Matemáticas orientadas ás ensinanzas académicas

4ºB de ESO

Capítulo 10: Funcións e gráficas

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Andrés García e Javier Sánchez

Revisores: Javier Rodrigo e José Gallegos

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: Andrés García e Javier Sánchez

Índice

Resumo

Un dos conceptos máis importantes que aparecen nas Matemáticas é a idea de *función*. Intuitivamente, unha función é calquera proceso polo que se transforma un número noutro. Máis formalmente, unha función *f é unha* correspondencia que a un número x lle asigna un único número y, tal que $y = f(x)$.
Non é difícil encontrar exemplos de funcións. O espazo percorrido en función do tempo, o peso dunha persoa en función da súa altura, o que pagamos de teléfono en función dos minutos que falamos.
Neste capítulo aprenderemos como tratar de maneira rigorosa a idea intuitiva de función e como estudar as funcións. Veremos como describir as súas características e estudaremos a maneira de facer un modelo matemático dalgunhas situacións da vida real que nos axude a tomar mellores decisións. Practicamente calquera situación real pode ser estudada con axuda de funcións. Temos pois moito campo…

Autores: Andrés García e Javier Sánchez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Revisores: Javier Rodrigo, José Gallegos e Fernanda Ramos
Ilustracións: Andrés García e Javier Sánchez

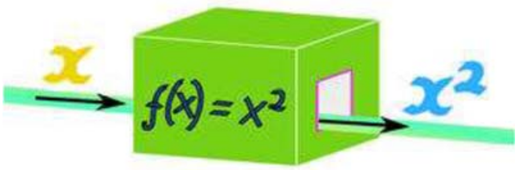
1. FUNCIÓNS REAIS

1.1. Concepto de función

Unha ***función*** é unha relación ou correspondencia entre dúas magnitudes, tales que a cada valor da variable independente, *x*, lle corresponde un ***só*** valor da dependente, *y*.

Para indicar que a variable (*y*) depende ou é función doutra, (*x*), úsase a notación **$y = f(x)$,** que se le *"y é función de x"*.

As funcións son como máquinas ás que se lles mete un elemento, *x*, e devolve outro valor, $y = f(x)$. Por exemplo, na función $f(x) = x^2$, introdúcense valores de *x*, e devólvenos os seus cadrados.



É MOI IMPORTANTE que teñamos un só valor de *y* (variable dependente) para cada valor de *x* (variable independente). En caso contrario non temos unha función.
As funcións introducíronse para estudar procesos. Se facendo o mesmo nos poden saír cousas distintas, non se pode estudar do mesmo modo.

Exemplos:

- *Pensemos na factura de teléfono. Se sabemos cantos minutos falamos (supoñendo, claro, que custen o mesmo todos) tamén sabemos canto nos toca pagar. O diñeiro que pagamos é función do tempo.*

- *Imos ao casino e apostamos a vermello ou negro. Se apostamos un euro, podemos gañar dous ou non gañar nada. Se dicimos canto apostamos non sabemos canto imos gañar. Polo tanto, as ganancias nun casino non son unha función da aposta.*

Actividades resoltas

- Indica se as seguintes situacións representan unha función ou non:
  a. O espazo percorrido por un coche e o tempo.
  b. As ganancias na Bolsa en función do investido.
  c. O cadrado dun número.

Solución:

Son funcións a) e c). O b) non o é porque non sabemos canto gañamos.

1.2. Gráfica dunha función

En moitas ocasións, a maneira máis sinxela de ver como se comporta unha función é debuxala no plano cartesiano. Imos recordar moi brevemente que era o plano cartesiano (cartesiano, vén de *Cartesio*, que era o nome co que asinaba o seu inventor, *Renè Descartes*).

Un **sistema de referencia cartesiano** consiste en dúas rectas numéricas perpendiculares chamadas **eixes**. O punto no que se cortan os eixes é a orixe do sistema, tamén chamada orixe **de coordenadas.**

Normalmente representámolo cun eixe vertical e o outro horizontal. Ao eixe horizontal denominámolo **eixe de abscisas** ou tamén eixe X e ao vertical **eixe de ordenadas** ou eixe Y.

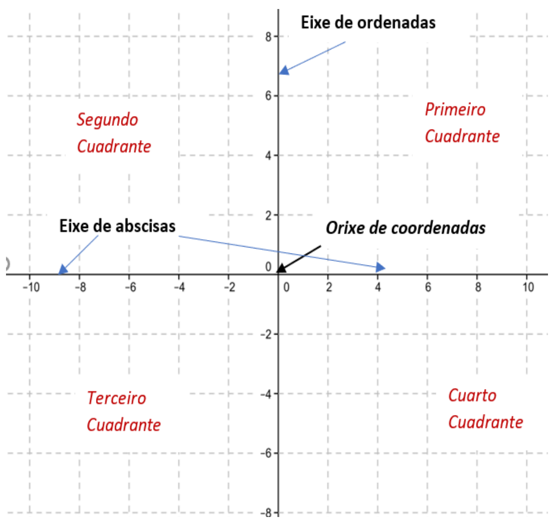
Ao cortárense os dous eixes, o plano queda dividido en catro zonas que se coñecen como **cuadrantes**:

- Primeiro cuadrante: Zona superior dereita.

- Segundo cuadrante: Zona superior esquerda.

- Terceiro cuadrante: Zona inferior esquerda.

- Cuarto cuadrante: Zona inferior dereita.



Sistema de referencia cartesiano

Para representar puntos, só hai que recordar que a primeira compoñente (ou abscisa) é *x*, polo que debe ir ao eixe X (eixe de abscisas). A segunda compoñente (ou ordenada) é *y*, polo tanto vai ao eixe Y (eixe de ordenadas).

O sentido positivo é á dereita e arriba. Se algunha das compoñentes é negativa, entón colócase en sentido contrario.

Para representar unha gráfica, o que debemos facer é simplemente tomar valores (x, y) ou, o que é o mesmo (x, $f(x)$) posto que $y = f(x)$. Logo unímolos, ben con liñas rectas, ben axustando "a ollo" unha liña curva. Naturalmente agora aparécennos dúas cuestións:

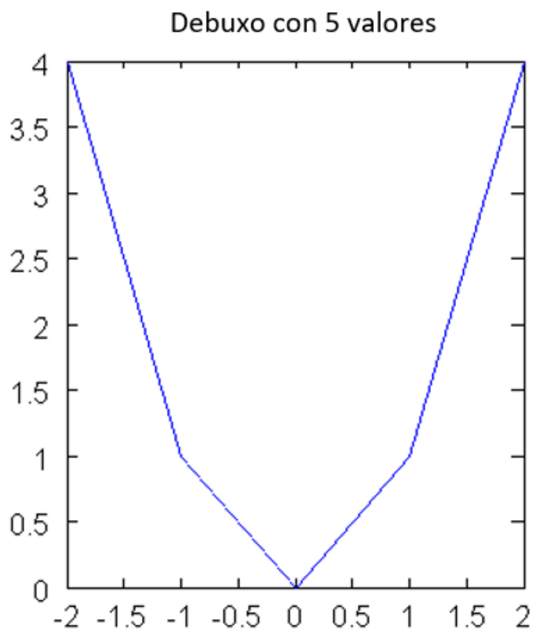
- Cantos valores hai que dar?
- Que valores lle damos?

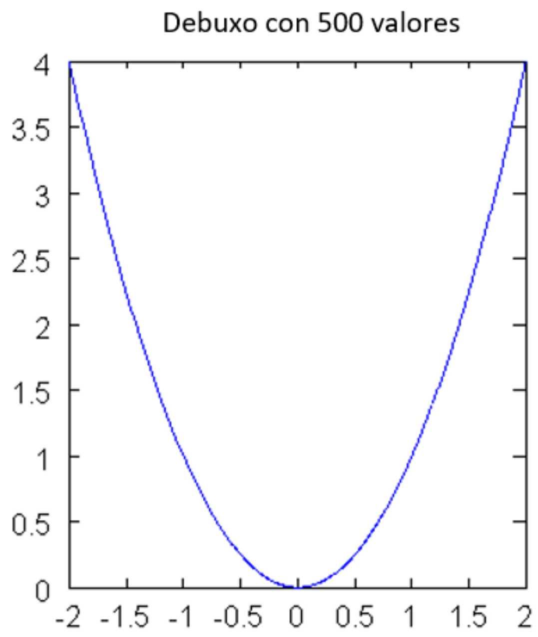
En xeral, non hai unha resposta clara a esas preguntas, aparte da obvia "canto máis, mellor". Se unha gráfica se debuxa con ordenador, normalmente dáselle un intervalo e o número de valores que queremos que represente. Tipicamente un ordenador dá MOITOS valores: 500, 1 000…

Exemplo:

- *Debuxamos a función* $y = x^2$ no intervalo [–2, 2] cun ordenador (este debuxo está feito co programa *Octave* que é código aberto e podes descargar libremente).

Facemos dúas gráficas, unha dando 5 valores e a outra 500. Observa a diferenza entre os dous debuxos. Observa tamén que o ordenador une os puntos con segmentos de rectas.



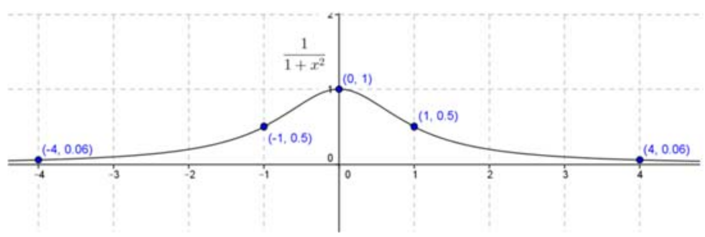


Actividade resolta

- *Debuxar a función* $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$.

Máis tarde indicaremos os valores que é recomendable tomar. De momento, limitarémonos a dar uns poucos e unir puntos. Por ningunha razón en especial tomamos –4, –1, 0, 1 e 4. Recordemos que ao substituír úsanse SEMPRE parénteses. Así $\frac{1}{(-4)^2+1}=\frac{1}{16+1}=\frac{1}{17}=0.06$. Obtemos entón a táboa de valores e basta unir os puntos (dándolles “a ollo” un pouco de curva).

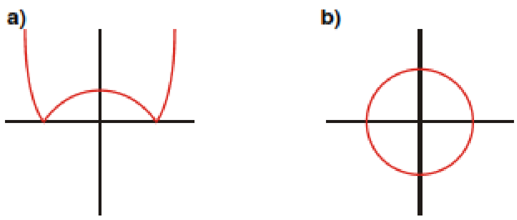
x	f (x)
–4	0.06
–1	0.5
0	1
1	0.5
4	0.06



Unha cuestión a destacar das gráficas é o feito de que, directamente a partir dun debuxo, podemos ver se corresponde a unha función ou non. Para velo, basta fixarse en se hai algún valor de *x* que corresponda a máis dun valor de *y*. Se non o hai, é unha función. Observamos que o exemplo anterior é unha función.

Actividade resolta

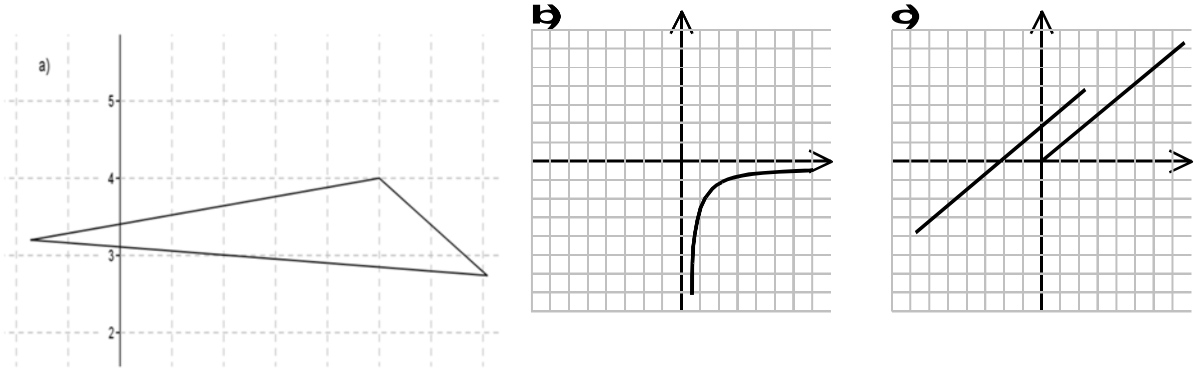
- *Indica cales das seguintes representacións corresponden á gráfica dunha función:*



A gráfica a) é unha función. A gráfica b) non o é porque, por exemplo, o punto $x = 0$ ten dous valores de y.

Actividade proposta

1. Das seguintes gráficas indica cales delas corresponden a funcións.



1.3. Diferentes maneiras de expresar unha función

Recordemos, unha vez máis, que unha función é a descrición de como se relacionan dúas magnitudes. Así pois, esta descrición podemos sabela de varias maneiras.

Funcións dadas por táboas

Probablemente, a maneira máis sinxela na que se pode dar unha función é cunha táboa de valores. É ademais a maneira máis experimental: observamos un proceso e medimos as cantidades que nos saen. Así temos unha idea de como se relacionan.

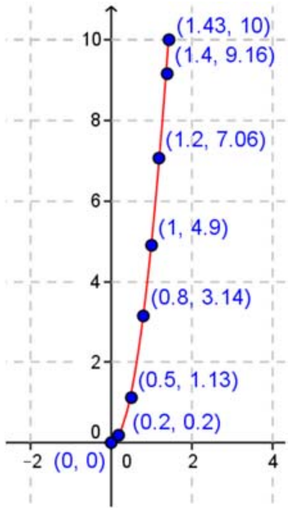
Debuxar a súa gráfica non pode ser máis sinxelo. Basta poñer os puntos e, no seu caso, unilos.

Exemplo:

- *Soltamos unha pelota desde 10 m de altura e medimos o espazo percorrido (en segundos). Obtemos entón a táboa seguinte:*

Espazo (m)	0	0.2	0.5	0.8	1	1.2	1.4	1.43
Tempo (s)	0	0.2	1.13	3.14	4.9	7.06	9.16	10.00

É moi sinxelo debuxar a súa gráfica. Basta representar os puntos e unilos (esta gráfica está feita co programa *Xeoxebra*, tamén de código aberto):



Dáte conta que ten sentido "*encher*" o espazo entre puntos. Aínda que non o teñamos medido, a pelota non pode teletransportarse, polo que seguro se pode falar de onde está no instante 0.7, por exemplo. E, obviamente, o espazo percorrido estará entre 1.13 (que corresponde a 0.5 segundos) e 3.14 (que corresponde a 0.8 segundos).

A cuestión que formulamos é a seguinte: é sempre así? Pode haber funcións onde non TEÑA SENTIDO poñer valores intermedios?

A pouco que penses, daraste conta de que si as hai.

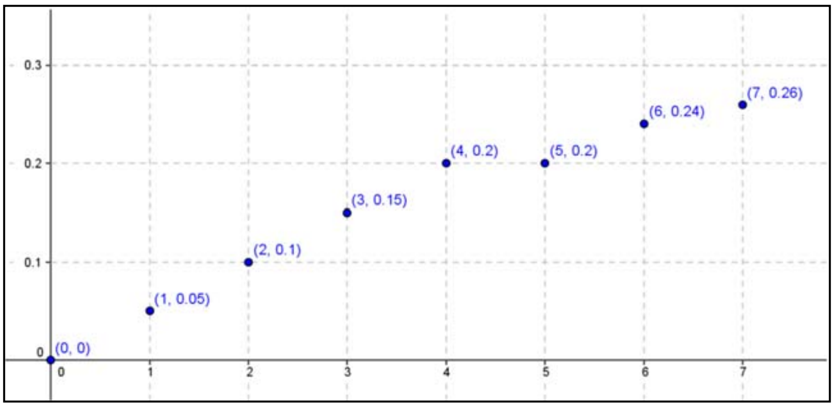
Vexamos un exemplo:

Exemplo:

- *Nunha libraría puxeron a seguinte táboa co prezo das fotocopias, dependendo do número de copias:*

Nº de copias	0	1	2	3	4	5	6	7
Prezo (euros)	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.2	0.24	0.28

Pódese construír a representación gráfica debuxando estes puntos.



A cuestión de se podemos debuxar puntos intermedios entre os anteriores respóndese por si soa.

Non se poden facer 1.5 copias. Só podes facer un número enteiro de copias.

Polo tanto, non ten sentido pensar sequera dar valores intermedios nin debuxalos.

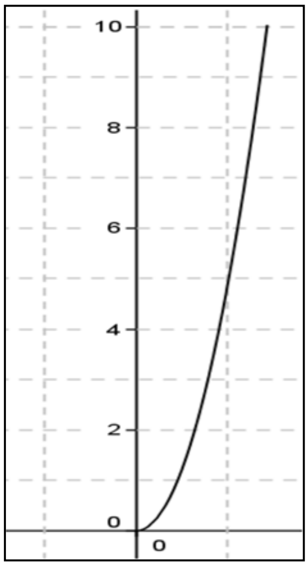
Funcións dadas por unha expresión

En moitísimas ocasións sabemos suficiente da relación entre dúas magnitudes como para coñecer exactamente unha expresión que as relaciona. Imos empezar cun exemplo.

Exemplo:

- *Volvamos ao caso que vimos antes, onde soltabamos unha pelota.*

Non precisamos medir os tempos e os espazos. É un corpo en caída libre e polo tanto o que en Física se chama movemento uniformemente acelerado. Neste caso $e=\frac{1}{2}at^2$ onde *e* é o espazo, *t* é o tempo e *a* é a aceleración. Ademais, *a* é coñecida pois é a gravidade, é dicir, 9.8 m/s^2.



Polo tanto, as dúas magnitudes, espazo e tempo, están relacionadas pola ecuación $e=\frac{1}{2}9.8t^2$. En Matemáticas é máis usual poñer *x* e *y*, polo que sería $y=\frac{1}{2}9.8x^2$ pero é exactamente o mesmo.

E, como temos todos os puntos que queiramos, podemos debuxar a función sen ningún problema cos seus puntos intermedios. Ou indicarlle a un ordenador que a debuxe.

O resultado, naturalmente, é o mesmo.

Actividades propostas

2. Un ciclista bebe 1/2 litro de auga cada 10 km de percorrido. Se no coche de equipo levan un bidón de 40 litros, fai unha táboa que indique a súa variación e escribe a función que a representa.
3. Un ciclista participa nunha carreira percorrendo 3 km cada minuto. Tendo en conta que non partiu da orixe senón 2 km por detrás representa nunha táboa o percorrido durante os tres primeiros minutos. Escribe a función que expresa os quilómetros en función do tempo en minutos e debúxaa.

Funcións definidas a anacos

- *Pensa na seguinte situación para a tarifa dun teléfono móbil. Págase un fixo de 10 € ao mes e con iso son gratis os 500 primeiros minutos. A partir de aí, págase a 5 céntimos por minuto.*

É evidente que é diferente o comportamento antes de 500 minutos e despois.

Unha **función definida a anacos** é aquela que vén dada por unha expresión distinta para diferentes intervalos.

No exemplo anterior, é fácil ver que $f(x)=\begin{cases}10+0.05(x-500) & x>500\\ 10, & x\le 500\end{cases}$.

Vexamos brevemente por que. Para valores menores que 500, o gasto é sempre 10 €. Para valores maiores, os minutos que gastamos POR RIBA DE 500 son (*x* – 500) e polo tanto o que pagamos polos minutos é 0.05(*x* – 500) pois medímolo en euros. Hai que sumarlle os 10 € que pagamos de fixo.

Actividades propostas

4. Representa as seguintes funcións a anacos. Indícanse os puntos que tes que calcular.

a. $f(x)=\begin{cases} x-1, & si \;\; x<-3 \\ -x+1, & si \;\; -3\le x<0 \\ 3, & si \;\; 0\le x<\infty \end{cases}$ Puntos:–5, –3.1, –3, –1, –0.1, 0, 1.

b. $g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & si \;\; x<-2 \\ 3, & si \;\; -2\le x<1 \\ \sqrt{x}, & si \;\; 1\le x \end{cases}$ Puntos: –3, –2.1, –2, 0, 0.9, 1, 4, 9.

1.4. Dominio e percorrido dunha función

Ata agora non nos preocupamos de que valores poden ter o *x* e o *y*. Pero é evidente que non sempre poden tomar todos os valores da recta real. Por exemplo, se unha función nos dá a altura con respecto do peso non imos poder ter valores negativos. Para iso existen os conceptos de dominio e percorrido.

O **dominio** dunha función é o conxunto de valores que a variable independente (*x*) pode tomar. Escríbese *Dom f* ou *Dom* (*f*).

O **percorrido ou rango** dunha función é o conxunto de valores que a variable dependente (*y*) pode tomar. Escríbese *Rgf* ou *Rg* (*f*).

Normalmente, o percorrido é máis directo de calcular. Simplemente, miramos a gráfica e vemos que valores pode tomar a variable dependente (*y*).

O dominio soe ser un asunto bastante máis complicado. En xeral, existen dúas razóns polas que un valor de *x* non pertenza ao dominio.

1. A función non ten sentido para eses valores. Por exemplo, se temos unha función que represente o consumo de electricidade a cada hora do día, é evidente que *x* debe estar entre 0 e 24. Un día ten 24 horas!! De ningunha maneira podemos falar sequera do que gastamos na hora 25.

2. A operación que nos dá *f*(*x*) non pode facerse. Por exemplo, non se pode dividir entre 0, polo que a función $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ten como dominio o conxunto $\{x \in \Re; x \neq 0\}$, é dicir $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

O primeiro caso vén dado pola aplicación práctica e o noso sentido común. O segundo é o que ten máis dificultade e por iso imos dedicarlle un pouco máis de tempo.

Cálculo de dominios

Existen dúas operacións que non están permitidas.

a. Dividir entre 0.

b. Facer raíces cadradas ou de índice par de números negativos. Ten en conta que a raíz cadrada de 0 SI está definida (vale 0).

En capítulos futuros veremos algunha operación máis pero, por agora, só esas dúas operacións. Imos ver un método sistemático para calcular o dominio.

Método para calcular o dominio

1. Enmarca TODAS as operacións problemáticas.
2. Para TODAS esas operacións, formula unha ecuación igualándoa a 0. Resolve esta ecuación.
3. Representa nunha recta todas as solucións de todas as ecuacións.
4. Dá valores á función. Un valor en cada intervalo e os valores límite. Se a operación se pode facer, é que o punto ou o intervalo pertence ao dominio. Se non, pois non. Podes ver se unha operación vale, ou non, facéndoa coa calculadora. Se sae erro, é que non se pode. Marca cun X os valores que non valen e cun tick (V) se se poden facer.
5. Representa a solución con intervalos. Se o punto do extremo está, é un corchete como [] e se non, unha paréntese.

Así visto, pode parecer un pouco complicado. Imos ver un par de exemplos.

Actividades resoltas

- *Calcula o dominio das seguintes funcións:*

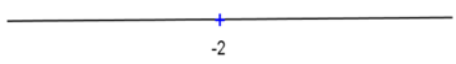
  a. $x+\sqrt{2x+4}$

  b. $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}-1}$

Apartado a

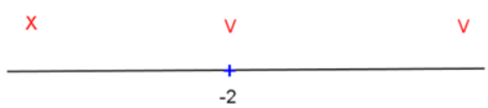
Imos seguir o procedemento punto por punto.

1. O único posible problema é a raíz cadrada de $2x+4$
2. Igualamos a 0 e resolvemos: $2x+4=0 \Rightarrow 2x=-4 \Rightarrow x=-2$



3. Representamos na recta os valores.
4. Temos que dar un valor á esquerda de –2, o valor –2 e un valor á dereita. Por exemplo, o –3, o –2 e o 0. Marcámolos na recta

X	–3	–2	0
É válido?	NON	SI	SI



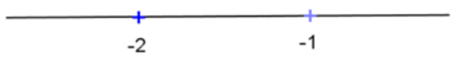
5. O dominio é $[-2,+\infty)$ (o infinito SEMPRE é aberto, nunca chegamos).

Apartado b

1. Temos dous posibles problemas. A raíz cadrada de $x+2$ e o denominador $\sqrt{x+2}-1$.
2. Temos que igualar os DOUS a cero. $x+2=0 \Rightarrow x=-2$.

Por outra parte $\sqrt{x+2}-1=0 \Rightarrow \sqrt{x+2}=1$. Elevando ao cadrado $x+2=1^2 \Rightarrow x=-1$.

3. Representamos na recta os valores.



4. Temos que dar un valor á esquerda de –2, o valor –2; un valor entre –2 e –1, o valor –1 e un valor á dereita de –1. Por exemplo, o –3, o –2, o –1.5, o –1 e o 0. Marcámolos na recta

X	–3	–2	–1.5	–1	0
É válido?	NON	SI	SI	NON	SI

5. O dominio é $[-2,-1) \cup (-1,+\infty)$.

Actividades propostas

5. Indica o dominio das seguintes funcións:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ **b)** $\sqrt{x+\dfrac{1}{x+2}}$

6. Indica o dominio e o percorrido das seguintes funcións:

a) $y=14x+2$ **b)** $y=\dfrac{1}{x-1}$ **c)** $y=\sqrt{2+x}$

7. Representa as seguintes funcións e indica o seu dominio e percorrido:

a) $f(x)=\begin{cases} x, \text{ se } x\in[-3,0) \\ 2, \text{ se } x\in[0,2] \end{cases}$ **b)** $g(x)=\begin{cases} -x, \text{ se } x\in[-2,1] \\ x, \text{ se } x\in(1,2] \end{cases}$

2. CARACTERÍSTICAS DUNHA FUNCIÓN

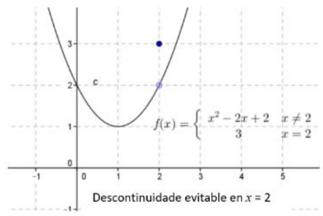
Recorda que: En terceiro xa estudiaches as características dunha función. É moi importante. Por iso imos insistir nisto.

2.1. Continuidade

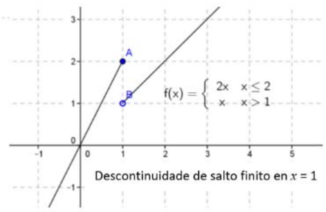
Intuitivamente, unha función é continua se a súa gráfica se pode debuxar sen levantar o lapis do papel. En caso contrario, prodúcense "saltos" en determinados valores da variable independente que reciben o nome de descontinuidades.

Unha descontinuidade pode ser de tres tipos:

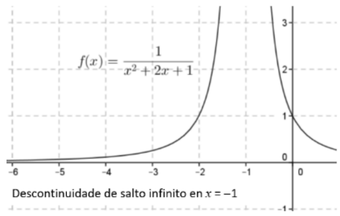
1. **Evitable**: Na función só "falla" un punto, que "non está onde debería estar". Máis formalmente, se nos aproximamos ao punto pola dereita e pola esquerda, aproximámonos a un valor que non é o da función. Neste caso, a función sería continua sen máis que cambiar a definición da función no punto que nos dá problemas.



2. **De salto finito:** Nun punto, a función ten dúas ramas diferentes a dereita e a esquerda do punto. Estas ramas aproxímanse a valores distintos (pero finitos) para cada lado. O punto de descontinuidade pode estar nunha calquera das ramas ou mesmo fóra delas. Dá o mesmo, a descontinuidade segue sendo de salto finito.

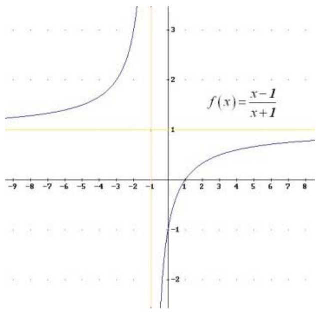


3. **De salto infinito:** Como no salto finito, nun punto a función ten dúas ramas diferentes. Pero neste caso, polo menos unha das dúas ramas (posiblemente as dúas) faise inmensamente grande ou inmensamente negativa (en termos máis informais "vaise a infinito").

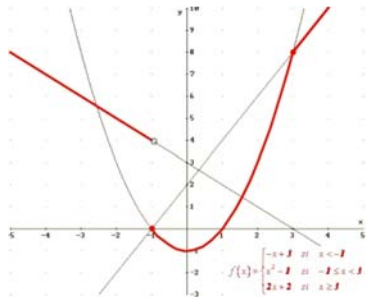


Actividades resoltas

- *Indica nestas funcións o/os valor/es da variable independente onde se produce a descontinuidade e indica o tipo de descontinuidade.*



Salto infinito en x = –1



Salto finito en x = –1

2.2. Monotonía: Crecemento e decrecemento, máximos e mínimos

As seguintes definicións quizais che resulten coñecidas de 3º de ESO.

Unha función é **constante** nun intervalo cando tome o valor que tome a variable independente, a dependente toma sempre o mesmo valor. En símbolos, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$, para todo x_1 e x_2.

Unha función é **estritamente crecente** nun intervalo cando ao aumentar o valor da variable independente aumenta tamén o da dependente. En símbolos $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, para todo x_1 e x_2.

Unha función é **crecente (en sentido amplo)** nun intervalo se é estritamente crecente ou constante. En símbolos $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, para todo x_1 e x_2. Pode tamén dicirse que, ao aumentar o valor da variable independente, o valor da dependente non diminúe.

Unha función é **estritamente decrecente** nun intervalo cando ao aumentar o valor da variable independente diminúe tamén o da dependente. En símbolos $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, para todo x_1 e x_2.

Unha función é **decrecente (en sentido amplo)** nun intervalo se é estritamente decrecente ou constante. En símbolos $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, para todo x_1 e x_2. Pode tamén dicirse que, ao aumentar o valor da variable independente, o valor da dependente non aumenta.

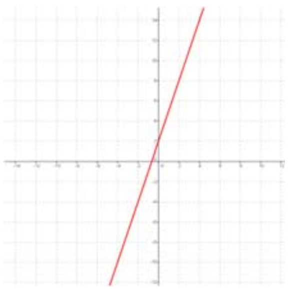
Unha función é **estritamente monótona** nun intervalo cando é estritamente crecente ou decrecente nese intervalo.

Unha función é **monótona (en sentido amplo)** nun intervalo cando é crecente ou decrecente (en sentido amplo) nese intervalo.

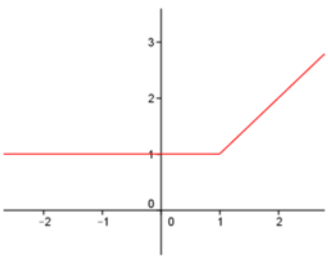
Como indican as definicións, a monotonía ou non dunha función dáse nun intervalo, é dicir, para un conxunto de números reais. Polo tanto, unha función pode ser crecente para unha serie de valores, para outros ser decrecente ou constante, logo pode volver ser crecente ou decrecente ou constante…

Exemplos:

- *Nas funcións seguintes estuda o crecemento e o decrecemento.*



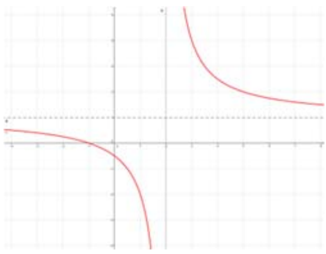
CRECENTE sempre



CONSTANTE ata x = 1

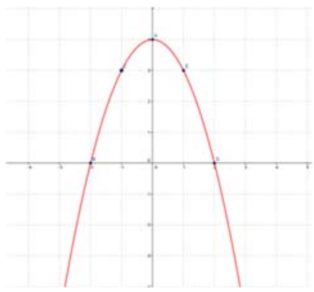
CRECENTE desde x = 1

CRECENTE (EN SENTIDO AMPLO) sempre



DECRECENTE ata x = 2

DECRECENTE desde x = 2



CRECENTE ata x = 0

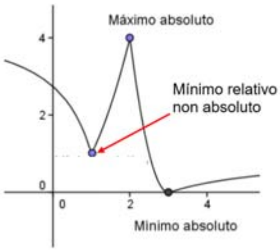
DECRECENTE desde x = 0

Extremos: máximos e mínimos

Unha función presenta un **máximo relativo** nun punto cando a imaxe da función nese punto é maior que en calquera dos valores que están ao seu arredor (no seu *entorno*). Se, ademais, a imaxe é maior que en calquera outro punto da función, dise que a función acada un **máximo absoluto** nel.
Unha función presenta un **mínimo relativo** nun punto cando a imaxe da función nese punto é menor que en calquera dos valores que están ao seu arredor (no seu *entorno*). Se, ademais, a imaxe é menor que en calquera outro punto da función, dise que a función acada un **mínimo absoluto** nel.

Se unha función presenta un máximo ou un mínimo nun punto, dise que ten un **extremo** nese punto, que poderá ser relativo ou absoluto.

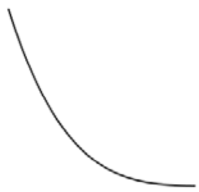
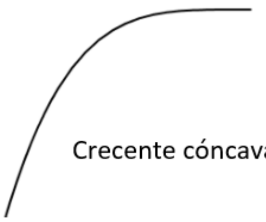
Exemplo:



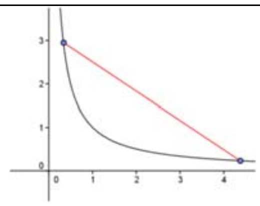
2.3. Curvatura: concavidade, convexidade e puntos de inflexión

Unha función é **convexa** se ao unir dous puntos da súa gráfica o segmento queda por enriba desta gráfica. Dise **cóncava** se ao facer a mesma operación queda por debaixo. Un punto onde se cambia de cóncava a convexa ou viceversa chámase **punto de inflexión**.

Unha imaxe vale máis que mil palabras. Así que imos debuxar os catro tipos de funcións que temos:

	Crecente	**Decrecente**
Convexa	 Crecente convexa	 Decrecente convexa
Cóncava	 Crecente cóncava	 Decrecente cóncava

Podes comprobar facilmente que se cumpre a definición. Se unes dous puntos, o segmento que forman está por enriba ou por debaixo da gráfica, segundo corresponde. Aquí á dereita podes ver un exemplo cun tramo decrecente e convexo. Observa como o segmento queda por enriba da gráfica da función.



2.4. Simetrías

Unha **función par é** aquela na que se obtén o mesmo ao substituír un número e o seu oposto:

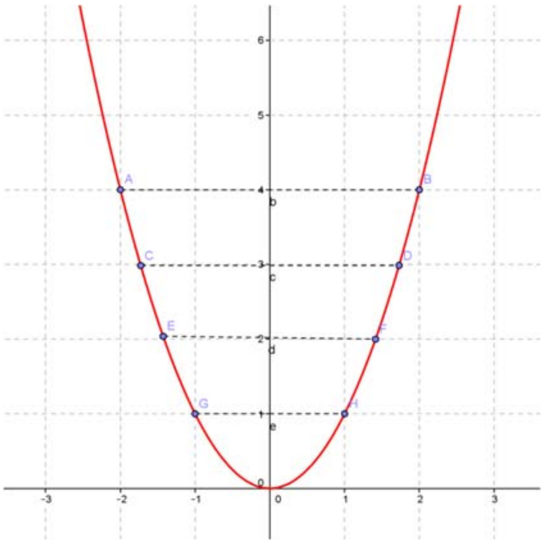
$$f(-x) = f(x)$$

Esta propiedade tradúcese en que a función é simétrica respecto ao eixe de ordenadas, é dicir, se dobramos o papel por este eixe, a gráfica da función coincide en ambos os lados.

Exemplo:

- *A función cuadrática* $f(x) = x^2$ *é par:*

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$



Unha **función impar** é aquela na que se obtén o oposto ao substituír un número e o seu oposto:

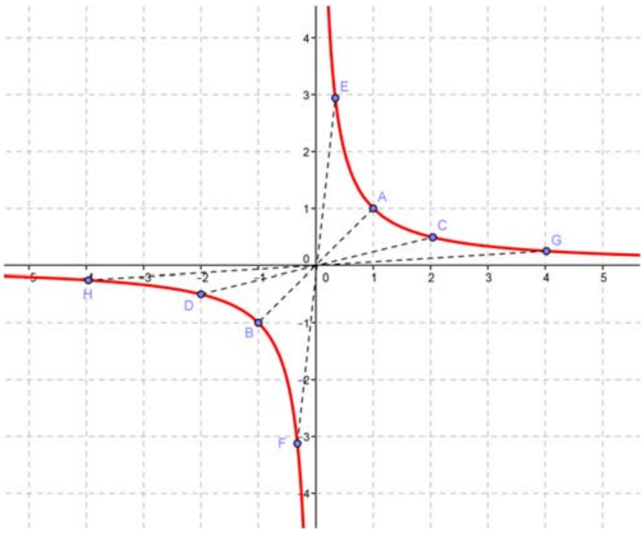
$$f(-x) = -f(x)$$

Esta propiedade tradúcese en que a función é simétrica respecto á orixe de coordenadas, é dicir, se trazamos un segmento que parte de calquera punto da gráfica e pasa pola orixe de coordenadas, ao prolongalo cara ao outro lado encontraremos outro punto da gráfica á mesma distancia.

Exemplo:

A función de proporcionalidade inversa $f(x) = \frac{1}{x}$ é impar porque:

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)} = \frac{-1}{x} = -f(x)$$

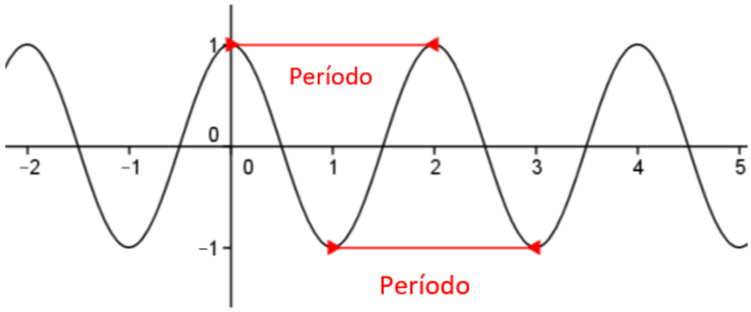


2.5. Periodicidade

Unha **función periódica é** aquela na que as imaxes da función se repiten conforme se lle engade á variable independente unha cantidade fixa chamada *período.*

Exemplo:

É moi claro que a seguinte función é periódica de período 2. Observa que o período se pode medir entre dous "picos" ou entre dous "vales". De feito pódese medir entre dous puntos equivalentes calquera.



2.6. Comportamento no infinito

O infinito é, por propia definición, inacadable. Pero dinos moito dunha función saber como é para valores moi grandes. Por iso se recomenda, ao debuxar unha gráfica, dar un valor (ou varios) positivo moi grande e un valor (ou varios) moi negativo.

Nalgunhas funcións simplemente ocorre que obtemos valores moi grandes e "nos saímos da táboa". Isto simplemente dános unha idea de cara a onde vai a función.

Pero noutras, e isto é o interesante, aproximámonos a un número finito. Iso significa que, para valores moi grandes de *x*, a función é aproximadamente unha recta horizontal. Esta recta chámase **asíntota**.

Actividade resolta

- *Debuxa a función* $f(x)=\frac{x^2+2}{x^2+1}$ *dando valores moi grandes e moi negativos.*

Damos valores moi grandes e vemos que nos aproximamos a 1:

$$f(10)=\frac{10^2+2}{10^2+1}=1.0099,\ f(100)=\frac{100^2+2}{100^2+1}=1.0001,\ f(1\,000)=\frac{1\,000^2+2}{1\,000^2+1}=1.000001$$

Se damos valores moi negativos, pasa o mesmo:

$$f(-10)=\frac{(-10)^2+2}{(-10)^2+1}=1.0099,\ f(-100)=\frac{(-100)^2+2}{(-100)^2+1}=1.0001,$$

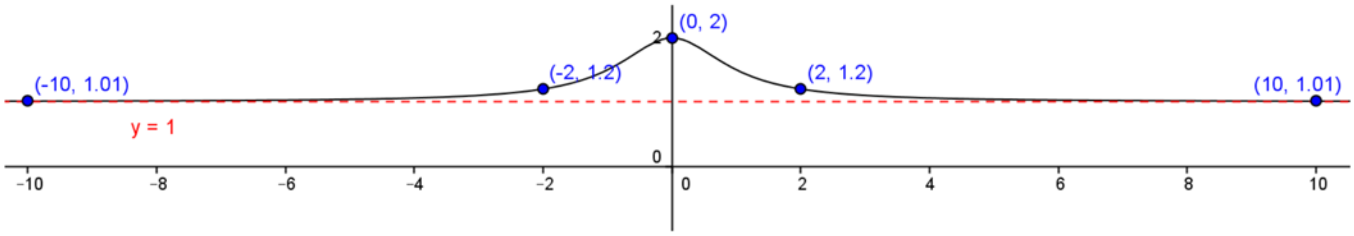
$$f(-1\,000)=\frac{(-1\,000)^2+2}{(-1\,000)^2+1}=1.000001$$

Poderiamos ter visto directamente que os valores ían ser os mesmos porque a función é claramente par $f(-x)=f(x)$ e, polo tanto, $f(-10)=f(10)$, $f(-100)=f(100)$, etc.

Iso dános unha idea de que a recta á que nos aproximamos (asíntota) é a recta horizontal *y* = 1.

Imos dar uns valores máis e debuxamos a función. Os valores negativos son iguais que os positivos. Redondeamos 1.0099 a 1.01

x	-10	-2	0	2	10
y	1.01	1.2	2	1.2	1.01



Observa a liña horizontal que é a asíntota debuxada en vermello a trazos.

2.7. Recompilatorio

Imos repasar o que vimos ata agora e como utilizalo para as dúas cuestións máis importantes deste capítulo.

Como debuxar unha función

Debuxar unha función é esencialmente unir puntos. Imos, de todas maneiras, a repasar os diferentes casos.

1. Primeiramente miramos se a función está definida por unha táboa ou por unha expresión. Se é unha táboa non hai nada que facer máis que debuxar e (se teñen sentido os valores intermedios) unir os puntos que nos dean e rematamos. Pasamos nese caso ao paso 2.
2. Se está definida por pedazos, damos o punto ou puntos onde cambia a definición e algúns puntos próximos. Tipicamente o punto crítico +0.1 e −0.1. Por exemplo, se cambia en 1, dariamos 1, 0.9 e 1.1.
3. En xeral, intentamos dar un valor moi grande e outro negativo, moi grande en valor absoluto. Se vemos que se estabiliza, poñémolos, é unha asíntota.
4. Damos dous ou tres puntos máis calquera.
5. Unimos os puntos (se teñen sentido os valores intermedios).

Actividades propostas

8. Indica o dominio e percorrido das seguintes funcións e debúxaas:

a. $\frac{1}{2x+6}$ b. $x+\frac{1}{3x-6}$ c. x^3-3x

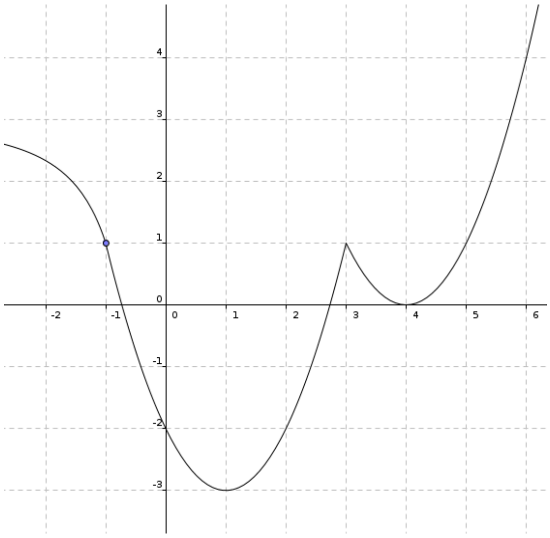
Como describir unha función

Se nos dan a gráfica dunha función e nos piden describila, é sinxelo:

1. Miramos os valores de *x* onde cambia o comportamento.
2. Describimos cada un dos tramos.
3. Describimos os máximos e mínimos indicando se son relativos ou absolutos.

Actividade resolta

- *Describir a función*



O primeiro, a función é continua. Os puntos onde "pasa algo" son $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$ e $x = 4$. Pasamos describir os tramos:

En $(-\infty, -1)$ decrecente cóncavo. En $(-1, 1)$ decrecente convexo. En $(1, 3)$ crecente convexo. No intervalo $(3, 4)$ decrecente convexo. En $(4, +\infty)$ crecente convexo.

Ás veces póñense separados o crecemento e a curvatura:

Crecente en $(1, 3) \cup (4, +\infty)$

Decrecente en $(-\infty, 1) \cup (3, 4)$

Cóncava en $(-\infty, -1)$. Convexa en $(-1, 3) \cup (3, +\infty)$

Finalmente hai un máximo relativo en $x = 3$. Hai mínimos relativos en $x = 1$ e $x = 4$. Non hai máximo absoluto e en $x = 1$ hai un mínimo absoluto.

Non hai asíntotas. Cando *x* se fai moi grande, o y tende a $+\infty$, e cando o *x* se achega a $-\infty$ o e tende tamén a $+\infty$.

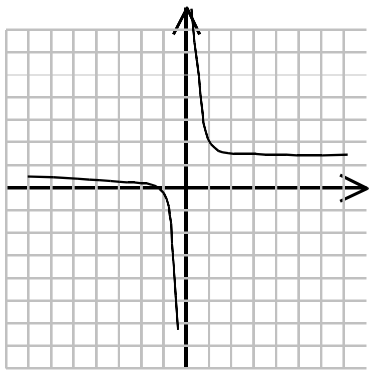
Actividades propostas

9. Debuxa as seguintes funcións e indica os seus intervalos de crecemento e decrecemento.

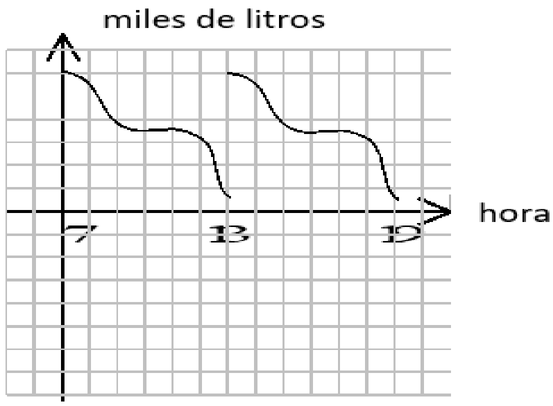
a) $y = x^3$ **b)** $y = x^5$ **c)** $y = \frac{1}{x^2}$

10. A gráfica que se dá a continuación indica a evolución dun valor da bolsa (no eixe vertical en miles de euros por acción) durante unha xornada. Estuda o seu dominio, percorrido, puntos de corte, simetría, periodicidade, crecemento, continuidade, máximos e mínimos.

11. Estuda a seguinte gráfica, indicando: dominio, percorrido, puntos de corte cos eixes, simetría, periodicidade, crecemento, continuidade, máximos e mínimos.



12. A gráfica que se dá a continuación representa o volume de combustible no depósito dunha gasolineira ao cabo dun día. Estuda o seu dominio, percorrido, puntos de corte, simetría, periodicidade, crecemento, continuidade, máximos e mínimos.



2.8. Ampliación: Translacións

Co que vimos anteriormente, xa podemos debuxar calquera función. O que imos describir agora é unha maneira de aforrar traballo nalgunhas ocasións.

Ás veces, debuxamos unha función e pídennos debuxar outra similar. Por exemplo, se estudamos un corpo en caída libre, o espazo percorrido é $y = \frac{1}{2}9.8x^2$. Pero, se o corpo xa percorrera un espazo de 10 m, sería $y = 10 + \frac{1}{2}9.8x^2$. Se a quixeramos debuxar, en principio deberiamos volver dar todos os valores. Pero, non poderemos evitarnos esforzos e aproveitar a gráfica que xa temos?

Si, podemos. Imos velo agora.

Translacións verticais.

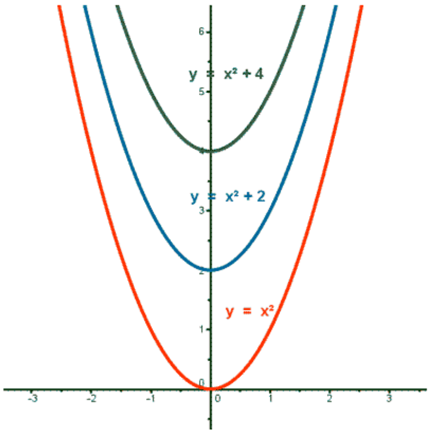
Trasladar verticalmente K unidades unha función *f*(*x*) é sumarlle á variable dependente *y* = *f*(*x*) a constante K. Noutras palabras, movemos a función cara arriba ou cara abaixo.

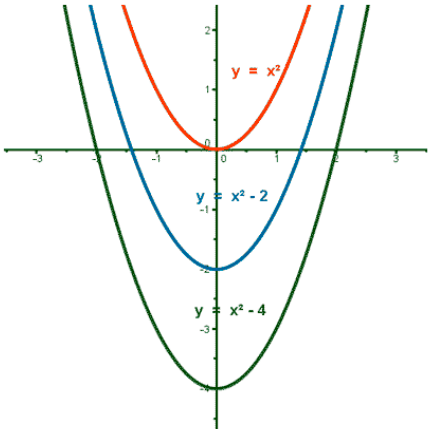
Obtense a función: ***y* = *f*(*x*) + K**

- se K > 0, a función trasládase **cara arriba**.
- se K < 0, a función trasládase **cara abaixo**.

Exemplo:

Representa, mediante a realización previa dunha táboa de valores, a función $f(x) = x^2$. A continuación, mediante translación, as das funcións $f(x) = x^2 + 2$, $f(x) = x^2 + 4$, $f(x) = x^2 - 2$ e $f(x) = x^2 - 4$.





Translacións horizontais.

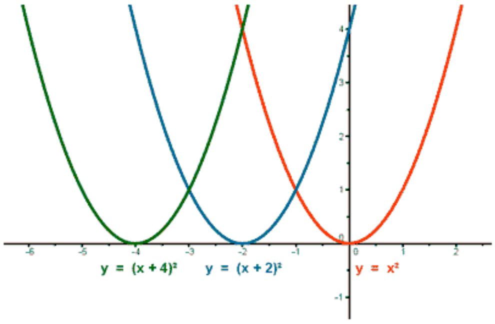
Trasladar horizontalmente K unidades unha función *f*(*x*) é sumarlle á variable independente *x* a constante K.

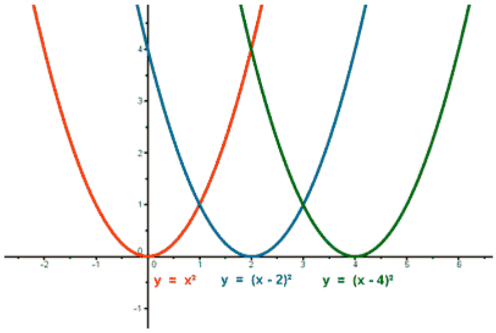
Obtense a función *y* = *f*(*x* + K)

- se K > 0, a función trasládase **cara á esquerda**.
- se K < 0, a función trasládase **cara á dereita.**

Exemplo:

- *Representa as funcións* $f(x) = x^2$, $f(x) = (x+2)^2$, $f(x) = (x+4)^2$, $f(x) = (x-2)^2$ *e* $f(x) = (x-4)^2$.





Actividades propostas

13. Representa a función $y = 10 + \frac{1}{2}9.8x^2$ que poñiamos como exemplo e interpreta o seu sentido físico.

14. Representa graficamente as seguintes funcións:

a) $y = x^2 + 2$ b. $y = 2 - x^2$ c. $y = 2x^2$ d. $y = -2x^2$

15. Representa graficamente as seguintes funcións:

a) $y = \frac{1}{x} + 5$ b. $y = \frac{5}{x}$ c. $y = \frac{1}{x} - 2$ d. $y = \frac{2}{x} + 3$

16. Representa a función $f(x) = 4 - x^2$ e, a partir dela, debuxa as gráficas das funcións:

a. $y = f(x) - 3$ b. $y = f(x) + 3$ c. $y = f(x - 3)$ d. $y = f(x + 3)$

3. VALORES ASOCIADOS ÁS FUNCIÓNS

Moitas veces, interésanos o comportamento dunha función nun valor concreto e algunha medida sobre ela. Por exemplo, se consideramos o espazo que percorre un coche, o que nos pode interesar non é todo o percorrido, senón só a velocidades ao pasar xunto a un radar. As medidas máis importantes imos describilas agora.

3.1. Taxa de variación e taxa de variación media (velocidades)

A **taxa de variación** dunha función entre dous puntos *a* e *b* é a diferenza entre o valor da función para *x* = *a* e o valor para *x* = *b*. En símbolos:

$$\boldsymbol{TV[a,b] = f(b) - f(a)}$$

A **taxa de variación media** (**velocidade media**) dunha función entre dous puntos *a* e *b* é o cociente entre a taxa de variación entre os mesmos e a diferenza *a e b*. En símbolos:

$$\boldsymbol{TVM[a,b] = \frac{TV[a,b]}{b-a} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

Estes conceptos poden parecerche raros ao principio pero realmente son cousas que se aplican moito na vida diaria. Pensemos nun coche que se move. O espazo que percorre entre dous momentos de tempo é a taxa de variación. A velocidade media a que os percorreu é a taxa de variación media.

Actividade resolta

- *O coche no que circulamos percorre 100 Km a 50 Km/h e logo outros 100 Km a 100 Km/h. En consecuencia, o espazo percorrido vén dado pola función* $f(t)=\begin{cases}50t, & t\le 2\\ 100+100(t-2), & t>2\end{cases}$. *Pídese:*

1. Xustificar a función que dá o espazo percorrido.
2. Calcular e interpretar as taxas de variación TV[0, 3], TV[1, 2], TV[2.5, 3].
3. Calcular e interpretar as taxas de variación medias TVM[0, 3], TVM[1, 2], TVM[2.5, 3].
4. Por que a velocidade media non foron 75 Km/h, que é a media das velocidades?

Apartado 1.

Para xustificar a función, só temos que recordar a supercoñecida fórmula $e = vt$. O único que hai que ver é cando cambia a velocidade.

Se o coche vai a 50 km/h, obviamente en 2 h chega aos 100 km e cambia a velocidade. Ata entón, o espazo percorrido é 50*t* (velocidade por tempo). A partir de aí, sería 100(*t*–2) posto que contamos o tempo desde o instante 2. A iso débeselle sumar o espazo xa percorrido, que son 100.

Apartado 2. A taxa de variación non é máis que o espazo percorrido. Basta con aplicar a definición. Como xa dixemos antes, non nos teñen que dar ningún medo as funcións definidas por pedazos. Simplemente substituímos onde corresponda e punto.

$TV[0,3] = f(3) - f(0) = [100 + 100 \cdot (3-2)] - 50 \cdot 0 = 200$. Entre 0 e 3 horas percorremos 200 Km.

$TV[1,2] = f(2) - f(1) = 50 \cdot 2 - 50 \cdot 1 = 50$. Entre 1 e 2 horas percorremos 50 Km.

$TV[2.5,\ 3] = f(3) - f(2.5) = [100 + 100 \cdot (3-2)] - [100 + 100 \cdot (2.5-2)] = 100 \cdot (3-2.5) = 50$. Percorremos 50 Km entre as 2.5 horas e as 3.

Autores: Andrés García e Javier Sánchez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Revisores: Javier Rodrigo, José Gallegos e Fernanda Ramos
Ilustracións: Andrés García e Javier Sánchez

Apartado 3. A taxa de variación media é o que na linguaxe da rúa se chama velocidade (media). E para calculala divídese o espazo entre o tempo, sen máis.

$TVM[0,3] = \frac{f(3)-f(0)}{3-2} = \frac{[100+100\cdot(3-2)]-50\cdot 0}{3-0} = 66.67$ Km/h. Entre 0 e 3 horas a nosa velocidade media foi de 66.67 Km/h, unha media (axustada polo tempo) das velocidades.

$TVM[1,2] = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{50}{2-1} = 50$. Entre 1 e 2 horas a nosa velocidade foi de 50 Km/h, como formulaba de feito o problema.

$TVM[2.5,3] = \frac{f(3)-f(2.5)}{3-2.5} = \frac{50}{3-2.5} = 100$. Entre 2.5 e 3 horas a nosa velocidade foi, como era de agardar, de 100 Km/h

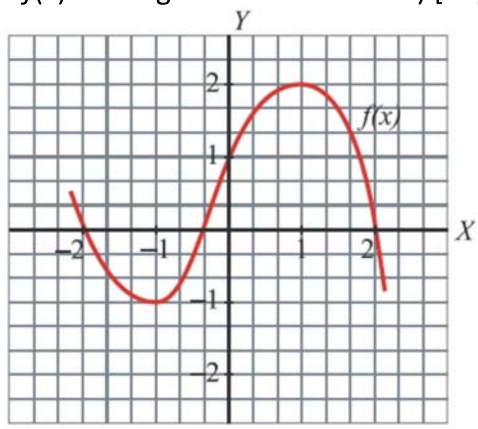
Apartado 4. Pois porque pasamos máis tempo circulando a 50 Km/h que a 100 Km/h e polo tanto a nosa velocidade media debe estar máis preto de 50 que de 100.

Actividades propostas

17. Dada a función $f(x)=(x-1)^3$, calcula a taxa de variación media no intervalo [0, 1]. É crecente ou decrecente a función nese intervalo?

18. Dada a función $f(x)=\frac{3}{x}$, calcula a taxa de variación media no intervalo [–3, –1]. É crecente ou decrecente a función nese intervalo?

19. Calcula a TVM desta función *f*(*x*) nos seguintes intervalos: a) [–1, 0] e b) [1, 2].



20. Consideremos a función $f(x)=\frac{x^2-1}{2}$. Calcula a taxa de variación media no intervalo [0, 2] e indica se é crecente ou decrecente nese intervalo.

21. Calcula a taxa de variación media da función $f(x) = 2x^2 - 3x$ no intervalo [1, 2] e indica se *f*(*x*) crece ou decrece nese intervalo.

3.2. Taxa de crecemento

"… a afiliación ao Réxime Xeral da Seguridade Social, onde hai 13.1 millóns de traballadores, apenas ascendeu en 16 852 persoas respecto a febreiro do 2013, un 0.13 % máis" (Diario *El Mundo*, edición dixital, 04/03/2014).

Seguro que liches (ou viches na tele) noticias como esta un montón de veces. A medida que están utilizando é o que se coñece como a taxa de crecemento. Imos definila.

A **taxa de crecemento** dunha función entre dous puntos a e b é o cociente entre a taxa de variación e o valor da función en $x = a$. En símbolos: $T_{Crec}[a,b] = \frac{f(b) - f(a)}{f(a)}$ ou ben $T_{Crec}[a,b] = \frac{TV[a,b]}{f(a)}$.

Sóese expresar en tanto por cento, polo que normalmente se multiplica por 100. As fórmulas pasan ser entón $T_{Crec}[a,b] = \frac{f(b) - f(a)}{f(a)} \cdot 100$ ou $T_{Crec}[a,b] = \frac{TV[a,b]}{f(a)} \cdot 100$

Se $f(a)$ = 0 a taxa de crecemento non **está definida**. NON SE PODE DIVIDIR ENTRE 0.

Observa que a taxa de crecemento pode ser negativa, indicando unha diminución. Crecer ao –5 % significa ter perdido o 5 %.

Exemplo:

- *Imos comprobar que no xornal calcularon ben a taxa de crecemento.*

Os momentos do tempo non son importantes. No momento inicial é $f(a) = 13\,100\,000$ traballadores. No momento final hai que sumarlle o aumento $f(b) = 13\,100\,000 + 16\,852$ = 13 116 852.

Aplicando a fórmula

$$T_{Crec}[a,b] = \frac{f(b) - f(a)}{f(a)} \cdot 100 = \frac{13\,116\,852 - 13\,100\,000}{13\,100\,000} \cdot 100 = 0.1286\%$$

que se redondea ao 0.13 %. Está ben calculado.

Observa que a taxa de variación é 16 852 polo que a podiamos ter calculado directamente coa outra fórmula:

$$T_{Crec}[a,b] = \frac{TV[a,b]}{f(a)} \cdot 100 = \frac{16\,852}{13\,100\,000} \cdot 100 = 0.1286\ \%$$

e, obviamente, sae o mesmo.

Actividades propostas

22. Dada a función $f(x) = (x+1)^3$, calcula a taxa de crecemento no intervalo [0, 1].

23. A función $f(x) = 1\,000 \cdot (1.03)^x$ representa o resultado de ingresar 1 000 € no banco (x = 0 é o estado inicial e, naturalmente, vale 1 000 €). Calcula a súa taxa de crecemento entre 0 e 1, entre 1 e 2 e entre 2 e 3. Que relación hai entre elas? Podes dar unha explicación de por que?

24. A seguinte táboa representa a poboación mundial (estimada) en millóns de persoas. Calcula a taxa de crecemento para cada intervalo de 5 anos. Que observas?

Ano	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
Poboación	3 692	4 068	4 435	4 831	5 264	5 674	6 071	6 456	6 916

25. Poderías dar un exemplo dunha función cuxa taxa de crecemento sexa constantemente 2?

CURIOSIDADES. REVISTA

Di o premio Nobel de 1963 EUGENE WIGNER:

"A enorme utilidade das Matemáticas nas ciencias naturais é algo que roza o misterioso e non hai explicación para iso. Non é en absoluto natural que existan "leis da natureza" e moito menos que o ser humano sexa capaz de descubrilas. O milagro do apropiada que resulta a linguaxe das Matemáticas para a formulación de leis da Física é un regalo maravilloso que non comprendemos nin nos merecemos".

As funcións utilizáronse para facer modelos matemáticos das situacións reais máis diversas. Antes da época dos ordenadores as funcións que soían utilizarse eran as funcións lineais (que xa coñeces pero que estudarás detidamente no próximo capítulo). *Linealizábanse* os fenómenos. Ao usar outras funcións, como por exemplo parábolas poden complicarse moito as cousas. Mesmo pode aparecer o caos.

Sabes que é o caos?

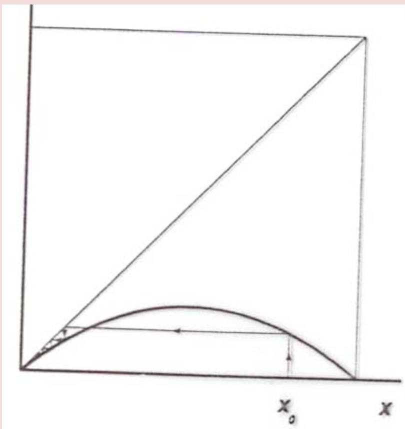
Imos estudar un exemplo no que aparece o caos: a **ecuación loxística**. É un modelo matemático proposto por *P. F. Verhulst* en 1845 para o estudo da dinámica dunha poboación. Explica o crecemento dunha especie que se reproduce nun entorno pechado sen ningún tipo de influencia externa. Considéranse valores x entre 0 e 1 da poboación.

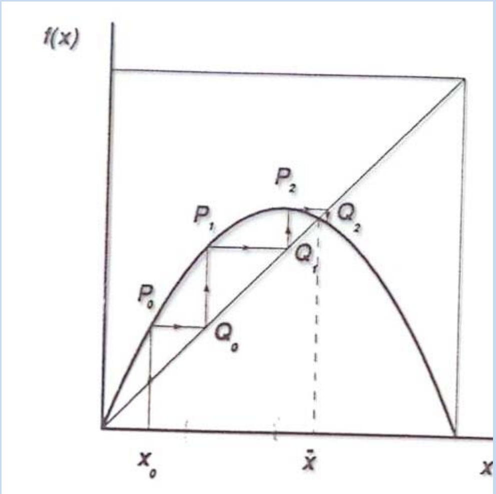
$$y = r(x(1 - x))$$

Se quedamos co primeiro termo, $y = rx$ sería un modelo lineal, e indica o crecemento da poboación, pero ten un termo de segundo grao que fai que sexa un polinomio de segundo grao. Se nalgún momento $y = x$ a poboación manterase sempre estable para ese valor. Por exemplo, se $x = 0$ entón $y = 0$, e sempre haberá unha poboación de tamaño 0. Estes valores que fan que $y = x$ denomínanse **puntos fixos**.

O comportamento é distinto segundo os valores que tome r. Por exemplo, para $r < 1$, extínguese a especie.

Debuxamos a parábola para $r = 0.9$. Imaxinamos que no instante inicial hai unha poboación x_0. Buscamos, cortando verticalmente á parábola, o valor de y. Para transformalo no novo x, cortamos a diagonal do primeiro cuadrante. Observa que a poboación cada vez é menor e que vai cara á extinción. Observa con coidado ese proceso de ir cortando á parábola e á diagonal, para volver cortar a parábola e así sucesivamente.





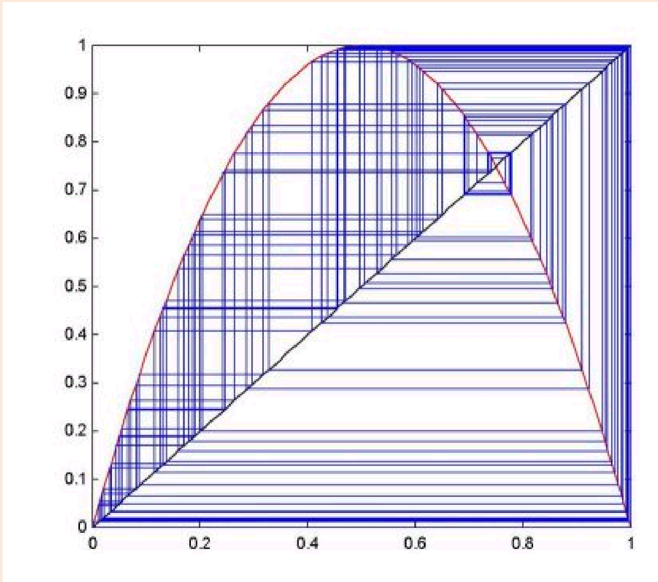
Para valores de r comprendidos entre 1 e 3: $1 < r < 3$, entón a poboación estabilízase, tende a un punto fixo.

Debuxamos a parábola para $r = 2.5$, e igual que antes partimos dun valor inicial calquera, neste caso x_0, que se converte en e = P_0. Ese valor tomámolo como abscisa: $x = Q_0$, e calculamos o novo valor de e = P_1… Observa como a poboación se estabiliza cara ao valor de intersección da parábola coa diagonal.

Para valores entre 3 e 3.56994546 as cousas empiezan a complicarse, ata que …

Para r maior ou igual a 3.56994546 temos sensibilidade extrema ás condicións iniciais, temos **caos**.

Non sabemos que pode ocorrer. A poboación flutúa constantemente. E ese comportamento tan errático é debido a unha función polinómica de segundo grao!



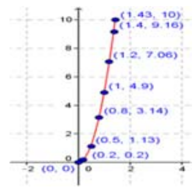
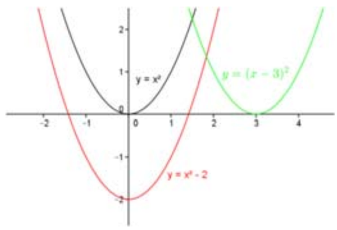
O termo **caótico** vai indicar que puntos próximos no instante inicial poden ter comportamentos dispares no futuro.

O meteorólogo americano *Edward N. Lorenz* utilizou o termo de **efecto bolboreta** para explicar porque o tempo atmosférico non é predicible a longo plazo, é dicir para explicar que existía unha dependencia sensible ás condicións iniciais: *"O **aletexo dunha bolboreta** no Brasil, podería provocar un tornado en Texas?"*

Oíralo?

Este é un exemplo de caos debuxado co ordenador. Hai 5 órbitas ben definidas, pero un punto da fronteira entre órbitas non sabemos en cal terminará.

RESUMO

Noción	*Definición*	*Exemplos*
Función	Unha relación ou correspondencia entre dúas magnitudes, tales que a cada valor da variable independente, *x*, lle corresponde un ***só*** valor da dependente, *y*.	$y = 2x + 3$, $y = \dfrac{1}{x^2+1}$
Gráfica dunha función	Son os (normalmente infinitos) puntos polos que pasa. É dicir, todos os valores $(x, f(x))$ posto que $y = f(x)$.	
Maneiras de describir unha función	- **Dando unha táboa de valores.** Como na columna do lado. - **Dando unha expresión**. $y = 2^x$ - **A anacos**: Varias expresións. $y = \begin{cases} x+1, x > 2 \\ x,\ x \le 2 \end{cases}$	*X* / *Y*: –3 / 2 –2 / 0 2 / 3
Dominio e percorrido	- **Dominio.** Son os valores de "*x*" onde a función teña sentido. - **Percorrido**. Son os valores de "*y*" que se acadan.	O dominio da función $\sqrt{2-x}$ é $(-\infty, 2]$ e o seu percorrido $[0, +\infty)$.
Características dunha función	Debemos estudar a súa continuidade, crecemento, máximos e mínimos, curvatura, simetrías e comportamento no infinito.	$y = x^2 + 2$ é continua, crecente en $(-\infty, 0)$, decrecente en $(0, \infty)$, ten un mínimo absoluto en 0 e é sempre convexa.
Translacións	- **Vertical.** *y* = *f*(*x*) + K. En sentido de K: se K é positivo cara arriba, se non cara abaixo. - **Horizontal**. *y* = *f*(*x* + *K*). En sentido **contrario** de K: se K é positivo cara á esquerda, se non cara á dereita.	
Valores asociados	- **Taxa de variación (TV):** $f(b) - f(a)$ - **Taxa de variación media (TVM):** $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ - **Taxa de crecemento T$_{crec}$:** $\dfrac{f(b)-f(a)}{f(a)}$	$y = x + 2$ $TV[3,5] = 2$ $TVM[3,5] = \dfrac{2}{5-3} = 1$ $T_{crec}[3,5] = \dfrac{2}{5} = 40\%$

EXERCICIOS E PROBLEMAS

1. Paulo saíu da súa casa ás 8 da mañá para ir ao instituto. No recreo, tivo que volver á casa para ir co seu pai ao médico. A seguinte gráfica reflicte a situación. As distancias veñen dadas en metros, (non en km).

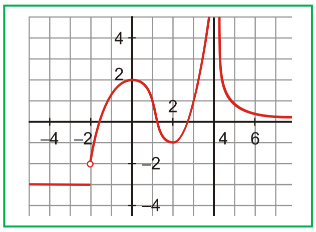
a. A que hora comezan as clases e a que hora empeza o recreo?
b. A que distancia da súa casa está o instituto? Que velocidade leva cando vai a clase?
c. A que distancia da súa casa está o consultorio médico? Que velocidade levan cando se dirixen alí?
d. Canto tempo estivo na clase? E no consultorio médico?

2. Dada a función a través da seguinte gráfica:

a) Indica cal é o seu dominio de definición.

b) É continua? Se non o é, indica os puntos de descontinuidade.

c) Cales son os intervalos de crecemento e cales os de decrecemento da función? Que ocorre no intervalo $(-\infty,-2]$?



3. Debuxa as gráficas destas hipérboles e determina os seus dominios, calcula as súas asíntotas e os puntos de corte cos eixes de coordenadas:

a. $y=\dfrac{2x}{x-2}$ b. $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$ c. $y=\dfrac{4x}{2x+1}$

4. Debuxa a gráfica de $f(x)=\begin{cases}1-x & si \quad x\le 1\\ x^2-4x & si \quad 1<x\end{cases}$ e explica se é continua en $x=1$.

5. Tres quilos de peras custáronnos 4.5 €; e, por sete quilos, teriamos pagado 10.5 €. Encontra a ecuación da recta que nos dá o prezo total, "y", en función dos quilos que compremos, "x". Represéntaa graficamente.

6. Describe as seguintes funcións cuadráticas e fai un bosquexo da súa gráfica:

a. e = $4x^2 + 8x - 5$ b. $y = x^2 + 3x - 4$ c. $y = 8 - 2x - x^2$

7. Calcula os puntos de corte cos eixes e o vértice das seguintes parábolas e utiliza estes datos para representalas graficamente

a. $y = x^2 + 5x + 6$ b. $y = -x^2 + 4x + 5$

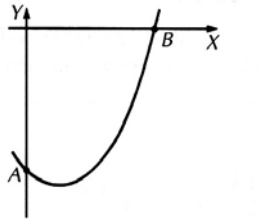
8. A altura sobre o chan dun proxectil lanzado desde o alto dunha muralla vén dada, en función do tempo, por $h(t) = -5t^2 + 15t + 20$, onde *t* se expresa en segundos, e *h*, en metros. Debuxa a gráfica desta función e calcula:

a. A altura da muralla.

b. A altura máxima acadada polo proxectil e o tempo que tarda en acadala.

c. O tempo que tarda en impactar contra o chan.

9. A gráfica amosa o debuxo aproximado da curva $y = x^2 - 2x - 8$. Calcula:



a. As coordenadas dos puntos A e B.

b. A ecuación dunha recta que pase polos puntos A e B.

10. Representa as seguintes funcións:

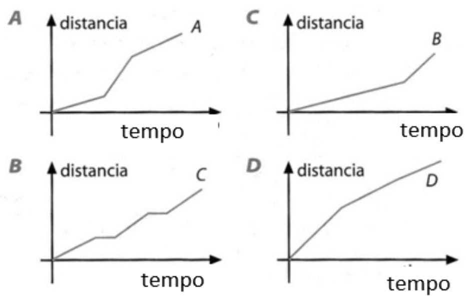
a. $y = 3/x$ b. $y = 4/x - 5$ c. $y = \sqrt{x+4}$

d. $y = \sqrt{x-2}$ e. $y = \begin{cases} x+3 & si \quad x < -1 \\ 2 & si \quad -1 \le x < 4 \\ x^2 - 10 & si \quad 4 \le x \end{cases}$

11. O custe diario de fabricación, en euros, de *x* artigos exprésase coa igualdade $C = 40x + 250$, e o ingreso diario da súa venda, mediante $V = -2x^2 + 100x$. Que cantidade de artigos se deben fabricar ao día para que a súa venda reporte un beneficio máximo? *Nota*: o beneficio é a diferenza entre o ingreso e o custe.

12. A base e a altura dun triángulo suman 4 centímetros. Que lonxitude deben ter ambas as dúas para que a área do triángulo sexa máxima?

13. Asigna as gráficas ao percorrido efectuado polos seguintes estudantes no seu camiño diario ao Instituto:



a) Emilio é o que vive máis lonxe do Instituto.

b) Ana debe recoller a dúas amigas polo camiño e sempre lle toca esperar.

c) Filipe é o que menos tempo tarda.

d) Isabel é durmiñona; sempre lle toca correr no último tramo, aínda que é a que vive máis preto do Instituto.

14. Un rectángulo ten un perímetro de 14 cm. Supoñendo que a base do mesmo ten unha lonxitude de *x* cm,

a. Probar que a área do mesmo *A* está dada pola función $A(x) = x(7 - x)$.

b. Debuxa a gráfica correspondente a esta función, tomando para iso valores de *x* de 0 a 7. Utilizando a gráfica, calcula os seguintes apartados.

c. A área do rectángulo cando $x = 2.25\ cm$.

d. As dimensións do rectángulo cando a súa área é 9 cm^2.

e. A área máxima do rectángulo.

f. As dimensións do rectángulo correspondentes a esa área máxima.

15. A velocidade *v* en m/s dun mísil *t* segundos despois do seu lanzamento vén dada pola ecuación $v = 54t - 2t^3$.Utilizando a gráfica desta función, calcula:

a. A máxima velocidade que acada o mísil.

b. O tempo que necesita para acelerar ata conseguir unha velocidade de 52 m/s.

c. O intervalo (aproximado, resolve graficamente) de tempo no cal o mísil voa a máis de 100 m/s.

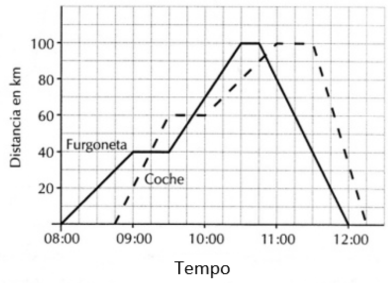
16. O prezo da viaxe de fin de curso dun grupo de alumnos é de 200 euros por persoa se van 30 alumnos ou menos. En cambio, se viaxan máis de 30 e menos de 40, rebaixan un 5% por cada alumno que exceda o número de 30, e se viaxan 40 ou máis, o prezo por persoa é de 100 euros. Calcula a expresión e debuxa a gráfica da función que fai corresponder ao número de viaxeiros o prezo da viaxe.

17. Calcula o dominio das seguintes funcións:

a. $y = \frac{5x-3}{4x-1}$ c. $y = \sqrt{3x+6}$ e. $y = \frac{4x^2-3x}{1+5x-6x^2}$

b. $y = 2x^4 - 3x^2 + 1$ d. $y = 2 - \frac{3}{x^2-3x}$ f. $y = \sqrt[3]{x^2+2x}$

18. A seguinte gráfica amosa as viaxes feitas por unha furgoneta e un coche saíndo desde Teruel cara á poboación de Alcañiz, ida e volta.



a) Canto tempo se detivo a furgoneta durante o traxecto?
b) A que hora adiantou o coche á furgoneta?
c) Que velocidade levaba a furgoneta entre as 9:30 e as 10:00?
d) Cal foi a maior velocidade acadada polo coche durante a viaxe?
e) Cal foi a velocidade media do coche na viaxe completa?

19. Representa graficamente a seguinte función: $f(x) = \begin{cases} x+4 & si\, x < -2 \\ -\frac{1}{2}x^2 & si\, -2 \le x \end{cases}$. Unha vez representada estuda as zonas de crecemento-decrecemento, os extremos (máximos-mínimos) e a súa continuidade.

20. Representa graficamente unha función, f, que cumpra as seguintes condicións:

a. Dom (f) = [–5, 6]
b. Crece nos intervalos (–5, –3) e (0, 6); decrece no intervalo (–3, 0).
c. É continua no seu dominio.
d. Corta ao eixe X nos puntos (–5, 0), (–1, 0) e (4, 0).
e. Ten un mínimo en (0, –2) e máximos en (–3, 3) e (6, 3).

21. Constrúe unha gráfica que represente a audiencia dunha determinada cadea de televisión durante un día, sabendo que:

a. Ás 0 horas había, aproximadamente, 0.5 millóns de espectadores.
b. Este número se mantivo practicamente igual ata as 6 da mañá.
c. Ás 7 da mañá acadou a cifra de 1.5 millóns de espectadores.
d. A audiencia descendeu de novo ata que, ás 13 horas, había 1 millón de espectadores.
e. Foi aumentando ata as 21 horas, momento no que acadou o máximo: 6.5 millóns de espectadores.
f. A partir dese momento, a audiencia foi descendendo ata as 0 horas, que volve haber, aproximadamente, 0.5 millóns de espectadores.

AUTOAVALIACIÓN

1. Indica cal das seguintes expresións alxébricas é unha función real:

a) $x^2 + y^2 = 1$ b) $y = -2x^5 + x^4 - x^3 + 5x - 1$ c) $y = 5 \cdot \sqrt{2} \cdot x \cdot y^2 \cdot z$ d) $y^2 = x + 1$

2. Estamos confeccionando unha táboa de valores da función $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Indica que punto (ou puntos) non debería estar na táboa:

a) (0, 1) b) (1/2, 2) c) (2, 1/5) d) (1, 0)

3. O dominio da función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ é:

a) a recta real b) $\{x \in \Re \mid x < 1\}$ c) $\{x \in \Re \mid x \geq 1\}$ d) $\{x \in \Re \mid x \geq 0\}$

4. Indica que tipo de descontinuidade ou continuidade presenta a función $f(x) = \begin{cases} -x, & si\ x \in [-2, 1] \\ x, & si\ x \in (1, 2] \end{cases}$ no punto $x = 1$:

a) é continua b) Ten unha descontinuidade evitable

c) Ten un salto finito de tamaño 2 d) Ten un salto infinito

5. Sinala a función que ten simetría par:

a) $y = x$ b) $y = x^2 + 3$ c) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ d) $f(x) = \begin{cases} -x, & si\ x \in [-2, 1] \\ x, & si\ x \in (1, 2] \end{cases}$

6. Sinala a función que ten como asíntota horizontal á recta $y = 0$:

a) $y = x$ b) $y = x^2 + 3$ c) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ d) $f(x) = \begin{cases} -x, & si\ x \in [-2, 1] \\ x, & si\ x \in (1, 2] \end{cases}$

7. A taxa de variación da función $f(x) = \begin{cases} -x, & si\ x \in [-2, 1] \\ x, & si\ x \in (1, 2] \end{cases}$ entre –1 e 2 é igual a:

a) TV[–1, 2] = 1 b) TV[–1, 2] = 2 c) TV[–1, 2] = 3 d) TV[–1, 2] = 0

8. A taxa de variación media da función $f(x) = \begin{cases} -x, & si\ x \in [-2, 1] \\ x, & si\ x \in (1, 2] \end{cases}$ entre –1 e 2 é igual a:

a) TV[–1, 2] = 1/3 b) TV[–1, 2] = 2/3 c) TV[–1, 2] = 1 d) TV[–1, 2] = 3

9. A taxa de crecemento da función $f(x) = \begin{cases} -x, & si\ x \in [-2, 1] \\ x, & si\ x \in (1, 2] \end{cases}$ entre –1 e 2 é igual a:

a) T_{crec} [–1, 2] = 3 b) T_{crec} [–1, 2] = 2 c) T_{crec} [–1, 2] =0 d) T_{crec} [–1, 2] = 1

10. A función e = x^2 + 3 ten un mínimo absoluto no punto:

a) (1, 4) b) (0, 0) c) (0, 3) d) (3, 0)