Matemáticas orientadas ás ensinanzas académicas

4ºB de ESO

Capítulo 12

Funcións exponenciais, logarítmicas e trigonométricas

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Miguel Ángel Paz

Revisora: María Molero e Javier Rodrigo

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: Miguel Ángel Paz e Banco de Imaxes de INTEF

Índice

Resumo

Entre as diversas funcións hai algunhas que teñen unha importancia especial, ou tivérona historicamente. Nestes dous capítulos amosámosche tres tipos moi importantes.
Termos como *crecemento exponencial ou curva sinusoidal* derivan deste tipo de funcións.
Teñen unhas propiedades importantísimas na análise matemática, enxeñaría, medicina, ciencias sociais, etc. Neste capítulo aprenderás o cálculo de logaritmos e as propiedades das funcións exponenciais e circulares e das súas gráficas.
O termo *logaritmo* foi cuñado en 1614 polo matemático escocés *John Neper* (1550-1617). Antes da invención das calculadoras electrónicas, os logaritmos tamén foron imprescindibles para o cálculo de potencias de números non enteiros.
As funcións trigonométricas son moi coñecidas e constitúen un dos exemplos máis populares de funcións periódicas. Elas ou outras funcións relacionadas atópanse por todas as partes na natureza e utilízanse en física, electrónica, etc. Numerosas gráficas comparten as súas propiedades como, por exemplo, a forma dunha onda, tamén chamada *sinusoide*, que debe este nome á función *seno*.

John Napier (Neper). Barón de Merchiston

1. FUNCIÓNS EXPONENCIAIS

1.1. Función exponencial

Hai dous tipos de funcións cuxa **expresión analítica** ou **fórmula** é unha **potencia**:

- Se a variable independente está na base: $y = x^3$, chámase **función potencial**, e cando ademais o expoñente é un número natural é unha función polinómica.
- Se a variable independente está no expoñente: $y = 3^x$, chámase **función exponencial**.

Exemplo:

$$y = 10^x,\ y = \left(\frac{1}{2}\right)^x,\ y = 2^{3x},\ y = 5^{-x}.$$

Unha función exponencial é aquela na que a variable independente está no expoñente.

Neste curso estudamos funcións exponenciais sinxelas, do tipo $y = b^x$, onde a base *b* é un número positivo distinto de 1.

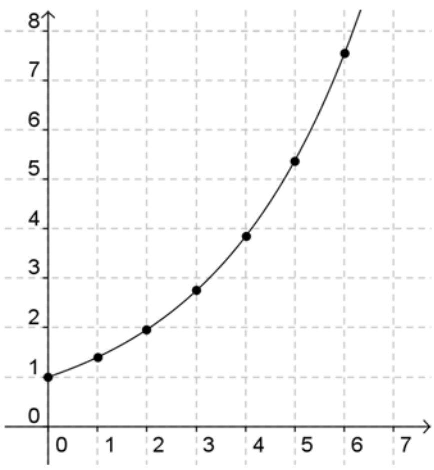
Actividades resoltas

- Se a cantidade de bacterias dunha determinada especie se multiplica por 1.4 cada hora, podemos escribir a seguinte fórmula para calcular o número *"y"* de bacterias que haberá ao cabo de *"x"* horas (comezando por unha soa bacteria): $y = 1.4^x$.

Número de bacterias en cada hora (**Táboa de valores da función**):

Horas transcorridas (*x*)	**Núm. bacterias (*y*)**
0	1
1	1.4
2	1.96
3	2.74
4	3.84
5	5.38
6	7.53
...	...

Gráfica da función



Observa que neste exemplo non se lle deu a “x” valores negativos, xa que non ten sentido un número de horas negativo. Nas funcións exponenciais en xeral o “x” si pode ter valores negativos. Porén a base b só pode ter valores positivos. Así mesmo, observarás que a variable “y” tamén resulta sempre positiva. Máis adiante recollemos estas propiedades ao falar de dominio e percorrido da función exponencial.

Actividades propostas

1. Proba agora a realizar no teu caderno unha táboa de valores e a gráfica para un caso similar, supoñendo que o número de bacterias se multiplica cada hora por 3 en lugar de por 1,4.

Observarás que os valores de “y” aumentan moito máis á présa e deseguida *se saen do papel*. Mentres que os valores de “x” aumentan de 1 en 1, os valores de e vanse multiplicando por 3. Isto chámase **crecemento exponencial**. Se en lugar de multiplicar se trata de dividir temos o caso de **decrecemento exponencial**.

2. No teu caderno, representa conxuntamente as gráficas de $y = x^2$ (función potencial) e $y = 2^x$ (función exponencial), con valores de “x” entre 0 e 6. Observa a diferenza cuantitativa entre o crecemento potencial e o crecemento exponencial.

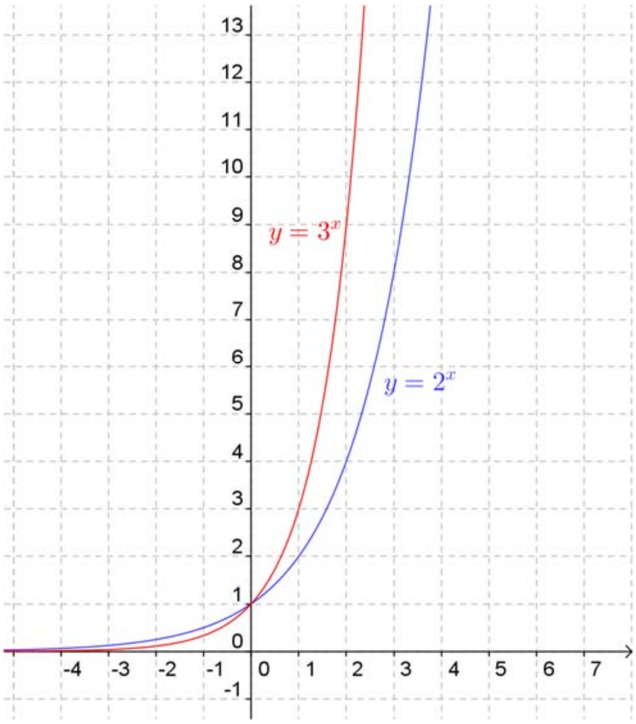
1.2. Distintas funcións exponenciais

As gráficas das funcións exponenciais $y = b^x$ diferéncianse segundo o valor da base “b”. Especialmente diferéncianse se $0 < b < 1$ ou $b > 1$.

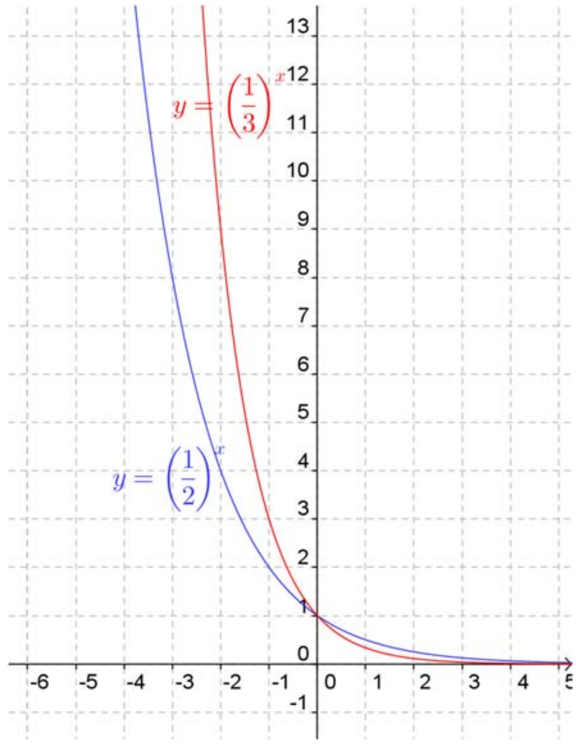
No caso no que $b = 1$ temos a función constante $y = 1$, cuxa gráfica é unha recta horizontal.

Vexamos as gráficas dalgunhas funcións exponenciais, comparándoas con outras:

Funcións $y = 2^x$ **e** $y = 3^x$



Funcións $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ **e** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



Observamos os seguintes aspectos comúns nas catro gráficas:

- O seu **dominio** é toda a recta real. Ademais son continuas.
- O seu **percorrido** é (0, +∞). É dicir, *"y"* nunca é cero nin negativo.
- Pasan todas polos puntos (0, 1), (1, b) e (–1, 1/b).
- A gráfica de $y = a^x$ e a de $y = (1/a)^x$ son simétricas respecto do eixe OY.

E observamos tamén aspectos diferenciados en ambas as ilustracións:

Cando a base é b > 1

Son funcións **crecentes**. Canto maior é a base o crecemento é máis rápido.

Cando $x \to -\infty$ a función tende a 0. Polo tanto presenta unha **asíntota horizontal** na parte esquerda do eixe OX.

Aínda que nalgúns casos poida aparentalo, non presentan asíntota vertical pois non se aproximan a ningunha recta.

Cando a base é 0 < b < 1

Son funcións **decrecentes**. Canto menor é a base o decrecemento é máis rápido.

Cando $x \to +\infty$ a función tende a 0. Polo tanto presenta unha **asíntota horizontal** na parte dereita do eixe OX.

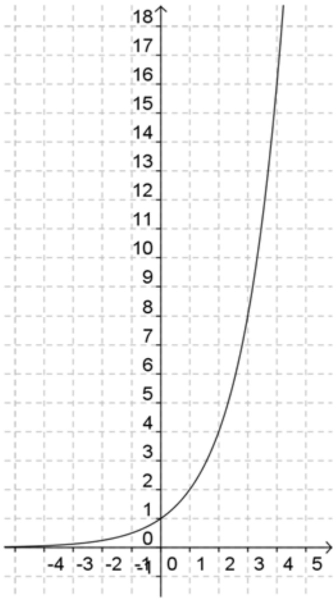
Aínda que nalgúns casos poida aparentalo, non presentan asíntota vertical pois non se aproximan a ningunha recta.

Actividades resoltas

- Representa graficamente as seguintes funcións exponenciais $y = 2^x$ e $y = 2^{-x}$.

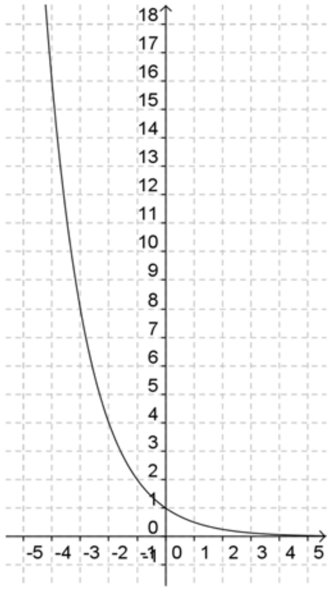
Función $y = 2^x$

x	y
…	…
-5	1/32
-4	1/16
-3	1/8
-2	1/4
-1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
…	…



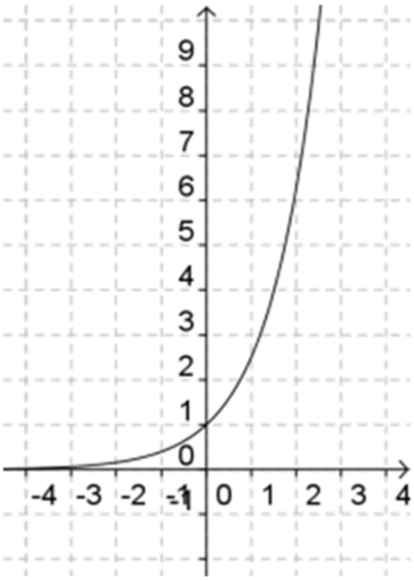
Función $y = 2^{-x}$

x	y
…	…
-5	32
-4	16
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	1/2
2	1/4
3	1/8
4	1/16
5	1/32
6	1/64
…	…

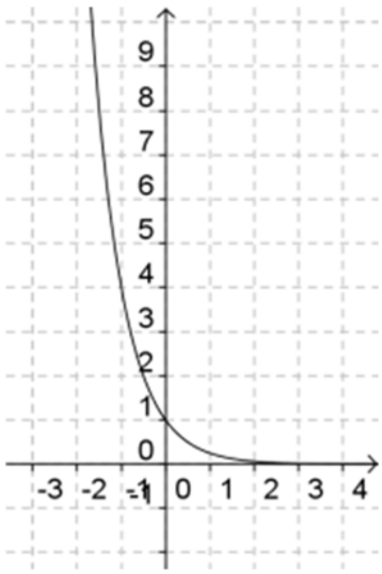


- Identifica as funcións correspondentes coas seguintes gráficas:

a)



b)



Solución:

Ambas as dúas son funcións exponenciais porque pasan polo punto (0, 1) e teñen por un lado como asíntota horizontal o eixe OX, mentres que polo outro lado tenden a + ∞.

A función (a) é $y = 2.5^x$ porque pasa polo punto (1, 2.5).

A función (b) é $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ porque pasa polo punto (–1, 4).

- Representa a función $y = 3^{-x}$

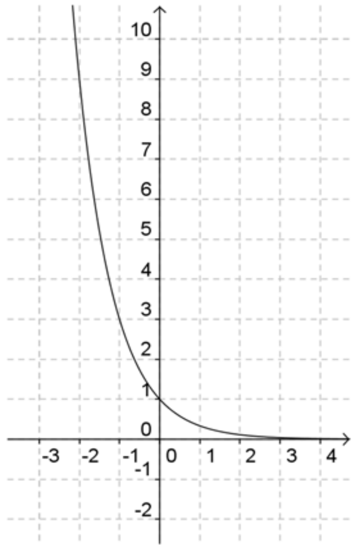
Solución:

Por ter expoñente negativo é:

$$y = 3^{-x} \Rightarrow y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x}.$$

Polo tanto a súa gráfica é a da marxe.

Observa que pasa polos puntos (–1, 3), (0, 1) e (1, 1/3).



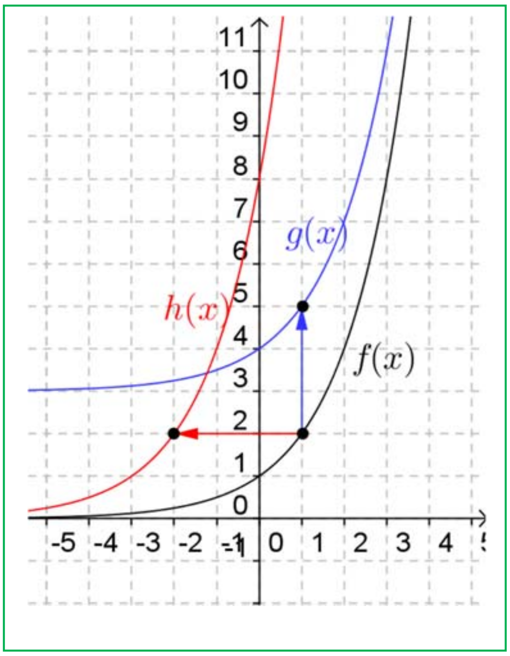
- Coñecendo a gráfica da función $f(x) = 2^{x}$, que se viu anteriormente, e sen calcular valores, debuxa as gráficas das funcións $g(x) = 2^{x} + 3$ e $h(x) = 2^{x+3}$.

Solución:

A función *g(x)* é a función *f(x)* desprazada cara arriba 3 unidades.

A función *h(x)* é a función *f(x)* desprazada cara á esquerda 3 unidades.

Polo tanto as súas gráficas son estas, representadas en diferente cor:



1.3. O número *e*. A función e^x

O número e ten unha gran importancia en Matemáticas, comparable mesmo ao número π aínda que a súa comprensión non é tan elemental e tan popular. Para comprender a súa importancia hai que acceder a contidos de cursos superiores. É un número irracional.

O número e defínese como o límite cando n tende a infinito da seguinte sucesión:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

O seu valor aproximado é e = 2.71828182846...

Trátase dun número irracional (aínda que ao velo pode parecer periódico).

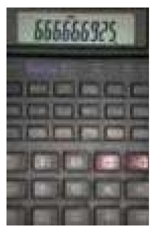
Coa axuda da calculadora pódese comprobar como os valores de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ se achegan cada vez máis ao valor e = 2.71828182846... a medida que aumenta o valor de n.

Este número aparece nas ecuacións de crecemento de poboacións, desintegración de substancias radioactivas, xuros bancarios, etc.

Tamén se pode obter directamente o valor de e coa calculadora (sempre como aproximación decimal, posto que é un número irracional). Normalmente hai unha tecla coa etiqueta e pero podes usar tamén a tecla etiquetada e^x. Para iso terás que calcular o valor de e^1.

A función $y = e^x$ comparte as características descritas máis arriba para funcións exponenciais de base maior que 1.

Actividades propostas



3. Utilizando a calculadora, no teu caderno fai unha táboa de valores e representa as funcións $y = e^x$,$y = e^{-x}$.

4. Unha persoa ingresou unha cantidade de 5 000 euros a interese do 3% nun banco, de modo que cada ano o seu capital se multiplica por 1.03. a) Escribe no teu caderno unha táboa de valores co diñeiro que terá esta persoa ao cabo de 1, 2, 3, 4, 5 e 10 anos. b) Indica a fórmula da función que expresa o capital en función do número de anos. c) Representa no teu caderno graficamente esta función. Pensa ben que unidades deberás utilizar nos eixes.

5. Un determinado antibiótico fai que a cantidade de certas bacterias se multiplique por 2/3 cada hora. Se a cantidade ás 7 da mañá é de 50 millóns de bacterias, (a) fai unha táboa calculando o número de bacterias que hai cada hora, desde as 2 da mañá ás 12 do mediodía (observa que tes que calcular tamén "cara atrás"), e (b) representa graficamente estes datos.

Cultivo da bacteria Salmonella

6. Representa no teu caderno as seguintes funcións e explica a relación entre as súas gráficas:

a) $y = 2^x$ b) $y = 2^{x+1}$ c) $y = 2^{x-1}$.

7. Coñecendo a gráfica da función $f(x) = 2^x$, que se viu máis arriba, e sen calcular táboa de valores, debuxa no teu caderno as gráficas das funcións $g(x) = 2^x - 3$ e $h(x) = 2^{x-3}$.

2. FUNCIÓNS LOGARÍTMICAS

2.1. Definición e cálculo elemental de logaritmos

Recorda que:

A expresión $\log_b a$ lese "logaritmo de a en base *b*".

$\log_b a$ é o expoñente ao que hai que elevar "*b*" para que o resultado sexa "*a*".

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

"b" chámase **base** e "***a***" chámase **argumento**.

Observacións:

- A base ten que ser un número positivo e distinto da unidade.
- O argumento ten que ser positivo e distinto de 0.

Exemplos:

a) $\log_2 32 = 5$ porque $2^5 = 32$ b) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$ porque $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

Un par de propiedades elementais

- ✓ O logaritmo da base sempre vale 1: $\log_b b = 1$ porque $b^1 = b$.
- ✓ O logaritmo de 1 en calquera base sempre vale 0: $\log_b 1 = 0$ porque $b^0 = 1$.

2.1.1. Logaritmos inmediatos

Chámanse así os que se calculan directamente aplicando a definición.

Exemplos:

- $\log_5 125 = 3$ porque $5^3 = 125$
- $\log_3 81 = 4$ porque $3^4 = 81$
- log 10 000 = 4 porque $10^4 = 10\,000$.

Cando non se escribe a base quere dicir que a base é 10 (*log* x). Os logaritmos en base 10 chámanse **logaritmos decimais**. Os logaritmos en base e chámanse logaritmos neperianos e escríbense *ln x*.

Outros logaritmos non son inmediatos pero pódense calcular tamén aplicando a definición, **igualando expoñentes**. Isto pasa cando a base e o argumento son potencias do mesmo número.

Exemplos:

- Para calcular $log_4 8$ poñemos $\log_4 8 = x \Rightarrow 4^x = 8 \Rightarrow 2^{2x} = 2^3 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$
- Para calcular $log_4 32$ poñemos $\log_4 32 = x \Rightarrow 4^x = 32 \Rightarrow 2^{2x} = 2^5 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$.

Actividades resoltas

- Calcula os seguintes logaritmos: a) $\log_4 256$; b) $\log_2 1/32$; c) $\log_2 1/2$; d)$\log 1/100$; e) $\log_3 0.111...$; f) $\log_3 3$; g) $\log_2 1$; e calcula o valor de x nas seguintes igualdades: h) $x = \log_3 3\sqrt{3}$; i) $\log_x 16 = 4$.

Solucións:

a) $\log_4 256 = 4$, porque $4^4 = 256$.

b) $\log_2 1/32 = -5$, porque $2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$.

c) $\log_2 1/2 = -1$, porque $2^{-1} = \frac{1}{2}$.

d) $\log 1/100 = -2$, porque $10^{-2} = \frac{1}{100}$.

e) $\log_3 0.111... = -2$, porque $0.111... = 1/9$, e entón $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.

f) $\log_3 3 = 1$, porque $3^1 = 3$ (o logaritmo da base sempre vale 1)

g) $\log_2 1 = 0$, porque $2^0 = 1$ (o logaritmo de 1 sempre vale 0).

h) $x = \log_3 3\sqrt{3} \Leftrightarrow 3^x = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow 3^x = 3^{3/2} \Leftrightarrow x = 3/2$.

i) $\log_x 16 = 4 \Leftrightarrow x^4 = 16 \Leftrightarrow x^4 = 2^4 \Leftrightarrow x = 2$.

- Calcula o valor de x nas seguintes igualdades:

a) $\log_3 81 = x \Leftrightarrow 3^x = 81 \Leftrightarrow 3^x = 3^4 \Leftrightarrow x = 4$

b) $\log_{12} 12 = x \Leftrightarrow 12^x = 1 \Leftrightarrow x = 1$

c) $\log_{30} 900 = x \Leftrightarrow 30^x = 900 \Leftrightarrow x = 2$

d) $\log 0.1 = x \Leftrightarrow 10^x = 0.1 \Leftrightarrow 10^x = 10^{-1} \Leftrightarrow x = -1$

e) $\log_3 243 = x \Leftrightarrow 3^x = 243 \Leftrightarrow 3^x = 3^5 \Leftrightarrow x = 5$

f) $\log_9 3 = x \Leftrightarrow 9^x = 3 \Leftrightarrow 3^{2x} = 3^1 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = 1/2$

g) $\log_7 \frac{1}{49} = x \Leftrightarrow 7^x = 7^{-2} \Leftrightarrow x = -2$

h) $\log_{16} 4\,096 = x \Leftrightarrow 16^x = 4\,096 \Leftrightarrow 2^{4x} = 2^{12} \Leftrightarrow 4x = 12 \Leftrightarrow x = 3$

i) $\log 1\,000 = x \Leftrightarrow 10^x = 1\,000 \Leftrightarrow x = 3$

j) $\log_{25} \sqrt{5} = x \Leftrightarrow 25^x = \sqrt{5} \Leftrightarrow 5^{2x} = 5^{1/2} \Leftrightarrow 2x = 1/2 \Leftrightarrow x = 1/4$

k) $\log 0 = x$ non existe solución, porque ningunha potencia dá 0 como resultado.

l) $\log (-100) = x$ non existe solución porque o resultado de calcular unha potencia de base positiva sempre é positivo.

m) $\log_x 7 = -2 \Leftrightarrow x^{-2} = 7 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 7 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \sqrt{7} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$

n) $\log_2 x = -1/2 \Leftrightarrow 2^{-1/2} = x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2^{1/2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Actividades propostas

8. Calcula os seguintes logaritmos utilizando a definición (sen calculadora):

a) $\log_3 81$ b) $\log_2 256$ c) $\log 10\,000$ d) $\log_5 125$ e) $\log_2 0.25$ f) $\log 0.001$

9. Calcula os seguintes logaritmos utilizando a definición e igualando expoñentes (sen calculadora):

a) $\log_4 2$ b) $\log_9 27$ c) $\log_{81} 27$ d) $\log_2 0.125$ e) $\log_3 \frac{1}{9}$ f) $\log_2 \frac{3}{12}$

g) $\log_{16} 2$ h) $\log_{64} 32$ i) $\log_4 \sqrt{2}$ j) $\log_3 \sqrt{27}$ k) $\log \sqrt[3]{100}$

10. Calcula o valor de x nas seguintes igualdades:

a) $\log_8 x = \frac{2}{3}$ b) $\log_x 81 = 4$ c) $\log_{\frac{1}{3}} 27 = x$ d) $\log_x 0.5 = -1$ e) $\log x = -4$.

2.1.2. Logaritmos decimais e neperianos coa calculadora

Ata aquí aprendemos a calcular logaritmos utilizando a definición. Porén soamente se pode facer así nuns poucos casos (en concreto cando o argumento é unha potencia da base do logaritmo).

Por exemplo non se poden calcular $\log_4 35$, $\log_{10} 7$, $\log_4 30$, $\log_9 5$.

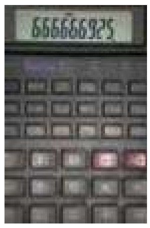
As calculadoras científicas dispoñen de teclas para calcular unicamente dous ou tres tipos de logaritmos (segundo o modelo de calculadora):

<table>
<tr><td>Logaritmos decimais (en base 10): </td><td rowspan="2">Logaritmos neperianos (en base e):
Logaritmos neperianos son os que teñen como base o número e = 2.718281…
Tamén se chaman **logaritmos naturais**.
Os logaritmos neperianos escríbense de tres modos:
$\log_e x = \ln x = \mathrm{L}\, x$ </td></tr>
<tr><td>Logaritmos en calquera base:
Nalgunhas calculadoras pode calcularse directamente poñendo a base e o argumento. </td></tr>
</table>

Exemplos:

- Comproba coa túa calculadora que $\log 7 = 0.845$ e que $\ln 7 = 0.946$ (valores redondeados).
- Comproba tamén que $\log 10 = 1$ e que $\ln e = 1$.

Para **calcular un número coñecendo o seu logaritmo** empréganse as mesmas teclas utilizando previamente a tecla de función inversa (normalmente *SHIFT* ou *INV*).



Exemplos:

- Comproba coa túa calculadora que o número cuxo logaritmo decimal vale 1.36 é 22.9 e que o número cuxo logaritmo neperiano vale 1.36 é 3.896.

2.1.3. Cambio de base de logaritmos

Coa calculadora tamén se poden calcular logaritmos que non sexan decimais nin neperianos, é dicir, en bases distintas a "10" e "*e*".

Para iso emprégase a **fórmula do cambio de base**:

Para cambiar de base "*a*" a base "*b*": $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

Exemplo:

- Para calcular $log_4 7$ utilizando a calculadora facemos $log_4 7 = \frac{log_{10} 7}{log_{10} 4} = \frac{0.845}{0.602} = 1.40$

Actividades propostas

11. Calcula os seguintes logaritmos coa calculadora utilizando a fórmula do cambio de base e compara os resultados cos obtidos na actividade:

a) $\log_4 2$ b) $\log_9 27$ c) $\log_{81} 27$ d) $\log_{16} 2$ e) $\log_2 0.125$ f) $\log_3 \frac{1}{9}$.

2.2. Propiedades dos logaritmos

As propiedades dos logaritmos son as seguintes:

- $\mathbf{\log_b 1 = 0}$ xa que $b^0 = 1$ (o logaritmo de 1 en calquera base é 0).
- $\mathbf{\log_b b = 1}$ xa que $b^1 = b$ (o logaritmo da base é 1).
- O logaritmo dun **produto** é igual á suma dos logaritmos dos factores:

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$$

- O logaritmo dun **cociente** é igual á diferenza dos logaritmos:

$$\log_b (x : y) = \log_b x - \log_b y$$

- O logaritmo dunha **potencia** é igual ao expoñente polo logaritmo da base:

$$\log_b x^y = y \cdot \log_b x$$

Exemplo:

$\log_2 10 + \log_2 3.2 = \log_2 (10 \cdot 3.2) = \log_2 32 = 5$

$\log 140 - \log 14 = \log (140/14) = \log 10 = 1$

$\log_3 9^5 = 5 \log_3 9 = 5 \cdot 2 = 10$

$\log_3 \sqrt[5]{9} = \log_3 9^{1/5} = \frac{1}{5} \log_3 9 = \frac{1}{5} \cdot 2 = \frac{2}{5}$.

2.2.1. Expresións logarítmicas e alxébricas

As propiedades dos logaritmos empréganse en dous tipos importantes de operación:

- **Tomar logaritmos** nunha igualdade é aplicar o logaritmo a ambos os membros da mesma:

$$x = y \Leftrightarrow \log_b x = \log_b y.$$

- **Eliminar logaritmos** nunha igualdade é o contrario: conseguir que unha expresión logarítmica deixe de selo. Para isto é preciso que cada membro teña un único logaritmo:

$$\log_b x = \log_b y \Leftrightarrow x = y.$$

Actividades resoltas

- Sabendo que log 2 = 0.301, calcula:

a) $\log 32 = \log 2^5 = 5 \log 2 = 5 \cdot 0.301 = 1.505$

b) $\log 0.008 = \log (8/1\,000) = \log 8 - \log 1\,000 = 3 \log 2 - 3 = 3 \cdot 0.301 - 3 = -2.097$

Observa que o logaritmo en base 10 da unidade seguida de ceros é igual ao número de ceros que teña.

- Sabendo que log 2 = 0.301 e que log 3 = 0.477 calcula:

a) $\log 6 = \log(3 \cdot 2) = \log 3 + \log 2 = 0.301 + 0.477 = 0.778$

b) $\log 180 = \log(3^2 \cdot 2 \cdot 10) = 2 \log 3 + \log 2 + \log 10 = 2 \cdot 0.477 + 0.301 + 1 = 2.255$

c) $\log 15 = \log(3 \cdot 5) = \log\left(\frac{3 \cdot 10}{2}\right) = \log 3 + \log 10 - \log 2 = 0.477 + 1 - 0.301 = 1.176$

- Toma logaritmos e desenvolve:

a) $a = \frac{mn}{p} \Rightarrow \log a = \log \frac{mn}{p} \Rightarrow \log a = \log m + \log n - \log p$

b) $a = \frac{\sqrt{b^3 c}}{x^2} \Rightarrow \log a = \log \frac{\sqrt{b^3 c}}{x^2} \Rightarrow \log a = \frac{3}{2} \log b + \frac{1}{2} \log c - 2 \log x$

- Elimina os logaritmos:

a) $\log a = \log c + \log d - \log e \Rightarrow \log a = \log \frac{cd}{e} \Rightarrow a = \frac{cd}{e}$

b) $\log b = \log 4 + \frac{1}{2}\log 5 - 3\log x \Rightarrow \log b = \log 4 + \log\sqrt{5} - \log x^3 \Rightarrow \log b = \log \frac{4\sqrt{5}}{x^3} \Rightarrow b = \frac{4\sqrt{5}}{x^3}$

c) $\log a + 3 = 2\log b - \frac{\log c}{3} \Rightarrow \log a + \log 1\,000 = \log b^2 - \log c^{1/3} \Rightarrow \log(1\,000a) = \log \frac{b^2}{\sqrt[3]{c}}$

$\Rightarrow 1\,000a = \frac{b^2}{\sqrt[3]{c}}$

- Resolve a seguinte **ecuación logarítmica**: $2\log x = 2\log(x-1) + \log 4$

Solución:

Para resolvela é preciso eliminar logaritmos:

$$\log x^2 = \log(x-1)^2 + \log 4 \quad \Rightarrow \quad \log x^2 = \log 4(x-1)^2$$

A ecuación queda $x^2 = 4(x-1)^2 \quad \Rightarrow \quad 0 = 3x^2 - 8x + 4$ cuxas solucións son $x = 2$ e $x = 2/3$.

A segunda solución non é válida porque ao substituíla na ecuación orixinal quedaría log (x – 1) como logaritmo dun número negativo, que non existe. Isto ocorre ás veces nas ecuacións logarítmicas, igual que nas ecuacións irracionais, e por iso é preciso comprobar a validez das solucións calculadas.

- No cálculo de **interese composto** o interese producido cada período de tempo pasa formar parte do capital. Así, se o período de tempo é un ano, a fórmula do interese cada ano calcúlase sobre un novo capital, que é o capital anterior máis os xuros producidos no ano. Polo tanto, se a porcentaxe de interese anual é r, o capital cada ano multiplícase por $1 + \frac{r}{100}$.

  Por exemplo se o interese é do 4 % hai que multiplicar por 1.04 cada ano transcorrido.

  A fórmula do capital acumulado ao cabo de n anos é: $C_n = C \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$

  Calcula o capital final acumulado ao cabo de 4 anos para 6 000 € ao 2 % de interese composto anual.

Solución:

$C = 6\,000 \cdot (1 + 0.02)^4 = 6\,000 \cdot 1.02^4 = 6\,494.59$ €.

- A que interese composto hai que investir 10 000 euros para obter en 10 anos ao menos 16 000 euros?

$$16\,000 = 10\,000 \cdot \left(1+\frac{r}{100}\right)^{10} \Rightarrow 1.6 = \left(1+\frac{r}{100}\right)^{10} \Rightarrow 1+\frac{r}{100} = \sqrt[10]{1.6} = 1.048 \Rightarrow \frac{r}{100} = 0.048$$

Así pois r = 4.8%.

- Cando a incógnita é o número de anos (que está no expoñente) necesitamos tomar logaritmos para resolvelo: Se ingresamos nun banco 3 000 € ao 4 % de interese composto anual, cantos anos teñen que pasar para conseguir 4 500 €?

$4\,500 = 3\,000 \cdot (1 + 0.04)^n \Rightarrow 1.5 = 1.04^n \Rightarrow \log 1.5 = n\log 1.04 \Rightarrow n = \frac{\log 1.5}{\log 1.04} = 10.34$ anos (teremos que agardar 11 anos).

- A fórmula do interese composto tamén se utiliza para os problemas de **crecemento ou decrecemento de poboacións**, que é unha función exponencial: Por exemplo, se a poboación dun país aumenta un 3% cada ano e actualmente ten 15 millóns de habitantes, cantos terá ao cabo de 5 anos?

$15\,000\,000 \cdot (1 + 0.03)^5 = 15\,000\,000 \cdot 1.03^5 = 17\,383\,111$ habitantes.

Actividades propostas

12. Sabendo que log 2 = 0.301 e que log 3 = 0.477 calcula:
a) log 5 b) log 25 c) log 24 d) log 60

13. Sabendo que log 8 = 0.903, e sen utilizar calculadora, calcula os seguintes:
a) log 80 b) log 2 c) log 64 d) log 0.8 e) log 1.25 f) $\log \sqrt[3]{800}$

14. Toma logaritmos e desenvolve: a) $A = \frac{2x^3y^2}{3z}$ b) $B = \frac{\sqrt{x^3y^2}}{10z}$

15. Reduce a un único logaritmo cada expresión:
a) log 2 – log 12 + 1 + log 3 b) $2\log 5 + \frac{1}{2}\log 5 - 2$ c) 2 log 2a – log$a$

16. Resolve as seguintes ecuacións logarítmicas:
a) $\log(x + 1)^2 = 6$ b) log x + log 5 = log 20 c) log (7 – 3x) – log (1 – x) = log 5

17. Cando naceu un neno os seus pais colocaron 1.000 euros nunha cartilla de aforro ao 2.5 % de interese composto anual. Canto diñeiro terá a conta cando o neno cumpra 15 anos?

18. A poboación de certas bacterias multiplícase por 1.5 cada día. Se ao comezo hai 18 millóns de bacterias, cantas haberá ao cabo dunha semana?

19. A que tanto por cento de interese composto hai que investir un capital de 20 000 euros para gañar 1 000 euros en tres anos?

20. Se investimos 7 000 euros ao 1.35 % de interese composto anual, cantos anos deben transcorrer para ter gañado polo menos 790 euros?

21. Calcula en cantos anos se duplica unha poboación que crece ao ritmo do 10 % anual.

22. Se unha poboación de 8 millóns de habitantes se converteu en 15 millóns en 7 anos, canto medrou cada ano? (*Ollo*: non se trata de dividir entre 7!).

2.3. Funcións logarítmicas

2.3.1. Gráfica e características

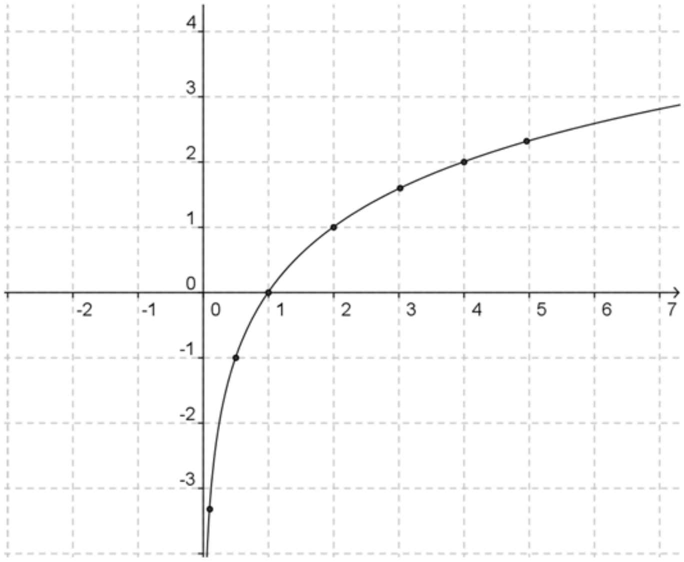
As funcións logarítmicas son as do tipo $y = \log_b x$.

Hai unha función distinta para cada valor da base b.

Exemplos:

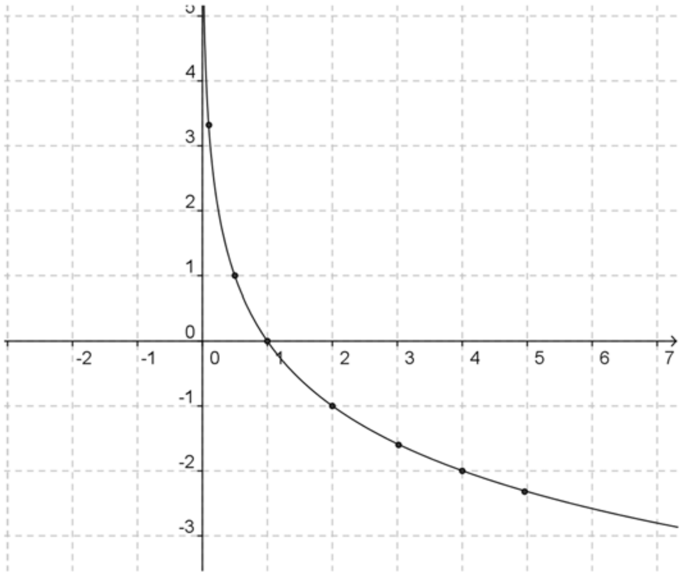
- A táboa de valores e a gráfica da función $y = \log_2 x$ son as seguintes:

x	$\log_2 x$
0.1	-3.3
0.5	-1.0
0.7	-0.5
1	0.0
2	1.0
3	1.6
4	2.0
5	2.3
…	…



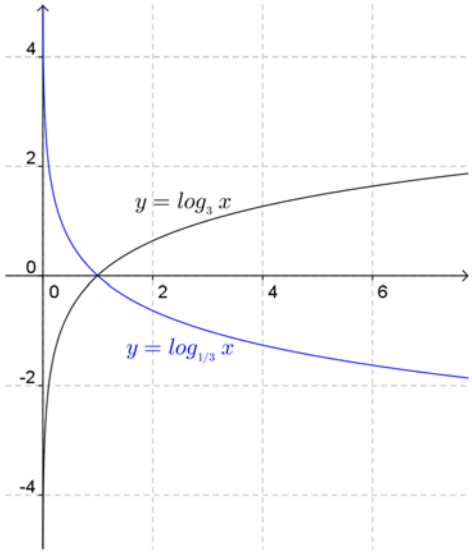
- A táboa de valores e a gráfica da función $y = \log_{1/2} x$ son as seguintes:

x	$\log_{1/2} x$
0.1	3.3
0.5	1.0
0.7	0.5
1	0.0
2	-1.0
3	-1.6
4	-2.0
5	-2.3…
…	



As características destas gráficas permítennos deducir as das funcións logarítmicas en xeral que son as seguintes:

- O seu **dominio** é (0, +∞). É dicir, só están definidas para "x" positivo.
- Son continuas.
- O seu **percorrido** é toda a recta real.
- Pasan polos puntos (1, 0), (b, 1) e (1/b, –1).
- A gráfica de $y = \log_b x$ e a de $y = \log_{1/b} x$ son simétricas respecto do eixe OX.



Por outra parte observamos unhas características propias nas funcións en ambas as ilustracións, segundo sexa a base do logaritmo maior ou menor que a unidade.

Cando a base é b > 1:

- Son funcións **crecentes**. Canto maior é a base o crecemento é máis rápido.
- Cando $x \to 0$ a función tende a $-\infty$. Polo tanto presenta unha **asíntota vertical** na parte negativa do eixe OY.
- Aínda que nalgún casos poida aparentalo, non presentan asíntota horizontal, pois a variable "y" pode chegar a calquera valor.

Cando a base é 0 < b < 1:

- Son funcións **decrecentes**. Canto menor é a base o decrecemento é máis rápido.
- Cando $x \to 0$ a función tende a $+\infty$. Polo tanto presenta unha **asíntota vertical** na parte positiva do eixe OY.
- Aínda que nalgúns casos poida aparentalo, non presentan asíntota horizontal, pois a variable "y" pode chegar a calquera valor.

2.3.2. Relación entre as funcións exponencial e logarítmica

Segundo a definición do logaritmo temos a seguinte relación: $y = \log_b x \quad \Leftrightarrow \quad x = b^y$

As funcións logarítmica e exponencial levan intercambiado o lugar do "x" e o "y". Polo tanto son **funcións inversas**.

En consecuencia, se partimos dun número e lle aplicamos a función logarítmica e logo ao resultado lle aplicamos a función exponencial, volvemos ao número de partida. O mesmo ocorre se primeiro aplicamos a función exponencial e despois a logarítmica.

Exemplo:

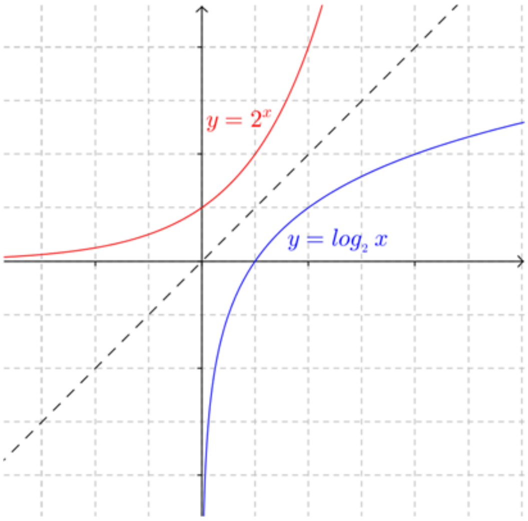
- Partindo do número 3, utilizando a calculadora, aplicamos unha función logarítmica: $log_5 3 = 0.6826$ (recorda a fórmula do cambio de base). A continuación, aplicamos a función exponencial: $5^{0.6826} = 3$ e obtemos o número do principio.
- Facéndoo en sentido inverso, partindo do número 3 aplicamos primeiro unha función exponencial: $5^3 = 125$. A continuación, aplicamos a función logarítmica: $\log_5 125 = 3$ e tamén obtivemos o número do principio.

Cando dúas funcións son inversas as súas gráficas son **simétricas**, sendo o seu eixe de simetría a bisectriz do primeiro cuadrante.

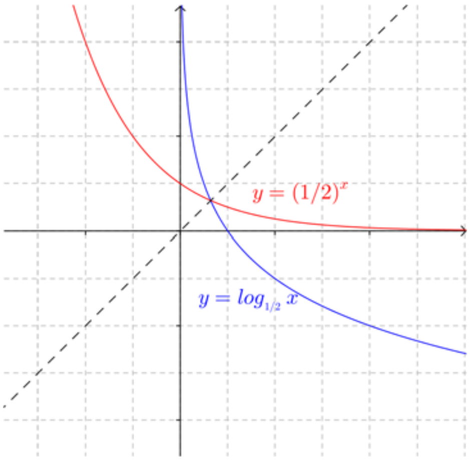
Isto débese a que se o punto (*a*, *b*) é da gráfica dunha delas, o punto (*b*, *a*) pertence á gráfica da outra.

Exemplos:

- As gráficas das funcións $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = 2^x$ teñen a seguinte simetría:



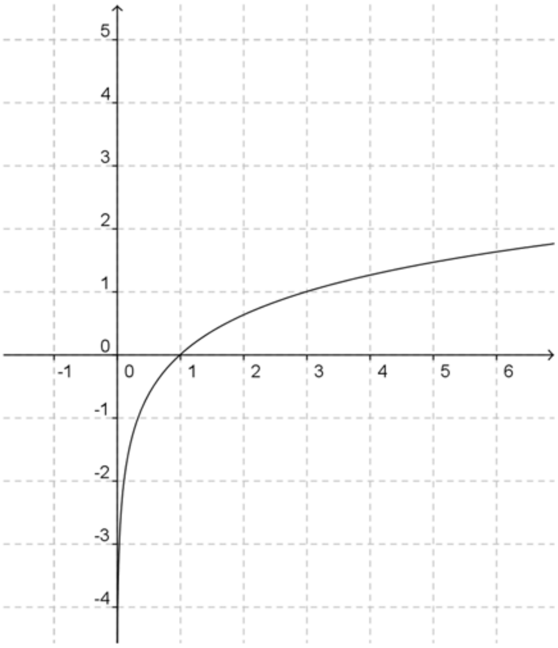
- As gráficas das funcións $f(x) = \log_{1/2} x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ teñen a seguinte simetría:



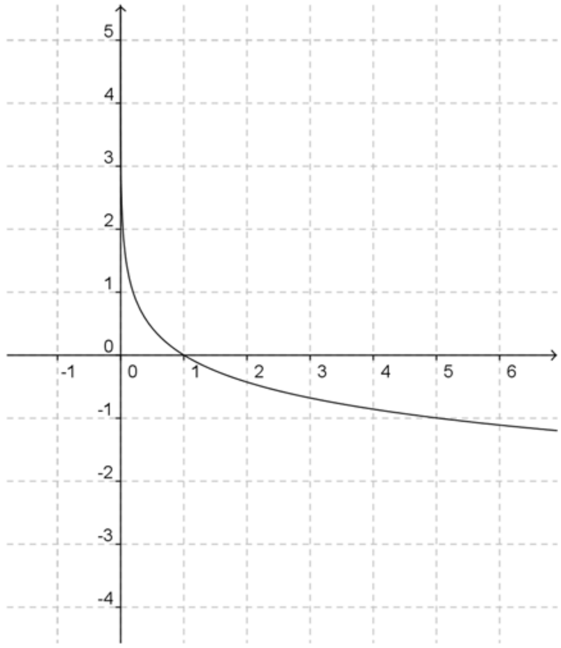
Actividades resoltas

- Identifica as funcións correspondentes coas seguintes gráficas:

a)



b)



Solución:

Ambas as dúas son funcións logarítmicas porque pasan polo punto (1, 0) e teñen como asíntota vertical o eixe OY (ben sexa na súa parte positiva ou negativa) e polo outro lado tenden a ∞.

A función (a) é $y = \log_3 x$ porque pasa polo punto (3, 1) e por (1/3, –1).

A función (b) é $y = \log_{1/5} x$ porque pasa polo punto (5, –1) e por (1/5, 1).

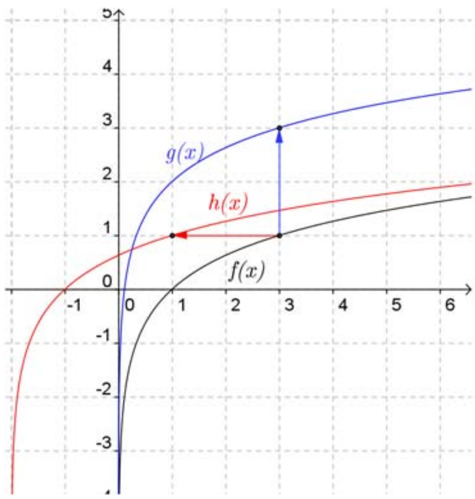
- Coñecendo a gráfica da función $f(x) = \log_3 x$, que se viu máis arriba, e sen calcular valores, debuxa as gráficas das funcións $g(x) = \log_3 x + 2$ e $h(x) = \log_3 (x+2)$.

Solución:

A función $g(x)$ é a función $f(x)$ desprazada cara arriba 2 unidades.

A función $h(x)$ é a función $f(x)$ desprazada cara á esquerda 2 unidades.

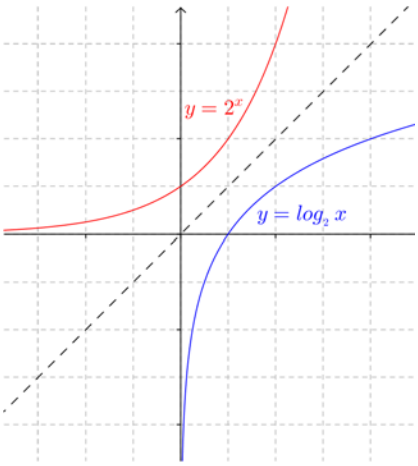
Polo tanto as súas gráficas son estas:



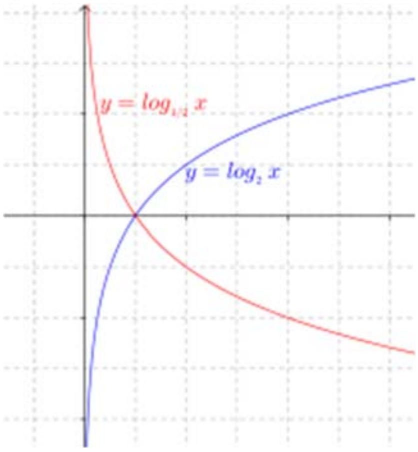
- Representa a función $y = \log_2 x$ usando unha táboa de valores. A continuación, a partir dela e sen calcular valores, representa as funcións seguintes: $y = 2^x$, $y = \log_{1/2} x$, e utilizando tamén $y = 2^x$ representa $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Solución:

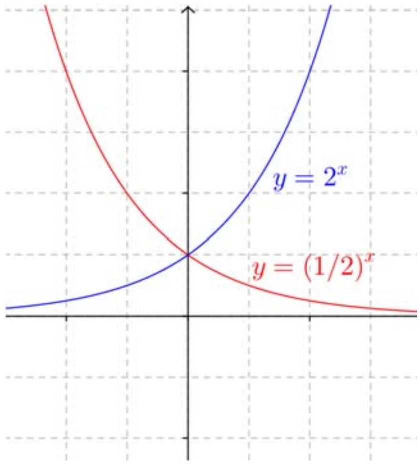
Pola simetría respecto á bisectriz do primeiro cuadrante:



Pola simetría respecto ao eixe OX:



Pola simetría respecto ao eixe OY:



Actividades propostas

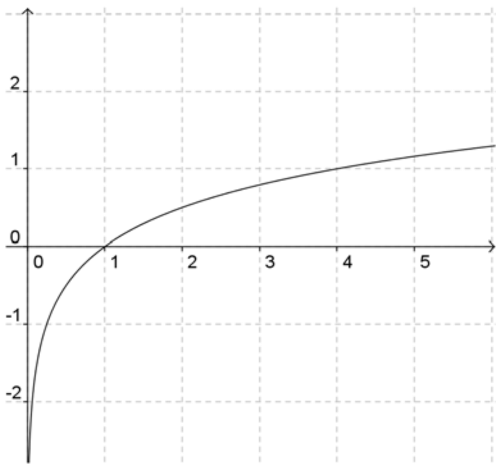
23. Representa no teu caderno, mediante táboas de valores, as gráficas das seguintes funcións:

a) $f(x) = \log_2 x$ b) $f(x) = \log_{1/2} x$ c) $f(x) = \log_{1,5} x$

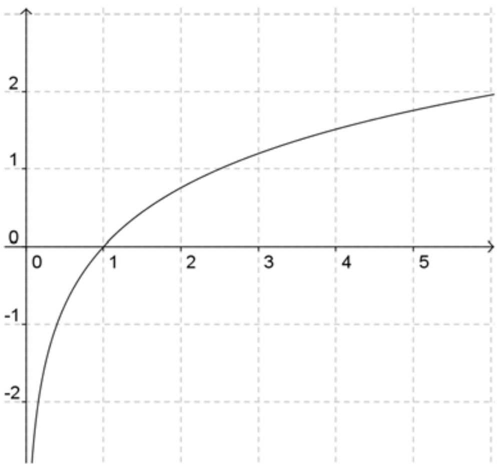
Comproba que en todos os casos pasan polos puntos (1, 0), (*b*, 1) e (1/*b*, –1).

24. Identifica as fórmulas das seguintes funcións a partir das súas gráficas, sabendo que son funcións logarítmicas:

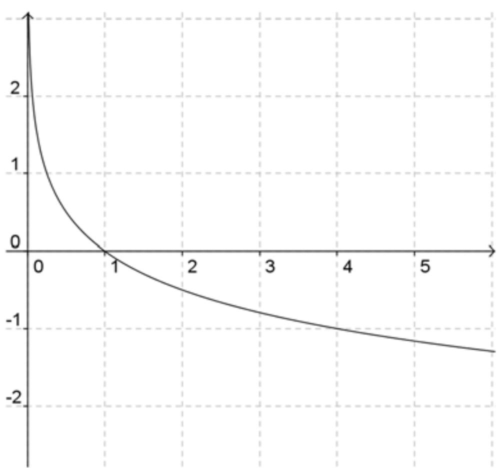
a)



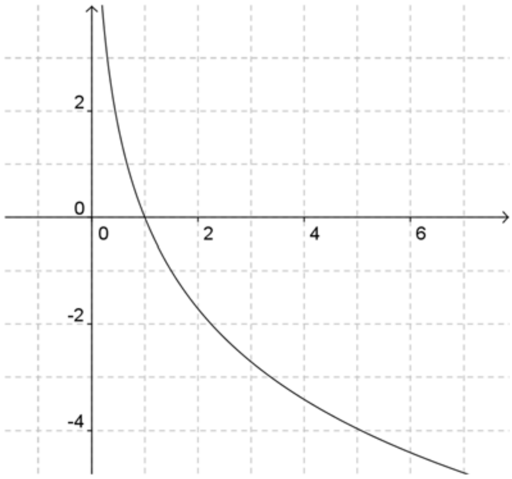
b)



c)



d)



25. Repite no teu caderno o debuxo da función $f(x)=\log_2 x$ representada no exercicio 23. Despois pensa que desprazamento sofren respecto a ela as funcións seguintes e represéntaas na mesma gráfica sen facer táboas de valores:

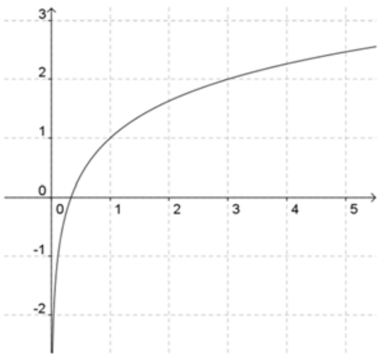
a) $g(x)=\log_2 x+3$ b) $h(x)=\log_2 x-3$ c) $i(x)=\log_2(x+3)$ d) $j(x)=\log_2(x-3)$

26. Fai o mesmo proceso do exercicio anterior coas funcións seguintes:

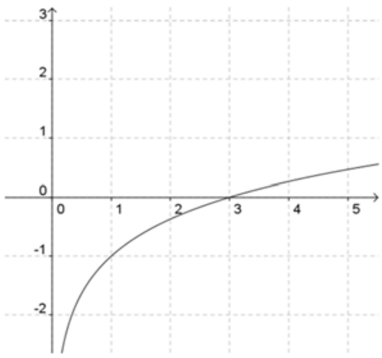
a) $g(x)=\log_2 x+2$ b) $h(x)=\log_2 x-2$ c) $i(x)=\log_2(x+2)$ d) $j(x)=\log_2(x-2)$

27. Identifica as fórmulas das seguintes funcións a partir das súas gráficas, sabendo que son funcións logarítmicas:

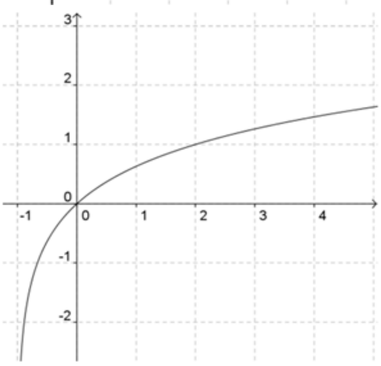
a)



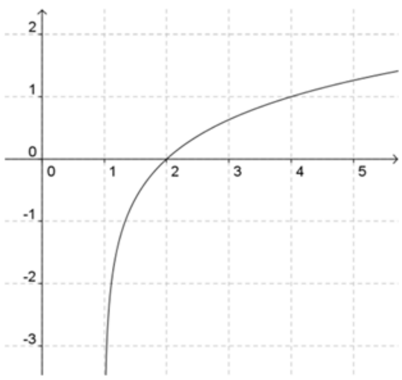
b)



c)



d)



28. Representa no teu caderno a función $y = 3^x$ usando unha táboa de valores. A continuación, a partir dela e sen calcular valores, representa as funcións seguintes: $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y=\log_3 x$, $y=\log_{1/3} x$.

3. FUNCIÓNS TRIGONOMÉTRICAS

No capítulo 7 estudaches Trigonometría polo que xa coñeces as razóns trigonométricas seno, coseno e tanxente dun ángulo. Agora imos estudar as funcións trigonométricas e as súas propiedades.

Recorda que:

Un radián defínese como a medida do ángulo central cuxo arco de circunferencia ten unha lonxitude igual ao radio. Polo tanto:

360° equivalen a 2π radiáns

De onde se deduce que:

180° equivalen a π radiáns

90° equivalen a π/2 radiáns …

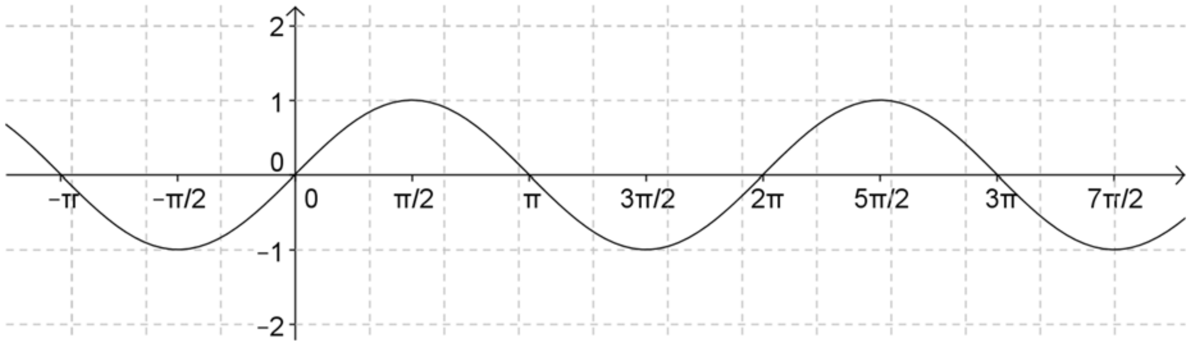
3.1. As funcións seno e coseno

Estas dúas funcións inclúense no mesmo apartado porque son moi parecidas.

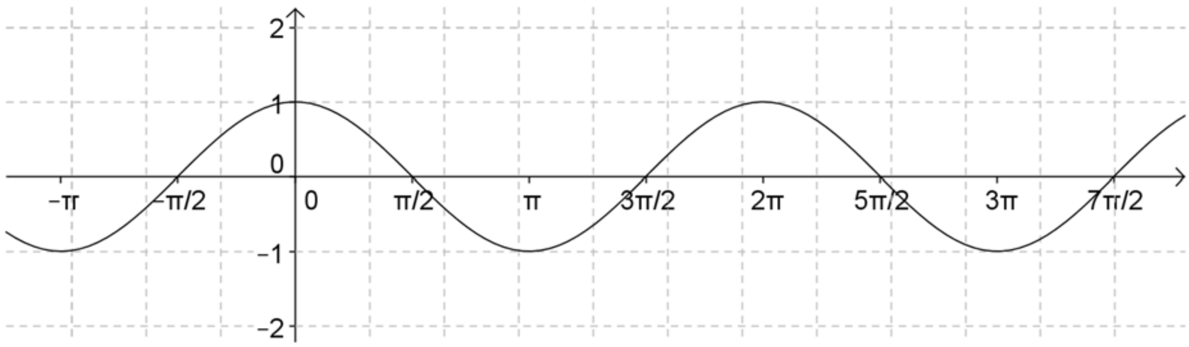
A súa gráfica é a chamada *sinusoide*, cuxo nome deriva do latín *sinus* (seno).

Xa sabes que nos estudos de Matemáticas se soe utilizar como unidade para medir os ángulos o radián. Polo tanto é necesario coñecer estas gráficas expresadas en radiáns. Podes obtelas facilmente coa calculadora. Fíxate nas súas similitudes e nas súas diferenzas:

Gráfica da función *f(x)* = sen *x*



Gráfica da función *f(x)*= cos *x*



Xa sabes canto vale π, π = 3.14…. Teno en conta ao debuxar as gráficas.

Propiedades destas funcións:

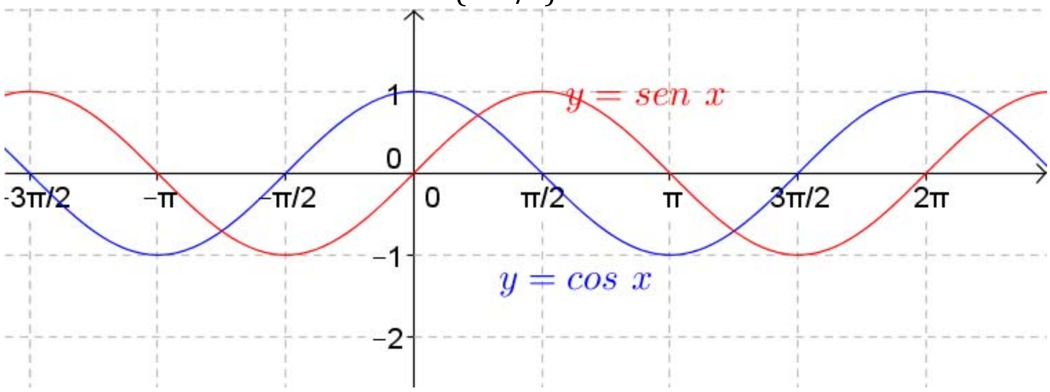
- Ambas as dúas son periódicas e o valor do seu período é 2π.

$$sen\ (x+2\pi) = senx \qquad cos\ (x+2\pi) = cosx$$

- Son funcións continuas en todo o seu dominio.
- O seu dominio son todos os números reais.
- O seu percorrido é o intervalo [–1 , 1].

- A función seno ten simetría impar (simétrica respecto da orixe de coordenadas, é dicir, $sen x = -sen(-x)$) e a función coseno ten simetría par (simétrica respecto do eixe OY, é dicir, $cos x = cos(-x)$).
- Ambas as funcións teñen a mesma gráfica pero desprazada en $\frac{\pi}{2}$ radiáns en sentido horizontal. é dicir:

sen $(x+\pi/2) = \cos x$

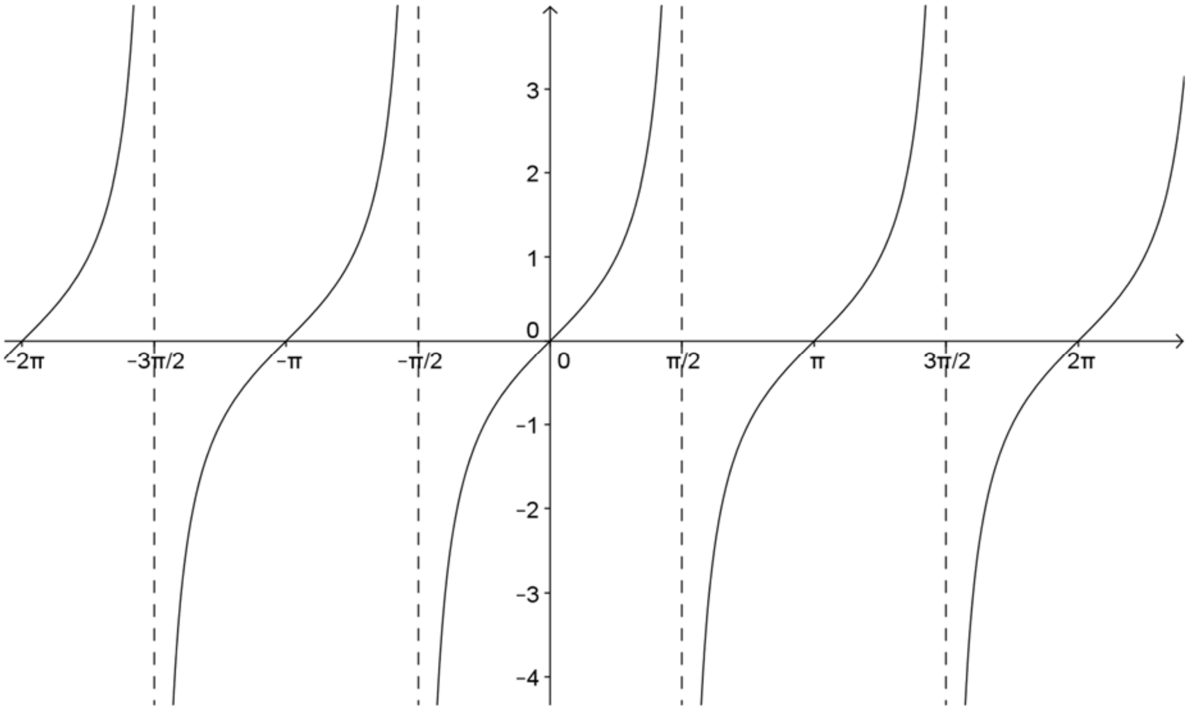


3.2. A función tanxente

Esta función é diferente ás outras dúas. Por esa razón presentámola separadamente.

Xa sabes que como razóns trigonométricas: $tg\ x = sen\ x / cos\ x$.

A gráfica da función $f(x) = tg\ x$ é a seguinte:



Recordamos en primeiro lugar que non existe a tanxente para os ángulos de ±π/2, ±3π/2, ±5π/2, etc.

As propiedades desta función son as seguintes:

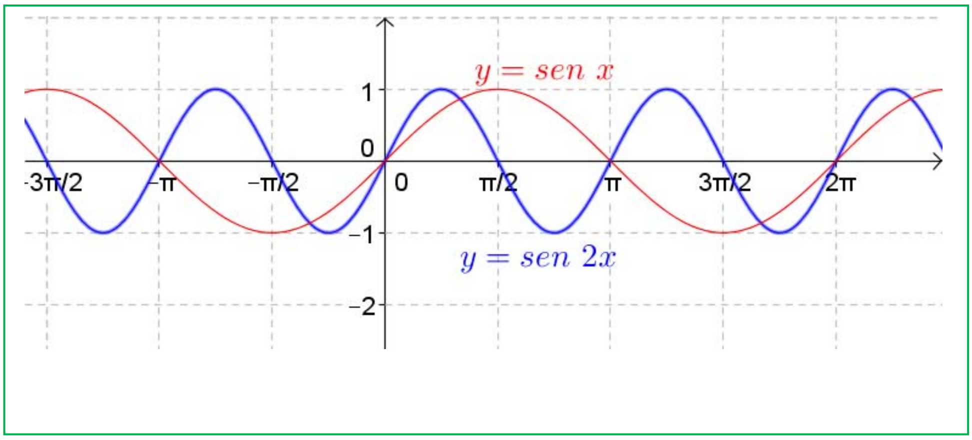
- É unha función periódica e o valor do seu período é agora menor, é π: tg $(x+\pi)$ = tg x.
- O seu dominio son todos os números reais excepto os múltiplos de π/2 por un número impar (±π/2, ±3π/2, ±5π/2, etc.), onde non existe. Neses valores presenta descontinuidades chamadas descontinuidades *inevitables*, porque non se poderían "taponar" mediante un punto.
- Ten asíntotas verticais neses mesmos valores do x. Representámolas no gráfico mediante liñas descontinuas.
- Ten simetría impar: é simétrica respecto da orixe de coordenadas, xa que tg(x) = –tg(–x)

Actividades resoltas

- Representa as gráficas das funcións y = sen$(2x)$ e y = 2sen x comparándoas despois coa gráfica de y = sen x.

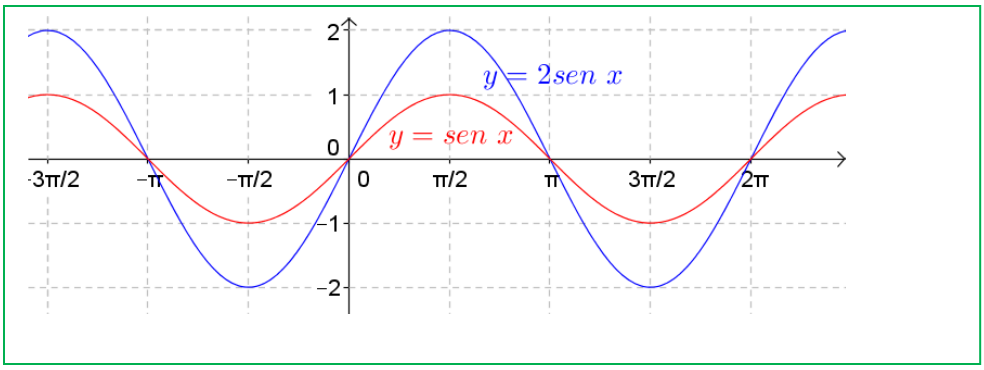
Solución:

Dando valores coa calculadora obtemos as seguintes gráficas, representadas en azul xunto á da función sen x, representada en vermello:



A gráfica de y = sen$(2x)$ é igual á de y = sen x contraéndoa horizontalmente. Cambia o período, que agora é de π.

A gráfica de y = 2sen x é igual á de y = sen x expandíndoa verticalmente. Teñen o mesmo período pero cambia a amplitude. Cando y = sen x acada en π/2 un valor máximo de 1, y = 2sen x acada en π/2 un valor máximo de 2. Dicimos que a súa amplitude vale 2.



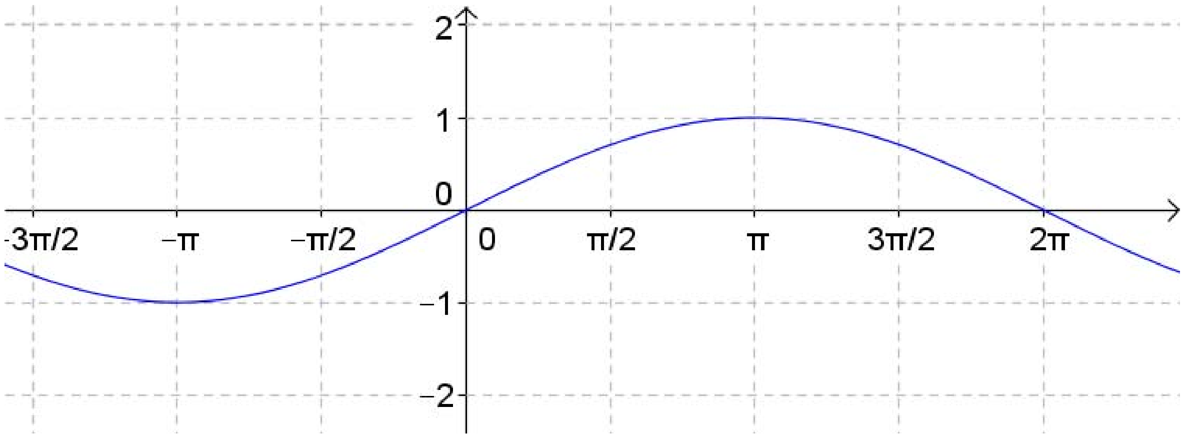
Actividades propostas

29. Representa no teu caderno as gráficas das funcións $y = \cos x$, $y = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ e $y = \frac{1}{2}\cos x$ comparándoas despois coa gráfica de $y = \cos x$.

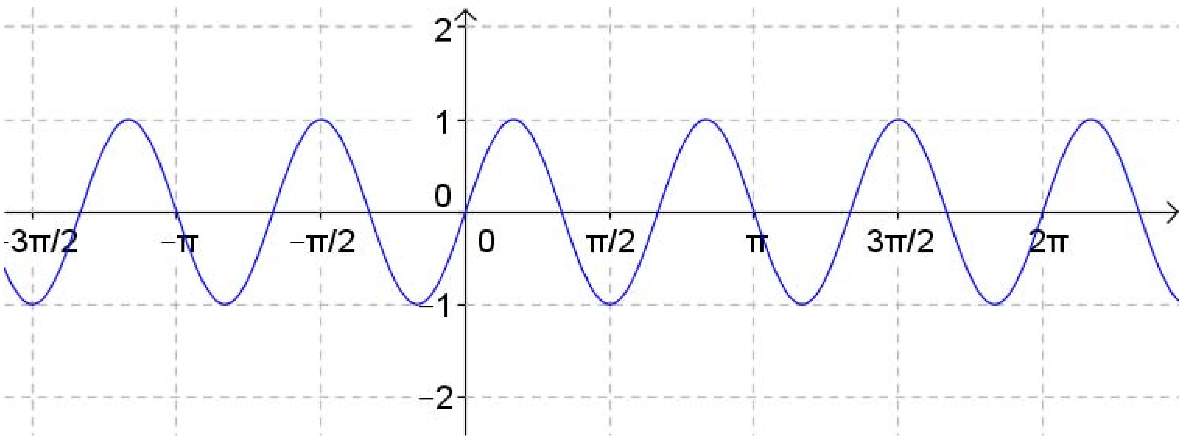
30. Partindo da gráfica da función e = sen x, representa no teu caderno, sen facer táboas de valores, as gráficas de $y = 1 + \text{sen } x$ e de $y = \text{sen } (x + \pi/6)$.

31. Identifica as gráficas das seguintes funcións trigonométricas:

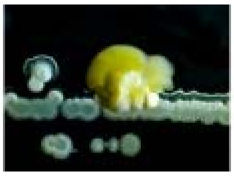
a)



b)



CURIOSIDADES. REVISTA



As poboacións crecen exponencialmente

Nos modelos que se utilizan para estudar as poboacións utilízase a función exponencial. Suponse que unha poboación dunha certa especie crece exponencialmente mentres teña alimento suficiente e non existan depredadores. Chega un momento no que a poboación encheu o territorio (a Terra é finita) e entón cambia a función que se utiliza, estabilizándose o crecemento.

Isto permite estudar o crecemento das bacterias que se reproducen por fisión binaria, ou o crecemento das células do feto, ou a poboación de coellos cando chegaron a Australia... Malthus afirmou que se a poboación humana crecía de forma exponencial e a produción de alimentos crecía de forma lineal habería graves fames.

Logaritmos

Non hai tanto tempo non existían as calculadoras. Para calcular logaritmos usábanse "táboas". Había unhas táboas de logaritmos que eran un libro cun lomo duns tres dedos de ancho. Usábanse en problemas de astronomía nos que había que utilizar fórmulas de trigonometría para resolvelos e se usaban números con moitas cifras decimais (máis de 10). Imaxinas o que é multiplicar ou dividir números con esas cifras decimais! Resultaba moi conveniente transformar as multiplicacións en sumas e divisións en restas. Esta mesma idea é a que levou *John Napier* (o *Neper*) a inventar os logaritmos.

Non todo o podes calcular con calculadora

Utiliza a túa calculadora para calcular 45^{79}. Verás que dá *erro*. Pero se usas logaritmos podes calculalo facilmente.

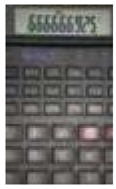
$$y = 45^{79} \Rightarrow$$

$$\log y = \log 45^{79} = 79 \cdot \log 45 = 130.6037886 \Rightarrow$$

$$y = 10^{130} \cdot 10^{0.6037886} \Rightarrow$$

$$10^{0.6037886} = 4.016 \Rightarrow$$

$$y = 45^{79} = 4.016 \cdot 10^{130}.$$



Decrecemento exponencial

Moitos fenómenos modélanse con funcións exponenciais de base menor que 1, como

- A desintegración de átomos dunha substancia radiactiva.
- A intensidade luminosa dun raio de luz.
- A probabilidade de supervivencia de certas especies que non teñen xeneticamente determinado o envellecemento celular.

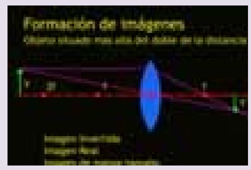
Carbono 14

O carbono 14 é un isótopo radiactivo cun período de semi-desintegración (vida media) de 5 568 anos, moi utilizado para datar restos orgánicos. As plantas, por fotosíntese, e os animais, por inxestión, incorporan o carbono na mesma proporción que existe na atmosfera e, ao morrer o ser vivo, empeza o proceso de desintegración.

Sophia Kovalevkaya

Coñecemos moi ben moitas anécdotas da vida de *Sophia* (ou *Sonia* como a ela lle gustaba que a chamaran), unha muller matemática con teoremas co seu nome, porque escribiu a súa biografía nun precioso libro chamado *Unha infancia en Rusia*.

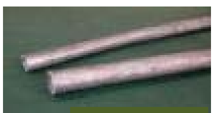
Cando *Sophia* tiña 14 anos, a súa familia recibiu a visita de *Nikolai Nikanorovich Tyrtov*, un veciño profesor de física, que lle deixou á familia unha copia do seu novo libro sobre esta materia. Sonia comezou a estudalo e quedou atascada ao chegar á sección de óptica na que se utilizaban razóns trigonométricas que non vira nunca. Entón foi directamente a *Tyrtov* preguntarlle que era exactamente un *seno* pero el, sen facerlle demasiado caso, contestoulle que non o sabía. De modo que *Sonia* comenzou a analizar e a explicar o que era un seno partindo das cousas que xa coñecía chegando a substituílo polo arco que, dado que as fórmulas que trataba o libro se aplicaban en ángulos moi pequenos, o aproximaban bastante ben. A seguinte vez que *Tyrtov* foi de visita á casa, *Sonia* pediulle que discutisen sobre o seu libro e el, tras intentar cambiar de tema, concluíu que o atopaba demasiado difícil para ela. Sonia comentoulle que o texto non tivera ningunha dificultade para ela e mesmo lle explicou como fora deducindo todo aquilo que non coñecía e que se utilizaba no libro. Tyrtov quedou estupefacto e comentoulle ao pai de Sonia que o seu desenvolvemento sobre o concepto de seno fora exactamente o mesmo co que historicamente se introducira tal concepto nas Matemáticas.



Fourier e o concepto de función

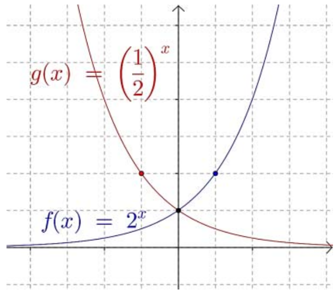
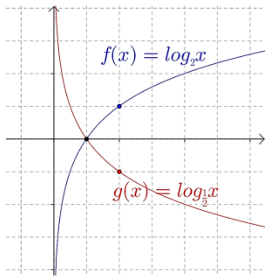
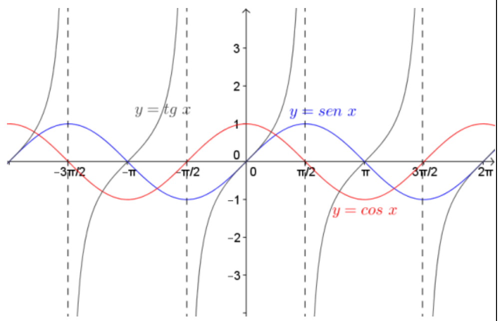
O concepto de función tardou moito en ser comprendido mesmo polos matemáticos, só dispostos a aceptar dous tipos de funcións, as que viñan dadas por unha fórmula ou as que se trazaban arbitrariamente debuxando a súa gráfica. A idea abstracta de función como correspondencia tardou un tempo en aparecer.

Foi *Joseph Fourier* na súa obra *A teoría analítica da calor* o motor para o afondamento do concepto de función. *Fourier* viviu durante a Revolución Francesa e participou na expedición de *Napoleón* a Exipto. Era moi frioleiro e por iso lle interesaba a propagación da calor. Na súa obra afirma que "toda" función podía escribirse como unha suma infinita de funcións seno e coseno.



Antoni Zygmund escribiu *"Esta teoría foi unha fonte de novas ideas para os analistas durante os dos últimos séculos e probablemente o será nos próximos anos. Moitas nocións e resultados básicos da teoría de funcións foron obtidos por matemáticos traballando sobre series trigonométricas".* Engade que esa obra de *Fourier* foi o catalizador para fixar o concepto de función, a definición de integral, afondar na Teoría de Conxuntos e actualmente coa Teoría de Funcións Xeralizadas ou Distribucións.

RESUMO

Noción	***Definición***	***Exemplos***
Función exponencial $y = b^x$	Dominio: Todos os números reais. Percorrido: Todos os números reais positivos. Continua en todo o dominio Asíntota horizontal: $y = 0$ $b > 1 \Leftrightarrow$ Crecente en todo o dominio. $0 < b < 1 \Leftrightarrow$ Decrecente en todo o dominio Puntos destacables: $(0, 1)$, $(1, b)$, $(-1, 1/b)$	
Definición de logaritmo	$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a \quad (a > 0, b > 0, b \neq 1)$ Consecuencias elementais: $\log_b b = 1 \quad \log_b 1 = 0$	$\log_5 125 = 3$ $\log_4 8 = 3/2$
Cambio de base	$\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$	$log_4 7 = \dfrac{log\ 7}{log\ 4} = 1.40$
Operacións con logaritmos	Logaritmo dun produto: $\mathbf{\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y}$ Logaritmo dun cociente: $\mathbf{\log_b (x : y) = \log_b x - \log_b y}$ Logaritmo dunha potencia: $\mathbf{\log_b x^y = y \cdot \log_b x}$	$\log \dfrac{\sqrt{b^3 c}}{x^2} =$ $\dfrac{1}{2}(3\log b + \log c) - 2\log x$
Función logarítmica $y = \log_b x$	*Dominio*: Todos os números reais positivos. *Percorrido*: Todos os números reais. **Continua** en todo o dominio Asíntota vertical: $x = 0$ $b > 1 \Leftrightarrow$ Crecente en todo o dominio. $0 < b < 1 \Leftrightarrow$ Decrecente en todo o dominio Puntos destacables: $(1, 0)$, $(b, 1)$, $(1/b, -1)$	
Funcións trigonométricas $y = \text{sen}\ x$ $y = \cos x$ $y = \text{tg}\ x$	<u>**Funcións seno e coseno**</u>: *Dominio*: Todos os números reais *Percorrido*: $[-1, 1]$ Continuas en todo o dominio. Periódicas de período 2π. <u>**Función tanxente**</u>: *Dominio e continuidade*: Todo $\Re$ agás $(2n+1)\cdot\pi/2$ (Neses valores hai asíntotas verticais). *Percorrido*: Todos os números reais. Periódica de período π. <u>**Simetría**</u>: Funcións seno e tanxente: simetría impar. Función coseno: simetría par.	

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Función exponencial

1. Representa mediante unha táboa de valores as seguintes funcións:

a) $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ b) $y=\left(\frac{4}{3}\right)^x$ c) $y=2^{x/2}$ d) $y=3^{-2x}$

2. Representa mediante unha táboa de valores a función $y=3^x$ e a continuación, sen táboa de valores, representa estoutras sobre o mesmo debuxo:

a) $y=3^x-1$ b) $y=3^x+1$ c) $y=3^{x+1}$ d) $y=3^{x-1}$

3. Encontra unha función exponencial $f(x)=b^x$ sabendo que $f(2)=9$.

4. Encontra unha función $f(x)=k{\cdot}b^x$ sabendo que $f(4)=48$ e que $f(0)=3$.

5. Se un capital de 3 500 euros se multiplica cada ano por 1.02 representa nun gráfico a evolución dese capital nos 10 primeiros anos. Escolle unhas proporcións adecuadas para os eixes.

6. Certo tipo de células reprodúcese por bipartición, comprobándose que o número delas se duplica cada día. Se nun día determinado o número de células era de 4 millóns:

a) Expresa mediante unha función o número de células en función do número de días.

b) Calcula o número de células que haberá dentro de 3 días e o que había hai 3 días.

c) En que día pensas que o número de células era de 31 250?

7. A descomposición de certo isótopo radioactivo vén dada pola fórmula $y = y_0 \cdot 2.7^{-0.25t}$, onde y_0 representa a cantidade inicial e t o número de milenios transcorrido. Se a cantidade actual é de 50 gramos, cal será a cantidade que queda ao cabo de 8 000 anos? Cal era a cantidade que había hai 5 000 anos?

Función logarítmica

8. Calcula os seguintes logaritmos utilizando a definición e sen utilizar a calculadora:

a) $\log_5 625$ b) $\log_2 128$ c) $\log 1\,000$ d) $\log_3 \frac{1}{27}$ e) $\log_5 0.2$ f) $\log 0.1$

9. Calcula os seguintes logaritmos utilizando a definición e igualando expoñentes, sen calculadora:

a) $\log_9 3$ b) $\log_4 3\ 2$ c) $\log_2 0.125$ d) $\log_9 27$ e) $\log_2 \sqrt{8}$ f) $\log_8 2$

g) $\log_3 0.333...$ h) $\log_8 \sqrt{2}$ i) $\log_3 \sqrt[4]{27}$ j) $\log \sqrt{1\,000}$

10. Calcula os seguintes logaritmos coa calculadora utilizando a fórmula do cambio de base:

a) $\log_5 7$ b) $\log_9 12$ c) $\log_{20} 0.1$ d) $\log_{13} \sqrt{8}$ e) $\log_{16} \sqrt{1\,000}$

11. Utilizando os valores log 2 = 0.301 e que log 3 = 0.477 calcula, aplicando as propiedades dos logaritmos e sen calculadora:

a) $\log 27$ b) $\log 12$ c) $\log 20$ d) $\log 50$ e) $\log \sqrt{6}$ f) $\log \sqrt[3]{25}$

12. Chamando log9 = *x* expresa en función de *x* os seguintes logaritmos:

a) $\log 81$ b) $\log 900$ c) $\log 0.\hat{1}$ d) $\log 0.9$ e) $\log \sqrt[3]{900}$

13. Resolve as seguintes ecuacións logarítmicas:

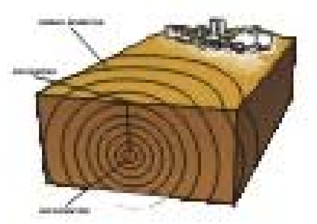
a) $2 \log x = \log (10 - 3x)$ b) $\log 2 + \log (11 - x^2) = 2 \log (5 - x)$

c) $\log (x^2 + 3x + 2) - \log (x^2 - 1) = \log 2$ d) $\log x + \log (x + 15) = 2$

14. Que relación hai entre o logaritmo dun número *x* e o do seu inverso 1/*x*?

15. Se se multiplica por 36 o número *x*, o seu logaritmo en certa base aumenta en dúas unidades. Cal é esta base?

16. A *escala Richter*, usada para medir a intensidade dos terremotos, é unha escala logarítmica: un terremoto de magnitude 5 é 100 veces máis intenso que un de magnitude 3, porque 5 = log 100 000 e 3 = log 1 000. Tendo isto en conta, se o famoso terremoto de San Francisco (en 1906) tivo unha magnitude de 8.2 e o de Haití (en 2010) foi de 7.2, cantas veces máis forte foi un que outro?



Terremoto

Funcións trigonométricas

17. Determina todos os ángulos que verifican que *sen x* = 1/2.

18. Determina todos os ángulos que verifican que *sen x* = –1/2.

19. Determina todos os ángulos que verifican que *cos x* = 1/2.

20. Determina todos os ángulos que verifican que *cos x* = –1/2.

21. Determina todos os ángulos que verifican que *tg x*= –1.

22. Calcula *sen x* e *cos x* se *tg x* = –3.

23. Calcula *sen x* e *tg x* se *cos x* = 0.4.

24. Calcula *tg x* e *cos x* se *sen x* = –0.3.

25. Calcula as razóns trigonométricas dos ángulos expresados en radiáns seguintes:

a) 17π/3, b) –20π/3, c) 13π/2, d) –9π/2.

26. Debuxa no teu caderno sobre uns mesmos eixes as gráficas das funcións seno, coseno e tanxente e indica o seguinte: a) Se o seno vale cero, canto valen o coseno e a tanxente? b) Se o coseno vale cero, canto valen o seno e a tanxente? c) Se a tanxente vale cero, canto valen o seno e o coseno? d) Cando a tanxente tende a infinito, canto vale o coseno?

27. Debuxa a gráfica da función $y = sen(2x)$, completando previamente a táboa seguinte no teu caderno:

x					
$2x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$sen(2x)$					
y					

a) A amplitude é a ordenada do máximo. Cal é a amplitude desta función?
b) Cal é o seu período?
c) A frecuencia é a inversa do período, cal é a súa frecuencia?

28. Debuxa a gráfica da función $y = 3\text{sen}(\pi x)$, completando previamente a táboa seguinte no teu caderno:

x					
πx	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$sen(\pi x)$					
y					

a) Cal é a amplitude desta función?
b) Cal é o seu período?
c) Cal é a súa frecuencia?

29. Debuxa a gráfica da función $y = 2sen((\pi/3)x) + \pi/2$, completando previamente a táboa seguinte no teu caderno:

x					
$(\pi/3)x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$sen((\pi/3)x)$					
y					

a) Cal é a amplitude desta función?
b) Cal é o seu período?
c) Cal é a súa frecuencia?

30. Debuxa a gráfica da función $y = 3sen(\pi x + 2)$, completando previamente a táboa seguinte no teu caderno:

x					
$\pi x + 2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$sen(\pi x + 2)$					
y					

a) Cal é a amplitude desta función?
b) Cal é o seu período?
c) Cal é a súa frecuencia?

31. Debuxa a gráfica da función $y = cos(2x)$, completando previamente a táboa seguinte no teu caderno:

x					
$2x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$cos(2x)$					
y					

a) Cal é a amplitude desta función?

b) Cal é o seu período?

c) Cal é a súa frecuencia?

32. Debuxa a gráfica da función $y = 3cos(\pi x)$, completando previamente a táboa seguinte no teu caderno:

x					
πx	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$cos(\pi x)$					
y					

a) Cal é a amplitude desta función?

b) Cal é o seu período?

c) Cal é a súa frecuencia?

33. Debuxa a gráfica da función $y = 2cos(\pi x + 2)$, completando previamente a táboa seguinte no teu caderno:

x					
$\pi x + 2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$cos(\pi x + 2)$					
y					

a) Cal é a amplitude desta función?

b) Cal é o seu período?

c) Cal é a súa frecuencia?

34. Debuxa a gráfica da función $y = tg(2x)$, completando previamente a táboa seguinte no teu caderno:

x					
$2x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$tg(2x)$					
y					

Cal é o seu período?

Problemas

35. Por efecto dun antibiótico o número de bacterias dunha colonia redúcese nun 7 % cada hora. Se no momento de administrarse o antibiótico había 40 millóns de bacterias, cantas haberá ao cabo de 10 horas?

36. Unha persoa inxire ás 8 da mañá unha dose de 10 mg de medicamento. Este medicamento vaise eliminando a través dos ouriños e a cantidade que queda no corpo ao cabo de *t* horas vén dada pola fórmula $M(t) = 10 \cdot 0.8^t$. Para que o medicamento faga efecto ten que haber polo menos unha cantidade de 2 mg no corpo. Canto tempo seguirá facendo efecto despois da súa inxestión?

37. A medida da presión atmosférica P (en milibares) a unha altitude de *x* quilómetros sobre o nivel do mar está dada pola ecuación $P(x) = 1\,035 \cdot e^{-0.12x}$.

a) Se a presión na cima dunha montaña é de 449 milibares, cal é a altura da montaña?

b) Cal será a presión na cima do *Everest* (altitude 8 848 metros)?

38. A que tanto por cento hai que investir un capital para duplicalo en 10 anos?

39. Cantos anos debe estar investido un capital para que ao 5 % de interese se converta en 1.25 veces o capital inicial?

40. Coñeces esas bonecas rusas que levan dentro outra boneca igual pero de menor tamaño e así sucesivamente? Supoñamos que cada boneca ten dentro outra que ocupa 2/3 do seu volume. Se a boneca maior ten un volume de 405 cm^3 e a máis pequena é de 80 cm^3, cantas bonecas hai en total na serie? Poderías dar unha fórmula xeral para este cálculo?

41. Indica, sen debuxar a gráfica, o período, a amplitude e a frecuencia das funcións seguintes:

a) $y = 2\ sen\ (x/2)$, b) $y = 0.4\ cos\ (\pi x/2)$, c) $y = 5\ sen\ (\pi x/3)$, d) $y = 3\ cos\ (\pi x)$.

AUTOAVALIACIÓN

1. O valor de x que verifica a ecuación exponencial $\frac{4^{x+3}}{2^{x-1}} = 64$ é:

a) 1 b) 2 c) 3 d)–1

2. A función exponencial $y = e^x$ tende a *** cando x tende a $-\infty$ e a *** cando x tende a $+\infty$. Indica con que valores habería que encher os asteriscos:

a) 0, $+\infty$ b) $+\infty$, 0 c) 0, $-\infty$ d) $-\infty$, 0

3. Indica cal é a función exponencial $f(x) = b^x$ que verifica que $f(3) = 27$:

a) $f(x) = 2^x$ b) $f(x) = 3^x$ c) $f(x) = 27^x$ d) $f(x) = 5^x$

4. O valor de x que verifica $x = log_2 1\,024$ é:

a) 0 b) 5 c) 10 d) Outro valor

5. A ecuación logarítmica $\log x + \log 6 = \log 30$ ten como solución:

a) 2 b) 3 c) 4 d)5

6. Indica a afirmación verdadeira:

a) a función exponencial de base maior que 1 é decrecente.

b) a función logarítmica de base maior que 1 é decrecente.

c) a función exponencial sempre é crecente.

d) a función exponencial de base maior que 1 é crecente.

7. A expresión xeral de todos os ángulos cuxa tanxente vale 1, onde k é un número enteiro, é:

a) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ b) $\frac{\pi}{4} + k\pi$ c) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ d) $\frac{\pi}{2} + k\pi$

8. A función $f(x) = 3\, sen(4x)$ ten de amplitude, período e frecuencia, respectivamente:

a) 3, $\pi/2$, $2/\pi$ b) 4, $\pi/3$, $3/\pi$ c) 4, $3/\pi$, $\pi/3$ d) 3, $2/\pi$, $\pi/2$

9. O seno, o coseno e a tanxente de $-\frac{7\pi}{4}$ valen respectivamente:

a) $-\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ 1$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2},\ \sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2},\ \sqrt{3}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ 1$

10. O seno, o coseno e a tanxente de $\frac{13\pi}{6}$ valen respectivamente:

a) $\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2},\ \sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2},\ \sqrt{3}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ 1$