

# FORMACIÓN PROFESIONAL BÁSICA

## MATEMÁTICAS II

### CAPÍTULO 8: PROBABILIDAD

#### ACTIVIDADES PROPUESTAS

- Indica si son, o no, fenómenos aleatorios:
  - La superficie de las provincias españolas.
  - Anotar el sexo del próximo bebé nacido en una clínica determinada.
  - El área de un cuadrado del que se conoce el lado.
  - Tirar tres dados y anotar la suma de los valores obtenidos.
  - Saber si el próximo año es bisiesto.
- Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: “Escribir en cinco tarjetas cada una de las vocales y sacar una al azar”.
- Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: “Tirar una chincheta y anotar si cae de punta o no”.
- Inventa dos sucesos del experimento aleatorio: *Tirar dos monedas*.
- En el juego de lotería, indica dos sucesos respecto a la cifra de las unidades del primer premio.
- Escribe tres sucesos aleatorios del experimento aleatorio sacar una carta de una baraja española.
- Al sacar una carta de una baraja española, llamamos  $B$  al suceso sacar un as y  $A$  al suceso sacar una figura. Escribe los sucesos  $A \cup B$ ,  $A \cap B$  y  $A - B$ .
- Sea  $A$  el suceso tirar un dado y sacar un número mayor que 4. Escribe el suceso contrario de  $A$ .
- Un suceso y su suceso contrario, ¿cómo son, compatibles o incompatibles? Razona la respuesta.
- En el experimento aleatorio, sacar una carta de una baraja española, escribe tres sucesos incompatibles con el suceso “sacar un as”.
- Calcula la probabilidad de que al sacar una carta de la baraja sea una espada.
- Para saber la probabilidad de que un recién nacido sea zurdo, ¿te basarías en el estudio de las frecuencias relativas o la asignarías por simetría?
- ¿Cuál es la probabilidad de *no* sacar un 5 al tirar un dado? ¿Y de *no* sacar un múltiplo de 3? ¿Y de *no* sacar un número menor que 2?
- Al tirar una moneda dos veces, ¿cuál es la probabilidad de no sacar ninguna cara? ¿Y de sacar al menos una cara? Observa que sacar al menos una cara es el suceso contrario de no sacar ninguna cara.
- Haz un diagrama en árbol similar al anterior en tu cuaderno con los sucesos  $A$  y  $B$ :  $A = \text{sacar un as}$  en la primera extracción,  $\bar{A} = \text{no sacar as}$ , y  $B = \text{sacar un as}$  en la segunda extracción,  $\bar{B} = \text{no sacar as en la segunda extracción}$ . ¿Cuál es la probabilidad de *sacar as* en la segunda extracción condicionado a *no* haberlo sacado en la primera? ¿Y la de *no sacar as* en la segunda extracción condicionado a no haberlo sacado en la primera? ¿Cuál es la probabilidad de *sacar dos ases*? ¿Y la de sacar un solo as?

16. En el diagrama de árbol anterior indica cual es la probabilidad de “no salen 2 ases” y la de “no sale ningún as”.
17. En el experimento “sacar tres cartas seguidas”, ¿cuál es la probabilidad de sacar tres ases? Primero con reemplazo, y luego sin reemplazo.
18. Al tirar dos veces un dado calcula la probabilidad de que salga un seis doble.
19. Al tirar dos veces un dado calcula la probabilidad de sacar al menos un 6. *Ayuda:* Quizás te sea más fácil calcular la probabilidad de no sacar ningún 6, y utilizar el suceso contrario.
20. Lanzamos dos dados que no estén trucados y anotamos los números de su cara superior. Consideramos el suceso  $A$  que la suma de las dos caras sea 8, y el suceso  $B$  que esos números difieran en dos unidades. a) Comprueba que  $P(A) = 5/36$  (casos favorables: 2 + 6; 3 + 5; 4 + 4; 5 + 3; 6 + 2) y que  $P(B) = 8/36$  (casos favorables: (1, 3), (2, 4), ...). b) Calcula las probabilidades de:  $P(A \cap B)$ ;  $P(A \cup B)$ ;  $P(A \cap \bar{B})$ ;  $P(\bar{A} \cap B)$ ;  $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ . c) Calcula  $P(A/B)$ ;  $P(A/\bar{B})$ ;  $P(\bar{A}/B)$ .
21. Dibuja en tu cuaderno un diagrama en árbol para tres incendios, y calcula la probabilidad de que al menos uno haya sido intencionado siendo  $P(I) = 0'6$ .
22. En una aeronave se han instalado tres dispositivos de seguridad:  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Si falla  $A$  se pone  $B$  en funcionamiento, y si también falla  $B$  empieza a funcionar  $C$ . Las probabilidades de que funcione correctamente cada dispositivo son:  $P(A) = 0'96$ ;  $P(B) = 0'98$  y  $P(C) = 0'99$ . a) Calcula la probabilidad de que fallen los tres dispositivos. b) Calcula la probabilidad de que todo vaya bien.
23. Una fábrica de muñecas desecha normalmente el 0'3 % de su producción por fallos debidos al azar. Calcula la probabilidad de que: a) Al coger dos muñecas al azar haya que desechar ambas. b) Al coger dos muñecas al azar haya que desechar sólo una. c) Al coger dos muñecas al azar no haya que desechar ninguna d) Verificamos 4 muñecas, calcula la probabilidad de desechar únicamente la tercera muñeca elegida.
24. Lanzamos una moneda hasta que aparezca dos veces seguidas del mismo lado. Calcula las probabilidades de que: A) La experiencia termine al segundo lanzamiento. B) Termine al tercer lanzamiento. C) Termine en el cuarto. D) Termine a lo sumo en el cuarto lanzamiento (es decir, que termine en el segundo o en el tercero o en el cuarto lanzamiento).
25. Se ha hecho un estudio estadístico sobre accidentes de tráfico y se han determinado las siguientes probabilidades reflejadas en la tabla de contingencia:

	Accidente en carretera ( $C$ )	Accidente en zona urbana ( $U$ )	Totales
Accidente con víctimas ( $V$ )	0'27		0'56
Accidente con sólo daños materiales ( $M$ )			
Totales	0'58		1

- a) Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.
- b) Determina las siguientes probabilidades:  $P(V \cap C)$ ;  $P(V \cap U)$ ;  $P(M \cap C)$ ;  $P(M \cap U)$ ;  $P(V)$ ;  $P(M)$ ;  $P(C)$  y  $P(U)$ .
- c) Calcula  $P(U/V)$ ;  $P(C/V)$ ;  $P(V/U)$ ;  $P(V/C)$ . ¿Son dependientes o independientes los sucesos: accidente con víctimas y accidente en carretera?

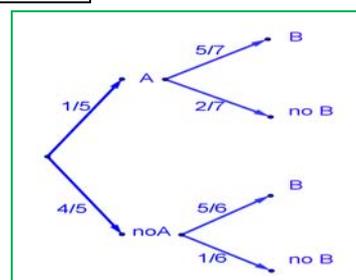
26. Inventa una tabla de contingencia considerando que los accidentes puedan ser de carretera ( $C$ ) o urbanos ( $U$ ), pero que ahora los clasificamos en leves ( $L$ ), graves ( $G$ ) o mortales ( $M$ ). *Observa que lo fundamental para confeccionar la tabla es que los sucesos sean incompatibles dos a dos.*

27. Dada la tabla de contingencia, construye dos diagramas de árbol.

	$A$	No $A = \bar{A}$	
$B$	0'4	0'2	0'6
No $B = \bar{B}$	0'15	0'25	0'4
	0'55	0'45	1

28. Dado el diagrama de árbol del margen, construye la tabla de contingencia, y después el otro diagrama de árbol.

29. Tenemos dos urnas,  $A$  y  $B$ . La primera con 8 bolas blancas y 2 bolas negras. La segunda con 4 bolas blancas y 6 bolas negras. Se saca una bola al azar, de una de las dos urnas, también al azar y resulta ser negra. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la urna  $A$ ?



30. Se está estudiando un tratamiento con un nuevo medicamento, para lo que se seleccionan 100 enfermos. A 60 se les trata con el medicamento y a 40 con un placebo. Los valores obtenidos se representan en la tabla adjunta

	Medicamento ( $M$ )	Placebo (no $M$ )	
Curados ( $C$ )	50	30	80
No curados (no $C$ )	10	10	20
	60	40	100

Se utilizan esos valores para asignar probabilidades. Calcula:

- La probabilidad de que un enfermo curado haya sido tratado con el medicamento. *Ayuda:*  $P(M/C)$
- La probabilidad de que un enfermo curado haya sido tratado con el placebo. *Ayuda:*  $P(\bar{M}/C)$ .

*Problemas propuestos en Selectividad*

31. En un proceso de fabricación de móviles se detecta que el 2 % salen defectuosos. Se utiliza un dispositivo para detectarlos que resulta que detecta el 90 % de los móviles defectuosos, pero señala como defectuosos un 1 % que no lo son. A) Calcula la probabilidad de que sea correcto un móvil que el dispositivo ha calificado como defectuoso. B) Calcula la probabilidad de que sea defectuoso un móvil que el dispositivo ha calificado como correcto. *Ayuda:* Utiliza primero un diagrama en árbol y luego una tabla de contingencia.

32. Se tienen 3 cajas,  $A$ ,  $B$  y  $C$ . La caja  $A$  tiene 10 bolas de las cuales 4 son negras. La caja  $B$  tiene 6 bolas con una bola negra. La caja  $C$  tiene 8 bolas con 3 negras. Se coge una caja al azar y de esa caja se saca una bola, también al azar. Comprueba que la probabilidad de que la bola sea negra es  $113/360$ .

33. Tenemos una moneda trucada cuya probabilidad de obtener cara es  $3/5$  y la de cruz es  $2/5$ . Si sale cara se escoge al azar un número del 1 al 8, y si sale cruz, se escoge un número del 1 al 6. Calcula la probabilidad de que el número escogido sea impar.

RESUMEN

<b>Sucesos</b>	Al realizar un experimento aleatorio existen varios posibles resultados o <b>sucesos posibles</b> . Un <b>suceso</b> es un subconjunto del conjunto de posibles resultados.	Tiramos un dado. Posibles resultados = {1, 2, 3, 4, 5, 6} Suceso <i>obtener múltiplo de 3</i> = {3, 6}
<b>Asignación de probabilidades</b>	Una medida Límite al que tienden las frecuencias relativas. Regla de Laplace: Si los sucesos elementales son equiprobables entonces: $p = \text{casos favorables} / \text{casos posibles.}$	$P(5) = 1/6.$ $P(\text{sacar múltiplo de 3}) = 2/6$
<b>Axiomática de Kolmogorov</b>	1. $P(E) = 1.$ 2. $P(A) \geq 0$ , para todo $A.$ 3. Si $A \cap B = \emptyset$ entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B).$	
<b>Teoremas de Probabilidad</b>	Suceso contrario: $P(X) + P(\text{no}X) = 1.$ Intersección: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A).$ Unión: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$	$P(\text{no } 5) = 1 - 1/6 = 5/6.$ $P(5 \cup \text{múl. } 3) = 1/6 + 2/6 = 3/6$ $P \text{ sacar primero un } 5 \text{ y luego múltiplo de } 3 = 1/6 \cdot 2/6 = 2/36$
<b>Teorema de Bayes</b>	$P(A_i / B) = \frac{P(B / A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B / A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^n P(B / A_k) \cdot P(A_k)}$	

## EJERCICIOS Y PROBLEMAS

- En un colegio se selecciona un grupo de 200 estudiantes de los cuales todos estudian francés o inglés. De ellos 150 estudian inglés y 70 estudian francés. ¿Cuántos estudian francés e inglés? En otro centro escolar se estudian varios idiomas: francés, inglés, alemán, italiano. Se seleccionan también 200 estudiantes de los cuales, 150 estudian inglés, 70 francés y 40 ambos idiomas, ¿cuántos estudiantes de ese centro no estudian ni francés ni inglés?
- Lanzamos un dado. Calcula la probabilidad de: a) Sacar un número impar. b) No sacar un 3. c) Sacar un número mayor que 3. d) Sacar un número mayor que 3 y que sea impar. e) Sacar un número mayor que 3 o bien que sea impar.
- En una clase hay 24 alumnos y 14 alumnas. La mitad de las alumnas y la tercera parte de los alumnos tienen los ojos azules. Se elige un estudiante al azar. A) Calcula la probabilidad de que sea chico y tenga los ojos azules. B) Calcula la probabilidad de que sea chico o tenga los ojos azules.
- Antonio, Juan y Jorge tienen una prueba de natación. Antonio y Juan tienen la misma probabilidad de ganar, y doble a la probabilidad de Jorge. Calcula la probabilidad de que gane Juan o Jorge.
- Lanzamos dos monedas distintas, una de 50 céntimos y otra de un euro. Calcula la probabilidad de que: A) En la moneda de un euro salga cara. B) Salga una cara. C) Salga al menos una cara. D) No salga ninguna cara. E) Salga una cara y una cruz.
- Lanzamos tres monedas. Calcula las probabilidades de: A) No salga ninguna cara. B) Salga al menos una cara. C) Salgan dos caras y una cruz.
- Lanzamos dos dados y anotamos los valores de las caras superiores. Calcula las probabilidades de que la suma sea 1, sea 2, sea 3, .... sea 12.
- ¿Qué es más probable al tirar tres dados, que la suma de sus caras superiores sea 9 o sea 10? Escribe el suceso “sea 9” y el suceso “sea 10” y calcula las probabilidades de sus sucesos elementales. ¡Sabes ya más que *Galileo*!
- Lanzamos a la vez una moneda y un dado. Llama A al suceso “Salga cara y un número par”. B al suceso “Salga cruz y un número primo” y C al suceso “salga un número primo”. Calcula las probabilidades de A, B y C. ¿Cómo son estos sucesos? Indica cuáles de ellos son compatibles y cuáles son incompatibles.
- Lanzamos una moneda 50 veces, ¿qué es más probable, obtener 50 caras seguidas o obtener en las primeras 25 tiradas cara y en las 25 siguientes cruz? Razona la respuesta.
- Una moneda está trucada. La probabilidad de obtener cara es doble que la de obtener cruz. Calcula las probabilidades de los sucesos obtener cara y de obtener cruz al tirar la moneda.
- Tres chicos y dos chicas juegan un torneo de ajedrez. Todos los chicos tienen idéntica probabilidad de ganar, y todas las chicas, también. Pero la probabilidad de ganar una chica es doble de la de ganar un chico. Calcula la probabilidad de que un chico gane el torneo.
- Siete parejas de novios están en una habitación. Se seleccionan dos personas al azar. Calcula la probabilidad de: a) Sean un chico y una chica. b) Sean una pareja de novios. Ahora se escogen 4 personas al azar. Calcula la probabilidad de: c) Haya al menos una pareja de novios. d) No haya ninguna pareja de novios.

14. Tenemos un dado trucado de forma que los números impares tienen una probabilidad doble a la de los números pares. Calcula las probabilidades de: A) Salga un número impar. B) Salga un número primo. C) Salga un número primo impar. D) Salga un número que sea primo o sea impar.
15. En un grupo de 12 amigas hay 3 rubias. Se eligen dos chicas al azar. Calcula la probabilidad de que: A) Ambas sean rubias. B) Al menos una sea rubia. C) Ninguna sea rubia. D) Una sea rubia y la otra no.
16. Lanzamos dos dados y anotamos los valores de las caras superiores. Calcula las probabilidades de que: A) Los números obtenidos sean iguales. B) Los números obtenidos difieran en 3 unidades. C) Los números obtenidos sean pares.
17. Lanzamos una moneda hasta que salga cara. Calcula la probabilidad de que: A) Salga cara antes del cuarto lanzamiento. B) Salga cara después del octavo lanzamiento.
18. Un lote de 20 artículos tiene 2 defectuosos. Se sacan 4 al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno sea defectuoso?
19. Se lanzan dos dados y la suma de las caras superiores es 7. ¿Cuál es la probabilidad de que en uno de los dados haya salido un 3?

## AUTOEVALUACIÓN

- Al tirar dos dados, la probabilidad de sacar al menos un 5 es:  
a)  $5/6$                       b)  $11/36$                       c)  $25/36$                       d)  $30/36$
- Al tirar 3 monedas, la probabilidad de sacar exactamente dos caras es:  
a)  $1/2$                       b)  $3/4$                       c)  $3/8$                       d)  $5/8$
- Al tirar 3 monedas, la probabilidad de sacar al menos dos caras es:  
a)  $1/2$                       b)  $3/4$                       c)  $3/8$                       d)  $5/8$
- Sacamos una carta de una baraja de 40 cartas, la probabilidad de que sea un oro o un múltiplo de 2 es:  
a)  $22/40$                       b)  $19/40$                       c)  $36/40$                       d)  $3/4$
- Indica cuál de las afirmaciones siguientes es **siempre** correcta:  
a)  $P(A) + P(\text{no}A) = 1$   
b)  $P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B)$   
c)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- El espacio muestral de sucesos elementales equiprobables del experimento “tirar dos monedas y contar el número de caras” es:  
a)  $\{2C, 1C, 0C\}$                       b)  $\{CC, CX, XC, XX\}$                       c)  $\{XX, XC, CC\}$                       d)  $\{CC, CX, XC, CC\}$
- Tiramos dos dados y contamos los puntos de las caras superiores. La probabilidad de que la suma sea 7 es:  
a)  $1/6$                       b)  $7/36$                       c)  $5/36$                       d)  $3/36$
- Al sacar una carta de una baraja española (de 40 cartas), la probabilidad de que sea un oro o bien un rey es:  
a)  $14/40$                       b)  $13/40$                       c)  $12/40$                       d)  $15/40$
- En una bolsa hay 7 bolas rojas, 2 negras y 1 bola blanca. Se sacan 2 bolas. La probabilidad de que las dos sean rojas es:  
a)  $49/100$                       b)  $42/100$                       c)  $49/90$                       d)  $7/15$
- Tiramos tres monedas al aire. La probabilidad de que las tres al caer sean caras es:  
a)  $1/5$                       b)  $1/7$                       c)  $1/8$                       d)  $1/6$