

4t A d'ESO

Activitats i exercicis

ÍNDEX:

1. Nombres racionals i irracionals. Nombres reals.	2
2. Proporcionalitat.	9
3. Polinomis. Fraccions algebraiques.	15
4. Equacions i sistemes d'equacions.	23
5. Geometria del plànel i de l'espai. Longituds, àrees i volums.	32
6. Funcions	41
7. Estadística. Atzar i probabilitat.	51

www.apuntesmareaverde.org.es

Autors de Llibres Marea Verde de Matemàtiques (VVAA).

Traducció: IES Binissalem (Balears)

Il·lustracions: Banc d'imatges d'INTEF i VVAA (anteriors)



Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-045270

Fecha y hora de registro: 2014-06-10 18:10:12.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>

CAPÍTOL 1: NOMBRES REALS

ACTIVITATS PROPOSADES

1. *Les perles del rajà*: Un rajà va deixar a les seves filles cert nombre de perles i va determinar que es fes de la següent manera. La filla major prendria una perla i un setè del que quedés. La segona filla rebria dues perles i un setè del restant. La tercera jove rebria tres perles i un setè del que quedés. I així successivament. Feta la divisió cadascuna de les germanes va rebre el mateix nombre de perles. Quantes perles hi havia? Quantes filles tenia el rajà?

1. DIFERENTS TIPUS DE NOMBRES

2. Realitza les següents operacions:

a) $+8 + (-1) \cdot (+6)$ b) $-6 + (-7) : (+7)$ c) $+28 - (-36) : (-9-9)$
 d) $+11ab + (+7) \cdot (+6ab - 8ab)$ e) $-7a^2b - [+4a^2b - (-6a^2b) : (+6)]$ f) $+9 + [+5 + (-8) \cdot (-1)]$

3. Utilitza la jerarquia d'operacions per calcular en el teu quadern:

a) $6 \cdot (-5) - 3 \cdot (-7) + 20$ b) $-8 \cdot (+5) + (-4) \cdot 9 + 50$
 c) $(-3) \cdot (+9) - (-6) \cdot (-7) + (-2) \cdot (+5)$ d) $-(-1) \cdot (+6) \cdot (-9) \cdot (+8) - (+5) \cdot (-7)$

4. Efectua les següents operacions amb fraccions:

a) $-\frac{5}{3} - \frac{7}{2}$ b) $\frac{4}{7} + \frac{(-7)}{9}$ c) $\frac{(-9)}{5} + \frac{(-1)}{8}$ d) $\frac{7}{2} + \left(\frac{5}{3} \cdot \frac{9}{8}\right)$
 e) $\left(\frac{7}{2} + \frac{5}{3}\right) \cdot \frac{9}{8}$ f) $\frac{7}{2} \cdot \left(\frac{5}{3} + \frac{9}{8}\right)$ g) $\frac{15}{2} : \frac{5}{4}$ h) $\frac{6}{5} : \frac{1}{5}$ i) $15 : \frac{3}{5}$

5. Simplifica les següents fraccions:

a) $\left(\frac{x-1}{2} + \frac{x+2}{3}\right) \cdot \frac{9}{x}$ b) $\frac{x+1}{x^2-1}$ c) $\frac{x^2-6x+9}{x-3} : \frac{x-3}{x+2}$ d) $\frac{a^2-4}{a^2} \cdot \left(\frac{1}{a+2} + \frac{1}{a-2}\right)$

6. Realitza les operacions:

a) $3,13 + 5,97$ b) $3,52 \cdot 6,7$ c) $11,51 - 4,8$ d) $19,1 - 7,35$
 e) $4,32 + 32,8 + 8,224$ f) $46,77 - 15,6 + 2,3$ g) $1,16 \cdot 3,52$ h) $3,2 \cdot 5,1 \cdot 1,4$
 i) $2,3 \cdot 4,11 \cdot 3,5$ j) $4 \cdot (3,01 + 2,4)$ k) $5,3 \cdot (12 + 3,14)$ l) $3,9 \cdot (25,8 - 21,97)$

7. Escribe en forma de fracció les següents expressions decimals i redueix-les. Comprova amb la calculadora que està bé:

a) 7,92835 b) 291,291835 c) 0,23 d) 2,353535.....
 e) 87,2365656565.... f) 0,9999..... g) 26,5735735735.....

8. Mentalment decideix quines de les següents fraccions tenen una expressió decimal exacta i quines la tenen periòdica.

a) $1/3$ b) $7/5$ c) $11/30$ d) $3/25$ e) $9/8$ f) $7/11$

9. Calcula l'expressió decimal de les fraccions de l'exercici anterior i comprova si la teva deducció era correcta.

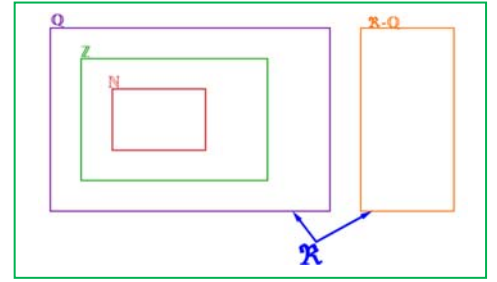
10. Dibuixa un segment de longitud $\sqrt{2}$. El Teorema de Pitàgores pot ajudar-te, és la hipotenusa d'un triangle rectangle isòsceles de catets 1. Mesura-ho amb una regla. La seva longitud no és 1,4, doncs $(1,4)^2$ és diferent de 2; no 1,41 doncs $(1,41)^2$ és diferent de 2; ni 1,414, doncs $(1,414)^2$ és diferent de 2; i no obstant això $(\sqrt{2})^2 = 2$.

11. Troba l'expressió decimal de $\sqrt{2}$. Hem vist que no és un nombre racional, per la qual cosa no pot tenir una expressió decimal finita, o periòdica, de manera que la seva expressió decimal té infinites xifres que no es repeteixen periòdicament. I no obstant això has pogut dibuixar-ho exactament (bé com la diagonal del quadrat de costat 1, o com la hipotenusa del triangle rectangle isòsceles de catets 1).

12. Copia en el teu quadern la taula adjunta i assenyala amb una X a quins conjunts pertanyen els següents nombres:

Nombre	N	Z	Q	I	R
-7,63					
$\sqrt[3]{-8}$					
0,121212...					
π					
$1/2$					
1,99999...					

13. Copia en el teu quadern l'esquema de la dreta i col·loca els nombres de l'exercici anterior en el seu lloc:
14. Pots demostrar que $4,99999... = 5?$, quant val $2,5999...?$ Escriu-los en forma de fracció.
15. Quantes xifres pot tenir com a màxim el període de $\frac{1}{53}$?



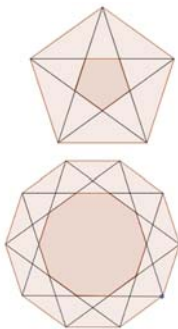
2. POTÈNCIES

16. Calcula: a) $(+1)^{7345}$ b) $(-1)^{7345}$ c) $(-4)^2$ d) $(-4)^3$ e) $(1/2)^3$ f) $(\sqrt{2})^6$
17. Expressa com a única potència:
 a) $(-4/3)^3 \cdot (-4/3)^2 \cdot (-4/3)^{-8}$ b) $(1/9)^{-5} \cdot (1/9)^4 \cdot (1/9)^{-2}$ c) $(5/4)^8 \cdot (-2/3)^8 \cdot (-3/5)^8$ d) $(-3/5)^{-4} \cdot (-8/3)^{-4} \cdot (-5/4)^{-4}$
18. Calcula: a) $(-3/5)^{-4}$ b) $(-4/7)^{-2}$ c) $\frac{(7^4 \cdot (-2)^4 \cdot 3^4)^3}{(9^2 \cdot 4^2 \cdot 7^2)^3}$ d) $\frac{3^2 \cdot 4^5}{(-2) \cdot 4^5}$ e) $\frac{\left(\frac{-2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{-9}{6}\right)^3}{\left(\frac{3}{8}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^6}$
19. Simplifica els radicals $\sqrt[4]{3^{12}}$, $\sqrt[10]{9^{15}}$ usant potències d'exponent fraccionari.
20. Calcula $\sqrt{484}$ i $\sqrt[3]{8000}$ factoritzant prèviament els radicands.
21. Calcula i simplifica: $\sqrt{3}(12\sqrt{3} - 7\sqrt{3} + 6\sqrt{3})$
22. Calcula $25^{0,5}$; $64^{\frac{3}{5}}$; $\left(\frac{6}{7^5}\right)^{\frac{5}{2}}$.
23. Expressa en forma de radical: a) $(-5)^{4/5}$ b) $27^{1/3}$ c) $7^{2/3}$
24. Escribeu en notació científica:
 a) 400.000.000 b) 45.000.000 c) 34.500.000.000.000 d) 0,0000001 e) 0,00000046
25. Utilitza la teva calculadora per obtenir 2^{16} , 2^{32} i 2^{64} i observa com dona el resultat.
26. Utilitza la calculadora per obtenir la teva edat en segons en notació científica.
27. Efectua les operacions en notació científica:
 a) $0,000481 + 2,4 \cdot 10^{-5}$ b) $300000000 - 5,4 \cdot 10^6 + 7,2 \cdot 10^5$ c) $(2,9 \cdot 10^5) \cdot (5,7 \cdot 10^{-3})$
 d) $(3,8 \cdot 10^{-8}) \cdot (3,5 \cdot 10^6) \cdot (8,1 \cdot 10^{-4})$ e) $(4,8 \cdot 10^{-8}) : (3,2 \cdot 10^{-3})$ f) $(6,28 \cdot 10^{-5}) \cdot (2,9 \cdot 10^2) : (3,98 \cdot 10^{-7})$

3. REPRESENTACIÓ EN LA RECTA REAL DELS NOMBRES REALS

28. Representa en una recta numèrica en el teu quadern els següents nombres i ordena'ls de menor a major: $-9, 7, 6, -5, 9, -2, -1, 1$ i 0 .
29. Representa en una recta numèrica en el teu quadern els següents nombres i ordena'ls de major a menor: $+1, -4, -8, +9, +4, -6, -8, -7$
30. *Pitàgores* va viure entre el 569 i el 475 a.C. i *Gauss* entre el 1777 i el 1855, quina diferència de segles hi ha entre ambdues dates?
31. Representa gràficament i ordena en sentit creixent, calcula els oposats i els valors absoluts dels següents nombres enters: $10, -4, -7, 5, -8, 7, -6, 0, 8$.
32. Representa en la recta numèrica de forma exacta els següents nombres: $\frac{7}{6}$; $\frac{-17}{4}$; $2,375$; $3,6$
33. Representa en la recta numèrica $6^5; 6^2; 3^7; 8^4; 8^3; 8^5; 8^38$.
34. Ordena els següents nombres de major a menor: $+1,47; -4,32; -4,8; +1,5; +1,409; 1,4, -4,308$.
35. Cerca rectangle auri i espiral àuria en Internet.
36. Ja de pas cerca la relació entre el *Nombre d'ori* i la *Successió de Fibonacci*.
37. Cerca en *youtube* "alguna cosa passa amb phi" i ho explica.

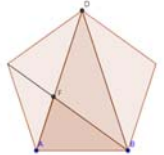
38. Representa en la recta numèrica de forma exacta: $\sqrt{20}$; $-\sqrt{8}$; $\sqrt{14}$; $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
39. Calcula tres nombres reals que estiguin entre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i 1.
40. Troba cinc nombres racionals que estiguin entre $\sqrt{2}$ i 1,5
41. Troba cinc nombres irracionals que estiguin entre 3,14 i π
42. Comprova que la longitud del costat del pentàgon regular i la de la seva diagonal estan en proporció àuria.



43. Calcula amb *Geogebra* una aproximació de la raó de semblança entre un pentàgon regular i el que es forma en el seu interior en dibuixar les seves diagonals. Determina sense utilitzar *Geogebra* el valor real de la raó de semblança entre aquests dos pentàgons.

44. Comprova que els triangles ABD i ABF de la figura són semblants i calcula aproximadament amb *Geogebra* la seva raó de semblança.

45. Calcula amb *Geogebra* el valor aproximat de la raó de semblança entre un decàgon regular i el decàgon que es forma en traçar les diagonals de la figura. Determina sense utilitzar *Geogebra* el valor real de la raó de semblança entre aquests dos polígons



4. INTERVALS, SEMIRECTES I ENTORNS

46. Expressa com a interval o semirecta, en forma de conjunt (usant desigualtats) i representa gràficament:
- Percentatge superior al 15%.
 - Edat inferior o igual a 21 anys.
 - Nombres el cub dels quals sigui superior a 27.
 - Nombres positius la part entera dels quals té 2 xifres.
 - Temperatura inferior a 24 °C.
 - Nombres que estiguin de 2 a una distància inferior a 3.
 - Nombres pels quals existeix la seva arrel quadrada (és un nombre real).
47. Expressa en forma d'interval els següents entorns: a) $E(2, 7)$ b) $E(-3, \frac{8}{3})$ c) $E(-1; 0,001)$
48. Expressa en forma d'entorn els següents intervals: a) $(1, 7)$ b) $(-5, -1)$ c) $(-4, 2)$
49. Els sous superiors a 500€ però inferiors a 1000€ es poden posar com a interval de nombres reals?

CURIOSITATS. REVISTA

Fulls i $\sqrt{2}$

- Comprova els valors de la taula següent (hi ha almenys tres valors equivocats 😊)
- Quants fulls A4 hi caben en un full A0?
- Quines són les dimensions del full A6? I de l'A7?

	Llarg (cm)	Ample (cm)	Àrea (cm ²)
A0	118,92	84,09	10000
A1	84,09	59,46	5000
A2	59,46	44,04	2500
A3	42,04	29,83	1250
A4	29,73	21,02	625
A5	21,02	14,87	415,2

El nombre d'or

$$F_n = \frac{\phi^n - \left(-\frac{1}{\phi}\right)^n}{\sqrt{5}} \quad \begin{array}{l} F_n = \text{Nombre de Fibonacci que ocupa el lloc n} \\ \phi = \text{Nombre d'or} \end{array}$$

- Calcula F_{31} i F_{30} amb la fórmula de Binet.
- Fes el quocient i mira si és una bona aproximació del Nombre d'or.
- Cerca a Internet el nombre d'or i la successió de Fibonacci.

EXERCICIS I PROBLEMES

Nombres

1. Efectua les següents operacions amb fraccions:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } -\frac{4}{7} - \frac{5}{2} & \text{b) } \frac{3}{5} + \frac{(-7)}{9} & \text{c) } \frac{(-2)}{3} + \frac{(-1)}{8} & \text{d) } \frac{5}{3} + \left(\frac{5}{3} \cdot \frac{9}{2}\right) \\ \text{e) } \left(\frac{3}{2} + \frac{7}{3}\right) \cdot \frac{5}{2} & \text{f) } \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{5}{3} + \frac{9}{2}\right) & \text{g) } \frac{25}{3} : \frac{5}{9} & \text{h) } \frac{7}{3} : \frac{14}{9} \quad \text{i) } 15 : \frac{3}{5} \end{array}$$

2. Simplifica les següents fraccions algebraiques:

$$\text{a) } \left(\frac{a-1}{3} + \frac{a+1}{2}\right) \cdot \frac{6}{a} \quad \text{b) } \frac{x-2}{x^2-4} \quad \text{c) } \frac{x^2+6x+9}{x-3} : \frac{x^2-9}{x+3} \quad \text{d) } \frac{a^2-4}{a^2} \cdot \left(\frac{1}{a+2} + \frac{1}{a-2}\right)$$

3. Realitza les operacions: a) $(24,67 + 6,91)3,2$ b) $2(3,91 + 98,1)$ c) $3,2(4,009 + 5,9)4,8$

4. Troba el valor exacte de $\frac{0,\bar{4}}{0,4}$ sense calculadora.
5. Determina quines d'aquestes fraccions tenen expressió decimal exacta i quines periòdica: $\frac{9}{40}$; $\frac{30}{21}$; $\frac{37}{250}$; $\frac{21}{15}$
6. Troba tres fraccions a, b, c de forma que $\frac{3}{4} < a < b < \frac{19}{25}$
7. Quants decimals té $\frac{1}{2^7 \cdot 5^4}$? T'atreveixes a explicar el motiu?
8. Fes la divisió $999\,999 : 7$ i després $1 : 7$. Serà casualitat?
9. Ara divideix 999 entre 37 i després $1 : 37$. És casualitat?
10. Fes en el teu quadern una taula i digues a quins conjunts pertanyen els següents nombres:
 $2,73535\dots$; $\pi - 2$; $\sqrt[5]{-32}$; 10^{100} ; $\frac{102}{34}$; $-2,5$; $0,1223334444\dots$
11. Contesta veritat o fals, justificant la resposta.
 - a) $\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \{0\}$
 - b) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
 - c) L'arrel quadrada d'un nombre natural és irracional.
 - d) $\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$
 - e) $1/47$ té expressió decimal periòdica.
12. Posa exemples que justifiquin:
 - a) La suma i la resta de nombres irracionals pot ser racional.
 - b) El producte o divisió de nombres irracionals pot ser racional.
13. Què serà la suma d'un nombre racional amb un altre irracional? (Pensa en la seva expressió decimal)
14. La suma de dos nombres amb expressió decimal periòdica pot ser un enter?
15. Troba l'àrea i el perímetre d'un rectangle de costats $\sqrt{2}$ i $\sqrt{8}$ m.
16. Troba l'àrea i el perímetre d'un quadrat que la seva diagonal mesura 2 m.
17. Troba l'àrea i el perímetre d'un hexàgon regular de costat $\sqrt{3}$ m.
18. Troba l'àrea i el perímetre d'un cercle de radi $\sqrt{10}$ m.
19. Troba l'àrea total i el volum d'un cub de costat $\sqrt[3]{7}$ m.
20. Per quin nombre hem de multiplicar els costats d'un rectangle per tal que la seva àrea es faci el triple?
21. Quant ha de valer el radi d'un cercle per tal que la seva àrea sigui 1 m^2 ?
22. Tenim una circumferència i un hexàgon regular inscrit en ella. Quina és la raó entre els seus perímetres? (Raó és divisió o quocient)

Potències

23. Calcula:
 - a) $(+2)^7$
 - b) $(-1)^{9345}$
 - c) $(-5)^2$
 - d) $(-5)^3$
 - e) $(1/3)^3$
 - f) $(\sqrt{2})^8$
24. Expressa com a única potència:
 - a) $(-5/3)^4 \cdot (-5/3)^3 \cdot (-5/3)^{-8}$
 - b) $(1/9)^{-5} : (1/9)^4 \cdot (1/9)^{-2}$
 - c) $(2/3)^8 \cdot (-3/2)^8 : (-3/5)^8$
 - d) $(-3/5)^{-4} \cdot (-8/3)^{-4} : -5/4)^{-4}$
25. Calcula:
 - a) $(-2/3)^{-4}$
 - b) $(-1/5)^{-2}$
 - c) $\frac{(11^4 \cdot (-2)^4 \cdot 5^4)^3}{(25^2 \cdot 4^2 \cdot 1^2)^3}$
 - d) $\frac{3^2 \cdot 25^5}{(-5)^2 \cdot 4^5}$
 - e) $\frac{\left(\frac{-2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{-25}{6}\right)^3}{\left(\frac{5}{8}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^6}$
26. Extreu els factors possibles de cada radical:
 - a) $\sqrt[4]{a^7 \cdot b^6}$
 - b) $\sqrt[3]{15^5 \cdot 3^4 \cdot 5^6}$
 - c) $\sqrt{25 \cdot 7^3 \cdot 16^3}$
27. Expressa en forma d'arrel única:
 - a) $\sqrt[3]{\sqrt{50}}$
 - b) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{9}}$
28. Expressa en forma de potència:
 - a) $\sqrt[4]{5^3} \cdot \sqrt{5^5}$
 - b) $\frac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{3^2}}{\sqrt{3^3}}$

29. Simplifica l'expressió:

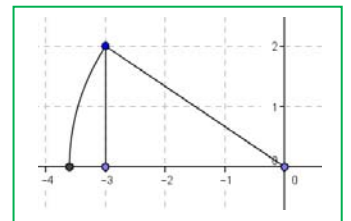
a) $\left(\frac{\frac{2}{x^3}}{\sqrt{x}}\right)^3$

b) $\frac{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[5]{x^{11}}}{\sqrt[3]{x}}$

30. S'estima que el volum de l'aigua dels oceans és de 1285600000 km^3 i el volum d'aigua dolça és de 35000000 km^3 . Escriu aquestes quantitats en notació científica i calcula la proporció d'aigua dolça.
31. Se sap que en un àtom d'hidrogen el nucli constitueix el 99% de la massa, i que la massa d'un electró és aproximadament de $9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$. Quina massa té el nucli d'un àtom d'hidrogen? (*Recorda*: Un àtom d'hidrogen està format pel nucli, amb un protó, i per un únic electró)
32. En Joan s'ha fet una anàlisi de sang i té 5 milions de glòbuls vermells en cada mm^3 . Escriu en notació científica el nombre aproximat de glòbuls vermells que té Joan estimant que té 5 litres de sang.

Representació en la recta real

33. Pitàgores va viure entre el 569 i el 475 a.C. i Gauss entre el 1777 i el 1855, quina diferència d'anys hi ha entre ambdues dates?
34. Representa de forma exacta a la recta numèrica: $-2,45$; $3,666\dots$
35. Situa en la recta real els nombres $0,5$; $0,48$; $0,51$ i $0,505$.
36. Ordena els següents nombres de major a menor: $2,4$; $-3,62$; $-3,6$; $2,5$; $2,409$; $-3,9999\dots$
37. Representa en la recta numèrica de forma exacta els següents nombres: $\frac{2}{3}$; $-\frac{3}{5}$; $\frac{5}{2}$; $1,256$; $3,5$
38. La imatge de la dreta és la representació d'un nombre irracional, quin?
39. Representa de forma exacta a la recta numèrica: $-\sqrt{8}$; $2\sqrt{5}$; $\frac{\sqrt{10}}{2}$
40. Troba cinc nombres racionals que estiguin entre $3,14$ i π .



Intervals

41. Expressa amb paraules els següents intervals o semirectes:
- a) $(-5, 5]$ b) $\{x \in \mathfrak{R} \mid -2 < x \leq 7\}$.
- c) $\{x \in \mathfrak{R} \mid x > 7\}$ d) $(-3, +\infty)$
42. Troba: a) $(2, 4] \cup (3, 5]$ b) $(2, 4] \cap (3, 5]$ c) $(-\infty, 1] \cap (-1, +\infty)$
43. Pot expressar-se com a entorn una semirecta? Raona la resposta.
44. Expressa com a entorns oberts, si és possible, els següents intervals:
- a) $(0, 8)$ b) $(-6, -2)$ c) $(2, +\infty)$
45. Expressa com a intervals oberts els següents entorns:
- a) $E_{2/3}(4)$ b) $E_{1/2}(-7)$ c) $E(1, 2)$ d) $E(0, 1)$
46. Quins nombres al quadrat donen 7?
47. Quins nombres reals al quadrat donen menys de 7?
48. Quins nombres reals al quadrat donen més de 7?

Varis

49. Un nombre irracional tan important com Pi és el nombre "e". $e \approx 2,718281828\dots$ que sembla periòdic, però no, no ho és. És un nombre irracional. Es defineix com el nombre al que s'apropa $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ quan n es fa molt, però que molt gran. Agafa la calculadora i dóna-li n valors cada vegada majors, per exemple: 10, 100, 1000, ... Apunta els resultats en una taula.

50. Una altra forma de definir e és $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$

I tu diràs, què són aquests nombres tan admirats!, es diu factorial i és molt senzill: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, es multiplica des del nombre fins a arribar a 1. Per exemple: $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$. No et preocupis, que la tecla "!" està en la calculadora. Pots calcular e amb 6 xifres decimals correctes? **Nota*: Fixa't que ara la convergència és molt més ràpida, només has hagut d'arribar fins a $n = ?$

51. Ordena de menor a major les següents masses:

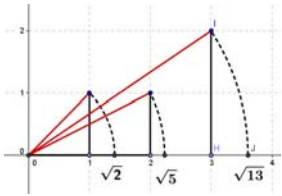

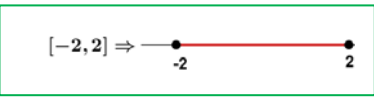
Massa d'un electró	$9,11 \cdot 10^{-31}$ quilograms
Massa de la Terra	$5,983 \cdot 10^{24}$ quilograms
Massa del Sol	$1,99 \cdot 10^{30}$ quilograms
Massa de la Lluna	$7,3 \cdot 10^{22}$ quilograms

52. Prenent $1,67 \cdot 10^{-24}$ grams com a massa d'un protó i $1,2 \cdot 10^{-15}$ metres com a radi, i suposant-ho esfèric, calcula:

- a) el seu volum en cm^3 (Recorda el volum d'una esfera és $(4/3)\pi r^3$). b) Troba el pes d'un centímetre cúbic d'un material format exclusivament per protons. c) Compara el resultat amb el pes d'un centímetre cúbic d'aigua (un gram) i d'un centímetre cúbic de plom (11,34 grams).

*Pista: 600,222333€ pot ser un sou?

RESUM

		Exemples
Conjunts de nombres	Naturals $\rightarrow N = \{1, 2, 3, \dots\}$; Enters $\rightarrow Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ Racionals $\rightarrow Q = \left\{\frac{a}{b}; a \in Z, b \in Z, b \neq 0\right\}$; Irracionals $\rightarrow I = \mathfrak{R} - Q$; $\mathfrak{R} = Q \cup I$	
Fraccions i expressió decimal	Totes les fraccions tenen expressió decimal exacta o periòdica. Tota expressió decimal exacta o periòdica es pot posar com a fracció.	$0,175 = \frac{175}{1000} = \frac{7}{40}$ $x = 1,7252525\dots = 854/495$
Nombres racionals	La seva expressió decimal és exacta o periòdica.	$2/3$; 1,5; 0,333333333...
Representació en la recta real	Fixat un origen i una unitat, existeix una bijecció entre els nombres reals i els punts de la recta. A cada punt de la recta li correspon un nombre real i viceversa.	
Nombres Reals	Tota expressió decimal finita o infinita és un nombre real i reciprocament.	0,333333; π ; $\sqrt{2}$
Interval obert	Interval en el qual els extrems NO pertanyen a l'interval	$(2, 7) = \{x \in \mathfrak{R} / 2 < x < 7\}$. $(2, 7) \Rightarrow$ 
Interval tancat	Els extrems SI pertanyen a l'interval	$[-2, 2] = \{x \in \mathfrak{R}; -2 \leq x \leq 2\}$ $[-2, 2] \Rightarrow$ 

AUTOAVALUACIÓ

1. Indica quina afirmació és falsa. El nombre $-0,3333333\dots$ és un nombre
 - a) real
 - b) racional
 - c) irracional
 - d) negatiu

2. Operant i simplificant la fracció $\frac{a^2 - 4a + 4}{a - 2} : \frac{a - 2}{a + 3}$ s'obté:
 - a) $a + 3$
 - b) $1/(a + 3)$
 - c) $a - 2$
 - d) $1/(a - 2)$

3. L'expressió decimal $0,63636363\dots$ S'escriu en forma de fracció com a:
 - a) $63/701$
 - b) $7/11$
 - c) $5/7$
 - d) $70/111$

4. En simplificar $\sqrt{2}(7\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2})$ obtens:
 - a) $6\sqrt{2}$
 - b) $\sqrt{2}(5\sqrt{2})$
 - c) 12
 - d) 8

5. Contesta sense fer operacions. Les fraccions $4/7$; $9/150$, $7/50$ tenen una expressió decimal:
 - a) periòdica, periòdica, exacta
 - b) periòdica, exacta, periòdica
 - c) periòdica, exacta, exacta

6. El conjunt dels nombres reals menors o iguals que -2 s'escriu:
 - a) $(-\infty, -2)$
 - b) $(-\infty, -2]$
 - c) $(-2, +\infty)$
 - d) $(-\infty, -2[$

7. L'entorn de centre -2 i radi $0,7$ és l'interval:
 - a) $(-3,7, -2,7)$
 - b) $(-2,7, -1,3)$
 - c) $(-3,3, -2,7)$
 - d) $(-2,7, -1,3]$

8. L'interval $(-3, -2)$ és l'entorn:
 - a) $E(-2'5; 1/2)$
 - b) $E(-3'5; -0,5)$
 - c) $(-3'5, 1/2)$
 - d) $(-2'5; -0,5)$

9. En efectuar l'operació $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{7}{6}} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ s'obté:
 - a) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{7}{2}}$
 - b) $25/4$
 - c) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{6}}$
 - d) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{2}}$

10. En efectuar l'operació $0,000078 + 2,4 \cdot 10^{-5}$ s'obté:
 - a) $3,6 \cdot 10^{-10}$
 - b) $1,8912 \cdot 10^{-10}$
 - c) $10,2 \cdot 10^{-5}$
 - d) $18,72 \cdot 10^{-5}$

CAPÍTOL 2: PROPORCIONALITAT

ACTIVITATS PROPOSADES

1. PROPORCIONALITAT DIRECTA

1. Copia en el teu quadern i completa la taula de proporció directa. Calcula la raó de proporcionalitat. Representa gràficament els punts. Determina l'equació de la recta.

Litres	12	7,82		1		50
Euros	36		9,27		10	

2. Calcula els termes que falten per completar les proporcions:

a) $\frac{24}{100} = \frac{30}{x}$

b) $\frac{x}{80} = \frac{46}{12}$

c) $\frac{3,6}{12,8} = \frac{x}{60}$

3. Si l'AVE tarda una hora i trenta-cinc minuts a arribar des de Madrid a València, que disten 350 quilòmetres, quant tardarà en recórrer 420 km?
4. En una recepta ens diuen que per fer una confitura de fruites del bosc necessitem un quilogram de sucre per cada dos quilograms de fruita. Si volem fer 7 quilograms de confitura, quants quilograms de sucre i quants de fruita hem de posar?
5. L'altura d'una torre és proporcional a la seva ombra (a una mateixa hora). Una torre que mesura 12 m projecta una ombra de 25 m. Quina altura tindrà una altra torre l'ombra de la qual mesura 43 m?
6. Una font omple una garrafa de 12 litres en 8 minuts. Quant temps trigarà a omplir un bidó de 135 litres?
7. Hem gastat 12 litres de benzina per recórrer 100 km. Quants litres necessitem per a una distància de 1374 km?
8. El meu cotxe ha gastat 67 litres de benzina per recórrer 1250 km, quants litres gastarà en un viatge de 5823 km?
9. Un llibre de 300 pàgines pesa 127 g. Quant pesarà un llibre de la mateixa col·lecció de 420 pàgines?
10. Dos pantalons ens van costar 28€, quant pagarem per set pantalons?
11. Expressa en tant per cent les següents proporcions:
- a) $\frac{27}{100}$ b) "1 de cada 2" c) $\frac{52}{90}$
12. Si sabem que els alumnes rossos d'una classe són el 16% i hi ha 4 alumnes rossos, quants alumnes hi ha en total?
13. Un dipòsit de 2000 litres de capacitat conté en aquest moment 1036 litres. Quin tant per cent representa?
14. La proporció dels alumnes d'una classe de 4t d'ESO que han aprovat Matemàtiques va ser del 70%. Sabent que a la classe hi ha 30 alumnes, quants han suspès?
15. Una fàbrica ha passat de tenir 130 obrers a tenir-ne 90. Expressa la disminució en percentatge.
16. Calcula el preu final d'un rentavaixelles que costava 520€ més un 21% d'IVA, al qual se li ha aplicat un descompte sobre el cost total del 18%.
17. Copia en el teu quadern i completa:
- a) D'una factura de 1340€ he pagat 1200€. M'han aplicat un % de descompte
- b) M'han descomptat el 9% d'una factura de € i he pagat 280€.
- c) Per pagar al comptat un moble m'han descomptat el 20% i m'he estalviat 100€. Quin era el preu del moble sense descompte?
18. El preu inicial d'un electrodomèstic era 500 euros. Primer va pujar un 10% i després va baixar un 30%. Quin és el seu preu actual? Quin és el percentatge d'increment o descompte?
19. Una persona ha comprat accions de borsa en el mes de gener per un valor de 10.000€. De gener a febrer aquestes accions han augmentat un 8%, però en el mes de febrer han disminuït un 16%. Quin és el seu valor a finals de febrer? En quin percentatge han augmentat o disminuït?
20. El preu inicial d'una enciclopèdia era de 300€ i al llarg del temps ha sofert variacions. Va pujar un 10%, després un 25% i després va baixar un 30%. Quin és el seu preu actual? Calcula la variació percentual.
21. En una tenda de venda per Internet s'anuncien rebaixes del 25%, però després carreguen en la factura un 20% de despeses d'enviament. Quin és el percentatge d'increment o descompte? Quant haurem de pagar per un article que costava 30 euros? Quant costava un article pel qual hem pagat 36 euros?
22. La distància real entre dos pobles és de 28,6 km. Si en el mapa estan a 7 cm de distància. A quina escala està dibuixat?
23. Quina altura té un edifici si la seva maqueta construïda a escala 1 : 200 presenta una altura de 8 cm?
24. Dibuixa l'escala gràfica corresponent a l'escala 1 : 60000.
25. Les dimensions d'una superfície rectangular en el plànol són 7 cm i 23 cm. Si està dibuixat a escala 1 : 50, calcula les seves mesures reals.

2. PROPORCIONALITAT INVERSA

26. Per enrajolar un recinte, 7 obrers han dedicat 80 hores de treball. Completa en el teu quadern la següent taula i determina la constant de proporcionalitat. Escriu l'equació de la hipèrbola.

Nombre d'obers	1	5	7	12			60
Hores de treball			80		28	10	

27. D'una quantitat de fusta hem aconseguit 5 panells d'1,25 m de llarg. Quants panells obtindrem si ara tenen 3 m de llarg?
28. En un hort ecològic s'utilitzen 5000 kg d'un tipus d'abonament d'origen animal, que se sap que té un 12% de nitrats. Si es canvia el tipus d'abonament per un altre que té un 15% de nitrats, quants quilograms es necessitaran del nou abonament perquè les plantes rebin la mateixa quantitat de nitrats?
29. Aquest mateix hort necessita 200 caixes per envasar les seves albergínies en caixes d'un quilogram. Quantes caixes necessitaria per envasar-les en caixes d'1,7 quilograms? I per envasar-les en caixes de 2,3 quilograms?
30. Per envasar certa quantitat de llet es necessiten 8 recipients d'100 litres de capacitat cadascun. Volem envasar la mateixa quantitat de llet emprant 20 recipients. Quina haurà de ser la capacitat d'aquests recipients?
31. Copia en el teu quadern la taula següent, calcula la raó de proporcionalitat i completa la taula de proporcionalitat inversa. Escriu l'equació de la hipèrbola.

Magnitud A	40	0,07		8	
Magnitud B	0,25		5		6,4

32. Sis persones realitzen un viatge de 12 dies i paguen en total 40800€. Quant pagaran 15 persones si el seu viatge dura quatre dies?
33. Si 16 bombetes originen una despesa de 4500€, estant enceses durant 30 dies, 5 hores diàries, quina despesa originarien 38 bombetes en 45 dies, enceses durant 8 hores diàries?
34. Per alimentar 6 vaques durant 17 dies es necessiten 240 quilos d'aliment. Quants quilos d'aliment es necessiten per mantenir 29 vaques durant 53 dies?
35. Si 12 homes construeixen 40 m de tàpia en 4 dies treballant 8 hores diàries, quantes hores diàries han de treballar 20 homes per construir 180 m en 15 dies?
36. Amb una quantitat de pinso podem donar menjar a 24 animals durant 50 dies amb una ració d'1 kg per a cadascun. Quants dies podem alimentar 100 animals si la ració és de 800 g?
37. Per omplir un dipòsit s'obren 5 aixetes que llancen 8 litres per minut i triguen 10 hores. Quant temps trigaran 7 aixetes similars que llancen 10 litres per minut?
38. Si 4 màquines fabriquen 2400 peces funcionant 8 hores diàries, quantes màquines s'han de posar a funcionar per aconseguir 7000 peces durant 10 hores diàries?

3. REPARTIMENTS PROPORCIONALS

39. Cinc persones comparteixen loteria, amb 10, 6, 12, 7 i 5 participacions respectivament. Si han obtingut un premi de 18000€, quant correspon a cadascun?
40. Tres socis han invertit 20000€, 34000€ i 51000€ aquest any en la seva empresa. Si els beneficis a repartir a final d'any ascendeixen a 31500€, quant correspon a cadascun?
41. La Unió Europea ha concedit una subvenció de 48.000.000€ per a tres Estats de 60, 46 i 10 milions d'habitants. Com s'han de repartir els diners, sabent que el repartiment és directament proporcional al nombre d'habitants?
42. Es reparteix una quantitat de diners, entre tres persones, de forma directament proporcional a 2, 5 i 8. Sabent que a la segona li corresponen 675€, trobar el que li correspon a la primera i a la tercera.
43. Una àvia reparteix 100€ entre les seves tres nétes de 12, 14 i 16 anys; proporcionalment a les seves edats. Quant correspon a cada néta?
44. En un concurs s'acumula puntuació de forma inversament proporcional al nombre d'errors. Els quatre finalistes, amb 10, 5, 2 i 1 error, s'han de repartir els 2500 punts. Quants punts rebrà cadascun?
45. En el testament, l'avi estableix que vol repartir entre els seus néts 4500€, de manera proporcional a les seves edats, que són 12, 15 i 18 anys, cuidant que la major quantitat sigui per als néts menors. Quant rebrà cadascun?
46. Es reparteixen diners de forma inversament proporcional a 5, 10 i 15. Si al menor li corresponen 3000€, quant correspon als altres dos?
47. Tres germans ajuden al manteniment familiar lliurant anualment 6000€. Si les seves edats són de 18, 20 i 25 anys i les aportacions són inversament proporcionals a l'edat, quant aporta cadascun?
48. Un pare va amb els seus dos fills a una fira i en la tómbola guanya 50€ que els reparteix de forma inversament proporcional a les seves edats, que són 15 i 10 anys. Quants euros ha de donar a cadascun?

49. Calcula el preu del quilo de mescla de dos tipus de cafè: 3,5 kg a 4,8 €/kg i 5,20 kg a 6 €/kg.
 50. Quants litres de suc d'aranja de 2,40 €/l han de barrejar-se amb 4 litres de suc de taronja a 1,80 €/l per obtenir una mescla a 2,13 €/l?
 51. Calcula la llei d'una joia sabent que pesa 87 g i conté 69 g d'or pur.
 52. Quants quirats té, aproximadament, la joia anterior?

4. INTERÈS

53. Calcula l'interès simple que produeixen 10.000€ al 3% durant 750 dies.
 54. Quin capital cal dipositar a l'1,80% durant 6 anys per obtenir un interès simple de 777,6€?
 55. Al 5% d'interès compost durant 12 anys, quin serà el capital final que obtindrem en dipositar 39.500€?

CURIOSITATS. REVISTA

1) La torre Eiffel de París mesura 300 metres d'altura i pesa uns 8 milions de quilos. Està construïda de ferro. Si encarreguem un model a escala d'aquesta torre, també de ferro, que pesi només un quilo, quina altura tindrà? Serà major o menor que un llapis?

Abans de començar a calcular, dóna la teva opinió.

- 2) En una pizzeria la pizza de 20 cm de diàmetre val 3 euros i la de 40 cm val 6 euros. Quina té millor preu?
 3) Veiem al mercat un lluç de 40 cm que pesa un quilo. Ens sembla una mica petit i en demanem un altre una mica major, que resulta pesar dos quilos. Quant mesurarà?
 4) En un dia fred un pare i el seu fill petit van abrigats exactament igual. Quin dels dos tindrà més fred?

RESUM

Proporcionalitat directa	Dues magnituds són directament proporcionals quan en multiplicar o dividir la primera per un nombre, la segona queda multiplicada o dividida pel mateix nombre. La funció de proporcionalitat directa és una recta que passa per l'origen: $y = kx$. El pendent de la recta, k , és la raó de proporcionalitat directa.	Per empaperar 300 m ² hem utilitzat 24 rotllos de paper; si ara la superfície és de 104 m ² , necessitarem 8,32 rotllos, perquè $k = 300/24 = 12,5$, $y = 12,5x$, per la qual cosa $x = 104/12,5 = 8,32$ rotllos.
Proporcionalitat inversa	Dues magnituds són inversament proporcionals quan en multiplicar o dividir la primera per un nombre, la segona queda dividida o multiplicada pel mateix nombre. La funció de proporcionalitat inversa és la hipèrbola $y = k'/x$. Per tant la raó de proporcionalitat inversa k' és el producte de cada parell de magnituds: $k' = a \cdot b = a' \cdot b'$.	Dues persones pinten un habitatge en 4 dies. Per pintar el mateix habitatge, 4 persones trigaràn: $k' = 8$, $y = 8/x$, per la qual cosa trigaràn 2 dies.
Percentatges	Raó amb denominador 100.	El 87% de 2400 és $\frac{87 \cdot 2400}{100} = 2088$
Escales	L'escala és la proporció entre les mesures del dibuix i les mesures en la realitat.	A escala 1:50000, 35 cm són 17,5 km en la realitat.
Repartiment proporcional directe Repartir directament a 6, 10 i 14, 105000 € $6 + 10 + 14 = 30$ $105000 : 30 = 3500$ $6 \cdot 3500 = 21000$ € $10 \cdot 3500 = 35000$ € $14 \cdot 3500 = 49000$ €		Repartiment proporcional invers Repartir 5670 inversament a 3, 5 i 6 $1/3 + 1/5 + 1/6 = \frac{10+6+5}{30} = \frac{21}{30}$ $5670 : 21 = 270$ $270 \cdot 10 = 2700$ $270 \cdot 6 = 1620$ $270 \cdot 5 = 1350$
Mescles i aliatges	Barrejar diferents quantitats de productes, de diferents preus. La llei d'un aliatge és la relació entre el pes del metall més valuós i el pes total.	Una joia que pesa 245 g i conté 195 g de plata, la seva llei és: $\frac{195}{245} = 0,795$
Interès simple i compost	L'interès és el benefici que s'obté en dipositar un capital en una entitat financera a un determinat tant per cent durant un temps	$C = 3600$; $r = 4,3 \%$; $t = 8$ anys $I = \frac{3600 \cdot 4,3 \cdot 8}{100} = 1238,4$ €

EXERCICIS I PROBLEMES

1. Copia en el teu quadern, calcula la raó de proporcionalitat i completa la taula de proporcionalitat directa:

litres	8,35		0,75	1,5	
euros		14	2,25		8

2. Estima quantes persones hi caben dretes en un metre quadrat. Hi ha hagut una festa i s'ha omplert completament un local de 400 m², quantes persones estimes que han anat a aquesta festa?
3. Cada setmana paguem 48€ en transport. Quant gastarem durant el mes de febrer?
4. Amb 85€ hem pagat 15 m de tela. Quant ens costaran 23 m de la mateixa tela?
5. Per entapissar cinc cadires he utilitzat 0,6 m de tela, quantes cadires podré entapissar amb la peça completa de 10 m?
6. Un camió ha transportat en 2 viatges 300 sacs de patates de 25 kg cadascun. Quants viatges seran necessaris per transportar 950 sacs de 30 kg cadascun?
7. Una edició de 400 llibres de 300 pàgines cadascun aconsegueix un pes total de 100 kg. Quants kg pesarà una altra edició de 700 llibres de 140 pàgines cadascun?
8. Sabent que la raó de proporcionalitat directa és $k = 1,8$, copia en el teu quadern i completa la següent taula:

Magnitud A	15,9			0,01	
Magnitud B		6	0,1		10

9. El telèfon mòbil que costava 285€+IVA (21%) està ara amb un 15% de descompte. Quin és el seu preu rebaixat?
10. Per retardar-se en el pagament d'un deute de 1500€, una persona ha de pagar un recàrrec del 12%. Quant ha de retornar en total?
11. Si un litre de llet de 0,85€ augmenta el seu preu en un 12%, quant val ara?
12. Quin tant per cent de descompte s'ha aplicat en una factura de 1900€ si finalment es van pagar 1200€?
13. Si unes sabates de 60€ es rebaixen un 15%, quin és el seu valor final?
14. En comprar un televisor he obtingut un 22% de descompte, per la qual cosa he pagat 483,60€, quin era el preu del televisor sense descompte?
15. En Lluís va comprar una samarreta que estava rebaixada un 20% i va pagar per ella 20€. Quin era el seu preu original?
16. Per liquidar un deute de 35000€ abans del que tenia previst, una persona paga finalment 30800€, quin percentatge del seu deute s'ha estalviat?
17. El preu d'un viatge s'anuncia a 500€ IVA inclòs. Quin era el preu sense IVA? (IVA 21 %)
18. Quin increment percentual s'ha efectuat sobre un article que abans valia 25€ i ara es paga a 29€?
19. Un hotel rebé 10 mil clients en el mes de juliol i 12 mil a l'agost. Quin és l'increment percentual de clients de juliol a agost?
20. Un mapa està dibuixat a escala 1 : 800000. La distància real entre dues ciutats és de 200 km. Quina és la seva distància en el mapa?
21. La distància real entre dues ciutats és de 340 km. Si en el mapa estan a 12 cm, quina és l'escala a la qual està dibuixat?
22. Interpreta la següent escala gràfica i calcula la distància en la realitat per a 21 cm.



23. Copia en el teu quadern i completa la següent taula:

Grandària en el dibuix	Grandària real	Escala
20 cm llarg i 5 cm d'ample		1 : 25000
10 cm	15 km	
	450 m	1 : 30000

24. Copia en el teu quadern, calcula la raó de proporcionalitat inversa i completa la taula:

Magnitud A	8	7,5		3,5	
Magnitud B		12	0,15		10

25. Determina si les següents magnituds es troben en proporció directa, inversa o en cap d'elles:
- Velocitat a la qual circula un cotxe i espai que recorre
 - Diners que tens per gastar i borses d'ametlles que pots comprar
 - Talla de sabates i preu dels mateixos
 - Nombre de membres d'una família i litres de llet que consumeixen
 - Nombre d'entrades venudes per a un concert i diners recaptats
 - Nombre d'aixetes que omplen una piscina i temps que aquesta tarda a omplir-se
 - Edat d'una persona i alçada que té
 - Nombre de treballadors i temps que tarden a fer una tanca
 - Edat d'una persona i nombre d'amics que té
26. Quina velocitat hauria de portar un automòbil per recórrer en 4 hores una certa distància, si a 80 km/h ha tardat 5 hores i 15 minuts?
27. La raó de proporcionalitat inversa entre A i B és 5. Copia en el teu quadern i completa la taula següent:

A	20		7		10,8
B		0,05		0,3	

28. En una granja tenen farratge per alimentar 240 porcs durant 9 setmanes. Si venen 60 porcs, quantes setmanes durarà el farratge? I si en lloc de vendre, compren 30 porcs? I si decideixen rebaixar la ració una quarta part amb els 240 porcs?
29. Un granger amb 65 gallines té blat de moro per alimentar-les durant 25 dies. Si ven 20 gallines, quants dies podrà alimentar les que li queden?
30. Amb 15 paquets de 4 kg cadascun poden menjar 150 gallines diàriament. Si els paquets fossin de 2,7 kg, quants en necessitariem per donar menjar a les mateixes gallines?
31. Determina si les dues magnituds són directa o inversament proporcionals i completa la taula en el teu quadern:

A	24	8	0,4	6		50
B	3	9	180		20	

32. Si la jornada laboral és de 8 hores necessitem a 20 operaris per realitzar un treball. Si rebaixem la jornada en mitja hora diària, quants operaris seran necessaris per realitzar el mateix treball?
33. En un magatzem es guarden reserves de menjar per 100 persones durant 20 dies amb 3 racions diàries, quants dies duraria el mateix menjar per 75 persones amb 2 racions diàries?
34. Si 15 operaris instal·len 2500 m de tanca en 7 dies. Quants dies trigaran 12 operaris a instal·lar 5250 m de tanca?
35. En un concurs el premi de 168000€ es reparteix de forma directament proporcional als punts aconseguits. Els tres finalistes van aconseguir 120, 78 i 42 punts. Quants euros rebrà cadascun?
36. Repartir 336 en parts directament proporcionals a 160, 140, 120.
37. Un treball es paga a 3120€. Tres operaris ho realitzen aportant el primer 22 jornades, el segon 16 jornades i el tercer 14 jornades. Quant rebrà cadascun?
38. Repartir 4350 en parts inversament proporcionals a 18, 30, 45.
39. Barregem 3 kg d'ametlles a 14€/kg, 1,5 kg de nous a 6€/kg, 1,75 kg de castanyes a 8€/kg. Calcula el preu final del paquet de 250 g de mescla.
40. Calcula el preu del litre de suc que s'aconsegueix barrejant 8 litres de suc de pinya a 2,5€/l, 15 litres de suc de taronja a 1,6€/l i 5 litres de suc de raim a 1,2€/l. A quin preu s'ha de vendre una botella de litre i mig si se li aplica un augment del 40% sobre el preu de cost?
41. Per aconseguir un tipus de pintura es barregen tres productes: 5 kg del producte X a 18€/kg, 19 kg del producte Y a 4,2€/kg i 12 kg del producte Z a 8 €/kg. Calcula el preu del kg de mescla.
42. Cinc persones comparteixen un microbús per realitzar diferents trajectes. El cost total és de 157,5€ més 20€ de suplement per servei nocturn. Els quilòmetres recorreguts per cada passatger van ser 3, 5, 7, 8 i 12 respectivament. Quant ha d'abonar cadascun?
43. S'ha decidit penalitzar a les empreses que més contaminen. Per a això es reparteixen 2350000€ per subvencionar tres empreses que presenten un 12%, 9% i 15% de grau de contaminació. Quant rebrà cadascuna?
44. Un lingot d'or pesa 340 g i conté 280,5 g d'or pur. Quina és la seva llei?
45. Quants grams d'or conté una joia de 0,900 de llei, que s'ha format amb un aliatge de 60 g de 0,950 de llei i 20 g de 0,750 de llei?
46. Quin capital cal dipositar al 3,5% de rèdit en 5 anys per obtenir un interès simple de 810€?

47. Quin és el capital final que es rebrà per dipositar 25400€ a l'1,4% en 10 anys?
48. Quants mesos s'ha de dipositar un capital de 74500€ al 3% per obtenir un interès de 2980€?
49. Al 3% d'interès compost, un capital s'ha convertit en 63338,5€. De quin capital es tracta?
50. En la construcció d'un pont de 850 m s'han utilitzat 150 bigues, però l'enginyer no està molt segur i decideix reforçar l'obra afegint 50 bigues més. Si les bigues es col·loquen uniformement al llarg de tot el pont, a quina distància es col·locaran les bigues?
51. En un col·legi de primària es convoca un concurs d'ortografia en el qual es donen diversos premis. El total que es reparteix entre els premiats és 500€. Els alumnes que no han comès cap falta reben 150€, i la resta es distribueix de manera inversament proporcional al nombre de faltes. Hi ha dos alumnes que no han tingut cap falta, un ha tingut una falta, un altre dues faltes i l'últim ha tingut quatre faltes, quant rebrà cadascun?

AUTOAVALUACIÓ

1. Els valors que completen la taula de proporcionalitat directa són:

A	10	0,25		0,1	100
B		50	5		

- a) 612,5; 1000; 0,0005; 0,5 b) 1,25; 2,5; 125; 0,125 c) 62; 500; 0,005; 0,05
2. Amb 500€ paguem les despeses de gas durant 10 mesos. En 36 mesos pagarem:
- a) 2000€ b) 1900€ c) 1800€ d) 1500€.
3. Un article que costava 2000€ s'ha rebaixat a 1750€. El percentatge de rebaixa aplicat és:
- a) 10% b) 12,5% c) 15,625% d) 11,75%
4. Per envasar 510 litres d'aigua utilitzem ampolles de litre i mitjà. Quantes ampolles necessitem si volem utilitzar envasos de tres quarts de litre?
- a) 590 ampolles b) 700 ampolles c) 650 ampolles d) 680 ampolles
5. Els valors que completen la taula de proporcionalitat inversa són:

A	5,5	10		11	
B	20		0,5		0,1

- a) 40; 200; 11,5; 1000 b) 11; 200; 20; 300 c) 11; 220; 10; 1100 d) 40; 220; 10; 500
6. Tres agricultors es reparteixen els quilograms de la collita de forma proporcional a la grandària de les seves parcel·les. La major, que mesura 15 ha rebut 30 tones, la segona de 12 ha i la tercera de 10 ha rebran:
- a) 24 t i 20 t b) 20 t i 24 t c) 24 t i 18 t d) 25 t i 20 t
7. L'escala a la qual s'ha dibuixat un mapa en el qual 2,7 cm equivalen a 0,81 km és:
- a) 1 : 34000 b) 1 : 3000 c) 1 : 30000 d) 1 : 300
8. Amb 4 rotllos de paper de 5 m de llarg, puc folrar 32 llibres. Quants rotllos necessitem per folrar 16 llibres si ara els rotllos de paper són de 2 m de llarg?
- a) 3 rotllos b) 5 rotllos c) 4 rotllos d) 2 rotllos
9. El preu final del kg de mescla de 5 kg de farina classe A, a 1,2€/kg, 2,8 kg de farina classe B, a 0,85€/kg i 4 kg de farina classe C, a 1€/kg és:
- a) 1,12€ b) 0,98€ c) 1,03€ d) 1,049€
10. La llei d'un aliatge és 0,855. Si el pes de la joia és 304 g, la quantitat de metall preciós és:
- a) 259,92 g b) 255,4 g c) 248,9 g d) 306 g

CAPÍTOL 3: POLINOMIS. FRACCIONS ALGEBRAIQUES

ACTIVITATS PROPOSADES

1. INTRODUCCIÓ. EXPRESSIONS ALGEBRAIQUES

- A finals de cada mes l'empresa de telefonia mòbil ens proporciona la factura mensual. En ella apareix molta informació, en particular, el nombre total de trucades realitzades (N) així com la quantitat total de minuts de conversa (M). Amb les dades de l'anterior exemple, justifica que l'import de les trucades efectuades durant aquest mes sigui:
 $(0'05 \cdot M) + (0'12 \cdot N) = 0'05 \cdot M + 0'12 \cdot N \text{ €}$
- Escriu l'expressió algebraica que ens proporciona l'àrea d'un cercle.
- Escriu en llenguatge algebraic els següents enunciats, referits a dos nombres qualssevol, x i y :
 - La meitat de l'oposat de la seva suma.
 - La suma dels seus cubs
 - El cub de la seva suma
 - L'invers de la seva suma
 - La suma dels seus inversos
- Tradueix a un enunciat en llenguatge natural les següents expressions algebraiques:
 - $3x + 4$
 - $x/3 - x^3$
 - $(x^3 + y^3 + z^3)/3$
 - $(x^2 - y^2) / (x - y)^2$
- Una tenda de roba anuncia en els seus aparadors que hi ha rebaixes i que tots els seus articles estan rebaixats un 15% sobre el preu imprès en cada etiqueta. Escriu el que pagarem per una peça en funció del que apareix en la seva etiqueta.
- L'anterior comerç, en els últims dies del període de rebaixes, desitja desfer-se de les seves existències i per això ha decidit augmentar el descompte. Manté el 15% per a la compra d'una única peça i, a partir de la segona, el descompte total augmenta un 5% per cada nova peça de roba, fins a un màxim d'10 articles. Analitza quant pagarem en realitzar una compra en funció de la suma total de les quantitats que figuren en les etiquetes i del nombre d'articles que s'adquireixin.
- Calcula el valor numèric de les següents expressions algebraiques per al valor o els valors que s'indiquen:
 - $x^2 + 7x - 12$ per a $x = 0$.
 - $(a + b)^2 - (a^2 + b^2)$ per a $a = -3$ i $b = 4$.
 - $a^2 - 5a + 2$ per a $a = -1$.
- Indica en cada cas el valor numèric de la següent expressió: $10x + 20y + 30z$
 - $x = 1, y = 2, z = 1$
 - $x = 2, y = 0, z = 5$
 - $x = 0, y = 1, z = 0$.

2. POLINOMIS. SUMA I PRODUCTE

- Indica el coeficient i la part literal de les següents monomis:
 - $\frac{3}{2}x^2y^3$
 - $\frac{1}{2}a^27b4c$
 - $\frac{2x5y9z}{2}$
- Realitza les següents sumes de polinomis:
 - $(2x^2 - 2x) + (-3x^2 - 4x + 2) + (3x^3 - 3x^2 + 2x - 3)$
 - $-2x^4 + (2x^3 + 3x - 4) + (-4x^2 - 6x + 5) + (3x^3 - 2x + 6)$
- Simplifica les següents expressions algebraiques:
 - $3x - 4 - (3x + 2) + 4x$
 - $3(x^2 - 4x + 6) - (x^2 - 6x + 5)$
 - $(-3)(2a + 4b) - (2b - 3a)$
 - $4(2a - 2ab + 2b^2) - (3a - 2ab)$
- Escriu el polinomi oposat de cadascun dels següents polinomis:
 - $4x^4 + 6x^3 + 2x^2 + 5x - 2$
 - $9x$
 - $-2x^4 + 4x^2$
- Considera els polinomis $p \equiv -2x^3 - 6x + 3$, $q \equiv 2x^2 + 2x + 9$, així com el polinomi suma $s \equiv p + q$. Troba els valors que pren cadascun d'ells per a $x = -2$, és a dir, calcula $p(-2)$, $q(-2)$ i $s(-2)$. Estudia si existeix alguna relació entre aquests tres valors.

14. Calcula el valor del polinomi $p = -2x^3 - 6x + 3$ per a $x = 3$. Quin valor pren el polinomi oposat de p en $x = 3$?
15. Efectua els següents productes de polinomis:
- a) $(-5 + 3x) \cdot (-4x^2)$ b) $(3x^4 + 2x) \cdot (-4x - 5)$
 c) $(3x^3 + 2x^2 - 2x) \cdot (4x^2 - x)$ d) $(-1) \cdot (6x^3 - 3x^2 - 2x + 3)$
16. Realitza les següents diferències de polinomis:
- a) $(-3x^3 + x) - (-2x^2)$ b) $(3x^4 + 2x) - (-4x - 5)$ c) $(4x^2 - 2x) - (x^3 + 2x^2 - 2x)$
17. Multiplica cadascun dels següents polinomis per un nombre de tal forma que sorgeixin polinomis mòncics:
- a) $3x^3 - 2x^2 + x$ b) $-4x^4 + 2x - 5$ c) $-x^2 + 2x - 6$
18. Calcula i simplifica els següents productes:
- a) $3x \cdot (2x^2 + 4x - 6)$ b) $(3x - 4) \cdot (4x + 6)$
 c) $(2a^2 - 5b) \cdot (4b - 3a^3)$ d) $(3a - 6) \cdot (8 - 2a) \cdot (9a - 2)$
19. Realitza els següents productes de polinomis:
- a) $x^2 \cdot (-3x^2 - 4x + 2) \cdot 3x^3$ b) $(3x - 4) \cdot (-4x^2 - 6x + 5) \cdot (2x)$
20. De cadascun dels següents polinomis extreu algun factor que sigui comú als seus monomis:
- a) $20x^3 - 40x^2 + 10x$ b) $60x^4 - 30x^2$

3. DIVISIÓ DE POLINOMIS

21. Observa a continuació com realitzar la divisió del polinomi $p(x) = 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2$ entre el polinomi $q(x) = 2x^2 - x + 3$:

- Primera etapa:

$$\begin{array}{r} 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 \\ -6x^4 + 3x^3 - 9x^2 \\ \hline 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} | 2x^2 - x + 3 \\ \hline 3x^2 \end{array}$$

- Primera i segona etapes:

$$\begin{array}{r} 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 \\ -6x^4 + 3x^3 - 9x^2 \\ \hline 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 \\ -8x^3 + 4x^2 - 12x \\ \hline -4x^2 - 9x - 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} | 2x^2 - x + 3 \\ \hline 3x^2 + 4x \end{array}$$

- Les tres etapes:

$$\begin{array}{r} 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 \\ -6x^4 + 3x^3 - 9x^2 \\ \hline 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 \\ -8x^3 + 4x^2 - 12x \\ \hline -4x^2 - 9x - 2 \\ \hline 4x^2 - 2x + 6 \\ \hline -11x + 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} | 2x^2 - x + 3 \\ \hline 3x^2 + 4x - 2 \end{array}$$

22. Divideix els següents polinomis:

- a) $3x^3 - 2x^2 - 2x + 6$ entre $x^2 - 3x + 5$ b) $-15x^3 - 3x^2 + 4x + 5$ entre $5x^3 - 2x^2 - 2x + 4$
 c) $6x^4 - 7x^3 + 7x^2 - 4x - 8$ entre $-2x^2 + 2x + 5$ d) $-7x^5 + 3x^2 + 2$ entre $x^2 + 4$
 e) $-16x^5 - 3x^4 + 7x^3 + 3x^2 + 4x + 6$ entre $4x^3 + 2x^2 + x - 2$

23. Troba dos polinomis tals que en dividir-los aparegui $q(x) = x^2 + 2x - 1$ com a polinomi quotient i $r(x) = -2x^2 + 3$ com a polinomi residu.

24. Efectua els següents càlculs:

a) $\frac{3x+2}{x^2+1} + \frac{5}{2x}$

b) $\frac{1}{x-3} - \frac{3}{x+2}$

c) $\frac{-2x}{5x^2+4x} \cdot \frac{5}{3x-2}$

d) $\frac{x-4}{x^2+5x} \cdot \frac{x-4}{x+5}$

25. Realitza les següents operacions alterant, a cada apartat, solament un dels denominadors, i el seu respectiu numerador:

a) $\frac{-3x^2+2x-1}{x^3} + \frac{4x-1}{x^2}$

b) $\frac{x-1}{x^2+5x} - \frac{6}{x+5}$

26. Comprova, simplificant, les següents igualtats:

a) $\frac{8a^4b^2}{2a^2b} = 4a^2b$

b) $\frac{4x^3y^2-3xy^2}{2xy} = 2x^2y - \frac{3}{2}y$

c) $\frac{3x^2-9x}{6x+12} = \frac{x^2-3x}{x+4}$

d) $\frac{6y^3+4y^2}{2y^2-8y} = \frac{3y^2+2y}{y-4}$

e) $\frac{6a^2b^3+2a^3b-4ab}{2ab^2+8a^2b} = \frac{3ab^2+a^2-2}{b+4a}$

27. Calcula els següents quocients:

a) $(3x^3-9x^2-6x):3x$

b) $(7a^3-70a^2-21):7$

c) $(25x^4-10x^2):5x^2$

d) $(3x^2y^3-8xy^2):xy^2$

28. Simplifica les següents fraccions algebraiques:

a) $\frac{3x^2-6x}{9x^2+15}$

b) $\frac{a^3-5a^2}{7a^3+4a^2}$

c) $\frac{x^2y+3xy^2}{4xy}$

d) $\frac{2a^2b^2+3ab}{a^3b-ab}$

4. DESCOMPOSICIÓ FACTORIAL D'UN POLINOMI

29. Completa, quan sigui possible, les següents factoritzacions:

• $-3x^3+3x = -3x \cdot (\quad)$

• $-6x^2+5x+6 = (2x-3) \cdot (\quad)$

• $-6x^4+3x^3-3x+6 = (2x^2-x+1) \cdot (\quad)$

• $-6x^4+3x^3-3x+6 = (2x^2-x+2) \cdot (\quad)$

30. Determina un polinomi de grau 4 que admeti una descomposició factorial en la qual participi el polinomi $6x^3-x^2+3x-1$.

31. Estudia si els següents nombres són o no arrel dels polinomis indicats:

a) $x=3$ de x^3-3x^2+1

b) $x=-2$ de x^3+3x^2+3x+2

c) $x=1$ de x^3-3x^2+x+1

d) $x=0$ de x^3-3x^2+1

e) $x=-1$ de x^3-3x^2-x+3

32. Suposem que tenim dos polinomis, $p_1(x)$ i $p_2(x)$, i un nombre real α .

• Si α és una arrel de $p_1(x)$, també és arrel del polinomi suma $p_1(x)+p_2(x)$?

• Si α és una arrel de $p_1(x)$, també és arrel del polinomi producte $p_1(x) \cdot p_2(x)$?

• Hi ha alguna relació entre les arrels del polinomi $p_1(x)$ i les del polinomi $4 \cdot p_1(x)$?

33. Determina un polinomi de grau 3 tal que posseeixi tres arrels diferents.

34. Determina un polinomi de grau 3 tal que tingui, almenys, una arrel repetida.

35. Determina un polinomi de grau 3 de manera que tingui una única arrel.

36. Conjectura, i després demostra, una llei que ens permeti saber quan un polinomi qualsevol:

$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ admet el nombre 0 com a arrel.

37. Demostra una norma que assenyali quan un polinomi qualsevol $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ admet el nombre 1 com a arrel.

38. Obtingues totes les arrels de cadascun dels següents polinomis:

a) $x+6$

b) $-x+4$

c) $2x-7$

d) $-4x-5$

e) $-3x$

f) x^2-5x

g) $4x^2-x-3$

h) x^3-4x

i) x^3+4x

39. Utilitza la regla de Ruffini per a realitzar les següents divisions de polinomis:
- a) $-3x^2 + 2x + 2$ entre $x + 1$ b) $x^3 + 3x^2 - 3x + 6$ entre $x + 2$
 c) $5x^3 - 4x^2 - 2$ entre $x - 1$ d) $x^3 - 8x + 2$ entre $x - 3$
40. Utilitza la regla de Ruffini per dictaminar si els següents nombres són o no arrels dels polinomis citats:
- a) $\alpha = 3$ de $x^3 - 4x^2 + 5$ b) $\beta = -2$ de $-x^3 - 2x^2 + x + 2$
 c) $\gamma = 1$ de $-2x^4 + x + 1$ d) $\sigma = -1$ de $2x^3 + 2x^2$
41. Utilitza la regla de Ruffini per conèixer el valor del polinomi $-2x^3 + 3x^2 + 2x + 3$ en $x = 3$
42. Estudia si és possible utilitzar la regla de Ruffini, d'alguna forma, per dividir $x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ entre $2x + 6$
43. Per a cadascun dels següents polinomis assenyala, en primer lloc, quins nombres enters són candidats a ser arrels seves i, després, determina quins ho són:
- a) $x^3 - x^2 + 2x - 2$ b) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 3$ c) $2x^3 + x^2 - 18x - 9$ d) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 6x$
44. Completa l'exemple precedent comprovant que, en efecte, $-\frac{1}{2}$ és arrel del polinomi $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$
45. Per a cadascun dels següents polinomis indica quins nombres racionals són candidats a ser arrels seves i, després, determina quins ho són:
- a) $3x^2 + 4x + 1$ b) $2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$
46. Simplifica, si és possible, les següents expressions:
- a) $\frac{x^2 + 4x}{x^3 + 3x^2 - 6x - 8}$ b) $\frac{x^2 - 1}{x^3 + 3x^2 - 6x - 8}$ c) $\frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 - 6x}$
47. Realitza les següents operacions tenint en compte les factoritzacions dels denominadors:
- a) $\frac{5}{-3x + 12} + \frac{x + 2}{x^2 - 4x}$ b) $\frac{-x}{x^2 - 2x + 1} - \frac{3x - 1}{x^2 - 1}$
48. Realitza els càlculs:
- a) $(1 + 4a)^2$ b) $(-x + 5)^2$ c) $(-2x - 3)^2$ d) $(x^2 - 1)^3$ e) $(5x + 3)^3$
49. Obtingues les fórmules dels quadrats dels següents trinomis:
- a) $(a + b + c)^2$ b) $(a + b - c)^2$
50. Desenvolupa les següents potències:
- a) $(2x + 3y)^2$ b) $(3x + y/3)^2$ c) $(5x - 5/x)^2$
 d) $(3a - 5)^2$ e) $(a^2 - b^2)^2$ f) $(3/5y - 2/y)^2$
51. Expressa com a quadrat d'una suma o d'una diferència les següents expressions algebraiques:
- a) $a^2 + 6a + 9$ b) $4x^2 - 4x + 1$ c) $b^2 - 10b + 25$
 d) $4y^2 + 12y + 9$ e) $a^4 - 2a^2 + 1$ f) $y^4 + 6y^2 + 9$
52. Efectua aquests productes:
- a) $(3x + 2y) \cdot (3x - 2y)$ b) $(5x^2 + 1) \cdot (5x^2 - 1)$ c) $(-x^2 + 2x) \cdot (x^2 + 2x)$
53. Factoritza els següents polinomis:
- a) $x^2 - 4x + 4$ b) $3x^2 + 18x + 27$ c) $3x^5 - 9x^3$
54. Calcula els següents productes:
- a) $(3x + 1) \cdot (3x - 1)$ b) $(2a - 3b) \cdot (2a + 3b)$
 c) $(x^2 - 5) \cdot (x^2 + 5)$ d) $(3a^2 + 5) \cdot (3a^2 - 5)$
55. Expressa com a suma per diferència les següents expressions:
- a) $9x^2 - 25$ b) $4a^4 - 81b^2$ c) $49 - 25x^2$ d) $100a^2 - 64$
56. Simplifica les següents fraccions algebraiques:
- a) $\frac{x^2 - 1}{3x + 3}$ b) $\frac{2x^2 + 12x + 18}{x^2 - 9}$ c) $\frac{6 - 3a}{a^2 - 4}$

CURIOSITATS. REVISTA

Fes màgia

- Pensa un nombre
- Multiplica-ho per 2
- Suma 4
- Multiplica per 5
- Divideix per 10
- Resta el nombre
- Màgia, màgia, màgia...
- El resultat és **2**!

Analitza com tu, el mag, has pogut conèixer el resultat.



Passatemps

A B A

A B A

A B A

B C B

Quant valen A, B i C?

EXERCICIS I PROBLEMES

- En aquest exercici es va a presentar un *truc* mitjançant el qual anem a endevinar el nombre que resulta després de manipular repetidament un nombre desconegut. Converteix en una expressió algebraica les successives alteracions del nombre desconegut i justifica el que ocorre:
 - Digues-li a un company que escrigui en un paper un nombre natural i que no ho mostri
 - Que ho multipliqui per 3
 - Que al resultat anterior li sumi 18
 - Que multipliqui per 2 el que ha obtingut
 - Que divideixi entre 6 l'última quantitat
 - Que al resultat precedent li resti el nombre que va escriure
 - Independentment del nombre desconegut original, quin nombre ha sortit?
- En aquest altre exercici anem a *endevinar* dos nombres que ha pensat un company. Construeix una expressió algebraica que reculli tots els passos i, finalment, descobreix el truc:
 - Sol·licita a un company que escrigui en un paper, i no mostri, dos nombres naturals: un d'una xifra (entre 1 i 9) i un altre de dues xifres (entre 10 i 99)
 - Que multipliqui per 4 el nombre escollit d'una xifra
 - Que multipliqui per 5 el que ha obtingut
 - Que multipliqui el resultat precedent per 5
 - Que li sumi a l'anterior el nombre de dues xifres que va triar
 - Si el teu company et diu el resultat d'aquestes operacions, tu descobreixes els seus dos nombres. Si et diu, per exemple, 467, llavors saps que el nombre d'una xifra és 4 i el de dues xifres és 67, per què?

- Estudia si hi ha nombres reals en els quals les següents expressions no poden ser avaluades:

$$\frac{7x-9}{(x+5) \cdot (2x-32)}$$

$$\frac{-x}{x^2-6x+9}$$

$$\frac{3x^3-x}{-2x^4-3x^2-4}$$

$$\frac{5x-y+1}{x^2+y^2}$$

- Una persona té estalviats 2500 euros i decideix dipositar-los en un producte bancari amb un tipus d'interès anual del 2%. Si decideix recuperar els seus estalvis al cap de dos anys, quina serà la quantitat total de la qual disposarà?
- Generalitzem l'exercici anterior: Si ingresem X euros en un dipòsit bancari amb un tipus d'interès del $i\%$ anual, quina serà la quantitat que recuperarem al cap de n d'anys?
- Construeix un polinomi de grau 2, $p(x)$, tal que $p(5) = -2$.
- Considera els polinomis $p(x) = -3x^3 + 2x^2 - 4x - 3$, $q(x) = 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x + 8$ i $r(x) = 5x^2 + 6x - 2$. Calcula:
 - $p+q+r$
 - $p-q$
 - $p \cdot r$
 - $p \cdot r - q$

- Calcula els productes:

$$a) \left(\frac{ax}{3} - \frac{by}{2}\right) \cdot \left(\frac{-xy}{6}\right)$$

$$b) (0,3x - 0,2y + 0,1z) \cdot (0,1x + 0,2y - 0,3z)$$

$$c) (x-1)(x-a)(x-b)$$

9. Efectua les següents divisions de polinomis:
- a) $3x^4 - 4x^3 - 9x^2 + x - 2$ entre $3x^2 + 4x - 4$
 b) $5x^5 - 6x^4 + 7x^3 + 3x^2 - x - 7$ entre $x^3 + 3x + 4$
10. Calcula els quocients:
- a) $(5x^4):(x^2)$ b) $(3x^2y^4z^6):((1/2)xy^3z^6)$ c) $(x^4 + 2x^2y + y^2):(x^2 + y)$
11. Realitza les següents operacions de fraccions algebraiques:
- a) $\frac{2x-3}{x^2-3x} + \frac{3x}{x^2-6x+9}$ b) $\frac{2x-3}{x^2-3x} - \frac{3x}{x^2-6x+9}$ c) $\frac{2x-3}{x^2-3x} \cdot \frac{3x}{x^2-6x+9}$ d) $\frac{2x-3}{x^2-3x} : \frac{3x}{x^2-6x+9}$
12. Determina un polinomi de grau 2 tal que el nombre -5 sigui arrel seva.
13. Determina un polinomi de grau 3 tal que les seves arrels siguin 6, -3 i 0
14. Determina un polinomi de grau 4 tal que les seves arrels siguin 6, -3, 2 i 0
15. Calcula un polinomi de grau 4 tal que tingui únicament dues arrels reals.
16. Determina un polinomi de grau 5 tal que les seves arrels siguin 6, -3, 2, 4 i 5
17. Troba un polinomi $q(x)$ tal que en dividir $p(x) = 2x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 3$ entre $q(x)$ s'obtingui com a polinomi residu $r(x) = x^2 + x + 1$.
18. Troba les arrels enteres dels següents polinomis:
- a) $3x^3 + 11x^2 + 5x - 3$ b) $3x^3 + 2x^2 + 8x - 3$ c) $3x^3 + 5x^2 + x - 1$ d) $2x^3 + x^2 - 6x - 3$
19. Troba les arrels racionals dels polinomis de l'exercici anterior.
20. Descompon els següents polinomis com a producte de polinomis irreductibles:
- a) $3x^3 + 11x^2 + 5x - 3$ b) $3x^3 + 5x^2 + x - 1$ c) $2x^3 + x^2 - 6x - 3$ d) $3x^3 - 6x^2 + x - 2$
21. Calcula les potències:
- a) $(x - 2y + z)^2$ b) $(3x - y)^3$ c) $((1/2)a + b^2)^2$ d) $(x^3 - y^2)^2$
22. Analitza si els següents polinomis han sorgit del desenvolupament de potències de binomis o trinomis, o d'un producte *suma per diferència*. En cas afirmatiu expressa la seva procedència:
- a) $x^2 - 36$ b) $5x^2 + 1$ c) $5x^2 - 11$ d) $x^2 - 3y^2$ e) $x^2 - 6x + 9$
 f) $x^4 - 8x^2 + 16$ g) $x^2 + \sqrt{20}xy + 5y^2$ h) $x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1$ i) $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x + 1$
23. Descompon en factors:
- a) $x^4 - 1$ b) $x^2 - y^2$ c) $x^2y^2 - z^2$ d) $x^4 - 2x^2y + y^2$
24. Amb aquest exercici es pretén mostrar la conveniència a l'hora de no operar una expressió polinòmica que tenim factoritzada total o parcialment.
- a) Comprova la igualtat $x^4 - 5x^2 + 6 = (x^2 - 2) \cdot (x^2 - 3)$
 b) Determina totes les arrels del polinomi $x^4 - 5x^2 + 6$
25. Factoritza numerador i denominador i simplifica:
- a) $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$ b) $\frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{x^2 + y^2}$ c) $\frac{x^3 - x}{x^4 - 1}$
26. Efectua les següents operacions i simplifica tot el possible:
- a) $\frac{2}{x(5-x)} - \frac{3}{2(5-x)}$ b) $\frac{x-y}{x+y} \cdot \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ c) $\frac{2x+1}{4x^2-1}$
27. Efectua les següents operacions i simplifica el més possible:
- a) $\frac{x^4-1}{x^7} : \frac{x^2+1}{x^8}$ b) $\frac{2x+3y}{a-b} - \frac{3x+4y}{2a-2b}$ c) $-4x + (1-x^4) \left(\frac{x+1}{1-x} - \frac{1-x}{1+x} \right)$
28. Efectua les següents operacions i simplifica el més possible:
- a) $\left(x^4 - \frac{1}{x^2}\right) : \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)$ b) $\frac{x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3}{x+a} : \frac{x-a}{x+a}$ c) $\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}\right) : \frac{ab}{a+b}$

29. Efectua les següents operacions i simplifica tot el possible:

$$a) \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{x+y}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{x+y}} : \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a+y}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{a+y}}$$

$$b) \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) : \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)$$

$$c) \frac{\frac{3}{x} + \frac{2}{y}}{\frac{1}{x} - \frac{3}{y}} \cdot \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{y}}{\frac{3}{x} + \frac{5}{y}}$$

RESUM

Noció	Descripció	Exemples
Expressió algebraica	Expressió matemàtica que es construeix amb nombres reals i lletres sotmesos a les operacions matemàtiques bàsiques de suma, resta, multiplicació i/o divisió	$\frac{-3x}{2x+y^3} - x \cdot y^2 \cdot z$
Valor numèric d'una expressió algebraica	En fixar un valor concret per a cada indeterminada, o variable, d'una expressió algebraica apareix un nombre real: el valor numèric d'aquesta expressió algebraica per a tals valors de les indeterminades	Si, en l'expressió precedent, fem $x=3$, $y=-2$, $z=1/2$ obtenim $\frac{-3 \cdot 3}{2 \cdot 3 + (-2)^3} - 3 \cdot (-2)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{-3}{2}$
Monomi	Expressió donada pel producte de nombres reals i indeterminades	$-5 \cdot x \cdot y^3 \cdot z^2$ de grau 6 i coeficient -5 $7 \cdot x^2$ de grau 2 i coeficient 7
Polinomi	Expressió construïda a partir de la suma de monomis	$-x^3 + 4x^2 + 8x + 6$
Grau d'un polinomi	El major grau dels seus monomis	El polinomi anterior és de grau 3
Suma i producte de polinomis	El resultat sempre és un altre polinomi	$2ax - ax = ax$ $2ax \cdot ax = 2a^2x^2$
Divisió de dos polinomis	En dividir el polinomi $p(x)$ entre $q(x)$ s'obtenen altres dos polinomis, els polinomis quocient, $c(x)$, i residu, $r(x)$, tals que $p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$	$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$
Factorització d'un polinomi	Consisteix a expressar-ho com a producte d'altres polinomis de menor grau	$x^5 - 3x^3 - x^2 + 3 = (x^2 - 3) \cdot (x^3 - 1)$
Arrels i factorització	Si α és una arrel del polinomi $p(x)$, el polinomi $p(x)$ admet una descomposició factorial de la forma $p(x) = (x - \alpha) \cdot c(x)$ per a cert polinomi $c(x)$	-2 és una arrel de $x^3 + 2x^2 - x - 2$ $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x + 2) \cdot (x^2 - 1)$
Regla de Ruffini	Ens pot ajudar a l'hora de factoritzar un polinomi i conèixer les seves arrels	

AUTOAVALUACIÓ

1. Assenyala els coeficients que apareixen en les següents expressions algebraiques:
 - a) $\frac{5x-8}{3-4y^2} + 6xy^3 - \frac{7}{z}$
 - b) $-3x^5 + 2x^4 - x^3 + 4x - 5$
 - c) $7 \cdot \sqrt{2} \cdot x \cdot y^2 \cdot z$
2. El valor numèric de l'expressió $\frac{3x-7}{2-3y^2} + 5xy^3 - \frac{6}{z}$ per a $x=2$, $y=-1$, $z=-1$ és:
 - a) 17
 - b) 15
 - c) -3
 - d) -5
3. Completa adequadament les següents frases:
 - a) La suma de dos polinomis de grau tres sol ser un altre polinomi de grau
 - b) La suma de tres polinomis de grau dos sol ser un altre polinomi de grau
 - c) El producte de dos polinomis de grau dos és sempre un altre polinomi de grau
 - d) La diferència de dos polinomis de grau quatre sol ser un altre polinomi de grau
4. En dividir el polinomi $p(x) = 5x^5 + 6x^4 + 3x^3 + 2$ entre $q(x) = 3x^2 + 5x + 8$, el polinomi residu que s'obté:
 - a) ha de ser de grau 2.
 - b) pot ser de grau 2.
 - c) ha de ser de grau 1.
 - d) ha de ser de grau menor que 2.
5. Considera el polinomi $p(x) = 5x^4 - 8x^3 + 4x^2 - 6x + 2$. Quins dels següents nombres enters són *raonables candidats* per ser una arrel seva?
 - a) 3
 - b) 2
 - c) 4
 - d) 7
6. Considera el polinomi $2x^4 + 7x^3 + x^2 - 7x - 3$. Quins dels següents nombres racionals són *raonables candidats* per ser una de les seves arrels?
 - a) -3
 - b) 2 i $-\frac{1}{2}$
 - c) -3 i $\frac{1}{3}$
 - d) -3 i $\frac{3}{2}$
7. Tot polinomi amb coeficients enters de grau tres
 - a) té tres arrels reals.
 - b) té, com a màxim, tres arrels reals.
 - c) té, almenys, tres arrels.
8. És possible que un polinomi, amb coeficients enters, de grau quatre tingui exactament tres arrels, ja siguin diferents o amb alguna múltiple?
9. Justifica la veracitat o falsedat de cadascuna de les següents frases:
 - a) La regla de Ruffini serveix per dividir dos polinomis qualssevol.
 - b) La regla de Ruffini permet dictaminar si un nombre és arrel o no d'un polinomi.
 - c) La regla de Ruffini només és vàlida per a polinomis amb coeficients enters.
 - d) La regla de Ruffini és un algorisme que ens proporciona totes les arrels d'un polinomi.
10. Analitza si pot haver-hi algun polinomi de grau deu que no tingui cap arrel real.

CAPÍTOL 4: EQUACIONS I SISTEMES LINEALS

ACTIVITATS PROPOSADES

1. EQUACIONS

1. Escriu tres equacions equivalents a $4x - 5xy + 7 - 2yx = 8x$.
2. Resol les següents equacions: a) $5(7x + 6) = 21$ b) $-2x + 7 = -7(3x - 2) - 8x$ c) $2x - 6(9 + 5x) = 4(x + 6) + 7$
3. Resol les següents equacions:
a) $9(2 - 3x) + \frac{4}{5}(x - 3) = 4x - \frac{7 - 3x}{5}$ b) $6 - \left(8 - 4\left(3x - \frac{3}{7}\right)\right) = 2x - \frac{5 - 9x}{7}$ c) $8(3x - 5) = 7(6 - 9x)$
4. Comprova que la solució de l'equació $\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{3} = \frac{1}{6}$ és $x = 6$.
5. Escriu tres equacions de 1r grau que tinguin solució $x=3$, tres que tinguin infinites solucions i tres que no tinguin solució.
6. Calcula les dimensions d'un rectangle de perímetre 30 cm i tal que la seva base és el doble de la seva altura.
7. Resol les següents equacions:
a) $2(3x + 4) = 7$ b) $-4x + 6 = -9(5x - 1) - 5x$ c) $4x - 7(11 + 2x) = 6(x + 8) + 9$
d) $2(3 - 4x) + \frac{4}{7}(x - 2) = 2x - \frac{5 - 4x}{7}$ e) $2 - \left(7 - 5\left(2x - \frac{1}{3}\right)\right) = 4x - \frac{6 - 2x}{3}$ f) $3(7x - 1) = 9(3 - 2x)$
8. Indica si són de segon grau les següents equacions:
a) $5x^2 - \sqrt{2}x + 8 = 0$ b) $3,2x^2 - 1,25 = 0$ c) $2x^2 - \frac{3}{x} = 0$
d) $5xy^2 - 8 = 0$ e) $28 - 6,3x = 0$ f) $2x^2 - 3\sqrt{x} + 4 = 0$
9. En les següents equacions de segon grau, indica quins són els valors a , b i c :
a) $3 - 8x^2 + 10x = 0$ b) $-3,4x^2 + 7,8x = 0$ c) $6x^2 - 1 = 0$ d) $1,25x^2 - 3,47x + 2,75 = 0$.
10. En les següents equacions de segon grau, indica els valors a , b i c :
a) $2 - 7x^2 + 11x = 0$ b) $-2,3x^2 + 6,7x = 0$ c) $5x^2 - 9 = 0$ d) $9,1x^2 - 2,3x + 1,6 = 0$
11. Resol les següents equacions de segon grau completes:
a) $x^2 - 7x + 12 = 0$ b) $3x^2 + 2x - 24 = 0$ c) $2x^2 - 9x + 6 = 0$ d) $x^2 - 3x - 10 = 0$
12. Resol les següents equacions:
a) $5x - 2\frac{x-1}{5} = x^2 - \frac{10x+8}{5}$ b) $4\frac{x-3}{5} - \frac{7-4x}{x} = 8$ c) $x(x-2) + 3(x^2-7) + 11 = -11$
d) $6(x^2-7) + 2(x^2-9) + 3 = 2$ e) $\frac{3-6x^2}{2x} - \frac{1}{3} = \frac{2x-5}{6}$ f) $\frac{1-2x^2}{3x} - \frac{2}{5} = \frac{4x-2}{15}$
13. Esbrina quantes solucions tenen les següents equacions de segon grau:
a) $5x^2 + 2x + 4 = 0$ b) $2x^2 - 7x + 8 = 0$ c) $x^2 - 5x - 11 = 0$ d) $3x^2 - 8x + 6 = 0$
14. Resol les següents equacions de segon grau incompletes:
a) $3x^2 + 18x = 0$ b) $5x^2 - 180 = 0$ c) $x^2 - 49 = 0$ d) $2x^2 + x = 0$ e) $4x^2 - 25 = 0$ f) $5x^2 - 10x = 0$
15. Resol mentalment les següents equacions de segon grau:
a) $x^2 + 6x = 0$ b) $x^2 + 2x - 8 = 0$ c) $x^2 - 25 = 0$ d) $x^2 - 9x + 20 = 0$ e) $x^2 - 3x - 4 = 0$ f) $x^2 - 4x - 21 = 0$
16. Escriu una equació de segon grau les solucions de la qual siguin 3 i 7.
17. El perímetre d'un rectangle mesura 16 cm i la seva àrea 15 cm². Calcula les seves dimensions.
18. Si 3 és una solució de $x^2 - 5x + a = 0$, quant val a ?
19. Resol les equacions següents:
a) $(x-6) \cdot (x-3) \cdot (x+7) \cdot (x-1) \cdot (x-9) = 0$ b) $3(x-4) \cdot (x-8) \cdot (x+5) \cdot (x-2) \cdot (x-1) = 0$
20. Resol les equacions biquadrades següents:
a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ b) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$ c) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ d) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$

21. Resol les equacions racionals següents:

a) $\frac{2x-1+7x}{3x} = \frac{3}{x} - 2$ b) $\frac{1}{x} + 1 - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{4}{3}$ d) $\frac{2x-3}{x} + \frac{1}{x} = 1$

22. Resol les equacions irracionals següents:

a) $5 + \sqrt{x-1} = x + 2$ b) $\sqrt{x-2} + 3\sqrt{x-2} = x + 1$ c) $\sqrt{x} - 4 = x - 1$ d) $7 + \sqrt{x+4} = x + 9$

23. Resol les equacions exponencials següents: a) $2^{x+5} \cdot 2^{x+4} \cdot 2^{x+3} = 8$ b) $5^{3x} = \frac{1}{625}$ c) $2^{2x} \cdot 4^x = \frac{1}{16}$

2. SISTEMES D'EQUACIONS

24. Raona si són o no sistemes d'equacions lineals els següents sistemes:

a) $\begin{cases} 3xy + y = 5 \\ 5x - 4y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6y - 4x = 3 \\ x - 7y = -8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x - 3 = 2y \\ 4x + 6y = 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ 3x + y^2 = 4 \end{cases}$

25. Resol gràficament els següents sistemes i classifica'ls:

a) $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ -3x + y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ -2y + 2x = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 4x - 6y = 6 \end{cases}$

26. Resol gràficament els següents sistemes i classifica'ls:

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ -3x + y = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ -2y + x = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x - 4y = 4 \end{cases}$

27. Donat el sistema d'equacions $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + y = 5 \end{cases}$, inventa un enunciat que es resolgui amb aquest sistema.

28. Resol els següents sistemes pel mètode de substitució:

a) $\begin{cases} 3x + 4y = 26 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 4y = 26 \\ 3x + y = 24 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ 2x + 3y = 14 \end{cases}$

29. Resol els següents sistemes pel mètode d'igualació:

a) $\begin{cases} 3x + y = 18 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 4x + 2y = 26 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x - 4y = 10 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$

30. Resol els següents sistemes pel mètode de reducció:

a) $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ 2x - 5y = -23 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ 4x + y = 11 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x - 2y = 13 \end{cases}$

31. Resol els següents sistemes: (Ajuda: Utilitza el mètode de reducció per a resoldre a) i b))

a) $\begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = -2 \\ 2x^2 - 3y^2 = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 3 \\ 5x^2 - 2y^2 = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} xy = \frac{1}{2} \\ x + y = \frac{3}{2} \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 - 4y = -3 \\ xy = 1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + y - \frac{y}{x} = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$

32. La trajectòria d'un projectil és una paràbola d'equació: $y = -x^2 + 5x$, i la trajectòria d'un avió és una recta d'equació: $y = 3x$. En quins punts coincideixen ambdues trajectòries? Representa gràficament la recta i la paràbola per comprovar el resultat.

33. Resol els següents sistemes i comprova gràficament les solucions:

a) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 1 \\ xy = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ xy = 4 \end{cases}$
d) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17 \\ x + y = 5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 18 \\ y = x \end{cases}$

34. Resol els següents sistemes:

a) $\begin{cases} 2x + y - 3z = -2 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y + 2z = 6 \\ x + 2y + 2z = 4 \\ 3x - 2y - 3z = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 5 \\ x - 2y + 2z = -1 \\ x - 2y - 3z = -6 \end{cases}$

3. RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

35. Quin nombre multiplicat per 4 és 5 unitats menor que el seu quadrat?
36. En una classe decideixen que tots enviaran una carta a la resta de companys. Un diu: Escriurem 380 cartes! Calcula el nombre d'alumnes que hi ha a la classe.
37. Calcula tres nombres consecutius tals que la suma dels seus quadrats sigui 365.
38. Una fotografia rectangular mesura 14 cm de base i 10 cm d'altura. Al voltant de la foto hi ha un marge d'igual amplària per a la base que per a l'altura. Troba l'ample del marge, sabent que l'àrea total de la foto i el marge és de 252 cm².
39. El triple del quadrat d'un nombre augmentat en el seu doble és 85. Quin és el nombre?
40. Un triangle isòsceles té un perímetre de 20 cm i la base mesura 4 cm. Calcula els costats del triangle i la seva àrea.
41. Un full de paper quadrat es doblega per la meitat. El rectangle resultant té un àrea de 8 cm². Quin és perímetre d'aquest rectangle?
42. Un pare diu: "El producte de l'edat del meu fill fa 5 anys per la seva edat fa 3 anys és la meua edat actual, que són 35 anys". Calcula l'edat del fill.
43. Troba les dimensions del rectangle l'àrea del qual és 21 m², sabent que els seus costats es diferencien en 4 metres.
44. En un triangle rectangle el catet major mesura 4 cm menys que la hipotenusa i 4 cm més que l'altre catet. Quant mesuren els costats del triangle?
45. Troba dos nombres parells consecutius el producte dels quals sigui 224.
46. Troba tres nombres imparells consecutius tals que si al quadrat del major se li resten els quadrats dels altres dos s'obté com a resultat 15.
47. La suma de les edats de na Maria i en Pere és 65 anys. L'edat d'en Pere menys la meitat de l'edat de na Maria és igual a 35. Quina edat tenen na Maria i en Pere?
48. La suma de les edats de na Marta i en Toni és 32 anys. D'aquí a 7 anys, l'edat d'en Toni serà igual a l'edat de na Marta més 20 anys. Quina edat tenen na Marta i en Toni en l'actualitat?
49. Troba dos nombres la diferència dels quals sigui 24 i la seva suma sigui 104.
50. Un hotel té 42 habitacions (individuals i dobles) i 62 llits, quantes habitacions té de cada tipus?
51. En un triangle rectangle la hipotenusa mesura 10 cm i les longituds dels seus dos catets sumen 14 cm. Calcula l'àrea del triangle.
52. Na Xisca li demana a na Laura per les seves qualificacions en Matemàtiques i en Llengua. Na Laura li diu "La suma de les meves qualificacions és 19 i el producte 90". Na Xisca li dona l'enhorabona. Quines qualificacions va obtenir?
53. D'un nombre de tres xifres se sap que sumen 12, que la suma dels seus quadrats és 61, i que la xifra de les desenes és igual a la de les centenes més 1. Quin nombre és?
54. Es tenen tres suc's composts de la següent manera:
El primer de 40 dl de taronja, 50 dl de llimona i 90 dl d'aranja .
El segon de 30 dl de taronja, 30 dl de llimona i 50 dl d'aranja .
El tercer de 20 dl de taronja, 40 dl de llimona i 40 dl d'aranja .
Es demana quin volum s'haurà d'usar de cadascun dels suc's anteriors per formar un nou suc de 34 dl de taronja, 46 dl de llimona i 67 dl d'aranja .
55. Es venen tres espècies de cereals: blat, ordi i mill. Cada kg de blat es ven a 2 €, el d'ordi a 1 € i el de mill a 0,5 €. Si es venen 200 kg en total i s'obté per la venda 300 €, quina quantitat s'ha venut de cada cereal?
56. Es desitja barrejar farina de 2 €/kg amb farina d'1 €/kg per obtenir una mescla d'1,2 €/kg. Quants kg haurem de posar de cada tipus per obtenir 300 kg de mescla?
57. En una tenda hi ha dos tipus de joguines, les de tipus A que utilitzen 2 piles i les de tipus B que utilitzen 5 piles. Si en total en la tenda hi ha 30 joguines i 120 piles, quantes joguines hi ha de cada tipus?

58. Un vianant surt d'una ciutat A i es dirigeix a una ciutat B que està a 15 km de distància, a una velocitat de 4 km/h; en el mateix moment surt un ciclista de la ciutat B a una velocitat de 16 km/h i es dirigeix cap a A. Quant de temps porta el vianant caminant en el moment de la trobada? A quina distància de B es creuen?

RESUM

		<i>Exemples</i>
Equació de primer grau	Llevar parèntesi Llevar denominadors Transposar termes Simplificar i aïllar la incògnita	$5x/3 + 3(x + 1) = 2 \Rightarrow$ $5x/3 + 3x + 3 = 2 \Rightarrow$ $5x + 9x + 9 = 6 \Rightarrow$ $14x = -3 \Rightarrow x = -3/14.$
Equació de segon grau	Té la forma: $ax^2 + bx + c = 0$ Resoldre amb la fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 - 5x + 6 = 0$ $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2}$ $x_1 = 3, x_2 = 2$
Nombre de solucions d'una equació de 2n grau	Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, té dues solucions reals i diferents Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, té una solució doble. Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, l'equació no té solució	$x^2 - 4x - 5 = 0: \Delta = 36 > 0$, té dues solucions, $x=5$ i $x=-1$. $x^2 - 2x + 1 = 0: \Delta = 0$, té una arrel doble: $x = 1$. $x^2 + 3x + 8 = 0: \Delta = -23$. No té solució real
Resolució d'equacions de 2n grau incompletes	Si $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, aïllam la incògnita: $x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$. Si $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$, treiem x factor comú: $x = 0$ i $x = \frac{-b}{a}$	$2x^2 - 18 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$ $3x^2 - 15x = 0 \Rightarrow 3x(x - 5) = 0 \Rightarrow$ $x_1 = 0; x_2 = 5.$
Suma i producte d'arrels	$x_1 x_2 = \frac{c}{a}; x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$	$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = 3$
Sistema d'equacions lineals	$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}$
Classificació	Compatible determinat: Una única solució, el punt d'intersecció. Les rectes són secants: $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$ Compatible indeterminat: Infinites solucions, per la qual cosa les rectes són coincidents: $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 6 \end{cases}$ Incompatible: No té solució. Les rectes són paral·leles: $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 2 \end{cases}$	
Mètodes de resolució	Substitució: aïllar una incògnita en una equació i substituir en l'altra equació. Igualació: aïllar la mateixa incògnita en les dues equacions i igualar les expressions obtingudes. Reducció: sumar les dues equacions, multiplicant-les abans pels nombres adequats.	

EXERCICIS I PROBLEMES

Equacions

1. Resol aquestes equacions:

a) $4(3-2x) + \frac{5}{7}(6x-2) = 2x - \frac{1-9x}{7}$

b) $4 - \left(3 - 5 \left(2x - \frac{1}{6} \right) \right) = 3x - \frac{4-5x}{3}$

c) $4(2x-5) = 6(9-4x)$

2. Resol les següents equacions de segon grau:

a) $-3x^2 - 5x - 2 = 0$

b) $2x(-3+x) = 5$

c) $3x^2 = 27x$

d) $5(3x+2) - 4x(x+6) = 3$

e) $4(x-9) + 2x(2x-3) = 6$

f) $10(2x^2-2) - 5(3+2x) = -21$

g) $4(x+5) \cdot (x-1) = -2x-4$

h) $3x(5x+1) = 99$

i) $2(3x^2-4x+2) - 2x(3x-2) = -5$

3. Resol les següents equacions de segon grau amb denominadors:

a) $\frac{x^2-1}{3} - \frac{x+1}{2} = 1$

b) $\frac{x^2-3}{5} + \frac{x^2-4x+1}{5} = 2$

c) $\frac{2x^2+3}{3} + \frac{x+5}{6} = 2$

d) $\frac{1-x^2}{3} + \frac{4x-1}{2} = \frac{1}{6}$

e) $\frac{x^2-3}{2} - \frac{3x-7}{4} = 2x-5$

f) $\frac{3x+2x^2}{5} - \frac{4x-7}{10} = 2$

4. Resol mentalment les següents equacions de segon grau:

a) $x^2 - 3x - 10 = 0$

b) $x^2 + 3x - 10 = 0$

c) $x^2 + 7x + 10 = 0$

d) $x^2 - 7x + 10 = 0$

e) $x(-1+x) = 0$

f) $2x^2 = 50$

g) $x^2 - 5x + 6 = 0$

h) $x^2 - x - 6 = 0$

i) $x^2 + x - 6 = 0$

5. Factoritza les equacions anteriors. Així, si les solucions són -5 i 5, escriu: $2x^2 - 50 = 0 \Leftrightarrow 2(x+5) \cdot (x-5) = 0$. Observa que si el coeficient de x^2 és diferent d'1 els factors han d'estar multiplicats per aquest coeficient.

6. Quan el coeficient b és parell ($b = 2B$), pots simplificar la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2B \pm \sqrt{4B^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2B \pm 2\sqrt{B^2 - ac}}{2a} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - ac}}{a}$$

Així per resoldre $x^2 - 6x + 8 = 0$ prou dir $x = 3 \pm \sqrt{9-8} = 3 \pm 1$, després les seves solucions són 2 i 4.

Utilitza aquesta expressió per resoldre: a) $x^2 - 10x + 24 = 0$

b) $x^2 - 6x - 7 = 0$

c) $x^2 + 4x - 5 = 0$

7. Resol mentalment les equacions següents, després desenvolupa les expressions i utilitza la fórmula general per tornar a resoldre-les:

a) $(x-3) \cdot (x-7) = 0$

b) $(x+2) \cdot (x-4) = 0$

c) $(x-8) \cdot (x-4) = 0$

d) $(x-2) \cdot (x+5) = 0$

e) $(x+6) \cdot (x-3) = 0$

f) $(x-5) \cdot (x+3) = 0$

8. Determina el nombre de solucions reals que tenen les següents equacions de segon grau calculant el seu discriminant, i després resol les equacions:

a) $x^2 + 5x - 2 = 0$

b) $5x^2 + 2x - 4 = 0$

c) $2x^2 + 4x + 11 = 0$

d) $2x^2 - 3x + 8 = 0$

e) $3x^2 - x - 5 = 0$

f) $4x^2 + 2x - 7 = 0$

9. Escriu tres equacions de segon grau que no tinguin cap solució real. *Ajuda:* Utilitza el discriminant.

10. Escriu tres equacions de segon grau que tinguin una solució doble.

11. Escriu tres equacions de segon grau que tinguin dues solucions reals i diferents.

12. Resol les següents equacions polinòmiques:

a) $x^5 - 37x^3 + 36x = 0$

b) $x^3 - 2x^2 - 8x = 0$

c) $2x^3 + 2x^2 - 12x = 0$

d) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

e) $2x^4 = 32x^2 - 96$

f) $x(x-3)(2x+3)(3x-5) = 0$

13. Resol les següents equacions aplicant un canvi de variable:

a) $x^8 + 81 = 82x^4$

b) $x^4 - 24x^2 + 144 = 0$

c) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

d) $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$

14. Resol les següents equacions racionals:

a) $2x + \frac{3}{x} = 5$

b) $\frac{3}{5x} + \frac{1}{2x} = x$

c) $\frac{1}{x-3} + 2 = \frac{5}{x-3}$

d) $\frac{2x}{3-2x} - 5x = 1$

e) $\frac{2}{x+1} = \frac{3(2x+1)}{x-1} + 3$

f) $\frac{2x-3}{x+1} - \frac{4+5x}{x} = 7$

g) $\frac{3x-2}{x+1} - \frac{2+3x}{x-1} = 4$

h) $\frac{3}{1-x} = \frac{5}{x} + \frac{2}{x-x^2}$

i) $\frac{3x}{x-2} - \frac{5x}{x^2-4} = \frac{3x}{2}$

j) $\frac{1}{2} = \frac{x-5}{3-4x}$

15. Resol les següents equacions irracionals:

a) $x = -3 + \sqrt{5+2x^2}$

b) $\sqrt{25-x} = x-5$

c) $7 + \sqrt{x^2-3x+2} = 3x$

d) $\sqrt{x} - \sqrt{x-2} = 1$

e) $\sqrt{1-x} - \sqrt{x+1} + 1 = 0$

f) $\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}} = 5$

g) $3\sqrt{x-2} - 4 = \frac{-2}{\sqrt{x+1}}$

h) $\sqrt{x-1} - \frac{2}{\sqrt{x-1}} = 1$

i) $\sqrt{x+2} + \frac{1}{\sqrt{x-3}} = 4$

16. Resol les equacions següents:

a) $3^{3x} = \frac{1}{81}$

b) $5^{2x} = \frac{1}{625}$

Sistemes

17. Resol els següents sistemes pel mètode de substitució:

a) $\begin{cases} 4x - 3y = 1 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 4y = 6 \\ 2x + 5y = 9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 3y = 10 \\ x + y = 4 \end{cases}$

18. Resol els següents sistemes pel mètode d'igualació:

a) $\begin{cases} -3x + 2y = -1 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x - 2y = 1 \\ 4x - y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 7x - 4y = 10 \\ -8x + 3y = -13 \end{cases}$

19. Resol els següents sistemes pel mètode de reducció:

a) $\begin{cases} 7x - 2y = 5 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 2y = 10 \\ -x - 6y = -14 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 6y = 0 \\ -7x + 5y = -9 \end{cases}$

20. Resol de forma gràfica els següents sistemes

a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x + 3y = 5 \\ x - 7y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ -7x + 5y = 3 \end{cases}$

21. Resol els següents sistemes:

a) $\begin{cases} \frac{2x-3}{3} - \frac{y-1}{5} = -1 \\ \frac{2x+3}{2} + \frac{3y-1}{4} = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{2y+3}{5} = -3 \\ \frac{5x+2y}{5} = -10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{2x+3}{2} + \frac{3y-2}{3} = 2 \\ 7x - y = 1 \end{cases}$

22. Copia en el teu quadern i completa els següents sistemes incomplets de manera que es compleixi el que es demana en cadascun:

Compatible indeterminat

Incompatible

La seva solució sigui $x = 2$ i $y = 1$

a) $\begin{cases} ()x + 3y = () \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -5x + y = 2 \\ ()x + y = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - y = () \\ ()x + y = 7 \end{cases}$

Incompatible

La seva solució sigui $x = -1$ i $y = 1$

Compatible indeterminat

d) $\begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ 4x + ()y = () \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x + ()y = -1 \\ ()x + 3y = 5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} ()x + 6y = () \\ 2x + 3y = -2 \end{cases}$

23. Resol els següents sistemes pel mètode d'igualació i comprova la solució gràficament. De quin tipus és cada sistema?

a) $\begin{cases} -2x + 6y = 13 \\ x - 3y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = -3 \\ 4x - 4y = -12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 4 \\ -x + 3y = -5 \end{cases}$

Problemes

24. En una tenda lloguen bicicletes i tricicles. Si tenen 51 vehicles amb un total de 133 rodes, quantes bicicletes i quants tricicles tenen?
25. Quin és l'edat d'una persona si en multiplicar-la per 15 li falten 100 unitats per completar el seu quadrat?
26. Descompon 8 en dos factors de forma que la seva suma sigui 6
27. El triple del quadrat d'un nombre augmentat en el seu doble és 85. Quin nombre és?

28. La suma dels quadrats de dos nombres imparells consecutius és 394. Determina aquests nombres.
29. Van carregats un ase i un mul. L'ase es queixa del pes que porta damunt. El mul li contesta: Si jo portés un dels teus sacs, portaria el doble de càrrega que tu, però si tu n'agafes un dels meus, els dos portarem igual càrrega. Quants sacs porta cadascun?
30. Quin nombre multiplicat per 3 és 40 unitats menor que el seu quadrat?
31. Calcula tres nombres consecutius tal que la suma dels seus quadrats sigui 365
32. D'aquí 11 anys, l'edat de na Maria serà la meitat del quadrat de l'edat que tenia fa 13 anys. Quina edat té na Maria?
33. Dos nombres naturals es diferencien en 2 unitats i la suma dels seus quadrats és 580. Quins són aquests nombres?
34. La suma de dos nombres és 5 i el seu producte és -84 . De quins nombres es tracta?
35. Na Bel vol formar safates d'un quilogram amb massapans i polvorons. Si els polvorons li costen 5 euros el quilo i els massapans 7 euros el quilo, i vol que el preu de cada safata sigui de 6 euros, quina quantitat haurà de posar de cada producte? Si vol formar 25 safates, quina quantitat de polvorons i de massapans necessitarà?
36. Determina els catets d'un triangle rectangle sabent que sumen 7 cm i que la hipotenusa mesura 5 cm.
37. El producte de dos nombres és 4 i la suma dels seus quadrats 17. Calcula aquests nombres
38. La suma de dos nombres és 20. El doble del primer més el triple del segon és 45. De quins nombres es tracta?
39. En un garatge hi ha 30 vehicles entre cotxes i motos. Si en total hi ha 100 rodes, quants cotxes i motos hi ha en el garatge?
40. L'edat actual d'en Pere és el doble de l'edat de na Pilar. D'aquí 10 anys, les seves edats sumaran 65. Quants anys tenen actualment en Pere i na Pilar?
41. A la meua classe hi ha 35 persones. Ens han regalat a cada noia 2 bolígrafs i a cada noi 1 quadern. Si en total hi havia 55 regals. Quants nois i noies som a classe?
42. Entre el meu avi i el meu germà tenen 56 anys. Si el meu avi té 50 anys més que el meu germà, quina edat té cadascun?
43. Dos entrepans i un refresc costen 5 €. Tres entrepans i dos refrescs costen 8 €. Quin és el preu de l'entrepà i el preu del refresc?
44. En una granja hi ha pollastres i vaques. Si hi ha 50 caps i 134 potes, quants. Quants pollastres i vaques hi ha en la granja?
45. Un rectangle té un perímetre de 172 metres. Si el llarg és 22 metres major que l'ample, quines són les dimensions del rectangle?
46. En una borsa hi ha monedes de 1 € i 2 €. Si en total hi ha 40 monedes i 53 €, quantes monedes de cada valor hi ha en la borsa?
47. En una baralla entre aranyes i vespes, hi ha 70 caps i 488 potes. Sabent que una aranya té 8 potes i una vespa 6, quantes vespes i aranyes hi ha en la baralla?
48. Una classe té 32 estudiants, i el nombre de nois és el triple que el de noies, quants nois i noies hi ha?
49. Na Maria té 6 anys més que el seu germà Pau, i la seva mare té 50 anys. D'aquí 2 anys l'edat de la mare serà el doble de la suma de les edats dels seus fills, Quines edats tenen?
50. Es barregen 15 kg de blat de moro de 2,1 € el quilogram amb 27 kg de blat de moro de preu desconegut, resultant el preu de la mescla de 3 € el kg. Quin preu tenia el segon blat de moro?
51. L'altura d'un trapezi isòsceles és de 4 cm, el perímetre de 24 cm, i els costats inclinats són iguals a la base menor. Calcula l'àrea del trapezi.
52. Dos autobusos surten, un des de Madrid i l'altre des de València a les 8 del matí. Un va a 100 km/h i l'altre a 120 km/h. A quina hora es creuen? A quants km de Madrid estaran?
53. En un concurs es guanyen 50 € per cada resposta encertada i es perden 100 € per cada fallada. Després de 20 preguntes, na Pilar ha guanyat 250 €. Quantes preguntes ha encertat?
54. En Joan ha comprat 6 sucs i 4 batuts per 4,60 €, després ha comprat 4 sucs i 7 batuts i li han costat 4,80 €. Calcula els preus d'ambdues coses.
55. Quina fracció és igual a 1 quan se suma 1 al numerador i és igual a $1/2$ quan se suma 2 al denominador?
56. El quocient d'una divisió és 3 i el residu és 2. Si el divisor disminueix en 1 unitat, el quocient augmenta en 2 i el residu nou és 1, troba el dividend i el divisor.

57. Dues amigues van anar a pescar. Al final del dia una va dir: "Si tu em dones un dels teus peixos, llavors jo tindrè el doble que tu". L'altra li va respondre: "Si tu em dones un dels teus peixos, jo tindrè el mateix nombre de peixos que tu". Quants peixos tenia cadascuna?
58. Calcula les dimensions d'un rectangle sabent que la seva àrea és 30 cm^2 , i el seu perímetre mesura 26 cm .
59. Un vianant surt d'una ciutat A a una velocitat de 4 km/h , i es dirigeix a una ciutat B que està a 12 km de la ciutat A. Trenta minuts després surt un ciclista de la ciutat B a una velocitat de 16 km/h i es dirigeix cap a A. Quant de temps porta el vianant caminant en el moment de la trobada? A quina distància de B es creuen?
60. Es desitja barrejar oli de 3 €/l amb un altre oli de $4,20 \text{ €/l}$ de manera que la mescla resulti a $3,50 \text{ €/l}$. Quants litres de cada classe s'han de barrejar per obtenir 200 litres de la mescla?
61. En intercanviar les xifres d'un nombre de dues xifres s'obté un altre que és 27 unitats major. Troba el nombre inicial.
62. La diagonal d'un rectangle mesura 30 cm , i el perímetre 84 cm . Troba els costats del rectangle.
63. Una tanca envolta un terreny rectangular de 1000 m^2 . Si la tanca mesura 130 metres, calcula les dimensions del terreny.
64. Diversos amics han de fer un regal de noces que costa 900 euros i que pagaran a parts iguals. A darrera hora s'apunten dos amics més, amb el que cadascun toca a 15 euros menys. Quants amics eren inicialment? Quant pagarà al final cadascun?
65. Les diagonals d'un rombe es diferencien en 3 cm i la seva àrea és de 20 cm^2 . Calcula el seu perímetre.
66. Un tren surt de Bilbao cap a Alcàsser de Sant Joan a una velocitat de 140 km/h . Una hora més tard surt un altre tren d'Alcàsser de Sant Joan cap a Bilbao a 100 km/h ; la distància entre les dues ciutats és de 500 km . Al cap de quant de temps es creuen els dos trens? A quina distància d'Alcàsser de Sant Joan?
67. Un cotxe surt d'una ciutat A a una velocitat de 70 km/h i 30 minuts més tard un altre cotxe surt de A en la mateixa direcció i sentit a una velocitat de 120 km/h . Quant temps trigarà el segon a agafar el primer i a quina distància de A es produeix la trobada?

AUTOAVALUACIÓ

1. La solució de l'equació $3(x-1) - 2(x-2) = 5$ és:
 - a) $x = 2$
 - b) $x = 4$
 - c) $x = -2/3$
 - d) $x = 3$
2. Les solucions de l'equació $156 = x(x-1)$ són:
 - a) $x = 11$ i $x = -13$
 - b) $x = 13$ i $x = -12$
 - c) $x = 10$ i $x = 14$
 - d) $x = -12$ i $x = -11$
3. Les solucions de l'equació $\frac{4x-1}{3} - \frac{x+2}{6} = \frac{x^2}{2}$ són:
 - a) $x = 2$ i $x = 2/3$
 - b) $x = 1/3$ i $x = 4$
 - c) $x = 1$ i $x = 4/3$
 - d) $x = 5/3$ i $x = 3$
4. Les solucions de l'equació $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ són:
 - a) $1, -1, 4, -4$
 - b) $1, -1, 2, -2$
 - c) $2, -2, 3, -3$
 - d) $2, -2, 5, -5$
5. Les solucions de l'equació $2(x+2) - x(2-x) = 0$ són:
 - a) Infinites
 - b) $x = 9$ i $x = 5$
 - c) no té solució
 - d) $x = 1$ i $x = 4$
6. Les rectes que formen el sistema $\begin{cases} x+3y=2 \\ 2x+6y=4 \end{cases}$ són:
 - a) Secants
 - b) Paral·leles
 - c) Coincidents
 - d) Es creuen
7. La solució del sistema $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ -2x+3y=1 \end{cases}$ és:
 - a) $x = 2$ i $y = 1$
 - b) $x = 1$ i $y = 1$
 - c) $x = 3$ i $y = 2$
 - d) No té solució
8. La solució del sistema $\begin{cases} 3+2x-7 = x-1+y \\ 2x-9y = 13 \end{cases}$ és:
 - a) $x = 2$ i $y = -1$
 - b) $x = -2$ i $y = 1$
 - c) $x = 1$ i $y = 0$
 - d) $x = 3$ i $y = 1$
9. En una granja, entre pollastres i porcs hi ha 27 animals i 76 potes. Quants pollastres i porcs hi ha en la granja?
 - a) 16 pollastres i 11 porcs
 - b) 15 pollastres i 12 porcs
 - c) 13 pollastres i 14 porcs
10. Quina és l'edat d'una persona si en multiplicar-la per 15 , li falten 100 unitats per arribar al seu quadrat?
 - a) 20 anys
 - b) 7 anys
 - c) 25 anys
 - d) 8 anys

CAPÍTOL 5: GEOMETRIA DEL PLÀNOL I DE L'ESPAI.

ACTIVITATS PROPOSADES

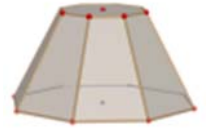
1. TEOREMA DE PITÀGORES I TEOREMA DE TALES

1. És possible trobar un triangle rectangle els catets del qual mesurin 12 i 16 *cm* i la seva hipotenusa 30 *cm*? Si la teva resposta és negativa, troba la mesura de la hipotenusa d'un triangle rectangle els catets del qual mesuren 12 i 16 *cm*.
2. Calcula la longitud de la hipotenusa dels següents triangles rectangles de catets:
 a) 4 *cm* i 3 *cm* b) 1 *m* i 7 *m* c) 2 *dm* i 5 *dm* d) 23,5 *km* i 47,2 *km*.
 Utilitza la calculadora si et resulta necessària.
3. Calcula la longitud del catet que falta en els següents triangles rectangles d'hipotenusa i catet:
 a) 8 *cm* i 3 *cm* b) 15 *m* i 9 *m* c) 35 *dm* i 10 *dm* d) 21,2 *km* i 11,9 *km*
4. Calcula l'àrea d'un triangle equilàter de costat 5 *m*.
5. Calcula l'àrea d'un hexàgon regular de costat 7 *cm*.
6. Una caixa té forma cúbica de 3 *cm* d'aresta. Quant mesura la seva diagonal?
7. Calcula la mesura de la diagonal d'una sala que té 8 metres de llarg, 5 metres d'ample i 3 metres d'altura.
8. En una foto hi ha un nin, que sabem que mesura 1,5 *m*, i un edifici. Mesurem l'altura del nin i de l'edifici a la foto, i resulten ser 0,2 *cm* i 10 *cm*, respectivament. Quina altura té l'edifici?
9. Es dibuixa un hexàgon regular. Es tracen les seves diagonals i s'obté un altre hexàgon regular. Indica la raó de semblança entre els costats de tots dos hexàgons.
10. En un triangle regular *ABC* de costat 1 *cm*, tracem els punts mitjans, *M* i *N*, de dos dels seus costats. Tracem les rectes *BN* i *CM* que es tallen en un punt *O*. Són semblants els triangles *MON* i *COB*? Quina és la raó de semblança? Quant mesura el costat *MN*?
11. Una piràmide regular hexagonal de costat de la base 3 *cm* i altura 10 *cm*, es talla per un plànol a una distància de 4 *cm* del vèrtex, amb el que s'obté una nova piràmide. Quant mesuren les seves dimensions?
12. Justifica que els triangles *ABC* i *A''B''C''* són semblants. Calcula la raó de semblança i la raó entre les seves àrees. Cerca una relació entre la raó de semblança i la raó entre les àrees de dos triangles semblants.
13. Per què són semblants els triangles *ABC* i *A''B''C''*? Observa en la Finestra algebraica les longituds dels seus costats i els valors de les seves àrees. Quina és la raó de semblança? Quina és la raó entre les àrees?
14. Dibuixa diferents pentàgons i hexàgons que no siguin regulars i amb l'eina Dilata objecte des de punt indicat, segons factor, construeix altres semblants.
 a) Argumenta per què són semblants.
 b) Calcula en cada cas la raó de semblança i la raó entre les seves àrees.
 c) Investiga com pots trobar la raó entre les àrees de polígons semblants a partir de la raó de semblança.
15. El diàmetre d'un préssec és tres vegades major que el del seu os, i mesura 8 *cm*. Calcula el volum del préssec, suposant que és esfèric, i el del seu os, també esfèric. Quina és la raó de proporcionalitat entre el volum del préssec i el de l'os?
16. En la pizzeria tenen pizzes de diversos preus: 1 €, 2 € i 3 €. Els diàmetres d'aquestes pizzes són: 15 *cm*, 20 *cm* i 30 *cm*. Quina resulta més econòmica? Calcula la relació entre les àrees i compara-la amb la relació entre els preus.
17. Una maqueta d'un dipòsit cilíndric de 1000 litres de capacitat i 5 metres d'altura, volem que tingui una capacitat d'1 litre. Quina altura ha de tenir la maqueta?

2. LONGITUDS, ÀREES I VOLUMS

18. Calcula el volum d'un prisma recte de 20 *dm* d'altura la base del qual és un hexàgon de 6 *dm* de costat.
19. Calcula la quantitat d'aigua que hi ha en un recipient amb forma de cilindre sabent que la seva base té 10 *cm* de diàmetre i que l'aigua arriba a 12 *dm* d'altura.
20. Calcula les àrees lateral i total d'un prisma hexagonal regular sabent que les arestes de les bases mesuren 3 *cm* i cada aresta lateral 2 *dm*.
21. L'àrea lateral d'un prisma regular de base quadrada és 16 *m*² i té 10 *m* d'altura. Calcula el perímetre de la base.
22. El costat de la base d'una piràmide triangular regular és de 7 *cm* i l'altura de la piràmide 15 *cm*. Calcula l'apotema de la piràmide i la seva àrea total.

23. Calcula l'àrea lateral d'un tronc de piràmide regular, sabent que les seves bases són dos octàgons regulars de costats 3 i 8 dm i que l'altura de cada cara lateral és de 9 dm.
24. Si l'àrea lateral d'una piràmide quadrangular regular és 104 cm², calcula l'apotema de la piràmide i la seva altura.
25. Una columna cilíndrica té 35 cm de diàmetre i 5 m d'altura. Quina és la seva àrea lateral?
26. El radi de la base d'un cilindre és de 7 cm i l'altura és el triple del diàmetre. Calcula la seva àrea total.
27. Calcula l'àrea lateral d'un con recte sabent que la seva generatriu mesura 25 dm i el radi de la base 6 dm.
28. La circumferència de la base d'un con mesura 6,25 m i la seva generatriu 12 m. Calcula l'àrea total.
29. Una esfera té 4 m de radi. Calcula: a) La longitud de la circumferència màxima b) L'àrea de l'esfera.
30. El dipòsit de gasoil de la casa de na Marina és un cilindre d'1 m d'altura i 2 m de diàmetre. Na Marina ha cridat al subministrador de gasoil perquè en el dipòsit només queden 140 litres.
a) Quin és, en dm³, el volum del dipòsit? (Utilitza 3,14 com a valor de π).
b) Si el preu del gasoil és de 0,80 € cada litre, quant haurà de pagar la mare de na Marina per omplir el dipòsit?
31. Comprova que el volum de l'esfera de radi 4 dm sumat amb el volum d'un con del mateix radi de la base i 8 dm d'altura, coincideix amb el volum d'un cilindre que té 8 dm d'altura i 4 dm de radi de la base.

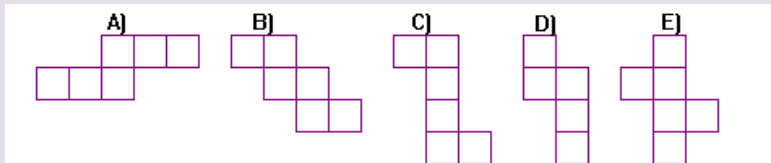


3. INICIACIÓ A LA GEOMETRIA ANALÍTICA

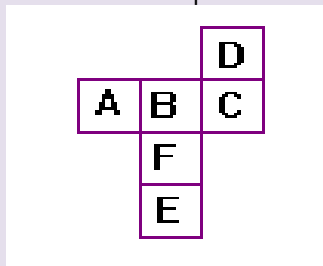
32. Representa en un sistema de referència a l'espai de dimensió tres els punts: $O(0, 0, 0)$, $A(1, 2, 3)$, $B(3, 1, 7)$, $D(3, 2, 1)$ i $E(4, 4, 4)$ i vectors: DE i OA .
33. El vector de components $u = (2, 3)$ i origen $A = (1, 1)$, quin extrem té?
34. Calcula la distància entre els punts $A(6, 2)$ i $B(3, 9)$.
35. Calcula la distància entre els punts $A(6, 2, 5)$ i $B(3, 9, 7)$.
36. Calcula la longitud del vector de components $u = (3, 4)$.
37. Calcula la longitud del vector de components $u = (3, 4, 1)$.
38. Dibuixa un quadrat de diagonal el punt $O(0, 0)$ i $A(3, 3)$. Quines coordenades tenen els altres vèrtexs del quadrat? Calcula la longitud del costat i de la diagonal d'aquest quadrat.
39. Dibuixa un cub de diagonal $O(0, 0, 0)$ i $A(3, 3, 3)$. Quines coordenades tenen els altres vèrtexs del cub? Ja saps, són 8 vèrtexs. Calcula la longitud de l'aresta, de la diagonal d'una cara i de la diagonal de la cub.
40. Sigui $X(x, y)$ un punt genèric del plànel, i $O(0, 0)$ l'origen de coordenades. Escribe l'expressió de tots els punts X que disten de O una distància D .
41. Sigui $X(x, y, z)$ un punt genèric de l'espai, i $O(0, 0, 0)$ l'origen de coordenades. Escribe l'expressió de tots els punts X que disten de O una distància D .
42. Escribe l'equació de la recta que passa pels punts $A(6, 2)$ i $B(3, 9)$, de forma explícita, implícita i paramètrica. Representa-la gràficament.
43. Escribe l'equació de la recta que passa pels punts $A(6, 2, 5)$ i $B(3, 9, 7)$, de forma explícita, i com a intersecció de dos plànols.
44. Escribe les equacions dels tres plànols que contenen els eixos de coordenades.
45. Escribe les equacions dels tres eixos de coordenades a l'espai.
46. En el cub de diagonal $O(0, 0, 0)$ i $A(6, 6, 6)$ escriu les equacions dels plànols que formen les seves cares. Escribe les equacions de totes les seves arestes i les coordenades dels seus vèrtexs.
47. Escribe l'equació del cilindre d'eix l'eix OZ i radi 2.
48. Escribe l'equació de l'esfera de centre l'origen de coordenades i radi 2.
49. Escribe l'equació del cilindre d'eix, la recta $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$ i radi 1.
50. Escribe l'equació de la circumferència en el plànel de centre $A(2, 5)$ i radi 2.
51. En tallar un cert cilindre per un plànel horitzontal s'obté la circumferència de l'exercici anterior. Escribe l'equació del cilindre.

CURIOSITATS. REVISTA

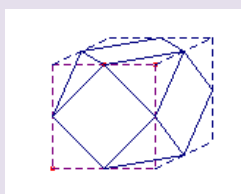
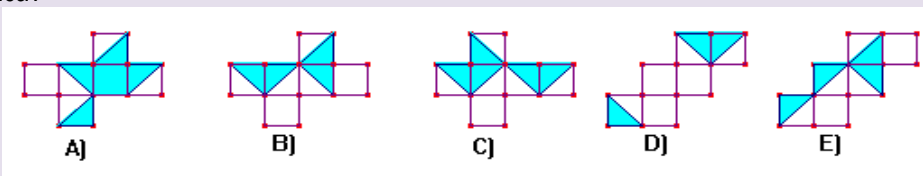
Quina de les següents figures no representa el desenvolupament d'un cub?



En formar un cub amb el desenvolupament de la figura, quina serà la lletra oposada a F?

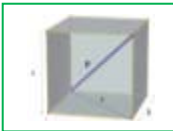



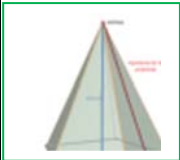







A partir d'un d'aquests desenvolupaments bicolors, es pot fabricar un cub, de manera que els colors siguin els mateixos en les dues parts de cadascuna de les arestes. Quin d'ells ho verifica?



Fes el desenvolupament

RESUM

		Exemples
Teorema de Pitàgores a l'espai	$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$	 $a = 2, b = 3, c = 4$, llavors $D^2 = 4 + 9 + 16 = 29$ $D = \sqrt{29} = 5,4$.
Teorema de Tales:	Donades dues rectes, r i r' , que es tallen en el punt O , i dues rectes paral·leles entre si, a i b . Si la recta a talla les rectes r i r' en els punts A i C , i la recta b talla les rectes r i r' en els punts B i D , llavors els segments corresponents són proporcionals.	
Poliedres regulars	Un poliedre regular és un poliedre en el qual totes les seves cares són polígons regulars iguals i en el qual els seus angles poliedres són iguals. Hi ha cinc poliedres regulars: tetraedre, octàedre, icosaèdre, cub i dodecaedre	
Prismes	 $A_{Lateral} = \text{Perímetre}_{Base} \cdot \text{Altura}$; $A_{total} = \text{Àrea}_{Lateral} + 2 \text{Àrea}_{Base}$; $\text{Volum} = \text{Àrea}_{base} \cdot \text{Altura}$	
Piràmides	 $A_{Lateral} = \frac{\text{Perímetre}_{Base} \cdot \text{Apotema}_{piràmide}}{2}$ $A_{total} = \text{Àrea}_{Lateral} + \text{Àrea}_{Base}$ $\text{Volum} = \frac{\text{Àrea}_{base} \cdot \text{Altura}}{3}$	
Cilindre	 $A_{Lateral} = 2 \pi R H$; $A_{total} = 2 \pi R H + 2 \pi R^2$ $\text{Volum} = \text{Àrea}_{base} \cdot \text{Altura}$	
Con	$A_{Lateral} = \pi R G$; $A_{total} = \pi R G + \pi R^2$ $\text{Volum} = \frac{\text{Àrea}_{base} \cdot \text{Altura}}{3}$	
Esfera	$A_{total} = 4 \pi R^2$; $\text{Volum} = \frac{4}{3} \pi R^3$	
Equacions de la recta en el plànel	Equació explícita: $y = mx + n$; Equació implícita: $ax + by + c = 0$; Equació paramètrica: $\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \end{cases}$	
Equacions de la recta i el plànel a l'espai.	Equació implícita d'un plànel: $ax + by + cz + d = 0$ Equació paramètrica d'una recta: $\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \\ z = a_3 + tv_3 \end{cases}$	

EXERCICIS I PROBLEMES

Teorema de *Pitàgores* i teorema de *Tales*

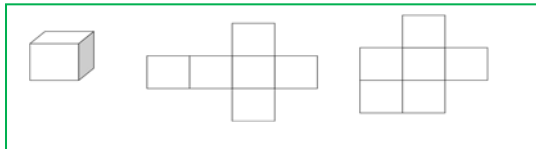
1. Calcula el volum d'un tetraedre regular de costat 7 cm .
2. Calcula la longitud de la diagonal d'un quadrat de costat 1 m .
3. Calcula la longitud de la diagonal d'un rectangle de base 15 cm i altura 6 cm .
4. Dibuixa un paral·lelepípede les arestes del qual mesurin 4 cm , 5 cm i 6 cm que no sigui un ortoedre. Dibuixa també el seu desenvolupament.
5. Si el paral·lelepípede anterior fos un ortoedre, quant mesuraria la seva diagonal?
6. Un tassó d' 11 cm d'altura té forma de tronc de con en el qual els radis de les bases són de 5 i 3 cm . Quant ha de mesurar com a mínim una cullereta perquè sobresurti del tassó almenys 2 cm ?
7. És possible guardar en una caixa amb forma d'ortoedre d'arestes 4 cm , 3 cm i 12 cm un bolígraf de 13 cm de longitud?
8. Calcula la diagonal d'un prisma recte de base quadrada sabent que el costat de la base mesura 6 cm i l'altura 8 cm .
9. Si un ascensor mesura $1,2\text{ m}$ d'ample, $1,6\text{ m}$ de llarg i $2,3\text{ m}$ d'altura, és possible introduir-hi una escala de 3 m d'altura?
10. Quin és la major distància que es pot mesurar en línia recta en una habitació que té 6 m d'ample, 8 m de llarg i 4 m d'altura?
11. Calcula la longitud de l'aresta d'un cub sabent que la seva diagonal mesura $3,46\text{ cm}$.
12. Calcula la distància màxima entre dos punts d'un tronc de con les bases del qual tenen radis 5 cm i 2 cm , i altura 10 cm .
13. En una pizzeria la pizza de 15 cm de diàmetre val 2 € i la de 40 cm val 5 € . Quina té millor preu?
14. Veiem en el mercat un lluç de 30 cm que pesa un quilo. Ens sembla una mica petit i en demanem un altre una mica major, que resulta pesar 2 quilos. Quant mesurarà?
15. En un dia de fred un pare i un fill petit van exactament igual d' abrigats, Quin dels dos tindrà més fred?

Longituds, àrees i volums

16. Identifica a quin cos geomètric pertanyen els següents desenvolupaments:

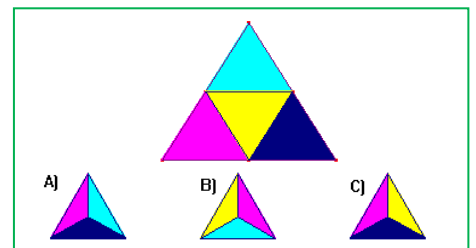


17. Podrà existir un poliedre regular que les seves cares siguin hexagonals? Raona la resposta.
18. Pots trobar dues arestes paral·leles en un tetraedre? I en cadascun dels restants poliedres regulars?
19. Utilitza una trama de quadrats o paper quadriculat, i cerca tots els dissenys de sis quadrats que se t'ocorren. Decideix quins poden servir per construir un cub
20. Quantes diagonals pots traçar en un cub? I en un octàedre?
21. El triangle de la figura s'ha plegat per obtenir un tetraedre.



Tenint en compte que el triangle no està pintat per darrere, quina de les següents vistes en perspectiva del tetraedre és falsa?

22. Un prisma de 8 dm d'altura té com a base un triangle rectangle de catets 3 dm i 4 dm . Calcula les àrees lateral i total del prisma.
23. Dibuixa un prisma hexagonal regular que tingui 3 cm d'aresta basal i $0,9\text{ dm}$ d'altura i calcula les àrees de la base i total.
24. Un prisma pentagonal regular de 15 cm d'altura té una base de 30 cm^2 d'àrea. Calcula el seu volum.
25. Calcula l'àrea total d'un ortoedre de dimensions $2,7\text{ dm}$, $6,2\text{ dm}$ i 80 cm .
26. Calcula la superfície total i el volum d'un cilindre que té 7 m d'altura i 3 cm de radi de la base.
27. Calcula l'àrea total d'una esfera de 7 cm de radi.
28. Calcula l'apotema d'una piràmide regular si sabem que la seva àrea lateral és de 150 cm^2 i la seva base és un hexàgon de 4 cm de costat.
29. Calcula l'apotema d'una piràmide hexagonal regular sabent que el perímetre de la base és de 36 dm i l'altura de la piràmide és de 6 dm . Calcula també l'àrea total i el volum d'aquesta piràmide.
30. Un triangle rectangle de catets 12 cm i 16 cm gira al voltant del seu catet menor generant un con. Calcula l'àrea lateral, l'àrea total i el volum.
31. Tres boles de metall de radis 15 dm , $0,4\text{ m}$ i 2 m es fonen en una sola, Quin serà el diàmetre de l'esfera resultant?



32. Quina és la capacitat d'un pou cilíndric d'1,50 m de diàmetre i 30 m de profunditat?
 33. Quant cartró necessitem per construir una piràmide quadrangular regular si volem que el costat de la base mesuri 12 cm i que la seva altura sigui de 15 cm?
 34. Calcula el volum d'un cilindre que té 2 cm de radi de la base i la mateixa altura que un prisma la base del qual és un quadrat de 4 cm de costat i 800 cm³ de volum.



35. Quina és l'àrea de la base d'un cilindre d'1,50 m d'alt i 135 dm³ de volum?
 36. L'aigua d'un rierol es condueix fins a uns dipòsits cilíndrics que mesuren 10 m de radi de la base i 20 m d'altura. Després s'embotella en bidons de 2,5 litres. Quants envasos s'omplen amb cada dipòsit?



37. Calcula la quantitat de cartolina necessària per construir un [anel·l](#) d'10 tetraedres cadascun dels quals té un centímetre d'aresta.

38. En fer el desenvolupament d'un prisma triangular regular de 5 dm d'altura, va resultar un rectangle d'un metre de diagonal com a superfície lateral. Calcula l'àrea total.

39. Determina la superfície mínima de paper necessària per embolicar un prisma hexagonal regular de 2 cm de costat de la base i 5 cm d'altura.

40. L'ajuntament de Madrid ha col·locat unes jardineres de pedra als carrers que tenen forma de prisma hexagonal regular. La cavitat interior, on es diposita la terra, té 80 cm de profunditat i el costat de l'hexàgon interior és de 60 cm. Calcula el volum de terra que ompliria una jardinera per complet.



41. Una habitació té forma d'ortoeidre i les seves dimensions són directament proporcionals als nombres 2, 4 i 8. Calcula l'àrea total i el volum si a més se sap que la diagonal mesura 17,3 m.

42. Un ortoeidre té 0,7 dm d'altura i 8 dm² d'àrea total. La seva longitud és el doble de la seva amplària, quin és el seu volum?

43. Si el volum d'un cilindre de 15 cm d'altura és de 424 cm³, calcula el radi de la base del cilindre.

44. Han instal·lat a casa d'en Joan un dipòsit d'aigua de forma cilíndrica. El diàmetre de la base mesura 2 metres i l'altura és de 3 metres. a) Calcula el volum del dipòsit en m³. b) Quants litres d'aigua hi caben en el dipòsit?

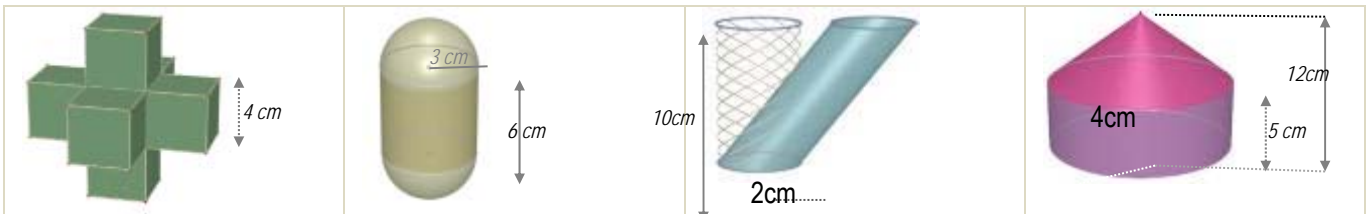
45. Un envàs d'un litre de llet té forma de prisma, la base és un quadrat que té 10 cm de costat. a) Quin és, en cm³, el volum de l'envàs? b) Calcula l'altura de l'envàs en cm.

46. Una circumferència de longitud 18,84 cm gira al voltant d'un dels seus diàmetres generant una esfera. Calcula el seu volum.

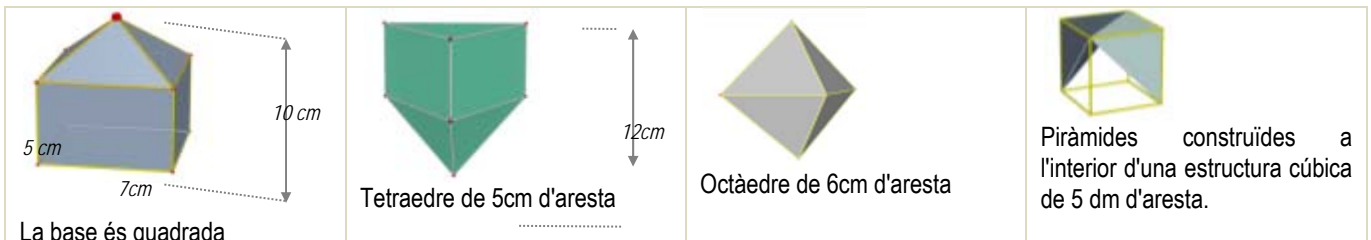
47. Una porta mesura 1,8 m d'alt, 70 cm d'ample i 3 cm d'espessor. El preu d'instal·lació és de 100 € i es cobra 5 € per m² en concepte de envernissat, més el cost de la fusta, que és de 280 € per m³. Calcula el cost de la porta si només es realitza l'envernissat de les dues cares principals.

48. Quin és el volum d'una esfera en la qual la longitud d'una circumferència màxima és 251,2 m?

49. Calcula l'àrea lateral i el volum dels següents cossos geomètrics



50. Calcula l'àrea lateral i el volum dels següents cossos geomètrics



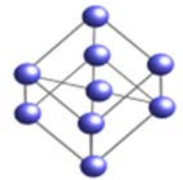
51. L'aigua continguda en un recipient cònic de 21 cm d'altura i 15 cm de diàmetre de la base s'aboca en un got cilíndric de 15 cm de diàmetre de la base. Fins a quina altura arribarà l'aigua?

52. Segons Arquímedes, quines dimensions té el cilindre circumscrit a una esfera de 7 cm de radi que té la seva mateixa àrea? Calcula aquesta àrea.

53. En la construcció d'un globus aerostàtic esfèric d'un metre de radi s'empra lona que té un cost de 300 €/m². Calcula l'import de la lona necessària per a la seva construcció.

54. Calcula el radi d'una esfera que té 33,51 dm³ de volum.

55. L'Atomium és un monument de Brussel·les que reproduïx una molècula de ferro. Consta de 9 esferes d'acer de 18 m de diàmetre que ocupen els vèrtexs i el centre d'una estructura cúbica de 103 m de diagonal, realitzada amb cilindres de 2 metres de diàmetre. Si utilitzem una escala 1:100, i tant les esferes com els cilindres són massissos, quina quantitat de material necessitarem?

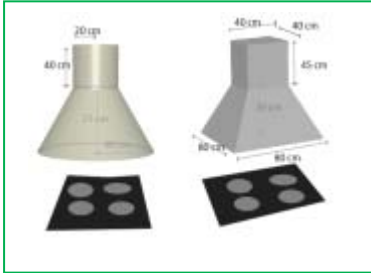


56. Una piscina mesura 20 m de llarg, 5 m d'ample i 2 m d'alt.

a) Quants litres d'aigua són necessaris per omplir-la?

b) Quant costarà recobrir el sòl i les parets amb PVC si el preu és de 20 €/m²?

57. S'ha pintat per dins i per fora un dipòsit sense tapadora de 8 dm d'alt i 3 dm de radi. Tenint en compte que la base sols es pot pintar per dins, i que s'ha utilitzat pintura de 2€/dm², quants diners ha costat en total?



58. Quina de les dues campanes extractores de la figura de l'esquerra té un cost d'acer inoxidable menor?

59. En un atuell cilíndric de 3 m de diàmetre i que conté aigua, s'introdueix una bola. Quin és el seu volum si després de la immersió puja 0,5 m el nivell de l'aigua?

60. El preu de les teules és de 12,6 €/m². Quant costarà reteular un habitatge la teulada del qual té forma de piràmide quadrangular regular d'1,5 m d'altura i 15 m de costat de la base?

61. S'enrotlla una cartolina rectangular de costats 40 cm i 26 cm formant cilindres de les dues formes possibles, fent coincidir costats oposats. Quin dels dos cilindres resultants té major volum?

62. Cadascun dels cubs de la figura té 2 cm d'aresta. Quants cubs s'han d'afegir per formar un cub de 216 cm³ de volum?

63. Un tub d'assaig té forma de cilindre obert en la part superior i rematat per una semiesfera en la inferior. Si el radi de la base és d'1 cm i l'altura total és de 12 cm, calcula quants centilitres de líquid hi caben.



64. El costat de la base de la piràmide de Kheops mesura 230 m, i la seva altura 146 m. Quin és el seu volum?

65. La densitat d'un tap de suro és de 0,24, quant pesen mil taps si els diàmetres de les seves bases mesuren 2,5 cm i 1,2 cm, i la seva altura 3 cm?

66. Comprova que el volum d'una esfera és igual al del seu cilindre circumscrit menys el del con d'igual base i altura.

67. Calcula el volum d'un octàedre regular d'aresta 2 cm.

68. Construeix en cartolina un prisma quadrangular regular de volum 240 cm³, i d'àrea lateral 240 cm².

69. El cristall d'un fanal té forma de tronc de con de 40 cm d'altura i bases de radis 20 i 10 cm. Calcula la seva superfície.



70. Un pot cilíndric de 15 cm de radi i 30 cm d'altura té en el seu interior quatre pilotes de radi 3,5 cm. Calcula l'espai lliure que hi ha en el seu interior.



71. Un embut cònic de 15 cm de diàmetre té un litre de capacitat, quina és la seva altura?

72. En un dipòsit amb forma de cilindre de 30 dm de radi, una aixeta aboca 15 litres d'aigua cada minut. Quant augmentarà l'altura de l'aigua després de mitja hora?

73. La lona d'una ombrel·la oberta té forma de piràmide octogonal regular de 0,5 m d'altura i 40 cm de costat de la base. Es fixa un masteler en el sòl en el qual s'encaixa i el vèrtex de la

piràmide queda a una distància del sòl d'1,80 m. En el moment en què els rajos de sol són verticals, quina àrea té l'espai d'ombra que determina?

74. Una peixera amb forma de prisma recte i base rectangular s'omple amb 65 litres d'aigua. Si té 65 cm de llarg i 20 cm d'ample, quina és la seva profunditat?

75. En un gelat de cucurutxo la galleta té 12 cm d'altura i 4 cm de diàmetre. Quina és la seva superfície? Si el cucurutxo està completament ple de gelat i sobresurt una semiesfera perfecta, quants cm³ de gelat conté?

Iniciació a la Geometria Analítica

76. Calcula la distància entre els punts $A(7, 3)$ i $B(2, 5)$.

77. Calcula la distància entre els punts $A(7, 3, 4)$ i $B(2, 5, 8)$.

78. Calcula la longitud del vector de components $u = (4, 5)$.

79. Calcula la longitud del vector de components $u = (4, 5, 0)$.

80. El vector $u = (4, 5)$ té l'origen en el punt $A(3, 7)$. Quines són les coordenades del seu punt extrem?

81. El vector $u = (4, 5, 2)$ té l'origen en el punt $A(3, 7, 5)$. Quines són les coordenades del seu punt extrem?

82. Dibuixa un quadrat de diagonal els punts $A(2, 3)$ i $C(5, 6)$. Quines coordenades tenen els altres vèrtexs del quadrat?

Calcula la longitud del costat i de la diagonal del quadrat.

83. Dibuixa un cub de diagonal $A(1, 1, 1)$ i $B(4, 4, 4)$. Quines coordenades tenen els altres vèrtexs del cub? Ja saps, són 8 vèrtexs. Calcula la longitud de l'aresta, de la diagonal d'una cara i de la diagonal del cub.
84. Sigui $X(x, y)$ un punt del plànel i considera el punt $A(2, 4)$. Escriu l'expressió de tots els punts X que disten de A una distància 3.
85. Sigui $X(x, y, z)$ un punt de l'espai i considera el punt $A(2, 4, 3)$. Escriu l'expressió de tots els punts X que disten de A una distància 3.
86. Escriu l'equació paramètrica de la recta que passa pel punt $A(2, 7)$ i té com a vector director $u = (4, 5)$. Representa-la gràficament.
87. Escriu l'equació de la recta que passa pels punts $A(2, 7)$ i $B(4, 6)$, de forma explícita, implícita i paramètrica. Representa-la gràficament.
88. Escriu l'equació de la recta que passa pels punts $A(2, 4, 6)$ i $B(5, 2, 8)$, de forma explícita, i com a intersecció de dos plànols.
89. En el cub de diagonal $A(1, 1, 1)$ i $B(5, 5, 5)$ escriu les equacions dels plànols que formen les seves cares. Escriu també les equacions de totes les seves arestes, i les coordenades dels seus vèrtexs.
90. Escriu l'equació del cilindre d'eix $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ i radi 3.
91. Escriu l'equació de l'esfera de centre $A(2, 7, 3)$ i radi 4.
92. Escriu l'equació del cilindre d'eix la recta $\begin{cases} x=5+t \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$ i radi 2.
93. Escriu l'equació de la circumferència en el plànel de centre $A(3, 7)$ i radi 3.
94. En tallar un cert cilindre per un plànel horitzontal s'obté la circumferència de l'exercici anterior. Escriu l'equació del cilindre.

AUTOAVALUACIÓ

- Les longituds dels costats del triangle de vèrtexs $A(2, 2)$, $B(1, 4)$ i $C(0, 3)$ són:
a) 2, 5, 5 b) $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ d) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$
- En el triangle rectangle de catets 3 i 4 cm es multipliquen per 10 totes les seves longituds. L'àrea del nou triangle és:
a) 6 m² b) 6 dm² c) 60 cm² d) 0,6 m²
- La altura d'un prisma de base quadrada és 20 cm i el costat de la base és 5 cm, la seva àrea total és:
a) 450 cm² b) 45 dm² c) 425 cm² d) 0,45 m²
- Un dipòsit d'aigua té forma de prisma hexagonal regular de 5 m d'altura i costat de la base 1 m. El volum d'aigua que hi ha en ell és:
a) $60\sqrt{2}$ m³ b) $45\sqrt{2}$ m³ c) $30000\sqrt{2}$ dm³ d) $90\sqrt{2}$ m³
- La teulada d'una caseta té forma de piràmide quadrangular regular de 0,5 m d'altura i 1000 cm de costat de la base. Si es necessiten 15 teules per metre quadrat per recobrir la teulada, s'utilitzen un total de:
a) 1051 teules. b) 150 teules. c) 245 teules. d) 105 teules.
- Una caixa de dimensions 30, 20 i 15 cm, està plena de cubs d'1 cm d'aresta. Si s'utilitzen tots per construir un prisma recte de base quadrada de 10 cm de costat, l'altura mesurarà:
a) 55 cm b) 65 cm c) 75 cm d) 90 cm
- El radi d'una esfera que té el mateix volum que un con de 5 dm de radi de la base i 120 cm d'altura és:
a) $5\sqrt{3}$ dm b) $\sqrt[3]{75}$ dm c) 150 cm d) $\sqrt[3]{2250}$ cm
- Es distribueixen 42,39 litres de dissolvent en llaunes cilíndriques de 15 cm d'altura i 3 cm de radi de la base. El nombre d'envasos necessari és:
a) 100 b) 10 c) 42 d) 45
- L'equació d'una recta en el plànel que passa pels punts $A(2, 5)$ i $B(1, 3)$ és:
a) $y = -2x + 1$ b) $3y - 2x = 1$ c) $y = 2x + 1$ d) $y = -2x + 9$
- L'equació de l'esfera de centre $A(2, 3, 5)$ i radio 3 és:
a) $x^2 - 2x + y^2 - 3y + z^2 - 5z + 29 = 0$ b) $x^2 - 4x + 3y^2 - 6y + 5z^2 - 10z + 29 = 0$
c) $x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 - 10z + 38 = 0$ d) $x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 - 10z + 29 = 0$

CAPÍTOL 6: FUNCIONS I GRÀFIQUES

ACTIVITATS PROPOSADES

1. FUNCIONS

- Representa gràficament en el teu quadern els següents punts del plànol: A (2, -3); B (0, -1); C (3, 4).
- De les següents relacions entre dues variables, raona quines són funcionals i quines no:
 - Edat i pes d'una persona concreta al llarg de la seva vida
 - Pes i edat d'aquesta mateixa persona
 - Un nombre i la seva meitat
 - Un nombre i el seu quadrat
 - Preu de la benzina i el dia del mes
 - Dia del mes i preu de la benzina
- Si avui el canvi d'euros a dòlars està $1\text{€} = 1,3\text{\$}$, completa en el teu quadern la següent taula d'equivalència entre les dues monedes:

€	2	5	10	27	x
\$					

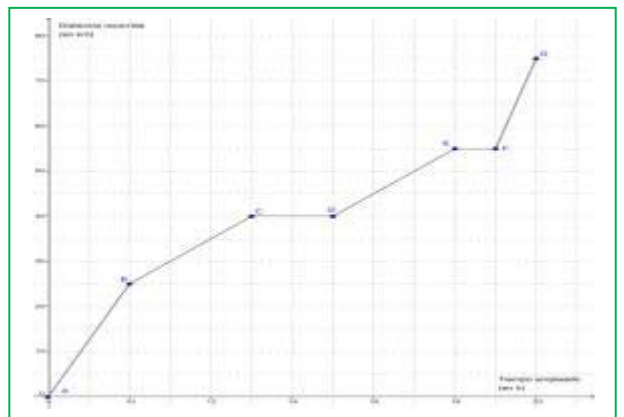
Expressa mitjançant una fórmula la relació que existeix entre ambdues, en la qual, coneixent els euros, s'obtinguin els dòlars. Es pot expressar de forma única aquesta relació? És una funció?

Si quan realitzes el canvi en una oficina et cobren una comissió fixa d'1,50€, com quedaria la fórmula en aquest cas?

- Realitza en el teu quadern el dibuix de dues gràfiques, una que correspongui a una funció i una altra que no. Identifica cadascuna i explica el perquè d'aquesta correspondència.
- Raona si els valors de la següent taula poden correspondre als d'una funció i per què:

x	-10	-5	10	-10	27
f(x)	-3	0	5	4	0

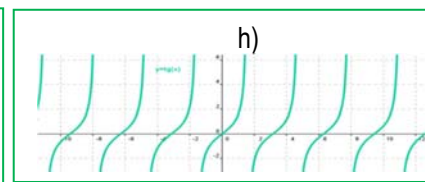
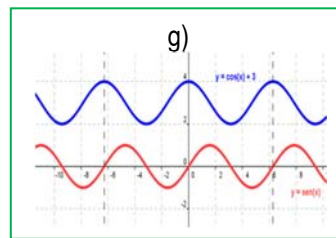
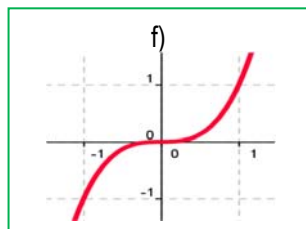
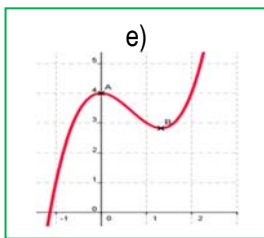
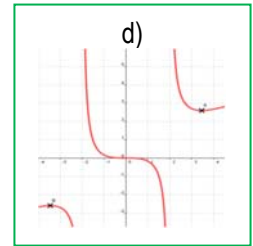
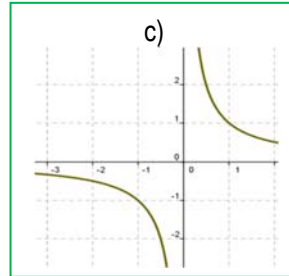
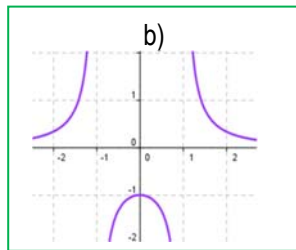
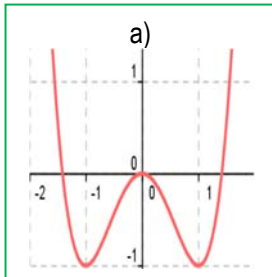
- Una persona camina a una velocitat de 4 km/h i parteix del quilòmetre 10. Escriu l'expressió algebraica de la funció que indica els quilòmetres recorreguts en funció del temps. Assenyala quins són els valors que no té sentit donar a la variable independent i en què es tradueix això en la gràfica.
- En un full de paper quadriculat ratlla un quadrat de costat un quadratet. La seva àrea és 1 u^2 . Ara fes el mateix amb un quadrat de costat 2. Continua prenent quadrats de costats 3, 4, 5... i calcula les seves àrees. Amb els resultats completa una taula de valors i dibuixa la seva gràfica. Té sentit per a valors negatius de la variable? Troba una fórmula per a aquesta funció.
- Per aparcar en zona blava (no residents) hi ha unes tarifes. La tarifa mínima és de 0,50€, el temps màxim d'aparcament és de 2 hores, cada mitja hora més costa 0,90€, i cada fracció, 0,05€. Representa una gràfica de la funció, de variable independent el temps que s'espera que estarà aparcat el vehicle i variable dependent el preu (en euros) que cal pagar.
- Un fabricant vol construir gots cilíndrics mesuradors de volums, que tinguin de radi de la base 5 cm i d'altura total del got 18 cm. Escriu una fórmula que indiqui com varia el volum en anar variant l'altura del líquid. Construeix una taula amb els volums corresponents a les altures preses de 3 en 3 cm. Escriu també una fórmula que permeti obtenir l'altura coneixent els volums. A quina altura caldrà col·locar la marca per tenir un decilitre?
- La següent gràfica resumeix l'excursió que hem realitzat per la serra de Guadarrama:
 - Quant de temps va durar l'excursió?
 - Quant de temps es va descansar? A quines hores?
 - Quants quilòmetres es van recórrer?
 - En quins intervals de temps es va anar més ràpid que entre les 11 i les 13 hores?
 - Fes una breu descripció del desenvolupament de l'excursió.
 - Construeix una taula de valors a partir dels punts assenyalats en la gràfica.
 - Si en l'eix d'ordenades representéssim la variable "distància al punt de partida", seria la mateixa gràfica? Amb les dades que disposes, pots fer-la?



11. La relació entre l'altura i l'edat dels diferents components d'un equip de bàsquet, és una relació funcional? Per què? I la relació entre l'edat i l'altura? Escriu tres correspondències que siguin funcionals i tres que no.

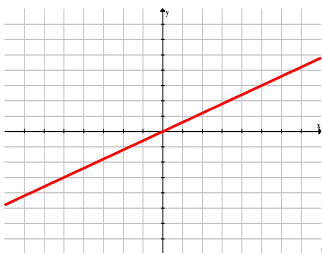
2. CARACTERÍSTIQUES D'UNA FUNCIO

12. Copia les següents gràfiques en el teu quadern i assenjala totes les característiques que puguis de les funcions representades. Indica el seu domini, si és contínua (o punts de discontinuïtat si n'hi hagués), si és simètrica i tipus de simetria, intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims, període (si n'hi hagués),...

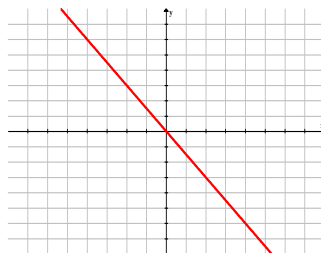


3. TIPUS DE FUNCIONS

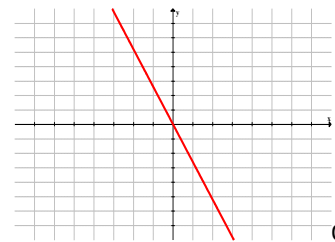
13. El consum mitjà d'aigua diari per habitant és de 150 litres. Representa gràficament el consum d'aigua d'una persona al llarg d'una setmana.
14. Representa en el teu quadern, estudia el domini, màxims i mínims i simetries de les funcions lineals següents:
 a) $y = 1,25 \cdot x$; b) $y = (3/5) \cdot x$; c) $y = 3 \cdot x$; d) $y = 0,5 \cdot x$;
15. Troba el pendent i l'expressió algebraica (fórmula) de les següents rectes:



a.

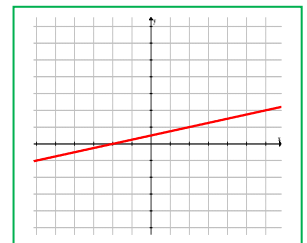
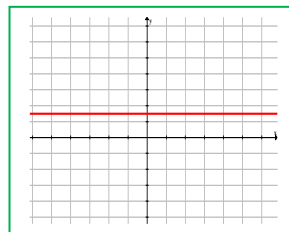
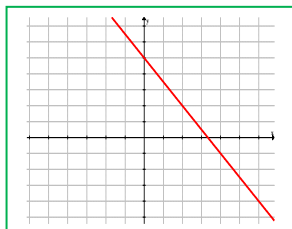
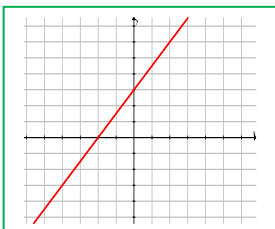


b.



c.

16. Troba l'expressió algebraica de les següents rectes:



17. Escriu tres funcions que les seves gràfiques siguin tres rectes que passin per l'origen de coordenades i els seus pendents siguin 5, -4, i 1/3 respectivament.

18. Quin angle forma amb l'eix d'abscisses la recta $y = x$? I la recta $y = -x$?

19. Com són entre sí dues rectes d'igual pendent i diferent ordenada en l'origen?

20. Representa les següents funcions lineals:

a) $y = 3x + 4$

b) $y = -\frac{3}{7}x - 2$

c) $2x + 4y = 5$

d) $y = 5$

e) $y = 0$

f) $x = 3$

21. Un metre d'una certa tela costa 2,05€, quant costen 7 metres? I 20 m? I 15,2 m? Quant costen "x" metres de tela? ESCRIU la fórmula d'aquesta situació.

22. Dibuixa en paper quadriculat la gràfica de la funció $y = x^2$.

a) Fes una taula de valors, prenent valors d'abscissa positiva.

b) Pren ara valors d'abscissa negativa.

c) Què li ocorre a la gràfica per a valors grans de "x"? I per a valors negatius grans en valor absolut?

d) La corba és simètrica? Indica el seu eix de simetria.

e) Té un mínim? Quin és? Coordenades del vèrtex.

f) Retalla una plantilla d'aquesta paràbola marcant el seu vèrtex i l'eix de simetria, que usarem en altres problemes.

23. A partir de la paràbola $y = x^2$, dibuixa la gràfica de les següents paràboles:

a) $y = \frac{5}{3}x^2$

b) $y = -3x^2$

c) $y = -\frac{15}{3}x^2$

d) $y = 4,12x^2$

e) $y = -\frac{6}{10}x^2$

f) $y = \frac{7}{8}x^2$

24. Completa aquest resum. La gràfica de la funció $y = ax^2$ s'obté de la gràfica de $y = x^2$:

a) Si $a > 1$ llavors ??

b) Si $0 < a < 1$ llavors ??

c) Si $a < -1$ llavors ??

d) Si $-1 < a < 0$ llavors ??

25. Prenent la mateixa unitat que en el problema anterior dibuixa en el teu quadern, en un mateix sistema de referència, les gràfiques de les paràboles: $y = x^2 + 2$; $y = x^2 - 3$; $y = -x^2$; $y = -x^2 + 2$; $y = x^2 - 1$. Observa que pots utilitzar la plantilla de l'exercici anterior. Fes un resum indicant el que has obtingut. Hauràs observat que en tots els casos pots utilitzar la plantilla traslladant-la en sentit vertical, cap amunt en el cas de $y = x^2 + 2$; i cap avall en el cas de $y = x^2 - 3$. La paràbola $y = -x^2$ és simètrica (cap avall) a la de $y = x^2$. En general, si traslladem q unitats en la direcció de l'eix d'ordenades tenim la paràbola $y = x^2 + q$.

26. Prenent la mateixa unitat que en el problema anterior dibuixa en el teu quadern, en un mateix sistema de referència, les gràfiques de les paràboles: $y = (x + 3)^2$; $y = (x - 2)^2$; $y = (x + 5)^2$; $y = (x - 5)^2$. Observa que pots utilitzar la plantilla de l'exercici anterior. Fes un resum indicant el que has obtingut. Hauràs observat que en tots els casos pots utilitzar la plantilla traslladant-la en sentit horitzontal, cap a la dreta en el cas de $y = (x - 2)^2$; i cap a l'esquerra en el cas de $y = (x + 3)^2$. En general, si traslladem p unitats en la direcció de l'eix d'abscisses obtenim la paràbola $y = (x - q)^2$.

27. ESCRIU l'equació d'una paràbola d'igual forma que $y = x^2$, però traslladada 7 unitats en sentit horitzontal a la dreta i 4 unitats en sentit vertical cap amunt. Quines coordenades té el seu vèrtex?

28. Representa la gràfica de les següents paràboles i localitza el vèrtex:

a) $y = (x + 4)^2 - 5$

b) $y = -\left(x - \frac{4}{5}\right)^2 + 6$

c) $y = x^2 - 5$

d) $y = x^2 - 6x + 16$

e) $y = x^2 + 4x + \frac{5}{2}$

f) $y = -x^2 + 12x - 26$

g) $y = x^2 - 10x + 17$

h) $y = -x^2 + 2x - 4$

i) $y = -x^2 + \frac{4}{3}x - 1$

29. Tornem a usar la plantilla.

a) Trasllada el vèrtex de la paràbola $y = x^2$ al punt (3, 1). ESCRIU la seva equació i l'equació del seu eix de simetria. Dibuixa la seva gràfica.

b) Trasllada el vèrtex de la paràbola $y = x^2$ al punt (-4, -2). ESCRIU la seva equació i l'equació del seu eix de simetria. Dibuixa la seva gràfica.

30. Troba els elements característics i representa les següents paràboles:

a) $y = 2x^2 + 4x - 6$

b) $y = 6x^2 - 24x$

c) $y = -2x^2 + 4x - 2$

d) $y = 2x^2 + 5x - 12$

e) $y = 3x^2 + 6x - 9$

f) $y = -2x^2 + 7x + 3$

g) $y = 7x^2 + 21x - 28$

h) $y = 5x^2 - 9x + 4$

i) $y = -4x^2 - 4x - 1$

31. Troba la funció quadràtica determinada pels punts: (1, 14); (2, 20); (3, 28). Representa-la gràficament.
32. Troba la funció polinòmica que passa pels punts: (0, 5); (1, 7); (2, 11) i (3, 23).
33. Troba la funció polinòmica determinada pels punts: (0, 3); (1, 3); (2, 5); (3, 15); (4, 39); (5, 83). Calcula les diferències successives i dibuixa la gràfica.
34. Es fan proves mesurant la distància que recorre un avió des de que toca terra en una pista d'aterratge. Les dades estan en la taula adjunta. Existeix alguna funció polinòmica que s'ajusta a aquestes dades. Si n'hi ha, escriu la seva fórmula.

Temps (s):	0	1	2	3	4	5	6
Distància (m):	0	100	175	230	270	300	325

35. En una fàbrica els preus dels cables d'acer depenen dels diàmetres i el preu de cada metre ve donat en euros en la taula següent. Existeix alguna funció polinòmica que s'ajusti perfectament a aquestes dades?

Diàmetre (mm):	3	4	5	6	7	8	9
Preu (€):	3,6	8	18	25,3	39,2	57,6	81

36. Donada la taula següent, es pot ajustar exactament una recta? Considera si alguna dada és errònia i si és així, corregeix-lo.

Temps (s):	1	2	3	4	5	6	76
Distància (m):	1,53	4,65	7,78	10,89	14,01	17,13	20,29

37. Representa les següents funcions de proporcionalitat inversa en el mateix sistema de coordenades:

a) $y = \frac{-1}{x}$ b) $y = \frac{5}{x}$ c) $y = \frac{1}{2x}$

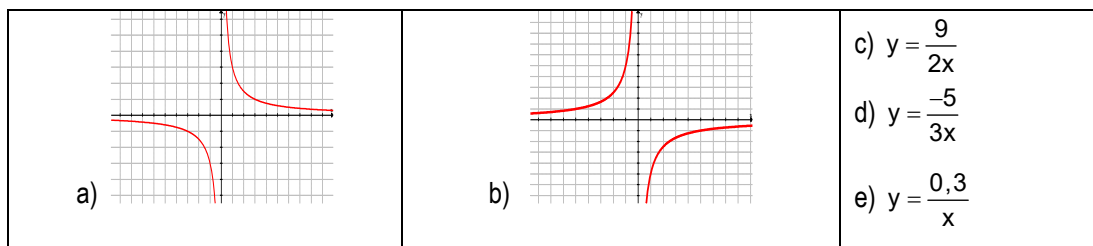
d) $y = \frac{3}{8x}$ e) $y = \frac{-5}{3x}$ f) $y = \frac{-12}{5x}$

38. Descriu el que succeeix quan varia el valor de k . Ajuda't de les gràfiques de l'exercici anterior.

39. Troba l'expressió analítica i representa la gràfica de les hipèrboles que passen per cadascun d'aquests punts. Escriu els intervals on la funció és creixent o decreixent.

a) (5, 3)	b) (2, -1)	c) (1/2, 6)
d) (10, 4)	e) (a, 1)	f) (1, b)

40. Troba el domini, recorregut, continuïtat, màxims i mínims i el creixement de les següents hipèrboles:



41. Representa en els mateixos eixos de coordenades, les següents hipèrboles:

a) $y = \frac{5}{x}$ b) $y = \frac{5}{x} + 3$ c) $y = \frac{5}{x} - 3$

d) $y = \frac{-12}{x}$ e) $y = \frac{-12}{x-3}$ f) $y = \frac{-12}{x+3}$

g) $y = \frac{3}{x}$ h) $y = \frac{3}{x-1} + 5$ i) $y = \frac{5x-2}{x-1}$

42. Descriu el que succeeix quan varien els paràmetres a i b en les hipèrboles de l'exercici anterior.

43. Representa les següents funcions de proporcionalitat inversa a partir de la hipèrbola $y = \frac{5}{x}$:

a) $y = \frac{10}{x-5} + 3$ b) $y = \frac{1}{x+4} + 8$ c) $y = \frac{100}{x+10} + 1$

d) $y = \frac{10}{2x-4} - 7$ e) $y = 6 - \frac{4}{x}$ f) $y = \frac{20}{5-x} - 2$

44. Estudia el domini, recorregut, continuïtat, simetria, asímptotes i creixement de les funcions de proporcionalitat inversa de l'exercici anterior.
45. Escriu una regla per expressar com es traslladen les asímptotes segons els paràmetres a i b .
46. Representa les següents hipèrboles:

a) $y = \frac{2x-4}{x+5}$

b) $y = \frac{3-5x}{x+2}$

c) $y = \frac{4x-12}{x-3}$

d) $y = \frac{6x+8}{1-x}$

e) $y = \frac{7x+5}{x-4}$

f) $y = \frac{6x+10}{2x-1}$

47. Representa la gràfica de la funció: $y = 7 - \frac{15}{x+3}$.

- a) Quan x creix, "y" tendeix a 7? Té una asímptota horitzontal $y = 7$?
- b) Si x s'apropa a -3 , la y creix? Té una asímptota vertical, $x = -3$?
- c) Analitza si aquesta hipèrbola s'ajusta als valors de l'activitat resolta de la taula:

Dosi (mg): x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Curacions (%): y	3,25	4,0	4,5	4,86	5,1	5,3	5,5	5,64	5,75	5,85

48. Prova ara a realitzar en el teu quadern una taula de valors i la gràfica per a un cas similar, suposant que el nombre de bacteris es multiplica cada hora per 2 en lloc de per 1,4.

Observa que els valors de "y" augmenten molt més de pressa: mentre que els valors de "x" augmenten d'1 en 1 els valors de "y" es van multiplicant per 2. Això es diu creixement exponencial. Si en lloc de multiplicar es tracta de dividir tenim el cas de decreixement exponencial.

49. En el teu quadern, representa conjuntament les gràfiques de $y = x^2$ (funció potencial) i $y = 2^x$ (funció exponencial), amb valors de "x" entre 0 i 6. Observa la diferència quantitativa entre el creixement potencial i el creixement exponencial.
50. Utilitzant la calculadora, fes una taula de valors i representa en el teu quadern les funcions $y = e^x$, $y = e^{-x}$.

51. Una persona ha ingressat una quantitat de 5.000 euros a interès del 3 % en un banc, de manera que cada any el seu capital es multiplica per 1,03.

- a) Escriu en el teu quadern una taula de valors amb els diners que tindrà aquesta persona al cap d'1, 2, 3, 4, 5 i 10 anys.
- b) Indica la fórmula de la funció que expressa el capital en funció del nombre d'anys.
- c) Representa en el teu quadern gràficament aquesta funció. Pensa bé quines unitats hauràs d'utilitzar en els eixos.

52. Un determinat antibiòtic fa que la quantitat de certs bacteris es multipliqui per $2/3$ cada hora. Si la quantitat a les 7 del matí és de 50 milions de bacteris, (a) fes una taula calculant el nombre de bacteris que hi ha cada hora, des de les 2 del matí a les 12 de migdia (observa que has de calcular també "cap a enrere"), i (b) representa gràficament aquestes dades.

53. Representa en el teu quadern les següents funcions i explica la relació entre les seves gràfiques:

a) $y = 2^x$

b) $y = 2^{x+1}$

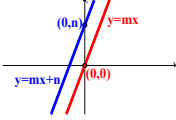
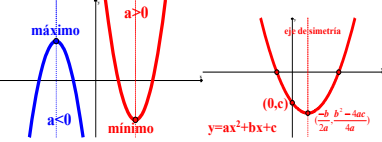
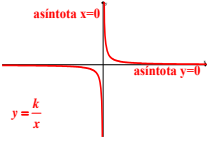
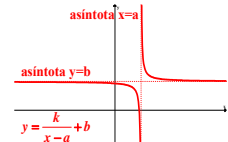
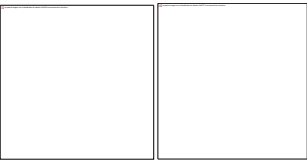
c) $y = 2^{x-1}$.

54. Coneixent la gràfica de la funció $f(x) = 2^x$, que s'ha vist més amunt, i sense calcular taula de valors, dibuixa en el teu quadern les gràfiques de les funcions $g(x) = 2^x - 3$ i $h(x) = 2^{x-3}$.

CURIOSITATS. REVISTA

Utilitza l'ordinador per dibuixar funcions

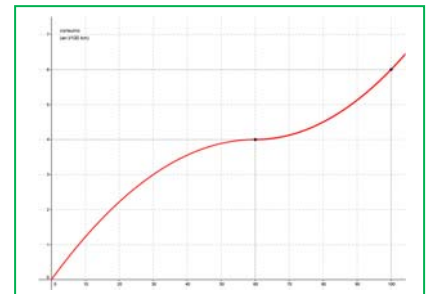
RESUM

		Exemples
Funció	Relació entre dues magnituds de manera que a un valor qualsevol d'una, li fem correspondre, com a molt, un únic valor de l'altra.	$y = 2x + 3$
Característiques de les funcions	Continuïtat. Creixement i decreixement. Màxims i mínims. Simetria. Periodicitat.	La recta $y = 2x + 3$ és contínua, creixent, no té màxims ni mínims, ni és simètrica, ni periòdica.
Funció polinòmica de primer grau: Rectes: $y = mx$, $y = mx + n$	Es representen mitjançant rectes: Hi ha dos tipus: Funcions lineals $y = m \cdot x$ Funcions afins: $y = m \cdot x + n$	
Funció polinòmica de segon grau: Paràboles $y = ax^2 + bx + c$	Es representen mitjançant paràboles: Vèrtex: $(\frac{-b}{2a}, \frac{b^2 - 4ac}{4a})$. Eix de simetria: és la recta $x = \frac{-b}{2a}$. Punts de tall amb l'eix OX: $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$. Punt de tall amb l'eix OY: $x = 0$, és el punt $(0, c)$	
Funció de proporcionalitat inversa: Hipèrboles $y = k/x$.	$ k $: allunya o apropa la corba a l'origen de coordenades. Domini i recorregut: $\mathbb{R} - \{0\}$ Discontínua en $x = 0$. Simetria: Funció imparell. Asíntotes: Les rectes $x = 0$ i $y = 0$	
Hipèrboles $y = \frac{k}{x-a} + b$	Translació de la hipèrbola $y = \frac{k}{x}$ pel vector (a, b) . Domini: $\mathbb{R} - \{a\}$. Asíntotes: $x = a$, $y = b$.	
Funció exponencial $y = b^x$	$y = b^x$. Si $b > 1$ és creixent Si $0 < b < 1$ és decreixent	

EXERCICIS I PROBLEMES

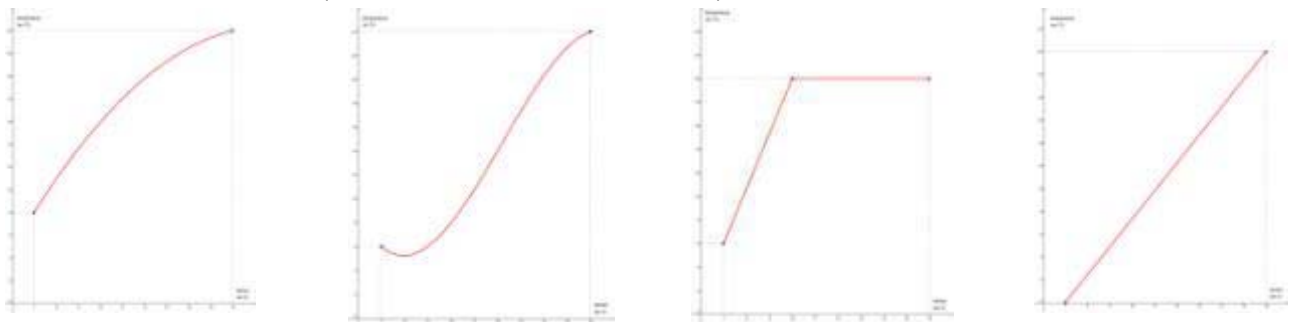
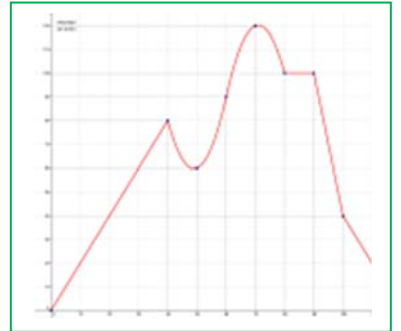
Funcions

- Dibuixa en el teu quadern un sistema de referència cartesià i en ell, els punts següents, triant una escala en els eixos que permeti dibuixar-los tots de forma còmoda. Assenyala en cada cas a quin quadrant pertany el punt o, si escau, en quin eix està: $A(2, 4)$; $B(0, 1)$; $C(-3, 0)$; $D(2, -1'5)$; $E(1'5, 0)$; $F(0, 0)$; $G(-1, -2/3)$.
- Escriu les coordenades de tres punts situats en el tercer quadrant.
- Situa en un sistema de referència cartesià els punts: $A(0, 3)$; $B(0, 1'7)$; $C(0, -1)$; $D(0, -4)$. Què tenen en comú tots ells?
- Escriu les coordenades i representa tres punts de l'eix d'abscisses. Què tenen en comú?
- Dibuixa en el teu quadern un triangle rectangle amb un catet igual a 3, i el vèrtex de l'angle recte en l'origen de coordenades. Indica les coordenades de tots els vèrtexs.
- Indica quines de les següents correspondències són funcions:
 - A cada nombre natural se li associen els seus divisors primers.
 - A cada circumferència del plànol se li associa el seu centre.
 - A cada circumferència del plànol se li associa un diàmetre.
- La distància, d , recorreguda per un tren depèn del nombre de voltes, n , que dona cada roda de la locomotora.
 - Escriu la fórmula que permet obtenir d conegut n , sabent que el diàmetre de les rodes de la locomotora és de 78 cm.
 - Dibuixa la gràfica.
 - Quina distància haurà recorregut el tren quan la roda hagi donat mil voltes? (pren com a valor de π el número 3,14).
 - Quantes voltes haurà donat la roda al cap de 7 km?
- Un globus sonda utilitzat pel Servei Meteorològic dels Pirineus per mesurar la temperatura a diferents altures porta incorporat un termòmetre. S'observa que cada 180 m d'altura la temperatura disminueix un grau. Cert dia la temperatura en la superfície és de 9°C . Determina:
 - Quina temperatura hi haurà a 3 km d'altura?
 - A quina altura hi haurà una temperatura de -30°C ?
 - Escriu una fórmula que permeti calcular la temperatura T coneixent l'altura A . Confecciona una taula i dibuixa la gràfica. Quin tipus de funció és?
 - Si la temperatura en la superfície és de 12°C , quin és llavors la fórmula? Quin tipus de funció és?
- Dibuixa la gràfica de la funció *part entera*. $y = E(x)$, que indica el nombre enter menor, més proper a x (ex: $E(2'3) = 2$).
- Un rectangle té un perímetre de 100 cm. Anomena x la longitud d'un dels seus costats i escriu la fórmula que dona l'àrea en funció de x . Dibuixa la seva gràfica. Quin tipus de funció és?
- Una caixa quadrada té una altura de 20 cm. Com depèn el seu volum del costat de la base? Dibuixa la gràfica de la funció que en resulta.
- Amb una fulla de paper de 32 cm de llarg i 22 cm d'ample es retalla un quadrat de 2 cm de costat en cadascuna de les cantonades, es doblega i es construeix una caixa. Quin és el volum de la caixa? I si es retallen quadrats de 3 cm? Quin és el volum si el costat del quadrat retallat és x ? Escriu la fórmula i dibuixa la gràfica.
- Es construeixen boies unint dos cons iguals per la base, sent el diàmetre de la base de 90 cm. El volum de la boia és funció de l'altura " a " dels cons. Si volem una boia per assenyalar l'entrada de patinets basta amb una altura de 50 cm: quin volum tindrà? Si és per a vaixells majors, es necessita una altura d'1,5 m: quin volum tindrà? Escriu l'expressió de la funció que calcula el volum en funció de l'altura. Dibuixa la seva gràfica.
- El consum de benzina d'un cotxe per cada 100 km ve representat mitjançant la gràfica. Utilitza la gràfica per explicar com varia el consum de benzina depenent de la velocitat del cotxe.
 - Quin és la variable dependent? I la independent?
 - Quin és el consum per a una velocitat de 60 km/h?
 - A quina velocitat el consum és de 6 l/100 km?
- En estudiar el creixement d'una planta observem que durant els primers 30 dies ho fa molt de pressa, en els 15 dies següents el creixement és més lent i després es manté amb la mateixa altura. Realitza un esbós de la gràfica que relaciona el temps transcorregut amb l'altura aconseguida per la planta. Si tenim més informació podem millorar l'esbós. Per exemple, fes la taula i la gràfica en el cas que el creixement de la planta s'ajusti a les següents fórmules (el temps s'expressa en dies i l'altura en centímetres):
 - Durant els primers 30 dies: altura = $4 \cdot$ temps
 - En els 15 dies següents: altura = $90 +$ temps
 - A partir del dia 45: altura = 135.



Característiques d'una funció.

16. En Jordi ha arribat a un acord amb el seu pare per rebre la seva paga. Cobrarà 20 euros al mes el primer any i 5 euros més per cada any que passi. Quant li correspondrà d'aquí 7 anys? Fes una taula de valors i representa la seva gràfica. És contínua? Indica els punts de discontinuïtat i el seu tipus. Cerca una fórmula que permeti calcular la paga quan hagin passat n anys.
17. En entrar a l'aparcament d'un centre comercial trobem un rètol amb els preus que ens indiquen que 1 hora o fracció costa 1'20€ i les dues primeres hores són gratuïtes per als clients amb targeta de compra del centre. Fes una taula que relacioni el temps amb l'import pagat durant una jornada completa (12 hores) en els casos d'un client amb targeta o sense ella. Esbossa la gràfica i contesta a les preguntes:
- Quins valors pren la variable dependent? I la independent?
 - Pots unir els punts de la gràfica? Com s'ha de fer?
 - Existeixen punts de discontinuïtat? Si la resposta és afirmativa, assenyalala's i explica el seu significat.
18. Durant un viatge, la velocitat del cotxe varia depenent del tipus de carretera, de les condicions en què es troba, del temps meteorològic... La següent gràfica reflecteix la velocitat d'un vehicle en cada instant del trajecte que ha seguit.
- És funcional la relació de dependència entre el temps i la velocitat?
 - Quina és la variable independent? I la dependent?
 - A quina velocitat anava quan portava una hora de viatge? En quins moments anava a una velocitat de 40 km/h?
 - Indica els intervals en els quals la velocitat ha augmentat i disminuït. Ha estat constant en algun moment? Quan? Durant quant temps?
 - Quina ha estat la velocitat màxima aconseguida al llarg de tot el viatge? En quin moment es va aconseguir? I durant la primera hora del mateix?
 - Quina ha estat la velocitat mínima aconseguida al llarg de tot el viatge? Quan es va aconseguir? I entre la primera mitja hora i l'hora i mitja?
19. Les gràfiques següents mostren l'evolució, un dia qualsevol, de la temperatura aconseguida entre les 7 del matí i les 4 de la tarda en quatre ciutats (Madrid, Granada, Valladolid i Sevilla):



- Explica la monotonia de totes les gràfiques.
 - En alguna ciutat la temperatura s'ha mantingut constant durant tot l'interval? I en part d'ell?
 - Quina ciutat creus que presenta un canvi de temperatura més suau al llarg de tot el matí?
 - Tenint en compte que a Madrid l'increment de la temperatura ha estat sempre lineal, a Granada la temperatura mínima s'ha aconseguit després de les 7 h, a Sevilla de vegades s'ha mantingut constant, indica quina gràfica correspon a cadascuna de les ciutats i explica quines han estat les temperatures màximes i mínimes en cadascuna d'elles.
20. Un viatge realitzat per un tren, en un cert interval del mateix, ve donat de la següent forma: Durant les dues primeres hores, la distància " d " (en quilòmetres) al punt de partida és: $2 \cdot t + 1$, on " t " és el temps (en hores) de durada del trajecte. Entre la 2a i 3a hora aquesta distància ve donada per $-t + 7$. Entre la 3a i 4a hora, ambdues incloses, $d = 4$. Des de la 4a i fins a la 6a (incloses), la distància s'ajusta a $3 \cdot t - 8$.
- Realitza una taula i una gràfica que reculli aquest viatge de la forma més precisa possible (per a això has de calcular, com a mínim, els valors de la variable temps en els instants 0, 2, 3, 4 i 6).
 - Explica si la relació anteriorment explicada entre la distància recorreguda i el temps tardat a recórrer-la és funcional.
 - La relació anterior, presenta alguna discontinuïtat?
 - En quin moment la distància al punt de partida és de 7 km?
 - Què indiquen els punts de tall de la gràfica amb els eixos?
 - Determina els intervals on la funció és creixent, decreixent i constant.
 - Troba els punts on la funció assoleix els seus màxims i mínims relatius i absoluts. Interpreta el seu significat.

21. Representa gràficament les següents funcions, estudiant en ella totes les característiques que s'han treballat en el capítol: continuïtat, monotonia, extrems, simetria i periodicitat.
- a) Valor absolut d'un nombre: $f(x) = |x|$, que es defineix: $|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x > 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

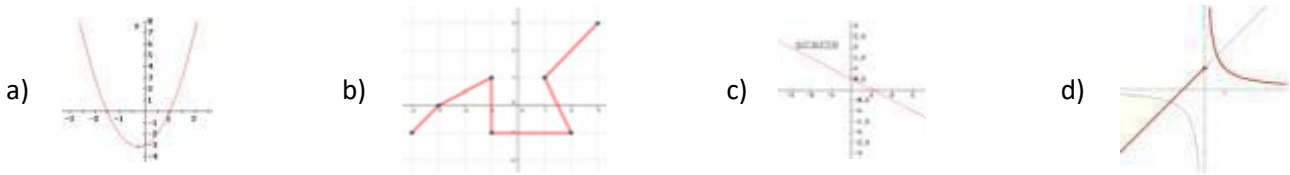
b) Oposat i invers del nombre x : $f(x) = \frac{-1}{x}$

Tipus de funcions

22. ESCRIU l'equació de la recta paral·lela a $y = 5x + 1$ d'ordenada a l'origen 6.
23. Sense representar-los gràficament, digues si estan alineats els punts $A(2, 4)$, $B(6, 9)$ i $C(12, 15)$.
24. Dibuixa en el teu quadern, en un mateix sistema de coordenades, les rectes: $y = 2x$; $y = -2x$; $y = 3x$; $y = -3x$.
25. Dibuixa en el teu quadern, en un mateix sistema de coordenades, les rectes: $y = 2x + 1$; $y = 2x + 3$; $y = 2x - 1$; $y = 2x - 2$; $y = 2x - 3$. Com són les rectes?
26. Una empresa de lloguer de vehicles ofereix dues fórmules diferents. Fórmula 1: Lloga vehicle per 300 euros al dia amb quilometratge il·limitat. Fórmula 2: Lloga vehicle per 200 euros al dia i 7 euros el quilòmetre. Volem fer un viatge de 10 dies i mil quilòmetres, quant ens costarà amb cadascuna de les fórmules? Com no sabem el quilometratge exacte que acabarem fent, ens interessa fer un estudi per saber la fórmula més beneficiosa. ESCRIU les fórmules d'ambdues situacions i dibuixa les seves gràfiques. Raona, a partir d'aquestes gràfiques, quina fórmula és més rendible segons el nombre de quilòmetres que anem a fer.
27. Troba l'equació i dibuixa la gràfica de les rectes següents:
- El seu pendent és 3 i la seva ordenada a l'origen és 5.
 - Passa pels punts $A(1, 4)$ i $B(0, 9)$.
 - La seva ordenada a l'origen és 0 i el seu pendent és 0.
 - Passa pels punts $C(-2, 7)$ i $D(-3, 10)$.
 - Passa pel punt (a, b) i té de pendent m .
28. Dibuixa en el teu quadern, sense trobar la seva equació, les rectes següents:
- El seu pendent és 2 i l'ordenada a l'origen 0.
 - Passa pels punts $A(1, 3)$ i $B(2, 1)$.
 - El seu pendent és 2 i passa pel punt $(4, 5)$.
29. Calcula el vèrtex, l'eix de simetria i els punts d'intersecció amb els eixos de les següents paràboles. Dibuixa les seves gràfiques.
- $y = x^2 + 8x - 13$
 - $y = -x^2 + 8x - 13$
 - $y = x^2 - 4x + 2$
 - $y = x^2 + 6x$
 - $y = -x^2 + 4x - 7$
30. Dibuixa la gràfica de la funció $y = 2x^2$. Fes una plantilla. Determina el vèrtex de les següents paràboles i utilitza la plantilla per dibuixar la seva gràfica:
- $y = 2x^2 + 8x - 12$
 - $y = -2x^2 + 8x - 10$
 - $y = 2x^2 - 4x + 2$
 - $y = 2x^2 + 6x$
- Ajuda:* $2x^2 + 8x - 12 = 2(x^2 + 4x - 6) = 2((x + 2)^2 - 4 - 6) = 2((x + 2)^2 - 10)$. Vèrtex $(-2, -10)$
31. Ajusta una funció polinòmica a les dades de la taula:
- | | | | | | | | |
|-------|---|---|----|----|----|----|----|
| x : | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| y : | 1 | 5 | 11 | 19 | 29 | 41 | 55 |
32. Dibuixa les gràfiques de: $y = 2/x$; $y = 4 + 2/x$; $y = 2/(x + 3)$; $y = 4 + 2/(x + 3)$. Indica en cada cas els punts de discontinuïtat i les asymptotes.
33. Dibuixa les gràfiques de: $y = 3^x$; $y = (1/3)^x$; $y = 3^{-x}$; $y = (1/3)^{-x}$; $y = 2 + 3^x$; $y = 3^{x+2}$.

AUTOAVALUACIÓ

1. L'única gràfica que no correspon a una funció és:



2. L'única taula que no pot ser d'una relació funcional és:

x	i
0	5
1	7
2	32
3	41

a)

x	i
-1	-2
0	-2
1	-2
2	-2

b)

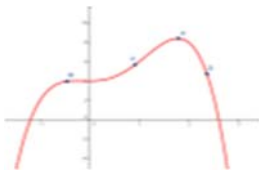
x	i
-3	1
-1	2
0	3
2	4

c)

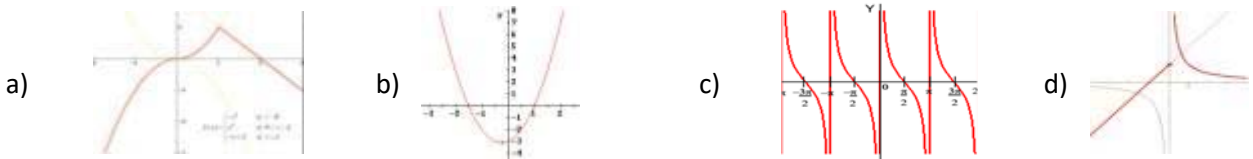
x	i
0	1
1	2
4	3
0	4

d)

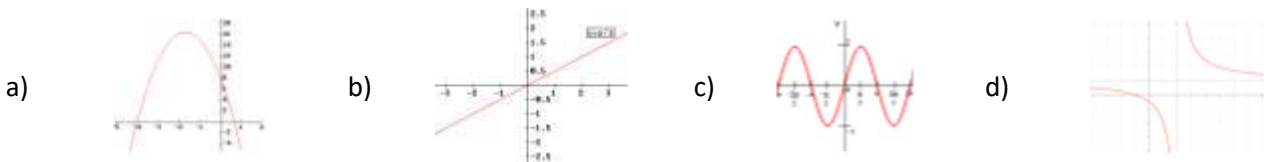
3. El màxim absolut de la funció s'aconsegueix en el punt: a, b, c, d



4. L'única gràfica que correspon a una funció periòdica és:



5. L'única gràfica que correspon a una funció que és sempre creixent és:



6. L'única funció afí que, a més, és lineal és:

a) $y = -7x$

b) $y = 7x + 4$

c) $y = -4x + 7$

d) $y = -6x - 9$

7. L'única funció quadràtica és:

a) $y = -8x$

b) $y = 2x + 3$

c) $y = -2x^2 + 3x$

d) $y = -2x^3 - 3x$

8. La funció quadràtica que té el seu vèrtex en el punt (2, 0) és:

a) $y = -2x^2$

b) $y = x^2 - 4x + 4$

c) $y = -2x^2 + 4x$

d) $y = -x^2 + 4x - 2$

9. La hipèrbola d'asimptotes $x = 3$ i $y = 5$ és:

a) $y = 5 + 8/(x - 3)$

b) $y = 3 + 6/(x - 5)$

c) $y = -5 + 2/(x + 3)$

d) $y = 5 + 1/(x + 3)$

10. L'única funció exponencial és:

a) $y = x^6$

b) $y = 3^x$

c) $y = 3^x + x^2$

d) $y = 1/3^x + x^2$

CAPÍTOL 7: ESTADÍSTICA. ATZAR I PROBABILITAT

ACTIVITATS PROPOSADES

1. ESTADÍSTICA

- Volem realitzar un estudi estadístic sobre el temps dedicat a l'estudi per l'alumnat d'ESO de Mallorca. Per a això se seleccionen adequadament 100 alumnes. Indica quina és la població, quina és la mostra, quina grandària té la mostra i qui seria un individu.
- Vols passar una enquesta per conèixer, el mateix que en el problema anterior, el temps dedicat a l'estudi, en aquest cas, el dels companys i companyes del teu centre escolar. La hi passaries només a les noies? Només als nois? Preguntaries als millors de la classe? Als de pitjors notes? Indica el criteri que seguiries per seleccionar la mostra.
- Copia en el teu quadern i completa la següent taula de freqüències absolutes dels valors obtinguts en tirar un dau, amb les freqüències relatives i percentatges, i amb freqüències absolutes acumulades i freqüències relatives acumulades.
- Amb la taula de valors de l'exercici anterior, dibuixa en el teu quadern el diagrama de freqüències relatives, el polígon de freqüències absolutes acumulades i el diagrama de sectors.
- Fes un estudi estadístic preguntant als teus companys i companyes de classe sobre el nombre de llibres que llegeixen al mes. Confecciona una taula i representa-la en un diagrama de rectangles, un polígon de freqüències i un diagrama de sectors.
- Selecciona una mostra entre els teus companys i companyes i realitza un estudi estadístic sobre l'esport que més li agrada a cadascun. Fes la representació que sigui més senzilla d'interpretar.
- Donades les temperatures en una ciutat a una hora determinada el dia 1 de cada mes es té la següent taula:

Resultats	Freqüències absolutes
1	17
2	12
3	17
4	15
5	21
6	14

	Gener	Febrer	Març	Abril	Maig	Juny	Julio	Agost	Setembre	Octubre	Novembre	Desembre
Temperatura	-2	5	8	9	11	13	27	33	21	14	9	4

- Calcula la temperatura mitjana, la moda i la mediana.
 - Utilitza l'ordinador per comprovar el resultat.
- Calcula la mitjana, la mediana i la moda de les distribucions següents:
 - 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 1000
 - 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 10
 - 0, 0, 4, 5, 7, 9, 9, 100, 200
 Utilitza l'ordinador per comprovar els resultats.
 Observa en cada cas com influeixen els valors extrems. Influeixen en la moda? I en la mediana? I en la mitjana?
 - S'ha llançat un dau 100 vegades i s'ha confeccionat la següent taula de freqüències absolutes:

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	18	16	14	16	16	20

- Calcula la mitjana, la moda i la mediana.
 - Utilitza l'ordinador per comprovar els resultats.
- Llancem 2 daus i sumem els valors obtinguts. Repetim l'experiment 1000 vegades i obtenim la següent taula de freqüències absolutes.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f_i	24	65	73	81	158	204	148	79	68	59	41

- Calcula la mitjana, la mediana i la moda.
 - Utilitza l'ordinador per comprovar els resultats.
 - Repeteix tu els llançaments, ara només deu vegades, i calcula la mitjana, la mediana i la moda.
- Utilitza l'ordinador per calcular la mitjana, la mediana i la moda de la següent taula de freqüències absolutes, que indica el nombre de fills que tenen 200 famílies entrevistades:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_i	14	65	73	27	9	6	2	1	0	2	1

- Donades les temperatura en una ciutat d'un exercici anterior:

Mesos	Gener	Febrer	Març	Abril	Maig	Juny	Julio	Agost	Setembre	Octubre	Novembre	Desembre
Temperatura	-2	5	8	9	11	13	27	33	21	14	9	4

- Calcula el recorregut, la variància, la desviació típica, els quartils i l'interval interquartil.
- Utilitza l'ordinador per comprovar els resultats.

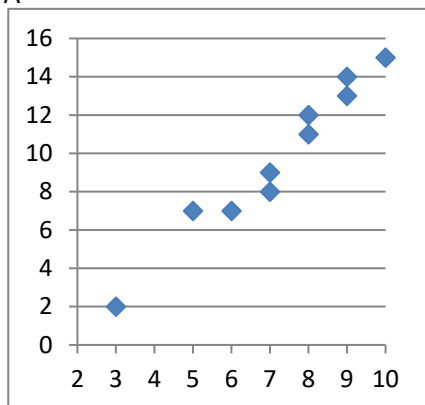
13. Calcula el recorregut, la variància, la desviació típica, els quartils i l'interval interquartil. de les distribucions següents:
 a) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 1000 b) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 10 c) 0, 0, 4, 5, 7, 9, 9, 100, 200
 Utilitza l'ordinador per comprovar els resultats.
14. Utilitza l'ordinador per dibuixar l'histograma de l'activitat 11.
15. Es coneixen les quantitats de residus sòlids recollits en m^3 /setmana durant 12 setmanes en una urbanització: 23, 27, 30, 34, 38, 21, 30, 33, 36, 39, 32, 24. Escriu en el teu quadern una taula de freqüències absolutes amb quatre intervals: [20, 25), [25, 30), [30, 35) i [35, 40). Calcula les marques de classe. Dibuixa l'histograma de freqüències absolutes. Calcula la mitjana i la desviació típica. Calcula gràficament la mediana i els quartils.
16. Fes un estudi estadístic preguntant els teus companys i companyes de classe sobre el nombre de llibres que llegeixen al mes. Confecciona una taula i representa-la en un diagrama de rectangles, un polígon de freqüències i un diagrama de sectors.

2. DADES BIDIMENSIONALS

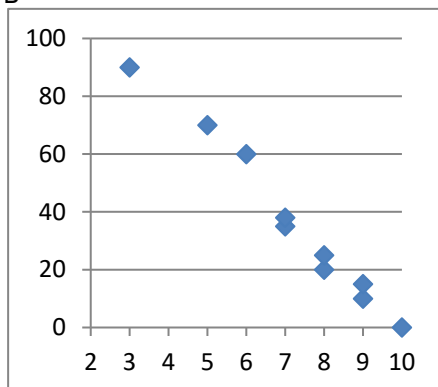
17. Amb la taula de valors de l'exemple, construeix la taula de freqüències absolutes i relatives de la variable X ("Color de pèl") i la variable I ("Color d'ulls") per separat, com a variables unidimensionals.
18. Completa la següent taula i expressa-la en forma de taula de doble entrada, primer amb freqüències relatives i després amb freqüències absolutes.
19. Completa la següent taula de freqüències conjunta i expressa-la en freqüències de parells (x_i, y_j) , tant amb freqüències relatives com absolutes.
20. Na Maria ha calculat els coeficients de correlació dels tres núvols de punts adjunts, i ha obtingut: $-0,05$, $0,98$ i $-0,99$, però ara no recorda quin és de cadascun. Pots ajudar-la a decidir quin coeficient es correspon amb cada núvol?

	Freqüència absoluta	Freqüència relativa
(0, 1)	12	
(1, 2)	14	
(2, 3)	14	

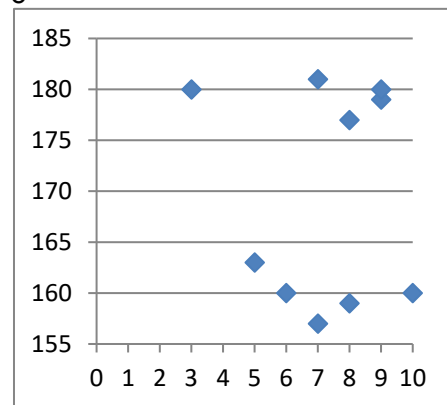
A



B



C



21. Fes una enquesta entre els teus companys de classe. Amb l'enquesta realitzaràs un treball d'investigació i presentaràs un informe. Tria amb cura les preguntes. Demanaràs a cadascun dels teus companys seleccionats, la mostra, dues preguntes, com per exemple el que mesura la seva mà i la seva nota en llengua, però a tu poden interessar-te altres qüestions molt diferents.
 El primer que faràs és tabular les respostes i confeccionar dues taules de freqüències absolutes. Després completa aquestes mateixes taules amb les freqüències relatives i les freqüències acumulades. Fes representacions gràfiques d'aquestes freqüències: de barres, de línies, de sectors.
 Calcula mitjanes, modes i medianes, així com recorregut, desviació típica, quartils, interval interquartilic... Representa les dades en una taula de doble entrada i dibuixa el núvol de punts. Calcula el coeficient de correlació. Presenta un informe d'aquest treball.

3. ATZAR I PROBABILITAT

22. Indica si són, o no, fenòmens aleatoris:
- ✚ La superfície de les comunitats autònomes espanyoles.
 - ✚ Anotar el sexe del proper bebè nascut en una clínica determinada.
 - ✚ L'àrea d'un quadrat del que es coneix el costat.
 - ✚ Tirar tres daus i anotar la suma dels valors obtinguts.
 - ✚ Saber si el proper any és de traspàs.

23. Escriu el conjunt de possibles resultats de l'experiment aleatori: "Escriure en cinc targetes cadascuna de les vocals i treure una targeta a l'atzar".
24. Escriu el conjunt de possibles resultats de l'experiment aleatori: "Tirar una xinxeta i anotar si cau de punta o no".
25. Inventa dos successos de l'experiment aleatori: Tirar dues monedes.
26. En el joc de loteria, indica dos successos respecte a la xifra de les unitats del primer premi.
27. Escriu tres successos aleatoris de l'experiment aleatori: "Treure una carta d'una baralla espanyola".
28. Calcula la probabilitat que en treure una carta de la baralla sigui una espasa.
29. Per saber la probabilitat que un nounat sigui esquerrà, et basaries en l'estudi de les freqüències relatives o l'assignaries per simetria?
30. Quina és la probabilitat de *no* treure un 5 en tirar un dau? I de *no* treure un múltiple de 3? I de *no* treure un nombre menor que 2?
31. En tirar una moneda dues vegades, quina és la probabilitat de no treure cap cara? I de treure almenys una cara? Observa que treure almenys una cara és el succés contrari de no treure cap cara.
32. En el teu quadern fes un diagrama en arbre similar a l'anterior amb els successos A i B: A = *treure un as* en la primera extracció (noA = no treure-ho), i B = *treure un as* en la segona extracció (no B = no treure-ho). Quina és la probabilitat de *treure as* en la segona extracció condicionat a no haver-ho tret en la primera? I la de no treure as en la segona extracció condicionat a no haver-ho tret en la primera? Quina és la probabilitat de *treure dos asos*? I la de treure un sol as?
33. En el diagrama d'arbre anterior indica com és la probabilitat de "*no surten 2 asos*" i la de "*no surt cap as*".
34. En l'experiment "treure tres cartes seguides", quina és la probabilitat de *treure tres asos*? Primer amb reemplaçament, i després sense reemplaçament.
35. En tirar dues vegades un dau calcula la probabilitat que surti un sis doble.
36. En tirar dues vegades un dau calcula la probabilitat de treure almenys un 6. *Ajuda*: Potser et sigui més fàcil calcular la probabilitat de *no treure cap 6*, i utilitzar el succés contrari.
37. Llancem dos daus que no estiguin trucats i anatem els nombres de la seva cara superior. Considerem el succés A que la suma de les dues cares sigui 8, i el succés B que aquests nombres difereixin en dues unitats.
a) Comprova que $p(A) = 5/36$ (2 + 6; 3 + 5; 4 + 4; 5 + 3; 6 + 2) i que $p(B) = 8/36$ ((1,3), (2, 4), ...). b) Calcula les probabilitats de: $p(A \cap B)$; $p(A \cup B)$; $p(A \cap \text{no}B)$; $p(\text{no}A \cap B)$; $p(\text{no}A \cap \text{no}B)$. c) Calcula $p(A/B)$; $p(A/\text{no}B)$; $p(\text{no}A/B)$.
38. Dibuixa en el teu quadern un diagrama en arbre per a tres incendis, i calcula la probabilitat que almenys un hagi estat intencionat sent $p(I) = 0,7$.
39. En una aeronau s'han instal·lat 3 dispositius de seguretat: A, B i C. Si falla A es posa B en funcionament, i si també falla B comença a funcionar C. Les probabilitats que funcioni correctament cada dispositiu són: $p(A)=0,95$; $p(B)=0,97$ i $p(C)=0,98$.
a) Calcula la probabilitat que fallin els tres dispositius. b) Calcula la probabilitat que tot vagi bé.
40. Una fàbrica de nines rebutja normalment el 0,5% de la seva producció per fallades degudes a l'atzar. Calcula la probabilitat que: a) En agafar dues nines a l'atzar calgui rebutjar ambdues. b) En agafar dues nines a l'atzar calgui rebutjar només una. c) En agafar dues nines a l'atzar no calgui rebutjar-ne cap d) Verifiquem 4 nines, calcula la probabilitat de rebutjar únicament la tercera nina triada.
41. Llancem una moneda fins que aparegui dues vegades seguides del mateix costat. Calcula les probabilitats que:
a) L'experiència acabi en el segon llançament. b) Acabi en el tercer llançament. c) Acabi en el quart. d) Acabi com a màxim en el quart llançament (és a dir, que acabi en el segon o en el tercer o en el quart llançament).
42. S'ha fet un estudi estadístic sobre accidents de trànsit i s'han determinat les següents probabilitats reflectides en la taula de contingència:

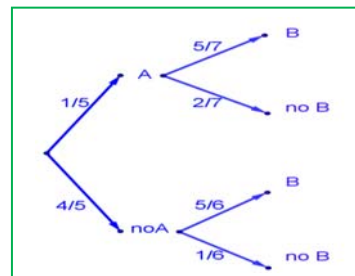
	Accident en carretera (C)	Accident en zona urbana (U)	Totals
Accident amb víctimes (V)	0,27		0,56
Accident amb només danys materials (M)			
Totals	0,58		1

- a) Copia la taula en el teu quadern i completa-la.
b) Determina les següents probabilitats: $p(V \cap C)$; $p(V \cap U)$; $p(M \cap C)$; $p(M \cap U)$; $p(V)$; $p(M)$; $p(C)$ i $p(U)$.
c) Calcula $p(U/V)$; $p(C/V)$; $p(V/U)$; $p(V/C)$. Són dependents o independents els successos: accident amb víctimes i accident en carretera?

43. Inventa una taula de contingència considerant que els accidents puguin ser de carretera (C) o urbans (U), però que ara els classifiquem en lleus (L), greus (G) o mortals (M). *Observa que el fonamental per confeccionar la taula és que els successos siguin incompatibles dos a dos.*
44. Donada la taula de contingència, construeix dos diagrames d'arbre.

	A	No A	
B	0,4	0,2	0,6
No B	0,15	0,25	0,4
	0,55	0,45	1

45. Donat el diagrama d'arbre, construeix la taula de contingència, i després l'altre diagrama d'arbre.
46. Tenim dues urnes, A i B. La primera amb 8 boles blanques i 2 boles negres. La segona amb 4 boles blanques i 6 boles negres. Es treu una bola a l'atzar, d'una de les dues urnes, també a l'atzar i resulta ser negra. Quina és la probabilitat que procedeixi de la urna A?
47. S'està estudiant un tractament amb un nou medicament, pel que se seleccionen 100 malalts. A 60 se'ls tracta amb el medicament i a 40 amb un placebo. Els valors obtinguts es representen en la taula adjunta:



	Medicament (M)	Placebo (no M)	
Curats (C)	50	30	80
No curats (no C)	10	10	20
	60	40	100

S'utilitzen aquests valors per assignar probabilitats. Calcula:

- a) La probabilitat que un malalt curat hagi estat tractat amb el medicament. *Ajuda: $p(M/C)$*
- b) La probabilitat que un malalt curat hagi estat tractat amb el placebo. *Ajuda: $p(\text{no}M/C)$*

CURIOSITATS I REVISTA

Cavaller de la Méré

Calcula les probabilitats de: a) "Treure almenys un 6 en 4 tirades d'un dau". b) En tirar dos daus "Treure almenys un 6 doble en 24 jugades"

Galileu

En tirar tres daus, per què és més probable obtenir que la suma de les cares superiors sigui 10, que sigui 9? Calcula les probabilitats de cadascuna de les summes i la de treure 10 i de treure 9.

EXERCICIS I PROBLEMES

Estadística

1. En una classe es mira el color dels ulls de cada alumne i alumna i s'obté el següent: N := negre; A := blau i V := verd.
N, N, A, V, N, V, A, N, A, N, V, A, A, N, N, N, V, A, N, N, A, N, V, N, N, A, N, A, N, N.

Fes una taula de freqüències absolutes, representa els valors en un diagrama de sectors i calcula la moda.

2. Les notes d'un conjunt d'alumnes de 4t són:

2, 10, 7, 8, 1, 0, 3, 5, 6, 9, 2, 4, 1, 6, 9, 10, 5, 6, 7, 8, 3, 1, 0, 1, 5, 9, 10, 9, 8, 7.

- a) Fes una taula de freqüències absolutes, freqüències relatives, freqüències absolutes acumulades i freqüències relatives acumulades.
- b) Calcula la mitjana, la mediana i la moda.
- c) Calcula la desviació típica i els quartils.
3. S'ha preguntat a 40 alumnes pel nombre de germans que tenia, i s'ha obtingut

Nombre de germans	0	1	2	3	4	5	6 o més
Nombre de vegades	5	15	7	6	4	2	1

- a) Representa un diagrama de barres de freqüències absolutes i un diagrama de línies de freqüències relatives.
- b) Calcula la mitjana, la mediana i la moda.

4. S'han llançat quatre monedes 100 vegades i s'ha anotat el nombre de vegades que ha sortit cara. Els resultats estan reflectits en la taula següent:

Nombre de cares	0	1	2	3	4
Nombre de vegades	7	25	36	26	6

- a) Escribeu en el teu quadern una taula de freqüències absolutes, freqüències relatives, freqüències absolutes acumulades i freqüències relatives acumulades.
 b) Representa un diagrama de barres de freqüències absolutes acumulades, un diagrama de línies de freqüències relatives i un diagrama de sectors de freqüències absolutes.
 c) Calcula la mitjana i la desviació típica.
 d) Calcula la mediana i els quartils.
5. Per conèixer la distribució de les persones d'un cert país segons la seva edat s'ha recollit una mostra de deu mil persones i els valors obtinguts vénen reflectits en la taula següent:

Edats	[0, 5)	[5, 10)	[10, 15)	[15, 25)	[25, 35)	[35, 45)	[45, 55)	[55, 65)	[65, 100)
Nombre de persones	900	1000	900	1500	1300	1200	1300	900	1000

- a) Utilitza les marques de classe i escriu en el teu quadern una taula de freqüències absolutes, freqüències relatives, freqüències absolutes acumulades i freqüències relatives acumulades.
 b) Representa un histograma de freqüències absolutes. Observació: Els intervals no són tots iguals. Recorda: L'àrea dels rectangles ha de ser proporcional a les freqüències.
 c) Calcula la mitjana i la desviació típica.
 d) Calcula la mediana i els quartils de forma gràfica usant un histograma de freqüències absolutes acumulades.
6. Amb les dades del problema anterior calcula l'interval [mitjana – desviació típica, mitjana + desviació típica]. Quantes persones estan en aquest interval? Quin percentatge? Calcula també els intervals [mitjana – 2·desviació típica, mitjana + 2·desviació típica] i [mitjana – 3·desviació típica, mitjana + 3·desviació típica]. Si la distribució fos normal hi hauria en el primer interval un 68 % de la mostra, en el segon un 95 % i en el tercer més d'un 99'7 %. Compara els teus resultats amb aquests.
7. Amb les mateixes dades calcula l'interval interquartil i indica quantes persones estan en aquest interval i quin percentatge.
8. Una companyia d'assegurances desitja establir una pòlissa d'accidents. Per a això, selecciona a l'atzar a 200 propietaris i els pregunta quants euros han gastat en reparacions de l'automòbil. S'han agrupat en intervals els valors de la variable obtinguts:

Euros	[0, 100)	[100, 200)	[200, 400)	[400, 600)	[600, 800)	[800, 3000)
Nombre de persones	40	30	20	40	50	20

- a) Calcula les marques de classe i escriu en el teu quadern una taula de freqüències absolutes, freqüències relatives, freqüències absolutes acumulades i freqüències relatives acumulades.
 b) Representa un histograma de freqüències relatives. Observació: Els intervals no són tots iguals.
 c) Calcula la mitjana i la desviació típica.
 d) Calcula la mediana i els quartils de forma gràfica usant un histograma de freqüències absolutes acumulades.
9. Dos fabricants de bateries de cotxes ofereixen el seu producte a una fàbrica al mateix preu. La fàbrica vol triar la millor. Per a això escull una mostra de 60 bateries de cada marca i obté de cadascuna els mesos que ha funcionat sense espantllar-se. S'obté la següent taula:

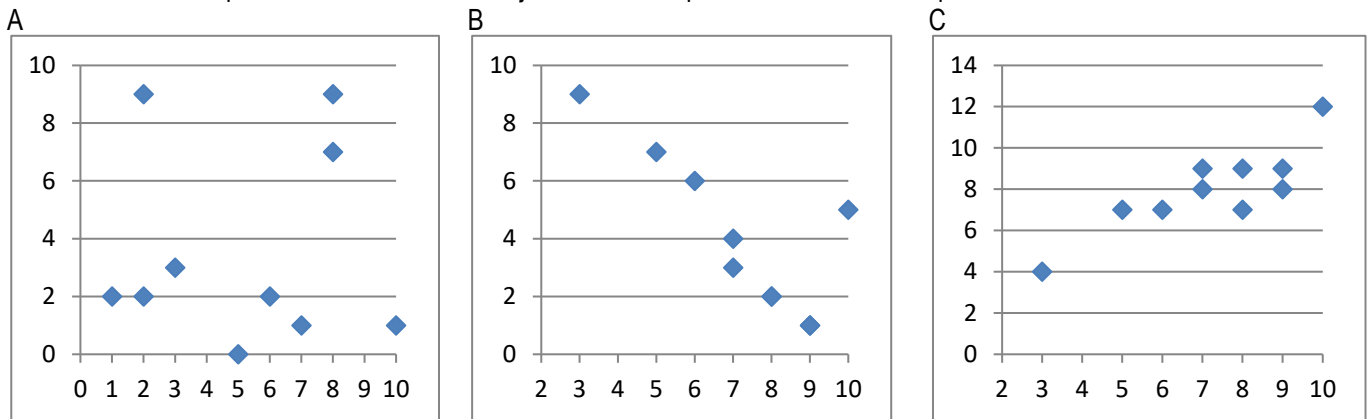
Vida de la bateria en mesos	20	22	24	26	28	30	32
Marca A	2	7	13	16	12	8	2
Marca B	1	4	17	20	15	3	0

Quina marca creus que triarà? Per prendre la decisió, calcula la mitjana, la moda i la mediana per a cada marca. Si encara no et decideixes, calcula el recorregut, la desviació típica, l'interval $[m - s, m + s]$ i l'interval interquartil.

10. Fes un treball. Passa una enquesta als teus companys i companyes de classe. Fes-los una pregunta amb dades numèriques, com per exemple, quant mesura la seva mà, quin nombre de sabates calça, el nombre de llibres que llegeix en un mes, el nombre d'hores que veu la televisió a la setmana, els diners que gasta en el mes per comprar música... Representa les dades obtingudes en una taula. Fes un estudi complet. Pots utilitzar l'ordinador: Escribeu en el teu quadern una taula de freqüències absolutes, freqüències relatives, freqüències absolutes acumulades i freqüències relatives acumulades. Dibuixa un diagrama de barres, un diagrama de línies i un diagrama de sectors. Calcula la mitjana, la mitjana i la moda. Calcula la variància i la desviació típica. Calcula els quartils i l'interval interquartil. Reflexiona sobre els resultats i escriu un informe.

Coeficient de correlació

11. N'Andreu ha calculat els coeficients de correlació dels tres núvols de punts adjunts, i ha obtingut: $-0,8$, $0,85$ i $0,03$, però ara no recorda quin és de cadascun. Pots ajudar a decidir quin coeficient es correspon amb cada núvol?



Probabilitat

12. En un col·legi se selecciona un grup de 200 estudiants dels quals tots estudien francès o anglès. D'ells 150 estudien anglès i 70 estudien francès. Quants estudien francès i anglès? A un altre centre escolar s'estudien diversos idiomes: francès, anglès, alemany, italià. Se seleccionen també 200 estudiants dels quals, 150 estudien anglès, 70 francès i 40 tots dos idiomes, quants estudiants d'aquest centre no estudien ni francès ni anglès?
13. Llancem un dau. Calcula la probabilitat de: a) Treure un nombre imparell. b) No treure un 3. c) Treure un nombre major que 3. d) Treure un nombre major que 3 i que sigui imparell. e) Treure un nombre major que 3 o bé que sigui imparell.
14. En una classe hi ha 24 al·lots i 14 al·lotes. La meitat de les al·lotes i la tercera part dels al·lots tenen els ulls blaus. Es tria un estudiant a l'atzar. a) Calcula la probabilitat que sigui al·lot i tingui els ulls blaus. b) Calcula la probabilitat que sigui al·lot o tingui els ulls blaus.
15. En Toni, en Joan i en Jordi tenen una prova de natació. En Toni i en Joan tenen la mateixa probabilitat de guanyar, i doble a la probabilitat d'en Jordi. Calcula la probabilitat que guanyi en Joan o en Jordi.
16. Llancem dues monedes diferents, una de 50 cèntims i una altra d'un euro. Calcula la probabilitat que: a) En la moneda d'un euro surti cara. b) Surti una cara. c) Surti almenys una cara. d) No surti cap cara. e) Surti una cara i una creu.
17. Llancem tres monedes. Calcula la probabilitat de: a) No surti cap cara. b) Surti almenys una cara. c) Surtin dues cares i una creu.
18. Llancem dos daus i anotem els valors de les cares superiors. Calcula les probabilitats que: la suma sigui 1, sigui 2, sigui 3, sigui 4, sigui 12.
19. Què és més probable en tirar tres daus, que la suma de les seves cares superiors sigui 9 o sigui 10? Escriu el succés "sigui 9" i el succés "sigui 10" i calcula les probabilitats dels seus successos elementals. Saps ja més que *Galileu!*
20. Llancem alhora una moneda i un dau. Sigui A el succés "Surti cara i un nombre parell", B el succés "Surti creu i un nombre primer" i C el succés "Surti un nombre primer". Calcula les probabilitats de A, B i C. Com són aquests successos? Indica quins d'ells són compatibles i quins són incompatibles.
21. Llancem una moneda 50 vegades, què és més probable, obtenir 50 cares seguides o obtenir en les primeres 25 tirades cara i en les 25 següents creu? Raona la resposta.
22. Una moneda està trucada. La probabilitat d'obtenir cara és doble que la d'obtenir creu. Calcula les probabilitats dels successos obtenir cara i d'obtenir creu en tirar la moneda.
23. Tres nois i dues noies juguen un torneig d'escacs. Tots els nois tenen idèntica probabilitat de guanyar, i totes les noies, també. Però la probabilitat de guanyar una noia és doble de la de guanyar un noi. Calcula la probabilitat que un noi guanyi el torneig.
24. Set parelles de nuvis estan en una habitació. Se seleccionen 2 persones a l'atzar. Calcula la probabilitat de: a) Sigui un noi i una noia. b) Sigui una parella de nuvis. Ara s'escullen 4 persones a l'atzar. Calcula la probabilitat de: c) Hi hagi almenys una parella de nuvis. d) No hi hagi cap parella de nuvis.
25. Tenim un dau trucat de manera que els nombres imparells tenen una probabilitat doble a la dels nombres parells. Calcula la probabilitat de: a) Surti un nombre imparell. b) Surti un nombre primer. c) Surti un nombre primer imparell. d) Surti un nombre que sigui primer o sigui imparell.

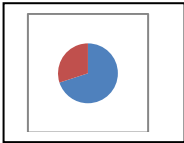
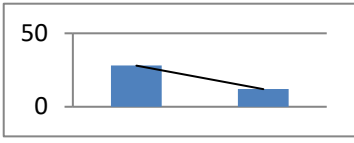
26. En un grup de 12 amigues n'hi ha 3 de rosses. Es trien dues noies a l'atzar. Calcula la probabilitat que: a) Ambdues siguin rosses. b) Almenys una sigui rossa. c) Cap sigui rossa. d) Una sigui rossa i l'altra no.
27. Llancem dos daus i anotem els valors de les cares superiors. Calcula la probabilitat que: a) Els nombres obtinguts siguin iguals. b) Els nombres obtinguts difereixin en 3 unitats. c) Els nombres obtinguts siguin parells.
28. Llancem una moneda fins que surti cara. Calcula la probabilitat que: a) Surti cara abans del quart llançament. b) Surti cara després del vuitè llançament.
29. Un lot de 20 articles en té 2 de defectuosos. Es treuen 4 articles a l'atzar, quina és la probabilitat que cap sigui defectuós?
30. Es llancen dos daus i la suma de les cares superiors és 7. Quina és la probabilitat que en un dels daus hagi sortit un 3?
31. Es tenen 3 caixes, A, B i C. La caixa A té 10 boles de les quals 4 són negres. La caixa B té 6 boles amb una bola negra. La caixa C té 8 boles amb 3 de negres. S'agafa una caixa a l'atzar i d'aquesta caixa es treu una bola, també a l'atzar. Comprova que la probabilitat que la bola sigui negra és $113/360$.
32. Tenim una moneda trucada de manera que la probabilitat d'obtenir cara és $3/5$ i la d'obtenir creu és $2/5$. Si surt cara s'escull a l'atzar un nombre de l'1 al 8, i si surt creu, s'escull un nombre de l'1 al 6. Calcula la probabilitat que el nombre escollit sigui imparell.
33. En un procés de fabricació de mòbils es detecta que el 2% surten defectuosos. S'utilitza un dispositiu per detectar-los que resulta que detecta el 90% dels mòbils defectuosos, però assenyala com a defectuosos un 1% que no ho són.
a) Calcula la probabilitat que sigui correcte un mòbil que el dispositiu ha qualificat com a defectuós. b) Calcula la probabilitat que sigui defectuós un mòbil que el dispositiu ha qualificat com a correcte. *Ajuda:* Utilitza primer un diagrama en arbre i després una taula de contingència.

AUTOAVALUACIÓ

Amb les dades següents, 1, 5, 2, 8, 9, 4, 7, 7, 5, 7, calcula:

- La mitjana:
 - 5
 - 5'5
 - 6
 - 7
- La mediana:
 - 5
 - 5'5
 - 6
 - 7
- La moda:
 - 5
 - 5'5
 - 6
 - 7
- La desviació típica:
 - 2
 - 2,3
 - 2,5
 - 2,6
- L'interval interquartil
 - 3
 - 2,75
 - 4
 - 2
- En tirar dos daus, la probabilitat de treure almenys un 5 és:
 - $5/6$
 - $11/36$
 - $25/36$
 - $30/36$
- En tirar tres monedes, la probabilitat de treure exactament dues cares és:
 - $1/2$
 - $3/4$
 - $3/8$
 - $5/8$
- En tirar tres monedes, la probabilitat de treure almenys dues cares és:
 - $1/2$
 - $3/4$
 - $3/8$
 - $5/8$
- Traiem una carta d'una baralla de 40 cartes, la probabilitat que sigui un or o un múltiple de 2 és:
 - $22/40$
 - $19/40$
 - $36/40$
 - $3/4$
- Indica quina de les afirmacions següents és sempre correcta:
 - $P(A) + P(\text{no}A) = 1$
 - $P(A \text{ i } B) = P(A) \cdot P(B)$
 - $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$

RESUM

		Exemples												
Població i mostra	Població: Tot el conjunt d'individus sobre el qual es fa l'estudi. Mostra: Una part d'aquesta població.	Per conèixer la intenció de vot, la població és tot el país, i se selecciona una mostra												
Freqüència absoluta, relativa i acumulada	Freqüència absoluta: Nombre de vegades que s'ha obtingut aquest resultat. Freqüència relativa: S'obté dividint la freqüència absoluta pel nombre total. Freqüència acumulada: S'obté sumant les freqüències anteriors.	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>Fr. Absoluta</th> <th>Fr. Relativa</th> <th>Fr. Absoluta Acumulada</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A</td> <td>28</td> <td>0'7</td> <td>28</td> </tr> <tr> <td>B</td> <td>12</td> <td>0'3</td> <td>40</td> </tr> </tbody> </table>		Fr. Absoluta	Fr. Relativa	Fr. Absoluta Acumulada	A	28	0'7	28	B	12	0'3	40
	Fr. Absoluta	Fr. Relativa	Fr. Absoluta Acumulada											
A	28	0'7	28											
B	12	0'3	40											
Gràfics estadístics	Diagrama de barres Diagrama de línies Diagrama de sectors 													
Mitjana	$\text{Mitjana} = \bar{x} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$	Amb: 8, 4, 6, 10 i 10 Mitjana $\bar{x} = 38/5 = 7'6$												
Moda	És el valor més freqüent	Mo = 10												
Mediana	Deixa per sota la meitat	$4 < 6 < 8 < 10 = 10$. Me = 8.												
Variància i Desviació típica	$\text{Variància} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum x_i^2 - n \bar{x}^2}{n}$ $s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$	Variància = 5,4. $s = 2,33$.												
Quartils	Q_1 deixa per sota la quarta part. Q_3 deixa per sota les tres quartes parts. Interval interquartil = $Q_3 - Q_1$.	$Q_1 = 6$; $Q_3 = 10$; Interval interquartil = $Q_3 - Q_1 = 4$.												
Histograma	L'àrea de cada rectangle és proporcional a la freqüència.													
Correlació	El coeficient de correlació, ρ , mesura la relació entre dues variables. És un nombre entre -1 i 1 .	$\rho = 1 \rightarrow$ correlació perfecta positiva $\rho = -1 \rightarrow$ correlació perfecta negativa $\rho = 0 \rightarrow$ correlació nul·la $\rho \in (0, 1) \rightarrow$ correlació positiva $\rho \in (-1, 0) \rightarrow$ correlació negativa												
Succés	En realitzar un experiment aleatori existeixen diversos possibles resultats o successos possibles. Un succés és un subconjunt del conjunt de possibles resultats.	Tirem un dau. Possibles resultats = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ Succés <i>obtenir múltiple de 3</i> = $\{3, 6\}$												
Probabilitat	Límit al que tendeixen les freqüències relatives. Si els successos elementals són equiprobables llavors: $p = \text{casos favorables} / \text{casos possibles}$.	$P(5) = 1/6$. $P(\text{treure múltiple de 3}) = 2/6$												
Assignació de probabilitats	Succés contrari: $p(X) + p(\text{no}X) = 1$. Successos dependents: $p(A \text{ i } B) = p(A) \cdot p(B/A)$. Successos compatibles: $P(A \text{ o } B) = p(A) + p(B) - p(A \text{ i } B)$.	$P(\text{no } 5) = 1 - 1/6 = 5/6$. $P(5 \text{ o múltiple de } 3) = 1/6 + 2/6 = 3/6$ $P(\text{treure primer un } 5 \text{ i després múltiple de } 3) = 1/6 \cdot 2/6 = 2/36$												