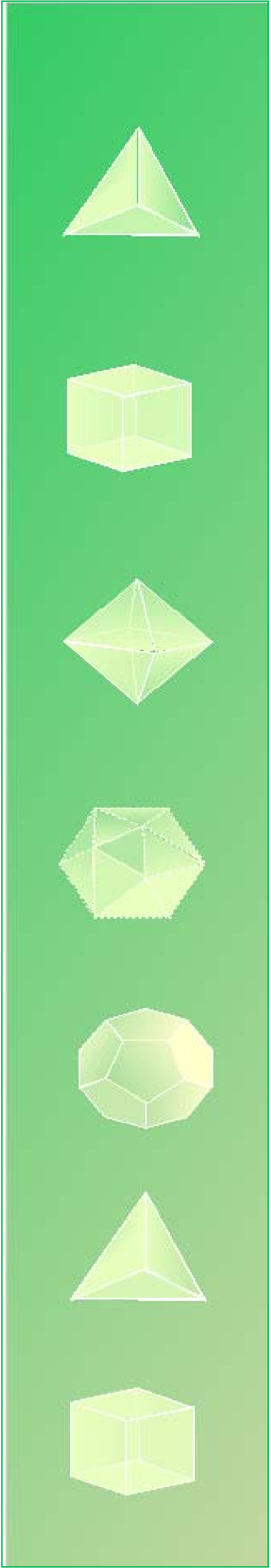
Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas

3º B de ESO
Capítulo 4: Expresiones algebraicas. Polinomios



www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez

Revisor: Javier Rodrigo

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

y commons.wikimedia

Índice

Resumen

Según avanzamos en nuestros estudios se van ampliando nuestros conocimientos, en particular los de Matemáticas. Esto no se debe a ningún tipo de capricho, todo lo contrario: a lo largo de la historia las Matemáticas se desarrollan empujadas por las necesidades de las personas. Es indudable la conveniencia de que una persona tenga soltura con los números y sus operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división. Por soltura no debe entenderse que se sepa de memoria “todas” las tablas de multiplicar, sino que sea consciente de lo que significa realizar una operación concreta, que sea capaz de dar respuesta a preguntas cotidianas que se solventan *operando* adecuadamente los datos disponibles. Para ese propósito es útil fomentar nuestra capacidad de abstracción; ella nos permite reconocer como equivalentes situaciones en apariencia muy alejadas. En este capítulo se va a dar un paso en ese sentido al manipular, manejar, datos numéricos no concretados, no conocidos, a través de indeterminadas o variables. De esa manera aparecerán las expresiones algebraicas y, dentro de ellas, unas expresiones particulares de abundante uso y simplicidad de exposición, los polinomios.

1. INTRODUCCIÓN. EXPRESIONES ALGEBRAICAS

1.1. Introducción

No hace falta imaginar situaciones rebuscadas para que, a la hora de realizar un razonamiento, nos topemos con alguna de las cuatro operaciones matemáticas básicas: suma, resta, multiplicación o división.

Ejemplos:

- El padre, la madre y el hijo han ido al cine y las entradas han costado 27 euros. Para calcular el precio de cada entrada se divide entre 3, 27/ 3 = 9 euros.

- Si vamos a comprar pasta de té y el precio de un kilogramo es de 18.3 euros, resulta habitual que, según va la dependienta introduciendo pastas en una bandeja, vayamos viendo el importe final. Para ello si la bandeja está sobre una balanza, ejecutamos la operación 18.3·x donde x es la cantidad de kilogramos que nos ha indicado la balanza. Después de cada pesada, el resultado de esa multiplicación refleja el importe de las pastas que, en ese momento, contiene la bandeja.

- Supongamos que tenemos un contrato con una compañía de telefonía móvil por el que pagamos 5 céntimos de euro por minuto, así como 12 céntimos por establecimiento de llamada. Con esa tarifa, una llamada de 3 minutos nos costará:

$$(0.05 \cdot 3) + 0.12 = 0.15 + 0.12 = 0.27 \text{ euros}$$

Pero ¿cuál es el precio de una llamada cualquiera? Como desconocemos su duración, nos encontramos con una cantidad no determinada, o indeterminada, por lo que en cualquier respuesta que demos a la pregunta anterior se apreciará la ausencia de ese dato concreto. Podemos decir que el coste de una llamada cualquiera es

$$(0.05 \cdot x) + 0.12 = 0.05 \cdot x + 0.12 \text{ euros}$$

donde x señala su duración, en minutos.

Actividades propuestas

1. A finales de cada mes la empresa de telefonía móvil nos proporciona la factura mensual. En ella aparece mucha información, en particular, el número total de llamadas realizadas (N) así como la cantidad total de minutos de conversación (M). Con los datos del anterior ejemplo, justifica que el importe de las llamadas efectuadas durante ese mes es:

$$(0.05 \cdot M) + (0.12 \cdot N) = 0.05 \cdot M + 0.12 \cdot N \text{ euros}$$

Ejemplo:

- Es bien conocida la *fórmula* del área de un rectángulo de base *b* y altura asociada *h*:

$$A = b \cdot h$$

En todos estos ejemplos han surgido **expresiones algebraicas**.

1.2. Expresiones algebraicas

Llamaremos **expresión algebraica** a cualquier expresión matemática que se construya con números y las operaciones matemáticas básicas: suma, resta, multiplicación y/o división. En una expresión algebraica puede haber datos no concretados; según el contexto, recibirán el nombre de ***variable***, ***indeterminada***, ***parámetro***, entre otros.

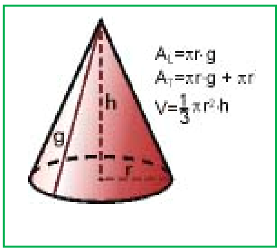
Si en una expresión algebraica no hay *variables*, dicha expresión no es más que un número:

Ejemplo:

$$\frac{3\cdot(-7)}{\frac{4}{5}-\frac{2}{3}}+1=\frac{-21}{\frac{4\cdot3}{5\cdot3}-\frac{2\cdot5}{3\cdot5}}+1=\frac{-21}{\frac{12}{15}-\frac{10}{15}}+1=\frac{-21}{\frac{2}{15}}+1=\frac{-21\cdot15}{2}+1=\frac{-315}{2}+1=\frac{-315}{2}+\frac{2}{2}=\frac{-313}{2}$$

Al fijar un valor concreto para cada *indeterminada* de una expresión algebraica aparece un número, el **valor numérico** de esa expresión algebraica para tales valores de las indeterminadas.

Ejemplo:



- El volumen de un cono viene dado por la expresión algebraica:

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot r^2\cdot h$$

en la que *r* es el radio del círculo base y *h* es su altura. De este modo, el volumen de un cono cuya base tiene un radio de 10 cm y de altura 15 cm es igual a:

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot r^2\cdot h=\frac{1}{3}\pi\cdot 10^2\cdot 15=500\cdot\pi\, cm^3.$$

- El área lateral del cono viene dada por $A_L = \pi \cdot r \cdot g$, donde *r* es el radio de la base y *g* la generatriz. La superficie total es $A_T = \pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2$.
- La expresión algebraica que representa el producto de los cuadrados de dos números cualesquiera x e y se simboliza por $x^2 \cdot y^2$. Si en ella fijamos $x=-2$ e $y=\frac{3}{5}$ resulta

$$(-2)^2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2=4\cdot\frac{9}{25}=\frac{36}{25}.$$

- Si en la expresión

$$7+\frac{x}{2}+x\cdot y^3-\frac{6}{z}$$

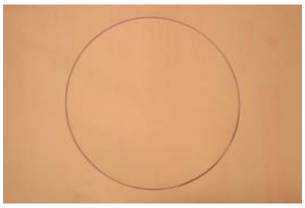
particularizamos las tres variables con los valores

$$x=4,\ y=-1,\ z=\frac{1}{2}$$

surge el número

$$7+\frac{4}{2}+4\cdot(-1)^3-\frac{6}{1/2}=7+2-4-12=-7$$

En una expresión algebraica puede no tener sentido otorgar algún valor a cierta indeterminada. En efecto, en el último ejemplo no es posible hacer $z=0$.



Actividades propuestas

2. Escribe las expresiones algebraicas que nos proporcionan la longitud de una circunferencia y el área de un trapecio.

3. Reescribe, en lenguaje algebraico, los siguientes enunciados, referidos a dos números cualesquiera x e y:

a) El triple de su diferencia b) La suma de sus cuadrados c) El cuadrado de su suma

d) El inverso de su producto e) La suma de sus opuestos f) El producto de sus cuadrados

4. Una tienda de ropa anuncia en sus escaparates que está de rebajas y que todos sus artículos están rebajados un 30 % sobre el precio impreso en cada etiqueta. Escribe lo que pagaremos por una prenda en función de lo que aparece en su etiqueta.

5. Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para el valor o valores que se indican:

a) $-3x^2+\frac{4}{x}-5$ para $x=-2$.

b) $3b+\frac{a+b}{2-b^3}+a\cdot b^2-1$ para $a=\frac{1}{3}$ y $b=\frac{1}{2}$.

6. Indica, en cada caso, el valor numérico de la expresión $x-2y+3z$:

a) $x=1, y=2, z=1$

b) $x=2, y=0, z=-1$

c) $x=0, y=1, z=0$

7. Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para el valor o los valores que se indican:

a) $x^2 + 2x - 7$ para $x = 2$ b) $(a + b)^2 - (a^2 + b^2)$ para $a = 3$ y $b = -2$ c) $c^2 + 3c + 7$ para $c = 1$.

2. POLINOMIOS. SUMA Y PRODUCTO

2.1. Monomios. Polinomios

Unas expresiones algebraicas de gran utilidad son los **polinomios**, cuya versión más simple y, a la vez, generadora de ellos son los **monomios**.

Un **monomio** viene dado por el producto de números e indeterminadas. Llamaremos **coeficiente** de un monomio al número que multiplica a la indeterminada, o indeterminadas; la indeterminada, o indeterminadas, conforman la **parte literal** del monomio.

Ejemplos:

- La expresión que nos proporciona el triple de una cantidad, $3 \cdot x$, es un monomio con una única variable, x, y coeficiente 3.
- El volumen de un cono, $\frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$, es un monomio con dos indeterminadas, r y h, y coeficiente $\frac{1}{3}\pi$. Su parte literal es $r^2 \cdot h$.
- Otros monomios: $5a^2b^3$, $\sqrt{2} \cdot x^3 \cdot y^2 \cdot z^2$
- La expresión $5xy^2 + \sqrt{3}xy - \frac{3}{7}x$ está formada por tres términos, tres monomios. Cada uno tiene un coeficiente y una parte literal:

  En el primero, $5xy^2$, el coeficiente es 5 y la parte literal xy^2

  El segundo, $\sqrt{3}xy$, tiene por coeficiente $\sqrt{3}$ y parte literal xy

  Y en el tercero, $-\frac{3}{7}x$, el coeficiente es $-\frac{3}{7}$ y la parte literal x

Atendiendo al exponente de la variable, o variables, adjudicaremos un **grado** a cada monomio con arreglo al siguiente criterio:

- Cuando haya una única indeterminada, el grado del monomio será el exponente de su indeterminada.
- Si aparecen varias indeterminadas, el grado del monomio será la suma de los exponentes de esas indeterminadas.

Ejemplos:

- $3x$ es un monomio de grado 1 en la variable x.
- $\frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$ es un monomio de grado 3 en las indeterminadas r y h.
- $5a^2b^3$ es un monomio de grado 5 en a y b.
- $\sqrt{2} \cdot x^3 \cdot y^2 \cdot z^2$ es un monomio de grado 7 en x, y y z.

Un número puede ser considerado como un monomio de grado 0.

Actividades propuestas

8. En cada uno de los siguientes monomios señala su coeficiente, su parte literal y su grado:

a) $-12x^3$

b) a^4b^3c

c) $4xy^2$

Un **polinomio** es una expresión construida a partir de la suma de monomios. El **grado de un polinomio** vendrá dado por el mayor grado de sus monomios.

Ejemplos:

- $\frac{1}{5}\cdot x^2 - 7\cdot x^3 + 2$ es un polinomio de grado 3 en la variable x.
- $-3\cdot y^4 + 8\cdot x^2 + 2\cdot x$ es un polinomio de grado 4 en las indeterminadas x e y.
- $4\cdot x^2\cdot y^3 - 7 + 3\cdot y^2$ es un polinomio de grado 5 en x e y.
- $x - 2\cdot y + 6\cdot z$ es un polinomio de grado 1 en x, y y z.

Tanto en esta sección como en la siguiente nos limitaremos, básicamente, a considerar polinomios con una única variable. Es habitual escribir los diferentes monomios de un polinomio de forma que sus grados vayan en descenso para, con este criterio, apreciar en su primer monomio cuál es el grado del polinomio.

El aspecto genérico de un polinomio en la variable x es

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

donde los coeficientes a_k son números. El monomio de grado cero, a_0, recibe el nombre de **término independiente**. Diremos que un polinomio es **mónico** cuando el coeficiente de su término de mayor grado es igual a 1.

Ejemplos:

- $-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ es un polinomio de grado 4 en la variable x, cuyo término independiente es 2.
- $4y^3 + 3y - 7$ es un polinomio de grado 3 en la indeterminada y con término independiente -7.
- $z^2 - 3z + 12$ es un polinomio de grado 2 en z. Además, es un polinomio mónico.
- $3x+9$ es un polinomio de grado 1 en x.

Actividades propuestas

9. Para cada uno de los siguientes polinomios destaca su grado y los monomios que lo constituyen:

a) $5x^4 + 7x^2 - x$

b) $6x^2 + 10 - 2x^3$

c) $2xy^3 - x^5 + 7x^2y^2$

Como ocurre con cualquier expresión algebraica, si fijamos, o escogemos, un valor concreto para la variable de un polinomio aparece un número: el **valor numérico** del polinomio para ese valor determinado de la variable. Si hemos llamado p a un polinomio, a la evaluación de p en, por ejemplo, el número -3 la denotaremos por $p(-3)$, y leeremos: *"p de menos tres"* o *"p en menos tres"*. Con este criterio, si p es un polinomio cuya indeterminada es la variable x, podemos referirnos a él como p o $p(x)$ indistintamente.

De esta forma apreciamos que un polinomio puede ser entendido como una manera concreta de asignar a cada número otro número.

Ejemplos:

- Si evaluamos el polinomio $p \equiv -3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ en $x=5$ nos encontramos con el número

$$p(5) = -3 \cdot 5^4 + \frac{1}{5} \cdot 5^2 + 2 = -3 \cdot 625 + 5 + 2 = -1\,875 + 7 = -1\,868$$

- El valor del polinomio $q(y) = 4y^3 + 3y - 7$ para $y = -1$ es

$$q(-1) = 4 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1) - 7 = 4 \cdot (-1) - 3 - 7 = -4 - 10 = -14$$

- Al particularizar el polinomio $r \equiv z^2 - 3z + 12$ en $z=0$ resulta el número $r(0) = 12$.

Actividades propuestas

10. Consideremos el polinomio $p(x) = x^3 - 3x + 2$. Halla los siguientes valores numéricos de p: $p(0)$, $p(1)$, $p(-1)$, $p(-2)$ y $p(1/2)$.

2.2. Suma de polinomios

Como un polinomio es una suma de monomios, la suma de dos polinomios es otro polinomio. A la hora de sumar dos polinomios procederemos a sumar los monomios de igual parte literal.

Ejemplos:

- La suma de los polinomios $-3x^4+\frac{1}{5}x^2+2$ y $-x^4+4x^2-5x-6$ es el polinomio

$$\left(-3x^4+\frac{1}{5}x^2+2\right)+(-x^4+4x^2-5x-6)=(-3x^4-x^4)+\left(\frac{1}{5}x^2+4x^2\right)-5x+(2-6)=$$

$$=(-3-1)\cdot x^4+\left(\frac{1}{5}+4\right)\cdot x^2-5x+(2-6)=-4x^4+\frac{21}{5}x^2-5x-4$$

- $(5x^2-3x+1)+(x^2+4x-7)=(5x^2+x^2)+(-3x+4x)+(1-7)=6x^2+x-6$
- $(2x^3+1)+(-x^4+4x)=-x^4+2x^3+4x+1$
- $(x^3+9)+(-x^3+2)=11$
- $3xy + 5xy + 2x = 8xy + 2x$

En el siguiente ejemplo sumaremos dos polinomios disponiéndolos, adecuadamente, uno sobre otro.

Ejemplo:

$$\begin{array}{rrrrrrr} & 4x^5 & +2x^4 & +x^3 & -5x^2 & +x & +4 \\ + & -7x^5 & & +4x^3 & +5x^2 & -3x & -6 \\ \hline & -3x^5 & +2x^4 & +5x^3 & & -2x & -2 \end{array}$$

Propiedades de la suma de polinomios

Propiedad conmutativa. Si *p* y *q* son dos polinomios, no importa el orden en el que los coloquemos a la hora de sumarlos:

$$p+q\equiv q+p$$

Ejemplo:

$$(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)=-x^3+(4x^2+x^2)+(-2x-3x)+(7+1)=-x^3+5x^2-5x+8$$

$$(-x^3+x^2-3x+1)+(4x^2-2x+7)=-x^3+(x^2+4x^2)+(-3x-2x)+(1+7)=-x^3+5x^2-5x+8$$

Propiedad asociativa. Nos señala cómo se pueden sumar tres o más polinomios. Basta hacerlo agrupándolos de dos en dos:

$$(p+q)+r\equiv p+(q+r)$$

Ejemplo:

$$(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)+(x-6)=(4x^2-2x+7-x^3+x^2-3x+1)+(x-6)=$$
$$=(-x^3+5x^2-5x+8)+(x-6)=-x^3+5x^2-4x+2$$

También:

$$(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)+(x-6)=(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1+x-6)=$$
$$=(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-2x-5)=-x^3+5x^2-4x+2$$

Actividades propuestas

11. Realiza las siguientes sumas de polinomios:

a) $(-x^3+x-5)+(2x^2+5x+4)+(-4x^3-2x^2+3x)$

b) $(x^2+4)+(-2x+4)+(-6x^3+3x^2+x+1)-x^2$

Elemento neutro. Hay un polinomio con una propiedad particular: el resultado de sumarlo con cualquier otro siempre es este último. Se trata del polinomio dado por el número 0, el *polinomio cero*.

Ejemplo:

$$0+(-7x^3+3x+7)=(-7x^3+3x+7)+0=-7x^3+3x+7$$

Elemento opuesto. Cada polinomio tiene asociado otro, al que llamaremos su *polinomio opuesto*, tal que la suma de ambos es igual al polinomio cero. Alcanzamos el polinomio opuesto de uno dado, simplemente, cambiando el signo de cada monomio.

Ejemplo:

- El polinomio opuesto de $p\equiv -2x^4+x^3+2x-7$ es $2x^4-x^3-2x+7$, al que denotaremos como "$-p$". Ratifiquemos que su suma es el polinomio cero:

$$(-2x^4+x^3+2x-7)+(2x^4-x^3-2x+7)=(-2x^4+2x^4)+(x^3-x^3)+(2x-2x)+(-7+7)=0$$

Actividades propuestas

12. Escribe el polinomio opuesto de cada uno de los siguientes polinomios:

a) $2x^3-2x^2-3x+9$

b) $-5x$

c) $-x^3+7x$

13. Considera los polinomios $p\equiv x^2-x+1$, $q\equiv -x^3+2x-3$, así como el polinomio suma $s\equiv p+q$. Halla los valores que adopta cada uno de ellos para $x=-2$, es decir, calcula $p(-2)$, $q(-2)$ y $s(-2)$. Estudia si existe alguna relación entre esos tres valores.

14. Obtén el valor del polinomio $p\equiv 4x^3-x^2+1$ en $x=2$. ¿Qué valor toma el polinomio opuesto de p en $x=2$?

2.3. Producto de polinomios

Otra operación que podemos realizar con polinomios es la multiplicación.

El resultado del producto de polinomios siempre será otro polinomio. Aunque en un polinomio tenemos una indeterminada, o variable, como ella adopta valores numéricos, a la hora de multiplicar polinomios utilizaremos las propiedades de la suma y el producto entre números, en particular la propiedad distributiva del producto respecto de la suma; así, todo queda en función del producto de monomios, cuestión que resolvemos con facilidad:

$$ax^n \cdot bx^m = abx^{n+m}$$

Ejemplos:

- $(-5)x^2 \cdot 2x^4 = (-5) \cdot 2 \cdot x^{2+4} = -10x^6$
- $5x^3 \cdot (-4) = 5 \cdot (-4) \cdot x^3 = -20x^3$
- $3x^2 \cdot (2x^2 - 4x + 6) = (3x^2 \cdot 2x^2) - (3x^2 \cdot 4x) + (3x^2 \cdot 6) = 6x^4 - 12x^3 + 18x^2$
- $(-x^3 + 3x - 1) \cdot (-2x) = (-x^3) \cdot (-2x) + (3x) \cdot (-2x) + (-1) \cdot (-2x) = 2x^4 - 6x^2 + 2x$
- $(3x-2) \cdot (x^2 - 4x - 5) = (3x) \cdot (x^2 - 4x - 5) + (-2) \cdot (x^2 - 4x - 5) = (3x^3 - 12x^2 - 15x) + (-2x^2 + 8x + 10) =$
  $= 3x^3 + (-12x^2 - 2x^2) + (-15x + 8x) + 10 = 3x^3 - 14x^2 - 7x + 10$
- $(x-6) \cdot (x^3 - 2x) = (x-6) \cdot x^3 + (x-6) \cdot (-2x) = (x^4 - 6x^3) + (-2x^2 + 12x) = x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 12x$

También podemos materializar el producto de polinomios tal y como multiplicamos números enteros:

Ejemplo:

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & -2x^3 & & +x & +4 \\
\times & & & x^2 & -3x & +1 \\
\hline
 & & -2x^3 & & +x & +4 \\
 & 6x^4 & & -3x^2 & -12x & \\
-2x^5 & & +x^3 & +4x^2 & & \\
\hline
-2x^5 & +6x^4 & -x^3 & +x^2 & -11x & +4
\end{array}$$

Recordemos que el polinomio *opuesto* de otro se obtiene simplemente cambiando el signo de cada monomio. Esta acción se corresponde con multiplicar por el número "-1" el polinomio original. De esta forma el polinomio opuesto de p es

$$-p \equiv (-1) \cdot p$$

En este momento aparece de manera natural la **operación diferencia**, o **resta**, de polinomios. La definimos con la ayuda del polinomio opuesto de uno dado:

$$p - q \equiv p + (-q) \equiv p + (-1) \cdot q$$

Ejemplo:

$$(-5x^2 - 3x + 2) - (-2x^4 + x^3 + 3x^2 + 6) = (-5x^2 - 3x + 2) + (2x^4 - x^3 - 3x^2 - 6) =$$
$$= 2x^4 - x^3 + (-5x^2 - 3x^2) - 3x + (2 - 6) = 2x^4 - x^3 - 8x^2 - 3x - 4$$

Actividades propuestas

15. Efectúa los siguientes productos de polinomios:

a) $(-2x)\cdot(3x^2 - 4)$

b) $(2x^3 + 1)\cdot(-4x + 5)$

c) $(4x^3 - x^2 - 1)\cdot(2x + 6)$

d) $(-1)\cdot(8x^2 + 7x - 9)$

16. Realiza las siguientes diferencias de polinomios:

a) $(5x^2 + 2) - (-2x)$

b) $(-2x^3 + 4x) - (-2x - 1)$

c) $(7x^2 - 2x) - (3x^3 + 4x^2 - x + 1)$

17. Multiplica cada uno de los siguientes polinomios por un número de tal forma que surjan polinomios mónicos:

a) $3x^2 - x + 2$

b) $-6x^3 + 2x - 3$

c) $-x^2 + 9x - 2$

18. Calcula y simplifica los siguientes productos:

a) $x\cdot(-2x + 4)$ b) $(2x - 3)\cdot(3x + 2)$

c) $(a - 2)\cdot(4 - 3a)$ d) $(3a - b^2)\cdot(2b - a^2)$

Propiedades del producto de polinomios

Propiedad conmutativa. Si *p* y *q* son dos polinomios, no importa el orden en el que los coloquemos a la hora de multiplicarlos:

$$p \cdot q \equiv q \cdot p$$

Ejemplo:

$$(2x-7)\cdot(-x^3+x^2)=2x\cdot(-x^3+x^2)-7\cdot(-x^3+x^2)=-2x^4+2x^3+7x^3-7x^2=-2x^4+9x^3-7x^2$$

$$(-x^3+x^2)\cdot(2x-7)=-x^3\cdot(2x-7)+x^2\cdot(2x-7)=-2x^4+7x^3+2x^3-7x^2=-2x^4+9x^3-7x^2$$

Propiedad asociativa. Nos señala cómo se pueden multiplicar tres o más polinomios. Basta hacerlo agrupándolos de dos en dos:

$$(p \cdot q)\cdot r \equiv p\cdot(q\cdot r)$$

Ejemplo:

$$\left((4x^2-2)\cdot(-3x+1)\right)\cdot(-x^3+x)=(-12x^3+4x^2+6x-2)\cdot(-x^3+x)=$$
$$=12x^6-12x^4-4x^5+4x^3-6x^4+6x^2+2x^3-2x=12x^6-4x^5-18x^4+6x^3+6x^2-2x$$

También:

$$(4x^2-2)\cdot\left((-3x+1)\cdot(-x^3+x)\right)=(4x^2-2)\cdot(3x^4-3x^2-x^3+x)=$$
$$=12x^6-12x^4-4x^5+4x^3-6x^4+6x^2+2x^3-2x=12x^6-4x^5-18x^4+6x^3+6x^2-2x$$

Actividades propuestas

19. Realiza los siguientes productos de polinomios:

a) $x\cdot(-3x^2+4x+2)\cdot x^2$

b) $(-2x+1)\cdot(5x^2-x+3)\cdot(-x)$

c) $(3a-1)\cdot(2-a)\cdot(5-4a)$

Elemento neutro. Hay un polinomio con una propiedad particular: al multiplicarlo por cualquier otro siempre nos da este último. Se trata del polinomio dado por el número 1, el *polinomio unidad*.

Ejemplo:

$$1\cdot(-5x^3-2x+3)=(-5x^3-2x+3)\cdot 1=-5x^3-2x+3$$

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma. Cuando en una multiplicación de polinomios uno de los factores viene dado como la suma de dos polinomios como, por ejemplo,

$$(3x^2-x)\cdot\left((-2x+7)+(x^3-4x)\right)$$

tenemos dos opciones para conocer el resultado:

a) realizar la suma y, después, multiplicar

$$(3x^2-x)\cdot\big((-2x+7)+(x^3-4x)\big)=(3x^2-x)\cdot\big(x^3-6x+7\big)=$$
$$=3x^5-18x^3+21x^2-x^4+6x^2-7x=3x^5-x^4-18x^3+27x^2-7x$$

b) distribuir, aplicar, la multiplicación a cada uno de los sumandos y, después, sumar:

$$(3x^2-x)\cdot\big((-2x+7)+(x^3-4x)\big)=(3x^2-x)\cdot(-2x+7)+(3x^2-x)\cdot(x^3-4x)=$$
$$=(-6x^3+21x^2+2x^2-7x)+(3x^5-12x^3-x^4+4x^2)=3x^5-x^4-18x^3+27x^2-7x$$

Comprobamos que obtenemos el mismo resultado.

En general, la **propiedad distributiva** de la multiplicación respecto de la suma nos dice que

$$p\cdot(q+r)\equiv(p\cdot q)+(p\cdot r)$$

Conviene comentar que la anterior propiedad distributiva leída en sentido contrario, de derecha a izquierda, es lo que comúnmente se denomina **sacar factor común**.

Ejemplo:

$$6x^5-4x^4-18x^3+2x^2=(3x^3-2x^2-9x+1)\cdot 2x^2$$

Actividades propuestas

20. De cada uno de los siguientes polinomios extrae algún factor que sea común a sus monomios:

a) $-10x^3-15x^2+20x$

b) $30x^4+24x^2$

3. DIVISIÓN DE POLINOMIOS

3.1. Introducción a las fracciones polinómicas

Hasta este momento hemos estudiado varias operaciones con polinomios: suma, resta y producto. En cualquiera de los casos el resultado siempre es otro polinomio. Cuando establecemos una **fracción polinómica** como, por ejemplo,

$$\frac{3x^3 - x}{2x^2 + x - 3}$$

lo que tenemos es una expresión algebraica, una **fracción algebraica**, la cual, en general, no es un polinomio. Sí aparece un polinomio en el muy particular caso en el que el denominador es un número diferente de cero, esto es, un polinomio de grado 0.

Es sencillo constatar que la expresión anterior no es un polinomio: cualquier polinomio puede ser evaluado en cualquier número. Sin embargo, esa expresión no puede ser evaluada para $x = 1$, ya que nos quedaría el número 0 en el denominador.

Podríamos creer que la siguiente fracción polinómica sí es un polinomio:

$$\frac{-2x^3 + 5x^2 - 3x}{x} = \frac{-2x^3}{x} + \frac{5x^2}{x} + \frac{-3x}{x} = -2x^2 + 5x - 3$$

La expresión de la derecha sí es un polinomio, pues se trata de una suma de monomios, pero la de la izquierda no lo es ya que no puede ser evaluada en $x = 0$. No obstante, esa fracción algebraica y el polinomio, cuando son evaluados en cualquier número diferente de cero, ofrecen el mismo valor. Son **expresiones equivalentes** allí donde ambas tienen sentido, esto es, para aquellos números en los que el denominador no se hace cero.

3.2. División de polinomios

Aunque, como hemos visto en el apartado anterior, una fracción polinómica, en general, no es un polinomio, vamos a adentrarnos en la división de polinomios pues es una cuestión importante y útil.

Analicemos con detenimiento la división de dos números enteros positivos. Cuando dividimos dos números, *D* (dividendo) entre *d* (divisor, distinto de 0), surgen otros dos, el cociente (*c*) y el resto (*r*). Ellos se encuentran ligados por la llamada *prueba de la división*:

$$D = d \cdot c + r$$

Alternativamente:

$$\frac{D}{d} = c + \frac{r}{d}$$

Además, decimos que la división es exacta cuando $r = 0$.

El conocido algoritmo de la división persigue encontrar un número entero, el cociente *c*, tal que el resto *r* sea un número menor que el divisor *d*, y mayor o igual que cero. Fijémonos en que, sin esta exigencia para el resto *r*, podemos escoger arbitrariamente un valor para el cociente *c* el cual nos suministra su valor asociado como resto *r*. En efecto, si tenemos como dividendo *D* = 673 y como divisor *d* = 12, "si queremos" que el cociente sea *c* = 48 su resto asociado es

$$r = D - d \cdot c = 673 - 12 \cdot 48 = 673 - 576 = 97$$

y la conexión entre estos cuatro números es

$$673 = 12 \cdot 48 + 97$$

Esta última "lectura" de la división de números enteros va a guiarnos a la hora de dividir dos polinomios.

Dados dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$, la división de $p(x)$, polinomio dividendo, entre $q(x)$, polinomio divisor, nos proporcionará otros dos polinomios, el polinomio cociente $c(x)$ y el polinomio resto $r(x)$. También aquí pesará una exigencia sobre el polinomio resto: su grado deberá ser menor que el grado del polinomio divisor. La relación entre los cuatro será, naturalmente,

$$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$$

También escribiremos

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

aunque, en tal caso, seremos conscientes de las cautelas señaladas en el apartado anterior en cuanto a las equivalencias entre polinomios y otras expresiones algebraicas.

Al igual que ocurre con el algoritmo de la división entera, el algoritmo de la división de polinomios consta de varias etapas, de carácter repetitivo, en cada una de las cuales aparecen unos polinomios cociente y resto "provisionales" de forma que el grado de esos polinomios resto va descendiendo hasta que nos topamos con uno cuyo grado es inferior al grado del polinomio divisor, lo que indica que hemos concluido. Veamos este procedimiento con un ejemplo concreto.

Ejemplo:

- Vamos a dividir el polinomio $p(x) = 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2$ entre el polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$. Como el polinomio divisor, $q(x)$, es de grado 2, debemos encontrar dos polinomios, un polinomio cociente $c(x)$, y un polinomio resto $r(x)$ de grado 1 o 0, tales que

$$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$$

  o, como igualdad entre expresiones algebraicas,

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

  A la vista de los polinomios $p(x)$ y $q(x)$, y de lo dicho sobre $r(x)$, es evidente que el grado del polinomio cociente, $c(x)$, ha de ser igual a 2. Vamos a obtenerlo monomio a monomio.

- Primera aproximación a los polinomios cociente y resto:

Para poder lograr la igualdad $p \equiv q \cdot c + r$, como el grado de $r(x)$ será 1 o 0, el término de mayor grado de $p(x)$, $6x^4$, surgirá del producto $q(x) \cdot c(x)$. Así obtenemos la primera aproximación de $c(x)$, su monomio de mayor grado:

$$c_1(x) = 3x^2$$

y, de manera automática, también un primer resto $r_1(x)$:

$$r_1(x) = p(x) - q(x) \cdot c_1(x) = (6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2) - (2x^2 - x + 3) \cdot 3x^2 =$$
$$= (6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2) - (6x^4 - 3x^3 + 9x^2) = 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2$$

Como este polinomio $r_1(x)$ es de grado 3, mayor que 2, el grado del polinomio divisor $q(x)$, ese polinomio resto no es el definitivo; debemos continuar.

- Segunda aproximación a los polinomios cociente y resto:

Si particularizamos la igualdad entre expresiones algebraicas $\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$ a lo que tenemos hasta ahora resulta

$$\frac{6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3} = 3x^2 + \frac{8x^3 - 8x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3}$$

Esta segunda etapa consiste en dividir el polinomio $r_1(x) = 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2$, surgido como resto de la etapa anterior, entre el polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$, el divisor inicial. Es decir, repetimos lo hecho antes pero considerando un nuevo polinomio dividendo: el polinomio resto del paso anterior.

El nuevo objetivo es alcanzar la igualdad $r_1 \equiv q \cdot c_2 + r$. Al igual que antes, el grado de $r(x)$ debería ser 1 o 0. Como el término de mayor grado de $r_1(x)$, $8x^3$, sale del producto $q(x) \cdot c_2(x)$, es necesario que el polinomio cociente contenga el monomio

$$c_2(x) = 4x$$

Ello nos lleva a un segundo resto $r_2(x)$:

$$r_2(x) = r_1(x) - q(x) \cdot c_2(x) = (8x^3 - 8x^2 + 3x - 2) - (2x^2 - x + 3) \cdot 4x =$$
$$= (8x^3 - 8x^2 + 3x - 2) - (8x^3 - 4x^2 + 12x) = -4x^2 - 9x - 2$$

Como este polinomio $r_2(x)$ es de grado 2, igual que el grado del polinomio divisor $q(x)$, ese polinomio resto no es el definitivo; debemos continuar.

- Tercera aproximación a los polinomios cociente y resto:

Lo realizado en la etapa segunda nos permite avanzar en la adecuada descomposición de la expresión algebraica que nos ocupa:

$$\frac{6x^4+5x^3+x^2+3x-2}{2x^2-x+3}=3x^2+\frac{8x^3-8x^2+3x-2}{2x^2-x+3}=3x^2+4x+\frac{-4x^2-9x-2}{2x^2-x+3}$$

Esta tercera etapa consiste en dividir el polinomio $r_2(x)=-4x^2-9x-2$, el resto de la etapa anterior, entre el polinomio $q(x)=2x^2-x+3$, el divisor inicial. De nuevo repetimos el algoritmo pero con otro polinomio dividendo: el polinomio resto del paso anterior.

Perseguimos que $r_2\equiv q\cdot c_3+r$. Como en cada paso, el grado de $r(x)$ debería ser 1 o 0. El término de mayor grado de $r_2(x)$, $-4x^2$, surge del producto $q(x)\cdot c_3(x)$, por lo que

$$c_3(x)=-2$$

y el tercer resto $r_3(x)$ es

$$r_3(x)=r_2(x)-q(x)\cdot c_3(x)=(-4x^2-9x-2)-(2x^2-x+3)\cdot(-2)=$$
$$=(-4x^2-9x-2)-(-4x^2+2x-6)=-11x+4$$

Como este polinomio $r_3(x)$ es de grado 1, menor que 2, grado del polinomio divisor $q(x)$, ese polinomio resto sí es el definitivo. Hemos concluido:

$$\frac{6x^4+5x^3+x^2+3x-2}{2x^2-x+3}=3x^2+\frac{8x^3-8x^2+3x-2}{2x^2-x+3}=3x^2+4x+\frac{-4x^2-9x-2}{2x^2-x+3}=3x^2+4x-2+\frac{-11x+4}{2x^2-x+3}$$

Si lo expresamos mediante polinomios:

$$6x^4+5x^3+x^2+3x-2=(2x^2-x+3)\cdot(3x^2+4x-2)+(-11x+4)$$

Conclusión: al dividir el polinomio $p(x)=6x^4+5x^3+x^2+3x-2$ entre el polinomio $q(x)=2x^2-x+3$ obtenemos como polinomio cociente $c(x)=3x^2+4x-2$ y como polinomio resto $r(x)=-11x+4$.

Seguidamente vamos a agilizar la división de polinomios:

Actividades propuestas

21. Comprueba que los cálculos que tienes a continuación reflejan lo que se hizo en el ejemplo anterior para dividir el polinomio $p(x)=6x^4+5x^3+x^2+3x-2$ entre el polinomio $q(x)=2x^2-x+3$.

- Primera etapa:

$$\begin{array}{rl} 6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & \underline{|\ 2x^2-x+3} \\ \underline{-6x^4+3x^3-9x^2} \qquad\qquad & 3x^2 \\ 8x^3-8x^2+3x-2 & \end{array}$$

- Primera y segunda etapas:

$$\begin{array}{rl} 6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & \underline{|\ 2x^2-x+3} \\ \underline{-6x^4+3x^3-9x^2} \qquad\qquad & 3x^2+4x \\ 8x^3-8x^2+3x-2 & \\ \underline{-8x^3+4x^2-12x} \quad & \\ -4x^2-9x-2 & \end{array}$$

- Las tres etapas:

$$\begin{array}{rl} 6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & \underline{|\ 2x^2-x+3} \\ \underline{-6x^4+3x^3-9x^2} \qquad\qquad & 3x^2+4x-2 \\ 8x^3-8x^2+3x-2 & \\ \underline{-8x^3+4x^2-12x} \quad & \\ -4x^2-9x-2 & \\ \underline{4x^2-2x+6} & \\ -11x+4 & \end{array}$$

Divide los siguientes polinomios:

a) $3x^3+4x^2-9x+7$ entre x^2+2x-1

b) $-6x^3+2x^2+3x+4$ entre $3x^3+x^2-2x+1$

c) $-6x^4-13x^3-4x^2-13x+7$ entre $-3x^2-2x+1$

d) $3x^5-9x^4+7x^3+4x^2-14x+14$ entre x^3-2x^2-x+3

e) x^5-4x-6 entre x^2+3

22. Encuentra dos polinomios tales que al dividirlos aparezca $q(x)=x^2-2x-1$ como polinomio cociente y $r(x)=2x^2-3$ como resto.

3.3. Igualdades notables

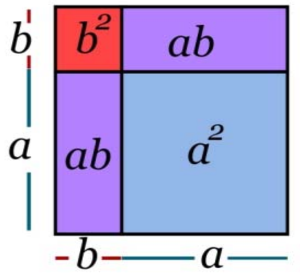
En este apartado vamos a destacar una serie de productos concretos de polinomios que surgen frecuentemente. Podemos exponerlos de muy diversas formas. Tal y como lo haremos, aparecerá más de una indeterminada; hemos de ser capaces de apreciar que si, en algún caso particular, alguna indeterminada pasa a ser un número concreto esto no hará nada más que particularizar una situación más general.

Potencias de un binomio. Las siguientes igualdades se obtienen, simplemente, tras efectuar los oportunos cálculos:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

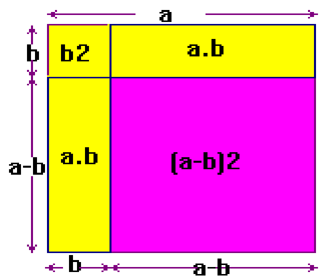
El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primero, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

Comprueba la igualdad a partir de los cuadrados y rectángulos de la ilustración.

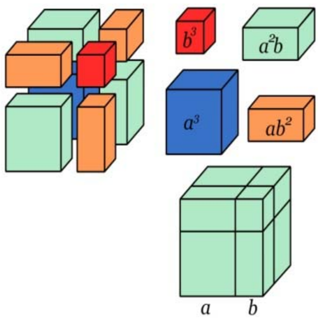


$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

El cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primero, menos el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.



Observa la figura y conéctala con la igualdad.



- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Ratifica la igualdad con los cubos y prismas de la figura.

- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Podemos observar que, en cada uno de los desarrollos, el exponente del binomio coincide con el grado de cada uno de los monomios.

Ejemplos:

- $(a+3)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot 3 + 3^2 = a^2 + 6a + 9$
- $(x-4)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 4 + 4^2 = x^2 - 8x + 16$
- $(3x+5)^2 = (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot 5 + (5)^2 = 9x^2 + 30x + 25$
- $(x-6y)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 6y + (6y)^2 = x^2 - 12xy + 36y^2$
- $(2x-5)^3 = (2x)^3 - 3\cdot(2x)^2\cdot 5 + 3\cdot(2x)\cdot 5^2 - 5^3 = 8x^3 - 30x^2 + 150x - 125$

Actividades propuestas

23. Realiza los cálculos:

a) $(1+x)^2$

b) $(-x+2)^2$

c) $(x-2)^2$

d) $(2a-3)^2$

e) $(x^2+1)^3$

f) $(2b-4)^3$

24. Obtén las fórmulas de los cuadrados de los siguientes trinomios:

$(a+b+c)^2$ $(a-b+c)^2$

25. Desarrolla las siguientes potencias:

a) $(3x-y)^2$ b) $(2a+x/2)^2$ c) $(4y-2/y)^2$

d) $(5a+a^2)^2$ e) $(-a^2+2b^2)^2$ f) $((2/3)y-1/y)^2$

26. Expresa como cuadrado de una suma o de una diferencia las siguientes expresiones algebraicas:

a) a^2-6a+9 b) $4x^2+4x+1$ c) $b^2-10b+25$

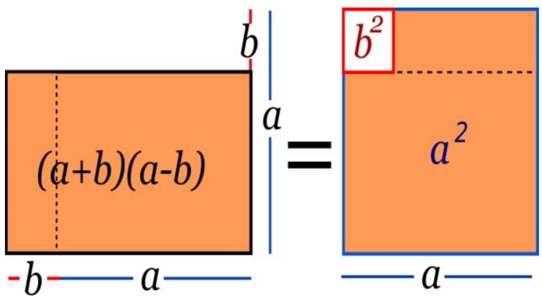
d) $4y^2-12y+9$ e) a^4+2a^2+1 f) $y^4+6xy^2+9x^2$

Suma por diferencia. De nuevo la siguiente igualdad se obtiene tras efectuar el producto señalado:

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

Suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados.

Observa las figuras y conéctalas con la igualdad.



Ejemplos:

- $(a+7)\cdot(a-7)=a^2-7^2=a^2-49$
- $(x+1)\cdot(x-1)=x^2-1^2=x^2-1$
- $(2x+3)\cdot(2x-3)=(2x)^2-3^2=4x^2-9$
- $(-3x-5)\cdot(-3x+5)=(-1)\cdot(3x+5)\cdot(-3x+5)=(-1)\cdot(5+3x)\cdot(5-3x)=$
  - o $=(-1)\cdot(5^2-(3x)^2)=-25+9x^2$

Actividades propuestas

27. Efectúa estos productos:

a. $(3x+2)\cdot(3x-2)$

b. $(2x+4y)\cdot(2x-4y)$

c. $(4x^2+3)\cdot(4x^2-3)$

d. $(3a-5b)\cdot(3a+5b)$

e. $(-x^2+5x)\cdot(x^2+5x)$

28. Expresa como suma por diferencia las siguientes expresiones

a) $9x^2 - 25$ b) $4a^4 - 81b^2$ c) $49 - 25x^2$ d) $100a^2 - 64$

De vuelta a los polinomios de una variable, podemos decir que en este apartado hemos expandido *potencias de un polinomio*, o productos de un polinomio por sí mismo, así como productos de la forma *suma por diferencia*. Conviene darse cuenta de que sus fórmulas, leídas al revés, nos informan del resultado de ciertas divisiones de polinomios. En efecto, al igual que cuando leemos $17\times 11=187$ deducimos que $\frac{187}{17}=11$ y, también, $\frac{187}{11}=17$, a partir del desarrollo de un binomio como, por ejemplo, $(-3x^2+2x)^2=(-3x^2+2x)\cdot(-3x^2+2x)=9x^4-12x^3+4x^2$, podemos obtener que

$$\frac{9x^4-12x^3+4x^2}{-3x^2+2x}=-3x^2+2x$$

Lo mismo ocurre con el producto de polinomios de la forma *suma por diferencia*. Puesto que, por ejemplo, $(2x^3-5)\cdot(2x^3+5)=4x^6-25$, deducimos que $\frac{4x^6-25}{2x^3-5}=2x^3+5$, y también $\frac{4x^6-25}{2x^3+5}=2x^3-5$

.

Actividades propuestas

29. Realiza las siguientes divisiones de polinomios a partir de la conversión del dividendo en la potencia de un binomio o en un producto de la forma suma por diferencia:

a) $x^2+12x+36$ entre $x+6$

b) $4x^4-16x^2$ entre $2x^2-4x$

c) $9x^2-24x+16$ entre $3x-4$

d) x^2-5 entre $x+\sqrt{5}$

3.4. Operaciones con fracciones algebraicas

Puesto que tanto los polinomios como las fracciones algebraicas obtenidas a partir de dos polinomios son, en potencia, números, operaremos con tales expresiones siguiendo las propiedades de los números.

- **Suma o resta.** Para sumar o restar dos fracciones polinómicas deberemos conseguir que tengan igual denominador. Una manera segura de lograrlo, aunque puede no ser la más adecuada, es ésta:

$$\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\equiv\frac{p_1\cdot q_2}{q_1\cdot q_2}+\frac{p_2\cdot q_1}{q_2\cdot q_1}\equiv\frac{p_1\cdot q_2+p_2\cdot q_1}{q_1\cdot q_2}$$

- **Producto.** Basta multiplicar los numeradores y denominadores entre sí:

$$\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_2}{q_2}\equiv\frac{p_1\cdot p_2}{q_1\cdot q_2}$$

- **División.** Sigue la conocida regla de la división de fracciones numéricas:

$$\frac{\frac{p_1}{q_1}}{\frac{p_2}{q_2}}\equiv\frac{p_1\cdot q_2}{q_1\cdot p_2}$$

Ejemplos:

- $$\frac{x-1}{x}+\frac{3x+1}{x+1}=\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x\cdot(x+1)}+\frac{(3x+1)\cdot x}{(x+1)\cdot x}=\frac{x^2-1}{x^2+x}+\frac{3x^2+x}{x^2+x}=$$
$$=\frac{(x^2-1)+(3x^2+x)}{x^2+x}=\frac{4x^2+x-1}{x^2+x}$$

- $$\frac{x+2}{x+1}-\frac{7}{x+2}=\frac{(x+2)\cdot(x+2)}{(x+1)\cdot(x+2)}-\frac{7\cdot(x+1)}{(x+2)\cdot(x+1)}=\frac{x^2+4x+4}{(x+1)\cdot(x+2)}-\frac{7x+7}{(x+2)\cdot(x+1)}=$$
$$=\frac{(x^2+4x+4)-(7x+7)}{(x+1)\cdot(x+2)}=\frac{x^2+4x+4-7x-7}{(x+1)\cdot(x+2)}=\frac{x^2-3x-3}{(x+1)\cdot(x+2)}$$

- $$\frac{x+1}{x-5}\cdot\frac{3x-1}{x^2-1}=\frac{(x+1)\cdot(3x-1)}{(x-5)\cdot(x^2-1)}$$

- $$\frac{-3x+2}{x+3}:\frac{x^2+x}{x-1}=\frac{-3x+2}{x+3}\cdot\frac{x-1}{x^2+x}=\frac{(-3x+2)\cdot(x-1)}{(x+3)\cdot(x^2+x)}$$

En ocasiones puede ser útil apreciar que una fracción polinómica puede ser reescrita como la suma, diferencia, producto o cociente de otras dos fracciones polinómicas. En particular, ello puede ser aprovechado para **simplificar** una expresión polinómica:

Ejemplos:

- $$\frac{4x^2-3x}{8x-6}=\frac{x\cdot(4x-3)}{2\cdot(4x-3)}=\frac{x}{2}\cdot\frac{(4x-3)}{(4x-3)}=\frac{x}{2}\cdot 1=\frac{x}{2}$$

- $$\frac{x^2-6x+9}{9-x^2}=\frac{(x-3)^2}{(3+x)\cdot(3-x)}=\frac{(x-3)}{(3+x)}\cdot\frac{(x-3)}{(3-x)}=\frac{(x-3)}{(3+x)}\cdot(-1)=\frac{-x+3}{3+x}$$

Actividades propuestas

30. Efectúa los siguientes cálculos:

a) $\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x-1}$ b) $\frac{x-2}{x^2-1}-\frac{5}{x}$

c) $\frac{-x+1}{x+3}\cdot\frac{3x^2}{x+1}$ d) $\frac{2+x}{x^2}:\frac{x}{x-3}$

31. Realiza las siguientes operaciones alterando, en cada apartado, solo uno de los denominadores, y su respectivo numerador:

a) $\frac{-2x^2-x+1}{x^3}+\frac{3x+1}{x^2}$

b) $\frac{2x-1}{x^2-2x}-\frac{3x}{x-2}$

32. Calcula los siguientes cocientes:

a) $(2x^3 – 8x^2 + 6x) : 2x$

b) $(5a^3 + 60a^2 –20) : 5$

c) $(16x^3 + 40x^2) : 8x^2$

d) $(6x^2y^3 – 4xy^2) : xy^2$

33. Comprueba las siguientes identidades simplificando la expresión del lado izquierdo de cada igualdad:

a) $\frac{6a^8b^2}{2a^3b}=3a^5b$

b) $\frac{8x^3y-2xy^2}{4xy}=2x^2-\frac{1}{2}y$

c) $\frac{4x^2+2x}{2x-8}=\frac{2x^2+x}{x-4}$

d) $\frac{6a^2b^2-4a^2b^3+4ab}{2ab^2-8a^2b}=\frac{3ab-2ab^2+2}{b-4a}$

34. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{3x^2+6x}{9x^2+18}$ b) $\frac{a^3-7a^2}{3a^3+5a^2}$ c) $\frac{x^2y^2-7xy^2}{2xy}$ d) $\frac{a^2b^2-ab}{a^3b+ab}$

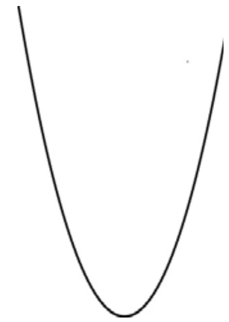
35. En cada una de las siguientes fracciones algebraicas escribe, cuando sea posible, el polinomio numerador, o denominador, en forma de potencia de un binomio o de suma por diferencia para, posteriormente, poder simplificar cada expresión:

a) $\frac{x^2-4}{3x+6}$ b) $\frac{2x^2-16x+32}{x^2-16}$ c) $\frac{6-4a}{4a^2-9}$

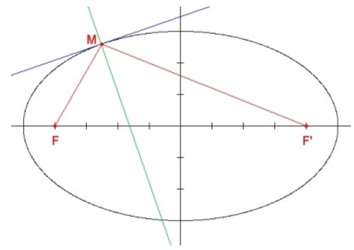
CURIOSIDADES. REVISTA

GEOMETRÍA

Tal y como podrás comprobar durante este curso y los siguientes, gracias a los polinomios será posible y sencillo describir numerosos objetos geométricos como rectas, circunferencias, elipses, parábolas, planos, esferas, cilindros, conos, etc.

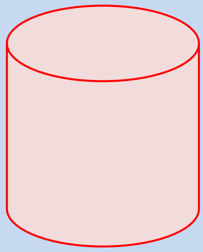


$y = ax^2 + bx + c$



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$



$x^2 + y^2 = r^2$

Para ver geométricamente el cuadrado de un trinomio:

http://recursostic.educacion.es/bancoimagenes/web/172241_am:1.swf

Para ver geométricamente suma por diferencia:

http://recursostic.educacion.es/bancoimagenes/web/172242_am:1.swf

Para ver geométricamente el cuadrado de una diferencia:

http://recursostic.educacion.es/bancoimagenes/web/172456_am:1.swf

OTRAS CIENCIAS

Hemos visto en este capítulo que las fórmulas que nos proporcionan el área o el volumen de diferentes figuras vienen dadas por polinomios. Éstos también aparecen en numerosos **principios** o **leyes de la Física** y **de la Química** como, por ejemplo, en diferentes *Leyes de Conservación*, la *Ley General de los Gases*, etc.

Asimismo, son de frecuente uso a la hora de obtener distintos **índices** o **indicadores** propios de la **Economía** como, por ejemplo, el *IPC* (índice de precios al consumo), el *euríbor*, etc.

RESUMEN

Noción	*Descripción*	*Ejemplos*
Expresión algebraica	Se construye con números y las operaciones matemáticas básicas de suma, resta, multiplicación y/o división	$\frac{-3x}{2x+y^3}-x\cdot y^2\cdot z$
Variable, indeterminada	Lo no concretado en una expresión algebraica	Las variables, o indeterminadas, del ejemplo anterior son *x*, *y*, *z*
Valor numérico de una expresión algebraica	Al fijar un valor concreto para cada indeterminada, o variable, de una expresión algebraica se obtiene un número, el **valor numérico** de esa expresión algebraica para tales valores de las indeterminadas.	Si, hacemos *x* = 3, *y* = –2, *z* = 1/2 obtenemos $\frac{-3\cdot 3}{2\cdot 3+(-2)^3}-3\cdot(-2)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{-3}{2}$
Monomio	Expresión dada por el producto de números e indeterminadas.	$-5\cdot x\cdot y^3\cdot z^2$, $7\cdot x^2$
Coeficiente de un monomio	El número que multiplica a la indeterminada, o indeterminadas, del monomio	Los coeficientes de los anteriores monomios son, respectivamente, –5 y 7
Parte literal de un monomio	La indeterminada, o producto de indeterminadas, que multiplica al coeficiente del monomio	La parte literal de $-5\cdot x\cdot y^3\cdot z^2$ es $x\cdot y^3\cdot z^2$
Grado de un monomio	Cuando hay una única indeterminada es el exponente de dicha indeterminada. Si aparecen varias, el grado del monomio será la suma de los exponentes de esas indeterminadas.	Los grados de los monomios precedentes son 6 y 2, respectivamente.
Polinomio	Expresión construida a partir de la suma de monomios.	$-x^3+4x^2+8x+6$
Grado de un polinomio	El mayor grado de sus monomios	El anterior polinomio es de grado 3
Suma, resta y producto de polinomios	El resultado siempre es otro polinomio	$p\equiv x+3,\ q\equiv x^2-2$ $p+q\equiv x^2+x+1$ $p-q\equiv -x^2+x+5$ $p\cdot q\equiv x^3+3x^2-2x-6$
División de dos polinomios	Se obtienen otros dos polinomios, los polinomios cociente (*c*(*x*)) y resto (*r*(*x*)), ligados a los polinomios iniciales: los polinomios dividendo (*p*(*x*)) y divisor (*q*(*x*))	$p(x)=q(x)\cdot c(x)+r(x)$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

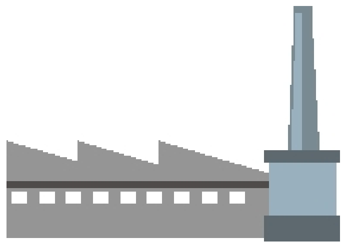
1. Una empresa mayorista de viajes está confeccionando una oferta para distribuirla en diferentes agencias de viaje. Se trata de un viaje en avión, de ida y vuelta, a Palma de Mallorca cuyo precio dependerá del número final de viajeros. Los datos concretos son:
   a) Si no hay más de 100 personas interesadas, el vuelo costará 150 euros por persona.
   b) Si hay más de 100 personas interesadas, por cada viajero que pase del centenar el precio del viaje se reducirá en 1 euro. No obstante, el precio del vuelo en ningún caso será inferior a 90 euros.

   Estudia y determina el precio final del vuelo, por persona, en función del número total de viajeros. Asimismo, expresa la cantidad que ingresará la empresa según el número de viajeros.

2. En este ejercicio se va a presentar un *truco* mediante el cual vamos a adivinar el número que resulta tras manipular repetidamente un número desconocido. Convierte en una expresión algebraica las sucesivas alteraciones del número desconocido y justifica lo que ocurre.

   i. Dile a un compañero que escriba en un papel un número par y que no lo muestre
   ii. Que lo multiplique por 5
   iii. Que al resultado anterior le sume 5
   iv. Que multiplique por 2 lo obtenido
   v. Que al resultado anterior le sume 10
   vi. Que multiplique por 5 lo obtenido
   vii. Que divida entre 100 la última cantidad
   viii. Que al resultado precedente le reste la mitad del número que escribió
   ix. Independientemente del número desconocido original ¿qué número ha surgido?

3. Los responsables de una empresa, en previsión de unos futuros altibajos en las ventas de los productos que fabrican, piensan proponer a sus trabajadores a finales del año 2014 lo siguiente:
   a) La disminución de los sueldos, para el próximo año 2015, en un 10 %.
   b) Para 2016 ofrecen aumentar un 10 % los salarios de 2015.
   c) En general, sugieren que el sueldo disminuya un 10 % cada año impar y que aumente un 10 % cada año par.



   Si finalmente se aplica lo expuesto, estudia si los trabajadores recuperarán en el año 2016 el salario que tenían en 2014. Analiza qué ocurre con los sueldos tras el paso de muchos años.

4. Los responsables de la anterior empresa, después de recibir el informe de una consultora, alteran su intención inicial y van a proponer a sus trabajadores, a finales del año 2014, lo siguiente:
    a) Un aumento de los sueldos, para el próximo año 2015, de un 10%.
    b) Para 2016, una reducción del 10 % sobre los salarios de 2015.
    c) En general, sugieren que el sueldo aumente un 10 % cada año impar y que disminuya un 10 % cada año par.

Si se aplica lo expuesto, analiza si el salario de los trabajadores del año 2016 coincidirá con el que tenían en 2014. Estudia cómo evolucionan los sueldos tras el paso de muchos años.

5. Observa si hay números en los que las siguientes expresiones no pueden ser evaluadas:

a) $\frac{x-3}{x+1}$

b) $\frac{2x-1}{(x-5)\cdot(2x+7)}$

c) $\frac{x}{x^2-2x+1}$

d) $\frac{x+y-2}{x^2+3y^2}$

6. Halla el valor numérico de las siguientes expresiones en los números que se indican:

a) $\frac{x-3}{x+1}$ en $x=1$

b) $\frac{x}{x^2-2x+1}$ para $x=-2$

c) $\frac{x+y-2}{x^2+3y^2}$ en $x=3$ e $y=-1$

d) $\frac{-2a+b^2-4}{a^2c-3abc}$ para $a=-1$, $b=0$ e $c=2$

e) $\frac{2x-1}{(x-5)\cdot(2x+7)}$ en $x=\frac{1}{2}$

7. Una persona tiene ahorrados 3 000 euros y decide depositarlos en un producto bancario con un tipo de interés anual del 2.5 %. Si decide recuperar sus ahorros al cabo de dos años, ¿cuál será la cantidad total de la que dispondrá?

8. Construye un polinomio de grado 2, $p(x)$, tal que $p(-2)=-6$.

9. Considera los polinomios $p(x)=2x^3-x^2+4x-1$, $q(x)=-x^4-3x^3+2x^2-x-5$ y $r(x)=x^2-3x+2$. Haz las siguientes operaciones:

a) $p+q+r$
b) $p-q$
c) $p\cdot r$
d) $p\cdot r-q$

10. Calcula los productos:

a) $\left(\frac{3ax}{2}-\frac{y}{5}\right)\cdot\left(\frac{-by}{3}\right)$

b) $(0.1x+0.2y-0.3z)\cdot(0.3x-0.2y+0.1z)$

c) $(x-y)\cdot(y-1)\cdot(x+a)$

11. Efectúa las divisiones de polinomios:

a) $2x^3+x^2-12x+7$ entre $x+3$
b) $-4x^4+8x^3+7x^2-21x+8$ entre $2x^2-3x+1$
c) $-3x^5-2x^3+9x^2+6x-14$ entre $-x^3-2x+3$

12. Calcula los cocientes:

a) $(4x^3):(x^2)$ b) $(4x^3y^3z^4):(3x^2yz^2)$ c) $(x^4-4x^2y+4y^2):(x^2-2y)$

13. Realiza las operaciones entre fracciones algebraicas:

a) $\frac{x-1}{x^2}+\frac{2x-1}{x}$
b) $\frac{2x+3}{x}+\frac{5}{x+1}$
c) $\frac{x-1}{x^2-3x}-\frac{2-x}{x}$
d) $\frac{x-1}{x^2-3x}\cdot\frac{2-x}{x}$
e) $\frac{x-1}{x^2-3x}:\frac{2-x}{x}$

14. Encuentra un polinomio $p(x)$ tal que al dividir $p(x)$ entre $q(x)=x^3-x^2+2x-3$ se obtenga como polinomio resto $r(x)=-3x^2+1$.

15. Calcula las potencias:

a) $(x+2y-z)^2$ b) $(x-3y)^3$ c) $\left(a+\frac{b}{3}\right)^2$ d) $(x^2-2z^3)^2$

16. Analiza si los siguientes polinomios han surgido del desarrollo de potencias de binomios, o trinomios, o de un producto *suma por diferencia*. En caso afirmativo expresa su procedencia.

a) $x^2 - 6x + 9$
b) $x^4 + 8x^2 + 16$
c) $x^2 - \sqrt{12}\, xy + 3y^2$
d) $y^4 + 2y^3 + y^2 + 2y + 1$
e) $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x + 1$
f) $x^2 - 25$
g) $x^2 + 5$
h) $5x^2 - 1$
i) $x^2 - 8y^2$
j) $x^4 - 1$
k) $x^2 - y^2$
l) $x^2 - 2y^2z^2$

17. Analiza si el numerador y el denominador de las siguientes expresiones algebraicas proceden del desarrollo de un binomio, o de un producto suma por diferencia, y simplifícalas:

a) $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$ b) $\dfrac{x^4 - 2x^2y^2 + y^4}{x^2 + y^2}$ c) $\dfrac{xy^3 - yx}{y^4 - 1}$

18. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\dfrac{3}{x(3-x)} - \dfrac{1}{2(3-x)}$ b) $3x^4 - 5x^3 + \dfrac{x^4 - 1}{x^3} \cdot \dfrac{x^5}{x^2 + 1}$ c) $\dfrac{x - 2y}{a - b} + \dfrac{4x + 5y}{3a - 3b}$

19. Simplifica todo lo posible:

a) $\left(yx^4 - \dfrac{y}{x^2}\right) : \left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)$ b) $\dfrac{b^3 + 3ab^2 + 3a^2b + a^3}{b - a} : \dfrac{b + a}{b - a}$ c) $\left(\dfrac{a + b}{a - b} - \dfrac{a - b}{a + b}\right) : \dfrac{4}{a - b}$

20. Simplifica todo lo posible:

a) $\dfrac{\dfrac{1}{a+y} - \dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{a+y} + \dfrac{1}{x}} : \dfrac{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{x+y}}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{x+y}}$ b) $\left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x^3}\right) : \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{3}{x^3}\right)$ c) $\dfrac{\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{y}}{\dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{y}} \cdot \dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{y}}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{y}}$

AUTOEVALUACIÓN

1. Señala los coeficientes que aparecen en las siguientes expresiones algebraicas:

a) $3\cdot\sqrt{5}\cdot x\cdot y^2$ b) $-3x^4-x^3+x+7$ c) $\frac{x+8}{4-2y^2}+6xa^2-\frac{3}{a}+9$

2. Destaca las variables, o indeterminadas, de las precedentes expresiones algebraicas.

3. Del polinomio $5x^4-8x^2-x+9$ indica su grado y los monomios que lo integran.

4. La expresión $\frac{x-7}{4-2x}$ no tiene sentido para

a) $x=7$ b) $x=2$ c) $x=7$ y $x=2$ d) $x=0$

5. Cualquier polinomio:

a) puede ser evaluado en cualquier número.
b) no puede ser evaluado en el número cero.
c) no puede ser evaluado en ciertos números concretos.

6. El valor numérico de la expresión $\frac{x+7}{4-2y^2}+6xz^2-\frac{3}{z}$ en $x=1,\ y=2,\ z=-1$ es:

a) -11 b) 7 c) 1 d) -5

7. Completa adecuadamente las siguientes frases:

a) La suma de dos polinomios de grado dos suele ser otro polinomio de grado ……….
b) La suma de tres polinomios de grado dos suele ser otro polinomio de grado ……….
c) El producto de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado ……….
d) La diferencia de dos polinomios de grado dos suele ser otro polinomio de grado ……….

8. Finaliza adecuadamente las siguientes frases:

a) La suma de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado ……….
b) La suma de tres polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado ……….
c) La diferencia de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado ……….

9. Al dividir el polinomio $p(x)=2x^4-x^3+4$ entre $q(x)=x^2+2x+2$ el polinomio resto resultante:

a) debe ser de grado 2.
b) puede ser de grado 2.
c) debe ser de grado 1.
d) ninguna de las opciones precedentes.

10. Para que una fracción polinómica $\frac{p(x)}{q(x)}$ sea *equivalente* a un polinomio:

a) los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ deben ser del mismo grado.
b) no importan los grados de $p(x)$ y $q(x)$.
c) el grado del polinomio numerador, $p(x)$, debe ser superior o igual al grado del polinomio denominador, $q(x)$.
d) el grado del polinomio numerador, $p(x)$, debe ser inferior al grado del polinomio denominador, $q(x)$.