Matemáticas orientadas ás ensinanzas académicas

4ºB ESO

Capítulo 15:

Azar e Probabilidade

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Fernando Blasco

Revisora: Raquel Caro

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

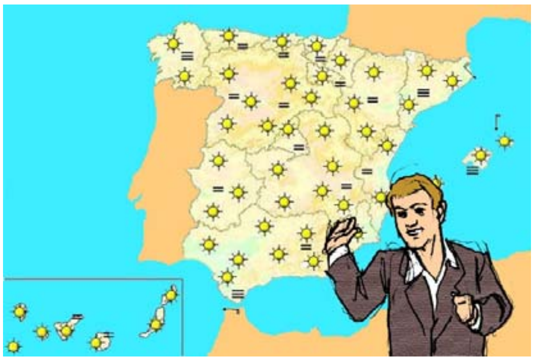
Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: Fernando Blasco, Banco de Imaxes de INTEF e Wikipedia

Índice

Resumo

Todos os días utilizamos conceptos probabilísticos informalmente: decidimos se levar abrigo ou non cando saímos pola mañá da casa, xogamos a xogos de azar ou de estratexia, lemos estatísticas e sondaxes ou nos preguntamos se hoxe choverá. Porén, a nosa intuición probabilística non está moi desenvolvida. Neste capítulo introducimos algunhas regras probabilísticas formais e amosamos como se pode utilizar a combinatoria ou os diagramas de árbore para calcular probabilidades. En realidade, o único segredo consiste en sermos capaces de contar ben. Con estes coñecementos non deixaremos que outros manipulen estatísticas. O coñecemento daranos a clave para tomar decisións propias.

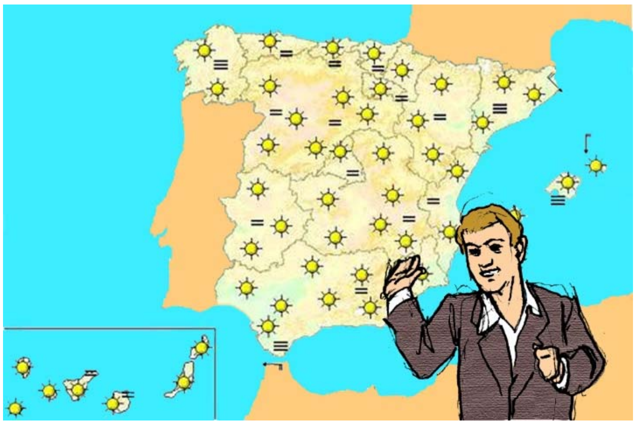


Tamén amosaremos algúns exemplos que poden parecer contrarios á nosa intuición. Hai feitos que, facendo as contas, resultan moito máis probables do que nos parece a simple vista. Coñecelos axudaranos a distinguir outros casos similares.

1. EXPERIENCIA E PROBABILIDADE

1.1. A lei de *Laplace*

Todos os días estamos obrigados a calcular probabilidades, aínda que sexa dun modo intuitivo: gañará a Liga o meu equipo favorito?, choverá mañá?, gustareille a esa persoa "especial" que hai na clase?, daranme unha beca?


A cada suceso pódeselle asignar unha **probabilidade** que é un número comprendido entre 0 e 1. Canto maior sexa a posibilidade de que ese suceso ocorra, o número que indica a probabilidade será máis próximo a 1 e se temos poucas opcións de que ocorra ese feito, a súa probabilidade estará próxima a 0.

A nosa experiencia (e tamén a teoría que podes consultar nos Apuntamentos Marea Verde de 3º ESO) axúdanos a calcular probabilidades mediante a **Lei de *Laplace*** cando todos os casos sexan equiprobables (isto é, non haxa sucesos simples que teñan máis probabilidade de saír que outros).

A regra de *Laplace* está baseada no *principio de razón insuficiente*: se a priori non existe ningunha razón para supoñer que un resultado se pode presentar con máis probabilidade que os demais, podemos considerar que todos os resultados teñen a mesma probabilidade de ocorrencia.

$$P(S) = \frac{número\ de\ casos\ favorables\ ao\ suceso\ S}{número\ de\ casos\ posibles}$$

Un pouco máis adiante neste capítulo imos volver formalizar (e ampliar) a matemática que hai debaixo do cálculo de probabilidades pero preferimos agora amosar uns cantos exemplos que nos sirvan para adestrar a nosa intuición.

Exemplos:

- Nunha clase hai 16 mozos e 17 mozas. Como non se presenta ninguén para ser delegado faise un sorteo. Cal é a probabilidade de que na clase haxa delegada?

Como hai 17 mozas (os casos favorables) sobre unha poboación de 33 individuos, de acordo coa Lei de *Laplace*, a probabilidade pedida é

$$P(S) = \frac{número\ de\ casos\ favorables\ ao\ suceso\ S}{número\ de\ casos\ posibles} = \frac{17}{33}$$

- No moedeiro temos 7 moedas de 1 céntimo, 5 moedas de 5 céntimos, 6 moedas de 10 céntimos e 3 moedas de 50 céntimos. Sacamos unha moeda ao chou, cal é a probabilidade de que a cantidade obtida sexa un número par de céntimos?

Ao sacar unha moeda, para ter un número par de céntimos ten que ser de 10 c ou de 50 c. Polo tanto, o total de casos favorables é de 9 (hai 6 de 10 e 3 de 50). O número de casos posibles é o de moedas que temos no moedeiro que son 7 + 5 + 6 + 3 = 21.

A probabilidade de obter un número par de céntimos é $P(par) = \frac{casos\, favorables}{casos\, posibles} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$.

Actividades propostas

1. Nunha caixa temos mesturados 25 cravos de 2 cm de longo, 15 cravos de 3 cm, 20 cravos de 2.5 cm e 40 cravos de 3.5 cm. Sacamos ao chou un cravo da caixa (asúmese que todos os cravos teñen a mesma probabilidade de seren elixidos). Que probabilidade hai de que o cravo extraído teña a menor lonxitude?

2. A ruleta francesa consta dos números que van do 0 ao 36. Se sae 0 gaña a banca. Decidimos apostar a "*par*" (gañaremos se sae un número par non nulo).

a) Que probabilidade temos de gañar a aposta?

b) A ruleta americana consta dun 0, un 00 e dous números que van do 1 ao 36. Se sae 0 ou 00 gaña a banca. Decidimos apostar a "*par*" (gañaremos se sae un número par non nulo). Que probabilidade temos de gañar a aposta?

3. Nun instituto de 800 alumnos hai 400 estudantes que falan inglés, 300 que falan francés, 100 que falan alemán, 100 que falan inglés e francés, 80 que falan inglés e alemán, 50 que falan francés e alemán e 30 que falan os tres idiomas.

Elíxese un estudante ao chou. Cal é a probabilidade de que fale soamente unha lingua estranxeira?

1.2. Sacando bólas dunha bolsa

Unha forma sinxela de facérmonos unha idea dos conceptos probabilísticos é facer *experimentos* con obxectos coñecidos. Por exemplo, son moi típicos os problemas nos que sacamos bólas (ou caramelos, ou papeletas…) dunha bolsa.

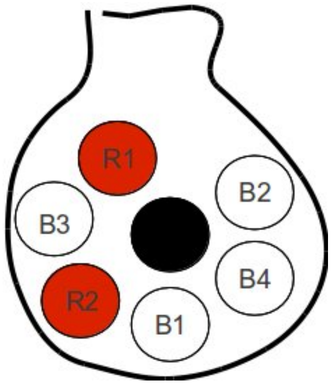
Exemplo:

- *Unha bolsa contén* 4 *bólas brancas,* 2 *bólas vermellas e unha bóla negra.*

a) Extráense dúas bólas ao mesmo tempo. Cal é a probabilidade de que sexan unha branca e unha negra?
b) Extráese unha bóla da bolsa. Despois sácase unha segunda bóla, sen volver meter na bolsa a primeira. Cal é a probabilidade de que tras a segunda extracción teñamos unha bóla branca e unha bóla negra?
c) Extráese unha bóla da bolsa. Despois sácase unha segunda bóla, sen volver meter na bolsa a primeira. Cal é a probabilidade de que a primeira bóla sexa branca e a segunda negra?
d) Extráese unha bóla da bolsa. Tras mirar de que cor é, introdúcese na bolsa de novo. Sácase unha segunda bóla. Cal é a probabilidade de que a primeira bóla sexa branca e a segunda negra?
e) Extráese unha bóla da bolsa. Tras mirar de que cor é, introdúcese na bolsa de novo. Sácase unha segunda bóla. Cal é a probabilidade de que as dúas veces teña saído a bóla negra?
f) Extráese unha bóla da bolsa. Tras mirar de que cor é, introdúcese na bolsa de novo. Sácase unha segunda bóla. Cal é a probabilidade de que as dúas veces teña saído unha bóla branca?

Hai moitas maneiras de resolver estes exemplos. A clave está en contar ben os casos que aparecen. Empregaremos métodos distintos, que imos desenvolver despois ao longo do capítulo.

a) Aínda que non nos digan nada no problema, e aínda que as bólas sexan indistinguibles, imos imaxinar que cada unha ten un número escrito, como as bólas de billar americano. Iso axudaranos a contar. Así, a situación é a representada na figura.



Formalmente non nos importa en que orde saen as bólas. En principio collemos as dúas ao mesmo tempo.

Os casos favorables son

Os casos posibles son as combinacións de 7 elementos tomados 2 a 2. Isto é,

$$C_{7,2} = \binom{7}{2} = 21$$

Así, a probabilidade pedida é $\frac{4}{21}$.

b) Aínda que pareza distinto por como o enunciamos, neste exemplo preguntamos exactamente o mesmo que no exemplo (a). En efecto, só nos interesa o que ocorre tras da segunda extracción. Así que xa sabemos o resultado.
Se quixeramos poderiamos formulalo tendo en conta a orde na que saen as bólas. Nese caso, para contar o total de casos posibles, teremos que utilizar variacións de 7 elementos tomados 2 a 2.

Casos favorables: B1 N, B2 N, B3 N, B4 N, N B1, N B2, N B3, N B4 (considérase orde de extracción).
Casos posibles: son todas as formas de elixir unha parella de bólas nas que si importa a orde de elección (primeiro sácase unha e despois outra):

$$V_{7,2} = 7 \cdot 6 = 42$$

Así, a probabilidade pedida é $\dfrac{casos\,favorables}{casos\,posibles} = \dfrac{8}{42} = \dfrac{4}{21}$

c) Este exemplo cambia con respecto ao anterior en que si nos importa a orde na que saen as bólas.
Casos favorables: B1 N, B2 N, B3 N, B4 N.
Casos posibles

$$V_{7,2} = 7 \cdot 6 = 42$$

Probabilidade = $\dfrac{casos\,favorables}{casos\,posibles} = \dfrac{4}{42} = \dfrac{2}{21}$.

d) Neste exemplo os casos favorables son os mesmos que no exemplo anterior. Pero hai moitas máis posibilidades, xa que volvemos introducir na bolsa a bóla que sacamos na primeira extracción. Para contar o número de casos posibles utilízanse as *variacións con repetición.*
Casos favorables: B1 N, B2 N, B3 N, B4 N.

Casos posibles:

$$VR_{7,2} = 7^2 = 49$$

Probabilidade = $\dfrac{casos\,favorables}{casos\,posibles} = \dfrac{4}{49}$.

e) Neste exemplo hai un único caso favorable: que saia a bóla negra 2 veces. O número de casos posibles é o que calculamos no exemplo anterior, xa que realizamos dúas extraccións e importa a orde.
Casos favorables: N N.
Casos posibles:

$$VR_{7,2} = 7^2 = 49$$

Probabilidade = $\dfrac{casos\,favorables}{casos\,posibles} = \dfrac{1}{49}$

f) Nesta ocasión volvemos ter o mesmo número de casos posibles que nos dous exemplos anteriores. O que cambia é o modo de contar o número de casos favorables. Podemos facelo "ao besta" ou ben utilizando combinatoria, que para iso a estudamos.

Os casos posibles son B1 B1, B1 B2, B1 B3, B1 B4, B2 B1, B2 B2, B2 B3, B2 B4, B3 B1, B3 B2, B3 B3, B3 B4, B4 B1, B4 B2, B4 B3, B4 B4. É dicir, 16 casos.

Poderiamos telo calculado dunha forma moito máis sinxela tendo en conta que hai 4 bólas brancas e extráense, con substitución, 2 veces. Iso dá lugar a un problema típico de variacións con repetición.
Casos favorables:

$$VR_{4,2} = 4^2 = 16$$

Casos posibles:

$$VR_{7,2} = 7^2 = 49$$

Probabilidade = $\dfrac{casos\,favorables}{casos\,posibles} = \dfrac{16}{49}$

Actividades propostas

4. Volve facer todos os apartados do exemplo anterior pero substituíndo en cada caso "bóla branca" por "bóla vermella". É dicir, a bolsa ten agora 6 bólas vermellas e unha bóla negra:

a) Extráense dúas bólas ao mesmo tempo. Cal é a probabilidade de que sexan unha vermella e unha negra?

b) Extráese unha bóla da bolsa. Despois sácase unha segunda bóla, sen volver meter na bolsa a primeira. Cal é a probabilidade de que tras a segunda extracción teñamos unha bóla vermella e unha bóla negra?

c) Extráese unha bóla da bolsa. Despois sácase unha segunda bóla, sen volver meter na bolsa a primeira. Cal é a probabilidade de que a primeira bóla sexa vermella e a segunda negra?

d) Extráese unha bóla da bolsa. Tras mirar de que cor é introdúcese na bolsa de novo. Sácase unha segunda bóla. Cal é a probabilidade de que a primeira bóla sexa vermella e a segunda negra?

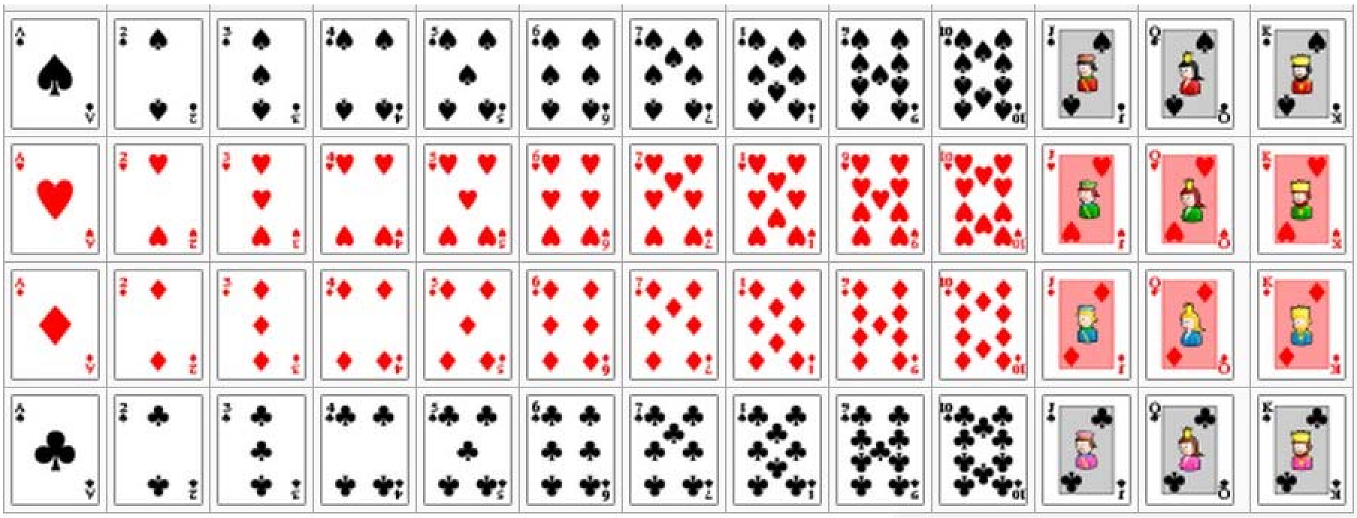
e) Extráese unha bóla da bolsa. Tras mirar de que cor é introdúcese na bolsa de novo. Sácase unha segunda bóla. Cal é a probabilidade de que as dúas veces teña saído a bóla negra?

f) Extráese unha bóla da bolsa. Tras mirar de que cor é introdúcese na bolsa de novo. Sácase unha segunda bóla. Cal é a probabilidade de que as dúas veces teña saído unha bóla vermella?

5. Na lotería primitiva unha aposta consiste en marcar 6 casas de entre 49 posibles. O día do sorteo extráense 6 bólas (de entre 49). Cal é a probabilidade de que a túa aposta coincida coa combinación gañadora? Cal é a probabilidade de que acertes unicamente 5 números? E a de que acertes unicamente 4 números?

1.3. Mesturando cartas

Nunha baralla americana temos 4 paus: picas, corazóns, trevos e diamantes. As cartas de picas e de trevos son negras mentres que os diamantes e os corazóns son cartas vermellas. Cada pau ten 13 cartas, das que hai cartas con números do 1 ao 10, e 3 figuras: a sota (J), a dama (Q) e o rei (K). Na baralla francesa (a orixinal, pero menos vista) en lugar de aparecer J, Q, K aparecen V, D, R (Valet, Dame e Roi). Ademais, a baralla ten 2 comodíns pero non os imos utilizar nos nosos exemplos.



As mesturas de cartas teñen propiedades moi interesantes. De feito, hai moitos xogos de cartomaxia que se basean en propiedades matemáticas das mesturas (e non precisamente probabilísticas). Nos exemplos que imos ver a continuación suporemos sempre que traballamos cunha baralla ben mesturada e a extracción das cartas farase sempre de forma aleatoria.

Exemplos:

- *Repártese ao chou* 5 *cartas dunha baralla de póker. Cal é a probabilidade de que teñas* 4 *cartas do mesmo valor?* (esa é a xogada que se chama *póker*).

Non nos importa a orde, co que o número de mans posibles se calcula mediante combinacións. Isto é,

$$C_{52,5} = \binom{52}{5} = 2\,598\,960.$$

Para contar o número de casos favorables pensaremos, de momento, en algo máis concreto: cantas posibilidades hai de obter un *póker de ases.*

A man que nos interesa é AAA *, onde * pode ser calquera carta. Hai 12 · 4 = 48 posibilidades para este (o 52 – 4 = 48). En efecto, a única elección posible é a carta que acompaña os ases.

Así, como temos 13 posibles valores do póker (do As ao 10 e as 3 figuras), hai 13 · 48 = 624 casos favorables. Con isto, a probabilidade pedida é

$$P(póker) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{624}{2\,598\,960} = \frac{156}{649\,740}$$

- *Unha xogada de 5 cartas chámase full se nela hai 3 cartas dun valor e outras 2 dun valor distinto. Cal é a probabilidade de conseguir un full de ases e de douses, isto é, AAA 22?*

Os casos posibles son os mesmos de antes: o número de posibles xogadas de 5 cartas.
Para conseguir AAA temos 4 cartas (os 4 ases) dos que debemos escoller 3. Calcúlanse con combinacións.

$$C_{4,3} = \binom{4}{3} = 4.$$

Para conseguir os douses temos que elixir 2 douses de entre 4. Volvemos utilizar combinacións.

$$C_{4,2} = \binom{4}{2} = 6.$$

Combinando as 4 posibilidades que temos para conseguir os 3 ases e as 6 posibilidades que temos para conseguir os 2 douses, quédannos un total de 24 formas de conseguir ese full de ases e de douses.
Así,

$$P(AAA22) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{24}{2\ 598\ 960} = \frac{1}{108\ 290}$$

- *Cal é a probabilidade de conseguir un full (independentemente da súa composición)?*

No exemplo anterior calculamos a probabilidade de conseguir un full concreto: o full AAA22.

Pero para conseguir un full arbitrario temos 13 posibilidades de elección para as 3 cartas do mesmo valor e 12 para elixir as outras 2 cartas (claro, xa non podemos usar o valor que eliximos para o trío). Así hai $13 \cdot 12$ posibilidades de conseguir un full concreto.

Como un full fixado se podía obter de 24 formas diferentes (calculámolo no exemplo anterior), o total de casos favorables é:

Casos favorables = 13 · 12 · 24 = 3 744.

E así

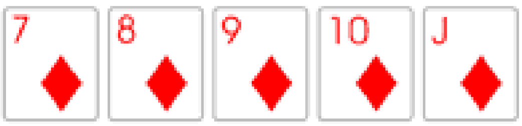
$$P(full) = \frac{3\ 744}{2\ 598\ 960} = \frac{78}{54\ 145}.$$

Actividades propostas

6. a) Chámase *trío* á xogada que consiste en 3 cartas do mesmo valor e outras dúas de diferente valor ao desas 3 e ademais con diferentes valores entre si. Calcula a probabilidade de obter un *trío de ases* nunha xogada de 5 cartas.

b) Calcula a probabilidade de obter un *trío* calquera.

7. a) Chámase *escaleira de cor* a unha xogada composta por 5 cartas do mesmo pau ordenadas consecutivamente. Calcula a probabilidade de obter esta *escaleira de cor*:



b) Calcula a probabilidade de obter unha *escaleira de cor* calquera. A escaleira de cor pode ser As, 2, 3, 4, 5, que é a escaleira de cor mínima, ou, 10, J, Q, K, As que é a escaleira de cor máxima ou escaleira real.

8. Chámase *cor* a unha xogada composta por 5 cartas do mesmo pau que non son consecutivas. Calcula a probabilidade de obter *cor* nunha xogada.

2. AFONDANDO NA TEORÍA

2.1. Combinatoria para poder contar

Os exemplos que fixemos ao principio do capítulo amosan o importante que é o dominio da combinatoria para contar os casos favorables e os casos posibles que temos. A modo de recordatorio, incluímos un cadro extraído do resumo do capítulo anterior:

Permutacións	Inflúe só a orde. $P_n = n!$	$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
Variacións con repetición	Inflúen a orde e os **elementos**. Os elementos poden **repetirse**. $VR_{m,n} = m^n$.	$VR_{2,4} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$
Variacións sen repetición	Inflúen a orde e os **elementos**. Os elementos non poden repetirse. $V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$	$V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6!}{3!} = 120$
Combinacións	Inflúen só os **elementos**. $C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!} = \binom{m}{n}$	$C_{9,7} = \binom{9}{7} = \frac{9!}{2! \cdot 7!} = 36$

2.2. Nomenclatura en probabilidade

É moi importante chamar a cada cousa polo seu nome. A precisión e a linguaxe en Matemáticas poden converter en sinxelo algo que, en principio, podería parecer moi complicado.

Un **experimento aleatorio** é unha acción (experimento) cuxo resultado depende do azar.

A cada un dos resultados posibles dun experimento aleatorio chamarémoslle **caso** ou **suceso elemental**.

O conxunto de todos os casos posibles chámase **espazo dunha mostra** ou **suceso seguro**.

Un **suceso** é un subconxunto do espazo dunha mostra.

Se *S* é un suceso verifícase o **suceso contrario** de *S* sempre que non se verifica *S*. Representarémolo por S^C.

Dise que dous sucesos son **sucesos independentes** se que se verifique un deles non afecta á probabilidade de verificación do outro.

Exemplo:

- *Experimentos aleatorios:*

  a) Elixir unha persoa ao chou e ver en que día da semana naceu.

  b) Sacar unha carta da baralla de póker e ver de que pau é.

  c) Lanzar un dado de parchís e observar o número da cara superior.

  d) Lanzar 3 moedas ao aire e observar a posición na que caen.

- *Espazos dunha mostra*. Para os experimentos do exemplo anterior os espazos dunha mostra son, respectivamente:

  a) {luns, martes, mércores, xoves, venres, sábado, domingo}.

  b) {picas, corazóns, trevos, diamantes}.

  c) {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

  d) {CCC, CCX, CXX, XXX}.

- *Sucesos contrarios*. Usaremos os experimentos (a), (b), (c), (d) deste exemplo.

  a) O suceso contrario a "un día da fin de semana" é {luns, martes, mércores, xoves, venres}.

  b) O suceso contrario a "carta vermella" é {picas, trevos}.

  c) O suceso contrario a "número múltiplo de 3" é {1,2,4,5}.

  d) O suceso contrario a "saen as 3 caras" é {CCX, CXX, XXX}.

- *Sucesos independentes*. Usaremos os experimentos (a), (b), (c), (d) deste exemplo.

a) Os sucesos "ter nacido en fin de semana" e "ter nacido en luns" son independentes. Os sucesos "ter nacido en fin de semana" e "ter nacido en domingo" son dependentes.

b) Os sucesos "obter unha carta vermella" e "obter unha carta de picas" son independentes. Os sucesos "obter unha carta vermella" e "obter unha carta de corazóns" son dependentes.

c) Os sucesos "obter un número par" e "obter un 5" son independentes. Os sucesos "obter un número par" e "obter un 6" son dependentes.

d) Os sucesos "obter tres caras" e "obter tres cruces" son independentes. Os sucesos "Obter tres resultados iguais" e "obter tres cruces" son dependentes.

Como a unión dun suceso e o seu suceso **contrario** é o suceso seguro tense que

$$P(S^C) = 1 - P(S).$$

Cando dous sucesos son independentes, a probabilidade de que se dea o **suceso intersección** (isto é, que se verifiquen ambos os sucesos á vez) é o produto das probabilidades de cada un deles.

Se A e B son **independentes**,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Actividades propostas

9. Considéranse os seguintes experimentos aleatorios:

1) Téñense 5 fichas de Scrabble formando a palabra CASAS. Métense nunha bolsa e extráense 3 fichas.
2) Mestúrase unha baralla de póker, córtase e mírase o valor da carta superior.
3) Un moedeiro contén 4 moedas de 5 céntimos, 2 moedas de 10 céntimos e 1 moeda de 20 cm. Extráense ao chou dúas moedas del.
4) Dos 30 alumnos dunha clase elíxese un ao chou. Pregúntaselle en que mes naceu.

a) Describe os espazos dunha mostra de cada un dos 4 experimentos aleatorios anteriores.
b) Indica os sucesos contrarios a
   1. {AAC}.
   2. {A, 2, 3, 4, 5}.
   3. Sacar unha cantidade par de céntimos.
   4. Ter nacido nun mes no que seguro que é verán.
c) Son independentes estes pares de sucesos?
   1. {AAC} e {{ASA}, {CAS}}.
   2. "Obter un 6" e "obter un número par".
   3. "Obter unha cantidade par de céntimos" e "sacar dúas moedas de 5 céntimos".
   4. "Ter nacido nun mes que seguro é de verán" e "ter nacido en xuño".

A linguaxe é moi importante á hora de **comprender** que nos están pedindo en cada caso.

2.3. Non todos os sucesos teñen a mesma probabilidade

Hai casos nos que intuímos perfectamente que non todos os sucesos teñen a mesma probabilidade. Por exemplo, se lanzamos un dado, a probabilidade de obter un número par é 1/2 mentres que a de obter un múltiplo de 3 é 1/3.

Noutras ocasións pode custarnos máis.

Exemplo

- *Considera o experimento aleatorio "mesturar unha baralla, cortar e mirar a cor das dúas cartas que quedaron arriba".*

  a) Se escribimos o espazo dunha mostra veremos que é {RR, RN, NN}. Claro: ou ben as dúas cartas son vermellas, ou ben as dúas son negras, ou ben hai unha de cada cor.
  b) Pero… e se tivesemos escrito a cor de cada carta, por orde de aparición? Nesta situación, os casos posibles serían {RR, RN, NR, NN}.

Como a linguaxe que utilizamos é imperfecta, para un mesmo experimento podemos considerar dous espazos dunha mostra distintos. Non hai problema nisto sempre que saibamos o que nos están preguntando e o que debemos facer.

En realidade, o RN que escribimos en (a) correspóndese cos casos RN e NR de (b).

Traballando co espazo dunha mostra de (b) todos os casos son equiprobables mentres que se traballamos co espazo dunha mostra de (a) os sucesos RR e NN teñen probabilidade 1/4 mentres que RN ten probabilidade 1/2.

Actividades resoltas

- *Téñense* 5 *fichas de Scrabble formando a palabra* CASAS. *Métense nunha bolsa e extráense* 3 *fichas. Dá dous casos que sexan equiprobables e outros dous que non o sexan.*

Son equiprobables {AAC} e {SSC}. Non son equiprobables {AAC} e {CAS}.

- *Mestúrase unha baralla de póker, córtase e súmanse os valores das dúas cartas superiores* (asumimos A = 1, J = 11, Q = 12, K = 13). *Dá dous casos que sexan equiprobables e outros dous que non o sexan.*

Neste exemplo o espazo dunha mostra é {2, 3, …, 26} (os números que poden obterse ao sumar os valores das dúas cartas).

Son casos equiprobables {2} e {26} ou {3} e {25}. Non son equiprobables {2} e {3}.

- *Dos* 30 *alumnos dunha clase elíxese un ao chou. Pregúntaselle en que mes naceu. Dá dous casos que sexan equiprobables e dous que non o sexan.*

O espazo dunha mostra é {xaneiro, febreiro … novembro, decembro}. En realidade, non todos estes casos son equiprobables. Para sabelo temos que aproximar a probabilidade mediante a frecuencia relativa e para iso é necesaria a estatística.

No ano 2012 os datos de nacementos en España, por meses, reflíctense nesta táboa:

xaneiro	febreiro	marzo	abril	maio	xuño	xullo	agosto	set	outubro	nov	dec
11 765	10 967	11 776	11 329	11 954	11 314	11 874	12 031	11 672	12 324	11 510	11 318

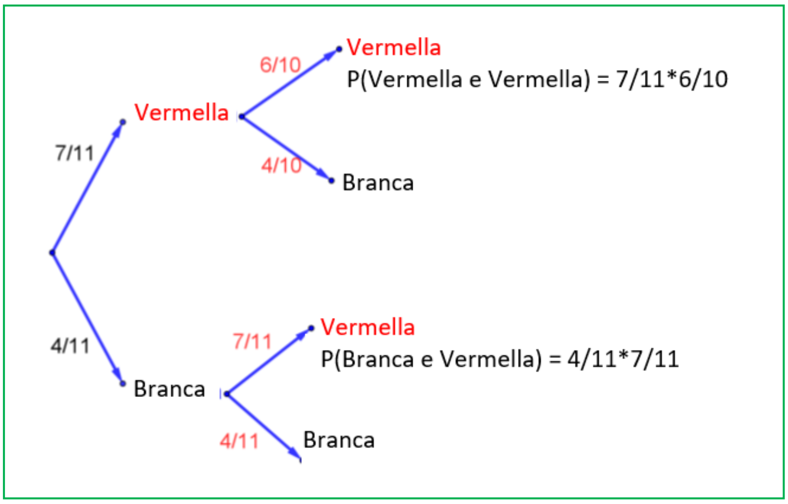
2.4. Uso de diagramas de árbore

Xa se utilizou a representación en diagrama de árbore para xerar variacións, combinacións ou permutacións. Ese mesmo tipo de estrutura é tamén útil cando hai que calcular probabilidades.

Exemplo

- *Temos unha caixa con 7 bólas vermellas e 4 bólas brancas. Sácase unha bóla ao chou. Se é branca, vólvese meter na caixa. Se é vermella, déixase fóra. Nestas condicións sácase outra bóla da caixa. Que probabilidade hai de que esta bóla sexa vermella?*

Poden ocorrer dúas cousas: que a bóla da primeira extracción sexa vermella ou que sexa branca.



1.- Se a bóla sacada é vermella (ocorre con probabilidade 7/11) a bóla quedará fóra e a composición da caixa xusto antes da segunda extracción é de 6 bólas vermellas e 4 bólas brancas.

A probabilidade de que neste momento se saque unha bóla vermella é de 6/10.

2.- Se a bóla sacada é branca (ocorre con probabilidade 4/11), a bóla vólvese meter na caixa e a composición desta antes da segunda extracción será a mesma que ao principio. Así a probabilidade de que na segunda extracción saia unha bóla vermella é de 7/11.

Pódese chegar a obter unha bóla vermella na segunda extracción por dúas vías: dependendo da cor da bóla que se saque na primeira extracción.

A **probabilidade total** de que saia unha bóla vermella na segunda extracción é:

$$P(vermella) = \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} + \frac{4}{11} \cdot \frac{7}{11} = \frac{371}{605}$$

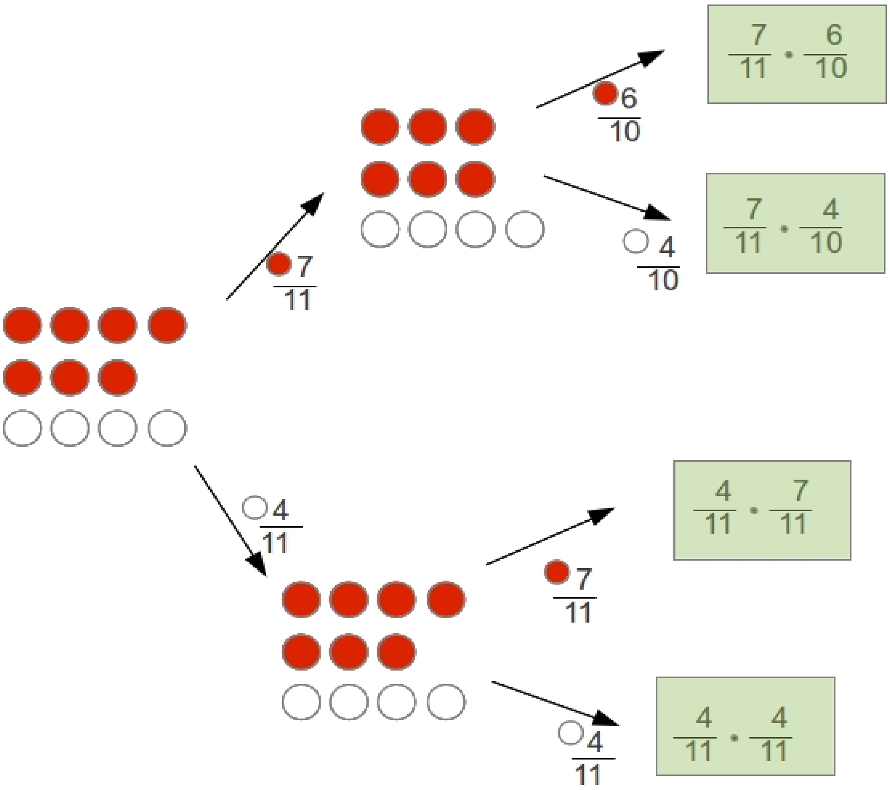
Probabilidade de obter vermella na primeira extracción.

Probabilidade de obter vermella na 2ª extracción tendo sacado vermella na 1ª.

Probabilidade de obter branca na 1ª extracción.

Probabilidade de obter vermella na 2ª extracción tendo sacado branca na 1ª.

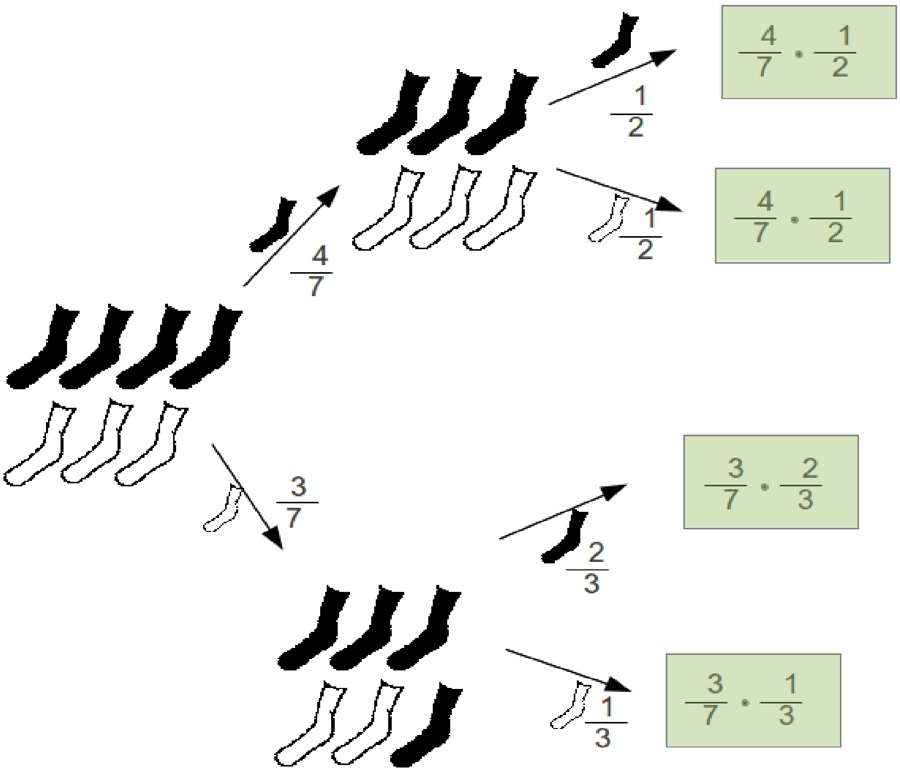
Todo este proceso soe resumirse e simplificarse utilizando un **diagrama de árbore:**



Actividade resolta

- *Nun caixón temos 7 calcetíns: 4 negros e 3 brancos. Sacamos, sen mirar, dous calcetíns do caixón. Que é máis probable, que sexan ambos da mesma cor ou que sexan de cores distintas?*

Faremos un diagrama de árbore calculando a probabilidade de cada caso.



A probabilidade de que obteñamos dous calcetíns negros é 2/7, de que obteñamos 2 calcetíns brancos é 1/7. Así temos que a probabilidade de obter dous da mesma cor é 3/7, fronte á probabilidade de obter dous de cores distintas, que é 4/7.

É máis probable sacar un par de calcetíns de cores distintas.

Observación

Tamén poderiamos ter resolto este problema mediante a *Lei de Laplace*.

Casos posibles: $C_{7,2} = \binom{7}{2} = 21$.

Casos favorables a sacar 2 calcetíns negros: $C_{4,2} = \binom{4}{2} = 6$.

Casos favorables a sacar 2 calcetíns brancos: $C_{3,2} = \binom{3}{2} = 3$.

Casos favorables: 6 + 3 = 9.

Probabilidade = $\dfrac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \dfrac{9}{21} = \dfrac{3}{7}$.

Como sacar un calcetín de cada cor é o suceso contrario a este, a súa probabilidade é $1 - \dfrac{3}{7} = \dfrac{4}{7}$. É máis probable este caso.

Recorda que os problemas de Matemáticas se poden abordar desde diferentes puntos de vista. O importante é que sexas capaz de resolvelos. Por iso é importante coñecer máis dun método. Nunhas ocasións será mellor utilizar un e noutras será mellor usar un método alternativo. Por iso debes estudar diversas “ferramentas” que che axuden a resolver os problemas que aparecen.

Actividades propostas

10. Elabora unha árbore de probabilidades para calcular a probabilidade de obter *dobre parella* nunha xogada de 5 cartas de póker. (*Dobre parella* consiste en 2 pares de cartas do mesmo valor, diferentes entre si e unha carta, indiferente, de valor distinto aos dous anteriores. Por exemplo, AA 33 Q).

11. No moedeiro teño 3 moedas dun céntimo, 2 de 5 céntimos, 3 de 10 céntimos, 1 de 20 e 1 de 50 céntimos. Saco 3 moedas ao chou. Cal é a probabilidade de que obteña un número par de céntimos?

2.5. Probabilidade condicionada

Nos casos de diagramas de árbore, en cada paso aparecen probabilidades que están condicionadas a un paso anterior. No exemplo da sección 2.4 a probabilidade de que na segunda extracción a bóla sexa vermella condicionada a que na primeira extracción teña saído unha bóla vermella era 6/10 mentres que a probabilidade de sacar unha bóla vermella na segunda extracción, sabendo que na primeira tiña saído unha bóla branca, era 7/11.

En moitos casos a probabilidade que hai que determinar é unha **probabilidade condicionada** á verificación dun suceso anterior.

A probabilidade de verificación do suceso A condicionada á verificación do suceso B represéntase por *P*(*A/B*).

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exemplos

- *No lanzamento dun dado saíu un número par. Calcula a probabilidade de que sexa un* 6.

Non é necesario formalizar este así pero, para acostumarnos á notación, daremos nomes aos sucesos que interveñen:

A = Obter un 6 = {6}.

B = Obter número par = {2, 4, 6}.

Os casos posibles son {2, 4, 6} (porque nos din que saíu un número par}.

O único caso favorable é {6}.

Así pois:

P(*sacar* 6 *condicionado a par*) = $\dfrac{casos\ \ favorables}{casos\ \ posibles} = \dfrac{1}{3}$

Tamén poderiamos ter calculado este con álxebra de sucesos:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

- *O 40 % da poboación fuma e o 10 % fuma e é hipertenso. Cal é a probabilidade de que un fumador sexa hipertenso?*

Asumiremos que as porcentaxes de poboación se corresponden con probabilidades. Así, a probabilidade de que un individuo, elixido ao chou, sexa fumador é 0.4 e a probabilidade de que sexa fumador e hipertenso é 0.1. Deste modo,

A = Ser fumador e hipertenso.

B = Ser fumador.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.1}{0.4} = \frac{1}{4} = 0.25$$

Como $P(A) = 0.1 \neq P(A/B) = 0.25$ os sucesos "*ser fumador*" e "*ser hipertenso*" son sucesos dependentes.

Actividades propostas

12. Un analista deportivo, que se equivoca o 20 % das veces, dixo que o noso equipo favorito vai gañar a liga. O analista da competencia, que se equivoca o 25 % das veces, dixo que o noso equipo favorito non vai gañar a liga. Á vista destas análises, que probabilidade hai de que o noso equipo gañe a liga?

13. Unha compañía de produtos avícolas empaqueta ducias de ovos en tres lugares diferentes. O 40 % da produción ten lugar na planta A, o 25 % en B e o resto en C. Un control de calidade dinos que un 5 % dos paquetes elaborados en A, un 10 % dos de B e un 8 % dos de C conteñen algún ovo roto. Que probabilidade hai de que nos toque unha ducia de ovos con algún ovo roto?

14. Nun instituto con 300 alumnos estase estudando se a cualificación obtida en *Lingua Galega* ten que ver coa cualificación obtida en *Matemáticas*. Tras facer unha enquisa, obtéñense os seguintes resultados:

		Matemáticas		
		Sobresaliente	**Notable**	**Outro**
Lingua	**Sobresaliente**	110	25	18
	Notable	420	70	40
	Outro	10	5	2

Elíxese un alumno ao chou. Cal é a probabilidade de que teña un sobresaliente en *Lingua*, se o tivo en *Matemáticas*?

Cal é a probabilidade de que teña un sobresaliente en *Matemáticas*, se o tivo en *Lingua*?

3. CÁLCULO DE PROBABILIDADES

3.1. Exemplos comúns

Actividades resoltas

- *Nun caixón teño un par de calcetíns vermellos, un par de calcetíns negros e un par de calcetíns brancos. Ao facer a maleta, coas présas, collo 3 calcetíns sen mirar. Que probabilidade teño de ter collido 2 da mesma cor?*

Collerei 2 da mesma cor sempre que non colla os 3 de cores diferentes. É dicir, vou usar o suceso contrario.

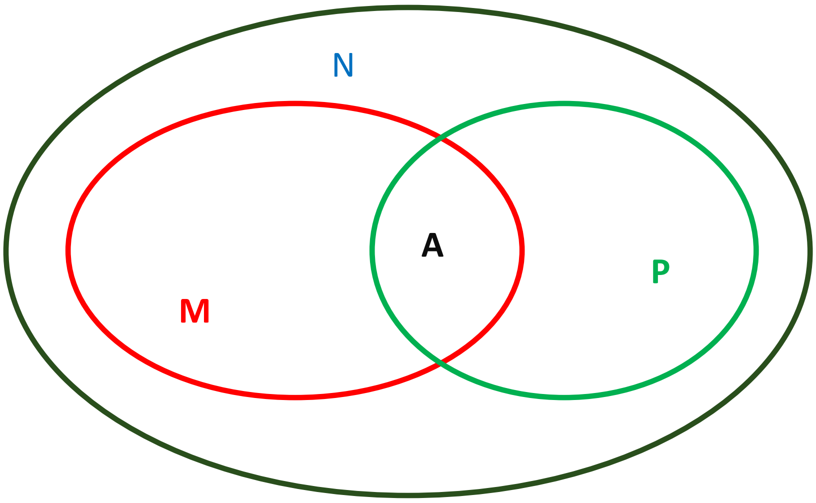
Dáme igual a cor do primeiro que saco. Para o segundo sérvenme 4 de entre 5, pois unicamente non me serve o que é da mesma cor que antes xa sacara. E na terceira extracción, como necesito unha cor diferente, sérvenme 2 de entre 4.

Así a probabilidade do suceso contrario é $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{2}{5}$.

Por iso a probabilidade pedida é $\frac{2}{5}$.

- *Faise un estudo de consumo nunha poboación. Descóbrese que ao 80% das persoas ás que lles gusta o xeado de pistacho tamén lles gusta o de mango e que ao 80% das persoas ás que lles gusta o xeado de mango tamén lles gusta o de pistacho. Ao 60% de esa poboación non lle gustan os xeados de mango nin de pistacho. Elíxese ao chou unha persoa desa poboación. Cal é a probabilidade de que lle guste tanto o xeado de mango como o de pistacho?*

Imos calcular as porcentaxes da poboación á que lle gusta o xeado de mango e de pistacho. Representaremos todos os datos con diagramas de Venn.



Consideremos

M = Porcentaxe de persoas ás que lles gusta o xeado de mango.

P = Porcentaxe de persoas ás que lles gusta o xeado de pistacho.

A = Porcentaxe de persoas ás que lles gustan ambos os xeados (pistacho e mango).

N = Porcentaxe de persoas ás que non lles gusta nin o xeado de pistacho nin o de mango.

Sabemos que A = 0.8 · P e tamén que A = 0.8 · M. Polo tanto, M = P.

Agora podemos referir todo a X, o número total de individuos da poboación.

O número de persoas ás que lles gusta polo menos un deses tipos de xeado é:

$$M + P - A = 2M - 0.8M = 1.2M$$

Pero sabemos que iso coincide co 60% da poboación.

Así $1.2M = 0.4X \Rightarrow M = \frac{4}{5}X$

E, finalmente, $A = 0.8 \cdot \frac{1}{3}X = \frac{4}{15}X.$

Co que a probabilidade de que á persoa elixida ao chou non lle guste nin o xeado de pistacho nin o de mango é:

$$P = \frac{casos\ \ favorables}{casos\ \ posibles} = \frac{\frac{4}{15}X}{X} = \frac{4}{15}.$$

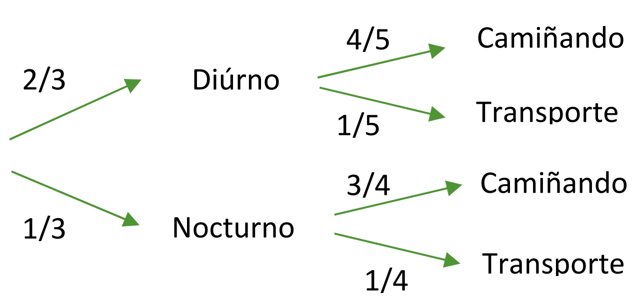
- *Na lotería primitiva apóstanse* 6 *números de entre* 49. *Xogando unha soa aposta, cal é a probabilidade de que che toque un premio de* 5 *acertos máis complementario?*

O número de casos posibles son as combinacións de 49 elementos tomados 6 a 6: $C_{49,6}$.

Os casos favorables teñen que incluír necesariamente ao *número complementario*. As outras 5 posicións téñense que encher con 5 dos 6 elementos da combinación gañadora. Así, o número de casos favorables vén dado polas combinacións de 6 elementos tomados de 5 en 5: $C_{6,5}$.

Así, $P(5 + complementario) = \frac{C_{6,5}}{C_{49,6}} = \frac{6}{13\,983\,816} = \frac{1}{2\,330\,636}.$

- *Nun IES hai Bacharelato diúrno e Bacharelato nocturno. En diúrno estudan 2/3 dos alumnos e o terzo restante faino en nocturno. A cuarta parte dos alumnos de nocturno e a quinta dos de diúrno utiliza un medio de transporte para ir ao instituto. O resto chega camiñando. Elíxese ao chou un estudante dese instituto. Que probabilidade hai de que vaia á clase andando?*



A probabilidade de que un alumno acuda á clase camiñando é $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{47}{60}.$

- *Tras volver de Dublín, no moedeiro temos* 6 *moedas de euro procedentes de España e* 9 *de Irlanda. Temos que pagar* 3 *euros. Que probabilidade hai de que o fagamos con moedas do mesmo país?*

Temos 6 moedas de euro de España, 9 de Irlanda.

Debemos tomar 3 moedas ao chou.

Os casos posibles son as combinacións de 15 elementos tomados 3 a 3. $C_{15,3} = 455$.

Os casos favorables proveñen de coller as 3 moedas españolas ou as tres irlandesas. Así resulta:

$$C_{6,3} + C_{9,3} = 20 + 84 = 104.$$

Polo tanto, a probabilidade pedida é $\frac{104}{455}$.

- *Un tafur xoga cunha baralla trucada de* 48 *cartas. Saca unha carta, míraa, volve metela na baralla e mestura. Repite este procedemento outras* 2 *veces máis. A baralla está preparada de tal modo que o feito de que unha das tres cartas vistas sexa unha figura ten unha probabilidade de* 19/27. *Cantas figuras ten a súa baralla?*

Chamaremos *x ao* número de figuras que hai na baralla trucada. A probabilidade de non obter figura na primeira carta é $\frac{48-x}{48}$, *a* de non obtela na segunda volve ser a mesma probabilidade e o mesmo coa terceira. Así a probabilidade de non obter figura é $\left(\frac{48-x}{48}\right)^3$.

Como *non obter ningunha figura* é o suceso contrario de *obter algunha figura*, a súa probabilidade é:

P (*non obter ningunha figura*) = 1 – *P* (*obter figura*) = $1-\frac{19}{27}=\frac{8}{27}$.

Así chegamos á ecuación

$$\left(\frac{48-x}{48}\right)^3 = \frac{8}{27} = \frac{2^3}{3^3}$$

De onde

$$\frac{48-x}{48} = \frac{2}{3}$$

E, despexando nesa ecuación, resulta *x* = 16.

Actividades propostas

15. Unha bolsa contén 9 bólas vermellas e 6 bólas negras. Extráese ao chou unha delas e substitúese por dúas doutra cor. Tras isto extráese unha segunda bóla. Que probabilidade hai de que a segunda bóla sexa vermella? Que probabilidade hai de que a segunda bóla sexa da mesma cor que a primeira?

16. No comedor escolar a probabilidade de que non haxa pasta unha semana é 1/3; a probabilidade de que haxa polo é 3/5 e a probabilidade de que haxa pasta e polo é 4/7. Calcula a probabilidade de que non haxa nin pasta nin polo. Calcula a probabilidade de que non haxa polo sabendo que houbo pasta.

17. Temos no peto moedas procedentes de 3 países: españolas (60 %), francesas (30 %) e alemás (o resto). O 30 % das moedas españolas e o 20 % das francesas son de 50 céntimos. Tamén sabemos que, do total de moedas, o 30 % son de 50 céntimos. Extráese unha moeda ao chou. Que probabilidade hai de que sexa unha moeda francesa de 50 céntimos? Que probabilidade hai de que sexa unha moeda de 50 céntimos, sabendo que é alemá?

18. Nunha clase hai 24 alumnos e 16 alumnas. Fórmanse equipos de traballo de 5 persoas. Calcula a probabilidade de formar un equipo nas seguintes condicións:

a) Todos os participantes son do mesmo sexo.
b) No equipo hai polo menos 3 mozas.
c) No equipo hai exactamente 3 mozas.
d) No equipo hai 3 estudantes dun sexo e 2 doutro.

3.2. Cousas sorprendentes

Levamos todo o capítulo insistindo en que non temos suficientemente desenvolvido o sentido da probabilidade. É necesario educar a intuición neste sentido. Por iso hai feitos que, sendo totalmente explicables desde as Matemáticas, nos seguen parecendo paradoxais. Imos comentar brevemente tres exemplos.

Actividades resoltas

- *Aínda que pareza unha casualidade, por ter o ano 365 días, é moi probable que na túa clase haxa 2 alumnos que celebren o seu aniversario o mesmo día. Comprobáchelo?*

A probabilidade de que iso ocorra nun grupo de 23 persoas é 1/2. Nun grupo de 30 persoas a probabilidade é maior de 0.7 e nun grupo de 40 persoas é 0.89.

Como podemos calculalo?

Máis fácil que calcular a probabilidade de que haxa unha coincidencia é calcular a probabilidade do suceso contrario: que non haxa coincidencias.

Suporemos neste exemplo que hai a mesma probabilidade de ter nacido nun día ou noutro (aínda que saibamos que, en realidade, non é así).

- Supoñamos que temos 2 persoas. A primeira terá nacido un día. Para que non coincida a data de nacemento da segunda temos 364 posibilidades de elección. Así a probabilidade de que non haxa unha coincidencia nun grupo de 2 persoas é $\frac{364}{365}$.

- Se agora temos 3 persoas e non queremos que haxa coincidencias, hai 364 posibilidades para elixir a segunda persoa e 363 para elixir a terceira. Así esta probabilidade é:

$$\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}$$

- Analogamente, a probabilidade de que nun grupo de 4 persoas non haxa coincidencias é:

$$\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdot\frac{362}{365}$$

- Seguindo con este razoamento, chegamos a que a probabilidade de que nun grupo de 23 persoas non haxa coincidencias é:

$$\underbrace{\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdots\frac{344}{365}\cdot\frac{343}{365}}_{\text{22 factores}} = 0.4927.$$

Así que a de que haxa coincidencias é 1 – 0.4927 = 0.5073, maior do 50 %!

Para os outros casos que comentamos, podes facer ti os cálculos. Son similares aos que acabamos de facer.

Actividades resoltas

- A Administración Pública acostuma sortear a letra do apelido pola que comezará un proceso. Pode ser a orde da actuación dos concursantes nunha oposición, antano para sortear excedentes de cota do servizo militar, adxudicación de vivendas protexidas ou para adxudicar as prazas nun colexio.

Malia que os matemáticos insistimos en que eses sorteos non son xustos, xa que non tratan a todos os individuos por igual, a administración continúa realizándoos (e mesmo defende con teimosía a súa ecuanimidade). Efectivamente, os casos do espazo dunha mostra non son equiprobables.

- Supoñamos que, entre as xogadoras da Selección Feminina de Baloncesto que gañou o Eurobasket 2013, se sortea cal delas sobe recoller a copa e faise sorteando unha das 27 letras do alfabeto español.

Apelido	Letras coas que gañará
Aguilar	yza
Domínguez	bcd
Gil	efg
Lima	hijkl
Nicholls	mn
Ouviña	o
Palau	p
Queralt	r
Sancho	rs
Torrens	t
Valdemoro	uv
Xargay	x

Vemos que Cindy Lima tería unha probabilidade de 5/27 de subir recoller a copa, fronte a 1/27 de Ouviña, Palau, Queralt, Torrens ou Xargay.

Tristemente este sistema séguese utilizando. Mesmo o usou a Comunidade de Madrid para asignar prazas en colexios para o curso 2014/2015.

Actividade proposta

19. Supón que se sortea ser delegado da túa clase polo método descrito antes. Quen tería máis probabilidade de saír? Hai alguén que non tería ningunha posibilidade? Faino cunha lista da túa clase.

3.3. Cousas aínda máis sorprendentes

Actividade proposta

20. Toma 2 cartolinas de cores, cada unha dunha cor distinta (por exemplo, vermella e azul) e recorta en cada unha delas 3 rectángulos do mesmo tamaño. Pega eses rectángulos entre si de modo que un sexa vermello-vermello, outro azul-azul e outro vermello-azul. Mete as 3 cartolinas así preparadas nun sobre e saca unha ao chou, con coidado de non amosar nada máis que un lado. Pregunta a un compañeiro que "*adiviñe*" a cor da cara que está oculta. Repite o proceso con todos os compañeiros. Escribe os resultados do experimento nunha táboa como esta que copies no teu caderno:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Oculto																														
Aposta																														
Sae																														
Acerta?																														

Que observas? É mellor dicir que a cor oculta é o mesmo que a visible? Ou é peor?

Exemplos

1.- O paradoxo de *Bertrand*

En 1889 *Joseph Bertrand* propuxo o seguinte experimento: temos tres caixas nas que introducimos nunha unha moeda de prata e unha de bronce; noutra, dúas moedas de prata e noutra dúas moedas de bronce. As moedas de prata e bronce son indistinguibles ao tacto. Elíxese unha caixa ao chou e sácase unha moeda dunha delas. Vese que a moeda é de prata. De que material cres que é a outra moeda da caixa, prata ou bronce?

En principio pensamos que como vemos unha moeda de prata, pode tratarse da caixa que contén dúas moedas de prata ou a que ten unha de cada tipo. Por iso, nos inclinamos a pensar que a probabilidade de que a outra moeda sexa de prata ou de bronce é a mesma: 1/2.

Se pensamos un pouco máis veremos que este problema é, en realidade, equivalente á actividade proposta coa que comezamos esta sección. En lugar de termos cartolinas con cores diferentes temos caixas con moedas de materiais diferentes. As matemáticas do problema son as mesmas nos dous casos. Así que, se fixeches a actividade anterior, agora terás argumentos para decidir que o máis probable é que a outra moeda da caixa sexa de prata.

En efecto, o que se elixe ao chou é a caixa. A probabilidade de ter elixido unha caixa con dúas moedas iguais é 2/3, mentres que a probabilidade de elixir a caixa que ten unha moeda de cada tipo é soamente 1/3. Por iso o máis probable é que teñamos elixido unha caixa coas dúas moedas iguais. Como vemos que unha é de prata o mellor que podemos dicir é que a outra tamén o é.

Este é un exemplo típico de probabilidade condicionada, aínda que non o parece.

2.- O problema de *Monty Hall*

Monty Hall era o presentador do concurso da televisión americana *Let's have a deal!* Nese concurso había un premio final onde se amosaban tres portas. Detrás dunha delas había un coche e en cada unha das outras dúas había unha cabra. Claro, os concursantes o que querían era levar o coche.

Monty Hall procedía sempre do mesmo modo:

- Dicía ao concursante que elixira unha porta: a A, a B ou a C.
- Unha vez elixida a porta polo concursante abría unha das que non elixira e amosaba que detrás dela había unha cabra.
- Dáballe ao concursante a oportunidade de cambiar a súa elección ou manterse co que elixira ao principio.

(Inciso antes de seguir lendo: ti que farías?, cambiarías?, manterías a túa elección?, dá igual?, é mellor unha cosa cá outra?).

Como ensina unha porta cunha cabra, o coche está ou na que elixe o concursante ou na outra, en principio ao 50 %. En realidade, a probabilidade non é do 50 %, como veremos agora.

Marilyn vos Savant é unha persoa que presumía (e gañaba a vida utilizándoo) de ter o récord *Guinness* de cociente intelectual. Escribía unha columna na revista *Parade* e nela dixo que a mellor estratexia era cambiar a elección despois que *Monty Hall* amosase a cabra. Tras a publicación desta columna numerosos matemáticos escribiron á revista queixándose de semellante erro. Para todos era obvio que a probabilidade de acerto, tanto se cambiaba a elección como se non o facía, era 1/2.

A polémica resolveuna *Paul Erdös* (un matemático húngaro, un pouco raro, que non tiña un domicilio fixo nin un traballo estable, pero que publicou un montón de resultados matemáticos) dando razón a *vos Savant*, para sorpresa de moitos. Si, algúns matemáticos (mesmo algúns importantes) equivocáranse ao calcular probabilidades. Non pasa nada, todos cometemos erros.

Volvemos ao problema. Vas ver que simple é o razoamento. En realidade, hai 3 casos: "elixes a porta do coche" "elixes a da cabra 1" ou "elixes a da cabra 2". O importante é que realizas esta elección ANTES que *Monty Hall* che ensine nada.

- Supoñamos que elixiches a porta co coche. *Monty Hall* ensinarache a cabra 1 ou a cabra 2. Se cambias, perdes. Se non cambias, gañas.
- Supoñamos que elixes a porta coa cabra 1. *Monty Hall* ensinarache a cabra 2. Se cambias gañas: só queda a porta que oculta ao coche. Se non cambias, perdes.
- Supoñamos que elixes a porta coa cabra 2. *Monty Hall* ensinarache a cabra 1. Se cambias gañas: só queda a porta que oculta ao coche. Se non cambias, perdes.

Así, cambiando a túa elección despois que *Monty Hall* abra a porta gañarás 2 de cada 3 veces. Sorprendido?

CURIOSIDADES. REVISTA

Pascal e Fermat

Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1655) mantiveron unha interesante correspondencia durante o ano 1654 que se podería considerar o inicio da Teoría da Probabilidade malia tratarse de problemas de xogos e apostas. Son problemas propostos polo Cabaleiro da Mérè que non era matemático.

Un é éste:

Un xogador aposta unha bolsa de moedas a que saca polo menos un 6 en 8 lanzamentos dun dado. Tirou xa o dado 3 veces sen sacar ningún 6 e decide deixar o xogo, que parte da bolsa lle correspondería?

Ti sabes resolvelo. Fai un diagrama en árbore e calcula en primeiro lugar a probabilidade que ten o xogador de gañar e a que ten de perder nun principio.

Cada tirada é un suceso independente (non depende do que se obtivese nas anteriores) así que, segundo Fermat, se o xogador renuncia a unha xogada ten dereito a 1/6 da bolsa.

Se renuncia a 2 lanzamentos, entón debe ser indemnizado con 1/6 + 5/36.

A ruleta

William Jaggers chegou a Montecarlo cuns poucos francos no peto e, durante un mes anotou os números que saían en cada ruleta, e en catro días gañou dous millóns catrocentos mil francos. *Jaggers* conseguiu quebrar á banca en *Montecarlo* analizando as frecuencias relativas de cada número da ruleta e observando que se desgastara algo do mecanismo dunha delas co que todos os valores non tiñan igual probabilidade. Apostou aos números máis probables e gañou.

O Cabaleiro da *Meré*

Ao *Cabaleiro da Meré* gustáballe xogar e era un gran xogador por iso sabía que era favorable apostar, ao tirar un dado, "sacar polo menos un 6 en 4 tiradas dun dado" e que non o era ao tirar dous dados ou "sacar polo menos un 6 dobre en 24 xogadas".

Vese que xogara moito para saber que as frecuencias relativas lle dicían que o primeiro suceso tiña unha probabilidade superior a 0,5, e o segundo a tiña inferior. Pero non o comprendía. Non era matemático e só sabía a regra de tres. Isto non é unha proporcionalidade! Dixo 6 : 4 = 36 : 24. Pero as frecuencias relativas dicíanlle que non era así, polo que escribiu a *Pascal* para que lle solucionara o problema.

Ti xa sabes o suficiente para solucionalo. Antes de seguir lendo, intenta resolvelo.

En lugar de calcular a probabilidade de *sacar polo menos un 6* en 4 tiradas, calcula a probabilidade de non *sacar un 6*, que é o seu suceso contrario, e é $\left(\frac{5}{6}\right)^4$. Polo tanto a probabilidade de *sacar polo menos un 6* en 4 tiradas é:

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.5177 > 0.5.$$

Calculamos do mesmo modo a probabilidade de sacar *polo menos un seis dobre* ao tirar dous dados 24 veces, calculando a do seu suceso contrario, a de non *sacar ningún seis dobre*: $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$, polo que sacar polo menos un 6 dobre é:

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0.4914 < 0.5.$$

Canto debeu xogar o *Cabaleiro da Meré* para darse conta desa pequena diferenza nas probabilidades!

Se queres saber máis, busca:

http://www.miscelaneamatematica.org/Misc34/caballero.pdfhttp://www.miscelaneamatematica.org/Misc34/caballero.pdf

O inicio da Teoría da Probabilidade, como sabes, foron os xogos de azar.

Galileo

No século XVI formulou o seguinte problema: ao tirar tres dados, por que é máis probable obter que a suma das caras superiores sexa 10 a que sexa 9?

Continuaba a reflexión coas posibles descomposicións nesas sumas:

$9 = 3 + 3 + 3 \quad 10 = 4 + 3 + 3$

$9 = 4 + 3 + 2 \quad 10 = 4 + 4 + 2$

$9 = 4 + 4 + 1 \quad 10 = 5 + 3 + 2$

$9 = 5 + 2 + 2 \quad 10 = 5 + 4 + 1$

$9 = 5 + 3 + 1 \quad 10 = 6 + 2 + 2$

$9 = 6 + 2 + 2 \quad 10 = 6 + 3 + 1$

En ambos os casos hai 6 descomposicións posibles, porén, tirando moitas veces os 3 dados comprobaba que é máis probable sacar un 10.

Se fas un diagrama en árbore comprobarás que todas esas descomposicións non son igualmente probables.

Por exemplo: (3, 3, 3) ten unha probabilidade de 1/216, mentres que a suma 6 + 2 + 2, pode saír con tres sucesos (6, 2, 2), (2, 6, 2) e (2, 2, 6), logo a súa probabilidade é 3/216.

- Calcula as probabilidades de cada unha das sumas e a de sacar 10 e a de sacar 9.

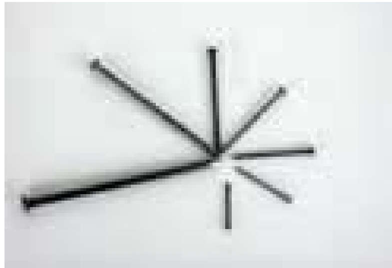
RESUMO

Concepto	*Definición*	*Exemplos*
Experimento aleatorio	O resultado depende do azar.	Tirar unha moeda ou un dado.
Suceso elemental	Cada un dos posibles resultados dun experimento aleatorio.	Cara ou cruz serían sucesos elementais no experimento "tirar unha moeda e observar o resultado".
Espazo dunha mostra	Conxunto de casos posibles.	{cara, cruz}. {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
Suceso	Subconxunto do espazo dunha mostra.	{2, 4, 6}.
Lei de *Laplace*	Se os sucesos elementais son equiprobables entón $P(S)=\dfrac{\text{número de casos favorables ao suceso } S}{\text{número de casos posibles}}$	Ao tirar un dado: *P* (sacar 3) = 1/6. P (sacar múltiplo 2) = 3/6.
Combinatoria	Utiliza a combinatoria (combinacións, variacións, variacións con repetición…) para contar ben os casos favorables e os posibles.	A probabilidade de ter póker nunha baralla francesa é: $P(póker) = \dfrac{13 \cdot 12}{C_{52,2}}$
Diagrama en árbore	Problemas moi difíciles que podes resolver representando un diagrama en árbore.	
Suceso contrario	O suceso contrario de S (S^c) verifícase se non se verifica S. $P(S^C) = 1 - P(S)$.	Suceso contrario de sacar par é: {1, 3, 5} = 1 – 3/6 = 1/2.
Sucesos independentes	Dous sucesos son independentes se a probabilidade de que se verifique un, non queda afectada por que se teña verificado o outro.	A probabilidade de sacar un 3 ao tirar un dado e volver tiralo.
Intersección de sucesos	Se A e B son independentes: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. En xeral $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$.	Nunha baralla española a probabilidade de sacar dous ases é (4/40) · (3/39).
Probabilidade condicionada	$P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$	Probabilidade de sacar un as tendo xa sacado outro as sen substitución é 3/39.
Unión de sucesos	Se A e B son incompatibles $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. En xeral $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.	Nunha baralla española a probabilidade de sacar un as ou ben un ouro é: (4/40) + (10/49) – (1/40) = 13/40.

EXERCICIOS E PROBLEMAS

1. Nunha clase hai 15 mozos e 18 mozas. Como non se presenta ninguén para ser delegado faise un sorteo. Cal é a probabilidade de que na clase haxa delegada?

2. No moedeiro temos 8 moedas de 1 céntimo, 3 moedas de 5 céntimos, 8 moedas de 10 céntimos e 5 moedas de 50 céntimos. Sacamos unha moeda ao chou, cal é a probabilidade de que a cantidade obtida sexa un número par de céntimos?



3. Nunha caixa temos mesturados 50 cravos de 2 cm de longo, 30 cravos de 3 cm, 35 cravos de 2.5 cm e 60 cravos de 3.5 cm. Sacamos ao chou un cravo da caixa (asúmese que todos os cravos teñen a mesma probabilidade de ser elixidos). Que probabilidade hai de que o cravo extraído teña a menor lonxitude?

4. Nun instituto de mil estudantes hai 700 que falan inglés, 400 que falan francés, 50 que falan alemán, 200 que falan inglés e francés, 30 que falan inglés e alemán, 10 que falan francés e alemán e 5 que falan os tres idiomas. Elíxese un estudante ao chou. Cal é a probabilidade de que fale soamente unha lingua estranxeira?

5. A ruleta francesa consta dos números que van do 0 ao 36. Se sae 0 gaña a banca. Decidimos apostar a "*par*" (gañaremos se sae un número par non nulo). Que probabilidade temos de gañar á aposta? E se apostamos a 7? E se apostamos a un número impar?

6. Unha bolsa contén 7 bólas brancas, 5 bólas vermellas e 3 bólas negras. Extráense dúas bólas ao mesmo tempo. Cal é a probabilidade de que sexan unha branca e unha negra?

7. Unha bolsa contén 10 bólas brancas, 9 bólas vermellas e unha bóla negra. Extráese unha bóla da bolsa. Despois sácase unha segunda bóla sen volver meter na bolsa a primeira. Cal é a probabilidade de que tras a segunda extracción teñamos unha bóla branca e unha bóla negra?

8. Unha bolsa contén 15 bólas brancas, 4 bólas vermellas e unha bóla negra. Extráese unha bóla da bolsa. Despois sácase unha segunda bóla, sen volver meter na bolsa a primeira. Cal é a probabilidade de que a primeira bóla sexa branca e a segunda negra?

9. Unha bolsa contén 15 bólas brancas, 4 bólas vermellas e unha bóla negra. Extráese unha bóla da bolsa. Tras mirar de que cor é introdúcese na bolsa de novo. Sácase unha segunda bóla. Cal é a probabilidade de que a primeira bóla sexa branca e a segunda negra?

10. Unha bolsa contén 15 bólas brancas, 4 bólas vermellas e unha bóla negra. Extráese unha bóla da bolsa. Tras mirar de que cor é introdúcese na bolsa de novo. Sácase unha segunda bóla. Cal é a probabilidade de que as dúas veces teña saído a bóla negra?

11. Unha bolsa contén 15 bólas brancas, 4 bólas vermellas e unha bóla negra. Extráese unha bóla da bolsa. Tras mirar de que cor é, introdúcese na bolsa de novo. Sácase unha segunda bóla. Cal é a probabilidade de que as dúas veces teña saído unha bóla branca?

12. Na lotería primitiva unha aposta consiste en marcar 6 casas de entre 49 posibles. O día do sorteo extráense 6 bólas (de entre 49). Cal é a probabilidade de que a túa aposta coincida coa combinación gañadora? Cal é a probabilidade de que acertes un número? E a de que acertes 2 números?

13. Repártense ao chou 5 cartas dunha baralla española. Cal é a probabilidade de que teñas 4 cartas do mesmo número?

14. Nunha xogada repártense 5 cartas. Cal é a probabilidade de conseguir tres ases e dous reis? Cal é a probabilidade de ter tres cartas iguais? E unha parella? E de ter tres cartas iguais e as outras dúas tamén iguais entre si?

15. Nunha xogada repártense 5 cartas. Chámase *escaleira de cor* unha xogada composta por 5 cartas do mesmo pau ordenadas consecutivamente. Calcula a probabilidade de obter unha escaleira de cor de trevos.

16. Nunha xogada repártense 5 cartas. Chámase *cor* unha xogada composta por 5 cartas do mesmo pau que non son consecutivas. Calcula a probabilidade de obter *cor* de trevos.

17. Considera o experimento aleatorio "mesturar unha baralla, cortar e mirar a cor das dúas cartas que quedaron arriba". Cal é a probabilidade de que ambas as dúas teñan a mesma cor?

18. Temos unha caixa con 12 bólas vermellas e 8 bólas brancas. Sácase unha bóla ao chou. Se é branca vólvese meter na caixa. Se é vermella déixase fóra. Nestas condicións sácase outra bóla da caixa. Que probabilidade hai de que esta bóla sexa vermella?

19. Nun caixón temos 10 calcetíns: 6 negros e 4 brancos. Sacamos, sen mirar, dous calcetíns do caixón. Que é máis probable, que sexan ambos da mesma cor ou que sexan de cores distintas?

20. Elabora unha árbore de probabilidades para calcular a probabilidade de obter *dobre parella* de ases e de treses nunha xogada de 5 cartas de póker. (*Dobre parella* consiste en 2 pares de cartas do mesmo valor, diferentes entre si, e unha carta indiferente, de valor distinto aos dous anteriores. Por exemplo, AA 33 Q).

21. No moedeiro teño 7 moedas dun céntimo, 4 de 5 céntimos, 6 de 10 céntimos, 5 de 20 e 7 de 50 céntimos. Saco 3 moedas ao chou. Cal é a probabilidade de que obteña un número impar de céntimos?

22. O 60 % dunha determinada poboación fuma, o 30 % é hipertenso, e o 12 % fuma e é hipertenso. Utiliza estas frecuencias para obter probabilidades e determina se ser hipertenso é dependente ou independente de fumar. Cal é a probabilidade condicionada de que unha persoa fumadora sexa hipertensa?

23. Un analista deportivo, que se equivoca o 10 % das veces, dixo que o noso equipo favorito vai gañar a liga. O analista da competencia, que se equivoca o 20 % das veces, dixo que o noso equipo favorito non vai gañar a liga. Á vista destas análises. Que probabilidade hai de que o noso equipo gañe a liga?

24. Unha compañía de produtos avícolas empaqueta ducias de ovos en tres lugares diferentes. O 60 % da produción ten lugar na planta A, o 30 % en B e o resto en C. Un control de calidade dinos que un 5 % dos paquetes elaborados en A, un 7 % dos de B e un 10 % dos de C conteñen algún ovo roto. Que probabilidade hai de que nos toque unha ducia de ovos con algún ovo roto?

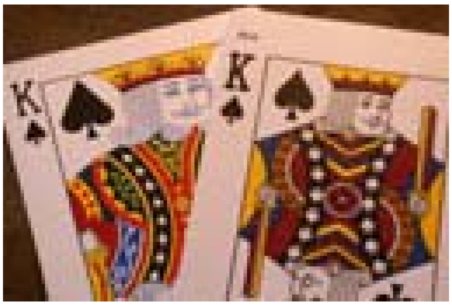
25. Nun caixón teño un par de calcetíns vermellos, un par de calcetíns negros e un par de calcetíns brancos. Ao facer a maleta, coas présas, collo 3 calcetíns sen mirar. Que probabilidade teño de ter collido 2 da mesma cor?

26. Faise un estudo de consumo nunha poboación. Descóbrese que ao 70 % das persoas ás que lles gusta a marmelada de laranxa tamén lles gusta a de grosella e que ao 80% das persoas ás que lles gusta a marmelada de grosella tamén lles gusta a de laranxa. Ao 40 % desa poboación non lle gusta nin a marmelada de laranxa nin a de grosella. Elíxese ao chou unha persoa desa poboación. Cal é a probabilidade de que lle gusten ambas as marmeladas?

27. Na lotería primitiva apóstanse 6 números de entre 49. Xogando a dúas apostas, cal é a probabilidade de que che toque un premio de 5 acertos máis complementario?

28. Nun instituto hai Bacharelato e Formación Profesional. En Bacharelato estudan 1/3 dos estudantes e o resto faino en Formación Profesional. A cuarta parte dos estudantes de Bacharelato e a sexta parte dos Formación Profesional utiliza un medio de transporte para ir ao instituto. O resto chega camiñando. Elíxese ao chou un estudante dese instituto. Que probabilidade hai de que vaia á clase utilizando un medio de transporte?

29. Un tafur xoga cunha baralla trucada de 40 cartas. Saca unha carta, míraa, volve metela na baralla e mestura. Repite este procedemento outras 2 veces máis. A baralla está preparada de tal modo que o feito de que unha das tres cartas vistas sexa unha figura ten unha probabilidade de 19/27. Cantas figuras ten a súa baralla?



30. Unha bolsa contén 10 bólas vermellas e 5 bólas negras. Extráese ao chou unha delas e substitúese por dúas da outra cor. Tras isto extráese unha segunda bóla. Que probabilidade hai de que a segunda bóla sexa negra? Que probabilidade hai de que a segunda bóla sexa da mesma cor que a primeira?

31. No comedor escolar a probabilidade de que non haxa patacas unha semana é 2/5; a probabilidade de que haxa peixe é 2/5 e a probabilidade de que haxa patacas e peixe é 1/10. Calcula a probabilidade de que non haxa nin patacas nin peixe. Calcula a probabilidade de que non haxa peixe sabendo que houbo patacas.

32. Nunha clase hai 20 alumnos e 10 alumnas. Fórmanse equipos de traballo de 6 persoas. Calcula a probabilidade de formar un equipo: a) con unicamente mozas, b) con 3 mozas, c) con unicamente mozos, d) con polo menos 3 mozas.

33. Aínda que pareza unha casualidade, por ter o ano 365 días, é moi probable que nunha clase de 35 alumnos haxa dous que celebren o seu aniversario o mesmo día. Calcula esta probabilidade. O mesmo se a clase ten 20 estudantes.

34. Utiliza a táboa para obter unha táboa de continxencia sobre os accidentes de tráfico:

	En estrada (C)	**En zona urbana (U)**	**Total**
Con vítimas (V)	34 092	32 295	66 387
Só danos materiais (D)	11 712	20 791	32 503
Total	45 804	53 086	98 890

Calcula P(V); P(D); P(C); P(U); P(V $\cap$ C); P(D $\cap$ U); P(U/V); P(V/U); P(V/C); P(C/V); P(C/D). Sábese que houbo un accidente na estrada, cal é a probabilidade de que tivese vítimas? Son independentes os sucesos do accidente con vítimas e accidente na estrada?

35. Realízanse estudos sobre unha determinada enfermidade e coñécese que a probabilidade de que unha persoa a teña é de 0.04. Unha determinada proba detecta se unha persoa está enferma cunha probabilidade de 0.97 pero tamén cualifica como enferma, en ocasións, a unha persoa sa cunha probabilidade de 0.01. Representa esta situación nun diagrama en árbore. Constrúe a táboa de continxencia asociada. Calcula a probabilidade de que unha persoa sa sexa detectada como enferma.

36. No control de calidade dun proceso de fabricación sábese que a probabilidade de que un circuíto sexa defectuoso é 0.02. Un dispositivo para detectar os defectuosos ten unha probabilidade de detectalos de 0.9 pero tamén cualifica como defectuosos a 0.03 dos correctos. Representa esta situación nun diagrama en árbore. Constrúe a táboa de continxencia asociada. Calcula a probabilidade de que un circuíto defectuoso sexa cualificado como correcto.

37. Nunha clase hai 25 alumnas e 15 alumnos e sábese que o 80 % das alumnas aproban as matemáticas mentres que as aproban o 60 % dos alumnos. Utiliza estas porcentaxes para asignar probabilidades e calcula a probabilidade que hai ao elixir unha persoa da clase ao chou de que:

a) Sexa alumna e aprobe as matemáticas.

b) Sexa alumna ou aprobe as matemáticas.

c) Sexa alumno e suspenda matemáticas.

d) Teña aprobado as matemáticas.

38. Estúdanse as familias de tres fillos. Para simplificar facemos a hipótese de que a probabilidade de mozo sexa igual á de moza. Calcula a probabilidade dos seguintes sucesos:

a) A = O primeiro fillo é moza.

b) B = polo menos hai un home.

c) A $\cup$ B.

d) A $\cap$ B.

39. Nunha bolsa hai 3 bólas verdes, 4 bólas vermellas e unha bóla branca. Sacamos dúas bólas da bolsa. Calcula a probabilidade dos sucesos: A = "algunha das bólas é verde", B = "saíu a bóla branca". Calcula tamén: P(A^c), P(B^c), P(A $\cup$ B) e P($A^c \cap$ B). Son A e B sucesos incompatibles? Son sucesos independentes?

40. Dados os sucesos A e B de probabilidades: P(A^c) = 3/5; P(A $\cap$ B) = 1/8; P(B $\cup$ A) = 3/4; calcula as seguintes probabilidades: P(A); P(B); P(B^c); P(B/A^c); P($A^c \cap B^c$); P(A/B). Son A e B sucesos independentes?

41. Determina se son compatibles ou incompatibles os sucesos A e B tales que:

a) $P(A) = 1/7$; $P(B) = 3/7$; $P(B \cup A) = 4/7$;

b) $P(A) = 1/5$; $P(B) = 0$;

42. Dados os sucesos A e B de probabilidades: $P(A^c) = 2/5$; $P(B) = 3/5$; $P(A^c \cap B^c) = 1/5$; calcula as seguintes probabilidades: $P(A)$; $P(B^c)$; $P(B \cup A)$; $P(B/A^c)$; $P(A \cap B)$; $P(A/B)$. Son A e B sucesos independentes?

43. Dous tiradores ao prato teñen unhas marcas xa coñecidas. O primeiro acerta cunha probabilidade de 0.8 e o segundo de 0.6. Lánzase un prato e ambos os dous disparan. Expresa mediante un diagrama de árbore e a táboa de continxencia asociada as distintas posibilidades. Calcula: a) Que probabilidade hai de que, polo menos, un dos tiradores dea no prato? b) Probabilidade de que ningún acerte? c) Sabemos que o disparo acertou no branco, cal é a probabilidade de que o fixera o primeiro tirador?

44. Disponse de dos urnas A e B. A urna A ten 7 bólas verdes e 3 amarelas. A urna B ten 5 bólas verdes e 7 amarelas. Sácase unha bóla ao chou dunha das dúas urnas, tamén ao chou, e resulta ser amarela. Calcula a probabilidade de que sexa da urna B. (*Axuda*: Representa as posibilidades mediante un diagrama en árbore, escribe a táboa de continxencia asociada e o outro diagrama en árbore).

45. Sábese que, en certa poboación, a probabilidade de ser home e daltónico é un décimo e a probabilidade de ser muller e daltónica é 1/20. A proporción de persoas de ambos os sexos é a mesma. Elíxese unha persoa ao chou.

a) Calcular a probabilidade de que non sexa daltónico.

b) Se a persoa elixida é muller, calcular a probabilidade de que sexa daltónica.

c) Cal é a probabilidade de que a persoa elixida padeza daltonismo?

46. En certo instituto ofrécese informática e teatro como asignaturas optativas. O grupo A consta de 35 estudantes e o B ten 30 estudantes. O 60% do grupo A elixiu teatro, así como o 40 % do grupo B e o resto elixiu informática.

a) Se se pregunta a un estudante elixido ao chou, calcular a probabilidade de que teña elixido informática.

b) Se un estudante elixiu teatro, calcula a probabilidade de que pertenza ao grupo B.

47. Nunha baralla española de corenta cartas elimináronse varias cartas. Sábese que a probabilidade de extraer un as entre as que quedan é 0.1, a probabilidade de que saia unha copa é 0.3 e a probabilidade de que non sexa nin as nin copa é 0.6.

a) Calcular a probabilidade de que a carta extraída sexa as ou copa.

b) Calcular a probabilidade de que a carta sexa o as de copas. Pódese afirmar que entre as cartas que non se eliminaron está o as de copas?

48. Nunha cidade na que hai dobre número de homes que de mulleres, hai unha epidemia. O 10% dos homes e o 5 % das mulleres están enfermos. Elíxese ao chou un individuo. Calcular a probabilidade de:

a) Que sexa home.
b) Que estea enfermo.
c) Que sexa home, sabendo que está enfermo.

AUTOAVALIACIÓN

1. Nunha bolsa hai 6 bólas negras e 3 bólas brancas, a probabilidade de sacar unha bóla negra é:

a) 1/2 b) 2/3 c) 1/3 d) 5/9

2. Indica cal dos seguintes experimentos non é un experimento aleatorio:

a) Tirar un xiz e anotar o número de anacos nos que rompe.

b) Tirar un dado trucado e anotar o número da cara superior.

c) Cruzar unha rúa e estudar se hai un atropelo.

d) Calcular o consumo de gasolina dun coche.

3. O espazo dunha mostra de tirar 3 moedas ao aire e anotar se caen en cara (C) ou en cruz (X) con sucesos elementais equiprobables é:

a) {CCC, CCX, CXX, XXX} b) {3C, 2C, 1C, 0C}

c) {CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX} d) {CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC}

4. O suceso contrario a sacar polo menos unha cara no experimento anterior é:

a) {XXX} b) {CCC, CCX, CXX} c) {CXX, XCX, XXC} d) {CCC, CCX, CXC, XCC}

5. Indica cal dos seguintes sucesos non son independentes:

a) Sacar un ouro e sacar un rei con substitución.

b) Tirar unha moeda e sacar cara e volver tirala e volver sacar cara.

c) Tirar un dado e sacar 6 e volver tiralo e volver sacar 6.

d) Tirar un dado e sacar un múltiplo de 2, e sacar un 6.

6. A probabilidade de non sacar un as nunha baralla de póker é:

a) 4/52 b) 48/52 c) 36/40 d) 1 – 36/40

7. A probabilidade de que a suma das caras superiores sexa 7 do experimento tirar dous dados é:

a) 1/6 b) 7/36 c) 5/36 d) 2/3

8. Nunha bolsa hai 7 bólas vermellas e 4 brancas. Sácase unha bóla ao chou e se é branca vólvese meter na bolsa, mentres que se é vermella déixase fóra. Sácase outra bóla da bolsa, a probabilidade de que sexa vermella é:

a) 42/110 b) 28/121 c) 371/605 d) 411/605

9. Nunha bolsa hai 4 bólas vermellas e 3 brancas. Sacamos sen mirar dúas bólas. A probabilidade de que sexan da mesma cor é:

a) 1/7 b) 2/7 c) 3/7 d) 4/7

10. Ao lanzar un dado saíu un número par, a probabilidade de que sexa un 6 é P (sacar 6/ a par):

a) 1/3 b) 1/6 c) 2/5 d) 3/6