

3º A da ESO

Capítulo 2:

Potencias e raíces

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-031750

Fecha y hora de registro: 2014-02-07 13:41:58.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



www.apuntesmareaverde.org.es



Autora: Nieves Zuasti

Revisor: Sergio Hernández

Tradutora: M^a Teresa Seara Domínguez

Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Índice

1. OPERACIONES CON POTENCIAS

- 1.1. PRODUCTO DE POTENCIAS
- 1.2. COCIENTE DE POTENCIAS
- 1.3. POTENCIA DUN PRODUCTO
- 1.4. POTENCIA DUN COCIENTE
- 1.5. POTENCIA DOUTRA POTENCIA

2. POTENCIAS DE NÚMEROS RACIONAIS

- 2.1. OPERACIONES CON BASE RACIONAL

3. NOTACIÓN CIENTÍFICA

- 3.1. GRANDES E PEQUEÑOS NÚMEROS
- 3.2. OPERACIONES CON NOTACIÓN CIENTÍFICA

4. RAÍCES

- 4.1. RAÍCES DE NÚMEROS RACIONAIS
- 4.2. RADICAIS DE ÍNDICE CALQUERA
- 4.3. POTENCIAS DE EXPOÑENTE RACIONAL
- 4.4. EXTRACCIÓN DE FACTORES DUN RADICAL
- 4.5. OPERACIONES CON RADICAIS

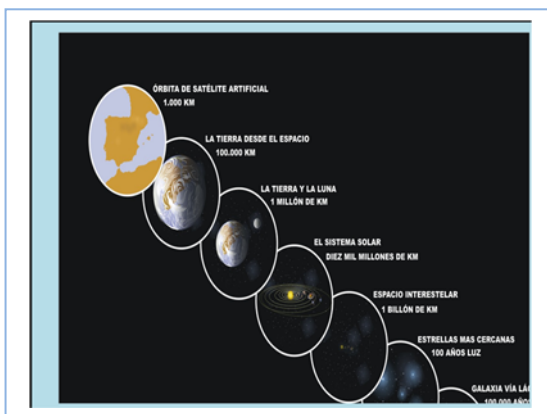
Resumo

Neste capítulo utilizamos os grandes números, as potencias, que nos permiten describir de maneira máis fácil a inmensidade do Universo, expresar as súas distancias, a masa dos corpos celestes, o número de galaxias, estrelas e planetas.

Tamén nos fixaremos nos pequenos números. O mundo microscópico expresado en forma de potencia de expoñente negativo.

Utilizaremos a notación científica para grandes e pequenos números.

Repasaremos as operacións con potencias de expoñente un número natural introduciendo as potencias con expoñentes negativos e racionais. Xa coñecemos as potencias de base un número natural, agora usaremos as mesmas ideas utilizando bases de números negativos e racionais. Xa coñeces os radicaís, agora veremos que un radical é unha potencia de expoñente un número fraccionario e que podemos utilizar as propiedades das potencias con eles.



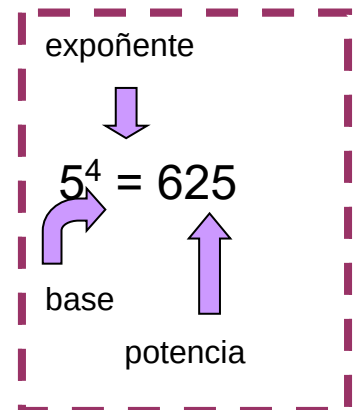
1. OPERACIÓNS CON POTENCIAS

Recorda que a **potencia** a^n de base un número natural a e expoñente natural n é un produto de n factores iguais á base:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \dots n \text{ factores} \dots a \quad (n > 0)$$

O factor que se repite é a **base** e o número de veces que se repite é o **expoñente**. Ao resultado chámasele **potencia**.

Xa coñeces as propiedades das operacións con potencias que imos repasar. Neste capítulo veremos que se o expoñente ou se a base é un número negativo ou fraccionario, esas propiedades mantéñense.



Recorda:

$$a^0 = 1$$

$$1^m = 1$$

$$(-1)^m = 1 \quad m \text{ par}$$

$$(-1)^n = -1 \quad n \text{ impar}$$

$$0^n = 0$$

$$a = a^1$$

1.1. Produto de potencias

Coa mesma base

O produto de potencias da mesma base é outra potencia coa mesma base e de expoñente a suma dos expoñentes.

$$b^m \cdot b^n \cdot b^p = b^{m+n+p}$$

Exemplo:

$$(-5)^4 \cdot (-5)^{-3} \cdot (-5)^2 \cdot (-5)^{-6} = (-5)^{4+(-3)+2+(-6)} = (-5)^{-3} = 1/(-5)^3 = 1/-125$$

Co mesmo expoñente

O produto de potencias co mesmo expoñente é outra potencia cuxa base se calcula multiplicando as bases elevada ao mesmo expoñente.

$$a^m \cdot b^m \cdot c^m = (a \cdot b \cdot c)^m$$

Exemplo:

$$(-3)^2 \cdot (5)^2 \cdot (-1)^2 \cdot (-4)^2 = [(-3) \cdot (5) \cdot (-1) \cdot (-4)]^2 = (+60)^2 = 3\ 600$$

1.2. Cociente de potencias

Coa mesma base

O cociente entre dúas potencias da mesma base é outra potencia coa mesma base e o seu expoñente calcúlase restando os expoñentes.

$$c^m : c^n = c^{m-n}$$

Exemplo:

$$(-12)^7 : (-12)^2 = (-12)^{7-2} = (-12)^5$$

Co mesmo expoñente

Para dividir potencias co mesmo expoñente divídense as bases e o resultado elévase ao mesmo expoñente.

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Exemplo:

$$18^4 : 3^4 = (18/3)^4 = 6^4$$

Exemplo:

$$(5)^3 : (-14)^3 = (5/-14)^3$$

Potencias de expoñente enteiro negativo

Unha potencia de base real $a \neq 0$ e expoñente natural $n < 0$ é o inverso da mesma con expoñente positivo.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

A expresión a^{-n} pode ser o resultado de dividir dúas potencias da mesma base. Xa que:

$$a^x : a^y = a^{x-y} \text{ se } x < y \text{ (} x - y < 0 \text{)}$$

Exemplo:

$$6^3 : 6^8 = 6^{3-8} = 6^{-5} = 1/6^5$$

1.3. Potencia dun produto

A potencia dun produto pode calcularse realizando primeiro o produto e elevando o resultado á devandita potencia ou ben elevando cada un dos factores á devandita potencia e realizando despois o produto.

$$(a \cdot b \cdot c \cdot d)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n \cdot d^n$$

Exemplo:

$$[(-2) \cdot (+5) \cdot (-4)]^3 = (+40)^3 = +64\,000 = (-2)^3 \cdot (+5)^3 \cdot (-4)^3 = (-8) \cdot (+125) \cdot (-64) = +64\,000$$

1.4. Potencia dun cociente

A potencia dun cociente pode calcularse efectuando primeiro o cociente e elevando o resultado á devandita potencia. Ou ben elevar o dividendo e o divisor á potencia e despois efectuar o cociente.

$$(a : b)^m = a^m : b^m$$

Exemplo:

$$[(5) : (-4)]^2 = (5/-4)^2 = (-1.25)^2 = +1.5625 = (5)^2 : (-4)^2 = 25 : 16 = 1.5625$$

1.5. Potencia doutra potencia

Ao elevar unha potencia a outra potencia obtemos unha potencia coa mesma base e cuxo expoñente é o produto dos expoñentes:

$$((d)^m)^n = d^{m \cdot n}$$

Exemplo:

$$((-5)^3)^6 = (-5)^{3 \cdot 6} = (-5)^{18}$$

Actividades resoltas

- ✚ Cántase que o inventor do xadrez llo amosou ao rei Shirham da India que se entusiasmou tanto que lle ofreceu regalarlle o que quixera. O inventor pediulle un gran de trigo para a primeira casa, dous para a segunda, 4 para a terceira e así duplicando a cantidade en cada casa. Cantos grans de trigo habería que poñer na derradeira casa, na 64?



Observamos que o número de grans de trigo da casa n é 2^{n-1} polo que debemos calcular 2^{63} . Calculamos $2^2 = 4$. Logo:

$$(2^2)^2 = 2^4 = 16$$

$$((2^2)^2)^2 = 2^8 = 16 \cdot 16 = 256$$

$$(((2^2)^2)^2)^2 = (2^8)^2 = 2^{16} = 256 \cdot 256 = 65\,536$$

$$((((2^2)^2)^2)^2)^2 = (2^{16})^2 = 2^{32} = 65\,536 \cdot 65\,536 = 4\,294\,967\,296$$

$$((((((2^2)^2)^2)^2)^2)^2)^2 = (2^{32})^2 = 2^{64} = 4\,294\,967\,296 \cdot 4\,294\,967\,296 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616$$

E agora para calcular 2^{63} podemos dividir potencias da mesma base:

$$2^{63} = 2^{64}/2 = 9\,223\,372\,036\,854\,775\,808 \text{ grans de trigo. Un número enorme e difícil de manexar.}$$

Para calcular o número total de grans de trigo observamos que a suma de grans ata a casa n é 2^n polo que entón debemos calcular 2^{64} que estimando 1 200 grans por kg dan pouco máis de 15 billóns de Tm e iso corresponde á produción mundial de 21 685 anos. Imposible que o rei tivese tanto trigo!

Actividades propostas

1. Determina o signo das potencias:

$$(-1)^9 \quad (5)^{12} \quad (-12)^{-5} \quad (8)^{-4}$$

2. Expresa en forma dunha única potencia:

$$(-7)^3 \cdot (-7)^5 \cdot (-7)^2 \cdot (-7)^6$$

$$(3)^2 \cdot (3)^7 \cdot (3) \cdot (3)^4 \cdot (3)^3$$

3. Expresa en forma de potencia:

$$(-6)^4 \cdot (4)^4 \cdot (-1)^4 \cdot (-5)^4$$

4. Expresa en forma de potencia:

$$(-8)^9 : (-8)^3 \quad (-3)^2 : (-3)^7$$

5. Expresa en forma de potencia:

$$(+75)^4 : (-3)^4 \quad (-5)^8 : (8)^8$$

6. Expresa en forma de potencia:

$$((-2)^5)^6 \quad ((7)^3)^{-5}$$

Alga marina (fotografía microscópica)



2. POTENCIA DE BASE RACIONAL

A potencia dun número racional é outro número racional cuxo numerador e denominador quedan elevados á devandita potencia.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Exemplo:

$$\left(\frac{-2}{5}\right)^4 = \left(\frac{-2}{5}\right) \cdot \left(\frac{-2}{5}\right) \cdot \left(\frac{-2}{5}\right) \cdot \left(\frac{-2}{5}\right) = \frac{(-2)^4}{5^4} = \frac{16}{625}$$

2.1. Potencias de base racional e expoñente negativo

O resultado de elevar un número racional a unha potencia negativa é outra potencia cuxa base é o número racional inverso elevado ao mesmo expoñente positivo.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Exemplo:

$$(4/9)^{-5} = (9/4)^5$$

2.2. Produto de potencias de base racional

Mantéñense as propiedades das potencias de base un número natural.

Coa mesma base

O resultado de multiplicar potencias coa mesma base é outra potencia coa mesma base e expoñente a suma dos expoñentes.

$$(a/b)^m \cdot (a/b)^n \cdot (a/b)^p = (a/b)^{m+n+p}$$

Exemplo:

$$(2/5)^3 \cdot (2/5) \cdot (2/5)^{-4} \cdot (2/5)^5 = (2/5)^{3+1+(-4)+5} = (2/5)^5$$

Co mesmo expoñente

O resultado de multiplicar potencias co mesmo expoñente é outra potencia cuxa base é o produto das bases elevada ao mesmo expoñente.

$$(a/b)^m \cdot (c/d)^m \cdot (e/f)^m = [(a/b) \cdot (c/d) \cdot (e/f)]^m$$

Exemplo:

$$(-2/3)^4 \cdot (1/4)^4 \cdot (3/5)^4 = [(-2/3) \cdot (1/4) \cdot (3/5)]^4 = (-6/60)^4 = (-1/10)^4$$

Actividades propostas

7. Calcula: a) $(5/3)^3$ b) $(-2/7)^{-4}$ c) $(-1/6)^4$ d) $(-5/2)^{-2}$
8. Expressa como única potencia: a) $(-3/4)^3 \cdot (-3/4)^2 \cdot ((-3/4)^{-8})$ b) $(1/8)^{-5} \cdot (1/8)^4 \cdot (1/8)^{-2}$
9. Expressa como única potencia:
- a) $(5/4)^6 \cdot (-2/3)^6 \cdot (-1/7)^6$ b) $(-3/5)^{-4} \cdot (-3/8)^{-4} \cdot (-1/4)^{-4}$

2.3. Cociente de potencias de base racional

✚ Coa mesma base

O resultado de dividir potencias coa mesma base é outra potencia coa mesma base e o expoñente a diferenza dos expoñentes.

$$(a/b)^m : (a/b)^n = (a/b)^{m-n}$$

Exemplo:

$$(-1/3)^3 : (-1/3)^4 = (-1/3)^{3-4} = (-1/3)^{-1}$$

✚ Co mesmo expoñente

O resultado de dividir potencias co mesmo expoñente é outra potencia cuxa base é o cociente das bases elevada ao mesmo expoñente.

$$(a/b)^m : (c/d)^m = [(a/b) : (c/d)]^m$$

Exemplo:

$$(-3/4)^{-5} : (7/8)^{-5} = [(-3/4) : (7/8)]^{-5} = (-24/28)^{-5} = (-6/7)^{-5} = (-7/6)^5$$

2.4. Operacións combinadas con potencias

Exemplo:
$$\frac{(-3)^3 \cdot (-3)^{-5} \cdot (-3)}{(-3)^8 \cdot (-3)^{-6}} = \frac{(-3)^{3-5+1}}{(-3)^{8-6}} = \frac{(-3)^{-1}}{(-3)^2} = (-3)^{-1-2} = (-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = -\frac{1}{27}$$

Exemplo:

$$\frac{(5^4 \cdot (-2)^4 \cdot 3^4)^3}{(9^2 \cdot 4^2)^3} = \frac{[(5 \cdot (-2) \cdot 3)^4]^3}{[(3^2)^2 \cdot (2^2)^2]^3} = \frac{[(-30)^4]^3}{[(3 \cdot 2)^2]^3} = \frac{[(-30)^4]^3}{[6^4]^3} = [(-5)^4]^3 = (-5)^{12} = 244\,140\,625.$$

Actividades propostas

10. Calcula:

a) $(-2/5)^4 : (-2/5)^7$

b) $(5/8)^3 : (5/8)^{-2}$

11. Calcula:

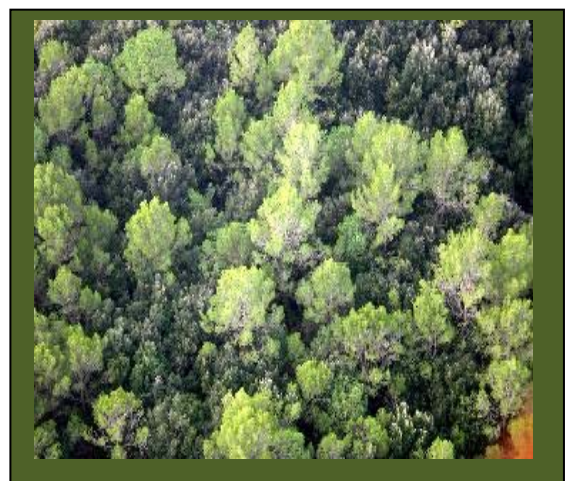
a) $(1/5)^{-3} : (2/9)^{-3}$

b) $(-6)^5 : (-2/9)^5$

12. Calcula:

a) $\frac{3^2 \cdot \frac{2^5}{5^5}}{(-4) \cdot 4^5}$

b) $\frac{\left(\frac{-2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{-1}{6}\right)^2}{\left(\frac{3}{8}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^6}$



4. NOTACIÓN CIENTÍFICA

4.1. Expresións en notación científica

Un número expresado en notación científica está formado por un número decimal cuxa parte enteira está entre 1 e 9 multiplicado por 10^n sendo n un número enteiro positivo ou negativo.

$$a \cdot 10^n \text{ sendo } 1 \leq a \leq 9$$

Se o expoñente n é positivo utilízase para expresar números grandes e se o expoñente n é negativo para expresar números pequenos

Exemplo:

$$3\,420\,000\,000\,000 = 3.42 \cdot 10^{12}$$

$$0.0000000000057 = 5.7 \cdot 10^{-11}$$

Actividades resoltas

- Na lenda do xadrez utilizamos números moi grandes. Se non nos interesa tanta aproximación senón facemos unha idea unicamente do grandes que son podemos usar a notación científica.

Unha aproximación para o número de grans de trigo da casa 64 é $9 \cdot 10^{18}$ co que nos facemos unha idea mellor do enorme que é que co número: 9 223 372 036 854 775 808 que dá un pouco de mareo.

- Escribe en notación científica: 2^{16} ; 2^{32} e 2^{64}

$$2^{16} = 65\,536 \approx 6.5 \cdot 10^4$$

$$2^{32} = 4\,294\,967\,296 = 4 \cdot 10^9$$

$$2^{64} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616 = 1.8 \cdot 10^{19}$$



4.2. Operacións con notación científica

Suma ou diferenza

Para realizar sumas e restas con expresións en notación científica transfórmase cada expresión decimal de maneira que se iguallen os expoñentes de 10 en cada un dos termos.

Exemplo:

Para calcular $4 \cdot 10^8 + 2.3 \cdot 10^6 - 6.5 \cdot 10^5$ expresamos todos os sumandos coa mesma potencia de 10 elixindo a menor. Neste caso 10^5 :

$$4\,000 \cdot 10^5 + 23 \cdot 10^5 - 6.5 \cdot 10^5$$

Sacamos factor común: $10^5 \cdot (4\,000 + 23 - 6.5) = 4\,016.5 \cdot 10^5 = 4.0165 \cdot 10^8$

Produto

O produto de expresións en notación científica é o resultado de multiplicar os números decimais e sumar os expoñentes de base 10.

Exemplo:

$$2.5 \cdot 10^5 \cdot 1.36 \cdot 10^6 = (2.5 \cdot 1.36) \cdot 10^{5+6} = 3.4 \cdot 10^{11}$$

Cociente

O cociente de dúas expresións en notación científica é o resultado de dividir os números decimais e restar os expoñentes de base 10.

Exemplo:

$$5.4 \cdot 10^9 : 4 \cdot 10^7 = (5.4 : 4) \cdot 10^{9-7} = 1.35 \cdot 10^2$$

Actividades resoltas

Para facer o cociente para calcular 2^{63} dividindo 2^{64} entre 2 en notación científica:

$$2^{63} = 2^{64} / 2 = 1.8 \cdot 10^{19} / 2 = 0.9 \cdot 10^{19} = 9 \cdot 10^{18}.$$

Usa a calculadora

As calculadoras utilizan a notación científica. Moitas calculadoras para escribir $9 \cdot 10^{18}$ escriben 9e+18.

13. Utiliza a túa calculadora para obter 2^{16} ; 2^{32} e 2^{64} e observa como dá o resultado.

14. Utiliza a calculadora para obter a túa idade en segundos en notación científica.

Actividades propostas

15. Efectúa as operacións en notación científica:

a) $0.000257 + 1.4 \cdot 10^{-5}$ b) $200\,000\,000 - 3.5 \cdot 10^6 + 8.5 \cdot 10^5$

16. Efectúa as operacións en notación científica:

a) $(1.3 \cdot 10^5) \cdot (6.1 \cdot 10^{-3})$ b) $(4.7 \cdot 10^{-8}) \cdot (3 \cdot 10^6) \cdot (2.5 \cdot 10^{-4})$

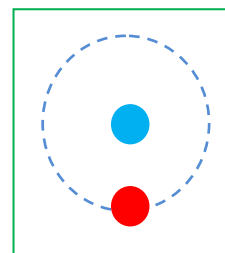
17. Efectúa as operacións en notación científica:

a) $(5 \cdot 10^{-8}) : (1.5 \cdot 10^{-3})$ b) $(3.25 \cdot 10^{-5}) \cdot (5 \cdot 10^2) : (6.15 \cdot 10^{-7})$

18. Estímase que o volume da auga dos océanos é de $1\,285\,600\,000\text{ km}^3$ e o volume de auga doce é de $35\,000\,000\text{ km}^3$. Escribe esas cantidades en notación científica e calcula a proporción de auga doce.

19. Sábese que nun átomo de hidróxeno o núcleo constitúe o 99 % da masa e que a masa dun electrón é aproximadamente de $9.109 \cdot 10^{-31}\text{ kg}$. Que masa ten o núcleo dun átomo de hidróxeno? (*Recorda:* Un átomo de hidróxeno está formado polo núcleo cun protón e por un único electrón)

20. A Xoán fixéronlle unha análise de sangue e ten 5 millóns de glóbulos vermellos en cada mm^3 . Escribe en notación científica o número aproximado de glóbulos vermellos que ten Xoán estimando que ten 5 litros de sangue.



5. RADICAIS

5.1. Radicais de índice calquera

A raíz enésima dun número a é un número x que ao elevalo a n dá como resultado a .

$$\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a.$$

Recorda:

n = índice da raíz

a = radicando

$x = \sqrt[n]{a}$ raíz

A **raíz cadrada** dun número real non negativo a é un único número non negativo x que elevado ao cadrado nos dea a :

Observación

Non confundas resolver unha **ecuación** $x^2 = 9$ que ten dúas raíces 3 e -3 con calcular unha **raíz** como $\sqrt{9}$ que é **unicamente** 3.

Imaxina que lío tan horrible sería calcular $\sqrt{9} + \sqrt{1} + \sqrt{4}$ se o resultado puidese ser:

$3 + 1 + 2 = 6$ ou ben $3 - 1 - 2 = 0$ ou ben $-3 + 1 - 2 = -4$ ou ben $3 - 1 + 2 = 4 \dots$

A raíz enésima dun número no campo real ou non existe ou é **única**.

$$\sqrt{a} = x \Leftrightarrow x^2 = a; a \geq 0; x \geq 0.$$

Observa que $\sqrt{-1}$ non existe no campo real. Ningún número real ao elevalo ao cadrado dá un número negativo. Só podemos calcular raíces de expoñente par de números positivos.

Porén $\sqrt[3]{-1} = -1$ pois $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$.

Actividades resoltas

- ✚ Canto mide o lado dunha habitación cadrada embaldosada con 144 baldosas cadradas de 25 cm de lado?

Cada lado terá $\sqrt{144} = 12$ baldosas que miden 25 cm. Logo medirá: $12 \cdot 25 = 300 \text{ cm} = 3 \text{ m}$ de longo.

- ✚ Nun depósito cúbico caben 1 000 cubos de 1 dm^3 . Canto mide a súa aresta? E se caben 12 167 cubos?

Calculamos $\sqrt[3]{1\ 000} = 10$. A aresta mide 10 dm. Calculamos agora $\sqrt[3]{12\ 167} = 23$. A aresta mide 23 dm porque $23 \cdot 23 \cdot 23 = 12\ 167$.

- ✚ Calcula $\sqrt[3]{-64}$; $\sqrt[3]{-8}$; $\sqrt[3]{-27}$; $\sqrt[3]{-1\ 000}$.

As raíces de radicando negativo e índice impar si existen:

$$\sqrt[3]{-64} = -4; \sqrt[3]{-8} = -2; \sqrt[3]{-27} = -3; \sqrt[3]{-1\ 000} = -10.$$



5.2. Potencias de expoñente fraccionario

Defínese $x^{\frac{1}{n}}$ como $\sqrt[n]{x}$:

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

Polo tanto a potencia $x^{\frac{m}{n}}$ pode expresarse en forma de radical de maneira que n será o índice da raíz e m o expoñente do radicando.

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$



Exemplo:

a) $5^{2/3} = \sqrt[3]{5^2}$

As propiedades das potencias de expoñente fraccionario coinciden coas das potencias de expoñente un número natural.

Actividades resoltas

✚ Simplifica os radicais $\sqrt[4]{2^{12}}$; $\sqrt[10]{7^{15}}$ usando potencias de expoñente fraccionario.

Escribimos o radical como potencia de expoñente fraccionario e simplificamos as fraccións:

$$\sqrt[4]{2^{12}} = 2^{\frac{12}{4}} = 2^3 = 8.$$

$$\sqrt[10]{7^{15}} = 7^{\frac{15}{10}} = 7^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{7^3} = 7 \cdot \sqrt{7}$$

✚ Calcula $\sqrt{484}$ e $\sqrt[3]{27\,000}$ factorizando previamente os radicandos

$$\sqrt{484} = \sqrt{2^2 \cdot 11^2} = 2 \cdot 11 = 22$$

$$\sqrt[3]{27\,000} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

✚ Calcula $25^{0.5}$; $32^{\frac{3}{5}}$ e $\left(3^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{5}{2}}$

$$25^{0.5} = 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$$

$$32^{\frac{3}{5}} = (2^5)^{\frac{3}{5}} = 2^{\frac{5 \cdot 3}{5}} = 2^3 = 8$$

$$\left(3^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{5}{2}} = 3^{\frac{6 \cdot 5}{5 \cdot 2}} = 3^3 = 27$$

5.3. Extracción de factores dun radical

Temos $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ con $m > n$. Para extraer factores da raíz realizamos o cociente: m dividido entre n ten de cociente p e de resto r : $m = n \cdot p + r$. O resultado é $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n]{x^{n \cdot p + r}} = x^{\frac{n \cdot p + r}{n}} = x^{p + \frac{r}{n}} = x^p \cdot \sqrt[n]{x^r}$.

$$\text{Se } m > n, \quad x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = x^p \cdot \sqrt[n]{x^r}.$$

Exemplo:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x^5} &= x \cdot \sqrt[3]{x^2} \\ \sqrt{2^4 \cdot 3^3 \cdot 5} &= \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 5} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3 \cdot 5} = 12 \cdot \sqrt{15} \end{aligned}$$

Actividades propostas

21. Calcula todas as solucións:

a) $\sqrt{121}$ b) $\sqrt[3]{-8}$ c) $\sqrt[4]{10\,000}$ d) $\sqrt[5]{-1}$ e) $\sqrt[3]{1}$

22. Expresa en forma de radical

a) $(-3)^{4/5}$ b) $8^{1/3}$ c) $5^{2/3}$

23. Extrae os factores posibles en cada radical:

a) $\sqrt[4]{a^6 b^5}$ b) $\sqrt[3]{6^5 \cdot 3^4 \cdot 2^6}$ c) $\sqrt{4 \cdot 5^3 \cdot 9^3}$

5.4. Operacións con radicais

Como os radicais se poden escribir como potencias, teñen as propiedades que xa coñeces das potencias.

5.4.1. Raíz dun produto

A raíz dun produto é igual ao produto das raíces dos factores

$$\sqrt[n]{x \cdot y \cdot z} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} \cdot \sqrt[n]{z}$$

Exemplo:

$$\sqrt[3]{8 \cdot 27 \cdot 64} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{64} = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

5.4.2. Raíz dun cociente

A raíz dun cociente é igual ao cociente da raíz do dividendo e a raíz do divisor

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

Exemplo:

$$\sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{243}} = \frac{2}{3}$$

5.4.3. Raíz dunha raíz

A raíz dunha raíz é igual a outra raíz co mesmo radicando e cuxo índice é o produto dos índices.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n \cdot m]{x}$$

Exemplo:

$$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3 \cdot 2]{64} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$$

5.5. Operacións combinadas

Exemplo:

$$x^{2/3} \cdot y^{1/3} = \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x^2 \cdot y}$$

Exemplo:

$$\frac{x^{7/4}}{x^{5/3}} = \frac{\sqrt[4]{x^7}}{\sqrt[3]{x^5}} = \frac{x \cdot \sqrt[4]{x^3}}{x \cdot \sqrt[3]{x^2}} = \frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x^2}}$$

Actividades propostas

24. Expressa en forma de produto ou de cociente:

a) $\sqrt[3]{a \cdot b}$

b) $\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7}$

c) $\sqrt[2]{\frac{7}{6}}$

d) $\sqrt{\frac{x^3}{y}}$

25. Expressa en forma de única raíz:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{18}}$

b) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{25}}$

26. Expressa en forma de potencia:

a) $\sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt{2^5}$

b) $\frac{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{5^2}}{\sqrt{5^3}}$

27. Simplifica a expresión:

a) $\left(\frac{x^{2/3}}{\sqrt{x}}\right)^3$

b) $\frac{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[5]{x^{11}}}{\sqrt[3]{x}}$

Recorda

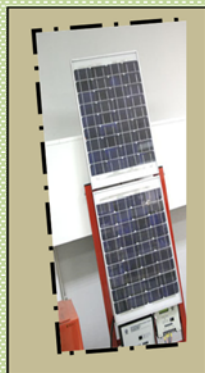
Hai operacións con radicais que **NON** están permitidas.

$10 = \sqrt{100} = \sqrt{64+36}$ que é distinto de:
 $\sqrt{64} + \sqrt{36} = 8 + 6 = 14.$

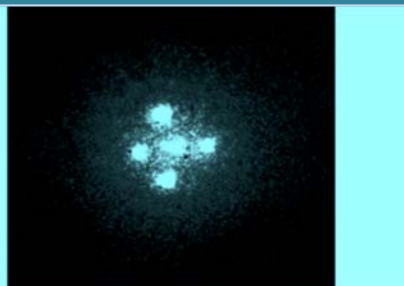


CURIOSIDADES. REVISTA**Células solares de silicio de tamaño microscópico**

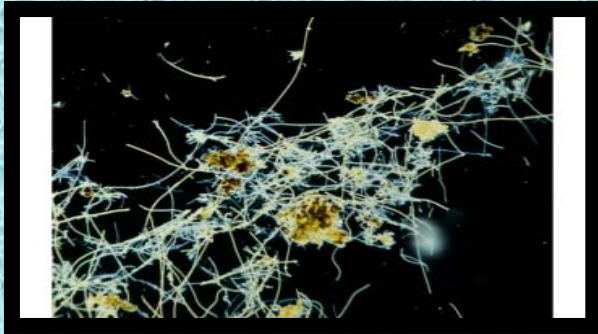
O programa de Tecnoloxía Solar do Departamento de Enerxía de Estados Unidos, no seu obxectivo de conseguir maior eficiencia na produción de enerxía solar, creou células microscópicas de silicio. Estas células utilizan 100 veces menos material de silicio policristalino de 20 micrómetros de grosor cun significativo custe menor de fabricación. Estas células converten case un 15 % da luz solar en enerxía eléctrica.

**Sabías que...**

ás operacións en notación exponencial tamén se lles chama de "**coma flotante**" porque o expoñente equivale á posición do decimal? Nos ordenadores a potencia de cálculo mídese en *mflops* ou miles de operacións en coma flotante por segundo, en inglés *floating point operations per second*, abreviado "flops". O teu ordenador igual pode facer un millón destas operacións por segundo. Un "*xiga flops*"!

A cruz de Einstein

Albert Einstein anunciara, a partir da súa teoría da relatividade xeral, o chamado "espellismo cósmico" ou "lente gravitacional". Este efecto pode explicar a formación de catro ou máis imaxes a partir dunha soa fonte moi distante. A cruz da imaxe resultou ser un só quásar situado a uns 10 000 millóns de anos-luz ao que se lle chamou a Cruz de Einstein cuxa luz queda curvada na súa traxectoria por unha galaxia-lente situada dez veces máis preto.



A presenza das bacterias

Estímase que existen 100 millóns de bacterias de 600 especies diferentes por cada milímetro cúbico de cuspe e 40 millóns de bacterias nun gramo de terra.

Algúns científicos calculan que no interior da Terra podería haber ata 100.000 billóns de toneladas de bacterias de maneira que se todas estiveran sobre a superficie cubrirían o noso planeta ata unha altura de 15 metros. Hai moita máis vida no interior que no exterior.



No Papiro de Ajmeed (1650 a. C.) amósase como os egipcios extraían raíces cadradas. Na antiga India, nos manuscritos do Baudhayana Sulbasutra Aryabhata (800-500 a. C.) anótase un método para calcular raíces cadradas.

En Europa non se encontraron referencias antes de Cataneo (1546). O símbolo da raíz cadrada foi introducido en 1525 polo matemático Christoph Rudolff e é unha forma estilizada do r minúsculo.

RESUMO

	POTENCIAS E RAÍCES	Exemplos
Produto e cociente de potencias	No produto de potencias coa mesma base súmanse os expoñentes. No cociente réstanse os expoñentes co mesmo expoñente: no produto multiplícanse as bases e elévase o resultado ao mesmo expoñente. No cociente divídense as bases e elévase o resultado ao mesmo expoñente.	$(-5)^4 \cdot (-5)^2 = (-5)^6$ $3^2 : 3^7 = 3^{-5}$ $2^5 \cdot 7^5 = 14^5$ $(-5)^3 : (4)^3 = (-5/4)^3$
Potencia dun produto e dun cociente	A potencia dun produto é igual ao produto de cada un dos factores elevados a dita potencia $(a \cdot b \cdot c \cdot d)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n \cdot d^n$ A potencia dun cociente é igual ao cociente do dividendo e o divisor elevados a dita potencia $c^m : c^n = c^{m-n}$	$(5 \cdot 2 \cdot 3)^4 = 5^4 \cdot 2^4 \cdot 3^4$ $(-7/2)^6 = 7^6 / (-2)^6$
Potencia doutra potencia	$((d)^m)^n = d^{m \cdot n}$	$((-4)^3)^5 = (-4)^{15}$
Potencia de base racional	$(a/b)^n = a^n/b^n$	$(6/5)^2 = 6^2/5^2$
Potencia de expoñente negativo	$a^{-n} = 1/a^n$	$8^{-3} = 1/8^3$
Notación científica: operacións	$a \cdot 10^{\pm n}$ sendo $1 \leq a \leq 9$. + n para grandes números - n para pequenos números	$320\,000\,000 = 3.2 \cdot 10^8$ $0.0000000009 = 9 \cdot 10^{-10}$
Radicais: raíces de índice calquera	$\sqrt{49} = 7; \sqrt[3]{-216} = -6; \sqrt[3]{64} = 4; \sqrt[4]{81} = 3; \sqrt[5]{-32} = -2$	
Potencias de expoñente racional	Unha potencia con expoñente racional pode expresarse en forma de raíz cuxo índice é o denominador do expoñente e o radicando queda elevado ao numerador do expoñente: $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$	$8^{2/5} = \sqrt[5]{8^2}$
Extracción de factores dun radical	Se $m = n \cdot c + r$ entón $\sqrt[n]{a^m} = a^c \cdot \sqrt[n]{a^r}$	$\sqrt[3]{8^7} = 8^2 \cdot \sqrt[3]{8}$
Operacións con radicais	$\sqrt[n]{x \cdot y \cdot z} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} \cdot \sqrt[n]{z}; \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$	$\sqrt[4]{5 \cdot 3 \cdot 2} = \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{2} =$ $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3}$

EXERCICIOS E PROBLEMAS**Potencias**

1. Expressa en forma de única potencia:

- a) $2^5 \cdot (-3)^5 \cdot (-1)^5$
- b) $(-1)^3 \cdot (-1)^8 \cdot (1)^5$
- c) $4^3 \cdot (-2)^3 \cdot (-1)^3 \cdot 5^3$
- d) $(-5)^2 \cdot (-5)^4 \cdot (5)$
- e) $(-9)^2 \cdot 9^3 \cdot 9^4 \cdot 9$
- f) $(-18)^4 : (-3)^4$
- g) $(6)^5 : (6)^2$
- h) $(-3)^2 : (-3)^4$

2. Expressa en forma de única potencia:

- a) $\frac{4^2 \cdot 4^3 \cdot 4}{5^6 \cdot (-1)^6}$
- b) $[(2)^7 : (-3)^7] \cdot (-4)^3 \cdot (-4)^4$
- c) $\frac{[-2^4 \cdot (-3)^4 \cdot 6^4]^3 : [(-4)^8 \cdot (-4)^4]}{9^6 \cdot 9^4 : 9}$
- d) $\frac{(-3)^2 \cdot (10)^2 : (-5)^2}{7^5 : 7^3}$

3. Expressa en forma de potencia de expoñente positivo:

- a) $(-4)^{-3}$
- b) $(9)^{-3}$
- c) $(-2)^5 : (-2)^9$
- d) $(-5) \cdot (-5)^2 : (-5)^6$

4. Expressa en forma de única potencia:

- a) $((2)^4)^3$
- b) $((-3)^{-2})^5$
- c) $((-1)^4)^3$
- d) $((5)^2)^{3/5}$

5. Expressa en forma de única potencia:

- a) $(-3/5)^4$
- b) $(2/9)^4$
- c) $(1/5)^{-3}$
- d) $(2/3)^{-4}$

6. Expressa en forma de única potencia:

- a) $(2/3)^{-4} \cdot (2/3)^3 \cdot (2/3)^5$
- b) $(1/6)^3 \cdot (3/5)^3 \cdot (-6/7)^3$
- c) $(-5/3)^4 : (-2/3)^4$
- d) $(4/9)^3 : (4/9)^5$
- e) $((-4/3)^{-3})^5$
- f) $((2/7)^{-1})^{-3}$

7. Expresa en forma de única potencia:

$$a) \frac{(2/3)^3 \cdot (-1/5)^3 \cdot (-4/9)^3 \cdot (1/2)^3}{(-1/4)^3 \cdot (-1/4)^{-2} \cdot (-1/4) \cdot (-1/4)^4}$$

$$b) ((-1/3)^4)^{3/2} \cdot (2/5)^{1/6}$$

$$c) \frac{(2/5)^{1/2} \cdot (2/5)^{3/4} \cdot (2/5)^{-1/6}}{(7/8)^3 : (1/6)^3}$$

8. Expresa en forma de notación científica:

a) 140 000 000

b) 32 800

c) 71 000 000 000 000 000

d) 0.0000075

e) -18 000 000

f) 0.00000000042

g) -0.009

h) 0.00000000007

9. Busca información expresada en notación científica sobre:

a) A distancia entre a Terra e a Lúa

b) Unidade de masa atómica.

c) Km que corresponden a un ano luz.

d) Un gúgol.

e) A lonxitude de onda dos raios cósmicos.

10. Realiza as operacións e expresa o resultado en notación científica:

$$a) 4 \cdot 10^3 + 2.4 \cdot 10^6 - 1.7 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^3$$

$$b) 2.3 \cdot 10^{-5} - 3.45 \cdot 10^{-4} + 6 \cdot 10^{-3}$$

$$c) 3 \cdot 10^{-4} \cdot 4.5 \cdot 10^2$$

$$d) 1.8 \cdot 10^5 : 5 \cdot 10^8$$

Raíces

19. Calcula:

a) $\sqrt{12\,100}$

b) $\sqrt[3]{-0.008}$

c) $\sqrt[3]{-125}$

d) $\sqrt[5]{-1}$

e) $\sqrt{0.49}$

20. Calcula:

a) $\sqrt[4]{2.0736}$

b) $\sqrt[5]{-0.00001}$

c) $\sqrt{33\,640\,000}$

d) $\sqrt[3]{-2.7 \cdot 10^{-6}}$

21. Expresa en forma de raíz:

a) $(-4)^{3/5}$

b) $7^{1/6}$

c) $(21)^{1/3}$

d) $(-5)^{2/3}$

22. Expresa en forma de potencia:

a) $\sqrt[5]{6^3}$

b) $\sqrt{(-7)^5}$

c) $\sqrt{3^5}$

d) $\sqrt[3]{(-30)^4}$

23. Extrae os factores posibles destes radicais:

a) $\sqrt{3^3 \cdot 10^5 \cdot 2}$

b) $\sqrt[3]{6^9 \cdot 2^5}$

c) $\sqrt[4]{x^{11} \cdot y^5}$

d) $\sqrt[3]{3^4 \cdot 5^6}$

24. Extrae os factores posibles destes radicais:

a) $\sqrt[3]{a^7 \cdot b^3 \cdot c^{-6}}$

b) $\sqrt{5^{-5} \cdot 3^{-6}}$

c) $\sqrt[4]{10^5 \cdot 6^8}$

d) $\sqrt{x^3 \cdot x^8 \cdot x}$

25. Simplifica:

a) $\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^3}$

b) $\sqrt[3]{\left(\frac{-4}{5}\right) \cdot \left(\frac{-4}{5}\right)^5}$

c) $\sqrt{\frac{x^3 \cdot y^4}{x^8 \cdot y}}$

d) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{4}\right)^5 : \left(\frac{4}{3}\right)^5}$

26. Expresa en forma de produto:

a) $\sqrt{3 \cdot 50 \cdot 12}$

b) $\sqrt[3]{5^2 \cdot 2^4 \cdot 3^6}$

c) $\sqrt{8 \cdot 3^4 \cdot 9}$

d) $\sqrt[3]{a^8 \cdot b^2 \cdot c^6}$

27. Expresa en forma de cociente:

a) $\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)}$

b) $\sqrt[5]{\frac{15}{32}}$

c) $\sqrt[3]{\frac{-7}{9}}$

d) $\sqrt{\frac{15}{24}}$

28. Expresa en forma de única raíz:

a) $\sqrt{\sqrt{48}}$

b) $\sqrt[3]{\sqrt{450}}$

c) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{9000}}$

d) $\sqrt[2]{\sqrt[5]{-1}}$

29. Simplifica as operacións:

a) $\sqrt[3]{3^5} \cdot \sqrt[3]{2^4}$

b) $(\sqrt[3]{-27}) \cdot 5^{\frac{2}{3}}$

c) $\sqrt[5]{2^{12}} : \sqrt[5]{3^8}$

d) $\sqrt[2]{3} \cdot \sqrt[2]{10^5} : \sqrt{2^3}$

30. Simplifica as operacións:

a) $\sqrt[3]{x^5} : \sqrt{x^3}$

b) $\sqrt{\sqrt{10^{12}}}$

c) $\sqrt{5 \cdot (-2)^6 \cdot (-3)^6}$

d) $\sqrt[5]{(-6)^{12}} : \sqrt[5]{(-6)^7 \cdot 3^{10}}$

31. Simplifica as operacións:

a) $\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} : 5^{\frac{2}{3}}$

b) $\frac{(-4)^5 \cdot \sqrt[3]{(-4)}}{\sqrt{2^3} : \sqrt{2^5}}$

c) $\frac{((-7^3))^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[3]{(-7)^2}}{\sqrt{\sqrt{(-7)}}$

AUTOAVALIACIÓN

1. O resultado das operacións seguintes é: $(-6)^3 \cdot (-6)^{-5} \cdot (-6)$ e $(12)^7 : (12)^5$
 - a) 6 e 12^2
 - b) $1/6$ e 12^5
 - c) $-1/6$ e 12^2
2. O resultado das operacións seguintes é: $(-5)^4 \cdot (-1)^4 \cdot (6)^4$ e $(-8)^7 : (5)^7$
 - a) $(-30)^4$ e $(-3)^7$
 - b) 30^4 e $(-8/5)^7$
 - c) 30^4 e $(-3)^7$
3. O resultado das operacións seguintes é: $((-2)^5)^3$; $((-1)^5)^7$ e $((-5)^{2/3})^6$
 - a) $(-2)^{15}$; (-1) e $(5)^{8/3}$
 - b) -2^{15} ; (-1) e -5^4
 - c) $(-2)^{15}$; (-1) e $(-5)^4$
4. O resultado das operacións seguintes é: $(8)^{-3}$; $(-2)^{-4}$ e $(10)^{-2}$
 - a) $1/512$; $1/16$ e $1/10^{10}$
 - b) $1/8^3$; $-1/2^4$ e $1/10^{10}$
5. O resultado das operacións seguintes é: $(5/7)^3$; $(-1/3)^{-2}$ e $(-2/5)^4$
 - a) $5^3/7^3$; $1/3^2$ e $-2^4/5^4$
 - b) $5^3/7^3$; 3^2 e $2^4/5^4$
6. O resultado das operacións seguintes é: $(2/3)^3 \cdot (2/3)^2 \cdot (2/3)^{-5}$
 - a) 1
 - b) $2/3$
 - c) $-2/3$
 - d) $(2/3) \cdot (-3/2)$
7. As expresións $3.1 \cdot 10^8$ e 0.0000000095 corresponden a:
 - a) 3 100 000 000 e $9.5 \cdot 10^{-10}$
 - b) 310 000 000 e $9.5 \cdot 10^{-10}$
 - c) 310 000 000 e $9.5 \cdot 10^{-9}$
8. O resultado desta operación é: $(0.00098 + 3 \cdot 10^{-6} - 4.2 \cdot 10^{-4}) \cdot 2.5 \cdot 10^5$
 - a) 124.5
 - b) 2 407.5
 - c) 107.5
 - d) 140.75
9. O resultado das operacións seguintes é: $\sqrt[3]{-1\ 331}$; $\sqrt{256}$ e $\sqrt[5]{-1}$
 - a) -11 ; 16; -1
 - b) 11; 16; 1
 - c) -11 ; -16 ; -1
10. As seguintes expresións corresponden a: $(-4)^{3/5}$; $(3)^{1/2}$ e $(-5)^{4/3}$
 - a) $\sqrt[5]{-4^3}$; $\sqrt{3}$ e $\sqrt[3]{-5^4}$
 - b) $\sqrt[5]{(-4)^3}$; $\sqrt{3}$ e $\sqrt[3]{(-5)^4}$
 - c) $-\sqrt[5]{4^3}$; $\sqrt{3}$ e $\sqrt[3]{-(5^4)}$
11. O resultado de extraer factores destes radicais é: $\sqrt[3]{(-5)^4}$ e $\sqrt{2^3 \cdot 5^5}$
 - a) $(-5) \cdot \sqrt[3]{(-5)}$ e $2 \cdot 5^3 \sqrt{2 \cdot 5}$
 - b) $(-5) \cdot \sqrt[3]{(-5)}$ e $50\sqrt{10}$
 - c) $(-5) \cdot \sqrt[3]{(-5)}$ e $50\sqrt{5}$
12. As operacións seguintes poden expresarse: $\sqrt[3]{-(5):12}$ e $\sqrt[3]{\sqrt{-18}}$
 - a) $\frac{\sqrt[3]{-5}}{\sqrt[3]{12}}$ e $\sqrt[2]{-18}$
 - b) $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{12}}$ e $\sqrt[6]{-18}$
 - c) $\frac{\sqrt[3]{-5}}{\sqrt[2]{12}}$ e $\sqrt[2]{18}$