MATEMÁTICAS II

Selectividad 2025

Comunidad autónoma de

PAÍS VASCO

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

eman ta zabal zazu Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024 – 2025** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

Instrucciones: Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados. Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 4 bloques de 2 ejercicios cada uno. Se realizará únicamente un ejercicio de cada bloque. En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Problema 1: OBLIGATORIO

EJERCICIO OBLIGATORIO (2,5 puntos). Los estudios publicados en "Anales Españoles de Pediatría" respecto a las curvas de desarrollo fetal de los recién nacidos en el Hospital de Cruces en 2024 revelan que el peso de los 9476 recién nacidos sigue una distribución normal con media 3372g y desviación típica de 405g.

(a) **(1 punto)** Elegido al azar un recién nacido en el Hospital de Cruces en 2024, calcula la probabilidad de que su peso haya sido superior a 3kg.

(b) **(1 punto)** Calcula el número probable de recién nacidos en el Hospital de Cruces en 2024 cuyo peso esté en el rango comprendido entre 3kg y 3,5kg.

(c) **(0,5 puntos)** Utilizando únicamente los resultados de los apartados anteriores, razona si es correcto afirmar que la cantidad de recién nacidos en el Hospital de Cruces en 2024 con un peso en el rango comprendido entre 3,1kg y 3,3kg debería estar entre 4500 y 4700.

Problema 2A

SEGUNDO EJERCICIO (2,5 puntos). Responde **solo a una** de las opciones.

(2A) Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \alpha x - 2y + z = \alpha \\ x - 2y + \alpha z = \alpha \\ -2x + y + \alpha z = -2. \end{cases}$$

(a) **(1 punto)** Encuentra los valores del parámetro α para los que el sistema tiene una única solución.

(b) **(0,75 puntos)** ¿Hay algún valor del parámetro α para el que el sistema no tiene solución? Razona tu respuesta.

(c) **(0,75 puntos)** ¿Hay algún valor del parámetro α para el que el sistema tiene más de una solución? Si la respuesta es afirmativa, calcula esos valores de α y, para cada uno de ellos, encuentra dos soluciones distintas del sistema.

Problema 2B

(2B) Sean a y b dos números reales y sea

$$A = \begin{pmatrix} a+b & 2a \\ 2b & a+b \end{pmatrix}.$$

(a) **(0,75 puntos)** Decide si existe la inversa de A en función de los valores de los parámetros a y b.

(b) **(1,75 puntos)** En el caso particular en que $a = 1$ y $b = 2$ resuelve, si es posible, la ecuación matricial

$$AX - A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problema 3A

TERCER EJERCICIO (2,5 puntos). Responde **solo a una** de las opciones.

(3A) (2,5 puntos) Se consideran las siguientes rectas:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - 3y + z = 1 \end{cases} \qquad r_2 \equiv \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Calcula la ecuación del plano que contiene a r_1 y pasa por el punto de intersección del plano $\pi \equiv x - 3y - 2z + 7 = 0$ y la recta r_2.

Problema 3B

(3B) Se consideran la recta r que pasa por los puntos $A(-4, 4, 1)$ y $B(1, 0, -1)$ y la recta s que pasa por los puntos $C(-2, 7, -1)$ y $D(2, 3, -1)$.

(a) **(1,5 puntos)** Calcula la posición relativa de la recta r con respecto de la recta s.

(b) **(1 punto)** En caso de ser paralelas o cruzarse, calcula la distancia entre ambas. Si se cortan, calcula el punto de intersección.

Problema 4A

CUARTO EJERCICIO (2,5 puntos). Responde **solo a una** de las opciones.

(4A) Se considera la función $f(x) = x^4 + Ax^3 + x^2 + Bx$.

(a) **(1 punto)** Calcula los valores de los parámetros A y B para que las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 1$ sean horizontales.

(b) **(1,5 puntos)** Con los valores de A y B que has obtenido en el apartado anterior, estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

Problema 4B

(4B) En la empresa "MARKOAK" fabrican marcos para cuadros. En esta ocasión les han solicitado marcos para 274 cuadros rectangulares. Todos los cuadros tienen las mismas dimensiones y una superficie de 0,3m^2. Para cada marco van a emplear dos tipos de material: las partes horizontales serán de un material cuyo coste es de 12€/m y para las verticales utilizarán un material cuyo coste es de 10€/m. La empresa que ha realizado el pedido quiere pagar lo mínimo posible. Calcula:

(a) **(2 puntos)** cuáles deben ser las medidas de los cuadros para pagar el mínimo posible;

(b) **(0,5 puntos)** a cuánto ascenderá la factura.

Problema 5A

QUINTO EJERCICIO (2,5 puntos). Responde **solo a una** de las opciones.

(5A) Calcula las dos integrales siguientes:

(a) **(1,25 puntos)** $\int 2x\cos(2x + 5)\,dx$.

(b) **(1,25 puntos)** $\int \frac{x + 495}{x^2 - 2025}\,dx$.

Problema 5B

(5B) Se consideran las curvas de ecuaciones $y = (x-1)^2$, $y = (x+1)^2$ e $y = 7 - 3x$.

(a) **(1,25 puntos)** Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado por esas tres curvas.

(b) **(1,25 puntos)** Calcula el área del recinto del apartado anterior.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1: OBLIGATORIO

EJERCICIO OBLIGATORIO (2,5 puntos). Los estudios publicados en "Anales Españoles de Pediatría" respecto a las curvas de desarrollo fetal de los recién nacidos en el Hospital de Cruces en 2024 revelan que el peso de los 9476 recién nacidos sigue una distribución normal con media 3372g y desviación típica de 405g.

(a) **(1 punto)** Elegido al azar un recién nacido en el Hospital de Cruces en 2024, calcula la probabilidad de que su peso haya sido superior a 3kg.

(b) **(1 punto)** Calcula el número probable de recién nacidos en el Hospital de Cruces en 2024 cuyo peso esté en el rango comprendido entre 3kg y 3,5kg.

(c) **(0,5 puntos)** Utilizando únicamente los resultados de los apartados anteriores, razona si es correcto afirmar que la cantidad de recién nacidos en el Hospital de Cruces en 2024 con un peso en el rango comprendido entre 3,1kg y 3,3kg debería estar entre 4500 y 4700.

Solución:

EJERCICIO OBLIGATORIO. La variable X = "peso de un recién nacido en el Hospital de Cruces en 2024" sigue una distribución normal $N(3372; 405)$. Representamos por Z una variable que sigue una distribución normal tipificada.

(a) La probabilidad de que el peso de un recién nacido haya sido superior a 3kg es

$$\begin{aligned} P(X > 3000) &= P\Big(Z > \frac{3000-3372}{405}\Big) \\ &= P(Z > -0,92) = P(Z < 0,92) = 0,8212. \end{aligned}$$

(b) La probabilidad de que el peso de un recién nacido esté en el rango comprendido entre 3kg y 3,5kg es

$$\begin{aligned} P(3000 < X < 3500) &= P\Big(\frac{3000-3372}{405} < Z < \frac{3500-3372}{405}\Big) \\ &= P(-0,92 < Z < 0,32) = P(Z < 0,32) - P(Z < -0,92) \\ &= 0,6255 - (1-0,8212) = 0,4467. \end{aligned}$$

El número probable de recién nacidos cuyo peso está en dicho rango es el total de niños nacidos en el Hospital de Cruces en 2024 multiplicado por la probabilidad obtenida, $9476 \times 0,4467 \sim 4233$.

(c) La probabilidad de un subconjunto no puede ser mayor que la del conjunto en el que está incluido. Se ha obtenido que $P(3000 < X < 3500) = 0,4467$, y $(3100, 3300)$ es un subconjunto de $(3000, 3500)$. Por tanto, $P(3100 < X < 3300) < 0,4467$ y el número de recién nacidos con un peso entre 3,1kg y 3,3kg no debería ser mayor que 4233.

Problema 2A

SEGUNDO EJERCICIO (2,5 puntos). Responde **solo a una** de las opciones.

(2A) Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \alpha x - 2y + z = \alpha \\ x - 2y + \alpha z = \alpha \\ -2x + y + \alpha z = -2. \end{cases}$$

(a) **(1 punto)** Encuentra los valores del parámetro α para los que el sistema tiene una única solución.

(b) **(0,75 puntos)** ¿Hay algún valor del parámetro α para el que el sistema no tiene solución? Razona tu respuesta.

(c) **(0,75 puntos)** ¿Hay algún valor del parámetro α para el que el sistema tiene más de una solución? Si la respuesta es afirmativa, calcula esos valores de α y, para cada uno de ellos, encuentra dos soluciones distintas del sistema.

Solución:

SEGUNDO EJERCICIO

(2A) La matriz de coeficientes del sistema dado es

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -2 & 1 \\ 1 & -2 & \alpha \\ -2 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(a) El determinante de esa matriz es $|A| = -3(\alpha - 1)^2$. Por tanto, si $\alpha \neq 1$, el sistema tiene una única solución.

(b) Si $\alpha = 1$, el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el de la matriz ampliada también, por tanto, no hay ningún valor del parámetro α para el que el sistema no tiene solución.

(c) El sistema tiene más de una solución cuando $\alpha = 1$ y, en ese caso, las soluciones cumplen $y = z$ y $x = 1 + 2y - z$. Dando valores a y (o a z), se obtienen las diferentes soluciones. Por ejemplo, tomando $y = 0$, se tiene la solución $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$; y tomando $y = 1$ se obtiene $x = 2$, $y = 1$, $z = 1$. Claramente, con otras elecciones de y o z se obtendrán otras soluciones.

Problema 2B

(2B) Sean a y b dos números reales y sea

$$A = \begin{pmatrix} a+b & 2a \\ 2b & a+b \end{pmatrix}.$$

(a) **(0,75 puntos)** Decide si existe la inversa de A en función de los valores de los parámetros a y b.

(b) **(1,75 puntos)** En el caso particular en que $a = 1$ y $b = 2$ resuelve, si es posible, la ecuación matricial

$$AX - A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución:

(2B) El determinante de la matriz dada es $|A| = (a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$, por lo tanto, la matriz tiene inversa si $a \neq b$.

Si $a = 1$ y $b = 2$, la matriz A tiene inversa y se puede resolver la ecuación matricial planteada, que se reescribe como

$$AX = A^3 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies X = A^{-1}A^3 + A^{-1}I_2 = A^2 + A^{-1}.$$

La matriz A, su cuadrado y su inversa son

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 17 & 12 \\ 24 & 17 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$X = A^2 + A^{-1} = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 20 & 20 \end{pmatrix}.$$

Problema 3A

TERCER EJERCICIO (2,5 puntos). Responde **solo a una** de las opciones.

(3A) (2,5 puntos) Se consideran las siguientes rectas:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - 3y + z = 1 \end{cases} \qquad r_2 \equiv \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Calcula la ecuación del plano que contiene a r_1 y pasa por el punto de intersección del plano $\pi \equiv x - 3y - 2z + 7 = 0$ y la recta r_2.

(3B) Se consideran la recta r que pasa por los puntos $A(-4,4,1)$ y $B(1,0,-1)$ y la recta s que pasa por los puntos $C(-2,7,-1)$ y $D(2,3,-1)$.

(a) **(1,5 puntos)** Calcula la posición relativa de la recta r con respecto de la recta s.

(b) **(1 punto)** En caso de ser paralelas o cruzarse, calcula la distancia entre ambas. Si se cortan, calcula el punto de intersección.

Solución:

TERCER EJERCICIO

(3A) El punto de corte del plano de ecuación $x - 3y - 2z + 7 = 0$ con la recta r_2 es $P(0,1,2)$, y P no está en la recta r_1. Por otro lado, tomando dos puntos distintos Q y R de la recta r_1, por ejemplo, $Q = (1/5, -1/5, 0)$ y $R = (2/5, 0, 1/5)$, el plano que se pide es el que contiene a P, Q y R. Su ecuación es $4x - 11y + 7z - 3 = 0$.

Otra manera de resolver el problema es la siguiente: el haz de planos que contiene a la recta r_1 es $x + y - 2z + t(2x - 3y + z - 1) = 0$. Entonces, sustituimos el punto $P(0,1,2)$ en la ecuación del haz de planos y obtenemos $t = -3/2$; por tanto, la ecuación del plano pedido es $4x - 11y + 7z - 3 = 0$.

Problema 3B

(3B) Se consideran la recta r que pasa por los puntos $A(-4,4,1)$ y $B(1,0,-1)$ y la recta s que pasa por los puntos $C(-2,7,-1)$ y $D(2,3,-1)$.

(a) **(1,5 puntos)** Calcula la posición relativa de la recta r con respecto de la recta s.

(b) **(1 punto)** En caso de ser paralelas o cruzarse, calcula la distancia entre ambas. Si se cortan, calcula el punto de intersección.

Solución:

(3B)

(a) Los vectores directores de las rectas r y s son $\vec{v}_r = (5,-4,-2)$ y $\vec{v}_s = (4,-4,0)$, respectivamente. Como no existe ninguna constante k tal que $\vec{v}_s = k\vec{v}_r$, las rectas no son paralelas ni coincidentes.

Para ver si las rectas r y s se cortan o se cruzan, tomamos un punto de cada una de las rectas, por ejemplo los puntos A y C y calculamos el vector $\vec{AC} = (2,3,-2)$. El producto mixto $[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{AC}] \neq 0$, por lo tanto, las rectas se cruzan.

Problema 4A

CUARTO EJERCICIO (2,5 puntos). Responde **solo a una** de las opciones.

(4A) Se considera la función $f(x) = x^4 + Ax^3 + x^2 + Bx$.

(a) **(1 punto)** Calcula los valores de los parámetros A y B para que las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 1$ sean horizontales.

(b) **(1,5 puntos)** Con los valores de A y B que has obtenido en el apartado anterior, estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

(4B) En la empresa "MARKOAK" fabrican marcos para cuadros. En esta ocasión les han solicitado marcos para 274 cuadros rectangulares. Todos los cuadros tienen las mismas dimensiones y una superficie de 0,3m^2. Para cada marco van a emplear dos tipos de material: las partes horizontales serán de un material cuyo coste es de 12€/m y para las verticales utilizarán un material cuyo coste es de 10€/m. La empresa que ha realizado el pedido quiere pagar lo mínimo posible. Calcula:

(a) **(2 puntos)** cuáles deben ser las medidas de los cuadros para pagar el mínimo posible;

(b) **(0,5 puntos)** a cuánto ascenderá la factura.

Solución:

CUARTO EJERCICIO

(4A) Se considera la función $f(x) = x^4 + Ax^3 + x^2 + Bx$.

(a) Para que las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 1$ sean horizontales, la derivada de la función en esos puntos debe ser nula.

Como $f'(x) = 4x^3 + 3Ax^2 + 2x + B$,

$$\begin{cases} f'(0) = B = 0 \\ f'(1) = 4 + 3A + 2 + B = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad A = -2, B = 0.$$

(b) Con los valores de A y B obtenidos en el apartado anterior, la función f y su derivada son

$$\begin{aligned} f(x) =& x^4 - 2x^3 + x^2, \\ f'(x) =& 4x^3 - 6x^2 + 2x = 4x\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1). \end{aligned}$$

f' es positiva si $x \in (0, 1/2) \cup (1, +\infty)$ y negativa si $x \in (-\infty, 0) \cup (1/2, 1)$. Por tanto, f es creciente en los intervalos $(0, 1/2)$ y $(1, +\infty)$; y f es decreciente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(1/2, 1)$.

Problema 4B

CUARTO EJERCICIO (2,5 puntos). Responde **solo a una** de las opciones.

(4A) Se considera la función $f(x) = x^4 + Ax^3 + x^2 + Bx$.

(a) **(1 punto)** Calcula los valores de los parámetros A y B para que las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 1$ sean horizontales.

(b) **(1,5 puntos)** Con los valores de A y B que has obtenido en el apartado anterior, estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

(4B) En la empresa "MARKOAK" fabrican marcos para cuadros. En esta ocasión les han solicitado marcos para 274 cuadros rectangulares. Todos los cuadros tienen las mismas dimensiones y una superficie de 0,3m^2. Para cada marco van a emplear dos tipos de material: las partes horizontales serán de un material cuyo coste es de 12€/m y para las verticales utilizarán un material cuyo coste es de 10€/m. La empresa que ha realizado el pedido quiere pagar lo mínimo posible. Calcula:

(a) **(2 puntos)** cuáles deben ser las medidas de los cuadros para pagar el mínimo posible;

(b) **(0,5 puntos)** a cuánto ascenderá la factura.

Solución:

(4B) Se denota por x la longitud de los lados horizontales de los marcos y por y la longitud de los lados verticales.

(a) El coste de un marco viene dado por la función $g(x,y) = 12 \times 2x + 10 \times 2y = 24x + 20y$. La superficie de cada cuadro es $xy = 0,3$m^2, por tanto $y = 0,3/x$. Sustituyendo esta condición en la función g obtenemos la función de una variable que se quiere optimizar,

$$f(x) = 24x + 20\frac{0,3}{x} = 24x + \frac{6}{x}.$$

Buscamos los puntos donde se anula la derivada:

$$f'(x) = 24 - \frac{6}{x^2} = 0 \implies x = \pm\frac{1}{2}.$$

Las medidas deben ser positivas, por tanto, el único punto a considerar es $x_0 = 1/2$. Para comprobar si la función tiene un mínimo en x_0 calculamos la segunda derivada de f en ese punto, que debe ser positiva:

$$f''(x) = \frac{12}{x^3} \implies f''(x_0) > 0.$$

Como f es continua en $(0,\infty)$ y no tiene más puntos críticos en ese intervalo, el mínimo absoluto de f se alcanza en $x_0 = 1/2$ y las dimensiones de los cuadros deben ser $x = 0,5$m la longitud de sus lados horizontales e $y = 0,3/0,5 = 0,6$m la longitud de sus lados verticales.

(b) El precio de cada cuadro es $g(x,y) = g(1/2, 3/5) = 24$€ y el precio de los 274 cuadros se obtiene multiplicando el precio unitario por la cantidad de cuadros, luego la factura ascenderá a 6.576€.

Problema 5A

QUINTO EJERCICIO (2,5 puntos). Responde **solo a una** de las opciones.

(5A) Calcula las dos integrales siguientes:

(a) **(1,25 puntos)** $\int 2x\cos(2x+5)\,dx$.

(b) **(1,25 puntos)** $\int \frac{x+495}{x^2-2025}\,dx$.

(5B) Se consideran las curvas de ecuaciones $y=(x-1)^2$, $y=(x+1)^2$ e $y=7-3x$.

(a) **(1,25 puntos)** Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado por esas tres curvas.

(b) **(1,25 puntos)** Calcula el área del recinto del apartado anterior.

Solución:

QUINTO EJERCICIO

(5A)

(a) La primera integral se resuelve por partes, tomando

$$u=2x, \quad dv=\cos(2x+5)dx,$$
$$du=2dx, \quad v=\frac{\sin(2x+5)}{2}.$$

Entonces,

$$\int 2x\cos(2x+5)\,dx = 2x\frac{\sin(2x+5)}{2} - \int 2\frac{\sin(2x+5)}{2}\,dx$$
$$= x\sin(2x+5) - \int \sin(2x+5)\,dx = x\sin(2x+5) + \frac{\cos(2x+5)}{2} + k.$$

(b) Como $2025=45^2$, el integrando se descompone como suma de dos fracciones simples

$$\frac{x+495}{x^2-2025} = \frac{6}{x-45} - \frac{5}{x+45}$$

y, por tanto,

$$\int \frac{x+495}{x^2-2025}\,dx = 6\ln|x-45| - 5\ln|x+45| + k.$$

Problema 5B

QUINTO EJERCICIO (2,5 puntos). Responde **solo a una** de las opciones.

(5A) Calcula las dos integrales siguientes:

(a) **(1,25 puntos)** $\int 2x\cos(2x+5)\,dx.$

(b) **(1,25 puntos)** $\int \frac{x+495}{x^2-2025}\,dx.$

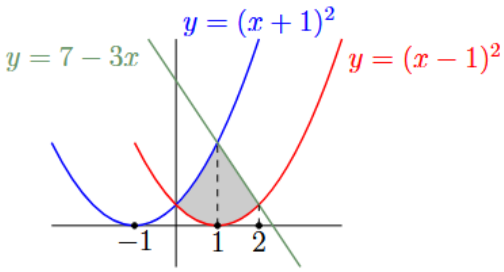
(5B) Se consideran las curvas de ecuaciones $y=(x-1)^2$, $y=(x+1)^2$ e $y=7-3x$.

(a) **(1,25 puntos)** Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado por esas tres curvas.

(b) **(1,25 puntos)** Calcula el área del recinto del apartado anterior.

Solución:

(5B) Las parábolas de ecuaciones $y=(x-1)^2$ e $y=(x+1)^2$ se cortan cuando $x=0$. La parábola de ecuación $y=(x-1)^2$ y la recta se cortan cuando $x=2$ y cuando $x=-3$. Por último, la parábola de ecuación $y=(x+1)^2$ y la recta se cortan cuando $x=-6$ y $x=1$. El recinto limitado por las tres curvas es



El área de ese recinto es

$$A=\int_0^1\left((x+1)^2-(x-1)^2\right)dx+\int_1^2\left(7-3x-(x-1)^2\right)dx=\frac{25}{6}u^2.$$

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 5 partes, de 2,5 cada una. Se debe responder a 4 de ellas, y una pregunta de cada parte

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Problema 2:

Problema 3:

Problema 4:

Problema 5:

Problema 6:

Problema 7:

Problema 8:

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

Solución:

Problema 2:

Solución:

Problema 3:

Solución:

Problema 4:

Solución:

Problema 5:

Solución:

Problema 6:

Solución:

Problema 7:

Solución:

Problema 8:

Solución: