Matemàtiques orientades a les ensenyances acadèmiques.

4tB ESO
Capítol 2:
Potències i arrels

www.apuntesmareaverde.org.es

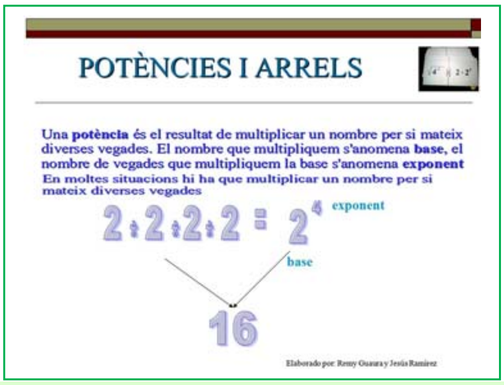
Autor: JOSE ANTONIO ENCABO DE LUCAS

Revisora: Nieves Zuasti

Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

Índex



En aquest capítol estudiarem les potències d'exponent natural i enter amb les seues propietats. Aprendrem a operar amb les potències aplicant les seues propietats.

Estudiarem les potències d'exponent racional, que són els radicals, les seues propietats i així com les operacions que podem realitzar amb ells. Ens detindrem en la racionalització, que és una operació molt utilitzada en matemàtiques que la necessitarem per a operar amb radicals.

Estudiarem la notació científica, les propietats per a poder operar amb aquest tipus de notació i els avantatges d'operar amb aquesta notació.

Finalment estudiarem els logaritmes i les seues propietats, que faciliten les operacions perquè transformen, per exemple, els productes en sumes. Quan no hi havia calculadores ni ordinadors i volien multiplicar nombres de més de deu xifres, com ho feien?

1. POTÈNCIES D'EXPONENT ENTER. PROPIETATS

1.1. Potències d'exponent natural.

Recorda que:

Donat *a,* un nombre qualsevol, i *n,* un nombre natural, la potència a^n és el producte del nombre *a* per si mateix *n* vegades

En forma desenrotllada, la potència de base *a* i exponent *n* s'escriu: $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$, *n* vegades, sent *a* qualsevol nombre i *n* un nombre natural

Exemple:

$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, 5 vegades

$(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$, 5 vegades.

La base *a pot* ser positiva o negativa. Quan la base és positiva el resultat és sempre positiu. Quan la base és negativa, si l'exponent és parell el resultat és positiu, però si és imparell el resultat és negatiu.

Si calculem els exemples de dalt tindrem:

$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$. Resultat positiu perquè multiplique un nombre positiu 5 vegades.

$(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243$. Multiplique un nombre negatiu un nombre imparell de vegades, per la qual cosa el resultat és negatiu. Cada vegada que multipliquem dues vegades dos nombres negatius ens dóna un positiu, com tenim 5, quedaria un signe menys sense multiplicar, per tant:

$(+) \cdot (-) = (-)$.

Recorda que:

Base positiva: resultat sempre positiu.

Base negativa i exponent parell: resultat positiu.

Base negativa i exponent imparell: resultat negatiu

Activitats resoltes:

- Calcula les potències següents:

a) $(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243$

b) $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

c) $-(2)^4 = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -16$

Activitats proposades:

1. Calcula les potències següents:

a) -3^3 b) $(2 + 1)^3$ c) $-(-2x)^2$

1.2. Potències d'exponent negatiu:

Definició de potència d'exponent negatiu $-n$ i base a:

$$a^{-n} = 1/a^n$$

$$a^{-n} = 1/a^n$$

Açò es justifica ja que es desitja que es continuen verificant les propietats de les potències:

$$a^m/a^n = a^{m-n}.$$

$$a^m/a^{m+n} = a^{m-(m+n)} = a^{-n} = 1/a^n.$$

Exemple:

- 5^{-2} és el mateix que $(1/5)^2$.

2. PROPIETATS DE LES POTÈNCIES. EXEMPLES:

Les propietats de les potències són:

El producte de potències de la mateixa base és igual a una altra potència de la mateixa base i com a exponent la suma dels exponents.

$$a^n \cdot a^m = a^{m+n}$$

Propietats de les Potències
$a^m . a^n = a^{n+m}$
$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
$(a^m)^n = a^{n.m}$
$(a.b)^n = a^n.b^n$
$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Exemple:

- $3^2 \cdot 3^4 = (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 3^{4+2} = 3^6$

El quocient de potències de la mateixa base és igual a una altra potència que té com a base la mateixa, i com a exponent la diferència dels exponents.

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

Exemple:

- $5^5/5^3 = (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) / (5 \cdot 5 \cdot 5) = 5^{5-3} = 5^2$

La potència d'una potència és igual a la potència l'exponent de la qual és el producte dels exponents.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Exemple:

- $(7^2)^3 = (7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7) = 7^6$

El producte de potències de distinta base amb el mateix exponent és igual a una altra potència la base de la qual és el producte de les bases i l'exponent del qual és el mateix:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Exemple:

- $3^2 \cdot 5^2 = (3 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 5) = (3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5) = (3 \cdot 5)^2$

El quocient de potències de distinta base i el mateix exponent és igual a una altra potència la base de la qual és el quocient de les bases i l'exponent del qual és el mateix.

$a^n/b^n = (a/b)^n$

Exemple:

- $8^3/7^3 = (8 \cdot 8 \cdot 8) / (7 \cdot 7 \cdot 7) = (8/7) \cdot (8/7) \cdot (8/7) = (8/7)^3$

Totes aquestes propietats de les potències que s’han citat per als exponents naturals continuen sent vàlides per a altres exponents: negatius, fraccionaris…

Activitats resoltes:

- Calcula les següents operacions amb potències:

  a) $3^5 \cdot 9^2 = 3^5 \cdot (3^2)^2 = 3^5 \cdot 3^4 = 3^9$

  b) $(2^3)^3 = 2^{3 \cdot 3} = 2^9$

  c) $5^3 / 5^0 = 5^{3-0} = 5^3$

  d) $3^4/3^{-5} = 3^{4-(-5)} = 3^{4+5} = 3^9$

Activitats proposades:

2. Efectua les següents operacions amb potències:

a) $(x + 1) \cdot (x + 1)^3$ b) $(x + 2)^3 : (x + 2)^4$ c) $[(x - 1)^3]^4$ d) $(x + 3) \cdot (x + 3)^{-3}$

3. POTÈNCIES D’EXPONENT RACIONAL. RADICALS

3.1. Potències d’exponent racional. Definició.

Es defineix la potència d’exponent fraccionari i base *a* com:

$$a^{r/s} = \sqrt[s]{a^r}$$

Exemple:

- Exponents fraccionaris: $(16)^{3/4} = \sqrt[4]{16^3}$

Els propietats esmentades per a les potències d’exponent enter són vàlides per a les potències d’exponents fraccionaris

Exemple:

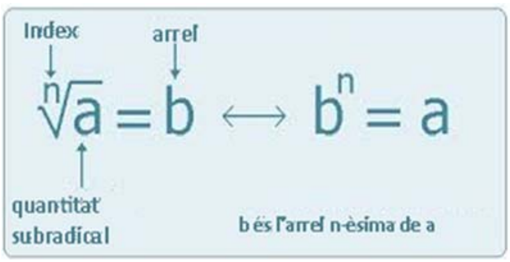
- $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

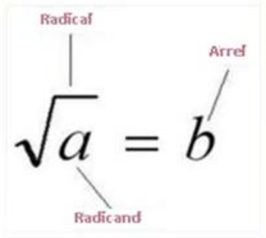
3.2. Radicals. Definició. Exemples

Es defineix arrel **n-èsima** d’un nombre *a*, com el nombre *b* que verifica la igualtat $b^n = a$.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Sent: *n* és **l’índex**, *a* és la quantitat **subradical** o **radicand** i *b* és l’arrel **n-èsima** de *a*





Important: *n* sempre és positiu. No hi ha l'arrel –5.

> **La radicació d'índex *n* és *l'operació inversa de la potenciació d'exponent n*.**
>
> **Per la definició d'arrel *n*-èsima d'un nombre *a* es verifica que si *b* és arrel, aleshores:**
>
> $$\sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^n = a$$

Observa que es pot definir: $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ja que: $(a^{1/n})^n = a^{(1/n)\cdot n} = a^1 = a$

Com $a^{1/n}$ satisfà la mateixa propietat que *b* han de ser considerats com el mateix nombre.

Exemples:

- $(16)^{3/4} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{(2^4)^3} = \sqrt[4]{2^{12}} = (2)^{12/4} = 2^3 = 8$
- $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

3.3. Propietats dels radicals. Exemples.

Les propietats de les potències enunciades anteriorment per al cas d'exponents fraccionaris, també es poden aplicar a les arrels:

a) Si multipliquem l'índex d'una arrel *n* per un nombre *p*, i al mateix temps elevem el radicand a aqueix nombre *p* el valor de l'arrel no varia.

Es verifica $\forall p \neq 0$es verifica que :

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n\cdot p]{a^p}$$

Demostració:

$$\sqrt[n\cdot p]{a^p} = a^{\frac{p}{p\cdot n}} = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Exemple:

- $\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{25}$Es verifica ja que segons acabem de veure:$\sqrt[3]{5} = \sqrt[3\cdot 2]{5^2} = \sqrt[6]{25}$

b) Per a multiplicar arrels del mateix índex, es multipliquen els radicands i es troba l'arrel d'índex comú:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Demostració:

Segons les propietats de les potències d'exponents enters es verifica que:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

c) Per a dividir arrels del mateix índex es divideixen els radicands i es troba l'arrel de l'índex comú. Suposem que $b \neq 0$ perquè tinga sentit el quocient.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Demostració:

Si escribim:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Exemple:

$$\frac{\sqrt[3]{a^7}}{\sqrt[3]{a^4}} = \sqrt[3]{\frac{a^7}{a^4}} = \sqrt[3]{a^{7-4}} = \sqrt[3]{a^3} = a$$

d) Per a elevar un radical a una potència n'hi ha prou amb elevar el radicand a la dita potència:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Demostració:

Aquesta propietat la podem demostrar com segueix:

$$(\sqrt[n]{a})^m = (a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

e) L'arrel d'una arrel és igual a l'arrel l'índex del qual és el producte dels índexs:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$$

$m > 0$ y $m \in Z$

Demostració:

Es verifica que:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Exemple:

- $\sqrt[3]{\sqrt[5]{x^{15} \cdot y^{30}}} = \sqrt[15]{x^{15} \cdot y^{30}} = (x^{15} \cdot y^{30})^{\frac{1}{15}} = (x^{15})^{\frac{1}{15}} \cdot (y^{30})^{\frac{1}{15}} = x \cdot y^2$

Activitats resoltes:

- Redueix a índex comú (6) els següents radicals: $\sqrt[3]{536}$; $\sqrt{70}$

  $\sqrt[3]{536} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 67} = \sqrt[6]{(2^3 \cdot 67)^2}$

  $\sqrt{70} = \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 5^3 \cdot 7^3}$

- Trau factors fora de l'arrel: $\sqrt{108}$

  $\sqrt{108} = \sqrt{2^2 \cdot 3^3} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 3} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

- Escriu els següents radicals com una única arrel:

$$\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{24}} = \frac{\sqrt[6]{3^3} \cdot \sqrt[6]{4^2}}{\sqrt[6]{2^3 \cdot 3}} = \sqrt[6]{\frac{3^3 \cdot 2^4}{2^3 \cdot 3}} = \sqrt[6]{2 \cdot 3^2} = \sqrt[6]{18}$$

Activitats proposades:

3. Calcula:

a) $(\sqrt[3]{a^6 \cdot b^9})^2$ b) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ c) $(\sqrt[12]{(x+1)^3})^2$

4. Troba:

a) $\sqrt{\sqrt[4]{\frac{x}{5y}}} : \sqrt{\sqrt[4]{\frac{3x}{y^2}}}$ b) $\sqrt{\frac{5}{3}} : \sqrt{\frac{2}{3}}$

5. Realitza les següents operacions amb radicals:

a) $\sqrt[4]{\frac{x}{5y}} : \sqrt[4]{\frac{3x}{y^2}}$ b) $(\sqrt[5]{(x+3)^2})^3$

4. OPERACIONS AMB RADICALS: RACIONALITZACIÓ.

4.1. Operacions. Definició. Exemples

Suma i resta de radicals:

RECORDA:

Per a sumar i restar radicals aquests deuen de ser idèntics:

$$\sqrt{4}+\sqrt{9}=2+3=5\neq\sqrt{13}$$

Per a sumar aquests radicals cal sumar les seues expressions aproximades.

No obstant això l'expressió:

$$7\sqrt{5}+11\sqrt{5}-\sqrt{5}=17\sqrt{5}$$

si es pot sumar i restar ja que els seus radicals són idèntics

PER A PODER SUMAR O RESTAR RADICALS ÉS NECESSARI QUE TINGUEN EL MATEIX ÍNDEX I EL MATEIX RADICAND.

NOMÉS QUAN AÇÒ SUCCEEIX PODEM SUMAR O RESTAR ELS COEFICIENTS O PART NUMÈRICA DEIXANT EL MATEIX RADICAL

Exemple:

- $\sqrt{18}+\sqrt{8}+\sqrt{1250}=\sqrt{2\cdot 3^2}+\sqrt{2^3}+\sqrt{2\cdot 5^4}$

Per les propietats dels radicals podem traure factors del radical deixant que tots els radicals siguen idèntics:

$$\sqrt{2\cdot 3^2}+\sqrt{2^2\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 5^2\cdot 5^2}=3\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{2}+5\cdot 5\cdot\sqrt{2}=3\sqrt{2}+2\sqrt{2}+25\sqrt{2}$$
$$=(3+2+25)\sqrt{2}=30\sqrt{2}$$

Producte de radicals:

Per a multiplicar radicals hem de convertir-los en radicals del mateix índex i multiplicar els radicands:

1.- Calculem el m.c.m.de els índexs

2.- Dividim el m.c.m entre cada índex i el multipliquem per l'exponent del radicand i simplifiquem

Exemple:

- $\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[3]{7}=\sqrt[15]{8^3\cdot 7^5}=\sqrt[15]{(2^3)^3\cdot 7^5}=\sqrt[15]{2^9\cdot 7^5}$

Divisió de radicals:

Per a dividir radicals hem d’aconseguir que tinguen el mateix índex, com en el cas anterior i després dividir els radicals.

Exemple:

- $\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{24}} = \sqrt[6]{\frac{3^3\cdot 4^2}{24}} = \sqrt[6]{\frac{3^3\cdot(2^2)^2}{2^3\cdot 3}} = \sqrt[6]{\frac{3^3\cdot 2^4}{2^3\cdot 3}} = \sqrt[6]{3^2\cdot 2^1} = \sqrt[6]{18}$

Arrel d’una arrel:

És l’arrel l’índex del qual és el producte dels índexs (segons es va demostrar en la propietat e), i després simplifiquem extraient factors fora el radical si es pot.

Exemple:

- $\sqrt{\sqrt[3]{x^7\cdot y^5}} = \sqrt[6]{x^7\cdot y^5} = \sqrt[6]{x^6\cdot x^1\cdot y^5} = x\cdot\sqrt[6]{x\cdot y^5}$

RECORDA:

Per a extraure factors del radical s’ha de complir que l’exponent del radicand siga major que l’índex de l’arrel.

2 opcions:

- ✓ Es divideix l’exponent del radicand entre l’índex de l’arrel, el quocient indica el nombre de factors que extrac i el residu els que es queden dins.
- ✓ Es descomponen els factors del radicand elevant-los al mateix índex de l’arrel, cada exponent que coincidisca amb l’índex, eixirà el factor i els que sobren es queden dins

Exemple:

1. $\sqrt{20} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$
2. $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27\cdot 2} = \sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$
3. $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \sqrt{4} = 2$

- Extrau factors del radical:

$\sqrt{\frac{28x^5}{75y^3}} = \sqrt{\frac{2^2\cdot 7\cdot x^5}{3\cdot 5^2\cdot y^3}} = \sqrt{\frac{2^2\cdot 7\cdot x^2\cdot x^2\cdot x}{3\cdot 5^2\cdot y^2\cdot y}} =$

Els factors que podríem extraure serien el 2, *x, y* i el 5, de la manera següent:

Dividim l’exponent de la *x*, 5, entre 2, ja que l’índex de l’arrel és 2, i tenim de quocient 2 i de residu 1, per la qual cosa eixiran dos *x* i queda 1 dins.

De la mateixa manera per a la *y*, dividim 3 entre 2 i obtenim 1 de quocient i un de residu, per la qual cosa ix 1 *y* i es queda una altra dins.

Vegem: $\sqrt{\frac{2^2\cdot 7\cdot x^2\cdot x^2\cdot x}{3\cdot 5^2\cdot y^2\cdot y}} = \frac{2x^2}{5y}\sqrt{\frac{7y}{3y}}$

Activitats proposades:

6. Escriu davall un sol radical i simplifica: $\sqrt{2\cdot\sqrt{3\cdot\sqrt{4\cdot\sqrt{5\cdot\sqrt{6\cdot\sqrt{8}}}}}}$

7. Calcula i simplifica: $\frac{\sqrt[4]{x^3\cdot y^3}\cdot\sqrt[3]{x^4\cdot y^5}}{\sqrt[6]{x^5\cdot y^4}}$

8. Realitza l'operació següent: $\sqrt{x^3}+\sqrt{16x^7}+\sqrt{x}$

9. Calcula i simplifica: $\sqrt{\frac{3}{x}}\cdot\sqrt[3]{\frac{x^2}{8}}\cdot\sqrt[4]{\frac{9}{5}}$

4.2. Racionalització. Exemples.

Racionalitzar una fracció algebraica consisteix a trobar una altra equivalent que no tinga radicals al denominador.

Per fer això, cal multiplicar numerador i denominador per l'expressió adequada.

Quan en la fracció només hi ha monomis, es multiplica i divideix la fracció per un mateix nombre per a aconseguir completar en el denominador una potència del mateix exponent que l'índex de l'arrel.

Exemple:

- $\sqrt[4]{\frac{6}{x^3}}$

Multipliquem i dividim per $\sqrt[4]{x}$ per a obtindre en el denominador una quarta potència i llevar el radical.

$$\sqrt[4]{\frac{6}{x^3}}=\frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{x^3}}=\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}}\cdot\frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{x^3}}=\frac{\sqrt[4]{6x}}{\sqrt[4]{x^4}}=\frac{\sqrt[4]{6x}}{x}$$

Quan en la fracció apareixen en el denominador binomis amb arrels quadrades, es multiplica i es divideix per un factor que proporcione una diferència de quadrats, aquest factor és el factor conjugat del denominador.

$\sqrt{a}+\sqrt{b}$, el seu conjugat és: $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

Un altre exemple: $(\sqrt{a}+b)$ el seu conjugat és: $(\sqrt{a}-b)$

Exemple:

- $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

Multipliquem pel conjugat del denominador que en aquest cas és: $\sqrt{3}-\sqrt{5}$

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{5})}=\frac{3\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{3-5}=-\frac{3\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{2}$$

Activitats proposades:

10. Racionalitza l'expressió:$\frac{x+3y}{\sqrt{x}-\sqrt{2y}}$

11. Racionalitza: $\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

12. Racionalitza:$\frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{\sqrt{5}-2}$

5. NOTACIÓ CIENTÍFICA.

5.1. Definició. Exemples.

La notació científica s'utilitza per a escriure nombres molt grans o molt xicotets. L'avantatge que té sobre la notació decimal és que les xifres se'ns donen comptades, amb la qual cosa l'orde de magnitud del nombre és evident.

Un nombre posat en notació científica consta de:

- ✓ Una part entera formada per només una xifra que no és el zero (la de les unitats).
- ✓ La resta de les xifres significatives posades com a part decimal.
- ✓ Una potència de base 10 que dóna l'orde de magnitud del nombre.

N* = *a,bcd*...·10*ⁿ

*sent: **a** la seua part entera (només una xifra)*

b c d... la seua part decimal

10^n La potència entera de base 10

Si *n* és positiu, el nombre *N* és "gran"

I si *n* és negatiu, llavors *N* és "xicotet"

Exemples:

- $2{,}48 \cdot 10^{14}$ (= 248000000000000): Nombre gran.
- $7{,}561 \cdot 10^{-18}$ (= 0,000000000000000007561): Nombre xicotet.

5.2. Operacions amb notació científica

Per a operar amb nombres donats en notació científica es procedix de forma natural, tenint en compte que cada nombre està format per dos factors: l'expressió decimal i la potència de base 10.

El producte i el quocient són immediats, mentres que la suma i la resta exigeixen preparar els sumands de manera que tinguen la mateixa potència de base 10 i, així poder traure factor comú.

Exemples:

a) $(5{,}24 \cdot 10^6) \cdot (6{,}3 \cdot 10^8) = (5{,}24 \cdot 6{,}3) \cdot 10^{6+8} = 33{,}012 \cdot 10^{14} = 3{,}3012 \cdot 10^{15}$

b) $\frac{5{,}24 \cdot 10^6}{6{,}3 \cdot 10^{-8}} = (5{,}24 : 6{,}3) \cdot 10^{6-(-8)} = 0{,}8317 \cdot 10^{14} = 8{,}317 \cdot 10^{13}$

RECORDA:

✓ Per a **multiplicar** nombres en notació científica, es multipliquen les parts decimals i se sumen els exponents de la potència de base 10.

✓ Per a **dividir** nombres en notació científica, es divideixen les parts decimals i es resten els exponents de la potència de base 10.

✓ Si fa falta es multiplica o es divideix el nombre resultant per una potència de 10 per a deixar amb una sola xifra en la part entera.

c) $5{,}83 \cdot 10^9 + 6{,}932 \cdot 10^{12} – 7{,}5 \cdot 10^{10} = 5{,}83 \cdot 10^9 + 6932 \cdot 10^9 – 75 \cdot 10^9 = (5{,}83 + 6932 – 75) \cdot 10^9 =$

$= 6862{,}83 \cdot 10^9 = 6{,}86283 \cdot 10^{12}$

RECORDA:

✓ Per a **sumar o restar** nombres en notació científica, cal posar els nombres amb la mateixa potència de base 10, multiplicant o dividint per potències de base 10.

✓ Es trau factor comú la potència de base 10 i després se sumen o resten els nombres decimals quedant un nombre decimal multiplicat per la potència de 10.

✓ Finalment si fa falta es multiplica o es divideix el nombre resultant per una potència de 10 per a deixar en la part entera una sola xifra.

Activitats proposades:

13. Calcula:

a) $(7{,}83 \cdot 10^{-5}) \cdot (1{,}84 \cdot 10^{13})$ b) $(5{,}2 \cdot 10^{-4}) : (3{,}2 \cdot 10^{-6})$

14. Efectua i expressa el resultat en notació científica:

a) $\frac{3 \cdot 10^{-5} + 7 \cdot 10^{-4}}{10^6 - 5 \cdot 10^5}$ b) $\frac{7{,}35 \cdot 10^4}{5 \cdot 10^{-3}} + 3{,}2 \cdot 10^7$

15. Realitza les següents operacions i efectua el resultat en notació científica:

a) $(4{,}3 \cdot 10^3 – 7{,}2 \cdot 10^5)^2$ b) $(7{,}8 \cdot 10^{-7})^3$

6. LOGARITMES:

6.1. Definició:

El **logaritme** d'un nombre ***m***, positiu, de **base a** , positiva i diferent de u, és l'exponent a què cal elevar la base per a obtindre el dit nombre.

$$\text{Si } a > 0,\ \log_a m = z \Leftrightarrow m = a^z$$

Els logaritmes més utilitzats són els logaritmes **decimals** o logaritmes de base 10 i els logaritmes **neperians** (anomenats així en honor a **Neper**) o logaritmes en base *e* (e és un nombre irracional les primeres xifres del qual són: *e* = 2,71828182…). Ambdós tenen una notació especial:

$$\log_{10} m = \log m \qquad \log_e m = \ln m$$

Exemples:

- $\log_3 9 = 2 \Leftrightarrow 9 = 3^2$
- $\log_2 16 = 4 \Leftrightarrow 16 = 2^4$
- $\log_{1000} = 3 \Leftrightarrow 1000 = 10^3$
- $\ln e = 1 \Leftrightarrow e = e^1$

Com a **conseqüències immediates** de la definició es dedueix que:

✓ El logaritme d'1 és zero (en qualsevol base)

Demostració:

Com $a^0 = 1$, per definició de logaritme, tenim que $\log_a 1 = 0$

Exemples:

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_2 1 = 0$
- $\log_3 1 = 0$

✓ El logaritme de la base és 1.

Demostració:

Com $a^1 = a$, per definició de logaritme, tenim que $\log_a a = 1$

Exemples:

- $\log_a a = 1$
- $\log_3 3 = 1$
- $\log_5 5 = 1$
- $\log_3 3^5 = 5$

✓ El logaritme d'1 és zero (en qualsevol base)

✓ El logaritme de la base és 1.

✓ Només tenen logaritmes els nombres positius.

✓ Només tenen logaritmes els nombres positius, però pot haver-hi logaritmes negatius. Un logaritme pot ser un nombre natural, enter, fraccionari i fins i tot un nombre irracional

En ser la base un nombre positiu, la potència mai ens pot donar un nombre negatiu ni zero.

- log_2 (–4) No existeix
- log_2 0 No existeix.
- $log\ 100 = 2 \Leftrightarrow 100 = 10^2$.
- $log\ 0{,}1 = -1 \Leftrightarrow 0{,}1 = 10^{-1}$.
- $log\ \sqrt{10} = 1/2 \Leftrightarrow \sqrt{10} = 10^{1/2}$.
- $log\ 2 = 0{,}301030\ldots$.

Activitats resoltes:

- $\log_3 81 = x \Leftrightarrow 3^x = 81 \Rightarrow 3^x = 3^4 \Rightarrow x = 4$
- $\log_2 128 = x \Leftrightarrow 2^x = 128 \Rightarrow 2^x = 2^7 \Rightarrow x = 7$
- $\log_3 \sqrt{243} = x \Leftrightarrow 3^x = (243)^{1/2} \Rightarrow 3^x = (3^5)^{1/2} \Rightarrow x = 5/2$

Activitats proposades:

15. Copia la taula adjunta en el teu quadern i emparella cada logaritme amb la seua potència:

$2^5 = 32$	$\log_5 1 = 0$	$2^0 = 1$	$5^2 = 25$
$5^1 = 5$	$\log_2 2 = 1$	$5^0 = 1$	$\log_2 32 = 5$
$2^1 = 2$	$\log_2 1 = 0$	$\log_5 5 = 1$	$\log_5 25 = 2$
$2^4 = 16$	$\log_3 81 = 4$	$\log_2 16 = 4$	$3^4 = 81$

16. Calcula utilitzant la definició de logaritme:

a) $\log_2 2^5$ b) $\log_5 25$ c) $\log_2 2^{41}$ d) $\log_5 5^{30}$

17. Calcula utilitzant la definició de logaritme:

a) $\log_2 27$ b) $\log_{10} 100$ c) $\log_{1/2}(1/4)$ d) $\log_{10} 0'0001$

18. Calcula x utilitzant la definició de logaritme:

a) $\log_2 64 = x$ b) $\log_{1/2} x = 4$ c) $\log_x 25 = 2$

19. Calcula utilitzant la definició de logaritme:

a) $\log_2 64 + \log_2 1/4 - \log_3 9 - \log_2 \sqrt{2}$

b) $\log_2 1/32 + \log_3 1/27 - \log_2 1$

6.2. Propietats dels logaritmes:

1. El logaritme d'un **producte** és igual a la suma dels logaritmes dels seus factors:

$$\log_a(x\cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Demostració:

Anomenem A = $\log_a x$ i B = $\log_a y$. Per definició de logaritmes sabem que:

$A = \log_a x \Leftrightarrow a^A = x$

$B = \log_a y \Leftrightarrow a^B = y$

Multipliquem: $x\cdot y = a^A \cdot a^B = a^{A+B} \Leftrightarrow \log_a x\cdot y = A + B = \log_a x + \log_a y$.

Exemple:

- $\log_a(2\cdot 7) = \log_a 2 + \log_a 7$

2. El logaritme d'un **quocient** és igual al logaritme del dividend menys el logaritme del divisor:

$$\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$$

Demostració:

Anomenem A = $\log_a x$ y B = $\log_a y$. Per definició de logaritmes sabem que:

$A = \log_a x \Leftrightarrow a^A = x$

$B = \log_a y \Leftrightarrow a^B = y$

Dividim: $x / y = a^A / a^B = a^{A-B} \Leftrightarrow \log_a(x / y) = A - B = \log_a x - \log_a y$.

Exemple:

- $\log_a (75/25) = \log_a 75 - \log_a 25$

3. El logaritme d'una **potència** és igual a l'exponent multiplicat pel logaritme de la base de la potència:

$$\log_a x^y = y.\log_a x$$

Demostració:

Per definició de logaritmes sabem que:

$A = \log_a x \Leftrightarrow a^A = x \Leftrightarrow (a^A)^y = x^y = a^{Ay} \Leftrightarrow Ay = \log_a x^y = y \log_a x$

Exemple:

- $\log_a 2^5 = 5\cdot\log_a 2$

4. El logaritme d'una **arrel** és igual al logaritme del radicand dividit per l'índex de l'arrel:

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\log_a x$$

Demostració:

Tenint en compte que una arrel és una potència d'exponent fraccionari.

Exemple:

- $\log_a \sqrt[3]{27} = (\frac{\log_a 27}{3})$

5. **Canvi de base:** El logaritme en base *a* d'un nombre *x* és igual al quocient de dividir el logaritme en base *b* de *x* pel logaritme en base *b* de *a*:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Aquesta expressió es coneix amb el nom de ***"fórmula del canvi de base"***. Les calculadores només permeten el càlcul de logaritmes decimals o neperians, per la qual cosa, quan volem utilitzar la calculadora per a calcular logaritmes en altres bases, necessitem fer ús d'aquesta fórmula.

Exemple:

- $\log_2 11 = \frac{\log 11}{\log 2} = \log 11 - \log 2 = 3{,}45943162$

Activitats resoltes:

- Desenrotllar les expressions que s'indiquen:

$$\log_5[\frac{a^3 \cdot b^2}{c^4}] = \log_5[a^3 \cdot b^2] - \log_5 c^4 = \log_5 a^3 + \log_5 b^2 - \log_5 c^4 = 3\log_5 a + 2\log_5 b - 4\log_5 c$$

$$\log(\frac{x^2}{y^5 \cdot z})^3 = 3\log(\frac{x^2}{y^5 \cdot z}) = 3[\log x^2 - \log(y^5 \cdot z)] = 3(2\log x - 5\log y - \log z)$$
$$= 6\log x - 15\log y - 3\log z$$

- Escriu amb un únic logaritme:

$$3\log_2 a + \frac{1}{2}\log_2 x - \frac{2}{3}\log_2 b + 2\log_2 c - 4 = \log_2 a^3 + \log_2\sqrt{x} + \log_2 c^2 - \log_2\sqrt[3]{b^2} - \log_2 2^4 =$$
$$=(\log_2 a^3 + \log_2\sqrt{x} + \log_2 c^2) - (\log_2\sqrt[3]{b^2} + \log_2 2^4) = \log_2(a^3 \cdot \sqrt{x} \cdot c^2) - \log_2(\sqrt[3]{b^2} \cdot 2^4)$$
$$= \log_2(\frac{a^3 \cdot \sqrt{x} \cdot c^2}{\sqrt[3]{b^2} \cdot 2^4})$$

- Expressa els logaritmes dels següents nombres en funció de log2 = 0,301030:

a) $4 \Rightarrow \log 4 = \log 2^2 = 2\cdot\log 2 = 2\cdot 0{,}301030 = 0{,}602060$

b) $1024 \Rightarrow \log 1024 = \log 2^{10} = 10\cdot\log 2 = 10 \cdot 0{,}301030 = 3{,}01030$

Activitats proposades:

20. Desenrotlla les expressions que s'indiquen:

a) $\ln\sqrt[5]{\frac{4x^2}{e^3}}$ b) $\log(\frac{a^3 \cdot b^2}{c^4 \cdot d})$

21. Expressa els logaritmes dels nombres següents en funció de log 3 = 0,4771212

a) 81 b) 27 c) 59049

22. Simplifica l'expressió següent: $\frac{1}{2}\log m - 2\log t - \log p + \frac{5}{2}\log h$

CURIOSITATS. REVISTA

POTÈNCIES D'11

Les potències d'11

Les potències enteres d'11 no deixen de cridar la nostra atenció i poden ser incloses entre els productes curiosos:

11 x 11 = 121

11 x 11 x 11 = 1331

11 x 11 x 11 x 11 = 14641

Disposició no menys interesant presenten els nombres 9, 99, 999, etc. quan són elevats al quadrat:

$$9^2 = 81$$

$$99^2 = 9801$$

$$999^2 = 998001$$

$$9999^2 = 99980001$$

Utilitza la calculadora o l'ordinador per a calcular $\mathbf{26^{378}}$.

¡Dóna error! No ix. És necessari emprar logaritmes! Apliquem logaritmes decimals a l'expressió:

$$x = 26^{378} \Leftrightarrow \log(x) = 378 * \log(26)$$

Això sí sap calcular-lo la calculadora o l'ordinador. Dóna:

$$\log(x) = 534{,}86 \Leftrightarrow x = 10^{534{,}86} = 10^{534} \cdot 10^{0{,}86} = 10^{534} \cdot 7{,}24.$$

Solució:

$$\mathbf{26^{378} = 7{,}24 \cdot 10^{534}}.$$

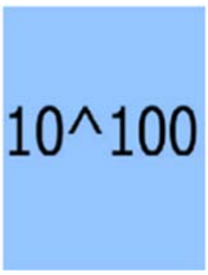
És un nombre tan gran que ni l'ordinador ni la calculadora sap calcular-lo directament i és necessari emprar logaritmes. Repeteix el procés amb $\mathbf{50^{200}}$ i comprova que ix $\mathbf{6{,}3 \cdot 10^{339}}$.

NOmBRes grans

Els primers nombres que s'acosten a la nostra definició del que és infinit els podem prendre de la mateixa naturalesa, comptant elements molt xicotets que existeixen en abundància, com són **les gotes del mar** (1 x 10^{25} gotes), **els grans de sorra en totes les platges del món** (5,1 x 10^{23} grans) o el **nombre d'estreles de tot l'Univers conegut** (3 x 10^{23} estreles). Podem inclús prendre el nombre de partícules elementals de l'univers (1 x 10^{80}) si volem obtindre un nombre més gran.

Si volem trobar un nombre més gran **"Googol"**, acunyat per un xiquet de 9 anys en 1939, posseeix 100 zeros, i va ser creat amb l'objectiu de donar-nos una aproximació cap al que significa l'infinit. Però hui en dia es coneixen quantitats (molt) més grans que el Googol.

Tenim per exemple, els **nombres primers de la forma de Mersenne**, que han pogut ser trobats gràcies a la invenció de les computadores. En 1952, el nombre primer de Mersenne més gran era $(2\cdot10^{17})–1$, un nombre primer amb 39 dígits, i aqueix mateix any, les computadores van provar que el nombre $(2\cdot10^{521})–1$ és també primer, i que el dit nombre posseeix 157 dígits, sent aquest molt més gran que un Googol



RESUM

Potències d'exponent natural i enter	$a^{-n}= 1/a^n$	$(-3)^2 = (-3).(-3) = 9$ $(-\frac{1}{2})^{-2} = (-2)^{-2} = 4$
Propietats de les potències	$a^n.a^m=a^{m+n}$ $a^n:a^m=a^{n-m}$ $(a^n)^m=a^{n.m}$ $a^n.b^n=(a.b)^n$ $a^n/b^n=(a/b)^n$	$(-3)^3\cdot(-3)^3 = (-3)^{3+3} = (-3)^6$ $5^3 : 5^2 = 5^{2-1} = 5^1$ $(-3^5)^2 = (-3)^{5.2} = (-3)^{10}$ $(-2)^3\cdot(-5)^3 = ((-2)\cdot(-5))^3$ $3^4/2^4 = (3/2)^4$
Potències d'exponent racional. Radicals	$a^{r/s} = \sqrt[s]{a^r}$	$(16)^{3/4} = \sqrt[4]{16^3}$
Propietats dels radicals	$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n\cdot p]{a^p}\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}\,\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} =$ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$	$\sqrt[3\cdot 2]{5^2} = \sqrt[6]{25}\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3 \cdot 2}$ $= \sqrt[3]{6}\frac{\sqrt[3]{a^7}}{\sqrt[3]{a^4}} = \sqrt[3]{\frac{a^7}{a^4}}$ $= \sqrt[3]{a^{7-4}} = \sqrt[3]{a^3}$ $= a(\sqrt[5]{2})^3$ $= \sqrt[5]{2^3}\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[3\cdot 2]{5}$ $= \sqrt[6]{5}$
Racionalització de radicals	Es suprimeixen les arrels del denominador. Es multiplica numerador i denominador per l'expressió adequada (conjugat del denominador, radical del numerador, etc.)	$\frac{1}{\sqrt[3]{25}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5^2}}$ $= \frac{\sqrt[3]{5}}{5}\frac{1}{5-\sqrt{3}} = \frac{5+\sqrt{3}}{(5-\sqrt{3}) \cdot (5+\sqrt{3}}$ $\frac{5+\sqrt{3}}{5^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{5+\sqrt{3}}{22}$
Notació científica	Es suprimeixen les arrels del denominador. Es multiplica numerador i denominador per l'expressió adequada (conjugat del denominador, radical del numerador, etc.)	$5{,}83\cdot10^9+6{,}932\cdot10^{12}-7{,}5\cdot10^{10}=$ $5{,}83\cdot10^9+6932\cdot10^9-75.10^9 =(5{,}83+6932-75)\cdot10^9= 6862{,}83\cdot10^9= 6{,}86283\cdot10^{12}$ $(5{,}24\cdot10^6)\cdot(6{,}3\cdot10^8)=33{,}012\cdot10^{14}=3{,}32012\cdot10^{15}$ $\frac{5{,}24 \cdot 10^6}{6{,}3 \cdot 10^{-8}} = (5{,}24{:}\,6{,}3) \cdot 10^{6-(-8)}$ $= 0{,}8317 \cdot 10^{14}$
Logaritmes	*Si a > 0,* $\log_a m = z \Leftrightarrow m = a^z$ $\log_a (x\cdot y) = \log_a x + \log_a y$ $\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$ $\log_a x^y = y.\log_a x$	$\log_a (75/25) = \log_a 75 - \log_a 25$ $\log_a 2^5= 5\cdot\log_a 2$ $\log_a \sqrt[3]{27} = (\frac{\log_a 27}{3})$

EXERCICIS I PROBLEMES:

Potències:

1. Expressa en forma exponencial**:**

a) $\frac{1}{64}$ **b)** $\frac{t}{t^5}$ **c)** $\left(\frac{1}{z+1}\right)^2$ **d)** $\frac{27^{-2}}{81^{-5}}$ **e)** $\frac{x^{-2}\cdot y^{-7}}{x^8\cdot y^{-4}}$

2. Calcula:

a) $4^{\frac{1}{2}}$ b) $125^{\frac{1}{3}}$ c) $625^{\frac{5}{6}}$ d) $(64^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{6}}$ e) $(8^{\frac{-4}{3}})^{\frac{2}{5}}$

Radicals:

3. Expressar en forma de radical:

a) $x^{\frac{7}{9}}$ b) $(m^5\cdot n^3)^{\frac{1}{3}}$ c) $[(x^2)^{\frac{1}{3}}]^{\frac{1}{5}}$ d) $a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{3}}$

4. Expressar en forma exponencial:

a) $(\sqrt[3]{x^2})^5$ b) $\sqrt{\frac{a^{13}}{a^6}}$ c) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^k}}$ d) $\sqrt[3]{x^{(5x+1)}}$ e) $\sqrt[4]{(x^2)^{(3x+2)}}$ f) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{(x^2)^{\frac{1}{5}}}}}$

5. Expressa com a potència única:

a) $\frac{\sqrt[3]{a^8}}{a^2}$ b) $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt[3]{25}}$ c) $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a\sqrt{a}}$ d) $2\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ e) $a\cdot\sqrt{\frac{1}{a}}$ f) $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}$ g) $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a^3}\cdot\frac{a^3}{\sqrt{a}}$

Propietats dels radicals:

6. Simplifica:

a) $\sqrt[9]{64}$ b) $\frac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt[4]{a^3\cdot b^5\cdot c}}{\sqrt{a\cdot b^3\cdot c^3}}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^5\cdot x^7}}$ e) $(\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}})^8$ f) $\frac{\sqrt[4]{x^3\cdot y^3\cdot\sqrt[3]{x^4\cdot y^5}}}{\sqrt[6]{x^5\cdot y^4}}$ g) $\sqrt[5]{x^2\cdot 3\cdot\sqrt[10]{x^2\cdot\sqrt{x^3}}}$

7. Extraure factors del radical:

a) $\sqrt[3]{32x^4}$ b) $\sqrt[3]{81a^3b^5c}$ c) $(\sqrt{\sqrt{2}})^{10}$ d) $\sqrt[4]{\frac{25a^2b}{c^6}}$ d) $\sqrt{\frac{8a^5}{b^4}}$ e) $\sqrt{\frac{28x^5}{75y^3}}$ f) $\sqrt{\frac{32a^3}{45b^4}}$

8. Introduir factors en el radical:

a) $2\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}$ b) $3\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}$ c) $2\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ d) $2\cdot\sqrt[4]{\frac{5}{12}}$ e) $\frac{1}{2}\sqrt{12}$ f) $\frac{2}{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$

Operacions amb radicals:

a) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{b^4}\cdot\sqrt[3]{b^2}$ b) $\sqrt{5a}\cdot\sqrt{10ab}\cdot\sqrt{8a^3b}\cdot\sqrt{a}$ c) $\frac{\sqrt[6]{20}}{\sqrt[4]{10}}$ d) $\sqrt[4]{\frac{5}{12}}:\sqrt[4]{\frac{20}{3}}$ e) $\sqrt{\frac{3}{2}}:\sqrt{\frac{2}{3}}$ f) $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}$

9. Efectua:

a)$\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{2}-\sqrt{8}$ b)$\sqrt{50a}-\sqrt{18a}$ c)$\sqrt{320}+\sqrt{80}-\sqrt{500}$ d)$\sqrt{\frac{7}{64}}+\sqrt{\frac{7}{4}}$

e) $5\sqrt{96}-\sqrt[5]{\frac{3}{32}}$ f) $\sqrt[3]{\frac{135}{8}}-\sqrt[3]{\frac{5}{8}}$ g)$\sqrt{150}+\sqrt{54}-\sqrt{24}$

Racionalitzar

10. Racionalitza els denominadors:

a)$\frac{5}{\sqrt[3]{2}}$ b)$\frac{3}{2-\sqrt{3}}$ c)$\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ d)$\frac{6}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$f)$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

11. Racionalitza i simplifica:

a) $\frac{11}{2\cdot\sqrt{5}+3}$ b)$\frac{\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{2}+3}$ c)$\frac{\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$ d)$\frac{\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2\cdot\sqrt{2}}$ e) $\frac{4\cdot\sqrt{15}-2\cdot\sqrt{21}}{2\cdot\sqrt{5}-\sqrt{7}}$ f)$\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$

12. Efectua i simplifica:

a) $(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}})\cdot(3+2\cdot\sqrt{2})$ b)$\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{\sqrt{5}-1}-3\sqrt{5}$ c) $(1-\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}):(1+\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}})$

Logaritmes

13. Desenrotlla els logaritmes següents:

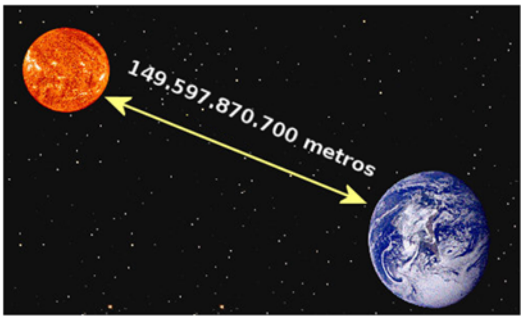
a) $\ln(\frac{\sqrt{x^3}}{y^2\cdot z^{-4}})$

b) $\log_3\sqrt[4]{\frac{(x\cdot y)^5}{z^{1/2}\cdot e^2}}$

14. Simplifica l'expressió següent:

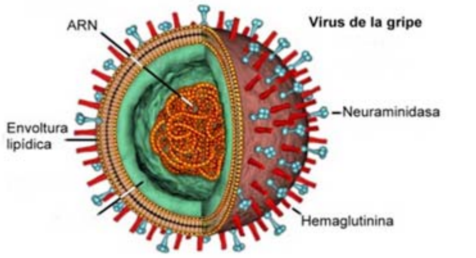
$$\log_2 5-3\log_2 a+\frac{7}{3}\log_2 9$$

Notació científica:



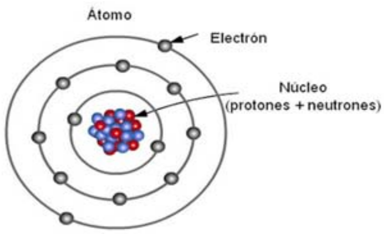
15. La massa del Sol és 330000 vegades la de la Terra, aproximadament, i aquesta és $5{,}98 \cdot 10^{21}$ t. Expressa en notació científica la massa del Sol, en quilograms.

16. El ser viu més xicotet és un virus que pes de l'orde de 10^{-18} g i el més gran és la balena blava, que pesa, aproximadament, 138 t. Quants virus serien necessaris per a aconseguir el pes de la balena?.



17. Els cinc països més contaminants del món (Estats Units, Xina, Rússia, Japó i Alemanya) van emetre 12 bilions de tones de CO_2 l'any 1995, quantitat que representa el 53,5 % de les emissions de tot el món. Quina quantitat de CO_2 es va emetre l'any 1995 en tot el món?

18. Expressa en notació científica:



a) Recaptació de les quinieles en una jornada de la lliga de futbol: 1628000 €

b) Tones de CO_2 que es van emetre a l'atmosfera en 1995 als Estats Units 5228,5 milers de milions.

c) Radi de l'àtom d'oxigen: 0,000000000066 m

19. Efectua i expressa el resultat en notació científica:

a) $(3 \cdot 10^{-7}) \cdot (8 \cdot 10^{18})$ b) $(4 \cdot 10^{-12}) \cdot (5 \cdot 10^{-3})$ c) $(5 \cdot 10^{12}) : (2 \cdot 10^{-3})$ d) $3{,}1 \cdot 10^{12} + 2 \cdot 10^{10}$ e) $(4 \cdot 10^{5})^{-2}$

20. Expressa en notació científica i calcula:

a) $(75800)^4 : (12000)^4$ b) $\frac{0{,}000541 \cdot 10318000}{1520000 \cdot 0{,}00302}$ c) $(0{,}0073)^2 \cdot (0{,}0003)^2$ d) $\frac{2700000-13000000}{0{,}00003-0{,}00015}$

21. Efectua i expressa el resultat en notació científica:

a) $\frac{3 \cdot 10^{-5}+7 \cdot 10^{-4}}{10^{6}-5 \cdot 10^{5}}$ b) $\frac{7{,}35 \cdot 10^{4}}{5 \cdot 10^{-3}} + 3{,}2 \cdot 10^{7}$ c) $(4{,}3 \cdot 10^{3} - 7{,}2 \cdot 10^{5})$

22. Que resultat és correcte de la següent operació expressada en notació científica: $(5{,}24.10^{6}) \cdot (8{,}32 \cdot 10^{5})$:

a) $4{,}35968 \cdot 10^{12}$ b) $43{,}5968 \cdot 10^{13}$ c) $4{,}35968 \cdot 10^{11}$ d) $4{,}35968 \cdot 10^{13}$

AUTOAVALUACIÓ

1. El nombre $8^{-4/3}$ val:

a) un setzé b) Dos c) Un quart d) Un mitjà.

2. Expressa com a potència de base 2 cada un dels nombres que van entre parèntesis i efectua després l'operació:$(16^{1/4})\cdot(\sqrt[6]{4})\cdot(\frac{1}{8})$. El resultat és:

a) $2^{-1/3}$ b) $2^{-5/4}$ c) $2^{-5/3}$ d) 2^{-5}

3. El nombre: $\sqrt[3]{4\sqrt[3]{6\sqrt{8}}}$és igual a :

a) $6^{1/4}$ b) $2^{1/3}$ c) $2^{5/6}\cdot 6^{1/9}$ d) 2

4. Quin és el resultat de la següent expressió si l'expressem com a potència única?:$\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{16}}$

a) $\frac{1}{2\cdot\sqrt[3]{2}}$ b) $\frac{2}{2\cdot\sqrt[3]{2}}$ c) $\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{2}}$ d) $\sqrt[3]{2}$

5. Simplificant i extraient factors la següent expressió té un valor: $\sqrt{\sqrt{625a^6\cdot b^7\cdot c^6}}$

a)$5^3\cdot a\cdot b\cdot c^2\cdot\sqrt[4]{a\cdot b^2\cdot c}$ b)$5\cdot a^2\cdot b\cdot c\cdot\sqrt[4]{a^2\cdot b^3\cdot c^2}$ c)$5\cdot a\cdot b\cdot c\cdot\sqrt[4]{a^3\cdot b^2\cdot c^3}$ d) $5\cdot a\cdot b\cdot c\cdot\sqrt[4]{a^2\cdot b^3\cdot c^2}$

6. Quin dels següents valors és igual a $a^{3/2}$?

a) $a^{1/2}\cdot a^2$ b) $a^{5/2}\cdot a^{-1}$ c) $(a^2)^2$ d) $a^3\cdot a^{-2}$

7. Quin és el resultat d'aquesta operació amb radicals?: $\sqrt{63}-\frac{5}{2}\cdot\sqrt{28}+\frac{\sqrt{112}}{3}$

a)$2\cdot\sqrt{7}$ b) $\frac{11}{8}\cdot\sqrt{7}$ c) $-\frac{2}{3}\cdot\sqrt{7}$ d)$\frac{-2}{5}\cdot\sqrt{7}$

8. Una expressió amb un únic radical de: $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{(x+2)^3}\cdot\sqrt{(x+1)}$està donada per:

a)$\sqrt[6]{x^2\cdot(x+2)\cdot(x+1)}$ b)$\sqrt[8]{x^2\cdot(x+2)^3\cdot(x+1)}$ c)$\sqrt[12]{x^8\cdot(x+2)^9\cdot(x+1)^6}$
d)$\sqrt[12]{x^2\cdot(x+2)^3\cdot(x+1)}$

9. Per a racionalitzar l'expressió:$\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ cal multiplicar numerador i denominador per:

a) $\sqrt{3}-\sqrt{5}$ b) $2\cdot\sqrt{3}-\sqrt{5}$ c) $2+\sqrt{5}$ d)$\sqrt{5}+\sqrt{3}$

10. Quin és el resultat en notació científica de la següent operació?: $5{,}83\cdot10^9+6{,}932\cdot10^{12}-7{,}5\cdot10^{10}$

a) $6{,}86283.10^{12}$ b) $6{,}86283\cdot10^{13}$ c) $6{,}8623\cdot10^{11}$ d) $6{,}8628\cdot10^{12}$

11. Quin és el resultat de la següent operació expressat en notació científica?:$\frac{5{,}24\cdot10^{10}}{6{,}3\cdot10^{-7}}$

a) $0{,}8317.10^{17}$ b) $8{,}317\cdot10^{16}$ c) $8{,}317\cdot10^{15}$ d) $83{,}17.10^{16}$