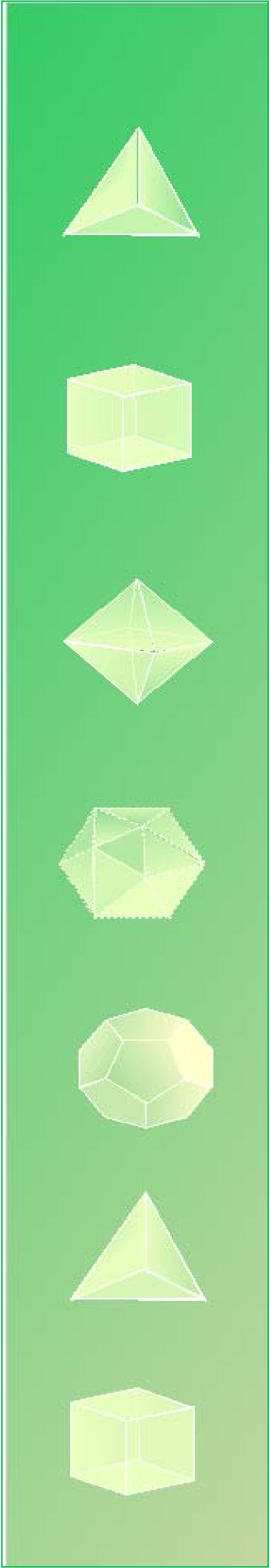


Matemáticas orientadas ás ensinanzas aplicadas

3º A da ESO

Capítulo 10: Funcións e gráficas

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: José Gallegos Fernández

Revisores: Concha Fidalgo e Javier Brihuega

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

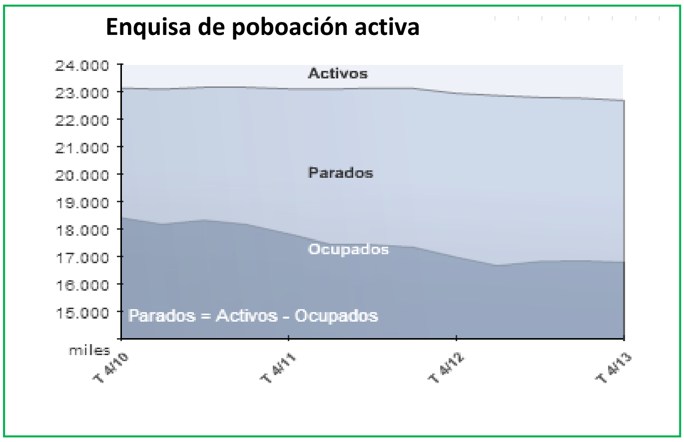
Ilustracións: José Gallegos Fernández

Índice

Resumo

O concepto de función é bastante abstracto, o que fai complicada a súa definición e comprensión. Porén, as súas aplicacións son múltiples e moi útiles, o que as fai moi importantes.

Por exemplo, as FUNCIÓNS serven para poder explicar moitos fenómenos que ocorren en campos tan diversos como a Física, a Economía ou a Socioloxía.



Malia as dificultades, algunhas características que posúen as FUNCIÓNS enténdense doadamente cando se representan graficamente, por resultaren entón moi intuitivas, e iso é suficiente para poder analizar e resolver moitas cuestións. Por exemplo, se observamos a gráfica anterior non é difícil interpretar se o paro subiu ou se baixou no cuarto trimestre entre dous anos consecutivos, ou globalmente ao longo do período completo estudado, ou calcular este incremento/diminución ou estudar en que ano houbo máis persoas ocupadas ou menos persoas activas...

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

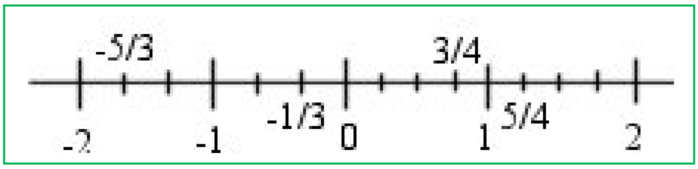
1. SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN NO PLANO

1.1. Eixes de coordenadas ou cartesianos

Recorda que:

Cando queremos representar graficamente un número, normalmente debuxámolo sobre unha recta, chamada *recta numérica*, na cal establecemos un punto de referencia, que é o 0, a partir do que trazamos os números positivos (cara á dereita) e os negativos (cara á esquerda).

Pois ben, se estamos traballando cunha única variable que toma valores numéricos e os queremos representar, farémolo igualmente sobre esta recta.



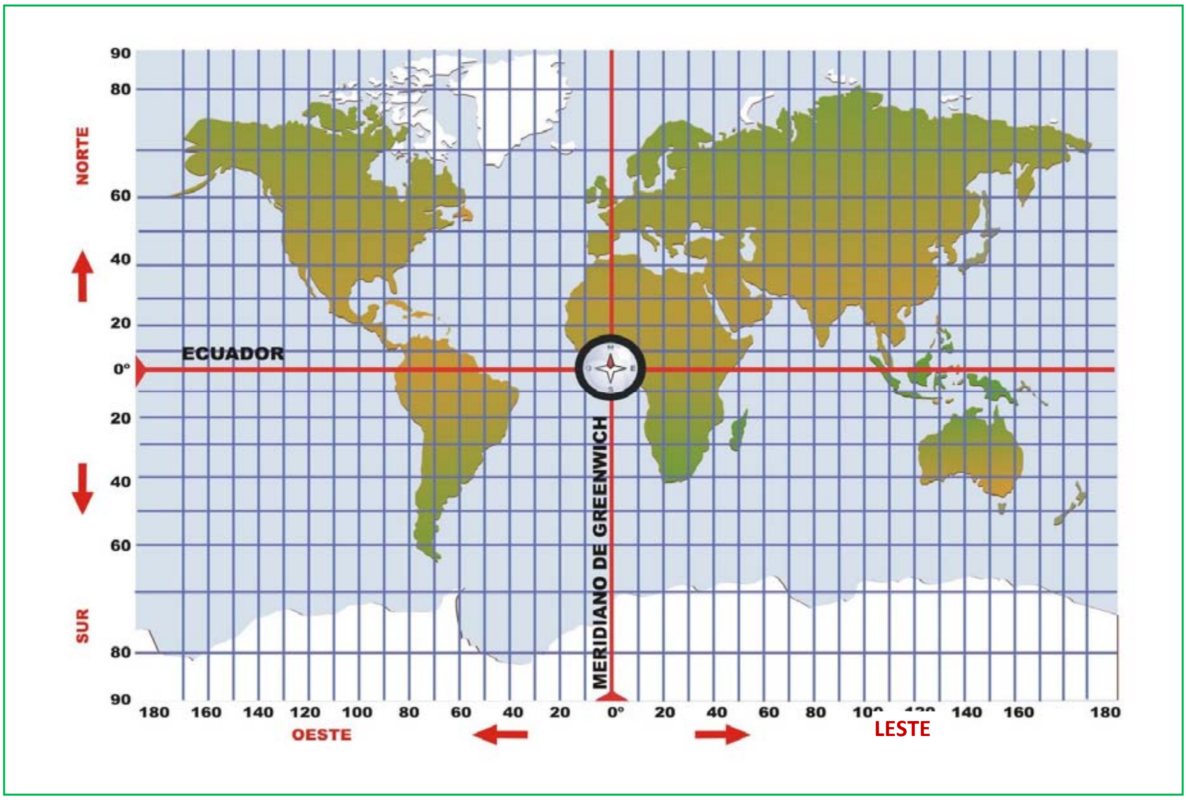
É importante facer notar que, como temos unha única variable, necesitamos unha única recta e, polo tanto, estamos traballando cunha única dimensión (lonxitude).

No plano:

Agora ben, se traballamos con obxectos de dúas dimensións, no plano, necesitamos dous valores para referirnos a eles, xa que están determinados pola súa lonxitude e a súa anchura, que non teñen por que ser iguais e que seguen direccións diferentes.

Exemplo:

- Nun mapa, para poder situar un punto calquera (por exemplo, unha cidade), temos unha referencia a partir da cal tomar as medidas: o paralelo do Ecuador e o meridiano de *Greenwich*. Ambos os dous córtanse nun punto, que é a orixe deste sistema de referencia:

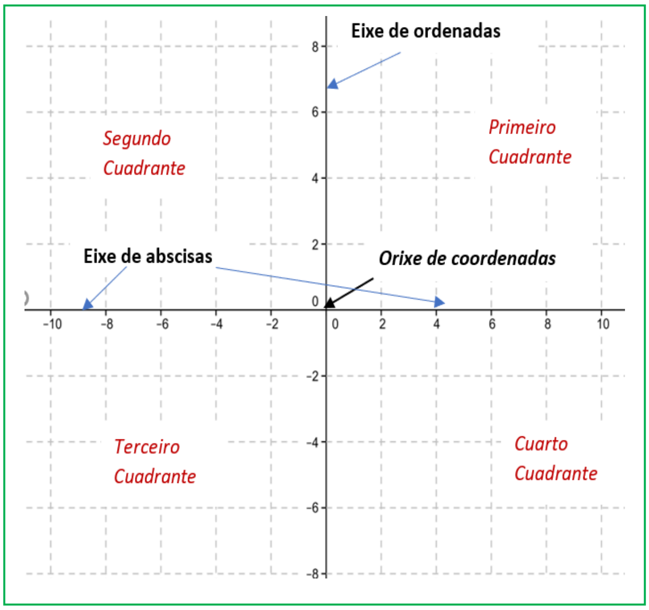


Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

De igual forma, se temos dúas variables *que están relacionadas dalgunha maneira,*que toman valores numéricos e queremos debuxalo, teremos que utilizar dúas rectas ou eixes diferentes(cada un para os datos correspondentes a unha variable) e que sexan secantes, é dicir, córtanse nun punto (sen o cal non se podería establecer a relación entre ambas as dúas).

Se as rectas se cortan de forma perpendicular, é máis sinxelo establecer a conexión entre valores, e as medidas que se representan en cada eixe (agás escalas) pódense corresponder de forma directa coa realidade, polo que sempre se soen debuxar desta forma (formando un ángulo de 90° entre si).

O sistema de representación de puntos no plano máis común está formado por dous eixes perpendiculares, un horizontal chamado ***eixe de abscisas***, onde se representan os valores da variable independente (que toma os valores libremente, e que soe chamarse *"x"*), e outro vertical chamado ***eixe de ordenadas***, onde se representan os valores da variable dependente (porque se calculan a partir da outra, e que soe chamarse *"y"*). Ambos reciben o nome de ***eixes de coordenadas*** ou ***eixes cartesianos*** (en honor do famoso filósofo e matemático francés *Renè Descartes*). O punto onde se cortan ambos os eixes chamase ***orixe de coordenadas*** e, ao cortárense os dous eixes, o plano queda dividido en catro zonas, que se coñecen como cuadrantes, e que se nomean no sentido contrario ás agullas do reloxo empezando desde a parte positiva do eixe de abscisas.



Un conxunto formado pola orixe *O*, os dous eixes de coordenadas e a unidade de medida é un **sistema de referencia cartesiano**.

1.2. Coordenadas cartesianas

Unha vez establecido o sistema de referencia con respecto ao cal poder situar os puntos, para chegar a un en concreto partimos da orixe, "O", percorremos unha determinada cantidade cara á dereita ou a esquerda e logo outra cara arriba ou cara abaixo. Así cada punto queda determinado por un par de números, a medida dos camiños realizados en ambas as direccións, aos que chamamos **coordenadas do punto**.

Exemplo:

- Nun mapa como o do exemplo anterior, un punto queda determinado pola súa *latitude* (distancia ao Ecuador, medida sobre o meridiano que pasa por este punto) e a *lonxitude* (distancia ao Meridiano de *Greenwich*, medida sobre o paralelo que pasa por este punto), chamadas *coordenadas xeográficas*. Por exemplo, a situación de Madrid é (–3.41, 40.24):

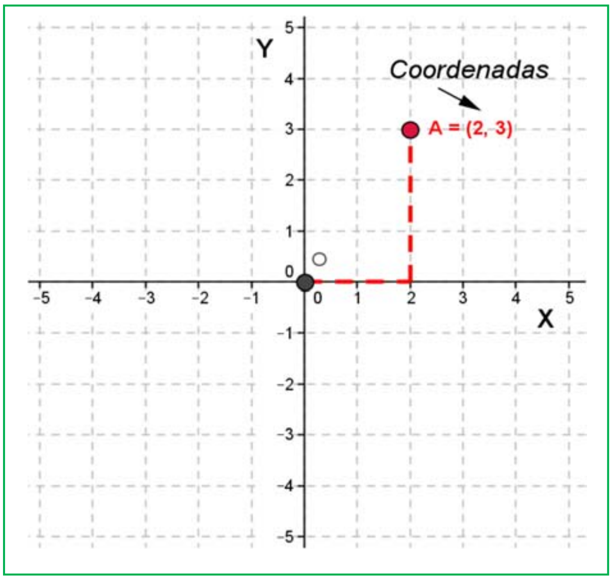
  Lonxitude –3.41 ou 3.41 O, é dicir, hai que trasladarse 3.41 cara ao oeste (esquerda) do meridiano de *Greenwich*.
  Latitude +40.24 ou 40.24 N, é dicir, hai que trasladarse 40.24 cara ao norte (por enriba) do Ecuador.

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

As **coordenadas dun** punto *A* son un par ordenado de números reais **(*x*, *y*)**, sendo "***x***" a primeira coordenada ou **abscisa** (indícanos a distancia á que o punto se encontra do eixe vertical) e "***y***" a segunda coordenada ou **ordenada** (indícanos a distancia á que o punto se encontra do eixe horizontal).

Cando ese valor se toma cara á esquerda ou cara abaixo indicámolo cun número **negativo** e se é cara arriba ou á dereita indicámolo cun **positivo**, da mesma maneira que faciamos ao representar os números na recta.

Desta forma, calquera punto do plano queda totalmente determinado mediante as súas coordenadas e viceversa, a toda parella ordenada de números lle corresponde un punto do plano.

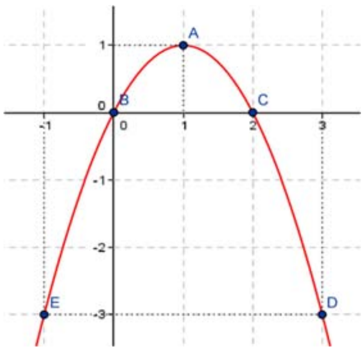


Exemplo:

- No gráfico anterior, o punto A ten coordenadas (2, 3).

Actividades resoltas

- *Na seguinte gráfica, indica as coordenadas dos puntos sinalados:*



***A*(1, 1)**

***B*(0, 0)**

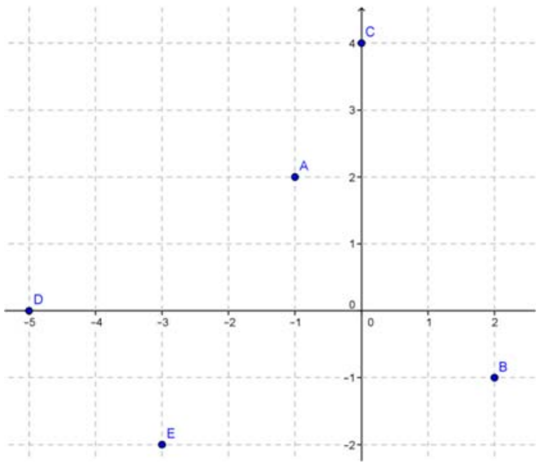
***C*(2, 0)**

***D*(3, –3)**

***E*(–1, –3)**

- *Representa graficamente os puntos*:

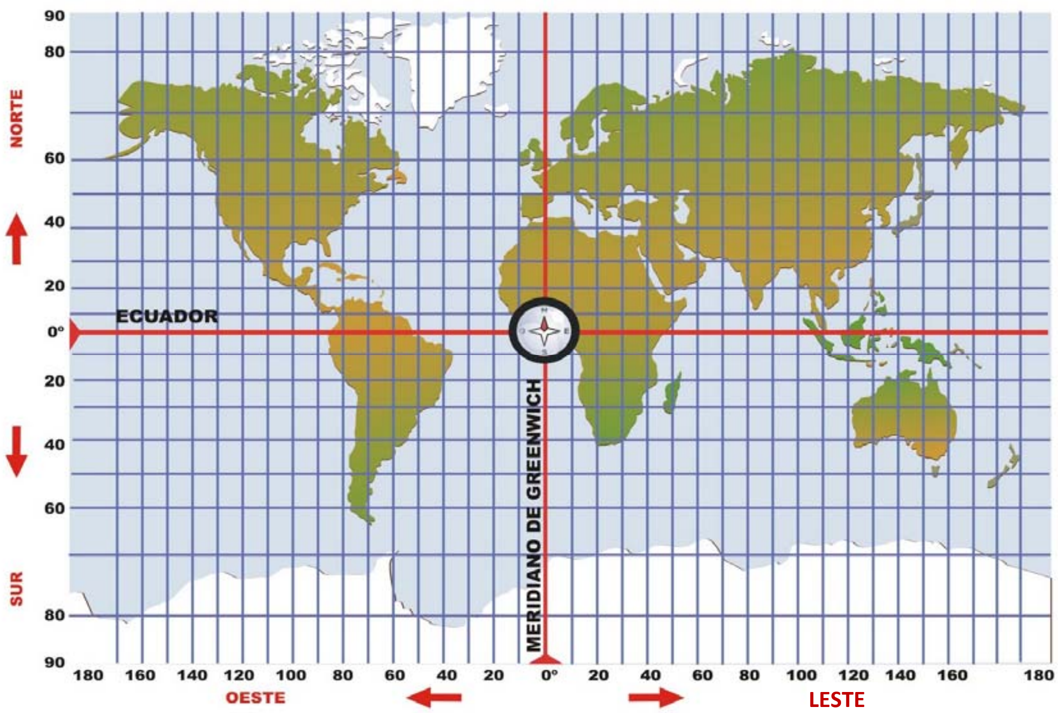
$A(-1, 2);\ B(2, -1);\ C(0, 4);$
$D(-5, 0);\ E(-3, -2)$



Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

Actividades propostas

1. Fíxate no mapa seguinte, localiza os países ou cidades que se piden e indica no teu caderno:



a) Os cuadrantes onde se encontran os seguintes países:

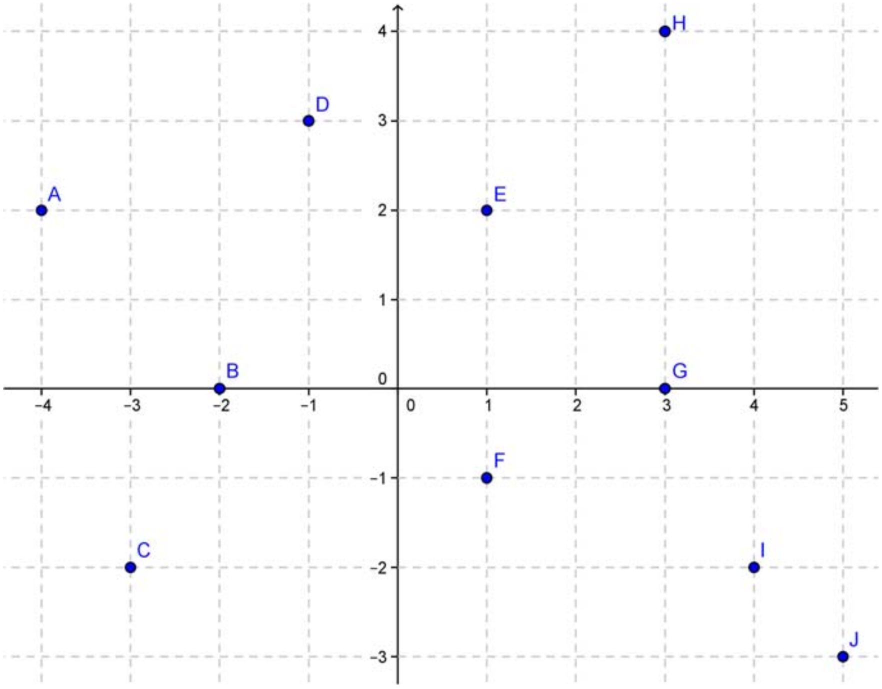
- México:
- Madagascar:
- India:
- Chile:
- España:
- Arxentina:
- Australia:
- Xapón:
- Arabia Saudita:
- Alemaña:
- EEUU:
- Marrocos:

b) As coordenadas (aproximadas) das seguintes cidades:

- Cidade do Cabo:
- Nova York:
- Río de Janeiro:
- Alacante:
- Pequín:
- Rabat:
- Sidney:
- Oviedo:
- Londres:
- Córdoba (México):

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

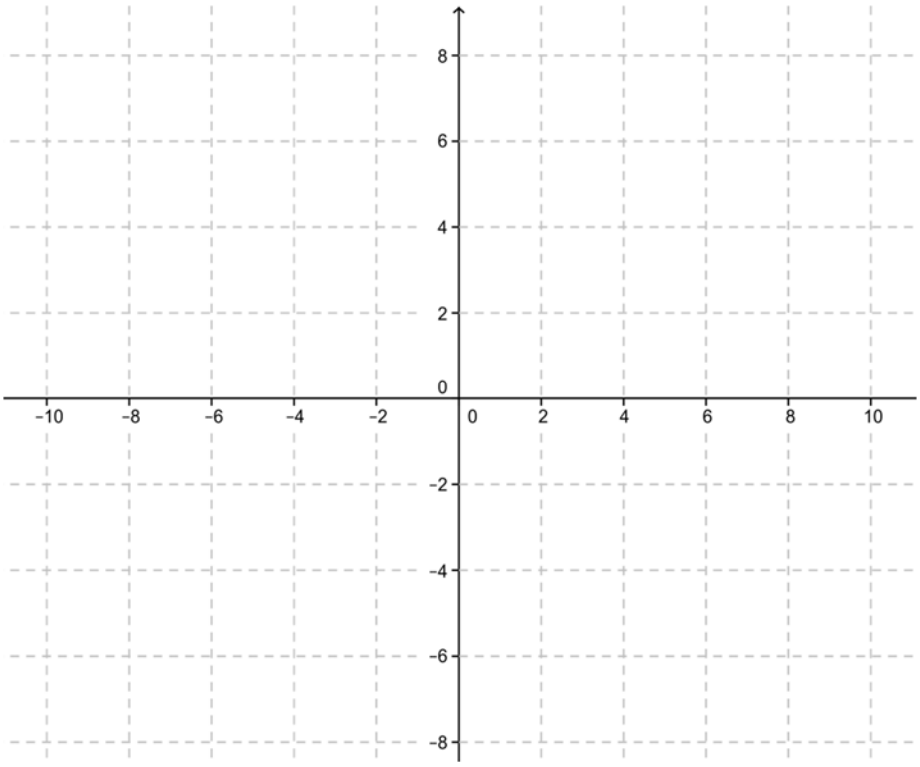
2. Copia no teu caderno e indica as coordenadas de todos os puntos que están sinalados no plano:



3. Representa graficamente no teu caderno os seguintes puntos do plano:

A (0, –2) *B* (–2, 0) *C* (4, 0) *D* (–6, 0) *E* (0, 6) *F* (1, 7) *G* (7, 1) *H* (–4, 8) *I* (–1, –4) *J* (–4, –1)

K (5, –3) *L* (9, 6) *M* (–2, 1) *N* (7, –4) *Ñ* (–3, –3) *O*(0, 0) *P(–2, –1)* *Q*(2, 1) *R*(2, –1) *S*(–2, 2)



Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

2. FUNCIÓNS

2.1. Concepto intuitivo de función

Existen multitude de fenómenos na nosa vida cotiá nos que aparecen relacionadas dúas magnitudes. Por exemplo, o prezo dun billete nun medio de transporte e a distancia ou tempo de duración da viaxe, o prezo dun quilo de froita ou carne e o número de quilos que compramos, a duración dun traxecto e a velocidade á que imos, o número de latexos do corazón nunha unidade de tempo…

Moitas desas relacións réxense por unha lei de proporcionalidade, directa ou inversa, pero hai outras moitas nas que a correspondencia entre ambas as magnitudes é máis complexa.

Unha **función** é unha relación entre dúas magnitudes de forma que a un valor calquera dunha (**variable independente**) lle facemos corresponder, como moito, un único valor da outra (**variable dependente**).

Esta relación funcional pódese establecer, moitas veces, mediante unha expresión matemática ou fórmula, o que nos permitirá traballar de forma cómoda con ela. Outras veces vén dada mediante unha táboa onde aparecen os valores relacionados entre si. En ocasións temos a relación en forma de gráfica… E tamén existen FUNCIÓNS que non se poden escribir mediante unha expresión alxébrica!

Exemplos:

- *Un quilo de tomates custa* 0.59 €/kg. *A función que establece canto debemos pagar en función da cantidade de tomates que levamos é y = f(x) =* 0.59 *x.*

  Nela, ***f*** é o nome que lle poñemos á función e poderiamos chamala usando outras letras (as que se usan máis frecuentemente son "*f*", "*g*" e "*h*"). Entre paréntese vai a variable "***x***" que representa o número de quilos que compramos, e é a variable independente xa que nós eliximos libremente a cantidade que queremos ou precisamos. Por último, a variable "***y***" representa o prezo que debemos pagar, e é a variable dependente xa que "depende" de cantos quilos levamos, é dicir, de "*x*".

  A expresión, *f*(x) que se le "*f* de *x*", sóese usar con moita frecuencia para designar á variable dependente porque:

  1º) nela vese cal é a variable independente e, polo tanto:

  2º) resulta moi cómodo escribir canto nos custaría comprar unha cantidade concreta, por exemplo, 2 kg. Expresaríase "*f* de *2*" e o seu valor é *f*(2) = 0.59·2 *= 1.18 €.*

- *Unha persoa que vai paseando sempre á mesma velocidade, quere percorrer unha rúa recta de* 1 km *nun tempo determinado. A relación entre o tempo que tardará (en segundos) e a velocidade que leva (en metros por segundo) vén dada pola fórmula* $v(t) = \frac{1\,000}{t}$.

  Nela, "***v***" é o nome da función velocidade, 1 000 son os metros que ten que percorrer e "***t***" o tempo que tarda en percorrer este espazo.

- Todos os números decimais teñen a súa parte enteira e a súa parte decimal. Pois ben, todo número real pódese relacionar de forma única co *número enteiro inmediatamente inferior*, chamado a súa "*parte enteira*" e representado $E(x)$. O feito de que este número sexa único fai que nos encontremos perante unha función.
  Por exemplo, a parte enteira de 8.3 é 8: $E(8.3) = 8$; a de –4.2 é –5: $E(-4.2) = -5$...
  Pois ben, esta función, malia a súa sinxela descrición mediante palabras que nos din que debemos facer, non se pode escribir mediante unha fórmula alxébrica.

Actividades propostas

4. Das seguintes relacións entre dúas variables, razoa cales son funcionais e cales non:

a. Idade – altura da persoa ao longo da súa vida.
b. Altura – idade da persoa.
c. Prezo da gasolina – día do mes.
d. Día do mes – prezo da gasolina.
e. Un número e a súa quinta parte.
f. Un número e o seu cadrado.
g. Un número e a súa raíz cadrada.

5. Se hoxe o cambio € a $ está 1 € = 1.37 $, completa no teu caderno a seguinte táboa de equivalencia entre as dúas moedas:

€	2	5	10	27	60
$					

Expresa mediante unha fórmula a relación que existe entre ambas as dúas. Pódese expresar de forma única esta relación? É unha función?
Se realizas o cambio nunha oficina, cóbranche unha pequena comisión fixa por realizar a operación de 1.5 €. Como quedaría/n a fórmula/s neste caso?

6. A ponte *Golden Gate* permite a comunicación entre os dous lados da baía de San Francisco. As súas torres, de 746 pés de altura, están separadas por unha distancia de 4 200 pés aproximadamente. A calzada, que ten unha anchura de 90 pés e se encontra a unha altura de 220 pés sobre o nivel da auga, está suxeita ás torres mediante dous cables, de 3 pés de diámetro, que teñen forma de parábola e que tocan a calzada no centro da ponte.

- Realiza un debuxo onde queden reflectidos os datos máis significativos do problema.
- Determina a relación que existe entre a altura á que se encontra un punto do cable e a distancia da súa proxección vertical ao centro da ponte.
- Aplica a devandita fórmula para calcular a altura dun punto do cable cuxa vertical está a 1 000 pés do centro da ponte.

2.2. Gráfica dunha función

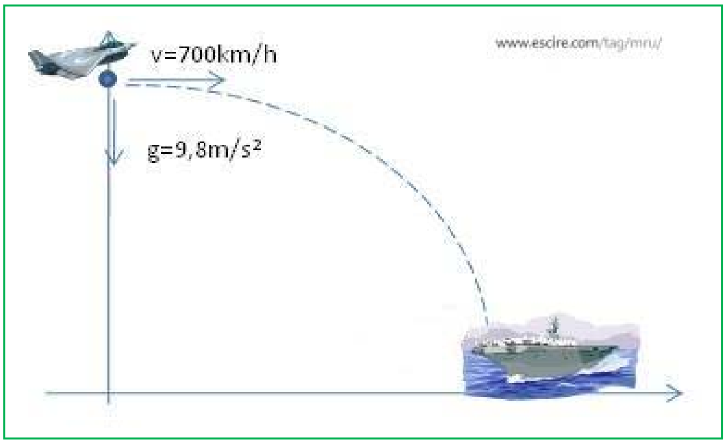
Xa que en toda función temos dous valores que se relacionan de forma única, podemos debuxalos ambos os dous nos eixes cartesianos de forma que, se unimos todos eses puntos, obtemos unha curva que nos permite visualizar a esta función.

Esta representación ten unha serie de limitacións, moitas delas comúns a calquera debuxo que poidamos facer: é aproximada xa que os instrumentos que se utilizan para facelo (regra, compás, lapis…), por moi precisos que sexan (ordenadores), sempre teñen unha marxe de erro; tamén existen fallos de tipo visual ou dos instrumentos de medida; ou moitas veces temos que representar os infinitos puntos do grafo nun espazo finito, o cal é imposible e fai que só poidamos debuxar unha parte do que se pretende, pero non todo.

Malia todos estes inconvenientes, representar graficamente esta serie de puntos relacionados que conforman a función, aínda que sexa de forma aproximada, é importante xa que nos fai moito máis concreto un concepto moi abstracto, ao poder visualizalo: “máis vale unha imaxe que mil palabras”.

Exemplo:

- *A traxectoria que debe seguir un avión para aterrar nun portaavións correspóndese coa representación da función que relaciona a distancia percorrida por el mesmo dependendo do tempo que tarda en percorrela:*

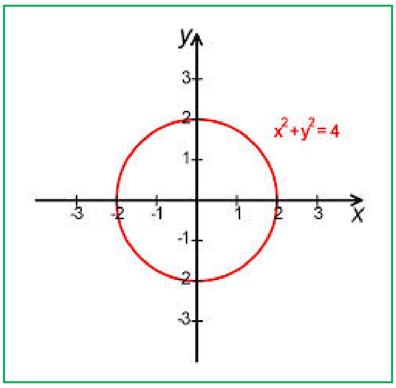


Ademais, unha representación tamén nos permite descubrir se a mesma representa a unha función ou non, xa que no debuxo é fácil interpretar se a un valor da variable independente lle corresponde unicamente un da dependente ou máis de un, propiedade fundamental que define ás FUNCIÓNS.

Exemplo:

- No seguinte debuxo, que corresponde a unha circunferencia, ao valor **0** da variable independente correspóndenlle os valores **2** e –**2** da dependente. Ademais, hai outros moitos valores aos que lles pasa o mesmo, polo que non pode ser a representación dunha función.

  A fórmula que corresponde a esta gráfica é $x^2 + y^2 = 4$ ou, tamén, $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$.



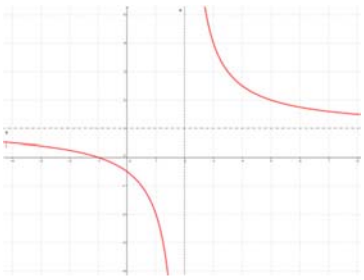
Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

A **gráfica dunha función é a** representación no plano cartesiano de todos os pares ordenados nos que o primeiro valor corresponde a un calquera da variable independente e o segundo ao que se obtén ao transformalo mediante a función:

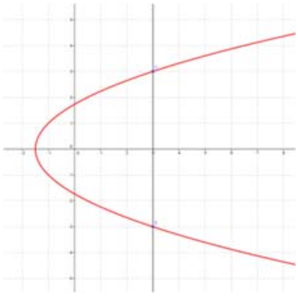
$$\{(x, y) \mid x \in \Re,\ y = f(x)\}$$

Actividades resoltas

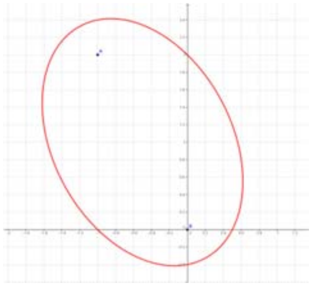
- *Indica cales das seguintes gráficas corresponden a unha función e cales non:*



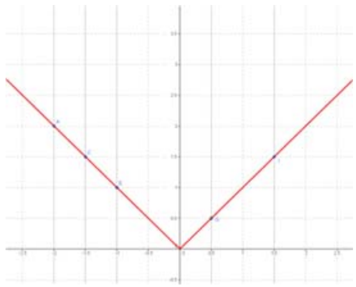
SI



NON



NON



SI

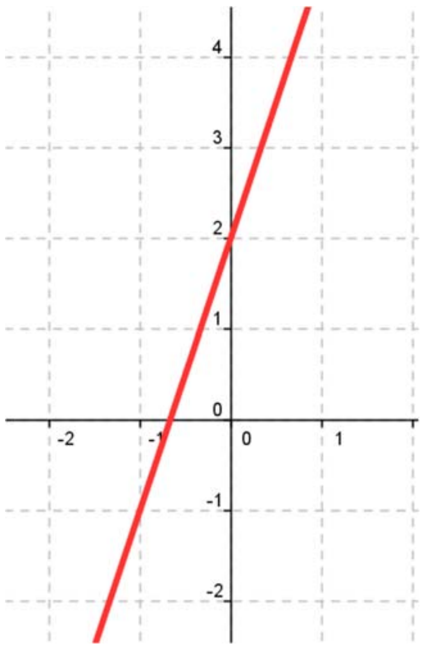
Cal é a clave ou regra para saber, a partir do debuxo, se este corresponde a unha función ou non?

Se trazamos rectas verticais imaxinarias e estas chocan co debuxo, como moito, nun punto, a gráfica corresponde a unha función. No outro caso, non.

- *Debuxa no plano cartesiano os valores da seguinte táboa e conxectura sobre que tipo de figura corresponde á gráfica da función:*

x	–4	–2	0	1	3
f(x)	–10	–4	2	5	11

GRÁFICA



Observamos que os puntos, ao representalos, están aliñados. Polo tanto, o debuxo que corresponde á gráfica da función é unha RECTA.

Neste caso, non é demasiado difícil descubrir que a fórmula que relaciona ambas as variables é:

$$f(x) = 3x + 2$$

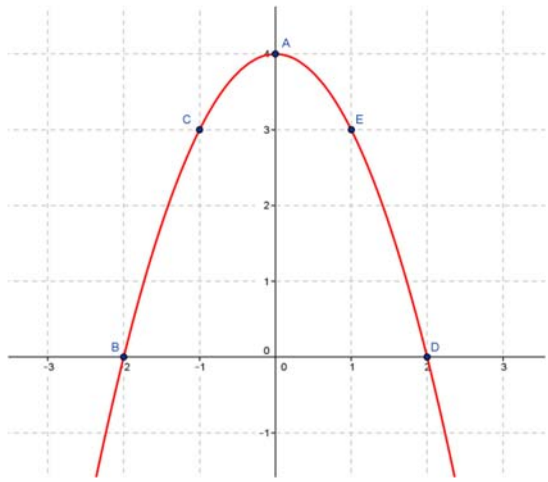
Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

- *Completa a seguinte táboa a partir da fórmula da función $f(x) = -x^2 + 4$, debuxa os puntos nos eixes cartesianos e intenta unilos mediante unha curva:*

x	–2	–1	0	1	2
f(x)	***0***	***3***	***4***	***3***	***0***

A curva obtida recibe o nome de **PARÁBOLA** (que é unha das catro cónicas).

GRÁFICA



Actividades propostas

7. Realiza no teu caderno o debuxo de dúas gráficas, unha que corresponda a unha función e a outra non. Identifica cada unha e explica o porque desta correspondencia.

8. Realiza no teu caderno unha táboa con 10 valores da función *e*(*t*) = 5*t* + 20, represéntaos graficamente e indica a figura que determinan. Se esta función representa o espazo (en quilómetros) que percorre unha persoa que leva andados 20 km e camiña a unha velocidade de 5 km/h, en función do tempo que tarda en percorrelo (en horas), indica cales serían os valores que non tería sentido dar á variable independente e en que se traduce iso na gráfica.

9. Razoa se os valores da seguinte táboa poden corresponder aos dunha función e por que:

x	–13	–7	10	–13	24
f(*x*)	–15	0	14	3	0

10. Nunha folla de papel cuadriculado raia un cadrado de lado un cadradiño. Cal é a súa área? Agora fai o mesmo cun cadrado de lado 2. Continúa tomando cadrados de lados 3, 4, 5… e calcula as súas áreas. Cos resultados completa unha táboa de valores e debuxa a súa gráfica. Ten sentido para valores negativos da variable? Busca unha fórmula para esta función.

11. Para aparcar en zona azul (non residentes) hai unhas tarifas. Representa unha gráfica da función cuxa variable independente sexa o tempo e a variable dependente o prezo (en euros) que hai que pagar.

12. Un fabricante quere construír vasos cilíndricos medidores de volume que teñan de radio da base 4 cm e de altura total do vaso 24 cm. Escribe unha fórmula que indique como varía o volume ao ir variando a altura do líquido. Constrúe unha táboa cos volumes correspondentes ás alturas tomadas de 3 en 3 cm. Escribe tamén unha fórmula que permita obter a altura coñecendo os volumes. A que altura haberá que colocar a marca para ter un decilitro?

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

2.3. Exemplos de FUNCIÓNS: función afín e cuadrática

Durante todos os apartados anteriores fomos analizando distintos exemplos de relacións entre dúas variables que eran función e outros que non. Fixémolo desde o punto de vista gráfico, de táboas de valores e de fórmulas matemáticas.

Nesta sección, simplemente imos analizar uns cantos exemplos de FUNCIÓNS que son bastante sinxelas e que teñen bastantes aplicacións prácticas.

Unha **función afín** é aquela función na que a relación entre as dúas variables vén dada por un polinomio de grao menor ou igual a un:

$$y = f(x) = mx + n.$$

A súa representación gráfica é sempre unha **recta**, a súa **pendente** é o coeficiente líder (m) e indica a inclinación da mesma (se é positivo a recta será **crecente e se** é negativo **decrecente**) e a súa **ordenada na orixe**(n) é o termo independente, que nos proporciona o punto onde a recta corta ao eixe de ordenadas.

Exemplo:

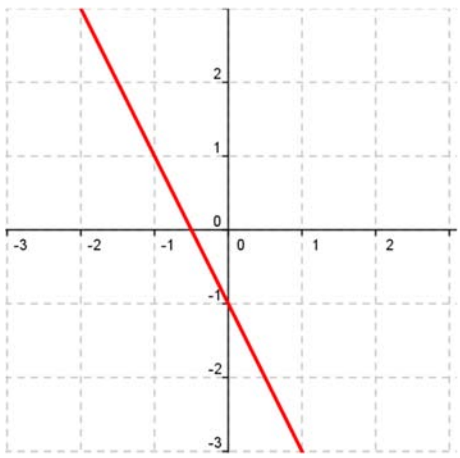
- $y = -\mathbf{3}x - \mathbf{1}$ (polinomio de primeiro grao)

x	–2	–1	–1/2	0	1
$f(x)$	3	1	0	**–1**	**–3**

(–2, 3) (–1, 1) (–1/2, 0) (0, –1) (1, –3)

Pendente: –**3** ⇒ recta decrecente
Ordenada na orixe:–**1** ⇒ **(0, –1)**punto de corte da recta co eixe de ordenadas

GRÁFICA



Como casos particulares de FUNCIÓNS afíns temos:

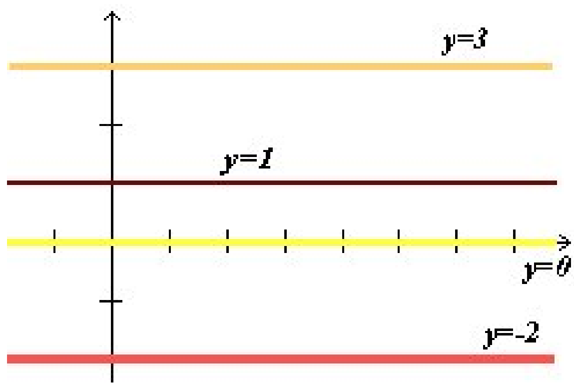
Función constante (recta horizontal): é aquela que sempre toma o mesmo valor para todos os valores da variable independente (a pendente é nula):

$$y = n$$

Exemplo:

- Gráficas de $y = 3$; $y = 1$; $y = 0$; $y = -2$.

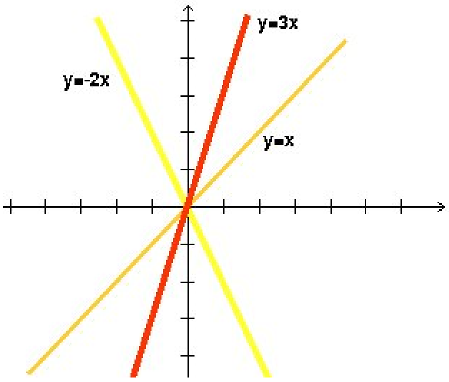
Polo tanto, a recta non ten inclinación, é dicir, é paralela ao eixe de abscisas.



Observa que

A ecuación do eixe de abscisas é $y = 0$.

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández



Función lineal ou de proporcionalidade directa: é aquela que ten ordenada na orixe igual a **0** (pasa pola orixe de coordenadas): $y = mx$

Cada valor de "***y***" conserva unha mesma proporción respecto ao de "***x***":

$y = \mathbf{3}x$ (*y* é o triplo de *x*)

$y = \mathbf{-2}x$ (*y* é o oposto do dobre de *x*)

$y = x$ (**función identidade**: y é igual a *x*)

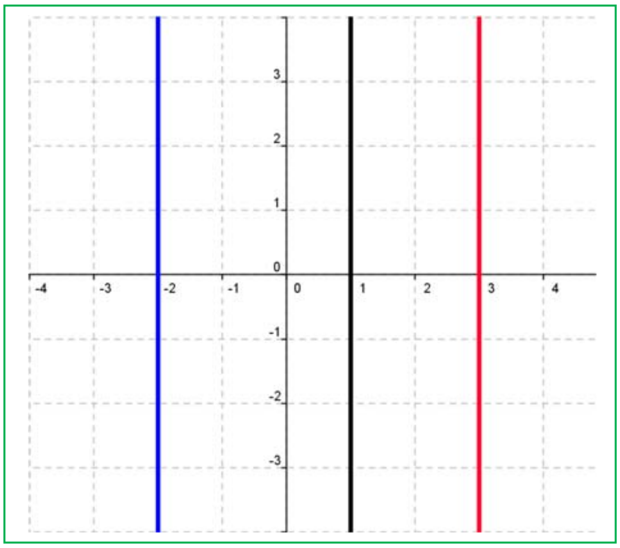
Observa que:

A gráfica de *x* = *a* é unha recta vertical, pero non é unha función porque para o valor da variable independente "*a*", a ordenada toma infinitos valores.

Exemplo:

- Debuxa a gráfica de *x* = 3; *x* = –2; *x* = 1.

A ecuación do eixe de ordenadas é *x* = 0.



Actividades propostas

13. Escribe tres FUNCIÓNS cuxas gráficas sexan tres rectas que pasen pola orixe de coordenadas e as súas pendentes sexan 3, –2, e 1/2 respectivamente.

14. Que ángulo forma co eixe de abscisas a recta e = *x*? E a recta e = –x?

15. Un metro de certa tea custa 1.35 €, canto custan 5 metros? E 10 m? E 12.5 m? Canto custan "*x*" metros de tea? Escribe a fórmula desta situación.

16. Calcula a ecuación e debuxa a gráfica das rectas seguintes:

a) A súa pendente é 2 e a súa ordenada na orixe é 3.
b) Pasa polos puntos *A*(1, 3) e *B*(0, 4).
c) A súa ordenada na orixe é 0 e a súa pendente é 0.
d) Pasa polos puntos *C*(–1, 3) e *D*(–2, 5).
e) Pasa polo punto (*a*, *b*) e ten de pendente *m*.

17. Como son entre si dúas rectas de igual pendente e distinta ordenada na orixe?

18. Debuxa no teu caderno, sen calcular a súa ecuación, as rectas seguintes:

a) De pendente 3 e ordenada na orixe 0.
b) Pasa polos puntos *A*(2, 3) e *B*(4, 1).
c) A súa pendente é 2 e pasa polo punto (4, 5).

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

Unha **función cuadrática** é aquela función na que a relación entre as dúas variables vén dada por un polinomio de grao dous:

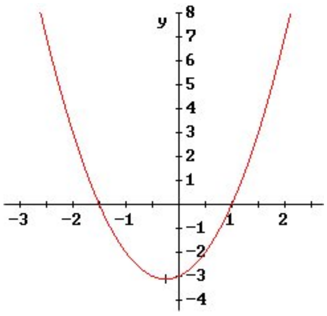
$$y = f(x) = ax^2 + bx + c.$$

A gráfica deste tipo de FUNCIÓNS chámase **parábola**

Se o coeficiente líder ou cuadrático é positivo (***a*** **> 0**), a parábola está aberta cara ao eixe Y positivo (**convexa**).

$y = 2x^2 + x - 3$

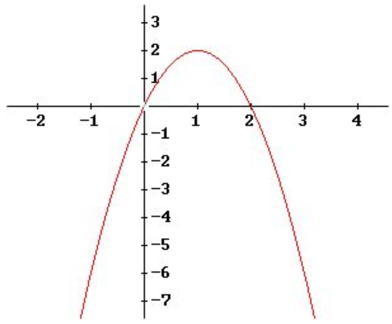
$2 > 0$



Se o coeficiente líder ou cuadrático é negativo (***a*** **< 0**), a parábola está aberta cara ao eixe Y negativo (**cóncava**).

$y = -2x^2 + 4x$

$-2 < 0$



Os outros coeficientes do polinomio afectan á posición que ocupa a parábola respecto aos eixes.

Non podemos dicir que unha función cuadrática é crecente ou decrecente, xa que hai un anaco (**rama**) que medra e outro que diminúe. O punto onde se produce ese cambio chámase **vértice** e é o maior (*máximo*) ou menor (*mínimo*) valor que toma a función. Podemos dicir que este punto é o máis significativo nunha parábola, e por iso é importante saber calculalo. Para iso, dámoslle á variable independente o valor $x = \frac{-b}{2a}$, e substituímolo na función para calcular "***y***". Este valor é fácil de recordar xa que é o mesmo que aparece na fórmula das ecuacións de 2º grao quitándolle a raíz cadrada, e obtense precisamente polo carácter de máximo ou mínimo que ten o vértice.

Exemplo:

GRÁFICA

$$y = \underbrace{x^2 - 6x + 5}_{\text{polinomio 2º grado}}$$

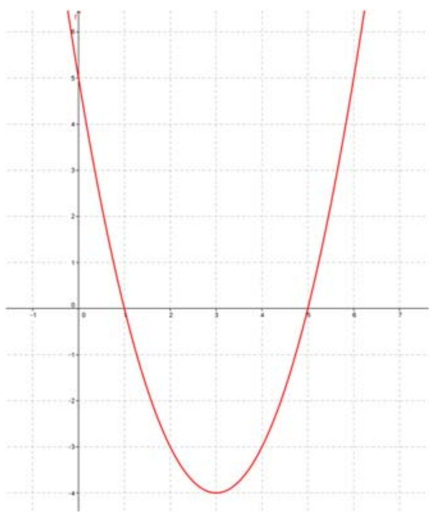
x	3	1	5	0	6
f(x)	–4	0	0	5	5
	(3, –4)	(1, 0)	(5, 0)	(0, 5)	(6, 5)

Coeficiente líder:**1**> 0 $\Rightarrow$ parábola convexa

Vértice: $x = \left[\frac{-b}{2a}\right]_{\substack{a=1\\b=-6}} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow$ **(3, –4)**

Ordenada na orixe: **5** $\Rightarrow$ **(0, 5)** *punto de corte co eixe de ordenadas.*

Puntos de intersección co eixe de abscisas: **(1, 0)** e **(5, 0)**



Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

Textos Marea Verde

Actividades propostas

19. Copia no teu caderno e completa:

$\boxed{y = 3x + 3} \rightarrow$ *Función* ____________________ porque ____

X	y

→
→
→
→
→

Solución

Gráfica

Operacións:

$\boxed{y = \frac{-x}{2}} \rightarrow$ *Función* ____________________ porque ____

X	y

→
→
→
→
→

Solución

Gráfica

Operacións:

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

$\boxed{y=-3x^2+6x-4}$ → *Función* ____________________ porque ____

x	*y*

Solución

→

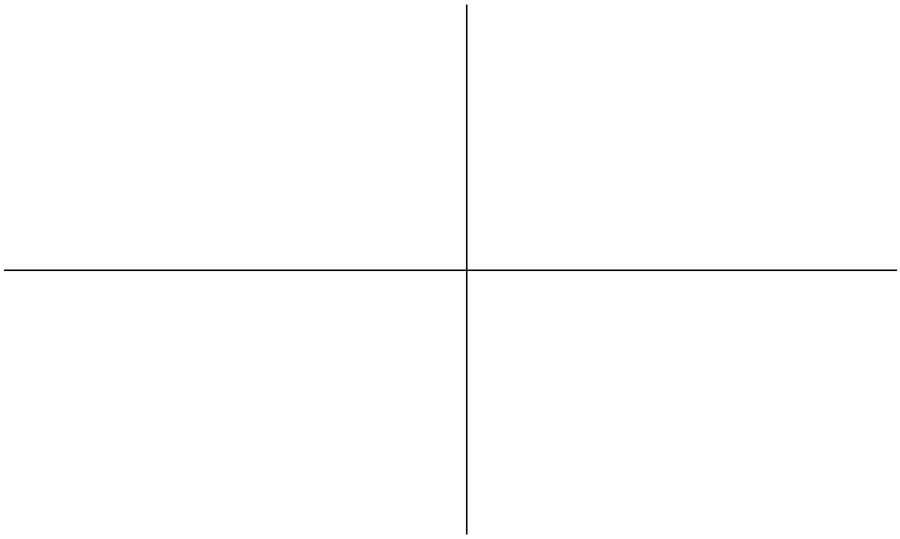
→

→

→

→

Gráfica



Operacións:

$\boxed{y=2x^2-8}$ → *Función* ____________________ porque ____

x	*y*

Solución

→

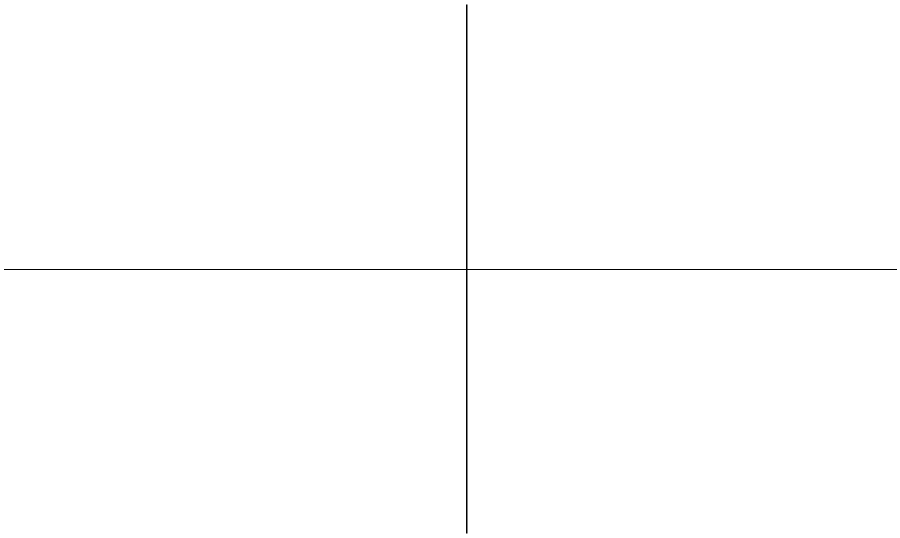
→

→

→

→

Gráfica



Operacións:

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

20. Debuxa a gráfica da función $y = x^2$.

a) Para iso fai unha táboa de valores, tomando valores de abscisa positiva.

b) Tomando valores de abscisa negativa.

c) Que lle ocorre á gráfica para valores grandes de "x"? E para valores negativos grandes en valor absoluto?

d) A curva é simétrica? Indica o seu eixe de simetría.

e) Ten un mínimo? Cal é? Coordenadas do vértice.

f) Recorta un modelo desta parábola marcando o seu vértice e o eixe de simetría, que usaremos noutros problemas.

21. Tomando a mesma unidade que no problema anterior debuxa no teu caderno, nun mesmo sistema de referencia, as gráficas das parábolas: $y = x^2 + 2$; $y = x^2 – 3$; $y = –x^2$; $y = –x^2 + 2$; $y = x^2 – 1$. Observa que podes utilizar o modelo do exercicio anterior. Fai un resumo indicando o que obtiveches. Terás observado que en todos os casos podes utilizar o modelo trasladándoo en sentido vertical, cara arriba no caso de $y = x^2 + 2$; e cara abaixo no caso de $y = x^2 – 3$. A parábola $y = –x^2$; é simétrica (cara abaixo) de $y = x^2$. En xeral, se trasladamos q unidades na dirección do eixe de ordenadas temos a parábola $y = x^2 + q$.

22. Tomando a mesma unidade que no problema anterior debuxa no teu caderno, nun mesmo sistema de referencia, as gráficas das parábolas: $y = (x + 2)^2$; $y = (x – 3)^2$; $y = (x + 1)^2$; $y = (x – 1)^2$. Observa que podes utilizar o modelo do exercicio anterior. Fai un resumo indicando o que obtiveches. Terás observado que en todos os casos podes utilizar o modelo trasladándoo en sentido horizontal, cara á dereita no caso de $y = (x – 3)^2$; e cara á esquerda no caso de $y = (x + 2)^2$. Polo que, en xeral, se trasladamos p unidades na dirección do eixe de abscisas obtemos a parábola $y = (x – p)^2$.

23. Escribe a ecuación dunha parábola de igual forma que $y = x^2$, pero trasladada 5 unidades en sentido horizontal á dereita e 3 unidades en sentido vertical cara arriba. Que coordenadas ten o seu vértice?

24. Debuxa no teu caderno, nun mesmo sistema de referencia, as gráficas das parábolas:

$y = x^2$; $y = 2x^2$; $y = 1/3x^2$; $y = –x^2$; $y = –1/2x^2$; $y = –3x^2$.

Observa que agora xa non che serve o modelo empregado. Agora as parábolas estréitanse ou ensánchanse.

25. Completa este resumo. A gráfica de $y = ax^2$ obtense da de $y = x^2$:

a) Se $a > 1$ entón…?

b) Se $0 < a < 1$ entón…?

c) Se $a < –1$ entón…?

d) Se $–1 < a < 0$ entón…?

26. Volvemos usar o modelo.

a) Traslada o vértice da parábola $y = x^2$ ao punto (4, 2). Escribe a súa ecuación e a ecuación do seu eixe de simetría. Debuxa a súa gráfica.

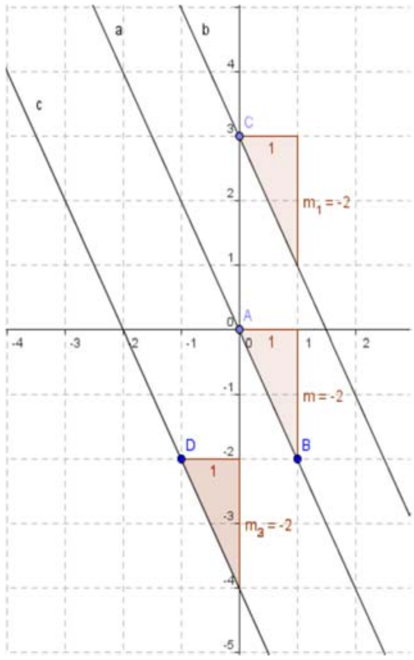
b) Traslada o vértice da parábola $y = x^2$ ao punto (–3, –1). Escribe a súa ecuación e a ecuación do seu eixe de simetría. Debuxa a súa gráfica.

2.4. Gráficas de FUNCIÓNS con Xeoxebra. Gráficas de FUNCIÓNS lineais e afíns

Nesta actividade vaise utilizar o programa ***Xeoxebra*** para representar FUNCIÓNS lineais e afíns, as gráficas destas FUNCIÓNS son rectas. Primeiro represéntanse rectas coa mesma pendente para observar a relación que existe entre elas e determinar a propiedade que as caracteriza. Tamén se representan rectas que teñen a mesma ordenada na orixe para observar a relación que existe entre elas e determinar unha característica común.

Actividades resoltas

Utiliza Xeoxebra para estudar rectas con igual pendente.



- Abre o programa Xeoxebra e en **Visualiza** activa **Cuadrícula** para que sexa máis fácil definir puntos.
- Coa ferramenta **Novo Punto** define un punto na orixe de coordenadas. Observa que na **Ventá Alxébrica** aparece o punto, que o sistema denomina *A*, como obxecto libre e coordenadas (0, 0).
- Define un **Novo Punto** de coordenadas (1, –2), o programa chámao *B* e na **Ventá Alxébrica** aparece como obxecto libre coas súas coordenadas: B = (1, –2).
- Utiliza a ferramenta **Recta que pasa por 2 puntos** para debuxar a recta que pasa polos puntos *A* e *B*. Observa que o programa a denomina *a* e na **Ventá Alxébrica** aparece como obxecto dependente e a súa ecuación a: $2x + y = 0$. Esta ecuación pódese expresar por: $y = -2x$.
- Define un **Novo Punto** de coordenadas (0, 3), o programa chámao *C* e na **Ventá Alxébrica** aparece como obxecto libre coas súas coordenadas: *C* = (0, 3).
- Coa ferramenta **Recta Paralela**, debuxa unha recta paralela á recta a que pase por *C*. Observa que o programa a denomina *b* e na **Ventá Alxébrica** aparece como obxecto dependente e a súa ecuación a: $2x + y = 3$. Esta ecuación pódese expresar por: $y = -2x + 3$.
- Define un **Novo Punto** de coordenadas (–1, –2), o programa chámao *D* e na **Ventá Alxébrica** aparece como obxecto libre coas súas coordenadas: *D* = (–1, –2).
- Coa ferramenta **Recta Paralela**, debuxa unha recta paralela á recta a que pase por *D*. Observa que o programa a denomina *c* e na **Ventá Alxébrica** aparece como obxecto dependente e a súa ecuación a: $2x + y = -4$. Esta ecuación pódese expresar por: $y = -2x - 4$.
- Utiliza a ferramenta **Pendente** para calcular as pendentes das rectas *a*, *b* e *c*. Observa que ao calcular a pendente da recta *a* aparece na gráfica e na **Ventá Alxébrica** como obxecto dependente $m = -2$. Analogamente ao calcular a pendente da recta *b*, obtense $m_1 = -2$ e ao calcular a pendente da recta *c*, tense $m_2 = -2$.

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

27. Como son as pendentes das rectas paralelas? En función dos resultados anteriores realiza unha conxectura e debuxa outras rectas paralelas á recta *a* para comprobala.

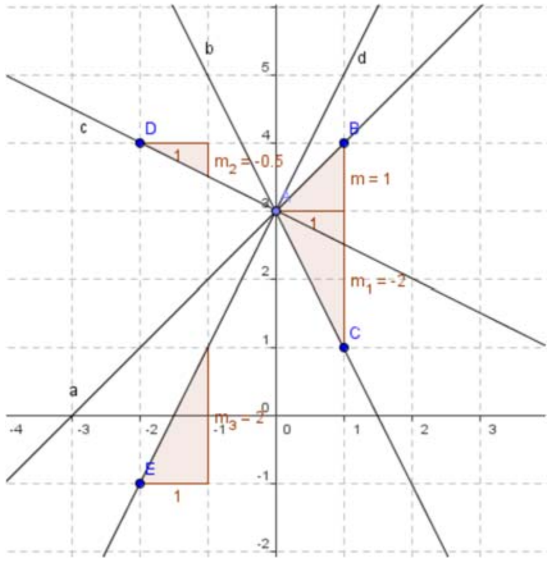
Observa que a ecuación de todas as rectas paralelas á recta *a* son da forma:

$y = -2x + n$, con n variable.

Algunha das rectas que debuxaches é a gráfica dunha función lineal?

Rectas coa mesma ordenada na orixe

Utiliza Xeoxebra para estudar rectas con igual ordenada na orixe.



- Abre unha **Nova Ventá** que é unha opción do menú **Arquivo**.
- Coa ferramenta **Novo Punto** define un punto de coordenadas (0, 3). Observa que na **Ventá Alxébrica** aparece o punto, que o sistema denomina *A*, como obxecto libre e aparecen as súas coordenadas *A* = (0, 3).
- Define un **Novo Punto** *B* de coordenadas (1, 4) e coa ferramenta **Recta que pasa por 2 puntos** debuxa a recta que pasa por *A* e *B*, o programa denomínaa *a* e na **Ventá Alxébrica** aparece a súa ecuación, *a*: $-x + y = 3$ equivalente a $y = x + 3$.
- Define un **Novo Punto** *C* de coordenadas (1, 1) e coa ferramenta **Recta que pasa por 2 puntos** debuxa a recta que pasa por *A* e *C*, o programa denomínaa *b* e na Ventá Alxébrica aparece a súa ecuación, *b*: $2x + y = 3$ equivalente a $y = -2x + 3$
- Cun proceso similar debuxa a recta *c* que pasa por *A* e *D*, con *D* = (–2, 4) que ten por ecuación *c*: $x + 2y = 6$. Esta ecuación pódese expresar por: $y = -\frac{1}{2}x + 3$.
- Debuxa tamén a recta *d* que pasa por *A* e *E*, con *E* = (–2, –1), a ecuación da recta *d* que aparece é:

  d: $-4x + 2y = 6$, equivalente a $y = 2x + 3$.
- Utiliza a ferramenta **Pendente** para calcular as pendentes das catro rectas que debuxaches.
  - Observa que as catro rectas que debuxaches pasan polo punto *A* = (0, 3), as súas ecuacións coa variable e despexada son:

    a: $y = x + 3$ *b*: $y = -2x + 3$ *c*: $y = -\frac{1}{2}x + 3$ *d*: $y = 2x + 3$.

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

Textos Marea Verde

28. Que teñen en común as ecuacións das rectas que pasan polo punto *A* (0, 3)? En función dos resultados anteriores realiza unha conxectura e compróbaa debuxando outras rectas que pasen polo punto *A*.

Observa que a ecuación de todas as rectas que pasan polo punto *A*(0, 3) son da forma:

$y = mx + 3$, sendo *m* a pendente da recta.

Na ecuación da recta $y= mx + n$, o parámetro *n* denomínase ordenada na orixe.

29. Cal é o valor da ordenada na orixe das catro rectas que debuxaches?

30. Observa as ecuacións das catro rectas que debuxaches, dúas delas teñen pendente positiva *a* e *d* e as outras dúas, *b* e *c* teñen pendente negativa. Relaciona o signo da pendente da recta co crecemento ou decrecemento da función que representan.

Actividades propostas

31. Calcula dous puntos das rectas de ecuacións: $y = 2x + 2$ e $y = -\frac{x}{2} + 2$, para debuxalas con Xeoxebra. Indica dúas propiedades comúns de ambas as gráficas.

32. Representa, tamén, as rectas de ecuacións: $y = -3x + 1$ e $y = \frac{x}{3} - 3$.

33. Que condición deben verificar as pendentes de dúas rectas para que sexan perpendiculares?

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

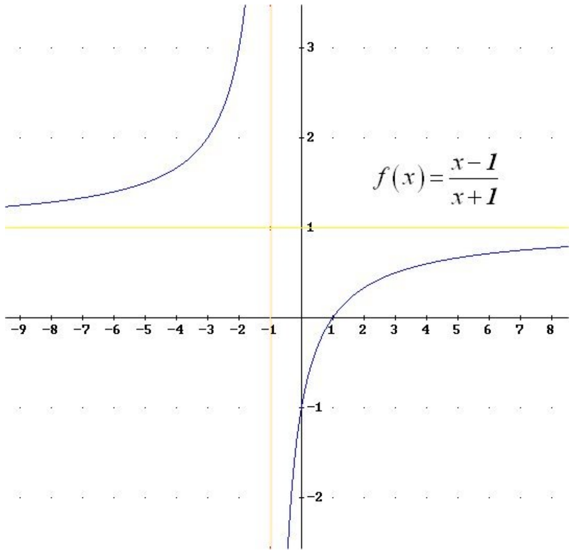
3. CARACTERÍSTICAS DUNHA FUNCIÓN

3.1. Continuidade

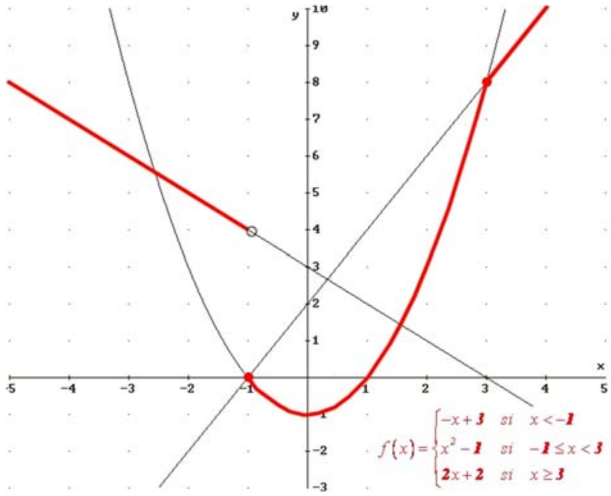
O concepto de continuidade dunha función é moi intuitivo (na maioría das FUNCIÓNS) xa que se corresponde con que a gráfica se poida debuxar sen levantar o lapis do papel. Cando isto non ocorre, prodúcense "saltos" en determinados puntos que reciben o nome de descontinuidades.

Exemplos:

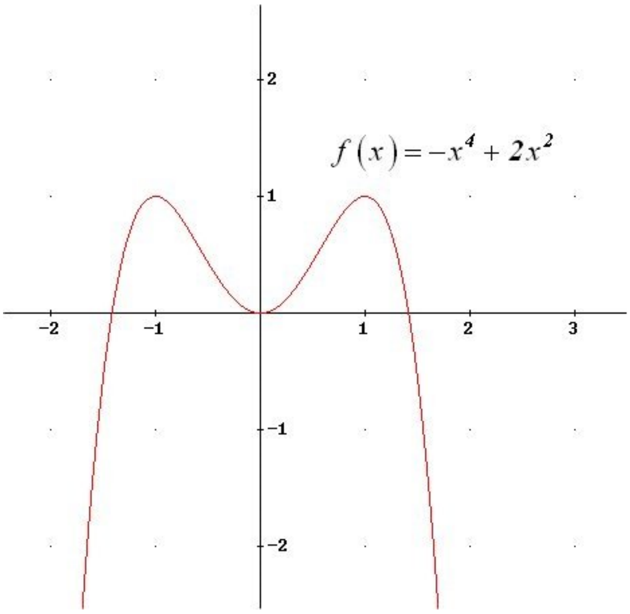
- *Que FUNCIÓNS son continuas segundo o seu debuxo e cales non? Indica nestas últimas o/os valor/es da variable independente onde se produce a descontinuidade:*



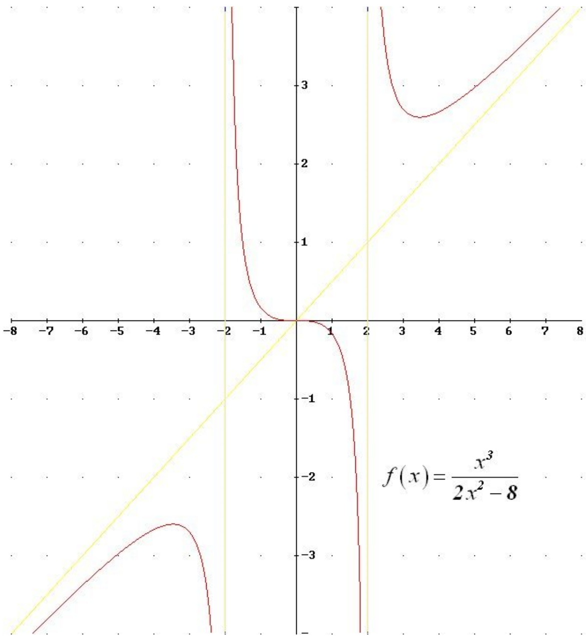
NON (en $x = -1$ ten un salto infinito)



NON (en $x = -1$ ten un salto finito de 4 unidades)



SI (continua para calquera valor de x)



NON (en $x = -2$ e $x = 2$ ten saltos infinitos)

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

3.2. Monotonía: crecemento e decrecemento

Unha función é **crecente** nun intervalo cando ao aumentar o valor da variable independente aumenta tamén o da dependente.

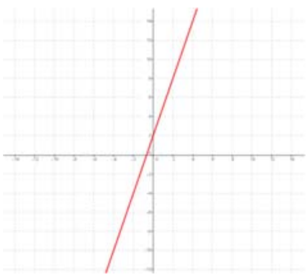
Unha función é **decrecente** nun intervalo se ao aumentar o valor da variable independente diminúe o da dependente.

Unha función é **monótona** nun intervalo cando é crecente ou decrecente nese intervalo.

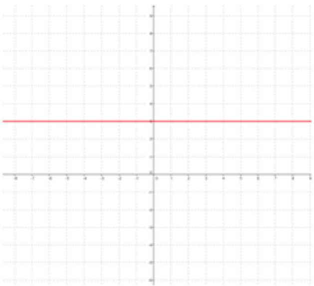
Unha función é **constante** nun intervalo cando tome o valor que tome a variable independente, a dependente toma sempre o mesmo valor.

Como indican as definicións, a monotonía ou non dunha función dáse nun intervalo. Polo tanto, unha función pode ser crecente para unha serie de valores, para outros ser decrecente ou constante, logo pode volver ser crecente ou decrecente ou constante…

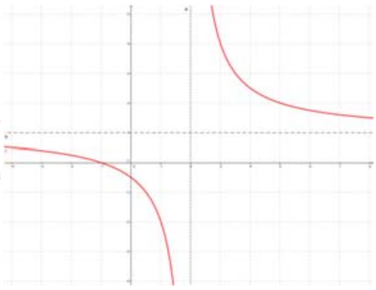
Exemplo:



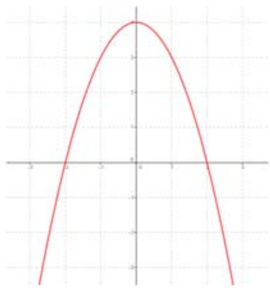
CRECENTE sempre



CONSTANTE sempre



DECRECENTE ata x = 2
DECRECENTE desde x = 2



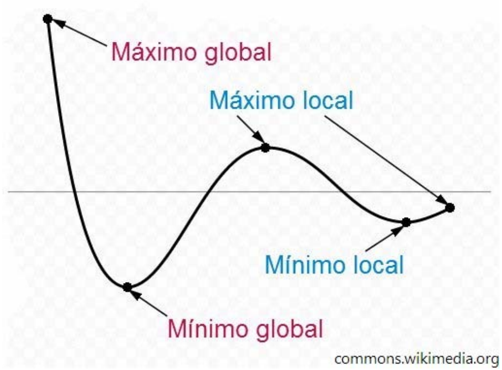
CRECENTE ata x = 0
DECRECENTE desde x = 0

3.3. Extremos: máximos e mínimos

Unha función presenta un **máximo relativo** (ou máximo *local*) nun punto cando o valor da función nese punto é maior que calquera dos valores que están ao seu arredor (no seu *entorno*). Se, ademais, o valor é maior que en calquera outro punto da función dise que a función acada un **máximo absoluto** (ou máximo *global*) nel.

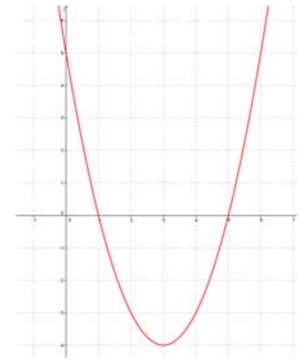
Unha función presenta un **mínimo relativo** (ou mínimo *local*) nun punto cando o valor da función nese punto é menor que en calquera dos valores que están ao seu arredor (no seu *entorno*). Se, ademais, o valor é menor que en calquera outro punto da función dise que a función acada un **mínimo absoluto** (ou *global*) nel.

Se unha función presenta un máximo ou un mínimo nun punto, dise que ten un **extremo** nese punto que poderá ser relativo ou absoluto.



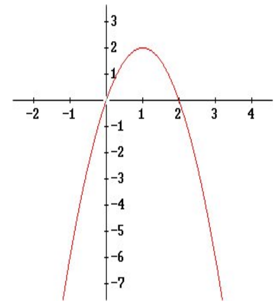
Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

Exemplos



$y = x^2 - 6x + 5$

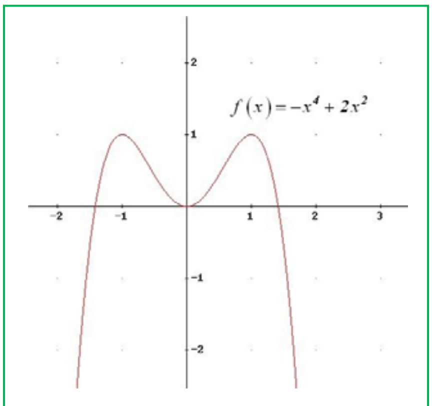
A parábola $y = x^2 - 6x + 5$ ten un mínimo absoluto no seu vértice (3, – 4). Non ten máximos, nin relativos nin absoluto. Antes do vértice é decrecente e despois é crecente.



$y = -2x^2 - 4x$

A parábola $y = -2x^2 - 4x$ ten un máximo absoluto no seu vértice (1, 2). Non ten mínimos, nin relativos nin absoluto. Antes do vértice, para $x < 1$, a función é crecente, e despois, para $x > 1$, a función é decrecente.

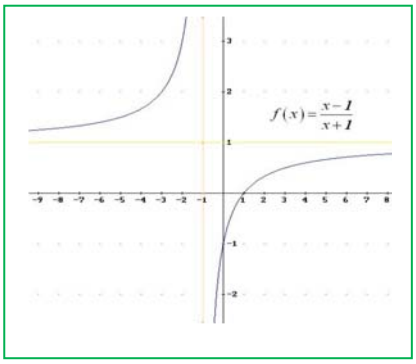
Todas as parábolas teñen un máximo ou un mínimo absoluto no seu vértice.

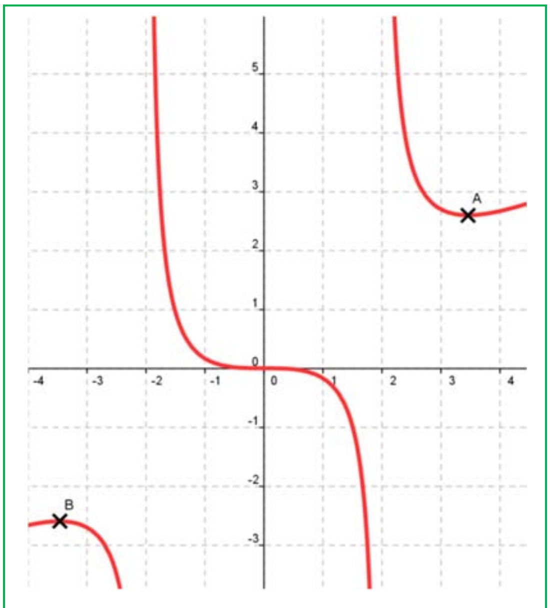


A función $y = -x^4 + 2x^2$ ten un mínimo absoluto na orixe (0, 0) e dous máximos en (1, 1) e en (–1, 1). Para $x < -1$ é unha función crecente, para $-1 < x < 0$, é unha función decrecente, para $0 < x < 1$ é crecente, e para $x > 1$ é decrecente.

Observa, nos **máximos** sempre a función pasa de ser **crecente** a ser **decrecente**, e nos **mínimos** de ser **decrecente** a ser **crecente**.

A función $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ non ten ni máximos ni mínimos (nin relativos nin absolutos).É unha función sempre crecente.





A gráfica da función $f(x) = \dfrac{x^3}{2x^2 - 8}$ non ten máximo nin mínimo absoluto, pero ten un mínimo relativo cara a x = 3, A(3.46, 2.6), e un máximo relativo cara a x = –3, B(–3.46, –2.6). Observa que o valor do mínimo relativo, 2.6, é maior que a do máximo relativo, –2.6. Pero en valores próximos ao mínimo si é o menor valor, por este motivo denomínanse "*relativo*", "*local*". Non son os valores maiores ou menores que acada a función, pero se unicamente miramos nun entorno do punto si son valores máximos ou mínimos.

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

3.4. Simetría

Unha **función par** é aquela na que se obtén o mesmo ao substituír un número que o seu oposto:

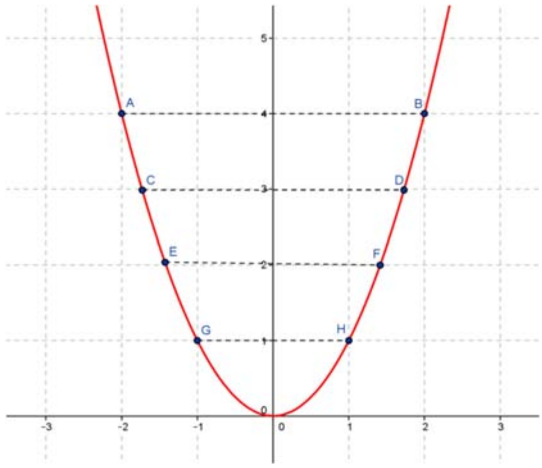
$$f(-x) = f(x)$$

Esta propiedade tradúcese en que a función é **simétrica** respecto ao **eixe de ordenadas**, é dicir, se dobramos o papel por este eixe, a gráfica da función coincide en ambos os lados.

Exemplo:

- A función cuadrática $f(x) = x^2$ é par:

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

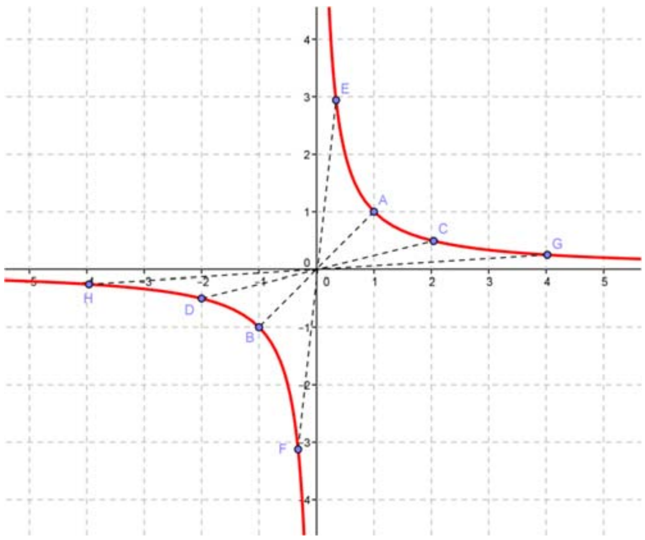


Unha **función impar** é aquela na que se obtén o mesmo ao substituír un número que o seu oposto:

$$f(-x) = -f(x)$$

Esta propiedade tradúcese en que a función é **simétrica** respecto á **orixe** de coordenadas, é dicir, se trazamos un segmento que parte de calquera punto da gráfica e pasa pola orixe de coordenadas, ao prolongalo cara ao outro lado encontraremos outro punto da gráfica á mesma distancia.

Exemplo:



- A **función de proporcionalidade inversa** $f(x) = \frac{1}{x}$ é impar porque:

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)} = \frac{-1}{x} = -f(x)$$

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

3.5. Periodicidade

Unha **función periódica é** aquela na que as imaxes da función se repiten sempre que se lle engade á variable independente unha cantidade fixa, chamada *período.*

Exemplo:

- Un exemplo de función periódica é o seguinte, que corresponde a un electrocardiograma:

Obsérvase claramente que a gráfica se repite a intervalos iguais, xa que os latexos do corazón son rítmicos.

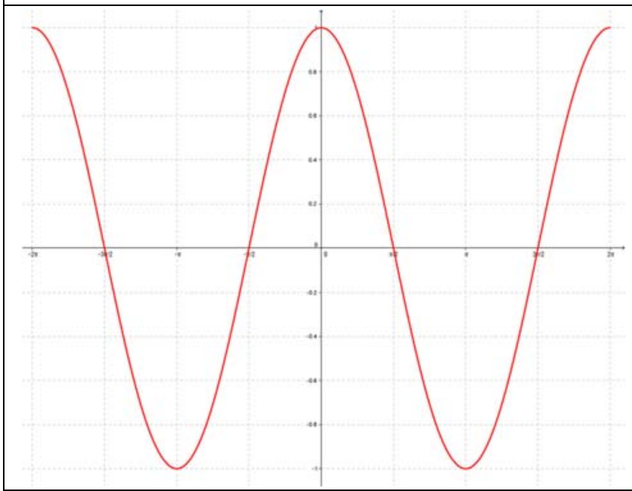
Actividades resoltas

- *Que significaría, na gráfica anterior, que os intervalos de repetición non fosen iguais?*
  Se non temos un período fixo, querería dicir que o corazón non está funcionando de forma rítmica e, polo tanto, diriamos que se produciu unha "arritmia".
- *Como influiría na gráfica anterior que o período sexa máis ou menos grande? Que significado tería?*
  Se o período é máis grande, é dicir, os intervalos de repetición atópanse máis distanciados, teriamos un ritmo de latexo máis lento (menos pulsacións por minuto), o que se coñece como "bradicardia".

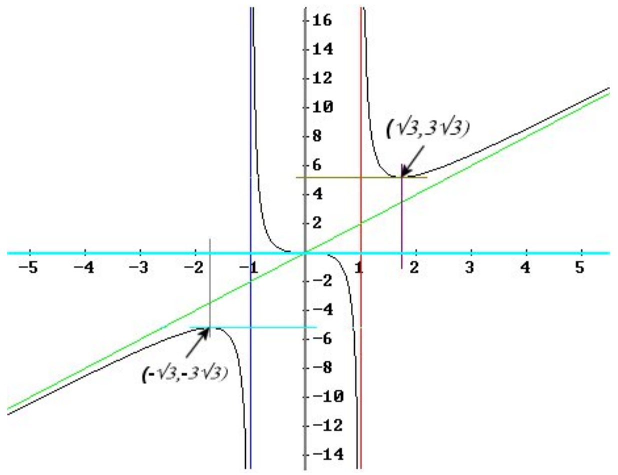
  Se o período é menor, pasaría xusto todo o contrario, isto é, o corazón estaría latexando máis rápido do normal (máis pulsacións por minuto) e teriamos unha "taquicardia".

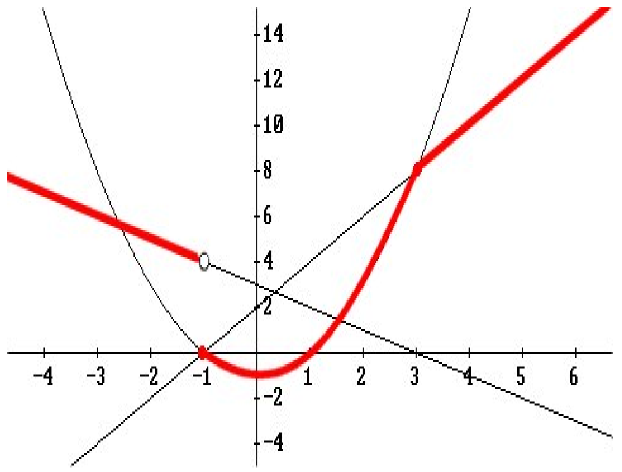
Actividades propostas

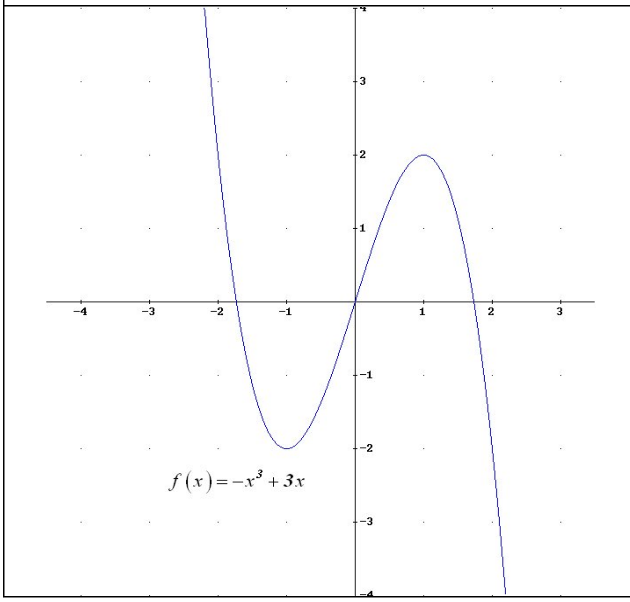
34. Copia as seguintes táboas no teu caderno e sinala todas as características que poidas das FUNCIÓNS representadas mediante as súas gráficas:

GRÁFICA 1	CARACTERÍSTICAS	
	Valores variable independente:	
	Valores variable dependente:	
	Simetría	Par:
		Impar:
	Punto corte eixe ordenadas:	
	Punto/s corte eixe abscisas:	
	Continuidade:	
	Monotonía	Crecente:
		Decrecente:
	Extremos	Máximos:
		Mínimos:
	Periódica:	

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

GRÁFICA 2	CARACTERÍSTICAS	
	Valores variable independente:	
	Valores variable dependente:	
	Simetría	Par:
		Impar:
	Punto corte eixe ordenadas:	
	Punto/s corte eixe abscisas:	
	Continuidade:	
	Monotonía	Crecente:
		Decrecente:
	Extremos	Máximos:
		Mínimos:
	Periódica:	

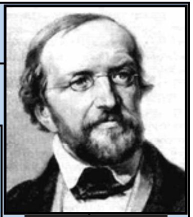
GRÁFICA 3	CARACTERÍSTICAS	
	Valores variable independente:	
	Valores variable dependente:	
	Simetría	Par:
		Impar:
	Punto corte eixe ordenadas:	
	Punto/s corte eixe abscisas:	
	Continuidade:	
	Monotonía	Crecente:
		Decrecente:
	Extremos	Máximos:
		Mínimos:
	Periódica:	

GRÁFICA 4	CARACTERÍSTICAS	
	Valores variable independente:	
	Valores variable dependente:	
	Simetría	Par:
		Impar:
	Punto corte eixe ordenadas:	
	Punto/s corte eixe abscisas:	
	Continuidade:	
	Monotonía	Crecente:
		Decrecente:
	Extremos	Máximos:
		Mínimos:
	Periódica:	

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

CURIOSIDADES. REVISTA

Dirichlet



Johann Peter Gustav Leixeune Dirichlet

Johann Peter Gustav Leixeune Dirichlet (13/02/1805–5/5/1859) foi un matemático alemán ao que se lle atribúe a definición "formal" moderna de *función*.
Dirichlet naceu en Düren, onde o seu pai era o xefe da oficina de correos. Foi educado en Alemaña e, despois, en Francia, onde aprendeu de algúns dos máis afamados matemáticos da súa época, relacionándose con algúns como *Fourier*.
Foron alumnos seus *Leopold Kronecker* e *Rudolf Lipschitz*. Tras a súa morte, o seu amigo e colega matemático *Richard Dedekind* compilou, editou e publicou as súas leccións e outros resultados na teoría de números.

Unha versión simple da ***función de Dirichlet*** defínese como:

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \ (x \text{ é racional}) \\ 0 & \text{se } x \in I \ (x \text{ é irracional}) \end{cases}$$

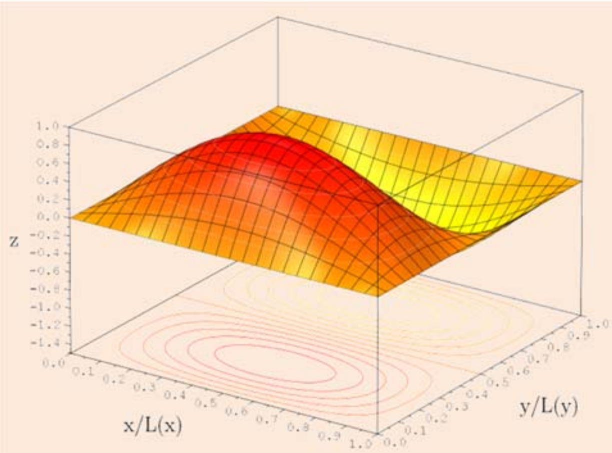
Esta función ten a “curiosa” propiedade de que é descontinua para calquera valor que lle deamos á variable independente.

Nikki Grazziano: “Funcións e fotografía”

Nikki encontrou unha forma de reunir os seus dous intereses, matemáticas e fotografía da natureza, nunha serie de imaxes chamada **Found Functions** nas que superpón gráficas xeradas mediante fórmulas matemáticas a fotografías tomadas por ela.
Pero o orixinal é que non busca imaxes que poidan adaptarse a certas fórmulas, senón que cando ten unha fotografía que lle gusta é cando busca e axusta a fórmula necesaria para xerar que a representación gráfica se adapte. Unha curiosa forma de aprender matemáticas e ver que todo se pode representar con elas.

Se queres consultar máis e ver as fotografías (que teñen copyright), visita a páxina:

http://www.nikkigraziano.com/index.php/project/found-functions/

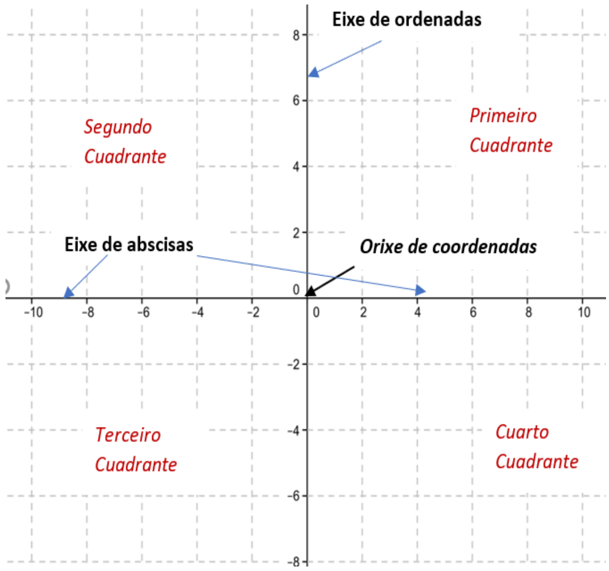
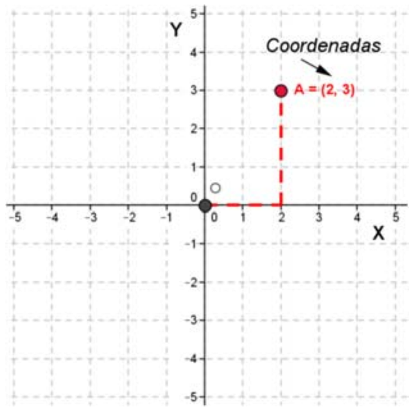
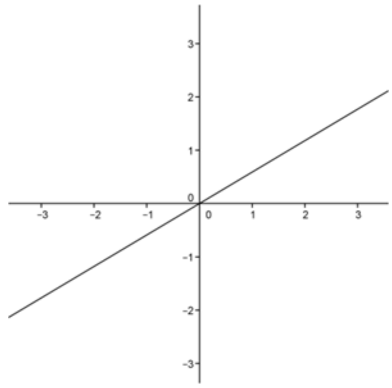


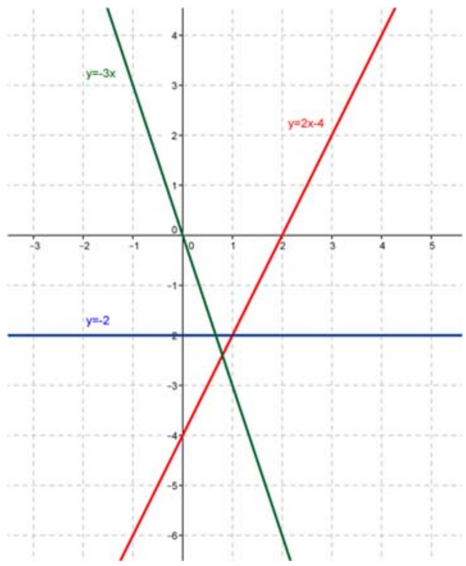
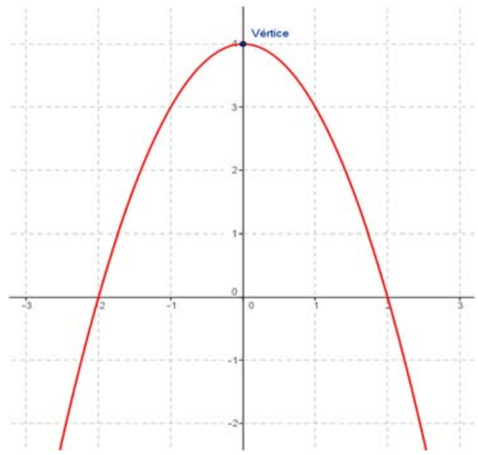
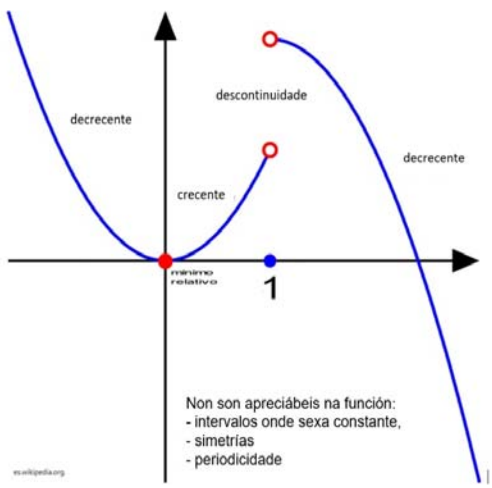
FUNCIÓNS 3D

Cando a relación funcional se establece entre tres variables, a gráfica tense que facer en tres dimensións, o que a fai máis complexa de representar pero máis rechamante. Os ordenadores son de gran axuda para facelas e velas desde distintos puntos de vista. Serven para realizar modelos moi reais de multitude de situacións tridimensionais.

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

RESUMO

CONCEPTOS		*Exemplos*
Eixes cartesianos e coordenadas dun punto no plano		
Función	Unha **función é unha** relación entre dúas magnitudes de forma que a un valor calquera dunha (**variable independente**) lle facemos corresponder, como moito, un único valor da outra (**variable dependente**).	$y = f(x) = 0.59 \cdot x$ $f(2) = 0.59 \cdot 2 = 1.18$ $f(5) = 0.59 \cdot 5 = 2.95$
Gráfica dunha función	A **gráfica dunha función é a** representación no plano cartesiano de todos os pares ordenados nos que o primeiro valor corresponde a un calquera da variable independente e o segundo ao que se obtén ao transformalo mediante a función: $\{(x, y) \mid x \in \mathfrak{R}, y = f(x)\}$	$y = f(x) = 0.59x$ $\{(2, 1.18), (5, 2.95)\ldots\}$  *Gráfica:*

CONCEPTOS		*Exemplos*
Función afín, función lineal e función constante	Unha **función afín** é aquela función na que a relación entre as dúas variables vén dada por un polinomio de grao menor ou igual a un: *y* = *f*(*x*) = *mx* + *n*. A representación gráfica é unha recta. "*m*" recibe o nome de **pendente** e "*n*" **ordenada na orixe.** Unha **función lineal ou de proporcionalidade directa** é unha función afín con ordenada na orixe nula: $y = mx$ (pasa pola orixe). Unha **función constante é unha** función afín con pendente nula: $y = n$ (sempre toma o mesmo valor e a súa gráfica é unha recta horizontal).	
Función cuadrática	Unha función cuadrática é aquela función na que a relación entre as dúas variables vén dada por un polinomio de grao dous: *y* = *f*(*x*) = *ax*^{2} + *bx* + *c*. A gráfica deste tipo de FUNCIÓNS chámase parábola. O punto máis significativo da parábola é o **vértice** e calcúlase dándolle á variable independente o valor $x = {}^{-b}\!/_{2a}$. Se o coeficiente líder é positivo, o vértice é un mínimo e, se é negativo, un máximo.	
Continuidade **Monotonía** **Extremos** **Simetría** **Periodicidade**	Unha función pode ser continua nun intervalo se a súa gráfica non sofre "rupturas" (chamadas **descontinuidades**), **crecente** (**decrecente**) se o seu valor aumenta (diminúe) cando o fai a variable independente, **constante** cando sempre toma o mesmo valor, **par** se a imaxe da variable independente coincide coa do seu oposto, **impar** cando o valor da función para o oposto da variable independente tamén é o oposto e **periódica** se as imaxes dos valores obtidos ao sumar unha cantidade fixa (**período**) á variable independente coinciden.	

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

Textos Marea Verde

EXERCICIOS E PROBLEMAS

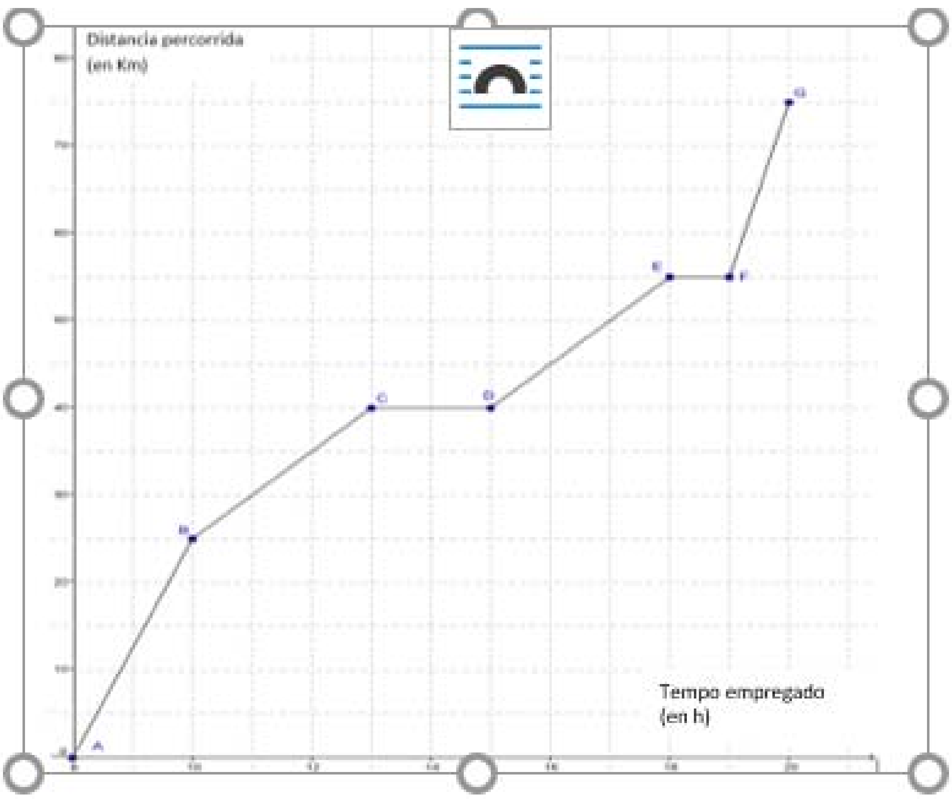
Sistemas de representación

1. Sitúa nun sistema de referencia cartesiano os puntos seguintes, elixindo unha escala nos eixes que permita debuxalos todos de forma cómoda: *A*(5, 4); *B*(0, 2); *C*(–2, 0); *D*(3, –1.3); *E*(1.5, 0); *F*(0, 0); *G*(–1, –2/3). Sinala en cada caso a que cuadrante pertence o punto ou, no seu caso, en que eixe está.

2. Escribe as coordenadas de tres puntos situados no terceiro cuadrante.

3. Sitúa nun sistema de referencia cartesiano os puntos seguintes:
   A(0, 4); *B*(0, 2.3); *C*(0, –2); *D*(0, –1). Que teñen en común todos eles?

4. Escribe as coordenadas e representa tres puntos do eixe de ordenadas. Que teñen en común?
5. Debuxa no teu caderno un triángulo rectángulo cun cateto igual a 3, e o vértice do ángulo recto na orixe de coordenadas. Indica as coordenadas de todos os vértices.
6. A seguinte gráfica resume a excursión que realizamos pola serra de Guadarrama:



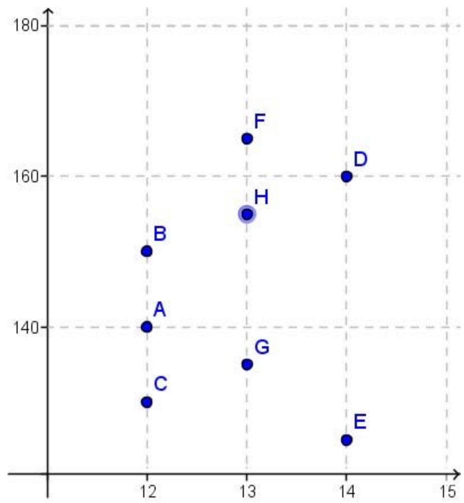
   a) Canto tempo durou a excursión?
   b) Canto tempo se descansou? A que horas?
   c) Cantos quilómetros se percorreron?
   d) En que intervalos de tempo se foi máis rápido que entre as 11 e as 13 horas?
   e) Fai unha breve descrición do desenvolvemento da excursión.
   f) Constrúe unha táboa de valores a partir dos puntos sinalados na gráfica.
   g) Se no eixe de ordenadas representaramos a variable "distancia ao punto de partida", sería a mesma gráfica? Cos datos de que dispós, podes facela?

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

FUNCIÓNS E TIPOS DE FUNCIÓNS

7. Indica cales das seguintes correspondencias son FUNCIÓNS:
   a) A cada número natural sonlle asociados os seus divisores primos.
   b) A cada circunferencia do plano élle asociado o seu centro.

8. A altura e a idade dos compoñentes dun equipo de baloncesto están relacionados segundo amosa a seguinte gráfica:



   a) Se Xoán ten 14 anos, cal pode ser a súa altura?
   b) Se María mide 165 cm, cal pode ser a súa idade?
   c) A relación entre a altura e a idade dos diferentes compoñentes do equipo, é unha relación funcional? Por que?
   d) E a relación entre a idade e a altura? Realiza unha gráfica similar á anterior para representar esta situación.

9. A distancia, *d*, percorrida por un tren depende do número de voltas, *n*, que dá cada roda da locomotora.
   a) Escribe a fórmula que permite obter *d* coñecido *n*, sabendo que o diámetro das rodas da locomotora é de 78 cm.
   b) Debuxa a gráfica.
   c) Que distancia terá percorrido o tren cando a roda teña dado mil voltas? (Toma como valor de π o número 3.14).
   d) Cantas voltas terá dado a roda ao cabo de 7 km?

10. Un globo sonda utilizado polo Servizo Meteorolóxico dos Pireneos para medir a temperatura a distintas alturas leva incorporado un termómetro. Obsérvase que cada 180 m de altura a temperatura diminúe un grao. Certo día a temperatura na superficie é de 9°C. Determina:
   a) Que temperatura haberá a 3 km de altura?
   b) A que altura haberá unha temperatura de –30°C?
   c) Escribe unha fórmula que permita calcular a temperatura T coñecendo a altura A. Confecciona unha táboa e debuxa a gráfica. Que tipo de función é?
   d) Se a temperatura na superficie é de 12°C, cal é entón a fórmula? Que tipo de función é?

11. Debuxa a gráfica da función parte enteira: $y = E(x)$.

12. Un rectángulo ten un perímetro de 100 cm. Llama *x* á lonxitude dun dos seus lados e escribe a fórmula que dá a área en función de *x*. Debuxa a súa gráfica. Que tipo de función é?

13. Unha caixa cadrada ten unha altura de 20 cm. Como depende o seu volume do lado da base? Debuxa a gráfica da función que resulta.

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

14. Nunha folla de papel de 32 cm de longo e 22 cm de ancho recórtase un cadrado de 2 cm de lado en cada unha das esquinas, dóbrase e constrúese unha caixa. Cal é o volume da caixa? E se se recortan cadrados de 3 cm? Cal é o volume se o lado do cadrado recortado é x? Escribe a fórmula e debuxa a gráfica.

15. Escribe a ecuación da recta paralela a $y = 4x + 2$ de ordenada na orixe 6.

16. Sen representalos graficamente, di se están aliñados os puntos $A(3, 4)$, $B(7, 9)$ e $C(13, 15)$.

17. Unha empresa de aluguer de vehículos ofrece dúas fórmulas diferentes. Fórmula 1: alúgao por 300 euros ao día con quilometraxe ilimitada. Fórmula 2: alúgao por 200 euros ao día e 7 euros o quilómetro. Queremos facer unha viaxe de 10 días e mil quilómetros, canto nos custará con cada unha das fórmulas? Como non sabemos a quilometraxe exacta que acabaremos facendo, interésanos facer un estudo para saber a fórmula máis beneficiosa. Escribe as fórmulas de ambas as situacións e debuxa as súas gráficas. Razoa, a partir das gráficas, que fórmula é máis rendible segundo o número de quilómetros que vaiamos facer.

18. Constrúense boias unindo dous conos iguais pola base, sendo o diámetro da base de 90 cm. O volume da boia é función da altura "*a*" dos conos. Se queremos unha boia para sinalar a entrada de barcos a pedal bástanos cunha altura de 50 cm: que volume terá? Se é para barcos maiores precísase unha altura de 1.5 m: que volume terá? Escribe a expresión da función que calcula o volume en función da altura. Debuxa a súa gráfica.

19. Calcula o vértice, o eixe de simetría e os puntos de intersección cos eixes das seguintes parábolas. Debuxa as súas gráficas.

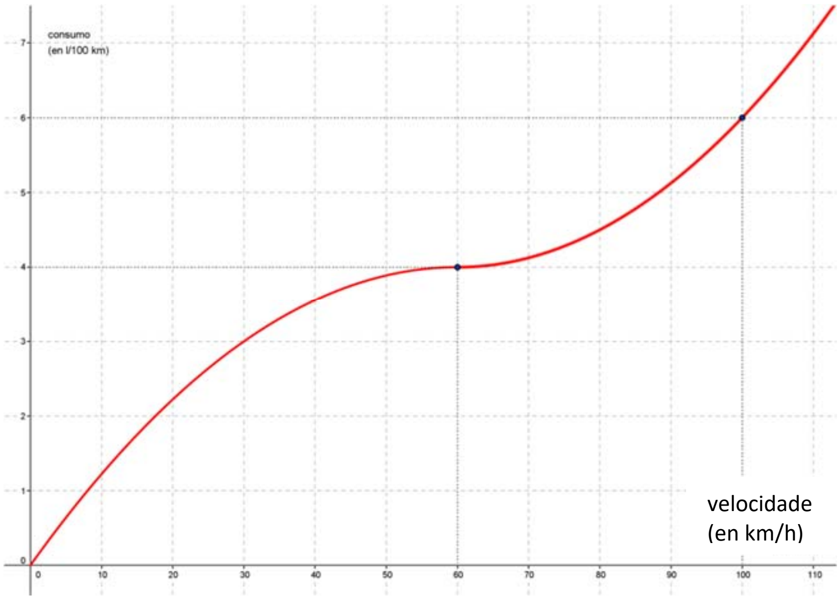
a) $y = x^2 + 8x - 13$ b) $y = -x^2 + 8x - 13$ c) $y = x^2 - 4x + 2$ d) $y = x^2 + 6x$ e) $y = -x^2 + 4x - 7$

20. Debuxa a gráfica de e = $2x^2$. Fai un modelo. Determina o vértice das seguintes parábolas e utiliza o modelo para debuxar a súa gráfica:

a) $y = 2x^2 + 8x - 12$ b) $y = -2x^2 + 8x - 10$ c) $y = 2x^2 - 4x + 2$ d) $y = 2x^2 + 6x$

Axuda: $2x^2 + 8x - 12 = 2(x^2 + 4x - 6) = 2((x + 2)^2 - 4 - 6) = 2((x + 2)^2 - 10)$. Vértice $(-2, -10)$

21. O consumo de gasolina dun coche por cada 100 km vén representado mediante a gráfica.



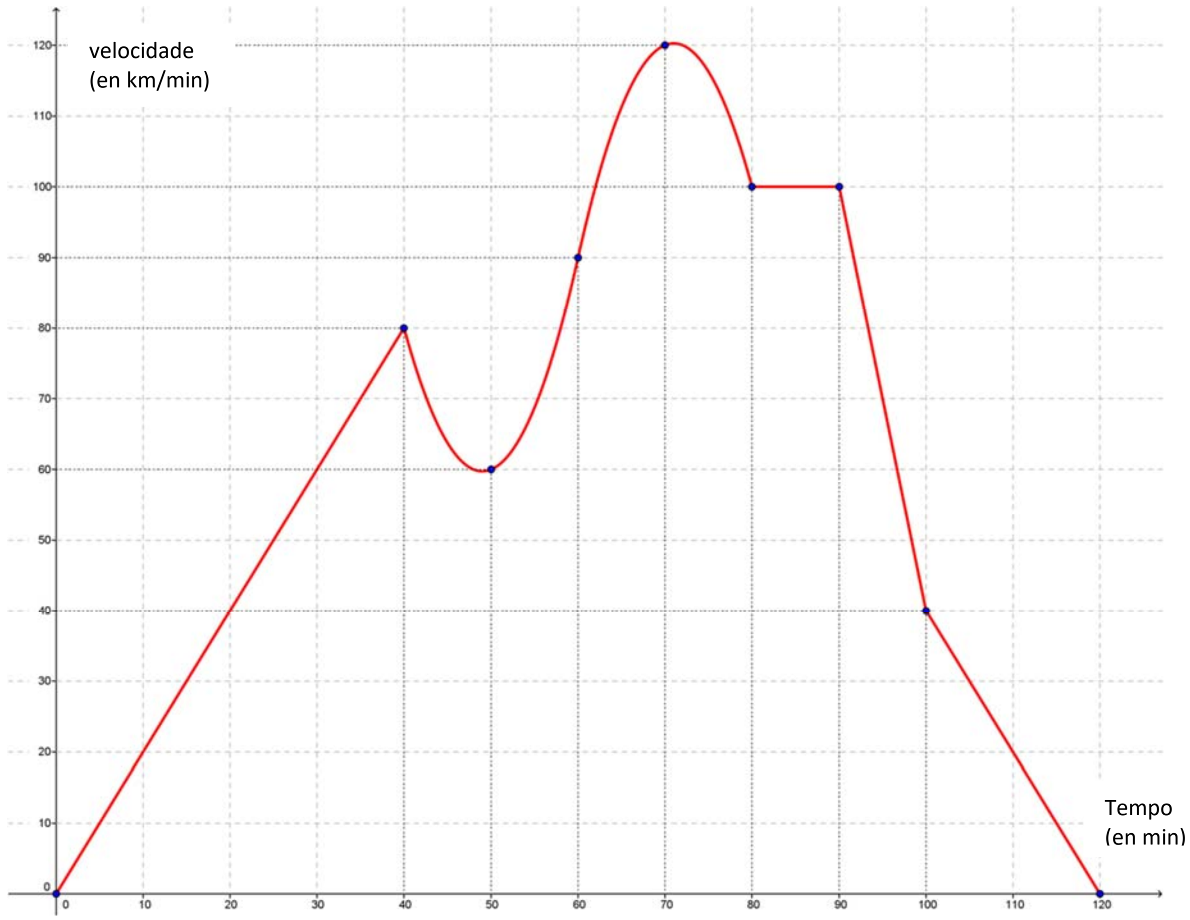
a) Cal é a variable dependente?
b) E a independente?
c) Cal é o consumo para unha velocidade de 60 km/h?
d) A que velocidade o consumo é de 6 l/100 km?
e) Utiliza a gráfica para explicar como varía o consumo de gasolina dependendo da velocidade do coche.

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

Características das FUNCIÓNS

22. Xaquín chegou a un acordo co seu pai para recibir a súa paga. Cobrará 20 euros ao mes o primeiro ano, e 5 euros máis por cada ano que pase. Canto lle corresponderá dentro de 7 anos? Fai unha táboa de valores e representa a súa gráfica. É continua? Indica os puntos de descontinuidade e o seu tipo. Busca unha fórmula que permita calcular a paga cando teñan pasado *n* anos.

23. Durante unha viaxe, a velocidade do coche varía dependendo do tipo de estrada, das condicións en que se encontra, do tempo meteorolóxico… a seguinte gráfica reflicte a velocidade dun vehículo en cada instante do traxecto que seguiu.



a) É funcional a relación de dependencia entre o tempo e a velocidade?

b) Cal é a variable independente? E a dependente?

c) A que velocidade ía cando levaba unha hora de viaxe? En que momentos ía a unha velocidade de 40 km/h?

d) Indica os intervalos nos que a velocidade aumentou e diminuíu. Foi constante nalgún momento? Cando? Durante canto tempo?

e) Cal foi a velocidade máxima acadada ao longo de toda a viaxe? En que momento se acadou? E durante a primeira hora da mesma?

f) Cal foi a velocidade mínima acadada ao longo de toda a viaxe? Cando se acadou? E entre a primeira media hora e a hora e media?

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

24. Ao entrar no aparcamento dun centro comercial encontramos un letreiro cos prezos que nos indican que 1 hora ou fracción custa 1.20 € e as dúas primeiras horas son gratis para os clientes con tarxeta de compra do centro. Fai unha táboa que relacione o tempo co importe pagado durante unha xornada completa (12 horas) nos casos dun cliente con tarxeta ou sen ela. Traza a gráfica e contesta ás preguntas:

a) Que valores toma a variable dependente? E a independente?
b) Podes unir os puntos da gráfica? Como se debe facer?
c) Existen puntos de descontinuidade? Se a resposta é afirmativa, sinálaos e explica o seu significado.

25. Ao estudar o crecemento dunha planta observamos que durante os primeiros 30 días o fai moi a présa, nos 15 días seguintes o crecemento é máis lento e despois mantense coa mesma altura. Realiza un bocexo da gráfica que relaciona o tempo coa altura acadada pola planta.

Se temos máis información podemos mellorar o bocexo. Por exemplo, fai a táboa e a gráfica no caso de que o crecemento da planta se axuste ás seguintes fórmulas (o tempo exprésase en días e a altura en centímetros):
a) Durante os primeiros 30 días: altura = 4 x tempo
b) Nos 15 días seguintes: altura = 90 + tempo
c) A partir do día 45: altura = 135.

26. Unha viaxe realizada por un tren, nun certo intervalo da mesma, vén dada da seguinte forma:

- Durante as dúas primeiras horas, a distancia "*d*" (en quilómetros) ao punto de partida é $2 \cdot t + 1$, onde "*t*" é o tempo (en horas) de duración do traxecto.
- Entre a 2ª e 3ª hora, a distancia vén dada por $-t + 7$.
- Entre a 3ª e 4ª hora, ambas as dúas inclusive, $d = 4$.
- Desde a 4ª e ata a 6ª (inclusive), a distancia axústase a $3 \cdot t - 8$.

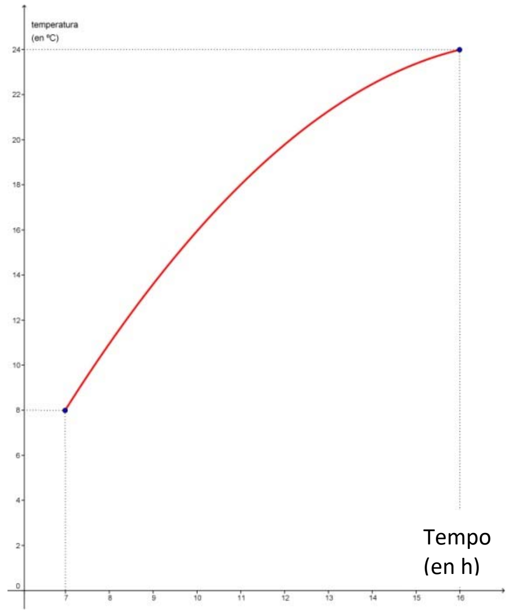
a) Realiza unha táboa e unha gráfica que recolla a viaxe da forma máis precisa posible (para iso debes calcular, como mínimo, os valores da variable tempo nos instantes 0, 2, 3, 4 e 6).
b) Explica se a relación anteriormente explicada entre a distancia percorrida e o tempo tardado en percorrela é funcional.
c) A relación anterior, presenta algunha descontinuidade?
d) En que momento a distancia ao punto de partida é de 7 km?
e) Que indican os puntos de corte da gráfica cos eixes?
f) Determina os intervalos onde a función é crecente, decrecente e constante.
g) Encontra os puntos onde a función acada os seus máximos e mínimos relativos e absolutos. Interpreta o significado que poidan ter.

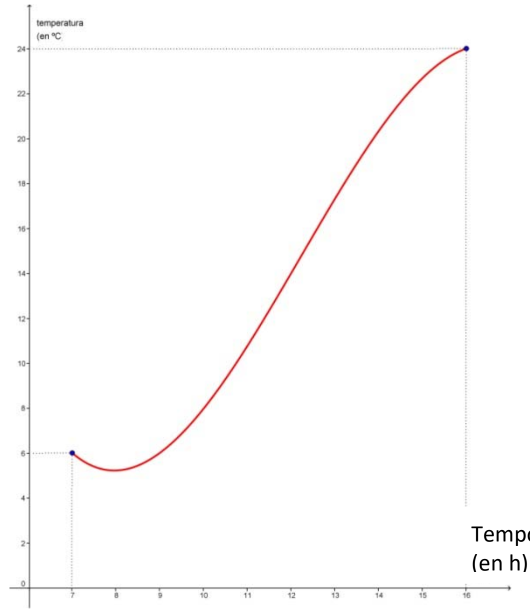
27. Representa graficamente as seguintes FUNCIÓNS, estudando nela todas as características que se traballaron no tema: monotonía, extremos, simetría e periodicidade.

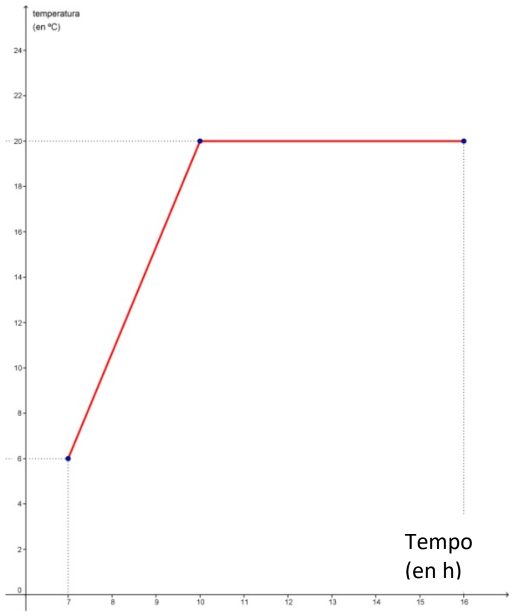
a) Valor absoluto dun número: $f(x) = |x|$.
b) Oposto e inverso dun número: $f(x) = \frac{-1}{x}$.
c) *Mantisa* (a cada número faille corresponder a diferenza entre este número e a súa parte enteira): $M(x) = x - E(x)$.

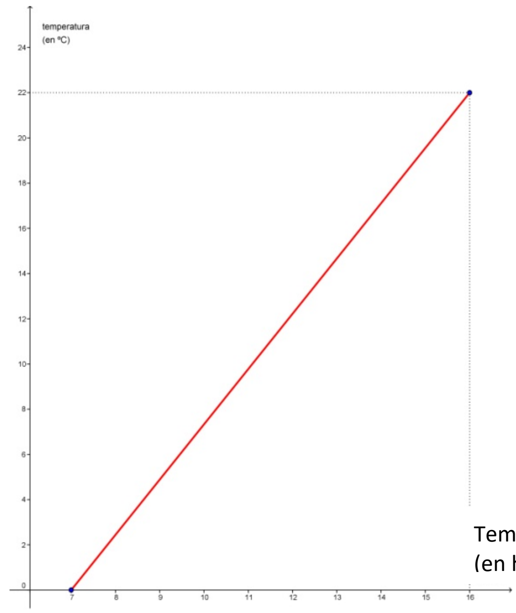
Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

28. As gráficas seguintes amosan a evolución, un día calquera, da temperatura acadada entre as 7 da mañá e as 4 da tarde en catro cidades (Madrid, Granada, Valladolid e Sevilla):









a) Estuda a monotonía de todas as gráficas.

b) Nalgunha cidade a temperatura se mantivo constante durante todo o intervalo? E en parte del?

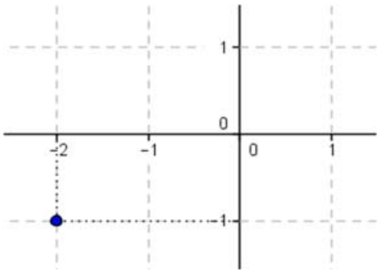
c) Que cidade cres que presenta un cambio de temperatura máis suave ao longo de toda a mañá?

d) Tendo en conta que en Madrid o incremento da temperatura foi sempre lineal, en Granada a temperatura mínima se acadou despois das 7 h e en Valladolid a partir do mediodía a temperatura baixou, indica que gráfica corresponde a cada unha das cidades e explica cales foron as temperaturas máximas e mínimas en cada unha delas.

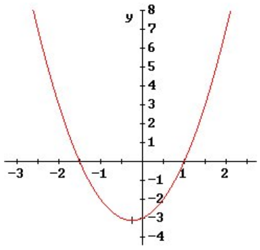
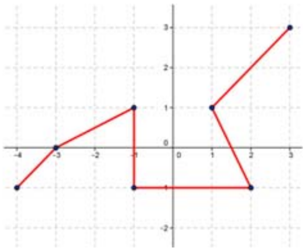
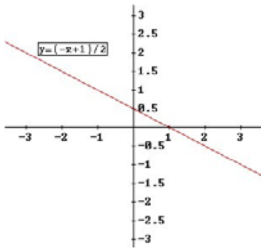
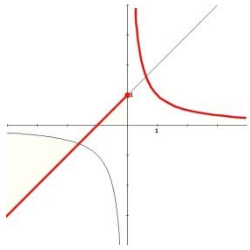
AUTOAVALIACIÓN

1. As coordenadas do punto sinalado son:

a) (–1, 2)
b) (–2, –1)
c) (1, 2)
d) (1, –2)



2. A única gráfica que non corresponde a unha función é:

a)  b)  c)  d) 

3. A única táboa que non pode ser dunha relación funcional é:

a)

x	*y*
0	1
1	2
2	3
3	4

b)

x	*y*
–1	–3
0	–3
1	–3
2	–3

c)

x	*y*
–3	9
–1	1
0	0
2	4

d)

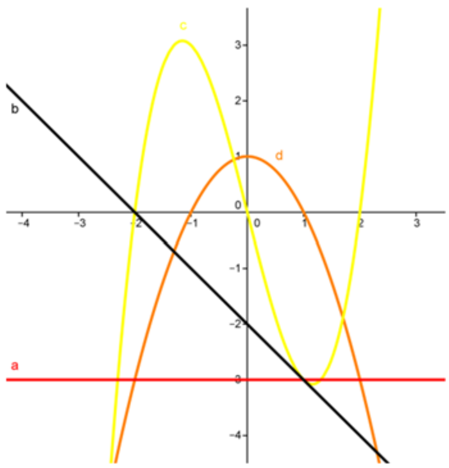
x	*y*
0	2
1	3
4	6
0	3

4. A única función afín que, ademais, é lineal é:

a) $y = –4x$ b) $y = 3x + 1$ c) $y = –2x + 3$ d) $y = –x – 1$

5. A única gráfica dunha función afín non constante é:

a)
b)
c)
d)



Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

6. A única función cuadrática é:

a) $y = -2x$ b) $y = 3x + 1$ c) $y = -2x^2 + 3x$ d) $y = -x^3 - 1$

7. A función cuadrática que ten o seu vértice no punto (3, 4) é:

a) $y = -2x^2$ b) $y = 3x^2 - x + 1$ c) $y = -2x^2 + 3x$ d) $y = -x^2 + 6x - 5$

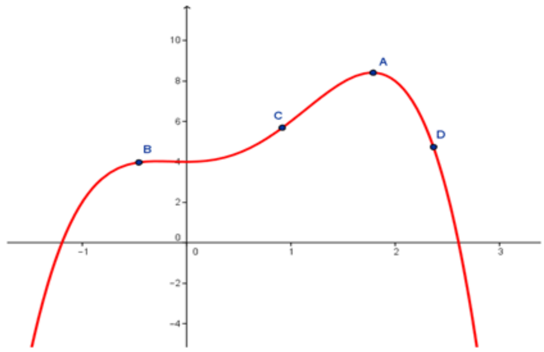
8. O máximo absoluto da función acádase no punto:

a)

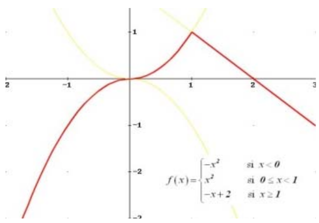
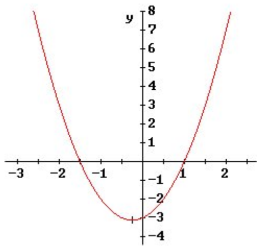
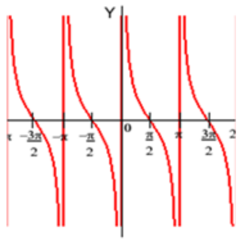
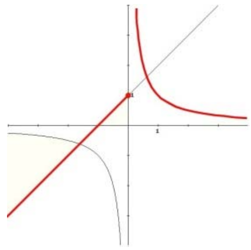
b)

c)

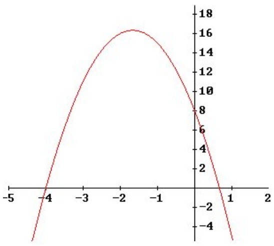
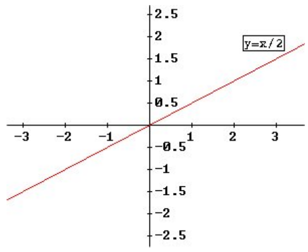
d)

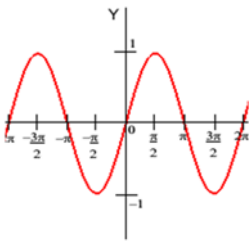
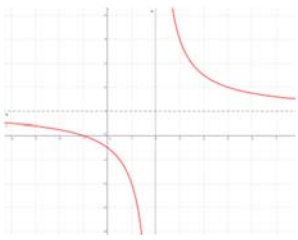


9. A única gráfica que corresponde a unha función periódica é:

a)  b)  c)  d) 

10. A única gráfica que corresponde a unha función que é crecente ata $x = -2$, pero logo deixa de selo, é:

a)  b) 

c)  d) 

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández