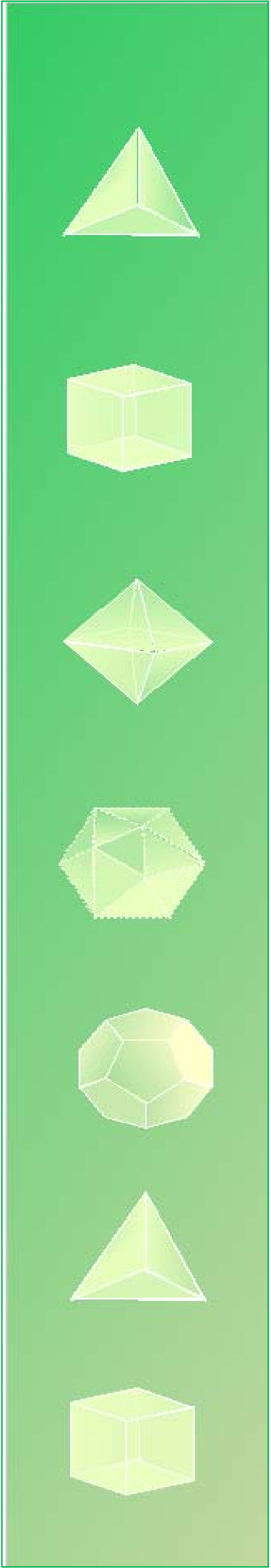


Matemáticas orientadas ás ensinanzas aplicadas

3º A de ESO
Capítulo 9:
Xeometría no espazo. Globo terráqueo

www.apuntesmareaverde.org.es

Autoras: Milagros Latasa Asso e Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos RodríguezIlustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

Índice

Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

Resumo

Moitas plantas distribúen as súas flores en forma esférica buscando un aproveitamento óptimo do espazo. O átomo de ferro dispón os seus electróns en forma de cubo, os sistemas de cristalización dos minerais adoptan formas poliédricas, os panais das abellas son prismas hexagonais. Estes son algúns exemplos da presenza de corpos xeométricos na natureza.

Movémonos no espazo, camiñamos sobre un plano, observamos a liña do horizonte, habitamos e movémonos habitualmente en poliedros. A información que percibimos por medio dos nosos sentidos interpretámola en termos xeométricos. Precisamos das fórmulas de áreas e volumes dos corpos xeométricos para calcular as medidas dos mobles que caben no noso salón ou para facer un orzamento da reforma da nosa vivenda.

A Xeometría é unha das ramas máis antigas das Matemáticas e o seu estudo axúdanos a interpretar mellor a realidade que percibimos. Neste tema recordarás as fórmulas que estudaches xa o ano pasado e afondarás sobre as súas aplicacións na vida real.

ORIXE DA IMAXE: WIKIPEDIA

Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

1. PERPENDICULARIDADE E PARALELISMO NO ESPAZO

1.1. Posicións relativas no espazo

No espazo de tres dimensións en que nos movemos, os elementos xeométricos máis sinxelos son puntos, rectas e planos. O noso primeiro obxectivo é describir as posicións que pode presentar calquera parella destes elementos. Trata de imaxinalas antes de ler.

Distinguiremos varios casos:

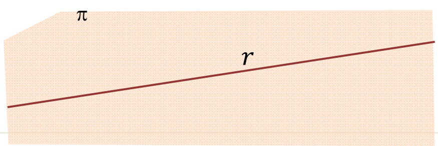
a) **Punto – recta:**

Pode ser que o punto pertenza á recta ou que sexa exterior a ela.

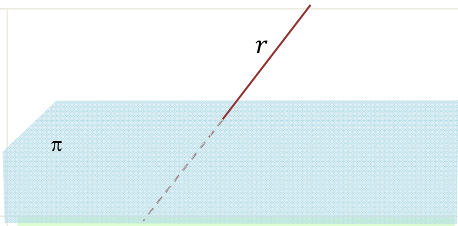
b) **Punto – plano:**

O mesmo ocorre cun punto e un plano: só hai dúas posicións posibles, o punto está no plano ou fóra do mesmo.

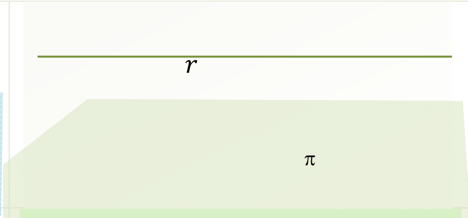
c) **Plano – recta:**



r está contida no plano



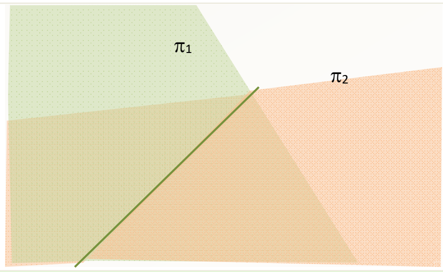
A recta *r* e o plano π córtanse nun punto



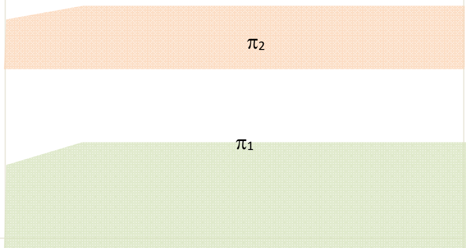
A recta *r* e o plano π son paralelos

d) **Plano- plano:**

π_1 e π_2 son iguais e todos os seus puntos coinciden.



π_1 e π_2 son secantes. Teñen en común todos os puntos dunha recta

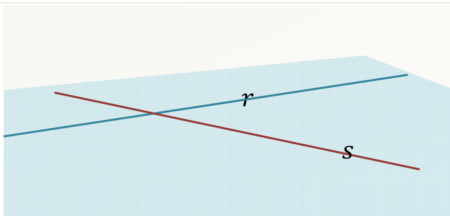


π_1 e π_2 son paralelos. Non teñen ningún punto común

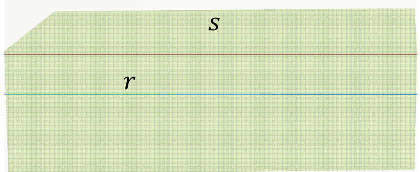
e) **Recta - recta:**

Dúas rectas no espazo poden ser *coplanarias* se é posible debuxalas nun mesmo plano ou *non coplanarias* no outro caso.

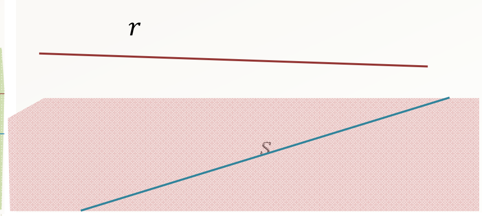
Se dúas rectas son coplanarias poden ser *paralelas*, se teñen a mesma dirección; *secantes,* se teñen un punto común, ou *coincidentes* se teñen comúns todos os seus puntos. Se dúas rectas son non coplanarias non teñen ningún punto común e dise que as dúas rectas *se cruzan.*



r e *s* son secantes.



r e *s* son paralelas.

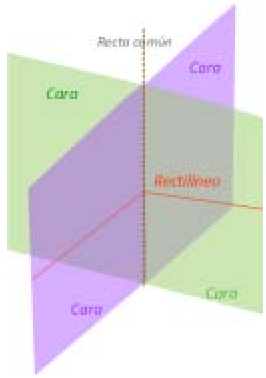


r e *s* crúzanse.

Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

1.2. Ángulos diedros, triedros e poliedros

Todo plano divide ao espazo en dous semiespazos. Dous planos que se cortan quedan divididos en catro semiplanos que pasan por unha mesma recta e que á súa vez dividen ao espazo en catro rexións.



Cada unha das rexións do espazo comprendida entre dous semiplanos que teñen unha recta común, chámase *ángulo diedro*. Os semiplanos que o definen chámanse *caras* do ángulo diedro e a recta común *aresta.*

Se nun diedro trazamos dúas perpendiculares á aresta no mesmo punto, situadas cada unha delas nunha cara, o ángulo que forman estas perpendiculares chámase *ángulo rectilíneo do diedro.*

Un ángulo poliedro é a rexión do espazo limitada por tres ou máis semiplanos que son secantes dous a dous e que teñen un punto común que se chama *vértice*. Cada semiplano é unha cara do poliedro e as rectas intersección das caras son as *arestas* do ángulo poliedro.

A suma dos ángulos dos diedros que forman un ángulo poliedro debe ser menor que 360º.

No caso de que un ángulo poliedro teña exactamente tres caras chámase *triedro*.

Exemplo:

- Observa calquera das esquinas do teito da habitación na que estás. Cada unha delas é o vértice dun triedro no que as caras son dúas paredes consecutivas e o teito.

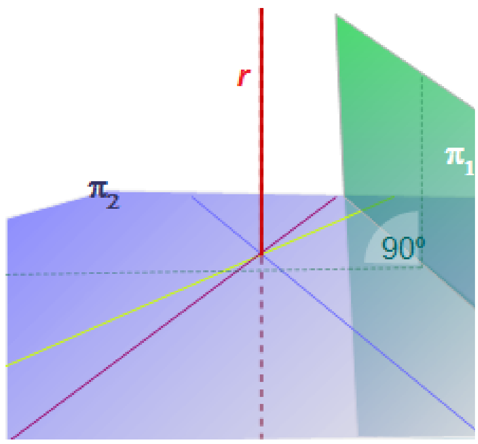
1.3. Perpendicularidade no espazo

No espazo debemos tratar varios casos de perpendicularidade.

Dous planos son perpendiculares se os catro ángulos rectilíneos que determinan son ángulos rectos.

Unha recta é perpendicular a un plano se o corta e é perpendicular a calquera recta que estea contida no plano.

Dúas rectas son *perpendiculares* se forman un ángulo recto. É o caso máis sorprendente por dúas razóns en primeiro lugar no espazo dúas rectas poden ser perpendiculares sen cortarse e en segundo hai infinitas rectas perpendiculares a unha recta *r* dada e que pasan por un punto P dado. Todas elas están contidas nun plano perpendicular á recta *r* que pasa polo punto *P*.



r é perpendicular a π_2 e a todas as rectas contidas en π_2.

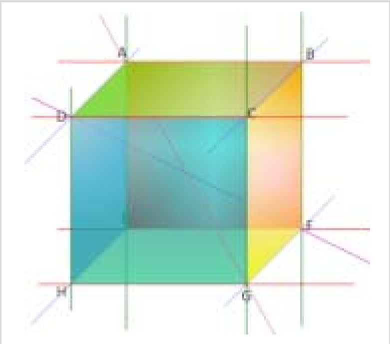
Os planos π_1 e π_2 son perpendiculares

Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

Actividades resoltas

- *Busca un exemplo na figura de:*

a) Planos paralelos. b) Planos perpendiculares. c) Rectas paralelas. d) Rectas perpendiculares e coplanarias. e) Rectas perpendiculares e non coplanarias. f) Recta e plano paralelos.



a) O plano que contén a cara *ABCD* é paralelo ao plano que contén á cara *EFGH*.

b) O plano que contén á cara *ABCD* é perpendicular aos planos que conteñen ás caras *DCGH*, *CBFG*, *ABFE* e *ADHE*.

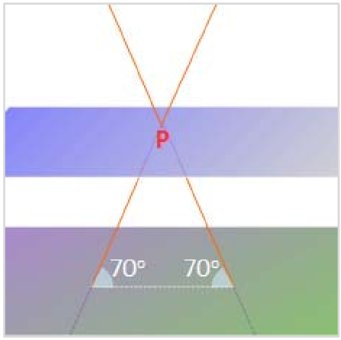
c) A recta que pasa por *A* e *B* é paralela á recta que pasa por *D* e *C*, á recta que pasa por *E* e *F,* e á recta que pasa por *H* e *G*.

d) A recta que pasa por *H* e *G* é perpendicular á recta que pasa por *G* e *F*, e ambas as dúas están no plano que contén á cara *EFGH*, polo que son tamén coplanarias.

e) A recta que pasa por *H* e *G* é perpendicular á recta que pasa por *A* e *D*. Estas dúas rectas pertencen a planos diferentes.

f) A recta que pasa por *A* e *B* é paralela ao plano que contén á cara *EFGH*.

- *Se dous planos paralelos determinan segmentos iguais ao cortar dúas rectas, podes afirmar que as rectas son paralelas?*



Non necesariamente. Observa a figura da dereita e daraste conta. As rectas do debuxo determinan un triángulo isósceles ao cortar a dous planos paralelos e cortarse entre si, tal e como aparece na figura. Os segmentos interceptados polos planos ao cortar ás dúas rectas son iguais, porén, as rectas non son paralelas.

Actividades propostas

1. Busca na habitación na que te encontras, exemplos de:

   a. Planos paralelos e perpendiculares.
   b. Rectas paralelas, rectas perpendiculares e coplanarias, rectas perpendiculares e non coplanarias.
   c. Recta paralela a plano, recta e plano secantes, recta contida no plano.

2. As follas dunha porta xiratoria forman entre si 5 ángulos diedros consecutivos e iguais. Canto mide cada un deles?

3. Desde un punto interior a unha sala de planta hexagonal regular trázase unha recta perpendicular a cada parede. Canto medirá o ángulo que forman dúas perpendiculares consecutivas?

4. Dous triedros teñen as tres caras iguais, pódese asegurar que son iguais? Razoa a resposta.

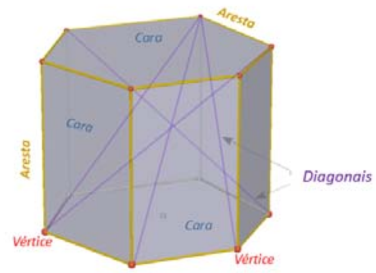
2. POLIEDROS

2.1. Poliedros. Elementos dun poliedro

Un *poliedro* é unha rexión pechada do espazo limitada por polígonos.

En todo poliedro podemos considerar os seguintes elementos: *caras, arestas, vértices, ángulos diedros* e *poliedros*, así como as *diagonais*.

As *caras* son os polígonos que o limitan, as *arestas e vértices os* lados e vértices dos polígonos que forman as caras.



Os *ángulos diedros* están formados por dúas caras que teñen unha aresta común. Os *ángulos poliedros* están formados por varias caras que teñen un vértice común.
Unha *diagonal* dun poliedro é un segmento que une dous vértices pertencentes a caras diferentes.

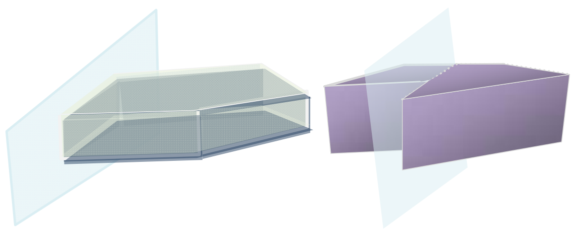
Un *plano diagonal* é un plano que contén tres vértices que non pertencen á mesma cara.

2.2. Poliedros convexos. Teorema de *Euler*.

É posible clasificar poliedros atendendo a diferentes criterios. Se nos fixamos na amplitude dos seus ángulos diedros, clasifícanse en ***cóncavos e convexos***.

Un poliedro é *convexo* se o segmento que une dous puntos calquera do poliedro está dentro do mesmo. En poliedros convexos, unicamente un dos dous semiespazos que determina cada un dos planos que conteñen ás caras, contén tamén ao resto do poliedro.

Un poliedro é *cóncavo* no caso contrario. Nos poliedros cóncavos algúns dos planos que conteñen ás caras divide ao poliedro en dous corpos que pertencen a semiespazos distintos.



Poliedro convexo Poliedro cóncavo

Nos poliedros convexos cúmprese o chamado *Teorema de Euler* que relaciona as caras, vértices e arestas e afirma que en todo poliedro convexo o número de caras máis o número de vértices coincide co número de arestas máis 2. Se as caras, vértices e arestas se representan polas súas iniciais, escríbese:

$$C + V = A + 2$$

Existen poliedros cóncavos que cumpren esta relación e poliedros cóncavos que non a cumpren.

Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

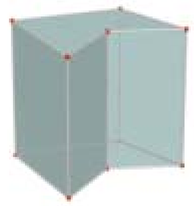
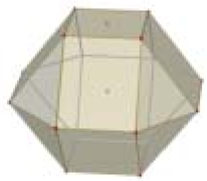
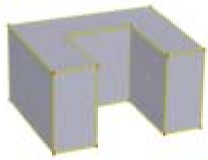
Actividades resoltas

- *Comproba que os seguintes corpos xeométricos verifican o teorema de Euler.*

 Hai dúas caras ocultas que son cuadriláteros	Este corpo xeométrico é un poliedro convexo. Ten 7 caras das cales 5 son cuadriláteros, 1 é un pentágono e 1 é un triángulo. Ten 9 vértices e para calcular o número de arestas sumamos o total de lados das caras e dividimos entre 2, xa que cada aresta é o lado de dúas caras: Nº de arestas = $\frac{5.4+5+3}{2} = 14$ $C + V = 7 + 9 = 16$; $A + 2 = 14 + 2 = 16$ Cumpre o teorema de *Euler*
 Todos os vértices están á vista	Se se ven todos os vértices, hai dúas caras ocultas: unha delas é un triángulo e a outra é un pentágono cóncavo. É un poliedro cóncavo. Ten un total de 6 caras, 6 vértices e Nº de arestas = $\frac{5+5.3}{2} = 10$ $C + V = 6 + 6 = 12$; $A + 2 = 10 + 2 = 12$ Verifica o teorema de *Euler*

Actividades propostas

5. Investiga se os seguintes corpos son poliedros e, en caso afirmativo, se cumpren o teorema de *Euler*. Indica tamén se son cóncavos ou convexos

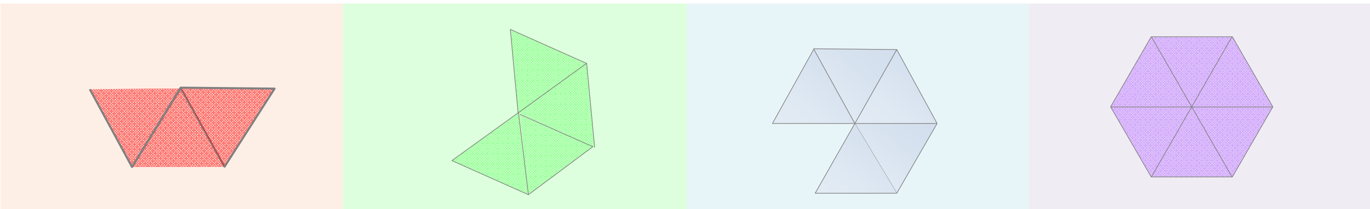
2.3. Poliedros regulares

Un poliedro regular é un poliedro que cumpre que todas as súas caras son polígonos regulares iguais e que os seus ángulos poliedros son iguais.

En todo poliedro regular coincide o mesmo número de caras en cada vértice. É sinxelo probar que só existen cinco poliedros regulares.

O polígono regular con menos lados é o triángulo equilátero. Busquemos os poliedros regulares que poden construírse con caras triangulares:

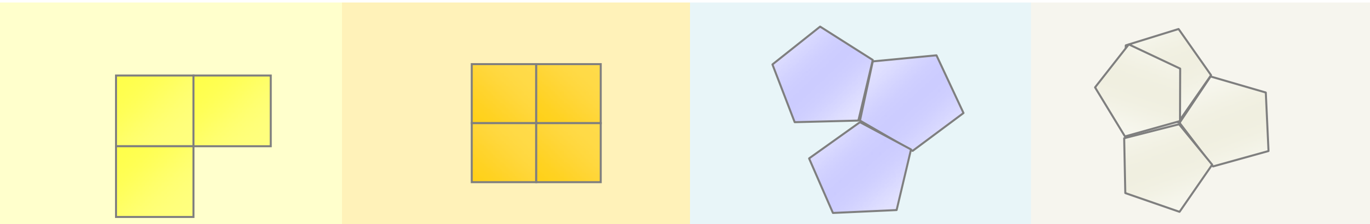
Como mínimo son necesarios tres triángulos por vértice e como máximo poden concorrer cinco para que sexa posible formar un ángulo poliedro.



Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

Se unimos tres triángulos equiláteros iguais por vértice, fórmase un tetraedro. O octaedro aparece ao unir catro triángulos equiláteros iguais en cada vértice. Con cinco triángulos equiláteros, tamén iguais, por vértice, fórmase un icosaedro. Se unimos seis triángulos equiláteros nun vértice, a suma dos ángulos das caras concorrentes é de 360° e non se pode formar ningún ángulo poliedro, así que non hai máis poliedros regulares con caras triangulares.

Estudemos agora os poliedros regulares que é posible construír con caras cadradas e pentagonais



Con tres cadrados iguais en cada vértice construímos un cubo. Ao unir catro cadrados nun vértice, a suma dos ángulos no vértice común aos catro é de 360° co que non podemos formar ningún poliedro máis que o cubo de caras cadradas.

Só é posible construír un poliedro regular con caras pentagonais unindo tres pentágonos en cada vértice. É o dodecaedro. Un número maior de pentágonos por vértice daría unha suma de ángulos superior a 360°.

Entón queda probado que só existen cinco poliedros regulares

Os poliedros regulares son *desenvolvibles* porque poden ser construídos a partir dun desenvolvemento plano formado por todas as súas caras.

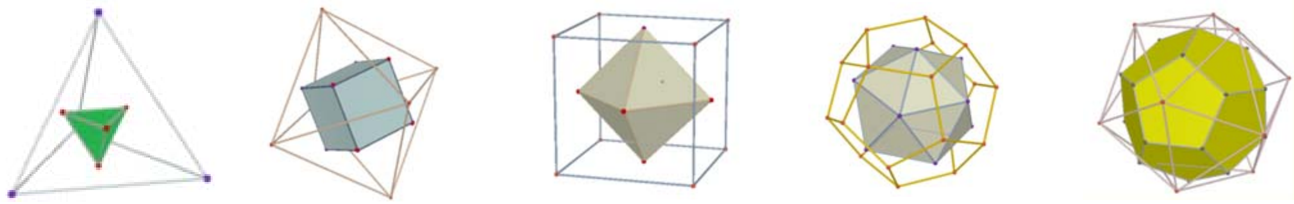
Todos cumpren a relación de Euler para poliedros convexos. Podes comprobalo:

	TETRAEDRO	CUBO	OCTAEDRO	DODECAEDRO	ICOSAEDRO
N° DE CARAS	4	6	8	12	20
N° DE VÉRTICES	4	8	6	20	12
N° DE ARESTAS	6	12	12	30	30
FORMA DAS CARAS	TRIANGULARES	CADRADAS	TRIANGULARES	PENTAGONAIS	TRIANGULARES

2.4. Dual de un poliedro regular

Defínese o poliedro dual dun poliedro regular como o poliedro resultante de unir os centros das caras do poliedro inicial e tomalos como vértices do novo poliedro. Fíxate que entón o número de caras dun poliedro coincide co número de vértices do seu poliedro dual.

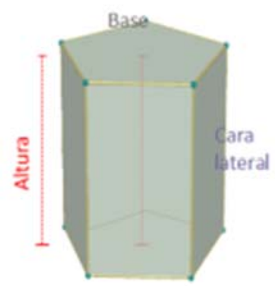
O poliedro dual do tetraedro é o tetraedro. O cubo e o octaedro son duais entre si. Tamén o dodecaedro é dual do icosaedro e reciprocamente



2.5. Prismas

Un *prisma* é un poliedro determinado por dúas caras paralelas que son polígonos iguais e tantas caras laterais, que son paralelogramos, como lados teñen as bases.

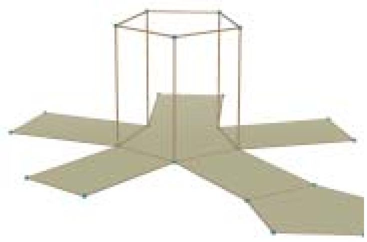
Os prismas son corpos desenvolvibles. O desenvolvemento dun prisma recto está composto polas súas dúas bases e por tantos paralelogramos como caras laterais teña.



A altura do prisma é a distancia entre as bases.

É posible clasificar un prisma atendendo a diferentes conceptos:

Pola forma das caras laterais poden ser *rectos ou oblicuos*. Son *rectos* se as citadas caras son rectángulos e son *oblicuos* se son rombos ou romboides.



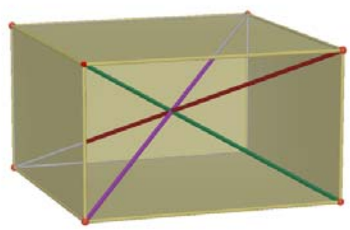
Pola forma das bases poden ser triangulares, cuadrangulares, pentagonais, hexagonais dependendo de que o polígono da base sexa triángulo, cadrado, pentágono, hexágono, etc...

Se ademais un prisma é recto e ten polígonos regulares como bases, o prisma chámase *regular*. En calquera outro caso o prisma chámase *irregular*.

Pola forma dos seus ángulos diedros poden ser cóncavos e convexos.

2.6. Paralelepípedos

Os paralelepípedos son prismas nos que as bases son paralelogramos.



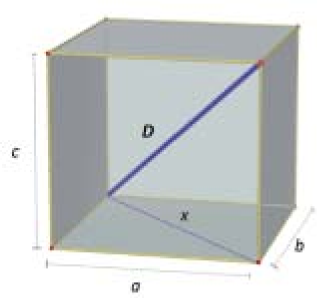
Ademais, todas as caras laterais son tamén paralelogramos e as caras opostas son iguais entre si polo que calquera cara pode tomarse como base. Unha propiedade importante de todos os paralelepípedos é que as catro diagonais se cortan no punto medio.

Os paralelepípedos poden ser*: cubos* se teñen todas as súas caras cadradas, *ortoedro*s se todas as súas caras son rectángulos, *romboedros* se todas as súas caras son rombos ou *romboiedros* se todas as súas caras son romboides.

Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

2.7. Teorema de *Pitágoras* no espazo

A diagonal dun ortoedro ao cadrado coincide coa suma dos cadrados das súas arestas.



Imos demostralo: Sexan *a, b* e *c* as arestas do ortoedro que supoñemos apoiado no rectángulo de dimensións *a, b*. Se *x* é a diagonal deste rectángulo, cumpre: $x^2 = a^2 + b^2$. O triángulo de lados *D, x, c* é rectángulo logo: $D^2 = x^2 + c^2$. E tendo en conta a relación que cumpre *x:*

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Actividades resoltas

- *As arestas da base dunha caixa con forma de ortoedro miden 10 cm e 11 cm e a súa altura 8 cm. Estuda se podes gardar nela tres barras de lonxitudes 14 cm, 16 cm e 18 cm.*

O rectángulo da base ten unha diagonal *d* que mide: $d = \sqrt{10^2 + 11^2} = \sqrt{221} \approx 14.9$ cm. Logo a barra máis curta cabe apoiada na base. Calculemos agora canto mide a diagonal do ortoedro:

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 8^2 + 10^2 + 11^2 = 285 \Rightarrow D = \sqrt{285} \approx 16.9 \text{ cm.}$$

Logo, a barra de 16 cm cabe tamén na caixa pero a de 18 cm, non.

Actividades propostas

6. É posible demostrar cun crebacabezas o teorema de Pitágoras no espazo. Propoñémosche que o intentes. Poderás encontrar na revista e entre os recursos para imprimir as pezas que che axudarán. Na fotografía amósase o puzle resolto.

7. É posible construír un prisma cóncavo triangular? E un prisma cóncavo regular? Razoa as respostas.

8. Entre os poliedros regulares, hai algún que sexa prisma? En caso afirmativo clasifícao.

9. Basta que un paralelepípedo teña dúas caras rectangulares para que sexa un prisma recto?

10. Debuxa un prisma pentagonal regular e comproba que cumpre a relación de Euler.

11. Unha caixa ten forma cúbica de 2 dm de aresta. Canto mide a súa diagonal?

12. Calcula a medida da diagonal dunha sala que ten 10 metros de longo, 4 metros de ancho e 3 metros de altura.

13. Clasifica os seguintes poliedros



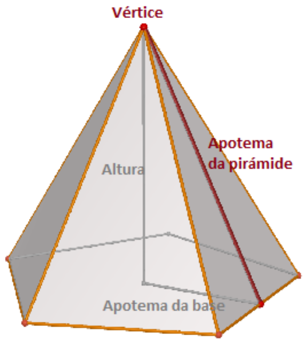


Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

2.8. Pirámides

Unha pirámide é un poliedro determinado por unha cara poligonal denominada base e tantas caras triangulares cun vértice común como lados ten a base.



O punto onde converxen todos os triángulos laterais denomínase *vértice* ou cúspide.

As pirámides pódense clasificar por conceptos análogos aos dos prismas. Así destacamos que as pirámides, segundo a forma da base, se clasifican en *triangulares, cuadrangulares, pentagonais…*

Unha pirámide é *regular* cando o é o polígono da base e ademais as caras laterais son triángulos isósceles iguais. A altura destes triángulos laterais chámase *apotema da pirámide*. Non debes confundir a apotema dunha pirámide regular coa apotema do polígono da base.

A *altura* dunha pirámide é a distancia do vértice á base. Se unha pirámide é regular, coincide coa distancia entre o vértice da pirámide e o centro do polígono da base.

As pirámides son desenvolvibles. O desenvolvemento dunha pirámide fórmano o polígono da base e tantas caras triangulares como lados teña a base. Se a pirámide é regular, os triángulos son isósceles e iguais.

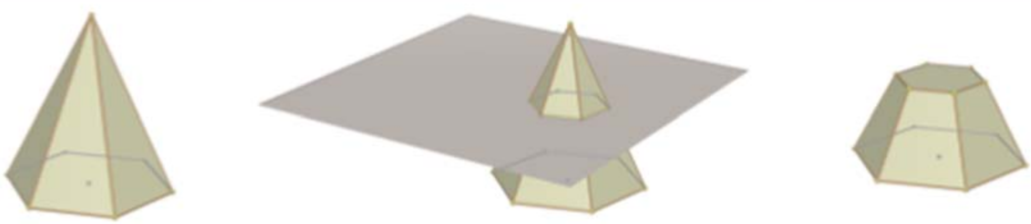
Actividades propostas

14. Hai algunha pirámide regular que sexa poliedro regular? E pirámides con caras paralelas? En caso afirmativo pon un exemplo e en caso negativo, xustifica as túas respostas.

15. Debuxa unha pirámide hexagonal regular e distingue a apotema da pirámide da apotema da base. Debuxa tamén o seu desenvolvemento.

2.9. Tronco de pirámide

Un tronco de pirámide é o poliedro resultante ao cortar unha pirámide por un plano paralelo á base. As bases son polígonos semellantes e as caras laterais son trapecios.



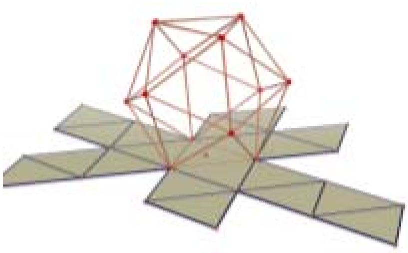
Un tronco de pirámide é regular cando é unha porción de pirámide regular. Neste caso as caras laterais son trapecios isósceles e as bases son polígonos regulares semellantes.

3. ÁREA LATERAL E TOTAL DUN POLIEDRO

3.1. Área total dun poliedro regular

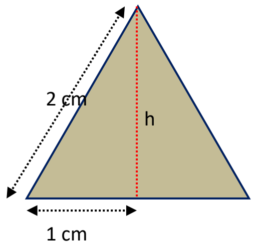
Como as caras dos poliedros regulares son iguais, o cálculo da área total dun poliedro regular redúcese a calcular a área dunha cara e despois multiplicala polo número de caras.

Actividades resoltas



Calcula a área total dun icosaedro de 2 cm de aresta.

Todas as súas caras son triángulos equiláteros de 2 cm de base. Calculamos a altura h que divide á base en dous segmentos iguais



$h^2 + 1^2 = 2^2 \Rightarrow h^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow h = \sqrt{3}$ cm

Polo tanto a área dunha cara será:

$A_{triángulo} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ cm^2 e polo tanto Área icosaedro = 20 $\sqrt{3}$ cm^2

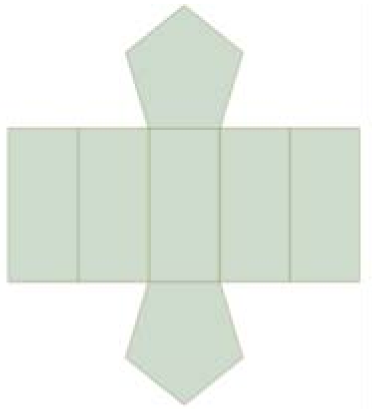
3.2. Áreas lateral e total dun prisma

A área lateral dun prisma é a suma das áreas das caras laterais.

Como as caras laterais son paralelogramos da mesma altura, que é a altura do prisma, podemos escribir:

Área lateral = Suma das áreas das caras laterais =

= Perímetro da base · altura do prisma.



Se denotamos por *h* a altura e por P_B o perímetro da base:

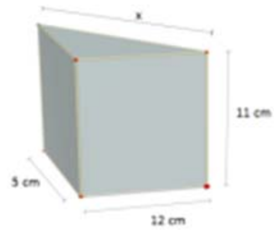
Área lateral = ao = $P_B \cdot h$

A área total dun prisma é a área lateral máis o dobre da suma da área da base:

Área total = $A_T = ao + 2A_B$

Actividades resoltas

- *Calcula as áreas lateral e total dun prisma triangular recto de 11 cm de altura se a súa base é un triángulo rectángulo de catetos 12 cm e 5 cm.*



Calculamos en primeiro lugar a hipotenusa do triángulo da base:

$x^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow x = \sqrt{169} = 13$ cm

$P_B = 12 + 5 + 13 = 30\ cm$; $A_B = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30\ cm^2$

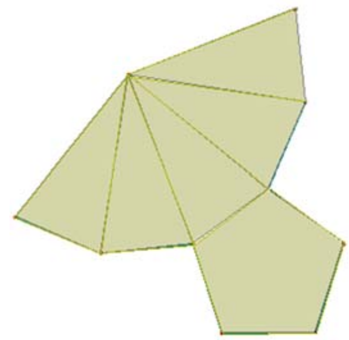
$A_L = P_B \cdot h = 30 \cdot 11 = 330\ cm^2$ $A_T = A_L + 2 \cdot A_B = 330 + 60 = 390\ cm^2$

Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

3.3. Áreas lateral e total dunha pirámide e dun tronco de pirámide regulares

A área lateral dunha pirámide regular é a suma das áreas das caras laterais.

Desenvolvemento de pirámide pentagonal regular



Son triángulos isósceles iguais polo que, se a aresta da base mide b, a apotema da pirámide é Ap e a base ten n lados, entón a área lateral é:

$$\text{Área lateral} = ao = \boldsymbol{n} \cdot \frac{\boldsymbol{b \cdot Ap}}{\boldsymbol{2}} = \frac{\boldsymbol{n \cdot b \cdot Ap}}{\boldsymbol{2}}$$

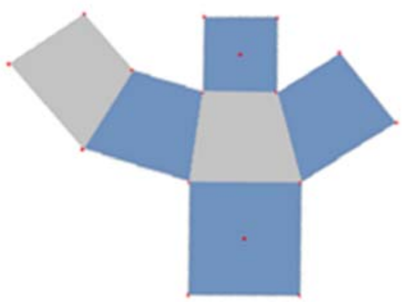
e como $n \cdot b$ = Perímetro da base

$$A_L = \frac{P_B \cdot Ap}{2} = \frac{\textit{Perímetro da base} \cdot \textit{Apotema da pirámide}}{2}$$

A área total dunha pirámide é a área lateral máis a área da base:

$$\text{Área total} = A_T = ao + A_B$$

Desenvolvemento de tronco de pirámide cuadrangular



Un tronco de pirámide regular é un corpo xeométrico desenvolvible. No seu desenvolvemento aparecen tantas caras laterais como lados teñen as bases. Todas elas son trapecios isósceles.

Se B é o lado do polígono da base maior, b o lado da base menor, n o número de lados das bases e Ap é a altura dunha cara lateral

$$\text{Área lateral} = ao = \boldsymbol{n} \cdot \frac{\boldsymbol{(B+b) \cdot Ap}}{\boldsymbol{2}} = \frac{\boldsymbol{(P_B + P_b) \cdot Ap}}{\boldsymbol{2}} =$$

$$= \frac{\textit{Suma do perímetro das bases} \cdot \textit{Apotema do tronco}}{2}$$

A área total dun tronco de pirámide regular é a área lateral máis a suma de áreas das bases:

$$\text{Área total} = A_T = ao + A_B + A_b$$

Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

Actividades resoltas

- *Calculemos a área total dun tronco de pirámide regular de 4 m de altura se sabemos que as bases paralelas son cadrados de 4 m e de 2 m de lado.*

En primeiro lugar, calculamos o valor da apotema. Tendo en conta que o tronco é regular e que as bases son cadradas fórmase un triángulo rectángulo no que se cumpre:

$$Ap^2 = 4^2 + 1^2 = 17 \Rightarrow Ap = \sqrt{17} \approx 4.12 \text{ m};\ A_L = \frac{(P_B + P_b)\cdot Ap}{2} = \frac{(16+8)\cdot 4.12}{2} = 49.44 \text{ m}^2$$

$$A_T = A_L + A_B + A_b = 49.44 \text{ m}^2 + 16 \text{ m}^2 + 4 \text{ m}^2 = 69.44 \text{ m}^2$$

Actividades propostas

16. Calcula as áreas lateral e total dun prisma triangular regular sabendo que as arestas das bases miden 2 cm e cada aresta lateral 8 cm.

17. A área lateral dun prisma regular de base cadrada é 63 m^2 e ten 7 m de altura. Calcula o perímetro da base.

18. O lado da base dunha pirámide hexagonal regular é de 6 cm e a altura da pirámide 10 cm. Calcula a apotema da pirámide e a súa área total.

19. Calcula a área lateral dun tronco de pirámide regular, sabendo que as súas bases son dous octógonos regulares de lados 4 e 7 dm e que a altura de cada cara lateral é de 8 dm.

20. Se a área lateral dunha pirámide cuadrangular regular, de lado da base 4 cm, é 104 cm^2, calcula a apotema da pirámide e a súa altura.

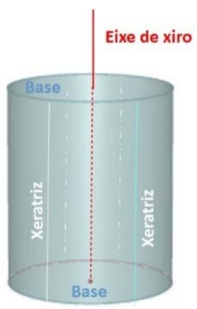
4. CORPOS DE REVOLUCIÓN

4.1. Corpos de revolución: Cilindros, conos e esferas

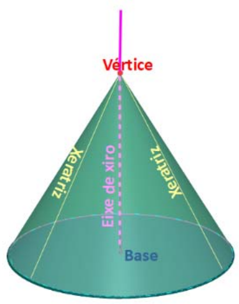
Os corpos de revolución son corpos xeométricos que se obteñen ao facer xirar unha liña arredor dunha recta fixa denominada *eixe*. A liña que xira chámase *xeratriz*.

Tamén pode obterse un corpo de revolución mediante o xiro dunha figura plana arredor dun eixe de xiro.

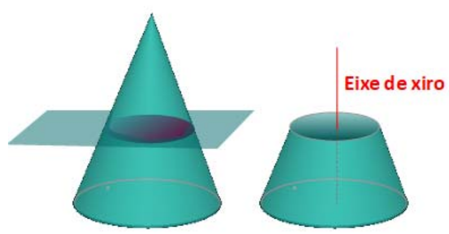
Os principais corpos de revolución son: *cilindros, conos e esferas*.



CILINDRO



CONO



TRONCO DE CONO

ESFERA

A xeratriz dun cilindro é unha recta paralela ao eixe de xiro. A dun cono é unha recta secante co eixe e a dunha esfera é una semicircunferencia cuxo centro está no eixe de xiro.

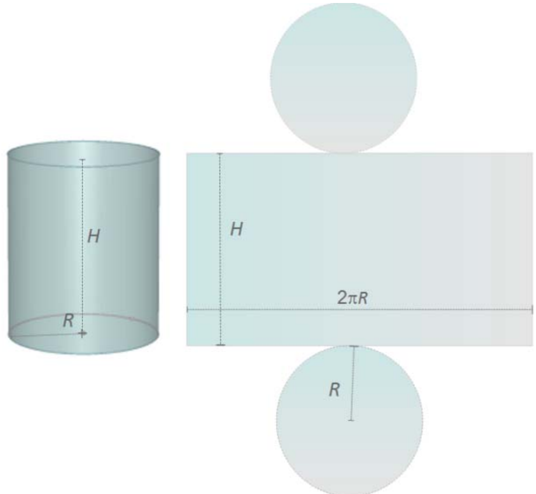
Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

4.2. Áreas lateral e total dun cilindro

O cilindro é un corpo xeométrico desenvolvible. Se recortamos un cilindro recto ao longo dunha xeratriz, e o estendemos nun plano, obtemos dous círculos e unha rexión rectangular. Desta maneira obtense o seu desenvolvemento.

A partir deste podemos ver que a área lateral do cilindro está determinada pola área do rectángulo que ten como dimensións a lonxitude da circunferencia da base e a altura do cilindro.



Suporemos que a altura do cilindro é H e que R é o radio da base co que a área lateral A_L é:

$$A_L = \text{Lonxitude da base} \cdot \text{Altura} = (2\pi\ R)\ \cdot\ H = 2\pi R H$$

Se á expresión anterior lle sumamos a área dos dous círculos que constitúen as bases, obtemos a área total do cilindro.

$$A_T = A_L + \pi R^2 + \pi R^2 = 2\pi R H + 2\pi R^2$$

4.3. Áreas lateral e total dun cono

Tamén o cono é un corpo xeométrico desenvolvible. Ao recortar seguindo unha liña xeratriz e a circunferencia da base, obtemos un círculo e un sector circular con radio igual á xeratriz e lonxitude de arco igual á lonxitude da circunferencia da base.

Chamemos agora R ao radio da base e G á xeratriz. A área lateral do cono é a área do sector circular obtido. Para calculala pensemos que esta área debe ser directamente proporcional á lonxitude de arco que á súa vez debe coincidir coa lonxitude da circunferencia da base. Podemos escribir entón:

$$\frac{A\ Lateral\ do\ cono}{Lonxitude\ de\ arco\ correspondente\ ao\ \ sec\,t\,or} = \frac{A\ total\ do\ círculo\ de\ radio\ G}{Lonxitude\ da\ circunferencia\ de\ radio\ G}$$

É dicir: $\frac{A_L}{2\pi R} = \frac{\pi\ G^2}{2\pi G}$ e despexando A_L temos:

$$A_L = \frac{2\pi R\,\pi\ G^2}{2\pi G} = \ \pi R G$$

Se á expresión anterior lle sumamos a área do círculo da base, obtemos a área total do cono.

$$A_T = A_L + \pi \cdot R^2 = \pi \cdot R \cdot G + \pi \cdot R^2$$

Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

Actividades resoltas

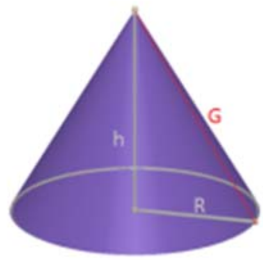
- *Calcula a área total dun cono de 12 dm de altura, sabendo que a circunferencia da base mide 18.84 dm.* (*Toma 3.14 como valor de π*)

  Calculamos en primeiro lugar o radio *R* da base:

  $2\pi R = 18.84 \Rightarrow \quad R = \frac{18.84}{2\pi} \approx \frac{18.84}{6.28} = 3$ dm.

  Calculamos agora a xeratriz *G*:

  $G = \sqrt{R^2 + h^2} \Rightarrow \quad G = \sqrt{3^2 + 12^2} = \sqrt{153} \approx 12.37$ dm.



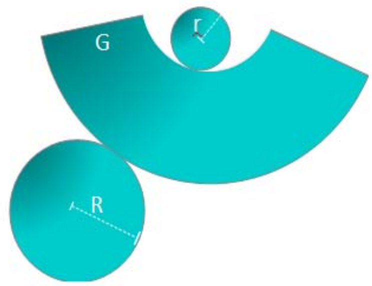
Entón A_T = ao + $\pi \cdot R^2 = \pi \cdot R \cdot G + \pi \cdot R^2 = 3.14 \cdot 3 \cdot 12.37 + 3.14 \cdot 3^2 \approx$ 144.79 dm^2.

4.4. Áreas lateral e total dun tronco de cono

Ao cortar un cono por un plano paralelo á base, obtense un tronco de cono. Ao igual que o tronco de pirámide, é un corpo desenvolvible e o seu desenvolvemento constitúeno os dous círculos das bases xunto cun trapecio circular, cuxas bases curvas miden o mesmo que as circunferencias das bases.

Chamando *R* e *r* aos radios das bases e *G* á xeratriz resulta:

$$A_L = \frac{(2\pi\ R + 2\pi\ r)G}{2} = \frac{2(\pi\ R + \pi\ r)\ G}{2} = (\pi\ R + \pi\ r)\ G$$



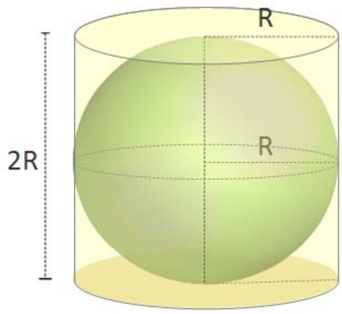
Se á expresión anterior lle sumamos as áreas dos círculos das bases, obtemos a área total do tronco de cono:

$$A_T = A_L + \pi \cdot R^2 + \pi \cdot r^2$$

4.5. Área total dunha esfera

A esfera non é un corpo xeométrico desenvolvible, polo que é máis complicado que nos casos anteriores encontrar unha fórmula para calcular a súa área.

Arquímedes demostrou que a área dunha esfera é igual que a área lateral dun cilindro circunscrito á esfera, é dicir un cilindro co mesmo radio da base que o radio da esfera e cuxa altura é o diámetro da esfera.



Se chamamos *R* ao radio da esfera:

$$A_T = (2\pi R) \cdot (2R) = 4\pi R^2$$

A área dunha esfera equivale á área de catro círculos máximos.

Actividades propostas

21. Unha columna cilíndrica ten 76 cm de diámetro e 4 m de altura. Cal é a súa área lateral?

22. O radio da base dun cilindro é de 38 cm e a altura é o triplo do diámetro. Calcula a súa área total.

23. Calcula a área lateral dun cono recto sabendo que a súa xeratriz mide 50 dm e o seu radio da base 30 dm.

24. A circunferencia da base dun cono mide 6.25 m e a súa xeratriz 8 m. Calcula a área total.

25. Unha esfera ten 4 m de radio. Calcula: a) a lonxitude da circunferencia máxima; b) a área da esfera.

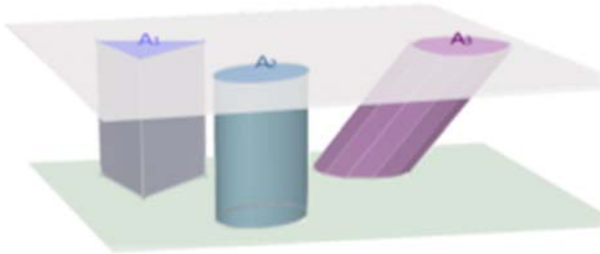
Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

5. VOLUME DUN CORPO XEOMÉTRICO

5.1. Principio de *Cavalieri*

Bonaventura Cavalieri, matemático do século XVII, enunciou o principio que leva o seu nome e que afirma:

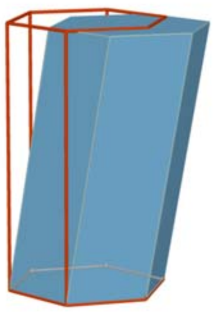
"Se dous corpos teñen a mesma altura e ao cortalos por planos paralelos ás súas bases se obteñen seccións coa mesma área, entón os volumes dos dous corpos son iguais".



Exemplo:

Na figura adxunta as áreas das seccións A_1, A_2, A_3, producidas por un plano paralelo ás bases, son iguais, entón, segundo este principio os volumes dos tres corpos son tamén iguais.

5.2. Volume dun prisma e dun cilindro



O volume dun prisma recto é o produto da área da base pola altura. Ademais, segundo o principio de *Cavalieri*, o volume dun prisma oblicuo coincide co volume dun prisma recto coa mesma base e altura. Se denotamos por V este volume, A_B a área da base e *h* a altura:

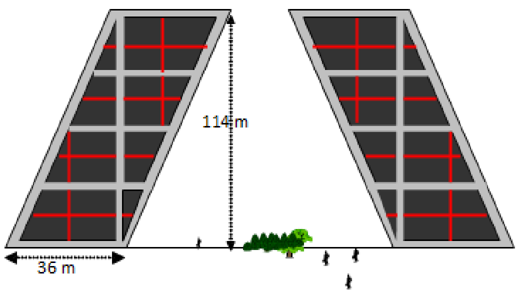
Volume prisma = $V = A_B \cdot h$

Tamén o volume dun cilindro, recto ou oblicuo é a área da base pola altura. Se chamamos *R* ao radio da base, A_B á área da base e *h* á altura, o volume escríbese:

Volume cilindro = $V = A_B \cdot h \quad = \quad \pi R^2 \cdot h$

Actividades resoltas

- *As coñecidas torres Kio de Madrid son dúas torres xemelgas que están no Paseo da Castellana, xunto á Praza de Castilla. Caracterízanse pola súa inclinación e representan unha porta cara a Europa.*
  Cada unha delas é un prisma oblicuo cuxa base é un cadrado de 36 metros de lado e teñen unha altura de 114 metros. O volume interior de cada torre pode calcularse coa fórmula anterior:



$V = A_B \cdot h = 36^2 \cdot 114 = 147\ 744$ m^3

Actividades propostas

26. Calcula o volume dun prisma recto de 12 dm de altura cuxa base é un hexágono de 4 dm de lado.

27. Calcula a cantidade de auga que hai nun recipiente con forma de cilindro sabendo que a súa base ten 12 cm de diámetro e que a auga acada 1 dm de altura.

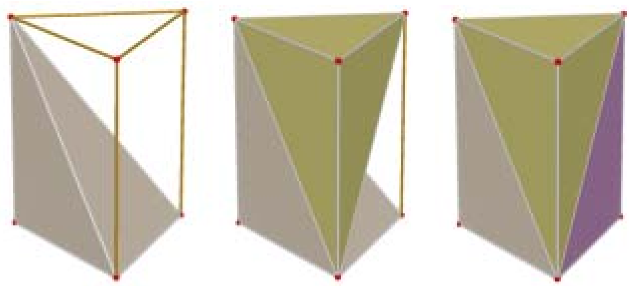
Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

5.3. Volume dunha pirámide e dun cono

Tamén nos casos dunha pirámide ou cono, as fórmulas do volume coinciden en corpos rectos e oblicuos.

O volume dunha pirámide é a terceira parte do volume dun prisma que ten a mesma base e altura.

Volume pirámide = $V = \frac{A_B \cdot h}{3}$



Se comparamos cono e cilindro coa mesma base e altura, concluímos un resultado análogo

Volume cono = $V = \frac{A_B \cdot h}{3} = \frac{\pi R^2 \cdot h}{3}$

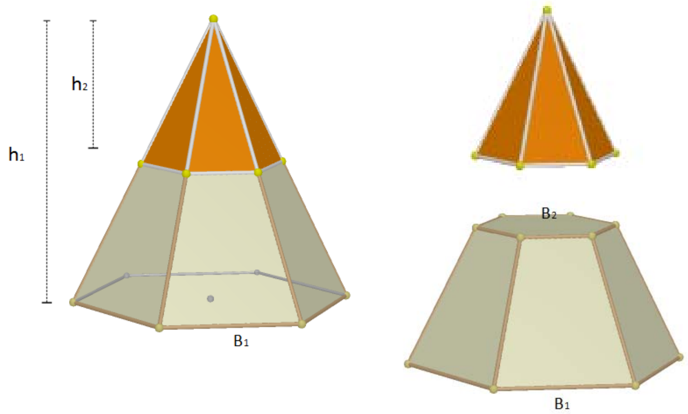
5.4. Volume dun tronco de pirámide e dun tronco de cono

Existe unha fórmula para calcular o volume dun tronco de pirámide regular pero evitarémola. Resulta máis sinxelo obter o volume dun tronco de pirámide regular restando os volumes das dúas pirámides a partir das que se obtén.

Se representamos por A_{B1} e A_{B2} as áreas das bases e por h_1 e h_2 as alturas das pirámides citadas, o volume do tronco de pirámide é:

Volume tronco de pirámide =

$$V = \frac{A_{B1} \cdot h_1}{3} - \frac{A_{B2} \cdot h_2}{3}$$



O volume do tronco de cono obtense de modo parecido. Se R_1 e R_2 son os radios das bases dos conos que orixinan o tronco e h_1 e h_2 as súas alturas, o volume do tronco de cono resulta:

Volume tronco de cono = $V = \frac{\pi \cdot R_1^2 \cdot h_1}{3} - \frac{\pi \cdot R_2^2 \cdot h_2}{3}$

Actividades resoltas

- *Calcula o volume dun tronco de pirámide regular de 10 cm de altura se as súas bases son dous hexágonos regulares de lados 7 cm e 3 cm.*

Primeiro paso: calculamos as apotemas dos hexágonos das bases:

Para cada un destes hexágonos:

$$L^2 = ap^2 + (L/2)^2 \Rightarrow ap^2 = L^2 - \frac{L^2}{4} = \frac{3L^2}{4} \Rightarrow ap = \frac{\sqrt{3}\,L}{2}$$

Logo as apotemas buscadas miden:

$$\boldsymbol{ap_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2.6\ cm \quad ap_2 = \frac{7\sqrt{3}}{2} \approx 6.1\ cm}$$

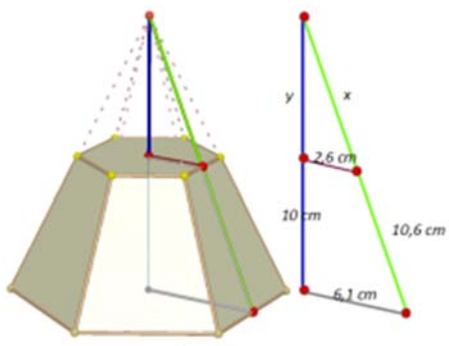


Figura 3

Como segundo paso, calcularemos a apotema do tronco de

Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

pirámide

$$A^2 = 10^2 + 3.5^2 \Rightarrow A = \sqrt{112.25} \approx \mathbf{10.6\ cm}$$

En terceiro lugar, calcularemos o valor do segmento *y* da figura 3 que nos servirá para obter as alturas das pirámides que xeran o tronco co que traballamos:

Polo teorema de *Tales*:

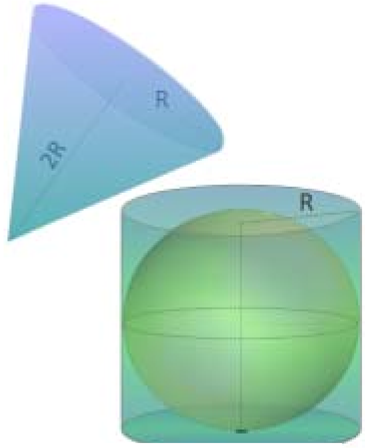
$$\frac{\mathbf{6.1}}{\mathbf{2.6}} = \frac{\mathbf{10+y}}{\mathbf{y}} \Rightarrow 6.1\,y = 2.6(10+y) \Rightarrow 6.1y - 2.6y = 26 \Rightarrow \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{26}}{\mathbf{3.5}} \approx \mathbf{7.5\ cm}.$$

Logo as alturas das pirámides xeradoras do tronco miden 10 + 7.5 = 17.5 cm e 7.5 cm.

Por último calculamos o volume do tronco de pirámide:

$$V = \frac{A_{B1}\cdot h_1}{3} - \frac{A_{B2}\cdot h_2}{3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{42\cdot 6.1}{2}\cdot 17.5 - \frac{1}{3}\cdot\frac{18\cdot 2.6}{2}\cdot 7.5 = \frac{4\,483.5}{6} - \frac{351}{6} = 688.75\ cm^3$$

5.5. Volume da esfera

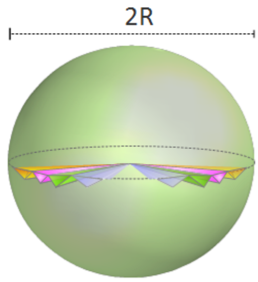


Volvamos pensar nunha esfera de radio *R* e no cilindro que a circunscribe. Para encher con auga o espazo que queda entre o cilindro e a esfera, necesítase unha cantidade de auga igual a un terzo do volume total do cilindro circunscrito.

Dedúcese entón que a suma dos volumes da esfera de radio *R* e do cono de altura *2R* e radio da base *R*, coincide co volume do cilindro circunscrito á esfera de radio *R*. Polo tanto:

Volume $_{\text{esfera}}$ = Volume $_{\text{cilindro}}$ – Volume $_{\text{cono}}$ $\Rightarrow$

Volume $_{\text{esfera}}$ = $\pi R^2(2R) - \dfrac{\pi R^2(2R)}{3} = \dfrac{6\pi R^3 - 2\pi R^3}{3} = \dfrac{4\pi R^3}{3} = \dfrac{4}{3}\pi R^3$



Existen demostracións máis rigorosas que avalan este resultado experimental que describimos. Así, por exemplo, o volume da esfera pódese obter como suma dos volumes de pirámides que a recobren, todas elas de base triangular sobre a superficie da esfera e con vértice no centro da mesma.

Actividades propostas

28. O depósito de gasóleo da casa de Irene é un cilindro de 1 m de altura e 2 m de diámetro. Irene chamou ao subministrador do gasóleo porque no depósito só quedan 140 litros.

a. Cal é, en dm^3, o volume do depósito? (Utiliza 3.14 como valor de π).

b. Se o prezo do gasóleo é de 0.80 € cada litro, canto deberá pagar a nai de Irene por encher o depósito?

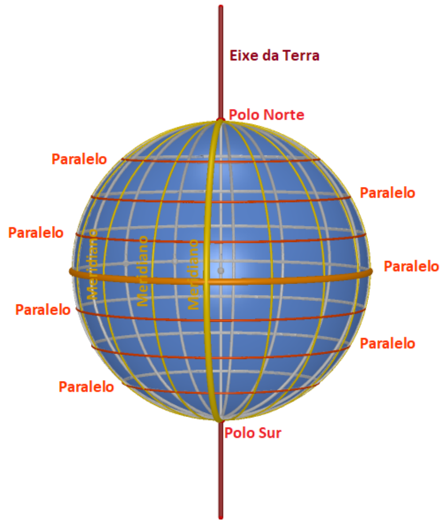
29. Comproba que o volume da esfera de radio 5 dm sumado co volume dun cono do mesmo radio da base e 10 dm de altura, coincide co volume dun cilindro que ten 10 dm de altura e 5 dm de radio da base.

Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

6. GLOBO TERRÁQUEO

6.1. O globo terráqueo

A Terra ten unha forma de esfera algo aplanada polos polos. No seu movemento de rotación xira arredor dunha liña imaxinaria que se denomina *eixe.* Os *polos xeográficos Norte e Sur* son os puntos de corte do eixe coa superficie da Terra.



Un *globo terráqueo* é unha representación tridimensional a escala da Terra. É a representación máis precisa que existe porque non presenta distorsións á hora de tomar datos para calcular ángulos e distancias.

O resto das representacións a escala da Terra son bidimensionais e entre elas destacan os *planisferios* que son proxeccións do globo terráqueo sobre o plano.

O obxectivo destas representacións da Terra é o emprazamento preciso de calquera punto xeográfico. Para logralo, no globo terráqueo defínense un conxunto de liñas imaxinarias que se denominan *meridianos* e *paralelos*.

Os *meridianos* son semicircunferencias centradas no centro da Terra e que pasan polos polos. Entre eles destacan o chamado meridiano de Greenwich ou meridiano cero que pasa por Londres e o Antemeridiano, emprazado no Océano Pacífico.

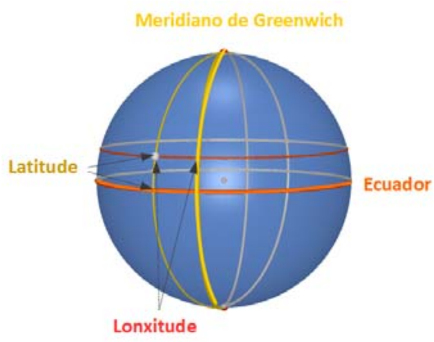
Os *paralelos* son circunferencias que teñen o seu centro no eixe da Terra e que cortan ao globo terráqueo. Só un deles ten como centro o da Terra. Denomínase *Ecuador ou paralelo cero e* é unha circunferencia de radio máximo.

Outros paralelos destacados son os *Trópicos de Cáncer* e *Capricornio*, achegados ao Ecuador no norte e sur respectivamente e tamén o *Círculo Polar Ártico* no Polo Norte e o *Círculo Polar Antártico* no Polo Sur.

O Ecuador divide á Terra en dúas semiesferas denominadas *hemisferio norte* (N) e *hemisferio sur*(S). O meridiano de Greenwich divide á Terra nos *hemisferios leste* (E) e *oeste* (W).

Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

6.2. Lonxitude e latitude. Coordenadas xeográficas



Tomando como sistema de referencia o Ecuador e o meridiano de Greenwich, a cada punto da Terra asóciaselle unha parella de números que son as súas *coordenadas xeográficas* e que reciben o nome de *latitude e lonxitude*. Estas coordenadas exprésanse en graos sexaxesimais.

A *latitude é* a distancia que existe entre un punto calquera do globo terráqueo e o Ecuador. Mídese sobre o meridiano que pasa por este punto.

A *lonxitude* é a distancia que existe entre un punto calquera e o Meridiano de Greenwich, medida sobre o paralelo que pasa polo punto.

Se un punto está no hemisferio norte, diremos que ten latitude norte e escribiremos latitude N. Analogamente se está no hemisferio sur, diremos que ten latitude sur e escribiremos latitude S.

Tamén falaremos de lonxitude leste e lonxitude oeste e escribiremos lonxitude E o lonxitude W dependendo de que un punto se encontre á esquerda ou á dereita do meridiano de Greenwich. Soe identificarse a lonxitude E con lonxitude negativa e a lonxitude W con lonxitude positiva.

6.3. Fusos horarios

Durante moito tempo a hora determinábase mediante cálculos baseados nos movementos dos astros e a hora oficial era a hora solar. Isto ocasionaba múltiples problemas nos horarios dos transportes entre diferentes localidades polo que se acordou establecer un horario oficial coordinado. Nun principio este horario estaba baseado na chamada hora media de *Greenwich* (**GMT**) que se calculaba facendo a media da hora solar de todas as localidades pertencentes ao meridiano de *Greenwich*. Hoxe en día a hora solar foi substituída pola hora que calculan reloxos atómicos moito máis precisos. Con eles a hora **GMT** deu paso á hora universal coordinada (**UTC**).

A Terra dá unha volta completa en 24 horas, percorre $360^{o} : 24 = 15^{o}$ nunha hora. Prodúcese entón unha diferenza dunha hora de tempo por cada diferenza de 15^{o} de lonxitude entre dous puntos xeográficos.

Chámase ***fuso horario*** a unha zona do globo terráqueo comprendida entre dous meridianos que se diferencian en 15º de lonxitude. A velocidade da Terra no seu movemento de rotación orixina 24 *fusos horarios*. Partindo do meridiano de *Greenwich* numéranse segundo a súa distancia ao Leste ou ao Oeste de Greenwich.

Dentro de cada fuso horario todos os reloxos deben marcar a mesma hora, e entre un fuso e o seguinte hai unha diferenza dunha hora. Xeralmente, os fusos horarios están determinados por meridianos dunha lonxitude que é múltiplo de 15°; porén, como consecuencia das fronteiras políticas, as delimitacións poden seguir liñas que adoptan formas moi irregulares.

Tendo en conta que o movemento de rotación é un xiro de oeste a leste, se nos desprazamos dun fuso horario a outro en dirección Leste- Oeste, debemos atrasar o reloxo unha hora e, se o desprazamento se produce de Oeste a Leste, debemos adiantalo unha hora.

Atravesar o Antemeridiano supón o cambio de data, exactamente un día.

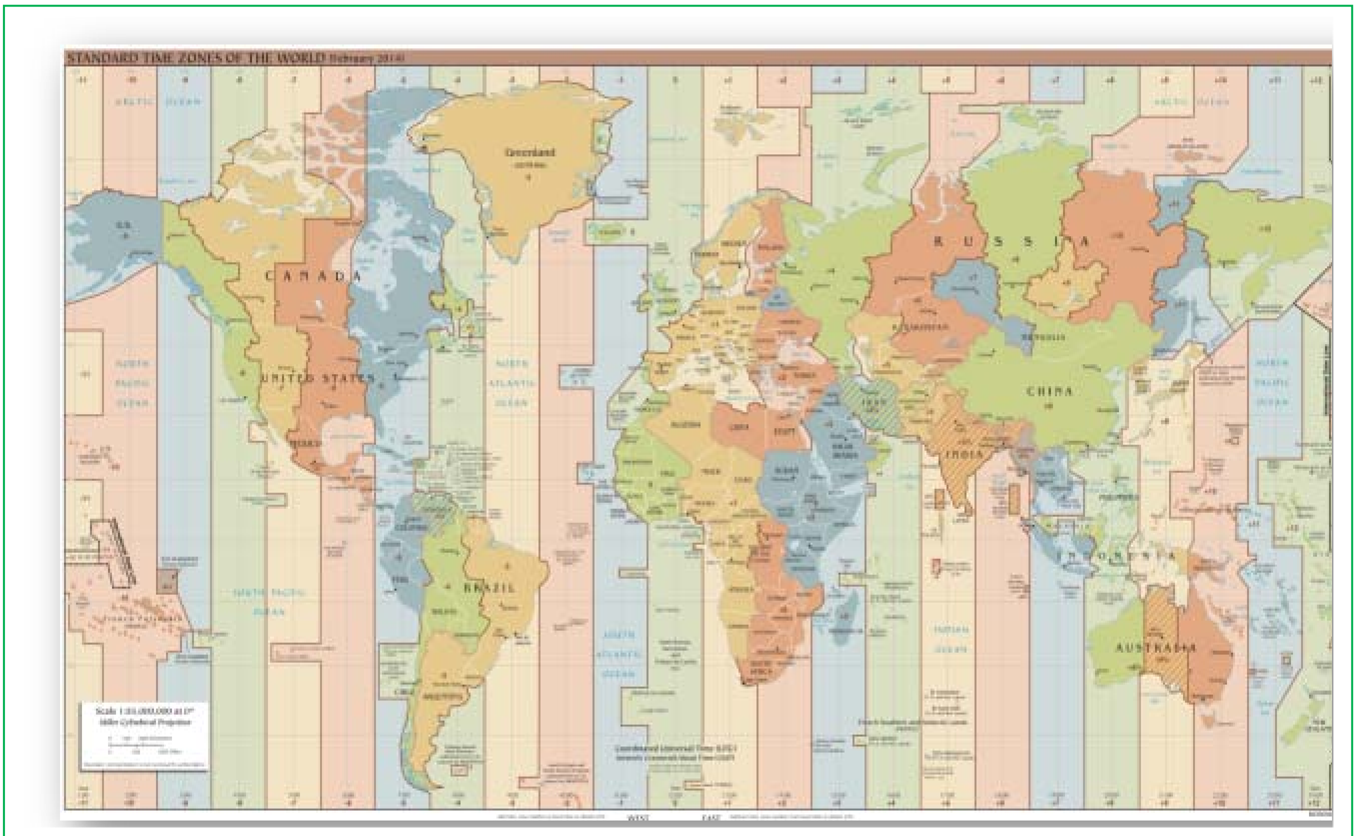
Actividades propostas

30. Un avión percorre 20º en dirección oeste ao longo do Ecuador. Se chega a un punto cuxa lonxitude é de 170º leste, cales son as coordenadas do lugar de partida?

31. Xoán sae da súa casa e percorre 10 Km en dirección sur, 20 Km cara ao leste e 10 Km cara ao norte. Se se encontra de novo na casa, onde está situada a súa casa?

32. Na esfera terrestre, que paralelo mide máis?, que meridiano mide máis? Razoa as túas respostas.

33. Busca as coordenadas xeográficas do lugar no que vives.

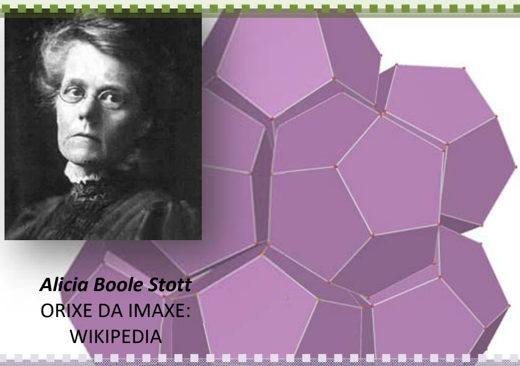


MAPA DE FUSOS HORARIOS DE 30 MARZO 2014 (ORIXE DA IMAXE: WIKIPEDIA)

CURIOSIDADES. REVISTA


Arquímedes pensativo e ***Cicerón e os maxistrados descubrindo a tumba de Arquímedes en Siracusa***
ORIXE DAS IMAXES: WIKIPEDIA

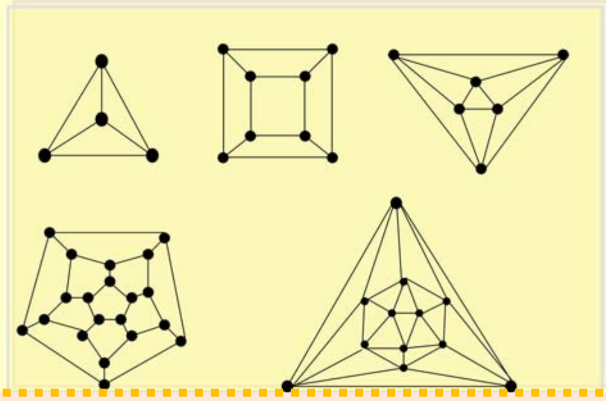
Arquímedes (287 a. C.- 212 a. C.) Matemático, enxeñeiro, físico, realizou múltiples aportacións á ciencia. Entre outras e como estudaches neste tema, a demostración das fórmulas da área e o volume dunha esfera. Dise que resultaron os seus descubrimentos favoritos. Na súa tumba gravouse un cilindro cunha esfera inscrita como homenaxe.



Alicia Boole Stott
ORIXE DA IMAXE: WIKIPEDIA

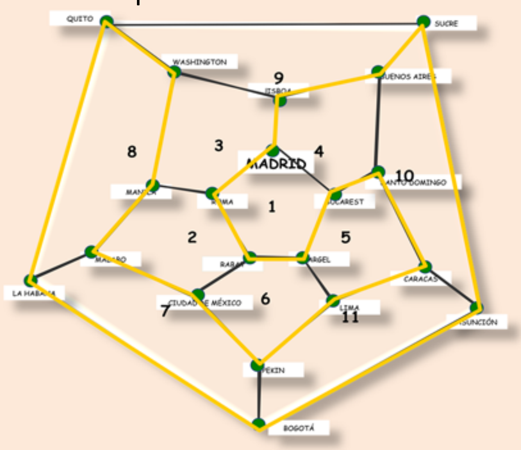
Alicia Boole Stott, (1860 - 1940) filla do matemático George Boole, destacou pola súa marabillosa capacidade para visualizar a cuarta dimensión. Calculou e representou as seccións dos chamados ***politopos regulares de dimensión 4***, obxectos xeométricos equivalentes, nun espazo de catro dimensións, aos polígonos regulares no plano ou aos poliedros regulares no espazo.

Os poliedros regulares poden ser "aplastados" sobre un plano, elixindo unha cara e proxectando os lados do poliedro desde un punto por enriba do centro desta cara. A figura que se obtén chámase diagrama de Schlegel. Estes diagramas son exemplos de grafos. Gran parte das propiedades dos poliedros consérvanse neles e axudan a que moitos problemas se resolvan con facilidade.



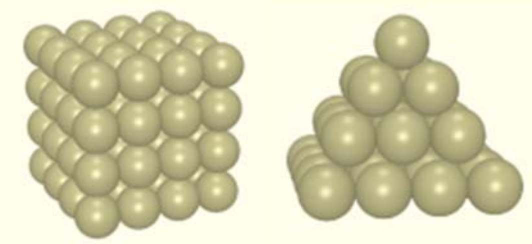
En 1859 Hamilton ideou o seguinte xogo: Dado un dodecaedro, se en cada un dos seus vértices se pon o nome dunha cidade, é posible atopar un circuíto pechado a través das arestas do dodecaedro que pase unha soa vez por cada cidade?

Grazas ao grafo do dodecaedro, é moi sinxelo resolver o problema.



Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

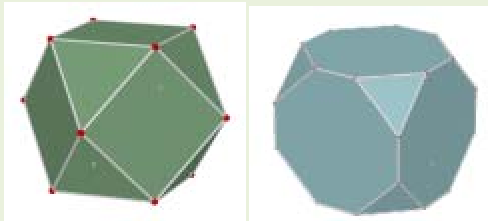
O matemático inglés **Thomas Harriot** (1560-1621), propuxo o problema do ***empaquetamento de esferas*** que estriba en atopar a forma de apilar esferas do mesmo radio de modo que o espazo comprendido entre elas sexa mínimo. O astrónomo alemán **Johannes Kepler** (1571-1630) resolveuno, chegando á conclusión de que a mellor colocación era a que entón se facía espontaneamente nos barcos para apilar as balas de canón ou a que utilizan os tendeiros para apilar as laranxas nos postos do mercado.



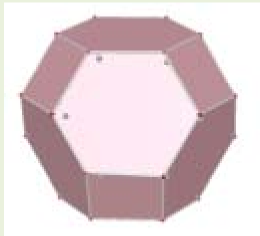
Un anel de tetraedros ou caleidociclo é un anel tridimensional composto por tetraedros unidos polas súas arestas. Poden xirar sobre si mesmos arredor do seu centro infinitas veces sen romper nin deformárense.

Entre os materiais atoparás un modelopara construír un coas imáxes de algunhas mulleres matemáticas célebres.

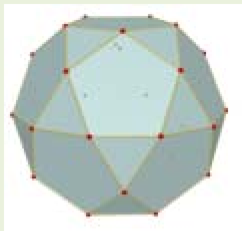
Os ***sólidos arquimedianos*** ou **sólidos de Arquímedes** son un grupo de poliedros convexos cuxas caras son polígonos regulares de dous ou máis tipos. En todos os sólidos de Arquímedes concorre o mesmo número de caras en cada vértice e coas mesmas formas. Algúns deles obtéñense truncando os sólidos platónicos (poliedros regulares).



Cubos truncados

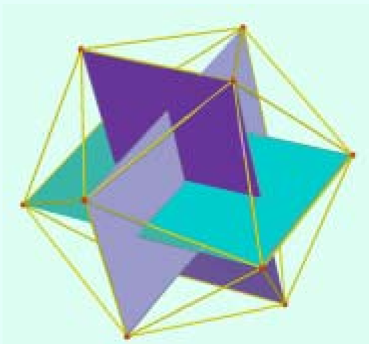


Octaedro truncado



Dodecaedro truncado

Os vértices do icosaedro determinan 3 rectángulos áureos perpendiculares dous a dous. No icosaedro podemos atopar un total de 15 rectángulos áureos. Cada un deles ten dous lados paralelos que son arestas opostas do poliedro.



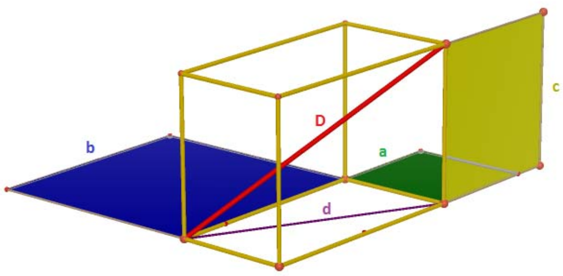
Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

TEOREMA DE PITÁGORAS NO ESPAZO

Se un ortoedro ten arestas de lonxitudes *a*, *b*, *c*, segundo o teorema de Pitágoras, no espazo, a suma dos cadrados das arestas, coincide co cadrado da diagonal, *D*, do ortoedro:

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Como consecuencia, a suma das áreas dos cadrados de lados iguais ás arestas, coincide coa área do cadrado que ten como lado a diagonal do ortoedro.

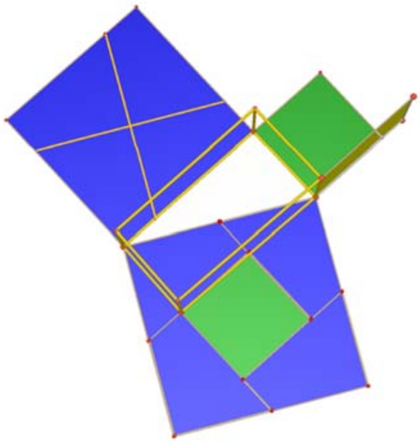


Construiremos un crebacabezas, baseado na demostración que *Perigal* ideou para demostrar o teorema de Pitágoras no plano. Hai que aplicar dúas veces o seu método e atoparemos as pezas clave que demostran o teorema no espazo.

Ao trazar a diagonal *d* da base, queda dividida en dous triángulos rectángulos de catetos *a* e *b*.

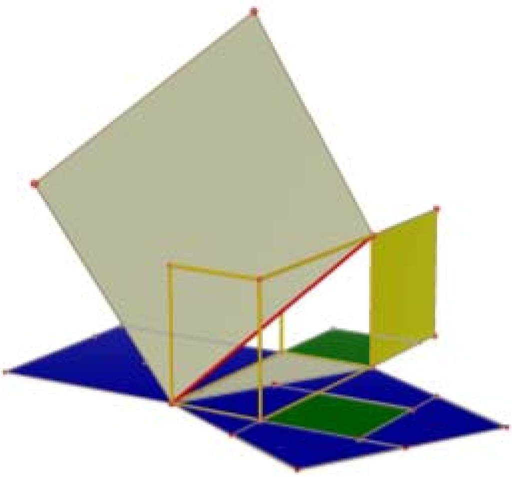
Construímos o cadrado sobre a súa hipotenusa e as pezas de *Perigal* que demostran o teorema de Pitágoras nun destes triángulos.

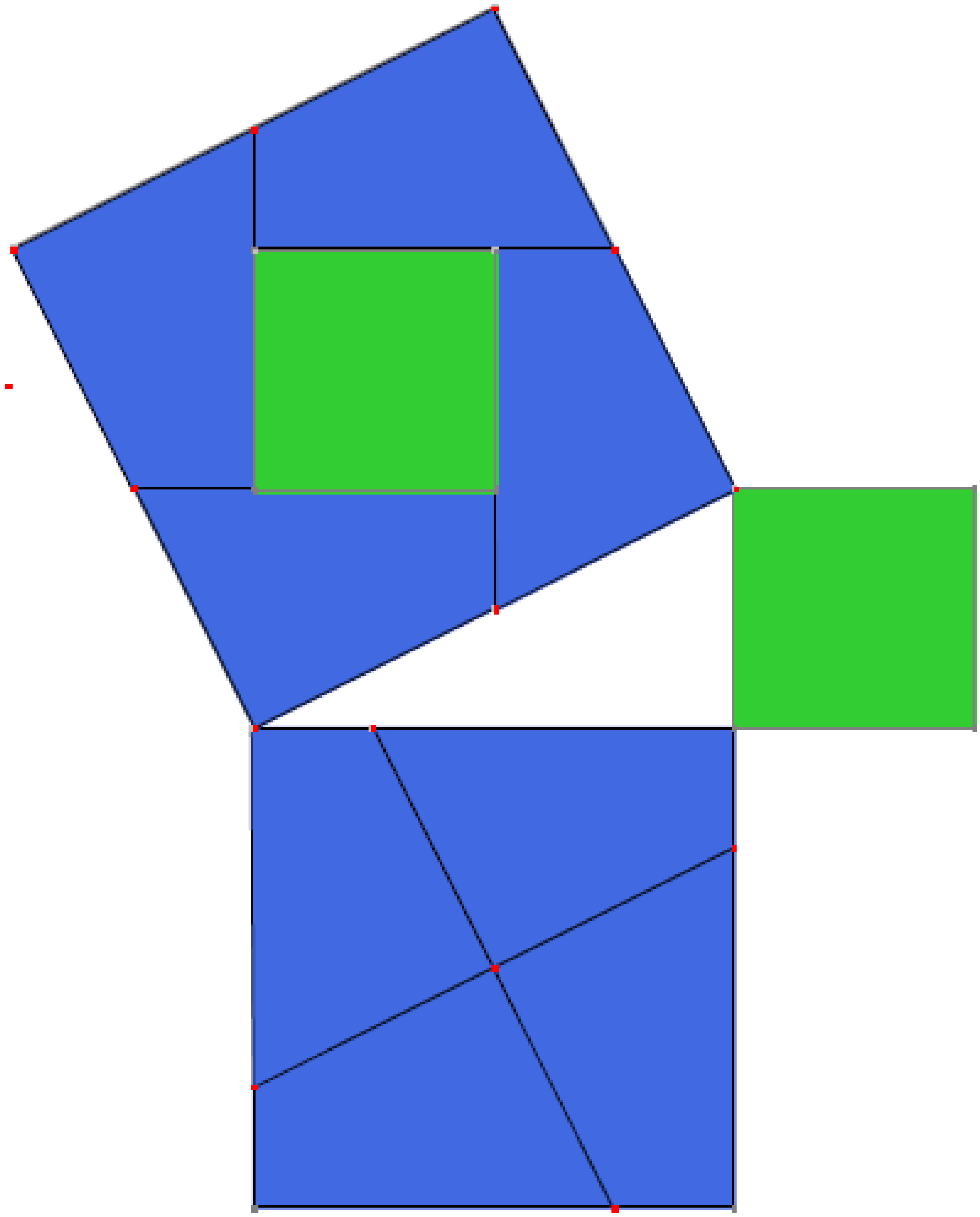
Para iso no cadrado construído sobre o cateto maior (na nosa figura, *b* de cor azul) e, polo seu centro, trazamos dous segmentos un paralelo e outro perpendicular á hipotenusa, de modo que ambos os dous corten aos dous lados do cadrado. O cadrado queda dividido en catro pezas exactamente iguais que xunto co cadrado de lado *a*, recobren o cadrado de lado *d*.



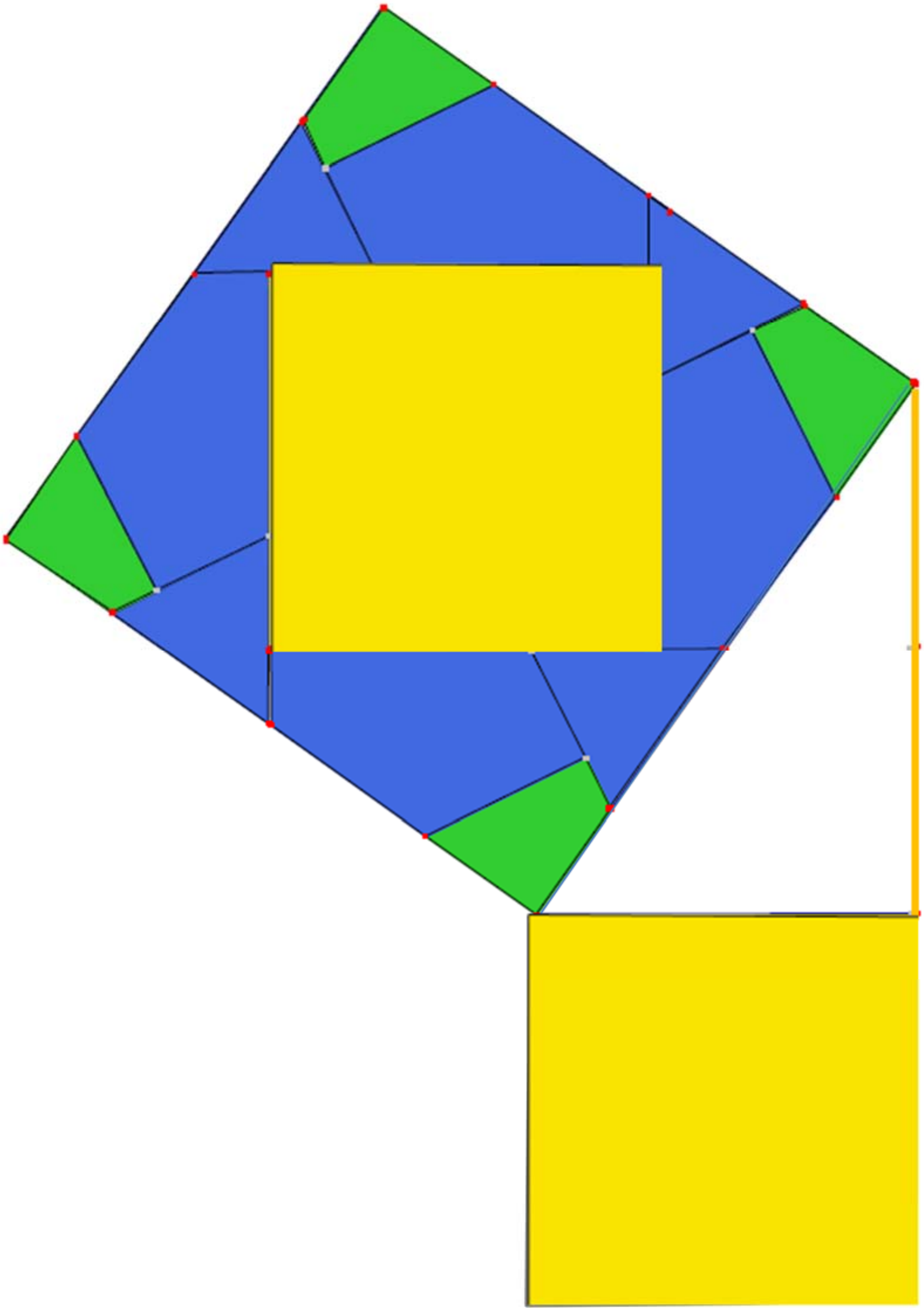
Agora hai que fixarse no triángulo rectángulo de catetos *c, d* e cuxa hipotenusa é *D* e repetir o proceso anterior, iso si utilizando o cadrado de lado *d* recuberto coas pezas azuis e o cadrado verde.

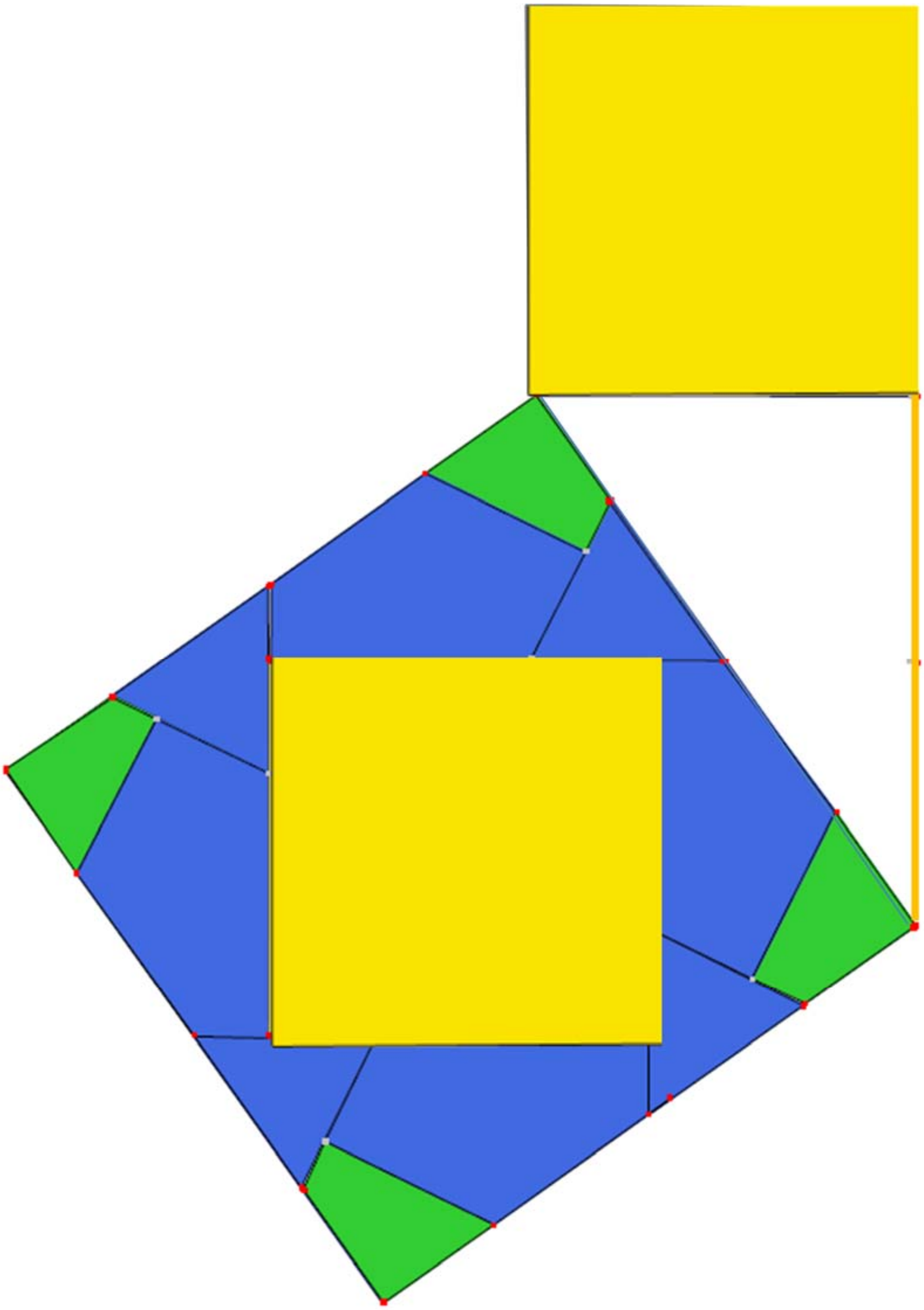
Nas páxinas seguintes encontrarás as láminas que che permiten construír a túa propia demostración. Unicamente tes que recortar as dúas últimas, pegalas unha contra a outra e construír un ortoedro con arame que teña como dimensións as lonxitudes dos lados dos cadrados verde, azul e amarelo.





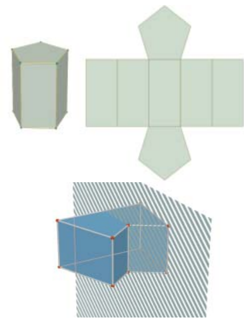
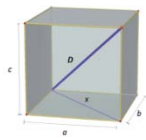
Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF



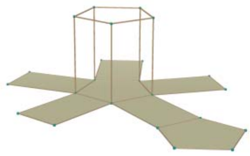
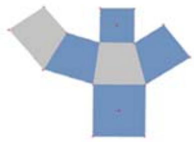
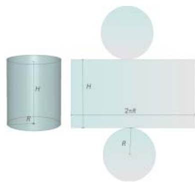
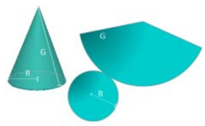
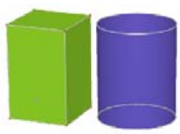


Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

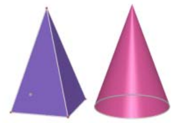
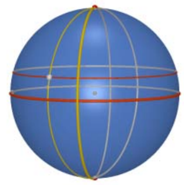
RESUMO

Concepto	Definición	*Exemplos*
Poliedro. Elementos dun poliedro. Tipos de poliedros	Un poliedro é unha rexión pechada do espazo limitada por polígonos. Os seus principais elementos son: caras, arestas, vértices, ángulos diedros e poliedros, así como as diagonais. Os poliedros poden ser cóncavos e convexos dependendo de que algunha das súas caras sexa un polígono cóncavo ou ningunha o sexa. Entre os poliedros destacan poliedros regulares, prismas e pirámides.	
Teorema de Euler	En todo poliedro convexo o número de caras máis o número de vértices coincide co número de arestas máis 2.	C + V = A + 2
Poliedros regulares	Un poliedro regular é un poliedro que cumpre que todas as súas caras son polígonos regulares iguais e que os seus ángulos poliedros son iguais. Hai cinco poliedros regulares: tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo e dodecaedro.	
Prismas	Un prisma é un poliedro determinado por dúas caras paralelas que son polígonos iguais e tantas caras laterais, que son paralelogramos, como lados teñen as bases. Poden ser cóncavos ou convexos; rectos ou oblicuos, regulares ou irregulares; triangulares, cuadrangulares, pentagonais… Destacan os paralelepípedos que son prismas con todas as súas caras paralelogramos e dentro destes os ortoedros que son paralelepípedos con todas as súas caras rectangulares.	
Teorema de Pitágoras no espazo	A diagonal dun ortoedro é a raíz cadrada da suma dos cadrados das súas arestas.	
Pirámides	Unha pirámide é un poliedro determinado por unha cara poligonal denominada base e tantas caras triangulares cun vértice común, como lados ten a base. Poden ser cóncavas ou convexas; rectas ou oblicuas, regulares ou irregulares; triangulares, cuadrangulares, pentagonais…	
Tronco de pirámide	Un tronco de pirámide é o poliedro resultante ao cortar unha pirámide por un plano paralelo á base. As bases son polígonos semellantes e as caras laterais son trapecios.	

Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

Corpos de revolución	Os corpos de revolución son corpos xeométricos que se obteñen ao facer xirar unha liña arredor dunha recta fixa denominada *eixe*. A liña que xira chámase *xeratriz*. Entre os corpos de revolución destacan cilindros, conos e esferas.	
Áreas lateral e total dun prisma	$A_{Lateral} = Perímetro_{Base} \cdot Altura$ $A_{total} = Área_{Lateral} + 2Área_{Base}$	
Áreas lateral e total dunha pirámide regular	$A_{Lateral} = \dfrac{Perímetro_{Base} \cdot Apotema_{pirámide}}{2}$ $A_{total} = Área_{\ Lateral} + Área_{\ Base}$	
Áreas lateral e total dun tronco de pirámide regular	$A_{Lateral} = \dfrac{Perímetro_{Base} \cdot Apotema_{tronco}}{2}$ $A_{total} = Área_{Lateral} + Área_{Base\ 1} + Área_{Base\ 2}$	
Áreas lateral e total dun cilindro	$A_{Lateral} = 2\,\pi\,R\,H$ $A_{total} = 2\,\pi\,R\,H + 2\,\pi\,R^2$	
Áreas lateral e total dun cono	$A_{Lateral} = \pi\,R\,G$ $A_{total} = \pi\,R\,G + \pi\,R^2$	
Áreas lateral e total dun tronco de cono	$A_{Lateral} = (\pi\ R + \pi\ r)\ G$ $A_{Total} = A_{Lateral} + \pi R^2 + \pi r^2$	
Área total dunha esfera	$A_{total} = 4\,\pi\,R^2$	
Volume dun prisma e dun cilindro	$Volume = Área_{\ base} \cdot Altura$	

Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

Volume dunha pirámide e dun cono	$$Volume = \frac{Área_{\ base} \cdot Altura}{3}$$	
Volume dunha esfera	$$Volume = \frac{4}{3}\pi R^3$$	
Coordenadas xeográficas	**Latitude**: Distancia do punto xeográfico ao Ecuador medida sobre o meridiano que pasa polo punto. **Lonxitude:** Distancia do punto xeográfico ao meridiano cero ou de Greenwich, medida sobre o paralelo que pasa polo punto.	
Fusos horarios	Cada **fuso horario** é unha zona do globo terráqueo comprendida entre dous meridianos que se diferencian en 15º de lonxitude.	

Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Ángulos poliedros. Paralelismo e perpendicularidade. Poliedros: elementos e tipos

1. Se estamos nunha habitación sen columnas, atendendo ao chan e ás súas catro paredes, cantos ángulos diedros se forman?

2. Dobra pola metade unha folla de papel, constrúe un ángulo diedro e traza o seu rectilíneo. Poderías medir a amplitude de diferentes ángulos diedros mediante este rectilíneo?

3. Determina a amplitude dos ángulos diedros que forman as caras laterais dun poliedro que é un prisma recto de base un octógono regular.

4. Dúas caras dun triedro miden 60º e 118º, entre que valores pode oscilar a outra?

5. Pódese formar un ángulo poliedro cun ángulo dun triángulo equilátero, dous ángulos dun rectángulo e un dun pentágono regular?

6. Poderá existir un poliedro regular cuxas caras sexan hexagonais? Razoa a resposta.

7. Cantas diagonais podes trazar nun cubo? E nun octaedro?

8. Podes atopar dúas arestas paralelas nun tetraedro? E en cada un dos restantes poliedros regulares?

9. Prolonga unha parella de arestas nunha pirámide pentagonal, de modo que se obteñan rectas non coplanarias.

10. Debuxa un prisma regular de base cadrada e sinala: a) dúas arestas que sexan paralelas, b) dúas arestas que sexan perpendiculares e coplanarias, c) dúas arestas perpendiculares e non coplanarias, d) dúas caras paralelas, e) dúas caras perpendiculares.

11. Se un poliedro convexo ten 16 vértices e 24 arestas, cantas caras ten? Podería ser unha pirámide? E un prisma?

12. Con 12 variñas de 5 cm de longo cada unha, usando todas as variñas que poliedros regulares se poden construír?

13. Dun prisma sabemos que o número de vértices é 16 e que o número de arestas é 24, cantas caras ten?

14. Clasifica os seguintes corpos xeométricos e indica, cando sexan poliedros, o número de vértices, caras e arestas que teñen. Cales cumpren o teorema de Euler?

15. Describe a diferenza entre un prisma recto e un prisma oblicuo. É suficiente que un paralelepípedo teña dúas caras paralelas rectangulares para que sexa un ortoedro?

Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

Teorema de Pitágoras no espazo

16. Debuxa un paralelepípedo cuxas arestas midan 4 cm, 5 cm e 6 cm que non sexa un ortoedro. Debuxa tamén o seu desenvolvemento.

17. Se o paralelepípedo anterior fose un ortoedro, canto mediría a súa diagonal?

18. Un vaso de 12 cm de altura ten forma de tronco de cono no que os radios das bases son de 5 e 4 cm. Canto medirá como mínimo unha culleriña para que sobresaia do vaso polo menos 2 cm?

19. É posible gardar nunha caixa con forma de ortoedro de arestas 4 cm, 3 cm e 12 cm un bolígrafo de 13 cm de lonxitude?

20. Calcula a diagonal dun prisma recto de base cadrada sabendo que o lado da base mide 6 cm e a altura do prisma 8 cm.

21. Se un ascensor mide 1 m de ancho, 1.5 m de longo e 2.2 m de altura, é posible introducir nel unha escaleira de 3 m de altura?

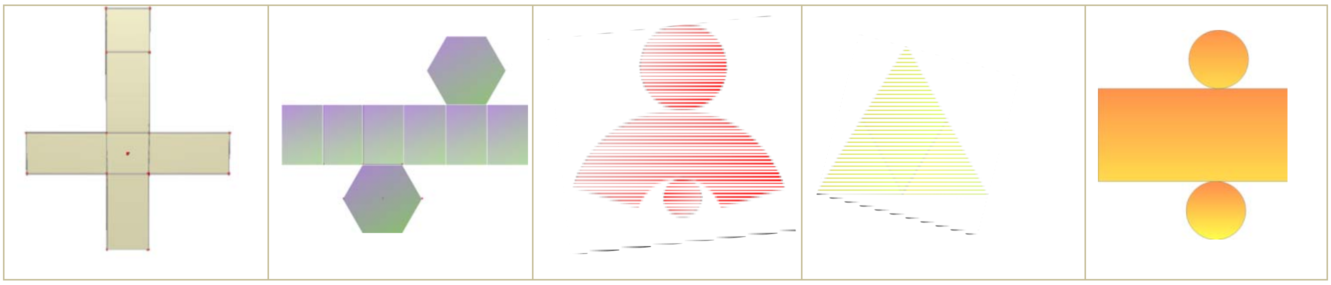
22. Cal é a maior distancia que se pode medir en liña recta nunha habitación que ten 6 m de ancho, 8 m de longo e 4 metros de altura?

23. Calcula a lonxitude da aresta dun cubo sabendo que a súa diagonal mide 3.46 cm.

24. Calcula a distancia máxima entre dous puntos dun tronco de cono cuxas bases teñen radios 5 cm e 2 cm, e altura 10 cm.

Área lateral, total e volume de corpos xeométricos

25. Identifica a que corpo xeométrico pertencen os seguintes desenvolvementos:



26. Un prisma de 8 dm de altura ten como base un triángulo rectángulo de catetos 3 dm e 4 dm. Calcula as áreas lateral e total do prisma.

27. Debuxa un prisma hexagonal regular que teña 4 cm de aresta basal e 1 dm de altura e calcula as áreas da base e total.

28. Un prisma pentagonal regular de 12 cm de altura ten unha base de 30 cm^2 de área. Calcula o seu volume.

29. Calcula a área total dun ortoedro de dimensións 3.5 dm, 8.2 dm e 75 cm.

30. Calcula a superficie total e o volume dun cilindro que ten 8 m de altura e 5 cm de radio da base.

31. Calcula a área total dunha esfera de 5 cm de radio.

Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

32. Calcula a apotema dunha pirámide regular sabendo que a súa área lateral é de 120 m^2 e a súa base é un hexágono de 5 m de lado.

33. Calcula a apotema dunha pirámide hexagonal regular sabendo que o perímetro da base é de 32 dm e a altura da pirámide é de 4 dm. Calcula tamén a área total e o volume desta pirámide.

34. Un triángulo rectángulo de catetos 12 cm e 5 cm xira arredor dun dos seus catetos xerando un cono. Calcula a área lateral, a área total e o volume.

35. Tres bólas de metal de radios 12 dm, 0.3 m e 4 m fúndense nunha soa, cal será o diámetro da esfera resultante?

36. Cal é a capacidade dun pozo cilíndrico de 1.20 m de diámetro e 20 metros de profundidade?

37. Canto cartón necesitaremos para construír unha pirámide cuadrangular regular se queremos que o lado da base mida 10 cm e que a súa altura sexa de 25 cm?

38. Calcula o volume dun cilindro que ten 2 cm de radio da base e a mesma altura que un prisma cuxa base é un cadrado de 4 cm de lado e 800 cm^3 de volume.

39. Cal é a área da base dun cilindro de 1.20 m de alto e 248 dm^3 de volume?

40. A auga dun manancial condúcese ata uns depósitos cilíndricos que miden 12 m de radio da base e 20 m de altura. Despois embotéllase en bidóns de 2.5 litros. Cantos envases se enchen con cada depósito?

41. Calcula a cantidade de cartolina necesaria para construír un anel de 10 tetraedros cada un dos cales ten 2 cm de aresta.

42. Ao facer o desenvolvemento dun prisma triangular regular de 8 dm de altura, resultou un rectángulo de 1 metro de diagonal como superficie lateral. Calcula a área total.

43. Determina a superficie mínima de papel necesaria para envolver un prisma hexagonal regular de 1 m de lado da base e 2 m de altura.

44. O Concello de Madrid colocou unhas xardineiras de pedra nas súas rúas que teñen forma de prisma hexagonal regular. A cavidade interior, onde se deposita a terra, ten 80 cm de profundidade e o lado do hexágono interior é de 60 cm. Calcula o volume de terra que enchería unha xardineira por completo.

45. Unha habitación ten forma de ortoedro e as súas dimensións son directamente proporcionais aos números 3, 5 e 7. Calcula a área total e o volume se ademais se sabe que a diagonal mide 14.5 m.

46. Un ortoedro ten 1 dm de altura e 6 dm^2 de área total. A súa lonxitude é o dobre da súa anchura, cal é o seu volume?

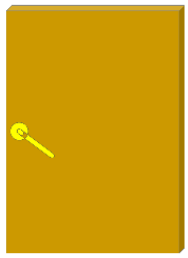
47. Se o volume dun cilindro de 10 cm de altura é de 314 cm^3, calcula o radio da base do cilindro. (Utiliza 3.14 como valor de π).

48. Instalaron na casa de Xoán un depósito de auga de forma cilíndrica. O diámetro da base mide 2 metros e a altura é de 3 metros. a) Calcula o volume do depósito en m^3. (Tomar π=3.14). b) Cantos litros de auga caben no depósito?

49. Un envase dun litro de leite ten forma de prisma, a base é un cadrado que ten 10 cm de lado. a) Cal é, en cm^3, o volume do envase? b) Calcula a altura do envase en cm.

50. Unha circunferencia de lonxitude 2.24 cm xira arredor de un dos seus diámetros xerando unha esfera. Calcula o seu volume. (Tomar π = 3.14).

51. Unha porta mide 2 m de alto, 80 cm de ancho e 4 cm de espesor. O prezo de instalación é de 200 € e cóbrase 6 € por m^2 en concepto de vernizado, ademais do custe da madeira, que é de 300 € cada m^3. A) Calcula o volume de madeira dunha porta. B) O custe da madeira dunha porta máis a súa instalación. C) O custe do vernizado de cada porta, se só se cobra o vernizado das dúas caras principais.

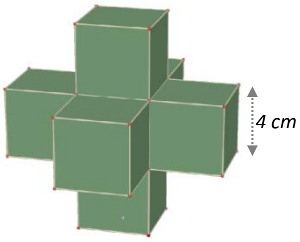


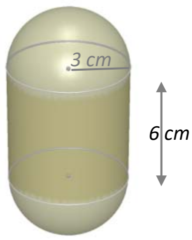
52. A auga contida nun recipiente cónico de 18 cm de altura e 24 cm de diámetro da base vértese nun vaso cilíndrico de 10 cm de diámetro. Ata que altura chegará a auga?

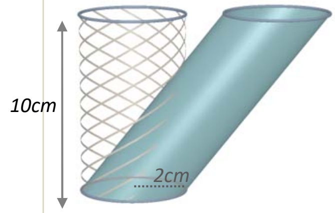
53. Segundo Arquímedes que dimensións ten o cilindro circunscrito a unha esfera de 5 cm de radio que ten a súa mesma área? Calcula esta área.

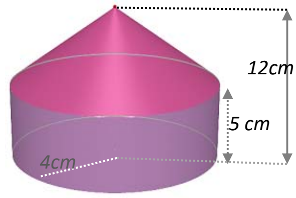
54. Cal é o volume dunha esfera na que unha circunferencia máxima mide 31.40 m?

55. Calcula a área lateral e o volume dos seguintes corpos xeométricos

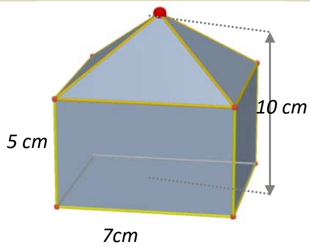




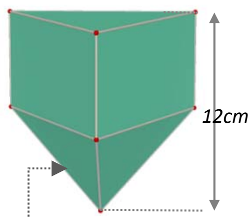




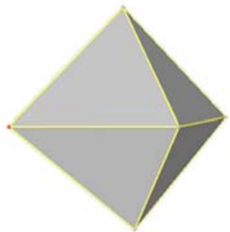
56. Calcula a área lateral e o volume dos seguintes corpos xeométricos



A base é cadrada



Tetraedro de 5 cm de aresta



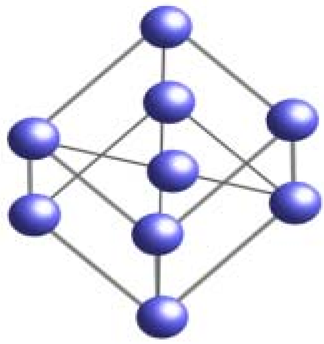
Octaedro de 6 cm de aresta

Pirámides construídas no interior dunha estrutura cúbica de 5 dm de aresta.

57. Na construción dun globo aerostático de radio de 2.5 m emprégase lona que ten un custe de 300 €/m^2. Calcula o importe da lona necesaria para a súa construción.

58. Calcula o radio dunha esfera que ten 33.51 dm^3 de volume.

59. O Atomium é un monumento de Bruxelas que reproduce unha molécula de ferro. Consta de 9 esferas de aceiro de 18 m de diámetro que ocupan os vértices e o centro dunha estrutura cúbica de 103 m de diagonal, realizada con cilindros de 2 metros de diámetro. Se utilizamos unha escala 1:100 e tanto as esferas como os cilindros son macizos, que cantidade de material necesitaremos?

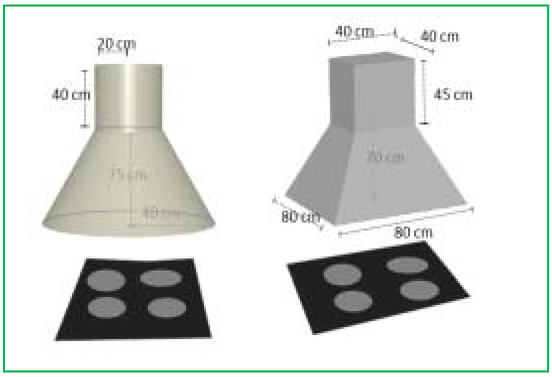


60. Pintouse por dentro e por fóra un depósito sen tapadeira de 8 dm de alto e 3 dm de radio. Tendo en conta que a base só se pode pintar por dentro, e que se utilizou pintura de 2 €/dm^2, canto diñeiro custou en total?

61. Unha piscina mide 20 m de longo, 5 m de ancho e 2 m de alto.

a. Cantos litros de auga son necesarios para enchela?

b. Canto custará recubrir o chan e as paredes con PVC se o prezo é de 20 €/ m^2?

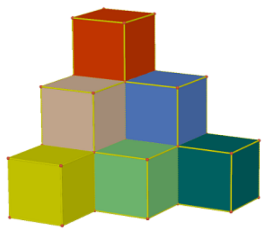


62. Cal das dúas cambotas da figura esquerda ten un custe de aceiro inoxidable menor?

63. Nunha vasilla cilíndrica de 8 dm de diámetro e que contén auga, introdúcese unha bóla. Cal é o seu volume se despois da inmersión sobe 0.3 metros o nivel da auga?

64. O prezo das tellas é de 14.30 €/m^2. Canto custará retellar unha vivenda cuxo tellado ten forma de pirámide cuadrangular regular de 4 metros de altura e 8 metros de lado da base?

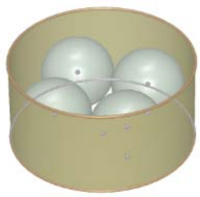
65. Enrólase unha cartolina rectangular de lados 30 cm e 25 cm das dúas formas posibles, facendo coincidir lados opostos. Cal dos dous cilindros resultantes ten maior volume?



66. Cada un dos cubos da figura ten 2 cm de aresta. Cantos hai que engadir para formar un cubo de 216 cm^3 de volume?

67. Un tubo de ensaio ten forma de cilindro aberto na parte superior e rematado por unha semiesfera na inferior. Se o radio da base é de 1.5 cm e a altura total é de 15 cm, calcula cantos centilitros de líquido caben nel.

68. O cristal dun farol ten forma de tronco de cono de 50 cm de altura e bases de radios 20 e 30 cm. Calcula a súa superficie.



69. Un bote cilíndrico de 10 cm de radio e 40 cm de altura ten no seu interior catro pelotas de radio 3.5 cm. Calcula o espazo libre que hai no seu interior.

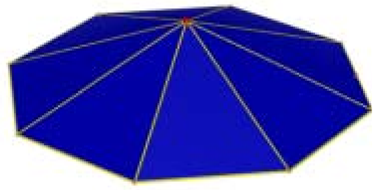
70. Construímos un cono con cartolina recortando un sector circular de 120º e radio 20 cm. Calcula o volume do cono resultante.

Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

71. Un funil cónico de 20 cm de diámetro debe ter 2 litros de capacidade, cal será a súa altura?

72. Nun depósito con forma de cilindro de 25 cm de radio, unha billa verte 15 litros de auga cada minuto. Canto aumentará a altura da auga despois dun cuarto de hora?

73. A lona dun parasol aberto ten forma de pirámide octogonal regular de 1 m de altura e 45 cm de lado da base. Fíxase un mastro ao chan no que se encaixa e o vértice da pirámide queda a unha distancia do chan de 1.80 m. No momento no que os raios de sol son verticais, que espazo de sombra determina?



74. Unha peixeira con forma de prisma recto e base rectangular énchese con 56 litros de auga. Se ten 48 cm de longo e 36 cm de ancho, cal é a súa profundidade?

75. Un rectángulo de 1 m de base e 10 m de altura xira 360° arredor dunha recta paralela á altura, que está situada a 2 m de distancia. Calcula a superficie e o volume do corpo que resulta.

76. Nun xeado de cornete a galleta ten 15 cm de altura e 5 cm de diámetro. Cal é a súa superficie? Se o cornete está completamente cheo de xeado e sobresae unha semiesfera perfecta, cantos gramos de xeado contén?

Fusos horarios

77. Que diferenza de lonxitude existe entre dúas cidades se a diferenza horaria entre ambas as dúas é de 5 horas? Podemos saber se existe diferenza entre as as súas latitudes?

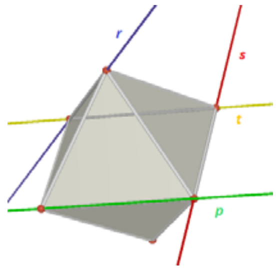
78. Un avión emprende viaxe cara a unha cidade situada ao oeste de Madrid. A viaxe dura 10 horas e o seu rumbo mantén en todo momento a latitude de partida. Se a diferenza de lonxitude entre Madrid e a cidade de chegada é de 45° e o avión despega do aeroporto Adolfo Suárez ás 9 da mañá. A que hora local aterrará na cidade de destino?

79. A distancia entre Londres e Pequín é de 8 149 Km e a distancia entre Londres e São Paulo é de 9 508 Km, porén en Pequín o reloxo marca 7 horas máis que en Londres e en São Paulo 3 horas menos que en Londres. Como explicas esta diferenza?

CIDADE	LONXITUDE	LATITUDE
LONDRES	0º	51º 30´ latitude N
PEQUÍN	116º lonxitude E	40º latitude N
SÃO PAULO	46º 30´ de lonxitude W	23º 30´de latitude S

Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

AUTOAVALIACIÓN



1. Cada unha das rectas *r, s, t e p* pasa por dous vértices consecutivos dun octaedro tal e como se observa na figura. Sinala que afirmación das seguintes é verdadeira:

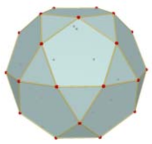
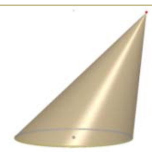
a) As rectas *r e s* son coplanarias e secantes.

b) As rectas *t* e *p* non son coplanarias.

c) As rectas *r* e *p* crúzanse.

d) *r* e *s* conteñen arestas dunha mesma cara do octaedro.

2. Observa os seguintes corpos xeométricos e selecciona a opción verdadeira:

I)	II)	III)	IV)	V)	VI)
					

a) Os corpos I), II), IV) e V) cumpren a relación de Euler. **b)** Hai dous corpos de revolución III) e VI). **c)** Son poliedros regulares II) e IV). **d)** Son cóncavos I) e V).

3. Se a altura dun prisma de base cadrada é 10 cm e o lado da base é 4 cm, a súa área total é:

a) 160 cm^2 **b)** 320 cm^2 **c)** 400 cm^2 **d)** 192 cm^2

4. Un depósito de auga ten forma de prisma hexagonal regular de 5 m de altura e lado da base 1 m. Se só contén as tres cuartas partes da súa capacidade, o número aproximado de litros de auga que hai neles:

a) 13 000 L **b)** 9 750 L **c)** 3 750 L **d)** 3 520 L.

5. O tellado dunha caseta ten forma de pirámide cuadrangular regular de 1.5 m de altura e 80 cm de lado da base. Se se necesitan 15 tellas por metro cadrado para recubrir o tellado, en total utilizaranse:

a) 38 tellas **b)** 76 tellas **c)** 72 tellas **d)** 36 tellas.

6. Unha caixa de dimensións $30 \times 20 \times 15 \quad cm$, está chea de cubos de 1 cm de aresta. Se se utilizan todos para construír un prisma recto de base cadrada de 10 cm de lado, a altura medirá:

a) 55 cm **b)** 65 cm **c)** 75 cm **d)** 90 cm.

7. O radio dunha esfera que ten o mesmo volume que un cono de 5 dm de radio da base e 120 cm de altura é:

a) $5\sqrt{3}$ dm **b)** $\sqrt[3]{75}$ dm **c)** 150 cm **d)** $\sqrt[3]{2\,250}$cm.

8. Distribúense 42.39 litros de disolvente en latas cilíndricas de 15 cm de altura e 3 cm de radio da base. O número de envases necesario é:

a) 100 **b)** 10 **c)** 42 **d)** 45.

Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

9. A área lateral dun tronco de cono que ten 20 cm de altura e bases de radios 30 e 15 cm, é:

a) 2 250 π cm^2 **b)** 900π cm^2 **c)** 1 125π cm^2 **d)** 450 π cm^2

10. A partir das coordenadas xeográficas das cidades A, B, C deduce que afirmación é correcta

CIDADE	LONXITUDE	LATITUDE
A	15º E	15º N
B	15º W	15º N
C	15º E	15º S

a) As cidades A e B teñen a mesma hora e a cidade C dúas horas menos.

b) As cidades A e B teñen a mesma hora e a cidade C dúas horas máis.

c) As cidades A e C teñen a mesma hora e a cidade B dúas horas máis.

d) As cidades A e C teñen a mesma hora e a cidade B dúas horas menos.

Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF