Matemàtiques orientades a les ensenyances acadèmiques:

3º B d'ESO

www.apuntesmareaverde.org.es

Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Textos Marea Verde

I.S.B.N. - 13: 978-84-697-0275-8

I.S.B.N. - 10: 84-697-0275-0

Matemàtiques orientades a les ensenyances acadèmiques:

3º B d'ESO
Capítol 1:
Nombres Racionals

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Paco Moya

Revisora: María Molero

Il·lustracions: Paco Moya i Banc d'Imatges d'INTEF

Traducció al valencià: Pedro Podadera IES Juan de Garay

Índex

Resum

En este capítol recordarem moltes de les coses que ja saps de cursos anteriors, com les operacions amb nombres naturals i enters, les operacions amb fraccions i expressions decimals. Estudiarem els nombres racionals.

0. ET CONVÉ RECORDAR

0.1. Prioritat de les operacions

Quan no hi ha parèntesi que ens indiquen quina operació fer primer o en operacions dins d'un parèntesi es va arribar a un acord per a saber com actuar. A saber:

1º Es resolen els parèntesis interiors.

Si no hi ha parèntesi o dins d'un parèntesi farem:

2º Les potències i les arrels

3º Les multiplicacions i divisions.

4º Les sumes i restes.

S'han d'evitar:

Expressions del tipus 1 – 100 : 5 · 5, on no està clar què fer (la multiplicació i divisió tenen la mateixa prioritat). S'han de posar parèntesi per a indicar qual fer primer. L'expressió de dalt pot ser:

$$1 - (100 : 5) \cdot 5 = -99 \text{ o bé } 1 - 100 : (5 \cdot 5) = -3.$$

De totes maneres, si te la trobes, faràs:

5º Si hi ha diverses operacions amb la mateixa prioritat es faran d'esquerra a dreta.

Exemples:

- $(5 - 7) \cdot 10 - 8$ **No podem fer 10 – 8** (encara que sí que pots, no deus)

Primer el parèntesi➔ $-2 \cdot 10 - 8$ Després el producte➔ $-20 - 8$ Finalment la resta➔ -28

- $10 - 2\cdot3^2 = 10 - 2\cdot9 = 10 - 18 = -8$. Ací està prohibit fer 10 – 2 i fer 2·3.
- $3 \cdot (-2 + 4)^2 - 8 - 5 \cdot 2^2 = 3 \cdot 2^2 - 8 - 5 \cdot 4 = 12 - 8 - 20 = -16$
- -10^2 val –100 ja que primer es fa la potència i a més el signe menys no està elevat a 2. No obstant això $(-10)^2$ sí que val +100.
- $-10^2 = -10 \cdot 10 = -100$
- $(-10)^2 = (-10) \cdot (-10) = +100$
- $\sqrt{9}\cdot 25 = 3 \cdot 25 = 75$. Primer es fa l'arrel.
- $10 - 9x$ **no** és $1x$ ja que no pot fer-se la resta de cap manera (el producte amb la x té prioritat)

Tin en compte que esta prioritat és vàlida **sempre**, per a operacions amb tot tipus de nombres o altres objectes (per exemple: polinomis). Val la pena saber-se-la, no?

Autor: Paco Moya
Traducció: Pedro Podadera. Institute Juan de Garay de Valencia

0.2. Ús de parèntesi

Els parèntesis ens indiquen les operacions que s'han de fer primer. De fet la primera cosa que farem seran els parèntesis **interiors** i seguirem **de dins cap a fora**. És com vestir-se: primer et poses la camiseta, després el jersei i després la caçadora. És complicat fer-ho al contrari. Per això, abans de posar-te a calcular a la babalà, mira tota l'expressió per a veure què es fa primer.

- Ha d'haver-hi tants parèntesis oberts com tancats, en cas contrari es diu que "els parèntesis no estan ben balancejats".
- Si quelcom multiplica a un parèntesi no cal posar el símbol "·".

Exemples:

- $2 \cdot (2 - 2 \cdot (2 - 2 \cdot 2)) = 2 \cdot (2 - 2 \cdot (2 - 4)) = 2 \cdot (2 - 2 \cdot (-2)) = 2 \cdot (2 + 4) = 2 \cdot 6 = 12$
- $2(3 - 2) = 2 \cdot 1$
- $(2 - 3)(6 - 4) = -1 \cdot 2 = -2$
- Si volem dividir entre 2 el resultat de fer 75 – 90 ***no posarem açò 75* – *90 : 2***, ací el 2 només dividix a 90. Escriurem (75 – 90) : 2

Els parèntesis s'utilitzen per a ficar arguments de funcions.

Per exemple:

- Si en un programa o en la calculadora volem fer l'arrel de $100 \cdot 3^4$, escriurem *arrel*(100*3^4).

0.3. Operacions amb enters

Recordem el més important:

Regla dels signes per a la suma:

- La suma de 2 nombres positius és positiva. ***Exemple:*** +5 + 7 = +12
- La suma de 2 nombres negatius és negativa. ***Exemple:*** –10 – 17 = –27

Es posa el signe –, i se sumen els seus valors absoluts.

Suma	+	-
+	+	>
-	>	-

Exemple:

- Si perd 10 i després perd altres 17, he perdut 27

La suma d'un nombre positiu amb un altre negatiu tindrà el signe del major en valor absolut.

Exemple:

- $-7 + 15 = +8$; $+8 + (-20) = 8 - 20 = -12$

Es posa el signe del més gran (en valor absolut) i es resten.

Exemple:

- Si perd 7 i després guanye 15, he guanyat 8 (són majors els guanys que les pèrdues).

Exemple:

- Si guanye 8 però després perd 20, he perdut 12 (són majors les pèrdues).

Regla dels signes per a la multiplicació (i la divisió):

- Positiu x Positiu = Positiu
- Positiu x Negatiu = Negatiu x Positiu = Negatiu
- Negatiu x Negatiu = Positiu.

x x	+	-
+	+	-
-	-	+

Exemples:

- +2 · (–7) = –14. Si rebut d'herència 2 deutes de 7€, tinc un deute de 14€.
- –2 · (–7) = +14. Si em lleven 2 deutes de 7 €, he guanyat 14 €!

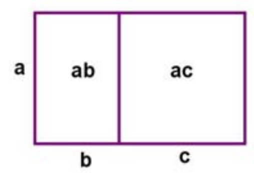
Ara un poquet de matemàtiques serioses, que ja estem a 3º!

Demostració **rigorosa de què "0 · *x* = 0 per a tot *x*" i de que " (–1) · (–1) = +1"**

Per fer això utilitzarem 4 propietats dels nombres que coneixes:

1ª) $a + 0 = a$ per a tot nombre a (0 és l'element neutre de la suma)

2ª) **La propietat distributiva:** $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$



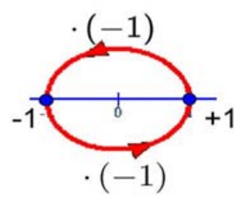
3ª) $1 \cdot a = a$ per a tot nombre a (1 és l'element neutre del producte)

4ª) $-a$ és l'oposat de $+a$, és a dir $-a + a = a + (-a) = 0$

Demostrem "$0 \cdot x = 0$ per a tot nombre x":

Com $a - a = 0$, per la propietat distributiva: $x(a - a) = x \cdot 0 = xa - xa = 0$

Demostrem que "$(-1) \cdot (-1) = +1$":



$(-1) \cdot (-1 + 1) = (-1) \cdot 0 = 0$; però per la propietat distributiva

$(-1) \cdot (-1 + 1) = (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = (-1) \cdot (-1) + (-1)$.

Per tant $(-1) \cdot (-1) + (-1) = 0$.

Si sumem 1 en ambdós membres: $(-1) \cdot (-1) + (-1) + 1 = +1 \rightarrow$

$(-1) \cdot (-1) + 0 = +1 \rightarrow (-1) \cdot (-1) = +1$

Autor: Paco Moya
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

Activitats resoltes

- *Calcula pas a pas*:

$$(((-15 - 5\cdot(-20 - 6)) : (15 - 4^2)) + 5 - 4\cdot 2) \cdot (-10)$$

Calculem en primer lloc $-20 - 6 = -26$; $4^2 = 16$ y $4\cdot 2 = 8$ i ens queda:

$(((-15 - 5\cdot(-26)) : (15 - 16)) + 5 - 8) \cdot (-10) = (((-15 + 130) : (-1)) - 3) \cdot (-10) =$

$((115 : (-1)) - 3) \cdot (-10) = (-115 - 3) \cdot (-10) = -118 \cdot (-10) = +1180$

Activitats proposades

1. Calcula:

a) $-20 + 15$ b) $-2 \cdot (-20 + 15)$ c) $-20 : (10 - 2(-20 + 15))$

d) $(-80 - 20 : (10 - 2(-20 + 15))) \cdot (3 - 2 \cdot 3^2)$

2. Calcula:

a) $-10 + 20 : (-5)$ b) $(-10 + 20) : (-5)$ c) $-100 : ((-20) : (-5))$

d) $(-100 : (-20)) : (-5)$ e) $\sqrt{36\cdot 4}$

3. Calcula:

a) $3-(4\cdot 3-2\cdot 5)^2-(3-5)^3$ b) $5 - 3^2 - 2 \cdot (-5) - (7 - 9)^2$

c) $7 - 2 \cdot (3 - 5)^2 + 2 \cdot (-3) + 8 - (-2)^2$ d) $2-(2\cdot 3-3\cdot 4)^2-(2-4)^3$

1. NOMBRES RACIONALS

1.1. Definició

Els **nombres racionals** són tots aquells nombres que ***poden*** expressar-se per mitjà d'una fracció de nombres enters. És a dir, el nombre *r* és **racional** si $r = \frac{a}{b}$, amb *a*, *b* nombres enters i $b \neq 0$.

Una fracció és una divisió indicada, així $\frac{7}{3} = 7:3$, però la divisió no es realitza fins que ho necessitem. Hi ha moltes ocasions en què és millor deixar les operacions indicades.

Amb un exemple n'hi haurà prou:

- Prova a fer la divisió 1,142857142857… : 8, difícil, no?, no obstant això, $\frac{8}{7}:8 = \frac{1}{7}$ és un poc més senzilla i a més **exacta**.

El nom "racional" ve de "***raó***", que en matemàtiques significa divisió o quocient.

El conjunt dels nombres racionals es representa per Q.

Un nombre racional té infinites representacions en forma de fracció.

Així: $\frac{1}{3} = \frac{3}{9} = \frac{6}{18} = \ldots$ son infinites fraccions que representen al mateix nombre racional, se'ls anomena "**equivalents**" ja que tenen el mateix valor numèric. Si fem les divisions en l'exemple totes valen 0,333… que és la seua expressió decimal.

Els números "*enters*" són racionals ja que es poden expressar per mitjà d'una fracció, per exemple:

$$-2 = \frac{-8}{4}$$

Tot nombre racional té un representant que és la seua fracció **irreductible**, aquella que té els números més xicotets possibles al numerador i al denominador. A aquesta fracció s'arriba a partir de qualsevol altra dividint el numerador i denominador pel mateix nombre. Si es vol fer en un sol pas es dividirà entre el Màxim Comú Divisor (M.C.D.) del numerador i el denominador.

Per exemple: $\frac{60}{80} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ on hem dividit primer entre 10 i després entre 2, però podíem haver dividit entre 20 directament ja que 20 és el MCD(60, 80). Per tant $\frac{3}{4}$ és la fracció irreductible i per això la que representa al número racional que té moltes altres formes de fracció com 60/80 = 6/8 = 30/40 = 12/16 = 9/12 = 15/20, = 18/24 = 21/28 = 24/32 = 27/36 … i per expressió decimal 0,75

1.2. Fraccions equivalents

Dos fraccions són equivalents si es verifiquen les següents condicions (totes equivalents):

- Al fer la divisió obtenim la mateixa expressió **decimal**. Aquesta és la definició.

Exemple:

4 : 5 = 8 : 10 = 0,8 doncs $\frac{4}{5}$ i $\frac{8}{10}$ són equivalents i pot escriure's $\frac{4}{5}=\frac{8}{10}$.

- Els productes **creuats són iguals**: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c$

És fàcil de demostrar, multipliquem a un costat i a l'altre de l'igual per *b* i per *d*

$\frac{a}{b}\cdot b\cdot d=\frac{c}{d}\cdot b\cdot d$, com *b* : *b* = 1 i *d* : *d* = 1 ens queda *a*·*d* = *c*·*b*.

Per exemple:

- $\frac{12}{8}=\frac{6}{4}$ ja que 12 · 4 = 8 · 6 = 48

- **Al simplificar les fraccions s'arriba a la mateixa fracció irreductible.**

Si A = B i C = B s'ha de complir que A = C

Exemple:

- $\frac{80}{60}=\frac{4}{3};\frac{12}{9}=\frac{4}{3}\text{doncs}\frac{80}{60}=\frac{12}{9}$

- **Es pot passar d'una fracció a una altra multiplicant (o dividint) el numerador i el denominador per un mateix nombre.**

Exemple:

$\frac{6}{4}=\frac{24}{16}$ perquè basta multiplicar el numerador i el denominador de la primera per 4 per obtindre la segona..

En general $\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n}$

Reducció a comú denominador

A fi de comparar 2 o més fraccions (veure quina és major) i també per poder sumar-les o restar-les és important obtindre fraccions equivalents que tinguen el mateix denominador.

Primer un ***exemple*** i després la teoria:

- Vull saber si $\frac{5}{6}$ és major que $\frac{6}{7}$ sense fer la divisió. Busquem un múltiple comú de 6 i de 7 (si és el mínim comú múltiple millor, però no és imprescindible), 42 és múltiple de 6 i de 7. Ho escrivim com a nou denominador per a les dues fraccions: $\frac{5}{6}=\frac{}{42};\frac{6}{7}=\frac{}{42}$

Ara calculem els nous numeradors: com el 6 l'he multiplicat per 7 per arribar a 42 perquè el 5 el multipliquem també per 7 per obtindre una fracció equivalent $\frac{5}{6}=\frac{5\cdot7}{6\cdot7}=\frac{35}{42}$ i com el 7 l'he multiplicat per 6, el 6 també el multiplique per 6 obtenint $\frac{6}{7}=\frac{6\cdot6}{7\cdot6}=\frac{36}{42}$, ara està clar quina de les dues és més gran, no?

Per obtindre fraccions equivalents $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ amb el **mateix denominador busquem** un múltiple comú de *b* i *d* (si és el mínim comú múltiple millor) que anomenarem m, i fem $\frac{a\cdot\frac{m}{b}}{m}$ i $\frac{c\cdot\frac{m}{d}}{m}$

1.3. Ordenació de fraccions

Per ordenar una sèrie de fraccions hi ha diversos procediments:

i) Fer les divisions i comparar les expressions decimals.

Aquest procediment és el més fàcil però no el més ràpid (a no ser que tingues calculadora).

Per exemple:

- Ens demanen que ordenem de menor a major les fraccions següents:

$$\frac{20}{19};\frac{21}{20};\frac{-20}{19};\frac{-21}{20};\frac{29}{30};\frac{28}{29}$$

Fem les divisions que donen respectivament: 1,0526…; 1,05; –1,0526…; –1,05; 0,9666… i 0,9655…

Mirant els nombres decimals sabem que:

$$\frac{-20}{19}<\frac{-21}{20}<\frac{28}{29}<\frac{29}{30}<\frac{21}{20}<\frac{20}{19}$$

Recorda que

Els nombres negatius són sempre menors que els positius i a més entre nombres negatius és menor el que té major valor absolut (–4 < –3).

ii) Usar la lògica i el truc següent: Per a fraccions positives $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\Leftrightarrow a\cdot d<b\cdot c$.

Exemple:

- $\frac{8}{9}<\frac{10}{11}$ perquè 8·11 < 9·10.

Autor: Paco Moya
Traducció: Pedro Podadera. Institut Juan de Garay de Valencia

Demostració:

$8\cdot 11 < 9\cdot 10 \Rightarrow \frac{8\cdot 11}{9\cdot 11} < \frac{9\cdot 10}{9\cdot 11} \Rightarrow \frac{8}{9} < \frac{10}{11}$; hem dividit entre 9·11. I simplificat.

I al contrari: $\frac{8}{9} < \frac{10}{11} \Rightarrow \frac{8\cdot 9\cdot 11}{9} < \frac{10\cdot 9\cdot 11}{11} \Rightarrow 8\cdot 11 < 10\cdot 9$;hem multiplicat per 9·11 i simplificat.

No cal que uses la demostració, la posem només perquè veges que en matemàtiques "quasi" tot té la seua explicació.

I això d'usar la lògica què és?

Comencem pel més fàcil,

Exemple:

- Comparar $\frac{20}{19} y \frac{28}{29}$

$\frac{20}{19} > 1$ ja que 20 > 19. Però $\frac{28}{29} < 1$ ja que 28 < 29. Està clar que la segona és menor.

- Un poc més difícil, comparem $\frac{20}{19} y \frac{21}{20}$:

$$\frac{20}{19} = \frac{19+1}{19} = \frac{19}{19} + \frac{1}{19} = 1 + \frac{1}{19}$$

$$\frac{21}{20} = \frac{20+1}{20} = \frac{20}{20} + \frac{1}{20} = 1 + \frac{1}{20}$$. Però què és major 1/19 o 1/20?

És major 1/19 i per tant és major la primera. Pensa que si dividim una pizza en 19 trossos iguals estos són majors que si la dividim en 20 trossos iguals.

Si *a* i *b* són positius $\Rightarrow a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

- Així que 1/3 > 1/4 per exemple.

Més difícil encara:

- Comparem $\frac{19}{20}$ i $\frac{18}{19}$. Ara 19/20 = 1 – 1/20 i 18/19 = 1 – 1/19.

Com 1/19 > 1/20 ara la fracció major és 19/20 ja que li falta menys per a arribar a 1.

Amb nombres més senzills s'entén millor: 2/3 < 3/4 ja que a 2/3 li falta 1/3 per arribar a 1, i a 3/4 només 1/4.

Autor: Paco Moya
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

Important: Si *a* i *b* són positius llavors $a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

iii) Reduir **a comú denominador i comparar els numeradors**:

- Ens demanen que ordenem de major a menor les fraccions següents:

$$\frac{5}{6};\frac{7}{8};\frac{-9}{4};\frac{-7}{3};\frac{-2}{1}$$

Primer busquem un nombre que siga múltiple de 6, de 8, de 4 i de 3 (si és el mínim comú múltiple millor que millor). Trobem el 24 que és múltiple de tots ells. El posem com a nou denominador de totes les fraccions i calculem els nous numeradors perquè les fraccions siguen equivalents: 24:6 = 4 després el 6 cal multiplicar-lo per 4 per arribar a 24, el mateix fem amb el 5, 5·4 = 20 és el nou numerador. Així amb les altres.

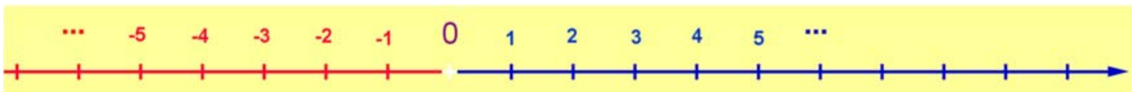
$$\frac{5}{6}=\frac{5\cdot 4}{6\cdot 4}=\frac{20}{24}$$
$$\frac{7}{8}=\frac{7\cdot 3}{8\cdot 3}=\frac{21}{24}$$
$$\frac{-9}{4}=\frac{-9\cdot 6}{4\cdot 6}=\frac{-54}{24}$$
$$\frac{-7}{3}=\frac{-7\cdot 8}{3\cdot 8}=\frac{-56}{24}$$
$$\frac{-2}{1}=\frac{-2\cdot 24}{1\cdot 24}=\frac{-48}{24}$$

Després comparem els numeradors i obtenim que:

$$\frac{7}{8}>\frac{5}{6}>-2>\frac{-9}{4}>\frac{-7}{3}$$

ja que 21 > 20 > -48 > –54 > –56

1.4. Representació a la recta numèrica



Aquesta és la recta numèrica, en ella tot nombre real té un lloc exacte.

Recordem coses que ja saps:

- Per dibuixar-la només es poden prendre dues decisions: on col·loquem el 0 i on col·loquem l’1, és a dir, on està l’origen i quin és la grandària de la unitat.
- Les unitats han de ser sempre de la mateixa grandària.
- Els nombres positius van a la dreta del 0 i els negatius a l’esquerra.
- El 0 no és ni positiu ni negatiu.
- La recta numèrica no té ni principi ni fi. Nosaltres només podem dibuixar una “xicoteta” part.
- Donats 2 nombres *a*, *b* es compleix: ***a* < *b* si *a* està a l’esquerra de *b*** i viceversa.

Així per exemple:

1 < 3; –1 < 1; –4 < –2

Tot nombre racional té una posició predeterminada en la recta numèrica. Les infinites fraccions equivalents que formen un nombre racional ocupen el mateix punt de la recta. Així que 2/3 i 4/6, que són el mateix nombre ocupen el mateix punt.

Vegem com representar les fraccions de forma exacta.

Fracció pròpia, fracció impròpia i forma mixta

Fracció pròpia: Es diu de la fracció *a/b* on ***a* < *b***. És a dir, el numerador és menor que el denominador.

Per exemple:

- 4/5 o 99/100.

Si *a* < *b* al fer la divisió l'expressió **decimal serà menor que 1**.

Per exemple:

- 4/5 = 4:5 =0,8.

Fracció impròpia: Es diu de la fracció *a/b* on ***a* > *b*,** numerador major que el denominador.

Exemple:

- 15/4 o 37/27. Si fem la divisió l'expressió **decimal és major d'1.** 15/4 = 3,75 y 37/27 = 1,37037037…

Nombre mixt: Les fraccions impròpies poden escriure's com la suma d'un nombre enter i d'una fracció pròpia.

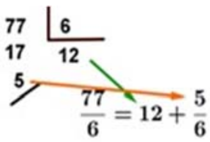
Així per exemple:

- $\frac{9}{5}=\frac{5+4}{5}=1+\frac{4}{5}$, aquesta última és la forma mixta.

A Espanya no és freqüent però en el món anglosaxó sol escriure's $1\frac{4}{5}$ que significa el mateix.

La calculadora científica passa a forma mixta, investiga-ho.

La forma ràpida i automàtica d'escriure una fracció en forma mixta és la següent:



- $\frac{77}{6}$ és impròpia perquè 77 > 6, per a escriure-la en forma mixta fem la divisió sencera 77 : 6, és a dir, sense decimals, ens interessa el quocient i la resta.

El quocient és la part sencera, la resta és el numerador de la fracció i el divisor és el denominador.

És important que ho intentes fer de cap (quan siga raonable), és fàcil, per exemple:

- 47/6, busquem el múltiple de 6 més pròxim a 47 per baix, aquest és **7** · 6 = 42, per tant:

$$47/6 = 7 + 5/6$$

ja que de 42 a 47 van 5. Pensa-ho, si ens mengem 47/6 de pizza, ens hem menjat 7 pizzes senceres i a més 5/6 de pizza.

Nota:

També és fàcil trobar el quocient i la resta amb la calculadora, per si tens pressa.

Per a 437/6, fes la divisió 437 : 6 , obtens 72,83333…, la part sencera és 72, només ens queda calcular la resta. Tenim 2 camins:

1º) Fas 437 – 72 · 6 = 5 i ja està.

2º)Multiplica la part decimal pel divisor: 0,8333… · 6 = 5, que és la resta. Si és necessari arredonix (0,8333 · 6 = 4,9998 que arredonim a 5).

Només et permetem fer açò si saps per què funciona, si no ho saps, oblida-ho.

Si la fracció és negativa procedim de la manera següent:

- $\frac{-19}{5} = -\left(3 + \frac{4}{5}\right) = -3 - \frac{4}{5}$, ja que la divisió dóna 3 de quocient i 4 de resta.

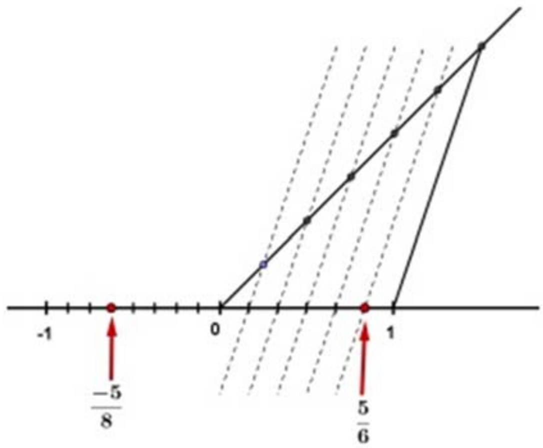
Representació de fraccions

a) Si la fracció és pròpia:

Per exemple

- *Representa la fracció* 5/6: El valor està entre 0 i 1, per tant dividim la primera unitat en 6 parts iguals i prenem 5.

A la figura s'indica com fer-ho de manera exacta emprant el ***Teorema de Tals***. Tracem una recta obliqua qualsevol que passe per 0, marquem amb el compàs 6 punts a la mateixa distància entre si (la que siga, però igual). Unim l'últim punt amb l'1 i tracem paral·leles a eixe segment que passen pels punts intermedis de la recta obliqua (les línies discontínues). Aquestes rectes paral·leles dividixen l'interval [0, 1] en 6 parts iguals.



Fixa't que per a dividir en 6 parts iguals només cal marcar 5 punts intermedis a la mateixa distància, sempre un menys. Per a dividir en 8 parts iguals marquem 7 punts intermedis.

Si la fracció és negativa es fa igual però a l'interval [–1, 0].

En la figura hem representat –5/8, hem dividit l'interval [–1, 0] en 8 parts iguals i hem comptat 5 començant en el 0. Assegura't d'entendre-ho i si no és el cas pregunta. Per *cert, la fletxa apunta al punt i no a l'espai que hi ha entre ells.*

Autor: Paco Moya
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

Si volem representar la fracció pròpia *a/b* **es divideix la primera unitat en "*b*" parts iguals i es compten "*a*" divisions.**

En cas de ser **negativa** es fa igual però comptant des de 0 cap a l'esquerra.

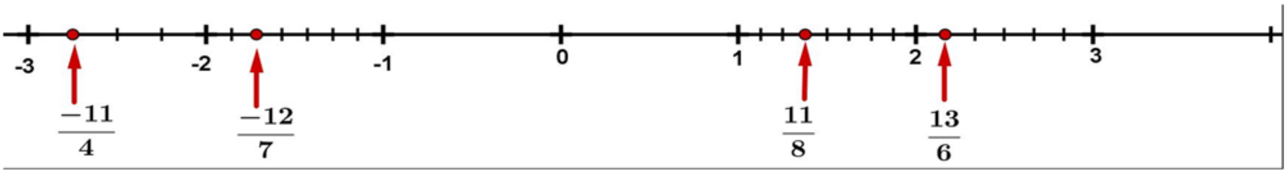
b) Si la fracció és impròpia:

Activitats resoltes

- *Representem* 13/6. El primer és escriure-la en la seua forma mixta, $\frac{13}{6}=2+\frac{1}{6}$, ara és fàcil representar-la, ens n'anem al 2, la unitat que va del 2 al 3 la dividim en 6 parts iguals i prenem 1 (veure imatge).
- Igual per $\frac{11}{8}=1+\frac{3}{8}$, ens n'anem a l'1 i la unitat que va de l'1 al 2 la dividim en 8 parts iguals i prenem 3.

Si la fracció és negativa procedim així:

- *Representem* $\frac{-12}{7}=-\left(1+\frac{5}{7}\right)=-1-\frac{5}{7}$, ens n'anem al –1, la unitat que va del –1 al –2 la dividim en 7 parts iguals i comptem 5 cap a l'esquerra començant en –1.
- *Representem* $\frac{-11}{4}=-\left(2+\frac{3}{4}\right)=-2-\frac{3}{4}$, ens n'anem al –2, dividim en 4 parts iguals i prenem 3,



comptant cap a l'esquerra i començant en –2 (veure imatge).

Activitats proposades

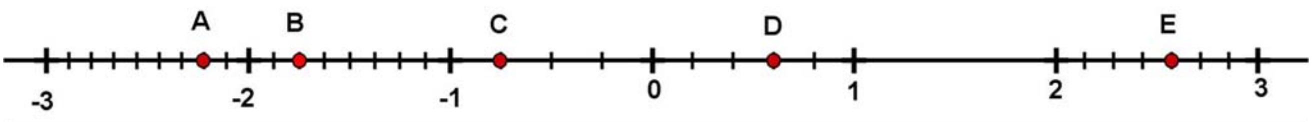
4. Passa a forma mixta les fraccions següents: $\frac{50}{7};\frac{25}{11};\frac{101}{6}$

5. Passa a forma mixta les fraccions $\frac{-30}{7};\frac{-50}{13};\frac{-100}{21}$

6. Representa en la recta numèrica les fraccions : $\frac{1}{5};\frac{3}{7};\frac{-5}{8};\frac{-3}{4}$

7. Passa a forma mixta i representa les fraccions: $\frac{23}{8};\frac{-23}{8};\frac{180}{50};\frac{-26}{6}$

8. Troba les fraccions que es corresponen amb els punts *A, B, C, D* i *E, expressant* en forma mixta i com



a fracció impròpia les representades pels punts *A, B* i *E*.

1.5. Operacions amb fraccions

Repassarem les operacions amb fraccions, en concret, la suma, la resta, el producte i la divisió.

Suma i resta de fraccions

La suma i la resta són les operacions més exigents ja que només poden sumar-se o restar-se coses iguals. No podem sumar metres amb segons, ni € amb litres. De la mateixa manera **no poden sumar-se terços amb quintos** ni quarts amb mitjans. És a dir, no es pot fer la suma $\frac{5}{6}+\frac{3}{4}$ així tal qual, ja que els sisens i els quarts són de distinta grandària. Però, hi haurà alguna manera de sumar-les?, si.

El primer és trobar 2 fraccions equivalents que tinguen el mateix denominador, i llavors ja sí es podran sumar.

Vegem l'exemple:

- Un múltiple de 6 i 4 és 12. Escrivim 12 com a nou denominador i trobem els numeradors perquè les fraccions siguen equivalents:

  $\frac{5}{6}+\frac{3}{4}=\frac{5\cdot 2}{12}+\frac{3\cdot 3}{12}=\frac{10}{12}+\frac{9}{12}=\frac{10+9}{12}=\frac{19}{12}$, els dotzens ja sí es poden sumar, i el resultat són dotzens.

Un altre exemple:

- $\frac{13}{6}-\frac{51}{10}+\frac{8}{12}=\frac{13\cdot 10}{60}-\frac{51\cdot 6}{60}+\frac{8\cdot 5}{60}=\frac{130-306+40}{60}=\frac{-136}{60}=\frac{-34}{15}$

Hem trobat un múltiple de 6, de 10 i de 12 (si és el mínim comú múltiple millor que millor), s'escriu com a denominador comú i fem 60 : 6 = 10, després el 13 el multipliquem per 10, 60:10 = 6 després el 51 el multipliquem per 6, etc.

Quan totes les fraccions tenen el mateix denominador, es sumen o resten els numeradors, deixant el mateix denominador. Si és possible es simplifica la fracció resultant.

Als casos en què no siga fàcil trobar el mínim comú múltiple es fa el següent:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{c\cdot b}{b\cdot d}=\frac{ad+cb}{bd}$$

Així per exemple:

$$\frac{15}{387}+\frac{19}{155}=\frac{15\cdot 155+19\cdot 387}{387\cdot 155}=\frac{9678}{59985}=\frac{3226}{19995}$$

Producte i divisió de fraccions:

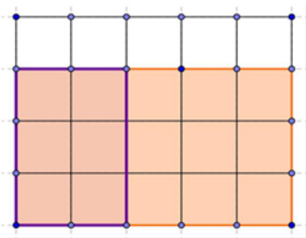
Sorprén que el producte i la divisió de fraccions siguen més senzills que la suma i la resta.

Producte: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$, es multipliquen els numeradors entre si per a obtindre el numerador de la fracció producte i els denominadors entre si per a determinar el denominador de la dita fracció, fàcil no?

Així:

$$\frac{3}{11}\cdot\frac{5}{7}=\frac{3\cdot 5}{11\cdot 7}=\frac{15}{77}$$

Per què les fraccions es multipliquen així?



No demostrarem el cas general, amb un exemple ens serà suficient.

- $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}$ significa dividir en 4 parts iguals i agafar 3 (els 3 franges inferiors de la figura). Ara hem de fer 2/5 del que ens ha quedat, eixes 3 franges les dividim en 5 parts iguals i prenem 2. Com pots veure's ens queden 6 parts iguals de les 20 totals.

De vegades convé fer la multiplicació amb intel·ligència:

- Abans de multiplicar ens fixem en que el 17 es pot simplificar (per a què multiplicar per 17 i després dividir per 17?) i després el 5 ja que 15=3·5.

$$\frac{17}{15}\cdot\frac{5}{17}=\frac{\cancel{17}\cdot 5}{15\cdot\cancel{17}}=\frac{1\cdot\cancel{5}}{3\cdot\cancel{5}}=\frac{1}{3}$$

Un altre exemple:

- $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}$ fes-la, esperem que arribes al resultat correcte ja simplificat que és 1/6 ☺

Tenim quelcom important que dir-te, no volem veure açò mai, mai:

$$\frac{\cancel{7}+3}{\cancel{7}+5}=\frac{3}{5}$$

és absolutament **fals** (10/12 = 5/6 és el correcte). Només poden simplificar-se si el nombre està multiplicant al numerador i al denominador (si és factor comú). Açò tampoc està gens **bé**.

$$\frac{\cancel{7}\cdot 2+3}{\cancel{7}\cdot 4+5}=\frac{2+3}{4+5}$$

Fracció inversa:

La fracció inversa $\frac{a}{b}$ és $\frac{b}{a}$ doncs es compleix que $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{ab}{ab}=1$ que és la definició d'invers.

Exemples:

- La inversa de 3/4 es 4/3 i la inversa de 2 és 1/2.

Divisió:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

Doncs per a dividir es multiplica per la inversa de la fracció que divideix. $\frac{6}{10}:\frac{9}{15}=\frac{6}{10}\cdot\frac{15}{12}=\frac{2\cdot3\cdot3\cdot5}{2\cdot5\cdot2\cdot2\cdot3}=\frac{3}{4}$

També pots multiplicar i després simplificar: $\frac{90}{120}=\frac{3}{4}$

Preguntaràs que si pots multiplicar en X, això dependrà del teu professor.

Casos curiosos:

- Dividir entre una desena és multiplicar per 10 ja que $a:\frac{1}{10}=\frac{a}{1}\cdot\frac{10}{1}=10a$

Com a cas general: dividir entre 1/*a* és multiplicar per *a*.

- Dividir entre un nombre és com multiplicar pel seu invers: *a* : 2 = $a\cdot\frac{1}{2}=\frac{a}{2}$
- ***Torres de fraccions:*** No t'espantes si veus açò $\dfrac{\frac{6}{10}}{\frac{4}{15}}$, és molt fàcil, és el mateix que $\frac{6}{10}:\frac{4}{15}=\frac{3}{5}\cdot\frac{15}{4}=\frac{3\cdot3\cdot5}{5\cdot4}=\frac{9}{4}$, no oblides que "__" és el mateix que ":"

Ara tot junt.

Operacions combinades.

Aplicarem tot el que "sabem" sobre prioritat i ús de parèntesi.

Activitats resoltes

- *Calcula **pas a pas i simplifica**:*

$$\left(\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{6}\right)\right):\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{14}\cdot\frac{2}{3}\right)$$

Primer fem el parèntesi de més dins i la multiplicació del segon parèntesi que té prioritat sobre la resta.

$$\left(\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{6}-\frac{4}{6}\right)\right):\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{7}\right)=\left(\frac{3}{4}-\left(\frac{-1}{6}\right)\right):\left(\frac{7}{14}-\frac{2}{14}\right)=$$

$$=\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{6}\right):\frac{5}{14}=\left(\frac{9}{12}+\frac{2}{12}\right):\frac{5}{14}=\frac{11}{12}\cdot\frac{14}{5}=\frac{154}{60}=\frac{77}{30}$$

La fracció com a operador

a) Fracció d'un nombre:

- Ens demanen trobar les 3 quartes parts de 120.

Traduïm: trobar $\frac{3}{4}$ de 120. Aquest "de" es traduïx en matemàtiques per un "per", així que:

$$\frac{3}{4}\ de\ 120=\frac{3}{4}\cdot 120=\frac{3\cdot 120}{4}=3\cdot 30=90$$

En general $\frac{a}{b}\ de\ c=\frac{a}{b}\cdot c=\frac{ac}{b}$

b) Fracció d'una fracció:

Exemples:

$$\frac{10}{6}\ de\ \frac{4}{15}=\frac{10}{6}\cdot\frac{4}{15}=\frac{40}{90}=\frac{4}{9}$$

- Troba les dos quintes parts de les deu dotzenes parts de 360.

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{10}{12}\cdot 360=\frac{2\cdot 10\cdot 360}{5\cdot 12}=\frac{20\cdot 360}{60}=20\cdot 6=120$$

c) Problema invers:

- Em diuen que les tres quartes parts d'un nombre valen 66. Quin nombre és?

Està clar que un quart serà 66 : 3 = 22 i els 4 quarts són

22·4 = 88

Resumint $66\cdot\frac{4}{3}$ = 88

El cas general és: $\frac{a}{b}\cdot x=c\Rightarrow x=c\cdot\frac{b}{a}$, es **multiplica el nombre per la fracció inversa**.

Activitats proposades

9. Troba les quatre cinquenes parts de les tres quartes parts de 12.

10. Les cinc sisenes parts d'un nombre són 100, quin nombre és?

2. APROXIMACIONS I ERRORS

A la vida quotidiana i també en les Ciències Aplicades és necessari treballar amb nombres aproximats.

Uns exemples:

- Volem comprar un terç de metre de tela, hem de dir-li al dependent quant volem i no serem tan idiotes com per a dir-li que ens done 0,333… metres o 33,333… cm que és l'exacte. El normal és demanar 33 cm o 333 mm si som molt exactes.
- Mesurem un foli A4 amb el regle i ens dóna 29,7 cm, el regle arriba als mm. Volem dividir-lo en 8 parts iguals, quant mesurarà cada part?, si fem 29,7:8 ens dóna 3,7125 cm, però el regle no arriba a tant, serà millor aproximar a 3,7 cm.
- Fem un examen amb 9 preguntes que valen totes igual. Tenim 5 bé i les altres en blanc. Quina nota tenim?, 10·5/9 = 5,555555556 segons la calculadora, les posem totes?, si ho fem estem suposant que som capaços de distingir 1 part d'entre 10000 milions de parts iguals de l'examen. El raonable és 5,6 o 5,56 si som molt però que molt precisos.
- Resulta curiós i hauria de ser delicte que en les gasolineres s'anuncie: Preu del gasoil 1,399 €/litre. Si algú va i demana un litre exacte, o 2 o 15 no se'l poden cobrar exactament ja que no hi ha mil·lèsimes d'€ haurien d'escriure 1,40 €/litre. És cert que d'eixa manera t'estalvies 5 cèntims si tires 50 litres però a ells els compensa el tema psicològic, la gent poc culta en nombres veu 1,3 en compte de 1,4.
- Exactament el mateix passa als supermercats: lluç 5,99€/Kg. Són trucs barats que una ment entrenada sap detectar i actuar en conseqüència. La diferència entre 6 €/Kg i 5,99 €/Kg és que t'estalvies 1 cèntim! si compres 1 Kg, si compres mitjà, quant t'estalvies?, gens ni miqueta!, 5,99:2 = 2,995 que arrodonit és 3, que és el que cobren. Encara que ben mirada l'oferta no està tan malament, si compres 5 Kg. de lluç estalvies per a comprar-te un caramel, això sí, has de comprar més de mig Kg per vegada.

Utilitzar massa xifres decimals sense estar segur d'elles no és sinònim de precisió sinó de malaptesa.

2.1. Arrodoniment.

Et recordem com s'arrodoneixen correctament els nombres.

- Arrodonir π a les deumil·lèsimes: π = 3,1415926535…, la xifra de les deumil·lèsimes és 5, com la xifra següent és 9 que és $\geq$ 5, li sumem 1 al 5 i posarem $\pi \approx 3{,}1416$.

  Fixa't que π està més prop de 3,1416 que de 3,1415

- Arrodonir $\sqrt{2}$ a les centèsimes: $\sqrt{2}$ =1,41421356…, ara la xifra següent és 4 < 5 doncs la deixem tal qual, $\sqrt{2} \approx 1{,}41$

La regla és: Localitzem la xifra d'arrodoniment, mirem la següent xifra (només la següent), si aquesta és menor que 5 deixem la xifra d'arrodoniment igual, si la xifra següent és 5 o més gran que 5 incrementem en 1 la xifra d'arrodoniment.

Més exemples:

Arrodoneix

- 1,995 a les centèsimes ➔ 2,00 i els zeros cal escriure'ls per a indicar l'ordre on hem arrodonit.
- 1555555 als milers ➔ 1556000 on cal completar amb zeros després dels milers.
- 6,94999 a les dècimes ➔ 6,9 només cal mirar el 4

Nota important: Si el resultat d'un problema son **€ s'arrodoneix sempre als cèntims.**

Una altra nota important: Si volem donar un resultat amb 2 decimals als passos intermedis treballarem amb més decimals, almenys 3 o 4, en cas contrari el resultat no tindrà la precisió que pretenem, un exemple:

- A = 9,65; B = 6,98 y C = 4,99. Volem fer (A · B) · C^2, si fem A · B i arrodonim a les centèsimes ens queda 67,36 i si ara multipliquem per $4{,}99^2$ = 24,90 ens ix 1677,26.

  El resultat correcte és 1677,20 on només hem arrodonit al final.

2.2. Xifres significatives.

És el nombre de xifres "amb *valor*" que s'utilitzen per a expressar un nombre aproximat.

Uns quants ***exemples*** i ho entens:

- 2,25 en té 3 xifres significatives; 28,049 en té 5 xifres significatives.
- 5,00 en té 3; 4000,01 en té 6;
- 10000 no sabem les xifres significatives que en té, pot ser 1 o 2 o 3 o 4 o 5, ens han de dir en quina xifra s'ha aproximat. Per a aquest últim cas pot recórrer-se a la notació científica per dir amb precisió el nombre de xifres significatives, així:

  $1\cdot10^4$ té una xifra significativa, $1{,}0\cdot10^4$ en té 2 i així fins a $1{,}0000\cdot10^4$ que en té 5.

Consideracions:

- Les xifres **diferents** de 0 sempre són significatives.
- Els zeros a l'esquerra mai són xifres significatives: 0,0002 en té una xifra significativa.
- Els zeros al mig d'altres xifres diferents de 0 sempre són significatius 2004 en té 4 xifres significatives.

Més que el nombre de decimals la precisió d'una aproximació es mesura pel nombre de xifres significatives.

No han d'utilitzar-se més xifres de les què requerisca la situació.

Activitats proposades

11. Còpia esta taula al teu quadern i arrodoneix amb el nombre de xifres indicat

	Xifres significatives			
Nombre	1	2	3	4
$\sqrt{10}$				
1/7				
95549	100000			
30000	$3\cdot10^4$			
1,9995				2,000
20,55				

2.3. Error absolut i error relatiu

I.- Error absolut

Es defineix l'error **absolut** (EA) com EA = $|\textit{valor real} - \textit{valor aproximat}|$.

Les barres verticals es lligen "valor absolut" i signifiquen que el resultat ens donarà sempre positiu.

Exemple:

- Aproximem 1/3 de litre per 0,33 litres.

$$\text{EA} = \left|\frac{1}{3} - 0,33\right| = 0,00333... \approx 0,0033 \text{ litros}$$

Un altre exemple:

- Aproximem 16/6 Kg. amb 2 xifres significatives (2,7 Kg.)

$$\text{EA} = \left|\frac{16}{6} - 2,7\right| = |-0,0333...| \approx 0,033 \text{ Kg.}$$

- ➢ **No han de posar-se massa xifres significatives a l'error absolut, 2 o 3 és prou.**
- ➢ **L'error absolut té les mateixes unitats que la magnitud que s'aproxima.**

Aquests errors són grans o xicotets?, la resposta és, comparats amb què?

Per a això es definix l'error relatiu que sí ens dóna una mesura del gran o xicotet que és l'error absolut.

II.- Error relatiu

Per a comparar errors de distintes magnituds o nombres es defineix l'Error Relatiu (ER) com:

$$ER = \frac{EA}{|Valor\ real|}$$

que sol multiplicar-se per 100 per parlar de % d'error relatiu.

Si no es coneix el valor real se substitueïx pel valor aproximat (la diferència normalment és xicoteta).

Calculem l'error relatiu per als exemples de dalt:

1º) $ER = \frac{0,0033}{1/3} = 0,0099 \Rightarrow 0,99\%$ de ER

2ª) $ER = \frac{0,033}{8/3} \approx 0,0124 \Rightarrow 1,2\%$ de ER

Ara sí que podem dir que la 1ª aproximació té menys error que la 2ª, ja que l'error relatiu és menor.

L'error relatiu (ER) no té **unitats i per** això es poden comparar errors de diferents magnituds o amb diferents unitats.

Què fer si no es coneix el valor exacte?

En este cas no es pot calcular l'error absolut, no obstant això tots els aparells de mesura tenen un error absolut màxim.

- Balances de bany que mesuren de 100 g en 100 g el seu error absolut màxim és de 50 g.
- Cronòmetres que mesuren centèsimes de segon, el seu error absolut màxim serà de 0,005 s, mitja centèsima.
- Regles normals que mesuren mm, el seu error absolut màxim serà de 0,5 mm = 0,05 cm = 0,0005 m

A açò se li denomina **cota o fita d'error absolut**.

Activitats resoltes

- Et peses en una bàscula de bany i et marca 65,3 Kg, l'error absolut màxim és de 0,05 Kg (50 g)

  Ara pesem un cotxe en una bàscula especial i pesa 1250 Kg amb error absolut màxim de 10 Kg. Quina mesura és més precisa?

  Tu mateix ➔ $ER \leq \frac{0,05}{65,3} = 0,00077 \Rightarrow ER \leq 0,077\%$

Cotxe ➔ $ER \le \frac{10}{1250} = 0,008 \Rightarrow ER \le 0,8\%$

És molt més precisa la bàscula de bany en aquest cas. No obstant això, si en la mateixa bàscula pesem un bebè i marca 3,1 Kg, l'error relatiu ix menor o igual que 1,6 % (prova-ho) i ara la mesura de la bàscula de bany és molt menys precisa.

Així que l'error depén de la precisió de la màquina i de la mesura que fem amb ella.

Activitats proposades

12. Prova que 123,45 amb EA = 0,005 i 0,12345 amb EA = 0,000005 tenen el mateix ER.

13. Contesta Verdader o Fals i justifica la teua resposta:

a) Per a una mateixa màquina de mesurar l'error comés és menor com més xicoteta siga la mesura.

b) No es poden comparar errors relatius de diferents magnituds.

c) Posar preus com 1,99 €/Kg és un intent d'engany.

d) Comprar a 1,99 €/Kg enfront de 2 €/Kg suposa un estalvi.

e) Posar moltes xifres en un resultat vol dir que la persona és un gran matemàtic.

f) La precisió es mesura pel nombre de xifres decimals.

3. FRACCIONS I DECIMALS

Veurem com es passa de fracció a decimal i de decimal a fracció.

3.1. Expressió decimal d'una fracció

Tota fracció té una expressió decimal que s'obté dividint el numerador entre el denominador:

$$a/b = a:b$$

Exemples:

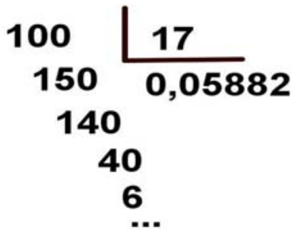
$$\frac{3}{25} = 0{,}12; \frac{68}{99} = 0{,}686868\ldots; \frac{91}{80} = 1{,}1375; \frac{177}{90} = 1{,}9666\ldots$$

Com pots observar unes vegades l'expressió decimal és exacta (ja que la resta ix 0) i altres vegades ix periòdica, infinits decimals entre els que es repetix un bloc de xifres que es denomina període.

Sempre ix així, exacte o periòdic?, tu et contestes quan lliges el següent.

- Fem 1/17 = 1 : 17 = 0,05882352941…, que són les xifres que mostra la calculadora, no pareix tindre període, però serà possible que sí el tinga però que no el vegem per ser molt llarg?

Comencem a fer la divisió:



Els residus obtinguts són 10; 15; 14; 4; 6; …

Com saps els residus són inferiors al divisor i en aquest cas poden ser 1; 2; 3; 4; …; 15 o 16, el 0 no pot eixir, ho expliquem després.

Fem ara 2 preguntes: Què ocorre si torna a eixir el mateix residu 2 vegades?, té a la força que repetir-se alguna vegada un residu?

La resposta a la primera pregunta és que si es repeteix una resta es repetirà la xifra del quocient i a partir d'ací es repetiran totes en forma de període.

La resposta a la segona pregunta és: Sí, a la força, segur que sí!, si tinc 16 possibles residus i suposem que han eixit els 16 possibles ja, què ocorre al traure el següent?

Ho entendràs millor amb caramels, tinc molts caramels per a repartir entre 16 persones, ja li he donat 1 caramel a cada u, és a dir, tots tenen ja 1 caramel, em dispose a repartir el següent, li tocara a algú que ja en té?

A açò se li denomina en matemàtiques ***"Principi de les caselles"*** i és una ferramenta molt potent. Busca informació d'ell.

- Fique 5 pilotes en 4 caixes, hi haurà alguna caixa amb més d'1 pilota?

Esperem que ho hages entès, **al pitjor dels casos** el residu número 17 ha de coincidir amb algun dels anteriors, es repetiran les xifres del quocient i per tant l'expressió decimal és periòdica.

- Pots comprovar que efectivament els residus són 10, 15, 14, 4, 6, 9, 5, 16, 7, 2, 3, 13, 11, 8, 12, 1, 10, …, el pitjor dels casos possibles, es repetix el que fa el número 17. El normal és que es repetisca abans. Per cert que la divisió ix

1:17 = 0,**0588235294117647**0588235294117647… un període de només 16 xifres!

Encara que hem vist un cas particular, esta és una regla general:

L'expressió decimal d'una fracció és exacta o periòdica.

El nombre de xifres del període d'1/*n* és menor o igual que *n* – 1.

Quan ix exacta i quan periòdica?

- Doncs és fàcil, ens donen una fracció com per exemple $\frac{27}{150}$, primer la simplifiquem fins a obtindre la irreductible: $\frac{27}{150}=\frac{9}{50}$, ens fixem només en el denominador i el descomponem en factors primers, $50 = 5 \cdot 10 = 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 5^2$, com els factors primers són només 2 i 5 l'expressió decimal és exacta.

Vegem la raó:

- $2 \cdot 5^2$ és divisor de $2^2 \cdot 5^2 = 100$ una potència de 10. Es compleix $\frac{2^2 \cdot 5^2}{2 \cdot 5^2} = 2 \Rightarrow \frac{1}{2 \cdot 5^2} = \frac{2}{100} = 0,02$, només falta multiplicar per 9 ➔ $\frac{9}{2 \cdot 5^2} = 0,02 \cdot 9 = 0,18$.

Fixa't que el nombre de decimals és 2, el major dels exponents de 2 i 5.

- Per exemple $\frac{1}{2^4 \cdot 5^3} = 0,0005$ té 4 xifres decimals perquè el major exponent és 4.

En general $\frac{1}{2^n \cdot 5^m}$ té expressió decimal exacta i el nombre de xifres decimals és el màxim entre *n* i *m*.

- Un altre cas: $\frac{20}{42}=\frac{10}{21}$, descomponem el 21 en factors primers, $21 = 3 \cdot 7$, com hi ha factors diferents de 2 i 5 l'expressió serà periòdica.

Vegem: si l'expressió fóra exacta podríem escriure $\frac{10}{3 \cdot 7} = \frac{a}{10^n} \Rightarrow \frac{10 \cdot 10^n}{3 \cdot 7} = a$, amb "*a*" un nombre enter. Però açò no pot ser!, 10 només té els factors 2 i 5 i els factors 3 i 7 no poden simplificar-se. Com no pot ser exacta serà periòdica.

Si al denominador d'una fracció irreductible apareixen factors primers diferents de 2 i de 5 l'expressió decimal serà periòdica.

Activitats proposades

14. Sense fer la divisió indica si les següents fraccions tenen expressió decimal exacta o periòdica:

a) $\frac{21}{750}$ b) $\frac{75}{21}$ c) $\frac{11}{99}$ d) $\frac{35}{56}$

3.2. Forma de fracció d'una expressió decimal

Els nombres decimals exactes o periòdics poden expressar-se com una fracció. A aquesta fracció se la denomina fracció **generatriu**.

De decimal exacte a fracció:

$$1,175 = \frac{1175}{1000} = \frac{47}{40}$$
$$20,68 = \frac{2068}{100} = \frac{517}{25}$$
$$3,1416 = \frac{31416}{10000} = \frac{3927}{1250}$$

És molt fàcil, mira els exemples de la dreta.

Has agarrat el truc?

Per obtindre la fracció generatriu es posa en el numerador el nombre sense la coma i en el denominador la unitat seguida de tants zeros com a xifres decimals en té. S'ha de simplificar la fracció.

Les persones intel·ligents comproven el que han fet, divideix 47 entre 40, si te dòna 1,175 està bé!, i no cal que ningú t'ho diga ☺

De decimal periòdic a fracció:

Abans de veure el mètode rigorós jugarem una estona.

- Agafa la **calculadora** i fes les següents divisions i apunta els resultats decimals al teu quadern:

1:9; 2:9; 3:9; 8:9; 1:99; 13:99; 37:99; 98:99; 1:999; 123:999; 567:999; 998:999.

Nota:

Al fer 6/9 la calculadora dòna 0,6666666667, realment és 6 periòdic, la calculadora ho fa bé i arrodoneix en l'última xifra.

Si has observat bé, ja saps escriure un muntó d'expressions decimals periòdiques a la seua forma de fracció, és a dir, saps calcular la seua fracció **generatriu**.

Per exemple:

- 0,444...= 4/9;
- 0,333... = 3/9 = 1/3.
- 0,171717...= 17/99;
- 0,454545... = 45/99 = 5/11;
- 0,878787= 87/99 = 29/33

- 0,337337337… = 337/999;
- 0,549549…= 549/999 = 61/111
- ¿Cómo será 0,1234512345…?, pues 12345/99999 = 4115/33333

Així que ja ho saps, per a tindre un període de *n* xifres el denominador té *n* nous.

- Però el truc anterior no val per 5,888…

L'adaptem: 5,888… = 5 + 0,888… = 5 + $\frac{8}{9}=\frac{45}{9}+\frac{8}{9}=\frac{53}{9}$

- Segueix sense valdre per 0,7333…

Fem 0,7333… = 0,7 + 0,0333… = $\frac{7}{10}+\frac{3}{9}:10=\frac{7}{10}+\frac{3}{90}=\frac{21}{30}+\frac{1}{30}=\frac{22}{30}=\frac{11}{15}$

Combinant els 3 trucs anteriors ixen tots, però no seguim, et deixem que investigues tu. Nosaltres explicarem el mètode seriós.

Un altre exemple:

- Ens demanen expressar el nombre 7,3252525... a la seua forma de fracció. El primer serà posar-li un nom, per exemple *N* = 7,3252525…, la segona cosa és aconseguir **2 nombres amb la mateixa part decimal**.
- L'avantperíode té 1 xifra i el període 2. Per aconseguir la mateixa part decimal multipliquem per 1000 i la coma se'n va fins després del primer període, si multipliquem per 10 la coma se'n va fins davant del primer període.

$$\begin{array}{rl} 1000N = & 7325,2\cancel{525}\ldots \\ -\ 10N = & 73,2\cancel{525}\ldots \\ \hline 990N = & 7252 \end{array} \Rightarrow N = \frac{7252}{990} = \frac{3626}{495}$$

Ja tenim 2 números amb la mateixa part decimal, si els restem aquesta desapareix i podem aillar *N*.

Fixa't que la resta es fa en els 2 membres al mateix temps.

Mètode formal:

Per obtindre la fracció generatriu d'una expressió decimal multipliquem el nombre per la potència de 10 necessària per emportar-nos la coma al final del primer període, després el multipliquem una altra vegada perquè la coma quede al principi del primer període.

Un altre exemple i ho entens:

- *N* = 15,25636363…

Com aconseguir 2 nombres amb la part decimal ,636363…?

Doncs el més fàcil és 10000*N* = 152563,6363… i 100*N* = 1525,6363…

Restem: 9900*N* = 151038 ➔ *N* = $\frac{151038}{9900} = \frac{8391}{550}$

Aquests són els casos més difícils (periòdics mixtos), quan no hi haja avantperíode (periòdic pur) només caldrà multiplicar una vegada ja que ja tenim el període just després de la coma:

- *N* = 4,545454...

100*N* = 454,5454…

– 1*N* = 4,5454…

99*N* = 450 ➔ *N* = $\frac{450}{99} = \frac{50}{11}$

Exemples:

N	**10N –**	**1N =**	**9N**	
1,333…	**13,333… –**	**1,333… =**	**12**	**N = 12/9**
N	**100N –**	**10N =**	**90N**	
5,6777 …	**567,77… –**	**56,77… =**	**511**	**N = 511/90**
N	**1000N –**	**100N =**	**900 N**	
8,65888 …	**8658,88… –**	**865,88... =**	**7793**	**N = 7793/900**

Finalment, si et diuen que hi ha un truc per a fer açò en segons i sense calfar-se el cap, perquè és cert, n'hi ha, el coneixem. És una regla que s'oblida i per tant no val per a res, no és raonada.

Activitats proposades

15. Passa a fracció i simplifica:

a) 1,4142

b) 0,125

c) 6,66

16. Passa a fracció i simplifica:

a. 1,41424142…

b. 0,125125…

c. 6,666…

17. Passa a fracció i simplifica:

1) 1,041424142…

2) 0,7125125…

3) 6,7666…

18. Determina la fracció generatriu de:

A. 0,333… + 0,666…

B. 0,888… · 2,5

C. 0,65 : 0,656565…

4.- RESOLUCIÓ DE PROBLEMES PER MITJÀ DE FRACCIONS.

Veiem uns quants exemples:

i) Quants litres hi ha en 90 *botelles de* 3 *quarts de litre cadascuna?*

La primera cosa que has de fer és posar-te un exemple amb nombres més fàcils.

Tinc 10 botelles cadascuna de 2 litres. Està clar que tenim 20 litres, quina operació hem fet?, multiplicar?, aleshores el mateix hem de fer amb els nombres del problema:

$$\frac{3}{4}\text{litres/botella} \cdot 80\text{botelles} = \frac{3 \cdot 80}{4} = 60\text{litres}$$

(Observa que botelles se'n van amb botelles i les unitats finals són litres).

ii) Quantes botelles de 3 *huitens de litre necessite per envasar* 900 *litres?*

Novament canviem els nombres per altres més senzills: vull envasar 10 litres en botelles de 2 litres. Està clar que necessite 5 botelles (10 : 2).

Fem el mateix amb els nostres nombres:

900 litres : $\frac{3}{8}$ litres/botella = $900 : \frac{3}{8} = 900 \cdot \frac{8}{3} = 300 \cdot 8 = 2400$ botelles

Fixa't que litres se'n va amb litres i que les botelles que dividixen en el denominador al final passen multiplicant en el numerador, per la qual cosa unitat del resultat és "botelles".

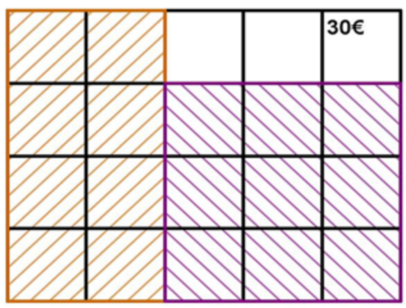
$$\frac{litres}{1} : \frac{litres}{botella} = \frac{litres \cdot botella}{litres} = botella$$

iii) Sol guanya uns certs diners al mes, si es gasta el 40 *% d'ells per pagar la lletra del pis, el* 75 *% del* ***que li queda*** *en factures i li sobren* 90 € *per a menjar. Quant guanya i quant gasta en el pis i en factures?*

El primer: 40 % = $\frac{40}{100} = \frac{2}{5}$ i 75 % = $\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

El fem de 2 maneres i tries la que més t'agrade:

a) Mètode gràfic:



Fem un rectangle de 5 x 4 quadrats que són els denominadors.

De les 5 franges verticals iguals llevem 2 que és el que es gasta en la lletra del pis.

El que queda està dividit en 4 parts iguals i llevem 3 que és el que es gasta en factures. Ens queden 3 quadradets que són els

90 € del menjar. Aleshores un quadradet és 90 : 3 = 30 €.

El que guanya és 30 · 20 = 600 €.

En la lletra es gasta **30 · 8 = 240 €** i en factures **30 · 9 = 270 €**.

b) Amb fraccions:

Si a una quantitat li llevem els seus 2/5 ens queden 3/5 d'ella (1 – 2/5 = 5/5 – 2/5)

En factures ens gastem $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{20}$

Si teníem 3/5 i ens gastem 9/20 ens queden $\frac{3}{5} - \frac{9}{20} = \frac{12-9}{20} = \frac{3}{20}$ de la quantitat inicial. Eixos 3/20 ens diuen que són 90 €. Per tant 1/20 seran 90 : 3 = 30 €.

La quantitat total són els 20/20 per tant 30 · 20 = 600 €.

En la lletra del pis em gaste 2/5 de 600 = 1200 : 5 = 240 € i en factures 3/4 de (600 – 240) = 3/4 de 360 = 270 €.

Tinc	Lleve	Em queda
1	2/5	3/5
3/5	3/4 de 3/5 = 9/20	3/5 – 9/20 = 3/20

En qualsevol cas els problemes es comproven.

40 % de 600 = 0,4 · 600 = 240 € es gasta en la lletra.

600 – 240 = 360 € em queden.

75 % de 360 = 0,75 · 360 = 270 € es gasta en factures.

360 – 270 = 90 € que li queden per a menjar. Funciona!

iv) Una pilota perd en cada bot 1 cinqué de l'altura des de la que cau.

a) Quants bots ha de donar perquè l'altura aconseguida siga inferior a 1 desé de la inicial?

b) Si després del quart bot la seua altura és de 12,8 cm, quina era l'altura inicial?

El primer és donar-se compte que si perd un cinqué de l'altura es queda amb els 4 cinquens d'aquesta. Per tant en cada bot l'altura es multiplica per 4/5.

a) Hem de veure per a què *n* es compleix $\left(\frac{4}{5}\right)^n < \frac{1}{10}$ = 0,1

I açò ho fem provant amb la calculadora: $\left(\frac{4}{5}\right)^{10} \approx 0,107 > 0,1$ però $\left(\frac{4}{5}\right)^{11} \approx 0,0859 < 0,1$, per tant fan falta 11 bots.

b) $\left(\frac{4}{5}\right)^{4} = \frac{256}{625}$ que és la fracció per la qual s'ha multiplicat l'altura inicial.

$$\frac{256}{625}h = 12,8 \Rightarrow h = 12,8 \cdot \frac{625}{256} = 31,25cm$$

v) A Mariana li descompten la cinquena part del seu sou brut en concepte d'IRPF i la sisena part del mateix per a la Seguretat Social. Si cobra 600 € nets, quin és el seu sou brut?

Sumem les dos fraccions ja que es referixen a la mateixa quantitat:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{6+5}{30} = \frac{11}{30}$$

que és la part que descompten del sou brut per tindre el net. Li queden $1 - \frac{11}{30} = \frac{19}{30}$ de la quantitat inicial. Eixos 19/30 ens diuen que són 600 €.

Per calcular el sou brut fem:

$$600 \cdot \frac{30}{19} \approx 947,37€$$

.

Comprovació:

1/5 de 947,37 = 189,47 € paga d'IRPF

1/6 de 947,37 = 157,90 € paga a la S.S.

947,37 – 189,47 – 157,90 = 600 € que és el sou net. Bé!

Podria hi haver hagut un xicotet desfasament d'algun cèntim degut a les aproximacions.

CURIOSITATS. REVISTA

Suma d'infinites fraccions.

El sentit comú et diu que si sumem infinits nombres positius la suma ha de ser infinita. Però, no necessàriament!

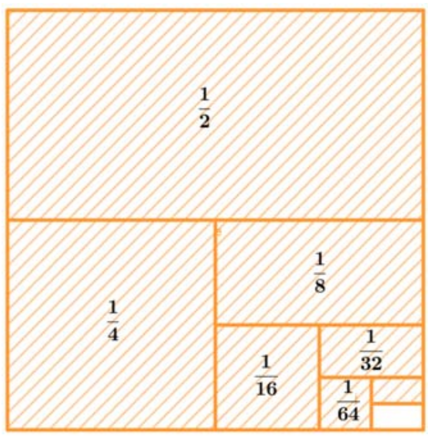
Et proposem un repte, sumarem $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+...$ on cada fracció és la mitat de l'anterior. Els punts suspensius indiquen que açò no acaba mai, en teoria hauríem de sumar i sumar i continuar sumant de forma indefinida. En la pràctica no pot fer-se, però per a això estan les matemàtiques.

Agafa la calculadora i comença: 1:2 + 1:4 + 1:8 + 1:16 +1:32 + 1:64

Et dóna 0,984375 o si tens sort 63/64, només falta 1/64 per a arribar a 1!

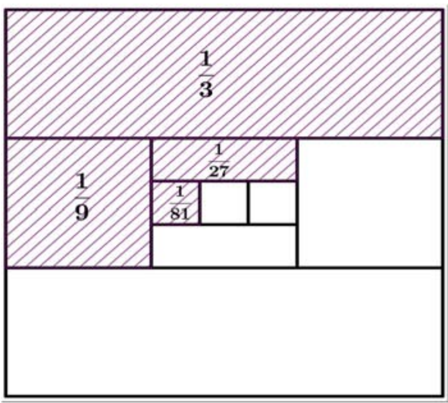
Suma ara al resultat anterior 1/128, obtenim 0,9921875 o el que és el mateix 127/128, només falta 1/128 per arribar a 1. Has de seguir, els següents nombres a sumar són 1/256, 1/512, 1/1024, …

Si t'has fixat ens acostem cada vegada més a 1. Val, no arribarem mai, però si voldríem donar-li un valor a la suma infinita de dalt, tu quin li donaries?



Els matemàtics li donen el valor 1.

Observa. Tens un full de paper quadrat d'àrea 1. El talles per la meitat, i deixes el tros tallat damunt de la taula i el sense tallar a la teua mà. Tornes a tallar per la mitat el tros que tens a la teua mà, i tornes a deixar damunt de la taula el tros tallat. I seguixes, i seguixes… Sumes els trossos de paper que tens a la taula. Podria alguna vegada sumar més d'1? No, evidentment, són trossos d'un paper d'àrea 1. Alguna vegada tindries tot el paper damunt de la taula? Cada vegada tens menys paper a la mà, i més en la taula, però al tallar per la meitat, mai ho tindries tot. No obstant això, els matemàtics diuen que en l'infinit eixa suma val 1.



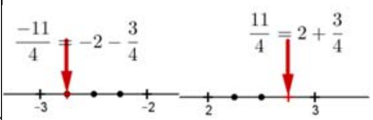
Ara tenim una pizza i ens anem a dinar la pizza de "terços en terços", és a dir, primer 1/3, després 1/3 d'1/3, després 1/3 d'1/3 d'1/3, i així successivament…

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+...=$$

Quant crees que val aquesta suma?

Autor: Paco Moya
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

RESUM

Prioritat de les operacions	1r Parèntesis interiors, 2º Potències i arrels, 3º Productes i divisions, 4º Sumes i restes.	$10 - 5 \cdot (4 - 3 \cdot 2^2) = 50$
Signe de la suma	(+) + (+) = (+) es sumen, (–) + (–) = (–) es sumen. (+) + (–) = ? té el signe del més gran en valor absolut.	–7/3 – 8/3 = –15/3 = –5 –12/5 + 8/5 = –4/5
Signe del producte i la divisió	Si tenen el mateix signe dóna positiu. (+)·(+) = (–)·(–) = (+) Si tenen signe contrari dóna negatiu. (+)·(–) = (–)·(+) = (–)	–4 · (–10) = +40 +2 · (–15) = –30
Nombre Racional	Un nombre *r* és racional si es pot escriure com *r* = *a*/*b* amb *a*, *b* enters i $b \neq 0$.	2; 3/8; —7/2 són racionals. També 0,125 i 2,6777... $\sqrt{2}$ i π no ho son.
Fracció irreductible	S'obté dividint el numerador i el denominador pel mateix nombre. Numerador i denominador són primers entre si.	360/840 = 3/7, l'última és irreductible.
Fraccions equivalents	Són equivalents les fraccions que tenen la mateixa expressió decimal. Dos fraccions equivalents representen al mateix nombre racional. Els seus productes creuats valen el mateix.	$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{15}{20}$ = 0,75 són equivalents. 3 · 20 = 4 · 15
Ordenació de fraccions	Es passen a comú denominador o es troba el seu valor decimal o s'usa la lògica i el truc *a*/*b* < *c*/*d* si *ad* < *bc* per a nombres positius.	$\frac{3}{4}<\frac{4}{5}<\frac{9}{10}$ perquè $\frac{15}{20}<\frac{16}{20}<\frac{18}{20}$ Entre altres motius
Representació	Si és necessari es passen a forma mixta. Per a *n* + *a*/*b* dividim la unitat que va de *n* a *n* + 1 en *b* parts iguals i prenem *a*. Per –*n* – *a*/*b* dividim la unitat que va de –*n* a –*n* – 1 en *b* parts iguals i comptem *a* començant en –*n*.	
Suma i resta de fraccions	Es passen a comú denominador i es sumen (resten) els numeradors.	$\frac{5}{6}-\frac{7}{8}=\frac{20}{24}-\frac{21}{24}=\frac{-1}{24}$
Producte i divisió	*a*/*b* · *c*/*d* = *ac*/*bd* *a*/*b* : *c*/*d* = *a*/*b* · *d*/*c* = *ad*/*bc*	$\frac{2}{7}\cdot\frac{14}{6}=\frac{2\cdot2\cdot7}{7\cdot2\cdot3}=\frac{2}{3}$ $\frac{6}{5}:\frac{14}{10}=\frac{6}{5}\cdot\frac{10}{14}=\frac{6}{7}$
Fracció d'un nombre	*a*/*b* de *x* = *a*/*b* ·*x* = (*ax*)/*b*	3/4 de 60 = 3/4 · 60 = 45 3/4 de 4/5 = 3/4 · 4/5 = 3/5
Xifres significatives	És el nombre de xifres "amb *valor*" que s'utilitzen per a aproximar un nombre	0,025 té 2 3,020 té 4 3000 no sabem les que en té

Errors	Error absolut: EA = | *valor real - valor aproximat* | Error relatiu: ER = $\frac{EA}{\lvert Valor\ real \rvert}$ es multiplica per 100 per obtindre el % d'ER.	$\frac{2}{3} \approx 0,7 \Rightarrow EA \approx 0,033$ $\Rightarrow ER \approx \frac{0,033}{2/3} \approx 0,050 \Rightarrow 5\%$
Fraccions i decimals	L'expressió decimal d'una fracció sempre és exacta o periòdica. Exacta si el denominador només té com a factors primers el 2 o el 5. Periòdica en cas contrari.	3/40 = 0,075 exacta 5/12 = 0,41666... periòdica
Pas de decimal a fracció	Expressió decimal exacta: es divideix el nombre sense la coma entre la unitat seguida de tants zeros com a xifres decimals en té. Expressió decimal periòdica: Es multiplica *N* per potències de *10* fins a aconseguir 2 nombres amb la mateixa part decimal, es resten i s'aïlla *N.*	3,175 = 3175/1000 = 127/40 *N*= 2,0333... 100*N* – 10*N* = 183 90*N* = 183➔ *N* = 183/90=61/30.

EXERCICIS I PROBLEMES

1. Troba pas a pas

(–5 + 4 · (–2) +7) : (7 – (3 – 4) · (–1))

2. Ordena de menor a major:

$$\frac{8}{9}; \frac{-8}{9}; \frac{4}{5}; \frac{38}{45}; \frac{77}{90}; \frac{-9}{8}$$

3. Indica raonadament quina fracció és major:

a) $\frac{102}{101}$ i $\frac{98}{99}$ b) $\frac{98}{99}$ i $\frac{97}{98}$ c) $\frac{-102}{101}$ i $-\frac{103}{102}$

4. Demostra que 4,999… = 5

Generalitza: Quant val n,999…?

5. Passa a forma mixta: $\frac{16}{9}; \frac{152}{6}; \frac{-17}{5}; \frac{-23}{4}$

6. Representa de forma **exacta** en la recta numèrica:

$$\frac{760}{240}; 3{,}125; -\frac{46}{14}; -2{,}1666\ldots$$

7. Simplifica:

$$a)\ \frac{2\cdot 7\cdot 15}{21\cdot 10}\quad b)\ \frac{10+6}{10-2}\quad c)\ \frac{2\cdot 3+4}{2\cdot 5+10}$$

8. Troba la fracció que cau just al mig de 3/2 i 9/4 en la recta numèrica.

Pista: La mitjana aritmètica $\frac{a+b}{2}$

Representa les 3 fraccions en la recta numèrica.

9. La mitjana harmònica es definix com H(a, b) = $\dfrac{1}{\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}}$, l'invers de la mitjana aritmètica dels inversos.

a) Demostra que H(a, b) = $\frac{2ab}{a+b}$

b) Troba $H\left(\frac{3}{2},\frac{11}{3}\right)$

10. Troba la fracció inversa de $3+\frac{4}{5}:\frac{6}{10}$

11. Opera i simplifica: $\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{14}\cdot\frac{10}{12}\cdot\frac{7}{2}$

12. Resol pas a pas:

$$\frac{\frac{3}{5}-\frac{2}{5}:\frac{4}{6}}{\frac{3}{5}:\left(\frac{1}{6}-2\right)}$$

13. Calcula les dos terceres parts de la sisena part del 80% de 900.

14. troba el nombre tal que els seus quatre terços valen 520.

15. Quants pots de tres huitens de litre puc omplir amb 12 litres?

16. Calcula la fracció per la qual cal multiplicar 450 per obtindre 720.

17. Si 100 polzades són 254 cm:

a) Troba el llarg en centímetres d'una televisió si l'alçaria són 19,2 polzades i llarg/alt = 4/3

b) Igual però ara llarg/alt = 16/9

18. Si en una classe el 77,777… % dels alumnes aproven i hi ha més de 30 alumnes però menys de 40, quants alumnes són i quants aproven?

19. Tres pelegrins decideixen iniciar un viatge de 8 dies. El primer dels pelegrins aporta 5 pans per al camí, el segon pelegrí, 3 pans, i el tercer no aporta cap, però promet pagar-los als seus companys al final del viatge pel pa que haja menjat. Cada un dels dies que va durar el viatge, a l'hora de menjar treien un pa de la bossa, ho dividien en tres trossos i cada pelegrí es menjava un tros. Quan van arribar al seu destí, el caminant que no havia aportat cap pa va traure 8 monedes i les va entregar als seus companys: 5 monedes per al que havia posat 5 pans i 3 monedes per al que havia contribuït amb 3 pans. Podries explicar per què este repartiment de monedes no és just? Quin seria el repartiment just? (*Problema de l'Olimpíada d'Albacete*.) S'ha de tindre en compte no els pans que un ha posat sinó el que realment ha aportat (el que posa menys el que menja).

20. Aproxima els nombres 32567 i 1,395 amb 2 xifres significatives i digues en quin es comet menor error relatiu.

21. π no pot representar-se per mitjà d'una fracció de enters però, pots trobar una fracció que ho aproxime amb 5 xifres significatives?

22. Aproximem π per: $3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{16}}$

a) Simplifica fins a una fracció impròpia irreductible.

b) Troba l'error absolut i l'error relatiu.

23. Quantes botelles de 3/4 de litre necessite per a tindre la mateixa quantitat que en 60 botelles de 3/5 de litre?

24. Troba un nombre enter de tal forma que: la seua mitat, la seua tercera part, la seua quarta part, la seua cinquena part, la seua sisena part i la seua setena part siguen nombres enters.

25. A la unitat li lleve les seues 2 cinquenes parts. Per quina fracció cal multiplicar el resultat per arribar una altra vegada a la unitat?

26. Troba la fracció resultant:

a) Lleve 1 terç del que tinc i després afig 1 terç del que queda.

b) Afig 1 terç del que tinc i després lleve 1 terç del resultat.

27. Estàs avorrit i decideixes jugar al següent: Avances un metre en línia recta, retrocedeixes la meitat, avances la meitat del que has retrocedit en l'últim pas, retrocedeixes la meitat del que has avançat en l'últim pas, …

Si ho fas moltes, però que moltes vegades, quant avances en total?

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\ldots=$$

28. Darío dóna passos de 3/5 de metre, el seu gos Raig dóna passos de ¼ de metre. Si ambdós van a la mateixa velocitat i Raig dóna 360 passos per minut, quants passos per minut donarà Darío?

La figura del costat és un "*Tamgran*".

a) Troba la fracció que li correspon a cadascuna de les 7 peces.

b) Si el costat del quadrat és de 20cm, troba l'àrea de cada peça.

29. Si el costat del quadrat és de 4 cm troba la fracció i l'àrea de la zona pintada:

30. Calcula*:*

a) $\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}:\frac{1}{3}\right)^2+\left(2-\frac{1}{2}\right)^2$ b) $\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{3}{2}:\frac{3}{4}\right)^3+\left(2-\frac{3}{2}\right)^2$ c) $\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}:\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-1\right)^3$

AUTOAVALUACIÓ

1. Saps operar amb nombres enters, coneixes la prioritat de les operacions i l'ús de parèntesi. Resol pas a pas:

$$(-8-7\cdot(-4+6):(2+(-3))+5-4\cdot 2^2)\cdot(-2)$$

2. Saps obtindre fraccions equivalents. Ordena de major **a menor**:

$$\frac{5}{6};\frac{7}{8};\frac{-7}{8};\frac{-5}{6};\frac{-5}{4}$$

3. Saps representar fraccions de forma exacta en la recta numèrica. Representa:

$$\frac{3}{4};\frac{17}{6};\frac{-11}{7};-0{,}125$$

4. Saps operar amb fraccions. Resol pas a pas i simplifica:

$$\frac{\frac{2}{3}-\frac{5}{6}:\left(2-\frac{11}{3}\right)}{\frac{2}{6}}$$

5. Saps trobar la fracció d'un nombre i la fracció d'una fracció.

a) Troba les quatre cinquenes parts dels cinc octaus de 360.

b) Una botella té plenes les seues set octaves parts, si conté 840 cm^3, quant li cap plena?

6. Saps arrodonir i calcular l'error relativa comés. Aproxima els nombres 9859 i 9,945 amb 2 xifres significatives i calcula els errors relatius comesos (en %), quin és menor?

7. Saps distingir quan una fracció té una expressió decimal exacta.

a) Digues quines de les següents fraccions tenen expressió decimal exacta i quines periòdica:

$$\frac{6}{120};\frac{5}{180};\frac{42}{210}$$

b) Quants decimals té $\frac{1}{2^{10}\cdot 5^{6}}$?

c) Quantes xifres com a màxim pot tindre el període d'1/97?

8. Saps passar de decimal a fracció. Passa a fracció i simplifica:

a) 2,225 b) 2,2252525... c) $\frac{0{,}125}{0{,}125125125...}$

9. Saps resoldre problemes per mitjà de fraccions.

Una medusa creix cada setmana un terç del seu volum.

a) Quantes setmanes han de passar perquè el seu volum es multiplique per més de 3?

b) Si el seu volum actual és de 1200 cm^3, quin era el seu volum fa 3 setmanes?

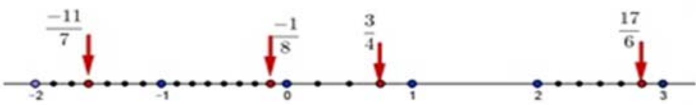
10. A un treballador li abaixen el sou la sisena part, del que li **queda** el 25 % se'n va destinat a impostos i finalment de la resta que li **queda** les dos cinquenes parts se les gasta a pagar la hipoteca del pis. Si encara té disponibles 450 €, quant cobrava abans de la baixada de sou?, quant paga d'impostos i d'hipoteca?

Solucions:

1) 10.

2) $\frac{7}{8} > \frac{5}{6} > \frac{-5}{6} > \frac{-7}{8} > \frac{-5}{4}$.

3)



4) $\frac{7}{2}$.

5) a) 180;

b) 960 cm^3.

6) 9859: 9900 ➔ EA = 41➔ ER = 0,42 %.

9,945: 9,9 ➔ EA = 0,045 ➔ ER = 0,45 %, és un poc menor el primer.

7) a) Primer se simplifiquen, són exactes 6/120 y 42/150. 5/180 té expressió decimal periòdica.

b) 10 xifres decimals.

c) 96 xifres (de fet les té).

8) a) $\frac{89}{40}$

b) $\frac{2203}{990}$

c) $\frac{999}{1000} = 0{,}999$

9) a) 4 setmanes.

b) 506,25 cm^3.

10) Cobrava 1200 €. Ara cobra 1000 €, paga 250 € de impostos i 300 € d'hipoteca.

Matemàtiques orientades a les ensenyances acadèmiques.

3º B d'ESO
Capítol 2: Potències i arrels

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Nieves Zuasti

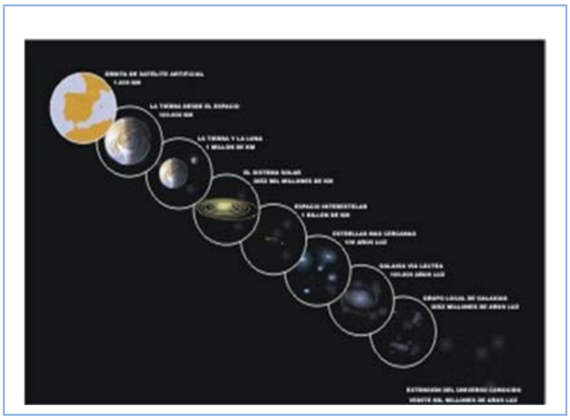
Revisor: Sergio Hernández

Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

Traducció al valencià: Pedro Podadera IES Juan de Garay

Índex

Resum



En aquest capítol utilitzem els grans números, les potències, que ens permeten descriure de manera més fàcil la immensitat de l'Univers, expressar les seues distàncies, la massa dels cossos celests, el nombre de galàxies, estreles i planetes.

També ens fixarem en els xicotets nombres, el món microscòpic expressat en forma de potència d'exponent negatiu.

Utilitzarem la notació científica per a grans i xicotets nombres.

Repassarem les operacions amb potències d'exponent un nombre natural, introduint les potències amb exponents negatius i racionals. Ja coneixem les potències de base un nombre natural, ara usarem les mateixes idees utilitzant bases de nombres negatius i racionals. Ja coneixes els radicals, ara veurem que un radical és una potència d'exponent un nombre fraccionari i que podem utilitzar les propietats de les potències amb ells.

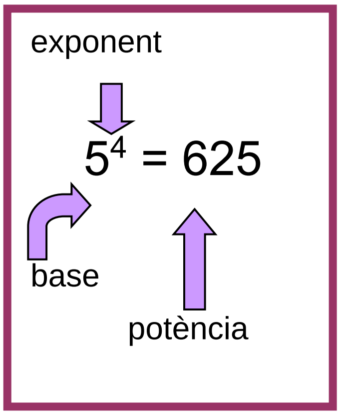
Autora: Nieves Zuasti
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

1. OPERACIONS AMB POTÈNCIES

Recorda que la **potència** a^n de base un nombre natural a i exponent natural n és un producte de n factors iguals a la base:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \ldots \overset{n \text{ factors}}{\ldots\ldots} \cdot a \qquad (n > 0)$$

El factor que es repeteix és la **base** i el nombre de vegades que es repeteix és **l'exponent**. Al resultat se l'anomena potència**.**



Ja coneixes les propietats de les operacions amb potències, que repassarem. En aquest capítol veurem que si l'exponent o si la base és un nombre negatiu o fraccionari, aqueixes propietats es mantenen.

Recorda:

$a^0 = 1$

$1^m = 1$

$(-1)^m = 1$ m parell

$(-1)^n = -1$ n imparell

$0^n = 0$

1.1. Producte de potències

- **Amb la mateixa base**

El producte de potències de la mateixa base és una altra potència amb la mateixa base i d'exponent, la suma dels exponents.

- $b^m \cdot b^n \cdot b^p = b^{m+n+p}$

Exemple:

$(-5)^4 \cdot (-5)^{-3} \cdot (-5)^2 \cdot (-5)^{-6} = (-5)^{4+(-3)+2+(-6)} = (-5)^{-3} = 1/(-5)^3 = 1/\text{––}125$

- **Amb el mateix exponent**

El producte de potències amb el mateix exponent és una altra potència la base de la qual es calcula multiplicant les bases, elevada al mateix exponent.

$$a^m \cdot b^m \cdot c^m = (a \cdot b \cdot c)^m$$

Exemple:

$(-3)^2 \cdot (5)^2 \cdot (-1)^2 \cdot (-4)^2 = [(-3) \cdot (5) \cdot (-1) \cdot (-4)]^2 = (+60)^2 = 3600$

1.2. Quocient de potències

- **Amb la mateixa base**

El quocient entre dues potència de la mateixa base és una altra potència amb la mateixa base i el seu exponent es calcula restant els exponents.

$$c^m : c^n = c^{m-n}$$

Exemple:

$(-12)^7 : (-12)^2 = (-12)^{7-2} = (-12)^5$

- **Amb el mateix exponent**

Per a dividir potències amb el mateix exponent, es divideixen les bases i el resultat s'eleva al mateix exponent.

$$\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$$

Exemple:

$18^4 : 3^4 = (18/3)^4 = 6^4$

Exemple:

$(5)^3 : (-14)^3 = (5/-14)^3$

- **Potències d'exponent enter negatiu**

Una potència de base real $a \neq 0$, *i* exponent natural $n < 0$ és l'invers de la mateixa amb exponent positiu.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

L'expressió a^{-n} pot ser el resultat de dividir dues potències de la mateixa base, ja que:

$a^x : a^y = a^{x-y}$ si $x < y$ $(x-y) < 0$.

Exemple:

$6^3 : 6^8 = 6^{3-8} = 6^{-5} = 1/6^5$

1.3. Potència d'un producte

La potència d'un producte pot calcular-se realitzant primer el producte i elevant el resultat a la potència o bé, elevant cada un dels factors a la potència i realitzant després el producte.

$$(a \cdot b \cdot c \cdot d)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n \cdot d^n$$

Exemple:

$[(-2) \cdot (+5) \cdot (-4)]^3 = (+40)^3 = +64000 = (-2)^3 \cdot (+5)^3 \cdot (-4)^3 = (-8) \cdot (+125) \cdot (-64) = +64000$

1.4. Potència d'un quocient

La potència d'un quocient pot calcular-se efectuant primer el quocient i elevant el resultat a la potència, o bé elevar dividend i divisor a la potència i després efectuar el quocient.

$$(a : b)^m = a^m : b^m$$

Exemple:

$[(5) : (-4)]^2 = (5/-4)^2 = (-1{,}25)^2 = +1{,}5625 = (5)^2 : (-4)^2 = 25 : 16 = 1{,}5625$

1.5. Potència d'una altra potència

En elevar una potència a una altra potència obtenim una potència amb la mateixa base i l'exponent de la qual és el producte dels exponents:

$$((d)^m)^n = d^{m \cdot n}$$

Exemple:

$((-5)^3)^6 = (-5)^{3x6} = (-5)^{18}$

Activitats resoltes

- Es conta que l'inventor dels escacs se'l va mostrar al rei Shirham de l'Índia, que es va entusiasmar tant que li va oferir regalar-li el que volguera. L'inventor va demanar un gra de blat per la primera casella, dos per la segona, 4 per la tercera, i així duplicant la quantitat en cada casella. Quants grans de blat caldria posar en l'última casella, en la 64?

Observem que el nombre de grans de blat de la casella n és 2^{n-1} pel que hem de calcular 2^{63}. Calculem $2^2 = 4$. Doncs:

$(2^2)^2 = 2^4 = 16$

$((2^2)^2)^2 = 2^8 = 16 \cdot 16 = 256$

$(((2^2)^2)^2)^2 = (2^8)^2 = 2^{16} = 256 \cdot 256 = 65536$

$((((2^2)^2)^2)^2)^2 = (2^{16})^2 = 2^{32} = 65536 \cdot 65536 = 4294967296$

$(((((2^2)^2)^2)^2)^2)^2 = (2^{32})^2 = 2^{64} = 4294967296 \cdot 4294967296 = 18446744073709551616$

I ara, per calcular 2^{63} podem dividir potències de la mateixa base:

$2^{63} = 2^{64}/2 = 9223372036854775808$ grans de blat, un nombre enorme i difícil de manejar.

Per calcular el nombre total de grans de blat observem que la suma de grans fins a la casella n és 2^n per la qual cosa hem de calcular 2^{64}, que estimant 1200 grans per kg donen poc més de 15 bilions de Tm i això correspon a la producció mundial de 21685 anys. Impossible que el rei tinguera tant de blat!

Activitats proposades

1. Determina el signe de les potències:

$(-1)^9$ $(5)^{12}$ $(-12)^{-5}$ $(8)^{-4}$

2. Expressa en forma d'una única potència:

$(-7)^3 \cdot (-7)^5 \cdot (-7)^2 \cdot (-7)^6$

$(3)^2 \cdot (3)^7 \cdot (3) \cdot (3)^4 \cdot (3)^3$

3. Expressa en forma de potència:

$(-6)^4 \cdot (4)^4 \cdot (-1)^4 \cdot (-5)^4$

4. Expressa en forma de potència:

$(-8)^9 : (-8)^3$ $(-3)^2 : (-3)^7$

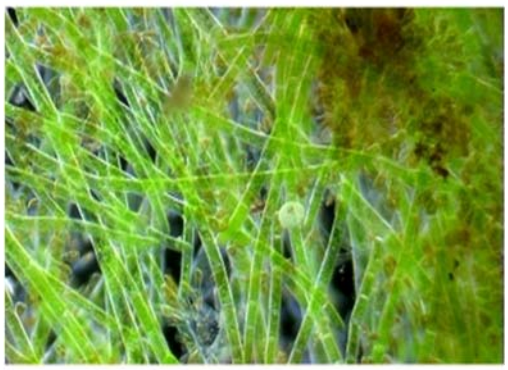
5. Expressa en forma de potència:

$(+75)^4 : (-3)^4$ $(-5)^8 : (8)^8$

6. Expressa en forma de potència:

$((-2)^5)^6$ $((7)^3)^{-5}$

Alga marina (fotografia microscòpica)



2. POTÈNCIES DE NOMBRES RACIONALS

La potència d'un número racional és un altre nombre racional el numerador i denominador del qual queden elevats a la potència. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Exemple: $\left(\frac{-2}{5}\right)^4 = \left(\frac{-2}{5}\right) \cdot \left(\frac{-2}{5}\right) \cdot \left(\frac{-2}{5}\right) \cdot \left(\frac{-2}{5}\right) = \frac{(-2)^4}{5^4} = \frac{16}{625}$

2.1. Potències de base racional i exponent negatiu

El resultat d'elevar un nombre racional a una potència negativa és una altra potència la base de la qual és el nombre racional invers, elevat al mateix exponent, positiu.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Exemple:

$(4/9)^{-5} = (9/4)^5$

2.2. Producte de potències de base racional

Es mantenen les propietats de les potències de base un nombre natural.

- **Amb la mateixa base**

El resultat de multiplicar potències amb la mateixa base és una altra potència amb la mateixa base i exponent la suma dels exponents.

$$(a/b)^m \cdot (a/b)^n \cdot (a/b)^p = (a/b)^{m+n+p}$$

Exemple:

$(2/5)^3 \cdot (2/5) \cdot (2/5)^{-4} \cdot (2/5)^5 = (2/5)^{3+1+(-4)+5} = (2/5)^5$

- **Amb el mateix exponent**

El resultat de multiplicar potències amb el mateix exponent és una altra potència la base de la qual és el producte de les bases, elevada al mateix exponent.

$$(a/b)^m \cdot (c/d)^m \cdot (e/f)^m = [(a/b) \cdot (c/d) \cdot (e/f)]^m$$

Exemple:

$(-2/3)^4 \cdot (1/4)^4 \cdot (3/5)^4 = [(-2/3) \cdot (1/4) \cdot (3/5)]^4 = (-6/60)^4 = (-1/10)^4$

Activitats proposades

7. Calcula: a) $(5/3)^3$ b) $(-2/7)^{-4}$ c) $(-1/6)^4$ d) $(-5/2)^{-2}$

8. Expressa com a única potència: a) $(-3/4)^3 \cdot (-3/4)^2 \cdot ((-3/4)^{-8}$ b) $(1/8)^{-5} \cdot (1/8)^4 \cdot (1/8)^{-2}$

9. Expressa com a única potència:

a) $(5/4)^6 \cdot (-2/3)^6 \cdot (-1/7)^6$ b) $(-3/5)^{-4} \cdot (-3/8)^{-4} \cdot (-1/4)^{-4}$

2.3. Quocient de potències de base racional

- **Amb la mateixa base**

El resultat de dividir potències amb la mateixa base és una altra potència amb la mateixa base i l'exponent la diferència dels exponents.

$$(a/b)^m : (a/b)^n = (a/b)^{m-n}$$

Exemple:

$(-1/3)^3 : (-1/3)^4 = (-1/3)^{3-4} = (-1/3)^{-1}$

- **Amb el mateix exponent**

El resultat de dividir potències amb el mateix exponent és una altra potència la base de la qual és el quocient de les bases, elevada al mateix exponent.

$$(a/b)^m : (c/d)^m = [(a/b) : (c/d)]^m$$

Exemple:

$(-3/4)^{-5} : (7/8)^{-5} = [(-3/4) : (7/8)]^{-5} = (-24/28)^{-5} = (-6/7)^{-5} = (-7/6)^5$

2.4. Operacions combinades amb potències

Exemple:

$$\frac{(-3)^3 \cdot (-3)^{-5} \cdot (-3)}{(-3)^8 \cdot (-3)^{-6}} = \frac{(-3)^{3-5+1}}{(-3)^{8-6}} = \frac{(-3)^{-1}}{(-3)^2} = (-3)^{-1-2} = (-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = -\frac{1}{27}$$

Exemple:

$$\frac{(5^4 \cdot (-2)^4 \cdot 3^4)^3}{(9^2 \cdot 4^2)^3} = \frac{[(5 \cdot (-2) \cdot 3)^4]^3}{[(3^2)^2 \cdot (2^2)^2]^3} = \frac{[(-30)^4]^3}{[[(3 \cdot 2)^2]^2]^3} = \frac{[(-30)^4]^3}{[6^4]^3} = [(-5)^4]^3 = (-5)^{12} = 244140625.$$

Activitats proposades

10. Calcula:

a) $(-2/5)^4 : (-2/5)^7$ b) $(5/8)^3 : (5/8)^{-2}$

11. Calcula:

a) $(1/5)^{-3} : (2/9)^{-3}$ b) $(-6)^5 : (-2/9)^5$

12. Calcula:

a) $\dfrac{3^2 \cdot \frac{2^5}{5^5}}{(-4) \cdot 4^5}$ b) $\dfrac{(\frac{-2}{3})^2 \cdot (\frac{-1}{6})^2}{(\frac{3}{8})^{-4} \cdot (\frac{3}{8})^6}$

3. NOTACIÓ CIENTÍFICA

3.1. Nombres grans i nombres xicotets

Un nombre expressat en notació científica està format per un nombre decimal la part entera del qual està entre 1 i 9, multiplicat per 10^n, sent n un nombre enter positiu o negatiu.

$$a \cdot 10^n \quad \text{sent} \quad 1 \le a \le 9$$

Si l'exponent ***n*** és positiu s'utilitza per a expressar nombres grans i si l'exponent ***n és*** negatiu per a expressar nombres xicotets

Exemples:

$3420000000000 = 3{,}42 \cdot 10^{12}$ $\qquad$ $0{,}000000000057 = 5{,}7 \cdot 10^{-11}$

Activitats resoltes

- En la llegenda dels escacs utilitzem números molt grans. Si no ens interessa tanta aproximació sinó fer-nos una idea únicament dels grans que són, podem usar la notació científica.

Una aproximació per al nombre de grans de blat de la casella 64 és $9 \cdot 10^{18}$, amb la qual cosa ens fem una idea millor de com és d'enorme que amb el número:

92233720368547758089223372036854775808 que dóna un poc de mareig.

- Escriu en notació científica: 2^{16}, 2^{32} i 2^{64}

$2^{16} = 65536 \approx 6{,}5 \cdot 10^4$ $\qquad$ $2^{32} = 4294967296 = 4 \cdot 10^9$ $\qquad$ $2^{64} = 18446744073709551616 = 1{,}8 \cdot 10^{19}$

3.2. Operacions amb notació científica

- **Suma o diferència**

Per realitzar sumes i restes, amb expressions en notació científica, es transforma cada expressió decimal de manera que s'igualen els exponents de 10 en cada un dels termes

Exemple:

Per calcular $4 \cdot 10^8 + 2{,}3 \cdot 10^6 - 6{,}5 \cdot 10^5$ expressem tots els sumands amb la mateixa potència de 10, triant la menor, en aquest cas 10^5:

$4000 \cdot 10^5 + 23 \cdot 10^5 - 6{,}5 \cdot 10^5$

Traiem factor comú: $10^5 \cdot (4000 + 23 - 6{,}5) = 4016{,}5 \cdot 10^5 = 4{,}0165 \cdot 10^8$

- **Producte**

El producte d'expressions en notació científica és el resultat de multiplicar els nombres decimals i sumar els exponents de base 10.

Exemple:

$$2{,}5 \cdot 10^5 \cdot 1{,}36 \cdot 10^6 = (2{,}5 \cdot 1{,}36) \cdot 10^{5+6} = 3{,}4 \cdot 10^{11}$$

- **Quocient**

El quocient de dues expressions en notació científica és el resultat de dividir els números decimals i restar els exponents de base 10.

Exemple:

$$5{,}4 \cdot 10^9 : 4 \cdot 10^7 = (5{,}4 : 4) \cdot 10^{9-7} = 1{,}35 \cdot 10^2$$

Activitats resoltes

- Per fer el quocient per a calcular 2^{63} dividint 2^{64} entre 2 en notació científica:

$$2^{63} = 2^{64} / 2 = 1{,}8 \cdot 10^{19} / 2 = 0{,}9 \cdot 10^{19} = 9 \cdot 10^{18}.$$

Usa la calculadora

Les calculadores utilitzen la notació científica. Moltes calculadores per a escriure $9 \cdot 10^{18}$ escriuen 9e+18.

13. Utilitza la teua calculadora per a obtindre 2^{16}, 2^{32} i 2^{64} i observa com dóna el resultat.

14. Utilitza la calculadora per obtindre la teua edat en segons en notació científica.

Activitats proposades

15. Efectua les operacions en notació científica:

a) $0{,}000257 + 1{,}4 \cdot 10^{-5}$ b) $200000000 - 3{,}5 \cdot 10^6 + 8{,}5 \cdot 10^5$

16. Efectua les operacions en notació científica:

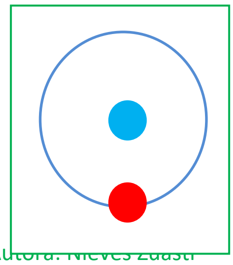
a) $(1{,}3 \cdot 10^5) \cdot (6{,}1 \cdot 10^{-3})$ b) $(4{,}7 \cdot 10^{-8}) \cdot (3 \cdot 10^6) \cdot (2{,}5 \cdot 10^{-4})$

17. Efectua les operacions en notació científica:

a) $(5 \cdot 10^{-8}) : (1{,}5 \cdot 10^{-3})$ b) $(3{,}25 \cdot 10^{-5}) \cdot (5 \cdot 10^2) : (6{,}15 \cdot 10^{-7})$

18. S'estima que el volum de l'aigua dels oceans és de 1285600000 km3 i el volum d'aigua dolça és de 35000000 km3. Escriu aqueixes quantitats en notació científica i calcula la proporció d'aigua dolça.

19. Se sap que en un àtom d'hidrogen el nucli constitueix el 99 % de la massa, i que la massa d'un electró és aproximadament de $9{,}109 \cdot 10^{-31}$ kg. Quina massa té el nucli d'un àtom d'hidrogen? (*Recorda*: Un àtom d'hidrogen



està format pel nuci, amb un protó, i per un únic electró)

20. A Joan li han fet una anàlisi de sang i té 5 milions de glòbuls rojos en cada mm^3. Escriu en notació científica el nombre aproximat de glòbuls rojos que té Joan estimant que té 5 litres de sang.

4. ARRELS

5.1. Radicals d'índex qualsevol

L'arrel enèsima d'un nombre *a* és un nombre *x* que en elevar-lo a *n*, dóna com resultat *a*.

$$\sqrt[n]{a} \Leftrightarrow x^n = a.$$

Recorda:
n = índex de l'arrel
a = radicand
$x = \sqrt[n]{a}$ arrel

L'arrel quadrada d'un nombre real no negatiu *a és* un únic nombre no negatiu *x* que elevat al quadrat ens dóna *a*:

$$\sqrt{a} = x \Leftrightarrow x^2 = a,\ a \geq 0,\ x \geq 0.$$

Observació

No confongues resoldre una equació, $x^2 = 9$, que té dues arrels, 3 i –3, amb calcular una **arrel**, com $\sqrt{9}$ que és **únicament** 3.

Imagina quin embolic tan horrible seria calcular $\sqrt{9} + \sqrt{1} + \sqrt{4}$ si el resultat poguera ser:

3 + 1 + 2 = 6, o bé, 3 – 1 – 2 = 0, o bé –3 + 1 – 2 = –4, o bé 3 – 1 + 2 = 4 ...

L'arrel enèsima d'un nombre en el camp real o no existeix o es **única**.

Observa que $\sqrt{-1}$ no existeix en el camp real. Cap nombre real en elevar-lo al quadrat dóna un nombre negatiu. Només podem calcular arrels d'exponent parell de nombres positius. No obstant això $\sqrt[3]{-1} = -1$, perquè (–1) · (–1) · (–1) = –1.

Activitats resoltes

- Quant mesura el costat d'una habitació quadrada enrajolada amb 144 taulells quadrats de 25 cm de costat?

Cada costat tindrà $\sqrt{144} = 12$ taulells, que mesuren 25 cm, doncs mesurarà 12 · 25 = 300 cm = 3 m de llarg.

- En un depòsit cúbic caben 1000 cubs d'1 dm^3, quant mesura la seua aresta? I si caben 12167 cubs?

Autora: Nieves Zuasti
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

Calculem $\sqrt[3]{1000}$= 10. L'aresta mesura 10 dm. Calculem ara $\sqrt[3]{12167}$= 23. L'aresta mesura 23 dm perquè 23 · 23 · 23 = 12167.

- Calcula $\sqrt[3]{-64}$; $\sqrt[3]{-8}$; $\sqrt[3]{-27}$; $\sqrt[3]{-1000}$.

Les arrels de radicand negatiu i índex imparell, si existeixen: $\sqrt[3]{-64}$= –4; $\sqrt[3]{-8}$= –2; $\sqrt[3]{-27}$= –3; $\sqrt[3]{-1000}$= –10.

4.2. Potències d'exponent fraccionari

Es defineix $x^{\frac{1}{n}}$com $\sqrt[n]{x}$:

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

Per tant, la potència $x^{\frac{m}{n}}$pot expressar-se en forma de radical, de manera que ***n*** serà l'índex de l'arrel i ***m*** l'exponent del radicand.

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

Exemple:

$5^{2/3} = \sqrt[3]{5^2}$

Les propietats de les potències d'exponent fraccionari coincideixen amb les de les potències d'exponent un nombre natural.

Activitats resoltes

- Simplifica els radicals $\sqrt[4]{2^{12}}$, $\sqrt[10]{7^{15}}$usant potències d'exponent fraccionari.

Escrivim el radical com a potència d'exponent fraccionari i simplifiquem les fraccions:

$$\sqrt[4]{2^{12}} = 2^{\frac{12}{4}} = 2^3 = 8.$$

$$\sqrt[10]{7^{15}} = 7^{\frac{15}{10}} = 7^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{7^3} = 7 \cdot \sqrt{7}$$

- Calcula $\sqrt{484}$y $\sqrt[3]{27000}$factorizando prèviament els radicands

$$\sqrt{484} = \sqrt{2^2 \cdot 11^2} = 2 \cdot 11 = 22$$

$$\sqrt[3]{27000} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

- Calcula $25^{0,5}$; $32^{\frac{3}{5}}$y $(3^{\frac{6}{5}})^{\frac{5}{2}}$

$$25^{0,5} = 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$$

$32^{\frac{3}{5}} = (2^5)^{\frac{3}{5}} = 2^{\frac{5\cdot3}{5}} = 2^3 = 8$

$(3^{\frac{6}{5}})^{\frac{5}{2}} = 3^{\frac{6\cdot5}{5\cdot2}} = 3^3 = 27$

4.3. Extracció de factors d'un radical

Tenim $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ amb *m* > *n*, per extraure factors de l'arrel realitzem el quocient: *m* dividit entre *n* té de quocient *p* i de residu *r*: *m* = *n* · *p* + *r*. El resultat és $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n]{x^{n\cdot p+r}} = x^{\frac{n\cdot p+r}{n}} = x^{p+\frac{r}{n}} = x^p \cdot \sqrt[n]{x^r}$.

Si *m* > *n*, $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = x^p \cdot \sqrt[n]{x^r}$.

Exemple:

$\sqrt[3]{x^5} = x \cdot \sqrt[3]{x^2}$

$\sqrt{2^4 \cdot 3^3 \cdot 5} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 5} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3 \cdot 5} = 12 \cdot \sqrt{15}$

Activitats proposades

21. Calcula totes les solucions:

a) $\sqrt{121}$ b) $\sqrt[3]{-8}$ c) $\sqrt[4]{10000}$ d) $\sqrt[5]{-1}$ e) $\sqrt[7]{1}$

22. Expressa en forma de radical

a) $(-3)^{4/5}$ b) $8^{1/3}$ c) $5^{2/3}$

23. Extrau els factors possibles en cada radical:

a) $\sqrt[4]{a^{6\cdot}b^5}$ b) $\sqrt[3]{6^5 \cdot 3^4 \cdot 2^6}$ c) $\sqrt{4 \cdot 5^3 \cdot 9^3}$

4.4. Operacions amb radicals

Com els radicals es poden escriure com a potències, tenen les propietats que ja coneixes de les potències.

- **Arrel d'un producte**

L'arrel d'un producte és igual al producte de les arrels dels factors

$$\sqrt[n]{x \cdot y \cdot z} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} \cdot \sqrt[n]{z}$$

Exemple:

$\sqrt[3]{8 \cdot 27 \cdot 64} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{64} = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

- **Arrel d'un quocient**

L'arrel d'un quocient és igual al quocient de l'arrel del dividend i l'arrel del divisor

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

Exemple:

$$\sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{243}} = \frac{2}{3}$$

Recorda

Hi ha operacions amb radicals que **NO** estan permeses.

10 = $\sqrt{100}$ = $\sqrt{64+36}$ que es distint de: $\sqrt{64}$ + $\sqrt{36}$ = 8 + 6 = 14.

- **Arrel d'una arrel**

L'arrel d'una arrel és igual a una altra arrel amb el mateix radicand i l'índex del qual és el producte dels índexs. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n\cdot m]{x}$

Exemple:

$$\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[3\cdot 2]{64} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$$

4.5. Operacions combinades

Exemple:

$$x^{2/3} \cdot y^{1/3} = \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x^2 \cdot y}$$

Exemple:

$$\frac{x^{\frac{7}{4}}}{x^{\frac{5}{3}}} = \frac{\sqrt[4]{x^7}}{\sqrt[3]{x^5}} = \frac{x \cdot \sqrt[4]{x^3}}{x \cdot \sqrt[3]{x^2}} = \frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x^2}}$$

Activitats proposades

24. Expressa en forma de producte o de quocient:

a) $\sqrt[3]{a \cdot b}$ b) $\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7}$ c) $\sqrt[2]{\frac{7}{6}}$ d) $\sqrt{\frac{x^3}{y}}$

25. Expressa en forma d'única arrel:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{18}}$ b) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{25}}$

26. Expressa en forma de potència:

a) $\sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt{2^5}$ b) $\frac{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{5^2}}{\sqrt{5^3}}$

27. Simplifica l'expressió:

a) $\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x}}\right)^3$ b) $\frac{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[5]{x^{11}}}{\sqrt[3]{x}}$

4.6. Arrels quadrades

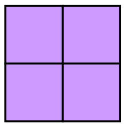
Ja saps que:

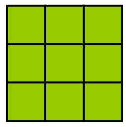
L'arrel quadrada exacta d'un nombre *a* és un altre nombre *b* el quadrat del qual és igual al primer:

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$$

Exemple:

a) En poder construir un quadrat de costat 2 amb 4 quadrats xicotets es diu que 2 és l'arrel quadrada de 4, ja que $2^2 = 4$, i per tant diem que 2 és l'arrel *quadrada* de 4, és a dir:





$$\sqrt{4} = 2.$$

Obtindre l'arrel quadrada exacta és l'operació oposada d'elevar al quadrat.

b) Podem construir un quadrat de costat 3 amb 9 quadrats xicotets, per tant com $3^2 = 9$ doncs:

$$\sqrt{9} = 3.$$

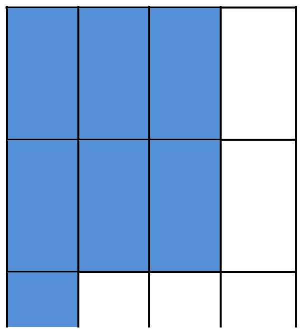
En escriure $\sqrt{64} = 8$es llig que l'arrel *quadrada* de 64 és 8.

Al signe √ se li denomina **radical**, s'anomena **radicand** al nombre col·locat davall, en aquest cas 64 i es diu que el **valor de l'arrel** és 8.

Exemple:

Sabem que l'àrea d'un quadrat és 121 cm^2, quant val el seu costat?

El seu costat valdrà l'arrel quadrada de 121. Com $11^2 = 121$, doncs l'arrel quadrada de 121 és 11. El costat del quadrat és 11.



Exemple:

Es pot construir un quadrat amb 7 quadrats xicotets?

Observa que es pot formar un quadrat de costat 2, però sobren 3 quadrats xicotets, i que per a fer un quadrat de costat 3 falten 2 quadrats xicotets.

El nombre 7 no és un quadrat perfecte, no té arrel quadrada exacta perquè amb 7 quadrats xicotets no es pot construir un quadrat.

És més, aquells nombres naturals que no tenen arrel quadrada exacta, la seua expressió decimal és un nombre irracional, amb infinites xifres decimals no periòdiques.

Però podem afirmar que 2 < $\sqrt{7}$< 3.

Com 4 és un quadrat perfecte i $\sqrt{4}$= 2, i 9 és també un altre quadrat perfecte i $\sqrt{9}$= 3, els nombres, 5, 6, 7, i 8 no són quadrats perfectes i la seua arrel quadrada és un nombre irracional.

Amb més dificultat es pot aproximar aqueixos valors, així 2,6 < $\sqrt{7}$ < 2,7, (Multiplica 2,6 per si mateix, i 2,7 per si mateix, i comprova que es verifica la desigualtat) o podem obtindre més xifres decimals:

2,64 < $\sqrt{7}$ < 2,65, o bé 2,64575131 < $\sqrt{7}$ < 2,64575132.

Podem trobar un valor aproximat de l'arrel.

Per calcular arrels quadrades pots utilitzar la calculadora, amb la tecla $\sqrt{\ }$

És important conéixer els quadrats perfectes, perquè mentalment, t'ajuda a saber entre quins valors enters està l'arrel quadrada que vols calcular.

Observa que:

El quadrat d'un nombre, positiu o negatiu, és sempre un nombre positiu. Llavors no hi ha l'arrel quadrada d'un nombre negatiu.

Activitats proposades

28. Escriu la llista dels 12 primers quadrats perfectes.

29. Calcula **mentalment** al teu quadern les arrels següents:

a) $\sqrt{49}$ b) $\sqrt{25}$ c) $\sqrt{100}$ d) $\sqrt{64}$ e) $\sqrt{81}$ f) $\sqrt{1}$ g) $\sqrt{0}$.

30. Calcula **mentalment** al teu quadern les aproximacions enteres de les arrels següents:

a) $\sqrt{51}$ b) $\sqrt{27}$ c) $\sqrt{102}$ d) $\sqrt{63}$ e) $\sqrt{80}$ f) $\sqrt{2}$ g) $\sqrt{123}$.

31. Indica quines arrels quadrades seran nombres naturals, quins nombres irracionals i quins no existeixen:

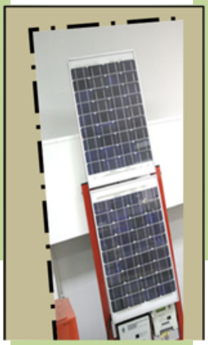
a) $\sqrt{36}$ b) $\sqrt{-25}$ c) $\sqrt{-100}$ d) $\sqrt{32}$ e) $\sqrt{-7}$ f) $\sqrt{10}$ g) $\sqrt{100}$.

CURIOSITATS. REVISTA

Cèl·lules solars de silici de grandària microscòpica

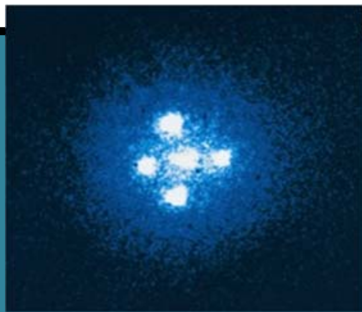
El programa de Tecnologia Solar del Departament d'Energia dels Estats Units, en el seu objectiu d'aconseguir major eficiència en la producció d'energia solar, ha creat cèl·lules microscòpiques de silici. Aquestes cèl·lules utilitzen 100 vegades menys material de silici policristalí de 20 micròmetres de grossor amb un significatiu cost menor de fabricació. Aquestes cèl·lules converteixen quasi un 15 % de la llum solar

en energia elèctrica.

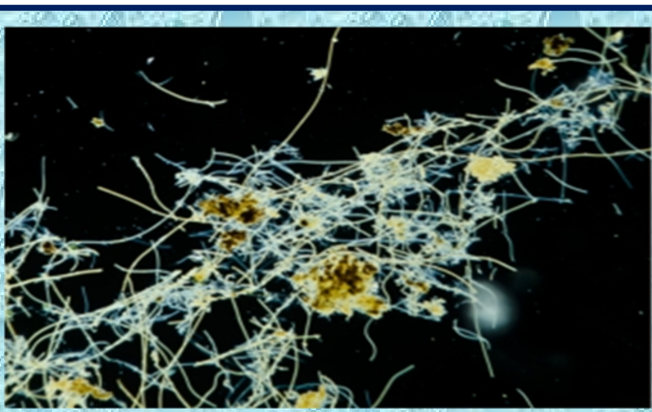


Sabies que...

a les operacions en notació exponencial també les anomenen de "coma flotant" perquè l'exponent equival a la posició del decimal? Als ordinadors, la potència de càlcul se mesura en *mflops*, o milers d'operacions en coma flotant per segon, en angles *floating point operations per secound*, abreviat "flops". El teu ordinador igual pot fer un milió d'aquestes operacions per segon, un "*giga flops*"!



Albert Einstein havia anunciat, a partir de la seua teoria de la relativitat general, l'anomenat "espillcòsmic" o "lent gravitacional". Aquest efecte pot explicar la formació de quatre o més imatges a partir d'una sola font molt distant. La creu de la imatge va resultar ser un sol quàsar situat a uns 10.000 milions d'anys-llum a què es va dir Creu d'Einstein, la llum dels quals queda corbada en la seua trajectòria per una galàxia-lent situada deu vegades més prop.



La presència dels bacteris

S'estima que existeixen 100 milions de bacteris, de 600 espècies diferents, per cada mil·límetre cúbic de saliva i 40 milions de bacteris en un gram de terra.

Alguns científics calculen que en l'interior de la Terra podria haver-hi fins a 100.000 bilions de tones de bacteris, de manera que si totes estigueren sobre la su 15 metres. Hi ha molta

Al Papir de Ajmeed (1650 a.C.) es mostra com els egipcis extreien arrels quadrades. En l'antiga Índia, en els manuscrits del Baudhayana Sulba Sutra Aryabhata (800-500 a.C.) s'anota un mètode per a calcular arrels quadrades.

A Europa, no s'han trobat referències abans de Cataneo (1546). El símbol de l'arrel quadrada va ser introduït en 1525 pel matemàtic Christoph Rudolff, i és una forma estilitzada de la r

RESUM

	POTÈNCIES I ARRELS	*Exemples*
Producte i quocient de potències	Al producte de potències amb la mateixa base es sumen els exponents. En el quocient es resten els exponents Amb el mateix exponent: En el producte, es multipliquen les bases i s'eleva el resultat al mateix exponent. En el quocient es divideixen les bases i s'eleva el resultat al mateix exponent	$(-5)^4 \cdot (-5)^2 = (-5)^6$ $3^2 : 3^7 = 3^{-5}$ $2^5 \cdot 7^5 = 14^5$ $(-5)^3 : (4)^3 = (-5/4)^3$
Potència d'un producte i d'un quocient	La potència d'un producte és igual al producte de cada un dels factors elevats a la potència $(a \cdot b \cdot c \cdot d)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n \cdot d^n$ La potència d'un quocient és igual al quocient del dividend i el divisor elevats a la potència $c^m : c^n = c^{m-n}$	$(5 \cdot 2 \cdot 3)^4 = 5^4 \cdot 2^4 \cdot 3^4$ $(-7/2)^6 = 7^6 / (-2)^6$
Potència d'una altra potència	$((d)^m)^n = d^{mxn}$	$((-4)^3)^5 = (-4)^{15}$
Potència de base racional	$(a/b)^n = a^n/b^n$	$(6/5)^2 = 6^2/5^2$
Potència d'exponent negatiu	$a^{-n} = 1/a^n$	$8^{-3} = 1/8^3$
Notació científica: operacions	$a \cdot 10^{\pm n}$ siendo $1 \leq a \leq 9$. + n para grandes números –n para pequeños números	$320000000 = 3{,}2 \cdot 10^8$ $0{,}0000000009 = 9 \cdot 10^{-10}$
Radicals: arrels d'índex qualsevol	$\sqrt{49} = 7;\ \sqrt[3]{-216} = -6; \sqrt[3]{64} = 4;\ \sqrt[4]{81} = 3;\ \sqrt[5]{-32} = -2$	
Potències d'exponent racional	Una potència amb exponent racional pot expressar-se en forma d'arrel l'índex de la qual és el denominador de l'exponent i el radicand queda elevat al numerador de l'exponent: $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$	$8^{2/5} = \sqrt[5]{8^2}$
Extracció de factors d'un radical	Si $m = n \cdot c + r$ doncs $\sqrt[n]{a^m} = a^c \cdot \sqrt[n]{a^r}$	$\sqrt[3]{8^7} = 8^2 \cdot \sqrt[3]{8}$
Operacions amb radicals	$\sqrt[n]{x \cdot y \cdot z} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} \cdot \sqrt[n]{z};\quad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$	$\sqrt[4]{5 \cdot 3 \cdot 2} = \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{2} =$ $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3}$

EXERCICIS I PROBLEMES

Potències

1. Expressa en forma d'única potència:

a) $2^5 \cdot (-3)^5 \cdot (-1)^5$

b) $(-1)^3 \cdot (-1)^8 \cdot (1)^5$

c) $4^3 \cdot (-2)^3 \cdot (-1)^3 \cdot 5^3$

d) $(-5)^2 \cdot (-5)^4 \cdot (5)$

e) $(-9)^2 \cdot 9^3 \cdot 9^4 \cdot 9$

f) $(-18)^4 : (-3)^4$

g) $(6)^5 : (6)^2$

h) $(-3)^2 : (-3)^4$

2. Expressa en forma d'única potència:

a) $\dfrac{4^2 \cdot 4^3 \cdot 4}{5^6 \cdot (-1)^6}$

b) $[(2)^7 : (-3)^7] \cdot (-4)^3 \cdot (-4)^4$

c) $\dfrac{[-2^4 \cdot (-3)^4 \cdot 6^4]^3 : [(-4)^8 \cdot (-4)^4]}{9^6 \cdot 9^4 : 9}$

d) $\dfrac{(-3)^2 \cdot (10)^2 : (-5)^2}{7^5 : 7^3}$

3. Expressa en forma de potència d'exponent positiu:

a) $(-4)^{-3}$ b) $(9)^{-3}$ c) $(-2)^5 : (-2)^9$ d) $(-5) \cdot (-5)^2 : (-5)^6$

4. Expressa en forma d'única potència:

a) $((2)^4)^3$ b) $((-3)^{-2})^5$ c) $((-1)^4)^3$ d) $((5)^2)^{3/5}$

5. Expressa en forma d'única potència:

a) $(-3/5)^4$ b) $(2/9)^4$ c) $(1/5)^{-3}$ d) $(2/3)^{-4}$

6. Expressa en forma d'única potència:

a) $(2/3)^{-4} \cdot (2/3)^3 \cdot (2/3)^5$
b) $(1/6)^3 \cdot (3/5)^3 \cdot (-6/7)^3$
c) $(-5/3)^4 : (-2/3)^4$
d) $(4/9)^3 : (4/9)^5$
e) $((-4/3)^{-3})^5$
f) $((2/7)^{-1})^{-3}$

7. Expressa en forma d'única potència:

a) $$\frac{(2/3)^3 \cdot (-1/5)^3 \cdot (-4/9)^3 \cdot (1/2)^3}{(-1/4)^3 \cdot (-1/4)^{-2} \cdot (-1/4) \cdot (-1/4)^4}$$

b) $((-1/3)^4)^{3/2} \cdot (2/5)^{1/6}$

c) $$\frac{(2/5)^{1/2} \cdot (2/5)^{3/4} \cdot (2/5)^{-1/6}}{(7/8)^3 : (1/6)^3}$$

8. Expressa en forma de notació científica:

a) 140000000 b) 32800 c) 710000000000000000 d) 0,0000075

e) –18000000 f) 0,00000000042 g) –0,009 h) 0,00000000007

9. Busca informació expressada en notació científica sobre:

a) La distància entre la Terra i la Lluna
b) Unitat de massa atòmica
c) Km que corresponen a un any llum
d) Un googol
e) La longitud d'ona dels rajos còsmics

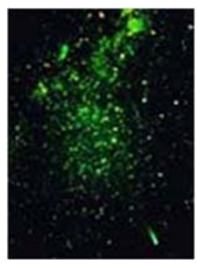
10. Realitza les operacions i expressa el resultat en notació científica:

a) $4 \cdot 10^3 + 2{,}4 \cdot 10^6 - 1{,}7 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^3$

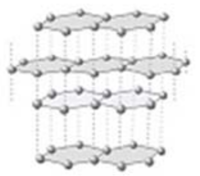
b) $2{,}3 \cdot 10^{-5} - 3{,}45 \cdot 10^{-4} + 6 \cdot 10^{-3}$

c) $3 \cdot 10^{-4} \cdot 4{,}5 \cdot 10^2$

d) $1{,}8 \cdot 10^5 : 5 \cdot 10^8$



11. L'estrela Sírius està a uns 8,611 anys llum del nostre planeta. Expressa en metres, mitjançant notació científica la distància que recorreria una nau espacial que realitzara un trajecte d'anada i tornada a Sírius. (*Recorda*: Un any llum, la longitud que recorre la llum en un any, és aproximadament igual a $9{,}46 \times 10^{12}$ km (9 460 730 472 580,8 km amb més aproximació))



12. La massa d'un electró en repòs s'estima en $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg, la d'un protó és de $1{,}672 \cdot 10^{-27}$ kg, i la d'un neutró $1{,}64 \times 10^{-27}$ kg. Calcula la massa d'un àtom de carboni 14 (C_{14}) format per sis protons, sis electrons i 6 + 2 = 8 neutrons. (El C_{14} és un isòtop que té dos neutrons més que el carboni normal i que s'utilitza per a datar).

13. Calcula i expressa en notació científica:

a) $0{,}00829 + 4 \cdot 10^{-3} + 7{,}45 \cdot 10^{-5} - 6{,}32 \cdot 10^{-4}$

b) $5 \cdot 10^{6} - 2{,}8 \cdot 10^{7} - 3 \cdot 10^{5}$

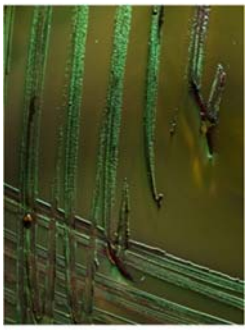
c) $5 \cdot 10^{-2} - 4 \cdot 10^{2} + 1{,}4 \cdot 10^{-3}$

d) $3 \cdot 10^{-5} \cdot (-2{,}7) \cdot 10^{-3} + 4{,}2 \cdot 10^{-6}$

14. Expressa el resultat d'aquesta operació en notació científica:

a) $\frac{2{,}4\cdot 10^{-3}-1{,}5\cdot 10^{-4}}{0{,}025+3\cdot 10^{-4}}$

b) $\frac{(1{,}3\cdot 10^{4})\cdot(5\cdot 10^{3})}{(4\cdot 10^{5})\cdot(2{,}3\cdot 10^{6})}$



15. S'estima que existeixen 40 milions de bacteris en un gram de terra. Expressa en notació científica de forma aproximada el nombre de bacteris que existeixen en uns camions que estan descarregant 50 tones mètriques d'arena en una platja.

16. Si $x = 240000$ $y = 0{,}00058$ $z = 7{,}2 \cdot 10^{6}$

Calcula i expressa en notació científica a) $x \cdot y$ b) $2x + y \cdot 10^{7}$ c) $3x - 5y$

17. **Arquimedes**, al seu tractat *L'arenario* conta una manera per expressar nombres molt grans, com el nombre de grans d'arena que hi ha en tota la Terra. Anem a estimar-los ara per un altre procediment. Estimem quants grans d'arena necessitem per tindre un gram d'arena. Et pareix que 50 grans d'arena?. S'estima que la massa de la Terra és de:

M_T=5 980 000 000 000 000 000 000 000 000 g = $598 \cdot 10^{25}$ g

Calcula de forma aproximada el nombre de grans d'arena que hi ha en tota la Terra.

18. Veiem en Internet que la massa de Mart és de 639E21 kg, que la massa de Júpiter és de 1,898E27 kg, i que la massa de la Terra és de 5,972E24 kg.

19. a) Calcula quantes vegades cabria la Terra en el planeta Júpiter.

20. b) Calcula la relació entre la massa de la Terra i la de Mart.

Arrels

21. Calcula:

a) $\sqrt{12100}$ b) $\sqrt[3]{-0{,}008}$ c) $\sqrt[3]{-125}$ d) $\sqrt[5]{-1}$ e) $\sqrt{0{,}49}$

22. Calcula:

a) $\sqrt[4]{2{,}0736}$ b) $\sqrt[5]{-0{,}00001}$ c) $\sqrt{33640000}$ d) $\sqrt[3]{-2{,}7\cdot 10^{-6}}$

23. Expressa en forma d'arrel:

a) $(-4)^{3/5}$ b) $7^{1/6}$ c) $(21)^{1/3}$ d) $(-5)^{2/3}$

24. Expressa en forma de potència:

a) $\sqrt[5]{6^3}$ b) $\sqrt{(-7)^5}$ c) $\sqrt{3^5}$ d) $\sqrt[3]{(-30)^4}$

25. Extrau els factors possibles d'aquests radicals:

a) $\sqrt{3^3\cdot 10^5\cdot 2}$ b) $\sqrt[3]{6^9\cdot 2^5}$ c) $\sqrt[4]{x^{11}\cdot y^5}$ d) $\sqrt[3]{3^4\cdot 5^6}$

26. Extrau els factors possibles d'aquests radicals:

a) $\sqrt[3]{a^7\cdot b^3\cdot c^{-6}}$ b) $\sqrt{5^{-5}\cdot 3^{-6}}$ c) $\sqrt[4]{10^5 : 6^8}$ d) $\sqrt{x^3\cdot x^8\cdot x}$

27. Simplifica:

a) $\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^3}$ b) $\sqrt[3]{\left(\frac{-4}{5}\right)\cdot\left(\frac{-4}{5}\right)^5}$ c) $\sqrt{\frac{x^3\cdot y^4}{x^8\cdot y}}$ d) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{4}\right)^5 : \left(\frac{4}{3}\right)^5}$

28. Expressa en forma de producte:

a) $\sqrt{3\cdot 50\cdot 12}$ b) $\sqrt[3]{5^2\cdot 2^4\cdot 3^6}$ c) $\sqrt{8\cdot 3^4\cdot 9}$ d) $\sqrt[3]{a^8\cdot b^2\cdot c^6}$

29. Expressa en forma de quocient:

a) $\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)}$ b) $\sqrt[5]{\frac{15}{32}}$ c) $\sqrt[3]{\frac{-7}{9}}$ d) $\sqrt{\frac{15}{24}}$

30. Expressa en forma d'única arrel:

a) $\sqrt{\sqrt{48}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{450}}$ c) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{9000}}$ d) $\sqrt[2]{\sqrt[5]{-1}}$

31. Simplifica les operacions:

a) $\sqrt[3]{3^5}\cdot\sqrt[3]{2^4}$ b) $\left(\sqrt[3]{-27}\right)\cdot 5^{\frac{2}{3}}$ c) $\sqrt[5]{2^{12}} : \sqrt[5]{3^8}$ d) $\sqrt[2]{3}\cdot\sqrt[2]{10^5} : \sqrt{2^3}$

32. Simplifica les operacions:

33. a) $\sqrt[3]{x^5}:\sqrt[2]{x^3}$ b) $\sqrt{\sqrt{10^{12}}}$ c) $\sqrt{5\cdot(-2)^6\cdot(-3)^6}$

d) $\sqrt[5]{(-6)^{12}}:\sqrt[5]{(-6)^7\cdot 3^{10}}$

34. Simplifica les operacions:

a) $\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}}:5^{\frac{2}{3}}$ b) $\dfrac{(-4)^5\cdot\sqrt[3]{(-4)}}{\sqrt{2^3:\sqrt{2^5}}}$ c) $\dfrac{((-7^3))^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt[3]{(-7)^2}}{\sqrt{\sqrt{(-7)}}}$

AUTOEVALUACIÓ

1. El resultat de les operacions següents és: $(-6)^3 \cdot (-6)^{-5} \cdot (-6)$ i $(12)^7 : (12)^5$

a) 6 i 12^2 b) $1/6$ i 12^5 c) $-1/6$ i 12^2

2. El resultat de les operacions següents és: $(-5)^4 \cdot (-1)^4 \cdot (6)^4$ i $(-8)^7 : (5)^7$

a) $(-30)^4$ i $(-3)^7$ b) 30^4 i $(-8/5)^7$ c) 30^4 i $(-3)^7$

3. El resultat de les operacions següents és: $((-2)^5)^3$; $((-1)^5)^7$ i $((-5)^{2/3})^6$

a) $(-2)^{15}$; (-1) i $(5)^{8/3}$ b) -2^{15}; (-1) i -5^4 c) $(-2)^{15}$; (-1) i $(-5)^4$

4. El resultat de les operacions següents és: $(8)^{-3}$; $(-2)^{-4}$ i $(10^5)^{-2}$

a) $1/512$; $1/16$ i $1/10^{10}$ b) $1/8^3$; $-1/2^4$ i $1/10^{10}$

5. El resultat de les operacions següents és: $(5/7)^3$; $(-1/3)^{-2}$ i $(-2/5)^4$

a) $5^3/7^3$; $1/3^2$ i $-2^4/5^4$ b) $5^3/7^3$; 3^2 i $2^4/5^4$

6. El resultat de les operacions següents és: $(2/3)^3 \cdot (2/3)^2 \cdot (2/3)^{-5}$

a) 1 b) $2/3$ c) $-2/3$ d) $(2/3) \cdot (-3/2)$

7. Les expresions $3{,}1 \cdot 10^8$ i $0{,}0000000095$ corresponen a :

a) 3100000000 i $9{,}5 \cdot 10^{-10}$ b) 310000000 i $9{,}5 \cdot 10^{-10}$ c) 310000000 i $9{,}5 \cdot 10^{-9}$

8. El resultat d'aquesta operació és: $(0{,}00098 + 3 \cdot 10^{-6} - 4{,}2 \cdot 10^{-4}) \cdot 2{,}5 \cdot 10^5$

a) $124{,}5$ b) $2407{,}5$ c) $107{,}5$ d) $140{,}75$

9. El resultat de les operacions següents és: $\sqrt[3]{-1331}$; $\sqrt{256}$y $\sqrt[5]{-1}$

a) $-11, 16, -1$ b) $11, 16, 1$ c) $-11, -16, -1$

10. Les següents expresions corresponen a: $(-4)^{3/5}$; $(3)^{1/2}$ i $(-5)^{4/3}$

a) $\sqrt[5]{-4^3}$; $\sqrt{3}$i $\sqrt[3]{-5^4}$ b) $\sqrt[5]{(-4)^3}$; $\sqrt{3}$i $\sqrt[3]{(-5)^4}$ c) $-\sqrt[5]{4^3}$; $\sqrt{3}$i $\sqrt[3]{-(5^4)}$

11. El resultat d'extraure factors d'aquests radicals és: $\sqrt[3]{(-5)^4}$ i$\sqrt{2^3 \cdot 5^5}$

a) $(-5) \cdot \sqrt[3]{(-5)}$i $2 \cdot 5^3\sqrt{2 \cdot 5}$ b) $(-5) \cdot \sqrt[3]{(-5)}$i $50\sqrt{10}$ c) $(-5) \cdot \sqrt[3]{(-5)}$i $(-5) \cdot \sqrt[3]{(-5)}$

12. Les operacions següents poden expressar-se: $\sqrt[3]{-(5):12}$i$\sqrt[3]{\sqrt[3]{-18}}$

$\frac{\sqrt[3]{-5}}{\sqrt[3]{12}}$i $\sqrt[9]{-18}$ b) $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{12}}$i $\sqrt[6]{-18}$ c) $\frac{\sqrt[3]{-5}}{\sqrt[2]{12}}$i $\sqrt[9]{18}$

Autora: Nieves Zuasti
Traducció: Pedro Podadera. Institut Juan de Garay de València

Matemàtiques orientades a les ensenyances acadèmiques.

3º B d'ESO
Capítol 3: Successions

www.apuntesmareaverde.org.es

Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez i Milagros Latasa Asso

Revisor: Javier Rodrigo i Nieves Zuasti

Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

Traducció al valencià: Pedro Podadera IES Juan de Garay

Successions. 3º B d'ESO

Índex

Resum

Què tenen en comú conceptes tan dispars com el nombre de conills fills engendrats per una parella de conills, l'estructura d'un floc de neu o l'interés que obtenim en depositar determinada quantitat de diners en una entitat financera?

Darrere d'aquests casos ens trobem amb el concepte de successió. Les successions numèriques tenen gran importància i utilitat en moltíssims aspectes de la vida real, algun dels quals aniràs descobrint al llarg d'aquest tema.

1. SUCCESSIONS DE NOMBRES REALS

1.1. Definicions

Una **successió** de nombres reals és una seqüència ordenada de nombres.

Exemple:

- Les següents seqüències són successions:
  a) 1, 2, 3, 4, 5, 6,…
  a) 2, 4, 6, 8, 10, 12,…
  b) $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$

S'anomena **terme d'una successió** a cada un dels elements que constitueixen la successió.

Per representar els diferents termes d'una successió s'usa una mateixa lletra amb distints subíndexs. Aquests subíndexs indiquen el lloc que ocupa aqueix terme en la successió.

Exemple:

- En la successió a) tindríem que: $a_5 = 5$, ja que és el terme de la successió que ocupa el cinqué lloc.
- En la successió b), el tercer terme, es denotaria b_3 i correspondria al 6
- En la successió c), per exemple $c_2 = \frac{1}{2}$

El realment important a l'hora d'anomenar els termes d'una successió és el subíndex perquè denota el lloc que ocupen en la successió. Les lletres amb què es designa la successió són distintes per a successions distintes i solen ser lletres minúscules.

S'anomena **terme general d'una successió** al terme que ocupa el lloc *n*-ésimo i s'escriu amb la lletra que denote a la successió (per exemple *a*) amb subíndex *n*: (a_n)

Exemple:

- Als casos que estem considerant, els termes generals de les successions serien: a_n, b_n y c_n.

Si ens fixem, els valors que prenen els subíndexs són nombres naturals, però els termes de la successió no tenen per què ser-lo, és a dir, els valors que pren la successió són nombres reals. Per això, podem definir successió de nombres reals de forma més rigorosa com:

Definició:

S'anomena **successió de nombres reals** a una aplicació que fa correspondre a cada nombre natural un nombre real.

Activitats resoltes

- *En les successions anteriors, observem que:* $a_{1003} = 1003$, $b_{12} = 24$ *i* $c_{37} = \frac{1}{37}$

Activitats proposades

1. Escriu els deu primers termes de les successions següents:

a) –1, –2, –3, –4,…

b) 1, 4, 9, 16,…

c) 1, 3, 5, 7,…

1. Escriu el terme que ocupa el lloc 100 de cada una de les successions anteriors.

2. Sabem que un cos amb densitat suficient que cau lliurement sobre la Terra té una velocitat que augmenta 9,8 m/s. Si en el primer segon la seua velocitat és de 15 m/s, escriu en el teu quadern la velocitat en els segons indicats en la taula. Observes alguna regla que et permeta conéixer la velocitat al cap de 20 segons? Representa gràficament aquesta funció.

Temps en segons	1	2	3
Velocitat en m/s	15		

1.2. Formes de definir una successió

Hi ha diverses formes de definir una successió:

1. **Donant una propietat que complisquen els termes d'aqueixa successió**

Exemple:

- Successió dels nombres parells: 2, 4, 6, 8, 10,…
- Successió dels nombres primers: 2, 3, 5, 7, 11,..
- Successió dels nombres naturals acabats en 9: 9, 19, 29, 39, ...
- Successió dels quadrats dels nombres naturals: 1, 4, 9, 16,…

1. **Donant el seu terme general o terme *n*-èsim**:

És una expressió algebraica en funció de *n.*

Exemple:

- $a_n = n^2 + 3$

Sabent açò, podem construir els termes de la successió sense més que substituir *n* per els nombres naturals. Així, tindríem:

$$a_1 = 1^2 + 3 = 4$$

$$a_2 = 2^2 + 3 = 7$$

$$a_3 = 3^2 + 3 = 12$$

$$a_4 = 4^2 + 3 = 19$$

…..

- $d_n = (-1)^n \frac{1}{n}$

$$d_1 = (-1)^1 \frac{1}{1} = -1$$

$$d_2 = (-1)^2 \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$d_3 = (-1)^3 \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$d_4 = (-1)^4 \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

2. <u>Per una llei de recurrència</u>:

És una expressió que permet obtindre un terme a partir dels anteriors

Exemple:

- La successió:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,…

coneguda com a successió de Fibonacci s'obté amb la següent llei de recurrència:

$$a_1 = a_2 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

És a dir, cada terme, excepte els dos primers, s'obté com a suma dels dos anteriors.

Activitats resoltes

- *Siga la successió de terme general:* $a_n = 2n + 3$.

  Els seus cinc primers termes són: $a_1 = 5$, $a_2 = 7$, $a_3 = 9$, $a_4 = 11$, $a_5 = 13$

- *Donada la successió en forma recurrent:* $a_1=1$, $a_n = a_{n-1} + 3$

  Els seus quatre primers termes són:

$a_1 = 1$ (ja ve donat),

$a_2 = 1 + 3 = 4$,

$a_3 = 4 + 3 = 7$,

$a_4 = 7 + 3 = 10$

Activitats proposades

3. Escriu els quatre primers termes de les successions següents:

a) $a_n = 2n^2+1$

a) $b_n = \frac{4n-1}{3n}$

b) $c_1 = 1$, $c_n = 3c_{n-1} + 5$

c) $d_1=2$, $d_2=5$, $d_n = 2d_{n-1} + d_{n-2}$

4. Escriu l'expressió del terme general de les successions següents:

a) $\{-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1,\ldots\}$

a) $\{0, 3, 8, 15, 24, 35,\ldots\}$

b) $\{2, 4, 6, 8, 10,\ldots\}$

c) $\{\frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{5}{6}, \frac{7}{7}, \frac{9}{8},\ldots\}$

5. En una successió el primer terme és 2 i els altres s'obtenen sumant 4 al terme anterior. Trobar els 6 primers termes de la successió.

6. Un satèl·lit artificial es va posar en òrbita a les 17 hores i 30 minuts. Tarda a fer una volta completa a la seua òrbita 87 minuts. A) Completa al teu quadern la taula adjunta. B) Escriu una expressió general que et permeta conéixer l'hora en què ha completat la volta *n*-èsima. C) Busca una expressió que et permeta conéixer l'hora en funció de l'hora de l'òrbita anterior. D)Busca una expressió que et permeta conéixer l'hora en funció de la primera. E) Quantes voltes completes haurà donat 20 dies més tard a les 14 hores?

Nr d'òrbites	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Hora en què l'ha completat						

2. PROGRESSIONS ARITMÈTIQUES

Exemple:

- *Alicia té en set dies un examen de Matemàtiques. Decideix preparar-lo fent cada dia tres exercicis més que el dia anterior. Comença hui fent dos exercicis. Si escrivim els exercicis que va fent Alicia a mesura que passen els dies, són:* 2, 5, 8, 11, 14,…

Observem que els termes de la successió van augmentant en una quantitat constant: 3. Aquest tipus de successions s'anomenen *progressions aritmètiques*.

Una **progressió aritmètica** és una successió de nombres reals en què la diferència entre dos termes consecutius de la successió és constant. A aquesta constant se l'anomena **diferència de la progressió i** se sol denotar amb la lletra *d*.

D'una altra forma, en una progressió aritmètica es verifica:

$$a_{i+1} - a_i = d$$

sent *i* qualsevol nombre natural

És a dir, cada terme s'obté sumant a l'anterior la diferència, *d*:

$$a_{i+1} = a_i + d$$

Exemple:

- La successió formada per els nombres naturals: {1, 2, 3, 4, 5,…} és una progressió aritmètica, ja que cada terme s'obté sumant 1 al terme anterior.

Activitats resoltes

- Si $a_1 = 3$ i $d = 2$, veurem com s'escriuen els cinc primers termes de la progressió aritmètica:

  $a_1 = 3$,

  $a_2 = a_1 + d = 3 + 2 = 5$

  $a_3 = a_2 + d = 5 + 2 = 7$

  $a_4 = a_3 + d = 7 + 2 = 9$

  $a_5 = a_4 + d = 9 + 2 = 11$

Activitats proposades

7. Assenyala raonadament si la següent successió és una progressió aritmètica:

{1, 10, 100, 1000, 100000, ….}.

8. Calcula els tres primers termes d'una progressió aritmètica sabent que el primer és 1 i la diferència és –2.

2.1. Terme general d'una progressió aritmètica

Una progressió aritmètica, igual que ocorre amb totes les successions, queda perfectament definida si coneixem el seu terme general. Anem a calcular-lo utilitzant la definició que hem vist de progressió aritmètica i suposant coneguts el primer terme a_1 i la diferència de la successió, d.

a_1 donat

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$

$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$

$a_5 = a_4 + d = a_1 + 3d + d = a_1 + 4d$

…….

De forma general:

$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-2)\cdot d + d = a_1 + (n-1)\,d$

Per tant, el **terme general d'una progressió aritmètica** és:

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d$$

Generalitzant aquest resultat, podem calcular el terme general d'una progressió aritmètica coneixent d i un altre terme de la progressió, no necessàriament el primer:

Més general, el **terme general d'una progressió aritmètica** és:

$$a_n = a_k + (n-k)\,d$$

Sent a_k el terme de la progressió que ocupa el lloc k.

NOTES

1. **Depenent del valor de *d*, ens podem trobar amb distints tipus de progressions aritmètiques:**
   a) Si $d > 0$,la progressió és creixent, és a dir, cada terme és major que els anteriors. Per exemple: {2, 4, 6, 8, …}
   a) Si $d < 0$,la progressió és decreixent, és a dir, cada terme és menor que els anteriors. Per exemple: {12, 9, 6, 3, …}
   b) Si $d = 0$, la progressió és constant, és a dir, tots els seus termes són iguals. Per exemple: {4, 4, 4, 4, …}

1. **Depenent de les dades que tinguem, calcularem el terme general d'una progressió aritmètica d'una forma o una altra:**
   a) Si coneixem a_1 i d, hem vist que: $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$

a) Si coneixem un terme qualsevol a_i i d, sabem que: $a_n = a_k + (n - k)\, d$

b) Si coneixem dos termes qualssevol a_r i a_s, ens faltaria la diferència d per a poder aplicar la fórmula anterior. Però, com sabem que:

$$a_n = a_r + (n - r)\cdot d \quad \text{i que} \quad a_n = a_s + (n - s)\cdot d$$

podem aïllar d en funció de r, s, a_r i a_s i ens queda: $d = \dfrac{a_r - a_s}{r - s}$

Activitats resoltes

- *Trobar el terme general d'una progressió aritmètica el primer terme del qual és* 7 *i la seua diferència també és* 7.

  N'hi ha prou amb substituir en la fórmula donada: $a_n = a_1 + (n - 1)\cdot d = 7 + (n - 1)7 = 7 + 7n - 7 = 7n$.

- *Calcula el terme que ocupa el lloc* 15 *en una progressió aritmètica el primer terme de la qual és* 2 *i la diferència és* 3.

  En aquest cas, $a_{15} = a_1 + (15 - 1)\cdot d = 2 + 14\cdot 3 = 2 + 42 = 44$.

- *Calcula el primer terme d'una progressió aritmètica amb* $a_5 = 6$ y $d = -2$.

  $a_5 = a_1 + (5 - 1)\cdot d$. Aïllem $a_1 = a_5 - 4d = 6 - 4\cdot(-2) = 14$.

Activitats proposades

9. Donada una progressió aritmètica dos dels termes de la qual són: $a_3 = 4$ i $a_{10} = 18$:

a) Calcula la seua diferència.

a) Calcula el seu terme general.

10. Calcula el primer terme d'una progressió aritmètica amb diferència 2 i $a_{30} = 60$.

11. Quin és el terme general d'una progressió aritmètica amb $a_{22} = 45$ i $d = 3$?

12. Els costats d'un pentàgon estan en progressió aritmètica de diferència 5. Sabent a més que el seu perímetre és 65, calcula el valor dels costats.

13. Calcula els 5 primers termes d'una progressió aritmètica de primer terme 2 i de diferència 3. Representa'ls gràficament. Observa que la seua representació gràfica és un conjunt de punts aïllats que estan sobre una recta.

14. Calcula l'expressió general de les progressions aritmètiques:

a) De diferència $d = 2{,}5$ i de primer terme 2.
a) De diferència $d = -2$ i de primer terme 0.
b) De diferència d'1/3 i de segon terme 5.
c) De diferència $d = 4$ i de cinqué terme 1.

15. Quants múltiples de 7 estan compresos entre el 4 i el 893?

2.2. Suma dels termes d'una progressió aritmètica

A una progressió aritmètica, la suma de dos termes equidistants és constant.

És a dir, si els subíndexs naturals p, q, r i s verifiquen que $p + q = r + s$, doncs: $a_p + a_q = a_r + a_s$

La ***demostració*** d'aquesta propietat és molt senzilla:

$$a_p + a_q = a_1 + d\cdot(p - 1) + a_1 + d\cdot(q - 1) = 2a_1 + d\cdot(p + q - 2)$$

$$a_r + a_s = a_1 + d\cdot(r - 1) + a_1 + d\cdot(s - 1) = 2a_1 + d\cdot(r + s - 2)$$

I com: $p + q = r + s$, aleshores: $a_p + a_q = a_r + a_s$

Volem calcular la suma dels n termes d'una progressió aritmètica, S_n. És a dir:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots.. + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

Aplicant la propietat commutativa de la suma, tenim que:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots\ldots. + a_3 + a_2 + a_1$$

Sumant aquestes dues igualtats terme a terme obtenim:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots\ldots. + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Com s'observa, els subíndexs corresponents a cada parell de termes entre parèntesis sumen n+1, per la qual cosa la suma dels seus termes serà sempre la mateixa, doncs:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots\ldots. + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) = n\cdot(a_1 + a_n)$$

Aïllant S_n :

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

La **suma** dels n primers termes d'una **progressió aritmètica** ve donada per:

$$S_n = \frac{n\cdot(a_1+a_n)}{2}.$$

Activitats resoltes

- *Suma els* 30 primers *termes de la progressió aritmètica:* $a_n = \{17, 13, 9, 5, 1, \ldots\}$.

  Observem que $d = -4$. Per a aplicar la fórmula de la suma hem de calcular primer el terme que ocupa el lloc 30, a_{30}:

  $a_{30} = a_1 + (n - 1)d = 17 + (30 - 1)\cdot(-4) = 17 + 29\cdot(-4) = -99$

  Doncs: $S_{30} = 30 \cdot \frac{17+(-99)}{2} = -1230$

- *Troba la suma dels nombres imparells menors que* 1000.

  Hem de tindre en compte que els nombres imparells formen una progressió aritmètica de diferència 2 i a més: $a_1 = 1$, $n = 500$, $a_{500} = 999$

  Doncs: $S_{500} = 500\cdot\frac{1+999}{2} = 250000$.

Activitats proposades

16. Suma els 10 primers termes de la progressió aritmètica: {–5, 4, 13, 22, 31, 40, …}

17. Troba la suma dels 50 primers múltiples de 3.

18. En una successió aritmètica d'un nombre imparell de termes el central val 12, quant valdrà la suma del primer més l'últim?

19. L'amo d'un pou contracta a un saurí per a conéixer la profunditat a què es troba l'aigua i aquest dictamina que a 5 m hi ha aigua en abundància. Demana un pressupost a un contractista, que li diu que el primer metre li costarà 50 euros i per cada mig metre més 6 euros més que pel mig anterior. Quant li costarà el pou si es compleixen les prediccions?

20. Antoni s'ha comprat un mòbil, però no pot pagar-lo al comptat. Paga 60 euros cada setmana, però el venedor li puja 5 euros cada setmana en concepte de pagament ajornat. Aconsegueix pagar-lo en 10 setmanes. Quant li va costar? Quant va pagar de més? Quin percentatge suposa aquest recàrrec sobre el preu de venda?

21. Un nadador s'entrena en una piscina de 50 m i vol controlar les pèrdues de velocitat per cansament. Cronometra en cinc dies consecutius els temps que tarda a fer 2, 5, 8, 11, 14 llargs. A) Troba el terme general de la successió a_n que dóna els metres recorreguts en el dia n. B) Quants metres haurà nadat en els dits cronometratges?

3. PROGRESSIONS GEOMÈTRIQUES

Exemple:

- *Un pare planeja ficar en una vidriola* 1 € *el dia que el seu fill xiquet de bolquers complisca un any i duplicar la quantitat en cada un dels seus aniversaris.*

  És a dir, la successió els termes de la qual són els diners que fica en la vidriola cada any és: {1, 2, 4, 8, 16,…}.

Observem que els termes de la successió van augmentant de manera que cada terme és l'anterior multiplicat per 2. Aquest tipus de successions s'anomenen progressions geomètriques.

Una **progressió geomètrica** és una successió de nombres reals en què el quocient entre cada terme i l'anterior és constant. A aquesta constant es denomina **raó de la progressió** i se sol denotar amb la lletra *r*. És a dir, $\frac{a_{i+1}}{a_i} = r$ sent *i* un nombre natural i sempre que a_i siga diferent de zero.

O el que és el mateix, cada terme s'obté multiplicant l'anterior per la raó *r*:

$$a_{i+1} = a_i \cdot r$$

Exemple:

- La successió: {1, 3, 9, 27, 81,…} és una progressió geomètrica, ja que prenent dos termes qualssevol consecutius, sempre s'obté el mateix quocient, que és 3, raó de la progressió.

$$3 : 1 = 9 : 3 = 27 : 9 = 81 : 27 = 3$$

3.1. Terme general d'una progressió geomètrica

Una progressió geomètrica, per ser una successió, queda totalment definida si coneixem el seu terme general. Anem a obtindre-lo sense més que aplicar la definició de progressió geomètrica:

$a_2 = a_1 \cdot r$

$a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r \cdot r = a_1 \cdot r^2$

$a_4 = a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^2 \cdot r = a_1 \cdot r^3$

$a_5 = a_4 \cdot r = a_1 \cdot r^3 \cdot r = a_1 \cdot r^4$

………

$a_n = a_{n-1} \cdot r = a_1 \cdot r^{n-2} \cdot r = a_1 \cdot r^{n-1}$

Per tant, el **terme general d'una progressió geomètrica** és:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Generalitzant aquest resultat, podem calcular el terme general d'una progressió geomètrica coneixent *r* i un altre terme de la progressió, no necessàriament el primer:

Més general, el **terme general d'una progressió geomètrica** és:

$$a_n = a_k \cdot r^{n-k}$$

sent a_k el terme de la progressió que ocupa el lloc *k*.

Exemple:

- La successió $a_n = 3 \cdot 5^{n-1}$ és una progressió geomètrica.

NOTES

1. **Depenent del valor de *r*, ens podem trobar amb distints tipus de progressions geomètriques:**

    a) Si $r > 1$, la progressió és creixent, és a dir, cada terme és major que els anteriors. Per exemple: {2, 4, 8, 16, …}

    a) Si $0 < r < 1$, la progressió és decreixent, és a dir, cada terme és menor que els anteriors. Per exemple: {90, 30, 10, 10/3, 10/9, …}

    b) Si $r < 0$, la progressió és alternada, és a dir, els seus termes van canviant de signe segons el valor de n. Per exemple: {–2, 4, –8, 16, …}

    c) Si $r = 0$, la progressió és la progressió formada per zeros a partir del segon terme. Per exemple: {7, 0, 0, 0, }

    d) Si $r = 1$, la progressió és la progressió constant formada pel primer terme: {2, 2, 2, 2 ,…}

1. **Depenent de les dades que tinguem, calcularem el terme general d'una progressió geomètrica d'una forma o una altra:**

    a) Si coneixem a_1 i r, hem vist que: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$.

    a) Si coneixem un terme qualsevol a_k i r, sabem que: $a_n = a_k \cdot r^{n-k}$

    b) Si coneixem dos termes qualssevol a_p i a_q, amb a_p no nul, ens falta conéixer la raó r per a poder aplicar la fórmula anterior. Però, com sabem que:

    $$a_n = a_p \cdot r^{n-p} \quad \text{i que} \quad a_n = a_q \cdot r^{n-q}$$

    podem aïllar r en funció de p, q, a_p i a_q i ens queda: $r = \sqrt[q-p]{\dfrac{a_q}{a_p}}$

Activitats resoltes

- *Trobar el terme general d'una progressió geomètrica el primer terme del qual és* 7 i *la seua raó també és* 7.

    N'hi ha prou amb substituir en la fórmula donada: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 7 \cdot 7^{n-1} = 7^n$.

- *Calcula el terme que ocupa el lloc* 5 *en una progressió geomètrica el primer terme de la qual és* 2 i *raó* 3.

    En aquest cas, $a_5 = a_1 \cdot r^{n-1} = 2 \cdot 3^{5-1} = 2 \cdot 3^4 = 162$.

- *Calcula el primer terme d'una progressió geomètrica amb* $a_3 = 6$ i $r = -2$.

    Aïllem a_1 de $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ i tenim: $a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}}$.

    Per a $n = 3$, tenim: $a_1 = \frac{a_3}{r^2} = \frac{6}{(-2)^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

Activitats proposades

22. Esbrina la raó d'una progressió geomètrica el primer terme de la qual és 27 i el quart és 8.

23. El quart terme d'una progressió geomètrica és 1/9 i la raó 1/3. Troba el primer terme.

24. Troba el sisé terme de la següent progressió geomètrica: $\{\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, \ldots\}$

25. Donada una progressió geomètrica dos dels termes de la qual són: $a_3 = -8$ i $a_6 = -2048$

a) Calcula la seua raó.

a) Calcula el seu terme general.

26. Una certa classe d'alga, anomenada *clorella*, es reprodueix duplicant la seua quantitat cada dos hores i mitja. Al cap d'altres dos hores i mitja torna a duplicar la seua quantitat, i així successivament. Si es té en el moment inicial un quilo, al cap de dos hores i mitja hi ha dos quilos. A) Fes una taula de valors en què indiques per a cada període de reproducció el nombre de quilos de *clorella*. B) Indica el terme general. C) Al cap de 4 dies, han transcorregut 40 períodes, consideres possible aquest creixement?

2.2. Producte dels termes d'una progressió geomètrica

En una progressió geomètrica, el producte de dos termes equidistants és constant.

És a dir, si els subíndexs naturals p, q, t i s verifiquen que $p + q = t + s$, doncs: $a_p \cdot a_q = a_t \cdot a_s$

La demostració d'aquesta propietat és molt senzilla:

$$a_p \cdot a_q = a_1 \cdot r^{p-1} \cdot a_1 \cdot r^{q-1} = a_1^2 \cdot r^{p-1} \cdot r^{q-1} = a_1^2 \cdot r^{p+q-2}$$

$$a_t \cdot a_s = a_1 \cdot r^{t-1} \cdot a_1 \cdot r^{s-1} = a_1^2 \cdot r^{t-1} \cdot r^{s-1} = a_1^2 \cdot r^{t+s-2}$$

I com: $p + q = t + s$, aleshores: $a_p \cdot a_q = a_t \cdot a_s$

Volem calcular el producte dels n termes d'una progressió geomètrica, P_n. És a dir:

$$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots\ldots \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

Aplicant la propietat commutativa del producte, tenim que:

$$P_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot \ldots\ldots \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot a_1$$

Multiplicant aquestes dues igualtats:

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots\ldots \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n) \cdot (a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot \ldots\ldots \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot a_1)$$

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_2 \cdot a_{n-1}) \cdot (a_3 \cdot a_{n-2}) \cdot \ldots\ldots \cdot (a_{n-2} \cdot a_3) \cdot (a_{n-1} \cdot a_2) \cdot (a_n \cdot a_1)$$

Com s'observa, els subíndexs corresponents a cada parell de termes entre parèntesis sumen n+1, per la qual cosa el producte serà sempre el mateix en cada factor, aleshores:

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)^n$$

Aïllant P_n:

$$P_n = \pm\sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} = \pm a_1 \cdot r^{\frac{n-1}{2}}$$

El signe serà positiu o negatiu depenent de la progressió.

El **producte** dels n primers termes d'una **progressió geomètrica** ve donat per:

$$\boldsymbol{P_n} = \pm\sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} = \pm a_1 \cdot r^{\frac{n-1}{2}}$$

Activitats resoltes

- *Troba el producte dels set primers termes d'una progressió geomètrica el primer terme del qual és* $a_1 = -1/8$ i raó $r = 2$

  Observem que tots els termes de la successió són tots negatius, per la qual cosa el producte d'un nombre parell de termes és positiu i que el producte d'un nombre imparell és negatiu. Calculem a_7 per a poder utilitzar la fórmula deduïda anteriorment:

  $a_7 = a_1 r^{n-1} = -\frac{1}{8} \cdot 2^{7-1} = (-1/8) \cdot 2^6 = -8$

  Aleshores: $P_7 = \pm\sqrt{[(-1/8)(-8)]^7} = -1$

Activitats proposades

27. El primer terme d'una progressió geomètrica és 3 i el huité 384. Troba la raó i el producte dels 8 primers termes.

28. Calcula el producte dels 5 primers termes de la progressió: 3, 6, 12, 24, …

3.3. Suma dels termes d'una progressió geomètrica

A) Suma d'un nombre limitat de termes consecutius d'una progressió geomètrica

Exemple:

- Joan ha comprat 20 llibres, pel 1r ha pagat 1 €, pel 2º, 2 €, pel 3º, 4 €, pel 4º, 8 € i així successivament. Com podem saber el que ha pagat en total sense necessitat de fer la suma?

Es tracta d'una progressió geomètrica amb $a_1 = 1$ i $r = 2$. Es tractaria de calcular: $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{20}$. Anem a veure-ho en general, per a una progressió geomètrica qualsevol:

Volem calcular: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$
Per a això, multipliquem aquesta igualtat per r:

$r \cdot S_n = r \cdot a_1 + r \cdot a_2 + r \cdot a_3 + \ldots + r \cdot a_{n-1} + r \cdot a_n$

Però com: $a_2 = r \cdot a_1$
$a_3 = r \cdot a_2$
$a_4 = r \cdot a_3$
....
$a_n = r \cdot a_{n-1}$

La igualtat anterior queda:

$r \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + r \cdot a_n$

Restant:

$$\begin{array}{rl} r \cdot S_n = & a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + r \cdot a_n \\ - \quad S_n = & a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n \end{array}$$

$r \cdot S_n - S_n = -a_1 + r \cdot a_n$
$(r-1) \cdot S_n = r \cdot a_n - a_1 \rightarrow S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r-1}$ sempre que $r \neq 1$, i com $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$
Aleshores:
$S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$ sempre que $r \neq 1$.

La **suma** dels n primers termes d'una progressió **geomètrica** ve donada per:

$$S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r-1} = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1} \text{ sempre que } r \neq 1.$$

Es considera $r \neq 1$ ja que si $r = 1$ la progressió és la progressió constant formada pel primer terme: $\{a_1, a_1, a_1, a_1, \ldots\}$ i $S_n = n \cdot a_1$

Analitzem la suma segons els distints valors de r:

a) Si $|r| > 1$, els termes en valor absolut creixen indefinidament i el valor de S_n ve donat per la fórmula anterior.
a) Si $|r| < 1$, la suma dels seus termes quan n és gran s'aproxima a $S_n \approx \frac{a_1}{1-r}$, ja que si en

$S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$, elevem la raó $|r| < 1$ a una potència, quant major siga l'exponent n, menor serà el valor de r^n i si n és prou gran, r^n s'aproxima a 0. Per això,

$$S_n \approx \frac{a_1 \cdot (-1)}{r-1} = \frac{a_1}{1-r}$$

b) Si $r = -1$, els termes consecutius són oposats: $\{a_1, -a_1, a_1, -a_1, \ldots\}$ i S_n és igual a zero si n és parell, i igual a a_1 si n és imparell. La suma de la sèrie oscil·la entre aqueixos dos valors.

Activitats resoltes

- *Trobar la suma dels* 11 primers *termes d'una progressió geomètrica sabent que el primer terme és* –2 *i la raó* –3.

  $S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r-1} = \frac{(-2)[(-3)^{11}-1]}{-3-1} = -88574.$

- *Trobar la suma dels* 7 primers *termes d'una progressió geomètrica sabent que el seté terme és* 20480*, el primer és* 5 *i la raó és* 4.

  Ara utilitzem la fórmula: $S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r-1}$

  Substituint:

  $S_7 = \frac{ra_7 - a_1}{r-1} = \frac{20480 \cdot 4 - 5}{4-1} = 27305.$

Activitats proposades

29. Un agricultor en la seua granja té 59049 litres d'aigua per a donar de beure als animals. Un dia va utilitzar la meitat del contingut, al següent la meitat del que li quedava i així successivament cada dia. Quants litres d'aigua va utilitzar fins al sisé dia?

30. Suma els quinze primers termes d'una progressió geomètrica en què $a_1 = 5$ i $r = ½$

A) Suma d'un nombre <u>il·limitat</u> de termes consecutius d'una progressió geomètrica

Què ocorrerà si repetim el procés anterior indefinidament? És a dir, què ocorrerà si sumem un nombre il·limitat de termes?

Depenent del valor de *r* serà possible o no obtindre la suma d'un nombre il·limitat de termes:

a) <u>Si $r = 1$</u>,la progressió és la progressió constant formada pel primer terme: {a_1, a_1, a_1, a_1,…} i si a_1 és positiu la suma dels termes serà cada vegada major (si fóra a_1 negatiu seria la suma cada vegada major en valor absolut, però negativa). Per tant, si el nombre de termes és il·limitat, aquesta suma serà infinita.

a) <u>Si $|r| > 1$,</u> els termes creixen indefinidament i el valor de S_n per a un nombre il·limitat de termes, també serà infinit.

b) <u>Si $|r| < 1$,</u> la suma dels seus termes s'aproxima quan *n* és gran a $S_n \approx \frac{a_1}{1-r}$.

   Observem que la suma no depén del nombre de termes, ja que en fer-se cada vegada més xicotets, arriba un moment en què no es consideren.

c) <u>Si $r = -1$,</u> els termes consecutius són oposats: {a_1, $-a_1$, a_1, $-a_1$,…} i S_n és igual a zero si *n* és parell, i igual a a_1 si *n* és imparell. La suma de la sèrie oscil·la entre aqueixos dos valors per a un nombre finit de termes. Per a un nombre de termes il·limitat no sabem si és parell o imparell, amb la qual cosa la suma no es pot realitzar llevat que $a_1 = 0$, cas en que $S = 0 = \frac{a_1}{1-r}$. En la resta dels casos diem que la suma d'infinits termes no existeix perquè el seu valor és oscil·lant.

d) <u>Si $r < -1$,</u> els termes oscil·len entre valors positius i negatius, creixent en valor absolut. La suma dels seus infinits termes no existeix perquè el seu valor també és oscil·lant.

En resum,

La **suma** d'un nombre **il·limitat** de termes d'una progressió **geomètrica** només pren un valor finit si $|r| < 1$, i aleshoress ve donada per: $S = \frac{a_1}{1-r}$. En la resta dels casos, o val infinit, o no hi ha perquè oscil·la.

Activitats resoltes

- *Calcula la suma de tots els termes de la progressió geomètrica el primer terme dels quals és* 4 i *la raó* 1/2.

  $S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8$

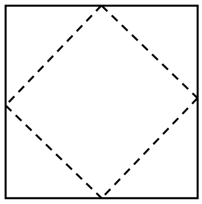
- *En una progressió geomètrica la raó és* 1/4 i *la suma de tots els seus termes és* 8. Quant *val el primer terme?*

  Aïllem a_1 de: $S = \frac{a_1}{1-r}$i: $a_1 = S\,(1 - r) = 8 \cdot (1 - 1/4) = 6$

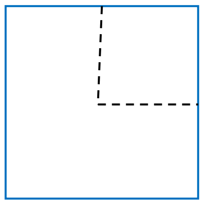
Activitats proposades

31. Calcula la suma dels infinits termes de la successió: 6, 3, 3/2, 3/4,…

32. Tenim a la mà un quadrat d'àrea 1. Tallem els quatre cantons pels punts mitjans dels costats. El nou quadrat, quina àrea té? Deixem els retalls damunt de la taula. Quina àrea de retalls hi ha sobre la taula? Amb el nou quadrat que tenim a la mà efectuem la mateixa operació de tallar els quatre cantons i deixar-les sobre la taula, i així successivament. Quina àrea tenen els successius quadrats que tinc a la mà? I els retalls que queden sobre la taula? Troba la suma de les infinites àrees de retalls així obtinguts.



33. De nou tenim un quadrat d'àrea 1 a la mà, i el tallem per les línies de punts com indica la figura. El tros major el deixem sobre la taula i ens quedem a la mà amb el quadrat, al què tornem a tallar de la mateixa manera. I així successivament. Quina àrea tenen els successius quadrats que tinc a la mà? Creixen o disminueixen? Escriu el terme general de la successió d'àrees que tenim a la mà. I els retalls que queden sobre la taula? Creix l'àrea o disminueix? Anem sumant àrees, calcula la suma d'aquestes àrees si haguérem fet infinits talls.



3.4. Aplicacions de les progressions geomètriques

Fracció generatriu

El curs passat vas estudiar com passar d'un decimal periòdic pur o periòdic mixt a una fracció. Ara utilitzarem les progressions geomètriques perquè comprengues millor el procés.

Exemple:

- *Si tenim un **nombre decimal periòdic pur**, el podem escriure com:*

$$2{,}37 = 2 + 0{,}37 + 0{,}0037 + 0{,}000037\ldots$$

O el que és el mateix:

$$2 + \frac{37}{100} + \frac{37}{100\cdot100} + \frac{37}{100\cdot100\cdot100} + \ldots$$

on els sumands a partir del segon formen una progressió geomètrica de raó $r = \frac{1}{100} < 1$, la suma infinita del qual val: $S = \frac{a_1}{1-r}$. Per tant:

$$2 + \frac{\frac{37}{100}}{1-\frac{1}{100}} = 2 + \frac{\frac{37}{100}}{\frac{99}{100}} = 2 + \frac{37}{99} = \frac{198}{99} + \frac{37}{99} = \frac{235}{99}$$

- *Si tenim un **nombre decimal periòdic mixt**, s'utilitza un procés semblant:*

$$1{,}328 = 1{,}32 + 0{,}008 + 0{,}0008 + \ldots$$

O el que és el mateix:

$$1{,}32 + \frac{8}{1000} + \frac{8}{1000\cdot10} + \frac{8}{1000\cdot10\cdot10} + \ldots$$

En aquest cas, els sumands a partir del segon formen una progressió geomètrica de raó $r = \frac{1}{10} < 1$. Per tant:

$$1{,}32 + \frac{\frac{8}{1000}}{1-\frac{1}{10}} = 1 + 0{,}32 + \frac{8}{900} = 1 + \frac{32}{100} + \frac{8}{900} = 1 + \frac{296}{900}$$

Nota

Amb aquest procés estem il·lustrant el concepte de fracció generatriu com a aplicació de les progressions geomètriques, però a efectes pràctics, és més còmode efectuar-lo segons el procés vist.

Capitalització composta

L'interés compost l'estudiaràs detingudament en el capítol 6,però pero ara és interessant que sàpies que llavors usaràs les progressions geomètriques per a calcular-lo, i que tens un full de càlcul per a fer les operacions.

Si depositem en una entitat financera una quantitat de diners C_0 durant un temps t'i un rèdit r donat en tant per u, obtindrem un benefici: $I = C_0 \cdot r \cdot t$ anomenat **interés.**

La principal característica de la capitalització composta és que els interessos que es generen en un any, passen a formar part del capital inicial i produeixen interessos als períodes següents.

Aleshores:

- Al final del *primer any*, el capital serà el capital inicial C_0 junt amb els interessos produïts durant aqueix any. És a dir:

$$C_1 = C_0 + I = C_0 + C_0 \cdot r \cdot 1 = C_0 \cdot (1 + r)$$

- Al final del segon *any*, el capital que tindrem serà el capital que teníem en finalitzar el primer any més els interessos produïts aqueix segon any. És a dir:

$$C_2 = C_1 + C_1 \cdot r \cdot 1 = C_1 \cdot (1 + r) = C_0 \cdot (1 + r) \cdot (1 + r) = C_0 \cdot (1 + r)^2$$

Observant els capitals obtinguts: C_1, C_2, …, C_n concloem que es tracta d'una progressió geomètrica de raó $(1 + r)$. Per tant:

- L'*any n-èsim*, tindrem:

El capital final obtingut després de n anys donat un capital inicial C_0 *i* un rèdit r donat en tant per u, és:

$$\mathbf{C_n = C_0 \cdot (1 + r)^n}$$

Activitats resoltes

- *Vegem la fracció generatriu de* $23,\overline{45}$ com a *aplicació de les progressions geomètriques.*

$$23,\overline{45} = 23 + 0,45 + 0,0045 + 0,000045 + \ldots$$

O el que és el mateix:

$$23 + \frac{45}{100} + \frac{45}{100 \cdot 100} + \frac{45}{100 \cdot 100 \cdot 100} + \ldots$$

on els sumands a partir del segon formen una progressió geomètrica de raó $r = \frac{1}{100} < 1$, la suma infinita del qual val: $S = \frac{a_1}{1-r}$. Per tant:

$$23 + \frac{\frac{45}{100}}{1-\frac{1}{100}} = 23 + \frac{\frac{45}{100}}{\frac{99}{100}} = 23 + \frac{45}{99} = \frac{2277}{99} + \frac{45}{99} = \frac{2322}{99} = \frac{258}{11}.$$

- *Depositem en un banc* 1500 € *al* 3,5 % *de capitalització composta durant tres anys. Quants diners tindríem en finalitzar el tercer any?*

  Utilitzem l'expressió: $C_t = C_0 \cdot (1 + r)^t$ on C_0= 1500 €, r = 0,035 perquè és el tant per u i t = 3 anys. Per tant: $C_t = C_0 \cdot (1 + r)^t = 1500(1 + 0,035)^3 = 1663,08$ €

Activitats proposades

34. Calcula la fracció generatriu del nombre 4,561

35. Un empresari acudeix a una entitat financera per a informar-se sobre com invertir els 6000 € de beneficis que ha tingut en un mes. Li plantegen dues opcions.

a) Mantindre aqueix capital durant 5 anys al 3,5 % anual o

a) Rebre el 5 % del capital durant els dos primers anys i el 3 % els tres anys restants. Quina opció li interessa més?

CURIOSITATS. REVISTA

A) L'inventor de l'escacs

Ja vam vore al capítol sobre potències la legenda sobre els escacs. Ara pots utilitzar els teus coneixements sobre progressions per fer els càlculs:

Compte la llegenda com l'inventor dels escacs va presentar el seu invent a un príncep de l'Índia. El príncep va quedar tan impressionat que va voler premiar-li generosament, per a la qual cosa li va dir: "Demana'm el que vullgues, que t'el donaré".

L'inventor dels escacs va formular la seua petició de la manera següent :

"Desig que m'entregues un gra de blat per la primera casella del tauler, dos per la segona, quatre per la tercera, huit per la quarta, setze per la cinquena, i així successivament fins la casella 64".

La sorpresa va ser quan el secretari del príncep va calcular la quantitat de blat que representava la petició de l'inventor, perquè tota la Terra sembrada de blat era insuficient per a obtindre el blat que demanava l'inventor.

Quin tipus de progressió s'utilitza? Aritmètica o geomètrica? Quina és la raó?

Quants trilions de grans de blat demanava aproximadament?

Podries trobar el total de grans de blat utilitzant fórmules i usant la calculadora?

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{62} + 2^{63}$$

Potències de 2 al tenis

L... potències de 2 també apareixen als tornejos de tenis. En molts ...ejos s'enfronten els jugadors de la manera següent: En la final ...en dos jugadors; en la semifinal hi ha quatre; en els quarts de final hi ...uit jugadors. Així, en cada ronda addicional la quantitat de jugadors ...uplica, tal com ocorria amb els grans de blat en el tauler d'escacs. Si el torneig tinguera 25 rondes, t'imagines quants hi hauria? Perquè, podrien participar quasi tots els habitants d'Espanya!! i amb 33 rondes, podrien participar tots els habitants del planeta!!

Successió de *Fibonacci*

Per als que penseu que és impossible veure Matemàtiques fora de l'aula i molt menys en la naturalesa, vos presentem un dels més bells conceptes matemàtics estretament relacionat amb la naturalesa i l'art.

Es tracta d'una successió molt simple, en la que cada terme és la suma dels dos anteriors.

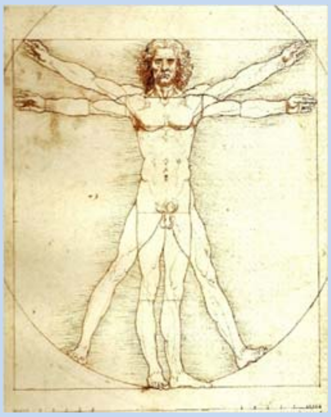
La successió comença pel nombre 1,

I segueix amb 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584…, ja que

1 = 0 + 1; 2 = 1 + 1; 3 = 1 + 2; 5 = 2 + 3; 8 = 3 + 5; 13 = 5 + 8; 21 = 8 + 13… etc.

Una de les propietats més curioses, és que el quocient de dos nombres consecutius de la sèrie s'aproxima a l'anomenada **"secció àuria" o "divina proporció".**

Aquest nombre, descobert pels renaixentistes, és = 1,61803…, i se l'anomena amb la lletra grega ϕ. La successió formada pels quocients de nombres consecutius de la successió de *Fibonacci* s'acosta ràpidament, cap al nombre auri. Els grecs i renaixentistes estaven fascinats amb aquest nombre i el consideraven l'ideal de la bellesa.



De fet, *Leonardo da Vinci* en la seua obra L'home de *Vitrubio utilitza* aquest nombre per a aconseguir les perfectes proporcions de la seua obra.

Com pot ser que el quocient de dos nombres d'una seqüència inventada per l'home es relacione amb la bellesa? Perquè perquè la successió de Fibonacci està estretament relacionada amb la naturalesa. Es creu que Leonardo va trobar aquests nombres quan estudiava el creixement de les poblacions de conills. Suposem que una parella de conills tarda un mes a aconseguir l'edat fèrtil, i a partir d'aqueix moment cada vegada engendra una altra parella de conills, que al seu torn engendraran cada mes una parella de conills.

Quants conills hi haurà al cap d'un determinat nombre de mesos?

Doncs sí, cada mes hi haurà un nombre de conills que coincideix amb cada un dels termes de la successió de *Fibonacci*. Pareix màgia, veritat?

Perquè moltes plantes, com les pinyes o les margarides segueixen una disposició relacionada també amb la successió de *Fibonacci*, la qual cosa il·lustra la famosa frase de Galileu

"La naturalesa està escrita en llenguatge matemàtic".

RESUM

Concepte	*Definició*	*Exemples*
Progressió aritmètica	És una successió de nombres reals en què la diferència entre dos termes consecutius de la successió és constant. A aquesta constant se l'anomena diferència de la progressió i se sol denotar amb la lletra *d*.	2, 5, 8, 11, 14, 17, …
Terme general	$a_n = a_k + (n - k)$ sent a_k el terme que ocupa el lloc k	$a_n = 2 + 3n$
Suma dels *n* primers termes	$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$	S_8 = (8/2)·(2 + (2 + 3·8)) = 4 · (4 + 24) = 4 · 28 = 112
Progressió geomètrica	És una successió de nombres reals en què el quocient entre cada terme i l'anterior és constant. A aquesta constant es denomina raó de la progressió i se sol denotar amb la lletra *r*. És a dir, $\frac{a_{i+1}}{a_i} = r$sent *i* un nombre natural.	3, 6, 12, 24, … 1, 1/2, 1/4, 1/8…
Terme general	$a_n = a_k \cdot r^{n-k}$ sent a_k el terme de la successió que ocupa el lloc k	$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ $a_n = 1 \cdot (1/2)^n$
Suma	- Per a $r \neq 1$,i un nombre finit de termes: $S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r-1} = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$ - Per a $r \neq 1$,i una quantitat il·limitada de termes: $S = \frac{a_1}{1-r}$	$S_8 = 3(2^8 - 1)/(2 - 1)$ = 3(256 – 1) = 3(255) = 765. S = 1/(1 – 1/2) = 2
Producte dels *n* primers termes	$P_n = \pm\sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} = \pm a_1 \cdot r^{\frac{n-1}{2}}$	$P_9 = + \sqrt{(3 \cdot 3 \cdot 2^8)^9} = (3 \cdot 2^4)^9$

EXERCICIS I PROBLEMES

1. Calcula el terme que ocupa el lloc 100 d'una progressió aritmètica el primer terme del qual és igual a 4 i la diferència és 5.
2. El desé terme d'una progressió aritmètica és 45 i la diferència és 4. Troba el primer terme.
3. Sabent que el primer terme d'una progressió aritmètica és 4, la diferència 7 i el terme n-èsim 88, troba n.
4. Troba el primer terme d'una progressió aritmètica i la diferència, sabent que $a_3 = 24$ i $a_{10} = 66$.
5. El terme sisé d'una progressió aritmètica és 4 i la diferència 1/2. Troba el terme 20.
6. Calcula els costats d'un triangle rectangle sabent que les seues mesures, expressades en metres, estan en progressió aritmètica de diferència 3.
7. Troba tres nombres que estiguen en progressió aritmètica i tals que, augmentats en 5, 4 i 7 unitats respectivament, siguen proporcionals a 5, 6 i 9.
8. Calcula la suma dels múltiples de 59 compresos entre 1000 i 2000.
9. El producte de tres termes consecutius d'una progressió aritmètica és 80 i la diferència és 3. Troba els dits termes.
10. Quants termes cal sumar de la progressió aritmètica 2, 8, 14,... per a obtindre com resultat 1064?
11. La suma de n nombres naturals consecutius presos a partir d'11 és 1715. Quants termes hem sumat?
12. Sabent que el cinqué terme d'una progressió aritmètica és 18 i la diferència és 2, troba la suma dels nou primers termes de la successió.
13. La suma de tres nombres en progressió aritmètica és 33 i el seu producte 1287. Troba aquests nombres.
14. Tres nombres en progressió aritmètica tenen per producte 16640; el més xicotet val 20. Troba els altres dos.
15. El producte de cinc nombres en progressió aritmètica és 12320 i la seua suma 40. Troba aquests nombres sabent que són enters.
16. Calcula tres nombres sabent que estan en progressió aritmètica, que la seua suma és 18 i que la suma del primer i del segon és igual al tercer disminuït en dues unitats.
17. La suma dels onze primers termes d'una progressió aritmètica és 176 i la diferència dels extrems és 30. Troba els termes de la progressió.
18. Troba quatre nombres en progressió aritmètica, coneixent la seua suma, que és 22, i la suma dels seus quadrats, 166.
19. La diferència d'una progressió aritmètica és 4. El producte dels quatre primers termes és 585. Troba els termes.
20. Troba els sis primers termes d'una progressió aritmètica sabent que els tres primers sumen –3 i els tres últims 24.
21. En una progressió aritmètica l'onzé terme excedeix en 2 unitats al huité, i el primer i el nové sumen 6. Calcula la diferència i els termes mencionats.
22. En una progressió aritmètica, els termes segon i tercer sumen 19, i els termes cinqué i seté sumen 40. Troba'ls.
23. Sabent que les mesures dels tres angles d'un triangle estan en progressió aritmètica i que un d'ells medeix 100º, calcula els altres dos.
24. Troba les dimensions d'un ortoedre sabent que estan en progressió aritmètica, que sumen 78 m i que el volum de l'ortoedre és de 15470 m.
25. Els sis angles d'un hexàgon estan en progressió aritmètica. La diferència entre el major i el menor és 60º. Calcula el valor de cada angle.

26. Les longituds dels tres costats d'un triangle rectangle estan en progressió aritmètica i sumen 36 metres. Quant medeix cada costat?

27. Un coronel mana 5050 soldats i vol formar amb ells un triangle per a una exhibició, de manera que la primera fila tinga un soldat, la segona dos, la tercera tres, etc. Quantes files han d'haver-hi?

28. Pel lloguer d'una casa s'acorda pagar 800 euros al mes durant el primer any, i cada any s'augmentarà el lloguer en 50 euros mensuals. Quant es pagarà mensualment al cap de 12 anys?

29. Les edats de quatre germans formen una progressió aritmètica, i la seua suma és 32 anys. El major té 6 anys més que el menor. Troba les edats dels quatre germans.

30. Un esquiador comença la pretemporada d'esquí fent peses en un gimnàs durant una hora. Decideix incrementar l'entrenament 10 minuts cada dia. Quant temps haurà d'entrenar al cap de 15 dies? Quant temps en total haurà dedicat a l'entrenament al llarg de tot un mes de 30 dies?

31. En una sala de cine, la primera fila de butaques dista de la pantalla 86 dm, i la sisena, 134 dm. En quina fila estarà una persona si la seua distància a la pantalla és de 230 dm?

32. Calcula el terme onzé d'una progressió geomètrica el primer terme del qual és igual a 1 i la raó és 2.

33. El cinqué terme d'una progressió geomètrica és 81 i el primer és 1. Troba els cinc primers termes de la progressió.

34. En una progressió geomètrica de primer terme 7 i raó 2, un cert terme és 28672. Quin lloc ocupa el dit terme?

35. Sabent que el seté terme d'una progressió geomètrica és 1 i la raó 1/2, troba el primer terme.

36. En una progressió geomètrica se sap que el terme quinzé és igual a 512 i que el terme desé és igual a 16. Troba el primer terme i la raó.

37. Descompon el nombre 124 en tres sumands que formen progressió geomètrica, sent 96 la diferència entre el major i el menor.

38. El volum d'un ortoedre és de 3375 cm^3. Troba la longitud de les seues arestes, sabent que estan en progressió geomètrica i que l'aresta intermèdia mesura 10 cm més que la menor.

39. Troba el producte dels huit primers termes de la progressió 3, 6, 12, 24,...

40. Troba la suma dels deu primers termes de la progressió geomètrica 3, 6, 12, 24,...

41. La suma dels huit primers termes d'una progressió geomètrica és 17 vegades la suma dels quatre primers. Troba el valor de la raó.

42. Troba la suma dels termes de la progressió il·limitada: 8, 4, 2, 1,...

43. Troba tres nombres en progressió geomètrica sabent que la seua suma és 26 i el seu producte 216.

44. Calcula el producte dels onze primers termes d'una progressió geomètrica sabent que el terme central val 2.

45. Tres nombres en progressió geomètrica sumen 525 i el seu producte val un milió. Calcula'ls.

46. Determina quatre nombres en progressió geomètrica de manera que els dos primers sumen 0,5 i els dos últims 0,125.

47. Quants termes s'han pres en una progressió geomètrica, sabent que el primer terme és 7, l'últim 448 i la seua suma 889?

48. La suma dels set primers termes d'una progressió geomètrica de raó 3 és 7651. Troba els termes primer i seté.

49. Troba tres nombres en progressió geomètrica el producte del qual és 328509, sabent que el major excedeix en 115 a la suma dels altres dos.

50. Tres nombres estan en progressió geomètrica; el segon és 32 unitats major que el primer, i el tercer, 96 unitats major que el segon. Troba els nombres.

51. Troba els quatre primers termes d'una progressió geomètrica, sabent que el segon és 20 i la suma dels quatre primers és 425.

52. Troba els angles d'un quadrilàter, si se sap que estan en progressió geomètrica i que el major és 27 vegades el menor.

53. Les dimensions d'un ortoedre estan en progressió geomètrica. Calcula aquestes dimensions sabent que el seu perímetre és 420 m'i el seu volum 8000 m^3.

54. Divideix el nombre 221 en tres parts enteres que formen una progressió geomètrica tal que el tercer terme sobrepassa al primer en 136.

55. La suma de tres nombres en progressió geomètrica és 248 i la diferència entre els extrems 192. Troba els dits nombres.

56. Troba quatre nombres en progressió geomètrica sabent que la suma dels dos primers és 28 i la suma dels dos últims 175.

57. En una progressió geomètrica, els termes primer i quinzé són 6 i 54, respectivament. Troba el terme sisé.

58. Una progressió geomètrica té cinc termes, la raó és igual a la quarta part del primer terme i la suma dels dos primers termes és 24. Troba els cinc termes.

59. Troba x perquè $x - 1$, $x + 1$, $2(x + 1)$ estiguen en progressió geomètrica.

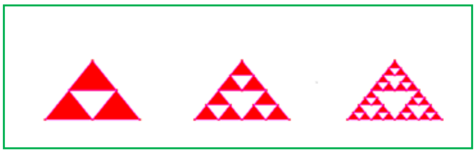
60. A una corda de 700 m de longitud se li donen dos talls, de manera que un dels trossos extrems té una longitud de 100 m. Sabent que les longituds dels trossos estan en progressió geomètrica, determina la longitud de cada tros.

61. Troba la fracció generatriu del nombre decimal 0,737373..., com a suma dels termes d'una progressió geomètrica il·limitada.

62. Es té un depòsit de vi que conté 1024 litres. L'1 d'octubre es va buidar la mitat del contingut; l'endemà es va tornar a buidar la mitat del que quedava, i així successivament tots els dies. Quina quantitat de vi es va traure el dia 10 d'octubre?

63. Donat un quadrat d'1 m de costat, unim dos a dos els punts mitjans dels seus costats; obtenim un nou quadrat, en el que tornem a efectuar la mateixa operació, i així successivament. Troba la suma de les infinites àrees així obtingudes.

64. Tres nombres la suma del qual és 36 estan en progressió aritmètica. Troba els dits nombres sabent que si se'ls suma 1, 4 i 43, respectivament, els resultats formen una progressió geomètrica.



65. *Triangle de Sierspinky*: Construirem un fractal. Es partix d'un triangle equilàter. S'uneixen els punts mitjans dels costats i es formen quatre triangles. S'elimina el triangle central. En cada un dels altres tres triangles es repeteix el procés. I així successivament. A la figura formada per iteració infinita se la denomina Triangle de Sierspinky, i és un fractal. Imagina que el primer triangle té una àrea A. Quan apliquem la primera iteració, l'àrea és (3/4)A. I en la segona? Escriu la successió de les àrees. És creixent o decreixent? Imagina ara que la longitud de cada costat del triangle inicial és L. Escriu la successió de les longituds. És creixent o decreixent?

AUTOEVALUACIÓ

1. Quina és la raó de la següent progressió geomètrica: a_n $5 \cdot 3^{n-1}$?

a) 5 b) 3 c) 2 d) No és una progressió geomètrica

2. En la successió de múltiples de 13, el 169 ocupa el lloc:

a) 1 b) 2 c) 13 d) 169

3. La suma dels deu primers termes de la progressió aritmètica: 7, 13, 19, 31,... és:

a) 170 b) 34 c) 19 d) 340

4. La successió 5, 15, 45, 135, 405, 1215...:

a) És una progressió geomètrica de raó 5 b) És una progressió aritmètica de diferència 5

c) És una progressió geomètrica de raó 3 d) És una progressió aritmètica de diferència 3.

5. Siga la successió: 2, 10, 50, 250, 1250... el seu terme general és:

a) $a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$ b) $a_n = 2 \cdot 2^{n-1}$ c) $a_n = 5 \cdot 5^{n-1}$ *d)* $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$

6. Quant sumen les potències de 2 compreses entre 2^1 i 2^{10}?

a) 1022 b) 2046 c) 1024 d) 2048

7. La progressió aritmètica el primer terme de la qual és 1 i la seua diferència 2, té com a terme general:

a) $a_n = 2n$ b) $a_n = 2n + 1$ c) $a_n = 2n – 1$ d) $a_n = 2n – 2$

8. Quin és el valor de la suma: 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 999?

a) 500.000 b) 250.000 c) 50000 d) 25000

9. Maria està preparant l’examen de selectivitat. Per a no deixar tota la matèria per al final ha decidit estudiar cada dia el doble de pàgines que el dia anterior. Si el primer dia va estudiar tres pàgines, quantes haurà estudiat al cap de 7 dies?

a) 381 b) 192 c) 765 d) 378

10. A Robert li han tocat 6000 € en la loteria i decideix depositar-los en el banc a un tipus d’interés compost del 4 %. Quants diners tindrà al cap de 5 anys?

a) 6240 € b) 6104 € c) 7832,04 € d) 7299,92 €

Matemàtiques orientades a les ensenyances acadèmiques:

3º B d'ESO. Capítol 4: Expressions algebraiques. Polinomis

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez

Revisor: Javier Rodrigo

Il·lustracions: Banc d'Images d'INTEF

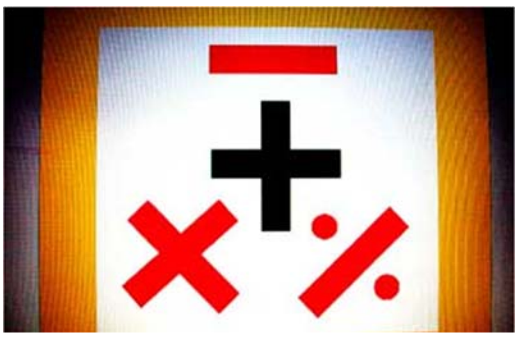
i commons.wikimedia

Traducció al valencià: Pedro Podadera IES Juan de Garay

Índex

Resum

Segons avancem en els nostres estudis es van ampliant els nostres coneixements, en particular els de Matemàtiques. Açò no es deu a cap tipus de capritx, tot al contrari: al llarg de la història les Matemàtiques es desenrotllen espentades per les necessitats de les persones. És indubtable la conveniència que una persona tinga soltesa amb els nombres i les seues operacions bàsiques: suma, resta, multiplicació i divisió. Per soltesa no ha d'entendre's que se sàpia de memòria "totes" les taules de multiplicar, sinó que siga conscient del que significa realitzar una operació concreta, que siga capaç de donar resposta a preguntes quotidianes que es resolen *operand* adequadament les dades disponibles. Per a aqueix propòsit és útil fomentar la nostra capacitat d'abstracció; ella ens permet reconéixer com a equivalents situacions en aparença molt allunyades. En aquest capítol es va a fer un pas en aqueix sentit en manipular, manejar, dades numèriques no concretats, no coneguts, a través d'indeterminades o variables. D'aqueixa manera apareixeran les expressions algebraiques i, dins d'elles, unes expressions particulars d'abundant ús i simplicitat d'exposició, els polinomis.



1. INTRODUCCIÓ. EXPRESSIONS ALGEBRAIQUES

1.1. Introducció

No cal imaginar situacions rebuscades perquè, a l'hora de realitzar un raonament, ens topem amb alguna de les quatre operacions matemàtiques bàsiques: suma, resta, multiplicació o divisió.

Exemples:

- El pare, la mare i el fill han anat al cine i les entrades han costat 27 euros. Per a calcular el preu de cada entrada es divideix entre 3: 27/ 3 = 9 euros.
- Si comprarem pasta de te i el preu d'un quilogram és de 18'3 euros, resulta habitual que, segons va la dependenta introduint pastes en una safata, anem veient l'import final. Per a això si la safata està sobre una balança, executem l'operació 18'3·*x* on *x* és la quantitat de quilograms que ens ha indicat la balança. Després de cada pesada, el resultat d'aqueixa multiplicació reflectix l'import de les pastes que, en aqueix moment, conté la safata.
- Suposem que tenim un contracte amb una companyia de telefonia mòbil pel que paguem 5 cèntims d'euro per minut, així com 12 cèntims per establiment de telefonada. Amb aqueixa tarifa, una telefonada de 3 minuts ens costarà:

$$(0'05 \cdot 3) + 0'12 = 0'15 + 0'12 = 0'27 \text{ euros}$$

Però quin és el preu d'una telefonada qualsevol? Com desconeixem la seua duració, ens trobem amb una quantitat no determinada, o indeterminada, per la qual cosa en qualsevol resposta que donem a la pregunta anterior s'apreciarà l'absència d'aqueix dada concreta. Podem dir que el cost d'una telefonada qualsevol és

$$(0'05 \cdot x) + 0'12 = 0'05 \cdot x + 0'12 \text{ euros}$$

on $x$assenyala la seua duració, en minuts.

Activitats proposades

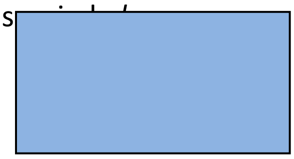
1. A finals de cada mes l'empresa de telefonia mòbil ens proporciona la factura mensual. En ella apareix molta informació, en particular, el nombre total de telefonades realitzades (*N*) així com la quantitat total de minuts de conversació (*M*). Amb les dades de l'anterior exemple, justifica que l'import de les telefonades efectuades durant aqueix mes és:

$$(0'05 \cdot M) + (0'12 \cdot N) = 0'05 \cdot M + 0'12 \cdot N \text{ euros}$$

Exemple:

- És ben coneguda la *fórmula* de l'àrea d'un rectangle de base *b* i altura as

A = *b*·*h*



h

b

En tots aquests exemples han sorgit **expressions algebraiques**.

1.2. Expressions algebraiques

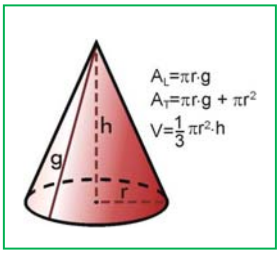
Anomenarem expressió **algebraica** a qualsevol expressió matemàtica que es construïsca amb nombres i les operacions matemàtiques bàsiques: suma, resta, multiplicació i/o divisió. En una expressió algebraica pot haver-hi dades no concretades; segons el context, rebran el nom de ***variable***, ***indeterminada***, ***paràmetre***, entre altres.

Si en una expressió algebraica no hi ha *variables*, la dita expressió no és més que un nombre:

Exemple:

$$\frac{3\cdot(-7)}{\frac{4}{5}-\frac{2}{3}}+1=\frac{-21}{\frac{4\cdot 3}{5\cdot 3}-\frac{2\cdot 5}{3\cdot 5}}+1=\frac{-21}{\frac{12}{15}-\frac{10}{15}}+1=\frac{-21}{\frac{2}{15}}+1=\frac{-21\cdot 15}{2}+1=\frac{-315}{2}+1$$
$$=\frac{-315}{2}+\frac{2}{2}=\frac{-313}{2}$$

Al fixar un valor concret per a cada *indeterminada* d'una expressió algebraica apareix un nombre, el **valor numèric** d'aqueixa expressió algebraica per a tals valors de les indeterminades.



Exemple:

- El volum d'un con ve donat per l'expressió algebraica:

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot r^2\cdot h$$

en la que *r* és el radi del cercle base i *h* és la seua altura. D'esta manera, el volum d'un con la base del qual té un radi de 10 cm i d'altura 15 cm és igual a:

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot r^2\cdot h=\frac{1}{3}\pi\cdot 10^2\cdot 15=500\cdot\pi \text{cm}^3.$$

- L'àrea lateral del con ve donada per $A_L = \pi\cdot r\cdot g$, on *r* és el radi de la base i *g* la generatriu. La superfície total és $A_T = \pi\cdot r\cdot g + \pi\cdot r^2$.
- L'expressió algebraica que representa el producte dels quadrats de dos nombres qualssevol x i y es simbolitza per $x^2\cdot y^2$. Si en ella fixem $x=-2$ i $y=\frac{3}{5}$ resulta

$$(-2)^2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2=4\cdot\frac{9}{25}=\frac{36}{25}.$$

- Si a l'expressió

$$7+\frac{x}{2}+x\cdot y^3-\frac{6}{z}$$

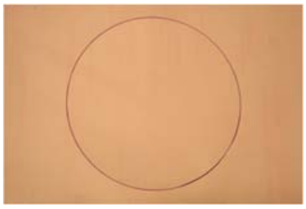
particularitzem les tres variables amb els valors

$$x=4,\ y=-1,\ z=\frac{1}{2}$$

sorgeix el nombre

$$7+\frac{4}{2}+4\cdot(-1)^3-\frac{6}{1/2}=7+2-4-12=-7$$

En una expressió algebraica pot no tindre sentit donar algun valor a certa indeterminada. En efecte, en l'últim exemple no és possible fer $z=0$.



Activitats proposades

2. Escriu les expressions algebraiques que ens proporcionen la longitud d'una circumferència i l'àrea d'un trapezi.

3. Reescriu, en llenguatge algebraic, els següents enunciats, referits a dos nombres qualssevol x i y:

a) El triple de la seua diferència b) La suma dels seus quadrats c) El quadrat de la seua suma

d) L'invers del seu producte e) La suma dels seus oposats d) El producte dels seus quadrats

4. Una botiga de roba anuncia en els seus aparadors que està de rebaixes i que tots els seus articles estan rebaixats un 30 % sobre el preu imprés en cada etiqueta. Escriu el que pagarem per una peça en funció del que apareix en la seua etiqueta.

5. Calcula el valor numèric de les següents expressions algebraiques per al valor o valors que s'indiquen:

a) $-3x^2+\frac{4}{x}-5$ per a $x=-2$.

b) $3b+\frac{a+b}{2-b^3}+a\cdot b^2-1$ per a $a=\frac{1}{3}$ i $b=\frac{1}{2}$.

6. Indica, en cada cas, el valor numèric de l'expressió $x-2y+3z$:

a) $x=1, y=2, z=1$

b) $x=2, y=0, z=-1$

c) $x=0, y=1, z=0$

7. Calcula el valor numèric de les següents expressions algebraiques per al valor o els valors que s'indiquen:

a) x^2+2x-7 per a $x=2$ b) $(a+b)^2-(a^2+b^2)$ per a $a=3$ i $b=-2$ c) c^2+3c+7 per a $c=1$.

2. POLINOMIS. SUMA I PRODUCTE

2.1. Monomis. Polinomis

Unes expressions algebraiques de gran utilitat són els **polinomis**, la versió més simple i, dels quals al mateix temps, generadora d'ells són els **monomis**.

Un **monomi** ve donat pel producte de nombres i indeterminades. Anomenarem **coeficient** d'un monomi al nombre que multiplica a la indeterminada, o indeterminades; la indeterminada, o indeterminades, conformen la **part literal** del monomi.

Exemples:

- L'expressió que ens proporciona el triple d'una quantitat, 3·*x*, és un monomi amb una única variable, *x*, i coeficient 3.
- El volum d'un con, $\frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$, és un monomi amb dues indeterminades, r i h, i coeficient $\frac{1}{3}\pi$. La seua part literal és $r^2 \cdot h$.
- Altres monomis: $5a^2b^3$, $\sqrt{2} \cdot x^3 \cdot y^2 \cdot z^2$
- L'expressió $5xy^2 + \sqrt{3}xy - \frac{3}{7}x$ està formada per tres termes, tres monomis. Cada un té un coeficient i una part literal:

  Al primer, $5xy^2$, el coeficient és 5 i la part literal xy^2

  Al segon, $\sqrt{3}xy$, té per coeficient $\sqrt{3}$ i part literal xy

- I al tercer, $-\frac{3}{7}x$, el coeficient és $-\frac{3}{7}$ i la part literal x

Atenent a l'exponent de la variable, o variables, adjudicarem un **grau** a cada monomi d'acord amb el criteri següent:

- Quan hi haja una única indeterminada, el grau del monomi serà l'exponent de la seua indeterminada.
- Si apareixen diverses indeterminades, el grau del monomi serà la suma dels exponents d'aqueixes indeterminades.

Exemples:

- 3*x* és un monomi de grau 1 en la variable *x*.
- $\frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$ és un monomi de grau 3 en les indeterminades r i h.
- $5a^2b^3$ és un monomi de grau 5 en *a* i *b*.
- $\sqrt{2} \cdot x^3 \cdot y^2 \cdot z^2$ és un monomi de grau 7 en x, y i z.

Un nombre pot ser considerat com un monomi de grau 0.

Activitats proposades

8. En cada un dels següents monomis assenyala el seu coeficient, la seua part literal i el seu grau:

- $-12x^3$
- a^4b^3c
- $4xy^2$

Un **polinomi** és una expressió construïda a partir de la suma de monomis. El **grau d'un polinomi** vindrà donat pel major grau dels seus monomis.

Exemples:

- $\frac{1}{5}\cdot x^2 - 7\cdot x^3 + 2$ és un polinomi de grau 3 en la variable x.
- $-3\cdot y^4 + 8\cdot x^2 + 2\cdot x$ és un polinomi de grau 4 en les indeterminades x i y.
- $4\cdot x^2\cdot y^3 - 7 + 3\cdot y^2$ és un polinomi de grau 5 en x i y.
- $x - 2\cdot y + 6\cdot z$ és un polinomi de grau 1 en x, y i z.

Tant en aquesta secció com en la següent ens limitarem, bàsicament, a considerar polinomis amb una única variable. És habitual escriure els diferents monomis d'un polinomi de manera que els seus graus vagen en descens per a, amb aquest criteri, apreciar en el seu primer monomi quin és el grau del polinomi.

L'aspecte genèric d'un polinomi en la variable x és

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

on els coeficients a_k són nombres. El monomi de grau zero, a_0, rep el nom de terme **independent**. Direm que un polinomi és **mònic** quan el coeficient del seu terme de major grau és igual a 1.

Exemples:

- $-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ és un polinomi de grau 4 en la variable x, el terme independent de la qual és 2.
- $4y^3 + 3y - 7$ és un polinomi de grau 3 en la indeterminada y amb terme independent -7.
- $z^2 - 3z + 12$ és un polinomi de grau 2 en z. A més, és un polinomi mònic.
- $3x + 9$ és un polinomi de grau 1 en x.

Activitats proposades

9. Para cada un dels següents polinomis destaca el seu grau i els monomis que el constitueixen:

- $5x^4 + 7x^2 - x$
- $6x^2 + 10 - 2x^3$
- $2xy^3 - x^5 + 7x^2y^2$

Com ocorre amb qualsevol expressió algebraica, si fixem, o triem, un valor concret per a la variable d'un polinomi apareix un nombre: el **valor numèric** del polinomi per a aqueix valor determinat de la variable. Si hem anomenat pa un polinomi, a l'avaluació de $p$en, per exemple, el nombre -3la denotarem per $p(-3)$, i llegirem *"p de menys tres"* o *"p en menys tres"*. Amb aquest criteri, si $p$és un polinomi la indeterminada del qual és la variable x, podem referir-nos a ell com po $p(x)$indistintament.

D'aquesta forma apreciem que un polinomi pot ser entés com una manera concreta d'assignar a cada nombre un altre nombre.

Exemples:

- Si avaluem el polinomi $p \equiv -3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$en $x = 5$ens trobem amb el nombre
    - $p(5) = -3 \cdot 5^4 + \frac{1}{5} \cdot 5^2 + 2 = -3 \cdot 625 + 5 + 2 = -1875 + 7 = -1868$
- El valor del polinomi $q(y) = 4y^3 + 3y - 7$per a $y = -1$és
    - $q(-1) = 4 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1) - 7 = 4 \cdot (-1) - 3 - 7 = -4 - 10 = -14$
- En particularitzar el polinomi $r \equiv z^2 - 3z + 12$en $z = 0$resulta el nombre $r(0) = 12$.

Activitats proposades

10. Considerem el polinomi $p(x) = x^3 - 3x + 2$. Troba els següents valors numèrics de p:

$p(0)$, $p(1)$, $p(-1)$, $p(-2)$i $p(1/2)$.

2.2. Suma de polinomis

Com un polinomi és una suma de monomis, la suma de dos polinomis és un altre polinomi. A l'hora de sumar dos polinomis procedirem a sumar els monomis de la mateixa part literal.

Exemples:

- La suma dels polinomis $-3x^4+\frac{1}{5}x^2+2$ i $-x^4+4x^2-5x-6$ és el polinomi
- $$(-3x^4+\tfrac{1}{5}x^2+2)+(-x^4+4x^2-5x-6)=(-3x^4-x^4)+(\tfrac{1}{5}x^2+4x^2)-5x+(2-6)=$$
  $$(-3-1)\cdot x^4+(\tfrac{1}{5}+4)\cdot x^2-5x+(2-6)=-4x^4+\tfrac{21}{5}x^2-5x-4$$
- $(5x^2-3x+1)+(x^2+4x-7)=(5x^2+x^2)+(-3x+4x)+(1-7)=6x^2+x-6$
- $(2x^3+1)+(-x^4+4x)=-x^4+2x^3+4x+1$
- $(x^3+9)+(-x^3+2)=11$
- $3xy+5xy+2x=8xy+2x$

En el següent exemple sumarem dos polinomis disposant-los, adequadament, un sobre un altre.

Exemple:

$$\begin{array}{r} 4x^5+2x^4+x^3-5x^2+x+4 \\ +-7x^5+4x^3+5x^2-3x-6 \\ \hline -3x^5+2x^4+5x^3-2x-2 \end{array}$$

Propietats de la suma de polinomis

Propietat commutativa. Si p i q són dos polinomis, no importa l'orde en què els col·loquem a l'hora de sumar-los:

$$p+q\equiv q+p$$

Exemple:

$$(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)=-x^3+(4x^2+x^2)+(-2x-3x)+(7+1)$$
$$=-x^3+5x^2-5x+8$$

$$(-x^3+x^2-3x+1)+(4x^2-2x+7)=-x^3+(x^2+4x^2)+(-3x-2x)+(1+7)$$
$$=-x^3+5x^2-5x+8$$

Propietat associativa. Ens assenyala com es poden sumar tres o més polinomis. Basta fer-lo agrupant-los de dos en dos:

$$(p+q)+r\equiv p+(q+r)$$

Exemple:

$$(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)+(x-6)=(4x^2-2x+7-x^3+x^2-3x+1)+(x-6)=$$
$$(-x^3+5x^2-5x+8)+(x-6)=-x^3+5x^2-4x+2$$

També:

$$(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)+(x-6)=(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1+x-6)=$$
$$(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-2x-5)=-x^3+5x^2-4x+2$$

Activitats proposades

11. Realitza les següents sumes de polinomis:

- $(-x^3+x-5)+(2x^2+5x+4)+(-4x^3-2x^2+3x)$
- $(x^2+4)+(-2x+4)+(-6x^3+3x^2+x+1)-x^2$

Element neutre. Hi ha un polinomi amb una propietat particular: el resultat de sumar-lo amb qualsevol altre sempre és aquest últim. Es tracta del polinomi donat pel nombre 0, el **polinomi *zero***.

Exemple:

$$0+(-7x^3+3x+7)=(-7x^3+3x+7)+0=-7x^3+3x+7$$

Element oposat. Cada polinomi té associat un altre, al què anomenerem el seu polinomi *oposat*, tal que la suma d'ambdós és igual al polinomi zero. Aconseguim el polinomi oposat d'un donat, simplement, canviant el signe de cada monomi.

Exemple:

- El polinomi oposat de $p\equiv -2x^4+x^3+2x-7$ és $2x^4-x^3-2x+7$, al què denotarem com - p. Ratifiquem que la seua suma és el polinomi zero:

$$(-2x^4+x^3+2x-7)+(2x^4-x^3-2x+7)$$
$$=(-2x^4+2x^4)+(x^3-x^3)+(2x-2x)+(-7+7)=0$$

Activitats proposades

12. Escriu el polinomi oposat de cada un dels polinomis següents:

- $2x^3-2x^2-3x+9$
- $-5x$
- $-x^3+7x$

13. Considera els polinomis $p\equiv x^2-x+1$, $q\equiv -x^3+2x-3$, així com el polinomi suma $s\equiv p+q$. Troba els valors que adopta cada un d'ells per a $x=-2$, és a dir, calcula $p(-2)$, $q(-2)$ i $s(-2)$. Estudia si hi ha alguna relació entre aqueixos tres valors.

14. Obtín el valor del polinomi $p\equiv 4x^3-x^2+1$ en $x=2$. Quin valor pren el polinomi oposat de p en $x=2$?

2.3. Producte de polinomis

Una altra operació que podem realitzar amb polinomis és la multiplicació.

El resultat del producte de polinomis sempre serà un altre polinomi. Encara que en un polinomi tenim una indeterminada, o variable, com ella adopta valors numèrics, a l'hora de multiplicar polinomis utilitzarem les propietats de la suma i el producte entre nombres, en particular la propietat distributiva del producte respecte de la suma; així, tot queda en funció del producte de monomis, qüestió que resolem amb facilitat:

$$\mathrm{ax}^{n} \cdot \mathrm{bx}^{m} = \mathrm{abx}^{n+m}$$

Exemples:

- $(-5)x^2 \cdot 2x^4 = (-5) \cdot 2 \cdot x^{2+4} = -10x^6$
- $5x^3 \cdot (-4) = 5 \cdot (-4) \cdot x^3 = -20x^3$
- $3x^2 \cdot (2x^2 - 4x + 6) = (3x^2 \cdot 2x^2) - (3x^2 \cdot 4x) + (3x^2 \cdot 6) = 6x^4 - 12x^3 + 18x^2$
- $(-x^3 + 3x - 1) \cdot (-2x) = (-x^3) \cdot (-2x) + (3x) \cdot (-2x) + (-1) \cdot (-2x) = 2x^4 - 6x^2 + 2x$
- $(3x - 2) \cdot (x^2 - 4x - 5) = (3x) \cdot (x^2 - 4x - 5) + (-2) \cdot (x^2 - 4x - 5) = (3x^3 - 12x^2 - 15x) + (-2x^2 + 8x + 10) == 3x^3 + (-12x^2 - 2x^2) + (-15x + 8x) + 10 = 3x^3 - 14x^2 - 7x + 10$
- $(x - 6) \cdot (x^3 - 2x) = (x - 6) \cdot x^3 + (x - 6) \cdot (-2x) = (x^4 - 6x^3) + (-2x^2 + 12x) = x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 12x$

També podem materialitzar el producte de polinomis tal com multipliquem nombres enters:

Exemple:

$$\begin{array}{r} -2x^3 + x + 4 \\ \times\, x^2 - 3x + 1 \\ \hline -2x^3 + x + 4 \\ 6x^4 - 3x^2 - 12x \\ -2x^5 + x^3 + 4x^2 \\ \hline -2x^5 + 6x^4 - x^3 + x^2 - 11x + 4 \end{array}$$

Recordem que el polinomi *oposat* d'un altre s'obté simplement canviant el signe de cada monomi. Aquesta acció es correspon de multiplicar pel nombre "-1" el polinomi original. D'aquesta manera el polinomi oposat d'és

$$-p \equiv (-1) \cdot p$$

En aquest moment apareix de manera natural l'operació **diferència**, o **resta**, de polinomis. La definim amb l'ajuda del polinomi oposat d'un donat:

$$p - q \equiv p + (-q) \equiv p + (-1) \cdot q$$

Exemple:

- $(-5x^2 - 3x + 2) - (-2x^4 + x^3 + 3x^2 + 6) = (-5x^2 - 3x + 2) + (2x^4 - x^3 - 3x^2 - 6) = 2x^4 - x^3 + (-5x^2 - 3x^2) - 3x + (2 - 6) = 2x^4 - x^3 - 8x^2 - 3x - 4$

Activitats proposades

15. Efectua els següents productes de polinomis:

- $(-2x) \cdot (3x^2 - 4)$
- $(2x^3 + 1) \cdot (-4x + 5)$
- $(4x^3 - x^2 - 1) \cdot (2x + 6)$
- $(-1) \cdot (8x^2 + 7x - 9)$

16. Realitza les següents diferències de polinomis:

- $(5x^2 + 2) - (-2x)$
- $(-2x^3 + 4x) - (-2x - 1)$
- $(7x^2 - 2x) - (3x^3 + 4x^2 - x + 1)$

17. Multiplica cada un dels següents polinomis per un nombre de tal forma que sorgisquen polinomis mònics:

- $3x^2 - x + 2$
- $-6x^3 + 2x - 3$
- $-x^2 + 9x - 2$

18. Calcula i simplifica els productes següents:

a) $x \cdot (-2x + 4)$ b) $(2x - 3) \cdot (3x + 2)$

- c) $(a - 2) \cdot (4 - 3a)$ d) $(3a - b^2) \cdot (2b - a^2)$

Propietats del producte de polinomis

Propietat commutativa. Si *p* i *q* són dos polinomis, no importa l'orde en què els col·loquem a l'hora de multiplicar-los:

$$p \cdot q \equiv q \cdot p$$

Exemple:

$$(2x - 7) \cdot (-x^3 + x^2) = 2x \cdot (-x^3 + x^2) - 7 \cdot (-x^3 + x^2) = -2x^4 + 2x^3 + 7x^3 - 7x^2$$
$$= -2x^4 + 9x^3 - 7x^2$$

$$(-x^3 + x^2) \cdot (2x - 7) = -x^3 \cdot (2x - 7) + x^2 \cdot (2x - 7) = -2x^4 + 7x^3 + 2x^3 - 7x^2$$
$$= -2x^4 + 9x^3 - 7x^2$$

Propietat associativa. Ens assenyala com es poden multiplicar tres o més polinomis. Basta fer-lo agrupant-los de dos en dos:

$$(p \cdot q) \cdot r \equiv p \cdot (q \cdot r)$$

Exemple:

$$((4x^2 - 2) \cdot (-3x + 1)) \cdot (-x^3 + x) = (-12x^3 + 4x^2 + 6x - 2) \cdot (-x^3 + x) =$$
$$12x^6 - 12x^4 - 4x^5 + 4x^3 - 6x^4 + 6x^2 + 2x^3 - 2x = 12x^6 - 4x^5 - 18x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 2x$$

També:

$$(4x^2 - 2) \cdot ((-3x + 1) \cdot (-x^3 + x)) = (4x^2 - 2) \cdot (3x^4 - 3x^2 - x^3 + x) =$$
$$12x^6 - 12x^4 - 4x^5 + 4x^3 - 6x^4 + 6x^2 + 2x^3 - 2x = 12x^6 - 4x^5 - 18x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 2x$$

Activitats proposades

19. Realitza els següents productes de polinomis:

- $x \cdot (-3x^2 + 4x + 2) \cdot x^2$
- $(-2x + 1) \cdot (5x^2 - x + 3) \cdot (-x)$
- $(3a - 1) \cdot (2 - a) \cdot (5 - 4a)$

Element neutre. Hi ha un polinomi amb una propietat particular: en multiplicar-lo per qualsevol altre sempre ens dóna aquest últim. Es tracta del polinomi donat pel nombre 1, el **polinomi *unitat***.

Exemple:

$$1 \cdot (-5x^3 - 2x + 3) = (-5x^3 - 2x + 3) \cdot 1 = -5x^3 - 2x + 3$$

Propietat distributiva de la multiplicació respecte de la suma. Quan en una multiplicació de polinomis un dels factors ve donat com la suma de dos polinomis com, per exemple,

$$(3x^2 - x) \cdot ((-2x + 7) + (x^3 - 4x))$$

tenim dues opcions per a conéixer el resultat:

a) realitzar la suma i, després, multiplicar

$$(3x^2 - x) \cdot ((-2x + 7) + (x^3 - 4x)) = (3x^2 - x) \cdot (x^3 - 6x + 7) =$$
$$3x^5 - 18x^3 + 21x^2 - x^4 + 6x^2 - 7x = 3x^5 - x^4 - 18x^3 + 27x^2 - 7x$$

b) distribuir, aplicar, la multiplicació a cada un dels sumands i, després, sumar:

$$(3x^2 - x) \cdot ((-2x + 7) + (x^3 - 4x)) = (3x^2 - x) \cdot (-2x + 7) + (3x^2 - x) \cdot (x^3 - 4x) =$$
$$(-6x^3 + 21x^2 + 2x^2 - 7x) + (3x^5 - 12x^3 - x^4 + 4x^2) = 3x^5 - x^4 - 18x^3 + 27x^2 - 7x$$

Comprovem que obtenim el mateix resultat.

En general, la **propietat distributiva** de la multiplicació respecte de la suma ens diu que

$$p \cdot (q + r) \equiv (p \cdot q) + (p \cdot r)$$

Convé comentar que l'anterior propietat distributiva llegida en sentit contrari, de dreta a esquerra, és el que comunament es denomina traure **factor comú**.

Exemple:

$$6x^5 - 4x^4 - 18x^3 + 2x^2 = (3x^3 - 2x^2 - 9x + 1) \cdot 2x^2$$

Activitats proposades

20. De cada un dels següents polinomis extrau algun factor que siga comú als seus monomis:

- $-10x^3 - 15x^2 + 20x$
- $30x^4 + 24x^2$

3. DIVISIÓ DE POLINOMIS

3.1. Introducció a les fraccions polinòmiques

Fins a aquest moment hem estudiat diverses operacions amb polinomis: suma, resta i producte. En qualsevol dels casos el resultat sempre és un altre polinomi. Quan establim una **fracció polinómica** com, per exemple,

$$\frac{3x^3 - x}{2x^2 + x - 3}$$

el que tenim és una expressió algebraica, una **fracció algebraica**, la qual, en general, no és un polinomi. Sí que apareix un polinomi en el molt particular cas en què el denominador és un nombre diferent de zero, açò és, un polinomi de grau 0.

És senzill constatar que l'expressió anterior no és un polinomi: qualsevol polinomi pot ser avaluat en qualsevol nombre. No obstant això aqueixa expressió no pot ser avaluada per a $x = 1$, ja que ens quedaria el nombre 0 al denominador.

Podríem creure que la següent fracció polinómica sí que és un polinomi:

$$\frac{-2x^3 + 5x^2 - 3x}{x} = \frac{-2x^3}{x} + \frac{5x^2}{x} + \frac{-3x}{x} = -2x^2 + 5x - 3$$

L'expressió de la dreta sí és un polinomi, perquè es tracta d'una suma de monomis, però la de l'esquerra no ho és ja que no pot ser avaluada en $x = 0$. No obstant això, aqueixa fracció algebraica i el polinomi, quan són avaluats en qualsevol nombre diferent de zero, ofereixen el mateix valor. Són **expressions equivalents** allí on ambdós tenen sentit, açò és, per a aquells nombres en què el denominador no es fa zero.

3.2. Divisió de polinomis

Encara que, com hem vist en l'apartat anterior, una fracció polinómica, en general, no és un polinomi, anem a endinsar-nos en la divisió de polinomis perquè és una qüestió important i útil.

Analitzem amb deteniment la divisió de dos nombres enters positius. Quan dividim dos nombres, *D* (dividend) entre *d* (divisor, diferent de 0), sorgeixen altres dos, el quocient (*c*) i el residu (*r*). Ells es troben lligats per l'anomenada *prova de la divisió*:

$$D = d \cdot c + r$$

Alternativament:

$$\frac{D}{d} = c + \frac{r}{d}$$

A més, diem que la divisió és exacta quan $r = 0$.

El conegut algoritme de la divisió persegueix trobar un nombre enter, el quocient *c*, tal que el residu r siga un nombre menor que el divisor d, i major o igual que zero. Fixem-nos en que, sense aquesta exigència per al residu r, podem triar arbitràriament un valor per al quocient c el qual ens subministra el seu valor associat com a residu r. En efecte, si tenim com a dividend D = 673 i com divisor d = 12, "si volem" que el quocient siga c = 48 el seu residu associat és

$$r = D - d \cdot c = 673 - 12 \cdot 48 = 673 - 576 = 97$$

i la connexió entre aquests quatre nombres és

$$673 = 12 \cdot 48 + 97$$

Aquesta última "llectura" de la divisió de nombres enters va a guiar-nos a l'hora de dividir dos polinomis.

Donats dos polinomis $p(x)$ i $q(x)$, la divisió de $p(x)$, polinomi dividend, entre $q(x)$, polinomi divisor, ens proporcionarà altres dos polinomis, el polinomi quocient $c(x)$ i el polinomi residu $r(x)$. També ací pesarà una exigència sobre el polinomi residu: el seu grau haurà de ser menor que el grau del polinomi divisor. La relació entre els quatre serà, naturalment,

$$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$$

També escriurem

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

encara que, en este cas, serem conscients de les cauteles assenyalades en l'apartat anterior quant a les equivalències entre polinomis i altres expressions algebraiques.

Igual que ocorre amb l'algoritme de la divisió entera, l'algoritme de la divisió de polinomis consta de diverses etapes, de caràcter repetitiu, en cada una de les quals apareixen uns polinomis quocient i residu "provisionals" de manera que el grau d'aqueixos polinomis residu va descendint fins que ens topem amb un el grau del qual és inferior al grau del polinomi divisor, la qual cosa indica que hem conclòs. Vegem aquest procediment amb un exemple concret.

Exemple:

- Dividirem el polinomi $p(x) = 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2$ entre el polinomi $q(x) = 2x^2 - x + 3$. Com el polinomi divisor, $q(x)$, és de grau 2, hem de trobar dos polinomis, un polinomi quocient $c(x)$ i un polinomi residu $r(x)$ de grau 1 o 0, tals que

  $$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$$

  o, com a igualtat entre expressions algebraiques,

  $$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

  A la vista dels polinomis $p(x)$ i $q(x)$, i del que s'ha dit sobre $r(x)$, és evident que el grau del polinomi quocient, $c(x)$, ha de ser igual a 2. Anem a obtindre-lo monomi a monomi.

- Primera aproximació als polinomis quocient i residu:

Per a poder aconseguir la igualtat $p \equiv q \cdot c + r$, com el grau de $r(x)$serà 1 o 0, el terme de major grau de $p(x)$, $6x^4$, sorgirà del producte $q(x) \cdot c(x)$. Així obtenim la primera aproximació del $c(x)$, seu monomi de major grau:

$$c_1(x) = 3x^2$$

i, de manera automàtica, també un primer residu $r_1(x)$:

$$r_1(x) = p(x) - q(x) \cdot c_1(x) = (6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2) - (2x^2 - x + 3) \cdot 3x^2 =$$
$$(6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2) - (6x^4 - 3x^3 + 9x^2) = 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2$$

Com aquest polinomi $r_1(x)$és de grau 3, major que 2, el grau del polinomi divisor $q(x)$, aqueix polinomi residu no és el definitiu; hem de continuar.

- Segona aproximació als polinomis quocient i residu:

Si particularitzem la igualtat entre expressions algebraiques $\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$el que tenim fins ara resulta

$$\frac{6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3} = 3x^2 + \frac{8x^3 - 8x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3}$$

Aquesta segona etapa consisteix a dividir el polinomi $r_1(x) = 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2$, sorgit com a residu de l'etapa anterior, entre el polinomi $q(x) = 2x^2 - x + 3$, el divisor inicial. És a dir, repetim el que feiem abans però considerant un nou polinomi dividend: el polinomi residu del pas anterior.

El nou objectiu és aconseguir la igualtat $r_1 \equiv q \cdot c_2 + r$. Igual que abans, el grau d'hauria de ser 1 o 0. Com el terme de major grau de $r_1(x)$, $8x^3$, ix del producte $q(x) \cdot c_2(x)$, és necessari que el polinomi quocient continga el monomi

$$c_2(x) = 4x$$

Això ens porta a un segon residu $r_2(x)$:

$$r_2(x) = r_1(x) - q(x) \cdot c_2(x) = (8x^3 - 8x^2 + 3x - 2) - (2x^2 - x + 3) \cdot 4x =$$
$$(8x^3 - 8x^2 + 3x - 2) - (8x^3 - 4x^2 + 12x) = -4x^2 - 9x - 2$$

Com aquest polinomi $r_2(x)$és de grau 2, igual que el grau del polinomi divisor $q(x)$, aqueix polinomi residu no és el definitiu; hem de continuar.

- Tercera aproximació als polinomis quocient i residu:

Allò que s'ha realitzat en l'etapa segona ens permet avançar en l'adequada descomposició de l'expressió algebraica que ens ocupa:

$$\frac{6x^4+5x^3+x^2+3x-2}{2x^2-x+3}=3x^2+\frac{8x^3-8x^2+3x-2}{2x^2-x+3}=3x^2+4x+\frac{-4x^2-9x-2}{2x^2-x+3}$$

Aquesta tercera etapa consisteix a dividir el polinomi $r_2(x)=-4x^2-9x-2$, el residu de l'etapa anterior, entre el polinomi $q(x)=2x^2-x+3$, el divisor inicial. De nou repetim l'algoritme però amb un altre polinomi dividend: el polinomi residu del pas anterior.

Perseguim que $r_2\equiv q\cdot c_3+r$. Com en cada pas, el grau d'hauria de ser 1 o 0. El terme de major grau de $r_2(x)$, $-4x^2$, sorgeix del producte $q(x)\cdot c_3(x)$, pel que

$$c_3(x)=-2$$

i el tercer residu $r_3(x)$és

$$r_3(x)=r_2(x)-q(x)\cdot c_3(x)=(-4x^2-9x-2)-(2x^2-x+3)\cdot(-2)=$$
$$(-4x^2-9x-2)-(-4x^2+2x-6)=-11x+4$$

Com aquest polinomi $r_3(x)$és de grau 1, menor que 2, grau del polinomi divisor $q(x)$, aqueix polinomi residu sí que és el definitiu. Hem conclòs:

$$\frac{6x^4+5x^3+x^2+3x-2}{2x^2-x+3}=3x^2+\frac{8x^3-8x^2+3x-2}{2x^2-x+3}=3x^2+4x+\frac{-4x^2-9x-2}{2x^2-x+3}$$
$$=3x^2+4x-2+\frac{-11x+4}{2x^2-x+3}$$

Si ho expressem mitjançant polinomis:

$$6x^4+5x^3+x^2+3x-2=(2x^2-x+3)\cdot(3x^2+4x-2)+(-11x+4)$$

Conclusió: en dividir el polinomi $p(x)=6x^4+5x^3+x^2+3x-2$entre el polinomi $q(x)=2x^2-x+3$obtenim com a polinomi quocient $c(x)=3x^2+4x-2$i com a polinomi residu $r(x)=-11x+4$.

A continuació agilitzarem la divisió de polinomis:

Activitats proposades

21. Comprova que els càlculs que tens a continuació reflecteixen el que es va fer en l'exemple anterior per a dividir el polinomi $p(x)=6x^4+5x^3+x^2+3x-2$entre el polinomi $q(x)=2x^2-x+3$.

- Primera etapa:

$$6x^4+5x^3+x^2+3x-2|2x^2-x+3$$

- $$-6x^4+3x^3-9x^2 3x^2$$
$$8x^3-8x^2+3x-2$$

- Primera i segona etapes:

$$6x^4+5x^3+x^2+3x-2|2x^2-x+3$$
$$-6x^4+3x^3-9x^2 3x^2+4x$$
$$8x^3-8x^2+3x-2$$
$$-8x^3+4x^2-12x$$
$$-4x^2-9x-2$$

- Les tres etapes:

$$6x^4+5x^3+x^2+3x-2|2x^2-x+3$$
$$-6x^4+3x^3-9x^2 3x^2+4x-2$$
$$8x^3-8x^2+3x-2$$
$$-8x^3+4x^2-12x$$
$$-4x^2-9x-2$$
$$4x^2-2x+6$$
$$-11x+4$$

22. Divideix els polinomis següents:

- $3x^3+4x^2-9x+7$ entre x^2+2x-1
- $-6x^3+2x^2+3x+4$ entre $3x^3+x^2-2x+1$
- $-6x^4-13x^3-4x^2-13x+7$ entre $-3x^2-2x+1$
- $3x^5-9x^4+7x^3+4x^2-14x+14$ entre x^3-2x^2-x+3
- x^5-4x-6 entre x^2+3

23. Troba dos polinomis tals que en dividir-los aparega $q(x)=x^2-2x-1$ com a polinomi quocient i $r(x)=2x^2-3$ com a residu.

Autor: Paco Moya i Nieves Zuasti
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

3.3. Igualtats notables

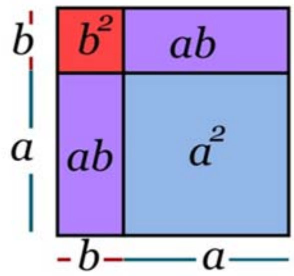
En aquest apartat destacarem una sèrie de productes concrets de polinomis que sorgeixen sovint. Podem exposar-los de molt diverses formes. Tal com ho farem, apareixerà més d'una indeterminada; hem de ser capaços d'apreciar que si, en algun cas particular, alguna indeterminada passa a ser un nombre concret açò no farà ni més menys que particularitzar una situació més general.

Potències d'un binomi. Les següents igualtats s'obtenen, simplement, després d'efectuar els oportuns càlculs:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\text{ab} + b^2$$

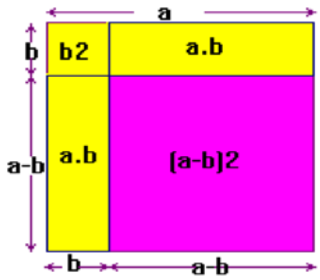
El quadrat d'una suma és igual al quadrat del primer, més el doble producte del primer pel segon, més el quadrat del segon.

Comprova la igualtat a partir dels quadrats i rectangles de la il·lustració.

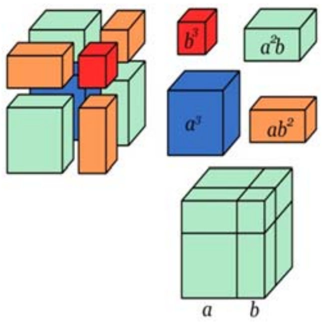


$$(a-b)^2 = a^2 - 2\text{ab} + b^2$$

El quadrat d'una diferència és igual al quadrat del primer, menys el doble producte del primer pel segon, més el quadrat del segon.



Observa la figura i connecta-la amb la igualtat.



- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3\text{ab}^2 + b^3$

Ratifica la igualtat amb els cubs i prismes de la figura.

- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3\text{ab}^2 - b^3$

Podem observar que, en cada un dels desenrotllaments, l'exponent del binomi coincideix amb el grau de cada un dels monomis.

Exemples:

- $(a+3)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot 3 + 3^2 = a^2 + 6a + 9$
- $(x-4)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 4 + 4^2 = x^2 - 8x + 16$
- $(3x+5)^2 = (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot 5 + (5)^2 = 9x^2 + 30x + 25$
- $(x-6y)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 6y + (6y)^2 = x^2 - 12\text{xy} + 36y^2$
- $(2x-5)^3 = (2x)^3 - 3\cdot(2x)^2\cdot 5 + 3\cdot(2x)\cdot 5^2 - 5^3 = 8x^3 - 30x^2 + 150x - 125$

Activitats proposades

24. Realitza els càlculs:

- $(1+x)^2$

- $(-x+2)^2$
- $(x-2)^2$
- $(2a-3)^2$
- $(x^2+1)^3$
- $(2b-4)^3$

25. Obtín les fórmules dels quadrats dels trinomis següents:

- $(a+b+c)^2$ $\quad\quad$ $(a-b+c)^2$

26. Desenrotlla les potències següents:

a) $(3x-y)^2$ b) $(2a+x/2)^2$ c) $(4y-2/y)^2$

d) $(5a+a^2)^2$ e) $(-a^2+2b^2)^2$ f) $(2/3y-1/y)^2$

27. Expressa com quadrat d'una suma o d'una diferència les següents expressions algebraiques:

a) a^2-6a+9 b) $4x^2+4x+1$ c) $b^2-10b+25$

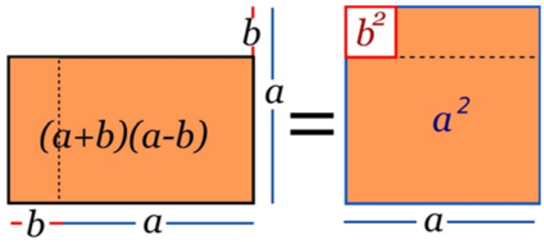
d) $4y^2-12y+9$ e) a^4+2a^2+1 f) $y^4+6xy^2+9x^2$

Suma per diferència. De nou la següent igualtat s'obté després d'efectuar el producte assenyalat:

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

Suma per diferència és igual a diferència de quadrats.

Observa les figures i connecta-les amb la igualtat.



Exemples:

- $(a+7)\cdot(a-7)=a^2-7^2=a^2-49$
- $(x+1)\cdot(x-1)=x^2-1^2=x^2-1$
- $(2x+3)\cdot(2x-3)=(2x)^2-3^2=4x^2-9$
- $(-3x-5)\cdot(-3x+5)=(-1)\cdot(3x+5)\cdot(-3x+5)=(-1)\cdot(5+3x)\cdot(5-3x)=$
  $=(-1)\cdot(5^2-(3x)^2)=-25+9x^2$

Activitats proposades

28. Efectua aquests productes:

- $(3x+2)\cdot(3x-2)$
- $(2x+4y)\cdot(2x-4y)$
- $(4x^2+3)\cdot(4x^2-3)$
- $(3a-5b)\cdot(3a+5b)$

- $(-x^2+5x)\cdot(x^2+5x)$

29. Expressa com a suma per diferència les següents expressions

a) $9x^2 - 25$ b) $4a^4 - 81b^2$ c) $49 - 25x^2$ d) $100a^2 - 64$

De volta als polinomis d'una variable, podem dir que en aquest apartat hem expandit potències *d'un polinomi*, o productes d'un polinomi per si mateix, així com productes de la forma *suma per diferència*. Convé donar-se compte que les seues fórmules, llegides al revés, ens informen del resultat de certes divisions de polinomis. En efecte, igual que quan llegim $17\times 11 = 187$ deduïm que $\frac{187}{17} = 11$ i, també, $\frac{187}{11} = 17$, a partir del desenrotllament d'un binomi com, per exemple:

$(-3x^2+2x)^2 = (-3x^2+2x)\cdot(-3x^2+2x) = 9x^4 - 12x^3 + 4x^2$, podem obtindre que

$$\frac{9x^4-12x^3+4x^2}{-3x^2+2x} = -3x^2+2x$$

El mateix ocorre amb el producte de polinomis de la forma *suma per diferència*. Ja que, per exemple, $(2x^3-5)\cdot(2x^3+5) = 4x^6 - 25$, deduïm que $\frac{4x^6-25}{2x^3-5} = 2x^3+5$, i també $\frac{4x^6-25}{2x^3+5} = 2x^3-5$

Activitats proposades

30. Realitza les següents divisions de polinomis a partir de la conversió del dividend en la potència d'un binomi o en un producte de la forma suma per diferència:

- $x^2+12x+36$ entre $x+6$
- $4x^4-16x^2$ entre $2x^2-4x$
- $9x^2-24x+16$ entre $3x-4$
- x^2-5 entre $x+\sqrt{5}$

3.4. Operacions amb fraccions algebraiques

Ja que tant els polinomis com les fraccions algebraiques obtingudes a partir de dos polinomis són, en potència, nombres, operarem amb tals expressions seguint les propietats dels nombres.

- **Suma o resta.** Per a sumar o restar dues fraccions polinómicas haurem d'aconseguir que tinguen el mateix denominador. Una manera segura d'aconseguir-lo, encara que pot no ser la més adequada, és aquesta:

$$\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\equiv\frac{p_1\cdot q_2}{q_1\cdot q_2}+\frac{p_2\cdot q_1}{q_2\cdot q_1}\equiv\frac{p_1\cdot q_2+p_2\cdot q_1}{q_1\cdot q_2}$$

- **Producte.** Basta multiplicar els numeradors i denominadors entre si:

$$\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_2}{q_2}\equiv\frac{p_1\cdot p_2}{q_1\cdot q_2}$$

- **Divisió.** Segueix la coneguda regla de la divisió de fraccions numèriques:

$$\frac{\frac{p_1}{q_1}}{\frac{p_2}{q_2}}\equiv\frac{p_1\cdot q_2}{q_1\cdot p_2}$$

Exemples:

- $\frac{x-1}{x}+\frac{3x+1}{x+1}=\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x\cdot(x+1)}+\frac{(3x+1)\cdot x}{(x+1)\cdot x}=\frac{x^2-1}{x^2+x}+\frac{3x^2+x}{x^2+x}=$
$\frac{(x^2-1)+(3x^2+x)}{x^2+x}=\frac{4x^2+x-1}{x^2+x}$
- $\frac{x+2}{x+1}-\frac{7}{x+2}=\frac{(x+2)\cdot(x+2)}{(x+1)\cdot(x+2)}-\frac{7\cdot(x+1)}{(x+2)\cdot(x+1)}=\frac{x^2+4x+4}{(x+1)\cdot(x+2)}-\frac{7x+7}{(x+2)\cdot(x+1)}=$
$\frac{(x^2+4x+4)-(7x+7)}{(x+1)\cdot(x+2)}=\frac{x^2+4x+4-7x-7}{(x+1)\cdot(x+2)}=\frac{x^2-3x-3}{(x+1)\cdot(x+2)}$
- $\frac{x+1}{x-5}\cdot\frac{3x-1}{x^2-1}=\frac{(x+1)\cdot(3x-1)}{(x-5)\cdot(x^2-1)}$
- $\frac{-3x+2}{x+3}:\frac{x^2+x}{x-1}=\frac{-3x+2}{x+3}\cdot\frac{x-1}{x^2+x}=\frac{(-3x+2)\cdot(x-1)}{(x+3)\cdot(x^2+x)}$

De vegades pot ser útil apreciar que una fracció polinòmica pot ser reescrita com la suma, diferència, producte o quocient d'altres dues fraccions polinòmiques. En particular, això pot ser aprofitat per a **simplificar** una expressió polinòmica:

Exemples:

- $\frac{4x^2-3x}{8x-6}=\frac{x\cdot(4x-3)}{2\cdot(4x-3)}=\frac{x}{2}\cdot\frac{(4x-3)}{(4x-3)}=\frac{x}{2}\cdot 1=\frac{x}{2}$
- $\frac{x^2-6x+9}{9-x^2}=\frac{(x-3)^2}{(3+x)\cdot(3-x)}=\frac{(x-3)}{(3+x)}\cdot\frac{(x-3)}{(3-x)}=\frac{(x-3)}{(3+x)}\cdot(-1)=\frac{-x+3}{3+x}$

Activitats proposades

31. Efectua els càlculs següents:

- $\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x-1}$
- $\frac{x-2}{x^2-1}-\frac{5}{x}$
- $\frac{-x+1}{x+3}\cdot\frac{3x^2}{x+1}$
- $\frac{2+x}{x^2}:\frac{x}{x-3}$

32. Realitza les següents operacions alterant, en cada apartat, només un dels denominadors, i el seu respectiu numerador:

- $\frac{-2x^2-x+1}{x^3}+\frac{3x+1}{x^2}$
- $\frac{2x-1}{x^2-2x}-\frac{3x}{x-2}$

33. Calcula els quocients següents:

a) $(2x^3 - 8x^2 + 6x) : 2x$

b) $(5a^3 + 60a^2 - 20) : 5$

c) $(16x^3 + 40x^2) : 8x^2$

d) $(6x^2y^3 - 4xy^2) : xy^2$

34. Comprova les següents identitats simplificant l’expressió del costat esquerre de cada igualtat:

- $\frac{6a^8b^2}{2a^3b}=3a^5b$
- $\frac{8x^3y-2xy^2}{4xy}=2x^2-\frac{1}{2}y$
- $\frac{4x^2+2x}{2x-8}=\frac{2x^2+x}{x-4}$
- $\frac{6a^2b^2-4a^2b^3+4ab}{2ab^2-8a^2b}=\frac{3ab-2ab^2+2}{b-4a}$

35. Simplifica les següents fraccions algebraiques:

a) $\frac{3x^2+6x}{9x^2+18}$ b) $\frac{a^3-7a^2}{3a^3+5a^2}$ c) $\frac{x^2y^2-7xy^2}{2xy}$ d) $\frac{a^2b^2-ab}{a^3b+ab}$

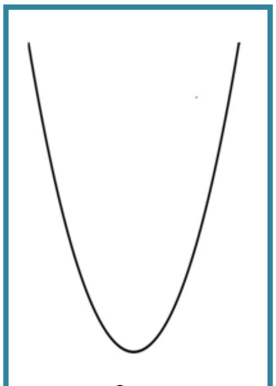
36. En cada una de les següents fraccions algebraiques escriu, quan siga possible, el polinomi numerador, o denominador, en forma de potència d’un binomi o de suma per diferència per a, posteriorment, poder simplificar cada expressió:

a) $\frac{x^2-4}{3x+6}$ b) $\frac{2x^2-16x+32}{x^2-16}$ c) $\frac{6-4a}{4a^2-9}$

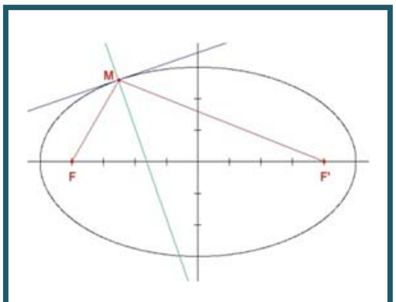
CURIOSITATS. REVISTA

GEOMETRIA

Tal com podràs comprovar durant aquest curs i els següents, gràcies als polinomis serà possible i senzill descriure nombrosos objectes geomètrics com a rectes, circumferències, el·lipses, paràboles, plans, esferes, cilindres, cons, etc.

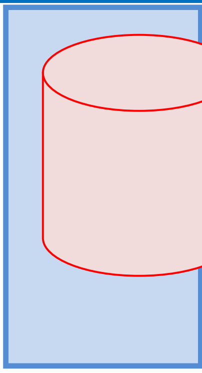


$y = ax^2 + bx + c$



$\frac{x^2}{} + \frac{y^2}{} = 1$

$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$



Per a vore geomètricament el quadrat d'un trinomi:

http://recursostic.educacion.es/bancoimagenes/web/172241_am:1.swf

Per a vore geomètricament suma per diferència:

http://recursostic.educacion.es/bancoimagenes/web/172242_am:1.swf

Per a vore geomètricament el quadrat d'una diferència:

http://recursostic.educacion.es/bancoimagenes/web/172456_am:1.swf

ALTRES CIÈNCIES

Hem vist en aquest capítol que les fórmules que ens proporcionen l'àrea o el volum de diferents figures vénen donades per polinomis. Aquests també apareixen en nombrosos **principis** o **lleis de la Física** i **de la Química** com, per exemple, en diferents *Lleis de Conservació*, la *Llei General dels Gasos*, etc.

Així mateix, són de freqüent ús a l'hora d'obtindre distints **índexs** o **indicadors** propis de **l'Economia** com, per exemple, l'*IPC* (índex de preus al consum), *l'euribor*, etc.

RESUM

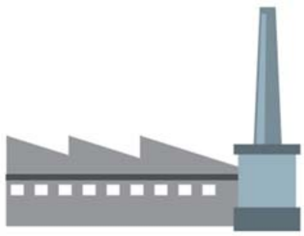
Expressió algebraica	Es construeix amb nombres i les operacions matemàtiques bàsiques de suma, resta, multiplicació i/o divisió	$\frac{-3x}{2x+y^3} - x \cdot y^2 \cdot z$
Variable, indeterminada	Allò no concretat en una expressió algebraica	Les variables, o indeterminades, de l'exemple anterior són *x*, *y*, *z*
Valor numèric d'una expressió algebraica	En fixar un valor concret per a cada indeterminada, o variable, d'una expressió algebraica s'obté un nombre, el **valor numèric** d'aqueixa expressió algebraica per a tals valors de les indeterminades.	Si, fem *x* = 3, i = –2, *z* = 1/2 obtenim $\frac{-3\cdot 3}{2\cdot 3+(-2)^3} - 3 \cdot (-2)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{-3}{2}$
Monomi	Expressió donada pel producte de nombres i indeterminades.	$-5 \cdot x \cdot y^3 \cdot z^2, 7 \cdot x^2$
Coeficient d'un monomi	El nombre que multiplica a la indeterminada, o indeterminades, del monomi	Els coeficients dels anteriors monomis són, respectivament, –5 i 7
Part literal d'un monomi	La indeterminada, o producte d'indeterminades, que multiplica al coeficient del monomi	La part literal de $-5 \cdot x \cdot y^3 \cdot z^2$és$x \cdot y^3 \cdot z^2$
Grau d'un monomi	Quan hi ha una única indeterminada és l'exponent de dita indeterminada. Si apareixen diverses, el grau del monomi serà la suma dels exponents d'aqueixes indeterminades.	Els graus dels monomis precedents són 6 i 2, respectivament
Polinomi	Expressió construïda a partir de la suma de monomis.	$-x^3 + 4x^2 + 8x + 6$
Grau d'un polinomi	El major grau dels seus monomis	L'anterior polinomi és de grau 3
Suma, resta i producte de polinomis	El resultat sempre és un altre polinomi	$p \equiv x+3, q \equiv x^2 - 2$ $p+q \equiv x^2 + x + 1$ $p-q \equiv -x^2 + x + 5$ $p \cdot q \equiv x^3 + 3x^2 - 2x - 6$
Divisió de dos polinomis	S'obtenen altres dos polinomis, els polinomis quocient (*c*(*x*)) i residu (*r*(*x*)), lligats als polinomis inicials: els polinomis dividend (*p*(*x*)) i divisor (*q*(*x*))	$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$

EXERCICIS I PROBLEMES

1. Una empresa majorista de viatges està confeccionant una oferta per a distribuir-la en diferents agències de viatge. Es tracta d'un viatge amb avió, d'anada i tornada, a Palma de Mallorca el preu del qual dependrà del nombre final de viatgers. Les dades concretes són:
   a) Si no hi ha més de 100 persones interessades, el vol costarà 150 euros per persona.
   b) Si hi ha més de 100 persones interessades, per cada viatger que passe del centenar el preu del viatge es reduirà en 1 euro. No obstant això, el preu del vol en cap cas serà inferior a 90 euros.

2. Estudia i determina el preu final del vol, per persona, en funció del nombre total de viatgers. Així mateix, expressa la quantitat que ingressarà l'empresa segons el nombre de viatgers.
3. En aquest exercici es va a presentar un *truc* mitjançant el qual endevinarem el nombre que resulta després de manipular repetidament un nombre desconegut. Converteix en una expressió algebraica les successives alteracions del nombre desconegut i justifica el que ocorre.
   i. Dis-li a un company que escriba en un paper un nombre parell i que no el mostre
   ii. Que el multiplique per 5
   iii. Que al resultat anterior li sume 5
   iv. Que multiplique per 2 el que obté
   v. Que al resultat anterior li sume 10
   vi. Que multiplique per 5 el que obté
   vii. Que dividisca entre 100 l'última quantitat
   viii. Que al resultat precedent li reste la meitat del nombre que va escriure
   ix. Independentment del nombre desconegut original quin nombre ha sorgit?

4. Els responsables d'una empresa, en previsió d'uns futurs alts i baixos en les vendes dels productes que fabriquen, pensen proposar als seus treballadors a finals de l'any 2014 el següent:
   a) La disminució dels sous, per a l'any que ve 2015, en un 10%.
   b) Per a 2016 ofereixen augmentar un 10% els salaris de 2015.
   c) En general, suggereixen que el sou disminuïsca un 10% cada any imparell i que augmente un 10% cada any parell.



5. Si finalment s'aplica allò que s'ha exposat, estudia si els treballadors recuperaran l'any 2016 el salari que tenien en 2014. Analitza què ocorre amb els sous després del pas de molts anys.
6. Els responsables de l'anterior empresa, després de rebre l'informe d'una consultora, alteren la seua intenció inicial i proposaran als seus treballadors, a finals de l'any 2014, el següent:
   a) Un augment dels sous, per a l'any que ve 2015, d'un 10%.
   b) Per a 2016, una reducció del 10% sobre els salaris de 2015.
   c) En general, suggereixen que el sou augmente un 10% cada any imparell i que disminuïsca un 10% cada any parell.

7. Si s’aplica allò que s’ha exposat, analitza si el salari dels treballadors de l’any 2016 coincidirà amb el que tenien en 2014. Estudia com evolucionen els sous després del pas de molts anys.
8. Observa si hi ha nombres en què les següents expressions no poden ser avaluades:

- $\frac{x-3}{x+1}$
- $\frac{2x-1}{(x-5)\cdot(2x+7)}$
- $\frac{x}{x^2-2x+1}$
- $\frac{x+y-2}{x^2+3y^2}$

9. Troba el valor numèric de les següents expressions als nombres que s’indiquen:

- $\frac{x-3}{x+1}$en $x=1$
- $\frac{x}{x^2-2x+1}$per a $x=-2$
- $\frac{x+y-2}{x^2+3y^2}$en $x=3$¡ $y=-1$
- $\frac{-2a+b^2-4}{a^2c-3\text{abc}}$per a $a=-1$, $b=0$¡ $c=2$
- $\frac{2x-1}{(x-5)\cdot(2x+7)}$en $x=\frac{1}{2}$

10. Una persona té estalviats 3000 euros i decideix depositar-los en un producte bancari amb un tipus d’interés anual del 2’5 %. Si decideix recuperar els seus estalvis al cap de dos anys, quina serà la quantitat total de què disposarà?

11. Construeix un polinomi de grau 2, $p(x)$, tal que $p(-2)=-6$.
12. Considera els polinomis $p(x)=2x^3-x^2+4x-1$, $q(x)=-x^4-3x^3+2x^2-x-5$¡ $r(x)=x^2-3x+2$. Fes les operacions següents:

- $p+q+r$
- $p-q$
- $p\cdot r$
- $p\cdot r-q$

13. Calcula els productes:

a) $(\frac{3\text{ax}}{2}-\frac{y}{5})\cdot(\frac{-\text{by}}{3})$ b) $(0'1x+0'2y-0'3z)\cdot(0'3x-0'2y+0'1z)$

c) $(x-y)\cdot(y-1)\cdot(x+a)$

14. Efectua les divisions de polinomis:

- $2x^3+x^2-12x+7$entre $x+3$
- $-4x^4+8x^3+7x^2-21x+8$entre $2x^2-3x+1$
- $-3x^5-2x^3+9x^2+6x-14$entre $-x^3-2x+3$

15. Calcula els quocients:

a) $(4x^3):(x^2)$ b) $(4x^3y^3z^4):(3x^2\text{yz}^2)$ c) $(x^4-4x^2y+4y^2):(x^2-2y)$

16. Realitza les operacions entre fraccions algebraiques:

- $\frac{x-1}{x^2}+\frac{2x-1}{x}$
- $\frac{2x+3}{x}+\frac{5}{x+1}$
- $\frac{x-1}{x^2-3x}-\frac{2-x}{x}$
- $\frac{x-1}{x^2-3x}\cdot\frac{2-x}{x}$
- $\frac{x-1}{x^2-3x}:\frac{2-x}{x}$

17. Troba un polinomi $p(x)$tal que en dividir $p(x)$entre $q(x)=x^3-x^2+2x-3$s'obtinga com a polinomi residu $r(x)=-3x^2+1$.
18. Calcula les potències:

a) $(x+2y-z)^2$ b) $(x-3y)^3$ c) $(a+\frac{b}{3})^2$ d) $(x^2-2z^3)^2$

19. Analitza si els següents polinomis han sorgit del desenrotllament de potències de binomis, o trinomis, o d'un producte *suma per diferència*. En cas afirmatiu expressa la seua procedència.

- x^2-6x+9
- x^4+8x^2+16
- $x^2-\sqrt{12}\text{xy}+3y^2$
- $y^4+2y^3+y^2+2y+1$
- $x^4-2x^3+x^2+2x+1$
- x^2-25
- x^2+5
- $5x^2-1$
- x^2-8y^2
- x^4-1
- x^2-y^2
- $x^2-2y^2z^2$

20. Analitza si el numerador i el denominador de les següents expressions algebraiques procedeixen del desenrotllament d'un binomi, o d'un producte suma per diferència, i simplifica-les:

a) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$ b) $\frac{x^4-2x^2y^2+y^4}{x^2+y^2}$ c) $\frac{\text{xy}^3-\text{yx}}{y^4-1}$

21. Efectua les següents operacions i simplifica tot el possible:

a) $\frac{3}{x(3-x)}-\frac{1}{2(3-x)}$ b) $3x^4-5x^3+\frac{x^4-1}{x^3}\cdot\frac{x^5}{x^2+1}$ c) $\frac{x-2y}{a-b}+\frac{4x+5y}{3a-3b}$

22. Simplifica tot el possible:

a) $(\text{yx}^4-\frac{y}{x^2}):(x^2+\frac{1}{x})$ b) $\frac{b^3+3\text{ab}^2+3a^2b+a^3}{b-a}:\frac{b+a}{b-a}$ c) $(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}):\frac{4}{a-b}$

23. Simplifica tot el possible:

a) $\frac{\frac{1}{a+y}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{a+y}+\frac{1}{x}}:\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{x+y}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{x+y}}$ b) $(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}):(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3})$ c) $\frac{\frac{2}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{3}{x}+\frac{2}{y}}\cdot\frac{\frac{1}{x}-\frac{3}{y}}{\frac{1}{x}-\frac{2}{y}}$

AUTOAVALUACIÓ

1. Assenyala els coeficients que apareixen en les següents expressions algebraiques:

a) $3 \cdot \sqrt{5} \cdot x \cdot y^2$ b) $-3x^4 - x^3 + x + 7$ c) $\frac{x+8}{4-2y^2} + 6xa^2 - \frac{3}{a} + 9$

2. Destaca les variables, o indeterminades, de les precedents expressions algebraiques.

3. Del polinomi $5x^4 - 8x^2 - x + 9$ indica el seu grau i els monomis que ho integren.

4. L'expresió $\frac{x-7}{4-2x}$ no té sentit para

a) $x = 7$ b) $x = 2$ c) $x = 7$ y $x = 2$ d) $x = 0$

5. Qualsevol polinomi:

a) pot ser avaluat en qualsevol nombre.

b) no pot ser avaluat en el nombre zero.

c) no pot ser avaluat en certs nombres concrets.

6. El valor numèric de l'expressió $\frac{x+7}{4-2y^2} + 6xz^2 - \frac{3}{z}$ en $x = 1, y = 2, z = -1$ és:

a) -11 b) 7 c) 1 d) -5

7. Completa adequadament les frases següents:

a) La suma de dos polinomis de grau dos sol ser un altre polinomi de grau ……….

b) La suma de tres polinomis de grau dos sol ser un altre polinomi de grau ……….

c) El producte de dos polinomis de grau dos és sempre un altre polinomi de grau ……….

d) La diferència de dos polinomis de grau dos sol ser un altre polinomi de grau ……….

8. Finalitza adequadament les frases següents:

a) La suma de dos polinomis de grau dos és sempre un altre polinomi de grau ……….

b) La suma de tres polinomis de grau dos és sempre un altre polinomi de grau ……….

c) La diferència de dos polinomis de grau dos és sempre un altre polinomi de grau ……….

9. En dividir el polinomi $p(x) = 2x^4 - x^3 + 4$ entre $q(x) = x^2 + 2x + 2$ el polinomi residu resultant:

a) ha de ser de grau 2.

b) pot ser de grau 2.

c) ha de ser de grau 1.

d) cap de les opcions precedents.

10. Perquè una fracció polinòmica $\frac{p(x)}{q(x)}$ siga *equivalent* a un polinomi:

a) els polinomis $p(x)$ i $q(x)$ han de ser del mateix grau.

b) no importen els graus de $p(x)$ i $q(x)$.

c) el grau del polinomi numerador, $p(x)$, ha de ser superior o igual al grau del polinomi denominador, $q(x)$.

d) el grau del polinomi numerador, $p(x)$, ha de ser inferior al grau del polinomi denominador, $q(x)$.

Matemàtiques orientades a les ensenyances acadèmiques:

3º B d'ESO. Capítol 5: Equacions i sistemes

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Raquel Hernández

Revisors: Sergio Hernández i María Molero

Il·lustracions: Raquel Hernández i Banc d'Imatges d'INTEF

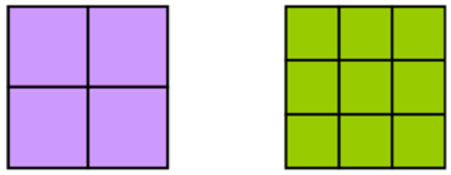
Traducció al valencià: Pedro Podadera IES Juan de Garay

Equacions i sistemes 3ºB ESO

Índex

Resum

Ja saps resoldre algunes equacions de segon grau. Si l'àrea d'un quadrat és 4 coneixes que el seu costat és 2, i si l'àrea és 9, coneixes que el costat mesura 3.



Saps resoldre $x^2 = 4$, les solucions del qual són 2 i –2, perquè $(2)^2=4$, i $(-2)^2 = 4$.

Per a resoldre $(x-3)\cdot(x+4) = 0$, observes que les solucions són 3 i –4 perquè $(3-3)\cdot(3+4) = 0$, i $((-4)-3)\cdot((-4)+4) = 0$.

En aquest capítol aprendrem a resoldre les equacions de segon grau, ja siguen completes o incompletes, i a utilitzar allò que s'ha aprés per a resoldre problemes de la vida quotidiana per mitjà de les equacions.

Veurem a més què són els sistemes d'equacions lineals, com es resolen per diferents mètodes i la seua aplicació per a resoldre problemes que ens rodegen.

Recorda

Si el producte de dos factors és zero, un dels factors ha de ser zero.

Per tant a l'equació:

$$(x+4)\cdot(x-3) = 0$$

o bé $x + 4 = 0$ o bé $x - 3 = 0$, per tant

Autora: Raquel Hernández
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

Textos Marea Verde

1. EQUACIONS DE PRIMER GRAU

1.1. El llenguatge de les equacions

Ja saps que:

Una **equació** és una igualtat entre dues expressions algebraiques.

Exemple:

- Si tenim dues expressions algebraiques: $7x + 3$ i $5x + 2$, i les unim amb el signe igual obtenim una equació: $7x + 3 = 5x + 2$.

Les expressions que hi ha a cada costat de l'igual s'anomenen **membres** de l'equació. Totes les equacions tenen dos membres: l'expressió que està a l'esquerra del signe igual s'anomena **primer membre** i la que està a la dreta, **segon membre**.

Les lletres que contenen les equacions algebraiques (les "parts literals" de les seues dues expressions) s'anomenen **incògnites**, que vol dir literalment "*desconegudes*". Si totes les lletres són iguals, es diu que l'equació té només una incògnita.

Exemple:

- $8x - 2 = 4x + 7$ és una equació amb una sola incògnita, mentres que
- $3x + y = 5$ o $5x - 9 = 3y$ són equacions amb dues incògnites: x i y.

El **grau** d'una equació és el major exponent que apareix en alguna de les seues incògnites.

Exemple:

- $8x - 2 = 4x + 7$ és una equació de primer grau, mentres que $2x + 4xy^2 = 1$ és una equació de tercer grau ja que el monomi $5xy^2$ té grau 3 ($1 + 2 = 3$).

Activitats proposades

1. Còpia al teu quadern la següent taula i completa-la:

Equació	Primer membre	Segon membre	Incògnites
$8x - 1 = 4x - 7$			
	$5x + 9$	$3x - 1$	
$2a + 3 = 32$			
	$2x - 5y$	$5 + 4y$	

2. Indica el nombre d'incògnites de les equacions següents:

a) $4x - 5y = 7x + 6$; b) $2x + 8y^2 = 5$ c) $3a + 6a^2 = 3$ d) $4x + 8x^2 = 12$.

3. Indica el grau de les equacions següents:

a) $2x - 4 = 6x + 8$; b) $3x + 9y^2 = 12$ c) $5x + 10x^2 = 30$ d) $2x + 2xy^2 = 3$

1.2. Equacions equivalents. Resolució d'equacions

Ja saps que:

Una **solució** d'una equació és un nombre que, quan la incògnita pren aqueix valor, es verifica la igualtat, és a dir, els dos termes de l'equació valen el mateix.

Algunes equacions només tenen una solució, però altres poden tindre diverses.

Resoldre una equació és trobar totes les seues possibles solucions numèriques.

Per a resoldre una equació el que es fa habitualment és transformar-la en una altra **equació equivalent** més senzilla.

Equacions equivalents són les que tenen les mateixes solucions.

Exemple:

- $2x - 9 = 15$ és equivalent a $2x = 24$, ja que la solució d'ambdues equacions és $x = 12$.

Per a obtindre equacions equivalents es tenen en compte les propietats següents:

Si es **suma** o es **resta** als dos membres d'una equació una mateixa quantitat, s'obté una equació equivalent.

Si es **multipliquen** o **divideixen** els dos membres d'una equació per una mateixa quantitat (diferent de zero), s'obté una equació equivalent.

Activitats resoltes

- Resol l'equació $5x + 7 = x - 3$ transformant-la en una altra més senzilla equivalent.

Transformar una equació fins que les seues solucions es facen evidents s'anomena "resoldre *l'equació*". Seguint aquests passos intentarem resoldre l'equació: $5x + 7 = x - 5$.

1)Sumem els dos membres $-x$ i restem als dos membres 7: $5x - x + 7 - 7 = x - x - 5 - 7$.

2) Fem operacions i aconseguim una altra equació que té al primer membre els termes amb x i al segon, els termes sense x: $5x - x = -5 - 7$.

3) Efectuem les sumes al primer membre i al segon: $4x = -12$.

4) Aïllem x dividint els dos membres per 4: $\frac{4x}{4} = \frac{-12}{4}$ d'on $x = -3$.

5) Comprova que totes les equacions que hem obtingut en aquest procés són equivalents i que la seua solució és $x = -3$.

El procediment utilitzat en les activitats és un mètode universal per a **resoldre** qualsevol equació de grau 1, és a dir, on x apareix sense elevar a un altre exponent com en x^2. Les equacions de primer grau tenen sempre una única solució, però en general, les solucions no tenen perquè ser nombres enters com als exemples.

Activitats proposades

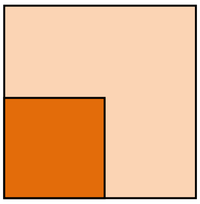
4. Resol les equacions següents: a) $2x - 3 = 4x - 5$ b) $3x + 6 = 9x - 12$ c) $4x + 8 = 12$

2. EQUACIONS DE 2n GRAU

Hi ha equacions de segon grau que ja saps resoldre. En aquest capítol anem a aprofundir i a aprendre a resoldre aquest tipus d'equacions. Per exemple, el següent problema ja saps resoldre'l:

Activitats resoltes

- S'augmenta el costat d'un taulell quadrat en 3 cm i la seua àrea ha quedat multiplicada per 4, Quin costat tenia el taulell?



Plantegem l'equació:

$$(x + 3)^2 = 4x^2$$

Aquesta equació si saps resoldre-la! $x + 3 = 2x$, doncs el costat és de 3 cm.

Hi ha una altra solució, $x = -1$, que no té sentit com a costat d'un quadrat.

Estudiarem de forma ordenada aquestes equacions.

2.1. Concepte d'equació de 2n grau

Una **equació de segon grau** és una equació polinómica en la que la major potència de la incògnita és 2. Les equacions de segon grau es poden escriure de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

on *a, b i c* són nombres reals, amb $a \neq 0$.

Exemple 1:

- Són equacions de 2n grau per exemple

$$3x^2 - 7x + 1 = 0; \quad -2x^2 + 5x + -2 = 0; \quad x^2 - 9x - 11 = 0.$$

Exemple 2:

- Els coeficients de les equacions de 2n grau són nombres reals, per tant poden ser fraccions o arrels. Per exemple:

$$\frac{3}{5}x^2 - 4x + \frac{1}{2} = 0; \quad \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{3}{4} = 0; \quad -2{,}7x^2 + 3{,}5x - 0{,}2 = 0; \quad \sqrt{2}x^2 + 3x - \sqrt{5} = 0.$$

Activitats proposades

5. Indica si són equacions de segon grau les equacions següents:

a) $5x^2 - \sqrt{2}x + 8 = 0$ c) $8x^2 - 9 = 0$ e) $2x^2 - \frac{3}{x} = 0$

b) $3xy^2 - 5 = 0$ d) $8 - 7{,}3x = 0$ f) $2x^2 - 3\sqrt{x} + 4 = 0$

6. En les següents equacions de segon grau, indica qui són *a*, *b* i *c*.

a) $3 - 4x^2 + 9x = 0$ b) $-3x^2 + 5x = 0$

c) $2x^2 - 3 = 0$ d) $x^2 - 8x + 1 = 0$

2.2. Resolució d'equacions de 2n grau completes

S'anomena **equació de segon grau completa** a aquella que té valors diferents de zero para *a*, *b* i *c*.

Per a resoldre les equacions de segon grau completes, emprarem la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Aquesta fórmula ens permet calcular les dues solucions de la nostra equació.

Anomenarem **discriminant** a la part de la fórmula que està a l'interior de l'arrel:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Activitats resoltes

- Resol l'equació de segon grau $x^2 - 5x + 6 = 0$

Primer hem de saber qui són *a*, *b* i *c:*

$$a = 1;\ b = -5;\ c = 6$$

Substituint aquests valors en la nostra fórmula, obtenim:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Per tant, les nostres dues solucions són:

$x_1 = \frac{5+1}{2} = 3;$ $\qquad$ $x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$

En efecte, $3^2 - 5{\cdot}3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$, y $2^2 - 5{\cdot}2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$, doncs 3 i 2 són solucions de l'equació.

Activitats proposades

7. Resol les següents equacions de 2n grau completes:

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$ $\qquad$ b) $2x^2 + 2x - 24 = 0$

c) $3x^2 - 9x + 6 = 0$ $\qquad$ d) $x^2 - 4x - 12 = 0$

2.3. Nombre de solucions d'una equació de 2n grau completa

Abans hem definit el que era el **discriminant**, et recordes?

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Per a saber quantes solucions té una equació de 2n grau, ens anem a fixar en el signe del discriminant.

Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ l'equació té dues solucions reals i distintes.

Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, l'equació té dues solucions reals iguals, (una solució doble).

Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, l'equació no té solució.

Exemple 3:

a) L'equació $2x^2 - 4x - 7 = 0$ té com a discriminant:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-7) = 16 + 28 = 44 > 0$$

Per tant, l'equació donada té 2 solucions reals i distintes, 5 i –1. (Comprovació: $5^2 - 4 \cdot 5 - 5 = 25 - 20 - 5 = 0$ i $(-1)^2 - 4(-1) - 5 = 1 + 4 - 5 = 0$).

b) L'equació $x^2 - 2x + 1 = 0$ té com a discriminant:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$$

Per tant, l'equació té dues solucions reals iguals. Es pot escriure com:

$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 = 0$, que té la solució doble $x = 1$.

c) L'equació $x^2 + 3x + 8 = 0$ té com a discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (8) = 9 - 32 = -23 < 0$$

Per tant, l'equació no té solució real. Cap nombre real verifica l'equació.

Activitats proposades

8. Esbrina quantes solucions tenen les següents equacions de 2n grau:

a) $x^2 + x + 4 = 0$ **b)** $x^2 - 6x + 9 = 0$

c) $x^2 - 6x - 7 = 0$ **d)** $x^2 - 3x + 5 = 0$

2.4. Resolució d'equacions de 2n grau incompletes

Anomenem **equació de 2n grau incompleta** a aquella equació de segon grau en què el coeficient *b* val 0 (falta *b*), o el coeficient *c* val 0 (falta *c*).

Exemple 4:

L'equació de 2n grau 2x2 18 – 0 = és incompleta perquè el coeficient b 0 =, és a dir, falta b.L'equació de 2n grau 3x2 15x – 0 = és incompleta perquè no té c, és a dir, c 0 =.

Les equacions de 2n grau incompletes es resolen d'una manera o una altra depenent del tipus que siguen.

Si el coeficient *b* = 0: Aïllem la incògnita normalment, com féiem en les equacions de primer grau:

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{-c}{a}} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Si el coeficient *c* = 0: Traiem factor comú:

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0.$$

Perquè el producte de dos factors siga zero, un dels factors ha de valdre zero.

Per tant $x = 0$, o $ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$

Resum

Si $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, Aïllem la incògnita:

.

Si $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$, traiem factor común:

$x = 0$ i

Exemple 5:

En l'equació $2x^2 - 18 = 0$ falta la *b*. Per a resoldre-la aïllem la incògnita, és a dir, x^2:

$$2x^2 - 18 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 18/2 = 9$$

Una vegada que arribem ací, ens falta llevar aqueix quadrat que porta nostra incògnita. Per a això, farem l'arrel quadrada als 2 membres de l'equació:

$$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

Així hem obtingut les dues solucions de la nostra equació, 3 i –3. En efecte, $2\cdot 3^2 - 18 = 2\cdot 9 - 18 = 0$, i $2\cdot(-3)^2 - 18 = 2\cdot 9 - 18 = 0$

Exemple 6:

En l'equació $3x^2 – 15x = 0$ falta la *c*. Per a resoldre-la, traiem factor comú:

$3x^2 – 15x = 0 \Rightarrow 3x(x – 5) = 0$

Una vegada que arribem ací, tenim dues opcions

1) $3x = 0 \Rightarrow x = 0$.
2) $x – 5 = 0 \Rightarrow x = 5$.

Així hem obtingut les dues solucions de l'equació $x = 0$ i $x = 5$

Una equació de segon grau incompleta també es pot resoldre utilitzant la fórmula de les completes però és un procés més lent i és més fàcil equivocar-se.

Activitats resoltes

- Resol l'equació de 2n grau $2x^2 – 32 = 0$:

Solució: Es tracta d'una equació de 2n grau incompleta on falta la *b*. Per tant, aïlleim la incògnita

$2x^2 – 32 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 32 \Rightarrow x^2 = 32/2 = 16 \Rightarrow x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$. Les arrels són 4 i –4.

- Resol l'equació de 2n grau $x^2 + 7x = 0$:

Solució: Es tracta d'una equació de 2n grau incompleta on falta la *c*. Per tant, traiem factor comú:

$x^2 + 7x = 0 \Rightarrow x(x + 7) = 0$

i obtenim les dues solucions:

$$x = 0 \text{ i } x + 7 = 0 \Rightarrow x = –7.$$

Activitats proposades

9. Resol les següents equacions de 2n grau incompletes:

a) $3x^2 + 6x = 0$ b) $3x^2 – 27 = 0$

c) $x^2 – 25 = 0$ d) $2x^2 + x = 0$

e) $4x^2 – 9 = 0$ f) $5x^2 – 10x = 0$

2.5. Suma i producte d'arrels

Si en una equació de segon grau: $x^2 + bx + c = 0$, amb $a = 1$, coneixem les seues solucions: x_1 i x_2 sabem que podem escriure l'equació de forma factoritzada:

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

Fem operacions:

$x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0 \Rightarrow x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0$,

pel que el coeficient c és igual al producte de les solucions i la suma de les solucions és igual a l'oposat del coeficient b, és a dir, $-b$.

$$\boldsymbol{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}; \; x_1 + x_2 = -b.}$$

Si l'equació és $ax^2 + bx + c = 0$, dividint per a, ja tenim una de coeficient $a = 1$, i obtenim que:

$$\boldsymbol{x_1 \, x_2 = \; ; \; x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}}$$

Aquesta propietat ens permet, de vegades, resoldre mentalment algunes equacions de segon grau.

Activitats resoltes

- Resol mentalment l'equació $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Busquem, mentalment dos números el producte del qual siga 6 i la suma del qual siga 5. En efecte, $2 \cdot 3 = 6$, i $2 + 3 = 5$, doncs les solucions de l'equació són 2 i 3.

- Resol mentalment l'equació $x^2 - 6x + 9 = 0$.

El producte ha de ser 9. Provem amb 3 com a solució, i en efecte $3 + 3 = 6$. Les solucions són l'arrel 3 doble.

- Resol mentalment l'equació $x^2 - x - 2 = 0$.

Les solucions són -1 i 2, perquè el seu producte és -2 i la seua suma 1.

- Resol mentalment l'equació $x^2 + x - 2 = 0$.

Les solucions són 1 i -2, perquè el seu producte és -2 i la seua suma -1.

Activitats proposades

10. Resol mentalment les següents equacions de 2n grau:

a) $x^2 + 6x = 0$ b) $x^2 + 2x - 8 = 0$

c) $x^2 - 25 = 0$ d) $x^2 - 9x + 20 = 0$

e) $x^2 - 3x - 4 = 0$ f) $x^2 - 4x - 21 = 0$

11. Escriu una equació de segon grau les solucions de la qual siguen 3 i 7.

12. El perímetre d'un rectangle mesura 16 cm i la seua àrea 15 cm². Calcula les seues dimensions.

13. Si 3 és una solució de $x^2 - 5x + a = 0$, quant val a?

2.6. Resolució d'equacions senzilles de grau superior a dos

Durant segles els algebristes han buscat fórmules, com la que ja coneixes de l'equació de segon grau, que resolguera les equacions de tercer grau, de quart, de cinqué… sense èxit a partir del cinqué grau. Les fórmules per a resoldre les equacions de tercer i quart grau són complicades. Només sabem resoldre de forma senzilla algunes d'aquestes equacions.

Exemple:

- Resol: $(x-5)\cdot(x-3)\cdot(x+2)\cdot(x-9)\cdot(x-6)=0$.

És una **equació polinómica** de grau cinc, però en estar factorizada sabem resoldre-la ja que per a que el producte de diversos factors siga zero, un d'ells ha de valdre zero. Igualant a zero cada factor tenim que les solucions són 5, 3, –2, 9 i 6.

Equacions biquadrades

Una **equació biquadrada** és una equació de la forma $ax^{2n}+bx^{n}+c=0$.

Per a resoldre-la, fem el canvi $x^n=t$, convertint-la així en una equació de segon grau de fàcil resolució.

Quan hàgem calculat el valor de t, desfem el canvi efectuat, $x=\sqrt[n]{t}$per a obtindre la solució x.

Les equacions biquadrades més comuns són les de quart grau

Exemple:

- *Per a resoldre l'equació biquadrada* $x^4-10x^2+9=0$, fem el canvi obtenint l'equació de segon grau $t^2-10t+9=0$.

Resolem la dita equació de segon grau:

$$\mathrm{t}=\frac{10\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot 1\cdot 9}}{2\cdot 1}=\frac{10\pm 8}{2}$$

$$\mathrm{t}_1=\frac{10+8}{2}=9\mathrm{i}\mathrm{t}_2=\frac{10-8}{2}=1$$

Desfem el canvi per a obtindre els valors de x:

$$\text{Si } t_1=9 \rightarrow \mathrm{x}=\pm\sqrt{9}=\pm 3$$

$$\text{Si } t_2=1 \rightarrow \mathrm{x}=\pm\sqrt{1}=\pm 1$$

Activitats resoltes

L'equació x^4- $5x^2$ + 4 = 0 és una equació polinómica de quart grau, però amb una forma molt especial, és una equació **biquadrada**, perquè podem transformar-la en una equació de segon grau anomenant a x^2 per exemple, t.

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2} = \frac{5\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{5\pm3}{2}$$

Una solució de l'equació de segon grau és $t = 4$, i l'altra és t=1.

Per tant si $t = x^2 = 4$, doncs $x = 2$ i $x = -2$.

I si $t = x^2 = 1$, doncs $x = 1$ i $x = -1$.

La nostra equació de quart grau té quatre solucions:

2, –2, 1 i –1.

Activitats proposades

14. Resol les equacions següents:

a) $(x - 7) \cdot (x - 2) \cdot (x + 5) \cdot (x - 3) \cdot (x - 11) = 0$ b) $3(x - 5) \cdot (x - 7) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4) = 0$

15. Resol les següents equacions biquadrades:

a) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ b) $x^4 + 12x^2 + 35 = 0$ c) $x^4 - 4x^2 - 12 = 0$.

16. Resol les equacions biquadrades següents:

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ b) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$ c) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ d) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$.

3. SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS

3.1. Concepte de sistema d'equacions lineals

Un **sistema d'equacions lineals** amb dues incògnites es pot expressar de la forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

On *a*, *b*, *a'* i *b'* són nombres reals que es denominen **coeficients** i *c* i *c'* també són nombres reals denominats **termes independents**.

Anomenem **solució** del sistema al parell de valors (*x*, *y*) que satisfan les dues equacions del sistema.

Es diu que dos sistemes d'equacions són **equivalents**, quan tenen la mateixa solució.

Exemple 7:

Són sistemes d'equacions lineals, per exemple:

$$\begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}; \quad \begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ x - y = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} 4y + 2 = 3x \\ 7x - 3 = 5y \end{cases}$$

Exemple 8:

No és un sistema lineal $\begin{cases} 3xy + 5y = 7 \\ 4x - 8xy = 9 \end{cases}$ perquè té termes en *xy*.

Tampoc ho és $\begin{cases} 3x^2 + 5y = 7 \\ 4x - 8y = 9 \end{cases}$ perquè té un terme en x^2.

Activitats proposades

17. Raona si són o no sistemes d'equacions lineals els sistemes següents:

a) $\begin{cases} xy + 2y = 6 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5y - x = 4 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - 2 = y \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ 3x + y^2 = 4 \end{cases}$

3.2. Classificació de sistemes d'equacions

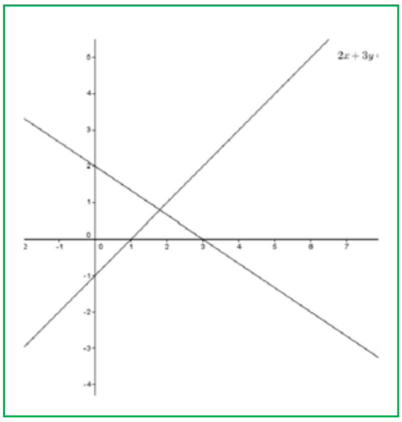
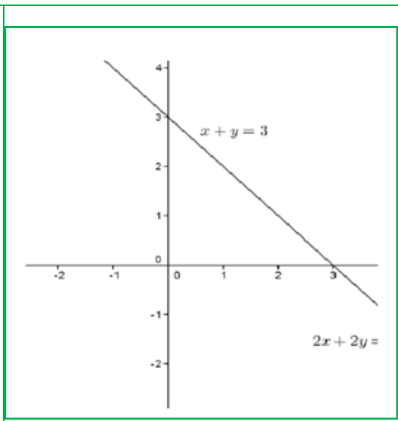
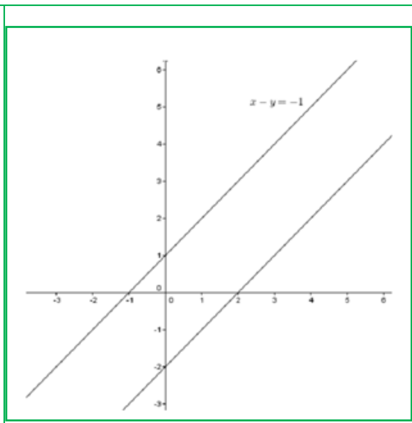
En un sistema d'equacions lineals amb dues incògnites, cada una de les equacions representa una recta al pla.

Aquestes rectes poden estar posicionades entre si de tres maneres distintes, la qual cosa ens ajudarà a classificar el nostre sistema en:

1) **Compatible determinat**: el sistema té una única solució, per la qual cosa les rectes són **SECANTS**, es tallen en un punt.

2) **Compatible indeterminat**: el sistema té infinites solucions, per la qual cosa les rectes són **COINCIDENTS.**

3)**Incompatible**: el sistema no té solució, per la qual cosa les rectes són **PARAL·LELES.**

		
Compatible determinat	**Compatible indeterminat**	**Incompatible**
Rectes secants	**Rectes coincidents**	**Rectes paral·leles**

Activitats resoltes

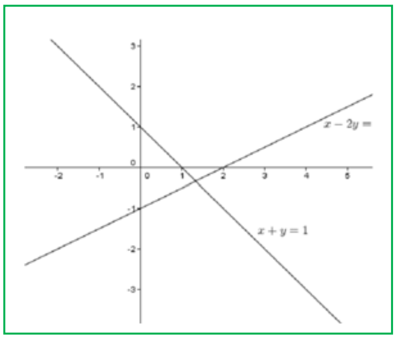
- Afig una equació a $x - 2y = 2$ perquè el sistema resultant siga:

  a) Compatible determinat

  b) Incompatible

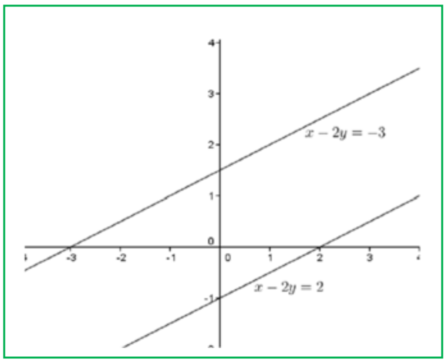
  c) Compatible indeterminat

Solució:

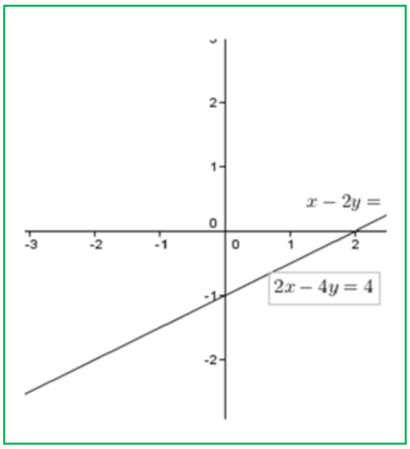


a) Perquè el sistema siga compatible determinat, afegirem una equació que no tinga els mateixos coeficients que la que ens donen. Per exemple, $x + y = 1$.

b) Perquè siga incompatible, els coeficients de les incògnites han de ser els mateixos (o proporcionals) però tindre diferent terme independent. Per exemple $x - 2y = -3$, (o $2x - 4y = 0$).



c) Perquè siga compatible indeterminat, posarem una equació proporcional a la què tenim. Per exemple $2x - 4y = 4$.



Activitats proposades

18. Representa els següents sistemes i classifica'ls:

a) $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -y + 2x = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 6 \end{cases}$

3.3. Resolució de sistemes pel mètode de substitució

El **mètode de substitució** consisteix a aïllar una incògnita d'una de les equacions del sistema i substituir l'expressió obtinguda en l'altra equació.

Així, obtenim una equació de primer grau en què podem calcular la incògnita aïllada. Amb el valor obtingut, obtenim el valor de l'altra incògnita.

Exemple 8:

Resoldrem el sistema $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \end{cases}$ pel mètode de substitució:

Aïllem *x* de la segona equació:

$$\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \Rightarrow x=3-2y \end{cases}$$

i la substituïm en la primera:

2(3 – 2*y*) – 3*y* = –1 ⇒ 6 – 4*y* – 3*y* = –1 ⇒ –4*y* – 3*y* = –1 – 6 ⇒ –7*y* = –7 ⇒ *y* = (–7)/(–7) = 1

Amb el valor obtingut de *y*, calculem la *x*:

x = 3 – 2*y* ⇒ *x* = 3 – 2·1 = 1.

Solució:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Activitats proposades

19. Resol els següents sistemes pel mètode de substitució:

a) $\begin{cases} 3x+4y=-7 \\ x-2y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+4y=0 \\ 3x+y=5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-2y=2 \\ 2x+3y=10 \end{cases}$

3.4. Resolució de sistemes pel mètode d'igualació

El **mètode d'igualació** consisteix aïllar la mateixa incògnita de les dues equacions que formen el sistema i igualar els resultats obtinguts.

Així, obtenim una equació de primer grau en què podrem calcular la incògnita aïllada. Amb el valor obtingut, calculem el valor de l'altra incògnita.

Exemple 8:

Resoldrem el sistema $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \end{cases}$ pel mètode d'igualació:

Aïllem la mateixa incògnita de les dues equacions que formen el sistema:

$$\begin{cases} 2x-3y=-1 \Rightarrow x=\dfrac{3y-1}{2} \\ x+2y=3 \Rightarrow x=3-2y \end{cases}$$

Igualem ara els resultats obtinguts i resolem l'equació resultant:

$$\frac{3y-1}{2}=3-2y \Rightarrow 3y-1=2(3-2y)=6-4y \Rightarrow 3y+4y=6+1 \Rightarrow 7y=7 \Rightarrow y=\frac{7}{7}=1$$

Amb el valor obtingut de *y*,calculem la *x*:

$x = 3 - 2y \Rightarrow x = 3 - 2\cdot(1) = 1$

Solució:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Activitats proposades

20. Resol els següents sistemes pel mètode d'igualació:

a) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ -2x + 3y = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x - 4y = 3 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$

3.5. Resolució de sistemes pel mètode de reducció

El **mètode de reducció** consisteix a eliminar una de les incògnites sumant les dues equacions. Per a això es multipliquen una o ambdues equacions per un nombre de manera que els coeficients de *x* o *y* siguen iguals però de signe contrari.

Exemple 9:

Resoldrem el sistema $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ pel mètode de reducció:

Multipliquem la segona equació per -2 perquè els coeficients de la *x* siguen iguals però de signe contrari i sumem les equacions obtingudes:

$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \xrightarrow[(-2)]{} \begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ -2x - 4y = -6 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumem}} -7y = -7 \Rightarrow y = (-7)/(-7) = 1$

Amb el valor obtingut de *y*, calculem la *x*:

$2x - 3\cdot 1 = -1 \Rightarrow 2x = -1 + 3 = 2 \Rightarrow x = 2/2 = 1$

Solució:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Activitats proposades

21. Resol els següents sistemes pel mètode de reducció:

a) $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 2x - 5y = 14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 3y = 2 \\ 4x + y = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x - 2y = 13 \end{cases}$

4. RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

4.1. Resolució de problemes mitjançant equacions de primer grau

Ja saps que:

Molts problemes poden resoldre's mitjançant una equació.

Activitats resoltes

- Busca un nombre que sumat amb el seu següent done com resultat 15.

Per a resoldre-lo seguirem tècniques generals de resolució de problemes:

Pas 1: Abans de començar a actuar, intenta entendre bé el problema

Llig amb molt atenció l'enunciat, i pregunta't:

Què et demanen? Quines dades tens?

Ens demanen un nombre. La **incògnita** és aqueix nombre. Anomena a aqueix nombre x. El seu següent, serà $x + 1$. Ens diuen que la suma d'ambdós és 15.

Pas 2: Busca una bona estratègia.

És un problema que volem resoldre mitjançant una equació. Escriu en llenguatge algebraic l'enunciat del problema i planteja una equació:

$$x + (x + 1) = 15.$$

Pregunta't si efectivament resol el problema rellegint l'enunciat.

Pas 3: Porta avant la teua estratègia

Ara sí, ara resol l'equació. Per resoldre una equació convé seguir un orde d'actuació que ens ajude a no cometre errors, per a això seguim el procediment que acabem d'aprendre.

- Lleva, si n'hi ha, parèntesi i denominadors: $x + x + 1 = 15$.
- Per a posar en el primer membre els termes amb x, i al segon els que no la tenen, **fes el mateix als dos costats**, resta 1 als dos membres: $x + x + 1 – 1= 15 – 1$, aleshores $x + x = 15 – 1$.

Opera: $2x = 14$. Aïlla:

- Per aïllar la x, es fa el mateix als dos costats, es divideixen per 2 ambdós membres:

$$2x/2 = 14/2, \text{ per tant, } x = 7.$$

Pas 4: Comprova el resultat. Pensa si és raonable.

En efecte, comprova que: $7 + 8 = 15$.

Activitats proposades

22. A un xicotet hotel hi ha 47 habitacions simples i dobles. Si en total té 57 llits, quantes habitacions són simples i quantes són dobles?

23. A una granja hi ha 100 animals entre gallines i conills, i entre tots els animals sumen 280 potes. Quantes gallines hi ha a la granja?

4.2. Resolució de problemes mitjançant equacions de 2n grau

Per a resoldre problemes per mitjà d'equacions de 2n grau, de la mateixa manera que els problemes d'equacions de primer grau, primer haurem de passar a llenguatge algebraic l'enunciat del problema i després resoldre'l seguint els passos següents:

1.- Comprendre l'enunciat

2.- Identificar la incògnita

3.- Traduir l'enunciat al llenguatge algebraic

4.- Plantejar l'equació i resoldre-la

5.- Comprovar la solució obtinguda

Activitats resoltes

Resoldrem el problema següent:

- *Quin és el nombre natural el quíntuple del qual augmentat en 6 és igual al seu quadrat?*

Una vegada comprés l'enunciat, identifiquem la incògnita, que en aquest cas, és el nombre que estem buscant.

2.- Nombre buscat = x

3.-Traduïm ara el problema al llenguatge algebraic:

$$5x + 6 = x^2$$

4.-Resolem l'equació:

$$5x + 6 = x^2 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+7}{2} = 6; \qquad x_2 = \frac{5-7}{2} = -1$$

Solució: Com l'enunciat diu "nombre natural" el nombre buscat és el 6.

5.- *Comprovació*: En efecte 5·6 + 6 = 36 = 6^2.

Activitats proposades

24. Quin nombre multiplicat per 3 és 40 unitats menor que el seu quadrat?

25. Calcula tres nombres consecutius tals que la suma dels seus quadrats siga 365.

26. El triple del quadrat d'un nombre augmentat en el seu duple és 85. Quin és el nombre?

27. Un triangle isòsceles té un perímetre de 20 cm i la base mesura 4 cm, calcula els costats del triangle i la seua àrea.

4.3. Resolució de problemes mitjançant sistemes d'equacions

Per a resoldre problemes per mitjà de sistemes d'equacions, primer haurem de passar a llenguatge algebraic l'enunciat del problema i després resoldre'l seguint els passos següents:

1.- Comprendre l'enunciat

2.- Identificar les incògnites

3.- Traduir l'enunciat al llenguatge algebraic

4.- Plantejar el sistema i resoldre'l

5.- Comprovar la solució obtinguda

Activitats resoltes

Resoldrem el problema següent:

- *La suma de les edats d'un pare i el seu fill és 39 i la seua diferència 25. Quina és l'edat de cada un?*

Una vegada comprés l'enunciat, identifiquem les incògnites que, en aquest cas, són l'edat del pare i el fill

2.- Edat del pare = x

Edat del fill = y

3.- Passem l'enunciat a llenguatge algebraic:
La suma de les seues edats és 39:

$$x + y = 39$$

I la seua diferència 25:

$$x – y = 25$$

4.- Plantegem el sistema i el resolem pel mètode que ens resulte més senzill. En aquest cas, ho fem per reducció:

$$\begin{cases} x + y = 39 \\ x - y = 25 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumem}} 2x = 64 \Rightarrow x = 64/2 = 32$$

$x + y = 39 \Rightarrow 32 + y = 39 \Rightarrow y = 39 – 32 = 7$.

Solució: El pare té 32 anys i el fill té 7 anys.

5.- Comprovació*:* En efecte, la suma de les edats és 32 + 7 = 39 i la diferència és 32 – 7 = 25.

Activitats proposades

28. La suma de les edats de Raquel i Lluis són 65 anys. L'edat de Lluis més quatre vegades l'edat de Raquel és igual a 104. Quina edat tenen cada un?

29. La suma de les edats de Maria i Albert és 32 anys. D'ací a 8 anys, l'edat d'Albert serà dues vegades l'edat de Maria. Quina edat té cada un en l'actualitat?

30. Troba dos nombres la diferència dels quals siga 24 i la seua suma siga 123.

CURIOSITATS. REVISTA

Obtenció de la fórmula per a resoldre equacions de segon grau.

$ax^2 + bx + c = 0$, amb $a \neq 0$

$\Downarrow$

$ax^2 + bx = -c$

$\Downarrow$ Multipliquem per $4a$

$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$

$\Downarrow$ Sumem b^2

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$

$\Downarrow$ Completem quadrats

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

$\Downarrow$ Trobem l'arrel quadrada

$2ax + b =$

$\Downarrow$Aïllem la x

$2ax =$

$\Downarrow$

x=

Tres equacions de segon grau interessants

$x^2 = 2$

Aquesta equació ens apareix en aplicar el Teorema de Pitàgores a un triangle rectangle isòsceles de costats iguals a 1, o en calcular la diagonal d'un quadrat de costat 1. La seua solució és la longitud de la hipotenusa o de la diagonal. Té d'interessant que es demostra que la dita solució NO és un nombre racional, un nombre que puga escriure's com a quocient de dos nombres enters.

$x + 1 = x^2$

També es pot escribir com:

que és una proporció, on x pren el valor

$\approx$ 1,618… que és el nombre d'or, altre nombre irracional.

$x^2 = -1$

La tercera equació no té solució real, cap nombre real al elevar-lo al quadrat pot donar un nombre negatuo, però si ampliem el camp real amb la seua arrel, = i, resulta que ja totes les equacions de segon grau tenen solució, i a els nombres $a + b{\cdot}i$ se'ls anomena **nombres complexos**.

Emmy Noether va ser una matemàtica alemanya d'origen jueu els treballs del qual en Àlgebra van permetre resoldre el problema de la conservació de l'energia.

RESUM

Equació de primer grau	És una equació algebraica en què la major potència de la incògnita és 1.	$-5x + 6 = 0$
Equació de segon grau	És una equació algebraica en què la major potència de la incògnita és 2. Té la forma: $ax^2 + bx + c = 0$ on a, b i c són nombres reals, amb $a \neq 0$.	$-3x^2 + 7x + -8 = 0$
Resolució d'equacions de 2n grau completes	S'usa la fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 - 5x + 6 = 0$: $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2}$ $x_1 = 3$, $x_2 = 2$
Discriminant	$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$
Nombre de solucions d'una equació de 2n grau	Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, té dues solucions reals i distintes Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, té una solució doble. Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, l'equació no té solució	$x^2 - 4x - 5 = 0$: $\Delta = 36 > 0$, té dues solucions 5 i -1. $x^2 - 2x + 1 = 0$: $\Delta = 0$, té una arrel doble: $x = 1$. $x^2 + 3x + 8 = 0$: $\Delta = -23$. No té solució real
Resolució d'equacions de 2º grau incompletes	Si $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, aïllem la incògnita: $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$. Si $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$: $x = 0$ i $x = \frac{-b}{a}$	$2x^2 - 18 = 0$: $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$ $3x^2 - 15x = 0 \Rightarrow 3x(x - 5) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = 5$.
Suma i producte d'arrels	$x_1\, x_2 = \frac{c}{a}$; $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$	$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$; $x_2 = 3$
Sistema d'equacions lineals	$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}$
Classificació	**Compatible determinat**: Una única solució, el punt d'intersecció. Les rectes són **secants**: $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$ **Compatible indeterminat**: Infinites solucions, per la qual cosa les rectes són **coincidents:** $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 6 \end{cases}$ **Incompatible**: No té solució, les rectes són **paral·leles:** $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 2 \end{cases}$	
Mètodes de resolució	**Substitució:** aïllar una incògnita i substituir en l'altra equació. **Igualació:** aïllar la mateixa incògnita de les dues equacions. **Reducció:** sumar les dues equacions, multiplicant-les per nombres adequats.	

EXERCICIS I PROBLEMES

Equacions de primer grau

1. Resol les següents equacions de 1r grau

a) $-x - 6x - 8 = 0$ b) $-1 + x = 6$ c) $7x = 70x + 5$

d) $2(x + 3) - (2x + 1) = 5$ e) $5(2x - 1) + (x - 1) = 5$ f) $12(x - 1) - 6(2 + x) = -18$

g) $(2x + 3) + (x - 1) = -x - 3$ h) $x + 2 = 2x + 168$ i) $6(2x - 3x + 1) - 2x - 1 = -1$

2. Resol les següents equacions de 1r grau amb denominadors:

a) $\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{3} = 10$ b) $\frac{x-3}{3} + \frac{-x+1}{7} = 3$ c) $\frac{x+1}{5} + \frac{2x+6}{10} = 2$

d) $\frac{1-x}{2} + \frac{3x-1}{3} = \frac{1}{3}$ e) $\frac{2x-8}{5} - \frac{3x-9}{10} = x - 1$ f) $\frac{2x+3x}{5} - \frac{3x-6}{10} = 1$

Equacions de segon grau

3. Resol les següents equacions de 2n grau

a) $-x^2 - 6x - 8 = 0$ b) $x(-1 + x) = 6$ c) $7x^2 = 70x$

d) $2(x + 3) - x(2x + 1) = 5$ e) $5(2x - 1) + x(x - 1) = 5$ f) $12(x^2 - 1) - 6(2 + x) = -18$

g) $(2x + 3)\cdot(x - 1) = -x - 3$ h) $x\cdot(x + 2) = 168$ i) $6(2x^2 - 3x + 1) - x(2x - 1) = -1$

4. Resol les següents equacions de 2n grau amb denominadors:

a) $\frac{x^2-1}{2} - \frac{x+1}{3} = 10$ b) $\frac{x^2-3}{3} + \frac{x^2-x+1}{7} = 3$ c) $\frac{x^2+1}{5} + \frac{2x+6}{10} = 2$

d) $\frac{1-x^2}{2} + \frac{3x-1}{3} = \frac{1}{3}$ e) $\frac{2x^2-8}{5} - \frac{3x-9}{10} = x - 1$ f) $\frac{2x+3x^2}{5} - \frac{3x-6}{10} = 1$

5. Resol mentalment les següents equacions de 2n grau:

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$ b) $x(-1 + x) = 0$ c) $2x^2 = 50$

d) $x^2 - 3x - 10 = 0$ e) $x^2 + 3x - 10 = 0$ f) $x^2 + 7x + 10 = 0$

g) $x^2 - 5x + 6 = 0$ h) $x^2 - x - 6 = 0$ i) $x^2 + x - 6 = 0$

6. Factoriza les equacions del problema anterior. Així, si les solucions són 2 i 5, escriu:

$x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)\cdot(x - 5) = 0.$

Observa que si el coeficient de x^2 fóra diferent d'1 els factors han d'estar multiplicats pel dit coeficient.

7. Quan el coeficient *b* és parell ($b = 2B$), pots simplificar la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2B \pm \sqrt{4B^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2B \pm 2\sqrt{B^2 - ac}}{2a} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - ac}}{a}$$

Així per a resoldre $x^2 - 6x + 8 = 0$ has de dir $x = 3 \pm \sqrt{9-8} = 3 \pm 1$, aleshores les seues solucions són 2 i 4.

Utilitza aqueixa expressió per a resoldre:

a) $x^2 - 8x - 12 = 0$ b) $x^2 - 10x + 24 = 0$ c) $x^2 + 4x + 7 = 0$

8. Resol mentalment les equacions següents, després desenrotlla les expressions i utilitza la fórmula general per a tornar a resoldre-les.

a) $(x-2)\cdot(x-6) = 0$ b) $(x+1)\cdot(x-3) = 0$ c) $(x-9)\cdot(x-3) = 0$

d) $(x-1)\cdot(x+4) = 0$ e) $(x+7)\cdot(x-2) = 0$ f) $(x-4)\cdot(x+6) = 0$

9. Determina el nombre de solucions reals que tenen les següents equacions de segon grau calculant el seu discrimina't, i després resol-les.

a) $x^2 + 3x - 4 = 0$ b) $7x^2 + 12x - 4 = 0$ c) $3x^2 + 7x + 10 = 0$

d) $x^2 - x + 5 = 0$ e) $6x^2 - 2x - 3 = 0$ f) $5x^2 + 8x - 6 = 0$

10. Escriu tres equacions de segon grau que no tinguen cap solució real. *Ajuda*: Utilitza el discriminant.
11. Escriu tres equacions de segon grau que tinguen una solució doble.
12. Escriu tres equacions de segon grau que tinguen dues solucions reals i distintes.
13. Escriu tres equacions de segon grau que no tinguen solució real.

Sistemes lineals d'equacions

14. Resol els següents sistemes pel mètode de substitució:

a) $\begin{cases} 2x - 5y = -4 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 6x + 5y = 7 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

15. Resol els següents sistemes pel mètode d'igualació:

a) $\begin{cases} -2x + 3y = 13 \\ 3x - 7y = -27 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 2y = -3 \\ 4x - y = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x - 5y = 4 \\ -8x + 3y = -5 \end{cases}$

16. Resol els següents sistemes pel mètode de reducció:

a) $\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + 3y = 14 \\ -x - 6y = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x - 5y = 4 \\ -7x + 5y = -2 \end{cases}$

17. Resol de forma gràfica els següents sistemes

a) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + 3y = 4 \\ x - 6y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x - 5y = 13 \\ -7x + 5y = -9 \end{cases}$

Textos Marea Verde

18. Resol els següents sistemes pel mètode que cregues més apropiat:

a) $\begin{cases} \frac{4x-1}{3} - \frac{2y+2}{5} = -1 \\ \frac{x+3}{2} + \frac{4y-1}{3} = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{3x-1}{2} - \frac{y+3}{5} = -3 \\ 3x + y = -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{x+1}{2} + \frac{y+2}{3} = 2 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$

19. Copia al teu quadern i completa els següents sistemes incomplets de manera que es complisca el que es demana en cada un:

Compatible indeterminat — Incompatible — La seua solució siga x = 2 i y = 1

a) $\begin{cases} ()x + 3y = () \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -5x + y = 2 \\ ()x + y = 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - y = () \\ ()x + y = 7 \end{cases}$

Incompatible indeterminat — La seua solució siga x = –1 i y = 1 — Compatible

d) $\begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ 4x + ()y = () \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3x + ()y = -1 \\ ()x + 3y = 5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} ()x + 6y = () \\ 2x + 3y = -2 \end{cases}$

20. Escriu tres sistemes lineals que siguen incompatibles.
21. Escriu tres sistemes lineals que siguen compatibles indeterminats.
22. Escriu tres sistemes lineals que siguen compatibles determinats.
23. Resol els següents sistemes pel mètode d'igualació i comprova la solució gràficament. De quin tipus és cada sistema?

a) $\begin{cases} -2x + 6y = 13 \\ x - 3y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = -3 \\ 4x - 4y = -12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y = 4 \\ -x + 3y = -5 \end{cases}$

Problemes

24. En una botiga lloguen bicicletes i tricicles. Si tenen 51 vehicles amb un total de 133 rodes, quantes bicicletes i quants tricicles tenen?
25. Quina és l'edat d'una persona si en multiplicar-la per 15 li falten 100 unitats per a completar el seu quadrat?
26. Descompon 8 en dos factors la suma del qual siga 6
27. El triple del quadrat d'un nombre augmentat en el seu duple és 85. Quin nombre és?
28. La suma dels quadrats de dos nombres imparells consecutius és 394. Determina els nombres.

29. Van carregats un ase i un mul. L'ase es queixava del pes que portava damunt. El mul li va contestar: Si jo portara un dels teus sacs, portaria el doble de càrrega que tu, però si tu prens un dels meus, els dos portarem la mateixa càrrega. Quants sacs porta cada un?
30. Quin nombre multiplicat per 3 és 40 unitats menor que el seu quadrat?
31. Calcula tres números consecutius la suma de quadrats del qual és 365

32. D'ací a 11 anys, l'edat de Mari serà la mitat del quadrat de l'edat que tenia fa 13 anys. Quina edat té Mari?

33. Dos nombres naturals es diferencien en 2 unitats i la suma dels seus quadrats és 580. Quins són els nombres?

34. La suma de dos nombres és 5 i el seu producte és –84. De quins nombres es tracta?

35. Maria vol formar safates d'un quilogram amb massapans i mantegades. Si les mantegades li costen a 5 euros el quilo i els massapans a 7 euros el quilo, i vol que el preu de cada safata siga de 6 euros, quina quantitat haurà de posar de cada producte? Si vol formar 25 safates, Quina quantitat de mantegades i de massapans necessitarà?

36. Determina els catets d'un triangle rectangle la suma dels quals és 7 cm i la hipotenusa del triangle mesura 5 cm.

37. El producte de dos nombres és 4 i la suma dels seus quadrats 17. Calcula els nombres

38. La suma de dos nombres és 20. El doble del primer més el triple del segon és 45. De quins nombres es tracta?

39. A un garatge hi ha 30 vehicles entre cotxes i motos. Si en total hi ha 100 rodes, quants cotxes i motos hi ha al garatge?

40. L'edat actual de Pere és el doble de la de Raquel. D'ací a 10 anys, les seues edats sumaran 65. Quants anys tenen actualment Pere i Raquel?

41. A la meua classe hi ha 35 persones. Ens han regalat a cada xica 2 bolígrafs i a cada xic 1 quadern. Si en total hi havia 55 regals. Quants xics i xiques som a classe?

42. Entre el meu iaio i el meu germà tenen 56 anys. Si el meu iaio té 50 anys més que el meu germà, quina edat té cada un?

43. Dos entrepans i un refresc costen 5€. Tres entrepans i dos refrescos costen 8€. Quin és el preu de l'entrepà i el refresc?

44. A una granja hi ha pollastres i vaques. Si es compten els caps, són 50. Si es compten les potes, són 134. Quants pollastres i vaques hi ha a la granja?

45. Un rectangle té un perímetre de 172 metres. Si el llarg és 22 metres major que l'ample, quines són les dimensions del rectangle?

46. A una bossa hi ha monedes d'1€ i 2€. Si en total hi ha 40 monedes i 53€, quantes monedes de cada valor hi ha a la bossa?

47. A una baralla entre aranyes i vespes, hi ha 70 caps i 488 potes. Sabent que una aranya té 8 potes i una vespa 6, quantes vespes i aranyes hi ha a la baralla?

48. Una classe té 32 estudiants, i el nombre d'alumnes és triple al d'alumnes, quants xics i xiques hi ha?

49. Violant té 6 anys més que el seu germà Pablo, i sa mare té 49 anys. D'ací a 2 anys l'edat de la mare serà doble de la suma de les edats dels seus fills, Quines edats té?

AUTOAVALUACIÓ

1. Les solucions de l'equació $3(x^2 – 1) + 2(x^2 – 2x) = 9$ són:

a) $x = 2$ i $x = 1$ b) $x = 1$ i $x = –3$ c) $x = 1$ i $x = –2/3$ d) $x = 2$ i $x = –6/5$

2. Les solucions de l'equació $156 = x(x – 1)$ són:

a) $x = 11$ i $x = –13$ b) $x = 13$ i $x = –12$ c) $x = 10$ i $x = 14$ d) $x = –12$ i $x = –11$

3. Les solucions de l'equació són:

a) $x = 2$ i $x = 2/3$ b) $x = 1/3$ i $x = 4$ c) $x = 1$ i $x = 4/3$ d) $x = 5/3$ i $x = 3$

4. Les solucions de l'equació $(x – 14)^2 + x^2 = (x + 2)^2$ són:

a) $x = 24$ i $x = 8$ b) $x = 21$ i $x = 3$ c) $x = 5$ i $x = 19$ d) $x = 23$ i $x = 2$

5. Les solucions de l'equació $2(x + 2) – x(2 – x) = 0$ són:

a) Infinites b) $x = 9$ i $x = 5$ c) no té solució d) $x = 1$ i $x = 4$

6. Les rectes que formen el sistema són:

a) Secants b) Paral·leles c) Coincidents d) S'encreuen

7. La solució del sistema és:

a) $x = 2$ i $y = 1$ b) $x = 1$ i $y = 1$ c) $x = 3$ i $y = 2$ d) No té solució

8. La solució del sistema és:

a) $x = 4$ i $y = 2$ b) $x = 3$ i $y = 3$ c) $x = 2$ i $y = –1$ d) $x = 5$ i $y = 1$

9. A una granja, entre pollastres i porcs hi ha 27 animals i 76 potes. Quants pollastres i porcs hi ha a la granja?

a) 16 pollastres i 11 porcs b) 15 pollastres i 12 porcs c) 13 pollastres i 14 porcs

10. Quina és l'edat d'una persona si en multiplicar-la per 15, li falten 100 unitats per a arribar al seu quadrat?

a) 6 anys b) 7 anys c) 5 anys d) 8 anys

Matemàtiques orientades a les ensenyances acadèmiques:

3º B d'ESO
Capítol 6: Proporcionalitat

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Nieves Zuasti

Revisor: Javier Rodrigo

Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

Il·lustracions: Paco Moya i Banc d'Imatges d'INTEF

Proporcionalitat. 3º B d'ESO

Índex

Resum

La proporcionalitat és una realitat amb què convivim al nostre voltant. Per a comprendre-la i utilitzar-la correctament, necessitem conéixer les seues regles.

Reconeixerem la proporcionalitat directa o inversa, simple i composta, i realitzarem exercicis i problemes d’aplicació.

En multitud d’ocasions hem d’efectuar repartiments proporcionals, directes o inversos: premis de loteria, herències, mescles, aliatges…

El tant per cent i l’interés és un concepte que apareix constantment en els Mitjans de comunicació i en la nostra pròpia economia. En aquest capítol farem una primera aproximació a la denominada “economia *financera*”

1. PROPORCIONALITAT DIRECTA

1.1. Magnituds directament proporcionals

Recorda que:

Dues magnituds són directament **proporcionals** quan en multiplicar o dividir a la primera per un nombre, la segona queda multiplicada o dividida pel mateix nombre.

Exemple:

- Si dues caixes contenen 12 bombons, deu caixes (iguals a les primeres) contindran seixanta bombons.

2 · **6** = 12   10 · **6** = 60

La **raó de proporcionalitat directa *k*** *s'obté* mitjançant el quocient de qualsevol dels valors d'una variable i els corresponents de l'altra:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = k$$

Exemple:

- A l'exemple anterior la raó de proporcionalitat és: $\frac{12}{2} = \frac{60}{10} = 6$

Exemple:

- Calcula la raó de proporcionalitat, cò
- Copia al teu quadern i completa la taula de proporcionalitat directa següent:

Magnitud A	18	2,4	60	2,8	0,20
Magnitud B	4,5	0,6	15	0,7	0,05

La raó de proporcionalitat és ***k*** = $\frac{18}{4{,}5} = 4$**.** Per tant tots els valors de la magnitud B són quatre vegades menors que els de la magnitud A.

1.2. Regla de tres simple directa

Recorda que:

El quart terme d'una proporció directa entre dues magnituds es pot calcular mitjançant el procediment denominat "***regla de tres***"

Exemple:

- Quinze paquets pesen 330 kg, quants kg pesen 6 paquets?

15 paquets ——— 330 kg

6 paquets ——— *x* kg

$$\frac{15}{330} = \frac{6}{x} \Rightarrow x = \frac{330 \cdot 6}{15} = 132\text{kg}$$

1.3. Regla de tres composta directa

Una proporció en què intervenen més de dues magnituds es denomina **proporció composta**.

Per a calcular el valor desconegut d'una de les seues magnituds s'utilitza la "***regla de tres composta***".

Exemple:

- Nou persones han gastat en transport 630 € en 20 dies. Quant gastaran 24 persones en 8 dies realitzant el mateix recorregut?

Observem que les tres magnituds són directament proporcionals.

9 persones	630 €	20 dies
24 persones	*x* €	8 dies

$$\frac{630}{x} = \frac{20}{8} = \frac{9}{24} \Rightarrow x = \frac{630 \cdot 24 \cdot 8}{9 \cdot 20} = 672€$$

1.4. Percentatges

El percentatge o tant per cent és la raó de proporcionalitat de major ús en la vida quotidiana.

El **tant per cent** és una raó amb denominador 100.

Exemple:

- 24 % = $\frac{24}{100}$

Els percentatges són proporcions directes en què es pot aplicar la regla de tres.

Exemple:

- La població de Robles era en 2012 de 5680 habitants. En 2013 s'ha incrementat en un 5 %. Quina és la seua població a final de 2013?

El 5 % de 5680 és $\frac{5 \cdot 5680}{100}$ = 284 habitants. La població s'ha incrementat en 284 habitants, doncs al final de 2013 serà de: 5680 + 284 = 5964 habitants.

Activitats proposades

1. Estima quantes persones caben de peu en un metre quadrat. Hi ha hagut una festa i s'ha omplit completament un local de 260 m^2, quantes persones estimes que han anat a aqueixa festa?

2. En una recepta ens diuen que per a fer una melmelada de maduixa necessitem un quilogram de sucre per cada dos quilograms de maduixes. Volem fer 5 quilograms de melmelada, quants quilograms de sucre i quants de maduixes hem de posar?

3. L'altura d'un arbre és proporcional a la seua ombra (a una mateixa hora). Un arbre que mesura 1,2 m té una ombra de 2,1 m. Quina altura tindrà un arbre l'ombra del qual mesure 4,2 m?

1.5. Increment percentual

Exemple:

- A l'exemple anterior pot resoldre's mitjançant **increment percentual**: 100 + 5 = 105%
- El 105 % de 5680 és $\frac{105 \cdot 5680}{100}$= 5964 habitants

1.6. Descompte percentual

- A les rebaixes a tots els articles a la venda els apliquen un 20 % de descompte. Calcula el preu de què apareixen en la taula:

Preu sense descompte	74 €	105 €	22 €	48 €
Preu en rebaixes	59,20 €	84 €	17,6 €	38,4 €

Ja que ens descompten el 20 %, pagarem el 80 %. Per tant: $\frac{\mathbf{80}}{\mathbf{100}}$= 0,8 és la raó directa de proporcionalitat que aplicarem als preus sense descompte per a calcular el preu rebaixat.

Activitats proposades

4. Copia al teu quadern i completa la taula de proporció directa. Calcula la raó de proporcionalitat.

Litres	16	4,5		1		50
Euros	36		8,10		10	

5. Hem gastat 72 litres de gasolina per a recórrer 960 km. Quants litres necessitarem per a una distància de 1500 km?

6. El meu cotxe gasta 6 litres de gasolina cada 100 km, quants litres gastarà en un viatge de 1250 km?

7. Un llibre de 420 pàgines pes 200 g. Quant pesarà un llibre de la mateixa col·lecció de 300 pàgines?

8. Sis persones realitzen un viatge de huit dies i paguen en total 40800 €. Quant pagaran 15 persones si el seu viatge dura 5 dies?

9. Calcula el preu final d'un llavaplats que costava 430 € més un 21 % d'IVA, a què se li ha aplicat un descompte sobre el cost total del 15 %.

10. Calcula els termes que falten per a completar les proporcions:

a) $\frac{24}{100}=\frac{30}{x}$ b) $\frac{x}{80}=\frac{46}{12}$ c) $\frac{3{,}6}{12{,}8}=\frac{x}{60}$

11. Copia al teu quadern i completa: D'una factura de 127 he € pagat 111. €. M'han aplicat un ……… % de descompte

12. M'han descomptat el 12 % d'una factura de ……………. € i he pagat 365 €.

13. Per pagar al comptat un moble m'han descomptat el 15 % i m'he estalviat 100 €. Quin era el preu del moble sense descompte?

14. Dos pantalons ens van costar 32 €, quant pagarem per 5 pantalons?

1.7. Escales

En plans i mapes trobem anotades en la seua part inferior l'escala a què estan dibuixats.

L'**escala** és la proporció entre les mesures del dibuix i les mesures en la realitat.

Exemple:

- Si una certa escala s'expressa de la forma 1 : 20000 significa que 1 cm del pla correspon a 20000 cm = 200 m en la realitat.

Les escales també es representen en forma gràfica, mitjançant una barra dividida en segments d'1 cm de longitud

Exemple:

0 20 40 60 80 100 m

Aquesta escala identifica cada centímetre del mapa amb 20 m en la realitat és a dir 1 : 2000.

Un instrument senzill per a realitzar treballs a escala és el *pantògraf* que facilita copiar una imatge o reproduir-la a escala.

El pantògraf és un paral·lelogram articulat que, en variar la distància entre els punts d'articulació, permet obtindre diferents grandàries de dibuix sobre un model donat.

15. Activitats proposades

16. La distància real entre dos pobles és 18,5 km. Si en el mapa estan a 10 cm de distància. A quina escala està dibuixat?

17. Quina altura té un edifici si la seua maqueta construïda a escala 1:300 presenta una altura de 12 cm?

18. Dibuixa l'escala gràfica corresponent a l'escala 1 : 60000.

19. Les dimensions d'una superfície rectangular en el pla són 6 cm i 14 cm. Si està dibuixat a escala 1 : 40, calcula les seues mesures reals.

2. PROPORCIONALITAT INVERSA

2.1. Magnituds inversament proporcionals

Recorda que:

Dues magnituds són **inversament proporcionals** quan en multiplicar o dividir a la primera per un nombre, la segona queda dividida o multiplicada pel mateix nombre.

Exemple:

- Quan un automòbil va a 90 km/h, tarda quatre hores a arribar al seu destí. Si fóra a 120 km/h tardaria 3 hores a fer el mateix recorregut.

$$90 \cdot 4 = 120 \cdot 3$$

La velocitat i el temps són magnituds inversament proporcionals.

La **raó de proporcionalitat inversa** *k´* és el producte de cada parell de magnituds: $k' = a \cdot b = a' \cdot b'$

Exemple:

- Còpia la taula al teu quadern, calcula la raó de proporcionalitat inversa i completa la taula de proporcionalitat inversa:

a	18	150	1,5	3600	100
b	50	6	600	0,25	9

k´ = 18 · 50 = 900. Comprova que totes les columnes donen aquest resultat.

2.2. Regla de tres simple inversa

Per calcular el quart terme entre dues magnituds inversament proporcionals apliquem la regla de tres inversa.

Exemple:

- Quatre persones realitzen un treball en 18 dies. Quantes persones necessitarem per a realitzar el mateix treball en 8 dies?

4 persones —— 18 dies

x persones —— 8 dies

$$\boldsymbol{k'} = 4 \cdot 18 = 8 \cdot x \Rightarrow x = \frac{4 \cdot 18}{8} = 9 \text{ persones.}$$

2.3. Regla de tres composta inversa

En la regla de tres composta **inversa**, intervenen diverses magnituds inversament proporcionals entre si.

Exemple:

- Amb una quantitat de pinso podem donar de menjar a 48 animals durant 30 dies amb una ració de 1,2 kg per a cada u. Quants dies podrem alimentar a 60 animals si la ració és de 800 g?

48 animals——— 30 dies ——— 1,2 kg

0 animals ——— x dies ———0,800 kg

Les tres magnituds són inversament proporcionals entre si.

Per tant $k' = 48 \cdot 30 \cdot 1{,}2 = 1728 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{48 \cdot 30 \cdot 1{,}2}{60 \cdot 0{,}800} = 36$ dies.

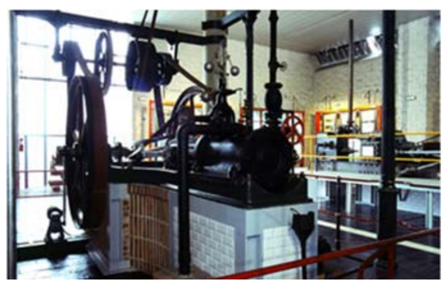
Activitats proposades

20. Copia al teu quadern la taula següent, calcula la raó de proporcionalitat i completa la taula de proporcionalitat inversa:

Magnitud A	36	0,09		12	
Magnitud B	0,25		6		72

21. En tallar una quantitat de fusta hem aconseguit 6 panells de 2,25 m de llarg. Quants panells aconseguirem si ara tenen 1,5 m de llarg?

22. Per a omplir un depòsit s'obrin tres aixetes que llancen 2 litres per minut cada una i tarden 6 hores. Quant temps tardaran 4 aixetes semblants que llancen 5 litres per minut cada una?



23. Tres màquines fabriquen 1200 peces funcionant 5 hores diàries. Quantes màquines s'han de posar a funcionar per a aconseguir 6000 peces durant 9 hores diàries?

24. En la construcció d'un pont de 900 m s'han utilitzat 250 bigues, però l'enginyer no està molt segur i decideix reforçar l'obra afegint 75 bigues més. Si les bigues es col·loquen uniformement al llarg de tot el pont, a quina distància es col·locaran les bigues?

25. En un hort ecològic s'utilitzen 3000 kg d'un tipus d'adob d'origen animal que se sap que té un 10 % de nitrats. Es canvia el tipus d'adob, que ara té un 15 % de nitrats, quants quilograms es necessitaran del nou adob perquè les plantes reben la mateixa quantitat de nitrats?

26. Aqueix mateix hort necessita 1200 caixes per a envasar les seues mandarines en caixes d'un quilogram. Quantes caixes necessitaria per a envasar-les en caixes de mig quilogram? I per a envasar-les en caixes de 2 quilograms?

3. REPARTIMENTS PROPORCIONALS

Quan es realitza un repartiment en parts desiguals s'ha d'establir prèviament si es tracta d'un repartiment proporcional directe o invers.

3.1. Repartiment proporcional directe

En un repartiment proporcional directe li correspondrà més a qui té més parts.

Activitat resolta

- Tres amics han de repartir-se els 300 € que han guanyat en una competició d'acord amb els punts que cada un ha obtingut. El primer va obtindre 7 punts, el segon 5 i el tercer 3 punts.

  El repartiment directament proporcional s'inicia sumant els punts: 7 + 5 + 3 = 15 punts.

  Calculem el premi per punt: 300 : 15 = 20 €.

  El primer obtindrà 20 · 7 = 140 €.

  El segon: 20 · 5 = 100 €.

  El tercer: 20 · 3 = 60 €.

  La suma de les tres quantitats és 300 €, la quantitat total a repartir.

Com es tracta d'una proporció, s'ha d'establir la regla següent:

Siga N (en l'exemple anterior 300) la quantitat a repartir entre quatre persones, a qui els correspondrà A, B, C, D de manera que N = A + B + C + D. Aquestes quantitats són proporcionals a la seua participació en el repartiment: *a, b, c, d*.

a + b + c + d = n és el nombre total de parts en què ha de distribuir-se N.

N : *n* = *k* que és la quantitat que correspon a cada part. A l'exemple anterior: *k* = 300 : 15 = 20.

El repartiment finalitza multiplicant *k* per *a*, *b*, *c* i *d*, obtenint-se així les quantitats corresponents A, B, C i D.

3.2. Repartiment proporcional invers

A un repartiment proporcional invers rep més qui menys parts té.

Siga N la quantitat a repartir i *a*, *b* i *c* les parts. En ser una proporció inversa, el repartiment es realitza als seus inversos 1/*a*, 1/*b*, 1/*c*.

Per a calcular les parts totals, reduïm les fraccions a comú denominador, per a tindre un patró comú, i prenem els numeradors que són les parts que corresponen a cada u.

Activitat resolta

- Repartir 3000 € de forma inversament proporcional a 12 i 20.

Calculem el total de les parts: 1/12 + 1/20 = **5**/60 + **3**/60 = **8**/60.

3000 : 8 = 375 € cada part.

375 · 5 = 1875 €.

375 · 3 = 1125 €.

Activitats proposades

27. Cinc persones comparteixen loteria, amb 10, 6, 12, 7 i 5 participacions respectivament. Si han obtingut un premi de 18000 € Quant correspon a cada un?

28. En un concurs s'acumula puntuació de forma inversament proporcional al nombre d'errors. Els quatre finalistes, amb 6, 5, 2, i 1 error, han de repartir-se els 1400 punts. Quants punts rebrà cada un?

29. En el testament, el iaio estableix que vol repartir entre els seus néts 22200 €, de manera proporcional a les seues edats, 12, 15 i 18 anys, cuidant que la major quantitat siga per als néts menors. Quant rebrà cada un?

30. Tres socis han invertit 20000 €, 34000 € i 51000 € enguany en la seua empresa. Si els beneficis a repartir a final d'any ascendeixen a 31500 €, quant correspon a cada un?

3.3. Mescla i aliatges

Les **mescles** que estudiarem són el resultat final de combinar distintes quantitats de productes, de distints preus.

Activitat resolta

b) Calcula el preu final del litre d'oli si mesclem 12 litres a 2,85 €/l, 5 litres a 3,02 €/l i 3 litres a 3,10 €/l.

Calculem el cost total dels distints olis:

12 · 2,85 + 5 · 3,02 + 3 · 3,10 = 58,60 €.

I el nombre total de litres: 12 + 5 + 3 = 20 l.

El preu del litre de mescla valdrà 58,60 : 20 = 2,93 €/l.

Una **aliatge** és una mescla de metalls per a aconseguir un determinat producte final amb millors propietats o aspecte.

Els aliatges es realitzen en joieria mesclant metalls preciosos, or, plata, platí, amb coure o rodi. Segons la proporció de metall preciós, es diu que una joia té més o menys **llei.**

La **llei** d'un aliatge és la relació entre el pes del metall més valuós i el pes total.

Exemple:

c) Una joia de plata de 50 g de pes conté 42 g de plata pura. Quina és la seua llei?

$$\textbf{Llei} = \frac{\text{pesmetallpur}}{\text{pestotal}} = \frac{42}{50} = 0{,}84$$

Una altra forma de mesurar el grau de puresa d'una joia és el **quirat**.

Un quirat d'un metall preciós és 1/24 de la massa total de l'aliatge.

Per a considerar una joia d'or pur ha de tindre 24 quirats.

Exemple:

Una joia d'or de 18 quirats pes 44 g. Quina quantitat del seu pes és d'or pur?

$$\text{Peso en oro} = \frac{44\cdot 18}{24} = 33 \text{ g.}$$

Activitats proposades

31. Calcula el preu del quilo de mescla de dos tipus de café: 3,5 kg a 4,8 €/kg i 5,20 kg a 6 €/kg.

32. Quants litres de suc de pomelo de 2,40 €/l han de mesclar-se amb 4 litres de suc de taronja a 1,80 €/l per a obtindre una mescla a 2,13 €/l?

33. Calcula la llei d'una joia sabent que pes 110 g i conté 82 g d'or pur.

34. Quants quirats, aproximadament té la joia anterior?

4. INTERÉS

4.1. Interés simple

L' **interés** és el benefici que s'obté en depositar un capital en una entitat financera a un determinat tant per cent durant un temps.

En l'interés **simple**, al capital *C* depositat se li aplica un tant per cent o rèdit *r* anualment.

El càlcul de l'interés obtingut al cap de diversos anys es realitza mitjançant la fórmula:

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$$

Si el temps que es deposita el capital són mesos o dies, l'interés es calcula dividint l'expressió anterior entre 12 mesos o 360 dies (any comercial).

$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{1200}$ temps en mesos $I = \frac{C \cdot r \cdot t}{36000}$ temps en dies

4.2. Interés compost

Des d'un altre punt de vista, l'interés és el percentatge que s'aplica a un préstec al llarg d'un temps, incrementant la seua quantia a l'hora de tornar-lo.

Aquest tipus d'interés no es calcula com l'interés simple sinó que s'estableix el que s'anomena "*capitalització*".

L' **interés compost** s'aplica tant per a calcular el capital final d'una inversió, com la quantitat a tornar per a amortitzar un préstec.

Normalment els préstecs es tornen mitjançant quotes mensuals que s'han calculat a partir dels interessos generats pel préstec al tipus d'interés convingut.

La capitalització composta planteja que, a mesura que es van generant interessos, passen a formar part del capital inicial, i aqueix nou capital produirà interessos als períodes successius.

Si es tracta d'un depòsit bancari, el capital final es calcularà seguint el procediment següent:

C_i (capital inicial)	1 any	*i* (tant per u)	$C_f = C_i \cdot (1 + i)$
$C_i \cdot (1 + i)$	2 anys	$C_i \cdot (1 + i) \cdot (1 + i)$	$C_f = C_i \cdot (1 + i)^2$
$C_i \cdot (1 + i)^2$	3 anys	$C_i \cdot (1 + i)^2 \cdot (1 + i)$	$C_f = C_i \cdot (1 + i)^3$
…………..	………..	……………	…………….
	n anys		$C_f = C_i \cdot (1 + i)^n$

Al cap de *n* anys, el capital final serà $\mathbf{C_f = C_i \cdot (1 + i)^n}$.

Per a fer els càlculs pots utilitzar una “Full de càlcul”:

(http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/Interes_compuesto.xlsx).

Basta que en el full de càlcul adjunt modifiques les dades de les caselles B5 on està el “Capital inicial”, casella B6 on està el “Tant per u” i de la casella B7 on apareix el nombre de “Anys”, i arrossegues en la columna B fins que el nombre final d’anys coincidisca amb la casella.

Activitats resoltes

- *Depositem* 5400 € al 2,25 % anual. Quants diners tindrem al cap de 28 mesos?

Calculem l’interés simple:

$$I = \frac{5400 \cdot 2{,}25 \cdot 28}{1200} = 283{,}5 \text{ €}$$

Sumem capital i interessos:

$$5400 + 283{,}5 = 5683{,}5 \text{ €}$$

- *El capital inicial d’un depòsit ascendeix a* 82000 €. El tant per cent aplicat és el 3 % a interés compost durant 5 anys. Calcula el capital final.

$$C_f = C_i \cdot (1 + i)^n = 82000 \cdot (1 + 0{,}03)^5 = 82000 \cdot 1{,}159\ldots = 95060 \text{ €}$$

Activitats proposades

35. Calcula l’interés simple que produeixen 105000 € al 4,8 % durant 750 dies. (*Solució*: 10500)

36. Al 5 % d’interés compost durant 12 anys, quin serà el capital final que obtindrem en depositar 39500 €?

Ajuda: també pots utilitzar el full de càlcul:

(http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/Interes_compuesto.xlsx).

37. Quin capital cal depositar al 1,80 % durant 6 anys per a obtindre un interés simple de 777,6 €?

CURIOSITATS. REVISTA

El terme ***quirat*** ve de la paraula grega *"keration" (garrofa).* Aquesta planta, de llavors molt uniformes, s'utilitzava per a pesar joies i gemmes en l'antiguitat.

L'escala musical és un conjunt de sons ordenats de forma ascendent o descendent.

Les escales pentatòniques són les més utilitzades en el blues, l'heavy metall i el rock

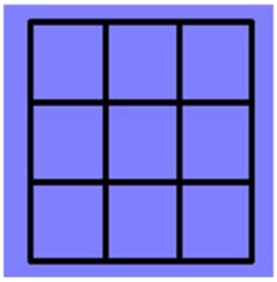
Durant segles, hòmens i dones han observat el cel utilitzant instruments que els permetien dibuixar a escala la volta celeste.

Dones com Hipatia d'Alexandria, Carolina Herschel, María Michell, María Kirch, van estudiar les constel·lacions, van catalogar estreles i galàxies, van descobrir cometes i van deixar un enorme llegat a pesar de treballar en l'anonimat, sense reconeixement, o amb serioses dificultats per raó de ser dones.

En 2009, Any Internacional de l'Astronomia, la Unió Astronòmica Internacional i la UNESCO, van impulsar el projecte "Ella és una astrònoma" a fi de promoure la igualtat entre gèneres en aquest camp de la Ciència.

La UNED, TVE la 2 i TVE internacional han elaborat una sèrie titulada "**Dones *en les estreles***" que aporta una perspectiva històrica i actual de les científiques espanyoles i la seua contribució a l'astronomia.

Proporcionalitat en àrees i volums



En general, si fem un canvi d'escala de factor de proporcionalitat k, l'àrea té un factor de proporcionalitat k^2, i el volum k^3.

Utilitza aquesta observació per a resoldre els següents problemes:

La **Torre Eiffel de París** mesura 300 metres d'altura i pesa uns 8 milions de quilos. Està construïda de ferro. Si encarreguem un model a escala de la torre, també de ferro, que pese només un quilo, quina altura tindrà? Serà major o menor que un llapis?

Abans de començar a calcular, dóna la teua opinió.

* En una pizzería la pizza de 20 cm de diàmetre val 3 euros i la de 40 cm val 6 euros. Quin té millor preu?

* Veiem en el mercat un lluç de 40 cm que pes un quilo. Ens pareix un poc xicotet i demanem un altre un poc major, que resulta pesar 2 quilos. Quant mesurarà?

* En un dia fred un pare i un fill xicotet van exactament igual abrigats, Quin dels dos tindrà més fred?

RESUM

		Exemples
Proporcionalitat directa	Dues magnituds són **directament proporcionals** quan en multiplicar o dividir a la primera per un nombre, la segona queda multiplicada o dividida pel mateix nombre. La **raó de proporcionalitat directa *k*** *és* el valor que s'obté mitjançant el quocient de qualsevol dels valors d'una variable i els corresponents de l'altra.	Per a empaperar 300 m^2 hem utilitzat 24 rotllos de paper, si ara la superfície és de 104 m^2, necessitarem 8,32 rotllos, perquè k = 300/24 = 12,5, i 12,5 = 104/x, per la qual cosa x = 104/12,5 = 8,32.
Proporcionalitat inversa	Dues magnituds són **inversament proporcionals** quan en multiplicar o dividir a la primera per un nombre, la segona queda dividida o multiplicada pel mateix nombre. La **razón de proporcionalidad inversa** *k´* es el producto de cada par de magnitudes: k' = a · b = a´· b´	Dues persones pinten una vivenda en 4 dies treballant 9 h diàries. Per a pintar la mateixa vivenda, 3 persones, treballant 8 h diàries tardaran... 3 dies
Percentatges	Raó amb denominador 100.	El 87 % de 2400 és: $\frac{87 \cdot 2400}{100} = 2088$
Escales	L'escala és la proporció entre les mesures del dibuix i les mesures en la realitat.	A escala 1:50000, 35 cm són 17,5 km en la realitat.
Repartiment proporcional directe	Rep més quantitat qui més parts té.	Repartir directament a 6,10 i 14, 105000 € 6 + 10 + 14 = 30 105000 : 30 = 3500 6 · 3500 = 21000 € 10 ·3500 = 35000 € 14 · 3500 = 49000 €
Repartiment proporcional invers	Rep més quantitat qui menys parts té.	Repartir 5670 inversament a 3,5 i 6 1/3 + 1/5 + 1/6 = $\frac{10+6+5}{30} = \frac{21}{30}$ 5670 : 21 = 270 270 · 10 = **2700** 270 · 6 = **1620** 270 · 5 = **1350**
Mescles i aliatges	Mesclar distintes quantitats de productes, de distints preus. La **llei** d'un **aliatge** és la relació entre el pes del metall més valuós i el pes total.	Una joia que pesa 245 g i conté 195 g de plata, la seua llei és: $\frac{195}{245}$ = 0,795
Interés simple i compost	L'interés és el benefici que s'obté en depositar un capital en una entitat financera a un determinat tant per cent durant un temps	C = 3600; r = 4,3 %; t = 8 anys $I = \frac{3600 \cdot 4{,}3 \cdot 8}{100} = 1238{,}4$ €

EXERCICIS I PROBLEMES

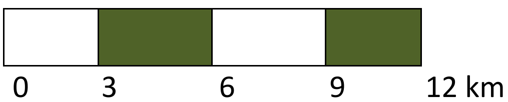
1. Copia al teu quadern, calcula la raó de proporcionalitat i completa la taula de proporcionalitat directa:

litres	6,25		0,75	1,4	
euros		15	2,25		4,5

2. Amb 76 € hem pagat 12,5 m de tela, quant ens costaran 22,5 m?
3. Cada setmana paguem 82 € en transport. Quant gastarem els mesos de juny i juliol?
4. Per a entapissar cinc cadires he utilitzat 2,3 m de tela, quantes cadires podré entapissar amb la peça completa de 23 m?
5. Un camió ha transportat en 3 viatges 220 sacs de creïlles de 24 kg cada u. Quants viatges seran necessaris per a transportar 550 sacs de 30 kg cada un?
6. Una edició de 350 llibres de 210 pàgines cada un arriba a un pes total de 70 kg. Quants kg pesarà una altra edició de 630 llibres de 140 pàgines cada un?
7. Sabent que la raó de proporcionalitat directa és $\frac{A}{B} = 1{,}8$, còpia al teu quadern i completa la taula següent:

Magnitud A	12,6			4,14	
Magnitud B		9	0,1		2,7

8.
9. El model de telèfon mòbil que costava 285 € + IVA està ara amb un 15 % de descompte. Quin és el seu preu rebaixat? (IVA 21 %)
10. Per retardar-se dos mesos en el pagament d'un deute de 1520 €, una persona ha de pagar un recàrrec del 12 %, quant ha de tornar en total?
11. Què tant per cent de descompte s'ha aplicat en una factura de 1820 € si finalment es van pagar 1274€?
12. En comprar un televisor he obtingut un 22 % de descompte, per la qual cosa al final he pagat 483,60 €, quin era el preu del televisor sense descompte?
13. Per liquidar un deute de 3500 € abans d'allò que s'ha previst, una persona paga finalment 3080 €, quin percentatge del seu deute s'ha estalviat?
14. El preu d'un viatge s'anuncia a 907,50 € IVA inclòs. Quin era el preu sense IVA? (IVA 21 %)
15. Què increment percentual s'ha efectuat sobre un article que abans valia 38 € i ara es paga a 47,12 €?
16. Un mapa està dibuixat a escala 1:700000. La distància real entre dues ciutats és 21 km. Quina és la seua distància al mapa?
17. La distància entre Oviedo i Corunya és de 340 km. Si al mapa estan a 10 cm, quina és l'escala a què està dibuixat?
18. Interpreta la següent escala gràfica i calcula la distància en la realitat per a 21 cm.



19. Copia al teu quadern i completa la taula següent:

Grandària en el dibuix	Grandària real	Escala
24 cm llarg i 5 cm d'ample		1:25000
6 cm	15 km	
	450 m	1:30000

20. Copia al teu quadern, calcula la raó de proporcionalitat inversa i completa la taula:

Magnitud A	4	7,5		3,6	
Magnitud B		12	0,18		10

21. Quina velocitat ha de portar un automòbil per a recórrer en 4 hores una certa distància si a 80 km/h ha tardat 5 hores i 15 minuts?

22. La raó de proporcionalitat inversa entre A i B és 5,4. Copia al teu quadern i completa la taula següent:

A	18		9		10,8
B		0,03		2,7	

23. En la granja es fa la comanda de farratge per a alimentar a 240 vaques durant 9 setmanes. Si el granger ven 60 vaques, a) quantes setmanes li durarà el farratge? b) I si en compte de vendre, compra trenta vaques? c) I si decideix rebaixar la ració una quarta part amb les 240 vaques?

24. Amb dotze paquets de 3,5 kg cada un poden menjar 80 gallines diàriament. Si els paquets foren de 2 kg, quants necessitaríem per a donar de menjar a les mateixes gallines?

25. Determina si les dues magnituds són directa o inversament proporcionals i completa la taula al teu quadern:

A	24	8	0,4	6		50
B	3	9	180		20	

26. Si la jornada laboral és de 8 hores necessitem a 15 operaris per a realitzar un treball. Si rebaixem la jornada en mitja hora diària, quants operaris seran necessaris per a realitzar el mateix treball?

27. En un magatzem es guarden reserves de menjar per a 80 persones durant 15 dies amb 3 racions diàries, quants dies duraria el mateix menjar per a 75 persones amb 4 racions diàries?

28. Deu operaris instal·len 3600 m de tanca en 6 dies. Quants dies tardaran 12 operaris a instal·lar 5040 m de tanca?

29. En un concurs el premi de 168000 € es reparteix de forma directament proporcional als punts aconseguits. Els tres finalistes van aconseguir 120, 78 i 42 punts. Quants euros rebran cada un?

30. Repartir 336 en parts directament proporcionals a 160, 140, 120.

31. Un treball es paga a 3120 €. Tres operaris el realitzen aportant el primer 22 jornades, el segon 16 jornades i el tercer 14 jornades. Quant rebrà cada un?

32. Repartir 4350 en parts inversament proporcionals a 18, 30, 45.

33. Cinc persones comparteixen un microbús per a realitzar distints trajectes. El cost total és de 157,5 € més 20 € de suplement per servei nocturn. Els quilòmetres recorreguts per cada passatger van ser 3, 5, 7, 8 i 12 respectivament. Quant ha d'abonar cada un?

34. S'ha decidit penalitzar a les empreses que més contaminen. Per a això es reparteixen 2350000 € per a subvencionar a tres empreses que presenten un 12 %, 9 % i 15 % de grau de contaminació. Quant rebrà cada una?

35. Mesclem 3 kg d'ametles a 14 €/kg, 1,5 kg d'anous a 6 €/kg, 1,75 kg d'anacards a 18 €/kg. Calcula el preu final del paquet de 250 g de mescla de fruits secs.

36. Calcula el preu del litre de suc que s'aconsegueix mesclant 8 litres de suc de pinya a 2,5 €/l, 15 litres de suc de taronja a 1,6 €/l i 5 litres de suc de raïm a 1,2 €/l. A quant ha de vendre's una botella de litre i mig si se li aplica un augment del 40 % sobre el preu de cost?

37. Per a aconseguir un tipus de pintura es mesclen tres productes 5 kg del producte X a 18 €/kg, 19 kg del producte Y a 4,2 €/kg i 12 kg del producte Z a 8 €/kg. Calcula el preu del kg de mescla.

38. Un lingot d'or pes 340 g i conté 280,5 g d'or pur. Quina és la seua llei?

39. Quants grams d'or conté una joia que s'ha format amb un aliatge de 60 g de 0,950 de llei i 20 g de 0,750 de llei?

40. Quin capital cal depositar al 3,5 % de rèdit en 5 anys per a obtindre un interés simple de 810 €?

41. Quin és el capital final que es rebrà per depositar 25400 € al 1,4 % en 10 anys?

42. Quants mesos ha de depositar-se un capital de 74500 € al 3 % per a obtindre un interés de 2980 €?

43. Al 3 % d'interés compost durant 5 anys un capital s'ha convertit en 69556,44 €. De quin capital es tracta?

AUTOAVALUACIÓ

a) Els valors que completen la taula de proporcionalitat directa són:

A	8	0,75		4,5	100
B		15	6		

a) 160; 0,3; 90; 2000 b) 16, 3, 90, 200 c) 160, 3, 9, 20

2. Amb 450 € paguem els gastos de gas durant 8 mesos. En 30 mesos pagarem:

a) 1850 € b) 1875 € c) 1687,5 €

3. Un article que costava 1600 € s'ha rebaixat a 1400 €. El percentatge de rebaixa aplicat és:

a) 12,5 % b) 14 % c) 15,625 % d) 16,25 %

4. Per a envasar 360 litres d'aigua, quantes botelles necessitarem si volem utilitzar envasos de tres quarts de litre?

a) 440 botelles b) 280 botelles c) 480 botelles d) 360 botelles

5. Tres agricultors es reparteixen els quilograms de la collita de forma proporcional a la grandària de les seues parcel·les. La major, que mesura 15 ha rep 24 tones, la segona és de 10 ha i la tercera de 8 ha rebran:

a) 16 t i 5 t b) 12,8 t i 16 t c) 16 t i 12,8 t d) 16 t i 11 t

6. L'escala a què s'ha dibuixat un mapa en què 3,4 cm equivalen a 1,02 km és :

a) 1:34000 b) 1:3000 c) 1:30000 d) 1:300

7. Amb 4 rotllos de paper de 5 m de llarg, puc forrar 32 llibres. Quants rotllos necessitarem per a forrar 16 llibres si ara els rotllos de paper són de 2 m de llarg?

a) 3 rotllos b) 5 rotllos c) 4 rotllos d) 2 rotllos

8. El preu final del kg de mescla de 5 kg de farina classe A, a 1,2 €/kg, 2,8 kg classe B a 0,85 €/kg i 4 kg classe C a 1 €/kg és:

a) 1,12 € b) 0,98 € c) 1,03 € d) 1,5 €

9. La llei d'un aliatge és 0,855. Si el pes de la joia és 304 g, la quantitat de metall preciós és:

a) 259,92 g b) 255,4 g c) 248,9 g d) 306 g

10. A 2 % d'interés compost, durant 6 anys, 14500 € s'hauran convertit en:

a) 16225,35 € b) 16329,35 € c) 15632,35 € d) 14550 €

Matemàtiques orientades a las ensenyances acadèmiques:

3º B d'ESO

Capítol 7: Geometria en el pla

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Pedro Luis Suberviola

Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

Revisora: María Molero

Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF; Pedro Luis Suberviola i Milagros Latasa

Geometria en el pla. 3º B d'ESO

Índex

Resum

Tales, Pitàgores i molt posteriorment Euclides són matemàtics grecs als què devem l'estudi de la Geometria deductiva. Anteriorment egipcis i babilonis van utilitzar la Geometria per a resoldre problemes concrets, com tornar a posar límits a les terres després de les inundacions del Nil. Però a Grècia es va utilitzar el raonament lògic per a deduir les propietats. Euclides va intentar arreplegar el coneixement que existia i va escriure *Els Elements* que consta de 13 llibres o capítols, dels que els sis primers tracten de Geometria Plana, i l'últim de Geometria en l'espai. En aquest llibre defineix conceptes, tan difícils de definir com a punt o recta, i enuncia els cinc axiomes d'Euclides dels que part com a veritats no demostrables, i a partir d'ells demostra la resta de les propietats o teoremes. Aquests axiomes són:

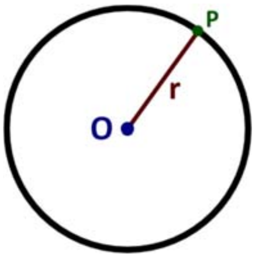
a) Donats dos punts es pot traçar una recta que els uneix.
- Qualsevol segment pot ser prolongat de forma contínua en una recta il·limitada.
- Es pot traçar una circumferència de centre en qualsevol punt i radi qualsevol.
- Tots els angles rectes són iguals.
- Donada una recta i un punt, es pot traçar una única recta paral·lela a la recta pel dit punt.

En aquest capítol recordarem qüestions que ja coneixes de Geometria en el pla, aprofundint en algunes d'elles, com en els criteris de semblança dels triangles. D'esta manera seràs capaç de resoldre un bon nombre de problemes.

Geometria en el pla. 3º B d'ESO

1. LLOCS GEOMÈTRICS

Moltes vegades definim una figura geomètrica com els punts del pla que compleixen una determinada condició. Diem llavors que és un *lloc geomètric del pla*.



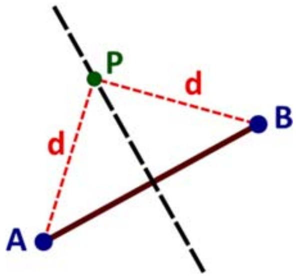
1.1. La circumferència

La **circumferència** és el lloc geomètric dels punts del pla la distància del qual a un punt del mateix (el centre) és un valor determinat (el radi).

Tots els punts de la circumferència tenen una distància igual al radi (*r*) del centre (*O*).

1.2. Mediatriu d'un segment

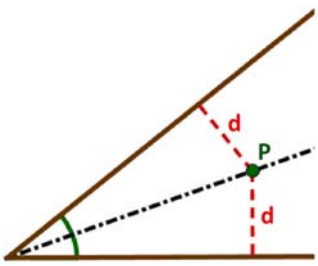
La **mediatriu** d'un segment és el lloc geomètric dels punts del pla que equidisten dels extrems del mateix.



Un punt *P* de la mediatriu verifica que està a la mateixa distància de A que de *B*. Qualsevol altre punt que ho complisca pertany a la mediatriu.

La mediatriu és una recta perpendicular al segment que passa pel punt mitjà del mateix.

1.3. Bisectriu d'un angle



Donat un angle delimitat per dues rectes, la **bisectriu** de l'angle és el lloc geomètric dels punts del pla que equidisten de les mateixes.

Un punt *P* de la bisectriu verifica que està a la mateixa distància de les dues rectes que formen l'angle. Qualsevol altre punt que ho complisca pertany a la bisectriu.

La bisectriu passa pel vèrtex de l'angle i divideix a aquest en dos angles iguals.

Activitats proposades

a) Un agricultor troba en el seu camp una bomba de la Guerra Civil. Les autoritats estableixen una distància de seguretat de 50 metres. Com s'ha d'acordonar la zona?

1) Un joc de dos participants consisteix en el fet que se situen a una distància de dos metres entre si i es posen diverses banderes a la mateixa distància d'ambdós. La primera a 5 metres, la segona a 10 metres, la tercera a 15 i així successivament. Sobre quina línia imaginària estarien situades les banderes?

2) Quan en una acampada s'assenten al voltant del foc ho fan formant un cercle. Per què?

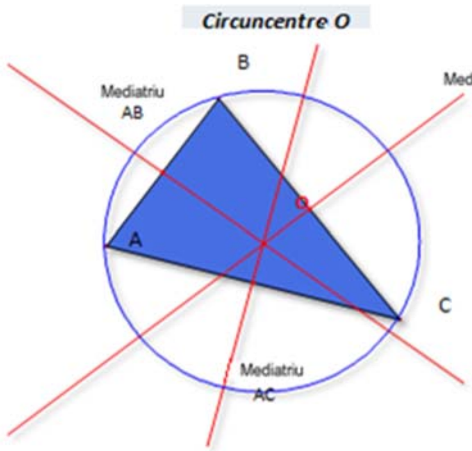
3) Utilitza regla i compàs per a dibuixar la bisectriu d'un angle i la mediatriu d'un segment.

1.4. Rectes i punts notables d’un triangle

Recorda que:

En qualsevol triangle podem trobar les seues mediatrius, bisectrius, altures i mitjanes.

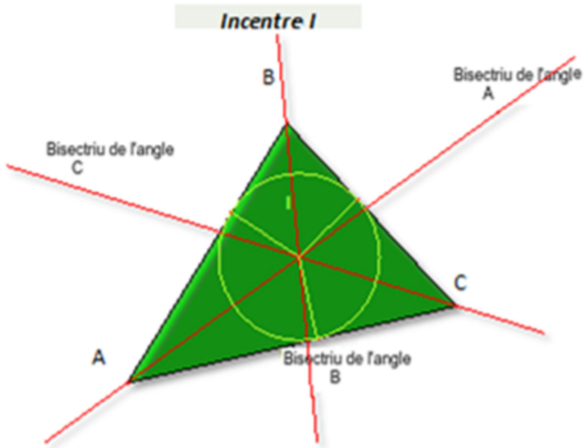
Mediatrius. Circuncentre.



Les mediatrius es tallen en el circumcentre.

El circumcentre està a la mateixa distància dels tres vèrtexs. És el centre de la circumferència circumscrita.

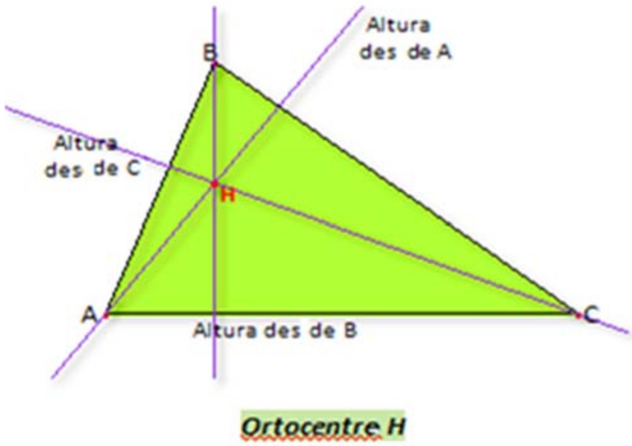
Bisectrius. Incentre.



Les bisectrius es tallen en l’Incentre.L’incentre està a la mateixa distància dels tres costats.

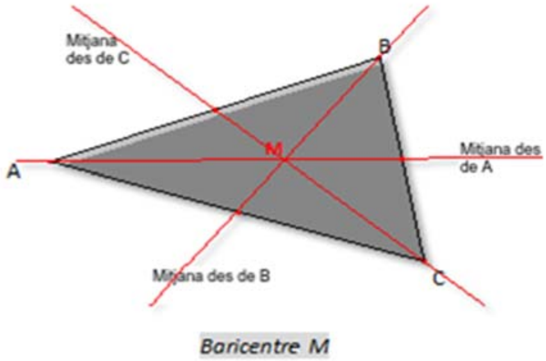
És el centre de la circumferència inscrita.

Altures. Ortocentre.



Les altures són les perpendiculars a un costat traçades des del vèrtex oposat. Es tallen en l’ortocentre.

Mitjanes. Baricentre.



Les mitjanes són les rectes que passen per un vèrtex i pel punt mitjà del costat oposat. Divideixen al triangle en dos triangles de la mateixa àrea.

Es tallen en el baricentre. La distància del mateix a cada costat és el doble de la seua distància al vèrtex oposat corresponent.

Si la **mediatriu** d'un segment és el lloc geomètric dels punts que equidisten dels extrems del segment, cada mediatriu d'un triangle equidistarà de dos dels vèrtexs del triangle i és la mediatriu d'un dels seus costats. Les tres mediatrius es tallen en un punt, el **circumcentre**, que, per tant, distarà el mateix de cada un dels tres vèrtexs del triangle, i és el centre d'una circumferència circumscrita al triangle, que passa pels seus tres vèrtexs.

Si la bisectriu d'un angle equidista dels costats de l'angle, ara cada una de les tres bisectrius d'un triangle equidistarà de dos dels costats del triangle. Les tres bisectrius es tallen en un punt, **l'incentre**, que, per tant, equidista dels tres costats del triangle i és el centre de la circumferència inscrita al triangle.

En qualsevol triangle el circumcentre, ortocentre i baricentre estan sobre una mateixa línia recta, a la que es denomina *Recta d'Euler*. Aquesta recta conté altres punts notables. L'incentre està en dita recta només si el triangle és isòsceles.

Activitats proposades

4) Dibuixa al teu quadern un triangle de costats 7, 6 i 4 cm. Traça en ell les circumferències inscrites i circumscrites.

5) Dibuixa al teu quadern un triangle de costat 8 cm i angles adjacents al mateix de 40º i 30º. Troba el seu ortocentre i el seu baricentre.

6) Dibuixa al teu quadern un triangle amb un angle de 40º comprés entre dos costats de 6 i 4 cm. Obtín el seu circumcentre i el seu incentre.

7) Què passa amb les rectes i els punts notables en un triangle equilàter?

8) Dibuixa un triangle isòsceles amb l'angle desigual de 40º. Traça les rectes notables per al costat desigual i per a un dels costats iguals. Què passa?
9) Una formiga camina per una mitjana d'un triangle partint del vèrtex. Quan arriba al baricentre ha recorregut 8 centímetres. Quina distància li falta per a arribar al punt mitjà del costat oposat al vèrtex d'on va partir?
10) Volem situar un fanal en una plaça triangular. On la posaríem?
11) Tenim un camp triangular sense tancar i volem lligar una cabra de manera que no isca del camp però que accedisca al màxim de past possible. On posaríem el pal?
12) A Yaiza i al seu germà Aitor els encanta la tortada. Sa mare els ha fet una triangular. Yaiza l'ha de tallar però Aitor triarà primer el seu tros. Com hauria de tallar Yaiza la tortada?

13) L'ortocentre d'un triangle rectangle, on està?
14) Comprova que el circumcentre d'un triangle rectangle està sempre en el punt mitjà de la hipotenusa.
15) El baricentre és el centre de gravetat. Construeix un triangle de cartolina i dibuixa el seu baricentre. Si poses el triangle horitzontalment en l'aire només subjectat per la punta d'un llapis en el baricentre comprovaràs que es subjecta.
16) Calcula el costat d'un triangle equilàter inscrit en una circumferència de 10 cm de radi. [*Ajuda*: Aplica que en aquest cas el circumcentre coincideix amb el baricentre i que aquest últim està al doble de distància del vèrtex que del costat oposat.]

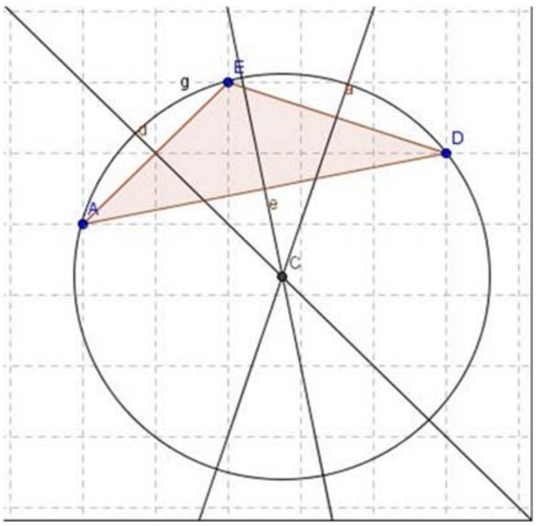
1.5. Ús de Geogebra per a l'estudi dels punts i rectes notables d'un triangle

S'utilitza el programa **Geogebra** per a determinar el *circumcentre*, *l'incentre* i el *baricentre* d'un triangle, estudiar les seues propietats i dibuixar la *recta d'Euler*.

Activitats resoltes

Una vegada obert el programa en l'opció del menú **Visualitza**, oculta **Eixos** i activa **Quadrícula.**

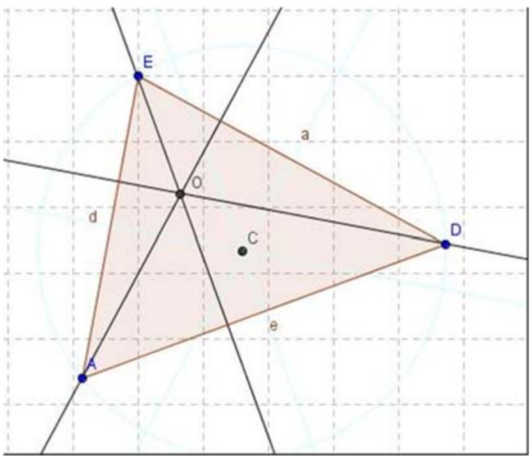
Circumcentre:



- Dibuixa les tres mediatrius d'un triangle i determina el seu circumcentre.
- Defineix tres punts A, D i E, observa que el programa els defineix com A, B i C, utilitza el botó dret del ratolí i l'opció **Renomenar** per a canviar el nom.
- Amb la ferramenta **Polígon** activada dibuixa el triangle que té per vèrtexs aquests punts. Observa que cada costat té la mateixa lletra que l'angle oposat amb minúscula.
- Amb la ferramenta **Mediatriu** dibuixa les mediatrius de dos costats, els segments a i d.
- Determina amb **Intersecció de dos objectes** el punt comú d'aquestes rectes i amb **Renomena** posa'l C. El dit punt és el circumcentre del triangle.
- Dibuixa la **Mediatriu** del segment e i observa que passa pel punt C.
- Activa **circumferència per centre i punt que creua** per a dibuixar la circumferència circumscrita al triangle.
- Utilitza el **Punter** per a desplaçar els vèrtexs A, D o E i comprovar que la circumferència roman circumscrita al triangle.

Ortocentre:

- *Dibuixa les tres altures d'un triangle i determina el seu ortocentre.*



i) Al mateix triangle canvia el color de les mediatrius i la circumferència situant-te amb el ratolí sobre el traç o sobre la seua equació i amb el botó dret tria en **Propietats, Color** un blau molt pròxim al blanc.

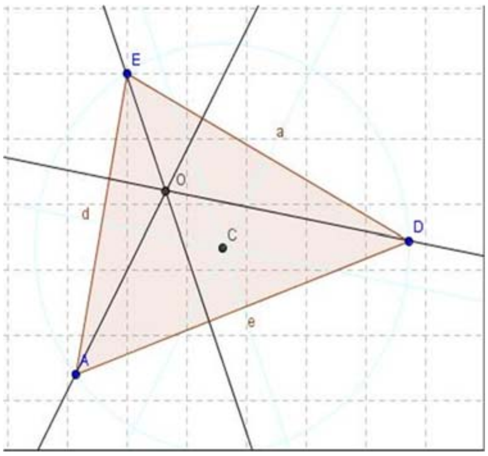
ii) Dibuixa dues altures amb la ferramenta **Recta Perpendicular**. Observa que el programa et demana que el punt pel qual vas a traçar-la i la recta o el segment respecte a què és perpendicular.

iii) Determina amb **Intersecció de dos objectes** ***l'ortocentre*** com el punt de tall de les dues altures i amb **Renomena** denomina'l *O*.

iv) Dibuixa la tercera altura i comprova que passa per *l'ortocentre*, desplaçant amb el **Punter** els vèrtexs del triangle.

Incentre:

- *Dibuixa les tres bisectrius d'un triangle i determina el seu incentre.*

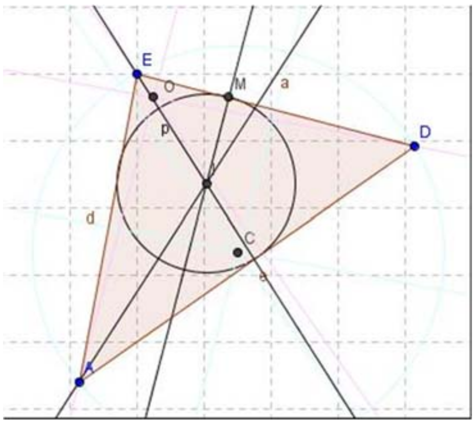


b) Canvia el color de les altures com en la construcció anterior, ara amb color rosa pàl·lid.

1. Amb la ferramenta **Bisectriu** dibuixa dues bisectrius. Observa que per a determinar la bisectriu d'un angle és prou assenyalar tres punts que poden ser els vèrtexs del triangle en l'orde adequat.

c) Determina *l'incentre* amb **Intersecció de dos objectes** com el punt de tall de les dues bisectrius i amb **Renomena** denomina'l *I*.

χ Dibuixa la tercera bisectriu i comprova que sempre passa per *l'incentre*, desplaçant amb el **Punter** els vèrtexs del triangle.



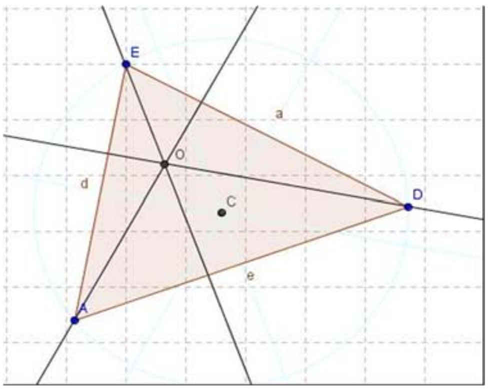
χ Traça des del punt *I* una **Recta perpendicular** a un dels costats i amb **Intersecció de dos objectes** calcula el punt de tall entre aquesta recta i el costat del triangle i amb **Renomena** anomena'l *M*.

χ Activa **Circunferencia por centro y punto que cruza** para dibujar con centro en *I* y radio el segmento *IM* la circunferencia inscrita al triángulo.

χ Desplaça amb el **punter** els vèrtexs del triangle per a comprovar que la circumferència roman inscrita al triangle.

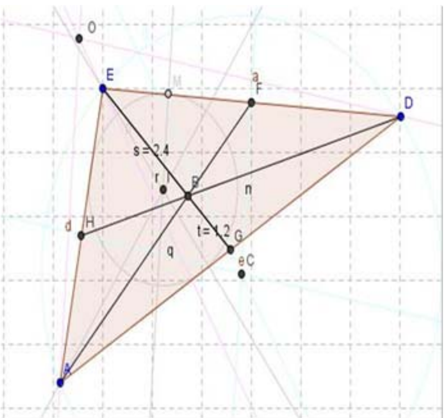
Baricentre:

- *Dibuixa les tres mitjanes d'un triangle i determina el seu baricentre.*



d) Canvia el color de les bisectrius, del punt *M* i de la circumferència inscrita, amb gris molt pàl·lid, com en les construccions anteriors.

- Amb la ferramenta **Punt mitjà o centre** calcula els punts mitjans de dos costats. Si el programa anomena algun amb la lletra *B*, utilitza **Reanomena** per a anomenar-lo *H*.



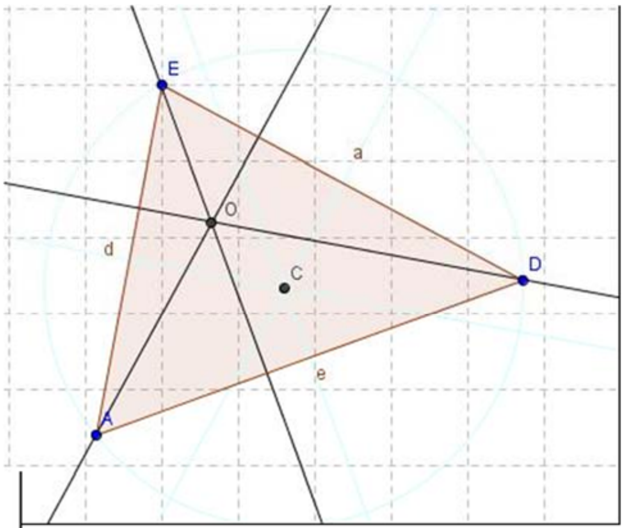
- Amb la ferramenta **Segment entre dos punts** dibuixa dues **mitjanes** i amb **Intersecció de dos objectes**, el seu punt de tall, el **baricentre**, que anomenaràs *B*.

- Traça la tercera mitjana i verifica que el baricentre pertany a aquest segment desplaçant amb el **Punter** els vèrtexs del triangle.

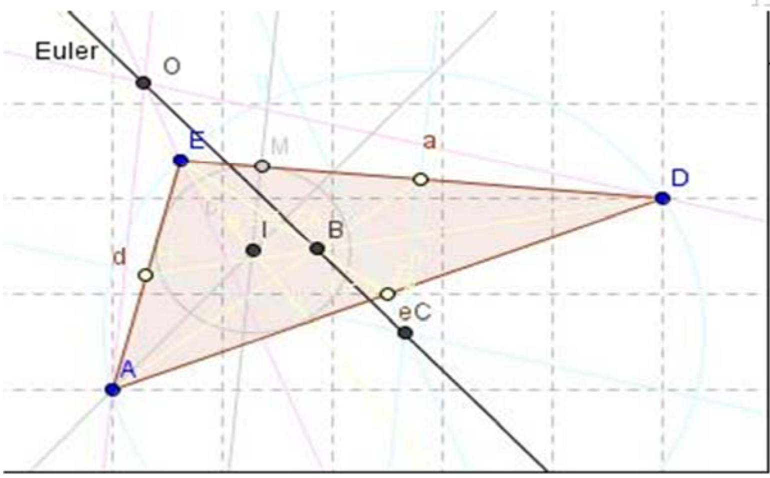
- Activa **Segment entre dos punts** i determina els dos segments determinats pel baricentre en una de les mitjanes.
- Activa Distància **per a** mesurar aquests segments.
- Desplaça els vèrtexs del triangle amb el **Punter** i observa la relació que existeix entre les mesures realitzades.

Recta d'Euler

- *Dibuixa la recta que passa pel circumcentre i l'ortocentre.*



- Canvia el color de les mitjanes, dels punts mitjans dels costats i dels dos segments de la mitjana, amb groc molt pàl·lid.
- Amb la ferramenta **Recta que passa per dos punts** dibuixa la recta d'Euler que passa pel *circumcentre* i *l'ortocentre* i utilitza Reanomena **per anomenar-la** *Euler*. Comprova que el baricentre pertany a la recta d'Euler i que l'incentre no sempre pertany.



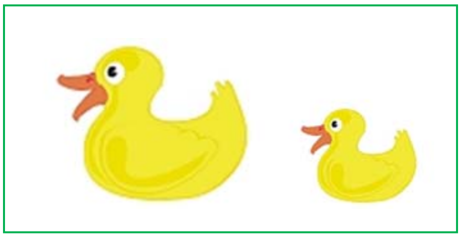
Activitats proposades

17) Repeteix les activitats resoltes. Modifica al teu gust colors i línies.
18) Mou un dels vèrtexs originals del triangle i indica quines coses romanen invariants.
19) Comprova que es verifiquen les propietats de *circumcentre*, com a centre de la circumferència circumscrita, *de l'incentre*, com a centre de la circumferència inscrita.
20) El *baricentre* divideix a la mitjana en dues part, sent una dos terços de l'altra. Comprova-ho.
21) La recta *d'Euler* passa pel *circumcentre*, el *baricentre* i *l'ortocentre*, i què *l'incentre* no sempre pertany a la recta *d'Euler*. Com ha de ser el triangle perquè pertanga?
22) Mou els vèrtexs del triangle per a determinar si és possible que els seus quatre punts notables coincidisquen.

2. SEMBLANÇA

2.1. Figures semblants

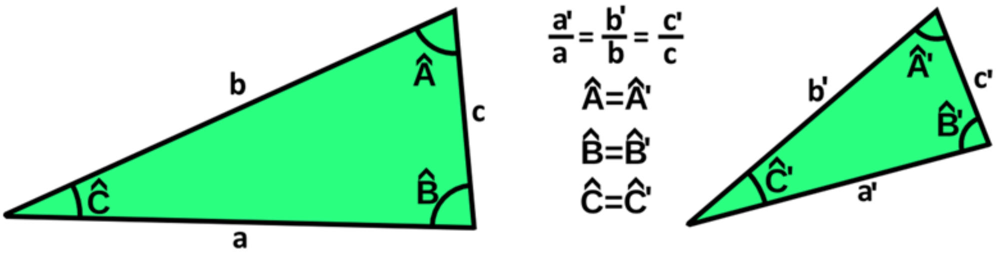
Dues figures semblants tenen *la mateixa forma*. És molt útil saber reconéixer la semblança per a poder estudiar una figura i inferir així propietats d'una figura semblant a ella que és més gran o inaccessible. La semblança conserva els angles i manté la proporció entre les distàncies.



Dos polígons són semblants si els seus costats són proporcionals i els seus angles són iguals.

2.2. Triangles semblants. Criteris de semblança.

Dos triangles són **semblants** tenen tots els angles iguals i els costats proporcionals.



Per reconéixer dos triangles semblants no cal conéixer tots els costats i angles, és prou amb què es complisca algun dels següents **criteris de semblança.**

Dos triangles són semblants sí:

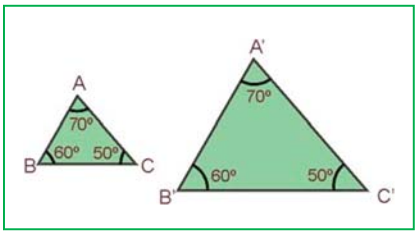
Primer: Tenen dos angles iguals.

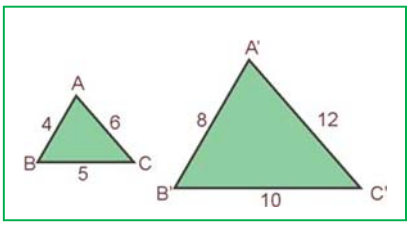
Segon: Tenen els tres costats proporcionals.

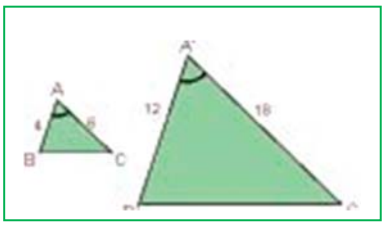
Tercer: Tenen dos costats proporcionals i l'angle que formen és igual.

La demostració es basa en els criteris d'igualtat de triangles. Ja saps que dos triangles són iguals si tenen els seus tres costats iguals i els seus tres angles iguals, però no cal que es verifiquen aqueixes sis igualtats perquè ho siguen. Basta per exemple que tinguen un costat i dos angles iguals. Així, es pot construir un triangle igual a un dels donats en posició *Tales* amb el segon i deduir la semblança.

Exemple







Autor: Pedro Luis Suberviola
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

Activitats proposades

23) Indica si són semblants els següents parells de triangles:

a) Un angle de 80º i un altre de 40º. Un angle de 80º i un altre de 60º.

b) Triangle isòsceles amb angle desigual de 70º. Triangle isòsceles amb angle igual de 50º.

c) A = 30º, b = 7 cm, c = 9 cm. A'= 30º, b' = 3.5 cm, c' = 4.5 cm

d) a = 4 cm, b = 5 cm, c = 7 cm. a' = 10 cm, b' = 12.5 cm, c' = 24.5 cm

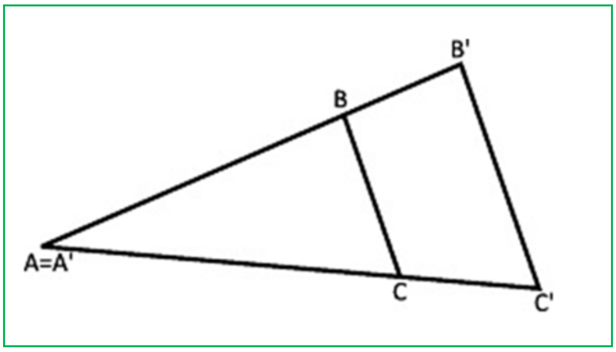
24) Calcula el valor desconegut perquè els triangles siguen semblants:

a) a = 9 cm, b = 6 cm, c = 12 cm. a' = 6 cm, b' = 4 cm, c'?

b) A = 45º, b = 8 cm, c = 4 cm. A' = 45º, b' = 8 cm, a'?

25) Un triangle té costats de 6 cm, 7 cm i 7 cm. Un triangle semblant a ell té un perímetre de 60 cm. Quant medeixen els seus costats?

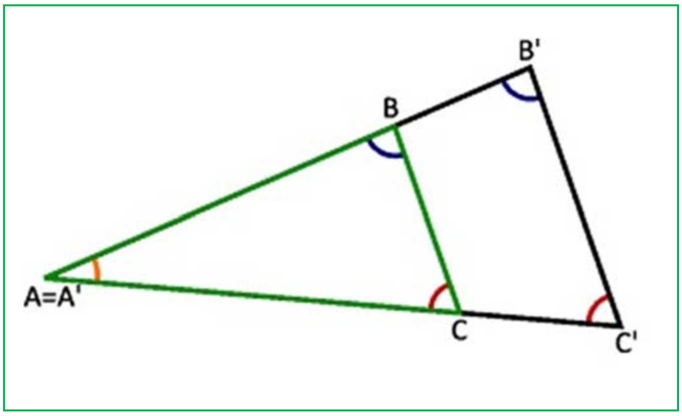
2.3. Triangles en posició de Tales



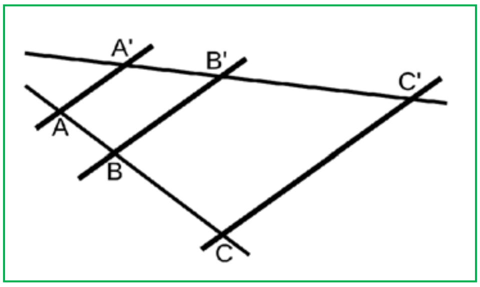
Diem que dos triangles estan en posició de Tales quan dos dels costats de cada un estan sobre les mateixes rectes i els altres costats són paral·lels.

Els angles són iguals. Un perquè és el mateix. Els altres per estar formats per rectes paral·leles. Per tant, pel primer criteri de semblança de triangles, els triangles són proporcionals i es compleix:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}$$



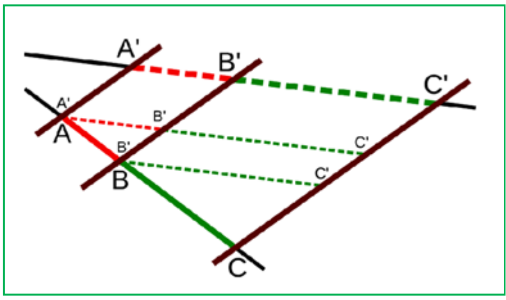
2.4. Teorema de Tales



El teorema de Tales estableix una relació entre els segments formats quan dues rectes qualssevol són tallades per diverses rectes paral·leles.

En la segona figura es pot apreciar com es formen en aquest cas tres triangles semblants i que per tant s'estableix que:

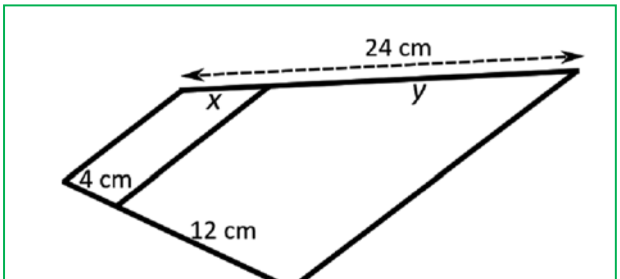
$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}$$



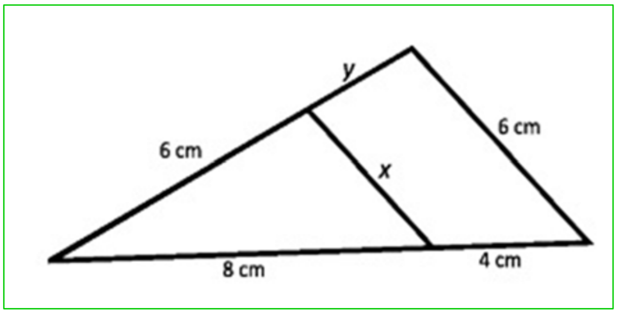
Observació: En aquest cas no relacionem els segments *AA'*, *BB'* i *CC'* que es formen sobre els costats paral·lels.

Activitats proposades

26) Calcula els valors de *x* i *y* en les següents figures.



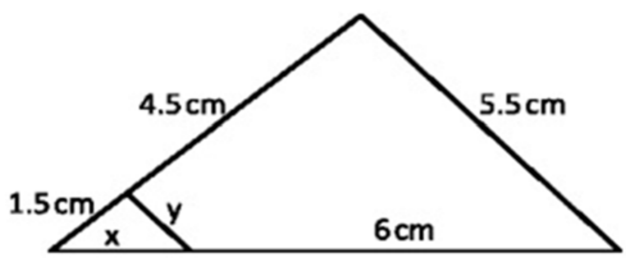
a)

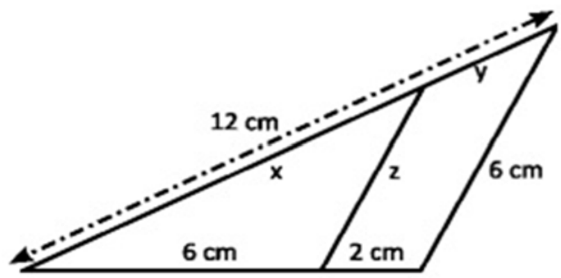


27) Un pal molt alt se subjecta amb cables d'acer que van del seu extrem superior al sòl. La distància de l'ancoratge d'un dels cables a la base del pal és 6 metres. Posem una barra de 120 centímetres de manera que està perpendicular al sòl i justa toca el sòl i el cable. La seua distància a l'ancoratge del cable és 90 centímetres. Calcula la longitud del pal i la longitud del cable d'acer.

28) Maria medeix 160 cm. La seua ombra medeix 90 cm. En aqueix mateix instant es mesura l'ombra d'un edifici i medeix 7,2 m. Quant medeix l'edifici?

29) Calcula les longituds que s'indiquen:



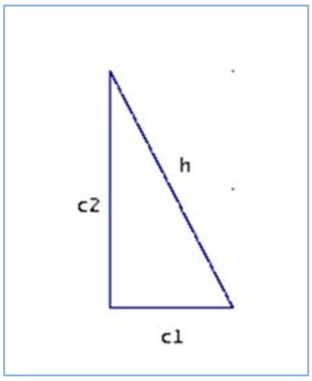


Autor: Pedro Luis Suberviola
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

3. ANGLES, LONGITUDS I ÀREES

3.1. Teorema de Pitàgores

Teorema de Pitàgores



A un triangle rectangle, la hipotenusa al quadrat és igual a la suma dels quadrats dels catets.

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2$$

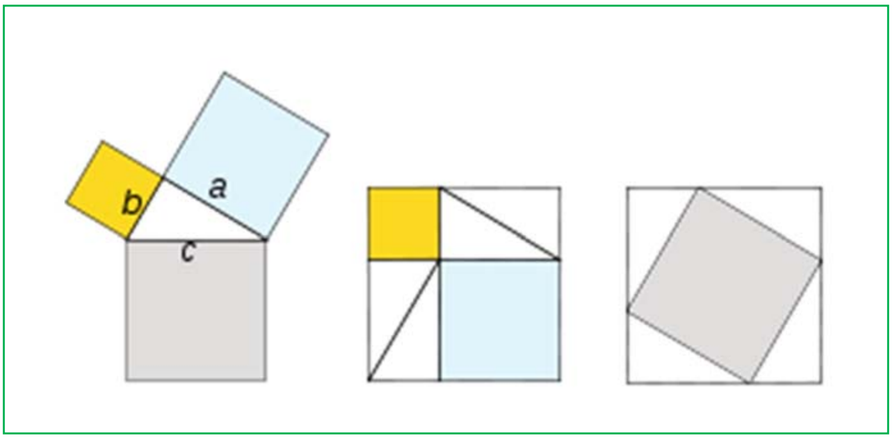
Utilitzant el teorema de Pitàgores podem obtindre el valor de la hipotenusa d'un triangle rectangle si coneixem el que medeixen els catets: $h = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, o també podem obtindre el valor d'un catet a partir dels valors de la hipotenusa i de l'altre catet: $c_2 = \sqrt{h^2 - c_1^2}$

Exemple:

e) Si els catets d'un triangle rectangle medeixen 10 *cm* i 24 *cm*, la seua hipotenusa val 26 *cm*, ja que:

$$h = \sqrt{10^2 + 24^2} = \sqrt{100 + 576} = \sqrt{676} = 26cm.$$

Interpretació del teorema de Pitàgores



Si dibuixem un quadrat de costat la hipotenusa *h* d'un triangle rectangle, la seua àrea és h^2(veure el primer exemple de 1.1). Si dibuixem dos quadrats de costats els catets c_1i c_2d'aqueix triangle rectangle, les seues àrees són c_1^2, c_2^2. Aleshores el teorema de Pitàgores diu que l'àrea del primer quadrat (quadrat gris de la figura de l'esquerra) és igual a la suma de les àrees dels altres dos (quadrats blau clar i groc de la figura de l'esquerra).

Existeixen més de 367 demostracions diferents del Teorema de Pitàgores.

Una comprovació gràfica consisteix a dibuixar dos quadrats iguals de costat la suma dels catets *a* i *b* (figures del centre i de la dreta). En un es dibuixen els quadrats de costat *a* i *b*, en groc i blau en el dibuix. En l'altre el quadrat de costat la hipotenusa (en gris en el dibuix). Observa que llevant 4 triangles iguals al de partida ens queda que el quadrat gris és igual a la suma dels quadrats groc i blau.

Per tant:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Activitats proposades

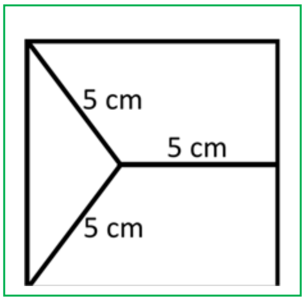
30) És possible trobar un triangle rectangle els catets del qual mesuren 5 i 12 *cm* i la seua hipotenusa 24 *cm*? Si la teua resposta és negativa, troba la mesura de la hipotenusa d'un triangle rectangle els catets de la qual mesuren 5 i 12 *cm*. Utilitza calculadora per a resoldre aquesta activitat si et resulta necessària.

31) Calcula la longitud de la hipotenusa dels següents triangles rectangles de catets:

a) 6 *cm* i 8 *cm* b) 4 *m* i 3 *m* c) 8 *dm* i 15 dm d) 13,6 *km* i 21,4 *km*.

32) Calcula la longitud del catet que falta als següents triangles rectangles d'hipotenusa i catet:

a) 26 *cm* i 10 *cm* b) 17 *m* i 8 *m* c) 37 *dm* i 35 *dm* d) 14,7 *km* i 5,9 *km*



33) Calcula el costat del quadrat de la figura del marge:

34) Calcula l'àrea d'un triangle equilàter de costat 9 *m*.

35) Calcula l'àrea d'un hexàgon regular de costat 2 *cm*.

36) Calcula el volum d'un tetraedre regular de costat 7 *dm*.

37) Calcula la longitud de la diagonal d'un quadrat de costat 3 *m*.

38) Calcula la longitud de la diagonal d'un rectangle de base 15 *cm* i altura 8 *cm*.

39) Una porteria de futbol mesura 7,32 m d'alt per 2,44 m d'ample. El punt de penal està a 10 metres. Calcula la distància que recorre el baló en:

a) Un tir directe a la base del pal.

b) Un tir directe a l'escaire.

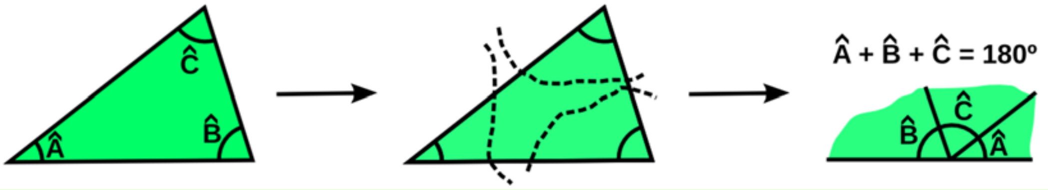
40) Demostra que el diàmetre d'un quadrat de costat *x* és $d = \sqrt{2}x$.

41) Demostra que l'altura d'un triangle equilàter de costat *x* és $d = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

Autor: Pedro Luis Suberviola
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

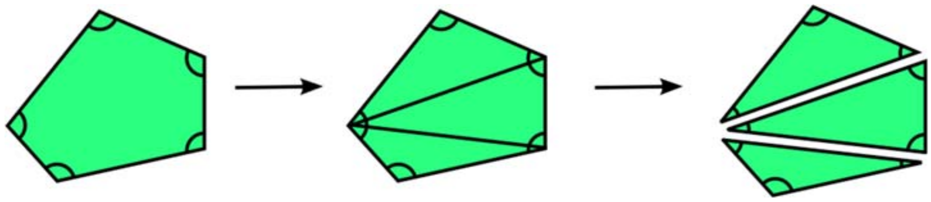
3.2. Suma d'angles d'un polígon

La suma dels angles interiors d'un triangle és 180º .



La suma dels angles interiors d'un polígon de n costats és $(n-2)\cdot180º$.

1. Per comprovar-lo hi ha prou amb traçar les diagonals d'un polígon des d'un vèrtex i ho haurem dividit en triangles.

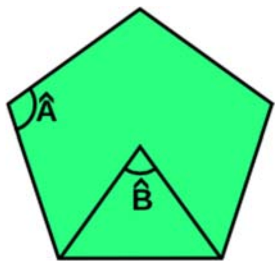


Per tant:

Polígon	**Suma d'angles**	**Polígon**	**Suma d'angles**
Triangle	180º	Quadrilàter	180º · 2 = 360º
Pentàgon	180º · 3 = 540º	Hexàgon	180º · 4 = 720º

Si el polígon de n costats és regular, tots els angles interiors són iguals i per a calcular el valor del seu angle interior es divideix entre n la suma dels angles interiors.

Exemple:



- *En un pentàgon la suma dels angles centrals és* 180 · 3 = 540º.

Per tant **l'angle interior:** $\hat{B} = \frac{540º}{5} = 108º$

També és molt comú calcular **l'angle central**: $\hat{B} = \frac{360º}{5} = 72º$

Activitats proposades

42) Calcula els angles central i interior del triangle equilàter, quadrat, pentàgon regular, hexàgon regular i enneàgon regular.

43) Justifica que un hexàgon regular es pot descompondre en 6 triangles equilàters.

44) Dos angles d'un triangle isòsceles mesuren 35º i 72º, quant pot mesurar l'angle que falta?

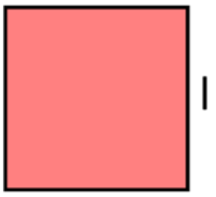
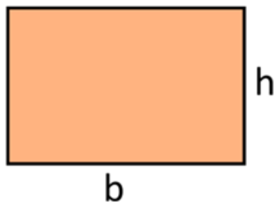
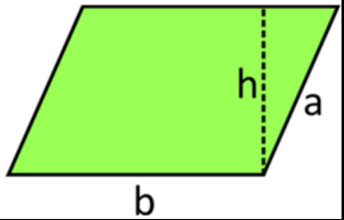
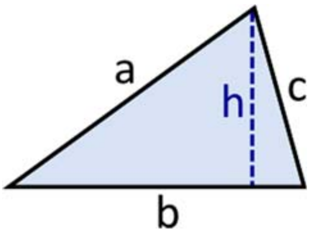
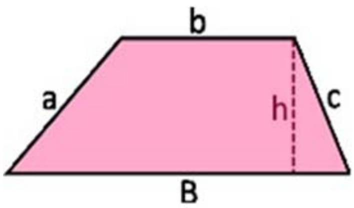
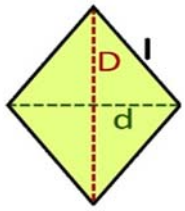
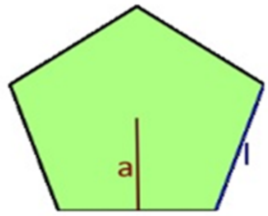
45) Dos angles d'un trapezi isòsceles mesuren 35º i 72º, quant mesuren els angles que falten?

46) Quant mesura la suma dels angles interiors d'un decàgon irregular?

Autor: Pedro Luis Suberviola
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

3.3. Longituds i àrees de figures poligonals

Recorda que:

<table>
<tr><th>Quadrat</th><th>Rectangle</th><th colspan="2">Romboide</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Perímetre: P = 4l Àrea: A = l^2</td><td>P = 2b + 2h   A = b · h</td><td colspan="2">P = 2b + 2a   A = b · h</td></tr>
<tr><th>Triangle</th><th>Trapezi</th><th>Rombe</th><th>Polígon regular de n costats</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>P = a + b + c $A = \frac{b \cdot h}{2}$</td><td>P = a + B + b + c $A = \frac{B+b}{2} \cdot h$</td><td>4l $A = \frac{d \cdot D}{2}$</td><td>P = n · l $A = \frac{P \cdot a}{2}$</td></tr>
</table>

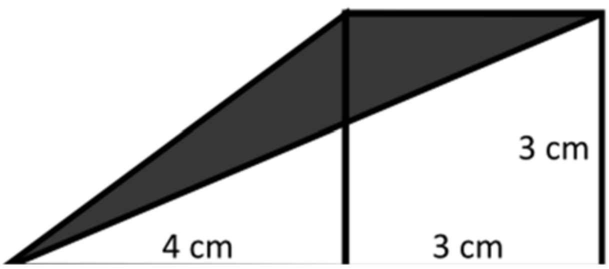
Activitats proposades

47) Calcula l'àrea i el perímetre d'un trapezi isòsceles de bases 50 cm i 26 cm i altura 5 cm.

48) Calcula l'àrea i perímetre d'un trapezi rectangle de bases 100 cm i 64 cm, i d'altura 77 cm.

49) Calcula l'àrea i el perímetre d'un trapezi isòsceles de bases 80 cm i 60 cm i costats laterals 29 cm.

50) Utilitza el teorema de Tales per a determinar l'àrea i el perímetre de la zona ombrejada de la figura.



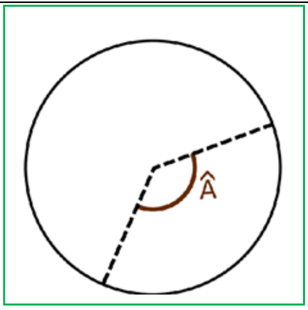
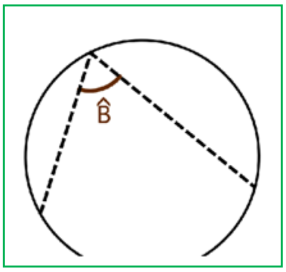
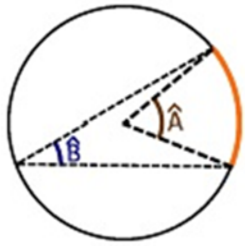
51) Tenint en compte que un hexàgon regular es pot dividir en sis triangles equilàters (l'altura del quals és l'apotema de l'hexàgon regular)calcula, l'àrea d'un hexàgon regular de 5 cm de costat.

52) Volem cobrir el pla amb polígons regulars de 100 cm^2. Les úniques opcions possibles són el triangle equilàter, el quadrat i l'hexàgon. Calcula quin d'aquestes tres figures té menor perímetre. Quin animal aplica aquest resultat? [Utilitza la relació entre costat i altura d'un triangle equilàter obtinguda anteriorment]

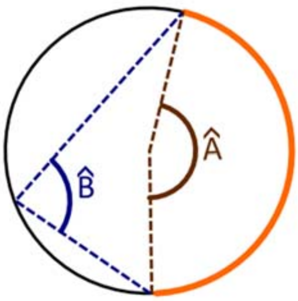
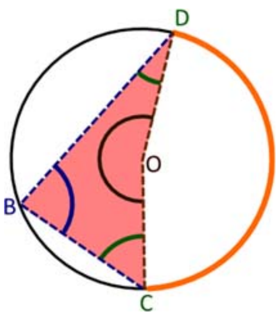
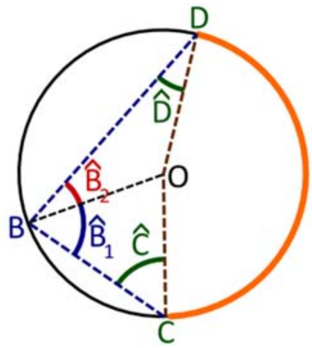
Autor: Pedro Luis Superviola
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

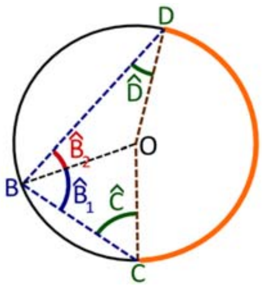
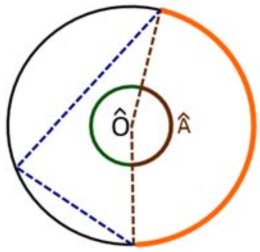
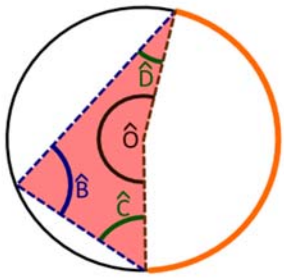
3.4. Angles de la circumferència

En una circumferència tenen especial importància els **angles centrals** (tenen el seu vèrtex en el centre de la circumferència) i els **angles inscrits** (tenen el seu vèrtex en un punt de la circumferència).

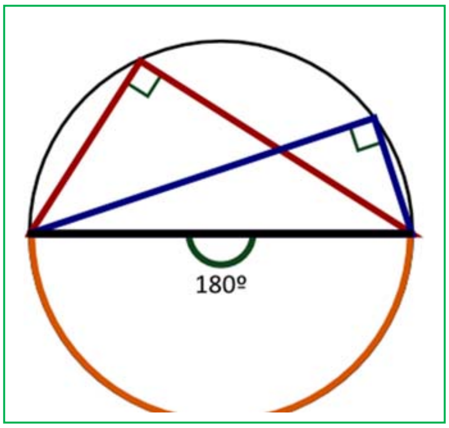
		
Angle central	**Angle inscrit**	$\hat{B} = \frac{\hat{A}}{2}$

Es verifica a més que un angle inscrit medeix la meitat que un angle central que comprén el mateix arc de circumferència.

Demostració de la propietat		
		
Hem de comprovar que l'angle $\widehat{B}$és la meitat de $\widehat{A}$. $2\widehat{B} = \widehat{A}$	Estudiarem el quadrilàter *BCOD* i aplicar en l'últim pas que els seus angles sumen 360º.	*BO* i *OD* són radis de la circumferència. Per tant *BDO* és isòsceles i$\widehat{B_2}$i$\widehat{D}$són iguals.

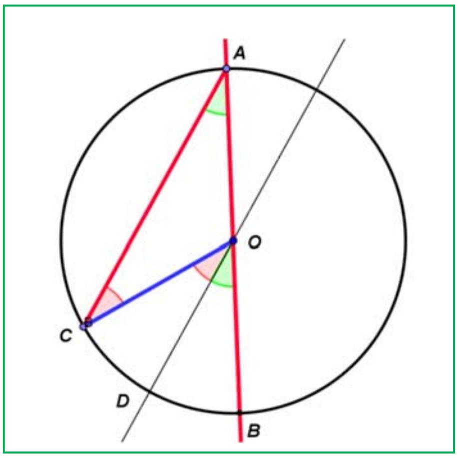
		
El mateix per a $\widehat{B_1}$i$\widehat{C}$ Aleshores $\hat{C}+\hat{D}=\widehat{B_2}+\widehat{B_2}=\hat{B}$	A més l'angle $\hat{O}$ del quadrilàter medeix 360º – $\hat{A}$.	$\hat{B}+(\hat{C}+\hat{D})+\hat{O}$ =360º. $\hat{B}+(\hat{B})$**+360º**–$\hat{A}$= =360º·2$\hat{B}=\hat{A}$

Tales va observar que en qualsevol triangle rectangle el circumcentre sempre estava en el punt mitjà de la hipotenusa.



53) Un angle inscrit en la circumferència que comprén un diàmetre és un angle recte. Per què? Raona la resposta.

54) En quines posicions té un futbolista el mateix angle de tir que des del punt de penal?



55) ***Una altra demostració. Intenta comprendre-la. Tracem*** un angle inscrit en la circumferència *CAB* que tinga un costat que passe pel centre *O* de la circumferència. Tracem el seu central *COB*. El triangle *OAC* és isòsceles perquè dos dels seus costats són radis de la circumferència. Tracem per *O* una recta paral·lela a *AC*. L'angle *CAO* és igual a l'angle *DOB* perquè tenen els seus costats paral·lels. L'angle *ACO* és igual a l'angle *COD* per alterns interns entre paral·leles, i és igual a l'angle *CAO* per ser el triangle isòsceles. Per tant el central mesura el doble que l'angle inscrit.

3.5. Longituds i àrees de figures circulars

Ja saps que:

El **nombre π** es defineix com el quocient entre la longitud de la circumferència i el seu diàmetre.

π = Longitud de la circumferència / Diàmetre

Ja saps que és un nombre irracional, amb infinites xifres decimals no periòdiques. Una aproximació de **π** és 3,14, una altra 3,1416, i una altra 3,141592. Des de l'antiguitat més llunyana fins hui en dia els matemàtics continuen investigant sobre ell.

Si una circumferència té un ràdio r, llavors el seu diàmetre mesura $2r$, i la seua longitud, per la definició de π, mesura $2·π·r$.

Longitud de la circumferència = $2·π·r$.

Per a calcular la **longitud d'un arc de circumferència** que comprén un angle de α graus, hem de tindre en compte que la circumferència completa comprén un angle de 360º. Per tant:

$$L = 2·π·r·\alpha/360.$$

L'àrea del cercle és igual al producte del nombre nombre pel quadrat del radi.

$$A = π·r^2.$$

L'àrea d'una corona circular és igual a l'àrea del cercle major menys l'àrea del cercle menor.

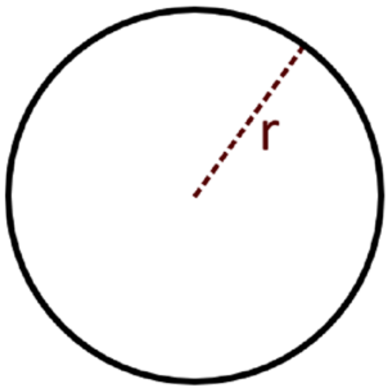
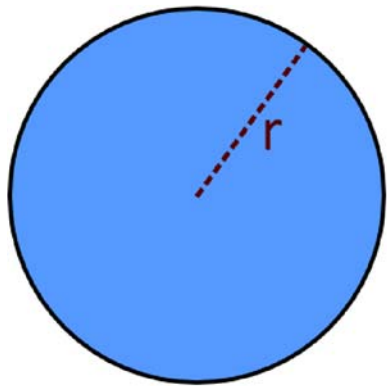
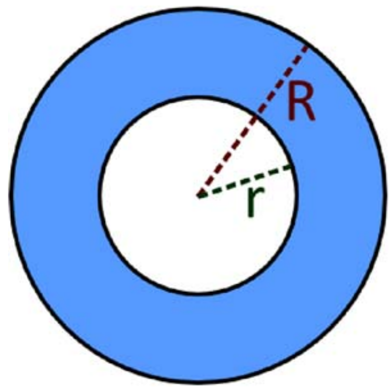
$$A = π · R^2 – π · r^2 = π·(R^2 – r^2)$$

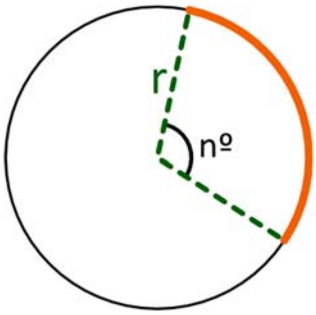
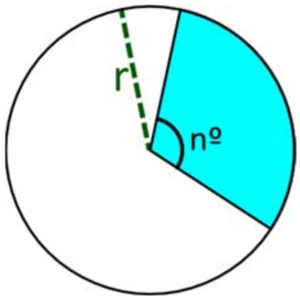
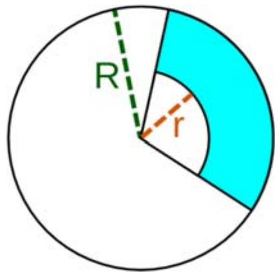
L' **àrea d'un sector circular** que comprén un angle de n graus és igual a:

$$A = π·r^2·n/360.$$

Per a trobar **l'àrea del segment circular restem** a l'àrea del sector circular l'àrea del triangle.

En resum

<table>
<tr><th>Longitud de la circumferència</th><th>Àrea del cercle</th><th>Àrea de la corona circular</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>L = 2 · π · r</td><td>A = π · r²</td><td>A = π · R² – π · r² = π · (R² – r²)</td></tr>
<tr><td colspan="3">π és la raó entre el la longitud d'una circumferència i el seu diàmetre.
És un nombre irracional, amb infinites xifres decimals no periòdiques.
Una aproximació de π és 3,14, una altra 3,1416 i una altra 3,141592</td></tr>
<tr><th>Longitud de l'arc de circumferència</th><th>Àrea del sector circular</th><th>Àrea del trapezi circular</th></tr>
</table>

		
$L = \dfrac{nº \cdot 2 \cdot \pi \cdot r}{360º}$	$A = \dfrac{nº \cdot \pi \cdot r^2}{360º}$	$A = \dfrac{nº \cdot \pi \cdot (R^2 - r^2)}{360º}$

Activitats resoltes

f) La circumferència de radi 5 *cm* té una longitud L = 2·π·*r* = 2·π·5 = 10·π ≈ 31,416.

g) Les rodes d'un carro mesuren 60 *cm* de diàmetre, i tenen 16 radis. La longitud de l'arc entre cada radi és:

L = 2·π·*r*·α/360 = 60·π/16 ≈ 11,78 *cm*.

h) L' àrea d'un cercle de radi 8 *cm* és A = 64 π ≈ 201,06 cm^2. I el d'un cercle de 10 *cm* de radi és

A = π ≈ 314,16 cm^2.

1) L' àrea d'un cercle de diàmetre 10 m és A = 25π ≈ 78,54 m^2.

2) L'àrea de la corona circular formada per les circumferències concèntriques de radis 9 *cm* i 5 *cm* és igual a: A = π·(R^2 – r^2) = π·(9^2 – 5^2) = π·(81 – 25) = π·56 ≈ 175,93 cm^2.

3) Per a trobar l'àrea del *sector* circular de radi 10 m que comprén un angle de 90º, calculem l'àrea del cercle complet: π·10^2 = 100 π, i trobem la proporció:

A_S = 100π·90/360 = 25π ≈ 78,54 m^2.

i) Per a trobar l'àrea del *segment circular*, restem a l'àrea anterior l'àrea del triangle rectangle de base 10 m'i altura 10 *m*, A_T = 10·10/2 = 50 m^2. Doncs l'àrea del segment és:

A = A_S – A_T = 78,54 – 50 = 28,54 m^2.

Activitats proposades

56) Les circumferències de grandària real de la il·lustració del marge tenen com a radi, la menor 1 *cm*, la següent, un poc més fosca 2 *cm*, la clara següent 3 *cm*, i així, augmenta un centímetre. Calcula les longituds de les 10 primeres circumferències.

57) La Terra és aproximadament una esfera de radi 6.379 *km*. Quant mesura l'Equador?

58) Antigament es definia un metre com: *"la deu milionèsima part del quadrant del meridià terrestre que passa per París"*. Segons aquesta definició, quant mesura (en metres) el diàmetre terrestre?

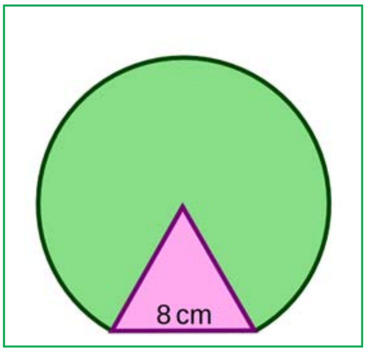
59) Un far gira descrivint un arc de 170º. A una distància de 5 *km*, quina és la longitud de l'arc de circumferència en què es veu la llum?

60) Determina el costat del triangle equilàter de la figura construït usant arcs de circumferència de 10 cm de radi.

61) Calcula l'àrea tancada per una circumferència de radi 9 cm.

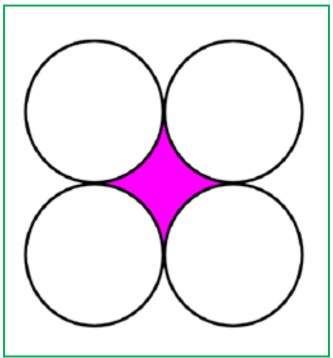
62) Calcula l'àrea de la corona circular de radis 12 i 5 *cm*.

63) Calcula l'àrea del sector circular i del segment circular de radi 6 *cm* i que forma un angle de 60º.

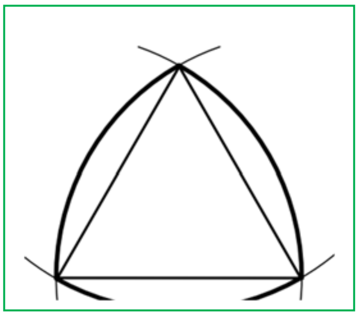


64) Calcula l'àrea del sector de corona circular de radis 25 *cm* i 18 *cm* i que forma un angle de 60º.

65) Calcula l'àrea tancada entre aquests cercles de 5 cm de radi.



66) Volem construir una rotonda per a una carretera de 9 metres d'ample de manera que el cercle interior de la rotonda tinga el mateix àrea que la corona circular que forma la carretera. Quin radi ha de tindre la rotonda?

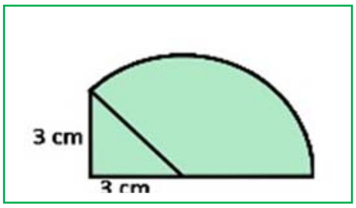


67) Una figura típica de l'arquitectura gòtica es dibuixa a partir d'un triangle equilàter traçant arcs de circumferència amb centre en cada un dels seus vèrtexs i que passen pels dos vèrtexs restants. Calcula l'àrea d'una d'aquestes figures si es construeix a partir d'un triangle equilàter de 2 metres de costat. Calcula l'àrea tancada entre aquests cercles de 5 cm de radi.

68) Calcula l'àrea i el perímetre de la figura formada per un triangle equilàter de 8 cm de costat sobre el qual es construeix un sector circular.

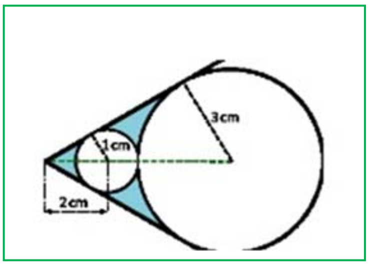
69) Hi ha 5 circumferències inscrites en una circumferència de 12 cm de radi tal com indica la figura. Quant val l'àrea ombrejada?

70) Un formatge cilíndric té una base circular de 14 cm de diàmetre i una etiqueta circular de 8 cm de diàmetre. Es talla una falca de 70º. Quina àrea té el tros d'etiqueta tallada?

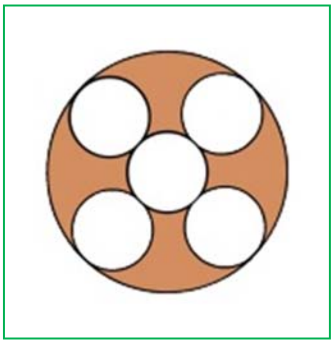


71) D'un formatge de 18 cm de diàmetre tallem una falca de 50º. L'etiqueta té 7 cm de radi. Quina àrea del formatge està visible?

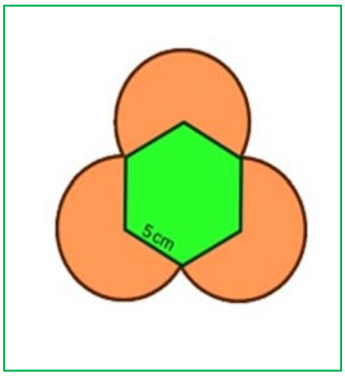
72) A partir d'un triangle rectangle isòsceles de 3 cm de catet construïm un sector circular. Calcula l'àrea de la figura.



73) En dues rectes que formen 60º s'inscriuen dues circumferències tangents entre si. La primera té el centre a 2 centímetres del vèrtex i el radi d'1 centímetre. La segona té de radi 3 centímetres. Quant val l'àrea ombrejada?



74) Tracem tres arcs circulars des de tres vèrtexs d'un hexàgon de 5 cm de costat. Calcula l'àrea i el perímetre de la figura.



Tot el que hem vist en aquest capítol, excepte l'enunciat del teorema de Tales i la semblança de triangles ja ho coneixies. Ho vas estudiar a primer d'ESO. Allí es va veure amb deteniment. Si no ho recordes i necessites més explicacions o problemes pots veure-ho al capítol 8: Figures Planes, de Primer d'ESO, pàgina 184, i al capítol 9: Longituds i àrees, de primer d'ESO, pàgina 216.

CURIOSITATS. REVISTA

Un poc d'historia de la Geometria

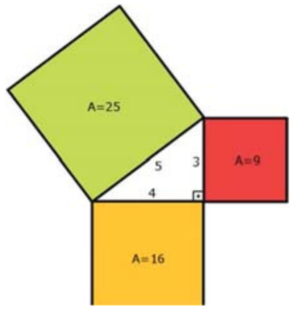
Es conjectura que l'inici de la Geometria pot ser anterior a **egipcis i babilonis**, però com no hi ha informació escrita, és impossible afirmar-ho.

Heròdot opinava que s'havia originat a Egipte per la necessitat de refer els límits de les terres després de les inundacions del Nil.

Al *papir de Moscú* apareix el volum d'una piràmide quadrada

A Mesopotàmia es coneixia molta Geometria. En el llistó Plimpton, que no es conserva sencera, es poden identificar amb dificultat ternes *pitagòriques* (molt anteriors a *Pitàgores*).

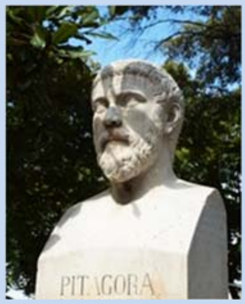
La **terna pitagórica** més coneguda es 3, 4 i 5. Es feien nucs a aqueixes distàncies i així es construïen triangles rectangles.

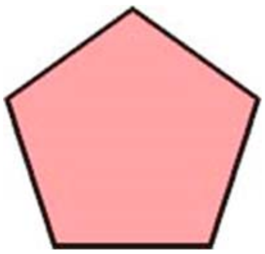


En altres llistons babilònics, les de Susa, apareixen les àrees dels polígons i les relacions entre elles

Encara que podem conéixer molt poc de **Tales** i de **Pitàgores**, perquè no ha quedat cap obra escrita per ells, s'accepta que van ser grans matemàtics i geòmetres.

Ambdós van viatjar als centres del saber, Egipte i Babilònia. Ja hem vist que ja es coneixia l'anomenat teorema de Tales o de Pitàgores. La seua importància està en la forma de pensar, a utilitzar el raonament deductiu per a obtindre els resultats matemàtics.





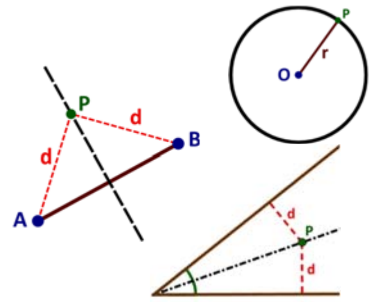
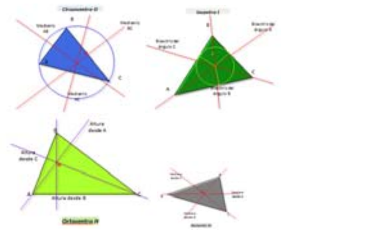
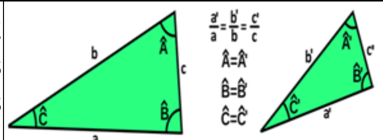
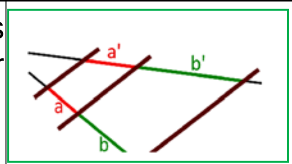
El pentàgon, i l'estrela pitagòrica, que obtens traçant les diagonals del pentàgon, tenen grans propietats relacionades amb el nombre d'or, ho recordes? L'escola va prendre a l'estrela com a emblema.

Teano, la dona de Pitàgores, va dirigir l'Escola Pitagòrica a la mort d'aquest.

Euclides d'Alexandria és l'autor dels *Elements*, on destaca la forma d'exposar el fonament de la Matemàtica amb un orde lògic

Consta de 13 llibres sent els sis primers de definicions i postulats construeix el saber.

RESUM

Llocs geomètrics	**Circumferència** és el lloc geomètric dels punts del pla que equidisten del centre. **Mediatriu d'un segment** és el lloc geomètric dels punts del pla que equidisten dels extrems del mateix. Donat un angle delimitat per dues rectes, la **bisectriu de l'angle** és el lloc geomètric dels punts del pla que equidisten de les mateixes.	
Rectes i punts notables d'un triangle	Mediatrius i circumcentre Bisectrius i incentre Altures i ortocentre Mitjanes i baricentre	
Semblança	Dues figures semblants tenen *la mateixa forma*. Dos polígons són semblants si els seus costats són proporcionals i els seus angles són iguals.	
Criteris de semblança de triangles	Dos triangles són semblants si: 1) Tenen 2 angles iguals. 2) Tenen els 3 costats proporcionals. 3) Tenen dos costats proporcionals i l'angle que formen és igual	
Teorema de Tales	Estableix una relació entre els segments formats quan dues rectes qualssevol són tallades per diverses rectes paral·leles: $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{a'+b'}{a+b}$	
Teorema de Pitàgores	A un triangle rectangle, la hipotenusa al quadrat és igual a la suma dels quadrats dels catets: $h^2 = c_1^2 + c_2^2$ $h = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5cm.$	
Suma dels angles d'un polígon	La suma dels angles interiors d'un triangle és 180º	

EXERCICIS I PROBLEMES

Llocs geomètrics

1. Dibuixa al teu quadern un triangle de costats 2 cm, 3 cm i 4 cm. Traça en ell, utilitzant regla i compàs, les mediatrius i bisectrius. Determina el circumcentre i l'incentre. Traça les circumferències inscrites i circumscrites.

2. Dibuixa al teu quadern un triangle de costat 5 cm i angles adjacents al mateix de 30º i 50º. Traça en ell, utilitzant regla i compàs, les mitjanes i les altures. Determina el seu ortocentre i el seu baricentre.

3. Dibuixa al teu quadern un triangle amb un angle de 50º comprés entre dos costats de 5 i 8 cm. Obtín el seu circumcentre i el seu incentre.

4. Com són les rectes i punts notables d'un triangle rectangle?

5. Com són les rectes i punts notables d'un triangle isòsceles?

Semblança

6. Indica si són semblants els següents parells de triangles:

a)Un angle de 70º i un altre de 20º. Un angle de 90º i un altre de 20º.

b) Triangle isòsceles amb angle desigual de 80º. Triangle isòsceles amb un angle igual de 50º.

c) A = 40º, b = 8 cm, c = 10 cm. A'= 40º, b' = 4 cm, c' = 5 cm

d) a = 3 cm, b = 4 cm, c = 6 cm. a' = 9 cm, b' = 12 cm, c' = 19 cm

7. Calcula el valor desconegut perquè els triangles siguen semblants:

a) a = 15 cm, b = 9 cm, c = 12 cm. a' = 10 cm, b' = 4 cm, ¿c'?

8. b) A = 50º, b = 6 cm, c = 4 cm. A' = 50º, b' = 18 cm, ¿a'?

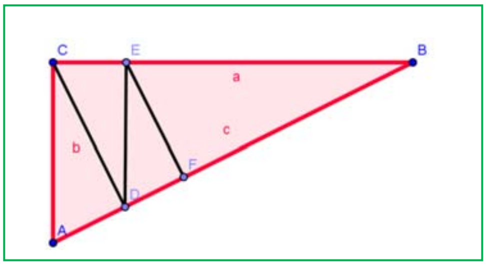
9. Les longituds dels costats d'un triangle són 12 cm, 14 cm i 14 cm. Un triangle semblant a ell té un perímetre de 90 cm. Quant mesuren els seus costats?

10. Dibuixa al teu quadern un pentàgon regular. Traça les seues diagonals. El triangle format per un costat del pentàgon i les dues diagonals del vèrtex oposat es denomina triangle auri, perquè en dividir el costat major entre el menor s'obté el nombre d'or, quant mesuren els seus angles? Busca en la figura que has traçat altres triangles auris. Quina és la relació de proporcionalitat?

11. Quant és la suma dels angles interiors d'un rombe?

12. L'ombra d'un edifici mesura 15 m, i la del primer pis 2 m. Sabem que l'altura d'aqueix primer pis és de 3 m, quant mesura l'edifici?

13. En el museu de Bagdad es conserva un llistó en què apareix dibuixat un triangle rectangle *ABC*, de costats a = 60, b = 45 i c= 75, subdividit en 4 triangles rectangles menors *ACD*, *CDE*, *DEF* i *EFB*, i l'escriba calcula la longitud del costat *AD* com 27. Ha utilitzat la semblança de triangles? Com es podria calcular? Quines dades necessites? Calcula l'àrea del triangle *ABC* i del triangle *ACD*. Determina la longitud dels segments *CD*, *DE* i *EF*.



Autor: Pedro Luis Suberviola
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

14. Demostra que en dos triangles semblants les mitjanes són proporcionals.

15. Un triangle rectangle isòsceles té un catet de longitud 7 cm, igual a la hipotenusa d'un altre triangle semblant al primer. Quant valen les àrees d'ambdós triangles?

16. El mapa a escala 1:3000000 d'un poble té una àrea de 2500 cm2, quant mesura la superfície verdadera del dit poble?

17. Unint els punts mitjans dels costats d'un triangle s'obté un altre triangle. Com són? Quina relació hi ha entre els seus perímetres? I entre les seues àrees?

18. L'altura i la base d'un triangle rectangle mesuren respectivament 4 i 7 cm; i és semblant a un altre de base 26 cm. Calcula l'altura del nou triangle i les àrees d'ambdós.

Angles, longituds i àrees

19. Construeix un triangle coneixent l'altura sobre el costat a, el costat a i el c.

20. Calcula la longitud del costat d'un octògon regular inscrit en una circumferència de radi 5 cm.

21. Calcula l'apotema d'un hexàgon regular costat 7 cm.

22. Calcula l'àrea d'un cercle la circumferència del qual mesura 50 cm.

23. Calcula la longitud d'una circumferència el cercle de la qual té una superfície que medeix 50 cm2.

24. La Terra fa una volta cada 24 hores, a quina velocitat es mou un punt de l'Equador?

25. Quina relació hi ha entre les àrees un triangle inscrit en un cercle i la del cercle?

26. Els grecs coneixien les dos següents possibles formes de construir un triangle rectangle amb els seus tres costats de longitud un nombre natural, sense més que donar valors a n. Comprova si es verifiquen per a n = 1, 2, …. a) Catets: 2n y n2 – 1, hipotenusa: n2 + 1. b) Catets: 2n + 1 y 2n2 + 2n, hipotenusa: 2n2 + 2n + 1.

27. En augmentar en 3 cm el costat d'un quadrat la seua àrea augmenta 32 cm2 Quant mesura el costat de dites quadrats?

28. Es vol cobrir un terreny circular de 25 m de diàmetre amb graveta, tirant 10 kg per cada metre quadrat. Quanta graveta es necessita?

29. Una escala de 4 m de longitud està recolzada sobre una paret. El peu de l'escala dista 1,5 m de la paret. A quina altura arriba l'escala sobre la paret?

30. Calcula l'àrea de la circumferència circumscrita a un rectangle de costats 7 i 9 cm.

31. Calcula l'àrea d'un hexàgon regular de 3 cm de costat. Prolonga els costats de l'hexàgon i dibuixa un hexàgon estrelat. Calcula la seua àrea.

32. El senyal de circulació de STOP té forma d'octògon regular. La seua altura mesura 90 cm, i el seu costat 37 cm, quant mesura la seua superfície?

33. Calcula l'àrea d'un triangle equilàter de costat 10 cm.

34. Calcula l'àrea d'un hexàgon regular de perímetre 60 cm.

35. Calcula l'àrea d'un trapezi isòsceles de base menor 5 cm, costat 3 cm i altura 4 cm.

36. Calcula l'àrea d'un trapezi isòsceles de bases 8 i 6 cm i costat 3 cm.

37. Calcula l'àrea i el perímetre d'un rectangle de costat 4 cm i diagonal 7 cm.

38. Calcula l'àrea i el perímetre d'un quadrat de diagonal 9 cm.

39. Calcula l'àrea i el perímetre d'un triangle isòsceles de base 8 cm i altura 6 cm.

40. Un triangle mesura d'altura π i de base $\pi + 1$. És rectangle?

41. Dibuixa un triangle rectangle isòsceles de catets de longitud 1, quant mesura la hipotenusa? Prenent la dita hipotenusa com a catet i amb l'altre catet igual a 1 dibuixa un nou triangle rectangle. Quant mesura la nova hipotenusa? Continua el procés 4 vegades, quant mesura l'última hipotenusa?

42. Dibuixa un triangle rectangle de catets de longitud 1 i 2 cm, quant mesura la hipotenusa? Prenent la dita hipotenusa com a catet i amb l'altre catet de longitud 1 cm dibuixa un nou triangle rectangle.

Quant mesura la nova hipotenusa? Continua el procés 3 vegades, quant mesura l'última hipotenusa?

43. Calcula l'altura d'una piràmide regular quadrangular de costat de la base 10 m i d'aresta 15 m.

44. Calcula la generatriu d'un con de radi de la base 5 m i d'altura 7 m.

45. Dos ascetes hindús viuen en la part alta d'un penya-segat de 10 m d'altura el peu de la qual està a 200 metres del poble més pròxim. Un dels ascetes baixa del penya-segat i va al poble. L'altre, que és mag, ascendeix una distància x i viatja volant en línia recta al poble. Ambdós recorren la mateixa distància. Quant ha ascendit el mag?

46. Quant mesura l'aresta de la base de la piràmide de Keops si mesura 138 m d'altura i 227 m d'aresta?

AUTOAVALUACIÓ

a) Tots els punts que estan a la mateixa distància de dos punts donats estan a:

a) una bisectriu b) una circumferència c) una el·lipse d) una mediatriu

☑ Les tres mitjanes d'un triangle es tallen en el:

a) ortocentre b) baricentre c) incentre d) circumcentre

☑ El circumcentre és el centre de:

a)gravetat del triangle b) la circumferència inscrita c) la circumferència circumscrita

☑ Dos triangles són semblants si:

a) tenen dos angles iguals b) tenen dos costats proporcionals

c) tenen un angle igual d) les seues àrees són semblants

☑ Sabem que els triangles *ABC* i *A'B'C'* són semblants. Calcula el valor de *a'* i *c'* perquè ho siguen, sabent que *a* = 10 cm, *b* = 6 cm, *b'* = 3 cm, *c* = 8 cm:

a) *a'* = 4 cm i *c'* = 6 cm b) *a'* = 5 cm i *c'* = 6 cm

c) *a'* = 4 cm i *c'* = 4 cm d) *a'* = 5 cm i *c'* = 4 cm

☑ Si la hipotenusa d'un triangle rectangle medeix 7 cm i un catet mesura 3 cm, aleshores l'altre catet medeix aproximadament:

a) 6,3 cm b) 5 cm c) 5,8 cm d) 6,9 cm

☑ La suma de los ángulos interiores de un polígono irregular de diez lados vale:

a) 1440º b) 1620º c) 1800º d) 1260º

☑ L' àrea d'un rombe de costat 5 cm i una diagonal de 8 cm medeix:

a) 48 cm^2 b) 36,7 cm^2 c) 24 cm^2 d) 21,2 cm^2

☑ L' angle central de l'inscrit en la circumferència que comprén un angle de 72º mesura:

a) 720º b) 108º c) 36º d) 144º

☑ La longitud de la circumferència i l'àrea del cercle de radi 3 cm són respectivament:

a) 6π cm i 9π cm^2 b) 9π cm i 6π cm^2 c) 3π cm i 3π cm^2 d) 18 cm i 27 cm^2

Matemàtiques orientades a les ensenyances acadèmiques:

3r B d'ESO. Capítol 8: Moviments al pla i a l'espai

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Adela Salvador i María Molero

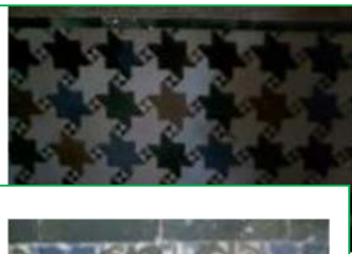
Revisors: Javier Rodrigo i Sergio Hernández

Il·lustracions: María Molero; Milagros Latasa; Banc d'Imatges d'INTEF i Adela Salvador

Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

Moviments al pla i a l'espai. 3r B d'ESO

Índex



Resum

Tot es mou en l’Univers, la Terra gira al voltant del seu eix i es desplaça al voltant del Sol. El Sol es mou dins de la nostra galàxia, i la galàxia també es mou. Mareig em dóna el pensar a quina velocitat m’estic movent! Observa que ni la grandària ni la forma dels objectes varien amb aquests moviments. Aquestes transformacions que mantenen la forma i la grandària són els moviments o isometries que estudiarem en aquest capítol.

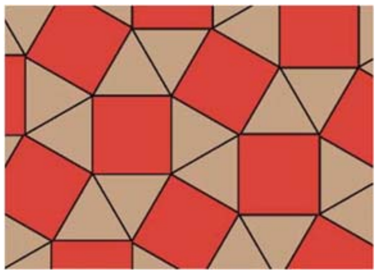
Analitzar el que ens rodeja amb ulls matemàtics ens ajuda a comprendre més i més coses. Aprendre a mirar les torres, aqueix reflex sobre l’aigua d’un palau de l’Alhambra, els mosaics… o els tapaboques dels cotxes, els animals i els objectes quotidians. Tots ells amaguen moltes matemàtiques: moltes transformacions geomètriques. Estudiarem les simetries, els girs i les translacions i les analitzarem al nostre entorn.

1. TRANSFORMACIONS GEOMÈTRIQUES

Moltes decoracions es fan repetint un motiu. Als mosaics de l'Alhambra, a les reixes, a les randes i les greques, als rosetons de les esglésies… a totes parts pots veure dissenys fets mitjançant un altre més senzill. En observar un edifici pots veure que de vegades està compost per algun tros que s'ha anat desplaçant, o girant, o trobant el simètric.

Imagina que estàs manipulant un mapa en un mòbil amb els dos dits: Pots desplaçar-te, girar el mapa, ampliar-ho, reduir-ho... però el mapa sempre és bàsicament el mateix. Aquestes manipulacions són "transformacions geomètriques", perquè mantenen les propietats geomètriques més bàsiques dels objectes: longituds, angles, àrees, volums, o la proporció entre les longituds, la forma…

1.1. Isometries



En el mosaic del marge tots els quadrats són iguals i també són iguals tots els triangles.

A les transformacions geomètriques que ens porten d'un quadrat a un altre (o d'un triangle a un altre) que mantenen la forma i la grandària les anomenem isometries o moviments.

La paraula *isometria* prové del grec: Iso = Igual. Metría = Mesura. Significa per tant: *La mateixa mesura*.

En l'exemple del mapa, sempre que no faces zoom, estaràs usant una isometria.

Les isometries**,** (**moviments** o **congruències**) són transformacions geomètriques que conserven angles i distàncies (encara que no tenen per què conservar l'orientació dels angles).

Isometries en el pla són les **translacions**, els **girs** i les **simetries**.

Activitats proposades

1. Al teu quadern dibuixa un triangle. Calca'l i copia la figura calcada novament al teu quadern. Mesura tots els costats de les figures homòlogues. Medeixen el mateix? Mesura tots els seus angles. Medeixen el mateix?
2. Dibuixa al teu quadern una lletra B i fes un disseny amb ella, traslladant-la, girant-la o dibuixant lletres B simètriques.

1.2. Isometries directes i inverses

Activitats resoltes

a) A la figura del marge observa que una fletxa es transforma en l'altra mitjançant la simetria d'eix *r*. L'angle *ABC*, és igual a l'angle *A'B'C'*? Tenen la mateixa amplitud, que en ambdós és de 90º, però la seua orientació és distinta. Mentres que *ABC* gira en el sentit de les agulles del rellotge, és a dir, té sentit negatiu, mesura –90º, *A'B'C'* gira en el sentit contrari a les agulles del rellotge, per la qual cosa el seu sentit és positiu i mesura +90º.

Entre les isometries hi ha dos tipus de transformacions, les que conserven els angles (la seua amplitud i el seu sentit) que s'anomenen **isometries directes**, i les que conserven l'amplitud dels angles però canvien el seu sentit, que s'anomenen **isometries inverses**.

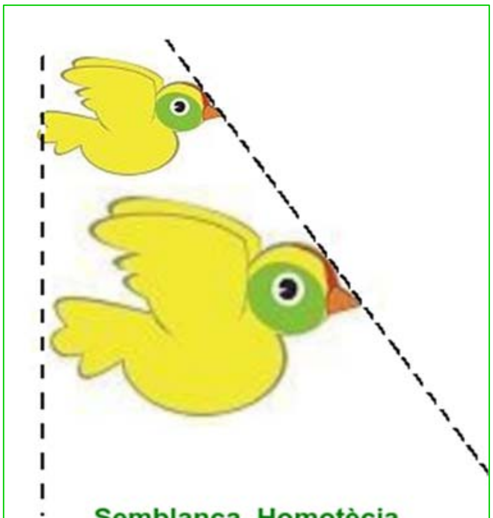
b) Les translacions i els girs en el pla són isometries directes. Les simetries són isometries inverses.

1 Les teues mans són simètriques. Són iguals. Però, les pots superposar? I els teus peus? La simetria és una isometria inversa.

2 Imagina el mapa fet sobre plàstic transparent: Si volteges el mapa sobre la taula, les longituds i angles es mantenen (és una isometria) però ara no podries col·locar la ciutat de València d'aquest nou mapa, sobre la ciutat de València del mapa original, per més que el mogueres mai et podrien coincidir. És una isometria inversa.

Observació:

Uns autors denominen moviments a les isometries, i altres estimen que si movent les mans mai podrem superposar-les, les isometries inverses no han d'anomenar-se moviments.



Semblança. Homotècia

1.3. Semblances

Si fas zoom en el mòbil amb els dos dits en el mapa, les longituds canvien, així que no és una isometria, però el mapa continua sent el mateix: els angles i els seus sentits sí que es conserven, i les proporcions entre les mesures també (el carrer que era el doble de llarga que una altra ho segueix sent-ho). Aquests canvis d'escala es denominen "semblances".

Les figures del marge són **semblants**. És la mateixa imatge encara que ampliada. Es manté la mateixa proporció en totes les direccions. Es manté la forma, però no la mateixa grandària. A aquestes transformacions les anomenen **semblances**, o si tenen una determinada posició: **homotècies**.

En una semblança les figures homòlogues tenen els angles iguals i els costats proporcionals.

Exemple

- Quan fas zoom en una foto amb el mòbil estàs fent una homotècia. En posar els dos dits sobre la pantalla defineixes dos punts: l'origen *O* seria el punt just entre els teus dos dits i no es mourà en fer zoom, i el punt *P estaria* en el teu primer dit. En moure aqueix dit aquestes definint el tercer i últim punt *P'* i el mòbil àmplia la foto perquè el punt *O* quede fix i *P* s'estire fins a *P'*. És una homotècia directa.

Les homotècies tenen un centre d'homotècia, *O*, i un punt *P* es transforma per una homotècia en el punt *P'* que està en la recta *OP*, si es verifica que: ***OP'*** = *r*·***OP*** on *r* és un número anomenat **raó d'homotècia**.

3. Activitats proposades
4. Al teu quadern dibuixa una lletra b minúscula, i a continuació una altra lletra b minúscula el doble de gran. Com són les seues longituds i els seus angles? És una semblança?
5. Dibuixa ara una lletra d minúscula. És semblant a la lletra b anterior?

1.4. Composició de transformacions geomètriques

Exemple:

- Observa com s'ha construït aquest bell mosaic de l'Alhambra:

http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/195378_am_1Alhambra1.swf

S'ha analitzat buscant la cel·la unitat, (un quadrat format per quatre quadrats) i el motiu mínim (la meitat d'un d'aqueixos quadrats). En el motiu mínim, un triangle rectangle isòsceles, s'ha dibuixat una senzilla poligonal. Se li han aplicat distintes isometries: Una simetria d'eix la hipotenusa. Al motiu format per l'inicial i el seu simètric se li han aplicat quatre girs de 90º. S'ha tornat a girar el conjunt. S'ha donat color. S'ha traslladat horitzontalment i verticalment.

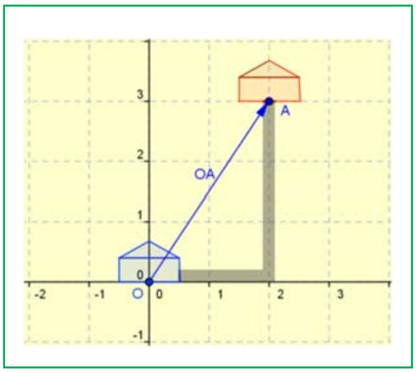
Quan apliquem diverses transformacions, estem component transformacions geomètriques.

Activitats proposades

6. Al teu quadern marca una trama formada per quadrats de dos quadradets de costat. En un quadradet fes un gargot, una poligonal, una línia corba… Dibuixa la simètrica prenent com a eix de simetria un costat del quadrat. Dibuixa la figura simètrica del conjunt obtingut prenent com a eixos sempre els costats de la trama inicial. Pinta la figura obtinguda. Trasllada-la horitzontalment i verticalment.

2. TRANSLACIONS

2.1. Vectors



Si Susana està en sa casa i vol anar a casa de Nadia, que viu 2 carrers A l'Est i 3 carrers al Nord, el trajecte que ha de fer és el que en la figura està dibuixat en gris.

Anomenem "*O*" a la posició de la casa de Susana, i "*A*" a la posició de la casa de Nadia. Si Susana tinguera un helicòpter podria anar directament en línia recta i seguiria la direcció *OA*. Ho representem amb una fletxa i es denomina vector fix.

Un vector fix ***OA*** és un segment orientat amb origen en el punt *O* i extrem en el punt *A*. Té una direcció, la de la recta, un sentit, des de *O* fins *A*, i una longitud, a la que anomenem mòdul.

Un **vector fix *OA*, d'origen** en *O* i **extrem** en el punt *A*, es caracteritza per:

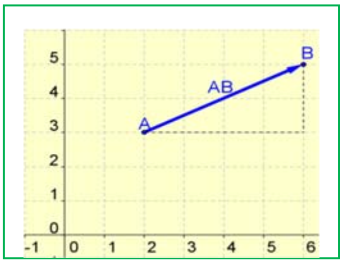
El seu **mòdul**, que és la longitud del segment *OA* i que s'escriu $|OA|$.

La seua **direcció**, que és la recta que conté al segment.

El seu **sentit** que va des de l'origen *O* fins a l'extrem *A*.

Les coordenades o components d'un vector vénen determinades pel seu origen i el seu extrem.

Exemple:



- Si coneixem les coordenades del punt origen i del punt final podem calcular les coordenades del vector. Observa el dibuix del marge i comprova que si *A* (2, 3) i *B* (6, 5) les coordenades del vector fix ***AB*** són ***AB*** = (6 – 2, 5 – 3) = (4, 2).

En general, si *A* (*a*, *b*) i *B* (*c*, *d*) aleshores ***AB*** = (*c* – *a*, *d* – *b*)

El mòdul d'un vector es calcula utilitzant el Teorema de Pitàgores. Així, el vector de coordenades ***u*** = (*x*, *i*) té de mòdul: $|\boldsymbol{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Activitats proposades

7. Dibuixa al teu quadern els punts de coordenades *A* (–5, 2), *B* (–1, 6) i *C* (2, –3). Troba les coordenades dels vectors fixos ***AB***, ***AC***, ***BC***, ***CA*** i ***CB***. Comprova al teu dibuix que aqueixes són les seues coordenades.

8. El vector fix ***AB*** té de coordenades (4, 2), calcula les coordenades del seu origen *A* sabent que les coordenades del seu extrem *B* són (–1, 1). Representa'l gràficament.

9. Les coordenades de *A* són (2, 3) i les del vector fix ***AB*** són (4, –2). Calcula les coordenades del punt *B*. Representa'l gràficament.

Tots els segments orientats o vectors fixos que tenen el mateix mòdul, direcció i sentit, tenen

Autores: Adela Salvador i María Molero
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

les mateixes coordenades, aleshores es diu que són el mateix vector lliure, i podem usar-lo en diferents punts origen.

Dos vectors fixos són **equipol·lents** quan tenen el mateix mòdul, direcció i sentit, i per tant tenen les mateixes coordenades.

Tots els vectors que són equipol·lents es diuen que són un **vector lliure**, i cada un dels seus vectors fixos, un **representant** del vector. Al vector lliure l'identifiquem per les seues coordenades.

Activitats proposades

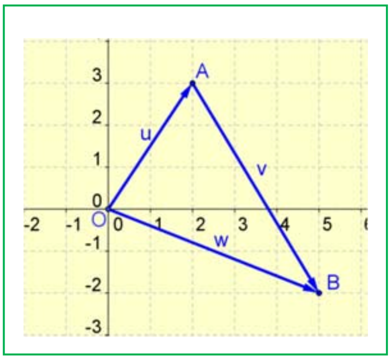
10. Anomena als vectors fixos de la figura i indica quins són representants d'un mateix vector lliure.

11. Dibuixa al teu quadern quatre vectors equipol·lents al vector fix amb origen en *A* (–3, 4) i extrem *B* (5, 0), amb orígens als punts *C* (0, 3), *D* (5, 2), *E*(–4, 0) i *F* (–2, –5).

12. Dibuixa al teu quadern els punts *A* (–2, 2), *B* (–3, 0), *C* (2, 4), *D* (6, 2), *E* (2, 0), *F* (6, –2) i *G* (2, –4). Amb els vectors fixos d'origen i extrem als dits punts, indica quins d'ells són equipol·lents.

13. Amb els punts de l'exercici anterior, calcula les coordenades dels vectors fixos ***DE*** i ***FG***. Com són? Són dos representants d'un mateix vector lliure?

Activitats resoltes



☑ El vector fix ***OA*** = ***u*** que indica el trajecte de Susana té de coordenades (2, 3). Si després Susana vol desplaçar-se a casa d'una altra amiga que està a 3 carrers a l'Est i 5 carrers al Sud farà un desplaçament de vector: ***v*** = (3, –5). En conjunt Susana ha fet un desplaçament que és la suma dels dos desplaçaments anteriors. Finalment està al punt:

$$(2, 3) + (3, –5) = (5, –2).$$

Es troba 5 carrers a l'Est i dos carrers al Sud de sa casa.

Es **sumen** dos vectors, sumant les seues components: **(*a, b*) + (*c, d*) = (*a* + *b*, *c* + *d*)**

Es multiplica un vector per un número, multiplicant les seues components: ***r*·(*a, b*) = (*r·a, r·b*)**

Activitats proposades

14. Dibuixa al teu quadern un sistema de referència cartesià i assenyala en ell els punts de coordenades: *A* (4, 5), *B* (–5, 6) i *C* (2, –5). a) Anomena **u** al vector fix ***AB*** i indica les seues components. b) Anomena **v** al vector fix ***BC*** i indica les seues components. c) Calcula les components del vector **w** = **u** + **v**. d) Representa al teu quadern als vectors lliures **u** i **v** amb origen en l'origen de coordenades i representa també al vector suma **w**. Observa que està sobre la diagonal del paral·lelogram construït sobre **u** i **v**.

15. Dibuixa al teu quadern el punt *A* (1, 2), dibuixa ara el vector **u** = (2, 3) amb origen en *A*, i el vector **v** = (4, –1) també amb origen en A. Calcula les coordenades del vector suma **u** + **v**, i dibuixa'l amb origen en *A*. El resultat coincideix amb el que has obtingut gràficament? Observa que el vector suma és la diagonal d'un paral·lelogram construït sobre **u** i **v**.

16. Efectua les següents operacions amb vectors:

a) $3\cdot\left(\frac{1}{3},-\frac{5}{6}\right)+\frac{1}{2}\cdot(4,8)$

b) (5, –9) – [(6, 3) + (–4, –6)]

c) 5·[(–1, 0) – (–2, 3)] + (–3)·[(4, –2) –6·(4, –5)]

d) 9'3·(2, 6) + (3'7, 5'2)

17. Efectua les següents operacions amb els vectors ***u*** = (–5, 6), ***v*** = (4, –7) i ***w*** = (3, 4):

a) 2***u*** – (***v*** + ***w***)

b) 3***w*** – 2***u*** + ***v***

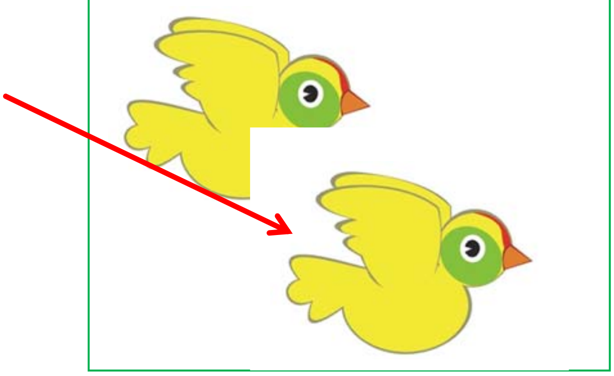
c) 2(***u*** + ***v***) – 3***w***

2.2. Translacions al pla

Un cotxe es mou per la ciutat des del domicili de l'amo fins al seu treball, i s'ha traslladat 4 carrers cap al nord i 3 carrers cap a l'est.

És possible conéixer una **translació** si sabem el punt d'origen *A* i el de destí *B*. Aquests dos punts, *A* i *B*, determinen el **vector de translació *AB***. ***AB*** és un vector fix, representant del vector lliure ***u*** de les mateixes coordenades.

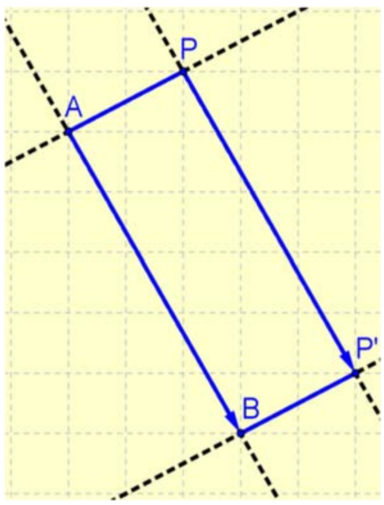
Una figura i la seua traslladada.



Per definir una **translació** només cal conéixer el seu **vector de translació**.

Si la translació de vector lliure ***u* = *AB*** transforma un punt del pla *P* en un altre *P'*, aleshores ***AB*** i ***PP'*** tenen el mateix mòdul, direcció i sentit. Són el mateix vector lliure. Tenen les mateixes coordenades.

Si amb la translació de vector ***AB*** traslladem el punt *P* fins al punt *P'* llavors *ABP'P* és un **paral·lelogram**, i ***AB*** = ***PP'***



Per traslladar una figura es traslladen els punts que la determinen. Com en una translació tots els punts es mouen sobre rectes paral·leles i una mateixa distància, es pot usar l'escaire i el cartabó per a traçar les rectes paral·leles i traslladar sobre ella alguns punts de la figura, per fer això s'ha de mesurar sempre la mateixa distància sobre la recta.

Propietats de les translacions

Els paral·lelograms tenen, com saps, els seus costats iguals dos a dos i paral·lels dos a dos.

La recta *AB* és paral·lela a la recta *PP'*, i la recta *AP* és paral·lela a la recta *BP'*. Els segments *AB i PP'* són iguals, el mateix que *AP i BP'*.

Per aquest motiu, entre una figura i la seua traslladada es **conserven totes les distàncies i tots els angles**.

La translació és una **isometria**, un moviment **directe**.

Identitat:

La translació de vector de translació nul, **0** = (0, 0) deixa tots els punts invariants, és a dir, no trasllada res, i es denomina també translació identitat o simplement: **identitat**.

Punts invariants:

Un **punt invariant** és el que es transforma en si mateix. Una **recta invariant** és la que es transforma en ella mateixa, encara que els seus punts no siguen invariants. Una **recta invariant de punts invariants** és un cas particular de recta invariant en què cada un dels seus punts és un punt invariant.

Quins punts deixa invariants una translació? Observa que excepte la translació identitat, (que deixa tot el pla invariant), una translació no deixa a cap punt invariant.

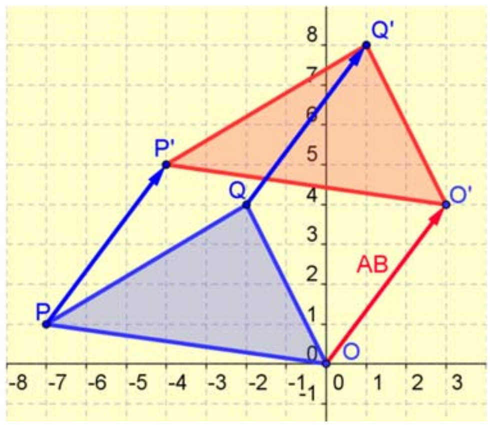
18. Activitats proposades

19. Dibuixa al teu quadern una figura i utilitza escaire i cartabó per a traslladar-la 5 centímetres cap a la dreta.

20. Dibuixa al teu quadern una figura. (Si no se t'acut cap altra, dibuixa la lletra G). Col·loca damunt un paper vegetal i calca-la. Desplaça en línia recta el paper vegetal i torna a calcar la figura. Les dues figures que has obtingut, tenen totes les seues mesures, tant longituds com angles, iguals? Traça les rectes que uneixen parells de punts corresponents, com són aqueixes rectes? Quina trajectòria han seguit els punts en el desplaçament?

21. Amb ajuda de paper quadriculat transforma mitjançant una translació una recta, una circumferència, un segment, un triangle, dues rectes paral·leles i dues rectes perpendiculars. En què es transformen? Analitza els resultats.

22. Observa aquest fris d'un temple de Cambotja. És una figura que es repeteix per translació. Quina direcció té el vector de translació? D'on a on aniria?



2.3. Coordenades

Per a treballar amb translacions pots utilitzar les coordenades:

Activitats resoltes

- Als punts *P* (–7, 1), *Q* (–2, 4) i *O* (0, 0) se'ls aplica una translació de 3 unitats cap a la dreta i 4 unitats cap amunt de manera que el seu vector de translació és:

$$\boldsymbol{AB} = (3, 4)$$

Aleshores les coordenades **dels punts traslladats** s'obtenen sumant a l'abscissa del punt que volem traslladar l'abscissa del vector de translació, i a l'ordenada del punt, l'ordenada del vector de translació:

Per traslladar *P* (–7, 1) segons el vector ***AB*** = (3, 4) es calcula –7 + 3 = –4, 1 + 4 = 5, per la qual cosa el seu punt traslladat és: *P'* (–4, 5).

En traslladar *Q* (–2, 4) s'obté *Q'* (–2 + 3, 4 + 4) = (1, 8).

En traslladar *O* (0, 0) segons el vector ***AB*** = (3, 4) s'obté *O'* (3, 4).

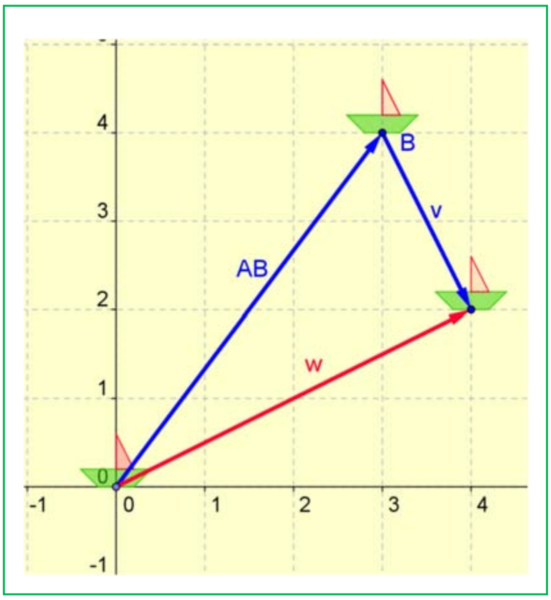
Activitats proposades

23. Utilitza paper quadriculat i dibuixa al teu quadern una lletra F de 2 quadradets d'alta i 1 quadradet d'ampla i aplica-li la translació de vector (2, 5).

24. Dibuixa al teu quadern uns eixos cartesians i el triangle de vèrtexs *A* (3, 1), *B* (3, 3) i *C* (1, 3). Aplica-li la translació de vector (4, 2): 4 unitats a la dreta i 2 unitats cap amunt. Quines són les coordenades dels punts traslladats *A'*, *B'* i *C'*?

2.4. Composició de translacions

Si traslladeu una figura mitjançant una translació de vector **u**, i després tornes a traslladar-la mitjançant una altra de vector **v**, pots comprovar que pots anar de la primera figura a l'última mitjançant una única translació. El vector de translació d'aquesta última translació pots obtindre'l sumant els vectors de translació de les dues primeres: **u** + **v**.



Activitats resoltes

c) Traslladem mitjançant el vector de translació ***AB***=(3, 4), i després mitjançant el vector de translació **v**=(1, –2). La composició d'ambdós translacions és una altra translació de vector de translació **w**:

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{AB} + \mathbf{v} = (3 + 1, 4 – 2) = (4, 2)$$

Activitats proposades

25. Les randes de la imatge s'han dissenyat a partir d'un motiu que s'ha anat traslladant al llarg. Dibuixa al teu quadern un motiu semblant a algun de la figura, una flor, una V, un zig-zag… i trasllada'l component div ers es translacions d'un mateix vector de translació. Has dibuixat un fris.

Autores: Adela Salvador i María Molero
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

Translació inversa:

Activitats resoltes

i) Si hem traslladat una figura 4 unitats cap a la dreta i 3 cap amunt, com hem de traslladar-la perquè ocupe la posició inicial? Cal traslladar-la amb el vector: (–4, –3).

Diem que aquestes translacions són l'una inversa de l'altra.

En general, la **translació inversa** de la de vector de translació **v** = (*a*, *b*) és la translació de vector:

w = –**v** = (–*a*, –*b*)

Activitats proposades

26. Trasllada una figura (per exemple una lletra L) mitjançant la translació de vector (–4, 5) i repeteix el procés amb la figura traslladada emprant el vector (3, –6). Quin moviment utilitzes per a anar de la primera figura a l'última? És una translació? Quin és el seu vector?

27. El mosaic del marge està confeccionat utilitzant un motiu mínim que es desplaça per tot el mosaic. Si utilitzes com a motiu mínim l'estrela de sis puntes, sense tindre en compte els canvis de color, determina els vectors de translació de dues translacions, una horitzontal i una altra vertical, que mitjançant composicions et permeten tindre la resta del mosaic. Observa que en sumar la translació horitzontal amb la vertical obtens translacions obliqües. Dibuixa al teu quadern una figura i trasllada-la de forma semblant per a tindre un mosaic.

2.5. Translacions a l'espai

Les translacions a l'espai tenen les mateixes propietats que les translacions al pla.

Imagina un avió que es mou. L'avió es trasllada.

Una translació a l'espai, igual que una translació al pla, és el moviment que consisteix a lliscar un objecte segons una direcció. La translació està determinada per la distància que es traslladа, la direcció de la recta sobre la qual es trasllada, i pel seu sentit. Per tant:

Per determinar una translació en l'espai basta conéixer el seu **vector de translació. L'única diferència** és que ara el vector de translació té tres components : ***AB* = (**a , *b* , *c)*. Exemple:

ii) Per traslladar el punt *P* (2, 4, –1) mitjançant la translació de vector ***AB*** = (–3, 5, 2), simplement sumem les coordenades:

P' = (2 – 3, 4 + 5, –1 + 2) = (–1, 9, 1).

La translació a l'espai no deixa cap punt invariant.

Activitats proposades

28. En edificació s'utilitzen molt les translacions. Pensa en les finestres d'un edifici i tria una. Pots obtindre una altra distinta mitjançant translació? Fes un dibuix que represente aquesta situació.

29. A la façana d'aquesta torre mudèjar de Terol podem veure distintes translacions. A la part superior hi ha dos conjunts de quatre finestretes. U és traslladat de l'altre. I cada finestreta forma a les altres quatre mitjançant una translació. En continuar baixant, els dos arcs es traslladen formant altres dos arcs. Observa, en aquest cas totes les translacions tenen un vector de translació horitzontal. Continua descrivint les translacions que veus al disseny d'aquesta torre.

3. GIRS O ROTACIONS

3.1. Girs al pla

Són les 4 en punt. Si retardem el rellotge 15 minuts, la maneta dels minuts ha girat un angle de 90º en sentit positiu.

Per a determinar un **gir** o **rotació** és necessari conéixer un punt, *O*, el **centre de gir**; un **angle** α i el sentit de gir d'aqueix angle.

Hi ha l'acord de considerar *positiu* (+) al sentit contrari de les agulles d'un rellotge i sentit *negatiu* (–) el de les agulles del rellotge.

Si *A'* és el punt girat de *A*, amb centre *O* i angle α, aleshores: $|OA| = |OA'|$ i el segment *OA* forma un angle α amb *OA*'.

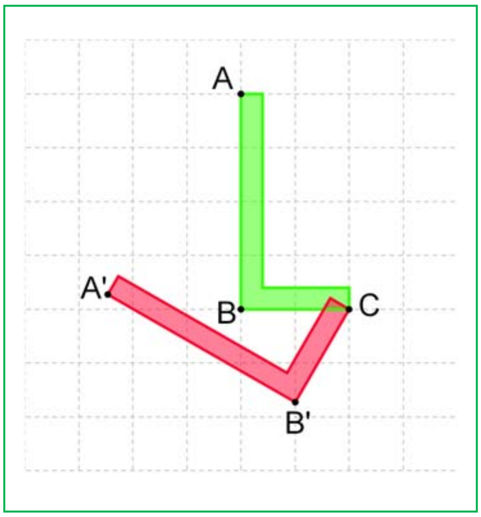
Per a girar una figura es giren els punts que la formen.

Exemple:

☑ Si han passat 15 minuts la maneta dels minuts ha girat –90º (90º en sentit negatiu), quan passe mitja hora haurà girat –180º, i si només passen 10 minuts haurà girat –60º.

Activitats resoltes

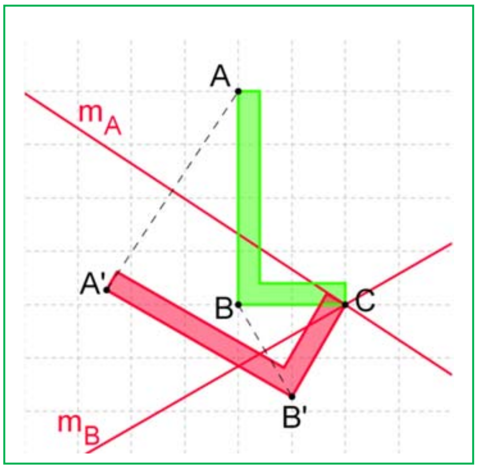
Per dibuixar rotacions al quadern pots utilitzar un transportador d'angles i un compàs.



- Per girar la lletra L segons un gir de centre *C* i angle 60º, prenem diversos punts de la figura, en aquest cas els punts *A*, *B* i *C*. Amb el compàs fent centre en *C* *tracem* arcs, i sobre ells, utilitzant el transportador, mesurem 60º. Obtenim els punts *B'* i *A'*.

La nova lletra L manté les distàncies: *BC* = *B'C* i *AB* = *A'B'*. També manté els angles: l'angle *ABC* és recte, i el nou angle *A'B'C* també és un angle recte i amb la mateixa orientació que l'anterior. En general:

Els girs mantenen les distàncies, per la qual cosa són **isometries** o moviments. Mantenen els angles i el sentit dels angles, per la qual cosa són **moviments directes**.



Per saber si dues figures són dues figures girades tracem les mediatrius dels punts corresponents i totes elles han de tallar-se en un mateix punt, el centre de gir. Amb el transportador d'angles podem aleshores mesurar l'angle de gir.

Autores: Adela Salvador i María Molero
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

Activitats resoltes

- Tracem el segment *BB'* i la seua mediatriu. Tracem el segment *AA'* i la seua mediatriu. Ambdues mediatrius es tallen en el punt *C*, que és el centre de gir. L'angle que formen les mediatrius és de 60º.

Activitats proposades

30. Dibuixa al teu quadern un punt *O* i un altre punt diferent *A*. Gira al punt *A* amb centre en *O* un angle de 30º en sentit positiu i denomina *A*' al punt girat.

31. Dibuixa al teu quadern un punt *O* i dos segments, un *OA* que passe per *O*, i un altre *BC* que no passe per *O*. Dibuixa els segments girats *OA'* i *B'C'* del gir de centre *O* i angle 60º.

32. Dibuixa al teu quadern el triangle de vèrtexs *A* (4, 2), *B* (3, –2) i *C* (5, 0). Dibuixa el triangle que s'obté en girar-lo amb centre a l'origen de coordenades un angle de 90º en sentit positiu. Quines són les coordenades dels vèrtexs *A'*, *B'* i *C'* del triangle girat?

33. Amb ajuda de paper quadriculat, transforma mitjançant un gir, una recta, una circumferència, un segment, un triangle, dues rectes paral·leles i dues rectes perpendiculars. En què es transformen? Analitza els resultats.

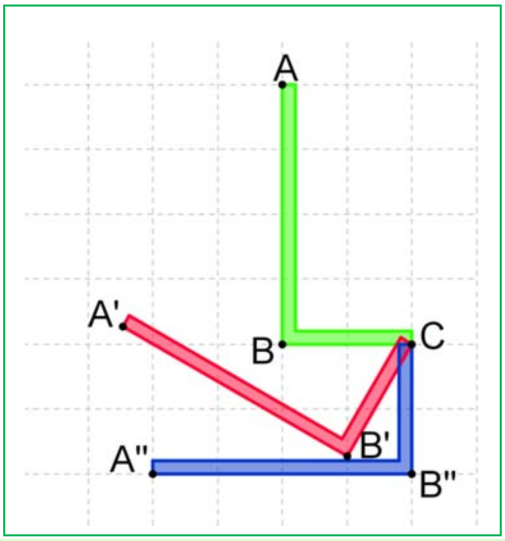
3.2. Composició de girs. Elements invariants.

Exemple:

- Si girem la lletra L amb centre *C*, 60º en sentit positiu i després, també amb centre *C*, 30º en sentit positiu, la figura obtinguda està girada respecte a la primera 90º amb el mateix centre de gir. En general:

La **composició** de dos girs del mateix centre és un altre gir del mateix centre i d'angle, la suma dels angles de gir.

- Si una vegada girada nostra lletra L 30º en sentit positiu, la girem, amb el mateix centre de gir, 30º en sentit negatiu, què ocorre? En efecte, hem tornat a la posició inicial. Es diuen que són girs inversos i que en compondre'ls tenim la identitat, ja que no ens movem.



Un gir de centre *O* i angle α és el **gir invers** al gir del mateix centre *O* i angle $-\alpha$.

Observa que la composició de girs de distint centre no és commutativa, perquè depén de l'orde en què fem els girs.

Activitats resoltes

- Pensem ara en quins elements deixa invariants un gir de centre *O* i angle de gir que no siga 0º ni 180º. Deixa alguna recta invariant? Hi ha alguna recta del pla que no es moga? No, totes giren. No hi ha rectes invariants. I punts? Algun punt del pla no es mou en girar? Si, el centre de gir queda invariant. El centre de gir es transforma en si mateix.

En un gir de centre *O* i angle diferent de 0º i de 180º, l'únic element **invariant** és un punt, el **centre de gir.**

Centre de gir: Centre de gir és un punt d'una figura plana tal que en girar un cert angle, la figura coincideix amb si mateixa.

Observa que el rosetó del centre d'aquest mosaic té un **centre de gir** de 60º. Si el girem 60º, torna a coincidir. També si el girem 120º o 180º o 240º o 300º.

3.3. Simetria central al pla. Centre de simetria

La simetria central de centre *O* al pla és un gir d'aqueix centre *O* i angle 180º. Al pla, la simetria central és, per tant, un moviment que ja coneixem. Observa que la simetria central és, per tant, un moviment directe.

Si *P' és* el simètric de *P* en la **simetria central** de centre de simetria *O*, aleshores, *O* és el punt mitjà del segment *PP'*.

Activitats resoltes

- Dos punts *P* i *P' són* simètrics **respecte de l'origen de coordenades** si tant les seues abscisses com les seues ordenades són oposades. Així, el simètric respecte de l'origen del punt (–2, 4) és el punt (2,–4).
- Observa amb aquesta animació com es construeix el simètric, respecte a una simetria central de centre (2, 3), d'un polígon:

http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/183284_am_1.swf

El simètric del punt *A* (8, 1) és el punt *A'* (–4, 5). Has vist que s'ha traçat la recta *OA*. Amb centre en *O* i radi *OA* es traça un arc de circumferència que talla a la recta *OA* en A. El mateix per a obtindre el simètric dels altres vèrtexs del polígon. Si els altres vèrtexs són *B* (12, 7), *C* (9, 10), *D* (5, 8) i *E* (7, 6), quins són els seus simètrics respecte a la simetria central de centre (2, 3)?

- Quins elements deixa invariants una simetria central? Deixa invariant el centre de simetria i totes les rectes que passen pel centre de gir.

Centre de simetria: Un punt *O* és un centre de simetria d'una figura si tot punt d'ella té com transformat per la simetria central de centre *O*, un altre punt de la figura. La simetria central transforma la figura en ella mateixa.

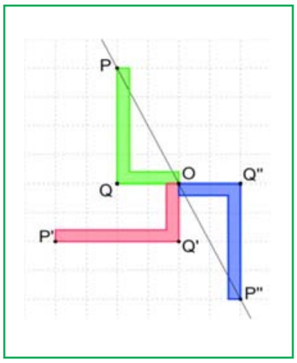
Exemple:

- El mosaic de l'Alhambra del marge té simetria central.
- El cercle, el quadrat, el rectangle tenen centre de simetria, no obstant això, un triangle mai té centre de simetria.
- Els polígons regulars amb un nombre parell de costats tenen centre de simetria.
- El pentàgon regular, no el té.

Autores: Adela Salvador i María Molero
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

Activitats resoltes

- Apliquem a la lletra L'un gir de 90º i després un altre gir també de 90º. La composició d'un gir de 90º, amb un altre del mateix centre i 90º, és un gir de 180º. El punt *P* primer es transforma en *P'* i després en P''. Si unim cada punt de la figura amb el seu transformat per la composició dels dos girs, la recta *OP* es transforma en la recta OP", que és la mateixa recta. Els punts *Q*, O i *Q''* també estan alineats. Les rectes que passen pel centre de simetria són invariants.



Activitats proposades

34. Dibuixa al teu quadern dos punts qualssevols *P* i *P'*. Troba el seu centre de simetria.

35. Què ocorre en aplicar un gir de 60º a una figura? Hi ha rectes invariants? I en un gir de 180º? Les rectes que passen pel centre de gir, en quines rectes es transformen? I amb un gir de 0º? I amb un gir de 360º?

36. Dibuixa un triangle *ABC* i el seu simètric *A'B'C'* respecte un punt *O*. Com són els seus costats? Són iguals? I els seus angles? Es manté el sentit dels angles? Comprova com és l'angle *ABC* i l'angle *A'B'C'*. És un moviment directe?

37. Analitzarem les lletres majúscules. Indica quins de les següents lletres no tenen simetria central i quins si la tenen, indicant llavors el seu centre de simetria: B, H, N, O, P, S, T, X, Z. Recorda, busques un punt tal que la simetria central de centre aqueix punt deixe invariant a la lletra.

3.4. Girs a l'espai

En obrir o tancar una porta, aquesta gira, les patilles de les ulleres giren, les rodes d'un cotxe giren... Observa que per a determinar un gir a l'espai necessites, a més de l'angle (i el seu sentit), conéixer **l'eix de gir**. Recorda, en el pla teníem un centre de gir, un punt, ara un eix de gir, una recta.

Pensa en altres exemples quotidians de girs en l'espai.

Quan gires una porta, canvia el sentit dels seus angles? Naturalment que no. Els girs en l'espai són moviments directes.

iii) Quins punts es transformen en si mateixos? El gir en l'espai deixa invariants als punts de l'eix de gir.

Eix de gir: Eix de gir d'una figura, a l'espai, és una recta imaginària tal, que en girar la figura un cert angle, coincideix amb si mateixa.

Autores: Adela Salvador i María Molero
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

3.5. Simetria central a l'espai. Centre de simetria

Una figura té simetria central si en unir cada un dels seus punts amb el centre s'obté un altre punt de la figura.

Si *P' és* el simètric de *P* en la simetria **central** de centre *O*, aleshores, *O* és el punt mitjà del segment *PP'*.

La simetria central a l'espai no és un gir. A més només deixa un punt invariant, el centre (no una recta)

Centre de simetria: Un punt *O* és un centre de simetria d'una figura si tot punt d'ella té com transformat per la simetria central de centre *O*, un altre punt de la figura.

Exemples:

- L'esfera, el cub tenen centre de simetria, el tetraedre, no.
- El cilindre té centre de simetria. El con no té centre de simetria.
- Un prisma regular té centre de simetria. Una piràmide, no.

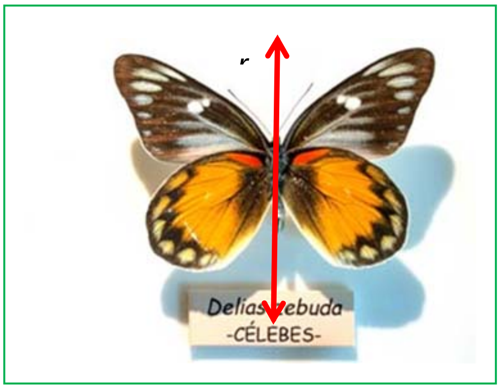
Activitats proposades

38. Escriu cinc exemples d'objectes de l'espai que giren.

39. Mitjançant un gir a l'espai, en què es transforma un pla? I una esfera? I un con? I dos plans paral·lels? I dos plans ortogonals? Analitza els resultats.

4. SIMETRIES

4.1. Simetries axials. Eix de simetria



La palometa de la figura és simètrica respecte de l'eix de simetria *r*.

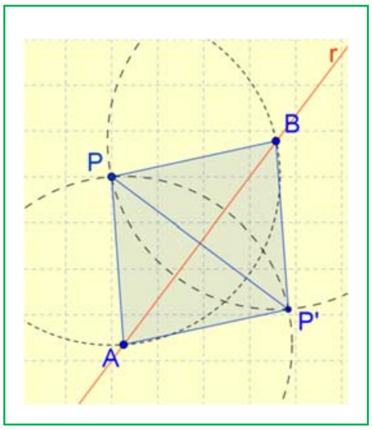
Per a determinar una simetria (simetria axial) és necessari conéixer **l'eix de simetria**.

Si *P'* és el simètric de *P* respecte de la **simetria axial** d'eix *r*, aleshores *r* és la **mediatriu** del segment *PP'*.

La simetria axial conserva totes les longituds i la magnitud dels angles, però canvia el sentit d'aquests. Per això no és possible fer coincidir una figura amb la seua simètrica (llevat que les pròpies figures siguen simètriques).

La simetria és per tant un moviment invers.

Activitats resoltes



- Per a trobar el simètric del punt *P* respecte de l'eix de simetria *r*, utilitza un compàs i fent centre en *P* amb radi prou gran traça un arc de circumferència que talle a *r* en dos punts, *A* i *B*. Sense variar de ràdio i amb centre en *A* i en *B* traça altres dos arcs que es tallen en *P'*, simètric de *P* respecte a *r*. Observa que *PAP'B* és un rombe perquè els seus quatre costats són iguals, per la qual cosa sabem que les seues diagonals són perpendiculars i es tallen al punt mitjà.
- En l'animació pots veure com es dibuixa el punt simètric d'un altre utilitzant regla i escaire:

http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/183282_am_1Punto_simetrico.swf

Tenim l'eix de simetria i volem trobar el simètric del punt *P* (4, 1). Dibuixem el punt *P* (4, 1) en un sistema de coordenades i prenem l'escaire. Recolzem l'escaire sobre l'eix de simetria i fins que toque al punt. Tracem una recta auxiliar, perpendicular a l'eix i que passe pel punt *P*. Mesurem la distància del punt a l'eix i portem aqueixa longitud sobre la recta auxiliar, i ja tenim el punt simètric.

- També pots obtindre figures simètriques doblegant un paper. La duplicitat és l'eix de simetria. Si dibuixes una figura, doblegues el paper i la calques obtens la figura simètrica.
- Una altra forma és doblegar un paper i retallar una figura: s'obté una figura simètrica respecte a la línia per on has doblegat.

Si dibuixem en paper quadriculat el triangle de vèrtexs *A* (–3, 2), *B* (–5, 4) i *C* (–4, 7) i trobem el simètric respecte a l'eix d'ordenades, les coordenades dels vèrtexs del triangle simètric són:

Autores: Adela Salvador i María Molero
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

A'(3,2), *B'* (5, 4) i *C'* (4, 7). En general, el simètric de *P* (*x*, *y*) respecte a l'eix d'ordenades és *P'* (–*x*, *y*).

Si dibuixes el triangle simètric *d'ABC* respecte a l'eix d'abscisses, observa que les coordenades dels seus vèrtexs són: A' (–3, –2), B' (–5, –4) i C' (–4, –7). En general, el punto simètric de *P* (*x*, *y*) respecte a l'eix d'abscisses és *P'* (*x*, –*y*).

Dos punts **simètrics respecte de l'eix d'ordenades** tenen la mateixa ordenada i les seues abscisses són oposades. Dos punts **simètrics respecte de l'eix d'abscisses** tenen la mateixa abscissa i les seues ordenades són oposades.

Punts invariants:

En una simetria, els punts de l'eix de simetria es transformen en si mateixos.

La simetria axial deixa invariants els punts de l'eix de simetria. L'eix de simetria és una recta invariant de punts invariants.

- Quins altres elements deixa invariants? Hi ha més punts? Hi ha altres rectes? Observa que les rectes perpendiculars a l'eix de simetria es transformen en si mateixes.

Activitats proposades

40. Dibuixa al teu quadern un eix *r* de simetria oblic, i un punt *P*. Dibuixa el punt P' simètric respecte de *r*. Comprova que la recta *r* és la mediatriu del segment *PP'.* (*Recorda*: La mediatriu d'un segment és la perpendicular pel punt mitjà).

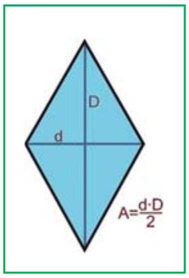
41. Dibuixa al teu quadern dos punts qualssevol *P* i *P'*. Dibuixa l'eix de simetria *r* respecte a què són simètrics.

42. Dibuixa en paper quadriculat una lletra L i un eix de simetria vertical. Dibuixa la lletra L simètrica respecte a aqueix eix. Calca una d'elles, i mou el paper de calc per a intentar fer-les coincidir. És impossible, perquè la simetria és un moviment invers.

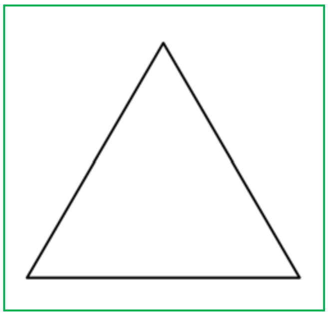
43. Reprodueix al teu quadern la figura del marge. Dibuixa un eix de simetria oblic i dibuixa la figura simètrica.

44. Troba les coordenades dels vèrtexs del triangle simètric respecte de l'eix d'ordenades del triangle *A* (3, –4), *B* (5, 6), *C* (–4, 5). El mateix respecte de l'eix d'abscisses.

Eix de simetria d'una figura:

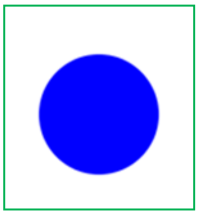


Si la recta *r* és un eix de simetria d'una figura aleshores tot punt d'aqueixa figura té com transformat per la simetria d'eix *r* a un altre punt de la dita figura.



Exemples:

iv) Un triangle isòsceles té un eix de simetria i un triangle equilàter, tres.



v) Un rectangle o un rombe tenen dos eixos de simetria, i un quadrat quatre.

vi) Un cercle té una infinitat de eixos de simetria (tots els seus diàmetres).

Activitats proposades

45. Indica quines de les següents lletres majúscules són simètriques, i si ho són, indica si els seus eixos de simetria són horitzontals o verticals: A, B, D, F, K, M, N, R, T, U, V, W, Z.

46. Amb ajuda de paper quadriculat, transforma mitjançant una simetria, una recta, una circumferència, un segment, un triangle, dues rectes paral·leles i dues rectes perpendiculars. En què es transformen? Analitza la resposta.

47. Dibuixa un rectangle *ABCD*. Dibuixa l'eix de simetria que transforma *AB* en *CD*, i l'eix de simetria que transforma *AD* en *BC*.

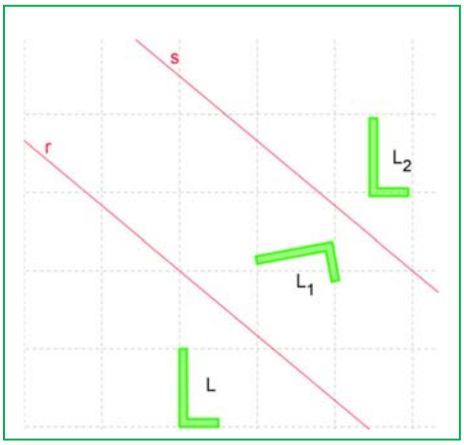
48. Dibuixa un hexàgon regular i dibuixa els seus eixos de simetria. Quants té? Té 6. Descriu-los.

49. Dibuixa un pentàgon regular i els seus eixos de simetria. Quants té? Descriu-los.

4.2. Composició de simetries

Estudiarem ara la composició de simetries. Ja saps que una simetria és un moviment invers. Si canvies el sentit d'un angle i després el tornes a canviar, et queda el sentit original. Per tant la composició de dues simetries no serà un moviment invers sinó un directe.

Vegem-ho primer en un cas particular.



Activitats resoltes

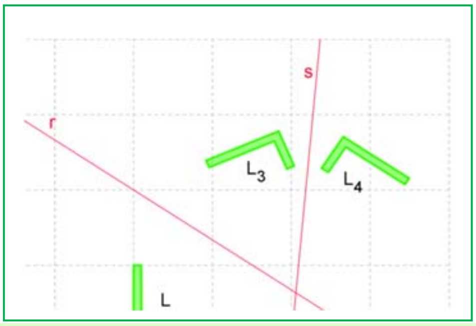
- Tracem dos eixos de simetria, *r* i *s*, paral·lels. Dibuixem una lletra L, i dibuixem la lletra L_1 simètrica de L amb respecte de la recta *r*, i després la lletra L_2 simètrica de L_1 respecte de la recta *s*. Mitjançant quina transformació passem directament de L a L_2? Pot ser una simetria? (Observa que sí es poden superposar L i L_2, per tant és un moviment directe). És un gir? És una translació? Si, és una translació, de quin vector?

Autores: Adela Salvador i María Molero
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

La composició de dues simetries d'eixos paral·lels és una translació. És la translació de vector de direcció la recta ortogonal als eixos de simetria, de mòdul el doble de la distància entre ambdós eixos, i de sentit el que va del primer eix al segon.

La composició de simetries **no és commutativa**. Comprova que si a L primer li apliquem la simetria d'eix "s" i després la simetria d'eix "*r*" obtenim una translació, però el vector de translació és l'oposat al del cas anterior.

- Tracem ara dos eixos de simetria secants, *r* i *s*, i una lletra L. Dibuixem la lletra L_3 simètrica de L respecte a la recta *r*, i dibuixem la lletra L_4 simètrica de L_3 respecte a la recta *s*. Mitjançant quina transformació passem directament de L a L_4? Pot ser una simetria? (Observa que es poden superposar L i L_4, per tant és un moviment directe). És una translació? És un gir? Si, és un gir, de quin centre i de quin angle?



La composició de dues simetries d'eixos secants és un gir. És el gir de centre el punt d'intersecció dels eixos de simetria, d'angle doble a què formen ambdós eixos i de sentit de l'angle, el que va del primer eix al segon.

La composició de simetries **no és commutativa**. Comprova que si a L primer li apliquem la simetria d'eix "s" i després la simetria d'eix "*r*" obtenim un gir, però l'angle de gir és l'oposat al del cas anterior.

Activitats proposades

50. Reprodueix en el teu quadern la figura P del marge.

a) Dibuixa el pardal P' simètric respecte a l'eix d'ordenades.

c) Dibuixa el pardal P'' simètric respecte a l'eix d'abscisses.

d) Hi ha alguna simetria axial que transforme P' en P''? Hi ha alguna simetria central que transforme P' en P''?

e) Si el bec del pardal P tinguera unes coordenades (–2, 5), quines coordenades tindria el bec del pardal P'? I el del pardal P''?

51. Dibuixa al teu quadern dos eixos de simetria paral·lels i una lletra F. Dibuixa la composició d'ambdues simetries a la dita lletra, comprovant que la composició d'elles és una translació i determina el vector de translació.

52. Dibuixa al teu quadern dos eixos de simetria secants i una lletra F. Dibuixa la composició d'ambdues simetries a la dita lletra, comprovant que la composició d'elles és un gir i determina el centre i l'angle de gir.

53. Si apliquem una simetria a una figura, quina transformació hem d'aplicar-li per a obtindre la figura inicial?

➢ La composició de dues simetries planes d'eixos secants és un gir. Com han de ser els eixos perquè siga un gir de 180º (o una simetria central)?

4.3. Simetria especular a l'espai. Pla de simetria

Molts mobles són simètrics: moltes taules, moltes cadires… Molts animals són quasi simètrics. Els cotxes, els avions, els trens són simètrics. Si ens mirem en un espill veiem una imatge reflectida que és simètrica de la nostra. Molts edificis són quasi simètrics o tenen elements de simetria.

Per a determinar una simetria a l'espai és necessari conéixer un pla, el **pla de simetria**.

Una simetria a l'espai deixa invariants els punts pertanyents al pla de simetria. Deixa invariant les rectes ortogonals al pla de simetria, i deixa invariant al pla de simetria.

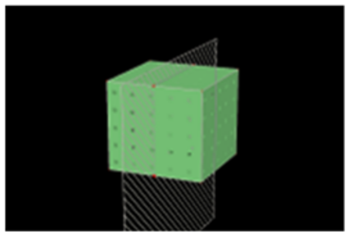
Pla de simetria: El pla de simetria d'una figura és un pla imaginari tal, que tot punt de la figura es transforma per la simetria respecte d'aqueix pla en un altre punt de la dita figura.

La torre amb la porta del marge té un pla de simetria.

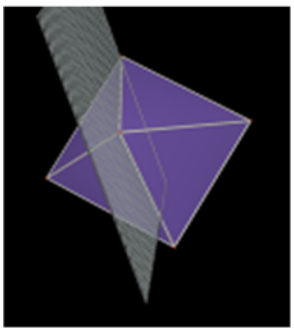
Un pla de simetria és com un espill que reflectix exactament un fragment de la figura en l'altre fragment.

Activitats resoltes

- Construeix poliedres regulars, amb cartolina, amb palletes, amb …, per a comprovar el que segueix:



- Analitzem el pla de simetria del cub de la il·lustració del marge. Veiem que passa pels punts mitjans de les arestes. Quants plans de simetria hi ha semblants a aquest? Com el cub té 12 arestes i cada pla passa per 4 hi ha 3 d'aquest tipus. Un altre pla de simetria passa per una diagonal d'una cara, una aresta, una altra diagonal i una altra aresta. Quants hi ha d'aqueix un altre tipus? Com el cub té 12 arestes i prenem 2, hi ha 6 d'aqueix tipus.
- Busca un eix de gir del cub. Observa que té un eix de gir de 90º que va de centre de cara a centre de cara. Quants eixos de gir té d'aqueix tipus? Comprova que hi ha 3 (6 cares : 2 = 3). Observa que també hi ha un eix de gir de 120º que va de vèrtex a vèrtex oposat. Quants hi ha d'aqueix un altre tipus? Com el cub té 8 vèrtexs hi ha 4 d'aquest tipus. Observa que també hi ha un eix de gir de 180º que va de centre d'aresta a centre d'aresta oposada. Quants hi ha d'aqueix un altre tipus? Com el cub té 12 arestes, hi ha 6 d'aqueix tipus. Hi ha simetria central? Observa que sí.



- Analitzarem ara les isometries d'un octaedre. Observa que té centre de simetria, igual que el cub. Plans de simetria: Hi ha plans, com el de la figura, que passen per quatre arestes. Com té 12 arestes hi ha 3 d'aquest tipus. També hi ha plans que passen per l'eix de simetria de les cares. Quants hi ha? Tenim el mateix nombre de plans de simetria que en el cub? Sí. El cub i l'octaedre són duals. Si en el cub fixem els centres de les cares i els unim, tenim un octaedre. I si en l'octaedre unim els centres de les cares, tenim un cub. Observa que el nombre de cares d'un cub, 6, coincideix amb el nombre de vèrtexs d'un octaedre, i que el nombre de cares d'un octaedre, 8, coincideix amb el nombre de vèrtexs del cub. I ambdós tenen el mateix nombre d'arestes, 12.

- Busquem ara eixos de gir en un octaedre. Té eixos de gir de 90º? Si, van de vèrtex a vèrtex oposat. Hi ha 6 vèrtexs, per tant hi ha 3 eixos de gir d'aquest tipus. Hi ha eixos de gir de 120º, com en el cub? Naturalment, van de centre de cara a centre de cara, i com té 8 cares, hi ha 4 d'aquest tipus. I els eixos de gir de 180º? Van, com en el cub, de centre d'aresta a centre d'aresta, i hi ha 6.
- L'estudi del tetraedre és més senzill. Comprova que NO té centre de simetria. Els plans de simetria passen per una aresta, l'eix de simetria d'una cara i l'eix de simetria d'una altra. Hi ha 6 arestes, per tant hi ha 6 d'aquest tipus. Té eixos de gir de 120º. Passen per un vèrtex i el centre de la cara oposada. Com té 4 cares hi ha 4 d'aquest tipus.

- L'estudi del dodecaedre i de l'icosaedre és més complicat. Observa que també són duals. Si unim els centres de les cares d'un dodecaedre s'obté un icosaedre, i si unim els centres de les cares d'un icosaedre, s'obté un dodecaedre. El dodecaedre té 12 cares i l'icosaedre 12 vèrtexs. L'icosaedre té 20 cares i el dodecaedre 20 vèrtexs. Ambdós tenen 30 arestes. Descriurem el pla de simetria del dodecaedre de la figura del marge: Veiem que passa pels dos eixos de simetria de dues cares, per una aresta. I després? Ja no ho veiem? Observa que torna a passar per dos eixos de simetria de cares i per una altra aresta. Com el dodecaedre té 20 arestes, hi ha 10 plans de simetria d'aquest tipus.

Activitats proposades

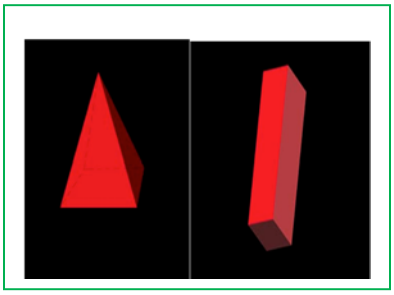
54. Escriu cinc objectes que estiguen al teu voltant que siguen simètrics i indica el seu pla de simetria. Mira a l'aula i busca simetries. Són simètriques les cadires, el llum, la finestra, les taules...? Quin és el seu pla de simetria?

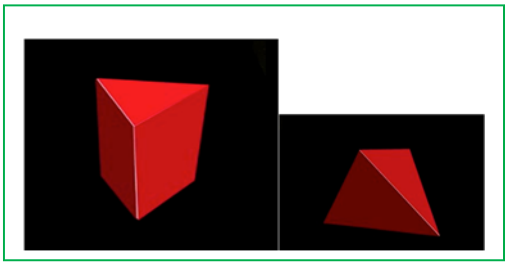
55. Defineix els plans de simetria i els aqueixos de rotació de les figures següents:

a) Un prisma recte de base quadrada. I si és oblic?

b) Una piràmide recta de base quadrada.

c) Si el prisma i la piràmide són rectes, però les seues bases són rectangles, quines simetries es mantenen?





56. Determina els plans de simetria i els eixos de rotació d'aquestes figures:

a) Un prisma recte la base del qual és un triangle equilàter.

b) Una piràmide recta de base un triangle equilàter. I si és obliqua?

c) Si el prisma i la piràmide són rectes però de base un triangle isòsceles, quines simetries es mantenen?

- ➢ Mitjançant una simetria especular, en què es transforma un pla? I una esfera? I un con? I dos plans paral·lels? I dos plans ortogonals? Analitza els resultats.

4.4. Isometries al pla

Les **isometries** són transformacions geomètriques que conserven les distàncies i els angles.

Al pla hem estudiat les translacions, els girs i les simetries (axials) que són isometries.

Ja sabem que la simetria central al pla coincideix amb un cas particular de gir, el gir de 180º.

Els girs i les translacions són isometries directes, perquè no canvien el sentit dels angles. Les simetries són isometries inverses perquè sí els canvien.

Hem vist que la composició de dues translacions és sempre una altra translació, que la composició de dos girs del mateix centre és un altre gir del mateix centre, que la composició de dues simetries és un gir o una translació. Podríem continuar estudiant què ocorre si componem girs de distint centre, girs amb translacions, translacions amb simetries i simetries amb girs. Veuríem que quasi sempre obteníem una simetria, una translació o un gir. Excepte quan componem una translació amb una simetria. Obtenim una isometria nova que anomenarem **simetria amb lliscament**. Passem de la lletra b del marge a la lletra p per una simetria d'eix horitzontal (en negre) i una translació (de vector de translació en verd).

Punts invariants: La translació no deixa cap punt invariant. Els girs deixen u, el centre de gir, i la simetria axial deixa una recta, l'eix de simetria. La simetria amb lliscament tampoc deixa cap punt invariant.

Si en un pla una isometria deixa tres punts invariants no alineats, aleshores deixa invariant tot el pla, per tant és la identitat.

Al pla			
	Punts invariants	**Rectes de punts invariants**	**Rectes invariants**
Translació	Cap	Cap	Les de direcció igual a la del vector de translació
Girs (d'angle de gir diferent de 180º i 0º)	Centre de gir	Cap	Cap
Simetria (axial)	Els de l'eix de simetria	L'eix de simetria	L'eix de simetria i les rectes ortogonals a l'eix de simetria.
Identitat	Tot el pla	Totes	Totes
Simetria amb lliscament	Cap	Cap	Les de direcció igual al vector de translació i a l'eix de simetria.

4.5. Ús de Geogebra per a analitzar les isometries al pla

Utilitzarem el programa **Geogebra** per a estudiar els moviments en el pla. Estudiarem les translacions i la simetria axial.

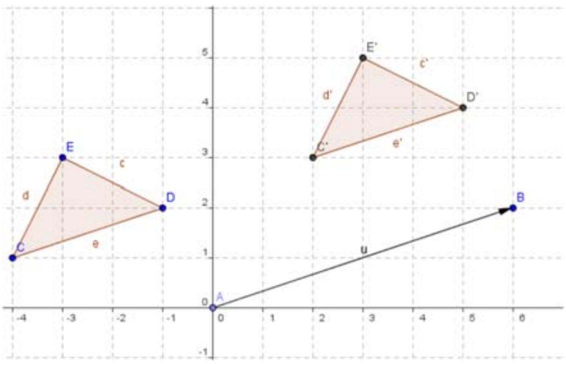
Activitats resoltes

Translació

d) *Utilitza Geogebra per a estudiar vectors i translacions.*

e) En un arxiu de *Geogebra* **Visualitza** els eixos, la quadrícula i la finestra algebraica.

- Amb la ferramenta **Nou Punt** defineix l'origen de coordenades com *A i* el punt de coordenades (6, 2) com a *B. i* amb la ferramenta **Vector entre dos punts** determina el vector *u* d'origen *A* i extrem *B* que tindrà coordenades (6, 2).



- Defineix amb **Nou Punt** *C* (–4, 1), D(-1, 2) i E (-3, 3)i amb **Polígon** dibuixa el triangle que té per vèrtexs aquests punts.

f) Observa que els punts que has dibuixat apareixen en la finestra algebraica com a objectes lliures i el triangle com a objecte dependent.

- Utilitza la ferramenta **Traslladar objecte d'acord amb vector** per a traslladar el triangle *CDE* segons el vector *u*, s'obté el triangle *C'D'E'*.

➢ Quin tipus de quadrilàters són els polígons *ACC'B, ADD'B i AEE'B*?

➢ Comprova en la finestra algebraica que:

a) Les coordenades dels punts *C', D' i E'* s'obtenen respectivament en sumar a les coordenades dels punts *C, D, i E* les coordenades del vector *u.*

I. La longitud de cada costat del triangle és la mateixa que la del seu traslladat i les àrees dels triangle *CDE* i *C'D'E'* coincideixen

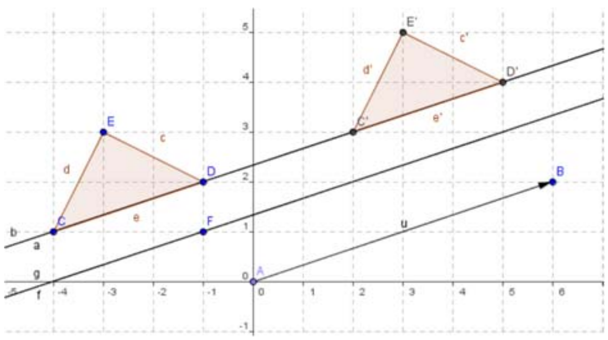
- Dibuixa amb **Recta que passa per 2 punts**, la recta *a* què passa pels punts per *C* i *D* i comprova, amb l'equació de la recta, que *C'* i *D'* estan en la mateixa recta.

- Trasllada ara la recta *a* segons el vector *u*, apareix, denominada *b*, la mateixa recta.

χ *Quina propietat té la recta a perquè romanga invariant mitjançant la translació? Una conjectura és que la recta a és paral·lela al vector u.*

- Per a comprovar la conjectura defineix un **Nou Punt** *F* (-1, 1) i amb **Recta paral·lela** dibuixa una recta *f* que passe per *F* i paral·lela al vector *u*.

- Trasllada la recta *f* segons el vector *u* i veuràs que apareix la recta *g* que coincideix amb ella. Dibuixa altres rectes paral·leles al vector u i comprova que la translació les deixa invariants.



- Mou amb el punter el punt *B*, perquè el vector *u* tinga distinta direcció i observa com la recta *a* ja no té la mateixa direcció que el vector *u* i la seua traslladada, la recta *b*, és distinta i paral·lela a ella, no obstant això la recta *f* té la mateixa direcció que el vector *u* i la seua traslladada *g* coincideix amb ella.

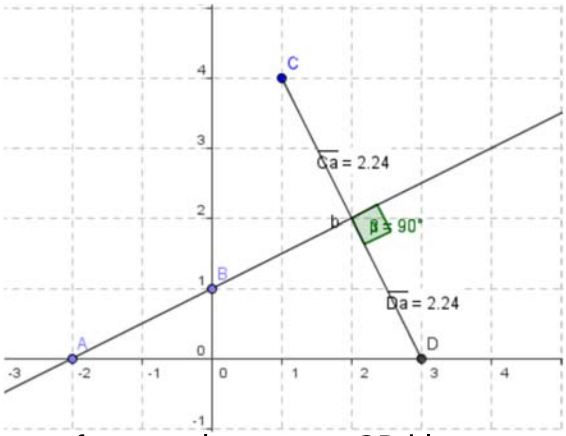
  ➢ Investiga si algun punt del pla roman invariant mitjançant translacions segons diferents vectors.

Simetria axial

- Utilitza Geogebra per a estudiar les propietats de la simetria axial.

b) Obri una nova finestra de *Geogebra* i visualitza els eixos, la quadrícula i la finestra algebraica.

1 Amb la ferramenta **Nou Punt** defineix *A* (-2, 0) i *B* (0, 1) i amb **Recta que passa per 2 punts**, dibuixa la recta *a* què passa per *A* i *B*, que serà l'eix de simetria.



2 Determina el punt *C* (1, 4) i amb la ferramenta **Reflectix objecte en recta**, el seu simètric respecte a la recta *a*, que és el punt *D* (3, 0).

3 Amb la ferramenta **Distància** comprova que la distància del punt *C* a la recta *a* coincideix amb la del punt *D* a dita recta.

4 Dibuixa amb **Segment entre dos punts** el que uneix els punts *C* i *D*.

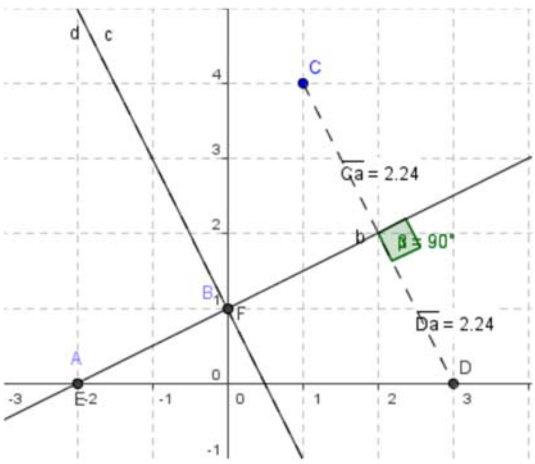
5 Amb la ferramenta **Angle** calcula la mesura de l'angle que formen el segment *CD* i la recta *a* per a verificar que són perpendiculars.

Les següents propietats, que acabes de comprovar, caracteritzen la simetria axial:

1ª: Les distàncies d'un punt i del seu simètric a l'eix de simetria coincideixen.

2ª: El segment que uneix un punt i el seu simètric és perpendicular a l'eix de simetria.

6 Amb la ferramenta **Reflectix objecte en recta troba** el simètric dels punts *A i B* respecte a l'eix *a* i comprova que *A i* el seu simètric de *E* coincideixen el mateix que *B* i *F*. Prova amb altres punts de la recta *a* per a verificar que tots els punts de l'eix resulten invariants mitjançant una simetria axial respecte a aquest eix. Verifica, també, que l'eix, la recta *a*, i la seua simètrica la recta *b* coincideixen.



7 Utilitza **Recta perpendicular** per a traçar la recta *c*, perpendicular a l'eix *a* què passa pel punt *B*.

8 Calcula la recta simètrica de la recta *c* respecte a l'eix *a*, s'obté la recta *d* que coincideix amb *c*.

9 Millora l'aspecte de la construcció dibuixant el segment CD i les rectes *c* i *d* amb traç

discontinu. Fes clic amb el botó dret del ratolí sobre l’element o la seua equació i en **Propietats**, **Estil**, tria un traç discontinu.

➢ Quins són els punts invariants d’una simetria axial? I les rectes invariants?

Activitats proposades

57. Utilitza la ferramenta Rota objecte entorn d’u***n punt, l’angle indicat per a estudiar els girs al pla. Defineix un punt O com a centre de gir, per e***xemple, el centre de coordenades. Defineix tres punts per a determinar amb Angle un de 45º.

58. Dibuixa rectes i polígons i observa com es transformen mitjançant aquest gir.

1) Investiga si en realitzar un gir hi ha punts i/o rectes que romanen invariants.

- Utilitza la ferramenta **Reflectix objecte per punt** per a estudiar la simetria central. Defineix un punt *O* com a centre de simetria, per exemple, el centre de coordenades.

a) Dibuixa rectes i polígons i observa com es transformen per una simetria central.

59. Comprova que una simetria central equival a un gir de 180º.

60. Investiga si en una simetria central hi ha punts i/o rectes que romanen invariants.

4.6. Isometries a l'espai

A l'espai hem estudiat les translacions, els girs, les simetries centrals i les simetries (especulares). La simetria central és un moviment nou diferent dels girs.

A l'espai, translacions i girs són isometries directes, i simetries especulares i simetries centrals són isometries inverses.

No hem estudiat la seua composició, però no ens costaria gens veure que la composició de dues translacions és una altra translació, de vector, la suma dels vectors de translació. La composició de dos girs del mateix eix és un altre gir del mateix eix i d'angle, la suma dels angles. La composició de dues simetries de plans paral·lels és una translació, i la composició de dues simetries de plans secants és un gir d'eix, la recta d'intersecció dels plans. La composició de dues simetries centrals del mateix centre és la identitat. El comportament d'aquestes composicions és semblant al que ocorre al pla.

Més complicat és estudiar a l'espai la composició de girs de distint eix, girs amb simetries, simetries amb translacions i translacions amb girs a l'espai. Igual que al pla van aparèixer noves isometries, la simetria amb lliscament, ara també ens apareixen noves isometries: simetria rotativa, simetria amb lliscament…

Punts invariants: La **translació** no deixa **cap** punt invariant. La **simetria central** deixa **un** punt invariant, el centre. Els **girs** deixen una **recta**, l'eix de gir. La **simetria** especular deixa un **pla** de punts invariants, el pla de simetria. I si una isometria a l'espai deixa quatre punts invariants no coplanaris, és la identitat.

5. MOSAICS, FRISOS I ROSETONS

En passejar per una ciutat o pel camp pots veure muntons de transformacions geomètriques: veuràs simetries, girs i translacions pertot arreu, formant mosaics, frisos o rosetons; o bé en les formes de les flors

5.1. Mosaics

- Mira aquest taulellet d'un mosaic d'Istambul. La cel·la unitat és cada un dels taulellets amb què es construeix tot el mosaic mitjançant translacions. Indica els vectors de translació. Però pots reduir el motiu mínim. Utilitzant girs? Utilitzant simetries? Mira l'ampliació: Comprova que pots utilitzar com a motiu mínim la huitena part del taulellet.

Realitza la mateixa observació amb els altres taulellets d'Istanbul següents

- **Anàlisi de mosaics de l'Alhambra**: Observa el mosaic del marge. Imagina que és infinit, que completa tot el pla. Pots prendre com a motiu mínim un parell de fulles. Per a passar d'un parell de fulles a l'altre parell adjacent, quina transformació has utilitzat? És una simetria? És un gir? Hi ha centres de gir de 60º? I de 180º? I de 30º?

Utilitza una trama de triangles, o dibuixa una al teu quadern, per a dissenyar un mosaic semblant a aquest. Marca en la trama els centres de girs de 60º, de 180º i de 30º. Dibuixa un motiu mínim senzillet, per exemple una poligonal o una fulla, i mou-lo usant aqueixes transformacions.

- Analitza l'animació de generació d'un mosaic mitjançant girs i translacions, analitza l'animació:

http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/185487_am_1_Alhambra_3.swf

Observa com primer dibuixa una trama de quadrats, dibuixa un motiu mínim format per dos segments, després li aplica isometries a aqueix motiu: girs de 90º, amb els que dibuixa l'estrela, que per simetria completa la cel·la unitat a què finalment la trasllada per tot el mosaic.

- També pots veure en l'animació següent:

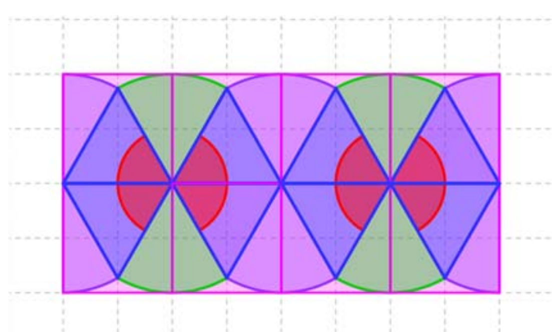
http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/195377_am_1Alhambra2.swf

com es realitza un estudi del **mosaic** del marge, buscant la cel·la unitat, el motiu mínim i estudiant els seus girs (de 90º i 180º) i els seus eixos de simetria.

Utilitza una trama de quadrats, o dibuixa una al teu quadern, per a dissenyar un mosaic semblant a aquest. Marca en la trama els centres de girs de 90º i de 180º. Marca els eixos de simetria. Dibuixa un motiu mínim senzillet, per exemple una poligonal, i mou-lo usant aqueixes transformacions. Completa primer la cel·la unitat, i després trasllada-la.

5.2. Frisos

Les randes, les greques dels brodats, les teles estampades, les reixes... utilitzen molt sovint les translacions als seus dissenys. Són els frisos.



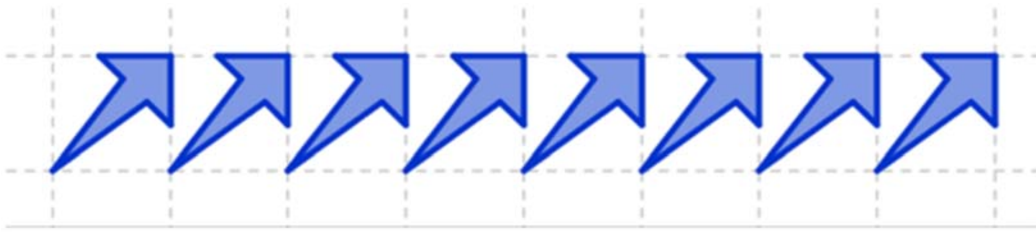
Observa el fris del marge. Com tots els frisos s'obté traslladant un motiu. Però poden tindre altres isometries a més de la translació. La combinació de translació, simetries i girs permeten obtindre set tipus de frisos diferents.

- Hem format frisos utilitzant les lletres de l'alfabet. Tots ells es formen per translació. Però de vegades hi ha altres isometries. A) En quines hi ha una simetria d'eix horitzontal. B) En quins hi ha girs de 180º? C) En quines hi ha simetries d'eix vertical? D) Hi ha simetries amb lliscament? E) Assenyala totes les famílies de simetries respecte a un eix, de girs i de translacions per les quals un punt del fris es transforma en un altre punt del mateix (suposat que es prolongue fins a l'infinit).

L1. LLLLL, L2. NNNNN, L3. VVVVV, L4. CCCCC, L5. HHHHH, L6. pbpbpb, L7. pqdbpqdbp

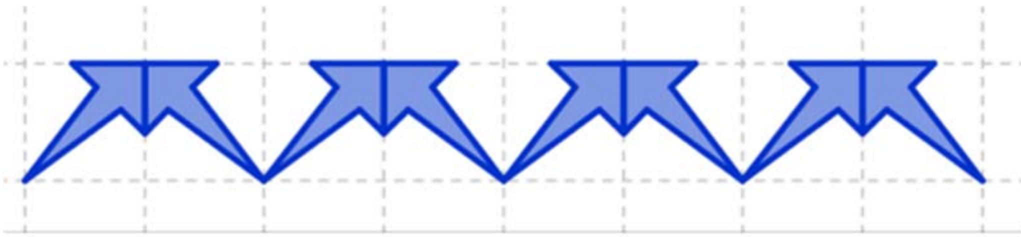
- Ix al carrer o en ta casa i busca frisos. Fotografia reixes, mira randes i greques... i fes un estudi dels diferents frisos que trobes. Dibuixa al teu quadern el seu disseny i intenta classificar-los segons l'esquema de les lletres del problema anterior, segons les transformacions que utilitzen. Per a això fes-te les preguntes següents: 1) Té girs? Si la resposta és NO, aleshores: 2) Té simetria horitzontal? Si la resposta és SI, és un L4, que com el fris format per la lletra C o la lletra D, no té girs i si, simetria d'eix horitzontal. Si la resposta és NO, aleshores: 3) Té simetria vertical? Si la resposta és SI, és un L3, com el fris format per la lletra V o la lletra A, que no té ni girs, ni simetria horitzontal i si simetria vertical. Si la resposta és NO, aleshores: 4) Té simetria amb lliscament? Si la té és un L6, i si no és un L1. Però si té girs pot tindre també simetria horitzontal i és un L5, o tindre simetria amb lliscament i ser un L7, o només tindre el gir i ser un L2, com el fris format per la lletra N o la lletra S.

- Als frisos següents assenyala totes les famílies de simetries respecte a un eix, de girs i de translacions per les quals un punt del fris es transforma en un altre punt del mateix (suposat que es prolongue fins a l'infinit).

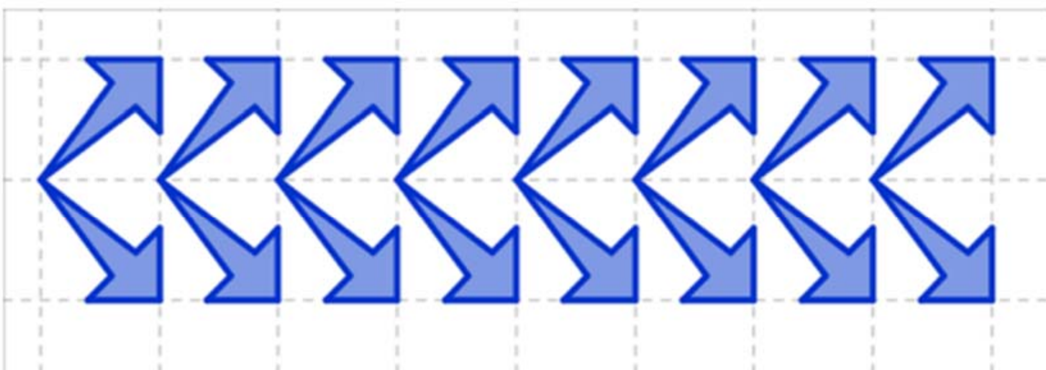


Fris L1: Només Translació

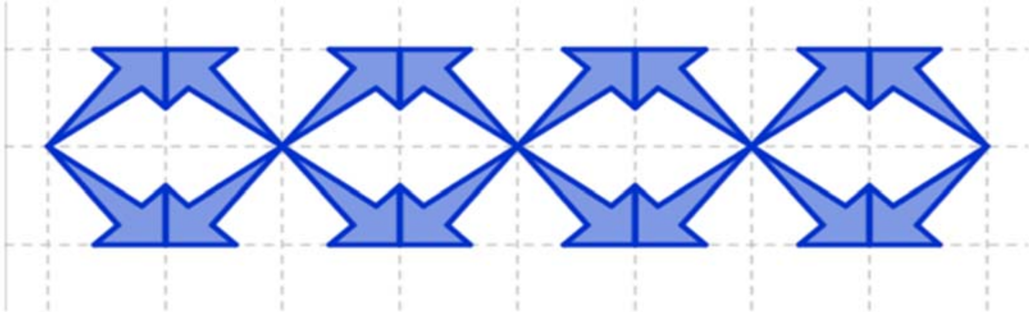
Fris L2: Girs de 180º



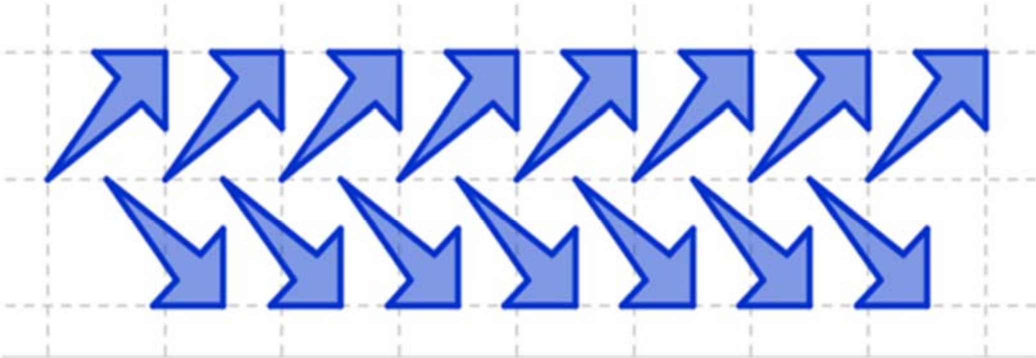
Fris L3: Simetria vertical



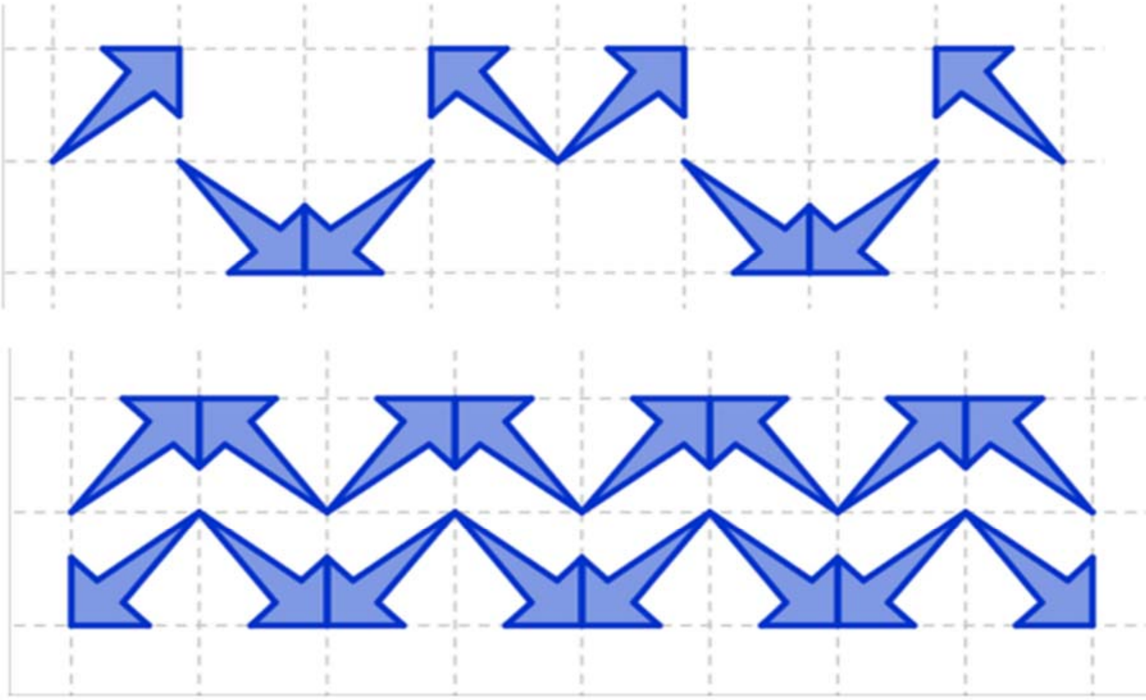
Fris L4: Simetria horitzontal



Fris L5: Girs, simetries verticals y simetries horitzontals.



Fris L6: Simetria amb lliscament



Frisos L7: Simetria amb lliscament i simetria vertical

Autores: Adela Salvador i María Molero
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

5.3. Rosetons

Els rosetons de les catedrals són espectaculars, però també es poden veure en situacions més quotidianes, com els tapaboques dels cotxes.

Es denominen grups de Lleonard als grups d'isometries d'aquests rosetons. Poden tindre simetries o únicament girs. Aquest rosetó d'una catedral té eixos de simetria i divideix la circumferència en 12 trossos iguals. Diem que és un D12. Si no hi ha simetries, només girs diem que és un C5, o un C6… segons dividisca a la circumferència en 5 o en 6… parts iguals.

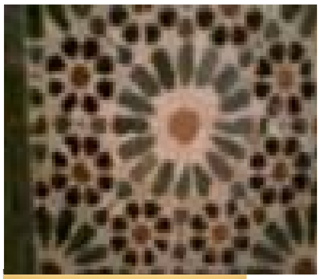
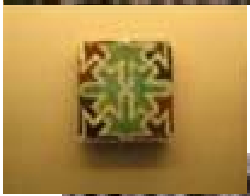
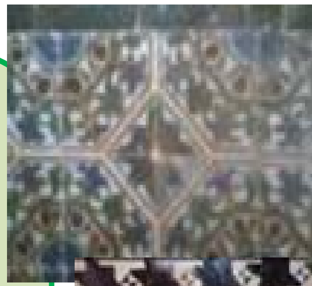
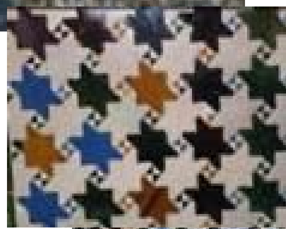
Per exemple, t'has fixat als tapaboques dels cotxes? De vegades tenen dissenys interessants. Hem arreplegat fotografies d'alguns tapaboques perquè els estudies.

- **Anàlisi de tapaboques:** Observa els següents tapaboques. Indica, per a cada un d'ells, les qüestions següents:

 1	 2	 3	 4
 5	 6	 7	 8
 9	 10	 11	 12

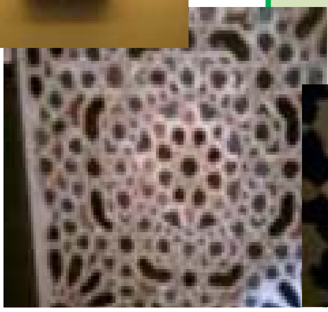
a) Té simetria central.
- Té eixos de simetria axial. Quants?
- Té centre de gir, quin és el menor angle de gir que el deixa invariant?
- Ix al carrer i fotografia o dibuixa els tapaboques que veges i et pareguen interessants. Fes un estudi d'ells.

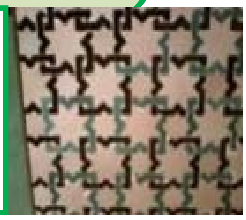
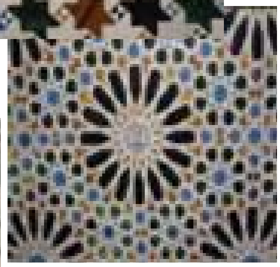
CURIOSITATS. REVISTA

Mosaics de l'Alhambra

Com saps els àrabs d'Espanya eren grands matemàtics i als mosaics de l'Alhambra demostren, a més del seu sentit artístic, els seus coneixements de Matemàtiques. S'ha demostrat que, partint d'un motiu mínim, i aplicant-li girs, simetries, translacions… sols hi ha 17 formes distintes d'emplenar el pla fent un mosaic. És sorprenent que eixes 17 formes ja es troben als mosaics de l'Alhambra.



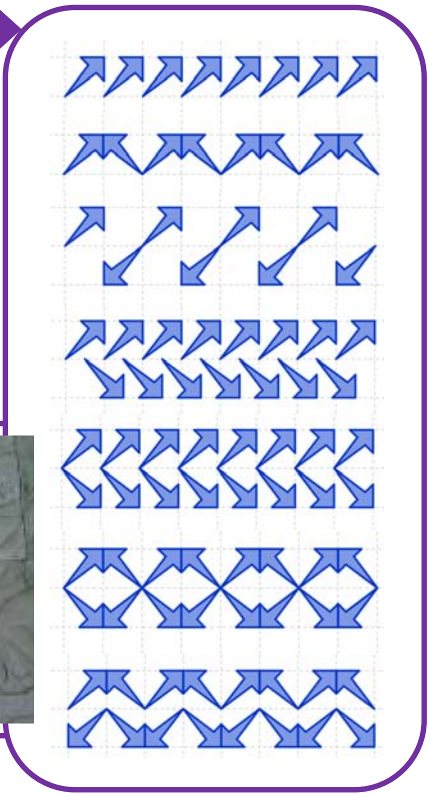
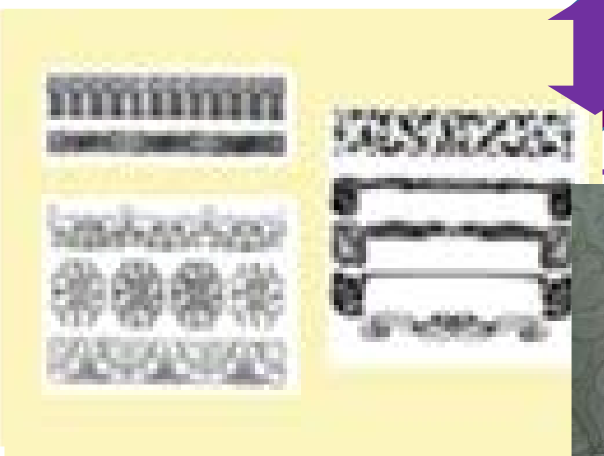
Pots veure la generació d'un d'aquests mosaics de l'Alhambra mitjançant simetries:

http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/195375_am_1.swf

Busca "mosaics" en Internet, i sabràs més sobre la generació de mosaics.

Frisos

Les sanefes, randes…, en les reixes, en… podem veure disenys que es repeteixen al llarg d'una línia per translación. S'ha demostrat que només hi ha 7 formes distintes de fer aqueixos


Pots veure la generació d'un fris: (http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/195415_am_1Friso.swf)

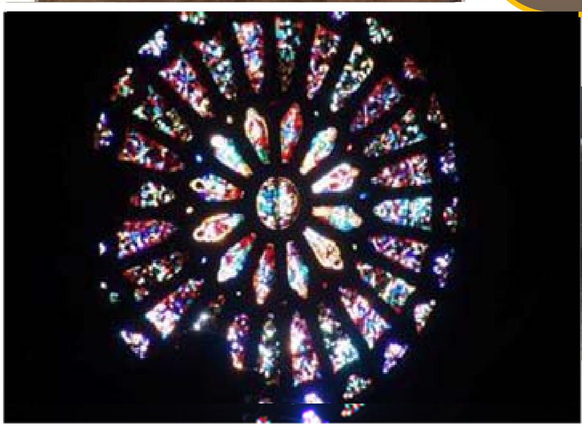
Cristales

Igual que en el plano sólo existen 17 posibles diseños de mosaicos, en el espacio existen 230 posibles tipos de diseños cristalográficos que compacten el espacio.

Per ser matemàtic hi ha que ser poeta. *Sonya Kovalevkaya.*

Rosetons

Girs i simetries pasant tots per un centre. Així es disenyen els rosetons. Si només hi ha girs s'anomenen C_n, sent C_2 si només té un gir de 180º, C_3 si el té de 120º… El tapaboques de baix és, per tant, un C_5. I si té simetries, s'anomenen D_n com els rosetons que veiem que són D_{12} o D_{16}. Busca en Internet "grups de Leonardo" i voràs més coses d'ells

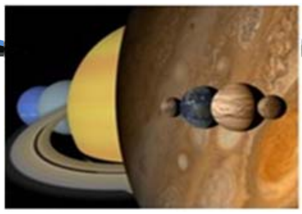


Autores: Adela Salvador i María Molero
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

Tot es mou.

Et mous no sols quan camines o vas amb cotxe. Quan estàs quiet també et mous. Tot es mou a l'Univers. La Terra gira al voltant del seu eix. El radi de la Terra és de 6.400 km, per la qual cosa la longitud de l'Equador terrestre és de $2\pi r$ = 40.192 km. Tarda 24 hores a fer una volta, per tant 40192/24 = 1674,67, per la qual cosa si estigueres a l'Ecuador estaries movent-te a una velocitat aproximada de 1.675 km/h.

Planetas del Sistema Solar



La Terra gira al voltant del Sol. Tarda aproximadament 365 dies en fer una volta sencera. Ara viatgem a 107.000 km/h girant al voltant del Sol.

Imagen en infrarrojos del centro de la Vía Láctea

El Sol es mou dins de la nostra galàxia, on també gira a una velocitat de 810.000 km/h al voltant del centre de la galàxia. El Sol està a 27.000 anys llum del centre de la nostra galàxia i tarda 200 milions d'anys en fer una volta.

Galàxia Andròmeda

La nostra galàxia, la Via Làctia, també es mou. S'acosta a la Galàxia Andròmeda a una velocitat de 230.000 km/h.

Mareig em dóna el pensar a quina velocitat m'estic movent!

Autores: Adela Salvador i María Molero
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

RESUM

		Exemples
Semblança	Transformació geomètrica que conserva els angles i les distàncies són proporcionals.	Una fotocòpia reduïda
Translació	Ve determinada pel seu vector de translació. Són isometries directes. La composició de dues translacions és una translació.	El traslladat del punt *P* (1, 2) per la translació de vector **v** = (4, 5) es *P'* (5, 7).
Gir o rotació al pla	Ve determinat pel centre de gir i l'angle de gir.	El girat del punt *P* (1, 2) pel gir de centre l'origen i angle 90º és *P'* (2, –1)
Gir a l'espai	Ve determinat per l'eix de gir i l'angle	
Simetria axial	Es coneix pel seu eix de simetria	El simètric del punt *P* (1, 2) per la simetria d'eix l'eix d'ordenades és *P'* (–1, 2)
Simetria especular	Es coneix pel seu pla de simetria	
Isometries	Són transformacions geomètriques que conserven les distàncies i els angles.	Translacions, girs i simetries
Composició d'isometries	La composició de dues isometries directes és una isometria directa. La composició de dues isometries inverses és una isometria directa. La composició d'una isometria directa amb una inversa és una isometria inversa.	
Composició d'isometries al pla	La composició de dos girs del mateix centre és un gir del mateix centre. La composició de dues simetries és un gir o una translació.	
Elements invariants al pla	La **translació** no deixa **cap** punt invariant. El **gir** deixa invariant **un** punt, el centre de gir. La **simetria** deixa invariant una **recta**, l'eix de simetria La **identitat** deixa invariant **tot** el pla.	
Elements invariants a l'espai	La **translació** no deixa **cap** punt invariant. La simetria **central** deixa invariant **un** únic punt, el centre de simetria. El **gir** deixa invariant una **recta**, l'eix de gir. La **simetria** deixa invariant el **pla** de simetria La **identitat** deixa invariant **tot** l'espai.	

Un bon resum d'aquest capítol el tens en aquesta presentació en Power Point:

http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/Mosaicosyfrisos.pdf

MATERIALS PER A L'AULA

Presentacions:

3 Un bon resum d'aquest capítol el tens en aquesta presentació en Power Point:
http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/Mosaicosyfrisos.pdf

4 Algunes presentacions de Power Point:
b) Sobre frisos i mosaics
http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/Movimientosenelplano.pdf

- Frisos i mosaics en la web: En Pensament Matemàtic:
http://innovacioneducativa.upm.es/sandbox/pensamiento/chip_geometrico/geometria_y_arte.pdf

5 Treballs realitzats per estudiants que poden servir de model perquè, ara ells, realitzen altres de similars:

- Frisos i reixes units per les Matemàtiques.
http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/rejas.pdf

Presentació confeccionat per dues alumnes de 2º de batxillerat de l'Institut Salvador Victòria de Monreal del Camp de Terol: Pilar Lorente Lorente i Paloma Plumed Martín. És un treball interessant sobre frisos i reixes, encara que, opinem, que algun fris no està correctament classificat. No obstant això és un magnífic model per a inspirar altres treballs d'eixir al carrer i fotografiar o dibuixar reixes, (o mosaics, o altres tipus de frisos) que es vagen veient.

- Power Point que arreplega treballs sobre mosaics de diferents alumnes de la Universitat Politècnica de Madrid. Pot també servir d'inspiració per a proposar a l'alumnat que confeccione els seus propis mosaics.
http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/Mosaico.pdf

Internet

6 Buscant en internet hem trobat, davall el títol dels 17 grups de simetria en el pla, l'entrada següent: http://www.acorral.es/index3.htm. Són pràctiques amb Geogebra sobre mosaics, frisos i zelosies. Estan dissenyats, amb dissenys vistosos i originals mosaics amb els 17 grups. Al final hi ha una taula, a manera de resum, que permet identificar i classificar cada grup de simetria. També hi ha un full de treball per a l'alumnat.

7 També en Internet, en http://www.xtal.iqfr.csic.es/Cristalografia i en particular en:

http://www.xtal.iqfr.csic.es/Cristalografia/parte_03.html

un treball sobre els grups d'autosimetria dels cristalls summament interessant i d'un nivell molt alt. Existeix 32 classes de xarxes cristal·lines: triclínic, monoclínic, tetragonal, cúbic, hexagonal… Estudia que només 11 tenen centre de simetria. En analitzar quins són compatibles amb la translació s'obtenen les xarxes (o xarxes de Bravais) de les que hi ha 11 xarxes. Combinant els 32 grups cristal·logràfics amb les 11 xarxes troba que hi ha 230 formes possibles de repetir un objecte finit (motiu mínim) a l'espai de dimensió tres.

Llibres: L'Alhambra. Treball monogràfic editat per l'Associació de Professors de Matemàtiques d'Andalusia, en 1987, que arreplega treballs de diversos autors, que permet aprendre molt més sobre transformacions geomètriques i els grups d'autosimetria en el pla. Editat per la revista "Epsilón".

EXERCICIS I PROBLEMES

Translació

1. Dibuixa al teu quadern un paral·lelogram sobre un sistema de referència i una quadrícula. Tens quatre segments orientats. Determina les coordenades dels vectors sobre els dits segments. Quins tenen les mateixes coordenades?

2. Tenim els punts *A* (0, 5), *B* (3, 6), *C* (4, -2) i *D* (7, 3). Calcula les coordenades dels vectors ***AB***; ***AC***; ***AD***; ***BC***; ***BD***; ***CD***; ***DC***; ***BA***.

3. Determina el vector de translació que trasllada el punt *A* (3, 7) al punt *A′* (1, 5).

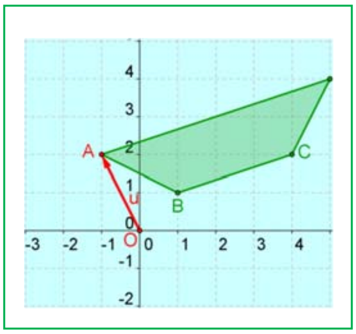
4. Per la translació de vector **u** = (2, 8) es trasllada el punt *A* (9, 4) al punt *A′*. Quines són les coordenades de *A′*?

5. Per la translació de vector **u** = (–3, –1) es trasllada el punt *A* al punt *A′* (3, 3). Quines són les coordenades de *A*?

6. Traslladem la circumferència de centre *C* (5, 2) i radi 3 unitats amb la translació de vector **u** = (–5,–2). Determina el centre i el radi de la circumferència traslladada.

7. Dibuixa al teu quadern uns eixos coordenats i en ells un quadrat de costat 2 unitats al què anomenes *C*, li apliques una translació segons el vector ***u*** = (4, 1) i anomenes *C*' al seu traslladat. Ara apliques a *C′* una translació segons el vector ***v*** = (–2, 4). La isometria que transforma *C* en *C*'', és una translació? Escriu les coordenades del seu vector. Mitjançant aqueixa translació, en quin punt es transforma l'origen de coordenades?

8. El vèrtex inferior esquerre d'un quadrat és A (3, 1) i el vèrtex superior esquerre és B (1, 3). Li apliques una translació de vector ***u*** = (–2, 4), quines són les coordenades dels quatre vèrtexs del quadrat transformat?



9. Dibuixa la imatge que resulta d'aplicar al trapezi de la figura la translació de vector ***OA*** = (–1, 2). Determina les coordenades dels punts transformats de *A* (–1, 2), *B* (1, 1), *C* (4, 2) i *D* (5, 4) per la dita translació.

10. Aplica la translació de vector ***u*** = (–3, 4) al triangle *ABC* de vèrtexs *A* (3, 1), *B* (4, 4), *C* (6, 5), i calcula les coordenades del triangle transformat.

11. Dibuixa al teu quadern un cercle de centre l'origen i radi 2 unitats.

a) Trasllada'l amb la translació de vector **u** = (3, 0).

b) Trasllada'l després mitjançant la translació de vector **v** = (0, 4).

c) Indica les coordenades del centre del segon cercle traslladat.

d) Indica les coordenades del traslladat del punt (0, 2) en aplicar-li cada una de les dues translacions.

12. Traslladem el triangle *ABC* de vèrtexs *A* (6, 1), *B* (–3, 4) i *C* (0, 8), mitjançant la translació de vector **u** = (7, 1), i després mitjançant la translació de vector **v** = (2, 8). Determina les coordenades del triangle transformat analíticament i gràficament.

13. La composició de dues translacions té per vector (5, 9). Si una d'elles és la translació de vector **u**=(7,3), quins components té l'altre vector de translació?

14. a) Dibuixa al teu quadern un triangle *ABC* i trasllada'l 5 cm a la dreta. Denomina *A'B'C'* al triangle obtingut.

b)Trasllada *A'B'C'* ara 4 cm cap amunt i denomina *A"B"C"* al nou triangle.

c) Dibuixa el vector que permet passar directament del triangle *ABC* al *A"B"C"* i mesura la seua longitud. Quines són les seues coordenades?

15. Determina el vector de translació de la translació inversa a la de vector ***u*** = (–2, 5).

16. a) Dibuixa al teu quadern una figura, i repeteix el dibuix traslladant la figura 4 vegades amb la mateixa translació. En fer-ho, dibuixaràs un fris.

b) Un fris confeccionat amb lletres L és: L L L L L. Dibuixa un fris confeccionat amb lletres J. Un altre confeccionat amb lletres M. A més de translació, té simetries?

c) Busca un fris. Mira les reixes del teu carrer, un brodat o una punta, les greques d'uns taulellets… i dibuixa el seu disseny al teu quadern.

17. Mitjançant una translació a l'espai, en què es transforma un pla? I una esfera? I un con? I dos plans paral·lels? I dos plans ortogonals? Analitza els resultats.

Girs

18. Dibuixa al teu quadern el punt *A* (5, 4). Indica les coordenades del punt *A'* què s'obté en girar 180º i amb centre l'origen el punt *A*. Indica les coordenades del punt *A''* obtingut en girar *A'* 90º amb el mateix centre de gir.

19. Dibuixa una figura al teu quadern, calca-la, retalla-la i apega-la inclinada al costat de la inicial. Les dues figures, tenen totes les longituds iguals?, i els seus angles? Determina, amb compàs i transportador, el centre i l'angle de gir.

20. Dibuixa al teu quadern una lletra F i la lletra F girada 30º amb centre de gir el seu punt més inferior.

21. Dibuixa al teu quadern un triangle rectangle isòsceles i amb centre en el vèrtex d'un dels angles aguts aplica-li un gir de 45º en sentit positiu. Després aplica-li un altre gir de 45º, i així successivament fins a arribar al triangle inicial. Quins girs has estat fent?

22. Dibuixa al teu quadern un cercle de centre *O*, dos diàmetres perpendiculars *AB* i *CD* i una corda *CB*. Sobre el mateix dibuix traça les figures obtingudes fent girar la figura formada pels dos diàmetres i la corda, amb girs de centre *O* i angles 45º, 90º, 135º, 180º, 225º, 270º i 315º. Hauràs fet la composició de girs de 45º diverses vegades.

23. La lletra H té centre de simetria? Indica tres objectes quotidians que tinguen simetria central.

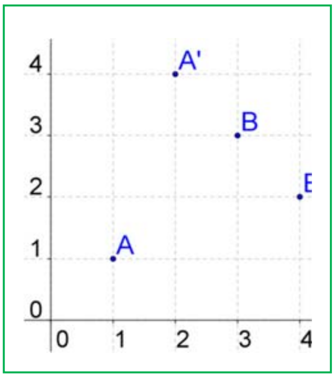
24. Sobre uns eixos cartesians representa els punts *A* (2, 6), *B* (–2, 5), *C* (5, 3) i els seus simètrics respecte a l'origen *A', B'* i *C'*. Quines coordenades tenen *A'*, *B'* i *C'*?

25. Dibuixa al teu quadern el triangle de vèrtexs *A* (3, 7), *B* (5, –5) i *C* (7, 2). Dibuixa el triangle que s'obté en girar-lo amb centre en el punt *D* (8, 8) un angle de 180º. És una simetria central. Quines són les coordenades dels vèrtexs *A'*, *B'* i *C'* del nou triangle?

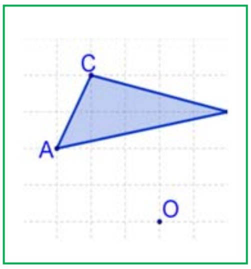
26. Dibuixa en un sistema de referència un punt *P* i el seu simètric *P'* respecte de l'origen. Si les coordenades de *P* són (*x*, *y*), quines són les de *P'*?

27. Donat el triangle *A*(3, –4), *B* (5, 6), *C* (–4, 5), troba les coordenades dels vèrtexs del triangle simètric respecte de l'origen.

28. Dibuixa un triangle equilàter *ABC* i amb centre en el vèrtex *A* aplica-li un gir d'angle 60º. El triangle donat i el transformat, quina figura formen? Torna a aplicar al triangle transformat el mateix gir de centre *A*, quins girs has estat fent? Quants girs has d'aplicar al triangle inicial perquè torne a ocupar la posició inicial?



29. Dibuixa al teu quadern els quatre punts de la figura. Determina, amb regla, compàs i transportador, el centre i l'angle de gir sabent que els punts *A* i *B* s'han transformat mitjançant un gir en *A'* i *B'*.



30. Dibuixa la imatge que resulta d'aplicar al triangle de la figura el gir de centre *O* que transforma el punt *A* en el punt *B*.

31. Utilitza un transportador d'angles, regla i compàs, per a girar una recta 60º respecte a un punt *O* exterior a ella (és prou girar dos punts de dita recta). Mesura els angles que formen les dues rectes, la inicial i la girada. Observes alguna regularitat? Investiga un mètode per a girar una recta transformant un sol punt. Quin punt has de triar i per què?

32. **Joc per a dos jugadors**: Forma sobre la taula un polígon regular utilitzant monedes (o fitxes o boletes de paper) com a vèrtexs. Alternativament cada jugador retira o una moneda o dues monedes adjacents. Gana qui retire l'última moneda. (***Ajuda***: És un joc d'estratègia guanyadora que pots descobrir utilitzant la simetria central).

33. Al disseny d'aquest mosaic s'han utilitzat girs al pla. No el veiem complet, però podem imaginar que fóra infinit. Indica els centres de gir que veges. Al centre de la figura hi ha un centre de gir claríssim, de quin angle? Hi ha girs de 45º? Quins són els seus centres de gir? Hi ha centres de simetria? Indica'ls.

34. Para cada un dels següents polígons indica el centre de gir i el mínim angle de gir que deixen invariants a cada un d'ells:

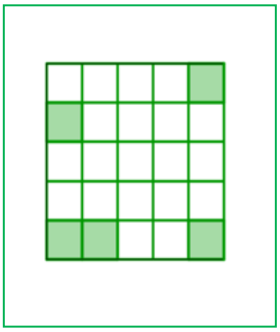
a) Pentàgon regular b) Hexàgon regular c) Decàgon regular

d) Triangle equilàter e) Rectangle f) Quadrat

g) Rombe h) Paral·lelepípede i) Octògon regular

35. En la simetria central de centre (2, 3) hem vist que el simètric del punt *A* (8, 1) és el punt *A'* (–4, 5). Calcula els simètrics dels punts *B* (12, 7), *C* (9, 10), *D* (5, 8) i *E* (7, 6).

36. Indica si el mosaic de l'Alhambra del marge té centre de gir, i determina quin és el menor angle de gir que fa que el mosaic se superpose (sense tindre en compte els canvis de color). Hi ha centres de simetria?



37. Amb ajuda de paper quadriculat transforma mitjançant una simetria central, una recta, una circumferència, un segment, un triangle, dues rectes paral·leles i dues rectes perpendiculars. En què es transformen? Analitza els resultats.

38. Quin nombre mínim de quadrats és necessari pintar de verd perquè el quadrat gran tinga un centre de simetria?

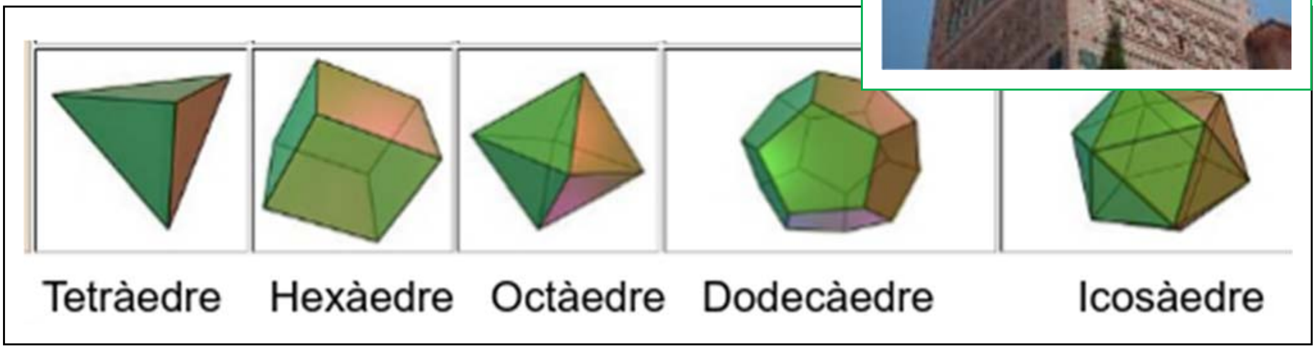
39. Hem girat el punt *A* (3, 5) i hem obtingut el punt *A′* (7, –2). Determina el centre de gir i l'angle utilitzant regla, compàs i transportador d'angles.

40. Quins dels polígons estrelats de la figura del marge tenen centre de simetria? Indica el centre de gir i el mínim angle de gir que deixa invariants a cada un d'ells.

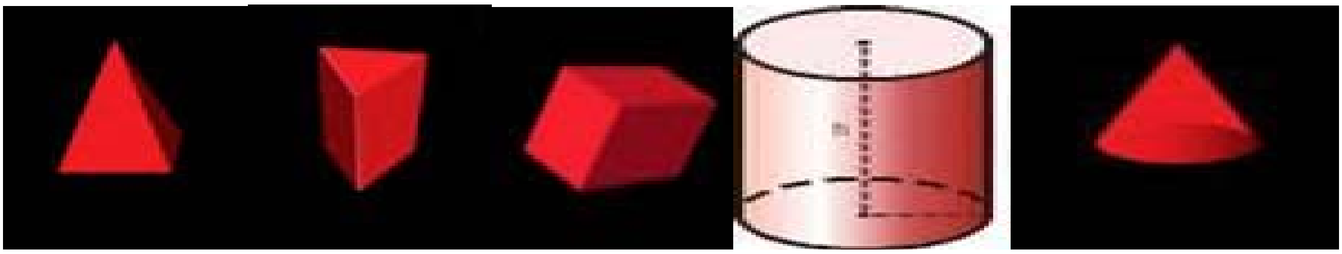
41. Determina tres objectes quotidians que tinguen algun eix de gir.

42. Observa aquesta torre mudèjar de Terol. Està dissenyada utilitzant girs en l'espai. Quin és el seu eix de gir? I l'angle de gir?

43. Pensa en els cinc poliedres regulars. Uns tenen simetria central a l'espai, altres no. Quins la tenen?



44. Pensa ara en els següents cossos geomètrics: Una piràmide quadrangular regular, un prisma triangular regular, un prisma romboïdal oblic, un cilindre i un con. Quins poden formar-se mitjançant girs en l'espai? Quin és el seu eix de gir? Quines tenen simetria central i quins no?



Simetries

45. Dibuixa al teu quadern un sistema de referència i una lletra B. Dibuixa la lletra simètrica de B respecte a l'eix d'abscisses i respecte a l'eix d'ordenades.

46. Classifica les lletres majúscules de l'alfabet, a) en les que són simètriques respecte d'un eix de simetria horitzontal i un eix de simetria vertical. b) en les que només són simètriques respecte d'un eix de simetria vertical, c) en les que només ho són respecte de l'eix de simetria horitzontal, i d) en les que no tenen cap eix de simetria. e) Comprova que les lletres que tenen dos eixos de simetria tenen centre de simetria. La raó ja la saps: La composició de dues simetries d'eixos secants és un gir.

47. Quines de les següents successions de lletres tenen un únic eix de simetria? Quines tenen dos eixos? Quines cap? Quines tenen centre de simetria?

a) ONO b) NON c) DODO d) OIO e) HEMO f) HOOH

48. Indica els eixos de simetria de les figures següents:

a) Quadrat. b) Triangle equilàter. c) Trapezi isòsceles. d) Hexàgon.

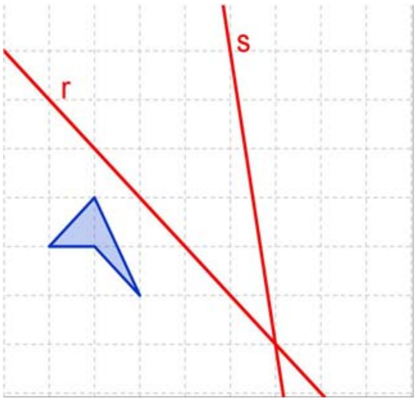
e) Circumferència. f) Rectangle. g) Rombe. h) Pentàgon.

49. Considera que els vèrtexs del quadrilàter de la figura tenen de coordenades: (1, 3), (2, 3), (3, 2) i (2, 4). Aplica-li dues simetries axials d'eixos paral·lels, la primera respecte a l'eix *r* i la segona respecte a l'eix *s*.

a) Indica les coordenades dels vèrtexs de les figures transformades per la dita composició de simetries.

Si anomenem *C* al quadrilàter inicial, *C'* al seu simètric respecte a l'eix *r* i *C''* al simètric de *C'* respecte a l'eix *s*:

- Quina isometria ens permet transformar directament *C* en *C''*.
- Quins elements la defineixen?
- Què ocorre si apliquem les dues simetries en distint orde, primer respecte a l'eix s i després respecte a l'eix *r*? Quins són ara les coordenades dels vèrtexs de la figura *C'''* transformada?



50. Considera que els vèrtexs del quadrilàter de la figura tenen de coordenades: (1, 3), (2, 3), (3, 2) i (2, 4). Aplica-li dues simetries axials d'eixos secants, la primera respecte a l'eix *r* i la segona respecte a l'eix *s*.

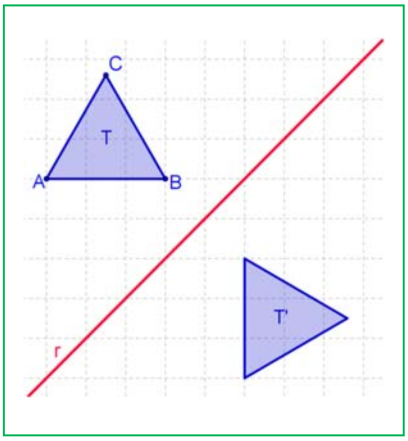
a) Indica les coordenades dels vèrtexs de les figures transformades per la composició de simetries.

1) Si anomenem *C* al polígon inicial, *C'* al simètric respecte a l'eix *r* i *C''* al simètric de *C'* respecte a l'eix *s*: Quina isometria ens permet transformar directament *C* en *C''*. Quins elements la defineixen?

2) Què ocorre si apliquem les dues simetries en distint orde, primer respecte a l'eix s i després respecte a l'eix *r*? Quina isometria tenim ara? Quins elements la defineixen?

3) Indica les coordenades dels vèrtexs de la figura transformada si primer apliquem la simetria d'eix s i després la d'eix *r*.

51. Dibuixa en un paper el contorn d'una figura irregular, en almenys cinc posicions. (Si no se t'acut cap figura, dibuixa una lletra G). a) Són iguals aquestes figures? Explica el teu raonament. b) Com pots passar d'una figura a una altra? c) Pinta amb el mateix color totes les figures que pots aconseguir des de la posició inicial, desplaçant la figura sense alçar-la. Utilitza un altre color per a les restants. Es pot passar sempre d'una figura a una altra del mateix color, lliscant la figura sense donar-li la volta? Canvien les dimensions de la figura?

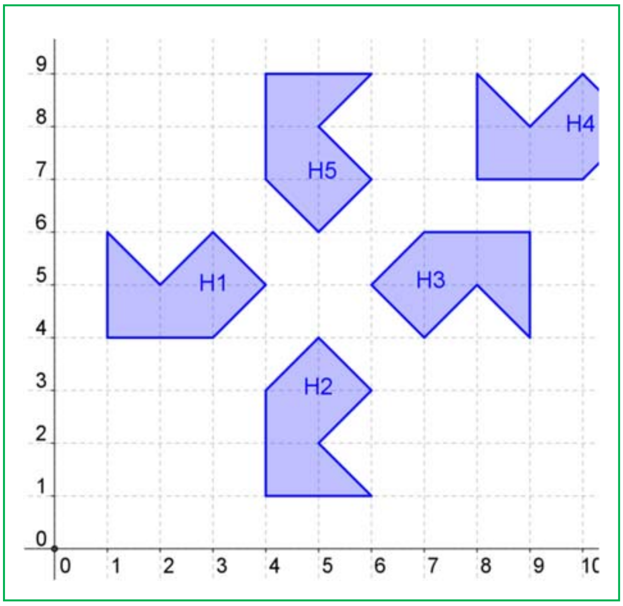


52. El triangle equilàter T de la figura s'ha transformat en el triangle T' mitjançant una simetria axial d'eix *r*. a) Copia el dibuix al teu quadern i anomena al dibuix a *A'*, *B'* i *C'*, que són els transformats de *A, B i C* respectivament. b) Troba un gir que transforme T en T', indicant el centre i l'angle de gir, quins són ara els transformats dels vèrtexs *A, B i C?*

53. Llibre d'espills: Utilitza un llibre d'espills per a obtindre simetries. Pots construir un amb dos rectangles de metacrilat units amb cinta d'embalar. Mira pel llibre d'espills un segment, una circumferència, diferents figures…

Problemes

54. Indica els punts invariants i les rectes invariants en cada un dels següents moviments.



a) Una translació segons el vector (1, 3).

- Una simetria axial respecte a l'eix d'ordenades.
- Una simetria central respecte al centre de coordenades.

55. En la figura adjunta l'hexàgon 1, denominat H1, ha canviat de posició mitjançant moviments. A) Indica el tipus de moviment: translació, gir o simetria que transforma H1 en cada un dels altres hexàgons. B) Determina, en cada cas, els elements bàsics que defineixen cada transformació indicant les coordenades de cada un dels vèrtexs de H1 quines coordenades té en cada un dels transformats, i si és possible, generalitza.

56. Sabem que les translacions no deixen cap punt invariant, però, a) deixa alguna recta invariant?

b) La simetria central deixa un punt invariant, el centre, però, quines rectes deixa invariants una simetria central al pla? I una simetria central a l'espai?

c) Una simetria axial deixa invariants tots els punts del seu eix, que és una recta invariant de punts invariants, però quines altres rectes invariants deixa una simetria axial? I quins altres punts?

d) Una simetria especular, a l'espai, deixa un pla invariant de punts invariants, el pla de simetria, quins altres plans deixa invariants? Quines altres rectes? Quins altres punts?

57. Copia al teu quadern i completa les taules següents:

Taula I: Al pla	**Punts invariants**	**Rectes invariants**	**Rectes invariants de punts invariants**
Translació			
Simetria central			
Gir			
Simetria axial			
Simetria amb lliscament			
Taula II: A l'espai	**Punts invariants**	**Rectes invariants**	**Plans invariants**
Translació			
Simetria central			
Gir			
Simetria especular			
Simetria amb lliscament			

58. Dibuixa el triangle T de vèrtexs *A* (2, 1), *B* (4, 2) i *C* (1, 3)

a) Aplica a T una translació segons el vector ***u*** = (–3, 2), anomena T' al seu transformat i indica les coordenades dels seus vèrtexs.

59. Dibuixa el triangle T'' que resulta d'aplicar a T' un gir de 270º respecte a l'origen de coordenades i indica les coordenades dels seus vèrtexs.

60. Dibuixa el quadrat *K* de vèrtexs *A* (2, 1), *B* (4, 2) *C* (1, 3) i *D* (3, 4).

a) Aplica a *K* una translació segons el vector ***u*** = (–3, –1), anomena *K*' al seu transformat i indica les coordenades dels seus vèrtexs.

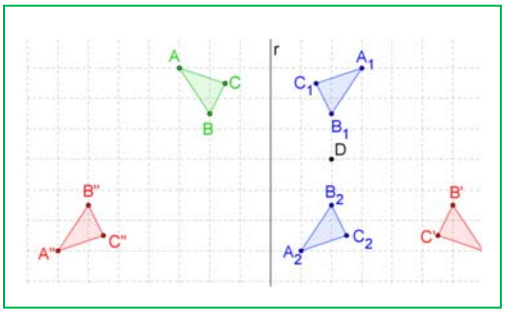
Dibuixa el quadrat *C*'' que resulta d'aplicar a *C* una simetria central respecte al punt (3, 0) i indica les coordenades dels seus vèrtexs.

Problemes d'ampliació

61. Transforma la lletra L mitjançant dues isometries consecutives. Pots obtindre el resultat final mitjançant una única isometria? Analitza possibles situacions.

62. Plega una tira de paper com un acordió. Fes alguns talls i desplega-la. Hauràs confeccionat un fris. Assenyala en ell totes les isometries. Assaja altres dissenys de frisos.

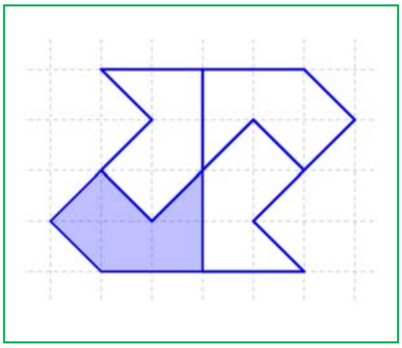
63. La composició d'isometries no és commutativa. Observa la figura adjunta:



a) Determina la isometria que transforma el triangle *ABC* en $A_1B_1C_1$ i la que transforma aquest en $A_2B_2C_2$

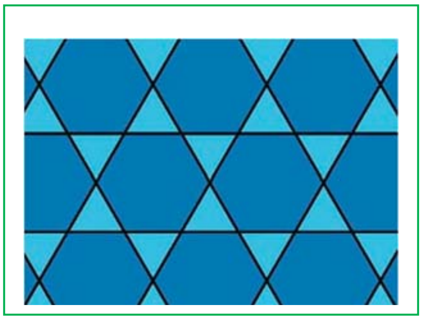
i) Indica la isometria que transforma el triangle *ABC* en *A'B'C'* i la que transforma aquest en *A"B"C"*.

ii) Quina conclusió obtens?



➢ Indica les isometries que cal aplicar a la figura pintada en blau per a obtindre la figura completa. Determina els elements que defineixen cada isometria. Pinta de distint color cada un dels quatre polígons i construeix un fris.

64. 1) La lletra A té un eix de simetria vertical. 2) La lletra H té dos eixos de simetria, un vertical i l'altre horitzontal, a més d'un centre de simetria. 3) La lletra Z té centre de simetria, però cap eix de simetria. 4) La lletra E té un eix de simetria horitzontal. 5) La lletra F no té centre de simetria ni cap eix de simetria. Classifica les **lletres de l'abecedari** en aquests grups, en el primer grup estaran les que tenen un eix de simetria vertical, com la lletra A, en el segon les que té dos eixos de simetria, un vertical i l'altre horitzontal, com la lletra H, en el tercer les que només tenen centre de simetria com la lletra Z, i en el quart les que com la lletra E tenen un eix de simetria horitzontal. Finalment, en un cinquè grup les que no tenen cap tipus de simetria com la lletra F.



65. **Anàlisi d'un mosaic:** Dibuixa al teu quadern una trama de triangles, en ella un esquema del mosaic del marge i assenyala al teu dibuix tots els eixos de simetria, els centres de gir i els vectors de translacions pels quals el transformat d'un punt del mosaic (suposat que es prolonga fins a l'infinit) és també un punt del mosaic.

a) Hi ha girs de 60º? Si n'hi ha marca els centres d'aquests girs amb un asterisc *.

- Hi ha girs de 180º? Si n'hi ha marca els centres d'aquests girs amb un cercle o.
- Assenyala els eixos de simetria que trobes amb una línia de punts.

- Dibuixa al marge els vectors de translació, horitzontals i verticals, que hi haja.
- Dissenya el teu propi mosaic que mantinga els mateixos moviments fent quelcom senzill (un arc, una poligonal) que es vaja movent.

66. Analitza aquest altre mosaic. Indica les transformacions que hem d'aplicar a l'element mínim del mosaic adjunt per a deixar-lo invariant. Indica també els elements que les caracteritzen.

67. En l'animació següent observa la forma d'obtindre un mosaic.

http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/195375_am_1.swf

Ha pres una cel·la unitat de 4 quadradets, ha seleccionat un motiu mínim… Indica que simetries ha utilitzat, quins girs i quines translacions.

68. Determina els eixos i centres de simetria de les següents gràfiques de funcions. Assenyala quins són parells i quins imparells. (Dibuixa prèviament la seua gràfica).

a) $y = x^2$ b) $y = x^3$ c) $y = x^4$ d) $y = x$

69. Un tetràedre regular té 6 plans de simetria, dibuixa'ls al teu quadern i indica la forma de determinar-los.

70. Un octàedre té 9 plans de simetria, dibuixa'ls, 6 passen pels punts mitjans d'arestes oposades, saps caracteritzar els altres 3? Intenta trobar plans de simetria en un dodecàedre, i en un icosàedre.

71. Un ser humà és més o menys simètric. Els mamífers, pardals i peixos també ho són. Tenen un pla de simetria. A) I les estreles de mar com la de la figura, tenen un pla de simetria? B) Tenen més? Quants? C) Té un eix de gir? De quins angles? D) Té simetria central? E) Dibuixa al teu quadern una estrela de cinc puntes i indica els seus eixos de simetria i el seu centre de gir. (És un grup de Lleonard D_5)

72. Un prisma recte de base un rectangle, té simetria central? Té plans de simetria? Quants? Descriu-los. Té eixos de gir? Descriu-los. De quins angles?

73. Una piràmide regular de base un triangle equilàter, té simetria central? Té plans de simetria? Quants? Descriu-los. Té eixos de gir? Descriu-los. De quins angles?

74. Descriu les **isometries** que deixen invariants als següents cossos geomètrics, analitzant els seus elements:

a) Esfera b) Cilindre recte c) Prisma regular de base quadrada

d) Con e) Cilindre oblic f) Piràmide recta de base un triangle equilàter

75. Retalla un triangle isòsceles obtusangle. Col·loca'l al llibre d'espills de manera que dos costats queden recolzats en la superfície dels espills, i l'altre sobre la taula. Mou les pàgines del llibre de manera que veges distintes piràmides, en les que la seua base són polígons regulars. Açò ens permet estudiar el gir de les piràmides, de quin angle és. (Pots construir-te un llibre d'espills amb dos espills xicotets o dos fulls de metacrilat, apegats amb cinta d'embalar adhesiva).

76. Pensa en els poliedres regulars. Còpia la següent taula al teu quadern i completa-la:

POLIEDRE	Té centre de simetria? SI/NO	Té eixos de gir? SI/NO	Quants eixos de gir té? De quins angles?	Té plans de simetria? SI/NO	Quants plans de simetria té?
Tetràedre					
Cub					
Octàedre					
Dodecàedre					
Icosàedre					

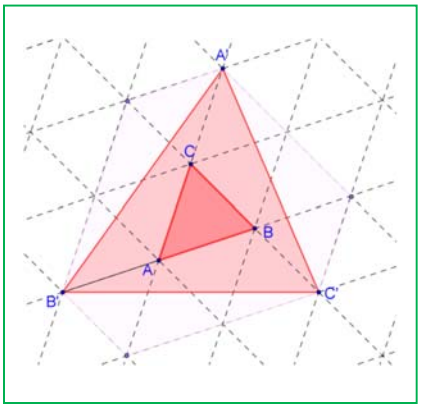
77. Contesta a les següents preguntes justificant les respostes.

a) És possible que una figura tinga dos eixos de simetria paral·lels?

I. La intersecció de dos eixos de simetria, és sempre un centre de simetria?

II. Per què un espill canvia la dreta per l'esquerra i no canvia això de dalt per això de baix?

III. És cert que dos cercles simètrics respecte a un pla són sempre talls d'una esfera?

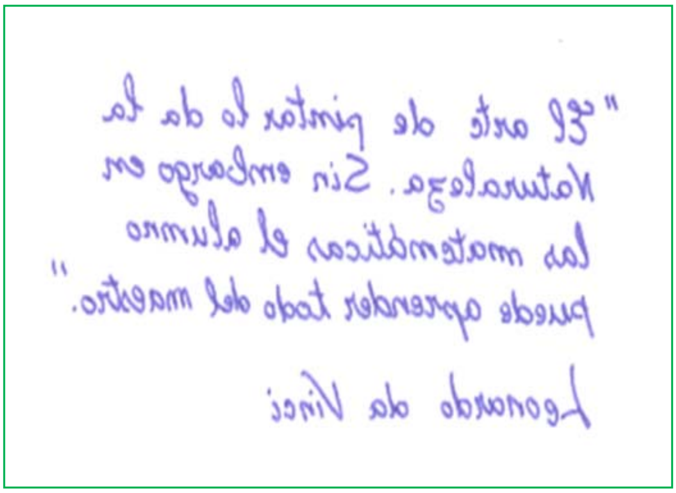


78. A partir d'un triangle qualsevol *ABC* construïm el triangle *A'B'C'*, en el que *A'* és el simètric de *A* respecte al centre *C*, *B'* és el simètric de *B* respecte al centre *A* i *C'* és el simètric de *C* respecte al centre *B*. Utilitza la trama de triangles per a calcular l'àrea del triangle *A'B'C' sabent* que el valor de l'àrea del triangle *ABC és* 1 u^2.

79. Calidoscopis dièdrics: Has mirat alguna vegada per un calidoscopi? Estan formats per un tub de cartó, dos espills formant angle i trossets de plàstic o vidre que combinen les seues imatges donant lloc a precioses composicions plenes de simetries. Fabrica u, i estudia els girs i simetries que observes.

80. Simetries plegant paper: a) Doblega un full de paper i retalla una figura. En desplegar hauràs obtingut la figura simètrica. b) Doblega un full de paper mitjançant dos duplicitats perpendiculars. (Hauràs de fer coincidir la duplicitat amb si mateix). Mantenint el paper doblegat retalla una figura. En desplegar, la figura obtinguda tindrà una doble simetria. c) Amb un altre full de paper, torna a doblegar mitjançant dos duplicitats perpendiculars. Doblega novament per la mitat l'angle recte obtingut. Retalla els dissenys que més t'agraden. Estàs construint models de floc de neu. Quants eixos de simetria has obtingut? d) Intenta ara doblegar el full de paper per a obtindre eixos de simetria que formen angles de 60º i de 30º. Utilitza la teua imaginació per a obtindre nous dissenys de flocs de neu.

81. La simetria en l'escriptura de Lleonard da Vinci: Sabies que, si mires allò que s'ha escrit per Lleonard en un espill pots llegir-ho amb facilitat? És un bon exemple de simetria especular. Llig el següent text del Lleonard.



82. Utilitza la propietat de la composició de dues simetries d'eixos secants per a demostrar que un angle inscrit en una circumferència és la mitat del central que comprèn el mateix arc. *Ajuda*: Traça la circumferència, un angle inscrit i el seu central. Traça dues rectes perpendiculars pel centre de la circumferència als costats de l'angle inscrit.

83. Estudia les isometries que deixen invariant a un triangle equilàter. Anomena els seus vèrtexs i els seus eixos de simetria. a) Aplica al triangle un gir de 120º i després una simetria. Pots obtindre el mateix resultat amb una única transformació? b) Repeteix el mateix amb un gir de 240º i una altra simetria. c) Comprova que sempre la composició d'un gir per una simetria és una altra simetria. d) Fes ara un gir de 120º i un altre de 240º, què obtens? e) I amb dos girs de 240º? f) Comprova que la composició de dos girs del mateix centre és sempre un gir (o la identitat).

84. En passejar per la ciutat, mirar l'aula, en tot el que ens rodeja podem veure com la Geometria permet explicar-ho. Mira aquest mosaic. Busca un motiu mínim, és a dir, un tros de mosaic que et permet, mitjançant moviments, recompondre'l. Al disseny d'aquest mosaic, s'han utilitzat simetries?

i) Hi ha simetries d'eix vertical?
ii) Hi ha simetries d'eix horitzontal?
iii) Hi ha altres eixos de simetria? Quins?
iv) Hi ha girs de 90º?
v) Hi ha girs de 45º?
vi) Hi ha translacions?

85. Dissenya al teu quadern un motiu mínim (si no se t'acut cap, usa la lletra L), i utilitza les mateixes simetries, girs i translacions que s'usen en aquest mosaic per a fer el teu propi disseny de mosaic.

Observa el teu disseny, i respon a les preguntes següents:

b) Si compons dues simetries d'eixos paral·lels, quin moviment obtens? És una altra simetria? És un gir? És una translació? Indica al teu disseny de mosaic en quina ocasió has compost dues simetries d'eixos paral·lels i descriu completament el moviment que has obtingut.

- Si compons dues simetries d'eixos secants, quin moviment obtens? És una altra simetria? És un gir? És una translació? Indica al teu disseny en quina ocasió has compost dues simetries d'eixos secants i descriu completament el moviment que has obtingut.

86. Mira aquest altre mosaic. És el famós mosaic Nassarita dels ossos. No tindrem en compte el color. Per a dissenyar l'os, dibuixa en el teu quadern un quadrat. Mira la figura. Talla en els costats verticals un trapezi i col·loca'l sobre els costats horitzontals. Ja tens l'os. És simètric? Té un eix de simetria vertical i un altre horitzontal, per la qual cosa podríem prendre com a motiu mínim la quarta part de l'os.

c) Per a passar d'un os de color a un os blanc, quina transformació s'ha usat?

87. Dibuixa en el teu quadern, en color roig, eixos de simetria verticals i en color blau, eixos de simetria horitzontals.

88. Assenyala, amb un asterisc, (*), centres de gir de 90º, i amb un cercle, (o), centres de simetria.

89. Utilitzant l'os dibuixa al teu quadern el mosaic complet.

90. Dibuixa al teu quadern una lletra F majúscula, i traça també dues rectes m i *n* que formen un angle de 30º i es tallen en un punt *O*. Dibuixa el seu transformat per:

a) Un gir de centre el punt *O* i angle 60º.
1. La simetria d'eix *n*
2. La simetria d'eix *m*
3. La composició de la simetria d'eix *n* amb la d'eix *m*
4. Compara el resultat obtingut en l'apartat a) amb el de l'apartat d). Què observes?

AUTOAVALUACIÓ

1. Amb la translació de vector **u** = (–3, 8) traslladem el punt *P* (5, –4) fins al punt *P'* i les coordenades de *P´* són:

a) (8, 4) b) (2, 4) c) (2, 12) d) (6, 3)

2. **En** traslladar *A* (–1, 8) fins *A'* (4, 6) s'utilitza el vector **u**:

a) **u** = (3, 2) b) **u** = (3, –2) c) **u** = (5, –2) d) **u** = (5, 14)

3. La transformació que porta el punt *A* (2, 0) en el punt *A'* (0, 2) **no** pot ser:

a) Un gir de centre l'origen i angle 90º

b) Una translació de vector **u** = (–2, 2)

c) Un gir de centre l'origen i angle 270º

d) Una simetria d'eix y = *x*.

4. La transformació identitat també s'anomena:

a) Simetria central b) Simetria axial c) Gir de 180º d) Translació de vector nul (0, 0)

5. Com ha de ser un triangle per a tindre més de dos eixos de simetria?

a) rectangle b) isòsceles c) equilàter d) rectangle isòsceles

6. La simetria central en el pla és un gir de:

a) 360º b) 180º c) 90º d) 0º

7. Al pla, la composició de dues simetries d'eixos secants sempre és:

a) una translació b) un gir c) una altra simetria d) la simetria central

8. Les coordenades del punt simètric al punt *A* (3, 7) respecte de l'eix d'ordenades són:

a) *A'* (–3, 7) b) *A'* (3, –7) c) *A'* (–3, –7) d) *A'* (7, 3)

9. Indica quina de les següents lletres **no té** simetria central:

a) O b) H c) S d) D

10. Sempre s'obté un gir fent successivament:

a) Dos girs de distint centre

b) Dues simetries d'eixos secants

c) Un gir i una simetria

d) Dues simetries d'eixos paral·lels.

Matemàtiques orientades a les ensenyances acadèmiques:

3r B d'ESO. Capítol 9: Geometria a l’espai. Globus terraqüi

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Milagros Latasa Asso i Fernanda Ramos Rodríguez

Revisors: Javier Rodrigo i Nieves Zuasti

Il·lustracions: Milagros Latasa i Banco d'Imatges d'INTEF

Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

Geometria a l'espai. 3r B d'ESO

Índex

Resum

Moltes plantes distribueixen les seues flors en forma esfèrica buscant un aprofitament òptim de l'espai. L'àtom de ferro disposa els seus electrons en forma de cub, els sistemes de cristal·lització dels minerals adopten formes polièdriques, les bresques de les abelles són prismes hexagonals. Aquests són alguns exemples de la presència de cossos geomètrics a la naturalesa.

Ens movem en l'espai, caminem sobre un pla, observem la línia de l'horitzó, habitem i ens movem habitualment en poliedres. La informació que percebem per mitjà dels nostres sentits la interpretem en termes geomètrics. Precisem de les fórmules d'àrees i volums dels cossos geomètrics per a calcular les mesures dels mobles que caben en el nostre saló, o per a fer un pressupost de la reforma de la nostra vivenda.

La Geometria és una de les branques més antigues de les Matemàtiques i el seu estudi ens ajuda a interpretar millor la realitat que percebem. En aquest tema recordaràs les fórmules que vas estudiar ja l'any passat i aprofundiràs sobre les seues aplicacions en la vida real.

1. PERPENDICULARITAT I PARAL·LELISME A L'ESPAI

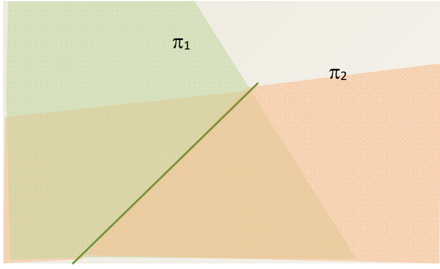
1.1. Posicions relatives a l'espai

A l'espai de tres dimensions en què ens movem, els elements geomètrics més senzills són punts, rectes i plans. El nostre primer objectiu és descriure les posicions que poden presentar qualsevol parella d'aquests elements. Tracta d'imaginar-les abans de llegir.
Distingirem diversos casos:

a) **Punt – recta:**
Pot ser que el punt pertanga a la recta o que siga exterior a ella.
- **Punt – pla:**
El mateix ocorre amb un punt i un pla: només hi ha dues posicions possibles, el punt està al pla o fora del mateix.
- **Pla – recta:**

π		
r està continguda al pla r	La recta r i el pla π es tallen en un punt r	La recta r i el pla π són paral·lels

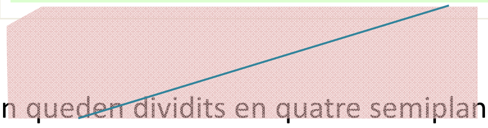
- **Pla- pla:**

		
π_1 i π_2 són iguals i tots els seus punts coincideixen.	π_1 i π_2 son secants. Tenen en comú tots els punts d'una recta	π_1 i π_2 són paral·lels. No tenen cap punt comú

– **Recta- recta:**

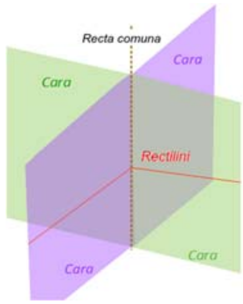
Dues rectes a l'espai poden ser *coplanàries* si és possible dibuixar-les en un mateix pla, o *no coplanàries* en qualsevol altre cas.

Si dues rectes són coplanàries poden ser *paral·leles*, si tenen la mateixa direcció, *secants,* si tenen un punt comú, o *coincidents* si tenen comuns tots els seus punts. Si dues rectes són no coplanàries no tenen cap punt comú i es diu que les dues rectes *s'encreuen.*

		
r i *s* són secants.	*r* i *s* són paral·leles.	*r* i *s* s'encreuen.

1.2. Angles diedres, triedres i poliedres.

Tot pla divideix a l'espai en dos semiespais. Dos plans que es tallen queden dividits en quatre semiplans que passen per una mateixa recta i que al seu torn divideixen a l'espai en quatre regions.



Cada una de les regions de l'espai compresa entre dos semiplans que tenen una recta comuna, s'anomena angle *diedre*. Els semiplans que el defineixen s'anomenen *cares* de l'angle diedre i la recta comuna aresta.

Si en un diedre tracem dos perpendiculars a l'aresta al mateix punt, situades cada una d'elles en una cara, l'angle que formen les dites perpendiculars s'anomena *angle rectilini del diedre.*

Un angle poliedre és la regió a l'espai limitada per tres o més semiplans que són secants dos a dos i que tenen un punt comú que s'anomena *vèrtex*. Cada semiplà és una cara del poliedre i les rectes intersecció de les cares són les *arestes* de l'angle poliedre. La suma dels angles dels diedres que formen un angle poliedre ha de ser menor que 360º

En el cas en què un angle poliedre tinga exactament tres cares, s'anomena *tríedre*.

Exemple:

) Observa qualsevol dels cantons del sostre de l'habitació en què estàs. Cada una d'elles és el vèrtex d'un tríedre en què les cares són dues parets consecutives i el sostre.

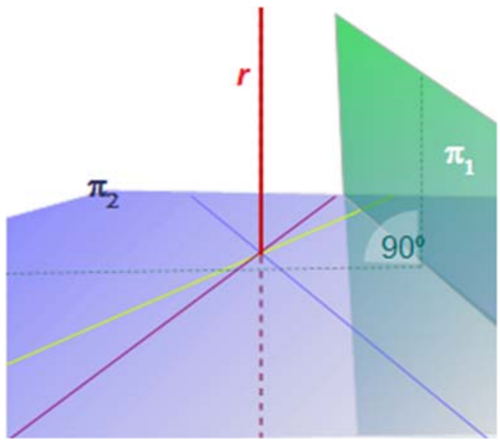
1.3. Perpendicularitat a l'espai

A l'espai hem de tractar diversos casos de perpendicularitat.

Dos plans són perpendiculars si els quatre angles rectilinis que determinen, són angles rectes.

Una recta és perpendicular a un pla si el talla i és perpendicular a qualsevol recta que estiga continguda al pla.

Dues rectes són *perpendiculars* si formen un angle recte. És el cas més sorprenent per dues raons en primer lloc a l'espai dues rectes poden ser perpendiculars sense tallar-se i en segon hi ha infinites rectes perpendiculars a una recta *r* donada i que passen per un punt P donat. Totes elles estan contingudes en un pla perpendicular a la recta *r* que passa pel punt P.



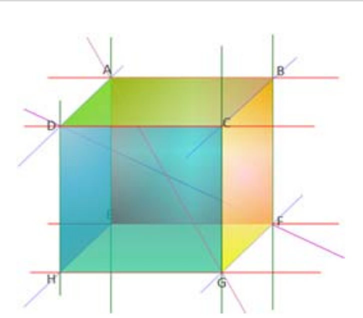
r és *perpendicular a π_2 i a totes les rectes contingudes en π_2.*

Els plans π_1 i π_2 són perpendiculars

Activitats resoltes

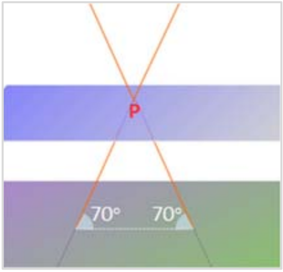
1) *Busca un exemple en la figura de:*

a)Plans paral·lels. b) Plans perpendiculars. c) Rectes paral·leles. d) Rectes perpendiculars i coplanaries. e) Rectes perpendiculars i no coplanaries. f) Recta i pla paral·lels.



a) El pla que conté a la cara *ABCD* és paral·lel al pla que conté a la cara *EFGH*.
b) El pla que conté a la cara *ABCD* és perpendicular als plans que contenen a les cares *DCGH*, *CBFG*, *ABFE* i *ADHE*.
c) La recta que passa per *A* i *B* és paral·lela a la recta que passa per *D* i *C*, a la recta que passa per *E* i *F,* i a la recta que passa per *H* i *G*.
d) La recta que passa per *H* i *G* és perpendicular a la recta que passa per *G* i *F*, i ambdues estan al pla que conté a la cara *EFGH*, per la qual cosa són també coplanaries.
e) La recta que passa per *H* i *G* és perpendicular a la recta que passa per *A* i *D*. Aquestes dues rectes pertanyen a plans diferents.
f) La recta que passa per *A* i *B* és paral·lela al pla que conté a la cara *EFGH*.

2) *Si dos plans paral·lels determinen segments iguals en tallar a dues rectes, pots afirmar que les rectes són paral·leles?*



No necessàriament. Observa la figura de la dreta i et donaràs compte. Les rectes del dibuix determinen un triangle isòsceles en tallar a dos plans paral·lels i tallar-se entre si, tal com apareix a la figura. Els segments interceptats pels plans en tallar a les dues rectes són iguals, no obstant això, les rectes no són paral·leles.

Activitats proposades

1. Busca en l'habitació en què et trobes, exemples de:
   a. Plans paral·lels i perpendiculars.
   b. Rectes paral·leles, rectes perpendiculars i coplanaries, rectes perpendiculars i no coplanaries.
   c. Recta paral·lela a pla, recta i pla secants, recta continguda en un pla.
2. Les fulles d'una porta giratòria formen entre si 5 angles diedres consecutius i iguals. Quant mesura cada un d'ells?
3. Des d'un punt interior a una sala de planta hexagonal regular es traça una recta perpendicular a cada paret. Quant mesurarà l'angle que formen dos perpendiculars consecutives?
4. Dos tríedres tenen les tres cares iguals, es pot assegurar que són iguals? Raona la resposta.

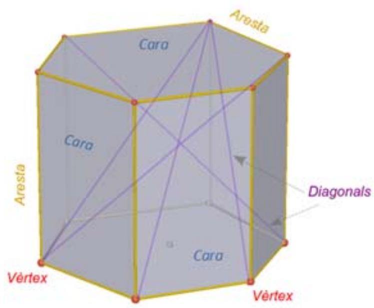
2. POLIEDRES

2.1. Poliedres. Elements d'un poliedre

Un *poliedre* és una regió tancada de l'espai limitada per polígons.

En tot poliedre podem considerar els elements següents: cares*, arestes, vèrtexs, angles diedres* i *poliedres*, així com les *diagonals*.

Les *cares* són els polígons que el limiten, les *arestes i vèrtexs els* costats i vèrtexs dels polígons que formen les cares.



Els *angles diedres* estan formats per dues cares que tenen una aresta comuna. Els *angles poliedres* estan formats per diverses cares que tenen un vèrtex comú.

Una *diagonal* d'un poliedre és un segment que uneix dos vèrtexs pertanyents a cares diferents.

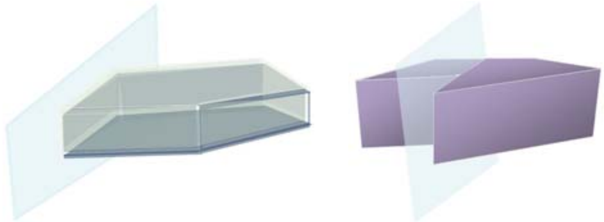
Un *pla diagonal* és un pla que conté tres vèrtexs que no pertanyen a la mateixa cara.

2.3. Poliedres convexos. Teorema *d'Euler*.

És possible classificar poliedres atenent a diferents criteris. Si ens fixem en l'amplitud dels seus angles diedres, es classifiquen en ***còncaus i convexos***.

Un poliedre és *convex* si el segment que uneix dos punts qualssevol del poliedre, està dins del mateix.

En poliedres convexos, únicament un dels dos semiespais que determina cada un dels plans que contenen a les cares, conté també a la resta del poliedre.



Un poliedre és *còncau* en cas contrari. Als poliedres còncaus algun dels plans que contenen a les cares divideix al poliedre en dos cossos que pertanyen a semiespais distints.

Als poliedres convexos es compleix l'anomenat *Teorema d'Euler* que relaciona les cares, vèrtexs i arestes i afirma que en tot poliedre convex el nombre de cares més el nombre de vèrtexs coincideix amb el nombre d'arestes més 2. Si cares, vèrtexs i arestes es representen pels seus inicials, s'escriu:

$$C + V = A + 2$$

Hi ha poliedres còncaus que compleixen aquesta relació i poliedres còncaus que no la compleixen.

Activitats resoltes

3) *Comprova que els següents cossos geomètrics verifiquen el teorema d'Euler.*

 Hi ha dues cares ocultes que són quadrilàters	Aquest cos geomètric és un poliedre convex. Té 7 cares de les quals 5 són quadrilàters, 1 és un pentàgon i 1 és un triangle. Té 9 vèrtexs i per a calcular el nombre d'arestes sumem el total de costats de les cares i dividim entre 2, ja que cada aresta és costat de dues cares: $$Nrd'arestes = \frac{5 \cdot 4 + 5 + 3}{2} = 14$$ $C + V = 7 + 9 = 16$ A +2 = 14 + 2 = 16 Compleix el teorema *d'Euler*

 Tots els vèrtexs estan a la vista	Si es veuen tots els vèrtexs, hi ha dues cares ocultes: una d'elles és un triangle i l'altra és un pentàgon còncau. És un poliedre còncau. Té un total de 6 cares, 6 vèrtexs i Nr. d'arestes=$\frac{5+5\cdot 3}{2}=10$ $C + V = 6 + 6 = 12$ $A + 2 = 10 + 2 = 12$ Verifica el teorema *d'Euler*

Activitats proposades

1 Investiga si els següents cossos són poliedres i, en cas afirmatiu, si compleixen el teorema *d'Euler*. Indica també si són còncaus o convexos

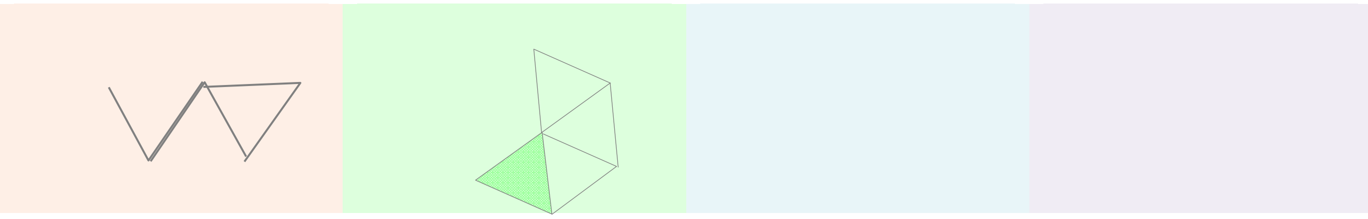
2.4. Poliedres regulars.

Un poliedre regular és un poliedre que compleix que totes les seues cares són polígons regulars iguals i que els seus angles poliedres són iguals.

En tot poliedre regular coincideixen el mateix nombre de cares en cada vèrtex. És senzill provar que només hi ha cinc poliedres regulars.

El polígon regular amb menys costats és el triangle equilàter. Busquem els poliedres regulars que poden construir-se amb cares triangulars:

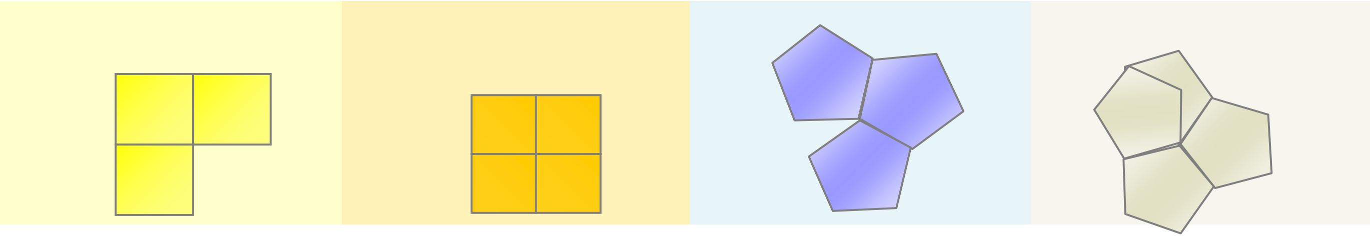
Com a mínim són necessaris tres triangles per vèrtex i com a màxim poden concórrer cinc perquè siga possible formar un angle poliedre



Si unim tres triangles equilàters iguals per vèrtex, es forma un tetràedre. L'octàedre apareix en unir quatre triangles equilàters iguals en cada vèrtex. Amb cinc triangles equilàters, també iguals, per vèrtex, es forma un icosàedre. Si unim sis triangles equilàters en un vèrtex, la suma dels angles de les cares concurrents és 360º i no es pot formar cap angle poliedre, així que no hi ha més poliedres regulars amb cares triangulars.

Geometria a l'espai. 3r B d'ESO

Estudiem ara els poliedres regulars que és possible construir amb cares quadrades i pentagonals



Amb tres quadrats iguals en cada vèrtex construïm un cub. En unir quatre quadrats en un vèrtex, la suma dels angles en el vèrtex comú als quatre és 360º amb el que no podem formar cap poliedre mes que el cub de cares quadrades.

Només és possible construir un poliedre regular amb cares pentagonals unint tres pentàgons en cada vèrtex. És el dodecàedre. Un nombre més gran de pentàgons per vèrtex donaria una suma d'angles superior a 360º.

Aleshores queda provat que només hi ha cinc poliedres regulars:

Els poliedres regulars són *desenrotllables* perquè poden ser construïts a partir d'un desenrotllament pla format per totes les seues cares.

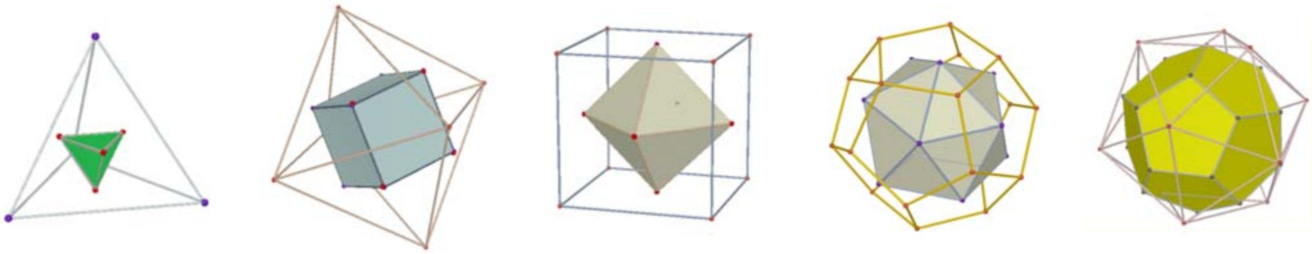
Tots compleixen la relació d'Euler per a poliedres convexos. Pots comprovar-ho:

	TETRÀEDRE	CUB	OCTÀEDRE	DODECÀEDRE	ICOSÀEDRE
Nr DE CARES	4	6	8	12	20
Nr DE VÈRTEXS	4	8	6	20	12
Nr DE ARISTAS	6	12	12	30	30
FORMA DE LES CARES	TRIANGULARS	QUADRADES	TRIANGULARS	PENTAGONALS	TRIANGULARS

2.5. Dual d'un poliedre regular.

Es defineix el poliedre dual d'un poliedre regular com el poliedre resultant d'unir els centres de les cares del poliedre inicial i prendre'ls com a vèrtexs del nou poliedre. Fixa't que aleshores el nombre de cares d'un poliedre coincideix amb el nombre de vèrtexs del seu poliedre dual.

El poliedre dual del tetraedre és el tetraedre. El cub i l'octaedre són duals entre si. També el dodecaedre és dual de l'icosaedre i recíprocament.

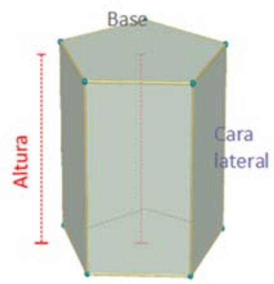


2.6. Prismes.

Un *prisma* és un poliedre determinat per dues cares paral·leles que són polígons iguals i tantes cares laterals, que són paral·lelograms, com a costats tenen les bases.

Els prismes són cossos desenrotllables. El desenrotllament d'un prisma recte està compost per les seues dues bases i per tants paral·lelograms com a cares laterals tinga.

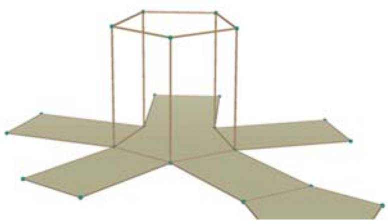
L'altura del prisma és la distància entre les bases.



És possible classificar un prisma atenent a diferents conceptes:

Per la forma de les cares laterals poden ser *rectes o oblics*. Són *rectes* si les citades cares són rectangles i són *oblics* si són rombes o romboides.

Per la forma de les bases poden ser triangulars, quadrangulars, pentagonals, hexagonals depenent de que el polígon de la base siga triangle, quadrat, pentàgon, hexàgon, etc...



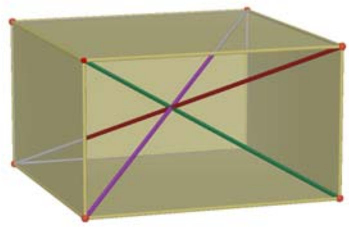
Si a més un prisma és recte i té polígons regulars com a bases, el prisma s'anomena *regular*. En qualsevol altre cas el prisma s'anomena *irregular*.

Per la forma dels seus angles diedres poden ser còncaus i convexos.

2.6. Paral·lelepípedes.

Els paral·lelepípedes són prismes en què les bases són paral·lelograms.

A més, totes les cares laterals són també paral·lelograms i les cares oposades són iguals entre si pel que qualsevol cara pot prendre's com a base.

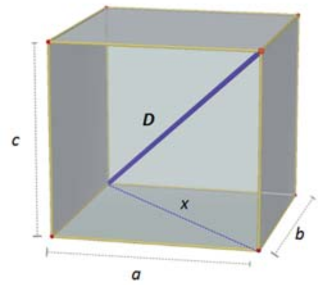


Els paral·lelepípedes poden ser: *cubs* si tenen totes les seues cares quadrades, *ortoedre* si totes les seues cares són rectangles, *romboedres* si totes les seues cares són rombes o *romboiedres* si totes les seues cares són romboides.

Una propietat important de tots els paral·lelepípedes és que les quatre diagonals es tallen en el punt mitjà.

2.7. Teorema de Pitàgores a l'espai

La diagonal d'un ortoedre al quadrat coincideix amb la suma dels quadrats de les seues arestes.



Anem a demostrar-ho: Siguen *a, b* i *c* les arestes de l'ortoedre que suposem recolzat en el rectangle de dimensions *a* , *b*.

Si *x* és la diagonal d'aquest rectangle, compleix: $x^2 = a^2 + b^2$

El triangle de costats *D, x, c* és rectangle per tant: $D^2 = x^2 + c^2$

I tenint en compte la relació que compleix *x:*

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Activitats resoltes

4) *Les arestes de la base d'una caixa amb forma d'ortoedre mesuren 10 cm i 11 cm i la seua altura 8 cm. Estudia si pots guardar en ella tres barres de longituds 14 cm, 16 cm i 18 cm.*

El rectangle de la base té una diagonal d que mesura: $d = \sqrt{10^2 + 11^2} = \sqrt{221} \approx 14,9$cm

Per tant la barra més curta cap recolzada a la base

Calculem ara quant mesura la diagonal de l'ortoedre:

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 8^2 + 10^2 + 11^2 = 285 \Rightarrow D = \sqrt{285} \approx 16,9\text{cm}$$

Per tant, la barra de 16 cm cap també a la caixa però la de 18 cm no.

Activitats proposades

5. És possible demostrar amb un trencaclosques el teorema de Pitàgores a l'espai. Et proposem que ho intentes. Podràs trobar en la revista i entre els recursos per a imprimir les peces que t'ajudaran. A la fotografia es mostra el puzle resolt.

6. És possible construir un prisma còncau triangular? I un prisma còncau regular? Raona les respostes.

7. Entre els poliedres regulars, hi ha algun que siga prisma? En cas afirmatiu classifica'l.

8. Hi ha prou que un paral·lelepípede tinga dues cares rectangulars perquè siga un prisma recte?

9. Dibuixa un prisma pentagonal regular i comprova que compleix la relació d'Euler.

10. Una caixa té forma cúbica de 2 dm d'aresta. Quant mesura la seua diagonal?

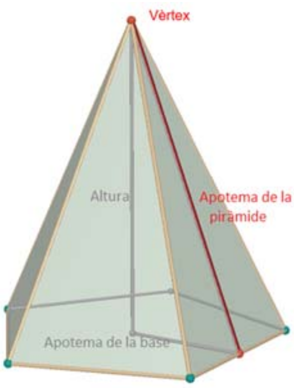
11. Calcula la mida de la diagonal d'una sala que té 10 metres de llarg, 4 metres d'ample i 3 metres d'altura.

12. Classifica els següents poliedres

2.8. Piràmides.

Una piràmide és un poliedre determinat per una cara poligonal denominada base i tantes cares triangulars amb un vèrtex comú com a costats té la base.



El punt on convergeixen tots els triangles laterals es denomina *vèrtex* o cúspide.

Les piràmides es poden classificar per conceptes anàlegs als dels prismes. Així destaquem que les piràmides, segons la forma de la base, es classifiquen en *triangulars, quadrangulars, pentagonals,…*

Una piràmide és *regular* quan ho és el polígon de la base i a més les cares laterals són triangles isòsceles iguals. L'altura d'aquests triangles laterals s'anomena *apotema de la piràmide*. No has de confondre l'apotema d'una piràmide regular amb l'apotema del polígon de la base.

L'*altura* d'una piràmide és la distància del vèrtex a la base. Si una piràmide és regular, coincideix amb la distància entre el vèrtex de la piràmide i el centre del polígon de la base.

Les piràmides són desenrotllables. El desenrotllament d'una piràmide el formen el polígon de la base i tantes cares triangulars com a costats tinga la base. Si la piràmide és regular, els triangles són isòsceles i iguals.

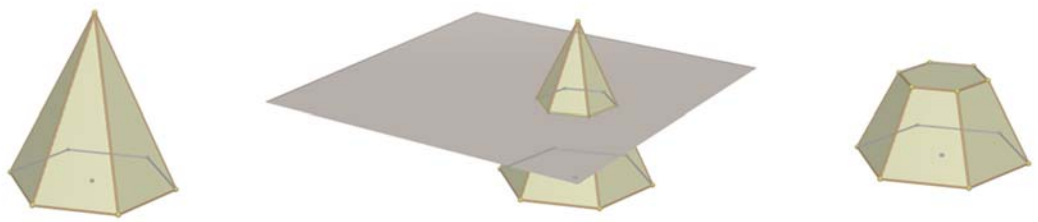
Activitats proposades

13. Hi ha alguna piràmide regular que siga poliedre regular? I piràmides amb cares paral·leles? En cas afirmatiu posa un exemple i en cas negatiu, justifica les teues respostes.

14. Dibuixa una piràmide hexagonal regular i distingeix l'apotema de la piràmide de l'apotema de la base. Dibuixa també el seu desenrotllament.

2.9. Tronc de piràmide.

Un tronc de piràmide és el poliedre resultant en tallar una piràmide per un pla paral·lel a la base. Les bases són polígons semblants i les cares laterals són trapezis.



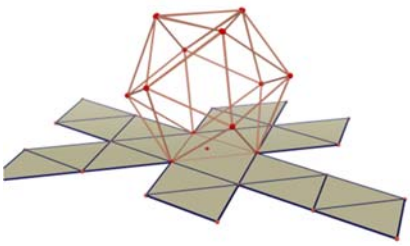
Un tronc de piràmide és regular quan és una porció de piràmide regular. En aquest cas les cares laterals són trapezis isòsceles i les bases són polígons regulars semblants.

3. ÀREA LATERAL I TOTAL D'UN POLIEDRE

3.2. Àrea total d'un poliedre regular.

Com les cares dels poliedres regulars són iguals, el càlcul de l'àrea total d'un poliedre regular es redueix a calcular l'àrea d'una cara i després multiplicar-la pel nombre de cares.

Activitats resoltes



Calcula l'àrea total d'un icosàedre de 2 cm d'aresta.

Totes les seues cares són triangles equilàters de 2 cm de base. Calculem l'altura h que divideix a la base en dos segments iguals

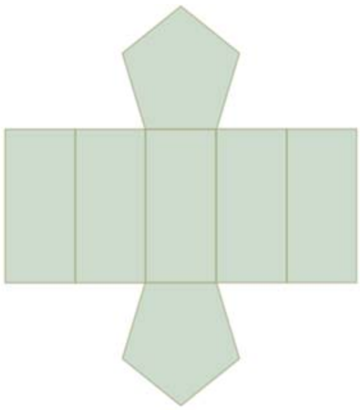
$h^2 + 1^2 = 2^2 \Rightarrow h^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow h = \sqrt{3}$cm

Per tant l'àrea d'una cara serà:

$A_{triangle} = \frac{b.h}{2} = \frac{2.\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$cm^2 i per tant Àrea icosàedre = $20\sqrt{3}$ cm^2

3.3. Àrees lateral i total d'un prisma.

L'àrea lateral d'un prisma és la suma de les àrees de les cares laterals.



Com les cares laterals són paral·lelograms de la mateixa altura, que és l'altura del prisma, podem escriure:

Àrea lateral = Suma de les àrees de les cares laterals = Perímetre de la base · altura del prisma.

Si denotem per *h* l'altura i per P_B el perímetre de la base:

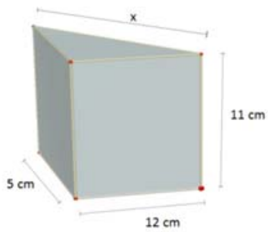
Àrea lateral = $A_L = P_B \,.\, h$

L'àrea total d'un prisma és l'àrea lateral més el doble de la suma de l'àrea de la base:

Àrea total = $A_T = A_L + 2.\, A_B$

Activitats resoltes

5) *Calcula les àrees lateral i total d'un prisma triangular recte d'11 cm d'altura si la seua base és un triangle rectangle de catets 12 cm i 5 cm.*



Calculem en primer lloc la hipotenusa del triangle de la base: $x^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow x = \sqrt{169} = 13$cm

$P_B = 12 + 5 + 13 = 30$ *cm*; $A_B = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30 cm^2$

$A_L = P_B \cdot h = 30 \cdot 11 = 330\ cm^2$ $A_T = A_L + 2 \cdot A_B = 330 + 60 = 390\ cm^2$

3.4. Àrees lateral i total d'una piràmide i d'un tronc de piràmide regulars.

L'àrea lateral d'una piràmide regular és la suma de les àrees de les cares laterals.

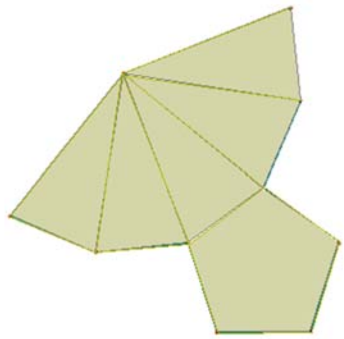
Són triangles isòsceles iguals per tant, si l'aresta de la base medeix *b*, l'apotema de la piràmide és *Ap* i la base té *n* costats, aquest àrea lateral és:

$$\text{Àrea lateral} = A_L = n.\frac{b.\text{Ap}}{2} = \frac{n.b.\text{Ap}}{2}$$

i com $n.b$= Perímetre de la base

$$A_L = \frac{P_B.\text{Ap}}{2} = \frac{\text{Perímetredelabase.Apotemadelapiràmide}}{2}$$

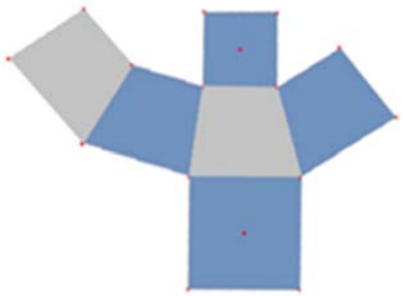
Desenrotllament de piràmide pentagonal regular



L'àrea total d'una piràmide és l'àrea lateral més l'àrea de la base:

$$\text{Àrea total} = A_T = A_L + A_B$$

Desenrotllament de tronc de piràmide quadrangular



Un tronc de piràmide regular és un cos geomètric desenrotllable. Al seu desenrotllament apareixen tantes cares laterals com a costats tenen les bases. Totes elles són trapezis isòsceles.

Si *B* és el costat del polígon de la base major, *b* el costat de la base menor, *n* el nombre de costats de les bases i *Ap* és l'altura d'una cara lateral

$$\text{Àrea lateral} = A_L = n.\frac{(B+b).\text{Ap}}{2} = \frac{(P_B+P_b).\text{Ap}}{2} =$$

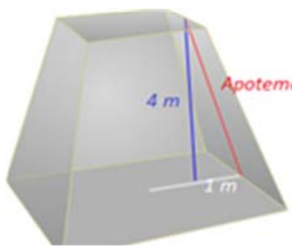
$$= \frac{\text{Sumadeperímetredelesbases.Apotemadeltronc}}{2}$$

L'àrea total de un tronc de pirámide regular és l'àrea lateral més la suma d'àrees de les bases:

$$\text{Àrea total} = A_T = A_L + A_B + A_b$$

Activitats resoltes

6) *Calculem l'àrea total d'un tronc de piràmide regular de 4 m d'altura si sabem que les bases paral·leles són quadrats de 4 m i de 2 m de costat.*



En primer lloc calculem el valor de l'apotema. Tenint en compte que el tronc és regular i que les bases són quadrades es forma un triangle rectangle en què es compleix:

$$Ap^2 = 4^2 + 1^2 = 17 \Rightarrow Ap = \sqrt{17} \approx 4{,}12 \text{ m}$$

$$A_L = \frac{(P_B+P_b).\text{Ap}}{2} = \frac{(16+8).4{,}12}{2} = 49{,}44 \text{ m}^2$$

$$A_T = A_L + A_B + A_b = 49{,}44 \text{ m}^2 + 16 \text{ m}^2 + 4 \text{ m}^2 = 69{,}44 \text{ m}^2$$

Activitats proposades

15. Calcula les àrees lateral i total d'un prisma triangular regular sabent que les arestes de les bases mesuren 2 cm i cada aresta lateral 8 m.

16. L'àrea lateral d'un prisma regular de base quadrada és 63 m2 i té 7 m d'altura. Calcula el perímetre de la base.

17. El costat de la base d'una piràmide hexagonal regular és de 6 cm i l'altura de la piràmide 10 cm. Calcula l'apotema de la piràmide i la seua àrea total.

18. Calcula l'àrea lateral d'un tronc de piràmide regular, sabent que les seues bases són dos octògons regulars de costats 4 i 7 dm i que l'altura de cada cara lateral és de 8 dm.

19. Si l'àrea lateral d'una piràmide quadrangular regular és 104 cm2, calcula l'apotema de la piràmide i la seua altura.

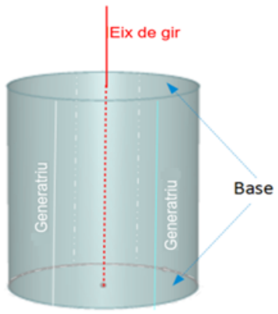
4. COSSOS DE REVOLUCIÓ

4.1. Cossos de revolució: Cilindres, cons i esferes.

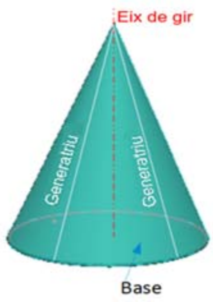
Els cossos de revolució són cossos geomètrics que s'obtenen en fer girar una línia al voltant d'una recta fixa denominada *eix*. La línia que gira s'anomena *generatriu*.

També pot obtindre's un cos de revolució mitjançant el gir d'una figura plana al voltant d'un eix de gir.

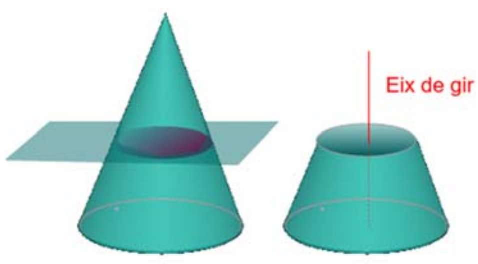
Els principals cossos de revolució són: *cilindres, cons i esferes*.



CILINDRE



CON



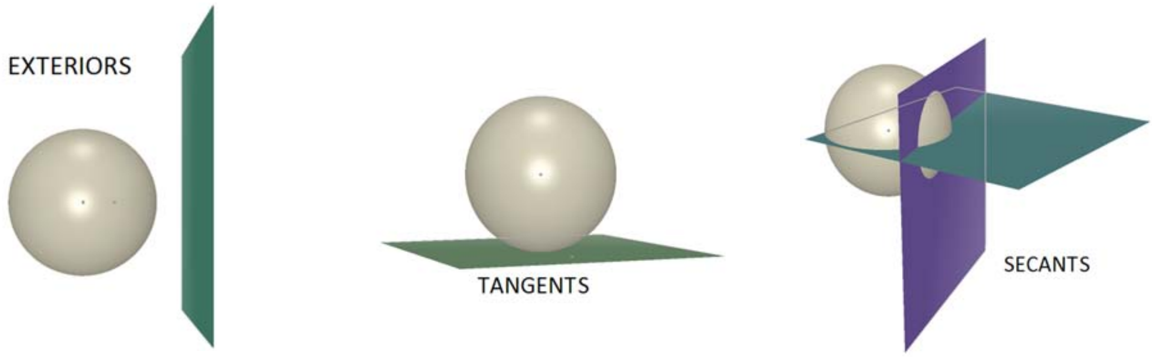
TRONC DE CON

ESFERA

La generatriu d'un cilindre és una recta paral·lela a l'eix de gir. La d'un con és una recta secant amb l'eix i la d'una esfera és una semicircumferència el centre de la qual està a l'eix de gir

4.2. L'esfera. Interseccions de plans i esferes.

Una esfera i un pla poden ser exteriors, tangents i secants. Si són secants, la seua intersecció és sempre un cercle. Si el pla és tangent, la intersecció es redueix a un punt. I si són exteriors, és el conjunt buit. Pots comprendre-ho amb facilitat pensant en una esfera (una taronja, per exemple) i un pla (el tall que fas amb un ganivet).

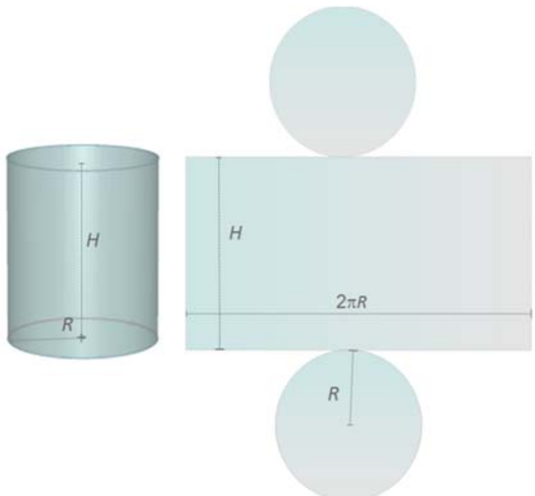


La intersecció d'una superfície esfèrica amb un pla és, per tant, una circumferència, un punt o el conjunt buit.

Amb equacions ens resulta més complicat perquè una superfície esfèrica té una equació de segon grau en dos variables, *x* i *y*. Un pla té una equació de primer grau també en *x* i *y*. Les equacions de segon grau poden no tindre cap arrel (en el camp real) amb el que el pla no tallaria a l'esfera; tindre una arrel doble (amb el que seria tangent) o tallar-la (i en aqueix cas tindríem una circumferència).

Si el pla talla a l'esfera passant pel centre de l'esfera, la intersecció és un cercle màxim. En el cas de l'esfera terrestre, l'equador o els meridians.

4.3. Àrees lateral i total d'un cilindre.



El cilindre és un cos geomètric desenrotllable. Si retallem un cilindre recte al llarg d'una generatriu, i l'estenem en un pla, obtenim dos cercles i una regió rectangular. D'aquesta manera s'obté el seu desenrotllament.

A partir d'aquest, podem veure que l'àrea **lateral de cilindre està** determinada per l'àrea del rectangle que té com a dimensions la longitud de la circumferència de la base i l'altura del cilindre.

Suposarem que l'altura del cilindre és *H* i que *R* és el radi de la base amb el que l'àrea lateral A_L és:

A_L = Longitud de la base . Altura = $(2\pi R).H = 2\pi RH$

Si a l'expressió anterior li sumem l'àrea dels dos cercles que constitueixen les bases, obtenim l'àrea **total del cilindre.**

$$A_T = A_L + \pi R^2 + \pi R^2 = 2\pi RH + 2\pi R^2$$

4.4. Àrees lateral i total d'un con.

També el con és un cos geomètric desenrotllable. En retallar seguint una línia generatriu i la circumferència de la base, obtenim un cercle i un sector circular amb radi igual a la generatriu i longitud d'arc igual a la longitud de la circumferència de la base.

Anomenem ara *R* al radi de la base i G a la generatriu. L'àrea lateral del con és l'àrea del sector circular obtingut. Per a calcular-la pensem que aquesta àrea ha de ser directament proporcional a la longitud d'arc que al seu torn ha de coincidir amb la longitud de la circumferència de la base. Podem escriure aleshores:

$$\frac{A\text{Lateraldelcon}}{\text{Longitudd'arccorresponentalsector}} = \frac{A\text{totaldelcerclederadi}G}{\text{Longituddelacircunferènciaderadi}G}$$

És a dir: $\frac{A_L}{2\pi R} = \frac{\pi G^2}{2\pi G}$i aïllant A_L tenim:

$$A_L = \frac{2\pi R\pi G^2}{2\pi G} = \pi RG$$

Si a l'expressió anterior li sumem l'àrea del cercle de la base, obtenim l'àrea **total del con.**

$$\mathbf{A_T = A_L + \pi \cdot R^2 = \pi \cdot R \cdot G + \pi \cdot R^2}$$

Activitats resoltes

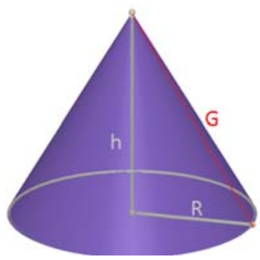
7) *Calcula l'àrea total d'un con de 12 dm d'altura, sabent que la circumferència de la base medeix 18,84 dm .(Pren 3,14 com a valor de π)*

Calculem en primer lloc el radi *R* de la base:

$2\pi R = 18{,}84 \Rightarrow R = \frac{18{,}84}{2\pi} \approx \frac{18{,}84}{6{,}28} = 3\text{dm}$.

Calculem ara la generatriu *G*:

$G = \sqrt{R^2 + h^2} \Rightarrow G = \sqrt{3^2 + 12^2} = \sqrt{153} \approx 12{,}37\text{dm}$.



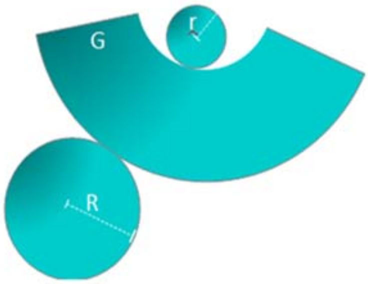
Aleshores $A_T = A_L + \pi \cdot R^2 = \pi \cdot R \cdot G + \pi \cdot R^2 = 3{,}14 \cdot 3 \cdot 12{,}37 + 3{,}14 \cdot 3^2$ $144{,}79\ \text{dm}^2$.

4.5. Àrees lateral i total d'un tronc de con.

En tallar un con per un pla paral·lel a la base, s'obté un tronc de con. Igual que el tronc de piràmide, és un cos desenrotllable i el seu desenrotllament el constitueixen els dos cercles de les bases junt amb un trapezi circular, les bases corbes del qual medeixen el mateix que les circumferències de les bases.

Anomenant *R* i *r* als ràdis de les bases i *G* a la generatriu resulta:

$$A_L = \frac{(2\pi R + 2\pi r)G}{2} = \frac{2(\pi R + \pi r)G}{2} = (\pi R + \pi r)G$$

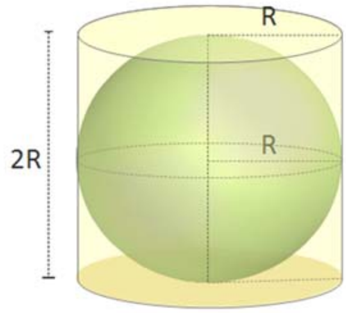


Si a l'expressió anterior li sumem les àrees dels cercles de les bases, obtenim l'àrea **total del tronc de con:**

$$A_T = A_L + \pi \cdot R^2 + \pi \cdot r^2$$

4.6. Àrea total d'una esfera.

L'esfera no és un cos geomètric desenrotllable, per la qual cosa és més complicat que als casos anteriors trobar una fórmula per a calcular la seua àrea.



Arquímedes va demostrar que l'àrea d'una esfera és igual que l'àrea lateral d'un cilindre circumscrit a l'esfera, és a dir un cilindre amb el mateix radi de la base que el radi de l'esfera i l'altura del qual és el diàmetre de l'esfera.

Si anomenem *R* al radi de l'esfera:

$$A_T = (2\pi R) \cdot (2R) = 4\pi R^2$$

L'àrea d'una esfera equival a l'àrea de quatre cercles màxims.

Actividades propuestas

20. Una columna cilíndrica té 76 cm de diàmetre i 4 m d'altura. Quina és la seua àrea lateral?

21. El radi de la base d'un cilindre és de 38 cm i l'altura és el triple del diàmetre. Calcula la seua àrea total.

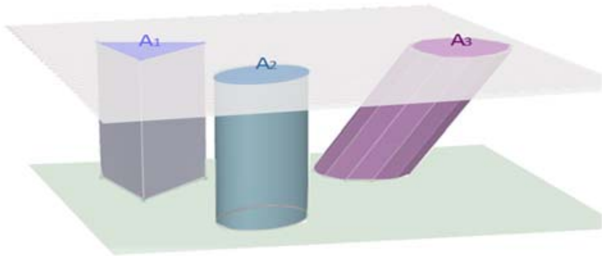
22. Calcula l'àrea lateral d'un con recte sabent que la seua generatriu mesura 50 dm i el seu radi de la base 30 dm.

23. La circumferència de la base d'un con mesura 6, 25 m i la seua generatriu 8 m. Calcula l'àrea total.

24. Una esfera té 4 m de radi. Calcula: a) la longitud de la circumferència màxima; b) l'àrea de l'esfera.

5. VOLUM D'UN COS GEOMÈTRIC

5.1. Principi de *Cavalieri*.



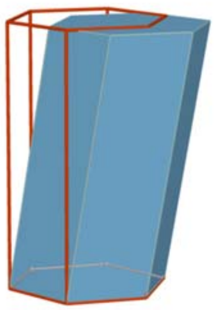
Bonaventura Cavalieri, matemàtic del segle XVII va enunciar el principi que porta el seu nom i que afirma:

"Si dos cossos tenen la mateixa altura i en tallar-los per plans paral·lels a les seues bases, s'obtenen seccions amb la mateixa àrea, aleshores els volums dels dos cossos són iguals"

Exemple:

A la figura adjunta les àrees de les seccions A_1, A_2, A_3, produïdes per un pla paral·lel a les bases, són iguals, aleshores, segons aquest principi els volums dels tres cossos són també iguals.

5.2. Volum d'un prisma i d'un cilindre



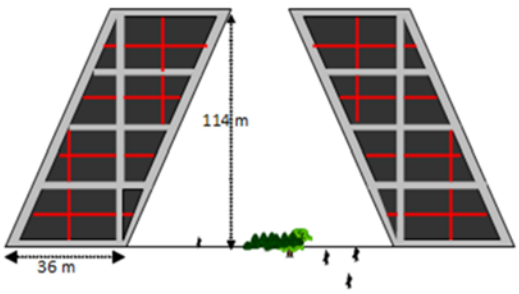
El volum d'un prisma recte és el producte de l'àrea de la base per l'altura. A més, segons el principi de *Cavalieri*, el volum d'un prisma oblic coincideix amb el volum d'un prisma recte amb la mateixa base i altura. Si denotem per V aquest volum, A_B l'àrea de la base i *h* l'altura:

Volum prisma = $V = A_B \cdot h$

També el volum d'un cilindre, recte o oblic és àrea de la base per altura. Si anomenem *R* al radi de la base, A_B l'àrea de la base i *h* l'altura, el volum s'escriu:

Volum cilindre = $V = A_B.h = \pi R^2.h$

Activitats resoltes



8) *Les conegudes torres Kio de Madrid són dues torres bessones que estan al Passeig de la Castellana, junt amb la Plaça de Castella. Es caracteritzen per la seua inclinació i representen una porta cap a Europa.*

Cada una d'elles és un prisma oblic la base del qual és un quadrat de 36 metres de costat i tenen una altura de 114 metres. El volum interior de cada torre pot calcular-se amb la fórmula anterior:

$$V = A_B.h = 36^2 \cdot 114 = 147\ 744 \text{ m}^3$$

Activitats proposades

25. Calcula el volum d'un prisma recte de 12 dm d'altura la base del qual és un hexàgon de 4 dm de costat.

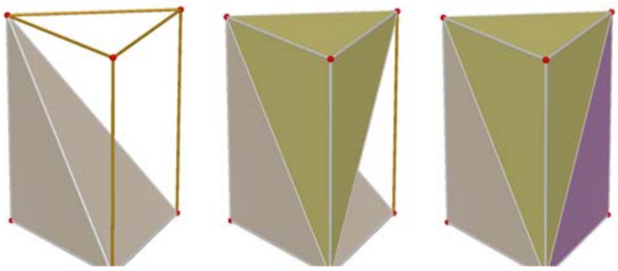
26. Calcula la quantitat d'aigua que hi ha en un recipient amb forma de cilindre sabent que la seua base té 12 cm de diàmetre i que l'aigua aconsegueix 1 dm d'altura.

5.3. Volum d'una piràmide i d'un con.

També als casos d'una piràmide o con, les fórmules del volum coincideixen en cossos rectes i oblics.

El volum d'una piràmide és la tercera part del volum d'un prisma que té la mateixa base i altura.

Volum piràmide = $V = \frac{A_B.h}{3}$



Si comparem con i cilindre amb la mateixa base i altura, concloem un resultat anàleg

Volum con = $V = \frac{A_B.h}{3} = \frac{\pi R^2.h}{3}$

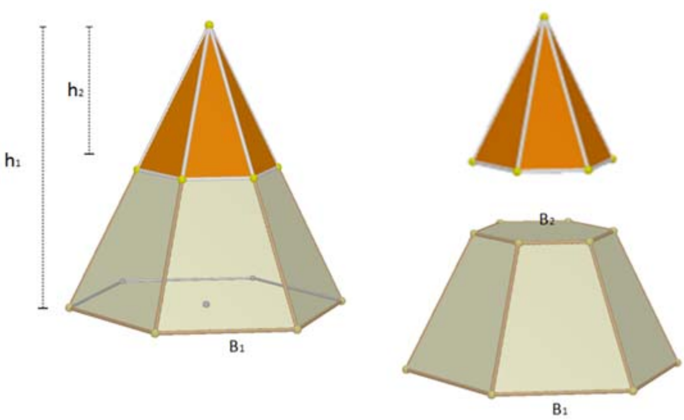
5.4. Volum d'un tronc de piràmide i d'un tronc de con.

Hi ha una fórmula per a calcular el volum d'un tronc de piràmide regular però l'evitarem. Resulta més senzill obtindre el volum d'un tronc de piràmide regular restant els volums de les dues piràmides a partir de les que s'obté.

Si representem per A_{B1} i A_{B2} *les* àrees de les bases i per h_1 i h_2 *les* altures de les piràmides esmentades, el volum del tronc de piràmide és:

Volum tronc de piràmide =

$V = \frac{A_{B1}.h_1}{3} - \frac{A_{B2}.h_2}{3}$



El volum del tronc de con s'obté de manera semblant. Si R_1 i R_2 són els radis de les bases dels cons que originen el tronc i h_1 i h_2 les seues altures, el volum del tronc de con resulta:

Volum tronc de con = $V = \frac{\pi.R_1^2.h_1}{3} - \frac{\pi.R_2^2.h_2}{3}$

Activitats resoltes

9) *Calcula el volum d'un tronc de piràmide regular de 10 cm d'altura si les seues bases són dos hexàgons regulars de costats 8 cm i 3 cm.*

Primer pas: calculem les apotemes dels hexàgons de les bases:

Per a cada un d'aquests hexàgons:

$L^2 = ap^2 + (L/2)^2 \Rightarrow ap^2 = L^2 - \frac{L^2}{4} = \frac{3L^2}{4} \Rightarrow ap = \frac{\sqrt{3}L}{2}$

Doncs les apotemes buscades mesuren: $\mathbf{ap}_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}6\mathbf{cm}\,\mathbf{ap}_2 = \frac{7\sqrt{3}}{2} \approx 6{,}1\mathbf{cm}$

Com segon pas, calcularem l'apotema del tronc de piràmide

$$A^2 = 10^2 + 3{,}5^2 \Rightarrow A = \sqrt{\mathbf{112{,}25}} \approx \mathbf{10{,}6cm}$$

En tercer lloc, calcularem el valor dels segments *x, y* de la figura 3 que ens serviran per a obtindre les altures i apotemes de les piràmides que generen el tronc amb el què treballem:

Pel teorema de *Tales*: $\frac{x}{2{,}6} = \frac{\mathbf{10{,}6}+x}{6{,}1} \Rightarrow 6{,}1x = (\mathbf{10{,}6} + x)2{,}6 \Rightarrow 6{,}1x - 2{,}6x = \mathbf{27{,}56} \Rightarrow x = \frac{\mathbf{27{,}56}}{3{,}5} \approx 7{,}9\mathbf{cm}$

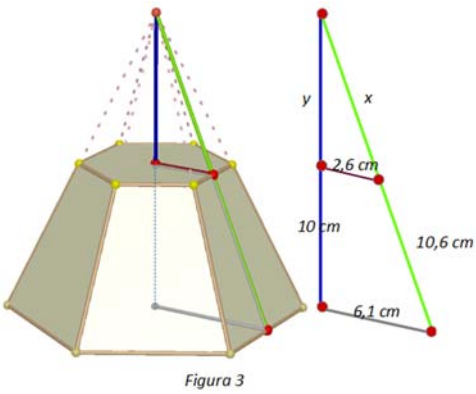


Figura 3

Aleshores l'apotema de la piràmide gran és 10,6 + 7,9=18,5 cm i la de la xicoteta 7,9 cm

I aplicant el teorema de *Pitàgores*:

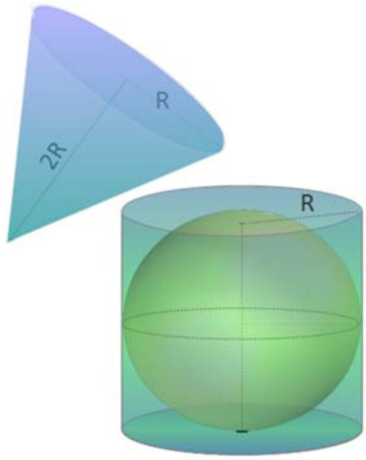
$$y^2 = x^2 - 2{,}6^2 = 7{,}9^2 - 2{,}6^2 = \mathbf{55{,}65} \Rightarrow y = \sqrt{\mathbf{55{,}65}} \approx 7{,}5 \text{ cm}$$

Per tant les altures de les piràmides generadores del tronc mesuren 10 +7,5 = 17,5 cm i 7,5 cm

Finalment calculem el volum del tronc de piràmide:

$$V = \frac{A_{B1}.h_1}{3} - \frac{A_{B2}.h_2}{3} = \frac{1}{3}.\frac{48.18{,}5.17{,}5}{2} - \frac{1}{3}.\frac{18.7{,}9.7{,}5}{2} = \frac{15540}{6} - \frac{1066.5}{6} = 2412{,}25\text{cm}^3$$

5.5. Volum de l'esfera

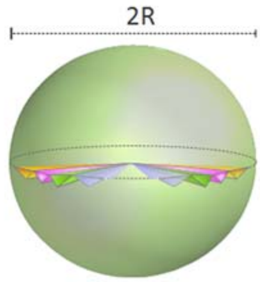


Tornem a pensar en una esfera de ràdio *R* i en el cilindre que la circumscriu. Per a omplir amb aigua l'espai que queda entre el cilindre i l'esfera, es necessita una quantitat d'aigua igual a un terç del volum total del cilindre circumscrit.

Es dedueix aleshores que la suma dels volums de l'esfera de radi *R* i del con d'altura *2R* i radi de la base *R*, coincideix amb el volum del cilindre circumscrit a l'esfera de radi *R*. Per tant:

Volum $_{\text{esfera}}$ = Volum $_{\text{cilindre}}$ - Volum $_{\text{con}}$ $\Rightarrow$

Volum $_{\text{esfera}}$ = $\pi R^2(2R) - \frac{\pi R^2(2R)}{3} = \frac{6\pi R^3 - 2\pi R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3$



Hi ha demostracions més rigoroses que avalen aquest resultat experimental que hem descrit. Així per exemple, el volum de l'esfera es pot obtindre com a suma dels volums de piràmides que la recobreixen, totes elles de base triangular sobre la superfície de l'esfera i amb vèrtex en el centre de la mateixa.

Activitats proposades

27. (CDI Madrid 2008) El depòsit de gasoil de la casa d'Irene és un cilindre d'1 m d'altura i 2 m de diàmetre. Irene ha telefonat al subministrador de gasoil perquè al depòsit només queden 140 litres.

- Quin és, en dm^3, el volum del depòsit? (Utilitza 3,14 com a valor de π).
- Si el preu del gasoil és de 0,80 € cada litre, quant haurà de pagar la mare d'Irene per omplir el depòsit?

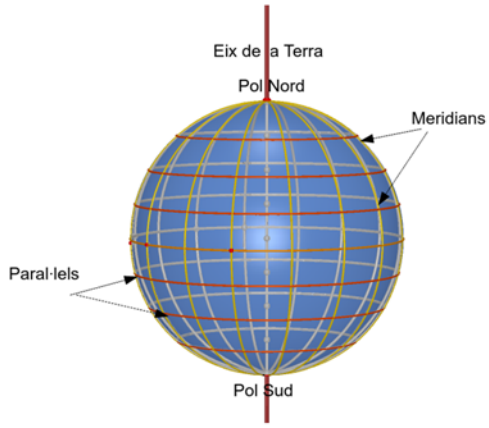
28. Comprova que el volum de l'esfera de radi 5 dm sumat amb el volum d'un con del mateix radi de la base i 10 dm d'altura, coincideix amb el volum d'un cilindre que té 10 dm d'altura i 5 dm de radi de la base.

6. GLOBUS TERRAQÜI

6.1. El globus terraqüi

La Terra té una forma d'esfera lleugerament aplatada pels pols. Al seu moviment de rotació gira al voltant d'una línia imaginària que es denomina eix. Els *pols geogràfics Nord i Sud* són els punts de tall de l'eix amb la superfície de la Terra.

Un globus *terraqüi* és una representació tridimensional a escala de la Terra. És la representació més precisa que existeix perquè no presenta distorsions a l'hora de prendre dades per a calcular angles i distàncies.



La resta de les representacions a escala de la Terra són bidimensionals i entre elles destaquen els *planisferis* que són projeccions del globus terraqüi sobre el pla.

L'objectiu d'aquestes representacions de la Terra és la ubicació precisa de qualsevol punt geogràfic. Per a aconseguir-ho, al globus terraqüi es defineixen un conjunt de línies imaginàries que es denominen *meridians* i *paral·lels*.

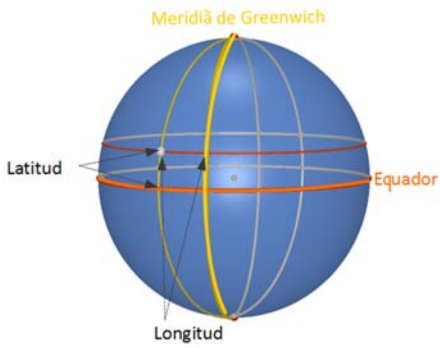
Els meridians són semicircumferències centrades al centre de la Terra i que passen pels pols. Entre ells destaquen l'anomenat meridià de Greenwich o meridià zero que passa per Londres i l’Antimeridià, ubicat a l’Oceà Pacífic.

Els *paral·lels* són circumferències que tenen el seu centre a l’eix de la Terra i que tallen al globus terraqüi. Només un d’ells té com a centre el de la Terra. Es denomina *Equador o paral·lel zero i és* una circumferència de radi màxim.

Altres paral·lels destacats són els *Tròpics de Càncer* i *Capricorn*, pròxims a l’Equador al nord i sud respectivament i també el *Cercle Polar Àrtic* al Pol Nord i el Cercle *Polar Antàrtic* al Pol Sud.

L’Equador divideix a la Terra en dues semiesferes, denominades *hemisferi nord* (N) i *hemisferi sud* (S). El meridià de Greenwich divideix a la Terra als hemisferis *est* (E) i *oest* (W).

6.2. Longitud i latitud. Coordenades geogràfiques.



Prenent com a sistema de referència l’Equador i el meridià de Greenwich, a cada punt de la Terra se li associa una parella de nombres que són les seues *coordenades geogràfiques* i que reben el nom de *latitud i longitud*. Aquestes coordenades s’expressen en graus sexagesimals.

La *latitud és* la distància que existeix entre un punt qualsevol del globus terraqüi i l’Equador. Es mesura sobre el meridià que passa pel dit punt.

La *longitud* és la distància que existeix entre un punt qualsevol i el Meridià de Greenwich, mesura sobre el paral·lel que passa pel punt.

Si un punt està a l’hemisferi nord, direm que té latitud nord i escriurem latitud N. Anàlogament si està a l’hemisferi sud, direm que té latitud sud i escriurem latitud S.

També parlarem de longitud est i longitud oest i escriurem longitud E o longitud W depenent de que un punt es trobe a l’esquerra o dreta del meridià de Greenwich. Sol identificar-se la longitud E amb longitud negativa i la longitud W amb longitud positiva

6.3. Fusos horaris.

Durant molt de temps l’hora es determinava mitjançant càlculs basats en els moviments dels astres i l’hora oficial era l’hora solar. Açò ocasionava múltiples problemes als horaris dels transports entre diferents localitats per la qual cosa es va acordar establir un horari oficial coordinat. En un principi aquest horari estava basat en l’anomenada hora mitjana de *Greenwich* (**GMT**) que es calculava fent la mitjana de l’hora solar de totes les localitats pertanyents al meridià de *Greenwich*. Hui en dia l’hora solar ha sigut substituïda per l’hora que calculen rellotges atòmics molt més precisos. Amb ells l’hora **GMT** ha donat pas a l’hora universal coordinada (**UTC**).

La Terra fa una volta completa en 24 hores, recorre 360 º : 24 = 15 º en una hora. Es produeix aleshores una diferència d'una hora de temps per cada diferència de 15º de longitud entre dos punts geogràfics.

Sanomena ***fus horari*** a una zona del globus terraqüi compresa entre dos meridians que es diferencien en 15º de longitud. La velocitat de la Terra en el seu moviment de rotació origina 24 fusos *horaris*. Partint del meridià de *Greenwich* es numeren segons la seua distància a l'Est o a l'Oest de Greenwich.

Dins de cada fus horari tots els rellotges han de marcar la mateixa hora, i entre un fus i el següent hi ha una diferència d'una hora. Generalment, els fusos horaris estan determinats per meridians d'una longitud que és múltiple de 15°; no obstant això, com a conseqüència de les fronteres polítiques, les delimitacions poden seguir línies que adopten formes molt irregulars.

Tenint en compte que el moviment de rotació és un gir d'oest a est, si ens desplacem d'un fus horari a un altre en direcció Est- Oest, hem de retardar el rellotge una hora i, si el desplaçament es produeix d'Oest a Est hem d'avançar-lo una hora.

Travessar l'Antimeridià suposa el canvi de data, exactament un dia.

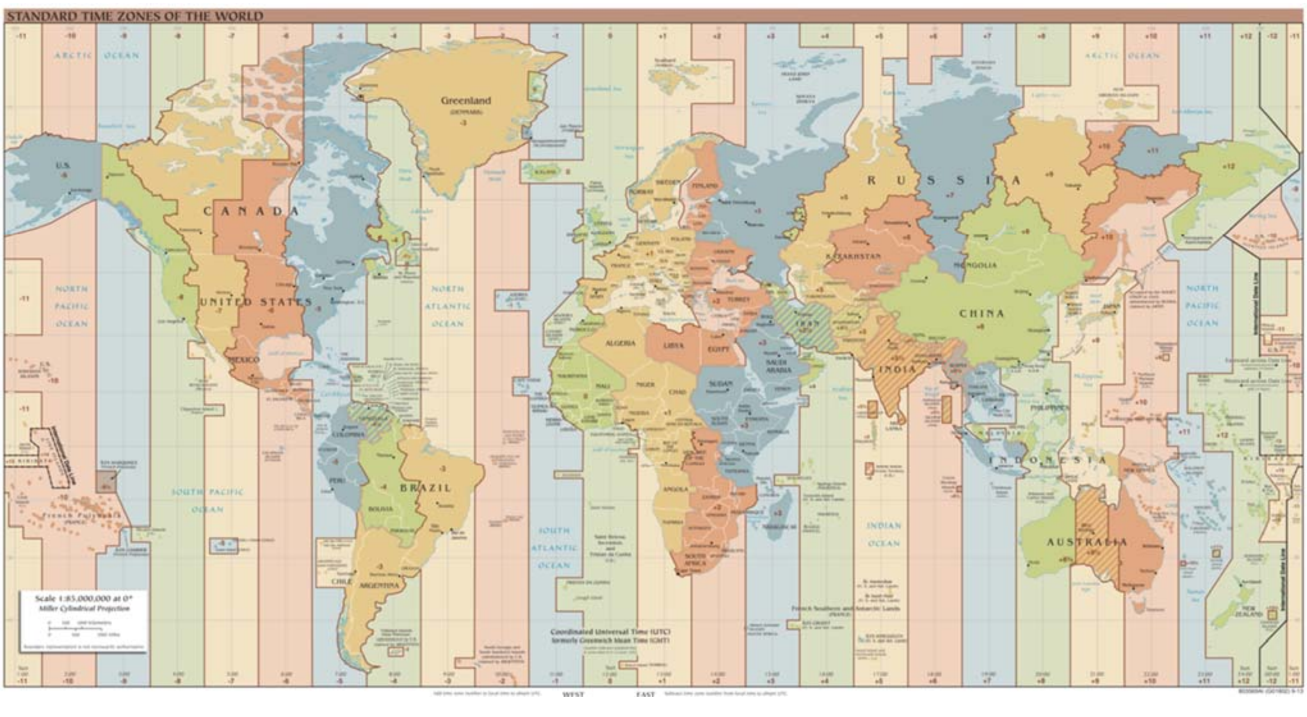
Actividades propuestas

29. Un avió recorre 20º en direcció Oest al llarg de l'Equador. Si arriba a un punt la longitud del qual és de 170o Est, quines són les coordenades del lloc de partida?

30. Juan ix de sa casa i recorre 10 Km en direcció sud, 20 Km cap a l'est i 10 Km cap al nord. Si es troba novament a casa, On està situada sa casa?

31. A l'esfera terrestre, quin paral·lel medeix més?, quin meridià medeix més? Raona les teues respostes.

32. Busca les coordenades geogràfiques del lloc en què vius.

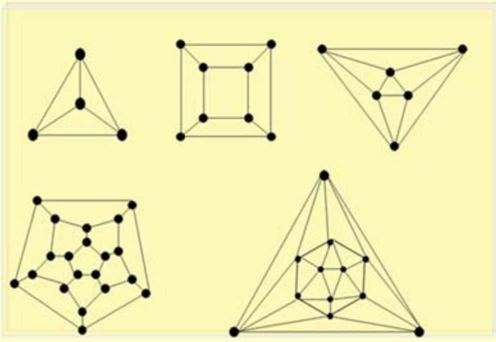


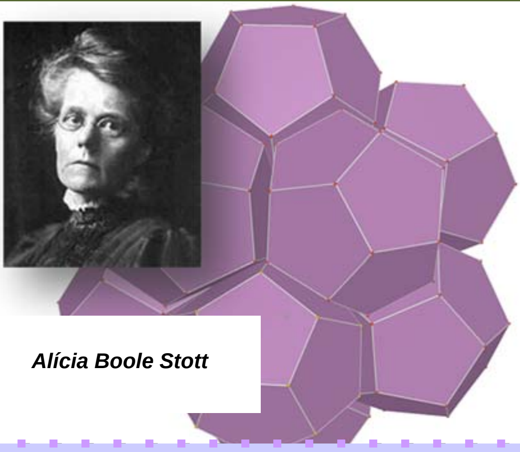
CURIOSITATS. REVISTA

Arquimedes pensatiu i Ciceró *i els magistrats descobrint la tomba d'Arquimedes a Siracusa*

Arquimedes (287 a. C.- 212 a. C.) Matemàtic, enginyer, físic, va realitzar múltiples aportacions a la ciència. Entre altres i com has estudiat en aquest tema, la demostració de les fórmules de l'àrea i volum d'una esfera. Es diu que van resultar els seus descobriments favorits. En la seua tomba es van gravar un cilindre amb una esfera inscrita com a homenatge.

Els poliedres regulars poden ser "esclafats" sobre un pla, triant una cara i projectant els costats del poliedre des d'un punt per damunt del centre d'aquesta cara. La figura que s'obté s'anomena diagrama de Schlegel. Aquests diagrames són exemples ... part de les propietats dels ... serven en ells i ajuden a fer que molts problemes es resolguen amb facilitat.



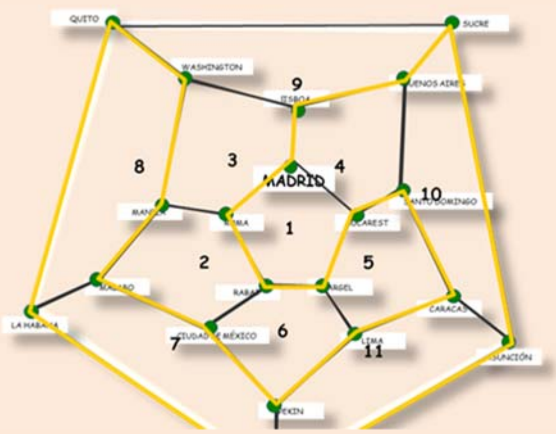


Alícia Boole Stott

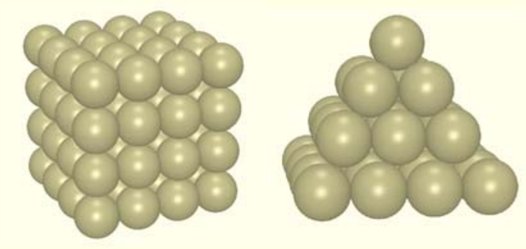
Alícia Boole Stott, (1860 - 1940) filla del matemàtic George Boole, va destacar per la seua meravellosa capacitat per a visualitzar la quarta dimensió. Va calcular i va representar les seccions dels anomenats ***polítops regulars de dimensió 4***, objectes geomètrics equivalents, en un espai de quatre dimensions, als polígons regulars al pla o als poliedres regulars a l'espai.

En 1859 Hamilton va idear el joc següent: Donat un dodecaedre, si en cada un dels seus vèrtexs es posa el nom d'una ciutat, és possible trobar un circuit tancat a través de les arestes del dodecaedre que passe una sola vegada per cada ciutat?

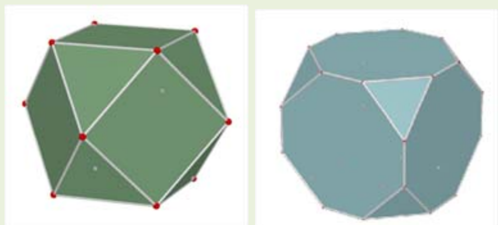
Gràcies al graf del dodecaedre, és molt senzill resoldre el problema



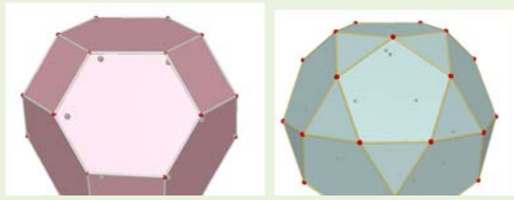
El matemàtic anglès **Thomas Harriot** (1560-1621), va plantejar el problema de **l'empaquetatge *d'esferes*** que consisteix a trobar la forma d'apilar esferes del mateix radi de manera que l'espai comprés entre elles siga mínim. L'astrònom alemany Johannes Kepler (1571-1630) el va resoldre, arribant a la conclusió que la millor col·locació era la que aleshores es feia espontàniament als vaixells



Els ***sòlids arquimedians*** o ***sòlids d'Arquimedes*** són un grup de poliedres convexos les cares del qual són polígons regulars de dues o més tipus. En tots els sòlids d'Arquimedes concorren el mateix nombre de cares en cada vèrtex i amb les mateixes formes. Alguns d'ells s'obtenen truncant els sòlids platònics (poliedres regulars).



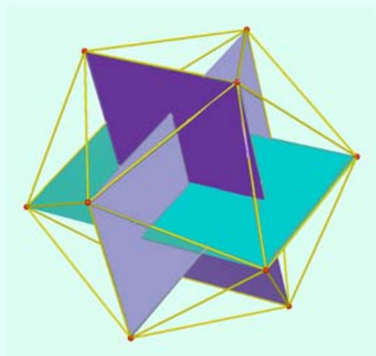
Cubs truncats



Un anell de tetràedres o caleidocicle és un anell tridimensional compost per tetràedres units per les seues arestes. Poden girar sobre si mateixos entorn del seu centre infinites vegades sense trencar-se ni deformar-se.

Entre els materials trobaràs un a plantilla per a construir un amb les imatges d'algunes dones matemàtiques celebres.

Els vèrtexs de l'icosàedre determinen 3 rectangles auris perpendiculars dos a dos. A l'icosaedre podem trobar un total de 15 rectangles auris. Cada un d'ells té dos costats paral·lels que són arestes oposades del poliedre.

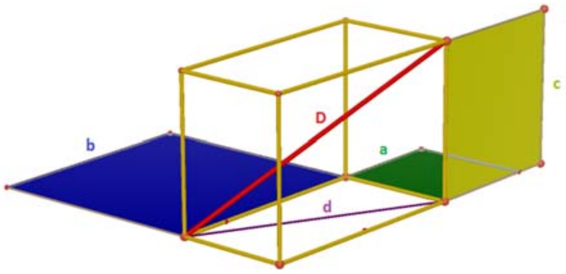


TEOREMA DE PITÀGORES A L'ESPAI

Si un ortoedre té arestes de longituds *a*, *b*, *c*, segons el teorema de Pitàgores, a l'espai, la suma dels quadrats de les arestes, coincideix amb el quadrat de la diagonal, *D*, de l'ortoedre:

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Com a conseqüència, la suma de les àrees dels quadrats de costats iguals a les arestes, coincideix amb l'àrea del quadrat que té com a costat la diagonal de l'ortoedre.

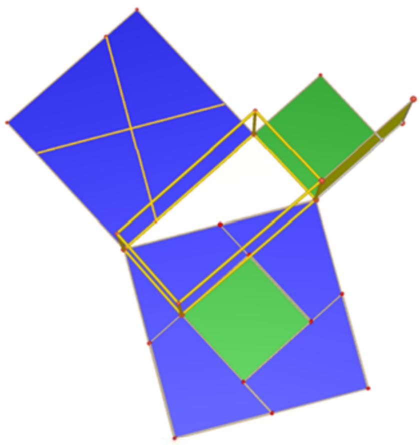


Construirem un trencaclosques, basat en la demostració que *Perigal* va idear per a demostrar el teorema de Pitàgores al pla. Cal aplicar dues vegades el seu mètode i trobarem les peces clau que demostren el teorema a l'espai.

En traçar la diagonal *d* de la base, queda dividida en dos triangles rectangles de catets *a* i *b*.

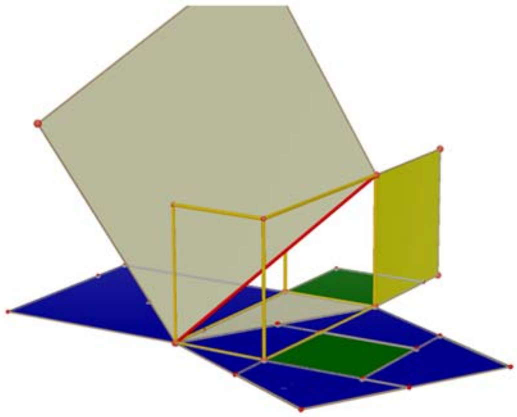
Construïm el quadrat sobre la seua hipotenusa i les peces de *Perigal* que demostren el teorema de Pitàgores en un d'aquests triangles.

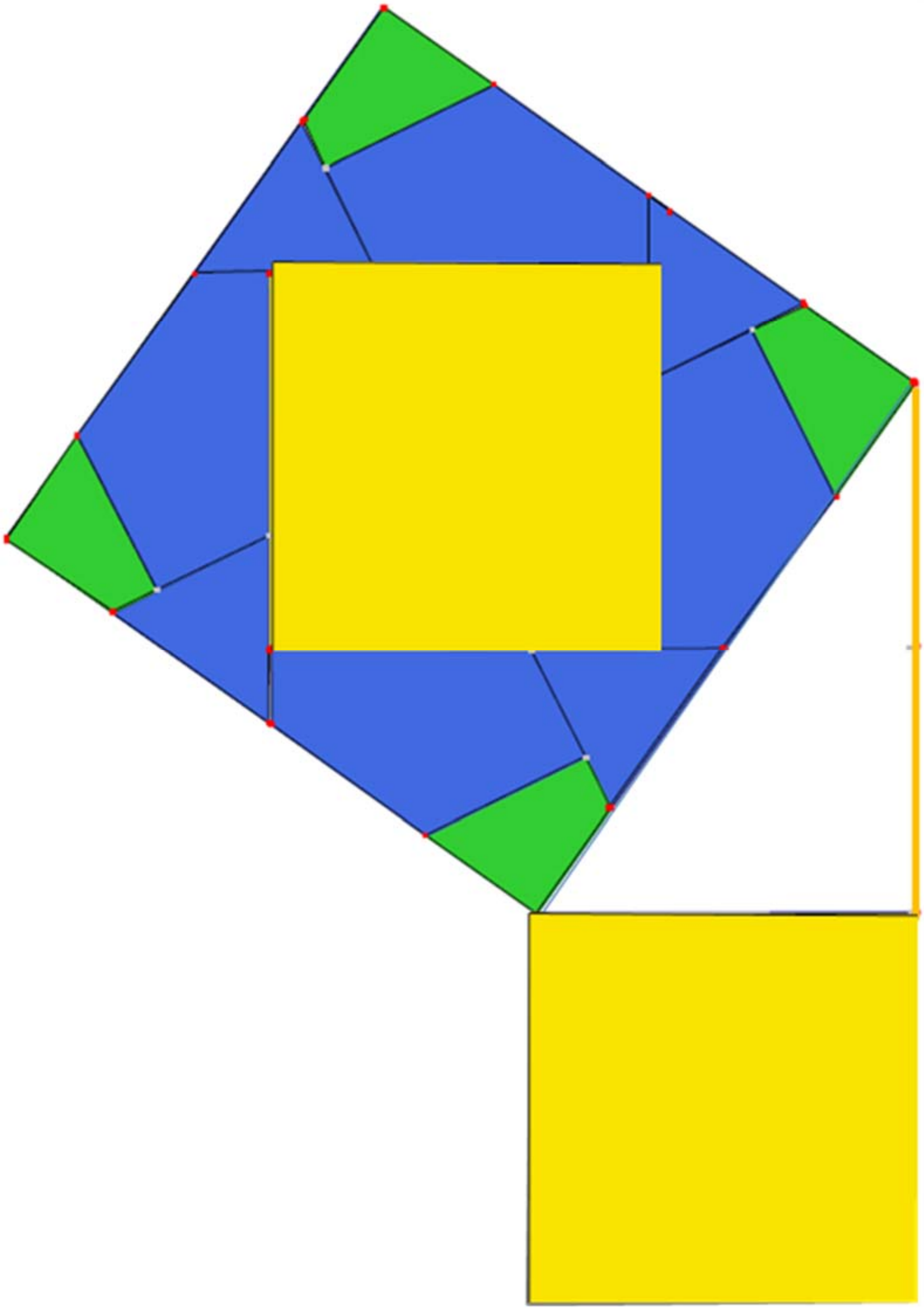
Per a això en el quadrat construït sobre el catet major (en la nostra figura, *b* de color blau) i, pel seu centre, tracem dos segments un paral·lel i un altre perpendicular a la hipotenusa, de manera que ambdós tallen als dos costats del quadrat. El quadrat queda dividit en quatre peces exactament iguals que junt amb el quadrat de costat *a*, recobreixen el quadrat de costat *d*.

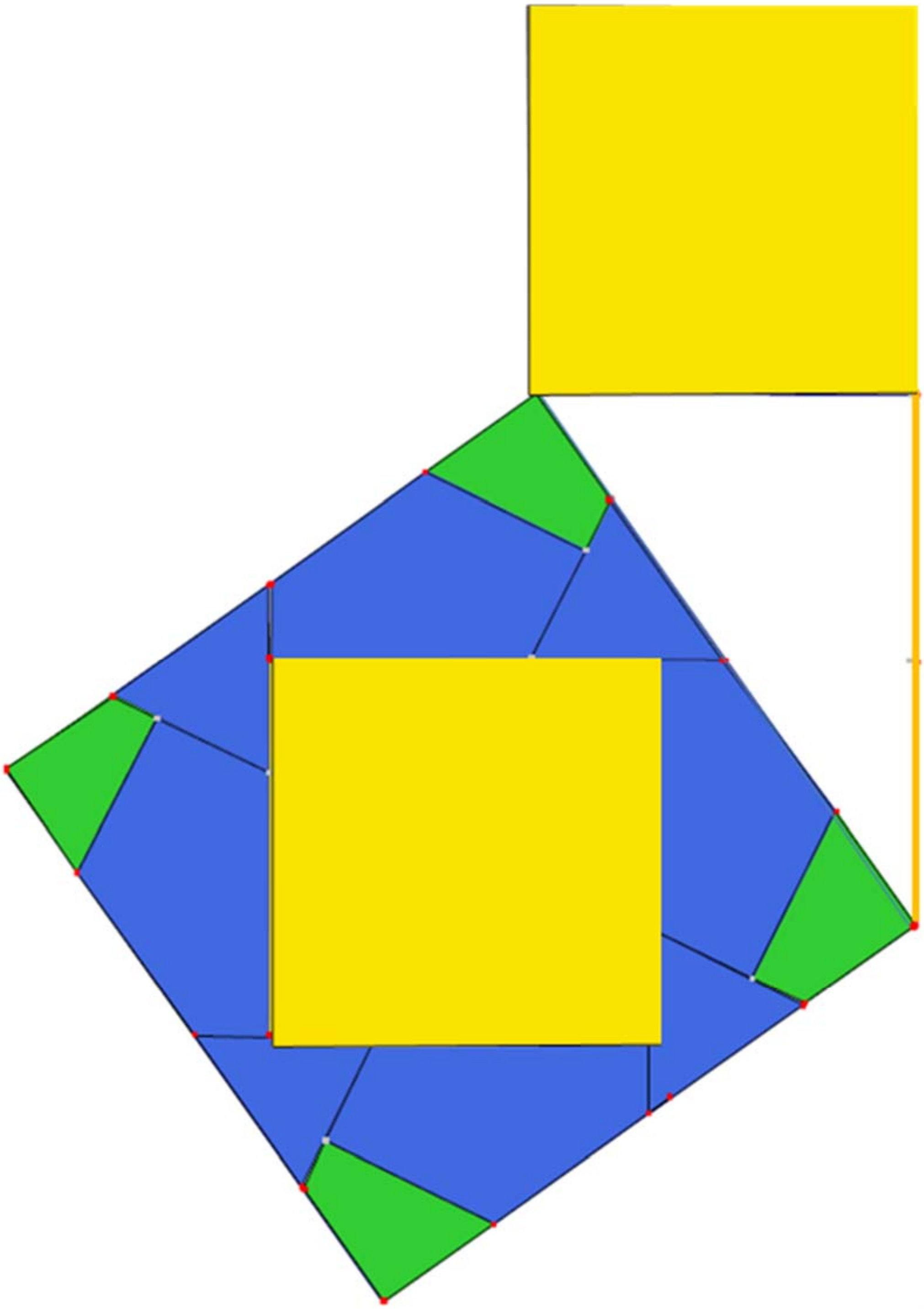


Ara cal fixar-se al triangle rectangle de catets *c, d* i la hipotenusa del qual és *D* i repetir el procés anterior, això sí que utilitzant el quadrat de costat *d* recobert amb les peces blaves i el quadrat verd.

A les pàgines següents trobaràs les làmines que et permeten construir la teua pròpia demostració. Únicament has de retallar les dues últimes, apegar-les una contra una altra i construir un ortoedre amb fil d'aram que tinga com a dimensions les longituds dels costats del quadrats verd, blau i groc.

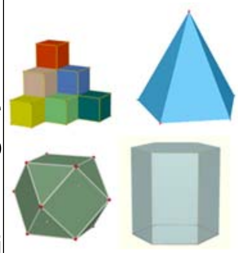
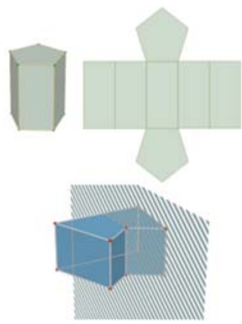
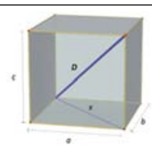


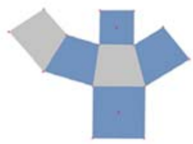
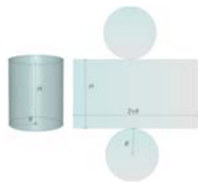


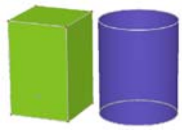
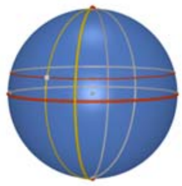


Geometria a l'espai. 3r B d'ESO

RESUM

		Exemples
Poliedre. Elements d'un poliedre. Tipus de poliedres	Un poliedre és una regió tancada a l'espai limitada per polígons. Els seus principals elements són: cares, arestes, vèrtexs, angles diedres i poliedres, així com les diagonals. Els poliedres poden ser còncaus i convexos depenent de que alguna de les seues cares siga un polígon còncau o cap ho siga. Entre els poliedres destaquen poliedres regulars, prismes i piràmides.	
Teorema d'Euler:	En tot poliedre convex el nombre de cares més el nombre de vèrtexs coincideix amb el nombre d'arestes més 2.	$C + V = A + 2$
Poliedres regulars	Un poliedre regular és un poliedre que compleix que totes les seues cares són polígons regulars iguals i que els seus angles poliedres són iguals. Hi ha cinc poliedres regulars: tetràedre, octàedre, icosàedre, cub i dodecàedre	
Prismes	Un prisma és un poliedre determinat per dues cares paral·leles que són polígons iguals i tantes cares laterals, que són paral·lelograms, com a costats tenen les bases. Poden ser còncaus o convexos; rectes o oblics, regulars o irregulars; triangulars, quadrangulars, pentagonals… Destaquen els paral·lelepípedes que són prismes amb totes els seus cares paral·lelograms i dins d'aquests els ortoedre que són paral·lelepípedes amb totes les seues cares rectangulars	
Teorema de Pitàgores a l'espai	La diagonal d'un ortoedre és l'arrel quadrada de la suma dels quadrats de les seues arestes	
Piràmides	Una piràmide és un poliedre determinat per una cara poligonal denominada base i tantes cares triangulars amb un vèrtex comú, com a costats té la base. Poden ser còncaves o convexes; rectes o obliqües, regulars o irregulars; triangulars, quadrangulars, pentagonals…	

Tronc de piràmide	Un tronc de piràmide és el poliedre resultant en tallar una piràmide per un pla paral·lel a la base. Les bases són polígons semblants i les cares laterals són trapezis.	
Cossos de revolució	Els cossos de revolució són cossos geomètrics que s'obtenen en fer girar una línia al voltant d'una recta fixa denominada *eix*. La línia que gira s'anomena *generatriu*. Entre els cossos de revolució destaquen cilindres, cons i esferes.	
Àrees lateral i total d'un prisma	$A_{\text{Lateral}} = \text{Perímetre}_{\text{Base}}.\text{Altura}$ $A_{\text{total}} = \text{Àrea}_{\text{Lateral}} + 2\text{Àrea}_{\text{Base}}$	
Àrees lateral i total d'una piràmide regular	$A_{\text{Lateral}} = \dfrac{\text{Perímetre}_{\text{Base}}.\text{Apotema}_{\text{piràmide}}}{2}$ $A_{\text{total}} = \text{Àrea}_{\text{Lateral}} + \text{Àrea}_{\text{Base}}$	
Àrees lateral i total d'un tronc de piràmide regular	$A_{\text{Lateral}} = \dfrac{\text{Perímetre}_{\text{Base}}.\text{Apotema}_{\text{tronc}}}{2}$ $A_{\text{total}} = \text{Àrea}_{\text{Lateral}} + \text{Àrea}_{\text{Base1}} + \text{Àrea}_{\text{Base2}}$	
Àrees lateral i total d'un cilindre	$A_{\text{Lateral}} = 2\pi RH$ $A_{\text{total}} = 2\pi RH + 2\pi R^2$	
Àrees lateral i total d'un con	$A_{\text{Lateral}} = \pi RG$ $A_{\text{total}} = \pi RG + \pi R^2$	
Àrees lateral i total d'un tronc de con	$A_{\text{Lateral}} = (\pi R + \pi r)G$ $A_{Total} = A_{Lateral} + \pi R^2 + \pi r^2$	
Àrea total d'una esfera	$A_{\text{total}} = 4\pi R^2$	

Volum d'un prisma i d'un cilindre	Volum = Àrea $_{\text{base}}$.Altura	
Volum d'una piràmide i d'un con	$\text{Volum} = \dfrac{\text{Àrea}_{\text{base}}.\text{Altura}}{3}$	
Volum d'una esfera	$\text{Volum} = \dfrac{4}{3}\pi R^3$	
Coordenades geogràfiques	**Latitud**: Distància del punt geogràfic a l'Equador mesurada sobre el meridià que passa pel punt. **Longitud:** Distància del punt geogràfic al meridià zero o de Greenwich, mesurada sobre el paral·lel que passa pel punt.	
Fusos horaris	Cada **fus horari** és una zona del globus terraqüi compresa entre dos meridians que es diferencien en 15º de longitud.	

EXERCICIS I PROBLEMES.

Ángulos poliedros. Paralelismo y perpendicularidad. Poliedros: elementos y tipos.

a) Si estem en una habitació sense columnes, atenent al sòl i a les seues quatre parets, quants angles diedres es formen?

1. Doblega per la mitat un full de paper, construeix un angle diedre i traça el seu rectilini. Podries mesurar l'amplitud de diferents angles diedres mitjançant aquest rectilini?

2. Determina l'amplitud dels angles diedres que formen les cares laterals d'un poliedre que és un prisma recte de base un octògon regular.

3. Dues cares d'un triedre medeixen 60o i 118o, Entre quins valors pot oscil·lar l'altra?

4. Es pot formar un angle poliedre amb un angle d'un triangle equilàter, dos angles d'un rectangle i un d'un pentàgon regular?

5. Podrà existir un poliedre regular les cares del qual siguen hexagonals? Raona la resposta.

6. Quantes diagonals pots traçar en un cub? I en un octaedre?

7. Pots trobar dues arestes paral·leles en un tetraedre? I en cada un dels restants poliedres regulars?

8. Prolonga una parella d'arestes en una piràmide pentagonal, de manera que s'obtinguen rectes no coplanaries.

9. Dibuixa un prisma regular de base quadrada i assenyala: a) dues arestes que siguen paral·leles, b) dues arestes que siguen perpendiculars i coplanaries, c) dues arestes perpendiculars i no coplanaries, d) dues cares paral·leles, e) dues cares perpendiculars.

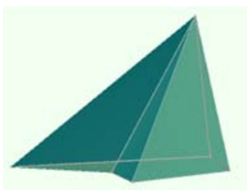
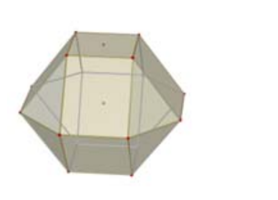
10. Si un poliedre convex té 16 vèrtexs i 24 arestes, quantes cares té? Podria ser una piràmide? I un prisma?

11. Amb 12 varetes de 5 cm de llarg cadascuna, usant totes les varetes quins poliedres regulars es poden construir?

12. D'unprisma sabem que el nombre de vèrtexs és 16 i que el nombre d'arestes és 24 quantes cares té?

13. Classifica els següents cossos geomètrics i indica, quan siguen poliedres, el nombre de vèrtexs, cares i arestes que tenen. Quins compleixen el teorema d'Euler?




14. Descriu la diferència entre un prisma recte i un prisma oblic. És prou que un paral·lelepípede tinga dues cares paral·leles rectangulars perquè siga un ortoedre?

Teorema de Pitàgores a l'espai

15. Dibuixa un paral·lelepípede les arestes del qual mesuren 4 cm, 5 cm i 6 cm que no siga un ortoedre. Dibuixa també el seu desenrotllament.

16. Si el paral·lelepípede anterior fóra un ortoedre, quant mesuraria la seua diagonal?

17. Un got de 12 cm d'altura té forma de tronc de con en què els radis de les bases són de 5 i 4 cm. Quant ha de mesurar com a mínim una cullereta perquè sobreïsca del got almenys 2 cm?

18. És possible guardar en una caixa amb forma d'ortoedre d'arestes 4 cm, 3 cm i 12 cm un bolígraf de 13 cm de longitud?

19. Calcula la diagonal d'un prisma recte de base quadrada sabent que el costat de la base mesura 6 cm i l'altura del prisma 8 cm.

20. Si un ascensor mesura 1 m d'ample, 1,5 m de llarg i 2,2 m d'altura, és possible introduir en ell una escala de 3 m d'altura?

21. Quina és la major distància que es pot mesurar en línia recta en una habitació que té 6 m d'ample, 8 m de llarg i 4 metres d'altura ⍰

22. Calcula la longitud de l'aresta d'un cub sabent que la seua diagonal medeix 3,46 cm.

23. Calcula la distància màxima entre dos punts d'un tronc de con les bases de la qual tenen radis 5 cm i 2 cm, i altura 10 cm.

Àrea lateral, total i volum de cossos geomètrics

24. Identifica a quin cos geomètric pertanyen els desenrotllaments següents:

25. Un prisma de 8 dm d'altura té com a base un triangle rectangle de catets 3 dm i 4 dm. Calcula les àrees lateral i total del prisma.

26. Dibuixa un prisma hexagonal regular que tinga 4 cm d'aresta basal i 1 dm d'altura i calcula les àrees de la base i total.

27. Un prisma pentagonal regular de 12 cm d'altura té una base de 30 cm2 d'àrea. Calcula el seu volum.

28. Calcula l'àrea total d'un ortoedre de dimensions 3,5 dm, 8,2 dm i 75 cm.

29. Calcula la superfície total i el volum d'un cilindre que té 8 m d'altura i 5cm de radi de la base.

30. Calcula l'àrea total d'una esfera de 5 cm de radi.

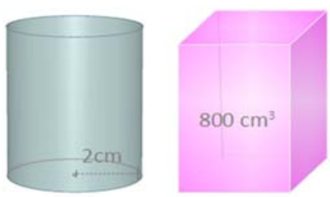
31. Calcula l'apotema d'una piràmide regular sabent que la seua àrea lateral és de 120 m2 i la seua base és un hexàgon de 5 m de costat.

32. Calcula l'apotema d'una piràmide hexagonal regular sabent que el perímetre de la base és de 32 dm i l'altura de la piràmide és de 4 dm. Calcula també l'àrea total i el volum d'aquesta piràmide.

33. Un triangle rectangle de catets 12 cm i 5 cm gira al voltant d'un dels seus catets generant un con. Calcula l'àrea lateral, l'àrea total i el volum.

34. Tres boles de metall de radis 12 dm, 0,3 m i 4 m es fonen en una sola, Quin serà el diàmetre de l'esfera resultant?

35. Quina és la capacitat d'un pou cilíndric de 1,20 m de diàmetre i 20 metres de profunditat?



36. Quant cartó necessitarem per a construir una piràmide quadrangular regular si volem que el costat de la base mesure 10 cm i que la seua altura siga de 25 cm?

37. Calcula el volum d'un cilindre que té 2 cm de radi de la base i la mateixa altura que un prisma la base del qual és un quadrat de 4 cm de costat i 800 cm3 de volum.

38. Quina és l'àrea de la base d'un cilindre de 1,20 m d'alt i 248 dm3 de volum?

39. L'aigua d'un brollador es condueix fins a uns depòsits cilíndrics que mesuren 12 m de radi de la base i 20 m d'altura. Després s'embotella en bidons de 2,5 litres. Quants envasos s'omplin amb cada depòsit?

40. Calcula la quantitat de cartolina necessària per a construir un anell de 10 tetràedres cada un dels quals té 2 cm d'aresta.

41. En fer el desenrotllament d'un prisma triangular regular de 8 dm d'altura, va resultar un rectangle d'1 metre de diagonal com a superfície lateral. Calcula l'àrea total.

42. Determina la superfície mínima de paper necessària per a embolicar un prisma hexagonal regular d'1 m de costat de la base i 2 m d'altura.

43. L'ajuntament de Madrid ha col·locat unes jardineres de pedra als seus carrers que tenen forma de prisma hexagonal regular. La cavitat interior, on es deposita la terra, té 80 cm de profunditat i el costat de l'hexàgon interior és de 60 cm. Calcula el volum de terra que ompliria una jardinera per complet.

44. Una habitació té forma d'ortoedre i les seues dimensions són directament proporcionals als nombres 3, 5 i 7. Calcula l'àrea total i el volum si a més se sap que la diagonal medeix 14,5 m.

45. Un ortoedre té 1 dm d'altura i 6 dm2 d'àrea total. La seua longitud és el doble de la seua amplària, quin és el seu volum?

46. Si el volum d'un cilindre de 10 cm d'altura és de 314 cm3, calcula el radi de la base del cilindre. (Utilitza 3,14 com a valor de π).

47. (CDI Madrid 2011) Han instal·lat a casa de Joan un depòsit d'aigua de forma cilíndrica. El diàmetre de la base mesura 2 metres i l'altura és de 3 metres. a) Calcula el volum del depòsit en m3. (Prendre=3,14). b) Quants litres d'aigua caben al depòsit?

48. (CDI Madrid 2012) Un envàs d'un litre de llet té forma de prisma, la base és un quadrat que té 10 cm de costat. a) Quin és, en cm3, el volum de l'envàs? b) Calcula l'altura de l'envàs en cm.

49. Una circumferència de longitud 2,24 cm gira al voltant d'un dels seus diàmetres generant una esfera. Calcula el seu volum. (Prendre=3,14).

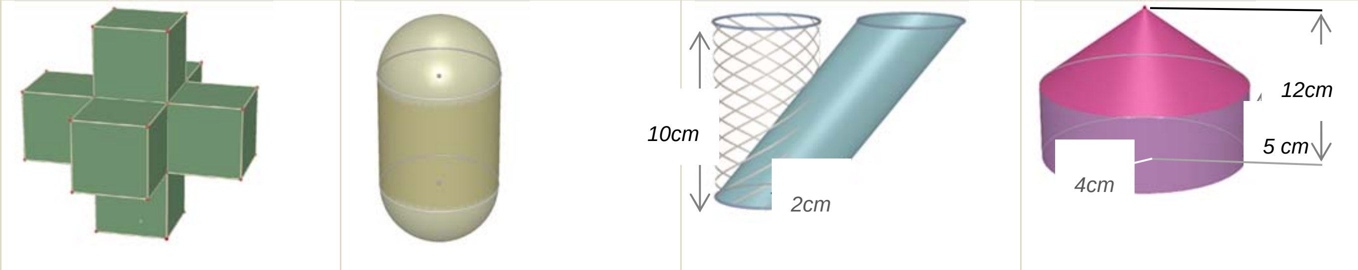
50. Una porta mesura 2 m d'alt, 80 cm d'ample i 4 cm de grossària. El preu d'instal·lació és de 200 € i es cobra 6 € per m2 en concepte d'envernissat, a més del cost de la fusta, que és de 300 € cada m3. A) Calcula el volum de fusta d'una porta. B) El cost de la fusta d'una porta més la seua instal·lació. C) El cost de l'envernissat de cada porta, si només es cobra l'envernissat de les dues cares principals.

51. L'aigua continguda en un recipient cònic de 18 cm d'altura i 24 cm de diàmetre de la base s'aboca en un got cilíndric de 10 cm de diàmetre. Fins a quina altura arribarà l'aigua?

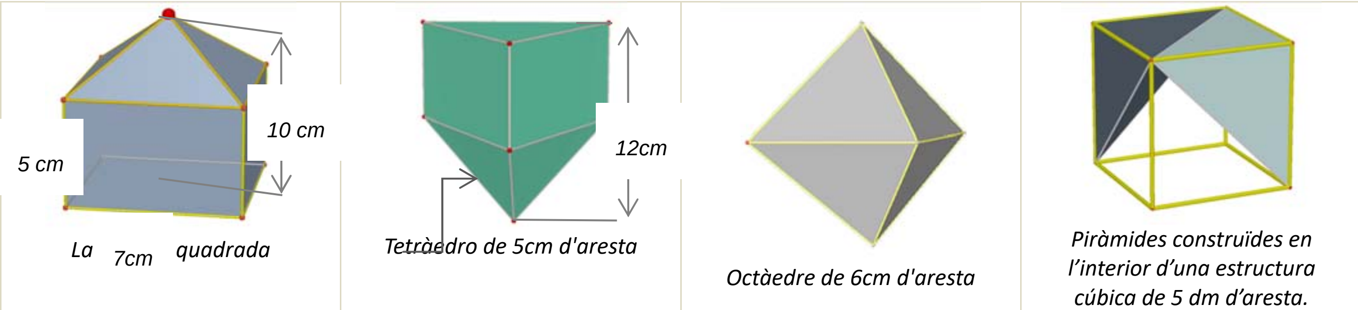
52. Segons Arquimedes, quines dimensions té el cilindre circumscrit a una esfera de 5 cm de radi que té la seua mateixa àrea? Calcula aquesta àrea.

53. Quin és el volum d'una esfera en què una circumferència màxima mesura 31,40 m?

54. Calcula l'àrea lateral i el volum dels següents cossos geomètrics



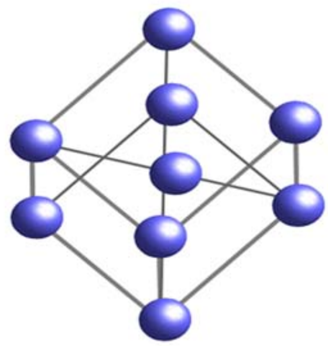
55. Calcula l’àrea lateral i el volum dels següents cossos geomètrics



56. En la construcció d’un globus aerostàtic de radi de 2,5 m s’empra lona que té un cost de 300 €/m^2. Calcula l’import de la lona necessària per a la seua construcció.

57. Calcula el radi d’una esfera que té 33,51 dm^3 de volum.

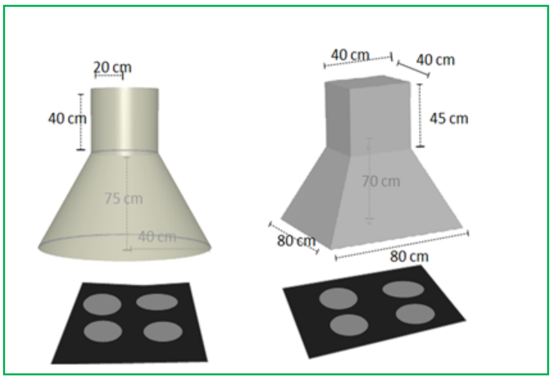
58. L'Atomium és un monument de Brussel·les que reprodueix una molècula de ferro. Consta de 9 esferes d’acer de 18 m de diàmetre que ocupen els vèrtexs i el centre d’una estructura cúbica de 103 m de diagonal, realitzada amb cilindres de 2 metres de diàmetre. Si utilitzem una escala 1:100 i tant les esferes com els cilindres són massissos, quina quantitat de material necessitarem?



59. S'ha pintat per dins i per fora un depòsit sense tapadora de 8 dm d’alt i 3 dm de radi. Tenint en compte que la base només es pot pintar per dins, i que s’ha utilitzat pintura de 2€/dm^2, quants diners ha costat en total?

60. Una piscina mesura 20 m de llarg, 5 m d’ample i 2 m d’alt.

61. Quants litres d’aigua són necessaris per a omplir-la?

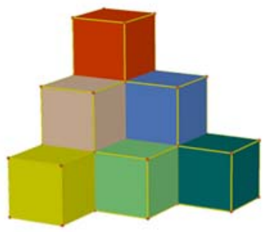


62. Quant costarà recobrir el sòl i les parets amb PVC si el preu és de 20 €/ m^2?

63. Quina de les dues campanes extractores de la figura esquerra té un cost d’acer inoxidable menor?

64. En un atuell cilíndric de 8 dm de diàmetre i que conté aigua, s’introdueix una bola. Quin és el seu volum si després de la immersió puja 0,3 metres el nivell de l’aigua?

65. El preu de les teules és de 14,30 €/m^2 Quant costarà reparar una vivenda la teulada de la qual té forma de prisma quadrangular regular de 4 metres d’altura i 8 metres de costat de la base?



66. S'enrotlla una cartolina rectangular de costats 30 cm i 25 cm de les dues formes possibles, fent coincidir costats oposats. Quin dels dos cilindres resultants té major volum?

67. Cada un dels cubs de la figura té 2 cm d'aresta. Quants cal afegir per a formar un cub de 216 cm3 de volum?

68. Un tub d'assaig té forma de cilindre obert en la part superior i rematat per una semiesfera en la inferior. Si el radi de la base és de 1,5 cm i l'altura total és de 15 cm, calcula quants centilitres de líquid caben en ell.

69. El vidre d'un fanal té forma de tronc de con de 50 cm d'altura i bases de radis 20 i 30 cm. Calcula la seua superfície.

70. Un pot cilíndric de 10 cm de radi i 40 cm d'altura té al seu interior quatre pilotes de radi 3,5 cm. Calcula l'espai lliure que hi ha al seu interior.

71. Construïm un con amb cartolina retallant un sector circular de 120o i radi 20 cm. Calcula el volum del con resultant.

72. Un embut cònic de 20 cm de diàmetre ha de tindre 2 litres de capacitat, quina serà la seua altura?

73. En un depòsit amb forma de cilindre de 25 cm de radi, una aixeta aboca 15 litres d'aigua cada minut. Quant augmentarà l'altura de l'aigua després d'un quart d'hora?

74. La lona d'una ombrel·la oberta té forma de piràmide octogonal regular d'1 m d'altura i 45 cm de costat de la base. Es fixa un pal en el sòl en què s'encaixa i el vèrtex de la piràmide queda a una distància del sòl de 1,80 m. En el moment en què els rajos de sol són verticals, quin espai d'ombra determina?

75. Una peixera amb forma de prisma recte i base rectangular s'ompli amb 56 litres d'aigua. Si té 48 cm de llarg i 36 cm d'ample, quina és la seua profunditat?

76. Si s'enrotlla una cartolina rectangular de costats 30 cm i 25 cm de les dues formes possibles, quin dels dos cilindres resultants té major volum?

77. Un rectangle d'1 m de base i 10 m d'altura gira 360º al voltant d'una recta paral·lela a l'altura, que està situada a 2 m de distància. Calcula la superfície i el volum del cos que resulta.

78. En un gelat de cucurutxo la galleta té 15 cm d'altura i 5 cm diàmetre. Quina és la seua superfície? Si el cucurutxo està completament ple de gelat i sobreïx una semiesfera perfecta, quants grams de gelat conté?

Fusos horaris

79. Quina diferència de longitud existeix entre dues ciutats si la diferència horària entre ambdues és de 5 hores? Podem saber si hi ha diferència entre les seues latituds?

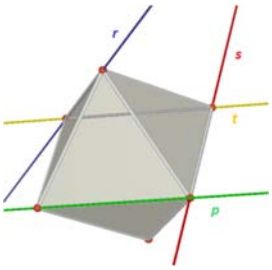
80. Un avió emprén viatge cap a una ciutat situada a l'oest de Madrid. El viatge dura 10 hores i el seu rumb manté en tot moment la latitud de partida. Si la diferència de longitud entre Madrid i la ciutat d'arribada és de 45º i l'avió s'envola de l'aeroport Adolfo Suárez a les 9 del matí. A quina hora local aterrarà a la ciutat de destí?

81. La distància entre Londres i Pequín és de 8149 Km i la distància entre Londres i Sao Paulo és de 9508 Km, no obstant això a Pequín el rellotge marca 7 hores més que a Londres i a Sao Paulo 3 hores menys que a Londres. Com expliques aquesta diferència?

CIUTAT	LONGITUD	LATITUD
LONDRES	0^o	51^o 30´latitud N
PEQUÍN	116^o longitud E	40^o latitud N
SAO PAULO	46^o 30´de longitud W	23^o 30´de latitud S

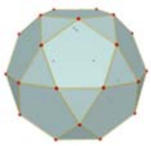
AUTOAVALUACIÓ

1. Cada una de les rectes *r, s, t* i *p* passa per dos vèrtexs consecutius d'un octàedre tal com s'observa en la figura. Assenyala quina afirmació de les següents és verdadera:



a) Les rectes *r i s* són coplanarias i secants.
b) Les rectes t i *p* no són coplanaries.
c) Les rectes *r* i *p* s'encreuen.
d) *r* i *s* contenen arestes d'una mateixa cara de l'octàedre

2. Observa els següents cossos geomètrics i selecciona l'opció verdadera:

a)	1	2	3	4	5
					

a) Els cossos I), II), IV) i V) compleixen la relació d'Euler. **b)**. Hi ha dos cossos de revolució III) i VI)

c).Són poliedres regulars II) i IV). **d)** Són còncaus I) i V).

3. Si l'altura d'un prisma de base quadrada és 10 cm i el costat de la base és 4 cm, la seua àrea total és:

a) 160 cm^2 b) 320 cm^2 c) 400 cm^2 d) 192 cm^2

4. Un depòsit d'aigua té forma de prisma hexagonal regular de 5 m d'altura i costat de la base 1 m. Si només conté les tres quartes parts de la seua capacitat, el nombre aproximat de litres d'aigua que hi ha en ell és:

a) 13000 L b) 9750 L c) 3750 L d) 3520 L

5. La teulada d'una caseta té forma de piràmide quadrangular regular de 1,5 m d'altura i 80 cm de costat de la base. Si es necessiten 15 teules per metre quadrat per a recobrir la teulada, en total s'utilitzaran:

a) 38 teules b) 76 teules c) 72 teules d) 36 teules

6. Una caixa de dimensions $30 \times 20 \times 15$cm, està plena de cubs d'1 *cm* d'aresta. Si s'utilitzen tots per a construir un prisma recte de base quadrada de 10 *cm* de costat, l'altura mesurarà:

a) 55 cm b) 65 cm c) 75 cm d) 90 cm

7. El radi d'una esfera que té el mateix volum que un con de 5 dm de radi de la base i 120 cm d'altura és:

a) $5\sqrt{3}$ dm b) $\sqrt[3]{75}$ dm c) 150 cm d) $\sqrt[3]{2250}$ cm

8. Es distribueixen 42,39 litres de dissolvent en llandes cilíndriques de 15 cm d'altura i 3 cm de radi de la base. El nombre d'envasos necessari és:

a) 100 b) 10 c) 42 d) 45

9. L'àrea lateral d'un tronc de con que té 20 cm d'altura i bases de radis 30 i 15 cm, és:

a) 2250 π cm^2 b) 900 π cm^2 c) 1125 π cm^2 d) 450 π cm^2

10. A partir de les coordenades geogràfiques de les ciutats A, B , C dedueix quina afirmació és correcta

CIUTAT	LONGITUD	LATITUD
A	15º E	15º N
B	15º W	15º N
C	15º E	15º S

a) Les ciutats A i B tenen la mateixa hora i la ciutat C dues hores menys.

b) Les ciutats A i B tenen la mateixa hora i la ciutat C dues hores més.

c) Les ciutats A i C tenen la mateixa hora i la ciutat B dues hores més.

d) Les ciutats A i C tenen la mateixa hora i la ciutat B dues hores menys.

Matemàtiques orientades a les ensenyances acadèmiques:

3º B d'ESO
Capítol 10:
Funcions i gràfiques.

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: José Gallegos Fernández

Revisors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega

Il·lustracions: José Gallegos Fernández

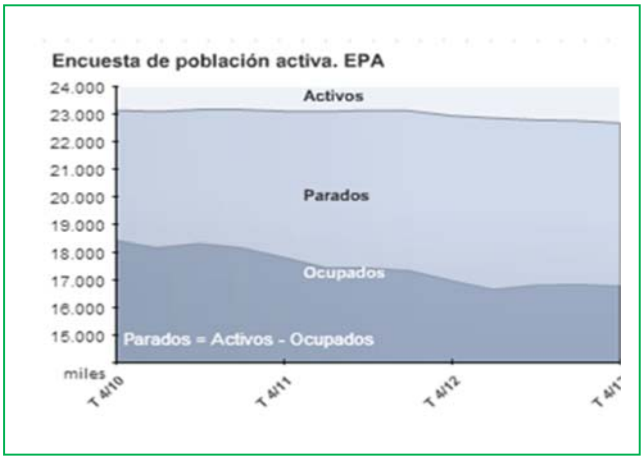
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

Índex

Resum

El concepte de funció és prou abstracte, la qual cosa fa complicada la seua definició i comprensió. No obstant això, les seues aplicacions són múltiples i molt útils, la qual cosa les fa molt importants.

Per exemple, les funcions serveixen per a poder explicar molts fenòmens que ocorren en camps tan diversos com la Física, l'Economia o la Sociologia.



A pesar de les dificultats, algunes característiques que posseeixen les funcions s'entenen fàcilment quan es representen gràficament, per resultar aleshores molt intuïtives, i això és prou per a poder analitzar i resoldre moltes qüestions. Per exemple, si observem la gràfica anterior no és difícil interpretar si la desocupació ha pujat o si ha baixat al quart trimestre entre dos anys consecutius, o globalment al llarg del període complet estudiat, o calcular el dit increment/disminució o estudiar en quin any va haver-hi més persones ocupades o menys persones actives...

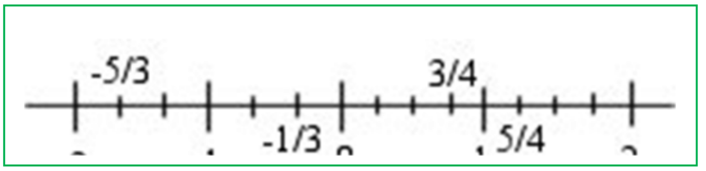
1. SISTEMES DE REPRESENTACIÓ AL PLA.

1.1. Eixos de coordenades o cartesians

Recorda que:

Quan volem representar gràficament un nombre, normalment els dibuixem sobre una recta, anomenada *recta numèrica*, a la qual establim un punt de referència, que és el 0, a partir del qual tracem els nombres positius (cap a la dreta) i els negatius (cap a l'esquerra).

Doncs bé, si estem treballant amb una única variable que pren valors numèrics i els volem representar, ho farem igualment sobre dita recta.



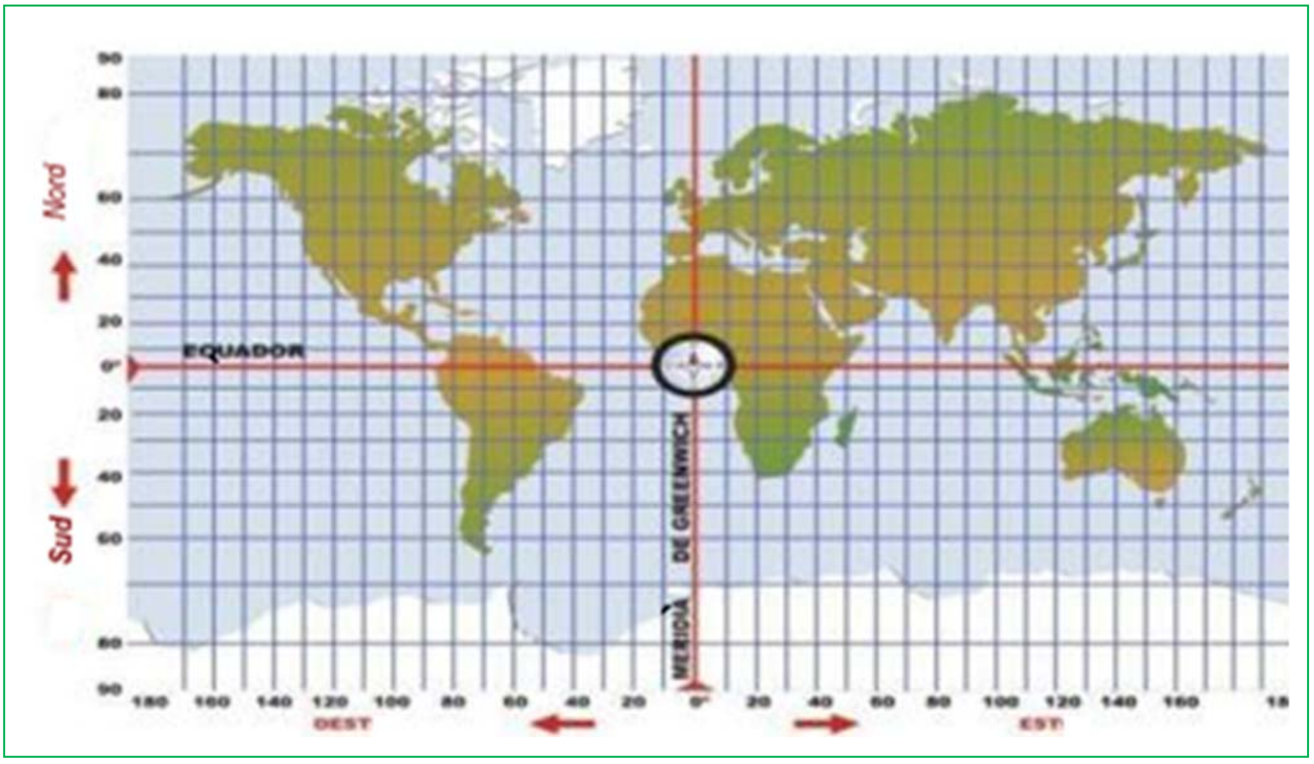
És important fer notar que, com tenim una única variable, necessitem una única recta i, per tant, estem treballant amb una única dimensió (longitud).

Al pla:

Ara bé, si treballem amb objectes de dues dimensions, al pla, necessitem dos valors per a referir-nos a ells, ja que estan determinats per la seua longitud i la seua amplària, que no tenen per què ser iguals i que segueixen direccions diferents.

Exemple:

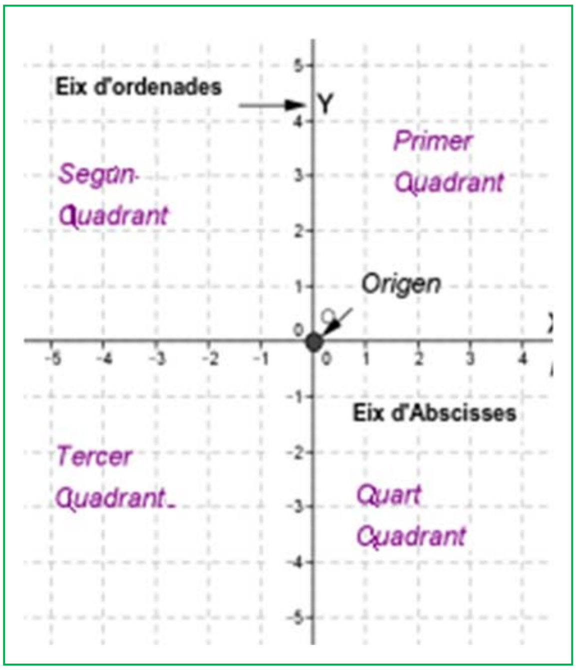
- En un mapa, per a poder situar un punt qualsevol (per exemple, una ciutat), tenim una referència a partir de la qual prendre les mesures: el paral·lel de l'Equador i el meridià de Greenwich. Ambdós es tallen en un punt, que és l'origen d'aquest sistema de referència:



De la mateixa manera, si tenim dos variables *que estan relacionades d'alguna manera,* que prenen valors numèrics i els volem dibuixar, haurem d'utilitzar dues rectes o eixos diferents (cada un per a les dades corresponents a una variable) i que siguen secants, és a dir, es tallen en un punt (sense el qual no es podria establir la relació entre ambdues).

Si les rectes es tallen de forma perpendicular, és més senzill establir la connexió entre valors, i les mesures que es representen en cada eix (excepte escales) es poden correspondre de forma directa amb la realitat, per la qual cosa sempre se solen dibuixar d'aquesta manera (formant un angle de 90º entre si).

El sistema de representació de punts en el pla més comú està format per dos eixos perpendiculars, un horitzontal anomenat ***eix d'abscisses***, on es representen els valors de la variable independent (que pren els valors lliurement, i que sol anomenar-se "*x*"), i un altre vertical anomenat ***eix d'ordenades***, on es representen els valors de la variable dependent (perquè es calculen a partir de l'altra, i que sol anomenar-se "*y*"). Ambdós reben el nom ***d'eixos de coordenades*** o ***eixos cartesians*** (en honor del famós filòsof i matemàtic francès Renè Descartes). El punt on es tallen ambdós eixos s'anomena ***origen de coordenades*** i, en tallar-se els dos eixos, el pla queda dividit en quatre zones, que es coneixen com a quadrants, i que s'anomenen en el sentit contrari a les agulles del rellotge començant des de la part positiva de l'eix d'abscisses.



Un conjunt format per l'origen *O*, els dos eixos de coordenades i la unitat de mesura és un **sistema de referència cartesià**.

1.2. Coordenades cartesianes

Una vegada establit el sistema de referència respecte al qual poder situar els punts, per a arribar a un en concret partim de l'origen, "O", recorrem una determinada quantitat cap a la dreta o l'esquerra i després un altre cap amunt o cap avall. Així cada punt queda determinat per un parell de nombres, la mesura dels camins realitzats en ambdues direccions, a les que anomenem **coordenades del punt**.

Exemple:

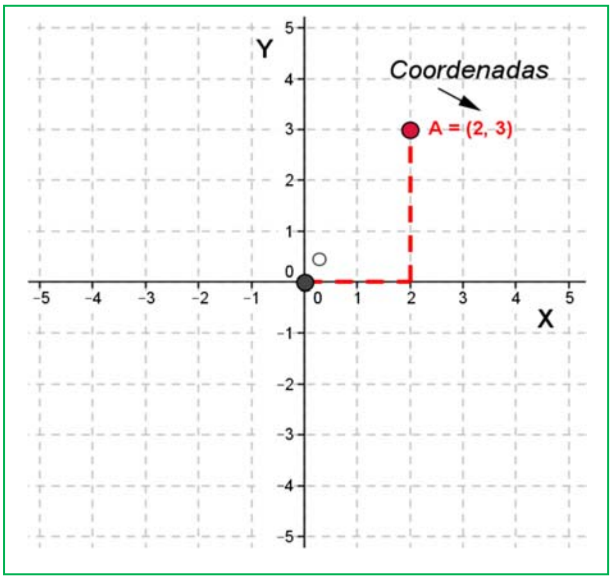
) En un mapa com el de l'exemple anterior, un punt queda determinat per la seua *latitud* (distància a l'Equador, mesurada sobre el meridià que passa pel dit punt) i la *longitud* (distància al Meridià de Greenwich, mesurada sobre el paral·lel que passa pel dit punt), anomenades *coordenades geogràfiques*. Per exemple, la situació de Madrid és (–3,41; 40,24):

  Longitud –3,41 o 3,41 O, és a dir, cal traslladar-se 3,41 cap a l'oest (esquerra) del meridià de Greenwich.
  Latitud +40,24 o 40,24 N, és a dir, cal traslladar-se 40,24 cap al nord (per damunt) de l'Equador.

Les **coordenades d'un** punt *A* són un parell ordenat de nombres reals **(*x*, *y*)**, sent "***x***" la primera coordenada o **abscissa** (ens indica la distància a què el dit punt es troba de l'eix vertical) i "y**"** la segona coordenada o **ordenada** (ens indica la distància a què el dit punt es troba de l'eix horitzontal).

Quan aqueix valor es pren cap a l'esquerra o cap avall ho indiquem amb un nombre **negatiu** i si és cap amunt o a la dreta ho indiquem amb un **positiu**, de la mateixa manera que fèiem en representar els nombres a la recta.

D'aquesta manera, qualsevol punt del pla queda totalment determinat mitjançant les seues coordenades i viceversa, a tota parella ordenada de nombres li correspon un punt del pla.

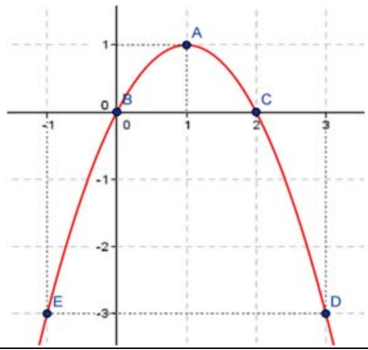


Exemple:

1) Al gràfic anterior, el punt A té coordenades (2, 3).

Activitats resoltes

2) *A la següent gràfica, indica les coordenades dels punts assenyalats:*



***A*(1, 1)**

***B*(0, 0)**

***C*(2, 0)**

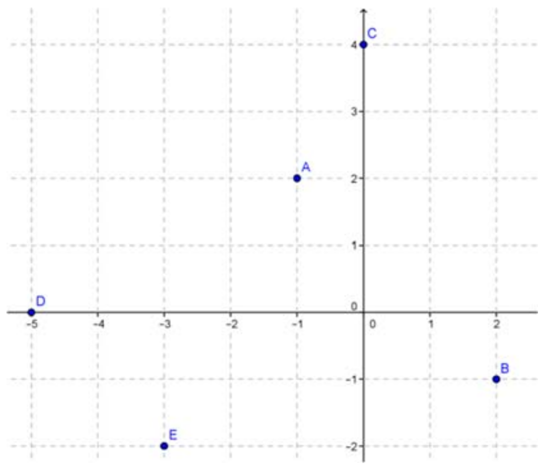
***D*(3, –3)**

***E*(–1, –3)**

3) *Representa gràficament els punts*:

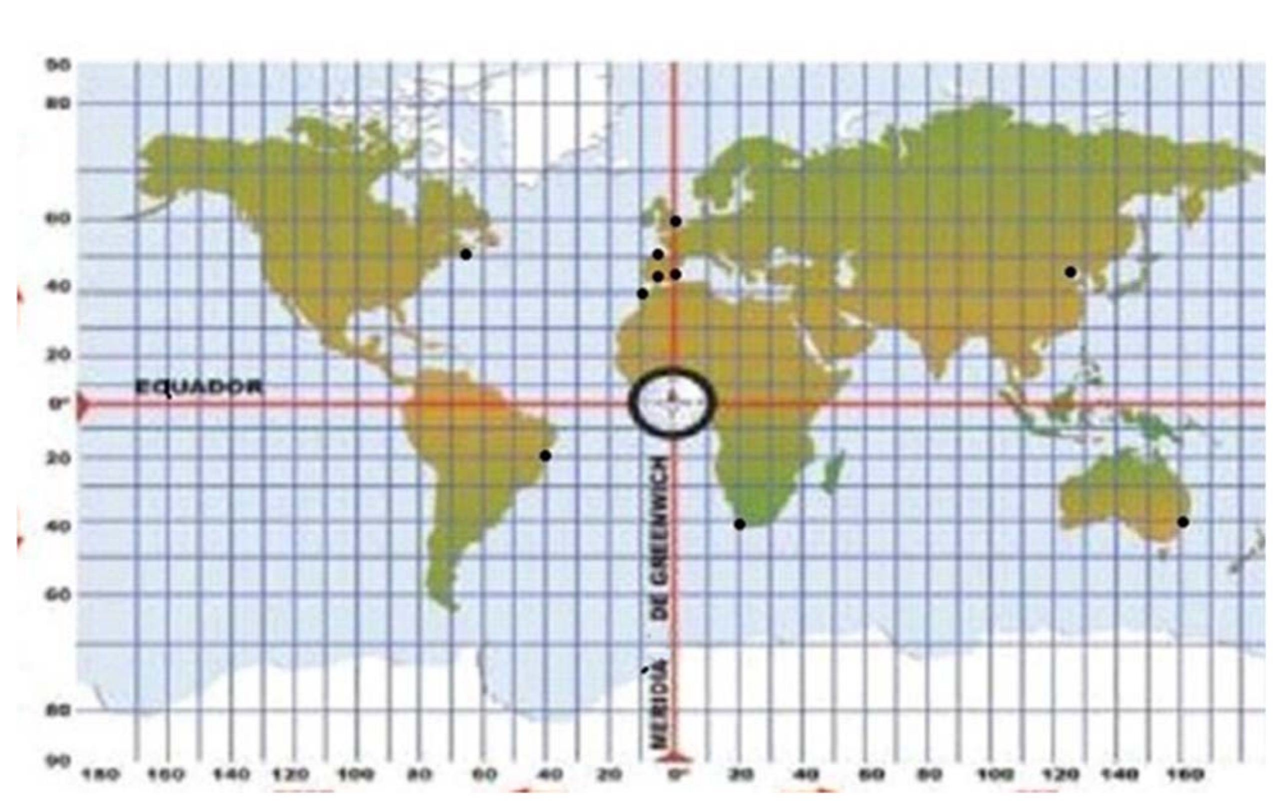
$A(-1,2); B(2,-1); C(0,4);$

$D(-5,0); E(-3,-2)$



Activitats propostes

1 Fixa't al mapa següent, localitza els països o ciutats que es demanen i indica al teu quadern:



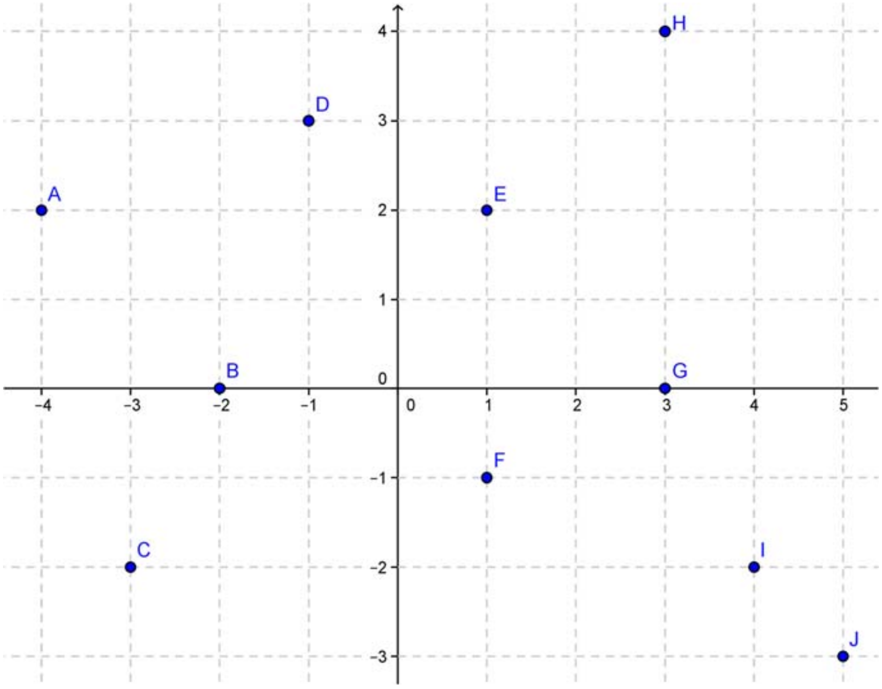
a) Els quadrants on es troben els països següents:

- Mèxic:
- Madagascar:
- Índia:
- Xile:
- Espanya:
- Argentina:
- Austràlia:
- Japó:
- Aràbia Saudita:
- Alemanya:
- EUA:
- El Marroc:

b) Les coordenades (aproximades) de les ciutats següents:

- Ciutat del Cap:
- Nova York:
- Rio de Janeiro:
- Alacant:
- Pequín:
- Rabat:
- Sidney:
- Oviedo:
- Londres:
- Còrdova:

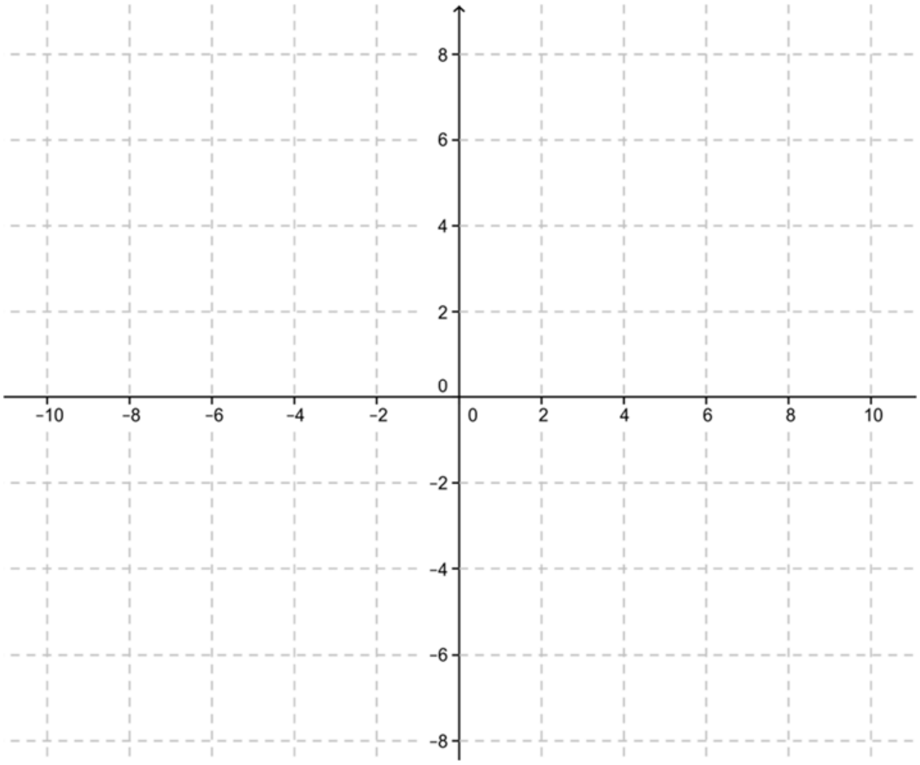
2 Copia al teu quadern i indica les coordenades de tots els punts que estan assenyalats al pla:



3 Representa gràficament al teu quadern els següents punts del pla:

A (0,-2) *B* (-2,0) *C* (4,0) *D* (-6,0) *E* (0,6) *F* (1,7) *G* (7,1) *H* (-4,8) *I* (-1,-4) *J* (-4,-1)

K (5,-3) *L* (9,6) *M* (-2,1) *N* (7,-4) *Ñ* (-3,-3) *O(0,0)* *P(-2,-1)* *Q*(2,1) *R*(2,-1) *S*(-2,1)



2. FUNCIONS

2.1. Concepte intuïtiu de funció

Hi ha multitud de fenòmens en la nostra vida quotidiana en què apareixen relacionades dues magnituds. Per exemple, el preu d'un bitllet en un mitjà de transport i la distància o temps de duració del viatge, el preu d'un quilo de fruita o carn i el nombre de quilos que comprem, la duració d'un trajecte i la velocitat a què anem, el nombre de batecs del cor en una unitat de temps…

Moltes d'aqueixes relacions es regeixen per una llei de proporcionalitat, directa o inversa, però hi ha moltes altres en què la correspondència entre ambdues magnituds és més complexa.

Una **funció és** una relació entre dues magnituds de manera que a un valor qualsevol d'una (**variable independent**) li fem correspondre, com a màxim, un únic valor de l'altra (**variable dependent**).

Aquesta relació funcional es pot establir, moltes vegades, mitjançant una expressió matemàtica o fórmula, la qual cosa ens permetrà treballar de forma còmoda amb ella. Altres vegades ve donada mitjançant una taula on apareixen els valors relacionats entre si. De vegades tenim la relació en forma de gràfica… I també hi ha funcions que no es poden escriure mitjançant una expressió algebraica!

Exemples:

) *Un quilo de tomaques costa* 0,59 €/kg*. La funció que estableix quant hem de pagar en funció de la quantitat de tomaques que ens emportem és y = f(x)* = 0,59 *x.*

En ella, ***f*** és el nom que li posem a la funció i podríem anomenar-la usant altres lletres (les que s'usen més sovint són *"f"*, *"g"* i *"h"*). Entre parèntesis va la variable "***x***" que representa el nombre de quilos que comprem, i és la variable independent ja que nosaltres triem lliurement la quantitat que volem o necessitem. Finalment, la variable "**y**" representa els diners que hem de pagar, y és la variable dependent ja que "depén" de quants quilos ens emportem, és a dir, de "*x*". L'expressió, f *(*x) es llig *"f de x" ,*se sol usar amb molta freqüència per a designar a la variable dependent perquè :

1º) en ella es veu quina és la variable independent i, per tant:

2º) resulta molt còmode escriure quant ens costaria comprar una quantitat concreta, per exemple, 2 kg. S'expressaria *"f* de *2"* i el seu valor és *f*(2) = 0,59·2 *= 1,18* €.

- *Una persona que va passejant sempre a la mateixa velocitat, vol recórrer un carrer recte d'1 km en un temps determinat. La relació entre el temps que tardarà (en segons) i la velocitat que porta (en metres per segon) ve donada per la fórmula* $v(t)=\frac{\mathbf{1000}}{t}$.

  En ella, "***v***" és el nom de la funció velocitat, 1000 són els metres que ha de recórrer i "***t***" el temps que tarda a recórrer el dit espai.

- Tots els nombres decimals tenen la seua part entera i la seua part decimal. Doncs bé, tot nombre real es pot relacionar de forma única amb el nombre *enter immediatament inferior*, anomenat la seua "*part entera*" i representat $E(x)$. El fet de que aquest número siga únic fa que ens trobem davant d'una funció.

Per exemple, la part entera de 8,3 és 8: $E(8'3)=8$; la de -4,2 és -5: $E(-4'2)=-5$ ...
Doncs bé, aquesta funció, a pesar de la seua senzilla descripció mitjançant paraules que ens diuen què hem de fer, no es pot escriure mitjançant una fórmula algebraica.

Activitats proposades

4 De les següents relacions entre dos variables, raona quines són funcionals i quines no:

- Edat – altura de la persona al llarg de la seua vida
- Altura – edat de la persona
- Preu de la gasolina – dia del mes
- Dia del mes – preu de la gasolina
- Un nombre i la seua cinquena part
- Un nombre i el seu quadrat
- Un nombre i la seua arrel quadrada

5 Si hui el canvi € a $ està 1 € = 1,37 $, completa al teu quadern la següent taula d'equivalència entre les dues monedes:

€	2	5	10	27	60
$					

Expressa mitjançant una fórmula la relació que existeix entre ambdues. Es pot expressar de forma única la dita relació? És una funció?
Si realitzes el canvi en una oficina, et cobren una xicoteta comissió fixa per realitzar l'operació de 1,5 €. Com quedaria/en la fórmula/es en aquest cas?

6 El pont Golden Gate permet la comunicació entre els dos costats de la badia de San Francisco. Les seues torres, de 746 peus d'altura, estan separades per una distància de 4200 peus aproximadament. La calçada, que té una amplària de 90 peus i es troba a una altura de 220 peus sobre el nivell de l'aigua, està subjectada a les torres mitjançant dos cables, de 3 peus de diàmetre, que tenen forma de paràbola i que toquen la calçada al centre del pont.

-Realitza un dibuix on queden reflectides les dades més significatives del problema.
-Determina la relació que existeix entre l'altura a què es troba un punt del cable i la distància de la seua projecció vertical al centre del pont.
-Aplicar la dita fórmula per a calcular l'altura d'un punt del cable la vertical de la qual està a 1000 peus del centre del pont.

2.2. Gràfica d'una funció

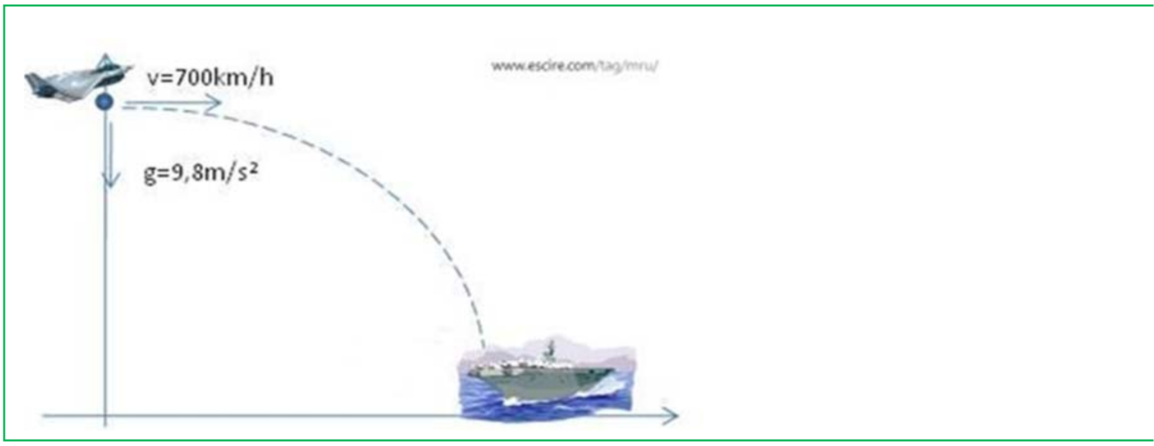
Ja que en tota funció tenim dos valors que es relacionen de forma única, podem dibuixar-los ambdós als eixos cartesians de manera que, si unim tots aqueixos punts, obtenim una corba que ens permet visualitzar la dita funció.

La dita representació té una sèrie de limitacions, moltes d'elles comunes a qualsevol dibuix que podem fer: és aproximada ja que els instruments que s'utilitzen per a fer-ho (regla, compàs, llapis…), per molt precisos que siguen (ordinadors), sempre tenen un marge d'error; també hi ha fallades de tipus visual o dels instruments de mesura; o moltes vegades hem de representar els infinits punts del grafo en un espai finit, la qual cosa és impossible i fa que només podem dibuixar una part del que es pretén, però no tot.

A pesar de tots aquests inconvenients, representar gràficament aquesta sèrie de punts relacionats que conformen la funció, encara que siga de forma aproximada, és important ja que ens fa molt més concret un concepte molt abstracte, en poder visualitzar-lo: "val més una imatge que mil paraules".

Exemple:

- *La trajectòria que ha de seguir un avió per a aterrar en un portaavions es correspon amb la representació de la funció que relaciona la distància recorreguda pel mateix depenent del temps que tarda a recórrer-la:*

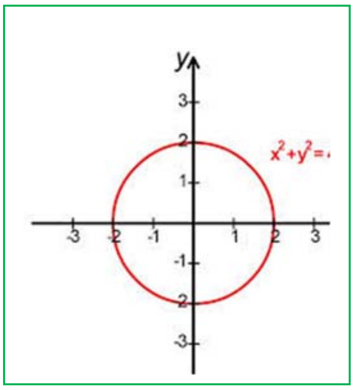


A més, una representació també ens permet descobrir si la mateixa representa a una funció o no, ja que en el dibuix és fàcil interpretar si a un valor de la variable independent li correspon únicament un de la dependent o més de u, propietat fonamental que defineix a les funcions.

Exemple:

) El següent dibuix, que correspon a una circumferència, al valor **0** de la variable independent li corresponen els valors **2** ***i*** –**2** de la dependent. A més, hi ha molts altres valors a què els passa el mateix, per la qual cosa **no** pot ser la representació d'una funció.

La fórmula que correspon a dita gràfica és $x^2+y^2=\boldsymbol{4}$ o, també, $y=\pm\sqrt{\boldsymbol{4}-x^2}$.

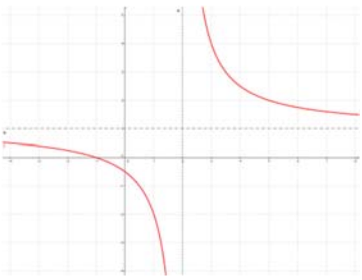


La **gràfica d'una funció** és la representació al pla cartesià de tots els parells ordenats als que el primer valor correspon a un qualsevol de la variable independent i el segon al què s'obté en transformar-lo mitjançant la funció:

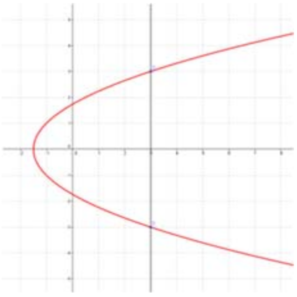
$$\{(x, y) \mid x \in \mathfrak{R}, y = f(x)\}$$

Activitats resoltes

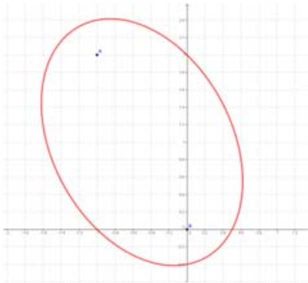
- *Indica quines de les següents gràfiques corresponen a una funció i quines no:*



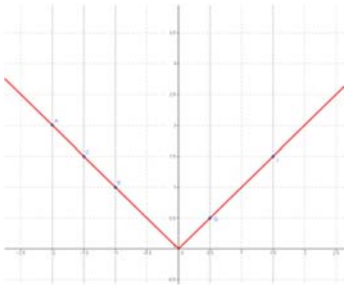
SÍ



NO



NO



SÍ

Quina és la clau o regla per a saber, a partir del dibuix, si aquest correspon a una funció o no?
Si tracem rectes verticals imaginàries i aquestes xoquen amb el dibuix, com a màxim, en un punt, la gràfica correspon a una funció. En qualsevol altre cas, no.

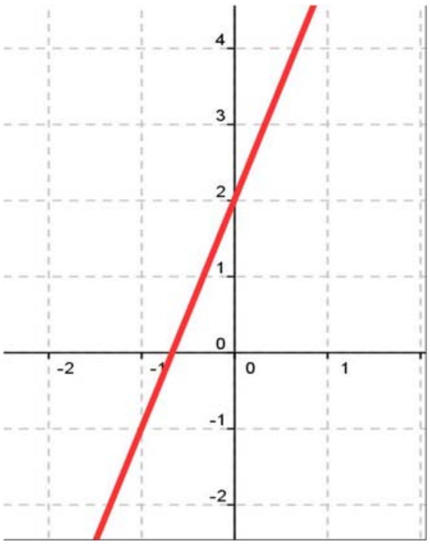
- *Dibuixa al pla cartesià els valors de la següent taula i conjectura sobre quin tipus de figura correspon a la gràfica de la funció:*

GRÀFICA

x	–4	–2	0	1	3
$f(x)$	–10	–4	2	5	11

Observem que els punts, en representar-los, estan alineats. Per tant, el dibuix que correspon a la gràfica de la funció és una RECTA.
En aquest cas, no és massa difícil descobrir que la fórmula que relaciona ambdues variables és:

$$f(x) = 3x + 2$$



➢ *Completa la següent taula a partir de la fórmula de la funció* $f(x) = -x^2 + \mathbf{4}$*, dibuixa els punts als eixos cartesians i intenta unir-los mitjançant una corba:*

GRÀFICA

x	−2	−1	0	1	2
f(*x*)	***0***	***3***	***4***	***3***	***0***

La corba obtinguda rep el nom de **PARÀBOLA** (que és una de les quatre còniques).

Activitats proposades

7 Realitza al teu quadern el dibuix de dues gràfiques, una que corresponga a una funció i l'altra no. Identifica cada u i explica el perquè de la dita correspondència.

8 Realitza al teu quadern una taula amb 10 valors de la funció *e*(*t*) = 5*t* + 20, representa'ls gràficament i indica la figura que determinen. Si la dita funció representa l'espai (en quilòmetres) que recorre una persona que porta caminats 20 km i camina a una velocitat de 5 km/h, en funció del temps que tarda a recórrer-ho (en hores), indica quins serien els valors que no tindria sentit donar a la variable independent i en què es tradueix això a la gràfica.

9 Raona si els valors de la següent taula poden correspondre als d'una funció i per què:

xx	−13	−7	10	−13	24
f(*x*)	−15	0	14	3	0

10 En un full de paper quadriculat ratlla un quadrat de costat un quadradet. Quina és la seua àrea? Ara fes el mateix amb un quadrat de costat 2. Continua prenent quadrats de costats 3, 4, 5… i calcula les seues àrees. Amb els resultats completa una taula de valors i dibuixa la seua gràfica. Té sentit per a valors negatius de la variable? Busca una fórmula per a aquesta funció.

11 Per a aparcar en zona blava (no residents) hi ha unes tarifes. Representa una gràfica de la funció la variable independent de la qual siga el temps i la variable dependent el preu (en euros) que cal pagar.

12 Un fabricant vol construir gots cilíndrics mesuradors de volums, que tinguen de radi de la base 4 cm i d'altura total del got 24 cm. Escriu una fórmula que indique com varia el volum en anar variant l'altura del líquid. Construeix una taula amb els volums corresponents a les altures preses de 3 en 3 cm. Escriu també una fórmula que permeta obtindre l'altura coneixent els volums. A quina altura caldrà col·locar la marca per a tindre un decilitre?

2.3. Exemples de funcions: funció afí i quadràtica

Durant tots els apartats anteriors hem anat analitzant distints exemples de relacions entre dos variables que eren funció i altres que no. Ho hem fet des del punt de vista gràfic, de taules de valors i de fórmules matemàtiques.

En aquesta secció, simplement analitzarem uns quants exemples de funcions que són prou senzilles i que tenen prou aplicacions pràctiques.

Una **funció afí** és aquella funció en què la relació entre les dos variables ve donada per un polinomi de grau menor o igual a un:

$$y = f(x) = mx + n.$$

La seua representació gràfica és sempre una **recta**, el seu **pendent** és el coeficient líder (m) i indica la inclinació de la mateixa (si és positiu la recta serà **creixent** i si és negatiu **decreixent**) i la seua **ordenada a l'origen** (n) és el terme independent, que ens proporciona el punt on la recta talla a l'eix d'ordenades.

Exemple:

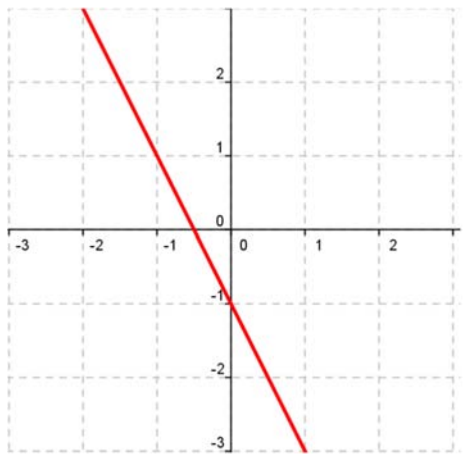
a) $y = -\mathbf{3}x - \mathbf{1}$ (polinomi de primer grau)

x	−2	−1	−1/2	0	1
$f(x)$	3	1	0	**−1**	**−3**
	(−2, 3)	(−1, 1)	(−1/2, 0)	(0, −1)	(1, −3)

Pendent: −**3** ⇒ recta decreixent

Ordenada a l'origen: −**1** ⇒ **(0, −1)** punt de tall de la recta amb l'eix d'ordenades

GRÀFICA



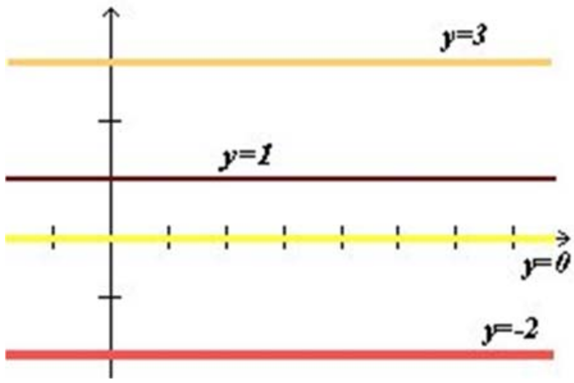
Com a casos particulars de funcions afins tenim:

Funció constant (recta horitzontal): és aquella que sempre pren el mateix valor per a tots els valors de la variable independent (el pendent és nul):

$$y = n$$

Exemple:

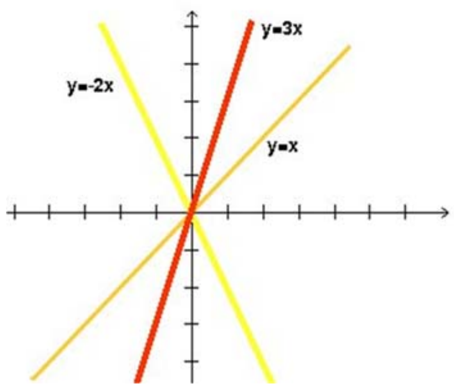
b) Gràfiques de $y = 3$; $y = 1$; $y = 0$; $y = -2$.



Per tant, la recta no té inclinació, és a dir, és paral·lela a l'eix d'abscisses.

Observa que

L'equació de l'eix d'abscisses és $y = 0$.



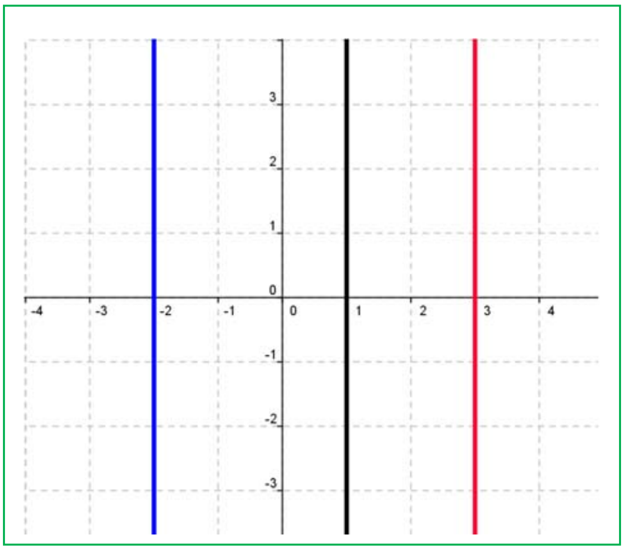
Funció lineal o **de proporcionalitat directa**: és aquella que té ordenada a l'origen igual a **0** (passa per l'origen de coordenades): $y = mx$

Cada valor de "***y***" conserva una mateixa proporció respecte al de "***x***":

$y = \mathbf{3}x$ (*y* és el triple de *x*)

$y = \mathbf{-2}x$ (*y* és l'oposat del doble de *x*)

$y = x$ (**funció identitat**: *y* és igual a *x*)



Observa que:

La gràfica de *x* = *a* és una recta vertical, però no és una funció perquè per al valor de la variable independent "*a*", l'ordenada pren infinits valors.

Exemple:

c) Dibuixa la gràfica de *x* = 3; *x* = –2; *x* = 1.
L'equació de l'eix d'ordenades és x =*0*.

Activitats proposades

13 Escriu tres funcions les gràfiques de les quals siguen tres rectes que passen per l'origen de coordenades i els seus pendents siguen 3, –2, i 1/2 respectivament.

14 Quin angle forma amb l'eix d'abscisses la recta y = *x*? I la recta *y* = –x?

15 Un metre d'una certa tela costa 1,35 €, quant costen 5 metres? I 10 m? I 12,5 m? Quant costen "*x*" metres de tela? Escriu la fórmula d'aquesta situació.

16 Troba l'equació i dibuixa la gràfica de les rectes següents:

i) El seu pendent és 2 i la seua ordenada a l'origen és 3.
) Passa pels punts *A*(1, 3) i *B*(0, 4).
a) La seua ordenada a l'origen és 0 i el seu pendent és 0.
b) Passa pels punts *C*(–1, 3) i *D*(–2, 5).
c) Passa pel punt (*a*, *b*) i té de pendent *m*.

17 Com són entre si dues rectes del mateix pendent i distint ordenada a l'origen?

18 Dibuixa al teu quadern, sense trobar la seua equació, les rectes següents:

i) De pendent 3 i ordenada a l'origen 0.

1. Passa pels punts *A*(2, 3) i *B*(4, 1).
2. El seu pendent és 2 i passa pel punt (4, 5).

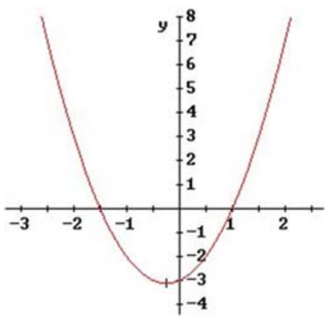
Una **funció quadràtica** és aquella funció en què la relació entre les dues variables ve donada per un polinomi de grau dos:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c.$$

La gràfica d'aquest tipus de funcions s'anomena **paràbola**

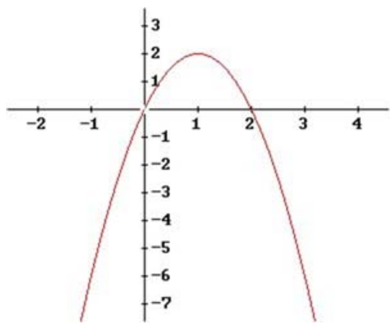
Si el coeficient líder o quadràtic és positiu (***a*>0**), la paràbola està oberta cap a l'eix Y positiu (**convexa**).

$y = 2x^2 + x - 3$



Si el coeficient líder o quadràtic és negatiu (***a*<0**), la paràbola està oberta cap a l'eix Y negatiu (**còncava**).

$y = -2x^2 + 4x$



Els altres coeficients del polinomi afecten la posició que ocupa la paràbola respecte als eixos.

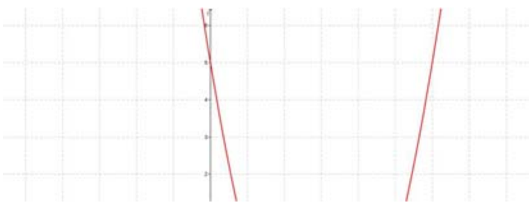
No podem dir que una funció quadràtica és creixent o decreixent, ja que hi ha un tros (**branca**) que creix i un altre que decreix. El punt on es produeix aqueix canvi s'anomena **vèrtex** i és el major (*màxim*) o menor (*mínim*) valor que pren la funció. Podem dir que aquest punt és el més significatiu en una paràbola, i per això és important saber calcular-lo. Per a això, li donem a la variable independent el valor $x = \frac{-b}{2a}$, i el substituïm a la funció per a calcular "***y***". El dit valor és fàcil de recordar ja que és el mateix que apareix a la fórmula de les equacions de 2n grau llevant-li l'arrel quadrada, i s'obté precisament pel caràcter de màxim o mínim que té el vèrtex.

Exemple:

d) ***y=x²-6x+5***

x	3	1	5	0	6
f(x)	–4	0	0	5	5
	(3, –4)	(1, 0)	(5, 0)	(0, 5)	(6, 5)

GRÀFICA



Coeficient líder: **1** > 0 $\Rightarrow$ paràbola convexa

Vèrtex: $x = \left[\frac{-b}{2a}\right]_{\substack{a=1\\b=-6}} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow$ **(3,–4)**

Ordenada a l'origen: **5** $\Rightarrow$ **(0, 5)** *punt de tall amb l'eix d'ordenades.*

Punts d'intersecció amb l'eix d'abscisses: **(1, 0)** i **(5, 0)**

Activitats proposades

19 Copia al teu quadern i completa:

$y = 3x + 3 \rightarrow$ *Funció* ____________________ *perquè* ____

X	*y*

$\rightarrow$
$\rightarrow$
$\rightarrow$
$\rightarrow$
$\rightarrow$

Solució

Gràfica

Operacions:

$y = \frac{-x}{2} \rightarrow$ *Funció* ____________________ *perquè* ____

X	*y*

$\rightarrow$
$\rightarrow$

Solució

Gràfica

→
→
→

Operacions:

$y=-3x^2+6x-4$ → Funció ____________________ perquè ____

x	y

Solució

→
→
→
→
→

Gràfica

Operacions:

$y=2x^2-8$ → Funció ____________________ perquè ____

x	y

Solució

→
→
→

Gràfica

Autor: Paco Moya
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

→

→

Operacions:

20 Dibuixa la gràfica de la funció $y = x^2$.

i) Per a això fes una taula de valors, prenent valors d'abscissa positiva.

) Prenent valors d'abscissa negativa.

a) Què li ocorre a la gràfica per a valors grans de "x"? I per a valors negatius grans en valor absolut?

b) La corba és simètrica? Indica el seu eix de simetria.

c) Té un mínim? Quin és? Coordenades del vèrtex.

d) Retalla una plantilla d'aquesta paràbola marcant el seu vèrtex i l'eix de simetria, que usarem en altres problemes.

21 Prenent la mateixa unitat que al problema anterior dibuixa al teu quadern, en un mateix sistema de referència, les gràfiques de les paràboles: $y = x^2 + 2$; $y = x^2 - 3$; $y = -x^2$; $y = -x^2 + 2$; $y = x^2 - 1$. Observa que pots utilitzar la plantilla de l'exercici anterior. Fes un resum indicant el que has obtingut. Hauràs observat que en tots els casos pots utilitzar la plantilla traslladant-la en sentit vertical, cap amunt en el cas de $y = x^2 + 2$; i cap avall en el cas de $y = x^2 - 3$. La paràbola $y = -x^2$; és simètrica (cap avall) de $y= x^2$. En general, si traslladem q unitats en la direcció de l'eix d'ordenades tenim la paràbola $y= x^2+q$.

22 Prenent la mateixa unitat que al problema anterior dibuixa al teu quadern, en un mateix sistema de referència, les gràfiques de les paràboles: $y = (x + 2)^2$; $y = (x - 3)^2$; $y = (x + 1)^2$; $y = (x - 1)^2$. Observa que pots utilitzar la plantilla de l'exercici anterior. Fes un resum indicant el que has obtingut. Hauràs observat que en tots els casos pots utilitzar la plantilla traslladant-la en sentit horitzontal, cap a la dreta en el cas de $y = (x - 3)^2$; i cap a l'esquerra en el cas de $y = (x + 2)^2$. Pel que, en general, si traslladem p unitats en la direcció de l'eix d'abscisses obtenim la paràbola $y = (x - p)^2$.

23 Escriu l'equació d'una paràbola de la mateixa manera que $y = x^2$, però traslladada 5 unitats en sentit horitzontal a la dreta i 3 unitats en sentit vertical cap amunt. Quines coordenades té el seu vèrtex?

24 Dibuixa al teu quadern, en un mateix sistema de referència, les gràfiques de les paràboles:

$y = x^2$; $y = 2x^2$; $y = 1/3x^2$; $y = -x^2$; $y = -1/2x^2$; $y = -3x^2$.

Observa que ara ja no et serveix la plantilla emprada. Ara les paràboles s'estreteixen o s'eixamplen.

25 Completa aquest resum. La gràfica de $y = ax^2$ s'obté de la de $y = x^2$:

i) Si $a > 1$ doncs ??

- Si $0 < a < 1$ doncs ??
- Si $a < -1$ doncs ??
- Si $-1 < a < 0$ doncs ??
- Tornem a usar la plantilla.

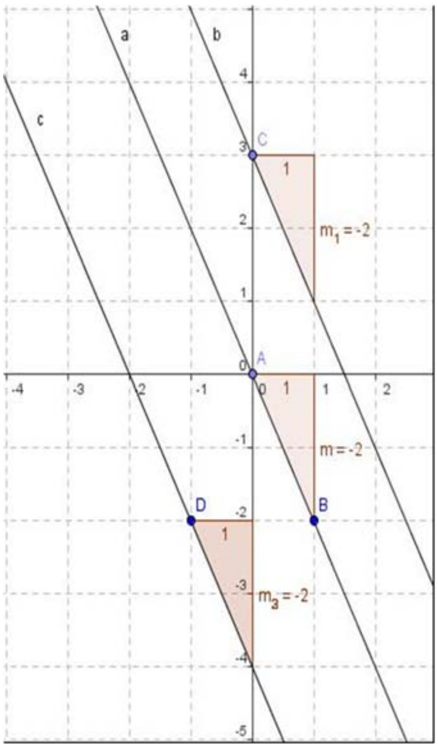
i) Trasllada el vèrtex de la paràbola $y = x^2$ al punt (4, 2). Escriu la seua equació i l'equació del seu eix de simetria. Dibuixa la seua gràfica.

a) Trasllada el vèrtex de la paràbola $y = x^2$ al punt (–3, –1). Escriu la seua equació i l'equació del seu eix de simetria. Dibuixa la seua gràfica.

2.4. Gràfiques de funcions amb Geogebra. Gràfiques de funcions lineals i afins

En aquesta activitat es va a utilitzar el programa ***Geogebra*** per a representar funcions lineals i afins, les gràfiques d'aquestes funcions són rectes. Primer es representen rectes amb el mateix pendent per a observar la relació que existeix entre elles i determinar la propietat que les caracteritza. També es representen rectes que tenen mateixa ordenada a l'origen per a observar la relació que existeix entre elles i determinar una característica comuna.

Activitats resoltes



- Utilitza Geogebra per a estudiar rectes amb el mateix pendent.
- Obri el programa Geogebra i en **Visualitza** activa **Quadrícula** perquè siga més fàcil definir punts.

i) Amb la ferramenta **Nou Punt** defineix un punt a l'origen de coordenades. Observa que en la **Finestra Algebraica** apareix el punt, que el sistema denomina *A*, com a objecte lliure i coordenades (0, 0).

ii) Defineix un **Nou Punt** de coordenades (1, –2), el programa l'anomena *B* i en la **Finestra Algebraica** apareix com a objecte lliure amb les seues coordenades: B = (1, –2).

iii) Utilitza la ferramenta **Recta que passa per 2 punts** per a dibuixar la recta que passa pels punts *A* i *B*. Observa que el programa la denomina *a* i en la **Finestra Algebraica** apareix com a objecte dependent i la seua equació a: $2x + y = 0$. Aquesta equació es pot expressar per: $y = -2x$.

iv) Defineix un **Nou Punt** de coordenades (0, 3), el programa l'anomena *C* i a la **Finestra Algebraica** apareix com a objecte lliure amb les seues coordenades: $C = (0, 3)$.

v) Amb la ferramenta **Recta Paral·lela**, dibuixa una recta paral·lela a la recta a què passe per *C*. Observa que el programa la denomina *b* i en la **Finestra Algebraica** apareix com a objecte dependent i la seua equació a: $2x + y = 3$. Aquesta equació es pot expressar per: $y = -2x + 3$.

vi) Defineix un **Nou Punt** de coordenades (–1, –2), el programa l'anomena *D* i a la **Finestra Algebraica** apareix com a objecte lliure amb les seues coordenades: D=(-1, –2).

vii) Amb la ferramenta **Recta Paral·lela**, dibuixa una recta paral·lela a la recta a què passe per *D*. Observa que el programa la denomina *c* i a la **Finestra Algebraica** apareix com a objecte dependent i la seua equació a: $2x + y = -4$. Aquesta equació es pot expressar per: $y = -2x - 4$.

viii) Utilitza la ferramenta **Pendent** per a calcular els pendents de les rectes *a*, *b* i *c*. Observa que en calcular el pendent de la recta *a* apareix a la gràfica i a la **Finestra Algebraica** com a objecte dependent $m = -2$. Anàlogament en calcular el pendent de la recta *b*, s'obté $m_1 = -2$ i en calcular el pendent de la recta *c*, es té $m_2 = -2$.

- Com són els pendents de les rectes paral·leles? En funció dels resultats anteriors realitza una conjectura i dibuixa altres rectes paral·leles a la recta *a* per a comprovar-la.

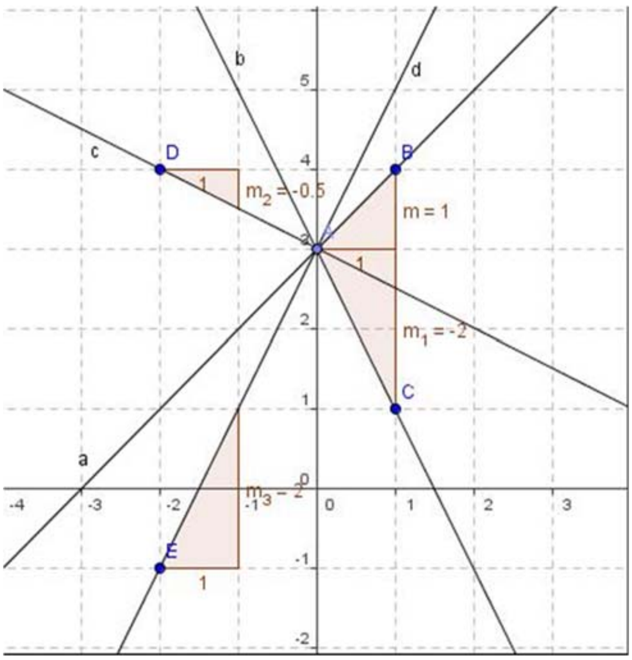
Observa que l'equació de totes les rectes paral·leles a la recta *a* són de la forma:

$y = -2x + n$, amb *n* variable.

Alguna de les rectes que has dibuixat és la gràfica d'una funció lineal?

Rectes amb la mateixa ordenada a l'origen

- *Utilitza Geogebra per a estudiar rectes amb igual ordenada a l'origen.*



ix) Obri una **Nova Finestra** que és una opció del menú **Arxiu**.

x) Amb la ferramenta **Nou Punt** defineix un punt de coordenades (0, 3). Observa que a la **Finestra Algebraica** apareix el punt, que el sistema denomina *A*, com a objecte lliure i apareixen les seues coordenades $A = (0, 3)$.

xi) Defineix un **Nou Punt** *B* de coordenades (1, 4) i amb la ferramenta **Recta que passa per 2 punts** dibuixa la recta que passa per *A i B*, el programa la denomina *a* i en la **Finestra Algebraica** apareix la seua equació, *a*: $-x + y = 3$ equivalent a $y = x + 3$.

xii) Defineix un **Nou Punt** *C* de coordenades (1, 1) i amb la ferramenta **Recta que passa per 2 punts** dibuixa la recta que passa per *A i C*, el programa la denomina *b* i a la finestra algebraica apareix la seua equació, *b*: $2x + y = 3$ equivalent a $y = -2x + 3$

xiii) Amb un procés semblant dibuixa la recta *c* que passa per *A i D*, amb $D = (-2, 4)$ que té per equació *c*: *x*+ 2*y* = 6. Aquesta equació es pot expressar per: $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

xiv) Dibuixa també la recta *d* que passa per *A* i *E*, amb *E* = (–2, –1), l'equació de la recta *d* que apareix és:

d: –4*x* +2*y* = 6, equivalent a *y* = 2*x* + 3.

xv) Utilitza la ferramenta **Pendent** per a calcular els pendents de les quatre rectes que has dibuixat.

) Observa que les quatre rectes que has dibuixat passen pel punt *A* = (0, 3), les seues equacions amb la variable *i* aïllada són:

a: *y* = *x* +3 *b*: *y* = -2*x* +3 *c*: $y = -\frac{1}{2}x + 3$ *d*: *y* = 2*x* + 3.

- Què tenen en comú les equacions de les rectes que passen pel punt *A* (0, 3)? En funció dels resultats anteriors realitza una conjectura i comprova-la dibuixant altres rectes que passen pel punt *A*.

Observa que l'equació de totes les rectes que passen pel punt *A*(0, 3) són de la forma:

y = mx + 3, sent *m* el pendent de la recta.

En l'equació de la recta y = *mx + n*, el paràmetre *n* es denomina ordenada a l'origen.

- Quin és el valor de l'ordenada a l'origen de les quatre rectes que has dibuixat?
- Observa les equacions de les quatre rectes que has dibuixat, dos d'elles tenen pendent positiva *a* i *d i* les altres dos, *b* i *c* tenen pendent negativa. Relaciona el signe del pendent de la recta amb el creixement o decreixement de la funció que representen.

Activitats proposades

26 Calcula dos punts de les rectes d'equacions: *y* = 2*x* + 2 e y = $-\frac{x}{2}$+ 2, per a dibuixar-les amb Geogebra. Indica dues propietats comunes d'ambdues gràfiques.

27 Representa, també, les rectes d'equacions: *y* = -3*x* + 1 i y = $\frac{x}{3}$- 3.

28 Quina condició han de verificar els pendents de dues rectes perquè siguen perpendiculars?

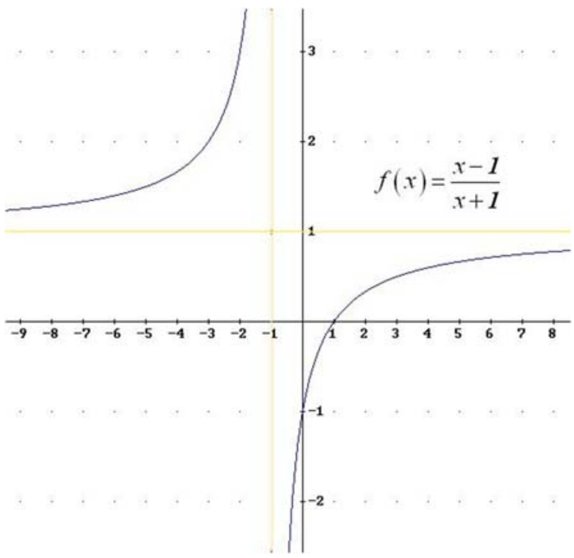
3. CARACTERÍSTIQUES D'UNA FUNCIÓ

3.1. Continuïtat

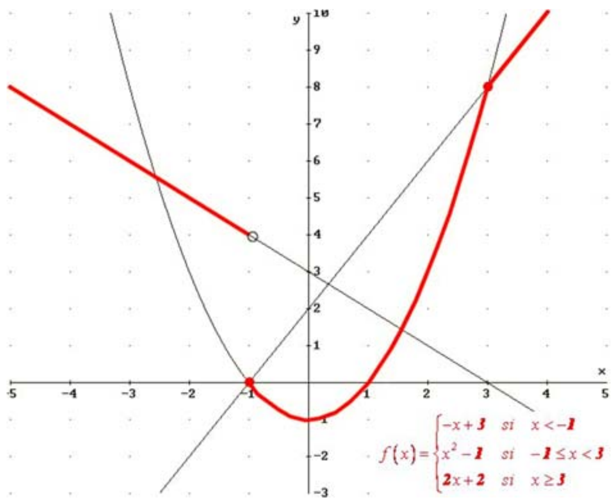
El concepte de continuïtat d'una funció és molt intuïtiu (en la majoria de les funcions) ja que es correspon amb que la gràfica es puga dibuixar sense alçar el llapis del paper. Quan açò no ocorre, es produeixen "salts" en determinats punts que reben el nom de discontinuïtats.

Exemples:

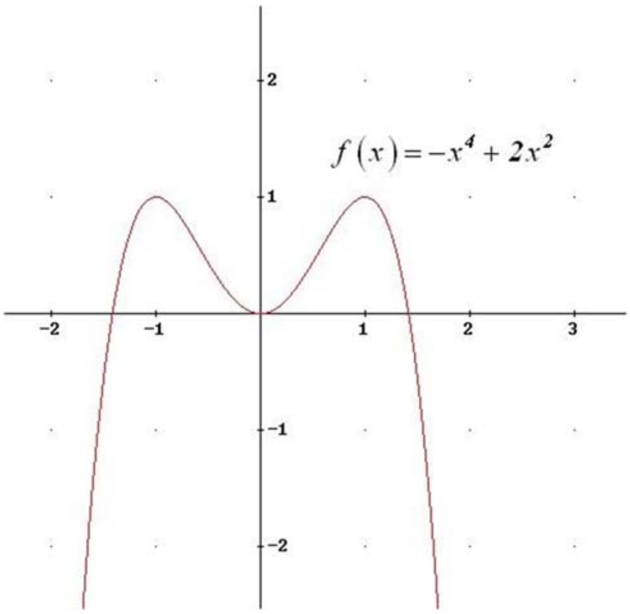
- *Quines funcions són contínues segons el seu dibuix i quines no? Indica en aquestes últimes el/els valor/s de la variable independent on es produeix la discontinuïtat:*



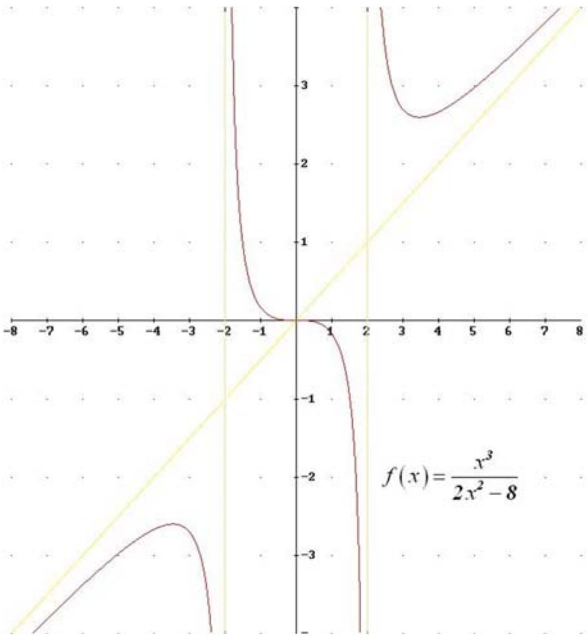
NO (en x = –1 té un salt infinit)



NO (en x = –1 té un salt finit de 4 unitats)



SÍ (contínua per a qualsevol valor de x)



NO (en x = –2 i x = 2 té salts infinits)

3.2. Monotonia: creixement i decreixement

Una funció és **creixent** en un interval quan en augmentar el valor de la variable independent augmenta també el de la dependent.

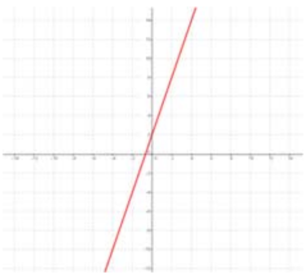
Una funció és **decreixent** en un interval si en augmentar el valor de la variable independent disminueix el de la dependent.

Una funció és **monòtona** en un interval quan és creixent o decreixent en el dit interval.

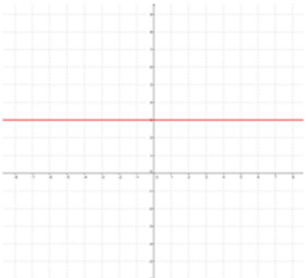
Una funció és **constant** en un interval quan prenga el valor que prenga la variable independent, la dependent pren sempre el mateix valor.

Com indiquen les definicions, la monotonia o no d'una funció es dóna en un interval. Per tant, una funció pot ser creixent per a una sèrie de valors, per a altres ser decreixent o constant, després pot tornar a ser creixent o decreixent o constant…

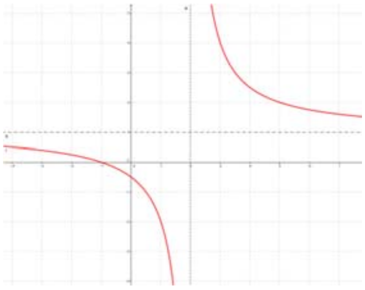
Exemple:



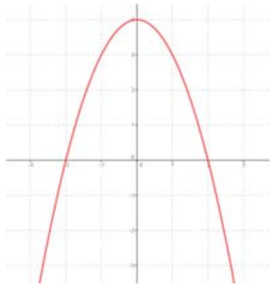
CREIXENT sempre



CONSTANT sempre



DECREIXENT fins a x = 2
DECREIXENT des de x = 2



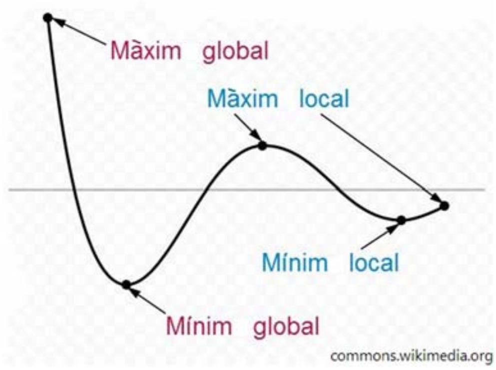
CREIXENT fins a x = 0
DECREIXENT des de x = 0

3.3. Extrems: màxims i mínims

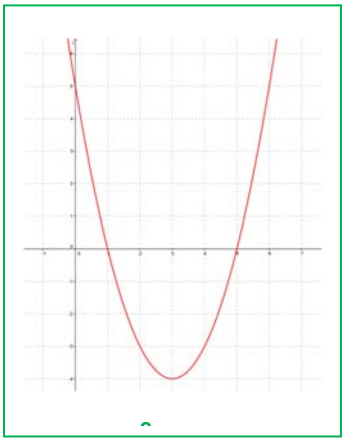
Una funció presenta un **màxim relatiu** (o màxim local) en un punt quan el valor de la funció en el dit punt és major que qualsevol dels valors que estan al seu voltant (en el seu *entorn*). Si, a més, el valor és major que en qualsevol altre punt de la funció, es diu que la funció aconsegueix un **màxim absolut** (o màxim global) en ell.

Una funció presenta un **mínim relatiu** (o mínim local) en un punt quan el valor de la funció en el dit punt és menor que en qualsevol dels valors que estan al seu voltant (en el seu *entorn*). Si, a més, el valor és menor que en qualsevol altre punt de la funció, es diu que la funció aconsegueix un **mínim absolut** (o global) en ell.

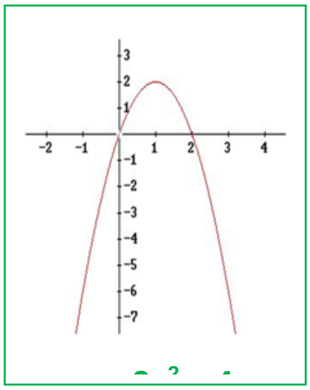
Si una funció presenta un màxim o un mínim en un punt, es diu que té un **extrem** en el dit punt, que podrà ser relatiu o absolut.



Exemples

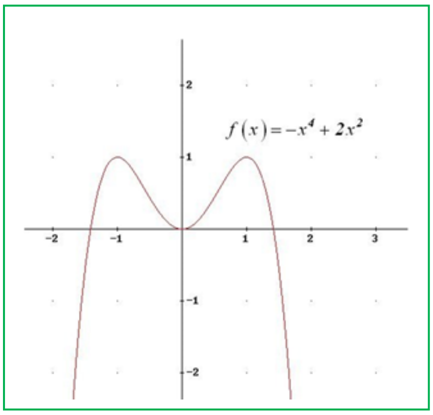


e) La paràbola $y = x^2 - 6x + 5$ té un mínim absolut al seu vèrtex (3, –4). No té màxims, ni relatius ni absolut. Abans del vèrtex és decreixent i després és creixent.



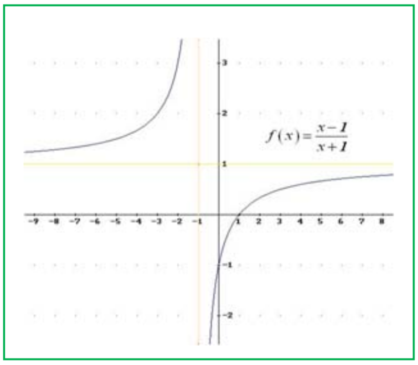
f) La paràbola $y = -2x^2 - 4x$ té un màxim absolut al seu vèrtex (1, 2). No té mínims, ni relatius ni absolut. Abans del vèrtex, per a $x< 1$, la funció és creixent, i després, per a $x> 1$, la funció és decreixent.

Totes les paràboles tenen un màxim o un mínim absolut al seu vèrtex.

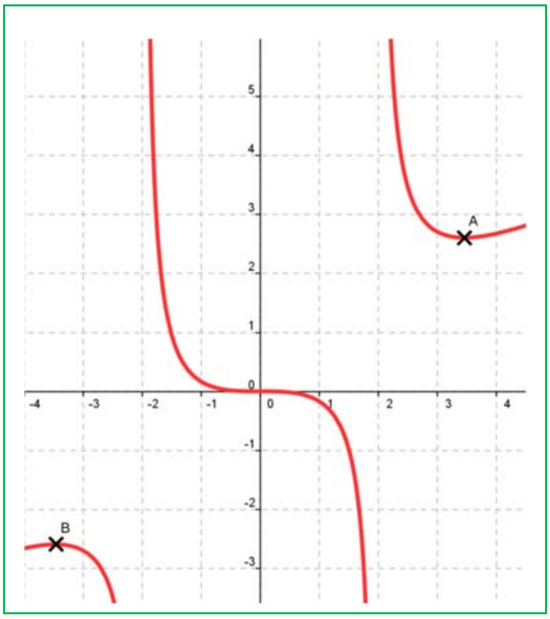


g) La funció $y = -x^4 + 2x^2$ té un mínim absolut a l'origen (0, 0) i dos màxims en (1, 1) i en (–1, 1). Per a $x < -1$ és una funció creixent, per a $-1 < x < 0$, és una funció decreixent, per a $0 < x < 1$ és creixent, i per a $x > 1$ és decreixent.

Observa, en els **màxims** sempre la funció passa de ser **creixent** a ser **decreixent**, i als **mínims** de ser **decreixent** a ser **creixent**.



h) La funció $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ no té ni màxims ni mínims (ni relatius ni absoluts). És una funció sempre creixent.



i) La gràfica de la funció $f(x) = \frac{x^3}{2x^2-8}$ no té màxim ni mínim absolut, però té un mínim relatiu cap a x=3, A(3'46, 2'6), i un màxim relatiu cap a x = –3, B(–3'46, –2'6). Observa que el valor del mínim relatiu, 2'6, és major que la del màxim relatiu, –2'6. Però en valors pròxims al mínim si és el menor valor, per aquest motiu es denominen "*relatiu*", "*local*". No són els valors majors o menors que aconsegueix la funció, però si únicament mirem en un entorn del punt si són valors màxims o mínims.

3.4. Simetria

Una **funció parell** és aquella en què s'obté el mateix valor en substituir un nombre o el seu oposat:

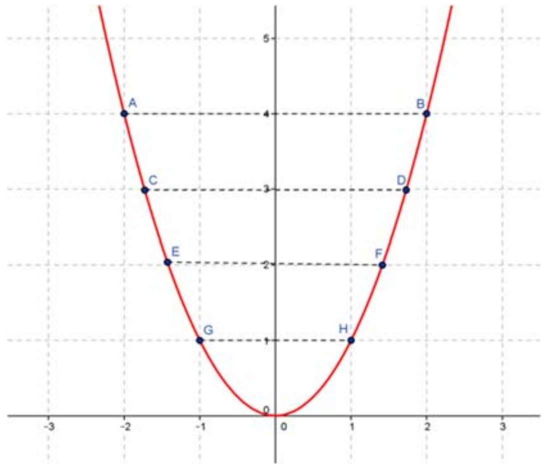
$$f(-x) = f(x)$$

Aquesta propietat es tradueix en que la funció és **simètrica** respecte a **l'eix d'ordenades**, és a dir, si dobleguem el paper pel dit eix, la gràfica de la funció coincideix en ambdós costats.

Exemple:

- La funció quadràtica $f(x) = x^2$ és parell:

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

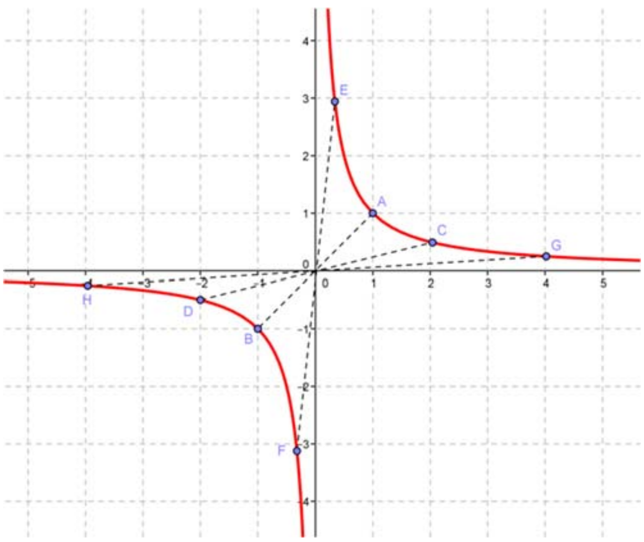


Una **funció imparella** és aquella en què s'obté el valor contrari en substituir un nombre o el seu oposat:

$$f(-x) = -f(x)$$

Aquesta propietat es tradueix en que la funció és **simètrica** respecte a **l'origen** de coordenades, és a dir, si tracem un segment que part de qualsevol punt de la gràfica i passa per l'origen de coordenades, en prolongar-ho cap a l'altre costat trobarem un altre punt de la gràfica a la mateixa distància.

Exemple:



- La **funció de proporcionalitat inversa** $f(x) = \frac{1}{x}$ és imparella perquè:

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)} = \frac{-1}{x} = -f(x)$$

3.5. Periodicitat

Una **funció periòdica** és aquella en què les imatges de la funció es repeteixen sempre que se li afig a la variable independent una quantitat fixa, anomenada període.

Exemple:

- Un exemple de funció periòdica és el següent, que correspon a un electrocardiograma:

S'observa clarament que la gràfica es repeteix a intervals iguals, ja que els batecs del cor són rítmics.

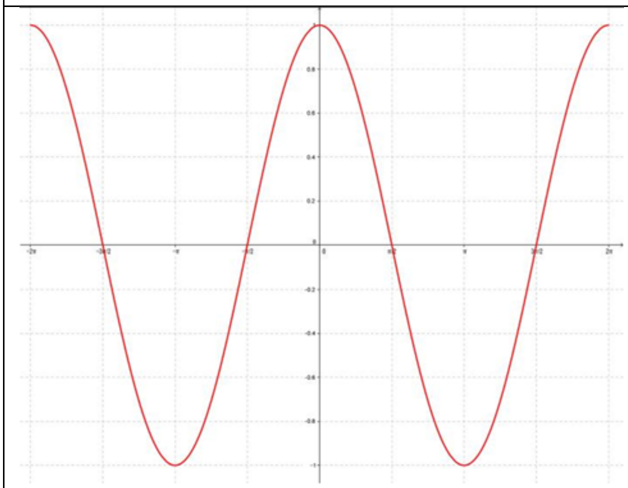
Activitats resoltes

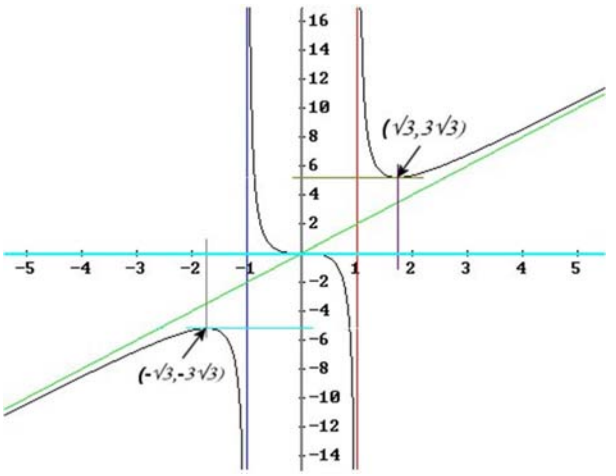
- *Què significaria, a la gràfica anterior, que els intervals de repetició no foren iguals?*
  Si no tenim un període fix, voldria dir que el cor no està funcionant de forma rítmica i, per tant, diríem que s'ha produït una "arítmia".
- *Com influiria a la gràfica anterior el que el període siga més o menys gran? Quin significat tindria?*
  Si el període és més gran, és a dir, els intervals de repetició es troben més distanciats, tindríem un ritme de batec més lent (menys pulsacions per minut), el que es coneix com "bradicàrdia".

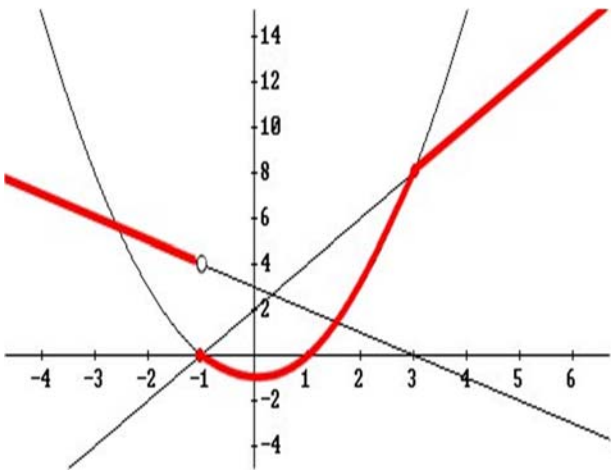
  Si el període és menor, passaria just tot al contrari, açò és, el cor estaria bategant més ràpid del normal (més pulsacions per minut) i tindríem una "taquicàrdia".

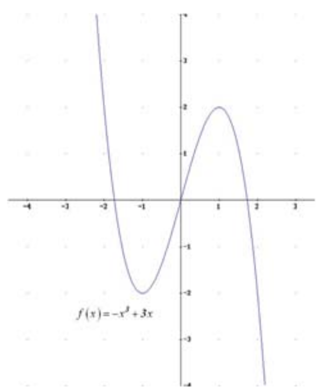
Activitats proposades

- Copia les següents taules al teu quadern i assenyala totes les característiques que pugues de les funcions representades mitjançant les seues gràfiques:

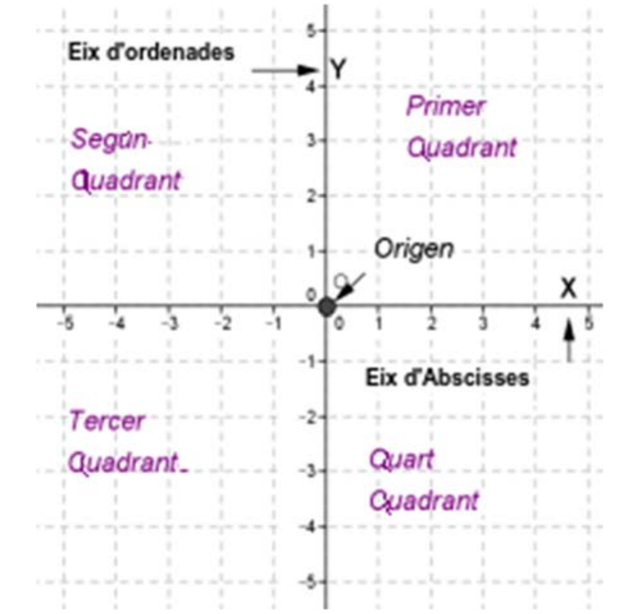
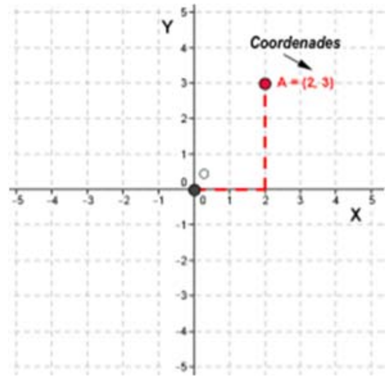
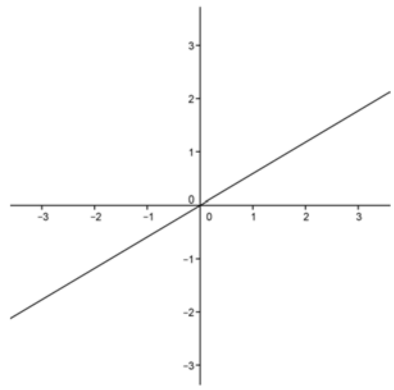
GRÀFICA 1	CARACTERÍSTIQUES	
	Valors variable independent:	
	Valors variable dependent:	
	Simetria	Parell:
		Imparell:
	Punt tall eix ordenades:	
	Punt/s tall eix abscisses:	
	Continuïtat:	
	Monotonia	Creixent:
		Decreixent:
	Extrems	Màxims:
		Mínims:
	Periòdica:	

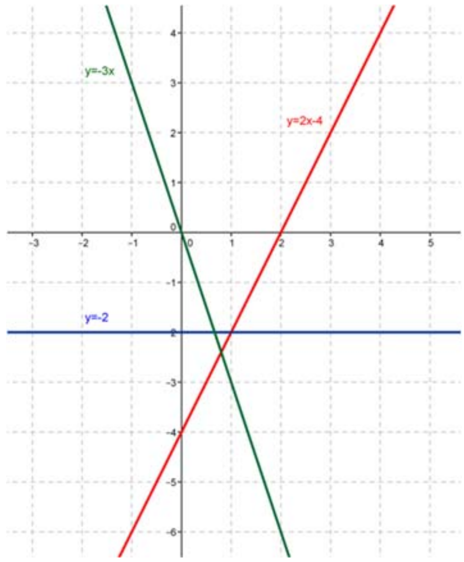
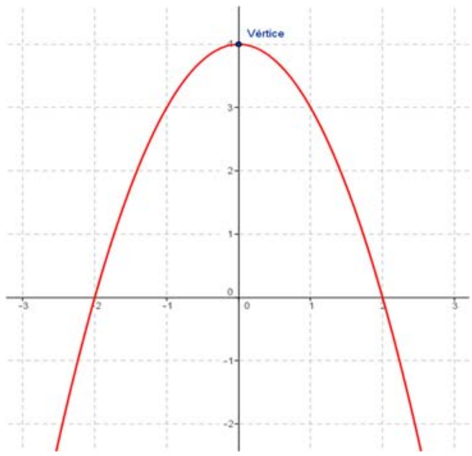
<table>
<tr><th>GRÀFICA 2</th><th colspan="2">CARACTERÍSTIQUES</th></tr>
<tr><td rowspan="14">
</td><td colspan="2">Valors variable independent:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Valors variable dependent:</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Simetria</td><td>Parell:</td></tr>
<tr><td>Imparell:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Punt tall eix ordenades:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Punt/s tall eix abscisses:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Continuïtat:</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Monotonia</td><td>Creixent:</td></tr>
<tr><td>Decreixent:</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Extrems</td><td>Màxims:</td></tr>
<tr><td>Mínims:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Periòdica:</td></tr>
</table>

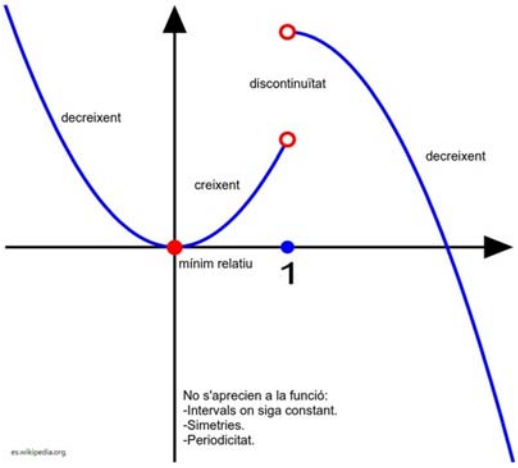
<table>
<tr><th>GRÀFICA 3</th><th colspan="2">CARACTERÍSTIQUES</th></tr>
<tr><td rowspan="14"></td><td colspan="2">Valors variable independent:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Valors variable dependent:</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Simetria</td><td>Parell:</td></tr>
<tr><td>Imparell:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Punt tall eix ordenades:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Punt/s tall eix abscisses:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Continuïtat:</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Monotonia</td><td>Creixent:</td></tr>
<tr><td>Decreixent:</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Extrems</td><td>Màxims:</td></tr>
<tr><td>Mínims:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Periòdica:</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>GRÀFICA 4</th><th colspan="2">CARACTERÍSTIQUES</th></tr>
<tr><td rowspan="14">
</td><td colspan="2">Valors variable independent:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Valors variable dependent:</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Simetria</td><td>Parell:</td></tr>
<tr><td>Imparell:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Punt tall eix ordenades:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Punt/s tall eix abscisses:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Continuïtat:</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Monotonia</td><td>Creixent:</td></tr>
<tr><td>Decreixent:</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Extrems</td><td>Màxims:</td></tr>
<tr><td>Mínims:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Periòdica:</td></tr>
</table>

RESUM

CONCEPTES		*Exemples*
Eixos cartesians i coordenades d'un punt en el pla		
Funció	Una **funció** és una relació entre dues magnituds de manera que a un valor qualsevol d'una (**variable independent**) li fem correspondre, com a màxim, un únic valor de l'altra (**variable dependent**).	$y = f(x) = \mathbf{0{,}59} \cdot x$ $f(2) = \mathbf{0{,}59} \cdot \mathbf{2} = \mathbf{1{,}18}$ $f(5) = \mathbf{0{,}59} \cdot \mathbf{5} = \mathbf{2{,}95}$
Gràfica d'una funció	La **gràfica d'una funció** és la representació al pla cartesià de tots els parells ordenats als que el primer valor correspon a un qualsevol de la variable independent i el segon al què s'obté en transformar-lo mitjançant la funció: $\{(x, y) \mid x \in \Re, y = f(x)\}$	*y* = *f*(*x*) = 0,59*x* {(2, 1'18), (5, 2'95),...}  *Gràfica:*

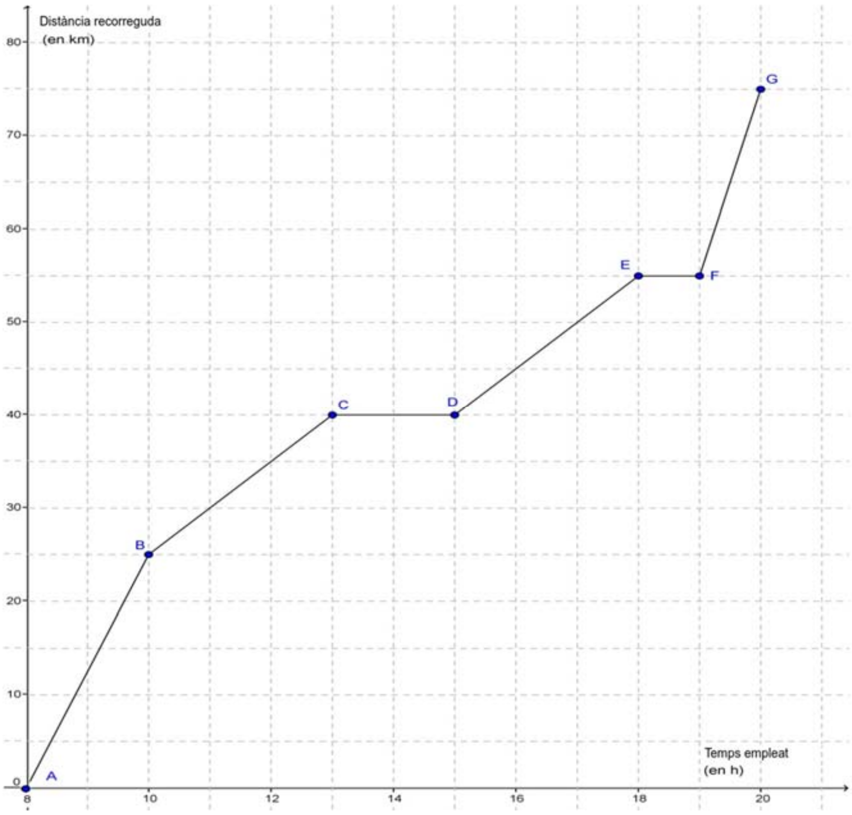
CONCEPTES		*Exemples*
Funció afí, funció lineal i funció constant	Una **funció afí** és aquella funció en què la relació entre les dos variables ve donada per un polinomi de grau menor o igual a un: $y=f(x)= mx + n$. La representació gràfica és una recta. *"m" rep* el nom de **pendent** i *"n"* **ordenada a l'origen.** Una **funció lineal** o **de proporcionalitat directa** és una funció afí amb ordenada a l'origen nul·la: $y = mx$ (passa per l'origen). Una **funció constant** és una funció afí amb pendent nul·la: $y = n$ (sempre pren el mateix valor i la seua gràfica és una recta horitzontal).	
Funció quadràtica	Una funció quadràtica és aquella funció en què la relació entre les dos variables ve donada per un polinomi de grau dos: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$. La gràfica d'aquest tipus de funcions s'anomena paràbola. El punt més significatiu de la paràbola és el **vèrtex** i es calcula donant-li a la variable independent el valor $x = -b/2a$. Si el coeficient líder és positiu, el vèrtex és un mínim i, si és negatiu, un màxim.	

Continuïtat **Monotonia** **Extrems** **Simetria** **Periodicitat**	Una funció pot ser contínua en un interval si la seua gràfica no pateix "trencaments" (anomenades **discontinuïtats**), **creixent** (**decreixent**) si el seu valor augmenta (disminueix) quan ho fa la variable independent, **constant** quan sempre pren el mateix valor, **parell** si la imatge de la variable independent coincideix amb el del seu oposat, **imparell** quan el valor de la funció per a l'oposat de la variable independent també és l'oposat i **periòdica** si les imatges dels valors obtinguts en sumar una quantitat fixa (**període**) a la variable independent coincideixen.	

EXERCICIS I PROBLEMES

Sistemes de representació

1. Situa en un sistema de referència cartesià els punts següents, triant una escala als eixos que permeta dibuixar-los tots de forma còmoda: *A*(5,4); *B*(0,2); *C*(–2,0); *D*(3,–1,3); *E*(1'5,0); *F*(0,0); *G*(–1,–2/3). Assenyala en cada cas a quin quadrant pertany el punt o, si és el cas, en quin eix està.
2. Escriu les coordenades de tres punts situats al tercer quadrant.
3. Situa en un sistema de referència cartesià els punts següents:
4. A(0, 4); B(0, 2'3); C(0, –2); D(0, –1). Què tenen en comú tots ells?
5. Escriu les coordenades i representa tres punts de l'eix d'ordenades. Què tenen en comú?
6. Dibuixa al teu quadern un triangle rectangle amb un catet igual a 3, i el vèrtex de l'angle recte a l'origen de coordenades. Indica les coordenades de tots els vèrtexs.
7. La següent gràfica resumeix l'excursió que hem realitzat per la serra de Guadarrama:



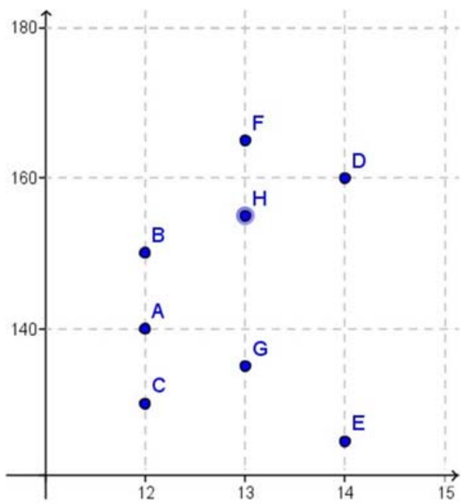
i) Quant temps va durar l'excursió?
1) Quant temps es va descansar? A quines hores?
2) Quants quilòmetres es van recórrer?
3) En quins intervals de temps se'n va anar més ràpid que entre les 11 i les 13 hores?
4) Fes una breu descripció del desenrotllament de l'excursió.
5) Construeix una taula de valors a partir dels punts assenyalats a la gràfica.
6) Si a l'eix d'ordenades representàrem la variable "distància al punt de partida", seria la mateixa gràfica? Amb les dades que disposes, pots fer-la?

Funcions i tipus de funcions

8. Indica quins de les següents correspondències són funcions:

   i) A cada nombre natural se li associen els seus divisors primers.
   - A cada circumferència del pla se li associa el seu centre.

9. L'altura i l'edat dels components d'un equip de bàsquet estan relacionats segons mostra la següent gràfica:



i) Si Joan té 14 anys, quina pot ser la seua altura?
29 Si Maria medeix 165 cm, quina pot ser la seua edat?
30 La relació entre l'altura i l'edat dels diferents components de l'equip, és una relació funcional? Per què?
31 I la relació entre l'edat i l'altura? Realitza una gràfica semblant a l'anterior per a representar aquesta situació.

10. La distància, *d*, recorreguda per un tren depén del nombre de voltes, *n*, que dóna cada roda de la locomotora.

   i) Escriu la fórmula que permet obtindre *d* conegut *n*, sabent que el diàmetre de les rodes de la locomotora és de 78 cm.
   a) Dibuixa la gràfica.
   b) Quina distància haurà recorregut el tren quan la roda haja donat mil voltes? (pren com a valor de π el nombre 3,14).
   c) Quantes voltes haurà donat la roda al cap de 7 km?

11. Un baló sonda utilitzat pel Servei Meteorològic dels Pirineus per a mesurar la temperatura a distintes altures porta incorporat un termòmetre. S'observa que cada 180 m d'altura la temperatura disminueix un grau. Un cert dia la temperatura en la superfície és de 9º C. Determina:

   i) Quina temperatura hi haurà a 3 km d'altura?
   a) A quina altura hi haurà una temperatura de –30º C?
   b) Escriu una fórmula que permeta calcular la temperatura T coneixent l'altura A. Confecciona una taula i dibuixa la gràfica. Quin tipus de funció és?
   c) Si la temperatura en la superfície és de 12º C, quin és aleshores la fórmula? Quin tipus de funció és?

12. Dibuixa la gràfica de la funció part entera: y = E(x).
13. Un rectangle té un perímetre de 100 cm. Anomena x a la longitud d'un dels seus costats i escriu la fórmula que dóna l'àrea en funció de x. Dibuixa la seua gràfica. Quin tipus de funció és?
14. Una caixa quadrada té una alçària de 20 cm. Com depén el seu volum del costat de la base? Dibuixa la gràfica de la funció que resulta.

15. Amb un full de paper de 32 cm de llarg i 22 cm d'ample es retalla un quadrat de 2 cm de costat en cada uns dels cantons, es doblega i es construeix una caixa. Quin és el volum de la caixa? I si es retallen quadrats de 3 cm? Quin és el volum si el costat del quadrat retallat és x? Escriu la fórmula i dibuixa la gràfica.
16. Escriu l'equació de la recta paral·lela a $y = 4x + 2$ d'ordenada a l'origen 6.
17. Sense representar-los gràficament, estableix si estan alineats els punts A(3, 4), B(7, 9) i C(13, 15).
18. Una empresa de lloguer de vehicles ofereix dues fórmules diferents. Fórmula 1: El lloga per 300 euros al dia amb quilometratge il·limitat. Fórmula 2: El lloga per 200 euros al dia i 7 euros el quilòmetre. Volem fer un viatge de 10 dies i mil quilòmetres, quant ens costarà amb cada una de les fórmules? Com no sabem el quilometratge exacte que acabarem fent, ens interessa fer un estudi per a saber la fórmula més beneficiosa. Escriu les fórmules d'ambdues situacions i dibuixa les seues gràfiques. Raona, a partir de dites gràfiques, quina fórmula és més rendible segons el nombre de quilòmetres que anem a fer.
19. Es construeixen boies unint dos cons iguals per la base, sent el diàmetre de la base de 90 cm. El volum de la boia és funció de l'altura "a" dels cons. Si volem una boia per a assenyalar l'entrada de patinets ens basta amb una altura de 50 cm: quin volum tindrà? Si és per a vaixells majors es necessita una altura de 1,5 m: quin volum tindrà? Escriu l'expressió de la funció que calcula el volum en funció de l'altura. Dibuixa la seua gràfica.
20. Calcula el vèrtex, l'eix de simetria i els punts d'intersecció amb els eixos de les següents paràboles. Dibuixa les seues gràfiques.

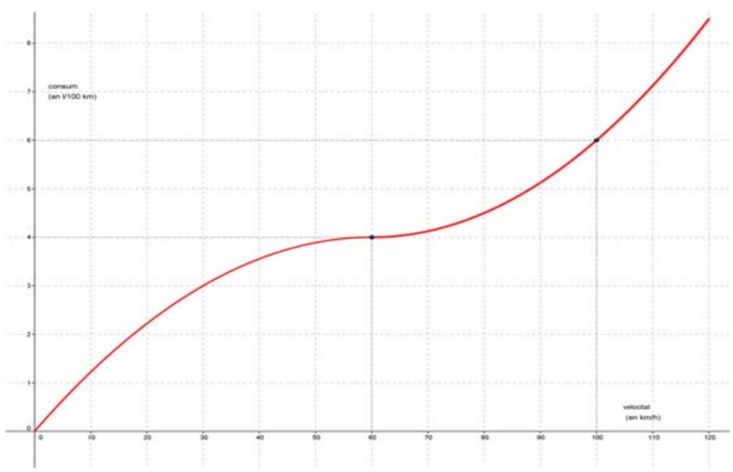
    a) $y = x^2 + 8x - 13$ b) $y = -x^2 + 8x - 13$ c) $y = x^2 - 4x + 2$ d) $y = x^2 + 6x$ e) $y = -x^2 + 4x - 7$

21. Dibuixa la gràfica de $y = 2x^2$. Fes una plantilla. Determina el vèrtex de les següents paràboles i utilitza la plantilla per a dibuixar la seua gràfica:

    a) $y = 2x^2 + 8x - 12$ b) $y = -2x^2 + 8x - 10$ c) $y = 2x^2 - 4x + 2$ d) $y = 2x^2 + 6x$

    Ajuda: $2x^2 + 8x - 12 = 2(x^2 + 4x - 6) = 2((x + 2)^2 - 4 - 6) = 2((x + 2)^2 - 10)$. Vèrtex $(-2, -10)$

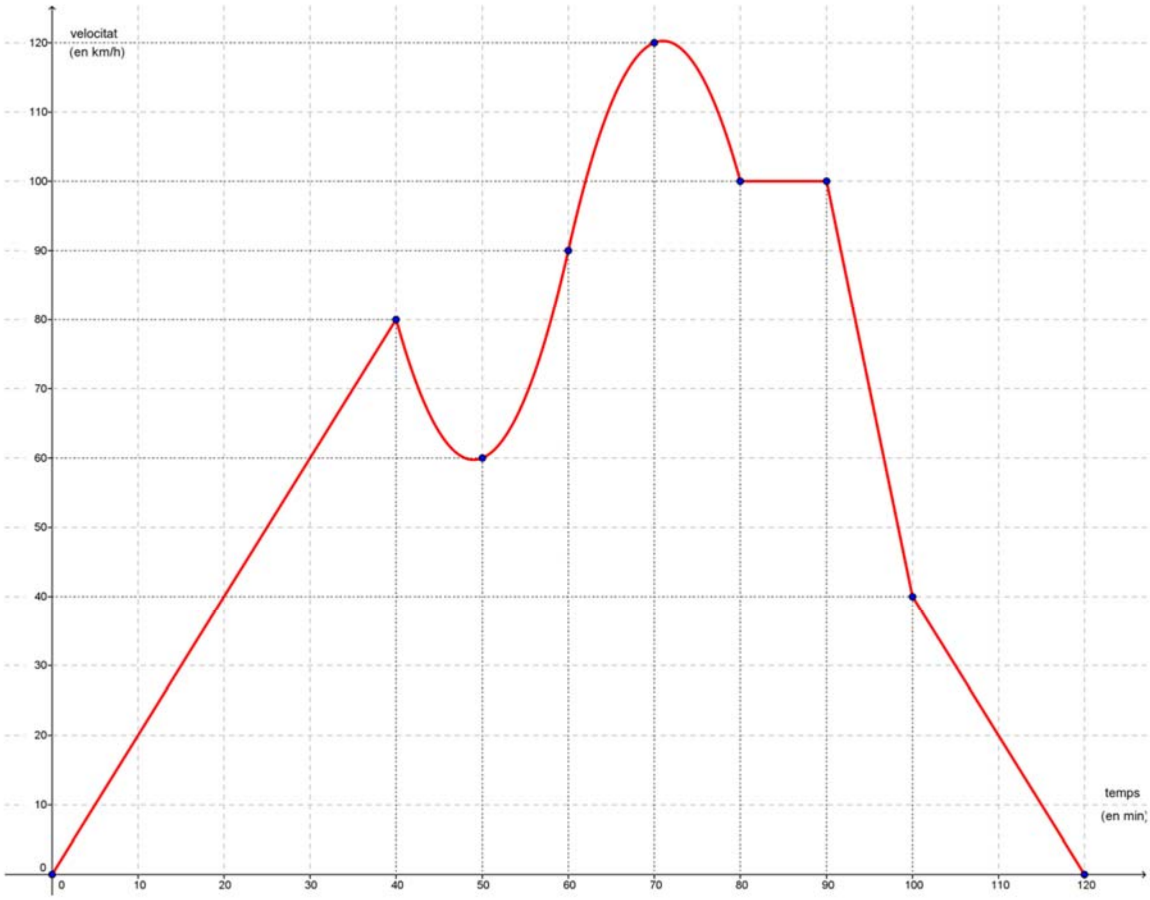
22. El consum de gasolina d'un cotxe per cada 100 km ve representat mitjançant la gràfica.



i) Quina és la variable dependent?
1) I la independent?
2) Quin és el consum per a una velocitat de 50 km/h?
3) A quina velocitat el consum és de 5 l/100 km?
4) Utilitza la gràfica per a explicar com canvia el consum de gasolina depenent de la velocitat del cotxe.

Característiques de les funcions

23. Ximo ha arribat a un acord amb son pare per a rebre la seua paga. Cobrarà 20 euros al mes el primer any, i 5 euros més per cada any que passe. Quant li correspondrà d'ací a 7 anys? Fes una taula de valors i representa la seua gràfica. És contínua? Indica els punts de discontinuïtat i el seu tipus. Busca una fórmula que permeta calcular la paga quan hagen passat *n* anys.
24. Durant un viatge, la velocitat del cotxe varia depenent del tipus de carretera, de les condicions en què es troba, del temps meteorològic… La següent gràfica reflectix la velocitat d'un vehicle en cada instant del trajecte que ha seguit.



25. És funcional la relació de dependència entre el temps i la velocitat?

) Quina és la variable independent? I la dependent?

a) A quina velocitat anava quan portava una hora de viatge? En quins moments anava a una velocitat de 40 km/h?

b) Indica els intervals als què la velocitat ha augmentat i disminuït. Ha sigut constant en algun moment? Quan? Durant quant temps?

c) Quina ha sigut la velocitat màxima aconseguida al llarg de tot el viatge? En quin moment es va aconseguir? I durant la primera hora del mateix?

d) Quina ha sigut la velocitat mínima aconseguida al llarg de tot el viatge? Quan es va aconseguir? I entre la primera mitja hora i l'hora i mitja?

26. En entrar en l'aparcament d'un centre comercial trobem un rètol amb els preus que ens indiquen que 1 hora o fracció costa 1'20 € i les dues primeres hores són gratis per als clients amb targeta de

compra del centre. Fes una taula que relacione el temps amb l'import pagat durant una jornada completa (12 hores) als casos d'un client amb targeta o sense ella. Esbossa la gràfica i contesta a les preguntes:

i) Quins valors pren la variable dependent? I la independent?
) Pots unir els punts de la gràfica? Com s'ha de fer?
a) Hi ha punts de discontinuïtat? Si la resposta és afirmativa, assenyala'ls i explica el seu significat.

27. En estudiar el creixement d'una planta observem que durant els primers 30 dies ho fa molt de pressa, en els 15 dies següents el creixement és més lent i després es manté amb la mateixa altura. Realitza un esbós de la gràfica que relaciona el temps amb l'altura aconseguida per la planta.

Si tenim més informació podem millorar l'esbós. Per exemple, fes la taula i la gràfica en el cas que el creixement de la planta s'ajuste a les següents fórmules (el temps s'expressa en dies i l'altura en centímetres):

i) Durant els primers 30 dies: altura = 4 x temps
. En els 15 dies següents: altura = 90 + temps
I. A partir del dia 45: altura = 135.

28. Un viatge realitzat per un tren, en un cert interval del mateix, ve donat de la manera següent:

-Durant les dues primeres hores, la distància "*d*" (en quilòmetres) al punt de partida és 2·t+1, on "*t*" és el temps (en hores) de duració del trajecte.

-Entre la 2ª i 3ª hora, la dita distància ve donada per –*t* + 7.

-Entre la 3ª i 4ª hora, ambdues inclusivament, *d* = 4.

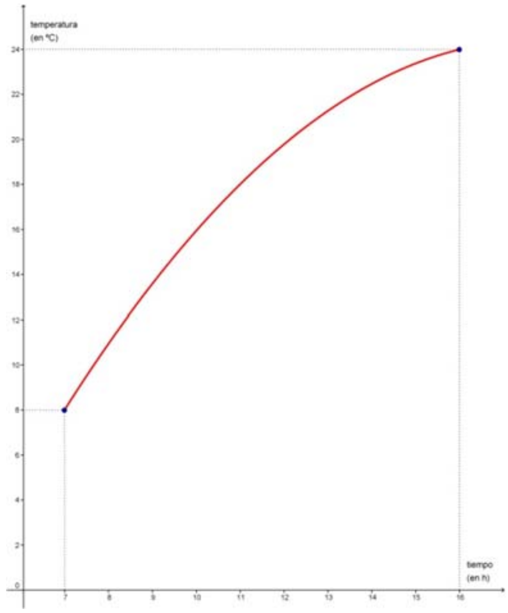
-Des de la 4ª i fins a la 6ª (inclusivament), la distància s'ajusta a 3·*t* - 8.

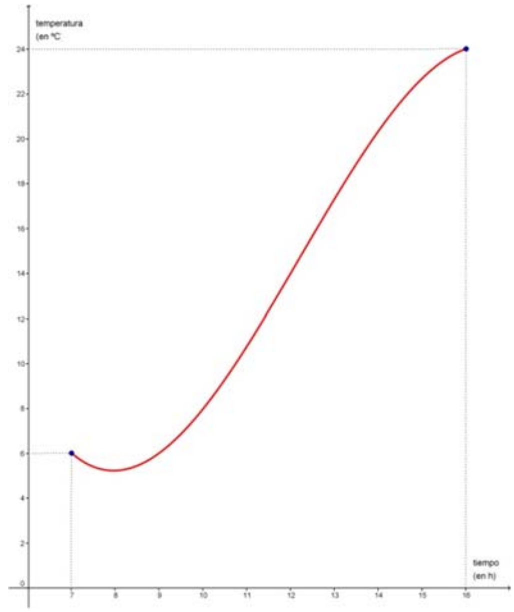
a) Realitza una taula i una gràfica que arreplegue el dit viatge de la manera més precisa possible (per a això has de calcular, com a mínim, els valors de la variable temps als instants 0, 2, 3, 4 i 6).
b) Explica si la relació anteriorment explicada entre la distància recorreguda i el temps tardat a recórrer-la és funcional.
c) La relació anterior, presenta alguna discontinuïtat?
d) En quin moment la distància al punt de partida és de 7 km?
e) Què indiquen els punts de tall de la gràfica amb els eixos?
f) Determina els intervals on la funció és creixent, decreixent i constant.
g) Troba els punts on la funció aconsegueix els seus màxims i mínims relatius i absoluts. Interpreta el significat que puguen tindre.

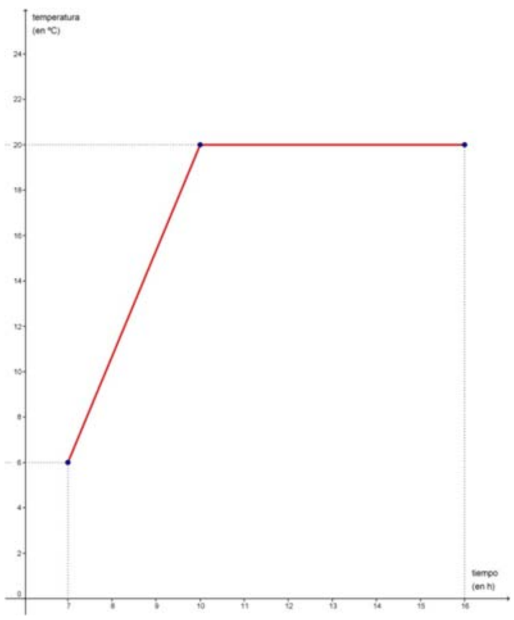
29. Representa gràficament les següents funcions, estudiant en ella totes les característiques que s'han treballat al tema: monotonia, extrems, simetria i periodicitat.

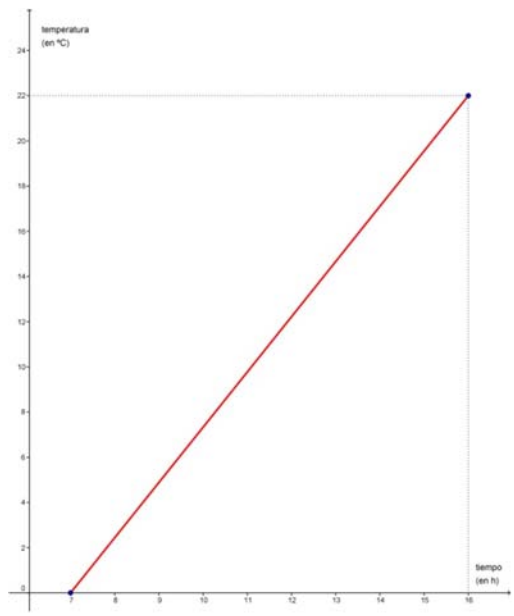
i) Valor absolut d'un nombre: $f(x)=|x|$.
) Oposat i invers d'un nombre: $f(x)=\frac{-1}{x}$.
a) *Mantissa* (a cada nombre li fa correspondre la diferència entre el dit nombre i la seua part sencera): $M(x)=x-E(x)$.

30. Les gràfiques següents mostren l’evolució, un dia qualsevol, de la temperatura aconseguida entre les 7 del matí i les 4 de la vesprada en quatre ciutats (Madrid, Granada, Valladolid i Sevilla):









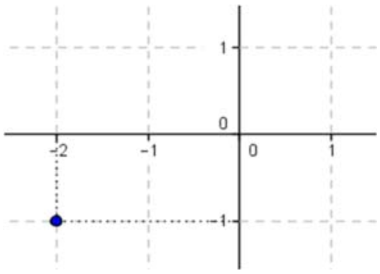
31. Estudia la monotonia de totes les gràfiques.

- En alguna ciutat la temperatura s’ha mantingut constant durant tot l’interval? I en part d’ell?
- Quina ciutat creus que presenta un canvi de temperatura més suau al llarg de tot el matí?
- Tenint en compte que a Madrid l’increment de la temperatura ha sigut sempre lineal, a Granada la temperatura mínima s’ha aconseguit després de les 7 h i a Valladolid a partir del mig dia la temperatura va baixar, indica quina gràfica correspon a cada una de les ciutats i explica quines han sigut les temperatures màximes i mínimes en cada una d’elles.

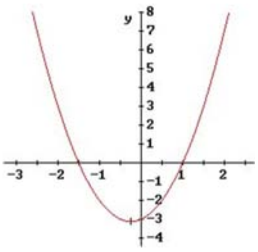
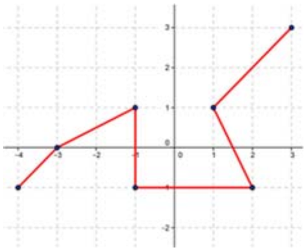
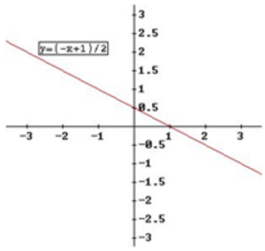
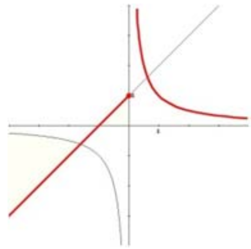
AUTOAVALUACIÓ

- Les coordenades del punt assenyalat són:

i) (–1, 2)
a) (–2, –1)
b) (1, 2)
c) (1, –2)



- L'única gràfica que no correspon a una funció és :

i)  a)  b)  c) 

- L'única taula que no pot ser d'una relació funcional és:

i)

x	*y*
0	1
1	2
2	3
3	4

•

x	*y*
–1	–3
0	–3
1	–3
2	–3

•

x	*y*
–3	9
–1	1
0	0
2	4

•

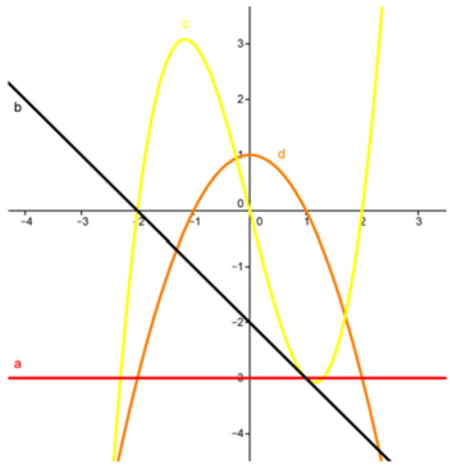
x	*y*
0	2
1	3
4	6
0	3

- L'única funció afí que, a més, és lineal és:

i) y = –4x 0) y = 3x + 1 1) y = –2x + 3 2) y = –x – 1

- L'única gràfica d'una funció afí no constant és:

i)
)
a)
b)



- L'única funció quadràtica és:

i) $y = -2x$ 0 .-$y = 3x + 1$ 1 .-$y = -2x^2 + 3x$ 2 .-$y = -x^3 - 1$

- La funció quadràtica que té el seu vèrtex al punt (3, 4) és:

a) $y = -2x^2$ b) $y = 3x^2 - x + 1$ c) $y = -2x^2 + 3x$ d) $y = -x^2 + 6x - 5$

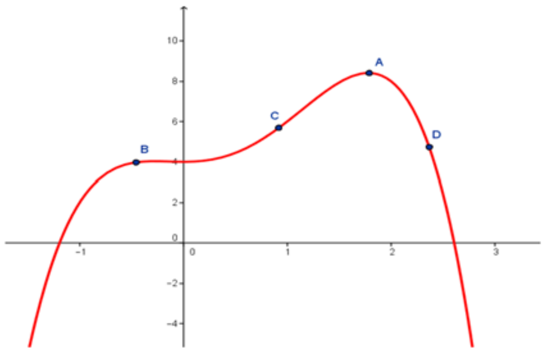
- El màxim absolut de la funció s'aconsegueix al punt:

i)

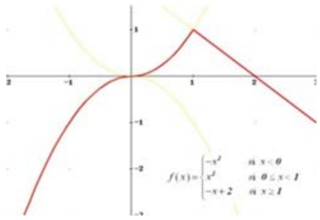
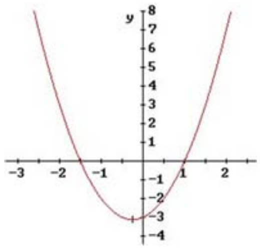
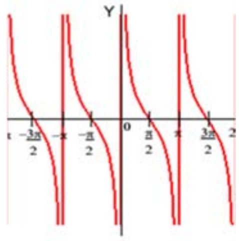
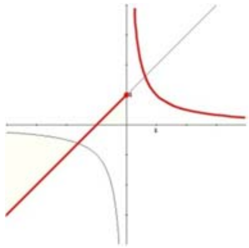
I.

II.

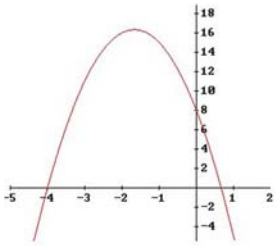
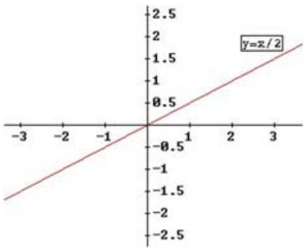
III.

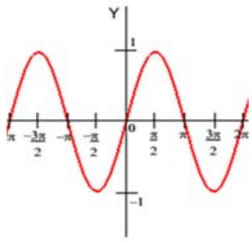
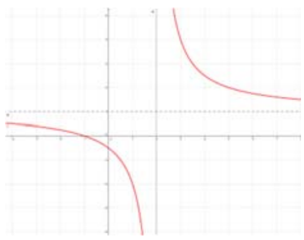


- L'única gràfica que correspon a una funció periòdica és :

i)  •  •  • 

- L'única gràfica que correspon a una funció que és sempre creixent fins a $x = -2$ és:

i)  1) 

2)  3) 

Matemàtiques orientades a les ensenyances acadèmiques:

3r B d'ESO. Capítol 11: Estadística i probabilitat

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Fernando Blasco

Revisor: David Hierro

Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

Estadística i probabilitat. 3r B ESO

Índex

Resum

L'Estadística és una Ciència que va sorgir per a portar la comptabilitat de l'Estat. D'ací ve el seu nom. Al segle XX es van desenrotllar les seues tècniques i es va separar de les Matemàtiques, passant a ser una ciència amb entitat pròpia. Als Mitjans de comunicació trobem freqüents estadístiques. En medicina es necessiten mètodes estadístics per a provar nous medicaments. En tot experiment científic, després de l'arreplegada de dades, es necessita utilitzar proves estadístiques que permeten traure informació d'aqueixes dades.

L'origen de la Probabilitat es troba en els jocs d'atzar. Cardano, Galileu, Pascal, Fermat són alguns dels matemàtics que es van ocupar als seus inicis.

1. LA PRESA DE DADES

1.1. Un exemple per a realitzar una anàlisi

Exemple:

- La Casa de la Moneda vol estudiar quantes monedes ha d'emetre, tenint en compte les que estan en circulació i les que es queden atresorades (bé en cases particulars, o en màquines de refrescos, o dipositades en un banc). S'ha fet una enquesta a peu de carrer a 60 persones i s'ha apuntat quantes monedes portava cada una d'elles a la butxaca. Hem obtingut aquestes dades:

12	7	11	8	8	9	6	12	7	7	13	0	10	9	13	18	7	6	11	12	16	0	10	10	8	8	9	11	10	8
16	8	5	2	12	8	14	14	16	6	2	0	18	10	10	12	14	6	7	3	12	11	10	18	9	7	12	1	15	8

El primer pas consisteix a fer un esquema per al recompte: usarem una taula i marcarem baquetes cada vegada que aparega aqueix nombre.

0	///
1	/
2	//
3	/
4	
5	/
6	////

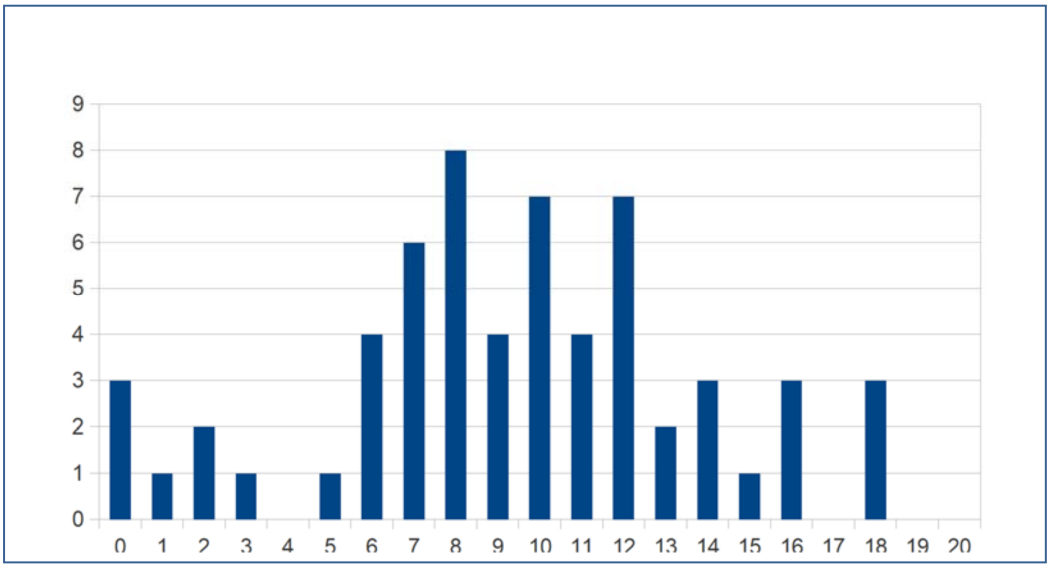
7	///// /
8	///// ///
9	////
10	///// //
11	////
12	///// //
13	//

14	///
15	/
16	///
17	
18	///
19	
20	

Passar d'aqueix recompte a una taula de **freqüències absolutes** és molt senzill: només cal substituir les baquetes pel nombre que representen.

0	3	**7**	6	**14**	3
1	1	**8**	8	**15**	1
2	2	**9**	4	**16**	3
3	1	**10**	7	**17**	0
4	0	**11**	4	**18**	3
5	1	**12**	7	**19**	0
6	4	**13**	2	**20**	0

És molt millor analitzar les dades de manera visual. Estem més acostumats a treballar d'aqueixa manera. Podem representar les dades de la taula de freqüències en un **diagrama de barres**, on l'altura de cada barra representa la freqüència d'aparició.



El processament de dades estadístiques s'utilitza molt. Òbviament no es fan les operacions a mà, sinó que s'utilitzen calculadors o fulls de càlcul. Disposar d'aqueixos mitjans tecnològics serà un bon complement per al capítol, encara que recordem que el més important és comprendre què es fa en cada moment.

Començarem introduint un poquet de **nomenclatura**. Quasi tots aquests noms els has escoltat ja que als Mitjans de comunicació els utilitzen moltíssim

Població és el col·lectiu sobre el qual es vol fer l'estudi.

Mostra és un subconjunt de la població de manera que a partir del seu estudi es poden obtindre característiques de la població completa.

Individu és cada un dels elements de la població o la mostra.

Exemple:

- Es vol fer un estudi sobre hàbits alimentaris dels estudiants de 3º d'ESO de tot Madrid. Però com és molt costós entrevistar tots els estudiants es decideix prendre un IES per cada districte i entrevistar als alumnes de 3º d'ESO d'aqueixos col·legis triats.

  La **població** objecte de l'estudi seran tots els estudiants madrilenys matriculats en 3º d'ESO.

  La **mostra** són els estudiants de 3º d'ESO matriculats als instituts triats.

  Cada un dels estudiants de 3º d'ESO és un **individu** per a aquest estudi estadístic.

Activitats proposades

a) Volem fer un estudi de la quantitat de monedes que porten a la butxaca els estudiants de la teua classe. Però per a no preguntar a tots tria 10 companys a l'atzar i anota en el teu quadern quantes monedes porta cada u.

a) Quina és la població objecte de l'estudi?

b) Quina és la mostra triada?

c) Especifica 5 individus que pertanguen a la població i no a la mostra.

1.2. Variables estadístiques

Exemple:

- En un estudi estadístic es pot preguntar coses tan molt variades com

b) Quines fruites menges al llarg d'una setmana?
1 .-Quantes peces de fruita menges al dia?
2 .-Quantes monedes portes a la butxaca?
3 .-Quina és la teua altura?
4 .-Quantes marques de xocolate recordes?
5 .-Quines són les marques de xocolate que recordes?
6 .-Quants germans tens?
7 .-Quin és el teu color favorit per a un cotxe?
8 .-Quant temps passes al dia veient la televisió?
9 .-Quants seguidors tens en twitter?

Aqueixes preguntes poden correspondre a estudis de salut, econòmics, publicitaris o socioeconòmics. Algunes es responen amb un nombre i altres es responen amb un nom o un adjectiu. Inclús hi ha diferències entre les que es responen amb nombres: el nombre de monedes que portes o el nombre de seguidors de *twitter* es contesten amb nombres enters, mentres que per a trobar la teua altura o les hores que panses davant del televisor necessitem utilitzar nombres reals (normalment amb representació decimal).

Una variable es diu **quantitativa** si els seus valors s'expressen amb nombres.

Les variables quantitatives poden ser

c) **discretes** si només admeten valors aïllats

contínues si entre dos valors poden donar-se també tots els intermedis

Una variable estadística és **qualitativa** quan els seus valors no s'expressen mitjançant un nombre, sinó amb una qualitat.

Activitats proposades

1. Classifica en variables qualitatives i quantitatives les que apareixen al primer exemple d'aquesta secció. Per a les quantitatives indica si són contínues o discretes.

1.3. Les fases d'un estudi estadístic.

En un estudi estadístic hi ha 6 fases fonamentals:

a) Determinació de l'objecte de l'estudi. Açò és, saber què volem estudiar.
b) Selecció de les variables que es van a estudiar.
c) Arreplega de les dades.
d) Organització de les dades.
e) Representació i tractament de les dades.
f) Interpretació i anàlisi.

En aquest llibre començarem els exemples a partir del punt 4, amb dades ja proporcionats en els enunciats, encara que a continuació reflexionarem un poc sobre la selecció d'una mostra,

1.4. Mètodes de selecció d'una mostra estadística. Representativitat d'una mostra

Per a arreplegar les dades i determinar els valors de la variable es pot utilitzar tota la població, tot l'univers sobre el qual es realitza l'estudi, o seleccionar una mostra. Moltes vegades no és convenient arreplegar valors de tota la població, perquè és complicat o massa costós, o inclús perquè és impossible com en el cas d'un control de qualitat en què es destruïsca l'objecte a analitzar. La part de l'Estadística que s'ocupa de com seleccionar adequadament les mostres es denomina *Teoria de Mostres*.

Exemples:

- Si estudiem el pes dels habitants d'una ciutat, la població serà el total de les persones de la dita ciutat.

I. Però el més normal serà no arreplegar informació sobre totes les persones de la ciutat (ja que seria una labor molt complexa i costosa), sinó que se sol seleccionar un subgrup (mostra) que s'entenga que és prou representatiu.

II. Per a conéixer la intenció de vot davant d'unes eleccions europees, municipals, autonòmiques… s'utilitzen mostres, perquè preguntar a tota la població seria molt costós (i això ja es fa en les eleccions).

III. Però si una fàbrica vol conéixer les hores de vida útil d'un tipus de pereta, no pot posar a funcionar a tota la població, totes les peretes, fins que s'espatllen perquè es queda sense producció. En aquest cas és imprescindible seleccionar una mostra.

IV. En *control de qualitat* es fan estudis estadístics i es prenen mostres.

Per a determinar la millor forma de seleccionar una mostra hi ha tota una part de l'Estadística, la Teoria *de Mostres*, que ens indica diversos detalls a tindre en compte:

- Com s'han de triar els elements de la mostra?

- Quin ha de ser la grandària de la mostra?
- Fins a quin punt la mostra és representativa de la població?

La forma de seleccionar la mostra, ***mostreig***, ha de reunir unes determinades característiques perquè puga caracteritzar la població, ser ***representativa*** de la població. Ha de ser un mostreig **aleatori**, és a dir, a l'atzar. Si la mostra està mal triada, no és representativa, es produeixen **biaixos**, errors als resultats de l'estudi.

Tots els individus de la població han de tindre les mateixes possibilitats de ser seleccionats per a la mostra.

Exemples:

- Es vol estudiar el nivell adquisitiu dels persones d'una ciutat, per al que passem una enquesta a la porta d'uns grans magatzems, et pareix un mostreig aleatori?

No ho és. Les persones que entren en un determinat establiment no representen a tota la població.

- Faràs un estudi sobre els gustos musicals dels jóvens, i per a això, preguntes a cinc d'entre les teues amistats, et pareix un mostreig aleatori?

No ho és. Les teues amistats poden tindre uns gustos diferents dels de la resta de la població.

Mètodes de selecció d'una mostra

Hi ha diversos mètodes per a seleccionar una mostra, que donarien per a analitzar en un llibre sobre "Mostreig". Però és convenient conéixer algun. Vegem tres d'ells:

Mostreig aleatori simple

Tots els individus de la població tenen la mateixa probabilitat de ser triats en la mostra.

Mostreig aleatori sistemàtic

S'ordenen els individus de la població. Es tria a l'atzar un individu, i se selecciona la mostra prenent individus mitjançant bots igualment espaiats.

Mostreig aleatori estratificat

Es divideix la població en grups homogenis d'una determinada característica, *estrats*, per exemple edat, i es pren una mostra aleatòria simple en cada estrat.

Exemple:

- S'estudia l'estat dels ossos de la població d'un país, i es divideix la població en "xiquets", "jóvens", "edat mitjana" i "tercera edat". En cada grup es fa un mostreig aleatori simple.

Representativitat d'una mostra

Quan es tria una mostra els dos Aspectes que cal tindre en compte són, la grandària i la representativitat de la mostra.

Si la mostra és massa xicoteta, encara que estiga ben triada, el resultat no serà fiable.

Exemple:

- Volem estudiar l'estatura de la població espanyola. Per a això triem a una persona a l'atzar i la mesurem.

Evidentment aquest resultat no és fiable. La mostra és massa xicoteta.

Si la mostra és massa gran els resultats seran molt fiables, però el gasto pot ser massa elevat. Inclús, de vegades, mostres massa grans no ens proporcionen millors resultats.

Quan una mostra tinga la grandària adequada, i haja sigut triada de forma aleatòria direm que és una **mostra representativa**.

Si la mostra no ha sigut triada de forma aleatòria direm que la mostra és **esbiaixada**.

Activitats proposades

2. Assenyalar en quin cas és més convenient estudiar la població o una mostra:

a) El diàmetre dels caragols que fabrica una màquina diàriament.

i) L'altura d'un grup de sis amics.

3. Es pot llegir el següent titular al periòdic que publica el teu institut: "*La nota mitjana dels alumnes de 3º ESO és de* 7'9". Com s'ha arribat a aquesta conclusió? S'ha estudiat a tota la població? Si hagueren seleccionat per al seu càlcul només a les alumnes, seria representatiu el seu valor?

4. En una sèrie de televisió tenen dubtes sobre què fer amb la protagonista, si que tinga un accident o si ha de casar-se. Faran una consulta. A tota la població o seleccionat una mostra representativa? Raona la resposta.

2. REPRESENTACIÓ DE LA INFORMACIÓ

2.1. Exemples per a treballar

La secció anterior la començàvem analitzant una variable discreta: el nombre de monedes que es porten a la butxaca. Pots repassar què fèiem allí: com recomptàvem les dades, com els portàvem després a una taula de freqüències i com representàvem la informació en un gràfic.

Farem ara el mateix procés amb una variable contínua.

Ja saps que:

Podem distingir entre **freqüències absolutes**, si, com en aquest exemple, fem un recompte del nombre de vegades que apareix cada dada. **Freqüències relatives**, que estudiarem amb més deteniment al final del capítol, i que consisteix a dividir cada freqüència absoluta pel nombre total d'observacions. **Freqüències acumulades**, tant freqüències absolutes acumulades com a freqüències relatives acumulades si es calculen tots els valors menors o iguals a ell.

Exemples:

- S'està realitzant un control del pes d'un grup de xiquets. Per a això, es comptabilitzen el nombre de vegades que mengen al dia una xocolatina 13 xiquets durant un mes, obtenint els nombres següents: 2, 5, 3, 2, 0, 4, 1, 7, 4, 2, 1, 0, 2.

La informació obtinguda es pot resumir en una taula de **freqüències absolutes** i **freqüències absolutes acumulades**:

Valors	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Freqüència absoluta	2	2	4	1	2	1	0	1
Freqüència absoluta	2	4	8	9	11	12	12	13

També es pot resumir en una taula de **freqüències relatives** i **freqüències relatives acumulades**:

Valors	0	1	2	3	4	5	6	7
Freqüència relativa	0'15	0'15	0'30	0'07	0'15	0'07	0	0'07
Freqüència relativa	0'15	0'30	0'61	0'69	0'84	0'92	0'92	1

- En una fàbrica es realitza un estudi sobre la grossària, en *mm*, d'un cert tipus de llandes de refresc. Amb aquest fi, selecciona una mostra de grandària $N = 25$, obtenint els valors següents: 7'8, 8'2, 7'6, 10'5, 7'4, 8'3, 9'2, 11'3, 7'1, 8'5, 10'2, 9'3, 9'9, 8'7, 8'6, 7'2, 9'9, 8'6, 10'9, 7'9, 11'1, 8'8, 9'2, 8'1, 10'5.

Aquesta informació es pot resumir fent cinc intervals i fent una taula de freqüències absolutes, freqüències absolutes acumulades, freqüències relatives i freqüències relatives acumulades

Intervals de classe	(7,	(8,	(9,	(10,	(11,
Marques de classe	7'5	8'5	9'5	10'5	11'5
Freqüència absoluta	6	8	5	4	2
Freqüència relativa	0'24	0'32	0'2	0'16	0'08
Freqüència relativa	0'24	0'56	0'76	0'92	1

Exemple:

- Les altures dels 12 jugadors de la Selecció Espanyola de Bàsquet (en metres) que van participar a l'Eurocopa 2013 s'arrepleguen a la taula següent:

2'03	1'96	1'91	2'11	1'91	1'93	2'08	1'99	1'90	2'16	2'06	2'03

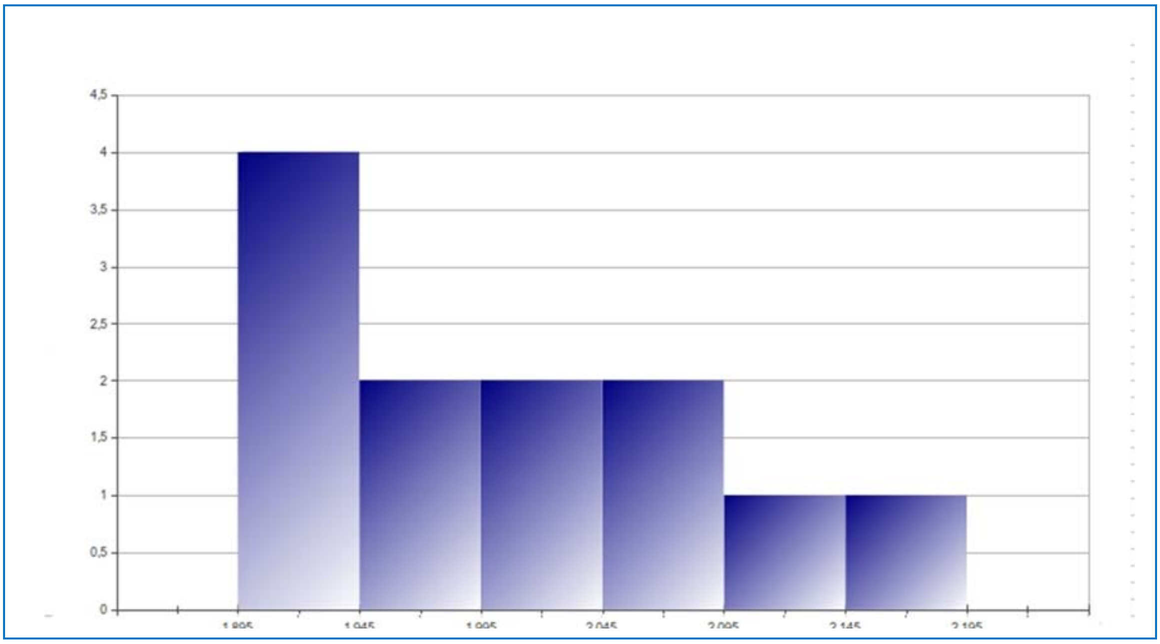
Com les dades són contínues, per a fer el recompte fixarem **intervals** d'altura:

1. entre 1'895 i 1'945 ////
2. entre 1'945 i 1'995 //
3. entre 1'995 i 2'045 //
4. entre 2'045 i 2'095 //
5. entre 2'095 i 2'145 /
6. entre 2'145 i 2'195 /

Ara portem les dades del recompte a un diagrama de freqüències:

entre 1'895 i 1'945	4
entre 1'945 i 1'995	2
entre 1'995 i 2'045	2
entre 2'045 i 2'095	2
entre 2'095 i 2'145	1
entre 2'145 i 2'195	1

En aquest cas la representació gràfica la fem amb un **histograma de freqüències**.

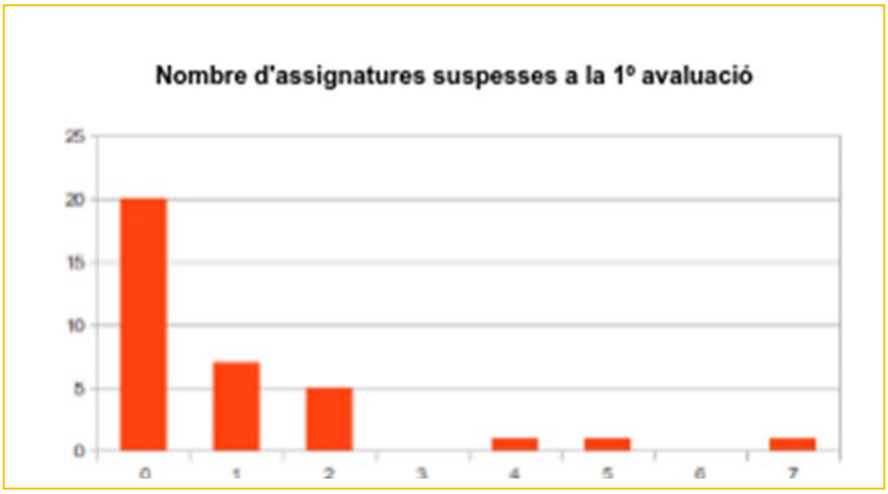


Observa la diferència entre aquest gràfic (corresponent a una variable contínua) i el que vam fer per al recompte de monedes (que representava una variable discreta). Aquest gràfic es denomina histograma de freqüències i és semblant a un diagrama de barres però ara representem unes barres pegades a altres, Per a recordar que es tracta d'intervals de classe i no de valors aïllats de les variables. Al nostre exemple tots els intervals tenen la mateixa longitud, 0'05 cm. Si les longituds dels intervals foren diferents les altures dels rectangles haurien de ser proporcionals a l'àrea.

2.2. Diagrama de barres

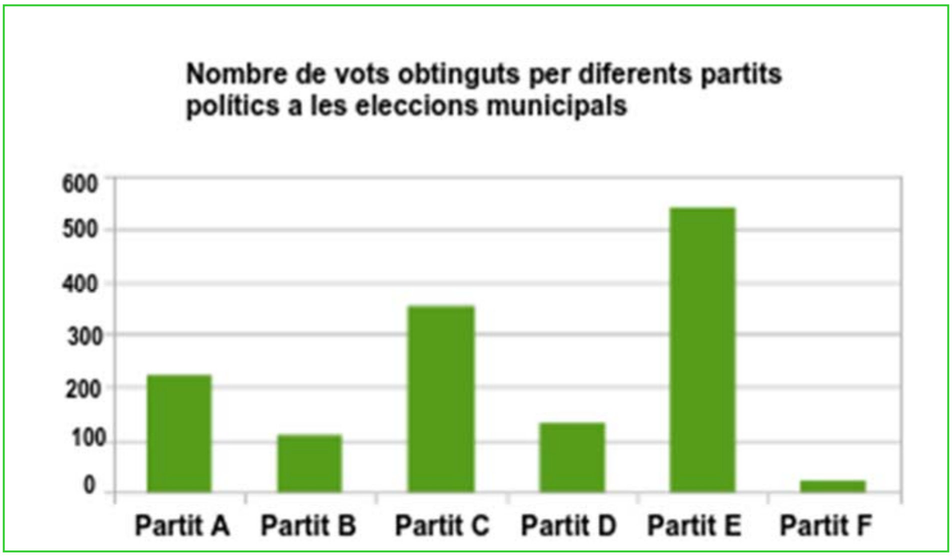
S'utilitza per a representar dades de variables estadístiques discretes o variables estadístiques qualitatives.

Al principi del capítol estudiant el nombre de monedes que es porten a la butxaca. Podem utilitzar aquest tipus de gràfic en altres situacions.



El gràfic anterior representa el nombre d'alumnes (d'una classe de 35) que han aprovat tot, el d'alumnes amb 1 assignatura suspensa, amb dues assignatures suspenses, etc. El millor de la representació gràfica és que d'una **sola ullada sabem que 20 alumnes han aprovat tot i que hi ha un alumne que té 7 assignatures suspeses.**

També podem utilitzar diagrames de barres per a representar variables qualitatives, com l'elecció de la modalitat de batxillerat que cursen els alumnes d'un IES o les preferències polítiques dels ciutadans d'un municipi.

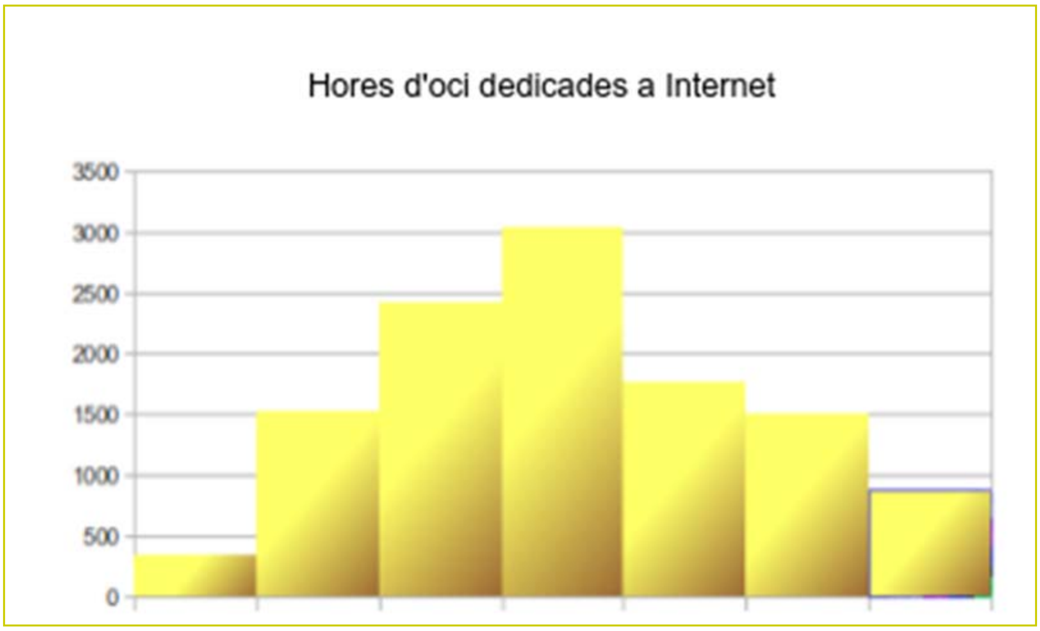


2.3. Histograma de freqüències

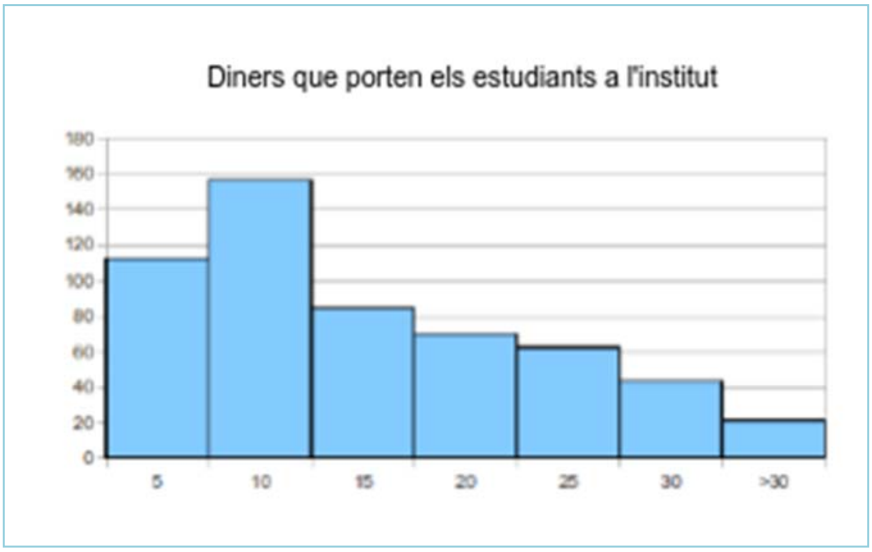
Aquest tipus de gràfic l'hem utilitzat abans per a representar les altures dels jugadors de la Selecció Espanyola de Bàsquet.

És semblant a un diagrama de barres però l'altura de cada barra ve donada pel nombre d'elements que hi ha a cada classe.

Altres variables que podem considerar com a variables contínues són el nombre d'hores que els jóvens d'una població dediquen a internet als seus moments d'oci o la quantitat de diners que es porta a la butxaca (ull, açò no és el nombre de monedes).



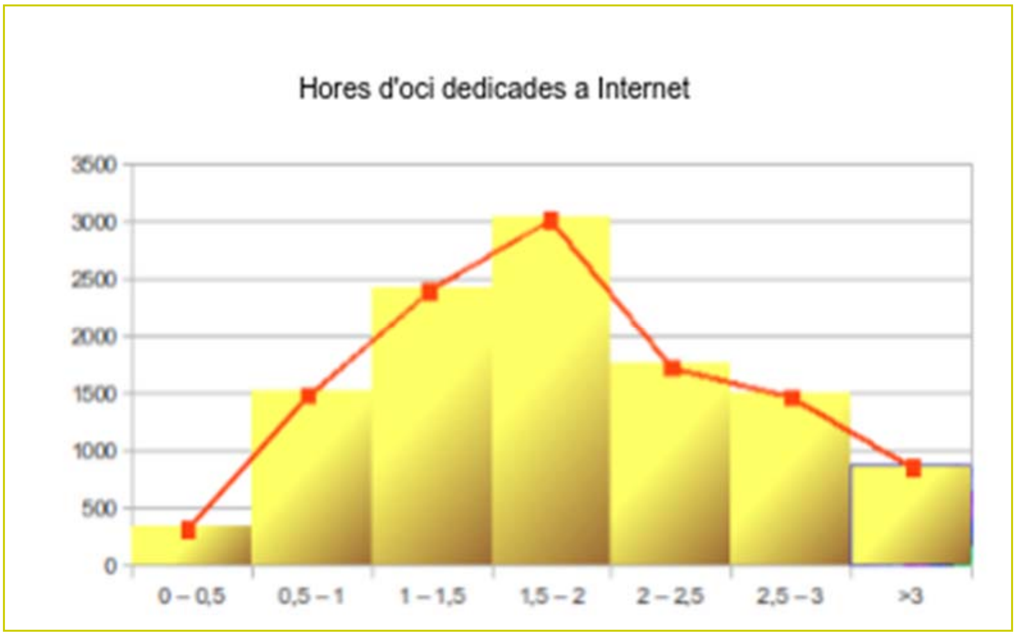
Al gràfic que incloem a continuació les marques de l'eix de les *x* es refereixen als trams de diners expressats de 5 en 5 euros. L'altura del gràfic es correspon amb la quantitat d'alumnes que porten aqueixa quantitat de diners. D'una simple ullada es veu que hi ha un poc més de 150 alumnes que porten entre 5 € i 10 € a l'institut i que poc més de 40 alumnes porten entre 25 € i 30 €.



Les barres són més amples i apareixen unes a continuació d'altres per a destacar que estem representant una variable contínua i que les altures es corresponen amb individus dins d'un interval de dades. Però recorda, si els intervals foren distints, les altures dels rectangles serien proporcionals a l'àrea.

2.4. Polígon de freqüències

S'utilitza als mateixos casos que l'histograma. Però dóna idea de la variació de la tendència. La línia poligonal es construeix unint els punts mitjans dels costats superiors dels rectangles.

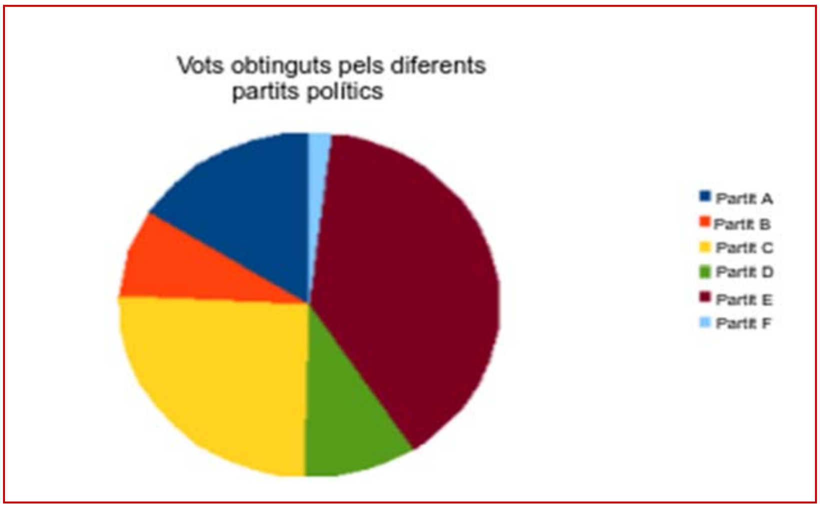


2.5. Diagrama de sectors

En algunes ocasions ens interessa fer-nos a la idea de la proporció que té cada resultat en relació amb els altres. S'utilitza molt amb variables qualitatives. Per exemple, aquesta representació s'utilitza per a mostrar els resultats d'unes les eleccions quan volem comparar els vots obtinguts pels diferents partits.

En un diagrama de sectors apareixen representats sectors circulars. L'angle d'aquests sectors és proporcional a la freqüència absoluta.

Reprenent l'exemple dels resultats obtinguts per diferents partits polítics representarem aqueixos mateixos resultats mitjançant un diagrama de sectors:



Activitats proposades

5. Reuneix a 10 amics. Reconta quantes monedes de cada valor (1cèntim, 2 cèntims, 5 cèntims, …) teniu entre tots. Representa mitjançant un gràfic adequat el nombre de monedes de cada classe que hi ha. Hi ha algun altre diagrama que et permeta veure quins tipus de monedes són més abundants en la mostra que has pres?

6. A la classe d'Educació Física el professor ha mesurat el temps que tarda cada alumne a recórrer 100 metres. Els resultats estan en aquesta taula:

14'92	13'01	12'22	16'72	12'06	10'11	10'58	18'58	20'07	13'15	20'10	12'43	17'51	11'59	11'79
16'94	16'45	10'94	16'56	14'87	17'59	13'74	19'71	18'63	19'87	11'12	12'09	14'20	18'30	17'64

Agrupa aquests resultats per classes començant en 10 segons i fent intervals de longitud 1 segon. Realitza una taula de freqüències i representa adequadament aquestes dades.

3. PARÀMETRES ESTADÍSTICS

3.1. Introducció

Segur que saps què és la mitjana de dos nombres i probablement saps calcular la mitjana d'una sèrie de dades. Però a més d'aqueixa mesura estadística hi ha altres mesures que poden ser interessants per a conéixer propietats de les dades que tenim.

Ara estudiarem les **mesures de centralització** (mitja, mitjana i moda) que ens proporcionen un valor de referència entorn del que es distribueixen les dades i les **mesures de dispersió** (recorregut, desviació mitjana, variància i desviació típica). Aquestes mesures ens indiquen com estan de separats les dades entorn de la mitja.

Exemple:

- Imagina que en dos exàmens de matemàtiques obtens un 6 i un 5. La mitja és 5.5. Suposa ara que les notes que has tingut són 10 i 1. La mitja també és 5.5 però hauràs d'estudiar-te la part en què has tret 1 per a recuperar. Les mesures de dispersió ens van a servir per a detectar quan tenim valors extrems, allunyats de la mitja.

3.2. Mesures de centralització

La **mitja** es calcula sumant tots els valors i dividint entre el nombre de dades.

Si x_1, x_2, ..., x_n són els valors que pren la variable estadística que estem considerant, la mitja es representa per$\bar{x}$ i es calcula mitjançant la fórmula:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Aqueixa suma es pot escriure abreviadament com $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$. El símbol $\sum$ s'utilitza habitualment per a representar sumes de diversos sumands. L'utilitzaràs molt a partir d'ara.

Per a calcular la **mitjana** s'ordenen totes les dades de menor a major i ens quedem amb el que ocupa la posició central. Si tenim un nombre parell de dades, prenem com a mitjana la mitja dels dos nombres que ocupen les posicions centrals. La representarem per *Me*.

La ***mitjana*** *Me* és un valor tal que el 50 % de les observacions són inferiors a ell.

Els ***quartils*** Q_1, Q_2 i Q_3 són els valors tals que el 25 %, 50 % i 75 % (respectivament) dels valors de la variable són inferiors a ell. Per tant la mitjana coincideix amb el segon quartil.

Usem el terme **moda** per a referir-nos al valor que més es repeteix. La denotem per *Mo*.

Activitats resoltes

- Continuem utilitzant les dades d'estatura corresponents als 12 jugadors de la Selecció Espanyola de Bàsquet *(veure secció 2.1 d'aquest capítol).* ***L'estatura mitja*** es calcula sumant totes les altures i dividint entre el nombre de dades.

2'03 + 2'06 + 2'16 + 1'90 + 1'99 + 2'08 + 1'93 + 1'91 + 2'11 + 1'91 + 1'96 + 2'03 = 24'07

2'0058.

En aquest exemple no podem parlar de **moda**, ja que no hi ha un únic valor que siga el que més es repeteix.

La **mitjana** en aquest cas és 2'01. Per a calcular-la ordenem totes les dades de menor a major i ens quedem amb la que ocupa la posició central. Com en aquest cas tenim un nombre imparell de dades, prenem com a mitjana la mitja aritmètica dels 2 que ocupen les posicions centrals.

Les dades, després d'ordenar-les, quedarien així:

1'90	1'91	1'91	1'93	1'96	1'99	2'03	2'03	2'06	2'08	2'11	2'16

Mitja d'ambdós = 2'01

Per a calcular els **quartils** hem de dividir el total de dades, en aquest exemple 12, entre 4, (o multiplicar per 0'25 que és el mateix) i obtenim 3. Per tant el primer quartil observem que està entre 1'91 i 1'93, fem la mitja i obtenim que Q_1 = 1'92. Per a calcular el tercer quartil multipliquem per 3 i dividim per 4, (o multipliquem per 0'75) i en aquest cas s'obté el valor que està entre 9, 2'06, i 10, 2'08, per la qual cosa Q_3 = 2'07.

3.3. Mesures de dispersió

Recorregut és la diferència entre la dada major i la dada menor. També es denomina **rang**.

Desviació mitja és la mitja de les distàncies de les dades a la mitja dels dades de què disposem.

$$\text{DM} = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \ldots + |x_n - \bar{x}|}{n} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}$$

Variança és la mitja dels quadrats de les distàncies de les dades a la mitja.

$$\text{Variança} = \frac{(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + \ldots + (x_n-\bar{x})^2}{n} = \frac{\sum (x_i-\bar{x})^2}{n}$$

Equivalentment (desenrotllant els quadrats que apareixen en l'expressió) es pot calcular mitjançant aquesta altra expressió:

$$\text{Variança} = \frac{\sum x_{i^2}}{n} - \bar{x}$$

Desviació típica és l'arrel quadrada de la variança.

Es representa per σ.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_{i^2}}{n} - \bar{x}}$$

Recorregut interquartílic o interval **interquartílic** és la distància entre el tercer i el primer quartil:

R = Recorregut interquartílic = $Q_3 - Q_1$.

Aquestes fórmules provenen de diferents formes de mesurar les distàncies. Per al càlcul de la desviació mitja s'usen valors absoluts, que és com es mesura la distància entre nombres a la recta real. La desviació típica té a veure amb la forma de mesurar distàncies al pla (recordem que la hipotenusa d'un triangle és l'arrel quadrada de la suma dels quadrats dels catets). No cal que comprengues ara d'on ixen aquestes fórmules però sí que és convenient que sàpies que no és per capritx dels matemàtics que les van inventar. Cada cosa al seu temps...

Activitats resoltes

- Tornem a usar les dades de l'exemple de la Selecció Espanyola amb què treballem.

Recorregut: 2'16 – 1'90 = 0'26 (metres). Açò és la diferència d'altures entre el jugador més alt i el més baix.

Per a calcular la **desviació mitja** primer calcularem la suma que apareix al numerador. Després dividirem entre el nombre de dades.

|2'03 – 2'0058| + |2'06 – 2'0058| + |2'16 – 2'0058| + |1'90 – 2'0058| + |1'99 – 2'0058| +

|2'08 – 2'0058| + |1'93 – 2'0058| + |1'91 – 2'0058| + |2'11 – 2'0058| + |1'91 – 2'0058| +

|1'96 – 2'0058| + |2'03 – 2'0058| = 0'0242 + 0'0458 + 0'0958 + 0'1042 + 0'0958 + 0'0758 + 0'0742 + 0'0158 + 0'1058 + 0'1542 + 0'9458 + 0'0242 = 0'87

Així la **desviació mitja** és 0'87/12 = 0'0725

Per a calcular la **variança** primer calcularem la suma que apareix al numerador, de forma semblant a com acabem de fer. Després acabarem dividint entre el nombre de dades.

$(2'03 – 2'0058)^2 + (2'06 – 2'0058)^2 + (2'16 – 2'0058)^2 + (1'90 – 2'0058)^2 + (1'99 – 2'0058)^2 +$

$(2'08 – 2'0058)^2 + (1'93 – 2'0058)^2 + (1'91 – 2'0058)^2 + (2'11 – 2'0058)^2 + (1'91 – 2'0058)^2 +$

$(1'96 – 2'0058)^2 + (2'03 – 2'0058)^2 = 0'08934$

Així la **variança** és 0'08934/12 = 0'00744

La **desviació típica** és l'arrel quadrada de la variança: $\sigma = \sqrt{0'00744}$ = 0'08628.

Recorregut interquartílic o **interval interquartílic** es calcula restant $Q_3 - Q_1$ = 2'07 – 1'92 = 0'15.

Les mesures de posició ens permeten realitzar un altre tipus de gràfic estadístic que s'anomena el ***gràfic de caixa***.

3.4. Càlcul detingut dels paràmetres estadístics

El més còmode per a calcular paràmetres estadístics és utilitzar un full de càlcul. Les calculadores científiques també incorporen funcions per a obtindre els principals paràmetres estadístics. Per a saber com usar la teua calculadora pots llegir el manual que ve amb ella.

Ara veurem com es poden utilitzar les taules de freqüències per a calcular la mitja i la variança.

Quan hi ha valors repetits en compte de sumar aqueix valor diverses vegades podem multiplicar el valor per la seua freqüència absoluta. També, el nombre de dades és la suma de les freqüències.

D'aquesta manera obtenim la següent **fórmula per a la mitja**

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i}$$

Anàlogament, la **variança** es pot calcular mitjançant

$$\text{Variança} = \sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}$$

o, alternativament, mitjançant l'expressió

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i{}^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2$$

(Aquestes dues fórmules són equivalents. La segona expressió s'obté desenrotllant els quadrats de la primera i simplificant).

Per tant la **desviació típica** es calcula:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}} = \sqrt{\frac{\sum f_i \cdot x_i{}^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2}$$

Activitats resoltes

- Les notes de 15 alumnes en un examen de matemàtiques es reflecteixen a la següent taula

7	7	6	6	10	1	4	5	5	3	9	5	5	8	6

Volem calcular la seua mitja i la seua variança.

En primer lloc, elaborem una taula de freqüències amb aqueixes dades:

x_i	f_i
1	1
2	0
3	1
4	1
5	4
6	3
7	2
8	1
9	1
10	1

Afegim una columna en què escriurem el resultat de multiplicar la freqüència i el valor, açò és, $xi \cdot fi$.

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
1	1	1
2	0	0
3	1	3
4	1	4
5	4	20
6	3	18
7	2	14
8	1	8
9	1	9
10	1	10
	$\sum f_i = n = 15$	$\sum x_i \cdot f_i = 87$

Sumant les freqüències (columna central) obtenim el nombre de dades.

Així la mitja és el quocient entre la suma de la columna de la dreta entre la suma de la columna central.

$$\bar{x} = \frac{87}{15} = 5'8$$

Per a calcular la variança afegirem una columna més a la taula anterior. En aqueixa columna escriurem el producte de la freqüència pel quadrat del valor.

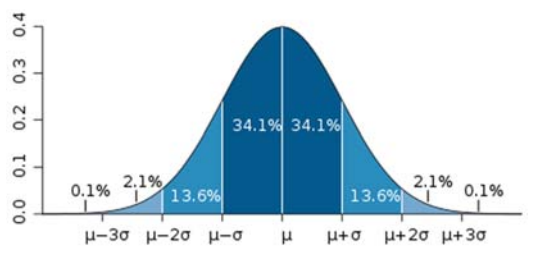
x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
1	1	1	1
2	0	0	0
3	1	3	9
4	1	4	16
5	4	20	100
6	3	18	108
7	2	14	98
8	1	8	64
9	1	9	81
10	1	10	100
	$\sum f_i = n = 15$	$\sum x_i \cdot f_i = 87$	$\sum x_i^2 \cdot f_i = 577$

Així la **variança** és $\sigma^2 = \frac{577}{12} - 5'8^2 = 14'4433$

I la **desviació típica** és $\sigma = \sqrt{14'4433} = 3'8004$.

3.5. Interpretació conjunta de la mitja i la desviació típica

Hem vist que la desviació típica ens mesura la distància de les dades respecte de la mitja. Ens dóna molta informació. Informa sobre com s'agrupen les dades al voltant de la mitja.



Mitja i desviació típica. Imatge de wikipedia

Si les dades que hem arreplegat tingueren una distribució normal (de moment no sabem el que açò significa exactament dins de l'Estadística, però pots suposar que significa això, que són normals, que no els passa gens estrany) resulta que a l'interval entre la mitja menys una desviació típica i la mitja més una desviació típica estan més del 68 % de les dades. A l'interval entre la mitja menys 2 desviacions típiques i la mitja més 2 desviacions típiques estan més del 95 % de les dades, i entre la mitja menys 3 desviacions típiques i la mitja més 3 desviacions típiques estan més del 99'7 % de les dades.

Es podria dir que quelcom, per exemple la intel·ligència d'una persona, l'altura d'una planta o el pes d'un animal... és normal si està dins d'aqueix interval $(\bar{x} - \sigma,\ \bar{x} + \sigma)$, que és intel·ligent, alt o pesat si està entre $(\bar{x} + \sigma,\ \bar{x} + 2\sigma)$, o que és un geni, gegant o molt pesat si està a l'interval $(\bar{x} + 2\sigma, \bar{x} + 3\sigma)$.

Observa que estem dient que pràcticament totes les dades disten de la mitja menys de 3 desviacions típiques i que més del 68 % disten menys d'una desviació típica. Açò serà de gran utilitat perquè connecta amb altres branques de l'Estadística. Fins ara hem estat descrivint el que ocorre. Ara podrem prendre decisions, inferir o predir amb una certa probabilitat el que ocorrerà. Per això estudiarem a continuació les probabilitats.

3.6. Diagrama de caixes o de bigots

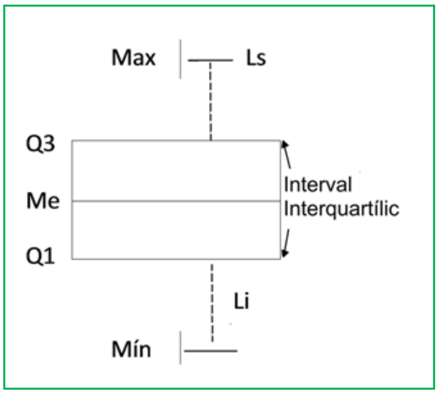
El **diagrama de caixes** és una representació gràfica en què s'utilitzen els quartils, la mitja, els valors màxims i mínims… intentant visualitzar tot el conjunt de dades.

Es forma un rectangle (o caixa) els costats del qual són els quartils (Q_1 i Q_3) i on s'assenyala al centre, la mitjana (*Me*). S'afigen dos braços (o *bigots*) on s'assenyalen els valors màxim (*Màx*) i mínim (*Mín*).

Es poden calcular, a més, uns límits superior i inferior. L'inferior, L_i; és Q_1 – 1'5 per l'interval interquartílic, i el superior Ls és Q_3 + 1'5 per l'interval interquartílic.

Exemple

- Neus ha tingut en Matemàtiques les notes següents: 8, 4, 6, 10 i 10. Calcula el seu recorregut, la variança, la desviació típica, els quartils i l'interval interquartílic.



Ordenem les dades: 4 ≤ 6 ≤ 8 ≤ 10 ≤ 10, i calculem que:

Mitjana = *Em* = 8.

Q_1 = 6. Q_3 = 10.

Interval interquartílic = 10 – 6 = 4.

Els bigots ens indiquen:

Màx = 10. Mín = 4.

Ls = Q3 + 4*1'5 = 16. Li = Q1 – 4*1'5 = 0.

En aquest exemple el màxim és igual a 10, que és menor que el possible extrem superior, igual a 16. El mínim és 4, major que l'extrem inferior, per tant no hi ha *valors atípics* que siguen majors que el límit superior o menors que el límit inferior. Els extrems dels bigots, al nostre exemple són 10 i 4.

El diagrama de caixa és el de la figura del marge.

4. INTRODUCCIÓ AL CÀLCUL DE PROBABILITATS

4.1. Conceptes bàsics en probabilitat

Tots els dies apareixen a la nostra vida fets que tenen a veure amb la probabilitat. Si juguem al parxís, intuïm que *més o menys* una de cada 6 vegades eixirà un 5, amb la qual cosa podrem traure una fitxa a recórrer el tauler. Al 'Monopoly' traure un doble tres vegades seguides ens envia a la presó ("sense passar per la casella d'eixida"). Açò no ocorre moltes vegades; no obstant això, tots els que hem jugat a açò hem anat a la presó per aqueix motiu.

La **probabilitat** és una mesura de com és de factible que tinga lloc un determinat succés.

Per a estudiar la probabilitat, hem d'introduir alguns noms. Ho anem a fer amb ajuda d'un cas concret.

Exemple

- Imaginem que tenim una bossa amb 5 boles: 2 blanques, 2 roges i una negra. Fem el següent **experiment aleatori**: ficar la mà a la bossa i mirar el color de la bola que ha eixit.

Hi ha 3 *casos* possibles: "que la bola siga blanca", "que la bola siga roja" o "que la bola siga negra". Abreviadament els representarem per *blanca*, *roja* o *negra* (també podrem representar els colors o escriure B, R o N; recorda que en matemàtiques sempre s'ha de simplificar, inclús la manera d'escriure).

L'espai mostral és el conjunt de tots els casos possibles : {B, R, N}.

Els diferents **successos** són els subconjunts de l'espai mostral. Al nostre exemple els successos possibles són {B},{R}, {N}, {B,R}, {B,N}, {R,N}, {B,R,N}.

És segur que en el nostre experiment la bola que traiem és "blanca", "negra" o "roja". Per això a l'espai mostral se l'anomena també **succés segur**.

Recorda aquests noms:

Un **experiment aleatori** és una acció (experiment) el resultat de la qual depèn de l'atzar.

A cada un dels resultats possibles d'un experiment aleatori li cridarem **cas** o **succés individual**.

El conjunt de tots els casos possibles s'anomena **espai mostral** o **succés segur**.

Un **succés** és un subconjunt de l'espai mostral.

Exemples.

- Baralla espanyola de 40 cartes. Experiment: traiem una carta a l'atzar i mirem el seu pal.

  Espai mostral {ors, copes, espases, bastos}

1 Experiment: llancem simultàniament 1 moneda d'euro i una de 2 euros a l'aire.

  Espai mostral:{Cara-Cara, Cara-Creu Creu-Cara, Creu-Creu}

2 Experiment: llancem simultàniament 2 monedes d'1 euro (indistingibles)

Espai mostral: {Ixen 2 cares, Ixen 2 creus, Ix 1 cara i una creu}

3 Experiment: llancem una moneda d'1 euro i apuntem què ha eixit; la tornem a llançar i apuntem el resultat.

Espai mostral: {CC, CX, XC, XX}

4 Experiment: llancem simultàniament dos daus i sumem els nombres que es veuen a les cares superiors.

Espai mostral:{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

5 Experiment: llancem un dau usual i sumem els nombres que apareixen a la cara superior i la cara inferior (la que no es veu, que està sobre la taula).

Espai de successos: {7}

Als exemples anteriors, (2) i (4) són equivalents: els possibles resultats del llançament de 2 monedes que es distingeixen són els mateixos que els del llançament d'una mateixa moneda dues vegades (per exemple, equiparem el resultat del llançament de la moneda d'1 euro de l'exemple 3 amb el primer llançament de la moneda de l'exemple 4 i el resultat del llançament de la moneda de 2 euros amb el segon llançament).

A l'experiment 6 sempre ix el mateix resultat (per alguna raó els punts en els daus usuals es distribueixen sempre de manera que les cares oposades sumen 7). Tècnicament aquest no és un experiment aleatori, ja que el resultat no depèn de l'atzar.

Activitats proposades

7. Para cada un dels exemples 1 a 5 anteriors indica 3 successos diferents que no siguen successos individuals.

8. En una bossa tenim 10 boles roges numerades de l'1 al 10. Es fan els dos experiments següents:

EXPERIMENT A: Es trau una bola de la bossa i es mira el seu color.

EXPERIMENT B: Es trau una bola de la bossa i es mira el seu nombre.

Quin d'aquests experiments no és un experiment aleatori? Per què?

9. Per a l'experiment que sí que és un experiment aleatori indica el seu espai mostral.

10. Una baralla francesa té 52 cartes, distribuïdes en 13 cartes de piques, 13 de cors, 13 de trèvols i 13 de diamants. Les piques i els trèvols són cartes negres mentres que els cors i els diamants són cartes roges. Es mescla la baralla, es talla i es fa l'experiment següent: agafar les dues cartes que han quedat dalt del tot i observar de quin color són.

Descriu l'espai mostral.

4.2. Càlcul de probabilitats

Ja hem indicat que la probabilitat és una mesura que ens indica el grau de confiança que ocórrega un determinat succés.

La **probabilitat** s'expressa mitjançant un nombre comprés entre 0 i 1.

Si aqueix nombre està pròxim a 0 direm que és un succés improbable (ull, improbable no vol dir que siga impossible), mentres que si està pròxim a 1 direm que aqueix succés serà molt més probable.

Exemple

- En una bossa que conté 20 boles blanques introduïm una bola negra (indistingible al tacte). Mesclem bé les boles de la bossa, i realitzem l'experiment consistent a ficar la mà a la bossa i traure una bola.

Sense que hagem estudiat res formalment sobre probabilitat. Què penses que és més probable, que la bola treta és blanca o que és negra? Estarem d'acord en què és més probable traure una bola blanca.

Ara ja sí que podem plantejar-nos una pregunta: En quina mesura és més probable traure una bola blanca?

No és difícil de calcular. Les dades que tenim són els següents

b) la bossa té 21 boles

- 1 bola és negra
- 20 boles són blanques

La probabilitat de traure la bola negra és 1 d'entre 21. La probabilitat de traure una bola blanca és de 20 entre 21.

El que acabem d'utilitzar és conegut com a **Llei de Laplace.** Si tots els casos d'un espai mostral són **equiprobables** (açò és, tenen la mateixa probabilitat d'ocórrer), i S és un succés d'aqueix experiment aleatori es té que

$$P(S) = \frac{nombre de casos favorables al succés S}{nombre de casos possibles}$$

Exemple.

- Mesclem una baralla espanyola de 40 cartes (els pals són ors, copes, espases i bastos i en cada pal hi ha cartes numerades de l'1 al 7 a més d'una sota, un cavall i un rei).

Es realitza l'experiment consistent a tallar *la baralla i quedar-nos amb la carta superior*.

Considerarem els successos següents:

a) Obtindre una figura

➢ Obtindre una carta amb un nombre imparell

- Obtindre una carta d'espases
- Obtindre una carta d'espases o una figura
- Obtindre la sota d'ors

En principi les cartes no estaran marcades, amb la qual cosa la probabilitat que isca cada una d'elles és la mateixa. Açò és, estem davant d'un experiment aleatori amb tots els casos equiprobables.

a) A la baralla hi ha 12 figures (3 per cada pal). Així

 Casos favorables: 12

 Casos possibles: 40

 Probabilitat: 12/40= 3/10

b) Per cada pal hi ha 4 cartes amb nombres imparells: 1, 3, 5 i 7.

 Casos favorables: 16

 Casos possibles: 40

 Probabilitat: 16/40=2/5

c) Hi ha 10 cartes d'espases a la baralla

 Casos favorables: 10

 Casos possibles: 40

 Probabilitat: 10/40=1/4

d) Hi ha 10 cartes d'espases i a més altres 9 figures que no són d'espases (clar, les 3 figures d'espases ja les hem comptat).

 Casos favorables: 19

 Casos possibles: 40

 Probabilitat: 19/40

e) Només hi ha una sota d'ors

 Casos favorables: 1

 Casos possibles: 40

 Probabilitat: 1/40

El que és capaç de calcular probabilitats ràpidament té avantatge en alguns jocs en què es mescla atzar amb estratègia. Per exemple, jocs de cartes o de dòmino. Si sabem quines cartes o fitxes s'han jugat podem estimar la probabilitat que un altre jugador tinga una determinada jugada. Òbviament en aqueixos casos no *quantifiquem* (no fem els càlculs exactes) però sí que *estimem* si tenim la probabilitat al nostre favor o en contra nostre.

Per a aprendre més…

Girolamo Cardano (1501-1576) va ser un personatge inquiet i prolífic. A més de dedicar-se a les matemàtiques era metge, però també era un jugador. De fet ell va ser qui va escriure el primer treball que es coneix sobre jocs d'atzar. Un segle després el Caballer de Meré, un conegut jugador, va plantejar a Blas Pascal diversos problemes que li apareixien a les seues partides. Un dels problemes que li va plantejar és el del repartiment dels guanys quan una partida s'ha d'interrompre. Aquest problema ja havia sigut tractat amb anterioritat per Lucca Pacioli (el matemàtic que va inventar la taula de doble entrada per a ajudar als Medici a portar la comptabilitat de la seua Banca).

El problema enunciat i resolt per Pacioli és aquest:

- Dos equips juguen a la pilota de manera que gana el joc el primer equip que gana 6 partits. L'aposta és de 22 ducats, que se'ls portarà el guanyador. Per algun motiu cal interrompre el joc quan un equip ha guanyat 5 partits i l'altre 3. Es vol saber com repartir els 22 ducats de l'aposta, d'una manera justa.

Pensa-ho!

A pesar d'haver passat a la història de les matemàtiques, la solució que va donar Pacioli a aquest problema hui no es consideraria correcta per no tindre en compte la probabilitat. Què proposes tu? Aquest és un problema curiós, perquè no tenim totes les dades ni coneixem les probabilitats que intervenen a la seua resolució, però és un bonic exemple per a pensar en equip i discutir sobre el tema. Dir què és i què no és just és molt complicat.

Activitats resoltes

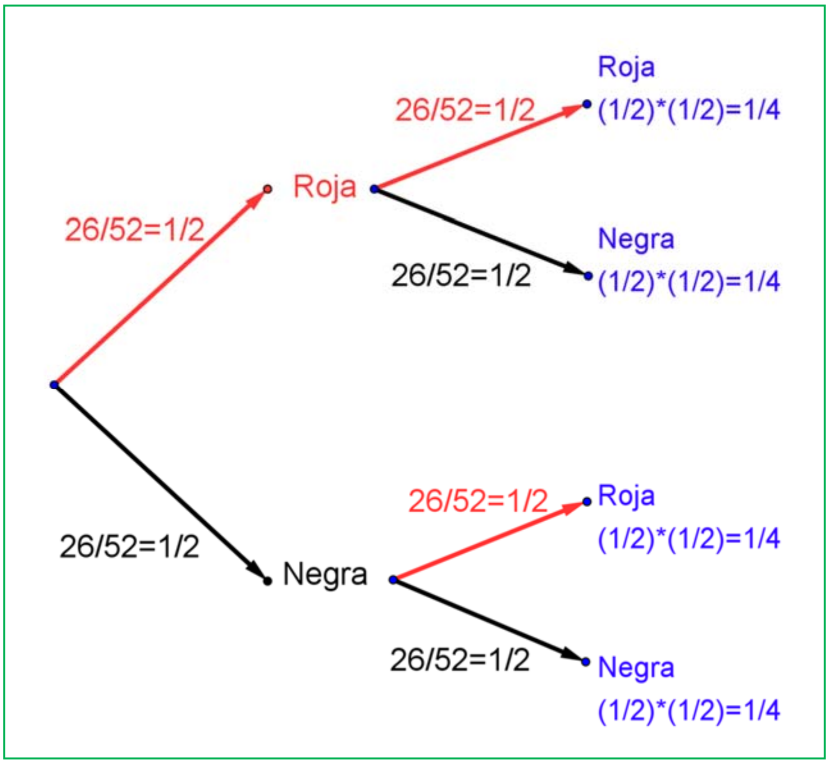
- Una bossa de boles conté 26 negres i 26 roges. Es mescla el contingut de la bossa, es fica la mà i es trau una bola, es mira el color i es torna a la bossa. A continuació es trau una altra bola i es mira el color. Quina és la probabilitat que hagen eixit una bola roja i una bola negra?

Abans de continuar llegint, pensa-ho. Si t'equivoques no passa res: el sentit de probabilitat no el tenim massa desenrotllat, però aquest és el moment de fer-ho.

Aquest problema l'hem plantejat moltes vegades a altres estudiants. Alguns diuen que la probabilitat és 1/3 perquè hi ha 3 casos possibles: Roja-Roja, Negra-Negra i Roja-Negra. Aqueixa resposta no és correcta.

En realitat el succés traure *una bola de cada color* consta de 2 casos Roja-Negra i Negra-Roja. Depenent de com haguérem escrit l'espai mostral o de com haguérem plantejat el problema aqueix detall es podria veure amb major o menor claredat.

Així, la probabilitat de traure una bola de cada color és, en realitat 1/2.



Si no t'ho creus pots fer un experiment: serà difícil que tingues 26 boles negres i 26 boles roges, però sí que és fàcil que tingues una baralla francesa. Mescla-la, talla i mira el color de la carta que ha quedat dalt al muntó. Apunta-ho. Torna a deixar les cartes en la baralla, torna a mesclar, talla de nou i mira el color de la carta que ha quedat dalt ara. Apunta els colors. Repeteix aquest experiment moltes vegades: 20, 50 o 100.

Si tens en compte els resultats veuràs que, aproximadament, la meitat de les vegades les dues cartes són del mateix color i l'altra meitat les cartes són de colors diferents. Amb això, hem pogut "comprovar" que la probabilitat d'aqueix succés era 1/2.

Una altra forma que et pot ajudar a raonar sobre aquest problema, i molts altres de probabilitat, és confeccionar un **diagrama en arbre**. La primera bola que traiem té una probabilitat de ser Roja igual a 26/52 = 1/2. Aqueix nombre l'escrivim a la branca de l'arbre. Si tornem a la bossa la bola i tornem a traure una altra bola de la bossa, la probabilitat que siga Roja torna a ser 26/52 = 1/2. Completem amb idèntic raonament la resta de les branques.

La probabilitat que les dues boles que hagem tret siguen roges és el producte de les seues branques: (1/2)·(1/2) = 1/4. La mateixa probabilitat obtenim per als successos Negra-Negra, Negra-Roja i Roja-Negra. La probabilitat de Roja-Negra és per tant 1/4, igual a la de Negra-Roja. Com són successos elementals la probabilitat que les dues boles siguen de distint color és la suma: 1/4 + 1/4 = 1/2.

4.3. Probabilitat i freqüència relativa

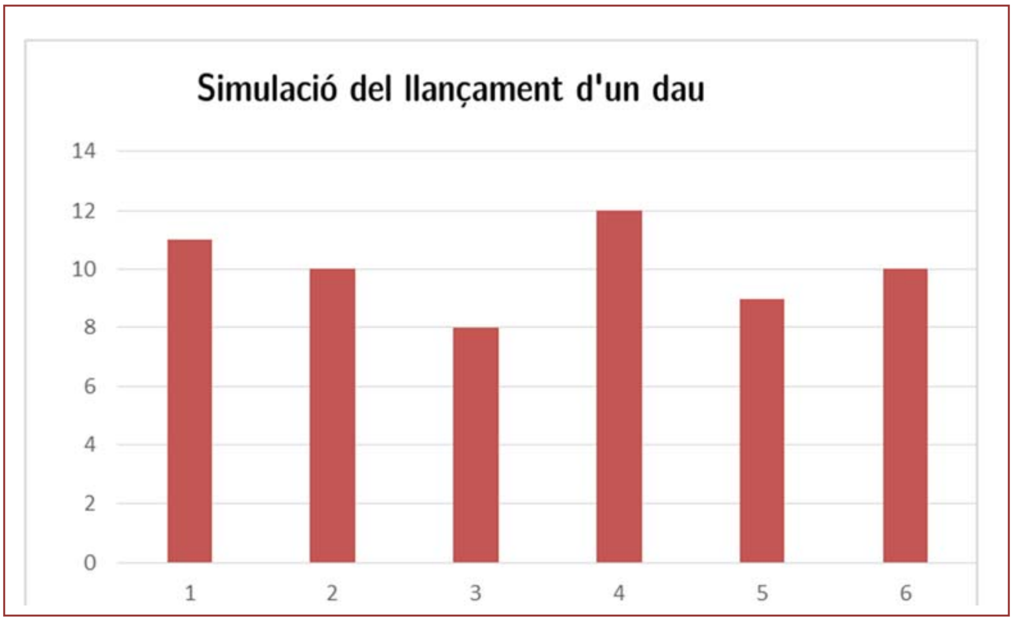
Al principi del capítol, quan introduíem els principals conceptes estadístics, parlàvem de la freqüència. A aqueixa freqüència se l'anomena **freqüència absoluta** per a distingir-la d'un altre concepte, que és molt més pròxim a la probabilitat.

Anomenarem **freqüència relativa** d'un resultat d'un experiment aleatori a la seua freqüència absoluta dividit entre el nombre de repeticions de l'experiment.

Exemple

- Llança un dau 60 vegades, copia aquesta taula al teu quadern i apunta el que ix:

Si dibuixes un diagrama de barres amb els resultats de l'experiment obtindràs un paregut a aquest:

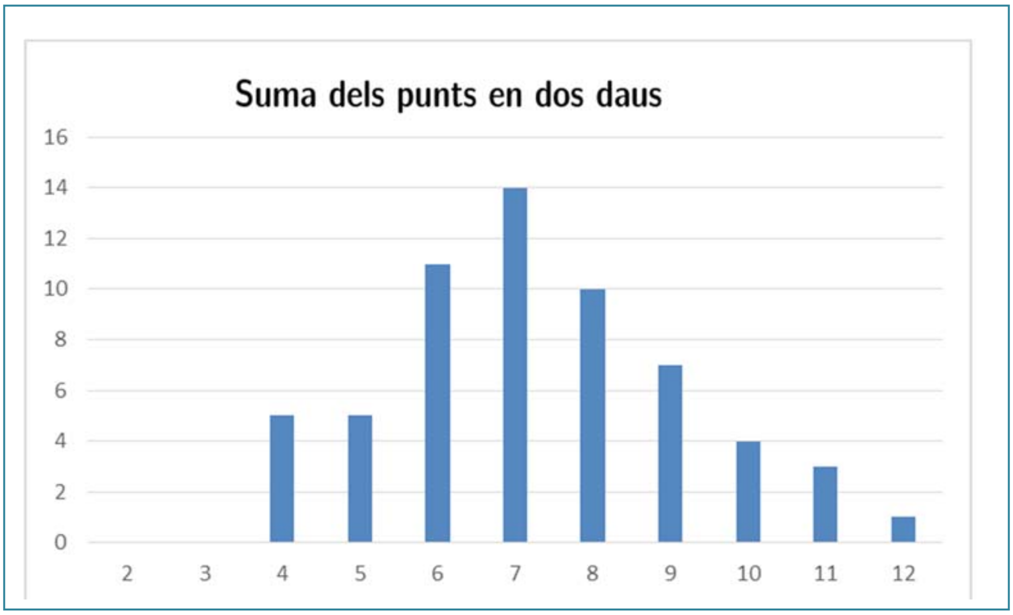


La freqüència relativa de cada un dels casos és prou pareguda a la probabilitat d'aqueix cas (que és 1/6).

Exemple.

- Feix ara un altre experiment: llança 2 daus 60 vegades i apunta la suma dels valors dels dos daus en aquesta taula.

Dibuixa ara un diagrama de barres. El que obtindràs serà un paregut a aquest:



Si la probabilitat “s’ha de parèixer” a les freqüències relatives, en aquest cas veiem que el succés *que la suma done 7* és més probable que qualsevol dels altres. I molt més probable que *que la suma done 2* o *que la suma done 12*.

La **llei dels grans nombres** ens diu que quan es repeteix moltes vegades un experiment aleatori la freqüència relativa de cada succés S s’aproxima a la seua probabilitat. Com més gran siga el nombre de repeticions, millor va sent l’aproximació.

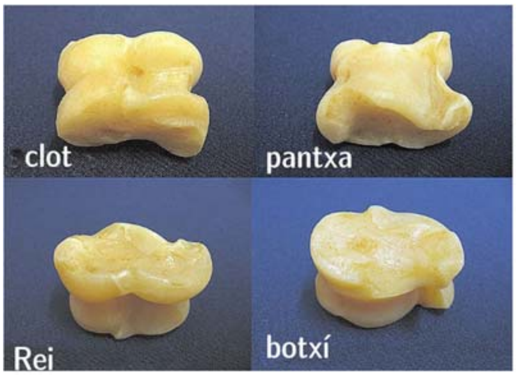
En aquest cas l’útil és utilitzar les freqüències relatives per a estimar probabilitats quan aquestes no són conegudes.

Activitats proposades

11. En alguns llocs d’Espanya es continua jugant a la taba. La taba és un os de corder que no és regular. Pot caure en quatre posicions distintes. Podem pensar en ella com si fóra un dau “rar”.

Considera l’experiment “llançar la taba a l’aire i veure la que marca la seua cara superior: clot, panxa, rei i botxí”.

Aproxima la probabilitat de cada un dels casos d’aquest experiment aleatori.



(Imatge: Wikimedia Commons)

12. La teua calculadora probablement tindrà una funció que serveix per a generar nombres aleatoris. Normalment dóna un nombre comprés entre 0 i 1.

Realitza l'experiment aleatori "genera un nombre aleatori i apunta el seu segon decimal". Fes 40 repeticions d'aquest experiment. Dibuixa un histograma de freqüències.

13. La probabilitat no és un concepte intuïtiu. Per a això farem una prova. Considerarem l'experiment aleatori *llançar una moneda*. Copia la taula al teu quadern

14. Escriu en la 1ª fila d'aquesta taula el que tu creus que eixiria en repetir l'experiment 30 vegades. Pensa-ho i ompli la taula. Com tu vulgues (inventa-t'ho, però "amb sentit").

1) A la 2ª fila de la taula escriu el resultat real de 30 llançaments de la moneda.

Què observes en ambdós casos? Alguna pauta? Presta atenció a aquestes qüestions per a cada una de les files de la taula.

Hi ha més o menys 15 cares i 15 creus?

Apareixen grups seguits de cares o creus?

Quin és el nombre més gran de cares que han eixit seguides? I el de creus?

Normalment quan "t'inventes" els resultats sí que sols posar la meitat de cares i la mitat de creus. En un experiment aleatori aquests nombres estan prop de la meitat però no solen ser la meitat exacta.

Quan t'ho inventes, en general poses pocs grups seguits de cares o creus.

El cervell ens enganya i en temes probabilístics hem d'educar-lo molt més. Per això aquest tema és molt important, encara que siga el que moltes vegades es queda sense donar. Ens ajuda a què, com a ciutadans, no ens enganyen. Ni amb loteries, ni amb cartes, ni amb estadístiques electorals.

CURIOSITATS. REVISTA

Un problema resolt: Les tres ruletes

Disposem de tres ruletes A, B i C cada una d'elles dividida en 32 sectors iguals amb distints punts:

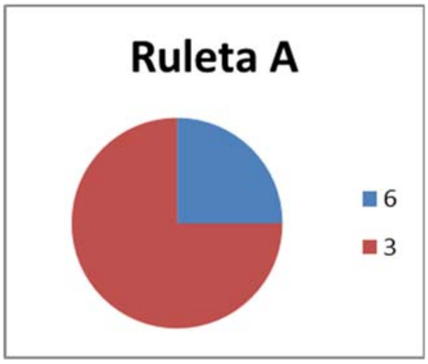
A: 8 sectors amb la xifra 6 i 24 sectors amb la xifra 3.

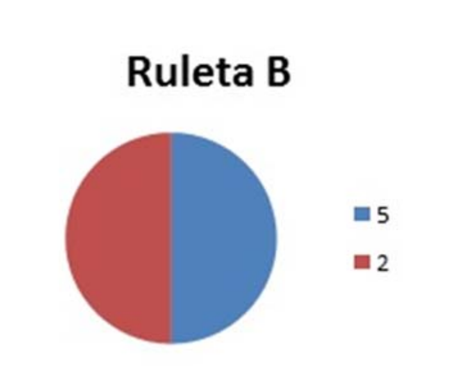
B: 16 sectors amb la xifra 5 i 16 sectors amb la xifra 2.

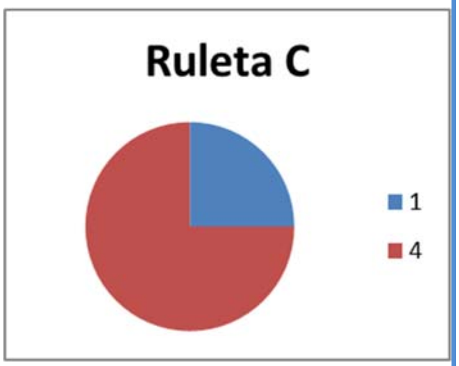
C: 8 sectors amb la xifra 1 i 24 sectors amb la xifra 4.

Dos jugadors seleccionen una ruleta cada u. Guanya qui obtinga major puntuació amb la ruleta.

Qui té avantatge en triar ruleta, la persona que tria primer o la que tria en segon lloc?







Solució: "Les tres ruletes"

Fes un **diagrama d'arbre** i comprova que:

Jugant amb la Ruleta A i la Ruleta B.

P(guanyar A) = $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$ P(guanyar B) = $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

Guanya el que juga amb la Ruleta A.

Jugant amb la Ruleta A i la Ruleta C.

P(guanyar A) = $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{16}$ P(guanyar C) = $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$

Guanya el que juga amb la Ruleta C.

Jugant amb la Ruleta B i la Ruleta C

P(ganar B) = $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$ P(ganar C) = $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$

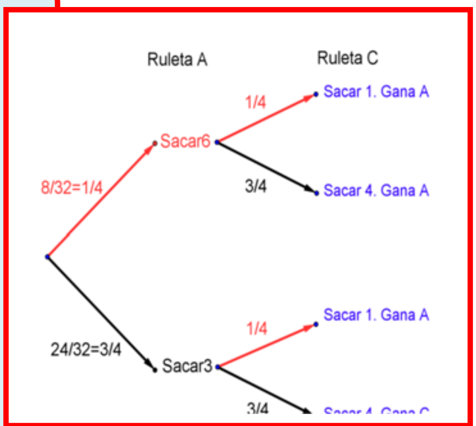
Guanya el que juega amb la Ruleta B.

Guanya el jugador que eligeix en segon lloc:

Si el primer eligeix la Ruleta A → El segon eligeix la Ruleta C i guanya.

Si el primer eligeix la Ruleta B → El segon eligeix la Ruleta A i guanya

Si el primer eligeix la Ruleta C → El segon eligeix la Ruleta B i guanya



Breu història de la Probabilitat

Girolamo Cardano (1501-1576)va ser un personatge inquiet i prolífic. A més de dedicar-se a les matemàtiques era metge, però també era un jugador. De fet ell va ser qui va escriure el primer treball que es coneix sobre jocs d'atzar.

Un segle després el Caballer de Méré li va plantejar a Blaise Pascal alguns problemes sobre **jocs** com el següent:

Un jugador intenta obtindre un 1 en 8 llançament successius d'un dau, però el joc s'interromp després de 3 llançaments fallits. En quina proporció ha de ser compensat el jugador?

Pascal va escriure a Fermat sobre aquest problema i la correspondència intercanviada es pot considerar com l'inici de la Teoria de Probabilitats, però no van publicar per escrit les seues conclusions. Aquest problema ja havia sigut tractat amb anterioritat per Lucca Pacioli (el matemàtic que va inventar la taula de doble entrada per a ajudar als Medici a portar la comptabilitat de la seua Banca).

Huygens en 1657 va publicar un breu escrit *"Els jocs d'atzar"* on narra la dita correspondència.

Però el primer llibre sobre Probabilitat és de 1713 de Jacques Bernoulli, *"L'art de la conjectura"* . En ell s'enuncia **la llei dels grans nombres** que ve a dir que la probabilitat d'un succés s'acosta a les freqüències relatives quan el nombre d'experiments és gran. Conéixer açò va portar a grans jugadors a guanyar al Casino de Montecarlo, com es narra més avall. L'Estadística i La Probabilitat es van usar en problemes socials com defendre la **vacunació de la pigota,** l'educació pública ...a la Il·lustració Francesa.

Fins ací, ja saps resoldre tots els problemes històrics. Però hi ha altres més difícils, que requereixen més coneixements de Matemàtiques, com el de **l'agulla de Buffon**, que s'ha utilitzat per a calcular xifres de π:

Tenim un feix de rectes paral·leles equidistants a una distància d. Es llança una agulla a l'atzar de grossor menyspreable i longitud L. Llavors la probabilitat que l'agulla talle alguna de les rectes és: 2L/πd.

La ruleta

William Jaggers va arribar a Montecarlo amb uns pocs francs a la butxaca i, durant un mes va anotar els nombres que eixien en cada ruleta, i en quatre dies va guanyar dos milions quatre-cents mil francs. *Jaggers* va aconseguir trencar la banca a *Montecarlo* analitzant les freqüències relatives de cada nombre de la ruleta i observant que s'havia desgastat alguna cosa del mecanisme d'una d'elles, amb la qual cosa tots els valors no tenien la mateixa probabilitat. Va apostar als nombres més probables i va

Luca Pacioli

Luca Pacioli (1445 – 1517), de nom complet **Frai Lucca Bartolomeo de Pacioli** o **Lucca Di Borgo San Sepolcro**, el cognom del qual també apareix escrit com ***Paccioli*** i ***Paciolo*** va ser un frare franciscà i matemàtic italià, precursor del càlcul de probabilitats. Ja hem parlat d'ell en aquestes revistes pels seus treballs sobre la proporció àuria o divina proporció com ell la va anomenar.

Va escriure un llibre amb 36 capítols sobre **comptabilitat** on utilitza la partida doble o taula de doble entrada per a ajudar als Medici a portar la comptabilitat de la seua Banca, defineix les seues regles, com ara no hi ha deutor sense creditor, o que la suma del que es deu ha de ser igual al que s'abona. No va ser el seu inventor, però sí el seu divulgador.

Ducat

El problema enunciat i resolt per Pacioli és aquest:

Dos equips juguen a la pilota de manera que guanya el joc el primer equip que guanya 6 partits. L'aposta és de 22 ducats, que se'ls portarà el guanyador. Per algun motiu cal interrompre el joc quan un equip ha guanyat 5 partits i l'altre 3. Es vol saber com repartir els 22 ducats de l'aposta, d'una manera justa.

Lucca sabia de proporcions, i la solució que va donar hui no es considera vàlida. No sabia probabilitats! Però tu, sí.

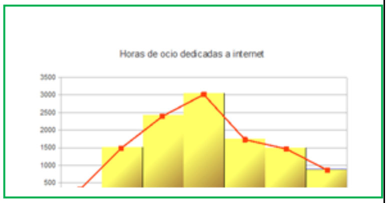
Partim de la hipòtesi que cada un dels jugadors té la mateixa probabilitat de guanyar: 1/2. Anomenem A al jugador que ja ha guanyat 5 partides i B al què porta guanyades 3.

Si feren una nova partida podria guanyar A amb probabilitat 1/2 o B amb la mateixa probabilitat. Si guanya A ja es porta la bossa. Si guanya B llavors B portaria 4 jugades guanyades i A 5. Es continua el joc. Pot guanyar A o B. Observa el diagrama d'arbre.

La probabilitat que guanye B és (1/2)·(1/2)·(1/2)

Com repartiries els 22 ducats?

RESUM

Població	Col·lectiu sobre el qual es fa l'estudi	Estudiants de tot Madrid
Mostra	Subconjunt de la població que permeta obtindre característiques de la població sencera.	Alumnes es 3º d'ESO seleccionats
Individu	Cada un dels elements de la població o mostra	Joan Pérez
Variables estadístiques	Quantitativa discreta Quantitativa contínua Qualitativa	Nombre de peu que falca Estatura Esport que practica
Gràfics estadístics	Diagrama de barres Histograma de freqüències Polígon de freqüències Diagrama de sectors 	
Mitja	$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n$	Amb les dades: 8, 2, 5, 10 i 10 *Mitja* = 35/5 = 7
Moda	És el valor més freqüent	*Mo* = 10
Mitjana	Deixa per davall la mitat	4 < 6 < **8** < 10 = 10. *Me* = 8.
Rang o recorregut	És la diferència entre la dada major i la dada menor.	10 – 2 = 8
Desviació mitjana	És la mitjana de les distàncies de les dades a la mitja de les dades de què disposem.	(|8–7|+|2–7|+|5–7|+|10–7|+|10–7|)/5 =(1+5+2+3+3)/5 = 14/5 = DM
Variança	És la mitja dels quadrats de les distàncies de les dades a la mitja: $\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2}{n} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_{i2}}{n} - m^2}$	V = (1 + 25 + 4 + 9 + 9)/5 = 47/5 = 9,4
Desviació típica	És l'arrel quadrada de la variança.	$\sigma = \sqrt{47/5} = 3{,}06$
Probabilitat	Valor entre 0 i 1 que ens dóna una mesura de com siga de factible que es verifique un determinat succés.	P(3) = 1/6 en tirar un dau
Espai mostral	El conjunt de tots els casos possibles	{1, 2, 3, 4, 5, 6}
Succés	Subconjunt de l'espai mostral	Traure parell: {2, 4, 6}
Llei de Laplace.	$P(S) = \frac{Nombre de casos favorables al succés}{Nombre de casos possibles}$	*P*(parell) = 3/6 = 1/2.

EXERCICIS I PROBLEMES

Estadística

1. S'han arreplegat les dades sobre el nombre de fills que tenen 20 matrimonis. Com és la variable utilitzada? Escriu una taula de freqüències de les dades arreplegades i representa les dades en un diagrama de sectors:

3, 1, 1, 2, 0, 2, 3, 1, 1, 1, 1, 0, 3, 2, 1, 2, 1, 2, 2, 3.

2. Amb les dades del problema anterior calcula la mitja, la mitjana, la moda i els quartils.
3. Amb les dades del problema anterior calcula el rang, la desviació mitja, la variança, la desviació típica i l'interval interquartílic.
4. Representa aqueixes dades en un diagrama de caixes.
5. La següent taula expressa les estatures, en metres, de 1000 soldats:

Estatura	1,50 - 156	1,56 – 1,62	1,62 - 168	1,68 - 1,74	1,74 - 1,80	1,80-1,92
Nr de soldats	10	140	210	340	210	90

a) Representa les dades en un histograma.

b) Calcula la mitja i la desviació típica.

c) Determina l'interval on es troben la mitjana.

6. Es pregunta a un grup de persones pel nombre de televisors que hi ha en el seu llar i els resultats són:

Nombre de televisors	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Nombre de llars	2	27	15	4	2	1

Quin tipus de variables és? Representa les dades a la representació que et parega més adequada.

Calcula la mitja i la desviació típica.

7. Amb les dades del problema anterior calcula la mitjana i l'interval interquartílic.
8. En un centre escolar s'ha arreplegat informació sobre el nombre d'ordinadors a les cases de 100 famílies i s'han obtingut els resultats següents:

Nombre ordinadors	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Nombre de famílies:	24	60	14	1	1

Representa les dades en un diagrama de barres i calcula la mitja, la mitjana i la moda.

9. Amb les dades del problema anterior calcula el rang, la desviació mitja, la variança i la desviació típica. Fes un diagrama de caixes.
10. Es pregunta a un grup de persones pel nombre de vegades que han visitat el dentista a l'últim any. Les respostes obtingudes s'arrepleguen en la taula següent:

Nombre de visites:	1	2	3	4	5
Nombre de persones:	13	18	7	5	7

Representa les dades en un diagrama de sectors i calcula la mitja, la mitjana i la moda.

11. Es pregunta a un grup de persones pel nombre de vegades que han visitat el dentista a l'últim any. Les respostes obtingudes s'arrepleguen a la taula següent:

Nombre de visites:	1	2	3	4	5
Nombre de persones:	13	18	7	5	7

Calcula el rang, la desviació mitja, la variança i la desviació típica.

12. En les eleccions de 2014 al Parlament Europeu es van obtindre els següents escons per grup parlamentari (DM: demòcrata – cristians; S: socialistes; L: Liberals; V: verds; C: conservadors; I: esquerra unitària; LD: Llibertat i democràcia; NI: No inscrits; Altres).

Partits	DM	S	L	V	C	I	LD	NI	Altres	Total
Escons	213	190	64	52	46	42	38	41	65	751

Què representació de les dades et pareix més adequada? Pots calcular la mitja o el rang? Quin tipus de variable és la de la taula?

13. En les eleccions de 2014 al Parlament Europeu es van obtindre els següents escons per algun dels estats membres:

Estat	Alemanya	Espanya	França	Itàlia	Polònia	Regne Unit	Portugal	Grècia	Altres	Total
Escons	96	54	74	73	51	73	21	21		751

Quina representació de les dades et pareix més adequada? Pots calcular la mitja o el rang? Quin tipus de variable és la de la taula? Determina el nombre d'escons dels altres països membres de la Unió Europea.

14. En les eleccions de 2004, 2009, 2014 al Parlament Europeu es van obtindre els següents percentatges de vots per alguns dels estats membres:

Estat	Alemanya	Espanya	França	Itàlia	Regne Unit	Portugal	Grècia	Bèlgica	% total
2004	43	45’14	42’76	71’72	38’52	38’6	63’22	90’81	45’47
2009	43’27	44’87	40’63	65’05	34’7	36’77	52’61	90’39	43
2014	47’6	45’9	43’5	60	36	34’5	58’2	90	43’09

Quina representació de les dades et pareix més adequada? Pots calcular la mitja o el rang? Quin tipus de variable és la de la taula? Ordena als països de major a menys percentatge de votants a les eleccions de 2014.

15. Amb les dades del problema anterior sobre les eleccions de 2004’ 2009’ 2014 al Parlament Europeu es van obtindre els següents percentatges de vots per alguns dels estats membres:

Estat	Alemanya	Espanya	França	Itàlia	Regne Unit	Portugal	Grècia	Bèlgica	% total
2004	43	45’14	42’76	71’72	38’52	38’6	63’22	90’81	45’47
2009	43’27	44’87	40’63	65’05	34’7	36’77	52’61	90’39	43
2014	47’6	45’9	43’5	60	36	34’5	58’2	90	43’09

Representa en un polígon de freqüències els percentatges de participació del total dels estats membres.

16. Amb les dades del problema anterior sobre les eleccions de 2004, 2009, 2014 al Parlament Europeu es van obtindre els següents percentatges de vots per alguns dels estats membres:

Estat	Alemanya	Espanya	França	Itàlia	Regne Unit	Portugal	Grècia	Bèlgica	% total
2004	43	45’14	42’76	71’72	38’52	38’6	63’22	90’81	45’47
2009	43’27	44’87	40’63	65’0	34’7	36’77	52’61	90’39	43

				5					
2014	47'6	45'9	43'5	60	36	34'5	58'2	90	43'09

Separa els Estats Membres en dos grups, els que van tindre un percentatge superior al percentatge mitjà i els que el van tindre tindre menor en 2004. Fes el mateix per a 2014. Són els mateixos? Analitza el resultat.

17. Amb les dades del problema anterior sobre les eleccions de 2004, 2009, 2014 al Parlament Europeu es van obtindre els següents percentatges de vots per alguns dels estats membres:

Estat	Alemanya	Espanya	França	Itàlia	Regne Unit	Portugal	Grècia	Bèlgica	% total
2004	43	45'14	42'76	71'72	38'52	38'6	63'22	90'81	45'47
2009	43'27	44'87	40'63	65'05	34'7	36'77	52'61	90'39	43
2014	47'6	45'9	43'5	60	36	34'5	58'2	90	43'09

Calcula el percentatge de participació mitjà per a Alemanya en aqueixes tres convocatòries i la desviació típica. El mateix per a Espanya, per a Bèlgica i per a Portugal.

18. En les eleccions de 2014 al Parlament Europeu els resultats d'Espanya han sigut:

Cens	Total de votants	Abstenció	Vots nuls	Vots en blanc
35.379.097	15.920.815	18.810,754	290.189	357.339

Representa en un diagrama de sectors aquestes dades. Fes una taula de percentatges: el cens és el 100 %. Determina els altres percentatges. Consideres que ha guanyat l'abstenció?

19. En les eleccions de 2014 al Parlament Europeu els resultats d'Espanya han sigut:

PP	PSOE	Esquerra plural	Podem	UPiD	Altres	Total de votants
4.074.363	8.001.754	1.562.567	1.245.948	1.015.994		15.920.815

Determina el nombre de vots dels altres partits. Representa en un diagrama de barres aquestes dades. Fes una taula de percentatges per a cada partit. Has de distribuir 54 escons, com els distribuiries per partits?

Probabilitat

20. Es considera l'experiment aleatori de tirar un dau dues vegades. Calcula les probabilitats següents:

a) Traure algun 1.

b) La suma dels dígits és 8.

c) No traure cap 2.

d) Traure algun 1 o bé no traure cap 2.

21. Es considera l'experiment aleatori traure dues cartes de la baralla espanyola. Calcula la probabilitat de:

a) Traure algun rei.

b) Obtindre almenys un basto.

c) No obtindre cap basto.

d) No obtindre el rei de bastos.

e) Traure alguna figura: sota, cavall, rei o as.

f) No traure cap figura.

22. Es considera l'experiment aleatori de tirar una moneda tres vegades. Calcula les probabilitats següents:

a) Traure cara a la primera tirada.

b) Traure cara a la segona tirada.

c) Traure cara a la tercera tirada.

b) Traure alguna cara.

c) No traure cap cara.

d) Traure tres cares.

23. Amb una baralla espanyola es fa l'experiment de traure tres cartes, amb reemplaçament, quina és la probabilitat de traure tres reis? I si l'experiment es fa sense reemplaçament, quina és ara la probabilitat de tindre 3 reis?

24. En una urna hi ha 6 boles blanques i 14 boles negres. Es trauen dues boles amb reemplaçament. Determina la probabilitat que:

a) Les dos siguen negres.

b) Hi haja almenys una negra.

c) Cap siga negra.

25. En una urna hi ha 6 boles blanques i 14 boles negres. Es trauen dues boles sense reemplaçament. Determina la probabilitat que:

a) Les dos siguen negres.
b) Hi haja almenys una negra.
c) Cap siga negra.
d) Compara els resultats amb els de l'activitat anterior.

26. En llançar quatre monedes a l'aire,

a) Quina és la probabilitat que les quatre siguen cares?
b) Quina és la probabilitat d'obtindre com a màxim tres cares?
c) Quina és la probabilitat de tindre exactament 3 cares?

27. Dos tiradors al plat tenen unes marques ja conegudes. El primer encerta amb una probabilitat de 0,7 i el segon de 0,5. Es llança un plat i ambdós disparen. Expressa mitjançant un diagrama d'arbre i les distintes possibilitats: a) Quina probabilitat hi ha de que un dels tiradors done al plat? b) Calcula la probabilitat que cap encerte. c) Calcula la probabilitat que els dos encerten.

28. Es llança una moneda fins que aparega cara dues vegades seguides. a) Calcula la probabilitat que l'experiència acabe al segon llançament. b) Calcula la probabilitat que acabe al tercer llançament.

29. En el llançament de naus espacials s'han instal·lat tres dispositius de seguretat A, B i C. Si falla A es posa automàticament en marxa el dispositiu B, i si falla aquest, es posa en marxa C. Se sap que la probabilitat que falle A és 0,1, la probabilitat que B funcione és 0,98 i la probabilitat que falle C és 0,05. Calcula la probabilitat que tot funcione bé.

30. Es fa un estudi sobre els incendis forestals d'una zona i es comprova que el 40 % són intencionats, el 50 % es deuen a negligències i el 10 % a causes naturals. S'han produït tres incendis, a) quina és la probabilitat que almenys un haja sigut intencionat? b) Probabilitat que els tres incendis es deguen a causes naturals. c) Probabilitat que cap incendi siga per negligències.

31. Es llança dues vegades un dau equilibrat amb sis cares. Trobar la probabilitat que la suma dels valors que apareixen a la cara superior siga múltiple de tres.

32. Se sap que s'han eliminat diverses cartes d'una baralla espanyola que té quaranta. La probabilitat d'extraure un as entre les que queden 0,12, la probabilitat que isca una copa és 0,08 i la probabilitat que no siga ni as ni copa és 0.84.

Calcular la probabilitat que la carta siga l'as de copes. Es pot afirmar que entre les cartes que no s'han eliminat està l'as de copes?

33. Una persona despistada té huit calcetins negres, sis blaus i quatre rojos, tots ells solts. Un dia amb molta pressa, tria dos calcetins a l'atzar. Trobar la probabilitat de:

a) que els calcetins siguen negres.

1) que els dos calcetins siguen del mateix color.

2) que almenys un d'ells siga roig.

3) que un siga negre i l'altre no.

34. Tres persones viatgen en un cotxe. Si se suposa que la probabilitat de nàixer en qualsevol dia de l'any és la mateixa i sabem que cap ha nascut en un any bixest,

a) trobar la probabilitat que només una d'elles celebre el seu aniversari aqueix dia.

➢ calcular la probabilitat que almenys dos complisquen anys aqueix dia.

AUTOAVALUACIÓ

1. Es fa un estudi sobre el color que prefereixen els habitants d'un país per a un cotxe. La variable utilitzada és:

a) quantitativa b) qualitativa c) quantitativa discreta d) quantitativa contínua

2. En un histograma de freqüències l'altura dels rectangles és:

a) proporcional a l'àrea b) igual a la freqüència absoluta

c) proporcional a la freqüència relativa d) proporcional a la freqüència acumulada

3. Anna ha obtingut en Matemàtiques les notes següents: 7, 8, 5, 10, 8, 10, 9 i 7. La seua nota mitja és de:

a) 7,6 b) 8,2 c) 8 d) 9

4. En les notes anteriors d'Anna la mitja és:

a) 9 b) 8 c) 7,5 d) 8,5

5. En les notes anteriors d'Anna la moda és:

a) 10 b) 8 c) 7 d) 7, 8 i 10

6. L'espai mostral de successos elementals equiprobables de l'experiment "llançar dues monedes i comptar el nombre de cares" és:

a) {2C, 1C, 0C} b) {CC, CX, XC, XX} c) {XX, XC, CC} d) {CC, CX, XC, CC}

7. Llancem dos daus i comptem els punts de les cares superiors. La probabilitat que la suma siga 7 és:

a) 1/6 b) 7/36 c) 5/36 d) 3/36

8. En traure una carta d'una baralla espanyola (de 40 cartes), la probabilitat que siga un or o bé un rei és:

a) 14/40 b) 13/40 c) 12/40 d) 15/40

9. En una bossa hi ha 7 boles roges, 2 negres i 1 bola blanca. Es trauen 2 boles. La probabilitat que les dos siguen roges és:

a) 49/100 b) 42/100 c) 49/90 d) 7/15

10. Llancem tres monedes a l'aire. La probabilitat que les tres en caure siguen cares és:

a) 1/5 b) 1/7 c) 1/8 d) 1/6

Matemàtiques orientades a les ensenyances acadèmiques

3º B d'ESO

ÍNDEX

NOMBRES.

GEOMETRIA

Funcions i ESTADÍSTICA