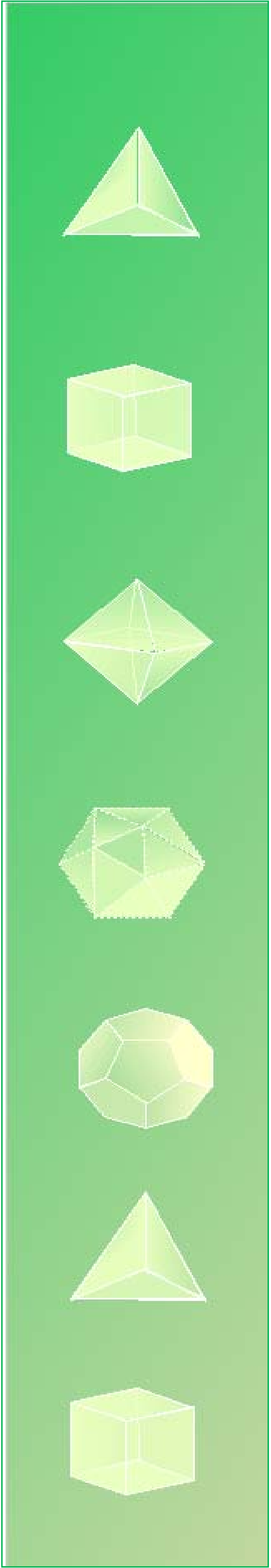


Matemáticas orientadas ás ensinanzas académicas

4ºB ESO
Capítulo 7: Semellanza

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Jorge Muñoz

Revisora: Nieves Zuasti

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

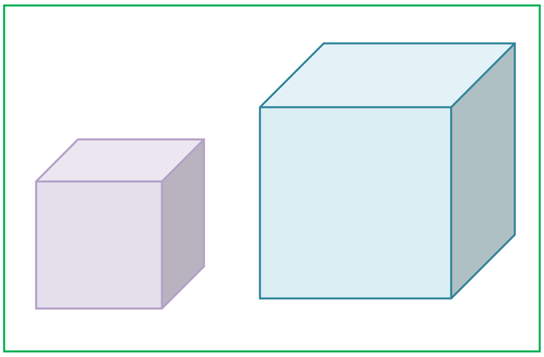
Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF e Jorge Muñoz

Índice

Resumo

Un dos problemas *históricos* da Matemática é o da **duplicación dun cubo**. En Atenas houbo unha tremenda peste que asolaba á poboación. Mesmo o seu gobernante, *Pericles*, morreu no ano 429 a. C. Consultado o oráculo de *Apolo* este dixo que se acabaría coa peste se se construía un altar que fose o dobre do que había (que tiña forma de cubo).



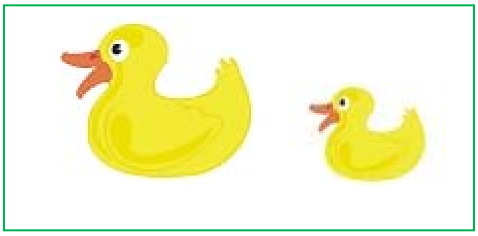
Non se logrou dar coa solución. Débese buscar a razón de proporcionalidade entre os lados para que o volume sexa dobre. A peste rematou e o problema quedou sen resolver durante séculos pero ti vas saber solucionalo cando estudes este capítulo.

Tamén imos estudar o teorema de *Tales* e a súa aplicación a recoñecer cando dous triángulos son semellantes. Son os criterios de semellanza de triángulos.

Utilizando a semellanza de triángulos demostraremos dous teoremas, o teorema da altura e o do cateto.

1. FIGURAS SEMELLANTES

1.1. Figuras semellantes



Durante este capítulo falaremos unicamente da proporcionalidade xeométrica, a semellanza.

Dúas figuras semellantes teñen a *mesma forma*. É moi útil saber recoñecer a semellanza para poder estudar unha figura e inferir así propiedades dunha figura semellante a ela que é máis grande ou inaccesible. A semellanza conserva os ángulos e mantén a proporción entre as distancias.

Dous polígonos son semellantes se os seus lados son proporcionais e os seus ángulos son iguais.

1.2. Razón de semellanza. Escala

Dúas figuras son **semellantes** se as lonxitudes de elementos correspondentes son proporcionais. Ao coeficiente de proporcionalidade chámaselle **razón de semellanza**. Cando representamos algo mediante unha figura (3D) ou un plano (2D) a razón de semellanza tamén se chama **escala**.

Na linguaxe matemática existen dúas ferramentas fundamentais para describir unha proporción: o produto e o cociente.

O produto indica cantas veces maior é a representación fronte ao modelo. Sóese denotar mediante o signo de produto **"X"** (10X, 100X, etc.) indicando así a razón de semellanza.

Exemplo:

- *Unha representación a escala 100X dunha célula indica que a representación é 100 veces máis grande que o modelo, ou que 100 células en fila teñen a mesma lonxitude que a representación.*

A división indica o camiño contrario, ou canto máis pequeno é o modelo fronte á súa representación. Sóese denotar mediante o símbolo de división **":"** (1:100, 1:500, etc.) o que indica a razón de semellanza.

Exemplo:

- *Un plano de construción dun edificio de escala* 1:100, *indica que a representación é 100 veces máis pequena que o modelo*. Se unha distancia no plano é 10 cm, esa mesma distancia na realidade será de 1 000 cm = 10 m.

Para escribir unha **razón de semellanza** en linguaxe alxébrica utilízanse dous operadores: o produto (x) e o cociente (:).

Cando falamos de semellanza xeométrica, referímonos a proporcionalidade en canto a lonxitudes pero tamén hai outros atributos nos que podemos atopar semellanzas entre un modelo e o seu semellante. En xeral, calquera magnitude que sexa medible, tanto no modelo como no seu semellante, é apta para establecer unha relación de semellanza.

Sempre que se poidan comparar dúas magnitudes dun atributo común, é posible establecer unha **razón de semellanza**.

Actividades resoltas

- *Se un microscopio ten un aumento de 100X, que tamaño (aparente) pensas que terá a imaxe que se vexa polo obxectivo se observamos un pelo de 0.1 mm de espesor?*

0.1 mm X 100 = 10 mm = 1 cm.

- *Pescuda a altura dunha casa que mide* 20 *cm de alto nun plano de escala* 1:100.

Se H é a altura da casa e h o tamaño no plano, sabemos que $h = H/100$, polo tanto, $H = 100 \cdot h$.

$H = 100 \cdot 20$ cm = 20 m. *Comprobación*: é unha casa duns 7 andares.

Actividades propostas

1. Mide a túa altura nunha foto e calcula o factor de semellanza.

1.3. Semellanza en lonxitudes, áreas e volumes

Lonxitudes de figuras semellantes

Nas figuras semellantes a forma non varía, unicamente cambia o tamaño. As lonxitudes son proporcionais. No seguinte apartado demostraremos o teorema de Tales que é o fundamento matemático da semellanza.

A **razón de semellanza** aplícase a todas as **lonxitudes** do modelo por igual.

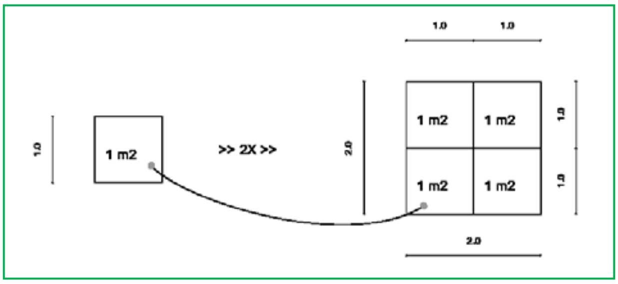
Cando as propiedades dunha figura dependen da lonxitude, como a área e o volume, estas propiedades tamén cambian na figura semellante, aínda que non da mesma maneira que a lonxitude.

Exemplo:

- *Se a área do cadrado é* $A = L^2 = L \cdot L$*, a área dun cadrado semellante de razón* 2*, será:*

$A = 2 \cdot L \cdot 2 \cdot L = 2 \cdot 2 \cdot L \cdot L = 2^2 \cdot L^2 = 4 \cdot L^2$

Áreas de figuras semellantes



A área dunha figura é unha propiedade que depende da lonxitude dos seus segmentos. En concreto, a relación entre a lonxitude dunha figura e a súa área é cuadrática.

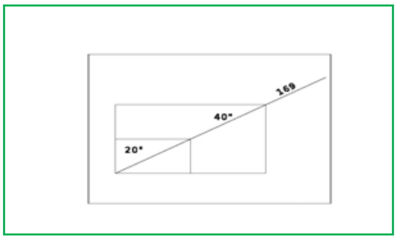
Cando se aplica o factor de semellanza, consérvase a relación cuadrática entre lonxitude e área polo que, nunha figura plana (2D), provocará un aumento da súa área proporcional ao cadrado.

Se a razón de semellanza entre as lonxitudes dunha figura é k, a relación entre as súas áreas, A e A', é:

$A' = k \cdot L_1 \cdot k \cdot L_2 = k \cdot k \cdot L_1 \cdot L_2 = k^2 \cdot A$

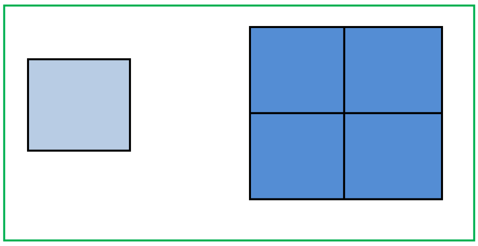
Se a razón de semellanza entre as lonxitudes dunha figura é k, entón a razón entre as súas áreas é $\boldsymbol{k^2}$.

Exemplo:



- *Un televisor de* 40 *polgadas custa aproximadamente catro veces máis que un de* 20. Por estraño que pareza, o aumento de prezo está xustificado. O tamaño do televisor, indica a lonxitude da súa diagonal en polgadas. Unha lonxitude dobre, implica unha área catro veces maior e por tanto necesita catro veces máis compoñentes electrónicos.

Exemplo:



- *Observa a figura da marxe.* Se multiplicamos por 2 o lado do cadrado pequeno, a área do cadrado grande é 2^2 = 4 veces a do pequeno.

Volumes de figuras semellantes

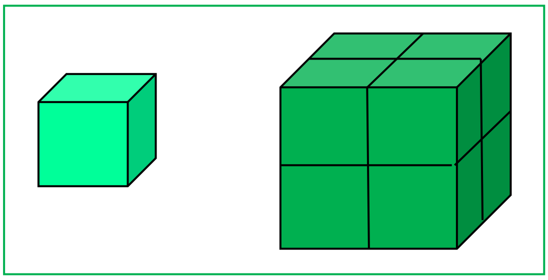
O volume dunha figura é unha propiedade que depende da lonxitude dos seus segmentos. Neste caso, a relación entre as lonxitudes dunha figura e o seu volume é cúbica.

Cando se aplica o factor de semellanza, esta relación cúbica provocará un aumento do seu volume proporcional ao cubo (k^3). Se a razón de semellanza entre as lonxitudes dunha figura é k, e o volume de partida é $V = L_1 \cdot L_2 \cdot L_3$: ao aplicar a semellanza tense:

$$V_k = k \cdot L_1 \cdot k \cdot L_2 \cdot k \cdot L_3 = \mathrm{k} \cdot \mathrm{k} \cdot \mathrm{k} \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 = k^3 \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 = k^3 \cdot V$$

Se a razón de semellanza entre as lonxitudes dunha figura é ***k***, entón entre os seus volumes é ***k*³**.

Exemplo:



- *Observa a figura da marxe*. Ao multiplicar por 2 o lado do cubo pequeno obtense o cubo grande. O volume do cubo grande é 8 (2^3) veces o do cubo pequeno.

Actividades resoltas

- *A torre Eiffel de París mide 300 metros de altura e pesa uns 8 millóns de quilos. Está construída de ferro. Se encargamos un modelo a escala da torre, tamén de ferro, que pese só un quilo, que altura terá? Será maior ou menor que un lapis?*

O peso está relacionado co volume. A torre Eiffel pesa 8 000 000 quilos, e queremos construír unha, exactamente do mesmo material que pese 1 quilo. Polo tanto, k^3 = 8 000 000/1 = 8 000 000, e k = 200. A razón de proporcionalidade entre as lonxitudes é de 200.

Se a Torre Eiffel mide 300 *m* de altura (mide un pouco máis, 320 m), e chamamos x ao que mida a nosa temos: 300/x = 200. Despexamos x que resulta igual a x = 1.5 *m*. Mide metro e medio! É moito maior que un lapis!

Actividades propostas

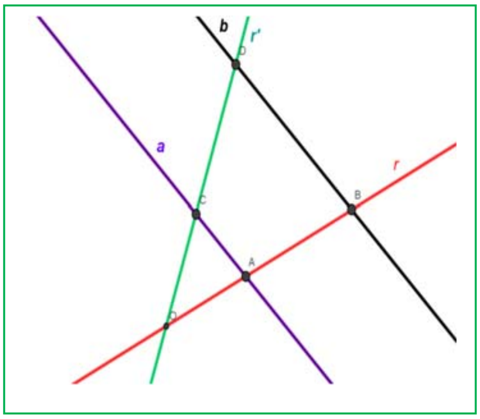
2. O diámetro dun pexego é tres veces maior có do seu óso, e mide 8 *cm*. Calcula o volume do pexego, supoñendo que é esférico, e o do seu óso, tamén esférico. Cal é a razón de proporcionalidade entre o volume do pexego e o do óso?

3. Na pizzería teñen pizzas de varios prezos: 3 €, 6 € e 9 €. Os diámetros destas pizzas son: 15 *cm*, 20 *cm* e 30 *cm*, cal resulta máis económica? Calcula a relación entre as áreas e compáraa coa relación entre os prezos.

4. Unha maqueta dun depósito cilíndrico de 1 000 litros de capacidade e 5 metros de altura, queremos que teña unha capacidade de 1 litro. Que altura debe ter a maqueta?

2. O TEOREMA DE TALES

2.1. Teorema de *Tales*



Dadas dúas rectas, *r* e *r'*, que se cortan no punto *O*, e dúas rectas paralelas entre si, *a* e *b*. A recta *a* corta ás rectas *r* e *r'* nos puntos *A* e *C*, e a recta *b* corta ás rectas *r* e *r'* nos puntos *B* e *D*. Entón o Teorema de Tales afirma que os segmentos son proporcionais:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD} = \frac{OA + OC + AC}{OB + OD + BD}$$

Dise que os triángulos *OAC* e *OBD* están en **posición *Tales***. Son **semellantes**. Teñen un ángulo común (coincidente) e os lados proporcionais.

Actividades resoltas

- *Sexan OAC e OBD dous triángulos en posición Tales. O perímetro de OBD é* 20 *cm, e OA mide* 2 *cm, AC mide* 5 *cm e OC mide* 3 *cm. Calcula as lonxitudes dos lados de OBD.*

Utilizamos a expresión: $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD} = \frac{OA + OC + AC}{OB + OD + BD}$ substituíndo os datos:

$$\frac{2}{OB} = \frac{3}{OD} = \frac{5}{BD} = \frac{2+3+5}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2},$$

polo que despexando, sabemos que: *OB* = 2·2 = 4 cm; *OD* = 3·2 = 6 cm, e *BD* = 5·2 = 10 cm.
En efecto: 4 + 6 + 10 = 20 cm, perímetro do triángulo.

- *Conta a lenda que Tales mediu a altura da pirámide de Keops comparando a sombra da pirámide coa sombra do seu bastón. Temos un bastón que mide* 1 *m. Se a sombra dunha árbore mide* 12 *m e a do bastón (á mesma hora do día e no mesmo momento) mide* 0.8 *m, canto mide a árbore?*

As alturas da árbore e do bastón son proporcionais ás súas sombras (forman triángulos en posición *Tales*), polo que, se chamamos *x* á altura da árbore, podemos dicir:

$\frac{0.8}{1} = \frac{12}{x}$. Polo tanto, *x* = 12/0.8 = 15 metros.

Actividades propostas

5. Nunha foto hai un neno, que sabemos que mide 1,5 *m*, e un edificio. Medimos a altura do neno e do edificio na foto e resultan ser: 2 *cm* e 10 *cm*. Que altura ten o edificio? *Comprobación*: O resultado paréceche real? É posible que un edificio teña esa altura?

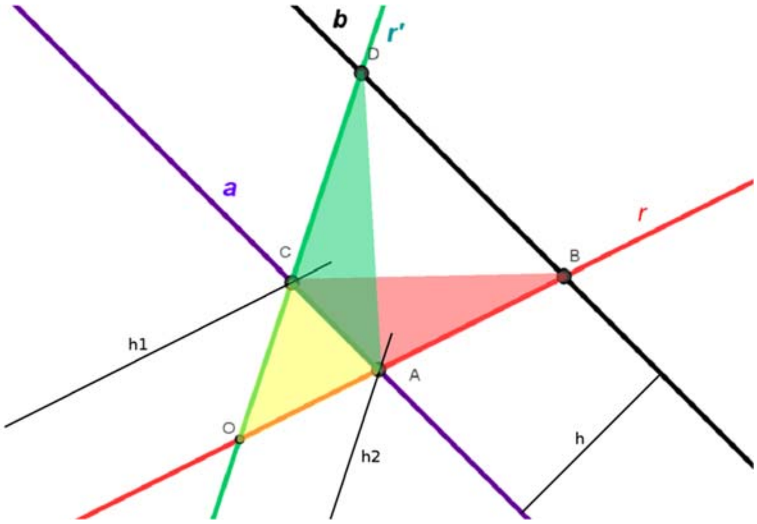
6. Debúxase un hexágono regular. Trázanse as súas diagonais e obtense outro hexágono regular. Indica a razón de semellanza entre os lados de ambos os hexágonos.

7. Nun triángulo regular *ABC* dado 1 *cm* trazamos os puntos medios, *M* e *N*, de dous dos seus lados. Trazamos as rectas *BN* e *CM* que se cortan nun punto *O*. Son semellantes os triángulos *MON* e *COB*? Cal é a razón de semellanza? Canto mide o lado *MN*?

8. Unha pirámide regular hexagonal, de lado da base 3 *cm* e altura 10 *cm*, córtase por un plano a unha distancia de 4 *cm* do vértice, co que se obtén unha nova pirámide. Canto miden as súas dimensións?

2.2. Demostración do teorema de Tales

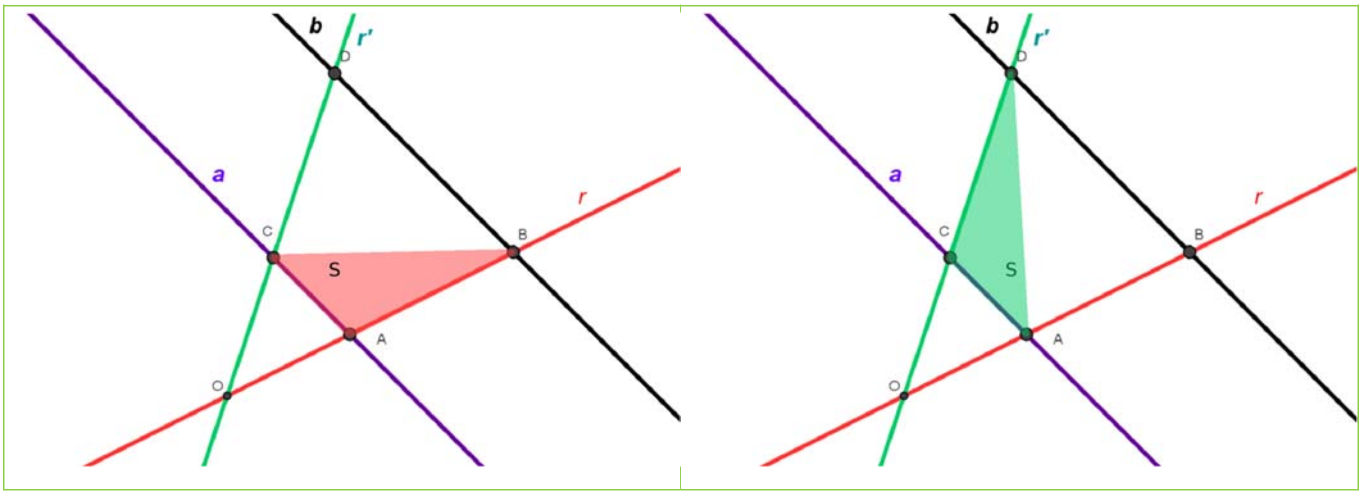
Para a demostración utilízanse os triángulos *ABC*, *ADC* e *OCA,* que se amosan na figura.



Imos dar varios pasos para demostrar o teorema de Tales.

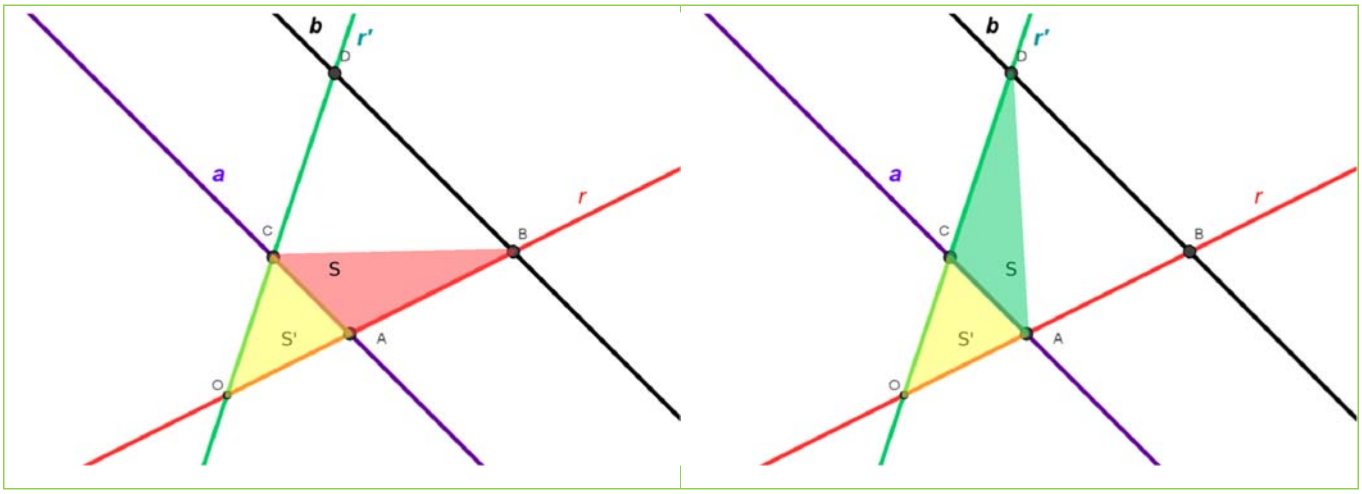
- A área do triángulo *ABC* é a mesma que a área do triángulo *ADC* pois teñen a mesma base (*AC)* e a mesma altura (*h*), a distancia entre as rectas paralelas ***a*** e ***b***:

$$Área\ (ABC) = Área\ (ADC) = CA \cdot h/2 = S$$



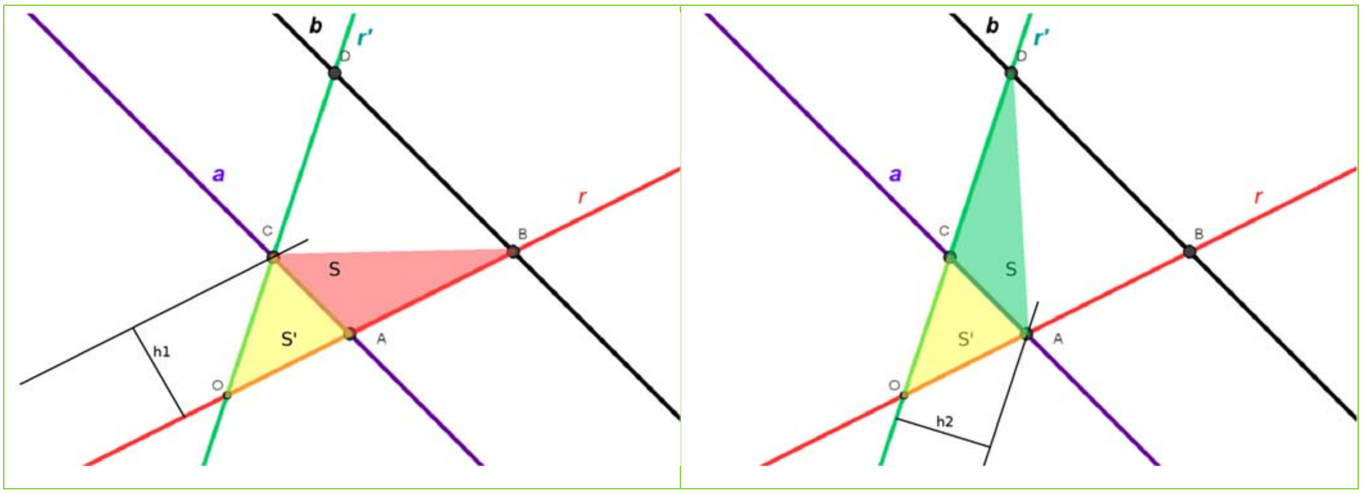
- A área do triángulo *OCB* é a mesma que a área do triángulo *OAD* pois sumamos ás áreas dous triángulos anteriores, a área do triángulo *OAC*:

$$Área\ (OCB) = Área\ (OAD) = S + S'$$



- Calculamos o cociente entre as áreas dos triángulos *OAC* e *OBC*. Para calcular as áreas, tomamos as bases que están sobre a recta ***r***, entón a altura de ambos os triángulos é a mesma pois teñen o vértice *C* común, polo que o cociente entre as súas áreas é igual ao cociente entre as súas bases.
- Do mesmo modo calculamos o cociente entre as áreas dos triángulos *OAC* e *OAD* tomando agora as bases sobre a recta ***r'*** e a altura, que é a mesma, a do vértice común *A*:

$$\frac{Área(OAC)}{Área(OBC)} = \frac{S'}{S+S'} = \frac{OA \cdot h_1/2}{OB \cdot h_1/2} = \frac{OA}{OB} \qquad \frac{Área(OAC)}{Área(OAD)} = \frac{S'}{S+S'} = \frac{OC \cdot h_2/2}{OD \cdot h_2/2} = \frac{OC}{OD}$$

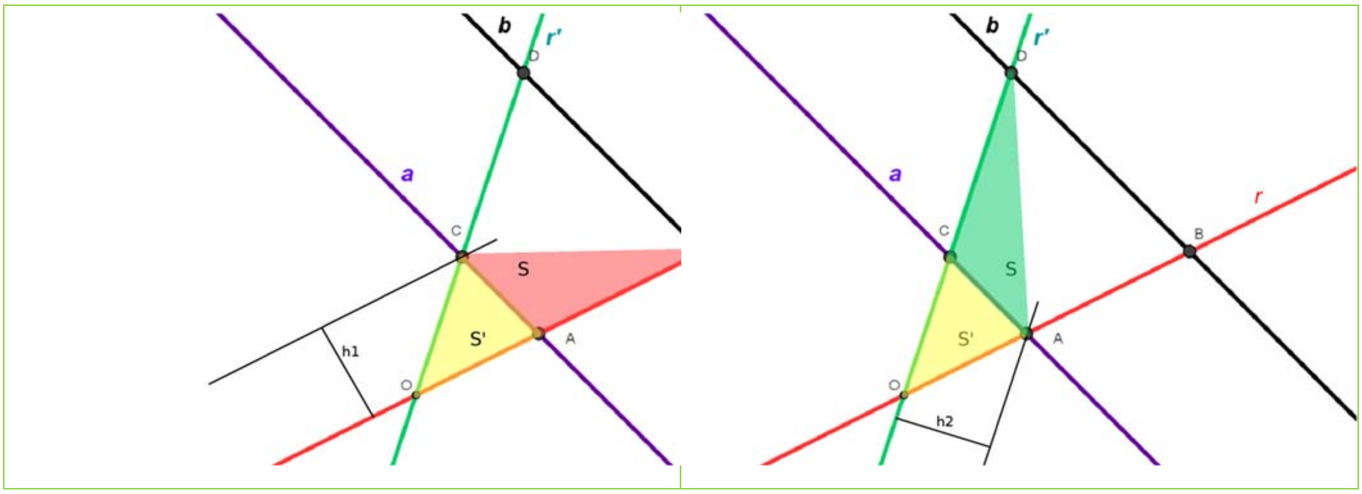


- Xa demostramos que *Área* (*OBC*) = *Área* (*OAD*) = S, substituíndo:

$$\frac{Área(OAC)}{Área(OBC)} = \frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}. \qquad (1)$$

- Para obter a outra relación de proporcionalidade utilizamos un razoamento similar. Calculamos o cociente entre as áreas dos triángulos *OAC* e *ABC* tomando as bases sobre a recta ***r*** e a altura do vértice común *C*.
- Despois calculamos o cociente entre as áreas dos triángulos *OAC* e *ADC* tomando as bases sobre a recta ***r’*** e a altura, que é a mesma, desde o vértice común *A*, polo que ese cociente é proporcional ás bases *OC* e *CD*:

$$\frac{Área(OAC)}{Área(ABC)}=\frac{S'}{S}=\frac{OA\cdot h_1/2}{AB\cdot h_1/2}=\frac{OA}{AB} \qquad \frac{Área(OAC)}{Área(ADC)}=\frac{S'}{S}=\frac{OC\cdot h_2/2}{CD\cdot h_2/2}=\frac{OC}{CD}$$



- Pero como as áreas de *ABC* e de *ADC* (S) son iguais obtense:

$$\frac{Área(OAC)}{Área(ABC)}=\frac{OA}{AB}=\frac{OC}{CD}\Rightarrow\frac{OA}{OC}=\frac{AB}{CD}. \qquad (2)$$

Igualando as expresións (1) e (2) conséguese a primeira afirmación do teorema de Tales:

$$\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{CD}\Leftrightarrow\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$$

Actividades resoltas

- Demostra que se $\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{CD}$ entón $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}=\frac{OA+OC+AC}{OB+OD+BD}$

En efecto, se dicimos que $\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{CD}=k$ obtemos que:

$$OA = k\cdot OC; OB = k\cdot OD; AB = k\cdot CD \Rightarrow$$

$$OA+OB+AB = k\cdot OC + k\cdot OD + k\cdot CD = k\cdot(OC+OD+CD)$$

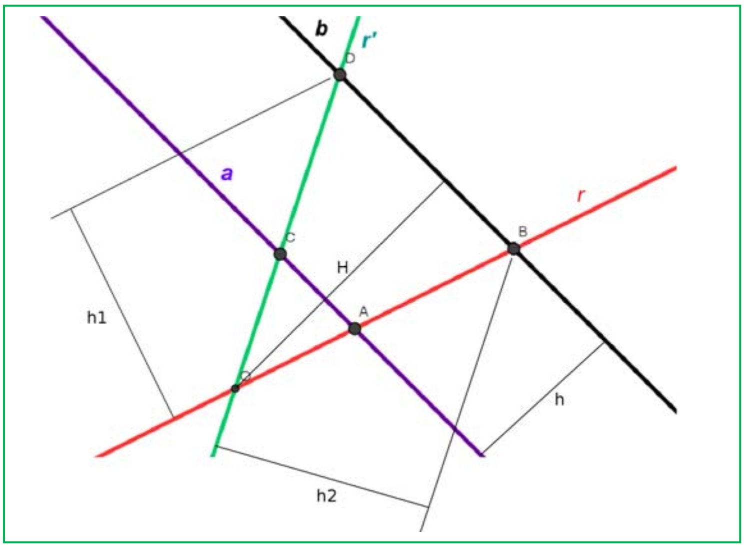
E despexando *k* logramos probar que:

$$k=\frac{OA+OB+AB}{OC+OD+CD} \text{ e polo tanto}$$

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}=\frac{OA+OC+AC}{OB+OD+BD}, \text{ o teorema de } Tales.$$

- *Sexan OAC e OBD dous triángulos en posición Tales. O perímetro de OAC é 50 cm, OB mide 12 cm, BD mide 9 cm e OD mide 9 cm. Calcula as lonxitudes dos lados de OAC.*

Utilizamos a expresión do Teorema de Tales:



$$\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}=\frac{OA+OC+AC}{OB+OD+BD}$$

substituíndo os datos:

$$\frac{OA}{12}=\frac{OC}{9}=\frac{AC}{9}=\frac{50}{12+9+9}=\frac{50}{30}=\frac{5}{3},$$

polo que, despexando, sabemos que:

$OA = 12\frac{5}{3} = 20$ cm;

$OC = 9\frac{5}{3} = 15$ cm, e

$AC = 9\frac{5}{3} = 15$ cm.

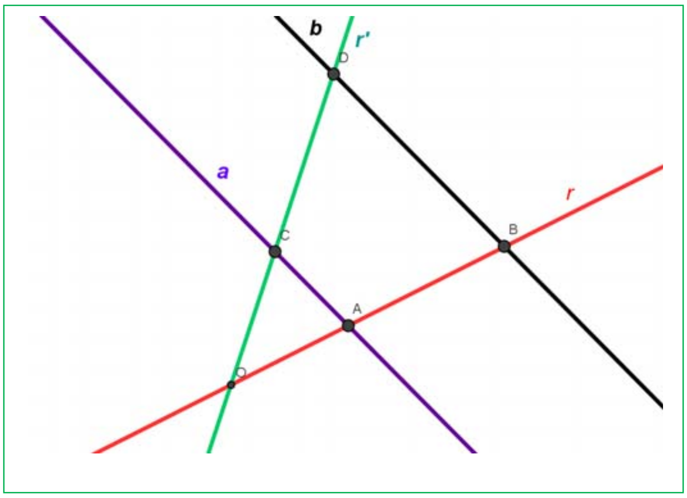
En efecto: 20 + 15 + 15 = 50 cm, perímetro do triángulo.

Actividades propostas

9. Sexan *ABC* e *AED* dous triángulos en posición Tales. Sábese que *AB* = 7 m, *BC* = 5 m, *AC* = 4 m e *AD* = 14 m. Calcula as dimensións de *AED* e o seu perímetro.

10. *Reto*: Utiliza unha folla en branco para demostrar o teorema de Tales sen axuda. Non fai falla que utilices o mesmo procedemento que o libro. Hai moitas maneiras de demostrar o teorema.

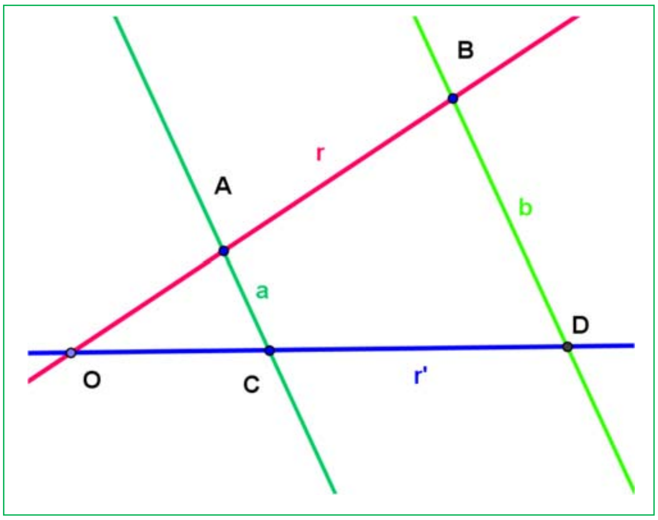
2.3. Recíproco do teorema de *Tales*



Dadas dúas rectas, ***r*** e ***r’***, que se cortan no punto *O*, e dúas rectas ***a*** e ***b*** tales que a recta ***a*** corta ás rectas ***r*** e ***r’*** nos puntos *A* e *C*, e a recta ***b*** corta ás rectas ***r*** e ***r’*** nos puntos *B* e *D*. Entón o recíproco do Teorema de Tales afirma que se todos os segmentos formados polos puntos *A, B, C* e *D* son proporcionais, as rectas ***a*** e ***b*** son paralelas entre si.

Se $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$ entón ***a*** e ***b*** son paralelas.

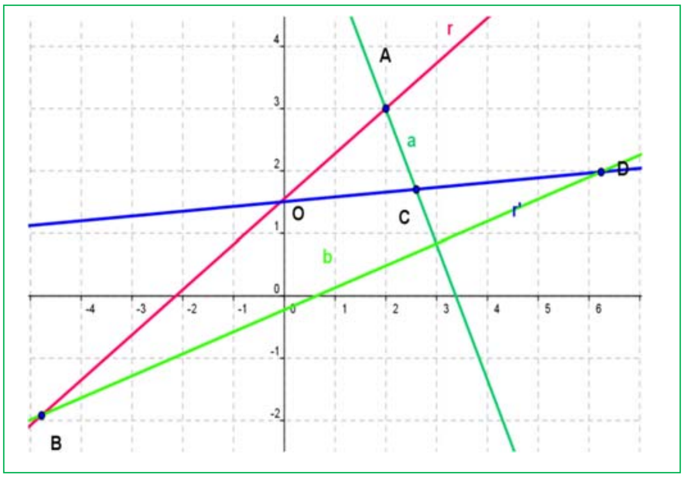
Actividades resoltas



Na figura adxunta sábese que OA = 2 cm, *OC* = 2 cm, AC = 1 cm, *OB* = 5 cm, *OD* = 5 cm, BD = 2.5 cm. Como son as rectas ***a*** e ***b***?

Substituímos na expresión do teorema de Tales: $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$, que se verifica xa que: $\frac{2}{5}=\frac{2}{5}=\frac{1}{2.5}$, logo as rectas ***a*** e ***b*** son paralelas, e o segmento *AC* é paralelo a *BD*.

Na figura adxunta sábese que OA = *OC* = 2 cm, e que *OB* = 5 cm = *OD*. As rectas ***a*** e ***b*** non son paralelas, por que?



Porque non verifica o teorema de Tales.

$\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}\neq\frac{AC}{BD}$ => $\frac{2}{5}=\frac{2}{5}\neq\frac{AC}{BD}$.

Non basta con que se verifique unha das igualdades, deben verificarse as dúas.

Comprobación: Mide cunha regra os valores de *AC* e *BD*.

Actividades propostas

11. Sexan *O*, *A* e *B* tres puntos aliñados e sexan *O*, *C*, *D* outros tres puntos aliñados nunha recta diferente á anterior. Verifícase que $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}$. Podemos asegurar que o segmento *AC* é paralelo ao segmento *BD*? Razoa a resposta.

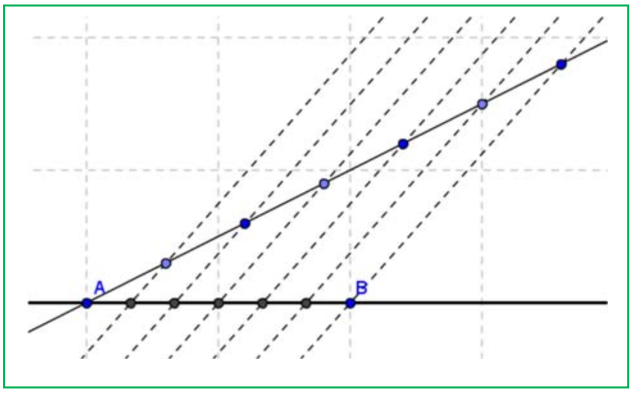
12. Sexan *O*, *A* e *B* tres puntos aliñados e sexan *O*, *C*, *D* outros tres puntos aliñados nunha recta diferente á anterior. Verifícase que $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$. Podemos asegurar que o segmento *AC* é paralelo ao segmento *BD*? Razoa a resposta.

2.4. Aplicacións do teorema de *Tales*

Ao estudar a representación de números racionais na recta numérica aprendemos a representar fraccións para o que cumpría dividir segmentos en partes iguais.

Recorda que:

Para dividir un **segmento *AB* en *n* partes iguais** trázase unha semirrecta *r* con orixe en A onde se sinalan, coa axuda dun compás, *n* segmentos consecutivos da mesma lonxitude. O extremo do último segmento únese con *B*, e trázanse paralelas a este segmento por cada un dos puntos sinalados da semirrecta.



Observa que a figura obtida é de triángulos en posición Tales, e que os segmentos obtidos en A*B* son todos de igual lonxitude.

Do mesmo modo o teorema de *Tales* sérvenos para **dividir un segmento en partes que teñan unha proporción dada**. O procedemento é o mesmo que o anterior. A diferenza é que agora unicamente nos interesa unha das divisións da semirrecta *r*.

O teorema de Tales tamén nos permite coñecer moito máis sobre a **semellanza de triángulos**. Se dous triángulos son semellantes imos poder aplicar un movemento a un deles (translación, xiro ou simetría) e colocalo en posición Tales co segundo, e a partir de aí utilizar o teorema de Tales. Isto verémolo con máis detemento nos apartados seguintes.

Actividades resoltas

- *Na figura anterior dividimos o segmento AB* en 6 partes iguais. Identifica os 6 triángulos en posición de Tales e calcula o factor de semellanza con respecto ao primeiro.

Os triángulos en posición de Tales son os que comparten o mesmo ángulo do vértice A.
Se chamamos *d* á distancia entre dous cortes sobre o segmento *AB*, pódese calcular *d* = *AB*/6.
O factor de semellanza calcúlase mediante a proporción entre as súas lonxitudes. Ao seren triángulos en posición Tales, sabemos que todas as proporcións son iguais para todos os lados, polo que o factor de semellanza coincide coa proporción entre calquera par de lados, incluíndo os que coinciden co segmento *AB*.

Temos entón que a base do primeiro triángulo (o máis pequeno) é *d*, e a base do segundo triángulo é 2 · *d*, así que a razón de semellanza destes dous triángulos é 2.
Da mesma maneira, as razóns de semellanza dos demais triángulos serán 3, 4, 5 e 6.

Actividades propostas

13. Se divides o segmento *AB* en 6 partes iguais, busca a relación de semellanza entre o sexto segmento e o terceiro.

14. Debuxa no teu caderno un segmento e divídeo en 5 partes iguais utilizando regra e compás. Demostra que, utilizando o teorema de Tales os segmentos obtidos son, en efecto, iguais.

15. Debuxa no teu caderno un segmento de 7 cm de lonxitude, e divídeo en dous segmentos que estean nunha proporción de 3/5.

16. Debuxa no teu caderno unha recta numérica e representa nela as seguintes fraccións:

a) 1/2 b) 5/7 c) –3/8 d) 5/3

3. SEMELLANZA DE TRIÁNGULOS

3.1. Criterios de semellanza de triángulos

Como se sabe se dúas figuras son semellantes?

Xa sabes que:

Dúas figuras son semellantes cando teñen a mesma forma pero distinto tamaño. Aínda que esta definición pode parecer moi clara na linguaxe natural, non é útil en Matemáticas xa que non se pode escribir en linguaxe lóxica.

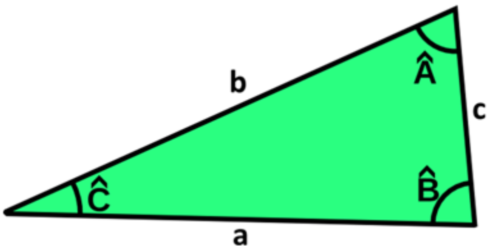
Imos traballar a semellanza coa figura máis simple que existe: o **triángulo**.

As dúas condicións para a semellanza son a forma e o tamaño. Un triángulo é unha figura formada por tres lados e tres ángulos.

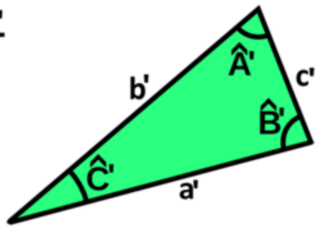
Dous triángulos teñen a mesma forma se os tres ángulos son iguais. Se un só ángulo é distinto teñen distinta forma e trátase de triángulos non semellantes.

Cando dous triángulos teñen a mesma forma (os mesmos ángulos), podemos falar de triángulos semellantes. Se son semellantes, a proporción entre os seus lados é constante, como afirma o teorema de Tales.

Dous triángulos **semellantes** teñen todos os ángulos iguais e os lados proporcionais.



$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$
$$\hat{A} = \hat{A}'$$
$$\hat{B} = \hat{B}'$$
$$\hat{C} = \hat{C}'$$



Para recoñecer dous triángulos semellantes non é necesario coñecer todos os lados e ángulos, é suficiente con que se cumpra algún dos seguintes **criterios de semellanza.**

Criterios de semellanza de triángulos

Para que dous triángulos sexan semellantes deben ter os seus tres ángulos iguais. Isto cúmprese nos seguintes tres casos.

Dous triángulos son semellantes se:

Primeiro: Teñen dos ángulos iguais.

Ao teren dos ángulos iguais e seren a suma dos ángulos dun triángulo igual a 180°, o terceiro ángulo é necesariamente igual. Co que ambos os triángulos se poden superpoñer e levar á posición de triángulos en posición Tales. Dous dos seus lados son entón coincidentes e o terceiro é paralelo.

Segundo: Teñen os tres lados proporcionais.

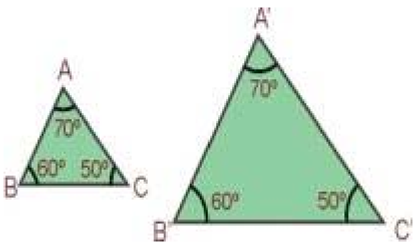
Se os seus tres lados son proporcionais, necesariamente son semellantes polo teorema de Tales.

Terceiro: Teñen dous lados proporcionais e o ángulo que forman é igual.

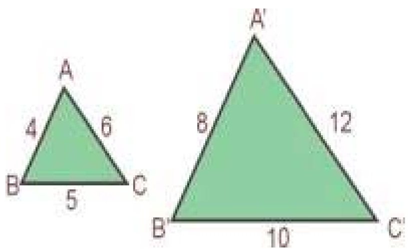
Como acabamos de ver, a demostración dos criterios de semellanza baséase nos criterios de igualdade de triángulos. Xa sabes que dous triángulos son iguais se teñen os seus tres lados iguais e os seus tres ángulos iguais, pero non é necesario que se verifiquen esas seis igualdades para que o sexan. Basta por exemplo que teñan un lado e dous ángulos iguais. Así, pódese construír un triángulo igual a un dos dados en *posición Tales* co segundo e deducir a semellanza.

Exemplo

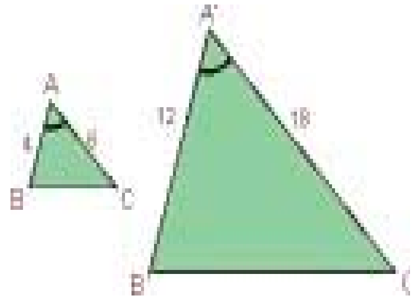
- *Os triángulos das ilustracións son semellantes. Cada unha das figuras verifica un dos criterios de semellanza de triángulos.*



Primeiro criterio



Segundo criterio



Terceiro criterio

Actividades resoltas

- *Calcula os valores descoñecidos b′ e c′ para que os triángulos de datos a* = 9 cm, *b* = 6 cm, *c* = 12 *cm. a'* = *6 cm sexan semellantes:*

Sabemos que debe verificarse que: *a/a′* = *b/b′* = *c/c′*. Ao substituír tense: 9/6 = 6/*b′* = 12/*c′* e ao despexar: *b′* = 6 · 6 / 9 = 4 cm, *c′* = 12 · 6 / 9 = 8 cm.

Actividades propostas

17. Indica se son semellantes os seguintes pares de triángulos:

a) Un ángulo de 60° e outro de 40°. Un ángulo de 80° e outro de 60°.
b) Triángulo isósceles con ángulo desigual de 80°. Triángulo isósceles con ángulo igual de 50°.
c) *a* = 30°, *b* = 8 cm, *c* = 10 cm. *a′* = 30°, *b′* = 4 cm, *c′* = 5 cm
d) *a* = 7 cm, *b* = 8 cm, *c* = 12 cm. *a′* = 14 cm, *b′* = 16 cm, *c′* = 25 cm

18. Calcula o valor descoñecido para que os triángulos sexan semellantes:

a) *a* = 12 cm, *b* = 15 cm, *c* = 10 cm. *a*' = 5 cm, *b', c'*?

b) *a* = 37°, *b* = 10 cm, c = 12 cm. *a′* = 37°, *b'* = 10 cm, *c'*?

19. Un triángulo ten lados de 12 cm, 14 cm e 8 cm. Un triángulo semellante a el ten un perímetro de 80 cm. Canto miden os seus lados?

3.2. Semellanza de triángulos rectángulos: Teorema da altura e do cateto

Os triángulos rectángulos teñen un ángulo de 90°, así que para que dous triángulos rectángulos sexan semellantes chégalles con ter outro ángulo igual.

Se dous triángulos rectángulos teñen un ángulo, distinto do recto, igual, son semellantes e os seus lados son proporcionais.

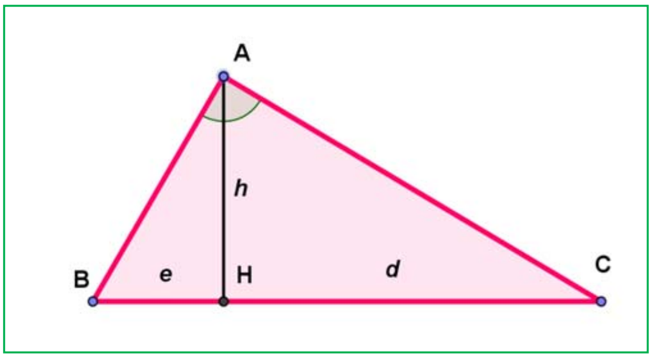
Debido a isto, a altura sobre a hipotenusa divide ao triángulo rectángulo en dous novos triángulos rectángulos que son semellantes (pois comparten un ángulo co triángulo de partida).

Agora que os lados son proporcionais podemos escribir dous teoremas, o teorema da altura e o do cateto.

Teorema da altura

Nun triángulo rectángulo a altura é a media proporcional entre os segmentos nos que divide á hipotenusa:

$$\frac{h}{e} = \frac{d}{h} \text{ logo } h^2 = e \cdot d.$$



En efecto, sexan as lonxitudes da altura *AH* = *h*, do segmento *BH* = *e*, e do segmento *HC* = *d*, ao ser o triángulo *ABC* semellante ao triángulo *ABH* e á súa vez semellante ao triángulo *AHC*, estes dous triángulos son semellantes, polo que os seus lados son proporcionais, polo que:

Cateto menor de *AHC* / cateto menor de *ABH* = Cateto maior de *AHC* / cateto maior de *ABH*$\Rightarrow$

$$\frac{h}{e} = \frac{d}{h},$$

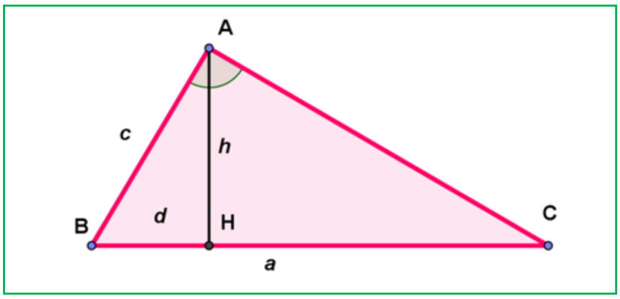
ou o que é o mesmo:

$$h^2 = e \cdot d.$$

Teorema do cateto

Nun triángulo rectángulo un cateto é a media proporcional entre a hipotenusa e a súa proxección sobre ela:

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{d} \text{ logo } c^2 = a \cdot d.$$



Pola semellanza dos triángulos *ABC* e *HBA* sabemos que os lados correspondentes son proporcionais, polo que:

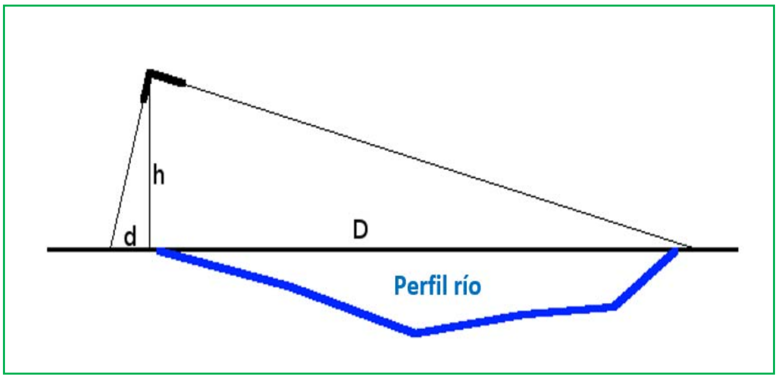
hipotenusa do triángulo grande *ABC* / hipotenusa do triángulo pequeno *AHB* = cateto menor do triángulo grande *ABC* / cateto menor do triángulo pequeno *AHB*

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{d}, \text{ ou o que é o mesmo: } c^2 = a \cdot d.$$

Actividades resoltas

- *Encargáronnos medir o ancho dun río en varios puntos do curso. Na maioría dos puntos puidemos medilo cunha corda, pero hai un ensanche no que no podemos medilo así. Imos inventar un método que aplica o teorema da altura que nos permita medilo.*

Imos a unha tenda e compramos dous punteiros láser. A continuación, unímolos formando un ángulo de 90°. Despois imos á parte do río que queremos medir e enfocamos un deles cara á outra beira ata que vexamos o punteiro. Agora buscamos o punteiro do outro láser que colocaramos a 90° e marcamos sobre o chan.



Despois de medir a altura á que sostemos os punteiros e a distancia da base ata o segundo punteiro, temos os seguintes datos:

d = 5 cm e h = 150 cm.

Aplicando o teorema da altura, sabemos que:

$h^2 = d \cdot D$, así que $D = h^2/d$.

Polo tanto, $D = 150^2/5$ = 4 500 cm = 45 metros.

Actividades propostas

20. Os catetos dun triángulo rectángulo miden 3 e 4 cm, canto mide a altura sobre a hipotenusa?

21. Os catetos dun triángulo rectángulo miden 3 e 4 cm, canto mide a proxección sobre a hipotenusa de cada un deses catetos?

22. Debuxa os tres triángulos semellantes para o triángulo rectángulo de catetos 3 e 4 en posición de *Tales*.

3.3. Aplicación informática para a comprensión da semellanza

A semellanza nun pentágono regular

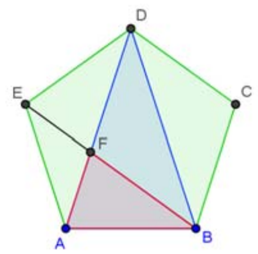
Nesta actividade vaise utilizar o programa *Xeoxebra* para realizar un estudo da semellanza de diferentes triángulos que podemos debuxar nun pentágono regular calculando de forma aproximada a súa razón de semellanza. Tamén se comprobará a relación que existe entre a razón entre as áreas de dúas figuras semellantes e a súa razón de semellanza.

Actividades resoltas

Cálculo da razón de semellanza

Abre unha ventá de *Xeoxebra,* no menú **Visualiza** desactiva **Eixes** e **Cuadrícula** e no menú **Opcións** elixe en **Rotulado** a opción **Só os novos puntos**.

- Determina con **Novo punto** os puntos *A* e *B* e debuxa con **polígono regular** o pentágono que ten como vértices os puntos *A* e *B*.
- Debuxa con **Polígono** o triángulo *ABD,* utiliza **Segmento** para debuxar a diagonal *BE* e define o punto *F* como punto de **intersección de dous obxectos** (as diagonais *AD* e *BE*), determina con **polígono** o triángulo *ABF*. É conveniente cambiar a cor de cada un dos polígonos debuxados para recoñecelos na ventá alxébrica, para isto utiliza a opción **Propiedades** do menú contextual ao situar o cursor sobre o polígono ou sobre o seu nome na ventá alxébrica



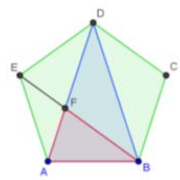
- Os triángulos *ABD* e *ABF* son semellantes. Sabes demostrar por que?

Recorda que é suficiente demostrar que teñen dous ángulos iguais e como os ángulos interiores dun pentágono regular miden 108°, é evidente que no triángulo isósceles *ABD* o ángulo desigual mide 36° e os ángulos iguais 72°. No triángulo *ABF*, o ángulo *ABF* mide 36° e o *BAF,* 72° polo que os triángulos son semellantes e ademais o ángulo *BFA* tamén mide 72°.

- Utiliza a ferramenta de *Xeoxebra* que permite medir ángulos para comprobar estes resultados.
- Para calcular a razón de semellanza calculamos o cociente entre dous lados correspondentes destes triángulos, por exemplo, *BD* e *AD.* É dicir entre unha diagonal e un lado do pentágono. Para facelo con *Xeoxebra* definimos na liña de entrada a variable **razón de semellanza = f/a** (*f* é unha diagonal e *a* un lado). Observamos na ventá alxébrica que este valor é 1.62. Se aumentamos o número de decimais en **Redondeo** do menú **Opcións** comprobamos que este valor é unha aproximación do número de ouro.

A razón de semellanza e o cociente entre as áreas.

- Define na liña de entrada a variable **cociente de áreas = polígono 2/polígono 3**, sendo o polígono 2 o triángulo *ABD* e o polígono 3 o *ABF*
- Define, tamén, na liña de entrada a variable **cadrado razón de semellanza = razón de semellanza^2.** Observa como o cadrado da razón de semellanza coincide co cociente entre as áreas. Aumenta o número de decimais para comprobar que estes valores coinciden.



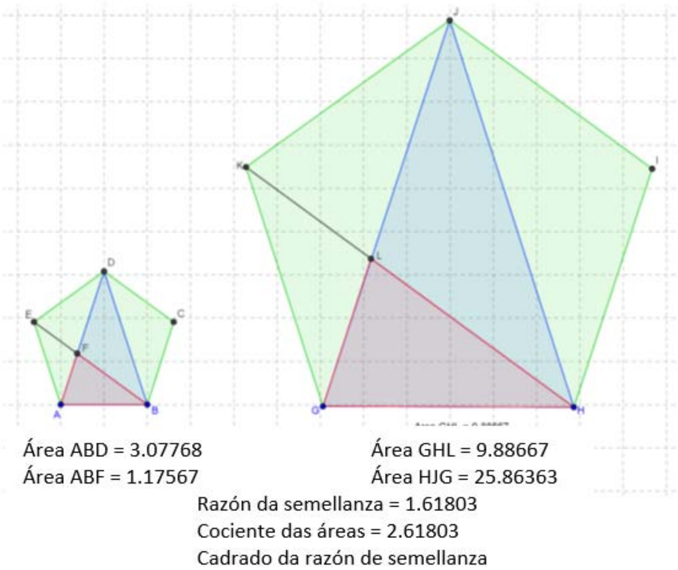
- Utiliza a ferramenta **Área** para que apareza na pantalla gráfica a área dos triángulos *ABD* e *ABF*, e **Inserir texto** para que aparezan os valores da razón de semellanza, o cociente entre as áreas e o cadrado da razón de semellanza.

Comproba estes resultados noutro pentágono.

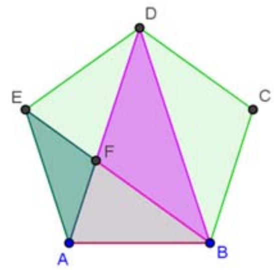
Actividades propostas

23. Debuxa un pentágono *GHIJK* do mesmo modo que construíches o *ABCDE* coa condición de que a lonxitude dos seus lados sexa o triplo do que xa está construído. Para facilitar a tarefa podes activar a **cuadrícula** e mover os puntos iniciais.

a) Calcula as áreas dos triángulos *HJG* e *GHL*, a súa razón de semellanza, o cociente entre as súas áreas e o cadrado da razón de semellanza.



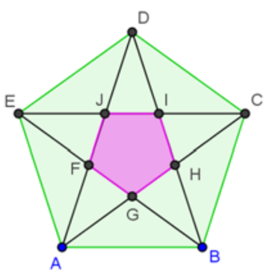
b) Comproba que a razón de semellanza, o cociente entre as áreas e o cadrado da razón de semellanza dos triángulos *GHJ* e *GHL* do pentágono *GHIJK* coinciden coas dos triángulos *ABD* e *ABF* do pentágono *ABCDE.*

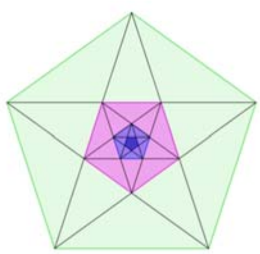


24. Calcula as áreas dos dous pentágonos anteriores e relaciona o seu cociente co cadrado da razón de semellanza.

25. *Outros triángulos do pentágono.* Investiga se os triángulos *AFE* e *BDF* son semellantes e se o son calcula a súa razón de semellanza, o cociente entre as súas áreas e compara este resultado co cadrado da razón de semellanza.

26. *Pentágono dentro dun pentágono.* Debuxa o pentágono *FGHIJ* que se forma no pentágono *ABCDE* ao trazar as súas diagonais, ambos son semellantes porque son polígonos regulares. Calcula a razón de semellanza e o cociente entre as súas áreas. Observa os triángulos AGF e ABD, son semellantes?





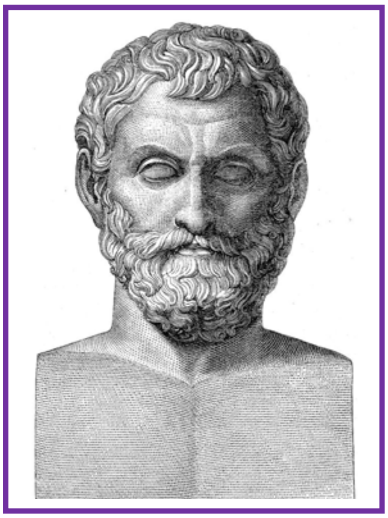
27. Observa os pentágonos regulares da figura: a) Son todos semellantes? b) Paréceche que o proceso de debuxar pentágonos dentro de pentágonos é infinito, por que? c) Cal é a sucesión das razóns de semellanza entre o pentágono maior e cada un dos seguintes?

CURIOSIDADES. REVISTA

Tales de Mileto (ca. 624 – 548 a.C.)

Sobre a vida de *Tales* sábese moi pouco. Os antiguos opinaban que era excepcionalmente intelixente sendo considerado un dos Sete Sabios de Grecia, e que viaxara e coñecera os saberes de Exipto e Babilonia.

Pero non existe ningún documento que certifique nada sobre a súa vida, e é probable que non deixara obra escrita á súa morte. *Eudemo de Rodas* escribiu unha historia das Matemáticas, que se perdeu, pero alguén fixo un resumo dunha parte, que tamén se perdeu, e no século V d.C. *Proclo* incluíu parte deste resumo nun comentario sobre os elementos de *Euclides*. Iso é o que sabemos sobre Tales e a Matemática!



Hai moitas lendas sobre a súa vida como que:

- Se fixo rico alugando uns muíños de aceite durante un ano no que a colleita de oliva foi abundante.
- Foi mercador de sal.
- Foi observador das estrelas. Un día, por mirar as estrelas, caeu a un pozo e cando se rían diso dixo que quería coñecer as cousas do ceo pero que o que estaba aos seus pés lle escapaba.
- Foi un home de estado.
- Dirixu unha escola de náutica.

Ademais de dicirse del que:

- predixo unha eclipse,
- construíu unha canle para desviar as aguas dun río para que o cruzara un exército

e tamén se di que utilizou a semellanza de triángulos para

- calcular a altura da pirámide de *Keops*
- e a distancia dun barco á praia.

Saberías ti resolver eses dous últimos problemas?

Sobre matemáticas atribúenselle diversos teoremas, aínda que algúns xa eran coñecidos polos babilonios, pero quizais el utilizou un razoamento dedutivo. Por exemplo, dise que demostrou:

- Un ángulo inscrito nunha semicircunferencia é un ángulo recto.
- Un diámetro divide un círculo en dúas partes iguais.
- Un triángulo isósceles ten dous ángulos iguais.
- Dous triángulos con dous ángulos iguais e un lado igual, son iguais.
- Os ángulos opostos polo vértice son iguais.

A que todos estes teoremas xa os sabías ti?

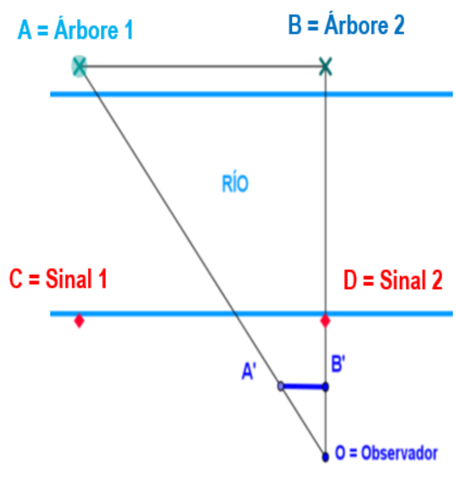
Algúns problemas

- Calcula a altura da *Pirámide de Keops* sabendo que a súa sombra mide 175.93 metros e que ao mesmo tempo a sombra dun bastón, de altura un metro, mide 1.2 metros.

- Calcula a altura dunha árbore sabendo que a súa sombra mide 15 metros e que ao mesmo tempo a sombra dun pau, de altura un metro, mide 1.5 metros.

- Uns exploradores atopan un río e queren construír unha pasarela para cruzalo pero como coñecer a anchura do río, se non podemos ir á outra beira? Pensa! Pensa! Seguro que se che ocorren moitas boas ideas, mellores que a que che imos comentar a continuación.

Buscas na beira oposta dúas árbores (ou dúas rochas, ou …), A e B. Colocándote na túa beira perpendicular a eles, marcas dous sinais (Sinal 1 e Sinal 2) e mides así a distancia entre esas dúas árbores. Agora medindo ángulos debuxas dous triángulos semellantes. Un, na túa beira, podes medilo e, por semellanza de triángulos, calculas os lados do outro.



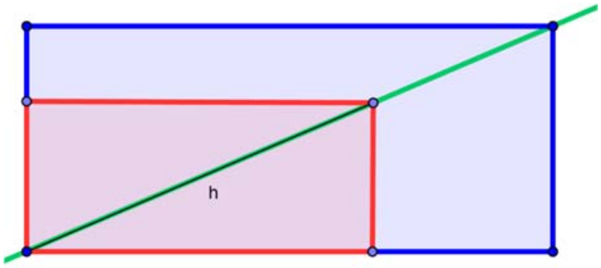
- Imaxina que a distancia *CD* é de 10 metros, que *A'B'* mide 2 metros e que *OB'* = 2.5 m. Canto mide *OB*? Se *OD* mide 5 metros, canto mide a anchura de río?

Pensa! Pensa!

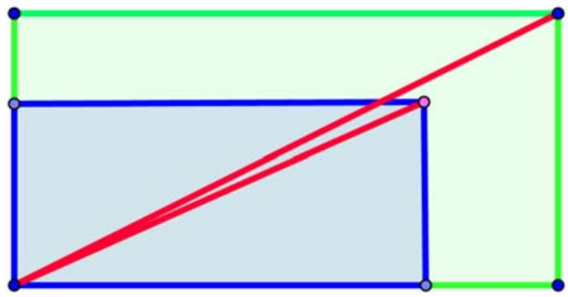
Como poderías coñecer a que distancia da costa está un barco?

Rectángulos semellantes

Para saber se dous rectángulos son semellantes colócanse un sobre o outro, con dos lados comúns, e se teñen a mesma diagonal, son semellantes.



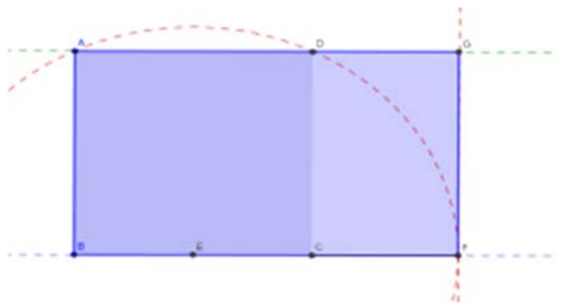
Rectángulos semellantes



Non son semellantes

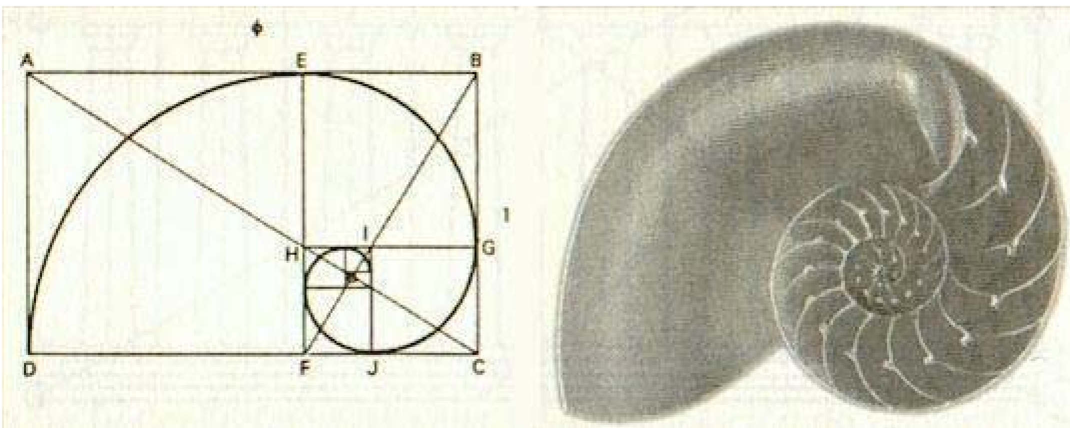
Rectángulo áureo

Un rectángulo é áureo se os seus lados están en proporción áurea. Todos os rectángulos áureos son semellantes.

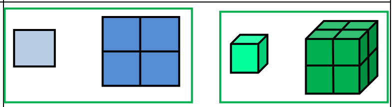
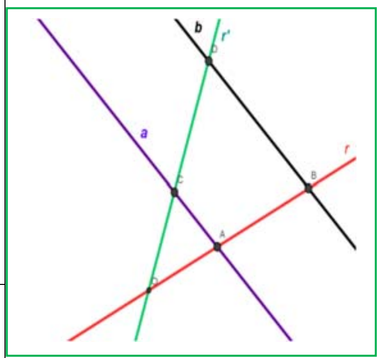
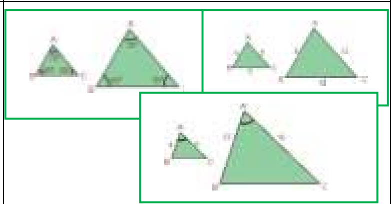
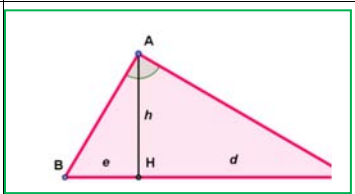
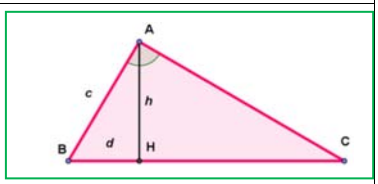


Se a un rectángulo áureo se lle quita (ou engade) un cadrado, obtense un rectángulo semellante ao de partida e polo tanto tamén áureo.

Podes construír unha espiral con rectángulos áureos como indica a figura



RESUMO

Noción	Definición	*Exemplos*
Figuras semellantes	Se as lonxitudes dos elementos correspondentes son proporcionais.	
Razón de semellanza	Coeficiente de proporcionalidade.	
Semellanza en lonxitudes, áreas e volumes	Se a razón de semellanza entre as lonxitudes dunha figura é ***k***, entón a razón entre as súas áreas é ***k*²** e entre os seus volumes é ***k*³**.	
Teorema de Tales	Dadas dúas rectas, *r* e *r'*, que se cortan no punto *O*, e dúas rectas paralelas entre si, *a* e *b*. A recta *a* corta ás rectas *r* e *r'* nos puntos *A* e *C*, e a recta *b* corta ás rectas *r* e *r'* nos puntos *B* e *D*. Entón: $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$	
Recíproco do teorema de Tales	Se $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$ entón ***a*** e ***b*** son paralelas.	
Semellanza de triángulos	Dous triángulos son **semellantes** se teñen todos os ángulos iguais e os lados proporcionais.	
Criterios de semellanza de triángulos	Dous triángulos son semellantes se: **Primeiro:** Teñen dos ángulos iguais. **Segundo:** Teñen os tres lados proporcionais. **Terceiro:** Teñen dous lados proporcionais e o ángulo que forman é igual.	
Teorema da altura	Nun triángulo rectángulo a altura é media proporcional dos segmentos nos que divide á hipotenusa: $\frac{h}{e}=\frac{d}{h}$ logo $h^2 = ed$.	
Teorema do cateto	Nun triángulo rectángulo un cateto é media proporcional entre a hipotenusa e a súa proxección sobre ela: $\frac{a}{c}=\frac{c}{d}$ logo $c^2 = ad$.	

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Figuras semellantes

1. Busca fotografías, planos, fotocopias, figuras a escala, etc. Toma medidas e determina as razóns de semellanza. Calcula as medidas reais e comproba que a razón de semellanza obtida é correcta.

2. Nun mapa de estradas de escala 1:3000 a distancia entre dúas cidades é de 2.7 cm. Calcula a distancia real entre as cidades.

3. Un microscopio ten un aumento de 500X, que tamaño ten a imaxe que se ve polo obxectivo se observamos un paramecio de 0.034 mm de diámetro?

4. Pericles morreu de peste no ano 429 a. C. Consultado o oráculo de Apolo debían construír un altar en forma de cubo cuxo volume duplicara exactamente o que xa existía. Cal debía ser a razón de proporcionalidade dos lados? É posible construír exactamente un cubo con esta razón?

5. Nunha fotografía unha persoa que sabe que mide 1.75 m ten unha altura de 2.3 cm. Aparece unha árbore que na fotografía mide 5.7 cm, canto mide na realidade?

6. Canto mide o lado dun icosaedro cuxa superficie é o triplo doutro icosaedro de lado 4 cm?

7. Supoñemos que un pexego é unha esfera e que o seu óso ten un diámetro que é un terzo do do pexego. Canto é maior a polpa do pexego có seu óso?

8. Son semellantes todos os cadrados? E todos os rombos? E todos os rectángulos? Cando son semellantes dous rombos? E dous rectángulos?

9. A área dun rectángulo é 10 cm^2 e un dos seus lados mide 2 cm. Que área ten un rectángulo semellante ao anterior no que o lado correspondente mide 1 cm? Que perímetro ten?

10. Son semellantes todas as esferas? E os icosaedros? E os cubos? E os dodecaedros? Cando son semellantes dous cilindros?

11. A aresta dun octaedro mide 7.3 cm e a doutro 2.8 cm. Que relación de proporcionalidade hai entre as súas superficies? E entre os seus volumes?

12. A medida normalizada A$ ten a propiedade de que partimos o rectángulo pola metade da súa parte máis longa, o rectángulo que se obtén é semellante ao primeiro. Duplicando, ou dividindo, obtéñense as dimensións dos rectángulos A1, A2, A3, A4, A5…. O rectángulo A4 mide 29.7 cm x 21 cm. Determina as medidas de A3 e de A5.

13. Debuxa un pentágono regular e traza as súas diagonais. Tes un novo pentágono regular. Cal é a razón de semellanza?

14. Debuxa no teu caderno un pentágono regular e traza as súas diagonais. Canto miden os ángulos do triángulo formado por un lado do pentágono e as dúas diagonais do vértice oposto? Este triángulo denomínase *triángulo áureo* pois ao dividir o lado maior entre o menor obtense o número de ouro. Na figura que trazaches hai outros triángulos semellantes ao áureo, que relación de proporcionalidade hai entre eles?

15. O mapa a escala 1:1500000 dunha rexión ten unha área de 1 600 cm^2, canto mide a superficie verdadeira desta rexión?

16. *Eratostenes de Alexandría* (276 – 196 a. C.) observou que en Siena a dirección dos raios solares era perpendicular á superficie da Terra no solsticio de verán. Viaxou seguindo o curso do Nilo unha distancia de 790 km (5 mil estadios) e mediu a inclinación dos raios do sol no solsticio de verán en Alexandría que era de α = 7° 12'. Utilizou a proporcionalidade: $2\pi R/790 = 360°/\alpha$ para determinar o radio da Terra. Que obtivo?

17. Temos un conxunto de rectángulos dados: A: 4 e 7, B: 2 e 5, C: 8 e 14, D: 4 e 10, E: 3 e 7, F: 9 e 21. Indica cales son semellantes. Debuxa e recorta o rectángulo A, e debuxa o resto dos rectángulos. Superpón o rectángulo A cos outros rectángulos e explica que observas co que é semellante. Que lonxitude ten o outro lado dun rectángulo semellante a A cuxo lado menor mide 10 cm?

O teorema de *Tales*

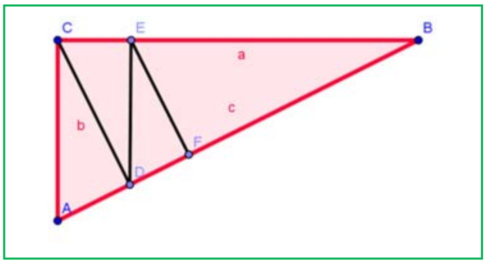
18. Divide un segmento calquera en 5 partes iguais utilizando o teorema de *Tales*. Saberías facelo por outro procedemento exacto?

19. Divide un segmento calquera en 3 partes proporcionais a 2, 3, 5 utilizando o teorema de Tales.

20. Se alguén mide 1.75 m e a súa sombra mide 1 m, calcula a altura do edificio cuxa sombra mide 25 m á mesma hora.

21. Un rectángulo ten unha diagonal de 75 m. Calcula as súas dimensións sabendo que é semellante a outro rectángulo de lados 36 m e 48 m.
Sexan *OAC* e *OBD* dous triángulos en posición *Tales*. O perímetro de *OBD* é 200 cm, e *OA* mide 2 cm, *AC* mide 8 cm e *OC* mide 10 cm. Determina as lonxitudes dos lados de *OBD.*

22. No museo de Bagdad consérvase unha taboíña na que aparece debuxado un triángulo rectángulo *ABC*, de lados *a* = 60, *b* = 45 e *c*= 75, subdividido en 4 triángulos rectángulos menores *ACD*, *CDE*, *DEF* e *EFB*, e o escriba calculou a lonxitude do lado *AD*. Utiliza o teorema de Tales para determinar as lonxitudes dos segmentos *AD*, *CD*, *DE, DF, EB, BF* e *EF*. Calcula a área do triángulo *ABC* e dos triángulos *ACD, CDE, DEF* e *EFB*.



Semellanza de triángulos

23. O triángulo rectángulo *ABC* ten un ángulo de 54° e outro triángulo rectángulo ten un ángulo de 36°. Podemos asegurar que son semellantes? Razoa a resposta.

24. A hipotenusa dun triángulo rectángulo mide 25 cm e a altura sobre a hipotenusa mide 10 cm, canto miden os catetos?

25. Indica se son semellantes os seguintes pares de triángulos:

a) Un ángulo de 50° e outro de 40°. Un ángulo de 90° e outro de 40°.

b) Triángulo isósceles cun ángulo desigual de 40°. Triángulo isósceles cun ángulo igual de 70°.

c) *A* = 72°, *b* = 10 cm, *c* = 12 cm. *A'*= 72°, *b'* = 5 cm, *c'* = 6 cm.

d) *a* = 7 cm, *b* = 5 cm, *c* = 8 cm. *a'* = 21 cm, *b'* = 15 cm, *c'* = 24 cm.

26. Calcula o valor descoñecido para que os triángulos sexan semellantes:

a) a = 12 cm, b = 9 cm, c = 15 cm. a' = 8 cm, b', c'?

b) A = 45°, b = 6 cm, c = 4 cm. A' = 45°, b' = 24 cm, c'?

27. As lonxitudes dos lados dun triángulo son 7 cm, 9 cm e 10 cm. Un triángulo semellante a el ten un perímetro de 65 cm. Canto miden os seus lados?

28. A sombra dun edificio mide 23 m e a do primeiro piso 3 m. Sabemos que a altura dese primeiro piso é de 2.7 m, canto mide o edificio?

29. Demostra que en dous triángulos semellantes as bisectrices son proporcionais.

30. Un triángulo rectángulo isósceles ten a hipotenusa de lonxitude 9 cm, igual a un cateto doutro triángulo semellante ao primeiro. Canto valen as áreas de ambos os triángulos?

31. Unindo os puntos medios dos lados dun triángulo obtense outro triángulo. Son semellantes? Que relación hai entre os seus perímetros? E entre as súas áreas?

32. A altura e a base dun triángulo isósceles miden respectivamente 7 e 5 cm; e é semellante a outro de base 12 cm. Calcula a altura do novo triángulo e as áreas de ambos os dous.

33. Os triángulos seguintes son semellantes. Pescuda a medida dos ángulos que faltan sabendo que:

a) Son rectángulos e un ángulo do primeiro triángulo mide 52°.

b) Dous ángulos do primeiro triángulo miden 30° e 84°.

34. Os triángulos seguintes son semellantes. Averigua as medidas que faltan sabendo que:

a) Os lados do primeiro triángulo miden 10 m, 15 m e z m. Os do segundo: x m, 9 m e 8 m.

b) Os lados do primeiro triángulo miden 4 m, 6 m e 8 m. Os do segundo: 6 m, x m e z m.

c) Un lado do primeiro triángulo mide 12 cm e a altura sobre este lado 6 cm. O lado correspondente do segundo mide 9 cm e a altura x cm.

d) Un triángulo isósceles ten o ángulo desigual de 35° e o lado igual de 20 cm e o desigual de 7 cm; o outro ten o lado igual de 5 cm. Canto miden os seus outros lados e ángulos?

35. Enuncia o primeiro criterio de semellanza de triángulos para triángulos rectángulos.

36. Os exipcios usaban unha corda con nós, todos á mesma distancia, para obteren ángulos rectos. Formaban triángulos de lonxitude 3, 4 e 5. Por que? Os indios e os chineses usaban un procedemento similar, aínda que utilizando cordas cos nós separados en 5, 12 e 13, e tamén 8, 15 e 17. Por que? Escribe as lonxitudes dos lados de triángulos semellantes aos indicados.

37. Quérese calcular a altura dunha árbore para o que se mide a súa sombra: 13 m, e a sombra dun pau de 1.2 m de lonxitude, 0.9 m. Que altura ten a árbore?

38. Agora non podemos usar o procedemento da sombra porque a árbore é inaccesible (hai un río no medio) pero sabemos que está a 30 m de nós. Como o farías? Pepe colleu un lapis que mide 10 cm e colocouno a 50 cm de distancia. Dese modo conseguiu ver aliñada a base da árbore cun extremo do lapis, e a punta da árbore co outro. Canto mide esta árbore?

39. *Arquímedes* calculaba a distancia á que estaba un barco da costa. Cunha escuadra *ABC* aliñaba os vértices *BC* co barco, *C’,* e coñecía a altura do cantil ata o vértice *B*. Debuxa a situación, determina que triángulos son semellantes. Calcula a distancia do barco se *BB’* = 50 m, *BA* = 10 cm, *AC* = 7 cm.

AUTOAVALIACIÓN

1. Nun mapa de estradas de escala 1:1200 a distancia entre dúas vilas é de 5 cm. A distancia real entre estas vilas é de:

a) 60 m b) 60 km c) 240 km d) 240 cm

2. Se un microscopio ten un aumento de 1000X, que tamaño (aparente) pensas que terá a imaxe que se vexa polo obxectivo se observamos unha célula de 0.01 mm de diámetro

a) 1 cm b) 1 mm c) 0.1 cm d) 100 mm

3. Queremos construír un cadrado de área dobre dun dun metro de lado. O lado do novo cadrado debe medir:

a) 2 metros b) $\sqrt{2}$ metros c) $\sqrt[3]{2}$ metros d) 1.7 metros

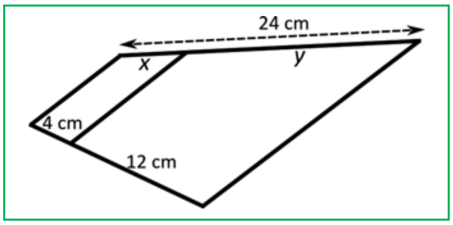
4. Sexan *OAC* e *OBD* dous triángulos en posición *Tales*. O perímetro de *OBD* é 50 cm, e *OA* mide 1 cm, *AC* mide 1.5 cm e OC mide 2.5 cm. As lonxitudes dos lados de *OBD* son:

a) *OB* = 10 cm, *OD* = 20 cm, *BD* = 30 cm b) *OB* = 25 cm, *OD* = 10 cm, *BD* = 15 cm

c) *OB* = 10 cm, *OD* = 15 cm, *BD* = 25 cm d)*OB* = 15 cm, *OD* = 25 cm, *BD* = 30 cm.

5. Na figura adxunta os valores de *x* e y son:

a) 6 e 12 cm b) 5 e 19 cm c) 6 e 18 cm d) 5 e 20 cm



6. Os triángulos *ABC* e *DEF* son semellantes. Os lados de *ABC* miden 3, 5 e 7 cm, e o perímetro de *DEF* mide 60 m. Os lados de *DEF* miden:

a) 6, 10 e 14 cm b) 12, 20 e 28 cm c) 9, 15 21 m d) 12, 20 e 28 m

7. Dous triángulos rectángulos son proporcionais se:

a) Teñen a hipotenusa proporcional.

b) Teñen un ángulo igual.

c) Teñen un ángulo distinto do recto igual.

d) As súas áreas son proporcionais.

8. Os triángulos *ABC* e *DEF* son semellantes. O ángulo A mide 30°, e B, 72°. Canto miden os ángulos *D*, *E* e *F*?

a) *D* = 72°, *E* = 78° e *F* = 30° b) *D* = 30°, *E* = 88° e *F* = 72° c) *D* = 30°, *E* = 72° e *F* = 68°

9. A altura dun triángulo rectángulo divide á hipotenusa en dous segmentos de lonxitude 5 e 4 cm, canto mide a altura?

a) 5.67 cm b) 4.47 cm c) 6 cm d) 5 cm

10. A proxección dun cateto sobre a hipotenusa dun triángulo rectángulo mide 4 cm, e a hipotenusa 9 cm, canto mide o cateto?

a) 7 cm b) 5 cm c) 5.67 cm d) 6 cm.