Matemáticas orientadas ás ensinanzas académicas

3º B da ESO
Capítulo 11: Estatística e probabilidade

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Fernando Blasco

Revisor: David Hierro

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Índice

Resumo

A Estatística é unha Ciencia que xurdiu para levar a contabilidade do Estado. De aí vén ou seu nome. No século XX desenvolvéronse as súas técnicas e separouse das Matemáticas, pasando a ser unha ciencia con entidade propia. Nos medios de comunicación encontramos frecuentes estatísticas. En Medicina precísanse métodos estatísticos para probar os novos medicamentos. En todo experimento científico, tras da recollida de datos, precísase utilizar probas estatísticas que permitan sacar información deses datos.

A orixe da Probabilidade encóntrase nos xogos de azar. *Cardano, Galileo, Pascal, Fermat* son algúns dos matemáticos que se ocuparon nos seus inicios.

1. A TOMA DE DATOS

1.1. Un exemplo para realizar unha análise

Exemplo:

- *A Casa da Moeda quere estudar cantas moedas debe emitir, tendo en conta as que están en circulación e as que quedan atesouradas (ben en casas particulares, en máquinas de refrescos ou depositadas nun banco). Fíxose unha enquisa a pé de rúa a 60 persoas e apuntouse cantas moedas levaba cada unha delas no peto. Obtivemos estes datos:*

12	7	11	8	8	9	6	12	7	7	13	0	10	9	13	18	7	6	11	12	16	0	10	10	8	8	9	11	10	8
16	8	5	2	12	8	14	14	16	6	2	0	18	10	10	12	14	6	7	3	12	11	10	18	9	7	12	1	15	8

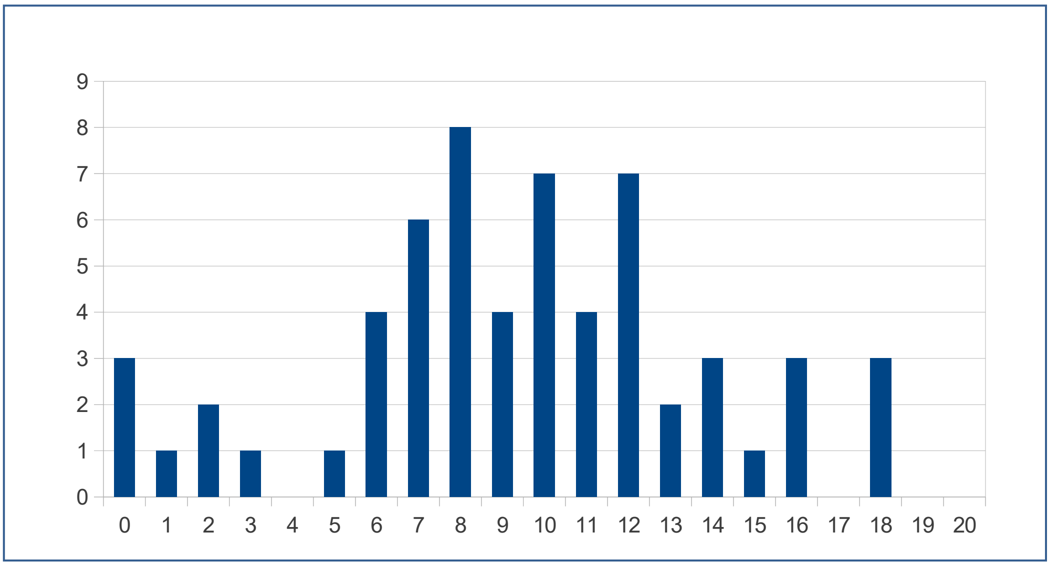
O primeiro paso consiste en facer un esquema para o reconto: usaremos unha táboa e marcaremos barras cada vez que apareza ese número.

0	///	**7**	///// /	**14**	///
1	/	**8**	///// ///	**15**	/
2	//	**9**	////	**16**	///
3	/	**10**	///// //	**17**	
4		**11**	////	**18**	///
5	/	**12**	///// //	**19**	
6	////	**13**	//	**20**	

Pasar dese reconto a unha táboa de **frecuencias absolutas** é moi sinxelo: só hai que substituír as barras polo número que representan.

0	3	**7**	6	**14**	3
1	1	**8**	8	**15**	1
2	2	**9**	4	**16**	3
3	1	**10**	7	**17**	0
4	0	**11**	4	**18**	3
5	1	**12**	7	**19**	0
6	4	**13**	2	**20**	0

É moito mellor analizar os datos de modo visual. Estamos máis acostumados a traballar desa maneira. Podemos representar os datos da táboa de frecuencias nun **diagrama de barras**, onde a altura de cada barra representa a frecuencia de aparición.



O procesamento de datos estatísticos utilízase moito. Obviamente non se fan as operacións a man senón que se utilizan calculadoras ou follas de cálculo. Dispoñer deses medios tecnolóxicos será un bo complemento para o capítulo, aínda que recordamos que o máis importante é comprender que se fai en cada momento.

Comezaremos introducindo algo de **nomenclatura**. Case todos estes nomes os escoitaches xa que os medios de comunicación os utilizan moitísimo:

Poboación é o colectivo sobre o que se quere facer o estudo.

Mostra é un subconxunto da poboación de modo que a partir do seu estudo se poden obter características da poboación completa.

Individuo é cada un dos elementos da poboación ou a mostra.

Exemplo:

- *Quérese facer un estudo sobre hábitos alimenticios dos estudantes de 3º de ESO de todo Madrid. Pero como é moi custoso entrevistar a todos os estudantes decídese tomar un IES por cada distrito e entrevistar aos alumnos de 3º de ESO deses colexios elixidos.*

  A **poboación** obxecto do estudo serán todos os estudantes madrileños matriculados en 3º de ESO.

  A **mostra** son os estudantes de 3º de ESO matriculados nos institutos elixidos.

  Cada un dos estudantes de 3º de ESO é un **individuo** para este estudo estatístico.

Actividades propostas

1. Queremos facer un estudo da cantidade de moedas que levan no peto os estudantes da túa clase. Pero para non preguntar a todos elixe 10 compañeiros ao azar e anota no teu caderno cantas moedas leva cada un.

a) Cal é a poboación obxecto do estudo?

b) Cal é a mostra elixida?

c) Especifica 5 individuos que pertenzan á poboación e non á mostra.

1.2. Variables estatísticas

Exemplo:

- *Nun estudo estatístico pódense preguntar cousas tan variadas como*
  - Que froitas comes ao longo dunha semana?
  - Cantas pezas de froita comes ao día?
  - Cantas moedas levas no peto?
  - Cal é a túa altura?
  - Cantas marcas de chocolate recordas?
  - Cales son as marcas de chocolate que recordas?
  - Cantos irmáns tes?
  - Cal é a túa cor favorita para un coche?
  - Canto tempo pasas ao día vendo a televisión?
  - Cantos seguidores tes en *twitter*?

Esas preguntas poden corresponder a estudos de saúde, económicos, publicitarios ou socioeconómicos. Algunhas respóndense cun número e outras cun nome ou un adxectivo. Mesmo hai diferenzas entre as que se responden con números: o número de moedas que levas ou o número de seguidores de *twitter* contéstanse con números enteiros, mentres que para calcular a túa altura ou as horas que pasas diante do televisor necesitamos utilizar números reais (normalmente con representación decimal).

Unha variable dise **cuantitativa** se os seus valores se expresan con números.

As variables cuantitativas poden ser

- **discretas** se só admiten valores illados
- **continuas** se entre dous valores poden darse tamén todos os intermedios.

Unha variable estatística é **cualitativa** cando os seus valores non se expresan mediante un número, senón cunha calidade.

Actividades propostas

2. Clasifica en variables cualitativas e cuantitativas as que aparecen no primeiro exemplo desta sección. Para as cuantitativas indica se son continuas ou discretas.

1.3. As fases dun estudo estatístico

Nun estudo estatístico hai 6 fases fundamentais:

1. Determinación do obxecto do estudo. Isto é, saber que queremos estudar.
2. Selección das variables que se van estudar.
3. Recollida dos datos.
4. Organización dos datos.
5. Representación e tratamento dos datos.
6. Interpretación e análise.

Neste libro empezaremos os exemplos a partir do punto 4, con datos xa proporcionados nos enunciados, aínda que a continuación imos reflexionar algo sobre a selección dunha mostra.

1.4. Métodos de selección dunha mostra estatística. Representatividade dunha mostra

Para recoller os datos e determinar os valores da variable pódese utilizar a toda a poboación, todo o universo sobre o que se realiza o estudo, ou seleccionar unha mostra. En moitas ocasións non é conveniente recoller valores de toda a poboación, porque é complicado ou demasiado custoso, ou mesmo porque é imposible como no caso dun control de calidade no que se destrúa o obxecto a analizar. A parte da Estatística que se ocupa de como seleccionar adecuadamente as mostras denomínase *Teoría de Mostras*.

Exemplos:

- Se estudamos o peso dos habitantes dunha cidade, a poboación será o total das persoas da devandita cidade.
- Pero o normal será non recoller información sobre todas as persoas da cidade (xa que sería un labor moi complexo e custoso), senón que se soe seleccionar un subgrupo (mostra) que se entenda que é suficientemente representativo.
- Para coñecer a intención de voto perante unhas eleccións europeas, municipais, autonómicas… utilízanse mostras, pois preguntar a toda a poboación sería moi custoso (e iso xa se fai nas eleccións).
- Pero se unha fábrica quere coñecer as horas de vida útil dun tipo de lámpada, non pode poñer a funcionar todas as lámpadas ata que se avaríen pois queda sen produción. Neste caso é imprescindible seleccionar unha mostra.
- En *control de calidade* fanse estudos estatísticos e tómanse mostras.

Para determinar a mellor forma de seleccionar unha mostra existe toda unha parte da Estatística, a *Teoría de Mostras*, que nos indica varios detalles a termos en conta:

- Como se deben elixir os elementos da mostra?
- Cal debe ser o tamaño da mostra?
- Ata que punto a mostra é representativa da poboación?

A forma de seleccionar a mostra, ***mostraxe***, debe reunir unhas determinadas características para que poida caracterizar á poboación, ser ***representativa*** da poboación. Debe ser unha mostraxe **aleatoria**, é dicir, ao azar. Se a mostra está mal elixida, non é representativa, e prodúcense **nesgos**, erros nos resultados do estudo.

Todos os individuos da poboación deben ter as mesmas posibilidades de seren seleccionados para a mostra.

Exemplos:

- *Quérese estudar o nivel adquisitivo das persoas dunha cidade, para o que pasamos unha enquisa na porta duns grandes almacéns, paréceche unha mostraxe aleatoria?*

Non o é. As persoas que entran nun determinado establecemento non representan a toda a poboación.

- *Vas facer un estudo sobre os gustos musicais dos mozos, e para iso, preguntas a cinco de entre as túas amizades, paréceche unha mostraxe aleatoria?*

Non o é. As túas amizades poden ter uns gustos diferentes aos do resto da poboación.

Autor: Fernando Blasco
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Métodos de selección dunha mostra

Hai varios métodos para seleccionar unha mostra, que darían para analizar nun libro sobre "Mostraxe". Pero é conveniente coñecer algún. Vexamos tres deles:

Mostraxe aleatoria simple

Todos os individuos da poboación teñen a mesma probabilidade de seren elixidos na mostra.

Mostraxe aleatoria sistemática

Ordénanse os individuos da poboación. Elíxese ao azar un individuo e selecciónase a mostra tomando individuos mediante saltos igualmente espazados.

Mostraxe aleatoria estratificada

Divídese á poboación en grupos homoxéneos dunha determinada característica, *estratos*, por exemplo, idade, e tómase unha mostra aleatoria simple en cada estrato.

Exemplo:

- Estúdase o estado dos ósos da poboación dun país, e divídese a poboación en "nenos", "mozos", "idade mediana" e "terceira idade". En cada grupo faise unha mostraxe aleatoria simple.

Representatividade dunha mostra

Cando se elixe unha mostra os dous aspectos que hai que ter en conta son, o tamaño e a representatividade da mostra.

Se a mostra é demasiado pequena, aínda que estea ben elixida, o resultado non será fiable.

Exemplo:

- *Queremos estudar a estatura da poboación española. Para iso eliximos a unha persoa ao azar e medímola.*

Evidentemente este resultado non é fiable. A mostra é demasiado pequena.

Se a mostra é demasiado grande os resultados serán moi fiables, pero o gasto pode ser demasiado elevado. Mesmo, en ocasións, mostras demasiado grandes non nos proporcionan mellores resultados.

Cando unha mostra teña o tamaño adecuado, e teña sido elixida de forma aleatoria diremos que é unha **mostra representativa**.

Se a mostra non foi elixida de forma aleatoria diremos que a mostra é **nesgada**.

Actividades propostas

3. Sinala en que caso é máis conveniente estudar a poboación ou unha mostra:
   a) O diámetro dos parafusos que fabrica unha máquina diariamente.
   b) A altura dun grupo de seis amigos.

4. Pódese ler o seguinte titular no xornal que publica o teu instituto: "*A nota media dos alumnos de 3º ESO é de* 7.9". Como se chega a esta conclusión? Estudouse toda a poboación? Se tivesen seleccionado para o seu cálculo só ás alumnas, sería representativo o seu valor?

5. Nunha serie de televisión teñen dúbidas sobre que facer coa protagonista, que teña un accidente ou se debe casar. Van facer unha consulta. A toda a poboación ou seleccionando unha mostra representativa? Razoa a resposta.

2. REPRESENTACIÓN DA INFORMACIÓN

2.1. Exemplos para traballar

Na sección anterior comezabamos analizando unha variable discreta: o número de moedas que se levan no peto. Podes repasar que faciamos alí: como recontabamos os datos, como os levabamos despois a unha táboa de frecuencias e como representabamos a información nun gráfico.

Faremos agora o mesmo proceso cunha variable continua.

Xa sabes que:

Podemos distinguir entre **frecuencias absolutas**, se, como neste exemplo, facemos un reconto do número de veces que aparece cada dato. **Frecuencias relativas**, que estudaremos con máis detemento ao final do capítulo, e que consiste en dividir cada frecuencia absoluta polo número total de observacións. **Frecuencias acumuladas**, tanto frecuencias absolutas acumuladas como frecuencias relativas acumuladas se se calculan todos os valores menores ou iguais a el.

Exemplos:

- Estase realizando un control do peso dun grupo de nenos. Para iso, contabilízase o número de veces que comen ao día unha barriña de chocolate 13 nenos durante un mes, obtendo os seguintes números: 2, 5, 3, 2, 0, 4, 1, 7, 4, 2, 1, 0, 2.

A información obtida pódese resumir nunha táboa de frecuencias **absolutas** e frecuencias **absolutas acumuladas**:

Valores	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Frecuencia absoluta	2	2	4	1	2	1	0	1
Frecuencia absoluta acumulada	2	4	8	9	11	12	12	13

Tamén se pode resumir nunha táboa de frecuencias **relativas** e frecuencias **relativas acumuladas**:

Valores	0	1	2	3	4	5	6	7
Frecuencia relativa	0.154	0.154	0.307	0.077	0.154	0.077	0	0.077
Frecuencia relativa acumulada	0.154	0.308	0.615	0.692	0.846	0.923	0.923	1

- Nunha fábrica realízase un estudo sobre o espesor, en *mm*, dun certo tipo de latas de refresco. Con este fin, selecciona unha mostra de tamaño $N = 25$, obtendo os seguintes valores: 7.8, 8.2, 7.6, 10.5, 7.4, 8.3, 9.2, 11.3, 7.1, 8.5, 10.2, 9.3, 9.9, 8.7, 8.6, 7.2, 9.9, 8.6, 10.9, 7.9, 11.1, 8.8, 9.2, 8.1, 10.5.

Esta información pódese resumir facendo cinco intervalos e facendo unha táboa de frecuencias absolutas, frecuencias absolutas acumuladas, frecuencias relativas e frecuencias relativas acumuladas

Autor: Fernando Blasco
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Intervalos de clase	(7, 8]	(8, 9]	(9, 10]	(10, 11]	(11, 12]
Marcas de clase	7.5	8.5	9.5	10.5	11.5
Frecuencia absoluta	6	8	5	4	2
Frecuencia relativa	0.24	0.32	0.2	0.16	0.08
Frecuencia relativa acumulada	0.24	0.56	0.76	0.92	1

Exemplo:

- As alturas dos 12 xogadores da Selección Española de Baloncesto (en metros) que participaron na Eurocopa 2013 recóllense na seguinte táboa :

2.03	1.96	1.91	2.11	1.91	1.93	2.08	1.99	1.90	2.16	2.06	2.03

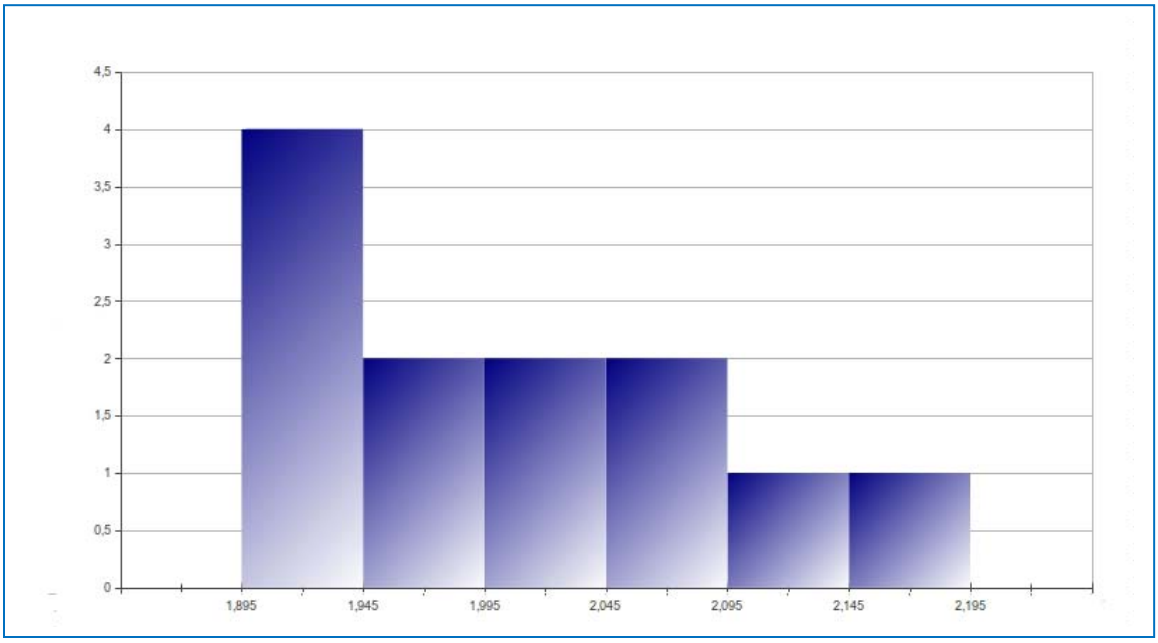
Como os datos son continuos, para facer o reconto fixaremos **intervalos** de altura:

- entre 1.895 e 1.945 ////
- entre 1.945 e 1.995 //
- entre 1.995 e 2.045 //
- entre 2.045 e 2.095 //
- entre 2.095 e 2.145 /
- entre 2.145 e 2.195 /

Agora levamos os datos do reconto a un diagrama de frecuencias:

entre 1.895 e 1.945	4
entre 1.945 e 1.995	2
entre 1.995 e 2.045	2
entre 2.045 e 2.095	2
entre 2.095 e 2.145	1
entre 2.145 e 2.195	1

Neste caso a representación gráfica facémola cun **histograma de frecuencias**.

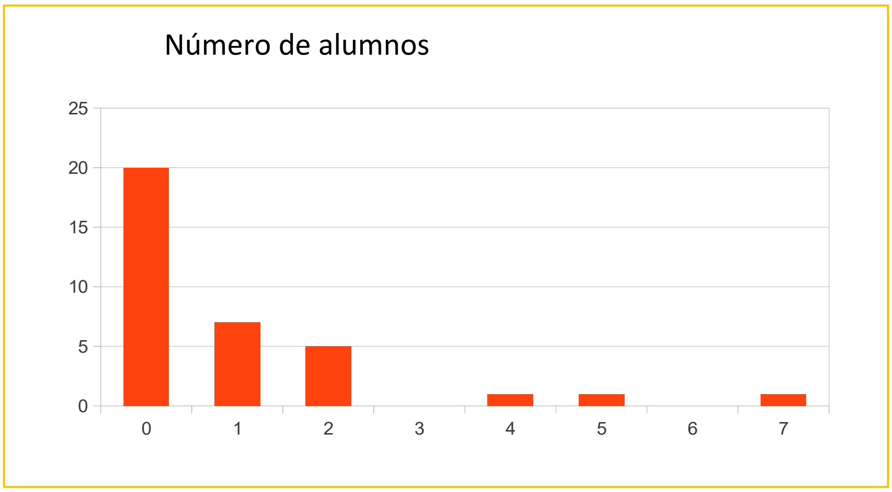


Observa a diferenza entre este gráfico (correspondente a unha variable continua) e o que fixemos para o reconto de moedas (que representaba unha variable discreta). Este gráfico denomínase histograma de frecuencias e é similar a un diagrama de barras pero agora representamos unhas barras pegadas a outras, para recordar que se trata de intervalos de clase e non de valores illados das variables. No noso exemplo todos os intervalos teñen a mesma lonxitude, 0.05 cm. Se as lonxitudes dos intervalos fosen diferentes, as alturas dos rectángulos deberían ser proporcionais á área.

2.2. Diagrama de barras

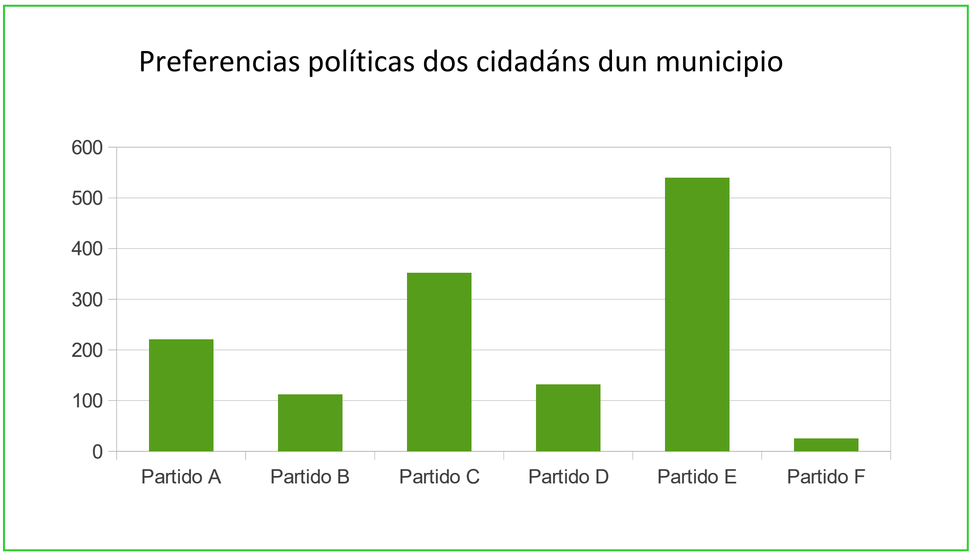
Utilízase para representar datos de variables estatísticas discretas ou variables estatísticas cualitativas.

Ao principio do capítulo estudamos o número de moedas que se levan no peto. Podemos utilizar este tipo de gráfico noutras situacións.



O gráfico anterior representa o número de alumnos (dunha clase de 35) que aprobaron todo, o de alumnos cunha materia suspensa, con dúas materias suspensas, etc. O bo da representación gráfica é que dunha **soa ollada sabemos que 20 alumnos aprobaron todo e que hai un alumno que ten 7 materias suspensas.**

Tamén podemos utilizar diagramas de barras para representar variables cualitativas, como a elección da modalidade de bacharelato que cursan os alumnos dun IES ou as preferencias políticas dos cidadáns dun municipio.

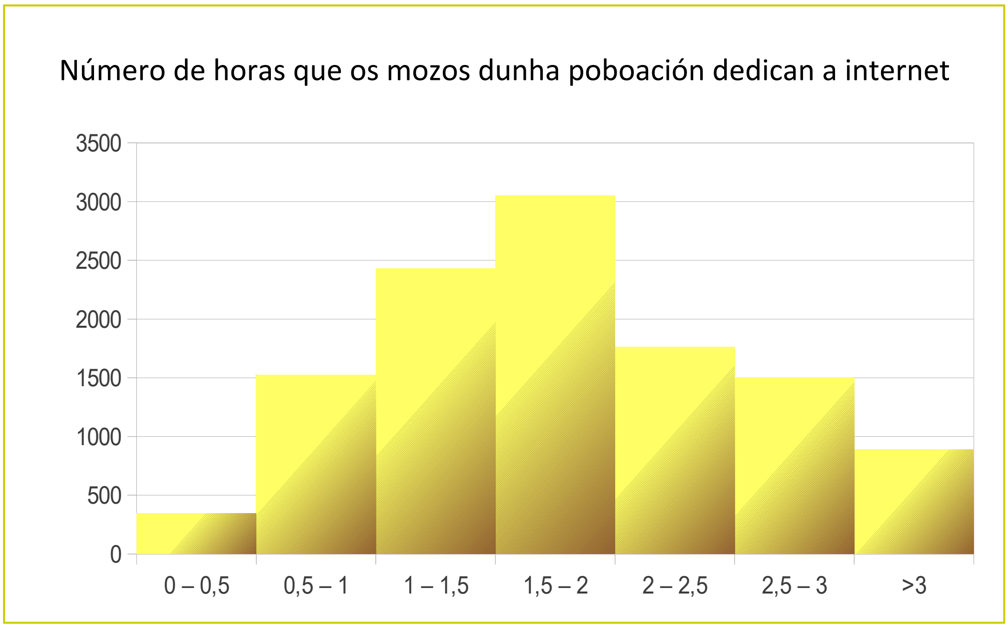


2.3. Histograma de frecuencias

Este tipo de gráfico utilizámolo antes para representar as alturas dos xogadores da Selección Española de Baloncesto.

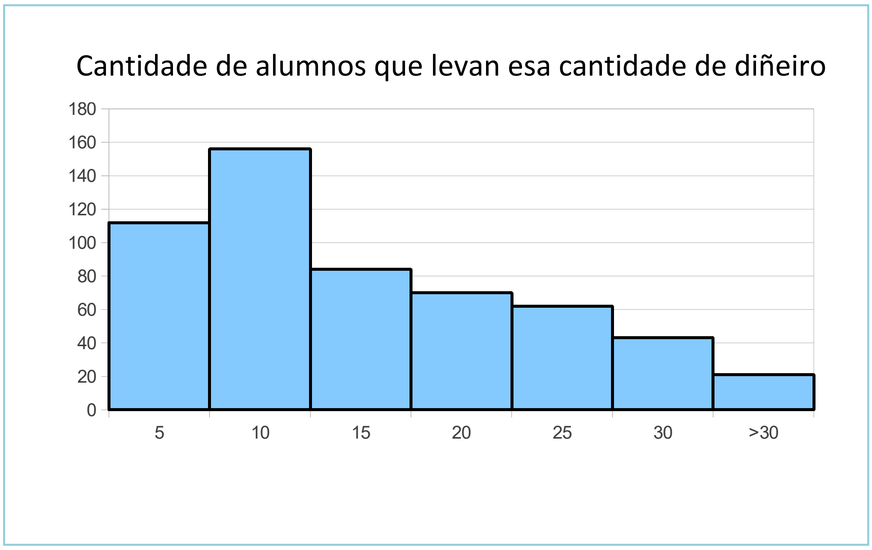
É similar a un diagrama de barras pero a altura de cada barra vén dada polo número de elementos que hai en cada clase.

Outras variables que podemos considerar como variables continuas son o número de horas que os mozos dunha poboación dedican a internet nos seus momentos de ocio ou a cantidade de diñeiro que se leva no peto (ollo, isto non é o número de moedas).



Autor: Fernando Blasco
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

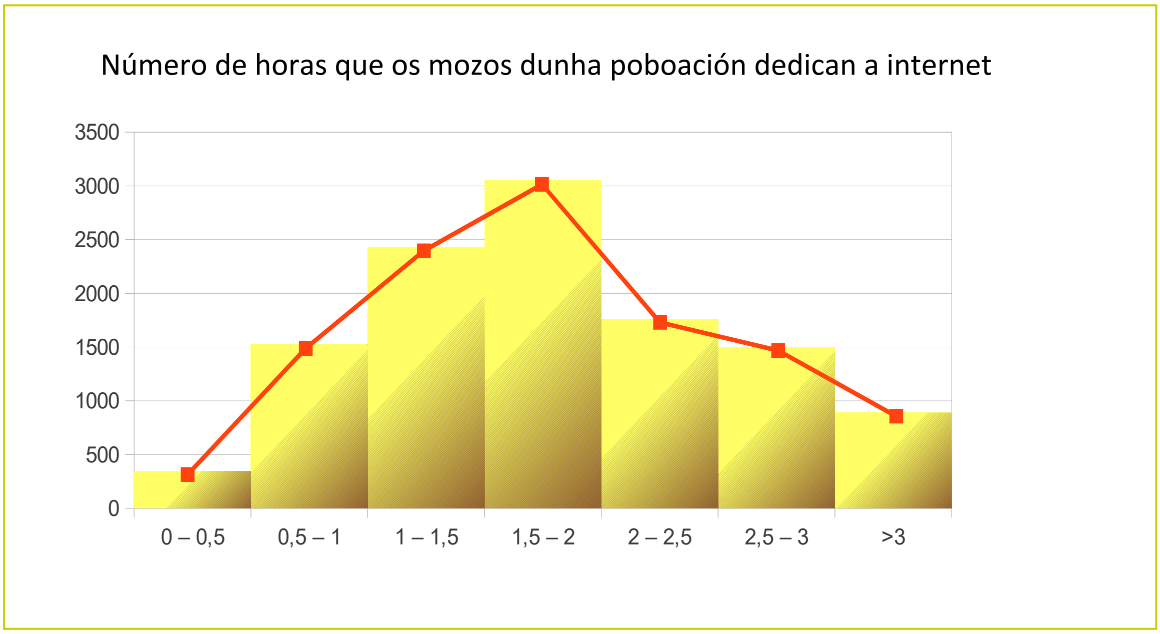
No gráfico que incluímos a continuación as marcas do eixe do *x* refírense aos tramos de diñeiro expresados de 5 en 5 euros. A altura do gráfico correspóndese coa cantidade de alumnos que levan esa cantidade de diñeiro. Dunha simple ollada vese que hai algo máis de 150 alumnos que levan entre 5 € e 10 € ao instituto e que pouco máis de 40 alumnos levan entre 25 € e 30 €.



As barras son máis anchas e aparecen unhas a continuación doutras para destacar que estamos representando unha variable continua e que as alturas se corresponden con individuos dentro dun intervalo de datos. Pero recorda, se os intervalos fosen distintos, as alturas dos rectángulos serían proporcionais á área.

2.4. Polígono de frecuencias

Utilízase nos mesmos casos que o histograma. Pero dá idea da variación da tendencia. A liña poligonal constrúese unindo os puntos medios dos lados superiores dos rectángulos.



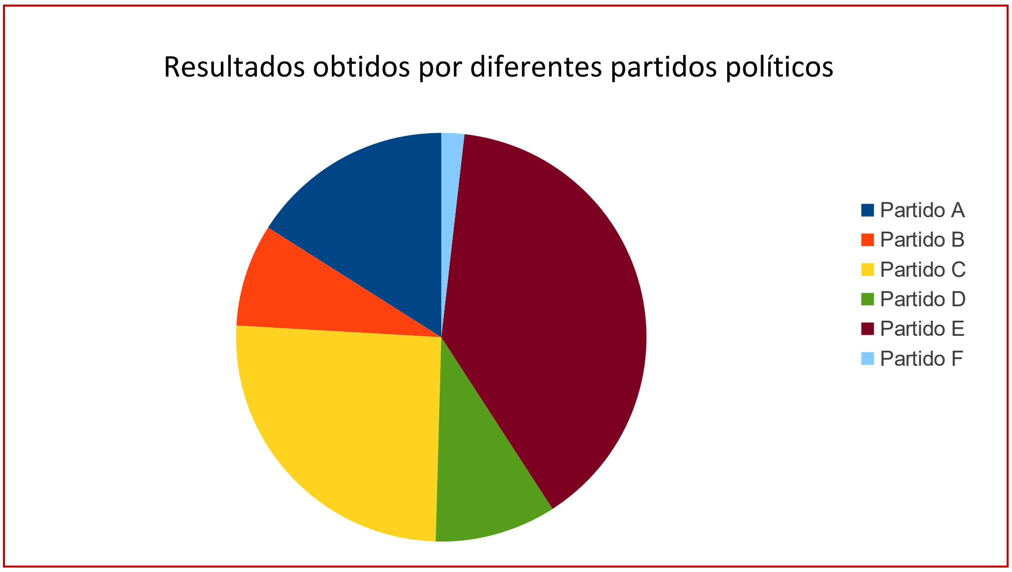
Autor: Fernando Blasco
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

2.5. Diagrama de sectores

Nalgunhas ocasións interésanos facernos idea da proporción que ten cada resultado en relación cos demais. Utilízase moito con variables cualitativas. Por exemplo, esta representación utilízase para amosar os resultados dunhas eleccións cando queremos comparar os votos obtidos polos diferentes partidos.

Nun diagrama de sectores aparecen representados sectores circulares. O ángulo destes sectores é proporcional á frecuencia absoluta.

Retomando o exemplo dos resultados obtidos por diferentes partidos políticos imos representar eses mesmos resultados mediante un diagrama de sectores:



Actividades propostas

6. Reúne a 10 amigos. Reconta cantas moedas de cada valor (1 céntimo, 2 céntimos, 5 céntimos…) tedes entre todos. Representa mediante un gráfico adecuado o número de moedas de cada clase que hai. Hai algún outro diagrama que che permita ver que tipos de moedas son máis abundantes na mostra que tomaches?

7. Na clase de Educación Física o profesor mediu o tempo que tarda cada alumno en percorrer 100 metros. Os resultados están nesta táboa:

14.92	13.01	12.22	16.72	12.06	10.11	10.58	18.58	20.07	13.15	20.10	12.43	17.51	11.59	11.79
16.94	16.45	10.94	16.56	14.87	17.59	13.74	19.71	18.63	19.87	11.12	12.09	14.20	18.30	17.64

Agrupa estes resultados por clases, comezando en 10 segundos e facendo intervalos de lonxitude 1 segundo. Realiza unha táboa de frecuencias e representa adecuadamente estes datos.

3. PARÁMETROS ESTATÍSTICOS

3.1. Introdución

Seguro que sabes que é a media de dous números e probablemente sabes calcular a media dunha serie de datos. Pero ademais desa medida estatística hai outras medidas que poden ser interesantes para coñecer propiedades dos datos que temos.

Agora estudaremos as **medidas de centralización** (media, mediana e moda) que nos proporcionan un valor de referencia arredor do cal se distribúen os datos e as **medidas de dispersión** (percorrido, desviación media, varianza e desviación típica). Estas medidas indícannos como están de separados os datos da media.

Exemplo:

- *Imaxina que en dous exames de Matemáticas obtés un 6 e un 5. A media é 5.5. Supón agora que as notas que tiveches son 10 e 1. A media tamén é 5.5 pero deberás estudar aparte na que sacaches 1 para recuperar. As medidas de dispersión vannos servir para detectar cando temos valores extremos, afastados da media.*

3.2. Medidas de centralización

A **media** calcúlase sumando todos os valores e dividindo entre o número de datos.

Se x_1, x_2, ..., x_n son os valores que toma a variable estatística que estamos considerando, a media represéntase por $\overline{x}$ e calcúlase mediante a fórmula:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Esa suma pódese escribir abreviadamente como $\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{\sum \boldsymbol{x_i}}{\boldsymbol{n}}$. O símbolo $\sum$ utilízase habitualmente para representar sumas de varios sumandos. Utilizaralo moito a partir de agora.

Para calcular a **mediana** ordénanse todos os datos de menor a maior e quedamos co que ocupa a posición central. Se temos un número par de datos, tomamos como mediana a media dos dous números que ocupan as posicións centrais. Representarémola por *Me*.

A ***mediana*** *Me* é un valor tal que o 50 % das observacións son inferiores a el.

Os ***cuartís*** Q_1, Q_2 e Q_3 son os valores tales que o 25 %, 50 % e 75 % (respectivamente) dos valores da variable son inferiores a el. Polo tanto, a mediana coincide co segundo cuartil.

Usamos o termo **moda** para referirnos ao valor que máis se repite. Denotámola por *Mo*.

Actividades resoltas

- Continuamos utilizando os datos de estatura correspondentes aos 12 xogadores da Selección Española de Baloncesto *(ver sección 2.1 deste capítulo).*

A estatura **media** calcúlase sumando todas as alturas e dividindo entre o número de datos.

Autor: Fernando Blasco
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

$\sum x_i$ = 2.03 + 2.06 + 2.16 + 1.90 + 1.99 + 2.08 + 1.93 + 1.91 + 2.11 + 1.91 + 1.96 + 2.03 = 24.07

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{24.07}{12} = 2.0058.$$

Neste exemplo non podemos falar de **moda**, xa que non hai un único valor que sexa o que máis se repite.

A **mediana** neste caso é 2.01. Para calculala ordenamos todos os datos de menor a maior e quedamos co que ocupa a posición central. Como neste caso temos un número impar de datos, tomamos como mediana a media aritmética dos 2 que ocupan as posicións centrais.

Os datos, tras ordenalos, quedarían así:

1.90	1.91	1.91	1.93	1.96	1.99	2.03	2.03	2.06	2.08	2.11	2.16

Media de ambos os dous = 2.01

Para calcular os **cuartís** temos que dividir o total de datos, neste exemplo 12, entre 4, (ou multiplicar por 0.25 que é o mesmo) e obtemos 3. Logo o primeiro cuartil observamos que está entre 1.91 e 1.93, facemos a media e obtemos que Q_1 = 1.92. Para calcular o terceiro cuartil multiplicamos por 3 e dividimos por 4, (ou multiplicamos por 0.75) e neste caso obtense o valor que está entre 9, 2.06, e 10, 2.08, polo que Q_3 = 2.07.

3.3. Medidas de dispersión

Percorrido é a diferenza entre o dato maior e o dato menor. Tamén se denomina **rango**.

Desviación media é a media das distancias dos datos á media dos datos dos que dispoñamos.

$$DM = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \ldots + |x_n - \bar{x}|}{n} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}$$

Varianza é a media dos cadrados das distancias dos datos á media.

$$\text{Varianza} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

De forma equivalente (desenvolvendo os cadrados que aparecen na expresión) pódese calcular mediante estoutra expresión:

$$\text{Varianza} = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

Desviación típica é a raíz cadrada da varianza.

Represéntase por σ.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2}$$

Autor: Fernando Blasco
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Percorrido intercuartílico ou **rango intercuartílico** é a distancia entre o terceiro e o primeiro cuartil:

R = Percorrido intercuartílico = $Q_3 - Q_1$.

Estas fórmulas proveñen de diferentes modos de medir as distancias. Para o cálculo da desviación media úsanse valores absolutos, que é como se mide a distancia entre números na recta real. A desviación típica ten que ver coa forma de medir distancias no plano (recordemos que a hipotenusa dun triángulo é a raíz cadrada da suma dos cadrados dos catetos). Non é preciso que comprendas agora de onde saen estas fórmulas, pero si é conveniente que saibas que non é por capricho dos matemáticos que o inventaron. Cada cousa ao seu tempo...

Actividades resoltas

- Volvemos usar os datos do exemplo da Selección Española cos que vimos traballando.

Percorrido: 2.16 – 1.90 = 0.26 (metros). Isto é a diferenza de alturas entre o xogador máis alto e o máis baixo.

Para calcular a **desviación media** primeiro calcularemos a suma que aparece no numerador. Despois dividiremos entre o número de datos.

|2.03 – 2.0058| + |2.06 – 2.0058| + |2.16 – 2.0058| + |1.90 – 2.0058| + |1.99 – 2.0058| +

|2.08 – 2.0058| + |1.93 – 2.0058| + |1.91 – 2.0058| + |2.11 – 2.0058| + |1.91 – 2.0058| +

|1.96 – 2.0058| + |2.03 – 2.0058| = 0.0242 + 0.0458 + 0.0958 + 0.1042 + 0.0958 + 0.0758 + 0.0742 + 0.0158 + 0.1058 + 0.1542 + 0.9458 + 0.0242 = 0.87

Así a **desviación media** é 0.87/12 = 0.0725

Para calcular a **varianza** primeiro calcularemos a suma que aparece no numerador, de modo similar a como acabamos de facer. Despois terminaremos dividindo entre o número de datos.

$(2.03 – 2.0058)^2 + (2.06 – 2.0058)^2 + (2.16 – 2.0058)^2 + (1.90 – 2.0058)^2 + (1.99 – 2.0058)^2 +$

$(2.08 – 2.0058)^2 + (1.93 – 2.0058)^2 + (1.91 – 2.0058)^2 + (2.11 – 2.0058)^2 + (1.91 – 2.0058)^2 +$

$(1.96 – 2.0058)^2 + (2.03 – 2.0058)^2 = 0.08934.$

Así a **varianza** é 0.08934/12 = 0.00744.

A **desviación típica** é a raíz cadrada da varianza: $\sigma = \sqrt{0.00744}$ = 0.08628.

Percorrido intercuartílico ou **rango intercuartílico** calcúlase restando $Q_3 - Q_1$ = 2.07 – 1.92 = 0.15.

As medidas de posición e dispersión permítennos realizar outro tipo de gráfico estatístico que se chama ***gráfico de caixa***.

Autor: Fernando Blasco
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

3.4. Cálculo detido dos parámetros estatísticos

O máis cómodo para calcular parámetros estatísticos é utilizar unha folla de cálculo. As calculadoras científicas tamén incorporan funcións para obter os principais parámetros estatísticos. Para saber como usar a túa calculadora podes ler o manual que vén con ela.

Agora veremos como se poden utilizar as táboas de frecuencias para calcular a media e a varianza.

Cando hai valores repetidos en vez de sumar ese valor varias veces podemos multiplicar o valor pola súa frecuencia absoluta. Tamén o número de datos é a suma das frecuencias.

Deste modo obtemos a seguinte **fórmula para a media**

$$\overline{x} = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i}$$

Analogamente, a **varianza** pódese calcular mediante

$$\text{Varianza} = \sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot (x_i - \overline{x})^2}{\sum f_i}$$

ou, alternativamente, mediante a expresión

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^{\,2}}{\sum f_i} - \overline{x}^2$$

(Estas dúas fórmulas son equivalentes. A segunda expresión obtense desenvolvendo os cadrados da primeira e simplificando).

Polo tanto a **desviación típica** calcúlase:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i \cdot (x_i - \overline{x})^2}{\sum f_i}} = \sqrt{\frac{\sum f_i \cdot x_i^{\,2}}{\sum f_i} - \overline{x}^2}$$

Actividades resoltas

- *As notas de 15 alumnos nun exame de matemáticas reflíctense na seguinte táboa*

7	7	6	6	10	1	4	5	5	3	9	5	5	8	6

Queremos calcular a súa media e a súa varianza.

En primeiro lugar, elaboramos unha táboa de frecuencias con eses datos:

x_i	f_i
1	1
2	0
3	1
4	1
5	4
6	3
7	2
8	1
9	1
10	1

Engadimos unha columna na que escribiremos o resultado de multiplicar a frecuencia e o valor, isto é, ***xi · fi.***

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
1	1	1
2	0	0
3	1	3
4	1	4
5	4	20
6	3	18
7	2	14
8	1	8
9	1	9
10	1	10
	$\sum f_i = n = 15$	$\sum x_i \cdot f_i = 87$

Sumando as frecuencias (columna central) obtemos o número de datos.

Así a media é o cociente entre a suma da columna da dereita entre a suma da columna central.

$$\bar{x} = \frac{87}{15} = 5.8$$

Para calcular a varianza engadiremos unha columna máis á táboa anterior. Nesa columna escribiremos o produto da frecuencia polo cadrado do valor.

Autor: Fernando Blasco
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
1	1	1	1
2	0	0	0
3	1	3	9
4	1	4	16
5	4	20	100
6	3	18	108
7	2	14	98
8	1	8	64
9	1	9	81
10	1	10	100
	$\sum f_i = n = 15$	$\sum x_i \cdot f_i = 87$	$\sum x_i^2 \cdot f_i = 577$

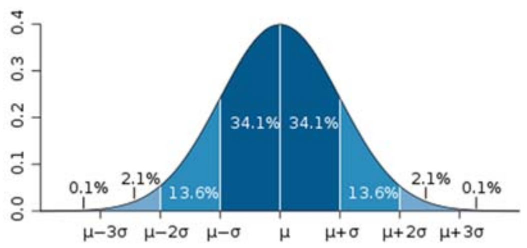
Así a **varianza** é $\sigma^2 = \frac{577}{15} - 5.8^2 = 4.826$

E a **desviación típica** é $\sigma = \sqrt{4.826} = 2.2$.

3.5. Interpretación conxunta da media e a desviación típica

Vimos que a desviación típica mide a distancia dos datos respecto da media. Dános moita información. Informa sobre como se agrupan os datos arredor da media.

Se os datos que recollemos tivesen unha distribución normal (de momento non sabemos o que isto significa exactamente dentro da Estatística, pero podes supoñer que significa iso, que son normais, que non lles pasa nada raro) resulta que no intervalo entre a media menos unha desviación típica e a media máis unha desviación típica están máis do 68 % dos datos. No intervalo entre a media menos 2 desviacións típicas e a media máis 2 desviacións típicas están máis do 95 % dos datos, e entre a media menos 3 desviacións típicas e a media máis 3 desviacións típicas están máis do 99.7 % dos datos.



Media e desviación típica. Imaxe de wikipedia

Poderíase dicir que algo, por exemplo a intelixencia dunha persoa, a altura dunha planta ou o peso dun animal... é normal se está dentro dese intervalo ($\bar{x} - \sigma$, $\bar{x} + \sigma$), que é intelixente, alto ou pesado se está entre ($\bar{x} + \sigma$, $\bar{x} + 2\sigma$), ou que é un xenio, xigante ou moi pesado se está no intervalo

($\bar{x} + 2\sigma$, $\bar{x} + 3\sigma$).

Observa que estamos dicindo que practicamente todos os datos distan da media menos de 3 desviacións típicas e que máis do 68 % distan menos dunha desviación típica. Isto vai ser de gran utilidade pois conecta con outras ramas da Estatística. Ata agora estivemos describindo o que ocorre. Agora imos poder tomar decisións, inferir ou predicir cunha certa probabilidade o que vai ocorrer. Por iso imos estudar a continuación as probabilidades.

3.6. Diagrama de caixa ou de bigotes

O **diagrama de caixa** ou de **bigotes** é unha representación gráfica na que se utilizan cinco medidas estatísticas: o valor mínimo, o valor máximo, a mediana, o primeiro cuartil e o terceiro cuartil… intentando visualizar todo o conxunto de datos.

O máis rechamante do gráfico é a «caixa». Fórmase un rectángulo (ou caixa) cuxos lados son os cuartís (Q_1 e Q_3) e onde se sinala no centro a mediana (*Me*). De maneira que o cadrado/rectángulo contén o 50 por cento dos valores centrais.

Engádenselle dous brazos (ou *bigotes*) onde se sinalan o valor máximo (*Máx*) e o valor mínimo (*Mín*).

Pódense calcular, ademais, uns límites superior e inferior. O inferior, L_i; é $Q_1 - 1.5$ polo percorrido intercuartílico, e o superior Ls é $Q_3 + 1.5$ polo percorrido intercuartílico.

Exemplo

- Neves tivo en Matemáticas as seguintes notas: 8, 4, 6, 10 e 10. Calcula o seu percorrido, a varianza, a desviación típica, os cuartís e o percorrido intercuartílico.

Ordenamos os datos: $4 \leq 6 \leq 8 \leq 10 \leq 10$, e calculamos que:

Mediana = *Me* = 8.

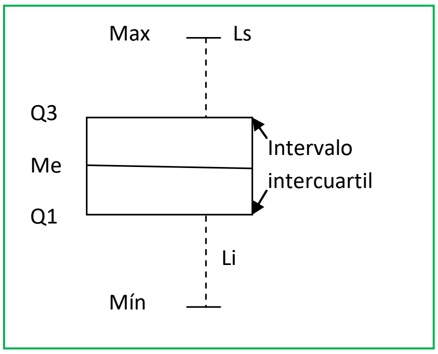
$Q_1 = 6$. $Q_3 = 10$.

Percorrido intercuartílico = 10 – 6 = 4.

Os bigotes indícannos:

Máx = 10. Mín = 4.

Ls = Q3 + 4 * 1.5 = 16. Li = Q1 – 4 * 1.5 = 0.



Neste exemplo o máximo é igual a 10, que é menor que o posible extremo superior, igual a 16. O mínimo é 4, maior que o extremo inferior, logo non hai valores *atípicos* que sexan maiores que o límite superior ou menores que o límite inferior. Os extremos dos bigotes no noso exemplo son 10 e 4. O diagrama de caixa é o da figura da marxe.

Actividades propostas

8. Nunha excursión de montaña participan 25 persoas coas seguintes idades:

8	10	10	11	12	36	37	37	38	40	42	43	43	44
	45	47	48	50	52	53	55	58	61	63	67		

a) Facer unha táboa de frecuencias clasificando as idades en 6 intervalos que comezan en 7.5 e terminan en 67.5. Calcular, a partir dela, os parámetros $\overline{x}$ e σ.

b) Calcular $\overline{x}$ e σ introducindo os 25 datos na calculadora, é dicir, sen agrupalos en intervalos.

c) Prescindindo dos 5 primeiros nenos, obtemos un colectivo de 20 persoas. Calcular de novo os seus parámetros $\overline{x}$ e σ, e comparar cos obtidos no grupo inicial.

d) Calcular os parámetros de posición Q_1, Q_3 e *Me*, da distribución orixinal, e construír o diagrama de caixa ou de bigotes correspondente.

4. INTRODUCIÓN AO CÁLCULO DE PROBABILIDADES

4.1. Conceptos básicos en probabilidade

Todos os días aparecen na nosa vida feitos que teñen que ver coa probabilidade. Se xogamos ao parchís, intuímos que *máis ou menos* unha de cada 6 veces sairá un 5, co que poderemos sacar unha ficha a percorrer o taboleiro. No "Monopoly" sacar un dobre tres veces seguidas mándanos ao cárcere ("sen pasar pola casa de saída"). Isto non ocorre moitas veces; porén, todos os que xogamos a isto fomos ao cárcere por ese motivo.

A **probabilidade** é unha medida do factible que é que teña lugar un determinado suceso.

Para estudar a probabilidade debemos introducir algúns nomes. Ímolo facer coa axuda dun caso concreto.

Exemplo

- *Imaxinemos que temos unha bolsa con 5 bólas: 2 brancas, 2 vermellas e unha negra. Facemos o seguinte* ***experimento aleatorio****: meter a man na bolsa e mirar a cor da bóla que saíu.*

Hai 3 *casos* posibles: "que a bóla sexa branca", "que a bóla sexa vermella" ou "que a bóla sexa negra". Abreviadamente representarémolos por *branca*, *vermella* ou *negra* (tamén poderemos representar as cores ou escribir B, R ou N; recorda que en matemáticas sempre se debe simplificar, mesmo a maneira de escribir).

O **espazo dunha mostra** é o conxunto de todos os casos posibles: {B, R, N}.

Os diferentes **sucesos** son os subconxuntos do espazo dunha mostra. No noso exemplo os sucesos posibles son {B}, {R}, {N}, {B, R}, {B, N}, {R, N}, {B, R, N}.

É seguro que no noso experimento a bóla que sacamos é "branca", "negra" ou "vermella". Por iso ao espazo dunha mostra chámaselle tamén **suceso seguro**.

Recorda estes nomes:

Un **experimento aleatorio** é unha acción (experimento) cuxo resultado depende do azar.

A cada un dos resultados posibles dun experimento aleatorio chamarémoslle **caso** ou **suceso individual**.

O conxunto de todos os casos posibles chámase **espazo dunha mostra** ou **suceso seguro**.

Un **suceso** é un subconxunto do espazo dunha mostra.

Exemplos.

1. Baralla española de 40 cartas. Experimento: sacamos unha carta ao azar e miramos o seu pau.

   Espazo dunha mostra {ouros, copas, espadas, bastos}.

2. Experimento: lanzamos simultaneamente 1 moeda de euro e unha de 2 euros ao aire.

   Espazo dunha mostra: {Cara-Cara, Cara-Cruz, Cruz-Cara, Cruz-Cruz}.

3. Experimento: lanzamos simultaneamente 2 moedas de 1 euro (indistinguibles).

   Espazo dunha mostra: {Saen 2 caras, Saen 2 cruces, Sae 1 cara e unha cruz}

Autor: Fernando Blasco
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

4. Experimento: lanzamos unha moeda de 1 euro e apuntamos o que saíu; volvémola lanzar e apuntamos o resultado.

   Espazo dunha mostra: {CC, CX, XC, XX}.

5. Experimento: lanzamos simultaneamente dous dados e sumamos os números que se ven nas caras superiores.

   Espazo dunha mostra: {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}.

6. Experimento: lanzamos un dado usual e sumamos os números que aparecen na cara superior e na cara inferior (a que non se ve, que está sobre a mesa).

   Espazo de sucesos: {7}

Nos exemplos anteriores, (2) e (4) son equivalentes: os posibles resultados do lanzamento de 2 moedas que se distinguen son os mesmos que os do lanzamento dunha mesma moeda dúas veces (por exemplo, equiparamos o resultado do lanzamento da moeda de 1 euro do exemplo 3 co primeiro lanzamento da moeda do exemplo 4 e o resultado do lanzamento da moeda de 2 euros co segundo lanzamento).

No experimento 6 sempre sae o mesmo resultado (por algunha razón os puntos nos dados usuais distribúense sempre de modo que as caras opostas suman 7). Tecnicamente este non é un experimento aleatorio, xa que o resultado non depende do azar.

Actividades propostas

9. Para cada un dos exemplos 1 a 5 anteriores indica 3 sucesos diferentes que non sexan sucesos individuais.

10. Nunha bolsa temos 10 bólas vermellas numeradas do 1 ao 10. Fanse os dous experimentos seguintes:

EXPERIMENTO A: Sácase unha bóla da bolsa e mírase a súa cor.

EXPERIMENTO B: Sácase unha bóla da bolsa e mírase o seu número.

Cal destes experimentos non é un experimento aleatorio? Por que?

Para o experimento que si é un experimento aleatorio indica o seu espazo dunha mostra.

11. Unha baralla francesa ten 52 cartas, distribuídas en 13 cartas de picas, 13 de corazóns, 13 de trevos e 13 de diamantes. As picas e os trevos son cartas negras mentres que os corazóns e os diamantes son cartas vermellas. Mestúrase a baralla, córtase e faise o seguinte experimento: coller as dúas cartas que quedaron arriba de todo e observar de que cor son.

Describe o espazo dunha mostra.

4.2. Cálculo de probabilidades

Xa indicamos que a probabilidade é unha medida que nos indica o grao de confianza de que ocorra un determinado suceso.

A **probabilidade** exprésase mediante un número comprendido entre 0 e 1.

Se ese número está próximo a 0 diremos que é un suceso improbable (ollo, improbable no quere dicir que sexa imposible), mentres que se está próximo a 1 diremos que ese suceso será moito máis probable.

Exemplo

- *Nunha bolsa que contén 20 bólas brancas introducimos unha bóla negra (indistinguible ao tacto). Mesturamos ben as bólas da bolsa, e realizamos o experimento consistente en meter a man na bolsa e sacar unha bóla.*

Sen que estudaramos nada formalmente sobre probabilidade, que pensas que é máis probable? que a bóla sacada é branca ou que é negra? Estaremos de acordo en que é máis probable sacar unha bóla branca.

Agora xa si que podemos preguntarnos: En que medida é máis probable sacar unha bóla branca?

Non é difícil de calcular. Os datos que temos son os seguintes:

- A bolsa ten 21 bólas
- 1 bóla é negra
- 20 bólas son brancas

A probabilidade de sacar a bóla negra é 1 de entre 21. A probabilidade de sacar unha bóla branca é de 20 entre 21.

O que acabamos de utilizar é coñecido como **Lei de *Laplace*.** Se todos os casos dun espazo dunha mostra son **equiprobables** (isto é, teñen a mesma probabilidade de ocorrer), e S é un suceso dese experimento aleatorio tense que

$$P(S) = \frac{\textit{número de casos favorables ao suceso } S}{\textit{número de casos posibles}}$$

Exemplo.

- *Mesturamos unha baralla española de 40 cartas (os paus son ouros, copas, espadas e bastos e en cada pau hai cartas numeradas do 1 ao 7 ademais dunha sota, un cabalo e un rei).*

Realízase o experimento consistente en *cortar a baralla e quedarmos coa carta superior*.

Consideraremos os seguintes sucesos:

1) Obter unha figura.
2) Obter unha carta cun número impar.
3) Obter unha carta de espadas.
4) Obter unha carta de espadas ou unha figura.
5) Obter a sota de ouros.

En principio as cartas non van estar marcadas, co que a probabilidade de que saia cada unha delas é a mesma. Isto é, estamos perante un experimento aleatorio con todos os casos equiprobables.

1) Na baralla hai 12 figuras (3 por cada pau). Así

   Casos favorables: 12

   Casos posibles: 40

   Probabilidade: 12/40 = 3/10.

2) Por cada pau hai 4 cartas con números impares: 1, 3, 5 e 7.

   Casos favorables: 16

   Casos posibles: 40

   Probabilidade: 16/40 = 2/5.

3) Hai 10 cartas de espadas na baralla

   Casos favorables: 10

   Casos posibles: 40

   Probabilidade: 10/40 = 1/4.

4) Hai 10 cartas de espadas e ademais outras 9 figuras que non son de espadas (claro, as 3 figuras de espadas xa as contamos).

   Casos favorables: 19

   Casos posibles: 40

   Probabilidade: 19/40.

5) Só hai unha sota de ouros

   Casos favorables: 1

   Casos posibles: 40

   Probabilidade: 1/40.

O que é capaz de calcular probabilidades rapidamente ten vantaxe nalgúns xogos nos que se mestura azar con estratexia. Por exemplo, xogos de cartas ou de dominó. Se sabemos que cartas ou fichas foron xogadas podemos estimar a probabilidade de que outro xogador teña unha determinada xogada. Obviamente neses casos non *cuantificamos* (non facemos os cálculos exactos) pero si que *estimamos* se teremos a probabilidade ao noso favor ou na nosa contra.

Para aprender máis…

Jerónimo Cardano (1501-1576) foi un personaxe inquedo e prolífico. Ademais de dedicarse ás matemáticas era médico, pero tamén era un xogador. De feito, el foi quen escribiu o primeiro traballo que se coñece sobre xogos de azar. Un século despois o *Cabaleiro de Meré*, un coñecido xogador, propúxolle a *Blas Pascal* diversos problemas que lle aparecían nas súas partidas. Un dos problemas que lle propuxo é o do reparto das ganancias cando unha partida se ten que interromper. Este problema xa fora tratado con anterioridade por *Luca Pacioli* (o matemático que inventou a táboa de dobre entrada para axudar aos *Medici* a levar a contabilidade da súa Banca).

O problema enunciado e resolto por *Pacioli* é este:

- *Dous equipos xogan á pelota de modo que gaña o xogo o primeiro equipo que gaña 6 partidos. A aposta é de 22 ducados, que levará o gañador. Por algún motivo hai que interromper o xogo cando un equipo gañou 5 partidos e o outro 3. Quérese saber como repartir os 22 ducados da aposta, dun modo xusto.*

Pénsao!

Malia ter pasado á historia das Matemáticas, a solución que deu *Pacioli* a este problema hoxe non se consideraría correcta por non ter en conta a probabilidade. Que propós ti? Este é un problema curioso porque non temos todos os datos nin coñecemos as probabilidades que interveñen na súa resolución, pero é un bonito exemplo para pensar en equipo e discutir sobre o tema. Dicir que é e que non é xusto é moi complicado.

Actividades resoltas

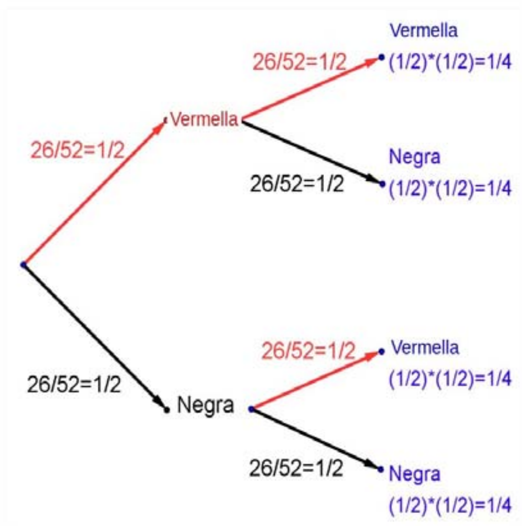
- *Unha bolsa de bólas contén 26 negras e 26 vermellas. Mestúrase o contido da bolsa, métese a man e sácase unha bóla, mírase a cor e devólvese á bolsa. A continuación, sácase outra bóla e mírase a cor. Cal é a probabilidade de que saíran unha bóla vermella e unha bóla negra?*

Antes de seguir lendo, pénsao. Se te equivocas non pasa nada: o sentido de probabilidade non o temos demasiado desenvolvido, pero este é o momento de facelo.

Este problema propuxémoslle moitas veces a outros estudantes. Algúns din que a probabilidade é 1/3 porque hai 3 casos posibles: Vermella-Vermella, Negra-Negra e Vermella-Negra. Esa resposta non é correcta.

En realidade, o suceso *sacar unha bóla de cada cor* consta de 2 casos Vermella-Negra e Negra-Vermella. Dependendo de como escribiramos o espazo dunha mostra ou de como propuxeramos o problema ese detalle podería verse con maior ou menor claridade.

Así, a probabilidade de sacar unha bóla de cada cor é, en realidade 1/2.



Autor: Fernando Blasco
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Se non o cres podes facer un experimento: será difícil que teñas 26 bólas negras e 26 bólas vermellas, pero si que é fácil que teñas unha baralla francesa. Mestúraa, corta e mira a cor da carta que quedou arriba no montón. Apúntaa. Volve deixar as cartas no mazo, volve mesturar, corta de novo e mira a cor da carta que quedou arriba agora. Apunta as cores. Repite este experimento moitas veces: 20, 50 ou 100.

Se tes en conta os resultados verás que, aproximadamente, a metade das veces as dúas cartas son da mesma cor e a outra metade as cartas son de cores diferentes. Con iso, puidemos "comprobar" que a probabilidade dese suceso era 1/2.

Outra forma que che pode axudar a razoar sobre este problema, e outros moitos de probabilidade, é confeccionar un **diagrama en árbore**. A primeira bóla que sacamos ten unha probabilidade de ser vermella igual a 26/52 = 1/2. Ese número escribímolo na póla da árbore. Se devolvemos á bolsa a bóla e volvemos sacar outra bóla da bolsa, a probabilidade de que sexa vermella volve ser 26/52 = 1/2. Completamos con idéntico razoamento o resto das pólas.

A probabilidade de que as dúas bólas que sacaramos sexan vermellas é o produto das súas pólas: (1/2)·(1/2) = 1/4. Igual probabilidade obtemos para os sucesos Negra-Negra, Negra-Vermella e Vermella-Negra. A probabilidade de Vermella-Negra é polo tanto 1/4, igual á de Negra-Vermella. Como son sucesos elementais a probabilidade de que as dúas bólas sexan de distinta cor é a suma: 1/4 + 1/4 = 1/2.

4.3. Probabilidade e frecuencia relativa

Ao principio do capítulo, cando introducimos os principais conceptos estatísticos, falabamos da frecuencia. A esa frecuencia chámaselle **frecuencia absoluta** para distinguila doutro concepto, que é moito máis próximo á probabilidade.

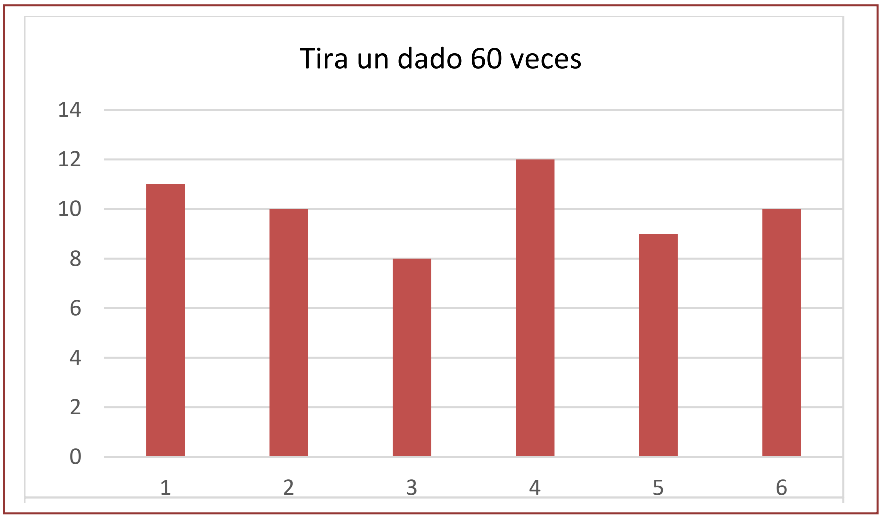
Chamaremos **frecuencia relativa** dun resultado dun experimento aleatorio á súa frecuencia absoluta dividida entre o número de repeticións do experimento.

Exemplo

- *Tira un dado 60 veces, copia esta táboa no teu caderno e apunta o que sae:*

Se debuxas un diagrama de barras cos resultados do experimento obterás algo parecido a isto:

Autor: Fernando Blasco
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

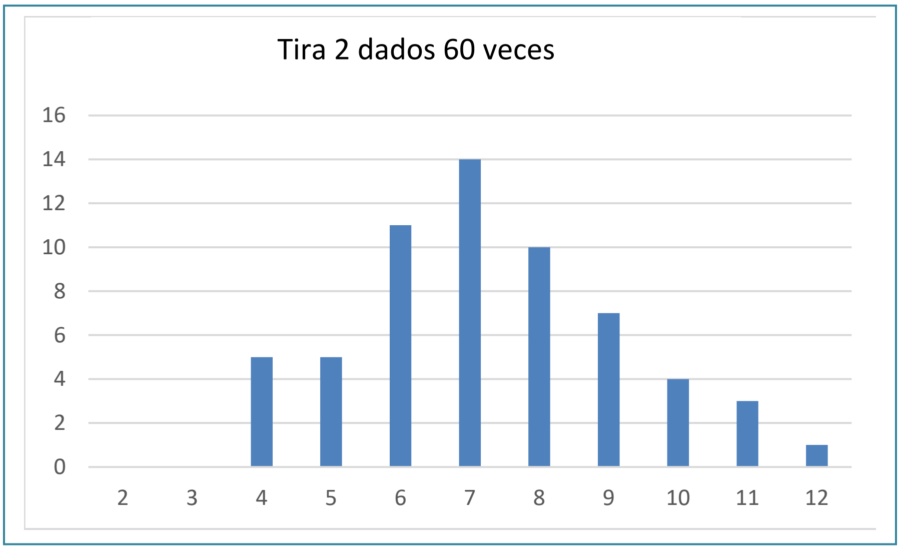


A frecuencia relativa de cada un dos casos é bastante parecida á probabilidade dese caso (que é 1/6).

Exemplo

- *Fai agora outro experimento: tira 2 dados 60 veces e apunta asuma dos valores dos dous dados nesta táboa.*

Debuxa agora un diagrama de barras. O que obterás será algo parecido a isto:



Se a probabilidade "se ten que parecer" ás frecuencias relativas, neste caso vemos que o suceso *que a suma dea 7* é máis probable que calquera dos demais. E moito máis probable que a *suma dea 2* ou *que a suma dea 12*.

A **lei dos grandes números** dinos que cando se repite moitas veces un experimento aleatorio a frecuencia relativa de cada suceso S aproxímase á súa probabilidade. Canto máis grande sexa o número de repeticións, mellor vai sendo a aproximación.

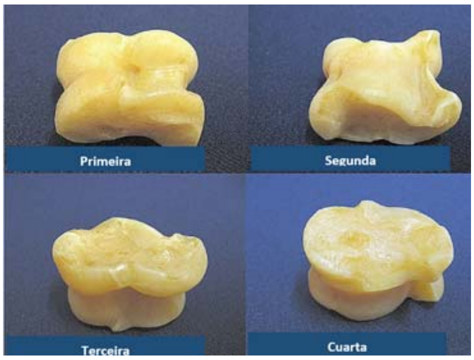
Neste caso o útil é utilizar as frecuencias relativas para estimar probabilidades cando estas non son coñecidas.

Actividades propostas

12. Nalgúns lugares de España séguese xogando á chuca. A chuca é un óso de año que non é regular. Pode caer en catro posicións distintas. Podemos pensar nela como se fose un dado “raro”.

Considera o experimento “lanzar a chuca ao aire e ver o que marca a súa cara superior: primeira, segunda, terceira ou cuarta”.

Aproxima a probabilidade de cada un dos casos deste experimento aleatorio.



(Imaxe: WikimediaCommons)

13. A túa calculadora probablemente terá unha función que serve para xerar números aleatorios. Normalmente dea un número comprendido entre 0 e 1.

Realiza o experimento aleatorio “xera un número aleatorio e apunta o seu segundo decimal”. Fai 40 repeticións deste experimento. Debuxa un histograma de frecuencias.

14. A probabilidade non é un concepto intuitivo. Para iso imos facer unha proba. Consideraremos o experimento aleatorio *lanzar unha moeda*. Copia a táboa no teu caderno

- Escribe na 1ª fila desta táboa o que ti cres que sairía ao repetir o experimento 30 veces. Pénsao e enche a táboa. Como ti queiras (invéntao pero “con sentido”).
- Na 2ª fila da táboa escribe o resultado real de 30 lanzamentos da moeda.

Que observas en ambos os casos? Algunha pauta? Presta atención a estas cuestións para cada unha das filas da táboa.

Hai máis ou menos 15 caras e 15 cruces?

Aparecen grupos seguidos de caras ou de cruces?

Cal é o maior número de caras que saíron seguidas? E o de cruces?

Normalmente cando “inventas” os resultados soes poñer a metade de caras e a metade de cruces. Nun experimento aleatorio estes números están preto da metade pero non soen ser a metade exacta.

Cando o inventas, en xeral pos poucos grupos seguidos de caras ou cruces.

O cerebro engánanos e en temas de probabilidade temos que educalo moito máis. Por iso este tema é moi importante, aínda que sexa o que moitas veces queda sen dar. Axúdanos a que, como cidadáns, non nos enganen. Nin con loterías, nin con cartas, nin con estatísticas electorais.

CURIOSIDADES. REVISTA

Un problema resolto: as tres ruletas

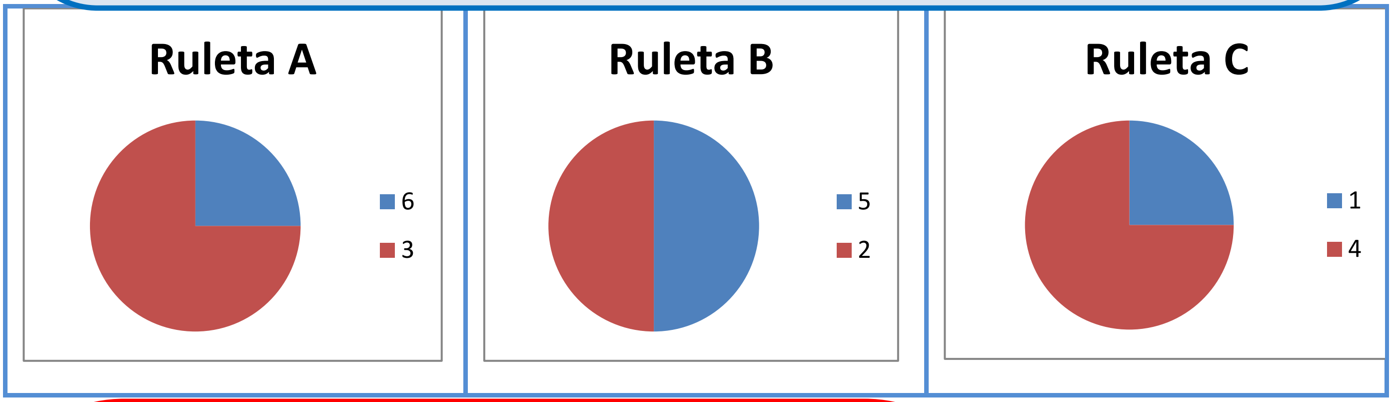
Dispoñemos de tres ruletas A, B e C cada unha delas dividida en 32 sectores iguais con distintos puntos:

A: 8 sectores coa cifra 6 e 24 sectores coa cifra 3.

B: 16 sectores coa cifra 5 e 16 sectores coa cifra 2.

C: 8 sectores coa cifra 1 e 24 sectores coa cifra 4.

Dous xogadores seleccionan unha ruleta cada un. Gaña quen obteña maior puntuación coa ruleta. **Quen ten vantaxe ao elixir ruleta, a persoa que elixe primeiro ou a que elixe en segundo lugar?**



Solución: "As tres ruletas"

Fai un **diagrama de árbore** e comproba que:

Xogando coa Ruleta A e a Ruleta B.

$P(\text{gañar } A) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$ $\qquad$ $P(\text{gañar } B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

Gaña o que xoga coa Ruleta A.

Xogando coa Ruleta A e a Ruleta C.

$P(\text{gañar } A) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{16}$ $\qquad$ $P(\text{gañar } C) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$

Gaña o que xoga coa Ruleta C.

Xogando coa Ruleta B e a Ruleta C

$P(\text{gañar } B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$ $\qquad$ $P(\text{gañar } C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$

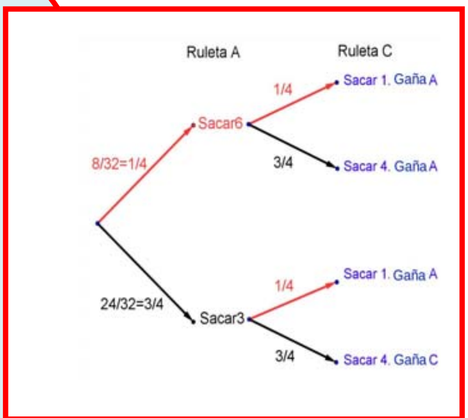
Gaña o que xoga coa Ruleta B.

Gaña o xogador que elixe en segundo lugar:

Se o primeiro elixe a Ruleta A ⟶ o segundo elixe a Ruleta C e gaña.

Se o primeiro elixe a Ruleta B ⟶ o segundo elixe a Ruleta A e gaña

Se o primeiro elixe a Ruleta C ⟶ o segundo elixe a Ruleta B e gaña



Autor: Fernando Blasco
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Breve historia da Probabilidade

Jerónimo Cardano (1501-1576) foi un personaxe inquedo e prolífico. Ademais de dedicarse ás matemáticas era médico, pero tamén era un xogador. De feito el foi quen escribiu o primeiro traballo que se coñece sobre xogos de azar.

Un século despois o *Cabaleiro de Mérè* propúxolle a *Blaise Pascal* algúns problemas sobre **xogos** como o seguinte:

- *Un xogador intenta obter un 1 en 8 lanzamentos sucesivos dun dado, pero o xogo interrómpese despois de 3 lanzamentos erróneos. En que proporción debe ser compensado o xogador?*

Pascal escribiu a *Fermat* sobre este problema e a correspondencia intercambiada pódese considerar como o inicio da Teoría de Probabilidades, pero non publicaron por escrito as súas conclusións. Este problema xa fora tratado con anterioridade por *Luca Pacioli* (o matemático que inventou a táboa de dobre entrada para axudar aos Medici a levar a contabilidade da súa Banca).

Huygens en 1657 publicou un breve escrito "*Os xogos de azar*" onde narra esta correspondencia.

Pero o primeiro libro sobre Probabilidade é de 1713 de *Jacques Bernoulli*, *A arte da conxectura*.

Nel enúnciase a **lei dos grandes números** que vén dicir que *A probabilidade dun suceso achégase ás frecuencias relativas cando o número de experimentos é grande*. Coñecer isto levou a grandes xogadores a gañar no Casino de Montecarlo, como se narra máis abaixo.

A Estatística e a Probabilidade usáronse en problemas sociais como defender a **vacinación da varíola**, a educación pública… na Ilustración Francesa.

Ata aquí, xa sabes resolver todos os problemas históricos. Pero hai outros máis difíciles, que requiren máis coñecementos de Matemáticas, como o da **agulla de *Buffon***, que utilizou para calcular cifras de π:

A ruleta

William Jaggers chegou a Montecarlo cuns poucos francos no peto e, durante un mes anotou os números que saían en cada ruleta, e en catro días gañou dous millóns catrocentos mil francos. *Jaggers* conseguiu quebrar a banca en *Montecarlo* analizando as frecuencias relativas de cada número da ruleta e observando que se desgastara algo do mecanismo dunha delas, co que todos os valores non tiñan igual probabilidade. Apostou aos números máis probables e gañou.

Autor: Fernando Blasco
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Luca Pacioli

Luca Pacioli (1445 – 1517), de nome completo **Frei Luca Bartolomeo de Pacioli** ou **Luca di Borgo San Sepolcro**, cuxo apelido tamén aparece escrito como ***Paccioli*** e ***Paciolo*** foi un frade franciscano e matemático italiano, precursor do cálculo de probabilidades. Xa falamos del nestas revistas polos seus traballos sobre a proporción áurea ou divina proporción como el a chamou.

Escribiu un libro con 36 capítulos sobre **contabilidade** onde utiliza a partida dobre ou táboa de dobre entrada para axudar aos Medici a levar a contabilidade da súa Banca, define as súas regras, tales como non hai debedor sen acredor, ou que a suma do que se debe ten que ser igual ao que se paga. Non foi o seu inventor, pero si o seu divulgador.

Ducado

O problema enunciado e resolto por *Pacioli* é este:

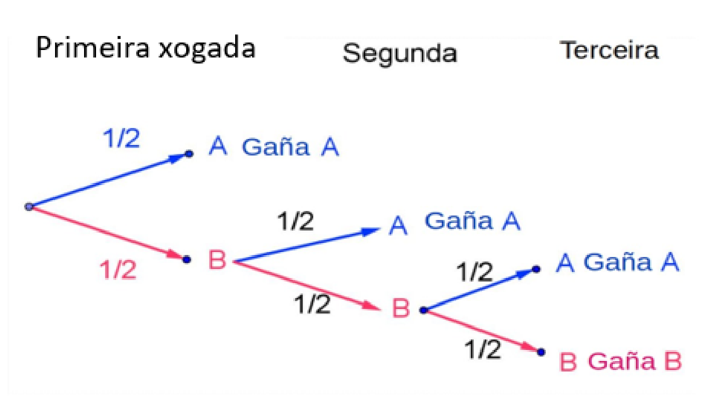
- *Dous equipos xogan á pelota de modo que gaña o xogo o primeiro equipo que gaña 6 partidos. A aposta é de 22 ducados, que levará o gañador. Por algún motivo hai que interromper o xogo cando un equipo gañou 5 partidos e o outro 3. Quérese saber como repartir os 22 ducados da aposta, dun modo xusto.*

Luca sabía de proporcións e a solución que deu hoxe non se considera válida. Non sabía probabilidades! Pero ti, si.

Partimos da hipótese de que cada un dos xogadores ten a mesma probabilidade de gañar: 1/2. Chamamos A ao xogador que xa gañou 5 partidas e B ao que leva gañadas 3.

Se fixeran unha nova partida podería gañar A con probabilidade 1/2 ou B con igual probabilidade. Se gaña A xa leva a bolsa. Se gaña B entón B levaría 4 xogadas gañadas e A 5. Continúa o xogo. Pode gañar A ou B. Observa o diagrama de árbore.

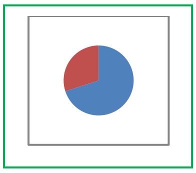
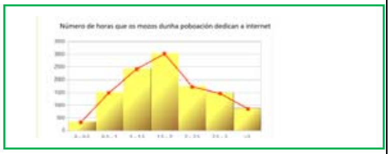
A probabilidade de que gañe B é (1/2)·(1/2)·(1/2) = 1/8, e a de que gañe A é 7/8.



Como repartirías os 22 ducados?

Autor: Fernando Blasco
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

RESUMO

Concepto	Definición	*Exemplos*
Poboación	Colectivo sobre o que se fai o estudo	Estudantes de todo Madrid
Mostra	Subconxunto da poboación que permite obter características da poboación completa.	Estudantes de 3º da ESO seleccionados
Individuo	Cada un dos elementos da poboación ou mostra	Xoán Pérez
Variable estatística	Cuantitativa discreta Cuantitativa continua Cualitativa	Número de pé que calza Estatura Deporte que practica
Gráficos estatísticos	Diagrama de barras Histograma de frecuencias Polígono de frecuencias Diagrama de sectores 	
Media	$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ = $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n$	Cos datos: 8, 2, 5, 10 e 10 *Media* = 35/5 = 7
Moda	É o valor máis frecuente	*Mo* = 10
Mediana	Deixa por debaixo a metade	4 < 6 < **8** < 10 = 10. *Me* = 8.
Rango ou percorrido	É a diferenza entre o dato maior e o dato menor.	10 – 2 = 8
Desviación media	É a media das distancias dos datos á media dos datos dos que dispoñamos.	$(\lvert 8-7\rvert + \lvert 2-7\rvert + \lvert 5-7\rvert + \lvert 10-7\rvert + \lvert 10-7\rvert)/5$ = (1 + 5 + 2 + 3 + 3)/5 = 14/5 = DM
Varianza	É a media dos cadrados das distancias dos datos á media: $\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - m^2$	V = (1 + 25 + 4 + 9 + 9)/5 = 47/5 = 9.4
Desviación típica	É raíz cadrada da varianza= $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - m^2}$	$\sigma = \sqrt{47/5}$ = 3.06
Probabilidade	Valor entre 0 e 1 que nos dá unha medida do factible que sexa que se verifique un determinado suceso.	P(3) = 1/6 ao tirar un dado
Espazo dunha mostra	O conxunto de todos os casos posibles	{1, 2, 3, 4, 5, 6}
Suceso	Subconxunto do espazo dunha mostra	Sacar par: {2, 4, 6}
Lei de Laplace	$P(S) = \frac{número\ de\ casos\ favorables\ ao\ suceso\ S}{número\ de\ casos\ posibles}$	*P*(par) = 3/6 = 1/2.

Autor: Fernando Blasco
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Estatística

1. Recolléronse os datos sobre o número de fillos que teñen 20 matrimonios. Como é a variable utilizada? Escribe unha táboa de frecuencias dos datos recollidos e representa os datos nun diagrama de sectores:

3, 1, 1, 2, 0, 2, 3, 1, 1, 1, 1, 0, 3, 2, 1, 2, 1, 2, 2, 3.

2. Cos datos do problema anterior calcula a media, a mediana, a moda e os cuartís.

3. Cos datos do problema anterior calcula o rango, a desviación media, a varianza, a desviación típica e o percorrido intercuartílico.

4. Representa eses datos nun diagrama de caixas.

5. A seguinte táboa expresa as estaturas, en metros, de 1000 soldados:

Talle	1.50 – 1.56	1.56 – 1.62	1.62 – 1.68	1.68 - 1.74	1.74 - 1.80	1.80-1.92
Nº de soldados	10	140	210	340	210	90

a) Representa os datos nun histograma.

b) Calcula a media e a desviación típica.

c) Determina o intervalo onde se encontra a mediana.

6. Pregúntase a un grupo de persoas polo número de televisores que hai no seu fogar e os resultados son:

Número de televisores	0	1	2	3	4	5
Número de fogares	2	27	15	4	2	1

Que tipo de variables é? Representa os datos na representación que che pareza máis adecuada.

Calcula a media e a desviación típica.

7. Cos datos do problema anterior calcula a mediana e o percorrido intercuartílico.

8. Nun centro escolar recolleuse información sobre o número de ordenadores nas casas de 100 familias e obtivéronse os seguintes resultados:

Número ordenadores	0	1	2	3	4
Número de familias:	24	60	14	1	1

Representa os datos nun diagrama de barras e calcula a media, a mediana e a moda.

9. Cos datos do problema anterior calcula o rango, a desviación media, a varianza e a desviación típica. Fai un diagrama de caixas.

10. Pregúntase a un grupo de persoas polo número de veces que visitaron o dentista no último ano. As respostas obtidas recóllense na seguinte táboa :

Número de visitas:	1	2	3	4	5
Número de persoas:	13	18	7	5	7

Representa os datos nun diagrama de sectores e calcula a media, a mediana e a moda.

11. Pregúntase a un grupo de persoas polo número de veces que visitaron o dentista no último ano. As respostas obtidas recóllense na seguinte táboa :

Número de visitas:	1	2	3	4	5
Número de persoas:	13	18	7	5	7

Calcula o rango, a desviación media, a varianza e a desviación típica.

12. Nas eleccións de 2014 ao Parlamento Europeo obtivéronse os seguintes escanos por grupo parlamentario (DM: demócrata – cristiáns; S: socialistas; L: liberais; V: verdes; C: conservadores; I: esquerda unitaria; LD: liberdade e democracia; NI: Non inscritos; Outros).

Partidos	DM	S	L	V	C	I	LD	NI	Outros	Total
Escanos	213	190	64	52	46	42	38	41	65	751

Que representación dos datos che parece máis adecuada? Podes calcular a media ou o rango? Que tipo de variables é a da táboa ?

13. Nas eleccións de 2014 ao Parlamento Europeo obtivéronse os seguintes escanos por algún dos Estados membro:

Estado	Alemaña	España	Francia	Italia	Poloña	Reino Unido	Portugal	Grecia	Outros	Total
Escanos	96	54	74	73	51	73	21	21		751

Que representación dos datos che parece máis adecuada? Podes calcular a media ou o rango? Que tipo de variables é a da táboa? Determina o número de escanos dos outros países membros da Unión Europea.

14. Nas eleccións de 2004, 2009, 2014 ao Parlamento Europeo obtivéronse as seguintes porcentaxes de voto por algúns dos Estados membro:

Estado	Alemaña	España	Francia	Italia	Reino Unido	Portugal	Grecia	Bélxica	% total
2004	43	45.14	42.76	71.72	38.52	38.6	63.22	90.81	45.47
2009	43.27	44.87	40.63	65.05	34.7	36.77	52.61	90.39	43
2014	47.6	45.9	43.5	60	36	34.5	58.2	90	43.09

Que representación dos datos che parece máis adecuada? Podes calcular a media ou o rango? Que tipo de variables é a da táboa? Ordena os países de maior a menor porcentaxe de votantes nas eleccións de 2014.

15. Cos datos do problema anterior sobre as eleccións de 2004, 2009 e 2014 ao Parlamento Europeo obtivéronse as seguintes porcentaxes de votos por algúns dos Estados membro:

Estado	Alemaña	España	Francia	Italia	Reino Unido	Portugal	Grecia	Bélxica	% total
2004	43	45.14	42.76	71.72	38.52	38.6	63.22	90.81	45.47
2009	43.27	44.87	40.63	65.05	34.7	36.77	52.61	90.39	43
2014	47.6	45.9	43.5	60	36	34.5	58.2	90	43.09

Representa nun polígono de frecuencias as porcentaxes de participación do total dos Estados membro.

16. Cos datos do problema anterior sobre as eleccións de 2004, 2009 e 2014 ao Parlamento Europeo obtivéronse as seguintes porcentaxes de votos por algúns dos Estados membro:

Estado	Alemaña	España	Francia	Italia	Reino Unido	Portugal	Grecia	Bélxica	% total
2004	43	45.14	42.76	71.72	38.52	38.6	63.22	90.81	45.47
2009	43.27	44.87	40.63	65.05	34.7	36.77	52.61	90.39	43
2014	47.6	45.9	43.5	60	36	34.5	58.2	90	43.09

Separa os Estados membro en dous grupos, os que tiveron unha porcentaxe superior á porcentaxe media e o que a tiveron menor en 2004. Fai o mesmo para 2014. Son os mesmos? Analiza o resultado.

17. Cos datos do problema anterior sobre as eleccións de 2004, 2009 e 2014 ao Parlamento Europeo obtivéronse as seguintes porcentaxes de votos por algúns dos Estados membro:

Estado	Alemaña	España	Francia	Italia	Reino Unido	Portugal	Grecia	Bélxica	% total
2004	43	45.14	42.76	71.72	38.52	38.6	63.22	90.81	45.47
2009	43.27	44.87	40.63	65.05	34.7	36.77	52.61	90.39	43
2014	47.6	45.9	43.5	60	36	34.5	58.2	90	43.09

Calcula a porcentaxe de participación media para Alemaña nesas tres convocatorias e a desviación típica. O mesmo para España, para Bélxica e para Portugal.

18. Nas eleccións de 2014 ao Parlamento Europeo os resultados de España foron:

Censo	Total de votantes	Abstención	Votos nulos	Votos en branco
35 379 097	15 920 815	19 458 282	290 189	357 339

Representa nun diagrama de sectores estes datos. Fai unha táboa de porcentaxes: o censo é o 100 %. Determina as outras porcentaxes. Consideras que gañou a abstención?

19. Nas eleccións de 2014 ao Parlamento Europeo os resultados de España foron:

PP	PSOE	Esquerda plural	Podemos	UPyD	Outros	Total de votantes
4 074 363	8 001 754	1 562 567	1 245 948	1 015 994		15 920 815

Determina o número de votos dos outros partidos. Representa nun diagrama de barras estes datos. Fai unha táboa de porcentaxes para cada partido. Tes que distribuír 54 escanos, como os distribuirías por partidos?

Probabilidade

20. Considérase o experimento aleatorio de tirar un dado dúas veces. Calcula as probabilidades seguintes:

a) Sacar algún 1.
b) A suma dos díxitos é 8.
c) Non sacar ningún 2.
d) Sacar algún 1 ou ben non sacar ningún 2.

21. Considérase o experimento aleatorio sacar dúas cartas da baralla española. Calcula a probabilidade de:

a) Sacar algún rei.
b) Obter polo menos un basto.
c) Non obter ningún basto.
d) Non obter o rei de bastos.
e) Sacar algunha figura: sota, cabalo, rei ou as.
f) Non sacar ningunha figura.

22. Considérase o experimento aleatorio de tirar unha moeda tres veces. Calcula as probabilidades seguintes:

a) Sacar cara na primeira tirada.

b) Sacar cara na segunda tirada.

c) Sacar cara na terceira tirada.

d) Sacar algunha cara.

e) Non sacar ningunha cara.

f) Sacar tres caras.

23. Cunha baralla española faise o experimento de sacar tres cartas, con substitución, cal é a probabilidade de sacar tres reis? E se o experimento se fai sen substitución, cal é agora a probabilidade de ter 3 reis?

24. Nunha urna hai 6 bólas brancas e 14 bólas negras. Sácanse dúas bólas con substitución. Determina a probabilidade de que:

a) As dúas sexan negras.

b) Haxa polo menos unha negra.

c) Ningunha sexa negra.

25. Nunha urna hai 6 bólas brancas e 14 bólas negras. Sácanse dúas bólas sen substitución. Determina a probabilidade de que:

a) As dúas sexan negras.

b) Haxa polo menos unha negra.

c) Ningunha sexa negra.

d) Compara os resultados cos da actividade anterior.

26. Ao lanzar catro moedas ao aire

a) Cal é a probabilidade de que as catro sexan caras?

b) Cal é a probabilidade de obter como moito tres caras?

c) Cal é a probabilidade de ter exactamente 3 caras?

27. Dous tiradores ao prato teñen unhas marcas xa coñecidas. O primeiro acerta cunha probabilidade de 0.7 e o segundo de 0.5. Lánzase un prato e ambos os dous disparan. Expresa mediante un diagrama de árbore as distintas posibilidades: a) Que probabilidade hai de que un dos tiradores dea no prato? b) Calcula a probabilidade de que ningún acerte. c) Calcula a probabilidade de que os dous acerten.

28. Lánzase unha moeda ata que apareza cara dúas veces seguidas. a) Calcula a probabilidade de que a experiencia termine no segundo lanzamento. b) Calcula a probabilidade de que termine no terceiro lanzamento.

29. No lanzamento de naves espaciais instaláronse tres dispositivos de seguridade A, B e C. Se falla A ponse automaticamente en marcha o dispositivo B e, se falla este, ponse en marcha C. Sábese que a probabilidade de que falle A é 0.1, a probabilidade de que B funcione é 0.98 e a probabilidade de que falle C é 0.05. Calcula a probabilidade de que todo funcione ben.

30. Faise un estudo sobre os incendios forestais dunha zona e compróbase que o 40 % son intencionados, o 50 % débense a neglixencias e o 10 % a causas naturais. Producíronse tres incendios, a) cal é a probabilidade de que polo menos un fose intencionado? b) Probabilidade de que os tres incendios se deban a causas naturais. c) Probabilidade de que ningún incendio sexa por neglixencias.

31. Lánzase dúas veces un dado equilibrado con seis caras. Calcular a probabilidade de que asuma dos valores que aparecen na cara superior sexa múltiplo de tres.

32. Sábese que se eliminaron varias cartas dunha baralla española que ten corenta. A probabilidade de extraer un as entre as que quedan é de 0.12, a probabilidade de que saia unha copa é de 0.08 e a probabilidade de que non sexa nin as nin copa é de 0.84.

Calcular a probabilidade de que a carta sexa o as de copas. Pódese afirmar que entre as cartas que non se eliminaron está o as de copas?

33. Unha persoa despistada ten oito calcetíns negros, seis azuis e catro vermellos, todos eles soltos. Un día con moita présa, elixe dous calcetíns ao azar. Calcula a probabilidade de:

a) que os calcetíns sexan negros.
b) que os dous calcetíns sexan da mesma cor.
c) que polo menos un deles sexa vermello.
d) que un sexa negro e o outro non.

34. Tres persoas viaxan nun coche. Suponse que a probabilidade de nacer en calquera día do ano é a mesma e sabemos que ningún naceu nun ano bisesto,

a) calcular a probabilidade de que soamente unha delas celebre o seu aniversario ese día.
b) calcular a probabilidade de que polo menos dúas cumpran anos ese día.

Autor: Fernando Blasco
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

AUTOAVALIACIÓN

1. Faise un estudo sobre a cor que prefiren os habitantes dun país para un coche. A variable utilizada é:

a) cuantitativa b) cualitativa c) cuantitativa discreta d) cuantitativa continua

2. Nun histograma de frecuencias relativas a área de cada rectángulo é:

a) proporcional á área b) igual á frecuencia absoluta

c) proporcional á frecuencia relativa d) proporcional á frecuencia acumulada

3. Ana obtivo en Matemáticas as seguintes notas: 7, 8, 5, 10, 8, 10, 9 e 7. A súa nota media é de:

a) 7.6 b) 8.2 c) 8 d) 9

4. Nas notas anteriores de Ana a mediana é:

a) 9 b) 8 c) 7.5 d) 8.5

5. Nas notas anteriores de Ana a moda é:

a) 10 b) 8 c) 7 d)7, 8 e 10

6. O espazo dunha mostra de sucesos elementais equiprobables do experimento "tirar dúas moedas e contar o número de caras" é:

a) {2C, 1C, 0C} b) {CC, CX, XC, XX} c) {XX, XC, CC} d) {CC, CX, XC, CC}

7. Tiramos dous dados e contamos os puntos das caras superiores. A probabilidade de que a suma sexa 7 é:

a) 1/6 b) 7/36 c) 5/36 d) 3/36

8. Ao sacar unha carta dunha baralla española (de 40 cartas), a probabilidade de que sexa un ouro ou ben un rei é:

a) 14/40 b) 13/40 c) 12/40 d) 15/40

9. Nunha bolsa hai 7 bólas vermellas, 2 negras e 1 bóla branca. Sácanse 2 bólas. A probabilidade de que as dúas sexan vermellas é:

a) 49/100 b) 42/100 c) 49/90 d) 7/15

10. Tiramos tres moedas ao aire. A probabilidade de que as tres ao caer sexan cara é:

a) 1/5 b) 1/7 c) 1/8 d) 1/6