Matemàtiques orientades a les ensenyances acadèmiques:

# 4tB ESO

# Capítol 3: Expressions algebraiques. Polinomis.



www.apuntesmareaverde.org.es


Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez

Revisor: Javier Rodrigo

Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF i commons.wikimedia

Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

## Índex



## Resum


En multitud de situacions el ser humà es veu obligat a quantificar, a manejar quantitats, dades, nombres, ja siga per a explicar quelcom ocorregut al passat, algun fet que estiga succeint a l'actualitat, o per a predir o pronosticar el comportament de determinat fenomen al futur. A pesar de la dificultat que puguen tancar aqueixes justificacions, algunes ferramentes són de caràcter senzill, com les operacions usuals de suma, resta, producte i divisió. De vegades cal manejar dades encara no conegudes, per la qual cosa apareixen indeterminades o variables. La mescla de nombres reals i les citades quatre operacions bàsiques ens porta a les expressions algebraiques i, dins d'elles, destaquen unes expressions concretes pel seu abundant ús i simplicitat d'exposició, els polinomis.

# 1. INTRODUCCIÓ. EXPRESSIONS ALGEBRAIQUES

## 1.1. Introducció

No cal imaginar situacions rebuscades perquè, a l'hora de realitzar un raonament, ens topem amb alguna de les quatre operacions matemàtiques bàsiques: suma, resta, multiplicació o divisió.

***Exemples:***

- Tres amics han realitzat un viatge de vacacions. A la volta, han sumat els gastos efectuats i aquests ascendeixen a 414 euros. El gasto realitzat per cada un ha sigut $\frac{414}{3}$ d'euros, és a dir, 138 euros.

- Si comprarem mandarines a una fruiteria en què el preu d'un quilogram és de 1'25 euros, resulta habitual que, segons anem introduint la fruita en una bossa, anem tantejant l'import final. Per a això podem col·locar diverses vegades la bossa sobre una balança i, després d'observar el pes, realitzem l'operació

$$1{,}25\cdot x$$

on $x$ és la quantitat de quilograms que ens ha indicat la balança. Després de cada pesada, el resultat d'aqueixa multiplicació reflectix l'import de les mandarines que, en aqueix moment, conté la bossa.

- Suposem que tenim un contracte amb una companyia de telefonia mòbil pel que paguem 5 cèntims d'euro per minut, així com 12 cèntims per establiment de telefonada. Amb aqueixa tarifa, una telefonada de 3 minuts ens costarà:



$$(0'05\cdot 3)+0'12=0'15+0{,}12=0'27 \text{ euros}$$

Però quin és el preu d'una telefonada qualsevol? Com desconeixem la seua duració, ens trobem amb una quantitat no determinada, o indeterminada, per la qual cosa en qualsevol resposta que donem a la pregunta anterior s'apreciarà l'absència d'aqueixa dada concreta. Podem dir que el cost d'una telefonada qualsevol és

$$(0'05\cdot x)+0'12=0'05\cdot x+0'12 \text{ euros}$$

on x assenyala la seua duració, en minuts.

## Activitats proposades

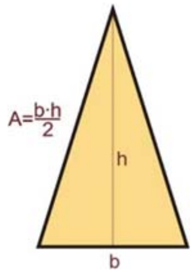
**1.** A finals de cada mes l'empresa de telefonia mòbil ens proporciona la factura mensual. En ella apareix molta informació, en particular, el nombre total de telefonades realitzades (N) així com la quantitat total de minuts de conversació (M). Amb les dades de l'anterior exemple, justifica que l'import de les telefonades efectuades durant aqueix mes és:

$$(0'05\cdot M)+(0'12\cdot N)=0'05\cdot M+0'12\cdot N \text{ euros}$$

***Exemple:***

- És ben coneguda la *fórmula* de l'àrea d'un triangle de base *b* i altura associada *h*:

$$\frac{b \cdot h}{2}$$




En tots aquests exemples han sorgit **expressions algebraiques**.

## 1.2. Expressions algebraiques

Anomenem **expressió algebraica** a qualsevol expressió matemàtica que es construïsca amb nombres reals i les operacions matemàtiques bàsiques: suma, resta, multiplicació i/o divisió. En una expressió algebraica pot haver-hi dades no concretades; segons el context, rebran el nom de ***variable***, ***indeterminada***, ***paràmetre***, entre altres.

Si en una expressió algebraica no hi ha *variables*, la dita expressió no és més que un nombre real:

***Exemple:***

$$\frac{3\cdot(-7)}{\frac{4}{5}-\frac{2}{3}}+1=\frac{-21}{\frac{4\cdot 3}{5\cdot 3}-\frac{2\cdot 5}{3\cdot 5}}+1=\frac{-21}{\frac{12}{15}-\frac{10}{15}}+1=\frac{-21}{\frac{2}{15}}+1=\frac{-21\cdot 15}{2}+1=\frac{-315}{2}+1=\frac{-315}{2}+\frac{2}{2}=\frac{-313}{2}$$

Al fixar un valor concret per a cada *indeterminada* d'una expressió algebraica apareix un nombre real: el **valor numèric** d'aqueixa expressió algebraica per a tals valors de les indeterminades.

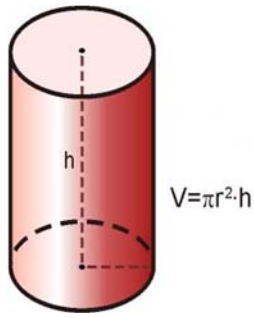
***Exemple:***

a) El volum d'un cilindre ve donat per l'expressió algebraica

$$\pi \cdot r^2 \cdot h$$

en la que *r* és el radi del cercle base i *h* és la seua altura. D'aquesta manera, el volum d'un cilindre la base del qual té un radi de 10 cm i d'altura 15 cm és igual a:

$$\pi \cdot 10^2 \cdot 15 = 1500 \cdot \pi cm^3$$

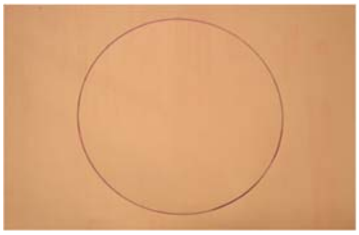



b) L'expressió algebraica que representa el producte dels quadrats de dos nombres qualssevol *x* i *y* es simbolitza per $x^2 \cdot y^2$.

c) Si a l'expressió $7+\frac{x}{2}+x\cdot y^3-\frac{6}{z}$particularitzem les tres variables amb els valors $x=4y=-1z=\frac{1}{2}$sorgeix el nombre real $7+\frac{4}{2}+4\cdot(-1)^3-\frac{6}{1/2}=7+2-4-12=-7$

En una expressió algebraica pot no tindre sentit donar algun valor a certa indeterminada. En efecte, en l'últim exemple no és possible fer $z=0$.

## Activitats proposades



**2.** Recorda l'expressió algebraica que ens proporciona la longitud d'una circumferència.

**3.** Escriu en llenguatge algebraic els següents enunciats, referits a dos nombres qualssevol $x$ i $y$:

a) La mitat de l'oposat de la seua suma.

b) La suma dels seus cubs

c) El cub de la seua suma

d) L'invers de la seua suma

e) La suma dels seus inversos

**4.** Una botiga de roba anuncia en els seus aparadors que està de rebaixes i que tots els seus articles estan rebaixats un 20 % sobre el preu imprés a cada etiqueta. Escriu el que pagarem per una peça en funció del que apareix a la seua etiqueta.

**5.** L'anterior comerç, als últims dies del període de rebaixes, desitja desfer-se de les seues existències i per a això ha decidit augmentar el descompte. Manté el 20 % per a la compra d'una única peça i, a partir de la segona, el descompte total augmenta un 5 % per cada nova peça de roba, fins a un màxim de 10 articles. Analitza quant pagarem en realitzar una compra en funció de la suma total de les quantitats que figuren en les etiquetes i del nombre d'articles que s'adquirisquen.

**6.** Calcula el valor numèric de les següents expressions algebraiques per al valor o valors que s'indiquen:

a) $x^2 + 7x - 12$ per a $x = 0$.

b) $(a + b)^2 - (a^2 + b^2)$ per a $a = -3$ i $b = 4$.

c) $a^2 - 5a + 2$ per a $a = -1$.

**7.** Indica, en cada cas, el valor numèric de l'expressió següent: $10x + 20y + 30z$

a) $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$

b) $x = 2$, $y = 0$, $z = 5$

c) $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$.

# 2. POLINOMIS. SUMA I PRODUCTE

## 2.1. Monomis. Polinomis

Unes expressions algebraiques de gran utilitat són els **polinomis**, la versió més simple i, dels quals al mateix temps, generadora d'ells, són els **monomis**.

Un **monomi** ve donat pel producte de nombres reals i indeterminades. Anomenarem **coeficient** d'un monomi al nombre real que multiplica a la indeterminada, o indeterminades; la indeterminada, o indeterminades, conformen la **part literal** del monomi.

***Exemples:***

- L'expressió que ens proporciona el doble d'una quantitat, 2·x, és un monomi amb una única variable, x, i coeficient 2.
- El volum d'un cilindre,$\pi \cdot r^2 \cdot h$, és un monomi amb dues indeterminades, *r* i *h*, i coeficient$\pi$ La seua part literal és$r^2 \cdot h$.
- Altres monomis:$\frac{4}{7} \cdot x^2 \cdot y^3$,$5 \cdot \sqrt{2} \cdot x \cdot y^2 \cdot z$

- L'expressió$7xy^2 + 3xy - 2x$està formada per tres termes, tres monomis. Cada un té un coeficient i una part literal:

  Al primer,$7xy^2$, el coeficient és 7 i la part literal$xy^2$

  El segon, 3 *xy*, té per coeficient 3 i part literal *xy*

  - I al tercer, -2*x*, el coeficient és -2 i la part literal *x*

Atenent a l'exponent de la variable, o variables, adjudicarem un **grau** a cada monomi d'acord amb el criteri següent:

a) Quan hi haja una única indeterminada, el grau del monomi serà l'exponent de la seua indeterminada.

b) Si apareixen diverses indeterminades, el grau del monomi serà la suma dels exponents d'aqueixes indeterminades.

***Exemples:***


- 2·*x* és un monomi de grau 1 en la variable *x* .
- $\pi \cdot r^2 \cdot h$és un monomi de grau 3 en les indeterminades *r* i *h*.
- $\frac{4}{7} \cdot x^2 \cdot y^3$és un monomi de grau 5 en *x* i *y*.
- $5 \cdot \sqrt{2} \cdot x \cdot y^2 \cdot z$és un monomi de grau 4 en *x*, *y* i *z*.

Un nombre real pot ser considerat com un monomi de grau 0.

Un **polinomi** és una expressió construïda a partir de la suma de monomis. El **grau d'un polinomi** vindrà donat pel major grau dels seus monomis.

***Exemples:***

- $\frac{1}{5} \cdot x^2 - 7 \cdot x^3 + 2$és un polinomi de grau 3 en la variable *x*.
- $-3 \cdot y^4 + 8 \cdot x^2 + 2 \cdot x$és un polinomi de grau 4 en les indeterminades *x* i *y*.

- $4 \cdot x^2 \cdot y^3 - 7 + 3 \cdot y^2$és un polinomi de grau 5 en *x* i *y*.
- $x - 2 \cdot y + 6 \cdot z$és un polinomi de grau 1 en *x*, *y* i *z*.

Tant en aquesta secció com a la següent ens limitarem, bàsicament, a considerar polinomis amb una única variable. És habitual escriure els diferents monomis d'un polinomi de manera que els seus graus vagen en descens per a, amb aquest criteri, apreciar en el seu primer monomi quin és el grau del polinomi.

L'aspecte genèric d'un polinomi en la variable *x* és

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

on els coeficients$a_k$ són nombres reals.

Diem que un polinomi és **mònic** quan el coeficient del seu terme de major grau és igual a 1.

***Exemples:***

- $-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$és un polinomi de grau 4 en la variable *x*.
- $4y^3 + 3y - 7$és un polinomi de grau 3 en la indeterminada *y*.
- $z^2 - 3z + 12$és un polinomi de grau 2 en *z*. A més, és un polinomi mònic.
- $3x + 9$és un polinomi de grau 1 en *x*.

Com ocorre amb qualsevol expressió algebraica, si fixem, o triem, un valor concret per a la variable d'un polinomi apareix un nombre real: el **valor numèric** del polinomi per a aqueix valor determinat de la variable. Si hem anomenat *p* a un polinomi, a l'avaluació de *p* en, per exemple, el nombre -3 la denotem per *p(-3),* i llegim *"p de menys tres"* o *"p en menys tres"*. Amb aquest criteri, si *p* és un polinomi la indeterminada del qual és la variable *x*, podem referir-nos a ell com *p* o *p(x)* indistintament.

D'aquesta forma apreciem que un polinomi pot ser entés com una manera concreta d'assignar a cada nombre real un altre nombre real.

***Exemples:***

- Si avaluem el polinomi $p \equiv -3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ en $x = 5$ ens trobem amb el nombre
    - $p(5) = -3 \cdot 5^4 + \frac{1}{5} \cdot 5^2 + 2 = -3 \cdot 625 + 5 + 2 = -1875 + 7 = -1868$
- El valor del polinomi $q(y) = 4y^3 + 3y - 7$per a $y = -1$és
    - $q(-1) = 4 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1) - 7 = 4 \cdot (-1) - 3 - 7 = -4 - 10 = -14$
- En particularitzar el polinomi$r \equiv z^2 - 3z + 12$ en $z = 0$resulta el nombre$r(0) = 12$.

## 2.2. Suma de polinomis

Com un polinomi és una suma de monomis, la suma de dos polinomis és un altre polinomi. A l'hora de sumar dos polinomis procedirem a sumar els monomis de la mateixa part literal.

***Exemples:***

- La suma dels polinomis$-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ i$-x^4 + 4x^2 - 5x - 6$ és el polinomi

$$\left(-3x^4+\frac{1}{5}x^2+2\right)+(-x^4+4x^2-5x-6)=(-3x^4-x^4)+\left(\frac{1}{5}x^2+4x^2\right)-5x+(2-6)=$$
$$=(-3-1)\cdot x^4+\left(\frac{1}{5}+4\right)\cdot x^2-5x+(2-6)=-4x^4+\frac{21}{5}x^2-5x-4$$

- $(5x^2-3x+1)+(x^2+4x-7)=(5x^2+x^2)+(-3x+4x)+(1-7)=6x^2+x-6$
- $(2x^3+1)+(-x^4+4x)=-x^4+2x^3+4x+1$
- $(x^3+9)+(-x^3+2)=11$
- $3xy+5xy+2x=8xy+2x$

Al següent exemple sumarem dos polinomis disposant-los, adequadament, un sobre l'altre.

***Exemple:***

$$\begin{array}{rrrrrrr} & 4x^5 & +2x^4 & +x^3 & -5x^2 & +x & +4 \\ + & -7x^5 & & +4x^3 & +5x^2 & -3x & -6 \\ \hline & -3x^5 & +2x^4 & +5x^3 & & -2x & -2 \end{array}$$

## Propietats de la suma de polinomis

**Propietat commutativa.** Si $p$ i $q$ són dos polinomis, no importa l'orde en què els col·loquem a l'hora de sumar-los:

$$p+q\equiv q+p$$

***Exemple:***

$$(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)=-x^3+(4x^2+x^2)+(-2x-3x)+(7+1)=-x^3+5x^2-5x+8$$
$$(-x^3+x^2-3x+1)+(4x^2-2x+7)=-x^3+(x^2+4x^2)+(-3x-2x)+(1+7)=-x^3+5x^2-5x+8$$

**Propietat associativa.** Ens assenyala com es poden sumar tres o més polinomis. Basta fer-ho agrupant-los de dos en dos:

$$(p+q)+r\equiv p+(q+r)$$

***Exemple:***

$$(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)+(x-6)=(4x^2-2x+7-x^3+x^2-3x+1)+(x-6)=$$
$$=(-x^3+5x^2-5x+8)+(x-6)=-x^3+5x^2-4x+2$$

També:

$$(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)+(x-6)=(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1+x-6)=$$
$$=(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-2x-5)=-x^3+5x^2-4x+2$$

## Activitats proposades

**8.** Realitza les següents sumes de polinomis:

- $(x^2-x)+(-2x^2-3x+1)+(2x^3-2x^2+x-2)$


Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

- $-x^4+(x^3+2x-3)+(-3x^2-5x+4)+(2x^3-x+5)$

**Element neutre.** Hi ha un polinomi amb una propietat particular: el resultat de sumar-lo amb qualsevol altre sempre és aquest últim. Es tracta del polinomi donat pel nombre 0, el polinomi *zero*.

***Exemple:***

$$0+(-7x^3+3x+7)=(-7x^3+3x+7)+0=-7x^3+3x+7$$

**Element oposat.** Cada polinomi té associat un altre, al que anomenarem el seu polinomi *oposat*, tal que la suma d'ambdós és igual al polinomi zero. Aconseguim el polinomi oposat d'un donat, simplement, canviant el signe de cada monomi.

***Exemple:***

- El polinomi oposat de $p\equiv-2x^4+x^3+2x-7$ és $2x^4-x^3-2x+7$, al què denotarem com $"-p"$. Ratifiquem que la seua suma és el polinomi zero:

$$(-2x^4+x^3+2x-7)+(2x^4-x^3-2x+7)=(-2x^4+2x^4)+(x^3-x^3)+(2x-2x)+(-7+7)=0$$

## Activitats proposades

**9.** Escriu el polinomi oposat de cada un dels polinomis següents:

a) $3x^4+5x^3+x^2+4x-1$ b) $7x$ c) $-x^4+3x^2$

**10.** Considera els polinomis $p\equiv-x^3-5x+2$, $q\equiv3x^2+3x+1$, així com el polinomi suma $s\equiv p+q$. Troba els valors que adopta cada un d'ells per a $x=-2$, és a dir, calcula $p(-2)$, $q(-2)$ i $s(-2)$. Estudia si hi ha alguna relació entre aqueixos tres valors.

**11.** Obtín el valor del polinomi $p\equiv-x^3-5x+2$ en $x=3$. Quin valor pren el polinomi oposat de $p$ en $x=3$?

## 2.3. Producte de polinomis

Una altra operació que podem realitzar amb polinomis és la multiplicació.

El resultat del producte de polinomis sempre serà un altre polinomi. Encara que en un polinomi tenim una indeterminada, o variable, com ella pren valors als nombres reals, a l'hora de multiplicar polinomis utilitzarem les propietats de la suma i el producte dels nombres reals, en particular la propietat distributiva del producte respecte de la suma; així, tot queda en funció del producte de monomis, qüestió que resolem amb facilitat:

$$ax^n\cdot bx^m=abx^{n+m}$$

***Exemples:***

- $(-5)x^2\cdot2x^4=(-5)\cdot2\cdot x^{2+4}=-10x^6$
- $5x^3\cdot(-4)=5\cdot(-4)\cdot x^3=-20x^3$
- $3x^2\cdot(2x^2-4x+6)=(3x^2\cdot2x^2)-(3x^2\cdot4x)+(3x^2\cdot6)=6x^4-12x^3+18x^2$

- $(-x^3+3x-1)\cdot(-2x)=(-x^3)\cdot(-2x)+(3x)\cdot(-2x)+(-1)\cdot(-2x)=2x^4-6x^2+2x$
- $(3x-2)\cdot(x^2-4x-5)=(3x)\cdot(x^2-4x-5)+(-2)\cdot(x^2-4x-5)=(3x^3-12x^2-15x)+(-2x^2+8x+10)=$
  $=3x^3+(-12x^2-2x^2)+(-15x+8x)+10=3x^3-14x^2-7x+10$
- $(x-6)\cdot(x^3-2x)=(x-6)\cdot x^3+(x-6)\cdot(-2x)=(x^4-6x^3)+(-2x^2+12x)=x^4-6x^3-2x^2+12x$

També podem materialitzar el producte de polinomis tal com multipliquem nombres enters:

***Exemple:***

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & -2x^3 & & +x & +4 \\
\times & & & & x^2 & -3x & +1 \\
\hline
 & & & -2x^3 & & +x & +4 \\
 & & 6x^4 & & -3x^2 & -12x & \\
-2x^5 & & & +x^3 & +4x^2 & & \\
\hline
-2x^5 & & +6x^4 & -x^3 & +x^2 & -11x & +4
\end{array}$$

Recordem que el polinomi *oposat* d'un altre s'obté simplement canviant el signe de cada monomi. Aquesta acció es correspon de multiplicar pel nombre "-1" el polinomi original. D'aquesta manera el polinomi oposat de $p$ és

$$-p\equiv(-1)\cdot p$$

En aquest moment apareix de manera natural l'operació **diferència**, o **resta**, de polinomis. La definim amb l'ajuda del polinomi oposat d'un donat:

$$p-q\equiv p+(-q)\equiv p+(-1)\cdot q$$

***Exemple:***

- $(-5x^2-3x+2)-(-2x^4+x^3+3x^2+6)=(-5x^2-3x+2)+(2x^4-x^3-3x^2-6)=$
  $=2x^4-x^3+(-5x^2-3x^2)-3x+(2-6)=2x^4-x^3-8x^2-3x-4$

## Activitats proposades

**12.** Efectua els següents productes de polinomis:

- $(-4x^3+2x)\cdot(-3x^2)$
- $(2x^4+x)\cdot(-3x-4)$
- $(2x^3+x^2-x)\cdot(3x^2-x)$
- $(-1)\cdot(7x^3-4x^2-3x+1)$

**13.** Realitza les següents diferències de polinomis:

- $(-4x^3+2x)-(-3x^2)$
- $(2x^4+x)-(-3x-4)$

- $(3x^2-x)-(2x^3+x^2-x)$

**14.** Multiplica cada un dels següents polinomis per un nombre de tal forma que sorgisquen polinomis mònics:

- $4x^3-3x^2+2x$
- $-2x^4+x-1$
- $-x^2+x-7$

**15.** Calcula i simplifica els productes següents:

a) $3x\cdot(2x^2+4x-6)$ b) $(3x-4)\cdot(4x+6)$

- c) $(2a^2-5b)\cdot(4b-3a^3)$ d) $(3a-6)\cdot(8-2a)\cdot(9a-2)$

## Propietats del producte de polinomis

**Propietat commutativa.** Si $p$ i $q$ són dos polinomis, no importa l'orde en què els col·loquem a l'hora de multiplicar-los: $p\cdot q \equiv q\cdot p$

***Exemple:***

$$(2x-7)\cdot(-x^3+x^2)=2x\cdot(-x^3+x^2)-7\cdot(-x^3+x^2)=-2x^4+2x^3+7x^3-7x^2=-2x^4+9x^3-7x^2$$

$$(-x^3+x^2)\cdot(2x-7)=-x^3\cdot(2x-7)+x^2\cdot(2x-7)=-2x^4+7x^3+2x^3-7x^2=-2x^4+9x^3-7x^2$$

**Propietat associativa.** Ens assenyala com es poden multiplicar tres o més polinomis. Basta fer-ho agrupant-los de dos en dos:

$$(p\cdot q)\cdot r \equiv p\cdot(q\cdot r)$$

***Exemple:***

$$\left((4x^2-2)\cdot(-3x+1)\right)\cdot(-x^3+x)=(-12x^3+4x^2+6x-2)\cdot(-x^3+x)=$$

$$=12x^6-12x^4-4x^5+4x^3-6x^4+6x^2+2x^3-2x=12x^6-4x^5-18x^4+6x^3+6x^2-2x$$

També:

$$(4x^2-2)\cdot\left((-3x+1)\cdot(-x^3+x)\right)=(4x^2-2)\cdot(3x^4-3x^2-x^3+x)=$$

$$=12x^6-12x^4-4x^5+4x^3-6x^4+6x^2+2x^3-2x=12x^6-4x^5-18x^4+6x^3+6x^2-2x$$

## Activitats proposades

**16.** Realitza els següents productes de polinomis: $x^2\cdot(-2x^2-3x+1)\cdot 2x^3$

- $(2x-3)\cdot(-3x^2-5x+4)\cdot(-x)$

**Element neutre.** Hi ha un polinomi amb una propietat particular: en multiplicar-lo per qualsevol altre sempre ens dóna aquest últim. Es tracta del polinomi donat pel nombre 1, el *polinomi unitat*.

***Exemple:***

$$1\cdot(-5x^3-2x+3)=(-5x^3-2x+3)\cdot 1=-5x^3-2x+3$$

**Propietat distributiva de la multiplicació respecte de la suma**. Quan en una multiplicació de polinomis un dels factors ve donat com la suma de dos polinomis com, per exemple,

$$(3x^2-x)\cdot\left((-2x+7)+(x^3-4x)\right)$$

tenim dues opcions per a conéixer el resultat:

a) realitzar la suma i, després, multiplicar

$$(3x^2-x)\cdot\big((-2x+7)+(x^3-4x)\big)=(3x^2-x)\cdot\big(x^3-6x+7\big)=$$
$$=3x^5-18x^3+21x^2-x^4+6x^2-7x=3x^5-x^4-18x^3+27x^2-7x$$

b) distribuir, aplicar, la multiplicació a cada un dels sumands i, després, sumar:

$$(3x^2-x)\cdot\big((-2x+7)+(x^3-4x)\big)=(3x^2-x)\cdot(-2x+7)+(3x^2-x)\cdot(x^3-4x)=$$
$$=(-6x^3+21x^2+2x^2-7x)+(3x^5-12x^3-x^4+4x^2)=3x^5-x^4-18x^3+27x^2-7x$$

Comprovem que obtenim el mateix resultat.

En general, la **propietat distributiva** de la multiplicació respecte de la suma ens diu que

$$p\cdot(q+r)\equiv(p\cdot q)+(p\cdot r)$$

Convé comentar que l'anterior propietat distributiva llegida en sentit contrari, de dreta a esquerra, és el que comunament es denomina **traure factor comú**.

***Exemple:*** $6x^5-4x^4-18x^3+2x^2=(3x^3-2x^2-9x+1)\cdot 2x^2$

## Activitats proposades

**17.** De cada un dels següents polinomis extrau algun factor que siga comú als seus monomis:

a) $-15x^3-20x^2+10x$ b) $24x^4-30x^2$

# 3. DIVISIÓ DE POLINOMIS

## 3.1. Introducció a les fraccions polinòmiques

Fins a aquest moment hem estudiat diverses operacions amb polinomis: suma, resta i producte. En qualsevol dels casos el resultat sempre és un altre polinomi. Quan establim una **fracció polinòmica** com, per exemple,

$$\frac{3x^3 - x}{2x^2 + x - 3}$$

el que tenim és una expressió algebraica, una **fracció algebraica**, la qual, en general, no és un polinomi. Sí que apareix un polinomi en el molt particular cas en què el denominador és un nombre real diferent de zero, açò és, un polinomi de grau 0.

És senzill constatar que l'expressió anterior no és un polinomi: qualsevol polinomi pot ser avaluat en qualsevol nombre real. No obstant això aqueixa expressió no pot ser avaluada per a $x=1$, ja que ens quedaria el nombre 0 al denominador.

Podríem creure que la següent fracció polinómica sí que és un polinomi:

$$\frac{-2x^3 + 5x^2 - 3x}{x} = \frac{-2x^3}{x} + \frac{5x^2}{x} + \frac{-3x}{x} = -2x^2 + 5x - 3$$

L'expressió de la dreta sí que és un polinomi, perquè es tracta d'una suma de monomis, però la de l'esquerra no ho és ja que no pot ser avaluada en $x=0$. No obstant això, aqueixa fracció algebraica i el polinomi, quan són avaluats en qualsevol nombre diferent de zero, ofereixen el mateix valor. Són **expressions equivalents** allí on ambdues tenen sentit.

## 3.2. Divisió de polinomis

Encara que, com hem vist a l'apartat anterior, una fracció polinómica, en general, no és un polinomi, anem a apronfundir en la divisió de polinomis perquè és una qüestió important i útil.

Analitzem amb deteniment la divisió de dos nombres enters positius. Quan dividim dos nombres, *D* (dividend) entre *d* (divisor, diferent de 0), sorgeixen altres dos, el quocient (*c*) i el residu (*r*). Ells es troben lligats per l'anomenada *prova de la divisió*:

$$D = d \cdot c + r$$

Alternativament: $$\frac{D}{d} = c + \frac{r}{d}$$

A més, diem que la divisió és exacta quan $r=0$.

El conegut algoritme de la divisió persegueix trobar un nombre enter, el quocient *c*, tal que el residu *r* siga un nombre menor que el divisor *d*, i major o igual que zero. Fixem-nos en que, sense aquesta exigència per al residu *r*, podem triar arbitràriament un valor per al quocient *c* el qual ens subministra el seu valor associat com a residu *r*. En efecte, si tenim com a dividend *D* = 673 i com divisor *d* = 12, "si volem" que el quocient siga *c* = 48 el seu residu associat és

$$r = D - d \cdot c = 673 - 12 \cdot 48 = 673 - 576 = 97$$

i la connexió entre aquests quatre nombres és $673 = 12 \cdot 48 + 97$

Aquesta última "lectura" de la divisió de nombres enters va a guiar-nos a l'hora de dividir dos polinomis.

Donats dos polinomis $p(x)$ i $q(x)$, la divisió de $p(x)$, polinomi dividend, entre $q(x)$, polinomi divisor, ens proporcionarà altres dos polinomis, el polinomi quocient $c(x)$ i el polinomi residu $r(x)$. També ací pesarà una exigència sobre el polinomi residu: el seu grau haurà de ser menor que el grau del polinomi divisor. La relació entre els quatre serà, naturalment,

$$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$$

També escriurem

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

encara que, en aquest cas, serem conscients de les cauteles assenyalades a l'apartat anterior quant a les equivalències entre polinomis i altres expressions algebraiques.

Igual que ocorre amb l'algoritme de la divisió entera, l'algoritme de la divisió de polinomis consta de diverses etapes, de caràcter repetitiu, en cada una de les quals apareixen uns polinomis quocient i residu "provisionals" de manera que el grau d'aqueixos polinomis residu va descendint fins que ens topem amb un el grau del qual és inferior al grau del polinomi divisor, la qual cosa indica que hem conclòs. Vegem aquest procediment amb un exemple concret.

***Exemple:***

Dividirem el polinomi $p(x) = 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2$ entre el polinomi $q(x) = 2x^2 - x + 3$. Com el polinomi divisor, $q(x)$, és de grau 2, hem de trobar dos polinomis, un polinomi quocient $c(x)$, i un polinomi residu $r(x)$ de grau 1 o 0, tals que

$$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$$

o, com a igualtat entre expressions algebraiques,

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

A la vista dels polinomis $p(x)$ i $q(x)$, i del que s'ha dit sobre $r(x)$, és evident que el grau del polinomi quocient, $c(x)$, ha de ser igual a 2. Anem a obtindre-lo monomi a monomi.

a) Primera aproximació als polinomis quocient i residu:

Per a poder aconseguir la igualtat $p \equiv q \cdot c + r$, com el grau de $r(x)$ serà 1 o 0, el terme de major grau de $p(x)$, $6x^4$, sorgirà del producte $q(x) \cdot c(x)$. Així obtenim la primera aproximació del $c(x)$, el seu monomi de major grau:

$$c_1(x) = 3x^2$$

i, de manera automàtica, també un primer residu $r_1(x)$:

$$r_1(x) = p(x) - q(x) \cdot c_1(x) = (6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2) - (2x^2 - x + 3) \cdot 3x^2 =$$
$$= (6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2) - (6x^4 - 3x^3 + 9x^2) = 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2$$

Com aquest polinomi $r_1(x)$ és de grau 3, major que 2, el grau del polinomi divisor $q(x)$, aqueix polinomi residu no és el definitiu; hem de continuar.

b) Segona aproximació als polinomis quocient i resta:

Si particularitzem la igualtat entre expressions algebraiques $\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$ al que tenim fins ara resulta

$$\frac{6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3} = 3x^2 + \frac{8x^3 - 8x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3}$$

Aquesta segona etapa consisteix a dividir el polinomi $r_1(x) = 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2$, sorgit com a residu de la etapa anterior, entre el polinomi $q(x) = 2x^2 - x + 3$, el divisor inicial. És a dir, repetim el que hem fet abans però considerant un nou polinomi dividend: el polinomi residu del pas anterior.

El nou objectiu és aconseguir la igualtat $r_1 \equiv q \cdot c_2 + r$. Igual que abans, el grau d'hauria de ser 1 o 0. Com el terme de major grau de $r_1(x)$, $8x^3$, ix del producte $q(x) \cdot c_2(x)$, és necessari que el polinomi quocient continga el monomi $c_2(x) = 4x$

Això ens porta a un segon residu $r_2(x)$:

$$r_2(x) = r_1(x) - q(x) \cdot c_2(x) = (8x^3 - 8x^2 + 3x - 2) - (2x^2 - x + 3) \cdot 4x =$$
$$= (8x^3 - 8x^2 + 3x - 2) - (8x^3 - 4x^2 + 12x) = -4x^2 - 9x - 2$$

Com aquest polinomi $r_2(x)$ és de grau 2, igual que el grau del polinomi divisor $q(x)$, aqueix polinomi residu no és el definitiu; hem de continuar.

c) Tercera aproximació als polinomis quocient i residu:

Allò que s'ha realitzat en l'etapa segona ens permet avançar en l'adequada descomposició de l'expressió algebraica que ens ocupa:

$$\frac{6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3} = 3x^2 + \frac{8x^3 - 8x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3} = 3x^2 + 4x + \frac{-4x^2 - 9x - 2}{2x^2 - x + 3}$$

Aquesta tercera etapa consisteix a dividir el polinomi $r_2(x) = -4x^2 - 9x - 2$, el residu de l'etapa anterior, entre el polinomi $q(x) = 2x^2 - x + 3$, el divisor inicial. De nou repetim l'algoritme però amb un altre polinomi dividend: el polinomi residu del pas anterior.

Perseguim que $r_2 \equiv q \cdot c_3 + r$. Com en cada pas, el grau deuria de ser 1 o 0. El terme de major grau de $r_2(x)$, $-4x^2$, sorgeix del producte $q(x) \cdot c_3(x)$, pel que $c_3(x) = -2$

i el tercer residu $r_3(x)$ és

$$r_3(x) = r_2(x) - q(x) \cdot c_3(x) = (-4x^2 - 9x - 2) - (2x^2 - x + 3) \cdot (-2) =$$
$$= (-4x^2 - 9x - 2) - (-4x^2 + 2x - 6) = -11x + 4$$

Com aquest polinomi $r_3(x)$ és de grau 1, menor que 2, grau del polinomi divisor $q(x)$, aqueix polinomi resisu sí que és el definitiu. Hem conclòs:

$$\frac{6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3} = 3x^2 + \frac{8x^3 - 8x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3} = 3x^2 + 4x + \frac{-4x^2 - 9x - 2}{2x^2 - x + 3} = 3x^2 + 4x - 2 + \frac{-11x + 4}{2x^2 - x + 3}$$

Si ho expressem mitjançant polinomis:

$$6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 = (2x^2 - x + 3) \cdot (3x^2 + 4x - 2) + (-11x + 4)$$

Conclusió: en dividir el polinomi $p(x) = 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2$ entre el polinomi $q(x) = 2x^2 - x + 3$ obtenim com a polinomi quocient $c(x) = 3x^2 + 4x - 2$ i com a polinomi residu $r(x) = -11x + 4$.

A continuació agilitzarem la divisió de polinomis:

## Activitats proposades

**18.** Comprova que els càlculs que tens a continuació reflecteixen el que es va fer en l'exemple anterior per a dividir el polinomi $p(x)=6x^4+5x^3+x^2+3x-2$ entre el polinomi $q(x)=2x^2-x+3$.

$$\begin{array}{rl} 6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & \lfloor\ 2x^2-x+3 \\ \underline{-6x^4+3x^3-9x^2} & 3x^2 \\ 8x^3-8x^2+3x-2 & \end{array}$$

a) Primera etapa:

$$\begin{array}{rl} 6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & \lfloor\ 2x^2-x+3 \\ \underline{-6x^4+3x^3-9x^2} & 3x^2+4x \\ 8x^3-8x^2+3x-2 & \\ \underline{-8x^3+4x^2-12x} & \\ -4x^2-9x-2 & \end{array}$$

b) Primera i segona etapes:

$$\begin{array}{rl} 6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & \lfloor\ 2x^2-x+3 \\ \underline{-6x^4+3x^3-9x^2} & 3x^2+4x-2 \\ 8x^3-8x^2+3x-2 & \\ \underline{-8x^3+4x^2-12x} & \\ -4x^2-9x-2 & \\ \underline{4x^2-2x+6} & \\ -11x+4 & \end{array}$$

c) Les tres etapes:

**19.** Divideix els polinomis següents:

a) $2x^3-x^2-x+7$ entre $x^2-2x+4$

b) $-10x^3-2x^2+3x+4$ entre $5x^3-x^2-x+3$

c) $4x^4-6x^3+6x^2-3x-7$ entre $-2x^2+x+3$

d) $-8x^5-2x^4+10x^3+2x^2+3x+5$ entre $4x^3+x^2+x-1$

e) $-6x^5+x^2+1$ entre $x^2+1$

**20.** Troba dos polinomis tals que en dividir-los aparega $q(x)=x^2+x-3$ com a polinomi quocient i $r(x)=-3x^2+1$ com a residu.

## 3.3. Operacions amb fraccions algebraiques

Ja que tant els polinomis com les fraccions algebraiques obtingudes a partir de dos polinomis són, en potència, nombres reals, operarem amb tals expressions seguint les propietats dels nombres reals.

a) **Suma o resta.** Per a sumar o restar dues fraccions polinómicas haurem d'aconseguir que tinguen el mateix denominador. Una manera segura d'aconseguir-ho, encara que pot no ser la més adequada, és aquesta:

$$\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\equiv\frac{p_1\cdot q_2}{q_1\cdot q_2}+\frac{p_2\cdot q_1}{q_2\cdot q_1}\equiv\frac{p_1\cdot q_2+p_2\cdot q_1}{q_1\cdot q_2}$$

b) **Producte.** Basta multiplicar els numeradors i denominadors entre si:

$$\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_2}{q_2}\equiv\frac{p_1\cdot p_2}{q_1\cdot q_2}$$

c) **Divisió.** Segueix la coneguda regla de la divisió de fraccions numèriques:

$$\frac{\frac{p_1}{q_1}}{\frac{p_2}{q_2}}\equiv\frac{p_1\cdot q_2}{q_1\cdot p_2}$$

## Activitats proposades

**21.** Efectua els càlculs següents: $\frac{2x+1}{x^2+1}+\frac{3}{x}$

d) $\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x+1}$

e) $\frac{-x}{x^2+3x}\cdot\frac{1}{x-1}$

f) $\frac{x-2}{x^2+3x}:\frac{x-2}{x+3}$

**22.** Realitza les següents operacions alterant, en cada apartat, únicament un dels denominadors, i el seu respectiu numerador: $\frac{-x^2+x-1}{x^3}+\frac{3x-2}{x^2}$

a) $\frac{x-2}{x^2+3x}-\frac{4}{x+3}$

**23.** Comprova les següents identitats simplificant l'expressió del costat esquerre de cada igualtat: $\frac{8a^4b^2}{2a^2b}=4a^2b$

b) $\frac{4x^3y^2-3xy^2}{2xy}=2x^2y-\frac{3}{2}y$

c) $\frac{3x^2-9x}{6x+12}=\frac{x^2-3x}{x+4}$

d) $\frac{6a^2b^2+4a^2b-4ab}{2ab^2+16a^2b}=\frac{3ab+2a-2}{b+8a}$

**24.** Calcula els quocients següents:

a) $(3x^3-9x^2-6x):3x$

b) $(7a^3-70a^2-21):7$

c) $(25x^4-10x^2):5x^2$

d) $(3x^2y^3-8xy^2):xy^2$

**25.** Simplifica les següents fraccions algebraiques:

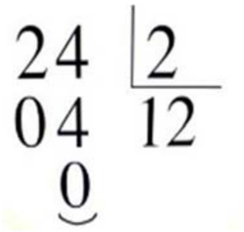
a) $\frac{3x^2-6x}{9x^2+15}$

b) $\frac{a^3-5a^2}{7a^3+4a^2}$

c) $\frac{x^2y+3xy^2}{4xy}$

d) $\frac{2a^2b^2+3ab}{a^3b-ab}$

# 4. DESCOMPOSICIÓ FACTORIAL D'UN POLINOMI



## 4.1. Factorització d'un polinomi

Tal com ocorre amb la divisió entera, la divisió de polinomis també pot ser **exacta**, és a dir, el residu pot ser el polinomi zero.

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
3x^5 & -3x^4 & -4x^3 & +18x^2 & -16x & +8 & -3x^2+3x-2 \\ \cline{7-7}
-3x^5 & +3x^4 & -2x^3 & & & & -x^3+2x-4 \\ \cline{1-3}
 & & -6x^3 & +18x^2 & -16x & +8 & \\
 & & 6x^3 & -6x^2 & +4x & & \\ \cline{3-5}
 & & & 12x^2 & -12x & +8 & \\
 & & & -12x^2 & +12x & -8 & \\ \cline{4-6}
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

***Exemple:***

En aquest cas escrivim $\dfrac{3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8}{-3x^2+3x-2}=-x^3+2x-4$

i direm que $q(x)=-3x^2+3x-2$ divideix a $p(x)=3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8$. Si optem per una igualtat polinómica: $3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8=(-3x^2+3x-2)\cdot(-x^3+2x-4)$

Observem que el fet d'haver obtingut com a residu el polinomi 0 ens permet expressar el polinomi dividend, $p(x)$, com a producte d'altres dos polinomis, els polinomis divisor i quocient, $q(x)\cdot c(x)$. Hem aconseguit una **factorització** del polinomi $p(x)$, o una **descomposició en factors** de $p(x)$.

En general, un polinomi concret pot ser factoritzat, o descompost, per mitjà de diferents grups de factors. Si continuem amb el polinomi $p(x)$ anterior, una manera d'obtindre una descomposició alternativa consisteix en, al seu torn, aconseguir una factorització d'algun dels polinomis $q(x)$ o $c(x)$.

Constatem que el polinomi $-x^2+2x-2$ divideix a $c(x)=-x^3+2x-4$:

$$\begin{array}{rrrr|l}
-x^3 & & +2x & -4 & -x^2+2x-2 \\ \cline{5-5}
x^3 & -2x^2 & +2x & & x+2 \\ \cline{1-3}
 & -2x^2 & +4x & -4 & \\
 & 2x^2 & -4x & +4 & \\ \cline{2-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

En efecte, la divisió és exacta i això ens porta a la igualtat següent:

$$-x^3+2x-4=(-x^2+2x-2)\cdot(x+2)$$

Si la traslladem a la descomposició que teníem de $p(x)$:

$$3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8=(-3x^2+3x-2)\cdot(-x^2+2x-2)\cdot(x+2)$$

**Activitats proposades**

**26.** Completa, quan siga possible, les factoritzacions següents:

a) $-2x^3+2x=-2x\cdot(\quad\quad)$

b) $-6x^2+5x+6=(2x-3)\cdot(\quad\quad)$

c) $-6x^4+3x^3-3x+6=(2x^2-x+1)\cdot(\quad\quad)$

d) $-6x^4+3x^3-3x+6=(2x^2-x+2)\cdot(\quad\quad)$

**27.** Determina un polinomi de grau 4 que admeta una descomposició factorial en què participe el polinomi $6x^3-x^2+3x-1$.

Diem que un polinomi és **reductible** si admet una factorització mitjançant polinomis de grau inferior al seu. En cas contrari el polinomi serà **irreductible**.

És clar que els polinomis de grau 1 no poden ser descompostos com a producte d'altres dos polinomis de menor grau. Són polinomis irreductibles. Al següent apartat constatarem que hi ha polinomis de grau 2 que també són irreductibles.

De les diferents factoritzacions que pot admetre un polinomi la que més informació ens proporciona és aquella en què tots els factors que intervenen són polinomis irreductibles, ja que *no és millorable*. Convé advertir que, en general, no és fàcil aconseguir aqueix tipus de descomposicions. A continuació aprofundirem en aquesta qüestió.

## 4.2. Arrels d'un polinomi

Donat un polinomi $p(x)$ direm que un nombre real concret $\alpha$ és **una arrel**, o **un zero**, del polinomi *p*, si en avaluar *p* en $x=\alpha$ obtenim el nombre 0, açò és, si

$$p(\alpha)=0$$

***Exemple:***

Considerem el polinomi $s(x)=2x^3+2x^2-8x-8$.

a) El nombre 2 és una arrel de $s(x)$, ja que

$$s(2)=2\cdot2^3+2\cdot2^2-8\cdot2-8=2\cdot8+2\cdot4-16-8=16+8-16-8=0$$

b) Una altra arrel de $s(x)$ és el nombre $-1$:

$$s(-1)=2\cdot(-1)^3+2\cdot(-1)^2-8\cdot(-1)-8=2\cdot(-1)+2\cdot(+1)+8-8=-2+2+8-8=0$$

c) En canvi, el nombre $1$ no és una arrel de $s(x)$:

$$s(1)=2\cdot1^3+2\cdot1^2-8\cdot1-8=2+2-8-8=4-16=-12\neq0$$

d) Tampoc és arrel del $s(x)$ nombre 0:

$$s(0)=2\cdot0^3+2\cdot0^2-8\cdot0-8=0+0-0-8=-8\neq0$$

**Activitats proposades**

**28.** Estudia si els següents nombres són o no arrel dels polinomis indicats:

a) $x=3$ de $x^3-3x^2+1$

b) $x=-2$ de $x^3+3x^2+3x+2$

c) $x=1$ de $x^3-3x^2+x+1$

d) $x=0$ de $x^3-3x^2+1$

e) $x=-1$ de $x^3-3x^2-x+3$

Al següent exercici arreplegarem algunes connexions entre les arrels d'un polinomi i les operacions de suma i producte de polinomis.

## Activitats proposades

**29.** Suposem que tenim dos polinomis, $p_1(x)$ i $p_2(x)$, i un nombre real $\alpha$.

a) Si $\alpha$ és una arrel de $p_1(x)$, també és arrel del polinomi suma $p_1(x)+p_2(x)$?

b) Si $\alpha$ és una arrel de $p_1(x)$, també és arrel del polinomi producte $p_1(x)\cdot p_2(x)$?

c) Hi ha alguna relació entre les arrels del polinomi $p_1(x)$ i les del polinomi $4\cdot p_1(x)$?

El que un nombre real siga arrel d'un polinomi està fortament connectat amb la factorització del dit polinomi:

Si un nombre real concret $\alpha$ és una arrel del polinomi $p(x)$, llavors el polinomi $x-\alpha$ divideix a $p(x)$. Dit d'una altra manera, el polinomi $p(x)$ admet una descomposició factorial de la següent forma:

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$$

per a un cert polinomi $c(x)$, el qual pot ser conegut en dividir $p(x)$ entre $x-\alpha$.

Demostrarem l'anterior asseveració. Si dividim $p(x)$ entre $x-\alpha$, obtindrem

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)+r(x)$$

Com el polinomi divisor, $x-\alpha$, és de grau 1, i el polinomi residu ha de ser d'inferior grau, deduïm que el residu anterior és un nombre real $\beta$. Escriguem $r(x)\equiv\beta$:

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)+\beta$$

El polinomi de l'esquerra, $p(x)$, és idèntic al de la dreta, $(x-\alpha)\cdot c(x)+\beta$. Per aqueixa raó, en avaluar-los en un cert nombre real obtindrem el mateix valor. Procedim a particularitzar-los per a $x=\alpha$. En ser $\alpha$ arrel de $p(x)$, $p(\alpha)=0$. Açò ens porta a

$$0=p(\alpha)=(\alpha-\alpha)\cdot c(\alpha)+\beta=0\cdot c(\alpha)+\beta=0+\beta=\beta$$

i, així, el residu és 0, i

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$$

És natural que ens preguntem si és cert el recíproc del resultat anterior. La resposta és afirmativa:

Si un polinomi $p(x)$ admet una descomposició factorial de la forma

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$$

per a un cert polinomi $c(x)$ i un cert nombre real $\alpha$, llavors el nombre $\alpha$ és una arrel del polinomi $p(x)$, açò és, $p(\alpha)=0$.

La seua demostració és senzilla. Basta que avaluem *p* en $x=\alpha$:

$$p(\alpha)=(\alpha-\alpha)\cdot c(\alpha)=0\cdot c(\alpha)=0$$

Si fonem aquests dos últims resultats en un només ens trobem davant del denominat *teorema del factor*:

**Teorema del factor**. Un nombre real concret $\alpha$ és arrel d'un polinomi $p(x)$ si i només si el polinomi $x-\alpha$ divideix a $p(x)$, és a dir, si i només si el polinomi $p(x)$ admet una descomposició factorial de la forma $p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$

***Exemple:***

Tornem amb el polinomi $s(x)=2x^3+2x^2-8x-8$.

- Sabem que el nombre 2 és una arrel de $s(x)$. Ratifiquem que $x-2$ divideix a $s(x)$:

$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & +2x^2 & -8x & -8 & x-2 \\ \cline{5-5}
-2x^3 & +4x^2 & & & 2x^2+6x+4 \\ \cline{1-2}
 & 6x^2 & -8x & -8 & \\
 & -6x^2 & +12x & & \\ \cline{2-3}
 & & 4x & -8 & \\
 & & -4x & +8 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Podem descompondre $s(x)$ de la manera següent:

$$2x^3+2x^2-8x-8=(x-2)\cdot(2x^2+6x+4)$$

- Vam veure que una altra arrel de $s(x)$ és el nombre $-1$. Si observem la precedent factorització de $s(x)$, és evident que aquest nombre $-1$ no és arrel del factor $x-2$, pel que necessàriament ha de ser-lo de l'altre factor $c(x)=2x^2+6x+4$:

$$c(-1)=2\cdot(-1)^2+6\cdot(-1)+4=2\cdot(+1)-6+4=0$$

En haver constatat que $-1$ és arrel del polinomi $c(x)$, deduïm que $x-(-1)=x+1$ ens va a ajudar a descompondre $c(x)$:

$$\begin{array}{rrr|l}
2x^2 & +6x & +4 & x+1 \\ \cline{4-4}
-2x^2 & -2x & & 2x+4 \\ \cline{1-2}
 & 4x & +4 & \\
 & -4x & -4 & \\ \cline{2-3}
 & & 0 &
\end{array}$$

$$2x^2+6x+4=(x+1)\cdot(2x+4)$$

Per tant:

- Si reunim allò que s'ha fet als apartats precedents d'aquest exemple:

$$s(x) = 2x^3 + 2x^2 - 8x - 8 = (x-2)\cdot(2x^2 + 6x + 4) = (x-2)\cdot(x+1)\cdot(2x+4) =$$
$$= (x-2)\cdot(x+1)\cdot 2\cdot(x+2) = 2\cdot(x-2)\cdot(x+1)\cdot(x+2)$$

S'ha descompost $s(x)$ com a producte de tres polinomis irreductibles de grau 1. A la vista d'ells coneixem totes les arrels de $s(x)$, els nombres $2$, $-1$i $-2$.

Els resultats teòrics que hem establit ens condueixen a aquest altre:

Tot polinomi de grau $n$ té com a màxim $n$ arrels reals, alguna de les quals pot aparéixer repetida entre aqueixos no més de $n$ nombres reals.

Hi ha polinomis que no admeten arrels, és a dir, que no s'anul·len mai:

***Exemples:***

- El polinomi $t(x) = x^2 + 1$ no té arrels ja que en avaluar-ho en qualsevol nombre real $\alpha$ sempre ens dóna un valor positiu i, per tant, diferent de 0:

$$t(\alpha) = \alpha^2 + 1 > 0$$

A més, aquest polinomi de grau dos, $t(x) = x^2 + 1$, és un polinomi irreductible perquè, en no tindre arrels, no podem expressar-lo com a producte de polinomis de menor grau.

- Un altre polinomi sense arrels és

$$u(x) = (x^2+1)^2 = (x^2+1)\cdot(x^2+1) = x^4 + 2x^2 + 1$$

No obstant això, $u(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ és un polinomi reductible ja que, òbviament, pot ser expressat com a producte de dos polinomis d'inferior grau.

Encara que no siga possible demostrar-ho, per la seua dificultat, sí es pot anunciar que tot polinomi de grau imparell posseeix, almenys, una arrel real.

## Activitats proposades

**30.** Construeix un polinomi de grau 3 tal que posseïsca tres arrels distintes.

**31.** Determina un polinomi de grau 3 tal que tinga, almenys, una arrel repetida.

**32.** Construeix un polinomi de grau 3 de manera que tinga una única arrel.

**33.** Conjectura, i després demostra, una llei que ens permeta saber quan un polinomi qualsevol

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ...... + a_1 x + a_0$$

admet al nombre 0 com a arrel.

**34.** Demostra una norma que assenyale quan un polinomi qualsevol

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ...... + a_1 x + a_0$$

admet al nombre 1 com a arrel.

**35.** Obtín totes les arrels de cada un dels polinomis següents: $x+7$

- $-x+5$
- $2x-3$
- $-4x-9$
- $-2x$

- $x^2-3x$
- $4x^2-x-3$
- $x^3-x$
- $x^3+x$

## 4.3. Regla de Ruffini

A l'apartat anterior es va provar l'equivalència entre que un nombre real $\alpha$ siga arrel d'un polinomi $p(x)$ i el fet de que el polinomi mònic de grau un $x-\alpha$ dividisca a $p(x)$, açò és, que existisca un altre polinomi $c(x)$ tal que siga possible una factorització de $p(x)$ del tipus:

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$$

A causa de la importància que té la divisió de polinomis quan el polinomi divisor és de la forma $x-\alpha$, és convenient agilitzar tals divisions.

***Exemple:***

- Considerem el polinomi $p(x)=3x^3-4x^2+x+3$. Anem a dividir-lo entre $x+2$. Si el residu és 0 el nombre $-2$ serà una arrel de $p(x)$; en el cas contrari, si no és 0 la resta, aleshores $-2$ no serà arrel de $p(x)$.

$$\begin{array}{rrrr|l}
3x^3 & -4x^2 & +x & +3 & \ x+2 \\ \cline{5-5}
\underline{-3x^3} & \underline{-6x^2} & & & 3x^2-10x+21 \\
 & -10x^2 & +x & +3 & \\
 & \underline{10x^2} & \underline{+20x} & & \\
 & & 21x & +3 & \\
 & & \underline{-21x} & \underline{-42} & \\
 & & & -39 &
\end{array}$$

Ja que el residu no és zero, $-2$ no és una arrel de $p(x)$.

Vegem com han sorgit tant el polinomi quocient com el residu. El que el grau del dividend siga tres i que el divisor siga de grau un imposa que el quocient tinga grau dos i que el residu siga un nombre real. El quocient consta dels monomis $3x^2$, $-10x$ i $21$, els quals coincideixen amb els monomis de major grau de cada un dels dividends després de disminuir els seus graus en una unitat: $3x^2$ procedix de $3x^3-4x^2+x+3$ (el dividend inicial), $-10x$ ve de $-10x^2+\ x\ +3$ i, finalment, $21$ de $21x+3$. Aquest fet, coincidència en el coeficient i disminució del grau en una unitat, es deu al fet que el divisor, $x+2$, és mònic i de grau u.

A continuació, tindrem en compte únicament els coeficients del dividend, per orde de grau, 3, –4, 1 i 3; quant al divisor, com és mònic i de grau u, basta considerar el seu terme independent, +2, però com el resultat de multiplicar els monomis que van conformant el quocient pel divisor hem de restar-se'l a cada un dels dividends, atenent a aquest canvi de signe, en lloc del terme independent, +2, operarem amb el seu oposat, –2, nombre que, al mateix temps, és l'arrel del divisor $x+2$ i sobre el qual pesa la pregunta de si és o no arrel de $p(x)$.

- Primer pas de la divisió:

$$\begin{array}{l|l} 3x^3-4x^2+x+3 & x+2 \\ \cline{2-2} \underline{-3x^3-6x^2} & 3x^2 \\ \quad -10x^2+\ x\ +3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 3 & -4 & 1 & 3 \\ -2 & & -6 & & \\ \hline & 3 & -10 & & \end{array}$$

Apareix en el quocient el monomi $3x^2$ (coeficient $3$), el qual provoca la "desaparició" de $3x^3$ al dividend i l'aparició del monomi $-6x^2$ (coeficient $-6=(-2)\cdot 3$). Després d'operar (sumar) ens trobem amb $-10x^2$ (coeficient $-10=(-4)+(-6)$) i, en el quocient, $-10x$.

- Segon pas. El dividend passa a ser $-10x^2+\ x\ +3$.

$$\begin{array}{l|l} 3x^3-4x^2+x+3 & x+2 \\ \cline{2-2} \underline{-3x^3-6x^2} & 3x^2-10x \\ \quad -10x^2+\ x\ +3 & \\ \quad \underline{10x^2+20x} & \\ \qquad\qquad 21x+3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 3 & -4 & 1 & 3 \\ -2 & & -6 & 20 & \\ \hline & 3 & -10 & 21 & \end{array}$$

La irrupció en el quocient del monomi $-10x$ (coeficient $-10$) provoca la "desaparició" de $-10x^2$ al dividend i l'aparició del monomi $20x$ (coeficient $20=(-2)\cdot(-10)$). Després d'operar (sumar) ens trobem amb $21x$ (coeficient $21=1+20$) i, al quocient, $21$.

- Tercer pas. El dividend passa a ser $21x\ +3$.

$$\begin{array}{l|l} 3x^3-4x^2+x+3 & x+2 \\ \cline{2-2} \underline{-3x^3-6x^2} & 3x^2-10x+21 \\ \quad -10x^2+\ x\ +3 & \\ \quad \underline{10x^2+20x} & \\ \qquad\qquad 21x+3 & \\ \qquad\quad \underline{-21x-42} & \\ \qquad\qquad\quad -39 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr|r} & 3 & -4 & 1 & 3 \\ -2 & & -6 & 20 & -42 \\ \hline & 3 & -10 & 21 & -39 \end{array}$$

Tenim al quocient el terme independent $21$. Aquest provoca l'eliminació de $21x$ al dividend i l'aparició del terme $-42=(-2)\cdot 21$. Després d'operar (sumar) ens trobem amb el residu $-39=3-42$.
En cada un dels passos figura, a la part dreta, el mateix que s'ha realitzat a la divisió convencional, però amb l'avantatge que tot és més àgil pel fet que únicament s'utilitzen nombres reals: els coeficients dels distints polinomis intervinents.

Estem davant de l'anomenada **regla de Ruffini**, un algoritme que ens proporciona tant el quocient com el residu que resulten de dividir un polinomi qualsevol entre un altre de la forma $x-\alpha$.

***Exemple:***

- Dividim el polinomi $p(x)=-x^4+2x^3-5x+4$ entre $x-3$:

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & -1 & 2 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & & -3 & -3 & -9 & -12 \\ \hline & -1 & -1 & -3 & -4 & -8 \end{array}$$

El quocient és $-x^3-x^2-3x-4$ i el residu $-8$. Com el residu no és 0 deduïm que el nombre 3 no és arrel de $p(x)=-x^4+2x^3-5x+4$. La relació entre dividend, divisor, quocient i residu és, com sempre:

$$p(x)=-x^4+2x^3-5x+4=(x-3)\cdot(-x^3-x^2-3x-4)+(-8)$$

Si avaluem $p(x)$ en $x=3$ no pot donar zero, però quin valor resulta?

$$p(3)=(3-3)\cdot(-3^3-3^2-3\cdot 3-4)+(-8)=0+(-8)=-8$$

Naturalment hem obtingut el residu anterior. Aquest fet ve arreplegat en el denominat teorema del residu.

**Teorema del residu**. El valor numèric que adopta un polinomi $p(x)$ en particularitzar-lo en $x=\alpha$ coincideix amb el residu que apareix en dividir $p(x)$ entre $x-\alpha$.

## Activitats proposades

**36.** Empra la regla de Ruffini per a realitzar les següents divisions de polinomis: $-2x^2+x+1$ entre $x+1$

d) $x^3+2x^2-2x+1$ entre $x+2$

e) $4x^3-3x^2-1$ entre $x-1$

f) $x^3-9x+1$ entre $x-3$

**37.** Empra la regla de Ruffini per a dictaminar si els següents nombres són o no arrels dels polinomis esmentats: $\alpha=3$ de $x^3-4x^2+5$

g) $\beta=-2$ de $-x^3-2x^2+x+2$

h) $\gamma=1$ de $-2x^4+x+1$

i) $\sigma=-1$ de $2x^3+2x^2$ Utilitza la regla de Ruffini per a conéixer el valor del polinomi $-x^3+2x^2+x+2$ en $x=3$.

**38.** Estudia si és possible usar la regla de Ruffini, d'alguna forma, per a dividir $x^3+3x^2+3x+2$ entre $2x+6$.

Per a facilitar la comprensió dels conceptes i resultats d'aquest tema la majoria dels nombres que han aparegut fins ara, coeficients, arrels, etc., han sigut nombres enters. Per descomptat que podem trobar-nos amb polinomis amb coeficients racionals, o irracionals, o amb polinomis amb arrels donades per una fracció o un nombre irracional. També hi ha polinomis que no tenen arrels.

***Exemples:***

- Comprovem, mitjançant la regla de Ruffini, que $\alpha=\frac{1}{2}$ és arrel del polinomi $2x^2-3x+1$:

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & -3 & 1 \\ 1/2 & & 1 & -1 \\ \hline & 2 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

- Per a conéixer les arrels del polinomi $x^2-2$ hem d'estudiar si hi ha algun nombre real $\alpha$ tal que l'anul·le, és a dir, per al que es tinga

$$\alpha^2-2=0$$
$$\alpha^2=2$$
$$\alpha=\pm\sqrt{2}$$

  Així, el polinomi de grau dos $x^2-2$ té dues arrels distintes, les quals són nombres irracionals.

- Ja sabem que hi ha polinomis que no tenen arrels, com per exemple $x^2+4$.

Apreciem que la regla de Ruffini ens informa sobre si un nombre concret és o no arrel d'un polinomi. Naturalment, quan estem davant d'un polinomi, i ens interessa conéixer les seues arrels, no és possible efectuar una prova amb cada nombre real per a determinar quines són arrel del polinomi. En el pròxim apartat destacarem certs "nombres candidats" a ser arrel d'un polinomi.

## 4.4. Càlcul de les arrels d'un polinomi

A l'hora de buscar les **arrels enteres d'un polinomi** disposem del resultat següent:

Donat un polinomi qualsevol

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ...... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

els coeficients del qual són tots nombres enters, les seues **arrels enteres**, si les tinguera, es troben necessàriament entre els divisors enters del seu terme independent $a_0$.

Procedim a la seua demostració. Suposem que un cert nombre enter $\alpha$ és una arrel d'aqueix polinomi. Tal nombre ha d'anul·lar-lo:

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + ...... + a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0 = 0$$

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + ...... + a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha = -a_0$$

$$\alpha \cdot (a_n \alpha^{n-1} + a_{n-1} \alpha^{n-2} + ...... + a_2 \alpha + a_1) = -a_0$$

$$a_n \alpha^{n-1} + a_{n-1} \alpha^{n-2} + ...... + a_2 \alpha + a_1 = \frac{-a_0}{\alpha}$$

En l'última igualtat, el nombre del costat esquerre és enter, perquè està expressat com una suma de productes de nombres enters. Per això, el nombre del costat dret, $\frac{-a_0}{\alpha}$, també és enter. Al ser també enters tant $-a_0$ com $\alpha$, arrivem a que $\alpha$ és un divisor de $a_0$.

***Exemples:***

- Determinem, d'acord amb l'anterior resultat, què nombres enters són candidats a ser arrels del polinomi $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$:

  Tals nombres enters candidats han de ser divisors del $-6$, terme independent del polinomi. Per això, els únics nombres enters que poden ser arrel d'aqueix polinomi són:

  $$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

  Pot comprovar-se que els nombres enters $2$ i $-3$ són arrels; els altres no ho són.

- Les úniques possibles arrels enteres del polinomi $2x^3 + x^2 + 12x + 6$ també són:

  $$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

  En aquest cas cap d'aqueixos nombres és arrel del polinomi.

## Activitats proposades

**39.** Para cada un dels següents polinomis assenyala, en primer lloc, què nombres enters són candidats a ser arrels seues i, després, determina quins ho són: $x^3 - x^2 + 2x - 2$

j) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 3$

k) $2x^3 + x^2 - 18x - 9$

l) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 6x$ Un poc més general podem afirmar sobre classes de nombres i arrels d'un polinomi:

Donat un polinomi qualsevol $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ del qual els coeficients són tots nombres enters, les seues **arrels racionals**, si les tinguera, necessàriament tenen per numerador algun divisor del terme independent, $a_0$, i per denominador algun divisor del coeficient del terme de major grau, $a_n$.

***Exemples:***

- Tornant a un dels polinomis de l'exemple anterior, $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$, els nombres racionals candidats a ser arrels seues tenen per numerador a un divisor de $-6$ i per denominador a un divisor de $2$. Per tant, els únics nombres racionals que poden ser arrel d'aqueix polinomi són:

$$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6,\ \frac{\pm 1}{2},\ \frac{\pm 2}{2} = \pm 1,\ \frac{\pm 3}{2},\ \frac{\pm 6}{2} = \pm 3$$

  A més de $2$ i $-3$, també és arrel $\frac{-1}{2}$; els altres no ho són.

- Les úniques possibles arrels racionals del polinomi $2x^4 + 2x^3 - x^2 - 3x - 3$ són:

$$\pm 1,\ \pm 3,\ \frac{\pm 1}{2},\ \frac{\pm 3}{2}$$

  En aquest cas cap d'aqueixos nombres és arrel del polinomi.

## Activitats proposades

**40.** Completa l'exemple precedent comprovant que, en efecte, $\frac{-1}{2}$ és arrel del polinomi $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$.

**41.** Per a cada un dels següents polinomis indica quins nombres racional són candidats a ser arrels seues i, després, determina quins ho són:

a) $3x^2 + 4x + 1$

b) $2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$

Al capítol pròxim, dedicat a les equacions, serem capaços d'obtindre les arrels de tot polinomi de grau dos, si les tinguera.

## 4.5. Factorització de polinomis i fraccions algebraiques

La factorització de polinomis pot ser utilitzada per a simplificar algunes expressions en què intervenen fraccions algebraiques. Vegem-ho a través d'un parell d'exemples:

***Exemple:***

- Una fracció algebraica com

$$\frac{x^4-8x^2-9}{x^5-6x^3-6x^2-7x-6}$$

pot ser simplificada gràcies a què el numerador i el denominador admeten factoritzacions en què algun polinomi està present en ambdós.

$$\frac{x^4-8x^2-9}{x^5-6x^3-6x^2-7x-6}=\frac{(x^2+1)\cdot(x+3)\cdot(x-3)}{(x^2+1)\cdot(x+2)\cdot(x+1)\cdot(x-3)}=\frac{x+3}{(x+2)\cdot(x+1)}$$

Com ja hem apuntat altres vegades, les expressions final i inicial no són idèntiques però sí que són equivalents en tots aquells valors per als que ambdues tenen sentit, açò és, per a aquells en què no s'anul·la el denominador.

***Exemple:***

- En una suma de fraccions polinòmiques com aquesta

$$\frac{3x-2}{x^2+x}+\frac{4}{x^2-x-2}$$

podem aconseguir un comú denominador en les fraccions a partir de la descomposició de cada denominador:

$$\frac{3x-2}{x^2+x}+\frac{4}{x^2-x-2}=\frac{3x-2}{x\cdot(x+1)}+\frac{4}{(x+1)\cdot(x-2)}=\frac{(3x-2)\cdot(x-2)}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}+\frac{4\cdot x}{(x+1)\cdot(x-2)\cdot x}=$$

$$=\frac{(3x-2)\cdot(x-2)+4x}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}=\frac{3x^2-4x+4}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}$$

Convé destacar que en el resultat final s'ha optat per deixar el denominador factorizado. D'aqueixa forma, entre altres qüestions, s'aprecia ràpidament per a què valors de la indeterminada aqueixa fracció algebraica no admet ser avaluada.

## Activitats proposades

**42.** Simplifica, si és possible, les expressions següents:

$$\frac{x^2+4x}{x^3+3x^2-6x-8} \qquad \frac{x^2-1}{x^3+3x^2-6x-8} \qquad \frac{x^2-1}{x^3+x^2-6x}$$

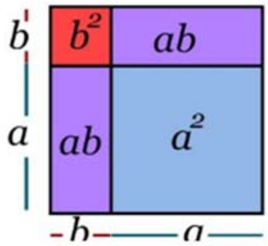
**43.** Realitza les següents operacions tenint en compte les factoritzacions dels denominadors:

- $\frac{5}{-3x+12}+\frac{x+2}{x^2-4x}$
- $\frac{-x}{x^2-2x+1}-\frac{3x-1}{x^2-1}$

## 4.6. Productes notables de polinomis

En aquest apartat destacarem una sèrie de productes concrets de polinomis que sorgeixen sovint. Podem exposar-los de molt diverses formes. Tal com ho farem, apareixerà més d'una indeterminada; hem de ser capaços d'apreciar que si, en un algun cas concret, alguna indeterminada passa a ser un nombre concret açò no farà ni més menys que particularitzar una situació més general.

**Potències d'un binomi.** Les següents igualtats s'obtenen, simplement, després d'efectuar els oportuns càlculs:

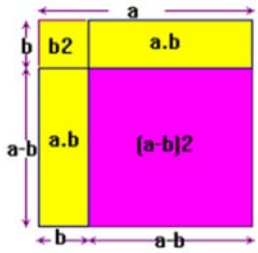



- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

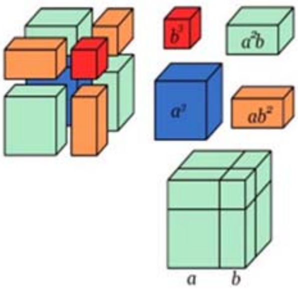
El quadrat d'una suma és igual al quadrat del primer, més el doble producte del primer pel segon, més el quadrat del segon.

Comprova la igualtat a partir dels quadrats i rectangles de la il·lustració.

- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$




El quadrat d'una diferència és igual al quadrat del primer, menys el doble producte del primer pel segon, més el quadrat del segon.




Observa la figura i connecta-la amb la igualtat.

- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Ratifica la igualtat amb els cubs i prismes de la figura.

- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Podem observar que, en cada un dels desenrotllaments, l'exponent del binomi coincideix amb el grau de cada un dels monomis.

***Exemples:***

- $(a+3)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot 3 + 3^2 = a^2 + 6a + 9$
- $(x-4)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 4 + 4^2 = x^2 - 8x + 16$
- $(3x+5)^2 = (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot 5 + (5)^2 = 9x^2 + 30x + 25$
- $(x-6y)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 6y + (6y)^2 = x^2 - 12xy + 36y^2$
- $(2x-5)^3 = (2x)^3 - 3\cdot(2x)^2\cdot 5 + 3\cdot(2x)\cdot 5^2 - 5^3 = 8x^3 - 60x^2 + 150x - 125$

## Activitats proposades

**44.** Realitza els càlculs: $(1+3a)^2$

b) $(-x+3)^2$

c) $(-3x-2)^2$

d) $(x^2-1)^3$

e) $(4x+2)^3$ Obtín les fórmules dels quadrats dels trinomis següents: $(a+b+c)^2$

a) $(a+b-c)^2$ Desenrotlla les potències següents:

a) $(2x + 3y)^2$ b) $(3x + y/3)^2$ c) $(5x – 5/x)^2$

d) $(3a – 5)^2$ e) $(a^2 – b^2)^2$ f) $(3/5y – 2/y)^2$

**45.** Expressa com quadrat d'una suma o d'una diferència les següents expressions algebraiques:

a) $a^2 + 6a + 9$ b) $4x^2 – 4x + 1$ c) $b^2 – 10b + 25$

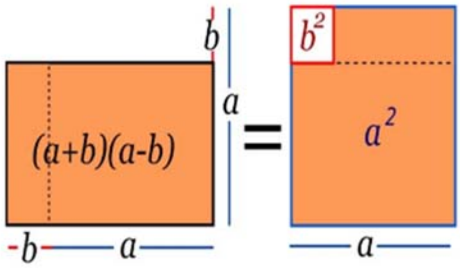
d) $4y^2 + 12y + 9$ e) $a^4 – 2a^2 +1$ f) $y^4 + 6y^2 + 9$

**Suma per diferència.** De nou la següent igualtat s'obté després d'efectuar el producte assenyalat:

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

Suma per diferència és igual a diferència de quadrats.

Observa les figures i connecta-les amb la igualtat.




***Exemples:***

- $(a+7)\cdot(a-7)=a^2-7^2=a^2-49$
- $(x+1)\cdot(x-1)=x^2-1^2=x^2-1$
- $(2x+3)\cdot(2x-3)=(2x)^2-3^2=4x^2-9$
- $(-3x-5)\cdot(-3x+5)=(-1)\cdot(3x+5)\cdot(-3x+5)=(-1)\cdot(5+3x)\cdot(5-3x)=$
$=(-1)\cdot(5^2-(3x)^2)=-25+9x^2$

## Activitats proposades

**46.** Efectua aquests productes:

a) $(4x+3y)\cdot(4x-3y)$

b) $(2x^2+4)\cdot(2x^2-4)$

c) $(-x^2+3x)\cdot(x^2+3x)$

De volta als polinomis d'una variable, podem dir que en aquest apartat hem expandit *potències d'un polinomi*, o productes d'un polinomi per si mateix, així com productes de la forma *suma per diferència*. Convé donar-se compte que les seues fórmules, llegides al revés, constitueixen una factorització d'un polinomi.

***Exemples:***

- $x^2+12x+36=x^2+2\cdot6\cdot x+6^2=(x+6)^2$
- $2x^3-12x^2+18x=2x\cdot(x^2-6x+9)=2x\cdot(x^2-2\cdot3\cdot x+3^2)=2x\cdot(x-3)^2$
- $x^2-5=(x+\sqrt{5})\cdot(x-\sqrt{5})$
- $x^4-16=(x^2+4)\cdot(x^2-4)=(x^2+4)\cdot(x+2)\cdot(x-2)$

## Activitats proposades

**47.** D'acord amb allò que s'ha exposat, factoriza els polinomis següents: $x^2-2x+1$

d) $3x^2+18x+27$

e) $4x^5-16x^3$

**48.** Calcula els productes següents:

a) $(3x + 1) \cdot (3x - 1)$ b) $(2a - 3b) \cdot (2a + 3b)$

c) $(x^2 - 5) \cdot (x^2 + 5)$ d) $(3a^2 + 5) \cdot (3a^2 - 5)$

**49.** Expressa com a suma per diferència les següents expressions

a) $9x^2 - 25$ b) $4a^4 - 81b^2$ c) $49 - 25x^2$ d) $100a^2 - 64$

**50.** Simplifica les següents fraccions algebraiques

a) $\dfrac{x^2-1}{3x+3}$ b) $\dfrac{2x^2+12x+18}{x^2-9}$ c) $\dfrac{6-3a}{a^2-4}$

## CURIOSITATS. REVISTA

Nombrosos actes que podem enquadrar dins de **"trucs de màgia"** poden ser analitzats, o "destripats", mitjançant un ús adequat de les Matemàtiques, en particular a partir d'expressions algebraiques.

Dis-li a un company que escriga a un paper un nombre natural i que el mostre
Que el multiplique per 10
Que al resultat anterior li sume 32
Que multiplique per 100 el que ha obtingut
Que li sume 800
Que dividisca per 1000 l'úlitma quantitat
que al resultat precedent li reste el nombre que va escriure al principi
Té un 4! Màgia!

Als exercicis 1 i 2 tens altres exemples d'açò.

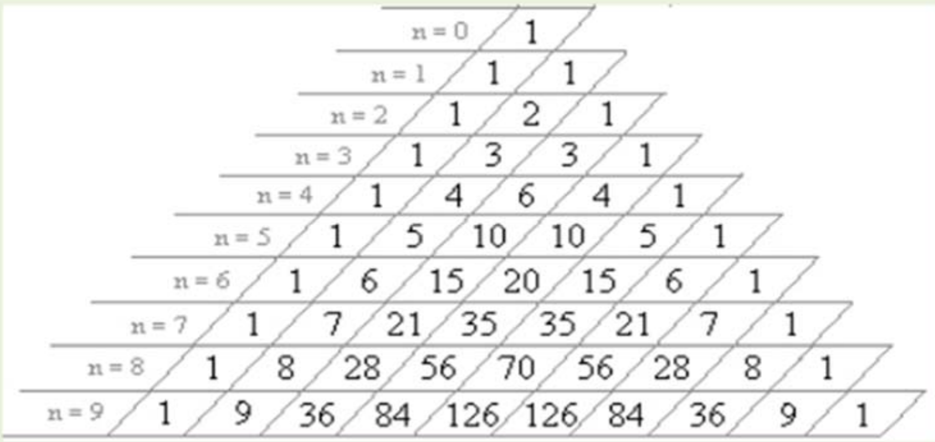
### Algoritmes

La regla de Ruffini és un exemple d'*algoritme*. Un *algoritme* és una relació ordenada i precissa d'operacions, o accions, que s'han de realitzar a les dades que inicialment disposem amb la finalitat de resoldre un problema o d'arribar a nova informació. Altres algoritmes:
- el de la divisió de dos nombres enters, que ens proporciona el seu quocient i el seu residu.
- el d'Euclides, pel que obtenim el màxim comú divisor de dos enters positius.
- el de l'arrel quadrada, que ofereix l'arrel quadrada d'un nombre.
- el que origina la lletra d'un DNI o NIF.

Els algoritmes són un fonament bàsic en el funcionament de qualsevol ordinador o computadora

## COEFICIENTS BINOMIALS

Quan expandim el binomi  apareix un polinomi tal que tots el seus monomis són del mateix grau, grau *n* . La part literal de cadascun d'ells és molt fàcil d'escriure, no així, en principi, cada un dels coeficients. No obstant això, gràcies a un triangle numèric podem conèixer els coeficients que corresponen a cada exponent : el ***triangle de Tartaglia*** o ***de Pascal***. És un triangle numèric amb moltes propietats i utilitats. Apuntem una propietat: cadascuna de les seues línies comença i acaba amb el dígit 1 , la resta de nombres és igual a la suma dels dos nombres que se troben damunt d'ell.




Per exemple, el desenvolupament per a l'exponent 5  seria:

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

## RESUM

| *Noció* | *Descripció* | *Exemples* |
|---|---|---|
| **Expressió algebraica** | Expressió matemàtica que es construeix amb nombres reals i les operacions matemàtiques bàsiques de suma, resta, multiplicació i/o divisió | $\frac{-3x}{2x+y^3} - x \cdot y^2 \cdot z$ |
| **Variable, indeterminada** | Allò no concretat a una expressió algebraica | Les variables, o indeterminades, de l'exemple anterior són *x*, *y*, *z*. |
| **Valor numèric d'una expressió algebraica** | En fixar un valor concret per a cada indeterminada, o variable, d'una expressió algebraica apareix un nombre real: el **valor numèric** d'aqueixa expressió algebraica per a tals valors de les indeterminades | Si, en l'expressió precedent, fem *x*=3, *y*=-2, *z*=1/2 obtenim $\frac{-3\cdot 3}{2\cdot 3+(-2)^3} - 3\cdot(-2)^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{-3}{2}$ |
| **Monomi** | Expressió donada pel producte de nombres reals i indeterminades | $-5\cdot x\cdot y^3\cdot z^2$, $7\cdot x^2$ |
| **Coeficient d'un monomi** | El nombre real que multiplica a la indeterminada, o indeterminades, del monomi | Els coeficients dels anteriors monomis són, respectivament, -5 i 7 |
| **Part literal d'un monomi** | La indeterminada, o producte d'indeterminades, que multiplica al coeficient del monomi | La part literal de $-5\cdot x\cdot y^3\cdot z^2$ és $x\cdot y^3\cdot z^2$ |
| **Grau d'un monomi** | Quan hi ha una única indeterminada és l'exponent de dita indeterminada. Si apareixen diverses, el grau del monomi serà la suma dels exponents d'aqueixes indeterminades | Els graus dels monomis precedents són 6 i 2, respectivament |
| **Polinomi** | Expressió construïda a partir de la suma de monomis | $-x^3+4x^2+8x+6$ |
| **Grau d'un polinomi** | El major grau dels seus monomis | L'anterior polinomi és de grau 3 |
| **Suma, resta i producte de polinomis** | El resultat sempre és un altre polinomi | $p = -3x + 6$; $q = x^2 + 4$. $p + q = x^2 - 3x + 10$; $p - q = -x^2 - 3x + 2$; $p \cdot q = -3x^3 + 6x^2 - 12x + 24$. |
| **Divisió de dos polinomis** | S'obtenen altres dos polinomis, els polinomis quocient (*c*(*x*)) i residu (*r*(*x*)), lligats als polinomis inicials, els polinomis dividend (*p*(*x*)) i divisor (*q*(*x*)) | $p(x)=q(x)\cdot c(x)+r(x)$ |

| | | |
|---|---|---|
| **Factorització d'un polinomi** | Consisteix a expressar-lo com a producte d'altres polinomis de menor grau | $x^5-3x^3-x^2+3=$ $=(x^2-3)\cdot(x^3-1)$ |
| **Polinomi irreductible** | És aquell que no pot ser expressat com a producte d'altres polinomis de grau inferior | $-3x+6$, $x^2+4$ |
| **Arrel d'un polinomi** | Un nombre real concret $\alpha$ és **una arrel**, o **un zero**, del polinomi $p$, si en avaluar $p$ en $x=\alpha$ obtenim el nombre 0, és a dir, si $p(\alpha)=0$ | $2$ es arrel de $-3x+6$ <br> $1$ i $-3$ són arrels de $x^2+2x-3$ |
| **Arrels i factorització** | El que un nombre real concret $\alpha$ siga una arrel del polinomi $p(x)$ és equivalent que el polinomi $p(x)$ admeta una descomposició factorial de la forma $p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$ per a un cert polinomi $c(x)$ | $-2$ es una arrel de $x^3+2x^2-x-2$ <br> $x^3+2x^2-x-2=(x+2)\cdot(x^2-1)$ |
| **Nombre d'arrels i grau** | Tot polinomi de grau $n$ té com a màxim $n$ arrels reals, alguna de les quals pot aparéixer repetida entre aqueixos no més de $n$ nombres reals | $x^2+2x-3$ té dues arrels, $1$ i $-3$ <br> $3x^2+7$ no té arrels |
| **Regla de Ruffini** | Ens pot ajudar a l'hora de factorizar un polinomi i conéixer les seues arrels | |

## EXERCICIS I PROBLEMES

1. En aquest exercici es va a presentar un *truc* mitjançant el qual endevinarem el nombre que resulta després de manipular repetidament un nombre desconegut. Converteix en una expressió algebraica les successives alteracions del nombre desconegut i justifica el que ocorre.

i. Dis-li a un company que escriga en un paper un nombre natural i que no el mostre

ii. Que el multiplique per 10

iii. Que al resultat anterior li sumeix 100

iv. Que multiplique per 1000 el que obté

v. Que dividisca entre 10000 l'última quantitat

vi. Que al resultat precedent li reste el nombre que va escriure

vii. Independentment del nombre desconegut original quin nombre ha sorgit?

2. En aquest altre exercici endevinarem dos nombres que ha pensat un company. Construeix una expressió algebraica que arreplegue tots els passos i, finalment, descobreix el truc.

i. Sol·licita a un company que escriga en un paper, i no mostre, dos nombres naturals: un d'una xifra (entre 1 i 9) i un altre de dues xifres (entre 10 i 99)

ii. Que multiplique per 4 el nombre triat d'una xifra

iii. Que al resultat anterior li sumeix 3

iv. Que multiplique per 5 el que obté

v. Que a l'última quantitat li sumeix 10

vi. Que multiplique el resultat precedent per 5

vii. Que li sumeix a l'anterior el nombre de dues xifres que va triar

viii. Dis-li al company que desvele quin és el resultat de tots aqueixos canvis

ix. Què hem de fer per a descobrir els dos nombres que va triar el company?

3. Estudia si hi ha nombres reals en què les següents expressions no poden ser avaluades: $\dfrac{3x-6}{(x+2)\cdot(2x-14)}$

- $\dfrac{-x}{x^2-4x+4}$
- $\dfrac{3x^3-x}{-2x^4-3x^2-4}$
- $\dfrac{5x-y+1}{x^2+y^2}$ Una persona té estalviats 1000 euros i decideix depositar-los en un producte bancari amb un tipus d'interés anual del 3 %. Si decideix recuperar els seus estalvis al cap de dos anys, quina serà la quantitat total de què disposarà?

**4.** Generalitzem l'exercici anterior: Si ingressem $X$ euros en un depòsit bancari el tipus d'interés del qual és de l'anual, quina serà la quantitat que recuperarem al cap de *n* anys?

**5.** Construeix un polinomi de grau 2, $p(x)$, tal que $p(3)=-7$.

**6.** Considerem els polinomis $p(x)=-5x^3+x^2-3x-2$, $q(x)=3x^4+2x^3-x^2+2x+7$ i $r(x)=4x^2+5x-1$. Realitza les operacions següents:

- $p+q+r$
- $p-q$
- $p\cdot r$
- $p\cdot r-q$

**7.** Calcula els productes:

a) $\left(\frac{ax}{3}-\frac{by}{2}\right)\cdot\left(\frac{-xy}{6}\right)$ b) $(0{,}3x - 0{,}2y + 0{,}1z)\cdot(0{,}1x + 0{,}2y - 0{,}3z)$ c) $(x-1)(x-a)(x-b)$

**8.** Efectua les divisions de polinomis:

- $2x^4-3x^3-8x^2+9x-1$ entre $2x^2+3x-3$
- $4x^5-5x^4+6x^3+2x^2-10x-6$ entre $x^3+2x+3$

**9.** Calcula els quocients:

a) $(5x^4):(x^2)$ b) $(3x^2y^4z^6) : ((1/2)xy^3z^5)$ c) $(x^4 + 2x^2y + y^2) : (x^2 + y)$

**10.** Realitza les operacions entre fraccions algebraiques: $\frac{x-1}{x^2-3x}+\frac{2x}{x^2-6x+9}$

- $\frac{x-1}{x^2-3x}-\frac{2x}{x^2-6x+9}$
- $\frac{x-1}{x^2-3x}\cdot\frac{2x}{x^2-6x+9}$
- $\frac{x-1}{x^2-3x}:\frac{2x}{x^2-6x+9}$

**11.** Construeix un polinomi de grau 2 tal que el nombre $-5$ siga arrel seua.

**12.** Determina un polinomi de grau 3 tal que les seues arrels siguen $6$, $-3$ i $0$.

**13.** Construeix un polinomi de grau 4 tal que tinga únicament dues arrels reals.

**14.** Troba un polinomi $q(x)$ tal que en dividir $p(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$ entre $q(x)$ s'obtinga com a polinomi residu $r(x)=5x^2+5x+1$.

- Troba les arrels enteres dels polinomis següents: $3x^3+11x^2+5x-3$
- $3x^3+2x^2+8x-3$
- $3x^3+5x^2+x-1$
- $2x^3+x^2-6x-3$

**15.** Obtín les arrels racionals dels polinomis de l'exercici anterior.

**16.** Descompon els següents polinomis com a producte de polinomis irreductibles:

- $3x^3+11x^2+5x-3$
- $3x^3+5x^2+x-1$
- $2x^3+x^2-6x-3$
- $3x^3-6x^2+x-2$

**17.** Calcula les potències:

a) $(x-2y+z)^2$ b) $(3x-y)^3$ c) $((1/2)a+b^2)^2$ d) $(x^3-y^2)^2$

- Analitza si els següents polinomis han sorgit del desenrotllament de potències de binomis, o trinomis, o d'un producte *suma per diferència*. En cas afirmatiu expressa la seua procedència. $x^2+6x+9$
- $x^4-8x^2+16$
- $x^2+\sqrt{20}\,xy+5y^2$
- $x^4+2x^3+x^2+2x+1$
- $x^4-2x^3+x^2+2x+1$
- $x^2-36$
- $5x^2+1$
- $5x^2-11$
- $x^2-3y^2$

**18.** Descompon en factors:

a) $x^4-1$ b) $x^2-y^2$ c) $x^2y^2-z^2$ d) $x^4-2x^2y+y^2$

**19.** Amb aquest exercici es pretén mostrar la conveniència a l'hora de no operar una expressió polinòmica que tenim factoritzada totalment o parcialment.

a) Comprova la igualtat $x^4-5x^2+6=(x^2-2)\cdot(x^2-3)$.

b) Determina totes les arrels del polinomi $x^4-5x^2+6$.

**20.** Factoriza numerador i denominador i simplifica:

a) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$ b) $\dfrac{x^4+2x^2y^2+y^4}{x^2+y^2}$ c) $\dfrac{x^3-x}{x^4-1}$

**21.** Efectua les següents operacions i simplifica tot el possible:

a) $\dfrac{2}{x(5-x)}-\dfrac{3}{2(5-x)}$ b) $\dfrac{x-y}{x+y}\cdot\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ c) $\dfrac{2x+1}{4x^2-1}$

**22.** Efectua les següents operacions i simplifica tot el possible:

a) $\dfrac{x^4-1}{x^7}:\dfrac{x^2+1}{x^8}$ b) $\dfrac{2x+3y}{a-b}-\dfrac{3x+4y}{2a-2b}$ c) $-4x+(1-x^4)\left(\dfrac{x+1}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

**23.** Efectua les següents operacions i simplifica tot el possible:

a) $\left(x^4-\dfrac{1}{x^2}\right):\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)$ b) $\dfrac{x^3-3ax^2+3a^2x-a^3}{x+a}:\dfrac{x-a}{x+a}$ c) $\left(\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}\right):\dfrac{ab}{a+b}$

**24.** Efectua les següents operacions i simplifica tot el possible:

a) $\dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{x+y}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{x+y}}:\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a+y}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{a+y}}$ b) $\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right):\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}\right)$ c) $\dfrac{\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{y}}\cdot\dfrac{\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{y}}{\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{y}}$

## AUTOAVALUACIÓ

**1.** Assenyala els coeficients que apareixen en les següents expressions algebraiques:

a) $\frac{3x-7}{2-3y^2}+5xy^3-\frac{6}{z}$ b) $-2x^5+x^4-x^3+5x-1$ c) $5\cdot\sqrt{2}\cdot x\cdot y^2\cdot z$

**2.** El valor numèric de l'expressió $\frac{3x-7}{2-3y^2}+5xy^3-\frac{6}{z}$ en $x=2,\ y=-1,\ z=-1$ és:

a) $17$ b) $15$ c) $-3$ d) $-5$

**3.** Completa adequadament les frases següents:

a) La suma de dos polinomis de grau dos és sempre un altre polinomi de grau ……….

b) La suma de tres polinomis de grau dos és sempre un altre polinomi de grau ……….

c) El producte de dos polinomis de grau dos és sempre un altre polinomi de grau ……….

d) La diferència de dos polinomis de grau dos és sempre un altre polinomi de grau ……….

**4.** En dividir el polinomi $p(x)=x^5+x^4+x^3+1$ entre $q(x)=x^2+x+1$ el polinomi residu resultant:

a) ha de ser de grau 2. b) pot ser de grau 2.

c) ha de ser de grau menor que 2. d) cap de les opcions precedents.

**5.** Considera el polinomi $2x^4-7x^3+5x^2-7x+3$. Quins dels següents nombres enters són *raonables candidats* per a ser una arrel seua?

a) $3$ b) $2$ c) $-1$ d) $-7$

**6.** Considera el polinomi $2x^4+7x^3+x^2-7x-3$. Quins dels següents nombres racionals són *raonables candidats* per a ser una de les seues arrels?

a) $-3$ b) $\frac{-1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{3}{2}$

**7.** Tot polinomi amb coeficients enters de grau tres

a) té tres arrels. b) té, com a màxim, tres arrels. c) té, almenys, tres arrels.

**8.** És possible que un polinomi, amb coeficients enters, de grau quatre tinga exactament tres arrels, ja siguen diferents o amb alguna múltiple?

**9.** Justifica la veracitat o falsedat de cada una de les frases següents:

a) La regla de Ruffini serveix per a dividir dos polinomis qualssevol.

b) La regla de Ruffini permet dictaminar si un nombre és arrel o no d'un polinomi.

c) La regla de Ruffini només és vàlida per a polinomis amb coeficients enters.

d) La regla de Ruffini és un algoritme que ens proporciona totes les arrels d'un polinomi.

**10.** Analitza si pot haver-hi algun polinomi de grau huit que no tinga cap arrel.