MATEMÀTIQUES

1º d'ESO

www.apuntesmareaverde.org.es

Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

Textos Marea Verde

I.S.B.N. - 13: 978-84-695-9891-7

I.S.B.N. - 10: 84-695-9891-0

1r ESO

CAPÍTOL 1: Resolució de problemes

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Adela Salvador

Revisors: Nieves Zuasti i Sergio Hernández

Il·lustracions: Banc d'imatges de l'INTEF

Traducció al valencià: Departament de Matemàtiques de l'Institut Juan de Garay

Índex

Resum

Què és un problema? Com enfrontar-se a uns problemes nous que, potser, no siguen fàcils? És possible donar normes, conèixer estratègies, per a resoldre millor qualsevol tipus de problema?

Un **problema** matemàtic és una situació en què hi ha un objectiu que aconseguir superant una sèrie d'obstacles, sempre que el subjecte que afronta la situació no conega procediments o algoritmes que li permeten, immediatament, aconseguir l'objectiu.

El que per a una persona és un problema, per a una altra pot ser un simple **exercici**, o molt més que un problema, una **investigació**. La diferència està en els coneixements previs, i si per resoldre-ho ha de fer-se preguntes, afegir hipòtesi a l'enunciat.

Davant d'un autèntic problema moltes vegades no sap un ni tan sols per on començar. Veurem algunes estratègies **de pensament** útils en qualsevol classe de problemes.

Pensem que ensenyar a resoldre problemes és el millor que es pot ensenyar, perquè el món evoluciona ràpidament i el que hui ens pareix imprescindible, demà pot haver quedat obsolet, mentre que resolent problemes es prepara a les persones per a enfrontar-se al que desconeixen i els processos mentals mai envelleixen.

Hi ha estudis que confirmen que l'ensenyança expressa de les etapes, cadències, tècniques i estratègies aconsegueix millors resultats que la mera pràctica espontània.

Autora: Adela Salvador
Traducció: Institut Juan de Garay

1. FASES EN LA RESOLUCIÓ D'UN PROBLEMA

Exemple 1:

1. La mare de Maria observa que el comptaquilòmetres del seu cotxe marca 24.312 km. Quants quilòmetres li falten per a la pròxima revisió, que ha de ser cada 5.000 km?

Sempre que hages de resoldre un problema és convenient que seguisques els passos següents:

Fase 1: Abans de començar a actuar, intenta entendre bé el problema

Llig amb atenció l'enunciat, i pensa:

- Quins són les dades?
- Què demanen?

Fase 2: Busca una bona estratègia.

És un problema amb operacions amb nombres naturals, després:

- Quines operacions aritmètiques he de fer? Caldrà sumar? Caldrà multiplicar? Caldrà restar? Caldrà dividir?

Fase 3: Porta avant la teua estratègia

Ara sí, ara resolem el problema:

Si multipliques 5.000 per 5 obtens 25.000. Per tant, la pròxima revisió ha de ser als 25.000 km, després a la mare de Maria li falten 25.000 – 24.312 = 688 km per a fer la revisió.

Fase 4: Comprova el resultat. Pensa si és raonable. Comprova l'estratègia.

Si sumes a 24.312 els 688 km del resultat tenim els 25.000 km de la pròxima revisió.

Activitats proposades

1. Inventa problemes semblants!

2. Estima quant mesura la teua aula de llarg i quant d'ample. Es desitja posar un sòcol que val a 6 € el metre. Quants euros costarà posar-lo?

3. El comptaquilòmetres del pare de Joan marca 64.731 km. Si les revisions són cada 5.000 km, quants quilòmetres li falten per a la pròxima revisió?

4. La piscina d'Agnès té forma de rectangle. Els seus costats mesuren 10 m de llarg i 7 m d'ample. Desitja rodejar la piscina amb una tanca. El metre de tanca val 12 €. Quant costarà fer la tanca?

2. ESTRATÈGIES EN LA RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

2.1. Fes una estimació del resultat

Moltes vegades n'hi ha prou amb fer una estimació del resultat, no amb la solució exacta.

Ja has estimat les dimensions de la teua aula.

A la mare de Maria, per exemple, per estar tranquil·la li basta saber que li falten més de 600 km per a la pròxima revisió. Mentre que el pare de Joan potser no necessite saber que exactament li falten 65.000 - 64.731 = 269 km per a la pròxima revisió, sinó fer una estimació que li falten menys de 300 km per començar a preocupar-se per fer-la.

Per realitzar bones estimacions és convenient haver practicat molt.

Activitats proposades

Intenta ara tu fer una estimació a les solucions d'aquests problemes:

5. Si la teua paga setmanal és de huit euros, i estalvies tota la paga d'un mes Podries comprar-te un ordenador portàtil (que estimes que val uns 1.500 euros)? I amb totes les pagues d'un any?

6. Un ascensor només pot amb 500 kg, quants dels teus amics penses que podrien pujar-se?

7. Informen que a una manifestació han anat 40.000 persones, com creus que les han comptat?

8. Si tota la població mundial es donara la mà, quina longitud es formaria?

9. Quanta gent cap de peu en la teua aula?

10. Quants quilòmetres camines a l'any?

11. Quants grans d'arròs hi ha en un quilo?

2.2. Experimenta, juga amb el problema

Al experimentar amb les dades del problema és fàcil que se t'ocórrega que has de fer amb ells.

Activitats proposades

12. a) Pensa un nombre de tres xifres.

b) Escriu-lo al revés i resta el menor del major.

c) Escriu el resultat al revés i suma'l al resultat de la resta.

d) Escriu la solució final.

e)Prova amb diversos nombres, què observes? Hi ha algun cas en què no s'obtinga la mateixa solució?

f) Prova amb quatre xifres. Obtens resultats del mateix tipus que les anteriors?

g) T'atreveixes amb cinc xifres?

Autora: Adela Salvador
Traducció: Institut Juan de Garay

2.3. Fes-ho més fàcil per a començar

13. "Les torres d'Hanoi": Conta la llegenda que en tres agulles d'or hi ha seixanta-quatre discos tots de distinta grandària, col·locats de major a menor. Uns monjos canvien contínuament de lloc aquests discos, un cada segon amb les regles següents: En cada moviment només es pot moure un disc. I no podem col·locar mai un disc damunt d'un altre més xicotet. Quan hagen passat tots els discos d'una de les agulles a una altra s'acabarà el món. Quant falta perquè acabe el món?

Per a enfrontar-te a aquest problema, has de tindre en compte, el primer, les **fases**, intenta entendre bé el problema.

Després, fes-ho **més fàcil per començar**. En compte de amb 64 discos, comença només amb un disc. A continuació, amb dos, amb tres... Manipula els objectes. Fes un esquema.

14. Quadrat Màgic

Amb els nombres del 10 al 18 completa en el teu quadern el quadre de manera que obtingues la mateixa suma en totes direccions, en horitzontal, en vertical, i fins i tot en les dues diagonals.

- Fes-ho més fàcil, comença amb un quadrat màgic amb els nombres de l'1 al 9. Quant ha de sumar cadascuna de les files? Quin ha de ser el nombre de la casella central? La suma d'1 + 2 + … + 9 = …? Quin nombre dividit entre 3 ens dóna: …?

Després fes-te les mateixes preguntes amb els nombres del problema inicial.

2.4. Fes un diagrama, un esquema...

Moltes vegades fer un diagrama ens resol el problema.

Activitats proposades

1. **"Color del cabell"**: Tres amigues A, B, C, una rossa, una altra morena i una altra pèl-roja, estan jugant a les cartes assentades en una taula circular, cada una passa una carta a la què està a la seua dreta. L'amiga B ha passat una carta a la rossa. L'amiga A ha passat una carta a la què ha passat una carta a la pèl-roja. Quin és el color del cabell de A, B i C?

Al fer un esquema i analitzar les dos configuracions que existixen, s'observa que una d'elles és inconsistent, ja que una de les amigues és al mateix temps rossa i pèl-roja. La solució és l'altra configuració, que és consistent amb l'enunciat.

2. Una persona és 80 cm més alta que la mitat de la seua alçària. Quina estatura té?

Llig i comprén amb atenció l'enunciat, dibuixa un esquema i sabràs la solució.

3. Volen creuar un riu en una barca tres dones i tres marits zelosos, si només caben dos persones en la barca, i mai poden quedar a soles una dona i un marit que no siguen parella, com poden fer-ho?

2.5. Mira si el teu problema s'assembla a algun que ja conegues

És possible que el teu problema tinga el mateix aire que un altre que ja has resolt, la qual cosa pot proporcionar-te pistes útils per a resoldre el nou.

Activitats proposades

4. Observa les ofertes d'una botiga:

	Preu anterior	*Oferta*
Camisetes	15 euros	12 euros
Jaquetes	40 euros	30 euros
Pantalons	32 euros	28 euros
Camises	25 euros	21 euros

Una persona aprofita aquestes ofertes i compra cinc camises, una jaqueta, dos pantalons i tres camisetes. Esbrina quant es gasta i quant s'estalvia per comprar eixa roba en ofertes.

5. S'han apuntat 25 estudiants a un viatge. Al pagar el bitllet 5 d'ells se n'adonen que no han portat diners. La resta decidix pagar-se'l, i abonen cada un 3 €. Quant costa cada bitllet?

2.6. Tria una bona notació

Activitats proposades

6. Calcula mentalment el producte de dos nombres i després suma un tercer:

a) 5 x 9 + 26 = b) 200 x 7 + 128 = c) 60 x 8 + 321 =

Ara al contrari: ens donen el resultat i busquem, de la forma anterior, amb quins nombres pot obtindre's. Per exemple, ens donen 1000 i diem 1000 = 100 x 7 + 300.

Seguix eixe model per a expressar els nombres següents: 2000, 4000 i 5500.

7. ***Emmy Noether***, una il·lustre dona matemàtica, va nàixer el 23 de març de 1882 i va morir el 14 d'abril de 1935.

a) Quants anys tenia al morir?

b) Quants anys han passat des de l'any de la seua mort?

c) Quants anys falten per a celebrar el centenari de la seua mort? Quants mesos? Quants dies?

Autora: Adela Salvador
Traducció: Institut Juan de Garay

3. EMOCIONS I RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

3.1. Eureka!

Ja saps que **Arquimedes** estava en la banyera quan va exclamar **Eureka**! perquè havia descobert una important propietat dels cossos submergits. Una cosa pareguda ocorre moltes vegades. Tu mateix, si treballes en un problema, després el teu inconscient contínua treballant i, de sobte, sense més, Eureka!, tens la solució. Aquesta situació, aquesta emoció positiva i gratificant, també rep el nom **d'això mateix**! En la Historia de la Ciència es coneixen moltes d'aquestes situacions. Troba alguna i reflexiona sobre com et sents al resoldre un problema, que en un primer moment, pareixia impossible.

3.2. Bloquejos

Però també poden aparèixer emocions negatives, a les que anomenem **bloquejos**. Moltes vegades, al tractar de resoldre un problema, aquest ens pareix impossible, ens desanimem, ens donen ganes de deixar-ho tot. Açò és un bloqueig. Però això li passa a tot el món. Cal traure forces i continuar. Trobar la causa del bloqueig.

Vegem alguns problemes senzills que resulten complicats perquè en ells sol produir-se un bloqueig. Intenta primer resoldre'ls i després, si no t'ixen, llig l'ajuda.

8. Sense alçar el llapis uneix amb 4 traços rectes estos nou punts.

o o o

o o o

o o o

Dibuixa al teu quadern nou punts com els de la figura i intenta unir-los, amb 4 traços sense alçar el llapis.

Recorda, el primer és comprendre l'enunciat. Prova a fer-lo. Ho has aconseguit? Magnífic. No ho aconsegueixes, intenta-ho un poc més.

Bloqueig: Si no ho aconseguixes és perquè estàs pressuposant alguna cosa que no s'ha dit i és que no pots eixir del recinte limitat pels punts. Fes traços més llargs i ho aconseguiràs de seguida.

9. Amb 3 furgadents, tots iguals, pots construir un triangle equilàter. Amb 5 furgadents pots construir 2 triangles equilàters, com podem construir quatre triangles equilàters iguals amb sis furgadents amb la condició que el costat de cada triangle siga la longitud del furgadents?

- Experimenta, juga amb el problema. Ho has aconseguit! Llavors no has tingut un bloqueig.

Bloqueig: Ningú ha dit que no pogueres eixir del pla. Ací està el bloqueig. Ho aconseguixes amb un tetraedre regular.

Autora: Adela Salvador
Traducció: Institut Juan de Garay

4. JOCS I PROBLEMES

T’agrada jugar? Per a ser un bon jugador en jocs d’estratègia pots utilitzar les tècniques que has aprés amb la resolució de problemes.

Fases: El primer, naturalment, comprendre bé les regles del joc, que és semblant a comprendre l’enunciat. La segona cosa, jugar, fins a trobar una estratègia guanyadora. Després jugar i veure si la teua estratègia és realment bona. Finalment, generalitzar, intentar millorar l’estratègia.

Activitats proposades

Utilitza tot el que has aprés.

1. I ara un joc! Les **tres en ratlla**

Es juga de dos en dos. Copia en el quadern la taula següent:

497	315	69	77
115	33	90	22
225	161	46	55
355	142	135	213

Una persona tria dos nombres, un del conjunt A = {2, 3, 5, 7} i un altre del conjunt B = {11, 45, 71, 23}. Els multiplica mentalment, i posa la seua marca (o una fitxa, o una boleta de paper) damunt del nombre resultant. L’altra persona fa el mateix quan li toque el torn. Guanya qui posa tres marques en línia recta.

Ara *a jugar*!

2. Realitza el mateix joc de l’activitat anterior amb este altre tauler, i amb els grups de números:

A = {2, 5, 7, 4} y B = {3, 11, 9, 1}.

63	7	21	6
22	4	15	5
45	2	55	44
12	36	18	77

- Inventa amb altres nombres el teu propi tauler de jocs.

Autora: Adela Salvador
Traducció: Institut Juan de Garay

3. Un altre **joc**

És un joc de **calculadora** i pot ser un joc cooperatiu; un joc en què es posen en comú les diferents estratègies i es discuteix sobre el millor procediment, el més senzill o el més original.

Consta de quatre fitxes com les de la figura, on s'indiquen les tecles que està permés polsar, i el resultat, en roig, a què cal arribar.

2 4	**5 6**	**1 0**	**3 7**
+ ?	**x /**	**+ ?**	**+ ?**
/ =	**+ =**	**x =**	**x =**
34	**147**	**123**	**93**

- El joc consisteix, en primer lloc, a obtindre el resultat a la calculadora.
- Has d'anotar tots els mètodes trobats. Pensa i anota en el teu quadern quin és el procediment que t'ha resultat més eficaç.
- Escriu, utilitzant parèntesi, les expressions que ha utilitzat la calculadora.
- Modifica el joc confeccionant noves fitxes, modificant aquestes amb altres tecles i amb altres resultats.

4. Fem màgia!

Digues-li a una persona que pense un nombre de tres xifres, que escriga eixe nombre i, de nou, les tres xifres, per a formar un nombre de sis xifres. Demana-li que el dividisca entre 7, després entre 11 i després entre 13. Es quedarà sorpresa al comprovar que el resultat és el nombre que va escriure. Saps per què?

5. *Resol **els mots encreuats: Copia'l*** al teu quadern i resol-lo.

	x		x		=	24
x		x		x		
	x		x		=	35
x		x		x		
	x		x		=	30
=		=		=		
6		50		84		

CURIOSITATS. REVISTA

ELLES I ELLS INVESTIGUEN PER A RESOLDRE PROBLEMES

El progrés que ara gaudim ha sigut possible gracies a la iniciativa i al treball de milers d'homes i dones. Van superar reptes i van resoldre problemes pels que necessitàrem molts coneixements matemàtics

VAN CONSTRUIR PONTS QUE ENS COMUNIQUEN

VAN DISENYAR AVIONS QUE SOBREVOLEN

EANS

LA INFORMÀTICA QUE ENS INVADEIX

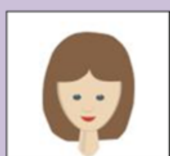
VAIXELLS QUE SOLQUEN

L'ELECTRICITAT QUE ARRIBA A TOTS ELS LLOCS

LA REINA DE LES CIÈNCIES DEL S. XIX

Mary Somerville va dedicar la seua vida a l'estudi de les matemàtiques i la física. Va traduir a l'anglès La Mecànica Celeste de Laplace, un dels tratats científics més importants de la seua època. Va escriure nombroses obres i articles, va viatjar per Europa i es va relacionar amb els principals científics. La Reina Victoria li va concedir una pensió vitalícia en reconeixement al seu treball. Va ser una dona feliç. Mireu el que va escriure:

"Tinc 92 anys..., la meua memòria per als esdeveniments ordinaris és dèbil però no per als matemàtics o les experiències científiques. Sóc encara capaç de llegir llibres d'àlgebra superior durant quatre o cinc hores pel matí, i fins i tot de resoldre problemes"



RESUM

Problema	És una situació en què hi ha un objectiu que aconseguir superant una sèrie d'obstacles, sempre que el subjecte que afronta la situació no conega procediments o algoritmes que li permeten aconseguir l'objectiu.
Fases en la resolució d'un problema	Fase 1: Abans de començar a actuar, tracta d'entendre bé el problema. Fase 2: Busca una bona estratègia. Fase 3: Porta avant la teua estratègia. Fase 4: Comprova el resultat. Pensa si és raonable. Comprova l'estratègia.
Algunes estratègies	➢ Fes una estimació del resultat. ➢ Experimenta, juga amb el problema. ➢ Fes-lo més fàcil per a començar. ➢ Fes un diagrama, un esquema... ➢ Mira si el teu problema s'assembla a algun que ja conegues. ➢ Tria una bona notació.
Emocions i resolució de problemes	Emoció positiva: Idea feliç. Això mateix! Eureka! Emoció negativa: Bloqueig
Jocs d'estratègia	Per a ser un bon jugador en jocs d'estratègia pots utilitzar les tècniques que has aprés en la resolució de problemes.

Autora: Adela Salvador
Traducció: Institut Juan de Garay

EXERCICIS I PROBLEMES de 1r d'ESO

1. La Cap d'Estudis d'un col·legi ha anotat en un quadre el nombre d'alumnes que han faltat a classe. En eixe col·legi hi ha huit classes de Secundària.

	L	M	X	J	V	TOTAL
1º A	2	3	5	1	3	
1º B	3	4	1	3	2	
2º A	2	6	3	4	3	
2º B	5	1	0	2	1	
3º A	4	2	3	1	0	
3º B	6	3	1	2	3	
4º A	2	3	1	4	0	
4º B	4	2	2	2	0	
TOTAL						

Copia la taula en el teu quadern i resol allí l'exercici.

a) Emplena les últimes fila i columna del quadre.

b) Sabent que el nombre total d'alumnes d'eixe col·legi en Secundària és de 205, esbrina quants hi havia en el col·legi el dijous.

2. "L' extraordinari 37"

37 x 3 = 111

37 x 6 = 222

37 x 9 = 333

Aconseguix tu ara

444, 555, 666...

3. En una quadrícula de quatre per quatre, col·loca els nombres de l'1 al 16 als quadrats, cada un en u. Multiplica els nombres de cada dos quadrats adjacents i escriu el producte en cada aresta. Suma els nombres que hi ha en cada aresta. Volem que la suma siga el menor possible. Com hem de col·locar els nombres de l'1 al 16?

Autora: Adela Salvador
Traducció: Institut Juan de Garay

4. Triangles

1 x 9 + 2 = 11

12 x 9 + 3 = 111

123 x 9 + 4 = 1111

1234 x 9 + 5 = 11111

Comprova que el triangle seguix fins a arribar a +10.

5. Estudia les maneres de dividir un quadrat en quatre parts iguals en forma i en àrea.

6. Números en fuga: Aquestes operacions s'han quedat sense resoldre per falta d'alguns nombres. Pots completar-les? Copia-ho al teu quadern i resol.

a)

```
   3 ◯ 8 9 ◯
 + 4  6  4 1 0
   ◯  2  5 ◯ 6
 -------------
 1 ◯ 9 ◯  5 3
```

b) 4 ◯ 2 : ◯5 = 17 resto 07

c) 2 ◯ 3◯ x 75 = 2◯0050

7. Dues dones havien anat al mercat a vendre 30 pomes cadascuna. La primera tenia la intenció de vendre cada dues pomes per un €. Quant pensava guanyar? La segona volia vendre cada tres pomes per dos €. Quant guanyaria? Però no volien fer-se la competència per la qual cosa van arribar a l'acord següent: vendre ambdues cada cinc (2 + 3) pomes per tres (1 + 2) €. Ho havien venut tot. Han guanyat 36 €? Els sobra un €! Amb la venda anterior guanyarien 35 €, i han guanyat 36 €. Pots explicar-los què ha ocorregut?

8. Sofia, que és molt sàvia, s'ho ha explicat, i s'han posat tan contentes que han decidit anar a dinar les tres juntes. Van pagar el menjar amb 30 €, i el cambrer els va tornar 5 €. Cadascuna es va quedar amb un €, però sobraven 2 que van deixar de propina. De nou tenien un problema! Ara faltava un €! Han pagat 10 -1 = 9 € cadascuna, que per 3 són 27 €, més 2 de propina són 27 + 2= 29. I en un principi tenien 30. Els falta un! Explica el que ha passat.

9. Lletres i nombres: Si segueixes l'orde alfabètic aquestes quatre operacions donen com resultat lletres amb les què podràs formar una paraula:

(8 + 10): 3 + 7 x 1 – 5=

(23 – 15) + 2 x 4 =

1 x 4 + 6 : 2 + 5 x 1 =

45 x (1 + 0) – 45 + 1 =

Copia-ho en el teu quadern i resol.

A. I. Fernández

10. "El llop, la cabra i la col llombarda": Un home ha de creuar un riu en una barca amb un llop una cabra i una col llombarda, en la que només pot anar ell i una de les tres coses, tenint en compte que si no està l'home davant, el llop es menja la cabra i la cabra es menja la col llombarda. Com aconseguix transportar-los a l'altre costat del riu?

11. Joan, Jaume i Jordi tenen cadascú dos oficis. Hi ha un barber, un xòfer, un taverner, un músic, un pintor i un jardiner. A què es dedica cada un d'ells? Sabent que:

1: El xòfer es va burlar del músic perquè tenia el cabell llarg

2: El músic i el jardiner pesquen amb Joan

3: El pintor va comprar al taverner vi

4: El xòfer cortejava a la germana del pintor

5: Jaume devia 5 dòlars al jardiner

6: Jordi va veure a la llunyania a Jaume i al pintor.

12. Sorpreses del 8 i el 9:

$0 \cdot 9 + 8 = 8$

$9 \cdot 9 + 7 = 88$

$98 \cdot 9 + 6 = 888$

$987 \cdot 9 + 6 = 8888$

$9876 \cdot 9 + 6 = 88888$

$98765 \cdot 9 + 6 = 888888$ T'animes a continuar la piràmide?

13. Ens donen 16 boles de la mateixa grandària, però una d'elles pesa un poquet menys que les altres. Per esbrinar quina és disposem d'una balança de dos plats. Quin és el mínim nombre de pesades que necessites efectuar per a, sense tindre en compte la bona sort, determinar la bola? I si són 32 boles? I si són 27? I si 13? Generalitza el problema a qualsevol nombre de boles.

14. Un rajà va deixar les seues filles un cert nombre de perles i va determinar que es fera de la manera següent: La filla major prendria una perla i un sèptim del que quedara. La segona filla rebria dos perles i un sèptim del restant. La tercera jove rebria tres perles i un sèptim del que quedara. I així successivament. Feta la divisió cadascuna de les germanes va rebre el mateix nombre de perles. Quantes perles hi havia? Quantes filles tenia el rajà?

15. Quin és el màxim nombre d'angles rectes que pot haver-hi en un polígon de *n* costats?

PER AL PROFESSORAT

En l'ensenyança de les matemàtiques és convenient, com afirmava *Hans Freudenthal*, "fer *matemàtiques en la classe de matemàtiques*" i una forma d'aconseguir-ho, és organitzar classes de resolució de problemes o proposar xicotetes investigacions.

A l'investigar als bons resolutors de problemes s'han obtingut dues conclusions : La primera és que la capacitat **per a resoldre problemes millora amb la pràctica,** la segona és que l'anàlisi dels mètodes matemàtics, així com el de les distintes estratègies que intervenen en la resolució de problemes també millora eixa capacitat. Hi ha estudis que confirmen que l'ensenyança expressa de les etapes, cadències, tècniques i estratègies aconsegueix millors resultats que només la pràctica espontània. És precís resoldre molts problemes. Eixa ajuda només pot ser eficaç si s'exerceix sobre problemes concrets i no com prerequisit teòric.

Treballar en la resolució de problemes és el millor que es pot proporcionar a una persona, ja que ajuda a equipar-la per a la seua activitat integral, no sols pel que fa a les seues capacitats matemàtiques. El món evoluciona ràpidament, i tenim l'obligació de preparar persones que en el futur van a enfrontar-se a situacions desconegudes. Els processos mentals no es fan obsolets.

Un **problema matemàtic** és una situació en què hi ha un objectiu que aconseguir superant una sèrie d'obstacles, sempre que el subjecte que afronta la situació no conega procediments o algoritmes que li permeten aconseguir l'objectiu.

Un problema té distinta qualificació en funció de la persona que se'l plantege, i és evident que el que són problemes per a uns, no ho són per a altres. Així quan una persona sap els rudiments del llenguatge algebraic, un problema que puga resoldre's plantejant una equació de primer o segon grau o un sistema d'equacions, no és un problema, sinó un **exercici** a què se li aplica una regla fixa que és la notació algebraica i els algoritmes per a resoldre les equacions que resulten. També és diferent un problema d'una **investigació**, que al ser un procés més obert, és la persona qui es planteja l'objectiu que vol aconseguir. Així, quan un estudiant al resoldre un problema es fa preguntes, intentant generalitzar el resultat o modificar les condicions inicials, està realitzant una investigació. Podem per tant distingir entre exercici, problema i investigació.

L'heurística**, terme** introduït per por ***George Polya*** al seu llibre *Com plantejar i resoldre problemes,* és "l'art de resoldre problemes" i tracta de desvelar el conjunt d'actituds, processos generals, estratègies i pautes que afavoreixen la resolució de problemes en general i en particular dels problemes matemàtics. Deia *Polya*: "*El professor de matemàtiques no hauria d'acontentar-se de dispensar el saber, sinó que també hauria d'intentar desenrotllar als estudiants la capacitat d'utilitzar eixe saber; hauria d'insistir en el saber – fer, en les actituds adequades, en els hàbits intel·lectuals desitjables*".

Polya considera la resolució de problemes com un procés lineal en què estableix quatre fases:

1. Comprendre el problema,
2. Concebre un pla,
3. Executar un pla, i
4. Examinar la solució obtinguda.

En cadascuna d'aquestes fases hi ha una sèrie de pautes o suggeriments heurístics que pretenen fixar l'atenció sobre aspectes concrets del problema, per a suggerir idees que permeten avançar en la seua resolució.

A Espanya en 1991 es publica Per a *pensar millor* de *Miguel de Guzmán* en el que es destaca la identificació

Autora: Adela Salvador
Traducció: Institut Juan de Garay

dels distints tipus de bloquejos, la importància de l'activitat subconscient en el procés de resolució de problemes, el desenrotllament de la creativitat, i la importància de realitzar un protocol en el procés de resolució. Aconsellava "ensenyar *matemàtiques basant-se fonamentalment en l'ocupació activa amb problemes al voltant dels continguts que es pretén impartir"*. En Com *parlar, demostrar i resoldre en Matemàtiques* (2003) reflexiona sobre l'organització d'una classe de problemes i les tècniques que la faciliten, com el remolí d'idees o el treball en grup.

Una forma aconsellable per a les classes de resolució de problemes és organitzar el treball **en grups**. Hi ha moltes formes d'organitzar el treball en grup, per la qual cosa abans de proposar qualsevol activitat de grup hem d'assegurar-nos que l'alumnat coneix algunes tècniques bàsiques. Si no és així gran part de la rendibilitat esperada es perd davant d'un mal repartiment de responsabilitats, una deficient organització, una incorrecta administració del temps, etc.

Els grups, ni massa grans, ni massa xicotets, podrien estar formats per unes sis o set persones. En un grup ha d'haver-hi una persona responsable i una persona secretària:

- La **persona responsable** té dos funcions, **dinamitzadora** per a mantindre l'interès del grup i cuidar que ningú es quede sense participar i **organitzadora** preocupant-se de planificar els temps i les tasques assignades a cada fase del treball.
- La persona **secretària** s'ocupa d'anotar totes les idees que vagen sorgint i sistematitzar les tasques que es vagen desenrotllant i és portaveu**,** encarregant-se d'exposar les conclusions del seu equip a tota la classe.

Cadascuna de les funcions descrites no han d'associar-se sempre a una mateixa persona sinó que és recomanable un sistema d'alternança.

Paper del professorat: En una classe de resolució de problemes, la nostra labor és dinamitzar als diferents equips, suplint les deficiències i ajudant als primers moments a les persones responsable i secretària en les seues funcions.

Quan un professor o una professora planteja un treball en grup per a resoldre problemes ha de:

- Triar problemes amb un enunciat atractiu i motivador.
- Graduar de manera convenient la dificultat del problema.
- Analitzar detingudament els bloquejos que puguen sorgir en la resolució del problema i utilitzar els mètodes adequats per a superar-los.
- Percebre les dificultats que el treball en grup planteja com a tal i comptar amb recursos per a actuar enfront dels obstacles que pertorben el seu bon funcionament.
- Procurar establir un ambient adequat dins de l'aula que afavorisca actituds positives cap a l'aprenentatge.

Però l'aprenentatge de la resolució de problemes és un procés a llarg termini. No és un objectiu operatiu avaluable per mitjà d'un examen.

Per saber més entra en:

http://innovacioneducativa.upm.es/pensamientomatematico/node/91

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Fernanda Ramos

Il·lustracions: Banc d'imatges de l'INTEF

Traducció al valencià: Departament de Matemàtiques de l'Institut Juan de Garay

Índex

Sistema de numeració grec clàssic

Il·lustració: A. Ortega

Resum

Jaume, Maria i Raquel visitaran la seua iaia sovint. Jaume va cada 2 dies, Maria cada 4 i Raquel només va un dia a la setmana. Un dia que van coincidir els tres, van comentar que mai havien menjat un pastís tan ric com el que fa la seua iaia. Ella va afirmar: "El pròxim dia que torneu a coincidir, el torne a fer". Quan podran tornar a disfrutar del pastís?

En este capítol aprendrem a resoldre problemes semblants a este i aprofundirem en la taula de multiplicar per mitjà de conceptes com: divisibilitat, factorització o nombres primers.

Descobriràs alguns dels grans secrets dels nombres i mai t'imaginaries que la taula de multiplicar amagara tants misteris ocults…

Fotografia: Clarisa Rodrígues

Autora: Fernanda Ramos
Traducció: Institut Juan de Garay

1. REPÀS DE NOMBRES NATURALS

1.1. Els sistemes de numeració

El sistema de numeració decimal

Per què en altres països, encara que es parlen llengües diferents, s'usen els mateixos nombres?

Eixos nombres, els que nosaltres usem, constituïxen un llenguatge universal i es diu que estan expressats en el sistema decimal.

El **sistema de numeració decimal** és el més usat en tot el món i en quasi tots els àmbits.

En este sistema el valor d'una xifra en un nombre és deu vegades major que el de la xifra situada a la seua dreta i deu vegades menor que el valor de la situada a la seua esquerra. Per això es diu que és un **sistema posicional**: el valor d'una xifra en un nombre depèn del lloc que ocupe eixa xifra.

Activitats resoltes

- En el nombre 4652031 tenim:

  -La xifra de les unitats: l'1

  -Després la xifra de les desenes: el 3, el valor del qual en el nombre és 10 vegades més que l'anterior, doncs el seu valor serà:

  $$3 \cdot 10 = 30$$

  - En tercer lloc, les centenes: el 0, el valor del qual serà el que resulte de multiplicar la xifra situada en tercer lloc per 100:

  $$0 \cdot 100 = 0$$

  - En quart lloc les unitats de miler: 2, el valor de les quals obtenim multiplicant per 1000 la xifra situada en eixe lloc:

  $$2 \cdot 1000 = 2000$$

  - Després, les desenes de miler: 5 el valor de les quals serà:

  $$5 \cdot 10000 = 50000$$

  - En sisè lloc, les centenes de miler: 6, el valor de les quals s'obté multiplicant la xifra per 100000.

  $$6 \cdot 100000 = 600000$$

  - I, finalment, les unitats de milió: 4, el valor de les quals obtenim multiplicant-lo per 1000000:

  $$4 \cdot 1000000 = 4000000$$

Amb açò observem que el nombre 4652031 es pot escriure utilitzant potències de 10 de la forma:

$$4652031 = 4 \cdot 1000000 + 6 \cdot 100000 + 5 \cdot 10000 + 2 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 1$$

Activitats proposades

1. Escriu per mitjà de potències de 10 els següents nombres:

a) 7653 b) 30500 c) 275643 d) 200543

2. Quin lloc ocupa la xifra 5 en els següents nombres? En quin dels nombres té major valor? I menor?

a) 508744 b) 65339001 c) 7092157 d) 9745

3. Raona per què en un nombre natural amb dos xifres repetides, aquestes no tenen el mateix valor.

Nombres romans

Un altre sistema de numeració que encara s'usa és el dels **nombres romans**. Et recordes de les seues equivalències?

I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000

Rellotge amb nombres romans

Exemple:

- El nombre MDL equival en el sistema decimal al 1550. Si ara li afegim un V, és a dir: MDLV, el nombre és el 1555, però les xifres continuen tenint el mateix valor en ambdós nombres.

Altres sistemes de numeració

Un dels primers sistemes de numeració que es va utilitzar va ser el de **base 12** fa ja més de 5000 anys. Encara s'usa quan comptem objectes a dotzenes o amb alguns mesuraments del temps (com els mesos d'un any)

Xifres del sistema binari

El sistema de **base 2** o sistema binari també és molt utilitzat hui en dia, sobretot en els ordinadors i calculadores a causa de la seua simplicitat, ja que per a escriure nombres en aquest sistema només es necessiten dos xifres distintes: el 0 i l'1

Activitats proposades

4. Podries escriure els nombres de l'1 al 10 en el sistema binari?

Autora: Fernanda Ramos
Traducció: Institut Juan de Garay

1.2. Operacions elementals

Multiplicació de nombres naturals

Com ja saps, **multiplicar dos nombres naturals** és equivalent a sumar un d'ells amb si mateix tantes vegades com indica l'altre.

Per exemple:

Fer 6 · 5 és el mateix que fer 6 + 6 + 6 + 6 + 6

Nota:

Encara que en primària s'usava el símbol "x" per a denotar el producte, a partir d'ara i, per comoditat, el simbolitzarem amb un punt: ·

Recorda que:

Les paraules "**multiplicació**" i "**producte**" signifiquen el mateix, és a dir, fan referència a la mateixa operació.

Propietat distributiva de la multiplicació respecte a la suma

Nota

Recorda la **propietat commutativa** de la multiplicació:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Exemple:

2 · 3 = 3 · 2

Si cridem *a, b* i *c* a tres nombres naturals, es verifica la propietat següent:

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

Per exemple:

Substituint les lletres *a* per 2, *b* per 5 i *c* per 7, tenim que:

2 · (5 + 7) = (2 · 5) + (2 · 7)

Aquesta propietat també es verifica per a la resta.

Propietat distributiva de la multiplicació respecte a la resta

Considerant una altra vegada, *a, b* i *c* nombres naturals qualssevol, es complix que:

$$a \cdot (b - c) = (a \cdot b) - (a \cdot c)$$

Aquestes propietats són molt útils per a fer càlculs mentals ràpids descomponent nombres:

Calcular 15 · 23 mentalment és complicat, però si fem:

15 · 23 = 15 · (20 + 3) = (15 · 20) + (15 · 3) resulta més senzill.

Si llegim la igualtat de dreta a esquerra, és a dir:

(15 · 20) + (15 · 3) = 15 · (20 + 3) se sol dir que hem *tret factor comú el nombre 15,* però realment estem parlant una altra vegada de la propietat distributiva.

Generalitzant:

$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ és el mateix que: $(a \cdot b) + (a \cdot c) = a \cdot (b + c)$,i utilitzant la propietat commutativa:

$$(b \cdot a) + (c \cdot a) = (b + c) \cdot a.$$

$a \cdot (b - c) = (a \cdot b) - (a \cdot c)$ és el mateix que: $(a \cdot b) - (a \cdot c) = a \cdot (b - c)$, i utilitzant la propietat commutativa:

$$(b \cdot a) - (c \cdot a) = (b - c) \cdot a.$$

Exemples:

(870 · 4) – (870 · 3) = 870 · (4 – 3) = 870 · 1 = 870
(450 · 2) + (3 · 450) = (2 + 3) · 450 = 5 · 450 = 2250
(45 · 6) – (45 · 5) = 45 · (6 – 5) = 45 · 1 = 45

Divisió de nombres naturals

Nota:

La paraula "**quocient**" significa el resultat de fer una "**divisió**" Els símbols utilitzats per a representar-les són:

/, : , i la fracció: $\frac{\square}{\square}$

Exemple:

- En el menjador de l'institut les taules són de 6 persones i en la classe de 1r de l'ESO hi ha 33 alumnes, quantes taules ocuparan?

Veiem que hi haurà 5 taules ocupades i sobraran 3 alumnes que han d'assentar-se en una altra taula:

$$\begin{array}{r|l} 33 & 6 \\ \cline{2-2} 3 & 5 \end{array}$$

Cadascun dels nombres que intervenen en la divisió es denominen:

33 → Dividend   6 → Divisor   5 → Quocient   3 → Residu

A més, com ja saps, es compleix que: 33 = (6 · 5) + 3

Aquesta propietat es compleix sempre per a qualsevol divisió. En general:

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \cline{2-2} r & C \end{array}$$

Es verifica que:

$$D = (d \cdot c) + r$$

Exemple:

- El quocient entre 3658 i 65 és 56 i el residu 18. Escriu la relació que existeix entre aquests quatre valors.

$$3658 = (65 \cdot 56) + 18$$

Exemples:

25/5, 25 : 5 i $\frac{25}{5}$ signifiquen el mateix: la divisió o el quocient de 25 entre 5.

L'expressió:

$$\begin{array}{r|l} 25 & 5 \\ \cline{2-2} 0 & 5 \end{array}$$

També significa el mateix, però en Secundària i Batxillerat a penes s'utilitza, així que convé que et familiaritzes com més prompte millor amb les anteriors.

Divisions amb calculadora

Ja sabem que dividir amb calculadora és molt fàcil, però què fem si ens demanen el residu de la divisió i només podem usar la calculadora?

És molt senzill. Vegem-ho amb un exemple:

Si fem:

325 ÷ 5 = 65

Però si fem:

325 ÷ 15 = 21.6666666667

Al primer cas està clar que el quocient és 65 i el residu és 0, però i en al segon cas?

Clarament el quocient és 21. Ara per a calcular el residu hem de multiplicar aquest quocient pel divisor i restar-li'l al dividend. El residu serà: 325 – (15 · 21) = 10.

Jerarquia de les operacions

En l'expressió: 3 · 4 + 2, quina operació realitzaries abans, la multiplicació o la suma?

Hi ha una prioritat a les operacions on no hi ha parèntesi i és que la multiplicació i la divisió sempre es realitzen abans que les sumes i les restes.

Per tant, l'operació anterior seria:

$$3 \cdot 4 + 2 = 12 + 2 = 14$$

I en 8 : 2 · 3? Són divisions i multiplicacions amb la mateixa prioritat. Podem convindre que primer es realitza la primera operació, la que està més a l'esquerra: 8 : 2 · 3 = 4 · 3 = 12, en compte de 8 : 2 · 3 = 8:6 = 4/3.

En general:

En operacions amb parèntesi, primer cal realitzar les que estan entre **parèntesis** i després les altres.

En operacions sense parèntesi, primer s'efectuen les **multiplicacions** i **divisions** i després, les sumes **i restes.**

En operacions de la mateixa prioritat, primer la de més a l'esquerra.

Exemple:

Observa la diferència entre aquestes dues operacions:

$$(15 + 10) \cdot 3 = 25 \cdot 3 = 75$$

$$15 + 10 \cdot 3 = 15 + 30 = 45$$

Notes

Autora: Fernanda Ramos
Traducció: Institut Juan de Garay

És important escriure els parèntesis només quan siga necessari. Per exemple, en l'expressió: (21 · 2) + 30 resulta innecessari, ja que per la prioritat en les operacions, ja sabem que hem d'efectuar el producte abans que la suma.

Si realitzem una operació en la calculadora sense parèntesi aquesta ja respecta la jerarquia en les operacions, per la qual cosa si l'operació necessitara parèntesi, hem d'incloure'ls en la calculadora.

Activitats proposades

5. Trau factor comú i calcula mentalment:

a) 23 · 4 – 23 · 3 b) 540 · 8 + 540 · 2 c) 55 · 13 – 55 · 3 d) 600 · 33 – 600 · 3

6. Construeix dos nombres amb les xifres 4, 5 i 6 tal que el seu producte siga el més gran possible.

7. Realitza les següents divisions i comprova amb cadascuna d'elles la propietat $D = d \cdot c + r$

6738 : 456 b) 34540 : 30 c) 240035 : 981 d) 397 : 45

8. Recordes la definició de divisió exacta? Què ocorre en la igualtat anterior si la divisió és exacta?

9. L'equip de futbol de l'institut decideix celebrar la seua victòria de lliga anant de viatge amb el seu entrenador. Sabent que l'equip el componen 20 alumnes, que el viatge els costa a cadascú 150 €, la nit en habitació individual 50 € i que han pagat 7350 € en total, quants dies han estat de viatge?

Autora: Fernanda Ramos
Traducció: Institut Juan de Garay

2. DIVISIBILITAT

2.1. Múltiples i divisors d'un nombre enter

Múltiples d'un nombre

Recordes molt bé les taules de multiplicar de tots els nombres?

- Escriu al teu quadern la del 5 i la del 7.

Sense donar-te compte, has escrit alguns dels múltiples de 5 i de 7.

Es definixen els **múltiples** d'un nombre enter ***n*** com els nombres que resulten de multiplicar eixe nombre ***n*** per tots els nombres enters.

Exemple:

- La taula del 5 que has escrit abans està formada pels valors:

0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90,….

Tots ells són múltiples de 5.

La notació matemàtica d'este concepte és: $\dot{5}$

És a dir: $\dot{5} = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, ...\}$

Exemple:

- Conta els múltiples de 5 que has escrit abans. És possible fer-ho?

Efectivament, els múltiples que té cada nombre enter són una quantitat infinita.

Activitats proposades

10. Calcula els set primers múltiples de 8 i de 9

11. Quins dels següents nombres són múltiples de 12?

12, 13, 22, 24, 25, 100, 112, 142, 144

12. Troba els múltiples d'11 compresos entre 12 i 90.

Autora: Fernanda Ramos
Traducció: Institut Juan de Garay

Divisors enters d'un nombre

Un nombre enter ***a*** és **divisor** d'un altre nombre enter ***b*** quan al dividir ***b*** entre ***a***, el residu és 0.

Nota

Tot nombre té sempre com a divisor a 1 i a si mateix.

Exemple:

2 és **divisor** de 8 perquè al dividir 8 entre 2, el residu és 0.

10 és **divisor** de 20 perquè al dividir 20 entre 10, el residu és 0.

6 és **divisor** de 36 perquè al dividir 36 entre 6, el residu és 0.

1 és **divisor** de 18 perquè al dividir 18 entre 1, el residu és 0.

18 és **divisor** de 18 perquè al dividir 18 entre 18, el residu és 0.

Si ***a*** és **divisor** de ***b***, aleshores també es diu que ***b*** és **divisible** per ***a***.

Exemple:

a) 8 és **divisible** per 2 perquè 2 és divisor de 8, és a dir, al dividir 8 entre 2, el residu és 0.

b) 20 és **divisible** per 10 perquè 10 és divisor de 20, és a dir al dividir 20 entre 10, el residu és 0.

c) 36 és **divisible** per 6 perquè 6 és divisor de 36, és a dir, al dividir 36 entre 6, el residu és 0.

Notes

Com hauràs deduït, les relacions ser *múltiple* i ser *divisor* són relacions inverses.

No confongues les expressions ser múltiple, ser divisor i ser divisible. Vegem-ho amb un exemple:

Exemple:

- De la igualtat: 5 · 3 = 15, podem deduir el següent:
  - 5 i 3 són divisors de 15.
  - 15 és múltiple de 3 i de 5.
  - 15 és divisible per 3 i per 5.

Activitats proposades

13. A partir de la igualtat: 6 · 4 = 24, escriu les relacions que existixen entre estos tres nombres.

14. Escriu frases usant les expressions: “ser múltiple de”, “ser divisor de“i “ser divisible per” i els nombres 10, 5 i 35.

Autora: Fernanda Ramos
Traducció: Institut Juan de Garay

2.2. Criteris de divisibilitat

Per a veure si un nombre enter és divisible per un altre nombre enter, és suficient dividir-los i veure si el residu és 0. Però quan els nombres són grans, les operacions poden resultar complicades.

La tasca es simplifica si tenim en compte els anomenats criteris **de divisibilitat** que ens permeten saber si un nombre és divisible per un altre sense necessitat d'efectuar la divisió.

Criteri de divisibilitat per 2

Un nombre enter és divisible per **2** quan la seua última xifra és 0 o xifra parell.

Exemple:

- Els nombres: 312, 50, 346, 500, 780, 988 són divisibles per 2.

Criteri de divisibilitat per 3

Un nombre enter és divisible per **3** quan la suma de les seues xifres és múltiple de 3

Exemple:

- El nombre 231 és divisible per 3 ja que 2 + 3 + 1 = 6 que és múltiple de 3.
- El nombre 1002 és divisible per 3 ja que 1 + 0 + 0 + 2 = 3.

Si al sumar les xifres obtens un nombre encara gran i no saps si és o no múltiple de 3, pots tornar a aplicar el mateix sistema, només has de tornar a sumar totes les seues xifres:

- El nombre 69 és divisible per 3 ja que 6 + 9 = 15, i 15 és divisible per 3, perquè 1 + 5 = 6 que és múltiple de 3. Per tant, 6, 15 i 69 són múltiples de 3.
- El nombre 78596778696 és divisible per 3 ja que 7+ 8+ 5+ 9+ 6+ 7+ 7 + 8 + 6 + 9 + 6 = 78, i 78 és divisible per 3 perquè 7 + 8 = 15, i 15 ho és.

Criteri de divisibilitat per 4

Un nombre enter és divisible per **4** si el nombre format per les dos últimes xifres del nombre considerat és múltiple de 4.

Exemple:

- El nombre 3628 és divisible per 4 ja que acaba en 28, que és múltiple de 4.

Criteri de divisibilitat per 5

Un nombre enter és divisible per **5** quan acaba en 0 o en 5.

Exemple:

- Els nombres 4875 i 34590 són divisibles per 5.

Autora: Fernanda Ramos
Traducció: Institut Juan de Garay

Criteri de divisibilitat per 6

Un nombre enter és divisible per **6** quan ho és al mateix temps per 2 i per 3.

Exemple:

El nombre 7332 és divisible per 6 ja que:

Ho és per 2 per ser parell.

Ho és per 3, ja que les seues xifres sumen 15 que és múltiple de 3.

Criteri de divisibilitat per 9

Un nombre enter és divisible per **9** quan la suma de les seues xifres és 9 o múltiple de 9.

Exemple:

- El nombre 6012 és divisible per 9 ja que: 6 + 0 + 1 + 2 = 9.
- El nombre 3903 no és divisible per 9 ja que: 3 + 9 + 0 + 3 = 15 que no és múltiple de 9.

Criteri de divisibilitat per 10

Un nombre enter és divisible per **10** quan acaba en 0.

Exemple:

- El nombre 59870 és divisible per 10.

Nota

Observa que els nombres que són divisibles per 10 ho són per 2 i per 5 i viceversa.

Criteri de divisibilitat per 11

Un nombre enter és divisible per **11** quan la diferència entre la suma de les xifres que ocupen lloc imparell i la suma de les xifres que ocupen lloc parell dóna 0 o múltiple d'11

Exemple:

- El nombre 80496 és divisible per 11 ja que: (8 + 4 + 6) – (0 + 9) = 11

Activitats proposades

15. Digues quals dels següents nombres són múltiples de 2:

23, 24, 56, 77, 89, 90, 234, 621, 400, 4520, 3411, 46295, 16392, 385500

Els nombres triats, coincideixen amb els divisors de 2? I amb els que són divisibles per 2?

16. Escriu quatre nombres que siguen divisibles per 10 i per 3 al mateix temps.

17. Substitueix A per un valor apropiat perquè:

a) 24 A75 siga múltiple de 3.

b) 1107 A siga múltiple de 6.

c) 5 A439 siga múltiple d'11.

18. Tots els nombres divisibles per 3 els són per 9? I al contrari? Raona la resposta.

19. Sabries deduir un criteri de divisibilitat per 15? Posa un exemple.

20. Emplena al teu quadern la següent taula escrivint verdader o fals:

Nombre	¿És…?	Verdader/Fals
2567	Divisible per 2	
498650	Divisible per 5	
98370034	Divisible per 3	
78337650	Divisible per 6	
984486728	Divisible per 4	
23009845	Divisible per 11	

2.3. Obtenció de tots els divisors d'un nombre enter

En principi, per a trobar els divisors naturals d'un nombre enter N, l'anem dividint successivament entre 1, 2, 3, 4,..., N. D'aquesta manera, els divisors de N seran aquells nombres que el dividisquen exactament, és a dir donen de residu 0.

Exemple:

- Si volem trobar els divisors de 18 l'hauríem de dividir entre 1, 2, 3, 4, 5,...., 18 i veure en quins casos la resta és 0. Pots comprovar que els divisors de 18 són: 1, 2, 3, 6, 9, 18.

El que ocorre és que aquesta forma de calcular els divisors d'un nombre es complica molt quan el nombre és gran. Pel que, si utilitzem els criteris de divisibilitat que hem aprés, només haurem de fer les divisions pels nombres pels quals N siga divisible.

Si la divisió és exacta, ***N* : *d* = *c*,** llavors el divisor (***d***) i el quocient (***c***) són divisors de ***N***, la qual cosa ens permet acurtar la busca de divisors, perquè de cada divisió exacta obtenim dos divisors.

Acabarem de buscar els divisors quan arribem a una divisió en què el quocient siga menor o igual que el divisor.

Activitats resoltes

- Vegem, com a exemple, el càlcul dels divisors del nombre 54.

Ja sabem que tot nombre té com divisors a la unitat i a ell mateix 1 i 54.

És divisible per 2. (Acaba en xifra parell) → 54 : 2 = 27 → Ja tenim dos divisors: 2 i 27.

És divisible per 3. (5 + 4 = 9, múltiple de 3) → 54 : 3 = 18 → Ja tenim dos divisors: 3 i 18.

És divisible per 6. (Al ser divisible per 2 i 3) → 54 : 6 = 9 → Ja tenim dos divisors: 6 i 9.

És divisible per 9. (5 + 4 = 9, múltiple de 9) → 54 : 9 = 6.

Com el quocient 6 és menor que el divisor 9, ja hem acabat. 9 i 6 (Repetits).

Per tant, els divisors de 54 són: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27 i 54.

Activitats proposades

21. Calcula els múltiples de 25 compresos entre 1 i 200.

22. Indica si les següents afirmacions són verdaderes o falses:

a) 40 és múltiple de 10.

b) 2 és divisor de 10.

c) 4 és múltiple de 8.

d) 55 és divisible per 11.

e) 90 és divisor de 9.

f) 3 és divisible per 45.

23. Substitueix *x* e *y* per valors apropiats per al següent nombre siga divisible per 9 i per 10 al mateix temps: 256*x*81*y*.

24. Què únic nombre amb tres xifres iguals és divisible per 2 i per 9 al mateix temps?

25. Calcula tots els divisors dels nombres següents:

a) 65 b) 33 c) 60 d) 75 e) 100 f) 150

Autora: Fernanda Ramos
Traducció: Institut Juan de Garay

3. NOMBRES PRIMERS

3.1. Nombres primers i compostos

Quins són els divisors de 2? I del 3? I del 5? I del 7? Trobes alguna similitud entre ells? Evidentment sí, els divisors d'aquests nombres són l'1 i ells mateixos. A aquests nombres se'ls anomena primers.

Un **nombre primer** és aquell nombre natural que només té dos divisors: l'1 i ell mateix.

S'anomena nombre **compost** a aquell nombre natural que té més de dos divisors, és a dir, a aquell que no és primer.

Nota

L'1 es considera que no és primer ni compost, ja que no verifica cap de les dues definicions.

Exemple:

- Els nombres 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 són els deu primers nombres primers.
- Nombres com: 22, 45, 60, 98, 345 o 39867657 són compostos.

Activitats proposades

26. Continua la llista de nombres primers de l'exemple amb 10 nombres primers més.

27. Quants nombres primers creus que hi ha? Creus que s'acaben en un moment donat o que són infinits?

3.2. La garbella d'Eratòstenes

La garbella **d'Eratòstenes** és un algoritme (és a dir, una seqüència d'instruccions) que permet trobar tots els nombres primers menors que un nombre natural donat.

Nosaltres ho farem per als menors o iguals que 100, és a dir, esbrinarem quins són els nombres primers fins al 100.

L'algoritme consta dels passos següents :

a) Construïm una llista amb els nombres de l'1 al 100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

b) Al principi es ratlla l'1, perquè sabem que no és primer.

c) El primer nombre que quede sense ratllar ha de ser primer. Es marca i es ratllen els seus múltiples.

d) Es repetix novament el pas c) fins que s'acaben els nombres.

Per tant:

Autora: Fernanda Ramos
Traducció: Institut Juan de Garay

- Deixem sense ratllar el següent nombre, que és el 2, que per tant és primer, i ratllem tots els múltiples de 2, quedant la garbella com segueix:

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	39	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
51	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	57	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	63	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	69	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	75	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
81	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	87	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	93	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	99	~~100~~

- Conservem el 3 perquè al ser el primer que apareix sense ratllar, sabem que és primer, però eliminem tots els múltiples de 3, és a dir, ratllem un de cada tres nombres. Ens queda una taula així:

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

- No necessitem ratllar el 4 perquè ja està ratllat, llavors anem al 5 que és el següent nombre, per tant no ho ratllem i eliminem tots els múltiples de 5 (alguns dels quals ja estaven ratllats)

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

- I després seguim de forma anàloga amb el 7 i ratllant tots els múltiples de 7.
- Després el següent nombre no ratllat és l'11 i ratllem els múltiples d'11.

- Després ens trobem amb el 13 i ratllem els múltiples de 13.

Autora: Fernanda Ramos
Traducció: Institut Juan de Garay

De forma anàloga anem localitzant els següents primers i ratllant els seus múltiples fins a arribar a una taula de la forma:

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Els nombres que no queden ratllats en cap pas és perquè no són múltiples de cap nombre anterior (assenyalats ací en roig).

En realitat, el que *Eratòstenes* estava fent era construir una espècie de "filtre" pel qual, al fer passar a tots els nombres, només quedaven els "primers".

Per tant, els nombres primers que hi ha entre els primers cent nombres, són:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 91 y 97.

Activitats proposades

28. T'atreviries a repetir la garbella d'Eratòstenes, però fins al 150?

29. Busca els distints significats de les paraules "garbella" i "algoritme", en què més contextos els pots utilitzar?

3.3. Descomposició d'un nombre natural en factors primers

Sabem que un nombre **primer** només té dos divisors: ell mateix i l'1.

Així que si voldríem expressar un nombre primer com a producte d'altres dos, els únics factors serien l'1 i el propi nombre.

Per exemple, si vull expressar 13 com a producte de dos nombres, seria:

$$13 = 1 \cdot 13 \text{ o també } 13 = 13 \cdot 1$$

No obstant això, si el nombre és **compost**, podrà expressar-se com a producte d'altres nombres que no són ni l'1 ni ell mateix.

Aprendrem a descompondre un nombre natural en factors primers, la qual cosa significa expressar un nombre natural com a producte d'altres nombres però han de ser primers.

Descompondre un nombre natural en factors primers és expressar el dit nombre com un producte, on tots els seus factors són nombres primers.

Per a descompondre el nombre 20 podríem fer: $20 = 4 \cdot 5$, però la descomposició en factors primers no seria correcta perquè el 4 no és un nombre primer.

La seua descomposició seria $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$, que s'expressaria com $20 = 2^2 \cdot 5$

Per a descompondre un nombre compost (perquè, com hem vist, descompondre un nombre primer no té cap interès ni dificultat) en els seus factors primers, s'ha de seguir el procediment següent:

a) Dividir el nombre natural donat pel menor primer possible utilitzant per fer això els criteris de divisibilitat si és possible, o realitzant la divisió si no hi ha un altre remei.

b) Realitzar la divisió, i si el quocient és divisor del nombre primer, realitzar la divisió.

c) Si el quocient no és divisor del dit nombre primer, buscar el menor nombre primer possible que siga divisor, recorrent novament als criteris de divisibilitat o continuar dividint.

d) Seguir amb el procediment fins a obtindre el quocient igual a 1.

Notes

1) Per a realitzar les divisions utilitzarem una barra vertical, a la dreta escrivim els divisors primers i a l'esquerra els quocients.

2) Els factors primers en l'expressió del nombre ja factoritzat se solen escriure en orde creixent.

3) Quan ja tinguem pràctica, i amb nombres no massa grans, podem descompondre un nombre en producte de dos i després cada un d'ells en altres productes fins que tots els factors obtinguts siguen primers.

Per exemple: $60 = 30 \cdot 2$.

Com $30 = 15 \cdot 2$ i $15 = 3 \cdot 5$, tenim que: $60 = 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$ i per tant, la seua descomposició és: $60=2^2 \cdot 3 \cdot 5$

Activitats resoltes

<table>
<tr>
<td>1. Realitzarem la descomposició en factors primers del nombre 90:
Com 90 és múltiple de 2, el dividim: 90 : 2 = 45
Com 45 no és múltiple de 2, busquem el menor primer possible pel qual es puga dividir, que és 3, el dividim: 45 : 3 = 15.
Com 15 es pot tornar a dividir entre 3, tenim:
15 : 3 = 5
Per tant: $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$
Açò se sol realitzar com s'assenyala en la nota de la manera següent:
$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$</td>
<td>2. Realitzarem una altra factorització per al nombre 2550:
$$\begin{array}{r|l} 2550 & 2 \\ 1260 & 2 \\ 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$
Per tant: $2550 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$</td>
</tr>
</table>

Activitats proposades

30. Descompon en factors primers els nombres següents:

a) 40 b) 56 c) 75 d) 90

31. Descompon en factors primers els nombres següents:

a) 110 b) 124 c) 290 d) 366

32. Descompon en factors primers els nombres següents:

a) 1290 b) 3855 c) 4520 d) 5342

33. Si descomponem en factors primers els nombres: 10, 100, 1000, 10000 i 100000, què és el que observes? Ho podries fer de forma més ràpida sense necessitat d'usar el mètode general?

34. Què ocorre al descompondre en factors primers els nombres 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256?

Podries continuar tu la sèrie amb 5 nombres més?

3.4. Màxim comú divisor de diversos nombres

Exemple:

- Calcularem els divisors dels nombres 24 i 36:

Divisors de 24 $\rightarrow$ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

Divisors de 36 $\rightarrow$ 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

Quins són els majors divisors comuns a ambdós? Els divisors comuns a ambdós són diversos: 1, 2, 3, 4, 6 i 12, però el major d'ells és 12 i es diu que 12 és el màxim comú divisor de 24 i de 36.

S'anomena **màxim comú divisor** de diversos nombres naturals al major dels divisors comuns a tots ells i s'escriu **M.C.D.**

A l'exemple anterior, escriuríem: M.C.D (24, 36) = 12

En principi, pareix que trobar el M.C.D no és molt complicat, només hem de calcular els divisors dels nombres, considerar els comuns i prendre el major d'ells. Però este mètode només té sentit amb pocs nombres i xicotets, ja que amb molts nombres o amb nombres grans, el càlcul es complica molt.

Per això, calcularem el màxim comú divisor utilitzant una sèrie de passos, per mitjà dels quals el càlcul se simplifica moltíssim:

<u>Càlcul del M.C.D.</u>

1. Factoritzem els nombres.
2. Prenem els factors comuns a tots els nombres elevats al menor exponent.
3. El producte dels factors considerats al pas 2 és el M.C.D.

Activitats resoltes

- Calcularem el màxim comú divisor dels nombres: 72, 90 i 120

1. Factoritzem cada nombre:

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

$$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

2. Prenem els factors comuns a tots els nombres elevats al menor exponent: Són 2 i 3

3. El producte dels factors considerats al pas 2 és el M.C.D. És a dir:

$$\text{M.C.D } (72, 90, 120) = 2 \cdot 3 = 6.$$

Nota

Dos nombres naturals sempre tenen almenys un divisor en comú, l'1. Si eixe és el M.C.D aleshores diem que eixos nombres són primers **entre si**.

Activitats proposades

35. Calcula el M.C.D dels següents parells de nombres:

a) 60 i 45 b) 120 i 55 c) 34 i 66 d) 320 i 80

36. Calcula el M.C.D dels nombres següents:

a) 30, 12 i 22 b) 66, 45 i 10 c) 75, 15 i 20 d) 82, 44 i 16

3.5. Mínim comú múltiple de diversos nombres

El **mínim comú múltiple** de diversos nombres naturals és el menor dels múltiples que tenen en comú, i s'escriu **m.c.m.**

Activitats resoltes

Igual que amb el M.C.D., es pot calcular el mínim comú múltiple aplicant la definició que acabem de veure. El que ocorre és que es tracta d'una forma molt "rudimentària" i que es complica molt per a nombres grans.

- Calcularem m.c.m (10, 15) aplicant aquesta definició:

Múltiples de 10 $\rightarrow$ 10, 20, 30, 40, 50, 60, …

Múltiples de 15 $\rightarrow$ 15, 30, 45, 60, 75, 90, …

Com veiem, múltiples comuns a ambdós són: 30, 60, 90, … però el menor d'ells és el 30. Per tant:

$$\text{m.c.m } (10, 15) = 30$$

Veurem ara els passos a realitzar per a simplificar aquest càlcul i fer-ho més mecànic:

Càlcul del m.c.m.

1. Factoritzem els nombres
2. Prenem els factors comuns i no comuns elevats al major exponent.
3. El producte d'eixos factors del pas anterior és el m.c.m.

Activitats resoltes

- Vegem com calcular el mínim comú múltiple de 16, 24, 40 seguint estos passos:

  1. Factoritzem els nombres:

$$16 = 2^4$$
$$24 = 2^3 \cdot 3$$
$$40 = 2^3 \cdot 5$$

  2. Prenem els factors comuns i no comuns elevats al major exponent.

  Al nostre cas: 2^4, 3 i 5.

  3. Multiplicant aquests factors tenim que: m.c.m(16, 24, 40) = $2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 240$.

Activitats proposades

37. Calcula el m.c.m. dels següents parells de nombres:

a) 60 i 45   b) 120 i 55   c) 34 i 66   d) 320 i 80

38. Calcula el m.c.m dels nombres següents:

a) 30, 12 i 22   b) 66, 45 i 10   c) 75, 15 i 20   d) 82, 44 i 16

Problemes

Però, a més, el càlcul del M.C.D. i del m.c.m. es molt útil per a resoldre problemes **reals**.
Vegem alguns exemples:

Exemple:

- Una dependenta d'una botiga de regals té un rotllo de llaç roig de 15 m i un blau de 20 m. Com per embolicar cada regal utilitza sempre trossos d'1 metre, i les vol tallar en trossos de la mateixa longitud per tindre preparades per fer empaquetar caixes de manera que no sobre res en els rotllos. Quina és la longitud màxima que pot tallar cada rotllo per a fer els paquets?

Estem buscant un nombre natural que siga divisor de 15 i de 20 al mateix temps. dels nombres que complisquen açò, triarem el major.
Açò és, precisament, el M.C.D: M.C.D.(15, 20) = 5
Per tant, la longitud de cada tros de llaç pels paquets serà de 5 m.

Exemple:

- El iaio d'Anna pren unes pastilles per al cor cada 8 hores i altres per a la circulació cada 12 hores. Acaba de prendre els dos medicaments al mateix temps. Dins de quantes hores tornarà a prendre-se'ls al mateix temps?

Estem buscant un nombre d'hores que serà major o igual a 12, i múltiple de 8 i de 12 al mateix temps. De tots els nombres que ho complisquen, ens interessa el més xicotet. És a dir, hem de calcular: m.c.m.(8, 12) = 24

Per tant, dins de 24 hores es prendrà ambdós medicaments al mateix temps.

Activitats proposades

39. Maria i Paula tenen 25 grans blancs, 15 grans blaus i 90 grans rojos. Volen fer el major nombre de collars iguals sense que sobre cap gra. a) Quants collars iguals poden fer? b) Quin nombre de grans de cada color tindrà cada collar?

40. Un autobús passa per una parada cada 18 minuts, un altre cada 25 minuts i un tercer autobús cada 36 minuts. Si a les 9 del matí han passat en eixe lloc els tres autobusos al mateix temps. A quina hora tornen a coincidir?

41. Es compren a una floristeria 24 roses i 36 clavells. Quants centres de taula es poden elaborar si es col·loca la màxima quantitat de flors sense que sobre cap? Quantes roses i clavells es col·loquen en cada centre de taula?

42. Raül té diversos avisos al seu mòbil: un que dóna un senyal cada 60 minuts, un altre que dóna un senyal cada 150 minuts i un tercer que dóna un senyal cada 360 minuts. Si a les 10 del matí les 3 senyals d'avís han coincidit.

a) Quantes hores com a mínim han de passar perquè tornen a coincidir?

b) A quina hora tornaran a fer el senyal una altra vegada junts?

43. Quin serà la menor quantitat de caramels que es pot repartir en parts iguals entre grups de 20, 30, o 60 xiquets? Determina en cada cas quants caramels la toca a cada xiquet.

Autora: Fernanda Ramos
Traducció: Institut Juan de Garay

CURIOSITATS. REVISTA

A què pensaves que els nombres eren només això, nombres?

Doncs no, hi ha **nombres perfectes, nombres amics, fins i tot nombres bessons!!**

Nombres perfectes

Són nombres **perfectes** els que són iguals a la suma dels seus divisors, excepte ell mateix.

El més xicotet és el 6: $6 = 1 + 2 + 3$

El següent és el 28: $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

Després del 28, no apareix cap nombre perfecte fins al 496, el quart nombre perfecte és el 8.128, el quint perfecte és 33.550.336. S'observa que cada nombre perfecte és molt major que l'anterior. Què curiós!!

Haurà alguna fórmula per obtindre nombres perfectes?

Clar que sí, la va descobrir Euclides i és la següent:

$\mathbf{2^{n-1} \cdot (2^n - 1)}$

Sent n un nombre natural i sempre que (2^n-1) siga primer

Nombres amics

Dos **nombres amics** són dos enters positius tals que la suma dels divisors propis d'un d'ells és igual a l'altre. (Es consideren divisors propis d'un nombre a tots els seus divisors excepte ell mateix)

Un exemple és el parell (220, 284), ja que:

Els divisors propis de 220 són 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 i 110, que sumen 284

Els divisors propis de 284 són 1, 2, 4, 71 i 142, que sumen 220

Per als pitagòrics els noms amics eren molt especials, i els atribuïen propietats quasi màgiques.

Nombres bessons

S'anomenen nombres bessons als parells de nombres primers que són imparells consecutius (3 i 5, 11 i 13,...). Pots trobar tu algun més?

Se suposa que el nombre de primers bessons és infinit, però està sense demostrar.

El que sí es pot demostrar és que hi ha dos nombres primers consecutius la diferència del qual siga tan gran com vulguem.

Nombres primers a la música i literatura

El compositor francés Olivier Messiaen, inspirant-se en la naturalesa, va utilitzar els nombres primers per crear música no mètrica emprant sons amb duració un nombre primer per crear ritmes impredicibles.

El curiós incident del gos a mitjanit, de Mark Haddon, descriu en primera persona la vida de un jove autista, utilitza únicament els nombres primers per numerar els capítols.

La soletat dels nombres primers, novel·la escrita per Paolo Giordano, va guanyar el premi Strega en 2008.

RESUM

Concepte	Definició	Exemples
El sistema de numeració decimal és posicional	El valor d'una xifra en un nombre depèn del lloc que ocupa en el nombre	L'1 no té el mateix valor en 1845 que en 6351
Jerarquia de les operacions	-En les operacions amb parèntesi, primer es realitzen els parèntesis i després les altres. -En les operacions sense parèntesi primer es realitzen multiplicacions i divisions i després sumes i restes.	L'operació 2·3+7 té com resultat 13, no 20, que és el que resultaria efectuant incorrectament abans la suma que el producte.
- **Divisor** - **Divisible** **Múltiple**	*a* és **divisor** de *b* quan al dividir *b* entre *a* el residu és 0. *a* és **múltiple** de *b* o *a* és **divisible** per *b* quan al dividir *a* entre *b* el residu és 0.	2 i 3 són divisors de 6. 6 és múltiple de 2 i de 3. 6 és divisible per 2 i per 3.
Criteris de divisibilitat	Simplifiquen molt el càlcul de la descomposició factorial i, en general esbrinar quan un nombre és divisible per un altre.	3742 és divisible per 2. 4980 és divisible per 2 i per 5. 2957 és divisible per 3.
Nombre primer	És aquell que només té dos divisors: l'1 i ell mateix.	23 i 29 són nombres primers.
Nombre compost	És aquell que té més de dos divisors, és a dir, que no és primer.	25 i 32 son nombres compostos.
Garbella d'Eratòstenes	És un algoritme que permet calcular tots els nombres primers menor que un donat.	Els primers menors que 20 són: 2, 3, 5, 7, 11, 13,17 i 19
Descompondre un nombre en factors primers	És expressar-lo com a producte de nombres primers.	$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
Mínim comú múltiple de diversos nombres	És el menor dels múltiples que tenen en comú.	m.c.m.(18, 12)= 36
Màxim comú divisor de diversos nombres	És el major dels divisors comuns a tots ells.	M.C.D.(18, 12) = 4

Autora: Fernanda Ramos
Traducció: Institut Juan de Garay

EXERCICIS I PROBLEMES. Matemàtiques 1r d'ESO

Repàs nombres naturals

1. Escriu per mitjà de potències de 10 els nombres següents:

a) 84300 b) 3333 c) 119345 d) 903711

2. Quin lloc ocupa la xifra 4 als següents nombres? En quin dels nombres té major valor? I menor?

a) 508744 b) 653349001 c) 47092157 d) 9745

3. Trau factor comú i calcula mentalment:

a) 28 · 4 – 28 · 3 b) 30 · 4 + 30 · 2 c) 66 · 23 – 66 · 13 d) 700 · 44 – 700 · 4

4. Construeix dos nombres amb les xifres 6,7 i 8 tal que el seu producte siga el més gran possible.

5. Realitza les següents divisions i comprova amb cadascuna d'elles la propietat: D = d · c + r

a) 3844 : 45 b) 74840 : 30 c) 983035 : 981 d) 847 : 45

6.Esbrina, utilitzant només la calculadora, els quocients i els residus de les divisions següents:

a) 654 : 77 b) 543 : 7 c) 8374 : 85 d) 9485 : 11 e) 6590 : 41

7. Realitza les operacions següents:

a) (55 + 12) · 4 b) 66 · 2 + 10 c) 55 + 70 · 3 + 11 d) 330 – 10 · 2 + 82

8. Digues quines de les següents operacions tenen el mateix resultat:

a) 2 · (46 - 16) b) 2 · 46 - 16 c) 2 · 46 – 8 · 16 d) 2 · (46 + 16) e) 2 · 46 + 16

9. Realitza les operacions de l'exercici anterior en la calculadora i comprova la importància d'afegir els parèntesis.

10. Realitza les operacions següents:

a) 4 · (44 + 5) – 6 · 2 + 9 b) 2·(3 + 11) - (4 + 12) c) (18 - 4)·5 + 3 · 7 - 13 d) 5·12+(3 - 2)·4 - 3 + 4·5 - 5

11. Inventa un problema en què hages de realitzar l'operació següent: 5 + 4(6 - 2)

12. Troba, utilitzant només la calculadora, els quocients i les restes de les divisions següents:

a) 376 : 37 b) 299 : 7 c) 3524 : 65 d) 585 : 22 e) 2060 : 51

13. Realitza les operacions següents:

a) (34 + 23) · 5 b) 87 · 2 + 10 c) 55 + 65 · 3 + 11 d) 230 – 100 · 2 + 90

14. Digues quines de les següents operacions tenen el mateix resultat:

a) 8 · (22 – 12) b) 8 · 22 – 12 c) 8 · 22 – 8 · 12 d) 8 · (22 + 12) e) 8 · 22 + 12

15. Realitza les operacions de l'exercici anterior en la calculadora i comprova la importància d'afegir els parèntesis.

16. Realitza les operacions següents:

a) 4·(65 + 7) – 5 · 2 + 4 b) 2·(3 + 9) - (4 + 8) c) (22 - 4)·5 + 3 · 2 - 1

d) 5· 4 + (4 - 2) · 5 – 3 + 4 · 6 – 5

17. Inventa un problema en què hages de realitzar l'operació següent: (34 + 7) · 8

18. Sabem que per al viatge de fi de curs són necessaris 3 autobusos, ja que viatjaran 103 alumnes. Als dos primers autobusos viatgen el mateix nombre d'estudiants i al tercer un alumne més que als altres dos. Quantes persones viatgen en cada autobús?

19. MÀGIA!

Segueix els passos següents:

- Pensa en dos nombres naturals d'una xifra.
- Multiplica el primer per 2 i suma-li 8.
- Multiplica el resultat anterior per 5.
- Suma el segon nombre que havies pensat al resultat anterior.
- Resta 40 a l'últim resultat

Què ocorre? És casualitat? Passarà sempre el mateix? Pots explicar-ho?

Divisibilitat

20. Escriu els deu primers múltiples de 6 i els deu primers múltiples de 9. Quins són comuns a ambdós?

21. Escriu quatre nombres que complisquen que la xifra de les unitats siga el triple que la de les desenes de manera que dos d'ells siguen divisibles per 2 i els altres dos no ho siguen.

22. Indica quals dels següents nombres són múltiples de 15:

1, 30, 50, 60, 70, 75, 100, 125, 150

23. Digues quins dels següents nombres són múltiples de 5. I de 10? Quins coincideixen? Per què?

23, 24, 56, 77, 89, 90, 234, 621, 400, 4520, 3411, 46295, 16392, 385500

24. Escriu quatre nombres de quatre xifres que complisquen que la xifra de les desenes siga el doble que la de les unitats de manera que un d'ells siguen divisible per 3, un altre per 11, un altre per 2 i un altre per 4.

25. Copia al teu quadern i completa la següent taula escrivint verdader o fals:

Nombre	És…?	Verdader/Fals
327	Divisible per 11	
494530	Divisible per 4	
39470034	Divisible per 6	
7855650	Divisible per 3	
985555328	Divisible per 2	
20000045	Divisible per 10	

26. Fes una llista amb els valors de les monedes i bitllets del sistema monetari euro.

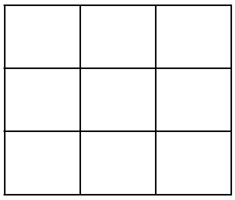
Figura entre ells algun nombre primer? Per què creus que és així?

27. Pere té una forma molt peculiar de donar el telèfon als seus amics: els diu que consta de nou xifres, que no es repetix cap i que llegint-lo d'esquerra a dreta es compleix:

- La primera xifra és un múltiple de 3 major que 6.
- Les dos primeres xifres formen un múltiple de 2 i de 5.
- Les tres primeres xifres formen un nombre parell múltiple de 3
- Les quatre primeres xifres formen un nombre que és múltiple de 5 però no de 2.
- Les cinc primeres xifres formen un nombre múltiple de 2 i de 3.
- Les sis primeres xifres formen un nombre múltiple d'11.
- La sèptima xifra és un múltiple de 7.
- Les huit primeres xifres formen un nombre imparell.
- Les quatre últimes xifres formen un múltiple d'11.

Esbrina quin és el seu telèfon.

28. Calcula quants quadrats pots comptar en la figura següent:



29. Substitueix x e y per valors apropiats per a que el següent nombre siga divisible per 2 i per 11 al mateix temps:

256x81y

30. Sabem que el nombre 1452 és múltiple d'11. Calcula un altre múltiple d'11 només canviant de lloc les xifres d'aquest nombre.

31. Completa al teu quadern amb les expressions "ser múltiple de", "ser divisor de " o "ser divisible per":

a) 40 és .... 10.

b) 2 és .... 10.

c) 4 és .... 8.

d) 335 és .... 11.

e) 90 és .... 45.

f) 3 és ....15.

Nombres primers

32. Descompon en factors primers els següents nombres: 1530, 2457 i 7440.

33. Observa la descomposició factorial dels següents nombres a, b, c, d i contesta:

$a = 2 \cdot 3^2 \quad b = 2 \cdot 3 \quad c = 5 \cdot 7 \quad d = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$

a) Quin d'ells és múltiple de a?

b) Quins són divisors de d?

c) Quins són primers entre si?

34. Esbrina quals són els nombres les descomposicions factorials dels quals són:

a) $x = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ b) $y = 5^2 \cdot 2^2 \cdot 11$ c) $z = 2 \cdot 5^2 \cdot 7$

35. Calcula el M.C.D dels següents parells de nombres:

a) 9 i 12 b) 18 i 42 c) 8 i 15 d) 108 i 630

36. Calcula el m.c.m. dels següents parells de nombres:

a) 140 i 300 b) 693 i 1485 c) 365 i 600 d) 315 i 1845

37. Calcula el m.c.m i M.C.D. dels següents nombres:

a) 24, 60 i 80 b) 60, 84 i 132 c) 270, 315 i 360 d) 240, 270 i 36

AUTOEVALUACIÓ DE 1r D'ESO

1. Quin és el resultat de 20 + 15 · 3?

a) 105 b) 65 c) 330 d) 900

2. Quina de les següents afirmacions és verdadera ?

a) En una divisió exacta el quocient sempre és zero.

b) En el sistema de numeració decimal el valor d'una xifra és independent del lloc que ocupa.

c) Si multipliquem dividend i divisor pel mateix nombre diferent de zero, el quocient no varia.

d) El producte i la divisió de nombres naturals compleixen la propietat commutativa.

3. Quina de les solucions és la correcta per al conjunt dels divisors de 40?

a) D(40) = {1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40} c) D(40) = {1, 2, 4, 5, 8, 10, 12, 20, 40}

b) D(40) = {1, 2, 4, 6, 5, 8, 10, 20, 40} d) D(40) = {0, 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40}

4. El nombre de divisors naturals de 12 és:

a) 3 b) 2 c) 4 d) 1

5. El nombre 315A és múltiple de 9 per als següents valors de A:

a) A = 9 i A = 3 b) A = 9 i A = 1 c) A = 3 i A = 6 d) A = 9 i A = 0

6. Quin d'aquests nombres compleix que és un nombre de tres xifres parell, divisible per 5 i per 17 i la suma de les seues xifres és 7?

a) 170 b) 510 c) 610 d) 340

7. Sabent que a és divisible per b. Indica quina de les següents afirmacions és verdadera:

a) El nombre a és divisor de b.
b) El nombre a és múltiple de b.
c) El nombre b és un múltiple de a.
d) Els nombres a i b són primers entre si.

8. El M.C.D.(54, 360, 45) és:

a) 18 b) 27 c) 45 d) 70

9. Maria compra en el supermercat els sucs en paquets de 2 i els refrescos en paquets de 3. Hui volia comprar el mateix nombre de sucs que de refrescos, però el menor nombre possible per a no portar molt pes en el camí a sa casa. Quants va comprar?

a) 3 b) 2 c) 6 d) 12

10. Paula vol fer un joc de cartes tallant una cartolina de 16 cm de llarg i 12 cm d'ample en quadrats iguals de manera que siguen el més grans possible i no sobre cartolina. Quant mesurarà el costat de cada carta?

a) 4 cm b) 2 cm c) 8 cm d) 6 cm

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Ana Lorente

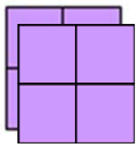
Revisora: Irene García Saavedra

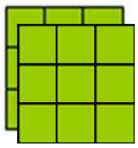
Il·lustracions: Banc d'imatges de l'INTEF

Traducció al valencià: Departament de Matemàtiques de l'Institut Juan de Garay

Índex

Per a treballar amb números molt grans, per a calcular la superfície d'una habitació quadrada o el volum d'un cub ens va a resultar útil a usar les potències. Coneixerem en este capítol com operar amb elles.





Si coneixem la superfície d'un quadrat o el volum d'un cub i volem saber quin és el seu costat utilitzarem les arrels. En aquest capítol aprendràs a usar-les amb un poc de soltesa.

1. POTÈNCIES

1.1. Concepte de potència. Base i exponent

Exemple:

- Maria guarda 5 collars en una bossa, cada 5 bosses en una caixa i cada 5 caixes en un calaix. Té 5 calaixos amb collars, quants collars té?

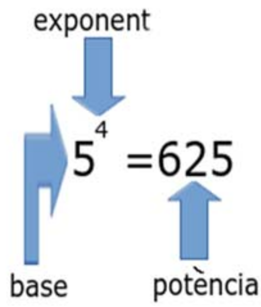
Per a esbrinar-ho has de multiplicar 5 x 5 x 5 x 5 que ho pots escriure en forma de potència: 5^4, que es llig 5 elevat a 4.

$$5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4 = 625.$$

Una **potència** és una forma d'escriure de manera abreviada una multiplicació de factors iguals. La **potència** a^n de base un nombre natural a i exponent natural n és un producte de n factors iguals a la base:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \ldots^{n \text{ factors}} \ldots \cdot a \qquad (n > 0)$$

El factor que es repetix és la **base** i el nombre de vegades que es repetix és **l'exponent**. Al resultat se l'anomena potència**.**



Activitats proposades

1. Calcula mentalment les següents potències i escriu el resultat al teu quadern:

a) 4^2 b) 2^4 c) 10^5 d) 3^3 e) 1^4 f) 1000^2

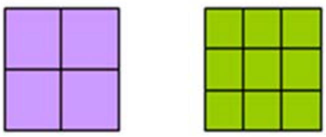
2. Calcula al teu quadern les potències següents:

a) 3^5 b) 7^4 c) 4^5 d) 9^4 e) 25^2 f) 16^3.

1.2. Quadrats i cubs

Exemple:

- Si un quadrat té 2 quadradets per costat Quants quadradets conté eixe quadrat? El nombre de quadradets que caben és $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$. L'àrea d'aquest quadrat és de 4 unitats. I si té 3 quadradets per costat. Quants quadradets conté eixe quadrat? El nombre de quadradets que caben és $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$. L'àrea d'aquest quadrat és de 9 unitats.



- De quants cubets està compost el cub gran si hi ha 3 al llarg, 3 a l'ample i 3 a l'alt? El nombre de cubets és $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27$. El volum d'aquest cub és 27 unitats.

Per aquesta relació amb l'àrea i el volum de les figures geomètriques, les potències d'exponent 2 i d'exponent 3 reben noms especials:

Les potències d'exponent 2 s'anomenen **quadrats** i les d'exponent 3 s'anomenen **cubs**.

$100 = 2^2 \cdot 5^2$
és un quadrat perfecte i la seua arrel quadrada és
$2 \cdot 5 = 10$.
$4900 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$
és un quadrat perfecte i la seua arrel és
$2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$.
Són quadrats perfectes.
$36 = 2^2 \cdot 3^2$
$81 = 3^2 \cdot 3^2$
Ho són també 144, 324 i 400?

Activitats proposades

3. Escriu al teu quadern el quadrat i el cub dels huit primers nombres naturals.

4. Indica quins de les següents potències són quadrats i quins són cubs:

Autora: Ana Lorente
Traducció: Institut Juan de Garay

a) 2^2 b) 3^2 c) 4^3 d) 5^4 e) 8^2 f) 16^3 g) 10^2

1.3. Lectura de potències

Les potències es poden llegir de dues maneres:

Exemple:

a) Així 5^2 es pot llegir 5 elevat a 2 i també es llig 5 al quadrat

b) 7^3 es pot llegir 7 elevat a 3 i també es llig 7 al cub

c) 8^4 es pot llegir 8 elevat a 4 i també es llig 8 a la quarta

d) 3^5 es pot llegir 3 elevat a 5 i també es llig 3 a la cinquena.

1.4. Potències d'1 i de zero

Una potència, de qualsevol base distinta de zero, elevada a zero és igual a 1.

Exemple:

$7^0 = 1$ $2459^0 = 1$ $1^0 = 1$.

$$\boxed{3^0 = 1}$$

U, elevat a qualsevol exponent, és igual a 1.

Exemple:

$1^2 = 1 \cdot 1 = 1$ $1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ $1^{35} = 1$ $1^0 = 1$.

$$\boxed{1^8 = 1}$$

Zero, elevat a qualsevol exponent distint de zero, és igual a 0.

Exemple:

$0^2 = 0 \cdot 0 = 0$ $0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$ $0^{35} = 0$.

$$\boxed{0^8 = 0}$$

Observació: 0^0 no se sap quant val, es diu que és una *indeterminació*.

Activitats proposades

5. Llig de dues maneres distintes les potències següents:

a) 5^3 b) 7^2 c) 25^4 d) 30^2 e) 7^5 f) 7^6.

6. Calcula mentalment:

a) 1^{2689} b) 0^{9826} c) 1927^0 d) 0^{1382} e) 1^{1000} f) 1961^0.

7. Completa la taula següent al teu quadern:

a	a^2	a^3	a^4	a^5
5				
	4			
		27		
			1	
				0

Autora: Ana Lorente
Traducció: Institut Juan de Garay

1.5. Potències de 10. Notació científica.

Les potències de base 10 tenen una propietat molt particular, són iguals a la unitat seguida de tants zeros com indica l'exponent:

Exemple:

$10^1 = 10$

$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$

$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1.000$

$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10.000$

$$\mathbf{10^5 = 100\,000}$$

Sabries trobar 10^7 sense fer cap operació?

La unitat seguida de zeros és igual a una potència de 10.
Açò ens permet expressar qualsevol nombre en **forma polinòmica** usant potències de 10.

$$6928 = 6 \cdot 1000 + 9 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 8 = 6 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 8$$

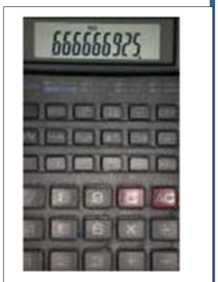
Activitats proposades

8. Busca els exponents de les potències següents:

a) $10^{\square} = 10.000$ b) $10^{\square} = 10.000.000$ c) $10^{\square} = 100$.

9. Expressa en forma polinòmica usant potències de 10:

a) 12.345 b) 6.780.912 c) 500.391 d) 9.078.280.



10. Utilitza la **calculadora** per obtindre potències successives d'un nombre. Si marques un nombre, a continuació dues vegades seguides la tecla de multiplicar i després la tecla igual obtens el quadrat del nombre.

a) Comprova-ho. Marca 7 * * = , què obtens?

b) Continua polsant la tecla igual i obtindràs les potències successives:

7 * * = = =…

c) Utilitza la teua calculadora per obtindre les potències successives de 2.

d) Torna a utilitzar-la per a obtindre les potències successives de 31 i anota-les al teu quadern.

Autora: Ana Lorente
Traducció: Institut Juan de Garay

2. OPERACIONS AMB POTÈNCIES I PROPIETATS

2.1. Producte de potències de la mateixa base

Per calcular el **producte** de dues o més potències de la mateixa base, es deixa la mateixa base i es sumen els exponents.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\boxed{9^3 \cdot 9^4 = 9^{3+4} = 9^7}$$

Exemple:

$$3^2 \cdot 3^3 = (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^{2+3} = 3^5$$

2.2. Quocient de potències de la mateixa base

El **quocient** de potències de la mateixa base és igual a una altra potència de la mateixa base i d'exponent, la diferència dels exponents.

$$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\boxed{5^7 : 5^4 = 5^{7-4} = 5^3}$$

Exemple:

$$3^5 : 3^3 = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3} = 3^{5-3} = 3^2$$

2.3. Elevar una potència a una altra potència

Per elevar una **potència** a una altra potència, es deixa la mateixa base i es multipliquen els exponents.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$\boxed{(6^3)^4 = 6^{3.4} = 6^{12}}$$

Exemple:

$$(7^5)^3 = (7^5) \cdot (7^5) \cdot (7^5) = (7·7·7·7·7) \cdot (7·7·7·7·7) \cdot (7·7·7·7·7) = 7^{15}$$

Activitats proposades

11. Aplica les propietats de les potències al teu quadern:

a) $7^{10} \cdot 7^2$ b) $8^{23} \cdot 8^3$ c) $5^5 \cdot 5^3 \cdot 5^6$ d) $10^3 \cdot 10^5 \cdot 10^4$

e) $(8^3)^2$ f) $(7^2)^4$ g) $(9^0)^6$ h) $(4^3)^2$

i) $6^{10} : 6^2$ j) $2^{23} : 2^3$ k) $9^8 : 9^3$ l) $3^{30} : 3^9$

m) $12^4 : 12^4$ n) $1^{25} : 1^{25}$ o) $5^3 : 5^0$ p) $7^4 \cdot 7^0$

12. T'has preguntat per què un nombre elevat a 0 és igual a 1. Analitza l'operació següent:

$$\frac{25}{25} = 1 \text{ i també } \frac{25}{25} = \frac{5^2}{5^2} = 5^{2-2} = 5^0$$

Per aqueix motiu es diu que tot nombre diferent de zero elevat a zero és igual a u.

2.4. Potència d’un producte

La potència d’un **producte** és igual al producte de cada un dels factors elevats al mateix exponent.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Exemple:

$$(5 \cdot 4)^3 = 5^3 \cdot 4^3.$$

2.5. Potència d’un quocient

La potència d’un **quocient** és igual al quocient de cada un dels factors elevats al mateix exponent.

$$(a : b)^n = a^n : b^n$$

Exemple:

$$(10 : 4)^3 = 10^3 : 4^3$$

Activitats proposades

13. Calcula:

a) $(2 \cdot 5)^4$ b) $(32 : 4)^3$.

14. Calcula **mentalment**

a) $2^2 \cdot 2^3$ b) $4^2 \cdot 4^2$ c) $3^2 \cdot 3^2$

d) $10^6 \cdot 10^3 \cdot 10^4 \cdot 10^2$ e) $1^4 \cdot 1^5 \cdot 1^{15}$ f) $0^{25} \cdot 0^5$.

15. Escriu en forma d’una única potència

a) $7^5 \cdot 7^6 \cdot 7^4$ b) $4^4 \cdot 4^6 \cdot 4^7$ c) $2^{20} \cdot 2^{17}$ d) $3^6 \cdot 3^7 \cdot 3^3$.

16. Calcula **mentalment**

a) $2^3 \cdot 2^2 \cdot 2$ b) $1^4 \cdot 1^6 \cdot 1^7$ c) $10^{15} \cdot 10^5$ d) $0^2 \cdot 0^6 \cdot 0^{12}$.

17. Calcula **mentalment**

a) $10^8 \cdot 10^3 \cdot 10^2$ b) $0^3 \cdot 0^7 \cdot 0^8$ c) $1^{46} \cdot 1^{200}$ d) $5^5 \cdot 2^5$.

18. Escriu en forma d’una única potència i calcula:

a) $2^5 \cdot 5^5$ b) $10^4 \cdot 3^4$ c) $2^{20} \cdot 5^{20}$ d) $10^{10} \cdot 5^{10}$.

19. Calcula utilitzant la **calculadora**

a) $53^3 \cdot 53^2 \cdot 53$ b) $71^3 \cdot 71^2$ c) $3{,}2^2 \cdot 3{,}2$ d) $82^3 \cdot 82$.

20. Calcula utilitzant la **calculadora**

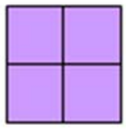
a) $49^2 \cdot 49^3 \cdot 49$ b) $35^4 \cdot 35^2$ c) $0'5^3 \cdot 0'5^5$ d) $147^2 \cdot 147$.

Autora: Ana Lorente
Revisora: Irene García Saavedra
Traducció: Institut Juan de Garay

3. ARRELS

3.1. Quadrats perfectes

Si es vol construir un quadrat de costat 2, quants quadrats xicotets fan falta?



Fan falta 4. El 4 és un quadrat **perfecte**. Observa que $2^2 = 4$.
Si volem construir ara un quadrat de costat 3, quants quadrats xicotets fan falta?

Fan falta 9. El 9 és també un quadrat perfecte. Observa que $3^2 = 9$.

Exemple:

- Quina és l'àrea d'un quadrat de 5 metres de costat?

  La seua àrea val $5 \cdot 5 = 5^2 = 25$ metres quadrats.

3.2. Arrel quadrada. Interpretació geomètrica

L'arrel quadrada **exacta** d'un nombre *a* és un altre nombre *b* el quadrat del qual és igual al primer:

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$$

Exemple:

- En poder construir un quadrat de costat 2 amb 4 quadrats xicotets es diu que 2 és l'arrel quadrada de 4, ja que $2^2 = 4$, i per tant diem que 2 és l'arrel *quadrada* de 4, és a dir:

$$\sqrt{4} = 2$$

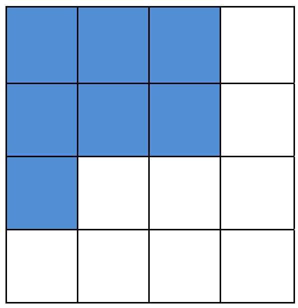
Obtindre l'arrel quadrada exacta és l'operació oposada de elevar al quadrat.

- Per tant, com $3^2 = 9$ doncs $\sqrt{9} = 3$.
- En escriure $\sqrt{25} = 5$es diu que l'arrel *quadrada* de 25 és 5.

Al signe $\sqrt{}$ se li denomina **radical**, s'anomena **radicand** al nombre col·locat davall, en aquest cas 25 i es diu que el **valor de l'arrel** és 5.

Exemple:

- Es pot construir un quadrat amb 7 quadrats xicotets?



Observa que es pot formar un quadrat de costat 2, però sobren 3 quadrats xicotets, i que per a fer un quadrat de costat 3 falten 2 quadrats xicotets.

El nombre 7 no és un quadrat perfecte, no té arrel quadrada exacta perquè amb 7 quadrats xicotets no es pot construir un quadrat.

Exemple:

- Sabem que l'àrea d'un quadrat és 36, quant val el seu costat?

El seu costat valdrà l'arrel quadrada de 36. Com $6^2 = 36$, doncs l'arrel quadrada de 36 és 6. El costat del quadrat és 6.

Activitats proposades

21. Calcula **mentalment** al teu quadern les arrels següents:

a)$\sqrt{100}$ b) $\sqrt{64}$c) $\sqrt{81}$ d) $\sqrt{49}$e) $\sqrt{25}$ f) $\sqrt{1}$ g)$\sqrt{0}$

3.3. Arrel n-èsima d'un nombre

➢ Com $2^3 = 8$ es diu que $\sqrt[3]{8} = 2$ que es llig: l'arrel *cúbica de 8 és 2*. El **radicand** és 8, el valor de **l'arrel** és 2 i 3 és **l'índex**.

$$\sqrt[3]{8} = 2 \text{ perquè } 2^3 = 8$$

➢ L'arrel enèsima d'un nombre a, *és* un altre nombre b, *la* potència enèsima del qual és igual al primer.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Exemple:

➢ Per ser 64 = 4^3, es diu que 4 és l'arrel *cúbica* de 64, és a dir $\sqrt[3]{64} = 4$.

➢ Per ser 81 = 3^4, es diu que 3 és l'arrel *quarta* de 81, és a dir $\sqrt[4]{81} = 3$.

➢

3.4. Introduir factors en el radical

Per introduir un nombre dins del radical s'eleva el nombre a l'índex de l'arrel i es multiplica pel radicand.

Exemple:

$$10\sqrt{2} = \sqrt{10^2 \cdot 2} = \sqrt{200}$$

3.5. Extraure factors del radical

Per extraure números d'un radical és necessari descompondre el radicand en factors:

Exemple:

$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{2^4 \cdot 2} = 2^2\sqrt{2}$$

3.6. Suma i resta de radicals

Diem que dos radicals són semblants si tenen el mateix índex i el mateix radicand.

Per sumar i restar radicals, aquests han de ser semblants; en aqueix cas, s'operen els coeficients i es deixa el mateix radical.

Atenció, un error molt comú: l'arrel d'una suma (o una resta) **NO** és igual a la suma (o la resta) de les arrels:

$$10 = \sqrt{100} = \sqrt{64 + 36} \neq \sqrt{64} + \sqrt{36} = 8 + 6 = 14$$

Activitats proposades

22. Calcula mentalment al teu quadern les arrels següents:

a) $\sqrt[3]{1000}$ b) $\sqrt[3]{8}$ c) $\sqrt[4]{16}$ d) $\sqrt[4]{81}$ e) $\sqrt[3]{64}$ f) $\sqrt[5]{1}$ g) $\sqrt[3]{0}$

23. Introduir els següents factors en el radical:

a) $2 \cdot \sqrt[3]{4}$ b) $3 \cdot \sqrt[3]{2}$ c) $5 \cdot \sqrt[5]{4}$ d) $10 \cdot \sqrt[3]{2}$ e) $2 \cdot \sqrt[4]{5}$

24. Extraure els factors que es puga del radical:

a) $\sqrt[3]{1000a^6b^3}$ b) $\sqrt[5]{100000000}$ c) $\sqrt[4]{81a^6b^5c^4}$ d) $\sqrt[3]{10000a^5b^3}$

25. Calcula: a) $2\sqrt{8} + 3\sqrt{32} - 5\sqrt{2}$ b) $5\sqrt{27} + 2\sqrt{3} - \sqrt{81}$

CURIOSITATS. REVISTA

NOMBRES ENORMES

El cos humà és un dels millors exemples per a estudiar nombres de moltes xifres. Per exemple:

Un cos humà adult pot contindre uns 50 trilions de cèl·lules

Cada dia nostre organisme fabrica uns deu mil milions de glòbuls blancs que lluiten contra les infeccions.

S'estima que tres mil milions de cèl·lules moren per minut encara que la majoria es renoven

WhatsApp

L'ús d'aquesta aplicació supera els 420 milions d'usuaris actius, i gestiona més de 54 mil milions de missatges al dia dels quals 38 mil milions són ixents i els restants, 16 mil milions són entrants.

POTÈNCIES I MÉS POTÈNCIES

En un moble hi ha sis estanteries amb sis calaixos cada una. Si es guarden sis clauers en cada un i en cada clauer hi ha sis claus. Quantes claus conté el moble? Expressa el resultat com a potència i calcula'l.

NOMBRES MOLT XICOTETS

El **nanòmetre és** la unitat de longitud que equival a una mil milionèsima part d'un metre (1 nm = 10^{-9} m).

Amb aquesta unitat es mesura, p. ex. la longitud d'ona de les radiacions infra-roja i ultravioleta .

La nanotecnologia, és una àrea cientí-fica que estudia l'aplicació de materials que posseeixen dimensions d'uns pocs nanòmetres en multitud de processos de fabricació.

El símbol del nanòmetre és **nm**.

CAROLINA HERSCHE

Estudiar les estreles va ser una activitat apassionant per a Carolina Herschel. Va treballar com a ajudant del seu famós germà William Herschel, la qual cosa li va proporcionar coneixements sobre astronomia.

Després de la mort de William, els seus descobriments sobre la posició de mil cinc-centes nebuloses van ser tan precisos que se li va concedir la Medalla d'Or de la Royal Society of Astronomy i moltes altres distincions internacionals.

Tot un reconeixement al seu treball com a astrònoma que va compartir amb la gran científica escocesa Mary Somerville, sent les primeres dones a rebre aquesta distinció.

RESUM

		Exemples
Potència	Una potència a^n de base un nombre real a i exponent natural n és un producte de n factors iguals a la base	$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$. 5 és la base i 3 l'exponent
Quadrats i cubs	Les potències d'exponent 2 s'anomenen quadrats i les d'exponent 3, cubs	5^2 és 5 al quadrat i 5^3 és 5 al cub.
Potències d'1 i de 0	Qualsevol nombre diferent de zero elevat a 0 és igual a 1. El nombre 1 elevat a qualsevol nombre és igual a 1. El nombre 0 elevat a qualsevol nombre diferent de zero és igual a 0.	$7^0 = 1$; $1^{35} = 1$; $0^{234} = 0$.
Potències de base 10	Una potència de base 10 és igual a la unitat seguida de tants zeros com a unitats té l'exponent. La unitat seguida de zeros és igual a una potència de 10.	$10^3 = 1.000$ $10000 = 10^4$
Producte de potències de la mateixa base	Per multiplicar potències de la mateixa base es deixa la mateixa base i es sumen els exponents.	$4^2 \cdot 4^3 =$ $(4 \cdot 4) \cdot (4 \cdot 4 \cdot 4) =$ $4^{2+3} = 4^5$
Quocient de potències de la mateixa base	Per dividir potències de la mateixa base, es deixa la mateixa base i es resten els exponents.	$7^8 : 7^5 = 7^{8-5} = 7^3$
Elevar una potència a una altra potència	Per calcular la potència d'una altra potència, es deixa la mateixa base i es multipliquen els exponents.	$(2^4)^6 = 2^{24}$
Arrel quadrada	L'arrel quadrada d'un nombre a és un altre nombre b que en elevar-lo al quadrat ens dóna a.	$\sqrt{4} = 2$ $\sqrt{49} = 7$

EXERCICIS I PROBLEMES de 1r d'ESO

Potències

1. Calcula al teu quadern les potències següents:

a) 7^3 b) 8^4 c) 5^5 d) 3^5 e) 5^2

f) 5^3 g) 3^4 h) 1^{47} i) 9^0 j) 10^8

2. Calcula mentalment al teu quadern les 5 primeres potències de 10.

3. Expressa en forma de potència al teu quadern:

a) 100000 b) 1000000 c) 10000000

4. Expressa com una única potència i calcula el resultat:

a) $(4^3)^2$ b) $(2^2)^2$ c) $(9^0)^5$ d) $(5^3)^2$

5. Calcula mentalment al teu quadern les 5 primeres potències de 2.

6. Escriu en el teu quadern en forma de potència el resultat d'aquestes operacions:

a) $6^{10} \cdot 6^2$ b) $8^{14} \cdot 8^3$ c) $3^5 \cdot 3^3 \cdot 3^6$ d) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$

e) $7 \cdot 7^4 \cdot 7^2$ f) $3^3 \cdot 3 \cdot 3^6$ g) $10^5 \cdot 10^3 \cdot 10^4$ h) $2 \cdot 2 \cdot 2$

7. Escriu en forma d'una única potència el resultat d'aquestes operacions:

a) $7^{10} : 7^2$ b) $9^{14} : 9^3$ c) $3^8 : 3^3$

d) $5^7 : 5^3$ e) $6^4 : 6^4$ f) $10^7 : 10^5$

8. Simplifica i calcula al teu quadern:

a) $(3 \cdot 2^4 \cdot 5^3) : (3 \cdot 2^2 \cdot 5^2)$ b) $(6^3 \cdot 4^5 \cdot 11^3) : (2^4 \cdot 3 \cdot 11^2)$

9. Escriu al teu quadern en forma d'una única potència:

a) $4^4 \cdot 2^5 \cdot 2^{10}$ b) $5^5 \cdot 25^6 \cdot 5^8$ c) $10^{12} \cdot 100^8$ d) $3^2 \cdot 9^5 \cdot 3^3$

10. Escriu en forma de potències:

a) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$ b) $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$ c) $11 \cdot 11 \cdot 11$

d) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

11. Dibuixa en un paper quadriculat un quadrat de costat igual a 2 quadrats xicotets. Quants quadrats xicotets té? Dibuixa també quadrats de costats 3, 4 i 5 quadrats xicotets i indica quants quadrats xicotets tenen. Expressa-ho en forma de potències.

12. Amb cubets es formen cubs majors de costat 2, 3, 4 i 5. Quants cubets són necessaris en cada cas? Expressa-ho en forma de potències.

Fotògraf Francisco Javier Martínez.

13. Efectua les següents operacions amb potències donant el resultat en forma de potència d'una sola base, la que cregues més adequada en cada cas:

a) $(4^5 \cdot 4^2)^3 : 16$ b) $1^3 \cdot 3^3$ c) $(16^4 : 8^3)^4$

d) $(5^3 : 5^2)^3$ e) $((7^5 \cdot 7^2)^2)^3$ f) $(27^2 \cdot 9^2)^3$

14. Efectua les següents operacions donant el resultat com una única potència:

a) $2^{10} \cdot 2^2 \cdot 2^2$ b) $(5^{10} \cdot 25^2)^4$ c) $4^3 \cdot 4^5 \cdot (4^5)^2$

d) $16^7 : 8^2$ e) $(16^7)^3 : (8^2)^2$ f) $3^4 \cdot (3^2 : 3^5)$

15. Escriu els quadrats de deu nombres majors que 10 i menors que 100.

16. En un envàs d'un supermercat hi ha 16 caixes de batuts de xocolate, i cada caixa té 8 batuts de 200 centímetres cúbics. Expressa el nombre total de batuts de cada envàs en forma de potència de 2.

17. Calculadora: Algunes calculadores tenen la tecla x^2 que calcula quadrats. Per exemple: Per a calcular 23^2 es polsa:

23 x^2

i s'obté 529. Usa la calculadora per obtindre:

a) 13^2 b) 43^2 c) 75^2 d) 82^2.

18. Escriu els cubs dels deu nombres majors que 10 i menors que 100.

19. Indica quins dels següents nombres són quadrats i quins són cubs:

a) 1 b) 2 c) 4 d) 8 e) 16 f) 27 g) 1000

Arrels

20. Calcula al teu quadern:

a) $\sqrt{4}$ b) $\sqrt{25}$ c) $\sqrt{81}$ d) $\sqrt{9}$

e) $\sqrt{64}$ f) $\sqrt{16}$ g) $\sqrt{225}$ h) $\sqrt{100}$

21. Calcula al teu quadern les arrels següents:

a) $\sqrt{121}$ b) $\sqrt[3]{125}$ c) $\sqrt[3]{8}$ d) $\sqrt[3]{1}$ e) $\sqrt[4]{16}$ f) $\sqrt{289}$

22. Introdueix al teu quadern els següents factors en el radical:

a) $3\sqrt[3]{27}$ b) $8\sqrt[3]{4}$ c) $9\sqrt[5]{3}$ d) $5\sqrt[3]{7}$

e) $4\sqrt[5]{4}$ f) $5\sqrt[3]{2}$ g) $2\sqrt{7}$ h) $5\sqrt{7}$

23. Extrau al teu quadern factors dels radicals següents:

a) $\sqrt[3]{729}$ b) $\sqrt{32}$ c) $\sqrt{175}$ d) $\sqrt{1200}$

e) $\sqrt{180}$ f) $\sqrt[4]{50000}$ g) $\sqrt[3]{64}$ h) $\sqrt[4]{100000}$

i) $\sqrt{50}$ j) $\sqrt{360}$ k) $\sqrt[3]{80}$ l) $\sqrt{8}$

24. Calculadora: Algunes calculadores tenen la tecla:

$\boxed{\sqrt{\ }}$

que calcula arrels quadrades. Per exemple: Per calcular $\sqrt{64}$es polsa:

64 $\boxed{\sqrt{\ }}$

i s'obté 8.

Usa la calculadora per obtindre les arrels quadrades de 121, 144, 625, 2025.

25. En la pastisseria volen col·locar en una caixa quadrada 196 bombons formant el major quadrat possible, quants bombons tindrà de costat? Quants bombons es necessiten per a formar el quadrat que tinga un bombó més per costat?

26. Calcula al teu quadern:

a) $3\sqrt{5} + 5\sqrt{20} - 7\sqrt{45}$ b) $4\sqrt{12} - 3\sqrt{75} + 6\sqrt{300}$

c) $5\sqrt{3} - 7\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$ d) $8\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$

27. Calcula mentalment les arrels quadrades de 100; 10.000; 1.000.000.

28. Calcula al teu quadern:

a) $2 + 5^2 + (14 : 2) + (1\ )^7$ b) $3 + 4^2 + (12 : 6) + (1)^{14}$

c) $3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^0$ d) $4^3 + 7 \cdot 3^2$

29. Escriu al teu quadern les frases següents i completa-les:

a) L’arrel quadrada de ... ... es 10.

b) L'arrel quadrada de 36 és ... ...

c) El nombre a què se li troba l’arrel quadrada s’anomena ... … …

d) El cub de 2 és ... ...

e) El quadrat de ... ... és 81.

f) L’arrel quadrada aproximada de 5 és ... ... Observa amb 5 quadradets podem formar un quadrat de costat 2 i ens sobra un quadradet.

30. Es volen plantar arbres en un jardí de manera que formen un quadrat. Hi ha 26 arbres. Quants arbres hi haurà en cada costat del quadrat? Sobrarà algun arbre?

31. Escriu el nombre 111 entre els quadrats de dos nombres consecutius.

32. Amb 9 quadrats hem format un quadrat major de costat 3. Quants quadradets hem d’afegir per a formar el següent quadrat de costat 4? És 3 + 3 + 1? I si ja tenim el quadrat de costat 4, quants per a formar el quadrat de costat 5?

Problemes

33. Una finca té forma quadrada i mesura 36 m de costat. Si el metre quadrat es paga a 500 €, quant val la finca?

34. El sòl d’una cuina és quadrat i està format per 121 lloses quadrades de 40 cm x 40 cm. Troba la mesura del costat de la cuina i la seua àrea.

35. Pregunten l’edat a una professora de Matemàtiques i contesta “La meua edat s’obté si del cub de 3 es suma el quadrat de 2”. Quina edat té?

36. Neus i Anna juguen tres partides. Neus tenia 10 cromos i Anna 80. En la primera partida va guanyar Neus i va elevar els seus cromos al quadrat, en la segona va perdre el cub de 3, i en la tercera va perdre el quadrat de 4. Quants cromos els queden a Anna i a Neus? Qui ha guanyat?

Fotògrafa: Manuela Morillo

37. Lluís i Miriam tenen boletes. Lluís té 8 elevat al quadrat. Miriam té 2 elevat a la sisena potència. Qui té més boletes?

38. En un restaurant es pot triar entre quatre primers plats, quatre segons i quatre postres. Quants menús distints poden fer-se?

AUTOEVALUACIÓN de 1º

1. Quin és el resultat de les tres potències següents 2^4, 4^3 i 5^2

a) 16, 12, 25 b) 16, 64, 25 c) 32, 64, 10 d) 64, 32, 26

2. Quin és el resultat de l'operació $4^2 + 5^2$?

a) 41 b) 64 c) 34 d) 16

3. Escriu = (igual) o ≠ (distint) segons corresponga:

a) $5^6 \square 15625$ b) $1^8 \square 8$ c) $14^0 \square 14$ d) $10^4 \square 40$

4. Quina de les respostes correspon a la multiplicació $3^3 \cdot 3^2 \cdot 3^5$?

a) 3^{30} b) 9^{10} c) 3^{10} d) 19683

5. Quina de les respostes correspon a la divisió $7^6 : 7^4$?

a) 7^{24} b) 7^2 c) 7^{10} d) 3/2

6. Quina de les solucions és la correcta per a l'operació $(5 \cdot 2 \cdot 1)^3$?

a) 1000 b) 30 c) 100 d) 60

7. Tria la resposta que corresponga al resultat de $((2)^2)^4$

a) 2^8 b) 2^6 c) 32 d) 16

8. Quin és el resultat de l'operació $(18 : 2)^3$?

a) 81 b) 316 c) 401 d) 729

9. Assenyala el nombre que no és quadrat perfecte:

a) 49 b) 36 c) 25 d) 1000

10. El costat d'una superfície quadrada de 64 centímetres quadrats medeix:

a) 6 cm b) 8 cm c) 7 cm d) 7,5 cm

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Ana Lorente

Il·lustracions: Banc d'imatges de l'INTEF

Traducció al valencià: Departament de Matemàtiques de l'Institut Juan de Garay

Índex

Resum

Si puges en un ascensor d'un edifici amb garatge hauràs observat que les plantes de soterrani són –1, –2... Són nombres negatius. Com hauràs vist, també s'usen nombres negatius als termòmetres per indicar temperatures per davall de zero graus centígrads, per anotar els deutes en un balanç, en indicar la profunditat d'un objecte davall el nivell del mar, en algunes latituds i longituds geogràfiques, en una data anterior a Crist, inclús en dir algunes hores...

En aquest capítol aprendràs a treballar amb nombres positius i negatius, a sumar-los, restar-los, multiplicar-los, dividir-los i representar-los en una recta.

Autora: Ana Lorente
Traducció: Institut Juan de Garay

1. NOMBRES ENTERS

1.1. Nombres positius, negatius i zero

Hi ha ocasions de la vida quotidiana en què és necessari usar nombres diferents dels naturals, nombres positius i negatius. Els nombres naturals no resulten ser suficients.

- Per exemple, si tens 20 euros i gastes 25 euros, de quants euros disposes? Tens un deute de 5 €, i per tant tens una quantitat negativa de diners.

Fixa't en aquests exemples:

Exemple:

- En fer els comptes dels teus diners pots indicar amb nombres positius el que reps i amb negatius el que gastes. Així, si reps 10 € de paga setmanal ho indicaràs (+10) i si gastes 1 € en un gelat ho indicaràs (–1) €. Si et quedes sense diners diràs que tens 0 €.

Exemple:

- Quan fa molt fred, per exemple 5 graus sota zero, s'indica dient que fa –5 ºC, mentres que si es diu que fa 9 graus, s'indica 9 ºC.

Exemple:

- Es diu que la muntanya Niblock mesura 2 976 m, mentres que un avenc marí, per exemple la fossa de les Marianes, la més profunda del món, que està a 11 516 m davall el nivell del mar, s'indica dient que està a –11 516 m. El nivell del mar és el nivell 0.

Mont Niblock
Il·lustració de INTEF. Banc d'imatges

Activitats proposades

1. Escriu el nombre que millor representa la situació que es planteja:

a) Un avió vola a 1 292 m d'altura

b) El dilluns el termòmetre marcava 6º C sota zero

c) El cotxe estava en el soterrani 2

d) Sòcrates va nàixer l'any 470 abans de Crist

1.2. On apareixen els nombres negatius

Els nombres negatius apareixen en considerar:

- El capital d'una empresa que hi ha fallit.
- Temperatures per davall de zero graus.
- Dates abans de Crist.
- Profunditat d'un submarí davall el nivell del mar.
- Es diu "les sis menys cinc" o les "huit menys vint".

Activitats proposades

2. Expressa aquests enunciats amb un nombre positiu, negatiu o zero:

a) M'he gastat tota la paga.

b) La meua ciutat està a 700 m sobre el nivell del mar.

c) El garatge està al segon soterrani.

Autora: Ana Lorente
Traducció: Institut Juan de Garay

1.3. Què són?

Els nombres **enters** són una ampliació dels nombres naturals:

- Els nombres enters **positius** són els nombres naturals i s'escriuen precedits del signe +: +1, +2, +3, +4, +5…
- Els enters negatius van precedits del signe –: –1, –2, –3….
- El zero és l'únic nombre enter que no és ni negatiu ni positiu i no porta signe.

El conjunt dels nombres enters es representa per $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = (0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, +4, -4, \ldots)$$

En escriure un nombre enter positiu no se sol escriure el seu signe: +2=2; +6=6.

Activitats proposades

3. Indica el significat dels nombres –5, 0 i +3 en cadascuna de les situacions següents:

a) En un ascensor b) En un termòmetre c) En un compte

1.4. Valor absolut d'un nombre enter

La distància que separa un nombre enter del zero es defineix com a **valor absolut** del nombre.

- És sempre un nombre positiu (o zero).
- S'escriu entre dues barres **| |**.

Exemple:

- El valor absolut de +3 , és 3, i s'escriu: |+3| = 3; el valor absolut de –7 és 7, per tant |–7| = 7, de la mateixa manera: |+8| = 8, |–5| = 5.

$|+4| = 4$

$|-2| = 2$

Activitats proposades

4. Calcula el valor absolut dels nombres següents:

a) |+9| b) |–11| c) |0| d) |–6|

1.5. Oposat d'un nombre enter

L'oposat d'un nombre enter és un altre nombre enter del mateix valor absolut i distint signe.

El contrari de "deure" és "tindre". El contrari de 5 m d'altura és 5 m davall el nivell del mar. El contrari de 4º C és 4º C sota zero, etc.

S'escriu: Op(+a) = –a, Op(–a) = +a o bé: – (+a) = –a, –(–a) = +a

Observa que...

Dos nombres oposats tenen el mateix valor absolut i distint signe.

Exemple: **+5 i -5**

Exemple:

- Op(+3) = –3 Op(–8) = +8 – (+3) = –3 –(–8) = +8

Activitats proposades

5. Escriu al teu quadern:

a) |–5| b) |+7| c) Op(+6) d) Op(–4)

6. Escriu dos nombres que disten 4 de zero. Quant dista de zero –3? I +3?

Autora: Ana Lorente
Traducció: Institut Juan de Garay

2. REPRESENTACIÓ GRÀFICA

2.1. Representació en la recta numèrica i orde en el conjunt dels nombres enters

Els nombres enters es representen en la recta numèrica així:

1. Hem de traçar una recta horitzontal i marquem el **zero**, que s'anomena **origen**
2. Dividim la recta en segments iguals, de longitud 1
3. Col·loquem els nombres positius a partir del zero a la dreta i els nombres negatius a partir del zero a l'esquerra.

–5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4

Exemple:

- Representa en una recta numèrica: –2, 0, 4, –1, 8, –7, –3 i 1

–8 –7 –6 –5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4 5 6 7 8

D'aquesta manera queden ordenats els nombres enters. Com més a la dreta estiga un nombre situat en la recta numèrica és major, i com més a l'esquerra estiga situat, és menor.

Exemple:

- –7 està més a l'esquerra que +4 per tant –7 és menor que +4. S'escriu –7 < +4

El signe **<** es llig "menor que" i el signe **>** es llig "major que".

Exemple:

- Podem ordenar nombres utilitzant els signes anteriors:

$$-7 < -3 < -2 < -1 < 0 < 2 < 4 < 8.$$

O bé:

$$8 > 4 > 2 > 0 > -1 > -2 > -3 > -7.$$

- Pareix extrany que el 0 siga major que un altre nombre, però pensa que es té més si no es té res, que si es deu diners. Si el termòmetre marca 0ºC no fa molta calor, però menys calor fa si marca: –7ºC. És a dir: 0 > –7

Activitats proposades

7. Representa a una recta numèrica al teu quadern els següents nombres i ordena'ls de menor a major: –7, 3, 1, –4, 6, –5, –2 i 0.

8. Completa al teu quadern amb el signe < (menor) o > (major) segons corresponga:

a) –11 –6   b) –8 +4   c) +2 +10   d) +3 –9   e) –2 |–6|

9. Ordena de menor a major:

a) +12, –4, –15, +13 b) +3, –25, –9, –6

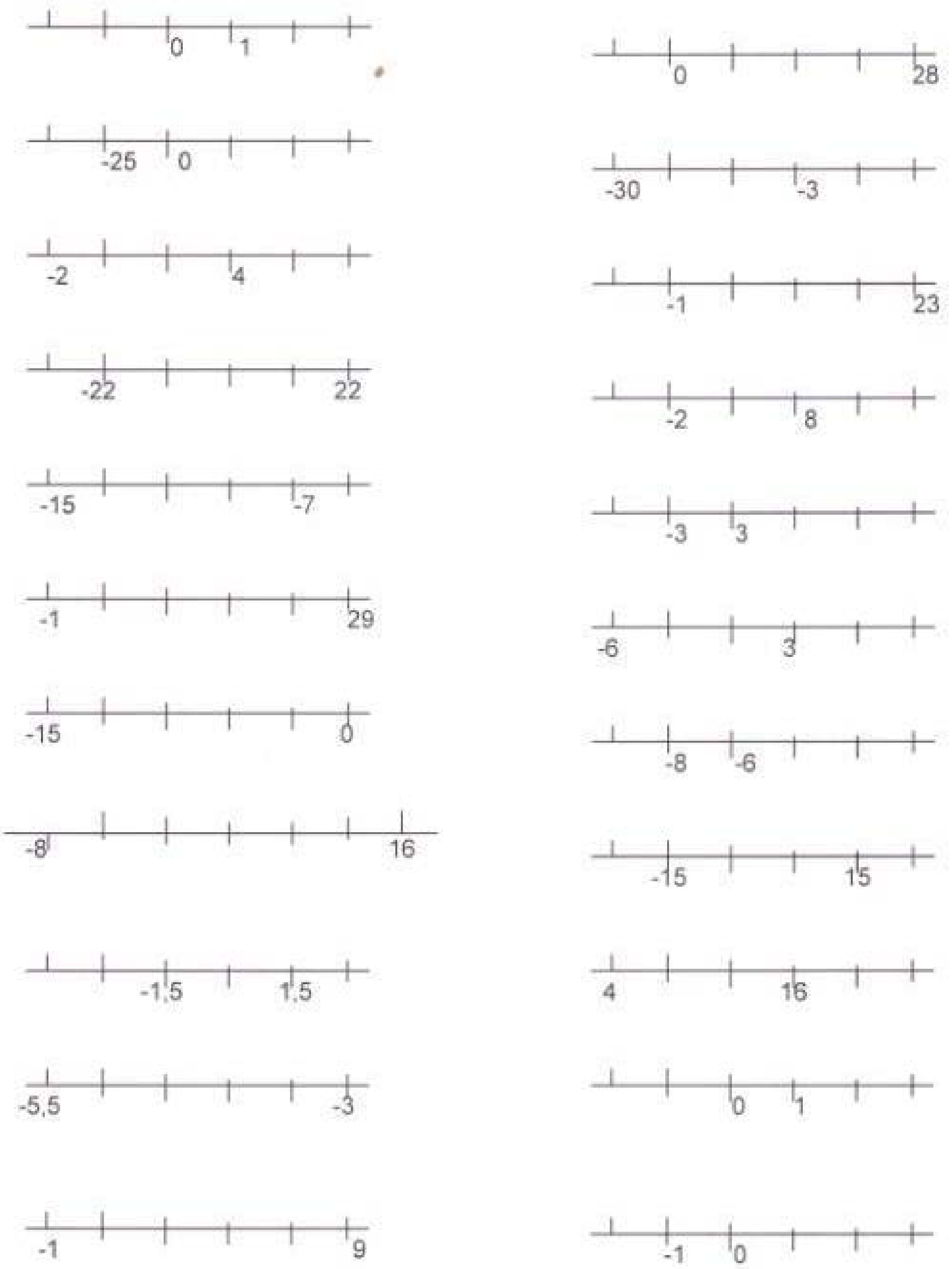
10. *Tales de Mileto* va viure cap a l'any 600 a. C. i Newton durant el segle XVII, quina diferència de segles hi ha entre ambdues dates?

Ajuda: Representa ambdues dates en una recta numèrica.

Recursos didàctics fotocopiables

Rectes numèriques

Escriu els nombres que falten als punts assenyalats en les següents rectes numèriques



Autora: Ana Lorente
Traducció: Institut Juan de Garay

3. OPERACIONS AMB NOMBRES ENTERS

3.1. Suma de nombres enters

Ejemplo:

- Tens 12 € i et donen 5 € aleshores tens 17 €: **+12 + 5** = **+17**.
- Deus 12 € i gastes 5 € aleshores acumules un deute de 17 €: **–12 – 5 = –17.**

Per **sumar** dos nombres enters del mateix signe es sumen els seus valors absoluts i es posa el signe dels sumands

- Tens 12 € però deus 5 € aleshores tens 7 €: **–5 + 12 = +7.**
- Deus 12 € i tens 5 € aleshores deus 7 €: **–12 + 5 = –7.**

Per **sumar** dos nombres enters de distint signe es resten els seus valors absoluts i es posa el signe del sumant de major valor absolut

Suma de tres o més enters

Es pot sumar 3 o més enters mitjançant dos procediments:

1) Se sumen els dos primers sumands i se suma el tercer sumant al resultat:

Exemple:

+8 – 5 + 2 = + 3 + 2 = +5

En el cas de 4 sumands es poden sumar de dos en dos:

Exemple:

+8 – 5 + 2 – 6 = + 3 – 4 = –1

2) Se sumen els positius per un costat (**tinc**) i els negatius (**dec**) per un altre i finalment s'obté el resultat:

Exemple:

Dec	**tinc**	**dec**		**tinc**	**dec**
–12	**+ 19**	**– 4**	**=**	**+19**	**– 16 = +3**

tinc	**dec**	**tinc**	**dec**		**tinc**	**dec**	
+8	**– 5**	**+ 2**	**– 3**	**=**	**+ 10**	**– 8**	**= +2**

Observa que en sumar nombres enters pots fer-ho en qualsevol orde i sempre s'obté el mateix resultat. I pots associar els termes com més et convinga i el resultat serà el mateix.

Activitats proposades

11. Realitza al teu quadern les següents sumes de nombres enters

a) +9 + 5 b) (–6) + (–3) c) +7 +(–4) d) (–8) + 10

12. Troba el resultat de les sumes següents:

a) (+12) + (+5) + (–4) b) (–8) + (–2) + (–10) c) (–15) + (–4) + (+9) d) (–3) + (+11)

13. Efectua aquestes operacions

a) (+8) + (+2) + (–2) b) (–14) + (–7) + (–11)c) (–7) + (–2) + (+6) d) (–5) + (+2)

Autora: Ana Lorente
Traducció: Institut Juan de Garay

3.2. Resta de nombres enters

Per a **restar** dos nombres enters se suma al primer l'oposat del segon.

Exemple:

- Observa els quatre casos següents:

$$(+12) – (+7) = (+12) + op(+7) = (+12) + (–7) = +5$$
$$(+12) – (–7) = (+12) + op(-7) = (+12) + (+7) = +19$$
$$(–12) – (+7) = (–12) + op(+7) = (–12) + (–7) = –19$$
$$(–12) – (–7) = (–12) + op(-7) = (–12) + (+7) = –5$$

El signe menys **davant d'un parèntesi** canvia els signes dels nombres que hi ha dins del parèntesi.

Exemple:

- Comprovarem aqueixa propietat realitzant de dues formes distintes les operacions:
- Calculem primer el parèntesi:

$$(+12) – ((–4) + 7) = (+12) – (+3) = +9$$

- Canviem primer els signes

$$(+12) – ((–4) + 7) = (+12) + ((+4) + (–7)) = (+12) + (–3) = +9$$

Activitats proposades

14. Un autobús comença el viatge amb 45 passatgers. En la primera parada s'abaixen 7 i es pugen 12. En la segona s'abaixen 10 i es pugen 8, i en la tercera s'abaixen 4. Quants passatgers hi ha a l'autobús?

Expressions senzilles amb parèntesi

El signe més (**+**) indica suma o que el nombre és positiu, i el signe menys (**–**) indica resta o que el nombre és negatiu. Si es vol escriure "*sumar al **8** el nombre **–3***" no és correcte escriure **8** + **–3**, el correcte és escriure: **8** + (**–3**) afegint un parèntesi. De la mateixa manera per escriure "***restar** al **7** el nombre **–3***", no és correcte **7 – –3**, s'ha d'escriure **7 – (–3)** afegint el parèntesi.

Activitats proposades

15. Un avió vola a 4000 m i un submarí està submergit a 60 m, quina distància en metres els separa?

16. L'emperador romà August va nàixer el 23 de setembre de l'any 63 a. C. i va morir el 19 d'agost de l'any 14 d. C. Quants anys va viure?

17. Expressa el nombre 10 com a suma i resta de 3 nombres enters.

18. Expressa el nombre zero com a suma i resta de quatre nombres enters.

Autora: Ana Lorente
Traducció: Institut Juan de Garay

3.3. Operacions combinades de sumes i restes

En les operacions de sumes i restes combinades, com la següent:

$$(+\ 2) + (–1) – (+\ 3) – (–5) + (–8)$$

Hem de:

1º) Eliminar els parèntesis

2º) Operar adequadament els nombres resultants

Recorda que:

+ (+a) = +a

+ (–a) = –a

– (+a) = –a

– (–a) = +a

Exemple:

(+ 2) + (–1) – (+ 3) – (–5) + (–8) = +2 – 1 – 3 + 5 = 7 – 4 = +3.

(+8) – (+3) + (–2) = +8 – 3 – 2 = 8 – 5 = +3.

(–7) + (–3) – (–5) = –7 – 3 + 5 = –10 + 5 = –5.

(–4) – (–7) + (–5) – (–1) = –4 + 7 – 5 + 1 = –9 + 8 = –1.

(–5) + (–6) – (–2) + (–3) = –5 – 6 + 2 – 3 = –14 + 2 = +12

Activitats proposades

19. Realitza al teu quadern les següents sumes de nombres enters

a) +8 +3 b) (–7) + (–9) c) +10 + (–4) d) (–7) +7

20. Realitza al teu quadern les següents sumes de nombres enters usant el mètode d'agrupar:

a) –6 + 7 – 5 b) +5 –7 + 9 c) –5 + 7 – 1 d) +6 – 9 –2

21. Realitza al teu quadern les següents sumes usant el mètode de tindre i deure:

a) –3 + 6 – 4 b) +4 – 6 + 8 c) –4 + 6 – 9 d) +5 – 8 – 9

22. Escriu al teu quadern el resultat:

a) + (+5) b) – (+6) c) – (–7) d) + (–42)

23. Realitza al teu quadern les següents sumes i diferències de nombres enters

a) +(+4) + (–6) b) –(+5) – (+7) c) – (–6) + (+8) d) – (+4) + (+2) – (–5)
e) – (+3) – (+2) – (+7) f) – (+3) + (–2) + (–5) – (–6) g) – (+2) – (+4) – (–5) – (–6)

24. Realitza al teu quadern les operacions següents:

a) +(+6) + (–8) + (+2) b) –(+7) – (+9) + (+1) c) – (–8) + (+1) d) – (+6) + (+4) – (–7)
e) – (+5) – (+4) – (+9) f) – (+5) + (–4) + (–7) – (–8) g) – (+4) – (+6) – (–7) – (–8)

3.4. Producte i quocient de nombres enters

Per a **multiplicar** dos nombres enters es deu:

1º) Multiplicar els seus valors absoluts

2º) Aplicar la **regla dels signes** seguint el següent:

És a dir, s'assigna el signe **+** si ambdós factors tenen el mateix signe, i el signe – si tenen distint signe.

+ · + = +

– · – = +

+ · – = –

– · + = –

Exemple:

(+6) · (+4) = +24

(–3) · (–4) = +12

(+5) · (–3) = –15

(–7) · (+5) = –35

Exemple:

Lluis gana 20 euros al mes, si no gasta res, quant estalviarà al cap de 5 mesos?

(+20) · (+5) =+100 € estalviarà al cap de 5 mesos.

Exemple:

El rebut mensual és de 30 euros al mes. Quant gastarà al cap de 7 mesos?

(–30) · (+7) = –210 € gastarà al cap de 7 mesos.

Exemple:

Eva gasta 10 euros al mes en llepolies. Deixa de comprar-les durant 3 mesos. Quant ha estalviat?

(–10) · (–3) = +30 € estalviarà al cap de 3 mesos.

Per a **dividir** dos nombres enters es deu:

1º) Calcular el quocient dels seus valors absoluts

2º) Assignar al resultat un signe mitjançant la regla següent:

+ : + = +

– : – = +

+ : – = –

– : + = –

Exemple:

(+25) : (+5) = +5

(–16) : (–2) = +8

(+21) : (–3) = –7

(–36) : (+9) = –4

Activitats proposades

25. Realitza els següents productes i divisions de nombres enters:

a) (+3) · (+2) b) (+4) · (–7) c) (–8) · (–9) d) (–5) · (+6)

e) (+20) : (+2) f) (+21) : (–3) g) (–30) : (–2) h) (–54) : (+6)

26. Calcula al teu quadern els següents productes i divisions de nombres enters:

a) (+7) · (+3) b) (+5) · (–3) c) (–9) · (–2) d) (–6) · (+7)

e) (+30) : (+3) f) (+50) : (–5) g) (–16) : (–4) h) (–70) : (+2)

27. Efectua mentalment i anota els resultats al teu quadern:

a) (+2) · (+4) b) (+3) · (–2) c) (–6) · (–3) d) (–5) · (+8)

e) (+8) : (+4) f) (+15) : (–3) g) (–10) : (–5) h) (–60) : (+6)

Autora: Ana Lorente
Traducció: Institut Juan de Garay

3.5. Potències de nombres enters

Per calcular la **potència** d'un nombre enter es multiplica la base per si mateixa tantes vegades com indique l'exponent.

Exemple:

$$(+2)^4 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) = +16$$

$$(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$$

Convé tindre en compte algunes particularitats que ens ajuden a abreviar el càlcul:

Les potències de **base negativa** i exponent **parell** són nombres positius.

$(-2)^2 = +4$

$(-2)^3 = -8$

Exemple:

$$(-5)^2 = +25$$

Les potències de **base negativa** i exponent **imparell** són nombres negatius

Exemple:

$$(-5)^3 = -125$$

3.6. Operacions combinades. Jerarquia d'operacions

En les operacions combinades és necessari tindre en compte la **jerarquia de les operacions**:

1ª) Es resolen les operacions que estiguen dins de parèntesi

2º) Es realitzen les multiplicacions i les divisions d'esquerra a dreta

3º) S'efectuen les sumes i les restes

Exemple:

Jerarquia d'operacions	$[(+4 - 5) \cdot (+3 - 7 - 2)] + (-9) : (-3) + 5$
1) Es resolen els parèntesis	$[(-1) \cdot (-6)] + (-9) : (-3) + 5$
2) Es realitzen multiplicacions i divisions	$[+6] + (+3) + 5$
3) S'efectuen sumes i restes	Resultat = 14

Activitats proposades

28. Realitza les operacions següents:

a) $+4 - (+5) \cdot (-3)$ b) $+6 + (-9) : (+2-5)$ c) $-3 + [-4 - (-26) : (+2)]$

29. Realitza les operacions següents:

a) $+8 + (-1) \cdot (+6)$ b) $-6 + (-7) : (+7)$ c) $+28 - (-36) : (-9-9)$

d) $+11 + (+7) \cdot (+6 - 8)$ e) $-7 - [+4 - (-6) : (+6)]$ f) $+9 + [+5 + (-8) \cdot (-1)]$

30. Troba:

$(+1)^{2374}$ b) $(-1)^{2375}$ c) $(-3)^2$ d) $(-3)^3$

Autora: Ana Lorente
Traducció: Institut Juan de Garay

3.7. Operacions amb calculadora

Per a utilitzar la calculadora per a fer operacions amb nombres enters hem de tindre molt clara la **jerarquia d'operacions** i l'ús de parèntesi. A la calculadora, o a un ordinador, hem de donar-li ordes precises. No pot comprendre el que haguérem volgut escriure. Cal fer-ho correctament.

Exemple:

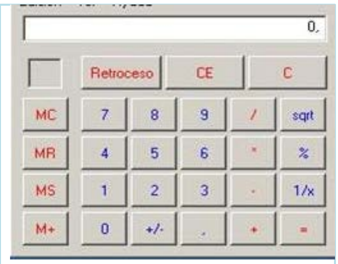
- Utilitza la teua calculadora per calcular 11 + 7 · 6 – 8, abans de fer-ho, què opines que eixirà?

Has obtingut 45? Si escrius directament en la teua calculadora 11 + 7 · 6 – 8, vegem en quina orde fa les operacions. Primer calcula els productes: 7 · 6 = 42. I després les sumes i restes: 11 + 42 – 8 = 45.

- Però l'operació que volíem haver fet era: +11 + (+7) · (+6 – 8). Com hem de fer-la amb calculadora?

De nou has de tindre molt clar l'ús de parèntesi i la jerarquia d'operacions. Recorda, primer es fa el que està entre parèntesis: 6 – 8 = –2. Després els productes: 7 · (–2) = –14. I finalment les sumes i restes: 11 – 14 = –3. És a dir, cal teclejar: 6 – 8 * 7 + 11 i s'obté –3.

- Calcula 11^6.



Per calcular una potència amb la calculadora (depenent del tipus de calculadora) o en un ordinador, has d'escriure: 11^6, i obtens 1771561. En calculadores massa senzilles hauràs de multiplicar 11 per si mateix 6 vegades. Una possible forma de fer-ho és multiplicar 11 · 11 = 121. I a continuació:

121 · 121 ·121 = 1771561.

Activitats proposades

31. Utilitza la calculadora per a realitzar les operacions següents:

a) +2 – (+6) • (–4) b) +9 + (–6) : (+3 – 6) c) –1 + [–5 – (–27) : (+2)]

32. Utilitza la calculadora per a realitzar les operacions següents:

a) +3 + (–2) · (+7) b) –4 + (–11) : (+11) c) +14 – (–27) : (–9 – 9)

d) +5 + (+2) · (+9 – 4) e) –3 – [+5 – (–7) : (+7)] f) +8 + [+3 + (–5) · (–2)]

33. Utilitza la calculadora per a realitzar les operacions següents:

a) $(+3)^{16}$ b) $(–2)^{15}$ c) $(–3)^{11}$ d) $(–2)^{20}$

Autora: Ana Lorente
Traducció: Institut Juan de Garay

CURIOSITATS. REVISTA

Pacte amb el diable

Una persona protestava per la seua mala sort. Havia perdut el seu treball i només li quedaven uns euros a la butxaca.

El diable se li va acostar i li va fer una estranya proposició:

–Jo *puc fer que els teus diners es duplique cada vegada que creues el pont que travessa el riu. L'única condició és que jo t'esperaré a l'altre costat i has d'entregar-me 24 €.*

El tracte pareixia avantatjós. No obstant això, quan va creuar per tercera vegada, en donar al diable els 24 € es va quedar sense res. Havia sigut enganyat. Quants diners tenia en un principi?

Un joc

Ompli amb nombres enters les caselles en blanc de tal manera que la suma de totes les files i columnes siga sempre **3**.

–6		+6
	+2	
		0

Ompli amb nombres enters les caselles en blanc de tal manera que el producte de totes les files i columnes siga sempre **–70**.

		+7
	–7	
–7		+2

Ompli amb els nombres **–6, –5, 1, 2, 3, 5, 7, 9** i **11** de manera que totes les files i columnes sumen el mateix.

Ompli amb els nombres **–8, –6, –4, –3, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9** i **11** de manera que totes les files i columnes sumen el mateix. Dos nombres poden repetir-se.

PUJAR I BAIXAR

L'Empire State Building, un dels gratacels més emblemàtic de Nova York, va necessitar per a la construcció de les seues 103 plantes, uns deu milions de rajoles. En la seua construcció, 3000 obrers van invertir, en 410 dies, més de set milions d'hores de treball.

Per a ascendir quasi els seus 414 m d'altura, cal superar els 1860 escalons que arriben fins a la planta 102.

Si voldríem arribar fins al centre de la Terra baixant per una escala semblant, el nombre d'escalons que baixaríem seria…………………… (el radi de la Terra mesura aproximadament 6371 km)

RESUM

Nombres positius, negatius i zero.	Els primers porten un signe + o no porten signe, els segons un signe -. El zero no té signe.	+2; 3; –5; 0
Nombres enters	Z = {... –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4 ... }	
Valor absolut d'un nombre	És la seua distància al zero.	|+4| = 4; |–8| = 8.
Nombres oposats	Tenen el mateix valor absolut però distint signe.	Op(+5) = –5; Op(–9) = +9
Ordenació de nombres	És major el que estiga més a la dreta en la recta numèrica.	410 > 20 > 0 > –21 > –43 –5 < –3
Suma de nombres del mateix signe	Se sumen els seus valors absoluts i es posa el mateix signe.	(+3) + (+9) = +12 (–4) + (–6) = –10
Suma de nombres enters de distint signe	Es resten els seus valors absoluts i es posa el signe del de major valor absolut.	(–2) + (+8) = +6 (–9) + (+2) = –7
Resta	Se suma el minuend amb l'oposat del subtrahend.	(–6)–(–3) = (–6)+(+3) = –3 (-4) – (+5) = (-4) + (-5) = -9
Multiplicació	Es multipliquen els valors absoluts i s'aplica la regla dels signes: **+ · + = +; – · – = +; + · – = –; – · + = –**	(+4) · (+6) = +24 (–1) · (–8) = +8 (–3) · (+3) = –9 (+9) · (–3) = –27
Quocient	Es divideixen els seus valors absoluts i s'aplica la mateixa regla de signes de la multiplicació.	(–16) : (–2) = +8 (+27) : (–3) = –9
Potències de base negativa	Si l'exponent és parell, la potència és positiva. Si l'exponent és imparell, la potència és negativa	$(-2)^4 = +16$ $(-2)^3 = -8$

Autora: Ana Lorente
Traducció: Institut Juan de Garay

EXERCICIS I PROBLEMES. Matemàtiques 1º d'ESO

1. Calcula al teu quadern:

a. (+7) – (–5) – (+2) + (–6)   b. –(–9) – (+7) + (–8) + (+6)

c. +(–1) – (+15) – (–13) + (+7)   d. –(+2) + (–5) – (–17) – (+8) – (+4)

2. Calcula mentalment:

a. 7 – 3   b. 6 – 14   c. 12 – 8   d. 25 – 32

e. 31 – 43   f. 56 – 63   g. –10 – 16   h. –31 – 18

i. –44 – 11   j. –18 + 18   k. –27 + 9   l. –42 + 32

3. Efectua al teu quadern aplicant la regla dels signes:

a. (–6) · (–7)   b. (–24) : (+4)   c. (–5) · (+8)   d.(+49) : (–7)   e.(–7) · (–9)

f. (+48) : (+6)   g. (+11) · (+6)   h. (–60) : (–10)   i. (–12) · (–6)   j. (+75) : (–15)

4. Calcula i escriu el resultat al teu quadern:

a. 6 – 9 – 5 + 4 – 7 + 1   b. 11 – 12 + 8 – 14 + 16 – 7

c. 1 – 3 – 8 – 12 + 4 + 19 – 2   d. –8 – 16 + 9 + 2 – 8 – 7 + 12

5. Utilitza la jerarquia d'operacions per calcular al teu quadern:

a. 4 · (10 – 12)   b. –6 · (5 – 1)   c. 6 · (1 – 5) – 10

d. 10 + 5 · (8 – 12)   e. 7 · (9 – 2) – 4 · (6 – 12)   f. 5 · (12 – 9) + 4 · (2 – 17)

6. Efectua al teu quadern aplicant la regla dels signes:

a. (+16) · (+3)   b. (–4) · (+9)   c. (+5) · (–6)   d. (–8) · (–3)   e. (–2) · (+5)

f. (+150) : (+15)   g. (–75) : (+25)   h. (+63) : (–21)   i. (–40) · (+5)   j. (–80) · (–10)

7. Utilitza la jerarquia d'operacions per calcular al teu quadern:

a. 7 – 5 · 4   b. 3 · 8 – 6   c. 5 · 6 – 7 · 4

d. 3 · 9 – 5 · 4   e. 25 – 5 · 8 + 2 · 6 – 33   f. 6 · 7 – 40 – 4 · 8 + 57

8. Efectua al teu quadern i explica quines conclusions obtens:

a. $(-3)^4$ b. $(+3)^4$ c. -3^4 d. $+3^4$ e. $(-3)^3$ f. -3^3

9. Utilitza la jerarquia d'operacions per calcular al teu quadern:

a. 6 · (– 5) – 3 · (–7) + 20   b. –8 · (+5) + (–4) · 9 + 50

c. (–3) · (+9) – (–6) · (–7) + (–2) · (+5)   d. –(–1) · (+6) · (–9) · (+8) – (+5) · (–7)

10. Representa gràficament i ordena en sentit creixent, calcula els oposats i els valors absoluts dels següents nombres enters:

9, –5, –6, 4, –3, 5, –6, 0, 8

Problemes

11. En un camp d’extracció de petroli una bomba l'extrau d’un pou a 1528 m de profunditat i l'eleva a un depòsit situat a 34 m d’altura. Quin nivell ha hagut de superar el petroli?

12. La temperatura de l’aire baixa segons s’ascendeix en l’atmosfera, a raó de 9 ºC cada 300 metres. A quina altura vola un avió si la temperatura de l’aire és de −90 ºC, si la temperatura al nivell del mar en aqueix punt és de 15 ºC?

13. Neus viu en la planta 8 d’un edifici i la seua plaça de garatge està en el soterrani 3. Quantes plantes separen la seua vivenda de la seua plaça de garatge?

14. La fossa de Filipines està aproximadament a 10 mil metres davall el nivell del mar, i la muntanya Everest està a una altura de 8848 metres, quina diferència d’altura hi ha entre la muntanya més alta i l’avenc més profund de la Terra?

15. Hi ha foscor absoluta als oceans a 500 metres de profunditat, i la seua profunditat mitjana és de 4 km. Expressa amb nombres enters aqueixes xifres.

16. El saldo de la cartilla d’estalvis de Manel és hui 289 €, però li carreguen una factura de 412 €. Quin és el saldo ara?

17. Quan Manel va anar a la Serra a les 7 del matí el termòmetre marcava −7 ºC, encara que a l’hora de dinar el termòmetre havia pujat 9 ºC, i a l’hora de tornar havia tornat a baixar 5 ºC, quina temperatura feia a aqueixa hora?

18. Quina era la temperatura inicial d’un termòmetre que ara marca 12 ºC després d’haver pujat 9 ºC?

19. Lourdes tenia ahir en la seua cartilla –169 euros i hui té 56 euros. Ha ingressat o ha gastat diners? Quina quantitat?

20. Quina és la diferència de temperatura que ha de suportar una persona que passa de la cambra de conservació de les fruites, que es troba a 4 ºC, a la de la carn congelada, que està a −18 ºC? I si passara de la cambra de la carn a la de la fruita?

21. Fa 5 setmanes Anna tenia diners estalviat, si cada setmana es gasta 7 euros, quants diners tenia més del que té ara?

22. Roma va ser fundada l’any 73 abans de Crist, i l’aqüeducte de Segòvia es va construir cap a l’any 160 d. C. Quants anys havien passat des de la fundació de Roma?

Autora: Ana Lorente
Traducció: Institut Juan de Garay

AUTOEVALUACIÓ de 1r d'ESO

1. El resultat de l'operació: $\{(-1 + 3) \cdot (-2 - 3) + (-5 + 1) : (+3 - 2)\}$ és:

a) −10 b) +14 c) −14 d) +16

2. El producte (−2) · (−6) · (−5) és:

a) menor que −100 b) major que 0 c) menor que −4 d) major que 50

3. El resultat de l'operació (+4) · (−2) · (−5) · (−1) és:

a) – 12 b) + 40 c) – 40 d) +20

4. Des de l'any 63 a. C. fins al 77 d. C. transcorren:

a) 140 anys b) 14 anys c) −14 anys d) −40 anys

5. Quina de les següents potències és positiva?

a) $(-2)^5$ b) $(-3)^2$ c) $(-4)^3$ d) $(-1)^7$

6. Un termòmetre ha pujat 10 ºC, després ha baixat 8 ºC i, finalment, marca −5 ºC. La temperatura inicial era:

a) −7 ºC b) −13 ºC c) +3 ºC d) −3 ºC

7. En viatjar des d'una latitud de 6º Sud fins a una altra de 40º Nord, la variació de latitud és:

a) 46º Norte b) 34º Sur c) 34º Norte d) 50º Sur

8. La temperatura és de 15 ºC sota zero i, al llarg del dia, el termòmetre puja 20 ºC i després descendeix 8º C. Per tant la temperatura final és:

a) – 2 ºC b) – 3 ºC c) 2 ºC d) 3 ºC

9. Si estàs situada en el punt −9 de la recta numèrica dels nombres enters, quins moviments et porten fins a +5?

a) +13 – 3 + 4 b) – 1 + 14 c) + 18 – 5

10. El resultat de l'operació (+3) – (+5) + (−4) – (−7) + (−6) és:

a) −2 b) −3 c) −4 d) −5

Autora: Ana Lorente
Traducció: Institut Juan de Garay

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Eduardo Cuchillo

Il·lustracions: Banc de imatges de l'INTEF

Traducció al valencià: Departament de Matemàtiques de l'Institut Juan de Garay

Índex

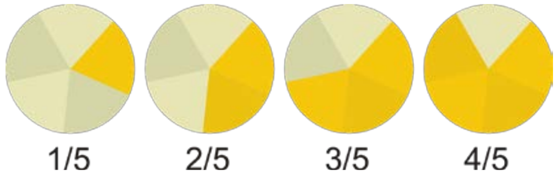
Resum

De segur que ja has utilitzat fraccions. De segur que saps que mitja dotzena d'ous són sis ous, que un quart d'hora són 15 minuts, fins i tot que tres quarts de quilo en són 750 grams.

En aquest capítol vas a familiaritzar-te amb l'ús de les fraccions aprenent a operar amb elles, a sumar-les, restar-les, multiplicar-les i dividir-les. Per fer això aprendràs quan dues fraccions són equivalents o es poden simplificar…

Autor: Eduardo Cuchillo
Traducció: Institut Juan de Garay

1. INTERPRETACIÓ D'UNA FRACCIÓ



1.1. Introducció

En una festa d'aniversari, quan arriba el moment de repartir el pastís, una persona s'encarrega de dividir-lo en porcions. Eixa persona està fraccionant el pastís. Cada porció és una fracció de pastís. A més a més, com qui reparteix gaudeix del pastís en l'últim lloc, eixa persona tractarà que tots els trossos sigan pràcticament idèntics, el seu propòsit serà dividir el pastís en fraccions iguals.

En moltes situacions quotidianes hem de fraccionar. Per pelar una poma és habitual partir-la primer per la meitat. D'aquesta manera resulten dues meitats de poma.

Altres vegades ens trobem amb quelcom que ja ha sigut dividit. A Europa, un partit de bàsquet té una duració de 40 minuts distribuïts en quatre temps, anomenats quarts, de 10 minuts cadascú. Cada temps és una fracció del partit complet, concretament una quarta part.

Algunes fàbriques funcionen durant les 24 hores del dia. Si cada operari treballa huit hores al dia, tot encaixa si fraccionem el dia en tres torns de huit hores cadascun. Així, cada torn es correspon amb la tercera part d'un dia complet, és un terç de dia.

Els objectes matemàtics anomenats **fraccions** permeten que les persones s'entenguen al parlar de trossos, parts o porcions, tant si s'ha trossejat en porcions idèntiques com si són de diferents grandàries.

1.2. Termes d'una fracció

Comencem amb un exemple. Si dividim un bescuit en 5 parts iguals, cada porció és una de les cinc parts en les que hem dividit el bescuit. Escriurem

$$\frac{1}{5}$$

per a representar cada tros, es a dir, cadascuna de les cinc cinquenes parts del bescuit.

Si col·loquem en una safata tres de eixes porcions, sobre la safata hi haurà tres cinquenes parts de bescuit:

$$\frac{3}{5}$$

El bescuit complet pot representar-se de la manera següent

Autor: Eduardo Cuchillo
Traducció: Institut Juan de Garay

$$\frac{5}{5} = 1$$

ja que està format per cinc cinquenes parts.

En general, una ***fracció*** és una expressió en la forma

$$\frac{m}{n}$$

on tant *m* com *n* són nombres naturals. Per referir-nos a ella direm *"m partit de n"*; *m* rep el nom de ***numerador*** i *n* és el ***denominador***.

Per a valors baixos del denominador, disposem de denominacions alternatives:

$\frac{1}{2}$, un mig $\frac{2}{3}$, dos terços $\frac{2}{4}$, dos quarts

$\frac{3}{5}$, tres cinquens $\frac{7}{10}$, set dècims

A partir del valor 11 del denominador:

$\frac{8}{11}$, huit onzens $\frac{6}{23}$, sis vint-i-tresens

Una pregunta natural que sorgix és la següent: és possible, o té sentit, que siga major el numerador que el denominador? La resposta es afirmativa, sí. Anem a comprovar-ho en la circumstància següent: imaginem que hem comprat dos pastissos idèntics, se han partit cada un d'ells per la meitat i algú s'ha menjat una meitat. Com expressem la quantitat de pastissos que queden? Diríem que queden tres meitats de pastís, és a dir

$\frac{3}{2}$de pastís

Com podríem entendre la fracció 12/7 (dotze setens)? Suposem que disposàvem de diverses taronges iguals i que cadascuna d'elles ha sigut dividida en set porcions iguals. Si en acabant de dinar part de la fruita només queden dotze porcions, llavors tindrem

$\frac{12}{7}$de taronja

Les fraccions el numerador de les quals és major que el denominador reben el nom de **fraccions impròpies**. Les fraccions el numerador de les quals és menor que el denominador reben el nom de **fraccions pròpies.**

Amb el que s'ha exposat fins aquest moment, intuïm que les fraccions estan molt lligades a l'acció de dividir. El denominador d'una fracció assenyala en quantes porcions s'ha dividit cada unitat, la qual cosa ens porta a conèixer la grandària de cada porció.

Exemples:

$\frac{6}{9}$, tenim 6 porcions, cadascuna d'elles de grandària 1/9. Són sis novenes parts.

$\frac{11}{5}$, hi ha 11 trossos de grandària 1/5. Són onze cinquenes parts.

$\frac{7}{12}$, hi ha 7 porcions de grandària 1/12, set dotzenes parts.

Què representa la fracció 4/1? Indica 4 porcions de grandària 1/1 = 1, es a dir 4 porcions de quelcom que no ha sigut dividit, amb la qual cosa són 4 unitats:

$$\frac{4}{1} = 4$$

Al principi, a l'exemple del bescuit, va sorgir la fracció 5/5. Representa 5 porcions de grandària 1/5, cinc cinquenes parts. Això és un bescuit complet:

$$\frac{5}{5} = 1$$

A la vista de l'anterior podem escriure **unes primeres propietats de les fraccions** que serveixen de connexió amb els nombres naturals:

$$\frac{m}{1} = m$$

$$\frac{m}{m} = 1$$

Activitats proposades

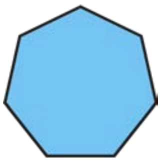
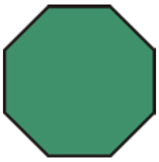
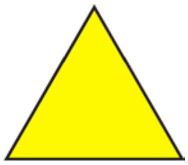
1. En cadascuna de les següents imatges escriu en el teu quadern la fracció que representen els formatgets de la caixa:

a)  b)  c)  d) 

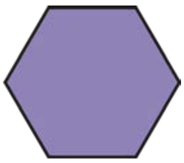
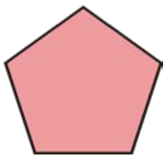
2. Còpia al teu quadern i divideix adequadament cadascuna de les següents figures per a poder destacar, en cada cas, la fracció indicada:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{3}{6}$

e) $\frac{7}{7}$ f) $\frac{1}{4}$ g) $\frac{2}{3}$ h) $\frac{3}{4}$

i) $\frac{4}{9}$ j) $\frac{1}{4}$ k) $\frac{7}{10}$ l) $\frac{5}{8}$

3. Assenyala diferents accions que obliguen a repartir, o subdividir, un cert objecte, ens o activitat.

4. Troba situacions de la vida quotidiana en què apareguen fraccions.

2. SUMA I RESTA DE FRACCIONS

2.1. Suma i resta de fraccions amb el mateix denominador

Al comentat exemple del bescuit, després de dividir-ho en 5 parts iguals situem en una safata 3 d'eixes porcions. D'eixa manera, sobre la safata hi havia tres cinquenes parts de bescuit:

$$\frac{3}{5}$$

Com que cada porció és 1/5 de bescuit, al col·locar un a un cada tros sobre la safata el que estem fent és afegir, sumar:

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$$

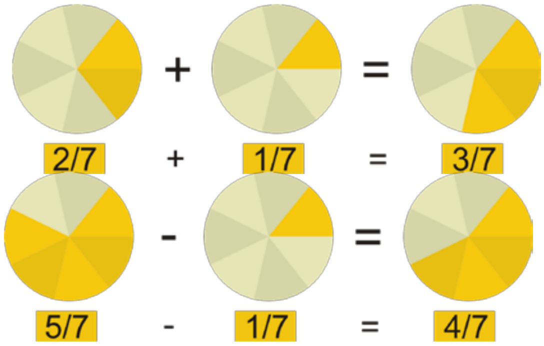
Quan algú agafe un dels trossos de la safata, en ella quedarà una porció menys de bescuit:

$$\frac{3}{5}-\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$$

Veiem que resulta senzill sumar i restar fraccions quan tenen el mateix denominador. Només hem de realitzar la suma, o la diferència, amb els numeradors i mantindre el denominador comú.

Exemples:

- $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}$
- $\frac{6}{11}+\frac{13}{11}=\frac{6+13}{11}=\frac{19}{11}$
- $\frac{8}{10}-\frac{7}{10}=\frac{8-7}{10}=\frac{1}{10}$
- $\frac{9}{4}-\frac{5}{4}=\frac{9-5}{4}=\frac{4}{4}=1$



En general,

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{n}=\frac{m+p}{n}$$
$$\frac{m}{n}-\frac{r}{n}=\frac{m-r}{n}$$

Per a poder sumar fraccions amb diferent denominador abans hem de saber què són *fraccions equivalents*.

Activitats proposades

5. Calcula:

a) $\frac{5}{9}+\frac{2}{9}$ b) $\frac{4}{13}+\frac{6}{13}$ c) $\frac{3}{5}+\frac{6}{5}$ d) $\frac{7}{1}+\frac{2}{1}$ e) $4+\frac{8}{1}$ f) $1+\frac{2}{5}$

6. Calcula:

a) $\frac{5}{6}-\frac{1}{6}$ b) $\frac{15}{11}-\frac{7}{11}$ c) $1-\frac{4}{7}$ d) $\frac{8}{3}-1$

2.2. Fraccions equivalents

Si hem tallat una pera en dos meitats i una altra en quatre quartes parts, veiem que:

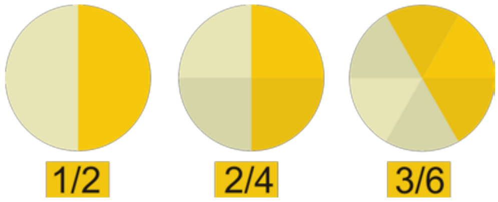
$$2 \text{ peres} = \frac{2}{2} + \frac{4}{4} = 1 + 1$$

Quan només ens quede una porció de la primera pera i una porció de la segona pera, és a dir, una meitat de pera més una quarta part de pera, tindrem

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \text{pera}$$

Però si partim la meitat de pera en dos trossos iguals, eixa meitat de pera es converteix en dues quartes parts de pera

$$\frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 2} = \frac{2}{4}$$



i, d'aquesta manera,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Si analitzem l'anterior, apreciem que les fraccions 1/2 i 2/4 són **equivalents**, representen la mateixa proporció. És el mateix mitja pera que dos quarts de pera. A més a més, transformar una fracció en una altra equivalent ens va a permetre sumar, o restar, fraccions amb diferent denominador:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

A partir d'una fracció m/n, si r és qualsevol nombre natural aleshores la fracció $(\boldsymbol{m \cdot r})/(\boldsymbol{n \cdot r})$ es equivalent a m/n,

$$\frac{m \cdot r}{n \cdot r} = \frac{m}{n}$$

Exemple:

Una fracció equivalent a 5/3 és, per exemple, 20/12, ja que

$$\frac{5}{3} = \frac{5 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{20}{12}$$

Activitats proposades

7. Obtín tres fraccions equivalents a cadascuna de les que figuren a continuació:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{7}{4}$ c) $\frac{24}{9}$

8. Decideix si les següents parelles de fraccions són o no equivalents:

a) $\frac{4}{3}$ i $\frac{12}{9}$ b) $\frac{2}{5}$ i $\frac{10}{15}$ c) $\frac{4}{8}$ i $\frac{3}{6}$

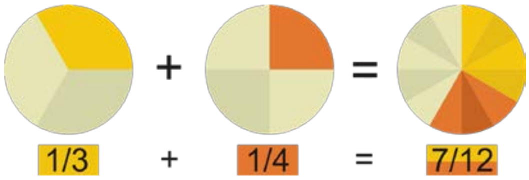
2.3. Suma i resta de fraccions amb diferent denominador

Per a realitzar la suma

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$$

haurem de buscar i trobar dos nombres naturals *r* i *s* que ens transformen cadascuna de les anteriors fraccions en altres **equivalents**, (*m·r*)/(*n·r*) i (*p·s*)/(*q·s*), de forma que les noves fraccions tinguen el **mateix denominador**, és a dir, que *n·r* = *q·s*, i en eixe cas

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{m\cdot r}{n\cdot r}+\frac{p\cdot s}{q\cdot s}=\frac{m\cdot r}{n\cdot r}+\frac{p\cdot s}{n\cdot r}=\frac{m\cdot r+p\cdot s}{n\cdot r}$$



Com hi ha moltes parelles de nombres naturals *r* i *s* que fan possible eixa igualtat, buscarem els més menuts.

Ja que *n·r* és múltiple de *n* i *q·s* és múltiple de *q*, aconseguirem *r* i *s* a partir del **mínim comú múltiple** de *n* i *q*.

$$n\cdot r=q\cdot s=m.c.m.(n,q)$$

El valor de *r* resulta de dividir eixe mínim comú múltiple entre *n* i el de *s* s'obté al dividir el mínim comú múltiple entre *q*.

Exemple:

$$\frac{5}{4}+\frac{1}{6}$$

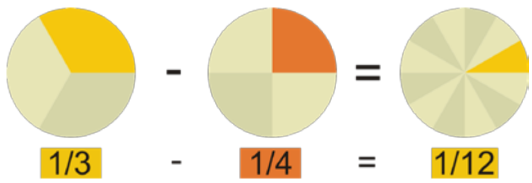
Els denominadors són diferents, 4 i 6. El seu mínim comú múltiple és 12. Al dividir 12 entre 4 ens dóna 3 i al fer-ho entre 6 obtenim 2.

$$\frac{5}{4}=\frac{5\cdot 3}{4\cdot 3}=\frac{15}{12}$$

$$\frac{1}{6}=\frac{1\cdot 2}{6\cdot 2}=\frac{2}{12}$$

Finalment

$$\frac{5}{4}+\frac{1}{6}=\frac{15}{12}+\frac{2}{12}=\frac{17}{12}$$



Exemple:

$$\frac{5}{7}-\frac{2}{3}$$

Els denominadors són diferents, 7 i 3. El seu mínim comú múltiple és 21. Al dividir 21 entre 7 ens dóna 3 i al fer-ho entre 3 obtenim 7.

$$\frac{5}{7}=\frac{5\cdot 3}{7\cdot 3}=\frac{15}{21}$$

$$\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 7}{3\cdot 7}=\frac{14}{21}$$

$$\frac{5}{7}-\frac{2}{3}=\frac{15}{21}-\frac{14}{21}=\frac{15-14}{21}=\frac{1}{21}$$

Activitats proposades

9. Realitza les següents sumes de fraccions:

a) $\frac{4}{5}+\frac{2}{3}$ b) $\frac{5}{6}+\frac{2}{9}$ c) $\frac{7}{8}+\frac{3}{2}$ d) $\frac{13}{100}+\frac{17}{24}$

10. Calcula:

a) $\frac{3}{14}-\frac{1}{6}$ b) $\frac{5}{6}-\frac{3}{5}$ c) $\frac{11}{10}-\frac{11}{24}$ d) $\frac{10}{21}-\frac{1}{3}$

Autor: Eduardo Cuchillo
Traducció: Institut Juan de Garay

2.4. Propietats de la suma de fraccions

Propietat commutativa. Ens indica que no importa l'ordre en què col·loquem els sumands:

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{p}{q}+\frac{m}{n}$$

Exemple:

$$\frac{5}{6}+\frac{4}{9}=\frac{5\cdot 3}{6\cdot 3}+\frac{4\cdot 2}{9\cdot 2}=\frac{15}{18}+\frac{8}{18}=\frac{23}{18}$$

$$\frac{4}{9}+\frac{5}{6}=\frac{4\cdot 2}{9\cdot 2}+\frac{5\cdot 3}{6\cdot 3}=\frac{8}{18}+\frac{15}{18}=\frac{23}{18}$$

Propietat associativa. Ens assenyala com es poden sumar tres o més fraccions. Només hem de fer-ho agrupant-les de dos en dos:

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{m}{n}+(\frac{p}{q}+\frac{r}{s})=(\frac{m}{n}+\frac{p}{q})+\frac{r}{s}$$

Exemple:

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+(\frac{3}{4}+\frac{1}{6})=\frac{1}{2}+(\frac{9}{12}+\frac{2}{12})=\frac{1}{2}+\frac{11}{12}=\frac{6}{12}+\frac{11}{12}=\frac{17}{12}$$

També:

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=(\frac{1}{2}+\frac{3}{4})+\frac{1}{6}=(\frac{2}{4}+\frac{3}{4})+\frac{1}{6}=\frac{5}{4}+\frac{1}{6}=\frac{15}{12}+\frac{2}{12}=\frac{17}{12}$$

Activitats proposades

11. Troba:

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{2}+\frac{5}{6}+\frac{5}{3}$ c) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ d) $\frac{7}{6}+\frac{3}{10}+\frac{1}{4}$

12. Calcula:

a) $\frac{11}{8}+\frac{5}{6}-\frac{4}{3}$ b) $\frac{11}{3}-\frac{5}{12}+\frac{13}{18}$ c) $\frac{15}{6}-\frac{4}{9}-\frac{1}{2}$

Autor: Eduardo Cuchillo
Traducció: Institut Juan de Garay

3. PRODUCTE I QUOCIENT DE FRACCIONS

3.1. Reducció d'una fracció. Fraccions irreductibles

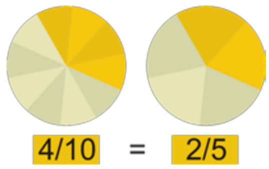
Anteriorment van dir que 1/2 i 2/4 són fraccions equivalents. Per la mateixa raó, altres fraccions equivalents són 3/5, 6/10 i 24/40 ja que

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}$$
$$\frac{6}{10} = \frac{6 \cdot 4}{10 \cdot 4} = \frac{24}{40}$$
$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 8}{5 \cdot 8} = \frac{24}{40}$$

Una manera alternativa de destacar aquestes relacions consisteix a dir que les fraccions 3/5 i 6/10 són reduccions de la fracció 24/40, mentre que 3/5 és una reducció de 6/10. Podem intuir que la fracció 3/5 no pot reduir-se més, és una **fracció irreductible**.

En general, si tenim dues fraccions *m/n* i *p/q* direm que *m/n* és una reducció de *p/q* si *m<p* i el resultat de dividir *p* entre *m* és el mateix que el de *q* entre *n*. Dit d'una altra manera, si tenim una fracció *p/q* i *d* és un nombre natural que divideix tant a *p* com a *q*, si *p:d* = *r* i *q:d* = *s*, aleshores les fraccions *r/s* i *p/q* són equivalents i *r/s* és una reducció de *p/q*. En eixe cas:

$$\frac{r}{s} = \frac{r \cdot d}{s \cdot d} = \frac{p}{q}$$



Obtindrem la major reducció d'una fracció *p/q* al dividir tant *p* com *q* entre el seu **màxim comú divisor**.

Una fracció és **irreductible** quan el màxim comú divisor del seu numerador i denominador és 1.

Exemple:

Una reducció de 24/40 és 6/10, perquè l'obtenim al dividir tant 24 com 40 entre 4.

Com el màxim comú divisor de 24 i 40 és 8, la major reducció de la fracció 24/40 és 3/5. Al ser el màxim comú divisor de 3 i 5 igual a 1, la fracció 3/5 és irreductible, tal i com era d'esperar.

Exemple:

De vegades, una fracció es redueix a un nombre natural com, per exemple, la fracció 30/6. Així és, perquè el màxim comú divisor de 30 i 6 és igual a 6, i al dividir 30, el numerador, entre 6 obtenim 5, i al dividir 6, el denominador, també entre 6 obtenim el nombre 1:

$$\frac{30}{6} = \frac{5}{1} = 5$$

Dues fraccions són equivalents si es reduïxen a una mateixa fracció irreductible. Per aquesta raó:

Dues fraccions $\frac{m}{n}$ i $\frac{p}{q}$ són **equivalents** si

$$m \cdot q = n \cdot p$$

Autor: Eduardo Cuchillo
Traducció: Institut Juan de Garay

Activitats proposades

13. Redueix les següents fraccions a la seua expressió irreductible:

a) $\frac{48}{18}$ b) $\frac{14}{49}$ c) $\frac{8}{8}$ d) $\frac{60}{148}$

14. Determina si les següents parelles de fraccions són o no equivalents:

a) $\frac{4}{8}$ i $\frac{3}{6}$ b) $\frac{3}{7}$ i $\frac{4}{9}$ c) $\frac{5}{8}$ i $\frac{105}{168}$

3.2. Producte de fraccions

Podem multiplicar un nombre natural per una fracció si raonem de la següent manera:

2 · 5/7 o 5/7 · 2 ho llegim com "dues vegades la fracció 5/7". Així:

$$2 \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{7} \cdot 2 = \frac{5}{7} + \frac{5}{7} = \frac{5+5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{7} = \frac{10}{7}$$

D'una altra manera, 5/7 indica 5 porcions de grandària 1/7. El producte 2 · 5/7 assenyala dues vegades 5 porcions de grandària 1/7, açò és, 2 · 5 = 10 porcions de grandària 1/7, és a dir, 10/7.

En general,

$$a \cdot \frac{m}{n} = \frac{a \cdot m}{n}$$

Com podem entendre el producte de dues fraccions ambdues amb numerador igual a u? Per exemple, 1/2·1/3:

Al ser 1/3 = 1 · 1/3, 1/3 és UNA porció de quelcom que s'ha dividit en tres parts, de la mateixa manera que 2/3 = 2 · 1/3 representa DUES porcions de quelcom que s'ha dividit en tres parts. Anàlogament, 1/2·1/3 ens apunta cap a la meitat d'una porció de quelcom dividit en tres parts, és a dir, una sisena part, ja que primer dividim en tres porcions i després cadascuna d'elles en dos:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$$

En general,

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{q} = \frac{1}{n \cdot q}$$

A la vista de l'anterior:

Per a **multiplicar** dues fraccions multiplicarem els seus numeradors entre si i el mateix farem amb els denominadors:

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q}$$

Justificació:

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=(m\cdot\frac{1}{n})\cdot(\frac{1}{q}\cdot p)=m\cdot(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{q})\cdot p=m\cdot(\frac{1}{n\cdot q})\cdot p=\frac{m\cdot 1}{n\cdot q}\cdot p=\frac{m}{n\cdot q}\cdot p=\frac{m\cdot p}{n\cdot q}$$

Exemple:

$$\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}=\frac{4\cdot 3}{7\cdot 6}=\frac{12}{42}$$

Podem simplificar, reduir, el resultat:

$$\frac{12}{42}=\frac{4\cdot 3}{7\cdot 6}=\frac{2\cdot 2\cdot 3}{7\cdot 2\cdot 3}=\frac{2\cdot 3}{7\cdot 3}=\frac{2}{7}$$

Activitats proposades

15. Calcula:

a) $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}$ b) $7\cdot\frac{5}{9}$ c) $8\cdot\frac{1}{7}$ d) $\frac{6}{10}\cdot\frac{11}{2}$

16. Multiplica les següents fraccions i redueix, simplifica, el resultat:

a) $\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{8}$ b) $\frac{9}{12}\cdot\frac{4}{3}$ c) $\frac{14}{6}\cdot\frac{5}{21}$ d) $\frac{6}{5}\cdot\frac{10}{3}$

Autor: Eduardo Cuchillo
Traducció: Institut Juan de Garay

3.3. Propietats del producte de fraccions

Propietat commutativa. Ens indica que no importa l'ordre en el que col·loquem els factors:

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{p}{q}\cdot\frac{m}{n}$$

Exemple:

$$\frac{7}{9}\cdot\frac{11}{5}=\frac{7\cdot 11}{9\cdot 5}=\frac{77}{45}$$
$$\frac{11}{5}\cdot\frac{7}{9}=\frac{11\cdot 7}{5\cdot 9}=\frac{77}{45}$$

Propietat associativa. Ens assenyala com es poden multiplicar tres o més fraccions. Només hem de fer-ho ajuntant-les de dos en dos:

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}=\frac{m}{n}\cdot(\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s})=(\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q})\cdot\frac{r}{s}=\frac{m\cdot p\cdot r}{n\cdot q\cdot s}$$

Exemple:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1\cdot 3\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6}=\frac{3}{48}$$

Propietat distributiva de la multiplicació respecte de la suma. Quan en una multiplicació un dels factors ve donat com la suma de dues fraccions com, per exemple,

$$\frac{8}{3}\cdot(\frac{6}{5}+\frac{1}{4})$$

tenim dos opcions per a conèixer el resultat:

a) realitzar la suma i, després, multiplicar

$$\frac{6}{5}+\frac{1}{4}=\frac{6\cdot 4}{5\cdot 4}+\frac{1\cdot 5}{4\cdot 5}=\frac{24}{20}+\frac{5}{20}=\frac{24+5}{20}=\frac{29}{20}$$
$$\frac{8}{3}\cdot(\frac{6}{5}+\frac{1}{4})=\frac{8}{3}\cdot\frac{29}{20}=\frac{8\cdot 29}{3\cdot 20}=\frac{2\cdot 4\cdot 29}{3\cdot 4\cdot 5}=\frac{2\cdot 29}{3\cdot 5}=\frac{58}{15}$$

b) distribuir, aplicar, la multiplicació a cadascú dels sumands i, després, sumar:

$$\frac{8}{3}\cdot(\frac{6}{5}+\frac{1}{4})=(\frac{8}{3}\cdot\frac{6}{5})+(\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{4})$$

Comprovem que obtenim el mateix resultat:

$$\frac{8}{3}\cdot(\frac{6}{5}+\frac{1}{4})=(\frac{8}{3}\cdot\frac{6}{5})+(\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{4})=\frac{8\cdot 6}{3\cdot 5}+\frac{8\cdot 1}{3\cdot 4}=\frac{8\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5}+\frac{2\cdot 4\cdot 1}{3\cdot 4}=\frac{8\cdot 2}{5}+\frac{2\cdot 1}{3}=\frac{16}{5}+\frac{2}{3}$$
$$=\frac{16\cdot 3}{5\cdot 3}+\frac{2\cdot 5}{3\cdot 5}=\frac{48}{15}+\frac{10}{15}=\frac{48+10}{15}=\frac{58}{15}$$

En general, la propietat distributiva de la multiplicació respecte de la suma ens diu que

$$\frac{a}{b}\cdot(\frac{m}{n}+\frac{p}{q})=(\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n})+(\frac{a}{b}\cdot\frac{p}{q})$$

Convé comentar que l'anterior propietat distributiva llegida en sentit contrari, de dreta a esquerra, és allò que comunament denominem **traure factor comú**:

$$\frac{12}{5}+\frac{22}{15}=\frac{2\cdot 6}{5}+\frac{2\cdot 11}{5\cdot 3}=(\frac{2}{5}\cdot 6)+(\frac{2}{5}\cdot\frac{11}{3})=\frac{2}{5}\cdot(6+\frac{11}{3})$$

Activitats proposades

17. Realitza els productes indicats:

a) $\frac{8}{3}\cdot(\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{4})$ b) $(\frac{8}{3}\cdot\frac{6}{5})\cdot\frac{1}{4}$ c) $\frac{8}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{4}$

18. Fes les següents operacions:

a) $\frac{7}{2}+(\frac{5}{3}\cdot\frac{9}{8})$ b) $(\frac{7}{2}+\frac{5}{3})\cdot\frac{9}{8}$ c) $\frac{7}{2}\cdot(\frac{5}{3}+\frac{9}{8})$

3.4. Quocient de fraccions

Són quatre les operacions bàsiques dels nombres naturals i enters, a saber: la suma, la resta o diferència, el producte o multiplicació i la divisió. Per a les fraccions ja han sigut establides les tres primeres, ens falta la divisió.

Recordem com podem entendre la divisió de dos nombres naturals. Per exemple, la divisió de 6 entre 2, el resultat de la qual és 3, podem entendre-la com que si tenim 6 objectes i els ajuntem de dos en dos resultaran 3 grups.

D'aquesta manera, la divisió de 6 (o de la fracció equivalent 6/1) entre la fracció 3/4 ens portarà al nombre de grups que obtenim al repartir 6 unitats en agrupacions formades per 3/4 parts:

- 6 unitats, a quantes quartes parts equivalen? Resposta: a 24, ja que 6·4 = 24. D'aquesta manera, 6 = 6/1 = 24/4
- si col·loquem 24 quartes parts de tres en tres, quantes agrupacions tenim? Resposta: 8, perquè 24:3 = 8

Es a dir,

$$6 : \frac{3}{4} = \frac{6}{1} : \frac{3}{4} = 8$$

Observem que

$$8 = \frac{6}{1} : \frac{3}{4} = \frac{6 \cdot 4}{1 \cdot 3} = \frac{6}{1} \cdot \frac{4}{3}$$

En general,

$$\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p} = \frac{m \cdot q}{n \cdot p}$$

Exemple:

$$\frac{12}{5} : \frac{4}{7} = \frac{12}{5} \cdot \frac{7}{4} = \frac{12 \cdot 7}{5 \cdot 4} = \frac{84}{20} = \frac{21 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{21}{5}$$

Activitats proposades

19. Calcula:

a) $\frac{7}{2} : \frac{3}{4}$ b) $\frac{11}{6} : \frac{2}{5}$ c) $\frac{5}{7} : \frac{5}{7}$ d) $\frac{6}{4} : \frac{12}{8}$ e) $\frac{16}{5} : 3$

20. Realitza les següents divisions i redueix, simplifica, el resultat:

a) $\frac{15}{2} : \frac{5}{4}$ b) $\frac{6}{5} : \frac{1}{5}$ c) $\frac{4}{3} : \frac{4}{7}$ d) $15 : \frac{3}{5}$

Autor: Eduardo Cuchillo
Traducció: Institut Juan de Garay

4. ALTRES ASPECTES DE LES FRACCIONS

4.1. Comparació, representació i ordenació de fraccions

Com que les fraccions són nombres, és interessant que sapiguem comparar-les, que puguem dictaminar quina és major o quina és menor. Per a esbrinar-lo podem transformar-les en altres fraccions equivalents, de manera que tinguen el mateix denominador, i, a la vista dels numeradors, ja és molt senzill decidir.

Exemple:

- Quina de les següents fraccions és la més gran? 5/4 i 7/5

Els denominadors són 4 i 5. El seu mínim comú múltiple és 20:

$$\frac{5}{4} = \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{25}{20}$$
$$\frac{7}{5} = \frac{7 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{28}{20}$$

Conclusió: 7/5 és més gran que 5/4

Exemple:

- Ordena les següents fraccions de menor a major:

$$\frac{7}{4}, \frac{19}{12}, \frac{17}{10}$$

Els denominadors són 4, 12 i 10. El seu mínim comú múltiple és 60 ja que

$$4 = 2 \cdot 2$$
$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$
$$10 = 2 \cdot 5$$
$$m.c.m.(4,12,10) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$
$$\frac{7}{4} = \frac{7 \cdot 15}{4 \cdot 15} = \frac{105}{60}$$
$$\frac{19}{12} = \frac{19 \cdot 5}{12 \cdot 5} = \frac{95}{60}$$
$$\frac{17}{10} = \frac{17 \cdot 6}{10 \cdot 6} = \frac{102}{60}$$

Conclusió:

$$\frac{19}{12} < \frac{17}{10} < \frac{7}{4}$$

Podem comprovar que si

$$\frac{m}{n} < \frac{p}{q}$$

ha de complir-se que: $m \cdot q < p \cdot n$

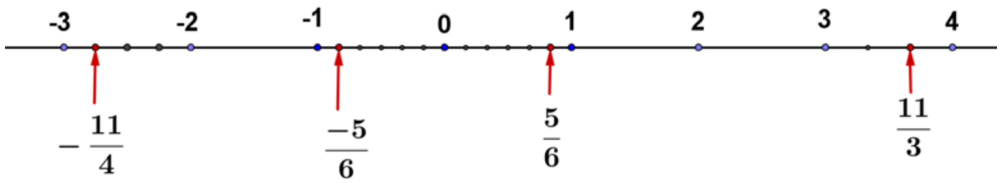
Autor: Eduardo Cuchillo
Traducció: Institut Juan de Garay

Representació en la recta

Per a representar una fracció en la recta numèrica podem seguir dos camins, escriure-la en forma de nombre decimal, i així representar-la, o dividir la unitat en tantes parts com diga el denominador, i prendre en la recta les parts que diu el numerador. En cursos pròxims aprendràs a representar-les amb més deteniment.

Exemple:

- Representa en la recta numèrica les fraccions següents: $\frac{11}{3}, \frac{5}{6}, \frac{-5}{6}, \frac{-11}{4}$.



Activitats proposades

21. En cadascú dels següents parells de fraccions, indica quina és la més gran:

a) $\frac{7}{8}$i $\frac{3}{2}$ b) $\frac{7}{8}$ i $\frac{10}{11}$ c) $\frac{2}{3}$ i $\frac{14}{21}$ d) $\frac{11}{18}$ i $\frac{14}{21}$

22. Ordena les següents fraccions de menor a major:

$\frac{12}{7}, \frac{4}{7}, \frac{8}{5}, \frac{6}{11}$

4.2. Descomposició d'una fracció

Quan tenim una fracció *m/n* impròpia, es a dir, una fracció en la que és més gran el numerador *m* que el denominador *n*, podem descomposar-la com la suma d'un nombre natural més altra fracció en la que ja és més gran el denominador. Per fer-ho només hi ha que dividir el numerador entre el denominador i tindre en compte tant el residu com el quocient.

La fracció 26/3 és impròpia al ser més gran el seu numerador. Al dividir 26 entre 3 obtenim un quocient igual a 8 i un residu igual a 2. Per tant:

$$\frac{26}{3} = \frac{(8 \cdot 3) + 2}{3} = \frac{8 \cdot 3}{3} + \frac{2}{3} = 8 \cdot \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = 8 \cdot 1 + \frac{2}{3} = 8 + \frac{2}{3}$$

Per tant 26/3 és igual a huit unitats més dues terceres parts. En algunes ocasions, en compte d'escriure

$$8 + \frac{2}{3}$$

s'opta per l'expressió

$$8\frac{2}{3}$$

Autor: Eduardo Cuchillo
Traducció: Institut Juan de Garay

el que es denomina ***nombre mixt***, perquè arreplega la seua *part sencera* i la seua *part fraccionada*. Cal parar atenció amb no confondre-ho amb

$$8 \cdot \frac{2}{3}$$

Activitats proposades

23. Escriu com nombre mixt les fraccions:

a) $\frac{11}{6}$ b) $\frac{34}{5}$

4.3. Fraccions negatives

En aquest capítol tots els exemples de fraccions han sigut a partir de dos nombres naturals, o enters positius; un, el numerador, i, un altre, el denominador. Igual que en altres cursos, després d'estudiar els nombres naturals, es va donar pas als nombres negatius i, amb ells, als nombres enters, anem a introduir ara les fraccions negatives. No s'ha fet així des de el principi del capítol perquè pareix convenient adquirir abans una certa soltesa i coneixements sobre fraccions positives.

D'ara en avant, una fracció serà una expressió de la forma *m/n* on tant *m* com *n* són nombres enters, i el denominador, *n*, és diferent de zero.

Les conegudes regles dels signes dels nombres enters, a l'hora de multiplicar o dividir, també són vàlides per a les fraccions. Per això un conveni estès sobre l'aspecte d'una fracció consisteix en que el denominador siga un nombre enter positiu, es a dir, un nombre natural.

Exposarem una sèrie variada de exemples en què apareixen fraccions negatives i algunes de les seus propietats.

Exemples:

- $\frac{(-5)}{(-4)} = \frac{(-1)\cdot 5}{(-1)\cdot 4} = \frac{5}{4}$
- $\frac{(-2)}{3} = \frac{2}{(-3)} = -\frac{2}{3} = (-1)\cdot\frac{2}{3} = (-2)\cdot\frac{1}{3}$
- $\frac{(-3)}{4} + \frac{6}{5} = \frac{6}{5} + \frac{(-3)}{4} = \frac{6}{5} - \frac{3}{4} = \frac{6\cdot 4}{5\cdot 4} - \frac{3\cdot 5}{4\cdot 5} = \frac{24}{20} - \frac{15}{20} = \frac{24-15}{20} = \frac{9}{20}$
- $-\frac{7}{2} - \frac{4}{3} = -(\frac{7}{2} + \frac{4}{3}) = (-1)\cdot(\frac{7}{2} + \frac{4}{3}) = (-1)\cdot(\frac{7\cdot 3}{2\cdot 3} + \frac{4\cdot 2}{3\cdot 2}) = (-1)\cdot(\frac{21}{6} + \frac{8}{6}) = (-1)\cdot\frac{29}{6} = -\frac{29}{6}$
- $\frac{3}{8} - \frac{5}{6} = \frac{3\cdot 3}{8\cdot 3} - \frac{5\cdot 4}{6\cdot 4} = \frac{9}{24} - \frac{20}{24} = \frac{9-20}{24} = \frac{-11}{24} = -\frac{11}{24}$

Activitats proposades

24. Efectua les següents operacions:

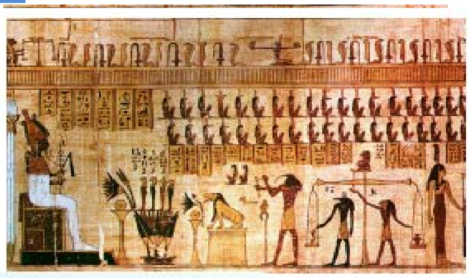
a) $-\frac{5}{3} - \frac{7}{2}$ b) $\frac{4}{7} + \frac{(-7)}{9}$ c) $\frac{(-9)}{5} + \frac{(-1)}{8}$

Autor: Eduardo Cuchillo
Traducció: Institut Juan de Garay

CURIOSITATS. REVISTA

Sabies que ja els egipcis empraven fraccions?

Al papir de Ahmes (o de Rhind), de fa quasi quatre mil anys, s'empraven fraccions. Empraven algunes fraccions com 2/3, però sobretot empraven les fraccions unitàries, aquelles en les que el numerador és un 1: 1/2, 1/3, 1/4, 1/5... Per a representar, per exemple, 1/5, escrivíem dalt del seu nombre 5 un punt o un cercle. Busca en Internet Ahmes o Rhind per conèixer més acerca de l'us que els egipcis donavem a les fraccions.



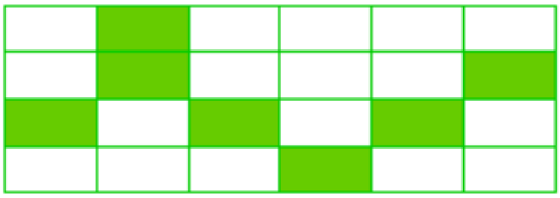
Trencats

Tot i que es troba en clar desús, una manera alternativa per a referir-se a les fraccions és la paraula ***trencats***.

Reflexiona breuement i ofereix una justificació a eixa denominació.

Posteriorment busca en un diccionari la definició de la paraula *trencat* i compara-la amb la teua argumentació.

Observa que tant "*trencat*" com "*fracció*" signifiquen "tros".



Mots encreuats

HORIZONTALS

1. Numerador d'un quart. Els 3/4 de 6500.
2. Diferència entre 1/4 i 2/8. Els 11/3 de 69.
3. Producte de 2/5 per 5/2. Quocient entre 8/3 i 2/3. Part sencera del nombre mixt de 22/5.
4. Denominador d'una fracció equivalent a 7/240 de numerador 21. Part sencera de 71/3 com nombre mixt.

VERTICALS

1. Denominador d'una desena. Part sencera de 39/5 expresat com nombre mixt.
2. Denominador resultat de simplificar 130/120.
3. Numerador del quocient entre 6/5 i 11/7. Diferència entre 3/2 i 6/4.
4. Els 7/4 de 488.
5. Numerador de simplificar 146/22. Les 3/4 parts de 8/3.
6. Producte entre 15/2 i 2/3. Numerador de la suma de 7/5 i 3/4.

Autor: Eduardo Cuchillo
Traducció: Institut Juan de Garay

RESUM

NOCIÓN	*DESCRIPCIÓN*	*EJEMPLOS*
Fracció	Expressió de la forma $\frac{m}{n}$ on tant *m*, el *numerador*, com *n*, el *denominador*, són nombres enters. Llegirem *"m partit de n"*.	$\frac{5}{6}$, cinc sisens $\frac{30}{19}$, trenta dinovens
Fraccions impròpies	fraccions el numerador de les quals és més gran que el denominador.	$\frac{2}{3}, \frac{15}{25}, \frac{10}{11}$
Suma i resta de fraccions amb el mateix denominador	Realitzem la suma, o la diferència, amb els numeradors i mantenim el denominador comú.	$\frac{3}{5}+\frac{6}{5}=\frac{3+6}{5}=\frac{9}{5}$ $\frac{13}{7}-\frac{8}{7}=\frac{13-8}{7}=\frac{5}{7}$
Fraccions equivalents	Són fraccions que representen la mateixa proporció.	$\frac{10}{25}$ i $\frac{6}{15}$
Suma i resta de fraccions amb diferent denominador	Transformem cada fracció en una altra equivalent de manera que les noves fraccions tinguen el mateix denominador, i les sumem.	$\frac{9}{10}+\frac{7}{15}=\frac{9\cdot 3}{10\cdot 3}+\frac{7\cdot 2}{15\cdot 2}=$ $=\frac{27}{30}+\frac{14}{30}=\frac{27+14}{30}=\frac{41}{30}$
Fracció irreductible	Una fracció és irreductible quan el màxim comú divisor del seu numerador i denominador és 1.	$\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{10}{9}$
Producte de fraccions	Multipliquem els seus numeradors entre si i el mateix fem amb els denominadors.	$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{9}=\frac{5\cdot 1}{6\cdot 9}=\frac{5}{54}$
Quocient de fraccions	Multipliquem la primera fracció per la que resulta de intercanviar el numerador i el denominador de la segona fracció.	$\frac{3}{11}:\frac{5}{7}=\frac{3}{11}\cdot\frac{7}{5}=\frac{3\cdot 7}{11\cdot 5}=\frac{21}{55}$
Comparació de fraccions	Podem determinar quina és la més gran de dues o més fraccions reduint-les a comú denominador.	$\frac{18}{11}<\frac{7}{4}<\frac{15}{8}$
Fraccions negatives	Podem estendre la noció de fracció per a que tant el numerador com el denominador puguen ser nombres enters, diferent de zero el denominador.	$\frac{(-3)}{(-7)}=\frac{(-1)\cdot 3}{(-1)\cdot 7}=\frac{3}{7}$ $-\frac{4}{5}=\frac{(-4)}{5}=\frac{4}{(-5)}=(-1)\cdot\frac{4}{5}$

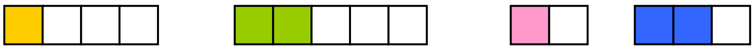
Autor: Eduardo Cuchillo
Traducció: Institut Juan de Garay

EXERCICIS I PROBLEMES. Matemàtiques 1º de ESO.

1. Raona si són certes o no les següents afirmacions:
   a) Si el denominador d'una fracció és un nombre primer aleshores la fracció és irreductible.
   b) Si el denominador d'una fracció no és un nombre primer aleshores la fracció no és irreductible.
   c) Hi ha fraccions irreductibles el denominador de les quals no és un nombre primer.
   d) Qualsevol fracció pot ser reduïda a una fracció irreductible.
2. Anna ha rebut dels seus pares 36 euros i el seu germà menor, Ernest, la tercera part del que ha rebut Anna. Quina quantitat va rebre Ernest?
3. A una festa d'aniversari assisteixen 6 persones. El pastís ja ha sigut dividit en sis porcions iguals quan, sense esperar-ho, arriben 2 persones més. Descriu què s'ha de fer amb el pastís per a que totes les persones mengen la mateixa quantitat de pastís.

4. Si en la festa d'abans en compte d'arribar de sobte 2 persones s'en van 2, abans de distribuir el pastís ja dividit en 6 porcions iguals, comenta el que es pot fer amb el pastís perquè les 4 persones que s'han quedat reben la mateixa fracció de pastís, i no quede res d'ell.
5. Una persona disposa de 1172 euros i ha decidit invertir tres quartes parts de eixa quantitat en cert producte bancari. Quin és l'import del que inverteix?
6. Una figura massissa pesa huit quilos i mig. Quant pesarà una figura i mitja?
7. Dibuixa al teu quadern per a cada cas un rectangle, que serà la unitat, i pinta en ell la fracció corresponent a:

   a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $\frac{5}{6}$ e) $\frac{7}{9}$
8. Expressa mitjançant una fracció la part pintada de cada figura:

a) 

9. Calcula:

   a) $\frac{1}{13}$ de 39 b) $\frac{1}{10}$ de 50 c) $\frac{1}{7}$ de 35 d) $\frac{1}{3}$ de 21
10. Converteix en fracció els següents nombres mixtos:

   a) $4\frac{1}{3}$ b) $5\frac{2}{9}$ c) $3\frac{4}{7}$ d) $2\frac{1}{4}$ e) $7\frac{3}{11}$
11. Pilar ha llegit les $\frac{3}{4}$ parts d'un llibre de 300 fulls. Xavi ha llegit els $\frac{6}{8}$ del mateix llibre. Quantes pàgines han llegit cadascú? Com són les fraccions utilitzades?
12. Decideix calculant mentalment quines de les següents fraccions són equivalents a $\frac{1}{3}$:

   a) $\frac{2}{6}$ b) $\frac{-1}{-3}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{7}{21}$ e) $\frac{5}{15}$
13. Si es congela l'aigua augmenta el seu volum en 1/10. Fiques al congelador unes botelles d'un litre i mig, quant has de deixar buit perquè no explote?

Autor: Eduardo Cuchillo
Traducció: Institut Juan de Garay

14. Escriu al teu quadern les següents operacions i després calcula el resultat:

$$a)\ \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\quad b)\ \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}\quad c)\ \frac{7}{3}\cdot\frac{4}{2}\quad d)\ \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}$$

15. En una obra de teatre han treballat els 3/8 de l'alumnat de 1º A, 1/2 del de 1º B i 4/5 del de 1º C. En quina classe han treballat més estudiants? Ordena les classes segons que hagen treballat més o menys estudiants.

16. Copia al teu quadern i completa els següents parells de fraccions perquè resulten equivalents:

a) $\frac{5}{3}$ i $\frac{\ }{60}$ b) $\frac{6}{8}$ i $\frac{21}{\ }$

17. Expressa de forma numèrica i calcula el resultat:

a) Un quart de tres terços

b) Dos setens de la meitat

c) La meitat de la cinquena part

18. En un magatzem volen envasar tres mil litres amb ampolles de 1/3, Quantes ampolles fan falta?

19. Còpia al teu quadern i emplena els llocs buits:

$$a)\ \frac{13}{6}+\frac{1}{6}=\frac{\ }{6}=\frac{\ }{3};\quad b)\ \frac{5}{8}-\frac{3}{8}=\frac{\ }{8}=\frac{\ }{4};\quad c)\ \frac{14}{9}+\frac{\ }{9}=\frac{10}{3};\quad d)\ \frac{\ }{10}-\frac{7}{10}=\frac{2}{5}$$

20. Escriu en forma de fracció irreductible les quantitats:

a) 30 minuts d'una hora; b) 45 minuts d'una hora; c) 4 mesos d'un any;

d) 6 mesos d'un any; e) 3 dies d'una setmana; f) 6 hores d'un dia.

21. Copia al teu quadern i emplena les següents fraccions de manera que resulten impròpies:

a) $\frac{\ }{5}$ b) $\frac{34}{\ }$ c) $\frac{\ }{2}$

22. Finalitza les següents frases per a dues fraccions amb numerador i denominador positius:

- Si tenen el mateix numerador llavors és més gran la que te el denominador ……………..
- Si tenen el mateix denominador llavors és més gran la que te el numerador ……………..

Autor: Eduardo Cuchillo
Traducció: Institut Juan de Garay

AUTOEVALUACIÓN de 1º de ESO

1. Assenyala la fracció que no siga impròpia:

a) $\frac{16}{9}$ b) $\frac{15}{4}$ c) $\frac{5}{9}$ d) $\frac{9}{7}$

2. Indica quina de les fraccions següents és equivalent a $\frac{7}{9}$:

a) $\frac{21}{28}$ b) $\frac{63}{81}$ c) $\frac{15}{18}$ d) $\frac{28}{35}$

3. El resultat de la suma $\frac{2}{3}+\frac{7}{2}+\frac{5}{6}$ és :

a) 5 b) $\frac{29}{6}$ c) $\frac{14}{3}$ d) $\frac{11}{2}$

4. Els llocs buits que falten són: $\frac{13}{6}+\frac{1}{6}=\frac{\quad}{6}=\frac{\quad}{3}$

a) 14 i 8 b) 13 i 7 c) 12 i 6 d) 14 i 7

5. Amb 6 quilos de sucre, quants sucrers de 2/3 kg podem emplenar?

a) 18 b) 4 c) 9 d) 12

6. Se sap que un refresc amb gas al congelar-lo augmentarà el seu volum 1/9 respecte al que te a temperatura ambient. Per congelar 2 litres d'eixa beguda, l'envàs ha de tindre una capacitat al menys de:

a) 2,12 litres, b) 2,22 litres, c) 2,23 litres d) 1,95 litres

7. Elegeix la fracció que siga el resultat de la divisió $\frac{2}{3}:\frac{3}{4}$

a) $\frac{8}{9}$ b) $\frac{6}{12}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{7}{8}$

8. En cada full d'un àlbum caben sis fotografies. He emplenat ja amb fotos 7 fulls i encara em queden els $\frac{2}{3}$ de les meues fotografies per col·locar, en total vull pegar:

a) 81 fotos b) 42 fotos c) 147 fotos d) 126 fotos

9. La quarta part dels $\frac{2}{3}$ de 600 equival a:

a) 120 b) 100 c) 150 d) 400

10. Indica quina de les següents fraccions és més gran que $\frac{6}{8}$:

a) $\frac{7}{9}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{5}{9}$ d) $\frac{4}{7}$

Autor: Eduardo Cuchillo
Traducció: Institut Juan de Garay

CAPÍTOL 6: EXPRESSIONS DECIMALS

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Eduardo Cuchillo

Il·lustracions: **Banc d'imatges de l'INTEF**

Traducció al valencià: Departament de Matemàtiques de l'Institut Juan de Garay

Índex

Resum

Si atenem al nostre entorn, és fàcil que ens trobem amb "nombres que tenen decimals": en mesurar la temperatura corporal amb un termòmetre, en els preus dels productes d'una empresa que llegim en una fulla de publicitat, etc.

En aquest tema anem a treballar amb ells, i ho farem a partir del que hem après en el capítol anterior sobre les fraccions. Al llarg d'aquest capítol veurem que hi ha fortes connexions entre aqueixos dos conceptes matemàtics: fraccions i expressions decimals.

Autor: Eduardo Cuchillo
Traducció: Institut Juan de Garay

1. PRIMERES EXPRESSIONS DECIMALS

1.1. Introducció. Nombres decimals

En el capítol anterior van sorgir les fraccions perquè ens siga possible i fàcil parlar de porcions, parts, en les quals alguna cosa ha sigut dividit. No obstant açò, en la vida quotidiana ens trobem amb altres formes que expressen quantitats que no es corresponen amb unitats completes.

Exemple:

- En qualsevol mercat veiem preus d'un quilo de fruita com 2'38 €/kg. Un quilo d'aquesta fruita ens costa 2 euros i 38 cèntims d'euro, quantitat que es troba entre 2 i 3 euros, és major que 2 i menor que 3. Com cada cèntim d'euro és la porció d'euro que resulta en dividir un euro en cent parts iguals, tenim una primera connexió entre l'expressió 2'38 i les fraccions:

$$2'38 = 2 + \frac{38}{100} = \frac{238}{100}$$

que interpretem com que 2 euros i 38 cèntims d'euro és el mateix que 238 cèntims d'euro.

Exemple:

- En alguns carrers o places de les ciutats es situen panells que ens informen de la temperatura ambiental. En dies calorosos la temperatura pot aconseguir, per exemple, els 37'4 graus. Aquesta temperatura és superior a 37 graus i inferior a 38 graus. Podem dir que disposem de dos nombres: a l'esquerra de la coma el número 37, a la dreta de la coma el 4. Ells ens informen que la temperatura exacta del carrer és de 37 graus més 4 dècimes de grau, es a dir, 37 graus més el que resulta de dividir un grau en deu parts iguals i prendre quatre de elles:

$$37'4 = 73 + \frac{4}{10}$$

Exemple:

- Si pesem en una balança la fruita que hem escollit i veiem que el seu pes és d'1'692 kg sabrem que tenim més d'un quilogram de fruita i menys de 2 quilograms. La quantitat exacta és un quilogram de fruita més 692 mil·lèsimes de quilo. Una mil·lèsima de quilogram (rep el nom de gram) és cadascuna de les porcions de quilogram que resulten després de dividir un quilogram en mil parts iguals.

$$1'692 = 1 + \frac{692}{1000} = \frac{1692}{1000}$$

Aquesta igualtat ens indica que 1'692 kg és el mateix que 1692 mil·lèsimes de quilo, és a dir, 1692 grams.

En les tres situacions anteriors han aparegut nombres decimals.

Un nombre decimal consta de dues parts:

- la seua part entera, el nombre que està a l'esquerra de la coma
- i la seua part decimal, que es troba a la dreta de la coma

Com podem apreciar, la part entera d'un nombre decimal arreplega certa quantitat d'unitats completes, mentre que la seua part decimal assenyala el nombre de porcions que cal afegir, porcions que resulten de dividir una unitat en 10, 100, 1000, etc., parts iguals segons tinguem, respectivament, 1, 2, 3, etc., xifres decimals. Per açò, segons vam veure en el capítol anterior, un nombre decimal està connectat amb les descomposicions de fraccions amb denominador potència del número 10.

Exemples:

$$2'9 = 2 + \frac{9}{10}$$

$$2'09 = 2 + \frac{9}{100}$$

$$0'3 = 0 + \frac{3}{10} = \frac{3}{10}$$

$$0'035 = 0 + \frac{35}{1000} = \frac{35}{1000}$$

Activitats proposades

1. Cerca altres situacions de la vida real on apareguen nombres decimals.

1.2. Conversió d'una expressió decimal a fracció

Ja hem vist que una expressió decimal es converteix en fracció, de manera que el numerador coincideix amb el nombre decimal, després d'eliminar la coma, i el denominador és el nombre 1 seguit de tants zeros com xifres tenia la part decimal

Exemple:

$$73'18 = 73 + \frac{18}{100} = \frac{7318}{100}$$

Nombres decimals equivalents. Si a un nombre decimal la seua part decimal finalitza amb la xifra zero podem suprimir aquest zero sense que alterem la quantitat que expressa el nombre decimal.

Exemples:

$$3'90 = 3 + \frac{90}{100} = 3 + \frac{9}{10} = 3'9$$

$$76'0 = 76 + \frac{0}{10} = 76 + 0 = 76$$

$$8'200 = 8 + \frac{200}{1000} = 8 + \frac{2}{10} = 8'2$$

Recíprocament, en ocasions pot resultar convenient, a causa del context, afegir algun zero a la part decimal:

$$46'54 = 46 + \frac{54}{100} = 46 + \frac{540}{1000} = 46'540$$

Activitats proposades

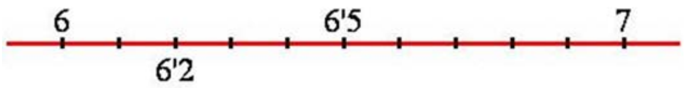
2. Transforma en fraccions els següents nombres decimals:

a) $0'87$ **b)** $0'0701$ **c)** $30'56$ **d)** $17'03$ **e)** $10'050$

Autor: Eduardo Cuchillo
Traducció: Institut Juan de Garay

1.3. Representació en la recta numèrica

La relació que hem aconseguit entre els nombres decimals i les fraccions ens permet situar-los a la recta numèrica. Per a representar un nombre decimal com 6’2 en primer lloc ens fixem en la seua part entera, 6, la qual cosa ens informa que 6’2 es troba entre els nombres naturals 6 i 7. Com la seua part decimal posseeix una sola xifra, són 2 dècimes, haurem de dividir el segment d'extrems 6 i 7 en deu parts iguals para, finalment, situar 6’2 sobre la segona de les marques.



Si el nombre decimal té més d'una xifra decimal, haurem de realitzar una subdivisió més exigent. El nombre decimal 3’76 té dues xifres decimals. En ser la seua part sencera 3, es troba situat entre els nombres 3 i 4. La posició exacta l'aconseguiríem si dividírem el segment d'extrems 3 i 4 en 100 parts iguals i cerquem, a partir del número 3, les 76 centèsimes.

Activitats proposades

3. Situa en la següent recta els nombres 8’43, 8’48, 8’51 y 8’38

Comparació entre expressions decimals.

Decidir si un nombre decimal és major o menor que un altre és prou senzill. Si les seues parts senceres són diferents, elles ja determinen quin és major.

Exemple:

- 13’66 és major que 11’4, doncs el primer té part sencera 13 i el segon 11.

Si tenen igual part sencera passem a mirar la seua primera xifra decimal, la de les dècimes. Si són diferents, ja podem decidir.

Exemple:

- 7’25 és menor que 7’3, ja que tenen la mateixa part entera i la primera xifra decimal de 7’3 és major que la primera xifra decimal de 7’25.

En general, si coincideixen les parts enteres cerquem la primera xifra decimal en la qual els nombres difereixen. La que siga major pertanyerà al major nombre decimal.

Autor: Eduardo Cuchillo
Traducció: Institut Juan de Garay

Activitats proposades

4. Assenyala quin nombre és el major per a cadascuna de les següents parelles:

a) $0'87$ i $0'789$ b) $3'58$ i $4'1$ c) $7'005$ i $7'1$ d) $32'4$ i $27'9$

5. Escriu dos nombres decimals que siguen, simultàniament, majors que 6'147 i menors que 6'2.

1.4. Suma i resta d'expressions decimals

Com que hem relacionat les expressions decimals amb les fraccions, anem a traslladar les operacions entre fraccions a operacions entre expressions decimals.

Suma d'expressions decimals. Si per a sumar fraccions havíem d'alterar els denominadors perquè coincidiren, ara n'hi ha prou que les parts decimals tinguen el mateix nombre de xifres. Si no ho tenen des d'un principi, afegim els zeros que siguen necessaris.

Exemples:

$$4'76+12'15=4+\frac{76}{100}+12+\frac{15}{100}=16+\frac{76+15}{100}=16+\frac{91}{100}=16'91$$

$$24'7+83'15=24'70+83'15=107'85$$

$$53'39+56=53'39+56'00=109'39$$

En aquests exemples hem sumat les parts senceres (en el primer d'ells, 3 + 12 = 15), i les parts decimals (76 + 15 = 91). L'operació suma no sempre serà exactament així.

Exemples:

- Si una persona té 4 euros i 37 cèntims d'euro i una altra té 5 euros i 82 cèntims quants diners tenen les dues juntes? Hem de sumar. En total tenen 4 + 5 = 9 euros i 37 + 82 = 119 cèntims. Però, com 100 cèntims d'euro és el mateix que 1 euro, 119 cèntims d'euro és igual a 1 euro més 19 cèntims. D'aquesta forma, les dues persones juntes tenen 9+1=10 euros i 19 cèntims.

$$4'37+5'82=4+\frac{37}{100}+5+\frac{82}{100}=9+\frac{119}{100}=$$

$$=9+\frac{100+19}{100}=9+\frac{100}{100}+\frac{19}{100}=9+1+\frac{19}{100}=10+\frac{19}{100}=10'19$$

Ens adonem que, a voltes, en sumar les parts decimals el valor que resulta té més xifres de les quals té assignades i açò afecta a la part entera resultant.

Exemples:

$$5'25+2'98=8'23$$

$$11'5+4'77=16'27$$

$$24'7+83'35=108'05$$

Autor: Eduardo Cuchillo
Traducció: Institut Juan de Garay

Ens adonem que per a sumar dues expressions decimals hem de:

- Observar, en primer lloc, si les seues parts decimals tenen la mateixa quantitat de xifres.
- Si no és així, completem amb zeros, per la dreta, la part decimal més curta.
- Una vegada que les expressions decimals ja tenen les seues parts decimals amb la mateixa llargària, sumem els nombres ignorant la coma que posseeix cadascun d'ells.
- Al resultat d'aqueixa summa li posem coma per a obtindre una expressió decimal amb part decimal de la mateixa llargària d'abans que les expressions decimals sumades.

Propietats de la suma d'expressions decimals.

Commutativa: No importa en quin ordre sumem dues expressions decimals.

Exemple:

$$314'66+2'47=317'13$$

$$2'47+314'66=317'13$$

Associativa: Ens permet sumar més de dues expressions decimals. Agrupem, com vulguem, de dos en dos.

Exemple:

$$5'7+30'02+17'4=(5'7+30'02)+17'4=35'72+17'4=53'12$$

$$5'7+30'02+17'4=5'7+(30'02+17'4)=5'7+47'42=53'12$$

Element neutre: El nombre 0 sumat a qualsevol altre nombre decimal no laltera.

Exemple:

$$0+42'324=42'324=42'324+0$$

Autor: Eduardo Cuchillo
Traducció: Institut Juan de Garay

Diferència d'expressions decimals.

Igual que amb la suma, hem de forçar que les parts decimals tinguen la mateixa quantitat de xifres.

Exemples:

$$32'45-29'36=\left(32+\frac{45}{100}\right)-\left(29+\frac{36}{100}\right)=32+\frac{45}{100}-29-\frac{36}{100}=(32-29)+\left(\frac{45}{100}-\frac{36}{100}\right)=3+\frac{9}{100}=3'09$$

$$7'71\ -\ 5'3=7'71-\ 5'30=2'41$$

En aquests exemples hem restat les parts enteres (en el primer d'ells, 32 − 29 = 3) i les parts decimals (45 − 36 = 09). L'operació diferència no sempre es realitzarà exactament així.

Exemple:

$$82'53-9'72=\left(82+\frac{53}{100}\right)-\left(9+\frac{72}{100}\right)=82+\frac{53}{100}-9-\frac{72}{100}=82-9+\left(\frac{53}{100}-\frac{72}{100}\right)=73+\frac{53-72}{100}=$$

$$=73+\frac{(-19)}{100}=73-\frac{19}{100}=72+1-\frac{19}{100}=72+\frac{100}{100}-\frac{19}{100}=72+\frac{100-19}{100}=72+\frac{81}{100}=72'81$$

$$23-16'32=23'00-16'32=6'68$$

- Per a restar dues expressions decimals hem de:
- Observar si les seues parts decimals tenen la mateixa quantitat de xifres.
- Si no és així, completem amb zeros, per la dreta, la part decimal més curta.
- Una vegada que les expressions decimals ja tenen les seues parts decimals amb la mateixa longitud, procedim a restar els nombres ignorant la coma que posseeix cadascun d'ells.
- Al resultat d'aqueixa resta li posem coma per a obtindre una expressió decimal amb part decimal de la mateixa llargària d'abans que les expressions decimals restades.

Com és habitual, l'operació diferència o resta no és commutativa.

Activitats proposades

6. Realitza les operacions:

a) $17'03+5'46$ b) $26'84+15'57$ c) $6'64-5'47$ d) $35'21-23'57$

7. Efectua els següents càlculs:

a) $27'3+5'87$ b) $2'553+6'7$ c) $13'51-4'7$ d) $9'1-8'57$

8. Troba:

a) $5'57+32'6+9'115$ b) $46'77-15'6+2'3$ c) $33'2-16'53-12'4$

1.5. Producte d'expressions decimals

De nou el pas de decimal a fracció va a indicar-nos com s'ha d'operar.

Exemples:

$$5'7 \cdot 3'3 = \frac{57}{10} \cdot \frac{33}{10} = \frac{57 \cdot 33}{10 \cdot 10} = \frac{1881}{100} = 18'81$$
$$93'05 \cdot 72'4 = \frac{9305}{100} \cdot \frac{724}{10} = \frac{9305 \cdot 724}{100 \cdot 10} = \frac{6736820}{1000} = 6736'820 = 6736'82$$
$$44'16 \cdot 8 = \frac{4416}{100} \cdot \frac{8}{1} = \frac{4416 \cdot 8}{100 \cdot 1} = \frac{35328}{100} = 353'28$$

Aquests exemples ens fan veure com hem de procedir, en la pràctica, per a realitzar el producte de dues expressions decimals:

- Multiplicar, en primer lloc, els nombres ignorant la coma que posseeix cadascun d'ells.
- Al resultat d'aquest producte li posem la coma per a obtindre una expressió decimal amb una part decimal de longitud igual a la unió de les quantitats de xifres decimals que tenen les expressions multiplicades.

Propietats de la multiplicació d'expressions decimals.

Commutativa: No importa en quin ordre multipliquem dues expressions decimals.

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Exemple:

$$1'552 \cdot 5'9 = 9'1568$$
$$5'9 \cdot 1'552 = 9'1568$$

Associativa: Ens permet multiplicar més de dues expressions decimals. Agrupem, com vulguem, de dos en dos.

$$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Exemple:

$$5'7 \cdot 3'2 \cdot 7'14 = (5'7 \cdot 3'2) \cdot 7'14 = 18'24 \cdot 7'14 = 130'2336$$
$$5'7 \cdot 3'2 \cdot 7'14 = 5'7 \cdot (3'2 \cdot 7'14) = 5'7 \cdot 22'848 = 130'2336$$

Element neutre: El nombre 1 multiplicat per qualsevol altre nombre decimal no l'altera.

$$1 \cdot a = a = a \cdot 1$$

Exemple:

$$1 \cdot 92'77 = 92'77 = 92'77 \cdot 1$$

Propietat distributiva de la multiplicació respecte de la suma: Quan en una multiplicació un dels factors és la suma de dues expressions decimals. Exemple:

$$8'3 \cdot (6'5 + 1'04)$$

tenim dues opcions per a conèixer el resultat:

a) realitzar la summa i, després, multiplicar $6'5 + 1'04 = 6'50 + 1'04 = 7'54$

$8'3 \cdot 7'54 = 62'582$

b) distribuir, aplicar la multiplicació a cadascun dels sumands i, després, sumar:

$$8'3\cdot(6'5+1'04)=(8'3\cdot6'5)+(8'3\cdot1'04)$$

Comprovem que obtenim el mateix resultat:

$$(8'3\cdot6'5)+(8'3\cdot1'04)=53'95+8'632=62'582$$

La propietat distributiva de la multiplicació respecte de la suma:

$$a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$$

Activitats proposades

9. Calcula:

a) $4'6\cdot7'5$ b) $1'16\cdot3'52$ c) $3'2\cdot5'1\cdot1'4$ d) $2'3\cdot4'11\cdot3'5$

10. Efectua:

a) $4\cdot(3'01+2'4)$ b) $5'3\cdot(12+3'14)$ c) $3'9\cdot(25'8-21'97)$

1.6. Divisió d'expressions decimals (I)

Per a dividir dues expressions decimals, si les dos tenen part decimal amb igual quantitat de xifres, podem oblidar-nos que estem operant amb nombres decimals i actuar com si les comes no estigueren:

Exemple:

$$\frac{16'11}{2'25}=\frac{1611}{100}:\frac{225}{100}=\frac{1611}{100}\cdot\frac{100}{225}=\frac{1611\cdot100}{100\cdot225}=\frac{1611}{225}=\frac{3\cdot3\cdot179}{3\cdot3\cdot5\cdot5}=\frac{179}{5\cdot5}=\frac{179}{25}$$

Si el nombre de xifres decimals és diferent, el primer que fem és igualar-les

Exemples:

$$\frac{9'3}{4'81}=\frac{9'30}{4'81}=\frac{930}{100}:\frac{481}{100}=\frac{930}{100}\cdot\frac{100}{481}=\frac{930\cdot100}{100\cdot481}=\frac{930}{481}$$

$$\frac{6'32}{3'4}=\frac{6'32}{3'40}=\frac{632}{100}:\frac{340}{100}=\frac{632}{100}\cdot\frac{100}{340}=\frac{632\cdot100}{100\cdot340}=\frac{632}{340}=\frac{2\cdot2\cdot2\cdot79}{2\cdot2\cdot5\cdot17}=\frac{2\cdot79}{5\cdot17}=\frac{158}{85}$$

Observem que, per aquest camí, la divisió de dues expressions decimals ens dóna com resultat una fracció. Volem fer un pas més i anem a estudiar com convertir fraccions en expressions decimals. D'aquesta manera sabrem què nombre decimal apareix en dividir dues expressions decimals.

Activitats proposades

11. Transforma en fracció les següents divisions entre expressions decimals:

a) $\frac{11'1}{3'7}$ b) $\frac{31'54}{2'7}$ c) $\frac{25'6}{1'39}$ d) $\frac{5}{3'5}$

1.7. Conversió d'una fracció a expressió decimal

Ja sabem escriure en forma de fracció una expressió decimal com, per exemple, 31’528:

$$31'528=\frac{31528}{1000}$$

o, si volem anar més a poc a poc:

$$31'528=31+0'528=31+\frac{528}{1000}=31+\frac{500+20+8}{1000}=31+\frac{500}{1000}+\frac{20}{1000}+\frac{8}{1000}=31+\frac{5}{10}+\frac{2}{100}+\frac{8}{1000}$$

Amb aquesta descomposició,

$$31'528=31+\frac{5}{10}+\frac{2}{100}+\frac{8}{1000}$$

apreciem, clarament separades, la seua part entera i cadascuna de les seues tres xifres decimals, el 5 de les dècimes, el 2 de les centèsimes i el 8 de les mil·lèsimes.

Ara anem a procedir en sentit contrari. Escollirem una fracció i la convertirem en una expressió decimal. Perquè resulte més senzill, triem una fracció concreta com, per exemple, 93/8. Si procedim a efectuar la usual divisió, 93 entre 8, ens apareix com a quocient el número 11 i com a residu 5:

$$\begin{array}{r|l} 93 & 8 \\ \hline 13 & 11 \\ 5 & \end{array}$$

$$\frac{93}{8}=\frac{8\cdot 11+5}{8}=11+\frac{5}{8}$$

Açò ens fa saber que la part entera de 93/8 és igual a 11, ja que la fracció 5/8 no conté cap unitat completa ja que 5, el residu, és menor que 8, el divisor. De moment:

$$\frac{93}{8}=11'......$$

Calculem la seua primera xifra decimal, les dècimes:

$$\frac{93}{8}=11+\frac{5}{8}=11+\frac{\frac{5}{8}\cdot 10}{10}=11+\frac{\frac{50}{8}}{10}=11+\frac{6+\frac{2}{8}}{10}=11+\frac{6}{10}+\frac{\frac{2}{8}}{10}$$

En l'anterior igualtat, quan va aparèixer 50/8, dividim 50 entre 8. Ens va donar de quocient 6 i de residu 2. Podem assegurar que la primera xifra decimal de 93/8, la xifra de les dècimes, serà igual a 6 perquè ha aparegut 6/10 i l'altra fracció no pot aportar cap dècima més a causa que 2/8 és menor que 1.

$$\frac{93}{8}=11'6.....$$

La segona xifra decimal de 93/8, la corresponent a les centèsimes, ix de l'últim sumant de l'expressió anterior:

$$11+\frac{6}{10}+\frac{\frac{2}{8}}{10}=11+\frac{6}{10}+\frac{\frac{2}{8}\cdot 10}{10\cdot 10}=11+\frac{6}{10}+\frac{\frac{20}{8}}{100}=11+\frac{6}{10}+\frac{2+\frac{4}{8}}{100}=11+\frac{6}{10}+\frac{2}{100}+\frac{\frac{4}{8}}{100}$$

Quan ens trobem amb 20/8, es va procedir a dividir 20 entre 8 i es va obtenir 2 com a quocient i 4 com a residu. De la fracció 2/100 tenim que la segona xifra decimal de 93/8 és 2, ja que l'última fracció no afegeix cap altra centèsima ja que 4/8 és menor que 1.

$$\frac{93}{8} = 11'62....$$

Coneguem la següent xifra decimal, la de les mil·lèsimes

$$11 + \frac{6}{10} + \frac{2}{100} + \frac{\frac{4}{8}}{100} = 11 + \frac{6}{10} + \frac{2}{100} + \frac{\frac{4}{8}\cdot 10}{100\cdot 10} = 11 + \frac{6}{10} + \frac{2}{100} + \frac{\frac{40}{8}}{1000} = 11 + \frac{6}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000}$$

En aquesta ocasió, amb la fracció 40/8, en dividir 40 entre 8 ens trobem amb que era una divisió exacta, de resta zero. Açò ens assenyala que hem acabat ja que

$$\frac{93}{8} = 11 + \frac{6}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000}$$

finalment,

$$\frac{93}{8} = 11'625$$

Si analitzem amb atenció el procés anterior, serem capaços d'agilitar-ho:

- La fracció original era 93/8. El quocient de la simple divisió de 93 entre 8 ens proporciona la seua part entera: 11.
- Com el residu era 5, dividim 5·10 = 50 entre 8. Vam obtenir quocient 6 i residu 2. Primera xifra decimal: 6
- A partir del residu anterior, 2, dividim 2·10 = 20 entre 8. Ixen quocient 2 i residu 4. Segona xifra decimal: 2
- A partir del residu anterior, 4, dividim 4·10 = 40 entre 8. Ixen quocient 5 i residu 0. Tercera xifra decimal: 5
- Com l'últim residu és 0, hem finalitzat el càlcul.

Visualitzem l'exposat recordant que 93=93’000:

$$\begin{array}{l|l} 93'000 & 8 \\ \cline{2-2} 13 & 11'625 \\ \ \ 50 & \\ \ \ \ \ 20 & \\ \ \ \ \ \ \ 40 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ 0 & \end{array}$$

Activitats proposades

12. Converteix en expressió decimal les fraccions següents:

a) $\frac{9}{2}$ b) $\frac{31}{4}$

Ix una pregunta lògica: en les conversions de fracció a expressió decimal, abans o després hem de topar-nos, necessàriament, amb que el residu és igual a zero en alguna etapa?

En l'exemple que ens ha il·lustrat, 93/8, deixant al marge la part entera, apreciem que es “van enfrontar”, i per aquest ordre, els nombres 5 enfront de 8, 2 enfront de 8, 4 enfront de 8, abans de ser multiplicats els primers per 10. Sempre apareix el nombre 8, ja que és el denominador original. Com 8 sempre és el divisor, les úniques restes possibles són 0 (si la divisió és exacta), 1, 2, 3, 4, 5, 6, i 7. D'aquesta manera si, amb una altra fracció diferent de 93/8, en algun moment apareix una resta que ja ha eixit abans entrarem en un bucle repetitiu o cicle periòdic.

Ho veiem amb una altra fracció, amb 46/11:

$$\begin{array}{l|l} 46'000 & 11 \\ \cline{2-2} \;\;20 & 4'181 \\ \;\;\;90 & \\ \;\;\;\;20 & \\ \;\;\;\;\;\;9 & \end{array}$$

Tenim

$$\frac{46}{11} = 4'181...$$

Com, al final de cada pas, els únics residus que sorgeixen són les xifres 2 i 9, tot el que segueix és predictible: la quarta xifra decimal és un 8, la cinquena un 1, la sisena un altre 8, la setena un altre 1, ….

$$\frac{46}{11} = 4'18181818181....$$

Amb el que acabem d'aconseguir, podem retornar a la divisió de nombres decimals.

1.8. Divisió d'expressions decimals (II)

Si anem a dividir dues expressions decimals com, per exemple, 34’24 entre 2’7, el primer que farem serà multiplicar ambdues expressions per 10 tantes voltes com a xifres decimals tinga el denominador. D'aquesta manera, el denominador passa a ser un nombre natural:

$$\frac{34'24}{2'7} = \frac{34'24 \cdot 10}{2'7 \cdot 10} = \frac{342'4}{27}$$

Seguidament iniciem el conegut algorisme de la divisió limitant-ho, en un primer pas, a la part entera del numerador:

$$\begin{array}{l|l} 342' & 27 \\ \cline{2-2} \;\;72 & 12' \\ \;\;18 & \end{array}$$

Hem acabat amb la part entera del numerador i ens trobem, de moment, amb quocient 12 i residu 18. Quan entren en acció les xifres decimals del numerador, hem de posar una coma en el quocient ja que comença a sorgir la seua part decimal:

$$\begin{array}{l|l} 342'4000 & 27 \\ \hline 72 & 12'6814 \\ \ \ 184 & \\ \ \ \ \ 220 & \\ \ \ \ \ \ \ 040 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ 130 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 22 & \end{array}$$

Per tant:

$$\frac{34'24}{2'7} = \frac{342'4}{27} = 12'68148148....$$

Activitats proposades

13. Efectua les següents divisions:

a) $\frac{42'78}{6}$ b) $\frac{15'2}{3'8}$ c) $\frac{12'505}{4'1}$ d) $\frac{6'42}{1'3}$

2. EXPRESSIONS DECIMALS PERIÒDIQUES

2.1. Decimals periòdics: purs i mixtos

Responem ara a la pregunta lògica que va eixir abans. En el pas de fracció a nombre decimal de, per exemple, la fracció 46/11 hem apreciat que en cap etapa tenim residu igual a zero. Apareix així un nou tipus d'expressió decimal, és un nombre decimal periòdic. Així els cridem perquè tenen un desenvolupament decimal que, encara que no tinga final, es repeteix de manera periòdica. Sobre l'exemple anterior, direm que el desenvolupament decimal de 46/11 és periòdic de període igual a 18. Escriurem:

$$\frac{46}{11} = 4'1818181818181.... = 4'\overline{18}$$

Per l'exposat abans sobre els residus, qualsevol fracció té un desenvolupament **decimal exacte o periòdic**.

Exemple:

$$\frac{3424}{27} = 126'\overline{814}$$

Les expressions decimals periòdiques amb desenvolupament periòdic el qual comença immediatament després de la coma es diuen periòdics purs. Si el període es troba més enllà de la coma estem davant un nombre decimal periòdic mixt i la part decimal situada entre la coma i el període es diu anteperíode.

Exemple:

- Troba el desenvolupament decimal de la fracció 178/70.

a) Apliquem l'algorisme de la divisió segons el que s'ha dit abans respecte l'entrada en acció de les xifres decimals del numerador:

$$\begin{array}{l|l} 178'000... & 70 \\ \hline \quad 380 & 2'54285714... \\ \quad\; 300 & \\ \quad\;\; 200 & \\ \quad\;\;\; 600 & \\ \quad\;\;\;\; 400 & \\ \quad\;\;\;\;\; 500 & \\ \quad\;\;\;\;\;\; 100 & \\ \quad\;\;\;\;\;\;\; 300 & \\ \quad\;\;\;\;\;\;\;\;\; 20 & \end{array}$$

b) Quan situem en el quocient el número 1 i operem, va aparèixer per segona vegada el residu 30. Aquesta repetició d'un residu ens va fer saber que estàvem davant un desenvolupament decimal periòdic. Ho hem ratificat fent un pas més, afegint la xifra 4 en el quocient, i observem que apareix com a nou residu el que ja va aparèixer abans després del residu 30, el residu 20.

c) D'acord amb l'anterior

$$\frac{178}{70} = 2'5\overline{428571}$$

Hem arribat a l'expressió decimal de la fracció 178/70. És el nombre decimal de part entera 2, anteperíode 5 i període 428571.

Activitats proposades

14. Transforma les següents fraccions en expressió decimal:

a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{7}{11}$ c) $\frac{5}{6}$ d) $\frac{4}{7}$ e) $\frac{25}{9}$ f) $\frac{17}{12}$ g) $\frac{50}{13}$

2.3. Conversió d'una expressió decimal periòdica en fracció

Vèiem al començament del tema que és molt senzill realitzar el pas a fracció dels nombres decimals exactes, aquells el desenvolupament decimal dels quals és finit. Ara anem a aconseguir el mateix per a les expressions decimals periòdiques, tant si són pures com a mixtes. Com és habitual, un cas concret ens obrirà camí.

Exemple:

- Anem a convertir en fracció el nombre

$$42'\overline{7}$$

a) Aïllem la seua part entera

$$42'\overline{7} = 42 + 0'\overline{7}$$

b) Anem a transformar en una fracció el nombre decimal. Cal cercar una fracció m/n que complisca m/n= $0'\overline{7}$. Per a simplificar l'escriptura, escriurem en lloc de la fracció que perseguim m/n:

$$X = 0'\overline{7} = 0'777777 \; .....$$

$$10 \cdot X = 10 \cdot 0'\overline{7} = 10 \cdot 0'777777 \; ..... = 7'777777 \; ..... = 7'\overline{7} = 7 + 0'\overline{7} = 7 + X$$

$$10 \cdot X - X = 7$$

$$9 \cdot X = 7$$

$$X = \frac{7}{9}$$

c) Ja sabem que $0'\overline{7}$ = 7/9. En la fracció 7/9 reconeixem en el numerador el període del nombre decimal $0'\overline{7}$. Després trobarem la justificació del nombre 9.

d) Només ens queda afegir la part entera:

$$42'\overline{7} = 42 + 0'\overline{7} = 42 + \frac{7}{9} = \frac{42 \cdot 9 + 7}{9} = \frac{378 + 7}{9} = \frac{385}{9}$$

Autor: Eduardo Cuchillo
Traducció: Institut Juan de Garay

$$42'\overline{7} = \frac{385}{9}$$

Exemple:

- Analitzem un altre cas. Cerquem una fracció el desenvolupament decimal de la qual siga $0'\overline{31}$:

$$X = 0'\overline{31}$$

$$100 \cdot X = 100 \cdot 0'\overline{31} = 100 \cdot 0'31313131 \; ..... = 31'313131 \; ..... = 31'\overline{31} = 31 + 0'\overline{31} = 31 + X$$

$$100 \cdot X - X = 31$$

$$99 \cdot X = 31$$

$$X = \frac{31}{99}$$

Un nombre decimal periòdic pur, amb part entera igual a zero, es converteix en aquella fracció que té per numerador al període i per denominador al nombre format per una quantitat de nous igual al nombre de xifres del període.

Exemples:

$$0'\overline{5} = \frac{5}{9}$$

$$0'\overline{934} = \frac{934}{999}$$

$$4'\overline{6} = 4 + 0'\overline{6} = 4 + \frac{6}{9} = 4 + \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 4 + 2}{3} = \frac{14}{3}$$

Ja sabem transformar un nombre decimal periòdic pur en una fracció. Per a aconseguir aquest mateix canvi en el cas periòdic mixt anem a realitzar un simple truc molt efectiu: convertirem el nombre decimal periòdic mixt en un altre que siga periòdic pur, transformarem aquest en fracció i, finalment, desfarem la primera conversió.

Exemple:

- Transformeu en fracció el nombre decimal $8'07\overline{458}$.

a) La seua part sencera és 8, el seu anteperíode és 07 i el seu període és 458. Com el seu anteperíode és de dues xifres, multipliquem al nombre per 100

$$8'07\overline{458} \cdot 100 = 807'\overline{458}$$

b) D'aquesta forma estem davant un nombre periòdic pur, $807'\overline{458}$, al que convertim en fracció:

$$807'\overline{458} = 807 + 0'\overline{458} = 807 + \frac{458}{999} = \frac{807 \cdot 999 + 458}{999} = \frac{806193 + 458}{999} = \frac{806651}{999}$$

Autor: Eduardo Cuchillo
Traducció: Institut Juan de Garay

Recuperem el nombre decimal periòdic mixt :

$$8'07\overline{458}=\frac{807'\overline{458}}{100}=\frac{\frac{806651}{999}}{100}=\frac{806651}{999\cdot 100}=\frac{806651}{99900}$$

Exemple:

- Representem ara per mitjà d'una fracció el nombre $0'3\overline{49}$.

  La seua part sencera és 0, el seu anteperíode és 3 i el seu període és 49. Com el seu anteperíode consta d'una sola xifra, multipliquem al nombre per 10

$$0'3\overline{49}\cdot 10 = 3'\overline{49}$$

a) Convertim en fracció al nombre $3'\overline{49}$

$$3'\overline{49}=3+0'\overline{49}=3+\frac{49}{99}=\frac{99\cdot 3+49}{99}=\frac{297+49}{99}=\frac{346}{99}$$

b) Per últim

$$0'3\overline{49}=\frac{3'\overline{49}}{10}=\frac{\frac{346}{99}}{10}=\frac{346}{99\cdot 10}=\frac{346}{990}$$

c) Si ralentim les últimes operacions podrem apreciar una regla per a aquestes conversions

$$0'3\overline{49}=\frac{3'\overline{49}}{10}=\frac{3+0'\overline{49}}{10}=\frac{3+\frac{49}{99}}{10}=\frac{3}{10}+\frac{49}{990}=\frac{99\cdot 3+49}{990}=\frac{100\cdot 3-3+49}{990}=\frac{349-3}{990}$$

Una expressió decimal periòdica mixta, amb part entera igual a zero, es converteix en aquella fracció que té per numerador al nombre natural format pel anteperíode immediatament seguit del període menys el anteperíode i per denominador al nombre format per una quantitat de nous igual al nombre de xifres del període seguit d'una quantitat de zeros coincident amb el nombre de xifres del anteperíode.

Activitats proposades

15. Expressa mitjançant una fracció cadascun dels següents nombres decimals:

a) $0'\overline{13}$ b) $14'\overline{5}$ c) $0'2\overline{6}$ d) $24'0\overline{18}$ e) $5'1\overline{101}$ f) $3'5\overline{40}$

2.3. Operacions amb expressions decimals periòdiques

Per a operar amb nombres decimals periòdics el més prudent és transformar-los en fraccions i després realitzar l'operació a través d'elles. D'aquesta manera podem evitar cometre errors a causa de la falta de costum de treballar amb un nombre infinit de decimals.

A títol de curiositat calculem la suma $0'\overline{3}+0'\overline{6}$. Sembla natural que

$$0'\overline{3}+0'\overline{6}=0'333333.....+0'666666.....=0'999999.....=0'\overline{9}$$

Per un altre costat

$$0'\overline{3}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3} \quad \text{i} \quad 0'\overline{6}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

Així

$$0'\overline{3}+0'\overline{6}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{3}{3}=1$$

per tant

$$1=0'\overline{9}=0'999999.....$$

Llavors alguna cosa està fallant? No, no hi ha cap error. Hem d'entendre que una expressió decimal no és més que una **representació** d'una fracció, o d'un nombre natural. Una altra representació decimal, sense cap utilitat, del nombre 1 seria

$$1=1'\overline{0}=1'00000.....$$

3. APROXIMACIONS, TRUNCAMENTS I ARRODONIMENTS

3.1. Aproximacions

En la vida quotidiana resulta més senzill treballar, o manejar-nos, amb unitats completes en lloc de parts o quantitats fraccionades. Quan anem al mercat, no és fàcil reconèixer l'exactitud de mig pollastre però no tenim cap problema a reconèixer un pollastre sencer. Si tenim set i demandem un got ple d'aigua aquesta és una petició "més simple" que si sol·licitem un terç de got. Naturalment, en el mercat no qüestionarem si ens ofereixen mig pollastre exacte o no; ho acceptarem simplement si "sembla" que és mig pollastre. Tampoc té sentit que dediquem temps a constatar si l'aigua que ens ofereixen es correspon amb la tercera part del got. En cap d'aquestes dues situacions tenim interès en l'exactitud, en ambdues ens conformem amb una aproximació.

Són molt freqüents les circumstàncies en les quals apareixen aproximacions, habitualment d'expressions decimals o fraccions:

- Si anem a pagar amb un bitllet de 50 euros una compra de 32’69 euros, esperem una volta de 17’31 euros. Si en la caixa no hi ha monedes d'un cèntim, ens proposaran que donem per bona una volta de 17’30 euros. És una aproximació a la baixa.
- Si realitzem una compra per un import de 12’44 euros i la saldem amb 12’45 euros estem davant una aproximació a l'alça.
- Els instruments de mesura, fins i tot els de alta precisió, sempre ens ofereixen mesuraments aproximades.

Activitats proposades

16. Escriu en el teu quadern tres circumstàncies de la vida quotidiana on es realitzen aproximacions.

3.2. Truncaments i arrodoniments.

Encara que estiguem en un context en el qual no cerquem l'exactitud, i siga prou una aproximació, sí és convenient que coneguem la magnitud de l'aproximació i com s'ha arribat a ella.

Una manera de realitzar una aproximació a la baixa d'un nombre decimal és el truncament. Consisteix a decidir quantes xifres decimals volem considerar i, simplement, eliminar les restants a partir de l'última xifra decimal mostrada.

Exemple:

- Si truncem el nombre decimal $12'3763$

  a) en les centèsimes, apareix la aproximació $12'37$

  b) en les mil·lèsimes, apareix $12'376$

Autor: Eduardo Cuchillo
Traducció: Institut Juan de Garay

Exemple:

- Si trunquem el nombre decimal periòdic $7'\overline{49}$
  - a) en les dècimes, apareix la aproximació 74
  - b) a la quinta xifra decimal, apareix $7'49494$

Activitats proposades

17. Aproxima per truncament els següents nombres decimals tal i que es mostre un desenvolupament decimal fins a les mil·lèsimes:

a) $11'1234$ b) $6'\overline{6}$ c) $9'3\overline{50}$ d) $8'\overline{71}$ e) $8'334\overline{8}$ f) $2'64\overline{08}$

Una altra forma de realitzar una aproximació és a través d'un **arrodoniment**. Aquest consisteix a decidir quantes xifres decimals tindrà l'aproximació, realitzar el truncament oportú i, en funció de quin siga la primera xifra decimal no considerada, mantenir o incrementar en una unitat l'última xifra de la part decimal del truncament. El criteri per a efectuar, o no, aquest increment és el següent:

- Quan la primera xifra decimal eliminada és 0, 1, 2, 3 o 4, l'arrodoniment coincideix amb el truncament.
- Si la primera xifra decimal no considerada és un 5, 6, 7, 8 o 9, l'arrodoniment s'obté en augmentar en una unitat l'última xifra de la part decimal del truncament.

D'acord amb l'anterior, un arrodoniment és una aproximació que pot ser a la baixa o a l'alça.

Exemple:

- Si arrodonim el nombre decimal $12'3763$
  - a) a les centèsimes, apareix l'aproximació $12'38$
  - b) a les mil·lèsimes, apareix $12'376$

Exemple:

- Si arrodonim el nombre decimal periòdic $7'\overline{49}$
  - a) a les dècimes, apareix l'aproximació 7'5 (
  - b) a la quinta xifra decimal, apareix 7'49495
  - c) a les centèsimes, apareix 7'49

Activitats proposades

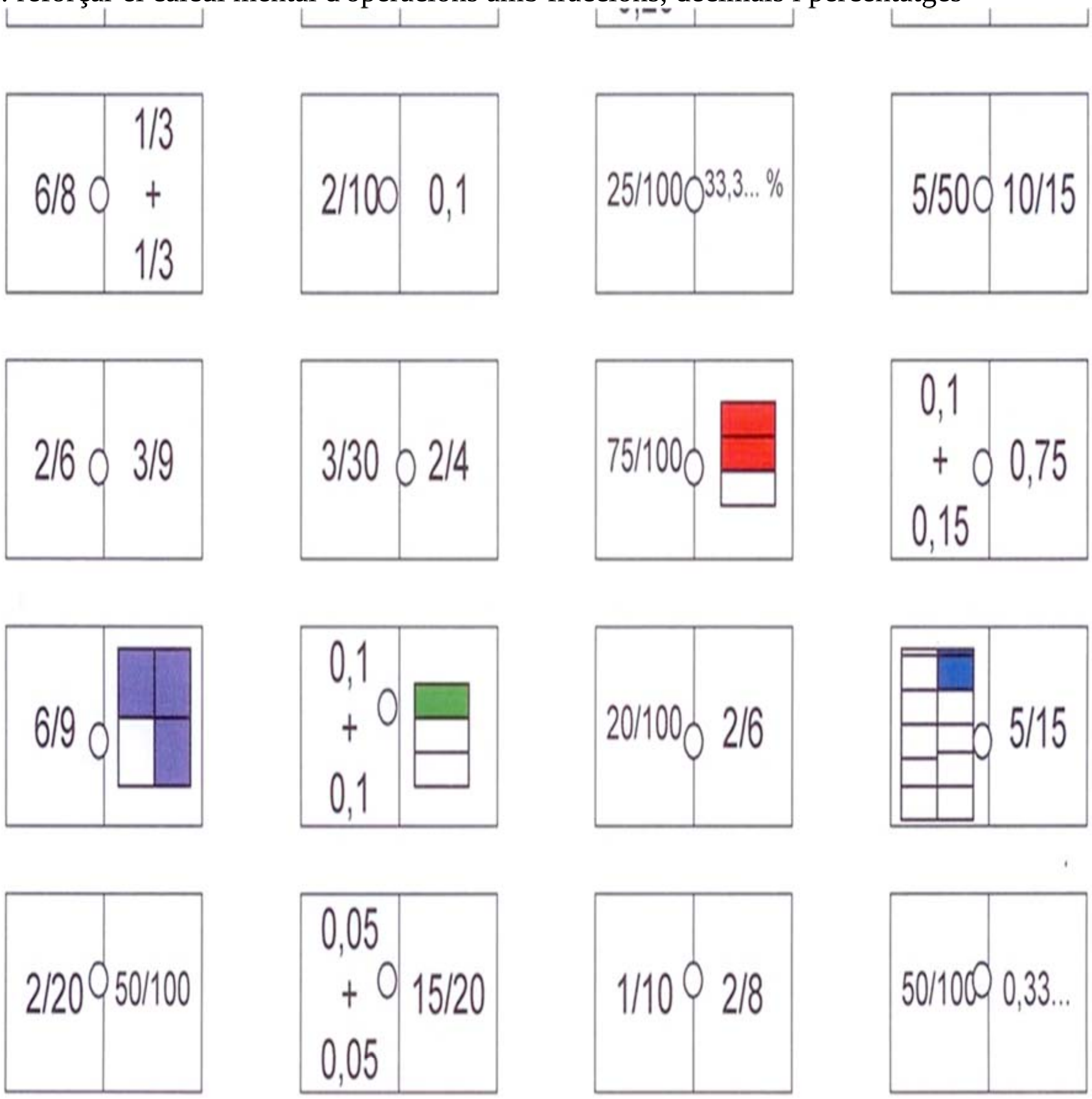
18. Aproxima per arrodoniment fins a les mil·lèsimes els següents nombres decimals:

a) $11'1234$ b) $6'\overline{6}$ c) $9'3\overline{50}$ d) $8'\overline{71}$ e) $8'334\overline{8}$ f) $2'64\overline{08}$ g) $3'99\overline{96}$

Recursos didàctics fotocopiables:

Xamelo de fraccions i decimals

Objectiu: reforçar el càlcul mental d'operacions amb fraccions, decimals i percentatges



Autor: Eduardo Cuchillo
Traducció: Institut Juan de Garay

RESUM

NOCIÓ		*Exemples*
Expressió decimal	Alternativa a les fraccions per a expressar quantitats que no es corresponen amb unitats completes. Consten de dues parts: la seua part entera i la seua part decimal	$21'375$ Part entera: 21 Part decimal: 375
Expressió decimal exacta	La seua part decimal té una quantitat finita de xifres	$5'7767$
Expressió decimal periòdica	La seua part decimal té una quantitat infinita de xifres que es repeteixen periòdicament. Poden ser purs o mixtos	Pur: $3'\overline{07} = 3'0707070$ ..... Mixto: $4'8\overline{13} = 4'813131$ .....
Pas de expressió decimal a fracció	Podem expressar qualsevol expressió decimal exacta o periòdica en forma de fracció	$5'7767 = \frac{57767}{10000}$ $3'\overline{07} = 3 + \frac{7}{99} = \frac{304}{99}$ $4'8\overline{13} = 4 + \frac{813-8}{990} = \frac{4765}{990}$
Operacions con expressions decimals	Es poden sumar, restar, multiplicar i dividir	
Conversió d'una fracció a expressió decimal	Podem representar qualsevol fracció mitjançant un nombre decimal, el qual podrà ser exacte o periòdic (pur o mixto)	$\frac{11}{4} = 2'75$ $\frac{10}{11} = 0'\overline{90}$ $\frac{32}{15} = 2'1\overline{3}$
Truncament d'una expressió decimal	És una aproximació d'un expressió decimal que consisteix a eliminar la seua part decimal a partir d'una xifra decimal	Truncament a les centèsimes: 21'375 → 21'37
Arrodoniment d'una expressió decimal	És una altra aproximació que, a diferència del truncament, sí considera la primera xifra decimal eliminada	Arrodoniment a les centèsimes: 21'375 → 21'38

Autor: Eduardo Cuchillo
Traducció: Institut Juan de Garay

EXERCICIS I PROBLEMES de 1r d'ESO

1. Escriu amb paraules l'expressió dels nombres següents:

a) 2'5 b) 32'05 c) 45'50 d) 72'050

2. Multiplica mentalment per a) 10, b) 100, c) 1000, d) 1000000 el nombre 3'761937

3. Ordena de menor a major els nombres: 5'67; 5'68; 5,6666; 5'63; 5'5; 5'8; 5'6070.

4. Ordena de major a menor els nombres: 7'45; 6'9999; 7'3456; 7'4378; 7'44444; 7'4501; 7'45012.

5. Indica entre què dos nombres enters es troben els següents nombres: 5,6666; 7,999; 1'0001; 3'099.

6. Arrodoneix a les dècimes els nombres següents: 5'67; 5'68; 5,6666; 7'45; 6'9999; 7'3456; 7'4378.

7. Arrodoneix a les centèsimes els nombres següents: 5'676767; 5'688989; 5,6666; 7'459; 6'9999; 7'3456; 7'4378.

8. Arrodoneix a les mil·lèsimes els nombres següents: 5'676767; 5'688989; 5,6666; 7'45911; 6'9999; 7'3456; 7'4378.

9. Ordena de menor a major els nombres: 1/2; 0'45; 0,999; 2/3; 0,75; 5/4; 0,3939; 1/5.

10. Trunca per les centèsimes els següents nombres: 5'676767; 5'688989; 5,6666; 7'459; 6'9999; 7'3456; 7'4378.

11. Completa les següents igualtats:

- $38'532 = 38 + \frac{\quad}{10} + \frac{\quad}{100} + \frac{\quad}{1000}$
- $0'078 = \frac{\quad}{10} + \frac{\quad}{100} + \frac{\quad}{1000}$
- $6'36 = \frac{\quad}{100}$
- $5'149 = \frac{\quad}{10} + \frac{\quad}{1000}$

12. Converteix en fracció els següents nombres decimals:

a) $0'124$ b) $5'23$ c) $49'350$ d) $0'013$

13. Efectua les operacions:

a) $1'34+51'7$ b) $53'4-3'72$ c) $4'83+9'77-5'9$ d) $1'42-9'77$

14. Emplena adequadament els llocs buits:

- $6'36 + \quad = 10$
- $36'76 - \quad = 10$
- $6'54 - \quad = 1'38$
- $2'7 + \quad = 15'29$

15. Realitza les següents operacions:

- $43'76 \cdot 10 =$
- $43'76 \cdot 1000 =$
- $0'017 \cdot 10 =$
- $3'76 : 10 =$ $5'67 : 100 =$

Autor: Eduardo Cuchillo
Traducció: Institut Juan de Garay

16. Troba:

a) $3'6\cdot 0'2$ b) $10'01\cdot 3'5$ c) $0'6\cdot 0'6$ d) $5'6\cdot 3'2\cdot\frac{2}{5}$

17. Calcula:

a) $\frac{15'6}{3'23}$ b) $\frac{1'1\cdot(5'8+2'6)}{3'23-2'9}$ c) $\frac{2'5\cdot(3'1-2'6)}{2'23-2'9}$ d) $\frac{(1'1+2'9)\cdot 2'53}{2'2\cdot 0'1}$

18. Determina el desenvolupament decimal de les fraccions següents:

a) $\frac{13}{50}$ b) $\frac{110}{9}$ c) $\frac{22}{12}$ d) $\frac{170}{125}$ e) $\frac{53}{22}$

19. Transforma en fracció els nombres decimals que segueixen:

a) $0'\overline{5}$ b) $0'\overline{70}$ c) $21'4\overline{5}$ d) $3'0\overline{02}$ e) $1'\overline{500}$

20. Calcula:

a) $\frac{4}{7}+1'\overline{46}$ b) $3'\overline{7}\cdot\frac{2}{5}$ c) $\frac{6'\overline{41}-4}{3-2'\overline{3}}$ d) $1'\overline{07}\cdot 2'\overline{5}$

21. Raona si són certes o no les següents afirmacions:

a) Tota fracció posseeix una representació decimal.

b) Si el denominador d'una fracció és un nombre primer llavors la seua representació decimal és periòdica.

c) Si el denominador d'una fracció no és un nombre primer llavors la seua representació decimal és finita.

d) Dues fraccions equivalents tenen la mateixa representació decimal

22. Hem vist que els nombres decimals exactes es poden transformar en una fracció amb denominador una potència de 10. Escriu una fracció amb representació decimal finita i tal que el denominador no siga el nombre 10.

23. Després del que hem raonat en el problema anterior, elabora una regla que ens servisca per a distingir les fraccions amb representació decimal que siga finita.

24. Determina quines de les següents fraccions tenen representació decimal finita (decideix-ho sense calcular-les):

a) $\frac{12}{20}$ b) $\frac{5}{7}$ c) $\frac{12}{5}$ d) $\frac{12}{45}$ e) $\frac{9}{48}$

25. Si es reparteixen equitativament 270 euros entre 120 persones quina quantitat rep cada persona?

26. Escriu un nombre decimal que sumat a $7'63$ origine un nombre natural.

27. Assenyala un altre nombre decimal que restat a $20'09$ ens done un nombre natural.

28. Troba una fracció tal que en multiplicar-la pel nombre $2'5\overline{7}$ done com resultat un nombre natural.

29. Aproxima per truncament, de diferents maneres, els següents nombres decimals:

a) $7'123$ b) $15'001$ c) $7'\overline{7}$ d) $0'21\overline{87}$ e) $3'99\,\overline{96}$

30. Arrodoneix els següents nombres decimals fins a la xifra que et semble adequada o significativa:

a) $7'391$ b) $6'1\overline{90}$ c) $24'\overline{74}$ d) $13'99$ e) $33'\overline{01}$

31. En cadascun dels arrodoniments que has realitzat en l'exercici anterior, distingeix si es tracta d'una aproximació a l'alça o a la baixa.

32. Manuel va comprar en la papereria 4 bolígrafs i 3 llapis. Si cada bolígraf costava 0’78 euros i cada llapis 0’63 euros, quant es va gastar Manuel?

33. Claudia s'ha comprat tres bolígrafs iguals que, en total, li han costat 2’46 euros. També va comprar un quadern que costava quatre vegades més que cada bolígraf. Calcula el preu del quadern.

34. Un dipòsit conté 46’22 litres d'aigua que anem a traspassar a botelles de litre i mitj. Troba quantes botelles omplirem i indica la quantitat d'aigua sobrant.

35. Escriu un nombre decimal que complisca la següent condició: els seus truncaments coincideixen amb els seus arrodoniments

36. Construeix un nombre decimal que complisca aquest requisit: cap dels seus truncaments coincideix amb els arrodoniments.

37. Mostra un nombre decimal que verifique la següent condició: algun dels seus truncaments coincideix amb els arrodoniments, però no tots.

38. L'examen de Matemàtiques constava de quatre exercicis. En ells Jaime va obtenir les següents qualificacions: 5, 7, 8 i 7. Calcula la nota mitja de l'examen de Jaime i aproxima-la tant per truncament com per arrodoniment fins a les dècimes.

39. Els pares d'Alicia estan comprant diversos tests i plantes. L'import de tot és de 135’80 euros. El comerç realitza un descompte del 2’5 % si es paga en metàl·lic i no amb targeta de crèdit. Si els pares d'Alicia opten pel pagament en metàl·lic, quina quantitat hauran d’abonar?

40. Si ens fixem en els preus del litre de combustible que solen exhibir les gasolineres en grans panells observem que figuren fins a la mil·lèsima d'euro, malgrat que les monedes solament “arriben” al cèntim d'euro. L'import de cada càrrega de combustible es realitza, en general, a través d'una aproximació. Si, en una estació de servei concreta, el preu del litre de gasolina és de 1’412 euros i el dipòsit del nostre vehicle té una capacitat de 53 litres, analitza amb quants litres de combustible l'import no requereix ser aproximat.

AUTOEVALUACIÓN de 1r de ESO

1. Assenyala la fracció el desenvolupament decimal de la qual és 8’37

a) $\frac{837}{1000}$ b) $\frac{800}{37}$ c) $\frac{837}{100}$ d) $\frac{83737}{100}$

2. El resultat del producte $1'506 \cdot 1000$ és:

a) 1506 b) 15060 c) 156 d) $1500'6$

3. El valor de la suma $2'5 + 4'83$ és

a) $7'3\overline{3}$ b) $7'\overline{3}$ c) $6'33$ d) $7'33$

4. El període i el anteperíode del nombre $18'9\overline{03}$ són, respectivament:

a) 18 i 9 b) 9 i 3 c) 3 i 9 d) 03 i 9 e) 18 i 3

5. L’expressió decimal de la fracció 5/9 és:

a) $0'59$ b) $5'9$ c) $0'\overline{5}$ d) $0'\overline{59}$

6. Quina és la solució correcta del pas a fracció del nombre decimal $13'\overline{57}$?

a) $\frac{1357}{9900}$ b) $\frac{1357}{99}$ c) $\frac{1344}{99}$ d) $\frac{1357}{9999}$

7. Finalitza les següents frases:

- Les fraccions impròpies són aquelles amb representació decimal amb una part entera ……………………………..
- Qualsevol nombre decimal, exacte o periòdic, pot transformar-se en una fracció el denominador de la qual és ………………….. , ………………….. o …………………..

8. Classifica els següents nombres segons siguen aproximacions a l'alça o a la baixa del nombre 375432’45

a) 375432’5 b) 375432 c) 375400 d) 375450 e) 375432’4

9. Si arrodonim el nombre $2'9\overline{36}$ fins a les centèsimes ens queda:

a) $2'93$ b) $2'94$ c) $2'96$ d) $2'95$ e) $2'9\overline{4}$

10. Si les notes d'un examen es mostren amb una xifra decimal, com escolliries que s’obtingueren?

a) per truncament b) per arrodoniment

CAPÍTOL 7: SISTEMES DE MESURA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Pedro Luis Suberviola Serrano

Revisor: Sergio Hernández

Il·lustracions: Banc d'imatges de l'INTEF més Wikipèdia i producció pròpia

Traducció al valencià: Departament de Matemàtiques de l'Institut Juan de Garay

Índex

Resum

Un accident interespacial, la recerca infructuosa d'un tresor submergit… tot a causa de la confusió entre les unitats de mesura. Es important saber si estem emprant el nostre Sistema Internacional d'unitats (SI), o si s'empren unitats anglosaxones. En aquest capítol aprendràs a utilitzar les unitats de mesura del Sistema Internacional d'unitats (SI), (antigament Sistema Mètric Decimal), a fer canvis entre unes unitats i altres, i fins i tot a utilitzar altres mesures, de divises …

Autor: Pedro Luis Suberviola / Revisor: Sergio Hernández
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF més Wikipèdia i producció pròpia

1. SISTEMA INTERNACIONAL D'UNITATS

1.1. Magnitud

Una **magnitud** és una característica que es pot mesurar i expressar quantitativament, es a dir, mitjançant un nombre.

Una magnitud es mesura comparant-la amb un patró que tinga ben definida eixa magnitud i observant el nombre de vegades que ho conté. A eixe patró li anomenem **unitat de mesura**.

Una mateixa magnitud es pot expressar amb diferents unitats de mesura.

Exemple:

La longitud és una magnitud i es pot expressar en quilòmetres, metres, centímetres, milles, polzades,... Puc dir que algú medeix 1,52 metres, 152 centímetres, 4,98 peus, 59,76 polzades,... l'altura és la mateixa, però està expressada en diferents unitats.

Observa que no es pot dir que *algú medeix 1 altura, 2 altures*,... perquè l'altura és la magnitud, no la unitat, que podria ser el centímetre. Igual no es diu que *algú pesa 1 massa, 2 masses*,... ja que massa és la magnitud, que es mesura en quilograms.

Activitats proposades

1. Classifica com a magnituds o unitats de mesura:

a) Litre b) Temps c) Hora d) Memòria d'un ordinador

e) Gram f) Altitud g) Pressió h) Quilòmetres per hora

2. Indica a quina magnitud correspon cada unitat de mesura:

a) Euro b) Mil·límetre c) Hectàrea d) Grau centígrad

3. Investiga a quines magnituds corresponen les següents unitats poc freqüents:

a) Unça b) Hertzi c) Yuan d) Grau Fahrenheit e) Any llum

1.2. Sistema Internacional d'unitats (SI)

Per a poder **comparar** el valor de diverses magnituds hem d'utilitzar una mateixa unitat de mesura.

Exemple:

Si vull comparar les mides d'una taula que faig servir a classe amb una taula de ma casa, hem d'utilitzar la mateixa unitat. Si una la mesure en centímetres i l'altra en polzades, no puc comparar-les.

Per a facilitar l'intercanvi científic, cultural i comercial, en quasi tots els països s'ha adoptat el **Sistema Internacional d'unitats** (SI) com a sistema de mesures.

És l'hereu de l'antic **Sistema Mètric Decimal** i per això també se'l coneix com a **Sistema Mètric** o simplement com a **Sistema Internacional** (SI).

Algunes de les unitats que utilitza per a les diferents magnituds són:

Longitud	Superfície	Volum	Massa	Temps
El metre	El metre quadrat	El metre cúbic	El quilogram	El segon

El segon, que és una mesura fonamental del Sistema Internacional de unitats, com has de saber, no és decimal, 100 segon no són una hora ni un minut. No obstant això en la resta dels casos, per a passar d'una unitat a una altra que siga múltiple o submúltiple, hi ha que multiplicar per una potència de deu. Per això , de vegades, es parla del Sistema Mètric *Decimal*.

En general, els múltiples i submúltiples de la unitat principal s'anomenen afegint prefixos (quilo, centi,...). Ho estudiarem amb més deteniment més avant.

Nota curiosa:

Segons la Física Clàssica les unitats fonamentals de massa, temps i longitud són propietats dels objectes, però segons la Teoria de la Relativitat ja NO són propietats "reals" dels objectes. Quan observem un objecte des de fora, com més velocitat porte eixe objecte més s'aplata la longitud, més s'accelera el temps i més augmenta la massa de l'objecte. El temps és relatiu, així com la longitud o la massa.

Les unitats fonamentals que emprarem són tres: massa (kg), temps (s) i longitud (m). Altres són unitats derivades, com de superfície (metre quadrat), de volum (metre cúbic) o per exemple, la velocitat que es pot mesurar en quilòmetres per hora (km/h).

Activitats proposades

4. Indica al menys una unitat del Sistema Internacional de unitats adequada per a expressar les següents magnituds:

a) La edat d'una persona b) La grandària d'una horta

c) La capacitat d'una ampollad) La distància entre Segòvia i Albacete

f) La massa d'un camió

5. Copia al teu quadern i relaciona cada magnitud amb la seua possible mida:

6 º C | 5 km | 18 m^2 | 13 l | 0,250 g

massa | longitud | capacitat | superfície | temperatura

2. EL METRE

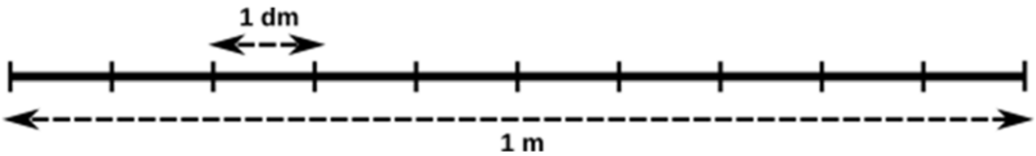
2.1. Unitats de longitud

El **metre** és una unitat de mesura de longitud i es representa per **m**.

Pertany al Sistema Internacional de unitats (SI).

Els seus múltiples i submúltiples principals són:

Múltiples			**Unitat**	**Submúltiples**		
Quilòmetre	**Hectò**metre	**Decà**metre	**Metre**	**Decí**metre	**Centí**metre	**Mil·lí**metre
km	**h**m	**da**m	**m**	**d**m	**c**m	**m**m
1.000 m	**100** m	**10** m	1 m	**0,1** m	**0,01** m	**0,001** m



Un metre està dividit en 10 decímetres

Existeixen altres múltiples i submúltiples:

Micròmetre (**µ**m). 1 µm = 0,001 mm = 0,000.001 m

Nanòmetre o micra (**n**m). 1 nm = 0,001 µm = 0,000.000.001 m

Angstrom (**Å**). 1 Å = 0,1 nm = 0,000.000.000.1 m

Altres unitats de longitud, que no són múltiples o submúltiples del metre són:

unitat astronòmica (UA): És la distància mitjana entre la Terra i el Sol, i és igual a 150 milions de km.

Any llum: És la distància recorreguda per un raig de llum en un any:

1 any llum = 63.240 UA = 9.460.000.000.000 km

Exemples:

- La Via Làctia té de radi 50.000 anys llum.
- El diàmetre d'un cabell és aproximadament 0,1 mm
- Un espermatozoide medeix 53 µm, un glòbul roig 7 µm.
- Els xips electrònics estan compostos de transistors de 22 nm de grandària.
- L'àtom més xicotet, el d'hidrogen, te aproximadament 1 Å de diàmetre.

Activitats proposades

6. Si Iker medeix 1,35 metros i Laura medeix 134 centímetres: Qui és més alt?

7. Respon amb un regle graduat:

a) Dibuixa un segment: Quant medeix el segment que has dibuixat?

b) Quant medeix la vora del teu pupitre?

c) Quants metres de cinta aïllant et faran falta per a cobrir les vores del pupitre?

8. Esbrina quant medeix el teu llit.

2.2. Canvi d'unitats

Per realitzar canvis d'unitats de longitud hem de multiplicar o dividir per deu tantes vegades com siga necessari.

km hm dam m dm cm mm

Açò ho fem desplaçant la coma cap a la dreta (per a multiplicar) o a l'esquerra (per a dividir) tantes vegades com vulguem multiplicar o dividir per deu.

Activitats resoltes

- Expressa en metres:

a) 7,23 km =72,3 hm =723 dam =7.230 m 7,23km=[3 posicions]=7.230 m

b) 312 mm = 31,2 cm = 3,12 dm = 0,312 m 312mm=[3 posicions]=0,312 m

c) 1,32 hm = 132 m

d) 27 cm = 0,27 m

e) 0,021 km = 21 m

f) 11 km 3 hm 7 m = 11.307 m

g) 4 dam 6 m 8 dm 5 mm = 46,805 m

Activitats proposades

9. Expressa les següents longituds en decímetres:

a) 54 cm b) 21,08 m c) 8,7 hm d) 327 mm

10. Realitza els canvis d'unitats que s'indiquen:

a) 15,2 hm = ___ dm b) 257 cm = ___ dam c)3.500 dam = ___ km

d) 345 mm = ___ m e) 0,234 km = ___ dm f) 23.000 cm = ___ hm

g) 7,31 dm = ___ dm h) 2,5 km = ___ dam

11. Expressa les següents longituds en les unitats que s'indiquen en cada cas:

a) 8 m 1 mm en decímetres b) 3,5 km 27 dam en decímetres

c) 13 km 21 mm en mil·límetres d) 7 hm 15 cm en decímetres

e) 2 dam 5 dm en metres f) 0,6 m 340 mm en centímetres

Autor: Pedro Luis Suberviola / Revisor: Sergio Hernández
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF més Wikipèdia i producció pròpia

2.3. Unitats de superfície

El **metre quadrat** és la unitat de mesura de superfície i es representa per m^2.

És una unitat derivada del metre. No és una unitat fonamental.

Els seus múltiples i submúltiples principals són:

Múltiples			Unitat	Submúltiples		
Quilòmetre quadrat	**Hectò**metre quadrat	**Decà**metre quadrat	**Metre quadrat**	**Decí**metre quadrat	**Centí**metre quadrat	**Mil·lí**metre quadrat
km^2	**h**m^2	**da**m^2	$\mathbf{m^2}$	**d**m^2	**c**m^2	**m**m^2
1.000.000 m^2	10.000 m^2	100 m^2	1 m^2	0,01 m^2	0,000.01 m^2	0,000.000.1m^2

Comprovem que en 1 m^2 hi ha 100 dm^2:

Un metre quadrat és la superfície que te un quadrat d'1 m de costat.

Dividim cada un dels seus costats en 10 segments iguals, que medeixen per tant 1 dm cadascú.

Unim els extrems dels segments fent quadrats. Obtenim 100 quadrats d'1 dm de costat. És a dir, en el metre quadrat hi ha 100 d'aquests quadrats, és a dir, 100 dm^2.

Exemples:

- Un pis sol mesurar entre 65 m^2 i 100 m^2.
- Un camp de futbol per a partits internacionals medeix entre 64 dam^2 i 82,5 dam^2.
- La ciutat de Valladolid té una superfície de 197,91 km^2, la de Madrid 605,8 km^2.
- La província de l'estat espanyol amb major superfície és Badajoz, amb 21.766 km^2, la menor Guipúscoa amb 1.980 km^2.
- La província de Madrid te 8.027 km^2 de superfície. Imagina un rectangle de 100 km d'ample i 80 km de llarg.
- L'estat de la Unió Europea amb major superfície es França, amb 547.030 km^2.

2.4. Canvi d'unitats

Per realitzar canvis d'unitats de **superfície** hem de multiplicar o dividir per **cent** tantes vegades com siga necessari.

km^2 hm^2 dam^2 m^2 dm^2 cm^2 mm^2

Açò ho fem desplaçant la coma cap a la dreta (per a multiplicar) o a l'esquerra (per a dividir) de dues en dues xifres.

Activitats resoltes

- Expressa en metres quadrats:

a) 0,843 km^2 =84,3 hm^2 =8.430 dam^2 =843.000 m^2 0,843 km^2=[6 llocs a la dreta]=843.000 m^2

b) 35.400 mm^2 = 354 cm^2 = 3,54 dm^2 =0,0354 m^2 35.400 mm^2 = [6 llocs a l'esquerra]= 0,0354 m^2

c) 8,32 hm^2 = 83.200 m^2

d) 27 cm^2 = 0,0027 m^2

e) 74 km^2 = 74.000.000 m^2

f) 7 km^2 63 hm^2 7 m^2 = 7.630.007 m^2

g) 4 dam^2 5 m^2 23 dm^2 = 405,23 m^2

Activitats proposades

12. Observa la taula anterior i calcula:

a) 18 dam^2= ____ m^2 b) 5 m^2= ____mm^2 c) 0,2 km^2= ____ m^2 d) 87 m^2= ____ hm^2

13. Passa 38 hm^2 17 dam^2 a metres quadrats.

14. Calcula els metres quadrats d'aquestes superfícies:

a) 4,59 dm^2 b) 10,2 hm^2 c) 4.391 mm^2 d) 501 dam^2

15. Expressa les següents superfícies a les unitats que s'indiquen en cada cas:

a)8 m^2 1 cm^2 en decímetres quadrats   b)2 dam^2 15 dm^2 en metres quadrats

c)3 hm^2 21 mm^2 en decàmetres quadrats d)7 hm^2 65 m^2 en mil·límetres quadrats

2.5. Unitats agràries

Són unitats que no pertanyen al Sistema Internacional però s'utilitzen per a mesurar superfícies rurals, boscos, plantacions,...

L'**àrea**   1 **a** = 100 m^2 = 1 dam^2

L'**hectàrea**   1 **ha** = 100 a = 100 dam^2 = 1 hm^2

La **centiàrea**   1 **ca** = 0,01 a = 1 m^2

Es a dir, per a fer la conversió entre unitats agràries i la seua conversió amb el Sistema Internacional podem utilitzar la següent regla:

hm^2	dam^2	m^2
ha	a	ca

Exemples:

- Una hectàrea és un quadrat de 100 m de costat. Un camp de futbol medeix 62 àrees, aproximadament mitja hectàrea. Per a fer-nos una imatge mental, podem pensar que dos camps de futbol són més o menys una hectàrea.
- La superfície cremada en Espanya en un any és, per terme mitjà, unes 125.000 ha. La província més xicoteta és Guipúscoa, amb 1.980 km^2, és a dir, 198.000 ha. És a dir, l'àrea incendiada cada any és aproximadament la d'eixa província.

Activitats resoltes

Expressa en hectàrees:

a) 5,7 km^2 = 570 hm^2 = 570 ha

b) 340.000 ca = 34 ha

c) 200.000 dm^2 = 0,2 hm^2 = 0,2 ha

d) 930 dam^2 =9,3 hm^2 =9,3 ha

Activitats proposades

16. Expressa les següents superfícies en àrees:

a) 1.678 ha   b) 5 ha   c) 8 ha 20 a   d) 28.100 ca

17. La superfície d'un camp de futbol és de 7.140 metres quadrats. Expressa aquesta mida en cadascuna d'aquestes unitats:

a) Centímetres quadrats   b) Decàmetres quadrats   c) Hectàrees   d) Àrees.

2.6. Unitats de volum

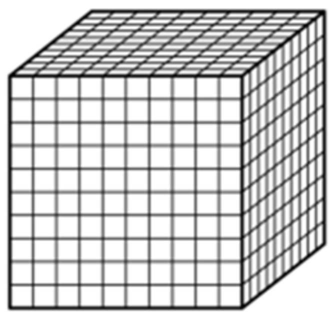
El **metre cúbic** és la unitat de mesura de **volum** i es representa per **m³**.

És una unitat derivada del metre.

Els seus múltiples i submúltiples principals són:

Múltiples			**unitat**	**Submúltiples**		
Quilòmetre cúbic	**Hectò**metre cúbic	**Decà**metre cúbic	**Metre cúbic**	**Decí**metre cúbic	**Centí**metre cúbic	**Mil·lí**metre cúbic
km^3	**h**m^3	**da**m^3	$\mathbf{m^3}$	**d**m^3	**c**m^3	**m**m^3
1.000.000.000 m^3	1000.000 m^3	1000 m^3	1 m^3	0,001 m^3	0,000.000.1 m^3	0,000.000.000.1 m^3

Comprovem que en 1 m^3 hi ha 1000 dm^3:



Un metre cúbic és el volum que té un cub de 1 m d'aresta.

Dividim cadascuna de les seues arestes en 10 segments iguals, que medeixen per tant 1 dm cadascú.

Tallem el cub paral·lelament a les cares. Obtenim 1.000 cubs d'1 dm d'aresta. És a dir, en el metre cúbic hi ha 1.000 d'aquests cúbics, és a dir, 1.000 dm^3.

Exemple:

- El consum d'aigua i de gas en les factures es medeix en m^3. Una persona consumeix de mitja 4,5 m^3 d'aigua al mes.
- La grandària d'un embassament poden ser 50 hm^3 de capacitat.
- Un dels embassaments de més gran capacitat a Espanya és el de "La Almendra" en Castella i Lleó, amb 2,6 km^3 de capacitat.
- La capacitat total dels embassaments d'Espanya és de 55 km^3.

2.7. Canvi d'unitats

Per realitzar canvis d'unitats de **volum** hem de multiplicar o dividir per **mil** tantes vegades com siga necessari.

km^3 hm^3 dam^3 m^3 dm^3 cm^3 mm^3

Açò ho fem desplaçant la coma cap a la dreta (per a multiplicar) o cap a l'esquerra (per a dividir) de tres en tres xifres.

Activitats resoltes

- Expressa en metres cúbics:

a) 0,843 km^3= 84,3 hm^3 = 8.430 dam^3 = 843.000 m^3 0,843 km^3= [6 posicions cap a la dreta]= 843.000 m^3

b) 35.400 mm^3= 354 cm^3 = 3,54 dm^3 = 0,0354 m^3 35.400 mm^3 = [6 posicions a l'esquerra]= 0,0354 m^3

c) 8,32 hm^3 = 83.200 m^3

d) 27 cm^3 = 0,0027 m^3

e) 74 km^3 = 74.000.000 m^3

f) 7 km^3 63 hm^3 7 m^3 = 7.630.007 m^3

g) 4 dam^3 5 m^3 23 dm^3 = 405,23 m^3

Activitats proposades

18. Resol:

a) 23 km^3= __ m^3 b) 25 m^3 = __cm^3 c) 302 hm^3 = __ m^3 d) 80 m^3 = __ dam^3

19. Expressa en metres cúbics 4,6 dam^3 2.800 dm^3.

20. Expressa aquests volums en decàmetres cúbics:

a) 0,76 m^3 b) 65 dm^3 c) 7,89 hm^3 d) 93 m^3

21. Emplena aquestes igualtats amb les unitats que falten:

a) 18 m^3 = 18.000 __ b) 23,99 dm^3= 23990 __ c) 100,12 cm^3= 0,10012 __

3. EL LITRE. MÚLTIPLES I DIVISORS

La "*capacitat*" és la mateixa magnitud que el *"volum"*, per tant es medeix la capacitat d'un recipient, (quant volum li cap) amb el metre cúbic i el seus derivats. El *litre* s'utilitza per raons històriques, i no pertany al Sistema Internacional d'unitats. Tot i que ens convé conèixer-lo si el considerem com una unitat de volum "col·loquial" utilitzada normalment per a mesurar la capacitat dels recipients. Un litre correspon amb un dm^3, i s'utilitzen múltiples de litre com si fóra una unitat més del SI, amb múltiples i divisors decimals.

3.1. El litre

La **capacitat** és el volum (generalment de matèria líquida o gasosa) que és capaç de contindre un recipient. La seua unitat de mesura és el **litre** i es representa por **L**.

Múltiples			Unitat	Submúltiples		
Quilolitre	**Hectò**litre	**Decà**litre	**Litre**	**Deci**litre	**Centi**litre	**Mil·li**litre
kL	**h**L	**da**L	**L**	**d**L	**c**L	**m**L
1000 L	**100** L	**10** L	1 L	**0,1** L	**0,01** L	**0,001** L

Exemples:

- Una ampolla d'aigua gran té una capacitat de 1,5 L.
- Un dipòsit de gas-oli per a una casa pot tindre una capacitat de 4 hL.
- Una llanda de refresc té una capacitat de 33 cL.
- Una dosi típica de xarop sol ser de 5 mL.
- En una dutxa de cinc minuts s'utilitzen uns 90 L d'aigua.
- Com hem vist, quan mesurem capacitats d'aigua grans s'utilitzen unitats de volum (m^3, hm^3, ...).

3.2. Canvi d'unitats

Per realitzar canvis d'unitats de capacitat hem de multiplicar o dividir per deu tantes vegades com siga necessari. Igual que amb metres, perquè la unitat no està elevada ni al quadrat ni al cub.

kL hL daL L dL cL mL

Açò ho fem desplaçant la coma cap a la dreta (per a multiplicar) o cap a l'esquerra (per a dividir) tantes vegades com vulguem multiplicar o dividir per deu.

Exemple:

Expressa en litres:

a) 4,2 hL = 420 L   b) 300 mL = 0,3 mL   c) 7,2 kL = 7.200 L
d) 0,0235 kL = 23,5 L   e)420 cL = 4,2 L   f) 1,2 mL = 0,001.2 L

Activitats proposades

22. Si un decilitre són 0,1 litres, quants decilitres té un litre?

23. Expressa en kilolitres:

a) 34 L b) 1.232 cL   c) 57 daL   d) 107 hL

24. Afig la mida necessària perquè sumeix 5 litres:

a)500 cL + __ cL   b)25 dL + __ dL   c) 500 mL + __ mL   d) 225 mL + __ __

3.3. Relació entre litres i m^3.

Els litres es relacionen amb les unitats de volum perquè 1 L equival a 1 dm^3. Per tant:

1 L = 1 dm^3

1 mL = 1 cm^3

1 kL = 1 m^3

Si ho afegim a l'esquema de canvis d'unitats de capacitat:

kL	hL	daL	L	dL	cL	mL
m^3			dm^3			cm^3

Exemples:

- Un dipòsit d'aigua d'1 m^3 té 1 kL de capacitat, és a dir, 1.000 L.
- A les botelletes d'aigua, depenent de la marca, s'expressen la quantitat d'aigua en mL o en cm^3 és a dir, com a capacitat o com a volum. Poden posar 250 mL o 250 cm^3.
- Un litre de llet ocupa un volum d'1 dm^3.

Activitats resoltes

- Expressa en litres:

  a) 4,2 dm^3 = 4,2 L   b) 12 m^3 = 12 kL =12.000 L   c) 30 cm^3 = 30 cL = 0,03 L

- Expressa en decímetres cúbics:

  a)0,835 hL = 83,5 dm^3 = 83,5 dm^3 b) 43 cL = 0,43 L = 0,43 dm^3

  c) 23,5 kL = 23.500 L = 23.500 dm^3 d) 0,6 dL = 0,06 L = 0,06 dm^3

Activitats proposades

25. Ordena de menor a major aquestes mesures:

a) 7,0001 hm^3 b) 23.000 L   c) 8 mL   d) 4 mm^3

26. Calcula aquesta diferència: 8 mL – 8 mm^3=

27. Calcula el volum (en litres i en cm^3) d'una caixa que medeix 10 cm d'ample, 20 cm de llarg i 5 cm d'alt.

4. UNITATS DE MASSA

4.1. El kilogram

El **kilogram** és la unitat de mesura de massa i es representa per **kg**.

Pertany al Sistema Internacional de unitats (SI).

Els seus múltiples i submúltiples principals són:

Unitat	**Submúltiples**					
Quilogram	**Hecto**gram	**Deca**gram	**Gram**	**Deci**gram	**Centi**gram	**Mil·li**gram
kg	**h**g	**da**g	**g**	**d**g	**c**g	**m**g
1000 g	**100** g	**10** g	1 g	**0,1** g	**0,01** g	**0,001** g

La **tona** i el **quintar** no són múltiples del gram ni pertanyen al SI. En origen una tona eren 960 kg i corresponien a 20 quintars de 46 kg o 100 lliures, però quan es va imposar el SI continuaren emprant-se, encara que "arrodonits" a 1000 kg i 100 kg. Aquestes noves unitats són la **tona mètrica** (tm) i el **quintar mètric** (qm), que si pertanyen al Sistema Universal de unitats.

Múltiples			**Unitat**
Tona	**Quintar**	**Miriagram**	**Kilo**gram
tm	**qm**	**ma**g	**k**g
1000 kg	100 kg	10 kg	1 kg

La primera *definició* de **kilogram** es va donar en la Revolució Francesa i especificava que era la massa d'un dm^3 (un litre) d'aigua destil·lada al nivell del mar i 3,98 ºC. Hui es defineix com la massa que té el prototip internacional, compost d'una aliatge de platí i iridi que es guarda en l'Oficina Internacional de Pesos i Mesures.

Quan demanem en la botiga un quilo de creïlles, estrictament, des del punt de vista matemàtic, estem dient mil creïlles, ja que el prefix quilo significa mil.

No significa que estiga malament dir-ho, hem de distingir diferents contextos i situacions.

En la botiga podem comprar *un quilo de creïlles*, mentre que a classe de matemàtiques direm un *quilogram de creïlles*.

Nota:

La massa no és el mateix que el pes!

Una bola d'acer pesa molt a la Terra, però no pesa res a l'espai, i encara així, si te la tiren amb força et continua donant un bon colp. La força d'eixe colp et diu que té molta massa (gram). La massa es conserva a l'espai perquè és una verdadera magnitud, però el pes és una força deguda a la gravetat de la Terra. Només a la Terra la massa i el pes d'una persona coincideixen com a quantitat, per això és normal dir que algú "*pesa tants kg*" encara que no siga del tot correcte, s'hauria de dir que "té una massa de 70 kg i, en la Terra, pesa 70 kgf (quilo grams força)".

Als exemples següents emprarem kg com pes per seguir amb la forma *col·loquial* de parlar, però hauríem d'emprar kgf o dir que "té una massa de 70 kg".

Exemples:

- Una persona adulta pot pesar 70 kg (hauríem de dir "té una massa de 70 kg" com ja van comentar abans).
- En un entrepà se solen posar uns 40 g d'embotit.
- La dosi que hi ha en cada pastilla de *enalapril* (medicament contra la hipertensió arterial) és de 10 mg. La resta de la pastilla es excipient (farcit perquè siga manejable).
- Per a plantar blat, s'empren entre 60 kg i 250 kg de llavor per hectàrea i es cullen diverses tones per hectàrea.
- El pes d'un cotxe buit és d'uns 1.200 kg.
- El pes màxim autoritzat d'un vehicle amb dos eixos és de 18 t.
- Un elefant africà pot pesar fins a 7,5 t. Una balena blava, 120 t.

Activitat resolta

- Pesa més un quilogram de ferro que un de palla?

La massa és igual, però ambdós estan a la Terra rodejats d'aire, i igual que ocorre si estan rodejades d'aigua, el ferro anirà cap avall amb més força que la palla que "sura més" tant a l'aigua com a l'aire. Pensa-ho així: Què pesa més, un tros de ferro de 100 kg o un globus aerostàtic de 100 kg que està surant? Si el globus vola, ¿es que no pesa?

Tornem a la mateixa idea d'abans. No hem de confondre el pes (que és una força) amb la massa.

4.2. Canvi d'unitats

Per realitzar canvis d'unitats de massa hem de multiplicar o dividir per deu tantes vegades com siga necessari.

kg hg dag g dg cg mg

Açò ho fem desplaçant la coma cap a la dreta (per a multiplicar) o cap a l'esquerra (per a dividir) tantes vegades com vulguem multiplicar o dividir per deu.

Un **litre** d'aigua té de massa, quasi de manera exacta **1 kg**. Aquesta aproximació es pot realitzar, de forma menys precisa, per altres líquids.

Activitats resoltes

- Expressa en grams:

  a) 0,23 kg = 23 g b) 312 mg = 0,312 g c) 5,32 hg = 532 g

  d) 2,57 cg = 0,0257 g e) 0,021 kg = 21 g f)11kg 3hg 7g=11.307 g

  g) 4 dag 6 g 8 dg 5 mg = 46,805 g

- Expressa en quilograms:

  a) 3,2 t = 3.200 kg b) 740 g = 0,74 kg c) 5,4 q = 540 kg

  d) 42 mag = 420 kg e) 238 hg = 23,8 kg f) 1200 dag = 12 kg

- Suposem que hem comprat 1 kg de fesols, 2,5 kg de fruita, 2 L de llet i dues ampolles de 1,5 L d'aigua. Si volem calcular el pes de la compra de forma aproximada, podem canviar els litres per quilograms.

  $$1 \text{ kg} + 2{,}5 \text{ kg} + 2 \text{ kg} + 2 \cdot 1{,}5 \text{ kg} = 8{,}5 \text{ kg}$$

  La nostra compra pesa aproximadament 8,5 kg.

Activitats proposades

28. Expressa les següents quantitats en decagrams:

a) 16 g b) 29 hg c) 23,5 kg d) 150 g

29. Expressa en grams les següents masses:

a) 1,6 dag b) 49 kg c) 240,5 kg 7,5 dag d) 2 dag 15,10 dg

30. Expressa en quilograms:

a) 3 t 5 q 2,5mag b) 2,35 t 750 dag c) 312 q 459 hg d) 52 t 3 mag 8 kg

31. Una furgoneta pot carregar 1,2 t. Ha de transportar 72 caixes que contenen 25 envasos de paquets de sabó, amb un pes de 750 g cadascú. Pot transportar-los en només un viatge?

32. Estima la massa de:

a) El teu quadern b) El teu bolígraf c) La teua motxilla d)La teua taula

CURIOSITATS. REVISTA

a) Mesures de l'antiga Grècia

Protàgores d'Abdera, filòsof grec del segle V a. C., va dir ***L'ésser humà és la mida de totes les coses***. Es pot interpretar com que les persones interpretem el nostre entorn sempre en relació a nosaltres mateixes, ja siga de forma individual o col·lectiva.

Va establir unes dimensions comparables amb la seua pròpia experiència, moltes vegades, amb el seu propi cos. Per exemple, en l'antiga Grècia:

1 ample d'un dit (daktylos) = 2 cm   No confondre amb polzada, ample d'un polze
1 peu (*pous*) = 33,3 cm
1 colze (*pēchys*) = 48 cm
1 braça (*orgyia*) = 4 colzes = 1,92 m (Longitud dels braços estesos)
1 estadi (*stadium*) = 600 peus = 174 m (longitud de l'estadi d'Olímpia).

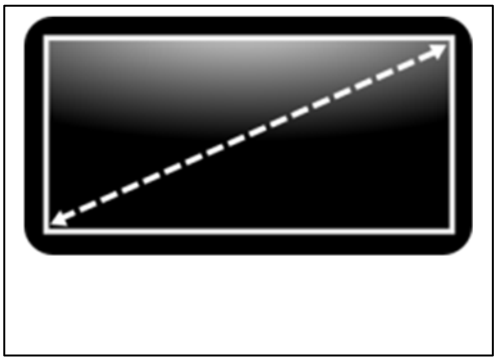
b) Unitats de mesura anglosaxones

Les unitats de mesura anglosaxones, basades en gran part en les de l'Imperi Romà, van ser introduïdes després de la invasió normanda d'Anglaterra per Guillem el Conqueridor en 1.066 i van ser utilitzades per l'Imperi Britànic.


Països que han adoptat el Sistema Internacional

Només tres països ho utilitzen oficialment hui en dia: Estats Units d'Amèrica, Libèria i Birmània. La resta han assumit el Sistema Internacional d'unitats (SI), implantat en 1.889 en una conferència a París. Però cal tindre en compte que hi ha països que ho han adoptat recentment. Per exemple Gran Bretanya; fins a l'any 2.000 no va haver obligació de que els productes de les botigues estiguérem marcats en quilos o grams, i encara es pot trobar el sistema de mesures anglosaxó moltes vegades.

Potser la unitat que més podem trobar en la vida quotidiana és la **polzada**. Per exemple, s'utilitza per a mesurar el diàmetre de les canonades, però segur que ens sona més com a mida de la grandària de les pantalles.



Quan diem que una *tablet* té 7”, ens referim a la mida de la diagonal de la pantalla, i podem fer 7·2,54 = 17,78 cm.

Observa que no determina de forma única la grandària de la pantalla, també ens hem de fixar en la relació del llarg i l'ample (s'expressa de la forma a : b).

Les principals mesures del sistema anglosaxó dels Estats Units d'Amèrica de mesures (hi ha xicotetes diferències respecte al britànic) són:

Longitud	Àrea	Capacitat
1 polzada (1 *inch*) = 2,54 cm 1 peu (1 *foot*)=12 polzades=0,3408 cm 1 iarda (1 *yard*)=3 peus=0,914.4 cm 1 milla (1 *mile*)=1.760 iardes=1,609 km 1 llegua (1 *league*)=3 milles=1.609 km	1 acre (1 *acre*) = 4.047 m^2 = 0,4047 ha	1 tassa (1 *cup*) = 236,5 mL 1 pinta (1 *pint*) = 2 tasses = 473 mL 1 galó (1 *gallon*) =8 pintes = 3,785 L 1 barril (1 *barrell*) = 31,5 galons = 119,24 L

RESUM

Magnitud	Una **magnitud** es pot mesurar en diferents **unitats de mesura**.						
La distància (magnitud) es pot mesurar en metres, centímetres, quilòmetres,... (diferents unitats de mesura)							
Longitud: metre	km	hm	dam	m	dm	cm	mm
0,32 km = 32 m = 3.200 cm			3.400 mm = 34 dm = 0,34 dam				
Superfície: metre quadrat	km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
0,0014 km^2 =0,14 hm^2=14 dam^2			23.000 mm^2 =230 cm^2=2,3 dm^2=230 dm^2				
Unitats agràries	1 ha = 1 hm^2		1 a = 1 dam^2		1 ca = 1 m^2		
5 km^2 = 500 hm^2 = 500 ha			13.000 m^2 = 13.000 ca= 1,3 ha				
Volum: metre cúbic	km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
3,2 hm^3 =320 dam^3 =32.00 m^3			2.800 mm^3=28 cm^3=0,28 dm^3				
El litre	kL	hL	daL	L	dL	cL	mL
3,7 kL = 37 hL = 370 daL = 3.700 L			85 mL = 8,5 cL = 0,85 dL = 0,085 L				
Litres i m^3.	1 kL = 1 m^3		1 L = 1 dm^3		1 mL = 1 cm^3		
4,5 cL =45 mL =45 cm^3		3 hL =0,3 kL =0,3 m^3		3 hL =300 L =300 dm^3			
Massa: quilogram	kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
2300 kg = 2,3 t		0,23 dag = 2,3 g = 2.300 mg		5,3 hg =53.000 cg			

EXERCICIS I PROBLEMES de 1r d'ESO

Sistema Internacional d'unitats

1. Classifica com a magnituds o unitats de mesura el següent:

a) Milla b) Temps c) Setmana d) mm

e) Àrea f) Segon g) Pressió h) Litre

2. Indica a quina magnitud correspon cada unitat de mesura:

a) Any llum b) cm c) kg d) dL

3. Mesura, o estima, la mida de:

a) Longitud de la teua ma; b) Longitud del teu peu; c) Longitud del teu braç

d) Longitud de la teua cama.

Quines unitats has emprat? Faries servir el km o el mm? Per què?

4. Còpia en el teu quadern i relaciona cada magnitud amb la seua possible mesura:

8 km 9 hores 7 cm^2 2 dm^3 0,789 kg

massa longitud capacitat superfície temps

Unitats de longitud

5. Si la mà de Xavier medeix 0,25 metres i la de Miriam medeix 24 centímetres: Quina medeix més?

6. Calcula utilitzant un regle graduat:

a) Quina és la longitud del teu bolígraf?

b) Quant mesuren els costats del teu quadern?

c) Quina és la altura de la teua taula?

d) I la altura de la teua cadira?

7. Expressa les següents longituds en metres:

a) 78 cm b) 35,7 dm c) 9,72 dam d) 825 km

8. Expressa en micres:

a) 0,00067 mm b) 25,7 m c) 0,0768 dm d) 0,000002 cm

Unitats de superfície

9. Expressa en centímetres quadrats:

a) 8,3 km^2; b) 4912 mm^2; c) 72,1 hm^2; d) 32 m^2; e) 28 dm^2;

f) 6 km^2 3 hm^2 5 m^2 1 dm^2 4 cm^2; g) 8 dam^2 9 m^2 2 dm^2 7 cm^2

10. Calcula els quilòmetres quadrats d'aquestes superfícies:

a) 34,5 dm^2 b) 8,26 hm^2 c) 999 mm^2 d)8,35 dam^2 e)7 m^2 f)666 cm^2.

11. La superfície d'un camp de futbol és de 8.378 metres quadrats. Expressa aquesta mida en cadascuna d'aquestes unitats:

a) Centímetres quadrats b) Decàmetres quadrats c) Hectàrees d) Àrees.

12. Escriu la unitat que empraries per a mesurar la superfície dels següents objectes:

a) Una habitació b) Un país c) La secció d'un tub d) Una taula

13. Vols enrajolar la teua habitació que medeix 3,5 m de llarg per 2,5 m d'ample. No vols tindre que tallar cap taulell, perquè llavors, moltes es trenquen. Quan vas a comprar-les hi ha taulells de: a) 40 cm per 20 cm; b) 50 cm per 35 cm; c) 25 cm per 18 cm. Et serveix alguna? Quantes taulells compraries? Indica en m^2 quant medeix la teua habitació.

14. Busca en Internet o en un diccionari la superfície de la teua comunitat i expressa-la en m^2.

15. Un terreny rústic de 6 ha costa 144.000 euros. A quant ix el metre quadrat? Compara-lo amb el preu del terreny urbanitzable, que costa uns 350 euros el metre quadrat. Perquè hi ha eixa diferència?

16. Copia en el teu quadern i emplena la taula

mm^2	**cm^2**	**dm^2**	**m^2**	**dam^2**	**hm^2**	**km^2**
4850000						
	83,29					
						2

Unitats de volum

17. Estima en cm^3 el volum de:

a) Un quadern; b) Un llapis; c) Una goma; d) L'aula; e) Una televisió; f) Una caixa de sabates.

Indica en cada cas si el seu volum es menor que un cm^3, està entre un cm^3 i un dam^3, o és més gran que un dam^3.

18. Una caixa té un volum de 18 cm^3, quines poden ser les seues dimensions?

19. Expressa en centímetres cúbics:

a) 65,2 hm^3 b) 222 mm^3 c) 6,24 km^3 d) 34 m^3 e) 93 km^3

f) 5 km^3 4 hm^3 6dam^3 8 m^3 g) 5 dam^3 6 m^3 7 dm^3

20. Expressa aquests volums en hectòmetres cúbics:

a) 777 m^3 b) 652 dm^3 c) 926 km^3 d) 312,2 m^3 e) 712 dam^3 f) 893 cm^3.

21. Estima quina és la resposta correcta a aquestes mesures:

1) Joan medeix:

a) 7 mm b) 300 km c) 1,7 m d) 1,7 cm

2) La longitud d'aquesta forqueta que està damunt la meua taula és:

a) 5,8 mm b) 3,9 km c) 1,7 m d) 24 cm

3) En l'ampolla d'aigua que està en la meua nevera cap:
a) 2,7 m^3 b) 7 ml c) 1,5 l d) 9,4 cm^3
4) Elena pesa:
a) 47 g b) 470 g c) 470 kg d) 47 kg
5) Eixe autobús aturat en el cantó medeix:
a) 12,5 cm b) 12,5 mm c) 12,5 m d) 12,5 km
6) El sòl d'aquesta aula medeix:
a) 1 m^2 b) 30 m^2 c) 30 cm^2 d) 30 km^2

22. Emplena les següents igualtats:

a) ___ hl=4000 L b) 0,025 L= ___ cL c) 1,2 daL=____mL d)32mL=____hL

23. Indica quina mida s'aproxima més a la realitat en cada cas:

a) Un envàs de crema: 12 cL 12 L 12000 mL

b) Una cullereta de cafè: 100 mL 1 L 8 mL

c) Una banyera: 85 L 850 daL 850 hL

24. Expressa en litres:

a) 5,8 dm^3 b) 39 m^3 c) 931 cm^3 d) 8.425 mm^3 e) 3 dam^3.

25. Si un centilitre són 0,1 decilitres, quants centilitres té un decilitre?

26. Expressa en centímetres cúbics:

a) 2,75 hL b) 72,8 cL c) 6,24 kL d) 3,75 dL e) 45 L f) 895 mL

27. Ordena de menor a major aquestes mesures:

a) 3,92 hm^3 b) 673 L c) 8.951.295 mL d) 4.000 mm^3

28. Expressa en cL les següents fraccions de litre:

a) 1/2 litre b) 1/5 litre c) 1/3 litre d) 3/4 litre e) 5/2 litre

29. Estima la quantitat de quaderns com el teu que cabríem en un metre cúbic

30. Una aixeta goteja 25 mm^3 cada 4 s. Quanta aigua es perd en una hora? I en un mes?

31. Expressa en quilolitres:

a) 7,29 L b) 3.891 cL c) 0,56 daL d) 3000 hL e) 982 dL f) 9.827 mL

32. Afig la mida necessària perquè sume 10 litres:

a) 500 cL +__ cL b) 25 dL +__ dL c) 500 mL +__ mL d) 2 L +__ dL

33. Talla la part de dalt d'un tetrabrick d'1 litre buit. Agafa una botelleta d'aigua, també buida, anota la seua capacitat. Emplena successivament la botelleta i aboca el seu contingut en el tetrabrick fins a omplir-lo. Quantes botelletes fan falta per a omplir-lo? Fes el mateix amb un got d'aigua en lloc de la botelleta.

34. Xavier desitja abocar 5 L d'aigua en un recipient, però només té una gerra de 13 L i altra de 8 L, què ha de fer?

35. Calcula aquesta resta: 5 cL – 5 cm^3.

36. Fes una estimació, i discuteix el resultat amb els teus companys i companyes, de les següents quantitats

a) Quants litres d'aigua gastes al dutxar-te? I al prendre un bany?
b) Quantes cullerades de cafè caben en un got d'aigua? I cullerades soperes?
c) Quant líquid beus al cap d'un dia?

37. En la comunitat de Madrid l'aigua es paga cada dos mesos. Les tarifes van per trams: Primers 25 m^3 a 0,30 €/ m^3. Entre 25 i 50 m^3 a 0,55 €/ m^3. De 50 m^3 en avant a 0,55 €/ m^3. Si la mida de consum d'aigua per persona i dia és 170 L, quant pagarà una persona que viu sola? Quant pagarà una família de 6 membres?

Unitats de massa

38. Expressa en quilograms:
a) 4,6 tm b) 851 g c) 6,5 qm d) 53,1 mag e) 359,2 hg f) 235 dag

39. Expressa les següents quantitats en decagrams:
a) 16 g b) 29 hg c) 23,5 kg d) 150 g

La massa d'1 litre d'aigua

40. Expressa en quilograms:
a) 4 tm 6 qm 3,7 mag b) 3,46 tm 869 dag c) 424 qm 561 hg
d) 6,3 tm 4,1 mag 8,92 kg

41. Indica, en cada cas, la mida més aproximada:

a) Massa d'un autobús:	3 tm	4 qm	7000 g
b) Massa d'un teuladí:	2 kg	150 g	30 mg
c) Massa d'un gat:	350 g	1 qm	25 kg
d) Massa d'una llentilla:	4 dag	2 g	5 dg

42. Una caravana amb el seu remolc pesen junts 2,5 qm. La caravana pesa 1.005 kg més que el remolc. Quant pesa cadascú per separat?

43. Una caixa plena de llibres pesa 25 kg, 7 hg i 4 dag i buida pesa 200 g i 5 dg. Esbrina el pes dels llibres en grams.

44. Quants grams pesa, aproximadament, 1 daL d'aigua?

45. Un camió pot carregar 3 tm. Ha de transportar 90 caixes que contenen cadascuna 30 envasos de tetrabrik de llet, amb un pes de 1005 g cadascú. Pot transportar-los en només un viatge?

46. La balança d'una botiga arrodoneix les mesures als 10 grams. Com quedaran els següents pesos?
a) 368 g b) 35,79 g c) 3 kg d) 2,7 kg

47. Classifica las següents masses en i) menys d'un gram, ii) entre un gram i un kg, iii) entre un kg i 20 kg, iv) més de 20 kg:
a) un cigró b) un camió c) la Torre Eiffel d) un llibre e) la taula

48. Expressa en grams:
a) 0,0005 kg b) 7.500 mg c) 2,98 hg d) 400 cg e) 0,085 tm
f) 44 kg 2 hg 6 g g) 36 dag 78 g 9 dg 4 mg h) 5 qm

AUTOEVALUACIÓ de 1r

1. Quant mesuren 8 milles angleses si una milla anglesa medeix 1609,342 m?

a) 11 km b) 102 km 998 m c) 12 km 875 m d) 12872 m.

2. Maria s'entrena corrent tots els dies. Dóna 14 voltes a un recorregut de 278 m. Quant recorre?

a) 3,892 km b) 40 hm 89 m c) 398,2 dam d) 38 km 92 m.

3. Un rectangle medeix de base 3,2 m i d'altura 1,3 dm. Recorda que la seua àrea es calcula multiplicant base per altura. Quina de les respostes correspon l'àrea del rectangle?

a) 3,1 m^2 b) 41,6 dm^2 c) 3 km^2 d) 0,5 m^2.

4. Un cub de 54 cm de costat, quin volum té?

a) 1574 dm^3 b) 157,464 dm^3 c) 0,001 m^3 d) 1.000.176 cm^3.

5. De les següents mesures de massa, quina és la més gran?

a) 7,91 dag b) 791 g c) 7,91 kg d) 0,791 hg.

6. El resultat de sumar 0,07 kL + 0,62 daL + 9,3 hL és:

a) 1000 L b) 1 kL 62 L c) 10 hL 62 L d) 1006,2 L.

7. Una caixa conté 7 paquets de 37 grams, quina és la seua massa?

a) 2 kg b) 259 g c) 2,5 hg d) 2590 mg

8. La unitat més adequada per a expressar la massa d'un paquet d'arròs és:

a) 1 kg b) 2 cg c) 20 g d) 2000 mg

9. Una ampolla de 2 litres d'aigua pesa buida 30 g. Si s'omplin les 4/5 parts de l'ampolla, quant pesa?

a) 1.600.000 mg b) 1,7 kg c) 1600 hg d) 1630 g

10. Els catets d'un triangle rectangle mesuren 7,4 dm i 8,43 cm. Quina de les respostes correspon a l'àrea del triangle?

a) 31,191 dm^2 b) 3000 cm^2 c) 311,91 dm^2 d) 3,1191 dm^2.

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Milagros Latasa Asso

Revisores: Fernanda Ramos i Nieves Zuasti

Il·lustraciones: Adela Salvador i Milagros Latasa

Traducció al valencià: Departament de Matemàtiques de l'Institut Juan de Garay

Índex

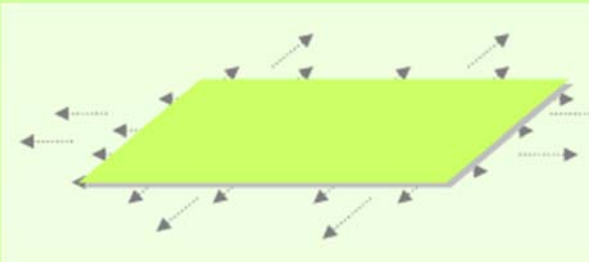
Resum

Als mosaics de l'Alhambra, com el de la fotografia, pots observar distintes figures geomètriques com a rectes paral·leles i rectes secants, estreles de 5 i de 10 puntes, polígons…
En aquest capítol revisaràs els teus coneixements de geometria i aprendràs moltes coses noves sobre les figures geomètriques planes la qual cosa et permetrà veure amb uns ulls nous el món que et rodeja observant rectes paral·leles als edificis, angles interiors o exteriors, o com en el mosaic anterior, els motius geomètrics que el formen. Aquestes formes geomètriques poden permetre't dissenyar interessants décorations.

1. ELEMENTS DEL PLA

1.1. Punts, rectes, semirectes, segments.

L'element més senzill del pla és el **punt**. El signe de puntuació que té aquest mateix nom serveix per a dibuixar-lo o també un xicotet cercle si volem destacar-lo. És molt útil anomenar-lo i per a això s'utilitzen lletres majúscules A, B, C,...



Imagina que cada un dels límits del full del teu quadern, de la pissarra o de cada una de les parets de l'habitació en la que estàs, es prolonga indefinidament sense canviar la seua inclinació o posició. Els objectes resultants serien exemples de plans.

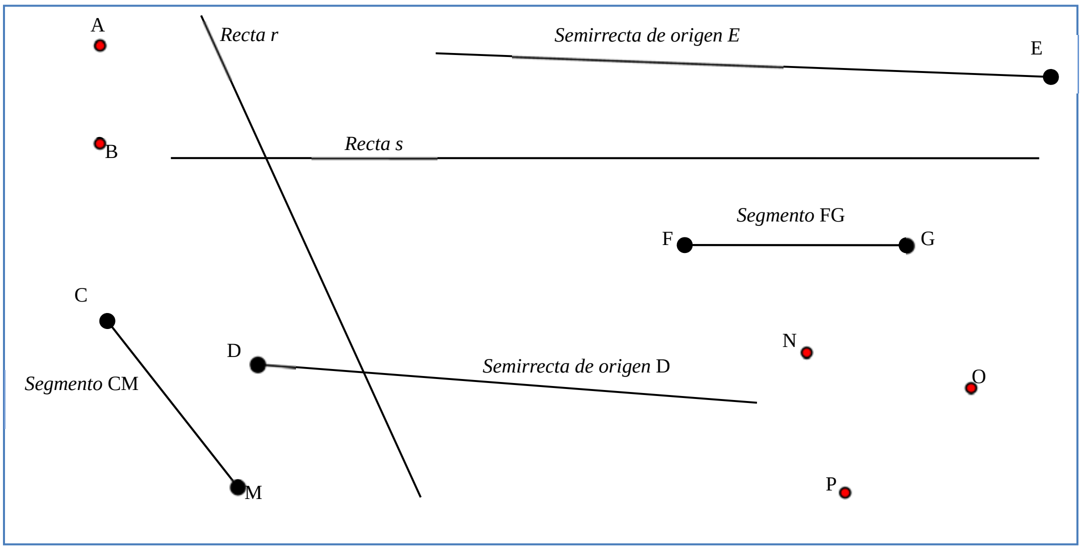
Per representar-los i estudiar bé els seus elements, ens quedarem només amb una part de cada u. Per exemple, als casos anteriorment citats, amb el mateix full, la pissarra o la paret tal com les veiem.

Igual que el punt, **la recta** és un objecte elemental del pla. Constitueix una successió infinita de punts alineats en una mateixa direcció. Les rectes s'anomenen amb lletres minúscules *r, s, t,...*

Una **semirecta** és cada una de les parts en què queda dividida una recta per un punt que pertany a ella. El punt es denomina origen. Les semirectes s'anomenen amb lletres minúscules o referenciant el seu origen: semirecta d'origen O, semirecta *p*, ...

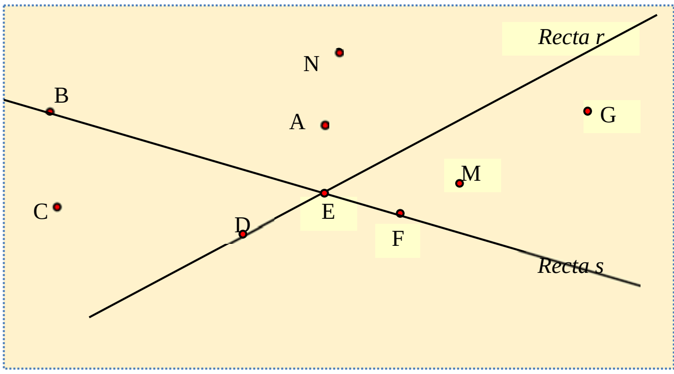
Un segment **és** la porció de recta compresa entre dos punts de ella mateixa. Els punts s'anomenen extrems. Els segments s'anomenen mitjançant els seus extrems, per exemple: segment $\overline{AB}$ o segment d'extrems A, B.

Exemple:



Activitats proposades

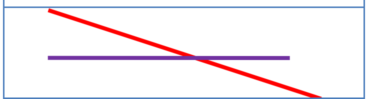
Copia al teu quadern el següent dibuix i realitza les següents activitats.



1. Dibuixa tres segments que tinguen els seus extrems fora de les rectes *r* i *s*.
2. El punt *B* pertany a la recta *s*? I a la recta *r*?
3. Dibuixa un segment que tinga com a extrems *A* i un punt que estiga en les rectes *r* i *s*
4. Dibuixa una semirecta d'origen *C* i que passe per *B*.
5. És possible dibuixar una recta que passe al mateix temps per *M, F* i *G*? I per *N, A i E*?

1.2. Rectes paral·leles i secants

Pensem ara en les diferents posicions que poden ocupar dues rectes a un pla:

Rectes paral·leles: No tenen cap punt comú	
Rectes secants: Tenen un únic punt comú	
Rectes coincidents: Tots els seus punts són comuns	

Per un punt P exterior a una recta r només pot traçar-se una recta paral·lela a ella i infinites secants.

Exemple:

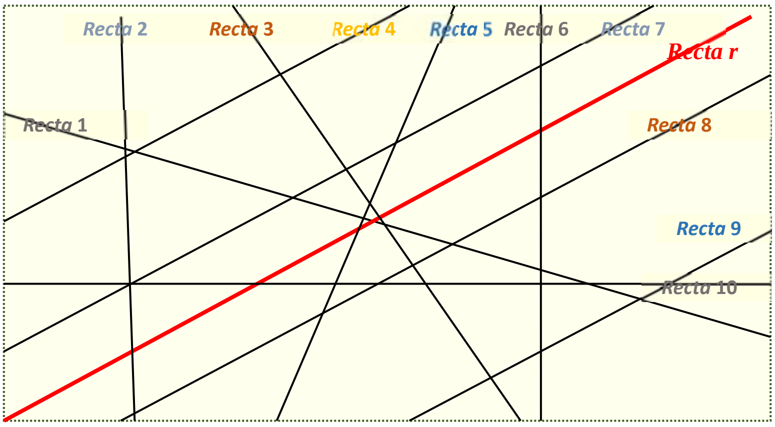
- Al nostre voltant trobem objectes quotidians en què s'aprecien paral·leles i secants

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisores: Fernanda Ramos i Nieves Zuasti

Activitats proposades

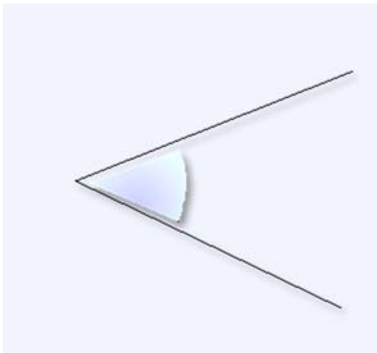
6. Dibuixa quatre rectes de manera que hi haja dues paral·leles, dues perpendiculars i dues secants no perpendiculars.

7. Observa el següent dibuix i indica quines rectes són paral·leles a *r* i quines rectes són secants a *r.*



1.3. Angles. Tipus d'angles

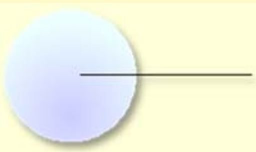
S'anomena ***angle*** a la regió del pla limitada per dues semirectes amb un origen comú. Les semirectes que el limiten s'anomenen **costats** i l'origen vèrtex**.**



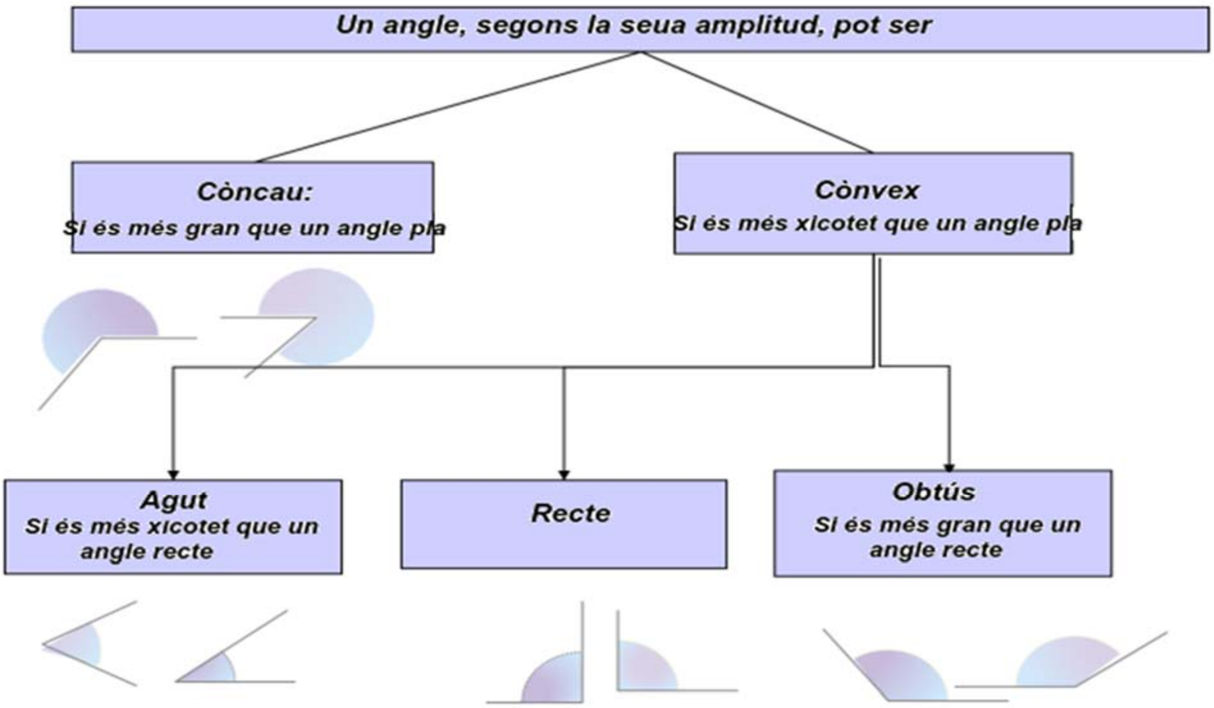
Per anomenar un angle podem utilitzar una sola lletra o bé tres, que seran noms de tres punts: el primer i l'últim punts sobre els costats de l'angle i el central el vèrtex. En ambdós casos es col·loca munt el símbol ^.

A l'angle del dibuix: O= AOB

Associats a semirectes especials definirem tres angles que ens serviran tant com referència per a classificar els altres, com per a definir una de les mesures angulars més utilitzades. Ens referim a angles **complets**, **plans i rectes**.

Angle complet: És el definit per dues semirectes iguals.	**Angle pla**: És la meitat d'un angle complet.	**Angle recte**: És la meitat d'un angle pla.
		

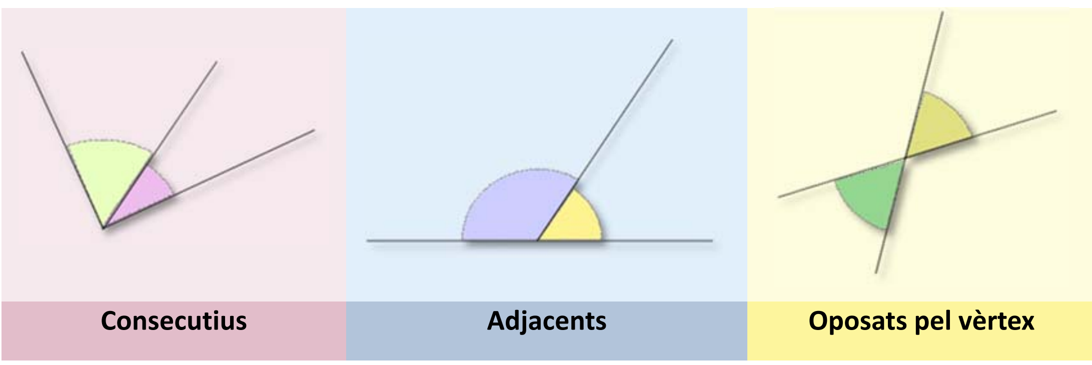
Autora: Milagros Latasa Asso
Revisores: Fernanda Ramos i Nieves Zuasti



S'anomenen angles ***consecutius*** a dos angles que tenen el mateix vèrtex i un costat comú. Un cas particular són els angles ***adjacents*** que són angles consecutius els costats no comuns dels quals formen un angle pla.

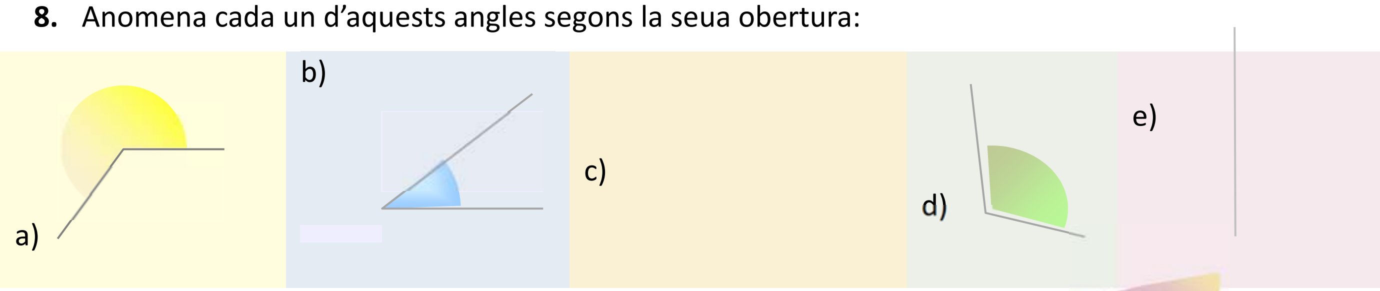
S'anomenen angles oposats ***pel vèrtex*** als angles que tenen el mateix vèrtex i tals que els costats d'un són semirectes oposades als costats de l'altre. Els angles oposats pel vèrtex són iguals.

Exemple:

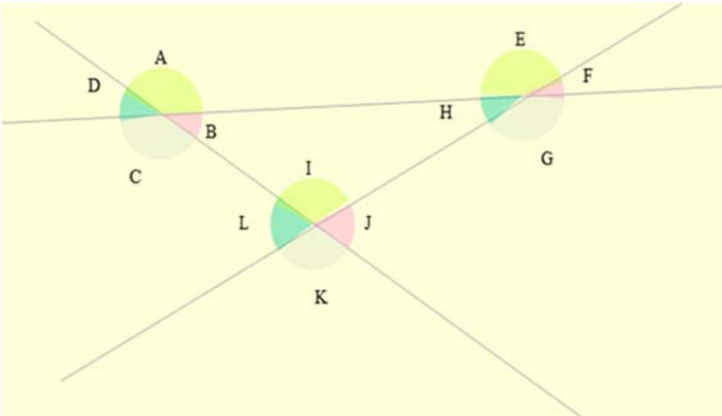


Activitats proposades

8. Anomena cada un d'aquests angles segons la seua obertura:



9. Indica totes les parelles d'angles adjacents, consecutius i oposats pel vèrtex [illegible]en al dibuix següent:



1.4. Mesura d'angles

Per mesurar angles utilitzem l'anomenat ***sistema sexagesimal***. La unitat de mesura és el grau ***sexagesimal***. Es representa amb el símbol **°** i es defineix com 1/360 d'un angle complet.

1 ° = 1 / 360 part d'un angle complet

El grau *sexagesimal* té dos divisors:

Minut 1 minut = 1 ´ = 1/ 60 part d'un grau

Segon 1 segon = 1 ´´ = 1 / 60 part d'un minut

Les unitats d'aquest sistema augmenten i disminueixen de 60 en 60, per això el sistema s'anomena sexagesimal.

Si un angle ve expressat en dues o tres d'aquestes unitats, es diu que està expressat en *forma complexa*. En la *forma incomplexa* de la mesura d'un angle apareix una sola unitat.

El pas d'una a una altra forma es realitza mitjançant multiplicacions o divisions per 60, segons haja que transformar una unitat de mesura d'angles en la unitat immediata inferior o superior.

Recorda aquestes relacions:

1 angle complet = 360 °

1 angle pla = 180°

1 angle recte = 90°

1 ° =60 minuts = 3600 segons

1 minut = 60 segons

Exemple:

- Forma complexa: A= 12º 40 ´ 32´´ B= 13´ 54´´ C= 120 º 23´´
- Forma incomplexa: D =35000´´ E= 23 º F = 34´

Exemple:

- Passarem l'angle D de l'exemple anterior a forma complexa:

35000´´	60	583´	60
500	583´	**43´**	**9 º**
200			
20´´			

D = 35000´´ = 583´ 20´´= 9 º 43´ 20´´

Exemple:

- A = 12 º 23´10´´ = 12. 3600´´+23.60´´+ 10´´ = 44590 ´´

Activitats proposades

10. Passa a forma complexa els següents angles

a) 12500´´ b) 83´ c) 230´´ d) 17600 ´´

11. Passa de forma incomplexa a forma complexa

a) 12º 34´ 40´´ b)13º 23´ 7 ´´ c) 49º 56´ 32 ´´ d) 1º 25´ 27 ´´

12. Completa la taula:

EXPRESSIÓ EN SEGONS	EXPRESSIÓ EN MINUTS I SEGONS	EXPRESSIÓ EN GRAUS, MINUTS I SEGONS
8465”		
	245 ´ 32 ´´	
		31 º 3´ 55 ´´

1.5. Suma i resta d'angles en el sistema sexagesimal

Per sumar angles expressats en el sistema sexagesimal, es col·loquen els sumands fent coincidir graus, minuts i segons, després es sumen les quantitats corresponents a cada unitat. Si els segons sobrepassen 60, es transformen en minuts i es sumen als minuts resultants de la primera fase de la suma. Si els minuts sobrepassen 60, els transformem en graus i es sumen als graus anteriorment obtinguts.

Exemple 7:

24º 43´ 29´´	77´´	60	73´	60
45º 29´ 48´´	**17´´**	1´	**13´**	1º
69º 72´ 77´´	Núm. minuts = 72´+ 1´= 73´		Núm. de graus= 69º + 1º = 70º	

24º 43´ 29´´ + 45º 29´ 48´´ = 69º 72´ 77´´ = 69º 73´ 17´´ = **70º 13´ 17´´**

Per restar dades de mesura d'angles, angles expressats en el sistema sexagesimal, es col·loquen el minuend i el subtrahend fent coincidir graus, minuts i segons, després restem. Si en alguna columna el minuend és menor que el subtrahend, es passa una unitat immediatament superior a la que presente el problema perquè la resta siga possible.

Exemple:

65º 48´ 50´´	
45º 29´ 48´´	65º 48´ 50´´ - 45º 29´ 48´´= **20º 19´ 2´´**
20º 19´ 2´´	

Exemple:

37º 60´	71´ 60´´	
~~38º~~ 12´ 14´´	~~37º~~ 72´ 14´´	37º 71´ 74´´
15º 15´ 15´´	15º 15´ 15´´	15º 15´ 15´´
		22º 56´ 59´´

38º 12´ 14´´ -15º 15´ 15´´= 37º 72´ 14´´- 15º 15´ 15´´= 37º 71´ 74´´- 15º 15´ 15´´=

= **22º 56´ 59´´**

Activitats proposades

13. Calcula:

34º 45´ 30´´ + 12 º 27´ 15´´ b) 16 º 30´ 1´´+ 12 º 13´ 12´´ + 2 º 1´
16 º 45' + 23 º 13'' + 30 º 20´ 30´´ d) 65 º 48´ 56´´ - 12 º 33´ 25´´
35 º 54´ 23´´ - 15 º 1´ 35'' e) 43 º 32´ 1 ´´ - 15 º 50´ 50''

1.6. Angles complementaris i suplementaris

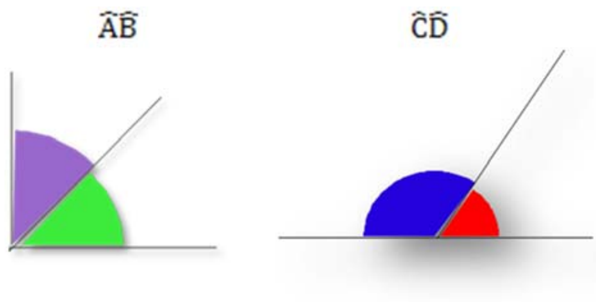
S'anomenenn **angles complementaris** a dos angles la suma dels quals és un angle recte (90 º)

S'anomenen **angles suplementaris** a dos angles la suma dels quals és un angle pla (180 º)

Exemple:

- En la figura apareixen dos exemples gràfics:

A i B són angles complementaris. C i D són suplementaris.

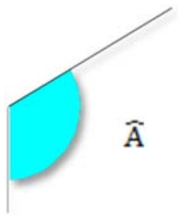


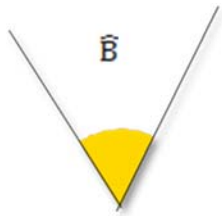
Exemple:

- L'angle $\widehat{A} = 12º$ és el complementari de $\widehat{B} = 78º$ i el suplementari de $\widehat{C} = 168º$

Activitats proposades

14. . Còpia al teu quadern i dibuixa el complementari de l'angle $\widehat{A}$ i el suplementari de l'angle $\widehat{B}$





15. Calcula els angles complementari i suplementari de:

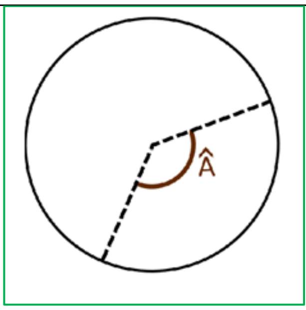
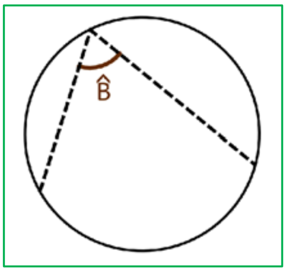
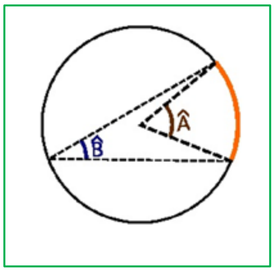
a) 35 º 54´ 23´´ b) 65 º 48´ 56´´ c) 43 º 32´ 1 ´´ d) 30 º 20´ 30´´

16. Indica si les següents parelles d'angles són complementaris, suplementaris o cap de les dues coses:

a) 15 º 34´ 20´´ i 164 º 25´ 40´´ b) 65 º 48´ 56´´ i 24 º 12´ 4´´ c) 43 º 32´ 1 ´´ i 30 º 26´ 59´´

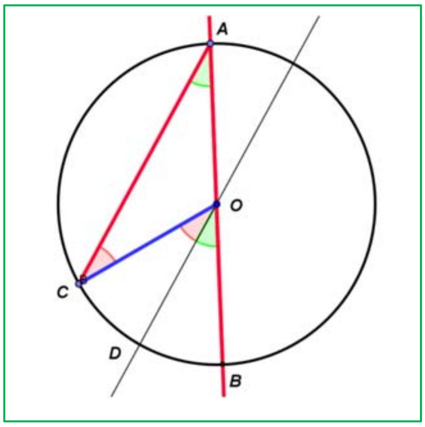
1.7. Angles en la circumferència

En una circumferència tenen especial importància els angles **centrals** (tenen el seu vèrtex al centre de la circumferència) i els angles **inscrits** (tenen el seu vèrtex a un punt de la circumferència).

		
Angle central	**Angle inscrit**	$\widehat{B} = \frac{\widehat{A}}{2}$

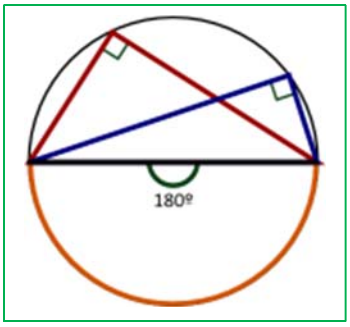
Es verifica a més que un angle inscrit mesura la mitat que un angle central que comprén el mateix arc de circumferència.

Demostració:



Tracem un angle inscrit en la circumferència *CAB* que tinga un costat que passe pel centre *O* de la circumferència. Tracem el seu central *COB*. El triangle *OAC* és isòsceles perquè dos dels seus costats són ràdis de la circumferència. Tracem per *O* una recta paral·lela a *AC*. L'angle *CAO* és igual a l'angle *DOB* perquè tenen els seus costats paral·lels. L'angle *ACO* és igual a l'angle *COD* per alterns interns entre paral·leles, i és igual a l'angle *CAO* per ser el triangle isòsceles. Per tant el central mesura el doble que l'angle inscrit.

Activitats proposades

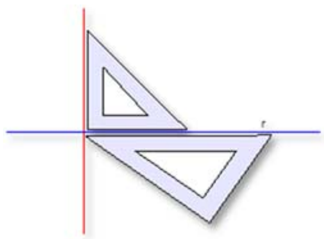


17. Un angle inscrit en la circumferència que comprén un diàmetre és un angle recte. Per què? Raona la resposta.

18. En quines posicions té un futbolista el mateix angle de tir que des del punt de penal?

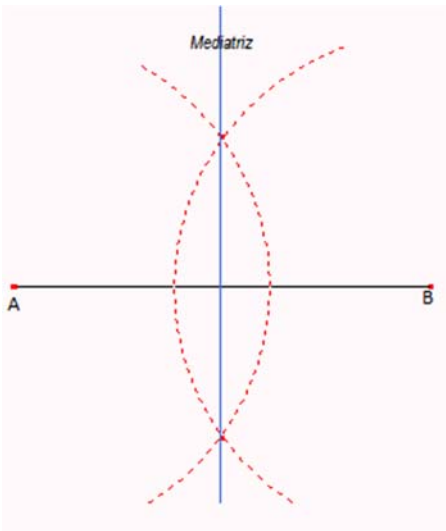
1.8. Rectes perpendiculars. Mediatriu d'un segment

Dues rectes són **perpendiculars** si formen un angle recte. . És un cas especial de rectes secants.



Per construir una recta perpendicular a una recta donada r, s'adapta un cartabó a r i sobre ell es recolza un dels costats que forma l'angle recte (catet) de l'escaire. L'altre catet de l'escaire ens serveix per realitzar la construcció desitjada. També poden canviar-se les funcions d'escaire i cartabó.

La **mediatriu** d'un segment AB és la recta perpendicular a AB traçada des del punt mitjà



Tots els punts de la mediatriu d'un segment equidisten, és a dir, estan a la mateixa distància, dels extrems.

Amb un compàs i un regle podem traçar fàcilment la mediatriu d'un segment donat. Hem de seguir els passos

Es dibuixa el segment AB.

Amb centre en A i amb radi R major que la meitat del segment, es traça un arc que talla al segment AB.

Amb el mateix radi es traça un arc de centre B.

S'uneixen els punts comuns dels dos arcs. Aquesta recta és la mediatriu.

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisores: Fernanda Ramos i Nieves Zuasti

Activitats proposades

19. És possible dibuixar tres rectes, secants dos a dos de manera que hi haja exactament: a) Una parella de rectes perpendiculars?   b) dues parelles de rectes perpendiculars?. c) les tres parelles de rectes siguen perpendiculars?

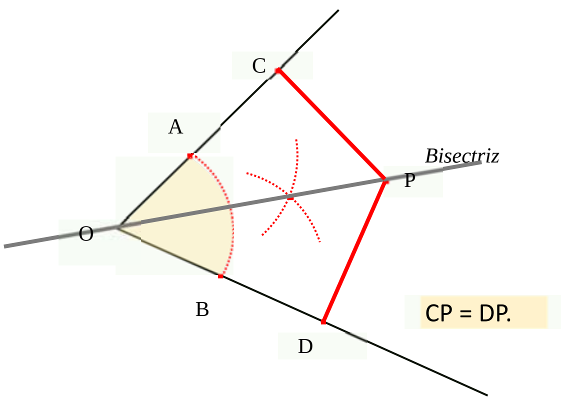
20. Dibuixa la mediatriu d'un segment de 6 cm de longitud.

21. Dibuixa un segment de longitud 8 cm, la seua mediatriu i una recta perpendicular al segment de partida que estiga a una distància de 5 cm del segment inicial. Quina posició ocupa aquesta recta respecte al segment de partida?

1.9. Bisectriu d'un angle

La **bisectriu d'un** angle és la recta que passa pel vèrtex de l'angle i el divideix en dues parts iguals.

Els punts de la bisectriu són equidistants als 2 costats de l'angle. Pots observar que en la figura de l'exemple adjunt que   CP = DP.



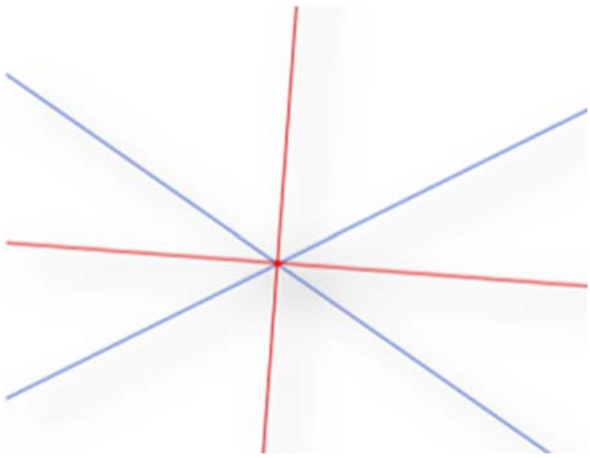
Per traçar la bisectriu d'un angle de vèrtex O, es traça un arc fent centre en O que determina dos punts, A i B. A continuació, amb centres en A i B respectivament i amb radi fix major que la meitat de la distància AB, tracem dos arcs. Aquests es tallen en un punt, que unit amb el vèrtex O ens dóna la bisectriu.

Dues rectes secants determinen quatre angles i les seues bisectrius es tallen conformant angles rectes entre elles.

Exemple:

- *En la figura inferior observem que les bisectrius dels angles que formen r i s són perpendiculars.*

Activitats proposades



22. Utilitzant un transportador d'angles, un regle i un compàs, dibuixa els angles que s'indiquen i la bisectriu de cada un d'ells:

a) 45º   b) 130º   c) 70º   d) 45º

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisores: Fernanda Ramos i Nieves Zuasti

1.10. Primers passos amb Geogebra

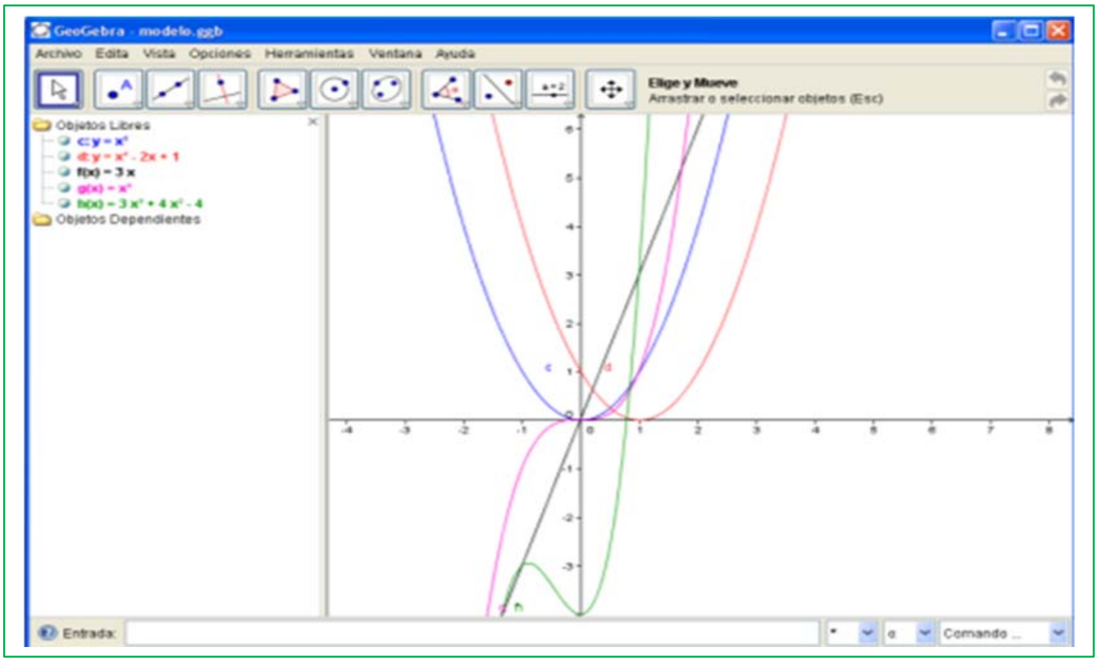
La finestra de Geogebra

En executar el programa *Geogebra* la finestra que apareix té molts components comuns amb qualsevol finestra de Windows.

L'element més característic d'aquest programa és la barra de **ferramentes en** què apareixen icones. Cada un d'ells s'activa en fer clic amb el ratolí sobre ell i es desactiva quan se selecciona un altre. Aquestes primeres icones que apareixen es corresponen amb la primera opció que trobem en el menú desplegable que s'obté en mantindre polsat el ratolí sobre cada un d'ells.

Una altra particularitat és que l'àrea de treball està dividida en dues parts la **finestra geomètrica**, on es realitzen les construccions geomètriques, i la **finestra algebraica** en la que apareixen característiques dels elements que es construeixen en la finestra geomètrica com són les coordenades dels punts, les longituds dels segments, l'àrea dels polígons, les equacions de rectes, circumferències, ….

També es poden realitzar operacions introduint els noms o el nom dels elements en el **Camp d'Entrada** que es troba a la part inferior de la finestra, els resultats apareixen en la finestra algebraica. Amb les opcions de **Visualitza** de la barra de menús es pot ocultar o mostrar, la finestra algebraica, el camp d'entrada així com els eixes i la quadrícula de la finestra geomètrica.

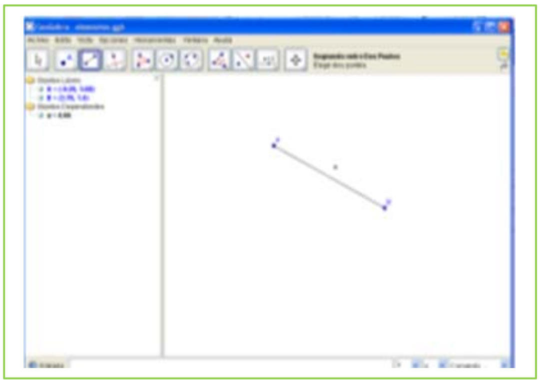


Les icones **Desfà** i **Refà** que es troben en la part superior dreta de la finestra geomètrica i com a opcions del menú **Edita** permeten eliminar o tornar a mostrar una acció realitzada.

El **menú contextual**, el que s'obté en fer clic amb el botó dret del ratolí sobre l'objecte de la finestra geomètrica o de l'algebraica, té múltiples possibilitats, permet entre altres funcions esborrar, ocultar, canviar el nom i modificar l'aparença dels objectes construïts.

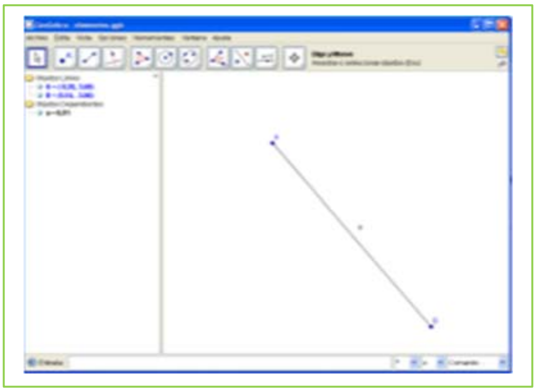
Elements geomètrics

Activitats resoltes



Abans de començar comprova en l'opció del menú **Visualitza** que està activada la finestra algebraica i desactiva eixos i quadrícula.

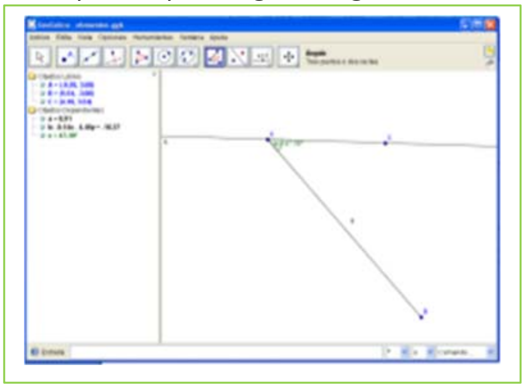
- Amb la ferramenta **Nou punt** dibuixa un punt en la finestra geomètrica, el sistema el denomina *A* i les seues coordenades apareixen a la finestra algebraica, en la carpeta dels objectes lliures.



- Dibuixa un altre punt *B* i amb la ferramenta **Segment entre dos punts** traça el segment, *a*, que passa pels punts *A* i *B*. En la finestra algebraica apareix la longitud del segment en la carpeta d'objectes dependents.

- Amb la ferramenta **Desplaça**, la primera de la barra de ferramentes, agafa el punt *B* i canvia la seua posició, observa de quina forma canvien les seues coordenades i la longitud del segment.

- Dibuixa un altre punt *C,* que no pertanga al segment, i amb la ferramenta **Recta que passa per 2 punts** traça la recta, *b*, que passa per *A* i *C*.

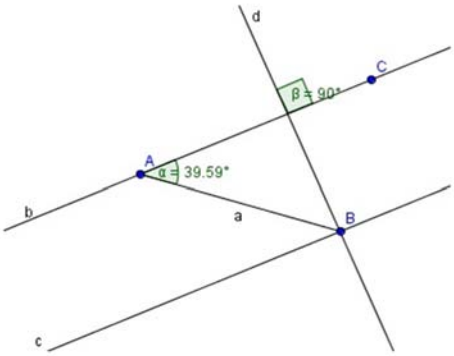


- Activa la ferramenta **Angle** i assenyala amb el ratolí els punts *B*, *A* i *C*, obtens la mesura de l'angle que has assenyalat. L'orde per a assenyalar els punts *B* i *C* ha de ser el contrari al de les agulles del rellotge.

Rectes paral·leles i perpendiculars

Activitats resoltes

Amb la ferramenta **Recta paral·lela** traça una recta, *c*, que passa pel punt *B* i és paral·lela a la recta *b* que passa pels punts *A* i *C*.



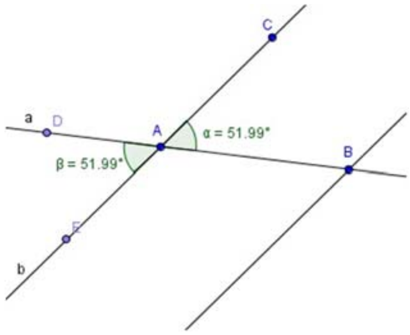
- Utilitza la ferramenta **Recta perpendicular** per a traçar una recta, *d*, que passa pel punt *B* i és perpendicular a la recta *b*.

- Calcula la mesura **de l'angle** que formen les rectes *b* i *d*.

- Amb la ferramenta **Desplaça**, mou els punts *A, B* i *C* i observa que canvien de posició però es mantenen les propietats geomètriques de la construcció, per exemple, les rectes *b* i *c* romanen paral·leles entre si i perpendiculars a la recta *d*.

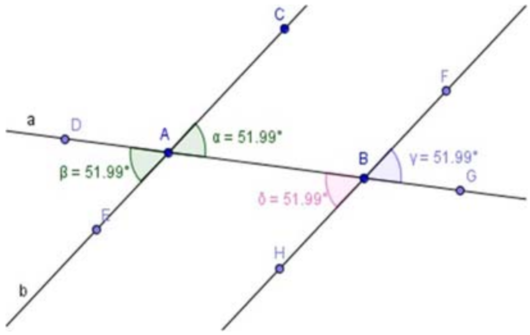
Angles

Activitats resoltes



Obri una nova finestra de *Geogebra,* en el menú **Visualitza** desactiva **Eixos** i **Quadricula**

- Determina tres **punts** *A*, *B* i *C*, no alineats, la **recta**, *a*, que passa per *A* i *B* i la recta, *b*, que passa pels punts *A* i *C*.
- Traça la **recta paral·lela**, *c***,** que passa per *B* i és paral·lela a la recta *a*.
- Calcula la mesura de l'angle**,** α, que determinen els punts *B, A* i *C, assenyalant* els punts *B* i *C* en orde contrari al sentit de les agulles del rellotge.
- Tria un punt *D* de la recta *a* i un altre *E* de la recta *b* per a determinar i mesurar un angle, β, oposat *pel vèrtex* a l'angle α.



- Determina i mesura un angle γ tal que els angles α i γ siguen corresponents *entre paral·leles* i amb l'opció **propietats** del menú contextual canvia el seu color.
- Determina i mesura un angle δ tal que els angles α i δ siguen alterns *interns entre paral·leles* i amb l'opció **propietats** del menú contextual canvia el seu color.
- Amb la ferramenta **Desplaça**, mou els punts *A, B* i *C* i observa que canvien de posició però els angles α, β, γ i δ mesuren el mateix.
- Indica dos angles dels què has dibuixats que siguen alterns *externs entre paral·leles*.

Activitats proposades

23. Repeteix l'activitat resolta d'elements geomètrics. Col·loca't damunt del segment *a*, estreny el botó dret, entra en **Propietats** i modifica el color, fes que siga roig. El mateix amb la recta *b*, però ara pinta-la en blau. Mou el punt *B* per observar com es modifiquen les longituds i l'angle.

24. Dibuixa amb *Geogebra* quatre rectes de manera que hi haja dues paral·leles, dos perpendiculars i dos secants no perpendiculars.

25. Dibuixa amb *Geogebra* dues rectes paral·leles tallades per una secant i mesura tots els angles que es formen.

26. Dibuixa amb *Geogebra* dos angles amb costats paral·lels i comprova que mesuren el mateix.

27. Dibuixa amb *Geogebra* dos angles amb costats perpendiculars i comprova que mesuren el mateix.

28. Dibuixa amb *Geogebra* dos angles que siguen complementaris i dos que siguen suplementaris.

29. Dibuixa amb *Geogebra* un angle inscrit en la circumferència i el central que comprén el mateix arc. Comprova que l'angle inscrit mesura la mitat del central. Mou un dels punts sobre la circumferència i comprova que aqueixa relació roman.

2. POLÍGONS

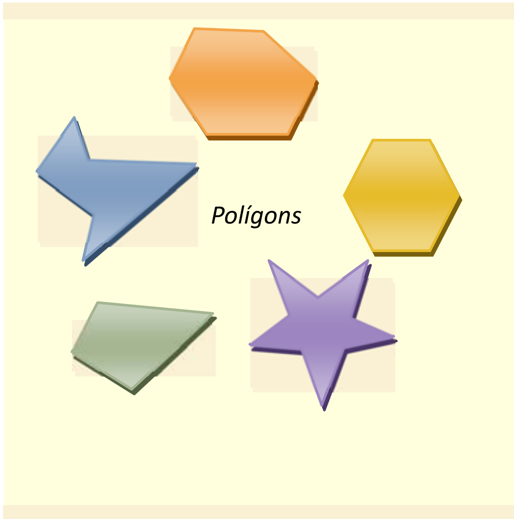
2.1. Línies poligonals i polígons.

Una línia **poligonal** és una col·lecció de segments consecutius. Açò vol dir que el primer segment té un extrem comú amb el segon. L'extrem lliure del segon és comú amb el tercer i així successivament.

Si els extrems lliures del primer i de l'últim coincideixen, es diu que la línia poligonal és tancada. En cas contrari, és *oberta*.

Un **polígon** és una regió del pla limitada per una línia poligonal tancada.

Exemple:



2.2. Elements d'un polígon: costats, angles, vèrtexs, diagonals

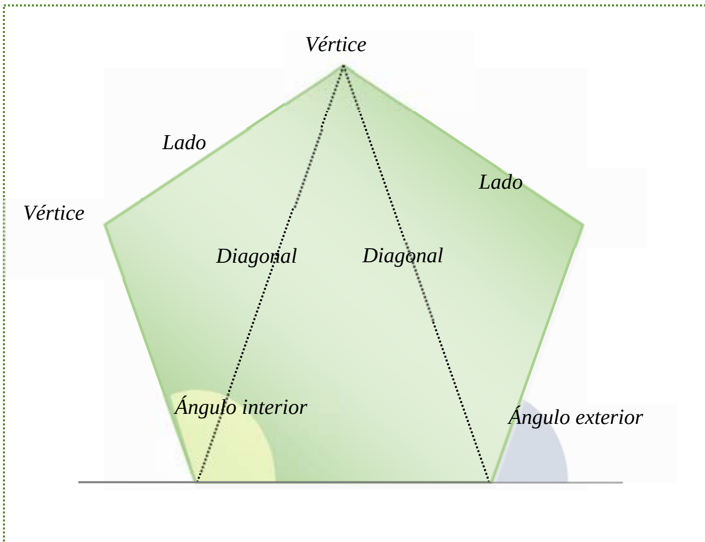
S'anomena **costat** d'un polígon a cada un dels segments que formen la línia poligonal que el limita.

Els angles limitats per dos costats consecutius són els angles **interiors** del polígon.

Els angles limitats per un costat i la prolongació del costat consecutiu són els angles **exteriors** del polígon

Els punts en què es tallen els costats s'anomenen **vèrtexs.**

Cada un dels segments que uneix dos vèrtexs no consecutius s'anomena **diagonal.**



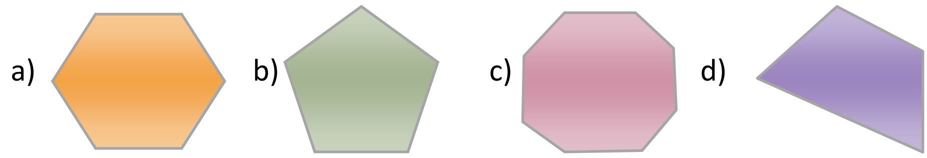
Qualsevol polígon té el mateix nombre de costats, d'angles interiors i de vèrtexs.

Dos polígons són **iguals** si tenen els costats i els angles iguals. En alguns casos n'hi ha prou amb saber que es compleixen condicions menys exigents (anomenads criteris d'igualtat) per a garantir-lo.

Veurem per exemple tres criteris d'igualtat de triangles.

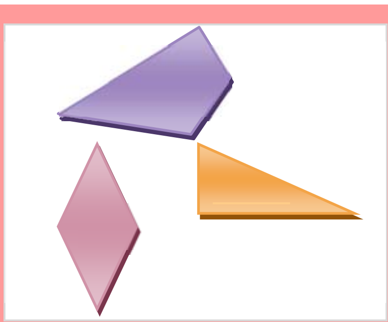
Activitats proposades

30. Copia els dibuixos següents i traça totes les diagonals de cada polígon:



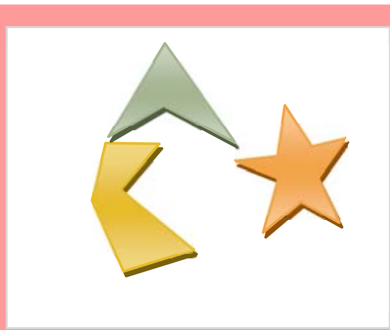
2.3. Classificació dels polígons

Segons els *angles* els polígons es classifiquen en dos grans grups:



Convexos

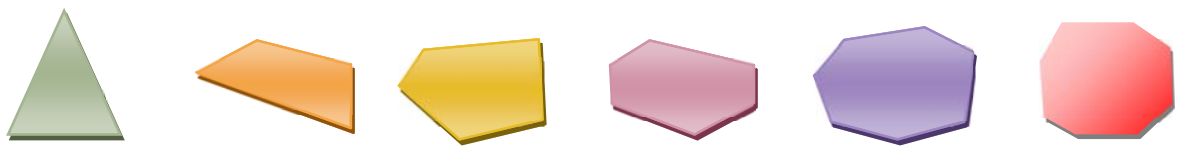
Si tots els seus angles són convexos.



Còncaus

Si almenys un dels seus angles és còncau

Pel nombre *de costats,* els polígons es classifiquen en



Triangle	**Quadrilàter**	**Pentàgon**	**Hexàgon**	**Heptàgon**	**Octògon**
Tres costats	*Quatre costats*	*Cinc costats*	*Sis costats*	*Set costats*	*Huit costats*

Si un polígon té tots els seus angles iguals s'anomena **equiangle** i si té tots els seus costats iguals s'anomena **equilàter**.

Els polígons que tenen tots els seus angles interiors i els seus costats iguals es denominen regulars**.** Els polígons regulars són doncs equilàters i equiangles. Si almenys una d'aquestes condicions s'incompleix, el polígon s'anomena **irregular.**

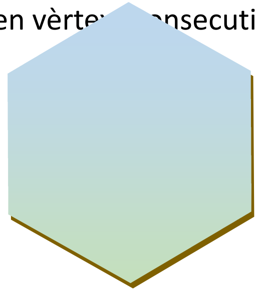
En un polígon regular apareixen nous elements:

Centre que és un punt que equidista dels vèrtexs.

Radi que és un segment que uneix el centre amb un vèrtex del polígon.

Angle central que és el menor dels angles que determinen dos radis que uneixen vèrte nsecutius.

Apotema que és el segment que uneix el centre amb el punt mitjà d'un és perpendicular al costat.



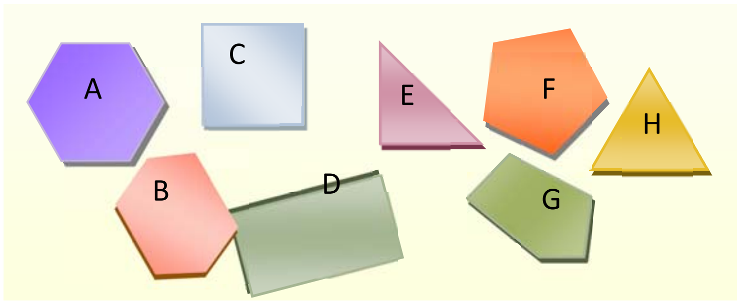
Activitats proposades

31. Dibuixa, si és possible, un polígon exemple de:

a)triangle còncau b) pentàgon convex

c) hexàgon còncau d) quadrilàter convex regular.

32. Observa la figura adjunta i indica quins polígons són equiangles, equilàters, regulars i irregulars. Pots copiar la taula inferior en el teu quadern i completar-la



	A	B	C	D	E	F	G	H
EQUIANGLE								
EQUILÀTER								
REGULAR								
IRREGULAR								

33. Dibuixa en el teu quadern l'apotema de:

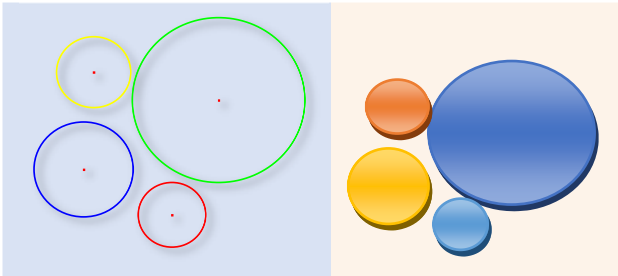
a) un triangle equilàter, b) un quadrat, c) un hexàgon regular.

3. CIRCUMFERÈNCIA I CERCLE

3.1. Circumferència i cercle

Una **circumferència** és una línia tancada i plana els punts de la qual equidisten d'un punt interior a la mateixa anomenat centre.

La porció de pla limitat per una circumferència s'anomena **cercle.**



Circunferencias *Círculos*

3.2. Elements d'una circumferència.

S'anomenen elements d'una circumferència a certs punts i segments singulars de la mateixa. Els descrivim a continuació

El **centre** és el punt interior equidistant de tots els punts de la circumferència.

El **radi** d'una circumferència és el segment que uneix el centre de la circumferència amb un punt qualsevol de la mateixa. S'anomena amb la lletra r o bé amb els seus punts extrems. La mesura del radi és constant.

El **diàmetre** d'una circumferència és el segment que uneix dos punts de la circumferència i passa pel centre. El diàmetre mesura el doble del radi.

Una **corda** és un segment que uneix dos punts qualssevol de la circumferència. El diàmetre és la corda de longitud màxima.

Cada una de les parts en què una corda divideix a la circumferència s'anomena **arc**.

Un arc de circumferència es denota amb el símbol $\frown$ sobre les lletres que designen els punts extrems de l'arc. Per exemple l'arc d'extrems A, B s'escriu $\widehat{AB}$. Un cas particular és la semicircumferència, arc delimitat pels extrems d'un diàmetre.

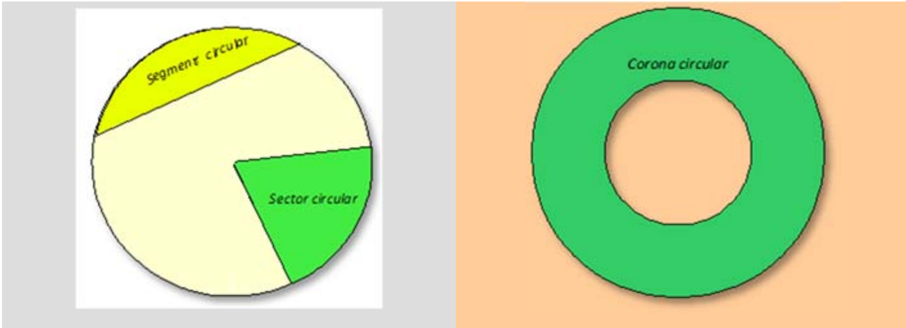
Autora: Milagros Latasa Asso
Revisores: Fernanda Ramos i Nieves Zuasti

3.3. Sector circular i segment circular. Corona circular.

Un **sector circular** és la porció de cercle compresa entre dos radis.

Un segment **circular** és la porció de cercle comprés entre una corda i l'arc que té els seus mateixos extrems.

Una **corona circular** és la superfície compresa entre dos cercles concèntrics.



L'angleque formen els dos radis que determinen un sector circular, s'anomena angle central. Si l'angle central és pla, el sector circular és un semicercle.

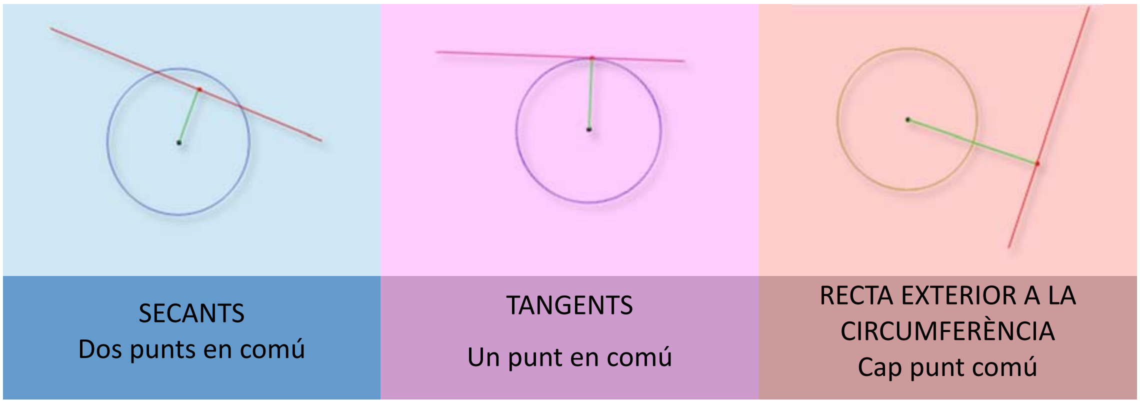
Activitats proposades

34. Dibuixa una circumferència de radi 4 cm i en ella un sector circular de 30º d'amplitud.

35. En la circumferència anterior, indica si és possible traçar una corda en cada un dels casos següents i fes-lo en cas afirmatiu: a) de 4 cm de longitud, b) de 8 cm, c) major de 8 cm.

3.4. Posicions entre una recta i una circumferència.

Una recta pot tindre dos punts comuns amb una circumferència, un o cap.

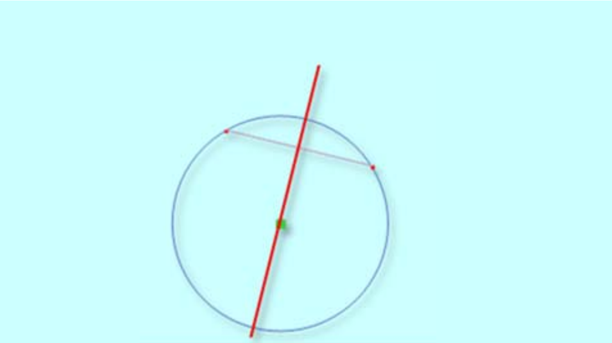


El punt comú d'una circumferència i una recta tangents, s'anomena **punt de tangència**

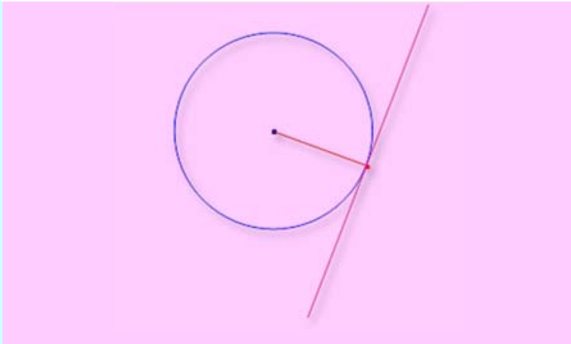
La distància del centre de la circumferència a una recta és menor, igual o major que el radi, depenent de que siguen secants, tangents o exteriors

3.5. Propietats importants de les circumferències i els seus elements

Algunes construccions geomètriques com el traçat de la circumferència que passa per tres punts donats, la busca del centre d'un arc de circumferència o el dibuix d'una recta tangent a una circumferència quan es coneix el punt de tangència, es poden resoldre gràcies a aquestes propietats que seleccionem



Les mediatrius de totes les cordes d'una circumferència passen pel centre.



La recta tangent a una circumferència és perpendicular al radi que passa pel punt de tangència.

Activitats proposades

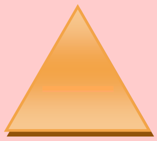
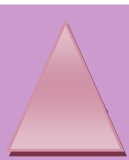
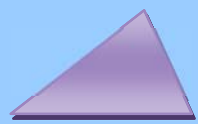
36. Dibuixa tres punts que no estiguen en línia recta de manera que el primer estiga a 2 cm de distància del segon i el segon a 3 cm del tercer. Finalment traça la circumferència que passe pels tres.

4. TRIANGLES

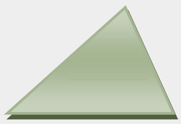
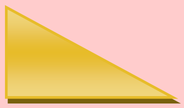
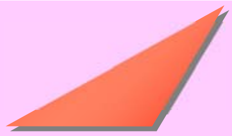
Com hem vist abans, un triangle és un polígon de tres costats. Estudiarem en aquest paràgraf dues classificacions dels triangles, dues propietats importants comunes a tots els triangles i descobrirem les anomenades rectes i punts notables d'un triangle.

4.1. Classificació dels triangles

Segons els *costats* els triangles es classifiquen en

		
Equilàters	**Isòsceles**	**Escalens**
Tenen tres costats iguals	*Tenen exactament dos costats iguals*	*Els tres costats són desiguals*

Segons els *angles* els triangles es classifiquen en

		
Acutangles	**Rectangles**	**Obtusangles**
Tenen tres angles aguts	*Tenen un angle recte*	*Tenen un angle obtús*

En un triangle rectangle els costats que formen l'angle recte s'anomenen *catets* i el tercer es denomina *hipotenusa*.

4.2. Propietats fonamentals d'un triangle.

La suma dels angles d'un triangle és 180º.

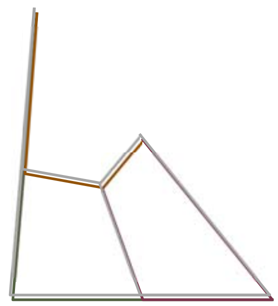
D'aquesta propietat es dedueixen les conseqüències següents:

Els angles aguts d'un triangle rectangle són complementaris.
Cada angle d'un triangle equilàter val 60º.

En un triangle qualsevol costat és sempre menor que la suma dels altres dos i major que la seua diferència.

És precís tindre en compte aquesta propietat per a saber si tres segments donats poden o no ser els costats d'un triangle

Activitats proposades



37. Dibuixa en un paper un triangle, divideix-lo en tres parts i pinta-les amb tres colors diferents. Després retalla-les i forma amb elles un angle pla. D'aquesta manera, hauràs demostrat que la suma dels seus angles és 180º

38. Calcula el valor del tercer angle d'un triangle si dos d'ells mesuren respectivament:

a) 30º i 80º b) 20 º i 50º c) 15º i 75º d) 40 º 30 ´ i 63 º 45 ´.

39. Classifica, segons els seus angles, els triangles de l'exercici anterior.

40. Construeix un triangle rectangle isòsceles.

41. Indica raonadament si és possible construir un triangle els costats del qual mesuren:

a) 5 cm, 4 cm i 3 cm b) 10cm, 2 cm i 5 cm c) 2dm, 2dm i 4 dm d) 13 m, 12 m i 5 m

4.3. Rectes i punts notables d'un triangle

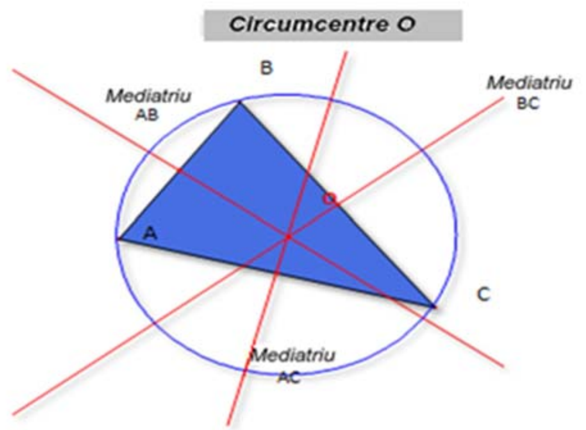
En un triangle es defineixen quatre tipus de rectes denominades, genèricament, rectes notables. Aqueixes rectes són: mediatrius, bisectrius, mitjanes i altures.

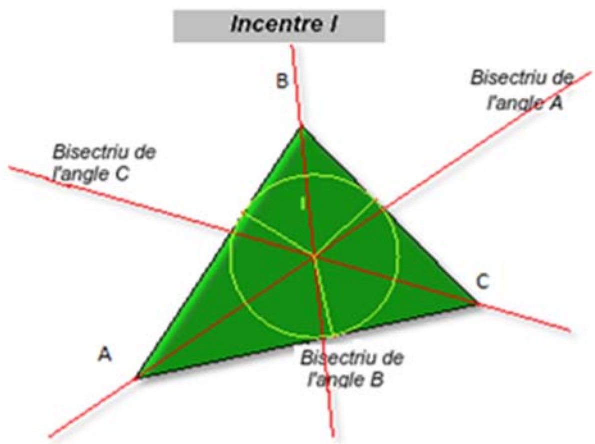
En tot triangle hi ha tres rectes de cada un dels tipus mencionats i tenen la propietat de passar per un mateix punt. Els punts d'intersecció d'aquests grups de rectes es denominen punts notables

Les mediatrius dels tres costats del triangle concorren en un punt anomenat **circumcentre** (O en la figura esquerra de l'exemple 14). El punt equidista dels vèrtexs i, és el centre de la circumferència circumscrita al triangle.

Les bisectrius dels angles d'un triangle concorren en un punt anomenat incentre (I en la figura de l'esquerra de l'exemple 14). El punt equidista dels costats del triangle i és el centre de la circumferència inscrita en el triangle.

Exemple:



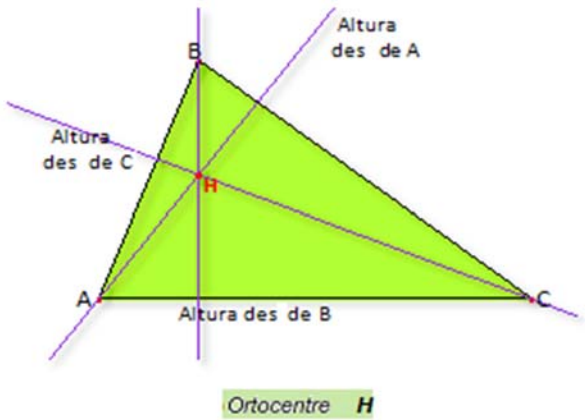


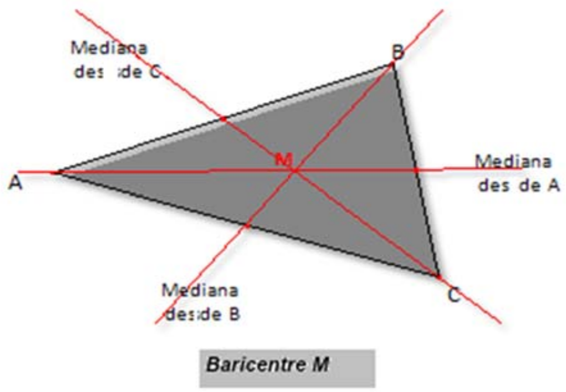
S'anomena **altura d'un triangle** a la recta que passa per un vèrtex i és perpendicular al costat oposat.

Les tres altures d'un triangle es tallen en l'ortocentre**.**

S'anomena **mitjana d'un triangle** a la recta que passa per un vèrtex i pel punt mitjà del costat oposat. El punt de tall de les mitjanes s'anomena **baricentre**.

Exemple:





Activitats proposades

42. Dibuixa un triangle equilàter de 10 cm de costat i comprova que tots els punts notables coincideixen.

43. Calcula el circumcentre d'un triangle rectangle. On es troba?

44. Calcula l'ortocentre d'un triangle obtusangle.

4.4. Igualtat de triangles.

Dos triangles són iguals si els tres costats i els tres angles són iguals.

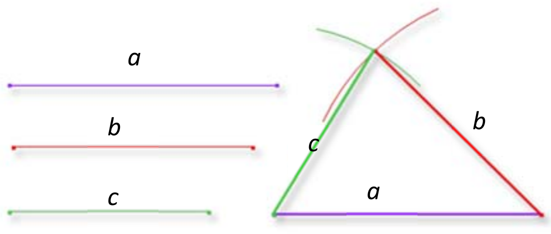
Per comprovar que dos triangles són iguals és prou comprovar que es compleix un dels tres criteris següents:

1º Tenen els tres costats iguals.

És possible construir un triangle prenent com a punt de partida les longituds dels tres costats: *a, b, c*

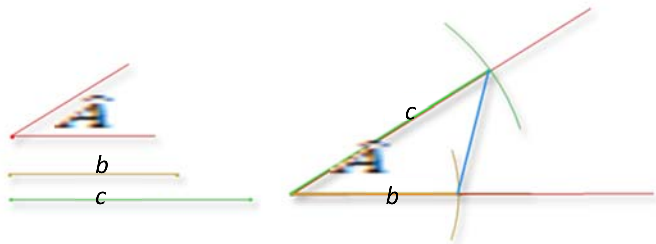
Per a això, es dibuixa un segment de longitud igual a un d'ells (*a* per exemple). Els seus extrems seran dos vèrtexs del triangle.

A continuació des d'un extrem es traça un arc amb radi *b* i des de l'altre es traça un arc amb radi *c*. El punt comú dels dos arcs és el vèrtex que falta:

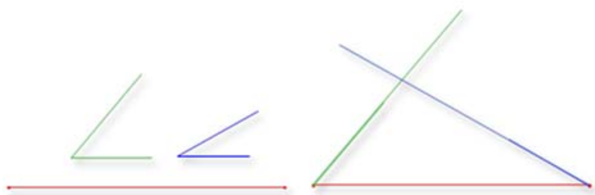


2º Tenen dos costats iguals i igual l'angle comprés entre ambdós.

Posem que les dades són les longituds b i c i l'angle $\widehat{A}$. Es dibuixa en primer lloc l'angle$\widehat{A}$ El seu vèrtex és un vèrtex del triangle. Sobre els seus costats es porten amb un compàs les mesures b i c, aquests arcs són els dos vèrtexs restants.



3º Tenen un costat igual adjacent a dos angles també iguals.



Suposem conegut el costat a i els angles$\widehat{B}$i$\widehat{C}$. Podem construir el triangle amb facilitat també en aquest cas.

Es dibuixa en primer lloc el segment *a*. Els seus extrems són dos vèrtexs del nostre triangle. En els seus extrems, es dibuixen els angles$\widehat{B}$i$\widehat{C}$de manera que el segment *a* siga un costat de cada un d'ells. Finalment, es prolonguen els costats de$\widehat{B}$i$\widehat{C}$fins que es tallen.

Activitats proposades

45. Dibuixa un triangle als casos següents:

a)Els seus costats mesuren 12 cm, 10 cm i 8 cm

b) Un costat mesura 10 cm i els seus angles adjacents 30º i 65º.

c) Dos costats mesuren 10 cm i 8 cm i l'angle comprés entre ells 50º.

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisores: Fernanda Ramos i Nieves Zuasti

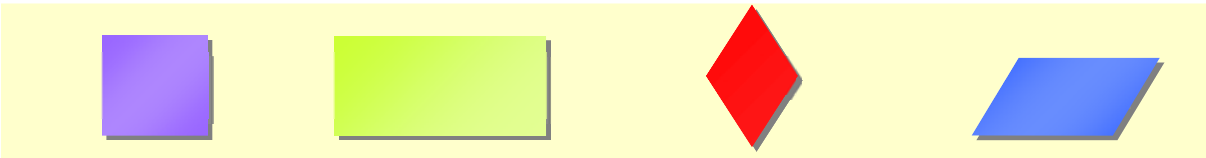
6 . QUADRILÀTERS

Un quadrilàter és un polígon de quatre costats. Com altres polígons, es classifiquen en dos grans grups depenent del tipus d'angles que tinguen: còncaus i convexos. A més, podem distingir diversos tipus de quadrilàters convexos.

6.1. Classificació dels quadrilàters convexos.

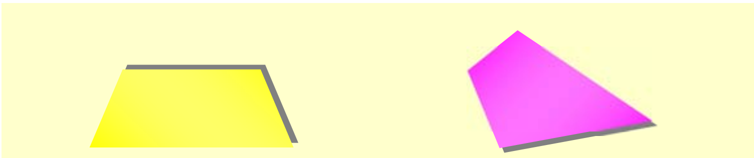
Els quadrilàters convexos es classifiquen en **paral·lelograms** i **no paral·lelograms.**

Un paral·lelogram és un quadrilàter que té els costats paral·lels i iguals dos a dos. També els seus angles són iguals dos a dos. Hi ha quatre tipus de paral·lelograms:



Quadrat	Rectangle	Rombe	Romboide
Els quatre costats i els quatre angles són iguals	*Els seus costats són distints i els seus quatre angles iguals*	*Els quatre costats són iguals i els angles distints*	*Costats i angles distints*

Els quadrilàters no paral·lelograms poden ser de dos tipus:

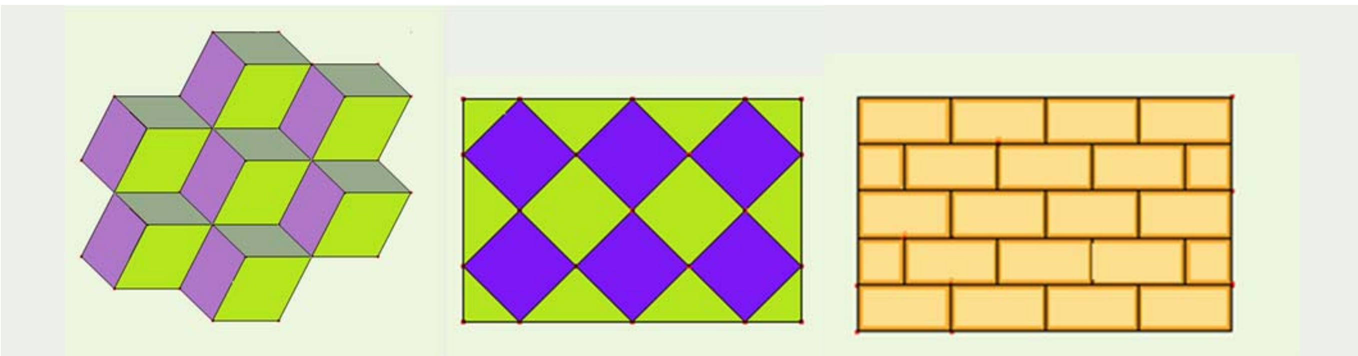


Trapezis	Trapezoides
Tenen exactament dos costats paral·lels	*No tenen cap parella de costats paral·lels*

A més, si un trapezi té dos costats iguals, s'anomena trapezi isòsceles i si té dos angles rectes, s'anomena trapezi rectangle.

Exemple:

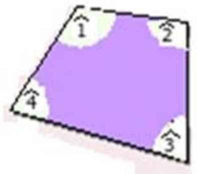
Els paral·lelograms tenen moltes i variades aplicacions en disseny i construcció



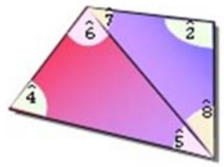
6.2. Propietats dels quadrilàters

1. La suma dels angles d'un quadrilàter és 360º.

En traçar una de les diagonals d'un quadrilàter queda dividit en dos triangles. La suma dels angles d'ambdós coincideix amb la suma dels angles del quadrilàter.



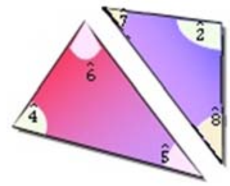
Anomenem els angles del quadrilàter



Dibuixem una diagonal i anomenem també els nous angles que apareixen :

$\hat{5}, \hat{6}, \hat{7}$ y $\hat{8}$

$\hat{6}+\hat{7}=\hat{1}$ $\quad$ $\hat{5}+\hat{8}=\hat{3}$



$\hat{4}+\hat{5}+\hat{6}= 180^\circ$

$\hat{2}+\hat{7}+\hat{8}= 180^\circ$

$\hat{4}+\hat{5}+\hat{6}+\hat{2}+\hat{7}+\hat{8}=$

$=\hat{4}+\hat{3}+\hat{2}+\hat{1}=$

$= 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$

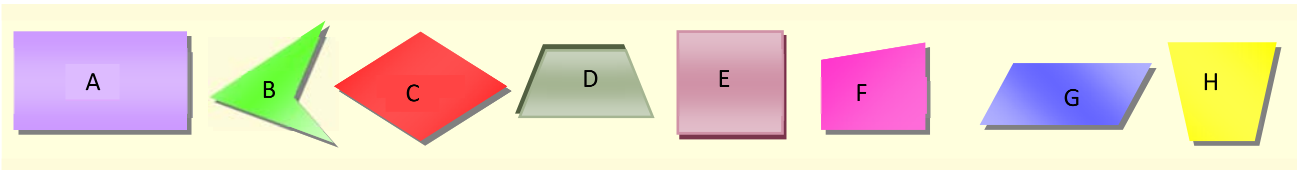
Altres propietats dels quadrilàters són

2. La diagonal d'un paral·lelogram el divideix en dos triangles iguals.
3. Les diagonals d'un paral·lelogram es tallen al punt mitjà.
4. Les diagonals tant d'un rombe com d'un quadrat, són perpendiculars.
5. En unir els punts mitjans d'un quadrilàter, es forma un paral·lelogram.

Activitats proposades

46. Fixa't en el dibuix i indica quins quadrilàters són:

a) còncaus b) paral·lelograms c) isòsceles d) trapezis e) trapezoides f) regulars



47. Esbrina quin tipus de paral·lelogram apareix si s'uneixen els punts mitjans de:

a)un quadrat b) un rombe c) un rectangle d) un trapezi e) un trapezoide.

48. Els dos angles aguts d'un romboide mesuren 32º. Quant mesura cada un dels angles obtusos?

CURIOSITATS. REVISTA

EUCLIDES, UN GRAN GEÒMETRA

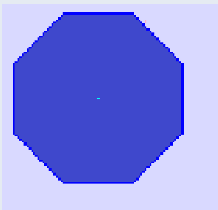
En el segle III a. C. Euclides ensenyava Matemàtiques en l’escola d’Alexandria. La seua obra principal van ser Els Elements, que han sigut durant segles la base de la geometria.
Les aportacions més interessants d’Euclides van ser definicions i postulats com aquests:

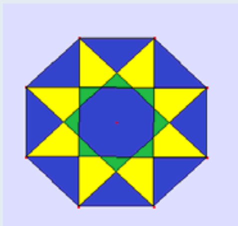
- “Un punt és allò que no té parts”
- “Una línia és una longitud sense amplària”
- “Les extremitats d’una línia són punts”

POLÍGONS REGULARS ESTRELATS

Un polígon regular estrelat pot construir-se a partir del regular convex unint vèrtexs no consecutius de forma contínua.

Si N és el nombre de vèrtexs del polígon regular convex i M el bot entre vèrtexs, la fracció N/M ha de ser irreductible, en cas contrari no es genera el polígon estrelat.



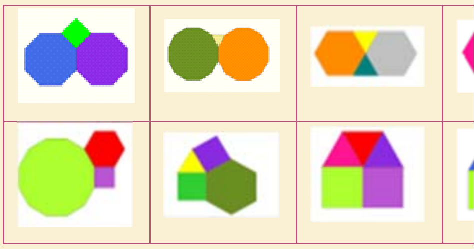


MOSAICS

Saps què és un mosaic?. S'anomena mosaic a tot recobriment del
superposar-se, ni poden deixar buits sense recobrir .

Els més senzills són els mosaics **regulars** formats per polígons regul
possibilitats per a construir mosaics regulars. Busca-les.

Un mosaic **semiregular** és el format per polígons regulars de manera
distribució. Només hi ha huit

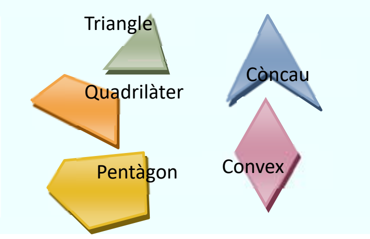
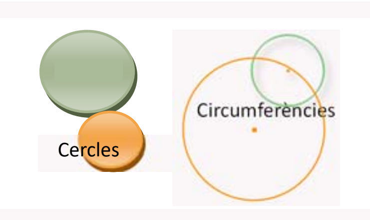


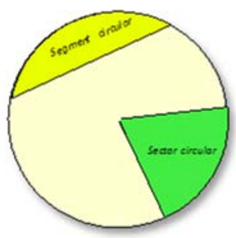
GRACE CHISHOLM YOUNG

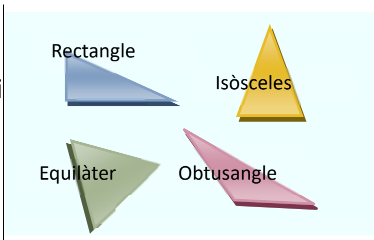
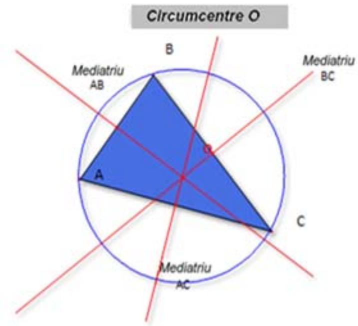
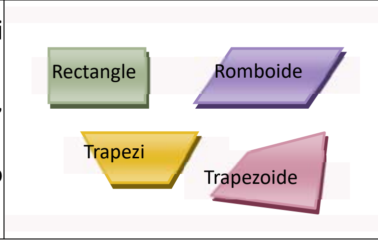
(1868 - 1944)

Grace Chisholm Young v
incloure en la seua obr
“Primer llibre de Geometria
múltiples diagrames d
figures tridimensionals per
ser retallades i construïdes
La seua innovadora forma d
plantejar l’ensenyança de l
Geometria, hi ha transcendi
fins al moment actual.

RESUM

		Exemples
Elements del pla	Els elements fonamentals del pla són: punts, rectes, semirectes, segments	
Posició relativa de dues rectes	Dues rectes distintes poden ser paral·leles o secants	
Polígons. Elements d'un polígon	Un polígon és una línia poligonal tancada. Els elements d'un polígon són costats, vèrtexs, diagonals, angles interiors i exteriors	
Classificació dels polígons	Pel tipus d'angles còncaus i convexos. Regulars o irregulars segons tinguen tots els seus costats i angles iguals o no. Pel nombre de costats: triangles, quadrilàters, pentàgons, hexàgons,...	
Circumferència i cercle	Una circumferència és una línia tancada que compleix que tots els seus punts estan a la mateixa distància d'un punt fix anomenat centre. Un cercle és la part de pla que tanca una circumferència.	
Elements d'una circumferència	Centre, radi, diàmetre, corda, arc.	

Sector circular, segment circular i corona circular	Un sector circular és la porció de cercle compresa entre dos radis. Un segment circular és la porció de cercle comprés entre una corda i l'arc que té els seus mateixos extrems. Una corona circular és la superfície compresa entre dos cercles concèntrics.	

Classificació de triangles	Segons els angles acutangles, rectangles i obtusangles. Segons els costats: equilàters, isòsceles i escalens.	
Propietats	La suma dels angles d'un triangle és 180°. En tot triangle, qualsevol costat és menor que la suma dels altres dos.	
Rectes i punts notables en un triangle	Les mediatrius concorren en el circumcentre, les bisectrius en l'incentre, les altures en l'ortocentre i les mitjanes en el baricentre.	
Classificació dels quadrilàters	Paral·lelograms si els seus costats són paral·lels i iguals dos a dos i no paral·lelograms. Els paral·lelograms es divideixen en quadrats, rectangles, rombes i romboides. Els no paral·lelograms poden ser trapezis o trapezoides.	

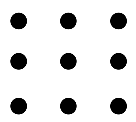
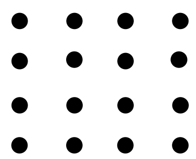
EXERCICIS I PROBLEMES

1. Dibuixa una recta horitzontal i una altra que forme un angle de 60 º amb ella.
2. Dibuixa quatre rectes de manera que tres d'elles passen per un mateix punt i la quarta siga paral·lela a una d'elles.
3. Dibuixa dues rectes secants i un segment que tinga un extrem en cada una d'elles.
4. Si dues rectes *r* i *s* són perpendiculars i traces una tercera recta *p* paral·lela a una d'elles, per exemple a *r* ,com són les rectes s i *p*? . Fes un dibuix.
5. Un angle medeix ¾ de recte. Expressa aquesta mesura en graus, minuts i segons.
6. Calcula :

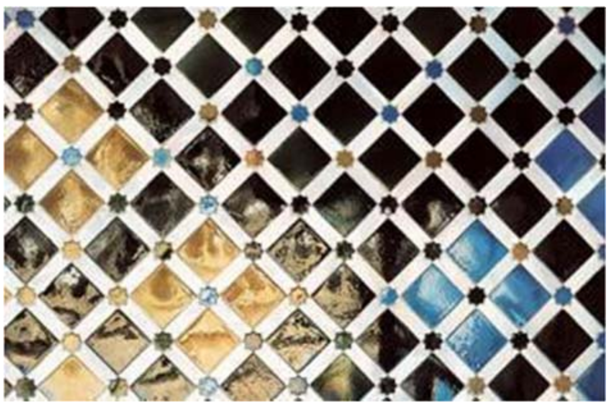
   a) 54º 25´ 10´´ + 32 º 17´ 14´´ b) 14 º 30´ 15´´+ 62 º 1´ 16´´ + 42 º 1´´

   c) 15 º 23' + 73 º 10'' + 70 º 28´ 38´´ d) 45 º 45´ 45´´ - 12 º 48´ 85´´

   e) 67 º 4´ 23´´ - 15 º 4´ 37'' f) 33 º 32´ 1 ´´ - 15 º 35´ 20''
7. La suma de dos angles és 125º 46' 35''. Si un d'ells medeix 57º 55' 47'', quant medeix l'altre?
8. Cinc guardes de seguretat han de repartir-se per igual un servei de vigilància de 24 hores. Expressa en hores i minuts el temps que ha de romandre vigilant cada un d'ells
9. En un tauler de 3 × 3, quin és el nombre més gran de costats que pot tindre un polígon? I en un de 4 × 4?

10. La fotografia representa un mosaic de L'Alhambra de Granada. Observa que està constituït per motius geomètrics.
    a. Aquest mosaic té dos tipus de polígons regulars: Quins són?
    b. Descriu el polígon blanc. És còncau o convex?
    c. El mosaic de la fotografia no és un mosaic regular. Si ho fora estaria format únicament per polígon regulars tots iguals.
    d. Descriu un octògon regular: nombre de costats, quant mesura el seu angle central, quant mesura els seus angles interiors…



11. Calcula el nombre de diagonals que tenen els polígons següents:

a) Rombe b) trapezi c) trapezoide d) quadrat e) rectangle f) hexàgon.

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisores: Fernanda Ramos i Nieves Zuasti

12. Dibuixa un hexàgon regular i un quadrat. Marca el centre i situa en cada un d'ells dues apotemes i dos radis.

13. Dibuixa un decàgon i totes les seues diagonals.

14. Completa:

    a. Un triangle rectangle té un angle ………………….

    b. Un triangle……………………………. té un angle obtús.

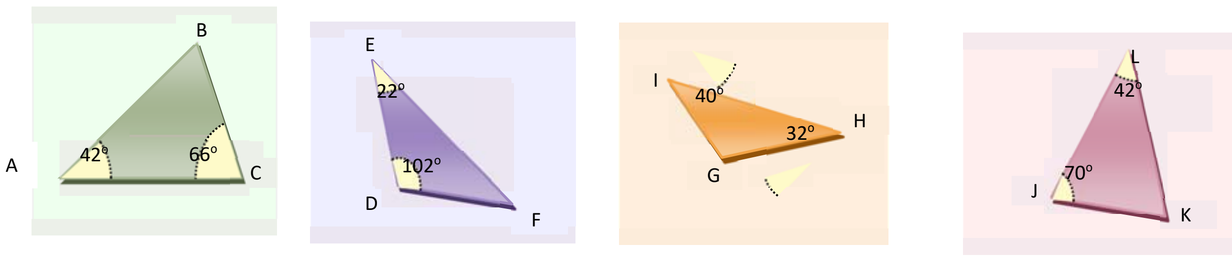
    c. Un triangle……………………………. té els tres angles aguts.

15. Construeix un triangle sabent que $a = 9\ cm$, $b = 7\ cm$ i l'angle $C = 50°$.

16. Es pot construir un triangle de manera que els seus angles mesuren 105º, 45º i 35º. Raona la teua resposta.

17. Dibuixa un triangle obtusangle. Creus que les tres altures són iguals?

18. Observa les figures i calcula els angles que falten



19. Donats tres segments de qualsevol mesura, és sempre possible construir un triangle? Per què? Retalla tiretes de paper de longituds de 10 cm, 8 cm i 6 cm, pots construir un triangle amb elles?

20. Pots assegurar que són iguals els triangles de la figura dreta?

21. Si un dels angles d'un triangle rectangle és de 50º, indica el valor dels altres. Dibuixa un triangle rectangle amb aquests angles i un catet de 5 cm.

22. Si dos dels angles d'un triangle mesuren 30º i 70º, quant mesura el menor dels angles que formen les bisectrius corresponents?

23. Construeix un triangle sabent que $a = 10\ cm$, els angles $B = 45°$ $C = 50°$

24. Calcula l'incentre del triangle anterior i dibuixa la circumferència inscrita al triangle.

25. En quin punt col·locaries un pou perquè tres cases de camp no alineades, estiguen a la mateixa distància del mateix? Fes un gràfic esquemàtic en el teu quadern i calcula el punt en el teu dibuix.

26. Des d’un dels vèrtexs d’un hexàgon es tracen tres diagonals que divideixen al polígon en quatre triangles.
    a. Calcula la suma dels angles de l’hexàgon.
    b. Si l’hexàgon és regular, calcula el valor de cada un dels seus angles interiors.
    c. En el mateix supòsit, calcula el valor de l’angle central.

27. Dibuixa un polígon de 9 costats. Com s’anomena?

    a. Quants triangles pots formar en traçar totes les diagonals que parteixen d’un vèrtex?

    b. Quant val la suma dels angles del polígon inicial?

28. Assenyala si les següents afirmacions són verdaderes:

    “Si les diagonals d’un quadrilàter són perpendiculars, es tracta d’un rombe”

    “Els trapezis rectangles tenen tots els seus angles iguals”

    “Els rectangles són polígons equiangles”.

    “Els diagonals d’un paral·lelogram es tallen en el punt mitjà”

Justifica les teues respostes i fes un dibuix que acompanye a cadascuna.

29. Aconsegueix un fil gruixit un tros de paper de color. Retalla el fil o el tros de paper, segons siga procedent i construeix:

    a) Una circumferència, b) un cercle, c) un radi , d) un segment circular, e) un sector circular .

30. Dibuixa una circumferència de 3 cm de radi i dos arcs iguals així com les cordes que tenen els seus mateixos extrems. Comprova que les cordes també són iguals.

31. En el dibuix fet per a donar resposta a l’exercici anterior, traça dos diàmetres perpendiculars a les cordes. Mesura després la distància de cada corda al centre. Què observes?

32. Dibuixa dues rectes paral·leles de manera que la distància entre elles siga de 5 cm. Dibuixa després una circumferència tangent a ambdues.

AUTOAVALUACIÓ

1. Dibuixa tres punts A, B, C que no estiguen alineats i :
    a. Els rectes r que passa per A i B i s que passa per B i C.
    b. La recta perpendicular a r i que passa pel punt C.
    c. La recta perpendicular a s que passa per B.
    d. La recta paral·lela a s que passa per A.
2. Calcula el complementari i suplementari dels angles següents:
    a) 54º   b) 73º 40´ 56´´
3. Quant valen els angles interior i exterior d'un pentàgon regular?

4. Dibuixa un hexàgon i totes les seues diagonals.

5. Classifica els següent polígons, emplenant la taula:
    a)   b)   c)   d)

POLÍGON	CÒNCAu	REGULAR	EQUIANGLE	EQUILÀTER	PEL NOMBRE DE COSTATS ÉS UN
a)	NO	SÍ	SI	SI	ENEÀGON
b)					
c)					
d)					
e)			SI	NO	QUADRILÀTER

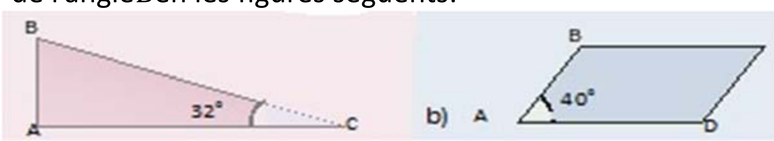
6. Dibuixa un triangle els costats del qual mesuren 3 cm, 6 cm i 5 cm i traça les seues tres altures.

7. a)Dibuixa un sector circular de radi 4 cm de manera que la seua amplitud siga de 82º . b) Dibuixa una corona circular definida per dos cercles de radis 4 cm i 2 cm.

8. Dibuixa un triangle en què a = 6 cm,$\widehat{B} = 30º$i$\widehat{C} = 45º$. Calcula després el seu circumcentre.

9. Dibuixa un trapezi isòsceles, un trapezi rectangle, un romboide, traça les seues diagonals i estudia si es tallen en el punt mitjà.

10. Calcula el valor de l'angle$\widehat{B}$en les figures següents:



1r ESO

Capítol 9: Longituds i àrees

www.apuntesmareaverde.org.es

Autors: Javier Rodrigo, Raquel Hernández i José Antonio Encabo

Revisors: Javier Rodrigo i Raquel Hernández

Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

Traducció al valencià: Departament de Matemàtiques de l'Institut Juan de Garay

Índex

Resum

En aquest tema aprendrem a trobar el perímetre i l'àrea de les principals figures: triangles, quadrats, rectangles, trapezi, circumferència, cercle, …

1. PERÍMETRES I ÀREES DE POLÍGONS

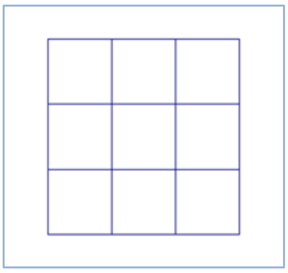
1.1. Concepte de perímetre i d’àrea d’una figura plana

El **perímetre** d’una figura plana és la suma de les longituds dels seus costats.

L’àrea d’una figura plana és el que mesura la regió limitada pels costats de la figura.

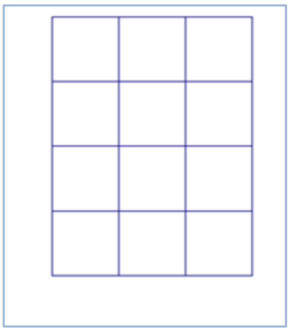
Les unitats per al perímetre són centímetres (*cm*), decímetres (*dm*), metres (*m*)…

Les unitats per a l’àrea són cm^2, dm^2, m^2, …



Exemple:

Si tenim un quadrat de costat 3 *cm*, el seu perímetre és 3 + 3 + 3 + 3 = 12 *cm* i la seua àrea és 9 cm^2 perquè podem ficar en ell 9 quadradets de costat 1 *cm*:



Exemple:

Si tenim un rectangle de base 3 *cm* i altura 4 *cm*, el seu perímetre és 3 + 4 + 3 + 4 = 14 *cm* i la seua àrea és 12 cm^2 perquè podem ficar en ell 12 quadradets de costat 1 *cm*:

Activitats resoltes

- Troba els següents perímetres i àrees:

  El perímetre d’un quadrat de costat 4 *dm*: 4 + 4 + 4 + 4 = 16 *dm*

  L’àrea d’un quadrat de costat 4 km : $4 \cdot 4 = 16$ km^2

  El perímetre d’un rectangle de base 4 m i altura 5 *dm* en *m*: 4 + 0,5 + 4 + 0,5 = 9 *m*

  L’àrea d’un rectangle de base 4 *m* i altura 5 *dm* en m^2: $4 \cdot 0.5 = 2$ m^2

Activitats proposades

1. Indica la resposta correcta: El perímetre i l’àrea d’un quadrat de costat 5 *cm* són:

a) 10 *cm* i 25 cm^2 b) 20 *cm* i 25 cm^2

c) 20 *cm* i 5 cm^2 d) 20 *cm* i 20 cm^2

2. Indica la resposta correcta: El perímetre i l’àrea d’un rectangle de base 7 *dm* i altura 3 *cm* són:

a) 146 *cm* i 210 cm^2 b) 20 *cm* i 49 cm^2

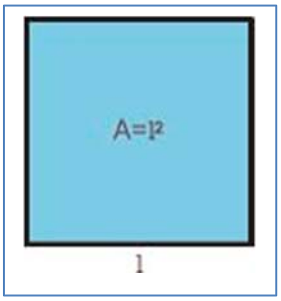
c) 20 *cm* i 21 cm^2 d) 21 *cm* i 21 cm^2

Autors: Javier Rodrigo, Raquel Hernández i José Antonio Encabo

1.2. Àrea del quadrat i del rectangle

L'àrea d'un quadrat és el quadrat d'un dels seus costats:

Àrea $_{quadrat}$ **= costat^2**



L' **àrea d'un rectangle** és el producte de la seua base per la seua altura:

Àrea $_{rectangle}$ ***= base · altura***

Exemple:

- Si tenim un quadrat de 13 *dm* de costat, l'àrea del dit quadrat és 169 dm^2 ja que:

Àrea $_{quadrat}$ = costat^2 = 13^2 = 169 dm^2.

Activitats resoltes

- Calcula l'àrea del taulell de la figura de 7 *cm* de costat

Taulell quadrat

Solució: El taulell de la figura és quadrat. Per tant:

Àrea $_{quadrat}$ = costat^2 = 7^2 = 49 cm^2.

- Calcula l'àrea d'un rectangle de 9 cm de base i 4 cm d'altura

Solució: Per tractar-se d'un rectangle:

Àrea $_{rectangle}$ = *base* · *altura* = 9 · 4 = 36 cm^2.

Activitats proposades

3. Els taulells de la figura mesuren 12 *cm* de llarg i 6 *cm* d'ample. Quina àrea ocupa cada uns dels taulells?

Taulells rectangulars

4. Mesura la base i l'altura de la teua taula. De quina figura es tracta? Quant mesura la seua àrea?

5. Aquestes motlures mesuren 175 cm d'ample i 284 cm d'alt. Quina és l'àrea tancada?

1.3. Àrea de paral·lelogram i del triangle.

Recorda que:

Un paral·lelogram és un quadrilàter (quatre costats) els costats del qual oposats són paral·lels.

Els quadrats, els rectangles i els rombes són paral·lelograms.

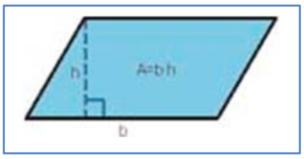
Els que no són de cap d'aqueixos tipus s'anomenen **romboides.**

Els paral·lelograms tenen les propietats següents:

- Els costats oposats son iguals.
- Les seues diagonals és tallen als seus punts mitjans.
- Tenen un centre de simetria.
- Els romboides no tenen un eix de simetria.

L'àrea d'un **paral·lelogram** és el producte de la seua base per la seua altura, igual que l'àrea d'un rectangle:

Àrea ***$_{Paral·lelogram}$*** ***= base · altura***

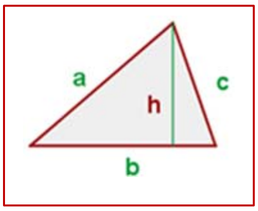


Mira el paral·lelogram de la figura. Pots convertir-lo en un rectangle tallant un triangle i col·locant-lo a l'altre costat.

Si talles a un paral·lelogram per una de les seues diagonals obtens dos triangles iguals, amb la mateixa base i la mateixa altura que el paral·lelogram. Per tant la seua àrea és la meitat que la del paral·lelogram.

L' àrea **d'un triangle** és la mitat de l'àrea d'un paral·lelogram:

$$\text{Àrea}_{\text{triangle}} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$



Exemple:

- L'àrea d'un triangle de base b = 5 *cm* i altura h = 8 *cm* és 20 cm^2 ja que:

$$\text{Àrea}_{\text{triangle}} = \frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2} = \frac{5\cdot 8}{2} = 20\ cm^2.$$

Activitats resoltes

- La vela d'un barco té forma triangular. La base de la vela mesura 3 metres i la seua altura són 6 metres, quina superfície ocupa la dita vela?

Solució: Com la vela té forma triangular:

$$\text{Àrea}_{\text{triangle}} = \frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2} = \frac{3\cdot 6}{2} = 9\ m^2.$$

- Troba els següents perímetres i àrees:

a) Un quadrat de 4 metres de costat:

Perímetre: La suma dels seus quatre costats: 4 + 4 + 4 + 4 = 16 *m*.

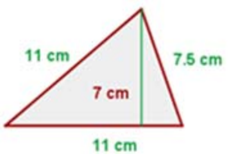
Àrea*:* costat · costat = 4 · 4 = 16 m^2.

b) Un rectangle de 5 metres d'ample i 3 *m* de llarg

Perímetre: Suma dels seus costats: 5 + 5 + 3 + 3 = 16 *m*.

Àrea: Llarg per ample = 5 · 3 = 15 m^2.

c)



Àrea: $A = \frac{11\cdot 7}{2} = 38.5\ \text{cm}^2$

Perímetre: $P = 11 + 11 + 7.5 = 29.5\ \text{cm}$

Recorda que:
Un **triangle** és **rectangle**, si té un angle recte.

Activitats proposades

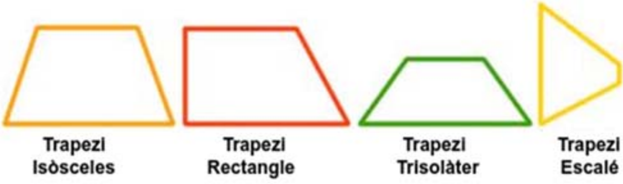
6. Cada un dels triangles de la figura tenen una base de 10 *mm* i una altura de 6 *mm*. Quant val l'àrea de cada triangle? Si en total hi ha 180 triangles, quina àrea ocupen en total?

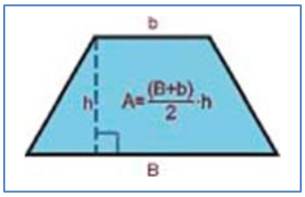
7. La base d'un triangle rectangle mesura 8 *cm*. Si la seua hipotenusa mesura 10 cm, quina és l'àrea d'aquest triangle rectangle? (*Ajuda*: Utilitza el teorema de Pitàgores per a calcular l'altre catet. Com els catets són ortogonals, un és la base i l'altre, l'altura)

1.4. Àrea del trapezi, rombe i romboide

Recorda que:

- Un **trapezi** és un quadrilàter amb dos costats paral·lels i dos costats no
- Un trapezi amb dos angles rectes s'anomena **rectangle**
- Un trapezi amb els dos costats no paral·lels iguals s'anomena **isòsceles**
- Un trapezi amb els tres costats desiguals s'anomena **escalè**





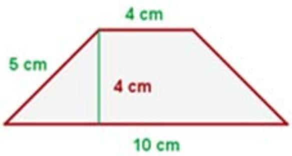
Imagina un trapezi. Gira'l 180º. Uneix el primer trapezi amb el trapezi que acabes de girar per un costat. Què obtens? És un paral·lelogram? Té de base, la suma de les bases menor i major del trapezi, i d'altura, la mateixa que el trapezi, doncs la seua àrea és la suma de les bases per l'altura. Per tant l'àrea del trapezi, que és la meitat és la semisuma de les bases per l'altura.

L'**àrea d'un trapezi** és igual a la meitat de la suma de les seues bases multiplicada per la seua altura:

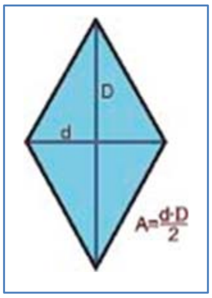
$$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$$

Exemple:

- Tenim el següent trapezi les mesures del qual són: B = 10 *cm*, b = 4 *cm*, h = 4 *cm*, la seua àrea és:



$$A = \frac{(10+4)\cdot 4}{2} = 28\text{cm}^2$$



Pensa en un rombe. Està format per dos triangles iguals

L' **àrea d'un rombe** és el producte de les seues diagonals dividides entre 2:

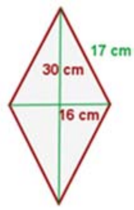
$$A = \frac{D\cdot d}{2}$$

Exemple:

Autors: Javier Rodrigo, Raquel Hernández i José Antonio Encabo

- Si tenim un rombe les diagonals del qual mesuren D = 30 *cm* i d = 16 *cm* respectivament i un costat mesura 17 *cm*, l'àrea serà

$$A = \frac{30 \cdot 16}{2} = 240\ cm^2$$



I el perímetre **P = 17 · 4 = 68 *cm*** en ser tots els costats iguals.

Una altra manera de trobar l'àrea d'un rombe seria considerar que el rombe amb les seues dues diagonals forma quatre triangles rectangles iguals de costats: 15 *cm*, (la meitad de la diagonal D), 8 *cm* (la meitat de la diagonal d), perquè ambdues diagonals s'encreuen en el centre del rombe, i d'hipotenusa 17 *cm*, el costat del rombe.

L'àrea és : Àrea d'un triangle multiplicada per 4 triangles.

Comprovem que el valor coincideix amb l'anterior:

$$(8 \cdot 15 : 2) \cdot 4 = 60 \cdot 4 = 240\ cm^2.$$

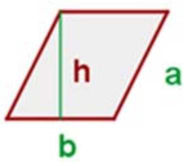
Ja saps que el romboide és un cas particular de paral·lelogram.

L'àrea **d'un romboide** és el producte de la seua base i la seua altura :

$$\text{Área}_{\text{romboide}} = base \cdot altura = b \cdot h$$

romboide

Exemple:



- Si tenim un romboide de 5 *cm* de base i 4 *cm* d'altura la seua àrea és 5 · 4 = 20 cm^2.

Si el costat val 4, el perímetre és 5 + 5 + 4 + 4 = 18 *cm*.

Activitats resoltes

- Calcula l'àrea de les següents figures planes:

  a)Un trapezi de bases 10 i 4 cm i d'altura 3 cm

  b) Un rombe de diagonals 16 i 12 cm

Solució:

$$\text{Àrea}_{\text{trapezi}} = \frac{(B+b)\cdot h}{2} = \frac{(10+4)\cdot 3}{2} = 21\ cm^2.$$

$$\text{Àrea}_{\text{rombe}} = \frac{D\cdot d}{2} = \frac{16\cdot 12}{2} = 96\ cm^2.$$

Activitats proposades

8. En un catxirulo amb forma de rombe, les seues diagonals mesuren 84 i 35 *cm*. Quant mesura l'àrea del catxirulo?

9. Un trapezista està realitzant acrobàcies sobre un trapezi de bases 1,2 i 0,8 m i altura 0,5 *m*. Quant mesura l'àrea del trapezi que usa el trapezista?

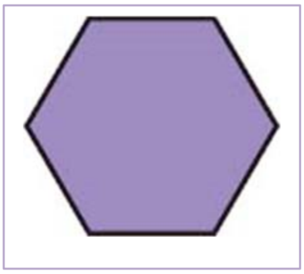
10. Calcula l'àrea d'un romboide de 15 *cm* de base i 12 *cm* d'altura. Si dobleguem les mesures de la base i l'altura, quina és l'àrea del nou romboide?

1.5. Àrea de polígons regulars

Un polígon regular podem dividir-lo en tants triangles iguals com a costats té el polígon. Cada triangle té d'àrea: (base · altura)/2. La base del triangle és el costat del polígon, i la seua altura, l'apotema del polígon.

Exemple:

L'hexàgon regular de costat 4 cm i apotema 3,5 cm el descomponem en 6 triangles de base 4 cm i altura 3,5 cm, per la qual cosa la seua àrea és:



$$Àrea_{\ triangle} = \frac{4 \cdot 3,5}{2} = 7\ cm^2.$$

L'àrea de l'hexàgon és per tant :

$$Àrea_{\ hexàgon} = \frac{6 \cdot 4 \cdot 3,5}{2} = \left(\frac{6 \cdot 4}{2}\right) \cdot 3,5 = 42\ cm^2.$$

En ser $\left(\frac{6 \cdot 4}{2}\right)$el semiperímetre de l'hexàgon, és a dir, la meitat del seu perímetre, es pot dir que:

L' **àrea d'un polígon regular** és igual al semiperímetre per l'apotema.

Àrea = semiperimetre · apotema

Activitats resoltes

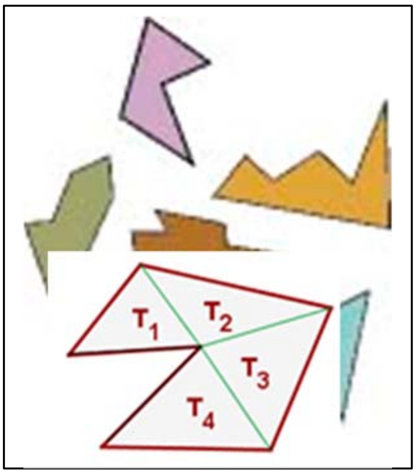
- Calcula les àrees d'un triangle i un hexàgon regular de costat 6 *cm*.

Solució: El semiperímetre del triangle és 9 *cm* i el de l'hexàgon és 18 *cm*. Les apotemes les pots calcular utilitzant el teorema de Pitàgores i valen, per al triangle i per a l'hexàgon aproximadament 5,2 *cm*, doncs les àrees valen:

$$A_{\ triangle} = 9 \cdot 5,2 = 46,8\ cm^2.$$

$$A_{\ hexàgon} = 18 \cdot 5,2 = 93,6\ cm^2.$$

1.6. Àrea de polígons irregulars



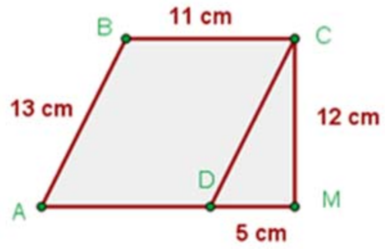
Els polígons irregulars són aquells que no tenen una forma coneguda determinada.

Per a calcular l'àrea d'un polígon irregular, dividim la figura en triangles i quadrilàters coneguts per a poder aplicar les fórmules apreses anteriorment.

$A = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$

Exemple:

- Trobar el perímetre i l'àrea de la figura:



AD = BC; AB = DC $\longrightarrow$ Romboide

P = 13 + 11 + 12 + 5 + 11= 52 cm

$A = A_R + A_T$

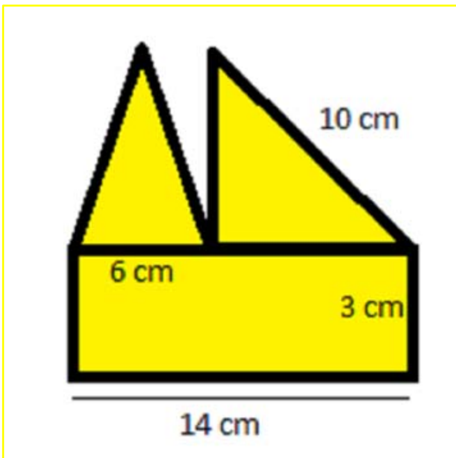
A_R = àrea del romboide A_T =àrea del triangle

$A = 11 \cdot 12 + (12 \cdot 5) : 2 = 162\ cm^2$

Exemple:

L'àrea d'aquesta figura irregular és 84 cm^2. Què hem fet per calcular-la?

Dividim la figura en dos triangles i un rectangle i calculem l'àrea de cada una de les figures. Prèviament utilitzem el teorema de Pitàgores per calcular l'altura dels triangles i obtenim que mesura 6 cm.



$$\text{Àrea}_{\text{triangle1}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18 cm^2.$$

$$\text{Àrea}_{\text{triangle2}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24 cm^2.$$

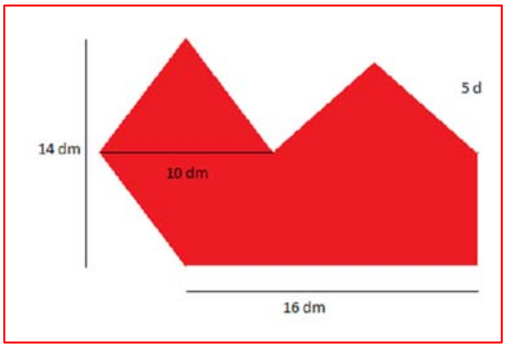
$$\text{Àrea}_{\text{rectangle}} = b \cdot h = 14 \cdot 3 = 42\ cm^2.$$

Per a calcular l'àrea total, sumem les tres àrees obtingudes:

$$A_{total} = 18 + 24 + 42 = 84\ cm^2.$$

Activitats resoltes

- Per calcular l'àrea de la figura de la dreta, la dividim primer en quadrilàters coneguts.



Tenim un rombe, un trapezi i un triangle:

Calculem l'àrea del rombe, el trapezi i el triangle:

$$\grave{A}rea_{\ rombe} = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{14 \cdot 10}{2} = 70\ dm^2.$$

El trapezi té de base major 16 dm, de base menor 16 – 5 = 11 dm, i d'altura 7 dm, doncs:

$$\grave{A}rea_{\ trapezi} = \frac{(B+b) \cdot h}{2} = \frac{(16+11) \cdot 7}{2} = \frac{189}{2} dm^2.$$

La base del triangle mesura 11 *dm* i la seua altura 5 *dm*, doncs la seua àrea mesura:

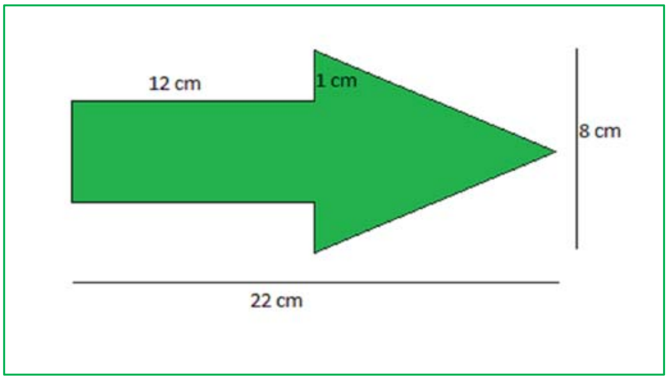
$$\grave{A}rea_{\ triangle} = \frac{B \cdot h}{2} = \frac{11 \cdot 5}{2} = \frac{55}{2} dm^2.$$

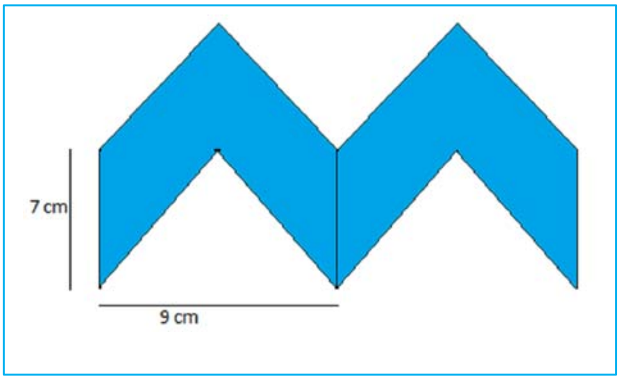
Sumant totes les àrees obtingudes:

$$\grave{A}rea_{\ TOTAL} = 70 + \frac{189}{2} + \frac{55}{2} = 192\ dm^2.$$

Activitats proposades

11. Calcula l'àrea dels següents polígons irregulars:





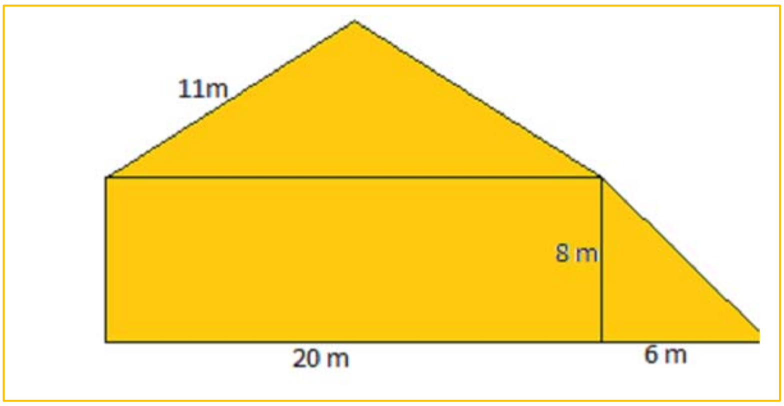
Autors: Javier Rodrigo, Raquel Hernández i José Antonio Encabo

1.7. Perímetres de polígons

El **perímetre** d'un polígon és la suma de les longituds de tots els seus costats

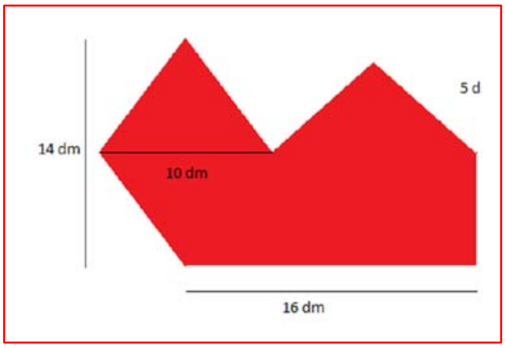
Activitats proposades

12. Calcula el perímetre del polígon de la figura:



13. Calcula el perímetre dels polígons de l'activitat 11.

14. Calcula el perímetre del polígon de la figura:



2. PERÍMETRES I ÀREES DE FIGURES CIRCULARS

2.1. Longitud d'una circumferència

El **nombre π** (pi) es defineix com el quocient entre la longitud de la circumferència i el seu diàmetre.

π = Longitud de la circumferència / Diàmetre

És un nombre irracional, amb infinites xifres decimals no periòdiques. Una aproximació de **π** és 3,14, una altra 3,1416, i una altra 3,141592.

Des de l'antiguitat més llunyana fins hui en dia els matemàtics continuen investigant sobre ell.

Si una circumferència té un radi *r*, doncs el seu diàmetre mesura 2*r*, i la seua longitud, per la definició de π, mesura $2·π·r$.

Longitud de la circumferència = $2·π·r$.

Activitats resoltes

- La circumferència de radi 3 *cm* té una longitud $L = 2·π·r = 2·π·3 = 6·π ≈ 18,84$.

Activitats proposades

15. Les circumferències de grandària real de la il·lustració del marge tenen com a radi, la menor 2 *cm*, l'un poc més fosca següent 2,5 *cm*, la clara següent 3,5 *cm*, i així, augmenta unes vegades mig centímetre i altres, un centímetre. Calcula les longituds de les 10 primeres circumferències.

16. Busca 3 objectes redons, per exemple un got, una tassa, un plat, una botella… i utilitza una cinta mètrica per a mesurar la seua longitud. Mesura també el seu diàmetre. Calcula el seu quocient. Anota les aproximacions de π que hages obtingut.

17. La Terra és aproximadament una esfera de radi 6.379 *km*. Quant mesura l'Equador?

2.2. Longitud d'un arc de circumferència

Per calcular la longitud d'un arc de circumferència que comprén un angle de α graus, hem de tindre en compte que la circumferència completa comprén un angle de 360º. Per tant:

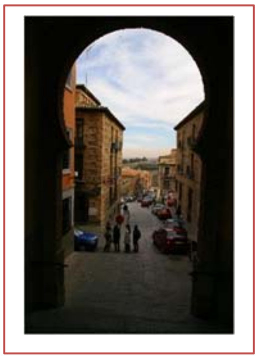
$L = 2·π·r·α/360$.

Activitats resoltes

- Les rodes d'un carro mesuren 60 *cm* de diàmetre, i tenen 16 radis. La longitud de l'arc entre cada ràdio és $L = 2·π·r·α/360 = 60·π/16 ≈ 11,78$ *cm*.

Activitats proposades

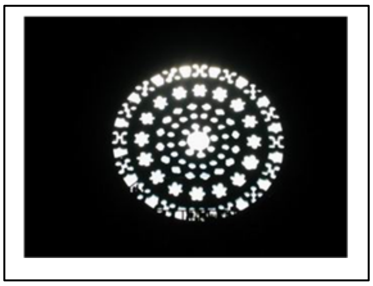
18. Antigament es definia un metre com: *"la deu milionèsima part del quadrant del meridià terrestre que passa per París"*. Segons aquesta definició, quant mesura (en metres) el diàmetre terrestre?



19. Hem mesurat la distància entre els pilars de l'arc de la figura que és de 8'4 *m*. Quina és la longitud de l'arc?

20. Un far gira descrivint un arc de 170º. A una distància de 5 *km*, quina és la longitud de l'arc de circumferència en què es veu la llum?

21. El radi de la circumferència exterior del rosetó de la figura és de 3 *m*, i la de la següent figura és de 2,5 *m*.



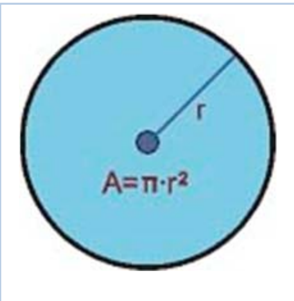
a) Calcula la longitud de l'arc que hi ha en la greca exterior entre dues figures consecutives.

b) Calcula la longitud d'arc que hi ha en la següent greca entre dues figures consecutives.

2.3. Àrea del cercle

L' **àrea del cercle** és igual al producte del nombre π pel quadrat del radi.

A = π·*r*².



Es pot imaginar l'àrea del cercle com a la que s'acosten polígons regulars inscrits en una mateixa circumferència de radi *r*, amb cada vegada més costats. Llavors:

i) L'apotema del polígon s'aproxima al radi.

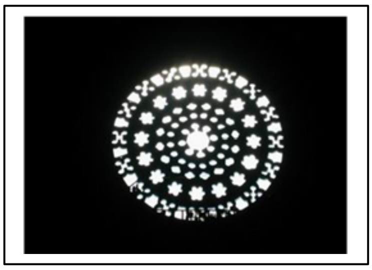
ii) El perímetre del polígon s'aproxima a la longitud de la circumferència.

Per tant, l'àrea d'aqueix polígon, que és igual al semiperímetre per l'apotema, és igual a:

$$(2\cdot\pi\cdot r/2)\cdot r = \pi\cdot r^2.$$

Activitats resoltes

- L'àrea d'un cercle de radi 7 *cm* és A = 49 π ≈ 153,86 cm^2. I el d'un cercle d'1 *cm* de radi és A = π ≈ 3,14 cm^2.
- L' àrea d'un cercle de diàmetre 4 m és A = 2^2 π = 4 π ≈ 12,56 m^2. I el d'un cercle de 2 *m* de diàmetre és A = 1^2π = π ≈ 3,14 m^2.



Activitats proposades

22. Calcula l'àrea tancada per la circumferència exterior del rosetó de 3 *m* de radi.

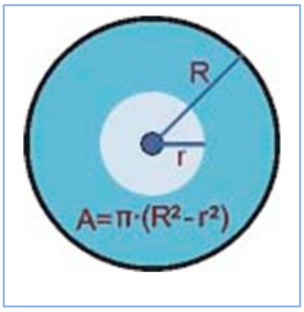
23. Calcula l'àrea tancada per la circumferència que rodeja a la figura interior sabent que el seu radi és de 1,3 *m*.

24. Dibuixa un esquema en el teu quadern del dit rosetó i calcula àrees i longituds.

2.4. Àrea de la corona circular

L'àrea d'una corona circular és igual a l'àrea del cercle major menys l'àrea del cercle menor.

$$A = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$



Activitats resoltes

- L'àrea de la corona circular formada per les circumferències concèntriques de radis 97,5 *cm* i 53,2 *cm* és igual a: $A = \pi \cdot (R^2 - r^2) = \pi \cdot (97{,}5^2 - 53{,}2^2) = \pi \cdot (9506{,}25 - 2830{,}24) = \pi \cdot 6676{,}01 \approx 20962{,}6714$ cm^2.

Activitats proposades

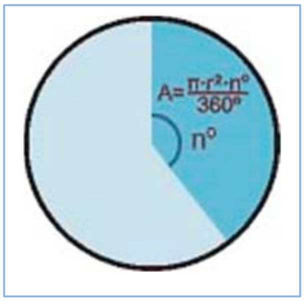
25. Calcula l'àrea de la corona circular de radis 7 i 3 *cm*.

2.5. Àrea del sector circular

L'àrea d'un sector circular que comprén un angle de *n* graus és igual a:

$$A = \pi \cdot r^2 \cdot n/360.$$

Per trobar l'àrea **del segment circular restem** a l'àrea del sector circular l'àrea del triangle construït sobre els radis.



Activitats resoltes

- Per trobar l'àrea del *sector* circular de radi 7 m que comprén un angle de 90º, calculem l'àrea del cercle complet: $\pi \cdot 7^2 = 49\pi$, i trobem la proporció:

$$A_S = 49\pi \cdot 90/360 = 12{,}25\pi \approx 38{,}465\ m^2.$$

Per trobar l'àrea del *segment* circular, restem a l'àrea anterior l'àrea del triangle rectangle de base 7 *m* i altura 7 *m*, $A_T = 7 \cdot 7/2 = 24{,}5\ m^2$. Doncs l'àrea del segment és:

$$A = A_S - A_T = 38{,}465 - 24{,}5 = 13{,}965\ m^2.$$

Activitats proposades

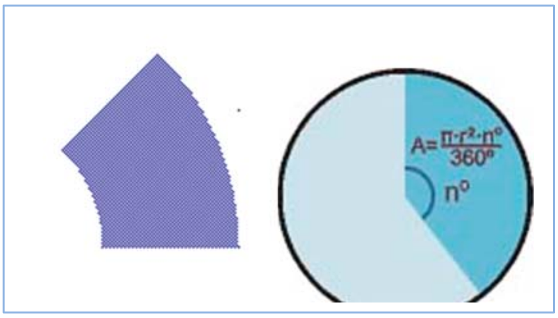
26. Calcula l'àrea del sector circular i del segment circular de radi 12 *cm* i que forma un angle de 60º. Observa que per a calcular l'altura del triangle necessites usar el Teorema de Pitàgores.

2.6. Altres àrees.

Per trobar l'àrea **d'un sector de corona circular** restem a l'àrea del sector circular de major radi l'àrea del sector circular de menor radi.

L'**àrea d'un sector de corona circular** formada per les circumferències concèntriques de radis *r* i *R* que comprén un angle de *n* graus és igual a:

$$\mathbf{A = \pi \cdot R^2 \cdot (n/360) - \pi \cdot r^2 \cdot (n/360) = \pi \cdot (R^2 - r^2) \cdot n/360.}$$



Activitats resoltes

- Per trobar l'àrea del *sector* de corona circular de radis 7 m i 8 m que comprén un angle de 90º, calculem l'àrea de la corona circular completa: $\pi \cdot (8^2 - 7^2) = 15\ \pi$, i trobem la proporció:

$$A_C = 15\ \pi \cdot 90/360 = 3{,}75\ \pi \approx 11{,}78\ m^2.$$

També es pot trobar amb la fórmula anterior:

$$A_C = \pi \cdot (8^2 - 7^2) \cdot 90/360 \approx 11{,}78\ m^2.$$

Activitats proposades

27. Calcula l'àrea del sector de corona circular de radis 10 *cm* i 12 *cm* i que forma un angle de 60º.

CURIOSITATS. REVISTA

Mesura del radi de la Terra.

Eratòstenes de Cirene va estimar, de manera molt precissa per a la seua època, el radi de la Terra. Per fer això va haver de mesurar amb atenció longituds (entre la ciutat de Syena prop d'Assuan i Alexandria), angles (del Sol en el solstici d'estiu). Com aqueix angle era 1/50 de la circumferència va determinar que el radi de la Terra era 50 vegades la distància calculada.

El nombre π (PI)

És un nombre sorprenent amb infinites xifres decimals no periòdiques.

El seu rastre més antic es troba en el Papir d'Ahmes on se li dóna un valor de 3,16.

Arquimedes el va valorar com 22/7 que és 3,1429.

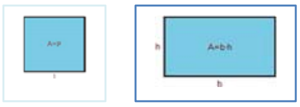
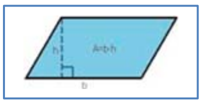
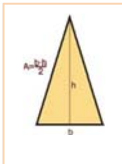
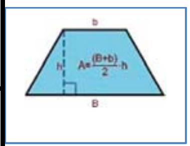
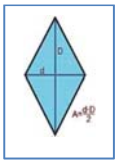
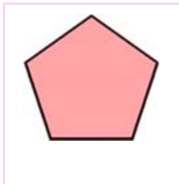
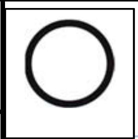
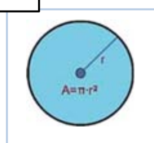
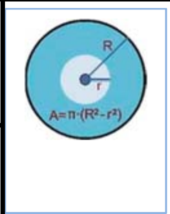
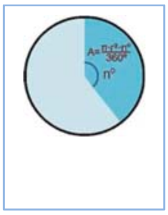
Actualment, amb ajuda de l'ordinador, es calculen més i més de les seues xifres decimals. En 2009 es van trobar més de dos bilions i mig de decimals de pi: π = 3,141592…

Algunes xifres de π:

3,14159265358979323846264338327950288498628034825342117067982148086513282306
684102701938521105559644622948954930381712019091456485669234603486104543266
4881520920962829254091715364367892590360572703657595919530921861173819326117
93279381830119491298336733624406566430861717629317675238467481846766940513
200078721468440901224953430146549585371050181598136297747713099605187072113
49999553469083026425223082533446850352619317766914730359825349042875546873115
9562130019278766111959092164201989380952573530185296899577362259941389124
972177561727855889075098381754637464939319255076601047101819429555961989467
67837449694912933136770289891521047521620569667326391419927260426992279678235
4781636498385054945885869269956909272107975098183479775356636980742654252
786255181892173217214772350141441973568548161361345477624168625189835694855
62099219222272327917860857843838279679766814541008412848862694560424196528502
22106611867191728746776465757396241389086583264552595709825822620522489407726
71947826852451749399651431429809190659250937221617539284681382686838689
427741559918554865383673622262609912460805124388439089441694868555848406353
422072225828488385225499546667278239864565961163548867945109659609402522887
971089314566913617824938589009714909675985261365549781775551323796414515237
462343645428584443596953623144295248493718711014576540378489683321445713868
751943506430218453614196634287544406437451237181921799983196156794520809514
655022523160388193046722182562599661501421503068038447734324340881907104863
317346496514539057965910289706414011097120628043903975951573125147120532928
191826186125867321579722910981690915280173506712748583222870675103346711031
412671113699086585163909998985998238734552833163550…

Autors: Javier Rodrigo, Raquel Hernández i José Antonio Encabo

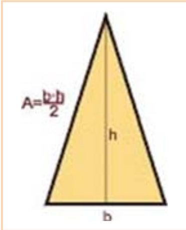
RESUM

			Ejemplos
Àrea del quadrat	A = costat^2 = l^2		Si l = 4 *cm* ⇒ A = 16 cm^2
Àrea del rectangle	A = base per altura = $a \cdot b$		Si a = 3 *cm*, b = 5 *cm* ⇒ A = 15 cm^2.
Àrea del paral·lelogram	A = base per altura = $a \cdot b$		a = 7 *m*, b = 9 *m* ⇒ A = 63 m^2
Àrea del triangle	A = (base per altura)/2 = $a \cdot b/2$		a = 5 m, b = 6 m ⇒ A = 15 m^2
Àrea del trapezi	Àrea igual a la semisuma de les bases per l'altura	 	B = 7; b = 3; h = 5 ⇒ A = 25
Àrea del rombe	Àrea igual al producte de les diagonals partit per 2		D = 4, D = 9 ⇒ A = 36/2 = 18
Perímetre d'un polígon	Perímetre és igual a la suma dels costats		Costat = 6 *cm*, apotema = 5 *cm*, nombre de costats = 5 ⇒ Perímetre = 6 · 5 = 30 *cm*; Àrea = 15 · 5 = 75 cm^2.
Àrea d'un polígon regular	Àrea és igual al semiperímetre per l'apotema		
Longitud de la circumferència	Si el radi és r, la longitud es igual a 2 · π · r.	 	Radi = 3 *cm* ⇒ Longitud = 6π ≈ 18,84 *cm*. Àrea = 9π ≈ 28,26 cm^2. Si α = 30º i r = 3 *cm* ⇒Longitud de l'arc = 2·π·3·30/360 = 0,5π ≈ 1,57 *cm*
Longitud d'un arc de circumferència	Si comprén un arc α , longitud és igual a 2 · π · r · α/360		
Àrea del cercle	Si el radi és r, l'àrea és igual a π · r^2.		
Àrea de la corona circular	És la diferència entre l'àrea del cercle major menys la del cercle menor.	 	R = 7, r = 3 ⇒ A = π(7^2 – 3^2) = π(49 – 9) = 40π ≈ 125,6 u^2
Àrea del sector circular	Si comprén un arc núm., l'àrea és igual a π · r^2· n/360.		R = 4 *cm*, n = 60º ⇒ A = π·16·60/360 ≈ 8,373 cm^2

Autors: Javier Rodrigo, Raquel Hernández i José Antonio Encabo

EXERCICIS I PROBLEMES de 1r d'ESO

Longituds i àrees de polígons



1. Un senyal de circulació té forma triangular. La seua base mesura 23 cm i la seua altura 36 cm. Quina és l'àrea del senyal de circulació?

2. La pissarra d'una classe té 150 cm d'altura i 210 cm de base. Quina és la superfície de la pissarra?

3. La teulada d'una casa té forma de trapezi. La base pegada al sostre de la vivenda mesura 53 m i l'altra base mesura 27 m. Sabent que l'altura de la teulada són 8 m, Quant mesura la seua àrea?

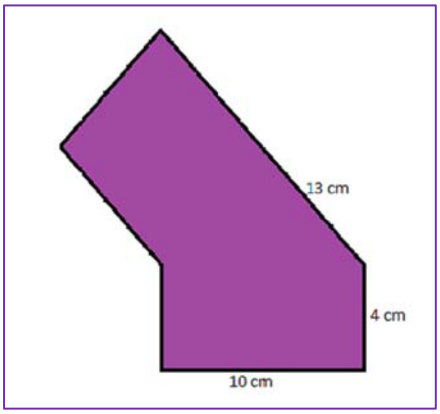
4. Es vol dissenyar un portagots. Pot ser quadrat de 12 cm de costat o circular de 7 cm de radi. Calcula ambdues superfícies. Als portagots se'ls vol posar un vorell. Quina longitud de vorell es necessita en cada cas? Quin és menor? Només tenim 50 cm de vorell, què quadrat podem dissenyar i quin portagots circular? Calcula l'àrea de cada u.

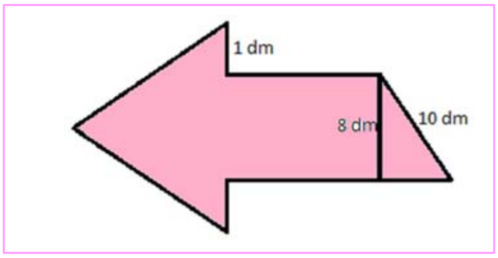
5. Calcula l'àrea d'un triangle isòsceles els costats iguals del qual mesuren 7 *cm* i el seu perímetre mesura 20 *cm*.

6. Quina és l'àrea d'un rectangle la diagonal del qual mesura 13 *cm* i la seua altura 5 *cm*?

7. Calcula el perímetre d'un rombe les diagonals del qual mesuren 24 i 10 *cm* respectivament.

8. Calcula l'àrea dels següents polígons irregulars:





Longituds i àrees de figures circulars

9. Calcula la longitud d'una circumferència de radi 7 cm.

10. Una circumferència de 98,27 cm de longitud, quin radi té? i quin diàmetre?

11. Quina és la longitud d'un arc de circumferència de 270º si el radi mesura 17 cm?

12. Calcula la longitud d'una circumferència inscrita en un hexàgon de costat 5 cm.

13. Calcula la longitud d'una circumferència inscrita en un quadrat de costat 5 cm.

14. Calcula la longitud d'una circumferència circumscrita en un quadrat de costat 5 cm.

15. Calcula l'àrea en m^2 dels cercles de radi *r* igual a:

a) *r* = 53 *cm*   b) *r* = 9 *m*   c) *r* = 8,2 *dam*   d) *r* = 6,2 *dm*

16. Calcula el radi d'un cercle d'àrea 28,26 m^2.

17. Calcula l'àrea d'un cercle de diàmetre 73,6 cm.

18. Calcula l'àrea de les corones circulars de radis, respectivament:

a) R = 8 *m*; r = 3 *m*.   b) R = 72 *cm*; r = 41 *cm*.   c) R = 9 *m*; r = 32 *cm*. d) R = 5 *dm*; r = 4 *cm*.

19. Calcula l'àrea, en cm^2, dels sectors circulars de radi *r* i angle α següents:

a) r = 6 m; α = 30º   b) r = 3,7 cm; α = 45º   c) r = 2,7 dm; α = 60º   d) r = 4 m; α = 90º

20. En una habitació rectangular de costats 3 i 5 m, cobrim un tros amb una estora circular de radi 2 m, quina part de sòl queda sense cobrir?

21. Dibuixa al teu quadern el disseny de tapís del marge de manera que el costat del quadrat xicotet fosc siga d'1 cm, el costat del quadrat de vora groc, de 3 cm, i la vora del quadrat de fons roig, de 6 cm. Estima l'àrea del cercle roig, del cercle fosc, de la figura en roig i de les línies grogues.

22. En una estora circular de 3 m de diàmetre ha caigut en el centre una taca de mig metre de radi. a) Quina àrea ocupa la part neta de l'estora? b) Tapem la taca amb una altra estora quadrada de 1,5 m de costat, quina àrea de l'estora circular queda sense tapar?

23. En un cercle tallem dos cercles tangents interiors de ràdios 5 i 2 cm, quina àrea queda sense tallar?

AUTOAVALUACIÓ de 1r d'ESO

1. El costat d'un hexàgon regular medeix 7 *m*, doncs el seu perímetre medeix:

a) 4,2 *dam* b) 42 m^2 c) 42 *m* d) 42000 *cm*

2. El rombe de diagonals 12 *dm* i 10 *dm* té com a àrea:

a) 62 dm^2 b) 11 dm^2 c) 60 dm^2 d) 67 dm^2

3. El trapezi de bases 7 *cm* i 5 *cm* i altura 8 *cm*, té com a àrea:

a) 60 cm^2 b) 48 cm^2 c) 50 cm^2 d) 40 cm^2

4. La longitud de la circumferència de radi 4,6 *cm* mesura aproximadament:

a) 0,2 *m* b) 30 *cm* c) 28,9 *cm* d) 25,7 *cm*

5. La longitud de l'arc de circumferència de radi 27,4 *m* que comprén un arc de 30º medeix aproximadament:

a) 28,6 *m* b) 100 *cm* c) 28,9 *cm* d) 14,34 *m*

6. L' àrea del cercle de radi 83,6 *m* medeix aproximadament:

a) 2,19 hm^2 b) 234 dam^2 c) 295413344 cm^2 d) 0,2 km^2

7. L'àrea de la corona circular de radis 10 i 5 *m* medeix aproximadament:

a) 23550 cm^2 b) 235,5 m^2 c) 235 *m* d) 0,2 km^2

8. La longitud de la semicircumferència de radi 7,3 *cm* medeix aproximadament:

a) 0,3 *m* b) 45,8 *cm* c) 22,922 *cm* d) 25,7 *cm*

9. La longitud de l'arc de circumferència de radi 9,2 *m* que comprén un arc de 60º medeix aproximadament:

a) 9,3421 *m* b) 10 *m* c) 976 *cm* d) 9,6 *m*

10. L'àrea del sector circular de radi 83,6 *m* que comprèn un arc de 45º medeix aproximadament:

a) 2,172 hm^2 b) 231 dam^2 c) 27445581 cm^2 d) 273 m^2

CAPÍTOL 9: LONGITUDS I ÀREES

www.apuntesmareaverde.org.es

Autors: Javier Rodrigo, Raquel Hernández i José Antonio Encabo

Revisors: Javier Rodrigo i Raquel Hernández

Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

Traducció al valencià: Departament de Matemàtiques de l'Institut Juan de Garay

Índex

Resum

En aquest tema aprendrem a trobar el perímetre i l'àrea de les principals figures: triangles, quadrats, rectangles, trapezi, circumferència, cercle, …

Autors: Javier Rodrigo, Raquel Hernández i José Antonio Encabo

1. PERÍMETRES I ÀREES DE POLÍGONS

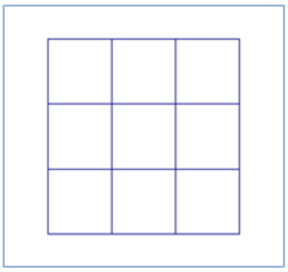
1.1. Concepte de perímetre i d'àrea d'una figura plana

El **perímetre** d'una figura plana és la suma de les longituds dels seus costats.

L'àrea d'una figura plana és el que mesura la regió limitada pels costats de la figura.

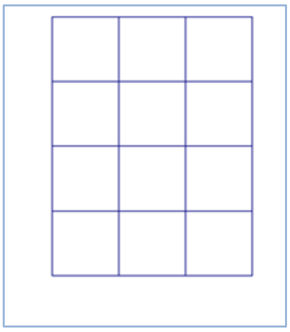
Les unitats per al perímetre són centímetres (*cm*), decímetres (*dm*), metres (*m*)…

Les unitats per a l'àrea són cm^2, dm^2, m^2, …



Exemple:

Si tenim un quadrat de costat 3 *cm*, el seu perímetre és 3 + 3 + 3 + 3 = 12 *cm* i la seua àrea és 9 cm^2 perquè podem ficar en ell 9 quadradets de costat 1 *cm*:



Exemple:

Si tenim un rectangle de base 3 *cm* i altura 4 *cm*, el seu perímetre és 3 + 4 + 3 + 4 = 14 *cm* i la seua àrea és 12 cm^2 perquè podem ficar en ell 12 quadradets de costat 1 *cm*:

Activitats resoltes

- Troba els següents perímetres i àrees:

  El perímetre d'un quadrat de costat 4 *dm*: 4 + 4 + 4 + 4 = 16 *dm*

  L'àrea d'un quadrat de costat 4 km : $4 \cdot 4 = 16\ \mathrm{km}^2$

  El perímetre d'un rectangle de base 4 m i altura 5 *dm* en *m*: 4 + 0,5 + 4 + 0,5 = 9 *m*

  L'àrea d'un rectangle de base 4 *m* i altura 5 *dm* en m^2: $4 \cdot 0.5 = 2\ m^2$

Activitats proposades

1. Indica la resposta correcta: El perímetre i l'àrea d'un quadrat de costat 5 *cm* són:

a) 10 *cm* i 25 cm^2 b) 20 *cm* i 25 cm^2

c) 20 *cm* i 5 cm^2 d) 20 *cm* i 20 cm^2

2. Indica la resposta correcta: El perímetre i l'àrea d'un rectangle de base 7 *dm* i altura 3 *cm* són:

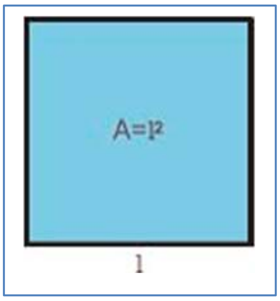
a) 146 *cm* i 210 cm^2 b) 20 *cm* i 49 cm^2

c) 20 *cm* i 21 cm^2 d) 21 *cm* i 21 cm^2

1.2. Àrea del quadrat i del rectangle

L'àrea d'un quadrat és el quadrat d'un dels seus costats:

***Àrea** quadrat* **= costat^2**



L' **àrea d'un rectangle** és el producte de la seua base per la seua altura:

Àrea** rectangle* ***= base · altura

Exemple:

- Si tenim un quadrat de 13 *dm* de costat, l'àrea del dit quadrat és 169 *dm*^{2} ja que:

$$\text{Àrea}_{\text{quadrat}} = \text{costat}^2 = 13^2 = 169 \text{ dm}^2.$$

Activitats resoltes

Taulell quadrat

- Calcula l'àrea del taulell de la figura de 7 *cm* de costat

Solució: El taulell de la figura és quadrat. Per tant:

$$\text{Àrea}_{\text{quadrat}} = \text{costat}^2 = 7^2 = 49 \text{ } cm^2.$$

- Calcula l'àrea d'un rectangle de 9 cm de base i 4 cm d'altura

Solució: Per tractar-se d'un rectangle:

$$\text{Àrea}_{\text{rectangle}} = base \cdot altura = 9 \cdot 4 = 36 \text{ cm}^2.$$

Activitats proposades

Taulells rectangulars

3. Els taulells de la figura mesuren 12 *cm* de llarg i 6 *cm* d'ample. Quina àrea ocupa cada uns dels taulells?

4. Mesura la base i l'altura de la teua taula. De quina figura es tracta? Quant mesura la seua àrea?

5. Aquestes motlures mesuren 175 cm d'ample i 284 cm d'alt. Quina és l'àrea tancada?

1.3. Àrea de paral·lelogram i del triangle.

Recorda que:

Un paral·lelogram és un quadrilàter (quatre costats) els costats del qual oposats són paral·lels.

Els quadrats, els rectangles i els rombes són paral·lelograms.

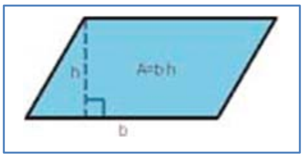
Els que no són de cap d'aqueixos tipus s'anomenen **romboides.**

Els paral·lelograms tenen les propietats següents:

- Els costats oposats son iguals.
- Les seues diagonals és tallen als seus punts mitjans.
- Tenen un centre de simetria.
- Els romboides no tenen un eix de simetria.

L'àrea d'un **paral·lelogram** és el producte de la seua base per la seua altura, igual que l'àrea d'un rectangle:

Àrea** $_{Paral·lelogram}$ **= base · altura

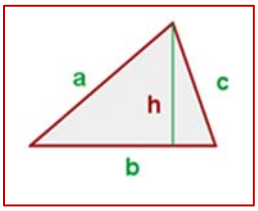


Mira el paral·lelogram de la figura. Pots convertir-lo en un rectangle tallant un triangle i col·locant-lo a l'altre costat.

Si talles a un paral·lelogram per una de les seues diagonals obtens dos triangles iguals, amb la mateixa base i la mateixa altura que el paral·lelogram. Per tant la seua àrea és la meitat que la del paral·lelogram.

L' àrea **d'un triangle** és la mitat de l'àrea d'un paral·lelogram:

$$\text{Àrea}_{\text{triangle}} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$



Exemple:

- L'àrea d'un triangle de base b = 5 *cm* i altura h = 8 *cm* és 20 cm^2 ja que:

$$\text{Àrea}_{\text{triangle}} = \frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2} = \frac{5\cdot 8}{2} = 20\ cm^2.$$

Activitats resoltes

- La vela d'un barco té forma triangular. La base de la vela mesura 3 metres i la seua altura són 6 metres, quina superfície ocupa la dita vela?

Solució: Com la vela té forma triangular:

$$\text{Àrea}_{\text{triangle}} = \frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2} = \frac{3\cdot 6}{2} = 9\ m^2.$$

- Troba els següents perímetres i àrees:

a) Un quadrat de 4 metres de costat:

Perímetre: La suma dels seus quatre costats: 4 + 4 + 4 + 4 = 16 *m*.

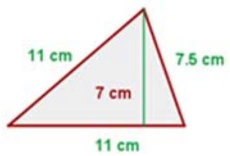
Àrea*:* costat · costat = 4 · 4 = 16 m^2.

b) Un rectangle de 5 metres d'ample i 3 *m* de llarg

Perímetre: Suma dels seus costats: 5 + 5 + 3 + 3 = 16 *m*.

Àrea: Llarg per ample = 5 · 3 = 15 m^2.

c)



Àrea: $A = \frac{11 \cdot 7}{2} = 38.5\ cm^2$

Perímetre: $P = 11 + 11 + 7.5 = 29.5\ cm$

Recorda que:

Un **triangle** és **rectangle**, si té un angle recte.

Activitats proposades

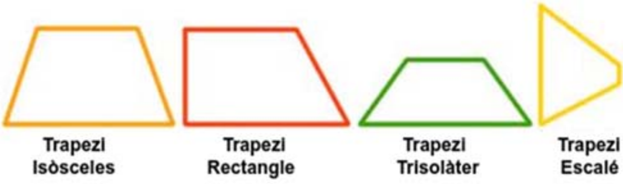
6. Cada un dels triangles de la figura tenen una base de 10 *mm* i una altura de 6 *mm*. Quant val l'àrea de cada triangle? Si en total hi ha 180 triangles, quina àrea ocupen en total?

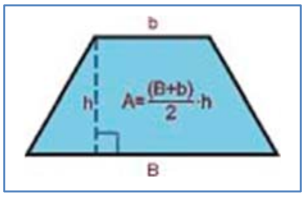
7. La base d'un triangle rectangle mesura 8 *cm*. Si la seua hipotenusa mesura 10 cm, quina és l'àrea d'aquest triangle rectangle? (*Ajuda*: Utilitza el teorema de Pitàgores per a calcular l'altre catet. Com els catets són ortogonals, un és la base i l'altre, l'altura)

1.4. Àrea del trapezi, rombe i romboide

Recorda que:

- Un **trapezi** és un quadrilàter amb dos costats paral·lels i dos costats no
- Un trapezi amb dos angles rectes s'anomena **rectangle**
- Un trapezi amb els dos costats no paral·lels iguals s'anomena **isòsceles**
- Un trapezi amb els tres costats desiguals s'anomena **escalè**





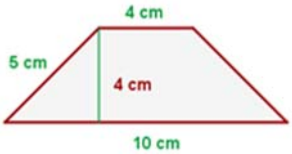
Imagina un trapezi. Gira'l 180º. Uneix el primer trapezi amb el trapezi que acabes de girar per un costat. Què obtens? És un paral·lelogram? Té de base, la suma de les bases menor i major del trapezi, i d'altura, la mateixa que el trapezi, doncs la seua àrea és la suma de les bases per l'altura. Per tant l'àrea del trapezi, que és la meitat és la semisuma de les bases per l'altura.

L'**àrea d'un trapezi** és igual a la meitat de la suma de les seues bases multiplicada per la seua altura:

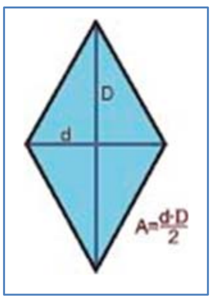
$$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$$

Exemple:

- Tenim el següent trapezi les mesures del qual són: B = 10 *cm*, b = 4 *cm*, h = 4 *cm*, la seua àrea és:



$$A = \frac{(10+4)\cdot 4}{2} = 28\text{cm}^2$$



Pensa en un rombe. Està format per dos triangles iguals

L' **àrea d'un rombe** és el producte de les seues diagonals dividides entre 2:

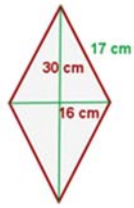
$$A = \frac{D\cdot d}{2}$$

Exemple:

Autors: Javier Rodrigo, Raquel Hernández i José Antonio Encabo

- Si tenim un rombe les diagonals del qual mesuren D = 30 *cm* i d = 16 *cm* respectivament i un costat mesura 17 *cm*, l'àrea serà

$$A = \frac{30 \cdot 16}{2} = 240\ cm^2$$



I el perímetre **P = 17 · 4 = 68 *cm*** en ser tots els costats iguals.

Una altra manera de trobar l'àrea d'un rombe seria considerar que el rombe amb les seues dues diagonals forma quatre triangles rectangles iguals de costats: 15 *cm*, (la meitad de la diagonal D), 8 *cm* (la meitat de la diagonal d), perquè ambdues diagonals s'encreuen en el centre del rombe, i d'hipotenusa 17 *cm*, el costat del rombe.

L'àrea és : Àrea d'un triangle multiplicada per 4 triangles.

Comprovem que el valor coincideix amb l'anterior:

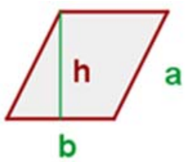
$$(8 \cdot 15 : 2) \cdot 4 = 60 \cdot 4 = 240\ cm^2.$$

Ja saps que el romboide és un cas particular de paral·lelogram.

L'àrea **d'un romboide** és el producte de la seua base i la seua altura :

$$\text{Área}_{\text{romboide}} = \text{base} \cdot \text{altura} = b \cdot h$$

Exemple:



- Si tenim un romboide de 5 *cm* de base i 4 *cm* d'altura la seua àrea és 5 · 4 = 20 cm^2.

Si el costat val 4, el perímetre és 5 + 5 + 4 + 4 = 18 *cm*.

Activitats resoltes

- Calcula l'àrea de les següents figures planes:

  a)Un trapezi de bases 10 i 4 cm i d'altura 3 cm

  b) Un rombe de diagonals 16 i 12 cm

Solució:

$$\text{Àrea}_{\text{trapezi}} = \frac{(B+b)\cdot h}{2} = \frac{(10+4)\cdot 3}{2} = 21\ cm^2.$$

$$\text{Àrea}_{\text{rombe}} = \frac{D\cdot d}{2} = \frac{16\cdot 12}{2} = 96\ cm^2$$

Activitats proposades

8. En un catxirulo amb forma de rombe, les seues diagonals mesuren 84 i 35 *cm*. Quant mesura l'àrea del catxirulo?

9. Un trapezista està realitzant acrobàcies sobre un trapezi de bases 1,2 i 0,8 m i altura 0,5 *m*. Quant mesura l'àrea del trapezi que usa el trapezista?

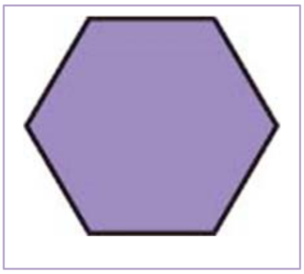
10. Calcula l'àrea d'un romboide de 15 *cm* de base i 12 *cm* d'altura. Si dobleguem les mesures de la base i l'altura, quina és l'àrea del nou romboide?

1.5. Àrea de polígons regulars

Un polígon regular podem dividir-lo en tants triangles iguals com a costats té el polígon. Cada triangle té d'àrea: (base · altura)/2. La base del triangle és el costat del polígon, i la seua altura, l'apotema del polígon.

Exemple:

L'hexàgon regular de costat 4 cm i apotema 3,5 cm el descomponem en 6 triangles de base 4 cm i altura 3,5 cm, per la qual cosa la seua àrea és:



$$Àrea_{\ triangle} = \frac{4 \cdot 3,5}{2} = 7\ cm^2.$$

L'àrea de l'hexàgon és per tant :

$$Àrea_{\ hexàgon} = \frac{6 \cdot 4 \cdot 3,5}{2} = \left(\frac{6 \cdot 4}{2}\right) \cdot 3,5 = 42\ cm^2.$$

En ser $\left(\frac{6 \cdot 4}{2}\right)$el semiperímetre de l'hexàgon, és a dir, la meitat del seu perímetre, es pot dir que:

L' **àrea d'un polígon regular** és igual al semiperímetre per l'apotema.

Àrea = semiperimetre · apotema

Activitats resoltes

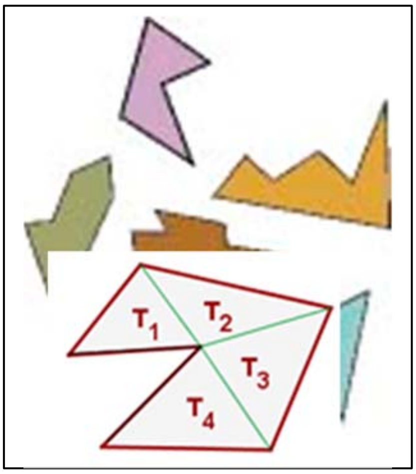
- Calcula les àrees d'un triangle i un hexàgon regular de costat 6 *cm*.

Solució: El semiperímetre del triangle és 9 *cm* i el de l'hexàgon és 18 *cm*. Les apotemes les pots calcular utilitzant el teorema de Pitàgores i valen, per al triangle i per a l'hexàgon aproximadament 5,2 *cm*, doncs les àrees valen:

$$A_{\ triangle} = 9 \cdot 5,2 = 46,8\ cm^2.$$

$$A_{\ hexàgon} = 18 \cdot 5,2 = 93,6\ cm^2.$$

1.6. Àrea de polígons irregulars



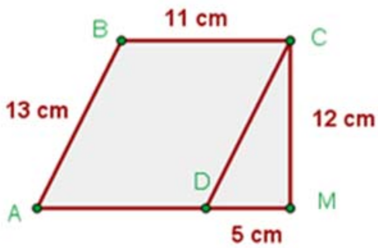
Els polígons irregulars són aquells que no tenen una forma coneguda determinada.

Per a calcular l'àrea d'un polígon irregular, dividim la figura en triangles i quadrilàters coneguts per a poder aplicar les fórmules apreses anteriorment.

$A = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$

Exemple:

- Trobar el perímetre i l'àrea de la figura:



AD = BC; AB = DC $\longrightarrow$ Romboide

P = 13 + 11 + 12 + 5 + 11= 52 *cm*

A = $A_R + A_T$

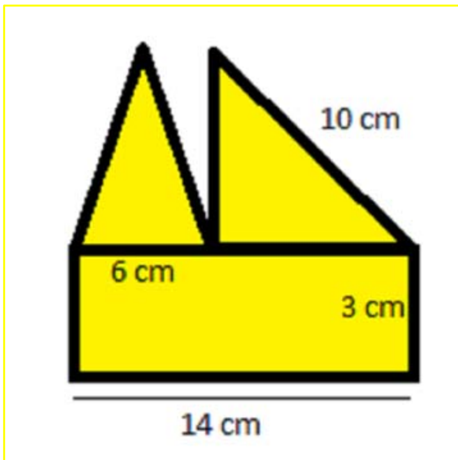
A_R = àrea del romboide A_T =àrea del triangle

$A = 11 \cdot 12 + (12 \cdot 5) : 2 = 162\ cm^2$

Exemple:

L'àrea d'aquesta figura irregular és 84 cm^2. Què hem fet per calcular-la?

Dividim la figura en dos triangles i un rectangle i calculem l'àrea de cada una de les figures. Prèviament utilitzem el teorema de Pitàgores per calcular l'altura dels triangles i obtenim que mesura 6 *cm*.



$$\text{Àrea}_{\text{triangle1}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18 cm^2.$$

$$\text{Àrea}_{\text{triangle2}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24 cm^2.$$

$$\text{Àrea}_{\ rectangle} = b \cdot h = 14 \cdot 3 = 42\ cm^2.$$

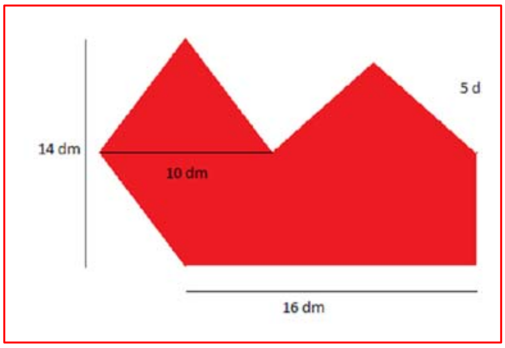
Per a calcular l'àrea total, sumem les tres àrees obtingudes:

$$A_{\ total} = 18 + 24 + 42 = 84\ cm^2.$$

Activitats resoltes

- Per calcular l'àrea de la figura de la dreta, la dividim primer en quadrilàters coneguts.

Tenim un rombe, un trapezi i un triangle:



Calculem l'àrea del rombe, el trapezi i el triangle:

$$\text{Àrea}_{\ rombe} = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{14 \cdot 10}{2} = 70\ dm^2.$$

El trapezi té de base major 16 dm, de base menor 16 – 5 = 11 dm, i d'altura 7 dm, doncs:

$$\text{Àrea}_{\ trapezi} = \frac{(B+b) \cdot h}{2} = \frac{(16+11) \cdot 7}{2} = \frac{189}{2} dm^2.$$

La base del triangle mesura 11 *dm* i la seua altura 5 *dm*, doncs la seua àrea mesura:

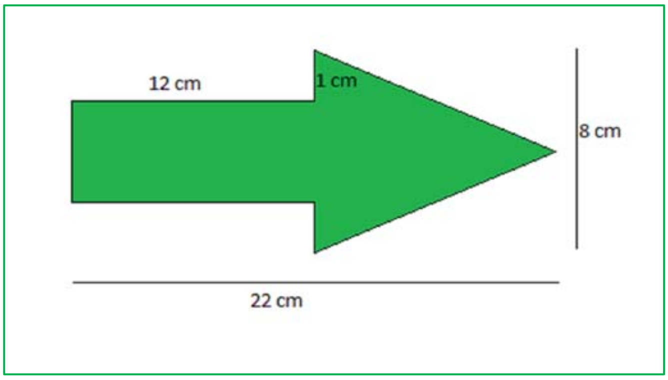
$$\text{Àrea}_{\ triangle} = \frac{B \cdot h}{2} = \frac{11 \cdot 5}{2} = \frac{55}{2} dm^2.$$

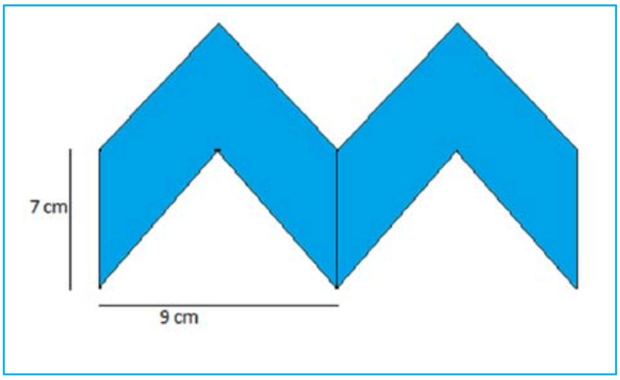
Sumant totes les àrees obtingudes:

$$\text{Àrea}_{\ TOTAL} = 70 + \frac{189}{2} + \frac{55}{2} = 192\ dm^2.$$

Activitats proposades

11. Calcula l'àrea dels següents polígons irregulars:





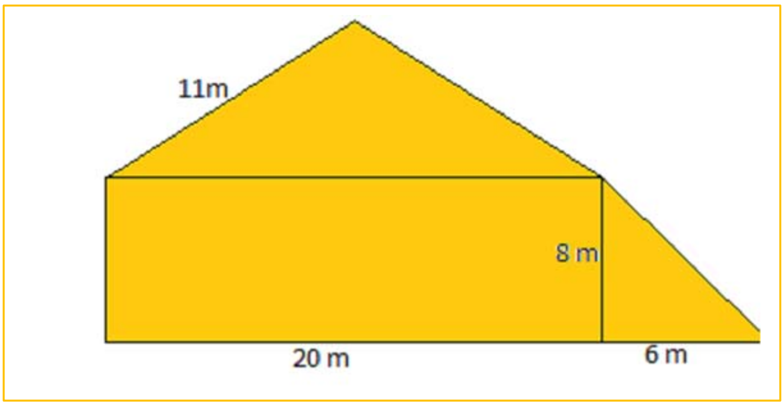
Traducció: Institut Juan de Garay

1.7. Perímetres de polígons

El **perímetre** d'un polígon és la suma de les longituds de tots els seus costats

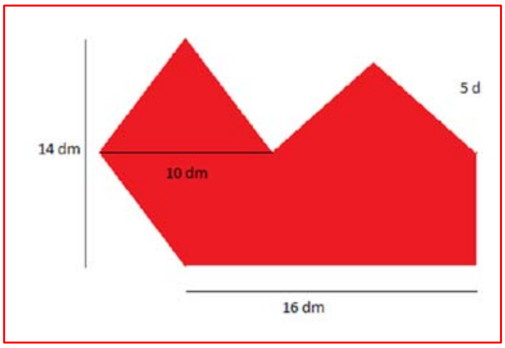
Activitats proposades

12. Calcula el perímetre del polígon de la figura:



13. Calcula el perímetre dels polígons de l'activitat 11.

14. Calcula el perímetre del polígon de la figura:



2. PERÍMETRES I ÀREES DE FIGURES CIRCULARS

2.1. Longitud d'una circumferència

El **nombre π** (pi) es defineix com el quocient entre la longitud de la circumferència i el seu diàmetre.

π = Longitud de la circumferència / Diàmetre

És un nombre irracional, amb infinites xifres decimals no periòdiques. Una aproximació de **π** és 3,14, una altra 3,1416, i una altra 3,141592.

Des de l'antiguitat més llunyana fins hui en dia els matemàtics continuen investigant sobre ell.

Si una circumferència té un radi *r*, doncs el seu diàmetre mesura 2*r*, i la seua longitud, per la definició de π, mesura $2\cdot\pi\cdot r$.

Longitud de la circumferència = $2\cdot\pi\cdot r$.

Activitats resoltes

- La circumferència de radi 3 *cm* té una longitud $L = 2\cdot\pi\cdot r = 2\cdot\pi\cdot 3 = 6\cdot\pi \approx 18{,}84$.

Activitats proposades

15. Les circumferències de grandària real de la il·lustració del marge tenen com a radi, la menor 2 *cm*, l'un poc més fosca següent 2,5 *cm*, la clara següent 3,5 *cm*, i així, augmenta unes vegades mig centímetre i altres, un centímetre. Calcula les longituds de les 10 primeres circumferències.

16. Busca 3 objectes redons, per exemple un got, una tassa, un plat, una botella… i utilitza una cinta mètrica per a mesurar la seua longitud. Mesura també el seu diàmetre. Calcula el seu quocient. Anota les aproximacions de π que hages obtingut.

17. La Terra és aproximadament una esfera de radi 6.379 *km*. Quant mesura l'Equador?

2.2. Longitud d'un arc de circumferència

Per calcular la longitud d'un arc de circumferència que comprén un angle de α graus, hem de tindre en compte que la circumferència completa comprén un angle de 360º. Per tant:

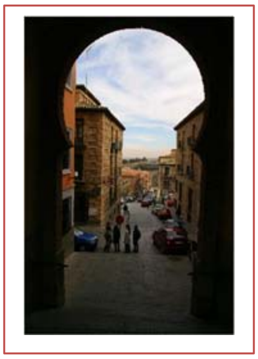
$L = 2\cdot\pi\cdot r\cdot\alpha/360$.

Activitats resoltes

- Les rodes d'un carro mesuren 60 *cm* de diàmetre, i tenen 16 radis. La longitud de l'arc entre cada ràdio és $L = 2\cdot\pi\cdot r\cdot\alpha/360 = 60\cdot\pi/16 \approx 11{,}78$ *cm*.

Activitats proposades

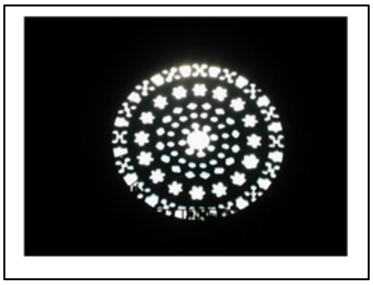
18. Antigament es definia un metre com: *"la deu milionèsima part del quadrant del meridià terrestre que passa per París"*. Segons aquesta definició, quant mesura (en metres) el diàmetre terrestre?



19. Hem mesurat la distància entre els pilars de l'arc de la figura que és de 8'4 *m*. Quina és la longitud de l'arc?

20. Un far gira descrivint un arc de 170º. A una distància de 5 *km*, quina és la longitud de l'arc de circumferència en què es veu la llum?

21. El radi de la circumferència exterior del rosetó de la figura és de 3 *m*, i la de la següent figura és de 2,5 *m*.



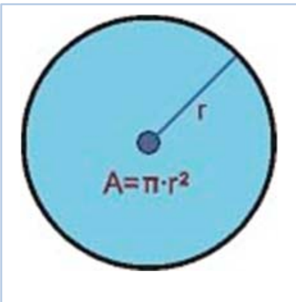
a) Calcula la longitud de l'arc que hi ha en la greca exterior entre dues figures consecutives.

b) Calcula la longitud d'arc que hi ha en la següent greca entre dues figures consecutives.

2.3. Àrea del cercle

L' **àrea del cercle** és igual al producte del nombre π pel quadrat del radi.

$$\mathbf{A = \pi \cdot r^2.}$$



Es pot imaginar l'àrea del cercle com a la que s'acosten polígons regulars inscrits en una mateixa circumferència de radi *r*, amb cada vegada més costats. Llavors:

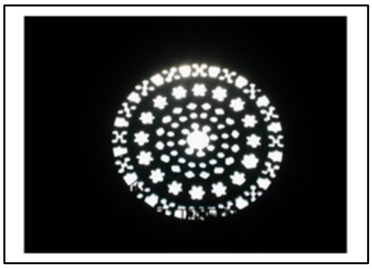
i) L'apotema del polígon s'aproxima al radi.

ii) El perímetre del polígon s'aproxima a la longitud de la circumferència.

Per tant, l'àrea d'aqueix polígon, que és igual al semiperímetre per l'apotema, és igual a:

$$(2\cdot\pi\cdot r/2)\cdot r = \pi\cdot r^2.$$

Activitats resoltes



- L'àrea d'un cercle de radi 7 *cm* és A = 49 π ≈ 153,86 cm^2. I el d'un cercle d'1 *cm* de radi és A = π ≈ 3,14 cm^2.
- L' àrea d'un cercle de diàmetre 4 m és A = 2^2 π = 4 π ≈ 12,56 m^2. I el d'un cercle de 2 *m* de diàmetre és A = 1^2π = π ≈ 3,14 m^2.

Activitats proposades

22. Calcula l'àrea tancada per la circumferència exterior del rosetó de 3 *m* de radi.

23. Calcula l'àrea tancada per la circumferència que rodeja a la figura interior sabent que el seu radi és de 1,3 *m*.

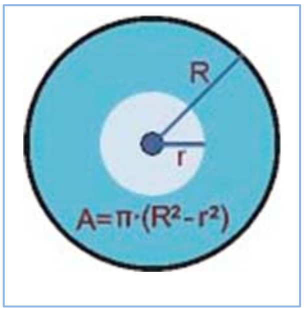
24. Dibuixa un esquema en el teu quadern del dit rosetó i calcula àrees i longituds.

Autors: Javier Rodrigo, Raquel Hernández i José Antonio Encabo

2.4. Àrea de la corona circular

L'àrea d'una corona circular és igual a l'àrea del cercle major menys l'àrea del cercle menor.

$$\mathbf{A = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (R^2 - r^2)}$$



Activitats resoltes

- L'àrea de la corona circular formada per les circumferències concèntriques de radis 97,5 *cm* i 53,2 *cm* és igual a: A = $\pi \cdot (R^2 - r^2) = \pi \cdot (97{,}5^2 - 53{,}2^2) = \pi \cdot (9506{,}25 - 2830{,}24) = \pi \cdot 6676{,}01 \approx 20962{,}6714$ cm^2.

Activitats proposades

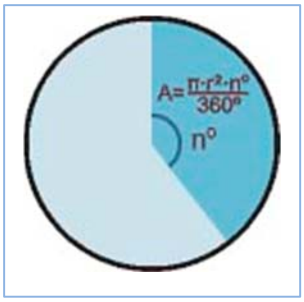
25. Calcula l'àrea de la corona circular de radis 7 i 3 *cm*.

2.5. Àrea del sector circular

L'àrea d'un sector circular que comprén un angle de *n* graus és igual a:

$$\mathbf{A = \pi \cdot r^2 \cdot n/360.}$$

Per trobar l'àrea **del segment circular restem** a l'àrea del sector circular l'àrea del triangle construït sobre els radis.



Activitats resoltes

- Per trobar l'àrea del *sector* circular de radi 7 m que comprén un angle de 90º, calculem l'àrea del cercle complet: $\pi \cdot 7^2 = 49\pi$, i trobem la proporció:

$$A_S = 49\pi \cdot 90/360 = 12{,}25\,\pi \approx 38{,}465\ m^2.$$

Per trobar l'àrea del *segment* circular, restem a l'àrea anterior l'àrea del triangle rectangle de base 7 *m* i altura 7 *m*, $A_T = 7 \cdot 7/2 = 24{,}5\ m^2$. Doncs l'àrea del segment és:

$$A = A_S - A_T = 38{,}465 - 24{,}5 = 13{,}965\ m^2.$$

Activitats proposades

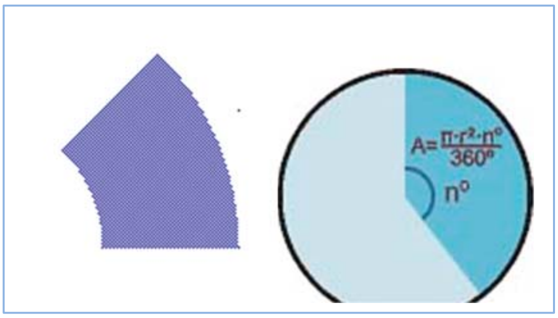
26. Calcula l'àrea del sector circular i del segment circular de radi 12 *cm* i que forma un angle de 60º. Observa que per a calcular l'altura del triangle necessites usar el Teorema de Pitàgores.

2.6. Altres àrees.

Per trobar l'àrea **d'un sector de corona circular** restem a l'àrea del sector circular de major radi l'àrea del sector circular de menor radi.

L'**àrea d'un sector de corona circular** formada per les circumferències concèntriques de radis *r* i *R* que comprén un angle de *n* graus és igual a:

$$\mathbf{A = \pi \cdot R^2 \cdot (n/360) - \pi \cdot r^2 \cdot (n/360) = \pi \cdot (R^2 - r^2) \cdot n/360.}$$



Activitats resoltes

- Per trobar l'àrea del *sector* de corona circular de radis 7 m i 8 m que comprén un angle de 90º, calculem l'àrea de la corona circular completa: $\pi \cdot (8^2 - 7^2) = 15\,\pi$, i trobem la proporció:

$$A_C = 15\,\pi \cdot 90/360 = 3{,}75\,\pi \approx 11{,}78\ m^2.$$

També es pot trobar amb la fórmula anterior:

$$A_C = \pi \cdot (8^2 - 7^2) \cdot 90/360 \approx 11{,}78\ m^2.$$

Activitats proposades

27. Calcula l'àrea del sector de corona circular de radis 10 *cm* i 12 *cm* i que forma un angle de 60º.

CURIOSITATS. REVISTA

Mesura del radi de la Terra.

Eratòstenes de Cirene va estimar, de manera molt precissa per a la seua època, el radi de la Terra. Per fer això va haver de mesurar amb atenció longituds (entre la ciutat de Syena prop d'Assuan i Alexandria), angles (del Sol en el solstici d'estiu). Com aqueix angle era 1/50 de la circumferència va determinar que el radi de la Terra era 50 vegades la distància calculada.

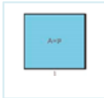
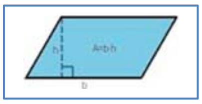
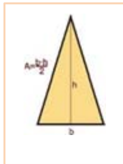
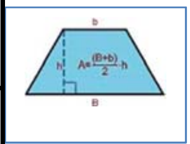
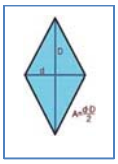
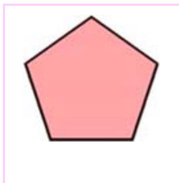
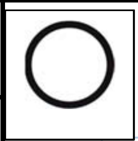
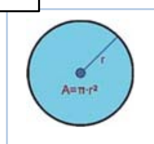
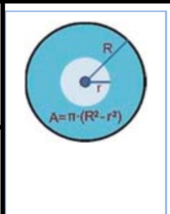
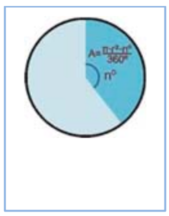
El nombre π (PI)

És un nombre sorprenent amb infinites xifres decimals no periòdiques.
El seu rastre més antic es troba en el Papir d'Ahmes on se li dóna un valor de 3,16.
Arquimedes el va valorar com 22/7 que és 3,1429.
Actualment, amb ajuda de l'ordinador, es calculen més i més de les seues xifres decimals. En 2009 es van trobar més de dos bilions i mig de decimals de pi: π = 3,141592…

Algunes xifres de π:

3,141592653589793238462643383279502884986280348253421170679821480865132823O
684102701938521105559644622948954930381712019091456485669234603486104543266
488152092096282925409171536436789259036057270365759591953092186117381932611
793279381830119491298336733624406566430861717629317675238467481846766940513
200078721468440901224953430146549585371050181598136297747713099605187072113
499995534690830264252230825334468503526193177669147303598253490428755468731
159562130019278766111959092164201989380952573530185296899577362259941389124
972177561727855889075098381754637464939319255076601047101819429555961989467
678374496949129331367702898915210475216205696673263914199272604269922796782
354781636498385054945885869269956909272107975098183479775356636980742654252
786255181892173217214772350141441973568548161361345477624168625189835694855
620992192222723279178608578438382796797668145410084128488626945604241965285
022210661186719172874677646575739624138908658326455259570982582262052248940
772671947826852451749399651431429809190659250937221617539284681382686838689
427741559918554865383673622262609912460805124388439089441694868555848406353
422072225828488385225499546667278239864565961163548867945109659609402522887
971089314566913617824938589009714909675985261365549781775551323796414515237
462343645428584443596953623144295248493718711014576540378489683321445713868
751943506430218453614196634287544406437451237181921799983196156794520809514
655022523160388193046722182562599661501421503068038447734324340881907104863
317346496514539057965910289706414011097120628043903975951573125147120532928
191826186125867321579722910981690915280173506712748583222870675103346711031
412671113699086585163909989859982387345528331635 50…

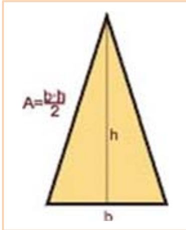
RESUM

Àrea del quadrat	A = costat^2 = l^2	 	Si l = 4 $cm \Rightarrow$ A = 16 cm^2
Àrea del rectangle	A = base per altura = $a \cdot b$		Si a = 3 cm, b = 5 $cm \Rightarrow$ A = 15 cm^2.
Àrea del paral·lelogram	A = base per altura = $a \cdot b$		a = 7 m, b = 9 $m \Rightarrow$ A = 63 m^2
Àrea del triangle	A = (base per altura)/2 = $a \cdot b/2$		a = 5 m, b = 6 m $\Rightarrow$ A = 15 m^2
Àrea del trapezi	Àrea igual a la semisuma de les bases per l'altura	 	B = 7; b = 3; h = 5 $\Rightarrow$ A = 25
Àrea del rombe	Àrea igual al producte de les diagonals partit per 2		D = 4, D = 9 $\Rightarrow$ A = 36/2 = 18
Perímetre d'un polígon	Perímetre és igual a la suma dels costats		Costat = 6 cm, apotema = 5 cm, nombre de costats = 5 $\Rightarrow$ Perímetre = 6 · 5 = 30 cm; Àrea = 15 · 5 = 75 cm^2.
Àrea d'un polígon regular	Àrea és igual al semiperímetre per l'apotema		
Longitud de la circumferència	Si el radi és r, la longitud es igual a 2 · π · r.	 	Radi = 3 $cm \Rightarrow$ Longitud = 6π ≈ 18,84 cm. Àrea = 9π ≈ 28,26 cm^2. Si α = 30º i r = 3 cm ⇒Longitud de l'arc = 2·π·3·30/360 = 0,5π ≈ 1,57 cm
Longitud d'un arc de circumferència	Si comprén un arc α , longitud és igual a 2 · π · r · α/360		
Àrea del cercle	Si el radi és r, l'àrea és igual a π · r^2.		
Àrea de la corona circular	És la diferència entre l'àrea del cercle major menys la del cercle menor.	 	R = 7, r = 3 $\Rightarrow$ A = π(7^2 – 3^2) = π(49 – 9) = 40π ≈ 125,6 u^2
Àrea del sector circular	Si comprén un arc núm., l'àrea és igual a π · r^2· n/360.		R = 4 cm, n = 60º $\Rightarrow$ A = π·16·60/360 ≈ 8,373 cm^2

Autors: Javier Rodrigo, Raquel Hernández i José Antonio Encabo

EXERCICIS I PROBLEMES de 1r d'ESO

Longituds i àrees de polígons



1. Un senyal de circulació té forma triangular. La seua base mesura 23 cm i la seua altura 36 cm. Quina és l'àrea del senyal de circulació?

2. La pissarra d'una classe té 150 cm d'altura i 210 cm de base. Quina és la superfície de la pissarra?

3. La teulada d'una casa té forma de trapezi. La base pegada al sostre de la vivenda mesura 53 m i l'altra base mesura 27 m. Sabent que l'altura de la teulada són 8 m, Quant mesura la seua àrea?

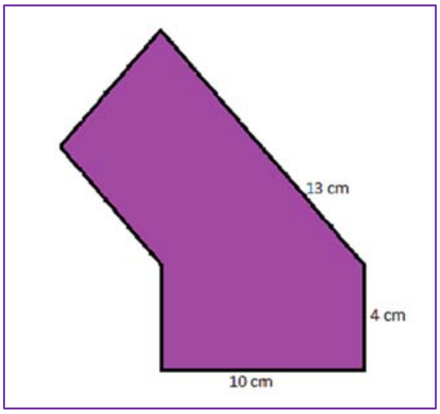
4. Es vol dissenyar un portagots. Pot ser quadrat de 12 cm de costat o circular de 7 cm de radi. Calcula ambdues superfícies. Als portagots se'ls vol posar un vorell. Quina longitud de vorell es necessita en cada cas? Quin és menor? Només tenim 50 cm de vorell, què quadrat podem dissenyar i quin portagots circular? Calcula l'àrea de cada u.

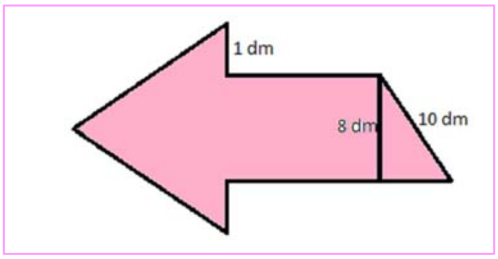
5. Calcula l'àrea d'un triangle isòsceles els costats iguals del qual mesuren 7 *cm* i el seu perímetre mesura 20 *cm*.

6. Quina és l'àrea d'un rectangle la diagonal del qual mesura 13 *cm* i la seua altura 5 *cm*?

7. Calcula el perímetre d'un rombe les diagonals del qual mesuren 24 i 10 *cm* respectivament.

8. Calcula l'àrea dels següents polígons irregulars:





Longituds i àrees de figures circulars

9. Calcula la longitud d'una circumferència de radi 7 cm.

10. Una circumferència de 98,27 cm de longitud, quin radi té? i quin diàmetre?

11. Quina és la longitud d'un arc de circumferència de 270º si el radi mesura 17 cm?

12. Calcula la longitud d'una circumferència inscrita en un hexàgon de costat 5 cm.

13. Calcula la longitud d'una circumferència inscrita en un quadrat de costat 5 cm.

14. Calcula la longitud d'una circumferència circumscrita en un quadrat de costat 5 cm.

15. Calcula l'àrea en m^2 dels cercles de radi *r* igual a:

a) *r* = 53 *cm* b) *r* = 9 *m* c) *r* = 8,2 *dam* d) *r* = 6,2 *dm*

16. Calcula el radi d'un cercle d'àrea 28,26 m^2.

17. Calcula l'àrea d'un cercle de diàmetre 73,6 cm.

18. Calcula l'àrea de les corones circulars de radis, respectivament:

a) R = 8 *m*; r = 3 *m*. b) R = 72 *cm*; r = 41 *cm*. c) R = 9 *m*; r = 32 *cm*. d) R = 5 *dm*; r = 4 *cm*.

19. Calcula l'àrea, en cm^2, dels sectors circulars de radi *r* i angle α següents:

a) r = 6 m; α = 30º b) r = 3,7 cm; α = 45º c) r = 2,7 dm; α = 60º d) r = 4 m; α = 90º

20. En una habitació rectangular de costats 3 i 5 m, cobrim un tros amb una estora circular de radi 2 m, quina part de sòl queda sense cobrir?

21. Dibuixa al teu quadern el disseny de tapís del marge de manera que el costat del quadrat xicotet fosc siga d'1 cm, el costat del quadrat de vora groc, de 3 cm, i la vora del quadrat de fons roig, de 6 cm. Estima l'àrea del cercle roig, del cercle fosc, de la figura en roig i de les línies grogues.

22. En una estora circular de 3 m de diàmetre ha caigut en el centre una taca de mig metre de radi. a) Quina àrea ocupa la part neta de l'estora? b) Tapem la taca amb una altra estora quadrada de 1,5 m de costat, quina àrea de l'estora circular queda sense tapar?

23. En un cercle tallem dos cercles tangents interiors de ràdios 5 i 2 cm, quina àrea queda sense tallar?

AUTOAVALUACIÓ de 1r d'ESO

1. El costat d'un hexàgon regular medeix 7 *m*, doncs el seu perímetre medeix:

a) 4,2 *dam* b) 42 m^2 c) 42 *m* d) 42000 *cm*

2. El rombe de diagonals 12 *dm* i 10 *dm* té com a àrea:

a) 62 dm^2 b) 11 dm^2 c) 60 dm^2 d) 67 dm^2

3. El trapezi de bases 7 *cm* i 5 *cm* i altura 8 *cm*, té com a àrea:

a) 60 cm^2 b) 48 cm^2 c) 50 cm^2 d) 40 cm^2

4. La longitud de la circumferència de radi 4,6 *cm* mesura aproximadament:

a) 0,2 *m* b) 30 *cm* c) 28,9 *cm* d) 25,7 *cm*

5. La longitud de l'arc de circumferència de radi 27,4 *m* que comprén un arc de 30º medeix aproximadament:

a) 28,6 *m* b) 100 *cm* c) 28,9 *cm* d) 14,34 *m*

6. L' àrea del cercle de radi 83,6 *m* medeix aproximadament:

a) 2,19 hm^2 b) 234 dam^2 c) 295413344 cm^2 d) 0,2 km^2

7. L'àrea de la corona circular de radis 10 i 5 *m* medeix aproximadament:

a) 23550 cm^2 b) 235,5 m^2 c) 235 *m* d) 0,2 km^2

8. La longitud de la semicircumferència de radi 7,3 *cm* medeix aproximadament:

a) 0,3 *m* b) 45,8 *cm* c) 22,922 *cm* d) 25,7 *cm*

9. La longitud de l'arc de circumferència de radi 9,2 *m* que comprén un arc de 60º medeix aproximadament:

a) 9,3421 *m* b) 10 *m* c) 976 *cm* d) 9,6 *m*

10. L'àrea del sector circular de radi 83,6 *m* que comprèn un arc de 45º medeix aproximadament:

a) 2,172 hm^2 b) 231 dam^2 c) 27445581 cm^2 d) 273 m^2

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Nieves Zuasti

Revisores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos

Il·lustracions: Banc d'imatges de l'INTEF

Traducció al valencià: Departament de Matemàtiques de l'Institut Juan de Garay

Índex

Resum

En aquest capítol aprendrem a utilitzar instruments que ens permeten establir comparacions entre magnituds.

Estudiarem els procediments de la proporcionalitat directa com la regla de tres i el càlcul de percentatges, en la resolució de problemes relacionats amb la vida quotidiana.

Si coneixes l'escala o proporció d'una fotografia, una fotocòpia… pots saber la grandària real de l'objecte mesurant sobre la foto o fotocòpia.

Si coneixes l'escala o proporció d'aquesta fotografia pots saber la grandària real d'aquestes flors mesurant sobre la foto.

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Institut Juan de Garay

RAÓ I PROPORCIÓ

1.1. Raó

Raó, en Matemàtiques, és una comparació entre els valors de dos variables.

S'expressa en forma de quocient, de forma semblant a una fracció i es llig ***"A és a B"***

Exemple:

- Comprem 3 kg de cireres per 6 €. Podem establir la relació entre el preu (6 €) i la quantitat (3 kg)

6 : 3 = 2 € el quilo

$\frac{6}{3}$ **és la raó** entre euros i cireres**.**

D'aquesta manera si comprem altres quantitats de cireres podrem calcular el preu a pagar.

Exemple:

- La raó que relaciona el gasto de 4 persones i els 200 litres d'aigua que gasten en un dia, pot escriure's:

$$\frac{4 \ persones}{200 \ litres} \text{ o bé } \frac{200 \ litres}{4 \ persones}$$

> ***Observa***:
>
> **Una fracció** expressa una part d'un tot d'una **única magnitud**, mitjançant els seus termes, numerador (les parts que es prenen) i denominador (el total de les parts en què s'ha dividit aqueix tot)
>
> No obstant això, els termes d'una **raó** es refereixen a quantitats de dues **magnituds**, el primer s'anomena "antecedent" i el segon "conseqüent"

En qualsevol dels casos estem expressant que la raó entre litres d'aigua i persones és:

200 : 4 = 50 litres per persona

Si són 40 persones, la quantitat d'aigua serà 2000 litres, si són dues persones la quantitat d'aigua serà 100 litres, és a dir:

$$\frac{4}{200} = \frac{40}{2000} = \frac{2}{100} = \frac{1}{50} \text{ o bé } \frac{200}{4} = \frac{2000}{40} = \frac{100}{2} = \frac{50}{1}$$

Idees clares

Una **raó** és un quocient. S'expressa en forma de **fracció** però els seus termes no expressen una part d'una mateixa magnitud sinó la **relació** entre dues magnituds.
Els termes de la raó poden ser nombres enters o decimals.

Activitats proposades

1. Tres persones gasten 150 litres d'aigua diàriament.
   Quina és la raó entre els litres consumits i el nombre de persones? Quina és la raó entre les persones i els litres consumits?
2. Sis quilos de taronges van costar 6,90 €. Expressa la raó entre quilos i euros.
3. La raó entre dues magnituds és 56. Escriu un exemple dels valors que poden tindre aquestes dues magnituds.

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Institut Juan de Garay

1.2. Proporció

Una **proporció** és la **igualtat** entre dues raons.

Els termes primer i quart són els **extrems** i el segon i tercer són els **mitjans.**

$$\frac{extrem}{mitjà} = \frac{mitjà}{extrem}$$

S'anomena "**raó *de proporcionalitat***" al quocient entre dos variables. I el seu valor constant ens permet obtindre raons semblants.

Quan manegem una sèrie de dades de dos parells de magnituds que presenten una mateixa raó, es poden ordenar en un quadre de proporcionalitat.

Exemple:

- En el quadre de baix s'observa que cada arbre dóna $\frac{200}{4} = 50$ kg de fruita. És la raó **de proporcionalitat.**

  Amb aqueix dada podem completar el quadre per als següents casos.

kg de fruita	**200**	400	100	50	500	150	3000	1000
núm. d'arbres	**4**	8	2	1	10	3	60	20

Propietat fonamental de les proporcions:

En tota proporció, el producte dels extrems és igual al producte dels mitjans.

Exemple:

- $\frac{45}{27} = \frac{30}{18} \Rightarrow 45 \cdot 18 = 30 \cdot 27$

Idees clares

Observa que la raó de proporcionalitat ens serveix per a establir una relació entre les dos variables per a qualsevol dels valors que puguen adoptar.

Activitats proposades

4. Completa les proporcions següents:

a) $\frac{18}{12} = \frac{30}{x}$ **b)** $\frac{0{,}4}{x} = \frac{6}{9}$ **c)** $\frac{x}{7{,}5} = \frac{3{,}6}{2{,}4}$ **d)** $\frac{0{,}05}{10} = \frac{x}{300}$

5. Ordena aquestes dades per a compondre una proporció:

a) 12, 3, 40, 10 b) 24, 40, 50, 30 c) 0,36; 0,06; 0,3; 1,8

6. Copia al teu quadern i completa la taula sabent que la raó de proporcionalitat és 4,5:

0,5	**7**	**3**		**20**			**3,6**
		13,5	**36**		**45**	**18**	

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Institut Juan de Garay

2. MAGNITUDS DIRECTAMENT PROPORCIONALS

2.1. Proporcionalitat directa

Dues magnituds són directament **proporcionals** quan en multiplicar o dividir a la primera per un nombre, la segona queda multiplicada o dividida pel mateix nombre.

Exemple:

- El nombre de persones que vénen a dinar i la quantitat de menjar que necessite. Per exemple si el nombre de persones és el triple caldrà preparar triple quantitat de menjar.

No obstant això, hi ha relacions entre magnituds que no són de proporcionalitat perquè quan una es multiplica o es divideix per un nombre, l'altra no queda multiplicada o dividida de la mateixa manera.

Exemple:

- El pes i l'edat d'una persona no són magnituds proporcionals: El doble de l'edat no vol dir el doble de pes.

Idees clares

Quan dues magnituds són directament proporcionals, el doble, triple, … de la primera suposa el doble, triple ... de la segona

Hi ha magnituds que no es relacionen proporcionalment.

Activitats proposades

7. Assenyala d'aquests parells de magnituds, les que són directament proporcionals:

- La grandària d'un recipient i el nombre de litres que pot contindre.
- L'edat d'una persona i la seua altura.
- El nombre de pisos que puja un ascensor i les persones que caben en ell.
- Els quilos de pinso i el nombre d'animals que podem alimentar.
- Les entrades venudes per a un concert i els diners recaptats.
- El nombre de calçat i l'edat de la persona.

8. Calcula els termes que falten per completar les proporcions:

a) $\frac{18}{24}=\frac{30}{x}$ b) $\frac{25}{100}=\frac{40}{x}$ c) $\frac{3,6}{21,6}=\frac{x}{3}$

9. Ordena aquests valors de manera que formen una proporció directa:

a) 3,9 0,3 1,3 0,1 b) 5, 12, 6,10 c) 0,18 4 0,4 18

Hi ha més d'una solució?

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Institut Juan de Garay

2.2. Regla de tres directa

Per a resoldre problemes de proporcionalitat directa, podem utilitzar el mètode **de reducció a la unitat.**

Exemple:

- Cinc bitllets d'avió van costar 690 €. Quant pagarem per 18 bitllets per al mateix recorregut?

Primer calculem el preu d'un bitllet, 690 : 5 = 138 €.

Després calculem el cost dels 18 bitllets: 138 · 18 = 2484 €

La **regla de tres** és un altre procediment per a calcular el quart terme d'una proporció.

Exemple:

- Amb dos quilos de pinso els meus gats mengen durant 6 dies. Quants quilos necessitaré per a donar-los de menjar 15 dies?

Formem la proporció ordenant les dades: $\frac{2\ kg}{x\ kg} = \frac{6\ dies}{15\ dies} \Rightarrow x = \frac{2 \cdot 15}{6} = 5\ kg$

Una altra forma habitual de plantejar la regla de tres és situant les dades d'aquesta manera:

2 kg ———————— 6 dies

x kg ———————— 15 dies

$$x = \frac{2 \cdot 15}{6} = 5\ kg$$

Idees clares

En la **regla de tres directa** ordenem les dades de manera que el valor desconegut s'obté multiplicant en creu i dividint pel tercer terme.

Reduir a la unitat significa calcular el valor d'un per a poder calcular qualsevol altra quantitat.

Activitats proposades

10. Un cotxe gasta 7 litres de gasolina cada 100 km, quants litres gastarà en un viatge de 825 km?

11. En una rifa s'han venut 320 paperetes i s'han recaptat 640 euros. A quant es venia cada papereta? Quant haurien recaptat si hagueren venut 1000 paperetes?

12. Una paella per a 6 persones necessita 750 g d'arròs, quantes persones poden menjar paella si utilitzem 9 kg d'arròs?

13. Tres camisetes ens van costar 24,90 €, quant pagarem per 11 camisetes iguals?

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Institut Juan de Garay

2.3. Percentatges

El **percentatge** o **tant per cent** és la proporció directa més utilitzada en la nostra vida quotidiana.

Als comerços, informacions periodístiques, o en les anàlisis de resultats de qualsevol activitat apareixen percentatges.

Un percentatge és una raó amb denominador 100.

El seu símbol és **%**.

La seua aplicació es realitza mitjançant un senzill procediment:

"Per calcular el % d'una quantitat es multiplica pel tant i es divideix entre 100"

Exemple:

- Calcula el 23 % de 800 El 23 % de 800 = $\frac{23 \cdot 800}{100} = 184$

Alguns percentatges es poden calcular mentalment en tractar-se d'un càlcul senzill:

- El 50 % equival a la meitad de la quantitat.
- El 25 % és la quarta part de la quantitat.
- El 75 % són les tres quartes parts de la quantitat.
- El 10 % és la desena part de la quantitat.
- El 200 % és el doble de la quantitat.

GRANS REBAIXES!!

40 % DE DESCOMPTE

EN TOTS ELS ARTICLES

Exemple:

- El 25 % de 600 és la quarta part de 600, per tant és 600 : 4 = 150

Idees clares

Si qualsevol quantitat la divideixes en 100 parts, el 22 % són vint-i-dos parts d'aqueixes cent.
El total d'una quantitat s'expressa com el 100 %

Activitats proposades

14. Calcula mentalment:

a) El 50 % de 190 b) el 1 % 360 c) el 10 % de 200 d) el 300 % de 7

15. Completa la taula:

Quantitat inicial	%	Resultat
280	16	
720		108
60	140	
	60	294

16. En un hotel estan allotjades 320 persones. D'elles, 40 són italianes, 120 franceses, 100 són alemanyes i la resta russes. Calcula el % que representa cada grup sobre el total.

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Institut Juan de Garay

3. ESCALES: PLANS I MAPES

Els dibuixos, fotografies, mapes o maquetes representen objectes, persones, edificis, superfícies, distàncies...

Perquè la representació siga perfecta, han de guardar en tots els seus elements una mateixa raó de proporcionalitat que denominem **"escala".**

L'**escala** és una raó de proporcionalitat entre la mesura representada i la mesura real, expressades en una mateixa unitat de mesura.

Exemple:

- En un mapa apareix assenyalada la següent escala **1 : 20 000** i s'interpreta que 1 cm del mapa representa 20 000 cm a la realitat.

Exemple:

CATEDRAL DE SANTIAGO DE COMPOSTEL·LA

- Hem fotografiat la catedral de Santiago de Compostel·la. La grandària de la foto ens dóna una escala:

1 : 600.

Les dues torres de la fatxada tenen en la foto una altura de 3,5 cm. L'altura real de les torres serà:

$3,5 \cdot 600 = 2100$ cm = 21 m.

Les escales ens permeten observar que la imatge real i la del dibuix són **semblants.**

Idees clares

L'escala utilitza el cm com a unitat de referència i s'expressa en comparació a la unitat.
Per exemple: 1 : 70000
Dues figures són semblants quan tenen la mateixa forma i els seus costats són proporcionals.

Activitats proposades

17. Escriu quatre exemples en què s'utilitzen escales.

18. La distància entre Madrid i Burgos és 243 km. En el mapa, la distància entre ambdues ciutats és 8,1 cm, a quina escala està dibuixat el mapa?

19. Completa la següent taula tenint en compte que l'escala aplicada és 1 : 5000

Dibuix	Mesura real
18 cm	
	3 km
0,008 m	

20. Calcula l'escala corresponent en cada exemple de la taula:

Dibuix	Mesura real	Escala
2,5 cm	800 m	
4 cm	6,4 hm	
5 cm	9 km	

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Institut Juan de Garay

CURIOSITATS. REVISTA

Si el planeta Terra fora

una boleta d'1 cm de diàmetre,

Júpiter seria una bola de

11,20 cm de diàmetre,

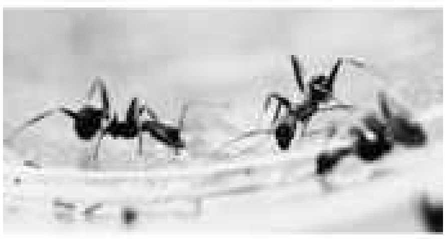
ja que els seus diàmetres

són 12.756 km i 142.984 km

PROPORCIONALMENT UNA FORMIGA COMÚNA ÉS MÉS FORT QUE UN ELEFANT, perquè és capaç d'alçar, gràcies als seus músculs, 50 vegades el seu propi pes i 30 vegades el volum del seu cos. **Alguns tipus més de 80 vegades. És l'animal amb el cervell més grand respecte a la seua grandària**

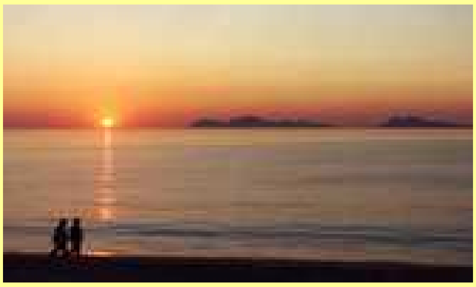
El peresós de tres dits es mou a una velocitat de 2,2 metres per hora.

El caragol tarda una hora en caminar mig metre.



El cor impulsa 80 ml de sang per batec, al voltant de 5 litres de sang per minut. Batega entre 60 i 80 vegades per minut, la qual cosa suposa més de 30 milions de vegades a l'any i 2000 milions de vegades en tota la vida.

Si per alguna raó el sol deixara d'emetre llum, en la Terra tardaríem 8 minuts a donar-nos compte ja que estem a 149.600.000 km de distància.



La velocitat com a objectiu

En el món modern, la gestió del temps ha primat enfront d'altres objectius.

Açò es reflectix en la incorporació massiva de l'alta velocitat en els nostres trens. L'AVE pot aconseguir els 300 km per hora.

Un ascensor d'alta velocitat és capaç de pujar, sense realitzar parades, fins a la planta 80 en 48 segons.

EL PES DE LES FORMIGUES

Estudis recents afirmen que el 10 % de la biomassa animal està formada per formigues. La biomassa, el pes total de tots els individus del planeta. S'estima que hi ha uns 7000 bilions de formigues, és a dir un milió per cada humà.

Tenint en compte que el pes mitjà d'una formiga és de 0,000065 kg i que el pes de les persones vives s'estima en 455 gigatonelades, es pot concloure que les formigues arriben a igualar el pes dels humans a pesar del seu xicoteta grandària.

TRUITA RÈCORD

16000 ous, 1600 kg de creïlles, 26 kg de ceba, 150 litres d'oli i 15 kg de sal han permés aconseguir el rècord de la truita de creïlles més gran cuinada. Aquesta súper truita va mesurar 5,20 metres de diàmetre, 7 cm de grossor i una tona i mitja de pes

Aquest rècord es va aconseguir el 2 d'agost a Vitoria-Gasteiz.

Suposant un **pes mig unitari de 65 quilos, tots els humans vius junts pesen 455 gigatonelades**, un pes semblant, segons Wilson, al de totes les formigues però amb un xicotet matís: elles **són 7.000 bilions, a raó d'un milió per cada un de nosaltres**. I no penses que són totes iguals, perquè la major de totes, la formiga gegant (*formicium giganteum*) podria albergar en el seu cap una colònia sencera de la més xicoteta (*pheidole*).

Si ens cenyim a la biomassa, és a dir, al pes total de tots els individus, les **formigues guanyen de carrer la competició per ser l'animal més abundant del planeta**, igualant el pes de tots els hòmens (i dones) junts. La qual cosa té molt mèrit, tenint en compte que la formiga mitjana pes una milionèsima part de l'humà mig, és a dir 0,000065 quilos.

Segons els càlculs de Bert Hölldobler i Edward Osborne Wilson en el seu meravellós compendi **"Les formigues"** (1990), les **formigues i els seus llunyanes parents els tèrmits acapararien "un terç de tota la biomassa animal terrestre"**. Un estudi realitzat a Finlàndia va concloure que **el 10 % de la biomassa animal estava formada per formigues**, una xifra que s'elevava fins al **15 % en el cas de la selva de Brasil**. En l'Amazones, ens compte Wilson, "les formigues tenen més de quatre vegades la biomasses de tots els vertebrats terrestres junts: aus rèptils, amfibis i mamífers".

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Institut Juan de Garay

RESUM

Concepte	*Definició*	*Exemple*
Raó	Comparació entre els valors de dos variables	Preu i quantitat
Proporció	Igualtat entre dues raons	A és a B com C és a D
Magnituds directament proporcionals	Si es multiplica o divideix una de les magnituds per un nombre, l'altra queda multiplicada o dividida pel mateix nombre	24 és a 10 com 240 és a 100
Raó de Proporcionalitat directa	Quocient entre els valors de dues magnituds	$\frac{300}{25}$
Percentatges	Raó amb denominador 100	$\frac{23}{100}$
Escales i plans	Comparació entre grandària real i grandària representada	1 : 20000

PERCENTATGE AMB CALCULADORA

En la calculadora pots trobar una funció que et permet calcular el % de manera directa.

Per a això has de seguir els passos següents:

1. **Escriu la quantitat**
2. **Multiplica pel tant**
3. **Polsa SHIFT i %. El resultat que apareix en la pantalla és la solució.**

Exemple:

650	*	16	SHIF	%	=	104

Una forma fàcil d'afegir o restar l'import del tant per cent a la quantitat final pot fer-se de la manera següent:

- **Segueix els passos 1, 2 i 3 anteriors**
- **Polsa la tecla + si el que vols és un augment percentual**
- **Polsa la tecla – per a una disminució percentual**

Exemple:

1370	*	12	SHIFT	%	164.4	+	1534.4

1370	*	12	SHIFT	%	164.4	–	1205.6

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Institut Juan de Garay

EXERCICIS I PROBLEMES de 1r d'ESO

1. Expressa la raó entre les edats de Jordi, 26 anys, i Andrés, 32 anys.

2. Expressa la raó entre les 20 persones que acudeixen a dinar a un restaurant i els 440 € que es recapten.

3. A un examen de 30 preguntes un estudiant ha contestat 21 bé i 9 mal. Expressa les raons entre aquests resultats i el total de les preguntes

4. Copia en el teu quadern i relaciona les magnituds d'ambdues columnes perquè cada exemple responga a parells de magnituds directament proporcionals:

Nombre de quilos de creïlles i	Litres de gasolina necessaris,
Quantitat d'aigua necessària i	Persones que viuen a un edifici
Diners disponibles i	Vestits confeccionats
Quilòmetres a recórrer i	Nombre de persones que vénen a dinar
Metres de tela i	Prendes que podem comprar

5. Amb aquestes sis magnituds has d'elaborar tres raons:

Nombre de persones, hores, quantitat de llet, litres de refresc, distància entre dues ciutats, nombre de vaques

6. Calcula el quart terme de les proporcions següents:

a) $\frac{36}{20}=\frac{45}{x}$ b) $\frac{12,6}{x}=\frac{0,2}{0.5}$ c) $\frac{1}{0,25}=\frac{x}{3}$ d) $\frac{x}{2}=\frac{35}{5}$

7. Aquesta recepta és per a 4 persones. Elabora dues receptes semblants per a 6 persones i per a 15 persones

ARRÒS AMB VERDURES

380 g d'arròs
1 kg de tomaca triturada
800 g de carabasseta
3 dents d'all
120 cl d'oli
1 kg xampinyó
1/2 kg pimentons rojos i verds

8. Completa la taula de proporcionalitat directa:

Distància	100	240		360	
Litres	6,5		52		2,6

9. Una llanda de clòtxines de 200 g val 2,40 €. Una altra llanda de 700 g es ven a 7,20 €, quina de les dues és proporcionalment més barata?

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Institut Juan de Garay

10. Quants diners ens costaran 6 ordinadors sabent que 56 ordinadors han costat 28 000 €?

11. Càlcul Mental

3 % de 40	20 % de 800	12 % de 70	3 % de 120
25 % de 300	15 % de 60	150 % de 30	200 % de 2

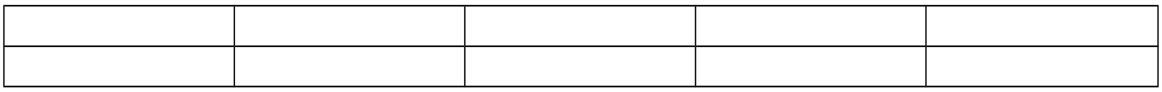
12. Completa mentalment:

a) El ....% de 30 es 3	b) El ....% de 500 es 250	c) El ....% de 400 es 4
d) El 20% de .... es 8	e) El 75% de .... es 30	f) El 150% de .... es 60

13. Calcula el 300 % del 10 % de 480.

14. Quin percentatge ocupen els quadres negres?

15. Copia aquesta taula al teu quadern i pinta un percentatge que represente el 40 %.



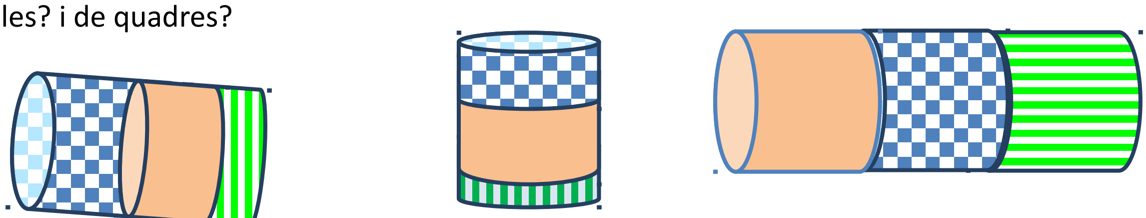
16. Rosana gasta el 15 % del seu diners i Marta gasta el 50 % del seu. No obstant això Marta ha gastat menys diners que Rosana, com és possible?

17. Completa la taula:

%	Quantitat	Resultat
45	1024	
	23	115
18		162

18. Quin d'aquests dibuixos conté major proporció de color taronja en relació a la seua dimensió?

19. Quin d'aquests dibuixos conté major proporció de color taronja en relació a la seua dimensió? I de ratlles? i de quadres?



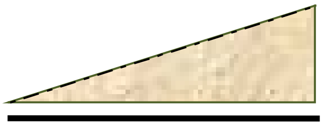
Fes una estimació en tants per cent per a cada cilindre i cada part.

20. En l'oficina de ma mare, el 18 % dels seus companys juguen a la BONOLOTO, el 56 % juguen a l'EUROMILIÓ, el 20 % juguen a la PRIMITIVA, i els 3 treballadors restants no juguen a res. Quantes persones treballen en aqueixa oficina?

21. Un adult respira uns 5 litres d'aire per minut. Quants litres respira en una setmana?

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Institut Juan de Garay

22. En 2 km ascendim 40 m, respecte a l'horitzontal, què % hem ascendit?

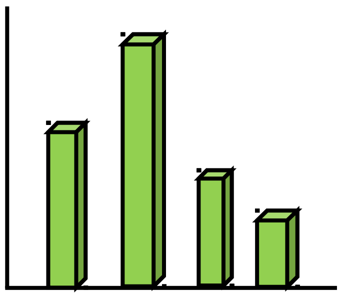


23. El guepard és l'animal terrestre més ràpid, ja que és capaç d'aconseguir una velocitat màxima de 130 km per hora. Quantes hores tardaria un guepard, sense parar, a viatjar des de València fins a Barcelona? I de Palència fins a Cadis?

24. Fes un informe sobre l'animal que més corre, el que més viu, el que més menja, el que més temps pot passar sense menjar o sense beure.

25. Si el dòlar es cotitza a 1,12 €, Quants dòlars obtindrem en canviar 360 €?

26. En estadística s'utilitzen els gràfics per a expressar l'evolució dels valors d'una variable respecte a una altra.



Si assignem a la barra més alta el valor 100, calcula de forma aproximada l'altura de les altres.

Si la barra més xicoteta pesa 0,5 kg. Quant pesaran cadascuna de les altres barres?

27. En un pla de carreteres la distància entre dues ciutats és de 6 cm. Si l'escala és 1 : 40000. Calcula la distància entre les ciutats.

28. Calcula l'escala a què està dibuixat un pla sabent que 15 cm del pla corresponen a 375 km.

29. En l'antic Egipte, per a definir la proporció de les diferents parts del cos, s'usava la longitud dels dits i per al cànon, els punys. Un cap havia de mesurar dos punys. Els grecs utilitzaven, igual que els egipcis, la proporció per a valorar els distints cànons de bellesa. Un cos ben proporcionat havia de tindre una longitud proporcional al cap. Algun dels més coneguts corresponen a famosos escultors:

	Cànon de Praxíteles	**Cànon de Polikletos**	**Cànon egipci**
Mesura del cos	Huit caps	Set caps	16 punys

Amb aquestes dades pots investigar sobre quina proporció és la més freqüent entre els teus amics

30. Hi ha altres maneres d'estudiar la proporció en la figura humana. La proporció àuria, coneguda pels grecs i desenrotllada de manera brillant per Leonardo da Vinci ens ha deixat imatges com el famós "Home de Vitrubio". Busca informació sobre aquesta figura.

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Institut Juan de Garay

AUTOAVALUACIÓ de 1r d'ESO

1. El valor de *x* a la proporció $\frac{2,4}{x} = \frac{0,8}{3}$ és:

a) 0,9 b) 1,2 c) 9 d) 0,9

2. En una caixa per cada tres boles blanques hi ha cinc boles roges. Si hi ha 108 boles roges, les boles blanques són:

a) 200 b) 180 c) 220 d) 210

3. Per a una excursió un grup de 28 persones va contractar un autobús. Cada una ha de pagar 45 €. Com quedaven places lliures, a última hora s'han apuntat 7 persones més. Quant han de pagar finalment cada una?

a) 36 € b) 30 € c) 38 € d) 40 €

4. Una bicicleta es ven per 225 €. Si fan un descompte del 14 % Quant haurem de pagar?

a) 201,50 € b) 198,50 € c)214 € d) 193,50 €

5. En un mapa 16 cm equivalen a 208 km. L'escala és:

a) 1: 320000 b) 1: 2100000 c) 1: 20800000 d) 1: 2220000

6. Els valors que completen la taula de proporcionalitat directa són:

Persones	8	11	46	
Kg de menjar	12			72

a) 24, 69,48 b) 16, 49, 68 c) 16.5 , 69, 48

7. Els valors que completen la taula de proporcionalitat inversa són:

NÚM. de treballadors	12	7			21
Hores diàries	35		10	7	

a) 60, 60, 42, 20 b) 60, 42, 42, 20 c) 60, 21, 42, 20

8. Els valors que completen les operacions són següents:
El 25% de 0,28 és .... El .... de 630 és 63 El 150% de .... és 120

a) 0.07, 10, 80 b) 0.7, 10, 90 c) 0.7, 3, 80

9. En efectuar un increment percentual del 18% sobre aquestes tres quantitats, 350, 99 i 6 obtenim:

a) 413, 116,82 , 7.08 b) 630, 116.82, 7.08 c) 403, 112, 7.08

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Institut Juan de Garay

1r ESO — Capítol 11: Àlgebra

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Raquel Caro

Revisor: Pedro Luis Suberviola i Sergio Hernández

Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

Traducció al valencià: Departament de Matemàtiques de l'Institut Juan de Garay

Índex

Resum

L'Àlgebraés una matèria nova que ara començarem a estudiar. Hi ha autors que opinen que l'àlgebra comença quan s'utilitzen lletres en compte de nombres, però, recorda, els romans ja utilitzaven lletres, i això no era àlgebra. En realitat l'origen de l'àlgebra està a fer operacions amb nombres simbolitzats amb lletres, la qual cosa suposa un estalvi d'esforç, perquè permet fer d'una sola vegada el que d'una altra manera caldria repetir moltes vegades. En l'època d'El *Quixot*, en la porta de les barberies, es llegia el cartell següent:

"ALGEBRISTA I SANGRADOR"

I això, per què? La paraula "*Àlgebra*" és una paraula àrab que va utilitzar el matemàtic *Al-Khwarizmi*. Si aconsegueixes llegir aqueix nom veuràs que et sona a una altra paraula: "*algoritme*". Cap a l'any 825 va escriure un llibre titulat:

Al-jabr w'almuqabalah

La paraula àrab *jabr* significa restaurar. El llibre tractava d'àlgebra, de sumes i altres operacions, però com els barbers també restauraven ossos, per això es deien algebristes.

En aquest capítol aprendrem a utilitzar el llenguatge algebraic,.

1. LLENGUATGE ALGEBRAIC.

1.1. Lletres i nombres.

Al nostre voltant ens trobem amb multitud de símbols el significat dels quals coneixem, com els senyals de circulació o alguns logotips.

El **llenguatge algebraic** aconsegueix que puguem expressar missatges en què les lletres representen variables de valor desconegut. Utilitza lletres, nombres i operacions per representar una informació.

Exemple:

- Ja has utilitzat el llenguatge algebraic per a indicar l'àrea d'un quadrat de costat a: A = a^2; l'àrea d'un cercle de radi r: A = πr^2.

El propi *Al-Khwarizmi* va usar originàriament la paraula "*cosa*", (per exemple, en compte de 2x deia "*el doble d'una cosa*"), que en àrab sona com "*šay*" i que es va traduir a l'espanyol com "*xei*". D'ací procedix la x actual.

Per a cada situació podem utilitzar la lletra que vullguem, encara que, quan parlem d'alguna cosa desconeguda, la lletra més utilitzada és la ***x***.

Exemple:

- El doble de l'edat d'una persona $2x$
- El triple d'un nombre menys 4 $3x - 4$

Les expressions que ens permeten reflectir mitjançant lletres i nombres una situació s'anomenen expressions **algebraiques.**

Activitats resoltes

- Expressa les següents frases en llenguatge algebraic:

  El triple d'un nombre $3x$

  La suma de dos nombres consecutius $x + (x + 1)$

  L'edat d'una xiqueta fa 2 anys $x - 2$

  La suma de dos nombres $a + b$

El triple d'un nombre

- Llig les expressions algebraiques següents:

  $x - 3x$ Un nombre menys el seu triple

  $2(x - 4)$ El doble de la diferència de un nombre menys 4.

Activitats proposades

1. Expressa les següents frases en llenguatge algebraic:

a)El doble d'un nombre més el seu triple

b) L'edat d'una persona d'ací a 7 anys

c) La cinquena part d'un nombre

d) La diferència entre dos nombres

1.2. Coeficient i part literal.

Una **expressió algebraica** pot estar formada per un o més sumands que es denominen **termes** o **monomis**. Una suma de monomis és un **polinomi**.

En un monomi la part **literal** són les lletres i s'anomena **coeficient** al nombre pel qual van multiplicades.

Exemple:

- En l'expressió $4x$, el coeficient és 4 i la part literal x. En $7ab$ el coeficient és 7 i la part literal ab.

Quan l'expressió és positiva no sol anar precedida del signe +, encara que sempre apareixerà el signe – en les expressions negatives.

Exemple:

- Assenyala el coeficient i la part literal en l'expressió $-6a$. El coeficient és –6 i la part literal a.

Activitats resoltes

- Assenyala els coeficients, les parts literals i el nombre de monomis de l'expressió algebraica:

$$3a - 5b + c + 6$$

Aquesta expressió algebraica té 4 termes o 4 monomis: $3a$, $-5b$, c i 6. Els coeficients són +3, –5, + 1 i +6 respectivament. Les parts literals són a, b i c. L'últim terme no té part literal.

- Assenyala en el polinomi $8x + 5x - 2x$ quins són els coeficients. Els coeficients són 8, 5 i –2.

1.3. Valor numèric d'una expressió algebraica.

Si a les lletres d'una expressió algebraica se'ls dóna un valor concret, es pot calcular el **valor numèric** de la dita expressió.

Activitats resoltes

- Calcula el valor numèric de l'expressió $3x + 2$ quan x val 5.

Cal substituir en l'expressió, x pel seu valor, 5.
Per tant: $3 \cdot 5 + 2 = 15 + 2 = 17$, que és el valor numèric quan x val 5.

1.4. Equivalència i simplificació d'expressions algebraiques.

L'expressió algebraica $4x + 4x$ és equivalent a l'expressió $8x$, que és la seua expressió més simplificada.

Activitats proposades

2. Assenyala el coeficient, la part literal i el nombre de termes o monomis dels polinomis següents:

a) $2 - 7x$ b) $a + 3b - 8c$ c) $4x + 5$ d) $7x + 9 - 5y$

3. Calcula el valor numèric dels polinomis següents:

a) $2x + 3y$ per a $x = 3$, $y = 2$.
b) $6 - a$ per a $a = -5$.
c) $3a + 4b - c$ per a $b = -1$, $a = -1$ i $c = +2$.

Autora: Raquel Caro
Revisors: Pedro Luis Suberviola i Sergio Hernández
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

Material didàctic fotocopiable: Cadenes numèriques

Emplena les següents cadenes numèriques donant a x els valors següents: 3, 5, 7 i 10

Expressa simbòlicament el que fan aquestes cadenes i simplifica:

I.- $\bigcirc \xrightarrow{\cdot 30} \square \xrightarrow{-9} \square \xrightarrow{:3} \square \xrightarrow{+17} \bigcirc$

3	
5	
7	
10	

a) Expressió simbòlica:
b) Simplificació:
c) Calcula el nombre pel qual has de començar perquè la cadena done com resultat 54.

II.- $\bigcirc \xrightarrow{-2} \square \xrightarrow{\cdot 12} \square \xrightarrow{+8} \square \xrightarrow{:4} \bigcirc$

3	
5	
7	
10	

a) Expressió simbòlica:
b) Simplificació :
c) Calcula el nombre pel qual has de començar perquè la cadena done com resultat 8

III.- $\bigcirc \xrightarrow{:2} \square \xrightarrow{\cdot 4} \square \xrightarrow{-3} \square \xrightarrow{+7} \bigcirc$

3	
5	
7	
10	

a) Expressió simbòlica:
b) Simplificació :
c) Calcula el nombre pel qual has de començar perquè la cadena done com resultat 16

IV.- $\bigcirc \xrightarrow{:2} \square \xrightarrow{\cdot 8} \square \xrightarrow{:2} \square \xrightarrow{+4} \bigcirc$

3	
5	
7	
10	

a) Expressió simbòlica:
b) Simplificació :
c) Calcula el nombre pel qual has de començar perquè la cadena done com resultat 9

V.- $\bigcirc \xrightarrow{+5} \square \xrightarrow{\cdot 6} \square \xrightarrow{-3} \square \xrightarrow{:3} \bigcirc$

3	
5	
7	
10	

a) Expressió simbòlica:
b) Simplificació :
c) Calcula el nombre pel qual has de començar perquè la cadena done com resultat 17

VI.- $\bigcirc \xrightarrow{\cdot 10} \square \xrightarrow{-15} \square \xrightarrow{:5} \square \xrightarrow{+8} \bigcirc$

3	
5	
7	
10	

a) Expressió simbòlica:
b) Simplificació :
c) Calcula el nombre pel qual has de començar perquè la cadena done com resultat 9

2. EQUACIONS DE PRIMER GRAU

2.1. El llenguatge de les equacions

Una **equació** és una igualtat entre dues expressions algebraiques.

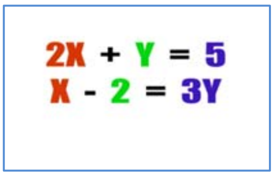
Exemple:

- Si tenim dues expressions algebraiques: $3x$ i $2x + 1$, i les unim amb el signe igual obtenim una equació: $3x = 2x + 1$.

Les expressions que hi ha a cada costat de l'igual s'anomenen **membres** de l'equació. Totes les equacions tenen dos membres: l'expressió que està a l'esquerra del signe igual s'anomena primer membre i la que està a la dreta, segon membre.

Les lletres que contenen les equacions algebraiques (les "parts literals" de les seues dues expressions) s'anomenen **incògnites**, que significa literalment "desconegudes". Si totes les lletres són iguals, es diu que l'equació té només una incògnita.

Exemple:



- $3x - 2 = 2x + 1$ és una equació amb una sola incògnita, mentres que:
- $2x + y = 5$ o $x - 2 = 3y$ són equacions amb dues incògnites: x i y.

El **grau** d'una equació és el major exponent que apareix en alguna de les seues incògnites.

Exemple:

- $7x - 5 = x + 7$ és una equació de primer grau, mentres que $x + 3y^2 = 9$ és una equació de segon grau.

Activitats proposades

4. Copia al teu quadern la següent taula i completa-la:

Equació	Primer membre	Segon membre	Incògnites
$7x - 3 = 4x - 5$			
	$6x + 2$	$x - 8$	
$4a + 9 = 23$			
	$x - y$	$5 + y$	

5. Indica el nombre d'incògnites de les equacions següents:

a) $7x - 5y = x + 7$; b) $x + 3y^2 = 9$ c) $a + 4a^2 = 7$ d) $9x + 3x^2 = 5$

6. Indica el grau de les equacions següents:

a) $2x - 6 = 3x + 8$; b) $5x + 2y^2 = 11$ c) $x + 2x^2 = 3$ d) $x + 6xy^2 = 1$

Autora: Raquel Caro
Revisors: Pedro Luis Suberviola i Sergio Hernández
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

2.2. Equacions equivalents. Resolució d'equacions.

Solució d'una equació:

Una **solució** d'una equació és un nombre que, quan la incògnita pren aqueix valor, es verifica la igualtat, és a dir, els dos termes de l'equació valen el mateix.

Algunes equacions només tenen una solució, però altres poden tindre diverses.

Resoldre una equació és trobar totes les seues possibles solucions numèriques.

Activitats resoltes

- Si et fixes en l'equació: $3x - 2 = 2x + 1$, veuràs que en donar-li valors a x la igualtat no sempre es compleix.

Per exemple, per a $x = 1$, el primer membre val $3 \cdot 1 - 2 = +1$, mentres que el valor del segon membre és: $2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3$. Doncs 1 **no** és solució de l'equació. Per a $x = 3$, el primer membre pren el valor: $3 \cdot 3 - 2 = 9 - 2 = 7$; i el segon membre: $2 \cdot 3 + 1 = 6 + 1 = 7$. Per tant 3 és una **solució** de l'equació.

Si es desconeix la solució d'una equació, resulta molt pesat resoldre-la provant un nombre després d'un altre. Per això el que es fa habitualment és transformar-la en altres equacions **equivalents** més senzilles.

Equacions equivalents són les que tenen les mateixes solucions.

Exemple:

- $2x - 5 = 11$ és equivalent a $2x = 16$, ja que la solució d'ambdues equacions és $x = 8$.

Per a obtindre equacions equivalents es tenen en compte les propietats següents:

- Si es **suma** o es **resta** als dos membres d'una equació una mateixa quantitat, s'obté una equació equivalent.

- Si es **multipliquen** o **divideixen** els dos membres d'una equació per una mateixa quantitat (diferent de zero), s'obté una equació equivalent.

Activitats resoltes

- Resol l'equació $3x + 7 = x - 3$ transformant-la en una altra més senzilla equivalent.

Transformar una equació fins que les seues solucions es facen evidents s'anomena "resoldre *l'equació*". Seguint aquests passos intentarem resoldre l'equació: $3x + 7 = x - 3$

1) Sumem els dos membres $-x$ i restem als dos membres 7:

$$3x - x + 7 - 7 = x - x - 3 - 7.$$

2) Fem operacions i aconseguim una altra equació que té en el primer membre els termes amb x i en el segon, els termes sense x:

$$3x - x = -3 - 7.$$

3) Efectuem les sumes al primer membre i al segon:

$$2x = -10.$$

Autora: Raquel Caro
Revisors: Pedro Luis Suberviola i Sergio Hernández
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

4) Aïllem x dividint els dos membres per 2:

$\frac{2x}{2} = \frac{-10}{2}$ d'on es dedueix que $x = -5$.

5) Comprova que totes les equacions que hem obtingut en aquest procés són equivalents i que la seua solució és $x = -5$.

- Resol l'equació $8 - x = 2x - 4$.

1) Sumem x i 4 per a passar a un membre els termes amb x i a l'altre membre els termes sense x:

$$8 - x + x + 4 = 2x + x - 4 + 4,$$

2) Fem operacions:

$$8 + 4 = 2x + x$$

3)Efectuem les sumes:

$$12 = 3x.$$

4) Aïllem x dividint els dos membres per 3:

$$4 = x.$$

La solució de l'equació és $x = 4$.

5) Comprovem que en efecte és la solució:

$$8 - x = 2x - 4 \Rightarrow 8 - 4 = 4;\ 2\cdot 4 - 4 = 4.$$

Activitats proposades

7. Esbrina quin dels nombres és la solució de l'equació i escriu-lo al teu quadern:

Equació	Possibles solucions		Equació	Possibles solucions
$3x + 7 = x - 3$	2, –1, –5		$a^2 - 5 = -1$	–2, –10, 2
$x + 2 = 4x - 1$	1, –2, –3		$b - 3 = 7 - b$	2, 4, 6

8. Resol les equacions següents:

a) $3x - 5 = 2x - 7$ b) $6x + 8 = 3x - 4$ c) $5x + 2 = 12$ d) $4x - 7 = 3x - 7$

9. Tria entre les següents equacions totes les que siguen equivalents a l'equació $3x - 6 = 2x + 9$.

a) $x + 10 = 5$ b) $10 - x = 3x - 5x$ c) $4x = 30$ d) $2x = 10 + 20$ e) $15 = x$

10. Escriu dues equacions equivalents a cada una de les equacions següents:

a) $2x - 4 = 11$ b) $3x = 12$ c) $5x + 11 = 6$ d) $x = -3$

3. RESOLUCIÓ DE PROBLEMES MITJANÇANT EQUACIONS

3.1. Procediment

Molts problemes poden resoldre's mitjançant una equació.

Activitats resoltes

- Busca un nombre que sumat amb el seu següent done com resultat 7.

Per a resoldre'l, segueix els passos següents:

Pas 1: Abans de començar a actuar, intenta entendre bé el problema

Llig amb molt atenció l'enunciat, i pregunta't:

Què et demanen? Quines dades tens?

Ens demanen un nombre. La **incògnita** és aqueix nombre. Anomena a aqueix nombre x. El seu següent, serà $x + 1$. Ens diuen que la suma d'ambdós és 7.

Pas 2: Busca una bona estratègia.

És un problema que volem resoldre mitjançant una equació. Escriu en llenguatge algebraic l'enunciat del problema i planteja una equació:

$$x + (x + 1) = 7.$$

Pregunta't si efectivament resol el problema rellegint l'enunciat.

Pas 3: Porta avant la teua estratègia

Ara sí, ara resol l'equació. Per resoldre una equació convé seguir un orde d'actuació que ens ajude a no cometre errors, per a això seguim el procediment que acabem d'aprendre.

Lleva, si n'hi ha, parèntesi i denominadors: $x + x + 1 = 7$

Per a posar al primer membre els termes amb x, i en el segon els que no la tenen, fes **el mateix als dos costats**, resta 1 als dos membres: $x + x + 1 – 1= 7 – 1$, després $x + x = 7 – 1$. Opera: $2x = 6$. Aïlla:

Per aïllar la x, es fa el mateix als dos costats, es divideixen per 2 ambdós membres: $2x/2 = 6/2$, per tant, $x = 3$.

Paso 4: Comprova el resultat. Pensa si és raonable.

En efecte, comprova que: $3 + 4 = 7$.

Activitats proposades

11. La suma de tres nombres consecutius és igual al doble del major més 1. Calcula els dits nombres.

12. La mare d'Álvaro té el triple de l'edat del seu fill, i aquest té 30 anys menys que sa mare. Quants anys tenen cada un?

13. El perímetre d'un triangle isòsceles medeix 30 centímetres. El costat desigual medeix la meitat d'un dels seus costats iguals. Quant mesura cada costat?

Autora: Raquel Caro
Revisors: Pedro Luis Suberviola i Sergio Hernández
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

RESUM

		Ejemplos
Llenguatge algebraic	Utilitza lletres i nombres per representar una informació	Àrea d'un rectangle = base per altura: A = b· a
Expressió algebraica	Expressions que reflecteixen una situació mitjançant lletres i nombres	$x + 3x$
Monomi o terme algebraic	Consta de coeficient i part literal. Van separats pels signes: +, –, =.	$5x^2$
Coeficient	Nombre que multiplica en un monomi	El coeficient de $5x^2$ és 5.
Valor numèric d'una expressió algebraica	Nombre que se obté al sustituir les lletres per nombres i fer les operacions.	El valor numèric de $x + 3x + 5$ per a $x = –2$ és: $–2 + 3(–2) + 5 = –2 – 6 + 5 = –3$
Equació	Igualtat entre dues expressions algebraiques.	$3x – 1 = 2x + 5$
Membres d'una equació	Cada una de les dues expressions algebraiques que formen l'equació. Van separats pel signe =.	En l'equació anterior $3x – 1$ és el primer membre, i $2x + 5$ és el segon membre
Incògnites	Lletres de valor desconegut que conté una equació	En $3x – 1 = 2x + 5$ la incògnita és x.
Grau d'una equació	El major exponent de la incògnita.	L'equació $3x – 1 = 2x + 5$ és de primer grau. L'equació $3x^2 = 27$ és de segon grau.
Solució d'una equació	Nombre pel que es pot substituir la incògnita perquè la igualtat siga certa.	La solució de $3x – 1 = 2x + 5$ és $x = 6$.
Resoldre una equació	És trobar la seua solució.	$\mathbf{3x – 1 = 2x + 5}$ $3x – 2x –1 + 1 = 2x – 2x + 5 +1$ $x = 6$
Equacions equivalents	Tenen les mateixes solucions	$2x – 5 = x + 2$ és equivalent a: $2x – x = 2 + 5$
Passos per resoldre una equació:	Llevar parèntesi Llevar denominadors Agrupar els termes amb x en un membre i els termes sense x en l'altre. Operar Aïllar la x.	**(3x – 1) = 7/2** 1. $6x – 2 = 7/2$ 2. $12 x – 4 = 7$ 3. $12 x = 7 + 4$ 4. $12 x = 11$ 5. $x = 11/12$
Passos per resoldre un problema mitjançant equacions	Llegir l'enunciat. Escriure l'equació. Resoldre l'equació. Comprovar la solució.	Trobar un nombre que sumat a 7 dóna el mateix que el seu doble menys 3. 1) Comprendre l'enunciat 2) $x + 7 = 2x – 3$ 3) $x – 2x = – 3 – 7$; $–x =–10$; $x = 10$ 4) $10 + 7 = 2· 10 – 3$

Autora: Raquel Caro
Revisors: Pedro Luis Suberviola i Sergio Hernández
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

EXERCICIS I PROBLEMES. Matemàtiques 1r d'ESO

Llenguatge algebraic

1. Expressa en el teu quadern en llenguatge algebraic

a) El triple d'un nombre és igual a 21.

b) A un cert nombre se li suma 2, es multiplica el resultat per 3, i es divideix entre 4.

c) El doble d'un nombre més 6.

d) Un nombre més el seu anterior.

2. Copia al teu quadern i relaciona:

a) El doble d'un nombre	1) $x - 17$
b) La diferència entre un nombre i 17	2) $\frac{x^2}{3}$
c) El producte d'un nombre per –3	3) $2(x + 5)$
d) La cinquena part d'un nombre	4) $2x^2$
e) El doble del quadrat d'un nombre	5) $x + y$
f) El nombre següent a x	6) $2x$
g) La suma de dos nombres	7) $x + 1$
h) El doble de la suma d'un nombre i 5	8) $x/5$
i) La tercera part del quadrat d'un nombre	9) $-3x$

3. Si anomenen *x als* estalvis que en té Laura, expressa algebraicament:

a) A Maria li falten 7 € per a tindre els mateixos estalvis que Laura.

b) Alfons en té 14 € més que Laura.

c) Martí en té 3 € menys que el doble de Laura.

d) Fàtima té igual que Laura i Rosa.

4. Heus ací el que sabem de les edats d'un grup d'amics:

a) Joan en té 3 anys més que Antoni;

b) Elena en té el doble que Joan;

c) Félix en té 5 anys menys que Elena i Laura en té la meitat que Antoni.

d) Si l'edat d'Antoni és x, indica, mitjançant expressions algebraiques, les edats dels altres amics.

Autora: Raquel Caro
Revisors: Pedro Luis Suberviola i Sergio Hernández
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

5. Escriu en llenguatge algebraic les següents informacions relatives a la base *x* i l'altura *i* d'un rectangle:

a) La base és doble que l'altura

b) La base excedeix en 5 unitats a l'altura

c) L'alturaés 3 7/de la base

d) L'àreadel rectangle val 20 cm.^{2}

e) La diferència entre l'altura i la base és de 10 unitats.

6. Escriu les següents operacions en llenguatge ordinari

a) $x + 5$ b) $a - 4$ c) $2x$ d) y^2

7. Completa al teu quadern les frases següents:

a) En una expressió ... ... pot haver-hi nombres, lletres i signes d'operació.

b) Un nombre qualsevol s'indica en àlgebra mitjançant una ... ..., per exemple, la x.

c) En l'expressió –3x el nombre –3 és el ... .

d) L'equacióx2 ^{25} = és de. .. grau ....

e) El primer membre de l'equació 3x + 1 = 2x – 7 és ... ...

f) Dues equacions que tenen les mateixes solucions s'anomenen ... ...

g) Una ... ... es una igualtat entre dues expressions algebraiques.

h) El nombre pel qual es substitueix la incògnita d'una equació de manera que la igualtat siga certa s'anomena ... ... de l'equació.

i) ... ... una equació es trobar el valor de la incògnita.

j) Si el major exponent de la incògnita d'una equació és 1, llavors l'equació és de ... ... grau.

8. El quilo de bresquilles costa *x* euros. Indica en llenguatge algebraic el preu de:

a) El quart de quilo de bresquilles

b) Tres quilos de bresquilles

c) El quilo de mandarines sabent que és 75 cèntims més barat que el quilo de bresquilles.

9. Anomenem *x* a una quantitat. Escriu en llenguatge algebraic:

a) El doble d'aqueixa quantitat més 9.

b) Aqueixa quantitat més 5.

c) 20 menys aqueixa quantitat.

d) Quatre vegades aqueixa quantitat menys 7.

e) La mitat d'aqueixa quantitat més 8.

f) Set vegades aqueixa quantitat menys la tercera part de la quantitat.

10. Calcula el valor numèric de les expressions següents per a $x = 2$.

a) $5x - 3$ b) $2(x + 5)$ c) $(x - 4)/2$ d) $7(2 - x^2)$

Autora: Raquel Caro
Revisors: Pedro Luis Suberviola i Sergio Hernández
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

11. Simplifica les expressions següents:

a) $x + x + x - x$ b) $2x + 3x + 5x - x$ c) $x/2 + x/2$ d) $2(x + 3x - 2x)$

12. Escriu al teu quadern el valor numèric de cada expressió per al valor de x que s'indica en cada cas:

	Expressió	**Valor de *x***	**Valor numèric**
a)	$5x - 4 + x$	-1	
b)	$x - 3 + 7x$	-2	
c)	$x + 3 + 2x$	-3	
d)	$3x - x$	-4	
e)	$2x - 3$	2	

13. Realitza les operacions següents

a) $3x + 5x - 2y + 9y - 4x - 3y$ b) $(2x - 5x^2) - (3x^2 + 5x)$

c) $3(7x - 3) - 2(2x + 5)$ d) $2a - 5a + 7a - 8a + b$

Equacions

14. Copia al teu quadern la següent taula i completa-la:

Equació	**Primer membre**	**Segon membre**	**Incògnites**
$8x - 5 = 2x - 1$			
	$7x + 3$	$2x - 8$	
$4x + 3 = 6x + 9$			
$4a + 11 = 23$			
	$x - y$	$5 + y$	

15. Calcula mentalment el valor que s'ha d'assignar a cada cercle:

a) 2 · O = 30 b) 10 = O : 5 c) 3 · O = 27 d) 5 = O : 3

16. Escriu dues equacions equivalents a cada una de les equacions següents:

a) $3x - 4 = 11$ b) $2x = 9$ c) $x + 11 = 6$ d) $x = -3$

17. Resol les equacions següents:

a) $2x + 4 = 7$ b) $4x + 3 = 15$ c) $5x - 2 = 37$ d) $-2x - 3x = -55$

Autora: Raquel Caro
Revisors: Pedro Luis Suberviola i Sergio Hernández
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

18. Relaciona cada equació amb la seua solució:

a) $x + 5 = 7x - 1$ b) $3x - 2 = 4 - x$ c) $x - 9 = 3 - 2x$ d) $5 = x + 9$ e) $8 - 2x = 5 - 3x$

f) $9x - 2 = 5x$ g) $3 + 2x = 1$ h) $6 - x = 5 + 9x$ i) $x = 6 - 2x$ j) $2x + 4 = x + 7$

Solucions:

1) $x = 4$ 2) $x = -4$ 3) $x = -3$ 4) $x = 1,5$ 5) $x = 0,5$

6) $x = 1$ 7) $x = 0,1$ 8) $x = -1$ 9) $x = 3$ 10) $x = 2$.

19. Digues si les següents frases són verdaderes o falses. Raona la resposta.

a) L'equació $x + 3 = 5$ és equivalent a $x + 5 = 3$.

b) L'equació $2x + 3 = 7x - 1$ té dues incògnites.

c) L'equació $x^3 + 5 = 2x^2$ és de tercer grau.

d) El valor numèric de $5x - 2$ per a $x = -1$ és -7.

e) La solució de l'equació $6x = 3$ és 2.

20. Troba els nombres que falten:

a) $15 = 25 - 2 \cdot \bigcirc$ b) $100 = 25 - \bigcirc$ c) $200 = \bigcirc - (-25)$ d) $40 = \bigcirc - (-20)$

21. Resol al teu quadern les equacions següents:

a) $x + 3 = 9$ b) $x + 5 = 4$ c) $x + 1 = 78$ d) $x + 7 = 46$

22. En el tren es pot transportar un gosset sempre que el seu pes no excedisca de 6 kg. Esbrina a quin dels meus gossets podria emportar-me de viatge en el tren sabent que Eder pesa 8 quilos i que el valor de x és el mateix en tots els casos:

Nombre	***Peso en kg***
Eder	$2x$
Peque	$-3(x - 7)$
Gosca	$3x - 5 + 6x$
Atila	$4x + 6 - 5x$
Clea	$1 - 2x + 9x$

23. Troba els nombres que falten:

a) $\bigcirc + 3 = 8$ b) $\bigcirc + 7 = 3$ c) $\bigcirc - 6 = 10$ d) $\bigcirc - 8 = -2$

24. Resol les equacions següents: (Suggeriment: il·lustra les equacions mitjançant balances equilibrades. Mantín equilibrades fins a aconseguir l'equació equivalent que ens done el resultat).

a) $x + 5 = 10$ b) $x + 7 = 4$ c) $x + 3 = 8$ d) $x + 7 = 12$

25. Resol al teu quadern les equacions següents:

a) $x - 4 = -7$ b) $x - 34 = 12$ c) $x - 21 = 84$ d) $x - 28 = 7$

Problemes

26. Si el doble d'un nombre menys 3 és igual a 7, quin és el nombre?

27. Un rectangle té 7 cm de base i la seua àrea és de 21 cm^2, quina altura té?

28. La suma de tres nombres consecutius és 48. Quant val cada nombre?

29. Si en una família la suma de l'edats dels tres fills és de 37 anys, Anna és 2 anys menor que Antoni, i aquest és 3 anys menor que Maite, quina edat té cada fill?

30. Si una parcel·la rectangular té 4 m menys d'ample que de llarg, i la tanca que la rodeja mesura 88 m, quines dimensions té la parcel·la?

31. Per a cada un dels següents enunciats, dibuixa la figura que corresponga, escriu una equació i resol-la:

a) Troba les dimensions d'un rectangle si la base mesura 3 cm més que l'altura i el perímetre és 22 cm.

b) El perímetre d'un quadrat és 28 mm. Quant medeix el seu costat?

c) El costat desigual d'un triangle isòsceles medeix 7 cm i el seu perímetre medeix 35 cm. Quant medeix cada un dels costats iguals?

d) El perímetre d'un octògon regular és 28 cm major que el d'un quadrat de 36 cm^2 d'àrea. Esbrina el costat de l'octògon.

e) Cada un dels angles d'un quadrilàter irregular mesura 30º més que l'angle anterior. Quant mesura cada un dels quatre angles del quadrilàter? (Ajuda: recorda que la suma dels angles interiors d'un quadrilàter és 360º).

f) Les mesures dels costats d'un triangle escalé són nombres consecutius i el perímetre és 33 cm. Quant mesura cada costat?

g) Dos angles són complementaris i es diferencien en 18º. Quant medeixen?

h) Dos angles suplementaris es diferencien en 25º. Quant medeixen cada un?

32. Escriu en llenguatge algebraic: "La suma dels angles interiors d'un polígon és tantes vegades 180º, com a costats tinga menys 2". Quants costats té un polígon si la suma dels seus angles interiors és 720º?

33. Si un triangle isòsceles té un perímetre de 36 cm, i el seu costat desigual medeix 5 cm menys que els seus costats iguals, quant medeixen els seus costats?

34. Troba les edats de tres germans sabent que sumen 52 anys, que els dos xicotets es porten dos anys, i que el major té tants anys com els altres dos junts.

35. Un muntanyenc fa una ruta de 48 km en tres etapes. El segon dia recorre 10 km més que el primer i el tercer dia recorre 7 km més que el segon. Quant recorre cada dia?

36. Tinc 26 monedes d'1 € i de 2 €, que valen en total 37 €. Quantes monedes tinc de cada classe?

37. Alfons vol saber quant pesa la compota de mores que ha fet, però només té pesos d'1 kg i de 200 gr. Comprova que si posa els dos pots iguals de compota, junt amb la pesa de 200 gr en un plat de la balança, i en l'altre plat la pesa d'1 kg, la balança queda equilibrada. Quant pesa cada pot?

38. Si multipliques a un nombre per 5 i després li sumes 12, obtens 62, de quin nombre es tracta?

39. El pati d'un col·legi és rectangular, el doble de llarg que d'ample, i el seu perímetre és de 600 m. Si es vol posar una tanca que costa a 3 € el metre en el costat més llarg. Quant caldrà pagar?

40. Albert ha tret un 8 en un examen de 10 preguntes. En la primera pregunta va traure un punt, i en l'última, que va deixar en blanc per falta de temps, un zero. La professora li ha dit que en totes les preguntes centrals ha obtingut la mateixa puntuació. Quin ha sigut aqueixa nota?

41. Mari estudia el que més li agrada les 2/5 parts del temps diari que dedica a l'estudi, i li sobren 72 minuts per a la resta de matèries. Quant estudia cada dia?

42. Si Cristina té 12 anys i sa mare, 36, quants anys han de passar perquè l'edat de la mare siga el doble de la de la seua filla?

43. Miriam li diu al mag, pensa un nombre, multiplica'l per 2, ara suma-li 10, divideix el resultat entre 2 i resta el nombre que has pensat. Tens un 5?

a) Escriu en forma algebraica el joc de màgia de Miriam, i descobreix el seu truc.

b) Inventa un nou joc de màgia.

44. Carles ha comprat 25 quaderns, els ha pagat amb un bitllet de 20 €, i li han tornat 12 €. Escriu una equació que permeta calcular el preu de cada quadern.

45. Un triangle equilàter té un perímetre de 36 cm, quant mesura el seu costat?

46. Brauli, Rosa i Guillem han guanyat 1200 € en la loteria. Si Brauli havia pagat la tercera part del dècim, Rosa, la meitat, i Guillem, la resta, com han de repartir el que han guanyat.

AUTOEVALUACIÓ DE 1r D'ESO

1. Els coeficients de l'expressió algebraica 5 x – 7 + y, són:

a) 5, 7 i 1 b) +5, –7 i +1 c) + 5 i – 7

2. El valor numèric de l'expressió algebraica 2 a + 6 b, quan a = 2 i b = – 1, és:

a) 2 b) –2 c) – 4

3. La solució de l'equació 3 + x – 4x = 8 + 2x és:

a) +5 b) +1 c) – 1

4. El doble d'un nombre més 2, equival al seu triple menys 10. El nombre és:

a) 5 b) 11 c) 12

5. La suma de les edats de dues persones és de 48 anys i la seua diferència, 14 anys. Quina de les següents equacions ens permet calcular les seues edats?

a) $x + x + 14 = 48$ b) $x - 14 = 48$ c) $48 + x = 14 - x$

6. El perímetre d'un rectangle és 72 cm. Si la base és el doble de l'altura menys 9 cm, les dimensions del rectangle són:

a) 21 i 15 b) 20 i 16 c) 30 i 6

7. Tres nombres sumen 77. El mitjà és el doble del menor, i el major és triple del menor menys 7. Quina d'aquestes equacions ens permet trobar els nombres?

a) $2x + x + 3x = 77$ b) $x + 3x + 2x = 77 + 7$ c) $x + 2x + 3x = 77 - 7$

8. Tenim 12 monedes de 2 € i 1 €. Si en total tenim 19 €, de cada classe de monedes, tenim:

a) 6 i 6 b) 7 i 5 c) 8 i 4

9. La mare de Joan té el doble de l'edat d'aquest més 5 anys. La suma de les seues edats és 38 anys. L'equació que plantegem per a saber les seues edats és:

a) $x + 2x + 5 = 38$ b) $x + 5 = 2x$ c) $x + 2x = 38$

10. Amb 24 € hem comprat 5 objectes iguals i ens han sobrat 6 € . El preu de cada objecte podem conéixer-lo en resoldre l'equació:

a) $5x = 24 + 6$ b) $x + 5 = 24$ c) $5x + 6 = 24$

Autora: Raquel Caro
Revisors: Pedro Luis Suberviola i Sergio Hernández
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

1r ESO

Capítol 12: Taules i gràfiques. El pla cartesià. Coordenades.

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Concha Fidalgo y Javier Brihuega

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Traducció al valencià: Departament de Matemàtiques de l'Institut Juan de Garay

Índex

Resum

L'estudi de les relacions entre dues magnituds i la seua representació mitjançant **taules i gràfiques** és de gran utilitat per a descriure, interpretar, predir i explicar fenòmens naturals i quotidians que es relacionen de manera funcional.

Moltes vegades necessitarem que les dades arreplegats en una taula siguen representats gràficament i utilitzarem el **sistema de referència cartesià**.

El sistema de referència cartesià s'anomena així en honor al filòsof, científic i matemàtic francés ***René Descartes*** *que va viure entre els anys 1596 i 1650. Descartes va voler fonamentar el seu pensament filosòfic en la necessitat de prendre un «punt de partida» sobre el qual edificar tot el coneixement. En Geometria, Descartes també va començar prenent un "punt d'origen" per a poder representar la geometria plana.*


René Descartes

En aquest tema aprendrem a utilitzar el llenguatge **gràfic** per a interpretar i descriure situacions del món que ens rodeja. També estudiarem les **funcions** entre dues magnituds variables, en les que una té una relació de dependència de l'altra. *Descartes, Newton i Leibniz ja van establir la idea de funció com a dependència entre dues quantitats variables.*

Així, els continguts que tractarem ens van a permetre treballar amb les distintes formes de representar algunes situacions funcionals: numèrica, gràfica, verbal o a través d'una expressió algebraica (com les que acabem d'estudiar en el tema anterior) i les distintes formes de traduir una expressió d'un a un altre llenguatge.

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Institut Juan de Garay

1. EL PLA CARTESIÀ. COORDENADES

1.1. Sistema de referència cartesià.

Constantment ens trobem amb situacions en què hem d'indicar la localització d'objectes o llocs respecte d'altres coneguts i, de vegades, les seues posicions en un pla o mapa. Per a entendre'ns és molt important que tinguem una referència comuna.

Si vols indicar a uns amics que no coneixen el teu barri, on es troba una botiga determinada o l'Institut on estudies, bastarà amb que els indiques la seua posició amb les referències que utilitzeu tots.

Exemple 1:

- Lluis viu en la casa marcada en roig en el pla adjunt i estudia en un Institut pròxim marcat a verd en el pla.

Per indicar als seus amics francesos on està el seu Institut els dóna les indicacions següents:

> "En eixir de ma casa aneu cap a la dreta i creueu dos carrers, després cap a l'esquerra creueu un carrer i ja heu arribat"

Les referències esquerra i dreta així com la idea de creuar un carrer són comuns a tots nosaltres, a més fixa't que en l'esquema la línia que indica el camí és molt clara

En Matemàtiques, en la majoria de les ocasions, utilitzem sistemes de referència cartesians que també s'utilitzen en Ciències Socials per a treballar els mapes i els plans.

Un **sistema de referència cartesià consisteix** en dues rectes numèriques (vegeu capítol *4*) perpendiculars, anomenades **eixos**. El punt en què es tallen els eixos és l'origen del sistema, també anomenat **origen de coordenades.**

Normalment el representem amb un eix vertical i l'altre horitzontal. A l'eix horitzontal li denominem **eix d'abscisses** o també eix X i al vertical **eix d'ordenades** o eix Y.

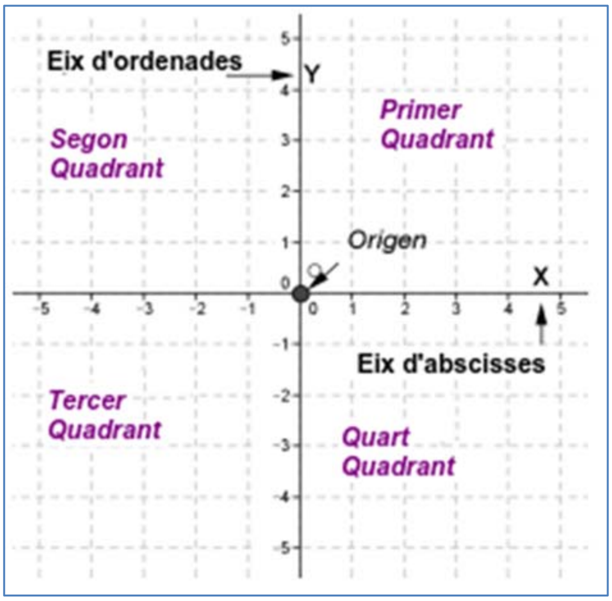
En tallar-se els dos eixos, el pla queda dividit en quatre zones, que es coneixen com a quadrants:

-Primer quadrant: Zona superior dreta

-Segon quadrant: Zona superior esquerra

- Tercer quadrant: Zona inferior esquerra

-Quart quadrant: Zona inferior dreta



Sistema de referència cartesià

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Institut Juan de Garay

Exemple 2:

- "Si estàs situat sobre la X que apareix en el mapa, segueix 3 llegües a l'Est i després 2 llegües al Nord. Allí està soterrat el tresor"

Nota: La llegua és una antiga unitat de longitud que expressa la distància que una persona pot caminar durant una hora. La llegua castellana es va fixar originàriament en 5.000 vares castellanes, és a dir, 4,19 km

Les referències Nord, Sud, Est i Oest ens defineixen un sistema de referència cartesià on l'Origen és el punt marcat amb la X.

Activitats resoltes

a) Marca al pla el punt on es troba el tresor i com s'arribaria a ell des del punt X

Solució:

Activitats proposades

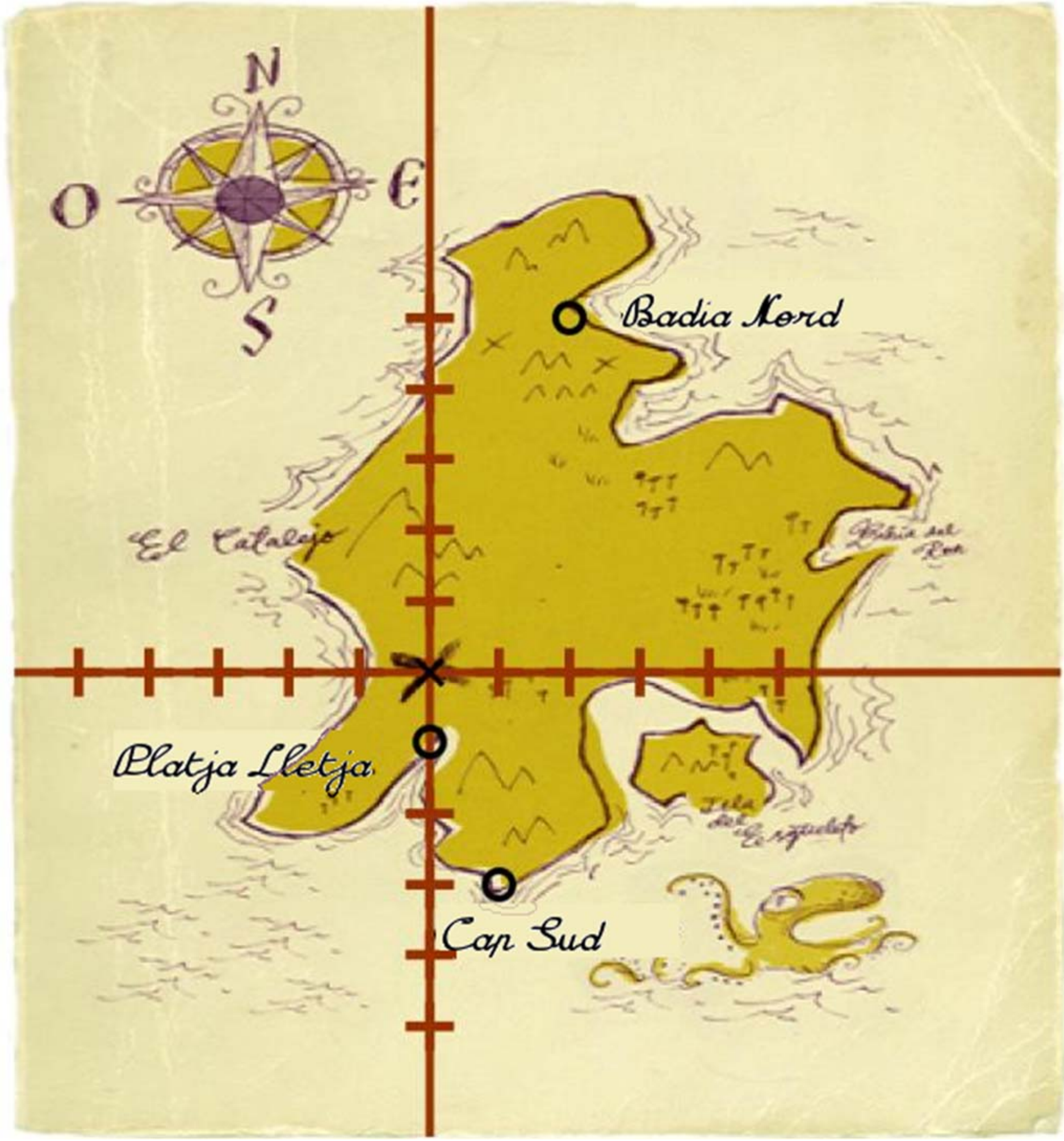
b) Descriu i marca en el pla adjunt com arribaries a:

   a) Cap Sud

   b) Badia Nord

   c) Platja Lletja

Material fotocopiable



Illa del Tresor

Font: Banc d'Imatges i sons de l'INTEF.
Coleccions: Robert Louis Stevenson L'illadel tresor. L'illa del tresor: El mapa del tresor, Il·lustrador: Loren

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Institut Juan de Garay

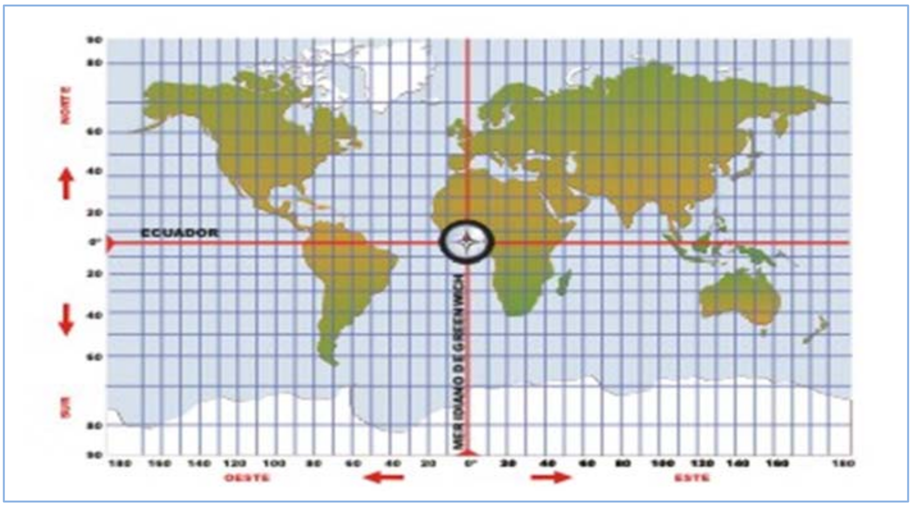
c) En el mapa indica en quin quadrant es troben els següents països:

a) Africa del Sud

b) Estats Units

c) Argentina

d) Índia

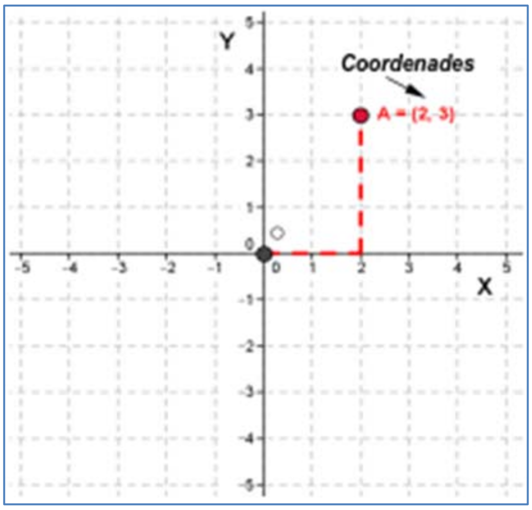


1.2. Coordenades. Representació i identificació de punts.

En les activitats anteriors hem descrit com arribaríem a alguns punts a partir d'un sistema de referència. Per a arribar a un punt, partint de l'Origen del sistema de referència, hem recorregut una determinada quantitat cap a la dreta o l'esquerra i després un altre cap amunt o cap avall. Així cada punt quedarà determinat per un parell de nombres als que anomenarem **coordenades del punt**.

Les **coordenades d'un punt A** són un parell ordenat de nombres **(*x*, *y*)**, sent ***x*** la primera coordenada que l'anomenarem **abscissa** i ens indica la quantitat a què el dit punt es troba de l'eix vertical. La segona coordenada és la ***Y***, anomenada **ordenada** i ens indica la quantitat a què el dit punt es troba de l'eix horitzontal.

Quan aquesta quantitat siga cap a l'esquerra o cap avall la indicarem amb un nombre **negatiu** i si és cap amunt o a la dreta la indicarem amb un **positiu**, de la mateixa manera que féiem en representar els nombres a la recta.



Exemple 3:

- Al gràfic el punt A té coordenades (2, 3).

Exemple 4:

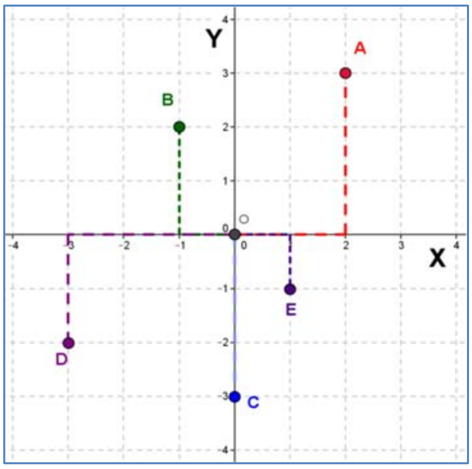
- A la primera Activitat resolta el TRESOR es troba en el punt de coordenades (3, 2).
- A l'Activitat proposada 2 el Cap Sud es troba en el punt de coordenades (1, –3), la Badia Nord al punt (2, 5) i Platja Lletja al punto (0, –1).

Nota: El cap Sud es troba en el quart quadrant i la seua ordenada és una quantitat negativa perquè des de l'origen ha d'anar cap al Sud, açò és, ha de baixar. I la Platja Lletja es troba en l'eix d'ordenades cap al Sud, per això la seua abscissa és 0 i la seua ordenada negativa.

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Institut Juan de Garay

Activitats resoltes

d) Indica quals són les coordenades dels punts marcats en el gràfic adjunt:



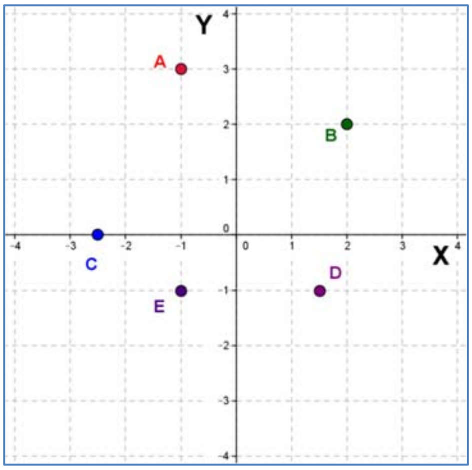
Solució

A = (2, 3); B = (–1, 2); C = (0, –3); D = (–3, –2) i E = (1, –1)

e) Dibuixa un sistema de referència cartesià i en ell marca els punts següents:

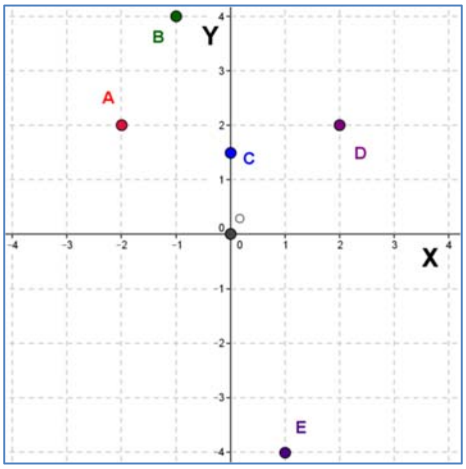
A = (–1, 3); B = (2, 2); C = (–2'5, 0), D = (1'5, –1) i E = (–1, –1)

Solució



Activitats proposades

f) Indica quals són les coordenades dels punts marcats en el gràfic adjunt:



g) Dibuixa un sistema de referència cartesià i en ell marca els punts següents:

A = (–4, 2); B = (–3, –3); C = (–0'5, 0'5) i D = (0, –2)

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Institut Juan de Garay

2. TAULES I GRÀFIQUES

2.1. Relació entre dues magnituds. Taules de valors

Moltes vegades tenim una relació entre dues magnituds que ens ve donada per la correspondència entre les quantitats de cada una d'elles. Aquesta relació pot ser de proporcionalitat, com vam estudiar al capítol 10, també pot estar donada per una expressió verbal o definida per una fórmula o equació com acabem d'estudiar al capítol 11.

D'una relació entre dues magnituds podem obtindre un conjunt de dades, relacionades dos a dos, que si les ordenem a una taula ens facilita la seua interpretació.

Una **taula de valors** és una taula en la què situem ordenadament les quantitats corresponents de dues magnituds relacionades.

Exemple 5:

- Els 100 metres llisos és una carrera en què s'ha de recórrer 100 metres, lliures de tot obstacle, amb la major rapidesa possible. Es considera, en general, com la competició de carreres de velocitat més important.

  Els millors atletes la realitzen en un temps d'al voltant de 10 segons de duració corrent cada 10 metres en una mitjana d'1 segon.

Longitud (m)	10	20	50	70	90	100
Temps (s)	1	2	5	7	9	10

Nota: La taula també es pot posar en sentit vertical

longitud (m)	temps (s)
10	1
20	2
50	5
70	7
90	9
100	10

En algunes ocasions la relació entre dues magnituds ens la poden indicar directament mitjançant la seua taula de valors

Exemple 6:

- *"La sopa estava molt calenta, així que la vaig deixar refredar durant cinc minuts, la temperatura de la sopa, segons es refredava, la indica la taula següent"*

Temps (min)	0	1	2	3	4	5
Temperatura (°C)	80	60	50	44	40	39

Exemple 7:

- Les notes de Matemàtiques i Tecnologia, a la segona avaluació, d'un grup de 1r d'E.S.O. van ser les arreplegues a la taula següent:

Matemàtiques	6	7	10	6	5	6	9	7	5	8	3	8	9	1	5	5	4	6	5	9	6	10	6	3	4	1	8	6	9	7
Tecnologia	5	6	7	8	6	8	7	6	4	10	2	8	10	1	5	6	7	10	3	5	8	10	9	3	5	1	6	5	5	8

Altres vegades desconeixem quals són les magnituds amb què estem treballant, tan sols coneixem els valors relacionats, i les solem indicar amb les lletres X i Y

Exemple 8:

- A la taula adjunta tenim la relació entre la magnitud **X** i la magnitud **Y**

X	–2	–1	0	1	2	3
Y	2	3	4	5	6	7

Activitats resoltes

- El preu d'un quilo de formatge especial de cabra, de la serra de Madrid, és de 18 € i es ven al pes. Construeix una taula de valors, amb sis quantitats diferents, que relacione el pes del formatge amb el seu preu.

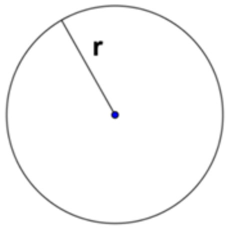
Solució

Com ens demanen sis quantitats diferents triarem algunes que ens pareixen quotidianes fins a un quilo, per exemple, 100 g, 250 g (quart de quilo), 500 g (mig quilo), 625 g, 750 g i 1000 g.

Com el preu i el pes són magnituds proporcionals sabem (capítol 10) completar la taula.

Pes (g)	100	250	500	625	750	1000
Preu (€)	1,80	4,50	9	11,25	13,50	18

- Com saps l'àrea d'un cercle es pot calcular mitjançant la fórmula $A = \pi r^2$, on r és el radi del cercle (utilitzem π = 3,14). Construeix una taula de valors des d'un radi d'1 cm a un de 5 cm, de centímetre en centímetre.



Solució

Ens demanen que elaborem una taula per als valors del radi 1, 2, 3, 4 *i* 5. Per a *això substituïm* $\boldsymbol{r}$ *en la fórmula per cada un d'aqueixos valors i obtenim per a*

$\boldsymbol{r} = 1 \rightarrow \boldsymbol{A} = 3{,}14 \cdot 1^2 = 3{,}14$; *per a* $\boldsymbol{r} = 2 \rightarrow \boldsymbol{A} = 3{,}14 \cdot 2^2 = 12{,}56; \ldots$

Radi (cm)	1	2	3	4	5
Àrea (cm²)	3,14	12,56	28,26	50,24	78,50

Activitats proposades

h) Construeix una taula de valors, amb cinc quantitats diferents, que relacione el consum d'un cotxe i els quilòmetres que recorre sabent que el seu consum mitjà és de 5 litres cada 100 quilòmetres.

i) Construeix una taula de valors, amb cinc quantitats diferents, en que es relacione el costat d'un quadrat i la seua superfície.

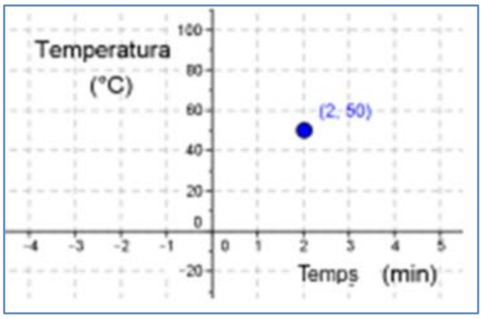
j) Construeix una taula de valors, amb sis quantitats diferents, que represente la situació següent: *"Una companyia de telefonia cobra 5 cèntims d'euro per establiment de telefonada i 4 cèntims per minut parlat"*

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Institut Juan de Garay

2.2. Representant punts. Les gràfiques.

Cada parell de dades corresponents d’una relació entre dues magnituds els podem **representar** en un sistema cartesià

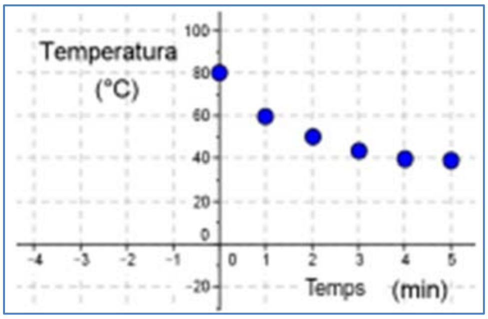
Exemple 9:



- A la relació de l’exemple 6 véiem que als 2 minuts, la sopa tenia una temperatura de 50 °C.

Aquest parell de nombres són les coordenades d’un punt (2, 50) en un sistema de referència cartesià en què a l’eix d’abscisses representem la magnitud *Temps* mesurada en minuts i a l’eix d’ordenades representem la magnitud *Temperatura* mesurada en graus centígrads.

Si representem a un sistema de referència cartesià tots els parells de dades d’una taula de valors obtenim una **gràfica**.

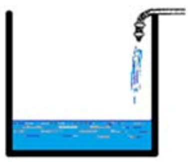


Si representem tots els parells de dades de la taula de valors de l’exemple anterior obtenim la següent gràfica:

En ocasions podríem haver donat moltes més dades en la taula de valors i en representar-los ens quedaria quasi una línia. En aquests casos la **gràfica**, unint **els punts**, estaria constituïda per **una línia** que en moltes situacions seria **contínua**.

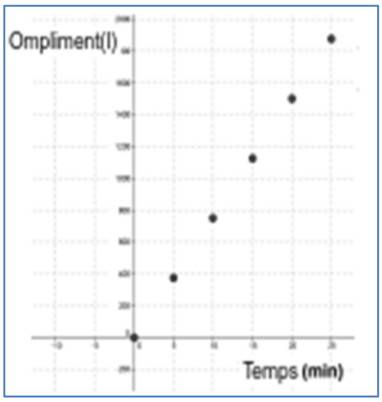
Exemple 10:

- Si omplim un depòsit d’aigua mitjançant un assortidor que aboca 75 litres d’aigua per minut podem calcular una taula de valors amb la quantitat d’aigua que va tenint el depòsit (ompliment) en relació al temps que ha anat passant.

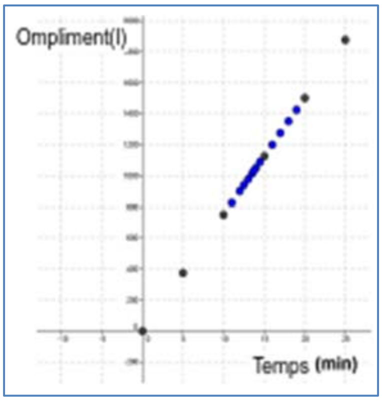


temps (min)	0	5	10	15	20	25
ompliment (l)	0	375	750	1125	1500	1875

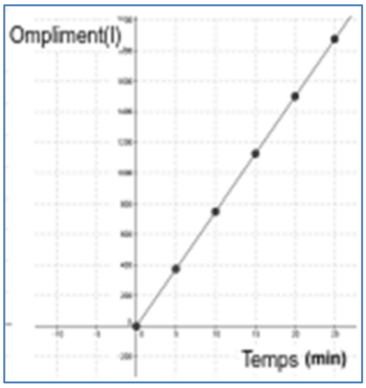
Dibuixem la seua gràfica a partir d’aquesta taula de valors



En aquesta ocasió tindria sentit mesurar la quantitat d’aigua que va tenint el depòsit cada menys temps. Si ho representem podria quedar de la manera següent:



Si representàrem tots els possibles valors ens quedaria la següent gràfica:



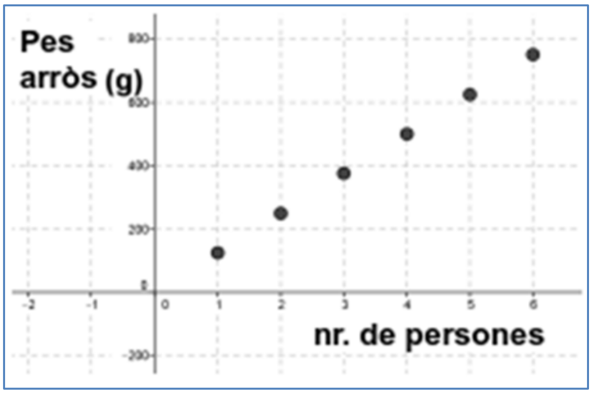
Nota: La gràfica comença, en el temps 0, en l'instant en què comencem a omplir el depòsit. No hi ha gràfica al tercer quadrant és perquè no té sentit un temps negatiu.

Exemple 11:

- A la situació següent: *"Una paella per a sis persones necessita 750 g d'arròs"* podem construir una taula de valors en què es relacionen el nombre de persones i la quantitat d'arròs que es necessita:

Nombre de persones	1	2	3	4	5	6
Pes arròs (g)	125	250	375	500	625	750

i podem construir una gràfica de punts amb aquests valors:



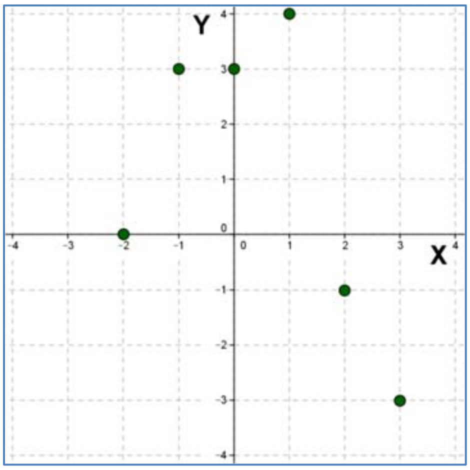
No obstant això no podem calcular valors intermedis (per a dues persones i mitja per exemple), perquè no podem dividir a una persona i, per tant, no té sentit unir els punts de la gràfica.

Exemple 12:

- També podem representar la relació entre les magnituds **X** e **I** de l'exemple 8 a partir de la seua

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Institut Juan de Garay

taula de valors:



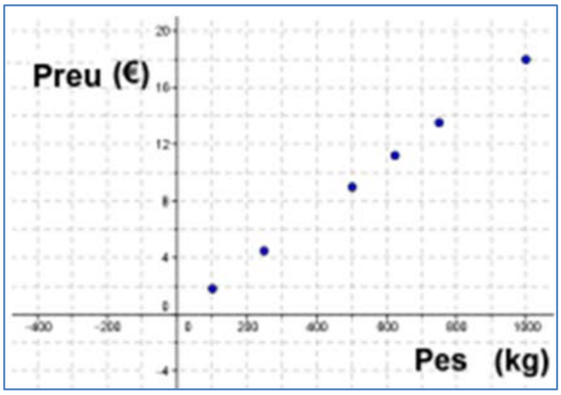
X	–2	–1	0	1	2	3
Y	0	3	3	4	–1	–3

Nota: En aquest cas no podem unir els punts, perquè al no conéixer quines són les magnituds ni quina és la relació entre elles, excepte en els punts que vénen determinats per la taula de valors, no podem saber, per exemple, quin valor tindria la magnitud Y si la magnitud X valguera 1,5.

Activitats resoltes

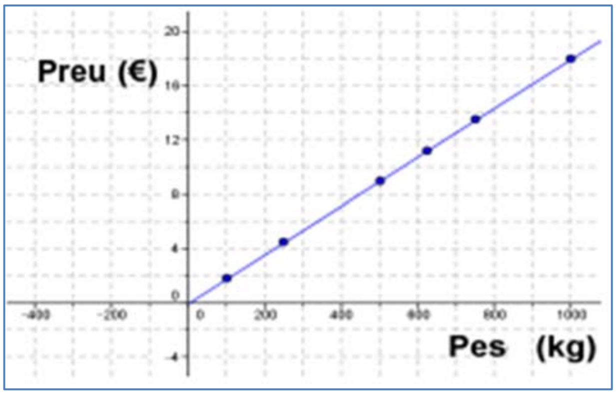
- Construeix una gràfica de punts a partir de les dades de la taula de valors de l'Activitat resolta 8 i, si és possible, uneix els seus punts:

Solució



Sí, en aquest cas és possible perquè podem calcular el preu per a qualsevol pes (és una relació proporcional).

La gràfica quedaria:

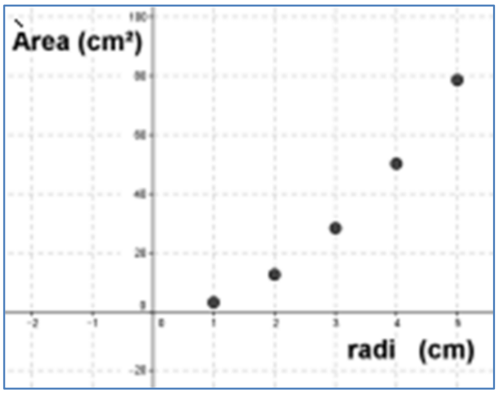


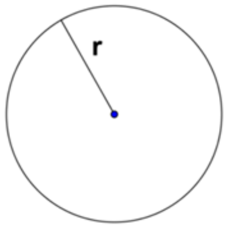
Nota: No hi ha gràfica al tercer quadrant perquè no té sentit un pes negatiu

- Construeix una gràfica a partir de les dades de la taula de valors de l'Activitat resolta 9 i, si és possible, construeix una gràfica unint els seus punts.

Solución:

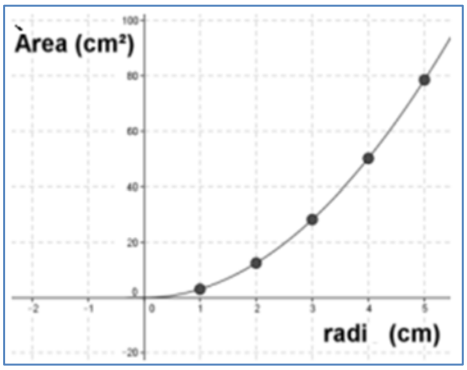
Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Institut Juan de Garay





Sí, és possible, perquè podem calcular l'àrea per a qualsevol radi.

La gràfica quedaria:



Nota: No hi ha gràfica al tercer quadrant perquè no té sentit un radi negatiu

Activitats proposades

k) Construeix una gràfica a partir de les dades de la taula de valors de l'Activitat proposada sobre el consum d'un cotxe i els quilòmetres que recorre sabent que el seu consum és de 5 litres cada 100 quilòmetres. Si és possible, construeix una gràfica unint els seus punts.

l) Construeix una gràfica a partir de les dades de la taula de valors de l'Activitat proposada sobre la relació entre el costat d'un quadrat i la seua superfície. Si és possible, construeix una gràfica unint els seus punts.

m) Construeix una gràfica a partir de les dades de la taula de valors de l'Activitat proposada sobre els costos en una companyia *de telefonia*. Si és possible, construeix una gràfica unint els seus punts.

n) En un rebut del gas de la vivenda de Joan ve la següent distribució de gasto:

Consum de gas: ....0,058 € per kw/h
Impost especial:............0,002 € per kw/h
Terme fixe: ....4,30 € per mes
Lloguer de comptador.... 2,55 €

La factura era de dos mesos, havia consumit 397 kw/h i el gasto ascendia a 34,97 €. Una altra factura anterior el gasto era de 26,15 € amb un consum de 250 kw/h.

Construeix una gràfica que relacione el consum de gas i el gasto. Té sentit unir els punts?

2.3. Gràfiques a partir de situacions.

En la majoria de les situacions que hem estudiat fins ara, hem pogut calcular els parells de valors relacionats, perquè es tractaven de relacions de proporcionalitat o de relacions donades per una fórmula que coneixíem.

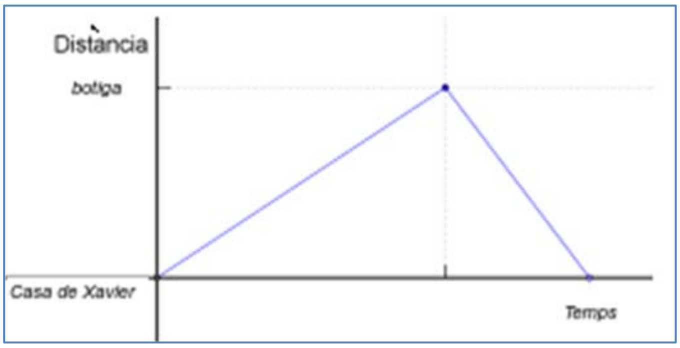
Açò no sempre ocorre. De vegades ens trobarem amb que ens descriuen una situació en què ens donen una informació entre dues magnituds sense aportar-nos a penes quantitats numèriques.

Moltes vegades **una situació quotidiana o relacionada amb fenòmens naturals descrita verbalment** es **pot representar mitjançant una gràfica** de manera directa.

Exemple 13:

- *Xavier ha d'anar a comprar a una botiga qualsevol allunyada de sa casa, com no té pressa decideix anar fent un passeig. Just quan arriba a la botiga se n'adona de que se li ha oblidat la cartera i no té diners per comprar. Corrent torna a sa casa a per la cartera.*

A partir d'aquest enunciat podem elaborar una gràfica com aquesta:

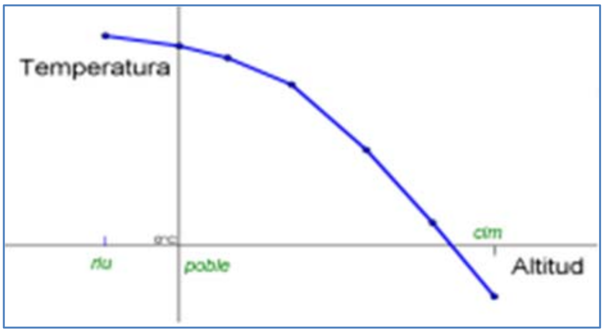


Nota: la distància entre la casa de Xavier i la botiga no la coneixem, però sabem que en la volta ha tardat menys temps que en l'anada.

Exemple 14:

- *La temperatura a una muntanya va descendint segons guanyem en altitud. Al cim arribem a temperatures sota zero.*

Podem representar una situació en què mesurem la temperatura segons pugem des d'un poble al cim d'una muntanya en una gràfica com la següent:



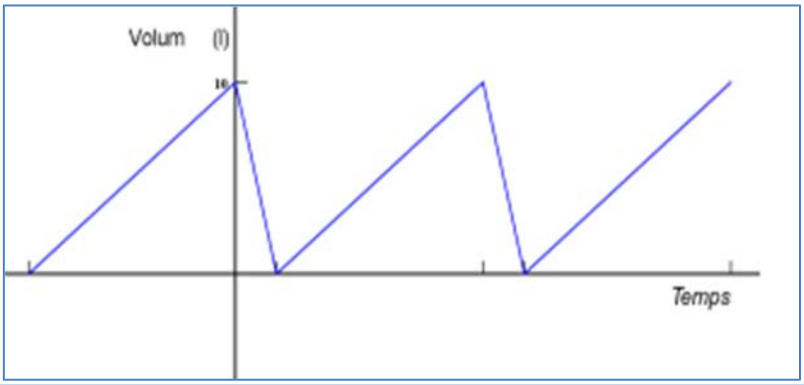
Al sistema de referència cartesià que hem establit, l'origen està en el poble i és per això pel que el riu té abscissa negativa, perquè està més davall. Al cim la temperatura és negativa i per això la seua ordenada és negativa.

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Institut Juan de Garay

Exemple 15:

- *A un establiment comercial, el depòsit d'aigua dels serveis públics va omplint-se a poc a poc fins a aconseguir els 10 L d'aigua i, en aqueix moment, es buida regularment. Quan està buit es repeteix el procés. A omplir-se tarda cinc vegades més temps que a buidar-se.*

Podem fer una gràfica que reflectisca la variació de la quantitat d'aigua (volum) del depòsit en funció del temps, a partir d'un moment en què el depòsit està ple.



L'origen del nostre sistema de referència cartesià aquesta en un moment amb el depòsit ple, el temps negatiu significa que és anterior a aqueix moment.

Les **gràfiques** ens donen una visió més clara de la situació que estem estudiant, a més d'elles podem obtindre una taula **de valors** i així fer una **interpretació** més precisa.

Exemple 16:

- En la situació anterior si considerem que tarda un minut a buidar-se el depòsit, tardarà cinc minuts a omplir-se i podem obtindre la següent taula de valors:

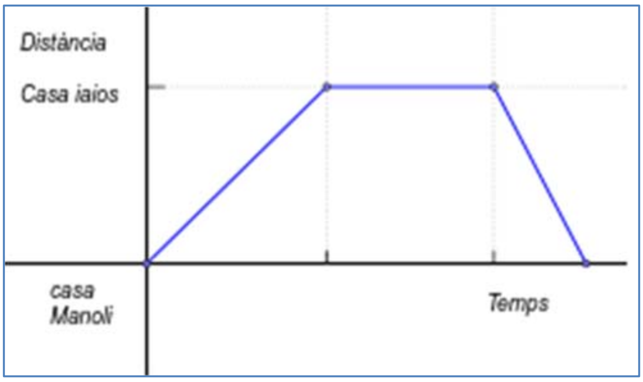
Temps (min)	–5	0	1	6	7	12
Volum (l)	0	10	0	10	0	10

Nota: el valor negatiu del temps vol dir que el depòsit va començar a omplir-se amb anterioritat a la situació inicial (origen) en el que el depòsit està ple.

Activitats resoltes

- Manoli va algunes vesprades a casa dels seus iaios on passa una bona estona amb ells. Després torna ràpidament a sa casa per a fer els deures abans de sopar. Construeix una gràfica d'aquesta situació

Solució:



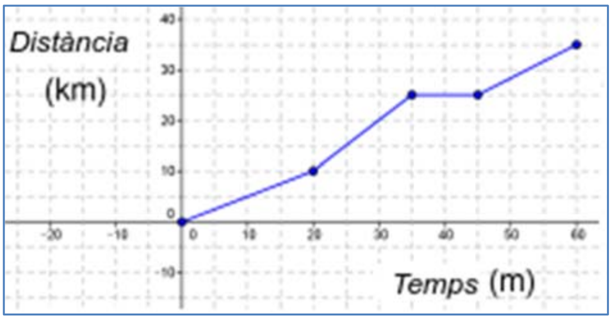
Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Institut Juan de Garay

- "Aquest estiu Joan va anar amb bicicleta a casa dels seus iaios que vivien en un poble pròxim, a 35 quilòmetres del seu. Als 20 minuts havia recorregut 10 km; en aqueix moment va començar a anar més de pressa i va tardar 15 minuts a recórrer els següents 15 km. Va parar a descansar durant 10 minuts i, després, va emprendre la marxa recorrent els últims 10 km en 15 minuts."

Construeix una gràfica d'aquesta situació i, a partir d'ella, confecciona una taula de valors.

Solució

La gràfica seria:



I la taula de valors:

Temps (min)	0	20	35	45	60
Distància (km)	0	10	25	25	35

Activitats proposades

o) *La família de Joaquin va anar un dia d'excursió al camp amb cotxe; després de passar el dia van tornar i a meitat de camí van parar durant una bona estona a posar gasolina i prendre uns refrescos. Al final van arribar a casa.*

Construeix una gràfica d'aquesta situació.

p) *Vanesa va eixir a donar un passeig, primer va anar a casa de la seua amiga Inés, que viu a 250 metres, i va tardar 6 minuts a arribar. La va haver d'esperar altres 6 minuts al seu portal i, després, van tardar 15 minuts a arribar al parc, que estava a 600 m, on van berenar i van xarrar durant mitja hora. Finalment Vanesa va tornar a casa ràpidament, perquè li havia telefonat sa mare. Només va tardar 5 minuts.*

Construeix una gràfica d'aquesta situació i, a partir d'ella, confecciona una taula de valors.

2. 4. Interpretació i lectura de gràfiques.

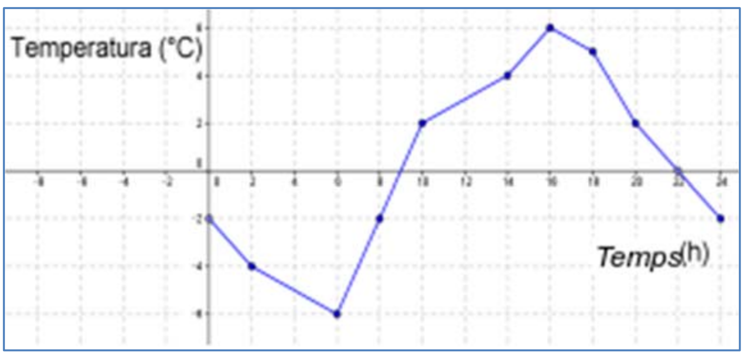
Les gràfiques resumeixen de manera eficaç la informació sobre la relació entre dues magnituds, per això se solen emprar molt, tant en situacions de caràcter científic o social, com en la informació que s'empra als mitjans de comunicació. La seua lectura i interpretació és per tant de molta utilitat.

De les coordenades dels punts d'una gràfica podem extraure dades molt interessants per a la comprensió de la situació que ens mostra la gràfica (l'ordenada més alta o més baixa, com es relacionen les magnituds,…)

Exemple 17:

- El gràfic adjunt mostra les temperatures al llarg d'un dia d'hivern en el pic de Peñalara.

A partir d'aquesta gràfica podem obtindre més informació sobre la situació plantejada. Així, per exemple podem veure que la temperatura mínima que es va arribar aqueix dia va ser de –6 °C a les 6 h del matí, ens ho indica el punt de coordenades (6, –6) que té l'ordenada menor de tots els punts de la gràfica. És un **mínim**.



• De la mateixa manera podem veure que la temperatura més alta va ser de 6 °C, que es va arribar a les 16 h. El punt de coordenades (16, 6) així ens ho indica. És un **màxim**. Podem també afirmar que la temperatura va ser pujant des de les 6 h fins a les 16 h perquè les ordenades dels punts l'abscissa de les quals està entre aqueixes hores van creixent. És **creixent**.

Així mateix el punt (10, 2) ens indica que a les 10 h del matí feia una temperatura de 2 °C, temperatura que es va arribar també a les 20 h, encara que aquesta vegada baixant.

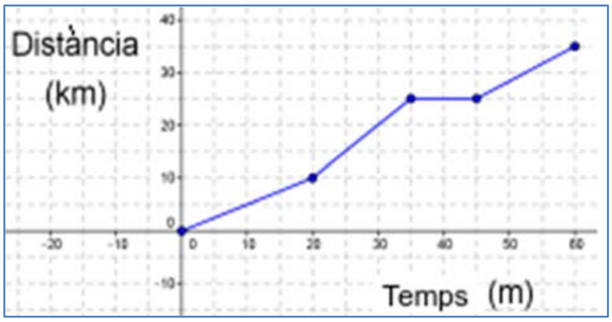
El fet de que de 10 h a 14 h pujara la temperatura menys que en hores anteriors (gràfica menys inclinada) va poder ser degut a causes climatològiques concretes, com que es posara la boira, i després, de 14 a 16 h, hi ha una pujada ràpida (va poder eixir el sol). La gràfica ens indica que qualsevol cosa així va poder passar.

A partir dels 16 hores la temperatura baixa, la gràfica és **decreixent**.

La temperatura és de 0 ºC cap a les 9 hores i a les 22 hores. (0, 9) i (0, 22) Són els punts en què la gràfica curta a l'eix d'abscisses. A l'eix d'ordenades el talla en (-2, 0).

Exemple 18:

- L'activitat resolta que ens descriu el recorregut de Joan de camí a casa dels seus iaios. La gràfica que dibuixem i resumeix el viatge era la que figura a la dreta.



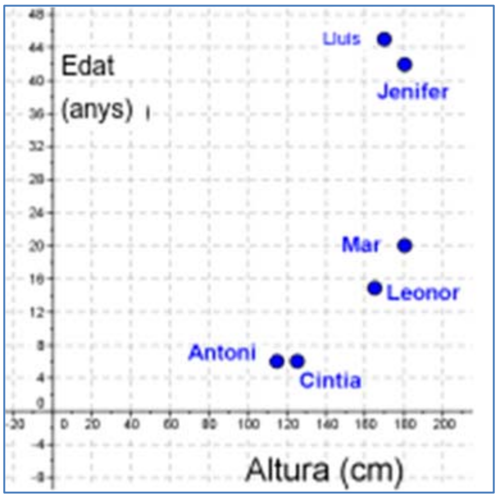
Viatje de Joan a casa dels seus iaios

De la gràfica, a més del que ja coneixíem i que ens ajude a dibuixar-la, podem extraure, d'una simple ullada més informació.

Per exemple, si mirem a la gràfica podem observar que en el quilòmetre 20 portava 30 minuts pedalejant, o que als 10 minuts havia recorregut 5 quilòmetres, que el tram més ràpid va ser dels 20 als 35 minuts (es veu major inclinació), o que en el minut 40 estava parat.

És una gràfica **contínua**, perquè podem dibuixar-la sense alçar el llapis.

Exemple 19:



- La gràfica següent ens indica la relació entre l'edat i l'estatura dels membres d'una família.

Si observem els punts d'aquesta gràfica veurem que Jenifer i Lluis són els punts (180, 43) i (170, 45) i representen als pares que tenen 43 i 45 anys i mesuren 180 i 170 cm respectivament.

Els xicotets Antoni i Cintia són bessons de 6 anys i mesuren 115 i 125 centímetres. Mar té 20 anys i mesura 180 cm, representada pel punt (180, 20) i, finalment Leonor mesura 165 i té 15 anys.

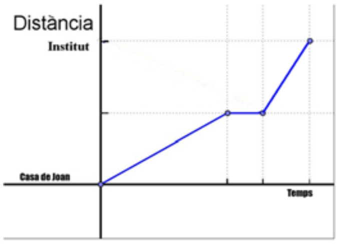
De la gràfica també podem deduir que Mar i sa mare, Jenifer, són els més alts de la família, que Lluis és el de més edat i que Cintia mesura 10 centímetres més que el seu germà bessó.

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Institut Juan de Garay

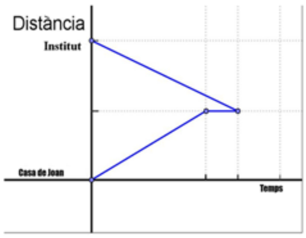
Activitats resoltes

- Observant les gràfiques de davall, determina quin és la que millor s'ajusta a la situació següent:

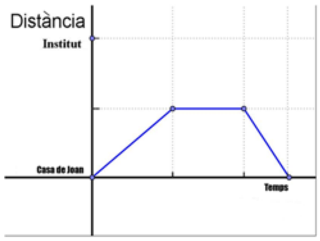
"Antoni va a l'Institut cada matí des de sa casa, un dia es troba amb un amic i es queda xarrant una estoneta. Com se l'ha fet tard ix corrent per a arribar a temps a la primera classe"



Gràfica 1



Gràfica 2



Gràfica 3

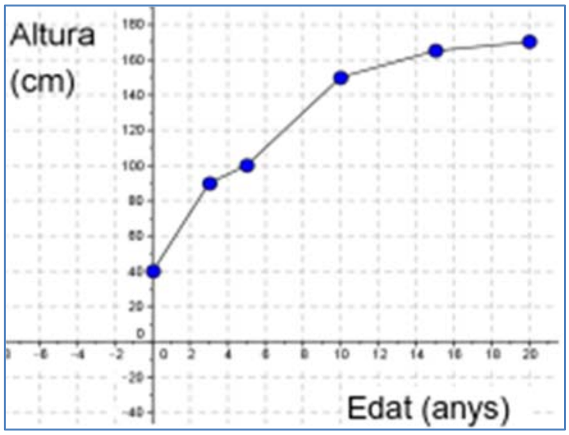
Solució

La gràfica 1 és **la que més s'ajusta perquè**: el segment horitzontal indica que durant un temps xicotet no va avançar en distància, açò és que estava parat, i la inclinació del tercer segment és major que la del primer, la qual cosa indica que en menys temps va recórrer més distància, açò és, que va ser més ràpid.

La gràfica 2 **no pot ser**, perquè Juan no pot estar a dos llocs distints, al mateix temps, al mateix moment. Aquesta gràfica indica, per exemple, que en l'instant inicial (temps 0) Juan està en sa casa i en l'institut al mateix temps.

La gràfica 3 **no pot ser**, ja que la gràfica ens indica que Juan torna a sa casa després de xarrar amb el seu amic i no va a l'institut.

- La gràfica següent ens mostra la variació de l'estatura de Laura amb relació a la seua edat.



Observant la gràfica contesta a les preguntes següents:

a) A quina edat medeix 1 metre?

b) Quant medeix en nàixer?

c) Quant medeix als 10 anys? I als 20?

d) En quin període va créixer menys?

Solució:

a) Mirant a la gràfica observem que el punt (5,100) és el que ens demanen perquè l'ordenada és 100 (1 metre), després Laura tenia 5 anys.

b) El punt que representa el naixement és el (0, 40) després va mesurar 40 centímetres

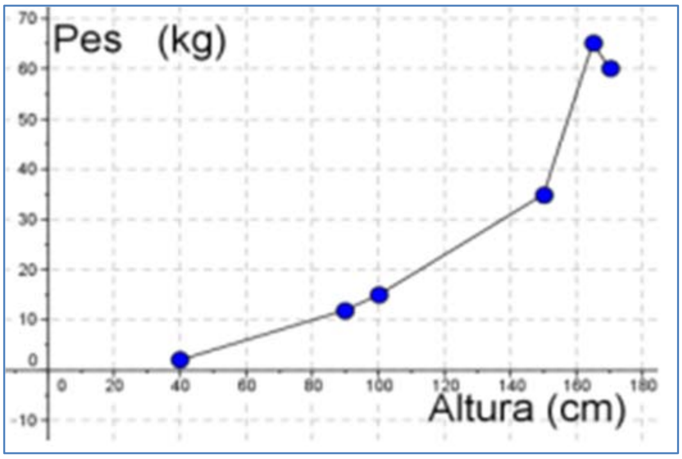
c) De la mateixa manera observem que als 10 anys mesurava 155 centímetres i als 20 anys 170.

d) En la gràfica observem que el tram menys inclinat és el que va dels 15 als 20 anys, això vol dir que en aqueix tram Laura va créixer menys.

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Institut Juan de Garay

Activitats proposades

q) La gràfica següent ens mostra la variació del pes de Laura amb relació a la seua estatura al llarg de la seua vida.



Analitza la gràfica, comenta la situació i respon a les preguntes següents:

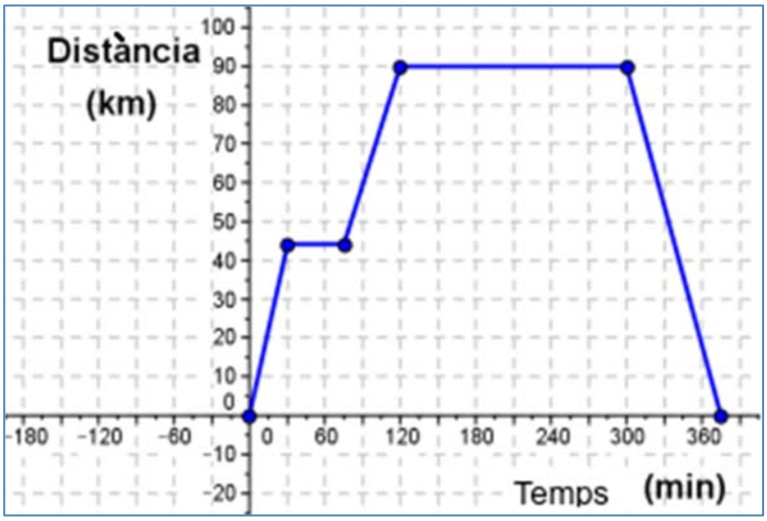
a) Quant pesava quan mesurava un metre? I quan mesurava 150 cm?

b) Quant mesurava quan pesava 55 kg?

c) A quina altura pesava més? Laura va aprimar-se en algun moment?

r) La següent gràfica representa una excursió amb autobús d'un grup de 1r d'E.S.O. a Toledo, passant per Aranjuez.

Sabent que Toledo està a 90 km de l'Institut i Aranjuez a 45 km:



a) Quant temps van parar en Aranjuez? I a Toledo?

b) Quant temps van tardar a arribar a Toledo? i a tornar a l'Institut?

c) Si van eixir a les 9 h del matí A quina hora van tornar? A les deu i mitja on es trobaven?

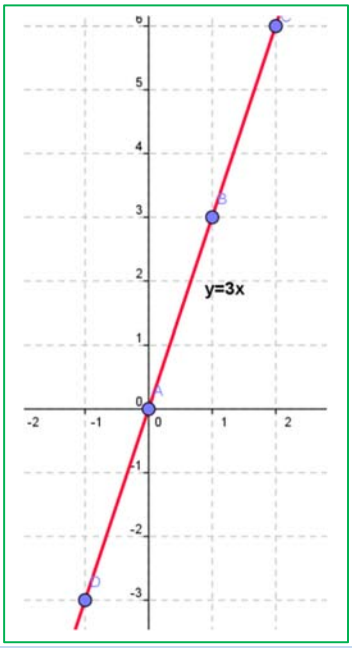
d) Fes una descripció verbal del viatge

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Institut Juan de Garay

2.5. Una funció important. La funció lineal o de proporcionalitat directa.

Dues magnituds són directament **proporcionals** quan en multiplicar o dividir a la primera per un nombre, la segona queda multiplicada o dividida pel mateix nombre.

En realitzar el quocient de qualsevol dels valors d'una variable i els corresponents de l'altra, obtenim la **raó de proporcionalitat directa *k***.



Exemple:

- *Representa gràficament la relació de proporcionalitat donada en la taula següent:*

Magnitud A (*x*)	–3	–2	0	1	2
Magnitud B (*y*)	–9	–6	0	3	6

En calcular la raó de proporcionalitat s'obté:

$$k = \frac{-9}{-3} = \frac{-6}{-2} = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = 3$$

La relació es defineix així: $y = 3x$.

La representació gràfica en el pla cartesià de dues magnituds **directament proporcionals** és una **recta** que passa per l'origen de coordenades.

Es pot escriure la relació entre la magnitud A (x) i la magnitud B (y) com $y = kx$ on k és la **raó de proporcionalitat**.

En representar gràficament una relació de proporcionalitat directa obtenim una recta que passa per l'origen de coordenades.

A aquestes rectes que passen per l'origen de coordenades i tenen com a equació $y = kx$ també les anomenem funcions lineals.

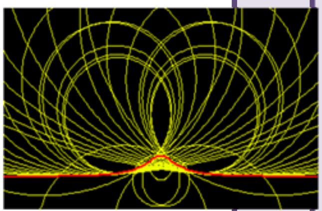
Activitats proposades

s) María vol comprar una cinta que val a 2 euros el metre. Representa gràficament el que haurà de pagar segons els metres de cinta que compre.

t) Representa gràficament la funció $y = 2x$.

CURIOSITATS. REVISTA

La Bruixa d'Agnesi

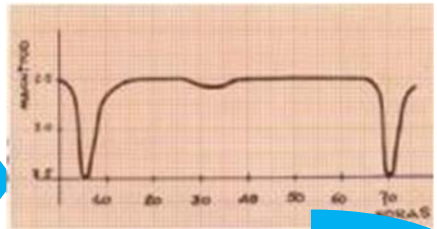


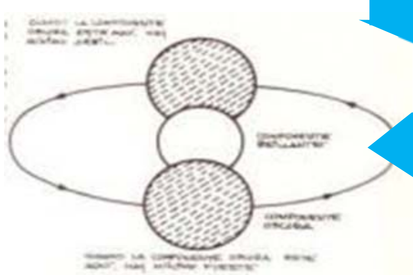
Existeix una función que s'anomena la Bruixa d'Agnesi. Maria Gaetana Agnesi va ser una matemàtica italiana que va escriure un llibre per que els seus germans pugueren aprendre matemàtiques. Eren 21 germans! Eixe llibre va ser tan bo, tan clar en les seues explicacions que es va emprar durant molt de temps en les universitats de tota Europa. Per fer això va haver que traduïr-lo. El traductor de l'italià a l'anglès, que admiraba molt a Maria Gaetana, va fer una mala traducció, i una de les funcions del llibre va apa-
réixer amb el nom de Bruixa (en lloc de *versiera*). Des

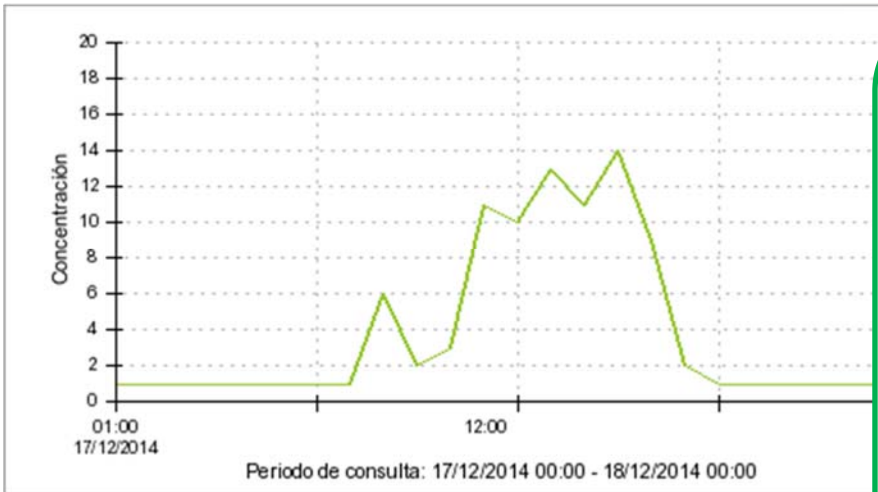
La llum de les estreles

Els astrònoms han de deduir el que saben de les estreles mesurant la llum que ens arriba d'elles. En la constel·lació de Perseu hi ha una estrela el brillantor de la qual varia segons la gràfica adjunta amb un període de 65 hores. Llavors han deduït que no es tracta d'una única estrela sinó d'una estrela doble, dues estreles molt pròximes, una més brillant i l'altra més fosca que giren una al voltant de l'altra.

Intenta ser un astrònom o astrònoma i explicar el comportament d'aqueixa estrela doble







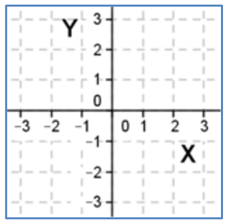
Qualitat de l'aire

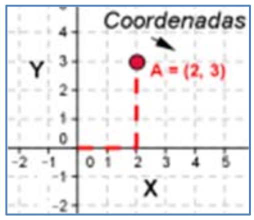
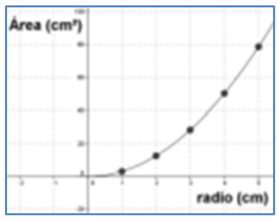
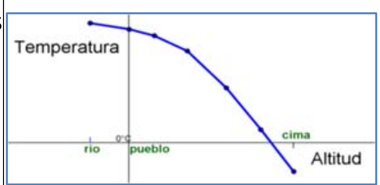
La gràfica indica l'evolució **de l'ozó** en l'estació de qualitat de l'aire de Casa de Camp de Madrid durant un dia, el 18 de desembre de 2014. Observa com puja en les hores centrals del dia.

En la pàgina de la Comunitat de Madrid pots conéixer com està la qualitat de l'aire en cada moment i saber quins són els valors llindars que no s'haurien de sobrepassar.

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Institut Juan de Garay

RESUM

<table>
<tr><th></th><th></th><th>Ejemplos</th></tr>
<tr><td>Sistema de referència cartesià</td><td>Dues rectes numèriques perpendiculars, anomenades Eixos, que es tallen en un punt anomenat Origen. L'eix horitzontal es denomina eix d'abscisses, i a l'eix vertical, eix d'ordenades.</td><td>

,</td></tr>
<tr><td>Coordenades</td><td>És un parell ordenat de nombres (x, y), que ens indica on es troba el punt respecte al sistema de referència cartesià que estem utilitzant.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Taula de valors</td><td>Taula en què situem ordenadament les quantitats corresponents de dues magnituds relacionades.</td><td><table><tr><td>Temps (min)</td><td>0</td><td>30</td><td>80</td><td>100</td></tr><tr><td>Distància (km)</td><td>0</td><td>10</td><td>20</td><td>30</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Gràfica</td><td>Si representem en un sistema de referència cartesià tots els parells de dades d'una taula de valors obtenim una gràfica.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Gràfiques a partir de situacions</td><td>Una situació quotidiana o relacionada amb fenòmens naturals descrita verbalment es pot representar mitjançant una gràfica</td><td>
</td></tr>
</table>

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Institut Juan de Garay

EXERCICIS I PROBLEMES de 1r d'ESO

El pla cartesià. Coordenades

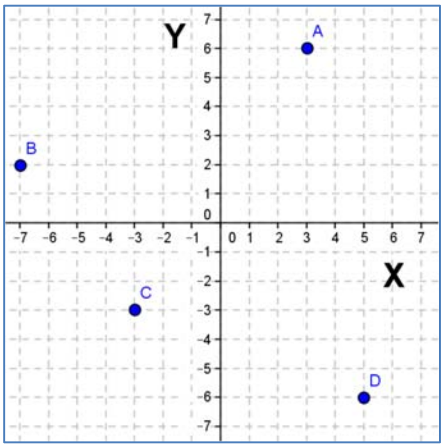
1. Representa al teu quadern els punts següents en un sistema de referència cartesià:

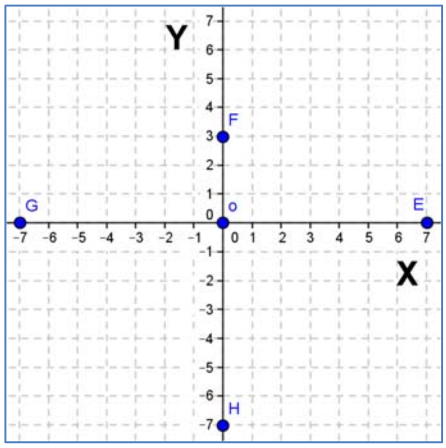
A = (3, 4) B = (– 3, 1) C = (– 1, – 3) D = (4,– 2) O = (0, 0)

2. Representa al teu quadern, a un altre sistema aquests altres punts:

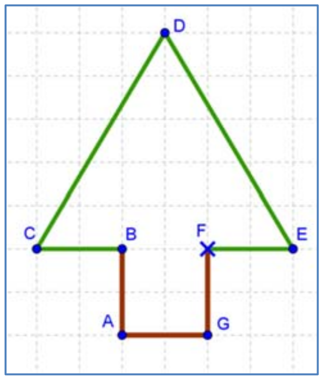
E = (6, 0) F = (2, 0) G = (– 3, 0) H = (– 7, 0)

3. Escriu al teu quadern les coordenades dels punts següents:





Analitza les coordenades de cada punt, els seus signes, els seus valors, etc. Tenen quelcom especial les coordenades dels punts E, F, G i H? I el punt O té coordenades? Com s'anomena aquest punt?



4. Dibuixa, a l'arbre del gràfic, un sistema de referència cartesià, amb l'origen en el punt F.

a) Indica les coordenades dels punts marcats al gràfic.

b) Indica en quin quadrant, o eix, està cada punt.

5. Representa els següents punts a un sistema de referència cartesià:

M = (3, –10) R = (–3, –10) V = (–3, 10) Z = (3, 10)

Uneix aquests punts en orde alfabètic i finalment uneix l'últim amb el primer. Quin polígon obtens? Calcula l'àrea i el perímetre d'aquest polígon.

6. El dibuix mostra el mapa de Mesopotàmia en l'antiguitat.

a. Representa un sistema de referència cartesià, amb origen en Babilònia.

b. Tria les unitats més adequades per a cada eix.

c. Indica quines coordenades tenen les ciutats de Jerusalem, Persèpolis i Uruk.

7. Representa els següents punts en un sistema de referència cartesià:

A = (–3, –2); B = (–3, –3); C = (–1, 5); D = (2, 3); E = (2, –2);

F = (–1, –2); G = (–1, 0); H = (–2, 0); I = (–2, –2)

a) Uneix aquests punts en orde alfabètic i finalment uneix l'últim amb el primer.

b) Indica en quin quadrant, o eix, està cada punt.

8. Al teu quadern, tria dos punts en cada quadrant i quatre punts en cada eix, dóna'ls un nom i escriu les coordenades que té cada punt.

9. El gràfic mostra el pla d'una ciutat. En ell tens marcat el sistema de coordenades cartesianes i les unitats.

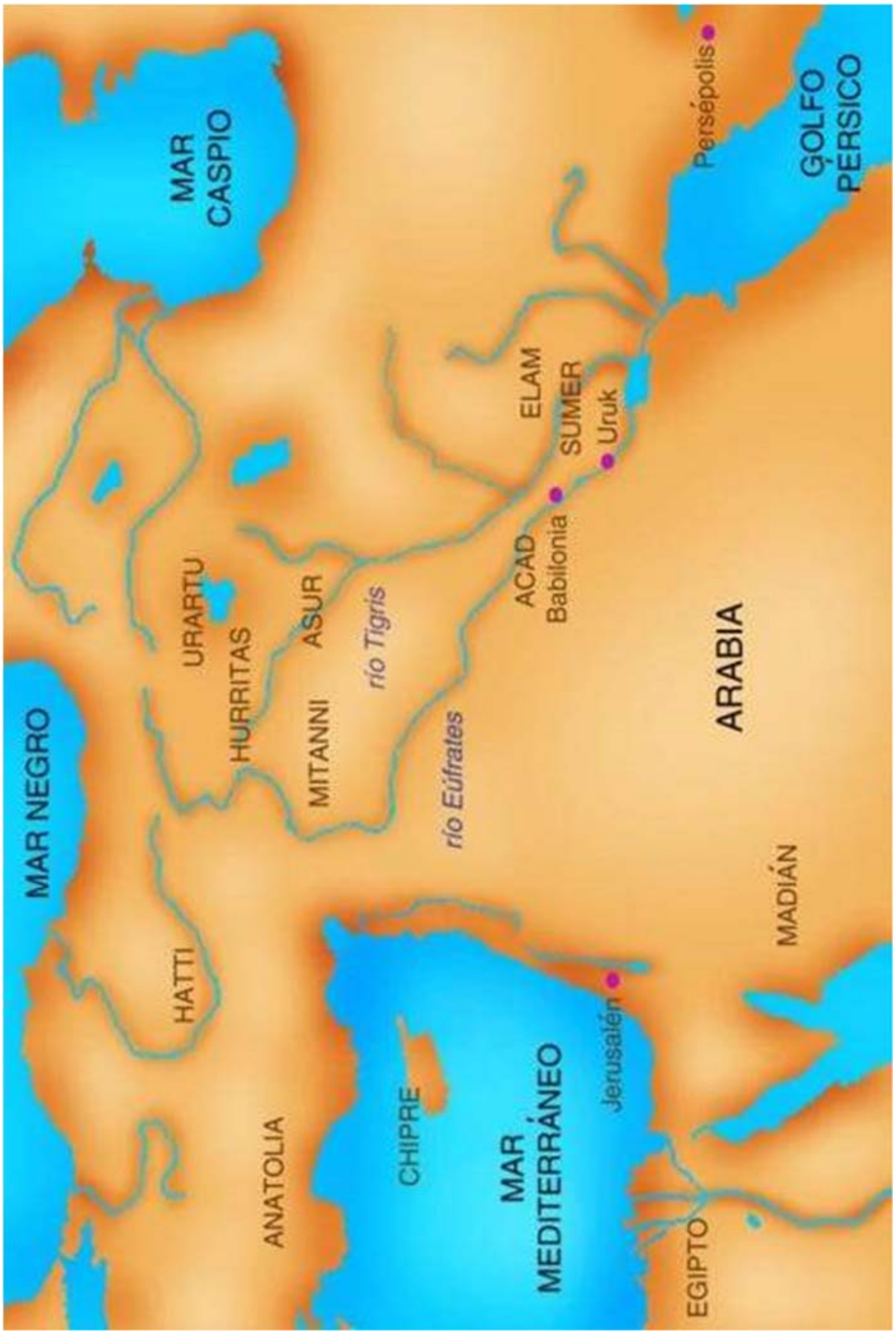
u) a. Indica les coordenades del Centre Cultural i del Centre de Salut respecte a aquests eixos.

b. Quina carrer està a les coordenades

(–1, 3)? I a les coordenades (0, –1)?

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Institut Juan de Garay

Material fotocopiable

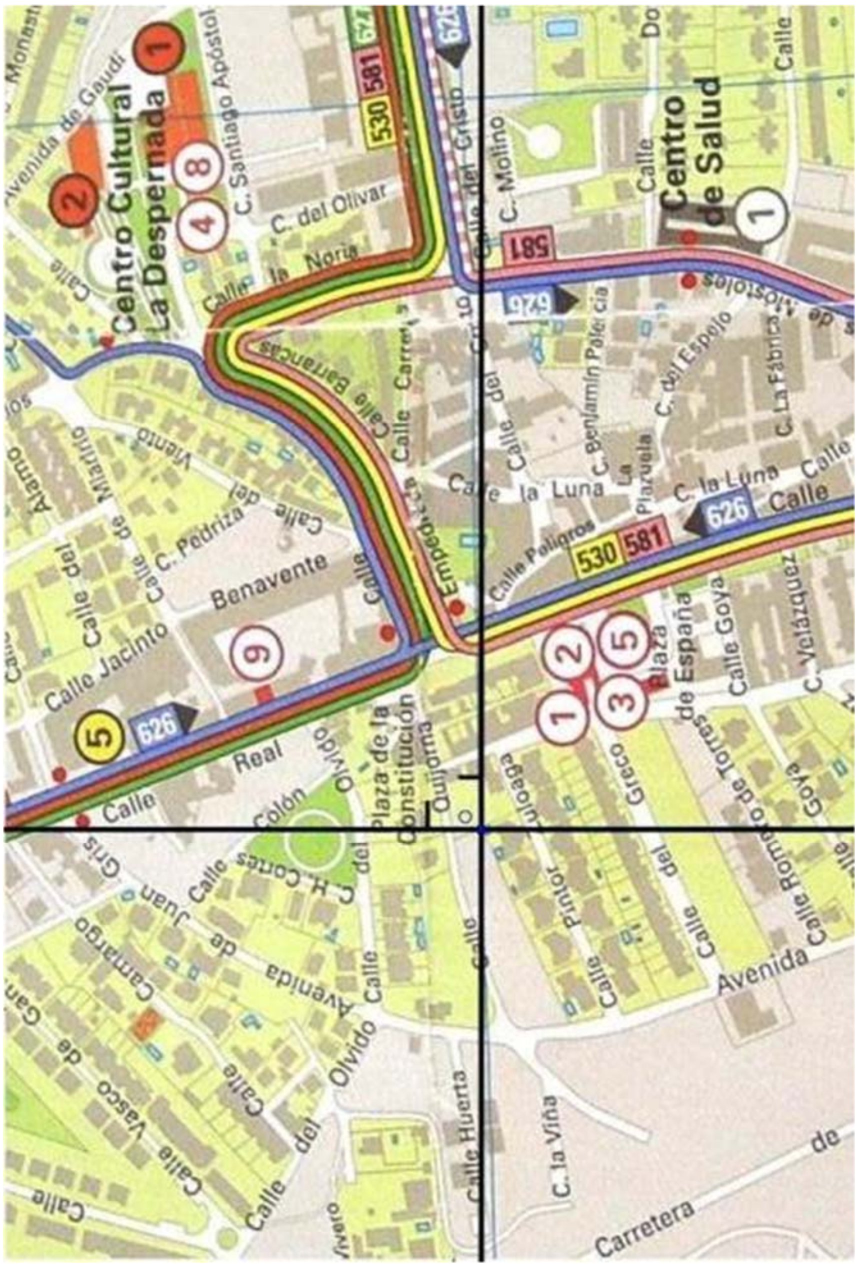


Mapa de Mesopotàmia

Font: Banc d'Imatges i sons de l'INTEF.

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Institut Juan de Garay

Material fotocopiable



Pla d'una ciutat

Font: Banc d'Imatges i sons de l'INTEF.

Taules i Gràfiques

10. La següent taula de valors relaciona el pes en quilograms de raïm i el seu preu en euros. Copia-la al teu quadern i completa-la.

Pes (Kg)	1,5		3,6		6,5
Preu (€)	2,7	3,6		9	

11. Construeix una gràfica de punts a partir de les dades de la taula de valors de l'exercici 10 i, si és possible, construeix la gràfica unint els seus punts.

12. Construeix taules de valors, amb quatre quantitats diferents, que ens expressen les relacions següents:

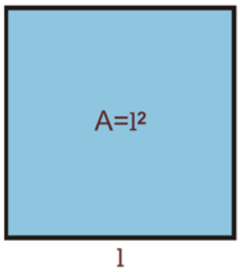
v) a. El costat d'un quadrat i la seua àrea

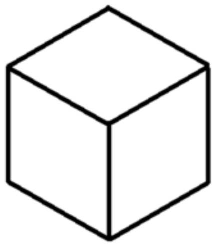
b. Un nombre i la quarta part del dit nombre.

c. Un nombre i el seu nombre oposat

d. Un nombre i el seu nombre invers.

e. L'aresta d'un cub i el seu volum





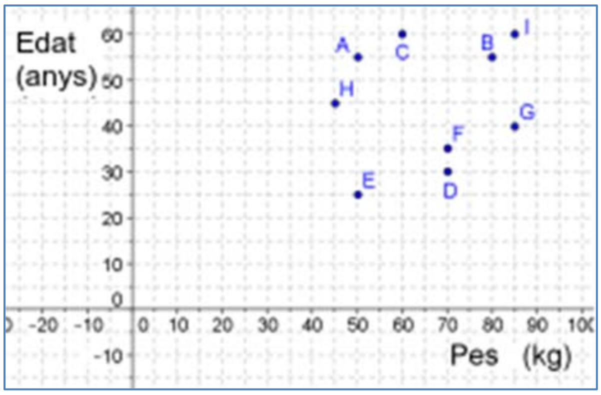
13. Copia al teu quadern i completa la següent taula de valors sabent que les magnituds P i Q són magnituds directament proporcionals:

P	0	1	2		7	9
Q				15	21	

14. La gràfica següent ens indica la relació entre l'edat i el pes dels professors d'un grup de 1º d'E.S.O. d'un Institut de Madrid.

Sabem que la professora de Matemàtiques és la més jove. La de Ciències de la Naturalesa té 35 anys. El professor de Ciències Socials és dels majors i dels que més pesen, i la d'Educació Física és la més prima.

Indica que punt de la gràfica correspon a cada un d'aquests quatre professors.



15. Fes una gràfica amb les dades de la taula següent:

X	0	1	2	5	7	9
Y	2	5	8	6	2	–2

16. Construeix gràfiques de punts a partir de les dades de les taules de valors que has realitzat a l'exercici 12 i, si és possible, construeix les gràfiques que resulten d'unir els seus punts. En cada apartat, indica en quins quadrants és possible tindre gràfica.

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Institut Juan de Garay

17. Construeix una gràfica de punts a partir de les dades de la taula de valors que has completat en l'exercici 13 i, si és possible, construeix la gràfica unint els seus punts.

18. Inventa quatre taules de valors, amb sis quantitats diferents, i representa les gràfiques corresponents. Fes que dues taules corresponguen a situacions reals i les altres dos no.

19. A un estudi de l'Institut Nacional d'Estadística de l'any 2012, ens indiquen el percentatge de llars espanyols que tenen accés a Internet en el període 2007 a 2012, aquestes dades vénen arreplegades a la taula següent:

Anys	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Viviendes amb accés a Internet (%)	45	51	54	59	64	68

Representa aquestes dades en una gràfica de punts. Podríem unir aquests punts?

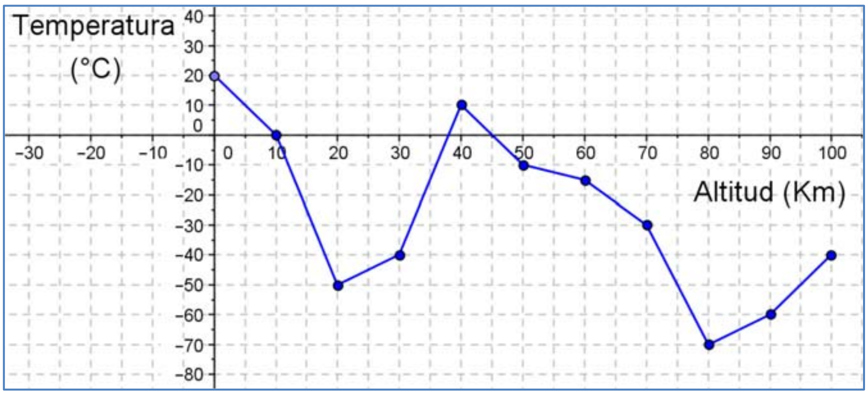
20. La gràfica següent mostra la temperatura que s'ha mesurat, en l'atmosfera, a distintes altituds.

w) a. A quines altituds la temperatura és de 0 ^{o}C?

b. Quina és la temperatura als 30 km d'altitud? i a nivell del mar (0 km)?

c. Quina és la temperatura més alta que s'ha mesurat? a quina altitud?

d. Quina és la temperatura més baixa que s'ha mesurat? a quina altitud?



Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Institut Juan de Garay

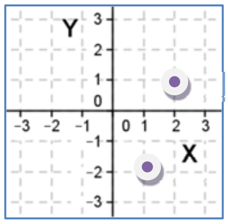
AUTOEVALUACIÓ de 1r d'ESO

1) El punt de coordenades A = (3, –1) està situat en el:

a) primer quadrant b) segon quadrant c) tercer quadrant d) quart quadrant.

2) Les coordenades dels punts indicats són:

a) (2, 1), (1, –2) b) (2, 1), (–1, 2). c) (1, 2), (–2, 1) d) (–2, 1), (2, 2)



3) Indica quina afirmació és falsa:

a) L'eix d'abscisses és horitzontal

b) L'eix d'ordenades és vertical

c) L'eix d'abscisses és perpendicular a l'eix d'ordenades

d) L'eix d'abscisses és l'eix Y

4) Els punts de coordenades A = (–3, 0), B = (–1, 0), C = (2, 0), D = (3, 0) estan tots ells en el:

a) eix d'ordenades b) primer quadrant c) eix d'abscisses d) segon quadrant

5) Els punts de coordenades A = (0, 0), B = (0, 1), C = (0, 2), D = (0, 3) estan tots ells en el:

a) eix d'ordenades b) primer quadrant c) eix d'abscisses d) segon quadrant

6) Els valors que completen la taula de proporcionalitat directa són:

Persones	1	4	8	
Kg de menjar	3			27

a) 6, 12, 8 b) 12, 24, 9 c) 8, 16, 12 d) 16, 32, 7

7) La següent taula de valors pot correspondre a:

X	3	9	15	27
Y	1	3	5	9

a) una proporcionalitat directa. b) una proporcionalitat inversa

c) la relació entre el costat d'un quadrat i la seua àrea d) la relació entre el radi del cercle i la seua àrea

8) Indica als casos següents aquell que NO és una funció:

a) La temperatura de la sopa al llarg del temps. b) Y = 2 X.

c) L'àrea d'un cercle com a funció del radi. d) L'àrea d'un quadrat i el seu color

9) Indica quina afirmació és falsa:

a) L'origen de coordenades és la intersecció entre l'eix d'abscisses i el d'ordenades.

b) En una funció a cada valor de la variable independent li correspon un únic valor de la variable dependent.

c) En una funció a cada valor de la variable dependent li correspon un únic valor de la variable independent.

PER AL PROFESSORAT

El concepte de funció és un dels conceptes bàsics en Matemàtiques i, al mateix temps, un dels més difícils d’adquirir pels estudiants de secundària. Açò no és estrany si analitzem com ha evolucionat el concepte al llarg de la història.

En la història de les Matemàtiques comença a plantejar-se el concepte de funció cap al segle XIV i ha sigut un dels què ha presentat més dificultat, sent en el segle XX un dels eixos de la investigació matemàtica. Inclús per als matemàtics del segle XVIII no estava molt clar el concepte de funció. Per exemple, en un article de *Jean Bernoulli* publicat en 1718 es troba aquesta primera definició: *“Una funció d’una variable és definida ací com una quantitat composta d’alguna manera per una variable i constants”*. Els matemàtics estaven disposats a acceptar dos tipus de funcions, les que venien donades per una fórmula o les que es traçaven arbitràriament dibuixant la seua gràfica. La idea abstracta de funció com a correspondència va tardar un temps a aparéixer. Va ser *Jean Baptiste Joseph Fourier* (1768 – 1830) en la seua obra *“La teoria analítica de la calor”* el motor per a l’aprofundiment del concepte de funció. Recordem que quan Fourier va exposar el seu desenrotllament d’una funció en sèrie trigonomètrica, va començar a discutir-se sobre què era una funció, quins podien ajustar-se a aqueix desenrotllament, i aquest fet va ser un catalitzador en la història de les Matemàtiques que, entre moltes altres coses, va portar a formalitzar aquest concepte. La noció moderna de funció és molt recent, podem datar-la en l’obra de *Peter Gustav Lejeune Dirichlet* (1805-1859) de 1837, on apareix la noció de funció com a correspondència, independent d’una representació analítica o geomètrica.

Al llarg de la història, aquest concepte s’ha anat desenrotllant a partir de l’estudi de fenòmens del món que ens rodeja i ha sigut expressat en distints llenguatges —verbal, gràfic, algebraic i numèric—. Per tant, per a poder aconseguir una aproximació significativa al sentit de les funcions, és necessari estudiar aquest concepte des de distints aspectes, utilitzant diferents llenguatges i treballant en distintes situacions.

Ja que les relacions funcionals es troben ben sovint en el nostre entorn, l’estudi de funcions, pels estudiants de 1r d’E.S.O., ha de començar amb el tractament d’aquelles situacions que existeixen en el seu entorn, sense oblidar les relacionades amb altres àrees de coneixement (les Ciències de la Naturalesa, les Ciències Socials, etc.).

Des de el primer curs d'E.S.O. els estudiants poden anar aproximant-se al concepte de funció interpretant els significats de les distintes expressions de les funcions. Aquests procediments s’han de treballar al llarg de tota l’etapa, i es van adquirint a mesura que augmenta la maduresa cognitiva i el camp d’experiència de l’estudiant.

La dificultat de visualització de la representació gràfica d’una funció pot salvar-se amb la utilització de programes informàtics específics com el Geogebra, o per aplicacions elaborades ja per alguns professors i que estan a disposició de tots, com les elaborades dins del Projecte Gauss (Institut Nacional de Tecnologies Educatives i de Formació del Professorat) o en pàgines personals d’aquests.

Bé utilitzant un sol ordinador en l’aula —amb la PDi o mitjançant la projecció de la pantalla—, o bé amb l’ús dels ordinadors pels estudiants en l’aula d’informàtica, aquests poden familiaritzar-se amb la forma de les gràfiques i la interpretació dels seus punts i és un suport inestimable per a acostar-se a la representació de funcions i al concepte de funció.

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Institut Juan de Garay

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Nieves Zuasti

Revisors: Raquel Caro i Sergio Hernández

Il·lustracions: Banc d'imatges de l'INTEF

Traducció al valencià: Departament de Matemàtiques de l'Institut Juan de Garay

Índex

Resum

Si vols conéixer l'estatura o el pes de les persones que tenen entre 11 i 13 anys a Espanya, pots arreplegar les dades de cada una de les persones d'aqueixes edats. Però açò és molt laboriós. El que fa **l'Estadística** és arreplegar una **mostra** que ens permeta representar la totalitat de la població objecte d'estudi.

L'arreplega de dades és molt antiga. L'emperador August va manar fer un cens, (o arreplega de dades) de tot el seu Imperi.

La Ciència progressa deduint, mitjançant raonaments lògics correctes, i inferint, en que amb unes observacions experimentals, s'indueix un poc més general.

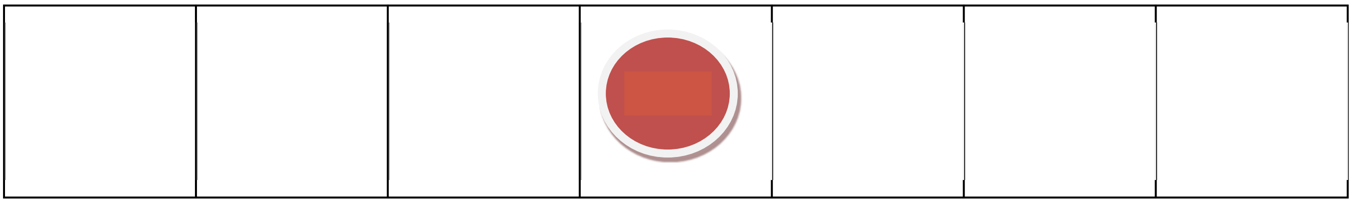
Els jocs d'atzar, daus, cartes, loteria... fan un bon ús de l'Estadística i la Probabilitat.

1. L'ATZAR I LA PROBABILITAT

1.1. Fenòmens o experiments aleatoris

Un **fenomen o experiment aleatori** és aquell, que mantenint les mateixes condicions en l'experiència, el resultat no és sempre el mateix.

- ***Vegem un joc:*** Dibuixa 3 caselles cap a la dreta, una casella central i 3 caselles cap a l'esquerra. Col·loca una fitxa en la casella central. Tira una xinxeta diverses vegades.



Si cau amb la punta cap amunt, avança una casella cap a la dreta, en cas contrari avances cap a l'esquerra. Anota quantes tirades necessites per a arribar a una de les metes. És un ***exemple*** de **fenomen o experiment aleatori** perquè no es pot predir el resultat.

- No obstant això, calcular el cost d'una mercaderia, sabent el pes i el preu per kg, no és un experiment aleatori. Tampoc ho és calcular el cost del rebut de la llum sabent el gasto.

Activitat resolta

- Són experiments aleatoris:

a) Llançar una moneda i anotar si ix cara o creu
b) Llançar un dau
c) Si en una urna hi ha 5 boles blanques i 3 roges, traiem una i anotem el color.
d) Traure una carta d'una baralla
e) Obrir un llibre i anotar la pàgina per la qual s'ha obert

- No són experiments aleatoris

a) Si ixes sense paraigua quan plou segur que et mulles.
b) El preu de mig quilo de rosquilles si les rosquilles costen a 3 € el quilo.
c) Soltar un objecte i veure si cau

Activitats proposades

1. Indica si és un fenomen aleatori:

a) La superfície de les comunitats autònomes espanyoles
b) Anotar el sexe del pròxim bebé nascut en una clínica determinada
c) L'àrea d'un quadrat del que es coneix el costat
d) Tirem dos daus i anotem la suma dels valors obtinguts
e) Saber si l'any que ve és bixest.

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Raquel Caro i Sergio Hernández
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

1.2. Freqüència absoluta i relativa. Freqüències acumulades

En realitzar nombroses vegades un experiment podem anotar les vegades en què s'obté cada un dels possibles resultats.

Exemple:

- Tirem una moneda 100 vegades i anotem les vegades en què ens ha eixit cara i les vegades en què ens ha eixit creu. Ens ha eixit cara 56 vegades, llavors diem que la freqüència absoluta de cara és 56.
- En dividir la freqüència absoluta pel nombre total d'experiments tenim la freqüència relativa, així la freqüència relativa de cara és 56/100, o bé 0,56.

Possibles resultats	Nombre de vegades
cara	56
creu	44
Total	100

La **freqüència absoluta** d'un succés és el nombre de vegades que s'ha obtingut aqueix succés.

La **freqüència relativa** d'un succés s'obté dividint la freqüència absoluta pel nombre total d'experiments.

Possibles resultats	Freqüències relatives
cara	0,56
creu	0,44
Suma total	1

Si sumes les freqüències relatives de tots els possibles resultats d'un experiment, aqueixa suma sempre és igual a 1.

Al conjunt dels possibles resultats i les seues corresponents freqüències se li denomina **distribució de freqüències.**

Activitats proposades

2. Completa en la següent taula les freqüències relatives de l'experiment aleatori tirar un dau:

Possibles resultats	Freqüències absolutes	Freqüències relatives
1	15	
2	18	
3	16	
4	17	
5	19	
6	15	
Suma total	100	1

3. Hem tirat dos daus i anotat si la suma de les seues cares superiors és menor, igual o major que 7. Escriu la taula de freqüències relatives de la taula adjunta. Observa que la suma de les freqüències relatives és 1.

Possibles resultats	Freqüències absolutes	Freqüències relatives
< 7	30	
7	38	
> 7	32	
Suma total	100	1

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Raquel Caro i Sergio Hernández
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

1.3. Experiments aleatoris. Successos

En realitzar un experiment aleatori hi ha diversos possibles resultats o **successos possibles**.

- Per exemple els possibles resultats en tirar una moneda són que isca *cara* o isca *creu*.
- Els possibles resultats en tirar un dau és que ens isca 1, 2, 3, 4, 5 o 6.

En realitzar l'experiment sempre s'obtindrà un dels possibles resultats.

Al conjunt de resultats d'un experiment aleatori se li denomina **espai mostral**.

Als elements de l'espai mostral se'ls anomena **successos elementals.**

Un **succés** és un subconjunt de l'espai mostral.

Activitat resolta

- L'espai mostral de l'experiment aleatori:

a) Extraure una bola d'una bossa amb 7 boles blanques i 2 negres és {*blanca*, *negra*}

b) Traure una carta d'una baralla espanyola i mirar el pal és {*ors*, *copes*, *bastos*, *espases*}

c) En traure un paper d'una bossa on s'han posat 5 papers numerats de l'1 al 5, és {1, 2, 3, 4, 5}

d) Tirar dues monedes és: {(*cara*, *cara*), (*cara*, *creu*), (*creu*, *cara*), (*creu*, *creu*)}

- Així, per al llançament d'un dau, encara que l'espai mostral habitual serà {1, 2, 3, 4, 5, 6}, és possible que només siga d'interés si el resultat obtingut és parell o imparell, i en este cas l'espai mostral seria {*parell*, *imparell*}. En el cas del llançament consecutiu de dues monedes, l'espai mostral pot ser {{C, C}, {C, +}, {+, C}, {+, +}}, o bé: {*0 cares*, 1 *cara*, 2 *caras*}, si ens interessa únicament el nombre de cares obtingudes.

- Alguns successos de l'experiment aleatori tirar un dau són:

a) Traure un nombre parell {2, 4, 6}.

b) Traure un nombre més gran que 3 {4. 5, 6}.

c) Traure un nombre menor que 5 {1, 2, 3, 4}.

Activitats proposades

4. Inventa cinc experiments aleatori i escriu el conjunt de possibles resultats

5. Escriu l'espai mostral de l'experiment aleatori: "Escriure *en cinc targetes cada una de les vocals i traure una a l'atzar*"

6. Escriu l'espai mostral de l'experiment aleatori: "*Tirar una xinxeta i anotar en que postura cau*"

7. Inventa dos successos de l'experiment aleatori de tirar dues monedes.

8. En el joc de loteria, indica dos successos respecte a la xifra de les unitats del primer premi.

9. En el joc de dòmino, indica tres successos amb fitxes dobles.

10. Escriu tres successos aleatoris de traure una carta d'una baralla.

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Raquel Caro i Sergio Hernández
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

1.4. Probabilitat

En realitzar un experiment aleatori no es pot predir el resultat que es va a obtindre. No obstant això, habitualment tenim informació sobre com és de possible un determinat succés. Així doncs, l'objectiu és quantificar d'alguna manera aquesta informació, que es denomina la **probabilitat del succés**.

Donats tots els successos possibles d'un experiment aleatori, assignarem a cada succés A, una quantitat que denotarem per P[A] i que anomenarem la probabilitat del succés A.

La probabilitat que ocórrega un cert resultat en realitzar l'experiment, encara que ja es veurà en altres cursos en detall, es calcula com la freqüència relativa d'aqueix resultat repetint l'experiment moltes vegades.

A més vegades repetisques l'experiment, més s'aproximarà la freqüència relativa al valor de la probabilitat.

- ***Per exemple,*** si tires una moneda a l'aire una sola vegada i ix cara, pareixerà que la probabilitat de traure cara és 1, però si repeteixes més vegades l'experiment, la freqüència relativa de traure cara s'anirà acostant a 0,5 amb el temps. Això ens diu que la probabilitat de traure cara és 0,5 o 1/2.

La probabilitat és un nombre entre 0 i 1. És una mesura de la *certesa* que tenim que es verifique un succés. Serveix per a previndre el futur usant el que se sap sobre situacions passades o presents.

Però la paraula "probable" és d'ús comú, per la qual cosa sempre saps si quelcom és "molt *probable*", "prou *probable*", "poc *probable*" o "molt *improbable*".

- Si no has estudiat res un examen és prou *probable* que et suspenguen, i si t'ho saps és molt *probable* que tragues bona nota.
- Si una persona condueix havent begut alcohol és *probable* que li posen una multa.
- És *poc probable* que en eixir al carrer caiga una cornisa damunt.
- És *segur* que demà eixirà el sol.
- És *molt improbable* que demà hi haja un terratrémol a Madrid.

Per calcular probabilitats s'usen dues tècniques, una **experimental**, analitzant les freqüències relatives de què ocórrega el succés, i l'altra per **simetria**, quan se sap que els successos elementals són **equiprobables,** és a dir, que tots **ells tenen la mateixa probabilitat**, llavors es **divideix el nombre de casos probables pel nombre de casos possibles.**

Activitat resolta

- La probabilitat que isca cara en tirar una moneda és 1/2, perquè només hi ha dos casos possibles {*cara*, *creu*} i suposem que la moneda no està trucada.
- La probabilitat que en creuar el carrer t'agarre un cotxe NO és 1/2, perquè ja t'hauria agarrat un muntó de vegades. Per calcular aqueixa probabilitat s'arrepleguen dades de vianants atropellats.
- La probabilitat de traure bola roja d'una bossa amb 7 boles roges i 3 boles blanques és 7/10.
- La probabilitat que un bebé siga xiqueta és aproximadament 0,5, però en fer l'estudi amb les freqüències relatives s'ha vist que és 0,49.

Activitats proposades

11. Assenyala si són *poc probable* o *molt probable* els successos següents:

a) Creues el carrer i t'agarra un cotxe.

b) Fa una quiniela i li toca el premi màxim.

c) El dilluns vas al col·legi.

d) Li toca la loteria a Joan.

12. Calcula la probabilitat que en traure una carta de la baralla siga d'ors.

13. Per saber la probabilitat que un xiquet de bolquers siga esquerrà, et basaries en l'estudi de les freqüències relatives o l'assignaries per simetria?

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Raquel Caro i Sergio Hernández
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

2. GRÀFICS ESTADÍSTICS

Si fem una representació gràfica de les dades podrem comprendre el seu significat amb molta més facilitat que si, simplement els deixem en forma de taula. Per a això, naturalment, ja haurem d'haver arreplegat les dades i elaborat una taula.

Estudiarem quatre tipus de representacions, el diagrama de rectangles, el diagrama de línies, el pictograma i el diagrama de sectors, encara que hi ha algunes altres representacions possibles.

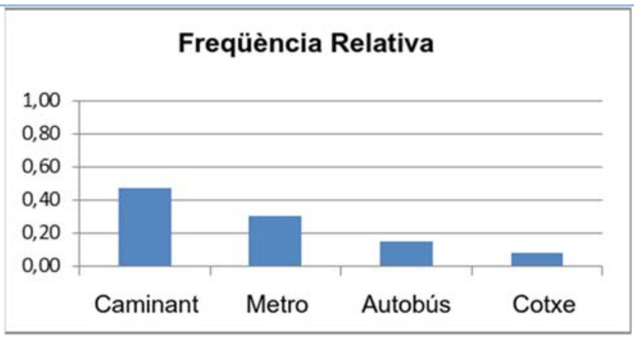
2.1. Diagrama de rectangles o de barres

En un diagrama de rectangles o de barres s'indiquen a l'eix horitzontal tots els possibles resultats de l'experiment i a l'eix vertical la freqüència amb què les dits dades apareixen, per tant podrà ser un diagrama de rectangles de freqüències absolutes o de freqüències relatives segons la freqüència utilitzada.

Activitat resolta

Medi de transport	Freqüència Absoluta	Freqüència relativa
Caminant	47	0,47
Metro	30	0,3
Autobús	15	0,15
Cotxe	8	0,8

- Preguntem a 100 estudiants quin és el mitjà de transport que utilitzen per a anar a escola. Les respostes apareixen a la taula del marge. Dibuixem el diagrama de rectangles.



- Si volem dibuixar el diagrama de barres de freqüències relatives, utilitzem la columna de freqüències relatives per a fer-lo, i s'obté el diagrama denominat "Freqüència *Relativa*". Si comparem el diagrama de barres de freqüències absolutes amb el de relatives s'observa que són iguals excepte en les unitats de l'eix d'ordenades, que en Freqüències Absolutes arriben al total, 100, i en Freqüències Relatives sempre arriben fins a 1.

Activitats proposades

Possibles resultats	Nombre de vegades
cara	56
creu	44

14. Dibuixa el diagrama de rectangles de freqüències absolutes de la taula adjunta. Representa també el diagrama de rectangles de freqüències relatives.

15. Dibuixa el diagrama de rectangles de freqüències absolutes de la taula adjunta. Representa també el diagrama de rectangles de freqüències relatives.

Possibles resultats	Freqüències absolutes
1	15
2	18
3	16
4	17
5	19
6	15

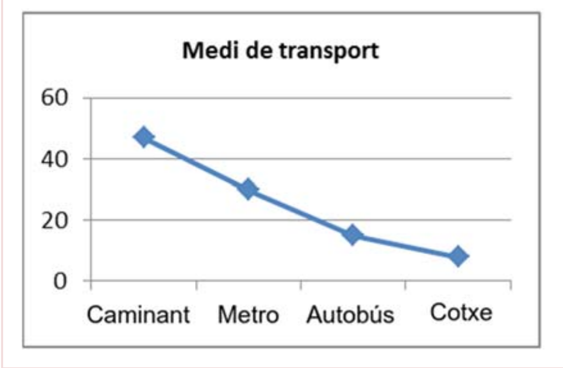
2.2. Diagrama de línies

Igual que en el diagrama de rectangles, s'indica en l'eix horitzontal tots els possibles resultats de l'experiment i en l'eix vertical les freqüències. En compte de dibuixar barres, ara simplement s'uneixen els punts obtinguts amb línies.

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Raquel Caro i Sergio Hernández
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

Activitat resolta

- El diagrama de línies absolutes de l'activitat resolta anterior és el del marge:



Activitats proposades

16. Dibuixa els diagrames de línies de freqüències absolutes i freqüències relatives de l'experiment tirar un dau de l'activitat proposada 15.

17. Dibuixa els diagrames de línies de freqüències absolutes i relatives de l'experiment tirar una moneda de l'activitat 14.

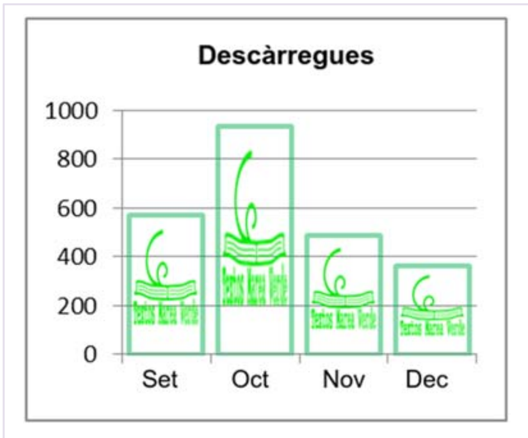
2.3. Pictograma

Als pictogrames es representen les freqüències mitjançant una gràfica de barres emplenades de dibuixos al·lusius.

Activitat resolta

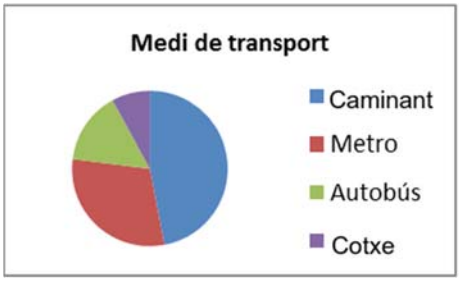
- S'han obtingut dades sobre el nombre de descàrregues que s'han fet dels Textos Marea Verda i s'indiquen en la taula. Es representen amb un pictograma, substituint el rectangle per un dibuix al·lusiu.

Marea verda	Descàrregues
Setembre	572
Octubre	937
Novembre	489
Decembre	361



2.4. Diagrama de sectors

Als diagrames de sectors les freqüències es representen en un cercle que es divideix en sectors d'amplituds proporcionals a les freqüències.



Activitat resolta

- El diagrama de sectors de la taula sobre el mitjà de transport utilitzat és:

Pots observa que amb una simple mirada saps que un poc menys de la meitat dels estudiants van caminant i un poc més de la quarta part van amb metro.

Però realitzar-lo a mà requereix un treball previ perquè has de calcular els angles mitjançant una regla de tres: multipliques pels 360º que mesura un angle complet i divideixes pel nombre total que en aquest cas és 100.

Medi de transport	Freqüència	Angle
Caminant	47	47 · 360º / 100 = 47 · 3,6 = 169,2
Metro	30	30 · 360º / 100 = 108
Autobús	15	15 · 360º / 100 = 54
Cotxe	8	8 · 360º / 100 = 28,8
TOTAL	100	360º

Activitats proposades

18. Fes una enquesta entre els teus companys i companyes de classe sobre el nombre de llibres que lligen al mes. Confecciona una taula i representa les dades en un diagrama de rectangles, un diagrama de línies, un pictograma i un diagrama de sectors.

19. Fes una enquesta entre els teus companys i companyes de classe sobre el nombre d'hores diàries que veuen la televisió. Confecciona una taula i representa les dades en un diagrama de rectangles, un diagrama de línies, un pictograma i un diagrama de sectors.

20. Fes un diagrama de sectors relatiu al nombre de descàrregues de Textos Marea Verda de l'exemple vist en *Pictograma*.

21. Dibuixa un diagrama de sectors de l'activitat proposada 14.

22. Dibuixa un diagrama de sectors de l'activitat proposada 15.

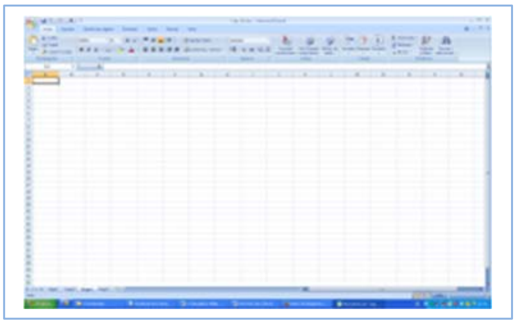
3. L'ORDINADOR I L'ESTADÍSTICA

L'ordinadorpot ajudar molt en els càlculs estadístics. Hi ha molts programes per a això. En particular són fàcils d'usar els fulls de càlcul. Resoldrem un problema utilitzant una d'elles.

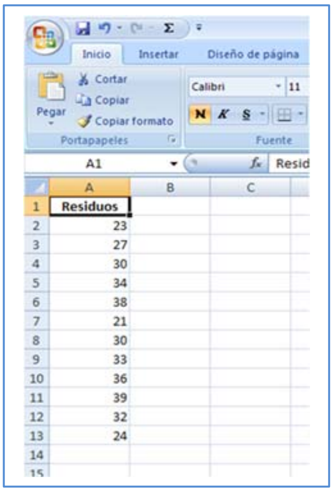
Activitat resolta

- Es coneixen les quantitats de residus sòlids arreplegats en m^3/setmana durant 12 setmanes d'una urbanització:

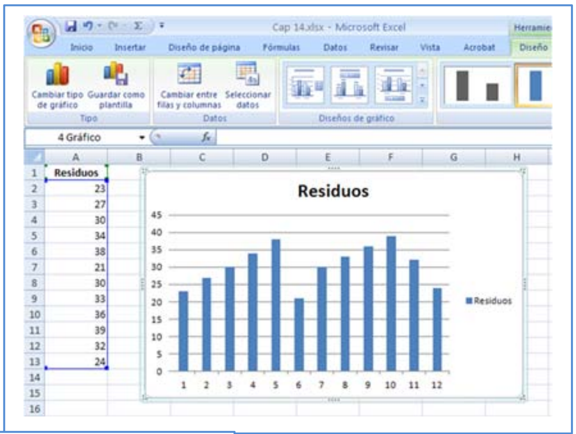
23, 27, 30, 34, 38, 21, 30, 33, 36, 39, 32, 24.



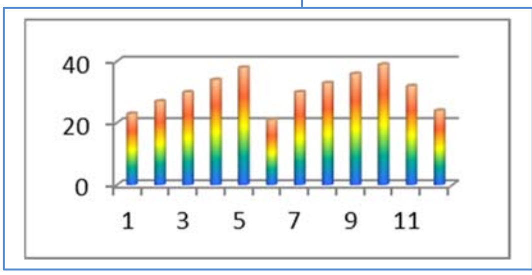
Volem utilitzar l'ordinador per a dibuixar les representacions gràfiques d'aquestes dades.
Obrim un full d'Excel.
Perquè tinga sentit hauríem d'agrupar les dades en una taula. En la casella A1 escrivim "Residus", i en les caselles A2, ..., A13 copiem les dades.



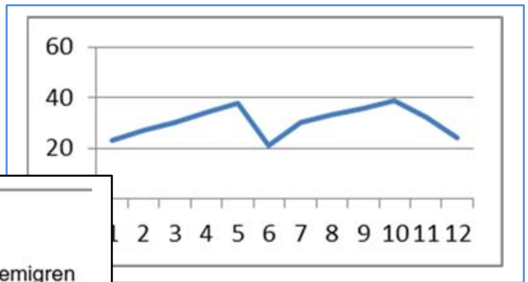
Per a dibuixar les gràfiques s'utilitza en Menú: Inserir.
En el menú *Inserir*, en *Gràfics*, desenrotlla *Columnes*, triem Columna en 2 D, i obtenim el diagrama de **barres** de la figura.
Podíem haver triat "Columnes en 3D", "Cilíndric", "Cònic", "Piràmide", o modificar el color, afegir o llevar rètols...



Veiem un diagrama de barres cilíndric en diversos colors.

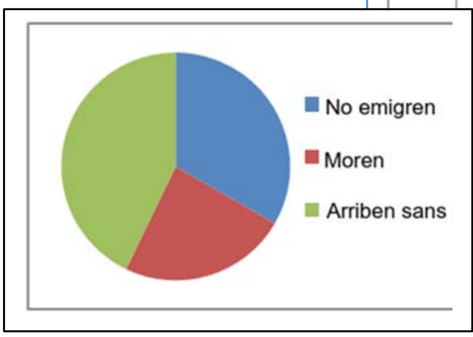


Ara volem representar un **diagrama de línies** amb les mateixes dades. Tornem al menú: Inserir, seleccionem "Línia" i de nou tenim diverses opcions. Seleccionem en el nostre full les dades, des d'A2 fins a A13, i marquem la primera línia 2D, i obtenim:



Per fer un **diagrama** de **sectors** hem pres dades sobre emigrants africans. Seleccionem les dades, i en el menú Inserir simplement triem "Circular" gràfic 2D, i ja obtenim un gràfic de sectors.

	Dades %
No emigren	35
Moren	25
Arriben sans	45



CURIOSITATS. REVISTA

Criptografia

Imagina que vols desxifrar un missatge secret i sospites que ha sigut xifrat canviant les lletres de l'alfabet entre si. Què pots fer per a desxifrar-ho?

Si estudies, o busques en Internet, les freqüències relatives, i tens una taula amb les freqüències de cada lletra prompte sabràs qual de les lletres encriptades correspon a, per exemple, la lletra A. Experimenta amb aquesta idea

Estadística

La paraula "**Estadística**" va començar a usar-se a mitjan del segle XVIII, i el nom ve del seu interés per a tractar els assumptes d'Estat. Es va constituir a poc a poc en Ciència independent a principis del segle XX.

L'accepció vulgar del terme Estadística fa referència a una determinada informació numèrica, és a dir, Estadística com a mètode de descripció quantitativa que utilitza els nombres com a suport objectiu.

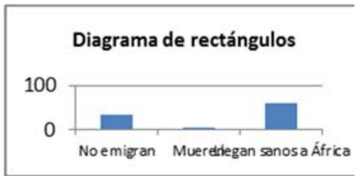
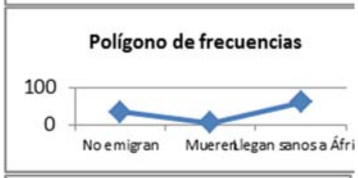
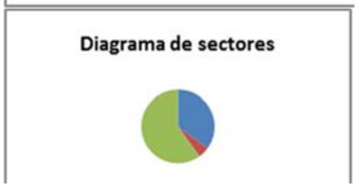
Daus

S'han trobat daus en tombes egípcies anteriors a l'any 2000 a. C. El joc de daus ha sigut molt popular en molts països en el món antic i l'Edat Mitjana.

La ruleta

William Jaggers va arribar a Montecarlo amb uns pocs francs en la butxaca i, durant un mes va anotar els nombres que eixien en cada ruleta, i en quatre dies va guanyar dos milions quatre-cents mil francs. Jaggers va aconseguir trencar la banca a Montecarlo analitzant les freqüències relatives de cada nombre de la ruleta i observant que s'havia desgastat quelcom del mecanisme d'una d'elles, amb la qual cosa tots els valors no tenien la mateixa probabilitat. Va apostar als nombres més probables i va guanyar.

RESUM

		Ejemplos
Fenomen o experiment aleatori	És aquell en què no es pot predir el resultat. Les dades estadístiques són els valors que s'obtenen en un experiment.	Tirar una moneda i saber si eixirà cara o creu
Freqüència absoluta	Nombre de vegades que es repeteix una dada estadística	Si en tirar un dau obtenim 2 vegades el 3, 2 és la freqüència absoluta de 3.
Freqüència relativa	Freqüència absoluta dividida pel nombre d'experiments	Si es realitza un experiment 500 vegades i la freqüència absoluta d'un succés és 107, la freqüència relativa és 107/500.
Succés possible.	Possible resultat d'un experiment aleatori	En l'experiment aleatori tirar un dau el conjunt de possibles resultats, o el conjunt de successos elementals o espai mostral és {1, 2, 3, 4, 5, 6}, per tant, un possible resultat és, per exemple, 3.
Espai mostral	Conjunt de resultats possibles	
Successos elementals	Elements de l'espai mostral	
Diagrama de rectangles	Les dades es representen mitjançant rectangles de la mateixa base i d'altura proporcional a la freqüència. S'indica en l'eix horitzontal la variable i en el vertical les freqüències.	
Diagrama de línies	S'uneixen els punts superiors d'un diagrama de rectangles	
Pictograma	Es substitueix els rectangles per un dibuix representatiu	
Diagrama de sectors	En un cercle es dibuixen sectors d'angles proporcionals a les freqüències	

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Raquel Caro i Sergio Hernández
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

EXERCICIS I PROBLEMES de 1r d'ESO

El azar y la probabilidad

1. Miriam i Lluis han escrit en targetes els 4 noms que més els agraden per a la filla que tindran: Adela, Miriam, Amèlia i Elena. Mesclen bé les targetes i extrauen una a l'atzar. Quina és la probabilitat que la xiqueta es diga Amèlia?

2. Es llança una moneda 750 vegades i s'obté cara 360 vegades. Expressa en una taula les freqüències absolutes, relatives i calcula també les freqüències acumulades absolutes i acumulades relatives de cares i creus en aquest experiment.

3. Es llança un dau 500 vegades i s'obtenen els resultats següents:

Resultat	1	2	3	4	5	6
Nombre de vegades	70	81	92	85		81

a) Quantes vegades ha eixit el 5?

b) Escriu al teu quadern una taula amb les freqüències absolutes

c) Escriu al teu quadern una taula amb les freqüències relatives

4. En una classe s'ha mesurat la grandària de les mans de cada un dels alumnes, i el resultat en centímetres ha sigut el següent:

19, 18, 20, 19, 18, 21, 19, 17, 16, 20,

16, 19, 20, 21, 18, 17, 20, 19, 22, 21,

23, 21, 17, 18, 17, 19, 21, 20, 16, 19

a) Quina grandària ha sigut el valor mínim? I el màxim?

b) Fes una taula de freqüències absolutes i una altra de freqüències relatives.

5. Calcula la freqüència absoluta de les dades d'una enquesta en què s'ha triat entre veure la televisió, t, o llegir un llibre, l:

t, l, t, t, t, l, t, t, l, t, l, t, l, t, t, t, l, l, t, l, t, l, t, l, t.

Gràfics estadístics

6. S'ha preguntat en un poble de la província de Madrid el nombre de germans que tenien i s'ha obtingut la següent taula de freqüències absolutes sobre el nombre de fills de cada família:

Nombre de fills	1	2	3	4	5	6	7	8 o més
Nombre de famílies	46	249	205	106	46	21	15	6

a) Escriu al teu quadern una taula de freqüències relatives.

b) Fes un diagrama de rectangles de freqüències absolutes i un altre de freqüències relatives.

c) Fes un diagrama de línies de freqüències absolutes i un altre de freqüències relatives.

7. Fes una enquesta amb els teus companys i companyes de curs preguntant el nombre de germans i confeccionant una taula sobre el nombre de fills i el nombre de famílies.

a) Fes una taula de freqüències relatives

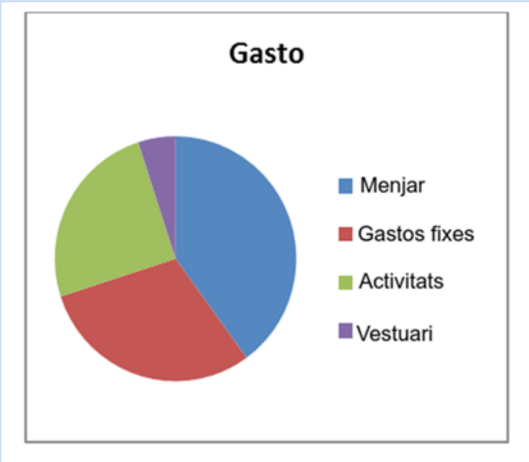
b) Fes un diagrama de rectangles de freqüències relatives

c) Compara la taula de freqüències relatives i el diagrama de rectangles de freqüències relatives que obtingues amb l'obtingut a l'exercici anterior.

8. Un batut de fruites conté 25 % de taronja, 15 % de plàtan; 50 % de poma i, la resta de llet. Representa en un diagrama de sectors la composició del batut.

9. En un campament d'estiu s'han gastat deu mil euros. El gràfic mostra la distribució del gasto:

1. Menjar: 40 %
2. Gastos fixes: 30 %
3. Activitats: 25 %
4. Vestuari: ....



a) Quin percentatge es va gastar en vestuari?

b) Quants euros es van gastar en menjar?

c) Quant mesura l'angle del sector corresponent a activitats?

10. Busca en revistes o periòdics dues gràfiques estadístiques, retalla-les i apega-les al teu quadern. Moltes vegades aquestes gràfiques tenen errors. Observa-les detingudament i comenta les qüestions següents:

a) Està clara la variable a què es referix? I les freqüències?

b) Són correctes les unitats? Poden millorar-se?

c) Comenta les gràfiques.

11. Es fa un estudi sobre el nombre de vídeo jocs de l'alumnat d'una classe. El resultat es representa en la taula següent:

Nombre de video jocs	0	1	2	3	4	5
Nombre d'estudiants	3	4	3	5	9	7

a) Copia la taula al teu quadern i fes una taula de freqüències relatives i de freqüències relatives acumulades.

b) Quin percentatge tenen menys de 3 vídeo jocs?

c) Representa les dades en un diagrama de sectors i en un diagrama de línies.

Ordinador

12. Introdueix les dades de l'enquesta sobre el nombre de fills en l'ordinador i torna a calcular la mitjana.

13. Organitza les dades en una taula calculant les freqüències absolutes de 0, 1, 2, 3 i 4. Introdueix aquesta taula en l'ordinador i fes una representació de barres, un diagrama de línies i un diagrama de sectors.

14. Utilitza l'ordinador per a comprovar els resultats obtinguts en els exercicis anteriors.

15. Realitza una enquesta en la teua classe i porta els resultats a un ordinador per fer un informe. L'enquesta podria ser, per exemple, si li agrada o no una determinada sèrie de televisió, o un programa; o el nombre de dies de la setmana que fan algun esport, el tipus de música que els agrada; o… Pensa sobre què podries preguntar.

Problemes

16. Si escrivim la paraula PROBABILITAT en una tira de paper, retallem les lletres de manera que quede una en cada paper i posem tots els papers en una bossa, quina és la probabilitat d'obtindre una B en extraure un dels papers?, i la d'extraure una A?, I la d'una L?

17. Tira una xinxeta 15 vegades i anota les vegades que cau amb la punta cap amunt i les que no. Construeix després dues taules: una de freqüències absolutes i una altra de freqüències relatives. Representa el resultat en un diagrama de freqüències i en un diagrama de línies

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Raquel Caro i Sergio Hernández
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

AUTOEVALUACIÓ de 1r d'ESO

1. Indica la resposta correcta: Els fenòmens aleatoris són

a) Els que succeeixen rares vegades.

b) Els que succeeixen una vegada de cada 100.

c) Aquells en què no es pot predir el resultat.

d) Els que són equiprobables.

2. Indica quin dels següents successos té una probabilitat 1/2. Observa que en tots els casos únicament pot passar aqueix succés i el contrari.

a) En creuar el carrer ens atropelle un cotxe

b) L' incendi ha sigut intencionat

c) Traure cara en tirar una moneda

d) S'afone la casa demà

3. S'extrau una carta d'una baralla espanyola. La probabilitat que siga una copa és:

a) 1/40 b) 0,1 c) 4/40 d) 10/40

4. Indica qual és la frase que falta en la definició següent:

En un … … … … … … se substitueixen els rectangles per un dibuix representatiu

a) Diagrama de línies b)Diagrama de rectangles c) Pictograma d) Diagrama de sectors

5. Si en una taula de freqüències a un valor li correspon una freqüència relativa de 0,1, en dibuixar un diagrama de sectors l'angle corresponent és de:

a) 36 º b) 30 º c) 3,6 º d) 72 º

6. En un diagrama de rectangles de freqüències absolutes, la suma de les seues altures és igual a:

a) 100 b) 1 c) Total de dades d) Suma de les seues bases

7. La mitjana dels següents dades 3, 4, 6, 7, 5, 8, és:

a) 6 b) 7 c) 4,8 d) 5,5

8. Una determinada freqüència absoluta és 4, i la suma total és 20, el percentatge val:

a) 20 b) 10 c) 25 d) 50

9. La mitjana de 6 nombres és 4. S'afigen dos nombres més però la mitjana continua sent 4. Quant sumen aquests dos nombres?

a) 10 b) 8 c) 12 d) 4

10. D'una baralla espanyola s'extrau a l'atzar una carta. Quina és la probabilitat que no siga d'ors?

a) 3/4 b) 1/4 c) 2/3 d) 1/40

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Raquel Caro i Sergio Hernández
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

1r D'ESO

ÍNDEX