MATEMÀTIQUES

2º d'ESO

www.apuntesmareaverde.org.es

Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

Textos Marea Verde

I.S.B.N. - 13: 978-84-695-9891-7

I.S.B.N. - 10: 84-695-9891-0

Textos Marea Verde

CAPÍTOL 1: RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

2n ESO

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Adela Salvador

Il·lustracions: Banc d'imatges de l'INTEF

Traducció al valencià: Pedro Podadera IES Juan de Garay

Índex

Resum

Què és un problema? Com enfrontar-se a uns problemes nous que, potser, no siguen fàcils? És possible donar normes, conèixer estratègies, per a resoldre millor qualsevol tipus de problema?

Un **problema** matemàtic és una situació en què hi ha un objectiu que aconseguir superant una sèrie d'obstacles, sempre que el subjecte que afronta la situació no conega procediments o algoritmes que li permeten, immediatament, aconseguir l'objectiu.

El que per a una persona és un problema, per a una altra pot ser un simple **exercici**, o molt més que un problema, una **investigació**. La diferència està en els coneixements previs, i si per a resoldre'l ha de fer-se preguntes, afegir hipòtesi a l'enunciat.

Davant d'un autèntic problema moltes vegades no sap un ni tan sols per on començar. Veurem algunes **estratègies de pensament** útils en qualsevol classe de problemes.

Pensem que ensenyar a resoldre problemes és el millor que es pot ensenyar, perquè el món evoluciona ràpidament i el que hui ens pareix imprescindible, demà pot haver quedat obsolet, mentre que resolent problemes es prepara les persones a enfrontar-se al que desconeix i els processos mentals mai envelleixen.

Hi ha estudis que confirmen que l'ensenyança expressa de les etapes, cadències, tècniques i estratègies aconsegueix millors resultats que la mera pràctica espontània.

Autora: Adela Salvador
Traducció al valencià: Pedro Podadera. IES Juan de Garay

1. FASES EN LA RESOLUCIÓ D'UN PROBLEMA

Exemple 1:

1. La piscina del teu poble té forma de rectangle. Els seus costats mesuren 25 m de llarg i 15 m d'ample. L'alcalde desitja rodejar la piscina amb una tanca. El metre de tanca val 12 €. Quant costarà fer la tanca?

Sempre que hages de resoldre un problema és convenient que seguisques els passos següents:

Fase 1: Abans de començar a actuar, intenta entendre bé el problema

Llig amb atenció l'enunciat, i pensa:

- Quins són les dades?
- Què demanen?

Dades: Dimensions de la piscina: 25 per 15 m. Preu del metre de tanca: 12 euros.

Demanen: El cost de la tanca. Per a saber-lo hem de calcular el seu perímetre.

Fase 2: Busca una bona estratègia.

És un problema amb operacions amb nombres naturals, per tant:

➢ Quines operacions aritmètiques he de fer? Caldrà sumar? Caldrà multiplicar? Caldrà restar? Caldrà dividir?

Per a calcular el perímetre hem de sumar 25 + 25 + 15 + 15. Per a conèixer el preu hem de multiplicar la longitud del perímetre pel preu d'un metre de tanca.

Fase 3: Porta avant la teua estratègia

Ara sí, ara resolem el problema:

Si sumem 25 + 25 + 15 + 15 = 80 m tenim el perímetre del rectangle. Multipliquem 12 per 80 i tenim 960 euros que és el que costarà fer la tanca.

Fase 4: Comprova el resultat. Pensa si és raonable. Comprova l'estratègia.

Comprovem totes les operacions. És raonable que el perímetre de la piscina siga de 80 metres? Si fóra de 100 metres ens costaria 1200 euros la tanca, per tant en ser menor, el preu també pareix raonable.

Activitats proposades

1. Inventa problemes semblants!

2. El comptaquilòmetres del pare de Joan marca 74.791 km. Si les revisions són cada 5.000 km, quants quilòmetres li falten per a la pròxima revisió? La mare de Maria observa que el comptaquilòmetres del seu cotxe marca 24.312 km, quants quilòmetres li falten per a la pròxima revisió?

3. L'aula de Maria mesura 8 metres de llarg per 5 d'ample. Es desitja posar un sòcol que val a 8 € el metre. Quants euros costarà posar-lo? Estima quant mesura la teua aula de llarg i quant d'ample, i calcula quant costaria posar aqueix mateix sòcol.

2. ESTRATÈGIES EN LA RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

2.1. Estima el resultat

Moltes vegades nos n'hi ha prou amb estimar un resultat, no amb la solució exacta.

Ja has estimat les dimensions de la teua aula.

A la mare de Maria, per exemple, per a estar tranquil·la li basta saber que li falten més de 600 km per a la pròxima revisió. Mentres que el pare de Joan potser no necessite saber que exactament li falten 75.000 – 74.791 = 209 km per a la pròxima revisió, sinó estimar que li falten menys de 300 km pel que ha de començar a preocupar-se per fer-la.

Per a realitzar bones estimacions és convenient haver practicat molt.

Activitats proposades

Intenta ara tu estimar les solucions d'aquests problemes:

4. Si la teua paga setmanal és de deu euros, i estalvies tota la paga d'un mes Podries comprar-te un ordenador portàtil (que estimes que val uns 900 euros)? I amb totes les pagues d'un any?

5. Pensa en una piscina a què hages anat alguna vegada. Estima els litres d'aigua que pot contindre.

6. Informen que a una manifestació han anat 500.000 persones, com creus que les han comptat?

7. Si tota la població mundial es donara la mà, quina longitud es formaria? (Estima que la població mundial, en aquest moment, és major que set mil milions de persones)

8. Quantes llentilles hi ha en un paquet d'un quilo?

2.2. Experimenta, juga amb el problema

En experimentar amb les dades del problema és fàcil que se t'acudisca que has de fer amb ells.

Activitats proposades

9. Aprèn a fer màgia.

- Pensa un nombre.
- Suma-li 10.
- Dobla el resultat.
- Resta-li 6.
- Calcula la meitat.
- Resta-li el nombre del principi.
- El teu resultat és 7! Com ho he endevinat?

2.3. Fes-ho més fàcil per a començar

10. En quants zeros acaba el producte dels mil primers nombres enters?

Per a enfrontar-te a aquest problema, tin en compte, el primer, les **fases**, intenta entendre bé el problema. Per a obtindre un 0 has multiplicat un 2 per un 5?

Per tant, fes-ho **més fàcil per a començar**. En compte de amb els mil primers nombres enters comença només amb 10. A continuació amb 20, després 100... Manipula els objectes. Pensa, que hi ha més múltiples de dos o múltiples de 5?

11. Quadrat Màgic

Amb els nombres del 20 al 28 completa al teu quadern el quadrat màgic de manera que obtingues la mateixa suma en totes direccions, en horitzontal, en vertical, i inclús a les dos diagonals.

➢ Fes-ho més fàcil, comença amb un quadrat màgic amb els nombres de l'1 al 9. Quant ha de sumar cada fila? Quin ha de ser el nombre de la casella central? La suma d'1 + 2 + … + 9 = …? Quin nombre dividit entre 3 ens dóna: …?

Després fes-te les mateixes preguntes amb els nombres del problema.

Un quadrat més difícil: Distribueix els nombres {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36} de manera que els **productes** de les seues files, columnes i diagonals done sempre el mateix valor. Una ajuda: Posa al centre el 6.

2.4. Fes un diagrama, un esquema...

Moltes vegades fer un diagrama ens resol el problema.

Activitats proposades

12. ***"El dipòsit":*** *D'un* dipòsit ple d'aigua es trau la tercera part del contingut, i encara queden 1.200 litres d'aigua Quina capacitat té el dipòsit?

Si dibuixes el dipòsit, de seguida sabràs la solució.

13. Es calcula que Teano, la dona de Pitàgores va nàixer cap a l'any 519 abans de Crist, quants anys han passat des del seu naixement?

14. Una persona ha de creuar un riu en una barca amb un llop, una cabra i un col llombarda, en la que només pot anar ella i una de les tres coses, tenint en compte que si no està davant, el llop es menja a la cabra i la cabra es menja la col llombarda. Com aconsegueix transportar-los a l'altre costat del riu?

2.5. Mira si el teu problema s'assembla a algun que ja conegues

És possible que el teu problema tinga el mateix aire que un altre que ja has resolt, la qual cosa pot proporcionar-te pistes útils per a resoldre el nou.

Activitats proposades

15. Amb quatre quatres es pot aconseguir 2: 4 : 4 + 4 : 4 = 1+1= 2

Aconsegueix utilitzant quatre quatres 1, 3, 4, 7.

16. Cada entrada costava 4 € i jo li vaig entregar 10 €. No em va preguntar res, em va donar dues entrades i em va tornar 2 €. Com va poder saber el taquiller que jo volia dues entrades de cine?

17. Dues persones es troben al desert on s'han perdut des de fa dies. Per a millor sobreviure, decideixen compartir els seus pans, un en té tres i l'altre cinc. En aqueix moment apareix una tercera persona que no té menjar. Comparteixen així els seus huit pans entre els tres. Finalment els rescaten i, en agraïment, quan arriben a la ciutat, la tercera persona els invita a sa casa i els recompensa donant tres monedes al primer i cinc monedes al segon. La seua filla que ha presenciat l'escena li indica al pare que el repartiment no és just. Per què? Com s'han de repartir les 8 monedes?

2.6. Tria una bona notació

Als problemes de matemàtiques és molt important triar una bona notació. Decidir, per exemple, que anomenem x al que no coneixem, als problemes d'equacions.

Activitats proposades

18. Busca un nombre que sumat amb el seu següent done com resultat 11.

Per a resoldre-ho, segueix els passos següents:

Pas 1: Abans de començar a actuar, intenta entendre bé el problema

Llig amb molt atenció l'enunciat, i pregunta't:

Què et demanen? Quines dades tens?

Ens demanen un nombre. La **incògnita** és aqueix nombre. Anomena a aqueix nombre x. El seu següent, serà $x + 1$. Ens diuen que la suma d'ambdós és 11.

Pas 2: Busca una bona estratègia. Triem una bona notació

Anomenem x al nombre que busquem: $x + (x + 1) = 11$.

Pas 3: Porta avant la teua estratègia

Juguem amb els nombres i observem que 5 + 6 = 11.

Pas 4: Comprova el resultat. Pensa si és raonable.

En efecte, el següent a 5 és 6, i 5 + 6 = 11.

Autora: Adela Salvador
Traducció al valencià: Pedro Podadera. IES Juan de Garay

3. EMOCIONS I RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

3.1. Eureka!

Ja saps que **Arquimedes** estava en la banyera quan va exclamar **Eureka**! perquè havia descobert una important propietat dels cossos submergits. Una cosa pareguda ocorre moltes vegades. Tu mateix, si treballes en un problema, després el teu inconscient contínua treballant i, de sobte, sense esperar-ho Eureka! Tens la solució. Aquesta situació, aquesta emoció positiva i gratificant, també rep el nom **d'Això mateix**!

A la Història de la Ciència es coneixen moltes d'aquestes situacions. Busca alguna i reflexiona sobre com et sents en resoldre un problema, que en un primer moment, pareixia impossible.

3.2. Bloquejos

Però també poden aparèixer emocions negatives, a les que anomenarem **bloquejos**. Moltes vegades, en intentar resoldre un problema, aquest ens pareix impossible, ens desanimem, entren ganes de deixar-lo tot. Açò és un bloqueig. Però això li passa a tot el món. Cal traure forces i continuar. Buscar la causa del bloqueig.

Vegem alguns problemes senzills que resulten complicats perquè en ells sol produir-se un bloqueig. Intenta primer resoldre'ls i després, si no t'ixen, llig l'ajuda.

19. Sense alçar el llapis uneix amb 4 traços rectes aquests nou punts.

o o o

o o o

o o o

Dibuixa al teu quadern nou punts com els de la figura i intenta unir-los, amb 4 traços sense alçar el llapis.

Recorda, el primer és comprendre l'enunciat. Prova a fer-lo. Ho has aconseguit? Magnífic. No l'aconsegueixes, intenta-ho un poc més.

Bloqueig: Si no ho aconsegueixes és perquè estàs pressuposant alguna cosa que no s'ha dit i és que no pots eixir del recinte limitat pels punts. Fes traços més llargs i ho aconseguiràs de seguida.

20. Amb 3 furgadents, tots iguals, pots construir un triangle equilàter. Amb 5 furgadents pots fer 2 triangles equilàters, com podem construir quatre triangles equilàters iguals amb sis furgadents amb la condició que el costat de cada triangle siga la longitud del furgadents?

Experimenta, juga amb el problema. Ho has aconseguit! Llavors no has tingut un bloqueig.

Bloqueig: Ningú ha dit que no pogueres eixir del pla. Ací està el bloqueig. L'aconsegueixes amb un tetraedre regular.

4. JOCS I PROBLEMES

T'agrada jugar? Per a ser un bon jugador en jocs d'estratègia pots utilitzar les tècniques que has aprés amb la resolució de problemes.

Fases:

1. El primer, naturalment, comprendre bé les regles del joc, que és semblant a comprendre l'enunciat.
2. La segona cosa, jugar, fins a trobar una estratègia guanyadora.
3. Després jugar i veure si la teua estratègia és realment bona.
4. Finalment, generalitzar, intentar millorar l'estratègia.

Activitats proposades

Utilitza tot el que has aprés.

21. Prepara unes quantes monedes d'un cèntim a la mà (o boletes de paper, o fitxes...). Posa la mateixa quantitat en cada mà, almenys 10. Passa 6 monedes de la mà dreta a l'esquerra. Lleva de la mà esquerra tantes monedes com et queden a la dreta. Què observes? Jo sóc mag i puc endevinar quantes monedes et queden a la mà esquerra! Són 12? Com funciona el truc? Prova a passar 4 o 5 objectes en compte de 6, com funciona ara?

22. Un altre joc: És un joc de **calculadora** i pot ser un joc cooperatiu; un joc en què es posen en comú les diferents estratègies i es discuteix sobre el millor procediment, el més senzill o el més original. Consta de quatre fitxes com les de la figura, on s'indiquen les tecles que està permès polsar, i el resultat, en roig, a què cal arribar.

Fitxa 1	Fitxa 2	Fitxa 3	Fitxa 4
3 6	**5 7**	**10 7**	**2 7**
+ –	**x /**	**+ –**	**+ –**
/ =	**+ =**	**x =**	**x =**
33	**147**	**123**	**95**

- ➢ El joc consisteix, en primer lloc, a obtindre el resultat a la calculadora.
- ➢ Has d'anotar tots els mètodes trobats. Pensa i anota al teu quadern quin és el procediment que t'ha resultat més eficaç.
- ➢ Escriu, utilitzant parèntesi, les expressions que ha utilitzat la calculadora.
- ➢ Modifica el joc confeccionant noves fitxes, modificant aquestes amb altres tecles i amb altres resultats.

CURIOSITATS. REVISTA

Un enigma

Quatre parets, sense portes

Amb sis talls les faràs

I tin a més en compte

Que el més senzill de cinc és.

Un joc: EL NIM

És un joc per a dos jugadors: de cada fila, per torn, es poden prendre una, dues o tota la fila. Perd qui ha de prendre l'última fitxa.

O O

O O O

O O O O

L'ós

Un caçador conta a un grup d'amics:

Vaig caminar 2 km cap al sud, després 2 km a l'est, i finalment 2 km al nord. Em vaig trobar al lloc de partida. I allí vaig caçar un ós. De quin color era l'ós?

Amic 1: Naturalment, era blanc.

Amic 2: Fals! Ací no hi ha óssos!

Analitza on estava el caçador

Solució: El primer amic opina que el caçador estava al Pol Nord. El segon amic que estava en un punt d'un meridià de l'hemisferi sud, tal que al caminar 2 km aplegue a un altre meridià de circumferència 2 km. Pero hi ha més. Moltes més solucions posibles. Troba-les

El nombre de files i de fitxes, (monedes, boletes de paper, furgadents...) pot modificar-se. És important buscar l'estratègia guanyadora.

Solució: El tetràedre

RESUM

Problema	És una situació en què hi ha un objectiu a aconseguir superant una sèrie d'obstacles, sempre que el subjecte que afronta la situació no conega procediments o algoritmes que li permeten aconseguir l'objectiu.
Fases en la resolució d'un problema	Fase 1: Abans de començar a actuar, intenta entendre bé el problema. Fase 2: Busca una bona estratègia. Fase 3: Porta avant la teua estratègia. Fase 4: Comprova el resultat. Pensa si és raonable. Comprova l'estratègia.
Algunes estratègies	➢ Estima el resultat. ➢ Experimenta, juga amb el problema. ➢ Fes-lo més fàcil per a començar. ➢ Fes un diagrama, un esquema... ➢ Mira si el teu problema s'assembla a algun que ja conegues. ➢ Tria una bona notació.
Emocions i resolució de problemes	Emoció positiva: Idea feliç. Això mateix! Eureka! Emoció negativa: Bloqueig
Jocs d'estratègia	Per a ser un bon jugador en jocs d'estratègia pots utilitzar les tècniques que has aprés amb la resolució de problemes.

EXERCICIS I PROBLEMES de 2n d'ESO

1. **"L'hotel dels embolics":** Un hotel té infinites portes totes tancades, un client graciós s'alça a la nit i les obri totes. Un segon client tanca les parells. Un tercer client modifica les que són múltiple de tres, si està oberta la tanca i si està tancada l'obri. El quart el mateix de quatre en quatre i així successivament. Com estan les portes al matí?

Ajuda i solució: Vés anotant les portes que es van quedant obertes fins a comprovar que són: 1, 4, 9, 16... Com són aqueixos nombres? Quants divisors tenen?

2. El radi de la Terra és de 6.240 km aproximadament. Rodegem la terra amb un cable. Quant hauríem d'augmentar la longitud del cable perquè se separara per l'equador una distància de dos metres? Menys de 15 m? Més de 15 m i menys de 15 km? Més de 15 km?

3. **La invitació:** Joan invita Marta i a Elena a berenar. Prepara una llimonada i es disposa a servir-la. Marta la vol amb poca llima i Elena amb molta. Joan ha posat el suc de llima i l'aigua en gerres iguals i amb la mateixa quantitat. Per a complaure a les seues invitades pren un got de la gerra amb llima i el tira en la de l'aigua, i a continuació pren un got de la mateixa grandària de la mescla i el tira en la de la llima. Hi haurà més llima en la gerra de l'aigua o aigua en la gerra de la llima?

Ajuda: Per a començar fes-ho més fàcil. Pensa en dues bosses iguals una amb boles negres i l'altra amb boles roges.

4. **"Els cadells"**: Un xic té una cistella de cadells i li regala a una amiga la meitat més mig cadell, del que li queda li dóna a un amic la meitat més mig, a la seua cosina la meitat que li queda més mig, i al seu cosí la meitat que li queda més mig i li queda un cadell. Quants cadells tenia la cistella?

Ajuda: Fes un esquema

5. Volem posar un rivet al voltant de la vora de la teua taula de treball. El metre de rivet val a un euro. Estima les dimensions de la teua taula. Quant costaria posar-lo?

6. Un amic diu a un altre:

   El producte de les edats de les meues tres filles és 36, i la suma és el nombre de la casa en què vius. Endevina quines edats tenen?

   No, em falta una dada.

   Tens tota la raó, la major toca el piano.

   Quina edat tenen les filles?

Autora: Adela Salvador
Traducció al valencià: Pedro Podadera. IES Juan de Garay

7. En una trama de quatre per quatre, quin és el nombre més gran de costats que pot tindre un polígon amb vèrtexs en punts de la trama? Generalitza a altres trames.

8. Dissenya figures de cartolina que mitjançant un sol tall podem dividir en quatre trossos iguals.

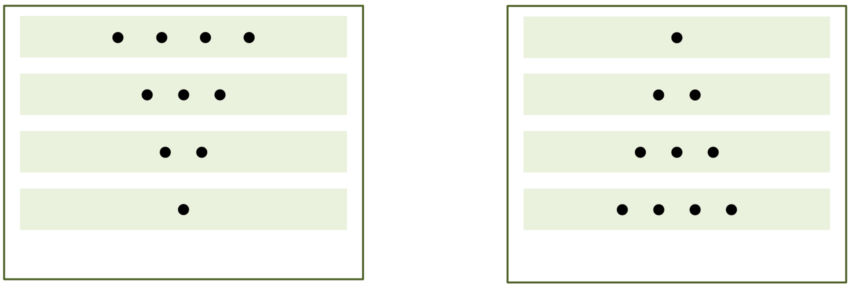
F. J. Martínez

9. Com repartir equitativament 8 litres entre dos utilitzant únicament tres gerres de 8, 5 i 3 litres.

10. Estima quant mesura la teua habitació de llarg, d'alt i d'ample. Si vols pintar-la i el pot de pintura costa 5,2 €, i diu en les instruccions que pots pintar amb ell, 10 m^2, quant costarà pintar-la?

11. Monedes Ordenades

Mou només tres monedes per a aconseguir que el triangle quede d'aquesta manera:



12. A la base de Plutó arriben embarcaments de 6 llandes de 100 boles d'un gram. Un dia arriba el missatge "Urgent*. Una llanda s'ha omplit amb boles defectuoses, cada una amb un excés de pes d'un mil·ligram. Identifiquen-la*" Com fer-lo amb una sola pesada? Un mes més tard arriba un altre missatge: "*Alguna de les sis llandes, potser totes elles, poden estar plenes amb boles defectuoses, amb un sobrepés d'un mil·ligram. Identifiquen i destruïsquen totes les boles defectuoses*" Pots fer-ho amb una pesada no més?

13. Una estudiant té l'insòlit nom palindròmico d'Inés Lil Seni. El seu nóvio, estudiant de matemàtiques, avorrit un matí per una lliçó un poc rotllo, s'entreté intentant compondre un criptograma numèric. Escriu el nom en forma de multiplicació:

INES

X LIL

SENI

Serà possible reemplaçar cada lletra per un dels deu dígits i obtindre una multiplicació correcta? El jove descobreix amb sorpresa que sí, i també que la solució és única. (Cap dels dos nombres de quatre xifres comença per zero).

14. La piscina del poliesportiu municipal s'ha hagut de buidar per un problema de contaminació. Aquest procés s'ha realitzat en tres fases per a poder utilitzar l'aigua en la neteja de les instal·lacions, primer s'ha tret la tercera part, després la meitat de la resta i encara queden 150 m^3 d'aigua. Quina capacitat té la piscina?

Autora: Adela Salvador
Traducció al valencià: Pedro Podadera. IES Juan de Garay

PER AL PROFESSORAT

En l'ensenyança de les matemàtiques és convenient, com afirmava *Hans Freudenthal*, "*fer matemàtiques a la classe de matemàtiques*" i una forma d'aconseguir-ho, és organitzar classes de resolució de problemes o proposar xicotetes investigacions.

En investigar als bons resolutors de problemes s'han obtingut dues conclusions: La primera és que **la capacitat per a resoldre problemes millora amb la pràctica**, la segona és que l'anàlisi dels mètodes matemàtics, així com el de les distintes estratègies que intervenen en la resolució de problemes també millora la dita capacitat. Hi ha estudis que confirmen que l'ensenyança expressa de les etapes, cadències, tècniques i estratègies aconsegueix millors resultats que la mera pràctica espontània. És precís resoldre molts problemes. Aqueixa ajuda només pot ser eficaç si s'exerceix sobre problemes concrets i no com prerequisit teòric.

Treballar en la resolució de problemes és el millor que es pot proporcionar a una persona, ja que ajuda a equipar-la per a la seua activitat integral, no sols pel que fa a les seues capacitats matemàtiques. El món evoluciona ràpidament, i tenim l'obligació de preparar persones que en el futur van a enfrontar-se a situacions desconegudes. Els processos mentals no es fan obsolets.

Un **problema matemàtic** és una situació en què hi ha un objectiu que aconseguir superant una sèrie d'obstacles, sempre que el subjecte que afronta la situació no conega procediments o algoritmes que li permeten aconseguir l'objectiu.

Un problema té distinta qualificació en funció de la persona que se'l plantege, i és evident que el que són problemes per a uns, no en són per a altres. Així quan una persona sap els rudiments del llenguatge algebraic, un problema que puga resoldre's plantejant una equació de primer o segon grau o un sistema d'equacions, no és un problema, sinó un **exercici** a què se li aplica una regla fixa que és la notació algebraica i els algoritmes per a resoldre les equacions que resulten. També és distint un problema d'una **investigació**, que en ser un procés més obert, és la persona qui es planteja l'objectiu que vol aconseguir. Així, quan un estudiant en resoldre un problema es fa preguntes, intentant generalitzar el resultat o modificar les condicions inicials, està realitzant una investigació. Podem per tant distingir entre exercici, problema i investigació.

L'heurística, terme introduït per **George *Polya*** al seu llibre *Com plantejar i resoldre problemes,* és el " art de resoldre problemes "i tracta de desvelar el conjunt d'actituds, processos generals, estratègies i pautes que afavoreixen la resolució de problemes en general i en particular dels problemes matemàtics. Deia *Polya*: "*El professor de matemàtiques no hauria d'acontentar-se de dispensar el saber, sinó que també hauria d'intentar desenrotllar en els estudiants la capacitat d'utilitzar aqueix saber; hauria d'insistir en el saber – fer, en les actituds adequades, en els hàbits intel·lectuals desitjables*".

Polya considera la resolució de problemes com un procés lineal en què estableix quatre fases:

1. Comprendre el problema,
2. Concebre un pla,
3. Executar un pla, i
4. Examinar la solució obtinguda.

En cada una d'aquestes fases hi ha una sèrie de pautes o suggeriments heurístics que pretenen fixar l'atenció sobre aspectes concrets del problema, per a suggerir idees que permeten avançar en la seua resolució.

Autora: Adela Salvador
Traducció al valencià: Pedro Podadera. IES Juan de Garay

A Espanya en 1991 es publica *Per a pensar millor* de *Miguel de Guzmán* en el que es destaca la identificació dels distints tipus de bloquejos, la importància de l'activitat subconscient al procés de resolució de problemes, el desenrotllament de la creativitat, i la importància de realitzar un protocol en el procés de resolució. Aconsellava *"ensenyar matemàtiques basant-se fonamentalment en l'ocupació activa amb problemes al voltant dels continguts que es pretén impartir".* En *Com parlar, demostrar i resoldre en Matemàtiques* (2003) reflexiona sobre l'organització d'una classe de problemes i les tècniques que la faciliten, com el remolí d'idees o el treball en grup.

Una forma aconsellable per a les classes de resolució de problemes és organitzar el **treball en grups**. Hi ha moltes formes d'organitzar el treball en grup, per la qual cosa abans de proposar qualsevol activitat de grup hem d'assegurar-nos que l'alumnat coneix algunes tècniques bàsiques. Si no és així gran part de la rendibilitat esperada es perd davant d'un mal repartiment de responsabilitats, una deficient organització, una incorrecta administració del temps, etc.

Els grups, ni massa grans, ni massa xicotets, podrien estar formats per unes sis o set persones. En un grup ha d'haver-hi una persona responsable i una persona secretària:

- La **persona responsable** té dues funcions, **dinamitzadora** per a mantindre l'interès del grup i cuidar que ningú es quede sense participar i **organitzadora** preocupant-se de planificar els temps i les tasques assignades a cada fase del treball.
- La persona **secretària** s'ocupa d'anotar totes les idees que vagen sorgint i sistematitzar les tasques que es vagen desenrotllant i és portaveu**,** encarregant-se d'exposar les conclusions del seu equip a tota la classe.

Cada una de les funcions descrites no han d'associar-se sempre a una mateixa persona sinó que és recomanable un sistema d'alternança.

Paper del professorat: En una classe de resolució de problemes, la nostra labor és dinamitzar als distints equips, suplint les deficiències i ajudant en els primers moments a les persones responsable i secretària en les seues funcions.

Quan un professor o una professora planteja un treball en grup per a resoldre problemes deu:

- ➢ Triar problemes amb un enunciat atractiu i motivador.
- ➢ Graduar de manera convenient la dificultat del problema.
- ➢ Analitzar detingudament els bloquejos que puguen sorgir en la resolució del problema i utilitzar els mètodes adequats per a superar-los.
- ➢ Percebre les dificultats que el treball en grup planteja com a tal i comptar amb recursos per a actuar enfront dels obstacles que pertorben el seu bon funcionament.
- ➢ Procurar establir un ambient adequat dins de l'aula que afavorisca actituds positives cap a l'aprenentatge.

Però l'aprenentatge de la resolució de problemes és un procés a llarg termini. No és un objectiu operatiu avaluable mitjançant un examen.

Deia Giner dels Rius: El mestre és qui exigeix del deixeble que pense i reflexione per si, i en la mesura de les seues forces, que investigue, qüestione, intente, dubte, desplegue les ales del seu esperit. O Cossio: Doneu l'ocasió a l'estudiant de pensar per ell mateix i ser el creador de la seua pròpia instrucció.
Per a saber més entra en: http://innovacioneducativa.upm.es/pensamientomatematico/node/91

Autora: Adela Salvador
Traducció al valencià: Pedro Podadera. IES Juan de Garay

CAPÍTOL 2: NOMBRES

www.apuntesmareaverde.org.es

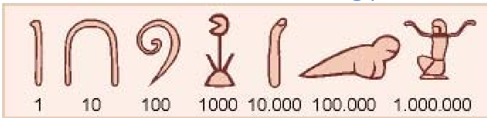
Autors: Eduardo Cuchillo, Ana Lorente i Fernanda Ramos

Revisora: Nieves Zuasti

Il·lustracions: Banc d'imatges de l'INTEF

Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

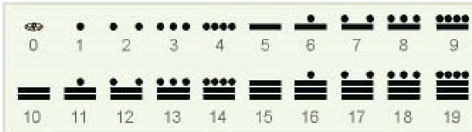
Sistema de numeració egipci



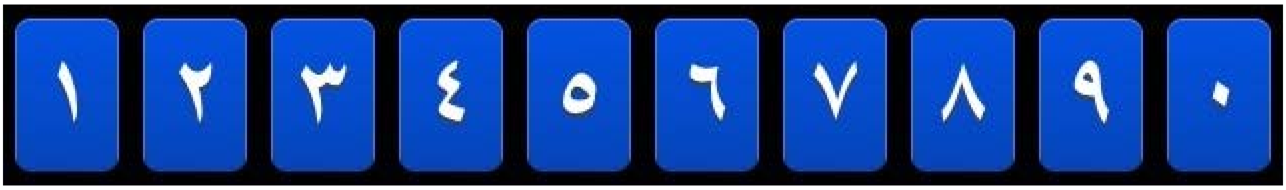
Il·lustració: A. Ortega

Índex

Il·lustració: A. Ortega



Sistema de numeració maia



Nombres aràbics

Resum

Ja coneixes molts tipus de nombres, els nombres naturals, que serveixen per a comptar, els nombres decimals, que ens serveixen, entre moltes altres coses, per a usar els cèntims, les fraccions… També coneixes, del curs passat, els nombres enters, els positius, els negatius i el zero. En la història de la humanitat apareixen molt abans les fraccions, a Egipte i en Babilònia, que els nombres negatius. Als balanços comptables, per exemple, es posava en roig els deutes (però no s'usava el signe menys). Al Renaixement Tartaglia i Cardano ja van obtindre solucions negatives d'algunes equacions (de tercer grau) però fins al segle XVII no es va generalitzar el seu ús. Observa que ja s'usaven expressions decimals i fraccions positives i no obstant això es va tardar molt a utilitzar els nombres negatius.

En aquest capítol revisarem com es treballa amb nombres positius i negatius, fraccions i decimals, a sumar-los, restar-los, multiplicar-los, dividir-los, a calcular si valor absolut, a representar-los en una recta i a comparar-los.

Autors: Eduardo Cuchillo, Ana Lorente i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

1. NOMBRES

Recorda que:

El conjunt dels nombres naturals es representa per la lletra $\mathbb{N}$ i està format pels nombres 1, 2, 3, 4,...

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$$

És un conjunt infinit, perquè no té un últim element, encara que si té un primer element, l'1. És un conjunt ben ordenat perquè donats dos nombres naturals sempre sabem si u és menor que l'altre.

1.1. El sistema de numeració

El sistema de numeració decimal

En el **sistema de numeració decimal** el valor d'una xifra en un nombre és deu vegades major que el de la xifra situada a la seua dreta i deu vegades menor que el valor de la situada a la seua esquerra. Per això es diu que és un **sistema posicional**: el valor d'una xifra en un nombre depèn del lloc que ocupe aqueixa xifra.

Altres sistemes de numeració decimal usats actualment són els que s'usen en països àrabs com:

Europeu	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Aràbic-Índic	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
Aràbic-Índic Oriental (Persa i Urdu)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹

Activitats resoltes

- Al nombre 9835067 tenim:

  - La xifra de les unitats: el $7 = 7 \cdot 10^0$

  -Després la xifra de les desenes: el 3, el valor del qual al número és 10 vegades més que l'anterior, per tant el seu valor serà: $6 \cdot 10 = 60$

  -Al tercer lloc, les centenes: el 0, el valor del qual serà el que resulte de multiplicar la xifra situada en tercer lloc per 100 (o per 10^2): $0 \cdot 10^2 = 0$

  -En quart lloc les unitats de miler: 2, el valor de les quals obtenim multiplicant per 1000 (o per 10^3) la xifra situada en aqueix lloc: $5 \cdot 10^3 = 5000$

  -Després, les desenes de miler: 5 el valor de les quals serà: $3 \cdot 10^4 = 30000$

  -En sisè lloc, les centenes de miler: 6, el valor de les quals s'obté multiplicant la xifra per 10^5: $8 \cdot 10^5 = 800000$

  -I, finalment, les unitats de milió: 4, el valor de les quals obtenim multiplicant-les per 10^6: $9 \cdot 10^6 = 9000000$

Amb açò observem que el nombre 4652031 es pot escriure utilitzant potències de 10 de la forma:

$$9835067 = 9 \cdot 10^6 + 8 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

1	一一
2	二二
3	三三
4	四四
5	五五
6	六六
7	七七
8	八八
9	九九
10	十十
0	零 / 〇

Nombres xinesos

Autors: Eduardo Cuchillo, Ana Lorente i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Activitats proposades

1. Escriu mitjançant potències de 10 els nombres següents:

a) 8216 b) 591274 c) 918273 d) 90003040506

2. Quin lloc ocupa la xifra 7 als següents nombres? En quin dels nombres té major valor? I menor?

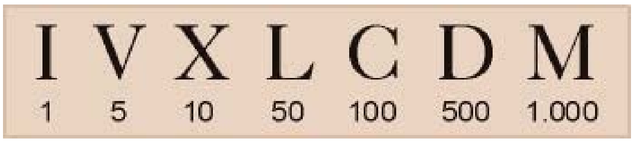
a) 708544 b) 67339001 c) 5092175 d) 9847

3. Raona per què, al nombre natural 77777 amb xifres repetides, aquestes no tenen el mateix valor.

Nombres romans

Un altre sistema de numeració que encara s'usa és el dels **nombres romans**. Et recordes de les seues equivalències?

I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000.



Nombres romans

Rellotge amb nombres romans

Exemple:

- El nombre MDL equival al sistema decimal al 1550. Si ara li afegim un V, és a dir: MDLV, el nombre és el 1555, però les xifres M, D, i L continuen tenint el mateix valor en ambdós nombres.

Activitats proposades

4. Escriu mitjançant potències de 10 els següents nombres romans en la nostra numeració:

a) MDCVX b) MMMCCXXXIIII c) MMCDXXVI d) MMCCCXLIII

Altres sistemes de numeració

Un dels primers sistemes de numeració que es va utilitzar va ser el de **base 12** fa ja més de 5000 anys. Encara s'usa quan comptem objectes a dotzenes o amb alguns mesuraments del temps.

El sistema de **base 2** o sistema binari també és molt utilitzat hui en dia, sobretot als ordinadors i calculadores a causa de la seua simplicitat, ja que per a escriure nombres en aquest sistema només es necessiten dues xifres distintes, el 0 i l'1

Xifres del sistema binari

Activitats proposades

5. Escriu els nombres de l'1 al 10 en el sistema binari.

1.2. Els nombres triangulars, quadrats, pentagonals…

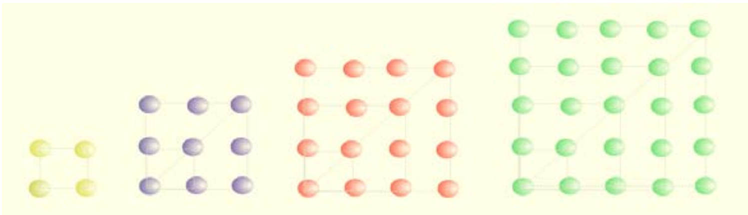
Els grecs, i en particular els pitagòrics solien representar els nombres mitjançant pedretes, càlculs, sobre l'arena i els ordenaven formant dibuixos geomètrics poligonals.

Si els ordenes formant triangles obtens els nombres triangulars:

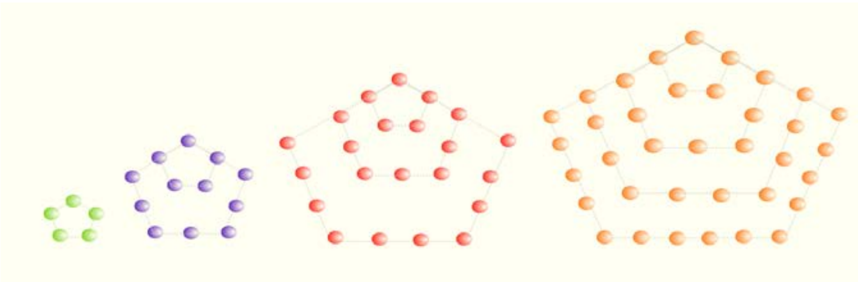
Observa que els nombres triangulars són: 1, 3, 6, 10, 15….

- Afig 3 nombres triangulars més.

Si els ordenem formant quadrats obtens els quadrats perfectes que ja coneixes: 1, 4, 9, 16, 25…



Es poden ordenar formant pentàgons:



Els nombres pentagonals són: 1, 5, 12, 22, 35…

I així amb altres polígons.

Aquests nombres es van usar en *l'Escola Pitagòrica* associant al nombre una imatge geomètrica.

Activitats proposades

6. Anomenem C_n al nombre quadrat i T_n al nombre triangular que ocupen el lloc n. Ja saps que C_n és igual a n^2: $C_n = n^2$ Comprova que $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ és una expressió per als nombres triangulars.

7. Observa els nombres quadrats perfectes. Mira en la figura i comprova que pots formar-los com a suma de dos nombres triangulars: 4 = 3 + 1, 9 = 6 + 3… Expressa-ho de forma general.

8. Escriu tres nombres triangulars, tres quadrats i tres pentagonals més dels ja indicats.

9. Dibuixa tres nombres hexagonals.

1.3. Nombres enters

Hi ha ocasions de la vida quotidiana en què és necessari usar nombres diferents dels naturals, nombres positius i negatius. Els nombres naturals no resulten ser suficients.

Recorda que:

Els nombres **enters** són una ampliació dels nombres naturals:

- Els nombres **enters positius** són els nombres naturals i s'escriuen precedits del signe +: +1, +2, +3, +4, +5…
- Els enters negatius van precedits del signe –: –1, –2, –3….
- El zero és l'únic nombre enter que no és ni negatiu ni positiu i no porta signe.

El conjunt dels nombres enters es representa per $\mathbf{Z}$.

$$\mathbf{Z} = (0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, +4, -4, \dots)$$

En escriure un nombre enter positiu no se sol escriure el seu signe: + 2 = 2; +6 = 6.

Exemple:

- Joan està treballant i el primer mes guanya 1000 euros però gasta 500 euros, per tant Joan *té en total* 1000 – 500 = 500 €. No obstant això, si el primer mes guanya 1000 però els seus gastos són majors (lloguer del pis, impostos…) i ascendeixen a 2000 euros, es diu que va *perdre en total* 2000 – 1000 = 1000 euros. Unes vegades hi ha un *guany* net, i altres una *pèrdua*, depenent de si els guanys van ser majors que els gastos o viceversa. Aquestes dues possibilitats es poden expressar utilitzant el signe dels nombres negatius (o positius): al primer cas va guanyar en total 1000 – 500 = +500 euros, i al segon va guanyar en total 1000–2000 = – 1000. Euros. Així, s'entén que una pèrdua és un *guany negatiu*.

Els nombres negatius apareixen en considerar:

- El capital d'una empresa que hi ha fallit.
- Temperatures per davall de zero graus.
- Dates abans de Crist.
- Profunditat d'un submarí davall el nivell del mar.
- Es diu "*les sis menys cinc*" o les "*huit menys vint*".
-

Valor absolut d'un nombre

La distància que separa un nombre del zero es defineix com a **valor absolut** del nombre.

- És sempre un nombre positiu (o zero).
- S'escriu entre dues barres **| |**.

$$|+6| = 6$$
$$|-3| = 3$$

Exemple:

- El valor absolut de +4, és 4, i s'escriu: |+4| = 4;
- El valor absolut de –9,3 és 9,3 i per tant |–9,3| = 9,3, de la mateixa manera:
- |+23,5| = 23,5 i |–5/6| = 5/6.

Activitats proposades

10. Escriu el nombre que millor representa la situació que es planteja:
a) Un submarí navega a 345 m de profunditat
b) Hui el termòmetre marcava 15ºC
c) El cotxe estava en el soterrani 5.
d) Arquimedes va morir l'any 212 abans de Crist

11. Expressa aquests enunciats amb un nombre positiu, negatiu o zero:
a) M'he quedat sense diners.
b) Miguel va nàixer l'any dos mil.
c) El garatge està al tercer soterrani.

12. Indica el significat dels nombres –4, 0 i +7 en cada una de les situacions següents:
a) En un garatge b) En una temperatura c) En un compte

13. Calcula el valor absolut dels nombres següents:
a) $|+43|$ b) $|-7{,}2|$ c) $|\ 0\ |$ d) $|-81{,}7|$

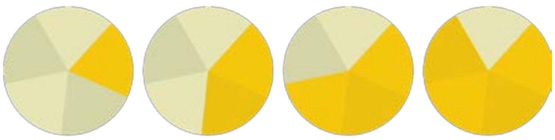
1.4. Fraccions

Els objectes matemàtics anomenats **fraccions** permeten que les persones s'entenguen en parlar de trossos, parts o porcions, tant si s'ha trossejat en porcions idèntiques com si són de diferents grandàries.

Una fracció és el quocient de dos nombres enters.

Comencem amb un exemple.

- Si dividim un bescuit en 5 parts iguals, cada porció és una de les cinc parts en què hem dividit el bescuit.



Escriurem $\frac{1}{5}$ per a representar cada tros, és a dir, cada una de les cinc cinquenes parts del bescuit. Si col·loquem en una safata tres d'aqueixes porcions, sobre la safata hi haurà tres cinquenes parts de bescuit: $\frac{3}{5}$

El bescuit complet pot representar-se de la manera següent $\frac{5}{5}=1$ ja que està format per cinc cinquenes parts.

En general, una ***fracció*** és una expressió de la forma $\frac{m}{n}$ on tant *m* com *n* són nombres naturals. Per a referir-nos a ella direm *"m partit de n"*; *m* rep el nom de ***numerador*** i *n* és el ***denominador***.

Per a valors baixos del denominador, disposem de denominacions alternatives:

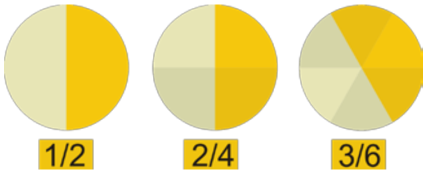
$\frac{1}{2}$, un mig $\frac{2}{3}$, dos terços $\frac{3}{4}$, tres quarts $\frac{4}{5}$, quatre quints $\frac{3}{10}$, tres desens

A partir del valor 11 del denominador: $\frac{7}{11}$, set onzens $\frac{11}{23}$, onze partit vint-i-tres

Autors: Eduardo Cuchillo, Ana Lorente i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Una pregunta natural que sorgeix és la següent: és possible, o té sentit, que siga major el numerador que el denominador? La resposta és afirmativa, sí.

Les fraccions el numerador de les quals és major que el denominador reben el nom de **fraccions impròpies**. Les fraccions el numerador de les quals és menor que el denominador reben el nom de **fraccions pròpies.**

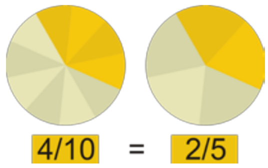


Reducció d'una fracció. Fraccions irreductibles

Dues fraccions $\frac{m}{n}$ i $\frac{p}{q}$ són **equivalents** si $m \cdot q = n \cdot p$

Els fracciones 1/2 i 2/4 són **equivalents** perquè representen la mateixa proporció. És el mateix mitja tortada que dos quarts de tortada.

A partir d'una fracció m/n, si r és qualsevol nombre natural llavors la fracció **(m·r)/(n·r)** és **equivalent** a m/n: $\frac{m \cdot r}{n \cdot r} = \frac{m}{n}$



Exemple:

- Una fracció equivalent a 1/3 és, per exemple, 10/30, ja que $\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 10}{3 \cdot 10} = \frac{10}{30}$

Anteriorment vam dir que 1/2 i 2/4 són fraccions equivalents. Per la mateixa raó, altres fraccions equivalents són 3/5, 6/10 i 24/40 ja que $\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}$, $\frac{6}{10} = \frac{6 \cdot 4}{10 \cdot 4} = \frac{24}{40}$, $\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 8}{5 \cdot 8} = \frac{24}{40}$.

Una manera alternativa de destacar aquestes relacions consisteix a dir que les fraccions 3/5 i 6/10 són reduccions de la fracció 24/40, mentre que 3/5 és una reducció de 6/10. Podem intuir que la fracció 3/5 no pot reduir-se més, és una **fracció irreductible**.

Obtindrem la major reducció d'una fracció p/q en dividir tant p com q entre el seu **màxim comú divisor**.

Una fracció és **irreductible** quan el màxim comú divisor del seu numerador i denominador és 1.

Exemple:

- Una reducció de 24/40 és 6/10, perquè l'obtenim en dividir tant 24 com 40 entre 4. Com el màxim comú divisor de 24 i 40 és 8, la major reducció de la fracció 24/40 és 3/5. En ser el màxim comú divisor de 3 i 5 igual a 1, la fracció 3/5 és irreductible, tal com era d'esperar.

Exemple:

- De vegades, una fracció es redueix a un nombre natural com, per exemple, la fracció 30/6, ja que el màxim comú divisor de 30 i 6 és igual a 6, i en dividir 30, el numerador, entre 6 obtenim 5.

Dues fraccions són equivalents si es redueixen a una mateixa fracció irreductible.

Activitats proposades

14. Assenyala diferents accions que obliguen a repartir, o subdividir, un cert objecte, ser o activitat.

15. Troba situacions de la vida quotidiana en què apareguen fraccions.

16. Redueix les següents fraccions a la seua expressió irreductible: a)$\frac{24}{18}$ b)$\frac{21}{49}$ c)$\frac{7}{7}$

17. Determina si les següents parelles de fraccions són o no equivalents:

a) $\frac{4}{8}\,i\,\frac{3}{6}$ b)$\frac{3}{11}\,i\,\frac{33}{9}$ c)$\frac{5}{8}\,i\,\frac{105}{168}$

18. Obtín tres fraccions equivalents a cada una de les que figuren a continuació: a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{9}{4}$

19. Decideix si les següents parelles de fraccions són o no equivalents: a) $\frac{4}{5}$ i $\frac{12}{15}$ b) $\frac{2}{3}$ i $\frac{10}{15}$

20. Obtín tres fraccions equivalents a cada una de les que figuren a continuació:

a) $\frac{-1}{5}$ b) $\frac{9}{-4}$ c) $\frac{-3}{7}$ b) $\frac{2}{-15}$

1.5. Expressions decimals

Però hi ha altres formes d'expressar quantitats que no es corresponen amb quantitats completes, com per exemple, el preu d'un producte: 3,25 euros.

Una **expressió decimal** consta de dues parts:

- la seua **part entera**, el nombre que està a l'esquerra de la coma
- i la seua **part decimal**, que es troba a la dreta de la coma

La part decimal indica porcions que cal afegir a la part entera dividint la unitat en 10, 100, 1000 … parts.

Exemples: $1'3 = 1 + \frac{3}{10}$ $1'03 = 1 + \frac{3}{100}$

Activitats proposades

21. Busca altres situacions de la vida real on apareguen nombres decimals.

Conversió d'una fracció a expressió decimal

Donada una fracció s'obté la seua expressió decimal, dividint.

Exemples: $\frac{93}{8} = 11'625$ $\frac{46}{11} = 4'1818181818181....$

Recorda que qualsevol fracció té un desenrotllament decimal **exacte** o **periòdic**.

Les expressions decimals periòdiques el desenrotllament decimal periòdic de les quals comença immediatament després de la coma s'anomenen **periòdics purs**. Si el període es troba més enllà de la coma estem davant d'un nombre decimal **periòdic mixt** i la part decimal situada entre la coma i el període s'anomena **avantperíode**.

Exemple: $\frac{178}{70} = 2'5\overline{428571}$

Hem arribat a l'expressió decimal de la fracció 178/70. És el nombre decimal de part entera 2, avantperíode 5 i període 428571.

Activitats proposades

22. Converteix en expressió decimal les fraccions següents: a) $\frac{97}{2}$ b) $\frac{345}{4}$

23. Transforma les següents fraccions en expressió decimal: a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{7}{9}$ c) $\frac{5}{6}$ d) $\frac{4}{11}$ e) $\frac{25}{12}$

Conversió d'una expressió decimal en fracció

Si l'expressió decimal és **exacta**, basta dividir per una potència de 10 de manera que desaparega la coma.

Exemple: $31'528 = \frac{31528}{1000}$

Si és **periòdic pur**, vegem la forma de procedir:

$$X = 7'\overline{31}$$

$$100 \cdot X = 100 \cdot 7'\overline{31} = 100 \cdot 7'31313131..... = 731'313131..... = 731'\overline{31}$$

$$100 \cdot X - X = 731 - 7 \Rightarrow 99 \cdot X = 724 \Rightarrow X = \frac{724}{99}$$

Un nombre decimal **periòdic pur** es converteix en aquella fracció que té per numerador, la diferència entre el nombre format per la part entera i el període menys la part entera, i per denominador al nombre format per una quantitat de nous igual al nombre de xifres del període.

Exemples: $0,\overline{5} = \frac{5}{9}$ $0,\overline{934} = \frac{934}{999}$ $4,\overline{6} = \frac{46-4}{9} = \frac{42}{9} = \frac{14}{3}$

Si és **periòdic mixt**, vegem la forma de procedir amb un exemple:

$$X = 7,6\overline{31}$$

$$10 \cdot X = 10 \cdot 7,6\overline{31} = 76'31313131.....$$

$$1000 \cdot X = 1000 \cdot 7,6\overline{31} = 7631,313131.....$$

$$(1000 - 10) \cdot X = 7631 - 76 \Rightarrow X = \frac{7631 - 76}{990} = \frac{6555}{990}$$

Una expressió decimal **periòdica mixta** es converteix en aquella fracció que té per numerador a la diferència entre, el nombre natural format per la part entera, l'avantperíode i el període, menys el nombre natural format per la part entera i l'avantperíode, i per denominador al nombre format per una quantitat de nous igual al nombre de xifres del període seguit d'una quantitat de zeros coincident amb el nombre de xifres de l'avantperíode.

Exemple: $0'3\overline{49} = \frac{349-3}{990} = \frac{346}{990}$ $8'07\overline{458} = \frac{807458-807}{99900} = \frac{806651}{99900}$

Autors: Eduardo Cuchillo, Ana Lorente i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Observa que:

Si calculem la suma $0'\overline{3}+0'\overline{6}$. Pareix natural que:

$$0'\overline{3}+0'\overline{6}=0'333333.....+0'666666.....=0'999999.....=0'\overline{9}$$

Per un altre costat $0'\overline{3}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ i $0'\overline{6}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$. Així que sumant $0'\overline{3}+0'\overline{6}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{3}{3}=1$ de manera que $1=0'\overline{9}=0'999999.....$

1.6. Aproximacions, truncaments i arredoniments

- Si pagarem amb un bitllet de 50 euros una compra que ascendeix a 32’69 euros, esperem una volta de 17’31 euros. Si a la caixa no hi ha monedes d’un cèntim, ens proposaran que donem per bona una volta de 17’30 euros. És una *aproximació a la baixa*.

- Si realitzem una compra per un import de 12’44 euros i la saldem amb 12’45 euros estem davant d’una *aproximació a l’alça*.

Una manera de realitzar una aproximació a la baixa d’un nombre decimal és el ***truncament***. Consisteix a decidir quantes xifres decimals volem considerar i, simplement, eliminar les restants a partir de l’última xifra decimal mostrada.

Una altra forma de realitzar una aproximació és a través d’un ***arredoniment***. Aquest consisteix a decidir quantes xifres decimals tindrà l’aproximació, realitzar el truncament oportú i, en funció de quina siga la primera xifra decimal no considerada, mantindre o incrementar en una unitat la part decimal del truncament. El criteri per a efectuar, o no, el dit increment és el següent:

- Quan la primera xifra decimal eliminada és 0, 1, 2, 3 o 4, **l’arredoniment** coincideix amb el truncament.
- Si la primera xifra decimal no considerada és un 5, 6, 7, 8 o 9, **l’arredoniment** s’obté en augmentar en una unitat la part decimal del truncament.

Exemple:

- Arredonim i trunquem l’expressió decimal 45,98351.

	Arredoniment	***Truncament***
Dècimes	46,0	45,9
Centèsimes	45,98	45,98
Mil·lèsimes	45,984	45,983
Deumil·lèsimes	45,9835	45,9835

Activitats proposades

24. Aproxima per truncament els següents nombres decimals de manera que aparega un desenrotllament decimal fins a les mil·lèsimes:

a) $11'1234$ b) $6'\overline{6}$ c) $9'3\overline{50}$ d) $8'\overline{71}$ e) $8'334\overline{8}$ f) $2'64\overline{08}$

25. Aproxima per arredoniment fins la mil·lèsima els següents nombres decimals:

a) $11'1234$ b) $6'\overline{6}$ c) $9'3\overline{50}$ d) $8'\overline{71}$ e) $8'334\overline{8}$ f) $2'64\overline{08}$ g) $3'99\overline{96}$

Autors: Eduardo Cuchillo, Ana Lorente i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

2. REPRESENTACIÓ GRÀFICA

2.1. Representació a la recta numèrica

Recorda que:

Per a representar **nombres enters** a la recta numèrica:

1. Hem de traçar una recta horitzontal i marquem el **zero**, que s'anomena **origen**
2. Dividim la recta en segments iguals, de longitud 1
3. Col·loquem els nombres positius a partir del zero a la dreta i els nombres negatius a partir del zero a l'esquerra.

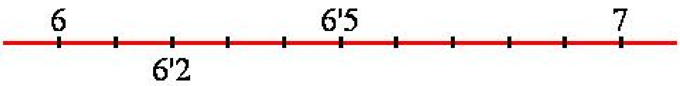
–5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4

Exemple:

- Representa en una recta numèrica: –2, 0, 4, –1, 8, –7, –3 i 1

–8 –7 –6 –5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4 5 6 7 8

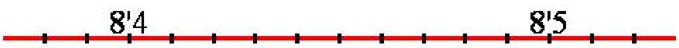
Per a representar un nombre decimal com 6'2 en primer lloc ens fixem en la seua part entera, 6, la qual cosa ens informa de que 6'2 es troba entre els nombres naturals 6 i 7. Com la seua part decimal posseeix una sola xifra, són 2 desenes, haurem de dividir el segment d'extrems 6 i 7 en deu parts iguals per a, finalment, situar 6'2 sobre la segona de les marques.



Activitats proposades

26. Representa en una recta numèrica al teu quadern els següents nombres i ordena'ls de menor a major: –8, 5, 1, –5, 8, –3, –7 i 0.

27. Situa en la següent recta els nombres 8'43, 8'48, 8'51 i 8'38



2.2. Comparació de nombres

En representar els nombres en la recta numèrica queden **ordenats**.

Com més a la dreta estiga un nombre situat en la recta numèrica és major, i com més a l'esquerra estiga situat és menor.

Exemple:

- –7 està més a l'esquerra que +4 per tant –7 és menor que +4. S'escriu –7 < +4

El signe **<** es llig "menor que" i el signe **>** es llig "major que".

Autors: Eduardo Cuchillo, Ana Lorente i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Decidir si un nombre decimal és major o menor que un altre és prou senzill. Si les seues parts enteres són distintes, elles ja determinen quin és major.

Exemple:

13'66 és major que 11'4, perquè el primer té part entera 13 i el segon 11.

Si tenen la mateixa part entera passem a mirar la seua primera xifra decimal, la de les desenes. Si són diferents, ja podem decidir.

Exemple:

7'25 és menor que 7'3, ja que tenen la mateixa part entera i la primera xifra decimal de 7'3 és major que la primera xifra decimal de 7'25.

En general, si coincideixen les parts enteres busquem la primera xifra decimal en què els nombres difereixen. La que siga major pertanyerà al nombre més gran decimal.

Exemple:

- Podem ordenar números utilitzant els signes anteriors:

$$-7,8 < -3,5 < -2,9 < -1,3 < 0 < 2,7 < 4,4 < 8,2.$$

O bé:

$$8,2 > 4,4 > 2,7 > 0 > -1,3 > -2,9 > -3,5 > -7,8.$$

- Pareix rar que el 0 siga major que un altre nombre, però pensa que es té més si no es té res, que si es deu diners. Si el termòmetre marca 0 é C no fa molta calor, però menys calor fa si marca –10ºC. És a dir: 0 > –10

Activitats proposades

28. Representa en una recta numèrica al teu quadern els següents nombres i ordena'ls de menor a major: –8, 5, 1, –5, 8, –3, –7 i 0.

29. Completa en el teu quadern amb el signe **<** (menor) o **>** (major) segons corresponga:

a) –13,6   –67,1   b) –80,2   +94,5   c) +37   +48   d) +52   –64   e) –21 |–25|

30. Ordena de menor a major

a) +5,1, –4,9, –1,5, +18,2, 5,17   b) +6,9, –7,2, –8,5, –5,9, –7,21

31. Assenyala quin nombre és el major per a cada una de les següents parelles:

a) –0,872 i –0,8721   b) 3,58 i |–3,57| c) 7,0001 i 7,00001   d) –4,78 i –8,92

32. Escriu dos nombres decimals que siguen, simultàniament, majors que 6'147 i menors que 6'2.

3. OPERACIONS

3.1. Suma i resta. Propietats

Suma de nombres enters

Recorda que:

Per a **sumar** dos nombres enters del mateix signe se sumen els seus valors absoluts i es posa el signe dels sumands

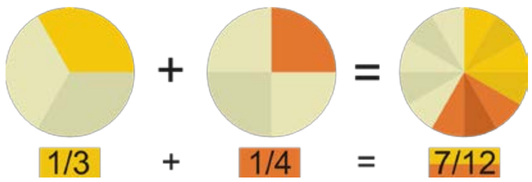
Per a **sumar** dos nombres enters de distint signe es resten els seus valors absoluts i es posa el signe del sumant de major valor absolut

Exemple:

- Tens 75 € i et donen 50 € llavors tens 125 €: **+75 + 50** = **+125.**
- Deus 75 € i gastes 50 € llavors acumules un deute de 125 €: **–75 – 50** = **–125.**
- Tens 75 € però deus 50 € llavors tens 25 €: **–50 + 75 = +25.**
- Deus 75 € i tens 50 € llavors deus 25 €: **–75 + 50 = –25.**

Suma de fraccions

Recorda que:



Per a realitzar la suma de dues fraccions hem d'aconseguir que tinguen el mateix denominador buscant fraccions equivalents.

Així, per a sumar $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$ haurem de buscar i trobar dos nombres naturals *r* i *s* que ens transformen cada una de les anteriors fraccions en altres **equivalents**, (*m*·*r*)/(*n*·*r*) i (*p*·*s*)/(*q*·*s*), de manera que les noves fraccions tinguen el **mateix denominador**, és a dir, que ***n·r = q·s***, i en este cas: $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{m\cdot r}{n\cdot r}+\frac{p\cdot s}{q\cdot s}=\frac{m\cdot r}{n\cdot r}+\frac{p\cdot s}{n\cdot r}=\frac{m\cdot r+p\cdot s}{n\cdot r}$

Com hi ha moltes parelles de nombres naturals *r* i *s* que fan possible aqueixa igualtat, buscarem els més menuts.

Ja que *n*·*r* és múltiple de *n* i *q*·*s* és múltiple de *q*, aconseguirem *r* i *s* a partir del mínim **comú múltiple** de *n* i *q*.

$$n\cdot r=q\cdot s=m.c.m.(n,q)$$

El valor de *r* resulta de dividir aqueix mínim comú múltiple entre *n* i el de *s* s'obté en dividir el mínim comú múltiple entre *q*.

Exemple: $\frac{7}{4}+\frac{5}{6}$

Els denominadors són diferents, 4 i 6. El seu mínim comú múltiple és 12. En dividir 12 entre 4 ens dóna 3 i en fer-ho entre 6 obtenim 2. $\frac{7}{4}=\frac{7\cdot 3}{4\cdot 3}=\frac{21}{12}$ $\frac{5}{6}=\frac{5\cdot 2}{6\cdot 2}=\frac{10}{12}$

Finalment

$$\frac{7}{4}+\frac{5}{6}=\frac{21}{12}+\frac{10}{12}=\frac{31}{12}$$

Suma d'expressions decimals

Suma d'expressions decimals. Ara basta amb què les parts decimals tinguen el mateix nombre de xifres. Si no la tenen des d'un principi, afegim els zeros que siguen necessaris per aconseguir-ho.

Exemples: $67'7 + 71'15 = 67'70 + 71'15 = 138'85$ $\quad 44'39 + 23 = 44'39 + 23'00 = 67'39$

- Si una persona té 8 euros i 42 cèntims d'euro i una altra té 7 euros i 94 cèntims, quants diners tenen entre les dos?

Hem de sumar. En total tenen 8 + 7 = 15 euros i 42 + 94 = 136 cèntims. Però, com 100 cèntims d'euro és el mateix que 1 euro, 136 cèntims d'euro és igual a 1 euro més 36 cèntims. D'esta manera, aqueixes dues persones tenen 15 + 1 = 16 euros i 36 cèntims.

Propietats de la suma

Commutativa. No importa en quina orde sumem dos nombres:

$$a + b = b + a$$

Exemple: $714'66 + 2'47 = 717'13$ $\quad 2'47 + 714'66 = 717'13$

Associativa. Ens permet sumar més de dos nombres agrupant-los com vulguem, de dos en dos.

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Exemple: $95'7 + 30'02 + 17'4 = (95'7 + 30'02) + 17'4 = 125'72 + 17'4 = 143'12$

$$95'7 + 30'02 + 17'4 = 95'7 + (30'02 + 17'4) = 95'7 + 47'42 = 143'12$$

Element neutre. El nombre 0 sumat a qualsevol altre nombre no l'altera.

Exemple: $0 + 78'324 = 78'324 = 78'324 + 0$

Oposat d'un nombre: L'oposat d'un nombre és un altre nombre del mateix valor absolut i distint signe que verifica que a + Op(+a) = 0.

S'escriu: Op(+a) = –a, Op(–a) = +a o bé: – (+a) = –a, –(–a) = +a

Exemple:

- Op(+5) = –5 Op(–7,3) = +7,3 – (+5) = –5 –(–7,3) = +7,3.

Resta

Per a **restar** dos nombres se suma al primer l'oposat del segon.

El signe menys **davant d'un parèntesi** canvia els signes dels nombres que hi ha dins del parèntesi.

Activitats proposades

33. Troba el resultat de les sumes següents:

a) (+12,8) + (+57) + (–4,6) b) (–83,2) – (–24,1) + (–10,5) c) (–35) + (–48) + (+92)

34. Efectua aquestes operacions:

a) (+3,8) + (+4,2) – (–52) b) (–614) + (–77) + (–811) c) (–97) – (–12) + (+26) d) (–45) + (+52)

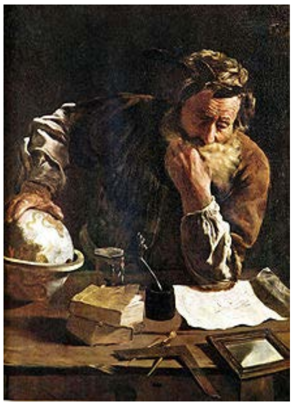
35. Un autobús comença el viatge amb 30 passatgers. A la primera parada s'abaixen 16 i es pugen 21. A la segona s'abaixen 17 i es pugen 24, i a la tercera s'abaixen 9. Quants passatgers hi ha a l'autobús?


36. Un avió vola a 3672 m i un submarí està submergit a 213 m, quina distància en metres els separa?

37. Arquimedes va nàixer l'any 287 a.C. i va morir l'any 212 a. C. Quants anys tenia?

38. Expressa al nombre 100 de quatre formes distintes com a suma i resta de 3 nombres enters.

39. Expressa al nombre zero com a suma i resta de quatre nombres enters.



Arquímedes

40. Realitza les següents sumes de fraccions:

a) $\frac{1}{5}+\frac{4}{3}$ b) $\frac{7}{6}+\frac{4}{9}$ c) $\frac{5}{8}+\frac{5}{2}$ d) $\frac{67}{100}+\frac{13}{24}$

41. Calcula: a) $\frac{5}{14}-\frac{7}{6}$ b) $\frac{11}{6}-\frac{13}{5}$ c) $\frac{13}{100}-\frac{13}{240}$ d) $\frac{50}{21}-\frac{7}{3}$

3.2. Producte i quocient. Propietats

Producte de nombres enters

Recorda que:

Per a **multiplicar** dos nombres enters es deu:

1º) Multiplicar els seus valors absoluts

2º) Aplicar la **regla dels signes** seguint el següent:

És a dir, s'assigna el signe **+** si ambdós factors tenen el mateix signe, i el signe **–** si tenen distint signe.

+ · + = +

– · – = +

+ · – = –

– · + = –

Exemples:

(+7) · (+3) = +21 **(–1) · (–1) = +1** **(+8) · (–4) = –32** **(–2) · (+9) = –18**

- Lluís guanya 1000 euros al mes, si no gasta res, quant estalviarà al cap de 7 mesos?

  (+1000) · (+7) =+7000 € estalviarà al cap de 7 mesos.

- El rebut mensual és de 65 euros al mes. Quant gastarà al cap de 4 mesos?

  (–65) · (+4) = –260 € gastarà al cap de 4 mesos.

- Àlvar gasta 12 euros al mes en llepolies. Deixa de comprar-les durant 5 mesos. Quant ha estalviat? **(–12) · (–5) = +60 €** estalviarà al cap de 5 mesos.

Autors: Eduardo Cuchillo, Ana Lorente i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Producte de fraccions

Per a **multiplicar** dues fraccions multipliquem els seus numeradors entre si i el mateix fem amb els denominadors: $\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{m\cdot p}{n\cdot q}$

Exemple: $\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}=\frac{5\cdot 4}{8\cdot 7}=\frac{20}{56}$

Podem simplificar, reduir, el resultat: $\frac{20}{56}=\frac{4\cdot 5}{4\cdot 14}=\frac{5}{14}$

Producte d'expressions decimals

Per a realitzar el producte de dues expressions decimals es deu:

- Multiplicar, en primer lloc, els nombres ignorant la coma que posseeix cada un d'ells.

Al resultat d'aqueix producte li posem una coma perquè sorgisca una expressió decimal amb una part decimal de longitud igual a la suma de les quantitats de xifres decimals que tenen les expressions decimals multiplicades.

Exemples: $5'7\cdot 3'3=18'81$

- 5,7·3,3 = 18,81 93,05·72,4 = 6736,820 = 6736,82 44,16·8 = 353,28

Propietats de la multiplicació.

Commutativa. No importa en quina orde multipliquem dos nombres.

$$a\cdot b=b\cdot a$$

Exemples: 3 · 5 = 5 · 3 = 15 3 · (–5) = (–5) · 3 = –15 1,552·5,9 = 5,9·1,552 = 9,1568

$$\frac{7}{9}\cdot\frac{11}{5}=\frac{11}{5}\cdot\frac{7}{9}=\frac{77}{45}$$

Associativa. Ens permet multiplicar més de dos nombres agrupant-los com vulguem de dos en dos.

$$a\cdot b\cdot c=(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$$

Exemples: (2 · 3) · 5 = 2 · (3 · 5) = 30 (2 · 3) · (–5) = 2 · (3 · (–5)) = –30

5,7·3,2·7,14 = (5,7·3,2)·7,14 = 5,7·(3,2·7,14) = 130,2336 $\frac{7}{9}\cdot\frac{11}{5}\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{7}{9}\cdot\frac{11}{5}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{9}\cdot\left(\frac{11}{5}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{77}{90}$

Element neutre. El nombre 1 multiplicat per qualsevol altre nombre, no l'altera.

1·*a* = *a* = *a*·1

Exemple: 2·1 = 2 1·(–5) = (–5) 7,3512·1 = 7,3512 $1\cdot\frac{7}{9}=\frac{7}{9}$

Observa que:

De vegades hi ha un nombre que multiplicat per un altre ens dóna la unitat. Quan aqueix nombre existeix, s'anomena invers. Dins del conjunt dels nombres naturals i dels nombres enters, no hi ha l'element invers. Però amb les fraccions, sí.

Exemple: $\frac{5}{11}\cdot\frac{11}{5}=\frac{55}{55}=1$ $\frac{1}{11}\cdot\frac{11}{1}=\frac{11}{11}=1$ $\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2}=\frac{10}{10}=1$

Propietat distributiva de la multiplicació respecte de la suma.

Quan en una multiplicació un dels factors és la suma de dos nombres, com, per exemple,

$$8{,}3\cdot(6{,}5+1{,}04)$$

tenim dues opcions per a conèixer el resultat:

a) realitzar la suma i, després, multiplicar

$6{,}5+1{,}04=6{,}50+1{,}04=7{,}54$ $8{,}3\cdot 7{,}54=62{,}582$

b) distribuir, aplicar, la multiplicació a cada un dels sumands i, després, sumar:

$8{,}3\cdot(6{,}5+1{,}04)=(8{,}3\cdot 6{,}5)+(8{,}3\cdot 1{,}04)=53{,}95+8{,}632=62{,}582$.

Comprovem que obtenim el mateix resultat:

La propietat distributiva de la multiplicació respecte de la suma ens diu que

***a* · (*b* + *c*) = (*a* · *b*) + (*a* · *c*)**

En general, la propietat distributiva de la multiplicació respecte de la suma amb fraccions ens diu:

$$\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}\right)+\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{p}{q}\right)$$

Convé comentar que aquesta propietat distributiva llegida en sentit contrari, de dreta a esquerra, és el que comunament denominem **traure factor comú**:

$$\frac{12}{5}+\frac{22}{15}=\frac{2\cdot 6}{5}+\frac{2\cdot 11}{5\cdot 3}=\left(\frac{2}{5}\cdot 6\right)+\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{11}{3}\right)=\frac{2}{5}\cdot\left(6+\frac{11}{3}\right)$$

Exemples:

6350 · 4 – 6350 · 3 = 6350 · (4 – 3) = 6350 · 1 = 6350

635 · 2 + 3 · 35 = (2 + 3) · 635 = 5 · 635 = 3175

928 · 6 – 928 · 5 = 928 · (6 – 5) = 928 · 1 = 928

928 · 7 + 928 · 3 = 928 · (7 + 3) = 928 · 10 = 9280

$\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{6}{5}+\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{8}{3}\cdot\frac{6}{5}\right)+\left(\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{4}\right)=\frac{58}{15}$

Activitats proposades

42. Realitza els següents productes i divisions de nombres enters:

a) (+35) · (+2) b) (+4) · (–72) c) (–8) · (–45) d) (–5) · (+67)

e) (+28) : (+2) f) (+27) : (–3) g) (–36) : (–2) h) (–54) : (+9)

43. Calcula al teu quadern els següents productes i divisions de nombres enters:

a) (+721) · (+3) b) (+562) · (–3) c) (–915) · (–2) d) (–6) · (+72)

e) (+303) : (+3) f) (+505) : (–5) g) (–160) : (–4) h) (–704) : (+2)

44. Efectua mentalment i anota els resultats al teu quadern:

a) (+2) · (+40) b) (+30) · (–2) c) (–60) · (–3) d) (–50) · (+8)

e) (+80) : (+4) f) (+18) : (–3) g) (–15) : (–5) h) (–70) : (+7)

45. Calcula: a) $\frac{8}{22}\cdot\frac{3}{75}$ b) $6\cdot\frac{7}{11}$ c) $23\cdot\frac{1}{23}$ d) $\frac{9}{10}\cdot\frac{11}{3}$

46. Multiplica les següents fraccions i redueix, simplifica, el resultat:

a) $\frac{4}{9}\cdot\frac{6}{8}$ b) $\frac{9}{15}\cdot\frac{5}{3}$ c) $\frac{14}{25}\cdot\frac{5}{21}$ d) $\frac{6}{15}\cdot\frac{10}{12}$

47. Calcula: a) 7,3·2,54 b) 2,89·7,21 c) 3,54·5,2·6,8 d) 6,9·7,5·6,1

48. Trau factor comú i calcula mentalment:

a) 756 · 4 – 756 · 3 b) 350 · 8 + 350 · 2 c) 927 · 13 – 927 · 3 d) 700 · 33 – 700 · 3

49. Efectua:

a) $9\cdot(4{,}01+3{,}4)$ b) $7{,}3\cdot(12+5{,}14)$ c) $2{,}9\cdot(25{,}8-21{,}97)$

50. Realitza els productes indicats:

a) $\frac{7}{3}\cdot\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{4}\right)$ b) $\left(\frac{7}{3}\cdot\frac{6}{5}\right)\cdot\frac{1}{4}$ c) $\frac{7}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{4}$

51. Efectua les operacions següents:

a) $\frac{9}{2}+\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{7}{8}\right)$ b) $\left(\frac{9}{2}+\frac{5}{3}\right)\cdot\frac{7}{8}$ c) $\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}+\frac{7}{8}\right)$

Divisió de nombres naturals

Exemple:

- Al menjador de l’institut les taules són de 4 persones i a la classe de 1r de l’ESO hi ha 35 alumnes, quantes taules ocuparan?

Veiem que hi haurà 8 taules ocupades i sobraran 3 alumnes que han d’assentar-se en una altra taula:

$$\begin{array}{r|l} 35 & 4 \\ \hline 3 & 8 \end{array}$$

Cada un dels nombres que intervenen en la divisió s'anomenen:

35 → Dividend 4 → Divisor 8 → Quocient 3 → Residu

A més, com ja saps, es verifica que: 35 = (4 · 8) + 3

Aquesta propietat es verifica sempre per a qualsevol divisió. En general:

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \hline r & C \end{array}$$

Es verifica que:

D* = (*d* · *c*) + *r

Dividend és igual a divisor per quocient més el residu

Exemple:

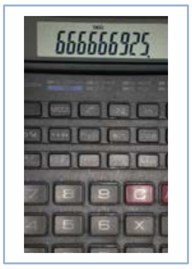
- El quocient entre 3658 i 65 és 56 i el residu 18. Escriu la relació que existeix entre aquests quatre valors.

$$3658 = 65 \cdot 56 + 18$$

Exemples:

27/3, 27: 3 i $\dfrac{27}{3}$ signifiquen el mateix: la divisió o el quocient de 27 entre 3.

Divisions amb calculadora



Ja sabem que dividir amb calculadora és molt fàcil, però què fem si ens demanen el residu de la divisió i només podem usar la calculadora?

- És molt senzill. Vegem-ho amb un exemple. Si fem:

325 ÷ 5 = 65 la divisió és exacta.

Però si fem:

325 ÷ 15 = 21.6666666667

Al primer cas està clar que el quocient és 65 i el residu és 0, però i al segon cas?

Clarament el quocient és 21. Ara per a calcular el residu hem de multiplicar aquest quocient pel divisor i restar-se'l al dividend. El residu serà: 325 – (15 · 21) = 10.

Quocient de nombres enters

Per a **dividir** dos nombres enters es deu:

1º) Calcular el quocient dels seus valors absoluts

2º) Assignar al resultat un signe mitjançant la regla següent:

+ : + = +

– : – = +

+ : – = –

– : + = –

Exemple:

(+36) : (+6) = +6

(–32) : (–4) = +8

(+27) : (–3) = –9

(–49) : (+7) = –7

Activitats proposades

52. Realitza les següents divisions i comprova amb cada una d'elles la propietat $D = d \cdot c + r$

8214 : 26 b) 271093 : 452 c) 1112220000 : 385 d) 274 : 25

Autors: Eduardo Cuchillo, Ana Lorente i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

3.3. Jerarquia d'operacions

A l'expressió: 5 · 4 + 3, quina operació realitzaries abans, la multiplicació o la suma?

Hi ha una **prioritat** en les operacions on no hi ha parèntesi i és que la multiplicació i la divisió sempre es realitzen abans que les sumes i les restes.

Per tant, l'operació anterior seria: 5 · 4 + 3 = 20 + 3 = 23

I en 9 : 3 · 2? Són divisions i multiplicacions amb la mateixa prioritat. Podem convindre que primer es realitza la primera operació, la que està més a l'esquerra: 9 : 3 · 2 = 3 · 2 = 6.

Prioritat d'operacions:

En operacions amb parèntesi, primer cal realitzar les que estan entre **parèntesis** i després les altres.

En operacions sense parèntesi, primer s'efectuen les **multiplicacions** i **divisions** i després, les **sumes i restes.**

En operacions de la mateixa prioritat, primer la de més a l'esquerra.

Exemple:

Observa la diferència entre aquestes dues operacions:

(17 + 8) · 6 = 25 · 6 = 150 17 + 8 · 6 = 17 + 48 = 65

Notes

És important escriure els parèntesis només quan siga necessari. Per exemple, a l'expressió: (21 · 2) + 30 resulta innecessari, ja que per la prioritat a les operacions, ja sabem que hem d'efectuar el producte abans que la suma.

Si realitzem una operació a la calculadora sense parèntesi aquesta ja respecta la jerarquia a les operacions, per la qual cosa si l'operació necessitara parèntesi, hem d'incloure'ls a la calculadora.

Exemple:

Jerarquia d'operacions	[(+7 – 5) · (+4 – 8 – 3)] + (– 27) : (–3) + 20
1) Es resolen els parèntesis	[(+2) · (– 7)] + (– 27) : (–3) + 20
2) Es realitzen multiplicacions i divisions	[– 14] + (+9) + 20
3) S'efectuen sumes i restes	Resultat = 15

Activitats proposades

53. Realitza les operacions següents:

a) +4 – (+5) • (-3) b) +6 + (–9) : (+2–5) c) –3 + [–4 – (–26) : (+2)]

54. Realitza les operacions següents:

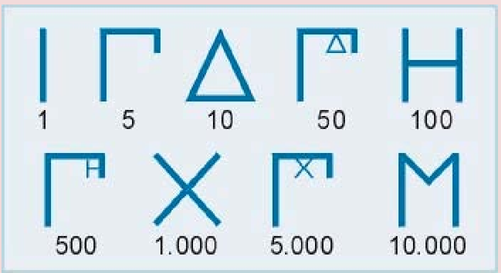
a) +8 + (–1) · (+6) b) –6 + (–7) : (+7) c) +28 – (–36) : (–9–9)

d) +11 + (+7) · (+6 – 8) e) –7 – [+4 – (–6) : (+6)] f) +9+ [+5 + (–8) · (–1)]

Autors: Eduardo Cuchillo, Ana Lorente i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

CURIOSITATS. REVISTA

Sistemes de numeració



Nombres grecs clàssics

Com saps, a Babilònia, fa més de cinc mil anys, s'usava un sistema de numeració en ***base dotze*** i un en ***base 60***. Imagines quants dígits feien falta! Hui encara perviuen quan diem que l'any té 12 mesos, o que una hora té 60 minuts i un minut, 60 segons.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Sistema en base 16 que s'usa als ordinadors

Els ordinadors utilitzen un sistema de numeració binari, amb només dos dígits, el 0 i l'1.

Encara que també s'empra un sistema en base **16**, que s'anomena **sistema hexadecimal**.

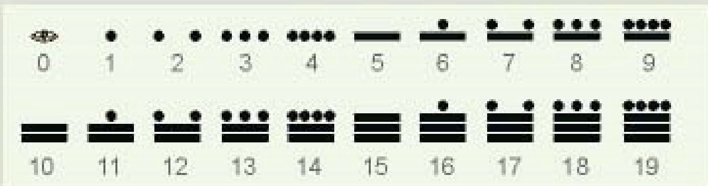
Nombres grecs

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1.000

Nombres romans

Nombres àrabs

Nombres xinesos



Nombres maies

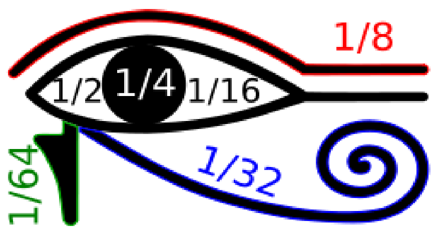
Autors: Eduardo Cuchillo, Ana Lorente i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Fraccions a Egipte

A l'Antic Egipte i a Babil·lònia, fa més de 5000 anys, ja s'empraven fraccions. A Egipte s'usaven fraccions unitaries, es a dir, amb numerador 1: 1/2, 1/3, 1/4, 1/5... L'Ull d'Horus és un jeroglífic que representa les fraccions unitaries de denominador una potència de 2:

= 1/2, = 1/4, = 1/8,

= 1/16, = 1/32, = 1/64



Imatge de Wikipedia. Si vols saber més has de trobar L'Ull d'Horus a Wikipedia.

Història dels nombres enters

Els xinesos utilitzaven els nombres negatius fa més de dos mil quatre-cents anys, ja que eren capaços de representar amb varetes negres els nombres negatius i amb roges els positius.

Els matemàtics hindús usaven "els béns", "els deutes" i "el no-res".

No obstant això a Europa la història de l'acceptació com a nombres dels negatius va ser un procés que va durar més de mil anys, ple d'avanços i retrocessos. Es va tardar molt a considerar als negatius com a nombres. Al segle XVII apareixen, al Diccionari Matemàtic, com a arrels ***falses***.

Ací tens algunes frases de persones famoses:

- Girard (1590-1639): *Per què aqueixes solucions **impossibles**?*
- Descartes (1596-1650): *No poden existir nombres menors que gens.*
- Stendhal (1783- 1842): *Qual no seria el meu desconcert quan ningú podia explicar-me que menys per menys és més.*
- Newton (1642- 1727): Les *quantitats són afirmatives, o siga, majors que gens, o negatives, és a dir, menors que gens. Així, a les coses humanes les possessions poden anomenar-se béns positius però els deutes béns negatius...*
- D'Alembert (1717- 1783) va escriure a l'Enciclopèdia: *Dir que la quantitat negativa és menys que gens és expressar una cosa que no es concep.*

Comenta amb els teus companys i companyes les frases de dalt.

Producte

Encara que a primària s'empra el símbol "x", per a denotar el producte el simbolitzarem ara com un punt: ·

Leibniz va escriure a *Bernoulli* dient que no li agradava emprar per al producte la lletra x ja que s'enganyava amb la lletra *x (incògnita)* i va començar a emprar el punt.

Els anglesos, que no seguixen a *Leibniz* per fer-li ombra a *Newton*, usen el punt en lloc de la coma per a expressar els nombres decimals: 3,5 = 3'5 = 3.5, i els ordinadors també.

Quocient

La paraula "***quocient***" vol dir el resultat de fer una "**divisió**" Els símbols emprats per a representar-les són:

/, : , i la fracció: -

La barra horitzontal de fracció, , és d'origen àrab, incòmoda si s'escriu en una única línia, per la qual cosa, de nou *Leibniz*, la va començar a substituir per la línia obliqua i els dos punts.

RESUM

Concepte	*Definició*	*Exemples*
El sistema de numeració decimal és posicional	El valor d'una xifra en un nombre depèn del lloc que ocupa al nombre	L'1 no té el mateix valor a 1792 que a 5431.
Jerarquia de les operacions	-A les operacions amb parèntesi, primer es realitzen els parèntesis i després les altres. -A les operacions sense parèntesi primer es realitzen multiplicacions i divisions i després sumes i restes. -A operacions de la mateixa prioritat, primer la de més a l'esquerra.	L'operació 2 + 3 · 7 té com resultat 23, no 35, que és el que resultaria efectuant abans la suma que el producte.
Nombres enters	$\mathbb{Z}$ = {… –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4 … }	
Ordenació de nombres	És més gran el que estiga més a la dreta a la recta numèrica.	82,6>36,1>0>–3>–36,7 –2,59<–1,3
Multiplicació	Es multipliquen els valors absoluts i s'aplica la regla dels signes: + · + = +; – · – = +; + · – = –; – · + = –	(+5) · (+6) = +30 (–1) · (–87) = +87 (–5) · (+6) = –30 (+9) · (–4) = –32
Fraccions equivalents	Són fraccions que representen la mateixa proporció.	$\frac{10}{25}$ i $\frac{6}{15}$
Suma i resta de fraccions amb diferent denominador	Transformem cada fracció en una altra equivalent de manera que les noves fraccions tinguen el mateix denominador, i les sumem.	$\frac{9}{10}+\frac{7}{15}=\frac{9\cdot 3}{10\cdot 3}+\frac{7\cdot 2}{15\cdot 2}=$ $=\frac{27}{30}+\frac{14}{30}=\frac{27+14}{30}=\frac{41}{30}$
Fracció irreductible	Una fracció és irreductible quan el màxim comú divisor del seu numerador i denominador és 1.	$\frac{2}{3},\frac{4}{5},\frac{10}{9}$
Comparació de fraccions	Podem determinar quin és la major de dues o més fraccions reduint a comú denominador.	$\frac{18}{11}<\frac{7}{4}<\frac{15}{8}$
Expressions decimals	Consten de dues parts: la seua part entera i la seua part decimal	21'375 Part entera: 21 Part decimal: 375
Expressió decimal exacta i periòdica	Exacta: La seua part decimal té una quantitat finita de xifres. Periòdic: La seua part decimal té una quantitat infinita de xifres que es repeteixen periòdicament. Poden ser purs o mixtos	5,7767 Pur: $3,\overline{07}=3{,}0707070.....$ Mixt: $4,8\overline{13}=4{,}813131.....$

Autors: Eduardo Cuchillo, Ana Lorente i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

EXERCICIS I PROBLEMES. Matemàtiques 2n d'ESO

Repàs nombres naturals

1. Realitza les operacions següents:

a) $(34 + 52) \cdot 5$ b) $89 \cdot 2 + 12$ c) $55 + 67 \cdot 3 + 13$ d) $280 - 110 \cdot 2 + 90$

2. Digues quals de les següents operacions tenen el mateix resultat:

a) $8 \cdot (22 - 20)$ b) $8 \cdot 22 - 20$ c) $8 \cdot 22 - 8 \cdot 20$ d) $8 \cdot (22 + 20)$ e) $8 \cdot 22 + 20$

3. Realitza les operacions de l'exercici anterior en la calculadora i comprova la importància d'afegir els parèntesis.

4. Realitza les operacions següents:

a) $23 \cdot 6 + (35-13) : 11 - 4 \cdot 7$ b) $48:4 \cdot 8:2 - (3 \cdot 12):6$ c) $357 - 23 \cdot 7 + 280:14$ d) $20 \cdot 9 - 11 \cdot 7 + 265:53$

Nombres enters

5. Efectua al teu quadern:

a. $6 - (8 + 10 - 1 - 2)$ b. $7 + (2 - 8 - 1) - (8 - 1 + 6)$

c. $(10 - 2 - 7) - (1 - 9 - 16)$ d. $-(9 - 6 - 8) - (-7 - 10 + 2)$

6. Lleva parèntesi i efectua al teu quadern:

a. $15 + [2 - 8 - (10 - 3)]$ b. $7 - [(5 - 8) - (6 - 12)]$ c. $(5 - 14) - [2 - (2 - 4 - 3)]$

d. $(1 - 11 + 6) - [(3 - 2) - (4 - 16)]$ e. $[8 - (4 - 16)] - [10 - (5 - 12)]$

7. Efectua al teu quadern aplicant la regla dels signes:

a. $(+4) \cdot (+8)$ b. $(-11) \cdot (-5)$ c. $(+12) \cdot (-6)$ d. $(-11) \cdot (-10)$ e. $(+16) : (+4)$

f. $(-12) : (+6)$ g. $(+24) : (-3)$ h. $(-81) : (-9)$ i. $(-63) : (+7)$ j. $(-30) : (-10)$

8. Troba al teu quadern:

a. $(-2)^1$ b. $(-2)^2$ c. $(-2)^3$ d. $(-2)^4$ e. $(-2)^5$

f. $(-2)^6$ g. $(-2)^7$ h. $(-2)^8$ i. $(-2)^9$ j. $(-2)^{10}$

9. Efectua les operacions i comprova com varia el resultat segons la posició dels parèntesis:

a. $18 - 7 \cdot 3$ b. $(18 - 7) \cdot 3$ c. $(-12) - 4 \cdot (-8)$

d. $[(-12) - 4] \cdot (-8)$ e. $(-5) \cdot (+7) + (-3)$ f. $(-5) \cdot [(+7) + (-3)]$

10. Calcula mentalment:

a. $(-1)^1$ b. $(-1)^2$ c. $(-1)^3$ d. $(-1)^4$ e. $(-1)^5$

f. $(-1)^6$ g. $(-1)^7$ h. $(-1)^8$ i. $(-1)^9$ j. $(-1)^{10}$

11. Calcula al teu quadern:

$(-6)^4$ b. $(+5)^5$ c. $(-3)^3$ d. $(+4)^3$ e. $(-9)^2$ f. $(-10)^6$

Autors: Eduardo Cuchillo, Ana Lorente i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

12. Representa gràficament i ordena en sentit decreixent, calcula els oposats i els valors absoluts dels següents nombres enters:

$$-5, 7, -3, 0, -6, 1, 2$$

13. Antoni fa els comptes totes les nits i al seu quadern té anotat: Dilluns: Papà m'ha tornat 10 euros que em devia: Dimarts: He venut segells de la meua col·lecció i m'han pagat 5 euros. Dimecres: Em compre uns croms per 3 euros. Dijous: M'he pres un gelat per 1 euro. Si Antoni tenia 15 euros el dilluns al matí, quant té cada nit? Ha augmentat el seu diners o ha disminuït? En quant?

14. De quina planta ha eixit un ascensor que després de pujar 7 pisos arriba al pis 4?

15. Jaume ha començat un negoci, i de moment perd 100 euros cada dia. Comparant amb la seua situació actual, quina era la seua situació fa 5 dies?

16. Pere disposa en 2013 d'una màquina per a viatjar en el temps. Decideix avançar 240 anys, en quin any es trobaria? I si retrocedeix 390 anys, a quin any viatja?

17. A quina edat es va casar una persona que va nàixer l'any 9 abans de Crist i es va casar l'any 19 després de Crist?

18. En quin any va nàixer una dona que l'any 27 després de Crist va complir 33 anys?

19. En quin any es va casar un home que va nàixer l'any 20 abans de Crist i es va casar als 27 anys?

20. Fa una hora el termòmetre marcava –5 ºC i ara marca 5 ºC. La temperatura ha augmentat o ha disminuït? Quant ha variat?

21. Al matí un termòmetre marcava 7 graus sota zero. La temperatura baixa 12 ºC al llarg del matí. Quina temperatura marca al migdia?

22. A quina planta ha arribat un ascensor d'un edifici que estava al soterrani 2 i ha pujat 7 pisos?

23. Un joc

a) Ompli amb nombres enters les caselles en blanc de tal manera que la suma de totes les files i columnes siga sempre **3**.

–6		**+6**
	+2	
		0

b) Ompli amb nombres enters les caselles en blanc de tal manera que el producte de totes les files i columnes siga sempre **–70**.

		+7
	–7	
–7		**+2**

24. Una persona protestava per la seua mala sort. Havia perdut el seu treball i només li quedaven uns euros a la butxaca. El diable se li va acostar i li va fer una estranya proposició:

–Jo puc fer que els teus diners es dupliquen cada vegada que encreues el pont que travessa el riu. L'única condició és que jo t'esperaré a l'altre costat i has d'entregar-me 24 €.

El tracte pareixia avantatjós. No obstant això, quan va creuar per tercera vegada, en donar al diable els 24 € es va quedar sense res. Havia sigut enganyat. Quants diners tenia en un principi?

Autors: Eduardo Cuchillo, Ana Lorente i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Fraccions

25. Realitza els càlculs següents:

a) $\frac{\frac{5}{2}+\frac{2}{3}}{5}\cdot\frac{1}{8}$ b) $\frac{4}{\frac{3}{5}-\frac{2}{3}}+1$ c) $\frac{\frac{1}{3}-\frac{4}{9}}{\frac{5}{3}-\frac{9}{2}}-2$ d) $\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{8}\right):\left(\frac{5}{6}+\frac{9}{8}\right)$

26. A un sopar assisteixen 8 persones. De postres hi ha un pastís que ja ha sigut dividit en 8 porcions iguals. Després de repartir les postres arriben de sobte 2 persones més. Els que estaven des d'un principi ofereixen als nouvinguts que proven el pastís i se n'adonen de que de les 8 porcions hi ha 6 que no s'han tocat i 2 que han sigut ingerides. Indica què s'ha de fer perquè les persones que no han provat la tortada reben la mateixa quantitat.

27. Maria es 70 cm més alta que la mitat de la seua altura. Quina estatura té?

28. Si una persona viu 80 anys, i es passa adormint un terç de la seua vida, quant ha dormit?

29. Indica quines de les següents fraccions són pròpies i quines són impròpies:

a) $\frac{8}{3}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{5}{2}$ d) $\frac{16}{7}$ e) $\frac{21}{4}$ f) $\frac{5}{6}$

30. Transforma en nombre mixt les fraccions impròpies de l'activitat anterior.

31. En un espectacle diuen que s'han venut els $\frac{5}{4}$ de les entrades d'un teatre que té capacitat per a 500 espectadors. Quantes entrades s'han venut? Què opines del resultat que s'obté en trobar els $\frac{5}{4}$ de 500?

32. En un iceberg es manté submergida les nou desenes parts del seu volum. Si emergeix 318 km^3, quin és el volum submergit? I el volum total?

33. En un bosc hi ha pins, roures i alzines. Els pins ocupen els 3/7 i els roures, 1/3. Quin espai ocupen les alzines?

34. Neus i Josep tenen el mateix sou mensual, Neus gasta els 3/5 del seu sou i Josep els 5/7, qui gasta més?

35. Copia al teu quadern i ompli els llocs buits:

a) $\frac{7}{6}+\frac{5}{3}=\frac{7}{6}+\frac{\quad}{6}=\frac{\quad}{6}$

b) $\frac{7}{10}-\frac{5}{14}=\frac{\quad}{70}-\frac{\quad}{70}=\frac{\quad}{70}$

36. 1/3 dels ingressos d'una família es gasten en rebuts (aigua, telèfon, comunitat de veïns,...) , a menjar gasten 3/7, quina part els queda per a estalviar i altres gastos?

37. En un país es valora que es gasta 250 litres d'aigua per persona i dia, i d'aqueixa quantitat les llars consumixen els 3/20 del total. Si es desperdicien els 1/7, quants litres d'aigua es desperdicia en un dia en una casa de 5 habitants?

38. El teu professor/a ha dedicat 5 hores a corregir exàmens i encara li queden ¼ sense corregir, quant temps haurà de dedicar encara?

39. Copia al teu quadern i completa les següents fraccions de manera que totes elles siguen equivalents:

a) $\frac{\quad}{5}$ b) $\frac{34}{\quad}$ c) $\frac{\quad}{2}$

40. Realitza els següents càlculs i, en cada cas, redueix la fracció resultant:

a) $\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{8}$ b) $\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{6}$ c) $\frac{5}{6}:\frac{2}{3}$ d) $\frac{3}{16}:\frac{3}{10}$

41. Tres nàufrags en una illa deserta arrepleguen gran quantitat de cocos i se’n van a dormir. A la nit s’alça un d’ells, que no es fia dels altres, reparteix els cocos en tres muntons iguals, amaga la seua part i torna a dormir. Després, s’alça un altre i fa el mateix amb els cocos restants. El mateix fa el tercer. Al matí següent reparteixen els cocos i també el repartiment és exacte. Quants cocos hi havia en total si se sap que eren menys de 100? Quants té cada nàufrag?

42. Un rajà regala a les seues filles unes perles i diu que les repartisquen de la manera següent: a la primera filla li deixa la sisena part de les perles, a la segona, la cinquena part de les que queden, a la tercera, la quarta part, i així successivament. Resulta que a totes les filles els ha tocat el mateix nombre de perles. Quantes filles tenia el rajà? Quantes perles?

Expressions decimals

43. Troba una fracció tal que en multiplicar-la pel nombre $1{,}8\overline{7}$ done como resultat un nombre natural.

44. Aproxima per truncament a desenes i centèsimes els següents nombres decimals:

a) 9,235 b) 57,0001 c) $8{,}\overline{7}$ d) $3{,}52\overline{87}$ e) $5'99\overline{96}$

45. Arredoneix els següents nombres decimals fins a les desenes i fins a les centèsimes:

a) 8,9351 b) $5{,}1\overline{990}$ c) $83{,}\overline{74}$ d) 77,992 e) $56{,}\overline{01}$

46. En cada un dels arredoniments que has realitzat a l’exercici anterior, distingeix si es tracta d’una aproximació a l’alça o a la baixa.

47. Vicent va comprar en la papereria 15 bolígrafs i 8 llapis. Si cada bolígraf costava 0’72 euros i cada llapis 0’57 euros quant es va gastar Vicente?

48. Pilar s’ha comprat tres bolígrafs iguals que, en total, li han costat 1,53 euros. També va comprar un quadern que costava quatre vegades més que cada bolígraf. Calcula el preu del quadern.

AUTOAVALUACIÓ DE 2n D'ESO

1. Quin és el resultat de 20 · (15 + 3)?

a) 303 b) 380 c) 360 d) 90

2. El resultat de l'operació: {(–5 + 8) · (–3 – 5) + (–7 + 1) : (+9 – 3)} és:

a) –25/6 b) +24 c) –25 d) +20

3. Un termòmetre ha pujat 4 ºC, després ha baixat 6 ºC, després ha baixat 8 ºC i, finalment, marca menys 9 é C. La temperatura inicial era:

a) –1 ºC b) –19 ºC c) +1 ºC d) –14 ºC

4. En viatjar des d'una latitud de 9º Nord fins a una altra de 20º Sud, la variació de latitud és:

a) 11 Sud b) 29º Nord c) 11º Nord d) 29º Sud

5. Si estàs situada al punt –15 de la recta numèrica dels nombres enters, quins moviments et porten fins a +10?

a) +13 – 3 + 4 b) – 1 + 14 c) + 18 – 5 d) +14 +12 – 1

6. Assenyala la fracció inversa de la fracció $\frac{5}{9}$:

a) $\frac{18}{9}$ b) $\frac{15}{27}$ c) $\frac{5}{9}$ d) $\frac{9}{5}$

7. El resultat de l'operació $\left(\frac{2}{5} - \frac{5}{2}\right)\cdot 2 + \frac{51}{10}$ és :

a) $\frac{9}{10}$ b) $\frac{105}{10}$ c) $\frac{30}{5}$ d) 3

8. Tria la fracció irreductible que siga el resultat de l'operació $\frac{5}{2}\cdot\frac{10}{9}+\frac{1}{3}$

a) $\frac{65}{18}$ b) $\frac{28}{9}$ c) $\frac{50}{18}$ d) $\frac{25}{9}$

9. Indica quina de les següents fraccions és menor que $\frac{1}{5}$:

a) $\frac{2}{16}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{7}$

10. Ordena de menor a major els nombres:

5,67; 5,68; 5,6666; 5,63; 5,5; 5,8; 5,6070.

Autors: Eduardo Cuchillo, Ana Lorente i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

2n ESO

CAPÍTOL 3: POTÈNCIES I ARRELS

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Ana Lorente

Revisora: Irene García Saavedra

Il·lustracions: Banc d'imatges de l'INTEF

Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

1. POTÈNCIES

1.1. CONCEPTE DE POTÈNCIA: BASE I EXPONENT

1.2. QUADRATS I CUBS

1.3. LECTURA DE POTÈNCIES

1.4. POTÈNCIES D'U I DE ZERO

1.5. POTÈNCIES DE 10. NOTACIÓ CIENTÍFICA

2. OPERACIONS AMB POTÈNCIES I PROPIETATS

2.1. PRODUCTE DE POTÈNCIES DE LA MATEIXA BASE

2.2. QUOCIENT DE POTÈNCIES DE LA MATEIXA BASE

2.3. ELEVAR UNA POTÈNCIA A UNA ALTRA POTÈNCIA

2.4. POTÈNCIA D'UN PRODUCTE

2.5. POTÈNCIA D'UN QUOCIENT

2.6. POTÈNCIES DE NOMBRES ENTERS

3. ARRELS

3.1. QUADRATS PERFECTES

3.2. ARREL QUADRADA. INTERPRETACIÓ GEOMÈTRICA

3.3. ARREL *n*-ÈSIMA D'UN NOMBRE

3.4. INTRODUIR FACTORS EN EL RADICAL

3.5. EXTRAURE FACTORS DEL RADICAL

3.6. SUMA I RESTA DE RADICALS

Per a treballar amb nombres molt grans, per a calcular la superfície d'una habitació quadrada o el volum d'un cub ens va a resultar útil a usar les potències. En aquest capítol repassarem com operar amb elles.

Si coneixem la superfície d'un quadrat o el volum d'un cub i volem saber quin és el seu costat utilitzarem les arrels. En aquest capítol revisarem el que ja coneixes per a poder usar-les amb un poc de soltesa.

Arquimedes, al seu tractat *L'arenari* conta una manera per a expressar nombres molt grans, com el nombre de grans d'arena que hi ha a tota la Terra. És, efectivament, un nombre molt gran, però no infinit. Imagina que tota la Terra està formada per grans d'arena. Pots calcular el seu volum coneixent el seu radi que és de 6500 km. Estima quants grans d'arena caben en 1 mm^3. Estima que, per exemple, caben 100 grans. Ja saps calcular quants hi ha! Però en aquest capítol aprendràs a escriure aqueix nombre tan gran.

Autora: Ana Lorente
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

1. POTÈNCIES

Recorda que:

Ja coneixes les potències. En aquest apartat revisarem la forma de treballar amb elles.

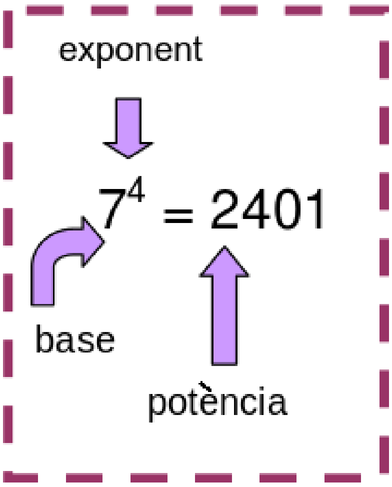
1.1. Concepte de potència. Base i exponent

Exemple:

- Joan guarda 7 boletes en una bossa, cada 7 bosses en una caixa i cada 7 caixes en un calaix. Té 7 calaixos amb boletes, quantes boletes té?

Per a esbrinar-lo has de multiplicar 7 x 7 x 7 x 7 que ho pots escriure en forma de potència: 7^4, que es llig 7 elevat a 4.

$$7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^4 = 2401 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7.$$



Una **potència** és una forma d'escriure de manera abreviada una multiplicació de factors iguals. La **potència** a^n de base un nombre natural a i exponent natural n és un producte de n factors iguals a la base:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \ldots^{n \text{ factors}} \ldots\ldots \cdot a \qquad (n > 0)$$

El factor que es repeteix és la **base** i el nombre de vegades que es repeteix és **l'exponent**. Al resultat se l'anomena **potència.**

Activitats proposades

1. Calcula mentalment les següents potències i escriu el resultat al teu quadern:

a) 5^2 b) 3^4 c) 10^6 d) 4^3 e) 1^7 f) 1000^3

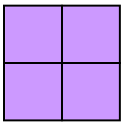
2. Calcula al teu quadern les potències següents:

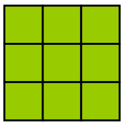
a) 3^7 b) 7^5 c) 2^{10} d) 9^5 e) 25^3 f) 16^4.

1.2. Quadrats i cubs

Ja saps que:

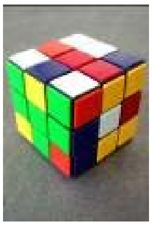
- Si un quadrat té 2 quadradets per costat Quants quadradets conté aqueix quadrat? El nombre de quadradets que caben és $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$. L'àrea d'aquest quadrat és de 4 unitats. I si té 3 quadradets per costat Quants quadradets conté aqueix quadrat? El nombre de quadradets que caben és $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$. L'àrea d'aquest quadrat és de 9 unitats.





$100 = 2^2 \cdot 5^2$
és un quadrat perfecte i la seua arrel quadrada és
$2 \cdot 5 = 10$.
$4900 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$
és un quadrat perfecte i la seua arrel és
$2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$.
Són quadrats perfectes.
$36 = 2^2 \cdot 3^2$
$81 = 3^2 \cdot 3^2$
Ho són també 121, 3600 i 900?

Autora: Ana Lorente
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay



- De quants cubets està compost el cub gran si hi ha 3 al llarg, 3 a l'ample i 3 a l'alt? El nombre de cubets és $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27$. El volum d'aquest cub és 27 unitats.

Recorda que:

Per aquesta relació amb l'àrea i el volum de les figures geomètriques, les potències d'exponent 2 i d'exponent 3 reben noms especials:

Les potències d'exponent 2 s'anomene **quadrats** i les d'exponent 3 s'anomenen **cubs**.

Activitats proposades

3. Escriu al teu quadern el quadrat i el cub dels deu primers nombres naturals.

4. Indica quins de les següents potències són quadrats i quins són cubs:

a) 7^2 b) 11^2 c) 5^3 d) 5^4 e) 8^2 f) 16^3 g) 10^2

1.3. Lectura de potències

Recorda que:

Les potències es poden llegir de dues maneres:

Exemple:

a) Així 3^2 es pot llegir 3 elevat a 2 i també es llig 3 al quadrat.

b) 11^3 es pot llegir 11 elevat a 3 i també es llig 11 al cub.

c) 6^4 es pot llegir 6 elevat a 4 i també es llig 6 a la quarta.

d) 27^5 es pot llegir 27 elevat a 5 i també es llig 27 a la cinquena.

1.4. Potències d'u i de zero

Recorda que:

Una potència de qualsevol base diferent de zero elevada a zero és igual a 1.

Exemple:

- $9^0 = 1$ $8725^0 = 1$ $1^0 = 1$.

$$\boxed{5^0 = 1}$$

U, elevat a qualsevol exponent, és igual a 1.

Exemple:

- $1^2 = 1 \cdot 1 = 1$ $1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ $1^{35} = 1$ $1^0 = 1$.

$$\boxed{1^{37} = 1}$$

Zero, elevat a qualsevol exponent diferent de zero, és igual a 0.

Exemple:

- $0^2 = 0 \cdot 0 = 0$ $0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$ $0^{35} = 0$.

$$\boxed{0^{54} = 0}$$

Observació: $\mathbf{0^0}$ no se sap quant val, es diu que és una *indeterminació*.

Activitats proposades

5. Llig de dues maneres distintes les potències següents:

a) 8^3 b) 3^2 c) 16^4 d) 48^2 e) 4^5 f) 6^6.

6. Calcula mentalment:

a) 1^{6562}; b) 0^{8526} c) 9327^0 d) 0^{3782}; e) 1^{1000}; f) 9761^0.

7. Completa la taula següent al teu quadern:

a	a^2	a^3	a^4	a^5
2				
	9			
		64		
			1	
				0

1.5. Potències de 10. Notació científica.

Les potències de base 10 tenen una propietat molt particular, són iguals a la unitat seguida de tants zeros com indica l'exponent:

Exemple:

$10^1 = 10$

$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$

$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1.000$

$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10.000$

$$\mathbf{10^8 = 100\,000\,000}$$

Sabries trobar 10^7 sense fer cap operació?

La unitat seguida de zeros és igual a una potència de 10.

Recorda que:

Açò ens permet expressar qualsevol nombre en **forma polinòmica** usant potències de 10.

$$8735 = 8 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 5 = 8 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 5$$

Un nombre en notació **científica** s'expressa com un nombre diferent de zero, multiplicat per una potència de base 10.

Autora: Ana Lorente
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

$a \cdot 10^n$

Exemple:

- Observa com s’utilitza la notació científica als exemples següents:

a) A la Torre Eiffel hi ha 2.500.000 reblons= $25 \cdot 10^5$ reblons

b) La massa de la Terra és:

$$M_T = 5\ 980\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000 \text{ g} = 598 \cdot 10^{25} \text{ g}$$

c) La superfície del globus terrestre és de 500 milions de quilòmetres quadrats, per tant és igual a: 500.000.000 km^2 = $5 \cdot 10^8$ km^2.

Activitats proposades

8. Busca els exponents de les potències següents:

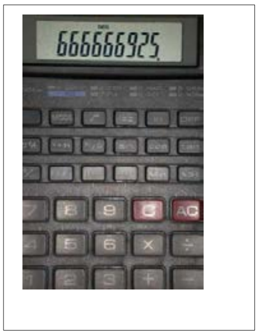
a) $10^{\square} = 100.000$ b) $10^{\square} = 100.000.000$ c) $10^{\square} = 1000$.

9. Expressa en forma polinòmica usant potències de 10:

a) 82.345 b) 3.591.825 c) 700.098 d) 2.090.190.

10. Calcula:

a) $3 \cdot 10^6$ b) $5 \cdot 10^8$ c) $2 \cdot 10^4$ d) $34 \cdot 10^5$.



11. Utilitza la **calculadora** per a obtindre potències successives d’un nombre. Si marques un nombre, a continuació dues vegades seguides la tecla de multiplicar i després la tecla igual obtens el quadrat del nombre.

a) Comprova-ho. Marca **8 * * =** , què obtens?

b) Continua polsant la tecla igual i obtindràs les potències successives:

8 * * = = =...

c) Utilitza la teua calculadora per a obtindre les potències successives de 2.

d) Torna a utilitzar-la per a obtindre les potències successives de 31 i anota-les al teu quadern.

2. OPERACIONS AMB POTÈNCIES I PROPIETATS

2.1. Producte de potències de la mateixa base

Recorda que:

Per a calcular el **producte** de dues o més potències de la mateixa base, es deixa la mateixa base i se sumen els exponents.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$7^3 \cdot 7^4 = 7^{3+4} = 7^7$$

Exemple:

- $6^2 \cdot 6^3 = (6 \cdot 6) \cdot (6 \cdot 6 \cdot 6) = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^{2+3} = 6^5$

2.2. Quocient de potències de la mateixa base

Recorda que:

El **quocient** de potències de la mateixa base és igual a una altra potència de la mateixa base i d'exponent, la diferència dels exponents.

$$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$8^7 : 8^4 = 8^{7-4} = 8^3$$

Exemple:

- $3^5 : 3^3 = \frac{3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3}{3\cdot3\cdot3} = 3^{5-3} = 3^2$

2.3. Elevar una potència a una altra potència

Recorda que:

Per a elevar una **potència** a una altra potència, es deixa la mateixa base i es multipliquen els exponents.

$$(a^n)^m = a^{n\cdot m}$$

$$(9^3)^4 = 9^{3.4} = 9^{12}$$

Exemple:

- $(5^5)^3 = (5^5) \cdot (5^5) \cdot (5^5) = (5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5) \cdot (5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5) \cdot (5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5) = 5^{15}$

Activitats proposades

12. Aplica les propietats de les potències al teu quadern:

a) $8^{10} \cdot 8^2$	b) $5^{23} \cdot 5^3$	c) $2^5 \cdot 2^3 \cdot 2^6$	d) $10^5 \cdot 10^7 \cdot 10^9$
e) $(6^3)^2$	f) $(4^2)^4$	g) $(3^0)^6$	h) $(7^3)^2$
i) $9^{10} : 9^2$	j) $3^{23} : 3^3$	k) $11^8 : 11^3$	l) $5^{30} : 5^9$

Autora: Ana Lorente
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

m) $14^4 : 14^4$ n) $1^{35} : 1^{35}$ o) $7^3 : 7^0$ p) $8^4 \cdot 8^0$

13. T'has preguntat per què un nombre elevat a 0 és igual a 1. Analitza l'operació següent:

$$\frac{25}{25} = \frac{5^2}{5^2} = 5^{2-2} = 5^0$$

i també

Per aqueix motiu es diu que tot nombre diferent de zero elevat a zero és igual a u.

2.4. Potència d'un producte

Recorda que:

La potència d'un **producte** és igual al producte de cada un dels factors elevats al mateix exponent.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Exemple:

- $(6 \cdot 7)^3 = 6^3 \cdot 7^3$.

2.5. Potència d'un quocient

Recorda que:

La potència d'un **quocient** és igual al quocient de cada un dels factors elevats al mateix exponent.

$$(a : b)^n = a^n : b^n$$

Exemple:

- $(7 : 9)^3 = 7^3 : 9^3$

2.6. Potències de nombres enters

Recorda que:

Per a calcular la **potència d'un nombre enter** es multiplica la base per si mateixa tantes vegades com indique l'exponent.

Exemple:

- $(+3)^4 = (+3) \cdot (+3) \cdot (+3) \cdot (+3) = +81$
- $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

Convé tindre en compte algunes particularitats que ens ajuden a abreviar el càlcul:

Autora: Ana Lorente
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Les potències de **base positiva** són nombres positius.

Les potències de **base negativa** i exponent **parell** són nombres positius.

Les potències de **base negativa** i exponent **imparell** són nombres negatius

$(+2)^4 = +16$ $(-2)^4 = +16$

$(-2)^5 = -32$

Exemple:

- $(-4)^2 = +16$
- $(-4)^3 = -64$

Activitats proposades

14. Calcula:

a) $(5 \cdot 2)^7$ b) $(64 : 4)^3$.

15. Calcula **mentalment**

a) $2^3 \cdot 2^3$ b) $3^2 \cdot 3^2$ c) $5^2 \cdot 5^2$

d) $10^{31} \cdot 10^{40} \cdot 10^4 \cdot 10^2$ e) $1^{20} \cdot 1^{27} \cdot 1^{18}$ f) $0^{41} \cdot 0^{86}$.

16. Escriu en forma d’una única potència

a) $7^5 \cdot 7^6 \cdot 7^4$ b) $6^4 \cdot 6^6 \cdot 6^7$ c) $5^{20} \cdot 5^{17}$ d) $8^6 \cdot 2^5 \cdot 2^3$.

17. Calcula **mentalment**

a) $2^3 \cdot 2^2 \cdot 2$ b) $1^4 \cdot 1^6 \cdot 1^7$ c) $10^{15} \cdot 10^5$ d) $0^2 \cdot 0^6 \cdot 0^{12}$.

18. Calcula **mentalment**

a) $10^5 \cdot 10^3 \cdot 10^2$ b) $0^3 \cdot 0^7 \cdot 0^8$ c) $1^{46} \cdot 1^{200}$ d) $5^5 \cdot 2^5$.

19. Escriu en forma d’una única potència i calcula:

a) $2^5 \cdot 5^5$ b) $10^3 \cdot 3^3$ c) $2^6 \cdot 5^6$ d) $10^5 \cdot 5^5$.

20. Escriu en forma d’una única potència:

a) $\dfrac{3^7 \cdot 3^{11} \cdot 3^0}{3^5 \cdot 3^3}$ b) $\dfrac{1{,}6^6 \cdot 1{,}6^{20} \cdot 1{,}6^1}{1{,}6^{15} \cdot 1{,}6^9}$ c) $\dfrac{(2/3)^5 \cdot (2/3)^{15} \cdot (2/3)^2}{(2/3)^{10} \cdot (2/3)^6}$

21. Escriu en forma d’una única potència:

a) $\dfrac{(-3)^7 \cdot (-3)^{11} \cdot (-3)^0}{(-3)^5 \cdot (-3)^3}$ b) $\dfrac{(-1{,}6)^6 \cdot (-1{,}6)^{20} \cdot (-1{,}6)^1}{(-1{,}6)^{15} \cdot (-1{,}6)^9}$ c) $\dfrac{(-2/3)^5 \cdot (2/3)^{15} \cdot (-2/3)^2}{(2/3)^{10} \cdot (-2/3)^6}$

22. Calcula utilitzant la **calculadora**

a) $41^3 \cdot 41^2 \cdot 41$ b) $53^3 \cdot 53^2$ c) $5'2^2 \cdot 5'2$ d) $27^3 \cdot 27$.

23. Calcula utilitzant la **calculadora**

a) $58^2 \cdot 58^3 \cdot 58$ b) $23^4 \cdot 23^2$ c) $0'6^3 \cdot 0'6^5$ d) $301^2 \cdot 301$.

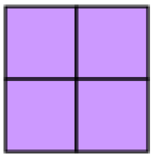
24. Calcula utilitzant la **calculadora**

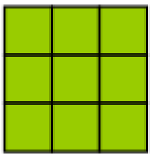
a) $7{,}4^2 \cdot 7{,}4^3 \cdot 7{,}4$ b) $0{,}82^4 \cdot 0{,}82^2$ c) $7{,}35^3 \cdot 7{,}35^5$ d) $0{,}002^2 \cdot 0{,}002$.

Autora: Ana Lorente
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

3. ARRELS

3.1. Quadrats perfectes





- Si es vol construir un quadrat de costat 2, quants quadrats xicotets es necessiten?

Necessitem 4. El 4 és un **quadrat perfecte**. Observa que $2^2 = 4$.

- Si volem construir ara un quadrat de costat 3, quants quadrats xicotets necessitem? Necessitem 9. El 9 és també un quadrat perfecte. Observa que $3^2 = 9$.

Exemple:

- Quina és l'àrea d'un quadrat de 7 metres de costat?

La seua àrea val $7 \cdot 7 = 7^2 = 49$ metres quadrats.

3.2. Arrel quadrada. Interpretació geomètrica

Recorda que:

L'arrel quadrada **exacta** d'un nombre *a* és un altre nombre *b* el quadrat del qual és igual al primer:

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$$

Exemple:

- En poder construir un quadrat de costat 2 amb 4 quadrats xicotets es diu que 2 és l'arrel quadrada de 4, ja que $2^2 = 4$, i per tant diem que 2 és *l'arrel quadrada* de 4, és a dir:

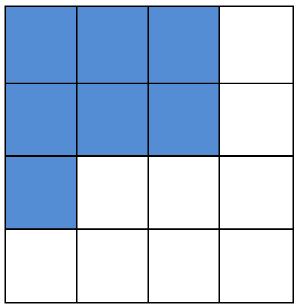
$$\sqrt{4} = 2.$$

Obtindre l'arrel quadrada exacta és l'operació oposada d'elevar al quadrat.

- Per tant com $3^2 = 9$ llavors $\sqrt{9} = 3$.
- En escriure $\sqrt{64} = 8$ es diu que *l'arrel quadrada* de 64 és 8.

Al signe √ se li denomina **radical**, s'anomena **radicand** al nombre col·locat davall, en aquest cas 64 i es diu que el **valor de l'arrel** és 8.

Exemple:



- Sabem que l'àrea d'un quadrat és 81, quant val el seu costat?

El seu costat valdrà l'arrel quadrada de 81. Com $9^2 = 81$, llavors l'arrel quadrada de 81 és 9. El costat del quadrat és 9.

Exemple:

- Es pot construir un quadrat amb 7 quadrats xicotets?

Autora: Ana Lorente
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Observa que es pot formar un quadrat de costat 2, però sobren 3 quadrats xicotets, i que per a fer un quadrat de costat 3 falten 2 quadrats xicotets.

El nombre 7 no és un quadrat perfecte, no té arrel quadrada exacta perquè amb 7 quadrats xicotets no es pot construir un quadrat.

És més, aquells nombres naturals que no tenen arrel quadrada exacta, la seua expressió decimal és un nombre irracional, amb infinites xifres decimals no periòdiques.

Però podem afirmar que $2 < \sqrt{7} < 3$.

Com 4 és un quadrat perfecte i $\sqrt{4} = 2$, i 9 és també un altre quadrat perfecte i $\sqrt{9} = 3$, els nombres, 5, 6, 7, i 8 no són quadrats perfectes i la seua arrel quadrada és un nombre irracional.

Amb més dificultat es pot aproximar aqueixos valors, així $2,6 < \sqrt{7} < 2,7$, o podem obtindre més xifres decimals: $2,64 < \sqrt{7} < 2,65$, o bé $2,64575131 < \sqrt{7} < 2,64575132$. Podem trobar un valor aproximat de l'arrel.

Per a calcular arrels quadrades pots utilitzar la calculadora, amb la tecla $\sqrt{\ }$

És important conèixer els quadrats perfectes, perquè mentalment, t'ajuda a saber entre quins valors enters està l'arrel quadrada que vols calcular.

Observa que:

El quadrat d'un nombre, positiu o negatiu, és sempre un nombre positiu. Després no hi ha l'arrel quadrada d'un nombre negatiu.

Activitats proposades

25. Escriu la llista dels 12 primers quadrats perfectes.

26. Calcula **mentalment** al teu quadern les arrels següents:

a) $\sqrt{49}$ b) $\sqrt{25}$ c) $\sqrt{100}$ d) $\sqrt{64}$ e) $\sqrt{81}$ f) $\sqrt{1}$ g) $\sqrt{0}$.

27. Calcula **mentalment** al teu quadern les aproximacions enteres de les arrels següents:

a) $\sqrt{51}$ b) $\sqrt{27}$ c) $\sqrt{102}$ d) $\sqrt{63}$ e) $\sqrt{80}$ f) $\sqrt{2}$ g) $\sqrt{123}$.

28. Indica quines arrels quadrades seran nombres naturals, quines, números irracionals i quines no existeixen:

a) $\sqrt{36}$ b) $\sqrt{-25}$ c) $\sqrt{-100}$ d) $\sqrt{32}$ e) $\sqrt{-7}$ f) $\sqrt{10}$ g) $\sqrt{100}$.

3.3. Arrel *n*-èsima d'un nombre

Recorda que:

- Com 2^3 = 8 es diu que $\sqrt[3]{8} = 2$ que es llig: l'arrel *cúbica* de 8 és 2. El **radicand** és 8, el valor de **l'arrel** és 2 i 3 és **l'índex**.

$$\sqrt[3]{8} = 2 \text{ perquè } 2^3 = 8$$

L'***arrel enèsima*** d'un nombre *a*, és un altre nombre *b*, la potència enèsima del qual és igual al primer.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Exemple:

- Per ser 27 = 3^3, es diu que 3 és l'arrel *cúbica* de 27, és a dir $\sqrt[3]{27} = 3$.
- Per ser 16 = 2^4, es diu que 2 és l'arrel *quarta* de 16, és a dir $\sqrt[4]{16} = 2$.

Observa que:

Si *n* és un nombre parell, la potència *n*-èsima d'un nombre, positiu o negatiu, és sempre un nombre positiu, per tant no hi ha l'arrel *n*-èsima d'un nombre negatiu.

Però si *n* és un nombre imparell, la potència *n*-èsima d'un nombre, si pot ser negativa.

Exemple:

- $\sqrt[3]{-27} = -3$ ja que $(-3)^3 = -27$.
- $\sqrt[5]{-32} = -2$ ja que $(-2)^5 = -32$.
- $\sqrt[4]{-16}$ no existeix ja que cap nombre, elevat a 4, done –16.

3.4. Introduir factors en el radical

Recorda que:

Per a introduir un nombre dins del radical s'eleva el nombre a l'índex de l'arrel i es multiplica pel radicand.

Exemple:

- $10\sqrt{3} = \sqrt{10^2 \cdot 3} = \sqrt{300}$

3.5. Extraure factors del radical

Recorda que:

Per a extraure nombres d'un radical és necessari descompondre el radicand en factors:

Exemple:

- $\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = \sqrt{2^4 \cdot 5} = 2^2\sqrt{5}$

Autora: Ana Lorente
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

3.6. Suma i resta de radicals

Recorda que:

Diem que dos radicals són semblants si tenen el mateix índex i el mateix radicand.

Per a sumar i restar radicals, aquests han de ser semblants; en aqueix cas, s'operen els coeficients i es deixa el mateix radical.

Atenció, un error molt comú: l'arrel d'una suma (o una resta) **NO** és igual a la suma (o la resta) de les arrels:

$$10 = \sqrt{100} = \sqrt{64+36} \neq \sqrt{64} + \sqrt{36} = 8 + 6 = 14$$

Activitats proposades

29. Calcula mentalment al teu quadern les arrels següents:

a) $\sqrt[4]{81}$ b) $\sqrt[4]{16}$ c) $\sqrt[3]{64}$ d) $\sqrt[3]{8}$ e) $\sqrt[3]{1000}$ f) $\sqrt[5]{1}$ g) $\sqrt[3]{0}$.

30. Introduir els següents factors al radical:

a) $2\cdot\sqrt[4]{5}$ b) $10\cdot\sqrt[3]{3}$ c) $2\cdot\sqrt[3]{4}$ d) $5\cdot\sqrt[5]{4}$ e) $3\cdot\sqrt[3]{7}$.

31. Extraure els factors que es puga del radical:

a) $\sqrt[3]{10000x^9y^3}$ b) $\sqrt[5]{100000}$ c) $\sqrt[4]{81a^8b^6c^4}$ d) $\sqrt[3]{1000a^7b^4}$.

32. Calcula:

a) $3\sqrt{8} + 5\sqrt{32} - 6\sqrt{2}$ b) $4\sqrt{27} + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{81}$.

Autora: Ana Lorente
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

CURIOSITATS. REVISTA

Història de l'escacs

Conta la llegenda que un súbdit va ensenyar a jugar als escacs al príncep persa Sisso, fill de Dahir, i li va agradar tant el joc que va prometre regalar-li el que demanara. El súbdit va dir, vull un gra de blat per la primera casella del tauler, dos per la segona, el doble per la tercera, així fins a arribar a la casella 64.

A Sisso no li va parèixer una demanda excessiva, i no obstant això no hi havia blat suficient al regne per a pagar això!

a) Com s'ha de representar el càlcul?

b) Quants grans de blat li donen per la casella primera? I per la casella segona? I per la tercera? I per la suma de les tres primeres caselles?

c) Quants grans de blat corresponen a la casella 10?

d) I a la 64? Utilitza la calculadora per a intentar calcular aqueix nombre, què ocorre?

El secret

A l'hotel d'una xicoteta ciutat d'uns 1000 habitants arriba un famós cantant intentant passar desapercebut.

Quan entra a la seua habitació, un empleat creu reconèixer-li i s'afanya a comentar-ho amb tres companys.

Les tres persones en arribar a les seues cases (en el que tarden 10 minuts) parlen amb els seus veïns i veïnes, telefonen a amics i amigues i cada un conta la notícia a altres tres persones.

Aquestes al seu torn, als següents 10 minuts, cada una d'elles conta la notícia a 3 persones.

El rumor passa dels uns als altres, i d'aquesta manera, una hora després la notícia és sabuda per quantes persones?

Té possibilitats el cantant de passar desapercebut en alguna part de la ciutat?

Endevina

a) Quin és el nombre més gran que pot escriure's utilitzant quatre uns?

b) Quin és el nombre més gran que pot escriure's utilitzant quatre dosos?

c) I cinc dosos?

Altres nombres enormes

Un mosquit femella posa al dia 200 ous de què ixen femelles, que al cap de 3 dies ja són nous mosquits femelles capaços de posar ous. Utilitza la teua calculadora per a anar obtenint la població de mosquits femelles: a) Al cap de 3 dies, 200 noves femelles, i al cap de 6 dies? I als 9 dies? I en un mes (de 30 dies)?

Observa en què poc de temps la teua calculadora comença a escriure coses rares. Ja no li cap aqueix nombre tan gran! Té un **creixement exponencial**. Si els mosquits no tingueren enemics i no tingueren competència pels aliments, prompte ocuparien tot l'espai.

RESUM

Potència	Una potència a^n de base un nombre real a i exponent natural n és un producte de n factors iguals a la base	$7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3$. 7 és la base i 3 l'exponent
Quadrats i cubs	Les potències d'exponent 2 s'anomenen quadrats i les d'exponent 3, cubs	7^2 és 7 al quadrat i 7^3 és 7 al cub.
Potències d'1 i de 0	Qualsevol nombre diferent de zero elevat a 0 és igual a 1. El nombre 1 elevat a qualsevol nombre és igual a 1. El nombre 0 elevat a qualsevol nombre diferent de zero és igual a 0.	$145^0 = 1$; $1^{395} = 1$; $0^{7334} = 0$.
Potències de base 10	Una potència de base 10 és igual a la unitat seguida de tants zeros com a unitats té l'exponent. La unitat seguida de zeros és igual a una potència de 10.	$10^6 = 1.000.000$ $10000000 = 10^7$
Notació científica.	Per a escriure un nombre en notació científica s'expressa com un nombre diferent de zero, multiplicat per una potència de base 10.	$3\,000\,000 = 3 \cdot 10^6$.
Producte de potències de la mateixa base	Per a multiplicar potències de la mateixa base es deixa la mateixa base i se sumen els exponents.	$9^2 \cdot 9^3 = (9 \cdot 9) \cdot (9 \cdot 9 \cdot 9) = 9^{2+3} = 9^5$
Quocient de potències de la mateixa base	Per a dividir potències de la mateixa base, es deixa la mateixa base i es resten els exponents.	$23^8 : 23^7 = 23^{8-7} = 23^1$
Elevar una potència a una altra potència	Per a calcular la potència d'una altra potència, es deixa la mateixa base i es multipliquen els exponents.	$(5^4)^6 = 5^{24}$
Arrel quadrada	L'arrel quadrada d'un nombre a és un altre nombre b que en elevar-lo al quadrat ens dóna a.	$\sqrt{9} = 3$ $\sqrt{81} = 9$
Arrel *n*-èsima	$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$	$\sqrt[3]{8} = 2 \Leftrightarrow 2^3 = 8$
Introduir i extraure factors en radicals	$10\sqrt[3]{2} = \sqrt{10^3 \cdot 2} = \sqrt{2000}$	$\sqrt[4]{405} = \sqrt[4]{81 \cdot 5} = 3\sqrt[4]{}$

Autora: Ana Lorente
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

EXERCICIS I PROBLEMES de 2º d'ESO

Potències

1. Escriu en forma de potències de 10:

a) Un milió b) Un bilió c) Una centena de miler

2. Calcula al teu quadern les potències següents:

a) 25^0 b) 10^6 c) $5 \cdot 10^4$ d) 2^4 e) 4^2

f) 10^2 g) 10^5 h) 10^{12} i) 10^6 j) 6^3

3. Escriu al teu quadern una aproximació de les següents quantitats, mitjançant el producte d'un nombre per una potència de 10.

a) 600000000 b) 250000000 c) 914000000000

4. Escriu al teu quadern una aproximació abreviada de les quantitats següents:

a. La distància de la Terra al Sol → 150 000 000 km

b. El nombre d'àtoms que hi ha en un gram d'oxigen.

37643750 000 000 000 000 000 àtoms

5. Troba al teu quadern:

a) $(2^5 : 2)^3 \cdot 2^4$ b) $(7^4)^2$ c) $6^5 : 3^5$

d) $(9 : 3)^5$ e) $(15 : 5)^3$ f) $(21 : 7)^3$

g) $(75 : 5)^4$ h) $(4 : 2)^5$ i) $8^2 : 2^5$

6. Calcula $(4^3)^2$ i 4^{3^2} Són iguals? La potenciació té la propietat associativa?

7. Escriu al teu quadern el resultat en forma de potència:

a) $36 \cdot 6^2$ b) $3^3 \cdot 81$ c) $36 : 6^2$

8. Factoritza i expressa com un producte de potències de base 2, 3 i 5:

a.) $12^7 : 6^7$ b) $(2^5 \cdot 2^2) : 16$ c) $(5^6 \cdot 36) : 10^4$ d) $(16 \cdot 4^2) : 2^5$

9. Calcula:

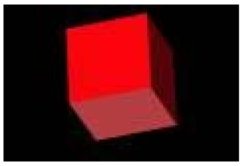
a) $(2 + 3)^2$ y $2^2 + 3^2$ Són iguals?

b) Calcula $6^2 + 8^2$ i $(6 + 8)^2$ Són iguals?

10. Calcula al teu quadern:

a) $2^3 + 2^4$ b) $3^5 – 3^4$ c) $5^3 \cdot 5^2$ d) $10^4 \cdot 10^3$ e) $7^4 : 7^2$ f) $10^5 : 10^3$

11. La superfície de la cara d'un cub mesura 36 cm quadrats. Quin és el seu volum?



12. Calcula al teu quadern:

a) $(2^3 \cdot 8 \cdot 2^5) : (2^6 \cdot 2^3)$ b) $(5^2 \cdot 5^4 \cdot 5) : (5 \cdot 5^2 \cdot 5)$

13. Calcula 5^3 i 3^5 Són iguals? Es poden intercanviar la base i l'exponent en una potència? Calcula $5 \cdot 3$ i $3 \cdot 5$ Són iguals?

14. Descompon en factors primers, utilitzant potències: 12; 36; 48; 100; 1000; 144.

15. Efectua les següents operacions amb potències donant el resultat en forma de potència d'una sola base, la que cregues més adequada en cada cas:

a) $(5^3 \cdot 5^2)^3$ b) $(16^2 : 4^3)^3$ c) $(9^2 : 3^3)^2$

d) $(2^5 : 2^2)^3$ e) $3{,}7^5 \cdot 3{,}7^2$ f) $(2{,}5^5 \cdot 2{,}5^2) : 2{,}5$

16. Efectua les següents operacions donant el resultat com una única potència:

a) $(7^{12} \cdot 49^3)^6$ b) $9^4 \cdot 27^2$ c) $(5^{10} \cdot 5^2)^2$

d) $(7^{10} : 7^2)^2$ e) $(9^5 \cdot 81^2)^3$ f) $(6^7 \cdot 36^5)^3$

17. Un camp quadrat mesura 3600 metres quadrats. Quants metres de tanca és necessari comprar per a tancar-lo?

18. A quin nombre cal elevar 2^2 per a obtindre 4^4? I per a obtindre 8^8?

19. Dibuixa quadrats de costats 5, 6, 7 i 10 i indica quants quadradets de costat 1 contenen.

Autora: Ana Lorente
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Arrels

20. Calcula al teu quadern:

a) $\sqrt{121}$ b) $\sqrt{49}$ c) $\sqrt{1}$ d) $\sqrt{0}$

e) $\sqrt{169}$ f) $\sqrt{196}$ g) $\sqrt{36}$ h) $\sqrt{144}$

21. La superfície d'un quadrat és de 1000000 metres quadrats, Quant mesura el seu costat? I el seu perímetre?

22. Calcula al teu quadern les arrels següents:

a) $\sqrt[5]{32}$ b) $\sqrt[3]{1000}$ c) $\sqrt{625}$

d) $\sqrt[4]{81}$ e) $\sqrt[3]{27}$ f) $\sqrt{1000000}$

23. Extrau al teu quadern factors dels radicals següents:

a) $\sqrt{60}$ b) $\sqrt{250}$ c) $\sqrt[3]{125a^6b^5c^3}$ d) $\sqrt[3]{8a^4b^7c^1}$

e) $\sqrt{49b^5x^8}$ f) $\sqrt[3]{125b^6c^5}$ g) $\sqrt[3]{216b^4x^7}$ h) $\sqrt[4]{81b^5m^9}$

24. Introdueix els següents factors al radical:

a) $3x\sqrt{x}$ b) $5\sqrt{100}$ 5 c) $6\sqrt{32}$ d) $4\sqrt{20}$

e) $2\sqrt[3]{3}$ f) $7a\sqrt[3]{3}$ g) $5\sqrt[5]{2^4}$ h) $a\sqrt[3]{5}$

25. Dibuixa al teu quadern quadrats d'àrea 36, 49, 64 i 100 unitats.

26. Escriu el signe = o ≠ al buit:

a) $\sqrt{64+36} \;\square\; \sqrt{64}+\sqrt{36}$. b) $\sqrt{9+16} \;\square\; \sqrt{9}+\sqrt{16}$.

27. Calcula al teu quadern:

a) $9\sqrt{20}+2\sqrt{80}-4\sqrt{180}$ b) $30\sqrt{27}+9\sqrt{3}-23\sqrt{12}$

c) $5\sqrt{2}-7\sqrt{8}+12\sqrt{50}$ d) $6\sqrt{28}-2\sqrt{63}+4\sqrt{7}$

28. Calcula al teu quadern:

a) $5\cdot\sqrt{16}-32:2^3+2\sqrt{144}+\sqrt{49}$ b) $3\cdot 10^2-5\cdot\sqrt{64}+7^0$

c) $5\cdot 3^2-2\cdot(1+\sqrt{36})-2$ d) $32:2^3-2\cdot\sqrt{25}+2^2$

Autora: Ana Lorente
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Problemes

29. Un xalet està edificat sobre una parcel·la quadrada de 7 225 m^2 d'àrea. Quant mesura el costat de la parcel·la?

30. L'hotel dels embolics: Un hotel tenia infinites habitacions totes ocupades. Un client graciós s'alça a la nit i obri totes les portes. Un altre client s'alça també i tanca les portes parells. Un tercer client s'alça i modifica les portes que són múltiples de 3, si estan obertes, les tanca, i si les troba tancades, les obri. Un quart client el mateix, però amb les que són múltiple de 4. I així tota la nit, tots els clients. Al matí següent com estan les portes? Quines portes estan obertes?

31. Calcula en quilòmetres i notació científica la distància que hi ha des de la Terra al Sol sabent que la velocitat de la llum és aproximadament de 300 000 km/s i que la llum del Sol tarda 8,25 minuts a arribar a la Terra.

32. Troba el volum d'un cub de 1,5 m d'aresta.

33. Una parcel·la és quadrada, i la mesura de la seua àrea és 8 100 m^2. Troba l'àrea d'una altra parcel·la el costat del qual siga el doble.

34. La superfície de la cara d'un cub mesura 49 cm quadrats. Quin és el seu volum?

35. Joan fa dissenys de jardins amb plantes formant quadrats. Li sobren 4 plantes en formar un quadrat i li falten 9 per a formar un altre amb una planta més per costat. Quantes plantes té? T'ajudarà a saber-ho fer un dibuix.

36. Manel té una habitació quadrada. Amb 15 taulells quadrades més tindria un taulell més per costat. Quantes té? T'ajudarà a saber-ho fer un dibuix.

37. **Arquimedes**, al seu tractat *L'arenari* comptava una manera per a expressar nombres molt grans, com el nombre de grans d'arena que hi ha en tota la Terra. És, efectivament, un nombre molt gran, però no infinit. Imagina que tota la Terra està formada per grans d'arena. Pots calcular el seu volum coneixent el seu radi que és de 6500 km. Recorda, el volum d'una esfera és $(4/3)\pi r^3$.

a) Calcula el volum de la Terra en km^3, i escriu aqueix volum en notació exponencial.
b) Passa el volum a mm^3, en notació exponencial.
c) Estima quants grans d'arena caben en 1 mm^3. Suposa que, per exemple, caben 100 grans.
d) Calcula quants caben en tota la Terra multiplicant el volum en mm^3 per 100.
e) Has obtingut $1{,}15 \cdot 10^{32}$ grans d'arena?

Autora: Ana Lorente
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

AUTOAVALUACIÓ de 2n

1. Quin és el resultat de les tres potències següents $(–2)^4$, $(–4)^3$ i $(–5)^2$

a) –16, –12, 25 b) 16, –64, 25 c) 32, –64, 10 d) –64, –32, –26

2. Quin és el resultat de l'operació $4·10^2 + 5·10^2$?

a) 900 b) $9·10^4$ c) $20·10^2$ d) 500

3. Escriu = (igual) o ≠ (distint) segons corresponga:

a) 3^3 □ 27 b) 1^{35} □ 35 c) 732^0 □ 732 d) 10^5 □ 50

4. Quina de les respostes correspon a la multiplicació $(–3)^3 · (–3)^2 · (–3)^5$?

a) $(–3)^{30}$ b) $(–9)^{10}$ c) 3^{10} d) –19683

5. Quina de les respostes correspon a la divisió $0'7^6 : 0'7^4$?

a) $0'7^2$ b) $0'7^2$ c) $0'7^{10}$ d) 6/4

6. Quina de les solucions és la correcta per a l'operació $((–5) · (–2) · (–1))^3$?

a) –1000 b) –30 c) 100 d) 60

7. Tria la resposta que corresponga al resultat de $((–0'2)^2)^4$

a) $(0'2)^8$ b) $(–0'2)^6$ c) 0'032 d) –0'0016

8. L'arrel quadrada de 81 val?

a) 18 b) 8,7 c) 9 d) 3

9. Assenyala el nombre que no és quadrat perfecte:

a) 169 b) 441 c) 636 d) 1024 e) 700

10. El costat d'una superfície quadrada de 196 centímetres quadrats mesura:

a) 19 cm b) 14 cm c) 13 cm d) 17 cm

2n ESO

Capítol 4: DIVISIBILITAT

Autora: Fernanda Ramos

Revisors: Sergio Hernández, Milagros Latasa i Nieves Zuasti

Il·lustracions: Banc d'imatges de l'INTEF

Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Índex

Resum

Jaume, Maria i Raquel visitaran la seua iaia sovint. Jaume va cada 2 dies, Maria cada 4 i Raquel només va un dia a la setmana. Un dia que van coincidir els tres, van comentar que mai havien menjat un pastís tan ric com el que fa la seua iaia. Ella va afirmar: "El pròxim dia que torneu a coincidir, el torne a fer". Quan podran tornar a disfrutar del pastís?

Fotografia: Clarisa Rodrígues

En aquest capítol aprendrem a resoldre problemes semblants a aquest i aprofundirem en la taula de multiplicar mitjançant conceptes com: divisibilitat, factorització o nombres primers.

Descobriràs alguns dels grans secrets dels nombres i mai t'imaginaries que la taula de multiplicar amagara tants misteris ocults...

Autora: Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

1. DIVISIBILITAT

1.1. Múltiples i divisors d'un nombre enter

Múltiples d'un nombre

Recordes molt bé les taules de multiplicar de tots els nombres?

- Escriu al teu quadern la del 3 i la del 6.

Sense donar-te compte, has escrit alguns dels múltiples de 3 i de 6.

Es defineixen els **múltiples** d'un nombre enter ***n*** com els nombres que resulten de multiplicar aqueix nombre ***n*** per tots els nombres enters.

Exemple:

- La taula del 3 que has escrit abans està formada pels valors:

  0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54,….

Tots ells són múltiples de 3.

La notació matemàtica d'aquest concepte és: $\dot{3}$

És a dir: $\dot{3} = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, ...\}$.

Exemple:

- Conta els múltiples de 3 que hagueres pogut escriure abans. És possible fer-ho?

Efectivament, els múltiples que té cada nombre enter són una quantitat infinita.

Activitats proposades

1. Calcula els set primers múltiples d'11 i de 7.

2. Quins dels següents nombres són múltiples de 15?

15, 16, 30, 40, 45, 100, 111, 141, 135.

3. Troba els múltiples de 12 compresos entre 13 i 90.

Divisors enters d'un nombre

Un nombre enter ***a*** és **divisor** d'un altre nombre enter ***b*** quan en dividir ***b*** entre ***a***, el residu és 0.

Nota

Tot nombre té sempre com divisor a 1 i a si mateix.

Exemple:

3 és **divisor** de 9 perquè en dividir 9 entre 3, el residu és 0.

10 és **divisor** de 100 perquè en dividir 100 entre 10, el residu és 0.

7 és **divisor** de 49 perquè en dividir 49 entre 7, el residu és 0.

1 és **divisor** de 47 perquè en dividir 47 entre 1, el residu és 0.

47 és **divisor** de 47 perquè en dividir 47 entre 47, el residu és 0

Si ***a*** es **divisor** de ***b***, doncs també es diu que ***b*** és **divisible** per ***a***.

Exemple:

a) 9 és **divisible** per 3 perquè 3 és divisor de 9, és a dir, en dividir 9 entre 3, el residu és 0.

b) 100 és **divisible** per 10 perquè 10 és divisor de 100, és a dir en dividir 100 entre 10, el residu és 0.

c) 49 és **divisible** per 7 perquè 7 és divisor de 49, és a dir, en dividir 49 entre 7, el residu és 0.

Notes

Com hauràs deduït, les relacions ser ***múltiple*** i ser ***divisor*** són relacions inverses.

No confongues les expressions ser múltiple, ser divisor i ser divisible. Vegem-ho amb un exemple:

Exemple:

- De la igualtat: $3 \cdot 7 = 21$, podem deduir el següent:
    - 3 i 7 són divisors de 21.
    - 21 és múltiple de 3 i de 7.
    - 21 és divisible per 3 i per 7.

Activitats proposades

4. A partir de la igualtat: $5 \cdot 8 = 40$, escriu les relacions que existeixen entre aquests tres nombres.

5. Escriu frases usant les expressions: "*ser múltiple de*", "*ser divisor de"* i "*ser divisible per*" i els nombres 27, 3 i 9.

1.2. Criteris de divisibilitat

Per a veure si un nombre enter és divisible per un altre nombre enter, només hi ha que dividir-los i veure si el residu és 0. Però quan els nombres són grans, les operacions poden resultar complicades.

La tasca se simplifica si tenim en compte els anomenats **criteris de divisibilitat** que ens permeten saber si un nombre és divisible per un altre sense necessitat d'efectuar la divisió.

Criteri de divisibilitat per 2

Un nombre enter és divisible per **2** quan la seua última xifra és 0 o xifra parell.

Exemple:

Els nombres: 492, 70, 376, 900, 564, 298 són divisibles per 2, ja que acaben en 2, 0, 6, 0, 4, i 8.

Sabries explicar per què?

Recorda que un nombre qualsevol el podem escriure amb les potències de 10:

$$4652031 = 4 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 1$$

Observa que en tots els sumands, excepte l'últim, apareix el 10, i $10 = 2 \cdot 5$, per tant tots els sumands són múltiples de 2. Si l'últim ho és, el nombre és múltiple de 2, si, com a l'exemple, acaba en 1, encara que la resta dels sumands siga divisible entre 2, l'últim no ho és, per tant el nombre no és divisible entre 2.

Criteri de divisibilitat per 3

Un nombre enter és divisible per **3** quan la suma de les seues xifres és múltiple de 3.

Exemple:

- El nombre 531 és divisible per 3 ja que 5 + 3 + 1 = 9 que és múltiple de 3.
- El nombre 4002 és divisible per 3 ja que 4 + 0 + 0 + 2 = 6 que és múltiple de 3.

Si en sumar les xifres obtens un nombre encara gran i no saps si és o no múltiple de 3, pots tornar a aplicar el mateix sistema, només has de tornar a sumar totes les seues xifres:

- El nombre 99 és divisible per 3 ja que 9 + 9 = 18, i 18 és divisible per 3, perquè 1 + 8 = 9 que és múltiple de 3. Per tant, 9, 18 i 99 són múltiples de 3.
- El nombre 48593778396 és divisible per 3 ja que 4+8+5+9+ 3 + 7 + 7 + 8 + 3 + 9 + 6 =69, i 69 és divisible per 3 perquè 6 + 9 = 15, i 15 ho és perquè 1 + 5 = 6, que és múltiple de 3.

Criteri de divisibilitat per 4

Un nombre enter és divisible per **4** si el nombre format per les dues últimes xifres del nombre considerat és múltiple de 4.

Exemple:

- El nombre 5728 és divisible per 4 ja que acaba en 28, que és múltiple de 4, ja que $7 \cdot 4 = 28$.
- El nombre 5718 **no** és divisible per 4 ja que acaba en 18, que no és múltiple de 4, ja que $4 \cdot 4 = 16$ i $5 \cdot 4 = 20$.

Autora: Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Criteri de divisibilitat per 5

Un nombre enter és divisible per **5** quan acaba en 0 o en 5.

Exemple:

Els nombres 3925 i 78216570 són divisibles per 5, perquè acaben en 5 i en 0.

Criteri de divisibilitat per 6

Un nombre enter és divisible per **6** quan ho és al mateix temps per 2 i per 3.

Exemple:

El nombre 5532 és divisible per 6 ja que:

Ho és per 2 perquè acaba en 2.

Ho és per 3, ja que les seues xifres sumen 15 que és múltiple de 3.

El nombre 2456 **no** és divisible per 6 ja que:

Ho és per 2 perquè acaba en 6.

No ho és per 3, ja que les seues xifres sumen 2 + 4 + 5 + 6 = 17, i 1 + 7 = 8 que no és múltiple de 3.

Criteri de divisibilitat per 9

Un nombre enter és divisible per **9** quan la suma de les seues xifres és 9 o múltiple de 9

Exemple:

- El nombre 5022 és divisible per 9 ja que: 5 + 0 + 2 + 2 = 9.
- El nombre 3313 **no és** divisible per 9 ja que: 3 + 3 + 1 + 3 = 10 que no és múltiple de 9.

Criteri de divisibilitat per 10

Un nombre enter és divisible per **10** quan acaba en 0

Exemple:

El nombre 825160 és divisible per 10 perquè acaba en 0.

Nota

Observa que els nombres que són divisibles per 10 ho són per 2 i per 5 i viceversa, si un nombre és divisible per 2 i per 5, ho és per 10.

Criteri de divisibilitat per 11

Un nombre enter és divisible per **11** quan la diferència entre la suma de les xifres que ocupen lloc imparell i la suma de les xifres que ocupen lloc parell dóna 0 o múltiple d’11

Exemple:

- El nombre 71335 és divisible per 11 ja que: (7 + 3 + 5) – (1 + 3) = 15 – 4 = 11.
- El nombre 71345 **no** és divisible per 11 ja que:(7+3+5)–(1+4)=15–5=10, que no és múltiple d’11.

Activitats proposades

6. Digues quals dels següents nombres són múltiples de 3:

21, 24, 56, 77, 81, 90, 234, 621, 600, 4520, 3411, 46095, 16392, 385500

Els nombres triats, coincideixen amb els divisors de 3? I amb els que són divisibles per 3?

7. Escriu quatre nombres que siguen divisibles per 10 i per 7 al mateix temps.

8. Substitueix *A* per un valor apropiat perquè:

a) 15*A*72 siga múltiple de 3.

b) 2205*A* siga múltiple de 6.

c) 6*A*438 siga múltiple d'11.

9. Tots els nombres divisibles per 2 ho són per 4? I al contrari? Raona la resposta.

10. Sabries deduir un criteri de divisibilitat per 15? Posa un exemple.

11. Completa al teu quadern la següent taula escrivint verdader o fals:

Nombre	És…?	Verdader/Fals
984486728	Divisible per 2	
984486725	Divisible per 5	
984486720	Divisible per 3	
783376500	Divisible per 6	
984486728	Divisible per 4	
23009845	Divisible per 11	

12. Intenta explicar per què es verifica el criteri de divisibilitat per 5.

13. Per a explicar el criteri de divisibilitat per 4 observa que 10 no és divisible per 4, però 100 si ho és. Intenta explicar-ho.

14. Per a explicar el criteri de divisibilitat per 3, observa que 10 = 9 + 1. Pots traure factor comú 9 en tots els sumands en què siga possible, i veure quins són els sumands que ens queden.

15. Per a explicar el criteri de divisibilitat per 11, observa que 10 = 11 – 1. Pots traure factor comú 11 en tots els sumands en què siga possible, i analitzar quins són els sumands que ens queden.

Autora: Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

1.3. Obtenció de tots els divisors d'un nombre enter

En principi, per a trobar els divisors naturals d'un nombre enter *N*, l'anem dividint successivament entre 1, 2, 3, 4,..., *N*. D'aquesta manera, els divisors de *N* seran aquells nombres que el dividisquen exactament, és a dir donen de residu 0.

Exemple:

- Si volem trobar els divisors de 54 l'hauríem de dividir entre 1, 2, 3, 4, 5,…., 54 i veure en quins casos el residu és 0. Pots comprovar que els divisors de 54 són: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27 i 54.

El que ocorre és que aquesta forma de calcular els divisors d'un nombre es complica molt quan el nombre és gran. Encara que, si utilitzem els criteris de divisibilitat que hem aprés, només haurem de fer les divisions pels nombres pels quals ***N*** siga divisible.
Si la divisió és exacta, ***N* : *d* = *c*,** llavors el divisor (***d***) i el quocient (***c***) són divisors de ***N***, la qual cosa ens permet acurtar la busca de divisors, perquè de cada divisió exacta obtenim dos divisors.
Acabarem de buscar més divisors quan arribem a una divisió en què el quocient siga menor o igual que el divisor.

Activitats resoltes

- Vegem, com a exemple, el càlcul dels divisors del nombre 48.

Ja sabem que tot nombre té com divisors a la unitat i a ell mateix 1 i 48.
És divisible per 2. (Acaba en xifra parella) → 48 : 2 = 24 → Ja tenim dos divisors: 2 i 24.
És divisible per 3. (4 + 8 = 12, múltiple de 3) → 48 : 3 = 16 → Ja tenim dos divisors: 3 i 16.
És divisible per 4. → 48 : 4 = 12 → Ja tenim dos divisors: 4 i 12.
És divisible per 6. (En ser divisible per 2 i 3) → 48 : 6 = 8 → Ja tenim dos divisors: 6 i 8.
Com 48 : 8 = 6, i el quocient 6 és menor que el divisor 8, ja hem acabat. 8 i 6 (Repetits).
Per tant, els divisors de 48 són: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 i 48.

Activitats proposades

16. Calcula els múltiples de 75 compresos entre 1 i 200.

17. Indica si les següents afirmacions són verdaderes o falses:

a) 50 és múltiple de 10.

b) 2 és divisor de 30.

c) 4 és múltiple de 16.

d) 66 és divisible per 11.

e) 80 és divisor de 8.

f) 3 és divisible per 12.

18. Substitueix *x* i *y* per valors apropiats per al següent nombre siga divisible per 9 i per 10 al mateix temps: 372*x*54*y*.

19. Què únic nombre amb tres xifres iguals és divisible per 2 i per 9 al mateix temps?

20. Calcula tots els divisors dels nombres següents:

a) 75 b) 88 c) 30 d) 25 e) 160 f) 300

Autora: Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

2. NOMBRES PRIMERS

2.1. Nombres primers i compostos

Quins són els divisors del 2? I del 3? I del 5? I del 7? Trobes alguna similitud entre ells? Evidentment sí, els divisors d'aquests números són l'1 i ells mateixos. A aquests números se'ls anomena primers.

Un **nombre primer** és aquell nombre natural que només té dos divisors: l'1 i ell mateix.

S'anomena **nombre compost** a aquell nombre natural que té més de dos divisors, és a dir, a aquell no és primer.

Nota

L'1 es considera que no és primer ni compost, ja que no verifica cap de les dues definicions.

Exemple:

- Els nombres 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 són els deu primers nombres primers.
- Nombres com: 33, 48, 54, 70, 785 o 43215678940 són compostos.

Activitats proposades

21. Continua la llista de nombres primers de l'exemple amb 10 nombres primers més.

22. Quant nombres primers creus que hi ha? Creus que s'acaben en un moment donat o que són infinits?

2.2. La garbella d'Eratòstenes

La **garbella d'Eratòstenes** és un algoritme (és a dir, una seqüència d'instruccions) que permet trobar tots els nombres primers menors que un nombre natural donat.

Nosaltres ho farem per als menors o iguals que 100, és a dir, esbrinarem quins són els nombres primers fins al 100.

L'algoritme consta dels passos següents :

a)Construïm una llista amb els nombres de l'1 al 100, en aquest cas, ordenats de 10 en 10.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

b) Primer es ratlla l'1, perquè sabem que no és primer.

c) El primer nombre que quede sense ratllar ha de ser primer. Es marca i es ratllen els seus múltiples.

d) Es repeteix novament el pas c) fins que s'acaben els nombres.

Per tant:

- Deixem sense ratllar el següent nombre, que és el 2, que per tant és primer, i ratllem tots els múltiples de 2, quedant la llista com segueix:

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	39	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
51	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	57	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	63	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	69	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	75	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
81	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	87	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	93	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	99	~~100~~

- Conservem el 3 perquè en ser el primer que apareix sense ratllar, sabem que és primer, però eliminem tots els múltiples de 3, és a dir, ratllem un de cada tres nombres. Ens queda una llista així:

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

- No necessitem ratllar el 4 perquè ja està ratllat, llavors anem al 5 que és el següent nombre, per tant no el ratllem i eliminem tots els múltiples de 5, alguns dels quals ja estaven ratllats, tots els que acaben en 0.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

- I després seguim de forma anàloga amb el 7 i ratllant tots els múltiples de 7.
- Després el següent nombre no ratllat és l'11 i ratllem els múltiples d'11.

- Fins a quin nombre hem de continuar ratllant? Pensa! Pensa! Observa que 100 és igual a 10·10, per tant en dividir un número menor que 100 per un major que 11 el quocient és menor que 11.

Hem arribat a una llista de la forma:

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Els nombres que no queden ratllats en cap pas no són múltiples de cap nombre anterior (assenyalats ací en roig).

En realitat, el que *Eratòstenes* estava fent era construir una espècie de "*filtre*" (garbella) pel qual, en fer passar a tots els nombres, només quedaven els "*primers*".

Per tant, els nombres primers que hi ha entre els primers cent nombres, són:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 91 i 97.

Activitats proposades

23. Completa la garbella d'Eratòstenes fins al 200.

24. En aquest cas, quin és l'últim nombre primer del que has de ratllar els seus múltiples?

Observa que $13 \cdot 13 = 169$ i $17 \cdot 17 = 289$.

25. Busca els distints significats de les paraules "garbella" i "algoritme", en què més contextos les pots utilitzar?

2.3. Descomposició d'un nombre natural en factors primers

Sabem que un nombre **primer** només té dos divisors: ell mateix i l'1.

Així que si voldríem expressar un nombre primer com a producte d'altres dos, els únics factors serien l'1 i el propi nombre. Per exemple, si vull expressar 11 com a producte de dos nombres, seria:

$$11 = 1 \cdot 11 \text{ o també } 11 = 11 \cdot 1$$

No obstant això, si el nombre és **compost**, podrà expressar-se com a producte d'altres nombres que no són ni l'1 ni ell mateix.

Aprendrem a descompondre un nombre natural en factors primers, la qual cosa significa expressar un nombre natural com a producte d'altres nombres però han de ser primers.

Descompondre un nombre natural en factors primers és expressar el dit nombre com un producte, on tots els seus factors són nombres primers.

- Per a descompondre el nombre 18 podríem fer: 18 = 9 · 2, però la descomposició en factors primers no seria correcta perquè el 9 no és un nombre primer.

  La seua descomposició és 18 = 3 · 3 · 2, que s'expressa com $18 = 3^2 \cdot 2$.

Per a descompondre un nombre compost (perquè, com hem vist, un nombre primer no es pot descompondre, no podem dir 11 = 11 · 1, perquè 1 no és primer) en els seus factors cosins, s'ha de seguir el procediment següent:

a) Dividir el nombre natural donat pel menor primer possible utilitzant per a això els criteris de divisibilitat si és possible, o realitzant la divisió si no hi ha un altre remei.

b) Realitzar la divisió, i si el quocient és divisor del dit nombre primer, realitzar la divisió.

c) Si el quocient no és divisor del dit nombre primer, buscar el menor nombre primer possible que siga divisor, recorrent novament als criteris de divisibilitat o continuar dividint.

d) Seguir amb el procediment fins a obtindre el quocient igual a u.

Notes

1) Per a realitzar les divisions utilitzarem una barra vertical, a la dreta escrivim els divisors primers i a l'esquerra els quocients.

2) Els factors primers a l'expressió del nombre ja factoritzat se solen escriure en orde creixent.

3) Quan ja tinguem pràctica, i amb nombres no massa grans, podem descompondre un nombre en producte de dos i després cada un d'ells en altres productes fins que tots els factors obtinguts siguen primers.

- Per exemple: 80 = 40 · 2. Com 40 = 4 · 10 i 10 = 2 · 5, tenim que: 80 = 2 · 2 · 2 · 2 · 5 i per tant, la seua descomposició és: $80 = 2^4 \cdot 5$.

Activitats resoltes

1. Realitzarem la descomposició en factors primers del nombre 231: Com 231 no és múltiple de 2, però sí de 3, el dividim: 231 : 3 = 77. Com 77 és múltiple de 7, que és el menor primer possible pel qual es puga dividir: 77 : 7 = 11. Per tant: 231 = 3 · 7 · 11. Açò se sol realitzar de la manera següent: $\begin{array}{r\|l} 231 & 3 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$	2. Realitzarem una altra factorització per al nombre 5148: $\begin{array}{r\|l} 5148 & 2 \\ 2574 & 2 \\ 1287 & 3 \\ 429 & 11 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$ Per tant: $5148 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 13$.

Autora: Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Activitats proposades

26. Descompon en factors primers els nombres següents:

a) 50 b) 36 c) 100 d) 110

27. Descompon en factors primers els nombres següents:

a) 150 b) 121 c) 350 d) 750

28. Descompon en factors primers els nombres següents:

a) 1240 b) 2550 c) 4520 d) 5342

29. Si descomponem en factors primers els nombres: 10, 100, 1000, 10000 i 100000, què és el que observes? Ho podries fer de forma més ràpida sense necessitat d'usar el mètode general?

30. Què ocorre en descompondre en factors primers els nombres 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256? Continua la sèrie amb 7 nombres més.

2.4. Màxim comú divisor de diversos nombres

Exemple:

- Calcularem els divisors dels nombres 60 i 84:

Divisors de 60 $\rightarrow$ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 30, 60.

Divisors de 84 $\rightarrow$ 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 12, 14, 21, 28, 84

Quins són els divisors comuns a ambdós? Els divisors comuns a ambdós són diversos: 1, 2, 3, 4, 6 i 12.

El major dels divisors comuns és 12 i es diu que 12 és el màxim comú divisor de 60 i de 84.

S'anomena **màxim comú divisor** de diversos nombres naturals al major dels divisors comuns a tots ells i s'escriu **M.C.D.**

- A l'exemple anterior, escrivim: M.C.D (60, 84) = 12

En principi, pareix que trobar el M.C.D no és molt complicat, només hem de calcular els divisors dels nombres, considerar els comuns i prendre el major d'ells. Però aquest mètode només té sentit amb pocs nombres i xicotets, ja que amb molts nombres o amb nombres grans, el càlcul es complica molt.

Per això, calcularem el màxim comú divisor utilitzant una sèrie de passos, mitjançant els quals el càlcul se simplifica moltíssim:

Càlcul del M.C.D.

1. Factoritzem els nombres.

2. Prenem els factors comuns a tots els nombres elevats al menor exponent.

3. El producte dels factors considerats al pas 2 és el M.C.D

Activitats resoltes

- Calcularem el màxim comú divisor dels nombres: 60, 72 i 84.

1. Factoritzem cada nombre:

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$$

2. Prenem els factors comuns a tots els nombres (2 i 3) elevats al menor exponent: 2^2 i 3.

3. El producte dels factors considerats al pas 2 és el M.C.D. És a dir:

$$\text{M.C.D}\ (60, 72, 84) = 2^2 \cdot 3 = 12.$$

Nota

Dos nombres naturals sempre tenen almenys un divisor en comú, l'1. Si aqueix és el M.C.D aleshores diem que aqueixos nombres són **primers entre si**.

Activitats proposades

31. Calcula el M.C.D dels següents parells de nombres:

a) 70 i 45 b) 121 i 55 c) 42 i 66 d) 224 i 80

32. Calcula el M.C.D dels nombres següents:

a) 33, 11 i 22 b) 66, 42 i 120 c) 75, 25 i 200 d) 81, 44 i 16

2.5. Mínim comú múltiple de diversos nombres

El **mínim comú múltiple** de diversos nombres naturals és el menor dels múltiples que tenen en comú, i s'escriu **m.c.m.**

Activitats resoltes

Igual que amb el M.C.D., es pot calcular el mínim comú múltiple aplicant la definició que acabem de veure. El que ocorre és que es tracta d'una forma molt "rudimentària" i que es complica molt per a nombres grans.

- Calcularem m.c.m.(20, 15) aplicant aquesta definició:

Múltiples de 20 $\rightarrow$ 20, 40, 60, 80, 100, 120, …

Múltiples de 15 $\rightarrow$ 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, …

Com veiem, múltiples comuns a ambdós són: 60, 120, … però el menor d'ells és el 60. Per tant:

m.c.m.(20, 15) = 60.

Veurem ara els passos a realitzar per a simplificar aquest càlcul i fer-lo més mecànic:

Càlcul del m.c.m.

1. Factoritzem els nombres
2. Prenem els factors comuns i no comuns elevats al major exponent.
3. El producte d'aqueixos factors del pas anterior és el m.c.m.

Activitats resoltes

Vegem com calcular el mínim comú múltiple de 60, 72 i 84 seguint aquests passos:

1. Factoritzem els nombres

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$$

2. Prenem els factors comuns i no comuns elevats al major exponent. Al nostre cas: 2^3, 3^2, 5 i 7.
3. Multiplicant aquests factors tenim que:

$$\text{m.c.m.}(60, 72, 84) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520.$$

Activitats proposades

33. Calcula el m.c.m. dels següents parells de nombres:

a) 40 i 24 b) 16 i 40 c) 30 i 66 d) 24 i 80

34. Calcula el m.c.m. dels nombres següents:

a) 33, 11 i 22 b) 66, 42 i 120 c) 75, 25 i 200 d) 81, 44 i 16

Problemes

Però, a més, el càlcul del M.C.D. i del m.c.m. es molt útil per a resoldre **problemes reals**. Vegem alguns exemples:

Activitats resoltes

- Una dependenta d'una botiga de regals té un rotllo de cinta roja de 15 m i un blau de 10 m. Com per a embolicar cada regal utilitza sempre trossos d'1 metre, i vol tallar la cinta en trossos de la mateixa longitud per a tindre'l preparat per a empaquetar caixes de manera que no sobre res als rotllos. Quina és la longitud màxima en què pot tallar cada rotllo?

Estem buscant un nombre natural que siga divisor de 15 i de 10 al mateix temps. dels nombres que complisquen açò, triarem el major.

Açò és, precisament, el M.C.D:

$$\text{M.C.D.}(15, 10) = 5.$$

Per tant, la longitud de cada tros de cinta en què tallarà ambdós rotllos serà de 5 m.

- Jaume, Maria i Raquel visitaran la seua iaia sovint. Jaume va cada 2 dies, Maria cada 4 i Raquel només va un dia a la setmana. Un dia que van coincidir els tres, van comentar que mai havien menjat un pastís tan ric com el que fa la seua iaia. Ella va afirmar: "*El pròxim dia que torneu a coincidir, el torne a fer*". Quan podran tornar a disfrutar del pastís?

Fotografia: Clarisa Rodrígues

Estem buscant un nombre de dies que serà múltiple de 2, 4 i 7 al mateix temps. De tots els nombres que ho complisquen, ens interessa el més xicotet. És a dir, hem de calcular:

m.c.m.(2, 4, 7) = 28

Per tant, d'ací a 28 dies tornaran a coincidir i la iaia els farà el pastís.

Activitats proposades

35. Mireia i Neus tenen 30 comptes blanques, 10 comptes blaus i 90 comptes roges. Volen fer el nombre més gran de collars iguals sense que sobre cap compte.

a) Quants collars iguals poden fer?

b) Quin nombre de comptes de cada color tindrà cada collar?

36. La iaia pren moltes pastilles. Només despertar-se, a les 9 del matí, pren una per al colesterol que ha de prendre cada 8 hores, una altra per a la tensió que ha de prendre cada 12 hores i una tercera per a la circulació que ha de prendre cada 4 hores. Dins de quantes hores tornarà a prendre els 3 medicaments al mateix temps? A quina hora?

37. Joan compra en una floristeria 24 roses i 36 clavells. Quants rams iguals pot elaborar si col·loca la màxima quantitat de flors de cada tipus perquè no li sobre cap? Quantes roses i clavells ha de col·locar en cada ram?

38. Raül té diversos avisos al seu mòbil: un que dóna un senyal cada 30 minuts, un altre que dóna un senyal cada 60 minuts i un tercer que dóna un senyal cada 120 minuts. Si a les 10 del matí les 3 senyals d'avís han coincidit.

a) Quantes hores com a mínim han de passar perquè tornen a coincidir els tres avisos?

b) A quina hora ocorrerà?

39. Quina serà la menor quantitat de pastissos que s'han de comprar perquè es puguen repartir en parts iguals entre grups de 10, 20 i 30 xiquets? Determina en cada cas quants caramels la toca a cada xiquet.

Autora: Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

CURIOSITATS. REVISTA

Qui era Eratòstenes el de la famosa garbella que hem estudiat abans?

Eratòstenes va nàixer a Cyrene (ara Líbia), al nord d'Africa. Va viure entre els anys 275 a. C. i 195 a. de C.

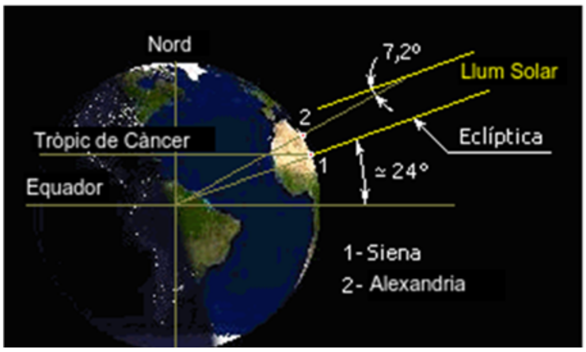
Per diverses dècades, va ser el director de la famosa Biblioteca d'Alexandria. Va ser amic d'Arquímedes.

Encara que, Eratòstenes es va fer famós per tres descobriments:

- Per la **medició increïblement precisa que va fer del diàmetre de la Terra**

-Per haver fabricat una **garbella**, o un filtre, per a descobrir tots els nombres primers.

-La invenció de l'esfera armil·lar.



QUINA RELACIÓ TENEN L'ESPIONATGE AMB L'EVOLUCIÓ D'ALGUNS INSECTES?

La relació entre ambdós són els **nombres primers**.

La teoria dels nombres primers té aplicació a la **criptografia**, ciència que estudia formes de xifrar missatges secrets que només puguen ser desxifrats pel receptor, però per ningú més. El procés de cifraje requereix l'ús d'una clau secreta i per a desxifrar el missatge, normalment, al receptor només li fa falta aplicar la clau al revés.

Però l'ideal seria tindre una clau per a un cifraje fàcil i desxifrat difícil. Açò s'aconsegueix utilitzant nombres primers molt grans, de 80 xifres o més.

Hui en dia la criptografia té gran importància per a les comunicacions entre els governs, compres per Internet o

En 1996 centenars de milers de **xitxarres** van nàixer als EUA. Es van reproduir i van morir un mes després d'haver escampat els seus ous. Hui, 17 anys després, ho estan fent novament. Aquesta espècie de xitxarra apareix només cada 13 o 17 anys. Els seus ous romanen baix terra durant tot aquest temps. En breu desapareixeran fins a la seua pròxima visita l'any 2030.

13 i 17 anys? Tindrà alguna cosa a veure que siguen nombres primers?

Si les xitxarres tingueren un cicle de, per exemple 12 anys, un depredador podria tindre cicles d'1, 2, 3, 4, 6 o 12 anys per a coincidir amb elles. Amb un cicle de 17, les seues opcions es redueixen a 17 i a 1. Sabrà l'evolució de nombres primers?

RESUM

Concepte	*Definició*	*Exemples*
- **Divisor** - **Divisible** - **Múltiple**	-*a* és **divisor** de *b* quan en dividir *b* entre *a* el residu és 0. -*a* és **múltiple** de *b* o *a* és **divisible** per *b* quan en dividir *a* entre *b* el residu és 0.	• 2 i 5 són divisors de 10. • 10 és múltiple de 2 i de 5. • 10 és divisible per 2 i per 5.
Criteris de divisibilitat	**2:** Acaba en 0 o xifra parell. **3:** La suma de les seues xifres és múltiple de 3. **5:** Acaba en 0 o 5. **11:** La diferència entre la suma de les xifres que ocupen lloc imparell i la suma de les xifres que ocupen lloc parell dóna 0 o múltiple d'11.	• 7892 és divisible per 2. • 4510 és divisible per 2 i per 5. • 2957 és divisible per 3. • 2057 és múltiple d'11.
Nombre primer	Té únicament dos divisors: l'1 i ell mateix.	23 i 29 són nombres primers.
Nombre compost	Té més de dos divisors, és a dir, no és primer.	25 i 32 son nombres compostos.
Garbella d'Eratòstenes	És un algoritme que permet calcular tots els nombres primers menor que un donat.	Els primers menors que 20 són: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19
Descompondre un nombre en factors primers	És expressar-lo com a producte de nombres primers.	$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
Mínim comú múltiple de diversos nombres	És el menor dels múltiples que tenen en comú.	m.c.m.(18, 12)= 36
Màxim comú divisor de diversos nombres	És el major dels divisors comuns a tots ells.	M.C.D.(18, 12) = 4

Autora: Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

EXERCICIS I PROBLEMES. Matemàtiques 2n d'ESO

Divisibilitat

1. Escriu quatre nombres de tres xifres que siguen divisibles per 11 i per 2 al mateix temps.
2. Escriu els deu primers múltiples de 4 i els deu primers múltiples de 6. Quins són comuns a ambdós?
3. Substitueix *A* per un valor apropiat perquè:
   a) 24*A*75 siga múltiple de 5.
   b) 1107*A* siga múltiple de 3.
   c) 5*A*439 siga múltiple de 6.
4. Indica quins dels següents nombres són múltiples de 3:
   1, 30, 50, 60, 70, 75, 100, 125, 150
5. Busca tots els divisors de 210.
6. Completa al teu quadern la següent taula escrivint verdader o fals:

Nombre	És...?	Verdader/Fals
30087	Divisible per 3	
78344	Divisible per 6	
87300	Múltiple de 11	
2985644	Múltiple de 4	
1	Divisor de 13	
98	Divisor de 3	

Nombres primers

7. Calcula el m.c.m. i M.C.D. de *m* i *n* sense esbrinar el valor numèric de cada un:
   a) $m = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ $\qquad n = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
   b) $m = 3 \cdot 5$ $\qquad n = 2 \cdot 7$
   c) $m = 22 \cdot 3 \cdot 52$ $\qquad n = 22 \cdot 32$
   d) $m = 3 \cdot 5 \cdot 72$ $\qquad n = 2 \cdot 52 \cdot 7$
8. Escriu al teu quadern i completa les afirmacions següents:
   a) Com dos nombres primers entre si no tenen factors primers comuns, el mínim comú múltiple d'ambdós és ....
   b) Com dos nombres primers entre si no tenen factors primers comuns, el màxim comú divisor d'ambdós és ....

9. Calcula mentalment el m.c.m. i M.C.D. dels nombres següents:

a) 4 i 8	d) 7 i 10	g) 10 i 15	j) 2 i 2	m) 2, 3 i 4
b) 2 i 3	e) 6 i 12	h) 2 i 5	k) 4 i 1	n) 3,6, i 12
c) 3 i 12	f) 6 i 9	i) 4 i 6	l) 3 i 7	o) 3, 4 i 6

10. Calcula:

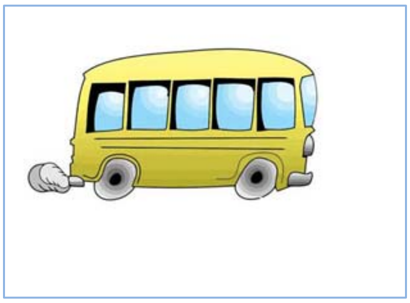
a) m.c.m.(8, 40) M.C.D.(8, 40)

b) m.c.m.(15, 35) M.C.D.(15, 35)

c) m.c.m.(84, 360) M.C.D.(84, 360)

11. En un tram de vorera hi ha tres fanals. Un s'encén cada 12 segons. Un altre cada 18 i un altre cada 60. A les 18:30 de la vesprada les 3 coincideixen encesos. Esbrina quantes vegades coincidiran als 5 minuts següents

12. Tres autobusos ixen de la mateixa estació en tres direccions distintes. El primer tarda 1 hora i 45 minuts a tornar al punt de partida, i roman un quart d'hora a l'estació. El segon tarda 1 hora i 5 minuts i roman 7 minuts a l'estació. El tercer tarda 1 hora i 18 minuts i roman 12 minuts a l'estació. Se sap que la primera eixida ha tingut lloc a les 6 del matí. Calcula:



a) A quina hora tornaran a eixir junts de l'estació.

b) El nombre de viatges efectuats per cada u.

13. Un artesà té 32 pedres de coral, 88 de turquesa, 56 perles i 66 d'atzabeja. Amb totes elles desitja elaborar el nombre més gran possible de collars iguals. Quants pot fer?

14. L'ordinador de Llúcia escaneja amb l'antivirus cada 180 minuts i fa actualitzacions cada 240 minuts, cada quants minuts fa les dues coses al mateix temps?

15. Al llarg d'una carretera hi ha un telèfon d'emergència cada 10 km, un pou d'aigua cada 15 km i una gasolinera cada 20 km. Cada quant coincideixen un telèfon, un pou i una gasolinera?

16. Per a celebrar el seu aniversari, Sònia compra 12 gorrets de paper, 6 collars, 18 anells i 36 caramels. Si vol fer bosses de regal amb la mateixa quantitat d'obsequis de cada tipus, per a quants amics li abasta? Què haurà de posar a cada bossa?

17. Una màquina ompli una caixa de 256 botelles en un minut i una altra màquina ompli la mateixa quantitat de botelles en un minut i mig. Si ambdues van començar a embotellar líquids a les 9:00 am. A quina hora acaben ambdues d'omplir una caixa? Quantes botelles hauran omplit ambdues maquines durant aqueix període?

AUTOAVALUACIÓ DE 2º D'AIXÒ

1. Quina de les següents afirmacions és verdadera?

a) Si dos nombres són primers, el seu màxim comú divisor és 1.

b) Si dos nombres són primers, el seu mínim comú múltiple és 1.

c) El mínim comú múltiple de dos nombres sempre és major que el producte d'ambdós.

d) El màxim comú divisor de dos nombres sempre és major que el producte d'ambdós.

2. Quina de les solucions és la correcta per al conjunt dels divisors de 63?

a) D(63) = {1, 3, 7, 21, 63} c) D(63) = {1, 3, 7, 9, 21, 63}

b) D(63) = {1, 2, 9,21,63} d) D(63) = {0, 1,3, 7, 9, 21, 63}

3. La descomposició de 81000 en factors primers és:

a) $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^3$ b) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3$ c) $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2$ d) $2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^3$

4. Dels nombres:183, 143 i 1973,

a) Tots son primers b) Cap és primer c) 143 és primer d) 1973 és primer

5. Quina de les següents afirmacions és verdadera ?

a) Si un nombre és múltiple de 2, també ho és de 4.

b) 11 és múltiple de 121.

c) 33 és divisor d'11.

d) Si un nombre és múltiple de 2 i de 3, també ho és de 6.

6. La propietat que s'il·lustra a la següent igualtat 2· (3+4)=2·3+2·4 és:

a) La propietat commutativa.
b) La propietat distributiva.
c) La propietat associativa.
d) Aqueixa igualtat no és certa.

7. El M.C.D.(650, 700) és:

a) 10 b) 30 c) 20 d) 50

8. Un operari revisa l'excavadora de la seua empresa cada 28 dies i la grua cada 35. Si va revisar les dos l'1 de maig, quan tornaran a coincidir?

a) El 17 de setembre b) L'1 de setembre c) El 17 d'agost d) Aqueix any no tornen a coincidir

9. Volem entaulellar una paret de 615x225 centímetres, amb taulellets quadrats de costat el major possible i no tallar cap taulellet. Quants taulellets són necessaris?

a) 615 b) 15 c) 225 d) No és possible

Autora: Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

2n ESO

CAPÍTOL 5: SISTEMES DE MESURA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Pedro Luis Suberviola Serrano

Revisor: Sergio Hernández

Traducció: Institut Juan de Garay

Il·lustracions: Banc d'imatges de l'INTEF més Wikipedia i producció pròpia

Índex

Resum

Un accident interespacial, la busca infructuosa d'un tresor submergit... tot a causa de la confusió entre les unitats de mesura. Per això és important saber si estem usant el nostre Sistema Internacional d'Unitats (SI), o si s'empren unitats anglosaxones.

En aquest capítol revisarem els teus coneixements del curs anterior sobre les unitats de mesura del Sistema Internacional d'Unitats (SI), (antigament Sistema Mètric Decimal), a fer canvis entre unes unitats i altres. També revisarem les anomenades unitats agràries: àrea, hectàrea...

Ampliarem aquest coneixement amb la mesura d'angles i les unitats de temps, tan útils, que usen un sistema diferent del decimal, el sistema sexagesimal.

Afegirem les unitats monetàries que ens van a servir entre altres coses per al canvi de divises

Autor: Pedro Luis Suberviola
Traducció: Institut Juan de Garay

1. SISTEMA INTERNACIONAL D'UNITATS

Recorda que:

En aquest apartat revisarem els teus coneixements del curs anterior sobre el Sistema Internacional de Mesures.

Magnitud

Una **magnitud** és una característica que es pot mesurar i expressar quantitativament, és a dir, mitjançant un nombre.

Una magnitud es mesura comparant-la amb un patró que tinga ben definida aqueixa magnitud i observant el nombre de vegades que el conté. A aqueix patró li anomenem **unitat de mesura**.

Una mateixa magnitud es pot expressar amb distintes unitats de mesura.

Exemple:

- La longitud és una magnitud i es pot expressar en quilòmetres, metres, centímetres, milles, polzades,... Puc dir que algú mesura 1,52 metres, 152 centímetres, 4,98 peus, 59,76 polzades,... l'altura és la mateixa, però està expressada en distintes unitats.

Observa que no es pot dir que algú *mesura 1 longitud, 2 longituds*,... perquè la longitud és la magnitud, no la unitat, que podria ser el centímetre. Igual no es diu que algú *pesa 1 massa, 2 masses*,... ja que massa és la magnitud, que es mesura en quilograms.

1.1. Sistema Internacional d'Unitats (SI)

Per a poder **comparar** el valor de diverses magnituds hem d'utilitzar una mateixa unitat de mesura.

Exemple:

- Si vull comparar les mesures d'una taula que use en classe amb una taula de ma casa, he d'utilitzar la mateixa unitat. Si una la mesure en centímetres i l'altra en polzades, no puc comparar-les.

Per a facilitar l'intercanvi científic, cultural i comercial, en quasi tots els països s'ha adoptat el **Sistema Internacional d'Unitats** (SI) com a sistema de mesures.

És l'hereu de l'antic **Sistema Mètric Decimal** i per això també se'l coneix com a **Sistema Mètric** o simplement com a **Sistema Internacional** (SI).

Algunes de les unitats que utilitza per a les distintes magnituds són:

Longitud	Superfície	Volum	Massa	Temps
El metre	El metre quadrat	El metre cúbic	El quilogram	El segon

Autor: Pedro Luis Suberviola
Traducció: Institut Juan de Garay

Observa que:

El segon, que és una mesura fonamental del Sistema Internacional d'Unitats, com bé saps, no és decimal, 100 segons no són una hora ni un minut. No obstant això en la resta dels casos, per a passar d'una unitat a una altra que siga múltiple o submúltiple, cal multiplicar per una potència de deu. Per això, de vegades, es parla del Sistema Mètric *Decimal*.

En general, els múltiples i submúltiples de la unitat principal s'anomenen afegint prefixos (quilo, centi,...). Ho estudiarem amb més deteniment més avant.

Recorda: Hi ha unitats, com per exemple els peus, que usen en múltiples i submúltiples un sistema decimal, però no formen part del Sistema Internacional d'Unitats. Mentres que altres, com el segon, que si formen part del Sistema Internacional d'Unitats no usen un sistema decimal.

Nota curiosa:

Segons la Física Clàssica les unitats fonamentals de massa, temps i longitud són propietats dels objectes, però segons la Teoria de la Relativitat ja NO són propietats "reals" dels objectes. Al observar un objecte des de fora, com més velocitat porte aqueix objecte més s'aplata la longitud, més s'accelera el temps i més augmenta la massa de l'objecte. El temps és relatiu, així com la longitud o la massa.

Les unitats fonamentals que usarem són tres: massa (kg), temps (s) i longitud (m). Altres són unitats derivades, com de superfície (metre quadrat), de volum (metre cúbic) o per exemple, la velocitat que es pot mesurar en quilòmetres per hora (km/h).

Activitats proposades

1. Classifica com a magnituds o unitats de mesura. Indica quines de les unitats de mesura pertanyen al SI:

a) Centímetre cúbic b) Temps c) Hora d) Memòria d'un ordinador

e) Gram f) Massa g) Longitud h) Quilòmetres per hora

2. Investiga a quines magnituds corresponen les següents unitats pocs corrents:

a) Àrea b) Hertz c) Iuan d) Grau Fahrenheit e) Any llum

3. Indica almenys una unitat del Sistema Internacional d'Unitats adequada per a expressar les magnituds següents:

a) L'edat de la Terra b) La grandària d'un jardí

c) La capacitat d'un bidó d) La distància entre Madrid i València

f) La massa d'un armari e) El que tardes a fer un problema

4. Copia al teu quadern i relaciona cada magnitud amb la seua possible mesura:

12 º C 2 km 33 m^2 5 l 0,55 g

massa longitud capacitat superfície temperatura

1.2. El metre

Recorda que:

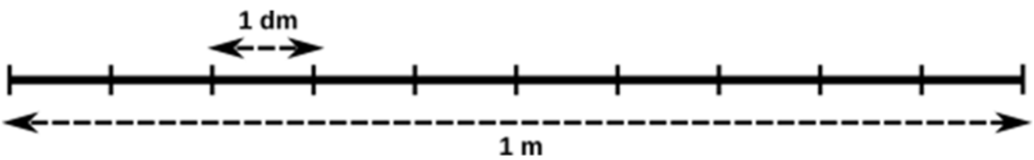
Unitats de longitud

El **metre** és una unitat de mesura de longitud i es representa per **m**.

Pertany al Sistema Internacional d'Unitats (SI).

Els seus múltiples i submúltiples principals són:

Múltiples			**Unitat**	**Submúltiples**		
Quilòmetre	**Hectò**metre	**Decà**metre	**Metre**	**Decí**metre	**Centí**metre	**Mil·lí**metre
km	**h**m	**da**m	**m**	**d**m	**c**m	**m**m
1.000 m	**100** m	**10** m	1 m	**0,1** m	**0,01** m	**0,001** m



Un metre està dividit en 10 decímetres

Hi ha altres submúltiples:

Micròmetre (**µ**m). 1 µm = 0,001 mm = 0,000.001 m

Nanòmetre (**n**m). 1 nm = 0,001 µm = 0,000.000.001 m

Ångström (**Å**). 1 Å = 0,1 nm = 0,000.000.000.1 m

Altres unitats de longitud, que no són múltiples o submúltiples del metre són:

Unitat astronòmica (UA): És la distància mitja entre la Terra i el Sol, i és igual a 150 milions de km.

Any llum: És la distància recorreguda per un raig de llum en un any i és igual a:

1 any llum = 63.240 UA = 9.460.000.000.000 km

Exemples:

- L'àtom més xicotet, el d'hidrogen, té aproximadament 1 Å de diàmetre.
- Els xips electrònics estan compostos de transistors de 22 nm de grandària.
- La Via Làctia té de radi 50.000 anys llum.
- El diàmetre d'un cabell és d'aproximadament 0,1 mm
- Un espermatozoide mesura 53 µm, un glòbul roig 7 µm.

Canvi d'unitats

Per a realitzar canvis d'unitats de longitud hem de multiplicar o dividir per deu tantes vegades com siga necessari.

km $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ hm $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ dam $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ m $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ dm $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ cm $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ mm

Açò ho fem desplaçant la coma cap a la dreta (per a multiplicar) o a l'esquerra (per a dividir) tantes vegades com vulguem multiplicar o dividir per deu.

Activitats resoltes

- Expressa en metres:

  a) 8,25 km = 82,5 hm = 825 dam = 8250 m   8,25 km = [3 posicions] = 8.250 m

  b) 712 mm = 71,2 cm = 7,12 dm = 0,712 m   712 mm = [3 posicions] = 0,712 m

  c) 6,32 hm = 632 m

  d) 34 cm = 0,34 m

  e) 0,063 km = 63 m

  f) 25 km 3 hm 7 m = 25307 m

  g) 9 dam 6 m 8 dm 5 mm = 96,805 m

Activitats proposades

5. Si Ramon mesura 1,65 metres i Jesús mesura 164 centímetres: Qui és més alt?

6. Contesta amb un regle graduat:

a) Mesura la longitud del teu quadern. Quant mesura?

b) Mesura un llapis. Quant mesura?

7. Esbrina quant mesura de llarg la teua habitació.

8. Expressa les següents longituds en centímetres:

a) 54 dm   b) 21,08 m   c) 8,7 hm   d) 327 mm

9. Expressa les següents longituds en les unitats que s'indiquen en cada cas:

a) 8 m 1 mm en centímetres   b) 3,5 km 27 dam en centímetres   c)13 km 21 mm en mil·límetres

d) 7 hm 15 cm en centímetres   e) 2 dam 5 dm en metres   f) 0,6 m 340 mm en decímetres

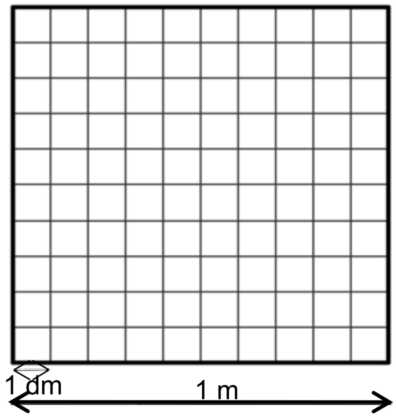
Unitats de superfície

Recorda que:

El **metre quadrat** és la unitat de mesura de superfície i es representa per m^2.

És una unitat derivada del metre. No és una unitat fonamental.

Els seus múltiples i submúltiples principals són:



Múltiples			Unitat	Submúltiples		
Quilòmetre quadrat	**Hectò**metre quadrat	**Decà**metre quadrat	**Metre quadrat**	**Decí**metre quadrat	**Centí**metre quadrat	**Mil·lí**metre quadrat
km^2	**h**m^2	**da**m^2	**m^2**	**d**m^2	**c**m^2	**m**m^2
1.000.000 m^2	10.000 m^2	100 m^2	1 m^2	0,01 m^2	0,000.01 m^2	0,000.000.1m^2

Comprovem que en 1 m^2 hi ha 100 dm^2:

Un metre quadrat és la superfície que té un quadrat d'1 m de costat.

Dividim cada un dels seus costats en 10 segments iguals, que mesuraran per tant 1 dm cada u.

Unim els extrems dels segments formant quadrats. Obtenim 100 quadrats d'1 dm de costat. És a dir, al metre quadrat hi ha 100 d'aquests quadrats, és a dir, 100 dm^2.

Exemples:

- Un pis sol mesurar entre 60 m^2 i 110 m^2.
- Un camp de futbol per a partits internacionals mesura entre 64 dam^2 i 82,5 dam^2.
- La ciutat de Valladolid té una superfície de 197,91 km^2, la de Madrid 605,8 km^2.
- La província de l'estat espanyol amb major superfície és Badajoz, amb 21.766 km^2, la menor Guipúscoa amb 1.980 km^2.
- La província de Madrid té 8.027 km^2 de superfície. Imagina un rectangle de 100 km d'ample i 80 km de llarg.
- L'estat de la Unió Europea amb major superfície és França, amb 547.030 $km.^2$

Canvi d'unitats

Per a realitzar canvis d'unitats de **superfície** hem de multiplicar o dividir per **cent** tantes vegades com siga necessari.

$$km^2 \underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}} hm^2 \underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}} dam^2 \underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}} m^2 \underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}} dm^2 \underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}} cm^2 \underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}} mm^2$$

Açò ho fem desplaçant la coma cap a la dreta (per a multiplicar) o a l'esquerra (per a dividir) de dues en dues xifres.

Activitats resoltes

- Expressa en metres quadrats:

a) 0,743 km^2 = 743.000 m^2 — 0,743 km^2= [6 posicions a la dreta] = 743.000 m^2

b) 95.400 mm^2 = 0,0954 m^2 — 95.400 mm^2 = [6 posicions a l'esquerra]= 0,0954 m^2

c) 5,32 hm^2 = 53.200 m^2

d) 37 cm^2 = 0,0037 m^2

e) 82 km^2 = 82.000.000 m^2

f) 4 km^2 53 hm^2 2 m^2 = 4.530.002 m^2

g) 3 dam^2 15 m^2 23 dm^2 = 315,23 m^2

Activitats proposades

10. Observa la taula anterior i calcula:

a) 35 dam^2= _____ m^2 b) 67 m^2 = _____mm^2 c) 5 km^2 = _____ m^2 d) 7 m^2 = _____ hm^2

11. Passa 98 hm^2 37 dam^2 a centímetres quadrats.

Unitats agràries

Són unitats que no pertanyen al Sistema Internacional però s'utilitzen per a mesurar superfícies rurals, boscos, plantacions,...

L'**àrea**	1 **a** = 100 m^2 = 1 dam^2
L'hectàrea	1 **ha** = 100 a = 100 dam^2 = 1 hm^2
La **centiàrea**	1 **ca** = 0,01 a = 1 m^2

És a dir, per a fer la conversió entre unitats agràries i la seua conversió amb el Sistema Internacional podem utilitzar la regla següent:

$$\begin{array}{ccccc} \text{hm}^2 & \underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}} & \text{dam}^2 & \underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}} & \text{m}^2 \\ \text{ha} & & \text{a} & & \text{ca} \end{array}$$

Exemples:

- Una **hectàrea** és un quadrat de 100 m de costat. Un camp de futbol mesura 62 àrees, aproximadament mitja hectàrea. Per a fer-nos una imatge mental, podem pensar que dos camps de futbol són més o menys una hectàrea.
- La superfície incendiada a Espanya cada any és, com a mitja, unes 125.000 ha. La província més xicoteta és Guipúscoa, amb 1.980 km^2, és a dir, 198.000 ha. És a dir, l'àrea incendiada cada any és aproximadament el d'aqueixa província.

Activitats resoltes

- Expressa en hectàrees:

a) 5,7 km^2 = 570 hm^2 = 570 ha

b) 340.000 ca = 34 ha

c) 200.000 dm^2 = 0,2 hm^2 = 0,2 ha

d) 930 dam^2 = 9,3 hm^2 = 9,3 ha

Activitats proposades

12. Expressa les següents superfícies en àrees:

a) 1.678 ha b) 5 ha c) 8 ha 20 a d) 28.100 ca

13. La superfície d'un camp de futbol és de 7.140 metres quadrats. Expressa aquesta mesura en cada una d'aquestes unitats:

a) Centímetres quadrats b) Decàmetres quadrats c) Hectàrees d) Àrees.

Unitats de volum

El **metre cúbic** és la unitat de mesura de **volum** i es representa per **m³**.

És una unitat derivada del metre.

Els seus múltiples i submúltiples principals són:

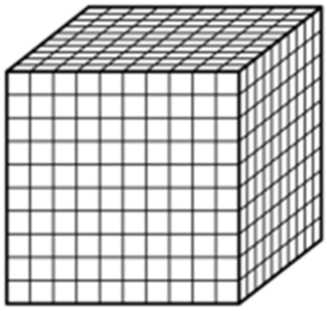
Múltiples			Unitat	Submúltiples		
Quilòmetre cúbic	**Hectò**metre cúbic	**Decà**metre cúbic	**Metre cúbic**	**Decí**metre cúbic	**Centí**metre cúbic	**Mil·lí**metre cúbic
km^3	**h**m^3	**da**m^3	**m^3**	**d**m^3	**c**m^3	**m**m^3
1.000.000.000 m^3	1000.000 m^3	1000 m^3	1 m^3	0,001 m^3	0,000.000.1 m^3	0,000.000.000.1 m^3

Comprovem que en 1 m^3 hi ha 1000 dm^3:

Un metre cúbic és el volum que té un cub d'1 m d'aresta.

Dividim cada un de les seues arestes en 10 segments iguals, que mesuraran per tant 1 dm cada u.

Tallem el cub paral·lelament a les cares. Obtenim 1.000 cubs d'1 dm d'aresta. És a dir, al metre cúbic hi ha 1.000 d'aquests cúbics, és a dir, 1.000 dm^3.



Exemple:

- El consum d'aigua i de gas a les factures es mesura en m^3. Una persona consumix de mitja 4,5 m^3 d'aigua al mes.
- La grandària d'un embassament poden ser 50 hm^3 de capacitat.
- Un dels embassaments de major capacitat a Espanya és el de la Almendra, amb 2,6 km^3 de capacitat.
- La capacitat total dels embassaments d'Espanya és de 55 km^3.

Canvi d'unitats

Per a realitzar canvis d'unitats de **volum** hem de multiplicar o dividir per **mil** tantes vegades com siga necessari.

$$\text{km}^3 \underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}} \text{hm}^3 \underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}} \text{dam}^3 \underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}} \text{m}^3 \underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}} \text{dm}^3 \underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}} \text{cm}^3 \underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}} \text{mm}^3$$

Açò ho fem desplaçant la coma cap a la dreta (per a multiplicar) o a l'esquerra (per a dividir) de tres en tres xifres.

Activitats resoltes

- Expressa en metres cúbics:

a) 0,743 km^3 = 743.000 m^3 0,743 km^3= [6 posicions a la dreta] = 743.000 m^3

b) 95.400 mm^3 = 0,0954 m^3 95.400 mm^3 = [6 posicions a l'esquerra] = 0,0954 m^3

c) 5,32 hm^3 = 53.200 m^3

d) 457 cm^3 = 0,0457 m^3

e) 61 km^3 = 61.000.000 m^3

f) 3 km^3 52 hm^3 8 m^3 = 3.520.008 m^3

g) 9 dam^3 6 m^3 34 dm^3 = 906,34 m^3

Activitats proposades

14. Expressa en metres cúbics 3,2 dam^3 5600 dm^3.

15. Expressa aquests volums en decàmetres cúbics:

a) 0,38 m^3 b) 81 dm^3 c) 1,23 hm^3 d) 52 m^3

1.3. El litre

Recorda que:

La "*capacitat*" és la mateixa magnitud que el "*volum*", per tant es mesura la capacitat d'un recipient, (quant volum li cap) amb el metre cúbic i els seus derivats. El *litre* s'utilitza per raons històriques, i no pertany al Sistema Internacional d'Unitats. Encara que ens convé conèixer-lo si el considerem com una unitat de volum "col·loquial" utilitzada normalment per a mesurar la capacitat dels recipients. Un litre correspon amb un dm^3, i s'utilitzen múltiples de litre com si fóra una unitat més del SI, amb múltiples i divisors decimals.

La **capacitat** és el volum (generalment de matèria líquida o gasosa) que és capaç d'albergar un recipient. La seua unitat de mesura és el **litre** i es representa per **L**.

Múltiples			Unitat	Submúltiples		
Quilolitre	**Hecto**litre	**Deca**litre	**Litre**	**Deci**litre	**Centi**litre	**Mil·li**litre
kL	**h**L	**da**L	**L**	**d**L	**c**L	**m**L
1000 L	**100** L	**10** L	1 L	**0,1** L	**0,01** L	**0,001** L

Exemples:

- Una botella d'aigua gran té una capacitat de 1,5 L.
- Un dipòsit de gasoil per a una casa pot tindre una capacitat de 4 hL.
- Una llanda de refresc té una capacitat de 33 cL.
- Una dosi típica de xarop sol ser de 5 mL.
- En una dutxa de cinc minuts s'utilitzen uns 90 L d'aigua.
- Com hem vist, quan mesurem capacitats d'aigua grans s'utilitzen unitats de volum (m^3, hm^3, ...).

Canvi d'unitats

Per a realitzar canvis d'unitats de capacitat hem de multiplicar o dividir per deu tantes vegades com siga necessari. Igual que amb metres, perquè la unitat no està elevada ni al quadrat ni al cub.

$$\text{kL} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{hL} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{daL} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{L} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{dL} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{cL} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{mL}$$

Açò ho fem desplaçant la coma cap a la dreta (per a multiplicar) o a l'esquerra (per a dividir) tantes vegades com vulguem multiplicar o dividir per deu.

Exemple:

- Expressa en litres:

  a) 5,7 hL = 570 L b) 200 mL = 0,2 mL c) 9,5 kL = 9500 L

  d) 0,0345 kL = 34,5 L e) 710 cL = 7,1 L f) 9,2 mL = 0,0092 L

Activitats proposades

16. Quants Decilitre té un litre?

17. Expressa en Hectolitre:

a) 34 L b) 1.232 cL c) 57 daL d) 107 hL

Relació entre litres i m³

Els litres es relacionen amb les unitats de volum perquè 1 L equival a 1 dm³. Per tant:

1 L = 1 dm³

1 mL = 1 cm³

1 kL = 1 m³

Si ho afegim a l'esquema de canvis d'unitats de capacitat:

$$\mathrm{kL} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \mathrm{hL} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \mathrm{daL} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \mathrm{L} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \mathrm{dL} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \mathrm{cL} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \mathrm{mL}$$

$$\mathrm{m}^3 \underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}} \mathrm{dm}^3 \underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}} \mathrm{cm}^3$$

Exemples:

- Un dipòsit d'aigua d'1 m³ té 1 kL de capacitat, és a dir, 1.000 L, mil litres.
- En les botelletes d'aigua, depenent de la marca, s'expressen la quantitat d'aigua en mL o en cm³ és a dir, com a capacitat o com a volum. Poden posar 250 mL o 250 cm³.
- Un litre de llet ocupa un volum d'1 dm³.

Activitats resoltes

- Expressa en litres:

  a) 7,2 dm³ = 7,2 L b) 52 m³ = 52 kL = 52.000 L c) 33 cm³ = 33 cL = 0,033 L

- Expressa en decímetres cúbics:

  a) 0,635 hL = 63,5 dm³ = 63,5 dm³ b) 23 cL = 0,23 L = 0,23 dm³

  c) 73,5 kL = 73.500 L = 73.500 dm³ d) 0,5 dL = 0,05 L = 0,05 dm³

Activitats proposades

18. Ordena de menor a major aquestes mesures:

a) 7,0001 hm³ b) 23.000 L c) 8 mL d) 4 mm³

19. Calcula el volum (en litres i en cm^3) d'una caixa que mesura 20 cm d'ample, 20 cm de llarg i 5 cm d'alt.

1.4. Unitats de massa

Recorda que:

El **quilogram** és la unitat de mesura de massa i es representa per **kg**.

Pertany al Sistema Internacional d'Unitats (SI).

Els seus múltiples i submúltiples principals són:

Unitat	**Submúltiples**					
Quilogram	**Hecto**gram	**Deca**gram	**Gram**	**Deci**gram	**Centi**gram	Mil·ligram
kg	**hg**	**dag**	**g**	**dg**	**cg**	**mg**
1000 g	**100** g	**10** g	1 g	**0,1** g	**0,01** g	**0,001** g

La **tona** i el **quintar** no són múltiples del gram ni pertanyen al SI. En origen una tona eren 960 kg i correspon a 20 quintars de 46 kg o 100 lliures, però quan es va imposar el SI van continuar usant-se, encara que "arrodonits" a 1000 kg i 100 kg. Aquestes noves unitats són la **tona mètrica** (tm) i el **quintar mètric** (qm), que si pertanyen al Sistema Universal d'Unitats.

Múltiples			**Unitat**
Tona mètrica	**Quintar mètric**	**Miriagram**	Quilogram
tm	**qm**	**mag**	**kg**
1000 kg	100 kg	10 kg	1 kg

Nota:

Autor: Pedro Luis Superviola
Traducció: Institut Juan de Garay

La massa no és el mateix que el pes!

Una bola d'acer pesa molt en la Terra, però no pesa res a l'espai, i encara així, si te la tiren amb força et continua donant un bon colp. La força d'aqueix colp et diu que té molta massa (grams). La massa es conserva a l'espai perquè és una verdadera magnitud, però el pes és una força deguda a la gravetat de la Terra. Només a la Terra la massa i el pes d'una persona coincideixen com a quantitat, per això és normal dir que algú "*pesa tants kg*" encara que no siga del tot correcte, s'hauria de dir que "té una massa de 70 kg i, a la Terra, pesa 70 kgf (quilo grams força)".

Als exemples següents usarem kg com a pes per seguir amb la forma *col·loquial* de parlar, però hauríem d'usar kgf o dir que "té una massa de 70 kg".

Quan demanem a la botiga *un quilo de creïlles,* estrictament, des del punt de vista matemàtic, estem dient *mil creïlles*, ja que el prefix *quilo* significa *mil*.

No significa que estiga malament dir-ho, hem de distingir distints contextos i situacions.

A la botiga podem comprar *un quilo de creïlles*, mentres que a classe de matemàtiques direm un *quilogram de creïlles*.

Exemples:

- Una persona adulta pot pesar 70 kg (bo, hauríem de dir "té una massa de 70 kg" com ja comentem abans).
- A un entrepà se solen posar uns 40 g d'embotit.
- Per a plantar blat, s'utilitzen entre 60 kg i 250 kg de llavor per hectàrea i es recullen diverses tones per hectàrea.
- El pes d'un cotxe buit és d'uns 1.200 kg.
- El pes màxim autoritzat d'un vehicle amb dos eixos és de 18 t.
- Un elefant africà pot pesar fins a 7,5 t. Una balena blava, 120 t.

Activitat resolta

- Pesa més un quilogram de ferro que un de palla?

La massa és igual, però ambdós estan a la Terra rodejades d'aire, i igual que ocorre si estan rodejades d'aigua, el ferro anirà cap avall amb més força que la palla que "flota més" tant a l'aigua com a l'aire. Pensa-ho així: Que pesa més, un tros de ferro de 100 kg o un globus aerostàtic de 100 kg que està surant? Si el globus vola, és que no pesa?

Tornem a la mateixa idea d'abans. No hem de confondre el pes (que és una força) amb la massa.

Autor: Pedro Luis Suberviola
Traducció: Institut Juan de Garay

Canvi d'unitats

Per a realitzar canvis d'unitats de massa hem de multiplicar o dividir per deu tantes vegades com siga necessari.

kg $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ hg $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ dag $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ g $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ dg $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ cg $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ mg

Açò ho fem desplaçant la coma cap a la dreta (per a multiplicar) o a l'esquerra (per a dividir) tantes vegades com vulguem multiplicar o dividir per deu.

Un **litre** d'aigua té de massa, quasi de forma exacta **1 kg**. Aquesta aproximació es pot realitzar, de forma menys precisa, per a altres líquids.

Activitats resoltes

- Expressa en grams:
  a) 0,45 kg = 45 g b) 712 mg = 0,712 g c) 9,32 hg = 932 g
  d) 8,57 cg = 0,0857 g e) 0,031 kg = 31 g f) 56 kg 3 hg 7 g = 56307 g
  g) 7 dag 2 g 3 dg 5 mg = 72,305 g
- Expressa en quilograms:
  h) 8,2 t = 8200 kg I) 340 g = 0,34 kg j) 2,4 q = 240 kg
  k) 92 mag = 920 kg l) 678 hg = 67,8 kg m) 8900 dag = 89 kg
- Suposem que hem comprat 1 kg de fesols, 2,5 kg de fruita, 2 L de llet i dues botelles de 1,5 L d'aigua. Si volem calcular el pes de la compra de forma aproximada, podem canviar els litres per quilograms.

  1 kg + 2,5 kg + 2 kg + 2 · 1,5 kg = 8,5 kg

  La nostra compra pesa aproximadament 8,5 kg.

Activitats proposades

20. Expressa les següents quantitats en hectograms:

a) 17 g b) 59 dag c) 73,5 kg d) 350 g

21. Expressa en grams les masses següents:

a) 3,6 dag b) 59 kg c) 740,5 kg 8,5 dag d) 3 dag 15,10 dg

22. Expressa en quilograms:

a) 5 t 5 q 2,5 mag b) 9,35 t 750 dag c) 712 q 459 hg d) 22 t 3 mag 8 kg

23. Estima la massa de:

a) el teu quadern b) el teu bolígraf c) la teua cartera d) la teua taula

2. MESURA D'ANGLES

Per a mesurar angles utilitzem l'anomenat ***sistema sexagesimal***. La unitat de mesura és el grau ***sexagesimal***. Es representa amb el símbol **°** i es defineix com 1/360 d'un angle complet.

1 ° = 1 / 360 part d'un angle complet

El grau *sexagesimal* té dos divisors:

Minut 1 minut = 1 ´ = 1/ 60 part d'un grau

Segon 1 segon = 1 ´´ = 1 / 60 part d'un minut

Les unitats d'aquest sistema augmenten i disminueixen de 60 en 60, per això el sistema s'anomena sexagesimal.

Si un angle ve expressat en dues o tres d'aquestes unitats, es diu que està expressat en ***forma complexa***. En la *forma incomplexa* de la mesura d'un angle apareix una sola unitat.

El pas d'una a una altra forma es realitza mitjançant multiplicacions o divisions per 60, segons haja que transformar una unitat de mesura d'angles en la unitat immediata inferior o superior.

Recorda aquestes relacions:

1 angle complet = 360 °

1 angle pla = 180°

1 angle recte = 90°

1 ° = 60 minuts = 3600 segons

1 minut = 60 segons

Exemple:

- Forma complexa: A = 12º 40 ´ 32´´ B = 13´ 54´´ C = 120 º 23´´
- Forma incomplexa: D = 35000´´ E = 23 º F = 34´

Exemple:

- **A = 12 º 23´ 10´´ = 12· 3600´´ + 23·60´´ + 10´´ = 44590´´**

Exemple:

- Passarem l'angle D de l'exemple anterior a forma complexa:

35000´´	60	583´	60
500	583´	**43´**	**9 º**
200			
20´´			

D = 35000´´ = 583´ 20´´= 9 º 43´ 20´´

Activitats proposades

24. Passa a forma complexa els següents angles

a) 12500´´ b) 83´ c) 230´´ d) 17600 ´´

25. Passa de forma incomplexa a forma complexa

a) 12º 34´ 40´´ b) 13º 23´ 7 ´´ c) 49º 56´ 32 ´´ d) 1º 25´ 27 ´´

26. Completa la taula:

Expressió en segons	Expressió en minuts i segons	Expressió en graus, minuts i segons
8465”		
	245 ´ 32 ´´	
		31º 3´ 55 ´´

Suma i resta d’angles en el sistema sexagesimal.

Per a sumar angles expressats en el sistema sexagesimal, es col·loquen els sumands fent coincidir graus, minuts i segons, després se sumen les quantitats corresponents a cada unitat. Si els segons sobrepassen 60, es transformen en minuts i se sumen als minuts resultants de la primera fase de la suma. Si els minuts sobrepassen 60, els transformem en graus i se sumen als graus anteriorment obtinguts.

Exemple:

24º 43´ 29´´	77´´	60	73´	60
+45º 29´ 48´´	**17´´**	1´	**13´**	1º
69º 72´ 77´´	Nr minuts = 72´+ 1´= 73´		Nr de graus= 69º + 1º = 70º	

24º 43´ 29´´ + 45º 29´ 48´´ = 69º 72´ 77´´ = 69º 73´ 17´´ = **70º 13´ 17´´**

Per a restar dades de mesura d’angles, angles expressats en el sistema sexagesimal, es col·loquen el minuend i el subtrahend fent coincidir graus, minuts i segons, després restem. Si en alguna columna el minuend és menor que el subtrahend, es passa una unitat immediatament superior a la que presente el problema perquè la resta siga possible.

Exemple:

65º 48´ 50´´ –45º 29´ 48´´ **20º 19´ 2´´**	65º 48´ 50´´ – 45º 29´ 48´´ = **20º 19´ 2´´**

Exemple: 38º 12´ 14´´ – 15º 15´ 15´´

38º 12´ 14´´	37º 72´ 14´´	37º 71´ 74´´
–15º 15´ 15´´	–15º 15´ 15´´	–15º 15´ 15´´
		22º 56´ 59´´

38º 12´ 14´´ – 15º 15´ 15´´ = 37º 72´ 14´´ – 15º 15´ 15´´ = 37º 71´ 74´´ – 15º 15´ 15´´= **22º 56´ 59´´**

Activitats proposades

27. Calcula:

a) 34º 45´ 30´´ + 12 º 27´ 15´´

b) 16 º 30´ 1´´+ 12 º 13´ 12´´ + 2 º 1´

c) 16 º 45' + 23 º 13'' + 30 º 20´ 30´´

d) 65 º 48´ 56´´ - 12 º 33´ 25´´

e) 35 º 54´ 23´´ - 15 º 1´ 35''

f) 43 º 32´ 1 ´´ - 15 º 50´ 50''

Autor: Pedro Luis Suberviola
Traducció: Institut Juan de Garay

3. MESURA DEL TEMPS

Què és un **dia**? És el temps que tarda la Terra a fer una volta al voltant del seu eix.

I un **any**? És el temps que tarda la Terra a fer una volta al voltant del Sol.

Per a conèixer la seua duració cal estudiar el moviment del Sol. El primer poble que es va ocupar d'estudis astronòmics, i van ser molt bons astrònoms, és el dels babilonis i assiris.

Ells usaven un sistema de numeració que no era decimal, sinó sexagesimal. D'ells encara ens queden les següents mesures del temps:

Un **dia** té 24 hores.

Una **hora** té 60 minuts.

Un **minut** té 60 segons.

La unitat utilitzada per a mesurar la magnitud "temps" és el **segon**, que es representa per la lletra s, en minúscula i sense punt... És una unitat del Sistema Internacional d'Unitats (SI) però ***no** és decimal*, és *sexagesimal*.

Passar segons a hores i minuts, o viceversa es fa de forma molt semblant a com es passen en les mesures d'angles de segons a graus i minuts que, per a no repetir aprendràs en el capítol 8 de "Figures Planes" a l'apartat 1.4.

Altres mesures del temps que coneixes són:

La setmana que té 7 dies.

El mes, que té 30 dies, o 31 dies o 28 dies el mes de febrer, excepte els anys bixestos que té 29.

Un any que té 12 mesos.

Un any té 365 dies excepte els anys bixestos que tenen 366 dies.

La cronologia permet datar els esdeveniments representant-los en una línia de temps.

Per a mesurar el temps, en un principi, es va començar mesurant els moviments dels astres, el moviment aparent del Sol i de la Lluna. Després es van utilitzar rellotges com el rellotge de sol, d'arena o la clepsidra o rellotge d'aigua. Ara hi ha rellotges i cronòmetres molt perfeccionats.

El nostre any comença l'1 de gener, però altres països utilitzen altres calendaris, com el xinés, el jueu, o el musulmà. En escriure açò estàvem l'any 2013, però altres pobles estan en altres anys molt diferents. Informa't sobre aqueix particular.

Activitats proposades

28. Quants segons té una hora?

29. Quantes hores té una setmana? Quants minuts?

30. Quantes setmanes té un any no bixest?

Autor: Pedro Luis Suberviola
Traducció: Institut Juan de Garay

4. UNITATS MONETÀRIES

Les unitats monetàries diferents de la que nosaltres utilitzem es denominen **divises**. Entre distintes monedes s'estableixen tipus de canvi que varien constantment.

En la Unió Europea la unitat monetària és **l'euro**, es representa per **€**.

Per a realitzar els canvis, utilitzarem *factors de conversió*, arrodonint el resultat si fera falta.

Activitats resoltes

- Amb la següent equivalència de divises:

Euros(€)	Lliures (£)	Dòlars ($)	Sols (S/)	Bolivians (Bs)	Iens (¥)	Iuans (¥)	Dirhems (درهم)(MAD)
1	0,86	1,3	3,6	9	131	8	11,1

- Canvia 600 € a Lliures i a Sols

1 € és equivalent a 0,86 £. Multiplicant per $\frac{0{,}86\,£}{1\,€}$ s'eliminen els € i queda dalt £

$$600\,€\cdot\frac{0{,}86\,£}{1\,€}=\frac{600\cdot 0{,}86}{1}\cdot\frac{€\cdot £}{€}=516\,£$$

Equivalentment per a sols:

$$600\,€\cdot\frac{3{,}6\,S/}{1\,€}=\frac{600\cdot 3{,}6}{1}\cdot\frac{€\cdot S/}{€}=2.160\,S/$$

- b) Canvia 715 $ i 16.000 ¥ (iuans) a euros.

En aquest cas he de dividir entre $ i ¥ respectivament i l'€ ha de quedar al numerador

$$715\,\$\cdot\frac{1\,€}{1{,}3\,\$}=\frac{715\cdot 1}{1{,}3}\cdot\frac{\$\cdot €}{\$}\approx 53{,}85\,€$$

$$16.000\,¥\cdot\frac{1\,€}{8\,¥}=\frac{16.000\cdot 1}{8}\cdot\frac{¥\cdot €}{¥}=2.000\,€$$

Activitats proposades

31. Amb les equivalències del quadre anterior, canvia 1.200 € a lliures, bolivians, iens i Dirhems:

32. Amb les equivalències del quadre anterior, canvia a euros les quantitats següents:

a) 390 $ b) 4051,5درهم c) 104.800 ¥ (iens) d) 5.103 Bs

33. Espicassi es vol comprar una tablet. A Espanya costa 350 €, als Estats Units 400 $ i 60 $ de transport, a Xina 2.700 ¥ i 200 ¥ de transport. On és més barat comprar la tablet?

34. Ramiro es comunica regularment amb amics per internet: John, d'Escòcia; Irina, de Bolívia i Taiko de Japó. Vol comprar una bici que costa 200 €. Els vol dir a cada un dels seus amics el preu en la seua moneda nacional. Realitza els càlculs.

CURIOSITATS. REVISTA

Curiositat respecte del metre:

Saps que hi ha una longitud mínima a la naturalesa i que res pot mesurar menys que ella?

S'anomena la longitud de Planck i és molt xicoteta, de l'orde de 1,6 · 10^-35 m, és a dir, 0 coma i després 35 zeros i després un 16 metres!

La primera *definició* de quilogram es va decidir durant la Revolució Francesa i especificava que era la massa d'un dm^3 (un litre) d'aigua destil·lada al nivell del mar i 3,98 graus centígrads.

Hui es defineix com la massa que té el prototip internacional, compost d'un aliatge de platí i iridi que es guarda a l'Oficina Internacional de Pesos i Mesures.

Una altra cosa respecte del temps i els segons:

Per raons històriques, per a temps d'1 segon o més, s'usen minuts i hores, però para menys d'1 s, com històricament mai s'han pogut mesurar, no existien unitats i es va usar el sistema decimal, per això es parla de desenes o mil·lèsimes de segon, però mai d'un "kilosegon".

Tirant milles

La milla nàutica (1.852 metres) és diferent de la milla terrestre (1 609 metres), perquè la *velocitat* als barcos es mesura en "nucs". Per a mesurar la velocitat es tirava una corda especial amb molts nucs per darrere del barco, i es mirava quants es quedaven surant: el nombre de nucs que suren indica la velocitat. Una milla nàutica es va definir com la distància que navega un barco a una velocitat d'un nuc durant una hora, per això no coincideix amb la milla terrestre.

Autor: Pedro Luis Suberviola
Traducció: Institut Juan de Garay

RESUM

Magnitud	Una **magnitud** es pot mesurar en distintes **unitats de mesura**.
La distància (magnitud) es pot mesurar en metres, centímetres, quilòmetres,… (distintes unitats de mesura)	
Longitud: metre	km $\overset{\cdot 10}{\underset{:10}{\rightleftarrows}}$ hm $\overset{\cdot 10}{\underset{:10}{\rightleftarrows}}$ dam $\overset{\cdot 10}{\underset{:10}{\rightleftarrows}}$ m $\overset{\cdot 10}{\underset{:10}{\rightleftarrows}}$ dm $\overset{\cdot 10}{\underset{:10}{\rightleftarrows}}$ cm $\overset{\cdot 10}{\underset{:10}{\rightleftarrows}}$ mm
0,32 km = 32 m = 3.200 cm 3.400 mm = 34 dm = 0,34 dam	
Superfície: metre quadrat	km^2 $\overset{\cdot 100}{\underset{:100}{\rightleftarrows}}$ hm^2 $\overset{\cdot 100}{\underset{:100}{\rightleftarrows}}$ dam^2 $\overset{\cdot 100}{\underset{:100}{\rightleftarrows}}$ m^2 $\overset{\cdot 100}{\underset{:100}{\rightleftarrows}}$ dm^2 $\overset{\cdot 100}{\underset{:100}{\rightleftarrows}}$ cm^2 $\overset{\cdot 100}{\underset{:100}{\rightleftarrows}}$ mm^2
0,0014 km^2 = 0,14 hm^2 = 14 dam^2 23.000 mm^2 = 230 cm^2 = 2,3 dm^2 = 230 dm^2	
U. agràries	1 ha = 1 hm^2 1 a = 1 dam^2 1 ca = 1 m^2
5 km^2 = 500 hm^2 = 500 ha 13.000 m^2 = 13.000 ca= 1,3 ha	
Volum: metre cúbic	km^3 $\overset{\cdot 1000}{\underset{:1000}{\rightleftarrows}}$ hm^3 $\overset{\cdot 1000}{\underset{:1000}{\rightleftarrows}}$ dam^3 $\overset{\cdot 1000}{\underset{:1000}{\rightleftarrows}}$ m^3 $\overset{\cdot 1000}{\underset{:1000}{\rightleftarrows}}$ dm^3 $\overset{\cdot 1000}{\underset{:1000}{\rightleftarrows}}$ cm^3 mm^3
3,2 hm^3 = 320 dam^3 = 32.00 m^3 2.800 mm^3 = 28 cm^3 = 0,28 dm^3	
El litre	kL $\overset{\cdot 10}{\underset{:10}{\rightleftarrows}}$ hL $\overset{\cdot 10}{\underset{:10}{\rightleftarrows}}$ daL $\overset{\cdot 10}{\underset{:10}{\rightleftarrows}}$ L $\overset{\cdot 10}{\underset{:10}{\rightleftarrows}}$ dL $\overset{\cdot 10}{\underset{:10}{\rightleftarrows}}$ cL $\overset{\cdot 10}{\underset{:10}{\rightleftarrows}}$ mL
3,7 kL = 37 hL = 370 daL = 3.700 L 85 mL = 8,5 cL = 0,85 dL = 0,085 L	
Litres i m^3.	1 kL = 1 m^3 1 L = 1 dm^3 1 mL = 1 cm^3
4,5 cL = 45 mL = 45 cm^3 3 hL = 0,3 kL = 0,3 m^3 3 hL = 300 L = 300 dm^3	
Massa: quilogram	kg $\overset{\cdot 10}{\underset{:10}{\rightleftarrows}}$ hg $\overset{\cdot 10}{\underset{:10}{\rightleftarrows}}$ dag $\overset{\cdot 10}{\underset{:10}{\rightleftarrows}}$ g $\overset{\cdot 10}{\underset{:10}{\rightleftarrows}}$ dg $\overset{\cdot 10}{\underset{:10}{\rightleftarrows}}$ cg $\overset{\cdot 10}{\underset{:10}{\rightleftarrows}}$ mg
2300 kg = 2,3 t 0,23 dag = 2,3 g = 2.300 mg 5,3 hg = 53.000 cg	
Mesura d'angles	Un **grau** = 1° = 1 / 360 part d'un angle complet. **Minut*:*** 1 minut = 1´ = 1/60 part d'un grau. **Segon*:*** 1 segon = 1´´ = 1/60 part d'un minut
Unitats de temps	Un **dia** és el temps que tarda la Terra a fer una volta al voltant del seu eix. Un **any** és el temps que tarda la Terra a fer una volta al voltant del Sol. Un dia té 24 **hores**. Una **hora** té 60 **minuts**. Un **minut** té 60 **segons**
Unitats monetàries	1 € = 0,86 £ = 9 Bs = …(varía constantment)
$200\,€ = 200\,€ \cdot \frac{0{,}86\,£}{1\,€} = \frac{200 \cdot 0{,}86}{1} \cdot \frac{€ \cdot £}{€} = 172\,£$ $1.800\,Bs = 1.800\,Bs \cdot \frac{1\,Bs}{9\,Bs} = \frac{1.800 \cdot 1}{9} \cdot \frac{Bs \cdot €}{Bs} = 1.800\,€$	

Autor: Pedro Luis Suberviola
Traducció: Institut Juan de Garay

EXERCICIS I PROBLEMES

Unitats de longitud

1. Descompon en les seues distintes unitats:

a) 3945,67 cm b) 415,95 mm c) 5148 m d) 67,914 km e) 0,82 dam

2. Completa amb el nombre o unitat corresponent:

a) 50 m = _______ hm = 5000 _______ b) 300 hm = 30 _____ = ___________ m

c) _____ dm = _______ m = 2300 mm d) 40 km = 4000 ____ = ___________ dm

3. Ordena de menor a major: 2,7 m; 30 cm; 0,005 km; 2600 mm; 0,024 hm; 26 dm.

4. Calcula la longitud que falta o sobra per a tindre a 1 m:

a) 27 cm b) 300 mm + 25 cm c) 0,00034 km + 0,22 dam d) 0, 3 m + 27 cm + 120 mm

5. Uns amics estan planejant fer El Camí de Santiago caminant des de Frómista (Palència). La distància a recórrer és d'uns 400 km. Ells calculen que a un pas còmode poden caminar 5 km en cada hora. Si pensen caminar 6 hores al dia, quants dies tardaran a fer el camí?

6. Rebeca i la seua companya de classe han comprovat que el grossor d'un paquet de 500 folis mesura 6 cm. Quin és el grossor d'un foli? Quants folis hi ha en una caixa de 21 cm d'alt?

7. Un parc rectangular mesura 100 m de llarg i 75 m d'ample. Joan vol córrer 5 km. Quantes voltes al parc ha de donar?

8. Expressa en U.A.

a) 38.000 km b) 8.000 m c) un milió de microns d) dos milions de metres

Unitats de superfície

9. Completa les següents igualtats

a) 3,5 dam^2 = ______ m^2 = ______ dm^2 b) 0,08 km^2 = _______ m^2 = _____ cm^2

c) 32 cm^2 = _____ dm^2 = ______ dam^2 d) 6075 m^2 = _____ dm^2 = ______ hm^2

10. Expressa les següents superfícies en les unitats que s'indiquen en cada cas:

a) 3 m^2 2 cm^2 5 mm^2 en decímetres quadrats b) 6 dam^2 2 dm en metres quadrats

c) 9,3 hm^2 5 m^2 6 cm^2 en decàmetres quadrats d) 7 dm^2 5 dam^2 en mil·límetres quadrats

11. Dibuixa al teu quadern el contorn de la teua mà.

a) Retalla després un quadrat d'1 cm de costat i estima, en centímetres quadrats, la superfície de la teua mà.

b) Si utilitzes un paper normal de 60 g/m^2, i dibuixes la teua mà com a l'exercici anterior i ho retalles, en pesar el paper amb un pes molt precís, obtens novament la superfície de la mà. (Abans dels ordinadors es calculaven així, amb paper i tisores, algunes superfícies!). Quant mesura en cm^2?

12. La superfície de Xina és de 9560000 km^2. Quantes ha té?

13. Expressa en hectàrees:

a) 3,2 km^2 b) 1.000 ca c) 600.000 dam^2 d) 824 m^2 e) 67 a f) 200 mm^2.

14. Expressa les següents superfícies en àrees:

a) 800 ha b) 261 ca c) 3 ha 3 a 3ca d) 37 m^2

15. El pare de Joan vol comprar un terreny de 7,3 ha a 3,2 € cada m^2. Quant li va a costar?

Unitats de volum i de capacitat

16. Pensa en un cub de costat una unitat. Pensa ara en un cub del doble de costat. Quants cubs dels primers són necessaris per a obtindre aqueix cub?

17. Expressa en metres cúbics: 28,7 hm^3 5 m^3 2.800 dam^3 45 dm^3.

18. Expressa en litres:

a) 8,1 hL b) 451 mL c) 2,3 kL d) 0,528 kL e) 6,25 cL f) 7,2 mL

19. Completa les igualtats següents:

a) 2 m^3 = _______ L b) 33 cL = _______ dm^3 c) 500 mm^3 = ________ mL

d) 230 mL = ______ dm^3 e) 0,02 hm^3 = ______ L f) 0,016 hL = ________ m^3

g) 0,35 dm^3 = _____ mL h) 230 cL = _______ cm^3 i) 0,25 hm^3 = _______ kL

20. En una urbanització s'arreplega cada setmana 27 m^3 de residus sòlids. Si viuen 42 famílies, quants litres estimes que produeix cada família al dia?

Unitats de massa

21. Què té més massa, un kg de paper o un kg de plom?

22. Expressa en grams les masses següents:

a) 2,7 dag b) 51,3 kg c) 35,7 kg 8,6 dag d) 3 dag 5 g 26,29 dg

23. Copia al teu quadern i completa:

a) 1 g = ... dg = ... cg = ... mg = ... dag b) 1 kg = ... hg = ... dag = ... g = ... cg = ... mg

c) 1 tm = ... kg = ... g = ... hg = ... dag d) 1 qm = ... kg = ... g = ... tm = ... hg = ... cg

24. Copia al teu quadern la taula següent i completa-la:

	kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
0,943 hg							
75282,9 dg							
64,92 kg							
4375 dag							
369266 cg							

Autor: Pedro Luis Suberviola
Traducció: Institut Juan de Garay

25. La densitat es defineix com el quocient entre la massa i el volum. L'or té una densitat de 19,3 i la plata de 10,5. Dues polseres de la mateixa massa, una d'alvocat i una altra d'or, Quin tindrà major volum?

Mesura d'angles

26. Un angle mesura la cinquena part d'un recte. Expressa aquesta mesura en graus, minuts i segons.

27. Calcula :

a) 36º 57´ 37´´ + 45 º 18´ 54´´
b) 46 º 37´ 35´´+ 82 º 32´ 41´´ + 43 º 5´´
c) 26º 34' + 84º 21'' + 81 º 39´ 49´´
d) 56 º 54´ 56´´ – 23 º 59´ 96´´
e) 78 º 5´ 34´´ – 26º 5´ 47''
f) 44 º 43´ 2 ´´ – 26 º 47´ 31''

28. La suma de dos angles és 236º 57' 46''. Si un d'ells mesura 68º 57' 58'', quant mesura l'altre?

Unitats de temps

29. Ximo va cada dia a l'escola i tarda 15 minuts en el trajecte. Si el curs té 50 setmanes i va de dilluns a divendres, quant temps gasta en un any en aqueix trajecte? Estima el temps que tu utilitzes.

30. Si dorms 8 hores al dia, quantes hores has dormit en una setmana? I en un any? Aqueixes hores, quants dies són?

31. Enric va cada dia a l'escola i tarda 20 minuts en el trajecte. Si el curs té 30 setmanes i va de dilluns a divendres, quants segons gasta en un any en aqueix trajecte? Estima el temps que tu utilitzes en hores.

32. Si dorms 8 hores al dia, quants minuts has dormit en una setmana?, i quants segons? Quants minuts en un any? I segons?

33. Set guardes de seguretat han de repartir-se per igual un servei de vigilància de 24 hores. Expressa en hores i minuts el temps que ha de romandre vigilant cada un d'ells.

Unitats monetàries

34. Amb la següent taula d'equivalències, canvia dos mil euros a dòlars, lliures, iuans i sols.

Euros(€)	Lliures (£)	Dòlars($)	Sols (S/)	Bolivians (Bs)	Iens(¥)	Iuans (¥)	Dirhems (MAD)
1	0,86	1,3	3,6	9	131	8	11,1

35. Sara té amics per totes les bandes. Ha comprat un ordinador que costa 400 €. Els vol dir als seus amics el preu en la seua moneda nacional. A) Què diria al de Japó? B) I al del Marroc? C) I al del Regne Unit? Realitza els càlculs.

36. Amb les equivalències del quadro adjunt, canvia a euros les quantitats següents:

Euros(€)	Lliures (£)	Dòlars($)	Sols (S/)	Bolivians (Bs)	Iens(¥)	Iuans (¥)	Dirhems (درهم)
1	0,86	1,3	3,6	9	131	8	11,1

a) 4025 Dòlarsb) 5162 Lliures c) 215,925 ¥ (Iens) d)6214 Bs

37. Pere es vol comprar un mòbil que a Espanya costa 500 €, als Estats Units 500 $ i 50 $ pel transport, a Xina 3900 ¥ i 150 ¥ de transport. On és més barat comprar aqueix mòbil?

AUTOAVALUACIÓ

1. Un cub de 3 cm de costat, quin volum té?

a) 9 cm^3 b) 0,27 dm^3 c) 0,003 m^3 d) 27 cm^3.

2. De les següents mesures, quina és la major?

a) 5,78 daL b) 578 L c) 5,78 kL d) 0,578 hL.

3. El resultat de sumar 0,07 kg + 0,62 dag + 9,3 hg és:

a) 1000 g b) 1 kg 62 g c) 10 hg 62 g d) 1006,2 g.

4. La mesura més adequada per a expressar el volum del contingut d'una tassa és:

a) 2 L b) 2 cL c) 200 cm^3 d) 2000 mL

5. Gladys ha tornat d'un viatge dels Estats Units amb 650 $ en metàl·lic. Els canvia a euros i aquests els canviarà a sols en un nou viatge a Perú. Quants sols tindrà?

a) 3042 S/ b) 1800 S/ c) 235 S/ d) 140 S/

6. Una gerra de 2 litres d'aigua pesa buida 200 g. Si s'ompli les 3/4 parts de la gerra, quant pesa?

a) 1500 g b) 1,7 kg c) 16 hg d) 10,7 kg

7. El nombre de segons d'una setmana és:

a) 25200 s b) 604800 s c) 602520 s d) 10080 s

8. El nombre de segons d'un dia és:

a) 1440 s b) 85931 s c) 86400 s d) 10080 s

9. Transforma a segons: 2 graus, 45 minuts i 3 segons.

a) 9903 s b) 2070 s c) 99030 s d) 10303 s

10. Joan ha canviat mil euros a dòlars, estant el canvi a 1,31 dòlar l'euro, quants dòlars li han donat?

a) 131 $ b) 1310 $ c) 763 $ d) 1257 $

Capítol 6: LONGITUDS I ÀREES. SEMBLANÇA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autors: Javier Rodrigo, Raquel Hernández i José Antonio Encabo

Revisors: Javier Rodrigo i Raquel Hernández

Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay

Índex

Resum

En aquest capítol estudiarem el teorema de Pitàgores per als triangles rectangles, que ens ajudarà en el càlcul de perímetres i àrees de figures planes.

Estudiarem el teorema de Tales i la semblança, amb els criteris per a reconèixer quan dos triangles són semblants, i la raó de semblança (escala) en mapes i en àrees i volums.

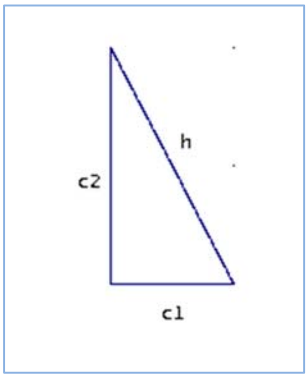
Repassarem les longituds i àrees en polígons i en figures circulars, que utilitzarem al pròxim capítol per a obtindre longituds, àrees i volums de cossos a l'espai.

Autors: Javier Rodrigo, Raquel Hernández i José Antonio Encabo
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay

1. TEOREMA DE PITÀGORES

En un triangle rectangle anomenem **catets** als costats incidents amb l'angle recte i **hipotenusa** a l'altre costat.

Teorema de Pitàgores



En un triangle rectangle, la hipotenusa al quadrat és igual a la suma dels quadrats dels catets.

És a dir,

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2$$

- Del teorema de Pitàgores podem obtindre el valor de la hipotenusa d'un triangle rectangle si coneixem el que mesuren els catets: $h = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$

- També podem obtindre el valor d'un catet a partir dels valors de la hipotenusa i de l'altre catet: $c_2 = \sqrt{h^2 - c_1^2}$

Exemple:

Si els catets d'un triangle rectangle mesuren 3 *cm* i 4 *cm*, la seua hipotenusa val 5 *cm*, ja que:

$$h = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}.$$

Activitats resoltes

- Si la hipotenusa d'un triangle rectangle mesura 13 *dm* i un dels seus catets mesura 12 *dm*, troba la mesura de l'altre catet:

Solució: Pel teorema de Pitàgores:

$$c = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{(13-12)\times(13+12)} = \sqrt{25} = 5 \ dm$$

Activitats proposades

1. És possible trobar un triangle rectangle els catets del qual mesuren 7 i 24 *cm* i la seua hipotenusa 26 *cm*? Si la teua resposta és negativa, troba la mesura de la hipotenusa d'un triangle rectangle els catets del qual mesuren 7 i 24 *cm*. Utilitza la calculadora per a resoldre aquesta activitat si et resulta necessària.

Interpretació del teorema de Pitàgores

Si dibuixem un quadrat de costat la hipotenusa *h* d'un triangle rectangle, la seua àrea és h^2 (veure el primer exemple de 1.1). Si dibuixem dos quadrats de costats els catets c_1 i c_2 d'aqueix triangle rectangle, les seues àrees són c_1^2, c_2^2. Llavors el teorema de Pitàgores diu que l'àrea del primer quadrat (quadrat gris de la figura de l'esquerra) és igual a la suma de les àrees dels altres dos (quadrats blau clar i groc de la figura de l'esquerra).

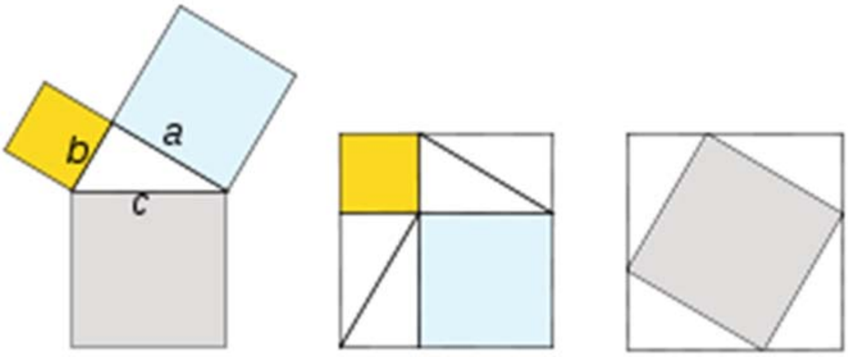
Existeixen més de 367 demostracions diferents del Teorema de Pitàgores.

Autors: Javier Rodrigo, Raquel Hernández i José Antonio Encabo
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay

Una comprovació gràfica consisteix a dibuixar dos quadrats iguals de costat la suma dels catets *a* i *b* (figures del centre i de la dreta). En un es dibuixen els quadrats de costat *a* i *b*, en groc i blau en el dibuix. En l'altre el quadrat de costat la hipotenusa (en gris al dibuix). Observa que llevant 4 triangles iguals al de partida ens queda que el quadrat gris és igual a la suma dels quadrats groc i blau.

Per tant:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Activitats proposades

2. Calcula la longitud de la hipotenusa dels següents triangles rectangles de catets:

a) 8 *cm* i 6 *cm* b) 12 *m* i 9 *m*

c) 6 *dm* i 14 *dm* d) 22,9 *km* i 36,1 *km*.

3. Calcula la longitud del catet que falta als següents triangles rectangles d'hipotenusa i catet:

a) 27 *cm* i 12 *cm* b) 32 *m* i 21 *m*

c) 28 *dm* i 12 *dm* d) 79,2 *km* i 35,6 *km*

4. Calcula l'àrea d'un triangle equilàter de costat 7 *m*. *Ajuda*: Utilitza el teorema de Pitàgores per a calcular l'altura.

5. Calcula l'àrea d'un hexàgon regular de costat 8 *cm*. *Ajuda*: Utilitza el teorema de Pitàgores per a calcular la seua apotema.

6. Calcula el volum d'un tetraedre regular d'aresta 5 *dm*.

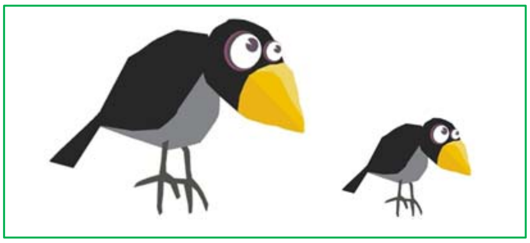
7. Calcula la superfície d'un icosaedre regular d'aresta 5 *dm*.

8. Calcula la longitud de la diagonal d'un quadrat de costat 12 *m*.

9. Calcula la longitud de la diagonal d'un rectangle de base 13 *cm* i altura 5 *cm*.

2. SEMBLANÇA

2.1. Figures semblants



Dues figures semblants tenen *la mateixa forma*.

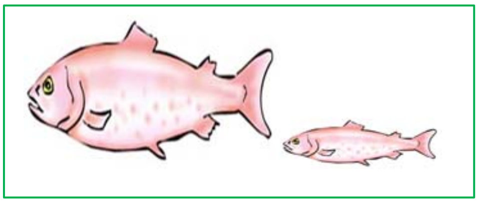
És molt útil saber reconèixer la semblança per a poder estudiar una figura i inferir així propietats d'una figura semblant a ella que és més gran o inaccessible.

La semblança conserva els angles i manté la proporció entre les distàncies.

Dues figures són **semblants** si les seues longituds són proporcionals i els seus angles són iguals.

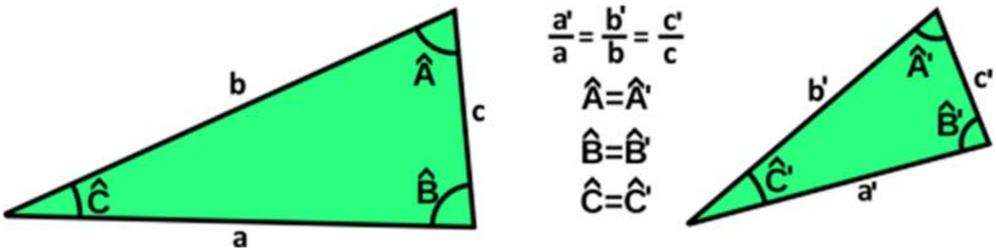
Exemple:

- *Les figures del marge **no** són semblants*



2.2. Triangles semblants. Criteris de semblança

Dos triangles són **semblants** si tenen tots els angles iguals i els costats proporcionals.



Per a saber si dos triangles són semblants no cal conèixer tots els costats i angles, és prou amb què es complisca algun dels següents **criteris de semblança.**

Dos triangles són semblants sí:

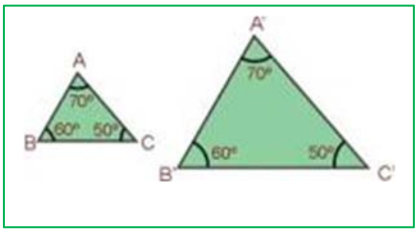
- **Primer:** Tenen dos angles iguals.
- **Segon:** Tenen els tres costats proporcionals.
- **Tercer:** Tenen dos costats proporcionals i l'angle que formen és igual.

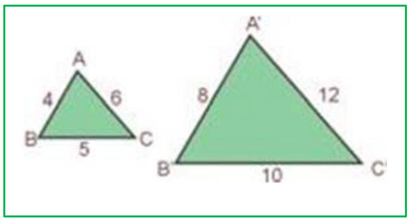
La demostració es basa en els criteris d'igualtat de triangles. Ja saps que dos triangles són iguals si tenen els seus tres costats iguals i els seus tres angles iguals, però no cal que es verifiquen aqueixes sis igualtats perquè ho siguen. Basta, per exemple, que tinguen un costat i dos angles iguals.

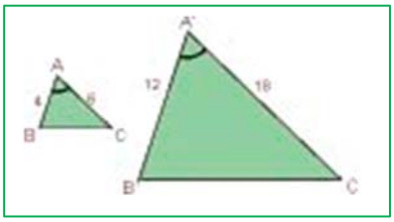
Si tenen dos angles iguals, el tercer angle també és igual, i necessàriament els costats són proporcionals. Si els costats són proporcionals, llavors els tres angles són iguals. Amb més atenció és necessari mirar el tercer criteri, i en un altre curs es demostrarà amb més rigor.

Autors: Javier Rodrigo, Raquel Hernández i José Antonio Encabo
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay

Exemple







Activitats proposades

10. Indica si són semblants els següents parells de triangles:

a) Un angle de 80º i un altre de 40º. Un angle de 80º i un altre de 60º.
b) Triangle isòsceles amb angle desigual de 70º. Triangle isòsceles amb angle igual de 50º.
c) *A* = 30º, *b* = 7 cm, *c* = 9 cm. *A'*= 30º, *b'* = 14 cm, *c'* = 18 cm
d) *a* = 4 cm, *b* = 5 cm, *c* = 7 cm. *a'* = 20 cm, *b'* = 25 cm, *c'* = 35 cm

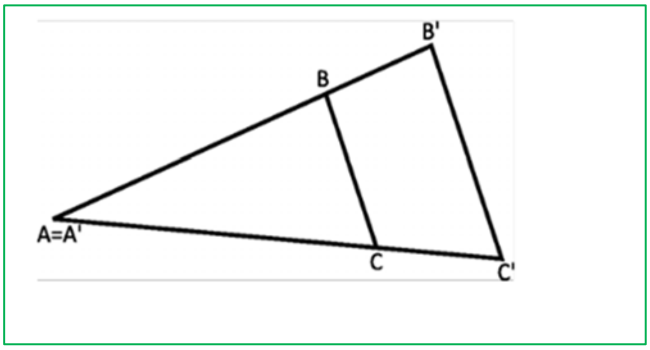
11. Calcula el valor desconegut perquè els triangles siguen semblants:

a) *a* = 18 cm, *b* = 12 cm, *c* = 24 cm. *a'* = 6 cm, *b'* = 4 cm, *c'*?

b) *A* = 45º, *b* = 16 cm, c = 8 cm. *A'* = 45º, *b'* = 4 cm, *c'*?

12. Un triangle té les longituds dels seus costats de 12 cm, 14 cm i 14 cm. Un triangle semblant a ell té un perímetre de 80 cm. Quant mesuren els seus costats?

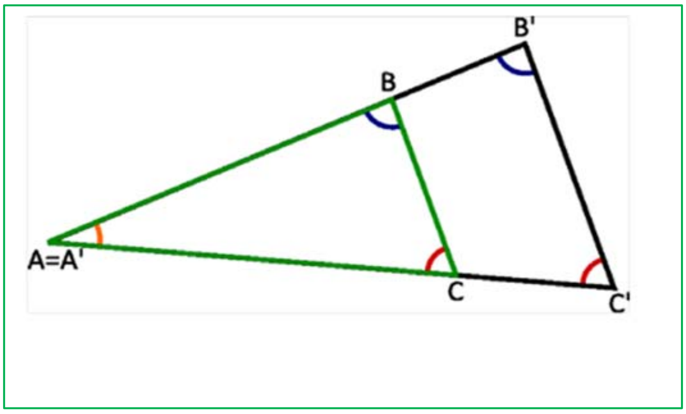
2.3. Triangles en posició de Tales



$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}$$

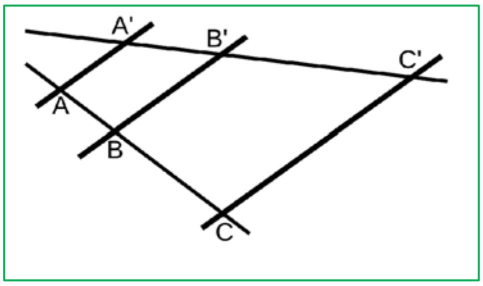
Diem que dos triangles estan en posició de Tales quan dos dels costats de cada un estan sobre les mateixes rectes i els altres costats són paral·lels.

Els angles són iguals. Un perquè és el mateix. Els altres, per estar formats per rectes paral·leles. Per tant, pel primer criteri de semblança de triangles, els costats són proporcionals i es compleix:



Autors: Javier Rodrigo, Raquel Hernández i José Antonio Encabo
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay

2.4. Teorema de Tales



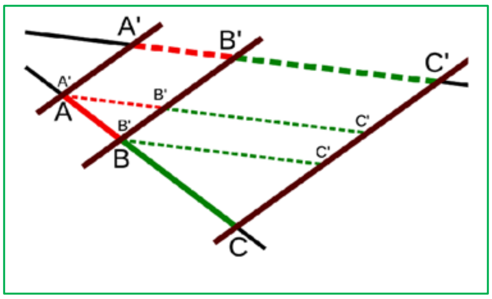
El teorema de Tales estableix una relació entre els segments formats quan dues rectes qualssevol són tallades per diverses rectes paral·leles.

Donades dues rectes, i diverses rectes paral·leles entre si, que les tallen respectivament en els punts *A, B, C* i *A′, B′, C′*. Llavors el **Teorema de Tales** afirma que els segments són proporcionals:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}$$

En la segona figura es pot apreciar com es formen en aquest cas tres triangles semblants en posició Tales, i que per tant es pot deduir que els seus costats són proporcionals:

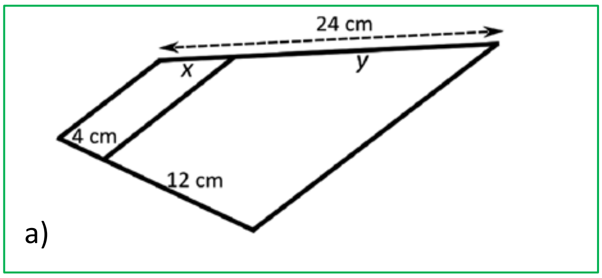
$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}$$



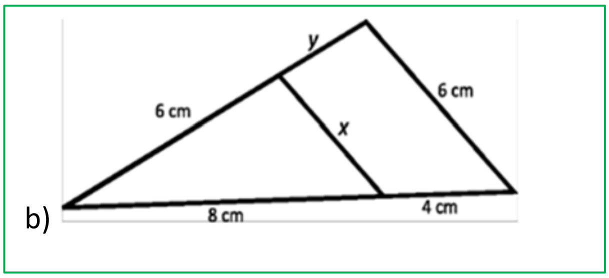
Observació: En aquest cas no relacionem els segments *AA'*, *BB'* i *CC'* que es formen sobre els costats paral·lels.

Activitats proposades

13. Calcula els valors de *x i y* a les següents figures.



a)

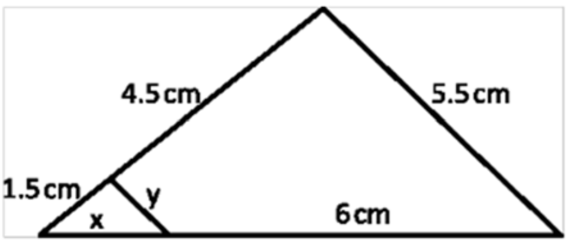


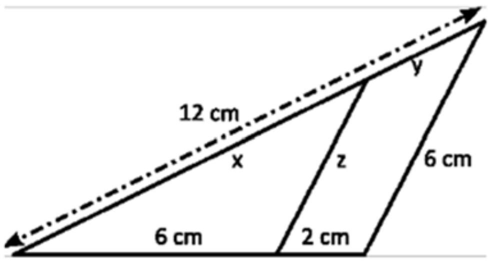
b)

14. Un pal se subjecta amb cables d’acer que van del seu extrem superior al sòl. La distància de l’ancoratge d’un dels cables a la base del pal és 3 metres. Posem una barra de 60 centímetres de manera que està perpendicular al sòl i justa toca el sòl i el cable. La seua distància a l’ancoratge del cable és 45 centímetres. Calcula la longitud del pal i la longitud del cable d’acer.

15. Maria mesura 165 cm. La seua ombra mesura 80 cm. En aqueix mateix instant es mesura l’ombra d’un edifici i mesura 7 m. Quant mesura l’edifici?

16. Calcula les longituds que s’indiquen:





Autors: Javier Rodrigo, Raquel Hernández i José Antonio Encabo
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay

2.5. Proporcionalitat en longituds, àrees i volums

Ja saps que:

Dues figures són **semblants** si les longituds d'elements corresponents són proporcionals. Al coeficient de proporcionalitat se l'anomena **raó de semblança**. En mapes, plans… a la raó de semblança se l'anomena **escala**.

Àrees de figures semblants

Si la raó de semblança entre les longituds d'una figura és k, llavors la raó entre les seues àrees és $\boldsymbol{k^2}$.

Exemple:

- *Observa la figura del marge.*

Si multipliquem per 2 el costat del quadrat xicotet, l'àrea del quadrat gran és $2^2 = 4$ vegades la del xicotet.

Volums de figures semblants

Si la raó de semblança entre les longituds d'una figura és k, llavors la raó entre els seus volums és $\boldsymbol{k^3}$.

Exemple:

- Observa la figura del marge.

En multiplicar per 2 el costat del cub xicotet s'obté el cub gran. El volum del cub gran és 8 (2^3) el del cub xicotet.

Activitats resoltes

- *La torre Eiffel de París mesura 300 metres d'altura i pesa uns 8 milions de quilos. Està construïda de ferro. Si encarreguem un model a escala de la dita torre, també de ferro, que pese només un quilo, quina altura tindrà? Serà major o menor que un llapis?*

El pes està relacionat amb el volum. La Torre Eiffel pesa 8 000 000 quilos, i volem construir una, exactament del mateix material, que pese 1 quilo. Per tant $k^3 = 8000000/1 = 8\,000\,000$, i $k = 200$. La raó de proporcionalitat entre les longituds és de 200.

Si la Torre Eiffel mesura 300 m, i anomenem x al que mesura la nostra tenim: $300/x = 200$. Aïllem x que resulta igual a $x = 1{,}5$ m. Mesura metre i mig! És molt major que un llapis!

Activitats proposades

17. El diàmetre d'una bresquilla és tres vegades major que el del seu os, i mesura 9 cm. Calcula el volum de la bresquilla, suposant que és esfèric, i el del seu os, també esfèric. Quina és la raó de proporcionalitat entre el volum de la bresquilla i el de l'os?

18. En la pizzeria tenen pizzes de diversos preus: 1 €, 3 € i 4 €. Els diàmetres d'aquestes pizzes són: 15 cm, 25 cm i 40 cm, quina resulta més econòmica? Calcula la relació entre les àrees i compara-la amb la relació entre els preus.

19. Estem dissenyant una maqueta per a dipòsit cilíndric de 1000 litres de capacitat i 5 metres d'altura. Volem que la capacitat de la maqueta siga d'1 litre. Quina altura ha de tindre la maqueta?

20. La maqueta que veus al marge d'una piràmide escalonada babilònica mesura d'altura mig metre, la raó de proporcionalitat és $k = 100$. Quant mesura la piràmide real?

Autors: Javier Rodrigo, Raquel Hernández i José Antonio Encabo
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay

2.6. Escales: plans i mapes

Els dibuixos, fotografies, mapes o maquetes representen objectes, persones, edificis, superfícies, distàncies...

Perquè la representació siga perfecta, han de guardar en tots els seus elements una mateixa raó de proporcionalitat que denominem **"escala"**

L'**escala** és una raó de proporcionalitat entre la mesura representada i la mesura real, expressades en una mateixa unitat de mesura

Exemples:

- En un mapa apareix assenyalada la següent escala **1 : 5 000 000** i s'interpreta que 1 cm del mapa representa 5 000 000 cm en la realitat, és a dir, a 50000 m, és a dir a 50 km.

Exemple:

- Hem fotografiat la catedral de Santiago de Compostel·la. La grandària de la foto ens dóna una escala: 1 : 600.

CATEDRAL DE SANTIAGO DE COMPOSTEL·LA

Les dues torres de la fatxada tenen en la foto una altura de 3,5 cm. L'altura real de les torres serà:

$$3{,}5 \cdot 600 = 2100 \text{ cm} = 21 \text{ m}.$$

Les escales ens permeten observar que la imatge real i la del dibuix són **semblants.**

Idees clares

L'**escala** utilitza el cm com a unitat de referència i s'expressa en comparació a la unitat.

Per exemple: 1 : 70000

Dues figures són **semblants** quan tenen la mateixa forma i els seus costats són proporcionals.

Activitats proposades

21. Completa la següent taula tenint en compte que l'escala aplicada és 1 : 1000

Dibuix	Mesura real
26 cm	
	11 km
0,05 m	

22. Calcula l'escala corresponent en cada exemple de la taula:

Dibuix	Mesura real	Escala
1,4 cm	700 m	
7 cm	0,7 hm	
4 cm	20 km	

23. Escriu quatre exemples en què s'utilitzen escales.

24. La distància entre Madrid i València és 350 km. Al mapa, la distància entre ambdues ciutats és 2,7 cm, a quina escala està dibuixat el mapa?

Autors: Javier Rodrigo, Raquel Hernández i José Antonio Encabo
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay

3. PERÍMETRES I ÀREES DE POLÍGONS

En aquest apartat repassarem les àrees i perímetres de polígons que ja coneixes del curs anterior. Si les recordes, pots botar-lo.

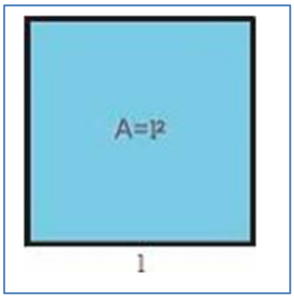
3.1. Àrea del quadrat i del rectangle

L'**àrea d'un quadrat** és el quadrat d'un dels seus costats:

$$\text{Àrea}_{\,quadrat} = \text{costat}^2$$

L'**àrea d'un rectangle** és el producte de la seua base per la seua altura:

$$\text{Àrea}_{\,rectangle} = base \cdot altura$$



Exemple:

- Si tenim un quadrat de 15 *dm* de costat, l'àrea del dit quadrat és 225 dm^2 ja que:

$$\text{Àrea}_{\,quadrat} = \text{costat}^2 = 15^{\,2} = 225 \text{ dm}^2.$$

Activitats resoltes

- Calcula l'àrea i el perímetre del taulell de la figura de 9 *cm* de costat


Taulell quadrada

Solució: El taulell de la figura és quadrat. Per tant:

$$Perímetre = 4(\text{costat}) = 4(9) = 36\ cm.$$

$$\text{Àrea}_{\,quadrat} = \text{costat}^2 = 9^{\,2} = 81\ cm^2.$$

- Calcula l'àrea i el perímetre d'un rectangle de 8 cm de base i 3 cm d'altura

Solució: Per tractar-se d'un rectangle:

$$Perímetre = 2(base) + 2(altura) = 2(8) + 2(3) = 22\ cm.$$

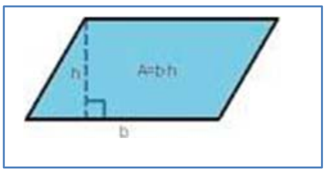
$$\text{Àrea}_{\,rectangle} = base \cdot altura = 8 \cdot 3 = 24 \text{ cm}^2.$$

3.2. Àrea de paral·lelogram i del triangle

Ja saps que:

L'àrea d'un **paral·lelogram** és el producte de la seua base per la seua altura, igual que l'àrea d'un rectangle:

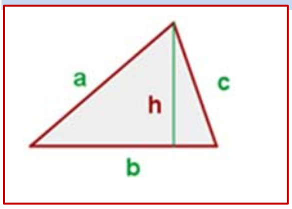
$$\textbf{Àrea}_{\,\textbf{Paral·lelogram}} = \textbf{base} \cdot \textbf{altura}$$



Mira el paral·lelogram de la figura. Pots convertir-ho en un rectangle tallant un triangle i col·locant-lo a l'altre costat.

Si talles a un paral·lelogram per una de les seues diagonals obtens dos triangles iguals, amb la mateixa base i la mateixa altura que el paral·lelogram. Per tant la seua àrea és la mitat que la del paral·lelogram.

L'**àrea d'un triangle** és la meitat de l'àrea d'un paral·lelogram:



$$\grave{A}rea_{triangle} = \frac{base \cdot altura}{2}$$

Exemple:

- L'àrea d'un triangle de base b = 7 cm i altura h = 5 cm és 17,5 cm^2 ja que: $\grave{A}rea_{triangle} = \frac{base \cdot altura}{2} = \frac{7 \cdot 5}{2} = 17{,}5 cm^2$

Activitats resoltes

- La vela d'un vaixell té forma triangular. La base de la vela mesura 5 metres i la seua altura mesura 4 metres, quina superfície ocupa la dita vela?

Solució: Com la vela té forma triangular:

$$\grave{A}rea_{triangle} = \frac{base \cdot altura}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10cm^2$$

- Troba els següents perímetres i àrees:

a) Un quadrat de 5 metres de costat:

Perímetre: La suma dels seus quatre costats: 5 + 5 + 5 + 5 = 20 m.

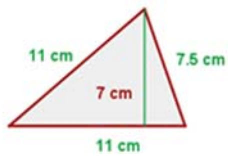
Àrea: costat · costat = 5 · 5 = 25 m^2.

b) Un rectangle de 7 metres d'ample i 6 m de llarg

Perímetre: Suma dels seus costats: 7 + 7 + 6 + 6 = 26 m.

Àrea: Llarg per ample = 7 · 6 = 42 m^2.

c) Triangle de base 11 cm i altura 7 cm, i els altres dos costats del qual mesuren 11 cm i 7,5 cm:



Àrea: $A = \frac{11 \cdot 7}{2} = 38.5 \text{ cm}^2$

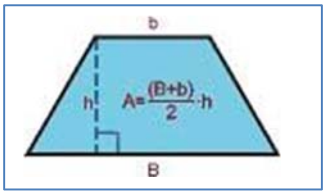
Perímetre: $P = 11 + 11 + 7.5 = 29.5 \text{ cm}$

Activitats proposades

25. La base d'un triangle rectangle mesura 8 cm. Si la seua hipotenusa mesura 10 cm, quina és l'àrea d'aquest triangle rectangle? (Ajuda: Utilitza el teorema de Pitàgores per a calcular l'altre catet. Com els catets són ortogonals, u és la base i l'altre, l'altura)

3.3. Àrea del trapezi, rombe i romboide

Imagina un trapezi. Gira'l 180º. Uneix el primer trapezi amb el trapezi que acabes de girar per un costat. Què obtens? És un paral·lelogram? Té de base, la suma de les bases menor i major del trapezi, i d'altura, la mateixa que el trapezi, després la seua àrea és la suma de les bases per l'altura. Per tant l'àrea del trapezi, que és la mitat és la semisuma de les bases per l'altura.

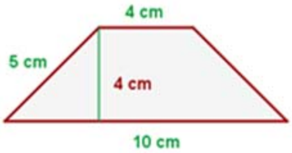


L'àrea d'un trapezi és igual a la meitat de la suma de les seues bases multiplicada per la seua altura:

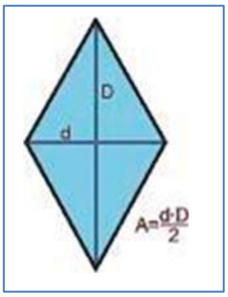
$$A=\frac{(B+b)\cdot h}{2}$$

Exemple:

- Tenim el següent trapezi la base del qual *B* = 10 *cm*, *b* = 4 *cm*, h = *4 cm*, la seua àrea és:



$$A=\frac{(10+4)\cdot 4}{2}=28\ cm^2$$



Pensa en un rombe. Està format per dos triangles iguals

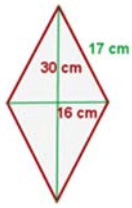
L'àrea d'un rombe és el producte de les seues diagonals dividides entre 2:

$$A=\frac{D\cdot d}{2}$$

Exemple:

- Si tenim un rombe les diagonals del qual són D = 30 *cm* i d = 16 *cm* respectivament i un costat 17 *cm*, l'àrea serà

$$A=\frac{30\cdot 16}{2}=240\ cm^2$$



I el perímetre 17 · 4 *cm* en ser tots els costats iguals.

Una altra manera de trobar l'àrea d'un rombe seria considerar que el rombe amb les seues dos diagonals forma quatre triangles rectangles iguals de costats: 15 *cm*, (la mitat de la diagonal D), 8 *cm* (la mitat de la diagonal d), perquè ambdues diagonals s'encreuen al centre del rombe, i d'hipotenusa 17 *cm*, el costat del rombe.

L'àrea és: Àrea d'un triangle multiplicat per 4 triangles.

Comprovem que el valor coincideix amb l'anterior:

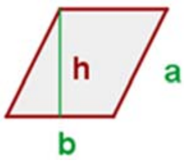
$$A = (8 \cdot 15 : 2) \cdot 4 = 60 \cdot 4 = 240\ cm^2.$$

Ja saps que el romboide és un cas particular de paral·lelogram.

Autors: Javier Rodrigo, Raquel Hernández i José Antonio Encabo
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay

L'àrea d'un romboide és el producte de la seua base i la seua altura:

$$\grave{A}rea_{romboide} = base \cdot altura = b \cdot h$$



Exemple:

Si tenim un romboide de 5 *cm* de base i 4 *cm* d'altura la seua àrea és 5 · 4 = 20 cm^2.

Si el costat val 4, el perímetre és 5 + 5 + 4 + 4 = 18 *cm*.

Activitats resoltes

- Calcula l'àrea de les següents figures planes:

  a) Un trapezi de bases 12 i 8 cm i d'altura 5 cm

  b) Un rombe de diagonals 27 i 8 cm

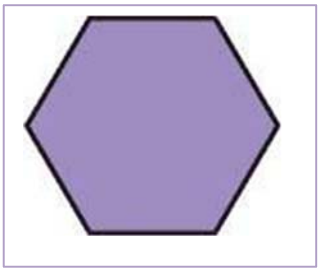
$$\grave{A}rea_{trapezi} = \frac{(B+b)\cdot h}{2} = \frac{(12+8)\cdot 5}{2} = 50\ cm^2.$$

$$\grave{A}rea_{rombe} = \frac{D\cdot d}{2} = \frac{27\cdot 8}{2} = 108\ cm^2.$$

3.4. Àrea de polígons regulars

Un polígon regular podem dividir-lo en tants triangles iguals com a costats té el polígon. Cada triangle té d'àrea: (base · altura)/2. La base del triangle és el costat del polígon, i la seua altura, l'apotema del polígon.

Exemple



- L'hexàgon regular de costat 4 *cm* i apotema 3,5 *cm* el descomponem en 6 triangles de base 4 *cm* i altura 3,5 *cm*, per la qual cosa l'àrea de cada u és:

$$\grave{A}rea_{triangle} = \frac{4\cdot 3{,}5}{2} = 7\ cm^2.$$

L'àrea de l'hexàgon és per tant:

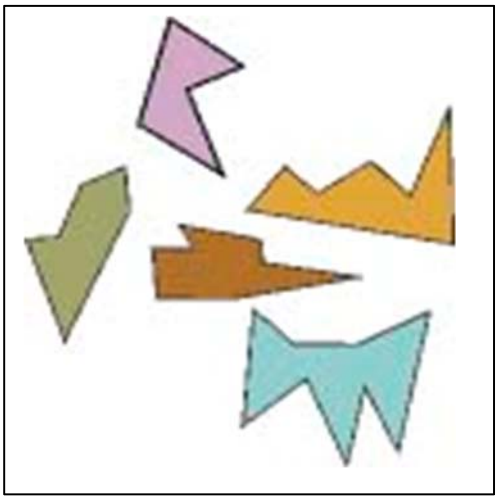
$$\grave{A}rea_{hex\grave{a}gon} = \frac{6\cdot 4\cdot 3{,}5}{2} = \left(\frac{6\cdot 4}{2}\right)\cdot 3{,}5 = 42\ cm^2.$$

En ser $\left(\frac{6\cdot 4}{2}\right)$ el semiperímetre de l'hexàgon, és a dir, la meitat del seu perímetre, es pot dir que:

L'àrea d'un polígon regular és igual al semiperímetre per l'apotema.

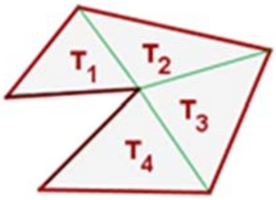
$$\grave{A}rea = semiperímetre \cdot apotema$$

3.5. Àrea de polígons irregulars



Els polígons irregulars són aquells que no tenen una forma coneguda determinada.

Per a calcular l'àrea d'un polígon irregular, dividim la figura en triangles i quadrilàters coneguts per a poder aplicar les fórmules apreses anteriorment.

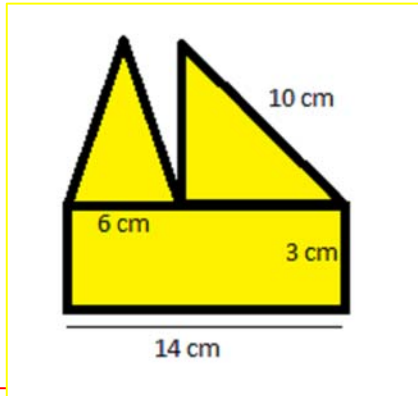


$A = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$

Exemple:

- L'àrea d'aquesta figura irregular és 84 cm^2. Què hem fet per a calcular-la?

Dividim la figura en dos triangles i un rectangle i calculem l'àrea de cada una de les figures. Prèviament utilitzem el teorema de Pitàgores per a calcular l'altura dels triangles i obtenim que mesura 6 *cm*.



$$\text{Àrea}_{triangle1} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18cm^2 \, \text{Àrea}_{triangle2} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24cm^2$$

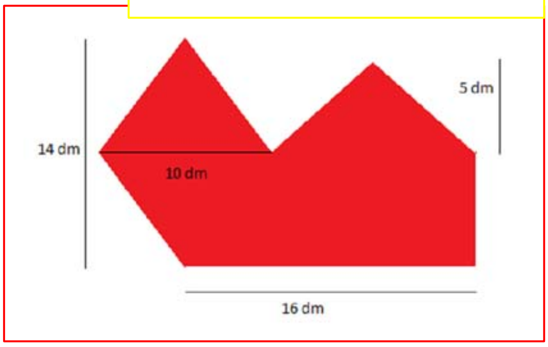
$$\text{Àrea}_{rectangle} = b \cdot h = 14 \cdot 3 = 42cm^2$$

Per a calcular l'àrea total, sumem les tres àrees obtingudes:

A_{total}=18 + 24 + 42 = 84 cm^2.

Activitats resoltes

- Per a calcular l'àrea del polígon de la dreta, el dividim primer en quadrilàters coneguts.



Tenim un rombe les diagonals del qual mesuren 14 *dm* i 10 *dm*, un trapezi d'altura 7 dm i bases 16 i 11 *dm* i un triangle d'altura 5 dm i base, la base menor del trapezi.

Calculem l'àrea del rombe, el trapezi i el triangle:

$$\text{Àrea}_{\text{rombe}} = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{14 \cdot 10}{2} = 70 \, dm^2.$$

El trapezi té de base major 16 dm, de base menor 16 – 5 = 11 dm, i d'altura 7 dm, per tant:

$$\text{Àrea}_{\text{trapezi}} = \frac{(B+b) \cdot h}{2} = \frac{(16+11) \cdot 7}{2} = \frac{189}{2} \, dm^2.$$

La base del triangle mesura 11 *dm* i la seua altura 5 *dm*, per tant la seua àrea mesura:

$$\text{Àrea}_{\text{triangle}} = \frac{B \cdot h}{2} = \frac{11 \cdot 5}{2} = \frac{55}{2} \, dm^2.$$

Sumant totes les àrees obtingudes: $\text{Àrea}_{\text{TOTAL}} = 70 + \frac{189}{2} + \frac{55}{2} = 192 \, dm^2$.

Autors: Javier Rodrigo, Raquel Hernández i José Antonio Encabo
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay

Activitats proposades

26. Els taulells de la figura mesuren 24 *cm* de llarg i 9 *cm* d'ample. Quina àrea ocupa cada un dels taulells?

Taulells rectangulars

27. Mesura la base i l'altura de la teua taula. De quina figura es tracta? Quant mesura la seua àrea?

28. Aquestes motlures mesuren 180 cm d'ample i 293 cm d'alt. Quina és l'àrea tancada?

29. Cada un dels triangles de la figura tenen una base de 20 *mm* i una altura de 12 *mm*. Quant val l'àrea de cada triangle? Si en total hi ha 180 triangles, quina àrea ocupen en total?

30. La base d'un triangle rectangle mesura 6 *cm*. Si la seua hipotenusa mesura 14 cm, quina és l'àrea d'aquest triangle rectangle? (*Ajuda*: Utilitza el teorema de Pitàgores per a calcular l'altre catet. Com els catets són ortogonals, u és la base i l'altre, l'altura)

31. En una cometa amb forma de rombe, les seues diagonals mesuren 93 i 44 *cm*. Quant mesura l'àrea de la cometa?

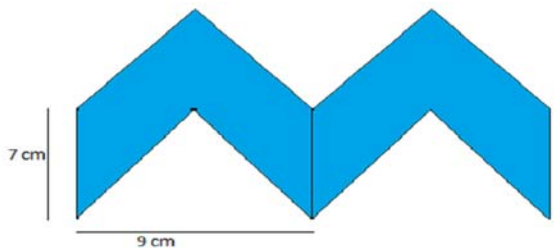
32. Un trapezista està realitzant acrobàcies sobre un trapezi de bases 2,3 i 1,7 m i altura 1,4 *m*. Quant mesura l'àrea del trapezi que usa el trapezista?

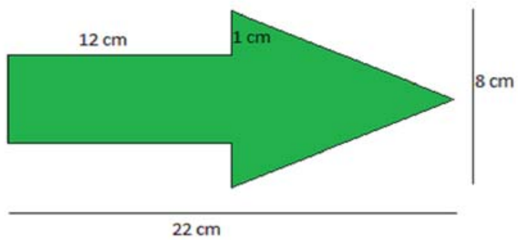
33. Calcula l'àrea d'un romboide de 24 *cm* de base i 21 *cm* d'altura. Si doblem les mesures de la base i l'altura, quina és l'àrea del nou romboide?

34. Donat un hexàgon regular de costat 4 *cm*, calcula la longitud de l'apotema i determina la seua àrea.

35. Donat un triangle equilàter de costat 4 *cm*, calcula la longitud de l'apotema i determina la seua àrea.

36. Calcula l'àrea dels següents polígons irregulars:





37. Calcula el perímetre dels polígons anteriors.

Autors: Javier Rodrigo, Raquel Hernández i José Antonio Encabo
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay

4. PERÍMETRES I ÀREES DE FIGURES CIRCULARS

En aquest apartat repassarem les àrees i perímetres de les figures circulars que ja coneixes del curs anterior. Si les recordes bé, pots botar-lo.

4.1. Longitud d'una circumferència

El **nombre π** (pi) es defineix com el quocient entre la longitud de la circumferència i el seu diàmetre.

π =Longitud de la circumferència / Diàmetre

És un nombre irracional, amb infinites xifres decimals no periòdiques. Una aproximació de **π** és 3,14, una altra 3,1416, i una altra 3,141592.

Des de l'antiguitat més llunyana fins hui en dia els matemàtics continuen investigant sobre ell.

Si una circumferència té un radi r, llavors el seu diàmetre mesura $2r$, i la seua longitud, per la definició de π, mesura $2\cdot\pi\cdot r$.

Longitud de la circumferència = $2\cdot\pi\cdot r$.

Activitats resoltes

- La circumferència de radi 7 *cm* té una longitud $L = 2\cdot\pi\cdot r = 2\cdot\pi\cdot 7 = 14\cdot\pi \approx 43{,}98$.

4.2. Longitud d'un arc de circumferència

Per a calcular la longitud d'un arc de circumferència que comprèn un angle de α graus, hem de tindre en compte que la circumferència completa comprèn un angle de 360º. Per tant:

$L = 2\cdot\pi\cdot r\cdot\alpha/360$.

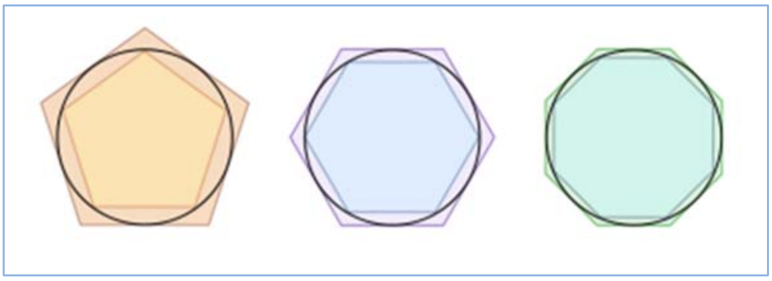
Activitats resoltes

- Les rodes d'un carro mesuren 50 *cm* de diàmetre, i tenen 16 radis. L'angle α mesura 360/16. Per tant la longitud de l'arc entre cada radi és
  $L = 2\cdot\pi\cdot r\cdot\alpha/360 = 50\cdot\pi\cdot(360/16)/360 = 50\cdot\pi\cdot/16 \approx 9{,}8$ *cm*.

4.3. Àrea del cercle

L'àrea del cercle és igual al producte del nombre π pel quadrat del radi.

$A = \pi\cdot r^2$.

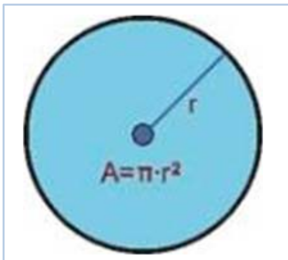


Es pot imaginar l'àrea del cercle com a la que s'acosten polígons regulars inscrits en una mateixa circumferència de radi r, amb cada vegada més costats. Llavors:

i) L'apotema del polígon s'aproxima al radi.

ii) El perímetre del polígon s'aproxima a la longitud de la circumferència.

Per tant, l'àrea d'aqueix polígon, que és igual al semiperímetre per l'apotema, s'aproxima a: $(2\cdot\pi\cdot r/2)\cdot r = \pi\cdot r^2$.



Activitats resoltes

- L'àrea d'un cercle de radi 5 *cm* és $A = 25\,\pi \approx 78{,}54$ cm^2. I el d'un cercle d'1 *m* de radi és $A = \pi \approx 3{,}14$ m^2.
- L'àrea d'un cercle de diàmetre 8 *m* és $A = 4^2\,\pi = 16\,\pi \approx 50{,}3$ m^2. I el d'un cercle de 2 *cm* de diàmetre és $A = 1^2\pi = \pi \approx 3{,}14$ cm^2.

4.4. Ús de Geogebra per a comprendre la longitud de la circumferència i l'àrea del cercle

Utilitzarem *Geogebra* per a millorar la comprensió sobre el nombre π comprovant com el quocient entre la longitud de la circumferència i el seu radi és constant, encara que es modifique el radi, sent igual a 2π. De la mateixa manera treballarem amb *Geogebra* amb l'àrea d'un cercle i comprovar que el quocient entre l'àrea i el quadrat del radi roman constant.

Si mai has utilitzat *Geogebra* busca en la web l'arxiu sobre *Geogebra* de Marea Verda i comença pels primers passos.

Activitats resoltes

- *Comprova, utilitzant Geogebra, la relació entre la longitud de la circumferència i el seu radi.*

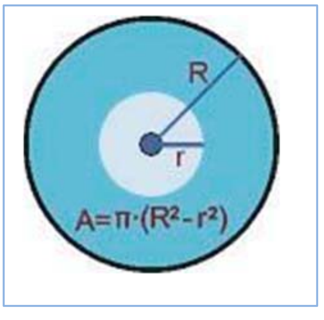
Obri una finestra de *Geogebra,* en el menú **Visualitza** desactiva **Eixos** i **Quadrícula**.

- Defineix un **Nou punt** *A* i un altre que, amb el menú contextual, anomenaràs *O* i dibuixa la **circumferència**, c, amb centre en *O* que passa per *A* i el **segment** *OA*.
- Utilitza la ferramenta **Distància** per a mesurar la longitud de la circumferència, *PeriCònica*; i el segment *OA*, que és el seu radi i es denomina *a*.
- Calcula en la línia d'Entrada el quocient *PeriCònica[c]/a*, que apareix en la finestra algebraica com a *b* = 6,28.
- Tria al menú **Opcions**, 5 Posicions **decimals**. El quocient *b* apareix com a *b* = 6,28319, una aproximació del nombre 2π.
- **Desplaça** el punt *A* i observa que encara que canvien les mesures de la longitud de la circumferència i del radi el quocient *b* roman constant.

- *Comprova, utilitzant Geogebra, la relació entre l'àrea del cercle i el seu radi.*

- Activa la ferramenta **Àrea** per a calcular la mesura de la superfície del cercle.
- Calcula en la línia d'Entrada el quocient *Àrea[c]/a^2*, que apareix a la finestra algebraica com *d*=3,14159, una aproximació del nombre π.
- **Desplaça** el punt *A* i observa que encara que canvien les mesures de l'àrea del cercle i del radi el quocient *d* roman constant.

4.5. Àrea de la corona circular



L'àrea d'una corona circular és igual a l'àrea del cercle major menys l'àrea del cercle menor.

$$\mathbf{A = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (R^2 - r^2)}$$

Activitats resoltes

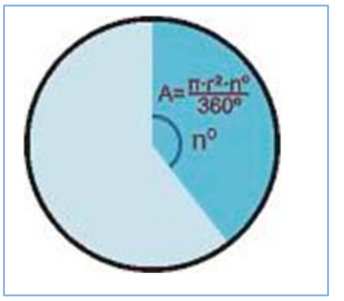
- L'àrea de la corona circular formada per les circumferències concèntriques de radis 9 *cm* i 5 *cm* és igual a:

$A = \pi \cdot (R^2 - r^2) = \pi \cdot (9^2 - 5^2) = \pi \cdot (81 - 25) = \pi \cdot 56 \approx 175{,}9\ cm^2$.

4.6. Àrea del sector circular

L'àrea d'un sector circular que comprèn un angle de *n* graus és igual a:

$$A = \pi \cdot r^2 \cdot n/360.$$



Per a trobar **l'àrea del segment circular restem** a l'àrea del sector circular l'àrea del triangle construït sobre els radis.

Activitats resoltes

- Per a trobar l'àrea del *sector circular* de radi 4 m que comprèn un angle de 90º, calculem l'àrea del cercle complet: $\pi \cdot 4^2 = 16\pi$, i trobem la proporció:

$$A_S = 16\pi \cdot 90/360 = 4\pi \approx 12{,}57\ m^2.$$

- Per a trobar l'àrea del *segment* circular, restem a l'àrea anterior l'àrea del triangle rectangle de base 4 m i altura 4 *m*, $A_T = 4 \cdot 4/2 = 8\ m^2$. Per tant l'àrea del segment és:

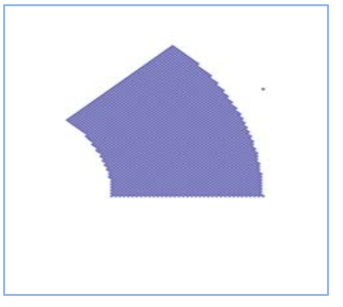
$$A = A_S - A_T = 12{,}57 - 8 = 4{,}57\ m^2.$$

4.7. Altres àrees

Per a trobar **l'àrea d'un sector de corona circular** restem a l'àrea del sector circular de major radi l'àrea del sector circular de menor radi.

L'àrea d'un sector de corona circular formada per les circumferències concèntriques de radis *r* i *R* que comprèn un angle de *n* graus és igual a:

$$A = \pi \cdot R^2 \cdot (n/360) - \pi \cdot r^2 \cdot (n/360) = \pi \cdot (R^2 - r^2) \cdot n/360.$$



Activitats resoltes

- Per a trobar l'àrea del *sector* de *corona* circular de radis 7 m i 8 m que comprèn un angle de 90º, calculem l'àrea de la corona circular completa: $\pi \cdot (8^2 - 7^2) = 15\pi$, i trobem la proporció:

$$A_C = 15\pi \cdot 90/360 = 3{,}75\pi \approx 11{,}78\ m^2.$$

També es pot trobar amb la fórmula anterior:

$$A_C = \pi \cdot (8^2 - 7^2) \cdot 90/360 \approx 11{,}78\ m^2.$$

Autors: Javier Rodrigo, Raquel Hernández i José Antonio Encabo
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay

Activitats proposades

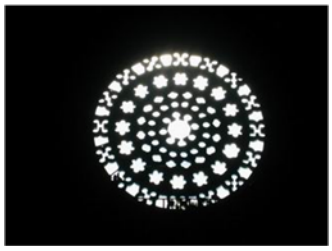
38. Busca 3 objectes redons, per exemple un got, una tassa, un plat, una botella… i utilitza una cinta mètrica per a mesurar la seua longitud. Mesura també el seu diàmetre. Calcula el seu quocient. Anota les aproximacions de π que hages obtingut.

39. La Terra és aproximadament una esfera de radi 6.379 *km*. Quant mesura l'Equador?

40. Antigament es definia un metre com: *"la deu milionèsima part del quadrant del meridià terrestre que passa per París"*. Segons aquesta definició, quant mesura (en metres) el diàmetre terrestre?

41. Hem mesurat la distància entre els pilars de l'arc de la figura que és de 5,3 *m*. Quina és la longitud de l'arc?

42. Un far gira descrivint un arc de 160º. A una distància de 5 *km*, quina és la longitud de l'arc de circumferència en què es veu la llum?



43. El radi de la circumferència exterior del rosetó de la figura és de 4 *m*, i la de la següent figura és de 3 *m*.

a) Calcula la longitud de l'arc que hi ha en la greca exterior entre dues figures consecutives.

b) Calcula la longitud d'arc que hi ha en la següent greca entre dues figures consecutives

c) Calcula l'àrea tancada per la circumferència que rodeja a la figura interior sabent que el seu radi és de 2 *m*.

d) Dibuixa un esquema al teu quadern del dit rosetó i calcula àrees i longituds.

44. Calcula l'àrea de la corona circular de radis 15 i 7 *cm*.

45. Calcula l'àrea del sector circular i del segment circular de radi 15 *cm* i que forma un angle de 60º. Observa que per a calcular l'altura del triangle necessites usar el Teorema de Pitàgores.

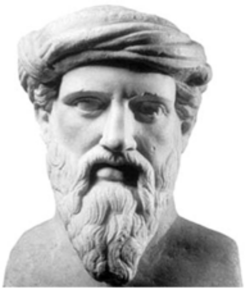
46. Calcula l'àrea del sector de corona circular de radis 10 *cm* i 12 *cm* i que forma un angle de 60º.

Autors: Javier Rodrigo, Raquel Hernández i José Antonio Encabo
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay

CURIOSITATS. REVISTA

Biografia de Pitàgores

Pitàgores de Samos va nàixer aproximadament l'any 580 a. C. i va morir aproximadament al 495 a.C. Va destacar per les seues contribucions en Matemàtiques, Filosofia i Música. Entre els seus troballes matemàtiques destaca el teorema de Pitàgores. Pitàgores va fundar l'Escola Pitagòrica, en la que tots els descobriments eren de la comunitat, i que mantenia entre altres normes molt estrictes, la de ser vegetarià. El lema dels Pitagòrics era: "*Tot és nombre*". Quan Pitàgores va morir va quedar la seua dona, Teano, dirigint l'Escola. Curiositat: Els Pitagòrics mostraven odi als fesols. No es coneix l'origen d'aqueixa aversió. Preferirien comptar amb llentilles?



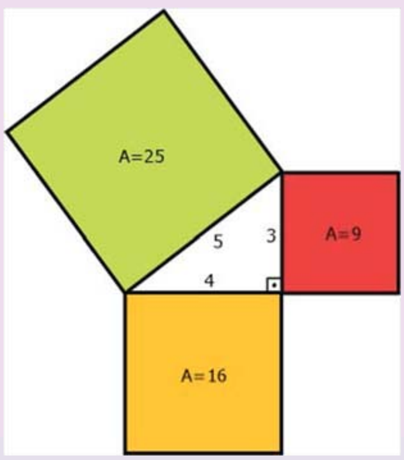
Teorema de Pitàgores

El teorema de Pitàgores és un dels grans tresors de la Geometria.

Es parla de les 370 demostracions del Teorema de Pitàgores: xinesos, hindús, àrabs... tenen la seua.

Teorema de Pitàgores i els egipcis

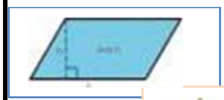
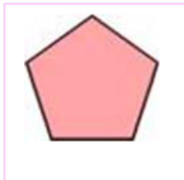
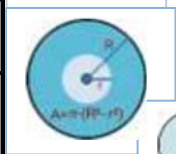
Dos mil anys abans de Crist, a la vora del Nil, els egipcis utilitzaven una corda amb tretze nucs per a traçar angles rectes. Sabien que un triangle els costats del qual mesuren 3, 4 i 5 era un



Inclús hui alguns obrers verifiquen la perpendicularitat dels marcs de les portes i de les finestres mitjançant la regla que anomenen: *6, 8 i 10*.

Autors: Javier Rodrigo, Raquel Hernández i José Antonio Encabo
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay

RESUM

Teorema de Pitàgores	En un triangle rectangle, la hipotenusa al quadrat és igual a la suma dels quadrats dels catets: $a^2 = b^2 + c^2$		$25 = 5^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16$
Àrea del quadrat	A = lado^2 = l^2 		Si $l = 4$ *cm* ⇒ A = 16 cm^2
Àrea del rectangle	A = base per altura = $a \cdot b$		Si $a = 3$ *cm*, $b = 5$ *cm* ⇒ A = 15 cm^2.
Àrea del paral·lelogram	A =base per altura = $a \cdot b$		a = 7 *m*, b = 9 *m* ⇒ A = 63 m^2
Àrea del triangle	A =(base per altura)/2 = $a \cdot b/2$		a = 5 m, b = 6 m ⇒A = 15 m^2
Àrea del trapezi	Àrea igual a la semisuma de les bases per l'altura		B = 7; b = 3; h = 5 ⇒ A = 25
Àrea del rombe	Àrea igual al producte de les diagonals partit per 2		D = 4, D = 9 ⇒ A = 36/2 = 18
Perímetre d'un polígon	Perímetre és igual a la suma dels costats		Costat = 6 *cm*, apotema = 5 *cm*, nombre de costats = 5 ⇒ Perímetre = 6 · 5 = 30 *cm*; Àrea = 15 · 5 = 75 cm^2.
Àrea d'un polígon regular	Àrea és igual al semiperímetre per l'apotema		
Longitud de la circumferència	Si el radi és r la longitud és igual a $2\pi r$. Longitud d'un arc de circumferència: $2 \cdot \pi \cdot r \cdot \alpha/360$		Radi = 3 *cm* ⇒ Longitud = 6π ≈ 18,84 *cm*. Àrea = 9π ≈ 28,26 cm^2. Si $\alpha = 30º$ i $r = 3$ *cm* ⇒Longitud de l'arc = $2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 30/360 = 0{,}5\pi \approx 1{,}57$*cm* $R = 7$, $r = 3$ ⇒ $A = \pi(7^2 - 3^2)$ $= \pi(49 - 9) = 40\pi \approx 125{,}6$ u^2 $R = 4$ *cm*, $\alpha = 60º$ ⇒ A = $\pi \cdot 16 \cdot 60/360 \approx 8{,}373$ cm^2
Àrea del cercle	Si el radi és r, l'àrea es igual a $\pi \cdot r^2$.		
Àrea de la corona circular. **Àrea del sector circular**	És la diferència entre l'àrea del cercle major menys la del cercle menor. Si comprèn un arc α graus, l'àrea és igual a $\pi \cdot r^2 \cdot \alpha/360$.		
Semblança	Dues figures són semblants si els seus angles són iguals i els seus costats proporcionals		Si el costat del quadrat mesura 5 *m*, un altre semblant de costat 15 m, k = 3, té una àrea multiplicada per 9, i el volum del cub multiplicat per 27.
Raó de semblança	Si la raó de semblança és k, la raó entre les àrees és k^2, i entre els volums k^3.		

Autors: Javier Rodrigo, Raquel Hernández i José Antonio Encabo
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay

EXERCICIS I PROBLEMES de 2n d'ESO

Teorema de Pitàgores

1. És possible construir un triangle rectangle de 10 *cm* i 6 *cm* de mesura dels seus catets i 15 *cm* d'hipotenusa? Raona la teua resposta

2. Dibuixa en paper quadriculat al teu quadern un triangle rectangle els catets del qual mesuren 3 i 4 quadrets. Dibuixa després un altre triangle rectangle de catets 6 i 8 quadrets. Mesura les dues hipotenuses i anota els resultats. És la mesura de la segona hipotenusa doble que la de la primera? Raona la resposta. Calcula les àrees formades pels quadrats construïts sobre els catets i la hipotenusa.

3. Dibuixa un triangle que no siga rectangle, que siga acutangle i comprova que no verifica el teorema de Pitàgores. Dibuixa ara un que siga obtusangle, i de nou comprova que no el verifica. Raona la resposta.

4. Quant mesura la diagonal d'un rectangle de dimensions 8,2 *cm* i 6,9 *cm*?

5. Calcula la longitud de la hipotenusa dels següents triangles rectangles de catets:

a) 16 *cm* i 12 *cm* b) 40 *m* i 30 *m*

c) 5 *dm* i 9,4 *dm* d) 2,9 *km* i 6,3 *km*.

6. Calcula la longitud del catet que falta als següents triangles rectangles d'hipotenusa i catet:

a) 25 *cm* i 15 *cm* b) 35 *m* i 21 *m*

c) 42 *dm* i 25 *dm* d) 6,1 *km* i 4,2 *km*

7. Calcula la longitud de la diagonal d'un quadrat de costat 8 *m*.

8. Calcula la mesura de la hipotenusa d'un triangle rectangle els catets del qual mesuren 12 cm i 5 cm

9. Calcula la longitud de la hipotenusa dels següents triangles rectangles de catets:

a) 4 *cm* i 3 *cm* b) 8 *m* i 6 *m*

c) 3 *dm* i 7 *dm* d) 27,3 *km* i 35,8 *km*.

10. Calcula la longitud del catet que falta als següents triangles rectangles d'hipotenusa i catet:

a) 5 *cm* i 3 *cm* b) 10 *m* i 6 *m*

c) 25 *dm* i 10 *dm* d) 34,7 *km* i 12,5 *km*

Semblança

11. Indica si són semblants els següents parells de triangles:

a)Un angle de 30º i un altre de 20º. Un angle de 120º i un altre de 20º.

b) Triangle isòsceles amb angle desigual de 80º. Triangle isòsceles amb un angle igual de 50º.

c) A = 40º, b = 8 cm, c = 12 cm. A'= 40º, b' = 4 cm, c' = 6 cm

d) a = 3 cm, b = 4 cm, c = 6 cm. a' = 12 cm, b' = 16 cm, c' = 24 cm

12. Calcula el valor desconegut perquè els triangles siguen semblants:

a) a = 15 cm, b = 9 cm, c = 12 cm. a' = 10 cm, b' = 4 cm, c'?

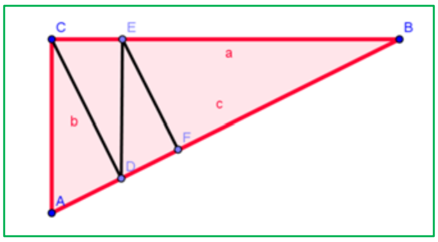
b) A = 50º, b = 3 cm, c = 7 cm. A' = 50º, b' = 18 cm, a'?

13. Les longituds dels costats d'un triangle són 12 cm, 14 cm i 14 cm. Un triangle semblant a ell té un perímetre de 80 cm. Quant mesuren els seus costats?

14. Dibuixa al teu quadern un pentàgon regular. Traça les seues diagonals. El triangle format per un costat del pentàgon i les dues diagonals del vèrtex oposat es denomina triangle auri, perquè en dividir el costat major entre el menor s'obté el nombre d'or, quant mesuren els seus angles? Busca en la figura que has traçat altres triangles auris. Quina és la relació de proporcionalitat?

15. Quant és la suma dels angles interiors d'un rombe? L'ombra d'un edifici mesura 15 m, i la del primer pis 2 m. Sabem que l'altura d'aqueix primer pis és de 3 m, quant mesura l'edifici?

16. Al museu de Bagdad es conserva un llistó en què apareix dibuixat un triangle rectangle *ABC*, de costats a = 60, b = 45 i c= 75, subdividit en 4 triangles rectangles menors *ACD*, *CDE*, *DEF* i *EFB*, i l'escriba calcula la longitud del costat *AD* com 27. Ha utilitzat la semblança de triangles? Com es podria calcular? Quines dades necessites? Calcula l'àrea del triangle *ABC* i del triangle *ACD*. Determina la longitud dels segments *CD*, *DE* i *EF*.



17. Un triangle rectangle isòsceles té un catet de longitud 20 cm, igual a la hipotenusa d'un altre triangle semblant al primer. Quant valen les àrees d'ambdós triangles?

18. El mapa a escala 1:5000000 d'un poble té una àrea de 700 cm^2, quant mesura la superfície verdadera del dit poble?

19. Unint els punts mitjans dels costats d'un triangle s'obté un altre triangle. Com són? Quina relació hi ha entre els seus perímetres? I entre les seues àrees?

20. L'altura i la base d'un triangle rectangle mesuren respectivament 6 i 15 cm; i és semblant a un altre de base 30 cm. Calcula l'altura del nou triangle i les àrees d'ambdós.

Àrees i perímetres

21. Un triangle rectangle té un catet de 6 cm i la hipotenusa de 10 cm. Quin és el seu perímetre? I la seua àrea?

22. Calcular l'àrea d'un pentàgon regular de 4 cm de costat i 3,4 cm de radi.

23. Calcula l'àrea d'un triangle equilàter de costat 8 m. *Ajuda*: Utilitza el teorema de Pitàgores per a calcular l'altura.

24. Calcula l'àrea d'un hexàgon regular de costat 7 cm. *Ajuda*: Utilitza el teorema de Pitàgores per a calcular la seua apotema.

25. Calcula el volum d'un tetraedre regular de costat 3 dm.

26. Calcula la longitud de la diagonal d'un rectangle de base 6 cm i altura 4 cm.

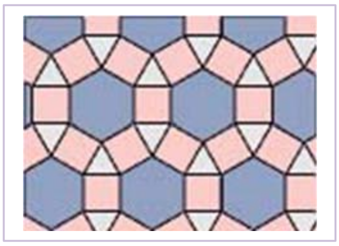
27. Per a sostindre un arbre lligues una corda a una altura de 2,5 m, i la subjectes al sòl a una distància de 3 m. Quina quantitat de corda necessites?

28. Si un catxerulo té una corda de 15 m de llarga i està sobre un fanal que dista 5 m de Xavier, a quina altura del sòl està el catxerulo?

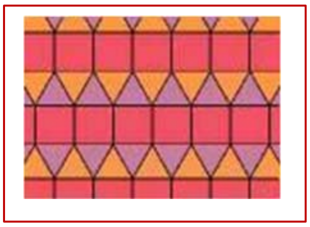
29. Calcula l'àrea d'un rombe de 4 cm de costat i la diagonal major del qual mesura 6 cm.

Autors: Javier Rodrigo, Raquel Hernández i José Antonio Encabo
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay

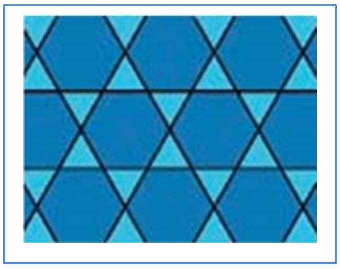
Problemes



30. Dibuixa al teu quadern el disseny del mosaic del marge. Observa que està format per quadrats (roses), triangles (blancs) i hexàgons (grisos), tots ells del mateix costat. Si aqueix costat mesura 5 cm, calcula: a) L'àrea del quadrat; b) L'àrea del triangle; c) L'àrea de l'hexàgon. Considera la part formada per 3 hexàgons, 13 triangles i 13 quadrats. Calcula l'àrea total.



31. Dibuixa al teu quadern el disseny del mosaic del marge. Observa que està format per quadrats (rojos) i triangles de dos colors, tots ells del mateix costat. Si aqueix costat mesura 7 cm, calcula: a) L'àrea del quadrat; b) L'àrea del triangle. Considera quatre franges del mosaic i relaciona les àrees dels quadrats amb la dels triangles. Quina proporció apareix? Calcula l'àrea total d'aqueixes quatre franges.



32. Calcula l'àrea d'un hexàgon de la figura si el seu costat mesura 9 cm. Calcula l'àrea d'un triangle. Què ocupa major àrea, els hexàgons o els triangles?

33. Una escala ha d'aconseguir una altura de 7 *m*, i se separa de la paret una distància de 2 *m*, quina és la seua longitud?

34. Tenim dos terrenys del mateix perímetre, un quadrat i l'altre rectangular. El rectangular mesura 200 *m* de llarg i 60 *m* d'ample. Calcula:

a) La diagonal del terreny quadrat.

b) La diagonal del rectangle

c) L'àrea de cada terreny.

d) Quin té major superfície?

35. Un constructor està rehabilitant un edifici. Per a les finestres rectangulars que mesuren 1,2 m d'ample i 1,5 m d'alt, talla travessers per a posar al seu diagonal. Quant han de mesurar?

36. La piràmide de Keops mesura uns 230 metres de costat. Podem, amb dificultat, mesurar l'altura d'una cara, estimem que mesura uns 180 m, però com conèixer l'altura de la piràmide? Quant mesura?

37. Un cub mesura d'aresta 8 cm. Calcula utilitzant el teorema de Pitàgores la longitud de la diagonal d'una cara, i la longitud de la diagonal del cub.

38. Una piràmide triangular regular té una altura de 7 cm i el radi de la circumferència circumscrita a la seua base és de 4 cm. Calcula utilitzant el teorema de Pitàgores:

a) Longitud d'una aresta.

b) Altura del triangle de la base.

c) Perímetre de la base

d) Altura d'una cara

e) Perímetre d'una cara

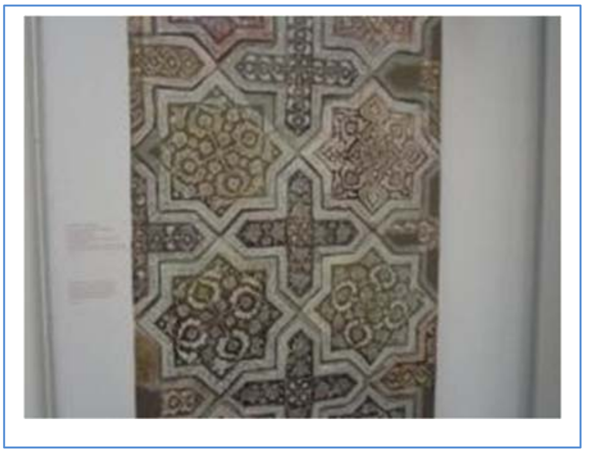
Autors: Javier Rodrigo, Raquel Hernández i José Antonio Encabo
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay

39. Un con té una altura de 10 cm i la generatriu de 12 cm. Quant mesura el radi de la seua base?

40. En un museu de Berlín es troba aquest fris babilònic. Està fet utilitzant xicotets cons d'argila. Tenim cons clars, més rogencs i més grisos. El diàmetre de la base de cada con és d'un cm. Calcula la superfície del rombe (rogenc) exterior, del següent rombe clar, del rombe gris.... Fes un disseny del dit rombe en el teu quadern així com del mosaic resultant. Si vols construir un mosaic d'un metre de llarg, quants cons de cada color necessites?

41. Mira aquest bonic fris del museu de Berlín! Fes a escala un disseny al teu quadern i pren mesures. Si la longitud del fris és d'un metre: a) Calcula la superfície de cada pètal de la flor. b) Calcula la superfície de cada tros de trena. C) calcula la superfície de cada palmet.

42. Dibuixa al teu quadern un esquema del mosaic del marge. Sabem que mesura d'ample 1,2 m. a) Calcula el costat de l'estrela de 8 puntes. b) La superfície de la dita estrela. c) La superfície de la creu,



Autors: Javier Rodrigo, Raquel Hernández i José Antonio Encabo
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay

AUTOAVALUACIÓ de 2n d'ESO

1. La hipotenusa d'un triangle rectangle de catets 2 i 6 *cm* mesura:

a) 6,32 *cm* b) 7 *cm* c) 0,05 *m* d) 627 *mm*

2. En un triangle rectangle d'hipotenusa 10 m i un catet 7 *m*, l'altre catet mesura:

a) 714 *cm* b) 7,4 *m* c) 8 *m* d) 8925,1 *mm*

3. El costat d'un hexàgon regular mesura 7 *m*, llavors la seua àrea mesura aproximadament:

a) 4,3 dam^2 b) 21 m^2 c) 40 m^2 d) 200000 cm^2

4. L'àrea d'un rectangle de 10 cm de diagonal i 8 cm de base és:

a) 53 cm^2 b) 80 cm^2 c) 48 cm^2 d) 62 cm^2

5. El rombe de diagonals 54 *dm* i 72 *dm* té com a perímetre:

a) 45 *dm* b) 180 *dm* c) 126 *dm* d) 200 *m*

6. El trapezi de bases 7 *cm* i 5 *cm* i costat 8 *cm*, té com a àrea:

a) 49 cm^2 b) 48 cm^2 c) 50 cm^2 d) 48,37 cm^2

7. La diagonal d'un quadrat de costat 1 *m* mesura aproximadament:

a) 3,14 *m* b) 1,4 *m* c) 1,26 *m* d) 1,7 *m*

8. La hipotenusa d'un triangle rectangle de catets 3 i 4 *cm* mesura:

a) 6,32 *cm* b) 5 *cm* c) 0,052 *m* d) 62 *mm*

9. En un triangle rectangle d'hipotenusa 10 m i un catet 6 *m*, l'altre catet mesura:

a) 87 *cm* b) 4 *m* c) 8 *m* d) 5,1 *mm*

10. Un rombe de diagonals 12 *cm* i 16 *cm*. Un altre rombe semblant té de diagonals 3 m i 4 *m*. Les seues àrees mesuren:

a) 90 *cm* i 6 *m* b) 180 *cm* i 6 *m* c) 40 *cm* i 12 *m* d) 62 *cm* i 12 *m*

Autors: Javier Rodrigo, Raquel Hernández i José Antonio Encabo
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay

2n ESO

CAPÍTOL 7: COSSOS GEOMÈTRIC. VOLUMS

www.apuntesmareaverde.org.es

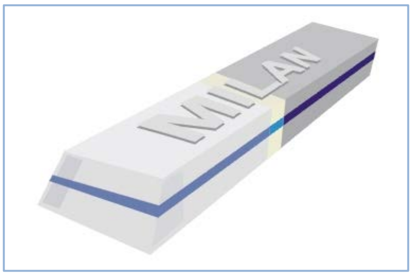
Autor: Fernando Blasco

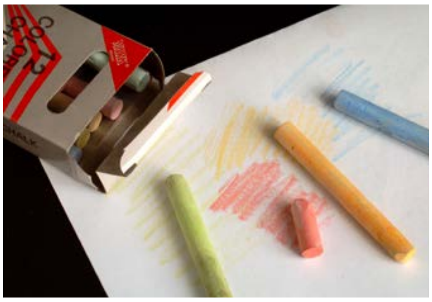
Revisor: Eduardo Cuchillo i José Gallegos.

Il·lustracions: Banc d'imatges de l'INTEF. Wikipedia Commons

Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Índex





Resum

Al nostre dia a dia, a la vida real, quasi mai trobem figures planes, sinó que utilitzem objectes tridimensionals.

Una caixa de sabates, una goma d'esborrar o un paquet de clarions són exemples de prismes. El dau del parxís (cub) o el dau d'un joc de rol (icosaedre) són poliedres regulars. De les piràmides no parlem: les que hi ha a Egipte són de tots conegudes. Les llandes de conserves vegetals i les clarions de colors solen ser cilíndriques, hi ha molts gelats amb forma de con i tant les pilotes com les bambolles de sabó tenen forma d'esfera.

Ens interessarà calcular el volum d'aquests cossos (per a saber quant cap al seu interior) i la seua àrea (el que ens permetrà, per exemple, estimar la quantitat de pintura necessària per a recobrir-los).

Autor: Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay

1. L'ESPAI

1.1. L'entorn en què ens movem

La nostra vida es desenrotlla en un entorn tridimensional: quan comprarem un moble mesurem tres dimensions, per a veure si ens cap a casa: alt, ample i llarg. Inclús els objectes "plans", com un full de paper o un DVD en realitat són tridimensionals, però la seua altura és molt xicoteta i tendim a considerar-los plans.

A pesar que al nostre dia a dia ens trobem objectes tridimensionals, és més difícil estudiar-los perquè no caben en un llibre, llevat que siga un llibre especial amb pàgines desplegables (acabem de dir que les pàgines són bidimensionals). Per això es recorre a fabricar models (en plastilina, cartolina, argila o un altre material) o a utilitzar representacions planes d'aquests objectes.

Una tècnica molt utilitzada en matemàtiques consisteix a aprofitar el que ja sabem per a aprendre els nous conceptes. Per això en aquest tema ens centrarem fonamentalment en cossos geomètrics que s'obtenen a partir de figures planes. Anem a familiaritzar-nos amb aqueixos objectes.

Activitats resoltes

- *Observa un dau. Quantes cares té? Quina forma tenen les seues cares? Mira ara un paquet de clarions blanques. Quantes cares té? Quina forma tenen? En què s'assemblen el dau i la caixa? En què es diferencien?*

El dau té 6 cares. Cada cara té la forma d'un quadrat.

El paquet de clarions també té 6 cares. Però les cares tenen forma rectangular.

El dau i la caixa s'assemblen en la forma (si la caixa fora de goma i poguérem comprimir-la tant com volguérem, podríem obtindre un dau a partir d'ella). S'assemblen en que tenen ambdues 6 cares. Es diferencien en que a un cas les cares són quadrades i a l'altre rectangulars.

Activitats proposades

1. Busca una llanda de tomaca fregida i el tros de cartó que hi ha a l'interior d'un rotllo de paper higiènic.

   a) Quina forma tenen les bases de la llanda?

   b) Hi ha cantons angulosos en algun dels objectes?

   c) Fica unes tisores en el cartó del rotllo de paper higiènic i talla. Quina figura plana obtens?

   d) Imagina que vols posar tapa i base al rotllo de cartó perquè tinga la mateixa forma que la llanda de tomaca fregit. Quina figura plana has d'utilitzar?

Autor: Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay

1.2. Dimensions

L'espai involucra tres **dimensions: ample, alt i llarg,** mentre que el pla involucra només a dos.

Exemple:

- Un full de grandària A4 mesura 21 cm x 29,7 cm. Donem 2 nombres per a parlar de la seua dimensió.

La caixa on vénen els paquets de 2500 fulls A4 mesura 21 cm x 29,7 cm x ??? cm. Necessitem tres nombres per a referir-nos a la seua dimensió. El nombre que hem afegit és l'altura de la caixa.

Exemple:

- Si has vist dibuixos fets pels egipcis t'haurà cridat l'atenció que estan dibuixats amb unes poses molt estranyes. Es deu al fet que representar en un pla un cos de l'espai és molt complex. Les figures perden el seu volum.

Lleonard Da Vinci, un geni en tots els camps i que va col·laborar en moltes activitats matemàtiques amb Lucca Paccioli (que era el seu professor) va ser un dels pioners a aconseguir representar les tres dimensions a un quadre. Aqueixes representacions utilitzen matemàtiques.

Activitats proposades

2. Busca una caixa de galetes. Mesura-la i dóna el valor de les seues tres dimensions.

3. Dibuixa en un paper aqueixa caixa de galetes. És difícil, perquè estàs representant en un full de dimensió 2 un objecte tridimensional (la caixa).

4. Dibuixa un baló de futbol, una llanda de conserves i un donut a un full de paper.

1.3. Poliedres, cossos redons i altres figures

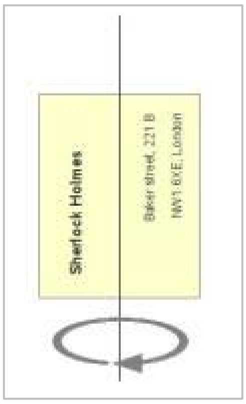
Un **poliedre** és un cos geomètric les cares del qual són polígons.

Anomenem **cossos redons** a figures prou regulars que tenen alguna superfície corba.

Un tipus particular de poliedres són els poliedres regulars, que estudiarem en una altra secció d'aquest capítol. Els prismes i piràmides també són poliedres.

Els principals cossos redons que estudiarem són les esferes, cons i cilindres. Un tipus particular de cossos redons és el dels cossos de revolució, que s'obtenen en girar una figura plana entorn d'un eix.

Activitats resoltes



- Si agafem una targeta de visita (rectangular), la travessem per un fil seguint el seu eix de simetria i la fem girar, quina figura obtenim?

La figura que s'obté és un cilindre. Pots comprovar-ho.

- Quina forma té una rosquilla?

La rosquilla no és ni una esfera ni un cilindre ni un con. La seua forma, igual que la d'un pneumàtic és una altra figura matemàtica, molt utilitzada, denominada tor.

Activitats proposades

5. Talla un triangle isòsceles de paper. Entrebanc un fil al llarg del seu eix de simetria i fes-ho girar. Quina figura s'obté?

6. Para cada un dels apartats següents, escriu al teu quadern 5 objectes quotidians que tinguen la forma requerida:

a) esfera b) cilindre c) poliedre regular d) prisma e) piràmide f) con

7. Aprèn a fer un cub amb papiroflèxia:

http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=13498&directory=67

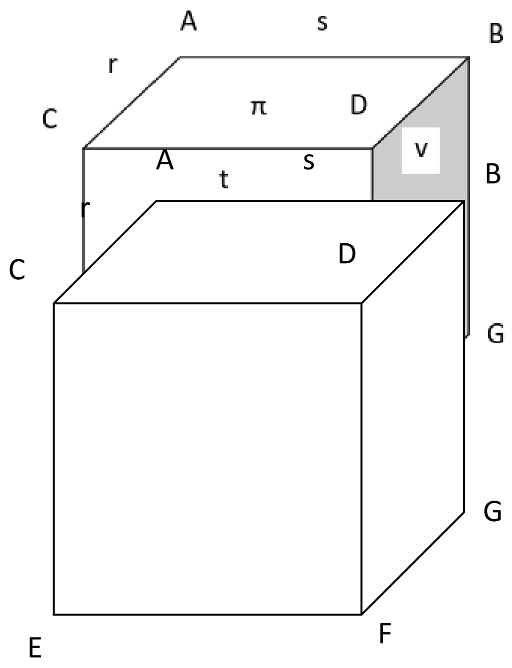
Autor: Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay

1.4. Elements de l'espai

Punts, rectes i plans

Mira al teu voltant. Estàs en una habitació. Les parets, el sòl i el sostre són plans. Aquests plans de vegades es tallen en segments de rectes. I la intersecció de tres d'aqueixos plans o de dos d'aqueixes rectes és a un punt.

Activitats resoltes



- Al cub del marge hem donat nom als punts amb lletres majúscules: A, B, C, D, E, F, G…; a les rectes amb lletres minúscules: r, s, t, u…; i als plans amb lletres gregues: π, α…

  També es podrien denominar dient, recta que passa pels punts A i B, o pla que conté als punts A, B i C.

Activitats proposades

8. Indica la recta que passa pels punts D i F.

9. Indica el pla que passa pels punts C, D i E.

10. Indica el pla que conté a la recta t i al punt B.

11. Indica el pla que conté a les rectes s i t.

Posicions relatives de dos plans

A la teua habitació el pla del sostre i el del sòl són plans paral·lels. El pla del sostre i el d'una paret són plans secants. A més com formen un angle recte són plans perpendiculars.

Dos plans a l'espai són **paral·lels** si no tenen cap punt en comú, i són **secants** si tenen una recta en comú.

Activitats resoltes

- Observem les sis cares del cub i comprovem que o són paral·leles o són secants. Les que són secants també són en aquest cas perpendiculars.
- El pla π i el pla α són secants i es tallen a la recta t.
- El pla π i el del sòl són paral·lels.

Activitats proposades

12. Indica un pla paral·lel al pla de la pissarra.

13. Dibuixa al teu quadern un croquis de la teua aula i assenyala els plans que siguen secants al pla del sostre.

Posicions relatives de dues rectes a l'espai

Continua mirant la teua aula. Fixa't en una recta del sostre. Les altres tres rectes del sostre o es tallen amb ella, o són paral·leles. Segueix fixant-te a la mateixa recta, i mira les quatre rectes verticals que formen les parets. Com són respecte a aqueixa recta? Observa que dos d'elles la tallen però les altres dos ni la tallen ni són paral·leles. Diem que aqueixes rectes s'encreuen

Dues rectes a l'espai o són **paral·leles** o es **tallen** o **s'encreuen**.

Activitats resoltes

- Ens fixem en el cub anterior a la recta r. La recta s la talla (és secant) al punt A.
- La recta t la talla al punt C. Les tres rectes r, s i t estan al pla π.
- Les rectes r i v són paral·leles i també estan al pla π.
- Però les rectes r i u no es tallen en cap punt, ni són paral·leles, ni hi ha cap pla que continga a ambdues. Les rectes r i u s'encreuen.

Activitats proposades

14. Dibuixa al teu quadern un cub. Anomena a tots els seus punts amb lletres majúscules, totes les seues rectes amb lletres minúscules, i tots els seus plans amb lletres gregues. Indica:

a) Tres parells de rectes que siguen paral·leles. Indica en cada cas sobre quin pla es troben

b) Tres parells de rectes que s'encreuen.

c) Tres parells de rectes que siguen secants. Indica en cada cas en quin punt es tallen, i en quin pla es troben.

Posicions relatives de recta i pla

Una recta pot estar **continguda** en un pla o ser **paral·lela** al pla o ser **secant**.

Activitats resoltes

- Seguim fixant-nos al cub anterior. El pla π conté a les rectes r, s, t i v. La recta u talla al pla π al punt D. La recta que passa pels punts E i F és paral·lela al pla π.

Activitats proposades

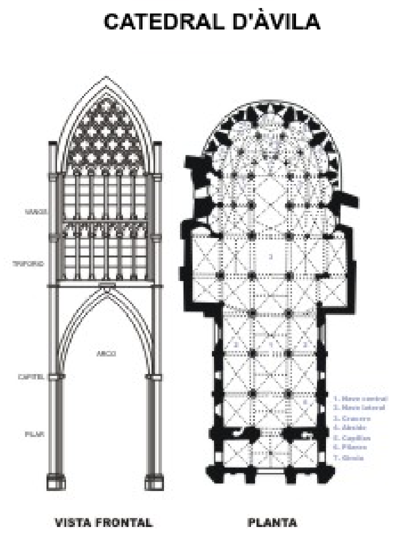
15. Indica les rectes que estan contingudes al pla α. Indica les que són paral·leles al dit pla. Indica les que són secants assenyalant el punt d'intersecció.

Autor: Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay

1.5. Representació de cossos geomètrics

De l'espai al pla

Els arquitectes, enginyers i a moltes altres professions, necessiten dibuixar en paper els edificis i les peces que dissenyen. Una forma de fer-ho és representar-los des de tres punts de vista: **planta, perfil i alçat**.

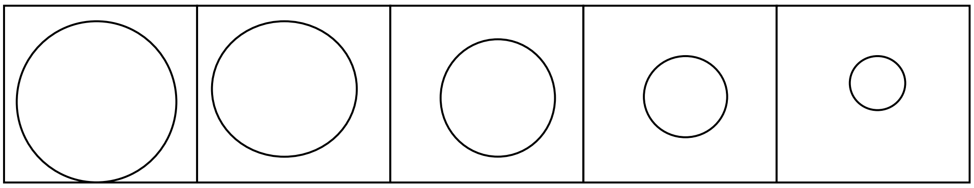


Planta i perfil

Altres professionals, com els metges, utilitzen altres tècniques, com la **tomografia**, en la que es representen els talls mitjançant diversos plans paral·lels.

Activitats resoltes

- La següent tomografia correspon a un con amb talls paral·lels a la seua base:



Activitats proposades

16. Dibuixa al teu quadern la planta, el perfil i l'alçat de:

a) un cub b) un cilindre c) un con d) una esfera e) una piràmide

17. Dibuixa al teu quadern una tomografia de:

a) Una esfera amb talls paral·lels al seu equador

b) Un cilindre amb talls paral·lels a la seua base

c) Un cilindre amb talls paral·lels a una aresta

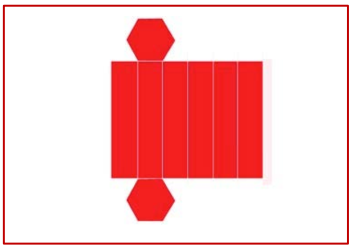
d) Un cub amb talls paral·lels a una cara

e) Un cub amb talls paral·lels a una aresta.

Autor: Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay

Del pla a l'espai

Molts cossos geomètrics podem construir-los fent el seu desenrotllament en un pla. Per exemple podem construir un prisma hexagonal amb el desenrotllament del marge:



Si vols construir-lo, pensa on posaries les pestanyes per a poder apegar-lo?

Activitats proposades

18. Dibuixa al teu quadern un desenrotllament per a construir un cub. Dibuixa les pestanyes per a apegar-lo.

19. Dibuixa al teu quadern un desenrotllament per a construir una caixa amb tapa.

20. Dibuixa al teu quadern el desenrotllament d'un cilindre.

Formes de representació

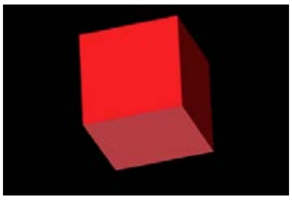
Hem vist formes de representar els cossos geomètrics: tomografies, desenrotllament, perfil, planta i alçat... però hi ha altres com descriure'l amb paraules, com per exemple: Posseeix 8 vèrtexs, 12 arestes, 6 cares totes iguals a quadrats. Saps ja què estem descrivint?

Abans vam veure la diferència entre la forma de dibuixar a l'Egipte antic i la de Lleonard da Vinci. Lleonard ja coneixia la perspectiva. Els artistes de Renaixement van aconseguir un gran domini de la perspectiva.

Una forma de perspectiva és la perspectiva cavallera, que consisteix a suposar que l'ull que mira la figura està infinitament lluny. Es té llavors, entre altres, les regles següents:

a) Les rectes paral·leles a la realitat es mantenen paral·leles al dibuix.

b) Els segments iguals sobre rectes paral·leles mantenen la mateixa longitud.



Cub en perspectiva cavallera

Activitats proposades

21. Dibuixa al teu quadern una taula en perspectiva cavallera.

22. Descriu un tetraedre dient quants vèrtexs té, quantes arestes i quantes cares.

23. Dibuixa al teu quadern la planta, el perfil i l'alçat d'un cub.

24. Dibuixa al teu quadern una habitació en perspectiva cavallera.

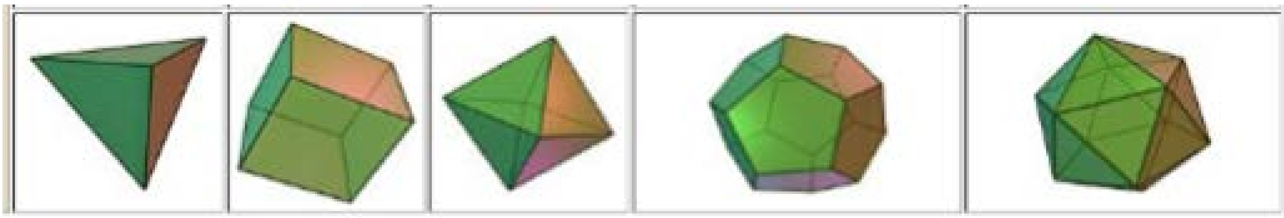
25. Dibuixa una tomografia d'una botella tallant per plans paral·lels a la seua base.

2. POLIEDRES

2.1. Poliedres regulars

Un **poliedre** és **regular** si totes les seues cares són polígons regulars iguals i a més en cada vèrtex concorre el mateix nombre de cares.

Només existeixen 5 poliedres regulars convexos, que són els que presentem a la taula següent:



Anomenem **arestes** d'un poliedre als costats de les cares d'aquest.

Els **vèrtexs** del poliedre són els vèrtexs de les seues cares.

Activitats resoltes

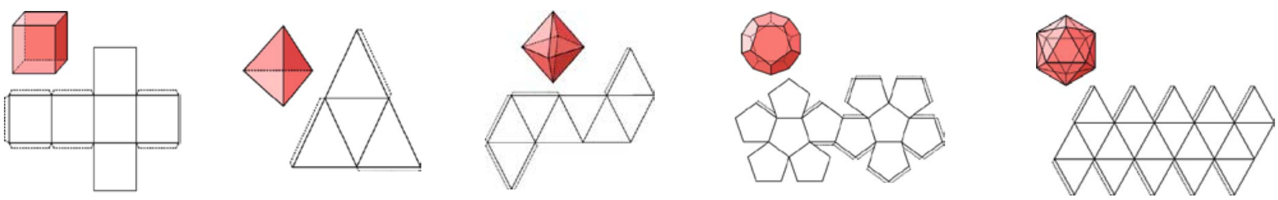
- *Conta el nombre de cares, d'arestes i de vèrtexs de cada un dels 5 poliedres regulars.*

	CARES	VÈRTEXS	ARESTES
TETRÀEDRE	4	4	6
CUB (HEXÀEDRE)	6	8	12
OCTÀEDRE	8	6	12
DODECÀEDRE	12	20	30
ICOSÀEDRE	20	12	30

Activitats proposades

26. Fes models en cartolina dels cinc poliedres regulars. Pots fer-lo en equip amb els teus companys.

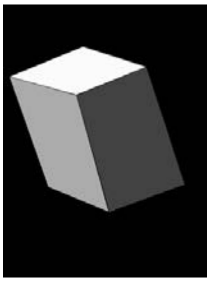
Para cada un dels cinc poliedres regulars calcula el valor de:



Autor: Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay

Nombre de cares + nombre de vèrtexs – nombre d'arestes.
Observes alguna pauta?

27. Hi ha poliedres amb totes els seus cares polígons regulars que no són poliedres regulars. Descriu el poliedre del marge. Per què no és un poliedre regular?



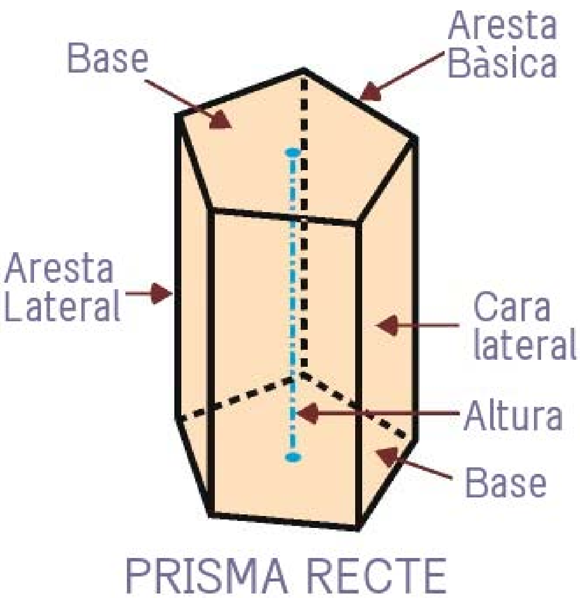
28. Hi ha poliedres amb totes les seues cares iguals que no són poliedres regulars. Com el poliedre format per 6 rombes que s'anomena *romboedre*. Descriu-lo. Construeix un amb el desenrotllament indicat:

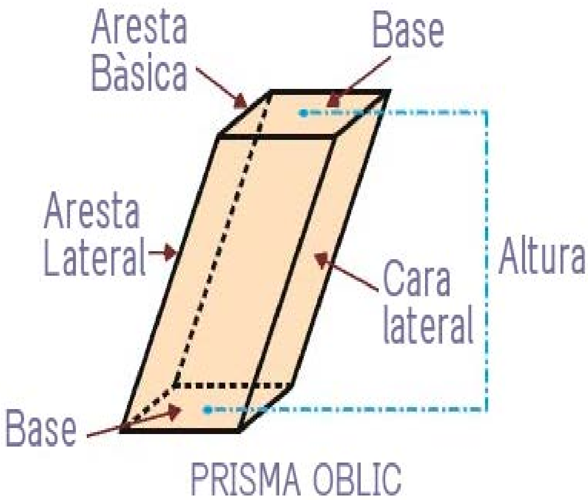
29. En una trama de triangles dibuixa el desenrotllament d'un poliedre que tinga 6 cares triangles equilàters i construeix el dit poliedre. Té totes les seues cares iguals i polígons regulars. Per què no és un polígon regular?

2.2. Prismes.

Un **prisma** és un poliedre limitat superiorment i inferiorment per dos polígons paral·lels i iguals (**bases**) i tants paral·lelograms (cares **laterals**) com a costats tenen les bases.

L'**altura** del prisma és la distància entre les seues bases.





Quan totes les cares laterals són rectangles, es diu que el prisma és un **prisma recte.**

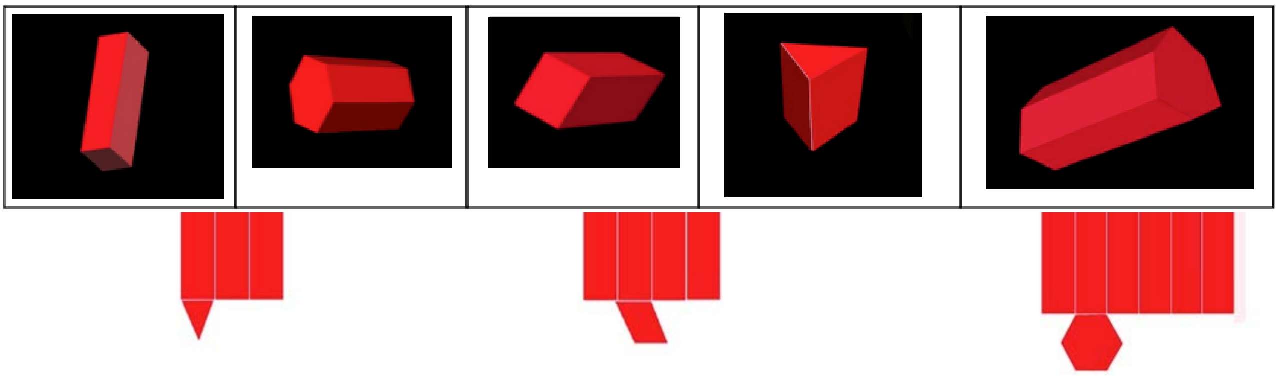
Si algunes cares laterals són romboides, tenim un **prisma oblic**.

Exemple:

- *Quasi tots els gratacels tenen una forma que recorda a un prisma recte.*

Encara que alguns arquitectes tenen idees més originals i s'atreveixen amb prismes oblics.

Anomenem **prisma regular** al prisma que té per bases dos polígons regulars.



Encara que no siga regular, al prisma se li anomena en funció dels polígons de la base. Així, si la base és un triangle tindrem un **prisma triangular**, si és un quadrilàter el prisma s'anomenarà **quadrangular**, si és un rombe, **prisma ròmbic** i quan la base siga un hexàgon, el prisma serà **hexagonal**.

La Calçada dels Gegants, a Irlanda del Nord, presenta roques de Basalt que han cristal·litzat en forma de prismes hexagonals. Les figures geomètriques apareixen també a la naturalesa.

Els prismes quadrangulars poden tindre molts altres noms com a paral·lelepípede, si totes les seues cares són paral·lelograms, paral·leles dos a dos; ortoedre si les seues cares són rectangles, és a dir, és un paral·lelepípede rectangular. A més dels que ja coneixes com a cub, prisma ròmbic…

Activitats proposades

30. Hi ha unes xocolatines que tenen forma de prisma triangular regular recte. Quins altres prismes regulars pots construir amb unes quantes d'elles? Construeix també prismes que no siguen regulars.

31. Classifica els prismes de la figura en funció que siguen regulars o no, rectes o oblics i del nombre de costats de les seues bases.

A partir del desenrotllament d'un prisma quadrangular regular recte, pensa com ha de ser el desenrotllament d'un prisma quadrangular regular oblic. Construeix-lo!

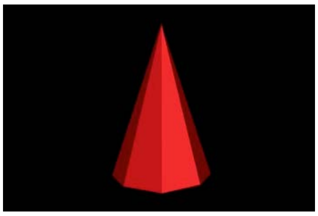
32. Recorda: Una diagonal és un segment que uneix dos vèrtexs no consecutius d'un poliedre. Quantes diagonals té un prisma regular triangular? I un prisma regular quadrangular?

33. Descriu un ortoedre, dient el nombre d'arestes i vèrtexs, i el nombre de cares, descrivint la seua forma. (De vegades se l'anomena caixa *de sabates*).

Autor: Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay

2.3. Piràmides

Una **piràmide** és un poliedre limitat inferiorment per un polígon i superiorment i lateralment per triangles amb un vèrtex comú.



Anomenarem **base** de la piràmide al polígon que la limita inferiorment.

Cares laterals als triangles que tenen un costat comú amb la base i un vèrtex comú.

A aqueix vèrtex comú se l'anomena **vèrtex** de la piràmide. **L'altura** de la piràmide és la distància del vèrtex a la base.

Quan la base de la piràmide és un polígon regular i el vèrtex es projecta sobre el centre de la base, ens trobem davant d'una **piràmide regular**.

Depenent del nombre de costats de la base de la piràmide, aquesta pot ser **triangular**, **quadrangular**, **pentagonal**...

Exemple:

- Hi ha unes piràmides molt famoses: les piràmides de Giza, prop del Caire, a Egipte. Són piràmides regulars amb base quadrada.

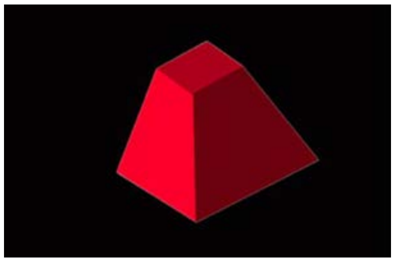
Exemple:

- Un tetraedre regular pot pensar-se com una piràmide triangular regular.

Exemple:

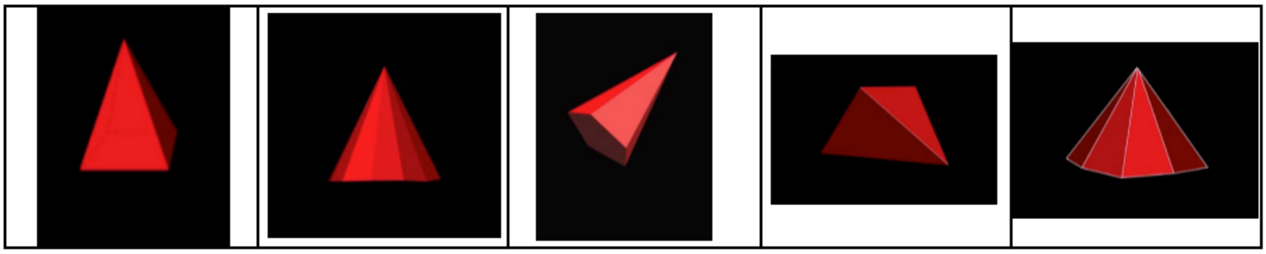
- Un octaedre regular es pot tallar amb un tall pla, formant dues piràmides quadrangulars regulars. Per aqueix motiu se li denomina "bipiràmide".

Anomenem **tronc de piràmide** al poliedre que s'obté en tallar una piràmide per un pla paral·lel a la seua base.



Observació: En tallar la piràmide pel pla paral·lel a la seua base en realitat queden dos cossos: una piràmide més xicoteta, proporcional a la que teníem originàriament i el tronc de piràmide.

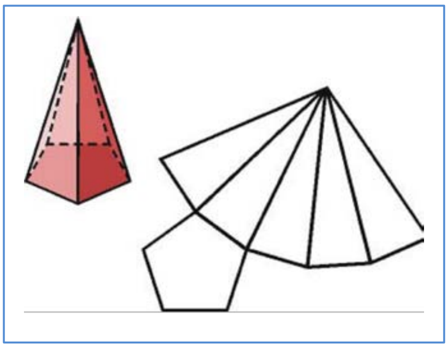
El tronc de piràmide conserva la base de la piràmide original i, al pla del tall, apareix un nou polígon, que és semblant a la base (i que actua a manera de "tapa" del poliedre). Aquesta és l'anomenada



base superior.

Activitats proposades

34. Construeix una piràmide pentagonal regular usant un desenrotllament com l'indicat.



35. Sabent com és el desenrotllament d'una piràmide pentagonal regular, i que un tronc de piràmide s'obté tallant aquesta per un pla, pensa i dibuixa com ha de ser el desenrotllament del tronc de piràmide pentagonal regular.

36. Classifica les piràmides de la figura en funció que siguen regulars o no, rectes o obliqües i del nombre de costats de la seua base.

37. A partir del desenrotllament d'una piràmide quadrangular regular recta, pensa i dibuixa com ha de ser el desenrotllament d'una piràmide quadrangular obliqua. Construeix-la!

2.4. Superfície de poliedres

La **superfície d'un poliedre** és la suma de les àrees de totes les seues cares.

Calcular la superfície d'un poliedre és simple, ja que només cal **reduir-lo a calcular les àrees dels polígons que formen les seues cares** i sumar.

Exemples:

- Superfície d'un cub de 3 cm d'aresta:

El cub té 6 cares, que són quadrats. Com l'àrea de cada un d'aqueixos quadrats és 9 cm^2, el del cub serà $6 \cdot 9 = 54$ cm^2.

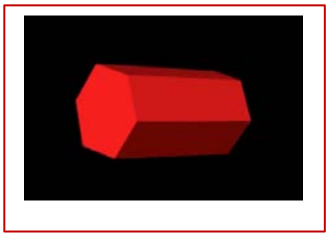
- Superfície d'un icosaedre regular de 3 cm d'aresta:

L'icosaedreregular consta de 20 triangles iguals. Com l'àrea del triangle és la meitat del producte de la base (3) per l'altura ($\frac{3\sqrt{3}}{2}$), l'àrea de cada un dels triangles és

Autor: Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay

1/2·3·($\frac{3\sqrt{3}}{2}$). Així, l'àrea de l'icosaedre és $45\sqrt{3}$ cm^2.

- Superfície d'un prisma hexagonal regular recte d'altura 10 *cm* i en el que el costat de l'hexàgon de la base és de 4 *cm*.



Hem de recordar que l'àrea d'un polígon regular és la meitat del producte del seu perímetre per la seua apotema. Així, com el costat mesura 4 *cm*, el perímetre mesura 24 *cm*. Calculem la longitud d'apotema, utilitzant el teorema de Pitàgores podem deduir que l'apotema de l'hexàgon mesura $2\sqrt{3}$

Així l'àrea d'una base és 24 · $\frac{2\sqrt{3}}{2}$ = $24\sqrt{3}$ cm^2.

Les cares laterals són rectangles. L'àrea de cada una de les cares laterals es calcula multiplicant la base per l'altura: 4 · 10 = 40 cm^2.

La superfície total del prisma s'obté sumant l'àrea de les 6 cares laterals rectangulars més la de les dues bases hexagonals: 6 · 40 + 2 · $24\sqrt{3}$ = 240 + $48\sqrt{3}$ cm^2.

Activitats proposades

38. Troba la superfície d'un octaedre regular de 5 cm d'aresta.

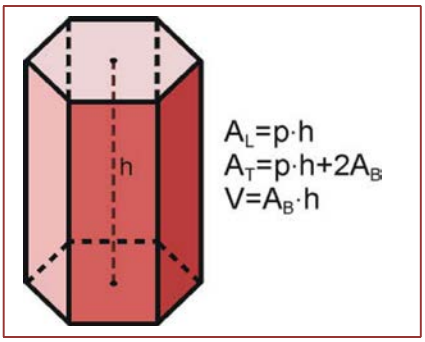
39. Troba l'àrea d'un prisma quadrangular oblic la base del qual és un rombe amb diagonals que mesuren 6 cm i 8 cm i la seua altura mesura 12 cm.

40. Quant cartó és necessari per a construir una caixa de sabates d'arestes amb longituds de 12 cm, 22 cm i 10 cm?

41. Si amb un litre de pintura podem pintar 20 m^2, quants litres de pintura són necessaris per a pintar un icosaedre regular de 38 cm d'aresta?

2.5. Volum de prismes i piràmides

El **volum** d'un cos geomètric representa el que ocupa en l'espai. Associat a aquest concepte està el de **capacitat** d'un cos, que és el que pot contindre. En matemàtiques moltes vegades es confonen aquests dos conceptes, atès que les "parets" del cos se suposen sense grossor.



De la mateixa manera que l'àrea d'un rectangle és el producte de les seues dues dimensions (base x altura), el volum del prisma rectangular recte (**ortoedre**) és el producte de les seues tres dimensions: llarg x ample x alt.

Si pensem un poc en què significa llarg x ample, veurem que açò és precisament l'àrea

Textos Marea Verde

de la base, amb la qual cosa el volum de l'ortoedre també pot calcular-se multiplicant l'àrea de la seua base per la seua altura. Podem estendre aqueixa idea a qualsevol prisma:

El **volum d'un prisma** és igual al producte de l'àrea de la seua base per la seua altura.

Activitats resoltes

- Calcula el volum d'un prisma recte la base del qual és un pentàgon regular de 10 cm^2 d'àrea i la seua altura és de 15 cm.

Com ens donen l'àrea de la base no necessitem calcular-la.

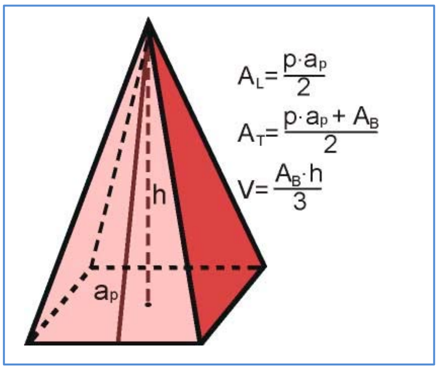
Volum = Àrea de la base x altura = 10 · 15 = 150 cm^3

- Troba el volum d'un prisma quadrangular oblic la base del qual és un rombe amb diagonals que mesuren 6 cm i 8 cm i la seua altura és igual a la diagonal major.

L'àrea del rombe és la meitat del producte de les seues dos diagonals. Així en aquest cas l'àrea de la base del prisma és 1/2 · 6 · 8 = 24 cm^2.

Per a calcular el volum ens dóna igual que el prisma siga recte o no, ja que només ens interessa l'àrea de la base i l'altura, que en aquest cas és de 8 cm, igual a la diagonal major.

Volum = Àrea de la base x altura = 24 · 8 = 192 cm^3



El **volum d'una piràmide** és un terç del volum del prisma que té la mateixa base que la piràmide i la mateixa altura que ella.

Provar aqueixa propietat relativa al volum d'una piràmide és complicat: requereix intuïció geomètrica, encara que et pots fer una idea de per què aqueix resultat és cert utilitzant papiroflèxia per a construir un prisma a partir de tres piràmides del mateix volum (consulta la revista al final del tema).

Activitats proposades

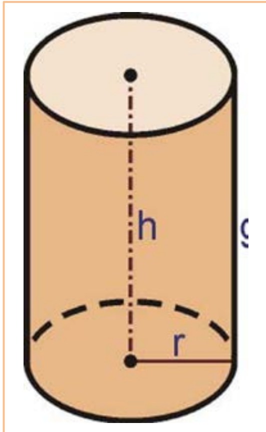
42. Troba el volum d'una piràmide hexagonal regular, en la que cada costat de la base mesura 3 cm i l'altura és de 12 cm.

43. Troba el volum d'un octaedre de 8 cm d'aresta. *Indicació*: pots descompondre l'octaedre en dues piràmides quadrades regulars.

3. COSSOS REDONS

3.1. Cilindres

De la mateixa manera que un prisma recte s'alça a partir d'una base poligonal, un **cilindre** es construeix a partir d'una base circular.



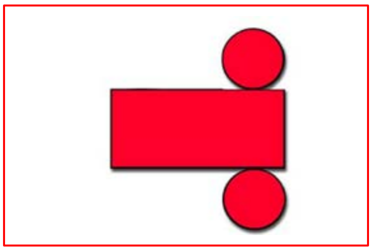
Un **cilindre** es pot generar fent girar un rectangle al voltant d'un dels seus costats. Els cercles que s'obtenen en girar l'altre costat són les **bases** del cilindre. El costat del rectangle que ens serveix com a eix de gir coincideix amb **l'altura** del cilindre.

Exemple:

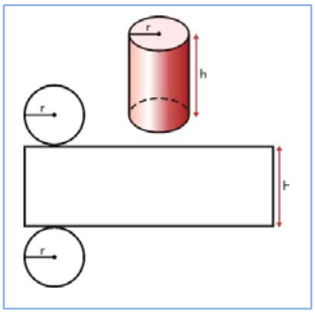
Abans ens hem referit a gratacel amb forma de prisma, però també n'hi ha amb forma de cilindre. Inclús hi ha cilindres en torres d'esglésies.

Exemple:

Les llandes de conserves són cilindres. Els rotllos de paper higiènic tenen forma cilíndrica (de fet, el nom cilindre prové d'una paraula grega que es referix a la seua forma enrotllada). Hi ha envasos de papes amb forma cilíndrica. Les llandes de refresc també tenen forma de cilindre. Molts objectes quotidians tenen forma de cilindre.



El **desenrotllament** d'un cilindre ens permetria retallar-lo en cartolina i armar-lo. Consta d'un rectangle, que el limitarà lateralment i de dos cercles, les bases que el limiten inferiorment i superiorment.

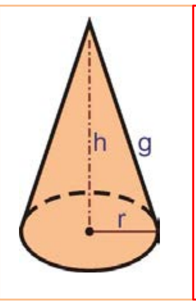


Activitats proposades

44. Dibuixa el desenrotllament corresponent a un cilindre la base del qual és un cercle de 2 cm de radi i la seua altura és de 10 cm. Després, utilitzant cinta adhesiva, construeix aqueix cilindre en paper.

Autor: Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay

3.2. Cons

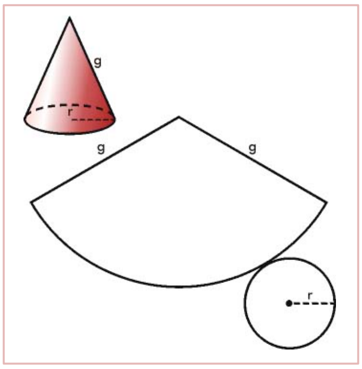


Si per a parlar del cilindre posàvem com a exemple als prismes, per a parlar del con posem com a exemple a les piràmides.

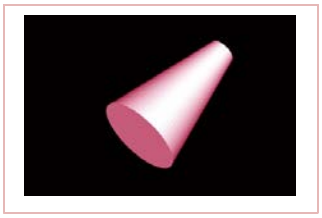
Un **con** es pot generar fent girar un triangle rectangle al voltant d'un dels seus catets. El cercle que s'obté en girar l'altre catet és la **base** del con. El costat del triangle que ens serveix com a eix de gir coincideix amb **l'altura** del con. La hipotenusa del triangle rectangle mesura el mateix que la **generatriu** del con.

Exemple:

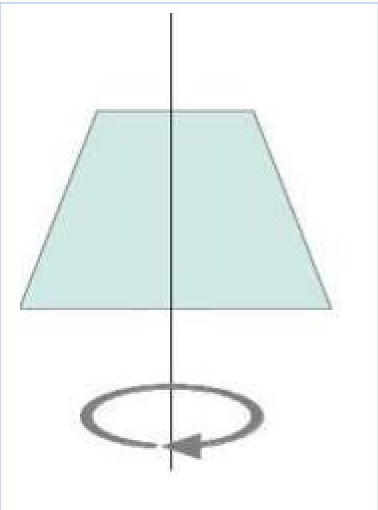
No coneixem gratacel amb forma cònica, però les botigues dels indis que estem acostumats a veure a les pel·lícules de l'oest tenen aqueixa forma.



El **desenrotllament** d'un con consta d'un sector circular i un cercle. Ens permetria retallar-ho en cartolina i armar-lo.



Igual que fèiem amb les piràmides, podem tallar un con per un pla paral·lel a la seua base, resultant un con més xicotet (la part superior del tall) i un altre cos. Aqueix un altre cos, que té dues **bases** circulars es denomina **tronc de con**. La seua **altura** és la distància entre les seues dues bases i anomenarem **generatriu** del tronc de con al segment que queda de la generatriu del con original que ha quedat després de tallar la part superior.



Un tronc de con es pot obtindre fent girar un trapezi rectangle al voltant de la seua altura.

Exemple:

Als circs, els domadors solen pujar a les feres en "tamborets" amb forma de tronc de con. Una flanera té forma de tronc de con. Els envasos de formatge fresc també tenen forma de con. Has pensat per què?

Autor: Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay

3.3. Esferes

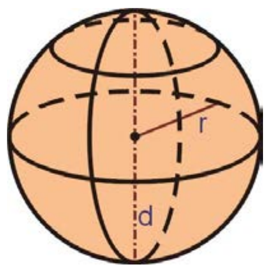
Madrid: A l'altre costat del mur

És més complicat definir una esfera que posar exemples d'objectes amb forma esfèrica: un meló d'alger, una pilota, una boleta… L'esfera és la generalització natural del cercle (pla) a l'espai.

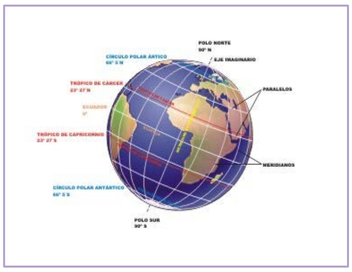
Una **esfera** es pot generar fent que un semicercle gire al voltant del seu diàmetre.

El radi del semicercle és el **radi** de l'esfera.

Quan tallem una esfera per un pla, tots els talls són cercles. Si el pla pel que tallem passa pel centre de l'esfera, obtenim un **cercle màxim**. El seu radi és igual al de l'esfera.



Exemple:

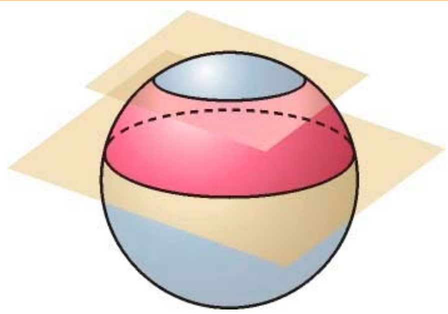


- A l'esfera terrestre, els meridians es corresponen amb cercles màxims. Els paral·lels són les circumferències que limiten els cercles que queden en tallar l'esfera terrestre amb plans perpendiculars a l'eix que passa pels pols. L'equador és l'únic paral·lel que és un cercle màxim.

Activitats resoltes

- Una esfera de 10 *cm* de radi es talla per un pla de manera que el cercle resultant té 6 *cm* de radi. Quina és la distància del centre de l'esfera a aqueix pla?

Hem de tindre en compte que el radi de l'esfera (*R*) és la hipotenusa del triangle rectangle que té per un dels seus catets al radi del cercle resultant del tall amb el pla (*r*) i per l'altre catet a un tros del radi de l'esfera perpendicular al pla, la longitud del qual és la distància demanada (*d*).



Així, com coneixem dos de les dades, només hem d'aplicar el teorema de Pitàgores per a calcular el tercer (la distància demanada *d*).

Així $r^2 + d^2 = R^2$ i, aïllant obtenim

$d^2 = R^2 – r^2 = 100 – 36 = 64$. Per la qual cosa $d = \sqrt{64} = 8$ *cm*.

3.4. Superfície de cilindres, cons i esferes

Superfície del cilindre

El procediment per a trobar la superfície d'un cilindre o un con ens recorda el mode amb què calculàvem la superfície d'un prisma o d'una piràmide: no tenim més que veure quines figures intervenen en el seu desenrotllament, calcular l'àrea de cada una d'elles i sumar-les.

En alguns textos s'utilitza el concepte d'àrea **lateral** tant per a prismes com per a cilindres. Amb ell es refereixen a l'àrea "de les parets" de la figura, sense tindre en compte el de la o les bases. Aquest **concepte no cal si en cada moment saps què estàs fent**. Les fórmules s'han de comprendre, però les matemàtiques no són un grapat de fórmules que s'han d'aprendre de memòria. Entendre el que s'ha de fer en cada moment et facilitarà l'aprenentatge de les matemàtiques.

El desenrotllament del cilindre consta de 2 cercles i un rectangle. L'altura del rectangle (h) és l'altura del cilindre i com el rectangle s'ha d'enrotllar al voltant de la base del cilindre, la seua base ha de mesurar el mateix que la corresponent circumferència i aqueix valor és, sent r el radi de la base del cilindre. Així, l'àrea del rectangle és $2\pi rh$.

D'altra banda cada una de les bases té àrea πr^2. Així:

Superfície del cilindre = $2\cdot\pi\cdot r\cdot h + \pi\cdot r^2$

Activitats proposades

45. Troba la superfície d'un cilindre l'altura del qual és de 12 cm i el radi de la seua base és de 3 cm.

46. Busca una llanda de tonyina en conserva (cilíndrica). Mesura la seua altura i el diàmetre de les seues bases. Dibuixa el desenrotllament del cilindre que dóna lloc a aqueixa llanda. Retalla-ho i forma una rèplica en paper de la llanda de tonyina.

Superfície del con

Seguint la mateixa idea anterior, per a calcular la superfície d'un con, sumarem les àrees de les dues peces que componen el seu desenrotllament: un cercle i un sector circular. (Mira la figura del desenrotllament del con que està a la secció 3.2).

Si la base del con és un cercle de radi r, la longitud de la corresponent circumferència és $2\pi r$ i la part corba del sector circular al desenrotllament del con ha d'enrotllar-se sobre aqueixa circumferència, per tant la mesura d'aqueixa línia corba és $2\pi r$.

Per a calcular l'àrea del sector circular farem una regla de tres, tenint en compte que el radi d'aqueix sector circular és la generatriu del con: si a una longitud de $2\pi g$ (circumferència completa) li correspon una àrea de πg^2, a una longitud de $2\pi r$ li correspondrà $2\pi r \cdot \pi g^2 / 2\pi g = \pi\cdot r\cdot g$.

La base del con és un cercle de radi r, l'àrea del qual és de sobra conegut. Així tenim que

Superfície del con = Àrea del sector circular + Àrea del cercle = $\pi\cdot r\cdot g + \pi\cdot r^2$

Per a calcular la superfície del tronc de con hem de calcular les àrees de les seues bases, que són

Autor: Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay

cercles (i, per tant, fàcils de calcular) i la de la seua paret lateral. L'àrea d'aquesta paret lateral se pot calcular restant l'àrea de la paret del con original menys el de la paret del con xicotet que hem tallat.

Superfície lateral del tronc de con = Superfície lateral del con original – Superfície lateral del con que tallem

Per a calcular la superfície total cal sumar a l'àrea lateral el de les dues bases.

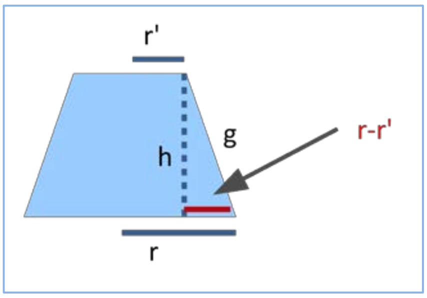
També es pot calcular açò mitjançant una fórmula, la prova de la qual utilitza dos teoremes importants de la geometria plana: el teorema de Pitàgores i el teorema de Tales.

Suposarem que el radi de la base major del tronc de con és r, el de la base menor r' i la generatriu g. Llavors

Superfície del tronc de con = $\pi\cdot(r+r')\cdot g + \pi\cdot r^2+\pi\cdot r'^{\,2}$

Activitats resoltes

- Volem construir un tamboret per a elefants amb forma de tronc de con, amb 75 *cm* d'altura i bases de 1,50 i 2,50 metres. Posteriorment forrarem amb tela tot el tamboret. Si el metre quadrat de la tela triada costa 3 euros (i se suposa no es desperdicia res en l'elaboració) quant costa forrar el tamboret?



La primera cosa que hem de fer és expressar totes les dades amb les mateixes unitats. Ho expressarem en metres.

Com ens donen l'altura i els radis, calcularem la generatriu usant el teorema de Pitàgores:

Així $h^2+(r-r')^2 = g^2$ i, reprenent les dades tenim:

$r' = 1{,}5\ m$; $r = 2{,}5\ m$; $g = \sqrt{0{,}75^2+1^2} = 1{,}25\ m$.

Amb això calculem l'àrea: $\pi\cdot(2{,}5 + 1{,}5)\cdot 1{,}25 + \pi\cdot 2{,}5^2 + \pi\cdot 1{,}5^{\,2} = 42{,}39\ \text{m}^2$

i, per tant, forrar el tamboret ens costa 42,39 · 3 = 127,17 euros.

Superfície de l'esfera

No podem calcular la superfície de l'esfera mitjançant el seu desenrotllament, ja que només es podria obtindre de forma aproximada. No obstant això, hi ha diferents mètodes (més avançats) que permeten calcular-lo. Encara que no som partidaris de donar fórmules, aquesta vegada hem d'avançar que

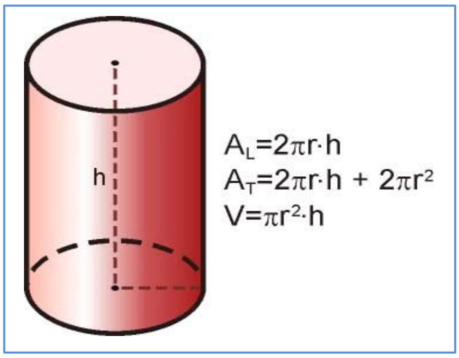
Superfície de l'esfera de radi r és igual a $4\pi r^2$

Aqueix valor coincideix amb el de l'àrea lateral del cilindre de radi r i altura $2r$ (que és el que s'ajusta per complet a l'esfera). Com sabem deduir l'àrea lateral del cilindre, recordar açò ens evitarà haver de recordar la fórmula anterior.

3.5. Volum de cilindres, cons i esferes

Amb el càlcul de volums ocorre una cosa pareguda al que ocorre amb les àrees: el càlcul del volum d'un cilindre és semblant al del volum d'un prisma, mentre que el càlcul del volum del con ens recorda al del volum de la piràmide. L'esfera mereix un capítol a part.

Volum del cilindre



El volum del cilindre es calcula com el producte de l'àrea de la seua base (que és un cercle) per la seua altura. Si el radi de la base és *r* i l'altura és *h* ens queda

Volum cilindre = $\pi r^2 h$

Exemple:

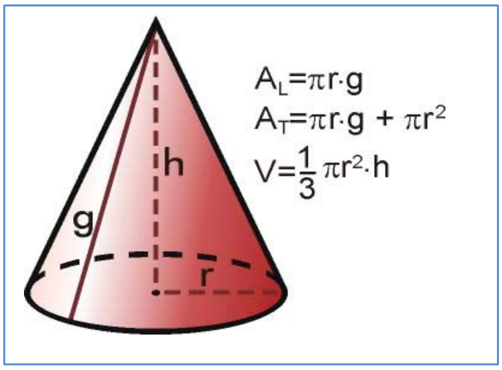
- Una llanda de tomaca fregida en conserva té un diàmetre de 6 *cm* i una altura de 12 *cm*. Calcularem el volum de la llanda, que ens indicarà quant tomaca cap al seu interior.

Cal parar atenció amb les dades perquè ens donen el diàmetre en lloc del radi. El radi de la base és 3 *cm*, la meitat del diàmetre.

Així el volum ve donat per

$$\text{Volum} = \pi \cdot 3^2 \cdot 12 \approx 339,12\ cm^3$$

Volum del con



El volum d'un con equival a un terç del volum del cilindre que té la mateixa base i la mateixa altura (et recorda això alguna cosa?). Així, per a un con el radi de la base del qual és *r* i la seua altura és *h* es té que

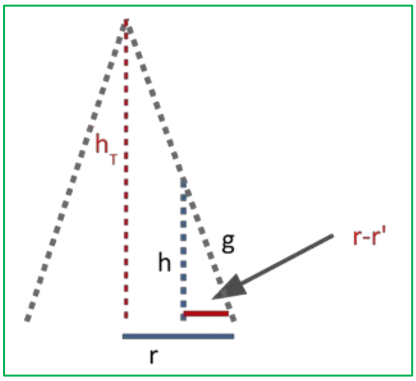
Volum con = $1/3\ \pi r^2 h$

Per a calcular el volum d'un **tronc de con** calcularem el volum del con original i li restarem la part superior que hem tallat.

Exemple:

- Calcularem el volum del tamboret per a elefants que hem forrat de tela en una activitat anterior: té forma de tronc de con, amb 75 *cm* d'altura i bases de 1,50 i 2,50 metres.

La primera cosa que farem és determinar el volum del con complet. Per a això necessitem calcular la seua altura.



Utilitzant semblança de triangles i anomenant a l'altura del con total h_T tenim que

$$h_T/h = r \,/\, (r - r')$$

d'ací que l'altura del con total siga

$$h_T = h\cdot r/(r - r') = 0{,}75\cdot 2{,}5/\,1 = 1{,}875\ m.$$

i per això el volum del con total serà de V = $h_T\,\pi r^2$ = 36,8 m^3 .

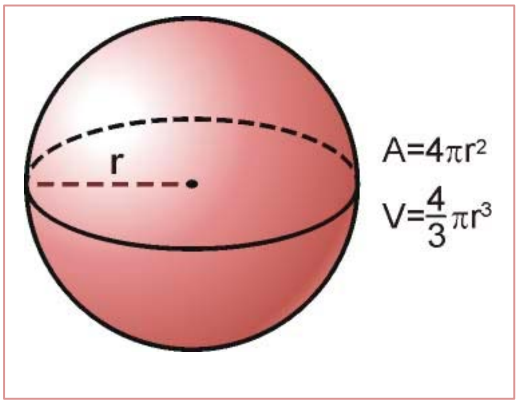
Ara hem de calcular el volum del "con xicotet" (el que hem eliminat per a aconseguir el tronc de con). La seua altura és la diferència entre l'altura del con gran i la del tronc de con. El seu radi és el de la base superior del tronc de con.

Per això el seu volum ve donat per $(h_T - h)\,\pi r'^2 = 7{,}95\ m^3$.

Conseqüentment, el volum del tronc de con és

$$36{,}8 - 7{,}95 = 28{,}85\ \text{m}^3.$$

Volum de l'esfera



Al no tindre un desenrotllament pla, treballar amb l'esfera és més difícil i requereix tècniques matemàtiques que estudiaràs en altres cursos. Simplement per completar allò que s'ha exposat en aquest tema, donem la fórmula que permet calcular el volum de l'esfera en funció del seu radi *r*.

Volum de l'esfera = $\frac{4}{3}\pi\cdot r^3$

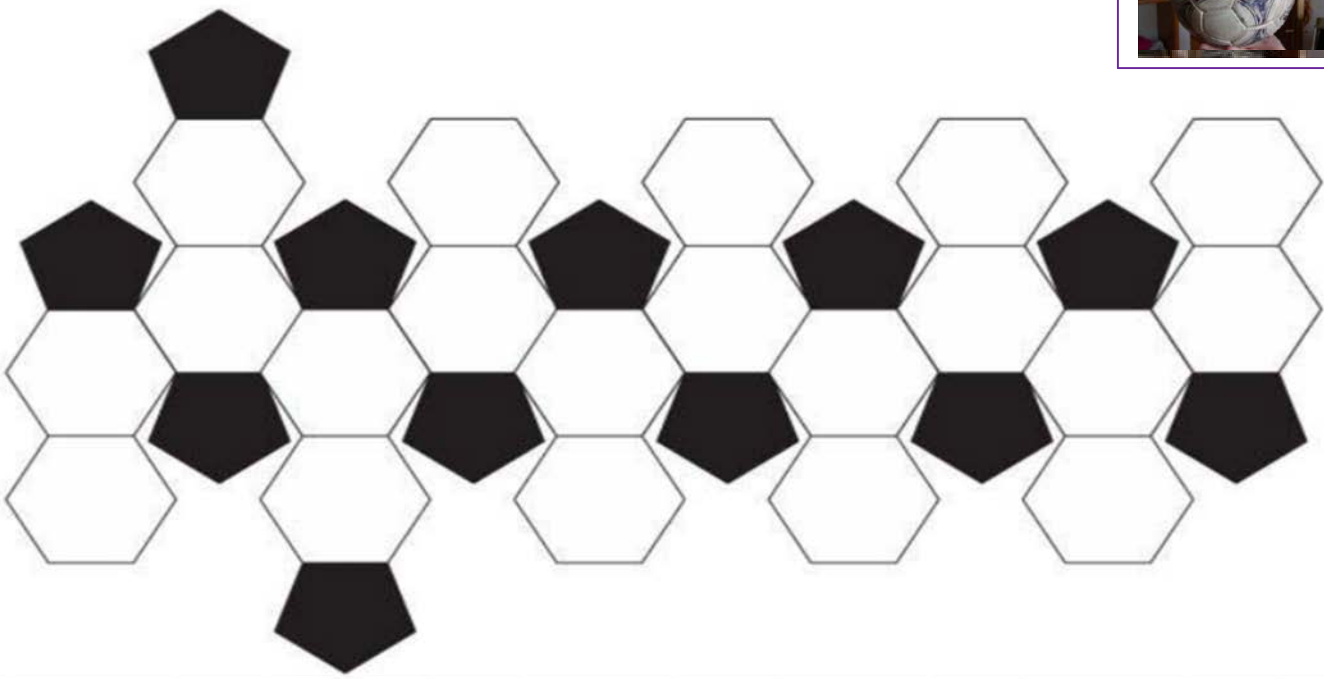
CURIOSITATS. REVISTA

Esferes

De tots els cossos geomètrics que tenen la mateixa superfície total, el que tanca un major volum és l'esfera. Per això les bambolles **de sabó** són esfèriques: contenen la major quantitat d'aire que es pot tancar amb aqueixa làmina de sabó. En dues dimensions és el cercle el que tanca la major superfície; per això si tires oli damunt de l'aigua es formen cercles.

Balons de futbol

Hi ha poliedres més complicats que els que hem descrit en aquest capítol. Per exemple, si a un icosaedre li tallem els cantons obtenim un "icosaedre **truncat**". Aqueixa és la forma real dels balons **de futbol** (els clàssics que tenen pentàgons negres i hexàgons blancs). El que ocorre és que en unflar la cambra que hi ha en el seu interior es corben els polígons, donant sensació d'esfericitat. Vols comprovar-ho? Simplement retalla en cartolina aquest model i apega les unions amb cinta adhesiva.



Llandes de conserves

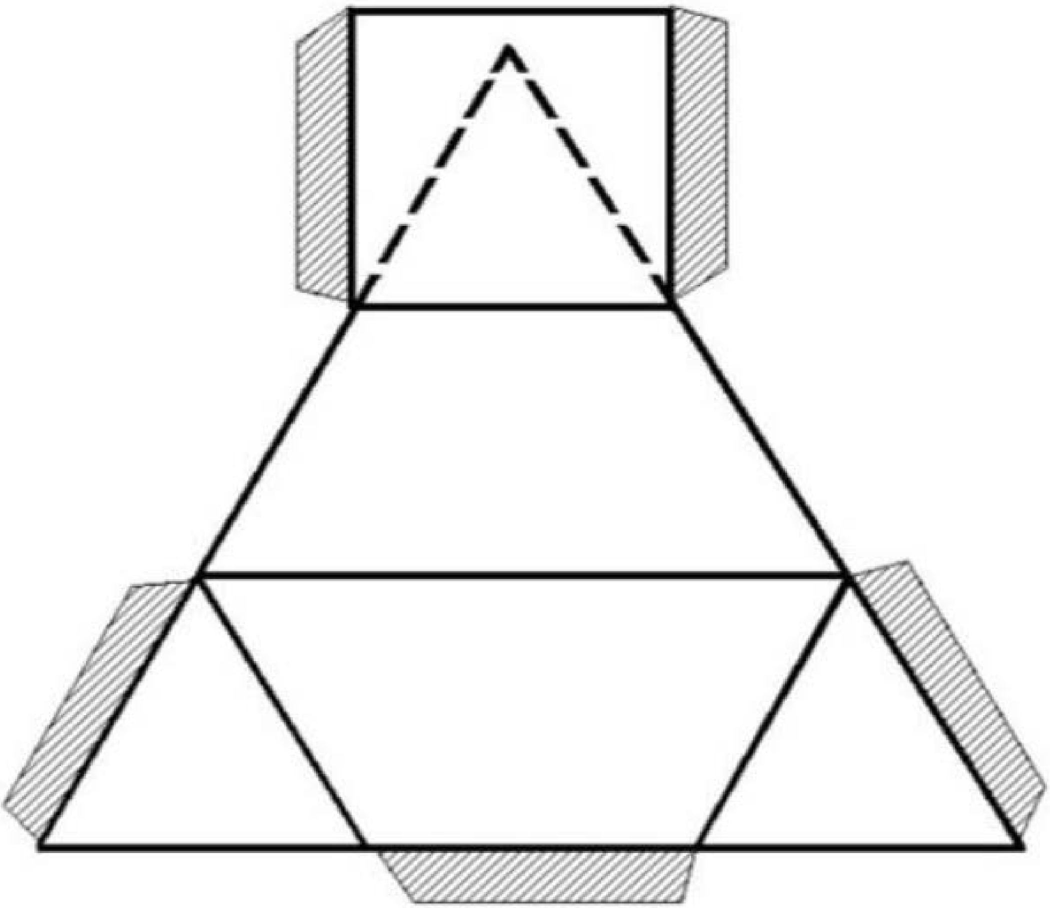
Moltes llandes i pots de conserves tenen forma cilíndrica perquè seria molt costós fabricar-les de forma esfèrica. Així i tot, pel fet que les seues bases són circulars, la relació àrea total/volum és prou satisfactòria.

Puzles de dues peces

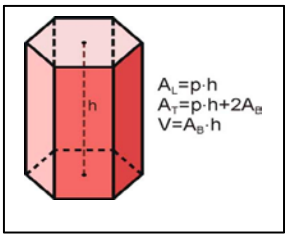
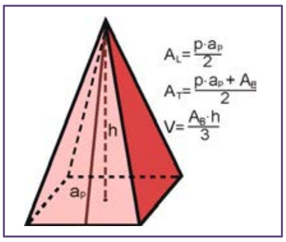
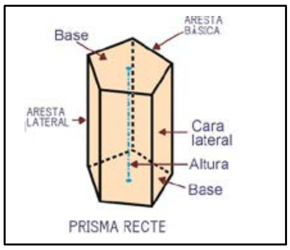
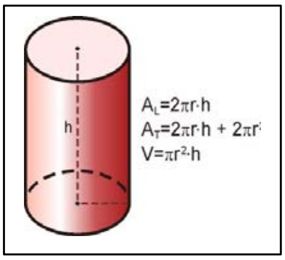
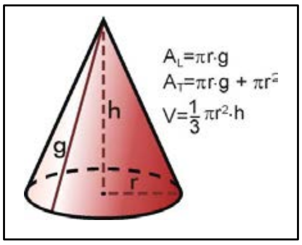
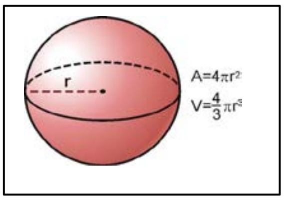
Et pareix que un puzle de dues peces és senzill?

Et proposem un repte: retalla en cartolina dues còpies d'aquesta figura, per a armar amb cada una d'elles un poliedre (les cares del qual són dos triangles, dos trapezis i un quadrat).

Ara, ajuntant aqueixos dos poliedres forma un tetraedre.



RESUM

Concepte	*Definició*	*Exemples*
Elements de l'espai	Punts, rectes i plans	
Sistemes de representació	Planta, perfil i alçat. Tomografia. Perspectiva cavallera.	
Posicions relatives	Dos plans: o es tallen o són paral·lels. Dues rectes en l'espai: o es tallen o són paral·leles o s'encreuen. Una recta i un pla: o la recta està continguda al pla, o el talla o és paral·lela.	
Poliedre	Cos geomètric les cares del qual són polígons	
Poliedres regulars	Poliedre amb totes les cares polígons regulars iguals i a més en cada vèrtex concorre el mateix nombre de cares.	Tetràedre, cub, octàedre, dodecàedre, i icosàedre.
Prisma. Volum	 	
Piràmide. Volum		
Cilindre. Volum	 	Un cilindre de radi 3 m i altura 5 m té un volum de 45π m^3, i una superfície lateral de 30π m^2.
Con. Volum		Un con de radi 3 m i altura 5 m, té un volum de 15 m^3.
Esfera. Superfície. Volum		Una esfera de radi 3 té un volum de 36π m^3, i una superfície de 36π m^2.

EXERCICIS I PROBLEMES

L'espai

1. Dibuixa al teu quadern la planta, perfil i alçat d'una cadira.

2. Dibuixa al teu quadern una tomografia de:

a) Una piràmide recta hexagonal amb talls paral·lels a la seua base

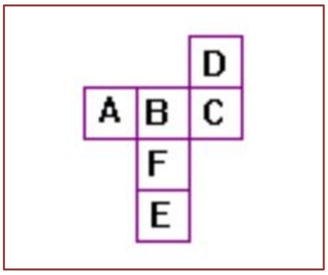
b) Un con amb talls paral·lels a la seua base

c) Un con recte amb talls paral·lels a la seua altura

d) Una prisma quadrangular amb talls paral·lels a una cara

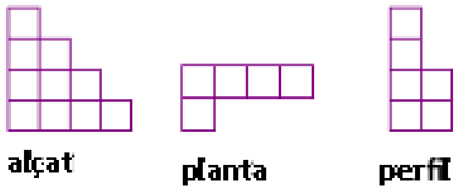
3. Mira al teu voltant i escriu al teu quadern el nom de cinc objectes indicant la seua descripció geomètrica.

4. Dibuixa una taula en perspectiva cavallera.



5. Si construeixes un cub amb el desenrotllament de la figura, la cara oposada a la lletra F seria….

6. Hem construït un cos format per cubets xicotets. Hem dibuixat el seu perfil, planta i alçat, quants cubs hem utilitzat?



7. Dibuixa al teu quadern un tetràedre. Anomena a tots els seus punts amb lletres majúscules, totes les seues rectes amb lletres minúscules, i tots els seus plans amb lletres gregues. Indica:

a) Tres parells de rectes que s'encreuen. Quins són? Descriu-les.

b) Tres parells de rectes que siguen assecants. Indica en cada cas en quin punt es tallen, i en quin pla es troben.

c) Hi ha rectes paral·leles?

8. Al dibuix del tetraedre anterior, quants plans hi ha? Hi ha plans paral·lels? Indica dos plans secants assenyalant en quina recta es tallen.

Poliedres

9. Pot existir un poliedre regular que les seues cares siguen hexàgons? En un vèrtex, quin és el nombre mínim de polígons que ha d'haver-hi? L'angle exterior de l'hexàgon és de 120º, quant val la suma de 3 angles?

10. Utilitza una trama de triangles i dibuixa en ella 6 rombes d'angles 60º i 120º. Fes amb ells el desenrotllament d'un poliedre, i construeix-lo. És un romboedre.

11. En una trama triangular retalla 2 triangles. Pots construir amb ells un poliedre? I amb 4? Retalla 5 i intenta construir un poliedre. Ara amb 6. És un treball difícil. El major que podries construir és amb 20. Sabries donar una explicació.

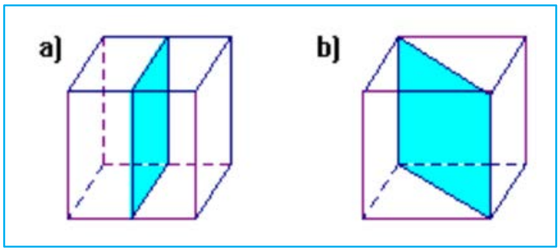
12. Pensa en un cub. Conta les seues cares, les seues arestes i els seus vèrtexs. Anota els resultats al teu quadern. Comprova si verifica la relació d'Euler: Vèrtexs més cares igual a arestes més 2. Fes el mateix pensant en un prisma hexagonal i en una piràmide triangular.

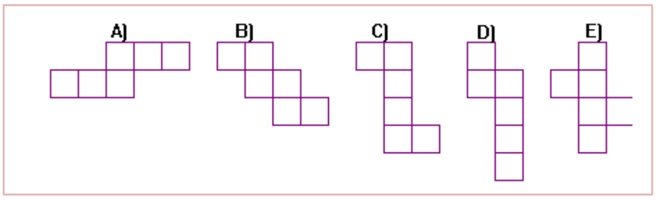
13. Un baló de futbol, és un poliedre? Descriu-lo.

14. Construeix molts, moltíssims poliedres. Almenys 5. Pots fer-ho de distintes formes: Amb el seu desenrotllament en cartolina; amb palles de refresc, fil i pegament; amb rentapipes i plastilina… Segur que se t'acuden altres formes!

15. Comprova que en unir els centres de les cares d'un cub s'obté un octàedre, i viceversa, si s'uneixen els centres de les cares d'un octàedre s'obté un cub. Es diu que són duals. Comprova que en unir els centres de les cares d'un icosàedre s'obté un dodecàedre, i viceversa. L'icosàedre i el dodecàedre són duals. Què s'obté si s'uneixen els centres de les cares d'un tetràedre? Quin poliedre és dual al tetràedre?

16. De moltes formes és possible tallar un cub en dos cossos geomètrics iguals, com per exemple mitjançant un pla que passe per dues arestes i dos diagonals de les cares, o mitjançant un pla que passe pel punt mitjà de quatre arestes, tal com s'observa a la il·lustració. Fes el desenrotllament pla de la secció del cub de la figura b), i construeix dos d'aqueixes seccions. Descriu-los. Pensa altres dos exemples de seccions del cub en dos cossos geomètrics iguals, confecciona el seu desenrotllament pla i construeix les dites seccions.





17. Quin dels següents desenrotllaments no pot ser el desenrotllament d'un cub? Raona la resposta. Només hi ha 11 possibilitats de desenrotllaments del cub diferents. Busca almenys tres més.

18. Quantes diagonals té un cub? Una diagonal és un segment que uneix dos vèrtexs que no estiguen en la mateixa cara.

19. Pensa en un cub. Imagina que talles un dels seus cantons creant una secció amb forma de triangle equilàter. Imagina que continues tallant mitjançant plans paral·lels, què obtens?, amb quin tall aconsegueixes el major triangle equilàter? I si continues tallant, què succeeix? Es pot obtindre un hexàgon regular? (Ajuda*: Si no eres capaç d'imaginar tant pots tallar un cub de plastilina*).

20. Dibuixa al teu quadern tres tomografies diferents d'un cub.

21. De quina manera pots obtindre amb un únic tall d'un cub, dues prismes triangulars rectes.

22. Calcula la diagonal d'un ortoedre de costats 8, 3 i 5 cm.

23. Escriu 3 objectes quotidians que siguen prismes quadrangulars. Els prismes quadrangulars s'anomenen també paral·lelepípedes, i si les seues cares són rectangles s'anomenen ortoedres, dels objectes que has assenyalat, quins són paral·lelepípedes i quins són ortoedres?

24. Dibuixa al teu quadern un prisma triangular i un pentagonal assenyalant les cares laterals, bases,, arestes, vèrtexs i altura.

25. Observa, en un prisma, quantes cares concorren en un vèrtex? És sempre el mateix nombre?

26. Un prisma pot tindre moltes cares, però quin és el seu nombre mínim?

27. Dibuixa el desenrotllament d'una piràmide recta quadrangular, i d'una altra hexagonal.

28. Dibuixa una piràmide recta pentagonal i assenyala el seu vèrtex, les seues arestes, les seues cares laterals, la seua base i la seua altura.

29. Pensa en un poliedre que tinga 5 cares i 5 vèrtexs. Quin tipus de poliedre és?

30. Quantes diagonals té un prisma hexagonal regular? I una piràmide hexagonal regular?

31. Dibuixa en perspectiva una piràmide pentagonal regular. Dibuixa el seu perfil, la seua planta i el seu alçat. Dibuixa una tomografia tallant per un pla paral·lel a la base.

32. Construeix un piràmide regular quadrangular de costat de la base 1 cm i altura 2 cm. Deixa la base sense tancar. Construeix un prisma regular quadrangular de costat de la base 1 cm i altura 2 cm. Deixa una base sense tancar. Plena d'arena (o semblant) la piràmide i aboca-ho dins del prisma, i compte quantes vegades necessites fer-ho per a omplir el prisma.

33. Si en una piràmide pentagonal regular la seua apotema mesura 10 cm i el costat de la seua base 4 cm, quant mesura la seua aresta?

34. Quant mesura l'aresta lateral d'una piràmide pentagonal regular l'altura del qual mesura 5 m, i la base del qual està inscrita en una circumferència de 2 m de radi?

35. Calcula el volum d'un con de generatriu 8 cm i radi de la base 3 cm.

36. Calcula el volum d'un tronc de con recte si els radis de les bases mesuren 9 i 5 cm i la generatriu, 6 cm.

37. Calcula la superfície lateral i total d'un prisma regular hexagonal d'altura 12 cm i costat de la base 6 cm.

38. Calcula la superfície total d'un tronc de con de piràmide regular triangular de costats de les bases 8 i 4 cm, i aresta 6 cm.

39. Un cilindre recte té una superfície lateral de 67π cm^2. Quant mesura si superfície total si la seua altura mesura 10 cm?

Cossos redons

40. Dibuixa al teu quadern els cossos que es generen en girar al voltant de:

a) un costat, un rectangle | b) un catet, un triangle rectangle

c) la hipotenusa, un triangle rectangle | d) el seu diàmetre, un cercle.

41. Escriu el nom de 5 objectes que tinguen forma de cilindre.

42. Dibuixa un cilindre oblic i assenyala les bases, la cara lateral, l'altura.

43. Construeix un cilindre recte en cartolina que tinga de radi de la base 1 cm i altura 2 cm.

44. Dibuixa en perspectiva cavallera un cilindre recte. Dibuixa el seu perfil, planta i alçat. Dibuixa 2 tomografies prenent un pla paral·lel a) a la base, b) a una aresta.

45. Escriu el nom de 5 objectes quotidians que tinguen forma de con.

46. Dibuixa en perspectiva cavallera un con oblic. Dibuixa la seua planta, perfil i alçat. Assenyala la seua base, la seua altura i la seua cara lateral.

47. Escriu el nom de 5 objectes quotidians que tinguen forma d'esfera.

48. Dibuixa una esfera en perspectiva cavallera. Dibuixa el seu perfil, planta i alçat. Dibuixa una tomografia de l'esfera.

49. Calcula el radi de l'esfera inscrita i circumscrita a un cub de costat 10 cm.

50. Calcula el radi de l'esfera inscrita i circumscrita a un tetràedre de costat 10 cm.

51. Calcula l'àrea total i el volum d'un cub de 10 cm de costat.

52. Calcula la superfície de cada un dels poliedres regulars sabent que la seua aresta mesura 8 cm. (Ajuda: L'apotema del pentàgon mesura 5,4 cm).

53. Si omplis d'arena un con recte de 7 cm d'altura i de radi de la base de 4 cm, i el buides en un cilindre recte de 4 cm de radi de la base, quina altura arribarà l'arena?

54. Calcula la superfície i el volum d'una esfera la circumferència màxima de la qual mesura 10π m.

55. Calcula el volum i la superfície d'una esfera inscrita i circumscrita a un cub de costat 10 m.

56. Calcula la superfície lateral d'un cilindre circumscrit a una esfera de radi R. Calcula la superfície de la dita esfera. Quant val si r = 6 cm.

57. Un con té d'altura h = 7 cm, i radi de la base r = 2 cm. Calcula el seu volum, la seua generatriu i la seua superfície lateral.

58. Calcula la superfície lateral i total d'un cilindre recte generat per un rectangle de costats 3 i 8 cm en girar al voltant del seu costat major.

59. Calcula la superfície lateral i total d'un con recte generat per un triangle rectangle de catets 3 i 8 cm en girar al voltant del seu catet menor.

60. Dupliquem l'aresta d'un cub, què ocorre amb la superfície d'una cara?, i amb el seu volum? Calcula'l suposant que dupliques l'aresta d'un cub de costat 5 m.

61. Un dipòsit cilíndric té una capacitat de 100 L i una altura de 100 cm, quant mesura el radi de la seua base?

AUTOAVALUACIÓ

1. Quin dels següents cossos geomètrics NO té un desenrotllament pla?

a) el cilindre b) l'esfera c) l'icosàedre d) el dodecàedre

2. La definició correcta de poliedre regular és:

a) Un poliedre amb totes les seues cares polígons regulars

b) Un poliedre amb totes les seues cares polígons iguals

c) Un poliedre amb totes les seues cares polígons regulars i iguals

d) Un poliedre amb totes les seues cares polígons regulars iguals i que en cada vèrtex concorren el mateix nombre de cares.

3. Indica quina de les següents afirmacions és correcta

a) Un prisma oblic pot ser regular

b) El volum d'un prisma oblic és àrea de la base per l'altura

c) Les cares d'un dodecàedre són hexàgons

d) El volum d'una piràmide és àrea de la base per l'altura

4. Una expressió de la superfície lateral d'un cilindre és:

a) $2\pi rh$ b) $2\pi rh + \pi r^2$ c) $2\pi r(h + r)$ d) $2/3\pi rh$

5. El nombre de vèrtexs d'un icosàedre és:

a) 20 b) 12 c) 30 d) 10

6. El volum i la superfície lateral d'un prisma regular hexagonal d'altura 8 cm i costat de la base 2 cm, mesuren aproximadament:

a) 83,1 cm^3; 96 cm^2 b) 35,7 cm^3; 48 cm^2 c) 0,1 L; 0,9 ha d) 106 m^3; 95 m^2

7. El volum i la superfície lateral d'una piràmide regular hexagonal d'altura 2 m i costat de la base 4 m, mesuren aproximadament:

a) 62 cm^3; 24 cm^2 b) 7000 L; 0,48 ha c) 7 cm^3; 8 cm^2 d) 27,6 m^3; 15,87 m^2

8. El volum d'un con d'altura 9 cm i radi de la base 2 cm, mesuren:

a) $0{,}12\pi$ L b) 36π cm^3 c) $12\ \pi$ cm^3 d) 36π cm^3

9. El volum i la superfície lateral d'un cilindre d'altura 4 cm i radi de la base 5 cm, mesuren:

a) 100π m^3; 40π m^2 b) 100π cm^3; 40π cm^2 c) 31,4 cm^3; 12,56 cm^2 d) 33π cm^3; 7π cm^2

10. El volum i la superfície d'una esfera de radi 6 cm mesuren:

a) 288π cm^3; 144π cm^2 b) 144π cm^3; 288π cm^2 c) 452 m^3; 904 m^2 d) 96π cm^3; 48π cm^2

Autor: Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay

CAPÍTOL 8: MAGNITUDS PROPORCIONALS: PERCENTATGES

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Nieves Zuasti

Revisores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos

Il·lustracions: Banc d'imatges de l'INTEF

Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Índex

Resum

En aquest capítol revisarem els coneixements que tens del curs anterior sobre raons, percentatges, proporcionalitat directa, regla de tres simple… i aprendrem a utilitzar instruments que ens permeten establir comparacions entre magnituds.

Interpretació de mapes

Estudiarem les diferències entre proporcionalitat directa i inversa, aplicant mètodes de resolució de problemes. Utilitzarem també la regla de tres composta.

Aprendrem a aplicar i interpretar tot allò que s'ha relacionat amb la proporcionalitat i la seua aplicació en la vida quotidiana.

Aplicarem els coneixements sobre proporcionalitat en la interpretació d'escales i mapes, utilitzant la idea de semblança, figures semblants, ampliació i reducció de figures, raó de semblança i escales. Estudiarem la raó entre les superfícies de figures semblants

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

RAÓ I PROPORCIÓ

1.1. Raó

Ja saps que:

Raó, en Matemàtiques, és una comparació entre els valors de dues variables.

S'expressa en forma de quocient, de forma semblant a una fracció i es llig **"A és a B"**

Exemple:

- Comprem 5 kg de taronges per 4 €. Podem establir la relació entre el preu (4 €) i la quantitat (5 kg)

  4 : 5 = 0,8 € el quilo

  $\frac{4}{5}$ és **la raó** entre euros i pes de taronges**.**

D'aquesta manera si comprem altres quantitats de taronges podrem calcular el preu a pagar.

Exemple:

- La raó que relaciona el gasto de 10 persones i els 500 litres d'aigua que gasten en un dia, es pot escriure:

Observa:

Una fracció expressa una part d'un tot d'**una única magnitud**, mitjançant els seus termes, numerador (les parts que prenen) i denominador (el total de les parts en las que s'ha dividit eixe tot)

No obstant això, els termes d'**una raó** fan referencia a quantitats de **dues magnituds**, el primer s'anomena "antecedent" i el segon "consecuent"

$$\frac{10\text{persones}}{500\text{litres}} \text{ o bé } \frac{500\text{litres}}{10\text{persones}}$$

En qualsevol dels casos estem expressant que la raó entre litres d'aigua i persones és:

500 : 10 = 50 litres per persona

Si foren 5 persones d'una mateixa família la quantitat d'aigua gastada serà de 250 litres. Si són 400 persones d'una urbanització la quantitat d'aigua serà 20000 litres, és a dir:

$$\frac{10}{500} = \frac{400}{20000} = \frac{5}{250} = \frac{1}{50} \text{ o bé } \frac{500}{10} = \frac{20000}{400} = \frac{250}{5} = \frac{50}{1}$$

Idees clares

Una **raó** és un quocient. S'expressa en forma de **fracció** però els seus termes no expressen una part d'una mateixa magnitud sinó la **relació** entre dues magnituds.
Els termes de la raó poden ser nombres enters o decimals.

Activitats proposades

1. Set persones gasten 280 litres d'aigua diàriament.
Quina és la raó entre els litres consumits i el nombre de persones? Quina és la raó entre les persones i els litres consumits?

2. Mig quilo de cireres costà 1,90 €. Expressa la raó entre quilos i euros.

3. La raó entre dues magnituds és 36. Escriu un exemple dels valors que poden tindre aquestes dues magnituds.

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

1.2. Proporció

Ja saps que:

Una **proporció** és la **igualtat** entre dues raons.

Els termes primer i quart són els **extrems** i el segon i tercer són els **mitjans.**

$$\frac{\text{extrem}}{\text{mitjà}} = \frac{\text{mitjà}}{\text{extrem}}$$

S'anomena "***raó de proporcionalitat***" al quocient entre dos variables. I el seu valor constant ens permet obtindre raons semblants.

Quan manipulem una sèrie de dades de dos parells de magnituds que presenten una mateixa raó, es poden ordenar en un quadre de proporcionalitat.

Exemple:

- Al quadre de a baix s'observa que cada arbre dóna $\frac{200}{5}$ = 40 kg de fruita. És la **raó de proporcionalitat.**

  Amb aqueixa dada podem emplenar el quadre per als següents casos.

kg de fruita	**200**	400	80	40	400	120	3000	800
núm. d'arbres	**5**	10	2	1	10	3	75	20

Propietat fonamental de les proporcions:

En tota proporció, el producte dels extrems és igual al producte dels mitjans.

Exemple:

- $\frac{3000}{75} = \frac{800}{20} \Rightarrow 3000 \cdot 20 = 75 \cdot 800$

Idees clares

Observa que la raó de proporcionalitat ens serveix per a establir una relació entre les dos variables per a qualsevol dels valors que puguen adoptar

Activitats proposades

4. Completa les proporcions següents:

a) $\frac{5}{22} = \frac{45}{x}$ **b)** $\frac{0,3}{x} = \frac{7}{14}$ **c)** $\frac{x}{9,5} = \frac{4,7}{1,9}$ **d)** $\frac{0,05}{100} = \frac{x}{400}$

5. Ordena aquestes dades per a compondre una proporció:

a) 12, 3, 40, 10 b) 24, 40, 50, 30 c) 0,36; 0,06; 0,3; 1,8

6. Copia al teu quadern i completa la taula sabent que la raó de proporcionalitat és 2,5:

0,5	**9**	**6**		**20**			**2,5**
			50		**8**	**25**	

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

2. MAGNITUDS DIRECTAMENT PROPORCIONALS

Ja saps que:

Dues magnituds són **directament proporcionals** quan en multiplicar o dividir a la primera per un nombre, la segona queda multiplicada o dividida pel mateix nombre.

Exemple:

El nombre de vaques i la quantitat de pinso que es necessita. Per exemple si el nombre de vaques fóra el triple caldrà tindre triple quantitat de pinso.

No obstant això, hi ha relacions entre magnituds que no són de proporcionalitat perquè quan una es multiplica o es divideix per un nombre, l'altra no queda multiplicada o dividida de la mateixa manera.

Exemple:

El pes i la grandària del peu d'una persona no són magnituds proporcionals: El doble de l'edat no significa el doble de nombre de sabata.

Idees clares

Quan dues magnituds són directament proporcionals, el doble, triple… de la primera suposa el doble, triple... de la segona

Hi ha magnituds que no es relacionen proporcionalment.

Activitats proposades

7. Assenyala d'aquests parells de magnituds, les que són directament proporcionals:

- La quantitat de filets que he de comprar i el nombre de persones que vénen a menjar.
- El pes d'una persona i la seua altura.
- El nombre de pisos que puja un ascensor i les persones que caben en ell
- El preu d'una tela i el que necessite per a fer un vestit.
- Les entrades venudes per a un concert i els diners recaptats
- El pes d'una persona i el seu sou.

8. Calcula els termes que falten per a completar les proporcions:

a) $\frac{25}{50}=\frac{30}{x}$ b) $\frac{300}{100}=\frac{7}{x}$ c) $\frac{7,5}{56,9}=\frac{x}{2}$

9. Ordena aquests valors de manera que formen una proporció directa:

a) 3,9 0,3 1,3 0,1 b) 5, 12, 6,10 c) 0,18 4 0,4 18

Hi ha més d'una solució?

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

2.1. Regla de tres directa

Ja saps que

Per a resoldre problemes de proporcionalitat directa, podem utilitzar el **mètode de reducció a la unitat.**

Exemple:

- Cinc viatges a Mèxic costaren 6500 €. Quant pagarem per 14 viatges d'un grup d'amics idèntics?

Primer calculem el preu d'un viatge, 6500 : 5 = 1300 €.

Després calculem el cost dels 14 bitllets: 1300 · 14 = 18200 €

La **regla de tres** és un altre procediment per a calcular el quart terme d'una proporció

Exemple:

- Amb tres quilos de dacsa les meues gallines mengen durant 7 dies. Quants quilos necessitaré per a donar-les de menjar 30 dies?

Formem la proporció ordenand les dades: $\frac{3\,kg}{x\,kg} = \frac{7\,días}{30\,días} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 30}{7} = 12{,}86\,kg$

Una altra forma habitual de plantejar la regla de tres és situant les dades d'aquesta manera:

3 kg ———————— 7días

x kg ———————— 30 dies

$$x = \frac{3 \cdot 30}{7} = 12{,}86\,kg$$

Idees clares

Reduir a la unitat significa calcular el valor d'un per a poder calcular qualsevol altra quantitat.

A la **regla de tres directa** ordenem les dades de manera que el valor desconegut s'obté multiplicant en creu i dividint pel tercer terme.

Activitats proposades

10. El cotxe de Joan gasta 5,5 litres de gasolina cada 100 km, quants litres gastarà en un viatge de 673 km?

11. En una rifa s'han venut 250 paperetes i s'han recaptat 625 euros. A quant es venia cada papereta? Quant haurien recaptat si hagueren venut 900 paperetes?

12. Una fabada per a 6 persones necessites 750 g de fesols, quantes persones poden menjar fabada si utilitzem 6 kg de fesols?

13. Quatre camisetes ens costaren 25,5 €, quant pagarem per 14 camisetes iguals?

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

2.2. Percentatges

Ja saps que

El **percentatge** o **tant per cent** és la proporció directa més utilitzada en la nostra vida quotidiana.

Als comerços, informacions periodístiques, o a les anàlisis de resultats de qualsevol activitat apareixen percentatges.

Un percentatge és una raó amb denominador 100.

El seu símbol és **%**.

La seua aplicació es realitza mitjançant un senzill procediment:

"Para calcular el % d'una quantitat es multiplica pel tant i es divideix entre 100"

Exemple:

- Calcula el 41 % de 900 El 41 % de 900 = $\frac{41 \cdot 900}{100} = 369$

Alguns percentatges es poden calcular mentalment en tractar-se d'un càlcul senzill:

- El 50 %equival a la mitat de la quantitat
- El 25 % és la quarta part de la quantitat
- El 75 % són les tres quartes parts de la quantitat
- El 10 % és la desena part de la quantitat
- El 200 % és el doble de la quantitat

GRANS REBAIXES!!

40 % DE DESCOMPTE

EN TOTS ELS ARTICLES

Exemple:

- El 25 % de 800 és la quarta part de 800, per tant és 800 : 4 = 200

Idees clares

Si qualsevol quantitat la divideixes en 100 parts, el 40 % són quaranta parts d'aqueixes cent.

El total d'una quantitat s'expressa com el 100 %

Activitats proposades

14. Calcula mentalment:

a) El 50 % de 240 b) el 1 % de 570 c) el 10 % de 600 d) el 300 % de 9.

15. Completa la taula:

Quantitat inicial	%	Resultat
500	25	
720		108
60	140	
	60	294

16. En un hotel estan allotjades 400 persones. D'elles, 40 són italianes, 120 franceses, 100 són alemanyes i la resta russes. Calcula el % que representa cada grup sobre el total.

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

2.3. Descompte percentual

En molts comerços apareixen els preus abans de la rebaixa i els preus rebaixats. Amb aqueixes dos dades podem calcular el % de descompte.

Exemple:

- Una camisa costava 34 € i en temporada de rebaixes es ven a 24 €, què % de descompte s'ha aplicat sobre el preu anterior?

Calculem l'import de la rebaixa 34 – 24 = 10 €.

Establim la proporció: $\frac{34}{10} = \frac{100}{x}$, $x = \frac{10 \cdot 100}{34} = 29{,}41$ %

Exemple:

- En comprar un ordinador m'ofereixen un 12 % de descompte per pagar-lo al comptat. He pagat 528 €. Quant valia l'ordinador sense descompte?

El preu inicial equival al 100 %. En aplicar el descompte, només pagarem

100-12=88 %.

Per tant, hem de calcular el 100 %: $\frac{528 \cdot 100}{88} = 600$ €

Idees clares

El **descompte** és la diferència entre la quantitat inicial i la quantitat final. Amb aquestes dades podrem calcular el % de descompte aplicat.

En descomptar-nos un *x* % d'una quantitat, només pagarem el (100 – *x*) %.

Activitats proposades

17. En una botiga ofereixen un 15 % de descompte en comprar una llavadora que costa 420 €. Quant suposa el descompte? Quin és el preu final de la llavadora?

18. Quin d'aquestes dues ofertes ofereix un major % de descompte:

Abans 44,99 €
Ara 31,99 €

Abans 11,99
Ara 9,99

19. Completa:

a) D'una factura de 540 € he pagat 459 €. M'han aplicat un ……… % de descompte

b) M'han descomptat el 16 % d'una factura de ……………. € i he pagat 546 €.

c) Per pagar al comptat un moble m'han descomptat el 12 % i m'he estalviat 90 €. Quin era el preu del moble sense descompte?

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

2.4. Increment percentual

Als **increments percentuals**, la quantitat inicial és menor que la final ja que el tant per cent aplicat s'afig a la quantitat inicial.

Exemple:

- Per no pagar una multa de 150 € m'han aplicat un 12 % de recàrrec.

Puc calcular el 12 % de 150 i sumar-lo a 150: $\frac{12 \cdot 150}{100} = 18$ €.

En total pagaré 150 + 18 = 168 €.

Exemple:

- Una altra forma d'aplicar l'increment percentual pot ser calcular el % final a pagar:

Al cas anterior: 100 + 12 = 112 %

Calculem el 112 % de 150 €: $\frac{112 \cdot 150}{100} = 168$ €.

Exemple:

- En un negoci he obtingut un 36 % de guanys sobre el capital que vaig invertir. Ara el meu capital ascendeix a 21760 €. Quants diners tenia al principi?

L'increment percentual del 36 % indica que els 21760 € són el 136 % del capital inicial.

Hem de calcular el 100 %: $\frac{21760 \cdot 100}{136} = 16000$ €.

2.5. Impost sobre el valor afegit IVA

Els articles de consum i les activitats econòmiques porten associades un impost IVA que suposa un increment sobre el seu preu de cost. A Espanya l'IVA general que s'aplica és el 21 %.

És important que, en la publicitat, observem si el preu que s'indica d'un article o servei és amb IVA inclòs.

Idees clares

Als **increments percentuals**, la quantitat inicial augmenta perquè se li aplica un tant per cent major que el 100 %.

L'IVA és un impost que suposa un increment sobre el preu inicial

Activitats proposades

20. Calcula el preu final després d'aplicar el 68 % d'increment percentual sobre 900 €.

21. Una persona inverteix 3570 € en accions, i al cap d'un any la seua inversió s'ha convertit en 3659,25 €. Calcula l'augment percentual aplicat al seu diners.

22. El preu de venda dels articles d'una botiga és el 135 % del preu a què els comprà el comerciant. A quin preu comprà el comerciant un article que està a la venda per 54 €?

23. Als Estats Units hi ha la norma de deixar un mínim del 10 % de propina en restaurants o taxis sobre l'import de la factura. Calcula en aquesta taula el que han degut pagar aquests clients que han quedat molt satisfets i afigen un 15 % de propina:

Import factura	34 $	105 $	90,4 $	100,20 $	12 $
Preu final					

24. El preu d'un televisor és 650€ + 21% IVA. El pagarem en sis mesos sense recàrrec. Calcula la quota mensual.

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

3. ESCALES: PLANS I MAPES

Els dibuixos, fotografies, mapes o maquetes representen objectes, persones, edificis, superfícies, distàncies ...

Perquè la representació siga perfecta han de guardar en tots els seus elements una mateixa raó de proporcionalitat que denominem "**escala**"

L'**escala** és una raó de proporcionalitat entre la mesura representada i la mesura real, expressades en una mateixa unitat de mesura.

Exemple:

- En un mapa apareix l'escala següent: **1 : 5 000 000** i s'interpreta que 1 cm del mapa representa 5 000 000 cm a la realitat, és a dir a 50000 m, és a dir a 50 km

Exemple:

- Hem fotografiat la catedral de Santiago de Compostel·la. La grandària de la foto ens dóna una escala:

1 : 600

Les dues torres de la fatxada tenen a la foto una altura de 3,5 cm. L'altura real de les torres serà:

$$3{,}5 \cdot 600 = 2100 \text{ cm} = 21 \text{ m}$$

Les escales ens permeten observar que la imatge real i la del dibuix són **semblants**.

Idees clares

L'escala utilitza el cm com a unitat de referència i s'expressa en comparació a la unitat.
Per exemple: 1 : 70000
Dues figures són semblants quan tenen la mateixa forma i els seus costats són proporcionals.

Activitats proposades

25. Escriu quatre exemples en què s'utilitzen escales.

26. La distància entre Madrid i València és 350 km. Al mapa, la distància entre ambdues ciutats és de 3,7 cm, a quina escala està dibuixat el mapa?

27. Completa la següent taula tenint en compte que l'escala aplicada és 1 : 1000

28.	Dibuix	**29.**	Mesura real
30.	36 cm	**31.**	
32.		**33.**	7,7 km
34.	0,005 cm	**35.**	

36. Calcula l'escala corresponent en cada exemple de la taula:

Dibuix	**Mesura real**	**Escala**
1,5 cm	900 m	
7 cm	7.7 hm	
4 cm	12 km	

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

4. MAGNITUDS INVERSAMENT PROPORCIONALS

4.1. Proporcionalitat inversa

Dues magnituds són **inversament proporcionals** quan en multiplicar o dividir la primera per un nombre, la segona queda dividida o multiplicada pel mateix nombre.

Exemple:

- Un cotxe va a 90 km/h i tarda 3 hores a arribar al seu destí. Si una moto va a 45 km/h, tardarà 6 hores a recórrer la mateixa distància.

Es comprova que si la velocitat és el doble, el temps serà la mitat, i ambdós han recorregut els mateixos quilòmetres: $90 \cdot 3 = 270$ km $45 \cdot 6 = 270$ km

A la proporcionalitat inversa, **la raó de proporcionalitat** és el producte d'ambdues magnituds

Hi ha moltes situacions en què trobem una relació de proporcionalitat inversa entre dues magnituds.

Exemples:

- El nombre d'invitats a un aniversari i el tros de tortada que li toca a cada u.
- Les persones que col·laboren en una mudança i el temps que tarden.

Quan coneixem la raó entre dues magnituds inversament proporcionals, podem elaborar una taula per a diferents valors:

Exemple:

- Tenim una bossa amb 60 caramels. Podem repartir-los de diverses maneres segons el nombre de xiquets: 60 és la raó de proporcionalitat.

Nombre de xiquets	6	12	30	15	20
Nombre de caramels per a cada un	10	5	2	4	3

Observa que quan el nombre de xiquets augmenta, els caramels que rep cada un disminueixen.

Idees clares

Perquè dues magnituds siguen inversament proporcionals, quan una creix l'altra decreix en la mateixa proporció.

La raó de proporcionalitat inversa es calcula multiplicant les dues magnituds.

Activitats proposades

37. Cinc treballadors acaben la seua tasca en 8 dies. El nombre de treballadors i el nombre de dies que tarden, són magnituds directa o inversament proporcionals? Quina és la raó de proporcionalitat?

38. Completa la taula de proporcionalitat inversa i assenyala el coeficient de proporcionalitat.

Velocitat en km/h	100	120			75
Temps en hores	6		20	4	

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

4.2. Regla de tres inversa

Una proporció entre dos parells de magnituds inversament proporcionals en la que es desconeix un dels seus termes es pot resoldre utilitzant la **regla de tres inversa**.

Exemple:

- Sis persones realitzen un treball en 12 dies, quant tardarien a fer el mateix treball 8 persones?

El coeficient de proporcionalitat inversa és el mateix per a les dues situacions: 12 · 6 = 72

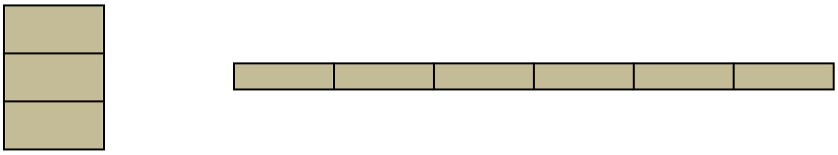
Plantegem la regla de tres:

6 persones	tarden	12 dies	$12 \cdot 6 = 8 \cdot x$	$x = \dfrac{6 \cdot 12}{8} = 9$ dies
8 persones	tarden	X dies		

En geometria trobem exemples de proporcionalitat inversa

Exemple:

- Aquestes dues superfícies tenen distinta forma però la mateixa àrea:



Observa que la primera té tres unitats d'altura i una de base i la segona, una altura de mitja unitat i sis unitats de base.

$$3 \cdot 1 = 0{,}5 \cdot 6 = 3$$

Exemple:

- Observa aquests gots. La seua capacitat depèn tant de la seua altura com de la seua base. Si dos gots distints tenen la mateixa capacitat però distinta forma a major base menor altura i viceversa.

Idees clares

Per a resoldre la regla de tres inversa s'ha de tindre en compte que el producte de cada parell de magnituds ha de ser el mateix, el seu coeficient de proporcionalitat inversa.

Activitats proposades

39. Hem tallat una peça de tela en 24 draps de 0,80 cm de llarg cada u. Quants draps de 1,20 m de llarg podrem tallar?

40. Cinc amics volen fer un regal d'aniversari. Han de posar cada un 5,40 €. Altres quatre amics s'uneixen per a contribuir al regal, quants euros ha de posar ara cada un?

41. Per a pintar una casa, el pintor dedica 8 hores diàries durant 6 dies. Si treballara 10 dies, quantes hores diàries necessitaria?

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

4. REGLA DE TRES COMPOSTA

En alguns problemes de proporcionalitat apareixen més de dues magnituds relacionades entre si, establint el que anomenem una proporcionalitat composta.

Les relacions entre les magnituds poden ser totes directes, totes inverses o directes i inverses. Per això, hem d'aplicar els mètodes de resolució tant de regla de tres directa o inversa, una vegada analitzat l'enunciat.

Exemple:

- Sis màquines realitzen 750 peces durant 4 dies. Quantes peces realitzaran huit màquines iguals durant 10 dies?

Plantegem les dades:

6 màquines ………………… 750 peces ………………….. 4 dies

8 màquines ………………… x peces ……………………..10 dies

La relació entre les tres magnituds és directament proporcional ja que en augmentar o disminuir cada una d'elles, les altres dos augmenten o disminueixen.

Per a calcular el resultat, apliquem la proporcionalitat directa en dos passos:

a) Màquines i peces: $x = \frac{8 \cdot 750}{6}$ ara cal tindre en compte els dies

b) Al ser una proporció directa $x = \frac{8 \cdot 750 \cdot 10}{6 \cdot 4} = 2500$ peces

Exemple:

- Tres fonts obertes durant 8 hores i brollant 12 litres cada minut omplin completament un estany. Quantes fonts hem d'obrir per a omplir el mateix estany en 5 hores i brollant 20 litres per minut?

Plantegem les dades:

5 fonts ………………. 8 hores ……………. 12 L/min
x fonts …………………..6 hores ……………. 20 L/min

La relació entre aquestes tres magnituds és inversament proporcional, ja que amb major cabal, tardaran menys temps a omplir el depòsit.

El producte de les tres variables 5 · 8 · 12 ha de ser igual al producte de x · 6 · 20, per tant

$$x = \frac{5 \cdot 8 \cdot 12}{6 \cdot 20} = 4$$ **!!br0ken!!**

Activitats proposades

42. Sis persones gasten 2100 € durant 4 mesos en despeses de transport. Si el gasto durant 10 mesos ha sigut de 3600 €, a quantes persones correspon?

43. Amb una jornada de 8 hores diàries, un equip de 20 persones tarda 9 dies a concloure un treball. Quantes persones es necessiten per a realitzar el mateix treball?

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

RESUM

Concepte	Definició	*Exemple*
Raó	Comparació entre els valors de dues variables	Preu i quantitat
Proporció	Igualtat entre dos raons	A és a B com C és a D
Magnituds directament proporcionals	Si es multiplica o divideix una de les magnituds per un nombre, l'altra queda multiplicada o dividida pel mateix nombre	24 és a 10 com 240 és a 100
Raó de Proporcionalitat directa	Quocient entre els valors de dues magnituds	$\frac{300}{25}$
Percentatges	Raó amb denominador 100	$\frac{23}{100}$
Escales i plans	Comparació entre grandària real i grandària representada	1 : 20000
Magnituds inversament proporcionals	Si es multiplica o divideix una de les magnituds per un nombre, l'altra queda dividida o multiplicada pel mateix nombre	A per B és igual a C per D
Raó de proporcionalitat inversa	Producte d'ambdues magnituds	45 · 70

PERCENTATGE AMB CALCULADORA

A la calculadora pots trobar una funció que et permet calcular el % de manera directa.

Per a això has de seguir els passos següents:

1. **Escriu la quantitat**
2. **Multiplica pel tant**
3. **Polsa SHIFT i %. El resultat que apareix a la pantalla és la solució.**

Exemple:

650	*	16	SHIF	%	=	104

Una forma fàcil d'afegir o restar l'import del tant per cent a la quantitat final pot fer-se de la manera següent:

- **Segueix els passos 1, 2 i 3 anteriors**
- **Polsa la tecla + si el que vols és un augment percentual**
- **Polsa la tecla – per a una disminució percentual**

Exemple:

1370	*	12	SHIFT	%	164.4	+	1534.4
1370	*	12	SHIFT	%	164.4	–	1205.6

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

EXERCICIS I PROBLEMES de 2n d'ESO

1. Què és una raó entre dos nombres? Com s'anomenen els seus termes? Escriu diversos exemples.

2. Com s'anomenen els termes d'una proporció? Escriu proporcions que es poden formar amb aquests nombres i comprova la propietat fonamental:

   a) 6, 24, 12, 3 b) 35 0,5 1,25 7

3. Amb 8 kg de farina hem confeccionat 15 pastissos. Quants pastissos podem elaborar amb 30 kg de farina?

4. Completa la taula i calcula el coeficient de proporcionalitat:

Litres de gasolina	8	25		4	
Euros	11,36		56,8		25,56

5. A Espanya molts productes porten al preu un impost anomenat IVA (Impost sobre el Valor Afegit), del 21 %. Als tiquets dels establiments solen marcar el preu final, sumant el 21 % d'IVA. Calcula el preu final d'una batedora que val 110 € + IVA

6. Amb 48 € puc comprar 20 peces de fusta. Si les peces costaren 1,50 € cada una, quantes podria comprar amb els mateixos diners?

7. En quina d'aquestes receptes és major la proporció entre la farina i el sucre?

MASSA DE ROSQUILLES
2kg de farina
6 ous
1kg i mig de sucre

MASSA DE ROSQUILLES
Mig quilo de farina
4 ous
400 g de sucre

8. Tenim el pinso suficient per a donar de menjar a les 45 vaques durant 30 dies. Si venem 9 vaques, amb la mateixa quantitat de pinso, quants dies podrem donar de menjar a les restants?

9. Calcula la raó de proporcionalitat i completa la taula de proporcionalitat inversa:

Velocitat en km/h	90	120		75	
Temps en hores	4,5		10		3

10. Cada gominola costa 5 cèntims i pesa 4 g. Comprem una bossa de 100 g de gominoles. Quantes gominoles conté la bossa? Quant ens costaran?

11. Si obrim dos aixetes el depòsit s'ompli en 4 hores i mitja. Quant temps tardaran en omplir el mateix depòsit 5 aixetes amb el mateix cabal?

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

12. Expressa en euros el canvi de 1400 \$, si cada euro cotitza a 1,26 \$

13. L'aigua en congelar-se augmenta un 10 % el seu volum. Quants litres d'aigua necessitem per a aconseguir una barra de gel de 75 dm^3?

14. Un pantaló costava 36 € però a les rebaixes es ven a 28 €. Què % han rebaixat?

15. El preu d'una televisió és 847 €, IVA inclòs. Calcula el preu sense IVA.

16. Assenyala en cada parell de magnituds si són directa o inversament proporcionals:

a) La quantitat d'arbres talats i els quilos de llenya emmagatzemats

b) La velocitat del tren i el temps que tarda a arribar al seu destí

c) La grandària de la bossa i la quantitat de bosses necessàries per a guardar la compra

d) La distància que recorre un automòbil i la gasolina que gasta

e) Les persones que assisteixen a l'aniversari i la grandària del tros de tortada que toca a cada un

f) El radi d'una circumferència i la seua longitud

g) Les peretes que il·luminen una sala i el gasto en electricitat.

17. Per a buidar un depòsit hem empleat 17 poals de 22 litres cada u. Si la següent vegada els poals tenen una capacitat de 34 litres quants necessitarem?

18. En aquesta etiqueta es veu el preu inicial i el preu rebaixat. Calcula el % de rebaixa que s'ha aplicat

Abans	**23,95**
Després	**15,95**

19. L'1 de gener de 2010 l'abonament de 10 viatges del metre de Madrid passà a costar 9 €, el que suposava un augment d'un 21,6 % sobre el seu anterior preu. En 2013, l'abonament de 10 viatges costa 12,20 €. Què % ha augmentat el preu del bo entre 2010 i 2013? Quant costava l'abonament abans de la pujada de 2010? Què % ha augmentat el seu cost des d'abans de la pujada de 2010?

20. Un empleat públic que gana 1154€ nets al mes patirà un retall de sou del 5% a partir de l'1 de gener de 2014. Quants diners deixarà de guanyar al cap d'un trimestre?

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

21. En les ciutats s'han instal·lat parquímetres, de manera que es cobra l'aparcament mitjançant unes tarifes. Hi ha dos tipus de zones amb distintes tarifes.

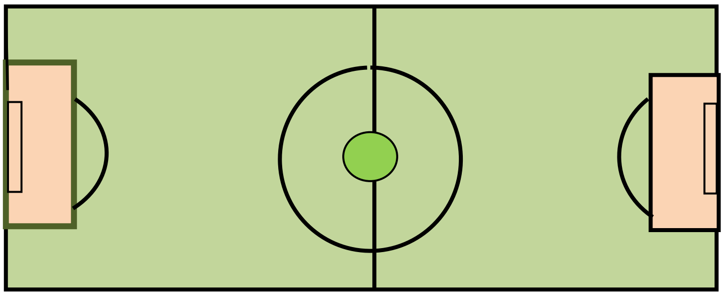
A la vista d'aquest quadre de preus Quant costa estacionar un cotxe en zona blava i en zona verda durant 80 minuts? I durant 45 minuts?

Zona blava	Tarifa		Zona verda	Tarifa
Fins a vint minuts	0,25 €		Fins a vint minuts	0,55 €
Mitja hora	0,45 €		Mitja hora	1,05 €
Una hora	1,20 €		Una hora	2,25 €
Hora i mitja	1,90 €		Hora i mitja (estada màxima autoritzada)	3,50 €
Dues hores	2,50 €			

22. El preu d'un ordinador portàtil és 899 € IVA (21%) inclòs. Calcula el seu preu sense IVA.

23. El joc quatre de pneumàtics per a un cotxe s'oferta a 324 € + IVA (21%). Calcula el preu de cada roda.

24. En un dibuix, el camp de futbol mesura 24 cm per 16 cm. El camp mesura 90 m de llarg Quant mesura d'ample? A quina escala està dibuixat?



25. En un mapa dibuixat a escala 1 : 250000, la distància entre dos punts és de 0,15 m. Calcula la distància real en km

26. La base i l'altura d'un rectangle mesuren 14 cm i 32 cm. A quina escala hem dibuixat un altre rectangle semblant a l'anterior, de 49 cm de base? Calcula la seua altura.

27. Amb 840 kg de pinso alimentem a 12 animals durant 8 dies. Quants animals semblants podrien alimentar-se amb 2130 kg durant 15 dies?

28. Per a emmagatzemar 2580 kg de mercaderia en 4 dies contractem a 6 persones. Si només podem comptar amb 5 persones i la càrrega és de 3000 kg Quants dies es tardarà en l'emmagatzematge?

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

AUTOAVALUACIÓ de 2n d'ESO

1. La quantitat d'animals d'un zoològic i els excrements diaris que s'arrepleguen és una relació

a) Proporcional directa b) proporcional inversa c) no és proporcional

2. Set caixes de galletes d'un quilo i mig cada una ens han costat 12.6 €. Si vull comprar 22 kg de galletes, em costaran:

a) 22,4 € b) 30.6 € c) 26.4 € d) 24.2 €

3. En aplicar un 24 % de descompte sobre una factura, hem hagut de pagar 699,20€. L'import total de la factura sense descompte era:

a) 920€ b) 1220€ c) 880€

4. De Jaén a Cadis es tarden 4h i 15 minuts per carretera a una mitjana de 86 km/h. Si pugem la velocitat a 100 km/h, quant es tardarà a fer el recorregut?

a) 3h 39 minuts b) 3h 6 minuts c) 3h 56 minuts

5. La distància entre dues ciutats és 108 km. En el mapa es representa amb una distància de 6 cm. L'escala del mapa és:

a) 1:180000 b) 1: 18000 c) 1:1600000 d) 1:1800000

6. Una sala d'espectacles té capacitat per a 280 persones. El preu de cada entrada és 14 €. Hui s'han venut el 85 % de la sala, i d'elles, 50 amb un 15 % de descompte. La recaptació total ha sigut:

a) 3227 € b) 2998 € c) 3028 €

7. Les dades que completen aquesta taula de proporcionalitat inversa són:

Persones que realitzen un treball	30		10	9	
Dies que tarden a realitzar-lo	15	6			25

a) 12; 5; 4,5; 50 b) 75; 45; 30; 18 c) 75; 45; 50; 18

8. Quatre persones han pagat 1540 € per set nits d'hotel. Quant pagaran 6 persones si desitgen passar 12 nits en el mateix hotel?

a) 3690 € b) 3960 € c) 3820 €

9. Un fuster tarda 18 dies a realitzar 3 armaris treballant 5 hores al dia. Quants dies necessitarà per a construir 5 armaris, emprant 3 hores al dia?

a) 40 dies b) 30 dies c) 50 dies

10. 48 estudiants necessiten 12450 € per a organitzar un viatge d'estudis de 10 dies. Quants dies durarà el viatge si disposen d'un 15 % més de diners i acudeixen 8 estudiants menys?

a) 12 dies b) 18 dies c) 15 dies

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Capítol 9: Àlgebra

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Raquel Caro

Revisor: Pedro Luis Suberviola i Sergio Hernández

Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Índex

Resum

A l'època d'El *Quixot*, a la porta de les barberies, es llegia el cartell següent: *"ALGEBRISTA I SANGRADOR" I* això, per què?

La paraula "*Àlgebra*" és una paraula àrab que utilitzà el matemàtic *Al-Khwarizmi*. Si aconsegueixes llegir aqueix nom veuràs que et sona a una altra paraula: "*algoritme*".

Cap a l'any 825 escrigué un llibre titulat: *Al-jabr w'almuqabalah* La paraula àrab *jabr* significa restaurar. El llibre tractava d'àlgebra, de sumes i altres operacions, però com els barbers també restauraven ossos, per això es deien algebristes.

Autora: Raquel Caro
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

1. LLENGUATGE ALGEBRAIC

1.1. Lletres i nombres

Ja saps que:

Al nostre voltant ens trobem amb multitud de símbols el significat dels quals coneixem, com els senyals de circulació o alguns logotips.

El **llenguatge algebraic** aconsegueix que puguem expressar missatges als quals les lletres representen variables de valor desconegut. Utilitza lletres, nombres i operacions per a representar una informació.

Exemple:

- Ja has utilitzat el llenguatge algebraic per a indicar l'àrea d'un rectangle de base b i altura h: A = $b \cdot h$; la longitud d'una circumferència de radi r: $L = 2\pi r$, per exemple.

Per a cada situació podem utilitzar la lletra que vulguem, encara que, quan parlem de alguna cosa desconeguda, la lletra més utilitzada és la ***x***.

Exemple:

- La meitat de l'edat d'una persona $x/2$
- El doble d'un nombre menys 7 $2x–7$.

El mateix *Al-Khwarizmi* usà originàriament la paraula *"cosa"*, (per exemple, en compte de 2*x* deia "*el doble d'una cosa*"), que en àrab sona com *"šay*" i que es traduí a l'espanyol com "*xei*". D'ací procedix la *x* actual.

Les expressions que ens permeten expressar mitjançant lletres i nombres una situació s'anomenen **expressions algebraiques.**

Activitats resoltes

- Expressa els següents frases en llenguatge algebraic:

El triple d'un nombre	$3x$
El producte de dos nombres consecutius	$x \cdot (x+1)$
L'edat de Pere fa 3 anys	$x - 3$
La diferència de dos nombres	$a - b$

Activitats proposades

1. Expressa les següents frases en llenguatge algebraic:
   a) El triple d'un nombre més la seua meitat.
   b) L'edat d'una persona d'ací a 10 anys.
   c) La sisena part d'un nombre menys el seu quadrat.
   d) La diferència entre dos nombres consecutius.

2. Un mag li proposa un joc a Adela: Pensa un nombre, suma-li 7, multiplica el resultat per 2, resta-li 10 i resta-li el nombre. Dis-me què t'ix. Adela digué 9. I el mag li contestà immediatament: El nombre que pensares és 5. Endevina com ho sabé el mag.

3. Vols ser el teu ara el mag? Inventa un joc i escriu-lo, per a poder endevinar el nombre pensat.

Autora: Raquel Caro
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

1.2. Coeficient i part literal

Ja saps que:

Una **expressió algebraica** pot estar formada per un o més sumands que es denominen **termes** o **monomis**. Una suma de monomis és un **polinomi**. En un monomi la **part literal** són les lletres i s'anomena **coeficient** al nombre pel qual van multiplicades.

Exemple:

- A l'expressió $7x$, el coeficient és 7 i la part literal x. En $9xy^2$ el coeficient és 9 i la part literal xy^2.

Per a poder sumar o restar dos monomis han de ser **semblants**, és a dir, tindre la mateixa part literal.

Exemple:

- Suma $9xy^2 + 7xy^2 = 16xy^2$. En canvi no es pot sumar $5x + 3y$ perquè no són semblants

Activitats resoltes

- Assenyala els coeficients, les parts literals i el nombre de monomis de l'expressió algebraica:

$$6a - 3b + c + 8$$

Aquesta expressió algebraica té 4 termes o 4 monomis: $6a$, $-3b$, c i 8. Els coeficients són +6, –3, + 1 i +8 respectivament. Les parts literals són a, b i c. L'últim terme no té part literal.

- Assenyala al polinomi i calcula la seua suma $8x + 5x - 2x$ quins són els coeficients. Els coeficients són 8, 5 i –2; la seua suma és $11x$.

1.3. Valor numèric d'una expressió algebraica

Si a les lletres d'una expressió algebraica li'ls dóna un valor concret, es pot calcular el **valor numèric** de la dita expressió.

Activitats resoltes

- Calcula el valor numèric de l'expressió $7x + 3$ quan x val 2.

Cal substituir a l'expressió, x pel seu valor, 2.
Per tant: $7 \cdot 2 + 3 = 14 + 3 = 17$, que és el valor numèric quan x val 2.

1.4. Equivalència i simplificació d'expressions algebraiques

L'expressió algebraica $5x + 4x$ és equivalent a l'expressió $9x$, que és la seua expressió més simplificada.

Activitats proposades

4. Assenyala el coeficient, la part literal i el nombre de termes o monomis dels polinomis següents:

a) $3 - 14xy$ b) $2a + 6b - 9c$ c) $6xy + 8$ d) $2xy + 6 - 4y$

5. Calcula el valor numèric dels polinomis següents:

a) $6x + 4y$ para $x = 3$, $y = 2$.

b) $2 - 3a$ para $a = -5$.

c) $5a + 9b - 7c$ para $b = -1$, $a = -1$ y $c = +2$.

Autora: Raquel Caro
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

1.5. Polinomis. Suma i producte

Monomis. Polinomis

Unes expressions algebraiques de gran utilitat són els **polinomis**, la versió més simple i, dels quals al mateix temps, generadora d'ells són els **monomis**.

Un **monomi** ve donat pel producte de nombres i indeterminades. Anomenarem **coeficient** d'un monomi al nombre que multiplica a la indeterminada, o indeterminades; la indeterminada, o indeterminades, conformen la part **literal** del monomi.

Exemples:

- L'expressió que ens proporciona el triple d'una quantitat, $3 \cdot x$, és un monomi amb una única variable, x, i coeficient 3.
- L'àrea del cercle, πr^2, és un monomi amb indeterminada, r i coeficient π. La seua part literal és r^2.

Atenent a l'exponent de la variable, o variables, adjudicarem un **grau** a cada monomi d'acord amb el criteri següent:

- Quan hi haja una única indeterminada, el grau del monomi serà l'exponent de la seua indeterminada.
- Si apareixen diverses indeterminades, el grau del monomi serà la suma dels exponents d'aqueixes indeterminades.

Exemples:

- $3x$ és un monomi de grau 1 en la variable x.
- πr^2 és un monomi de grau 2 en la indeterminada r.
- $7a^2b^3$ és un monomi de grau 5 en a i b.

Un nombre pot ser considerat com un monomi de grau 0.

Un **polinomi** és una expressió construïda a partir de la suma de monomis. El **grau d'un polinomi** vindrà donat pel major grau dels seus monomis.

Exemples:

- $\frac{1}{5} \cdot x^2 - 7 \cdot x^3 + 2$ és un polinomi de grau 3 en la variable x.
- $4 \cdot x^2 \cdot y^3 - 7 + 3 \cdot y^2$ és un polinomi de grau 5 en x i y.
- $x - 2 \cdot y + 6 \cdot z$ és un polinomi de grau 1 en x, y i z.

Tant en aquesta secció ens limitarem, bàsicament, a considerar polinomis amb una única variable. És habitual escriure els diferents monomis d'un polinomi de manera que els seus graus vagen en descens per a, amb aquest criteri, apreciar al seu primer monomi quin és el grau del polinomi.

L'aspecte genèric d'un polinomi en la variable x és

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

on els coeficients a_k són nombres. El monomi de grau zero, a_0, rep el nom de **terme independent**. Direm que un polinomi és **mònic** quan el coeficient del seu terme de major grau és igual a 1.

Exemples:

- $-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ és un polinomi de grau 4 en la variable x, el terme independent del qual és 2.

Activitats proposades

6. Per a cada un dels següents polinomis destaca el seu grau i els monomis que el constitueixen:

a) $3x^6 + 7x^2 - x$ b) $7x^3 + 8x^5 - 6x^2$ c) $3xy^6 + 7xy^2 - 2xy$

Com ocorre amb qualsevol expressió algebraica, si fixem, o triem, un valor concret per a la variable d'un polinomi apareix un nombre: el **valor numèric** del polinomi per a aqueix valor determinat de la variable. Si hem anomenat p a un polinomi, a l'avaluació de p en, per exemple, el nombre -3 la denotarem per $p(-3)$, i llegirem *"p de menys tres"* o *"p en menys tres"*. Amb aquest criteri, si p és un polinomi la indeterminada del qual és la variable x, podem referir-nos a ell com p o $p(x)$ indistintament.

D'aquesta manera apreciem que un polinomi pot ser entès com una manera concreta d'assignar a cada nombre un altre nombre.

Exemples:

- Si avaluem el polinomi $p \equiv -3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ en $x = 5$ ens trobem amb el nombre

$$p(5) = -3 \cdot 5^4 + \frac{1}{5} \cdot 5^2 + 2 = -3 \cdot 625 + 5 + 2 = -1875 + 7 = -1868$$

Activitats proposades

7. Considerem el polinomi $p(x) = 3x^6 + 7x^2 - x$. Troba els següents valors numèrics de p: $p(0)$, $p(1)$, $p(-1)$, $p(2)$.

Suma de polinomis

Com un polinomi és una suma de monomis, la suma de dos polinomis és un altre polinomi. A l'hora de sumar dos polinomis procedirem a sumar els monomis de la mateixa part literal.

Exemples:

- La suma dels polinomis $-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ i $-x^4 + 4x^2 - 5x - 6$ és el polinomi

$$\left(-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2\right) + (-x^4 + 4x^2 - 5x - 6) = (-3x^4 - x^4) + \left(\frac{1}{5}x^2 + 4x^2\right) - 5x + (2 - 6) =$$

$$= (-3 - 1) \cdot x^4 + \left(\frac{1}{5} + 4\right) \cdot x^2 - 5x + (2 - 6) = -4x^4 + \frac{21}{5}x^2 - 5x - 4$$

- $(5x^2 - 3x + 1) + (x^2 + 4x - 7) = (5x^2 + x^2) + (-3x + 4x) + (1 - 7) = 6x^2 + x - 6$

Al següent exemple sumarem dos polinomis disposant-los, adequadament, un sobre un altre.

Exemple:

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & 4x^5 & +2x^4 & +x^3 & -5x^2 & +x & +4 \\
+ & -7x^5 & & +4x^3 & +5x^2 & -3x & -6 \\
\hline
 & -3x^5 & +2x^4 & +5x^3 & & -2x & -2
\end{array}$$

Autora: Raquel Caro
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Producte de polinomis

Una altra operació que podem realitzar amb polinomis és la multiplicació.

El resultat del producte de polinomis sempre serà un altre polinomi. Encara que en un polinomi tenim una indeterminada, o variable, com ella adopta valors numèrics, a l'hora de multiplicar polinomis utilitzarem les propietats de la suma i el producte entre nombres, en particular la propietat distributiva del producte respecte de la suma; així, tot queda en funció del producte de monomis, qüestió que resolem amb facilitat:

$$ax^n \cdot bx^m = abx^{n+m}$$

Exemples:

- $(-5)x^2 \cdot 2x^4 = (-5) \cdot 2 \cdot x^{2+4} = -10x^6$
- $5x^3 \cdot (-4) = 5 \cdot (-4) \cdot x^3 = -20x^3$

També podem materialitzar el producte de polinomis tal com multipliquem nombres enters:

Exemple:

$$\begin{array}{r}
-2x^3 + x + 4 \\
\times \quad x^2 - 3x + 1 \\
\hline
-2x^3 \qquad + x + 4 \\
6x^4 \quad -3x^2 - 12x \qquad \\
-2x^5 \quad + x^3 + 4x^2 \qquad\qquad \\
\hline
-2x^5 + 6x^4 - x^3 + x^2 - 11x + 4
\end{array}$$

Activitats proposades

8. Realitza les següents sumes de polinomis:

a) $(-x^3 + x - 5) + (2x^2 + 5x + 4) + (-4x^3 - 2x^2 + 3x)$

b) $(x^2 + 4) + (-2x + 4) + (-6x^3 + 3x^2 + x + 1) - x^2$

9. Efectua els següents productes de polinomis:

a) $(-2x) \cdot (3x^2 - 4)$

b) $(2x^3 + 1) \cdot (-4x + 5)$

c) $(4x^3 - x^2 - 1) \cdot (2x + 6)$

d) $(-1) \cdot (8x^2 + 7x - 9)$

Autora: Raquel Caro
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

2. EQUACIONS DE PRIMER GRAU

2.1. El llenguatge de les equacions

Ja saps que:

Una **equació** és una igualtat entre dues expressions algebraiques.

Exemple:

- Si tenim dues expressions algebraiques: $7x + 3$ i $5x + 2$, i les unim amb el signe igual obtenim una equació: $7x + 3 = 5x + 2$.

Les expressions que hi ha a cada costat de l'igual s'anomenen **membres** de l'equació. Totes les equacions tenen dos membres: l'expressió que està a l'esquerra del signe igual s'anomena **primer membre** i la que està a la dreta, **segon membre**.

Les lletres que contenen les equacions algebraiques (les "parts literals" de les seues dues expressions) s'anomenen **incògnites**, que significa literalment "*desconegudes*". Si totes les lletres són iguals, es diu que l'equació té només una incògnita.

Exemple:

- $6x - 1 = 5x + 8$ és una equació amb una sola incògnita, mentre que
- $4x + 2y = 1$ o $3x - 8 = 9y$ són equacions amb dues incògnites: x i y.

El **grau** d'una equació és el major exponent que apareix en alguna de les seues incògnites.

Exemple:

- $2x - 7 = 3x + 2$ és una equació de primer grau, mentre que $4x + 5xy^2 = 8$ és una equació de tercer grau ja que el monomi $5xy^2$ té grau 3 ($1 + 2 = 3$).

Activitats proposades

10. Còpia al teu quadern la següent taula i completa-la:

Equació	Primer membre	Segon membre	Incògnites
$4x - 5 = 6x - 7$			
	$3x + 2$	$x - 9$	
$8a + 7 = 65$			
	$4x - 3y$	$2 + y$	

11. Indica el nombre d'incògnites de les equacions següents:

a) $x - 2y = 3x + 4$; b) $5x + 6y^2 = 7$ c) $8a + 9a^2 = 1$ d) $2x + 3x^2 = 4$.

12. Indica el grau de les equacions següents:

a) $5x - 6 = 7x + 8$; b) $9x + y^2 = 13$ c) $x + 2x^2 = 3$ d) $4x + 5xy^2 = 6$

2.2. Equacions equivalents. Resolució d'equacions

Solució d'una equació:

Una **solució** d'una equació és un nombre que, quan la incògnita pren aqueix valor, es verifica la igualtat, és a dir, els dos termes de l'equació valen el mateix.

Algunes equacions només tenen una solució, però altres poden tindre diverses.

Resoldre una equació és trobar totes les seues possibles solucions numèriques.

Activitats resoltes

- Si et fixes en l'equació: $7x - 3 = 5x + 9$, veuràs que en donar-li valors a x la igualtat no sempre es compleix.

Per exemple, per a $x = 1$, el primer membre val $7 \cdot 1 - 3 = +4$, mentre que el valor del segon membre és: $5 \cdot 1 + 9 = 5 + 9 = 14$. Per tant 1 **no** és solució de l'equació.

Per a $x = 6$, el primer membre pren el valor: $7 \cdot 6 - 3 = 42 - 3 = 39$; i el segon membre: $5 \cdot 6+9= 30+9=39$. Per tant 6 és una **solució** de l'equació.

Si es desconeix la solució d'una equació, resulta molt pesat resoldre-la provant un nombre darrere d'un altre.

Per això el que es fa habitualment és transformar-la en altres **equacions equivalents** més senzilles.

Equacions equivalents són les que tenen les mateixes solucions.

Sabies que totes les solucions de totes les expressions algebraiques possibles, de qualsevol grau, formen el que es denomina els "***nombres algebraics***"? Per exemple, són algebraics tots aquests nombres: 1, 2, 1/3, 7/5, $\sqrt{2}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$, etc.

Encara que la immensa majoria dels nombres que utilitzem en la nostra vida quotidiana són algebraics, has de saber que realment hi ha molts, moltíssims més nombres "no algebraics" que ja aniràs coneixent, encara que algun ja coneixes com al nombre π.

Exemple:

- $3x - 7 = 11$ és equivalent a $3x = 18$, ja que la solució d'ambdues equacions és $x = 6$.

Per a obtindre equacions equivalents es tenen en compte les propietats següents:

- Si es **suma** o es **resta** als dos membres d'una equació una mateixa quantitat, s'obté una equació equivalent.
- Si es **multipliquen** o **divideixen** els dos membres d'una equació per una mateixa quantitat (diferent de zero), s'obté una equació equivalent.

Activitats resoltes

- Resol l'equació $3x + 9 = x - 5$ transformant-la en una altra més senzilla equivalent.

Transformar una equació fins que les seues solucions es facen evidents s'anomena "*resoldre l'equació*". Seguint aquests passos intentarem resoldre l'equació: $3x + 9 = x - 5$.

1) Sumem als dos membres $-x$ i restem als dos membres 9: $3x - x + 9 - 9 = x - x - 5 - 9$.

2) Fem operacions i aconseguim una altra equació que té al primer membre els termes amb x i al segon, els termes sense x: $3x - x = -5 - 9$.

Autora: Raquel Caro
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

3) Efectuem les sumes al primer membre i al segon: $2x = -14$.

4) Aïllem x dividint els dos membres per 2: $\frac{2x}{2} = \frac{-14}{2}$ d'on $x = -7$.

5) Comprova que totes les equacions que hem obtingut en aquest procés són equivalents i que la seua solució és $x = -7$.

- Resol l'equació $6 - x = 2x - 3$.

1) Sumem x i 3 per a passar a un membre els termes amb x i a l'altre membre els termes sense x:

$$6 - x + x + 3 = 2x + x - 3 + 3,$$

2) Fem operacions: $6 + 3 = 2x + x$

3) Efectuem les sumes: $9 = 3x$.

4) Aïllem x dividint els dos membres per 3: $3 = x$.

La solució de l'equació és $x = 3$.

5) Comprovem que en efecte és la solució: $6 - x = 2x - 3 \Rightarrow 6 - 3 = 3$; $2·3 - 3 = 3$.

El procediment utilitzat a les activitats és un mètode universal per a **resoldre** qualsevol equació de grau 1, és a dir, on x apareix sense elevar a un altre exponent com en x^2. Les equacions de primer grau tenen sempre una única solució, però en general, les solucions no tenen perquè ser nombres enters com als exemples.

Activitats proposades

13. Esbrina quin dels nombres és la solució de l'equació i escriu-lo al teu quadern:

Equació	Possibles solucions		Equació	Possibles solucions
$3x + 5 = x - 1$	2, –1, –3		$a^2 - 6 = -2$	–2, –6, 2
$x + 6 = 4x - 3$	3, –2, –3		$b - 4 = 8 - b$	3, 4, 6

14. Resol les equacions següents:

a) $5x - 1 = 3x - 4$ b) $7x + 9 = 5x - 6$ c) $6x + 8 = 14$ d) $3x - 9 = 2x - 11$

15. Tria entre les següents equacions totes les que siguen equivalents a l'equació $3x - 6 = x + 10$.

a) $x - 10 = 5$ c) $16 - x = 3x - 5x$ e) $4x = 32$ e) $2x = 10 + 6$ g) $8 = x$

16. Escriu dues equacions equivalents a cada una de les equacions següents:

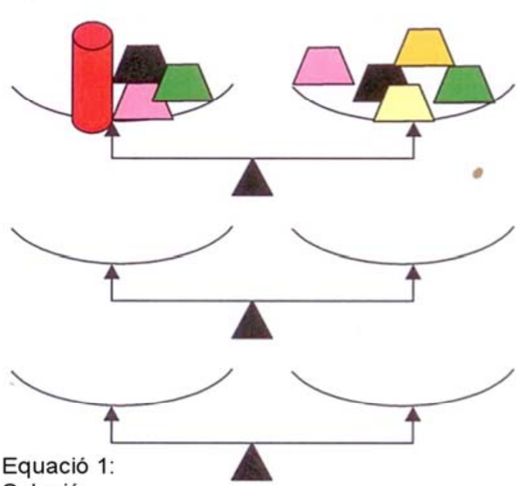
a) $2x - 5 = 13$ b) $3x = 15$ c) $5x + 12 = 7$ d) $x = -5$

Autora: Raquel Caro
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

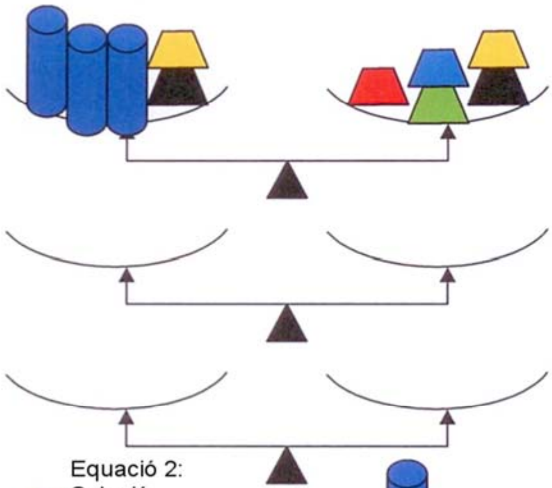
Material didàctic fotocopiable: Balances

a) Totes les peses són iguals a 1. Les balances estan equilibrades. Mantín sempre equilibrades les balances següents, fins a aconseguir conéixer quant pesa l'objecte cilíndric.

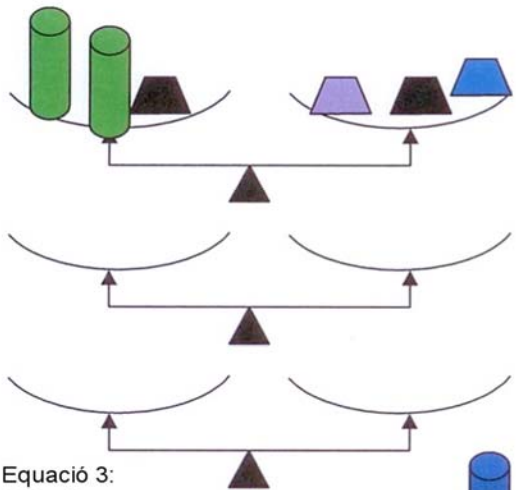
b) Escriu algebraicament la situació actual de cada balança, i totes les situacions intermèdies, fins a arribar a la solució.



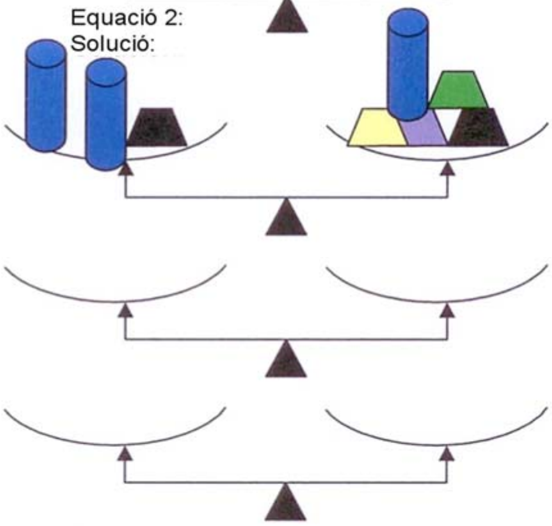
Equació 1:
Solució:



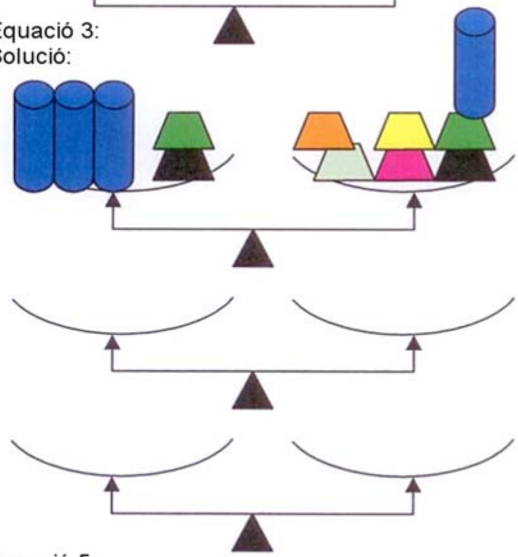
Equació 2:
Solució:



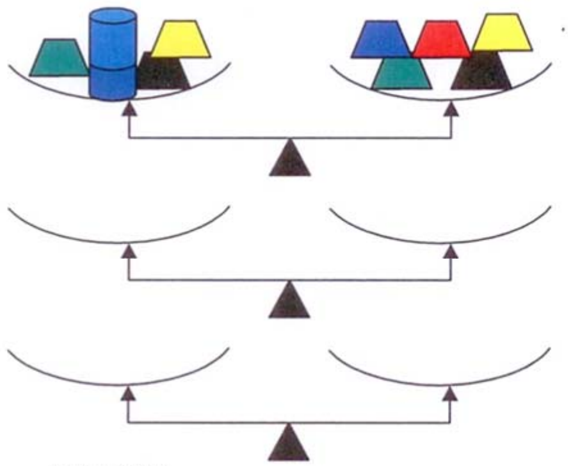
Equació 3:
Solució:



Equació 4:
Solució:



Equació 5:
Solució:



Equació 6:
Solució:

3. RESOLUCIÓ DE PROBLEMES MITJANÇANT EQUACIONS

3.1. Procediment

Ja saps que:

Molts problemes poden resoldre's mitjançant una equació.

Activitats resoltes

- Busca un nombre que sumat amb el seu següent done com resultat 9.

Per a resoldre-lo, segueix els passos següents:

Pas 1: Abans de començar a actuar, intenta entendre bé el problema

Llig amb molt atenció l'enunciat, i pregunta't:

Què et demanen? Quines dades tens?

Ens demanen un nombre. La **incògnita** és aqueix nombre. Anomena a aqueix nombre x. El seu següent, serà $x + 1$. Ens diuen que la suma d'ambdós és 9.

Pas 2: Busca una bona estratègia.

És un problema que volem resoldre mitjançant una equació. Escriu en llenguatge algebraic l'enunciat del problema i planteja una equació:

$$x + (x + 1) = 9.$$

Pregunta't si efectivament resol el problema rellegint l'enunciat.

Pas 3: Porta avant la teua estratègia

Ara sí, ara resol l'equació. Per a resoldre una equació convé seguir un orde d'actuació que ens ajude a no cometre errors, per a això seguim el procediment que acabem d'aprendre.

Lleva, si n'hi ha, parèntesi i denominadors: $x + x + 1 = 9$.

Per a posar al primer membre els termes amb x, i al segon els que no la tenen, fes **el mateix als dos costats**, resta 1 als dos membres: $x + x + 1 – 1= 9 – 1$, després $x + x = 9 – 1$. Opera: $2x = 8$.

Aïlla:

Per a aïllar la x, es fa el mateix als dos costats, es divideixen per 2 ambdós membres: $2x/2 = 8/2$, per tant, $x = 4$.

Pas 4: Comprova el resultat. Pensa si és raonable.

En efecte, comprova que: $4 + 5 = 9$.

Activitats proposades

17. La suma de tres nombres consecutius és igual al doble del major més 3. Calcula els dits nombres.

18. La mare d'Àlvar té el triple de l'edat del seu fill, i aquest té 32 anys menys que sa mare. Quants anys tenen cada un?

3.2. Problemes numèrics

Activitats resoltes

- En un xicotet hotel hi ha 50 habitacions simples i dobles. Si en total té 87 llits, quantes habitacions són simples i quantes són dobles?

Segueix els passos per a la resolució de problemes.

Pas 1: Abans de començar a actuar, intenta entendre bé el problema

Anomena x al nombre d'habitacions simples. El nombre d'habitacions dobles és $34 – x$. El nombre de llits és 54.

Pas 2: Busca una bona estratègia.

Escriu en forma d'equació la informació de l'enunciat:

$$x + 2(34 – x) = 54.$$

Pas 3: Porta avant la teua estratègia

Resol l'equació. Lleva parèntesi:

$$x + 68 – 2x = 54.$$

Per a posar al primer membre els termes amb x i al segon els termes sense x, resta 68 als dos membres:

$$x + 68 – 2x – 68 = 54 – 68.$$

Fes les operacions:

$$– x = – 14$$

Per a aïllar la x divideix els dos membres per $–1$:

$$x = – 14/– 1 = 14.$$

Pas 4: Comprova el resultat. Pensa si és raonable.

Hi ha 14 habitacions simples. Per tant hi ha $34 – 14 = 20$ habitacions dobles. Per tant el nombre de llits és 54 perquè:

$$14 + 2\cdot 20 = 54.$$

- En una granja hi ha 50 animals entre gallines i conills, i entre tots els animals sumen 120 potes. Quantes gallines hi ha a la granja?

Pas 1: Abans de començar a actuar, intenta entendre bé el problema

Anomena x al nombre de gallines, i com hi ha 50 animals en total, conills tindrem $50 – x$.

Com una gallina té 2 potes i un conill 4, tindrem en total $2x + 4(50 – x)$ potes.

Pas 2: Busca una bona estratègia.

Com sabem que el nombre total de potes és 120, podem escriure aquesta equació:

Autora: Raquel Caro
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

$$2x + 4(50 - x) = 120$$

Pas 3: Porta avant la teua estratègia

Resol l'equació. Lleva parèntesi:

$$2x + 200 - 4x = 120$$

Si restem 200 en ambdós costats obtenim:

$$2x + 200 - 4x - 200 = 120 - 200$$

Operand obtenim:

$$-2x = -80$$

Dividint per –2 en ambdós costats resolem l'equació:

$$-2x/-2 = -80/-2 \text{ per tant } x = 40.$$

Pas 4: Comprova el resultat. Pensa si és raonable.

Hi ha 40 gallines i 10 conills perquè $50 - x = 50 - 40 = 10$.

Les potes de 40 gallines i 10 conills sumen $40 \cdot 2 + 10 \cdot 4 = 80 + 40 = 120$

Activitats proposades

19. Un mag li digué: Pensa un nombre, suma-li 12, multiplica per 2 el resultat, resta 20 i divideix per 2. Dis-me que t'ix. Digué 35. I el mag li contestà immediatament: El nombre que pensares és 33. Endevina com ho sabé el mag. (Suggeriment: escriu prèviament la cadena d'operacions).

20. Pensa un nombre, multiplica-lo per 10, resta-li el nombre que has pensat i divideix el resultat entre 9. Has obtingut el nombre que pensares! Busca el truc: escriu algebraicament, anomena *x* al nombre, l'expressió algebraica de les operacions realitzades, i endevina com ho sabé el mag.

21. Si la suma de tres nombres consecutius és 63, de quins nombres es tracta? (Suggeriment: il·lustra la situació amb una balança equilibrada. Mantín equilibrada fins a aconseguir l'equació equivalent que ens done el resultat).

22. Hem comprat 8 llibres iguals i hem pagat amb un bitllet de 50 €. Si ens han tornat 10 €, quant costava cada llibre?

Autora: Raquel Caro
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

3.3. Problemes de geometria

Molts problemes de geometria es poden resoldre per mètodes algebraics, utilitzant equacions.

Activitats resoltes

- Es vol dibuixar un triangle de 55 cm de perímetre, de manera que un costat siga el doble d'un altre, i el tercer siga el triple del menor menys 5 cm.

Pas 1: Abans de començar a actuar, intenta entendre bé el problema

Dibuixa un triangle, pensant en les dades de l'enunciat.

Anomenem x al costat menor, d'aquesta manera pots definir els altres dos costats. El costat mitjà és $2x$. El costat major és $3x - 5$

Pas 2: Busca una bona estratègia.

Com el perímetre és 55, es pot plantejar l'equació: $x + 2x + (3x - 5) = 55$

Pas 3: Porta avant la teua estratègia

Es resol l'equació: $x + 2x + 3x - 5 + 5 = 55 + 5$; $x + 2x + 3x = 60$; $6x = 60$.

Per tant $x = 60 / 6 = 10$ és la longitud del costat menor. Els altres dos costats mesuren $2x = 20$ i $3x - 5 = 25$.

Solució: Els costats del triangle mesuren 10 cm, 20 cm i 25 cm.

Pas 4: Comprova el resultat. Pensa si és raonable.

Sumant els tres costats, 10 + 20 + 25 = 55, obtenim el perímetre del triangle, 55.

Activitats resoltes

- Tens un rectangle d'altura x cm i de base $2x + 3$. Si a la base d'aquest rectangle li lleven 2 cm i a l'altura li afigen 5 cm, es converteix en un quadrat. Quines dimensions té?

Pas 1: Abans de començar a actuar, intenta entendre bé el problema

Dibuixa un rectangle amb les condicions del problema. L'expressió $2x + 3 - 2$ expressa els 2 cm que li lleva a la base i $x + 5$ expressa els 5 cm que li afigen a l'altura.

Pas 2: Busca una bona estratègia.

Si s'ha format un quadrat com els costats són iguals ambdues expressions han de ser equivalents:

$2x + 3 - 2 = x + 5$

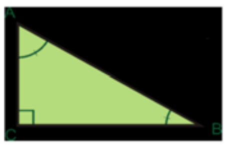
Pas 3: Porta avant la teua estratègia

Resol l'equació: $2x + 3 - 2 - x - 3 + 2 = x - x - 3 + 2 + 5$; $2x - x = 4$; $x = 4$

Solució: x = 4 cm és la longitud de l'altura del rectangle. Per tant, $2 \cdot 4 + 3 = 11$ cm mesura la base del rectangle.

Pas 4: Comprova el resultat. Pensa si és raonable.

En efecte, a l'altura li sumem 5, 4 + 5 = 9, i a la base li restem 2, 11 – 2 = 9, s'obté un quadrat.



Activitats proposades

23. Cada un dels costats iguals d'un triangle isòsceles és igual al doble del tercer costat menys 3 cm. Calcula la seua mesura si el perímetre del triangle és 84 cm.

24. Calcula l'àrea d'un triangle rectangle, sabent que els seus catets sumen 20 cm i el catet major mesura 4 cm més que el menor.

25. Calcula la mesura dels angles aguts d'un triangle rectangle, sabent que l'angle major és igual al triple del menor menys 6º.

3.4. Altres problemes

Activitats resoltes

- Si tenim 21 bitllets de 5 € i de 10 € que sumen en total 170 €, quants bitllets tenim de cada classe?

Pas 1: Abans de començar a actuar, intenta entendre bé el problema

Anomena x al nombre de bitllets de 5 € i la resta, 21 – x, serà el nombre de bitllets de 10 €.

Pas 2: Busca una bona estratègia.

Planteja l'equació que expressa la suma en euros dels dos tipus de bitllets:

$5 \cdot x + 10 (21 - x) = 170$

Pas 3: Porta avant la teua estratègia

Per a resoldre l'equació, el primer, llevarem parèntesi: $5x + 210 - 10x = 170$

Deixa al primer membre tots els termes amb *x*, i en el segon els que no tenen *x*:

$5x - 10x + 210 - 210 = - 210 + 170$

Fes operacions: $-5x = -40$

Aïlla la incògnita: $x = (-40) : (-5) = +8$

Per tant, tenim 8 bitllets de 5 €, i 21 – 8 = 13 és el nombre de bitllets de 10 €.

Pas 4: Comprova el resultat. Pensa si és raonable.

Comprovem que $8 \cdot 5 = 40$ € i $13 \cdot 10 = 130$ €. I que, en efecte, 40 + 130 = 70 €.

Solució: Tenim 8 bitllets de 5 € i 13 bitllets de 10 €.

Activitats proposades

26. Dues motocicletes ixen al mateix temps de dos punts que disten 420 km, en la mateixa direcció però en sentit contrari. La primera porta una velocitat de 60 km/h i la segona, de 80 km/h. Quant temps tardaran a encreuar-se?

Ajuda: Fes un diagrama per a comprendre l'enunciat

Solució: Tarden 3 hores a encreuar-se.

27. Dos cotxes ixen de dos punts situats a 560 km de distància, un a la trobada de l'altre. El primer porta una velocitat de 70 km/h i el segon de 90 km/h. Quantes hores tarden a encreuar-se?

28. Si en el portamonedes tenim 16 monedes de 10 cent i de 20 cèntims d'euro, i en total reunim 2 €, quantes monedes de cada classe tenim?

29. Si un bolígraf val el triple del preu d'un llapis, he comprat un total de 7 llapis i bolígrafs, i he pagat en total 5,50 €, quants bolígrafs i quants llapis he comprat?

30. Neus té una parella d'hàmsters amb una ventrada de diverses cries. Li regala a un amiga la meitat de les cries. A un segon amic li regala la meitat de les cries que li queden més mitja cria. L'única cria que li queda es la regala a un tercer amic. Quantes cries formaven la ventrada?

31. Dues amigues, Maite i Anna, van anar a visitar una granja en què hi havia gallines i conills. En eixir Anna li preguntà a Maite: Saps quantes gallines i quants conills hi havia. No, digué Maite, però hi havia en total 72 ulls i 122 potes. Esbrina el nombre de gallines i de conills de la granja.

32. D'un depòsit ple de líquid es trau la mitat del contingut, després la tercera part de la resta i queden encara 1600 litres. Calcula la capacitat del depòsit.

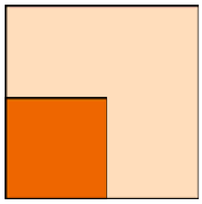
Autora: Raquel Caro
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

4. EQUACIONS DE 2n GRAU

Hi ha equacions de segon grau que ja saps resoldre. El curs pròxim estudiaràs com resoldre-les totes. Però en aquest curs aprendrem a resoldre algunes. Per exemple, el següent problema ja saps resoldre'l:

Activitats resoltes

- S'augmenta el costat d'un taulell quadrat en 3 *cm* i la seua àrea ha quedat multiplicada per 4, Quin costat tenia el taulell?



Plantegem l'equació:

$$(x + 9)^2 = 16x^2$$

Aquesta equació si saps resoldre-la! $x + 9 = 4x \to 9 = 3x$, per tant el costat és de 3 *cm*.

Hi ha una altra solució, $x + 9 = -4x \to 9 = 5x = -9 \to x = -9/5$, que no té sentit com a costat d'un quadrat.

Estudiarem de forma ordenada aquestes equacions.

4.1. Concepte d'equació de 2n grau

Una **equació de segon grau** és una equació polinòmica en la que la major potència de la incògnita és 2. Les equacions de segon grau es poden escriure de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

on *a, b* i *c* són nombres reals, amb $a \neq 0$.

Exemple 1:

- Són equacions de 2n grau per exemple

$$5x^2 - 8x + 3 = 0; \qquad -6x^2 + 2x + -9 = 0; \qquad x^2 - 25x - 1,1 = 0.$$

Exemple 2:

- Els coeficients de les equacions de 2n grau són nombres, per tant poden ser fraccions o arrels. Per exemple:

$$\frac{3}{5}x^2 - 4x + \frac{1}{2} = 0; \quad \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{3}{4} = 0; \quad -2,7x^2 + 3,5x - 0,2 = 0; \quad \sqrt{2}x^2 + 3x - \sqrt{5} = 0.$$

Activitats proposades

33. Indica si són equacions de segon grau les equacions següents:

a) $5x^2 - \sqrt{2}x + 8 = 0$ c) $3x^2 - 5 = 0$ e) $2x^2 - \frac{3}{x} = 0$

b) $7xy^2 - 2 = 0$ d) $6 - 8,3x = 0$ f) $2x^2 - 3\sqrt{x} + 4 = 0$

34. A les següents equacions de segon grau, indica qui són *a*, *b* i *c*.

a) $7 - 8x^2 + 2x = 0$ b) $-6x^2 + 9x = 0$

c) $4x^2 - 5 = 0$ d) $x^2 - 3x + 5 = 0$

4.2. Resolució d'equacions de 2º grau incompletes

Anomenem **equació de 2n grau incompleta** a aquella equació de segon grau en què el coeficient *b* val 0 (falta *b*), o el coeficient *c* val 0 (falta *c*).

Exemple:

- L'equació de 2n grau $3x^2 - 15 = 0$ és incompleta perquè el coeficient $b = 0$, és a dir, falta *b*.
- L'equació de 2n grau $3x^2 - 15x = 0$ és incompleta perquè no té *c* , és a dir, $c = 0$.

Les equacions de 2n grau incompletes es resolen d'una manera o una altra depenent del tipus que siguen.

Si el coeficient *b* = 0: Aïllem la incògnita normalment, com fèiem a les equacions de primer grau:

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{-c}{a}} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Si el coeficient *c* = 0: Traiem *x* factor comú:

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x\,(ax + b) = 0.$$

Perquè el producte de dos factors valga zero, un dels factors ha de valdre zero.

Per tant $x = 0$, o $ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$

Exemples:

- A l'equació $2x^2 - 50 = 0$ falta la *b* . Per a resoldre-la aïllem la incògnita, és a dir, x^2 :

$$2x^2 - 50 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 50 \Rightarrow x^2 = 50/2 = 25$$

Una vegada que arribem ací, ens falta llevar aqueix quadrat que porta nostra incògnita. Per a això, farem l'arrel quadrada en els 2 membres de l'equació:

$$x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$$

Així hem obtingut les dues solucions de la nostra equació, 5 i –5. En efecte, $2\cdot 5^2 - 50 = 2\cdot 25 - 50 = 0$, i $2\cdot(-5)^2 - 50 = 2\cdot 25 - 50 = 0$

- A l'equació $3x^2 - 21x = 0$ falta la *c* . Per a resoldre-la, traiem *x* factor comú:

$$3x^2 - 21x = 0 \Rightarrow 3x(x - 7) = 0$$

Una vegada que arribem ací, tenim dues opcions

1) $3x = 0 \Rightarrow x = 0$.
2) $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$.

Així hem obtingut les dues solucions de l'equació $x = 0$ i $x = 7$.

Activitats resoltes

- Resol l'equació de 2n grau $2x^2 - 72 = 0$:

Solució : Es tracta d'una equació de 2n grau incompleta on falta la *b* . Per tant, aïllem la incògnita: $2x^2 - 72 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 72 \Rightarrow x^2 = 72/2 = 36 \Rightarrow x = \pm\sqrt{36} = \pm 6$. Les arrels són 6 i –6.

- Resol l'equació de 2n grau $x^2 + 11x = 0$:

Solució : Es tracta d'una equació de 2n grau incompleta on falta la *c* . Per tant, traiem factor comú:

$x^2 + 11x = 0 \Rightarrow x(x + 11) = 0$ i obtenim les dues solucions: $x = 0$ i $x + 11 = 0 \Rightarrow x = -11$.

Activitats proposades

35. Resol les següents equacions de 2n grau incompletes:

a) $3x^2 + 9x = 0$ b) $2x^2 - 8 = 0$ c) $x^2 - 81 = 0$ d) $2x^2 + 5x = 0$

4.3. Resolució d'equacions de 2n grau completes

S'anomena **equació de segon grau completa** a aquella que té valors diferents de zero para a , b i c .

Per a resoldre les equacions de segon grau completes, usarem la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Aquesta fórmula ens permet calcular les dues solucions de la nostra equació.

Anomenarem **discriminant** a la part de la fórmula que està a l'interior de l'arrel:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Activitats resoltes

- Resol l'equació de segon grau $x^2 - 5x + 6 = 0$

Solució : Primer hem de saber qui són a, b i c: $a = 1$; $b = -5$; $c = 6$

Substituint aquests valors a la nostra fórmula, obtenim:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Per tant, les nostres dues solucions són:

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = 3 \quad ; \quad x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$$

En efecte, $3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$, i $2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$, per tant 3 i 2 són solucions de l'equació.

Activitats proposades

36. Resol les següents equacions de 2n grau completes:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ b) $2x^2 + 5x - 7 = 0$ c) $3x^2 - 8x + 2 = 0$ d) $x^2 - x - 12 = 0$

5. SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS

5.1. Concepte de sistema d'equacions lineals

Un **sistema d'equacions lineals** amb dues incògnites es pot expressar de la forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

On *a, b, a'* i *b'* són nombres reals que es denominen **coeficients** i *c* i *c'* també són nombres reals anomenats **termes independents**.

Anomenem **solució** del sistema al parell de valors (x, y) que satisfan les dues equacions del sistema.

Es diu que dos sistemes d'equacions són **equivalents**, quan tenen la mateixa solució.

Exemple:

- *Són sistemes d'equacions lineals:*

$$\begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases};\quad \begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ x - y = 0 \end{cases};\quad \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases};\quad \begin{cases} 4y + 2 = 3x \\ 7x - 3 = 5y \end{cases}$$

- ***No** és un sistema lineal* $\begin{cases} 3xy + 5y = 7 \\ 4x - 8xy = 9 \end{cases}$ *perquè té termes en xy.*

- Tampoc ho és $\begin{cases} 3x^2 + 5y = 7 \\ 4x - 8y = 9 \end{cases}$ perquè té un terme en x^2.

Activitats proposades

37. Raona si són o no sistemes d'equacions lineals els sistemes següents:

a) $\begin{cases} xy + 7y = 9 \\ 8x - 5y = 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2y - 3x = 4 \\ 5x - 6y = -7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 8x - 9 = 5y \\ 4x + 7y = 2/3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x^2 + y = 2 \\ 3x + y^2 = 4 \end{cases}$

5.2. Resolució de sistemes pel mètode de substitució

El mètode **de substitució** consisteix a aïllar una incògnita d'una de les equacions del sistema i substituir l'expressió obtinguda a l'altra equació.

Així, obtenim una equació de primer grau en què podem calcular la incògnita aïllada. Amb el valor obtingut, obtenim el valor de l'altra incògnita.

Exemple:

- *Resoldrem el sistema* $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ *pel mètode de substitució:*

Aïllem x de la segona equació:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \Rightarrow x = 3 - 2y \end{cases}$$

i la substituïm a la primera:

Autora: Raquel Caro
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

$2(3 - 2y) - 3y = -1 \Rightarrow 6 - 4y - 3y = -1 \Rightarrow -4y - 3y = -1 - 6 \Rightarrow -7y = -7 \Rightarrow y = (-7)/(-7) = 1$

Amb el valor obtingut de y, calculem la x:

$x = 3 - 2y \Rightarrow x = 3 - 2\cdot 1 = 1.$

Solució:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

5.3. Resolució de sistemes pel mètode d'igualació

El **mètode d'igualació** consisteix a aïllar la mateixa incògnita de les dues equacions que formen el sistema i igualar els resultats obtinguts.

Així, obtenim una equació de primer grau en la que podrem calcular la incògnita aïllada. Amb el valor obtingut, calculem el valor de l'altra incògnita.

Exemple:

- *Resoldrem el sistema* $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ *pel mètode d'igualació:*

Aïllem la mateixa incògnita de les dues equacions que formen el sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \Rightarrow x = \dfrac{3y - 1}{2} \\ x + 2y = 3 \Rightarrow x = 3 - 2y \end{cases}$$

Igualem ara els resultats obtinguts i resolem l'equació resultant:

$$\frac{3y - 1}{2} = 3 - 2y \Rightarrow 3y - 1 = 2(3 - 2y) = 6 - 4y \Rightarrow 3y + 4y = 6 + 1 \Rightarrow 7y = 7 \Rightarrow y = \frac{7}{7} = 1$$

Amb el valor obtingut de y, calculem la x:

$x = 3 - 2y \Rightarrow x = 3 - 2\cdot(1) = 1$

Solució:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

5.4. Resolució de sistemes pel mètode de reducció

El **mètode de reducció** consisteix a eliminar una de les incògnites sumant les dues equacions. Per fer això es multipliquen una o ambdues equacions per un nombre de manera que els coeficients de x o y siguen iguals però de signe contrari.

Exemple:

- *Resoldrem el sistema* $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ *pel mètode de reducció:*

Multipliquem la segona equació per -2 perquè els coeficients de la x siguen iguals però de signe contrari

Autora: Raquel Caro
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

i sumem les equacions obtingudes:

$$\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)} \qquad \xrightarrow{\text{sumem}} \begin{cases} 2x-3y=-1 \\ -2x-4y=-6 \end{cases} \qquad -7y=-7 \Rightarrow y=(-7)/(-7)=1$$

Amb el valor obtingut de y, calculem la x:

$2x - 3\cdot1 = -1 \Rightarrow 2x = -1 + 3 = 2 \Rightarrow x = 2/2 = 1$

Solució:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Activitats proposades

38. Resol els següents sistemes pel mètode de substitució:

a) $\begin{cases} 2x+4y=-5 \\ 3x-6y=7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+4y=0 \\ 3x+6y=11 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x-7y=1 \\ 8x+7y=10 \end{cases}$

39. Resol els següents sistemes pel mètode d'igualació:

a) $\begin{cases} 6x+7y=8 \\ -2x+3y=-4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-3y=-5 \\ 4x+2y=14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x-4y=3 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$

40. Resol els següents sistemes pel mètode de reducció:

a) $\begin{cases} 3x+y=4 \\ 2x-5y=14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+3y=2 \\ 4x+y=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3y=0 \\ 3x-2y=13 \end{cases}$

Autora: Raquel Caro
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

CURIOSITATS. REVISTA

A)Quadrats màgics

Al quadre Melancolia del famós pintor alemany Albert Dürer (1471-1528) apareix aquest quadrat màgic en què totes les files, columnes i diagonals sumen el mateix, i a més aqueix mateix resultat s'obté sumant les quatre caselles centrals.

A més, les dues caselles del centre de la línia inferior indiquen l'any en què aquest quadrat màgic va ser resolt, 1514.

40. Confecciona un quadrat màgic de 3 x 3 caselles, col·locant els dígits de l'1 al 9 de manera que totes les files, totes les columnes, i totes les diagonals sumen el mateix.

B) EMMY NOETHER (1882 – 1935)

Emmy Noether

Emmy Noether va ser una famosa algebrista. Nasqué a Alemanya, filla de pares jueus. Son pare era catedràtic de matemàtiques a la Universitat i Emmy heretà d'ell la passió per les matemàtiques. No obstant això, per aquella època la Universitat no admetia que les dones desenvoluparen estudis científics, així que hagué d'aconseguir un permís especial perquè la deixaren assistir a les classes, encara que no tenia dret a examinar-se. Anys més tard, les lleis canviaren i pogué doctorar-se. Treballà amb els matemàtics alemanys més brillants i desenvolupà un teorema essencial per a la Teoria de la Relativitat en què estava treballant Albert Einstein. Davant de la situació política d'Alemanya, amb la pujada en poder de Hitler, hagué d'exiliar-se als Estats Units. Allí coincidí amb **Einstein** qui li dedicà aquestes paraules: *"Segons el parer dels matemàtics més competents que encara viuen, des que les dones començaren a rebre ensenyança superior, Emmy Noether ha tingut el geni creatiu més destacat que haja sorgit fins a la data de hui en el camp de la matemàtica"*.

C) DIOFANT

Diofant va ser un famós matemàtic grec del segle III d. C. A l'epitafi de la seua tomba escrigué:

Caminant! Ací jauen les restes de Diofant. Els nombres poden mostrar oh meravella! La duració de la seua vida, la sisena part de la qual constituí la bella infància.

Havia transcorregut a més una dotzena part de la seua vida quan es cobrí de borrissol la seua barba.

A partir d'ací, la setena part de la seua existència transcorregué en un matrimoni estèril.

Passà, a més un quinquenni i llavors li féu feliç el naixement de primogènit.

Aquest entregà el seu cos i la seua bella existència a la terra havent viscut la meitat del que son pare arribà a viure.

Per la seua banda, Diofant descendí a la sepultura amb profunda pena havent sobreviscut quatre anys al seu fill.

Dis-me, caminant, quants anys visqué Diofant.

41. a) Escriu en llenguatge algebraic l'epitafi de la tomba de Diofant

b) Resol l'equació. Comprova que Diofant visqué 84 anys.

Autora: Raquel Caro
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

RESUM

		!!br0ken!!
Expressió algebraica	Expressions que reflecteixen una situació mitjançant lletres i nombres	Àrea d'un rectangle = base per altura: $A = b \cdot a$
Valor numèric d'una expressió algebraica	Nombre que s'obté en substituir les lletres per nombres i fer les operacions.	El valor numèric de $x + 3x + 5$ per a $x=-2$ es: $-2 + 3(-2) + 5 -2 - 6 + 5 = -3$
Equació	Igualtat entre dos expressions algebraiques.	$3x - 1 = 2x + 5$
Incògnites	Lletres de valor desconegut que contenen una equació	A $3x - 1 = 2x + 5$ la incògnita és x.
Grau d'una equació	El major exponent de la incògnita.	L'equació $3x - 1 = 2x + 5$ és de primer grau. L'equació $3x^2 = 27$ és de segon grau.
Solució d'una equació	Nombre pel qual es pot substituir la incògnita perquè la igualtat siga certa.	Solució de $3x - 1 = 2x + 5$ és $x = 6$.
Resoldre una equació	És trobar la seua solució.	$\mathbf{3x - 1 = 2x + 5}$ $3x - 2x -1 + 1 = 2x - 2x + 5 +1$; $x = 6$
Equacions equivalents	Tenen les mateixes solucions	$2x - 5 = x + 2$ és equivalent a: $2x - x = 2 + 5$
Passos per a resoldre una equació:	Llevar parèntesi Llevar denominadors Agrupar els termes amb x a un membre i els termes sense x a l'altre. Operar Aïllar la x.	$\mathbf{(3x - 1) = 7/2}$ 1. $6x - 2 = 7/2$ 2. $12x - 4 = 7$ 3. $12x = 7 + 4$ 4. $12x = 11$ 5. $x = 11/12$
Passos per a resoldre un problema mitjançant equacions	Llegir l'enunciat. Escriure l'equació. Resoldre l'equació. Comprovar la solució.	Trobar un nombre que sumat a 7 dóna el mateix que el seu doble menys 3. 1) Comprendre l'enunciat 2) $x + 7 = 2x - 3$ 3) $x - 2x = -3 - 7$; $-x =-10$; $x = 10$ 4) $10 + 7 = 2 \cdot 10 - 3$
Equació de segon grau	És una equació algebraica en la que la major potència de la incògnita és 2. Té la forma: $ax^2 + bx + c = 0$ on a, b i c són nombres reals, amb $a \neq 0$.	$-3x^2 + 7x + -8 = 0$
Resolució d'equacions de 2n grau incompletes	Si $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, aïllem la incògnita: $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$. Si $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$: $x = 0$ y $x = \frac{-b}{a}$	$2x^2 - 18 = 0$: $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$ $3x^2 - 15x = 0 \Rightarrow 3x(x - 5) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = 5$.
Resolució d'equacions de 2º grau completes	S'empra la fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 - 5x + 6 = 0$: $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2}$ $x_1 = 3$, $x_2 = 2$
Sistema d'equacions lineals	$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}$
Mètodes de resolució	**Substitució:** aïllar una incògnita i substituir a l'altra equació. **Igualació:** aïllar la mateixa incògnita a les dues equacions. **Reducció:** sumar les dues equacions, multiplicant-les per nombres adequats.	

EXERCICIS I PROBLEMES.

Llenguatge algebraic

1. Si anomenem x a l'edat de Lluís, expressa algebraicament:

a) Lola té l'edat que Lluís tenia fa 11 anys.

b) Jordi té l'edat que Lluís tindrà d'ací a 2 anys.

c) Els anys que falten perquè Lluís complisca 30 anys.

d) Carme té la meitat de l'edat de Lluís.

2. En una granja hi ha un nombre d'ovelles desconegut. Indica en llenguatge algebraic el nombre de potes i d'orelles que hi ha.

3. Escriu en llenguatge algebraic

a) L'edat de Cristina és doble que la que tindrà el seu germà d'ací a 5 anys

b) L'edat de Rafel és la tercera part que la que tenia la seua germana fa 3 anys.

4. Escriu al teu quadern utilitzant expressions algebraiques:

a) Raquel té x cromos

b) Pep té 10 cromos més que Raquel

c) Teresa té el triple de cromos que Pep

d) Carmela té el mateix nombre de cromos que Raquel i Pep junts

e) Marta té la mitat de cromos que Teresa.

5. Copia al teu quadern i relaciona cada enunciat verbal amb la seua expressió algebraica:

a) Sumar 9 al triple d'un cert nombre	1) $3x + 2(x + 1)$
b) Restem 7 a la meitat d'un nombre	2) $3x + 9$
c) El triple d'un nombre més el doble del següent	3) $8x$
d) El que ens tornen si paguem 20 € per una certa compra	4) $x/2 – 7$
e)El perímetre d'un octògon regular.	5) $x – 3$
f) L'edat d'algú fa 3 anys	6) $20 – x$

6. Calcula el valor numèric de les següents igualtats per al valor indicat de x:

a) $y = 0,5 + 3x$ per a x = 3 b) $y = 1,6x$ per a $x = 0,75$ c) $y = 4 + 1,5x$ per a $x = 2,1$

7. Simplifica les expressions següents:

a) $3a^2b – 2\, a^2\, b + 7\, a^2\, b$ b) $5xy + 7xy – 2xy$ c) $6x + 9x – 3x$

d) $2x + 7x – 2y$ e) $3ab + 8ab – 6ab$

8. Realitza les operacions següents

a) $3x + 5x – 2y + 9y – 4x – 3y$ b) $(2x – 5\, x^2) – (3\, x^2 + 5x)$

c) $3(7x – 3) – 2(2x + 5)$ d) $2a – 5a + 7a – 8a + b$

Autora: Raquel Caro
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Equacions de primer grau

9. Troba el nombre que falta:

a) O + 2 = 5 b) O + 3 = 1 c) O – 4 = 6 d) O – 4 = –1

10. Si Clara té x anys i sabem que encara no ha complit els 5, indica qui de les següents persones pot ser la mare de Clara:

Persona	***Edat en anys***
Júlia	$3x – 9$
Maria	$x^2 – 17$
Frederica	$3x + 5 + 7x + 6$
Elisa	$x – 2x + 9$

11. Resol **mentalment** les següents equacions i escriu la solució al teu quadern:

a) $x + 3 = 2$ b) $x – 2 = 3$ c) $x/5 = 1$ d) $x/3 + 2/3 = 4/3$

12. Tria entre les següents equacions totes les que siguen equivalents a l'equació 3x – 6 = x + 9.

a) $x + 10 = 17{,}5$ c) $8 – x = 3x – 5x$ e) $4x = 30$ g) $2x = 9 + 6$ i) $10 – 2{,}5= x$

b) $6x + 2x = 60$ d) $5x – 6 = 3x + 9$ f) $– 6 – 9 = x – 3x$ h) 3x = 15 j) x = 7,5

13. Resol les equacions següents:

a) $2x – 5 = 4x – 7$ d) $x + 9 = 3x – 3$ g) $4x + 2 = 14$ i) $3x –5= 2x– 5$

b) $x – 12 = 7x + 6$ e) $5x – x + 7 = 2x + 15$ h) $3x – 4 = x + 18$ k) $3x –4+x= 8$

c) $x – 1 = x + 5x + 9$ f) $2x – 27 = x$ i) $4x – 6 = x + 9$ l) $3 – 10 = x + 1$

14. Escriu tres equacions equivalents a $2x – 3 = 5$.

15. Escriu tres equacions que tinguen com a solució $x = 7$.

16. Resol les equacions següents: (Suggeriment: il·lustra les equacions mitjançant balances).

a) $x – 5 = 9$ b) $x – 8 = 2$ c) $x – 3 = 4$ d) $x – 9 = 6$

17. Resol al teu quadern les equacions següents:

a) $2x + 4x = 54$ b)$4x – 3x = 16$ c) $5(x – 2) = 70$ d) $–5x – 2x = –49$

18. Resol les equacions següents:

a. $2x + 3 = 5$ b. $4 x – 5 = x + 4$ c. $x/3 = –2$ d. $–2(3x – 4) = 2x + 5$

19. Resol les equacions següents:

a) $4x – 4 = 2x$ b) $2(x + 7) = x$ c) $x/3 + 2 = x$ d) $3(x + 3x) = x + 50$

20. Resol les equacions:

a) $x/2 – 2(x – 3x) = 27$ b) $2x – (2x – 3) + x = 4$ c) 7 = 1 + x/2 d) 4 – x = 2 + x/2

21. Resol:

a) x / 3 = 7; b) 3x = 9; c) x + 4 = 12; d) x – 7 = 1

22. Practica en el teu quadern resolent les següents sèries d'equacions:

Autora: Raquel Caro
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

1ª sèrie

1) $x + 4 = 6$ 2) $x + 6 = 3$ 3) $15 = 11 + x$ 4) $7 = x + 3$ 5) $x + 8 = 4$

6) $x + 6 = 8$ 7) $x + 7 = 3$ 8) $8 + x = 16$ 9) $3 = 7 + x$ 10) $2 = x + 4$

2a sèrie

11) $x - 3 = 6$ 12) $x - 4 = 2$ 13) $4 = x - 1$ 14) $7 - x = 2$ 15) $6 - x = 4$

16) $3 = 9 - x$ 17) $x - 4 = 7$ 18) $x - 2 = 0$ 19) $8 - x = 3$ 20) $9 - x = 5$

3a sèrie

21) $3x = 6$ 22) $4x = 16$ 23) $6x = 18$ 24) $8 = 2x$ 25) $-12 = 3x$

26) $2x = -6$ 27) $4x = 11$ 28) $3x = 6$ 29) $9 = 3x$ 30) $18 = 6x$

4a sèrie

31) $x/5 = 1$ 32) $x/3 = 7$ 33) $x/{-2} = 3$ 34) $x/5 = 2/3$ 35) $x/10 = 3/2$

36) $x/7 = 2$ 37) $x/12 = 3/4$ 38) $x/3 = -2/9$ 39) $x/5 = -2$ 40) $x/7 = 3/14$

5a sèrie

41) $x + 3x = 16$ 42) $4x + 2x = 6$ 43) $6x = 8 + 10$ 44) $3x + 7 = 4$

45) $2x + 7 = 11 + 4x$ 46) $x + 1 = 2x - 5 + 2x$ 47) $3x - 2 + 4x = 3 - 3x + 1$

48) $4x - 3 + x = 3x + 7$ 49) $x + 4 + 4x = 2 - 2x + 5$ 50) $6x + 4 - 2x = 3 + 2x - 7$

6a sèrie

51) $x/3 - 2 = 4$ 52) $3x/5 + 4 = 3$ 53) $x/3 + 2x/3 = 7$ 54) $x/5 + 3x/5 = 9$

55) $x/2 + x/2 + 3 = 5$ 56) $3x/7 + 2x/7 + 3 = 6$ 57) $x + x/5 = 7$ 58) $x/2 + 5x/2 + 3 = 5$

59) $5 + x/7 = 21$ 60) $3 + x/3 = 9$

7a sèrie

61) $3 + 4(2 - x) = 9 - 2x$ 62) $5 - 2(x + 2) = x - 5$

63) $13 + 3(2x + 5) = 2(x + 3) - 1$ 64) $7 - 2(3x - 5) = 13 - 2(4x - 7)$

65) $5x - 3(2x - 4) = 36 - 3(4x + 6)$ 66) $2(3x - 5) - (2x + 1) = 17 - 3x$

67) $2(x + 4) + 3x = -34 - 3(5x + 6)$ 68) $5 - 2(7 - 2x) = x - 6$

69) $3x - 4(x - 1) = 8 - 5x$ 70) $5x - (2x + 3) = 2x - 5$

8a sèrie

71) $x/3 + x/6 = 12$ 72) $x/6 + x/3 + x/2 = 5$ 73) $(x - 3)/5 = 1$ 74) $x/2 - 3 = 4$

75) $(2x + 9)/3 = 7$ 76) $(2x + 9)/3 = x$ 77) $(x - 3)/5 = x$ 78) $5 + x/4 = 6$

79) $4x/3 + 5x/6 = x/3 + 2$ 80) $2x/3 + 7x/2 + 5x = 8 + x/6$

Problemes

23. Si un repartidor de comandes ha deixat els 2/5 dels paquets que portava a la primera casa, i encara li queden 100 kg per repartir, quants quilos tenia en un principi?

24. Resol mentalment els problemes següents:

a) Quants cromos tinc si el doble de què posseïsc és 20?

b) Quantes boletes tinc si en donar-me 7 tindré 37?

c) Quants discos tinc si en regalar 5 em queda una dotzena?

d) Manuel, d'ací a 6 anys tindrà 18. Quants anys té ara?

25. En una granja hi ha 70 animals entre gallines i conills, i entre els dos, sumen 180 potes. Quantes gallines hi ha a la granja?

26. Troba el nombre tal que el seu doble més tres siga igual que el seu triple menys dos.

27. Repartim 150 € entre tres persones de manera que la primera rep el doble que la segona i aquesta el triple que la tercera. Quant li correspon a cada una?

28. L'angle major d'un triangle mesura el doble que el menor i aquest 20 graus menys que el mitjà. Quant mesura cada un dels angles del triangle? (Recorda que els tres angles d'un triangle sumen 180 graus)

29. Si al quíntuple d'un nombre li restes tres obtens 27. Quin és el nombre?

30. Un nombre i el seu següent sumen 87. Quins són aqueixos nombres?

31. Un bolígraf costa el triple que un llapis. He comprat cinc llapis i quatre bolígrafs i m'han costat 2,40€. Quant costa un llapis? I un bolígraf?

32. Al meu portamonedes porte deu monedes, unes de 50 cèntims i altres de 20 cèntims. Si tinc 2,90€ en total, Quantes monedes de cada tipus tinc?

33. El perímetre d'un rectangle és de 120 metres i l'altura és 25 centímetres més llarga que la base. Quant mesuren la base i l'altura del rectangle?

34. Laura diu que si al triple de l'edat que té li restes la meitat, el resultat és 30. Quina edat té Laura?

35. Un fill té 12 anys i son pare 35. Quants anys deuen de passar perquè l'edat del pare siga el doble que la del fill?

36. Calcula la longitud del costat d'un triangle equilàter sabent que el seu perímetre és de 18 cm.

37. Calcula la longitud dels costats d'un triangle isòsceles sabent que el perímetre és 18 m i cada costat igual mesura 3 cm més que el costat desigual.

38. Si a la tercera part d'un nombre li sumes dos, obtens el mateix resultat que si al nombre li sumes un i divideixes entre dos.

39. El perímetre d'un triangle isòsceles mesura 30 centímetres. El costat desigual mesura la meitat d'un dels seus costats iguals. Quant mesura cada costat?

40. Hem comprat 12 articles entre taules i cadires. Quantes hem comprat de cada si cada taula costa 130 € i cada cadira 60 € i en total ens hi ha costat 750 €?

41. Quadrats màgics: En el quadro Melancolia del famós pintor alemany Albert Dürer (1471-1528) apareix aquest quadrat màgic en què totes les files, columnes i diagonals sumen el mateix, i a més aqueix mateix resultat s'obté sumant les quatre caselles centrals. A més, les dues caselles del centre de la línia inferior indiquen l'any en què aquest quadrat màgic va ser resolt, 1514. Confecciona un quadrat màgic de 3 x 3 caselles, col·locant els dígits de l'1 al 9 de manera que totes les files, totes les columnes, i totes les diagonals sumen el mateix.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

42. DIOFANT: Diofant va ser un famós matemàtic grec del segle III d. C. A l'epitafi de la seua tomba escrigué:

- Caminant! Ací jauen les restes de Diofant. Els nombres poden mostrar oh meravella! La duració de la seua vida, la sisena part de la qual constituí la bella infància.
- Havia transcorregut a més una dotzena part de la seua vida quan es cobrí de borrissol la seua barba.
- A partir d'ací, la setena part de la seua existència transcorregué en un matrimoni estèril.
- Passà, a més un quinquenni i llavors li féu feliç el naixement de primogènit.
- Aquest entregà el seu cos i la seua bella existència a la terra havent viscut la meitat del que son pare arribà a viure.
- Per la seua banda, Diofant descendí a la sepultura amb profunda pena havent sobreviscut quatre anys al seu fill.

Dis-me, caminant, quants anys visqué Diofant.

a) Escriu en llenguatge algebraic l'epitafi de la tomba de Diofant

b) Resol l'equació. Comprova que Diofant visqué 84 anys.

Equacions de segon grau

43. Resol les següents equacions de 2n grau

a) $x^2 + 5x - 6 = 0$ b) $7x^2 + 12x = 0$ c) $3x^2 + 75 = 0$

d) $x^2 - 2x + 7 = 0$ e) $6x^2 - 5x - 7 = 0$ f) $x^2 - 9 = 0$

Sistemes lineals

44. Resol els següents sistemes pel mètode de substitució:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 6x - 4y = -8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 9x - 6y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

Autora: Raquel Caro
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

AUTOAVALUACIÓ

1. Els coeficients de l'expressió algebraica 8,3x – 2,5 + *y*, són:

a) 8,3, 2,5 i 1 b) +8,3, –2,5 i +1 c) + 8,3 i – 2,5

2. El valor numèric de l'expressió algebraica 4 a + 3 b, quan *a* = 5 i *b* = – 2, és:

a) 14 b) –14 c) 26

3. La solució de l'equació 3,4 + 5,2*x* – 8,1*x* = 9,4 + 7,3*x* és:

a) –10/17 b) +6/10,2 c) – 10/1,7

4. L'equació $x^2 = 4$ té de solucions:

a) 2 b) –2 c) 2 y –2

5. La suma de les edats de dues persones és de 50 anys i la seua diferència, 8 anys. Quina de les següents equacions ens permet calcular les seues edats?

a) $x + x + 8 = 50$ b) $x - 8 = 50$ c) $50 + x = 8 - x$

6. El perímetre d'un rectangle és 70 cm. Si la base és el triple de l'altura menys 5 cm, les dimensions del rectangle són:

a) 30 i 11 b) 20 i 9 c) 25 i 10

7. Tres nombres sumen 142. El mitjà és el doble del menor, i el major és triple del menor menys 8. Quina d'aquestes equacions ens permet trobar els nombres?

a) $2x + x + 3x = 142$ b) $x + 3x + 2x = 142 + 8$ c) $x + 2x + 3x = 142 - 8$

8. Tenim 20 monedes de 2 € i 1 €. Si en total tenim 30 €, de cada classe de monedes, tenim:

a) 9 i 12 b) 10 i 10 c) 12 i 6

9. Tres persones es reparteixen una quantitat de diners: la primera es queda amb 250 € més que la segona i la tercera es porta tant com la primera i la segona juntes menys 100 €. Si la quantitat a repartir és 2000 €, el resultat del repartiment és, respectivament:

a) 950 €, 400 € i 650 € b) 450 €, 650 € i 950 €

10. A quina distància dels seus respectius punts d'eixida s'encreuaran dos cotxes que ixen en sentit contrari des de dues ciutats que disten 540 km, si el primer va a 100 km/h i el segon a 80 km/h?

a) 340 km i 200 km b) 300 km i 240 km c) 420 km i 120 km

Autora: Raquel Caro
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

2n ESO

Capítol 10: Taules i gràfiques

El pla cartesià. Coordenades.

www.apuntesmareaverde.org.es

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega

Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Índex

Resum

L'estudi de les relacions entre dues magnituds i la seua representació mitjançant **taules i gràfiques** és de gran utilitat per a descriure, interpretar, predir i explicar fenòmens naturals i quotidians que es relacionen de manera funcional.

Moltes vegades necessitarem que les dades arreplegades en una taula siguen representades gràficament i utilitzarem el **sistema de referència cartesià**.

El sistema de referència cartesià s'anomena així en honor al filòsof, científic i matemàtic francès ***René Descartes*** que visqué entre els anys 1596 i 1650. *Descartes* volgué fonamentar el seu pensament filosòfic en la necessitat de prendre un «punt *de partida*» sobre el qual edificar tot el coneixement. En Geometria, *Descartes* també començà prenent un "*punt d'origen* " per a poder representar la geometria plana.


René Descartes

En aquest tema aprendrem a utilitzar el llenguatge **gràfic** per a interpretar i descriure situacions del món que ens rodeja. També estudiarem les **funcions** entre dues magnituds variables, en les que una té una relació de dependència de l'altra. *Descartes, Newton* i *Leibniz,* ja establiren la idea de funció com a dependència entre dues quantitats variables. Encara que la seua definició i comprensió va ser posterior, a partir de *Fourier* , arribant al segle XX.

Així, els continguts que tractarem ens van a permetre treballar amb les distintes formes de representar algunes situacions funcionals: numèrica, gràfica, verbal o a través d'una expressió algebraica (com les que acabem d'estudiar al capítol anterior) i les distintes formes de traduir una expressió d'un a un altre llenguatge.

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

1. EL PLA CARTESIÀ. COORDENADES

1.1. Sistema de referència cartesià

Ja saps que:

Constantment ens trobem amb situacions en què hem d'indicar la localització d'objectes o llocs respecte d'altres coneguts i, de vegades, les seues posicions en un pla o mapa. Per a entendre'ns és molt important que tinguem una referència comuna.

Si vols indicar a uns amics que no coneixen el teu barri, on es troba una botiga determinada o l'Institut on estudies, bastarà amb que els indiques la seua posició amb les referències que utilitzeu tots.

Exemple 1:

- Lluís viu a la casa marcada en roig al pla adjunt i estudia en un Institut pròxim marcat a verd al pla.

Per a indicar als seus amics francesos on està el seu Institut els dóna les indicacions següents:

"En eixir de ma casa aneu cap a la dreta i creueu dos carrers,
després cap a l'esquerra creueu un carrer i ja heu arribat"

Els referències esquerra i dreta així com la idea de creuar un carrer són comuns a tots nosaltres, a més fixa't que a l'esquema la línia que indica el camí és molt clara

En Matemàtiques, a la majoria de les ocasions, utilitzem sistemes de referència cartesians que també s'utilitzen en Ciències Socials per a treballar els mapes i els plans.

Un **sistema de referència cartesià** consisteix en dues rectes numèriques perpendiculars, anomenades **eixos**. El punt en què es tallen els eixos és l'origen del sistema, també anomenat **origen de coordenades.**

Normalment el representem amb un eix vertical i l'altre horitzontal. A l'eix horitzontal li denominem **eix d'abscisses** o també eix X i al vertical **eix d'ordenades** o eix Y.

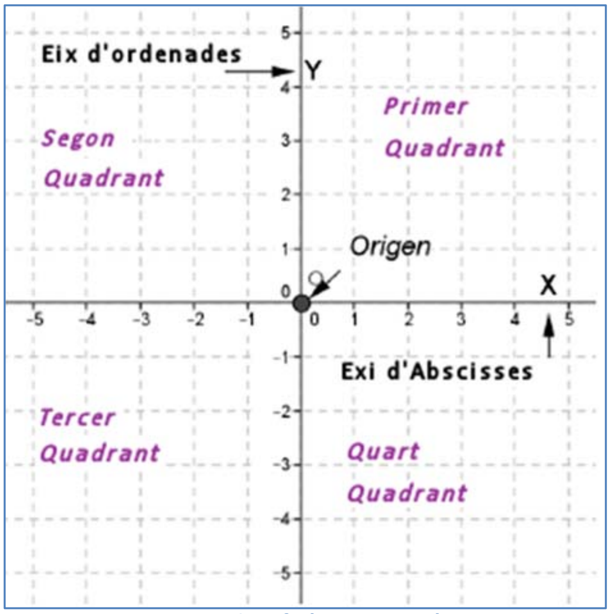
En tallar-se els dos eixos, el pla queda dividit en quatre zones, que es coneixen com a quadrants:

- Primer quadrant: Zona superior dreta

- Segon quadrant: Zona superior esquerra

- Tercer quadrant: Zona inferior esquerra

-Quart quadrant: Zona inferior dreta



Sistema de referència cartesià

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Exemple 2:

- "Si estàs situat sobre la X que apareix al mapa, segueix 3 llegües a l'Est i després 2 llegües al Nord. Allí està soterrat el tresor"

Nota: La llegua és una antiga unitat de longitud que expressa la distància que una persona pot caminar durant una hora. La llegua castellana es fixà originàriament en 5.000 vares castellanes, és a dir, 4,19 km

Les referències Nord, Sud, Aquest i Oest ens defineixen un sistema de referència cartesià on l'Origen és el punt marcat amb la X.

Activitats resoltes

- Marca al pla el punt on es troba el tresor i com s'arribaria a ell des del punt X

Solució:

Activitats proposades

1. Descriu i marca al pla adjunt com arribaries a:

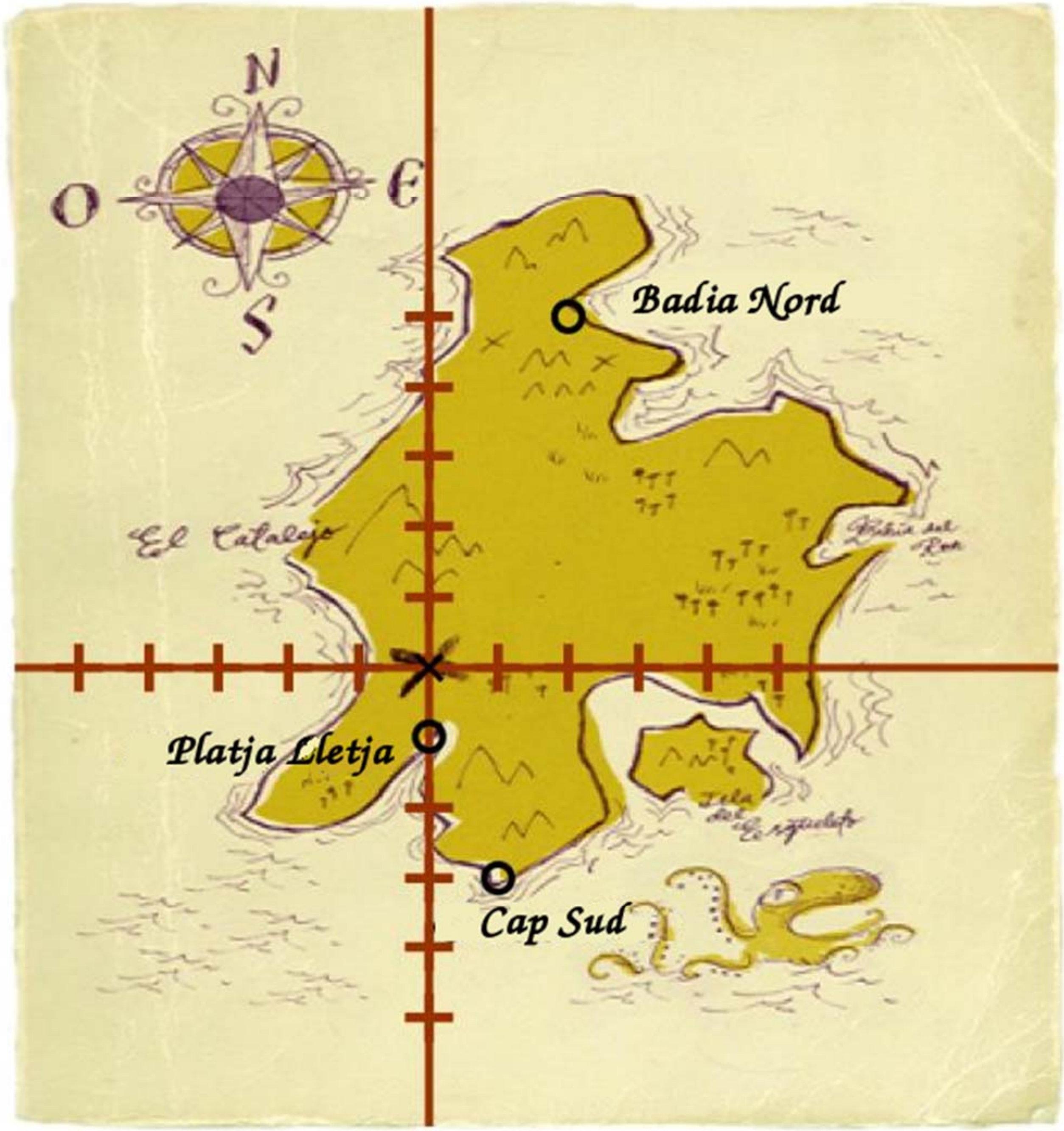
a) Cap Sud

b) Badia Nord

c) Platja Lletja

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Material fotocopiable



Illa del Tresor

Font: Banc d'Imatges i sons de l'INTEF.
Col·leccions: Robert Louis Stevenson: L'illa del tresor. L'illa del tresor: El mapa del tresor, Il·lustrador: Loren

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

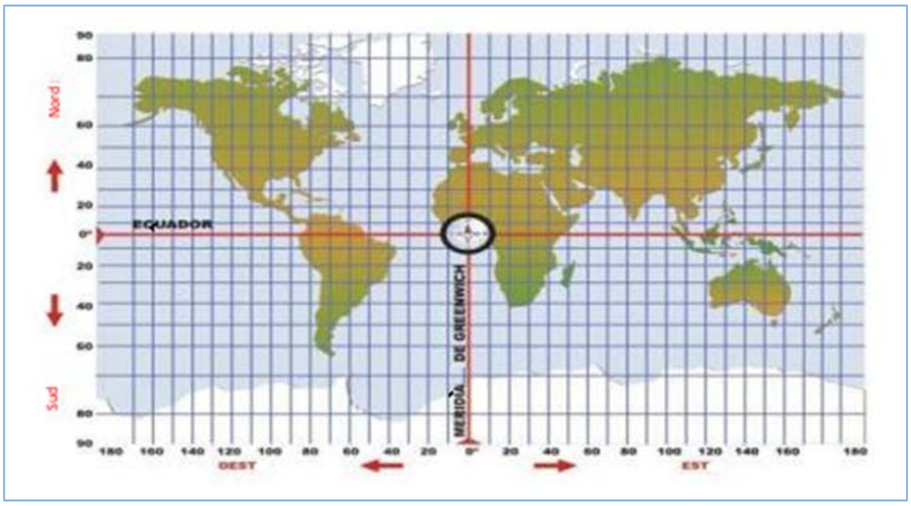
2. Al mapa indica en que quadrant es troben els següents països:

a) Austràlia

b) Espanya

c) Argentina

d) Xina

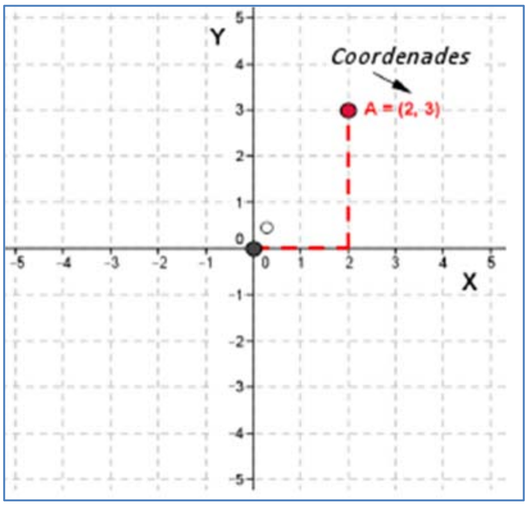


1.2. Coordenades. Representació i identificació de punts

A les activitats anteriors hem descrit com arribaríem a alguns punts a partir d'un sistema de referència. Per a arribar a un punt, partint de l'Origen del sistema de referència, hem recorregut una determinada quantitat cap a la dreta o l'esquerra i després un altre cap amunt o cap avall. Així cada punt quedarà determinat per un parell de nombres als què anomenarem **coordenades del punt**.

Les **coordenades d'un punt A** són un parell ordenat de nombres **(*x* , *y*)**, sent ***x*** la primera coordenada que l'anomenem **abscissa** i ens indica la quantitat a què el dit punt es troba de l'eix vertical. La segona coordenada és la ***y*** , anomenada **ordenada** i ens indica la quantitat a la què el dit punt es troba de l'eix horitzontal.

Quan aquesta quantitat siga cap a l'esquerra o cap avall la indicarem amb un nombre **negatiu** i si és cap amunt o a la dreta la indicarem amb un **positiu**, de la mateixa manera que fèiem en representar els nombres a la recta.



Exemple 3:

- Al gràfic el punt A té coordenades (2, 3).

Exemple 4:

- A l'Activitat resolta 1 el TRESOR es troba al punt de coordenades (3, 2).

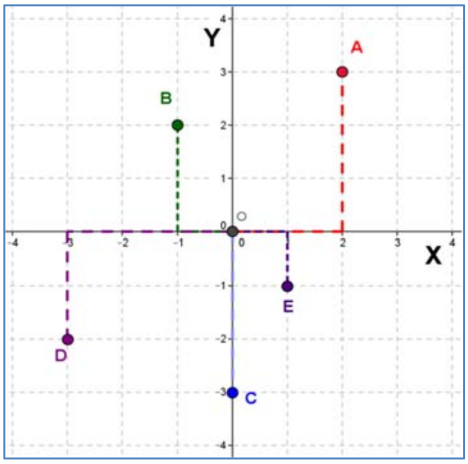
En l'Activitat proposada 2 el Cap Sud es troba al punt de coordenades (1, –3), la Badia Nord al punt (2,5) i Platja Lletja al punt (0, –1).

Nota: El cap Sud es troba al quart quadrant i la seua ordenada és una quantitat negativa perquè des de l'origen ha d'anar cap al Sud, açò és, ha de baixar. I la Platja Lletja es troba a l'eix d'ordenades cap al Sud, per això la seua abscissa és 0 *i la seua ordenada negativa.*

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Activitats resoltes

- Indica quines són les coordenades dels punts marcats al gràfic adjunt:



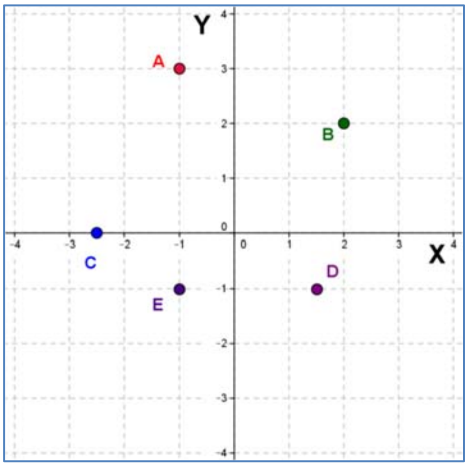
Solució

A = (2, 3); B = (–1, 2); C = (0, –3); D = (–3, –2) i E = (1, –1)

- Dibuixa un sistema de referència cartesià i en ell marca els punts següents:

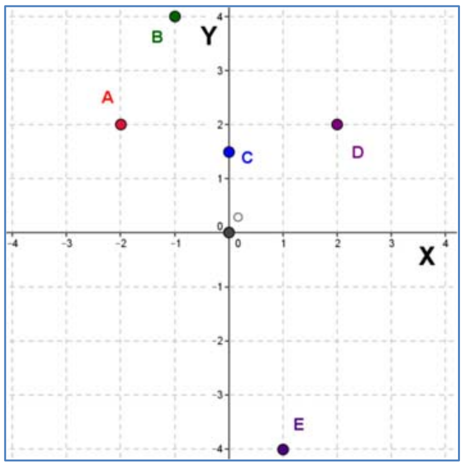
  A = (–1, 3); B = (2, 2); C = (–2'5, 0), D = (1'5, –1) i E = (–1, –1)

Solució



Activitats proposades

3. Indica quines són les coordenades dels punts marcats al gràfic adjunt:



4. Dibuixa un sistema de referencia cartesià i en ell marca els punts següents:

A = (–2, 3); B = (–2, –2); C = (–1'5, 0'5) i D = (0, –1)

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

2. TAULES I GRÀFIQUES

2.1. Relació entre dues magnituds. Taules de valors

Ja saps que:

Moltes vegades tenim una relació entre dues magnituds que ens ve donada per la correspondència entre les quantitats de cada una d'elles. Aquesta relació pot ser de proporcionalitat, com estudiem al capítol 8, també pot estar donada per una expressió verbal o definida per una fórmula o equació de les que acabem d'estudiar al capítol 9.

D'una relació entre dues magnituds podem obtindre un conjunt de dades, relacionades dos a dos, que si les ordenem en una taula ens facilita la seua interpretació.

Una **taula de valors** és una taula en què situem ordenadament les quantitats corresponents de dues magnituds relacionades.

Exemple 5:

- Els 100 metres llisos és una carrera en què s'ha de recórrer 100 metres, lliures de tot obstacle, amb la major rapidesa possible. Es considera, en general, com la competició de carreres de velocitat més important.

  Els millors atletes la realitzen en un temps al voltant de 10 segons de duració corrent cada 10 metres en una mitjana d'1 segon.

Longitud (m)	10	20	50	70	90	100
Temps (s)	1	2	5	7	9	10

longitud (m)	temps (s)
10	1
20	2
50	5
70	7
90	9
100	10

Nota: La taula també es pot posar en sentit vertical

En algunes ocasions la relació entre dues magnituds ens la poden indicar directament mitjançant la seua taula de valors

Exemple 6:

- *"La sopa estava molt calenta, així que la deixí refredar durant cinc minuts, la temperatura de la sopa, segons es refredava, la indica la taula següent"*

Temps (min)	0	1	2	3	4	5
Temperatura (°C)	80	60	50	44	40	39

Exemple 7:

- Les notes de Matemàtiques i Tecnologia, a la segona avaluació, d'un grup de 2n d'E.S.O. van ser

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

les arreplegues a la taula següent:

Matemàtiques	3	5	10	3	5	6	9	7	5	8	3	8	9	1	5	5	4	6	5	9	6	10	6	3	4	1	8	6	9	7
Tecnologia	4	7	7	5	6	8	7	6	4	10	2	8	10	1	5	6	7	10	3	5	8	10	9	3	5	1	6	5	5	8

Altres vegades desconeixem quines són les magnituds amb què estem treballant, tan sols coneixem els valors relacionats, i les solem indicar amb les lletres X i Y

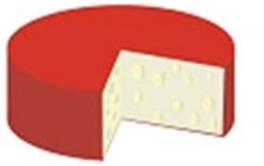
Exemple 8:

- A la taula adjunta tenim la relació entre la magnitud **X** i la magnitud **Y**

X	–2	–1	0	1	2	3
Y	0	3	3	4	–1	–3

Activitats resoltes

- El preu d'un quilo de formatge especial de cabra, de la serra de Madrid, és de 18 € i es ven al pes. Construeix una taula de valors, amb sis quantitats diferents, que relacione el pes del formatge amb el seu preu.



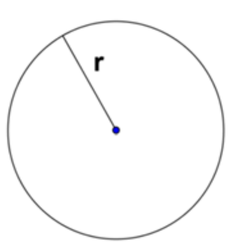
Solució

Com ens demanen sis quantitats diferents triarem algunes que ens pareixen quotidianes fins a un quilo, per exemple, 100 g, 250 g *(quart de quilo),* 500 g *(mig quilo),* 625 g, 750 g *i* 1000 g.

Com el preu i el pes són magnituds proporcionals sabem (capítol 8*) completar la taula.*

Pes (g)	100	250	500	625	750	1000
Preu (€)	1,80	4,50	9	11,25	13,50	18

- Com saps l'àrea d'un cercle es pot calcular mitjançant la fórmula $A = \pi r^2$, on r és el radi del cercle (utilitzem π = 3,14). Construeix una taula de valors des d'un radi d'1 cm a un de 5 cm, de centímetre en centímetre.



Solució

Ens demanen que elaborem una taula per als valors del radi 1, 2, 3, 4 i 5. Per a això substituïm $\boldsymbol{r}$ *a la fórmula per cada un d'eixos valors i obtenim:*

per a $\boldsymbol{r} = 1 \rightarrow \boldsymbol{A} = 3{,}14 \cdot 1^2 = 3{,}14$; *per a* $\boldsymbol{r} = 2 \rightarrow \boldsymbol{A} = 3{,}14 \cdot 2^2 = 12{,}56; \ldots$

Radi (cm)	1	2	3	4	5
Àrea (cm²)	3,14	12,56	28,26	50,24	78,50

Activitats proposades

5. Construeix una taula de valors, amb cinc quantitats diferents, que relacione el consum d'un cotxe i els quilòmetres que recorre sabent que el seu consum mitjà és de 7 litres cada 100 quilòmetres.

6. Construeix una taula de valors, amb cinc quantitats diferents, en que es relacione el costat d'un quadrat i el seu perímetre.

7. Construeix una taula de valors, amb sis quantitats diferents, que represente la situació següent: *"Una companyia de telefonia cobra 6 cèntims d'euro per establiment de telefonada i 3 cèntims per minut parlat"*

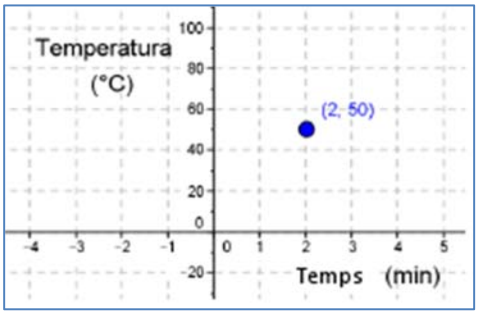
2.2. Representant punts. Les gràfiques

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Cada parell de dades corresponents d'una relació entre dues magnituds els podem **representar** en un sistema cartesià

Exemple 9:

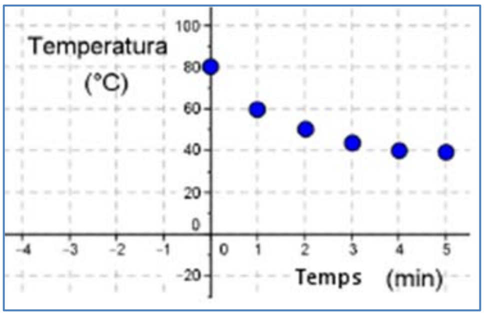
- A la relació de l'exemple de la temperatura de la sopa vèiem que als 2 minuts, la sopa tenia una temperatura de 50 °C.



Aquest parell de nombres són les coordenades d'un punt (2, 50) en un sistema de referència cartesià en què a l'eix d'abscisses representem la magnitud *Temps* mesurada en minuts i a l'eix d'ordenades representem la magnitud *Temperatura* mesurada en graus centígrads.

Si representem en un sistema de referència cartesià tots els parells de dades d'una taula de valors obtenim una **gràfica**.

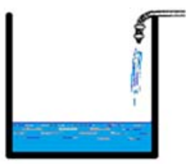
Si representem tots els parells de dades de la taula de valors de l'exemple anterior obtenim la següent gràfica:



De vegades podríem haver donat moltes més dades en la taula de valors i en representar-los ens quedaria quasi una línia. En aquests casos la **gràfica**, unint **els punts**, estaria constituïda per **una línia** que en moltes situacions seria contínua.

Exemple 10:

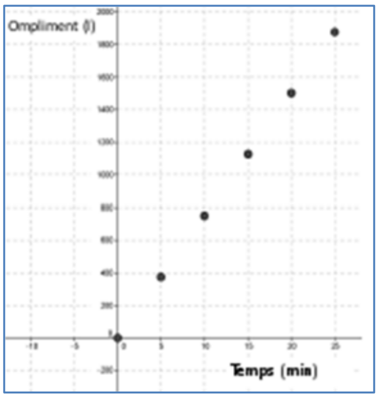
- Si omplim un depòsit d'aigua mitjançant un assortidor que aboca 75 litres d'aigua per minut podem calcular una taula de valors amb la quantitat d'aigua que va tenint el depòsit (ompliment) en relació al temps que ha passat.



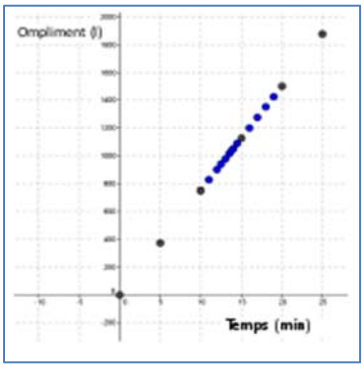
temps (min)	0	5	10	15	20	25
ompliment (l)	0	375	750	1125	1500	1875

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

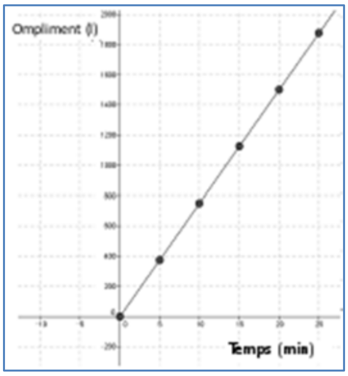
Dibuixem la seua gràfica a partir d'aquesta taula de valors



En aquesta ocasió tindria sentit mesurar la quantitat d'aigua que va tenint el depòsit cada menys temps. Si ho representem podria quedar de la manera següent:



Si representàrem tots els possibles valors ens quedaria la següent gràfica:



Nota: La gràfica comença, al temps 0, en l'instant en què comencem a omplir el depòsit. No hi ha gràfica al tercer quadrant perquè no té sentit un temps negatiu.

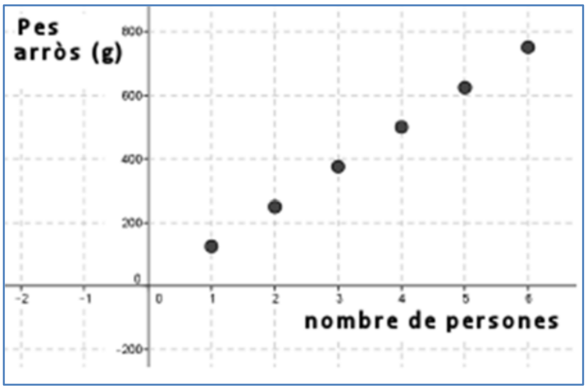
Exemple 11:

- A la situació següent: *"Una paella per a sis persones necessita 750 g d'arròs"* podem construir una taula de valors en què es relacionen el nombre de persones i la quantitat d'arròs que es necessita:

Nombre de persones	1	2	3	4	5	6
Pes arròs (g)	125	250	375	500	625	750

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

i podem construir una gràfica de punts amb aquests valors:

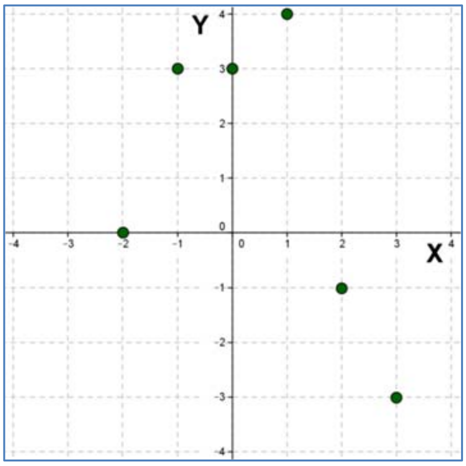


No obstant això no podem calcular valors intermedis (per a dues persones i mitja per exemple), perquè no podem dividir a una persona i, per tant, no té sentit unir els punts de la gràfica.

Exemple 12:

X	−2	−1	0	1	2	3
Y	0	3	3	4	−1	−3

- També podem representar la relació entre les magnituds **X** i **Y** de l'exemple 8 a partir de la seua taula de valors:



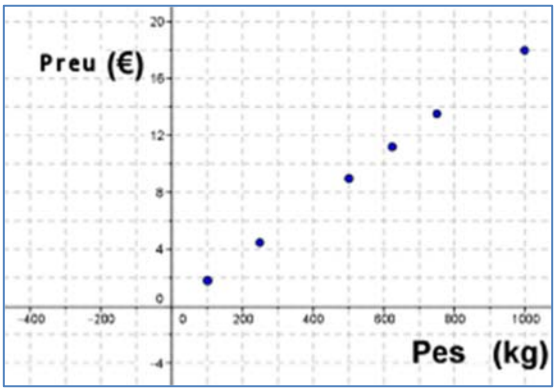
Nota: En aquest cas no podem unir els punts, perquè al no conèixer quines són les magnituds ni quina és la relació entre elles, excepte als punts que vénen determinats per la taula de valors, no podem saber, per exemple, quin valor tindria la magnitud I si la magnitud X valguera 1,5.

Activitats resoltes

- Construeix una gràfica de punts a partir de les dades de la taula de valors de l'Activitat resolta del preu del formatge i, si és possible, uneix els seus punts:

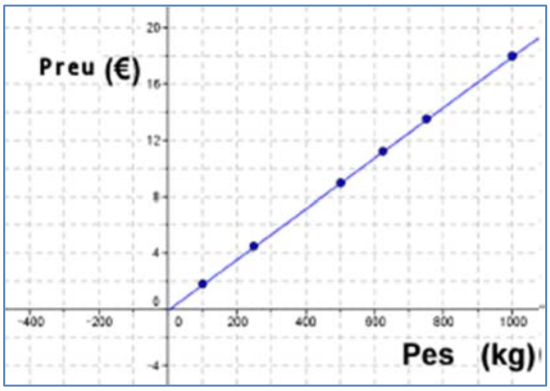
Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Solució



Sí, en aquest cas és possible perquè podem calcular el preu per a qualsevol pes (és una relació proporcional).

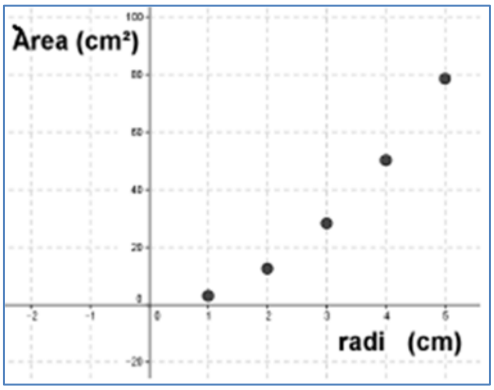
La gràfica quedaria:

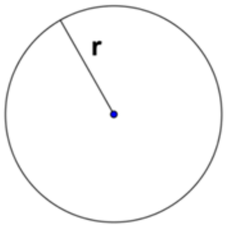


Nota: No hi ha gràfica al tercer quadrant perquè no té sentit un pes negatiu

- Construeix una gràfica a partir de les dades de la taula de valors de l'Activitat resolta de l'àrea del cercle i, si és possible, construeix una gràfica unint els seus punts.

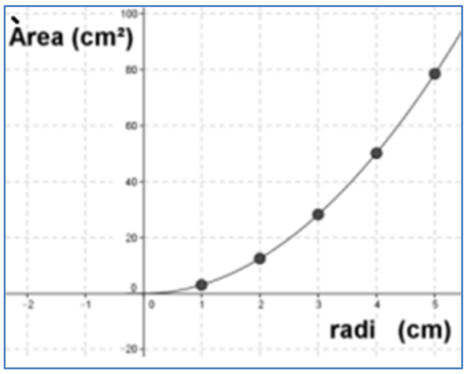
Solució:





Sí, és possible, perquè podem calcular l'àrea per a qualsevol radi.

La gràfica quedaria:



Nota: No hi ha gràfica al tercer quadrant perquè no té sentit un radi negatiu

Activitats proposades

8. Construeix una gràfica a partir de les dades de la taula de valors de l'Activitat proposada sobre el consum d'un cotxe i els quilòmetres que recorre sabent que el seu consum és de 7 litres cada 100 quilòmetres. Si és possible, construeix una gràfica unint els seus punts.

9. Construeix una gràfica a partir de les dades de la taula de valors de l'Activitat proposada sobre la relació entre el costat d'un quadrat i el seu perímetre. Si és possible, construeix una gràfica unint els seus punts.

10. Construeix una gràfica a partir de les dades de la taula de valors de l'Activitat proposada de la *companyia de telefonia*. Si és possible, construeix una gràfica unint els seus punts.

11. En un rebut del gas de la vivenda de Joan ve la següent distribució de gasto:

Consum de gas: ....0,058 € per kw/h
Impost especial:............0,002 € per kw/h
Terme fix:......................4,30 € per mes
Lloguer de comptador.... 2,55 €

La factura era de dos mesos, havia consumit 397 kw/h i el gasto ascendia a 34,97 €. Una altra factura anterior el gasto era de 26,15 € amb un consum de 250 kw/h.

Construeix una gràfica que relacione el consum de gas i el gasto. Té sentit unir els punts?

2.3. Gràfiques a partir de situacions

A la majoria de les situacions que hem estudiat fins ara, hem pogut calcular els parells de valors relacionats, perquè es tractaven de relacions de proporcionalitat o de relacions donades per una fórmula que coneixíem.

Açò no sempre ocorre. De vegades ens trobar-nos amb que ens descriuen una situació en què ens donen una informació entre dues magnituds sense aportar-nos a penes quantitats numèriques.

Moltes vegades **una situació quotidiana o relacionada amb fenòmens naturals descrita verbalment** es **pot representar mitjançant una gràfica** de manera directa.

Exemple 13:

- *Xavier ha d'anar a comprar a una botiga un poc allunyada de sa casa, com no té pressa decideix anar fent un passeig. Just quan arriba a la botiga se n adona de que se li ha oblidat la cartera i no té diners per a comprar. Corrent torna a sa casa a per la cartera.*

A partir d'aquest enunciat podem elaborar una gràfica com aquesta:

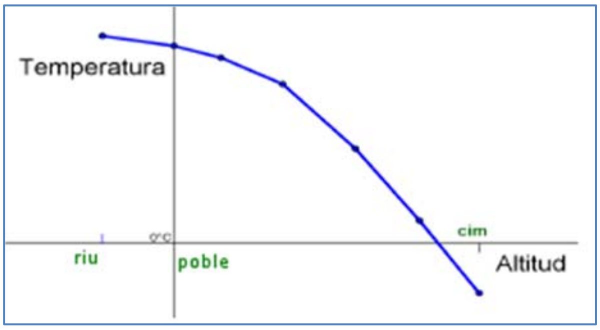
Nota: la distància entre la casa de Xavier i la botiga no la coneixem, però sabem que a la volta ha tardat menys temps que a l'anada.

Exemple 14:

- *La temperatura en una muntanya va descendint segons guanyem en altitud. Al cim arribem a temperatures sota zero.*

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Podem representar una situació en què mesurem la temperatura segons pugem des d'un poble al cim d'una muntanya en una gràfica com la següent:

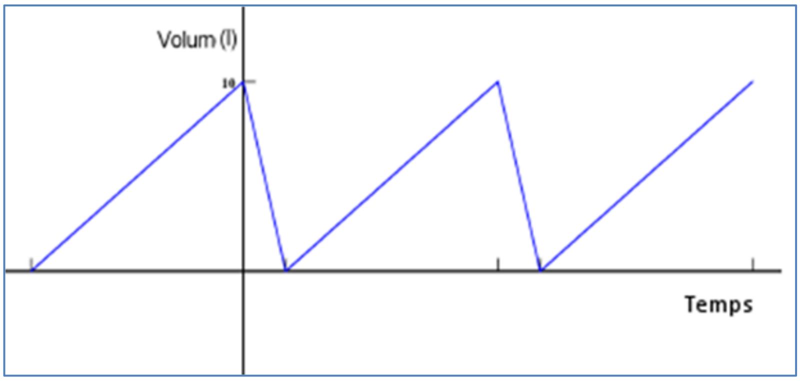


Al sistema de referència cartesià que hem establit, l'origen està al poble i és per això pel que el riu té abscissa negativa, perquè està més davall. Al cim la temperatura és negativa i per això la seua ordenada és negativa.

La temperatura descendeix. La seua gràfica és **decreixent**.

Exemple 15:

- *En un establiment comercial, el depòsit d'aigua dels serveis públics va omplint-se a poc a poc fins a aconseguir els 10 L d'aigua i, en aqueix moment, es buida regularment. Quan està buit es repeteix el procés. A omplir-se tarda el quíntuple de temps que a buidar-se.*



Podem fer una gràfica que reflectisca la variació de la quantitat d'aigua (volum) del depòsit en funció del temps, a partir d'un moment en què el depòsit està ple.

L'origen del nostre sistema de referència cartesià aquesta en un moment amb el depòsit ple, el temps negatiu significa que és anterior a aqueix moment.

En buidar-se el depòsit es té una gràfica **decreixent**. Quan està buit, es té un **mínim**. En omplir-se, la gràfica és **creixent**, i quan està totalment ple, es té un *màxim*.

Els punts de tall amb els eixos són: Amb l'eix d'ordenades al punt (0, 10), amb l'eix d'abscisses quan el depòsit està buit.

Les **gràfiques** ens donen una visió més clara de la situació que estem estudiant, a més d'elles podem obtindre una **taula de valors** i així fer una **interpretació** més precisa.

Exemple 16:

- A la situació anterior si considerem que tarda un minut a buidar-se el depòsit, tardarà cinc minuts a omplir-se i podem obtindre la següent taula de valors:

Temps (min)	–5	0	1	6	7	12
Volum (l)	0	10	0	10	0	10

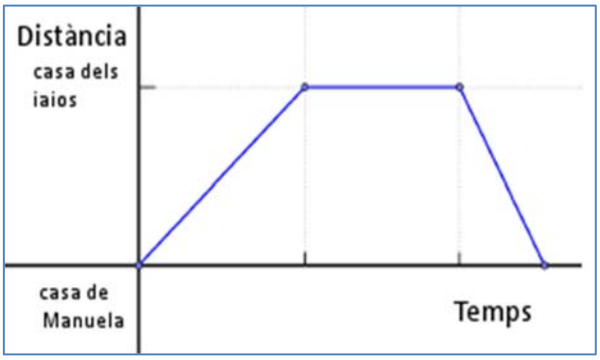
Nota: el valor negatiu del temps vol dir que el depòsit començà a omplir-se amb anterioritat a la situació inicial (origen) en el que el depòsit està ple.

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Activitats resoltes

- Manuela va algunes vesprades a casa dels seus iaios on passa una bona estona amb ells. Després torna ràpidament a sa casa per a fer els deures abans de sopar. Construeix una gràfica d'aquesta situació

Solució:



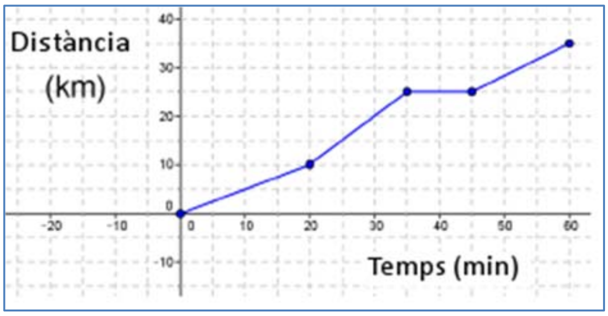
Observa que a la gràfica es té un primer tram que és creixent, el següent és constant i l'últim és decreixent. La gràfica de la funció és contínua (en cap moment és necessari alçar el llapis per dibuixar-la).

- "Aquest estiu Joan va anar amb bicicleta a casa dels seus iaios que vivien en un poble pròxim, a 35 quilòmetres del seu. Als 20 minuts havia recorregut 10 km; en aqueix moment començà a anar més de pressa i tardà 15 minuts a recórrer els següents 15 km. Parà a descansar durant 10 minuts i, després, emprengué la marxa recorrent els últims 10 km en 15 minuts."

Construeix una gràfica d'aquesta situació i, a partir d'ella, confecciona una taula de valors.

Solució

La gràfica seria:



I la taula de valors:

Temps (min)	0	20	35	45	60
Distància (km)	0	10	25	25	35

La gràfica és contínua i sempre creixent.

Activitats proposades

12. *La família de Pere va anar un dia d'excursió al camp amb cotxe; després de passar el dia tornaren i a meitat de camí pararen durant una bona estona a posar gasolina i prendre uns refrescos. Al final arribaren a casa. Construeix una gràfica d'aquesta situació.*

13. *"Maria isqué a donar un passeig, primer va anar a casa de la seua amiga Llúcia, que viu a 200 metres, i tardà 5 minuts a arribar. L'hagué d'esperar altres 5 minuts al seu portal i, després, tardaren 10 minuts a arribar al parc, que estava a 500 m, on berenaren i xarraren durant mitja hora. Finalment Maria tornà a casa ràpidament, perquè li havia cridat sa mare. Només tardà 7 minuts."*

Construeix una gràfica d'aquesta situació i, a partir d'ella, confecciona una taula de valors.

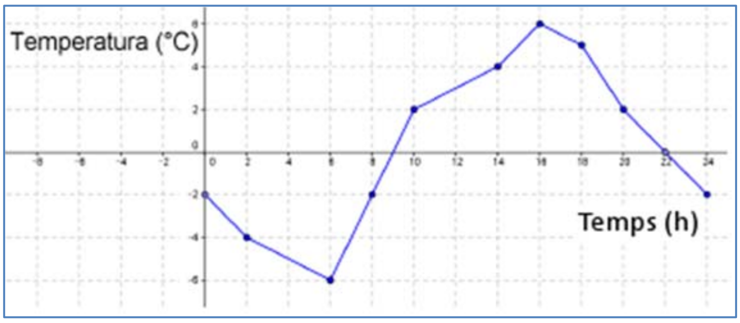
2. 4. Interpretació i lectura de gràfiques

Les gràfiques resumixen de manera eficaç la informació sobre la relació entre dues magnituds, per això se solen emprar molt, tant en situacions de caràcter científic o social, com a la informació que s'empra als mitjans de comunicació. La seua lectura i interpretació són de molta utilitat.

De les coordenades dels punts d'una gràfica podem extraure dades molt interessants per a la comprensió de la situació que ens mostra la gràfica (l'ordenada més alta o més baixa, com es relacionen les magnituds,…)

Exemple 17:

- El gràfic adjunt mostra les temperatures al llarg d'un dia d'hivern al pic de Penyalara.



A partir d'aquesta gràfica podem obtindre més informació sobre la situació plantejada.
Així, per exemple podem veure que la temperatura mínima que s'aconseguí aqueix dia va ser de –6 °C a les 6 h del matí, ens ho indica el punt de coordenades (6, –6) que té l'ordenada menor de tots els punts de la gràfica. És un mínim.

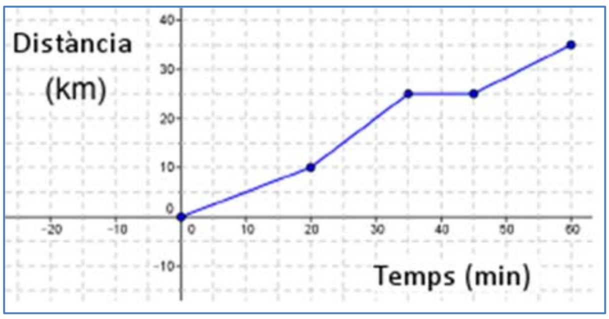
- De la mateixa manera podem veure que la temperatura més alta va ser de 6°C, que s'obtingué a les 16 h. El punt de coordenades (16, 6) així ens ho indica. És un màxim. Podem també afirmar que la temperatura va anar pujant des de les 6 h fins a les 16 h perquè les ordenades dels punts l'abscissa de les quals està entre aqueixes hores van creixent. És creixent.

Així mateix el punt (10, 2) ens indica que a les 10 h del matí feia una temperatura de 2 °C, temperatura que s'aconseguí també a les 20 h, encara que aquesta vegada baixant.
El fet de que de 10 h a 14 h pujara la temperatura menys que en hores anteriors (gràfica menys inclinada) pogué ser degut a causes climatològiques concretes, com que es posara la boira, i després, de 14 a 16 h, hi ha una pujada ràpida (pogué eixir el sol). La gràfica ens indica que una cosa així pogué passar.
A partir de les 16 hores la temperatura baixa, la gràfica és **decreixent**.

La temperatura és de 0 ºC cap a les 9 hores i a les 22 hores. (0, 9) i (0, 22). Són els punts en què la gràfica talla a l'eix d'abscisses. A l'eix d'ordenades el talla en (–2, 0).

Exemple 18:

- L'activitat resolta que ens descriu el recorregut de Joan de camí a casa dels seus iaios. La gràfica que dibuixem i resumeix el viatge era la que figura a la dreta.

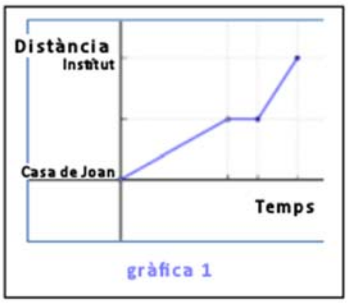


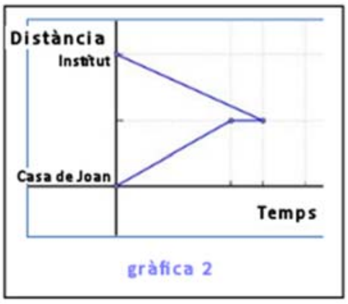
viatge de Joan a casa dels seus iaios

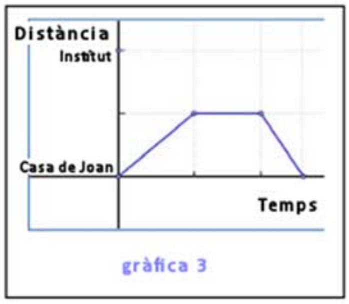
De la gràfica, a més del que ja coneixíem i que ens ajude a dibuixar-la, podem extraure, “d'una simple ullada” més informació.

Per exemple, si mirem a la gràfica podem observar que en el quilòmetre 20 portava 30 minuts pedalejant, o que als 10 minuts havia recorregut 5 quilòmetres, que el tram més ràpid va ser dels 20 als 35 minuts (es veu

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay



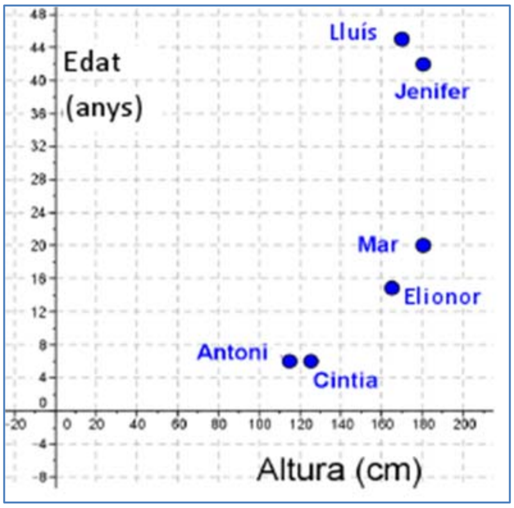




major inclinació), o que al minut 40 estava parat.
És una gràfica contínua, perquè podem dibuixar-la sense alçar el llapis.

Exemple 19:

- La gràfica següent ens indica la relació entre l'edat i l'estatura dels membres d'una família.



Si observem els punts d'aquesta gràfica veurem que Jenifer i Lluís són els punts (180, 43) i (170, 45) i representen als pares que tenen 43 i 45 anys i mesuren 180 i 170 cm respectivament.

Els xicotets Antoni i Cíntia són bessons de 6 anys i mesuren 115 i 125 centímetres. Mar té 20 anys i mesura 180 cm, representada pel punt (180, 20) i, finalment Elionor mesura 165 i té 15 anys.

De la gràfica també podem deduir que Mar i sa mare, Jenifer, són els més alts de la família, que Lluís és el de més edat i que Cíntia mesura 10 centímetres més que el seu germà bessó.

Activitats resoltes

- Observant les gràfiques de davall, determina quin és la que millor s'ajusta a la situació següent:

"Antoni va a l'Institut cada matí des de sa casa, un dia es troba amb un amic i es queda xarrant una estoneta. Com se l'ha fet tard ix corrent per a arribar a temps a la primera classe"

Solució

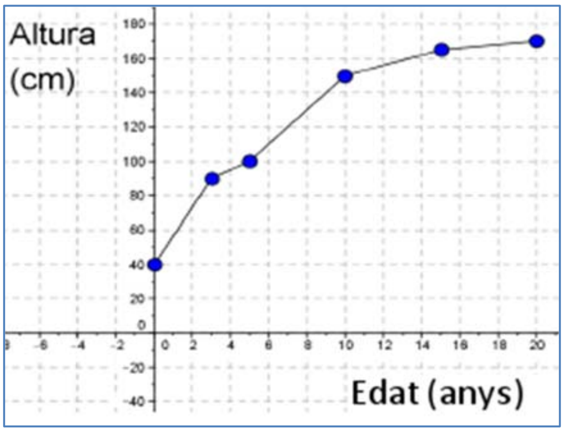
La gràfica 1 és **la que més s'ajusta** perquè: el segment horitzontal indica que durant un temps xicotet no avançà en distància, açò és que estava parat, i la inclinació del tercer segment és major que la del primer, la qual cosa indica que en menys temps recorregué més distància, açò és, que va ser més ràpid.

La gràfica 2 **no pot ser**, perquè Joan no pot estar en dos llocs distints, al mateix temps, en el mateix moment. Aquesta gràfica indica, per exemple, que en l'instant inicial (temps 0) Joan està en sa casa i a l'institut al mateix temps.

La gràfica 3 **no pot ser**, ja que la gràfica ens indica que Joan torna a sa casa després de xarrar amb el seu amic i no va a l'institut.

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

- La gràfica següent ens mostra la variació de l'estatura de Laura amb relació a la seua edat.



Observant la gràfica contesta a les preguntes següents:

a) A quina edat mesurava 1 metre?

b) Quant mesurava en nàixer?

c) Quant mesurava als 10 anys? I als 20?

d) En quin període cresqué menys?

Solució:

a) Mirant a la gràfica observem que el punt (5, 100) és el que ens demanen perquè l'ordenada és 100 (1 metre), per tant Laura tenia 5 anys.

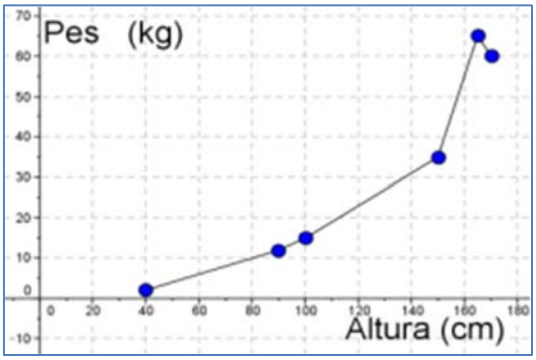
b) El punt que representa el naixement és el (0, 40) per tant mesurà 40 centímetres

c) De la mateixa manera observem que als 10 anys mesurava 155 centímetres i als 20 anys 170.

d) A la gràfica observem que el tram menys inclinat és el que va dels 15 als 20 anys, això vol dir que en aqueix tram Laura cresqué menys.

Activitats proposades

14. La gràfica següent ens mostra la variació del pes de Laura amb relació a la seua estatura al llarg de la seua vida.



Analitza la gràfica, comenta la situació i respon a les preguntes següents:

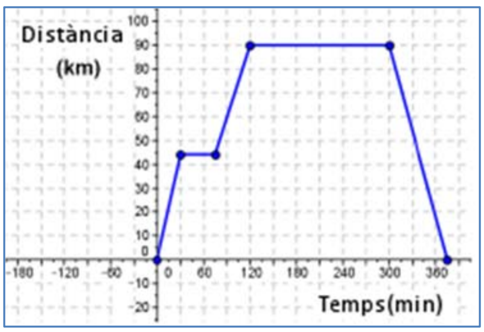
a) Quant pesava quan mesurava un metre? I quan mesurava 150 cm?

b) Quant mesurava quan pesava 55 kg?

c) A quina altura pesava més? Laura s'aprimà en algun moment?

15. La següent gràfica representa una excursió amb autobús d'un grup de 1r d'E.S.O. a Toledo, passant per Aranjuez.

Sabent que Toledo està a 90 km de l'Institut i Aranjuez a 45 km:



a) Quant temps pararen en Aranjuez? i a Toledo?

b) Quant temps tardaren a arribar a Toledo? i a tornar a l'Institut?

c) Si isqueren a les 9 h del matí A quina hora tornaren? A les deu i mitja on es trobaven?

d) Fes una descripció verbal del viatge

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

3. LES FUNCIONS

3.1. La funció com a relació entre dos variables. Variable dependent i variable independent

No és estrany escoltar o llegir a la premsa expressions com: *"el preu està **en funció de** la demanda"*, *"el nombre d'escons obtinguts per un partit polític està **en funció del** nombre de vots obtinguts"*, *"els resultats obtinguts als estudis estan **en funció del** temps dedicat a estudiar",* o com aquesta: *"l'àrea d'un cercle està **en funció del** radi"*.

Aquestes expressions indiquen que el preu d'un objecte, el nombre d'escons, els resultats acadèmics o l'àrea del cercle estan relacionats, respectivament, amb la demanda, el nombre de vots rebuts, el temps dedicat a l'estudi o el radi, de tal forma que la primera magnitud esmentada depèn únicament de la segona.

Una magnitud **Y** està **en funció d'una** altra magnitud **X**, si el valor de la magnitud **Y** depèn de **manera única** del valor que tinga la magnitud **X**.

*Nota: la Reial Acadèmia Espanyola, al Diccionari panhispànic de dubtes, diu que **'en funció'** és una locució preposicional que significa **'segons o depenent'***

Exemple 20:

- La temperatura de l'aigua que està en un casset al foc dependrà de la quantitat de calor que reba, així diem que: *la temperatura de l'aigua **T varia en funció de** la calor rebuda* **Q**, o simplement que **T** està en funció de **Q**.

Quan realitzem un viatge amb cotxe podem observar diverses magnituds; estudiarem la relació entre dos d'elles, per exemple la distància recorreguda i el temps transcorregut des de l'eixida.

Segons siga el nostre viatge i el que fem durant el seu recorregut (anar per autopista o per una carretera secundària, parar una estona, tornar,…) la distància recorreguda segons el temps transcorregut serà d'una manera o una altra, però és clar que *la distància està **en funció del** temps*. En cada instant de temps haurem recorregut una distància determinada.

Com hem vist en alguns exemples i activitats anteriors, per exemple en el cas de Joan que veurà els seus iaios, a l'activitat 20, hi ha un període de temps (10 minuts) en el que es deté a descansar i no avança distància, però el temps no es deté. Així ens trobem amb que a diversos valors de la magnitud temps els corresponen el mateix valor de la magnitud distància (els 25 quilòmetres que havia recorregut abans de parar).

No obstant això, a cada valor de la magnitud temps només li correspon un únic valor de la magnitud

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

distància, açò és evident perquè Joan no pot estar en dos llocs distints al mateix instant de temps.

Quan açò ocorre diem que la relació entre les dues magnituds és una funció**.**

Una **funció** és una relació entre dues magnituds numèriques **X** i **Y**, de tal forma que a cada valor de la primera magnitud **X**, li fa correspondre **un únic** valor de la segona magnitud **Y**.

A més ambdues magnituds tenen valors numèrics i varia una en funció de l'altra (la distància varia segons la variació del temps a l'exemple de Joan). Per a abreviar ens anem a referir a elles com a variables.

A les relacions **funcionals,** a les magnituds relacionades les anomenarem **variables.**

Així mateix, al nostre viatge, la distància depèn del temps transcorregut, així que diem que la distància és la variable dependent i el temps és la variable independent.

Nota: Quan tenim una relació funcional entre dos variables en què una és el temps que transcorre, aquesta, normalment, és la variable independent.

Quan tenim dues magnituds, **X** i **Y**, que estan relacionades de tal forma que **Y** és funció de **X**, a la magnitud **Y** l'anomenem **variable dependent**, i a la magnitud **X,** de la que depèn, l'anomenem **variable independent**.

*Nota: Quan tenim una funció entre dos variables que desconeixem, a les magnituds solem anomenar-les **X** i **Y**, sent **X** la independent i **Y** la dependent.*

Exemple 21:

- *"El preu del kg de peres és de 1,80 €."* Aquesta situació ens defineix una relació entre el preu i el pes, de tal manera que el preu que paguem depèn del pes que comprem. La relació és una funció, el pes i el preu són les variables, el pes és la variable independent i el preu la variable dependent.

Exemple 22:

- *La relació entre dos variables ve donada per la funció* ***y = 2x – 1***.

En aquest cas **Y** està en funció de **X**, perquè per a cada valor **x** de la variable **X** hi ha un únic valor **y** de la variable **Y**, sent la variable **X** la variable independent i la variable **Y** la dependent.

*Nota: Quan tenim una funció entre dos variables que desconeixem, solem anomenar-les **X** i **Y**, i als valors que prenen aquestes variables les denominarem **x** i **y** respectivament. Així quan la magnitud **X** pren el valor **x**, la magnitud **Y** val **y.***

Activitats resoltes

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

- A les següents relacions digues si són o no funcions i, en cas de ser-ho, indica quines són les variables dependents i independents.

a) El consum d'un cotxe i la velocitat a la que circula.
b) El perímetre d'un polígon regular i la longitud del seu costat.
c) El nombre d'habitants dels pobles i la temperatura mitjana a l'estiu.
d) L'altura i el nombre de germans dels estudiants de 1r d'E.S.O.

Solució

a) El consum d'un cotxe sí que està en funció de la velocitat a la que circula. En aquest cas el consum és la variable dependent i la velocitat la variable independent.

b) També ací es dóna una relació funcional, el perímetre és funció del costat. El perímetre és la variable dependent i el costat la independent.

c) En aquest cas no hi ha una relació funcional perquè hi ha pobles grans i xicotets i no tenint a veure amb la temperatura mitjana en estiu que faça en ells.

d) Tampoc hi ha relació funcional en aquest cas, pots comprovar-ho a la teua classe.

Activitats proposades

16. En les següents relacions assenyala si són o no funcions i, en cas de ser-ho, indica quines són les variables dependents i independents.

a) El consum d'un cotxe i la distància recorreguda.
b) La velocitat a què circula un cotxe i l'edat del conductor.
c) El nombre d'habitants d'un barri d'una ciutat, o un poble, i el nombre de col·legis públics que hi ha allí.
d) La temperatura d'un lloc i l'hora del dia.
e) El nombre de costats d'un polígon i el nombre de diagonals que té.

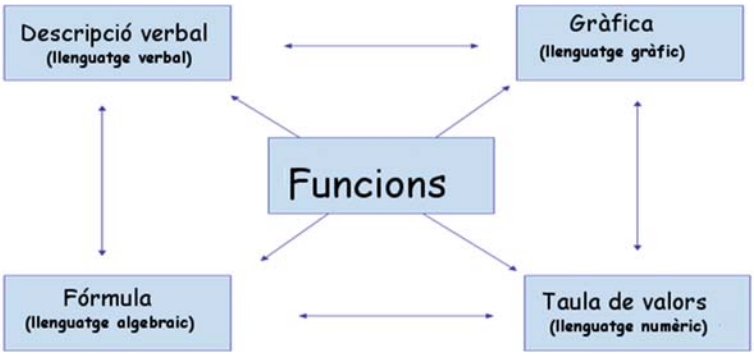
17. Proposa tres exemples, diferents de tots els que has estudiat fins ara, de relacions entre dues magnituds en què una siga funció de l'altra. Indica a més en cada cas quina és la variable dependent i quina la independent.

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

3.2. La funció: taula de valors, gràfica, expressió verbal i expressió algebraica

La gran majoria de les situacions que hem estudiat fins a aquest moment són relacions funcionals en què hi ha dos variables, i una depèn de l'altra de manera única; açò és, són ***funcions.***

A més hem vist que les ***funcions*** es poden representar de diverses maneres; com una ***descripció verbal*** que descriu una situació, com una ***taula de valors*** que ens indica els valors corresponents de la relació, com una ***gràfica*** que ens visualitza la situació i com una ***expressió algebraica*** (fórmula) que ens relaciona les dues magnituds.



Exemple 23:

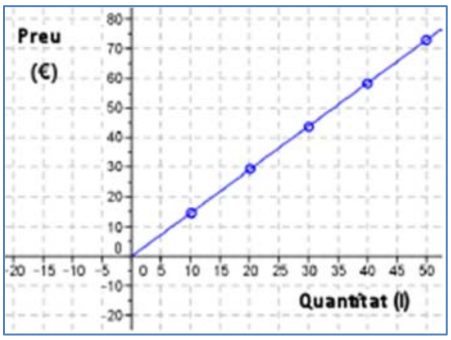
- Si observem el preu de la gasolina en un dia concret en omplir el depòsit d'un cotxe podem estudiar la relació entre el nombre de litres de gasolina i el que paguem.

El preu que paguem és funció de la quantitat de gasolina que posem i pot vindre donada de les maneres següents:

- Descripció verbal: *"El litre de gasolina se situà a la primera setmana d'agost en 1,46 €".*
- Expressió algebraica (fórmula): $p = 1{,}46 \cdot l$ (on p és el preu i l és la quantitat de gasolina)
- Taula de valors:

Quantitat (l)	10	20	30	40	50
Preu (€)	14,60	29,20	43,80	58,40	73,00

- Gràfica:



Exemple 24:

- Quan tenim una funció que relaciona dues magnituds que desconeixem, que les anomenem **X** i **Y**, la podem tindre definida per una fórmula (expressió algebraica).

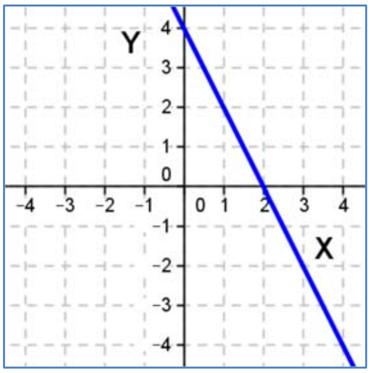
Per exemple $y = 4 - 2 \cdot x$

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

De la que podem elaborar una taula de valors com la següent:

X	0	1	2	3	4
Y	4	2	0	–2	–4

i, a partir d'ella, dibuixar una gràfica:



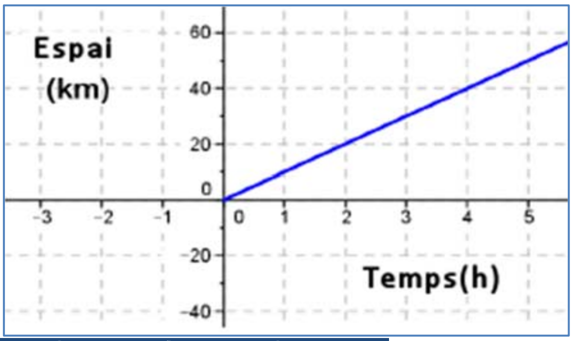
En aquest cas sí que podem unir els punts, perquè mitjançant la seua fórmula per a qualsevol valor ***x*** de la variable **X** podem calcular el valor **y** de la variable **Y**.

Podríem donar, també, una descripció verbal que definisca la relació entre aquestes variables, per exemple: "*A cada nombre li corresponen quatre unitats menys el doble del nombre*"

Nota: Moltes vegades no és possible, al nostre nivell, trobar la fórmula que defineix una funció donada com una taula de valors, la seua descripció verbal o la seua gràfica.

Activitats proposades

18. Expressa de forma gràfica i verbal la funció definida per la següent taula de valors:



Edat (anys)	0	1	5	10	15	20
Altura (m)	0	42	96	123	151	177

19. Donada la funció definida a la gràfica del costat, expressa-la com a taula de valors, mitjançant una descripció verbal i de forma algebraica.

20. Expressa de forma gràfica i mitjançant una taula de valors la funció definida per la fórmula següent:
$l = 2 \cdot \pi \cdot r$

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

3.3. Una funció important. La funció lineal o de proporcionalitat directa

Recorda que:

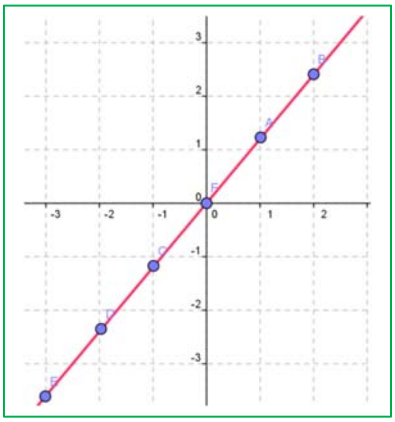
Dues magnituds són **directament proporcionals** quan en multiplicar o dividir a la primera per un nombre, la segona queda multiplicada o dividida pel mateix nombre.

En realitzar el quocient de qualsevol dels valors d'una variable i els corresponents de l'altra, obtenim la **raó de proporcionalitat directa *k***.

Exemple:

- *Representa gràficament la relació de proporcionalitat donada a la taula següent:*

Magnitud A (x)	–3	–2	0	1	2
Magnitud B (y)	–3'6	–2'4	0	1'2	2'4



En calcular la raó de proporcionalitat s'obté:

$$k = \frac{-3'6}{-3} = \frac{-2'4}{-2} = \frac{1'2}{1} = \frac{2'4}{2} = 1'2$$

La relació es defineix així: $y = 1'2x$.

La representació gràfica al pla cartesià de dues **magnituds directament proporcionals** és una **recta** que passa per l'origen de coordenades.

Una **funció lineal** és la que té la fórmula ***y = m ·x*** .

Una funció lineal correspon a una relació de proporcionalitat directa.

Per tant, la relació de proporcionalitat directa és una funció **lineal** de la forma ***y = m ·x*** .

Activitats proposades

21. Maria vol comprar una cinta que val a 0'7 euros el metre. Representa gràficament el que haurà de pagar segons els metres de cinta que compre.

22. Representa gràficament les funcions:

a) $y = 5x$, *b)* $y = 1'5x$, *c)* $y = 0'5x$, *d)* $y = -2x$, *e)* $y = -3'2x$, *f)* $y = -1'2x$

23. Indica a les funcions anteriors quines són creixents i quines són decreixents. Raona la resposta.

24. Joan camina molt de pressa, recorre 5 km a l'hora. Representa gràficament el passeig diari de Joan relacionant temps amb espai recorregut. Escriu la fórmula de la dita funció. És una recta? És una funció lineal?

25. En una urbanització es consumix generalment al dia tres mil litres d'aigua. Representa gràficament el consum d'aigua al llarg d'una setmana. Escriu la fórmula de la dita funció. És una recta? És una funció lineal?

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

3.4. Utilització de *Geogebra* per a la interpretació del pendent d'una funció lineal

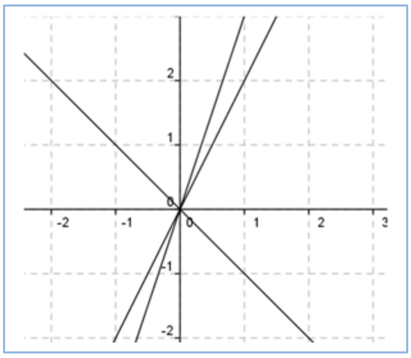
En aquesta activitat es va a utilitzar el programa **Geogebra** per a representar funcions lineals les gràfiques de les quals són rectes.

Es representen rectes amb el mateix pendent per a observar la relació que existeix entre elles i determinar la propietat que les caracteritza.

Activitats resoltes

- *Utilitza Geogebra per a estudiar rectes amb diferents pendents.*

- Obri el programa Geogebra i en **Visualitza** activa **Quadrícula** perquè siga més fàcil analitzar les funcions.



- A la finestra de davall de la pantalla, en **Entrada**, escriu: y = 2*x*. Immediatament apareix dibuixada aqueixa funció a la finestra gràfica.
- Escriu novament en **Entrada** altres rectes amb diferents pendents: *y* = 3*x*, *y* = –*x*...
- Dibuixa totes les funcions lineals que vulgues i respon a les següents preguntes.
  - ➢ Quan el pendent és positiu, què ocorre en créixer el pendent? I en disminuir?
  - ➢ Quan el pendent és negatiu, què ocorre en créixer el pendent en valor absolut? I en disminuir?
- Totes les funcions de la forma *y* = *mx* són rectes. Són funcions lineals. Totes elles passen per l'origen (0, 0).
  - ➢ Quan l'abscissa val 1, quant val l'ordenada?

Activitats proposades

26. Utilitza *Geogebra* per a novament representar gràficament les funcions:

a) y = 5*x*, *b) y* = 1’5*x*, *c) y* = 0’5*x*, *d) y* = –2*x*, *e) y* = –3’2*x*, *f) y* = –1’2*x*

27. Indica a les funcions anteriors les seues característiques: a) quines són creixents i quines són decreixents. b) Són contínues? c) Busca els punts de tall amb els eixos de coordenades. d) Hi ha màxims o mínims? Raona les respostes.

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

CURIOSITATS. REVISTA

Descartes i el sistema de referència cartesià

El sistema de referència cartesià s'anomena així en honor al filòsof, científic i matemàtic francés ***René Descartes*** *que visqué entre els anys 1596 i 1650. Descartes volgué fonamentar el seu pensament filosòfic en la necessitat de prendre un «punt de partida» sobre el qual edificar tot el coneixement. En Geometria, Descartes també començà prenent un "punt d'origen" per a poder representar la geometria plana.*

Principi del colomar o Principi de Dirichlet

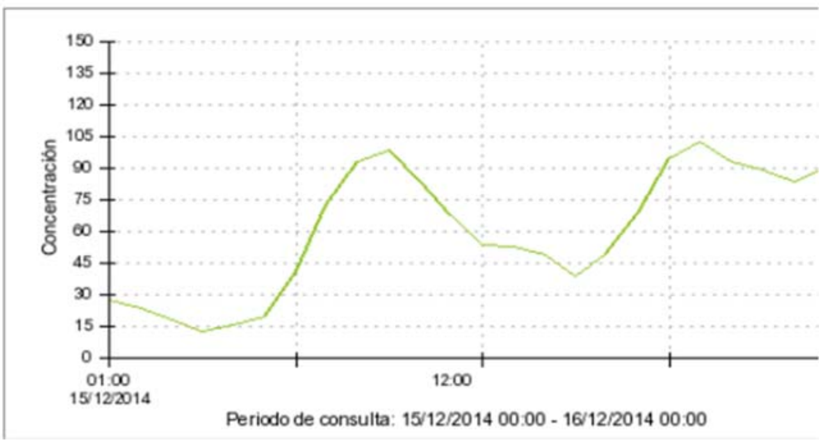
"Si una bandada de 21 coloms es fica per 20 forats d'un colomer, és segur que al menys dos coloms s'han ficat al mateix forat"

Estàs d'acord?

Aquest principi tan senzill permet resoldre altres problemes, com per exemple:

Es pot assegurar que ara mateix hi ha a Madrid al menys 20 persones amb el mateix nombre de pèls al cap?

Per raonar la resposta considera que ningú té més de 200 mil pèls al cap i que a Madrid hi ha uns 4 milions de persones.

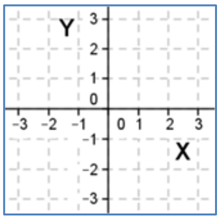
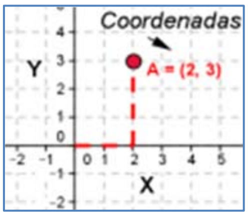
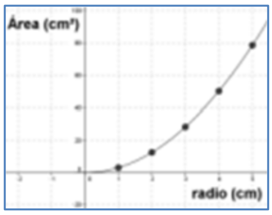
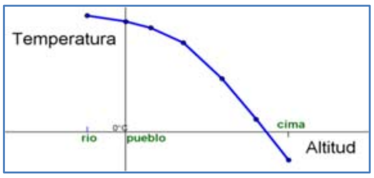


La gràfica indica l'evolució del NO2 a l'estació de qualitat de l'aire de Quatre Camins de Madrid al llarg d'un dia, el 16 de desembre de 2014. Observa com puja a les 9 del matí a la entrada del treball i torna a pujar a l'eixida, al voltant de les 6 de la vesprada.

A la pàgina de la Comunitat de Madrid pots conèixer com està la qualitat de l'aire en cada moment, i saber quins són els valors llindars que no es deuríem sobrepassar.

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

RESUM

<table>
<tr><td>Sistema de referència cartesià</td><td>Dues rectes numèriques perpendiculars, anomenades Eixos, que es tallen en un punt anomenat Origen. L'eix horitzontal es denomina eix d'abscisses, i a l'eix vertical, eix d'ordenades.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Coordenades</td><td>Es un parell ordenat de nombres (x, y), que ens indica on es troba el punt respecte al sistema de referència cartesià que estem utilitzant.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Taula de valors</td><td>Taula a la que situem ordenadament les quantitats corresponents de dues magnituds relacionades.</td><td><table><tr><td>Temps (min)</td><td>0</td><td>30</td><td>80</td><td>100</td></tr><tr><td>Distànci a (km)</td><td>0</td><td>10</td><td>20</td><td>30</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Gràfica</td><td>Si representem en un sistema de referència cartesià tots els parells de dades d'una taula de valors obtenim una gràfica.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Gràfiques a partir de situacions</td><td>Una situació quotidiana o relacionada amb fenòmens naturals descrita verbalment es pot representar mitjançant una gràfica</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Funció</td><td>Una magnitud Y està en funció d'una altra magnitud X, si el valor de Y depèn de manera única del valor que tinga X.</td><td>La temperatura de l'aigua T varia en funció de la calor rebuda Q</td></tr>
<tr><td>Variables</td><td>A les relacions funcionals, a les magnituds variables relacionades les anomenem només variables</td><td>“El preu del kg de peres és 1,80 €.” el pes i el preu són les variables</td></tr>
<tr><td>Variable dependent i independent</td><td>Quan tenim dues magnituds variables que estan relacionades de tal forma que Y és funció de X, a la magnitud Y se la denomina variable dependent, i a la magnitud X se la denomina variable independent.</td><td>El consum d'un cotxe i la velocitat a què circula.
El consum és la variable dependent i la velocitat la variable independent</td></tr>
<tr><td>Variables i valors</td><td>Quan tenim una funció entre dos variables X i Y, als valors que prenen aquestes variables els denominem x i y respectivament.</td><td>Quan la magnitud X pren el valor x, la magnitud Y val y.</td></tr>
</table>

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

EXERCICIS I PROBLEMES de 2n d'ESO

El pla cartesià. Coordenades

1. Representa els següents parells ordenats en un pla cartesià:

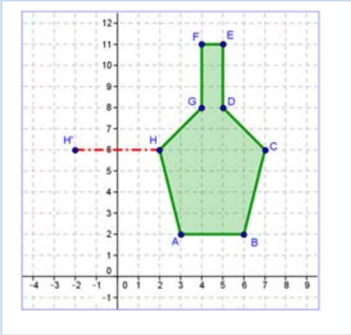
$I = \left(\frac{3}{2}, -3\right)$ $J = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ $K = (6, 3'5)$ $L = \left(-\frac{3}{4}, -0'5\right)$

2. Sense representar els següents punts, digues en quin quadrant estan:

$M = \left(4, -\frac{5}{2}\right)$ $N = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ $P = \left(-6, -\frac{9}{5}\right)$ $Q = \left(-\frac{7}{2}, 5\right)$

$R = (2, 0)$ $S = (-7, 0)$ $T = \left(0, -\frac{7}{2}\right)$ $U = (0, 7)$ $O = (0, 0)$

3. Observa l'atuell següent:



a) Indica les coordenades cartesianes de cada punt marcat de l'atuell.

b) Imagina que l'eix I és un espill i el punt H' és el reflectit del punt H per aquest espill. Dibuixa cada punt reflectit de l'atuell i dibuixa l'atuell reflectit.

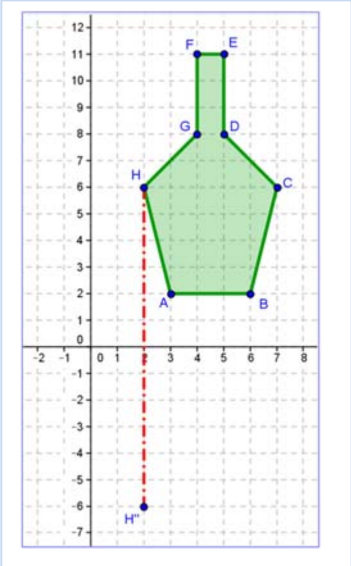
c) Anomena cada vèrtex del nou atuell. És un polígon? En cas afirmatiu, Quin tipus de polígon? Com s'anomenaria?

d) En quin quadrant t'ha quedat el nou atuell?

En aquest cas, els dos atuells són simètrics entre si, respecte a l'eix d'ordenades (eix Y).

e) Indica les coordenades cartesianes de cada punt de l'atuell reflectit.

Observa les coordenades dels punts reflectits dels dos atuells i indica la relació que hi ha entre ells.



4. Continuem amb l'atuell de l'exercici anterior.

a. Imagina que l'eix X és ara un altre espill, i el punt H'' és el reflectit de H per aquest nou espill.

b. Dibuixa al teu quadern el nou atuell reflectit i anomena cada un dels seus vèrtexs.

c. En quin quadrant t'ha quedat el nou atuell?.

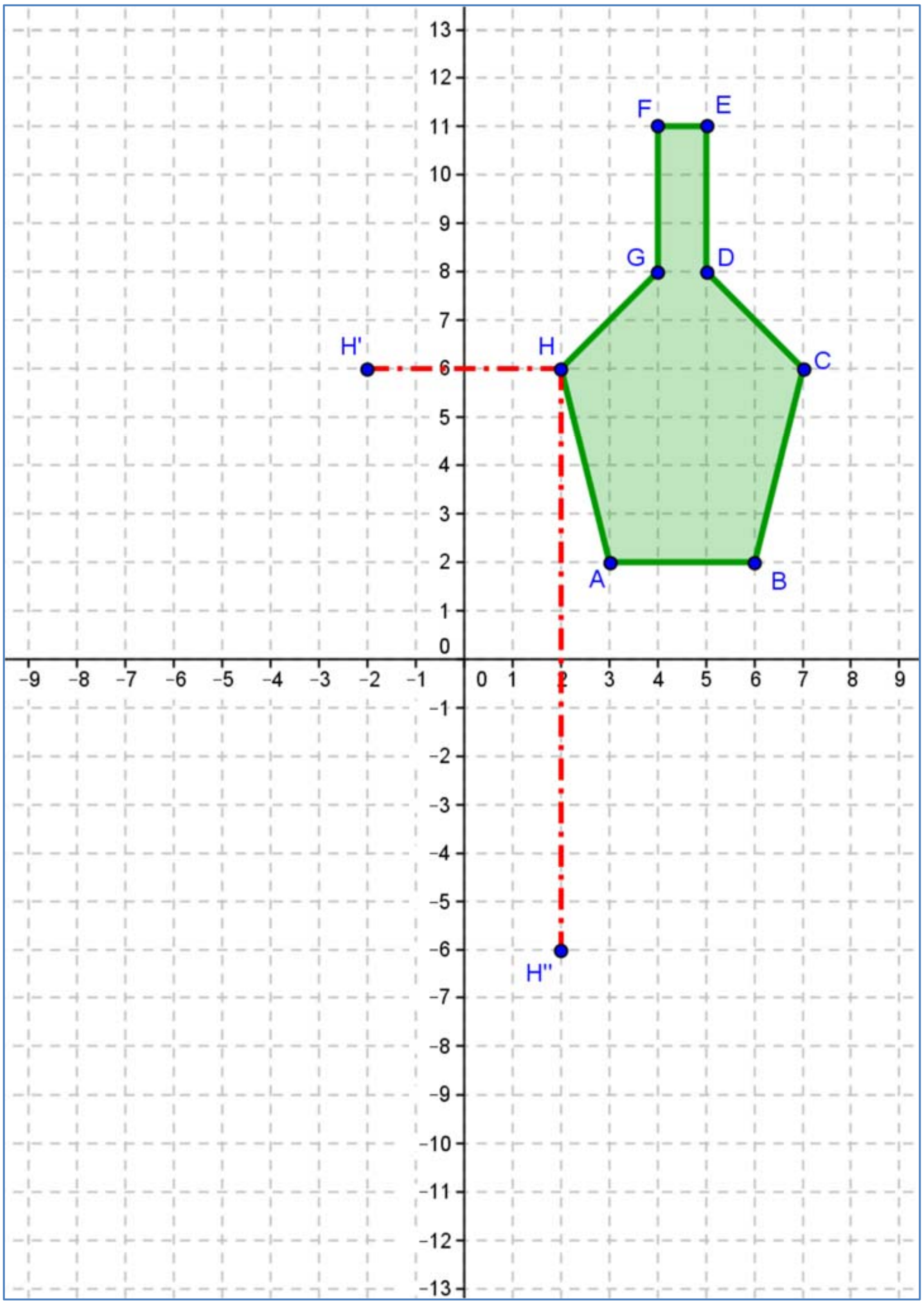
En aquest cas, els dos atuells són simètrics entre si, respecte a l'eix d'abscisses (eix X).

d. Indica les coordenades cartesianes de cada punt de l'atuell reflectit.

e. Observa les coordenades dels punts reflectits dels dos atuells i indica quina relació hi ha entre ells.

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Material fotocopiable



Atuell

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

5. Ajudant-te de regla, esquadra i cartabó dibuixa en un foli en blanc un sistema de referència cartesià i els eixos amb divisions d'1 centímetre.

a) Representa els punts M = (3, 4) N = (–1, 1) i R = (2, –4)

b) Dibuixa un altre sistema de referència cartesià, amb els eixos paral·lels als anteriors i que es tallen al punt (1, –1) del sistema anterior.

c) Escriu les coordenades dels punts M, N i R respecte al nou sistema cartesià.

d) Han canviat els punts? Descriu amb paraules el que ha passat.

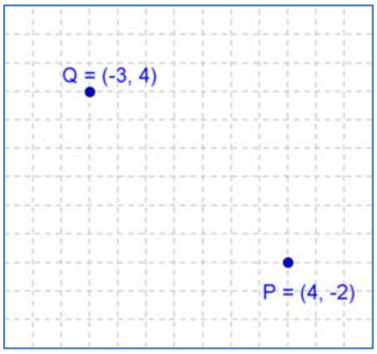
6. Dibuixa un sistema de referència cartesià en un paper mil·limetrat.

a) Representa un punt la distància del qual a l'eix d'abscisses siga de 3,3 cm, i la distància a l'eix d'ordenades siga de 1,9 cm.

b) Existeix més d'una solució? En aquest cas, representa tots els punts que complisquen aquesta condició i indica les seues coordenades cartesianes.

c) Com són aquests punts entre si dos a dos?

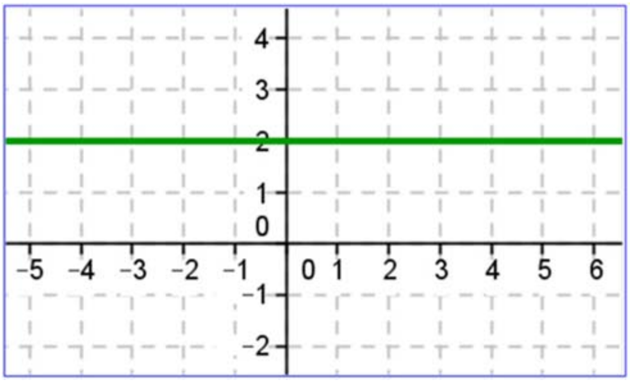
7. Representa al teu quadern un sistema de referència cartesià perquè els punts P i Q tinguen les coordenades que s'indiquen.

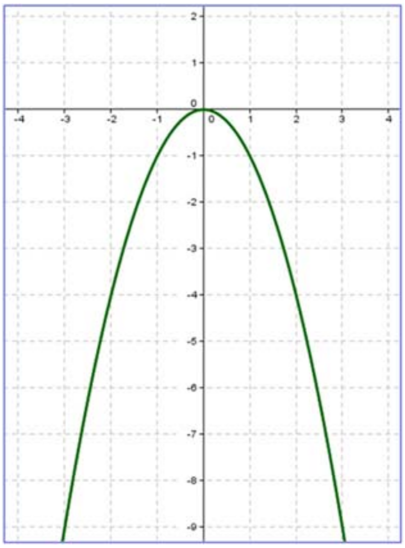


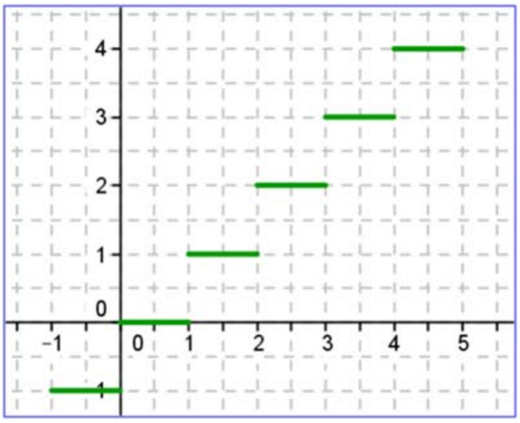
Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

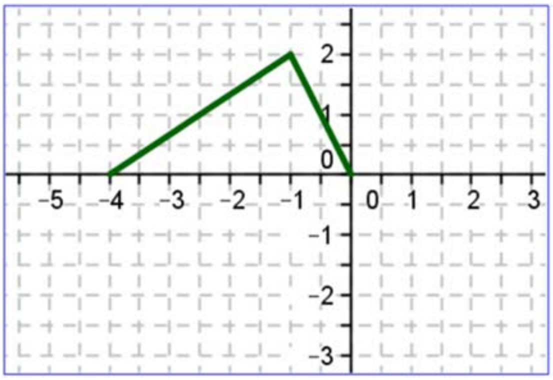
Taules i Gràfiques

8. Construeix taules de valors, amb cinc quantitats diferents, corresponents a les quatre gràfiques següents:

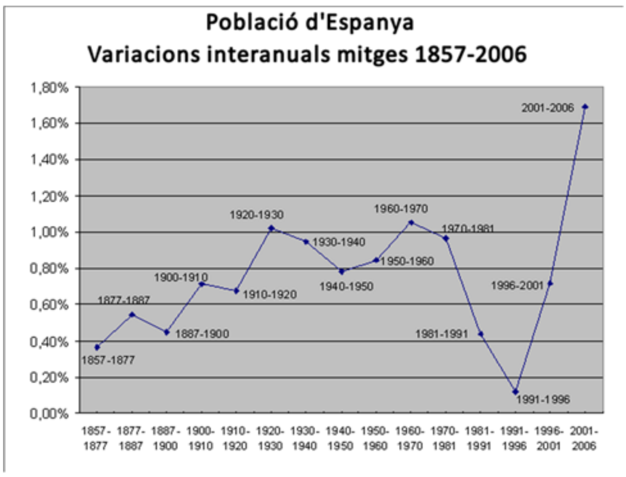








9. L'Institut Nacional d'Estadística ha publicat el següent balanç de l'evolució demogràfica de la població espanyola, mitjançant la gràfica següent:



Variacions interanuals mitges de la població espanyola entre 1857 i 2006.

a) Entre 1970 i 1991 la població creix o decreix?

b) Entre 1920 i 1940 la població creix o decreix?

c) I entre 1991 i 2001?

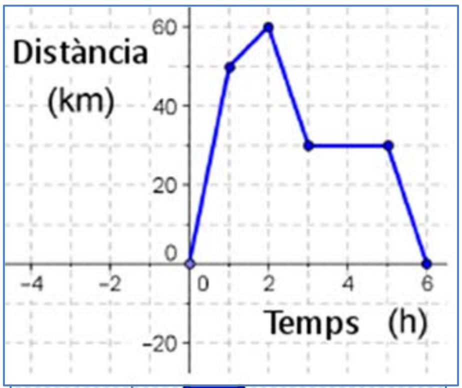
Raona sobre el significat d'aquesta gràfica.

a) Els percentatges a l'eix d'ordenades, què signifiquen?

b) En algun moment la població ha deixat de créixer, o simplement creix més lentament?

c) Indica possibles motius que expliquen aquesta gràfica

10. Joan ix de sa casa amb bicicleta i fa el recorregut que mostra la gràfica:



a. A quina distància de sa casa arriba?

b. Quant temps està parat?

c. Quant tarda a tornar?

d. A les dues hores a quina distància està de sa casa?

e. Quant temps tardà a recórrer 50 km?

f. Quan va més de pressa? I Quan més lentament?

11. La gràfica ens mostra una relació entre dues magnituds.

A. Inventa una situació que puga ser representada per aquesta gràfica.

B. Assenyala quals són les magnituds i en quines unitats es mesuren.

C. Indica, als eixos, els nombres adequats.

D. Descriu, a partir de les teues dades, la situació que has inventat.

12. El fenomen dels incendis forestals s'ha convertit en un dels majors problemes ecològics que pateixen les nostres muntanyes degut a l'elevada freqüència i intensitat que ha adquirit a les últimes dècades. Els que han ocorregut a Madrid i el nombre d'hectàrees cremades ens ho dóna la taula següent:

Hectàrees cremades (Ha)	825	1.095	450	339	325	101	385
Any	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011

Fes una gràfica amb aquests resultats.

13. Construeix taules de valors, amb quatre quantitats diferents, que ens expressen les relacions següents:

a) El pes i el preu de la mel de L'Hiruela (Madrid), sabent que el quilo val 7 €

b) Un nombre i la meitat del mateix nombre.

c) El perímetre d'un triangle equilàter i la mesura del seu costat.

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

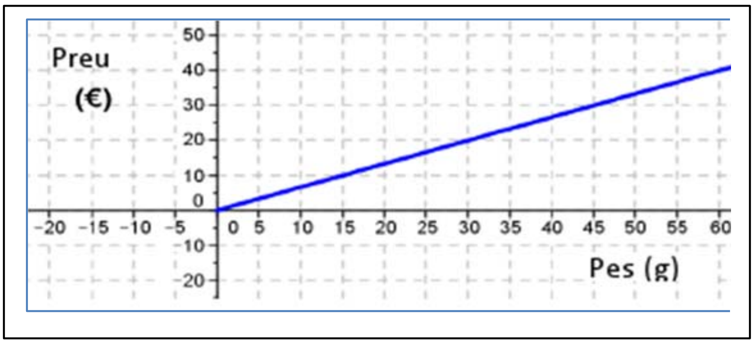
Les funcions

14. A les següents relacions assenyala si són o no funcions i, en cas de ser-ho, indica quines són les variables dependents i independents.

a) La temperatura del puré a llarg del temps.
b) El preu d'una camiseta i el seu color.
c) L'àrea d'un quadrat i el seu costat.
d) El preu de les taronges que hem comprat i el seu pes.
e) El volum d'una esfera i el seu radi.

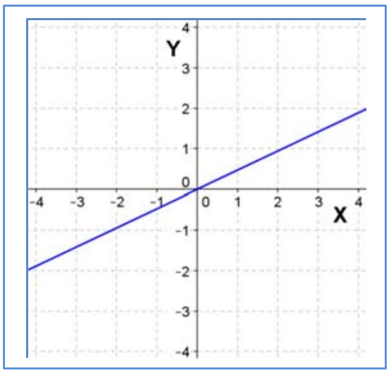
15. Proposa dues situacions diferents de totes les que has estudiat fins ara, de relacions entre dos variables en què una siga funció de l'altra. Indica a més en cada cas quina és la variable dependent i quina la independent.

16. Donada la funció definida en la gràfica de baix, expressa-la com a taula de valors, mitjançant una descripció verbal i de forma algebraica.



Quina és la variable dependent? I la independent?

Té sentit prolongar la gràfica pel tercer quadrant?

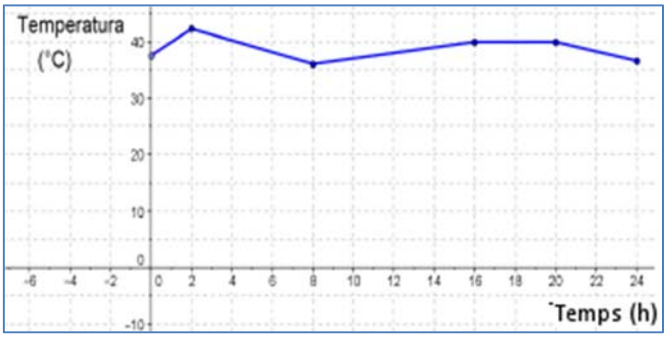


17. Expressa de forma gràfica, mitjançant una taula de valors i mitjançant una descripció verbal, la funció definida per la fórmula següent: $d=100 \cdot t$ Quina és la variable dependent?, i la variable independent?

18. Donada la funció definida en la gràfica del costat, expressa-la com a taula de valors, mitjançant una descripció verbal i de forma algebraica. Quina és la variable dependent?, i la independent?

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

19. La següent gràfica descriu l'evolució de la temperatura d'un malalt durant un dia.



Mirant la gràfica indica:

a) Quina temperatura tenia a les quatre del matí? I a les dotze de la nit?
b) A quines hores tenia quaranta graus de febra?
c) A quina hora tingué més temperatura? De quant era?
d) A quina hora tingué menys temperatura? De quant era?
e) Descriu amb paraules aquesta situació.

20. Una banyera de 500 litres es buida mitjançant un engolidor que desaigua 25 litres cada minut. Fes una taula de valors amb els deu primers minuts de buidatge. Representa gràficament la funció que relaciona la quantitat d'aigua que hi ha en la banyera amb el temps transcorregut des que comença a buidar-se. Indica quina és la variable dependent i quina la independent.

21. En les següents relacions assenyala si són o no funcions i, en cas de ser-ho, indica quals són les variables dependents i independents.

a) La temperatura d'un malalt a llarg del temps.
b) El preu d'un cotxe i el seu color.
c) El volum d'un líquid i el seu pes.
d) La distància a l'Institut i el temps emprat.
e) La longitud d'un moll i el pes penjat en ell.

22. Proposa dues situacions diferents de totes els que has estudiat fins ara, de relacions entre dos variables en què una siga funció de l'altra. Indica a més en cada cas quina és la variable dependent i quina la independent.

23. En una papereria 10 llapis costen 2,5 €, fes una taula de valors, dibuixa la seua gràfica i escriu la seua expressió algebraica. Quina és la variable dependent? i la variable independent?

24. Joan, un altre dia, fa un passeig amb la seua amiga Lluna. Ixen de casa de Lluna per un camí pla durant un temps, descansen durant una estona i, després tornen a casa de Lluna pel mateix camí però més lentament. Fes una gràfica (temps, distància) que descriga aquesta situació.

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

AUTOAVALUACIÓ de 2n d'ESO

1) El punt de coordenades A = (–5, –6) està situat al:

a) primer quadrant b) segon quadrant c) tercer quadrant d) quart quadrant.

2) Indica quina afirmació és falsa:

a) L'eix d'abscisses és l'eix OY
b) L'eix d'ordenades és vertical
c) L'eix d'abscisses és perpendicular a l'eix d'ordenades
d) L'eix d'ordenades és l'eix OY

3) Els punts de coordenades A = (0, –5), B = (0, 4), C = (0, –7), D = (0, 8) estan tots ells al:

a) eix d'ordenades b) primer quadrant c) eix d'abscisses d) segon quadrant

4) Els valors que completen la taula de proporcionalitat directa són:

Persones	1	4	8	
Kg de menjar	7			21

a) 16, 32, 7 b) 10, 20, 3 c) 28, 56, 3 d) 9, 18, 4

5) La següent taula de valors pot correspondre a:

X	4	12	20	36
Y	1	3	5	9

a) una proporcionalitat directa. b) una proporcionalitat inversa

c) la relació entre el costat d'un quadrat i la seua àrea. d) la relació entre el radi del cercle i la seua àrea

6) Indica en els casos següents aquell que NO és una funció:

a) La temperatura d'un malalt al llarg del temps. b) Y = 3X + 2.

c) La longitud d'una circumferència com a funció del radi. d) L'àrea d'un cercle i el seu color.

7) Indica quina afirmació és falsa:

a) L'origen de coordenades és la intersecció entre l'eix d'abscisses i el d'ordenades

b) En una funció a cada valor de la variable independent li correspon un únic valor de la variable dependent

c) En una funció a cada valor de la variable dependent li correspon un únic valor de la variable independent

8) Escriu una taula de valors de la funció y = 2x – 3.

x	1	2	3	4
y				

a) –1, 1, 3, 5. b) 0, 1, 4, 5. c) –1, –7, –9, –11. d) –1, 0, 3, 6.

9) Dibuixa la gràfica de la funció: Àrea del quadrat = Costat al quadrat.

PER AL PROFESSORAT

El concepte de funció és un dels conceptes bàsics en Matemàtiques i, al mateix temps, un dels més difícils

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

d'adquirir pels estudiants de secundària. Açò no és estrany si analitzem com ha evolucionat el dit concepte al llarg de la història.

A la història de les Matemàtiques comença a plantejar-se el concepte de funció cap al segle XIV i ha sigut un de què ha presentat una més dificultat, sent al segle XX un dels eixos de la investigació matemàtica. Inclús per als matemàtics del segle XVIII no estava molt clar el concepte de funció. Per exemple, en un article de *Jean Bernoulli* publicat en 1718 es troba aquesta primera definició: *"Una funció d'una variable és definida ací com una quantitat composta d'alguna manera per una variable i constants"*. Els matemàtics estaven disposats a acceptar dos tipus de funcions, les que venien donades per una fórmula o les que es traçaven arbitràriament dibuixant la seua gràfica. La idea abstracta de funció com a correspondència tardà un temps a aparèixer. Va ser *Jean Baptiste Joseph Fourier* (1768 – 1830) *a* la seua obra *"La teoria analítica de la calor"* el motor per a l'aprofundiment del concepte de funció. Recordem que quan Fourier exposà el seu desenvolupament d'una funció en sèrie trigonomètrica, començà a discutir-se sobre què era una funció, quines podien ajustar-se a aqueix desenvolupament, i aquest fet va ser un catalitzador en la història de les Matemàtiques que, entre moltes altres coses, portà a formalitzar aquest concepte. La noció moderna de funció és molt recent, podem datar-la en l'obra de *Peter Gustav Lejeune Dirichlet* (1805-1859) de 1837, on apareix la noció de funció com a correspondència, independent d'una representació analítica o geomètrica.

Al llarg de la història, aquest concepte s'ha anat desenvolupant a partir de l'estudi de fenòmens del món que ens rodeja i ha sigut expressat en distints llenguatges —verbal, gràfic, algebraic i numèric—. Per tant, per a poder aconseguir una aproximació significativa al sentit de les funcions, és necessari estudiar aquest concepte des de distints aspectes, utilitzant diferents llenguatges i treballant en distintes situacions.

Ja que les relacions funcionals es troben ben sovint al nostre entorn, l'estudi de funcions, pels estudiants de 1r d'E.S.O., ha de començar amb el tractament d'aquelles situacions que existeixen al seu entorn, sense oblidar les relacionades amb altres àrees de coneixement (les Ciències de la Naturalesa, les Ciències Socials, etc.). Des del primer curs de l'E.S.O. els estudiants poden anar aproximant-se al concepte de funció interpretant els significats de les distintes expressions de les funcions. Aquests procediments s'han de treballar al llarg de tota l'etapa, i es van adquirint a mesura que augmenta la maduresa cognitiva i el camp d'experiència de l'estudiant.

La dificultat de visualització de la representació gràfica d'una funció pot salvar-se amb la utilització de programes informàtics específics com el Geogebra, o per aplicacions elaborades ja per alguns professors i que estan a disposició de tots, com les elaborades dins del Projecte Gauss (Institut Nacional de Tecnologies Educatives i de Formació del Professorat) o en pàgines personals d'aquests.

Bé utilitzant un sol ordinador a l'aula —amb la PDi o mitjançant la projecció de la pantalla—, o bé amb l'ús dels ordinadors pels estudiants a l'aula d'informàtica, aquests poden familiaritzar-se amb la forma de les gràfiques i la interpretació dels seus punts i és un suport inestimable per a acostar-se a la representació de funcions i al concepte de funció.

Finalment cal indicar que la tercera part d'aquest capítol pretén una primera formalització al concepte de funció i, encara que s'ha tractat de seleccionar activitats en què les relacions funcionals són essencialment proporcionals, pot ser de més dificultat.

D'aquesta manera, trobar l'expressió algebraica a partir de la representació gràfica d'una funció senzilla és una de les ampliacions que es poden proposar als estudiants més avantatjats i pot servir per a l'estudi i comprensió major del significat de les funcions.

Per tot això, i depenent del temps que es desitge o es puga emprar per al desenvolupament d'aquest capítol, aquesta tercera part es pot suprimir sense que hi haja cap activitat, de les parts anteriors, que quede sense acabar de desenvolupar.

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

CAPÍTOL 12: ESTADÍSTICA I PROBABILITAT

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Nieves Zuasti i Fernando Blasco

Revisors: Raquel Caro i Sergio Hernández

Il·lustracions: Banc d'imatges de l'INTEF

Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Índex

Resum

Si vols conèixer l'estatura o el pes de les persones que tenen entre 11 i 13 anys a Espanya, pots arreplegar les dades de cada una de les persones d'aqueixes edats. Però açò és molt laboriós. El que fa l'Estadística és arreplegar una **mostra** que ens permeta representar la totalitat de la població objecte d'estudi. L'arreplega de dades és molt antiga. L'emperador August manà fer un cens, (o arreplega de dades) de tot el seu Imperi.

L'origen de la Probabilitat pot trobar-se als jocs d'atzar, i els jocs d'atzar, daus, cartes, loteria… fan un bon ús de l'Estadística i la Probabilitat.

La Ciència progressa deduint, mitjançant raonaments lògics correctes, i inferint, en que amb unes observacions experimentals, s'indueix un poc més general.

En aquest capítol repassarem els coneixements que ja tens del curs passat sobre freqüències i probabilitat i la representació de dades estadístiques i iniciarem l'estudi de les mesures de centralització: mitja, mitjana i moda.

Autora: Nieves Zuasti i Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

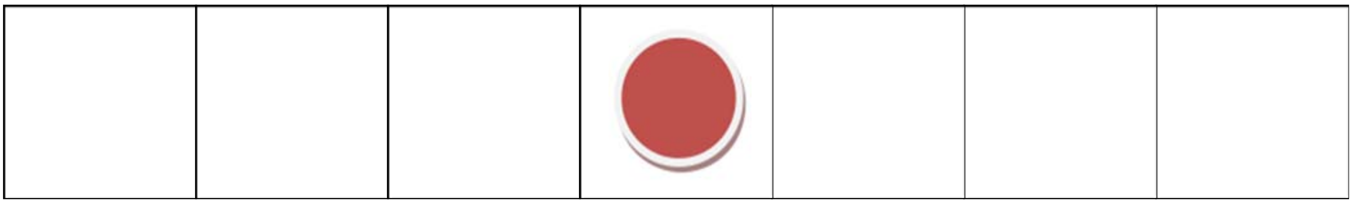
1. L'ATZAR I LA PROBABILITAT

1.1. Fenòmens o experiments aleatoris

Ja saps que:

Un **fenomen o experiment aleatori** és aquell, que mantenint les mateixes condicions a l'experiència, el resultat no és sempre el mateix, no és possible predir el resultat.

- *Vegem un joc:* Dibuixa 3 caselles cap a la dreta, una casella central i 3 caselles cap a l'esquerra. Col·loca una fitxa en la casella central. Tirem dos daus i anotem la suma de les seues cares superiors. Si ix més



de 7 es mou la fitxa a la dreta, si menys, cap a l'esquerra. Tirem els daus diverses vegades. Anota quantes tirades necessites per a arribar a una de les metes.

És un *exemple* de **fenomen o experiment aleatori** perquè no es pot predir el resultat.

- No obstant això, calcular el cost de 3 kg de fruita, sabent el preu per kg, no és un experiment aleatori. És un **fenomen determinista**. També és determinista calcular el cost del rebut de l'aigua sabent el gasto.

Activitat resolta

- Són experiments aleatoris:

a) Llançar una moneda i anotar si ix cara o creu

b) Llançar un dau

c) Si en una urna hi ha 7 boles negres i 5 roges, traiem una i anotem el color.

d) Traure una carta d'una baralla espanyola

- No són experiments aleatoris

  a) Si ixes sense paraigua quan plou segur que et mulles.

  b) El preu de mig quilo de mandarines si costen a 1,7 € el quilo.

  c) Soltar un objecte i veure si cau

Activitats proposades

1. Indica si és un fenomen aleatori:

  a) La superfície dels països de la Comunitat Europea

  b) Anotar el sexe del pròxim bebé nascut en una clínica determinada

  c) L'àrea d'un cercle de què es coneix el radi

  d) Tirem una xinxeta i anotem si cau amb la punta cap amunt

  e) Saber si el pròxim mes és febrer.

Autora: Nieves Zuasti i Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

1.2. Freqüència absoluta i relativa. Freqüències acumulades

Ja saps que:

En realitzar nombroses vegades un experiment podem anotar les vegades en què s'obté cada un dels possibles resultats.

Possibles resultats	Nombre de vegades
cara	49
creu	51
Total	100

Exemple:

- Tirem una moneda 100 vegades i anotem les vegades en què ens ha eixit cara i les vegades en què ens ha eixit creu. Ens ha eixit cara 49 vegades, llavors diem que la freqüència absoluta de cara és 49.
- En dividir la freqüència absoluta pel nombre total d'experiments tenim la freqüència relativa, així la freqüència relativa de cara és 49/100, o bé 0,49.

La **freqüència absoluta** d'un succés és el nombre de vegades que s'ha obtingut aqueix succés.

La **freqüència relativa** d'un succés s'obté dividint la freqüència absoluta pel nombre total d'experiments.

Possibles resultats	Freqüències relatives
cara	0,49
creu	0,51
Suma total	**1**

Si sumes les freqüències relatives de tots els possibles resultats d'un experiment, aqueixa suma sempre és igual a 1.

Al conjunt dels possibles resultats i les seues corresponents freqüències se li denomina **distribució de freqüències.**

Activitats proposades

2. Completa en la següent taula les freqüències relatives de l'experiment aleatori tirar un dau:

Possibles resultats	Freqüències absolutes	Freqüències relatives
1	15	
2	18	
3	16	
4	17	
5	19	
6	15	
Suma total	100	1

De vegades pot interessar-nos saber quina és la freqüència, absoluta o relativa, del succés *ser menor a igual a n*. Llavors es diu que és una freqüència **acumulada**. Naturalment açò només té sentit si les dades són numèriques.

Activitat resolta

- A l'exemple anterior la taula de freqüències absolutes i freqüències absolutes acumulades és:

Possibles resultats	Freqüències absolutes	Freqüències acumulades
1	15	15
2	18	33
3	16	49
4	17	66
5	19	85
6	15	100
Suma total	100	

Observa que cada valor s'obté sumant a l'anterior. Així 15 + 18 = 33, i 33 + 16 = 49…

Activitats proposades

3. Escriu la taula de freqüències relatives i freqüències relatives acumulades de l'exercici 2. Observa que l'últim valor ara és 1.

Autora: Nieves Zuasti i Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

1.3. Experiments aleatoris. Successos

Tots els dies apareixen a la nostra vida fets que tenen a veure amb l'atzar o amb la probabilitat. Si juguem al parxís, intuïm que *més o menys* una de cada 6 vegades eixirà un 5, amb la qual cosa podrem traure una fitxa a recórrer el tauler. Al 'Monopoly' traure un doble tres vegades seguides ens envia a la presó ("sense passar per la casella d'eixida"). Açò no ocorre moltes vegades, no obstant això, tots els que hem jugat a açò, hem anat a la presó per aqueix motiu.

En realitzar un experiment aleatori no es pot predir el resultat que es va a obtindre. No obstant això, habitualment tenim informació sobre com és de possible un determinat succés. Així doncs, l'objectiu és quantificar d'alguna manera aquesta informació que es denomina la probabilitat del succés.

La **probabilitat** és una mesura de com és de factible que tinga lloc un determinat succés.

Per a estudiar la probabilitat, hem d'introduir alguns noms. Ho anem a fer amb ajuda d'un cas concret.

Espai mostral

Un **experiment aleatori** és una acció (experiment) el resultat de la qual depèn de l'atzar.

En realitzar un experiment aleatori hi ha diversos possibles resultats o **successos possibles**.

- Per exemple els possibles resultats en tirar una moneda són que isca *cara* o isca *creu*.
- Els possibles resultats en tirar un dau és que ens isca 1, 2, 3, 4, 5 o 6.

En realitzar l'experiment sempre s'obtindrà un dels possibles resultats.

Al conjunt de resultats d'un experiment aleatori se li denomina **espai mostral**.

Als elements de l'espai mostral se'ls anomena **successos elementals**.

Exemple

- Imaginem que tenim una bossa amb 7 boles: 2 blanques, 4 roges i una negra. Fem el següent **experiment aleatori**: ficar la mà a la bossa i mirar el color de la bola que ha eixit.

Hi ha 3 *casos* possibles: "que la bola siga blanca", "que la bola siga roja" o "que la bola siga negra". Abreviadament els representarem per *blanca*, *roja* o *negra* (també podrem representar els colors o escriure B, R o N; recorda que en matemàtiques sempre s'ha de simplificar, inclús la manera d'escriure).

L'espai mostral és el conjunt de tots els casos possibles: {B, R, N}.

Un **succés** és un subconjunt de l'espai mostral.

Els diferents **successos** són els subconjunts de l'espai mostral. Al nostre exemple els successos possibles són {B}, {R}, {N}, {B,R}, {B,N}, {R,N}, {B,R,N}.

És segur que en el nostre experiment la bola que traiem és "blanca", "negra" o "roja". Per això a l'espai mostral se l'anomena també **succés segur**.

Exemples.

1. Baralla espanyola de 40 cartes. Experiment: traiem una carta a l'atzar i mirem el seu pal.

   Espai mostral: {ors, copes, espases, bastos}

2. Experiment: Llancem simultàniament 1 moneda d'euro i una de 2 euros a l'aire.

Autora: Nieves Zuasti i Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Espai mostral: {Cara-Cara, Cara-Creu, Creu-Cara, Creu-Creu}

3. Experiment: Llancem simultàniament 2 monedes d'1 euro (indistingibles)

Espai mostral: {Ixen 2 cares, Ixen 2 creus, Ix 1 cara i una creu}

4. Experiment: Llancem una moneda d'1 euro i apuntem què ha eixit; la tornem a llançar i apuntem el resultat.

Espai mostral: {CC, CX, XC, XX}

5. Experiment: Llancem simultàniament dos daus i sumem els nombres que es veuen a les cares superiors.

Espai mostral:{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

6. Experiment: Llancem un dau usual i sumem els nombres que apareixen a la cara superior i la cara inferior (la que no es veu, que està sobre la taula).

Espai de successos: {7}

Als exemples anteriors, (2) i (4) són equivalents: els possibles resultats del llançament de 2 monedes que es distingeixen són els mateixos que els del llançament d'una mateixa moneda dues vegades (per exemple, equiparem el resultat del llançament de la moneda d'1 euro de l'exemple 3 amb el primer llançament de la moneda de l'exemple 4 i el resultat del llançament de la moneda de 2 euros amb el segon llançament).

A l'experiment 6 sempre ix el mateix resultat (per alguna raó els punts als daus usuals es distribueixen sempre de manera que les cares oposades sumen 7). Tècnicament aquest no és un experiment aleatori, ja que el resultat no depèn de l'atzar.

Activitat resolta

- L'espai mostral de l'experiment aleatori:

a) Extraure una bola d'una bossa amb 5 boles roges i 2 negres és {*roja*, *negra*}

b) En traure un paper d'una bossa on s'han posat 3 papers numerats de l'1 al 3, és {1, 2, 3}

- Així, per al llançament d'un dau, encara que l'espai mostral habitual serà {1, 2, 3, 4, 5, 6}, és possible que només siga d'interès si el resultat obtingut és parell o imparell, i en este cas l'espai mostral seria {*parell*, *imparell*}.

- Al cas del llançament consecutiu de dues monedes, l'espai mostral pot ser {{C, C}, {C, +}, {+, C}, {+, +}}, o bé: {*0 cares*, 1 *cara*, 2 *cares*}, si ens interessa únicament el nombre de cares obtingudes.

- Alguns **successos** de l'experiment aleatori tirar un dau són:

a) Traure un nombre imparell: {1, 3, 5}
b) Traure un nombre més gran que 4: {5, 6}
c) Traure un nombre menor que 4: {1, 2, 3}

Activitats proposades

4. Para cada un dels exemples anteriors: llançar un dau, tirar dues monedes, indica 3 successos diferents que no siguen successos individuals.

5. En una bossa tenim 5 boles roges numerades de l'1 al 5. Es fan els dos experiments següents:

Autora: Nieves Zuasti i Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

EXPERIMENT A: Es trau una bola de la bossa i es mira el seu color.

EXPERIMENT B: Es trau una bola de la bossa i es mira el seu nombre.

Quin d'aquests experiments no és un experiment aleatori? Per què?

Per a l'experiment que sí que és un experiment aleatori indica el seu espai mostral.

6. Una baralla francesa té 52 cartes, distribuïdes en 13 cartes de piques, 13 de cors, 13 de trèvols i 13 de diamants. Les piques i els trèvols són cartes negres mentre que els cors i els diamants són cartes roges. Es mescla la baralla, es talla i es fa l'experiment següent: agafar les dues cartes que han quedat dalt del tot i observar de quin color són. Descriu l'espai mostral.

7. Inventa cinc experiments aleatoris i escriu el conjunt de possibles resultats

8. Escriu l'espai mostral de l'experiment aleatori: "Escriure *en cinc targetes els nombres 1, 2, 3, 4 i 5 i traure una a l'atzar*"

9. Escriu l'espai mostral de l'experiment aleatori: "*Tirar un clarió al sòl i anotar el nombre de trossos en què es trenca*"

10. Inventa dos successos de l'experiment aleatori de traure dues cartes.

11. Al joc de loteria, indica dos successos respecte a la xifra de les centenes del primer premi.

12. Al joc de dòmino, indica tres successos amb fitxes dobles.

13. Escriu tres successos aleatoris de tirar tres monedes.

1.4. Probabilitat

Donats tots els successos possibles d'un experiment aleatori, assignarem a cada succés A, una quantitat que denotarem per P(A) i que anomenarem la probabilitat del succés A.

Ja saps que la probabilitat és una mesura que ens indica el grau de confiança que ocórrega un determinat succés.

La **probabilitat** s'expressa mitjançant un nombre comprés entre 0 i 1.

Si aqueix nombre està pròxim a 0 direm que és un succés improbable (ull, improbable no vol dir que siga impossible), mentre que si està pròxim a 1 direm que aqueix succés és molt més probable.

La probabilitat és una mesura de la certesa que tenim que es verifique un succés. Serveix per a preveure el futur usant el que se sap sobre situacions passades o presents.

Però la paraula "probable" és d'ús comú, per la qual cosa sempre saps si alguna cosa és "*molt probable*", "*prou probable*", "*poc probable*" o "*molt improbable*".

Activitat resolta

- Si no has estudiat res un examen és *prou probable* que et suspenguen, i si t'ho saps, és *molt probable* que tragues bona nota.
- Si una persona roba un banc és *probable* que acabe a la presó.
- És poc *probable* que caiga l'avió que acaba d'eixir de Barajas
- És *segur* que després del dilluns arriba el dimarts.
- És molt *improbable* que demà hi haja un sisme submarí.

Activitats proposades

14. Assenyala si són poc *probable* o molt *probable* els successos següents:

a) El dijous vas al col·legi.

b) Creues el carrer i t'agarra un cotxe.

c) Fa una quiniela i li toca el premi màxim.

d) Li toca la loteria a Joan.

e) Li posen una multa a una persona que condueix havent begut alcohol.

f) Ixes al carrer i et cau una cornisa damunt.

g) Eixirà el sol demà?

h) Demà hi haja un terratrèmol a Madrid.

Per a calcular probabilitats s'usen dues tècniques, una **experimental**, analitzant les freqüències relatives de què ocórrega el succés, i l'altra per **simetria**.

Exemple

- En una bossa que conté 20 boles blanques introduïm una bola negra (indistingible al tacte). Mesclem bé les boles de la bossa, i realitzem l'experiment consistent a ficar la mà a la bossa i traure una bola.

Sense que hàgem estudiat gens formalment sobre probabilitat. Què penses que és més probable, que la bola treta siga blanca o que siga negra? Estem d'acord en què és més probable traure una bola blanca!

Ara ja sí que podem plantejar-nos una pregunta: En quina mesura és més probable traure una bola blanca?

No és difícil de calcular. Les dades que tenim són els següents:

- La bossa té 21 boles
- 1 bola és negra
- 20 boles són blanques

La probabilitat de traure la bola negra és 1 d'entre 21. La probabilitat de traure una bola blanca és de 20 entre 21.

El que acabem d'utilitzar és conegut com a **Llei de Laplace.** Si tots els casos possibles d'un espai mostral són **equiprobables** (açò és, tenen la mateixa probabilitat d'ocórrer), i S és un succés d'aqueix experiment aleatori es té que

Regla de Laplace:

La probabilitat d'un succés és igual al nombre de casos favorables dividit pel nombre de casos possibles

$$P(S) = \frac{nombredecasosfavorablesalsuccésS}{nombredecasospossibles}$$

Però, i si no podem assegurar que tots els casos siguen equiprobables?

La probabilitat que ocórrega un cert resultat en realitzar l'experiment, encara que ja es veurà en altres

Autora: Nieves Zuasti i Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

cursos en detall, es calcula com la freqüència relativa d'aqueix resultat repetint l'experiment moltes vegades. Com més vegades repetisques l'experiment, més s'aproximarà la freqüència relativa al valor de la probabilitat.

- Per exemple, si tires una moneda a l'aire una sola vegada i ix cara, pareixerà que la probabilitat de traure cara és 1, però si repeteixes més vegades l'experiment, la freqüència relativa de traure cara s'anirà acostant a 0,5 amb el temps. Això ens diu que la probabilitat de traure cara és 0,5.

Activitat resolta

- Mesclem una baralla espanyola de 40 cartes (els pals són ors, copes, espases i bastos i en cada pal hi ha cartes numerades de l'1 al 7 a més d'una sota, un cavall i un rei).

Es realitza l'experiment consistent a *tallar la baralla i quedar-nos amb la carta superior*.

Considerarem els successos següents:

1) Obtindre una figura
2) Obtindre una carta amb un nombre imparell
3) Obtindre una carta d'espases
4) Obtindre una carta d'espases o una figura
5) Obtindre la sota d'ors

En principi les cartes no estaran marcades, amb la qual cosa la probabilitat que isca cada una d'elles és la mateixa. Açò és, estem davant d'un experiment aleatori amb tots els casos equiprobables.

2) A la baralla hi ha 12 figures (3 per cada pal). Així

   Casos favorables: 12

   Casos possibles: 40

   Probabilitat: 12/40= 3/10

4) Per cada pal hi ha 4 cartes amb nombres imparells: 1, 3, 5 i 7.

   Casos favorables: 16

   Casos possibles: 40

   Probabilitat: 16/40=2/5

- Hi ha 10 cartes d'espases a la baralla

  Casos favorables: 10

  Casos possibles: 40

  Probabilitat: 10/40=1/4

- Hi ha 10 cartes d'espases i a més altres 9 figures que no són d'espases (clar, les 3 figures d'espases ja les hem comptat).

  Casos favorables: 19

  Casos possibles: 40

  Probabilitat: 19/40

Autora: Nieves Zuasti i Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

- Només hi ha una sota d'ors

Casos favorables: 1

Casos possibles: 40

Probabilitat: 1/40

Més activitats resoltes

- La probabilitat que isca cara en tirar una moneda és 1/2, perquè només hi ha dos casos possibles {*cara*, *creu*} i suposem que la moneda no està trucada
- La probabilitat de traure un 5 en tirar un dau és 1/6, perquè hi ha sis casos possibles {1, 2, 3, 4, 5, 6} i suposem que el dau no està trucat després tots ells són equiprobables.
- La probabilitat que en creuar el carrer t'agarre un cotxe NO és 1/2, perquè ja t'hauria agarrat un muntó de vegades. Per a calcular aqueixa probabilitat s'arrepleguen dades de vianants atropellats.
- La probabilitat de traure bola roja d'una bossa amb 7 boles roges i 3 boles blanques és 7/10.
- La probabilitat que un bebé siga xiqueta és aproximadament 0,5, però en fer l'estudi amb les freqüències relatives s'ha vist que és 0,49.

Observa que per a poder utilitzar la Regla de Laplace has d'haver-te cerciorat que els successos elementals són equiprobables.

Si creues un carrer poden ocórrer dues coses, que t'agarre un cotxe o que no t'agarre, no obstant això és evident que la meitat de les vegades que creues carrers no t'agarra un cotxe.

En aquest cas l'útil és utilitzar les freqüències relatives per a estimar probabilitats quan aquestes no són conegudes.

La **llei dels grans nombres** ens diu que quan es repeteix moltes vegades un experiment aleatori la freqüència relativa de cada succés S s'aproxima a la seua probabilitat. Com més gran siga el nombre de repeticions, millor va sent l'aproximació.

En jocs de daus, monedes, cartes… suposem que no estan trucades i que per això els successos elementals són equiprobables.

- Traiem una carta d'una baralla espanyola. La probabilitat que siga un or és 10/40 = 1/4, i la probabilitat de traure un rei és 4/40 = 1/10.
- Tirem dues monedes i volem calcular la probabilitat que siga cara. Podem considerar que l'espai de successos elementals és: {0 cares, 1 cara, 2 cares}, o bé {(C,C), (C,+), (+,C), (+, +). Per a decidir haurem de saber en quin dels casos són equiprobables. Jugant, jugant, és a dir, li experiència no diu que són equiprobables al segon cas i per tant la probabilitat que alguna siga cara és 3/4, en compte de 2/3 com seria al primer cas.

Activitats proposades

15. Calcula la probabilitat que en tirar amb aquesta ruleta isca el plàtan.

16. Calcula la probabilitat que en traure una carta de la baralla siga: a) l'as de copes, b) una copa, c) un as, d) l'as de copes o bé un or, e) un as o bé una copa.

17. Per a saber la probabilitat que un incendi haja sigut intencionat, et basaries a l'estudi de les freqüències relatives o l'assignaries per simetria?

Activitats resoltes

- Una bossa de boles conté 26 negres i 26 roges. Es mescla el contingut de la bossa, es fica la mà i es trau una bola, es mira el color i es torna a la bossa. A continuació es trau una altra bola i es mira el color. Quina és la probabilitat que hagen eixit una bola roja i una bola negra?

Abans de continuar llegint, pensa-ho. Si t'equivoques no passa res: el sentit de probabilitat no el tenim massa desenvolupat, però aquest és el moment de fer-ho.

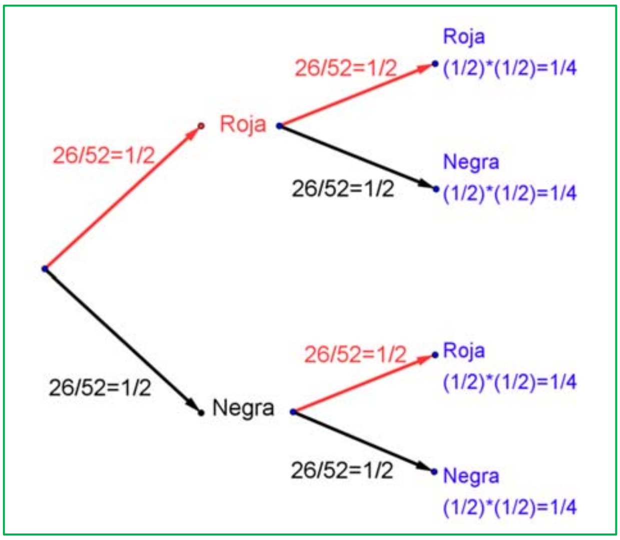
Aquest problema l'hem plantejat moltes vegades a altres estudiants. Alguns diuen que la probabilitat és 1/3 perquè hi ha 3 casos possibles: Roja-Roja, Negra-Negra i Roja-Negra. Aqueixa resposta no és correcta.

En realitat el succés *traure una bola de cada color* consta de 2 casos Roja-Negra i Negra-Roja. Depenent de com haguérem escrit l'espai mostral o de com haguérem plantejat el problema aqueix detall es podria veure amb major o menor claredat.

Així, la probabilitat de traure una bola de cada color és, en realitat 1/2.

Si no t'ho creus pots fer un experiment: serà difícil que tingues 26 boles negres i 26 boles roges, però sí que és fàcil que tingues una baralla francesa. Mescla-la, talla i mira el color de la carta que ha quedat dalt en el muntó. Apunta-ho. Torna a deixar les cartes a la maça, torna a mesclar, talla de nou i mira el color de la carta que ha quedat dalt ara. Apunta els colors. Repeteix aquest experiment moltes vegades: 20, 50 o 100.

Si tens en compte els resultats veuràs que, aproximadament, la meitat de les vegades les dues cartes són del mateix color i l'altra meitat les cartes són de colors diferents. Amb això, hem pogut "comprovar" que la probabilitat d'aqueix succés era 1/2.



Una altra forma que et pot ajudar a raonar sobre aquest problema, i molts altres de probabilitat, és confeccionar un **diagrama en arbre**. La primera bola que traiem té una probabilitat de ser Roja igual a 26/52 = 1/2. Aqueix nombre l'escrivim a la branca de l'arbre. Si tornem a la bossa la bola i tornem a traure una altra bola de la bossa, la probabilitat que siga Roja torna a ser 26/52 = 1/2. Completem amb idèntic raonament la resta de les branques.

La probabilitat que les dues boles que hàgem tret siguen roges és el producte de les seues branques: (1/2)·(1/2) = 1/4. La mateixa probabilitat obtenim per als successos Negra-Negra, Negra-Roja i Roja-Negra. La probabilitat de Roja-Negra és per tant 1/4, igual a la de Negra-Roja. Com són successos elementals la probabilitat que les dues boles siguen de distint color és la suma: 1/4 + 1/4 = 1/2.

Autora: Nieves Zuasti i Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Activitats proposades

18. La probabilitat no és un concepte intuïtiu. Per a això farem una prova. Considerarem l'experiment aleatori *llançar una moneda*. Copia la taula al teu quadern

- Escriu a la 1ª fila d'aquesta taula el que tu creus que eixiria en repetir l'experiment 30 vegades. Pensa-ho i ompli la taula. Com tu vulgues (inventa-t'ho, però “amb sentit”).
- A la 2ª fila de la taula escriu el resultat real de 30 llançaments de la moneda.

Què observes en ambdós casos? Alguna pauta? Presta atenció a aquestes qüestions per a cada una de les files de la taula.

Hi ha més o menys 15 cares i 15 creus?

Apareixen grups seguits de cares o de creus?

Quin és el nombre més gran de cares que han eixit seguides? I el de creus?

Normalment quan “t'inventes” els resultats sí que sols posar la meitat de cares i la mitat de creus. En un experiment aleatori aquests nombres estan prop de la meitat però no solen ser la meitat exacta.

Quan t'ho inventes, en general poses pocs grups seguits de cares o creus.

El cervell ens enganya i en temes probabilístics hem d'educar-lo molt més. Per això aquest tema és molt important, encara que siga el que moltes vegades es queda sense donar. Ens ajuda a què, com a ciutadans, no ens enganyen. Ni amb loteries, ni amb cartes, ni amb estadístiques electorals.

Autora: Nieves Zuasti i Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

2. GRÀFICS ESTADÍSTICS

Si fem una representació gràfica de les dades podrem comprendre el seu significat amb molta més facilitat que si, simplement les deixem en forma de taula. Per a això, naturalment, ja haurem d'haver arreplegat les dades i elaborat una taula.

Estudiarem quatre tipus de representacions, el diagrama de rectangles, el diagrama de línies, el pictograma i el diagrama de sectors, encara que hi ha algunes altres representacions possibles.

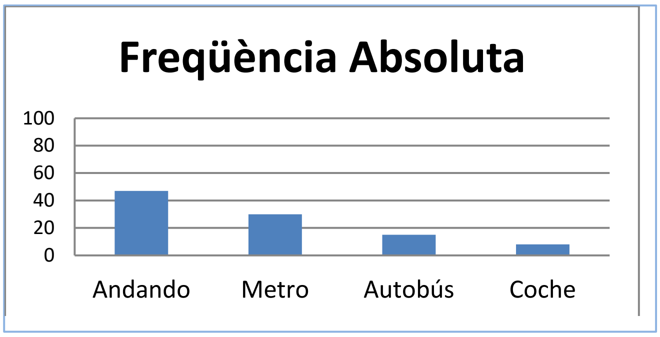
2.1. Diagrama de rectangles o de barres

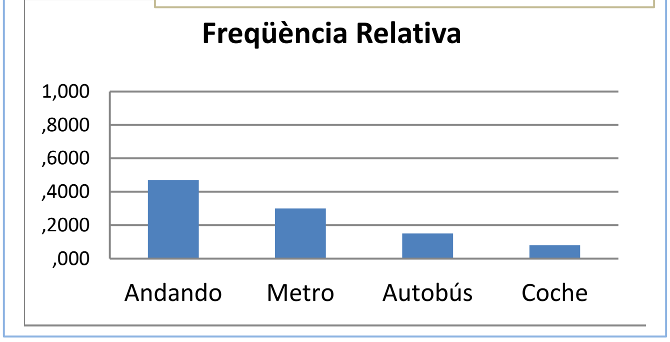
En un diagrama de rectangles o de barres s'indiquen en l'eix horitzontal tots els possibles resultats de l'experiment i en l'eix vertical la freqüència amb què les dites dades apareixen, per tant podrà ser un diagrama de rectangles de freqüències absolutes, o relatives o acumulades segons la freqüència utilitzada.

Activitat resolta

- Preguntem a 100 estudiants quin és el mitjà de transport que utilitzen per a anar a escola. Les respostes apareixen a la taula del marge. Dibuixem el diagrama de rectangles.

Mitjà de transport	Freqüència Absoluta	Freqüència relativa
Caminant	47	0,47
Metro	30	0,3
Autobús	15	0,15
Cotxe	8	0,8





a) Si volem dibuixar el diagrama de barres de freqüències relatives, utilitzem la columna de freqüències relatives per a fer-ho, i s'obté el diagrama denominat "*Freqüència Relativa*". Si comparem el diagrama de barres de freqüències absolutes amb el de relatives s'observa que són iguals excepte en les unitats de l'eix d'ordenades, que ara, al de Freqüències Relatives, sempre arriben fins a 1.

b) Tenim la taula de freqüències acumulades de l'experiment tirar un dau. Dibuixem el diagrama de barres de freqüències acumulades. S'observa com les barres van creixent i l'altura de l'última coincideix amb la suma total, en aquest cas, 100, el total de vegades que hem tirat el dau.

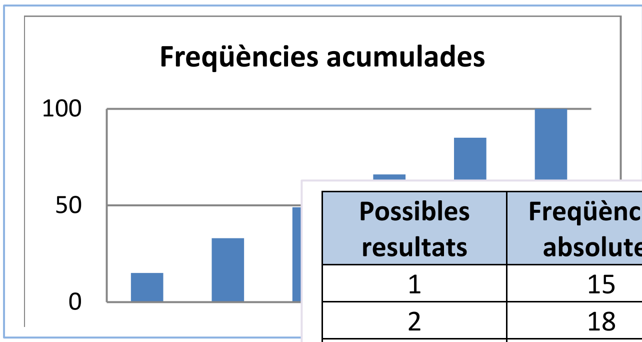
Caminant Metro Autobús Cotxe

Caminant Metro Autobús Cotxe

Possibles resultats	Freqüències absolutes	Freqüències acumulades
1	15	15
2	18	33
3	16	49
4	17	66
5	19	85
6	15	100
Suma total	100	

Activitats proposades

Possibles resultats	Nombre de vegades
cara	56
creu	44



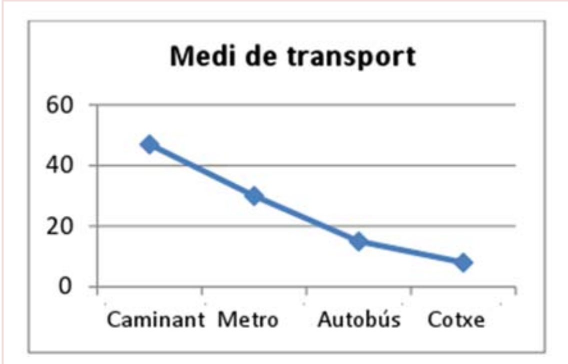
Possibles resultats	Freqüències absolutes
1	15
2	18
3	16
4	17
5	19
6	15

19. Dibuixa el diagrama de rectangles de freqüències absolutes de la taula adjunta. Representa també el diagrama de rectangles de freqüències relatives i de freqüències absolutes acumulades.

20. Dibuixa el diagrama de rectangles de freqüències absolutes de la taula adjunta. Representa també el diagrama de rectangles de freqüències relatives i de freqüències relatives acumulades.

2.2. Diagrama de línies

Igual que al diagrama de rectangles s'indica a l'eix horitzontal tots els possibles resultats de l'experiment i a l'eix vertical les freqüències. En compte de dibuixar barres, ara simplement s'uneixen els punts obtinguts amb línies.



Activitat resolta

- El diagrama de línies absolutes de l'activitat resolta anterior és el del marge:

Activitats proposades

21. Dibuixa els diagrames de línies de freqüències absolutes, relatives i absolutes acumulades de l'experiment tirar un dau de l'activitat 20.

22. Dibuixa els diagrames de línies absolutes, relatives i relatives acumulades de l'experiment tirar una moneda de l'activitat 19.

Autora: Nieves Zuasti i Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

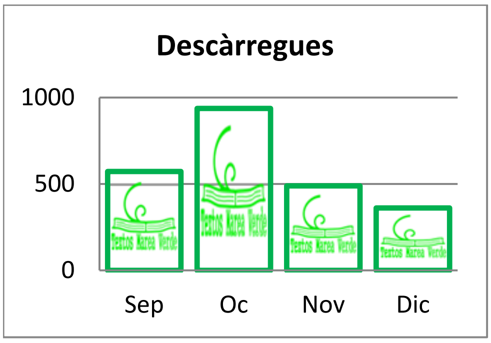
2.3. Pictograma

Als pictogrames es representen les freqüències mitjançant una gràfica de barres omplides de dibuixos al·lusius.

Activitat resolta

- S'han obtingut dades sobre el nombre de descàrregues que s'han fet dels Textos Marea Verda i es tenen les dades indicats a la taula. Es representen amb un pictograma, substituint el rectangle per un dibuix al·lusiu.

Marea verda	Descàrregues
Setembre	572
Octubre	937
Novembre	489
Desembre	361

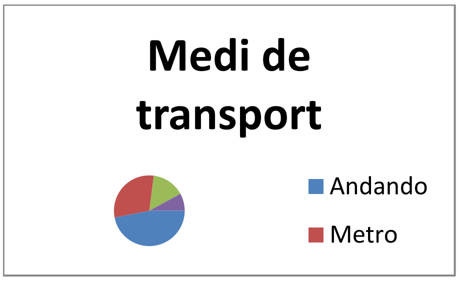


2.4. Diagrama de sectors

Als diagrames de sectors les freqüències es representen en un cercle que es divideix en sectors d'amplituds proporcionals a les freqüències.

Activitat resolta

- El diagrama de sectors de la taula sobre el mitjà de transport utilitzat és:



Pots observa que amb una simple mirada saps que més o menys la mitat dels estudiants van caminant i un poc més de la quarta part van amb metro.

Però realitzar-lo a mà requereix un treball previ ja que has de calcular els angles mitjançant una regla de tres: multipliques pels 360º que mesura un angle complet i divideixes pel nombre total que en aquest cas és 100.

Medi de transport	Freqüència	Angle
Caminant	47	47 · 360º / 100 = 47 · 3,6 = 169,2
Metro	30	30 · 360º / 100 = 108
Autobús	15	15 · 360º / 100 = 54
Cotxe	8	8 · 360º / 100 = 28,8
TOTAL	100	360º

Autora: Nieves Zuasti i Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Activitats proposades

23. Fes un diagrama de sectors i un pictograma relatius al nombre de descàrregues de Textos Marea Verda a l'exemple vist en *Pictograma*.

24. Dibuixa un diagrama de sectors i un pictograma relatius a les dades de l'activitat 19.

25. Dibuixa un diagrama de sectors i un pictograma relatius a les dades de l'activitat 20.

26. Fes una enquesta entre els teus companys i companyes de classe sobre el nombre de llibres que lligen al mes. Confecciona una taula i representa les dades en un diagrama de rectangles, un diagrama de línies, un pictograma i un diagrama de sectors.

27. Fes una enquesta entre els teus companys i companyes de classe sobre el nombre d'hores diàries que veuen la televisió. Confecciona una taula i representa les dades en un diagrama de rectangles, un diagrama de línies, un pictograma i un diagrama de sectors.

28. Fes una enquesta entre els teus companys i companyes de classe, pregunta almenys a 10 persones, sobre el temps que tarden a anar des de sa casa al centre escolar. Confecciona una taula i representa les dades en un diagrama de rectangles, un diagrama de línies, un pictograma i un diagrama de sectors.

Autora: Nieves Zuasti i Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

3. MESURES DE CENTRALITZACIÓ I MESURES DE DISPERSIÓ

Podrem obtindre uns nombres d'una taula de freqüències o d'unes dades que ens donen informació sobre el seu "*centre*" i informació sobre el que s'allunyen del dit centre.

3.1. Mitja aritmètica

Activitat resolta

a) Saps molt bé calcular la mitja de les teues notes. Joan ha tingut en Matemàtiques, 7, 3, 5, 9, 8. La teua nota mitjana la calcules sumant totes les notes: 7 + 3 + 5 + 9 + 8 = 33, i dividint la suma entre el nombre total de notes: 33/5 = 6,6.

En general si es vol calcular la mitja de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, es fa el mateix, se sumen tots i es divideix pel nombre total de dades.

Mitja = $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n$

Activitats proposades

29. Donades les temperatura en una ciutat a una hora determinada el dia 1 de cada mes es té la taula següent:

	Gener	Febrer	Març	Abril	Maig	Juny	Juliol	Agost	Setembre	Octubre	Novembre	Desembre
Temperatura	-1	3	8	9	11	13	20	25	21	14	9	4

Calcula la temperatura mitja.

Activitat resolta

Però si tens moltes dades i les tens agrupades en una taula de freqüències, pots fer-ho millor d'una altra manera.

- Imagina que tens les següents notes, a les que anomenes x_i, amb les freqüències absolutes, a les que anomenes f_i:

												Suma total
x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
f_i	1	2	1	2	3	8	7	6	6	4	3	**43**

Açò significa que hi ha dos 1, hi ha dos 3, i que hi ha 8 persones que han tret un 5. No sumarem 1 +1 dues vegades, o 5 + 5 + 5… huit vegades, sinó multiplicarem 1 · 2, 3 · 2, 5 · 8…

Afegim una fila a la taula amb aqueixos productes:

$x_i \cdot f_i$	0	2	2	6	12	40	42	42	48	36	30	**260**

Sumem aqueixa fila $x_i \cdot f_i$ i obtenim 260. Com la de freqüències f_i suma 43, les dividim, per la qual cosa la mitja resulta: Mitja = 260 / 43 = 6,04.

En general si la variable pren els valors $x_1, x_2, \ldots, x_n$, amb una freqüència absoluta $f_1, f_2, \ldots, f_n$, per a calcular la mitja es multiplica cada valor per la seua freqüència, se sumen els dits productes i es divideix pel total de dades:

Mitja = $(x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \ldots + x_n \cdot f_n) / (f_1 + f_2 + \ldots + f_n)$

Autora: Nieves Zuasti i Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Activitats proposades

30. S'ha llançat un dau 50 vegades i s'ha confeccionat la següent taula de freqüències absolutes:

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	9	8	7	8	8	10

Calcula la mitja i comprova que és 3,56.

31. Llancem 2 daus i sumem els valors obtinguts. Repetim l'experiment 100 vegades i obtenim les següent taula de freqüències absolutes.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f_i	3	6	7	8	16	20	15	8	7	6	4

- Calcula la mitja.
- Repeteix ara tu els llançaments, ara només 20, i calcula novament la mitja.

Activitat resolta

a) Una companyia d'assegurances d'automòbil ha realitzat un estudi sobre 1000 assegurats per a saber quants diners ha gastat la companyia en reparacions per accident. Les dades estan a la taula:

Diners gastat en euros	De 0 a 100	De 100 a 300	De 300 a 500	De 500 a 900	De 900 a 1100	De 1100 a 1500	Més de 1500 euros
Nombre d'assegurats	167	150	145	131	106	57	24

Ara la cosa es complica. No coneixes el valor *d'*x_i. Pots construir la taula de freqüència substituint cada interval pel seu punt mitjà:

							Suma Total
x_i	50	200	400	700	1000	1300	1700	
f_i	167	150	145	131	106	57	24	780

I ara ja saps calcular la mitja. Afegim la fila dels productes $x_i \cdot f_i$.

$x_i \cdot f_i$	8350	30000	58000	91700	106000	74100	40800	408950

La suma d'aqueixos productes és: 408950, i la suma de les freqüències és: 780, per tant la mitja dels diners gastat en segurs és: Mitja = 408950 / 780 = 524’3 €.

Activitats proposades

32. Calcula la mitja dels pesos de 40 estudiants d'un centre escolar, sabent que la taula de freqüències absolutes, amb intervals és:

Pes	35 - 41	41 - 47	47 - 53	53 - 59	59 - 65	65 - 71	71 - 77
Estudiants	1	10	12	9	5	1	2

3.2. Moda

Què és el que està de moda? El que més es porta.

La **moda** d'una distribució de freqüències és el valor més freqüent.

Activitat resolta

La moda de les taules de freqüències següents és la indicada:

a) Medi de transport

Medi de transport	Freqüència
Caminant	47
Metro	30
Autobús	15
Cotxe	8
TOTAL	100

La moda és anar *caminant*.

c) Notes

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_i	1	2	1	2	3	8	7	6	6	4	3

La moda és 5.

d) Llançament d'un dau

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	9	8	7	8	8	10

La moda és 6.

e) Llançament de dos daus

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f_i	3	6	7	8	16	20	15	8	7	6	4

La moda és 7.

Nota

Pot ocórrer que una distribució de freqüències tinga més d'una moda. Per exemple, la distribució:

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	9	8	9	8	8	9

té 3 modes, 1, 3 i 6, ja que el valor més alt de la freqüència absoluta és 9 als tres casos.

La moda permet classificar els conjunts de dades en *unimodals*, *bimodals* o *plurimodals*, segons el nombre de modes que tinguen.

3.3. Mitjana

La **mitjana** és el valor central que deixa per davall el mateix nombre de dades que per damunt.

Una forma de calcular la mitjana és ordenar els valors de menor a major, i si el nombre de dades és imparell, el valor central és la mitjana. Si el nombre de dades és parell, la mitjana és la mitja de les dos dades centrals.

Activitat resolta

f) La mitjana de les notes, ja ordenades següents: 2, 3, 5, 7, 9, 9, 10, és 7, perquè és el valor central d'un nombre imparell de dades.

g) La mitjana de les notes: 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 10, és la mitja entre 5 i 7, és a dir, és 6, perquè 5 i 7 són els valors centrals d'un nombre parell de dades.

Cal destacar que aquesta mesura de tendència central, a diferència de la mitja, no es veu afectada per valors extrems. És a dir, la mitjana de les notes: 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 1000, continua sent la mitja entre 5 i 7, és a dir, 6.

Activitats proposades

33. Calcula la mitja, la mitjana i la moda de les distribucions següents:

a) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 1000

b) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 10

c) 0, 0, 4, 5, 7, 9, 9, 1000, 2000

Observa en cada cas com influeixen els valors extrems.

3.4. Mesures de dispersió

Variància és la mitjana dels quadrats de les distàncies de les dades a la mitjana.

$$\text{Variància} = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2}{n} = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}$$

Equivalentment (desenvolupant els quadrats que apareixen a l'expressió) es pot calcular mitjançant aquesta altra expressió:

$$\text{Variància} = \frac{\sum x_i^{\,2}}{n} - \bar{x}$$

Desviació típica és l'arrel quadrada de la variància.

Es representa per σ.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^{\,2}}{n} - \bar{x}}$$

Activitats resoltes

a) Les altures dels 12 jugadors de la Selecció Espanyola de Bàsquet (en metres) que participaren a l'Eurocopa 2013 s'arrepleguen a la taula següent:

2’03	1’96	1’91	2’11	1’91	1’93	2’08	1’99	1’90	2’16	2’06	2’03

Calculem la mitja i s'obté 2’0058. Calcula la variància i la desviació típica.

Per a calcular la **variància** primer calcularem la suma que apareix al numerador, de manera semblant a com acabem de fer. Després acabarem dividint entre el nombre de dades.

$(2'03 – 2'0058)^2 + (2'06 – 2'0058)^2 + (2'16 – 2'0058)^2 + (1'90 – 2'0058)^2 + (1'99 – 2'0058)^2 +$

$(2'08 – 2'0058)^2 + (1'93 – 2'0058)^2 + (1'91 – 2'0058)^2 + (2'11 – 2'0058)^2 + (1'91 – 2'0058)^2 +$

$(1'96 – 2'0058)^2 + (2'03 – 2'0058)^2 = 0'08934$

Així la **variància** és 0'08934/12 = 0'00744

La **desviació típica** és l'arrel quadrada de la variància: $\sigma = \sqrt{0'00744}$ = 0'08628.

Activitats proposades

34. Calcula la mitja, la variància i la desviació típica de les dades següents:

a) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 1000

b) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 10

c) 0, 0, 4, 5, 7, 9, 9, 1000, 2000

35. Donades les temperatura en una ciutat a una hora determinada el dia 1 de cada mes es té la taula següent:

	Gener	Febrer	Març	Abril	Maig	Juny	Juliol	Agost	Setembre	Octubre	Novembre	Desembre
Temperatura	-1	3	8	9	11	13	20	25	21	14	9	4

Calcula la mitja, la variància i la desviació típica de les dades següents:

Si tenim freqüències relatives les expressions són:

Variància = $\sigma^2 = \dfrac{\sum f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}$ = $\sigma^2 = \dfrac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2$

Per tant la **desviació típica** es calcula:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}} = \sqrt{\frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2}$$

Activitats proposades

36. S'ha llançat un dau 50 vegades i s'ha confeccionat la següent taula de freqüències absolutes:

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	9	8	7	8	8	10

La mitja és 3,56. Calcula la variància i la desviació típica.

Autora: Nieves Zuasti i Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

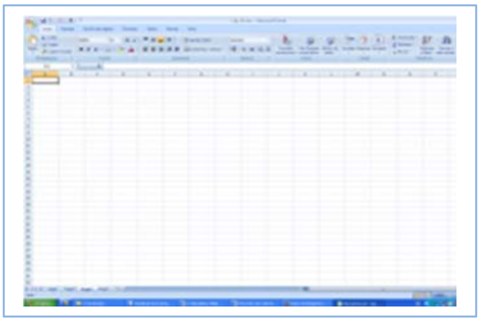
4. L'ORDINADOR I L'ESTADÍSTICA

L'ordinador pot ajudar molt als càlculs estadístics. Hi ha molts programes per fer això. En particular són fàcils d'usar els fulls de càlcul. Resoldrem un problema utilitzant un d'ells.

Activitat resolta

a) Es coneixen les quantitats de residus sòlids arreplegats en m^3/setmana durant 12 setmanes d'una urbanització:

23, 27, 30, 34, 38, 21, 30, 33, 36, 39, 32, 24.

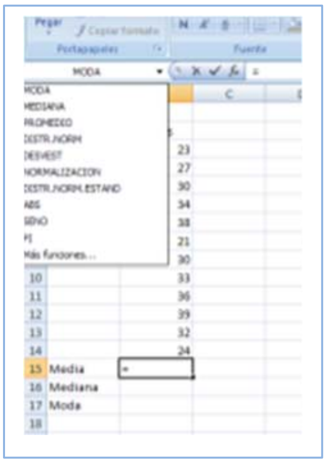


Per a calcular la **mitja**, la **mitjana** o la **moda**, obrim el full de càlcul. Consta de files indicades per les lletres A, B, C… i columnes indicades pels nombres 1, 2, 3… cada casella s'identifica per la seua columna i la seua fila, per exemple, A1 és la primera casella.

Escrivim les dades que ens han donat a la columna B a partir de la fila 3, deixant la primera columna i les dues primeres files per a posar títols.

Escrivim en B2: Residus; en A15: Mitja; en A16: Mitjana; i en A17: Moda.

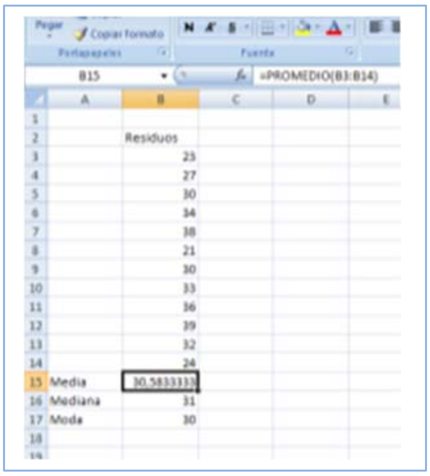
Ens col·loquem sobre la casella B15. A la finestra *fx* escrivim el signe igual: **=**, i despleguem les funcions de la llista de l'esquerra. Ens interessen: MITJA (que és la mitja), MITJANA i MODA.



Escrivim a la casella B15:

=PROMEDI(B3:B14),

i obtenim la mitja que és 30,58.



Observa el que aqueixa expressió significa. Estàs dient a l'ordinador que calcule la mitja (mitja) de les dades que estan entre la casella B3 i la casella B14.

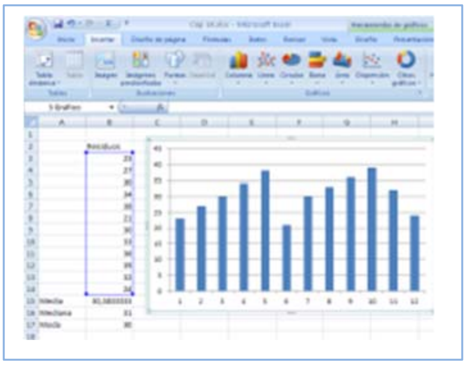
Per a calcular la mitjana ens col·loquem a la casella B16 i escrivim:

=MITJANA(B3:B14),

i per a calcular la moda ens col·loquem a B17 i escrivim: =MODA(B3:B14).

Hem obtingut que la mitjana és 31 i la moda és 30.

Pots investigar la quantitat de funcions que té l'ordinador que també calcula (i que encara no coneixes), desviació típica, coeficient de curtosis, valor mínim, valor màxim, quartil…



També dibuixa gràfiques amb facilitat. Perquè tinga sentit hauríem d'agrupar les dades en una taula. Però si desenvolupes el menú "*d'Inserir*" pots veure els tipus de gràfiques que pots dibuixar: de *columna*, *línia*, *circular*, *barra*, *dispersió*…

Hem dibuixat un diagrama de rectangles seleccionat les dades i inserint un gràfic de columnes.

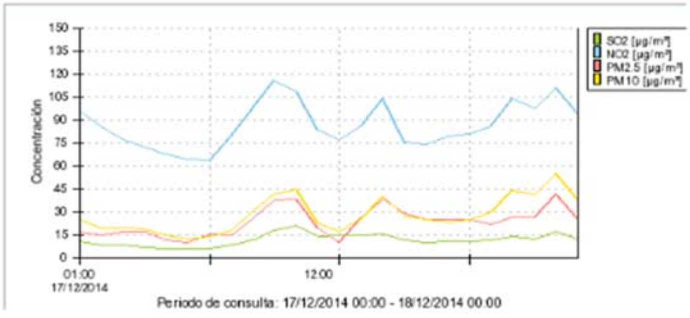
Juga amb l'ordinador. Insereix altres gràfics diferents de columna, de línia, circular, barra, dispersió i indica a quin tipus de representació corresponen.

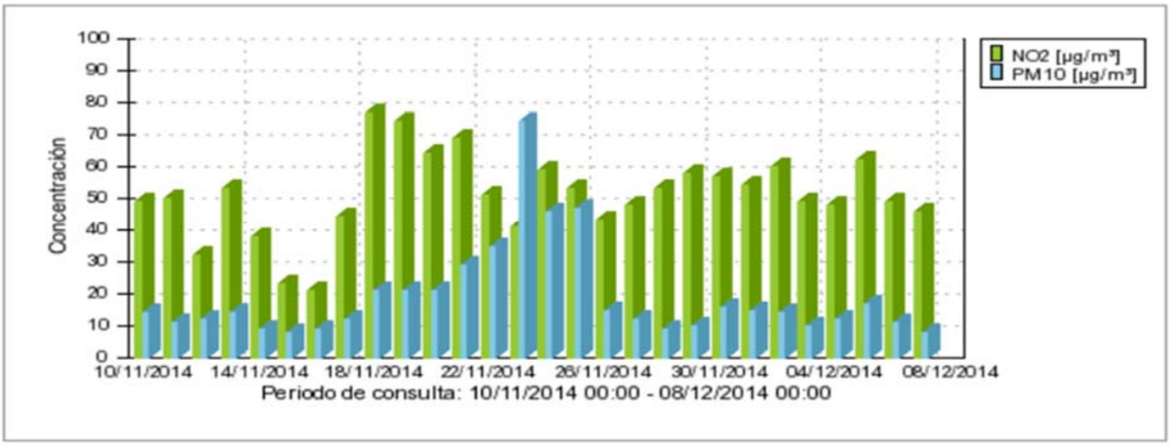
Autora: Nieves Zuasti i Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

CURIOSITATS. REVISTA

Sèries temporals sobre la qualitat de l'aire a Madrid

A Madrid es controla la qualitat de l'aire. Pots veure al **diagrama de línies** les concentracions de **NO_2, SO_2 i partícules** durant un dia a l'estació de Quatre Camins. A l'eix d'abscisses apareix el temps, les 24 hores. A l'eix d'ordenades les distintes concentracions





Tenim ara un **diagrama de barres** també de l'estació de Quatre Camins d'únicament NO_2 i partícules amb els valors **mitjans** diaris durant quatre setmanes, a partir del 8 de desembre. Analitza aquesta nova sèrie temporal. Consideres que aquests valors són alts o són baixos?

Diagrama de barres de la concentració **d'ozó** a l'estació de la Casa de Camp amb els valors **mitjans** mensuals obtinguts durant un **any**. Quan és major la concentració d'ozó, a l'hivern o a l'estiu?

La Comunitat de Madrid i l'Ajuntament de Madrid controlen la qualitat de l'aire, la qual cosa és obligatòria per a complir amb les directives europees. Pots buscar informació a Internet escrivint: http://www.mambiente.munimadrid.es/svca/index.php. o simplement "qualitat de l'aire a Madrid".

RESUM

		Exemples
Fenomen o experiment aleatori	És aquell en què no es pot predir el resultat. Les dades estadístiques són els valors que s'obtenen en un experiment.	Tirar una moneda i saber si eixirà cara o creu
Freqüència absoluta	Nombre de vegades que es repeteix una dada estadística	Si en tirar un dau obtenim 2 vegades el 3, 2 és la freqüència absoluta de 3.
Freqüència relativa	Freqüència absoluta dividit pel nombre d'experiments	Si es realitza un experiment 500 vegades i la freqüència absoluta d'un succés és 107, la freqüència relativa és 107/500.
Freqüència acumulada	Se sumen les freqüències anteriors	
Succés possible.	Possible resultat d'un experiment aleatori	A l'experiment aleatori tirar un donat el conjunt de possibles resultats, o el conjunt de successos elementals o espai mostral és {1, 2, 3, 4, 5, 6}, per tant, un possible resultat és, per exemple, 3.
Espai mostral	Conjunt de resultats possibles	
Successos elementals	Elements de l'espai mostral	
Diagrama de rectangles	Les dades es representen mitjançant rectangles de la mateixa base i d'altura proporcional a la freqüència. S'indica a l'eix horitzontal la variable i al vertical les freqüències.	
Diagrama de línies	S'uneixen els punts superiors d'un una diagrama de rectangles	
Pictograma	Se substitueix els rectangles per un dibuix representatiu	
Diagrama de sectors	En un cercle es dibuixen sectors d'angles proporcionals a les freqüències	
Mitja aritmètica	És el quocient entre la suma de totes les dades i el nombre total de dades.	A les dades 3, 5, 5, 7, 8, la **mitja** és: (3 + 5 + 5 + 7 + 8)/5 = 28/5 = 5,6. La **moda** és: 5. La **mitjana** és 5
Mitjana	Deixa per davall la meitat dels valors i per damunt l'altra meitat	
Moda	El valor que més es repeteix.	

Autora: Nieves Zuasti i Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

EXERCICIS I PROBLEMES de 2n d'ESO

L'atzar i la probabilitat

1. Una urna que conté 10 boles numerades del 0 al 9, traiem una bola, anotem el nombre i tornem la bola a l'urna. Repetim l'experiment 1000 vegades i s'han obtingut els resultats indicats a la taula:

Resultat	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Freqüència absoluta	79	102			93	98	104	77		
Freqüència relativa			0,12	0,13					0,1	
Freqüència absoluta acumulada	79	181								
Freqüència relativa acumulada										1

a) Quina és la freqüència absoluta de 9?

b) Quina és la freqüència absoluta acumulada de 2?

c) Quina és la freqüència relativa acumulada d'1?

d) Copia la taula al teu quadern i emplena-la.

2. Classifica els següents successos en impossibles, poc probable, possibles, molt probable i segurs:

a) Tindre un accident de tràfic.

b) Eixir de passeig i creuar algun carrer.

c) Eixir de passeig i que caiga un raig.

d) Demà nasca algun xiquet a París.

e) Demà no isca el sol.

f) Demà ploga.

3. Pepa ha tirat un dau 25 vegades i ha obtingut els resultats següents:

1, 2, 5, 6, 3, 1, 4, 5, 6, 1, 3, 1, 2, 2, 1, 6, 2, 2, 4, 3, 4, 6, 6, 1, 4

a) Escriu al teu quadern una taula de freqüències absolutes.

b) Escriu una altra de freqüències relatives.

c) Dibuixa un diagrama de rectangles.

d) Dibuixa un diagrama de línies i una representació per sectors.

4. La duració en minuts d'unes telefonades ha sigut:

7, 3, 6, 3, 7, 5, 4, 3, 5, 7, 10, 1, 9, 12, 2

Elabora una taula de freqüències absolutes i una taula de freqüències relatives.

Gràfics estadístics

5. Es fa una enquesta sobre el nombre de vegades que van uns jóvens al mes al cine. Les dades estan a la taula:

Vegades que van al cine	0	1	2	3	4	5
Freqüència absoluta	1	7	9	5	2	1

a) Representa un diagrama de rectangles de freqüències absolutes.

b) Representa un diagrama de línies de freqüències relatives.

c) Fes un pictograma

d) Representa les dades en un diagrama de sectors.

6. Es fa un estudi sobre el que es recicla en una ciutat i es fa una taula amb el pes en percentatge dels distints tipus de residus:

Tipus de residu	Percentatge
Orgànic	15
Paper i cartó	1
Vidre	15
Plàstic	1
Piles	15

a) Fes un diagrama de rectangles

b) Representa un diagrama de línies.

c) Fes un pictograma

d) Representa les dades en un digrama de sectors.

7. Quant val la suma de les altures d'un diagrama de rectangles de freqüències relatives.

8. S'ha mesurat en una classe la grandària de les mans de cada un dels alumnes, i el resultat en centímetres ha sigut el següent:

19, 18, 20, 19, 18, 21, 19, 17, 16, 20,

16, 19, 20, 21, 18, 17, 20, 19, 22, 21,

23, 21, 17, 18, 17, 19, 21, 20, 16, 19

Representa les dades en un diagrama de rectangles i en un diagrama de línies.

9. En una classe s'ha preguntat per les preferències esportives i s'ha obtingut:

Futbol	Bàsquet	Natació	Karate	Ciclisme
8	9	7	6	10

a) Copia la taula al teu quadern i fes una taula de freqüències relatives.

b) Representa aquestes dades en un diagrama de sectors.

c) Fes un pictograma.

10. El 35 % de les cigonyes no ha emigrat enguany a Àfrica i el 6 % morí pel camí. Dibuixa un diagrama per sectors que descriga aquesta situació.

Mesures de centralització

11. Xavier ha tirat un dau 10 vegades i ha obtingut els resultats següents:

6, 3, 1, 4, 2, 2, 1, 4, 3, 4

Calcula la mitja aritmètica.

12. Raquel ha tingut les següents notes als seus exàmens de Llengua: 7, 5, 6, 4, 7, 10, 7. Calcula la mitja aritmètica.

13. S'ha mesurat la grandària de la mà de 10 alumnes, i el resultat en centímetres ha sigut el següent:

19, 18, 21, 21, 18, 17, 18, 17, 19, 21

Calcula la mitja aritmètica.

14. Ens interessa conèixer la distribució de notes obtingudes per 20 estudiants. Les notes són:

2, 8, 9, 0, 0, 5, 8, 2, 7, 1, 6, 3, 7, 2, 4, 9, 4, 9, 5, 1

a) Escriu al teu quadern una taula de freqüències absolutes.

b) Fes un diagrama de línies de freqüències absolutes.

c) Calcula la mitja.

15. Els jugadors d'un equip de bàsquet té les edats següents:

13, 12, 14, 11, 12, 12.

Calcula la mitja.

16. Fem una enquesta preguntant a 10 famílies quantes fills tenen. Els resultats són:

0, 1, 0, 2, 1, 4, 3, 2, 1, 1

Calcula la mitja.

Autora: Nieves Zuasti i Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

17. Pepa ha tirat un dau 25 vegades i ha obtingut els resultats següents:

1, 2, 5, 6, 3, 1, 4, 5, 6, 1, 3, 1, 2, 2, 1, 6, 2, 2, 4, 3, 4, 6, 6, 1, 4

a) Calcula la mitja aritmètica

b) Calcula la mitjana

c) Quina és la moda? És única?

18. Sara ha tingut les següents notes als seus exàmens de Matemàtiques: 9, 7, 8, 6, 9, 10, 9

a) Calcula la mitja aritmètica

b) Calcula la mitjana

c) Quina és la moda? És única?

19. S'ha tingut el resultat de mesurar en una classe la grandària de les mans de cada un dels alumnes, i el resultat en centímetres ha sigut el següent:

19, 18, 20, 19, 18, 21, 19, 17, 16, 20,

16, 19, 20, 21, 18, 17, 20, 19, 22, 21,

23, 21, 17, 18, 17, 19, 21, 20, 16, 19

1. Calcula la mitja aritmètica

2. Calcula la mitjana

3. Quina és la moda? És única?

20. Ens interessa conèixer la distribució de notes obtingudes per 40 estudiants. Les notes són:

4, 1, 7, 10, 3, 2, 8, 9, 0, 0, 5, 8, 2, 7, 1, 2, 8, 10, 2, 10,

3, 4, 8, 9, 3, 6, 3, 7, 2, 4, 9, 4, 9, 5, 1, 3, 3, 9, 7, 8, 10

Escriu al teu quadern una taula de freqüències absolutes.

d) Fes un diagrama de línies de freqüències absolutes.

e) Calcula la mitja

f) Calcula la mitjana

g) Calcula la moda

Autora: Nieves Zuasti i Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

21. Fem una enquesta preguntant a 10 famílies quantes mascotes tenen. Els resultats són:

0, 1, 0, 2, 1, 4, 3, 0, 0, 1

Calcula la mitja, la mitjana i la moda.

22. Els jugadors d'un equip d'handbol té les edats següents:

12, 14, 13, 12, 15, 11, 12, 12, 13, 14, 11, 12, 12.

Calcula la mitja

Calcula la mitjana

Calcula la moda

Ordinador

23. Introdueix les dades de l'enquesta sobre el nombre de mascotes en l'ordinador i torna a calcular la mitja, la mitjana i la moda.

24. Organitza les dades en una taula calculant les freqüències absolutes de 0, 1, 2, 3 i 4. Introdueix aquesta taula a l'ordinador i fes una representació de barres, un diagrama de línies i un diagrama de sectors.

25. Utilitza l'ordinador per a comprovar els resultats obtinguts als exercicis anteriors.

26. Realitza una enquesta en la teua classe i porta els resultats a un ordinador per a fer un informe. L'enquesta podria ser, per exemple, si li agrada o no una determinada sèrie de televisió, o un programa; o el nombre de dies de la setmana que fan algun esport, el tipus de música que els agrada; o... Pensa sobre què podries preguntar.

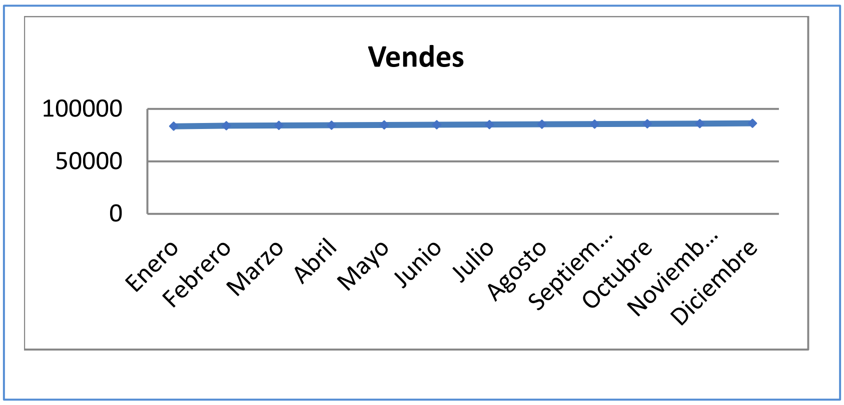
Autora: Nieves Zuasti i Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Problemes

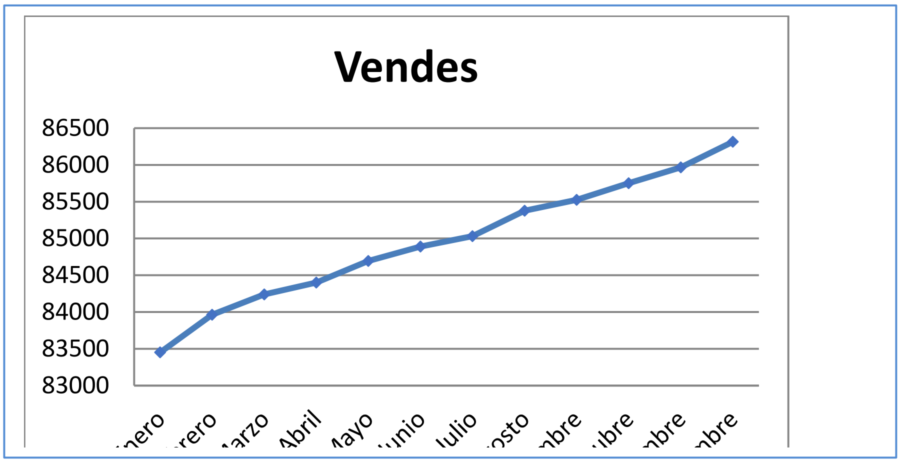
27. El Director Comercial d'una empresa serà avaluat. Per a això ha de donar explicacions dels resultats obtinguts. Vol quedar bé, perquè això li pot suposar un augment de sou. S'han venut les quantitats següents:

Mesos	Gener	Febrer	Març	Abril	Maig	Juny	Juliol	Agost	Setembre	Octubre	Novembre	Desembre
Vendes	83451	83962	84238	84401	84693	84889	85032	85378	85524	85751	859967	86316

L'estadístic de l'empresa li ha entregat la següent gràfica:



No li ha agradat gens i per a la presentació ell s'ha confeccionat el següent gràfic:



Ambdós gràfics són correctes.

Escriu un informe sobre com poden els distints gràfics donar impressions tan diferents.

28. Tira una moneda 100 vegades i anota els resultats obtinguts: C, C, x, …. Construeix una nova llista anotant, cada vegada que haja eixit cara, el resultat següent: C, x, …Confecciona després dues taules: una de freqüències absolutes i una altra de freqüències relatives. Representa els resultats en un diagrama de barres i en un diagrama de sectors.

29. Es coneix el volum setmanal de residus sòlids arreplegats en m^3 durant les 52 setmanes d'un any, en un municipi xicotet: 25'5, 27'1, 31'8, 34'2, 38'9, 21'3, 28'7, 33'2, 36'5, 39'6, 25'2, 24'7, 23'2, 23'3, 22'2, 26'4, 26'7, 29'6, 31'3, 30'5, 28'3, 29'1, 26'7, 25'2, 24'5, 23'7, 25'4, 27'2, 31'7, 34'5, 38'4, 21'2, 28'1, 33'7, 36'8, 39'9, 31'7, 34'4, 38'2, 21'9, 28'1, 33'5, 25'2, 24'7, 23'2, 23'3, 22'2, 26'4, 25'9, 24'1, 23'2, 23'6, 26'4.

Calcula la mitja, la moda, la mitjana , la variància i la desviació típica.

30. Amb les dades del problema anterior:

Representa les dades en una taula prenent intervals de longitud dos m^3: (21, 23), (23,25), … (39, 41)

Dibuixa un diagrama de rectangles i un diagrama de línies de freqüències absolutes..

Quantes famílies tenen un volum de fem major que 31 m^3?

Quin percentatge de famílies tenen un volum de fem menor que 35 m^3?

31. Busca en revistes o periòdics dues gràfiques estadístiques, retalla-les i apega-les al teu quadern. Moltes vegades aquestes gràfiques tenen errors. Observa-les detingudament i comenta les qüestions següents:

Està clara la variable a què es referix? I les freqüències?

Són correctes les unitats? Poden millorar-se?

Comenta les gràfiques.

32. La mitja de sis nombres és 5. S'afigen dos nombres més però la mitja continua sent 5. Quant sumen aquests dos nombres?

Autora: Nieves Zuasti i Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

AUTOAVALUACIÓ de 2n d'ESO

Indica la resposta correcta:

a)La freqüència relativa s'obté dividint per 100 la freqüència absoluta

b) La freqüència relativa s'obté sumant tots els valors anteriors

c) La freqüència relativa s'obté dividint la freqüència absoluta pel total d'experiments.

d) Freqüència relativa és el mateix que probabilitat

S'extrau una carta d'una baralla espanyola. La probabilitat que siga un rei és:

a) 1/40 b) 0,25 c) 4/40 d) 10/40

Indica quina és la frase que falta a la definició següent:

En … … …. … … …. les freqüències es representen en un cercle que es divideix en sectors circulars d'amplituds proporcionals a les freqüències.

a) Diagrama de línies b) Diagrama de rectangles c) Pictograma d) Diagrama de sectors

Si en una taula de freqüències a un valor li correspon una freqüència relativa de 0,125, en dibuixar un diagrama de sectors l'angle corresponent és de:

a) 45 º b) 30 º c) 60 º d) 72 º

En un diagrama de rectangles de freqüències relatives, la suma de les seues altures és igual a:

a) 100 b) 1 c) Total de dades d) Suma de les seues bases

La mitja de les següents dades 7; 0; 9,5; 2; 4,1; 3,8, és:

a) 6,3 b) 3,8 c) 4,4 d) 5,5

La mitjana de les següents dades 3, 4, 6, 7, 8, és:

a) 6 b) 7 c) 4 d) 5

La moda de les següents dades 3, 4, 6, 7, 5, 8, 7, 7, és:

a) 6 b) 7 c) 4 d) 5

Es tira un dau. Quina és la probabilitat que no siga un 2?

a) 3/4 b) 1/6 c) 2/6 d) 5/6

Volem saber els esports que fan els escolars d'un cert centre. Passem una enquesta a 20 de 2n A. Indica en aquest cas quina és la població i quina és una mostra:

a)Estudiants d'Espanya i estudiants d'aqueix centre

b) Estudiants d'aqueix centre i estudiants de 2n A

c) Estudiants d'aqueix centre i els 20 estudiants de 2n A

d) Estudiants de 2n A i els 20 estudiants triats de 2n A

Autora: Nieves Zuasti i Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

2n D'ESO

ÍNDEX