Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II
2º Bachillerato
Capítulo 7: Integrales

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por: IRENE, CARMEN, JULIA, LAURA, ESPERANZA, ISMAEL F, AMALIA, NEREA, ISMAEL, AITANA, ROSA, ANDREA, OLIVIA, LUCÍA, NATALIA.
IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Todas las imágenes han sido creadas *software* libre (GeoGebra)

Actividades propuestas

1. Calcula el área de la región limitada por cada una de las funciones $f(x)=a$, $g(x)=a\cdot x$ y $h(x)=a\cdot x+b$ (con a y $b\in\mathbb{R}$) entre el origen de coordenadas y un punto genérico de abscisa x.

- $\int_0^x a\,dt = a\cdot t|_0^x = a\cdot x - a\cdot 0 = a\cdot x$
- $\int_0^x a\cdot t\,dt = a\cdot \frac{t^2}{2}\Big|_0^x = a\cdot\frac{x^2}{2} - a\cdot 0 = a\cdot\frac{x^2}{2}$
- $\int_0^x (a\cdot t+b)dt = a\cdot\left(\frac{t^2}{2}+b\cdot t\right)\Big|_0^x = a\cdot(\frac{x^2}{2}+b\cdot x) - a\cdot 0 = a\cdot(\frac{x^2}{2}+b\cdot x)$

2. Calcula las siguientes primitivas:

a) $\int 4x^3dx$ b) $\int 3x^2dx$ c) $\int 5x^4dx$ d) $\int(5x^4-4x^3+3x^2)dx$

a) $\int \mathbf{4x^3\,dx} = x^4 + C$

b) $\int \mathbf{3x^2\,dx} = \frac{3x^3}{3} + C = x^3 + C$

c) $\int \mathbf{5x^4dx} = \frac{5x^5}{5} + C = x^5 + C$

d) $\int(\mathbf{5x^4-4x^3+3x^2})\mathbf{dx} = x^5-x^4+x^3 + C$

3. Dada $f(x)=x^3-3x^2+2x+1$, calcula la primitiva $F(x)$ de $f(x)$ que verifica $F(0)=4$.

$F(x) = \int(\mathbf{x^3-3x^2+2x+1})\mathbf{dx} = \frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + x + C = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + x + C$

Como F(0) = 4 , F(0) = $\frac{0^4}{4} - 0^3 + 0^2 + 0 + C = 4$, luego C = 4 , de donde,

$F(x) = \frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + x + 4$

4. Comprueba si $F(x)=4x^3+2x^2-x+5$ es una primitiva de $f(x)=12x^2+4x+3$. En caso negativo, explica por qué.

Si derivamos F(x) obtenemos $F'(x) = 12x^2 + 4x - 1 \neq f(x)$
Por tanto, F(x) no es una primitiva de f(x)

5. Determina los valores de a, b, c y d para los que $F(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ es una primitiva de la función $f(x)=4x^2-5x+3$.

$F(x) = \int(4x^2 - 5x + 3)dx = 4\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 3x + C$ *, por tanto,*

$a = \frac{4}{3}$, $b = \frac{-5}{2}$, $c = 3$, $d = C$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

6. Al resolver una primitiva, Javier y Ricardo han utilizado métodos diferentes y, como era de esperar, han obtenido expresiones distintas. Después de revisarlo muchas veces y no encontrar ningún error en los cálculos, le llevan el problema a la profesora para ver quién tiene bien el ejercicio.
Para su sorpresa, la profesora les dice que ambos tienen bien el problema. ¿Cómo es posible?

7. Razona por qué la gráfica siguiente:

es una primitiva de la función "parte entera de x", $E(x)$, (salvo en los puntos de discontinuidad donde no es derivable):

$\int 1dx = x$ $\quad \int 2dx = 2x$ $\quad \int 3dx = 3x$ $\quad \int(-1)dx = -x$ $\quad \int(-2)dx = -2x$

8. Calcula las siguientes primitivas utilizando el cambio indicado:

a) $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}dx$ haciendo $x = t^{12}$.

$x = t^{12}$, $dx = 12t^{11}dt$, sustituyendo, obtenemos $\int \frac{\sqrt{t^{12}}-\sqrt[3]{t^{12}}}{\sqrt[4]{t^{12}}} \cdot 12t^{11}dt$, simplificando,

$\int \frac{t^6-t^4}{t^3}12t^{11}dt = \int(t^6-t^4)12t^8dt = 12\int(t^{14}-t^{12})dt = 12\left(\frac{t^{15}}{15}-\frac{t^{13}}{13}\right)+C$

$x = t^{12}$, $t = \sqrt[12]{x}$, deshaciendo el cambio, $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}} \cdot dx = 12\left(\frac{(\sqrt[12]{x})^{15}}{15}-\frac{(\sqrt[12]{x})^{13}}{13}\right)+C$

b) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ haciendo $e^x = t$.

$e^x = t$, $e^x dx = dt$, $dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$, $e^{-x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{t}$ sustituyendo,

$\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{\frac{dt}{t}}{t+\frac{1}{t}} = \int \frac{\frac{dt}{t}}{\frac{t^2+1}{t}} = \int \frac{dt}{t^2+1} = arctg(t)+C = arctg(e^x)+C$

c) $\int \frac{5x^4}{\sqrt{1+2x}}dx$ haciendo $1+2x = t^2$

$1+2x = t^2$, $2dx = 2tdt$, $dx = tdt$, $x = \frac{t^2-1}{2}$, $t = \sqrt{1+2x}$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$$\int \frac{5x^4}{\sqrt{1+2x}}dx = \int \frac{5\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^4}{\sqrt{t^2}}tdt = 5\int \frac{(t^2-1)^4}{2^4}dt = \frac{5}{16}\int (t^8 - 4t^6 + 6t^4 - 4t^2 + 1)dt =$$

$$= \frac{5}{16}\left(\frac{t^9}{9} - 4\frac{t^7}{7} + 6\frac{t^5}{5} - 4\frac{t^3}{3} + t\right) + C =$$

$$= \frac{5}{16}\left(\frac{(\sqrt{1+2x})^9}{9} - 4\frac{(\sqrt{1+2x})^7}{7} + 6\frac{(\sqrt{1+2x})^5}{5} - 4\frac{(\sqrt{1+2x})^3}{3} + \sqrt{1+2x}\right) + C$$

d) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-1}}$ haciendo $x+\sqrt{x^2-1}=t$

$x + \sqrt{x^2-1} = t$, $\sqrt{x^2-1} = t - x$, $\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2 = (t-x)^2$,

$x^2 - 1 = t^2 + x^2 - 2xt$, $2xt = t^2 + 1$, $x = \frac{t^2+1}{2t}$,

$dx = \frac{2t\cdot 2t - (t^2+1)\cdot 2}{4t^2}dt = \frac{(2t^2-2)}{4t^2}dt = \frac{t^2-1}{2t^2}dt$, de donde,

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{1}{t}\cdot\frac{t^2-1}{2t^2}dt = \frac{1}{2}\int\left(\frac{t^2}{t^3} - \frac{1}{t^3}\right)dt = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t} - t^{-3}\right)dt = \frac{1}{2}\left(ln|t| + \frac{t^{-2}}{2}\right) + C$$

Deshaciendo el cambio, $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2}\left(ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + \frac{1}{2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2}\right) + C$

e) $\int (2\,\text{sen}^3 x + 3\,\text{sen}^2 x - \text{sen}\, x + 3)\cos x\, dx$ haciendo $\text{sen}\, x = t$

$senx = t$, $cosxdx = dt$, sustituyendo, nos queda,

$$\int (2t^3 + 3t^2 - t + 3)dt = 2\frac{t^4}{4} + 3\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 3t + C = \frac{sen^4x}{2} + sen^3x - \frac{sen^2x}{2} + 3senx + C$$

9. Elige el cambio que simplifica las siguientes integrales:

a) $\int \frac{2x^3+1}{(x^4+2x)^3}dx$ $\quad t = x^4 + 2x$, $dt = (4x^3+2)dx = 2(2x^3+1)dx$

b) $\int \frac{e^{\text{tg}\,x}}{\cos^2 x}dx$ $\quad t = tgx$, $dt = \frac{1}{cos^2x}dx$

c) $\int \frac{\ln(\ln x)}{x\cdot \ln x}dx$ $\quad t = ln(lnx)$, $dt = \frac{\frac{1}{x}}{lnx}dx = \frac{1}{xlnx}dx$

d) $\int 2x^3\sqrt{x^4-49}\cdot dx$ $\quad t = x^4 - 49$, $dt = 4x^3dx$

e) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x+1}+2}dx$ $\quad t^3 = x + 1$, $3t^2dt = dx$

f) $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$ $\quad t = 1 - 4x^2$, $dt = -8xdx$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

10. Determina si las siguientes integrales son inmediatas o no:

a) $\int\left(4x^3+3x^3-\frac{1}{x^2}+\sqrt{x}\right)dx$ SÍ.

b) $\int\frac{\ln x}{x}dx$ SÍ $\left(\int\frac{lnx}{x}dx=\int lnx\cdot\frac{1}{x}dx\right)$

c) $\int \operatorname{sen} x\cos x\,dx$ SÍ

d) $\int\frac{\ln(x+1)}{x}dx$ NO

e) $\int\frac{x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ NO

f) $\int\frac{x^4-2x^2+1}{x^2-1}dx$ SÍ $[x^4-2x^2+1=(x^2-1)^2]$

g) $\int x^2\cdot e^{x^2}dx$ NO

h) $\int e^{x^2}dx$ NO

11. Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int\left(e^{3x}+e^{2x}+e^x\right)e^x dx$ $, t=e^x, dt=e^x dx, \int(t^3+t^2+t)dt=\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+C=\frac{e^{4x}}{4}+\frac{e^{3x}}{3}+\frac{e^{2x}}{2}+C$

b) $\int x\cdot\cos e^{x^2}\cdot e^{x^2}dx$ $, t=e^{x^2},\ dt=2xe^{x^2}dx\ ,\ \frac{1}{2}\int costdt=\frac{1}{2}sent+C=\frac{1}{2}sen(e^{x^2})+C$

c) $\int\ln(\cos x)\operatorname{tg} x\,dx$ $,\ t=\ln(cosx),\quad dt=-\frac{senx}{cosx}dx=-tgxdx=$

$=-\int tdt=-\frac{t^2}{2}+C=-\frac{(\ln(cosx))^2}{2}+C$

d) $\int\frac{x\,dx}{1+x^4}$ $=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+(x^2)^2}dx=\frac{1}{2}arctg(x^2)+C$

i) $\int\frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$ $=\int\frac{e^x}{1+(e^x)^2}dx=arctg(e^x)+C$

j) $\int(\ln x+2)\frac{dx}{x}$ $=\frac{(lnx+2)^2}{2}+C$

12. Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int\left(x^2+x+1\right)e^x dx$ $\begin{cases}u=x^2+x+1 & \rightarrow\quad du=(2x+1)dx\\ dv=e^x dx & \rightarrow\quad v=\int e^x dx=e^x\end{cases}$

$\int(x^2+x+1)e^x dx=(x^2+x+1)e^x-\int(2x+1)e^x dx=$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$$\left\{\begin{array}{lll} u = 2x+1 & \rightarrow & du = 2dx \\ dv = e^x dx & \rightarrow & v = \int e^x dx = e^x \end{array}\right\} \quad = (x^2+x+1)e^x - [(2x+1)e^x - \int 2e^x dx] =$$

$$= (x^2+x+1)e^x - (2x+1)e^x + 2e^x + C = (x^2 - x + 2)e^x + C$$

b) $\int \ln x\, dx$ $\left\{\begin{array}{lll} u = lnx & \rightarrow & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx & \rightarrow & v = \int dx = x \end{array}\right\}$ $\int lnxdx = ln|x|x - \int x\frac{1}{x}dx = xln|x| - x + C$

c) $\int x\cos x dx$ $\left\{\begin{array}{lll} u = x & \rightarrow & du = dx \\ dv = cosxdx & \rightarrow & v = \int cosxdx = senx \end{array}\right\}$

$$\int xcosxdx = xsenx - \int senxdx = xsenx + cosx + C$$

d) Curiosidad – idea feliz: Resuelve la primitiva $\int \cos(\ln x)dx$.

Para ello, multiplica y divide el integrando por x: $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\cdot x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = x \rightarrow du = \ldots \\ dv = \frac{\cos(\ln x)}{x}dx \rightarrow v = \ldots \end{array} \right\rangle$

$$I = \int \cos(lnx)\,dx = \int \frac{\cos(lnx)}{x}\cdot xdx = \quad \left\{\begin{array}{lll} u = x & \rightarrow & du = dx \\ dv = \frac{\cos(lnx)}{x}dx & \rightarrow & v = sen(lnx) \end{array}\right\}$$

$$= xsen(lnx) - \int sen(lnx)dx.$$

$$\int sen(lnx)dx = \int \frac{\text{sen}(lnx)}{x}\cdot xdx = \quad \left\{\begin{array}{lll} u = x & \rightarrow & du = dx \\ dv = \frac{\text{sen}(lnx)}{x}dx & \rightarrow & v = -cos(lnx) \end{array}\right\}$$

$$= -xcos(lnx) + \int \cos(lnx)\,dx.$$

$$I = xsen(lnx) + xcos(lnx) - I\,,\quad 2I = xsen(lnx) + xcos(lnx)$$

$$\boldsymbol{I = \frac{1}{2}x(sen(lnx) + cos(lnx)\,) + C}$$

13. Sea $f(x) = e^{2x} - 2x^2 + 8$, justifica si es primitiva de alguna de las siguientes funciones:

$$g(x) = e^{2x} - 4x + 8 \qquad h(x) = 2e^{2x} - 4x$$

$f'(x) = 2e^{2x} - 4x$, f(x) es una primitiva de h(x).

14. Dada la función $f(x) = (x+1)\cdot(3x-2)$.

a) Calcula una primitiva de $f(x)$.

b) Justifica que la función $F(x) = x^3 + 2x^2 + 2$ no es primitiva de $f(x)$.

a) $\int (x+1)(3x+2)dx = \int (3x^2 + 5x + 2)dx = 3\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} + 2x + C$

b) $F'(x) = 3x^2 + 4x \neq f(x)$, no es una primitiva.

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

15. Dada la función $f(x)=(x+a)\cos x$, donde a es una constante,

a) Encuentra una primitiva de f.

b) Si F es una primitiva de f, ¿puede serlo también $G(x)=F(x)+2x$?

a) $\int(x+a)cosxdx = \begin{Bmatrix} u = x+a & \rightarrow & du = dx \\ dv = cosxdx & \rightarrow & v = \int cosxdx = senx \end{Bmatrix}$

$= (x+a)senx - \int senxdx = (x+a)senx + cosx + C$

b) Ha de ser G'(x) = f(x), sin embargo, G'(x) = F'(x) + 2 = f(x) + 2.

16. Sea $f(x)=x^2+bx$ donde b es una constante. Encuentra b, sabiendo que hay una primitiva F de f con $F(0)=2$ y $F(3)=20$. Encuentra también la expresión de F.

$F(x) = \int(x^2+bx)dx = \frac{x^3}{3} + bx^2 + C$

$F(0) = \frac{0^3}{3} + b\cdot 0^2 + C = 2 \qquad F(3) = \frac{3^3}{3} + b\cdot 3^2 + C = 20$

C = 2 y 9 + 9 b + C = 20 , de donde, b = 1 y $F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + 2$

17. Dada la función $f(x)=25-x^2+\frac{a}{x^2}$ $(x\neq 0)$, donde a es una constante, encuentra una primitiva de f. Posteriormente, encuentra a para que si f' es la derivada de f, entonces $f'(1)=-2$.

$F(x) = \int\left(25 - x^2 + \frac{a}{x^2}\right)dx = 25x - \frac{x^3}{3} - \frac{a}{x} + C$

$f'(x) = -2x - 2\frac{a}{x^3} \qquad f'(1) = -2\cdot 1 - 2\frac{a}{1^3} = -2 - 2a = -2\,, \qquad a = 0$

18. Resuelve las siguientes integrales definidas:

a) $\int_0^6 (x^2+x+1)dx$ $= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\Big|_0^6 = \left(\frac{6^3}{3} + \frac{6^2}{2} + 6\right) - \left(\frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2} + 0\right) = 92$

b) $\int_{-1}^1 (x^2+x+1)dx$ $= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\Big|_{-1}^1 = \left(\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + 1\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + (-1)\right) = \frac{8}{3}$

c) $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1}\,dx$ $= \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} 2x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\left[\left((\sqrt{3})^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\right) - \left((0^2+1)^{\frac{3}{2}}\right)\right] = \frac{7}{3}$

d) $\int_{-1}^1 \frac{x+1}{x^2+2x+2}dx$ $= \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}ln|x^2+2x+2|\Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2}[(ln5) - (ln1)] = \frac{ln5}{2}$

e) $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx$ $= -cosx|_0^{\pi} = -cos\pi + cos0 = 2$

f) $\int_1^e \ln x\,dx$ $\int lnxdx = \begin{Bmatrix} u = lnx & \rightarrow & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx & \rightarrow & v = \int dx = x \end{Bmatrix} = xlnx - \int x\frac{1}{x}dx = xlnx - x + C$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$\int_1^e lnxdx = xlnx - x]_1^e = (elne - e) - (1ln1 - 1) = 1$

19. Halla el valor de c que verifica $\int_0^5 (2x+1)dx = f(c)\cdot(5-0)$ y razona su interpretación geométrica.

$\int_0^5 (2x+1)dx = x^2 + x|_0^5 = 30$, f(c) = 2c + 1, 30 = (2c + 1)·5 , $c = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$

20. Sin efectuar el cálculo de la integral indefinida, calcula f'(x) si $f(x) = \int_2^{e^x} \frac{dt}{lnt}$

La función $g(t) = \frac{1}{lnt}$ es continua en [2,b] , $g(x) = e^x$ es derivable,

Por el teorema fundamental del cálculo integral:

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(e^x)} \cdot e^x$$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Ejercicio 1:

1) $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$

2) $\int \frac{4}{x^5} dx = \int 4x^{-5} dx = 4 \cdot \frac{x^{-4}}{-4} = \frac{-1}{x^4} + C$

3) $\int \frac{dx}{x^2} = \int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C$

4) $\int 37 dx = 37x + C$

5) $\int 6x^7 dx = 6 \cdot \frac{x^8}{8} + C$

6) $\int 5x^{\frac{1}{4}} dx = 5 \cdot \frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} = 4\sqrt[4]{x^5} + C$

7) $\int 5 \cdot \sqrt{x^3} dx = \int 5x^{\frac{3}{2}} dx = 5 \cdot \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = 2\sqrt{x^5} + C$

8) $\int (3 - 2x - x^4) dx = 3x - \frac{2x^2}{2} - \frac{x^5}{5} + C = 3x - x^2 - \frac{x^5}{5} + C$

9) $\int (2x^5 - 5x + 3) dx = \frac{2x^6}{6} - \frac{5x^2}{2} + 3x + C$

10) $\int (2 + 3x^3)^2 dx = \int 4 + 9x^6 + 12x^3 dx = 4x + 9\frac{x^7}{7} + 12\frac{x^4}{4} + C = 4x + \frac{9x^7}{7} + 3x^4 + C$

11) $\int (2 \cdot (x^2 + 2)^3 dx = \int 2 \cdot ((x^2)^3 + (3x^2)^2 \cdot 2 + 3x^2 \cdot 2^2 + 2^3) dx = \int 2 \cdot (x^6 + 18x^4 + 12x^2 + 8) dx =$

$\int (2x^6 + 36x^4 + 24x^2 + 16) dx = 2 \cdot \frac{x^7}{7} + 36 \cdot \frac{x^5}{5} + 24 \cdot \frac{x^3}{3} + 16x + C$

12) $\int (1 - x^3)^2 dx = \int 1 - 2x^3 + (x^3)^2 dx = x - 2 \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} + C$

13) $\int \frac{x^3 - x + 2}{x^3} dx = \int \frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}} dx - \int \frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} dx + \int \frac{2}{x^3} dx = \int 1 dx - \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{2}{x^3} dx = \int (1 - x^{-2} + 2x^{-3}) dx =$

$= x + \frac{x^{-1}}{1} + 2 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} = x + \frac{x^{-1}}{1} - x^{-2} + C$

14) $\int (-4x^{\frac{2}{3}} + 2x) dx = -4 \cdot \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + \cancel{2} \cdot \frac{x^2}{\cancel{2}} + C = -\frac{12X^{\frac{5}{3}}}{5} + x^2 + C$

15) $\int (3a - \frac{1}{3e^2} + 2x^a) dx = (3a - \frac{1}{3e^2})x + 2\frac{x^{a+1}}{a+1} + C$

16) $\int -\frac{3}{x^3} + 2 - \frac{3}{\sqrt{x}} dx = \int -3x^{-3} + 2 - 3x^{\frac{-1}{2}} dx = -3\frac{x^{-2}}{-2} + 2x - 3\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$

$= \frac{3}{2x^2} + 2x - 6\sqrt{x} + C$

17) $\int (3x^5 - \frac{4}{3x^2} + 2\sqrt[5]{x^2}) dx = \frac{3x^6}{6} - 12 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + 2 \cdot \frac{x^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} = \frac{x^6}{2} - \frac{12}{x} + \frac{10x^{\frac{7}{5}}}{7} + C$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

18) $\int(1-x)\sqrt{x})dx = \int\sqrt{x} - x\sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}} - x \cdot x^{\frac{1}{2}}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + C$

19) $\int\frac{x^3+5x^2-4}{x^2}dx = \int\frac{x^3}{\cancel{x^2}}dx + \int\frac{5\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}dx - \int\frac{4}{x^2}dx = \int x\,dx + \int 5\,dx - \int 4x^{-2}dx =$

$= \frac{x^2}{2} + 5x - 4 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} = \frac{x^2}{2} + 5x - \frac{4}{x} + C$

20) $\int(5e^x + \frac{2x^3-3x^2+5}{4x^2})dx = \int 5e^x dx + \int\frac{2x^3}{4\cancel{x^2}}dx - \int\frac{3\cancel{x^2}}{4\cancel{x^2}}dx + \int\frac{5}{4x^2}dx =$

$= \int 5e^x dx + \int\frac{2x}{4}dx - \int\frac{3}{4}dx + \int\frac{5x^{-2}}{4}dx = 5e^x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{5x^{-1}}{4} =$

$= 5e^x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{5}{4x} + C$

21. $\int\frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}dx = \int(x^2+2x+1)\left(x^{\frac{-1}{2}}\right)dx = \int\left(x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{-1}{2}}\right)dx = \frac{x^{5/2}}{5/2} + 2\frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + C =$
$\frac{2\sqrt{x^5}}{5} + \frac{4\sqrt{x^3}}{3} + 2\sqrt{x} + C$

22. $\int(\sqrt{x} - \frac{1}{2}x + \frac{2}{\sqrt{x}})dx = \int\left(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x + 2x^{\frac{-1}{2}}\right)dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^2}{4} + \frac{2x^{1/2}}{1/2} + C = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^2}{4} + 4\sqrt{x} + C$

23. $\int\sqrt{x}\,(x^3+1)dx = \int\left(x^{\frac{1}{2}}\right)(x^3+1)dx = \int\left(x^{\frac{7}{2}}\right) + \left(x^{\frac{1}{2}}\right)dx = \frac{x^{9/2}}{9/2} + \frac{x^{3/2}}{3/2} + C =$

$= \frac{2\sqrt{x^9}}{9} + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C$

24. $\int\left(\sqrt{x^5} - \frac{2}{3\sqrt{x}}\right)dx = \int\left(x^{\frac{5}{2}} - \frac{2x^{\frac{-1}{2}}}{3}\right)dx = \frac{x^{7/2}}{7/2} - \frac{2x^{1/2}}{3\cdot 1/2} + C = \frac{2\sqrt{x^7}}{7} - \frac{4\sqrt{x}}{3} + C$

25. $\int\sqrt{x}\,(3-5x)dx = \int(x^{\frac{1}{2}})\,(3-5x)dx = \int\left(3x^{\frac{1}{2}} - 5x^{\frac{3}{2}}\right)dx = \frac{3x^{3/2}}{3/2} - \frac{5x^{5/2}}{5/2} + C =$

$= 2\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x^5} + C$

26. $\int\frac{(x+1)+(x-2)}{\sqrt{x}}dx \quad \int(x^2+x-2)\left(x^{\frac{-1}{2}}\right)dx = \int\left(x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{-1}{2}}\right)dx = \frac{x^{5/2}}{5/2} + \frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{2x^{1/2}}{1/2} +$
$C = \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} - 4\sqrt{x} + C$

27. $\int(3x+4)^2\,dx = \int 3(3x+4)^2dx = \frac{(3x+4)^3}{3\cdot 3} + C = \frac{(3x+4)^3}{9} + C$

28. $\int(3x-7)^4dx = \frac{1}{3}\int 3(3x-7)^4dx = \frac{(3x-7)^5}{3\cdot 5} + C = \frac{(3x-7)^5}{15} + C$

29. $\int x\,(x^2-4)^3dx = \frac{1}{2}\int 2x(x^2-4)^3dx = \frac{(x^2-4)^4}{2\cdot 4} + C = \frac{(x^2-4)^4}{8} + C$

30. $\int 3x\,(x^2+2)^3\,dx = \frac{3}{2}\int 2x\,(x^2+2)^3dx = \frac{3(x^2+2)^4}{2\cdot 4} + C = \frac{3(x^2+2)^4}{8} + C$

31. $\int(x^3+2)^2x^2\,dx = \frac{1}{3}\int(x^3+2)^2 3x^2dx = \frac{(x^3+2)^3}{3\cdot 3} + C = \frac{(x^3+2)^3}{9} + C$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

32. $\int (x^3+3)\,x^2\,dx = \frac{1}{3}\int (x^3+3)3x^2dx = \frac{(x^3+3)^2}{3\cdot 2} + C = \frac{(x^3+3)^2}{6} + C$

33. $\int (x-2)^{3/2}dx = \frac{2\sqrt{(x-2)^5}}{5} + C$

34. $\int (a + x)^3\,dx = \frac{(a+x)^4}{4} + C$

35. $\int [(x+2)^3 - (x+2)^2]\,dx = \frac{(x+2)^4}{4} - \frac{(x+2)^3}{3} + C$

36. $\int \sqrt{3x+12}\,dx = \frac{1}{3}\int 3(3x+12)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{(3x+12)^{3/2}}{3\cdot 3/2} + C = \frac{2\sqrt{(3x+12)^3}}{9} + C$

37. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}} = \int (x+3)^{\frac{-1}{2}}dx = \frac{(x+3)^{1/2}}{1/2} + C = 2\sqrt{x+3} + C$

38. $\int \frac{dx}{(x-1)^3} = \int (x-1)^{-3}dx = \frac{(x-1)^{-2}}{-2} + C = \frac{-1}{2(x-1)^2} + C$

39. $\int (x^2+x)^4\,(2x+1)\,dx = \frac{(x^2-x)^5}{5} + C$

40. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})^2dx = 2\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{x}\right)^2dx = \frac{2(1+\sqrt{x})^3}{3} + C$

41. $\int \frac{x^3}{(x^4-1)^2}dx = \int x^3(x^4-1)^{-2}\,dx = \frac{1}{4}\int 4x^3(x^4-1)^{-2}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{(x^4-1)^{-1}}{-1} + c = \frac{(x^4-1)^{-1}}{-4} + c = \frac{1}{4(x^4-1)} + c$

42. $\int \frac{x}{(x^2+4)^3}dx = \int x(x^2+4)^{-3}dx = \frac{1}{2}\int 2x(x^2+4)^{-3}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+4)^{-2}}{-2} + c = \frac{(x^2+4)^{-2}}{-4} + c = -\frac{1}{4(x^2+4)^2} + c$

43. $\int x\sqrt{x^2-7}dx = \int x(x^2-7)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\,(x^2-7)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2-7)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{(x^2-7)^{\frac{3}{2}}}{3} + c = \frac{\sqrt{(x^2-7)^3}}{3} + c$

44. $\int (x-1)(x^2-2x+3)^4\,dx =$

$\frac{1}{2}\int (2x-2)(x^2-2x+3)^4\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2-2x+3)^5}{5} + c = \frac{(x^2-2x+3)^5}{10} + c$

45. $\int \frac{3x}{\sqrt{1+7x^2}}dx = \int 3x(1+7x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx =$

$\frac{3}{14}\int 14x(1+7x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{3}{14}\cdot\frac{(1+7x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{3\sqrt{1+7x^2}}{7} + c$

46. $\int \frac{8x^2}{(x^3+2)^2}dx = \int 8x^2\,(x^3+2)^{-2}dx =$

$\frac{8}{3}\int 3x^2\,(x^3+2)^{-2}dx = \frac{8}{3}\cdot\frac{(x^3+2)^{-1}}{-1} + c = -\frac{8}{3(x^3+2)} + c$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

47. $\int \frac{3x}{\sqrt[3]{x^2+3}}dx = \int 3x(x^2+3)^{-\frac{1}{3}}\,dx = \frac{3}{2}\int 2x(x^2+3)^{-\frac{1}{3}}\,dx =$

$\frac{3}{2}\cdot\frac{(x^2+3)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = \frac{9\sqrt[3]{(x^2+3)^2}}{4} + c$

48. $\int x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx = \int x(1-x^2)^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx =$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-x^2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = \frac{3\sqrt[3]{(1-x^2)^4}}{4} + c$

49. $\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+5}}dx = \int x^2(x^3+5)^{-\frac{1}{4}}\,dx = \frac{1}{3}\int 3x^2(x^2+5)^{-\frac{1}{4}}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{(x^3+5)^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} + c = \frac{4\sqrt[4]{(x^3+5)^3}}{9} + c$

50. $\int x^2(x^3-1)^{\frac{3}{5}}\,dx = \frac{1}{3}\int 3x^2(x^3-1)^{\frac{3}{5}}dx =$

$\frac{1}{3}\cdot\frac{(x^3-1)^{\frac{3}{5}}}{\frac{3}{5}} + c = \frac{5\sqrt[5]{(x^3-1)^8}}{24} + c$

51. $\int \sqrt{x^2-2x^4}\,dx = \int \sqrt{x^2(1-2x^2)}\,dx = \int x\sqrt{1-2x^2}dx = \int x(1-2x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = -\frac{1}{4}\int -4x(1-2x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx =$

$-\frac{1}{4}\cdot\frac{(1-2x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = -\frac{\sqrt{(1-2x^2)^3}}{6} + c$

52. $\int (e^x+1)^3e^x dx = \frac{(e^x+1)^4}{4} + c$

53. $\int sen^3x(cos\,x)\,dx = \frac{sen^4x}{4} + c$

54. $\int x(cos^4x^2)sen\,x^2\,dx = -\frac{1}{2}\int 2x\,(cos^4x^2)(-sen\,x^2)dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{cos^5x^2}{5} + c = -\frac{cos^5x^2}{10} + c$

55. $\int \frac{x\cdot ln(x^2+3)}{x^2+3}\,dx = \int ln\,(x^2+3)\cdot\frac{x}{x^2+3}dx =$

$\frac{1}{2}\int \ln(x^2+3)\cdot\frac{2x}{x^2+3}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{ln^2|x^2+3|}{2} + c = \frac{ln^2|x^2+3|}{4} + c$

56. $\int \frac{sen\,x}{cos^3x}dx = \int cos^{-3}x(sen\,x)dx =$

$-1\int cos^{-3}x(-sen\,x)dx = -1\cdot\frac{cos^{-2}x}{-2} + c = \frac{cos^{-2}x}{2} + c = \frac{1}{2cos^2x} + c$

57. $\int \frac{e^x}{2e^x-3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2e^x}{2e^x-3}dx = \frac{1}{2}\cdot ln|2e^x-3| + c$

58. $\int tg^5x(sec^2x)dx = \frac{tg^6x}{6} + c$

59. $\int \frac{sec^2\,3x}{tg\,3x}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3\cdot sec^2\,3x}{tg\,3x}dx = \frac{1}{3}\cdot ln\,|tg\,3x| + c$

60. $\int \frac{ln(x)}{3x}dx = \frac{1}{3}\int ln\,|x|\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{ln^2|x|}{2} + c = \frac{ln^2|x|}{6} + c$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

Ejercicio 2

1) $\int \frac{dx}{x+2} = \int \frac{1}{x+2} dx = \ln|x+2| + C$

2) $\int \frac{dx}{2x-3} = \frac{1}{2}\ln|2x-3| + C$

3) $\int \frac{dx}{x-1} = \int \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-1| + C$

4) $\int \frac{xdx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-1} dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C$

5) $\int \frac{x}{1-2x^3} dx = \frac{-1}{6}\int \frac{-6x^2}{1-2x^3} = \frac{-1}{6}\ln|2x^3-1| + C$

6) $\int \frac{x^2}{1-x^3} dx = \frac{-1}{3}\int \frac{3x^2}{1-x^3} dx = \frac{-1}{3}\ln|x^3-1| + C$

7) $\int \frac{3x}{x^2+2} dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+2} dx = \frac{3}{2}\ln|x^2+2| + C$

8) $\int \frac{4}{3x+5} dx = \frac{4}{3}\int \frac{3}{3x+5} dx = \frac{4}{3}\ln|3x+5| + C$

9) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+1)}{x^2+2x+2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+2| + C$

10) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right) dx = \int \sqrt{x} dx + \int \frac{1}{x} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \ln|x| + C$

11) $\int \left(\frac{3}{x^2} + \frac{2}{x} + \sqrt{x}\right) dx = \int 3x^{-2} + \frac{2}{x} + x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{3x^{-1}}{-1} + 2\ln(x) + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -3x^{-1} + 2\ln(x) + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C$

12) $\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln\left(\left|\ln|x|\right|\right) + C$

13) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} = \int \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} dx = -2\int \frac{-1}{2\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} dx = -2\ln\left(\left|1-\sqrt{x}\right|\right) + C$

14) $\int \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} dx = \frac{1}{2}\left(\int \frac{2}{(2x-1)} dx - \int \frac{2}{(2x-1)} dx\right) = \frac{1}{2}\ln(|2x-1|) - \frac{1}{2}\ln(|2x+1|) + C$

15) $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx = \ln(e^x+1) + C$

16) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+3} dx = \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+3) + C$

17) $\int \tan(x)\, dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = -\ln(|\cos(x)|) + C$

18) $\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx = \ln(|\sin(x)|) + C$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

19) $\int \frac{5}{x\ln(x)}\mathbf{dx} = 5\ln(|\ln(x)|) + C$

20) $\int \frac{\sin(x)+\cos(x)}{\cos(x)}\mathbf{dx} = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\cos(x)}{\cos(x)}dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} + 1dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx + \int 1dx = -\ln(|\cos(x)|) + x + C$

21) $\int \frac{2\sin(x)\cos(x)}{1+\sin(x^2)}\mathbf{dx} = \ln(|1+\sin(x^2)|) + C$

22) $\int \frac{\sin(x)-\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\mathbf{dx} = -\ln(|\sin(x)+\cos(x)|) + C$

23) $\int \mathbf{x\cot x^2\,dx} = \frac{1}{2}\int 2x\frac{\cos(x^2)}{\sin(x^2)}dx = \frac{\ln(|\sin x^2|)}{2} + C$

Ejercicio 3

Si $\int e^x\,dx = e^x + C$, $\int e^{f(x)}\cdot f'(x)dx = e^{f(x)} + C$,

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ y $\int a^{f(x)}\cdot f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$, calcula:

1. $\int 3^x\,dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C$
2. $\int a^{4x}dx = \frac{1}{4}\int 4(a^{4x})dx = \frac{a^{4x}}{4\ln a} + C$
3. $\int e^{-x}dx = -1\int(-1)(e^{-x})dx = \frac{-1}{e^x} + C$
4. $\int 4e^{3x}dx = 4(\frac{1}{3})\int 3(e^{3x})dx = \frac{4e^{3x}}{3} + C$
5. $\int(3x^2\cdot e^{x^3+2})\,dx = e^{x^3+2} + C$
6. $\int(4e^{4-x})dx = 4\cdot(-1)\int(-1)(e^{4-x})dx = -4(e^{4-x}) + C$
7. $\int(x^2e^{x^3})\,dx = \frac{1}{3}\int[3x^2(e^{x^3})]dx = \frac{e^{x^3}}{3} + C$
8. $\int(e^x+1)^2\,dx = \int[(e^x)^2 + 2(e^x)(1) + 1^2]dx = \int e^{2x}dx + \int 2e^x dx + \int 1dx =$

   $= \frac{1}{2}\int 2e^{2x}dx + \int 2e^x dx + \int 1dx = \frac{e^{2x}}{2} + 2e^x + x + C$
9. $\int\left(e^x + \frac{1}{e^x}\right)^2 dx = \int(e^x + e^{-x})^2 dx = \int[(e^x)^2 + 2(e^x)(e^{-x}) + (e^{-x})^2]dx$

   $= \int e^{2x}\,dx + \int 2dx + \int e^{-2x}dx = \frac{e^{2x}}{2} + 2x - \frac{e^{-2x}}{2} + C$
10. $\int(e^x + x^6)^2 dx = \int[(e^x)^2 + 2(e^x)(x^6) + (x^6)^2]dx =$

    $= \frac{1}{2}\int 2e^{2x}\,dx + \int 2(e^x)(x^6)\,dx\ (por\ partes) + \int x^{12}dx =$

    $= \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x(x^6 - 6x^5 + 30x^4 - 120x^3 + 360x^2 - 720x + 720\,) + \frac{x^{13}}{13} + C$ -

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

11. $\int e^{-x^2+2}\,xdx = \frac{-1}{2}\int e^{-x^2+2}\,(-2x)dx = \frac{-\left(e^{-x^2+2}\right)}{2} + C$

12. $\int \frac{e^{\ln x}}{x}dx = \int \frac{x}{x}dx = \int dx = x + C$

13. $\int \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}dx = \int e^{\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{1}{x^3}dx = \frac{-1}{2}\int e^{\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{-2}{x^3}dx = \frac{-1}{2}e^{\frac{1}{x^2}} + C$

14. $\int xe^{\sin x^2}\cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\,e^{\sin x^2}\cos x^2\,dx = \frac{e^{\sin x^2}}{2} + C$

15. $\int (e^{3\cos 2x}\sin 2x)dx = \frac{-1}{6}\int (-6)\,(e^{3\cos 2x}\sin 2x)dx = \frac{-e^{3\cos 2x}}{6} + C$

16. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{5\sqrt{x}}dx = \frac{1}{5}\cdot 2\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx = \frac{2e^{\sqrt{x}}}{5} + C$

17. $\int e^{\cos x}\sin x\,dx = -\int e^{\cos x}\,(-\sin x)\,dx = -e^{\cos x} + C$

18. $\int \left(\frac{\sqrt{1+e^2}}{2e} - e^{x-3}\right)dx = \frac{\sqrt{1+e^2}}{2e}x - e^{x-3} + C$

19. $\int e^{\tan 2x}\sec^2 2x\,dx = \frac{1}{2}\int 2e^{\tan 2x}\sec^2 2x\,dx = \frac{e^{\tan 2x}}{2} + C$

20. $\int \frac{2x}{3}(3^{3+5x^2})dx = \frac{2}{3}\int x(3^{3+5x^2})dx = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{10}\right)\int 10x(3^{3+5x^2})dx = \frac{1}{15}\left(\frac{3^{3+5x^2}}{\ln 3}\right) + C$

$$\int \frac{x}{2}(2^{3-5x^2})dx = \frac{1}{2}\int x\left(2^{3-5x^2}\right)dx = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{10}\right)\int (-10x)\left(2^{3-5x^2}\right)dx = \frac{-1}{20}\left(\frac{2^{3-5x^2}}{\ln 2}\right) + C$$

Ejercicio 4

Sabiendo que $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$, $\int f'(x)\cdot\sin f(x) = -\cos f(x) + C$,

$\int \cos x dx = \sin x + C$ y $\int \cos f(x)\cdot f'(x) = \sin f(x) + C$ calcula:

1. $\int \sin(2x+8)dx = \frac{1}{2}\int \sin(2x+8)2dx = \frac{-\cos(2x+8)}{2} + C$

2. $\int \sin\frac{x}{2}dx = 2\int \sin(\frac{x}{2})(\frac{1}{2})dx = -2\cos\frac{x}{2} + C$

3. $\int \cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\int 3(\cos(3x)dx) = \frac{\sin 3x}{3} + C$

4. $\int x\sin x^2 dx = \frac{1}{2}\int 2x(\sin x^2)\,dx = \frac{-\cos x^2}{2} + C$

5. $\int (\frac{3\sin x - 2\cos x}{4})dx = \frac{1}{4}\int (3\sin x - 2\cos x)dx = \frac{-3\cos x}{4} - \frac{\sin x}{2} + C$

6. $\int \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\int 2\,(\sin 2x)dx = \frac{-\cos 2x}{2} + C$

7. $\int e^x\cos e^x\,dx = \sin e^x + C$

8. $\int x\cos(2x^2)\cdot\sin(2x^2)dx = \frac{1}{4}\int 4x\cos(2x^2)\cdot\sin(2x^2)dx = -\frac{1}{4}\cos(2x^2) + C$

$\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx = \int \frac{1}{x}\cdot\sin(lnx)\,dx = -\cos(lnx) + C$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

Ejercicio 5

1) $\int x(1+\tan x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int 2x(1+\tan x^2)\,dx = \frac{1}{2}tan(x^2)+C$

2) $\int(1+\tan x)^2\,dx = \int(1+tan^2x+2\tan x)dx = \int((1+tan^2x)+2\tan x)dx = \tan x - 2\int\frac{-\sin x}{\cos x}dx = \tan x - 2\ln|\cos x| + C$

3) $\int tan^2 3x\,dx = \int(1-1+tan^2 3x)dx = \frac{1}{3}\int 3(1+tan^2 3x)\,dx - \int 1\,dx =$

$= \frac{1}{3}\cdot\tan 3x - x + C$

Ejercicio 6.

Halla el valor de las siguientes integrales, usando un cambio de variable:

1) $\int(2+5x)^4dx = \int t^4\cdot\frac{1}{5}dt = \frac{1}{5}\int t^4dt = \frac{1}{5}\cdot\frac{t^5}{5} = \frac{t^5}{25} = \frac{(2+5x)^5}{25}+c$

t = 2+5x , dt = 5 dx $\rightarrow dx = \frac{1}{5}dt$

2) $\int(3+4x)^6dx = \int t^6\cdot\frac{1}{4}dt = \frac{1}{4}\int t^6dt = \frac{1}{4}\cdot\frac{t^7}{7} = \frac{t^7}{28} = \frac{(3+4x)^7}{28}+c$

t = 3+4x , dt = 4x dx$\rightarrow dx = \frac{1}{4}dt$

3) $\int 6x(3+x^2)^5dx = \int 6x\cdot t^5\cdot\frac{1}{2x}dt = \int 3t^5dt = 3\int t^5dt = \frac{3t^6}{6} = \frac{t^6}{2} = \frac{(3+x^2)^6}{2}+c$

t =3 + x^2 , dt = 2x dx$\rightarrow dx = \frac{1}{2x}dt$

4) $\int[\frac{3}{5+4x}+\frac{3}{(5+4x)^3}]dx = \int[\frac{3}{t}\cdot\frac{1}{4}]dt + \int[\frac{3}{t^3}\cdot\frac{1}{4}]dt = \int[\frac{3}{4t}]dt + \int[\frac{3}{4t^3}]dt =$

$\frac{3}{4}\int[\frac{1}{t}]dt + \frac{3}{4}\int[\frac{1}{t^3}] = \frac{3}{4}\int[\frac{1}{t}]dt + \frac{3}{4}\int[t^{-3}]dt = \frac{3}{4}\ln|t| + \frac{3}{4}\cdot\frac{t^{-2}}{-2} = \frac{3}{4}\ln|t| - \frac{3t^{-2}}{8} =$

$\frac{3}{4}\ln|t| - \frac{3}{8t^2} = \frac{3}{4}\ln|5+4x| - \frac{3}{8(5+4x)^2}+c$

t = 5+4x , dt = 4 dx$\rightarrow dx = \frac{1}{4}dt$

5) $\int(\sqrt{3+2x}+\sqrt[3]{3+2x})dx = \int(\sqrt{t}+\sqrt[3]{t})\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int(t^{\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{3}})dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} =$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$$= \frac{t^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{3t^{\frac{4}{3}}}{8} = \frac{\sqrt{t^3}}{3} + \frac{3\sqrt[3]{t^4}}{8} = \frac{\sqrt{(3+2x)^3}}{3} + \frac{3\sqrt[3]{(3+2x)^4}}{8} + c$$

t = 3+2x , dt = 2 dx$\rightarrow dx = \frac{1}{2}dt$

6) $\int (\frac{e^x-4}{e^{2x}})dx = \int (\frac{t-4}{t^2}) \cdot \frac{1}{t}dt = \int (\frac{t-4}{t^3})dt = \int (\frac{t}{t^3})dt - \int (\frac{4}{t^3})dt =$

$$= \int (\frac{1}{t^2})dt - 4\int (\frac{1}{t^3})dt = \int t^{-2}dt - 4\int t^{-3}dt = \frac{t^{-1}}{-1} - \frac{4t^{-2}}{-2} = \frac{-1}{t} + \frac{2}{t^2} = \frac{-1}{e^x} + \frac{2}{e^{2x}} + c$$

$t = e^x$, $dt = e^x dx \rightarrow dx = \frac{1}{e^x}dt = \frac{1}{t}dt$

7) $\int \sin^3(x) \cdot \cos(x)dx = \int t^3 \cdot \cos(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)}dt = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} = \frac{\sin^4(x)}{4} + c$

$t = \sin(x)$, $dt = \cos(x)dx \rightarrow dx = \frac{1}{\cos(x)}dt$

8) $\int (\frac{\sin(x)}{\cos(x)})dx = \int (\frac{\sin(x)}{t}) \cdot \frac{-1}{\sin(x)}dt = \int \frac{-1}{t}dt = -\ln|t| = -\ln|\cos(x)| + c$

$t = \cos(x)$, $dt = -\sin(x)dx \rightarrow dx = \frac{-1}{\sin(x)}dt$

9) $\int (\frac{\cos(x)}{\sin^4(x)})dx = \int (\frac{\cos(x)}{t^4}) \cdot \frac{1}{\cos(X)}dt = \int (\frac{1}{t^4})dt = \int t^{-4}dt = \frac{t^{-3}}{-3} = \frac{-1}{3t^3} = \frac{-1}{3\sin^3(x)} + c$

$t = \sin(x)$, $dt = \cos(x)dx \rightarrow dx = \frac{1}{\cos(x)}dt$

10) $\int x\sqrt{x^2+4}dx = \int x\sqrt{t} \cdot \frac{1}{2x}dt = \int (\frac{\sqrt{t}}{2})dt = \int (\frac{t^{\frac{1}{2}}}{2})dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} \cdot 2} = \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{6} = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{\sqrt[3]{(x^2+4)^2}}{3} + c$

$t = x^2 + 4$, dt = 2x dx$\rightarrow dx = \frac{1}{2x}dt$

11) $\int (\frac{e^x+3}{e^{2x}})dx = \int (\frac{t+3}{t^2} \cdot \frac{1}{t})dt = \int (\frac{t+3}{t^3})dt = \int (\frac{t}{t^3})dt + \int (\frac{3}{t^3})dt =$

$$\int t \cdot t^{-3}dt + \int 3t^{-3}dt = \int t^{-2}dt + \int 3t^{-3}dt = \frac{t^{-1}}{-1} + \frac{3t^{-2}}{-2} = \frac{-1}{t} - \frac{3}{2t^2} = \frac{-1}{e^x} - \frac{3}{2e^{2x}} + c$$

$t = e^x$, $dt = e^x dx \rightarrow dx = \frac{1}{e^x}dt = \frac{1}{t}dt$

12) $\int (\frac{e^{-x}+2}{e^{3x}})dx = \int (\frac{-t+2}{t^3} \cdot \frac{1}{t})dt = \int (\frac{-t+2}{t^4})dt = \int (\frac{-t}{t^4})dt + \int (\frac{2}{t^4})dt =$

$$\int (-t) \cdot t^{-4}dt + \int 2t^{-4}dt = \int (-t^{-3})dt + \int 2t^{-4}dt = \frac{t^{-2}}{2} - \frac{2t^{-3}}{3} = \frac{e^{-2x}}{2} - \frac{2e^{-3x}}{3} + c$$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$$t = e^x \quad , \quad dt = e^x dx \rightarrow dx = \frac{1}{e^x} dt = \frac{1}{t} dt$$

Ejercicio 7.

1) $\int 3x \cos x \, dx =$

$$\boxed{dv = \cos x \ dx \quad u = 3x \quad ; \quad v = \text{sen } x \quad du = 3\,dx}$$

$= 3x \cdot (\text{sen } x) - \int \text{sen } x \cdot 3\,dx = 3x \cdot \text{sen } x + 3 \cdot \cos x + C$

2) $\int x^2 \cdot \text{sen } x \, dx =$

$$\boxed{dv = \text{sen } x\,dx \quad u = x^2 \ ; \ v = -\cos x \quad du = 2x\,dx}$$

$= x^2 \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) \cdot 2x\,dx =$

$$\boxed{dv = -\cos x\,dx \quad u = 2x \ ; \ v = -\text{sen } x \quad du = 2}$$

$= (x^2 \cdot (-\cos x)) - [2x \cdot (-\text{sen } x) - \int (-\text{sen } x) \cdot 2\,dx] =$

$= x^2 \cdot (-\cos x) + 2x \cdot (\text{sen } x) - 2 \cdot (-\cos x) + C =$

$= -x^2 \cos x + 2x \,\text{sen } x + 2 \cos x + C$

3) $\int x^2 \ln x \, dx =$

$$\boxed{dv = x^2\,dx \quad u = \ln x \quad ; \quad v = \frac{x^3}{3} \quad du = \frac{1}{x}}$$

$= \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}\,dx = \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3x}\,dx =$

$= \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} \int x^2\,dx = \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{9} + C$

4) $\int \sqrt{x} \cdot \ln x \, dx =$

$$\boxed{dv = \sqrt{x}\,dx = x^{\frac{1}{2}}\,dx \quad u = \ln x; \quad v = = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \quad du = \frac{1}{x}dx}$$

$= \ln x \cdot \frac{x^{\frac{3}{3}}}{\frac{3}{2}} - \int \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{x}\,dx = \ln x \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \int \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{3}\,dx =$

$= \ln x \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \ln x \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \ln x \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{9} + C$

5) $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx =$

$$\boxed{dv = x^{-2}\,dx \quad u = \ln x \quad ; \quad v = \frac{x^{-1}}{-1} \quad du = \frac{1}{x}\,dx}$$

$= \int \ln x \cdot x^{-2}\,dx = \ln x \cdot \frac{x^{-1}}{-1} - \int \frac{x^{-1}}{-1} \cdot \frac{1}{x}\,dx = \ln x \cdot \frac{x^{-1}}{-1} - \int \frac{x^{-1}}{-x}\,dx =$

$= \ln x \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + \int \frac{1}{x^2}\,dx = -\ln x \ \frac{1}{x} + \int \frac{1}{x^2}\,dx = -\ln x \ \frac{1}{x} + \frac{x^{-1}}{-1} + C =$

$= -\ln x \ \frac{1}{x} - \frac{1}{x} + C$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

6) $\int 2e^x \cdot \cos x\, dx =$ (cambios 1)

$2e^x \cdot \text{sen } x - \int \text{sen } x \cdot 2e^x dx =$ (cambios 2)

$= 2e^x \cdot \text{sen } x - [2e^x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) \cdot 2e^x\, dx\,] =$

$= 2e^x \cdot \text{sen } x - [2e^x \cdot (-\cos x) + \int \cos x \cdot 2e^x\, dx\,] =$

$2e^x \cdot \text{sen } x + 2e^x \cdot \cos x - \int \cos x \cdot 2e^x\, dx\,]$ (haciendo $\int \cos x \cdot 2e^x dx = I$)

$I = 2e^x \cdot \text{sen } x + 2e^x \cdot \cos x - I$

$2I = 2e^x \cdot \text{sen } x + 2e^x \cdot \cos x$

$I = e^x \cdot \text{sen } x - e^x \cdot \cos x + C$

Cambios 1	Cambios 2
dv = cos x dx	dv = sen x
u = $2e^x$	u = $2e^x$
v = sen x	v = - cos x
du = $2e^x$dx	du = $2e^x\, dx$

Ejercicio 8

1) $\int_1^3 \frac{dx}{2x} = \int_1^3 \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2}\ln(|x|)\Big|_1^3 = \frac{1}{2}\ln(|3|) - \frac{1}{2}\ln(|1|) = \frac{1}{2}\ln(3)$

2) $\int_2^3 \frac{x}{x^2-1} dx = \int_2^3 \frac{1}{2t} dt = \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2}\ln(|t|)\Big|_2^3 = \frac{1}{2}\ln(|x^2-1|)\Big|_2^3 = \frac{1}{2}\ln(|3^2-1|) - \frac{1}{2}\ln(|2^2-1|) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{8}{3}\right)$

3) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{3}} \sin(x)\, dx = -\cos(x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{3}} = -\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) - \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$

4) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(3x)\, dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)}{3} dt = \frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(t)\, dt = \frac{1}{3}(-\cos(t))\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3}(-\cos(3x))\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{\cos(3x)}{3}\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{\cos\left(3\times\frac{\pi}{4}\right)}{3} - \left(-\frac{\cos\left(3\times\frac{\pi}{6}\right)}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{6}$

5) $\int_{-4}^{4} |x|\, dx = \int_{-4}^{0} -x\, dx + \int_0^4 x\, dx = -\frac{x^2}{2}\Big|_{-4}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_0^4 = 8 + 8 = 16$

6) $\int_{-1}^{1} \left(3x^2 - 2x + \frac{1}{2}\right) dx = \int_{-1}^{1} 3x^2\, dx - \int_{-1}^{1} 2x\, dx + \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} dx = \left(x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x\right)\Big|_{-1}^{1} = \left(1^3 - 1^2 + \frac{1}{2}\cdot 1\right) - \left((-1)^3 - (-1)^2 + \frac{1}{2}\cdot(-1)\right) = 3$

7) $\int_{-1}^{2} \left(\frac{2}{x+2} - \frac{3}{x-3}\right) dx = \int_{-1}^{2} \frac{2}{x+2} dx - \int_{-1}^{2} \frac{3}{x-3} dx = (2\ln(|x+2|) - 3\ln(|x-3|))\Big|_{-1}^{2} = 10\ln(2)$

8) $\int_{-2}^{2} \left(\frac{3a}{5} - \frac{x}{2}\right) dx = \int_{-2}^{2} \frac{3a}{5} dx - \int_{-2}^{2} \frac{x}{2} dx =$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$$\left(\frac{3ax}{5}-\frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_{-2}^{2}=\frac{3a\cdot 2}{5}-\frac{2^2}{4}-\left(\frac{3a\cdot(-2)}{5}-\frac{(-2)^2}{4}\right)=\frac{12}{5}a$$

Ejercicio 9

Halla el valor de b para que se cumpla $\int_{-1}^{b}(2bx-3x^2)dx=-12$.

1. Se resuelve la integral con la incógnita b:

$$\int_{-1}^{b}(2bx-3x^2)dx=2b\frac{x^2}{2}-3\frac{x^3}{3}\Bigg]_{-1}^{b}=bx^2-x^3]_{-1}^{b}$$

2. Sustituimos los límites de integración:

$$(b\cdot b^2-b^3)-(b\cdot(-1)^2-(-1)^3)=b^3-b^3-b-1=-b-1$$

3. Igualamos el resultado a -12:

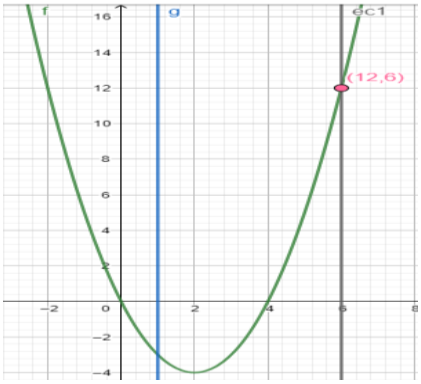
$$-b-1=-12\rightarrow -b=-12+1\rightarrow -b=-11\rightarrow b=11$$

<u>Resultado: b=11</u>

Ejercicio 10

Halla el área entre la función $f(x)=x^2-4x$, el eje de abscisas, y las rectas x=1 y x=6.

1. Hacemos el gráfico:



2. Hallamos los cortes con el eje x de la función:

$$f(x)=x^2-4x\rightarrow x^2-4x=0\rightarrow x(x-4)=0\rightarrow x_1=0,\qquad x_2=4$$

3. Hallamos el área de las dos zonas de áreas obtenidas; de x=1 a x=4, y de x=4 a x=6:

$$\int_1^4(x^2-4x)dx=\frac{x^3}{3}-4\frac{x^2}{2}\Bigg]_1^4=\frac{x^3}{3}-2x^2]_1^4=\left(\frac{4^3}{3}-2\cdot 4^2\right)-\left(\frac{1^3}{3}-2\cdot 1^2\right)=-9u^2$$

Como es un área tomamos su valor positivo.

$$\int_4^6(x^2-4x)dx=\frac{x^3}{3}-4\frac{x^2}{2}\Bigg]_4^6=\frac{x^3}{3}-2x^2]_4^6=\left(\frac{6^3}{3}-2\cdot 6^2\right)-\left(\frac{4^3}{3}-2\cdot 4^2\right)=\frac{32}{3}u^2$$

4. Sumamos ambas áreas:

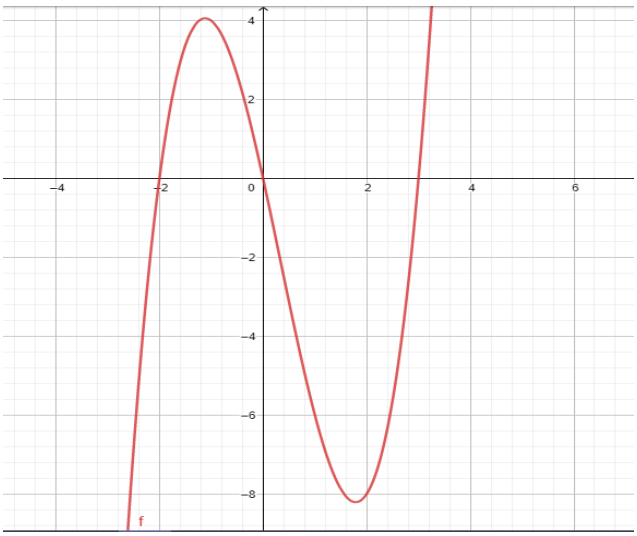
$$\frac{32}{3} + (9) = \frac{59}{3}\ u.a.$$

Resultado: El área es $\frac{59}{3}$ u.a.

Ejercicio 11

Halla el área de la región limitada por la función $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$ y el eje de abscisas.

1. Hacemos el gráfico:



2. Hallamos los cortes con el eje x de la función:
$f(x) = x^3 - x^2 - 6x \rightarrow x^3 - x^2 - 6x = 0 \rightarrow x(x^2 - x - 6) = 0 \rightarrow \quad x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 3$

3. Hallamos el área de las dos zonas obtenidas; de x=-2 a x=0, y de x=0 a x=3:

$$\int_{-2}^{0} (x^3 - x^2 - 6x)dx - \int_{0}^{3} (x^3 - x^2 - 6x)dx =$$

$$\left.\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3x^2\right]_{-2}^{0} - \left.\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3x^2\right)\right]_{0}^{3} =$$

$$\left(\frac{(-2)^4}{4} - \frac{(-2)^3}{3} - 3 \cdot (-2)^2\right) - \left(\frac{3^4}{4} - \frac{3^3}{3} - 3 \cdot 3^2\right) = 10{,}42u^2$$

Resultado: El área es $\frac{125}{12}$ u.a.

Ejercicio 12

Halla el área delimitada por las gráficas:

a) $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$ **e** $y - x - 1 = 0$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

Ponemos las ecuaciones en función de x.

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$$

$$g(x) = x + 1$$

Igualamos f(x) y g(x) para hallar los puntos de corte: $\frac{1}{2}x^2 - x + 1 = x + 1$

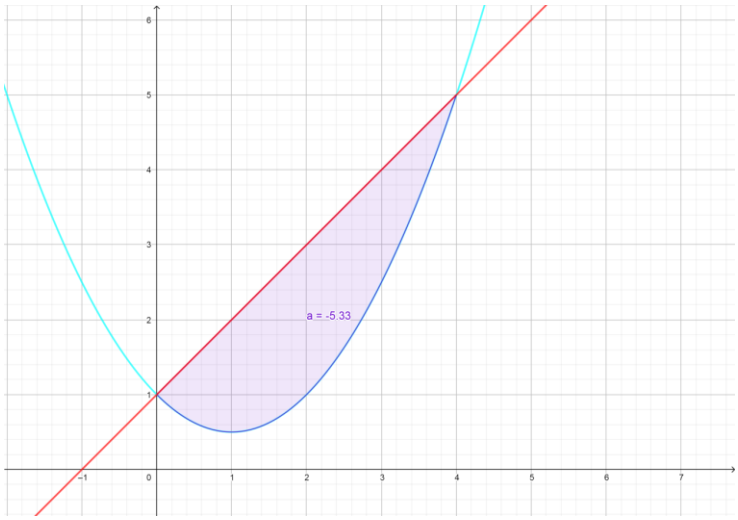
$$\frac{1}{2}x^2 - 2x = 0 \quad ; \quad x\left(\frac{1}{2}x - 2\right) = 0$$

$$x = 0$$

$$\frac{1}{2}x - 2 = 0 \quad ; \quad \frac{x}{2} = 2 \quad ; \quad x = 2 \cdot 2 \quad ; \quad x = 4$$

Los puntos de corte son x=0 y x=4.

Área=$\left|\int_0^4 (f(x) - g(x))\,dx\right| = \left|\int_0^4 \left(\left(\frac{1}{2}x^2 - x + 1\right) - (x+1)\right) dx\right| = \left|\int_0^4 \left(\frac{1}{2}x^2 - x + 1 - x - 1\right) dx\right| = \left|\int_0^4 \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right) dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{6} - x^2\right]_0^4\right| = \left|\left(\frac{4^3}{6} - 4^2\right) - \left(\frac{0^3}{6} - 0^2\right)\right| = \left|\left(\frac{64}{6} - 16\right) - (0)\right| = \left|\left(-\frac{16}{3}\right) - 0\right| = \left|-\frac{16}{3}\right| = \frac{16}{3}\ u.a. = 5{,}3\ u.a.$



b)

$$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x} \quad y \quad g(x) = x^2}$$

Igualamos f(x) y g(x) para hallar los puntos de corte:

$$\sqrt{x} = x^2 \ ; \ \left(\sqrt{x}\right)^2 = (x^2)^2 \ ; \ x = x^4 \ ; \ x^4 - x = 0 \ ; \ x(x^3 - 1) = 0$$

$$x = 0$$

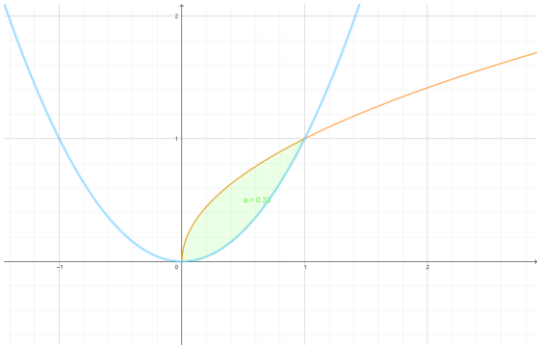
$$(x^3 - 1) = 0 \ ; \ x^3 = 1 \ ; \ x = \sqrt[3]{1} \ ; \ x = 1$$

Los puntos de corte son x=0 y x=1.

Área=$\int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx = \int_0^1 (x^{1/2} - x^2)\,dx = \left.\frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left.\frac{2\sqrt{x^3} - x^3}{3}\right]_0^1 =$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$\left(\frac{2\sqrt{1^3}-1^3}{3}\right)-\left(\frac{2\sqrt{0^3}-0^3}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)-(0)=\frac{1}{3}u.a.$



c)

$\mathbf{f(x)=x^2+x+4}$ **y** $\mathbf{g(x)=-x^2+2x+5}$

Igualamos f(x) y g(x) para hallar los puntos de corte:

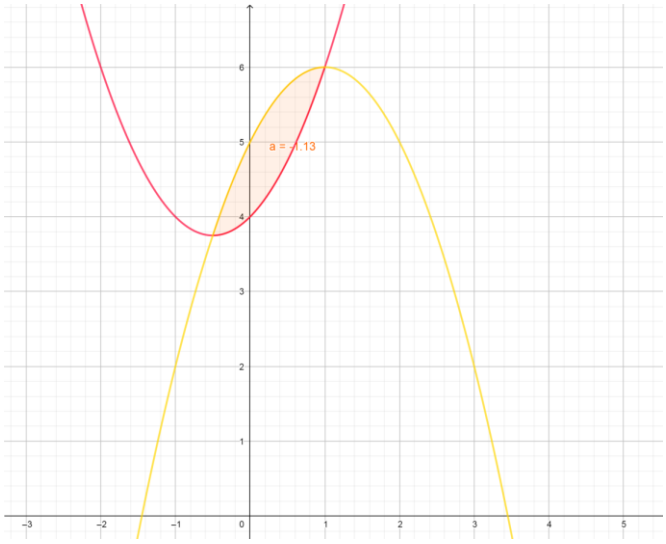
$x^2+x+4=-x^2+2x+5 \quad ; \quad 2x^2-x-1=0$

$x=1$

$x=-\frac{1}{2}$

Los puntos de corte son x=1 y x=$-\frac{1}{2}$

Área=$\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{1}(f(x)-g(x))dx\right|$=$\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{1}((x^2+x+4)-(-x^2+2x+5))\,dx\right|$=$\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{1}(x^2+x+4+x^2-2x-5)\,dx\right|=\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{1}(2x^2-x-1)\,dx\right|=\left|\left[\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-x\right]_{-\frac{1}{2}}^{1}\right|=\left|\left(\frac{2\cdot 1^3}{3}-\frac{1^2}{2}-1\right)-\left(\frac{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3}{3}-\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\right|=\left|\left(-\frac{5}{6}\right)-\left(\frac{7}{24}\right)\right|=\left|-\frac{5}{6}-\frac{7}{24}\right|=\left|-\frac{9}{8}\right|=\frac{9}{8}\,u.a.=1{,}125\,u.a.$



IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

Ejercicio 13

Halla el área de la región limitada por la función $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$ y el eje de abcisas.

1er paso: Se igualan las funciones para saber los puntos de corte:

$$f(x) = x^3 - x^2 - 6x \quad \rightarrow \quad x^3 - x^2 - 6x = 0 \rightarrow \boldsymbol{x = 0;\ x = -2;\ x = 3}$$

$$g(x) = o$$

2º paso: Se calcula el área entre las curvas como:

$$A = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)]\ dx \right|$$

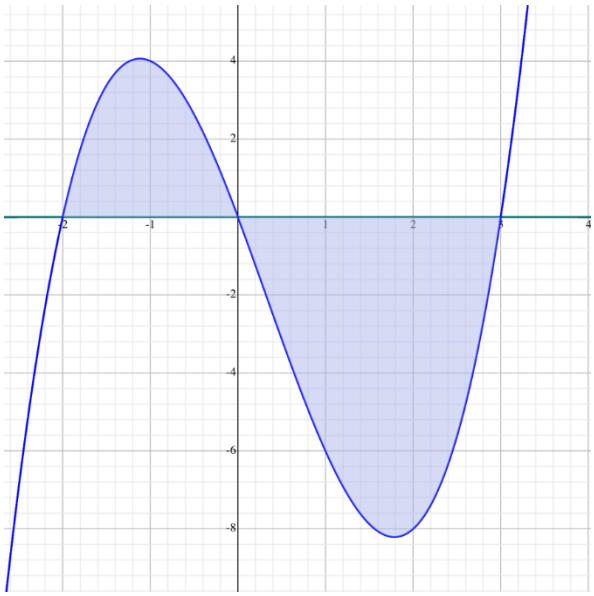
$$A = \left| \int_{-2}^{0} (x^3 - x^2 - 6x)\ dx \right| + \left| \int_0^3 (x^3 - x^2 - 6x)\ dx \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3x^2 \right]_{-2}^{0} \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3x^2 \right]_{0}^{3} \right| =$$

$$= \left| 0 - \left[\frac{(-2)^4}{4} - \frac{(-2)^3}{3} - 3(-2)^2 \right] \right| + \left| 0 - \left[\frac{(-2)^4}{4} - \frac{(-2)^3}{3} - 3(-2)^2 \right] \right| = \frac{253}{12} = \boldsymbol{21,0833\ u^2}$$

$f(x) = x^3 - x^2 - 6x$

$g(x) = 0$



Ejercicio14

Calcula el área de la porción del plano que limitan las curvas $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$

e $y - x - 1 = 0 \quad (y = x + 1)$

1er paso: Se igualan las funciones para saber los puntos de corte:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1 \qquad g(x) = x + 1 \rightarrow \ \frac{1}{2}x^2 - x + 1 = x + 1 \ \rightarrow \ \frac{1}{2}x^2 - x + 1 = o$$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$\boldsymbol{x = 0}$; $\boldsymbol{x = 4}$

2º paso: Se calcula el área entre las curvas como:

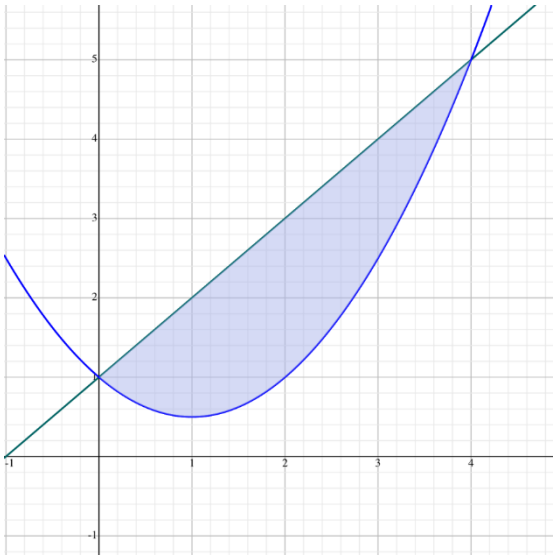
$$A = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)]\ dx \right|$$

$$A = \left| \int_0^4 \left[\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{x^2} - \boldsymbol{x} + \boldsymbol{1} \right) - (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{1}) \right] dx \right| = \left| \int_0^4 \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{x^2} - \boldsymbol{2x} \right) dx \right| = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_0^4 =$$

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4^3}{3} - 4^2 \right) - 0 = \frac{16}{3} = \boldsymbol{5,3\ u^2}$$

$f(x) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x^2} - \boldsymbol{x} + \boldsymbol{1}$

$g(x) = x + 1$



IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

Ejercicios Autoevaluación

1) Los valores de a, b y c para los que $F(x) = ax^3 - be^x + c\sin x$ es una primitiva de la función $f(x) = 3x^2 - 7e^x + 5\cos x$ son:

$F(x) = ax^3 - be^x + c\sin x$
$f(x) = 3x^2 - 7e^x + 5\cos x$

F'(x)= f(x)

$F'(x) = 3ax^2 - be^x + c\cos x$

a= 1 b=7 c=5

La respuesta correcta es la b)

2) La integral indefinida $\int x\sqrt{2x^2+3}\,dx$ vale:

$\int x\sqrt{2x^2+3}\,dx = \int x(2x^2+3)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{4}\int 4x(2x^2+3)^{\frac{1}{2}}\,dx =$

$\frac{1}{4}\cdot\frac{(2x^2+3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{\sqrt{(2x^2+3)^3}}{6} + C$

La respuesta correcta es la b)

3) La integral $\int \frac{dx}{1-x^2}$ vale:

$\int \frac{dx}{1-x^2} = \int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \int \frac{1}{(1-x)(1+x)}\,dx = \int \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}\,dx$

A (1+x) + B(1-x) = 1

x=1 2B = 1 B=$\frac{1}{2}$

x= -1 2A = 1 A=$\frac{1}{2}$

$\int \frac{\frac{1}{2}}{1+x}\,dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{1-x}\,dx = -\frac{1}{2}\ln|1-x| + \frac{1}{2}\ln|1+x|\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$

La respuesta correcta es la d)

4) Al integrar por partes $\int x\cdot\sin x\,dx$ se obtiene:

$u = x \qquad du = 1\,dx$
$dv = \sin x \qquad v = -\cos x$

$$\int x\cdot\sin x\,dx = x\cdot(-\cos x) + \int \cos x\cdot dx$$

$x\cdot(-cosx) + senx = -x\cdot cosx + senx + C$

La respuesta correcta es la c)

5) La integral $\int (x^2+4x+13)\,dx$ vale:

$\int (x^2+4x+13)\,dx = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 13x + C$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

La respuesta correcta es la d)

6) La integral $\int e^x \cos e^x \, dx$ vale:

$$\int f'(x) \cos f(x) \, dx = \sin f(x) + C$$

Con esta fórmula podemos ver que la derivada de f(x) en este caso e^x es la misma e^x

Luego $\int e^x \cos e^x \, dx = \sin e^x + C$

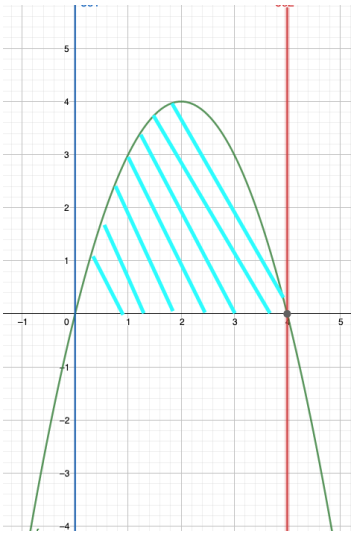
La respuesta correcta es la a)

7) La integral definida $\int_0^\pi \cos x \, dx$ vale:

$$\int_0^\pi \cos x \, dx = \sin x \Big]_0^\pi = \sin \pi - (\sin 0) = 0$$

La respuesta correcta es la c)

8) Para hallar el área comprendida entre la función $f(x) = -x^2 + 4x$, el eje de abscisas y las rectas x=0 y x=4, debemos representar dicha función y ver el área que comprende:



Una vez que tenemos la gráfica, y vemos el dónde corta la función con el eje y con las rectas, comenzamos a aplicar la regla de Barrow para obtener el área.

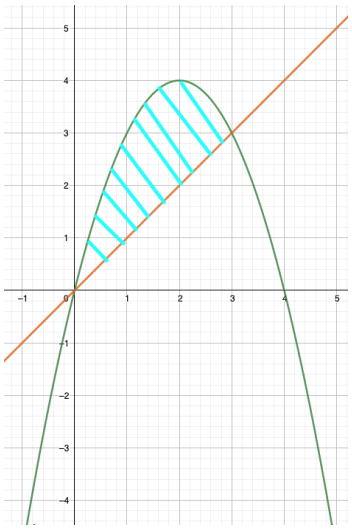
$$\int_0^4 (-x^2 + 4x)dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2}\Big]_0^4$$

$$\left(-\frac{4^3}{3} + \frac{4 \cdot 4^2}{2}\right) - (0) = \frac{32}{3}$$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

La respuesta correcta es la b)

9) Para hallar el área comprendida entre las funciones $f(x) = -x^2 + 4x$ y $g(x) = x$, debemos representar ambas funciones y ver el área que comprenden:



Una vez que tenemos la gráfica, y vemos el dónde corta f(x) con g(x), debemos sacar los puntos de corte y, una vez hallados comenzamos a aplicar la regla de Barrow para obtener el área.

Puntos de corte: Para hallarlos debemos igualar las funciones y despejar la incógnita "x".

$$-x^2 + 4x = x$$

$$0 = x^2 - 3x$$

$$0 = x(x-3)$$

$$x = 0$$

$$x = 3$$

Ahora ya podemos aplicar la regla de Barrow:

$$\int_0^3 [(-x^2 + 4x) - (x)]\, dx = \int_0^3 (-x^2 + 3x) dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\Big]_0^3$$

$$\left(-\frac{3^3}{3} + \frac{3 \cdot 3^2}{2}\right) - (0) = \frac{9}{2}$$

La respuesta correcta es la a)

10) La regla de Barrow sirve para…:

resolver integrales definidas.

La respuesta correcta es la c)

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra