MATEMÁTICAS II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

VALENCIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Pedro Podadera

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Vallecas

CC BY NC SA

GENERALITAT VALENCIANA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JULIO

BAREMO DEL EXAMEN:
El alumno elegirá solo TRES problemas entre los seis propuestos.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

Problema 1:

Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+ay+z=1 \\ ax+y+z=-2 \end{cases}$, siendo a un parámetro real,

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El estudio del sistema en función del parámetro a. (5 puntos)

b) Las soluciones del sistema cuando $a=-2$. (3 puntos)

c) La solución del sistema cuando $a=0$. (2 puntos)

Problema 2:

Se da la recta $r: \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-1}$ y los puntos $P(1,0,0)$ y $Q(2,1,\alpha)$ **Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

a) El valor de a para que la recta que pasa por P y Q sea paralela a r. (3 puntos)

b) La ecuación del plano que contiene a P y Q y es paralelo a r, cuando $\alpha=1$ (3 puntos)

c) La distancia del punto Q al plano que pasa por P y es perpendicular a r, cuando $\alpha=1$ (4 puntos)

Problema 3:

Se da la función real f definida por $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2\cdot(x-1)}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El dominio y las asíntotas de la función f. (3 puntos)

b) La integral $\int f(x)dx$, así como la primitiva de $f(x)$ cuya gráfica pasa por el punto$(2,0)$. (3+1 puntos)

c) El área de la región limitada por la curva $y=f(x)$ y las rectas $y=0$, $x=2$, $x=4$. (3 puntos)

Textos Marea Verde

Problema 4:

Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix}$, que dependen del parámetro real b.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de b para que cada una de las matrices AB y BA tenga inversa. (3 puntos)

b) Los valores de b para que la matriz $A^T A$ tenga inversa, siendo A^T la matriz traspuesta de A. (3 puntos)

c) La inversa de $A^T A$, cuando dicha inversa exista. (4 puntos)

Problema 5:

Sea dan el plano π: $2x + y - z - 5 = 0$ y los puntos $A(1,2,-1)$ y $B(2,1,0)$

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La ecuación implícita del plano que pasa por los puntos A, B y es perpendicular a π. (4 puntos)

b) Las ecuaciones paramétricas de la recta r que es perpendicular a π y pasa por A. Encuentra dos planos cuya intersección sea la recta r. (1+2 puntos)

c) La distancia entre el punto B y la recta r. (3 puntos)

Problema 6:

En un triángulo isósceles, los dos lados iguales miden 10 centímetros cada uno.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La expresión del área $A(x)$ del triángulo, en función de la longitud x del tercer lado. (4 puntos)

b) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $A(x), 0 \leq x \leq 20$ (4 puntos)

c) La longitud x del tercer lado para que el área del triángulo sea máxima y el valor de esta área. (2 puntos)

Textos Marea Verde

RESPUESTAS

Problema 1:

a) El estudio del sistema en función del parámetro a.

Vamos a discutir el sistema utilizando el Teorema de Rouché-Fröbenius. Para ello tenemos que estudiar los rangos de la matriz de los coeficientes y de la ampliada.

Matriz de los coeficientes: $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Como se trata de una matriz 3x3 su mayor rango es 3 por lo que calculamos el valor del menor de orden 3 (toda la matriz). Calculamos el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = a + a + a - a^3 - 1 - 1 = -a^3 + 3a - 2$$

Igualamos a cero para ver los valores que anulan el determinante:

$$-a^3 + 3a - 2 = 0$$

Para resolver la ecuación de tercer grado vamos a descomponer por Ruffini:

	-1	0	3	-2
1		-1	-1	2
	-1	-1	2	0
1		-1	-2	
	-1	-2	0	

Con lo cual tenemos que: $-a^3 + 3a - 2 = (a-1)^2 \cdot (-a-2) = 0$

Las soluciones son:

$$a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$
$$-a - 2 = 0 \Rightarrow a = -2$$

La primera conclusión que podemos sacar es que si $a \neq 1$ y $a \neq -2$ el $RgM = 3$ y como la matriz ampliada es de dimensión 3x4 y su mayor rango puede ser 3 tenemos que:

Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$ el $RgM = 3 = RgM^*$ y el sistema será SCD

Vamos a estudiar los casos $a = 1$ y $a = -2$

➔ Caso $a = 1$, sustituyendo el valor tenemos que:

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Como las tres filas (o columnas) son iguales aplicando las propiedades de los determinantes debemos de saber que no habrá ningún menor de orden 2 diferente de cero y, por lo tanto, su rango será 1.

Estudiamos, para este caso, el rango de la matriz ampliada:

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Fácilmente podemos ver que hay un menor de orden 2 diferente de cero:

$\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix} = -2-1 = -3 \neq 0$ Lo que nos indica que el $RgM^* = 2$

Por lo que la discusión queda: $RgM = 1 \neq RgM^* = 2$ y el sistema es SI.

➔ Caso $a = -2$, sustituyendo el valor tenemos que: $M = \begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$

Tomando las dos primeras filas y columnas podemos ver que hay un menor de orden 2 diferente de cero: $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix} = -2-1 = -3 \neq 0$ por lo que $RgM = 2$

Estudiamos ahora el rango de la matriz ampliada:

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -2 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 1 & -2\end{array}\right)$$

Deberíamos buscar un menor de orden 3 diferente de cero pero, si nos fijamos un poco, la primera y la cuarta columna de la matriz son iguales por lo que todos los menores de orden 3 que calculemos van a ser cero. Por lo tanto, tenemos que el rango de la ampliada es 2 y podemos concluir, para este caso, que $RgM = 2 = RgM^* < nºincógnitas$ por lo que el sistema es SCI.

Hacemos un resumen de la discusión:

- Si $a = 1$ tenemos que $RgM = 1 \neq RgM^* = 2$ y el sistema es SI.
- Si $a = -2$ se da que $RgM = 2 = RgM^* < nºincógnitas$ por lo que el sistema es SCI.
- Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$ el $RgM = 3 = RgM^* = nºincógnitas$ y el sistema será SCD

b) Las soluciones del sistema cuando $a = -2$.

Por la discusión realizada anteriormente tenemos que si $a = -2$ se da que el sistema es SCI. Damos ese valor al parámetro y resolvemos por Cramer. Para ello, consideramos el menor que nos dio el rango 2 (las dos primeras ecuaciones y las dos primeras incógnitas) quitamos la última ecuación y hacemos la incógnita igual a un parámetro: $z = \lambda\ \lambda \in \mathbb{R}$ con todo eso queda el sistema:

$$\begin{cases} x+y-2z=1\\ x-2y+z=1\\ -2x+y+z=-2\end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y-2z=1\\ x-2y+z=1\end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y-2\lambda=1\\ x-2y+\lambda=1\end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=1+2\lambda\\ x-2y=1-\lambda\end{cases}$$

Ahora el sistema tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y el determinante de la matriz de los coeficientes no es cero: $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix} = -2-1 = -3 \neq 0$

Resolvemos por Cramer: $x = \frac{\begin{vmatrix}1+2\lambda & 1\\ 1-\lambda & -2\end{vmatrix}}{-3} = \frac{-2(1+2\lambda)-1\cdot(1-\lambda)}{-3} = \frac{-3-3\lambda}{-3} = 1+\lambda$

$$y = \frac{\begin{vmatrix}1 & 1+2\lambda\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}}{-3} = \frac{1\cdot(1-\lambda)-1\cdot(1+2\lambda)}{-3} = \frac{-3\lambda}{-3} = \lambda$$

Por lo que las soluciones son: $x = 11+\lambda; y = -7-2\lambda; z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

Textos Marea Verde

c) La solución del sistema cuando $a = 0$

Por la discusión del apartado a) tenemos que si $a \neq 1$ y $a \neq -2$el sistema será SCD

Sustituimos el valor y resolvemos por Cramer:

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ ax + y + z = -2 \end{cases} \rightarrow a = 0 \rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 1 \\ y + z = -2 \end{cases}$$

La matriz de los coeficientes queda: $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y su determinante:

$$|M| = 0 + 0 + 0 - 0 - 1 - 1 = -2 \neq 0$$

Resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{0 - 2 + 0 - 0 - 1 - 1}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{1 + 0 + 0 - 0 - 1 + 2}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{0+0+1-0+2-1}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$Por lo que la solución es: $(x, y, z) = (2, -1, -1)$

Textos Marea Verde

Problema 2:

a) El valor de a para que la recta que pasa por P y Q sea paralela a r.

Para que se cumpla, el vector que pasa por ambos puntos debe ser paralelo (proporcional) al vector director de r.

Como la ecuación está en forma continua tenemos que: $\overrightarrow{v_r} = (1,1,-1)$

El vector que pasa por ambos puntos es el $\overrightarrow{PQ} = (2-1,1-0,\alpha-0) = (1,1,\alpha)$

Planteamos la proporcionalidad de ambos vectores: $\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{-1}{\alpha}$

Para que sean proporcionales tenemos que: $\alpha = -1$ que es el valor buscado.

b) La ecuación del plano que contiene a P y Q y es paralelo a r, cuando $\alpha = 1$

Nos piden la ecuación de un plano por lo que necesitamos un punto y dos vectores:

- Como es paralelo a r tenemos que el vector director de r será uno de los que necesitamos.
- Como contiene a los puntos P y Q también contendrá el vector que los une: $\overrightarrow{PQ} = (1,1,1)$ (hemos hecho ya $\alpha = 1$)
- Podemos tomar como punto cualquiera de ambos, yo voy a tomar el $P(1,0,0)$

Vamos a dar la ecuación general:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot (x-1) - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot y + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot z = 2 \cdot (x-1) - 2y = 2x - 2y - 2 = 0$$

Podemos utilizar esa ecuación o simplificarla por 2:

$$\pi: x - y - 1 = 0$$

c) La distancia del punto Q al plano que pasa por P y es perpendicular a r, cuando $\alpha = 1$

Primero vamos a trazar el plano que pasa por P y es perpendicular a r.

Para que un plano sea perpendicular a una recta el vector normal del plano ha de ser proporcional al vector director de la recta. Como sabemos que $\overrightarrow{v_r} = (1,1,-1)$ los coeficientes de la ecuación general del plano serán: $A = 1, B = 1, C = -1$

$Ax + By + Cz + D = 0 \rightarrow x + y - z + D = 0$

Calculamos el coeficiente que nos falta aplicando que el plano tiene que pasar por P y, por lo tanto, ha de cumplir la ecuación para ese punto:

$\pi: x + y - z + D = 0 \rightarrow$ Si $P(1,0,0) \in \pi \rightarrow 1 + 0 - 0 + D = 0 \rightarrow D = -1$

Por lo que el plano que pasa por P y es perpendicular a r es $\pi: x + y - z - 1 = 0$

Vamos a calcular ahora la distancia del punto Q al plano. Para ello tenemos que aplicar la fórmula de distancia de un punto a un plano:

$$d(P,\pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \rightarrow d(P,\pi) = \frac{|2+1-1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} u.$$

Textos Marea Verde

Problema 3:

a) El dominio y las asíntotas de la función f.

La función es una racional polinómica por lo que estarán fuera del dominio los puntos que anulan el denominador:

$x^2 \cdot (x-1) = 0 \rightarrow\ x = 0 x = 1$ por lo que el dominio es: $Dom f(x) = \mathbb{R} - \{0,1\}$

Asíntotas horizontales. Se encuentran en el valor, si existe del límite:

$\lim_{x\to\infty} f\ (x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2\cdot(x-1)} = 0$ (por ser el grado del denominador mayor que el del numerador e independiente de ser +∞ o -∞) luego tiene asíntota horizontal en $y = 0$

Asíntotas verticales. Las buscamos en las discontinuidades del dominio, el valor del límite a esos puntos tiene que ser un infinito. Tenemos dos valores candidatos: $x = 0$y$x = 1$calculamos los límites:

$$\lim_{x\to 0} f\ (x) = \left(\frac{1}{0}\right) = \begin{cases} \lim_{x\to 0+} \frac{x^2+1}{x^2\cdot(x-1)} = -\infty \\ \lim_{x\to 0-} \frac{x^2+1}{x^2\cdot(x-1)} = -\infty \end{cases}$$ luego $x = 0$ es asíntota vertical

$$\lim_{x\to 0} f\ (x) = \left(\frac{1}{0}\right) = \begin{cases} \lim_{x\to 0+} \frac{x^2+1}{x^2\cdot(x-1)} = -\infty \\ \lim_{x\to 0-} \frac{x^2+1}{x^2\cdot(x-1)} = -\infty \end{cases}$$ luego $x = 1$ es asíntota vertical

Como tiene asíntota horizontal no tiene oblicua.

b) La integral $\int f\ (x)dx$, así como la primitiva de $f(x)$ cuya gráfica pasa por el punto $(2,0)$.

$$\int f\ (x)dx = \int \frac{x^2+1}{x^2\cdot(x-1)}dx$$

Como se trata de una función racional polinómica tenemos que descomponer la fracción en fracciones cuyos denominadores sean la descomposición factorial del denominador original.

La descomposición nos la dan hecha pero tenemos uno de las factores que es raíz múltiple por lo que tendremos que incluir las potencias de orden inferior a la múltiple:

La descomposición queda: $\frac{x^2+1}{x^2\cdot(x-1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1}$

Para determinar los valores A, ByC realizamos la suma e igualamos numeradores:

$$\frac{x^2+1}{x^2\cdot(x-1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} = \frac{A(x-1)}{x^2(x-1)} + \frac{B\cdot x\cdot(x-1)}{x^2(x-1)} + \frac{Cx^2}{x^2(x-1)} \rightarrow x^2+1 = A(x-1) + Bx(x-1) + Cx^2$$

Como se trata de una identidad (no es una ecuación) le damos valores para hallar los coeficientes:

Si $x = 0 \rightarrow 1 = -A$ luego $A = -1$

Si $x = 1 \rightarrow\ 2 = C$

Si $x = 2 \rightarrow 5 = A + 2B + 4C$ sustituyendo los valores conocidos: $5 = -1 + 2B + 8 \rightarrow B = -1$

Por lo que tenemos que: $\frac{x^2+1}{x^2\cdot(x-1)} = \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{2}{x-1}$

Ahora podemos descomponer nuestra integral en tres integrales más sencillas:

Textos Marea Verde

$$\int \frac{x^2+1}{x^2\cdot(x-1)}dx = \int \frac{-1}{x^2}dx - \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{2}{x-1}dx$$

La primera se puede hacer por la fórmula de $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (con $n = -2$)

La segunda y la tercera son de logaritmo neperiano:

$$\int \frac{x^2+1}{x^2\cdot(x-1)}dx = \int \frac{-1}{x^2}dx - \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{2}{x-1}dx = -1\cdot\frac{x^{-1}}{-1} - lnx + 2ln(x-1) + C$$
$$= \frac{1}{x} - ln|x| + 2ln|x-1| + C$$

Queremos determinar la constante de integración para que cumpla que pasa por el punto $(2,0)$. Sustituimos la x por 2 e igualamos a cero:

$\frac{1}{2} - ln2 + 2ln(2-1) + C = 0 \rightarrow \frac{1}{2} - ln2 + C = 0 \rightarrow C = ln2 - \frac{1}{2} \simeq -0.1931$

c) El área de la región limitada por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$.

Entre los valores considerados la función es positiva siempre (no cambia de signo) por lo que el área pedida será:

$$\int f(x)dx = \left[\frac{1}{x} - lnx + 2ln(x-1)\right]_2^4 = \left[\frac{1}{4} - ln4 + 2ln3\right] - \left[\frac{1}{2} - ln2 + 2ln1\right] = \frac{-1}{4} + ln\left(\frac{9}{2}\right)$$
$$\simeq 1.2541u^2$$

BY NC SA
Textos Marea Verde

Problema 4:

a) Los valores de b para que cada una de las matrices AB y BA tenga inversa.

Calculamos la matriz AB:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2 & 0+2b & 2-2 \\ -b-0 & 0+0 & 2b-0 \\ 1-2 & 0+2b & -2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2b & 0 \\ -b & 0 & 2b \\ -1 & 2b & -4 \end{pmatrix}$$

Una matriz no tiene inversa cuando su determinante vale cero. Calculamos el determinante:

$$|AB| = \begin{vmatrix} -3 & 2b & 0 \\ -b & 0 & 2b \\ -1 & 2b & -4 \end{vmatrix} = 0 - 4b^2 + 0 - 0 - 8b^2 + 12b^2 = 0$$

Como el determinante de la matriz vale cero para todo valor de b ($\forall b \in \mathbb{R}$) tenemos que la matriz AB **no tiene inversa nunca**.

Calculamos la matriz BA:

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0-2 & -2+0+4 \\ -1+b^2+1 & -2+0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ b^2 & -4 \end{pmatrix}$$

Una matriz no tiene inversa cuando su determinante vale cero. Calculamos el determinante:

$$|BA| = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ b^2 & -4 \end{vmatrix} = 12 - 2b^2$$

Igualamos a cero el valor del determinante: $12 - 2b^2 = 0 \rightarrow b^2 = \frac{12}{2} \rightarrow b = \pm\sqrt{6}$

La matriz BA **tiene inversa cuando** $b \neq \pm\sqrt{6}$.

b) Los valores de b para que la matriz A^TA tenga inversa, siendo A^T la matriz traspuesta de A.

Tenemos que calcular la matriz A^TA

Calculamos primero A^T (recordemos que trasponer es cambiar filas por columnas) :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & b & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos A^TA :

$$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & b & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+b^2+1 & 2+0-2 \\ 2+0-2 & 4+0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2+2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Para que una matriz tenga inversa su determinante ha de ser diferente de cero. Calculamos el determinante:

$$|A^TA| = \begin{vmatrix} b^2+2 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 8 \cdot (b^2+2)$$

Igualamos a cero el valor del determinante: $8 \cdot (b^2+2) = 0 \rightarrow b = \pm\sqrt{-2} \notin \mathbb{R}$ como el parámetro nos dicen que es real tenemos que **la matriz A^TA tiene inversa siempre para cualquier valor del parámetro**.

($\forall b \in \mathbb{R}$)

Textos Marea Verde

c) La inversa de A^TA , cuando dicha inversa exista.

Como acabamos de demostrar que la matriz A^TA tiene inversa siempre sabemos que se puede calcular.

$A^TA = \begin{pmatrix} b^2+2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ Su determinante es $|A^TA| = \begin{vmatrix} b^2+2 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 8 \cdot (b^2+2)$

Utilizamos el cálculo por adjuntos: $(A^TA)^{-1} = \frac{1}{|A^TA|}\left(Adj(A^TA)\right)^T$

$$(A^TA)^{-1} = \frac{1}{8(b^2+2)}\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & b^2+2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{8(b^2+2)}\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & b^2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{b^2+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Podemos comprobar el resultado (no es obligatorio pero sí conveniente) utilizando que: $A \cdot A^{-1} = I$

$(A^TA) \cdot (A^TA)^{-1} = \begin{pmatrix} b^2+2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{b^2+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b^2+2}{b^2+2}+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+\frac{8}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ luego está correcta.

Se puede calcular alternativamente por Gauss (sólo hace falta aplicar un método) pero, por su simplicidad, vamos a dar también el resultado:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} b^2+2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{b^2+2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{8} \end{array}\right)$$

$F_1=F_1/(b^2+2)$

$F_2=F_2/8$

El resultado es, lógicamente, el mismo por los dos métodos.

Textos Marea Verde

Problema 5:

a) La ecuación implícita del plano que pasa por los puntos A, B y es perpendicular a π.

Nos piden la ecuación de un plano por lo que necesitamos un punto y dos vectores:

- Como el plano pasa por los puntos A y B tomamos como nuestro punto el A, por ejemplo (es indiferente)

- Como el plano pasa por los puntos A y B tomamos como nuestro primer vector el que une ambos puntos el $\overrightarrow{AB}$, que tiene que estar contenido en el plano.

$$\overrightarrow{AB} = (2-1,1-2,0-(-1)) = (1,-1,1)$$

- Como el plano es perpendicular al plano π el vector normal de dicho plano tiene que ser una de las direcciones del plano buscado (por ser perpendicular). El vector normal es el $\vec{n} = (2,1,-1)$

Con el punto y los dos vectores damos la ecuación:

$$\pi': \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}(x-1) - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}(y-2) + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}(z+1)$$
$$= -(-3)(y-2) + 3(z+1) = 0$$

$3y - 6 + 3z + 3 = 0 \rightarrow 3y + 3z - 3 = 0$ o bien, simplificando: $\pi': y + z - 1 = 0$

b) Las ecuaciones paramétricas de la recta *r* que es perpendicular a π y pasa por A. Encuentra dos planos cuya intersección sea la recta *r*.

Nos piden la ecuación de una recta por lo que necesitamos un punto y un vector director.

- Como pasa por A lo vamos a tomar como punto de aplicación.

- Como es perpendicular a π tomamos como vector director el vector normal del plano (que sabemos tiene dirección perpendicular): $\vec{n} = (2,1,-1)$

Con el punto y el vector podemos dar directamente la ecuación paramétrica de la recta:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Ahora tenemos que encontrar dos planos cuya intersección sea la recta r. Si recordamos las diferentes ecuaciones de una recta tenemos que la **ecuación implícita** es la que da la recta como intersección de dos planos por lo que basta pasar nuestra ecuación paramétrica a implícita.

La escribimos en forma continua para quitar el parámetro: $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}$

Tomando las dos primeras ecuaciones y despejando obtenemos:

$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} \rightarrow x - 1 = 2y - 4 \rightarrow x - 2y + 3 = 0$

Tomando la primera y la tercera y despejando obtenemos:

$\frac{x-1}{2} = \frac{z+1}{-1} \rightarrow -x + 1 = 2z + 2 \rightarrow x + 2z + 1 = 0$

Ya tenemos los planos buscados cuya intersección es la recta r:

Textos Marea Verde

$$r: \begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ x + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

c) La distancia entre el punto B y la recta r.

Para hallar la distancia de un punto B a una recta r vamos a utilizar la fórmula:

$d(B,r) = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$ donde $\vec{v}$ es el vector director de la recta, A es un punto de la misma y el vector $\overrightarrow{AB}$ es el que une el punto de la recta y el punto del que hay que calcular la distancia.

Como el punto A del enunciado forma parte de la recta ya tenemos calculado el vector $\overrightarrow{AB}$:

$\overrightarrow{AB} = (2-1,1-2,0-(-1)) = (1,-1,1)$

Como el vector director es: $\vec{v} = (2,1,-1)$ realizamos las operaciones:

$$d(B,r) = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{|(1,-1,1) \times (2,1,-1)|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{|(0,3,3)|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{0^2+3^2+3^2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}} = \sqrt{3}u.$$

El cálculo del producto vectorial es:

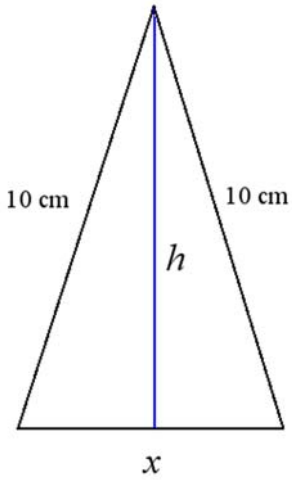
$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = (0,3,3)$$

Textos Marea Verde

Problema 6:

a) La expresión del área $A(x)$ del triángulo, en función de la longitud x del tercer lado.

El triángulo que nos dan en el enunciado lo podemos representar así:



Donde hemos llamado x a la base del mismo (nos la da el enunciado) y h a la altura sobre la base x.

El área de este triángulo sería: $A = \frac{x \cdot h}{2}$

Tenemos que expresar h en función de x para tener una función de tan sólo una variable.

Utilizando el teorema de Pitágoras y tomando el triángulo rectángulo formado por uno de los lados iguales, la altura h y la mitad de la base $\frac{x}{2}$ podemos encontrar la relación:

$$10^2 = h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \rightarrow 100 = h^2 + \frac{x^2}{4} \rightarrow h^2 = 100 - \frac{x^2}{4} \rightarrow h = \sqrt{100 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{400-x^2}{4}} = \frac{\sqrt{400-x^2}}{2}$$

Sustituyendo en la fórmula del área tenemos que:

$$A(x) = \frac{x \cdot \frac{\sqrt{400-x^2}}{2}}{2} = \frac{x}{4} \cdot \sqrt{400-x^2}$$

Hay un método alternativo que es la fórmula de Herón que nos da el área de un triángulo en función de lo que miden los tres lados:

$A = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$ donde a, b y c son los tres lados y $s = \frac{a+b+c}{2}$ (semiperímetro)

Los tres lados miden 10, 10 y x por lo que tenemos que: $s = \frac{10+10+x}{2} = \frac{20+x}{2} = 10 + \frac{x}{2}$

Si sustituimos en la fórmula tenemos:

$$A(x) = \sqrt{\left(10+\frac{x}{2}\right) \cdot \left(10+\frac{x}{2}-10\right) \cdot \left(10+\frac{x}{2}-10\right) \cdot \left(10+\frac{x}{2}-x\right)} = \sqrt{\frac{20+x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \left(10-\frac{x}{2}\right)} =$$

Textos Marea Verde

$A(x) = \frac{x}{2}\sqrt{\frac{20+x}{2}\cdot\frac{20-x}{2}} = \frac{x}{4}\sqrt{400-x^2}$ que es la misma expresión obtenida antes.

b) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $A(x), 0 \leq x \leq 20$

Para establecer los intervalos derivamos la función e igualamos a cero:

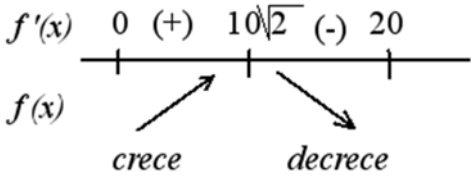
$$A'(x) = \frac{1}{4}\sqrt{400-x^2} + \frac{x}{4}\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{400-x^2}} = \frac{\sqrt{400-x^2}}{4} - \frac{x^2}{4\sqrt{400-x^2}} = 0$$

Despejamos la x:

$\frac{\sqrt{400-x^2}}{4} = \frac{x^2}{4\sqrt{400-x^2}} \rightarrow \sqrt{400-x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{400-x^2}} \rightarrow 400-x^2 = x^2 \rightarrow 400 = 2x^2 \rightarrow 200 = x^2$

$x = \pm\sqrt{200} = \pm 10\sqrt{2}$ (podemos desechar el valor $-10\sqrt{2}$ ya que está fuera del dominio.

Como el dominio de la función es $0 \leq x \leq 20$ estudiamos el signo de la derivada dividiendo el dominio en dos intervalos:



Para estudiar el signo he calculado los valores:

$$A'(1) = \frac{\sqrt{400-1^2}}{4} - \frac{1^2}{4\sqrt{400-1^2}} \simeq 4.98 > 0$$

$$A'(15) = \frac{\sqrt{400-15^2}}{4} - \frac{15^2}{4\sqrt{400-15^2}} \simeq -0.94 < 0$$

Con lo cual tenemos que la función crece en $]0,10\sqrt{2}[$ y decrece en $]10\sqrt{2},20[$

c) La longitud x del tercer lado para que el área del triángulo sea máxima y el valor de esta área.

Por lo visto en el apartado anterior la función tiene un máximo en el valor $x = 10\sqrt{2}$ y el valor del área máxima será:

$$A(10\sqrt{2}) = \frac{10\sqrt{2}}{4}\cdot\sqrt{400-(10\sqrt{2})^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}\sqrt{200} = 50cm^2$$

GENERALITAT VALENCIANA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA DE SEPTIEMBRE

BAREMO DEL EXAMEN:
El alumno elegirá solo TRES problemas entre los seis propuestos.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

Problema 1:

Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + ay + 2z = 3 \\ x - 3y + az = -2 \\ x + y + 2z = a \end{cases}$, donde a es un parámetro real.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de a para los cuales el sistema es compatible. (4 puntos)

b) La solución del sistema cuando a=0. (3 puntos)

c) Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado. (3 puntos)

Problema 2:

Se dan los planos $\pi: x + y = 1$ y $\pi': x - y + z = 1$ y el punto $P(1,-1,0)$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Unas ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por el punto *P* y es paralela a los planos π y π'. (3 puntos)

b) La distancia de la recta r a cada uno de los planos π y π'. (3 puntos)

c) Las ecuaciones de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta obtenida como intersección de los planos π y π'. (4 puntos)

Problema 3:

Dada la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El dominio de definición y las asíntotas de la función f. (3 puntos)

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como la representación gráfica de la función. (3 +1 puntos)

c) El valor de $\int f(x)dx$

Textos Marea Verde

Problema 4:

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La justificación de que A tiene inversa y el cálculo de dicha matriz inversa. (3 puntos)

b) Dos constantes a,b de modo que $A^{-1} = A^2 + aA + bI$. Se puede usar (sin comprobarlo) que A verifica la ecuación $A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0$siendo I la matriz identidad. (3 puntos)

c) El valor de λ para que el sistema de ecuaciones$(A - \lambda I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tenga infinitas soluciones.

Para dicho valor de λ hallar todas las soluciones del sistema.

Problema 5:

Se dan las rectas $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$, $\lambda \varepsilon \boldsymbol{R}$, $s: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{1}$y el plano π:3x+$a$$y$−$z$+1=0. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Si hay algún valor del parámetro a para el cual la recta r está contenida en el plano π. (4 puntos)

b) La distancia entre las rectas r y s. (3 puntos)

c) El coseno del ángulo que forman la recta r y la recta $t: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ y - z = 2 \end{cases}$. (3 puntos)

Problema 6:

Los vértices de un triángulo son A(0,12), B(−5,0) y C(5,0). Se desea construir un rectángulo inscrito en el triángulo anterior, de lados paralelos a los ejes coordenados y dos de cuyos vértices tienen coordenadas (−x,0),(x,0), siendo 0 ≤x ≤5. Los otros dos vértices están situados en los segmentos AB y AC.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La expresión $f(x)$ del área del rectángulo anterior. (4 puntos)

b) El valor de x para el cual dicha área es máxima y las dimensiones del rectángulo obtenido. (3 puntos)

c) La proporción entre el área del rectángulo anterior y el área del triángulo. (3 puntos)

Textos Marea Verde

RESPUESTAS

Problema 1:

a) Los valores de a para los cuales el sistema es compatible.

Vamos a discutir el sistema utilizando el Teorema de Rouché-Fröbenius. Para ello tenemos que estudiar los rangos de la matriz de los coeficientes y de la ampliada.

Matriz de los coeficientes: $M = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & -3 & a \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Como se trata de una matriz 3x3 su mayor rango es 3 por lo que calculamos el valor del menor de orden 3 (toda la matriz). Calculamos el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & -3 & a \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -6 + a^2 + 2 + 6 - 2a - a = a^2 - 3a + 2$$

Igualamos a cero para ver los valores que anulan el determinante:

$$a^2 - 3a + 2 = 0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$a = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = 2 \\ \frac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

La primera conclusión que podemos sacar es que si$a \neq 1$y$a \neq 2$el$RgM = 3$y como la matriz ampliada es de dimensión 3x4 y su mayor rango es 3 tenemos que:

Si$a \neq 1$y$a \neq 2$el$RgM = 3 = RgM^* = n$y el sistema será SCD

Vamos a estudiar los casos $a = 1$y$a = 2$

➔ Caso$a = 1$, sustituyendo el valor tenemos que:

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$Como la 1ª y 3ª fila son iguales dará cero el determinante de orden 3 comprobamos si existe algún menor de orden 2 diferente de cero:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 1 = -4 \neq 0$ y, por lo tanto su rango será 2.

Estudiamos, para este caso, el rango de la matriz ampliada:

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Comprobamos si hay un menor de orden 3 diferente de cero, de las cuatro posibilidades hay una que sabemos que vale cero, comprobamos si alguna de las otras tres da:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 - 18 - 3 + 6 + 4 = -14 \neq 0$con lo cual es de rango 3, con lo que concluimos que:

Textos Marea Verde

Si $a = 1$ el $RgM = 2 \neq RgM^* = 3$ y el sistema será SI

➔ Caso $a = 2$, sustituyendo el valor tenemos que:

$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Como la 1ª y 3ª columna son proporcionales dará cero el determinante de orden 3 comprobamos si existe algún menor de orden 2 diferente de cero:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5 \neq 0$ y, por lo tanto su rango será 2.

Estudiamos, para este caso, el rango de la matriz ampliada:

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Comprobamos si hay un menor de orden 3 diferente de cero, de las cuatro posibilidades hay una que sabemos que vale cero, comprobamos si alguna de las otras tres da:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 4 - 18 - 6 + 12 + 8 = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 + 6 - 6 - 4 + 4 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -6 - 4 + 3 + 9 - 4 + 2 = 0$$

Como no hay ningún menor de orden 3 diferente de cero podemos concluir que la matriz ampliada también tiene rango 2 por lo que:

Si $a = 2$ el $RgM = 2 = RgM^* < n$ y el sistema será SCI

La discusión completa del sistema será:

- Si $a = 1$ el $RgM = 2 \neq RgM^* = 3$ y el sistema será SI
- Si $a = 2$ el $RgM = 2 = RgM^* < n$ y el sistema será SCI
- Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$ el $RgM = 3 = RgM^* = n$ y el sistema será SCD

Por lo que el sistema es compatible para cualquier valor $a \neq 1$

b) La solución del sistema cuando $a = 0$.

Por la discusión anterior sabemos que el sistema cuando $a = 0$ es SCD.

Sustituyendo en el sistema tenemos que:

$$\begin{cases} x + 2z = 3 \\ x - 3y = -2 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

Textos Marea Verde

Matriz de los coeficientes: $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ calculamos su determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 0 + 2 + 6 - 0 - 0 = 2 \neq 0$$

Al tener igual número de ecuaciones e incógnitas y el determinante de la matriz de los coeficientes no ser cero podemos resolver por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-18 + 0 - 4 - 0 - 0 - 0}{2} = \frac{-22}{2} = -11$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-4 + 0 + 0 + 4 - 6 - 0}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{2} = \frac{0+0+3+9-0+2}{2} = \frac{14}{2} = 7$ Por lo que la solución es: $(x, y, z) = (-11, -3{,}7)$

c) Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado.

Por la discusión del primer apartado sabemos que este caso corresponde con $a = 2$

Como sabemos que la matriz de los coeficientes tiene rango 2 tomamos las ecuaciones e incógnitas que nos han dado ese rango y, las ecuaciones que quedan fuera las quitamos y las incógnitas que quedan fuera las igualamos a parámetros. El sistema es:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ x - 3y + 2z = -2 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

El menor que nos da el rango es: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5 \neq 0$ por lo que quitamos la última ecuación y hacemos la $z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

Ahora tenemos que resolver:

$$\begin{cases} x + 2y + 2\lambda = 3 \\ x - 3y + 2\lambda = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 - 2\lambda \\ x - 3y = -2 - 2\lambda \end{cases}$$

Resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 - 2\lambda & 2 \\ -2 - 2\lambda & -3 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-3(3 - 2\lambda) - 2 \cdot (-2 - 2\lambda)}{-5} = \frac{-5 + 10\lambda}{-5} = 1 - 2\lambda$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 - 2\lambda \\ 1 & -2 - 2\lambda \end{vmatrix}}{-5} = \frac{1(-2 - 2\lambda) - 1 \cdot (3 - 2\lambda)}{-5} = \frac{-5}{-5} = 1$$

Con lo que la solución queda: $(x, y, z) = (1 - 2\lambda, 1, \lambda)$

Textos Marea Verde

Problema 2:

a) Unas ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por el punto P y es paralela a los planos π y π'.

Si la recta es paralela a ambos planos quiere decir que tiene que ser perpendicular a los vectores normales de ambos. Los vectores normales son:

$\vec{n} = (1,1,0)$y$\vec{n}' = (1,-1,1)$

Para hallar un vector perpendicular a ambos basta con calcular su producto vectorial:

$\vec{n} \wedge \vec{n}' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = (1,-1,-2)$que es el vector director de nuestra recta

Además sabemos que pasa por el punto$P(1,-1,0)$con lo que podemos escribir las ecuaciones paramétricas como:

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$$

b) La distancia de la recta r a cada uno de los planos π y π'.

Como la recta es paralela a ambos planos su distancia siempre es la distancia de cualquiera de sus puntos al plano correspondiente. Tomamos como punto de la recta el$P(1,-1,0)$ y tenemos que utilizar la fórmula de distancia de un punto a un plano:

$$d(P,\pi) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

La distancia de r al plano π: $d(P,\pi) = \frac{|1-1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} u.l.$

La distancia de r al plano π' : $d(P,\pi') = \frac{|1-1\cdot(-1)+0-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} u.l.$

c) Las ecuaciones de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta obtenida como intersección de los planos π y π'.

Vamos a obtener el plano que tiene como vector normal el vector director de la recta r (que recordemos es paralela a ambos planos) y que pasa por el punto P.

Este plano cumple que es perpendicular a ambos planos por lo que cortará perpendicularmente a la recta intersección de ambos y además contendrá al punto requerido.

El plano tendrá de vector normal el $(1,-1,-2)$(que lo hemos obtenido antes) por lo que su ecuación tendrá el aspecto:

Textos Marea Verde

$x-y-2z+D=0$

Como tiene que pasar por el punto P hallamos el valor de D sustituyendo las coordenadas y despejando:

$x-y-2z+D=0 \rightarrow 1-(-1)-2\cdot 0+D=0 \rightarrow 2+D=0 \rightarrow D=-2$

Por lo que el plano es el $x-y-2z-2=0$

Vamos a hallar el punto de corte de ese plano con la recta intersección de ambos. Para eso hay que resolver el sistema formado por las dos ecuaciones de los planos que forman la recta y nuestro plano:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y+z=1 \\ x-y-2z=2 \end{cases}$$

Resolvemos por Cramer (tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas) y calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 2+1+0-0-(-2)-(-1)=6\neq 0$ por lo que el sistema es de Cramer

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{6}=\frac{2+2+0-0-(-2)-(-1)}{6}=\frac{7}{6}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}}{6}=\frac{-2+1+0-0-(-2)-2}{6}=\frac{-1}{6} \quad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{6}$$
$$=\frac{-2+1-1-(-1)-2-(-1)}{6}=\frac{-2}{6}=\frac{-1}{3}$$

Luego el punto de intersección es el: $\left(\frac{7}{6},-\frac{1}{6},-\frac{1}{3}\right)$

Hallamos ahora las ecuaciones de la recta que pasa por P y por el punto hallado:

$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0} \rightarrow \frac{x-1}{\frac{7}{6}-1}=\frac{y+1}{\frac{-1}{6}+1}=\frac{z-0}{\frac{-1}{3}-0} \rightarrow \frac{x-1}{\frac{1}{6}}=\frac{y+1}{\frac{5}{6}}=\frac{z}{\frac{-1}{3}}$

Tomamos, para simplificar cálculos (multiplicamos por -6) el: $\vec{v}=(1{,}5,-2)$

Las ecuaciones serán (en paramétricas):

$$s:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-1+5\lambda \\ z=-2\lambda \end{cases} \lambda\in\mathbb{R}$$

Textos Marea Verde

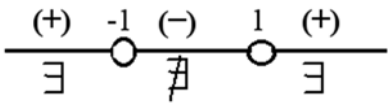
Problema 3:

a) El dominio de definición y las asíntotas de la función f.

La función es una racional polinómica con una raíz en el denominador por lo que estarán fuera del dominio los puntos que anulan el denominador o lo hacen negativo. Para saber el dominio tenemos que resolver la inecuación:

$x^2-1>0\rightarrow$ como es continua hallamos cuando vale cero y estudiamos el signo en los intervalos que definen las soluciones.

$x^2-1=0\rightarrow x^2=1\rightarrow x=\pm 1$por lo que estudiamos el signo de x^2-1en los intervalos:



El dominio de la función será: $Domf(x)=$]-∞,-1[U] 1, +∞[

Asíntotas horizontales. Se encuentran en el valor, si existe de los límites:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=1$(por ser el grado del denominador igual que el del numerador y los coeficientes 1) luego tiene asíntota horizontal en $y=1$por +∞

Además podemos comprobar si la función va por debajo o por encima de la asíntota dando un valor grande (relativamente) y positivo, por ejemplo:

$f(10)=\frac{10}{\sqrt{10^2-1}}\simeq 1.005$por lo que la función va por encima de la asíntota.

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=-1$(por ser el grado del denominador igual que el del numerador y los coeficientes 1 pero el denominador es siempre positivo por la raíz mientras que el numerador será negativo al ser la tendencia -∞) luego tiene asíntota horizontal en $y=-1$por -∞ .

Además podemos comprobar si la función va por debajo o por encima de la asíntota dando un valor grande (relativamente) y negativo, por ejemplo:

$f(-10)=\frac{-10}{\sqrt{(-10)^2-1}}\simeq -1.005$por lo que la función va por debajo de la asíntota.

Asíntotas verticales. Las buscamos en las discontinuidades del dominio, el valor del límite a esos puntos tiene que ser un infinito. Tenemos dos valores candidatos: $x=-1 y x=1$calculamos los límites a esos puntos teniendo en cuenta que por la derecha del -1 no hay función y por la izquierda del 1 tampoco (por el dominio calculado antes)

$$\lim_{x\to-1} f(x)=\left(\frac{-1}{0}\right)=\begin{cases}\lim_{x\to-1+}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=No hay función\\ \lim_{x\to-1-}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=-\infty\end{cases}$$ luego$x=-1$es asíntota vertical

$$\lim_{x\to1} f(x)=\left(\frac{1}{0}\right)=\begin{cases}\lim_{x\to1+}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=+\infty\\ \lim_{x\to1-}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=No hay función\end{cases}$$ luego$x=1$es asíntota vertical

Como tiene asíntotas horizontales no tiene oblicua.

Textos Marea Verde

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como la representación gráfica de la función.

Para calcularlos tenemos que hacer la derivada e igualar a cero para conocer los puntos críticos:

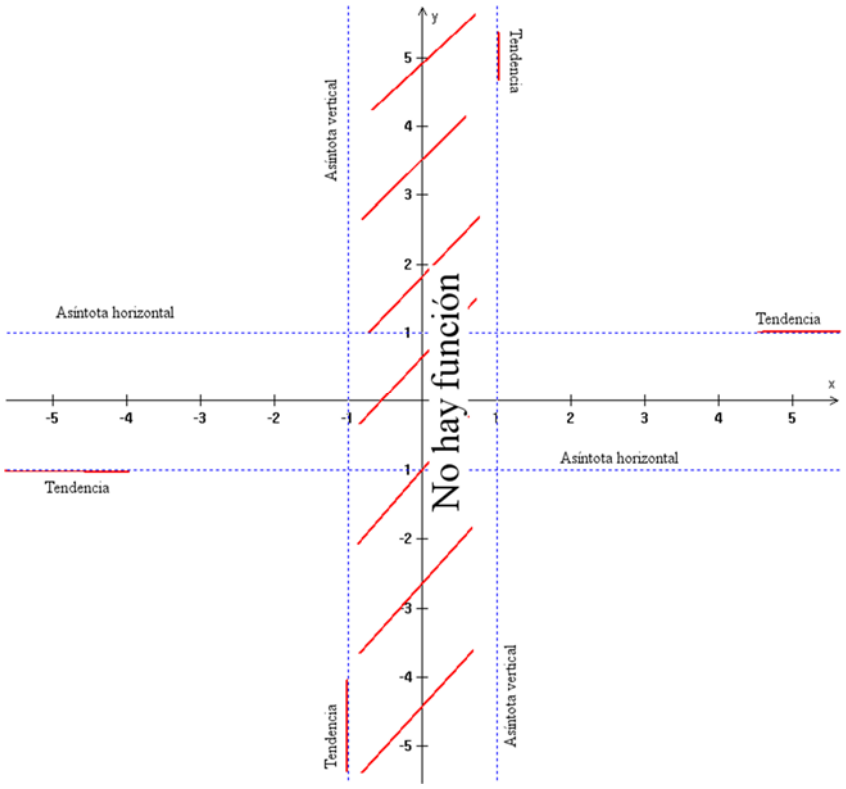
$$f'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2-1} - x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^2-1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} = \frac{\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} = \frac{-1}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

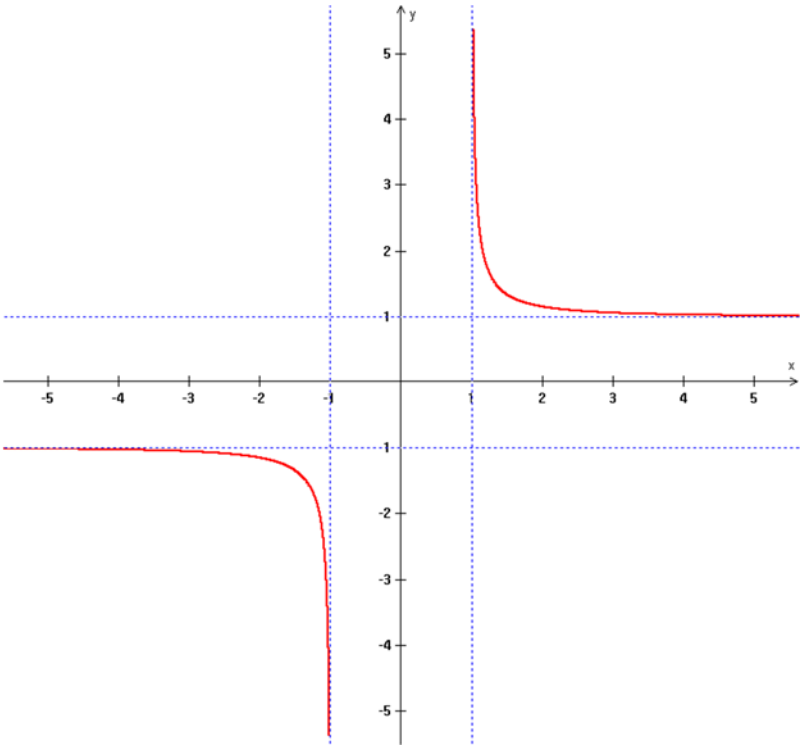
Como es una función racional se hace cero cuando lo es el numerador. Como en este caso no puede ser cero tenemos que la función no tiene puntos críticos (máximos o mínimos).

Por otro lado, tanto para valores positivos como negativos de la variable podemos observar que la derivada es negativa siempre por lo que tenemos que:

La función es decreciente en todo su dominio.

Para representarla gráficamente utilizamos las asíntotas, las tendencias halladas y el dominio:





c) El valor de $\int f(x)dx$

Primero vamos a obtener una primitiva de la función:

$$\int f(x)dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx$$

Como se trata de una función racional que tiene una raíz en el denominador podemos aplicar un cambio de variable o ver que se trata, salvo un factor, de la derivada de una raíz cuadrada.

$$\int f(x)dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx = \int \frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2-1}}dx = \sqrt{x^2-1} + C$$

Si aplicamos, alternativamente, un cambio de variable tenemos que:

$$\int f(x)dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx = \left|\begin{matrix} t = x^2-1 \\ dt = 2xdx \end{matrix}\right| = \int \frac{dt}{2\cdot\sqrt{t}} = \sqrt{t} + C = \sqrt{x^2-1} + C$$

Con ese resultado volvemos para resolver la integral definida:

$$\int f(x)dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx = \left[\sqrt{x^2-1}\right]_2^3 = \sqrt{9-1} - \sqrt{4-1} = \sqrt{8} - \sqrt{3} \simeq 1.0964$$

Problema 4:

a) La justificación de que A tiene inversa y el cálculo de dicha matriz inversa.

Una matriz tiene inversa cuando su determinante es diferente de cero. Calculamos el determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1 \neq 0 \text{por lo que} \exists A^{-1}$$

Para calcular la inversa lo hacemos con la fórmula: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(AdjA)^t$

Aplicando la fórmula tenemos:

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos comprobar el resultado (no es obligatorio pero sí conveniente) aplicando:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0 & -2+2+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+1+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+2-2 & 0+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{luego}$$

es correcto el cálculo.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Dos constantes $a,\ b$ de modo que$A^{-1} = A^2 + aA + bI$. Se puede usar (sin comprobarlo) que A verifica la ecuación$A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0$siendo I la matriz identidad.

Vamos a resolverlo aplicando la ecuación que nos dan. Para ello tenemos que fijarnos que nos piden unas constantes relacionadas con el valor de la inversa. Ya sabemos que$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

En la expresión que nos dan despejamos la identidad y obtenemos:

$$A^3 - 3A^2 + 3A = I$$

Si multiplicamos la expresión por la inversa tenemos que:

$$A^{-1} \cdot A^3 - A^{-1} \cdot 3A^2 + A^{-1} \cdot 3A = A^{-1} \cdot I$$

Sabiendo que los números conmutan con las matrices y que $A^{-1} \cdot I = A^{-1}$obtenemos:

$$A^{-1} \cdot A^3 - 3 \cdot A^{-1} \cdot A^2 + 3 \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1}$$

Ahora aplicamos la definición de potencia de una matriz: $A^3 = A \cdot A \cdot A$y$A^2 = A \cdot A$:

$$A^{-1} \cdot A \cdot A \cdot A - 3 \cdot A^{-1} \cdot A \cdot A + 3 \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1}$$

Aplicando la definición de inversa tenemos que: $A^{-1} \cdot A = I$:

$$I \cdot A \cdot A - 3 \cdot I \cdot A + 3 \cdot I = A^{-1}$$

Aplicando ahora que $I \cdot A = A$:

Textos Marea Verde

$A \cdot A - 3 \cdot A + 3 \cdot I = A^{-1} \rightarrow A^2 - 3 \cdot A + 3 \cdot I = A^{-1}$

Comparando la expresión resultante con la que nos dan inicialmente tenemos que:

$A^{-1} = A^2 + aA + bI \leftrightarrow A^{-1} = A^2 - 3 \cdot A + 3 \cdot I$

Por lo cual tenemos que: $a = -3 \text{y} b = 3$

c) El valor de λ para que el sistema de ecuaciones $(A - \lambda I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tenga infinitas soluciones. Para dicho valor de λ hallar todas las soluciones del sistema.

La matriz de términos independientes es una matriz columna de ceros lo cual implica que el **sistema es homogéneo.**

Por el teorema de Rouché-Fröbenius sabemos que un sistema homogéneo siempre tiene una única solución compatible determinada: la trivial $(x = y = z = 0)$. Para que tenga una solución diferente a la trivial ha de ser sistema compatible indeterminado (con infinitas soluciones) que es la que queremos.

Por el teorema de Rouché-Fröbenius sabemos que un sistema será SCI si el rango de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada coinciden (cosa que en un sistema homogéneo siempre se da) pero además el rango ha de ser menor que el número de incógnitas (3) por lo que, para cumplir las condiciones del problema tenemos que:

$Rg(A - \lambda I) = 2$

Para que eso se cumpla los menores de orden 3 de la matriz $A - \lambda I$ han de ser cero.

Sólo hay un menor de orden 3 en la matriz por lo que lo igualamos a cero y hallamos el valor del parámetro:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = (1-\lambda)^3 = 0$$

La ecuación tiene una única solución (triple) que es $\lambda = 1$

Por lo tanto **el sistema tiene infinitas soluciones para el valor** $\lambda = 1$

Para ese valor el sistema queda:

$$A - \lambda I = A - I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2y = 0 \\ 0 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$ Por lo que podemos deducir que $y = 0$ y las otras incógnitas pueden tener cualquier valor (les tenemos que asignar un parámetro) por lo que la **solución del sistema es**:

$x = \alpha$
$y = 0$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$z = \beta$

Textos Marea Verde

Problema 5:

a) Si hay algún valor del parámetro a para el cual la recta r esta contenida en el plano π.

Este ejercicio hay varias formas de hacerlo. La más sencilla es aplicar que **una recta estará contenida en un plano si dos de sus puntos lo están.** (El razonamiento hay que escribirlo)

Por lo cual tomamos dos puntos cualesquiera de la recta:

$$r:\begin{cases} x=1 \\ y=2+\lambda \\ z=2\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} hacemos \lambda=0 \rightarrow p_0(1,2,0) \\ hacemos \lambda=1 \rightarrow p_1(1,3,2) \end{cases}$$

Sustituimos los puntos en la ecuación del plano. **Para que esos puntos pertenezcan al plano han de verificar su ecuación**.

$$\pi: 3x+ay-z+1=0$$

Si tomamos $p_0(1,2,0)$tenemos que:$3\cdot 1+a\cdot 2-0+1=0\rightarrow 2a+4=0\rightarrow a=-2$

Si tomamos $p_1(1,3,2)$tenemos que:$3\cdot 1+a\cdot 3-2+1=0\rightarrow 3a+2=0\rightarrow a=\frac{-2}{3}$

Como ambas valores **no son el mismo** podemos afirmar que **no existe ningún valor de a para el que la recta r esta contenida en el plano π**.

b) La distancia entre las rectas r y s.

Para calcular la distancia entre dos rectas es necesario conocer su posición relativa (coincidentes, paralelas, se cortan o se cruzan) ya que la forma de calcular la distancia es diferente (si son coincidentes o se cortan la distancia es cero).

Para determinar la posición relativa de ambas rectas necesitamos un punto y un vector de cada una:

$r:\begin{cases} x=1 \\ y=2+\lambda \\ z=2\lambda \end{cases}$por ser la ecuación paramétrica sabemos que el punto es: $P_r(1,2,0)$y el vector director$\overrightarrow{v_r}=(0,1,2)$

$s:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{1}$por ser la ecuación continua sabemos que el punto es: $P_s(-1,0,-2)$y el vector director$\overrightarrow{v_s}=(2,-1,1)$

Hallamos el vector que une ambos puntos:$\overrightarrow{P_rP_s}=(-1-1,0-2,-2-0)=(-2,-2,-2)$

Estudiamos ahora si los tres vectores (el director de r, el de s y el que une dos puntos de r y s) son independientes. Para ello estudiamos los rangos de la matriz formada por los dos vectores directores ampliada con el vector de los puntos:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} A^*=\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Estudiamos el rango de A: como $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=0-2=-2\neq 0$tenemos que $rgA=2$

Textos Marea Verde

El rango de A^* puede ser tres: $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 - 8 - 2 - 4 + 4 - 0 = -10 \neq 0$ entonces $rgA^* = 3$

Como el vector de los puntos y los directores de las rectas son independientes podemos afirmar que las rectas se cruzan.

Para hallar la distancia entre dos rectas que se cruzan podemos utilizar la fórmula:

$$d(r,s) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rP_s}\right]\right|}{|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}|}$$

Calculamos:

$$\left|\left[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rP_s}\right]\right| \rightarrow \left|\begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}\right| = |0 - 8 - 2 - 4 + 4 - 0| = |-10| = 10$$

$$\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\vec{k} = (3{,}4, -2)$$

Hallamos el módulo del producto vectorial: $|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$

Por lo que la distancia será:

$$d(r,s) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rP_s}\right]\right|}{|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}|} = \frac{10}{\sqrt{29}} u.l.$$

c) El coseno del ángulo que forma la recta r y la recta t: $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ y - z = 2 \end{cases}$

Este ejercicio presenta una primera dificultad que no siempre comprobamos y es que **para que dos rectas formen un ángulo tienen que cortarse en un punto.**

Para esa comprobación y dado que tenemos una en forma paramétrica y otra en forma implícita podemos proceder del siguiente modo: Vamos a comprobar si existe algún valor del parámetro λ de la recta r para el que se verifiquen las ecuaciones de la recta t.

Sustituyendo las ecuaciones de r en t tenemos que:

t: $\begin{cases} 2 \cdot 1 - (2 + \lambda) = 0 \\ (2 + \lambda) - 2\lambda = 2 \end{cases}$ → de la primera ecuación: $\lambda = 0$

si sustituimos en la segunda obtenemos que el sistema es compatible: $2 = 2$ por lo que **las rectas se cortan en un punto y es posible calcular el ángulo que forman**.

Para ello debemos conocer un vector director de cada recta. Tenemos que: $\overrightarrow{v_r} = (0,1,2)$

Hallamos un vector director de t. Como se trata de la forma implícita podemos resolver el sistema compatible indeterminado de las ecuaciones (y hallamos la ecuación paramétrica de la que es fácil tener un vector director) o bien hacemos el producto vectorial de los vectores normales de los planos que representan las ecuaciones:

Los vectores normales son $\overrightarrow{n_1} = (2,-1,0)$ y$\overrightarrow{n_2} = (0,1,-1)$

Hallamos su producto vectorial:

$$\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = (1,2,2) \text{que es } \overrightarrow{v_t}$$

Ahora hallamos el ángulo que forman ambos vectores utilizando para ello la fórmula que se basa en el producto escalar:

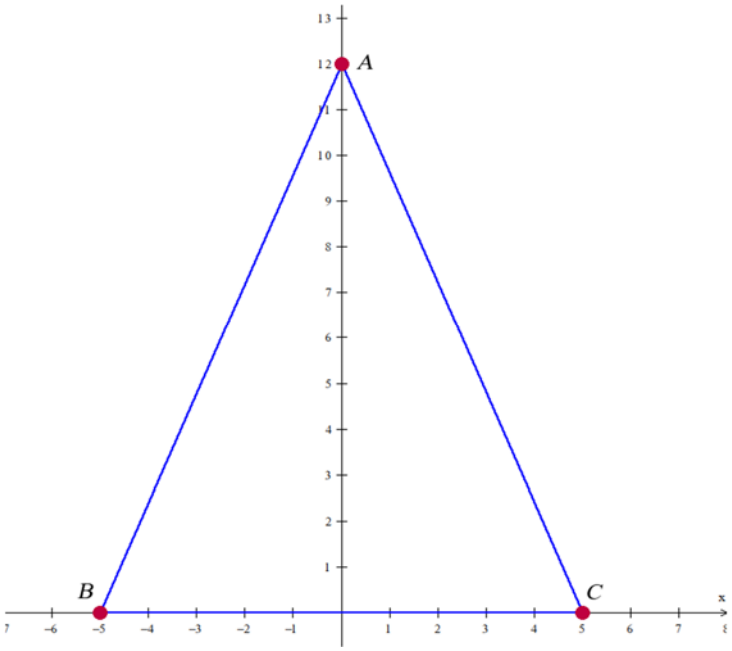
$$cos\left(\widehat{\overrightarrow{v_r}\overrightarrow{v_t}}\right) = \frac{|\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_t}|}{|\overrightarrow{v_r}| \cdot |\overrightarrow{v_t}|} = \frac{|(0,1,2) \cdot (1,2,2)|}{\sqrt{0^2+1^2+2^2} \cdot \sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{6}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{9}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Luego la solución es: $cos\left(\widehat{\overrightarrow{v_r}\overrightarrow{v_t}}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}$

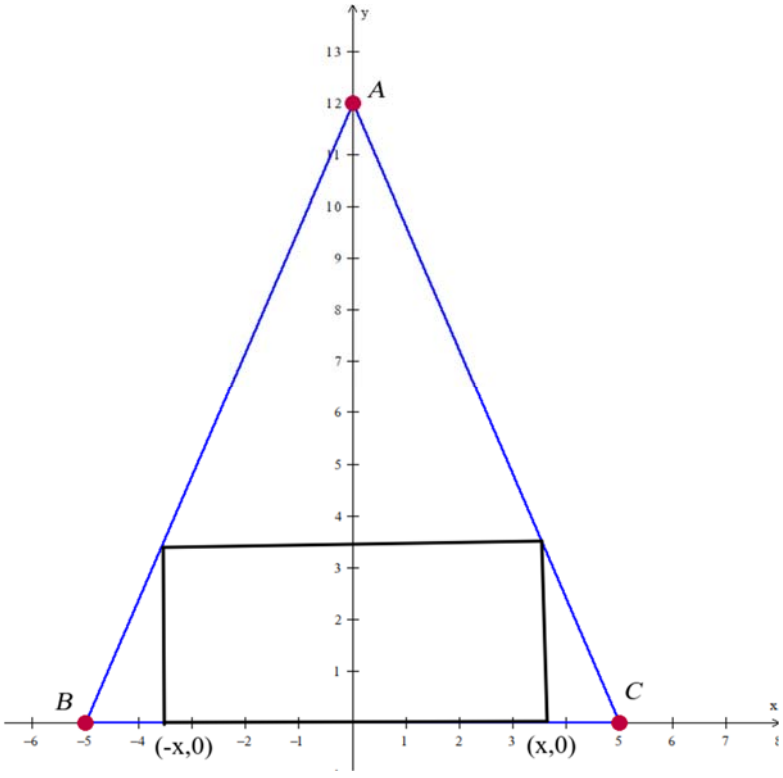
Textos Marea Verde

Problema 6:

No lo pide pero sería recomendable hacer un dibujo del problema para hacernos idea de lo que se nos está preguntando. El triángulo lo podemos dibujar en un eje de coordenadas y nos queda:



Vamos a dibujar rectángulos inscritos en ese triángulo como el de la figura siguiente:



Textos Marea Verde

a) La expresión $f(x)$ del área del rectángulo anterior.

Tenemos que hallar la expresión del área del rectángulo en función del valor de x. Todos debemos saber que el área de un rectángulo es su base por su altura.

La base mide desde el valor$(-x, 0)$al $(x, 0)$por lo que mide $2x$.

La altura (nos da igual cuál tomemos) es un punto de la recta que une los vértices A y C.

La ecuación de la recta que une los puntos$A(0,12)$y$C(5,0)$es:

(ecuación de la recta que une dos puntos) $\frac{x-0}{5-0}=\frac{y-12}{0-12}\rightarrow \frac{x}{5}=\frac{y-12}{-12}\rightarrow y=\frac{-12x}{5}+12$

Por lo tanto el valor que nos da la altura correspondiente al vértice (x,0) será$h=\frac{-12x}{5}+12$

El área del rectángulo buscada tendrá la expresión:

$$A(x)=b\cdot h=2x\cdot\left(\frac{-12x}{5}+12\right)=\frac{-24x^2}{5}+24xx\in[0,5]$$

b) El valor de x para el cual dicha área es máxima y las dimensiones del rectángulo obtenido.

Tenemos que buscar un máximo de la función área por lo que vamos a derivar e igualar a cero la derivada para hallar los puntos críticos:

$A'(x)=\frac{-48x}{5}+24=0\rightarrow 24=\frac{48x}{5}\rightarrow 120=48x\rightarrow x=\frac{120}{48}=\frac{5}{2}=2.5$

Para conocer la naturaleza del mismo (máximo, mínimo o punto de inflexión) calculamos el valor de la segunda derivada en el punto en cuestión:

$A''(x)=\frac{-48}{5}<0$Como siempre es negativa el punto calculado es un **máximo relativo**.

Como sabemos que una función continua (la función área es polinómica y, por lo tanto, continua en todos sus puntos) definida en un intervalo cerrado alcanza en éste un máximo y mínimo absolutos en los extremos relativos o en los extremos del intervalo tenemos que la función ha de tener su máximo en el valor hallado$x=2.5$ o en $x=0$o$x=5$

Hallamos el valor de$A(x)$en los tres puntos:

$$A(x)=\frac{-24x^2}{5}+24x$$

$$A(0)=\frac{-24\cdot 0^2}{5}+24\cdot 0=0$$

$$A(2.5)=\frac{-24\cdot 2.5^2}{5}+24\cdot 2.5=30$$

$$A(5)=\frac{-24\cdot 5^2}{5}+24\cdot 5=0$$

Textos Marea Verde

Por lo que podemos concluir que el valor $x = 2.5$es un máximo absoluto mientras que los valores $x = 0$y$x = 5$son los mínimos absolutos. El área máxima es $A(2.5) = 30u^2$

Las dimensiones del rectángulo serán:

Base: $2x = 2 \cdot 2.5 = 5u.$

Altura: $h = \frac{-12x}{5} + 12 = \frac{-12 \cdot 2.5}{5} + 12 = 6u.$

c) La proporción entre el área del rectángulo anterior y el área del triángulo. (3 puntos)

El área de un triángulo se calcula mediante la fórmula conocida de$A = \frac{b \cdot h}{2}$la base del mismo mide 10 u. mientras que su altura es de 12 u. por lo que el área es: $A = \frac{10 \cdot 12}{2} = 60u^2$

La proporción buscada es: $\frac{A_r}{A_t} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$