Matemáticas orientadas ás ensinanzas académicas

3º B da ESO

Capítulo 7: Xeometría no plano

www.apuntesmareaverde.org.es

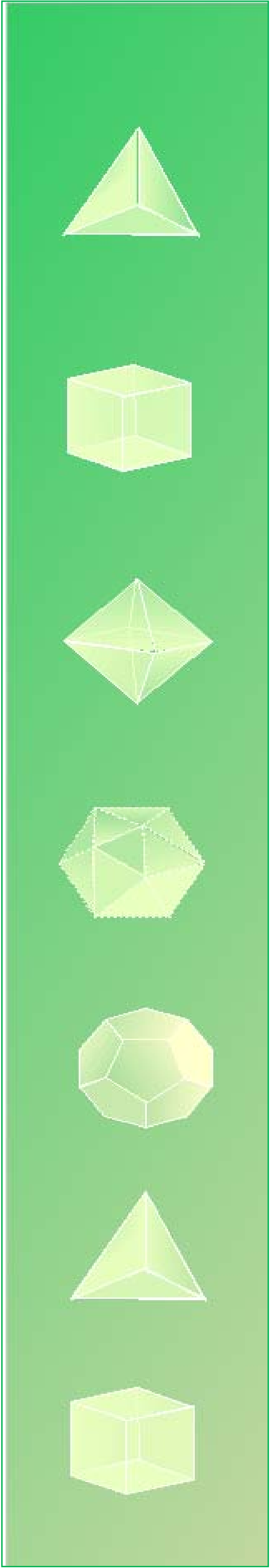
Autor: Pedro Luis Suberviola

Revisor: Alberto da Torre

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF; Pedro Luis Suberviola e Milagros Latasa



Índice

Resumo

Tales, Pitágoras e moi posteriormente *Euclides* son matemáticos gregos aos que debemos o estudo da Xeometría dedutiva. Anteriormente exipcios e babilonios utilizaron a Xeometría para resolver problemas concretos, como volver poñer lindes ás terras despois das inundacións do Nilo. Pero en Grecia utilizouse o razoamento lóxico para deducir as propiedades. *Euclides* intentou recoller o coñecemento que existía e escribiu os *Elementos* que consta de 13 libros ou capítulos, dos que os seis primeiros tratan de Xeometría Plana e o último de Xeometría no espazo. Neste libro define conceptos, tan difíciles de definir como punto ou recta, e enuncia os cinco axiomas (de *Euclides*) dos que parte como verdades non demostrables, e a partir deles demostra o resto das propiedades ou teoremas. Estes axiomas son:

Euclides

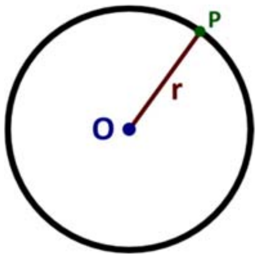
1. Dados dous puntos pódese trazar unha recta que os une.
2. Calquera segmento pode ser prolongado de forma continua nunha recta ilimitada.
3. Pódese trazar unha circunferencia de centro en calquera punto e radio calquera.
4. Todos os ángulos rectos son iguais.
5. Dada unha recta e un punto, pódese trazar unha única recta paralela á recta por este punto.

Neste capítulo imos recordar cuestións que xa coñeces de Xeometría no plano, afondando nalgunhas delas, como nos criterios de semellanza dos triángulos. Deste modo vas ser capaz de resolver un bo número de problemas.

Autor: Pedro Luis Suberviola
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF e Pedro Luis Suberviola

1. LUGARES XEOMÉTRICOS

Moitas veces definimos unha figura xeométrica como os puntos do plano que cumpren unha determinada condición. Dicimos entón que é un *lugar xeométrico do plano*.



1.1. A circunferencia

A **circunferencia** é o lugar xeométrico dos puntos do plano cuxa distancia a un punto do mesmo (o centro) é un valor determinado (o radio).

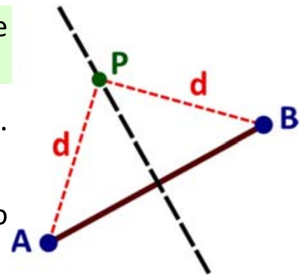
Todos os puntos da circunferencia teñen unha distancia igual ao radio (*r*) do centro (*O*).

1.2. Mediatriz dun segmento

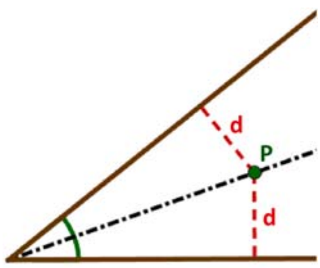
A **mediatriz** dun segmento é o lugar xeométrico dos puntos do plano que equidistan dos extremos do mesmo.

Un punto *P* da mediatriz verifica que está á mesma distancia de A que de *B*. Calquera outro punto que o cumpra pertence á mediatriz.

A mediatriz é unha recta perpendicular ao segmento e pasa polo punto medio do mesmo.



1.3. Bisectriz dun ángulo



Dado un ángulo delimitado por dúas rectas, a **bisectriz** do ángulo é o lugar xeométrico dos puntos do plano que equidistan das mesmas.

Un punto *P* da bisectriz verifica que está á mesma distancia das dúas rectas que forman o ángulo. Calquera outro punto que o cumpra pertence á bisectriz.

A bisectriz pasa polo vértice do ángulo e divídeo en dous ángulos iguais.

Actividades propostas

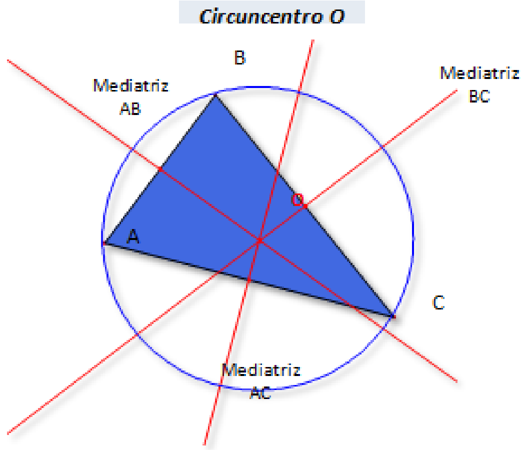
1. Un agricultor encontra no seu campo unha bomba da Guerra Civil. As autoridades establecen unha distancia de seguridade de 50 metros. Como se debe acordoar a zona?
2. Un xogo de dous participantes consiste en que se sitúan a unha distancia de dous metros entre si e póñense varias bandeiras á mesma distancia de ambos os dous. A primeira a 5 metros, a segunda a 10 metros, a terceira a 15 e así sucesivamente. Sobre que liña imaxinaria estarían situadas as bandeiras?
3. Cando nunha acampada sentan arredor do lume, fano formando un círculo. Porque?
4. Utiliza regra e compás para debuxar a bisectriz dun ángulo e a mediatriz dun segmento.

1.4. Rectas e puntos notables dun triángulo

Recorda que:

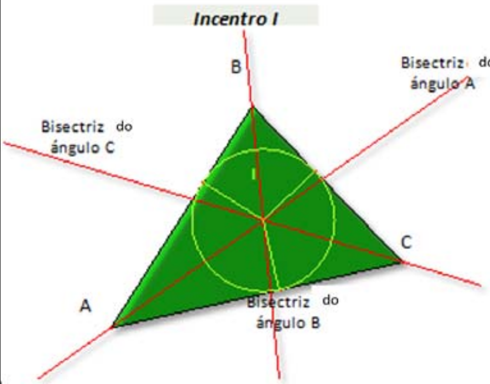
En calquera triángulo podemos atopar as súas mediatrices, bisectrices, alturas e medianas.

Mediatrices. Circuncentro.



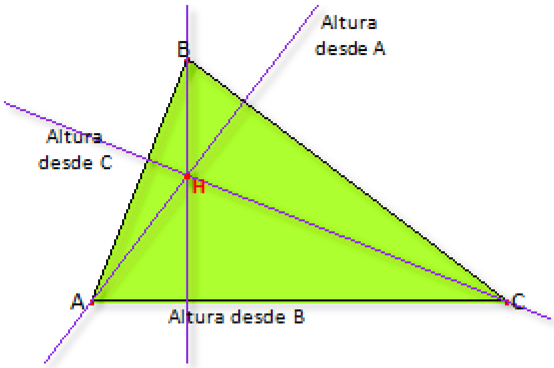
As mediatrices córtanse no circuncentro.
O circuncentro está á mesma distancia dos tres vértices. É o centro da circunferencia circunscrita.

Bisectrices. Incentro.



As bisectrices córtanse no incentro.
O incentro está á mesma distancia dos tres lados. É o centro da circunferencia inscrita.

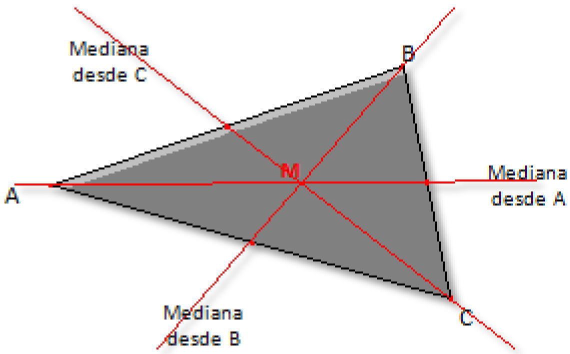
Alturas. Ortocentro.



Ortocentro H

As alturas son as perpendiculares a un lado trazadas desde o vértice oposto. Córtanse no ortocentro.

Medianas. Baricentro.



Baricentro M

As medianas son as rectas que pasan por un vértice e polo punto medio do lado oposto. Dividen o triángulo en dous triángulos de igual área.
Córtanse no baricentro. A distancia do mesmo a cada vértice é o dobre da súa distancia ao punto medio do lado oposto correspondente.

Se a **mediatriz** dun segmento é o lugar xeométrico dos puntos que equidistan dos extremos do segmento, cada mediatriz dun triángulo equidistará de dous dos vértices do triángulo e é a mediatriz dun dos seus lados. As tres mediatrices córtanse nun punto, o **circuncentro**, que, polo tanto, distará o mesmo de cada un dos tres vértices do triángulo, e é o centro dunha circunferencia circunscrita ao triángulo, que pasa polos seus tres vértices.

Se a bisectriz dun ángulo equidista dos lados do ángulo, agora cada unha das tres bisectrices dun triángulo equidistará de dous dos lados do triángulo. As tres bisectrices córtanse nun punto, o **incentro**, que, polo tanto, equidista dos tres lados do triángulo e é o centro da circunferencia inscrita ao triángulo.

En calquera triángulo circuncentro, ortocentro e baricentro están sobre unha mesma liña recta, á que se lle chama *Recta de Euler*. Esta recta contén outros puntos notables. O incentro está nesta recta só se o triángulo é isósceles.

Actividades propostas

5. Debuxa no teu caderno un triángulo de lados 7, 6 e 4 cm. Traza nel as circunferencias inscritas e circunscritas.

6. Debuxa no teu caderno un triángulo de lado 8 cm e ángulos adxacentes ao mesmo de 40° e 30°. Encontra o seu ortocentro e o seu baricentro.

7. Debuxa no teu caderno un triángulo cun ángulo de 40° comprendido entre dous lados de 6 e 4 cm. Obtén o seu circuncentro e o seu incentro.

8. Que pasa coas rectas e cos puntos notables nun triángulo equilátero?

9. Debuxa un triángulo isósceles co ángulo desigual de 40°. Traza as rectas notables para o lado desigual e para un dos lados iguais. Que pasa?

10. Unha formiga anda por unha mediana dun triángulo partindo do vértice. Cando chega ao baricentro percorreu 8 centímetros. Que distancia lle falta para chegar ao punto medio do lado oposto ao vértice de onde partiu?

11. Queremos situar un farol nunha praza triangular. Onde o poñeriamos?

12. Temos un campo triangular sen cercar e queremos atar unha cabra de forma que non saia do campo pero que acceda ao máximo de pasto posible. Onde poñeriamos o poste?

13. A Alba e ao seu irmán Aitor encántalles a torta. A súa nai fíxolles unha triangular. Alba ten que cortala pero Aitor elixirá primeiro o seu anaco. Como debería cortar Alba a torta?

14. O ortocentro dun triángulo rectángulo, onde está?

15. Comproba que o circuncentro dun triángulo rectángulo está sempre no punto medio da hipotenusa.

16. O baricentro é o centro de gravidade. Constrúe un triángulo de cartolina e debuxa o seu baricentro. Se pos o triángulo horizontalmente no aire só suxeito pola punta dun lapis no baricentro comprobarás que se suxeita.

17. Calcula o lado dun triángulo equilátero inscrito nunha circunferencia de 10 cm de radio. [*Axuda*: Aplica que neste caso o circuncentro coincide co baricentro e que este último está ao dobre de distancia do vértice que do lado oposto.]

Autor: Pedro Luis Superviola
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF e Pedro Luis Superviola

1.5. Uso de Xeoxebra para o estudo dos puntos e rectas notables dun triángulo

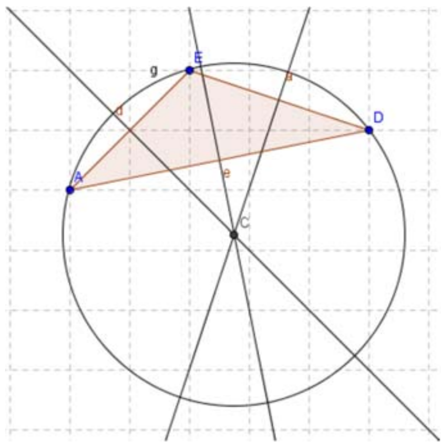
Utilízase o programa **Xeoxebra** para determinar o *circuncentro*, o *incentro* e o *baricentro* dun triángulo, estudar as súas propiedades e debuxar a *recta de Euler*.

Actividades resoltas

Unha vez aberto o programa na opción do menú **Visualiza**, oculta **Eixes** e activa **Cuadrícula.**

Circuncentro:

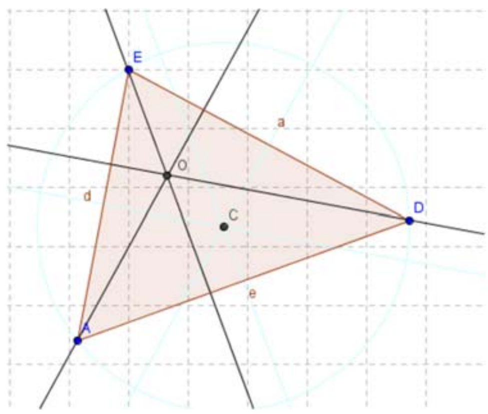
Debuxa as tres mediatrices dun triángulo e determina o seu circuncentro.



- Define tres puntos *A*, *D* e *E*, observa que o programa os define como *A, B* e *C*, utiliza o botón dereito do rato e a opción **Renomea** para cambiar o nome.
- Coa ferramenta **Polígono** activada debuxa o triángulo que ten por vértices estes puntos. Observa que cada lado ten a mesma letra que o ángulo oposto con minúscula.
- Coa ferramenta **Mediatriz** debuxa as mediatrices de dous lados, os segmentos *a* e *d*.
- Determina con **Intersección de dous obxectos** o punto común destas rectas e con **Renomea** chámao *C*. Este punto é o *circuncentro* do triángulo.
- Debuxa a **Mediatriz** do segmento *e* e observa que pasa polo punto *C*.
- Activa **circunferencia por centro e punto que cruza** para debuxar a circunferencia circunscrita ao triángulo.
- Utiliza o **Punteiro** para desprazar os vértices *A*, *D* o *E* e comprobar que a circunferencia permanece circunscrita ao triángulo.

Ortocentro:

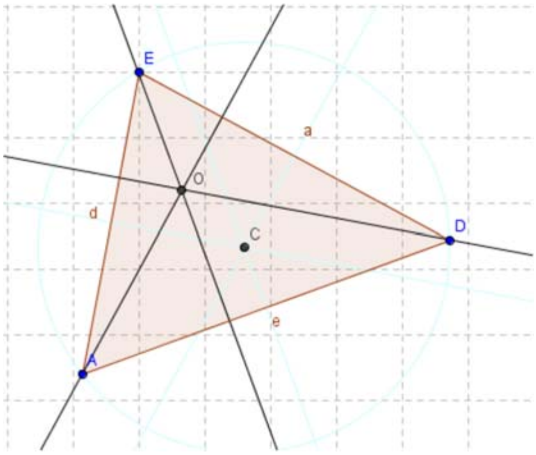
Debuxa as tres alturas dun triángulo e determina o seu ortocentro.



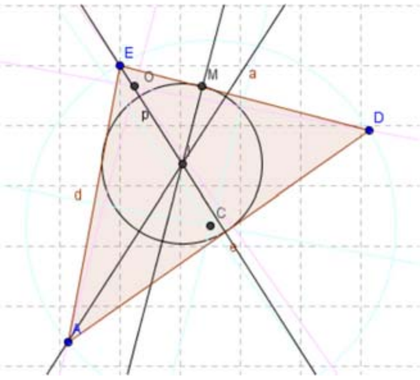
- No mesmo triángulo cambia a cor das mediatrices e a circunferencia situándote co rato sobre o trazo ou sobre a súa ecuación e co botón dereito elixe en **Propiedades, Cor** un azul moi próximo ao branco.
- Debuxa dúas alturas coa ferramenta **Recta Perpendicular**. Observa que o programa che pide que o punto polo que vas trazala e a recta ou o segmento respecto ao que é perpendicular.
- Determina con **Intersección de dous obxectos o** *ortocentro* como o punto de corte das dúas alturas e con **Renomea** denomínao *O*.
- Debuxa a terceira altura e comproba que pasa polo *ortocentro*, desprazando co **Punteiro** os vértices do triángulo.

Incentro:

- *Debuxa as tres bisectrices dun triángulo e determina o seu incentro.*



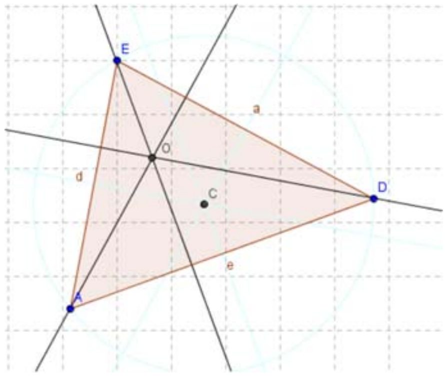
- Cambia a cor das alturas como na construción anterior, agora con cor rosa pálido.
- Coa ferramenta **Bisectriz** debuxa dúas bisectrices. Observa que para determinar a bisectriz dun ángulo é suficiente sinalar tres puntos que poden ser os vértices do triángulo na orde adecuada.
- Determina o *incentro* con **Intersección de dous obxectos** como o punto de corte das dúas bisectrices e con **Renomea** denomínao *I*.
- Debuxa a terceira bisectriz e comproba que sempre pasa polo *incentro*, desprazando co **Punteiro** os vértices do triángulo.



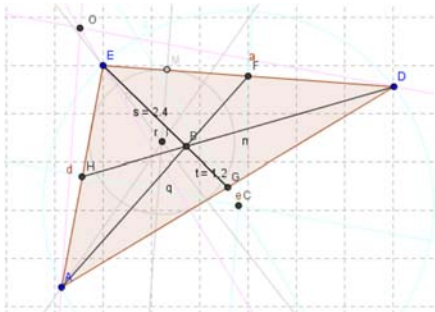
- Traza desde o punto *I unha* **Recta perpendicular** a un dos lados e con **Intersección de dous obxectos** calcula o punto de corte entre esta recta e o lado do triángulo e con **Renomea** chámao *M*.
- Activa **Circunferencia por centro e punto que cruza** para debuxar con centro en *I* e radio o segmento *IM* a circunferencia inscrita ao triángulo.
- Despraza co **punteiro** os vértices do triángulo para comprobar que a circunferencia permanece inscrita ao triángulo.

Baricentro:

- *Debuxa as tres medianas dun triángulo e determina o seu baricentro.*



- Cambia a cor das bisectrices, do punto *M* e da circunferencia inscrita, con gris moi pálido, como nas construcións anteriores.
- Coa ferramenta **Punto medio ou centro** calcula os puntos medios de dous lados. Se o programa nomea algún coa letra *B*, utiliza **Renomea** para chamalo *H*.
- Coa ferramenta **Segmento entre dous puntos** debuxa dúas medianas e con **Intersección de dous obxectos**, o seu punto de corte, o **baricentro**, que chamarás *B*.

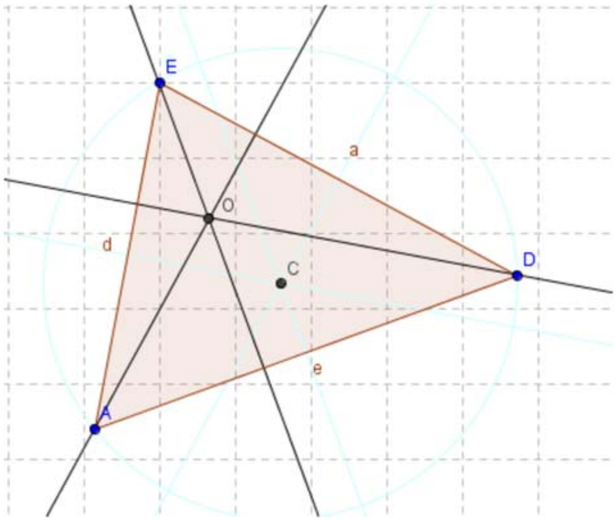


- Traza a terceira mediana e verifica que o baricentro pertence a este segmento desprazando co **Punteiro** os vértices do triángulo.
- Activa **Segmento entre dous puntos** e determina os dous segmentos determinados polo baricentro nunha das medianas.
- Activa **Distancia** para medir estes segmentos.
- Despraza os vértices do triángulo co **Punteiro** e observa a relación que existe entre as medidas realizadas.

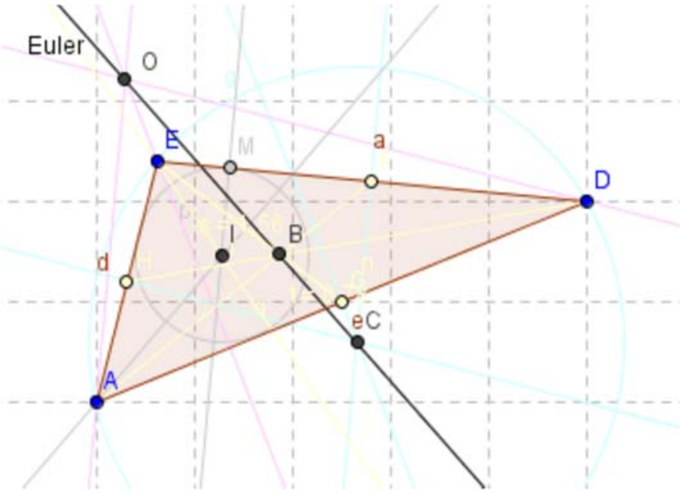
Autor: Pedro Luis Suberviola
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF e Pedro Luis Suberviola

Recta de Euler

Debuxa a recta que pasa polo circuncentro e o ortocentro.



- Cambia a cor das medianas, dos puntos medios dos lados e dos dous segmentos da mediana, con amarelo moi pálido.
- Coa ferramenta **Recta que pasa por dous puntos** debuxa a recta de Euler que pasa polo *circuncentro* e o *ortocentro* e utiliza **Renomea** para chamala *Euler*. Comproba que o baricentro pertence á recta de Euler e que o incentro non sempre pertence.



Actividades propostas

18. Repite as actividades resoltas con *Xeoxebra*. Modifica ao teu gusto cores e liñas.

19. Move un dos vértices orixinais do triángulo e indica que cousas permanecen invariantes.

20. Comproba que se verifican as propiedades de *circuncentro*, como centro da circunferencia circunscrita, e do *incentro*, como centro da circunferencia inscrita.

21. En *baricentro* divide a mediana en dúas partes, sendo unha dous terzos da outra. Compróbao.

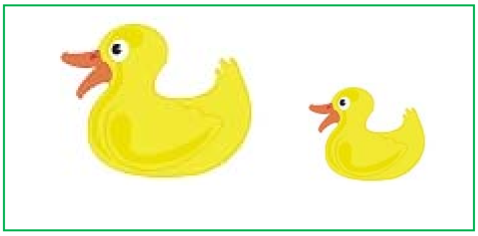
22. A recta de *Euler* pasa polo *circuncentro*, o *baricentro* e o *ortocentro*, e o *incentro* non sempre pertence á recta de *Euler*. Como debe ser o triángulo para que pertenza?

23. Move os vértices do triángulo para determinar se é posible que os seus catro puntos notables coincidan.

Autor: Pedro Luis Suberviola
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF e Pedro Luis Suberviola

2. SEMELLANZA

2.1. Figuras semellantes

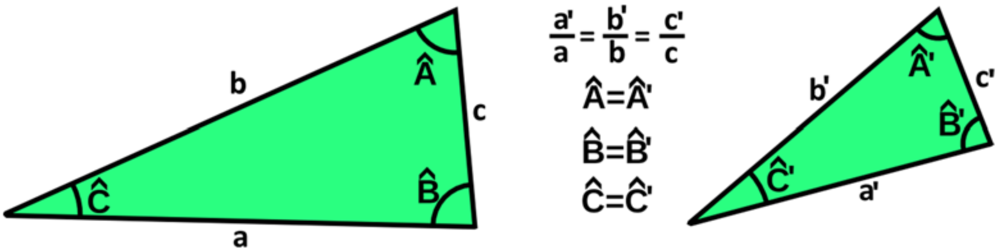


Dúas figuras semellantes teñen a *mesma forma*. É moi útil saber recoñecer a semellanza para poder estudar unha figura e inferir así propiedades dunha figura semellante a ela que é máis grande ou inaccesible. A semellanza conserva os ángulos e mantén a proporción entre as distancias.

Dous polígonos son semellantes se os seus lados son proporcionais e os seus ángulos son iguais.

2.2. Triángulos semellantes. Criterios de semellanza.

Dous triángulos son **semellantes** se teñen todos os ángulos iguais e os lados proporcionais.



Para recoñecer dous triángulos semellantes non é necesario coñecer todos os lados e ángulos, é suficiente con que se cumpra algún dos seguintes **criterios de semellanza.**

Dous triángulos son semellantes se:

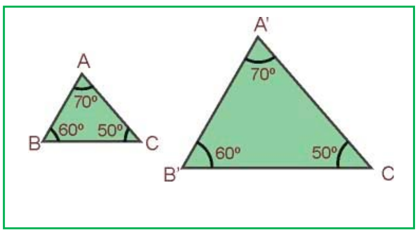
Primeiro: Teñen dous ángulos iguais.

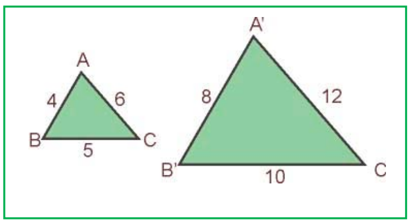
Segundo: Teñen os tres lados proporcionais.

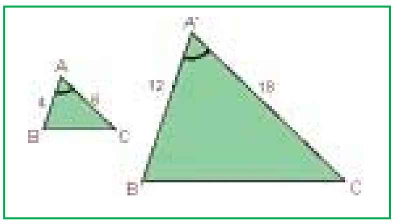
Terceiro: Teñen dous lados proporcionais e o ángulo que forman é igual.

A demostración baséase nos criterios de igualdade de triángulos. Xa sabes que dous triángulos son iguais se teñen os seus tres lados iguais e os seus tres ángulos iguais, pero non é necesario que se verifiquen esas seis igualdades para que o sexan. Basta por exemplo que teñan un lado e dous ángulos iguais. Así, pódese construír un triángulo igual a un dos dados en posición *Tales* co segundo e deducir a semellanza.

Exemplo







Actividades propostas

24. Indica se son semellantes os seguintes pares de triángulos:

a) Un ángulo de 80° e outro de 40°. Un ángulo de 80° e outro de 60°.
b) Triángulo isósceles con ángulo desigual de 70°. Triángulo isósceles con ángulo igual de 50°.
c) A = 30°, b = 7 cm, c = 9 cm. A'= 30°, b' = 3.5 cm, c' = 4.5 cm
d) a = 4 cm, b = 5 cm, c = 7 cm. a' = 10 cm, b' = 12.5 cm, c' = 24.5 cm

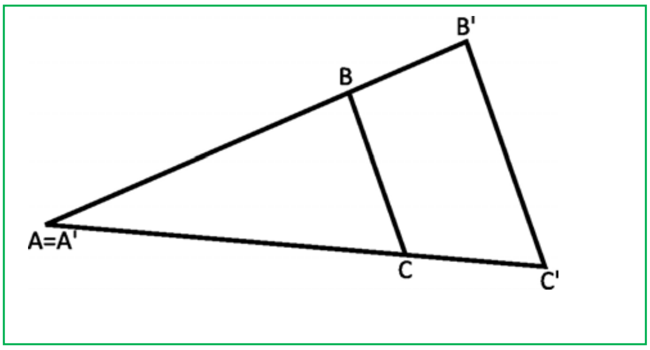
25. Calcula o valor descoñecido para que os triángulos sexan semellantes:

a) a = 9 cm, b = 6 cm, c =12 cm. a' = 6 cm, b' = 4 cm, c'?

b) A = 45°, b = 8 cm, c = 4 cm. A' = 45°, b' = 8 cm, a'?

26. Un triángulo ten lados de 6 cm, 7 cm e 7 cm. Un triángulo semellante a el ten un perímetro de 60 cm. Canto miden os seus lados?

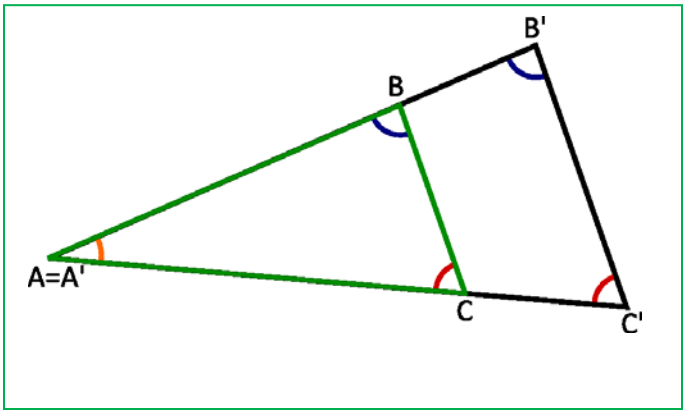
2.3. Triángulos en posición de Tales



Dicimos que dous triángulos están en posición de Tales cando dous dos lados de cada un están sobre as mesmas rectas e os outros lados son paralelos.

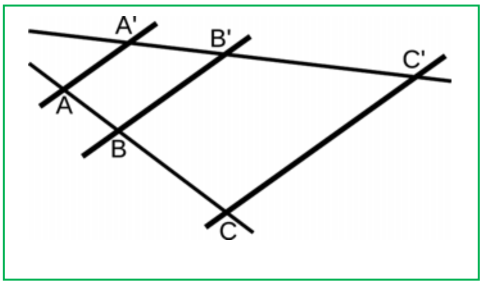
Os ángulos son iguais. Un porque é o mesmo. Os outros por estaren formados por rectas paralelas. Polo tanto, polo primeiro criterio de semellanza de triángulos, os triángulos son proporcionais e cúmprese:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$



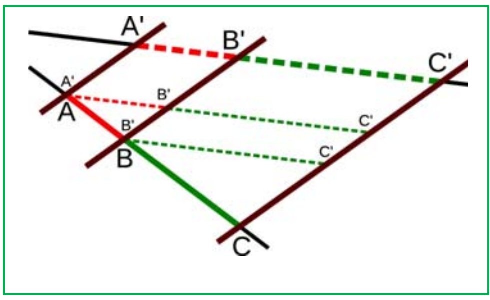
Autor: Pedro Luis Suberviola
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF e Pedro Luis Suberviola

2.4. Teorema de Tales



O teorema de *Tales* establece unha relación entre os segmentos formados cando dúas rectas calquera son cortadas por varias rectas paralelas.

Na segunda figura pódese apreciar como se forman neste caso tres triángulos semellantes e que polo tanto se establece que:



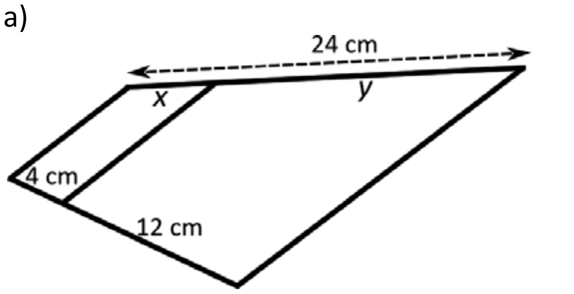
$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}$$

Observación: Neste caso non relacionamos os segmentos *AA'*, *BB'* e *CC'* que se forman sobre os lados paralelos.

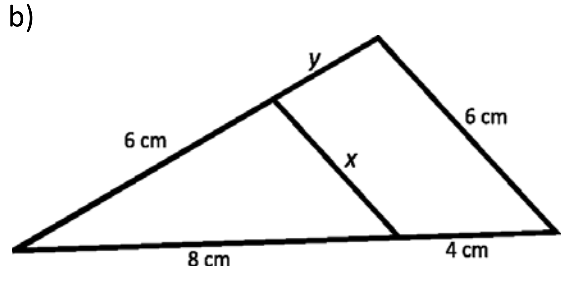
Actividades propostas

27. Calcula os valores de *x* e y nas seguintes figuras.

a)



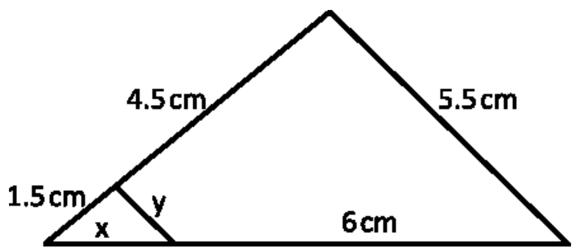
b)

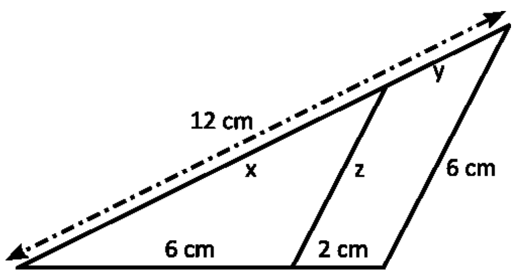


28. Un poste moi alto suxéitase con cables de aceiro que van do seu extremo superior ao chan. A distancia da ancoraxe dun dos cables á base do poste é de 6 metros. Poñemos unha barra de 120 centímetros de forma que estea perpendicular ao chan e xusto toca o chan e o cable. A súa distancia á ancoraxe do cable é 90 centímetros. Calcula a lonxitude do poste e a lonxitude do cable de aceiro.

29. María mide 160 cm. A súa sombra mide 90 cm. Nese mesmo instante mídese a sombra dun edificio e mide 7.2 m. Canto mide o edificio?

30. Calcula as lonxitudes que se indican:



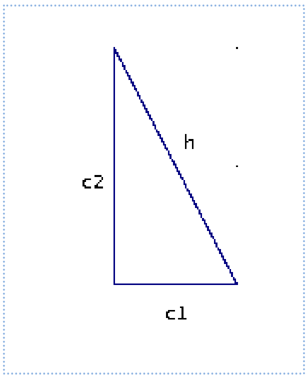


Autor: Pedro Luis Suberviola
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF e Pedro Luis Suberviola

3. ÁNGULOS, LONXITUDES E ÁREAS

3.1. Teorema de *Pitágoras*

Teorema de *Pitágoras*



Nun triángulo rectángulo, a hipotenusa ao cadrado é igual á suma dos cadrados dos catetos.

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2$$

Utilizando o teorema de *Pitágoras* podemos obter o valor da hipotenusa dun triángulo rectángulo se coñecemos o que miden os catetos: $h = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, ou tamén podemos obter o valor dun cateto a partir dos valores da hipotenusa e do outro cateto: $c_2 = \sqrt{h^2 - c_1^2}$

Exemplo:

- Se os catetos dun triángulo rectángulo miden 10 *cm* e 24 *cm*, a súa hipotenusa vale 26 *cm* xa que:

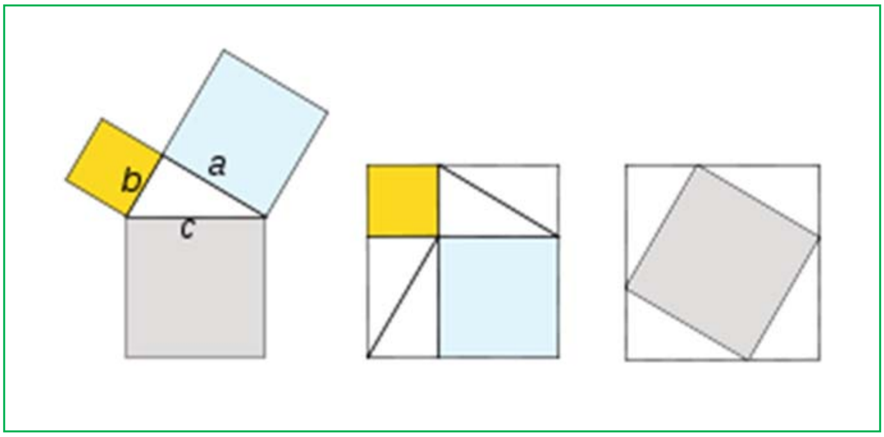
$$h = \sqrt{10^2 + 24^2} = \sqrt{100 + 576} = \sqrt{676} = 26cm.$$

Interpretación do teorema de *Pitágoras*

Se debuxamos un cadrado de lado a hipotenusa *h* dun triángulo rectángulo, a súa área é h^2 (ver o primeiro exemplo de 1.1). Se debuxamos dous cadrados de lados os catetos c_1 e c_2 dese triángulo rectángulo, as súa áreas son c_1^2, c_2^2. Entón o teorema de *Pitágoras* di que a área do primeiro cadrado (cadrado gris da figura da esquerda) é igual á suma das áreas dos outros dous (cadrados azul claro e amarelo da figura da esquerda).

Existen máis de 367 demostracións diferentes do Teorema de *Pitágoras*.

Unha comprobación gráfica consiste en debuxar dous cadrados iguais de lado a suma dos catetos *a* e *b* (figuras do centro e da dereita). Nun debúxanse os cadrados de lado *a* e *b*, en amarelo e azul no debuxo. Noutro o cadrado de lado a hipotenusa (en gris no debuxo). Observa que quitando 4 triángulos iguais ao de partida queda que o cadrado gris é igual á suma dos cadrados amarelo e azul.



Polo tanto:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Actividades propostas

31. É posible encontrar un triángulo rectángulo cuxos catetos midan 5 e 12 *cm* e a súa hipotenusa 24 *cm*? Se a túa resposta é negativa, calcula a medida da hipotenusa dun triángulo rectángulo cuxos catetos miden 5 e 12 *cm*. Utiliza calculadora para resolver esta actividade se che resulta necesaria.

32. Calcula a lonxitude da hipotenusa dos seguintes triángulos rectángulos de catetos:

a) 6 *cm* e 8 *cm*

b) 4 *m* e 3 *m*

c) 8 *dm* e 15 dm

d) 13.6 *km* e 21.4 *km*.

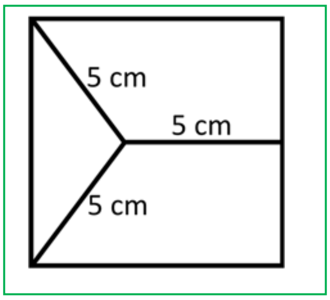
33. Calcula a lonxitude do cateto que falta nos seguintes triángulos rectángulos de hipotenusa e cateto:

a) 26 *cm* e 10 *cm*

b) 17 *m* e 8 *m*

c) 37 *dm* e 35 *dm*

d) 14.7 *km* e 5.9 *km*



34. Calcula o lado do cadrado da figura da marxe:

35. Calcula a área dun triángulo equilátero de lado 9 *m*.

36. Calcula a área dun hexágono regular de lado 2 *cm*.

37. Calcula o volume dun tetraedro regular de lado 7 *dm*.

38. Calcula a lonxitude da diagonal dun cadrado de lado 3 *m*.

39. Calcula a lonxitude da diagonal dun rectángulo de base 15 *cm* e altura 8 *cm*.

40. Unha portería de fútbol mide 7.32 m de ancho por 2.44 m de alto. O punto de penalti está a 10 metros. Calcula a distancia que percorre o balón en:

a) Un tiro directo á base do poste.

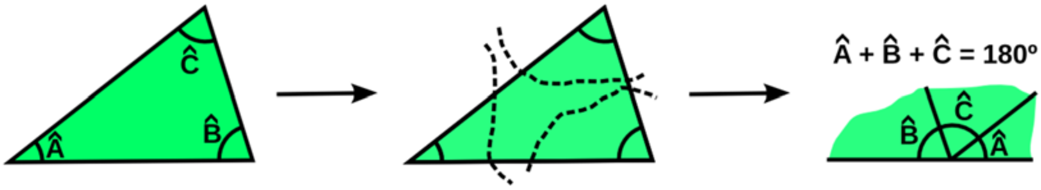
b) Un tiro directo á escuadra.

41. Demostra que o diámetro dun cadrado de lado x é $d = \sqrt{2}x$.

42. Demostra que a altura dun triángulo equilátero de lado x é $d = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$.

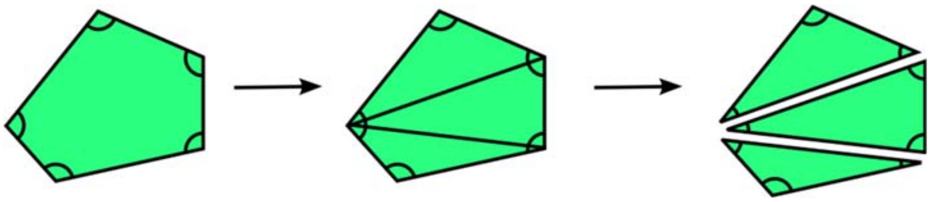
3.2. Suma de ángulos dun polígono

A suma dos ángulos interiores dun triángulo é 180° · *n*.



A suma dos ángulos interiores dun polígono de *n* lados é ($n-2$) · 180°.

Para comprobalo basta con trazar as diagonais dun polígono desde un vértice e xa o teremos dividido en triángulos.

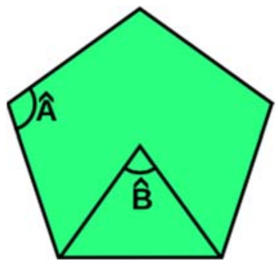


Polo tanto:

Polígono	Suma de ángulos	Polígono	Suma de ángulos
Triángulo	180°	Cuadrilátero	180° · 2 = 360°
Pentágono	180° · 3 = 540°	Hexágono	180° · 4 = 720°

Se o polígono de *n* lados é regular, todos os ángulos interiores son iguais e para calcular o valor do seu ángulo interior divídese entre *n* a suma dos ángulos interiores.

Exemplo:



- *Nun pentágono a suma dos ángulos interiores é* 180 · 3 = 540°.

Polo tanto, o **ángulo interior:** $\widehat{A} = \frac{540^{\circ}}{5} = 108^{\circ}$

Tamén é moi común calcular o **ángulo central**: $\hat{\mathrm{B}} = \frac{360^{\circ}}{5} = 72^{\circ}$

Actividades propostas

43. Calcula os ángulos central e interior do triángulo equilátero, cadrado, pentágono regular, hexágono regular e enneágono regular.

44. Xustifica que un hexágono regular se pode descompoñer en 6 triángulos equiláteros.

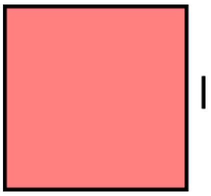
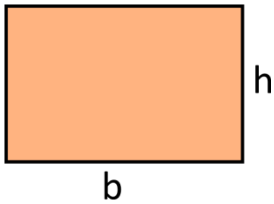
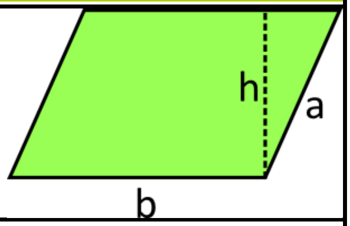
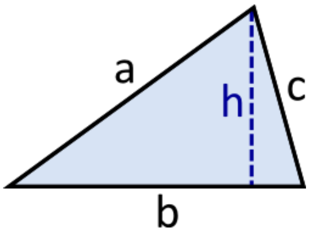
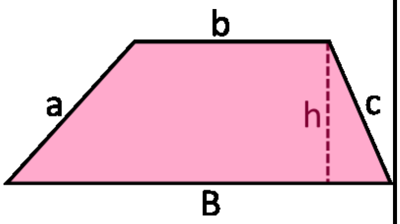
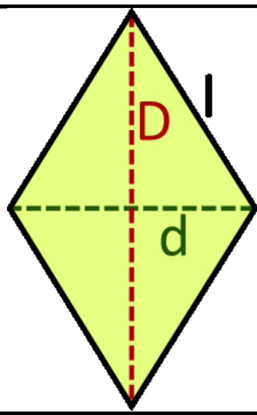
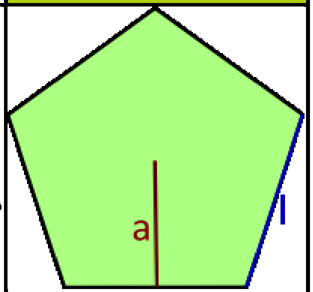
45. Dous ángulos dun triángulo isósceles miden 36° e 72°, canto pode medir o ángulo que falta?

46. Dous ángulos dun trapecio isósceles miden 108° e 72°, canto miden os ángulos que faltan?

47. Canto mide a suma dos ángulos interiores dun decágono irregular?

3.3. Lonxitudes e áreas de figuras poligonais

Recorda que:

Cadrado	Rectángulo	Romboide	
			
Perímetro: P = $4l$; **Área: A** = l^2	**P** = $2b + 2h$; **A** = $b \cdot h$	**P** = $2b + 2a$;	**A** = $b \cdot h$
Triángulo	**Trapecio**	**Rombo**	**Polígono regular de *n* lados**
			
P = $a + b + c$; $A = \frac{b \cdot h}{2}$	**P** = $a + B + b + c$; $A = \frac{B+b}{2} \cdot h$	$A = \frac{d \cdot D}{2}$	**P** = $n \cdot l$; $A = \frac{P \cdot a}{2}$

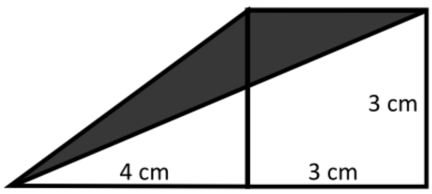
Actividades propostas

48. Calcula a área e o perímetro dun trapecio isósceles de bases 50 cm e 26 cm e altura 5 cm.

49. Calcula a área e perímetro dun trapecio rectángulo de bases 100 cm e 64 cm e de altura 77 cm.

50. Calcula a área e o perímetro dun trapecio isósceles de bases 100 cm e 60 cm e lados laterais 29 cm.

51. Utiliza o teorema de Tales para determinar a área e o perímetro da zona sombreada da figura.



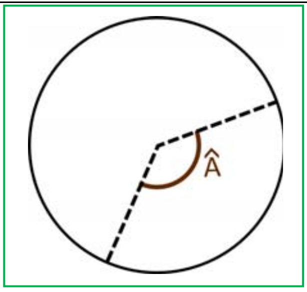
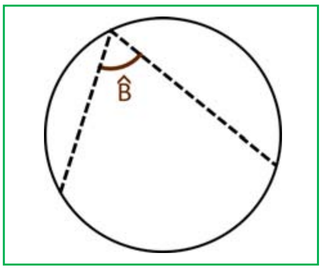
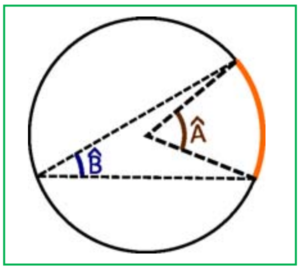
52. Tendo en conta que un hexágono regular se pode dividir en seis triángulos equiláteros (cuxa altura é a apotema do hexágono regular), calcula a área dun hexágono regular de 5 cm de lado.

53. Queremos cubrir o plano con polígonos regulares de 100 cm^2. As únicas opcións posibles son o triángulo equilátero, o cadrado e o hexágono. Calcula cal destas tres figuras ten menor perímetro. Que polígono aplica este resultado? [Utiliza a relación entre lado e altura dun triángulo equilátero obtida anteriormente]

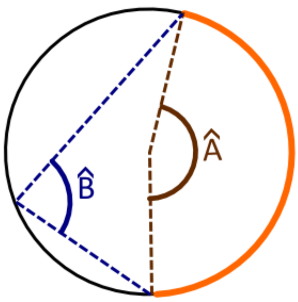
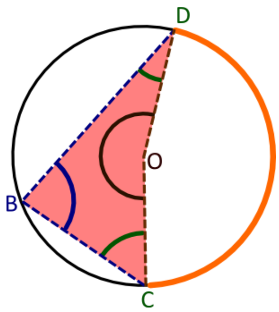
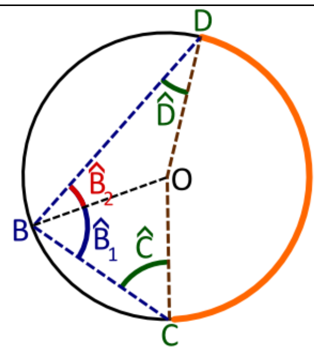
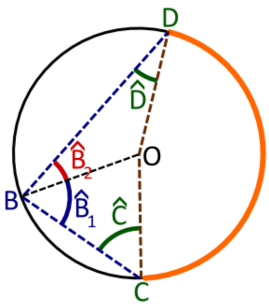
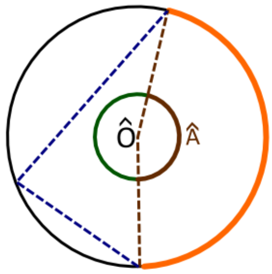
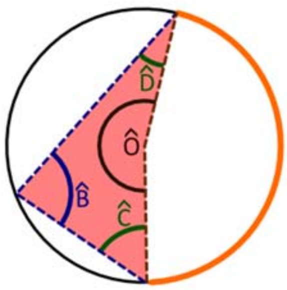
Autor: Pedro Luis Suberviola
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF e Pedro Luis Suberviola

3.4. Ángulos da circunferencia

Nunha circunferencia teñen especial importancia os **ángulos centrais** (teñen o seu vértice no centro da circunferencia) e os **ángulos inscritos** (teñen o seu vértice nun punto da circunferencia).

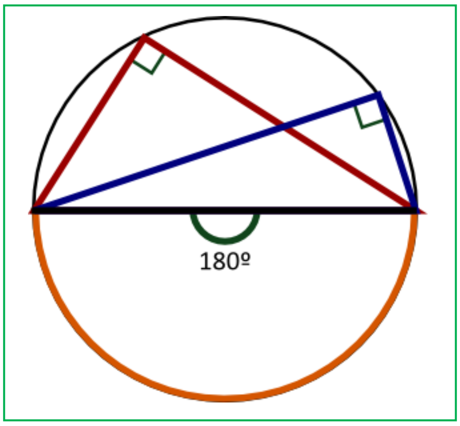
		
Ángulo central	**Ángulo inscrito**	$\hat{B} = \frac{\hat{A}}{2}$

Verifícase ademais que un ángulo inscrito mide a metade que un ángulo central que abrangue o mesmo arco de circunferencia.

Demostración da propiedade		
		
Debemos comprobar que o ángulo $\hat{B}$ é a metade de $\hat{A}$. $2\hat{B} = \hat{A}$	Imos estudar o cuadrilátero *BCOD* e aplicar no último paso que os seus ángulos suman 360°.	*BO* e *OD* son radios da circunferencia. Polo tanto *BDO* é isósceles e $\hat{B}_2$ e $\hat{D}$ son iguais.
		
O mesmo para $\hat{B}_1 e\ \hat{C}$ Entón $\hat{C} + \hat{D} = \hat{B}_2 + \hat{B}_2 = \hat{B}$	Ademais, o ángulo Ô do cuadrilátero mide 360°–$\hat{A}$.	$\hat{B} + (\hat{C} + \hat{D}) + \hat{O} = 360°$. $\hat{B} + (\hat{B}) + 360° - \hat{A} = 360°. 2\hat{B} = \hat{A}$

Actividades propostas

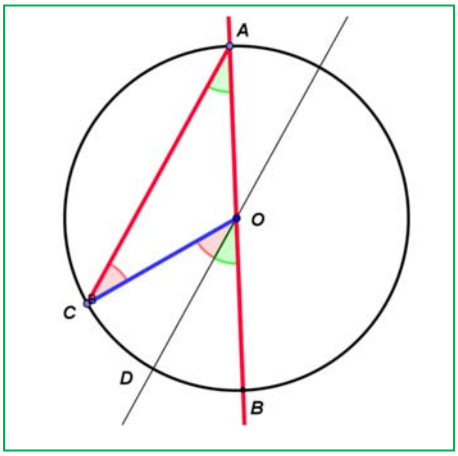
54. Tales observou que en calquera triángulo rectángulo o circuncentro sempre estaba no punto medio da hipotenusa. Observa a figura e razoa a afirmación.



55. Un ángulo inscrito na circunferencia que abrangue un diámetro é un ángulo recto. Por que? Razoa a resposta.

56. En que posicións ten un futbolista o mesmo ángulo de tiro que desde o punto de penalti?

57. Outra demostración. Intenta comprendela.



Trazamos un ángulo inscrito na circunferencia *CAB* que teña un lado que pase polo centro *O* da circunferencia. Trazamos o seu central *COB*. O triángulo *OAC* é isósceles pois dous dos seus lados son radios da circunferencia. Trazamos por O unha recta paralela a *AC*. O ángulo *CAO* é igual ao ángulo *DOB* pois teñen os seus lados paralelos. O ángulo *ACO* é igual ao ángulo *COD* por alternos internos entre paralelas, e é igual ao ángulo *CAO* por ser o triángulo isósceles. Polo tanto o central mide o dobre que o ángulo inscrito.

3.5. Lonxitudes e áreas de figuras circulares

Xa sabes que:

O **número π** defínese como o cociente entre a lonxitude da circunferencia e o seu diámetro.

π = Lonxitude da circunferencia / Diámetro

Xa sabes que é un número irracional, con infinitas cifras decimais non periódicas. Unha aproximación de **π** é 3.14, outra 3.1416 e outra 3.141592. Desde a antigüidade máis afastada ata hoxe en día os matemáticos seguen investigando sobre el.

Se unha circunferencia ten un radio r, entón o seu diámetro mide $2r$, e a súa lonxitude, pola definición de π, mide $2\cdot\pi\cdot r$.

Lonxitude da circunferencia = $2 \cdot \pi \cdot r$.

Para calcular a lonxitude **dun arco de circunferencia** que abrangue un ángulo de α grados, debemos ter en conta que a circunferencia completa abrangue un ángulo de 360°. Polo tanto:

$$L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \alpha/360.$$

A **área do círculo é** igual ao produto do número π polo cadrado do radio.

$$A = \pi \cdot r^2.$$

A **área dunha coroa circular** é igual á área do círculo maior menos a área do círculo menor.

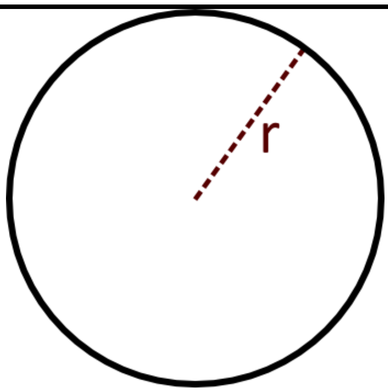
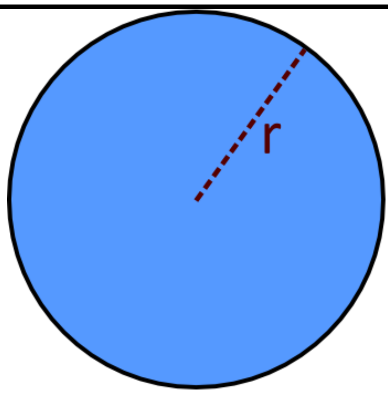
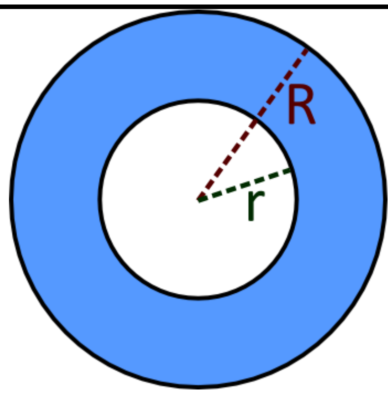
$$A = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

A **área dun sector circular** que abrangue un ángulo de n graos é igual a:

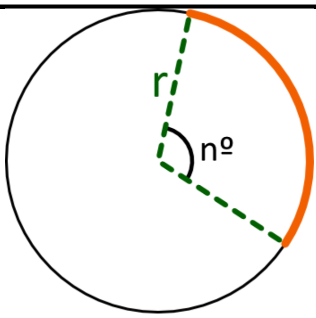
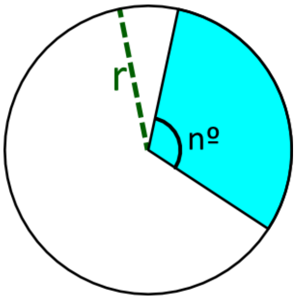
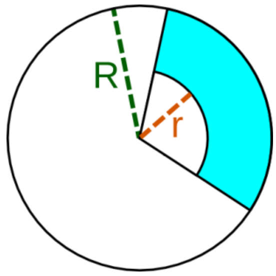
$$A = \pi \cdot r^2 \cdot n / 360.$$

Para calcular a **área do segmento circular** restamos á área do sector circular a área do triángulo.

En resumo

<table>
<tr><th>Lonxitude da circunferencia</th><th>Área do círculo</th><th>Área da coroa circular</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>L = $2 \cdot \pi \cdot r$</td><td>A = $\pi \cdot r^2$</td><td>A = $\pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (R^2 - r^2)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">π é a razón entre a lonxitude dunha circunferencia e o seu diámetro.
É un número irracional, con infinitas cifras decimais non periódicas.
Unha aproximación de π é 3.14, outra 3.1416 e outra 3.141592</td></tr>
</table>

Autor: Pedro Luis Subervíola
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF e Pedro Luis Subervíola

Lonxitude do arco da circunferencia	Área do sector circular	Área do trapecio circular
		
$L = \frac{nº \cdot 2 \cdot \pi \cdot r}{360º}$	$A = \frac{nº \cdot \pi \cdot r^2}{360º}$	$A = \frac{nº \cdot \pi \cdot (R^2 - r^2)}{360º}$

Actividades resoltas

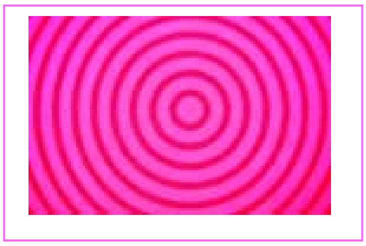
- A circunferencia de radio 5 *cm* ten unha lonxitude L = 2·π·*r* = 2·π·5 = 10·π ≈ 31.416.
- As rodas dun carro miden 60 *cm* de diámetro e teñen 16 radios. A lonxitude do arco entre cada radio é:

  L = 2 · π · *r* · α / 360 = 60 · π / 16 ≈ 11.78 *cm*.
- A área dun círculo de radio 8 *cm* é A = 64 π ≈ 201.06 cm^2. E a dun círculo de 10 *cm* de radio é A = π ≈ 314.16 cm^2.
- A área dun círculo de diámetro 10 m é A = 25π ≈ 78.54 m^2.
- A área da coroa circular formada polas circunferencias concéntricas de radios 9 *cm* e 5 *cm* é igual a: A = π · (R^2 – r^2) = π · (9^2 – 5^2) = π · (81 – 25) = π · 56 ≈ 175.93 cm^2.
- Para calcular a área do *sector* circular de radio 10 m que abrangue un ángulo de 90°, calculamos a área do círculo completo: π · 10^2 = 100 π e calculamos a proporción:

  A_S = 100π · 90 / 360 = 25π ≈ 78.54 m^2.
- Para calcular a área do *segmento* circular, restamos á área anterior a área do triángulo rectángulo de base 10 *m* e altura 10 *m*, A_T = 10 · 10 / 2 = 50 m^2. Logo a área do segmento é:

  A = A_S – A_T = 78.54 – 50 = 28.54 m^2.

Actividades propostas



58. As circunferencias de tamaño real da ilustración da marxe teñen como radio, a menor 1 *cm*, a seguinte, un pouco máis escura 2 *cm*; a clara seguinte 3 *cm*, e así, aumenta un centímetro. Calcula as lonxitudes das 10 primeiras circunferencias.

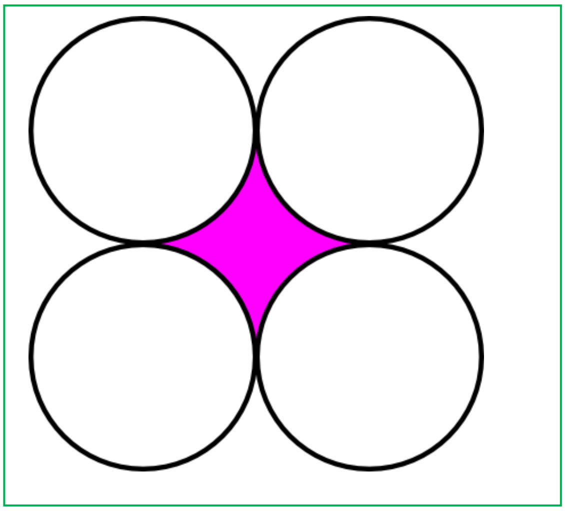
59. A Terra é aproximadamente unha esfera de radio 6 379 *km*. Canto mide o Ecuador?

60. Antigamente definíase un metro como: *"a dez millonésima parte do cuadrante do meridiano terrestre que pasa por París*". Segundo esta definición, canto mide (en metros) o diámetro terrestre?

61. Un faro xira describindo un arco de 170°. A unha distancia de 5 *km*, cal é a lonxitude do arco de circunferencia no que se ve a luz?

62. Determina o lado do triángulo equilátero da figura construído usando arcos de circunferencia de 10 cm de radio.

63. Calcula a área encerrada por unha circunferencia de radio 9 cm.



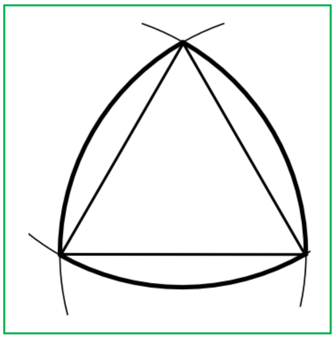
64. Calcula a área da coroa circular de radios 12 e 5 *cm*.

65. Calcula a área do sector circular e do segmento circular de radio 6 *cm* e que forma un ángulo de 60°.

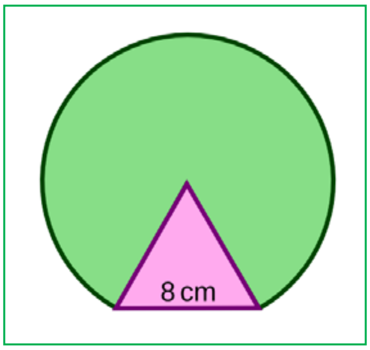
66. Calcula a área do sector de coroa circular de radios 25 *cm* e 18 *cm* e que forma un ángulo de 60°.

67. Calcula a área encerrada entre estes círculos de 5 cm de radio.

68. Queremos construír unha rotonda para unha estrada de 9 metros de ancho de forma que o círculo interior da rotonda teña a mesma área que a coroa circular que forma a estrada. Que radio debe ter a rotonda?

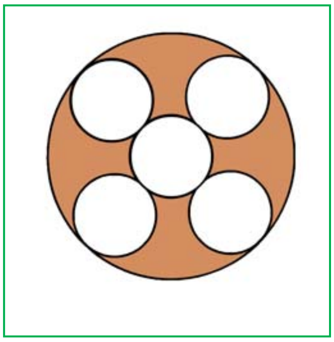


69. Unha figura típica da arquitectura gótica debúxase a partir dun triángulo equilátero trazando arcos de circunferencia con centro en cada un dos seus vértices e que pasan polos dous vértices restantes. Calcula a área dunha destas figuras se se constrúe a partir dun triángulo equilátero de 2 metros de lado.



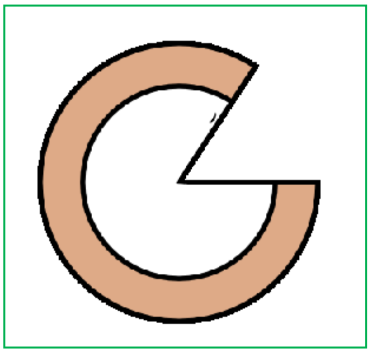
70. Calcula a área e o perímetro da figura formada por un triángulo equilátero de 8 cm de lado sobre o que se constrúe un sector circular.

Autor: Pedro Luis Suberviola
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF e Pedro Luis Suberviola



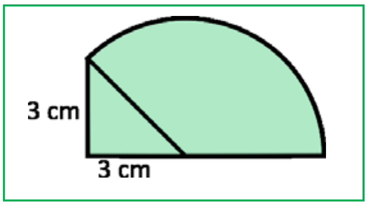
71. Hai 5 circunferencias inscritas nunha circunferencia de 12 cm de radio tal como indica a figura. Canto vale a área sombreada?

72. Un queixo cilíndrico ten unha base circular de 14 cm de diámetro e unha etiqueta circular de 8 cm de diámetro. Córtase unha porción de 70°. Que área ten o anaco de etiqueta cortada?

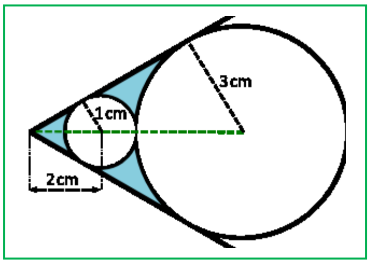


73. Dun queixo de 18 cm de diámetro cortamos unha porción de 50°. A etiqueta ten 7 cm de radio. Que área do queixo está visible?

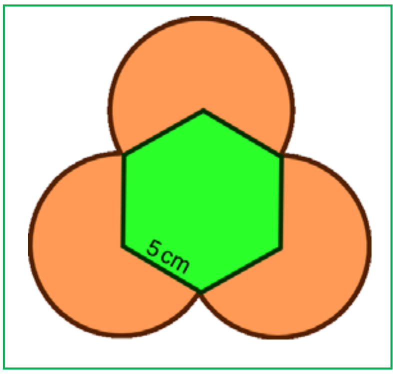
74. A partir dun triángulo rectángulo isósceles de 3 cm de cateto construímos un sector circular. Calcula a área da figura.



75. En dúas rectas que forman 60° inscríbense dúas circunferencias tanxentes entre si. A primeira ten o centro a 2 centímetros do vértice e o radio de 1 centímetro. A segunda ten de radio 3 centímetros. Canto vale a área sombreada?



76. Trazamos tres arcos circulares desde tres vértices dun hexágono de 5 cm de lado. Calcula a área e o perímetro da figura.



Todo o que vimos neste capítulo, agás o enunciado do teorema de *Tales* e a semellanza de triángulos xa o coñecías. Estudáchelo en primeiro de ESO. Alí viuse con detemento. Se non o recordas e precisas máis explicacións ou problemas podes velo no capítulo 8: Figuras Planas, de Primeiro de ESO, páxina 184, e no capítulo 9: Lonxitudes e áreas, de primeiro de ESO, páxina 216.

CURIOSIDADES. REVISTA

Algo de historia da Xeometría

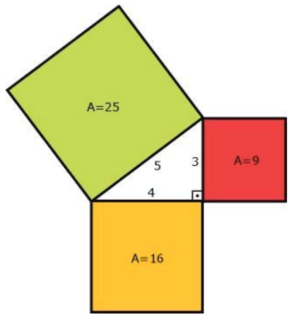
Conxectúrase que o inicio da Xeometría pode ser anterior a **exipcios e babilonios** pero, como non existe información escrita, é imposible afirmalo.

Herodoto opinaba que se orixinara en Exipto pola necesidade de refacer os lindes das terras despois das inundacións do Nilo.

No *papiro de Moscú* aparece o volume dunha pirámide cadrada.

En Mesopotamia coñecíase moita Xeometría. Na taboíña Plimpton, que non se conserva enteira, pódense identificar con dificultade *ternas pitagóricas* (moi anteriores a *Pitágoras*).

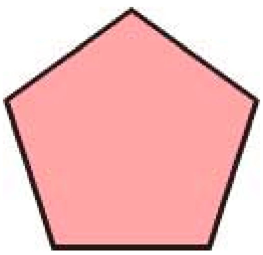
A **terna pitagórica** máis coñecida é 3, 4 e 5. Facíanse nós a esas distancias e así construíanse triángulos rectángulos.



Noutras taboíñas babilónicas, as de Susa, aparecen as áreas dos polígonos e as relacións entre elas.

Aínda que podemos coñecer moi pouco de **Tales** e de **Pitágoras**, pois non quedou ningunha obra escrita por eles, acéptase que foron grandes matemáticos e xeómetras.

Ambos os dous viaxaron aos centros do saber, Exipto e Babilonia. Xa vimos que xa se coñecía o que chamamos teorema de Tales ou de *Pitágoras*. A súa importancia está na forma de pensar, en utilizar o razoamento dedutivo para obter os resultados matemáticos.



O pentágono, e a estrela pitagórica, que obtés trazando as diagonais do pentágono, teñen grandes propiedades relacionadas co número de ouro, recórdalo? A escola tomou a estrela como emblema.

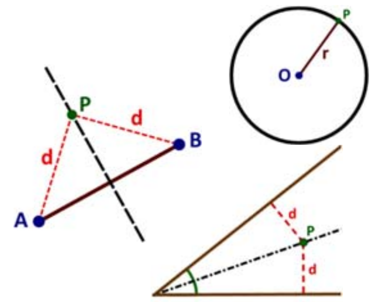
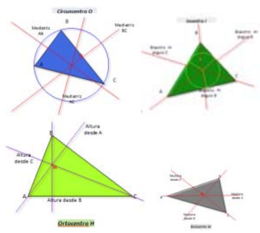
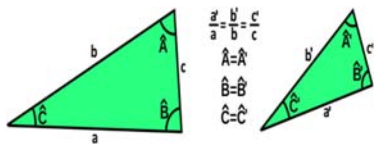
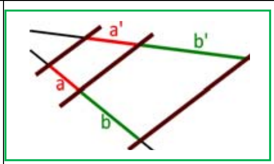
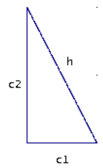
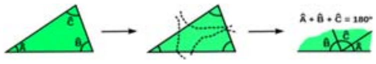
Teano, a muller de *Pitágoras*, dirixiu a Escola Pitagórica á morte deste.

Euclides de Alexandría é o autor dos *Elementos* onde destaca a forma de expoñer o fundamento da Matemática cunha orde lóxica.

Consta de 13 libros sendo os seis primeiros de Xeometría plana e o último sobre corpos. Con definicións e postulados constrúe o saber.

Autor: Pedro Luis Suberviola
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF e Pedro Luis Suberviola

RESUMO

Concepto	Definición	*Exemplos*
Lugares xeométricos	**Circunferencia** é o lugar xeométrico dos puntos do plano que equidistan do centro. **Mediatriz dun segmento** é o lugar xeométrico dos puntos do plano que equidistan dos extremos do mesmo. Dado un ángulo delimitado por dúas rectas, a **bisectriz** do ángulo é o lugar xeométrico dos puntos do plano que equidistan das mesmas.	
Rectas e puntos notables dun triángulo	Mediatrices e circuncentro Bisectrices e incentro Alturas e ortocentro Medianas e baricentro	
Semellanza	Dúas figuras semellantes teñen a *mesma forma*. Dous polígonos son semellantes se os seus lados son proporcionais e os seus ángulos son iguais.	
Criterios de semellanza de triángulos	Dous triángulos son semellantes se: 1) Teñen 2 ángulos iguais. 2) Teñen os 3 lados proporcionais. 3) Teñen dous lados proporcionais e o ángulo que forman é igual.	
Teorema de Tales	Establece unha relación entre os segmentos formados cando dúas rectas calquera son cortadas por varias rectas paralelas: $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{a'+b'}{a+b}$	
Teorema de Pitágoras	Nun triángulo rectángulo, a hipotenusa ao cadrado é igual á suma dos cadrados dos catetos: $h^2 = c_1^2 + c_2^2$ $h = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5\,cm.$	
Suma dos ángulos dun polígono	A suma dos ángulos interiores dun triángulo é 180·*n*.	

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Lugares xeométricos

1. Debuxa no teu caderno un triángulo de lados 2 cm, 3 cm e 4 cm. Traza nel, utilizando regra e compás, as mediatrices e bisectrices. Determina o circuncentro e o incentro. Traza as circunferencias inscritas e circunscritas.

2. Debuxa no teu caderno un triángulo de lado 5 cm e ángulos adxacentes ao mesmo de 30° e 50°. Traza nel, utilizando regra e compás, as medianas e as alturas. Determina o seu ortocentro e o seu baricentro.

3. Debuxa no teu caderno un triángulo cun ángulo de 50° comprendido entre dous lados de 5 e 8 cm. Obtén o seu circuncentro e o seu incentro.

4. Como son as rectas e puntos notables dun triángulo rectángulo?

5. Como son as rectas e puntos notables dun triángulo isósceles?

Semellanza

6. Indica se son semellantes os seguintes pares de triángulos:

a) Un ángulo de 70° e outro de 20°. Un ángulo de 90° e outro de 20°.

b) Triángulo isósceles con ángulo desigual de 80°. Triángulo isósceles cun ángulo igual de 50°.

c) A = 40°, b = 8 cm, c = 10 cm. A'= 40°, b' = 4 cm, c' = 5 cm

d) a = 3 cm, b = 4 cm, c = 6 cm. a' = 9 cm, b' = 12 cm, c' = 19 cm

7. Calcula o valor descoñecido para que os triángulos sexan semellantes:

a) a = 15 cm, b = 9 cm, c = 12 cm. a' = 10 cm, b' = 4 cm, c'?

b) A = 50°, b = 6 cm, c = 4 cm. A' = 50°, b' = 18 cm, c'?

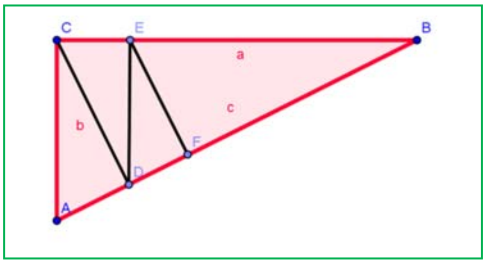
8. As lonxitudes dos lados dun triángulo son 12 cm, 14 cm e 14 cm. Un triángulo semellante a el ten un perímetro de 90 cm. Canto miden os seus lados?

9. Debuxa no teu caderno un pentágono regular. Traza as súas diagonais. O triángulo formado por un lado do pentágono e as dúas diagonais do vértice oposto denomínase triángulo áureo, pois ao dividir o lado maior entre o menor obtense o número de ouro, canto miden os seus ángulos? Busca, na figura que trazaches, outros triángulos áureos. Cal é a relación de proporcionalidade?

10. Canto é a suma dos ángulos interiores dun rombo?

11. A sombra dun edificio mide 15 m e a do primeiro andar 2 m. Sabemos que a altura dese primeiro andar é de 3 m, canto mide o edificio?

12. No museo de Bagdad consérvase unha taboíña na que aparece debuxado un triángulo rectángulo *ABC*, de lados a = 60, b = 45 e c= 75, subdividido en 4 triángulos rectángulos menores *ACD*, *CDE*, *DEF* e *EFB*, e o escriba calcula a lonxitude do lado *AD* como 27. Utilizou a semellanza de triángulos? Como se podería calcular? Que datos necesitas? Calcula a área do triángulo *ABC* e do triángulo *ACD*. Determina a lonxitude dos segmentos *CD*, *DE* e *EF*.



13. Demostra que en dous triángulos semellantes as medianas son proporcionais.

14. Un triángulo rectángulo isósceles ten un cateto de lonxitude 7 cm, igual á hipotenusa doutro triángulo semellante ao primeiro. Canto valen as áreas de ambos os triángulos?

15. O mapa a escala 1:3000000 dunha vila ten unha área de 2 500 cm^2, canto mide a superficie verdadeira da vila?

16. Unindo os puntos medios dos lados dun triángulo obtense outro triángulo. Como son? Que relación hai entre os seus perímetros? E entre as súas áreas?

17. A altura e a base dun triángulo rectángulo miden respectivamente 4 e 7 cm; e é semellante a outro de base 26 cm. Calcula a altura do novo triángulo e as áreas de ambos os dous.

Ángulos, lonxitudes e áreas

18. Constrúe un triángulo coñecendo a altura sobre o lado a, o lado a e o c.

19. Calcula a lonxitude do lado dun octógono regular inscrito nunha circunferencia de radio 5 cm.

20. Calcula a apotema dun hexágono regular lado 7 cm.

21. Calcula a área dun círculo cuxa circunferencia mide 50 cm.

22. Calcula a lonxitude dunha circunferencia cuxo círculo ten unha superficie que mide 50 cm^2.

23. A Terra dá unha volta cada 24 horas, a que velocidade se move un punto do Ecuador?

24. Que relación hai entre as áreas dun triángulo inscrito nun círculo e a do círculo?

25. Os gregos coñecían as dúas seguintes posibles formas de construír un triángulo rectángulo cos seus tres lados de lonxitude un número natural, sen máis que dar valores a n. Comproba se se verifican para n = 1, 2, …. a) Catetos: $2n$ e $n^2 - 1$, hipotenusa: $n^2 + 1$. b) Catetos: $2n + 1$ e $2n^2 + 2n$, hipotenusa: $2n^2 + 2n + 1$.

26. Ao aumentar en 3 cm o lado dun cadrado a súa área aumenta 32 cm^2. Canto mide o lado dos cadrados?

27. Quérese cubrir un terreo circular de 25 m de diámetro con grava, botando 10 kg por cada metro cadrado. Canta grava se precisa?

28. Unha escaleira de 4 m de lonxitude está apoiada sobre unha parede. O pé da escaleira dista 1.5 m da parede. Que altura acada a escaleira sobre a parede?

29. Calcula a área da circunferencia circunscrita a un rectángulo de lados 7 e 9 cm.

30. Calcula a área dun hexágono regular de 3 cm de lado. Prolonga os lados do hexágono e debuxa un hexágono estrelado. Calcula a súa área.

31. O sinal de tráfico de STOP ten forma de octógono regular. A súa altura mide 90 cm e o seu lado 37 cm, canto mide a súa superficie?

32. Calcula a área dun triángulo equilátero de lado 10 cm.

33. Calcula a área dun hexágono regular de perímetro 60 cm.

34. Calcula a área dun trapecio isósceles de base menor 5 cm, lado 3 cm e altura 4 cm.

35. Calcula a área dun trapecio isósceles de bases 8 e 6 cm e lado 3 cm.

36. Calcula a área e o perímetro dun rectángulo de lado 4 cm e diagonal 7 cm.

37. Calcula a área e o perímetro dun cadrado de diagonal 9 cm.

38. Calcula a área e o perímetro dun triángulo isósceles de base 8 cm e altura 6 cm.

39. Un triángulo mide de altura π e de base $\pi + 1$. É rectángulo?

40. Debuxa un triángulo rectángulo isósceles de catetos de lonxitude 1, canto mide a hipotenusa? Tomando esta hipotenusa como cateto e co outro cateto igual a 1 debuxa un novo triángulo rectángulo. Canto mide a nova hipotenusa? Continúa o proceso 4 veces, canto mide a última hipotenusa?

41. Debuxa un triángulo rectángulo de catetos de lonxitude 1 e 2 cm, canto mide a hipotenusa? Tomando esta hipotenusa como cateto e co outro cateto de lonxitude 1 cm debuxa un novo triángulo rectángulo. Canto mide a nova hipotenusa? Continúa o proceso 3 veces, canto mide a última hipotenusa?

42. Calcula a altura dunha pirámide regular cuadrangular de lado da base 10 m e de aresta 15 m.

43. Calcula a xeratriz dun cono de radio da base 5 m e de altura 7 m.

44. Dous ascetas hindús viven no alto dun cantil de 10 m de altura cuxo pé está a 200 metros da vila máis próxima. Un dos ascetas baixa do cantil e vai á vila. O outro, que é mago, ascende unha distancia *x e* viaxa voando en liña recta á vila. Ambos os dous percorren a mesma distancia. Canto ascendeu o mago?

45. Canto mide a aresta da base da pirámide de *Keops* se mide 138 m de altura e 227 m de aresta?

AUTOAVALIACIÓN

1. Todos os puntos que están á mesma distancia de dous puntos dados están en:

a) unha bisectriz b) unha circunferencia c) unha elipse d) unha mediatriz

2. As tres medianas dun triángulo córtanse no:

a) ortocentro b) baricentro c) incentro d) circuncentro

3. O circuncentro é o centro de:

a) gravidade do triángulo b) a circunferencia inscrita c) a circunferencia circunscrita

4. Dous triángulos son semellantes se:

a) teñen dous ángulos iguais b) teñen dous lados proporcionais

c) teñen un ángulo igual d) as súas áreas son semellantes

5. Sabemos que os triángulos *ABC* e *A'B'C'* son semellantes. Calcula o valor de *a'* e *c'* para que o sexan sabendo que a = 10 cm, b = 6 cm, b' = 3 cm, c = 8 cm:

a) a' = 4 cm e c'= 6 cm b) a' = 5 cm e c'= 6 cm

c) a' = 4 cm e c'= 4 cm d) a' = 5 cm e c'= 4 cm

6. Se a hipotenusa dun triángulo rectángulo mide 7 cm e un cateto mide 3 cm, entón o outro cateto mide aproximadamente:

a) 6.3 cm b) 5 cm c) 5.8 cm d) 6.9 cm

7. A suma dos ángulos interiores dun polígono irregular de dez lados é:

a) 1 440° b) 1 620° c) 1 800° d) 1 260°

8. A área dun rombo de lado 5 cm e unha diagonal de 8 cm mide:

a) 48 cm^2 b) 36.7 cm^2 c) 24 cm^2 d) 21.2 cm^2

9. O ángulo central do inscrito na circunferencia que abrangue un ángulo de 72° mide:

a) 720° b) 108° c) 36° d) 144°

10. A lonxitude da circunferencia e a área do círculo de radio 3 cm son respectivamente:

a) 6π cm e 9π cm^2 b) 9π cm e 6π cm^2 c) 3π cm e 3π cm^2 d) 18 cm e 27 cm^2

Autor: Pedro Luis Suberviola
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF e Pedro Luis Suberviola