

3º A de ESO

Capítulo 2:

Potencias y raíces

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-031750

Fecha y hora de registro: 2014-02-07 13:41:58.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



www.apuntesmareaverde.org.es



Autora: Nieves Zuasti

Revisor: Sergio Hernández

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Índice

1. OPERACIONES CON POTENCIAS

- 1.1. PRODUCTO DE POTENCIAS
- 1.2. COCIENTE DE POTENCIAS
- 1.3. POTENCIA DE UN PRODUCTO
- 1.4. POTENCIA DE UN COCIENTE
- 1.5. POTENCIA DE OTRA POTENCIA

2. POTENCIAS DE NÚMEROS RACIONALES

- 2.1. OPERACIONES CON BASE RACIONAL

3. NOTACIÓN CIENTÍFICA

- 3.1. GRANDES Y PEQUEÑOS NÚMEROS
- 3.2. OPERACIONES CON NOTACIÓN CIENTÍFICA

4. RAÍCES

- 4.1. RAÍCES DE NÚMEROS RACIONALES
- 4.2. RADICALES DE ÍNDICE CUALQUIERA
- 4.3. POTENCIAS DE EXPONENTE RACIONAL
- 4.4. EXTRACCIÓN DE FACTORES DE UN RADICAL
- 4.5. OPERACIONES CON RADICALES

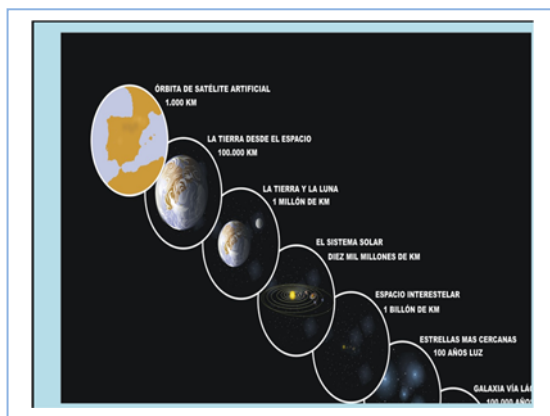
Resumen

En este capítulo utilizamos los grandes números, las potencias, que nos permiten describir de manera más fácil la inmensidad del Universo, expresar sus distancias, la masa de los cuerpos celestes, el número de galaxias, estrellas y planetas.

También nos fijaremos en los pequeños números, el mundo microscópico expresado en forma de potencia de exponente negativo.

Utilizaremos la notación científica para grandes y pequeños números.

Repasaremos las operaciones con potencias de exponente un número natural, introduciendo las potencias con exponentes negativos y racionales. Ya conocemos las potencias de base un número natural, ahora usaremos las mismas ideas utilizando bases de números negativos y racionales. Ya conoces los radicales, ahora veremos que un radical es una potencia de exponente un número fraccionario y que podemos utilizar las propiedades de las potencias con ellos.



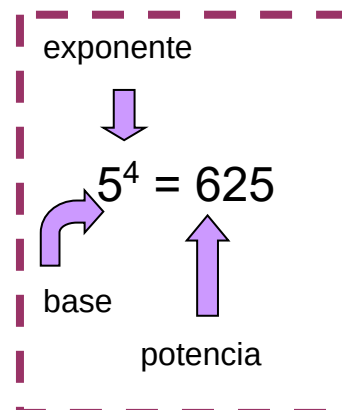
1. OPERACIONES CON POTENCIAS

Recuerda que la **potencia** a^n de base un número natural a y exponente natural n es un producto de n factores iguales a la base:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \dots n \text{ factores} \dots a \quad (n > 0)$$

El factor que se repite es la **base** y el número de veces que se repite es el **exponente**. Al resultado se le llama **potencia**.

Ya conoces las propiedades de las operaciones con potencias, que vamos a repasar. En este capítulo veremos que si el exponente o si la base es un número negativo o fraccionario, esas propiedades se mantienen.



Recuerda:

$$a^0 = 1$$

$$1^m = 1$$

$$(-1)^m = 1 \quad m \text{ par}$$

$$(-1)^n = -1 \quad n \text{ impar}$$

$$0^n = 0$$

$$a = a^1$$

1.1. Producto de potencias

Con la misma base

El producto de potencias de la misma base es otra potencia con la misma base y de exponente, la suma de los exponentes.

$$b^m \cdot b^n \cdot b^p = b^{m+n+p}$$

Ejemplo:

$$(-5)^4 \cdot (-5)^{-3} \cdot (-5)^2 \cdot (-5)^{-6} = (-5)^{4+(-3)+2+(-6)} = (-5)^{-3} = 1/(-5)^3 = 1/-125$$

Con el mismo exponente

El producto de potencias con el mismo exponente es otra potencia cuya base se calcula multiplicando las bases, elevada al mismo exponente.

$$a^m \cdot b^m \cdot c^m = (a \cdot b \cdot c)^m$$

Ejemplo:

$$(-3)^2 \cdot (5)^2 \cdot (-1)^2 \cdot (-4)^2 = [(-3) \cdot (5) \cdot (-1) \cdot (-4)]^2 = (+60)^2 = 3\ 600.$$

1.2. Cociente de potencias

Con la misma base

El cociente entre dos potencia de la misma base es otra potencia con la misma base y su exponente se calcula restando los exponentes.

$$c^m : c^n = c^{m-n}$$

Ejemplo:

$$(-12)^7 : (-12)^2 = (-12)^{7-2} = (-12)^5$$

Con el mismo exponente

Para dividir potencias con el mismo exponente, se dividen las bases y el resultado se eleva al mismo exponente.

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Ejemplo:

$$18^4 : 3^4 = (18/3)^4 = 6^4$$

Ejemplo:

$$(5)^3 : (-14)^3 = (5/-14)^3$$

Potencias de exponente entero negativo

Una potencia de base real $a \neq 0$, y exponente natural $n < 0$ es el inverso de la misma con exponente positivo.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

La expresión a^{-n} puede ser el resultado de dividir dos potencias de la misma base, ya que:

$$a^x : a^y = a^{x-y} \quad \text{si } x < y \quad (x - y) < 0.$$

Ejemplo:

$$6^3 : 6^8 = 6^{3-8} = 6^{-5} = 1/6^5$$

1.3. Potencia de un producto

La potencia de un producto puede calcularse realizando primero el producto y elevando el resultado a dicha potencia o bien, elevando cada uno de los factores a dicha potencia y realizando después el producto.

$$(a \cdot b \cdot c \cdot d)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n \cdot d^n$$

Ejemplo:

$$[(-2) \cdot (+5) \cdot (-4)]^3 = (+40)^3 = +64\,000 = (-2)^3 \cdot (+5)^3 \cdot (-4)^3 = (-8) \cdot (+125) \cdot (-64) = +64\,000$$

1.4. Potencia de un cociente

La potencia de un cociente puede calcularse efectuando primero el cociente y elevando el resultado a dicha potencia, o bien elevar dividiendo y divisor a la potencia y después efectuar el cociente.

$$(a : b)^m = a^m : b^m$$

Ejemplo:

$$[(5) : (-4)]^2 = (5/-4)^2 = (-1.25)^2 = +1.5625 = (5)^2 : (-4)^2 = 25 : 16 = 1.5625$$

1.5. Potencia de otra potencia

Al elevar una potencia a otra potencia obtenemos una potencia con la misma base y cuyo exponente es el producto de los exponentes:

$$((d)^m)^n = d^{m \cdot n}$$

Ejemplo:

$$((-5)^3)^6 = (-5)^{3 \cdot 6} = (-5)^{18}$$

Actividades resueltas

- ✚ Se cuenta que el inventor del ajedrez se lo mostró al rey *Shirham* de la India, que se entusiasmó tanto que le ofreció regalarle lo que quisiera. El inventor pidió un grano de trigo para la primera casilla, dos para la segunda, 4 para la tercera, y así duplicando la cantidad en cada casilla. ¿Cuántos granos de trigo habría que poner en la última casilla, en la 64?



Observamos que el número de granos de trigo de la casilla n es 2^{n-1} por lo que debemos calcular 2^{63} . Calculamos $2^2 = 4$. Luego:

$$(2^2)^2 = 2^4 = 16 \quad ((2^2)^2)^2 = 2^8 = 16 \cdot 16 = 256 \quad (((2^2)^2)^2)^2 = (2^8)^2 = 2^{16} = 256 \cdot 256 = 65\,536$$

$$((((2^2)^2)^2)^2)^2 = (2^{16})^2 = 2^{32} = 65\,536 \cdot 65\,536 = 4\,294\,967\,296$$

$$((((((2^2)^2)^2)^2)^2)^2)^2 = (2^{32})^2 = 2^{64} = 4\,294\,967\,296 \cdot 4\,294\,967\,296 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616$$

Y ahora, para calcular 2^{63} podemos dividir potencias de la misma base:

$$2^{63} = 2^{64}/2 = 9\,223\,372\,036\,854\,775\,808 \text{ granos de trigo, un número enorme y difícil de manejar.}$$

Para calcular el número total de granos de trigo observamos que la suma de granos hasta la casilla n es 2^n por lo que entonces debemos calcular 2^{64} , que estimando 1 200 granos por kg dan poco más de 15 billones de Tm y eso corresponde a la producción mundial de 21 685 años. ¡Imposible que el rey tuviera tanto trigo!

Actividades propuestas

1. Determina el signo de las potencias:

$$(-1)^9 \quad (5)^{12} \quad (-12)^{-5} \quad (8)^{-4}$$

2. Expresa en forma de una única potencia:

$$(-7)^3 \cdot (-7)^5 \cdot (-7)^2 \cdot (-7)^6$$

$$(3)^2 \cdot (3)^7 \cdot (3) \cdot (3)^4 \cdot (3)^3$$

3. Expresa en forma de potencia:

$$(-6)^4 \cdot (4)^4 \cdot (-1)^4 \cdot (-5)^4$$

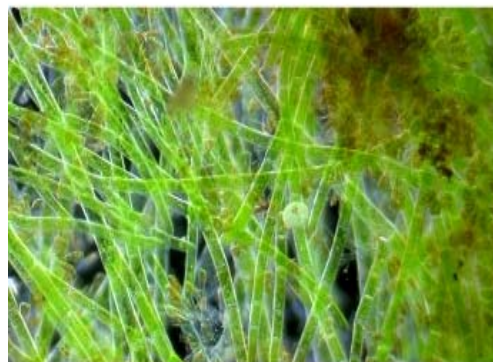
4. Expresa en forma de potencia:

$$(-8)^9 : (-8)^3 \quad (-3)^2 : (-3)^7$$

5. Expresa en forma de potencia: $(+75)^4 : (-3)^4$ $(-5)^8 : (8)^8$

6. Expresa en forma de potencia: $((-2)^5)^6$ $((7)^3)^{-5}$

Alga marina (fotografía microscópica)



2. POTENCIA DE BASE RACIONAL

La potencia de un número racional es otro número racional cuyo numerador y denominador quedan elevados a dicha potencia.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Ejemplo: $\left(\frac{-2}{5}\right)^4 = \left(\frac{-2}{5}\right) \cdot \left(\frac{-2}{5}\right) \cdot \left(\frac{-2}{5}\right) \cdot \left(\frac{-2}{5}\right) = \frac{(-2)^4}{5^4} = \frac{16}{625}$

2.1. Potencias de base racional y exponente negativo

El resultado de elevar un número racional a una potencia negativa es otra potencia cuya base es el número racional inverso, elevado al mismo exponente, positivo.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Ejemplo: $(4/9)^{-5} = (9/4)^5$

2.2. Producto de potencias de base racional

Se mantienen las propiedades de las potencias de base un número natural.

Con la misma base

El resultado de multiplicar potencias con la misma base es otra potencia con la misma base y exponente la suma de los exponentes.

$$(a/b)^m \cdot (a/b)^n \cdot (a/b)^p = (a/b)^{m+n+p}$$

Ejemplo: $(2/5)^3 \cdot (2/5) \cdot (2/5)^{-4} \cdot (2/5)^5 = (2/5)^{3+1+(-4)+5} = (2/5)^5$

Con el mismo exponente

El resultado de multiplicar potencias con el mismo exponente es otra potencia cuya base es el producto de las bases, elevada al mismo exponente.

$$(a/b)^m \cdot (c/d)^m \cdot (e/f)^m = [(a/b) \cdot (c/d) \cdot (e/f)]^m$$

Ejemplo: $(-2/3)^4 \cdot (1/4)^4 \cdot (3/5)^4 = [(-2/3) \cdot (1/4) \cdot (3/5)]^4 = (-6/60)^4 = (-1/10)^4$

Actividades propuestas

7. Calcula: a) $(5/3)^3$ b) $(-2/7)^{-4}$ c) $(-1/6)^4$ d) $(-5/2)^{-2}$

8. Expresa como única potencia:

a) $(-3/4)^3 \cdot (-3/4)^2 \cdot ((-3/4)^{-8})$ b) $(1/8)^{-5} \cdot (1/8)^4 \cdot (1/8)^{-2}$

9. Expresa como única potencia:

a) $(5/4)^6 \cdot (-2/3)^6 \cdot (-1/7)^6$ b) $(-3/5)^{-4} \cdot (-3/8)^{-4} \cdot (-1/4)^{-4}$

2.3. Cociente de potencias de base racional

Con la misma base

El resultado de dividir potencias con la misma base es otra potencia con la misma base y el exponente la diferencia de los exponentes.

$$(a/b)^m : (a/b)^n = (a/b)^{m-n}$$

Ejemplo:

$$(-1/3)^3 : (-1/3)^4 = (-1/3)^{3-4} = (-1/3)^{-1}$$

Con el mismo exponente

El resultado de dividir potencias con el mismo exponente es otra potencia cuya base es el cociente de las bases, elevada al mismo exponente.

$$(a/b)^m : (c/d)^m = [(a/b) : (c/d)]^m$$

Ejemplo:

$$(-3/4)^{-5} : (7/8)^{-5} = [(-3/4) : (7/8)]^{-5} = (-24/28)^{-5} = (-6/7)^{-5} = (-7/6)^5$$

2.4. Operaciones combinadas con potencias

Ejemplo:
$$\frac{(-3)^3 \cdot (-3)^{-5} \cdot (-3)}{(-3)^8 \cdot (-3)^{-6}} = \frac{(-3)^{3-5+1}}{(-3)^{8-6}} = \frac{(-3)^{-1}}{(-3)^2} = (-3)^{-1-2} = (-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = -\frac{1}{27}$$

Ejemplo:

$$\frac{(5^4 \cdot (-2)^4 \cdot 3^4)^3}{(9^2 \cdot 4^2)^3} = \frac{[(5 \cdot (-2) \cdot 3)^4]^3}{[(3^2)^2 \cdot (2^2)^2]^3} = \frac{[(-30)^4]^3}{[(3 \cdot 2)^2]^3} = \frac{[(-30)^4]^3}{[6^4]^3} = [(-5)^4]^3 = (-5)^{12} = 244\ 140\ 625.$$

Actividades propuestas

10. Calcula:

a) $(-2/5)^4 : (-2/5)^7$

b) $(5/8)^3 : (5/8)^{-2}$

11. Calcula:

a) $(1/5)^{-3} : (2/9)^{-3}$

b) $(-6)^5 : (-2/9)^5$

12. Calcula:

a) $\frac{3^2 \cdot \frac{2^5}{5^5}}{(-4) \cdot 4^5}$

b) $\frac{\left(\frac{-2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{-1}{6}\right)^2}{\left(\frac{3}{8}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^6}$



4. NOTACIÓN CIENTÍFICA

4.1. Expresiones en notación científica

Un número expresado en notación científica está formado por un número decimal cuya parte entera está entre 1 y 9, multiplicado por 10^n , siendo n un número entero positivo o negativo.

$$a \cdot 10^n \quad \text{siendo} \quad 1 \leq a \leq 9$$

Si el exponente n es positivo se utiliza para expresar números grandes y si el exponente n es negativo para expresar números pequeños

Ejemplo:

$$3\,420\,000\,000\,000 = 3.42 \cdot 10^{12}$$

$$0.000000000057 = 5.7 \cdot 10^{-11}$$

Actividades resueltas

- ✚ En la leyenda del ajedrez utilizamos números muy grandes. Si no nos interesa tanta aproximación sino hacernos una idea únicamente de los grandes que son, podemos usar la notación científica.

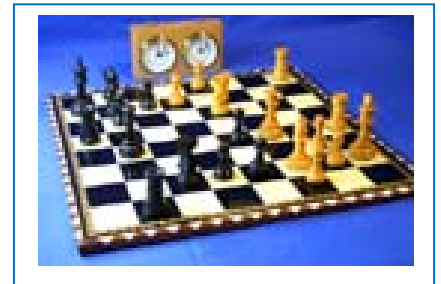
Una aproximación para el número de granos de trigo de la casilla 64 es $9 \cdot 10^{18}$, con lo que nos hacemos una idea mejor de lo enorme que es que con el número: 9 223 372 036 854 775 808 que da un poco de mareo.

- ✚ Escribe en notación científica: 2^{16} , 2^{32} y 2^{64}

$$2^{16} = 65\,536 \approx 6.5 \cdot 10^4$$

$$2^{32} = 4\,294\,967\,296 = 4 \cdot 10^9$$

$$2^{64} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616 = 1.8 \cdot 10^{19}$$



4.2. Operaciones con notación científica

✚ Suma o diferencia

Para realizar sumas y restas, con expresiones en notación científica, se transforma cada expresión decimal de manera que se igualen los exponentes de 10 en cada uno de los términos

Ejemplo:

Para calcular $4 \cdot 10^8 + 2.3 \cdot 10^6 - 6.5 \cdot 10^5$ expresamos todos los sumandos con la misma potencia de 10, eligiendo la menor, en este caso 10^5 :

$$4\,000 \cdot 10^5 + 23 \cdot 10^5 - 6.5 \cdot 10^5$$

$$\text{Sacamos factor común: } 10^5 \cdot (4\,000 + 23 - 6.5) = 4\,016.5 \cdot 10^5 = 4.0165 \cdot 10^8$$

Producto

El producto de expresiones en notación científica es el resultado de multiplicar los números decimales y sumar los exponentes de base 10.

Ejemplo: $2.5 \cdot 10^5 \cdot 1.36 \cdot 10^6 = (2.5 \cdot 1.36) \cdot 10^{5+6} = 3.4 \cdot 10^{11}$

Cociente

El cociente de dos expresiones en notación científica es el resultado de dividir los números decimales y restar los exponentes de base 10.

Ejemplo: $5.4 \cdot 10^9 : 4 \cdot 10^7 = (5.4 : 4) \cdot 10^{9-7} = 1.35 \cdot 10^2$

Actividades resueltas

Para hacer el cociente para calcular 2^{63} dividiendo 2^{64} entre 2 en notación científica:

$$2^{63} = 2^{64} / 2 = 1.8 \cdot 10^{19} / 2 = 0.9 \cdot 10^{19} = 9 \cdot 10^{18}.$$

Usa la calculadora

Las calculadoras utilizan la notación científica. Muchas calculadoras para escribir $9 \cdot 10^{18}$ escriben 9e+18.

- Utiliza tu calculadora para obtener 2^{16} , 2^{32} y 2^{64} y observa cómo da el resultado.
- Utiliza la calculadora para obtener tu edad en segundos en notación científica.

Actividades propuestas

15. Efectúa las operaciones en notación científica:

a) $0.000257 + 1.4 \cdot 10^{-5}$ b) $200\,000\,000 - 3.5 \cdot 10^6 + 8.5 \cdot 10^5$

16. Efectúa las operaciones en notación científica:

a) $(1.3 \cdot 10^5) \cdot (6.1 \cdot 10^{-3})$ b) $(4.7 \cdot 10^{-8}) \cdot (3 \cdot 10^6) \cdot (2.5 \cdot 10^{-4})$

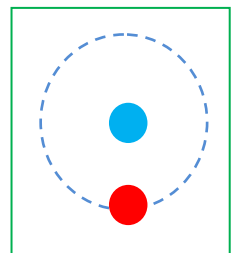
17. Efectúa las operaciones en notación científica:

a) $(5 \cdot 10^{-8}) : (1.5 \cdot 10^{-3})$ b) $(3.25 \cdot 10^{-5}) \cdot (5 \cdot 10^2) : (6.15 \cdot 10^{-7})$

18. Se estima que el volumen del agua de los océanos es de $1\,285\,600\,000 \text{ km}^3$ y el volumen de agua dulce es de $35\,000\,000 \text{ km}^3$. Escribe esas cantidades en notación científica y calcula la proporción de agua dulce.

19. Se sabe que en un átomo de hidrógeno el núcleo constituye el 99 % de la masa, y que la masa de un electrón es aproximadamente de $9.109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$. ¿Qué masa tiene el núcleo de un átomo de hidrógeno? (*Recuerda:* Un átomo de hidrógeno está formado por el núcleo, con un protón, y por un único electrón)

20. A Juan le han hecho un análisis de sangre y tiene 5 millones de glóbulos rojos en cada mm^3 . Escribe en notación científica el número aproximado de glóbulos rojos que tiene Juan estimando que tiene 5 litros de sangre.



5. RADICALES

5.1. Radicales de índice cualquiera

La raíz enésima de un número a es un número x que al elevarlo a n , da como resultado a .

$$\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a.$$

Recuerda:

n = índice de la raíz

a = radicando

$x = \sqrt[n]{a}$ raíz

La **raíz cuadrada** de un número real no negativo a es un único número no negativo x que elevado al cuadrado nos da a :

$$\sqrt{a} = x \Leftrightarrow x^2 = a, a \geq 0, x \geq 0.$$

Observación

No confundas resolver una **ecuación**, $x^2 = 9$, que tiene dos raíces, 3 y -3 , con calcular una **raíz**, como $\sqrt{9}$ que es **únicamente** 3.

Imagina que lío tan horrible sería calcular $\sqrt{9} + \sqrt{1} + \sqrt{4}$ si el resultado pudiera ser:

$3 + 1 + 2 = 6$, o bien, $3 - 1 - 2 = 0$, o bien $-3 + 1 - 2 = -4$, o bien $3 - 1 + 2 = 4$...

La raíz enésima de un número en el campo real o no existe o es **única**.

Observa que $\sqrt{-1}$ no existe en el campo real. Ningún número real al elevarlo al cuadrado da un número negativo. Sólo podemos calcular raíces de exponente par de números positivos. Sin embargo $\sqrt[3]{-1} = -1$, pues $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$.

Actividades resueltas

- ✚ ¿Cuánto mide el lado de una habitación cuadrada embaldosada con 144 baldosas de cuadradas de 25 cm de lado?

Cada lado tendrá $\sqrt{144} = 12$ baldosas, que miden 25 cm, luego medirá $12 \cdot 25 = 300$ cm = 3 m de largo.

- ✚ En un depósito cúbico caben 1 000 cubos de 1 dm³, ¿cuánto mide su arista? ¿Y si caben 12 167 cubos?

Calculamos $\sqrt[3]{1\ 000} = 10$. La arista mide 10 dm. Calculamos ahora $\sqrt[3]{12\ 167} = 23$. La arista mide 23 dm porque $23 \cdot 23 \cdot 23 = 12\ 167$.

- ✚ Calcula $\sqrt[3]{-64}$; $\sqrt[3]{-8}$; $\sqrt[3]{-27}$; $\sqrt[3]{-1000}$.

Las raíces de radicando negativo e índice impar, si existen:

$$\sqrt[3]{-64} = -4; \sqrt[3]{-8} = -2; \sqrt[3]{-27} = -3; \sqrt[3]{-1\ 000} = -10.$$



5.2. Potencias de exponente fraccionario

Se define $x^{\frac{1}{n}}$ como $\sqrt[n]{x}$:

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

Por tanto, la potencia $x^{\frac{m}{n}}$ puede expresarse en forma de radical, de manera que n será el índice de la raíz y m el exponente del radicando.

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

Ejemplo:

$$5^{2/3} = \sqrt[3]{5^2}$$

Las propiedades de las potencias de exponente fraccionario coinciden con las de las potencias de exponente un número natural.



Actividades resueltas

- ✚ Simplifica los radicales $\sqrt[4]{2^{12}}$, $\sqrt[10]{7^{15}}$ usando potencias de exponente fraccionario.

Escribimos el radical como potencia de exponente fraccionario y simplificamos las fracciones:

$$\sqrt[4]{2^{12}} = 2^{\frac{12}{4}} = 2^3 = 8.$$

$$\sqrt[10]{7^{15}} = 7^{\frac{15}{10}} = 7^{\frac{3}{2}} = \sqrt{7^3} = 7 \cdot \sqrt{7}$$

- ✚ Calcula $\sqrt{484}$ y $\sqrt[3]{27\,000}$ factorizando previamente los radicandos

$$\sqrt{484} = \sqrt{2^2 \cdot 11^2} = 2 \cdot 11 = 22$$

$$\sqrt[3]{27\,000} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

- ✚ Calcula $25^{0.5}$; $32^{\frac{3}{5}}$ y $\left(3^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{5}{2}}$

$$25^{0.5} = 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$$

$$32^{\frac{3}{5}} = (2^5)^{\frac{3}{5}} = 2^{\frac{5 \cdot 3}{5}} = 2^3 = 8$$

$$\left(3^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{5}{2}} = 3^{\frac{6 \cdot 5}{5 \cdot 2}} = 3^3 = 27$$

5.3. Extracción de factores de un radical

Tenemos $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ con $m > n$, para extraer factores de la raíz realizamos el cociente: m dividido entre n tiene de cociente p y de resto r : $m = n \cdot p + r$. El resultado es $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n]{x^{n \cdot p + r}} = x^{\frac{n \cdot p + r}{n}} = x^{p + \frac{r}{n}} = x^p \cdot \sqrt[n]{x^r}$.

$$\text{Si } m > n, x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = x^p \cdot \sqrt[n]{x^r}.$$

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{x^5} = x \cdot \sqrt[3]{x^2}$$

$$\sqrt{2^4 \cdot 3^3 \cdot 5} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 5} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3 \cdot 5} = 12 \cdot \sqrt{15}$$

Actividades propuestas

21. Calcula todas las soluciones:

a) $\sqrt{121}$ b) $\sqrt[3]{-8}$ c) $\sqrt[4]{10\,000}$ d) $\sqrt[5]{-1}$ e) $\sqrt[3]{1}$

22. Expresa en forma de radical

a) $(-3)^{4/5}$ b) $8^{1/3}$ c) $5^{2/3}$

23. Extrae los factores posibles en cada radical:

a) $\sqrt[4]{a^6 b^5}$ b) $\sqrt[3]{6^5 \cdot 3^4 \cdot 2^6}$ c) $\sqrt{4 \cdot 5^3 \cdot 9^3}$

5.4. Operaciones con radicales

Como los radicales se pueden escribir como potencias, tienen las propiedades que ya conoces de las potencias.

5.4.1. Raíz de un producto

La raíz de un producto es igual al producto de las raíces de los factores

$$\sqrt[n]{x \cdot y \cdot z} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} \cdot \sqrt[n]{z}$$

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{8 \cdot 27 \cdot 64} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{64} = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

5.4.2. Raíz de un cociente

La raíz de un cociente es igual al cociente de la raíz del dividendo y la raíz del divisor

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

Ejemplo:

$$\sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{243}} = \frac{2}{3}$$

5.4.3. Raíz de una raíz

La raíz de una raíz es igual a otra raíz con el mismo radicando y cuyo índice es el producto de los índices.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n \cdot m]{x}$$

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3 \cdot 2]{64} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$$

5.5. Operaciones combinadas

Ejemplo:

$$x^{2/3} \cdot y^{1/3} = \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x^2 \cdot y}$$

Ejemplo:

$$\frac{x^{7/4}}{x^{5/3}} = \frac{\sqrt[4]{x^7}}{\sqrt[3]{x^5}} = \frac{x \cdot \sqrt[4]{x^3}}{x \cdot \sqrt[3]{x^2}} = \frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x^2}}$$

Actividades propuestas

24. Expresa en forma de producto o de cociente:

a) $\sqrt[3]{a \cdot b}$

b) $\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7}$

c) $\sqrt[2]{\frac{7}{6}}$

d) $\sqrt{\frac{x^3}{y}}$

25. Expresa en forma de única raíz:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{18}}$

b) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{25}}$

26. Expresa en forma de potencia:

a) $\sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt{2^5}$

b) $\frac{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{5^2}}{\sqrt{5^3}}$

27. Simplifica la expresión:

a) $\left(\frac{x^{2/3}}{\sqrt{x}}\right)^3$

b) $\frac{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[5]{x^{11}}}{\sqrt[3]{x}}$

Recuerda

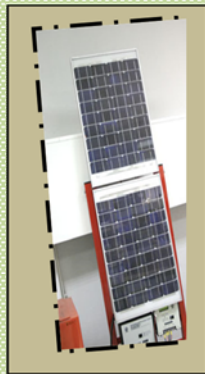
Hay operaciones con radicales que **NO** están permitidas.

$10 = \sqrt{100} = \sqrt{64+36}$ que es distinto de:
 $\sqrt{64} + \sqrt{36} = 8 + 6 = 14.$

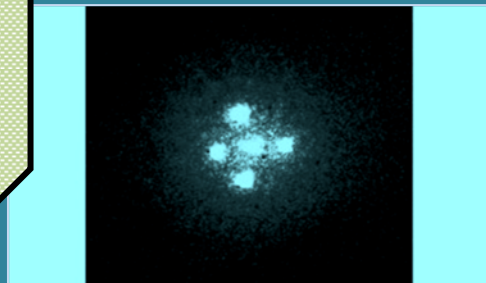


CURIOSIDADES. REVISTA**Células solares de silicio de tamaño microscópico**

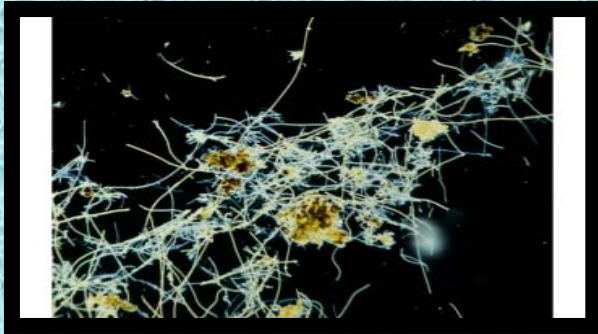
El programa de Tecnología Solar del Departamento de Energía de Estados Unidos, en su objetivo de conseguir mayor eficiencia en la producción de energía solar, ha creado células microscópicas de silicio. Estas células utilizan 100 veces menos material de silicio policristalino de 20 micrómetros de grosor con un significativo coste menor de fabricación. Estas células convierten casi un 15 % de la luz solar en energía eléctrica.

**¿Sabías que...**

a las operaciones en notación exponencial también se las llama de "coma flotante" porque el exponente equivale a la posición del decimal? En los ordenadores, la potencia de cálculo se mide en *mflops*, o miles de operaciones en coma flotante por segundo, en inglés *floating point operations per second*, abreviado "flops". Tu ordenador igual puede hacer un millón de estas operaciones por segundo, un "giga flops"!

La cruz de Einstein

Albert Einstein había anunciado, a partir de su teoría de la relatividad general, el llamado "espejismo cósmico" o "lente gravitacional". Este efecto puede explicar la formación de cuatro o más imágenes a partir de una sola fuente muy distante. La cruz de la imagen resultó ser un solo quásar situado a unos 10 000 millones de años-luz al que se llamó Cruz de Einstein, cuya luz queda curvada en su trayectoria por una galaxia-lente situada diez veces más cerca.



La presencia de las bacterias

Se estima que existen 100 millones de bacterias, de 600 especies diferentes, por cada milímetro cúbico de saliva y 40 millones de bacterias en un gramo de tierra. Algunos científicos calculan que en el interior de la Tierra podría haber hasta 100 000 billones de toneladas de bacterias, de manera que si todas estuvieran sobre la superficie, cubrirían nuestro planeta hasta una altura de 15 metros. Hay mucha más vida en el interior que en el exterior.



En el Papiro de *Ajmeed* (1650 a.C.) se muestra cómo los egipcios extraían raíces cuadradas. En la antigua India, en los manuscritos del *Baudhayana Sulba Sutra Aryabhata* (800 - 500 a.C.) se anota un método para calcular raíces cuadradas.

En Europa, no se han encontrado referencias antes de *Cataneo* (1546). El símbolo de la raíz cuadrada fue introducido en 1525 por el matemático *Christoph Rudolff*, y es una forma estilizada de la *r* minúscula.

RESUMEN

	POTENCIAS Y RAÍCES	Ejemplos
Producto y cociente de potencias	En el producto de potencias con la misma base se suman los exponentes. En el cociente se restan los exponentes Con el mismo exponente: En el producto, se multiplican las bases y se eleva el resultado al mismo exponente. En el cociente se dividen las bases y se eleva el resultado al mismo exponente	$(-5)^4 \cdot (-5)^2 = (-5)^6$ $3^2 : 3^7 = 3^{-5}$ $2^5 \cdot 7^5 = 14^5$ $(-5)^3 : (4)^3 = (-5/4)^3$
Potencia de un producto y de un cociente	La potencia de un producto es igual al producto de cada uno de los factores elevados a dicha potencia $(a \cdot b \cdot c \cdot d)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n \cdot d^n$ La potencia de un cociente es igual al cociente del dividendo y el divisor elevados a dicha potencia $c^m : c^n = c^{m-n}$	$(5 \cdot 2 \cdot 3)^4 = 5^4 \cdot 2^4 \cdot 3^4$ $(-7/2)^6 = 7^6 / (-2)^6$
Potencia de otra potencia	$((d)^m)^n = d^{m \cdot n}$	$((-4)^3)^5 = (-4)^{15}$
Potencia de base racional	$(a/b)^n = a^n/b^n$	$(6/5)^2 = 6^2/5^2$
Potencia de exponente negativo	$a^{-n} = 1/a^n$	$8^{-3} = 1/8^3$
Notación científica: operaciones	$a \cdot 10^{\pm n}$ siendo $1 \leq a \leq 9$. + n para grandes números -n para pequeños números	$320\,000\,000 = 3.2 \cdot 10^8$ $0.0000000009 = 9 \cdot 10^{-10}$
Radicales: raíces de índice cualquiera	$\sqrt{49} = 7$; $\sqrt[3]{-216} = -6$; $\sqrt[3]{64} = 4$; $\sqrt[4]{81} = 3$; $\sqrt[5]{-32} = -2$	
Potencias de exponente racional	Una potencia con exponente racional puede expresarse en forma de raíz cuyo índice es el denominador del exponente y el radicando queda elevado al numerador del exponente: $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$	$8^{2/5} = \sqrt[5]{8^2}$
Extracción de factores de un radical	Si $m = n \cdot c + r$ entonces $\sqrt[n]{a^m} = a^c \cdot \sqrt[n]{a^r}$	$\sqrt[3]{8^7} = 8^2 \cdot \sqrt[3]{8}$
Operaciones con radicales	$\sqrt[n]{x \cdot y \cdot z} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} \cdot \sqrt[n]{z}$; $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$	$\sqrt[4]{5 \cdot 3 \cdot 2} = \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{2}$ $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS**Potencias**

1. Expresa en forma de única potencia:

- a) $2^5 \cdot (-3)^5 \cdot (-1)^5$
 b) $(-1)^3 \cdot (-1)^8 \cdot (1)^5$
 c) $4^3 \cdot (-2)^3 \cdot (-1)^3 \cdot 5^3$
 d) $(-5)^2 \cdot (-5)^4 \cdot (5)$
 e) $(-9)^2 \cdot 9^3 \cdot 9^4 \cdot 9$
 f) $(-18)^4 : (-3)^4$
 g) $(6)^5 : (6)^2$
 h) $(-3)^2 : (-3)^4$

2. Expresa en forma de única potencia:

- a) $\frac{4^2 \cdot 4^3 \cdot 4}{5^6 \cdot (-1)^6}$
 b) $[(2)^7 : (-3)^7] \cdot (-4)^3 \cdot (-4)^4$
 c) $\frac{[-2^4 \cdot (-3)^4 \cdot 6^4]^3 : [(-4)^8 \cdot (-4)^4]}{9^6 \cdot 9^4 : 9}$
 d) $\frac{(-3)^2 \cdot (10)^2 : (-5)^2}{7^5 : 7^3}$

3. Expresa en forma de potencia de exponente positivo:

- a) $(-4)^{-3}$ b) $(9)^{-3}$ c) $(-2)^5 : (-2)^9$ d) $(-5) \cdot (-5)^2 : (-5)^6$

4. Expresa en forma de única potencia:

- a) $((2)^4)^3$ b) $((-3)^{-2})^5$ c) $((-1)^4)^3$ d) $((5)^2)^{3/5}$

5. Expresa en forma de única potencia:

- a) $(-3/5)^4$ b) $(2/9)^4$ c) $(1/5)^{-3}$ d) $(2/3)^{-4}$

6. Expresa en forma de única potencia:

- a) $(2/3)^{-4} \cdot (2/3)^3 \cdot (2/3)^5$
 b) $(1/6)^3 \cdot (3/5)^3 \cdot (-6/7)^3$
 c) $(-5/3)^4 : (-2/3)^4$
 d) $(4/9)^3 : (4/9)^5$
 e) $((-4/3)^{-3})^5$
 f) $((2/7)^{-1})^{-3}$

7. Expresa en forma de única potencia:

$$a) \frac{(2/3)^3 \cdot (-1/5)^3 \cdot (-4/9)^3 \cdot (1/2)^3}{(-1/4)^3 \cdot (-1/4)^{-2} \cdot (-1/4) \cdot (-1/4)^4}$$

$$b) ((-1/3)^4)^{3/2} \cdot (2/5)^{1/6}$$

$$c) \frac{(2/5)^{1/2} \cdot (2/5)^{3/4} \cdot (2/5)^{-1/6}}{(7/8)^3 : (1/6)^3}$$

8. Expresa en forma de notación científica:

- a) 140 000 000 b) 32 800 c) 71 000 000 000 000 000 d) 0.0000075
 e) -18 000 000 f) 0.00000000042 g) -0.009 h) 0.00000000007

9. Busca información expresada en notación científica sobre:

- a) La distancia entre la Tierra y la Luna
 b) Unidad de masa atómica
 c) Km que corresponden a un año luz
 d) Un gúgol
 e) La longitud de onda de los rayos cósmicos

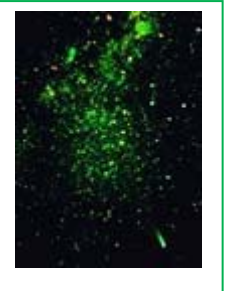
10. Realiza las operaciones y expresa el resultado en notación científica:

- a) $4 \cdot 10^3 + 2.4 \cdot 10^6 - 1.7 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^3$
 b) $2.3 \cdot 10^{-5} - 3.45 \cdot 10^{-4} + 6 \cdot 10^{-3}$
 c) $3 \cdot 10^{-4} \cdot 4.5 \cdot 10^2$
 d) $1.8 \cdot 10^5 : 5 \cdot 10^8$

11. La estrella *Sirio* está a unos 8 611 años luz de nuestro planeta. Expresa en metros, mediante notación científica la distancia que recorrería una nave espacial que realizara un trayecto de ida y vuelta a Sirio. (*Recuerda:* Un año luz, la longitud que recorre la luz en un año, es aproximadamente igual a 9.46×10^{12} km (9 460 730 472 580.8 km con más aproximación))



12. La masa de un electrón en reposo se estima en $9.11 \cdot 10^{-31}$ kg, la de un protón es de $1.672 \cdot 10^{-27}$ kg, y la de un neutrón 1.64×10^{-27} kg. Calcula la masa de un átomo de carbono 14 (C_{14}) formado por seis protones, seis electrones y $6 + 2 = 8$ neutrones. (El C_{14} es un isótopo que tiene dos neutrones más que el carbono normal y que se utiliza para datar).



Raíces

19. Calcula:

a) $\sqrt{12\,100}$

b) $\sqrt[3]{-0.008}$

c) $\sqrt[3]{-125}$

d) $\sqrt[5]{-1}$

e) $\sqrt{0.49}$

20. Calcula:

a) $\sqrt[4]{2.0736}$

b) $\sqrt[5]{-0.00001}$

c) $\sqrt{33\,640\,000}$

d) $\sqrt[3]{-2.7 \cdot 10^{-6}}$

21. Expresa en forma de raíz:

a) $(-4)^{3/5}$

b) $7^{1/6}$

c) $(21)^{1/3}$

d) $(-5)^{2/3}$

22. Expresa en forma de potencia:

a) $\sqrt[5]{6^3}$

b) $\sqrt{(-7)^5}$

c) $\sqrt{3^5}$

d) $\sqrt[3]{(-30)^4}$

23. Extrae los factores posibles de estos radicales:

a) $\sqrt{3^3 \cdot 10^5 \cdot 2}$

b) $\sqrt[3]{6^9 \cdot 2^5}$

c) $\sqrt[4]{x^{11} \cdot y^5}$

d) $\sqrt[3]{3^4 \cdot 5^6}$

24. Extrae los factores posibles de estos radicales:

a) $\sqrt[3]{a^7 \cdot b^3 \cdot c^{-6}}$

b) $\sqrt{5^{-5} \cdot 3^{-6}}$

c) $\sqrt[4]{10^5 \cdot 6^8}$

d) $\sqrt{x^3 \cdot x^8 \cdot x}$

25. Simplifica:

a) $\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^3}$

b) $\sqrt[3]{\left(\frac{-4}{5}\right) \cdot \left(\frac{-4}{5}\right)^5}$

c) $\sqrt{\frac{x^3 \cdot y^4}{x^8 \cdot y}}$

d) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{4}\right)^5 : \left(\frac{4}{3}\right)^5}$

26. Expresa en forma de producto:

a) $\sqrt{3 \cdot 50 \cdot 12}$

b) $\sqrt[3]{5^2 \cdot 2^4 \cdot 3^6}$

c) $\sqrt{8 \cdot 3^4 \cdot 9}$

d) $\sqrt[3]{a^8 \cdot b^2 \cdot c^6}$

27. Expresa en forma de cociente:

a) $\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)}$

b) $\sqrt[5]{\frac{15}{32}}$

c) $\sqrt[3]{\frac{-7}{9}}$

d) $\sqrt{\frac{15}{24}}$

28. Expresa en forma de única raíz:

a) $\sqrt{\sqrt{48}}$

b) $\sqrt[3]{\sqrt{450}}$

c) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{9000}}$

d) $\sqrt[2]{\sqrt[5]{-1}}$

29. Simplifica las operaciones:

a) $\sqrt[3]{3^5} \cdot \sqrt[3]{2^4}$

b) $(\sqrt[3]{-27}) \cdot 5^{\frac{2}{3}}$

c) $\sqrt[5]{2^{12}} : \sqrt[5]{3^8}$

d) $\sqrt[2]{3} \cdot \sqrt[2]{10^5} : \sqrt{2^3}$

30. Simplifica las operaciones:

a) $\sqrt[3]{x^5} : \sqrt[2]{x^3}$

b) $\sqrt{\sqrt{10^{12}}}$

c) $\sqrt{5 \cdot (-2)^6 \cdot (-3)^6}$

d) $\sqrt[5]{(-6)^{12}} : \sqrt[5]{(-6)^7 \cdot 3^{10}}$

31. Simplifica las operaciones:

a) $\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} : 5^{\frac{2}{3}}$

b) $\frac{(-4)^5 \cdot \sqrt[3]{(-4)}}{\sqrt{2^3} : \sqrt{2^5}}$

c) $\frac{\left((-7^3)\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[3]{(-7)^2}}{\sqrt{\sqrt{(-7)}}$

AUTOEVALUACIÓN

- El resultado de las operaciones siguientes es: $(-6)^3 \cdot (-6)^{-5} \cdot (-6)$ y $(12)^7 : (12)^5$
 a) 6 y 12^2 b) $1/6$ y 12^5 c) $-1/6$ y 12^2
- El resultado de las operaciones siguientes es: $(-5)^4 \cdot (-1)^4 \cdot (6)^4$ y $(-8)^7 : (5)^7$
 a) $(-30)^4$ y $(-3)^7$ b) 30^4 y $(-8/5)^7$ c) 30^4 y $(-3)^7$
- El resultado de las operaciones siguientes es: $((-2)^5)^3$; $((-1)^5)^7$ y $((-5)^{2/3})^6$
 a) $(-2)^{15}$; (-1) y $(5)^{8/3}$ b) -2^{15} ; (-1) y -5^4 c) $(-2)^{15}$; (-1) y $(-5)^4$
- El resultado de las operaciones siguientes es: $(8)^{-3}$; $(-2)^{-4}$ y $(10^5)^{-2}$
 a) $1/512$; $1/16$ y $1/10^{10}$ b) $1/8^3$; $-1/2^4$ y $1/10^{10}$
- El resultado de las operaciones siguientes es: $(5/7)^3$; $(-1/3)^{-2}$ y $(-2/5)^4$
 a) $5^3/7^3$; $1/3^2$ y $-2^4/5^4$ b) $5^3/7^3$; 3^2 y $2^4/5^4$
- El resultado de las operaciones siguientes es: $(2/3)^3 \cdot (2/3)^2 \cdot (2/3)^{-5}$
 a) 1 b) $2/3$ c) $-2/3$ d) $(2/3) \cdot (-3/2)$
- Las expresiones $3.1 \cdot 10^8$ y 0.0000000095 corresponden a:
 a) 3 100 000 000 y $9.5 \cdot 10^{-10}$ b) 310 000 000 y $9.5 \cdot 10^{-10}$ c) 310 000 000 y $9.5 \cdot 10^{-9}$
- El resultado de esta operación es: $(0.00098 + 3 \cdot 10^{-6} - 4.2 \cdot 10^{-4}) \cdot 2.5 \cdot 10^5$
 a) 124.5 b) 2 407.5 c) 107.5 d) 140.75
- El resultado de las operaciones siguientes es: $\sqrt[3]{-1331}$; $\sqrt{256}$ y $\sqrt[5]{-1}$
 a) $-11, 16, -1$ b) $11, 16, 1$ c) $-11, -16, -1$
- Las siguientes expresiones corresponden a: $(-4)^{3/5}$; $(3)^{1/2}$ y $(-5)^{4/3}$
 a) $\sqrt[5]{-4^3}$; $\sqrt{3}$ y $\sqrt[3]{-5^4}$ b) $\sqrt[5]{(-4)^3}$; $\sqrt{3}$ y $\sqrt[3]{(-5)^4}$ c) $-\sqrt[5]{4^3}$; $\sqrt{3}$ y $\sqrt[3]{-(5^4)}$
- El resultado de extraer factores de estos radicales es: $\sqrt[3]{(-5)^4}$ y $\sqrt{2^3 \cdot 5^5}$
 a) $(-5) \cdot \sqrt[3]{(-5)}$ y $2 \cdot 5^3 \sqrt{2 \cdot 5}$ b) $(-5) \cdot \sqrt[3]{(-5)}$ y $50\sqrt{10}$ c) $(-5) \cdot \sqrt[3]{(-5)}$ y $50\sqrt{5}$
- Las operaciones siguientes pueden expresarse: $\sqrt[3]{-(5):12}$ y $\sqrt[3]{\sqrt[3]{-18}}$
 a) $\frac{\sqrt[3]{-5}}{\sqrt[3]{12}}$ y $\sqrt[3]{-18}$ b) $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{12}}$ y $\sqrt[3]{-18}$ c) $\frac{\sqrt[3]{-5}}{\sqrt[3]{12}}$ y $\sqrt[3]{18}$