www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Raquel Caro

Revisor: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Índice

Resumen

En la época de *El Quijote*, en la puerta de las barberías, se leía el siguiente cartel: *"ALGEBRISTA Y SANGRADOR"* ¿Y eso, por qué?

La palabra "*Álgebra*" es una palabra árabe que utilizó el matemático *Al-Khwarizmi*. Si logras leer ese nombre verás que te suena a otra palabra: "*algoritmo*".

Hacia el año 825 escribió un libro titulado: *Al-jabr w'almuqabalah* La palabra árabe *jabr* significa restaurar. El libro trataba de álgebra, de sumas y otras operaciones, pero como los barberos también restauraban huesos, por eso se llamaban algebristas.

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. LENGUAJE ALGEBRAICO

1.1. Letras y números

Ya sabes que:

A nuestro alrededor nos encontramos con multitud de símbolos cuyo significado conocemos, como las señales de tráfico o algunos logotipos.

El **lenguaje algebraico** consigue que podamos expresar mensajes en los que las letras representan variables de valor desconocido. Utiliza letras, números y operaciones para representar una información.

Ejemplo:

- Ya has utilizado el lenguaje algebraico para indicar el área de un rectángulo de base b y altura h: $A = b \cdot h$; la longitud de una circunferencia de radio r: $L = 2\pi r$, por ejemplo.

Para cada situación podemos utilizar la letra que queramos, aunque, cuando hablamos de algo desconocido, la letra más utilizada es la ***x***.

El propio *Al-Khwarizmi* usó originariamente la palabra "*cosa*", (por ejemplo, en lugar de $2x$ decía "*el doble de una cosa*"), que en árabe suena como "*šay*" y que se tradujo al español como "*xei*". De aquí procede la x actual.

Ejemplo:

- La mitad de la edad de una persona $x/2$
- El doble de un número menos 7 $2x - 7$.

Las expresiones que nos permiten reflejar mediante letras y números una situación se llaman **expresiones algebraicas.**

Actividades resueltas

- Expresa las siguientes frases en lenguaje algebraico:

El triple de un número	$3x$
El producto de dos números consecutivos	$x \cdot (x+1)$
La edad de Pedro hace 3 años	$x - 3$
La diferencia de dos números	$a - b$

Actividades propuestas

1. Expresa las siguientes frases en lenguaje algebraico:
   a) El triple de un número más su mitad.
   b) La edad de una persona dentro de 10 años.
   c) La sexta parte de un número menos su cuadrado.
   d) La diferencia entre dos números consecutivos.

2. Un mago le propone un juego a Adela: Piensa un número, súmale 7, multiplica el resultado por 2, réstale 10 y réstale el número. Dime qué te sale. Adela dijo 9. Y el mago le contestó de inmediato: El número que pensaste es 5. Adivina cómo lo supo el mago.

3. ¿Quieres ser tú ahora el mago? Inventa un juego y escríbelo, para poder adivinar el número pensado.

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.2. Coeficiente y parte literal

Ya sabes que:

Una **expresión algebraica** puede estar formada por uno o varios sumandos que se denominan **términos** o **monomios**. Una suma de monomios es un **polinomio**. En un monomio la **parte literal** son las letras y se llama **coeficiente** al número por el que van multiplicadas.

Ejemplo:

- En la expresión $7x$, el coeficiente es 7 y la parte literal x. En $9xy^2$ el coeficiente es 9 y la parte literal xy^2.

Para poder sumar o restar dos monomios deben ser **semejantes**, es decir, tener igual parte literal.

Ejemplo:

- Suma $9xy^2 + 7xy^2 = 16xy^2$. En cambio no se puede sumar $5x + 3y$ pues no son semejantes

Actividades resueltas

- Señala los coeficientes, las partes literales y el número de monomios de la expresión algebraica:

$$6a - 3b + c + 8$$

Esta expresión algebraica tiene 4 términos o 4 monomios: $6a$, $-3b$, c y 8. Los coeficientes son +6, –3, + 1 y +8 respectivamente. Las partes literales son a, b y c. El último término no tiene parte literal.

- Señala en el polinomio y calcula su suma $8x + 5x - 2x$ cuáles son los coeficientes. Los coeficientes son 8, 5 y –2; su suma es $11x$.

1.3. Valor numérico de una expresión algebraica

Si a las letras de una expresión algebraica se les da un valor concreto, se puede calcular el **valor numérico** de dicha expresión.

Actividades resueltas

- Calcula el valor numérico de la expresión $7x + 3$ cuando x vale 2.

Hay que sustituir en la expresión, x por su valor, 2.
Por tanto: $7 \cdot 2 + 3 = 14 + 3 = 17$, que es el valor numérico cuando x vale 2.

1.4. Equivalencia y simplificación de expresiones algebraicas

La expresión algebraica $5x + 4x$ es equivalente a la expresión $9x$, que es su expresión más simplificada.

Actividades propuestas

4. Señala el coeficiente, la parte literal y el número de términos o monomios de los polinomios siguientes:

a) $3 - 14xy$ b) $2a + 6b - 9c$ c) $6xy + 8$ d) $2xy + 6 - 4y$

5. Calcula el valor numérico de los siguientes polinomios:

a) $6x + 4y$ para $x = 3$, $y = 2$.
b) $2 - 3a$ para $a = -5$.
c) $5a + 9b - 7c$ para $b = -1$, $a = -1$ y $c = +2$.

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Superviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.5. Polinomios. Suma y producto

Monomios. Polinomios

Unas expresiones algebraicas de gran utilidad son los **polinomios**, cuya versión más simple y, a la vez, generadora de ellos son los **monomios**.

Un **monomio** viene dado por el producto de números e indeterminadas. Llamaremos **coeficiente** de un monomio al número que multiplica a la indeterminada, o indeterminadas; la indeterminada, o indeterminadas, conforman la **parte literal** del monomio.

Ejemplos:

- La expresión que nos proporciona el triple de una cantidad, $3 \cdot x$, es un monomio con una única variable, x, y coeficiente 3.
- El área del círculo, πr^2, es un monomio con indeterminada, r y coeficiente π. Su parte literal es r^2.

Atendiendo al exponente de la variable, o variables, adjudicaremos un **grado** a cada monomio con arreglo al siguiente criterio:

- Cuando haya una única indeterminada, el grado del monomio será el exponente de su indeterminada.
- Si aparecen varias indeterminadas, el grado del monomio será la suma de los exponentes de esas indeterminadas.

Ejemplos:

- $3x$ es un monomio de grado 1 en la variable x.
- πr^2 es un monomio de grado 2 en la indeterminada r.
- $7a^2b^3$ es un monomio de grado 5 en a y b.

Un número puede ser considerado como un monomio de grado 0.

Un **polinomio** es una expresión construida a partir de la suma de monomios. El **grado de un polinomio** vendrá dado por el mayor grado de sus monomios.

Ejemplos:

- $\frac{1}{5} \cdot x^2 - 7 \cdot x^3 + 2$ es un polinomio de grado 3 en la variable x.
- $4 \cdot x^2 \cdot y^3 - 7 + 3 \cdot y^2$ es un polinomio de grado 5 en x e y.
- $x - 2 \cdot y + 6 \cdot z$ es un polinomio de grado 1 en x, y y z.

Tanto en esta sección nos limitaremos, básicamente, a considerar polinomios con una única variable. Es habitual escribir los diferentes monomios de un polinomio de forma que sus grados vayan en descenso para, con este criterio, apreciar en su primer monomio cuál es el grado del polinomio.

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

El aspecto genérico de un polinomio en la variable x es

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde los coeficientes a_k son números. El monomio de grado cero, a_0, recibe el nombre de **término independiente**. Diremos que un polinomio es **mónico** cuando el coeficiente de su término de mayor grado es igual a 1.

Ejemplos:

- $-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ es un polinomio de grado 4 en la variable x, cuyo término independiente es 2.

Actividades propuestas

6. Para cada uno de los siguientes polinomios destaca su grado y los monomios que lo constituyen:

a) $3x^6 + 7x^2 - x$ b) $7x^3 + 8x^5 - 6x^2$ c) $3xy^6 + 7xy^2 - 2xy$

Como ocurre con cualquier expresión algebraica, si fijamos, o escogemos, un valor concreto para la variable de un polinomio aparece un número: el **valor numérico** del polinomio para ese valor determinado de la variable. Si hemos llamado p a un polinomio, a la evaluación de p en, por ejemplo, el número -3 la denotaremos por $p(-3)$, y leeremos *"p de menos tres"* o *"p en menos tres"*. Con este criterio, si p es un polinomio cuya indeterminada es la variable x, podemos referirnos a él como p o $p(x)$ indistintamente.

De esta forma apreciamos que un polinomio puede ser entendido como una manera concreta de asignar a cada número otro número.

Ejemplos:

- Si evaluamos el polinomio $p \equiv -3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ en $x = 5$ nos encontramos con el número

$$p(5) = -3 \cdot 5^4 + \frac{1}{5} \cdot 5^2 + 2 = -3 \cdot 625 + 5 + 2 = -1875 + 7 = -1868$$

Actividades propuestas

7. Consideremos el polinomio $p(x) = 3x^6 + 7x^2 - x$. Halla los siguientes valores numéricos de p: $p(0)$, $p(1)$, $p(-1)$, $p(2)$.

Suma de polinomios

Como un polinomio es una suma de monomios, la suma de dos polinomios es otro polinomio. A la hora de sumar dos polinomios procederemos a sumar los monomios de igual parte literal.

Ejemplos:

- La suma de los polinomios $-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ y $-x^4 + 4x^2 - 5x - 6$ es el polinomio

$$\left(-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2\right) + (-x^4 + 4x^2 - 5x - 6) = (-3x^4 - x^4) + \left(\frac{1}{5}x^2 + 4x^2\right) - 5x + (2 - 6) =$$

$$= (-3 - 1) \cdot x^4 + \left(\frac{1}{5} + 4\right) \cdot x^2 - 5x + (2 - 6) = -4x^4 + \frac{21}{5}x^2 - 5x - 4$$

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- $(5x^2-3x+1)+(x^2+4x-7)=(5x^2+x^2)+(-3x+4x)+(1-7)=6x^2+x-6$

En el siguiente ejemplo sumaremos dos polinomios disponiéndolos, adecuadamente, uno sobre otro.

Ejemplo:

$$\begin{array}{rrrrrrr} & 4x^5 & +2x^4 & +x^3 & -5x^2 & +x & +4 \\ + & -7x^5 & & +4x^3 & +5x^2 & -3x & -6 \\ \hline & -3x^5 & +2x^4 & +5x^3 & & -2x & -2 \end{array}$$

Producto de polinomios

Otra operación que podemos realizar con polinomios es la multiplicación.

El resultado del producto de polinomios siempre será otro polinomio. Aunque en un polinomio tenemos una indeterminada, o variable, como ella adopta valores numéricos, a la hora de multiplicar polinomios utilizaremos las propiedades de la suma y el producto entre números, en particular la propiedad distributiva del producto respecto de la suma; así, todo queda en función del producto de monomios, cuestión que resolvemos con facilidad:

$$ax^n \cdot bx^m = abx^{n+m}$$

Ejemplos:

- $(-5)x^2 \cdot 2x^4 = (-5)\cdot 2 \cdot x^{2+4} = -10x^6$
- $5x^3 \cdot (-4) = 5\cdot(-4)\cdot x^3 = -20x^3$

También podemos materializar el producto de polinomios tal y como multiplicamos números enteros:

Ejemplo:

$$\begin{array}{rrrrrrr} & & & -2x^3 & & +x & +4 \\ & & \times & x^2 & -3x & +1 & \\ \hline & & & -2x^3 & & +x & +4 \\ & & 6x^4 & & -3x^2 & -12x & \\ & -2x^5 & & +x^3 & +4x^2 & & \\ \hline & -2x^5 & +6x^4 & -x^3 & +x^2 & -11x & +4 \end{array}$$

Actividades propuestas

8. Realiza las siguientes sumas de polinomios:

a) $(-x^3+x-5)+(2x^2+5x+4)+(-4x^3-2x^2+3x)$

b) $(x^2+4)+(-2x+4)+(-6x^3+3x^2+x+1)-x^2$

9. Efectúa los siguientes productos de polinomios:

a) $(-2x)\cdot(3x^2-4)$ b) $(2x^3+1)\cdot(-4x+5)$

c) $(4x^3-x^2-1)\cdot(2x+6)$ d) $(-1)\cdot(8x^2+7x-9)$

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2. ECUACIONES DE PRIMER GRADO

2.1. El lenguaje de las ecuaciones

Ya sabes que:

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.

Ejemplo:

- Si tenemos dos expresiones algebraicas: $7x + 3$ y $5x + 2$, y las unimos con el signo igual obtenemos una ecuación: $7x + 3 = 5x + 2$.

Las expresiones que hay a cada lado del igual se llaman **miembros** de la ecuación. Todas las ecuaciones tienen dos miembros: la expresión que está a la izquierda del signo igual se llama **primer miembro** y la que está a la derecha, **segundo miembro**.

Las letras que contienen las ecuaciones algebraicas (las "partes literales" de sus dos expresiones) se llaman **incógnitas**, que significa literalmente "*desconocidas*". Si todas las letras son iguales, se dice que la ecuación tiene una sola incógnita.

Ejemplo:

- $6x - 1 = 5x + 8$ es una ecuación con una sola incógnita, mientras que
- $4x + 2y = 1$ o $3x - 8 = 9y$ son ecuaciones con dos incógnitas: x e y.

El **grado** de una ecuación es el mayor exponente que aparece en alguna de sus incógnitas.

Ejemplo:

- $2x - 7 = 3x + 2$ es una ecuación de primer grado, mientras que $4x + 5xy^2 = 8$ es una ecuación de tercer grado ya que el monomio $5xy^2$ tiene grado 3 (1 + 2 = 3).

Actividades propuestas

10. Copia en tu cuaderno la siguiente tabla y complétala:

Ecuación	Primer miembro	Segundo miembro	Incógnitas
$4x - 5 = 6x - 7$			
	$3x + 2$	$x - 9$	
$8a + 7 = 65$			
	$4x - 3y$	$2 + y$	

11. Indica el número de incógnitas de las siguientes ecuaciones:

a) $x - 2y = 3x + 4$; b) $5x + 6y^2 = 7$ c) $8a + 9a^2 = 1$ d) $2x + 3x^2 = 4$.

12. Indica el grado de las siguientes ecuaciones:

a) $5x - 6 = 7x + 8$; b) $9x + y^2 = 13$ c) $x + 2x^2 = 3$ d) $4x + 5xy^2 = 6$

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.2. Ecuaciones equivalentes. Resolución de ecuaciones

Solución de una ecuación:

Una **solución** de una ecuación es un número que, cuando la incógnita toma ese valor, se verifica la igualdad, es decir, los dos términos de la ecuación valen lo mismo.

Algunas ecuaciones solo tienen una solución, pero otras pueden tener varias.

Resolver una ecuación es encontrar todas sus posibles soluciones numéricas.

Actividades resueltas

- Si te fijas en la ecuación: $7x - 3 = 5x + 9$, verás que al darle valores a x la igualdad no siempre se cumple.

Por ejemplo, para $x = 1$, el primer miembro vale $7 \cdot 1 - 3 = +4$, mientras que el valor del segundo miembro es: $5 \cdot 1 + 9 = 5 + 9 = 14$. Luego 1 **no** es solución de la ecuación.

Para $x = 6$, el primer miembro toma el valor: $7 \cdot 6 - 3 = 42 - 3 = 39$; y el segundo miembro: $5 \cdot 6 + 9 = 30 + 9 = 39$. Por tanto 6 es una **solución** de la ecuación.

Si se desconoce la solución de una ecuación, resulta muy pesado resolverla probando un número tras otro.

Por eso lo que se hace habitualmente es transformarla en otras ecuaciones **equivalentes** más sencillas.

Ecuaciones equivalentes son las que tienen las mismas soluciones.

¿Sabías que todas las soluciones de todas las expresiones algebraicas posibles, de cualquier grado, forman lo que se denomina los "***números algebraicos***"? Por ejemplo, son algebraicos todos estos números: 1, 2, 1/3, 7/5, $\sqrt{2}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$, etc. Aunque la inmensa mayoría de los números que utilizamos en nuestra vida cotidiana son algebraicos, debes saber que realmente hay muchos, muchísimos más números "no algebraicos" que ya irás conociendo, aunque alguno ya conoces como al número π.

Ejemplo:

- $3x - 7 = 11$ es equivalente a $3x = 18$, puesto que la solución de ambas ecuaciones es $x = 6$.

Para obtener ecuaciones equivalentes se tienen en cuenta las siguientes propiedades:

- Si se **suma** o se **resta** a los dos miembros de una ecuación una misma cantidad, se obtiene una ecuación equivalente.
- Si se **multiplican** o **dividen** los dos miembros de una ecuación por una misma cantidad (distinta de cero), se obtiene una ecuación equivalente.

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- Resuelve la ecuación $3x + 9 = x - 5$ transformándola en otra más sencilla equivalente.

Transformar una ecuación hasta que sus soluciones se hagan evidentes se llama "*resolver la ecuación*". Siguiendo estos pasos intentaremos resolver la ecuación: $3x + 9 = x - 5$.

1) Sumamos a los dos miembros $-x$ y restamos a los dos miembros 9: $3x - x + 9 - 9 = x - x - 5 - 9$.

2) Hacemos operaciones y conseguimos otra ecuación que tiene en el primer miembro los términos con x y en el segundo, los términos sin x: $3x - x = -5 - 9$.

3) Efectuamos las sumas en el primer miembro y en el segundo: $2x = -14$.

4) Despejamos x dividiendo los dos miembros por 2: $\frac{2x}{2} = \frac{-14}{2}$ de donde $x = -7$.

5) Comprueba que todas las ecuaciones que hemos obtenido en este proceso son equivalentes y que su solución es $x = -7$.

- Resuelve la ecuación $6 - x = 2x - 3$.

1) Sumamos x y 3 para pasar a un miembro los términos con x y al otro miembro los términos sin x: $6 - x + x + 3 = 2x + x - 3 + 3$,

2) Hacemos operaciones: $6 + 3 = 2x + x$

3) Efectuamos las sumas: $9 = 3x$.

4) Despejamos x dividiendo los dos miembros por 3: $3 = x$.

La solución de la ecuación es $x = 3$.

5) Comprobamos que en efecto es la solución: $6 - x = 2x - 3 \Rightarrow 6 - 3 = 3$; $2·3 - 3 = 3$.

El procedimiento utilizado en las actividades es un método universal para **resolver** cualquier ecuación de grado 1, es decir, donde x aparece sin elevar a otro exponente como en x^2. Las ecuaciones de primer grado tienen siempre una única solución, pero en general, las soluciones no tienen por qué ser números enteros como en los ejemplos.

Actividades propuestas

13. Averigua cuál de los números es la solución de la ecuación y escríbelo en tu cuaderno:

Ecuación	Posibles soluciones		Ecuación	Posibles soluciones
$3x + 5 = x - 1$	2, –1, –3		$a^2 - 6 = -2$	–2, –6, 2
$x + 6 = 4x - 3$	3, –2, –3		$b - 4 = 8 - b$	3, 4, 6

14. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $5x - 1 = 3x - 4$ b) $7x + 9 = 5x - 6$ c) $6x + 8 = 14$ d) $3x - 9 = 2x - 11$

15. Elige entre las siguientes ecuaciones todas las que sean equivalentes a la ecuación $3x - 6 = x + 10$.

a) $x - 10 = 5$ b) $16 - x = 3x - 5x$ c) $4x = 32$ d) $2x = 10 + 6$ e) $8 = x$

16. Escribe dos ecuaciones equivalentes a cada una de las ecuaciones siguientes:

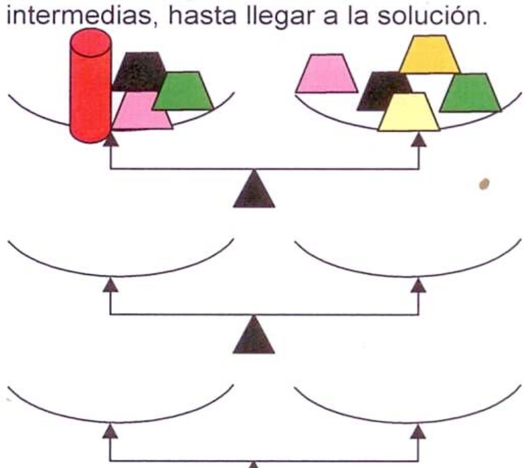
a) $2x - 5 = 13$ b) $3x = 15$ c) $5x + 12 = 7$ d) $x = -5$

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

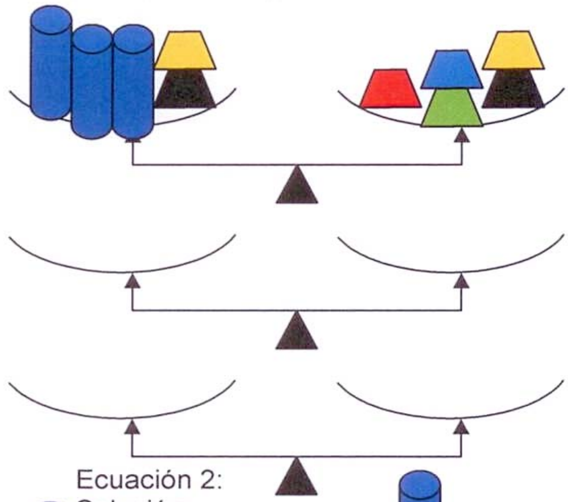
Material didáctico fotocopiable: Balanzas

a) Todas las pesas son iguales a 1. Las balanzas están equilibradas. Mantén siempre equilibradas las balanzas siguientes, hasta conseguir conocer cuanto pesa el objeto cilíndrico.

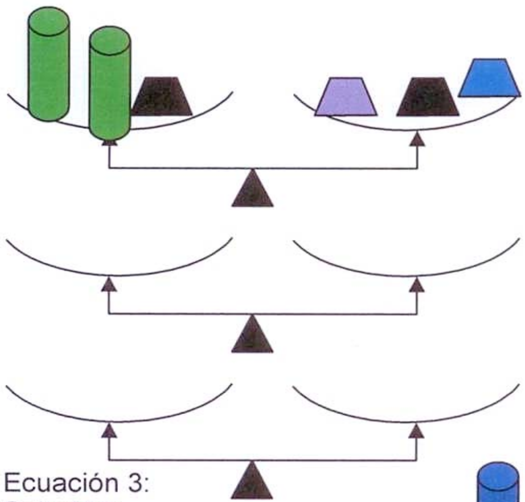
b) Escribe algebraicamente la situación actual de cada balanza, y todas las situaciones intermedias, hasta llegar a la solución.



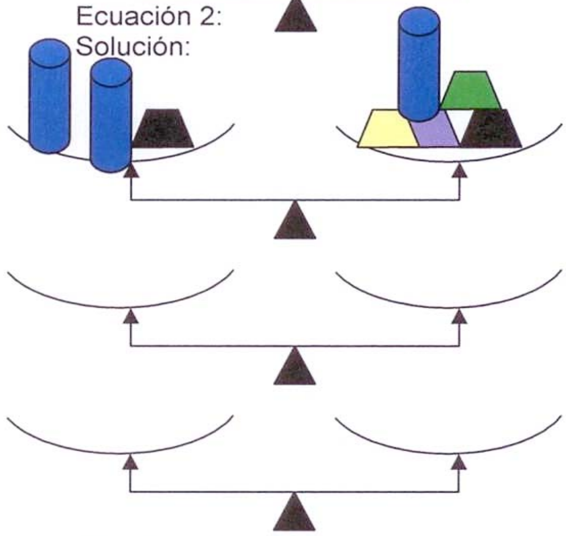
Ecuación 1:
Solución:



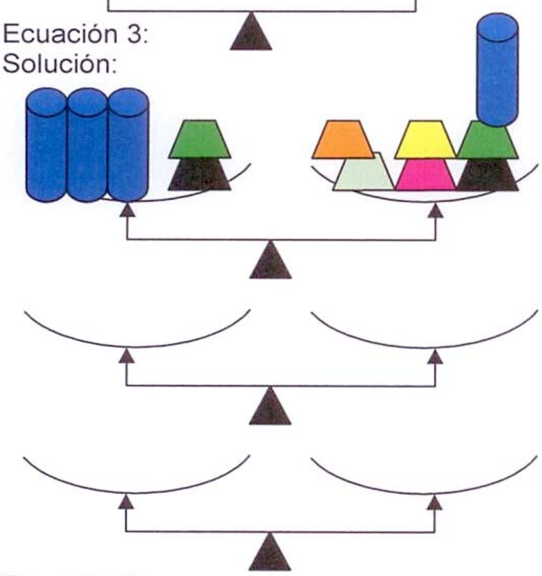
Ecuación 2:
Solución:



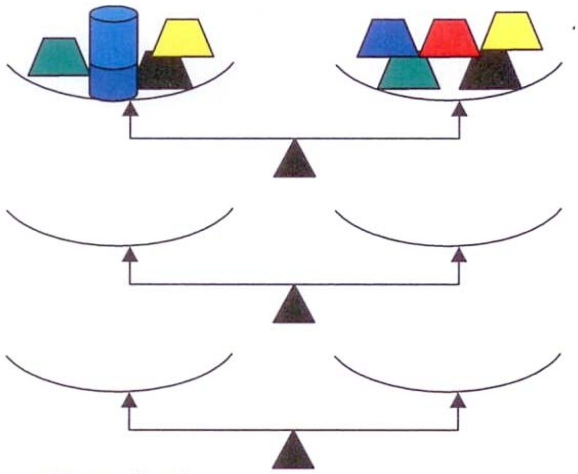
Ecuación 3:
Solución:



Ecuación 4:
Solución:



Ecuación 5:
Solución:



Ecuación 6:
Solución:

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE ECUACIONES

3.1. Procedimiento

Ya sabes que:

Muchos problemas pueden resolverse mediante una ecuación.

Actividades resueltas

- Busca un número que sumado con su siguiente dé como resultado 9.

Para resolverlo, sigue los siguientes pasos:

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Lee con mucho cuidado el enunciado, y pregúntate:

¿Qué te piden? ¿Qué datos tienes?

Nos piden un número. La **incógnita** es ese número. Llama a ese número x. Su siguiente, será $x + 1$. Nos dicen que la suma de ambos es 9.

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Es un problema que queremos resolver mediante una ecuación. Escribe en lenguaje algebraico el enunciado del problema y plantea una ecuación:

$$x + (x + 1) = 9.$$

Pregúntate si efectivamente resuelve el problema releyendo el enunciado.

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Ahora sí, ahora resuelve la ecuación. Para resolver una ecuación conviene seguir un orden de actuación que nos ayude a no cometer errores, para ello seguimos el procedimiento que acabamos de aprender.

Quita, si los hay, paréntesis y denominadores: $x + x + 1 = 9$.

Para poner en el primer miembro los términos con x, y en el segundo los que no lo tienen, **haz lo mismo a los dos lados**, resta 1 a los dos miembros: $x + x + 1 - 1= 9 - 1$, luego $x + x = 9 - 1$. Opera: $2x = 8$. Despeja:

Para despejar la x, se hace lo mismo a los dos lados, se dividen por 2 ambos miembros: $2x/2 = 8/2$, por tanto, $x = 4$.

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

En efecto, comprueba que: $4 + 5 = 9$.

Actividades propuestas

17. La suma de tres números consecutivos es igual al doble del mayor más 3. Calcula dichos números.

18. La madre de Álvaro tiene el triple de la edad de su hijo, y éste tiene 32 años menos que su madre. ¿Cuántos años tienen cada uno?

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.2. Problemas numéricos

Actividades resueltas

- En un pequeño hotel hay 34 habitaciones simples y dobles. Si en total tiene 54 camas, ¿cuántas habitaciones son simples y cuántas son dobles?

Sigue los pasos para la resolución de problemas.

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Llama x al número de habitaciones simples. El número de habitaciones dobles es $34 - x$. El número de camas es 54.

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Escribe en forma de ecuación la información del enunciado:

$$x + 2(34 - x) = 54.$$

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Resuelve la ecuación. Quita paréntesis:

$$x + 68 - 2x = 54.$$

Para poner en el primer miembro los términos con x y en el segundo los términos sin x, resta 68 a los dos miembros:

$$x + 68 - 2x - 68 = 54 - 68.$$

Opera:

$$-x = -14$$

Para despejar la x divide los dos miembros por -1:

$$x = -14/-1 = 14.$$

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

Hay 14 habitaciones simples. Luego hay $34 - 14 = 20$ habitaciones dobles. Por tanto el número de camas es 54 pues:

$$14 + 2\cdot 20 = 54.$$

- En una granja hay 50 animales entre gallinas y conejos, y entre todos los animales suman 120 patas. ¿Cuántas gallinas hay en la granja?

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Llama x al número de gallinas, y como hay 50 animales en total, conejos tendremos $50 - x$.

Como una gallina tiene 2 patas y un conejo 4, tendremos en total $2x + 4(50 - x)$ patas.

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Como sabemos que el número total de patas es 120, podemos escribir esta ecuación:

$$2x + 4(50 - x) = 120$$

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Resuelve la ecuación. Quita paréntesis:

$$2x + 200 - 4x = 120$$

Si restamos 200 en ambos lados obtenemos:

$$2x + 200 - 4x - 200 = 120 - 200$$

Operando obtenemos:

$$-2x = -80$$

Dividiendo por –2 en ambos lados resolvemos la ecuación:

$$-2x/-2 = -80/-2 \text{ luego } x = 40.$$

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

Hay 40 gallinas y 10 conejos pues $50 - x = 50 - 40 = 10$.

Las patas de 40 gallinas y 10 conejos suman $40 \cdot 2 + 10 \cdot 4 = 80 + 40 = 120$

Actividades propuestas

19. Un mago le dijo: Piensa un número, súmale 12, multiplica por 2 el resultado, resta 20 y divide por 2. Dime que te sale. Dijo 35. Y el mago le contestó de inmediato: El número que pensaste es 33. Adivina como lo supo el mago. (Sugerencia: escribe previamente la cadena de operaciones).

20. Piensa un número, multiplícale por 10, réstale el número que has pensado y divide el resultado entre 9. ¡Has obtenido el número que pensaste! Busca el truco: escribe algebraicamente, llamando *x* al número, la expresión algebraica de las operaciones realizadas, y adivina como lo supo el mago.

21. Si la suma de tres números consecutivos es 63, ¿de qué números se trata? (Sugerencia: ilustra la situación con una balanza equilibrada. Mantenla equilibrada hasta conseguir la ecuación equivalente que nos dé el resultado).

22. Hemos comprado 8 libros iguales y hemos pagado con un billete de 50 €. Si nos han devuelto 10 €, ¿cuánto costaba cada libro?

3.3. Problemas de geometría

Muchos problemas de geometría se pueden resolver por métodos algebraicos, utilizando ecuaciones.

Actividades resueltas

- Se quiere dibujar un triángulo de 55 cm de perímetro, de forma que un lado sea el doble de otro, y el tercero sea el triple del menor menos 5 cm.

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Dibuja un triángulo, pensando en los datos del enunciado.

Llamamos x al lado menor, de esta forma puedes definir los otros dos lados. El lado mediano es $2x$. El lado mayor es $3x – 5$

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Como el perímetro es 55, se puede plantear la ecuación: $x + 2x + (3x – 5) = 55$

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Se resuelve la ecuación: $x + 2x + 3x – 5 + 5 = 55 + 5$; $x + 2x + 3x = 60$; $6x = 60$.

Luego $x = 60 / 6 = 10$ es la longitud del lado menor. Los otros dos lados miden $2x = 20$ y $3x – 5 = 25$.

Solución: Los lados del triángulo miden 10 cm, 20 cm y 25 cm.

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

Sumando los tres lados, $10 + 20 + 25 = 55$, obtenemos el perímetro del triángulo, 55.

Actividades resueltas

- Tienes un rectángulo de altura x cm y de base $2x + 3$. Si a la base de este rectángulo le quitan 2 cm y a la altura le añaden 5 cm, se convierte en un cuadrado. ¿Qué dimensiones tiene?

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Dibuja un rectángulo con las condiciones del problema. La expresión $2x + 3 – 2$ expresa los 2 cm que le quita a la base y $x + 5$ expresa los 5 cm que le añaden a la altura.

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Si se ha formado un cuadrado como los lados son iguales ambas expresiones deben ser equivalentes: $2x + 3 – 2 = x + 5$

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Resuelve la ecuación: $2x +3 –2 – x – 3 + 2= x– x – 3 + 2 + 5$; $2x – x = 4$; $x = 4$

Solución: $x = 4$ cm es la longitud de la altura del rectángulo. Por tanto, $2 \cdot 4 + 3 = 11$ cm mide la base del rectángulo.

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

En efecto, a la altura le sumamos 5, $4 + 5 = 9$, y a la base le restamos 2, $11 – 2 = 9$, se obtiene un cuadrado.

Actividades propuestas

23. Cada uno de los lados iguales de un triángulo isósceles es igual al doble del tercer lado menos 2 cm. Calcula su medida si el perímetro del triángulo es 84 cm.

24. Calcula el área de un triángulo rectángulo, sabiendo que sus catetos suman 20 cm y el cateto mayor mide 4 cm más que el menor.

25. Calcula la medida de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, sabiendo que el ángulo mayor es igual al triple del menor menos 6º.

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.4. Otros problemas

Actividades resueltas

- Si tenemos 21 billetes de 5 € y de 10 € que suman en total 170 €, ¿cuántos billetes tenemos de cada clase?

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Llama x al número de billetes de 5 € y el resto, 21 – x, será el número de billetes de 10 €.

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Plantea la ecuación que expresa la suma en euros de los dos tipos de billetes: $5 \cdot x + 10\,(21 - x) = 170$

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Para resolver la ecuación, lo primero, quita paréntesis: $5x + 210 - 10x = 170$

Deja en el primer miembro todos los términos con *x*, y en el segundo los que no tienen *x*: $5x - 10x + 210 - 210 = - 210 + 170$

Haz operaciones: $- 5x = - 40$

Despeja la incógnita: $x = (- 40) : (- 5) = + 8$

Por tanto, tenemos 8 billetes de 5 €, y 21 – 8 = 13 es el número de billetes de 10 €.

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

Comprobamos que $8 \cdot 5 = 40$ € y $13 \cdot 10 = 130$ €. Y que, en efecto, 40 + 130 = 70 €.

Solución: Tenemos 8 billetes de 5 € y 13 billetes de 10 €.

Actividades propuestas

26. Dos motocicletas salen al mismo tiempo de dos puntos que distan 420 km, en la misma dirección pero en sentido contrario. La primera lleva una velocidad de 60 km/h y la segunda, de 80 km/h. ¿Cuánto tiempo tardarán en cruzarse?

Ayuda: Haz un diagrama para comprender el enunciado

Solución: Tardan 3 horas en cruzarse.

27. Dos coches salen de dos puntos situados a 560 km de distancia, uno al encuentro de otro. El primero lleva una velocidad de 70 km/h y el segundo de 90 km/h. ¿Cuántas horas tardan en cruzarse?

28. Si en el monedero tenemos 16 monedas de 10 cent y de 20 céntimos de euro, y en total reunimos 2 €, ¿cuántas monedas de cada clase tenemos?

29. Si un bolígrafo vale 1.5 euros que es el triple del precio de un lápiz, he comprado un total de 7 lápices y bolígrafos, y he pagado en total 5.50 €, ¿cuántos bolígrafos y cuántos lápices he comprado?

30. Nieves tiene una pareja de hámsteres con una camada de varias crías. Le regala a una amiga la mitad de las crías. A un segundo amigo le regala la mitad de las crías que le quedan más media cría. La única cría que le queda se la regala a un tercer amigo. ¿Cuántas crías formaban la camada?

31. Dos amigas, Maite y Ana, fueron a visitar una granja en la que había gallinas y conejos. Al salir Ana le preguntó a Maite: Sabes cuántas gallinas y cuántos conejos había. No, dijo Maite, pero había en total 72 ojos y 122 patas. Averigua el número de gallinas y de conejos de la granja.

32. De un depósito lleno de líquido se saca la mitad del contenido, después la tercera parte del resto y quedan aún 1600 litros. Calcula la capacidad del depósito.

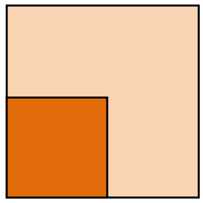
Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Subervióla y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

4. ECUACIONES DE 2º GRADO

Hay ecuaciones de segundo grado que ya sabes resolver. El curso próximo estudiarás como resolverlas todas. Pero en este curso vamos a aprender a resolver algunas. Por ejemplo, el siguiente problema ya sabes resolverlo:

Actividades resueltas

- Se aumenta el lado de una baldosa cuadrada en 9 *cm* y su área ha quedado multiplicada por 16, ¿Qué lado tenía la baldosa?



Planteamos la ecuación:

$$(x + 9)^2 = 16x^2$$

¡Esta ecuación si sabes resolverla! $x + 9 = 4x \rightarrow 9 = 3x$, luego el lado es de 3 *cm*.

Hay otra solución, $x + 9 = -4x \rightarrow 9 = 5x = -9 \rightarrow x = -9/5$, que no tiene sentido como lado de un cuadrado.

Vamos a estudiar de forma ordenada estas ecuaciones.

4.1. Concepto de ecuación de 2º grado

Una **ecuación de segundo grado** es una ecuación polinómica en la que la mayor potencia de la incógnita es 2. Las ecuaciones de segundo grado se pueden escribir de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde *a, b* y *c* son números reales, con $a \neq 0$.

Ejemplo 1:

- *Son ecuaciones de 2º grado por ejemplo*

$$5x^2 - 8x + 3 = 0; \qquad -6x^2 + 2x + -9 = 0; \qquad x^2 - 25x - 1.1 = 0.$$

Ejemplo 2:

- Los coeficientes de las ecuaciones de 2º grado son números, por lo tanto pueden ser fracciones o raíces. Por ejemplo:

$$\frac{3}{5}x^2 - 4x + \frac{1}{2} = 0; \quad \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{3}{4} = 0; \quad -2.7x^2 + 3.5x - 0.2 = 0; \quad \sqrt{2}x^2 + 3x - \sqrt{5} = 0.$$

Actividades propuestas

33. Indica si son ecuaciones de segundo grado las siguientes ecuaciones:

a) $5x^2 - \sqrt{2}x + 8 = 0$ c) $3x^2 - 5 = 0$ e) $2x^2 - \frac{3}{x} = 0$

b) $7xy^2 - 2 = 0$ d) $6 - 8.3x = 0$ f) $2x^2 - 3\sqrt{x} + 4 = 0$

34. En las siguientes ecuaciones de segundo grado, indica quiénes son *a*, *b* y *c*.

a) $7 - 8x^2 + 2x = 0$ b) $-6x^2 + 9x = 0$

c) $4x^2 - 5 = 0$ d) $x^2 - 3x + 5 = 0$

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

4.2. Resolución de ecuaciones de 2º grado incompletas

Llamamos **ecuación de 2º grado incompleta** a aquella ecuación de segundo grado en la que el coeficiente *b* vale 0 (falta *b*), o el coeficiente *c* vale 0 (falta *c*).

Ejemplo:

- La ecuación de 2º grado $3x^2 - 15 = 0$ es incompleta porque el coeficiente $b = 0$, es decir, falta *b*.
- La ecuación de 2º grado $3x^2 - 15x = 0$ es incompleta porque no tiene *c*, es decir, $c = 0$.

Las ecuaciones de 2º grado incompletas se resuelven de una manera u otra dependiendo del tipo que sean.

Si el coeficiente *b* = 0: Despejamos la incógnita normalmente, como hacíamos en las ecuaciones de primer grado:

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{-c}{a}} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Si el coeficiente *c* = 0: Sacamos *x* factor común:

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0.$$

Para que el producto de dos factores valga cero, uno de los factores debe valer cero.

Por tanto $x = 0$, o $ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$

Ejemplos:

- En la ecuación $2x^2 - 50 = 0$ falta la *b*. Para resolverla despejamos la incógnita, es decir, x^2:

$$2x^2 - 50 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 50 \Rightarrow x^2 = 50/2 = 25$$

Una vez que llegamos aquí, nos falta quitar ese cuadrado que lleva nuestra incógnita. Para ello, haremos la raíz cuadrada en los 2 miembros de la ecuación:

$$x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$$

Así hemos obtenido las dos soluciones de nuestra ecuación, 5 y –5. En efecto, $2\cdot 5^2 - 50 = 2\cdot 25 - 50 = 0$, y $2\cdot(-5)^2 - 50 = 2\cdot 25 - 50 = 0$

- En la ecuación $3x^2 - 21x = 0$ falta la *c*. Para resolverla, sacamos *x* factor común:

$$3x^2 - 21x = 0 \Rightarrow 3x(x - 7) = 0$$

Una vez que llegamos aquí, tenemos dos opciones

1) $3x = 0 \Rightarrow x = 0$.
2) $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$.

Así hemos obtenido las dos soluciones de la ecuación $x = 0$ y $x = 7$.

Actividades resueltas

- Resuelve la ecuación de 2º grado $2x^2 - 72 = 0$:

Solución: Se trata de una ecuación de 2º grado incompleta donde falta la *b*. Por lo tanto, despejamos la incógnita: $2x^2 - 72 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 72 \Rightarrow x^2 = 72/2 = 36 \Rightarrow x = \pm\sqrt{36} = \pm 6$. Las raíces son 6 y –6.

- Resuelve la ecuación de 2º grado $x^2 + 11x = 0$:

Solución: Se trata de una ecuación de 2º grado incompleta donde falta la *c*. Por lo tanto, sacamos factor común: $x^2 + 11x = 0 \Rightarrow x(x + 11) = 0$ y obtenemos las dos soluciones: $x = 0$ y $x + 11 = 0 \Rightarrow x = -11$.

Actividades propuestas

35. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado incompletas:

a) $3x^2 + 9x = 0$ b) $2x^2 - 8 = 0$ c) $x^2 - 81 = 0$ d) $2x^2 + 5x = 0$

4.3. Resolución de ecuaciones de 2º grado completas

Se llama **ecuación de segundo grado completa** a aquella que tiene valores distintos de cero para *a*, *b* y *c*.

Para resolver las ecuaciones de segundo grado completas, usaremos la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta fórmula nos permite calcular las dos soluciones de nuestra ecuación.

Llamaremos **discriminante** a la parte de la fórmula que está en el interior de la raíz:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Actividades resueltas

- Resuelve la ecuación de segundo grado $x^2 - 5x + 6 = 0$

Solución: Primero debemos saber quiénes son *a*, *b* y *c*: $a = 1$; $b = -5$; $c = 6$

Sustituyendo estos valores en nuestra fórmula, obtenemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Por lo tanto, nuestras dos soluciones son:

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = 3; \quad x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$$

En efecto, $3^2 - 5\cdot 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$, y $2^2 - 5\cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$, luego 3 y 2 son soluciones de la ecuación.

Actividades propuestas

36. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado completas:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ b) $2x^2 + 5x - 7 = 0$ c) $3x^2 - 8x + 2 = 0$ d) $x^2 - x - 12 = 0$

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

5. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

5.1. Concepto de sistema de ecuaciones lineales

Un **sistema de ecuaciones lineales** con dos incógnitas se puede expresar de la forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Donde *a, b, a'* y *b'* son números reales que se denominan **coeficientes** y *c* y *c'* también son números reales llamados **términos independientes**.

Llamamos **solución** del sistema al par de valores (*x*, *y*) que satisfacen las dos ecuaciones del sistema.

Se dice que dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes**, cuando tienen la misma solución.

Ejemplo:

- *Son sistemas de ecuaciones lineales:*

$$\begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}; \quad \begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ x - y = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} 4y + 2 = 3x \\ 7x - 3 = 5y \end{cases}$$

- ***No** es un sistema lineal* $\begin{cases} 3xy + 5y = 7 \\ 4x - 8xy = 9 \end{cases}$ *porque tiene términos en xy.*

- Tampoco lo es $\begin{cases} 3x^2 + 5y = 7 \\ 4x - 8y = 9 \end{cases}$ porque tiene un término en x^2.

Actividades propuestas

37. Razona si son o no sistemas de ecuaciones lineales los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} xy + 7y = 9 \\ 8x - 5y = 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2y - 3x = 4 \\ 5x - 6y = -7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 8x - 9 = 5y \\ 4x + 7y = 2/3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x^2 + y = 2 \\ 3x + y^2 = 4 \end{cases}$

5.2. Resolución de sistemas por el método de sustitución

El **método de sustitución** consiste en despejar una incógnita de una de las ecuaciones del sistema y sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación.

Así, obtenemos una ecuación de primer grado en la que podemos calcular la incógnita despejada. Con el valor obtenido, obtenemos el valor de la otra incógnita.

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo:

- *Vamos a resolver el sistema* $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ *por el método de sustitución:*

Despejamos *x* de la segunda ecuación:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \Rightarrow x = 3 - 2y \end{cases}$$

y lo sustituimos en la primera:

$2(3 - 2y) - 3y = -1 \Rightarrow 6 - 4y - 3y = -1 \Rightarrow -4y - 3y = -1 - 6 \Rightarrow -7y = -7 \Rightarrow y = (-7)/(-7) = 1$

Con el valor obtenido de *y*, calculamos la *x*:

$x = 3 - 2y \Rightarrow x = 3 - 2\cdot 1 = 1$.

Solución:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

5.3. Resolución de sistemas por el método de igualación

El **método de igualación** consiste en despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones que forman el sistema e igualar los resultados obtenidos.

Así, obtenemos una ecuación de primer grado en la que podremos calcular la incógnita despejada. Con el valor obtenido, calculamos el valor de la otra incógnita.

Ejemplo:

- *Vamos a resolver el sistema* $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ *por el método de igualación:*

Despejamos la misma incógnita de las dos ecuaciones que forman el sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \Rightarrow x = \dfrac{3y - 1}{2} \\ x + 2y = 3 \Rightarrow x = 3 - 2y \end{cases}$$

Igualamos ahora los resultados obtenidos y resolvemos la ecuación resultante:

$$\frac{3y - 1}{2} = 3 - 2y \Rightarrow 3y - 1 = 2(3 - 2y) = 6 - 4y \Rightarrow 3y + 4y = 6 + 1 \Rightarrow 7y = 7 \Rightarrow y = \frac{7}{7} = 1$$

Con el valor obtenido de *y*, calculamos la *x*:

$x = 3 - 2y \Rightarrow x = 3 - 2\cdot(1) = 1$

Solución:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

5.4. Resolución de sistemas por el método de reducción

El **método de reducción** consiste en eliminar una de las incógnitas sumando las dos ecuaciones. Para ello se multiplican una o ambas ecuaciones por un número de modo que los coeficientes de *x* o *y* sean iguales pero de signo contrario.

Ejemplo:

- *Vamos a resolver el sistema* $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \end{cases}$ *por el método de reducción:*

Multiplicamos la segunda ecuación por -2 para que los coeficientes de la *x* sean iguales pero de signo contrario y sumamos las ecuaciones obtenidas:

$$\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)} \begin{cases} 2x-3y=-1 \\ -2x-4y=-6 \end{cases} \xrightarrow{sumamos} -7y=-7 \Rightarrow y=(-7)/(-7)=1$$

Con el valor obtenido de *y*, calculamos la *x*:

$2x-3\cdot 1=-1 \Rightarrow 2x=-1+3=2 \Rightarrow x=2/2=1$

Solución:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Actividades propuestas

38. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 2x+4y=-5 \\ 3x-6y=7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+4y=0 \\ 3x+6y=11 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x-7y=1 \\ 8x+7y=10 \end{cases}$

39. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{cases} 6x+7y=8 \\ -2x+3y=-4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-3y=-5 \\ 4x+2y=14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x-4y=3 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$

40. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases} 3x+y=4 \\ 2x-5y=14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+3y=2 \\ 4x+y=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3y=0 \\ 3x-2y=13 \end{cases}$

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12

A) Cuadrados mágicos

En el cuadro Melancolía del famoso pintor alemán Alberto Durero (1471-1528) aparece este cuadrado mágico en el que todas las filas, columnas y diagonales suman lo mismo, y además ese mismo resultado se obtiene sumando las cuatro casillas centrales.

Además, las dos casillas del centro de la línea inferior indican el año en el que este cuadrado mágico fue resuelto, 1514.

40. Confecciona un cuadrado mágico de 3 x 3 casillas, colocando los dígitos del 1 al 9 de forma que todas las filas, todas las columnas, y todas las diagonales sumen lo mismo.

B) EMMY NOETHER (1882 – 1935)


Emmy Noether

Emmy Noether fue una famosa algebrista. Nació en Alemania, hija de padres judíos. Su padre era catedrático de matemáticas en la Universidad y Emmy heredó de él la pasión por las matemáticas. Sin embargo, por aquella época la Universidad no admitía que las mujeres desarrollasen estudios científicos, así que tuvo que conseguir un permiso especial para que la dejaran asistir a las clases, aunque no tenía derecho a examinarse. Años más tarde, las leyes cambiaron y pudo doctorarse. Trabajó con los matemáticos alemanes más brillantes y desarrolló un teorema esencial para la Teoría de la Relatividad en la que estaba trabajando Albert Einstein. Ante la situación política de Alemania, con la subida al poder de HItler, tuvo que exiliarse a Estados Unidos. Allí coincidió con **Einstein** quien le dedicó estas palabras: *"A juicio de los matemáticos más competentes que todavía viven, desde que las mujeres empezaron a recibir enseñanza superior, Emmy Noether ha tenido el genio creativo más destacado que haya surgido hasta la fecha de hoy en el campo de la matemática"*.

C) DIOFANTO

Diofanto fue un famoso matemático griego del siglo III d. C. En el epitafio de su tumba escribió:

¡Caminante! Aquí yacen los restos de Diofanto. Los números pueden mostrar ¡oh maravilla! La duración de su vida, cuya sexta parte constituyó la hermosa infancia.

Había transcurrido además una duodécima parte de su vida cuando se cubrió de vello su barba.

A partir de ahí, la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril.

Pasó, además un quinquenio y entonces le hizo dichoso el nacimiento de primogénito.

Este entregó su cuerpo y su hermosa existencia a la tierra habiendo vivido la mitad de lo que su padre llegó a vivir.

Por su parte, Diofanto descendió a la sepultura con profunda pena habiendo sobrevivido cuatro años a su hijo.

Dime, caminante, cuántos años vivió Diofanto.

41. a) Escribe en lenguaje algebraico el epitafio de la tumba de Diofanto

b) Resuelve la ecuación. Comprueba que Diofanto vivió 84 años.

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

Concepto	Definición	*Ejemplos*
Expresión algebraica	Expresiones que reflejan una situación mediante letras y números	Área de un rectángulo = base por altura: $A = b \cdot a$
Valor numérico de una expresión algebraica	Número que se obtiene al sustituir las letras por números y hacer las operaciones.	El valor numérico de $x + 3x + 5$ para $x = -2$ es:$-2 + 3(-2) + 5 = -2 - 6 + 5 = -3$
Ecuación	Igualdad entre dos expresiones algebraicas.	$3x - 1 = 2x + 5$
Incógnitas	Letras de valor desconocido que contienen una ecuación	En $3x - 1 = 2x + 5$ la incógnita es x.
Grado de una ecuación	El mayor exponente de la incógnita.	La ecuación $3x - 1 = 2x + 5$ es de primer grado. La ecuación $3x^2 = 27$ es de segundo grado.
Solución de una ecuación	Número por el que se puede sustituir la incógnita para que la igualdad sea cierta.	Solución de $3x - 1 = 2x + 5$ es $x = 6$.
Resolver una ecuación	Es hallar su solución.	**$3x - 1 = 2x + 5$** $3x - 2x - 1 + 1 = 2x - 2x + 5 + 1$; $x = 6$
Ecuaciones equivalentes	Tienen las mismas soluciones	$2x - 5 = x + 2$ es equivalente a: $2x - x = 2 + 5$
Pasos para resolver una ecuación:	Quitar paréntesis Quitar denominadores Agrupar los términos con x en un miembro y los términos sin *x* en el otro. Operar Despejar la *x*.	**$(3x - 1) = 7/2$** 1. $6x - 2 = 7/2$ 2. $12x - 4 = 7$ 3. $12x = 7 + 4$ 4. $12x = 11$ 5. $x = 11/12$
Pasos para resolver un problema mediante ecuaciones	Leer el enunciado. Escribir la ecuación. Resolver la ecuación. Comprobar la solución.	Hallar un número que sumado a 7 da lo mismo que su doble menos 3. 1) Comprender el enunciado 2) $x + 7 = 2x - 3$ 3) $x - 2x = -3 - 7$; $-x = -10$; $x = 10$ 4) $10 + 7 = 2 \cdot 10 - 3$
Ecuación de segundo grado	Es una ecuación algebraica en la que la mayor potencia de la incógnita es 2. Tiene la forma: $ax^2 + bx + c = 0$ donde *a, b* y *c* son números reales, con $a \neq 0$.	$-3x^2 + 7x + -8 = 0$
Resolución de ecuaciones de 2º grado incompletas	Si $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, despejamos la incógnita: $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$. Si $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$: $x = 0$ y $x = \frac{-b}{a}$	$2x^2 - 18 = 0$: $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$ $3x^2 - 15x = 0 \Rightarrow 3x(x - 5) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = 5$.
Resolución de ecuaciones de 2º grado completas	Se usa la fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 - 5x + 6 = 0$: $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2}$ $x_1 = 3$, $x_2 = 2$
Sistema de ecuaciones lineales	$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}$
Métodos de resolución	**Sustitución:** despejar una incógnita y sustituir en la otra ecuación. **Igualación:** despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones. **Reducción:** sumar las dos ecuaciones, multiplicándolas por números adecuados.	

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Lenguaje algebraico

1. Si llamamos x a la edad de Luis, expresa algebraicamente:

a) Lola tiene la edad que Luis tenía hace 11 años.

b) Jordi tiene la edad que Luis tendrá dentro de 2 años.

c) Los años que faltan para que Luis cumpla 30 años.

d) Carmen tiene la mitad de la edad de Luis.

2. En una granja hay un número de ovejas desconocido. Indica en lenguaje algebraico el número de patas y de orejas que hay.

3. Escribe en lenguaje algebraico

a) La edad de Cristina es doble que la que tendrá su hermano dentro de 5 años.

b) La edad de Rafa es la tercera parte que la que tenía su hermana hace 3 años.

4. Escribe en tu cuaderno utilizando expresiones algebraicas:

a) Raquel tiene x cromos.

b) Pepe tiene 10 cromos más que Raquel.

c) Teresa tiene el triple de cromos que Pepe.

d) Carmela tiene el mismo número de cromos que Raquel y Pepe juntos.

e) Marta tiene la mitad de cromos que Teresa.

5. Copia en tu cuaderno y relaciona cada enunciado verbal con su expresión algebraica:

a) Sumar 9 al triple de un cierto número	1) $3x + 2(x + 1)$
b) Restamos 7 a la mitad de un número	2) $3x + 9$
c) El triple de un número más el doble del siguiente	3) $8x$
d) Lo que nos devuelven si pagamos 20 € por una cierta compra	4) $x/2 – 7$
e) El perímetro de un octógono regular.	5) $x – 3$
f) La edad de alguien hace 3 años	6) $20 – x$

6. Calcula el valor numérico de las siguientes igualdades para el valor indicado de x:

a) $y = 0.5 + 3x$ para $x = 3$ b) $y = 1.6x$ para $x = 0.75$ c) $y = 4 + 1.5x$ para $x = 2.1$

7. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $3a^2b – 2a^2b + 7a^2b$ b) $5xy + 7xy – 2xy$ c) $6x + 9x – 3x$

d) $2x + 7x – 2y$ e) $3ab + 8ab – 6ab$

8. Realiza las operaciones siguientes

a) $3x + 5x – 2y + 9y – 4x – 3y$ b) $(2x – 5x^2) – (3x^2 + 5x)$

c) $3(7x – 3) – 2(2x + 5)$ d) $2a – 5a + 7a – 8a + b$

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ecuaciones de primer grado

9. Encuentra el número que falta:

a) O + 2 = 5 b) O + 3 = 1 c) O – 4 = 6 d) O – 4 = –1

10. Si Clara tiene x años y sabemos que aún no ha cumplido los 5, indica quién de las siguientes personas puede ser la madre de Clara:

Persona	***Edad en años***
Julia	$3x - 9$
María	$x^2 - 17$
Federica	$3x + 5 + 7x + 6$
Elisa	$x - 2x + 9$

11. Resuelve **mentalmente** las siguientes ecuaciones y escribe la solución en tu cuaderno:

a) $x + 3 = 2$ b) $x - 2 = 3$ c) $x/5 = 1$ d) $x/3 + 2/3 = 4/3$

12. Elige entre las siguientes ecuaciones todas las que sean equivalentes a la ecuación $3x - 6 = x + 9$.

a) $x + 10 = 17.5$ c) $8 - x = 3x - 5x$ e) $4x = 30$ g) $2x = 9 + 6$ i) $10 - 2.5 = x$

b) $6x + 2x = 60$ d) $5x - 6 = 3x + 9$ f) $-6 - 9 = x - 3x$ *h)* $3x = 15$ *j)* $x = 7.5$

13. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x - 5 = 4x - 7$ d) $x + 9 = 3x - 3$ g) $4x + 2 = 14$ i) $3x - 5 = 2x - 5$

b) $x - 12 = 7x + 6$ e) $5x - x + 7 = 2x + 15$ h) $3x - 4 = x + 18$ k) $3x - 4 + x = 8$

c) $x - 1 = x + 5x + 9$ f) $2x - 27 = x$ i) $4x - 6 = x + 9$ l) $3 - 10 = x + 1$

14. Escribe tres ecuaciones equivalentes a $2x - 3 = 5$.

15. Escribe tres ecuaciones que tengan como solución $x = 7$.

16. Resuelve las ecuaciones siguientes: (Sugerencia: ilustra las ecuaciones mediante balanzas).

a) $x - 5 = 9$ b) $x - 8 = 2$ c) $x - 3 = 4$ d) $x - 9 = 6$

17. Resuelve en tu cuaderno las siguientes ecuaciones:

a) $2x + 4x = 54$ b) $4x - 3x = 16$ c) $5(x - 2) = 70$ d) $-5x - 2x = -49$

18. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $2x + 3 = 5$ b. $4x - 5 = x + 4$ c. $x/3 = -2$ d. $-2(3x - 4) = 2x + 5$

19. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $4x - 4 = 2x$ b) $2(x + 7) = x$ c) $x/3 + 2 = x$ d) $3(x + 3x) = x + 50$

20. Resuelve las ecuaciones:

a) $x/2 - 2(x - 3x) = 27$ b) $2x - (2x - 3) + x = 4$ c) $7 = 1 + x/2$ d) $4 - x = 2 + x/2$

21. Resuelve:

a) $x / 3 = 7$; b) $3x = 9$; c) $x + 4 = 12$; d) $x - 7 = 1$

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

22. Practica en tu cuaderno resolviendo las siguientes series de ecuaciones:

1ª serie

1) $x + 4 = 6$ 2) $x + 6 = 3$ 3) $15 = 11 + x$ 4) $7 = x + 3$ 5) $x + 8 = 4$

6) $x + 6 = 8$ 7) $x + 7 = 3$ 8) $8 + x = 16$ 9) $3 = 7 + x$ 10) $2 = x + 4$

2ª serie

11) $x - 3 = 6$ 12) $x - 4 = 2$ 13) $4 = x - 1$ 14) $7 - x = 2$ 15) $6 - x = 4$

16) $3 = 9 - x$ 17) $x - 4 = 7$ 18) $x - 2 = 0$ 19) $8 - x = 3$ 20) $9 - x = 5$

3ª serie

21) $3x = 6$ 22) $4x = 16$ 23) $6x = 18$ 24) $8 = 2x$ 25) $-12 = 3x$

26) $2x = -6$ 27) $4x = 11$ 28) $3x = 6$ 29) $9 = 3x$ 30) $18 = 6x$

4ª serie

31) $x/5 = 1$ 32) $x/3 = 7$ 33) $x/-2 = 3$ 34) $x/5 = 2/3$ 35) $x/10 = 3/2$

36) $x/7 = 2$ 37) $x/12 = 3/4$ 38) $x/3 = -2/9$ 39) $x/5 = -2$ 40) $x/7 = 3/14$

5ª serie

41) $x + 3x = 16$ 42) $4x + 2x = 6$ 43) $6x = 8 + 10$ 44) $3x + 7 = 4$

45) $2x + 7 = 11 + 4x$ 46) $x + 1 = 2x - 5 + 2x$ 47) $3x - 2 + 4x = 3 - 3x + 1$

48) $4x - 3 + x = 3x + 7$ 49) $x + 4 + 4x = 2 - 2x + 5$ 50) $6x + 4 - 2x = 3 + 2x - 7$

6ª serie

51) $x/3 - 2 = 4$ 52) $3x/5 + 4 = 3$ 53) $x/3 + 2x/3 = 7$ 54) $x/5 + 3x/5 = 9$

55) $x/2 + x/2 + 3 = 5$ 56) $3x/7 + 2x/7 + 3 = 6$ 57) $x + x/5 = 7$ 58) $x/2 + 5x/2 + 3 = 5$

59) $5 + x/7 = 21$ 60) $3 + x/3 = 9$

7ª serie

61) $3 + 4(2 - x) = 9 - 2x$ 62) $5 - 2(x + 2) = x - 5$

63) $13 + 3(2x + 5) = 2(x + 3) - 1$ 64) $7 - 2(3x - 5) = 13 - 2(4x - 7)$

65) $5x - 3(2x - 4) = 36 - 3(4x + 6)$ 66) $2(3x - 5) - (2x + 1) = 17 - 3x$

67) $2(x + 4) + 3x = -34 - 3(5x + 6)$ 68) $5 - 2(7 - 2x) = x - 6$

69) $3x - 4(x - 1) = 8 - 5x$ 70) $5x - (2x + 3) = 2x - 5$

8ª serie

71) $x/3 + x/6 = 12$ 72) $x/6 + x/3 + x/2 = 5$ 73) $(x - 3)/5 = 1$ 74) $x/2 - 3 = 4$

75) $(2x + 9)/3 = 7$ 76) $(2x + 9)/3 = x$ 77) $(x - 3)/5 = x$ 78) $5 + x/4 = 6$

79) $4x/3 + 5x/6 = x/3 + 2$ 80) $2x/3 + 7x/2 + 5x = 8 + x/6$

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Problemas

23. Si un repartidor de pedidos ha dejado los 2/5 de los paquetes que llevaba en la primera casa, y aún le quedan 99 kg por repartir, ¿cuántos kilos tenía en un principio?

24. Resuelve mentalmente los siguientes problemas:

a) ¿Cuántos cromos tengo si el doble de los que poseo es 20?

b) ¿Cuántas canicas tengo si al darme 7 tendré 37?

c) ¿Cuántos discos tengo si al regalar 5 me queda una docena?

d) Manuel, dentro de 6 años tendrá 18. ¿Cuántos años tiene ahora?

25. En una granja hay 70 animales entre gallinas y conejos, y entre los dos, suman 180 patas. ¿Cuántas gallinas hay en la granja?

26. Halla el número tal que su doble más tres sea igual que su triple menos dos.

27. Repartimos 150 € entre tres personas de forma que la primera recibe el doble que la segunda y ésta el triple que la tercera. ¿Cuánto le corresponde a cada una?

28. El ángulo mayor de un triángulo mide el doble que el menor y éste 20 grados menos que el mediano. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos del triángulo? (Recuerda que los tres ángulos de un triángulo suman 180 grados)

29. Si al quíntuplo de un número le restas dos obtienes 27. ¿Cuál es el número?

30. Un número y su siguiente suman 87. ¿Cuáles son esos números?

31. Un bolígrafo cuesta el triple que un lápiz. He comprado cinco lápices y cuatro bolígrafos y me han costado 2.55 €. ¿Cuánto cuesta un lápiz? ¿Y un bolígrafo?

32. En mi monedero llevo diez monedas, unas de 50 céntimos y otras de 20 céntimos. Si tengo 2,90 € en total, ¿Cuántas monedas de cada tipo tengo?

33. El perímetro de un rectángulo es de 120 metros y la altura es 24 metros más larga que la base. ¿Cuánto miden la base y la altura del rectángulo?

34. Laura dice que si al triple de la edad que tiene le restas la mitad, el resultado es 30. ¿Qué edad tiene Laura?

35. Un hijo tiene 12 años y su padre 35. ¿Cuántos años deben de pasar para que la edad del padre sea el doble que la del hijo?

36. Calcula la longitud del lado de un triángulo equilátero sabiendo que su perímetro es de 18 cm.

37. Calcula la longitud de los lados de un triángulo isósceles sabiendo que el perímetro es 18 cm y cada lado igual mide 3 cm más que el lado desigual.

38. Si a la tercera parte de un número le sumas dos, obtienes el mismo resultado que si al número le sumas uno y divides entre dos.

39. El perímetro de un triángulo isósceles mide 30 centímetros. El lado desigual mide la mitad de uno de sus lados iguales. ¿Cuánto mide cada lado?

40. Hemos comprado 12 artículos entre mesas y sillas. ¿Cuántas hemos comprado de cada si cada mesa cuesta 130 € y cada silla 60 € y en total nos ha costado 860 €?

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

41. Cuadrados mágicos: En el cuadro Melancolía del famoso pintor alemán Alberto Durero (1471-1528) aparece este cuadrado mágico en el que todas las filas, columnas y diagonales suman lo mismo, y además ese mismo resultado se obtiene sumando las cuatro casillas centrales. Además, las dos casillas del centro de la línea inferior indican el año en el que este cuadrado mágico fue resuelto, 1514. Confecciona un cuadrado mágico de 3 x 3 casillas, colocando los dígitos del 1 al 9 de forma que todas las filas, todas las columnas, y todas las diagonales sumen lo mismo.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

42. DIOFANTO: Diofanto fue un famoso matemático griego del siglo III d. C. En el epitafio de su tumba escribió:

- ¡Caminante! Aquí yacen los restos de Diofanto. Los números pueden mostrar ¡oh maravilla! La duración de su vida, cuya sexta parte constituyó la hermosa infancia.
- Había transcurrido además una duodécima parte de su vida cuando se cubrió de vello su barba.
- A partir de ahí, la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril.
- Pasó, además un quinquenio y entonces le hizo dichoso el nacimiento de primogénito.
- Este entregó su cuerpo y su hermosa existencia a la tierra habiendo vivido la mitad de lo que su padre llegó a vivir.
- Por su parte, Diofanto descendió a la sepultura con profunda pena habiendo sobrevivido cuatro años a su hijo.

Dime, caminante, cuántos años vivió Diofanto.

a) Escribe en lenguaje algebraico el epitafio de la tumba de Diofanto

b) Resuelve la ecuación. Comprueba que Diofanto vivió 84 años.

Ecuaciones de segundo grado

43. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado

a) $x^2 + 5x - 6 = 0$ b) $7x^2 + 12x = 0$ c) $3x^2 + 75 = 0$

d) $x^2 - 2x + 7 = 0$ e) $6x^2 - 5x - 7 = 0$ f) $x^2 - 9 = 0$

Sistemas lineales

44. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 6x - 4y = -8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 9x - 6y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN

1. Los coeficientes de la expresión algebraica 8.3x – 2.5 + *y*, son:

a) 8.3, 2.5 y 1 b) +8.3, –2.5 y +1 c) + 8.3 y – 2.5 d) 8.3, 1, 2.5

2. El valor numérico de la expresión algebraica 4 a + 3 b, cuando $a = 5$ y $b = -2$, es:

a) 14 b) –14 c) 26 d) – 26

3. La solución de la ecuación $3.4 + 5.2x - 8.1x = 9.4 + 7.3x$ es:

a) –10/17 b) +6/–10.2 c) – 10/1.7 d) 0.58

4. La ecuación $x^2 = 4$ tiene de soluciones:

a) 2 b) –2 c) 2 y –2 d) 0 y 2

5. La suma de las edades de dos personas es de 50 años y su diferencia, 8 años. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones nos permite calcular sus edades?

a) $x + x + 8 = 50$ b) $x - 8 = 50$ c) $50 + x = 8 - x$ d) $x + x - 8 = 50$

6. El perímetro de un rectángulo es 70 cm. Si la base es el triple de la altura menos 5 cm, las dimensiones del rectángulo son:

a) 30 y 11 b) 20 y 9 c) 25 y 10 d) 55 y 20

7. Tres números suman 142. El mediano es el doble del menor, y el mayor es triple del menor menos 8. ¿Cuál de estas ecuaciones nos permite hallar los números?

a) $2x + x + 3x = 142$ b) $x + 3x + 2x = 142 + 8$ c) $x + 2x + 3x = 142 - 8$ d) $6x = 136$

8. Tenemos 20 monedas de 2 € y 1 €. Si en total tenemos 30 €, de cada clase de monedas, tenemos:

a) 9 y 12 b) 10 y 10 c) 12 y 6 d) 8 y 12

9. Tres personas se reparten una cantidad de dinero: la primera se queda con 250 € más que la segunda y la tercera se lleva tanto como la primera y la segunda juntas menos 100 €. Si la cantidad a repartir es 2 000 €, el resultado del reparto es, respectivamente:

a) 900 €, 400 € y 650 € b) 450 €, 650 € y 950 € c) 600 €, 400 €, 1000 € d) 650 €, 400 €, 950 €

10. ¿A qué distancia de sus respectivos puntos de salida se cruzarán dos coches que salen en sentido contrario desde dos ciudades que distan 540 km, si el primero va a 100 km/h y el segundo a 80 km/h?

a) 340 km y 200 km b) 300 km y 240 km c) 420 km y 120 km d) 320 km y 220 km.

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF