

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-012302

Fecha y hora de registro: 2013-09-26 17:30:23.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.drights.com>



www.apuntesmareaverde.org.es



Autora: Nieves Zuasti y Fernando Blasco

Revisor: Raquel Caro y Sergio Hernández

Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

Índice

1. EL AZAR Y LA PROBABILIDAD

- 1.1. FENÓMENOS ALEATORIOS
- 1.2. FRECUENCIA ABSOLUTA Y RELATIVA. FRECUENCIAS ACUMULADAS
- 1.3. EXPERIMENTOS ALEATORIOS
- 1.4. PROBABILIDAD

2. GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

- 2.1. DIAGRAMA DE RECTÁNGULOS O DE BARRAS
- 2.2. DIAGRAMA DE LÍNEAS
- 2.3. PICTOGRAMA
- 2.4. DIAGRAMA DE SECTORES

3. MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN Y MEDIDAS DE DISPERSIÓN

- 3.1. MEDIA ARITMÉTICA
- 3.2. MODA
- 3.3. MEDIANA
- 3.4. MEDIDAS DE DISPERSIÓN

4. EL ORDENADOR Y LA ESTADÍSTICA

Resumen

Si quieres conocer la estatura o el peso de las personas que tienen entre 11 y 13 años en España, puedes recoger los datos de cada una de las personas de esas edades. Pero esto es muy laborioso. Lo que hace la Estadística es recoger una **muestra** que nos permita representar la totalidad de la población objeto de estudio. La recogida de datos es muy antigua. El emperador Augusto mandó hacer un censo, (o recogida de datos) de todo su Imperio.

El origen de la Probabilidad puede encontrarse en los juegos de azar, y los juegos de azar, dados, cartas, lotería... hacen un buen uso de la Estadística y la Probabilidad.

La Ciencia progresa deduciendo, mediante razonamientos lógicos correctos, e infiriendo, con unas observaciones experimentales, se induce algo más general.

En este capítulo repasaremos los conocimientos que ya tienes del curso pasado sobre frecuencias y probabilidad y la representación de datos estadísticos e iniciaremos el estudio de las medidas de centralización: media, mediana y moda.



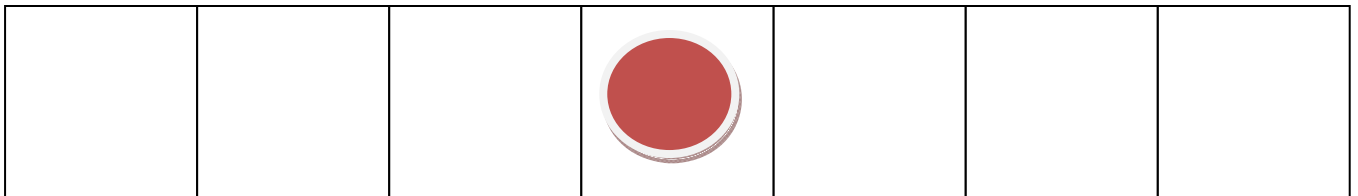
1. EL AZAR Y LA PROBABILIDAD

1.1. Fenómenos o experimentos aleatorios

Ya sabes que:

Un **fenómeno o experimento aleatorio** es aquel, que manteniendo las mismas condiciones en la experiencia, el resultado no es siempre el mismo, no es posible predecir el resultado.

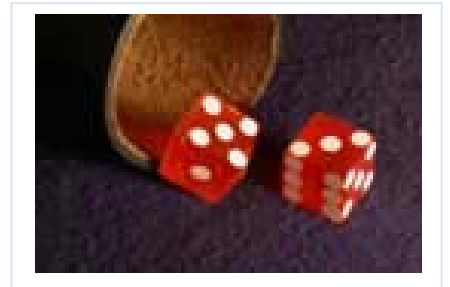
✚ **Veamos un juego:** Dibuja 3 casillas hacia la derecha, una casilla central y 3 casillas hacia la izquierda. Coloca una ficha en la casilla central. Tiramos dos dados y anotamos la suma de sus caras superiores.



Si sale más de 7 se mueve la ficha a la derecha, si menos, hacia la izquierda. Tiramos los dados varias veces. Anota cuántas tiradas necesitas para llegar a una de las metas.

Es un **ejemplo** de **fenómeno o experimento aleatorio** porque no se puede predecir el resultado.

✚ Sin embargo, calcular el coste de 3 kg de fruta, sabiendo el precio por kg, no es un experimento aleatorio. Es un fenómeno **determinista**. También es determinista calcular el coste del recibo del agua sabiendo el gasto.



Actividad resuelta

- ✚ Son experimentos aleatorios:
 - a) Lanzar una moneda y anotar si sale cara o cruz.
 - b) Lanzar un dado.
 - c) Si en una urna hay 7 bolas negras y 5 rojas, sacamos una y anotamos el color.
 - d) Sacar una carta de una baraja española.
- ✚ No son experimentos aleatorios
 - a) Si sales sin paraguas cuando llueve seguro que te mojas.
 - b) El precio de medio kilo de mandarinas si cuestan a 1.7 € el kilo.
 - c) Soltar un objeto y ver si cae.

Actividades propuestas

1. Indica si es un fenómeno aleatorio:
 - a) La superficie de los países de la Comunidad Europea.
 - b) Anotar el sexo del próximo bebé nacido en una clínica determinada.
 - c) El área de un círculo del que se conoce el radio.
 - d) Tiramos una chincheta y anotamos si cae con la punta hacia arriba.
 - e) Saber si el próximo mes es febrero.

1.2. Frecuencia absoluta y relativa. Frecuencias acumuladas

Ya sabes que:

Al realizar repetidas veces un experimento podemos anotar las veces en que se obtiene cada uno de los posibles resultados.

Ejemplo:

- ✚ Tiramos una moneda 100 veces y anotamos las veces en que nos ha salido cara y las veces en que nos ha salido cruz. Nos ha salido cara 49 veces, entonces decimos que la frecuencia absoluta de cara es 49.
- ✚ Al dividir la frecuencia absoluta por el número total de experimentos tenemos la frecuencia relativa, así la frecuencia relativa de cara es $49/100$, o bien 0.49.

Posibles resultados	Número de veces
cara	49
cruz	51
Total	100

La **frecuencia absoluta** de un suceso es el número de veces que se ha obtenido ese suceso.

La **frecuencia relativa** de un suceso se obtiene dividiendo la frecuencia absoluta por el número total de experimentos.

Si sumas las frecuencias relativas de todos los posibles resultados de un experimento, esa suma siempre es igual a 1.

Al conjunto de los posibles resultados y sus correspondientes frecuencias se le denomina **distribución de frecuencias**.

Posibles resultados	Frecuencias relativas
cara	0.49
cruz	0.51
Suma total	1

Actividades propuestas

Posibles resultados	Frecuencias absolutas	Frecuencias relativas
1	15	
2	18	
3	16	
4	17	
5	19	
6	15	
Suma total	100	1

2. Completa en la siguiente tabla las frecuencias relativas del experimento aleatorio tirar un dado:

En ocasiones puede interesarnos saber cuál es la frecuencia, absoluta o relativa, del suceso *ser menor a igual a n*. Entonces se dice que es una **frecuencia acumulada**. Naturalmente esto sólo tiene sentido si los datos son numéricos.

Actividad resuelta

- ✚ En el ejemplo anterior la tabla de frecuencias absolutas y frecuencias absolutas acumuladas es:

Observa que cada valor se obtiene sumando al anterior. Así $15 + 18 = 33$, y $33 + 16 = 49$...

Actividades propuestas

3. Escribe la tabla de frecuencias relativas y frecuencias relativas acumuladas del ejercicio 2. Observa que el último valor ahora es 1.

Posibles resultados	Frecuencias absolutas	Frecuencias acumuladas
1	15	15
2	18	33
3	16	49
4	17	66
5	19	85
6	15	100
Suma total	100	

1.3. Experimentos aleatorios. Sucesos

Todos los días aparecen en nuestra vida hechos que tienen que ver con el azar o con la probabilidad. Si jugamos al parchís, intuimos que *más o menos* una de cada 6 veces saldrá un 5, con lo que podremos sacar una ficha a recorrer el tablero. En el 'Monopoly' sacar un doble tres veces seguidas nos manda a la cárcel ("sin pasar por la casilla de salida"). Esto no ocurre muchas veces, sin embargo, todos los que hemos jugado a esto, hemos ido a la cárcel por ese motivo.

Al realizar un experimento aleatorio no se puede predecir el resultado que se va a obtener. No obstante, habitualmente tenemos información sobre lo posible que es un determinado suceso. Así pues, el objetivo es cuantificar de alguna manera esta información que se denomina la probabilidad del suceso.

La **probabilidad** es una medida de lo factible que es que tenga lugar un determinado suceso.

Para estudiar la probabilidad, debemos introducir algunos nombres. Lo vamos a hacer con ayuda de un caso concreto.

Espacio muestral

Un **experimento aleatorio** es una acción (experimento) cuyo resultado depende del azar.

Al realizar un experimento aleatorio existen varios posibles resultados o **sucesos posibles**.

- ✚ Por ejemplo, los posibles resultados al tirar una moneda son que salga *cara* o salga *cruz*.
- ✚ Los posibles resultados al tirar un dado es que nos salga 1, 2, 3, 4, 5 o 6.

Al realizar el experimento siempre se obtendrá uno de los posibles resultados.

Al conjunto de resultados de un experimento aleatorio se le denomina **espacio muestral**.

A los elementos del espacio muestral se les llama **sucesos elementales**.

Ejemplo

- ✚ Imaginemos que tenemos una bolsa con 7 bolas: 2 blancas, 4 rojas y una negra. Hacemos el siguiente **experimento aleatorio**: meter la mano en la bolsa y mirar el color de la bola que ha salido.

Hay 3 *casos* posibles: "que la bola sea blanca", "que la bola sea roja" o "que la bola sea negra". Abreviadamente los representaremos por *blanca*, *roja* o *negra* (también podremos representar los colores o escribir B, R o N; recuerda que en matemáticas siempre se debe simplificar, incluso la manera de escribir).

El **espacio muestral** es el conjunto de todos los casos posibles: {B, R, N}.

Un **suceso** es un subconjunto del espacio muestral.

Los diferentes **sucesos** son los subconjuntos del espacio muestral. En nuestro ejemplo los sucesos posibles son {B}, {R}, {N}, {B, R}, {B, N}, {R, N}, {B, R, N}.

Es seguro que en nuestro experimento la bola que sacamos es "blanca", "negra" o "roja". Por eso al espacio muestral se le llama también **suceso seguro**.

Ejemplos.

1. Baraja española de 40 cartas. Experimento: sacamos una carta al azar y miramos su palo.

Espacio muestral: {oros, copas, espadas, bastos}



2. Experimento: Lanzamos simultáneamente 1 moneda de euro y una de 2 euros al aire.

Espacio muestral: {Cara-Cara, Cara-Cruz, Cruz-Cara, Cruz-Cruz}

3. Experimento: Lanzamos simultáneamente 2 monedas de 1 euro (indistinguibles)

Espacio muestral: {Salen 2 caras, Salen 2 cruces, Sale 1 cara y una cruz}

4. Experimento: Lanzamos una moneda de 1 euro y apuntamos qué ha salido; la volvemos a lanzar y apuntamos el resultado.



Espacio muestral: {CC, CX, XC, XX}

5. Experimento: Lanzamos simultáneamente dos dados y sumamos los números que se ven en las caras superiores.

Espacio muestral: {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

6. Experimento: Lanzamos un dado usual y sumamos los números que aparecen en la cara superior y la cara inferior (la que no se ve, que está sobre la mesa).

Espacio de sucesos: {7}

En los ejemplos anteriores, (2) y (4) son equivalentes: los posibles resultados del lanzamiento de 2 monedas que se distinguen son los mismos que los del lanzamiento de una misma moneda dos veces (por ejemplo, equiparamos el resultado del lanzamiento de la moneda de 1 euro del ejemplo 3 con el primer lanzamiento de la moneda del ejemplo 4 y el resultado del lanzamiento de la moneda de 2 euros con el segundo lanzamiento).

En el experimento 6 siempre sale el mismo resultado (por alguna razón los puntos en los dados usuales se distribuyen siempre de modo que las caras opuestas suman 7). Técnicamente éste no es un experimento aleatorio, puesto que el resultado no depende del azar.

Actividad resuelta

- ✚ El espacio muestral del experimento aleatorio:

- a) Extraer una bola de una bolsa con 5 bolas rojas y 2 negras es {roja, negra}
- b) Al sacar un papel de una bolsa donde se han puesto 3 papeles numerados del 1 al 3, es {1, 2, 3}

- ✚ Así, para el lanzamiento de un dado, aunque el espacio muestral habitual será {1, 2, 3, 4, 5, 6}, es posible que sólo sea de interés si el resultado obtenido es par o impar, en cuyo caso el espacio muestral sería {par, impar}.

- ✚ En el caso del lanzamiento consecutivo de dos monedas, el espacio muestral puede ser {{C, C}, {C, +}, {+, C}, {+, +}}, o bien: {0 caras, 1 cara, 2 caras}, si nos interesa únicamente el número de caras obtenidas.

- ✚ Algunos **sucesos** del experimento aleatorio tirar un dado son:

- a) Sacar un número impar: {1, 3, 5}
- b) Sacar un número mayor que 4: {5, 6}
- c) Sacar un número menor que 4: {1, 2, 3}



Actividades propuestas

4. Para cada uno de los ejemplos anteriores: lanzar un dado, tirar dos monedas, indica 3 sucesos diferentes que no sean sucesos individuales.
5. En una bolsa tenemos 5 bolas rojas numeradas del 1 al 5. Se hacen los dos experimentos siguientes:
EXPERIMENTO A: Se saca una bola de la bolsa y se mira su color.
EXPERIMENTO B: Se saca una bola de la bolsa y se mira su número.
¿Cuál de estos experimentos no es un experimento aleatorio? ¿Por qué?
Para el experimento que sí es un experimento aleatorio indica su espacio muestral.
6. Una baraja francesa tiene 52 cartas, distribuidas en 13 cartas de picas, 13 de corazones, 13 de tréboles y 13 de diamantes. Las picas y los tréboles son cartas negras mientras que los corazones y los diamantes son cartas rojas. Se mezcla la baraja, se corta y se hace el siguiente experimento: coger las dos cartas que han quedado arriba del todo y observar de qué color son. Describe el espacio muestral.
7. Inventa cinco experimentos aleatorios y escribe el conjunto de posibles resultados
8. Escribe el espacio muestral del experimento aleatorio: *“Escribir en cinco tarjetas los números 1, 2, 3, 4 y 5 y sacar una al azar”*.
9. Escribe el espacio muestral del experimento aleatorio: *“Tirar una tiza al suelo y anotar el número de trozos en que se rompe”*.
10. Inventa dos sucesos del experimento aleatorio de sacar dos cartas.
11. En el juego de lotería, indica dos sucesos respecto a la cifra de las centenas del primer premio.
12. En el juego de dominó, indica tres sucesos con fichas dobles.
13. Escribe tres sucesos aleatorios de tirar tres monedas.

1.4. Probabilidad

Dados todos los sucesos posibles de un experimento aleatorio, asignaremos a cada suceso A , una cantidad que denotaremos por $P(A)$ y que llamaremos la probabilidad del suceso A .

Ya sabes que la probabilidad es una medida que nos indica el grado de confianza de que ocurra un determinado suceso.

La **probabilidad** se expresa mediante un número comprendido entre 0 y 1.

Si ese número está próximo a 0 diremos que es un suceso improbable (ojo, improbable no quiere decir que sea imposible), mientras que si está próximo a 1 diremos que ese suceso es mucho más probable.

La probabilidad es una medida de la certeza que tenemos que se verifique un suceso. Sirve para prevenir el futuro usando lo que se sabe sobre situaciones pasadas o presentes.

Pero la palabra “probable” es de uso común, por lo que siempre sabes si algo es “*muy probable*”, “*bastante probable*”, “*poco probable*” o “*muy improbable*”.

Actividad resuelta

- + Si no has estudiado nada un examen es *bastante probable* que te suspendan, y si te lo sabes, es *muy probable* que saques buena nota.
- + Si una persona roba un banco es *probable* que acabe en la cárcel.
- + Es *poco probable* que se caiga el avión que acaba de salir de Barajas.
- + Es *seguro* que después del lunes llega el martes.
- + Es *muy improbable* que mañana haya un maremoto.

Actividades propuestas

14. Señala si son *poco probables* o *muy probables* los siguientes sucesos:

- a) El jueves vas al colegio.
- b) Cruzas la calle y te pilla un coche.
- c) Hace una quiniela y le toca el premio máximo.
- d) Le toca la lotería a Juan.
- e) Le pongan una multa a una persona que conduce habiendo bebido alcohol.
- f) Sales a la calle y te cae una cornisa encima.
- g) ¿Amanecerá mañana?
- h) Mañana haya un terremoto en Madrid.

Para calcular probabilidades se usan dos técnicas, una **experimental**, analizando las frecuencias relativas de que ocurra el suceso, y la otra **por simetría**.

Ejemplo

- ✚ En una bolsa que contiene 20 bolas blancas introducimos una bola negra (indistinguible al tacto). Mezclamos bien las bolas de la bolsa, y realizamos el experimento consistente en meter la mano en la bolsa y sacar una bola.

Sin que hayamos estudiado nada formalmente sobre probabilidad. ¿Qué piensas que es más probable, que la bola sacada sea blanca o que sea negra? ¡Estamos de acuerdo en que es más probable sacar una bola blanca!

Ahora ya sí que podemos plantearnos una pregunta: ¿En qué medida es más probable sacar una bola blanca?

No es difícil de calcular. Los datos que tenemos son los siguientes:

- La bolsa tiene 21 bolas.
- 1 bola es negra.
- 20 bolas son blancas.

La probabilidad de sacar la bola negra es 1 de entre 21. La probabilidad de sacar una bola blanca es de 20 entre 21.

Lo que acabamos de utilizar es conocido como **Ley de Laplace**. Si todos los casos posibles de un espacio muestral son **equiprobables** (esto es, tienen la misma probabilidad de ocurrir), y S es un suceso de ese experimento aleatorio se tiene que

Regla de Laplace:

La probabilidad de un suceso es igual al número de casos favorables dividido por el número de casos posibles

$$P(S) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso } S}{\text{número de casos posibles}}$$

Pero, ¿y si no podemos asegurar que todos los casos sean equiprobables?

La probabilidad de que ocurra un cierto resultado al realizar el experimento, aunque ya se verá en otros cursos en detalle, se calcula como la frecuencia relativa de ese resultado repitiendo el experimento muchas veces. Cuantas más veces repitas el experimento, más se aproximará la frecuencia relativa al valor de la probabilidad.

- ✚ Por ejemplo, si tiras una moneda al aire una sola vez y sale cara, parecerá que la probabilidad de sacar cara es 1, pero si repites más veces el experimento, la frecuencia relativa de sacar cara se irá acercando a 0.5 con el tiempo. Eso nos dice que la probabilidad de sacar cara es 0.5.

Actividad resuelta

- ✚ Mezclamos una baraja española de 40 cartas (los palos son oros, copas, espadas y bastos y en cada palo hay cartas numeradas del 1 al 7 además de una sota, un caballo y un rey).

Se realiza el experimento consistente en *cortar la baraja y quedarnos con la carta superior*.

Consideraremos los siguientes sucesos:

- 1) Obtener una figura.
- 2) Obtener una carta con un número impar.
- 3) Obtener una carta de espadas.
- 4) Obtener una carta de espadas o una figura.
- 5) Obtener la sota de oros.

En principio las cartas no van a estar marcadas, con lo que la probabilidad de que salga cada una de ellas es la misma. Esto es, estamos ante un experimento aleatorio con todos los casos equiprobables.

- 1) En la baraja hay 12 figuras (3 por cada palo). Así

Casos favorables: 12

Casos posibles: 40

Probabilidad: $12/40 = 3/10$

- 2) Por cada palo hay 4 cartas con números impares: 1, 3, 5 y 7.

Casos favorables: 16

Casos posibles: 40

Probabilidad: $16/40 = 2/5$

- 3) Hay 10 cartas de espadas en la baraja

Casos favorables: 10

Casos posibles: 40

Probabilidad: $10/40 = 1/4$

- 4) Hay 10 cartas de espadas y además otras 9 figuras que no son de espadas (claro, las 3 figuras de espadas ya las hemos contado).

Casos favorables: 19

Casos posibles: 40

Probabilidad: $19/40$

- 5) Solo hay una sota de oros

Casos favorables: 1

Casos posibles: 40

Probabilidad: $1/40$

Más actividades resueltas

- ✚ La probabilidad de que salga cara al tirar una moneda es $1/2$, pues sólo hay dos casos posibles {cara, cruz} y suponemos que la moneda no está trucada
- ✚ La probabilidad de sacar un 5 al tirar un dado es $1/6$, pues hay seis casos posibles {1, 2, 3, 4, 5, 6} y suponemos que el dado no está trucado luego todos ellos son equiprobables.
- ✚ La probabilidad de que al cruzar la calle te pille un coche NO es $1/2$, pues ya te habría pillado un montón de veces. Para calcular esa probabilidad se recogen datos de peatones atropellados.
- ✚ La probabilidad de sacar bola roja de una bolsa con 7 bolas rojas y 3 bolas blancas es $7/10$.
- ✚ La probabilidad de que un bebé sea niña es aproximadamente 0.5, pero al hacer el estudio con las frecuencias relativas se ha visto que es 0.49.

Observa que para poder utilizar la Regla de Laplace debes haberte cerciorado que los sucesos elementales son equiprobables.

Si cruzas una calle pueden ocurrir dos cosas, que te pille un coche o que no te pille, sin embargo, es evidente que la mitad de las veces que cruzas calles no te pilla un coche.

En este caso lo útil es utilizar las frecuencias relativas para estimar probabilidades cuando éstas no son conocidas.

La **ley de los grandes números** nos dice que cuando se repite muchas veces un experimento aleatorio la frecuencia relativa de cada suceso S se aproxima a su probabilidad. Cuanto más grande sea el número de repeticiones, mejor va siendo la aproximación.

En juegos de dados, monedas, cartas... suponemos que no están trucadas y que por eso los sucesos elementales son equiprobables.

- ✚ Sacamos una carta de una baraja española. La probabilidad de que sea un oro es $10/40 = 1/4$, y la probabilidad de sacar un rey es $4/40 = 1/10$.
- ✚ Tiramos dos monedas y queremos calcular la probabilidad de que sea cara. Podemos considerar que el espacio de sucesos elementales es: {0 caras, 1 cara, 2 caras}, o bien {(C, C), (C, +), (+, C), (+, +)}. Para decidir tendremos que saber en cuál de los casos son equiprobables. Jugando, jugando, es decir, le experiencia no dice que son equiprobables en el segundo caso y por tanto la probabilidad de que alguna sea cara es $3/4$, en lugar de $2/3$ como sería en el primer caso.

Actividades propuestas

15. Calcula la probabilidad de que al tirar con esta ruleta salga el plátano.
16. Calcula la probabilidad de que al sacar una carta de la baraja sea: a) el as de copas, b) una copa, c) un as, d) el as de copas o bien un oro, e) un as o bien una copa.
17. Para saber la probabilidad de que un incendio haya sido intencionado, ¿te basarías en el estudio de las frecuencias relativas o la asignarías por simetría?



Actividades resueltas

- Una bolsa de bolas contiene 26 negras y 26 rojas. Se mezcla el contenido de la bolsa, se mete la mano y se saca una bola, se mira el color y se devuelve a la bolsa. A continuación, se saca otra bola y se mira el color. ¿Cuál es la probabilidad de que hayan salido una bola roja y una bola negra?

Antes de seguir leyendo, piénsalo. Si te equivocas no pasa nada: el sentido de probabilidad no lo tenemos demasiado desarrollado, pero este es el momento de hacerlo.

Este problema lo hemos planteado muchas veces a otros estudiantes. Algunos dicen que la probabilidad es $1/3$ porque hay 3 casos posibles: Roja-Roja, Negra-Negra y Roja-Negra. Esa respuesta no es correcta.

En realidad, el suceso *sacar una bola de cada color* consta de 2 casos Roja-Negra y Negra-Roja. Dependiendo de cómo hubiésemos escrito el espacio muestral o de cómo hubiésemos planteado el problema ese detalle se podría ver con mayor o menor claridad.

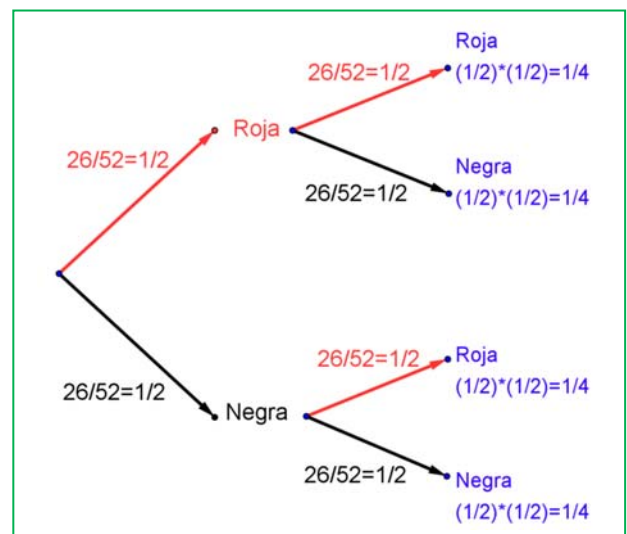
Así, la probabilidad de sacar una bola de cada color es, en realidad $1/2$.

Si no te lo crees puedes hacer un experimento: será difícil que tengas 26 bolas negras y 26 bolas rojas, pero sí que es fácil que tengas una baraja francesa. Mézclala, corta y mira el color de la carta que ha quedado arriba en el montón. Apúntalo. Vuelve a dejar las cartas en el mazo, vuelve a mezclar, corta de nuevo y mira el color de la carta que ha quedado arriba ahora. Apunta los colores. Repite este experimento muchas veces: 20, 50 o 100.

Si tienes en cuenta los resultados verás que, aproximadamente, la mitad de las veces las dos cartas son del mismo color y la otra mitad las cartas son de colores diferentes. Con eso, hemos podido “comprobar” que la probabilidad de ese suceso era $1/2$.

Otra forma que te puede ayudar a razonar sobre este problema, y otros muchos de probabilidad, es confeccionar un **diagrama en árbol**. La primera bola que sacamos tiene una probabilidad de ser Roja igual a $26/52 = 1/2$. Ese número lo escribimos en la rama del árbol. Si devolvemos a la bolsa la bola y volvemos a sacar otra bola de la bolsa, la probabilidad de que sea Roja vuelve a ser $26/52 = 1/2$. Completamos con idéntico razonamiento el resto de las ramas.

La probabilidad de que las dos bolas que hayamos sacado sean rojas es el producto de sus ramas: $(1/2) \cdot (1/2) = 1/4$. Igual probabilidad obtenemos para los sucesos Negra-Negra, Negra-Roja y Roja-Negra. La probabilidad de Roja-Negra es por tanto $1/4$, igual a la de Negra-Roja. Como son sucesos elementales la probabilidad de que las dos bolas sean de distinto color es la suma: $1/4 + 1/4 = 1/2$.



Actividades propuestas

18. La probabilidad no es un concepto intuitivo. Para ello vamos a hacer una prueba. Consideraremos el experimento aleatorio *lanzar una moneda*. Copia la tabla en tu cuaderno

- Escribe en la 1ª fila de esta tabla lo que tú crees que saldría al repetir el experimento 30 veces. Piénsalo y rellena la tabla. Como tú quieras (invéntatelo, pero “con sentido”).
- En la 2ª fila de la tabla escribe el resultado real de 30 lanzamientos de la moneda.

¿Qué observas en ambos casos? ¿Alguna pauta? Presta atención a estas cuestiones para cada una de las filas de la tabla.

¿Hay más o menos 15 caras y 15 cruces?

¿Aparecen grupos seguidos de caras o de cruces?

¿Cuál es el mayor número de caras que han salido seguidas? ¿Y el de cruces?

Normalmente cuando “te inventas” los resultados sí sueles poner la mitad de caras y la mitad de cruces. En un experimento aleatorio estos números están cerca de la mitad, pero no suelen ser la mitad exacta.

Cuando te lo inventas, en general pones pocos grupos seguidos de caras o cruces.

El cerebro nos engaña y en temas probabilísticos tenemos que educarlo mucho más. Por eso este tema es muy importante, aunque sea el que muchas veces se queda sin dar. Nos ayuda a que, como ciudadanos, no nos engañen. Ni con loterías, ni con cartas, ni con estadísticas electorales.

2. GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

Si hacemos una representación gráfica de los datos podremos comprender su significado con mucha más facilidad que si, simplemente, los dejamos en forma de tabla. Para ello, naturalmente, ya tendremos que haber recogido los datos y elaborado una tabla.

Vamos a estudiar cuatro tipos de representaciones, el diagrama de rectángulos, el diagrama de líneas, el pictograma y el diagrama de sectores, aunque hay algunas otras representaciones posibles.

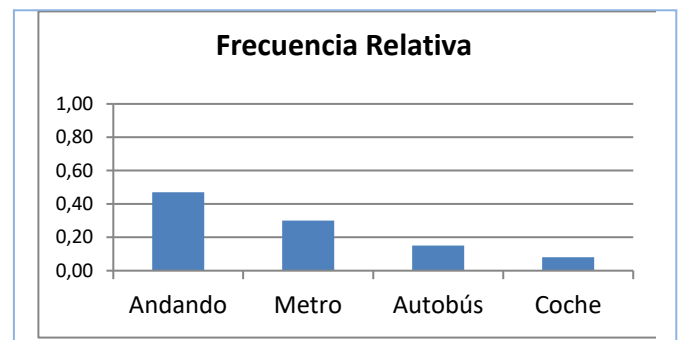
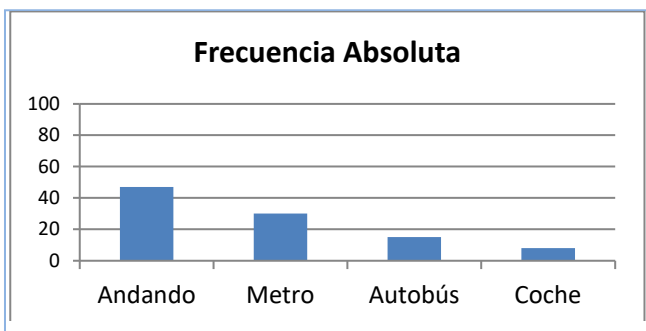
2.1. Diagrama de rectángulos o de barras

En un diagrama de rectángulos o de barras se indican en el eje horizontal todos los posibles resultados del experimento y en el eje vertical la frecuencia con la que dichos datos aparecen, por tanto, podrá ser un diagrama de rectángulos de frecuencias absolutas, o relativas o acumuladas según la frecuencia utilizada.

Actividad resuelta

- ✚ Preguntamos a 100 estudiantes cuál es el medio de transporte que utilizan para ir a la escuela. Las respuestas aparecen en la tabla del margen. Dibujamos el diagrama de rectángulos.

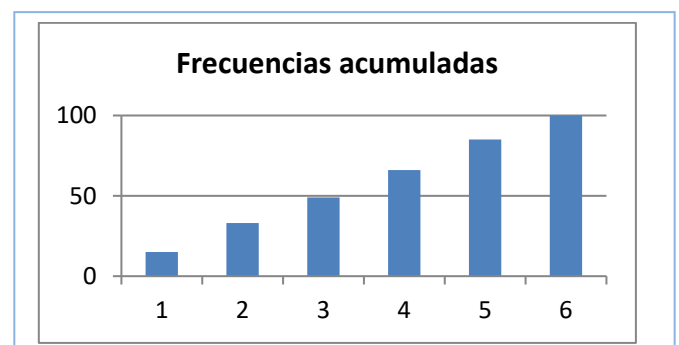
Medio de transporte	Frecuencia Absoluta	Frecuencia relativa
Andando	47	0.47
Metro	30	0.3
Autobús	15	0.15
Coche	8	0.08



Si queremos dibujar el diagrama de barras de frecuencias relativas, utilizamos la columna de frecuencias relativas para hacerlo, y se obtiene el diagrama denominado "*Frecuencia Relativa*". Si comparamos el diagrama de barras de frecuencias absolutas con el de relativas se observa que son iguales salvo en las unidades del eje de ordenadas, que ahora, en el de Frecuencias Relativas, siempre llegan hasta 1.

Tenemos la tabla de frecuencias acumuladas del experimento tirar un dado. Dibujamos el diagrama de barras de frecuencias acumuladas. Se observa como las barras van creciendo y la altura de la última coincide con la suma total, en este caso, 100, el total de veces que hemos tirado el dado.

Posibles resultados	Frecuencias absolutas	Frecuencias acumuladas
1	15	15
2	18	33
3	16	49
4	17	66
5	19	85
6	15	100
Suma total	100	



Actividades propuestas

Posibles resultados	Número de veces
cara	56
cruz	44

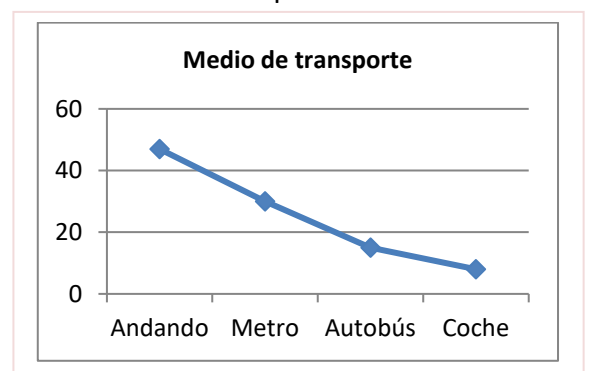
19. Dibuja el diagrama de rectángulos de frecuencias absolutas de la tabla adjunta. Representa también el diagrama de rectángulos de frecuencias relativas y de frecuencias absolutas acumuladas.

Posibles resultados	Frecuencias absolutas
1	15
2	18
3	16
4	17
5	19
6	15

20. Dibuja el diagrama de rectángulos de frecuencias absolutas de la tabla adjunta. Representa también el diagrama de rectángulos de frecuencias relativas y de frecuencias relativas acumuladas.

2.2. Diagrama de líneas

Igual que en el diagrama de rectángulos se indica en el eje horizontal todos los posibles resultados del experimento y en el eje vertical las frecuencias. En lugar de dibujar barras, ahora simplemente se unen los puntos obtenidos con líneas.



Actividad resuelta

- El diagrama de líneas absolutas de la actividad resuelta anterior es el del margen:



Actividades propuestas

21. Dibuja los diagramas de líneas de frecuencias absolutas, relativas y absolutas acumuladas del experimento tirar un dado de la actividad 20.

22. Dibuja los diagramas de líneas absolutas, relativas y relativas acumuladas del experimento tirar una moneda de la actividad 19.

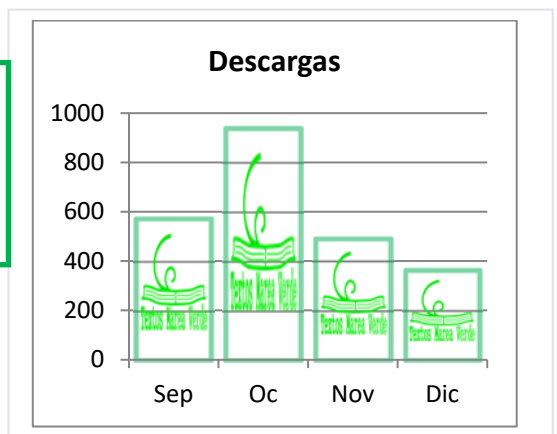
2.3. Pictograma

En los pictogramas se representan las frecuencias mediante una gráfica de barras rellenas de dibujos alusivos.

Actividad resuelta

- Se han obtenido datos sobre el número de descargas que se han hecho de los Textos Marea Verde y se tienen los datos indicados en la tabla. Se representan con un pictograma, sustituyendo el rectángulo por un dibujo alusivo.

Marea verde	Descargas
Septiembre	572
Octubre	937
Noviembre	489
Diciembre	361



2.4. Diagrama de sectores

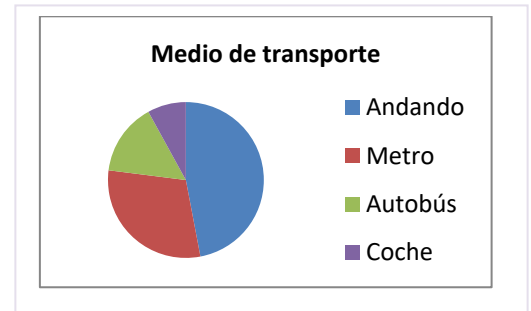
En los diagramas de sectores las frecuencias se representan en un círculo que se divide en sectores de amplitudes proporcionales a las frecuencias.

Actividad resuelta

- ✚ El diagrama de sectores de la tabla sobre el medio de transporte utilizado es:

Puedes observar que con una simple mirada sabes que algo menos de la mitad de los estudiantes van andando y algo más de la cuarta parte van en metro.

Pero realizarlo a mano requiere un trabajo previo pues debes calcular los ángulos mediante una regla de tres: multiplicas por los 360° que mide un ángulo completo y divides por el número total que en este caso es 100.



Medio de transporte	Frecuencia	Ángulo
Andando	47	$47 \cdot 360^\circ / 100 = 47 \cdot 3.6 = 169.2$
Metro	30	$30 \cdot 360^\circ / 100 = 108$
Autobús	15	$15 \cdot 360^\circ / 100 = 54$
Coche	8	$8 \cdot 360^\circ / 100 = 28.8$
TOTAL	100	360°



Actividades propuestas

- Haz un diagrama de sectores y un pictograma relativos al número de descargas de Textos Marea Verde del ejemplo visto en *Pictograma*.
- Dibuja un diagrama de sectores y un pictograma relativos a los datos de la actividad 19.
- Dibuja un diagrama de sectores y un pictograma relativos a los datos de la actividad 20.
- Haz una encuesta entre tus compañeros y compañeras de clase sobre el número de libros que leen al mes. Confecciona una tabla y representa los datos en un diagrama de rectángulos, un diagrama de líneas, un pictograma y un diagrama de sectores.
- Haz una encuesta entre tus compañeros y compañeras de clase sobre el número de horas diarias que ven la televisión. Confecciona una tabla y representa los datos en un diagrama de rectángulos, un diagrama de líneas, un pictograma y un diagrama de sectores.
- Haz una encuesta entre tus compañeros y compañeras de clase, pregunta al menos a 10 personas, sobre el tiempo que tardan en ir desde su casa al centro escolar. Confecciona una tabla y representa los datos en un diagrama de rectángulos, un diagrama de líneas, un pictograma y un diagrama de sectores.



3. MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN Y MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Vamos a poder obtener unos números de una tabla de frecuencias o de unos datos que nos den información sobre su “centro” e información sobre lo que se alejan de dicho centro.

3.1. Media aritmética

Actividad resuelta

- ✚ Sabes muy bien calcular la media de tus notas. Juan ha tenido en Matemáticas, 7, 3, 5, 9, 8. Tu nota media la calculas sumando todas las notas: $7 + 3 + 5 + 9 + 8 = 33$, y dividiendo la suma entre el número total de notas: $33/5 = 6.6$.

En general si se quiere calcular la media de x_1, x_2, \dots, x_n , se hace lo mismo, se suman todos y se divide por el número total de datos.

$$\text{Media} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$$

Actividades propuestas

29. Dada la temperatura en una ciudad a una hora determinada el día 1 de cada mes se tiene la siguiente tabla:

	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Temperatura	-1	3	8	9	11	13	20	25	21	14	9	4

Calcula la temperatura media.

Actividad resuelta

Pero si tienes muchos datos y los tienes agrupados en una tabla de frecuencias, puedes hacerlo mejor de otra manera.

- ✚ Imagina que tienes las siguientes notas, a las que llamas x_i , con las frecuencias absolutas, a las que llamas f_i :

	Suma total											
x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
f_i	1	2	1	2	3	8	7	6	6	4	3	43

Esto significa que hay dos 1, hay dos 3, y que hay 8 personas que han sacado un 5. No vamos a sumar $1 + 1$ dos veces, o $5 + 5 + 5 \dots$ ocho veces, sino multiplicar $1 \cdot 2, 3 \cdot 2, 5 \cdot 8 \dots$

Añadimos una fila a la tabla con esos productos:

$x_i \cdot f_i$	0	2	2	6	12	40	42	42	48	36	30	260
-----------------	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	------------

Sumamos esa fila $x_i \cdot f_i$ y obtenemos 260. Como la de frecuencias f_i suma 43, las dividimos, por lo que la media resulta: $\text{Media} = 260 / 43 = 6.04$.

En general si la variable toma los valores x_1, x_2, \dots, x_n , con una frecuencia absoluta f_1, f_2, \dots, f_n , para calcular la media se multiplica cada valor por su frecuencia, se suman dichos productos y se divide por el total de datos:

$$\text{Media} = (x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \dots + x_n \cdot f_n) / (f_1 + f_2 + \dots + f_n)$$

Actividades propuestas

30. Se ha lanzado un dado 50 veces y se ha confeccionado la siguiente tabla de frecuencias absolutas:

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	9	8	7	8	8	10

Calcula la media y comprueba que es 3.56.

31. Lanzamos 2 dados y sumamos los valores obtenidos. Repetimos el experimento 100 veces y obtenemos la siguiente tabla de frecuencias absolutas.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f_i	3	6	7	8	16	20	15	8	7	6	4



a) Calcula la media.

b) Repite ahora tú los lanzamientos, ahora sólo 20, y calcula de nuevo la media.

Actividad resuelta

Una compañía de seguros de automóvil ha realizado un estudio sobre 1000 asegurados para saber cuánto dinero ha gastado la compañía en reparaciones por accidente. Los datos están en la tabla:

Dinero gastado en euros	De 0 a 100	De 100 a 300	De 300 a 500	De 500 a 900	De 900 a 1100	De 1100 a 1500	Más de 1500 euros
Número de asegurados	167	150	145	131	106	57	24

Ahora la cosa se complica. No conoces el valor de x_i . Puedes construir la tabla de frecuencia sustituyendo cada intervalo por su punto medio:

								Suma Total
x_i	50	200	400	700	1000	1300	1700	
f_i	167	150	145	131	106	57	24	780

Y ahora ya sabes calcular la media. Añadimos la fila de los productos $x_i \cdot f_i$.

$x_i \cdot f_i$	8 350	30 000	58 000	91 700	106 000	74 100	40 800	408 950
-----------------	-------	--------	--------	--------	---------	--------	--------	---------

La suma de esos productos es: 408 950, y la suma de las frecuencias es: 780, luego la media del dinero gastado en seguros es: Media = $408\,950 / 780 = 524.3$ €.

Actividades propuestas

32. Calcula la media de los pesos de 40 estudiantes de un centro escolar, sabiendo que la tabla de frecuencias absolutas, con intervalos es:

Peso	35 - 41	41 - 47	47 - 53	53 - 59	59 - 65	65 - 71	71 - 77
Estudiantes	1	10	12	9	5	1	2

3.2. Moda

¿Qué es lo que está de moda? Lo que más se lleva.

La **moda** de una distribución de frecuencias es el valor más frecuente.

Actividad resuelta

La moda de las tablas de frecuencias siguientes es la indicada:

✚ Medio de transporte

Medio de transporte	Frecuencia
Andando	47
Metro	30
Autobús	15
Coche	8
TOTAL	100

La moda es ir *andando*.

✚ Notas

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_i	1	2	1	2	3	8	7	6	6	4	3

La moda es 5.

✚ Lanzamiento de un dado

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	9	8	7	8	8	10

La moda es 6.

✚ Lanzamiento de dos dados

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f_i	3	6	7	8	16	20	15	8	7	6	4

La moda es 7.

Nota

Puede ocurrir que una distribución de frecuencias tenga más de una moda. Por ejemplo, la distribución:

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	9	8	9	8	8	9

tiene 3 modas, 1, 3 y 6, ya que el valor más alto de la frecuencia absoluta es 9 en los tres casos.

La moda permite clasificar los conjuntos de datos en *unimodales*, *bimodales* o *plurimodales*, según el número de modas que tengan.

3.3. Mediana

La **mediana** es el valor central que deja por debajo el mismo número de datos que por encima.

Una forma de calcular la mediana es ordenar los valores de menor a mayor, y si el número de datos es impar, el valor central es la mediana. Si el número de datos es par, la mediana es la media de los dos datos centrales.

Actividad resuelta

- ✚ La mediana de las notas, ya ordenadas siguientes: 2, 3, 5, 7, 9, 9, 10, es 7, pues es el valor central de un número impar de datos.
- ✚ La mediana de las notas: 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 10, es la media entre 5 y 7, es decir, es 6, pues 5 y 7 son los valores centrales de un número par de datos.

Hay que destacar que esta medida de tendencia central, a diferencia de la media, no se ve afectada por valores extremos. Es decir, la mediana de las notas: 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 1000, sigue siendo la media entre 5 y 7, es decir, 6.

Actividades propuestas

33. Calcula la media, la mediana y la moda de las distribuciones siguientes:

- a) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 1000
- b) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 10
- c) 0, 0, 4, 5, 7, 9, 9, 1000, 2000

Observa en cada caso cómo influyen los valores extremos.

3.4. Medidas de dispersión

Varianza es la media de los cuadrados de las distancias de los datos a la media.

$$\text{Varianza} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Equivalentemente (desarrollando los cuadrados que aparecen en la expresión) se puede calcular mediante esta otra expresión:

$$\text{Varianza} = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

Desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza.

Se representa por σ .

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2}$$

Actividades resueltas

- Las alturas de los 12 jugadores de la Selección Española de Baloncesto (en metros) que participaron en la Eurocopa 2013 se recogen en la siguiente tabla:

2.03	1.96	1.91	2.11	1.91	1.93	2.08	1.99	1.90	2.16	2.06	2.03
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

Calculamos la media y se obtiene 2.0058. Calcula la varianza y la desviación típica.

Para calcular la **varianza** primero calcularemos la suma que aparece en el numerador, de modo similar a como acabamos de hacer. Después terminaremos dividiendo entre el número de datos.

$$(2.03 - 2.0058)^2 + (2.06 - 2.0058)^2 + (2.16 - 2.0058)^2 + (1.90 - 2.0058)^2 + (1.99 - 2.0058)^2 + (2.08 - 2.0058)^2 + (1.93 - 2.0058)^2 + (1.91 - 2.0058)^2 + (2.11 - 2.0058)^2 + (1.91 - 2.0058)^2 + (1.96 - 2.0058)^2 + (2.03 - 2.0058)^2 = 0.08934$$

Así la **varianza** es $0.08934/12 = 0.00744$

La **desviación típica** es la raíz cuadrada de la varianza: $\sigma = \sqrt{0.00744} = 0.08628$.

Actividades propuestas

34. Calcula la media, la varianza y la desviación típica de los datos siguientes:

- a) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 1000
 b) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 10
 c) 0, 0, 4, 5, 7, 9, 9, 1000, 2000

35. Dada la temperatura en una ciudad a una hora determinada el día 1 de cada mes se tiene la siguiente tabla:

	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Temperatura	-1	3	8	9	11	13	20	25	21	14	9	4

Calcula la media, la varianza y la desviación típica de los datos siguientes:

Si tenemos frecuencias relativas las expresiones son:

$$\text{Varianza} = \sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i} = \sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2$$

Por tanto, la **desviación típica** se calcula:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}} = \sqrt{\frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2}$$

Actividades propuestas

36. Se ha lanzado un dado 50 veces y se ha confeccionado la siguiente tabla de frecuencias absolutas:

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	9	8	7	8	8	10

La media es 3.56. Calcula la varianza y la desviación típica.

4. EL ORDENADOR Y LA ESTADÍSTICA

El ordenador puede ayudar mucho en los cálculos estadísticos. Hay muchos programas para ello. En particular son fáciles de usar las hojas de cálculo. Vamos a resolver un problema utilizando una de ellas.

Actividad resuelta

- Se conocen las cantidades de residuos sólidos recogidos en m^3/semana durante 12 semanas de una urbanización:

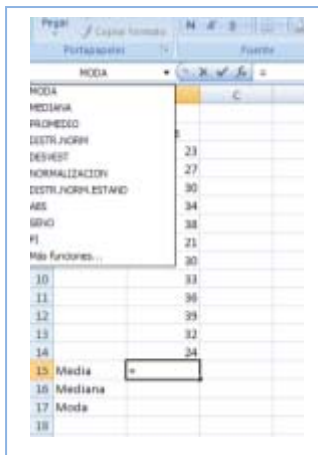
23, 27, 30, 34, 38, 21, 30, 33, 36, 39, 32, 24.

Para calcular la **media**, la **mediana** o la **moda**, abrimos la hoja de cálculo. Consta de filas indicadas por las letras A, B, C... y columnas indicadas por los números 1, 2, 3... cada casilla se identifica por su columna y su fila, por ejemplo, A1 es la primera casilla.

Escribimos los datos que nos han dado en la columna B a partir de la fila 3, dejando la primera columna y las dos primeras filas para poner títulos.

Escribimos en B2: Residuos; en A15: Media; en A16: Mediana; y en A17: Moda.

Nos colocamos sobre la casilla B15. En la ventana fx escribimos el signo igual: =, y desplegamos las funciones de la lista de la izquierda. Nos interesan: PROMEDIO (que es la media), MEDIANA y MODA.



Escribimos en la casilla B15:

=PROMEDIO(B3:B14),

y obtenemos la media que es 30,58.

Observa lo que esa expresión significa. Estás diciendo al ordenador que calcule la media (promedio) de los datos que están entre la casilla B3 y la casilla B14.

Para calcular la mediana nos colocamos en la casilla B16 y escribimos:

=MEDIANA(B3:B14),

y para calcular la moda nos colocamos en

B17 y escribimos: =MODA(B3:B14).

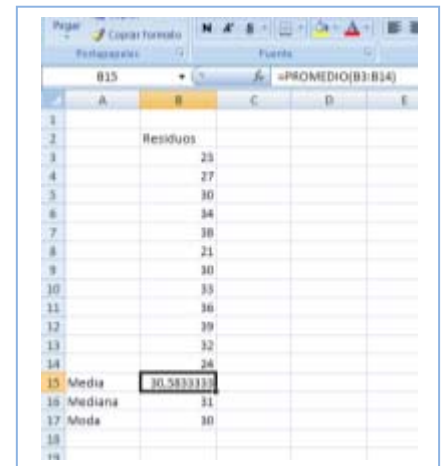
Hemos obtenido que la mediana es 31 y la moda es 30.

Puedes investigar la cantidad de funciones que tiene el ordenador que también calcula (y que aún no conoces), desviación típica, coeficiente de curtosis, valor mínimo, valor máximo, cuartil...

También dibuja gráficas con facilidad. Para que tenga sentido deberíamos agrupar los datos en una tabla. Pero si desarrollas el menú de "Insertar" puedes ver los tipos de gráficas que puedes dibujar: de *columna*, *línea*, *circular*, *barra*, *dispersión*...

Hemos dibujado un diagrama de rectángulos seleccionando los datos e insertando un gráfico de columnas.

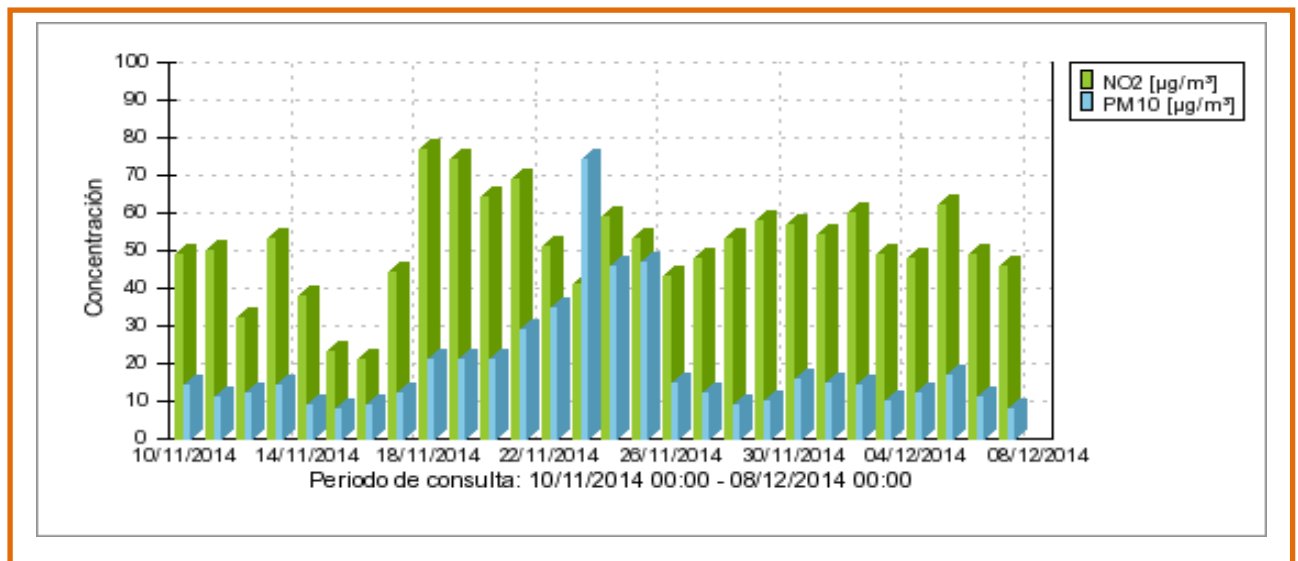
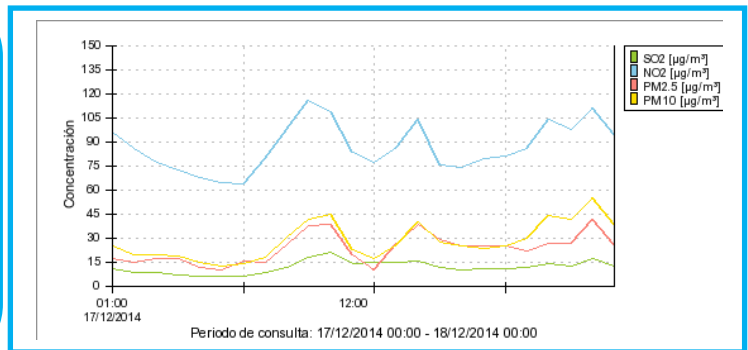
Juega con el ordenador. Inserta otros gráficos distintos de columna, de línea, circular, barra, dispersión e indica a qué tipo de representación corresponden.



CURIOSIDADES. REVISTA

Series temporales sobre la calidad del aire en Madrid

En Madrid se controla la calidad del aire. Puedes ver el **diagrama de líneas** de las concentraciones de **NO₂**, **SO₂** y **partículas** durante un día en la estación de Cuatro Caminos. En el eje de abscisas aparece el tiempo, las 24 horas. En el eje de ordenadas las distintas concentraciones.



Tenemos ahora un **diagrama de barras** también de la estación de Cuatro Caminos de únicamente NO₂ y partículas con los valores **medios** diarios durante cuatro semanas, a partir del 8 de diciembre. Analiza esta nueva serie temporal. Consideras que estos valores son altos o son bajos

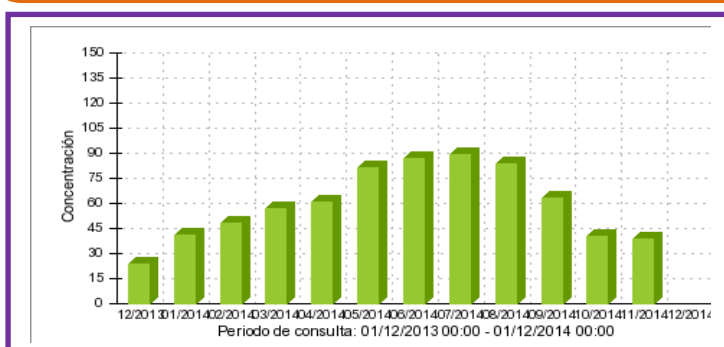


Diagrama de barras de la concentración de **ozono** en la estación de la Casa de Campo con los valores **medios** mensuales obtenidos durante un **año**. Cuándo es mayor la concentración de ozono, ¿en invierno o en verano?

La Comunidad de Madrid y el Ayuntamiento de Madrid controlan la calidad del aire, lo que es obligatorio para cumplir con las directivas europeas. Puedes buscar información en Internet escribiendo: <http://www.mambiente.munimadrid.es/svca/index.php>. o simplemente "calidad del aire en Madrid".

RESUMEN

Concepto	Definición	Ejemplos
Fenómeno o experimento aleatorio	Es aquel en el que no se puede predecir el resultado. Los datos estadísticos son los valores que se obtienen en un experimento.	Tirar una moneda y saber si va a salir cara o cruz
Frecuencia absoluta	Número de veces que se repite un dato estadístico	Si al tirar un dado hemos obtenido 2 veces el 3, 2 es la frecuencia absoluta de 3.
Frecuencia relativa	Frecuencia absoluta dividido por el número de experimentos	Si se realiza un experimento 500 veces y la frecuencia absoluta de un suceso es 107, la frecuencia relativa es 107/500.
Frecuencia acumulada	Se suman las frecuencias anteriores	
Suceso posible.	Posible resultado de un experimento aleatorio	En el experimento aleatorio tirar un dado el conjunto de posibles resultados, o el conjunto de sucesos elementales o espacio muestral es {1, 2, 3, 4, 5, 6}, por tanto, un posible resultado es, por ejemplo, 3.
Espacio muestral	Conjunto de resultados posibles	
Sucesos elementales	Elementos del espacio muestral	
Diagrama de rectángulos	Los datos se representan mediante rectángulos de igual base y de altura proporcional a la frecuencia. Se indica en el eje horizontal la variable y en el vertical las frecuencias.	<p>Diagrama de rectángulos</p> <p>100 0</p> <p>No emigran Mueren Llegan sanos a África</p> <p>Polígono de frecuencias</p> <p>100 0</p> <p>No emigran Mueren Llegan sanos a África</p> <p>Diagrama de sectores</p>
Diagrama de líneas	Se unen los puntos superiores de un diagrama de rectángulos	
Pictograma	Se sustituye los rectángulos por un dibujo representativo	
Diagrama de sectores	En un círculo se dibujan sectores de ángulos proporcionales a las frecuencias	
Media aritmética	Es el cociente entre la suma de todos los datos y el número total de datos.	En los datos 3, 5, 5, 7, 8, la media es: $(3 + 5 + 5 + 7 + 8)/5 = 28/5 = 5.6$. La moda es: 5. La mediana es 5
Mediana	Deja por debajo la mitad de los valores y por encima la otra mitad	
Moda	El valor que más se repite.	

EJERCICIOS Y PROBLEMAS**El azar y la probabilidad**

1. Una urna que contiene 10 bolas numeradas del 0 al 9, sacamos una bola, anotamos el número y devolvemos la bola a la urna. Repetimos el experimento 1 000 veces y se han obtenido los resultados indicados en la tabla:

Resultado	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Frecuencia absoluta	79	102			93	98	104	77		
Frecuencia relativa			0.12	0.13					0.1	
Frecuencia absoluta acumulada	79	181								
Frecuencia relativa acumulada										1

- a) ¿Cuál es la frecuencia absoluta de 9?
- b) ¿Cuál es la frecuencia absoluta acumulada de 2?
- c) ¿Cuál es la frecuencia relativa acumulada de 1?
- d) Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.
2. Clasifica los siguientes sucesos en imposibles, poco probables, posibles, muy probables y seguros:
- a) Tener un accidente de tráfico.
- b) Salir de paseo y cruzar alguna calle.
- c) Salir de paseo y que te caiga un rayo.
- d) Mañana nazca algún niño en París.
- e) Mañana no amanezca.
- f) Mañana llueva.
3. Pepa ha tirado un dado 25 veces y ha obtenido los siguientes resultados:
1, 2, 5, 6, 3, 1, 4, 5, 6, 1, 3, 1, 2, 2, 1, 6, 2, 2, 4, 3, 4, 6, 6, 1, 4
- a) Escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias absolutas.
- b) Escribe otra de frecuencias relativas.
- c) Dibuja un diagrama de rectángulos.
- d) Dibuja un diagrama de líneas y una representación por sectores.
4. La duración en minutos de unas llamadas telefónicas ha sido:
7, 3, 6, 3, 7, 5, 4, 3, 5, 7, 10, 1, 9, 12, 2

Elabora una tabla de frecuencias absolutas y una tabla de frecuencias relativas.

Gráficos estadísticos

5. Se hace una encuesta sobre el número de veces que van unos jóvenes al mes al cine. Los datos están en la tabla:

Veces que van al cine	0	1	2	3	4	5
Frecuencia absoluta	1	7	9	5	2	1

- a) Representa un diagrama de rectángulos de frecuencias absolutas.
 b) Representa un diagrama de líneas de frecuencias relativas.
 c) Haz un pictograma.
 d) Representa los datos en un diagrama de sectores.
6. Se hace un estudio sobre lo que se recicla en una ciudad y se hace una tabla con el peso en porcentaje de los distintos tipos de residuos:

Tipo de residuo	Porcentaje
Orgánico	15
Papel y cartón	1
Vidrio	15
Plástico	1
Pilas	15

- a) Haz un diagrama de rectángulos
 b) Representa un diagrama de líneas.
 c) Haz un pictograma.
 d) Representa los datos en un digrama de sectores.
7. ¿Cuánto vale la suma de las alturas de un diagrama de rectángulos de frecuencias relativas.
8. Se ha medido en una clase el tamaño de las manos de cada uno de los alumnos y alumnas, y el resultado en centímetros ha sido el siguiente:

19, 18, 20, 19, 18, 21, 19, 17, 16, 20,
 16, 19, 20, 21, 18, 17, 20, 19, 22, 21,
 23, 21, 17, 18, 17, 19, 21, 20, 16, 19

Representa los datos en un diagrama de rectángulos y en un diagrama de líneas.

9. En una clase se ha preguntado por las preferencias deportivas y se ha obtenido:

Futbol	Baloncesto	Natación	Kárate	Ciclismo
8	9	7	6	10

- a) Copia la tabla en tu cuaderno y haz una tabla de frecuencias relativas.
 b) Representa estos datos en un diagrama de sectores.
 c) Haz un pictograma.
10. El 35 % de las cigüeñas no ha emigrado este año a África y el 6 % murió por el camino. Dibuja un diagrama por sectores que describa esta situación.

Medidas de centralización

11. Javier ha tirado un dado 10 veces y ha obtenido los siguientes resultados:

6, 3, 1, 4, 2, 2, 1, 4, 3, 4

Calcula la media aritmética.

12. Raquel ha tenido las siguientes notas en sus exámenes de Lengua: 7, 5, 6, 4, 7, 10, 7. Calcula la media aritmética.

13. Se ha medido el tamaño de la mano de 10 alumnos y alumnas, y el resultado en centímetros ha sido el siguiente:

19, 18, 21, 21, 18, 17, 18, 17, 19, 21

Calcula la media aritmética.

14. Nos interesa conocer la distribución de notas obtenidas por 20 estudiantes. Las notas son:

2, 8, 9, 0, 0, 5, 8, 2, 7, 1, 6, 3, 7, 2, 4, 9, 4, 9, 5, 1

- Escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias absolutas.
- Haz un diagrama de líneas de frecuencias absolutas.
- Calcula la media.

15. Los jugadores de un equipo de baloncesto tiene las siguientes edades:

13, 12, 14, 11, 12, 12.

Calcula la media.

16. Hacemos una encuesta preguntando a 10 familias cuántas hijos tienen. Los resultados son:

0, 1, 0, 2, 1, 4, 3, 2, 1, 1

Calcula la media.

17. Pepa ha tirado un dado 25 veces y ha obtenido los siguientes resultados:

1, 2, 5, 6, 3, 1, 4, 5, 6, 1, 3, 1, 2, 2, 1, 6, 2, 2, 4, 3, 4, 6, 6, 1, 4

- Calcula la media aritmética.
- Calcula la mediana.
- ¿Cuál es la moda? ¿Es única?

18. Sara ha tenido las siguientes notas en sus exámenes de Matemáticas: 9, 7, 8, 6, 9, 10, 9

- Calcula la media aritmética.
- Calcula la mediana.
- ¿Cuál es la moda? ¿Es única?

19. Se ha tenido el resultado de medir en una clase el tamaño de las manos de cada uno de los alumnos y alumnas, y el resultado en centímetros ha sido el siguiente:

19, 18, 20, 19, 18, 21, 19, 17, 16, 20,

16, 19, 20, 21, 18, 17, 20, 19, 22, 21,

23, 21, 17, 18, 17, 19, 21, 20, 16, 19

- Calcula la media aritmética.
- Calcula la mediana.
- ¿Cuál es la moda? ¿Es única?

20. Nos interesa conocer la distribución de notas obtenidas por 40 estudiantes. Las notas son:

4, 1, 7, 10, 3, 2, 8, 9, 0, 0, 5, 8, 2, 7, 1, 2, 8, 10, 2, 10,

3, 4, 8, 9, 3, 6, 3, 7, 2, 4, 9, 4, 9, 5, 1, 3, 3, 9, 7, 8, 10

- Escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias absolutas.
- Haz un diagrama de líneas de frecuencias absolutas.
- Calcula la media.
- Calcula la mediana.
- Calcula la moda.

21. Hacemos una encuesta preguntando a 10 familias cuántas mascotas tienen. Los resultados son:

0, 1, 0, 2, 1, 4, 3, 0, 0, 1

Calcula la media, la mediana y la moda.

22. Los jugadores de un equipo de balonmano tiene las siguientes edades:

12, 14, 13, 12, 15, 11, 12, 12, 13, 14, 11, 12, 12.

- Calcula la media.
- Calcula la mediana.
- Calcula la moda.

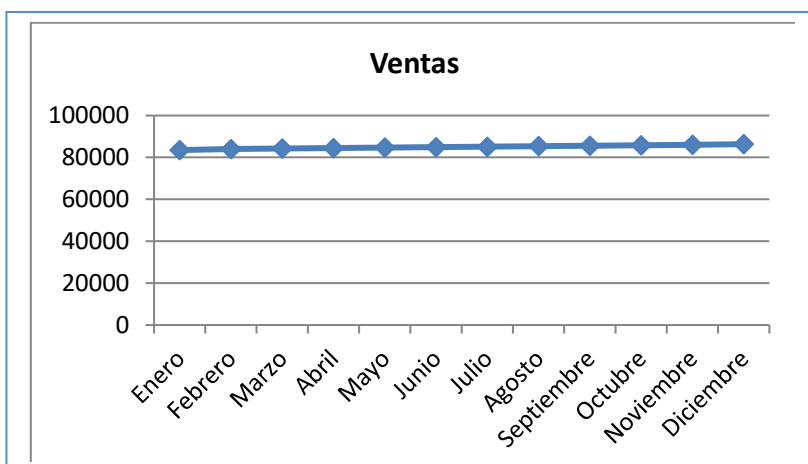
Ordenador

23. Introduce los datos de la encuesta sobre el número de mascotas en el ordenador y vuelve a calcular la media, la mediana y la moda.
24. Organiza los datos en una tabla calculando las frecuencias absolutas de 0, 1, 2, 3 y 4. Introduce esta tabla en el ordenador y haz una representación de barras, un diagrama de líneas y un diagrama de sectores.
25. Utiliza el ordenador para comprobar los resultados obtenidos en los ejercicios anteriores.
26. Realiza una encuesta en tu clase y lleva los resultados a un ordenador para hacer un informe. La encuesta podría ser, por ejemplo, si le gusta o no una determinada serie de televisión, o un programa; o el número de días de la semana que hacen algún deporte, el tipo de música que les gusta; o... Piensa sobre qué podrías preguntar.

Problemas

27. El Director Comercial de una empresa va a ser evaluado. Para ello debe dar cuenta de los resultados obtenidos. Quiere quedar bien, pues eso le puede suponer un aumento de sueldo. Se han vendido las siguientes cantidades:

Meses	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Ventas	83451	83962	84238	84401	84693	84889	85032	85378	85524	85751	859967	86316

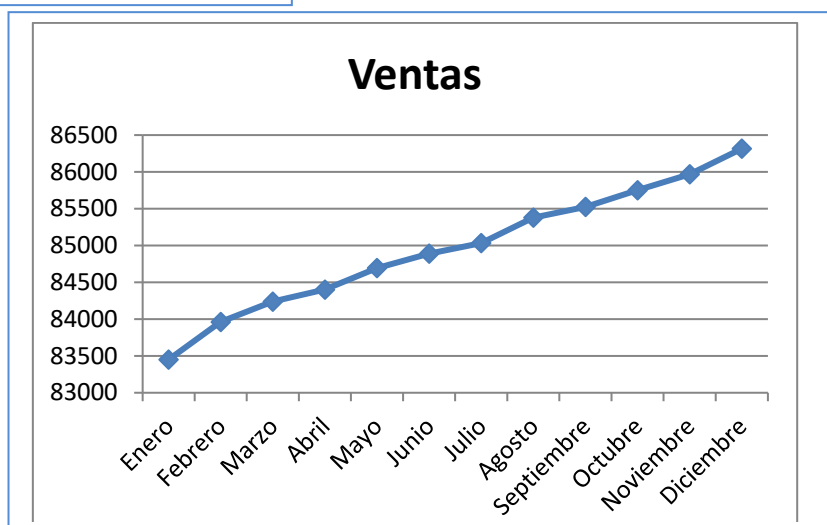


El estadístico de la empresa le ha entregado la siguiente gráfica:

No le ha gustado nada, y para la presentación él se ha confeccionado el siguiente gráfico:

Ambos gráficos son correctos.

Escribe un informe sobre cómo pueden los distintos gráficos dar impresiones tan diferentes.



28. Tira una moneda 100 veces y anota los resultados obtenidos: C, C, x, Construye una nueva lista anotando, cada vez que haya salido cara, el resultado siguiente: C, x, ...Confecciona luego dos tablas: una de frecuencias absolutas y otra de frecuencias relativas. Representa los resultados en un diagrama de barras y en un diagrama de sectores.

29. Se conoce el volumen semanal de residuos sólidos recogidos en m^3 durante las 52 semanas de un año, en un municipio pequeño: 25.5, 27.1, 31.8, 34.2, 38.9, 21.3, 28.7, 33.2, 36.5, 39.6, 25.2, 24.7, 23.2, 23.3, 22.2, 26.4, 26.7, 29.6, 31.3, 30.5, 28.3, 29.1, 26.7, 25.2, 24.5, 23.7, 25.4, 27.2, 31.7, 34.5, 38.4, 21.2, 28.1, 33.7, 36.8, 39.9, 31.7, 34.4, 38.2, 21.9, 28.1, 33.5, 25.2, 24.7, 23.2, 23.3, 22.2, 26.4, 25.9, 24.1, 23.2, 23.6, 26.4.

Calcula la media, la moda, la mediana, la varianza y la desviación típica.

30. Con los datos del problema anterior:

- Representa los datos en una tabla tomando intervalos de longitud dos m^3 : (21, 23), (23, 25), ... (39, 41)
- Dibuja un diagrama de rectángulos y un diagrama de líneas de frecuencias absolutas.
- ¿Cuántas familias tienen un volumen de basuras mayor que $31 m^3$?
- ¿Qué porcentaje de familias tienen un volumen de basuras menor que $35 m^3$?

31. Busca en revistas o periódicos dos gráficas estadísticas, recórtalas y pégalas en tu cuaderno. En muchas ocasiones estas gráficas tienen errores. Obsérvalas detenidamente y comenta las siguientes cuestiones:

- ¿Está clara la variable a la que se refiere? ¿Y las frecuencias?
- ¿Son correctas las unidades? ¿Pueden mejorarse?
- Comenta las gráficas.

32. La media de seis números es 5. Se añaden dos números más, pero la media sigue siendo 5. ¿Cuánto suman estos dos números?

AUTOEVALUACIÓN

- Indica la respuesta correcta:
 - La frecuencia relativa se obtiene dividiendo por 100 la frecuencia absoluta.
 - La frecuencia relativa se obtiene sumando todos los valores anteriores.
 - La frecuencia relativa se obtiene dividiendo la frecuencia absoluta por el total de experimentos.
 - Frecuencia relativa es lo mismo que probabilidad.
- Se extrae una carta de una baraja española. La probabilidad de que sea un rey es:
 - 1/40
 - 0.25
 - 4/40
 - 10/40
- Indica cual es la frase que falta en la siguiente definición:
 En las frecuencias se representan en un círculo que se divide en sectores circulares de amplitudes proporcionales a las frecuencias.
 - Diagrama de líneas
 - Diagrama de rectángulos
 - Pictograma
 - Diagrama de sectores
- Si en una tabla de frecuencias a un valor le corresponde una frecuencia relativa de 0.125, al dibujar un diagrama de sectores el ángulo correspondiente es de:
 - 45°
 - 30°
 - 60°
 - 72°
- En un diagrama de rectángulos de frecuencias relativas, la suma de sus alturas es igual a:
 - 100
 - 1
 - Total de datos
 - Suma de sus bases
- La media de los siguientes datos 7; 0; 9.5; 2; 4.1; 3.8; es:
 - 6.3
 - 3.8
 - 4.4
 - 5.5
- La mediana de los siguientes datos 3, 4, 6, 7, 8, es:
 - 6
 - 7
 - 4
 - 5
- La moda de los siguientes datos 3, 4, 6, 7, 5, 8, 7, 7, es:
 - 6
 - 7
 - 4
 - 5
- Se tira un dado. ¿Cuál es la probabilidad de que no sea un 2?
 - 3/4
 - 1/6
 - 2/6
 - 5/6
- Queremos saber los deportes que hacen los escolares de un cierto centro. Pasamos una encuesta a 20 de 2º A. Indica en este caso quién es la población y quien es una muestra:
 - Estudiantes de España y estudiantes de ese centro
 - Estudiantes de ese centro y estudiantes de 2º A
 - Estudiantes de ese centro y los 20 estudiantes de 2º A
 - Estudiantes de 2º A y los 20 estudiantes elegidos de 2º A