3º A da ESO

Capítulo 8: Movementos no plano e no espazo

www.apuntesmareaverde.org.es

Autoras: Adela Salvador e María Molero

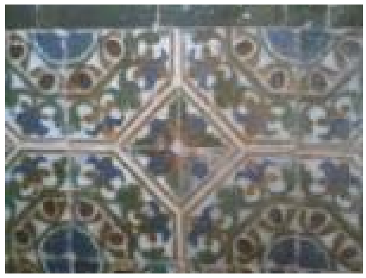
Revisores: Javier Rodrigo e Sergio Hernández

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

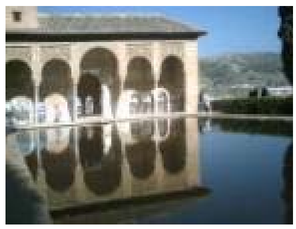
Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: María Molero, Milagros Latasa, Banco de Imaxes de INTEF e Adela Salvador

Índice



Resumo



Todo se move no Universo, a Terra xira arredor do seu eixe e desprázase arredor do Sol. O Sol móvese dentro da nosa galaxia, e a galaxia tamén se move. Mareo me dá pensar a que velocidade me estou movendo! Observa que nin o tamaño nin a forma dos obxectos varían con estes movementos. Estas transformacións que manteñen a forma e o tamaño son os movementos ou isometrías que estudaremos neste capítulo.

Analizar o que nos rodea con ollos matemáticos axúdanos a comprender máis e máis cousas. Aprender a mirar as torres, ese reflexo sobre a auga dun palacio da Alhambra, os mosaicos… ou os pratos das rodas dos coches, os animais e os obxectos cotiáns. Todos eles encerran moitas matemáticas: moitas transformacións xeométricas. Estudaremos as simetrías, os xiros e as translacións e analizarémolas no noso entorno.

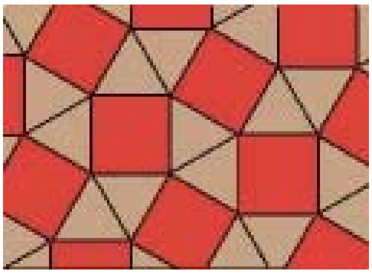
Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

1. TRANSFORMACIÓNS XEOMÉTRICAS

Moitas decoracións fanse repetindo un motivo. Nos mosaicos da *Alhambra*, nas reixas, nas puntillas e as grecas, nos rosetóns das igrexas… en todas as partes podes ver deseños feitos mediante outro máis sinxelo. Ao observar un edificio podes ver que en ocasións está composto por algún anaco que se foi desprazando, ou xirando, ou procurando o simétrico.

Imaxina que estás manipulando un mapa nun móbil cos dous dedos: podes desprazarte, xirar o mapa, amplialo, reducilo... pero o mapa sempre é basicamente o mesmo. Estas manipulacións son "transformacións xeométricas" porque manteñen as propiedades xeométricas máis básicas dos obxectos: lonxitudes, ángulos, áreas, volumes, ou a proporción entre as lonxitudes, a forma…

1.1. Isometrías


Isometrías

No mosaico da marxe todos os cadrados son iguais e tamén son iguais todos os triángulos.

Ás transformacións xeométricas que nos levan dun cadrado a outro (ou dun triángulo a outro) que manteñen a forma e o tamaño chamámolas isometrías ou movementos.

A palabra *isometría* provén do grego: Iso = Igual. Metría = Medida. Significa polo tanto: *Igual medida*.

No exemplo do mapa, sempre que non fagas zoom, estarás usando unha isometría.

As **isometrías** (**movementos** ou **congruencias**)son transformacións xeométricas que conservan ángulos e distancias (aínda que non teñen por que conservar a orientación dos ángulos).

Isometrías no plano son as **translacións**, os **xiros** e as **simetrías**.

Actividades propostas

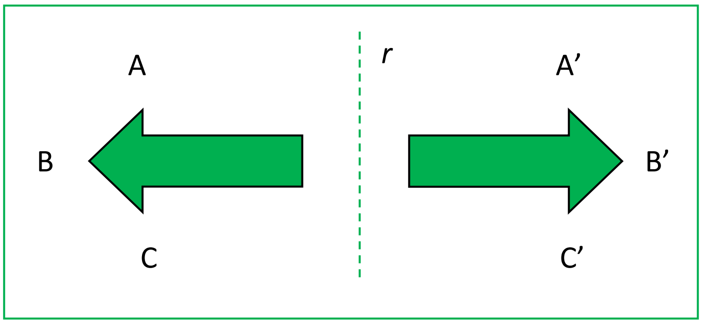
1. No teu caderno debuxa un triángulo. Cálcao e copia a figura calcada de novo no teu caderno. Mide todos os lados das figuras homólogas. Miden o mesmo? Mide todos os seus ángulos. Miden o mesmo?
2. Debuxa no teu caderno unha letra B e fai un deseño con ela, trasladándoa, xirándoa ou debuxando letras B simétricas.

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

1.2. Isometrías directas e inversas

Actividades resoltas

- Na figura da marxe observa que unha frecha se transforma noutra mediante a simetría de eixe *r*. O ángulo *ABC*, é igual ao ángulo *A'B'C'*? Teñen a mesma amplitude, que en ambos os dous é de 90°, pero a súa orientación é distinta. Mentres que *ABC* xira no sentido das agullas do reloxo, é dicir, ten sentido negativo, mide –90°, *A'B'C'* xira no sentido contrario ás agullas do reloxo, polo que o seu sentido é positivo e mide +90°.



Entre as isometrías hai dous tipos de transformacións, as que conservan os ángulos (a súa amplitude e o seu sentido) que se chaman isometrías **directas**, e as que conservan a amplitude dos ángulos pero cambian o seu sentido, que se chaman isometrías **inversas**.

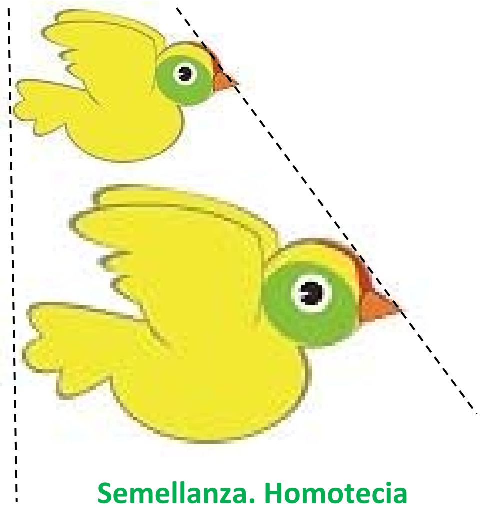
- As translacións e os xiros no plano son isometrías directas. As simetrías son isometrías inversas.
- As túas mans son simétricas. Son iguais. Pero, pódelas superpoñer? E os teus pés? A simetría é unha isometría inversa.
- Imaxina o mapa feito sobre plástico transparente: se volteas o mapa sobre a mesa, as lonxitudes e ángulos mantéñense (é unha isometría) pero agora non poderías colocar a cidade de Valencia deste novo mapa, sobre a cidade de Valencia do mapa orixinal, por máis que o moveras nunca che poderían coincidir. É unha isometría inversa.

Observación:

Uns autores denominan movementos ás isometrías, e outros estiman que se movendo as mans nunca imos poder superpoñelas, as isometrías inversas non deben chamarse movementos.

1.3. Semellanzas

Se fas zoom no móbil cos dous dedos no mapa, as lonxitudes cambian, así que non é unha isometría, pero o mapa segue sendo o mesmo: os ángulos e os seus sentidos si que se conservan, e as proporcións entre as medidas tamén (a rúa que era o dobre de longa que outra ségueo sendo). Estes cambios de escala denomínanse "semellanzas".



Semellanza. Homotecia

A figuras da marxe son **semellantes**. É a mesma imaxe só que ampliada. Mantense a mesma proporción en todas as direccións. Mantense a forma, pero non o mesmo tamaño. A estas transformacións chamámolas **semellanzas**, ou se teñen unha determinada posición: **homotecias**.

Nunha semellanza as figuras homólogas teñen os ángulos iguais e os lados proporcionais.

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

Exemplo

- Cando fas zoom nunha foto co móbil estás facendo unha homotecia. Ao poñer os dous dedos sobre a pantalla defines dous puntos: a orixe *O* sería o punto xusto entre os teus dous dedos e non se moverá ao facer zoom, e o punto *P* estaría no teu primeiro dedo. Ao mover ese dedo estás definindo o terceiro e derradeiro punto *P'* e o móbil amplía a foto para que o punto *O* quede fixo e *P* se estire ata *P'*. É unha homotecia directa.

As homotecias teñen un centro de homotecia, *O*, e un punto *P* transfórmase por unha homotecia no punto *P'* que está na recta *OP*, se se verifica que: ***OP'*** = *r* · ***OP*** onde *r* é un número chamado **razón de homotecia**.

Actividades propostas

3. No teu caderno debuxa unha letra b minúscula, e a continuación outra letra b minúscula o dobre de grande. Como son as súas lonxitudes e os seus ángulos? É unha semellanza?
4. Debuxa agora unha letra d minúscula. É semellante á letra b anterior?

1.4. Composición de transformacións xeométricas

Exemplo:

- Observa como se construíu este belo mosaico da *Alhambra*:

  http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/195378_am_1Alhambra1.swf

Analizouse buscando a cela unidade (un cadrado formado por catro cadrados) e o motivo mínimo (a metade dun deses cadrados). No motivo mínimo, un triángulo rectángulo isósceles, debuxouse unha sinxela poligonal. Aplicáronselle distintas isometrías: unha simetría de eixe a hipotenusa. Ao motivo formado polo inicial e o seu simétrico aplicáronselle catro xiros de 90°. Volveuse xirar o conxunto. Déuselle cor. Trasladouse horizontal e verticalmente.

Cando aplicamos varias transformacións, estamos compoñendo transformacións xeométricas.

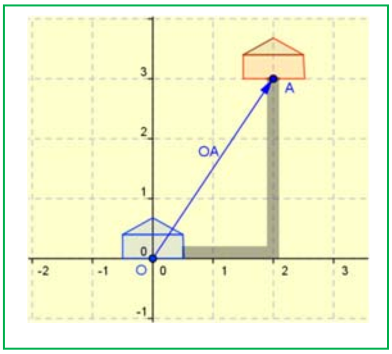
Actividades propostas

5. No teu caderno marca unha trama formada por cadrados de dous cadradiños de lado. Nun cadradiño fai un garabato, unha poligonal, unha liña curva… Debuxa a simétrica tomando como eixe de simetría un lado do cadrado. Debuxa a figura simétrica do conxunto obtido tomando como eixes sempre os lados da trama inicial. Colorea a figura obtida. Trasládaa horizontal e verticalmente.

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

2. TRANSLACIÓNS

2.1. Vectores



Se Susana está na súa casa e quere ir á casa de Nadia, que vive 2 rúas ao leste e 3 rúas ao norte, o traxecto que debe facer é o que na figura está debuxado en gris.

Chamamos *“O”* á posición da casa de Susana e *“A”* á posición da casa de Nadia. Se Susana tivese un helicóptero podería ir directamente en liña recta e seguiría a dirección *OA*. Representámolo cunha frecha e denomínase vector fixo.

Un vector fixo ***OA*** é un segmento orientado con orixe no punto *O* e extremo no punto *A*. Ten unha dirección, a da recta; un sentido, desde *O* ata *A*, e unha lonxitude, á que chamamos módulo.

Un **vector fixo *OA***, de **orixe** en *O* e **extremo** no punto *A*, caracterízase por:

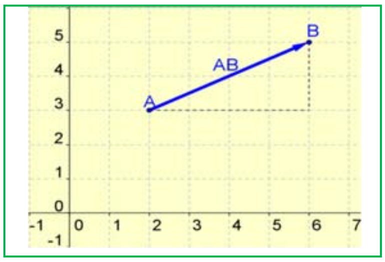
O seu **módulo**, que é a lonxitude do segmento *OA* e que se escribe $|OA|$.

A súa **dirección**, que é a recta que contén ao segmento.

O seu **sentido** que vai desde a orixe *O* ata o extremo *A*.

As coordenadas ou compoñentes dun vector veñen determinadas pola súa orixe e o seu extremo.

Exemplo:



- Se coñecemos as coordenadas do punto orixe e do punto final podemos calcular as coordenadas do vector. Observa o debuxo da marxe e comproba que se *A* (2, 3) e *B* (6, 5) as coordenadas do vector fixo ***AB*** son ***AB*** = (6 – 2, 5 – 3) = (4, 2).

En xeral, se *A* (*a, b*) e *B* (*c, d*) entón ***AB*** = (*c* – *a*, *d* – *b*)

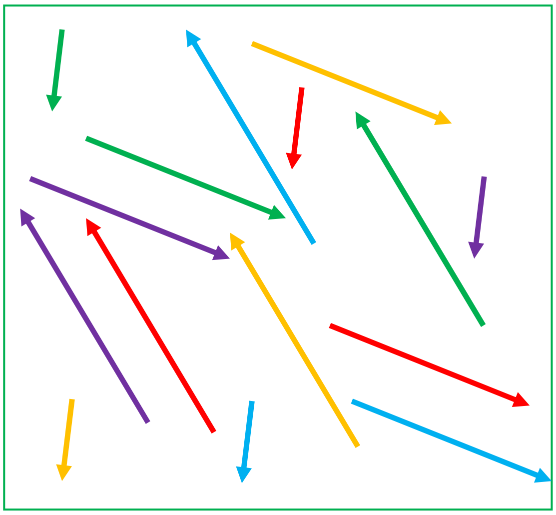
O módulo dun vector calcúlase utilizando o Teorema de *Pitágoras*. Así, o vector de coordenadas ***u*** = (*x*, *y*) ten de módulo: $|\mathbf{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Actividades propostas

6. Debuxa no teu caderno os puntos de coordenadas *A* (–5, 2), *B* (–1, 6) e *C* (2, –3). Calcula as coordenadas dos vectores fixos ***AB***, ***AC***, ***BC***, ***CA*** e ***CB***. Comproba no teu debuxo que esas son as súas coordenadas.
7. O vector fixo ***AB*** ten de coordenadas (4, 2), calcula as coordenadas da súa orixe *A* sabendo que as coordenadas do seu extremo *B* son (–1, 1). Represéntao graficamente.
8. As coordenadas de *A* son (2, 3) e as do vector fixo ***AB*** son (4, –2). Calcula as coordenadas do punto *B*. Represéntao graficamente.

Todos os segmentos orientados ou vectores fixos que teñen o mesmo módulo, dirección e sentido, teñen as mesmas coordenadas, entón dise que son o mesmo vector libre e podemos usalo en diferentes puntos orixe.

Dous vectores fixos son **equipolentes** cando teñen igual módulo, dirección e sentido, e polo tanto teñen as mesmas coordenadas.

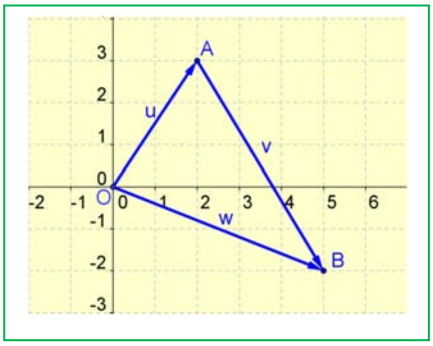


Todos os vectores que son equipolentes dise que son un **vector libre**, e cada un dos seus vectores fixos, un **representante** do vector. Ao vector libre identificámolo polas súas coordenadas.

Actividades propostas

9. Nome aos vectores fixos da figura e indica cales son representantes dun mesmo vector libre.
10. Debuxa no teu caderno catro vectores equipolentes ao vector fixo con orixe en *A* (–3, 4) e extremo *B* (5, 0), con orixes nos puntos *C* (0, 3), *D* (5, 2), *E*(–4, 0) e *F* (–2, –5).
11. Debuxa no teu caderno os puntos *A* (–2, 2), *B* (–3, 0), *C* (2, 4), *D* (6, 2), *E* (2, 0), *F* (6, –2) e *G*(2, –4). Cos vectores fixos de orixe e extremo nestes puntos, indica cales deles son equipolentes.
12. Cos puntos do exercicio anterior, calcula as coordenadas dos vectores fixos ***DE*** e ***FG***. Como son? Son dous representantes dun mesmo vector libre?

Actividades resoltas



O vector fixo ***OA*** = ***u*** que indica o traxecto de Susana ten de coordenadas (2, 3). Se logo Susana quere desprazarse á casa doutra amiga que está a 3 rúas ao leste e 5 rúas ao sur fará un desprazamento de vector: ***v*** = (3, –5). En conxunto Susana fixo un desprazamento que é a suma dos dous desprazamentos anteriores. Finalmente está no punto:

$$(2, 3) + (3, –5) = (5, –2).$$

Encóntrase 5 rúas ao leste e dúas rúas ao sur da súa casa.

Súmanse dous vectores, sumando os seus compoñentes: **(*a*, *b*) + (*c*, *d*) = (*a* + *c*, *b* + *d*)**

Multiplícase un vector por un número, multiplicando os seus compoñentes: ***r*** · **(*a*, *b*) = (*r* · *a*, *r* · *b*)**

Actividades propostas

13. Debuxa no teu caderno un sistema de referencia cartesiano e sinala nel os puntos de coordenadas: *A* (4, 5), *B* (–5, 6) e *C* (2, –5). a) Chama **u** ao vector fixo ***AB*** e indica os seus compoñentes. b) Chama **v** ao vector fixo ***BC*** e indica os seus compoñentes. c) Calcula as compoñentes do vector **w** = **u** + **v**. d) Representa no teu caderno os vectores libres **u** e **v** con orixe na orixe de coordenadas e representa tamén ao vector suma **w**. Observa que está sobre a diagonal do paralelogramo construído sobre **u** e **v**.

14. Debuxa no teu caderno o punto *A* (1, 2), debuxa agora o vector **u** = (2, 3) con orixe en *A* e o vector **v** = (4, –1) tamén con orixe en A. Calcula as coordenadas do vector suma **u** + **v**, e debúxao con orixe en *A*. O resultado coincide co que obtiveches graficamente? Observa que o vector suma é a diagonal dun paralelogramo construído sobre **u** e **v**.

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

15. Efectúa as seguintes operacións con vectores:

a) $3 \cdot \left(\frac{1}{3},\ -\frac{5}{6}\right) + \frac{1}{2} \cdot (4,\ 8)$ b) (5, –9) – [(6, 3) + (–4, –6)]

c) 5·[(–1, 0) – (–2, 3)] + (–3) · [(4, –2) – 6 · (4, –5)] d) 9.3 · (2, 6) + (3.7, 5.2)

16. Efectúa as seguintes operacións cos vectores ***u*** = (–5, 6), ***v*** = (4, –7) e ***w*** = (3, 4):

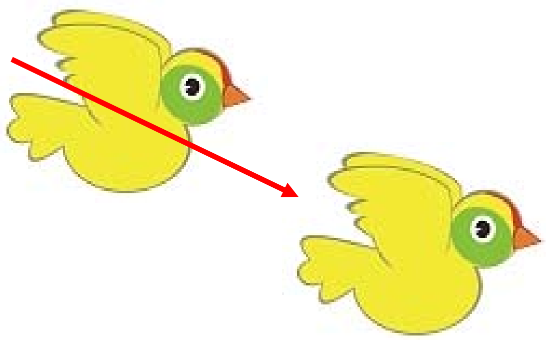
a) 2***u*** – (***v***+ ***w***) b) 3***w*** – 2***u*** + ***v*** c) 2(***u*** + ***v***) – 3***w***

2.2. Translacións no plano

Un coche móvese pola cidade desde o domicilio do dono ata o seu traballo, e trasládase 4 rúas cara ao norte e 3 rúas cara ao leste.

É posible coñecer unha **translación** se sabemos o punto de orixe *A* e o de destino *B*. Estes dous puntos, *A* e *B*, determinan o **vector de translación *AB***. ***AB*** é un vector fixo, representante do vector libre ***u*** de iguais coordenadas.

Unha figura e a súa trasladada.

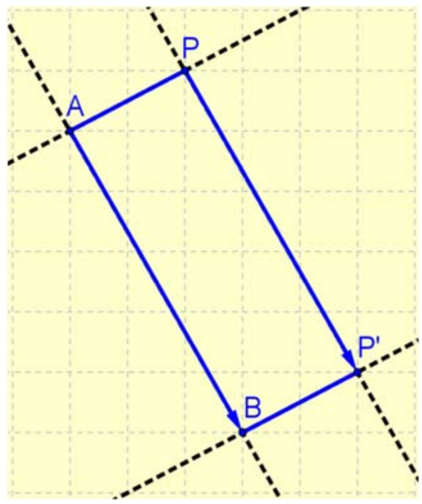


Para definir unha **translación** basta coñecer o seu **vector de translación**.

Se a translación de vector libre ***u* = *AB*** transforma un punto do plano *P* noutro *P'*, entón ***AB*** e ***PP'*** teñen igual módulo, dirección e sentido. Son o mesmo vector libre. Teñen as mesmas coordenadas.

Se coa translación de vector ***AB*** trasladamos o punto *P* ata o punto *P'* entón *ABP'P* é un **paralelogramo**, e ***AB*** = ***PP'***

Para trasladar unha figura trasládanse os puntos que a determinan. Como nunha translación todos os puntos se moven sobre rectas paralelas e unha mesma distancia, pódese usar a escuadra e o cartabón para trazar as rectas paralelas e trasladar sobre ela algúns puntos da figura, para o que se debe medir sempre a mesma distancia sobre a recta.



Propiedades das translacións

Os paralelogramos teñen, como sabes, os seus lados iguais dous a dous e paralelos dous a dous.

A recta *AB* é paralela á recta *PP'*, e a recta *AP* é paralela á recta *BP'*. Os segmentos *AB e PP'* son iguais, o mesmo que *AP e BP'*.

Por este motivo, entre unha figura e a súa trasladada **consérvanse todas as distancias e todos os ángulos**.

A translación é unha **isometría**, un **movemento directo**.

Identidade

A translación de vector de translación nulo, **0** = (0, 0) deixa todos os puntos invariantes, é dicir, non traslada nada, e denomínase tamén translación identidade ou simplemente: **identidade**.

Puntos invariantes

Un **punto invariante** é o que se transforma en si mesmo. Unha **recta invariante** é a que se transforma nela mesma, aínda que os seus puntos non sexan invariantes. Unha **recta invariante de puntos invariantes** é un caso particular de recta invariante na que cada un dos seus puntos é un punto invariante.

Que puntos deixa invariantes unha translación? Observa que agás a translación identidade(que deixa todo o plano invariante), unha translación non deixa ningún punto invariante.

Actividades propostas

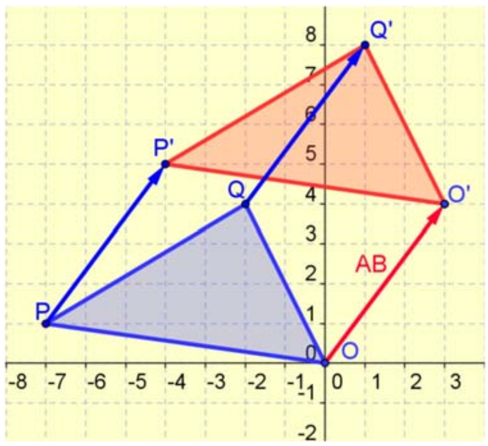
17. Debuxa no teu caderno unha figura e utiliza escuadra e cartabón para trasladala 5 centímetros cara á dereita.
18. Debuxa no teu caderno unha figura. (Se non se che ocorre ningunha outra, debuxa a letra G). Coloca enriba un papel vexetal e cálcaa. Despraza en liña recta o papel vexetal e volve calcar a figura. As dúas figuras que obtiveches, teñen todas as súas medidas, tanto lonxitudes como ángulos, iguais? Traza as rectas que unen pares de puntos correspondentes, como son esas rectas? Que traxectoria seguiron os puntos no desprazamento?


Un friso en Cambodia

19. Con axuda de papel cuadriculado transforma mediante unha translación unha recta, unha circunferencia, un segmento, un triángulo, dúas rectas paralelas e dúas rectas perpendiculares. En que se transforman? Analiza os resultados.
20. Observa este friso dun templo de Cambodia. É unha figura que se repite por translación. Que dirección ten o vector de translación? De onde a onde iría?

2.3. Coordenadas

Para traballar con translacións podes utilizar as coordenadas:



Actividades resoltas

- Aos puntos $P(-7, 1)$, $Q(-2, 4)$ e O (0, 0) aplícaselles unha translación de 3 unidades cara á dereita e 4 unidades cara arriba de modo que o seu vector de translación é:

  AB = (3, 4)

  Entón as **coordenadas dos puntos trasladados** obtéñense sumando á abscisa do punto que queremos trasladar a abscisa do vector de translación, e á ordenada do punto, a ordenada do vector de translación:

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

Para trasladar *P* (–7, 1) segundo o vector ***AB*** = (3, 4) calcúlase –7 + 3 = –4, 1 + 4 = 5, polo que o seu punto trasladado é: *P'* (–4, 5).

Ao trasladar *Q* (–2, 4) obtense *Q'* (–2 + 3, 4 + 4) = (1, 8).

Ao trasladar *O* (0, 0) segundo o vector ***AB*** = (3, 4) obtense *O'* (3, 4).

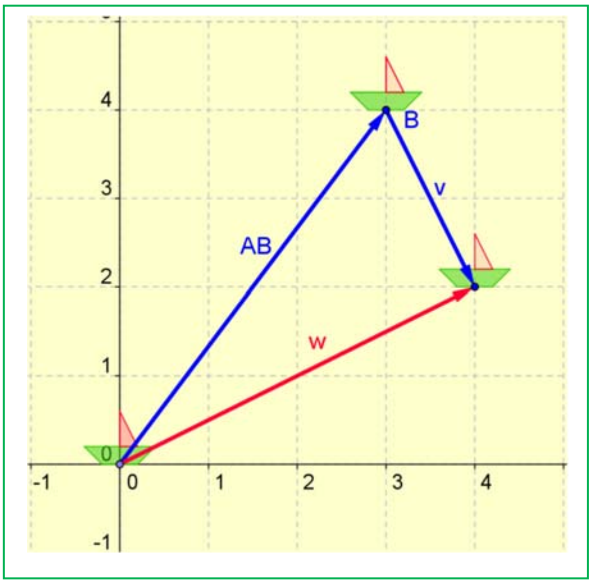
Actividades propostas

21. Utiliza papel cuadriculado e debuxa no teu caderno unha letra F de 2 cadradiños de alta e 1 cadradiño de ancha e aplícalle a translación de vector (2, 5).

22. Debuxa no teu caderno uns eixes cartesianos e o triángulo de vértices *A* (3, 1), *B* (3, 3) e *C* (1, 3). Aplícalle a translación de vector (4, 2): 4 unidades á dereita e 2 unidades cara arriba. Cales son as coordenadas dos puntos trasladados *A'*, *B'* e *C'*?

2.4. Composición de translacións

Se trasladas unha figura mediante unha translación de vector **u**, e logo volves trasladala mediante outra de vector **v**, podes comprobar que podes ir da primeira figura á última mediante unha única translación. O vector de translación desta última translación podes obtelo sumando os vectores de translación das dúas primeiras: **u** + **v**.



Actividades resoltas

- Trasladamos mediante o vector de translación ***AB***= (3, 4) e logo mediante o vector de translación **v** = (1, –2). A composición de ambas as translacións é outra translación de vector de translación **w**:

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{AB} + \mathbf{v} = (3 + 1, 4 – 2) = (4, 2)$$

Actividades propostas

23. As puntillas da imaxe deseñáronse a partir dun motivo que se foi trasladando a todo o longo. Debuxa no teu caderno un motivo parecido a algún da figura, unha flor, un V, un zigzag… e trasládao compoñendo varias translacións dun mesmo vector de translación. Debuxaches un friso.

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

Translación inversa

Actividades resoltas

- Se trasladamos unha figura 4 unidades cara á dereita e 3 cara arriba, como debemos trasladala para que ocupe a posición inicial? Hai que trasladala co vector: (–4, –3).

Dicimos que estas translacións son unha inversa doutra.

En xeral, a **translación inversa** da de vector de translación **v** = (a, b) é a translación de vector:

$$\mathbf{w} = -\mathbf{v} = (-a, -b)$$

Actividades propostas

24. Traslada unha figura (por exemplo unha letra L) mediante a translación de vector (–4, 5) e repite o proceso coa figura trasladada empregando o vector (3, –6). Que movemento utilizas para ir da primeira figura á última? É unha translación? Cal é o seu vector?

25. O mosaico da marxe está confeccionado utilizando un motivo mínimo que se despraza por todo o mosaico. Se utilizas como motivo mínimo a estrela de seis puntas, sen ter en conta os cambios de cor, determina os vectores de translación de dúas translacións, unha horizontal e outra vertical, que mediante composicións che permitan ter o resto do mosaico. Observa que ao sumar a translación horizontal coa vertical obtés translacións oblicuas. Debuxa no teu caderno unha figura e trasládaa de forma similar para ter un mosaico.

2.5. Translacións no espazo

As translacións no espazo teñen as mesmas propiedades que as translacións no plano.

Imaxina un avión que se move. O avión trasládase.

Unha translación no espazo, igual que unha translación no plano, é o movemento que consiste en deslizar un obxecto segundo unha dirección. A translación está determinada pola distancia que se traslada, a dirección da recta sobre a que se traslada, e polo seu sentido. Polo tanto:

Para determinar unha translación no espazo basta coñecer o seu **vector de translación**.

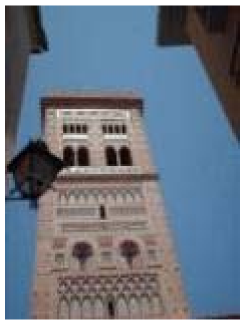
A única diferenza é que agora o vector de translación ten tres compoñentes: ***AB*** = (a, b, c).

Exemplo:

- Para trasladar o punto P (2, 4, –1) mediante a translación de vector ***AB*** = (–3, 5, 2), simplemente sumamos as coordenadas:

$$P' = (2 - 3, 4 + 5, -1 + 2) = (-1, 9, 1).$$

A translación no espazo no deixa ningún punto invariante.



Actividades propostas

26. En edificación utilízanse moito as translacións. Pensa nas ventás dun edificio e elixe unha. Podes obter outra distinta mediante translación? Fai un debuxo que represente esta situación.
27. Na fachada desta torre mudéxar de Teruel podemos ver distintas translacións. Na parte superior hai dous conxuntos de catro ventás. Un é trasladado do outro. E cada ventá forma ás outras catro mediante unha translación. Ao seguir baixando, os dous arcos trasládanse formando outros dous arcos. Observa, neste caso todas as translacións teñen un vector de translación horizontal. Continúa describindo as translacións que ves no deseño desta torre.

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

3. XIROS OU ROTACIÓNS

3.1. Xiros no plano

Son as 4 en punto. Se atrasamos o reloxo 15 minutos, a agulla dos minutos xirou un ángulo de 90°en sentido positivo.

Para determinar un **xiro** ou **rotación** é necesario coñecer un punto, *O*, o **centro de xiro**; un **ángulo** α e o **sentido** de xiro dese ángulo.

Existe o acordo de considerar *positivo* (+) ao sentido contrario das agullas dun reloxo e sentido *negativo* (–) o das agullas do reloxo.

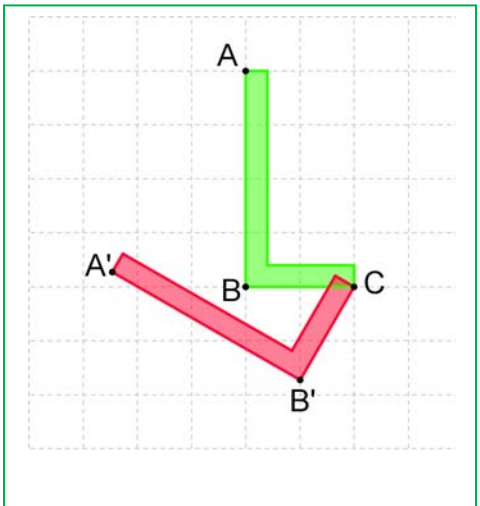
Se *A'* é o punto xirado de *A*, con centro *O* e ángulo α, entón: $|OA| = |OA'|$ e o segmento *OA* forma un ángulo α con *OA'*.

Para xirar unha figura xíranse os puntos que a forman.

Exemplo:

- Se pasaron 15 minutos a agulla dos minutos xirou–90° (90° en sentido negativo), cando pase media hora terá xirado –180°, e se só pasan 10 minutos terá xirado –60°.

Actividades resoltas



Para debuxar rotacións no caderno podes utilizar un transportador de ángulos e un compás.

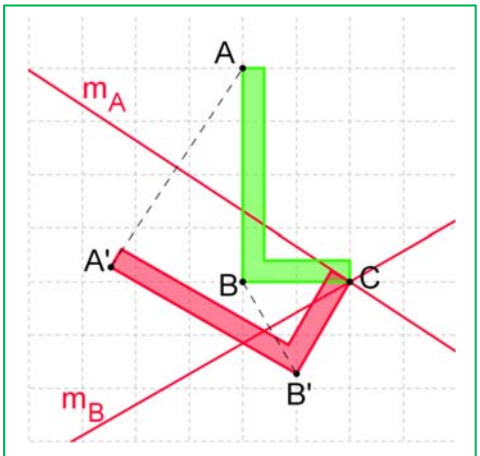
- Para xirar a letra L segundo un xiro de centro *C* e ángulo 60°, tomamos varios puntos da figura, neste caso os puntos *A*, *B* e *C*. Co compás facendo centro en *C* trazamos arcos, e sobre eles, utilizando o transportador, medimos 60°. Obtemos os puntos *B'* e *A'*.

A nova letra L mantén as distancias: *BC* = *B'C* e *AB* = *A'B'*. Tamén mantén os ángulos: o ángulo *ABC* é recto e o novo ángulo *A'B'C* tamén é un ángulo recto e coa mesma orientación que o anterior. En xeral:

Os xiros manteñen as distancias polo que son **isometrías** ou movementos. Manteñen os ángulos e o sentido dos ángulos polo que son **movementos directos**.

Para saber se dúas figuras son dúas figuras xiradas trazamos as mediatrices dos puntos correspondentes e todas elas deben cortarse nun mesmo punto, o centro de xiro. Co transportador de ángulos podemos entón medir o ángulo de xiro.

Actividades resoltas



- Trazamos o segmento *BB'* e a súa mediatriz. Trazamos o segmento *AA'* e a súa mediatriz. Ambas as mediatrices córtanse no punto *C*, que é o centro de xiro. O ángulo que forman as mediatrices é de 60°.

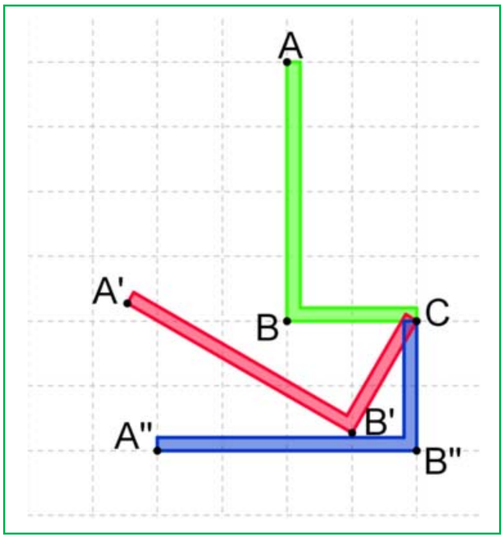
Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

28. Debuxa no teu caderno un punto *O* e outro punto distinto *A*. Xira ao punto *A* con centro en *O* un ángulo de 30° en sentido positivo e denomina *A’* o punto xirado.
29. Debuxa no teu caderno un punto *O* e dous segmentos, un *OA* que pase por *O*, e outro *BC* que non pase por *O*. Debuxa os segmentos xirados *OA’* e *B’C’* do xiro de centro *O* e ángulo 60°.
30. Debuxa no teu caderno o triángulo de vértices *A* (4, 2), *B* (3, –2) e *C* (5, 0). Debuxa o triángulo que se obtén ao xiralo con centro na orixe de coordenadas un ángulo de 90° en sentido positivo. Cales son as coordenadas dos vértices *A'*, *B'* e *C'* do triángulo xirado?
31. Coa axuda de papel cuadriculado, transforma mediante un xiro, unha recta, unha circunferencia, un segmento, un triángulo, dúas rectas paralelas e dúas rectas perpendiculares. En que se transforman? Analiza os resultados.

3.2. Composición de xiros. Elementos invariantes

Exemplo:



- Se xiramos a letra L con centro *C*, 60° en sentido positivo e logo, tamén con centro *C*, 30° en sentido positivo, a figura obtida está xirada respecto á primeira 90° co mesmo centro de xiro. En xeral:

A **composición** de dous xiros do mesmo centro é outro xiro do mesmo centro e de ángulo, a suma dos ángulos de xiro.

- Se unha vez xirada a nosa letra L 30° en sentido positivo, a xiramos, co mesmo centro de xiro, 30° en sentido negativo. Que ocorre? En efecto, volvemos á posición inicial. Dise que son xiros inversos e que ao compoñelos temos a identidade, xa que non nos movemos.

Un xiro de centro *O* e ángulo α é o **xiro inverso** ao xiro do mesmo centro *O* e ángulo $-\alpha$.

Observa que a composición de xiros de distinto centro non é conmutativa, pois depende da orde na que fagamos os xiros.

Actividades resoltas

- Pensemos agora en que elementos deixa invariantes un xiro de centro *O* e ángulo de xiro que non sexa 0° nin 180°. Deixa algunha recta invariante? Hai algunha recta do plano que non se mova? Non, todas xiran. Non hai rectas invariantes. E puntos? Algún punto do plano non se move ao xirar? Si, o centro de xiro queda invariante. O centro de xiro transfórmase en si mesmo.

Nun xiro de centro *O* e ángulo distinto de 0° e de 180°, o único elemento **invariante** é un punto, o **centro de xiro.**

Centro de xiro: Centro de xiro é un punto dunha figura plana tal que ao xirar un certo ángulo, a figura coincide consigo mesma.

- Observa que o rosetón do centro deste mosaico ten un **centro de xiro** de 60°. Se o xiramos 60°, volve coincidir. Tamén se o xiramos 120° o 180° o 240° o 300°.

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

3.3. Simetría central no plano. Centro de simetría

A simetría central de centro *O* no plano é un xiro dese centro *O* e ángulo 180°. No plano, a simetría central é, polo tanto, un movemento que xa coñecemos. Observa que a simetría central é, polo tanto, un movemento directo.

Se *P' é* o simétrico de *P* na **simetría central** de centro de simetría *O*, entón *O* é o punto medio do segmento *PP'*.

Actividades resoltas

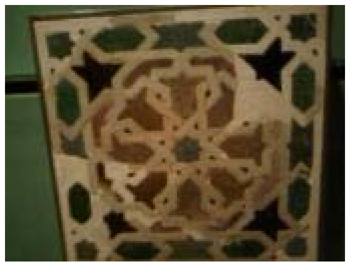
- Dous puntos *P* e *P'* son **simétricos respecto da orixe de coordenadas** se tanto as súas abscisas como as súas ordenadas son opostas. Así, o simétrico respecto da orixe do punto (–2, 4) é o punto (2, –4).
- Observa con esta animación como se constrúe o simétrico, respecto a unha simetría central de centro (2, 3), dun polígono:

  http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/183284_am_1.swf

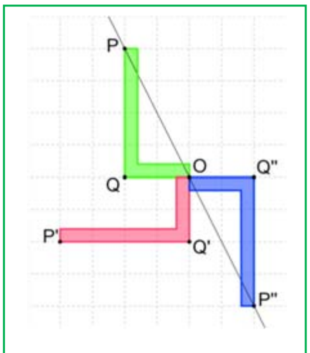
  O simétrico do punto *A* (8, 1) é o punto *A'* (–4, 5). Viches que se trazou a recta *OA*. Con centro en *O* e radio *OA* trázase un arco de circunferencia que corta á recta *OA* en *A'*. O mesmo para obter o simétrico dos outros vértices do polígono. Se os outros vértices son *B* (12, 7), *C* (9, 10), *D* (5, 8) e *E*(7, 6), cales son os seus simétricos respecto á simetría central de centro (2, 3)?
- Que elementos deixa invariantes unha simetría central? Deixa invariante o centro de simetría e todas as rectas que pasan polo centro de xiro.

Centro de simetría: Un punto *O* é un centro de simetría dunha figura se todo punto dela ten como transformado pola simetría central de centro *O*, outro punto da figura. A simetría central transforma á figura nela mesma.

Exemplo:



- O mosaico da *Alhambra* da marxe ten simetría central.
- O círculo, o cadrado, o rectángulo teñen centro de simetría, porén, un triángulo nunca ten centro de simetría.
- Os polígonos regulares cun número par de lados teñen centro de simetría.
- O pentágono regular, non o ten.



Actividades resoltas

- Aplicamos á letra L un xiro de 90° e logo outro xiro tamén de 90°. A composición dun xiro de 90°, con outro do mesmo centro e 90°, é un xiro de 180°. O punto *P* primeiro transfórmase en *P'* e logo en P''. Se unimos cada punto da figura co seu transformado pola composición dos dous xiros, a recta *OP* transfórmase na *OP*'', que é a mesma recta. Os puntos *Q*, O e *Q''* tamén están aliñados. As rectas que pasan polo centro de simetría son invariantes.

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

32. Debuxa no teu caderno dous puntos calquera *P* e *P’*. Encontra o seu centro de simetría.
33. Que ocorre ao aplicar un xiro de 60° a unha figura? Hai rectas invariantes? E nun xiro de 180°? As rectas que pasan polo centro de xiro, en que rectas se transforman? E cun xiro de 0°? E cun xiro de 360°?
34. Debuxa un triángulo *ABC* e o seu simétrico *A’B’C’* respecto dun punto *O*. Como son os seus lados? Son iguais? E os seus ángulos? Mantense o sentido dos ángulos? Comproba como é o ángulo *ABC* e o ángulo *A’B’C’*. É un movemento directo?
35. Imos analizar as letras maiúsculas. Indica cales das seguintes letras non teñen simetría central e cales si a teñen, indicando entón o seu centro de simetría: B, H, N, O, P, S, T, X, Z. Recorda, buscas un punto tal que a simetría central de centro ese punto deixe invariante á letra.

3.4. Xiros no espazo

Ao abrir ou pechar unha porta, esta xira, as patillas das lentes xiran, as rodas dun coche xiran... Observa que para determinar un xiro no espazo necesitas, ademais do ángulo (e o seu sentido), coñecer o **eixe de xiro**. Recorda, no plano tiñamos un centro de xiro, un punto, agora un eixe de xiro, unha recta.

Pensa noutros exemplos cotiáns de xiros no espazo.

Cando xiras unha porta, cambia o sentido dos seus ángulos? Naturalmente que non. Os xiros no espazo son movementos directos.

- Que puntos se transforman en si mesmos? O xiro no espazo deixa invariantes aos puntos do eixe de xiro.

Eixe de xiro: Eixe de xiro dunha figura, no espazo, é unha recta imaxinaria tal, que ao xirar a figura un certo ángulo, coincide consigo mesma.

3.5. Simetría central no espazo. Centro de simetría

Unha figura ten simetría central se ao unir cada un dos seus puntos co centro se obtén outro punto da figura.

Se *P' é* o simétrico de *P* na **simetría central** de centro *O*, entón *O* é o punto medio do segmento *PP'*.

A simetría central no espazo non é un xiro. Ademais só deixa un punto invariante, o centro (non unha recta)

Centro de simetría: Un punto *O* é un centro de simetría dunha figura se todo punto dela ten como transformado pola simetría central de centro *O*, outro punto da figura.

Exemplos:

- A esfera e o cubo teñen centro de simetría; o tetraedro, non.
- O cilindro ten centro de simetría. O cono non ten centro de simetría.
- Un prisma regular ten centro de simetría. Unha pirámide, non.

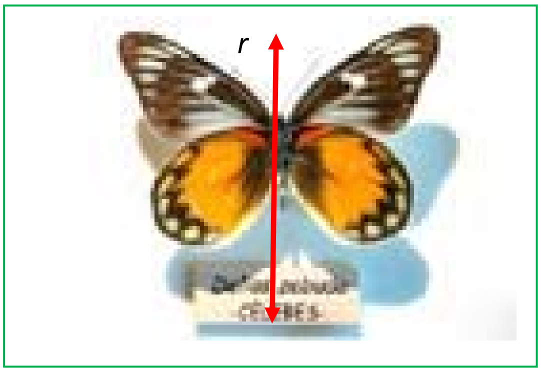
Actividades propostas

36. Escribe cinco exemplos de obxectos do espazo que xiren.
37. Mediante un xiro no espazo, en que se transforma un plano? E unha esfera? E un cono? E dous planos paralelos? E dous planos ortogonais? Analiza os resultados.

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

4. SIMETRÍAS

4.1. Simetrías axiais. Eixe de simetría



A bolboreta da figura é simétrica respecto do eixe de simetría *r*.

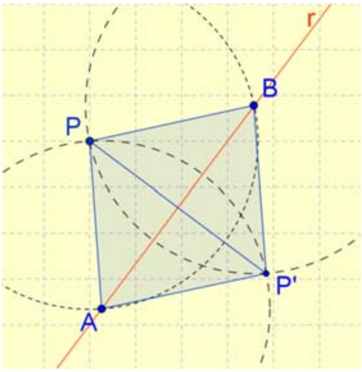
Para determinar unha simetría (simetría axial) é necesario coñecer o **eixe de simetría**.

Se *P'* é o simétrico de *P* respecto da **simetría axial** de eixe *r*, entón *r* é a **mediatriz** do segmento *PP'*.

A simetría axial conserva todas as lonxitudes e a magnitude dos ángulos, pero cambia o sentido destes. Por iso non é posible facer coincidir unha figura coa súa simétrica (a non ser que as propias figuras sexan simétricas).

A simetría é polo tanto un movemento inverso.

Actividades resoltas



- Para calcular o simétrico do punto *P* respecto do eixe de simetría *r*, utiliza un compás e, facendo centro en *P* con radio suficientemente grande, traza un arco de circunferencia que corte a *r* en dous puntos, *A* e *B*. Sen variar de radio e con centro en *A* e en *B* traza outros dous arcos que se cortan en *P'*, simétrico de *P* respecto a *r*. Observa que *PAP'B* é un rombo pois os seus catro lados son iguais, polo que sabemos que as súas diagonais son perpendiculares e córtanse no punto medio.
- Na animación podes ver como se debuxa o punto simétrico doutro utilizando regra e escuadra:
  http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/183282_am_1Punto_simetrico.swf
  Temos o eixe de simetría e queremos encontrar o simétrico do punto *P* (4, 1). Debuxamos o punto *P* (4, 1) nun sistema de coordenadas e tomamos a escuadra. Apoiamos a escuadra sobre o eixe de simetría e ata que toque ao punto. Trazamos unha recta auxiliar, perpendicular ao eixe e que pase polo punto *P*. Medimos a distancia do punto ao eixe e levamos esa lonxitude sobre a recta auxiliar, e xa temos o punto simétrico.
  - Tamén podes obter figuras simétricas dobrando un papel. A dobra é o eixe de simetría. Se debuxas unha figura, dobras o papel e a calcas obtés a figura simétrica.
  - Outra forma é dobrar un papel e recortar unha figura: obtense unha figura simétrica respecto á dobra.

Se debuxamos en papel cuadriculado o triángulo de vértices *A* (–3, 2), *B* (–5, 4) e *C* (–4, 7) e calculamos o simétrico respecto ao eixe de ordenadas, as coordenadas dos vértices do triángulo simétrico son: *A'*(3, 2), *B'* (5, 4) e *C'* (4, 7). En xeral, o simétrico de *P* (*x*, *y*) respecto ao eixe de ordenadas é *P'* (–*x*, *y*).
Se debuxas o triángulo simétrico de *ABC* respecto ao eixe de abscisas, observa que as coordenadas dos seus vértices son: A' (–3, –2), B' (–5, –4) e C' (–4, –7). En xeral, o punto simétrico de *P* (*x*, *y*) respecto ao eixe de abscisas é *P'* (*x*, –*y*).

Dous puntos **simétricos respecto do eixe de ordenadas** teñen a mesma ordenada e as súas abscisas son opostas. Dous puntos **simétricos respecto do eixe de abscisas** teñen a mesma abscisa e as súas ordenadas son opostas.

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

Puntos invariantes

Nunha simetría, os puntos do eixe de simetría transfórmanse en si mesmos.

A simetría axial deixa invariantes os puntos do eixe de simetría. O eixe de simetría é unha recta invariante de puntos invariantes.

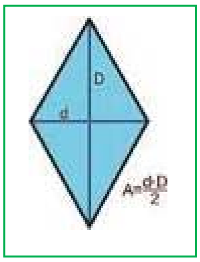
- Que outros elementos deixa invariantes? Hai máis puntos? Hai outras rectas? Observa que as rectas perpendiculares ao eixe de simetría se transforman en si mesmas.

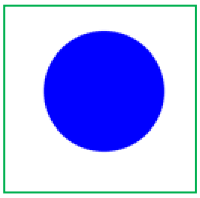
Actividades propostas

38. Debuxa no teu caderno un eixe *r* de simetría oblicuo, e un punto *P*. Debuxa o punto P' simétrico respecto de *r*. Comproba que a recta *r* é a mediatriz do segmento *PP'*. (*Recorda*: a mediatriz dun segmento é a perpendicular polo punto medio).
39. Debuxa no teu caderno dous puntos calquera *P* e *P'*. Debuxa o eixe de simetría *r* respecto ao que son simétricos.
40. Debuxa en papel cuadriculado unha letra L e un eixe de simetría vertical. Debuxa a letra L simétrica respecto a ese eixe. Calca unha delas e move o papel de calco para intentar facelas coincidir. É imposible porque a simetría é un movemento inverso.
41. Reproduce no teu caderno a figura da marxe. Debuxa un eixe de simetría oblicuo e debuxa a figura simétrica.

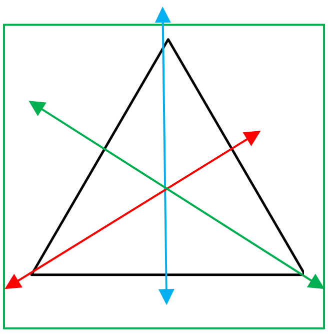
42. Calcula as coordenadas dos vértices do triángulo simétrico respecto do eixe de ordenadas do triángulo *A*(3, –4), *B* (5, 6), *C* (–4, 5). O mesmo respecto do eixe de abscisas.

Eixe de simetría dunha figura





Se a recta *r* é un eixe de simetría dunha figura entón todo punto desa figura ten como transformado pola simetría de eixe *r* a outro punto da figura.



Exemplos:

- Un triángulo isósceles ten un eixe de simetría e un triángulo equilátero, tres.
- Un rectángulo ou un rombo teñen dous eixes de simetría, e un cadrado catro.
- Un círculo ten unha infinidade de eixes de simetría (todos os seus diámetros).

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

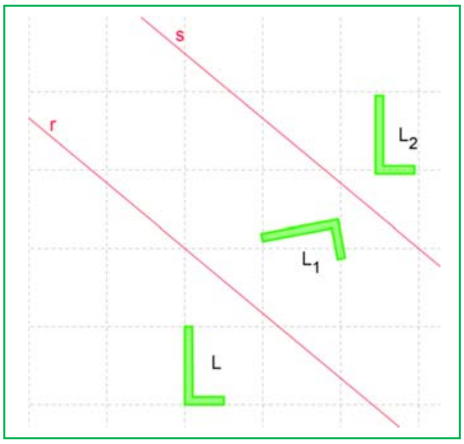
Actividades propostas

43. Indica cales das seguintes letras maiúsculas son simétricas, e se o son, indica se os seus eixes de simetría son horizontais ou verticais: A, B, D, F, K, M, N, R, T, U, V, W, Z.
44. Con axuda de papel cuadriculado, transforma mediante unha simetría, unha recta, unha circunferencia, un segmento, un triángulo, dúas rectas paralelas e dúas rectas perpendiculares. En que se transforman? Analiza a túa resposta.
45. Debuxa un rectángulo *ABCD*. Debuxa o eixe de simetría que transforma *AB* en *CD*, e o eixe de simetría que transforma *AD* en *BC*.
46. Debuxa un hexágono regular e debuxa os seus eixes de simetría. Cantos ten? Ten 6. Descríbeos.
47. Debuxa un pentágono regular e os seus eixes de simetría. Cantos ten? Descríbeos.

4.2. Composición de simetrías

Imos estudar agora a composición de simetrías. Xa sabes que unha simetría é un movemento inverso. Se cambias o sentido dun ángulo e logo volves cambialo, quédache o sentido orixinal. Polo tanto a composición de dúas simetrías non vai ser un movemento inverso senón un directo.

Vexámolo primeiro nun caso particular.



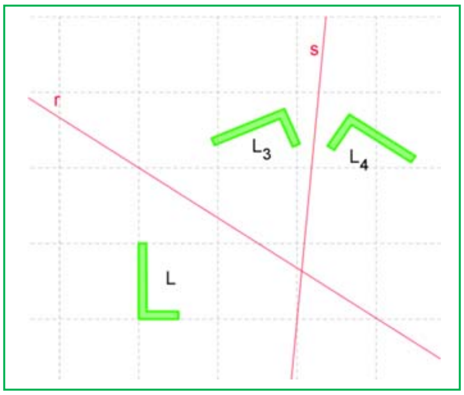
Actividades resoltas

- Trazamos dous eixes de simetría, *r* e *s*, paralelos. Debuxamos unha letra L, e debuxamos a letra L_1 simétrica de L con respecto da recta *r*, e despois a letra L_2 simétrica de L_1 respecto da recta *s*. Mediante que transformación pasamos directamente de L a L_2? Pode ser unha simetría? (Observa que si se poden superpoñer L e L_2, logo é un movemento directo). É un xiro? É unha translación? Si, é unha translación, de que vector?

A composición de dúas simetrías de eixes paralelos é unha translación. É a translación de vector de dirección a recta ortogonal aos eixes de simetría, de módulo o dobre da distancia entre ambos os eixes, e de sentido o que vai do primeiro eixe ao segundo.

A composición de simetrías **non é conmutativa**. Comproba que se ao L primeiro lle aplicamos a simetría de eixe *s* e logo a simetría de eixe *r* obtemos unha translación, pero o vector de translación é o oposto ao do caso anterior.

- Trazamos agora dous eixes de simetría secantes, *r* e *s*, e unha letra L. Debuxamos a letra L_3 simétrica de L con respecto á recta *r*, e debuxamos a letra L_4 simétrica de L_3 respecto á recta *s*. Mediante que transformación pasamos directamente de L a L_4? Pode ser unha simetría? (Observa que se poden superpoñer L e L_4, logo é un movemento directo). É unha translación? É un xiro? Si, é un xiro, de que centro e de que ángulo?



A composición de dúas simetrías de eixes secantes é un xiro. É o xiro de centro o punto de intersección dos eixes de simetría, de ángulo dobre ao que forman ambos eixes e de sentido do ángulo, o que vai do primeiro eixe ao segundo.

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

A composición de simetrías **non é conmutativa**. Comproba que se ao L primeiro lle aplicamos a simetría de eixe *s* e logo a simetría de eixe *r* obtemos un xiro, pero o ángulo de xiro é o oposto ao do caso anterior.

Actividades propostas

48. Reproduce no teu caderno a figura P da marxe.

a) Debuxa o paxaro P’ simétrico respecto ao eixe de ordenadas.

b) Debuxa o paxaro P’’ simétrico respecto ao eixe de abscisas.

c) Existe algunha simetría axial que transforme P’ en P’’? Existe algunha simetría central que transforme P’ en P’’?

d) Se o pico do paxaro P tivese unhas coordenadas (–2, 5), que coordenadas tería o pico do paxaro P’? E o do paxaro P’’?

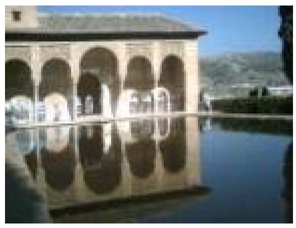
49. Debuxa no teu caderno dous eixes de simetría paralelos e unha letra F. Debuxa a composición de ambas as simetrías a esta letra, comprobando que a composición delas é unha translación e determina o vector de translación.

50. Debuxa no teu caderno dous eixes de simetría secantes e unha letra F. Debuxa a composición de ambas as simetrías a esta letra, comprobando que a composición delas é un xiro e determina o centro e o ángulo de xiro.

51. Se aplicamos unha simetría a unha figura, que transformación debemos aplicarlle para obter a figura inicial?

52. A composición de dúas simetrías planas de eixes secantes é un xiro. Como deben ser os eixes para que sexa un xiro de 180 ° (ou unha simetría central)?

4.3. Simetría especular no espazo. Plano de simetría



Moitos mobles son simétricos: moitas mesas, moitas cadeiras… Moitos animais son case simétricos. Os coches, os avións, os trens son simétricos. Se nos miramos nun espello vemos unha imaxe reflectida que é simétrica á nosa. Moitos edificios son case simétricos ou teñen elementos de simetría.

Para determinar unha simetría no espazo é necesario coñecer un plano, o **plano de simetría**.

Unha simetría no espazo deixa invariantes os puntos pertencentes ao plano de simetría. Deixa invariantes as rectas ortogonais ao plano de simetría, e deixa invariante ao plano de simetría.

Plano de simetría: o plano de simetría dunha figura é un plano imaxinario tal, que todo punto da figura se transforma pola simetría respecto dese plano noutro punto da figura.

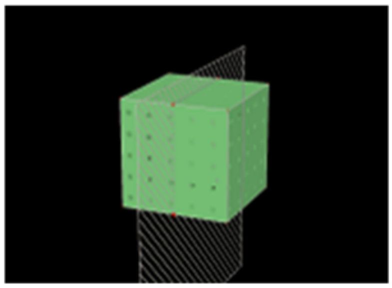
A torre coa porta da marxe ten un plano de simetría.

Un plano de simetría é como un espello que reflicte exactamente un fragmento da figura no outro fragmento.

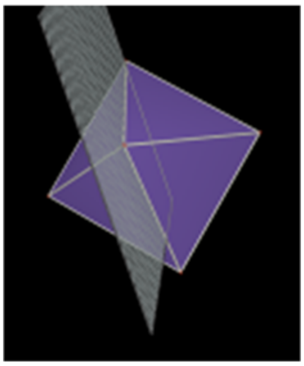
Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

Actividades resoltas

- Constrúe poliedros regulares, con cartolina, con palliñas, con …, para comprobar o que segue:
- Analizamos o plano de simetría do cubo da ilustración da marxe. Vemos que pasa polos puntos medios das arestas. Cantos planos de simetría hai similares a este? Como o cubo ten 12 arestas e cada plano pasa por 4 hai 3 deste tipo. Outro plano de simetría pasa por unha diagonal dunha cara, unha aresta, outra diagonal e outra aresta. Cantos hai desoutro tipo? Como o cubo ten 12 arestas e tomamos 2, hai 6 dese tipo.



- Busca un eixe de xiro do cubo. Observa que ten un eixe de xiro de 90° que vai de centro de cara a centro de cara. Cantos eixes de xiro ten dese tipo? Comproba que hai 3 (6 caras: 2 = 3). Observa que tamén hai un eixe de xiro de 120° que vai de vértice a vértice oposto. Cantos hai desoutro tipo? Como o cubo ten 8 vértices hai 4 deste tipo. Observa que tamén hai un eixe de xiro de 180° que vai de centro de aresta a centro de aresta oposta. Cantos hai desoutro tipo? Como o cubo ten 12 arestas, hai 6 dese tipo. Hai simetría central? Observa que si.



- Imos analizar agora as isometrías dun octaedro. Observa que ten centro de simetría, igual que o cubo. Planos de simetría: Hai planos, como o da figura, que pasan por catro arestas. Como ten 12 arestas hai 3 deste tipo. Tamén hai planos que pasan polo eixe de simetría das caras. Cantos hai? Temos o mesmo número de planos de simetría que no cubo? Si. O cubo e o octaedro son duais. Se no cubo fixamos os centros das caras e os unimos, temos un octaedro. E se no octaedro unimos os centros das caras, temos un cubo. Observa que o número de caras dun cubo, 6, coincide co número de vértices dun octaedro, e que o número de caras dun octaedro, 8, coincide co número de vértices do cubo. E ambos os dous teñen o mesmo número de arestas, 12.

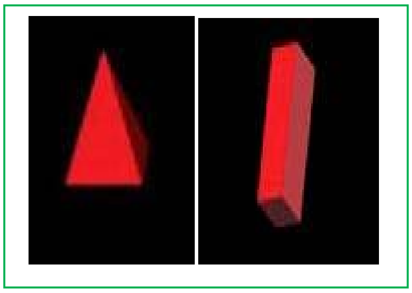
- Buscamos agora eixes de xiro nun octaedro. Ten eixes de xiro de 90°? Si, van de vértice a vértice oposto. Hai 6 vértices, logo hai 3 eixes de xiro deste tipo. Hai eixes de xiro de 120°, como no cubo? Naturalmente, van de centro de cara a centro de cara, e como ten 8 caras, hai 4 deste tipo. E os eixes de xiro de 180°? Van, como no cubo, de centro de aresta a centro de aresta, e hai 6.
- O estudo do tetraedro é máis sinxelo. Comproba que NON ten centro de simetría. Os planos de simetría pasan por unha aresta, o eixe de simetría dunha cara e o eixe de simetría doutra. Hai 6 arestas, logo hai 6 deste tipo. Ten eixes de xiro de 120°. Pasan por un vértice e o centro da cara oposta. Como ten 4 caras hai 4 deste tipo.
- O estudo do dodecaedro e do icosaedro é máis complicado. Observa que tamén son duais. Se unimos os centros das caras dun dodecaedro obtense un icosaedro, e se unimos os centros das caras dun icosaedro, obtense un dodecaedro. O dodecaedro ten 12 caras e o icosaedro 12 vértices. O icosaedro ten 20 caras e o dodecaedro 20 vértices. Ambos os dous teñen 30 arestas. Imos describir o plano de simetría do dodecaedro da figura da marxe: Vemos que pasa polos dous eixes de simetría de dúas caras, por unha aresta. E logo? Xa non o vemos? Observa que volve pasar por dous eixes de simetría de caras e por outra aresta. Como o dodecaedro ten 20 arestas, hai 10 planos de simetría deste tipo.

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

53. Escribe cinco obxectos que estean ao teu arredor que sexan simétricos e indica o seu plano de simetría. Mira na aula e busca simetrías. Son simétricas as cadeiras, a lámpada, a ventá, as mesas...? ¿Cal é o seu plano de simetría?

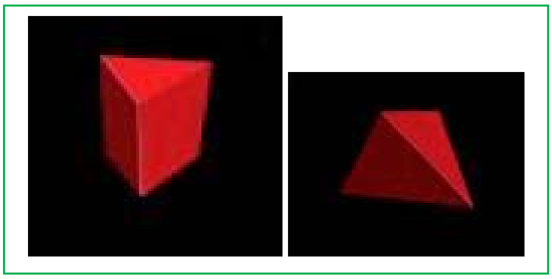
54. Define os planos de simetría e os eixes de rotación das seguintes figuras:



a) Un prisma recto de base cadrada. E se é oblicuo?

b) Unha pirámide recta de base cadrada.

c) Se o prisma e a pirámide son rectos, pero as súas bases son rectángulos, que simetrías se manteñen?



55. Determina os planos de simetría e os eixes de rotación destas figuras:

a) Un prisma recto cuxa base é un triángulo equilátero.

b) Unha pirámide recta de base un triángulo equilátero. E se é oblicua?

c) Se o prisma e a pirámide son rectos pero de base un triángulo isósceles, que simetrías se manteñen?

56. Mediante unha simetría especular, en que se transforma un plano? E unha esfera? E un cono? E dous planos paralelos? E dous planos ortogonais? Analiza os resultados.

4.4. Isometrías no plano

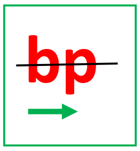
As **isometrías** son transformacións xeométricas que conservan as distancias e os ángulos.

No plano estudamos as translacións, os xiros e as simetrías (axiais) que son isometrías.

Xa sabemos que a simetría central no plano coincide cun caso particular de xiro, o xiro de 180°.

Os xiros e as translacións son isometrías directas, pois non cambian o sentido dos ángulos. As simetrías son isometrías inversas pois si que os cambian.

Vimos que a composición de dúas translacións é sempre outra translación, que a composición de dous xiros do mesmo centro é outro xiro de igual centro, que a composición de dúas simetrías é un xiro ou unha translación. Poderiamos seguir estudando que ocorre se compoñemos xiros de distinto centro, xiros con translacións, translacións con simetrías e simetrías con xiros. Veriamos que case sempre obteriamos unha simetría, unha translación ou un xiro. Agás cando compoñemos unha translación cunha simetría. Obtemos unha isometría nova que chamaremos **simetría con deslizamento**. Pasamos da letra b da marxe á letra p por unha simetría de eixe horizontal (en negro) e unha translación (de vector de translación en verde).



Puntos invariantes: a translación non deixa ningún punto invariante. Os xiros deixan un, o centro de xiro, e a simetría axial deixa unha recta, o eixe de simetría. A simetría con deslizamento tampouco deixa ningún punto invariante.

Se nun plano unha isometría deixa tres puntos invariantes non aliñados, entón deixa invariante todo o plano, logo é a identidade.

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

No plano			
	Puntos invariantes	**Rectas de puntos invariantes**	**Rectas invariantes**
Translación	Ningún	Ningunha	As de dirección igual á do vector de translación
Xiros (de ángulo de xiro distinto a 180° e 0°)	Centro de xiro	Ningunha	Ningunha
Simetría (axial)	Os do eixe de simetría	O eixe de simetría	O eixe de simetría e as rectas ortogonais ao eixe de simetría.
Identidade	Todo o plano	Todas	Todas
Simetría con deslizamento	Ningún	Ningunha	As de dirección igual ao vector de translación e do eixe de simetría.

4.5. Uso de Xeoxebra para analizar as isometrías no plano

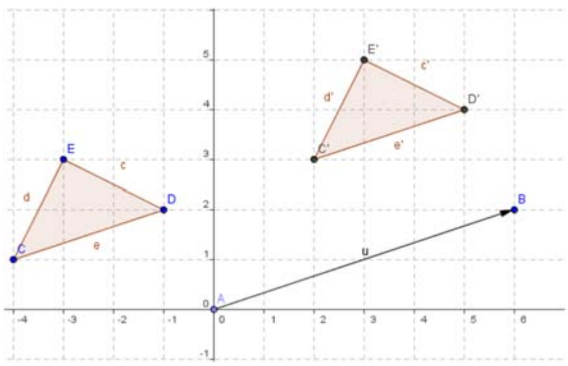
Imos utilizar o programa **Xeoxebra** para estudar os movementos no plano. Estudaremos as translacións e a simetría axial.

Actividades resoltas

Translación

Utiliza Xeoxebra para estudar vectores e translacións.

- Nun arquivo de *Xeoxebra* **Visualiza os** eixes, a cuadrícula e a ventá alxébrica.
- Coa ferramenta **Novo Punto** define a orixe de coordenadas como *A e* o punto de coordenadas (6, 2) como *B. E* coa ferramenta **Vector entre dous puntos** determina o vector *u* de orixe *A* e extremo *B* que terá coordenadas (6, 2).



- Define con **Novo Punto** *C* (–4, 1), *D* (–1, 2) e *E* (–3, 3) e con **Polígono** debuxa o triángulo que ten por vértices estes puntos.
  - Observa que os puntos que debuxaches aparecen na ventá alxébrica como obxectos libres e o triángulo como obxecto dependente.
- Utiliza a ferramenta **Trasladar obxecto acorde a vector** para trasladar o triángulo *CDE* segundo o vector *u*, obtense o triángulo *C'D'E'*.

57. Que tipo de cuadriláteros son os polígonos *ACC'B, ADD'B e AEE'B*?

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

58. Comproba na ventá alxébrica que:

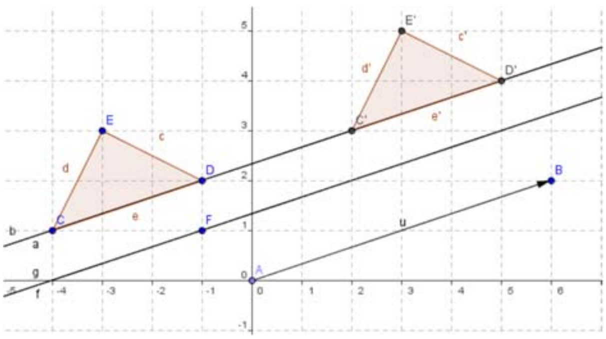
a) As coordenadas dos puntos *C', D' e E'* obtéñense respectivamente ao sumar as coordenadas dos puntos *C, D, e E* as coordenadas do vector *u.*

b) A lonxitude de cada lado do triángulo é a mesma que a do seu trasladado e as áreas dos triángulo *CDE* e *C'D'E'* coinciden.

- Debuxa con **Recta que pasa por 2 puntos**, a recta *a* que pasa polos puntos *C* e *D* e comproba, coa ecuación da recta, que *C'* e *D'* están na mesma recta.
- Traslada agora a recta *a* segundo o vector *u*, aparece, denominada *b*, a mesma recta.

Que propiedade ten a recta a para que permaneza invariante mediante a translación? Unha conxectura é que a recta a é paralela ao vector u.

- Para comprobar a conxectura define un **Novo Punto** *F* (-1, 1) e con **Recta paralela** debuxa unha recta *f* que pase por *F* e paralela ao vector *u*.



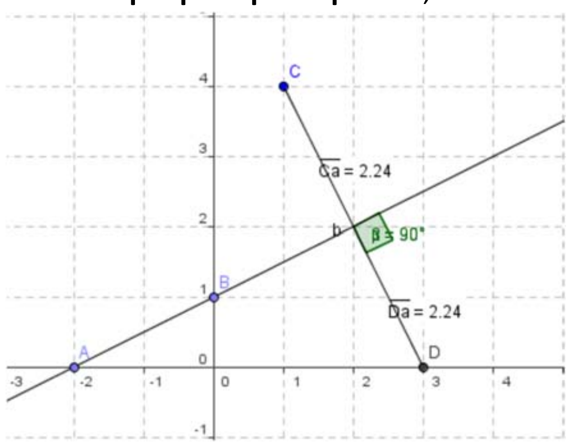
- Traslada a recta *f* segundo o vector *u* e verás que aparece a recta *g* que coincide con ela. Debuxa outras rectas paralelas ao vector *u* e comproba que a translación as deixa invariantes.
- Move co punteiro o punto *B*, para que o vector *u* teña distinta dirección e observa como a recta *a* xa non ten a mesma dirección que o vector *u* e a súa trasladada, a recta *b*, é distinta e paralela a ela, porén a recta *f* ten a mesma dirección que o vector *u* e a súa trasladada *g* coincide con ela.

59. Investiga se algún punto do plano permanece invariante mediante translacións segundo diferentes vectores.

Simetría axial

Utiliza Xeoxebra para estudar as propiedades da simetría axial.

- Abre unha nova ventá de *Xeoxebra* e visualiza os eixes, a cuadrícula e a ventá alxébrica.
- Coa ferramenta **Novo Punto** define *A* (-2, 0) e *B* (0, 1) e con **Recta que pasa por 2 puntos**, debuxa a recta *a* que pasa por A e *B*, que será o eixe de simetría.



- Determina o punto *C* (1, 4) e coa ferramenta **Reflicte obxecto en recta**, o seu simétrico con respecto á recta *a*, que é o punto *D* (3, 0).
- Coa ferramenta **Distancia** comproba que a distancia do punto *C* á recta *a* coincide coa do punto *D* a esta recta.
- Debuxa con **Segmento entre dous puntos** o que une os puntos *C* e *D*.
- Coa ferramenta **Ángulo** calcula a medida do ángulo que forman o segmento *CD* e a recta *a* para verificar que son perpendiculares.

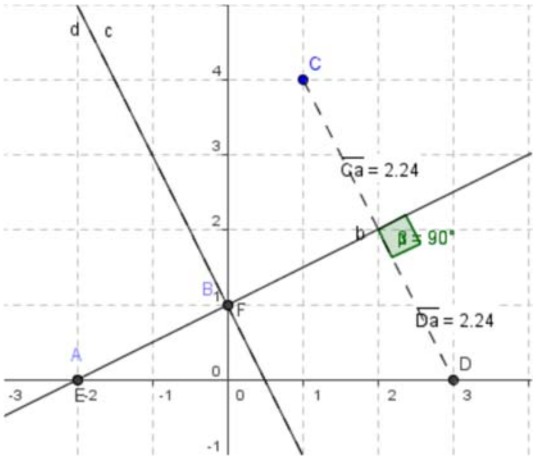
Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

As seguintes propiedades, que acabas de comprobar, caracterizan a simetría axial:

1ª: as distancias dun punto e do seu simétrico ao eixe de simetría coinciden.

2ª: o segmento que une un punto e o seu simétrico é perpendicular ao eixe de simetría.

- Coa ferramenta **Reflicte obxecto en recta** calcula o simétrico dos puntos *A* e *B* con respecto ao eixe *a* e comproba que *A* e o seu simétrico de *E* coinciden o mesmo que *B* e *F*. Proba con outros puntos da recta *a* para verificar que todos os puntos do eixe resultan invariantes mediante unha simetría axial con respecto a este eixe. Verifica, tamén, que o eixe, a recta *a*, e a súa simétrica a recta *b* coinciden.
- Utiliza **Recta perpendicular** para trazar a recta *c*, perpendicular ao eixe *a* que pasa polo punto *B*.
- Calcula a recta simétrica da recta *c* con respecto ao eixe *a*, obtense a recta *d* que coincide con *c*.



- Mellora o aspecto da construción debuxando o segmento CD e as rectas *c* e *d* con trazo descontinuo. Fai clic co botón dereito do rato sobre o elemento ou a súa ecuación e en **Propiedades**, **Estilo**, elixe un trazo descontinuo.

60. Cales son os puntos invariantes dunha simetría axial? E as rectas invariantes?

Actividades propostas

61. Utiliza a ferramenta **Rota obxecto en torno a un punto, o ángulo indicado** para estudar os xiros no plano. Define un punto *O* como centro de xiro, por exemplo, o centro de coordenadas. Define tres puntos para determinar con **Ángulo** un de 45°.

a) Debuxa rectas e polígonos e observa como se transforman mediante este xiro.

b) Investiga se ao realizar un xiro existen puntos e/ou rectas que permanecen invariantes.

62. Utiliza a ferramenta **Reflicte obxecto por punto** para estudar a simetría central. Define un punto *O* como centro de simetría, por exemplo, o centro de coordenadas.

a) Debuxa rectas e polígonos e observa como se transforman por unha simetría central.

b) Comproba que unha simetría central equivale a un xiro de 180°.

c) Investiga se nunha simetría central hai puntos e/ou rectas que permanecen invariantes.

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

4.6. Isometrías no espazo

No espazo estudamos as translacións, os xiros, as simetrías centrais e as simetrías (especulares). A simetría central é un movemento novo diferente dos xiros.

No espazo, translacións e xiros son isometrías directas, e as simetrías especulares e as simetrías centrais son isometrías inversas.

Non estudamos a súa composición, pero non nos custaría nada ver que a composición de dúas translacións é outra translación, de vector a suma dos vectores de translación. A composición de dous xiros do mesmo eixe é outro xiro do mesmo eixe e de ángulo a suma dos ángulos. A composición de dúas simetrías de planos paralelos é unha translación, e a composición de dúas simetrías de planos secantes é un xiro de eixe, a recta de intersección dos planos. A composición de dúas simetrías centrais do mesmo centro é a identidade. O comportamento destas composicións é similar ao que ocorre no plano.

Máis complicado é estudar no espazo a composición de xiros de distinto eixe, xiros con simetrías, simetrías con translacións e translacións con xiros no espazo. Igual que no plano apareceron novas isometrías, a simetría con deslizamento, agora tamén nos aparecen novas isometrías: simetría rotativa, simetría con deslizamento…

Puntos invariantes: a translación non deixa **ningún** punto invariante. A **simetría central** deixa **un** punto invariante, o centro. Os **xiros** deixan unha **recta**, o eixe de xiro. A **simetría** especular deixa un **plano** de puntos invariantes, o plano de simetría. E se unha isometría no espazo deixa catro puntos invariantes non coplanarios, é a identidade.

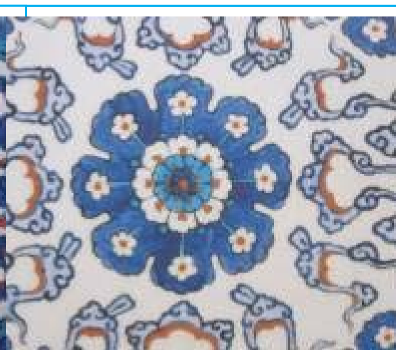
5. MOSAICOS, FRISOS E ROSETÓNS

Ao pasear por unha cidade ou polo campo podes ver montóns de transformacións xeométricas: verás simetrías, xiros e translacións por todos lados, formando mosaicos, frisos ou rosetóns; ou ben nas formas das flores.

5.1. Mosaicos

63. Mira este azulexo dun mosaico de Istambul. A cela unidade é cada un dos azulexos coa que se constrúe todo o mosaico mediante translacións. Indica os vectores de translación. Pero podes reducir o motivo mínimo. Utilizando xiros? Utilizando simetrías? Mira a ampliación: Comproba que podes utilizar como motivo mínimo a oitava parte do azulexo.

Realiza a mesma observación cos outros dous azulexos de Istambul seguintes:



64. **Análise de mosaicos da *Alhambra***: Observa o mosaico da marxe. Imaxina que é infinito, que completa todo o plano. Podes tomar como motivo mínimo un par de folliñas. Para pasar dun par de folliñas ao outro par adxacente que transformación utilizaches? É unha simetría? É un xiro? Hai centros de xiro de 60°? E de 180°? E de 30°?

Utiliza unha trama de triángulos, ou debuxa unha no teu caderno, para deseñar un mosaico parecido a este. Marca na trama os centros de xiros de 60°, de 180° e de 30°. Debuxa un motivo mínimo sinxeliño, por exemplo unha poligonal ou unha folla, e móveo usando esas transformacións.

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

65. Analiza a animación de xeración dun mosaico mediante xiros e translacións:
http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/185487_am_1_Alhambra_3.swf

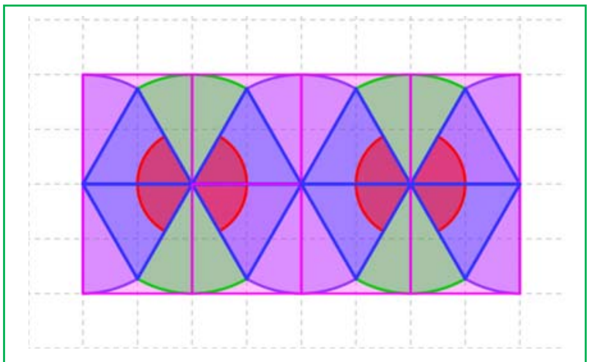
Observa como primeiro debuxa unha trama de cadrados, debuxa un motivo mínimo formado por dous segmentos, logo aplícalle isometrías a ese motivo: xiros de 90°, cos que debuxa a estrela, que por simetría completa a cela unidade á que por último traslada por todo o mosaico.

66. Tamén podes ver na seguinte animación:
http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/195377_am_1Alhambra2.swf

como se realiza un estudo do **mosaico** da marxe, buscando a cela unidade, o motivo mínimo e estudando os seus xiros (de 90° e 180°) e os seus eixes de simetría.
Utiliza unha trama de cadrados, ou debuxa unha no teu caderno, para deseñar un mosaico parecido a este. Marca na trama os centros de xiros de 90° e de 180°. Marca os eixes de simetría. Debuxa un motivo mínimo sinxeliño, por exemplo unha poligonal, e móveo usando esas transformacións. Completa primeiro a cela unidade, e logo trasládaa.

5.2. Frisos

As puntillas, as grecas dos bordados, as teas estampadas, as reixas... utilizan moi a miúdo as translacións nos seus deseños. Son os frisos.



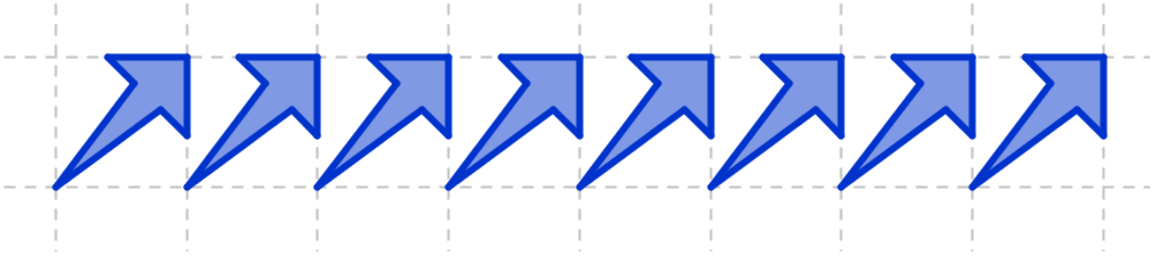
Observa o friso da marxe. Como todos os frisos obtense trasladando un motivo. Pero poden ter outras isometrías ademais da translación. A combinación de translación, simetrías e xiros permite obter sete tipos de frisos diferentes.

67. Formamos frisos utilizando as letras do alfabeto. Todos eles fórmanse por translación. Pero en ocasións hai outras isometrías. A) En cales hai unha simetría de eixe horizontal? B) En cales hai xiros de 180°. C) En cales hai simetrías de eixe vertical? D) Hai simetrías con deslizamento? E) Sinala todas as familias de simetrías respecto a un eixe, de xiros e de translacións polas cales un punto do friso se transforma noutro punto do mesmo (supoñendo que se prolongue ata o infinito).

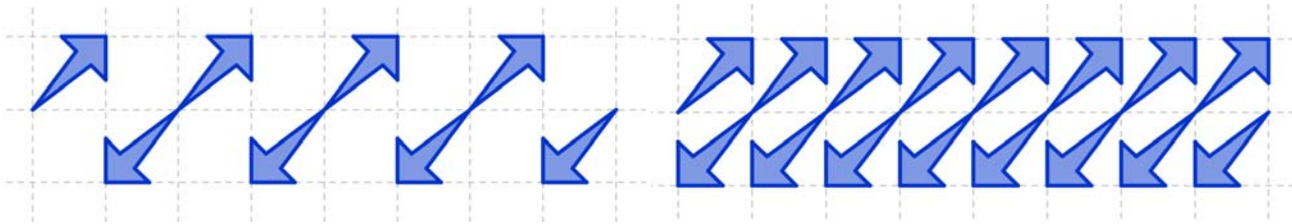
L1. LLLLL, L2. NNNNN, L3. VVVVV, L4. CCCCC, L5. HHHHH, L6. pbpbpb, L7. Pqdbpqdbp

68. Sae á rúa, ou na túa casa, e busca frisos. Fotografa reixas, mira puntillas e grecas… e fai un estudo dos diferentes frisos que encontres. Debuxa no teu caderno o seu deseño e intenta clasificalos segundo o esquema das letras do problema anterior, segundo as transformacións que utilicen. Para iso faite as seguintes preguntas: 1) Ten xiros? Se a resposta é NON, entón: 2) Ten simetría horizontal? Se a resposta é SI, é un L4, que como o friso formado pola letra C ou a letra D, non ten xiros e si simetría de eixe horizontal. Se a resposta é NON, entón: 3) Ten simetría vertical? Se a resposta é SI, é un L3, como o friso formado pola letra V ou a letra A, que non ten nin xiros, nin simetría horizontal e si simetría vertical. Se a resposta é NON, entón: 4) Ten simetría con deslizamento? Se o ten é un L6, e se non é un L1. Pero se ten xiros pode ter tamén simetría horizontal e é un L5, ou ter simetría con deslizamento e ser un L7, ou só ter o xiro e ser un L2, como o friso formado pola letra N ou a letra S.

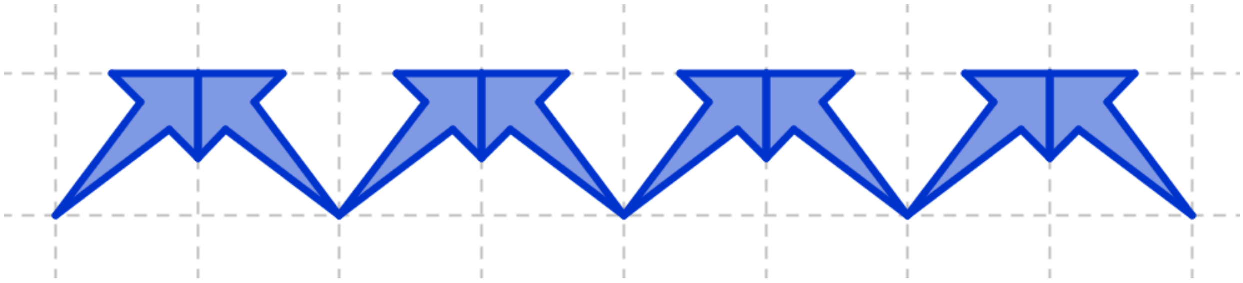
69. Nos frisos seguintes sinala todas as familias de simetrías respecto a un eixe, de xiros e de translacións polas cales un punto do friso se transforma noutro punto do mesmo (suposto que se prolongue ata o infinito).



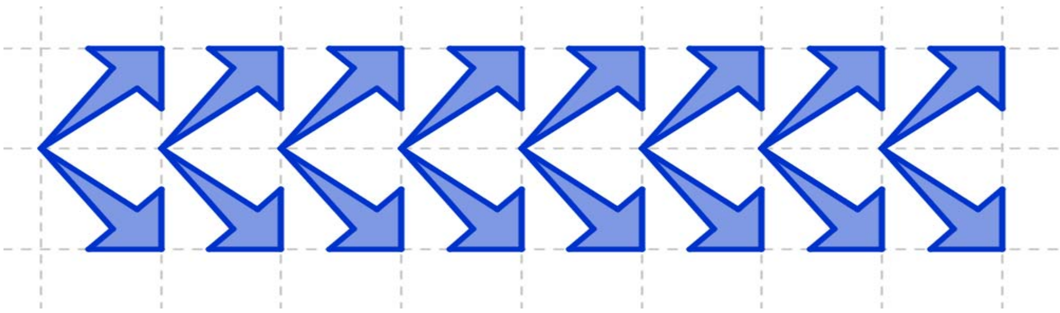
Friso L1: Só translación



Frisos L2: Xiros de 180º

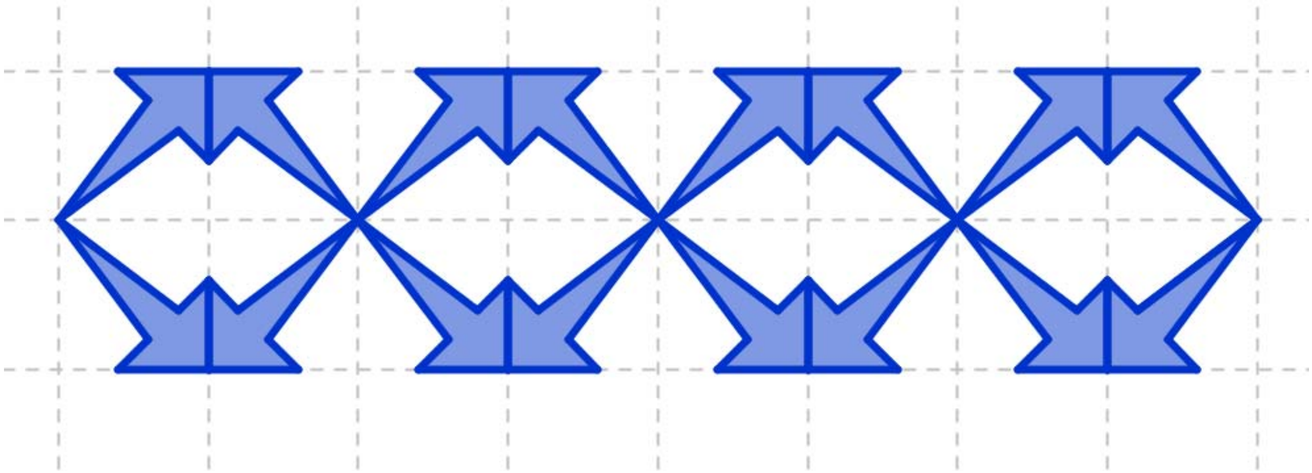


Friso L3: Simetría vertical

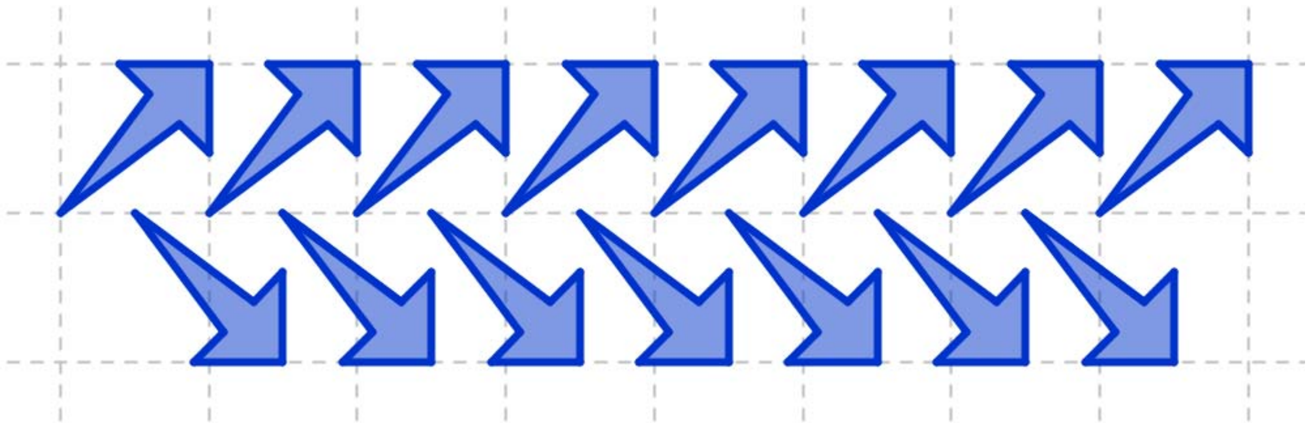


Friso L4: Simetría horizontal

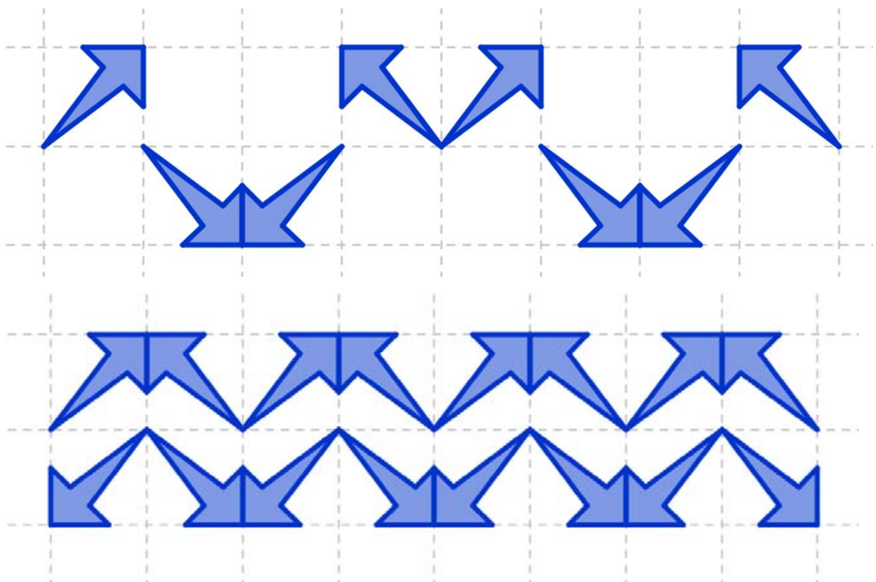
Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF



Friso L5: Xiros, simetrías verticais e simetrías horizontais



Friso L6: Simetría con deslizamento



Frisos L7: Simetría con deslizamento e simetría vertical.

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

5.3. Rosetóns

Os rosetóns das catedrais son espectaculares, pero tamén se poden ver en situacións máis cotiás, como no prato das rodas dos coches.

Denomínanse grupos de Leonardo os grupos de isometrías destes rosetóns. Poden ter simetrías ou unicamente xiros. Este rosetón dunha catedral ten eixes de simetría e divide a circunferencia en 12 anacos iguais. Dicimos que é un D12. Se non hai simetrías, só xiros dicimos que é un C5, ou un C6… segundo divida a circunferencia en 5 ou en 6… partes iguais.

Por exemplo, fixácheste nos pratos das rodas dos coches? En ocasións teñen deseños interesantes. Recollemos fotografías de algúns para que os estudes.

70. **Análises de prato das rodas:** Observa os seguintes pratos das rodas. Indica, para cada un deles, as seguintes cuestións:


1


2


3


4


5


6


7


8


9


10


11


12

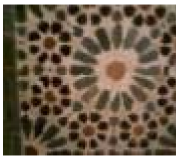
a) Ten simetría central?

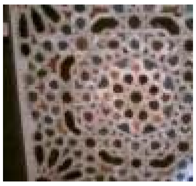
b) Ten eixes de simetría axial. Cantos?

c) Ten centro de xiro, cal é o menor ángulo de xiro que o deixa invariante?

d) Sae á rúa e fotografa ou debuxa os pratos das rodas que vexas e che parezan interesantes. Fai un estudo deles.

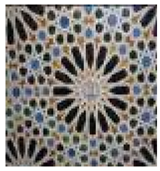
CURIOSIDADES. REVISTA

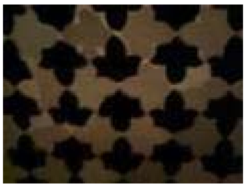


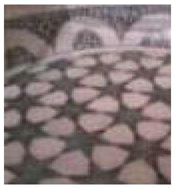


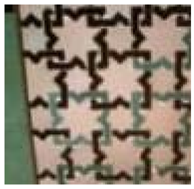
Mosaicos da *Alhambra*

Como sabes os árabes de España eran grandes matemáticos e nos mosaicos da *Alhambra* demostran, ademais do seu sentido artístico, os seus coñecementos de Matemáticas. Tense demostrado que, partindo dun motivo mínimo, e aplicándolle xiros, simetrías, translacións… só hai 17 formas distintas de completar o plano facendo un mosaico. É sorprendente que esas 17 formas xa se encontren nos mosaicos da *Alhambra*.









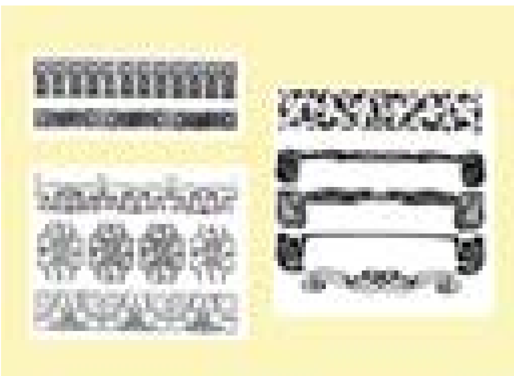
Podes ver a xeración dun destes mosaicos da Alhambra mediante simetrías:

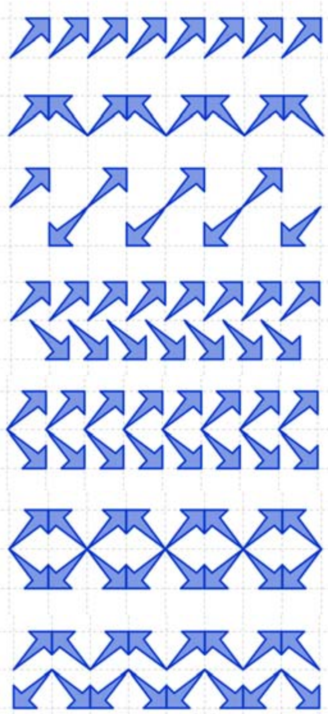
http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/195375_am_1.swf

Busca “mosaicos” en Internet, e saberás máis sobre a xeración de mosaicos.

Frisos

Nas cenefas, puntillas…, nas reixas, en… podemos ver deseños que se repiten ao longo dunha liña por translación. Tense demostrado que só hai 7 formas distintas de facer eses deseños utilizando, ademais das translacións, xiros e simetrías.





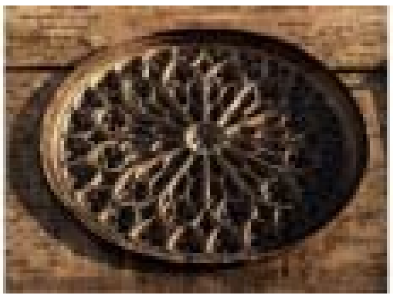
Podes ver a xeración dun friso:(http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/195415_am_1Friso.swf)

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

Cristais

Igual que no plano só existen 17 posibles deseños de mosaicos, no espazo existen 230 posibles tipos de deseños cristalográficos que compacten o espazo.

Para ser matemático hai que ser poeta. *SonyaKovalevkaya.*



Rosetóns

Xiros e simetrías pasando todos por un centro. Así se deseñan os rosetóns. Se só hai xiros chámanse C_n, sendo C_2. Se só ten un xiro de 180°, C_3. Se o ten de 120°… o prato das rodas de abaixo é, polo tanto, un C_5. E se teñen simetrías, chámanse D_n como os rosetóns que vemos que son D_{12} o D_{16}. Busca en Internet "grupos de Leonardo" e verás máis cousas sobre eles.

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

RESUMO

Concepto	Definición	*Exemplos*
Semellanza	Transformación xeométrica que conserva os ángulos e as distancias son proporcionais.	Unha fotocopia reducida
Translación	Vén determinada polo seu vector de translación. Son isometrías directas. A composición de dúas translacións é unha translación.	O trasladado do punto *P* (1, 2) pola translación de vector **v** = (4, 5) é *P'* (5, 7).
Xiro ou rotación no plano **Xiro no espazo**	Vén determinado polo centro de xiro e o ángulo de xiro. Vén determinado polo eixe de xiro e o ángulo	O xirado do punto *P* (1, 2) polo xiro de centro ou orixe e ángulo 90° é *P'* (2, –1)
Simetría axial **Simetría especular**	Coñécese polo seu eixe de simetría Coñécese polo seu plano de simetría	O simétrico do punto *P* (1, 2) pola simetría de eixe ou eixe de ordenadas é *P'* (–1, 2)
Isometrías	Son trasformacións xeométricas que conservan as distancias e os ángulos.	Translacións, xiros e simetrías
Composición de isometrías	A composición de dúas isometrías directas é unha isometría directa. A composición de dúas isometrías inversas é unha isometría directa. A composición dunha isometría directa cunha inversa é unha isometría inversa.	
Composición de isometrías no plano	A composición de dous xiros do mesmo centro é un xiro do mesmo centro. A composición de dúas simetrías é un xiro ou unha translación.	
Elementos invariantes no plano	A **translación** non deixa **ningún** punto invariante. O **xiro** deixa invariante **un** punto, o centro de xiro. A**simetría** deixa invariante unha **recta**, o eixe de simetría. A **identidade** deixa invariante **todo** o plano.	
Elementos invariantes no espazo	A **translación** non deixa **ningún** punto invariante. A **simetría central** deixa invariante **un** único punto, o centro de simetría. O **xiro** deixa invariante unha **recta**, o eixe de xiro. A **simetría** deixa invariante o **plano** de simetría A **identidade** deixa invariante **todo** o espazo.	

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

MATERIAIS PARA A AULA

Presentacións:

- Un bo resumo deste capítulo telo nesta presentación en PowerPoint:

  http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/Mosaicosyfrisos.pdf

- Algunhas presentacións de PowerPoint:
  - ➢ Sobre frisos e mosaicos

  http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/Movementosenelplano.pdf

  - ➢ Frisos e mosaicos na web: En Pensamento Matemático:

  http://innovacioneducativa.upm.es/sandbox/pensamiento/chip_geometrico/geometria_y_arte.pdf

- Traballos realizados por estudantes que poden servir de modelo para que, agora eles, realicen outros similares:

➢ Frisos e reixas unidos polas Matemáticas.
http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/rejas.pdf

Presentación confeccionada por dúas alumnas de 2º de Bacharelato do Instituto Salvador Victoria de Monreal do Campo de Teruel: Pilar Lorente Lorente e Paloma Plumed Martín. É un traballo interesante sobre frisos e reixas, aínda que, opinamos, que algún friso non está correctamente clasificado. Porén é un magnífico modelo para inspirar outros traballos de saír á rúa e fotografar ou debuxar as reixas (ou mosaicos, ou outros tipos de frisos) que se vaian vendo.

➢ PowerPoint que recolle traballos sobre mosaicos de diferentes alumnos da Universidade Politécnica de Madrid. Pode tamén servir de inspiración para propoñer ao alumnado que confeccione os seus propios mosaicos.
http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/Mosaico.pdf

Internet

- Buscando en internet encontramos, baixo o título dos 17 grupos de simetría no plano, a seguinte entrada: http://www.acorral.es/index3.htm. Son prácticas con Xeoxebra sobre mosaicos, frisos e celosías. Están deseñados, con deseños vistosos e orixinais mosaicos cos 17 grupos. Ao final hai unha táboa, a modo de resumo, que permite identificar e clasificar cada grupo de simetría. Tamén hai unha folla de traballo para o alumnado.
- Tamén en Internet, en http://www.xtal.iqfr.csic.es/Cristalografia e en particular en:
  http://www.xtal.iqfr.csic.es/Cristalografia/parte_03.html
  un traballo sobre os grupos de autosimetría dos cristais sumamente interesante e dun nivel moi alto. Existe 32 clases de redes cristalinas: triclínico, monoclínico, tetragonal, cúbico, hexagonal… Estuda que só 11 teñen centro de simetría. Ao analizar cales son compatibles coa translación obtéñense as redes (ou redes de Bravais) das que hai 11 redes. Combinando os 32 grupos cristalográficos coas 11 redes encontra que hai 230 formas posibles de repetir un obxecto finito (motivo mínimo) no espazo de dimensión tres.

Libros:

***La Alhambra*.**Traballo monográfico editado pola Asociación de Profesores de Matemáticas de Andalucía, en 1987, que recolle traballos de diversos autores, que permite aprender moito máis sobre transformacións xeométricas e os grupos de autosimetría no plano. Editado pola revista *Epsilón*.

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Translación

1. Debuxa no teu caderno un paralelogramo sobre un sistema de referencia e unha cuadrícula. Tes catro segmentos orientados. Determina as coordenadas dos vectores sobre estes segmentos. Cales teñen as mesmas coordenadas?

2. Temos os puntos *A* (0, 5), *B* (3, 6), *C* (4, -2) e *D* (7, 3). Calcula as coordenadas dos vectores ***AB***; ***AC***; ***AD***; ***BC***; ***BD***; ***CD***; ***DC***; ***BA***.

3. Determina o vector de translación que traslada o punto *A* (3, 7) ao punto *A’* (1, 5).

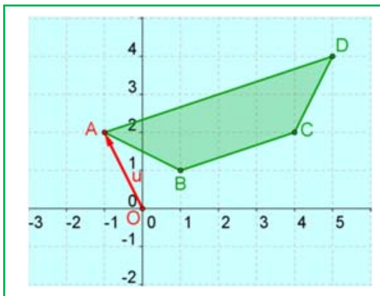
4. Pola translación de vector **u** = (2, 8) trasládase o punto *A* (9, 4) ao punto *A’*. Cales son as coordenadas de *A’*?

5. Pola translación de vector **u** = (–3, –1) trasládase o punto *A* ao punto *A’* (3, 3). Cales son as coordenadas de *A*?

6. Trasladamos a circunferencia de centro *C* (5, 2) e radio 3 unidades coa translación de vector **u** = (–5, –2). Determina o centro e o radio da circunferencia trasladada.

7. Debuxa no teu caderno uns eixes coordenados e neles un cadrado de lado 2 unidades ao que chamas *C*, aplícaslle unha translación segundo o vector ***u*** = (4, 1) e chamas *C*' ao seu trasladado. Agora aplicas a *C’* unha translación segundo o vector ***v*** = (–2, 4). A isometría que transforma *C* en *C*'', é unha translación? Escribe as coordenadas do seu vector. Mediante esa translación, en que punto se transforma a orixe de coordenadas?

8. O vértice inferior esquerdo dun cadrado é A (3, 1) e o vértice superior esquerdo é B (1, 3). Aplícaslle unha translación de vector ***u*** = (–2, 4), cales son as coordenadas dos catro vértices do cadrado transformado?



9. Debuxa a imaxe que resulta de aplicar ao trapecio da figura a translación de vector ***OA*** = (–1, 2). Determina as coordenadas dos puntos transformados de *A* (–1, 2), *B* (1, 1), *C* (4, 2) e *D* (5, 4) por esta translación.

10. Aplica a translación de vector ***u*** = (–3, 4) ao triángulo *ABC* de vértices *A* (3, 1), *B* (4, 4), *C* (6, 5), e calcula as coordenadas do triángulo transformado.

11. Debuxa no teu caderno un círculo de centro a orixe e radio 2 unidades.

    a) Trasládao coa translación de vector **u** = (3, 0).

    b) Trasládao despois mediante a translación de vector **v** = (0, 4).

    c) Indica as coordenadas do centro do segundo círculo trasladado.

    d) Indica as coordenadas do trasladado do punto (0, 2) ao aplicarlle cada unha das dúas translacións.

12. Trasladamos o triángulo *ABC* de vértices *A* (6, 1), *B* (–3, 4) e *C* (0, 8), mediante a translación de vector **u** = (7, 1), e logo mediante a translación de vector **v** = (2, 8). Determina as coordenadas do triángulo transformado analítica e graficamente.

13. A composición de dúas translacións ten por vector (5, 9). Se unha delas é a translación de vector **u** = (7, 3), que compoñentes ten o outro vector de translación?

14. a) Debuxa no teu caderno un triángulo *ABC* e trasládao 5 cm á dereita. Denomina *A'B'C'* ao triángulo obtido.

b) Traslada *A'B'C'* agora 4 cm cara arriba e denomina *A''B''C''* ao novo triángulo.

c) Debuxa o vector que permite pasar directamente do triángulo *ABC* ao *A''B''C''* e mide a súa lonxitude. Cales son as súas coordenadas?

15. Determina o vector de translación da translación inversa á de vector ***u*** = (–2, 5).

16. a) Debuxa no teu caderno unha figura, e repite o debuxo trasladando a figura 4 veces coa mesma translación. Ao facelo, debuxarás un friso.

b) Un friso confeccionado con letras L é: L LLLL. Debuxa un friso confeccionado con letras J. Outro confeccionado con letras M. Ademais de translación, ten simetrías?

c) Busca un friso. Mira as reixas da túa rúa, un bordado ou unha puntilla, as grecas duns azulexos… e debuxa o seu deseño no teu caderno.

17. Mediante unha translación no espazo, en que se transforma un plano? E unha esfera? E un cono? E dous planos paralelos? E dous planos ortogonais? Analiza os resultados.

Xiros

18. Debuxa no teu caderno o punto *A* (5, 4). Indica as coordenadas do punto *A'* que se obtén ao xirar 180° e con centro a orixe o punto *A*. Indica as coordenadas do punto *A''* obtido ao xirar *A'* 90° co mesmo centro de xiro.

19. Debuxa unha figura no teu caderno, cálcaa, recórtaa e pégaa inclinada ao lado da inicial. As dúas figuras, teñen todas as lonxitudes iguais?, e os seus ángulos? Determina, con compás e transportador, o centro e o ángulo de xiro.

20. Debuxa no teu caderno unha letra F e a letra F xirada 30° con centro de xiro o seu punto máis inferior.

21. Debuxa no teu caderno un triángulo rectángulo isósceles e con centro no vértice de un dos ángulos agudos aplícalle un xiro de 45° en sentido positivo. Logo aplícalle outro xiro de 45°, e así sucesivamente ata chegar ao triángulo inicial. Que xiros estiveches facendo?

22. Debuxa no teu caderno un círculo de centro *O*, dous diámetros perpendiculares *AB* e *CD* e unha corda *CB*. Sobre o mesmo debuxo traza as figuras obtidas facendo xirar a figura formada polos dous diámetros e a corda, con xiros de centro *O* e ángulos 45°, 90°, 135°, 180°, 225°, 270° e 315°. Terás feito a composición de xiros de 45° varias veces.

23. A letra H ten centro de simetría? Indica tres obxectos cotiáns que teñan simetría central.

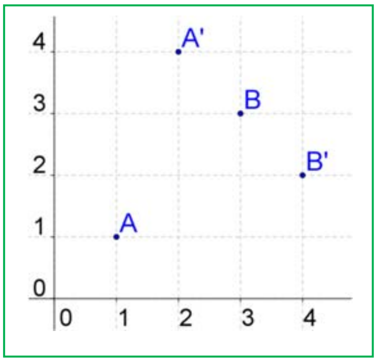
24. Sobre uns eixes cartesianos representa os puntos *A* (2, 6), *B* (–2, 5), *C* (5, 3) e os seus simétricos respecto á orixe *A'*, *B'* e *C'*. Que coordenadas teñen *A'*, *B'* e *C'*?

25. Debuxa no teu caderno o triángulo de vértices *A* (3, 7), *B* (5, –5) e *C* (7, 2). Debuxa o triángulo que se obtén ao xiralo con centro no punto *D* (8, 8) un ángulo de 180°. É unha simetría central. Cales son as coordenadas dos vértices *A'*, *B'* e *C'* do novo triángulo?

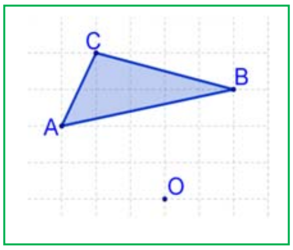
26. Debuxa nun sistema de referencia un punto P e o seu simétrico P' respecto da orixe. Se as coordenadas de P son (x, y), cales son as de P'?

27. Dado o triángulo $A(3, -4)$, B $(5, 6)$, C $(-4, 5)$, calcula as coordenadas dos vértices do triángulo simétrico respecto da orixe.

28. Debuxa un triángulo equilátero ABC e con centro no vértice A aplícalle un xiro de ángulo 60°. O triángulo dado e o transformado, que figura forman? Volve aplicar ao triángulo transformado o mesmo xiro de centro A, que xiros estiveches facendo? Cantos xiros debes aplicar ao triángulo inicial para que volva ocupar a posición inicial?



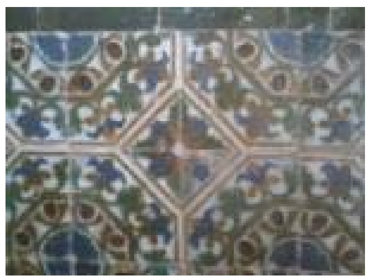
29. Debuxa no teu caderno os catro puntos da figura. Determina, con regra, compás e transportador, o centro e o ángulo de xiro sabendo que os puntos A e B se transformaron mediante un xiro en A' e B'.



30. Debuxa a imaxe que resulta de aplicar ao triángulo da figura o xiro de centro O que transforma o punto A no punto B.

31. Utiliza un transportador de ángulos, regra e compás, para xirar unha recta 60° respecto a un punto O exterior a ela (é suficiente xirar dos puntos da recta). Mide os ángulos que forman as dúas rectas, a inicial e a xirada. Observas algunha regularidade? Investiga un método para xirar unha recta transformando un só punto. Que punto debes elixir e porque?

32. **Xogo para dous xogadores**: Forma sobre a mesa un polígono regular utilizando moedas (ou fichas ou bólas de papel) como vértices. Alternativamente cada xogador retira ou unha ou dúas moedas adxacentes. Gaña quen retire a última moeda. (***Axuda***: é un xogo de estratexia gañadora que podes descubrir utilizando a simetría central).



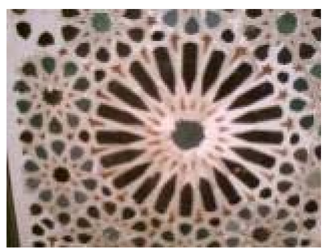
33. No deseño deste mosaico utilizáronse xiros no plano. Non o vemos completo, pero podemos imaxinar que fora infinito. Indica os centros de xiro que vexas. No centro da figura hai un centro de xiro clarísimo, de que ángulo? Hai xiros de 45°? Cales son os seus centros de xiro? Hai centros de simetría? Indícaos.

34. Para cada un dos seguintes polígonos indica o centro de xiro e o mínimo ángulo de xiro que deixan invariantes a cada un deles:

a) Pentágono regular	b) Hexágono regular	c) Decágono regular
d) Triángulo equilátero	e) Rectángulo	f) Cadrado
g) Rombo	h) Paralelepípedo	i) Octógono regular

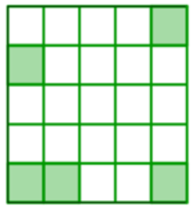
35. Na simetría central de centro (2, 3) vimos que o simétrico do punto A (8, 1) é o punto A' (–4, 5). Calcula os simétricos dos puntos B (12, 7), C (9, 10), D (5, 8) e E(7, 6).

36. Indica se o mosaico da Alhambra da marxe ten centro de xiro, e determina cal é o menor ángulo de xiro que fai que o mosaico se superpoña (sen ter en conta os cambios de cor). Hai centros de simetría?



Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

37. Con axuda de papel cuadriculado transforma mediante unha simetría central, unha recta, unha circunferencia, un segmento, un triángulo, dúas rectas paralelas e dúas rectas perpendiculares. En que se transforman? Analiza os resultados.



38. Que número mínimo de cadrados é necesario pintar de verde para que o cadrado grande teña un centro de simetría?

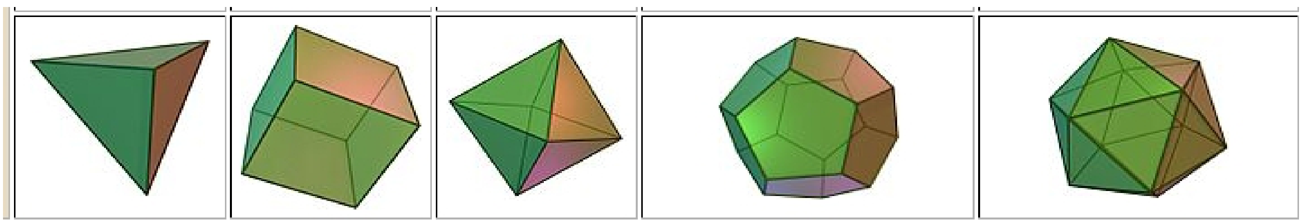
39. Xiramos o punto A (3, 5) e obtemos o punto A' (7, –2). Determina o centro de xiro e o ángulo utilizando regra, compás e transportador de ángulos.

40. Cales dos polígonos estrelados da figura da marxe teñen centro de simetría? Indica o centro de xiro e o mínimo ángulo de xiro que deixa invariantes a cada un deles.

41. Determina tres obxectos cotiáns que teñan algún eixe de xiro.

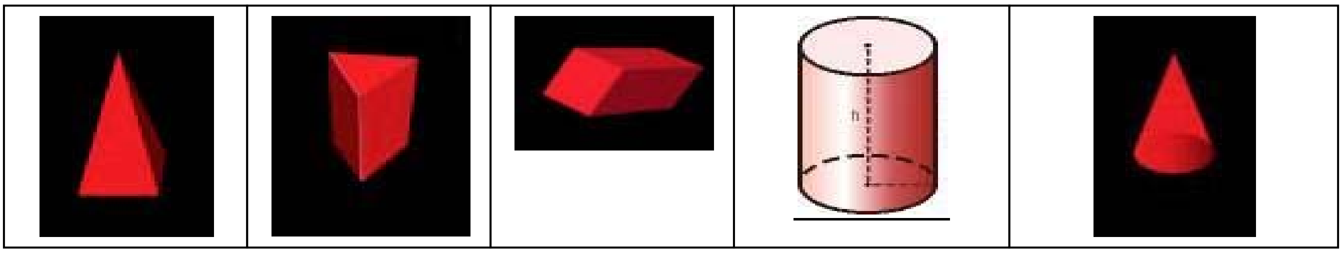
42. Observa esta torre mudéxar de Teruel. Está deseñada utilizando xiros no espazo. Cal é o seu eixe de xiro? E o ángulo de xiro?

43. Pensa nos cinco poliedros regulares. Uns teñen simetría central no espazo, outros non. Cales a teñen?



TETRAEDRO HEXAEDRO OCTAEDRO DODECAEDRO ICOSAEDRO

Pensa agora nos seguintes corpos xeométricos: unha pirámide cuadrangular regular, un prisma triangular regular, un prisma romboidal oblicuo, un cilindro e un cono. Cales poden formarse mediante xiros no espazo? Cal é o seu eixe de xiro? Cales teñen simetría central e cales non?



Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

Simetrías

44. Debuxa no teu caderno un sistema de referencia e unha letra B. Debuxa a letra simétrica de B respecto do eixe de abscisas e respecto do eixe de ordenadas.

45. Clasifica as letras maiúsculas do alfabeto, a) nas que son simétricas respecto dun eixe de simetría horizontal e un eixe de simetría vertical. b) nas que só son simétricas respecto dun eixe de simetría vertical, c) nas que só o son respecto do eixe de simetría horizontal, e d) nas que non teñen ningún eixe de simetría. e) Comproba que as letras que teñen dous eixes de simetría teñen centro de simetría. A razón xa a sabes: a composición de dúas simetrías de eixes secantes é un xiro.

46. Cales das seguintes sucesións de letras teñen un único eixe de simetría? Cales teñen dous eixes? Cales ningún? Cales teñen centro de simetría?

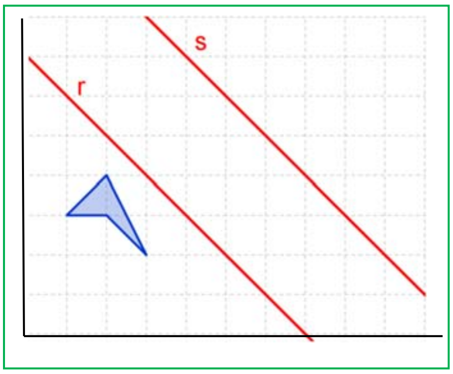
a) ONO   b) NON   c) DODO   d) OIO   e) HEMO   f) HOOH

47. Indica os eixes de simetría das seguintes figuras:

a) Cadrado.   b) Triángulo equilátero.   c) Trapecio isósceles.   d) Hexágono.

e) Circunferencia.   f) Rectángulo.   g) Rombo.   h) Pentágono.

48. Considera que os vértices do cuadrilátero da figura teñen de coordenadas: (1, 3), (2, 3), (3, 2) e (2, 4). Aplícalle dúas simetrías axiais de eixes paralelos, a primeira respecto ao eixe *r* e a segunda respecto ao eixe *s*.

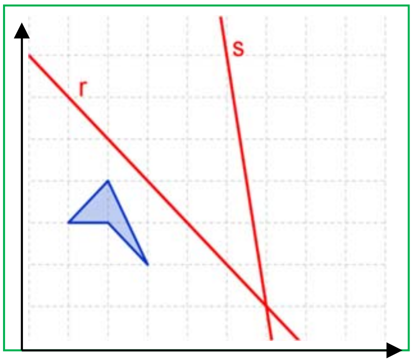


a) Indica as coordenadas dos vértices das figuras transformadas por esta composición de simetrías.

Se chamamos *C* ao cuadrilátero inicial, *C'* ao seu simétrico respecto ao eixe *r* e *C''* ao simétrico de *C'* respecto ao eixe *s*:

b) Que isometría nos permite transformar directamente *C* en *C''*. *c)* Que elementos a definen? d) Que ocorre se aplicamos as dúas simetrías en distinta orde, primeiro respecto ao eixe *s* e despois respecto ao eixe *r*? Cales son agora as coordenadas dos vértices da figura *C'''* transformada?

49. Considera que os vértices do cuadrilátero da figura teñen de coordenadas: (1, 3), (2, 3), (3, 2) e (2, 4). Aplícalle dúas simetrías axiais de eixes secantes, a primeira respecto ao eixe *r* e a segunda respecto ao eixe *s*.



a) Indica as coordenadas dos vértices das figuras transformadas pola composición de simetrías.

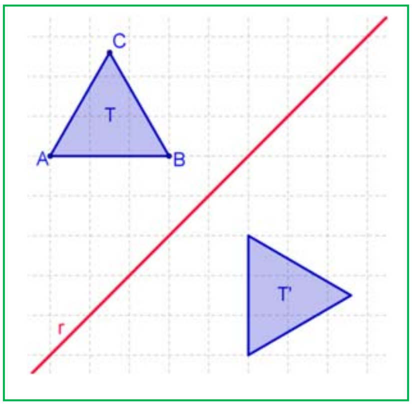
b) Se chamamos *C* ao polígono inicial, *C'* ao simétrico respecto ao eixe *r* e *C''* ao simétrico de *C'* respecto ao eixe *s*: Que isometría nos permite transformar directamente *C* en *C''*? Que elementos a definen?

c) Que ocorre se aplicamos as dúas simetrías en distinta orde, primeiro respecto ao eixe *s* e despois respecto ao eixe *r*? Que isometría temos agora? Que elementos a definen?

d) Indica as coordenadas dos vértices da figura transformada se primeiro aplicamos a simetría de eixe *s e* logo a de eixe *r*.

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

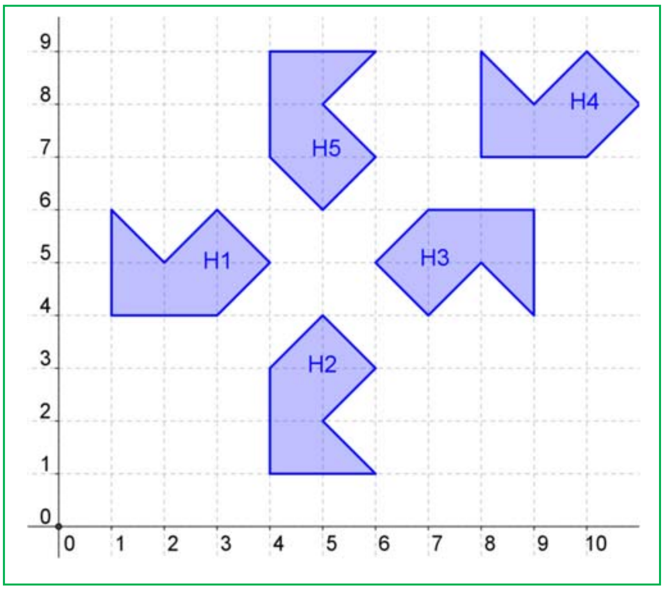
50. Debuxa nun papel o contorno dunha figura irregular, en polo menos cinco posicións. (Se no se che ocorre ningunha figura, debuxa unha letra G). a) Son iguais estas figuras? Explica o teu razoamento. b) Como podes pasar dunha figura á outra? c) Colorea coa mesma cor todas as figuras que podes acadar desde a posición inicial, desprazando a figura sen levantala. Utiliza outra cor para as restantes. Pódese pasar sempre dunha figura á outra da mesma cor, deslizando a figura sen darlle a volta? Cambian as dimensións da figura?



51. O triángulo equilátero T da figura transformouse no triángulo T' mediante unha simetría axial de eixe *r*. a) Copia o debuxo no teu caderno e nomea no debuxo *A'*, *B'* e *C'*, que son os transformados de *A, B e C* respectivamente. b) Encontra un xiro que transforme T en T', indicando o centro e o ángulo de xiro, cales son agora os transformados dos vértices *A, B e C*?

52. Libro de espellos: Utiliza un libro de espellos para obter simetrías. Podes construír un con dous rectángulos de metacrilato unidos con cinta de embalar. Mira polo libro de espellos un segmento, unha circunferencia, diferentes figuras…

Problemas



53. Indica os puntos invariantes e as rectas invariantes en cada un dos seguintes movementos: a) Unha translación segundo o vector (1, 3); b) Unha simetría axial respecto ao eixe de ordenadas; c) Unha simetría central respecto ao centro de coordenadas.

54. Na figura adxunta o hexágono 1, denominado H1, cambiou de posición mediante movementos. A) Indica o tipo de movemento: translación, xiro ou simetría que transforma H1 en cada un dos outros hexágonos. B) Determina, en cada caso, os elementos básicos que definen cada transformación indicando as coordenadas de cada un dos vértices de H1, que coordenadas ten en cada un dos transformados, e se é posible, xeneraliza.

55. Sabemos que as translacións non deixan ningún punto invariante, pero, a) deixa algunha recta invariante?, b) a simetría central deixa un punto invariante, o centro, pero, que rectas deixa invariantes unha simetría central no plano? E unha simetría central no espazo?; c) unha simetría axial deixa invariantes todos os puntos do seu eixe, que é unha recta invariante de puntos invariantes, pero que outras rectas invariantes deixa unha simetría axial? E que outros puntos?; d) unha simetría especular, no espazo, deixa un plano invariante de puntos invariantes, o plano de simetría, que outros planos deixa invariantes? Que outras rectas? Que outros puntos?

56. Copia no teu caderno e completa as seguintes táboas:

Táboa I: no plano	Puntos invariantes	Rectas invariantes	Rectas invariantes de puntos invariantes
Translación			
Simetría central			
Xiro			
Simetría axial			
Simetría con deslizamento			

Táboa II: no espazo	Puntos invariantes	Rectas invariantes	Planos invariantes
Translación			
Simetría central			
Xiro			
Simetría especular			
Simetría con deslizamento			

57. Debuxa o triángulo T de vértices $A(2, 1)$, $B(4, 2)$ e $C(1, 3)$

a) Aplica a T unha translación segundo o vector $\boldsymbol{u} = (-3, 2)$, chama T' ao seu transformado e indica as coordenadas dos seus vértices.

b) Debuxa o triángulo T'' que resulta de aplicar a T un xiro de 270° respecto á orixe de coordenadas e indica as coordenadas dos seus vértices.

58. Debuxa o cadrado *K* de vértices $A(2, 1)$, $B(4, 2)$ $C(1, 3)$ e $D(3, 4)$.

a) Aplica a *K* unha translación segundo o vector $\boldsymbol{u} = (-3, -1)$, chama *K*' ao seu transformado e indica as coordenadas dos seus vértices.

b) Debuxa o cadrado *C*'' que resulta de aplicar a *C* unha simetría central respecto ao punto (3, 0) e indica as coordenadas dos seus vértices.

Problemas de ampliación

59. Transforma a letra L mediante dúas isometrías consecutivas. Podes obter o resultado final mediante unha única isometría? Analiza as posibles situacións.

60. Prega unha tira de papel como un acordeón. Fai algúns cortes e desprégaa. Confeccionaches un friso. Sinala nel todas as isometrías. Ensaia outros deseños de frisos.

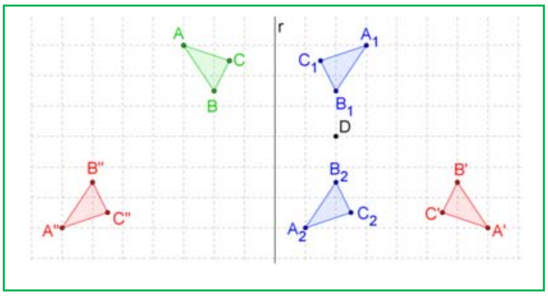
Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

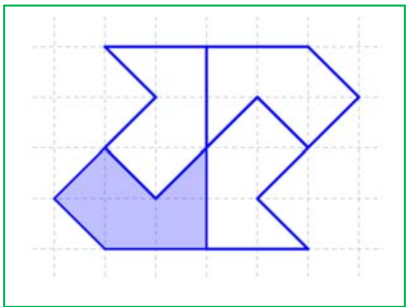
61. A composición de isometrías non é conmutativa. Observa a figura adxunta:

a) Determina a isometría que transforma o triángulo *ABC* en $A_1B_1C_1$ e a que transforma este en $A_2B_2C_2$

b) Indica a isometría que transforma o triángulo *ABC* en *A'B'C'* e a que transforma este en *A''B''C''*.

c) Que conclusión obtés?

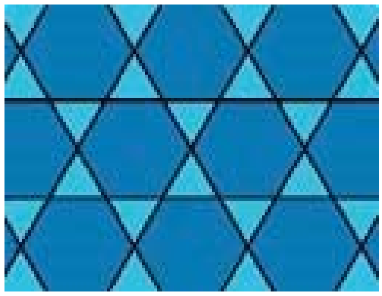




62. Indica as isometrías que hai que aplicar á figura coloreada en azul para obter a figura completa. Determina os elementos que definen cada isometría. Colorea de distinta cor cada un dos catro polígonos e constrúe un friso.

63. 1) A letra A ten un eixe de simetría vertical. 2) A letra H ten dous eixes de simetría, un vertical e o outro horizontal, ademais dun centro de simetría. 3) A letra Z ten centro de simetría, pero ningún eixe de simetría. 4) A letra E ten un eixe de simetría horizontal. 5) A letra F non ten centro de simetría nin ningún eixe de simetría. Clasifica as letras do **abecedario** nestes grupos, no primeiro grupo estarán as que teñen un eixe de simetría vertical, como a letra A; no segundo as que teñen dous eixes de simetría, un vertical e o outro horizontal, como a letra H; no terceiro as que só teñen centro de simetría como a letra Z, e no cuarto as que como a letra E teñen un eixe de simetría horizontal. Por último, nun quinto grupo as que non teñen ningún tipo de simetría como a letra F.

64. Análise dun mosaico: Debuxa no teu caderno unha trama de triángulos, nela un esquema do mosaico da marxe e sinala no teu debuxo todos os eixes de simetría, os centros de xiro e os vectores de translacións polos cales o transformado dun punto do mosaico (suposto que se prolonga ata o infinito) é tamén un punto do mosaico.



a) Hai xiros de 60°? Se os hai marca os centros destes xiros cun asterisco *.

b) Hai xiros de 180°? Se os hai marca os centros destes xiros cun círculo o.

c) Sinala os eixes de simetría que encontres cunha liña de puntos.

d) Debuxa á marxe os vectores de translación, horizontais e verticais, que haxa.

e) Deseña o teu propio mosaico que manteña os mesmos movementos facendo algo sinxelo (un arco, unha poligonal) que se vaia movendo.

65. Analiza estoutro mosaico. Indica as transformacións que temos que aplicar ao elemento mínimo do mosaico adxunto para deixalo invariante. Indica tamén os elementos que as caracterizan.

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

66. Na animación seguinte observa a forma de obter un mosaico.

http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/195375_am_1.swf

Tomou unha cela unidade de 4 cadradiños, seleccionou un motivo mínimo… Indica que simetrías utilizou, que xiros e que translacións.

67. Determina os eixes e centros de simetría das seguintes gráficas de funcións. Sinala cales son pares e cales impares. (Debuxa previamente a súa gráfica).

a) $y = x^2$ *b)* $y = x^3$ *c)* $y = x^4$ *d)* $y = x$

68. Un tetraedro regular ten 6 planos de simetría, debúxaos no teu caderno e indica a forma de determinalos.

69. Un octaedro ten 9 planos de simetría, debúxaos, 6 pasan polos puntos medios de arestas opostas, sabes caracterizar os outros 3? Intenta encontrar planos de simetría nun dodecaedro e nun icosaedro.

70. Un ser humano é máis o menos simétrico. Os mamíferos, paxaros e peixes tamén o son. Teñen un plano de simetría. A) E as estrelas de mar como a da figura, teñen un plano de simetría? B) Teñen máis? Cantos? C) Teñen un eixe de xiro? De qué ángulos? D) Teñen simetría central? E) Debuxa no teu caderno unha estrela de cinco puntas e indica os seus eixes de simetría e o seu centro de xiro. (É un grupo de Leonardo D_5).

71. Un prisma recto de base un rectángulo, ten simetría central? Ten planos de simetría? Cantos? Descríbeos. Ten eixes de xiro? Descríbeos. De que ángulos?

72. Unha pirámide regular de base un triángulo equilátero, ten simetría central? Ten planos de simetría? Cantos? Descríbeos. Ten eixes de xiro? Descríbeos. De que ángulos?

73. Describe as **isometrías** que deixan invariantes aos seguintes corpos xeométricos, analizando os seus elementos:

a) Esfera b) Cilindro recto c) Prisma regular de base cadrada

d) Cono e) Cilindro oblicuo f) Pirámide recta de base un triángulo equilátero

74. Recorta un triángulo isósceles obtusángulo. Colócao no libro de espellos de forma que dous lados queden apoiados na superficie dos espellos e o outro sobre a mesa. Move as páxinas do libro de forma que vexas distintas pirámides cuxa base son polígonos regulares. Isto permítenos estudar o xiro das pirámides, de que ángulo é? (Podes construír un libro de espellos con dous espellos pequenos ou dúas follas de metacrilato, pegados con cinta de embalar adhesiva).

75. Pensa nos poliedros regulares. Copia a seguinte táboa no teu caderno e complétaa:

POLIEDRO	Ten centro de simetría? SI/NON	Ten eixes de xiro? SI/NON	Cantos eixes de xiro ten? De que ángulos?	Ten planos de simetría? SI/NON	Cantos planos de simetría ten?
Tetraedro					
Cubo					
Octaedro					
Dodecaedro					
Icosaedro					

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

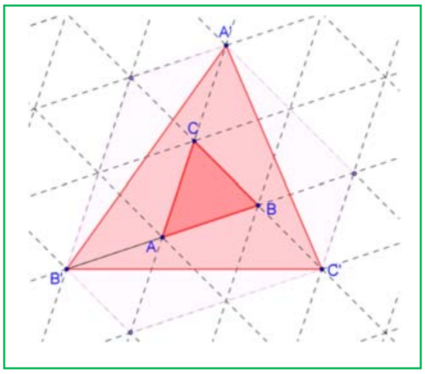
76. Contesta ás seguintes preguntas xustificando as respostas.

a) É posible que unha figura teña dous eixes de simetría paralelos?

b) A intersección de dous eixes de simetría, é sempre un centro de simetría?

c) Por que un espello cambia a dereita pola esquerda e non cambia o de arriba polo de abaixo?

d) É certo que dous círculos simétricos respecto a un plano son sempre cortes dunha esfera?

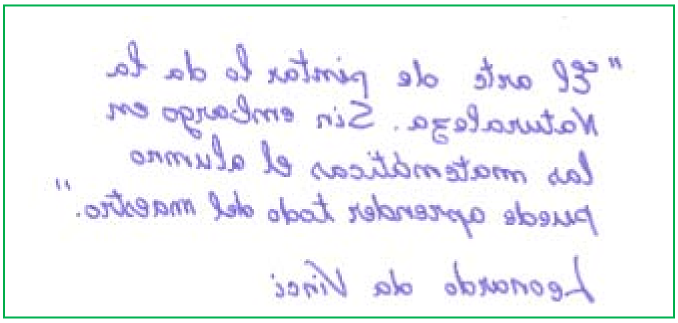


77. A partir dun triángulo calquera *ABC* construímos o triángulo *A'B'C'*, no que *A'* é o simétrico de *A* con respecto ao centro *C*, *B'* é o simétrico de *B* con respecto ao centro *A* e *C'* é o simétrico de *C* con respecto ao centro *B*. Utiliza a trama de triángulos para calcular a área do triángulo *A'B'C'* sabendo que o valor da área do triángulo *ABC é* 1 u^2.

78. Calidoscopios diédricos: Miraches algunha vez por un calidoscopio? Están formados por un tubo de cartón, dous espellos formando ángulo e anaquiños de plástico ou cristaliños que combinan as súas imaxes dando lugar a preciosas composicións cheas de simetrías. Fabrica un e estuda os xiros e simetrías que observes.

79. Simetrías pregando papel: a)Dobra unha folla de papel e recorta unha figura. Ao desdobrar obtés a figura simétrica. b) Dobra unha folla de papel mediante dúas dobras perpendiculares (Terás que facer coincidira dobra consigo mesma). Mantendo o papel dobrado recorta unha figura. Ao desdobrar, a figura obtida terá unha dobre simetría. c) Con outra folla de papel, volve dobrar mediante dúas dobras perpendiculares. Dobra de novo pola metade o ángulo recto obtido. Recorta os deseños que máis che gusten. Estás construíndo modelos de folerpa. Cantos eixes de simetría obtiveches? d) Intenta agora dobrar a folla de papel para obteres eixes de simetría que formen ángulos de 60° e de 30°. Utiliza a túa imaxinación para obteres novos deseños de folerpas.

80. A simetría na escritura de Leonardo Da Vinci: Sabías que se miras o escrito por Leonardo nun espello podes lelo con facilidade? É un bo exemplo de simetría especular. Le o seguinte texto de Leonardo.



81. Utiliza a propiedade da composición de dúas simetrías de eixes secantes para demostrar que un ángulo inscrito nunha circunferencia é a metade do central que abrangue o mesmo arco. *Axuda*: Traza a circunferencia, un ángulo inscrito e o seu central. Traza dúas rectas perpendiculares polo centro da circunferencia aos lados do ángulo inscrito.

82. Estuda as isometrías que deixan invariante a un triángulo equilátero. Nomea os seus vértices e os seus eixes de simetría. a) Aplica ao triángulo un xiro de 120° e logo unha simetría. Podes obter o mesmo resultado cunha única transformación? b) Repite o mesmo cun xiro de 240° e outra simetría. c) Comproba que sempre a composición dun xiro por unha simetría é outra simetría. d) Fai agora un xiro de 120° e outro de 240°, que obtés? e) E con dous xiros de 240°? f) Comproba que a composición de dous xiros do mesmo centro é sempre un xiro (ou a identidade).

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

83. Ao pasear pola cidade, mirar a aula, en todo o que nos rodea podemos ver como a Xeometría permite explicalo. Mira este mosaico. Busca un motivo mínimo, é dicir, un anaco de mosaico que che permite, mediante movementos, recompoñelo. No deseño deste mosaico, utilizáronse simetrías?

- Hai simetrías de eixe vertical?
- Hai simetrías de eixe horizontal?
- Hai outros eixes de simetría? Cales?
- Hai xiros de 90°?
- Hai xiros de 45°?
- Hai translacións?

84. Deseña no teu caderno un motivo mínimo (se non se che ocorre ningún, usa a letra L), e utiliza as mesmas simetrías, xiros e translacións que se usan neste mosaico para facer o teu propio deseño de mosaico.

Observa o teu deseño e responde ás seguintes preguntas:

- Se compós dúas simetrías de eixes paralelos, que movemento obtés? É outra simetría? É un xiro? É unha translación? Indica no teu deseño de mosaico en que ocasión compuxeches dúas simetrías de eixes paralelos e describe completamente o movemento que obtiveches.
- Se compós dúas simetrías de eixes secantes, que movemento obtés? É outra simetría? É un xiro? É unha translación? Indica no teu deseño en que ocasión compuxeches dúas simetrías de eixes secantes e describe completamente o movemento que obtiveches.

85. Mira estoutro mosaico. É o famoso mosaico nazarí dos ósos. Non imos ter en conta a cor. Para deseñar o óso, debuxa no teu caderno un cadrado. Mira a figura. Corta nos lados verticais un trapecio e colócao sobre os lados horizontais. Xa tes o óso. É simétrico? Ten un eixe de simetría vertical e outro horizontal, polo que poderiamos tomar como motivo mínimo a cuarta parte do óso.

- Para pasar dun óso de cor a un óso branco, que transformación se usou?
- Debuxa no teu caderno, en cor vermella, eixes de simetría verticais e en cor azul, eixes de simetría horizontais.
- Sinala, cun asterisco (*), centros de xiro de 90° e cun círculo, (o), centros de simetría.
- Utilizando o óso debuxa no teu caderno o mosaico completo.

86. Debuxa no teu caderno unha letra F maiúscula e traza tamén dúas rectas *m* e *n* que formen un ángulo de 30° e se corten nun punto *O*. Debuxa o seu transformado por:

a) Un xiro de centro o punto *O* e ángulo 60°.
b) A simetría de eixe *n*.
c) A simetría de eixe *m*.
d) A composición da simetría de eixe *n* coa de eixe *m*.
e) Compara o resultado obtido no apartado a) co do apartado d).Que observas?

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

AUTOAVALIACIÓN

1. Coa translación de vector **u** = (–3, 8) trasladamos o punto *P* (5, –4) ata o punto *P'* e as coordenadas de *P´* son:

a) (8, 4) b) (2, 4) c) (2, 12) d) (6, 3).

2. Ao trasladar *A* (–1, 8) ata *A'* (4, 6) utilízase o vector **u**:

a) **u** = (3, 2) b) **u** = (3, –2) c) **u** = (5, –2) d) **u** = (5, 14).

3. A transformación que leva o punto *A* (2, 0) no punto *A'* (0, 2) **non** pode ser:

a) Un xiro de centro a orixe e ángulo 90°.

b) Unha translación de vector **u** = (2, 2).

c) Un xiro de centro a orixe e ángulo 270°.

d) Unha simetría de eixe $y = x$.

4. A transformación identidade tamén se chama:

a) Simetría central b) Simetría axial c) Xiro de 180° d)Translación de vector nulo (0, 0)

5. Como debe ser un triángulo para ter máis de dous eixes de simetría?

a) rectángulo b) isósceles c) equilátero d) rectángulo isósceles.

6. A simetría central no plano é un xiro de:

a) 360° b) 180° c) 90° d)0°

7. No plano, a composición de dúas simetrías de eixes secantes sempre é:

a) unha translación b) un xiro c) outra simetría d) a simetría central.

8. As coordenadas do punto simétrico ao punto *A* (3, 7) respecto do eixe de ordenadas son:

a) *A'* (–3, 7) b) *A'* (3, –7) c) *A'* (–3, –7) d) *A'* (7, 3)

9. Indica cal das seguintes letras **non** ten simetría central:

a) O b) H c) S d) D

10. Sempre se obtén un xiro facendo sucesivamente:

a) Dous xiros de distinto centro.

b) Dúas simetrías de eixes secantes.

c) Un xiro e unha simetría.

d) Dúas simetrías de eixes paralelos.

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF