Matemáticas orientadas ás ensinanzas aplicadas

4º A da ESO

Versión en galego

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

www.apuntesmareaverde.org.es

Textos Marea Verde

I.S.B.N. - 13: 978-84-697-0275-8

I.S.B.N. - 10: 84-697-0275-0

Matemáticas orientadas ás ensinanzas aplicadas

4ºA ESO
Capítulo 1:
Números reais

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

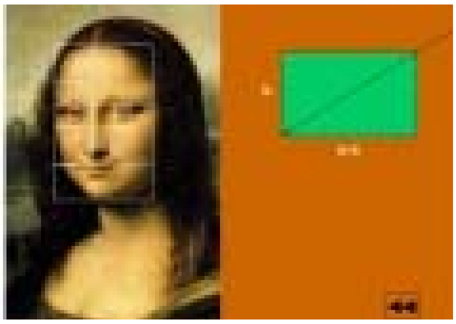
Índice

Resumo

Xa coñeces os números naturais, os números enteiros e os números racionais. Neste capítulo imos estudar os números reais que están formados polos números racionais e os irracionais.

Con algúns números reais irracionais xa te atoparas, como con $\sqrt{2}$, ou con π… Pero hai moitos, moitos máis. Hai moitos máis números irracionais que racionais. E preguntaraste, como se pode dicir iso se son infinitos? Resulta que hai uns infinitos máis grandes que outros. Ao infinito dos números naturais chámaselle "*infinito numerable*". O infinito dos números enteiros e o dos números racionais tamén é "*infinito numerable*", pero o dos números reais xa non é numerable, é moito maior, é denominado "*a potencia do continuo*".

O número de ouro na Gioconda



Unha das propiedades máis importantes dos números reais é a súa relación cos puntos dunha recta, polo que aprenderemos a representalos na recta "*real*" na que non deixan "buratos".

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Neste primeiro capítulo imos repasar moitas cosas que xa coñeces, como as operacións cos números, representar os números nunha recta, as potencias… se todo iso o dominas suficientemente, o mellor é que pases moi á présa por el, e dediques o teu tempo a outros capítulos que che resulten máis novos. Porén, seguro que hai pequenos detalles que si poden resultarche novos, como por exemplo que os números irracionais, xunto cos números racionais, forman o conxunto dos *números reais*, e que a cada número real lle corresponde un punto da recta (propiedade que xa tiñan os números racionais) e a cada punto da recta lle corresponde un número real. Por iso, á recta numérica imos chamala *recta real*.

Empezamos cun problema para que midas o que recordas sobre operacións con fraccións:

Actividades propostas

1. *As perlas do raxá*: Un raxá deixoulles á súas fillas certo número de perlas e determinou que o reparto se fixera do seguinte modo. A filla maior tomaría unha perla e un sétimo do que quedara. A segunda filla recibiría dúas perlas e un sétimo do restante. A terceira moza recibiría tres perlas e un sétimo do que quedara. E así sucesivamente. Feita a división cada unha das irmás recibiu o mesmo número de perlas. Cantas perlas había? Cantas fillas tiña o raxá?

1. DISTINTOS TIPOS DE NÚMEROS

1.1. Operacións con números enteiros, fraccións e decimais

Operacións con números enteiros

Recorda que:

Os números **naturais** son: $\mathbb{N}$ = **{1, 2, 3 …}**.

Existen ocasións da vida cotiá nas que é preciso usar números diferentes dos números naturais. Fíxate nestes exemplos:

Exemplos:

- Se se teñen 20 € e se gastan 30 euros, terase unha débeda de 10 euros, é dicir –10 €.
- Cando vai moito frío, por exemplo 5 graos baixo cero, indícase dicindo que fai –5 °C.
- Ao baixar no ascensor ao soto 3, baixaches ao andar –3.

Os **números enteiros** son unha ampliación dos números **naturais** ($\mathbb{N}$). Os números enteiros **positivos** son os números naturais e escríbense precedidos do signo +: +1, +2, +3, +4, +5… Os enteiros **negativos** van precedidos do signo –: –1, –2, –3… O **cero** é o único número enteiro que non é nin negativo nin positivo e non leva signo.

O conxunto dos números enteiros represéntase por $\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z}$ = **{… –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3 …}.**

Recorda que:

Para **sumar** (ou restar) números enteiros podemos sumar por un lado todos os números enteiros positivos e os negativos polo outro, restando o resultado.

Exemplo:

- Se *a, b* e *c* son números enteiros entón:

$$8ab^2c - 5ab^2c + 2ab^2c - 6ab^2c = 10ab^2c - 11ab^2c = -ab^2c$$

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Para **multiplicar** ou dividir números enteiros tense en conta a regra dos signos.

Exemplo:

- (+5) · (+4) = +20 (–3) · (–5) = +15 (+5) · (–4) = –20 (–6) · (+5) = –30

Actividades propostas

2. Realiza as seguintes operacións:

a) +8 + (–1) · (+6) b) –6 + (–7) : (+7) c) +28 – (–36) : (–9 –9)

d) $+11ab + (+7) \cdot (+6ab - 8ab)$ e) $-7a^2b - [+4a^2b - (-6a^2b) : (+6)]$ f) +9 + [+5 + (–8) · (–1)]

3. Utiliza a xerarquía de operacións para calcular no teu caderno:

a. 6 · (– 5) – 3 · (–7) + 20 b. –8 · (+5) + (–4) · 9 + 50

c. (–3) · (+9) – (–6) · (–7) + (–2) · (+5) d. –(–1) · (+6) · (–9) · (+8) – (+5) · (–7)

Operacións con fraccións

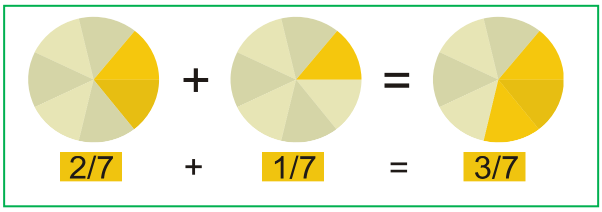
Recorda que:

Unha ***fracción*** é unha expresión da forma $\frac{m}{n}$ onde tanto *m* como *n* son números enteiros. Para referírmonos a ela dicimos *"m partido por n"*; *m* recibe o nome de ***numerador*** e *n* o de ***denominador***.

As fraccións cuxo numerador é maior có denominador reciben o nome de **fraccións impropias**. As fraccións cuxo numerador é menor có denominador reciben o nome de **fraccións propias.**

Para **sumar** ou restar fraccións que teñen o **mesmo denominador** realízase a suma, ou a resta, dos numeradores e mantense o mesmo denominador.

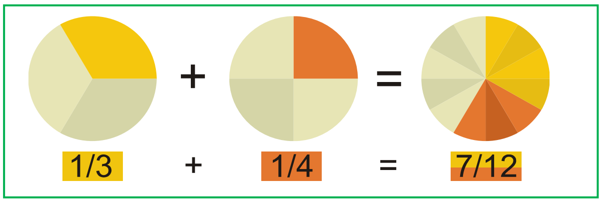
Para sumar ou restar fraccións con **distinto denominador**, redúcense a común denominador, buscando o mínimo común múltiplo dos denominadores.



Exemplos:

- a) $\frac{2}{7}+\frac{1}{7}=\frac{3}{7}$

- b) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$



Os denominadores son diferentes, 3 e 4. O seu mínimo común múltiplo é 12. Ao dividir 12 entre 3 dános 4 e ao facelo entre 4 obtemos 3.

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7}{12}$$

Actividades propostas

4. Efectúa as seguintes operacións con fraccións:

a) $-\frac{5}{3}-\frac{7}{2}$ b) $\frac{4}{7}+\frac{(-7)}{9}$ c) $\frac{(-9)}{5}+\frac{(-1)}{8}$ d) $\frac{7}{2}+\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{9}{8}\right)$

e) $\left(\frac{7}{2}+\frac{5}{3}\right)\cdot\frac{9}{8}$ f) $\frac{7}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}+\frac{9}{8}\right)$ g) $\frac{15}{2}:\frac{5}{4}$ h) $\frac{6}{5}:\frac{1}{5}$ i) $15:\frac{3}{5}$

5. Simplifica as seguintes fraccións:

a) $\left(\frac{x-1}{2}+\frac{x+2}{3}\right)\cdot\frac{9}{x}$ b) $\frac{x+1}{x^2-1}$ c) $\frac{x^2-6x+9}{x-3}:\frac{x-3}{x+2}$ d) $\frac{a^2-4}{a^2}\cdot\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a-2}\right)$

Operacións con expresións decimais

Unha **expresión decimal** consta de dúas partes: a súa **parte enteira**, o número que está á esquerda da coma, e a súa **parte decimal**, o que se encontra á dereita da coma.

Observa que:

A coma pódese escribir arriba: 3’5 (aínda que actualmente a RAG o considera falta de ortografía), ou abaixo: 3,5, ou tamén se utiliza un punto: 3.5. Neste capítulo imos utilizar o punto.

Para **sumar ou restar** expresións decimais basta conseguir que teñan o mesmo número de cifras decimais.

Exemplo:

a) 24.7 + 83.15 – 0.05 = 24.70 + 83.15 – 0.05 = 107. 80 b) 53.39 – 56 + 0.06 = 53.45 – 56.00 = –2.55

Para **multiplicar** dúas expresións decimais, multiplícanse ignorando a coma que posúe cada unha delas. Ao resultado dese produto pónselle unha coma para que xurda unha expresión decimal cunha parte decimal de lonxitude igual á suma das cantidades de cifras decimais que teñen as expresións decimais multiplicadas.

Exemplo:

- $5.7a \cdot 3.2a \cdot 7.14a = 130.2336a^3$

Para **dividir** expresións decimais igualamos o número de cifras decimais de ambos os números e logo dividimos.

Exemplo:

- $\frac{9.3}{4.81}=\frac{9.30}{4.81}=\frac{930}{481}=1.9$

Actividades propostas

6. Realiza as operacións:

a) $31.3+5.97$ b) $3.52\cdot 6.7$ c) $11.51-4.8$ d) $19.1-7.35$

e) $4.32+32.8+8.224$ f) $46.77-15.6+2.3$ g) $1.16\cdot 3.52$ h) $3.2\cdot 5.1\cdot 1.4$

i) $2.3\cdot 4.11\cdot 3.5$ j) $4\cdot(3.01+2.4)$ k) $5.3\cdot(12+3.14)$ l) $3.9\cdot(25.8-21.97)$

1.2. Números racionais. Fraccións e expresións decimais

Toda expresión decimal exacta, ou periódica, pode poñerse como fracción.

Unha expresión **decimal exacta** convértese na fracción cuxo numerador coincide co número decimal, tras eliminar a coma, e o denominador é o número 1 seguido de tantos ceros como cifras tiña a parte decimal do número en cuestión.

Exemplo:

- $93.15 = 93 + \frac{15}{100} = \frac{9315}{100}$

Para escribir en forma de fracción unha expresión **decimal periódica** como, por exemplo, *N* = 1.725252525…, temos que conseguir dous números coa mesma parte decimal para que ao restar desaparezan os decimais:

$$N = 1.7252525\ldots$$
$$1\,000N = 1\,725.2525\ldots$$
$$10N = 17.2525\ldots$$
$$Se\ restamos: 990N = 1\,708 \Rightarrow N = \frac{1\,708}{990} = \frac{854}{495}$$

Para isto multiplicamos o *N* de forma que a coma quede despois do primeiro período, neste caso despois de 1 725. Tamén multiplicamos o *N* de maneira que a coma quede ao principio do primeiro período, neste caso detrás de 17. Agora 1 000*N* e 10*N* teñen a mesma parte decimal (infinita) que se restamos desaparece, e podemos despexar *N*.

Actividades propostas

7. Escribe en forma de fracción as seguintes expresións decimais e redúceas. Comproba coa calculadora que está ben:

a) 7.92835; b) 291.291835; c) 0.23; d) 2.353535…..

e) 87.2365656565….; f) 0.9999…..; g) 26.5735735735…..

Todas as fraccións teñen expresión decimal exacta ou periódica.

Recorda que:

Se o denominador (da fracción irredutible) só ten como factores primos potencias de 2 ou 5 a súa expresión decimal é exacta.

Exemplo:

- $\frac{1}{2^3 \cdot 5} = 5^2 \cdot 10^{-3} = 0.025\ xa\ que\ \frac{10^3}{2^3 \cdot 5} = 5^2$, e isto é xeral xa que sempre haberá unha potencia de 10 que sexa múltiplo do denominador se este só contén douses ou cincos. Fíxate que o número de decimais é o maior dos expoñentes de 2 e 5.

Se o denominador (da fracción irredutible) ten algún factor primo que non sexa nin 2 nin 5 a fracción terá unha expresión decimal periódica.

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Exemplo:

- Se dividimos 1 entre 23 obtemos un primeiro resto que é 10, logo outro que é 8 e seguimos, pero, repetirase algunha vez o resto e, polo tanto, as cifras do cociente? A resposta é que si, seguro que si, os restos son sempre menores có divisor, neste caso do 1 ao 22, se eu obteño 22 restos distintos (como é o caso) ao sacar un máis ten que repetirse! É o chamado *Principio do Pombal*. E a partir de aí os valores do cociente repítense. Polo tanto, a expresión decimal é periódica e o número de cifras do período é como máximo unha unidade inferior ao denominador (non sempre ocorre isto 1/23 ten un período de 22 cifras, 1/97 teno de 96 cifras porén 1/37 ten un período de só 3 cifras).

Chámanse **números racionais** aqueles cuxa expresión decimal é finita ou periódica e son representados por $\mathbb{Q}$. Acabamos de ver que se poden escribir en forma de fracción polo que se pode definir o conxunto dos números racionais como:

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}; a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}.$$

Por que impoñemos que o denominador sexa distinto de cero? Observa que non ten sentido unha fracción de denominador 0.

Actividades propostas

8. Mentalmente decide cales das seguintes fraccións teñen unha expresión decimal exacta e cales a teñen periódica.

a) 1/3 b) 7/5 c) 11/30 d) 3/25 e) 9/8 f) 7/11

9. Calcula a expresión decimal das fraccións do exercicio anterior e comproba se a túa dedución era correcta.

1.3. Números irracionais. Expresión decimal dos números irracionais

Existen outros números cuxa expresión decimal é infinita non periódica. Xa coñeces algúns: π, $\sqrt{2}$ … Cando os gregos demostraron que existían números como $\sqrt{2}$, ou como o número de ouro, que non se podían poñer en forma de fracción e que tiñan, polo tanto, infinitas cifras decimais non periódicas, pareceulles algo insólito. Por iso estes números recibiron ese estraño nome de "*irracionais*". Non o podían entender dentro da súa filosofía. O interesante é que existe unha lonxitude que mide exactamente $\sqrt{2}$ que é a diagonal de cadrado de lado 1 ou a hipotenusa do triángulo rectángulo isósceles de catetos 1.

O método para demostrar que $\sqrt{2}$ non se pode escribir en forma de fracción denomínase "redución ao absurdo" e consiste en supoñer que si se pode, e chegar a unha contradición. Este procedemento serve igual para **todas as raíces non exactas**, como con $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ …

Pero non vale para todos os irracionais. Para demostrar que π é un número irracional hai que estudar moito. Está relacionado co interesante problema da *cuadratura do círculo*. Foi demostrado a finais do século XVIII por *Lambert*. Ata ese momento aínda se seguían calculando decimais para atopar un período que non ten.

Estes números cuxa expresión decimal é infinita e non periódica denomínanse **números irracionais**.

Chámase **números reais** ao conxunto formado polos números racionais e os números irracionais.

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Con estes números temos resolto o problema de poder medir calquera lonxitude. Esta propiedade dos números reais coñécese co nome de *completitude*.

A cada número real correspóndelle un punto da recta e a cada punto da recta correspóndelle un número real.

Observa que tamén a cada número racional lle corresponde un punto da recta, pero non ao contrario, pois $\sqrt{2}$ é un punto da recta que non é racional.

Actividades propostas

10. Debuxa un segmento de lonxitude $\sqrt{2}$. O Teorema de *Pitágoras* pode axudarche, é a hipotenusa dun triángulo rectángulo isósceles de catetos 1. Mídeo cunha regra. A súa lonxitude non é 1.4 pois $(1.4)^2$ é distinto de 2; non é 1.41 pois $(1.41)^2$ é distinto de 2; nin 1.414 pois $(1.414)^2$ é distinto de 2; e porén $(\sqrt{2})^2 = 2$.

11. Calcula a expresión decimal aproximada de $\sqrt{2}$. Vimos que non é un número racional polo que non pode ter unha expresión decimal finita, ou periódica, de modo que a súa expresión decimal ten infinitas cifras que non se repiten periodicamente. E porén puideches debuxalo exactamente (ben como a diagonal do cadrado de lado 1 ou ben como a hipotenusa do triángulo rectángulo isósceles de catetos 1).

1.4. Distintos tipos de números

Notación:

$\in$ significa "pertence a".

$\cup$ significa "unión".

$\subset$ significa "incluído en".

$\cap$ significa "intersección".

Xa coñeces distintos tipos de números:

Naturais ➔ $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Son os números que se usan para contar e ordenar. O 0 non soe considerarse un número natural.

Enteiros ➔ $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Son os números naturais, os seus opostos e o cero. Non teñen parte decimal, de aí o seu nome. Inclúen os Naturais.

Os números que se poden expresar en forma de cociente de dous números enteiros son denominados números **racionais** e represéntanse coa letra $\mathbb{Q}$. Polo tanto,

Racionais➔ $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}; a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}$

Os números racionais inclúen os enteiros.

Tamén conteñen os números que teñen expresión decimal exacta (0.12345) e os que teñen expresión decimal periódica (7.01252525…) pois poden escribirse en forma de fracción.

Os números como $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$ π… son os números **irracionais** e teñen unha expresión decimal infinita non periódica. Xunto cos números racionais forman o conxunto dos números reais. Polo tanto,

Irracionais ➔ $\mathrm{I} = \Re - \mathbb{Q}$.

Son números irracionais aqueles números que non poden poñerse como fracción de números enteiros. Hai máis dos que podería parecer (de feito hai máis que racionais!), son todos aqueles que teñen unha expresión decimal que non é exacta nin periódica, é dicir, **infinitas cifras decimais e sen período.**

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Exemplos: 17.6766766676… que acabo de inventar ou 0.1234567891011… que inventou *Carmichael*. Inventa un, busca en Internet e se non o atopas, pois é teu (por agora ☺).

Reais ➔ $\Re = \mathrm{Q} \cup \mathrm{I}$.

É a unión dos números racionais e dos irracionais.

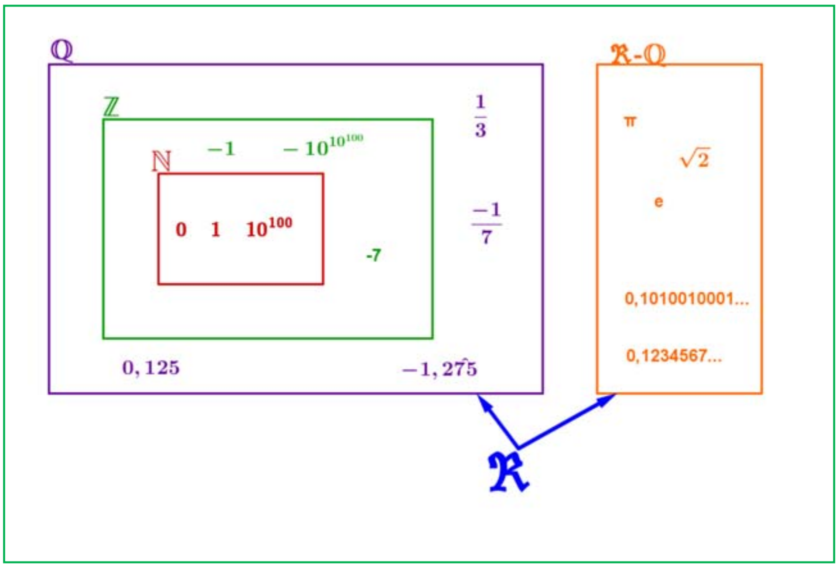
Temos polo tanto que:

$$\mathrm{N} \subset \mathrm{Z} \subset \mathrm{Q} \subset \Re.$$

$$\mathrm{I} \subset \Re$$

Son estes todos os números?

Non, os reais forman parte dun conxunto máis amplo que é o dos Números Complexos C (en 1º de Bacharelato estúdanse na opción de Ciencias).

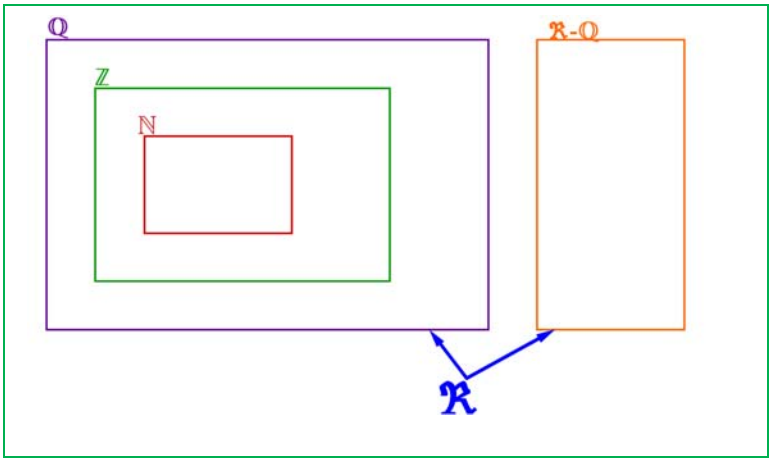


Actividades propostas

12. Copia no teu caderno a táboa adxunta e sinala cun X a que conxuntos pertencen os seguintes números:

Número	N	Z	Q	I	$\Re$
–7.63					
$\sqrt[3]{-8}$					
0.121212…					
π					
1/2					
1.99999…					

13. Copia no teu caderno o esquema seguinte e coloca os números do exercicio anterior no seu lugar:



14. Podes demostrar que 4.99999… = 5?, canto vale 2.5999…? Escríbeos en forma de fracción.

15. Cantas cifras pode ter como máximo o período de $\frac{1}{53}$?

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

2. POTENCIAS

2.1. Repaso das potencias de expoñente natural

Recorda que:

Para calcular a **potencia** de expoñente un número natural e de base un número calquera multiplícase a base por si mesma tantas veces como indique o expoñente.

Exemplos:

- a) $(+2)^4 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) = +16$ b) $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$

  c) $(1/2)^3 = (1/2) \cdot (1/2) \cdot (1/2) = 1/8$ d) $(\sqrt{2})^4 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 2 = 4$

Convén ter en conta algunhas particularidades que nos axudan a abreviar o cálculo:

As potencias de **base negativa** e expoñente **par** son números positivos.

As potencias de **base negativa** e expoñente **impar** son números negativos

$$(-2)^2 = +4$$
$$(-2)^3 = -8$$

- ***Exemplos:***

$(-5)^2 = +25$

$(-5)^3 = -125$

Actividades propostas

16. Calcula:

a) $1)^{7345}$ b) $(-1)^{7345}$ c) $(-4)^2$ d) $(-4)^3$ e) $(1/2)^3$ f) $(\sqrt{2})^6$

2.2. Potencias de expoñente fraccionario

Se o expoñente é, por exemplo, –2, non sabemos multiplicar algo *menos dúas* veces. Tampouco sabemos multiplicar algo por si mesmo *cero* veces. Agora a definición anterior non nos serve. As definicións que se van dar van manter as propiedades que coñecemos das operacións con potencias de expoñente natural, que van seguir sendo válidas.

Defínese: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ e defínese $a^0 = 1$

En efecto, $\frac{a^3}{a^3} = 1$ e $\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0$. Para que continúen verificándose as propiedades das operacións con potencias defínese $a^0 = 1$.

Recorda

Sempre se verifica que:

$b^m \cdot b^n = b^{m+n}$

$c^m : c^n = c^{m-n}$

$((d)^m)^n = d^{m \cdot n}$

Tamén $\frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^2}$ e $\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}$. Para que continúen verificándose as propiedades das operacións con potencias defínese $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

17. Expresa como única potencia:

a) $(-4/3)^3 \cdot (-4/3)^2 \cdot (-4/3)^{-8}$ b) $(1/9)^{-5} \cdot (1/9)^4 \cdot (1/9)^{-2}$

c) $(5/4)^8 \cdot (-2/3)^8 \cdot (-3/5)^8$ d) $(-3/5)^{-4} \cdot (-8/3)^{-4} \cdot (-5/4)^{-4}$

18. Calcula: a) $(-3/5)^{-4}$ b) $(-4/7)^{-2}$ c) $\frac{(7^4 \cdot (-2)^4 \cdot 3^4)^3}{(9^2 \cdot 4^2 \cdot 7^2)^3}$ d) $\frac{3^2 \cdot \frac{4^5}{9^5}}{(-2) \cdot 4^5}$ e) $\frac{\left(\frac{-2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{-9}{6}\right)^3}{\left(\frac{3}{8}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^6}$

2.3. Operacións con radicais

A raíz enésima dun número *a* é un número *x* que, ao elevalo a *n*, dá como resultado *a*.

$$\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a.$$

A **raíz cadrada** dun número real non negativo *a é* un *único* número non negativo *x* que elevado ao cadrado nos dá *a*:

$$\sqrt{a} = x \Leftrightarrow x^2 = a,\ a \geq 0,\ x \geq 0.$$

Observa que $\sqrt{-1}$ non existe no campo real. Ningún número real ao elevalo ao cadrado dá un número negativo. Só podemos calcular raíces de expoñente par de números positivos. Porén $\sqrt[3]{-1}$ = –1 si existe, pois (–1) · (–1) · (–1) = –1.

Observa que: $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x^{\frac{n}{n}} = x$, polo que se define:

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

Exemplo:

- $5^{2/3} = \sqrt[3]{5^2}$

Podemos **operar** con radicais utilizando as mesmas propiedades das potencias de expoñente fraccionario.

Exemplo:

- $\sqrt[3]{8 \cdot 27 \cdot 64} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{64} = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$
- $\sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{243}} = \frac{2}{3}$
- $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[3 \cdot 2]{64} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$
- $x^{2/3} \cdot y^{1/3} = \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x^2 \cdot y}$
- $\frac{x^{\frac{7}{4}}}{x^{\frac{5}{3}}} = \frac{\sqrt[4]{x^7}}{\sqrt[3]{x^5}} = \frac{x \cdot \sqrt[4]{x^3}}{x \cdot \sqrt[3]{x^2}} = \frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x^2}}$

Recorda

Hai operacións con radicais que non están permitidas.

10 = $\sqrt{100}$ = $\sqrt{64+36}$ que é distinto de:

$\sqrt{64}$ + $\sqrt{36}$ = 8 + 6 = 14.

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

En ocasións é posible **extraer factores** dun radical.

Exemplo:

- $\sqrt[3]{x^5} = \sqrt[3]{x^3 \cdot x^2} = x \cdot \sqrt[3]{x^2}$
- $\sqrt{2^4 \cdot 3^3 \cdot 5} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 5} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3 \cdot 5} = 12 \cdot \sqrt{15}$

Actividades propostas

19. Simplifica os radicais $\sqrt[4]{3^{12}}$, $\sqrt[10]{9^{15}}$ usando potencias de expoñente fraccionario.

20. Calcula $\sqrt{484}$ e $\sqrt[3]{8\,000}$ factorizando previamente os radicandos.

21. Calcula e simplifica: $\sqrt{3}\,(12\sqrt{3} - 7\sqrt{3} + 6\sqrt{3})$

22. Calcula $25^{0.5}$; $64^{\frac{3}{5}}$ e $\left(7^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{5}{2}}$

23. Expresa en forma de radical: a) $(-5)^{4/5}$ b) $27^{1/3}$ c) $7^{2/3}$

2.4. Notación científica

Un número expresado en **notación científica** está formado por un número decimal cuxa parte enteira está entre 1 e 9, multiplicado por 10^n, sendo n un número enteiro positivo ou negativo.

$$a \cdot 10^n \quad \text{sendo} \quad 1 \le a \le 9$$

Se o expoñente ***n*** é positivo utilízase para expresar números grandes e se o expoñente ***n é*** negativo para expresar números pequenos.

Exemplo:

- $7\,810\,000\,000\,000 = 7.81 \cdot 10^{12}$ $0.000000000038 = 3.8 \cdot 10^{-11}$
- $500\,000 = 5 \cdot 10^5$ $0.00002 = 2 \cdot 10^{-5}$
- Hai galaxias que están a 200 000 000 000 000 km de nós, e escribímolo $2 \cdot 10^{14}$.
- A masa dun electrón é aproximadamente de 0.000000000000000000000000000911 gramos, que se escribe como $9.11 \cdot 10^{-28}$.

Actividades resoltas

- Na lenda do xadrez utilizamos números moi grandes. Se non nos interesa tanta aproximación, senón facérmonos unha idea unicamente do grande que é, podemos usar a notación científica.

Unha aproximación para o número de grans de trigo da casa 64 é $9 \cdot 10^{18}$, co que nos facemos unha idea mellor do enorme que é que co número: 9 223 372 036 854 775 808 que dá un pouco de mareo.

- Escribe en notación científica: 2^{16}, 2^{32} e 2^{64}

$2^{16} = 65\ 536 \approx 6.5 \cdot 10^4$

$2^{32} = 4\ 294\ 967\ 296 \approx 4.29 \cdot 10^9$

$2^{64} = 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 616 \approx 1.8 \cdot 10^{19}$

Actividades propostas

24. Escribe en notación científica:

a) 400 000 000 b) 45 000 000 c) 34 500 000 000 000 d) 0.0000001 e) 0.00000046

Operacións con notación científica

Para realizar **sumas e restas**, con expresións en notación científica, transfórmase cada expresión decimal de maneira que se igualen os expoñentes de 10 en cada un dos termos.

Exemplo:

- Para calcular $4 \cdot 10^8 + 2.3 \cdot 10^6 - 6.5 \cdot 10^5$ expresamos todos os sumandos coa mesma potencia de 10, elixindo a menor, neste caso 10^5:$4\ 000 \cdot 10^5 + 23 \cdot 10^5 - 6.5 \cdot 10^5$. Sacamos factor común: $10^5 \cdot (4\ 000 + 23 - 6.5) = 4\ 016.5 \cdot 10^5 = 4.0165 \cdot 10^8$

O **produto** (ou o **cociente**) de dúas expresións en notación científica é o resultado de multiplicar (ou de dividir) os números decimais e sumar (ou restar) os expoñentes de base 10.

Exemplo:

- $2.5 \cdot 10^5 \cdot 1.36 \cdot 10^6 = (2.5 \cdot 1.36) \cdot 10^{5+6} = 3.4 \cdot 10^{11}$
- $5.4 \cdot 10^9 : 4 \cdot 10^7 = (5.4 : 4) \cdot 10^{9-7} = 1.35 \cdot 10^2$
- Para facer o cociente para calcular 2^{63} dividindo 2^{64} entre 2 en notación científica:

  $2^{63} = 2^{64} / 2 = 1.8 \cdot 10^{19} / 2 = 0.9 \cdot 10^{19} = 9 \cdot 10^{18}$.

Usa a calculadora

As calculadoras utilizan a notación científica. Moitas calculadoras para escribir $9 \cdot 10^{18}$ escriben 9e+18.

25. Utiliza a túa calculadora para obter 2^{16}, 2^{32} e 2^{64} e observa como dá o resultado.

26. Utiliza a calculadora para obter a túa idade en segundos en notación científica.

Actividades propostas

27. Efectúa as operacións en notación científica:

a) $0.000481 + 2.4 \cdot 10^{-5}$ b) $300\ 000\ 000 - 5.4 \cdot 10^6 + 7.2 \cdot 10^5$

c) $(2.9 \cdot 10^5) \cdot (5.7 \cdot 10^{-3})$ d) $(3.8 \cdot 10^{-8}) \cdot (3.5 \cdot 10^6) \cdot (8.1 \cdot 10^{-4})$

e) $(4.8 \cdot 10^{-8}) : (3.2 \cdot 10^{-3})$ f) $(6.28 \cdot 10^{-5}) \cdot (2.9 \cdot 10^2) : (3.98 \cdot 10^{-7})$

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

3. REPRESENTACIÓN NA RECTA REAL DOS NÚMEROS REAIS

3.1. Representación de números enteiros e racionais

Recorda que:

Para representar un número enteiro na recta numérica trázase unha recta horizontal na que se marcan o cero, que se denomina orixe, e o 1. Divídese a recta en segmentos iguais, de lonxitude 1. Represéntanse os números positivos a partir do cero á dereita e os números negativos a partir do cero á esquerda.

–5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4

Desta forma quedan ordenados os números enteiros. Canto máis á dereita estea un número situado na recta numérica é maior, e canto máis á esquerda estea situado é menor.

Exemplo 6:

- Representa nunha recta numérica e ordena os números enteiros seguintes:

–2, 0, 4, –1, 8, –7, –3 e 1

–8 –7 –6 –5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4 5 6 7 8

Orden de menor a maior: –7 < –3 < –2 < –1 < 0 < 2 < 4 < 8.

Orden de maior a menor: 8 > 4 > 2 > 0 > –1 > –2 > –3 > –7.

Actividades propostas

28. Representa nunha recta numérica no teu caderno os seguintes números e ordénaos de menor a maior: –9, 7, 6, –5, 9, –2, –1, 1 e 0.

29. Representa nunha recta numérica no teu caderno os seguintes números e ordénaos de maior a menor: +1, –4, –8, +9, +4, –6, –7

30. *Pitágoras* viviu entre o 569 a. C. e o 475 a. C. e *Gauss* entre o 1777 e o 1855, que diferenza de séculos hai entre ambas as datas?

31. Representa graficamente e ordena en sentido crecente, calcula os opostos e os valores absolutos dos seguintes números enteiros: 10, –4, –7, 5, –8, 7, –6, 0, 8.

Para representar unha fracción na recta numérica:

Distinguimos entre fraccións propias e impropias.

En calquera caso, debemos recordar como se divide un segmento en partes iguais.

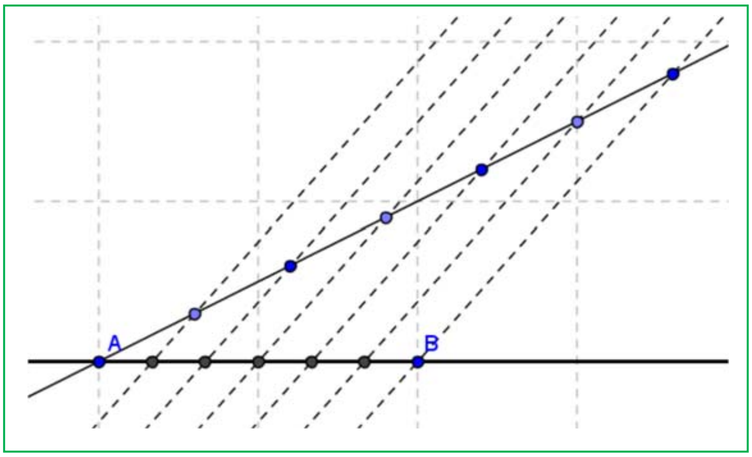
Actividades resoltas

- Se a fracción é **propia** (numerador menor có denominador, valor menor que 1), por exemplo $\frac{5}{6}$ bastará con dividir a primeira unidade en 6 partes iguais e tomar 5. En caso de ser negativa contaremos cara á esquerda (ver figura).

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

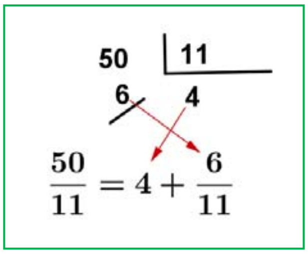
Dividir un segmento en parte iguais

Para dividir o segmento AB en, por exemplo, 6 partes iguais, trazamos por A unha liña auxiliar oblicua calquera, abrimos o compás unha abertura calquera e marcamos 6 puntos na recta anterior a distancia igual. Unimos o último punto con B e trazamos paralelas que pasen polos puntos intermedios da recta oblicua. Polo *Teorema de Tales*, o segmento AB quedou dividido en 6 partes iguais. Para representar 5/6, tomamos 5 desas partes.



Normalmente non che esixirán que o fagas tan exacto, faralo de forma aproximada, pero ten coidado en que as partes parezan iguais.

- Se a fracción é **impropia** (o numerador maior que o denominador e polo tanto valor maior que 1) faremos a división enteira (sen decimais) quedando co cociente e o resto. Isto permítenos poñela en forma mixta (suma dun enteiro e dunha fracción propia). Así, por exemplo, $\frac{50}{11} = 4 + \frac{6}{11}$ xa que ao dividir 50 entre 11 obtemos 4 de cociente e 6 de resto. O *cociente é a parte enteira e o resto o numerador da fracción propia*.



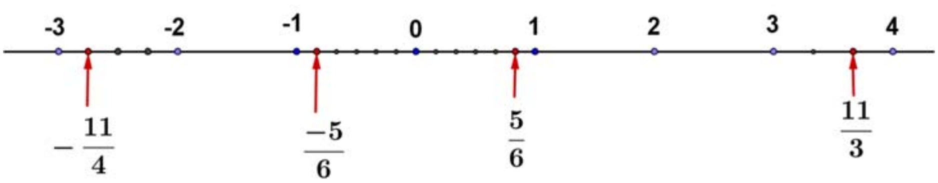
Para representala só temos que ir onde di a parte enteira (4) e a unidade seguinte (a que vai do 4 ao 5) dividímola en 11 partes iguais e tomamos 6.

- Outro exemplo: $\frac{17}{7} = 2 + \frac{3}{7}$, pois a división dá 2 de cociente e 3 de resto.

Imos ao 2, dividimos a unidade seguinte (do 2 ao 3) en 7 partes iguais e tomamos 3.

- **En caso de ser negativa**: $-\frac{11}{4} = -\left(2 + \frac{3}{4}\right) = -2 - \frac{3}{4}$, farase igual pero contando cara á esquerda.

  Imos ao –2, a unidade que vai do –2 ao –3 divídese en 4 partes e tomamos 3 (pero contando do –2 ao –3, claro!).



Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

32. Representa na recta numérica os seguintes números: $\frac{7}{6}; \frac{-17}{4}; 2.375; -3.\overset{\frown}{6}$

33. Representa na recta numérica 6.5; 6.2; 3.76; 8.43; 8.48; 8.51 e 8.38.

34. Ordena os seguintes números de maior a menor: +1.47; –4.32; –4.8; +1.5; +1.409; 1.4; –4.308.

3.2. Representación na recta real dos números reais

Elixida a orixe de coordenadas e o tamaño da unidade (ou o que é igual, se colocamos o 0 e o 1) todo número real ocupa unha posición na recta numérica e, ao revés, todo punto da recta pódese facer corresponder cun número real.

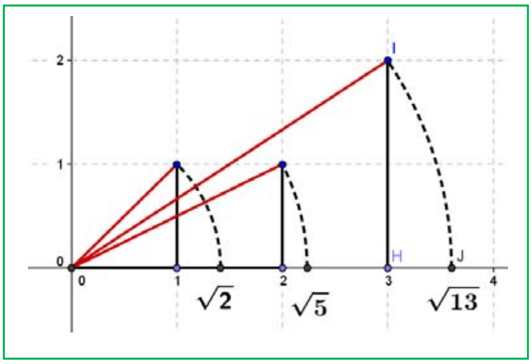
Esta segunda parte é a propiedade máis importante dos números reais e a que os distingue dos números racionais.

Vexamos como representar de forma exacta **algúns** números reais:

Representación na recta das raíces cadradas

Para representar raíces cadradas usamos o *Teorema de Pitágoras*. Se nun triángulo rectángulo a hipotenusa é *h* e os catetos son *a*, *b* temos que $h^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow h = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Actividades resoltas



- Representa na recta $\sqrt{2}$

Se *a* = *b* = 1 temos que $h = \sqrt{2}$. Só temos que construír un triángulo rectángulo de catetos 1 e 1, a súa hipotenusa mide $\sqrt{2}$, (a diagonal do cadrado de lado 1 mide $\sqrt{2}$). Agora utilizando o compás, levamos esa distancia ao eixe X (ver figura).

- Representa na recta $\sqrt{5}$.

Como $\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1^2}$ só hai que construír un triángulo rectángulo de catetos 2 e 1, e a súa hipotenusa mide $\sqrt{5}$.

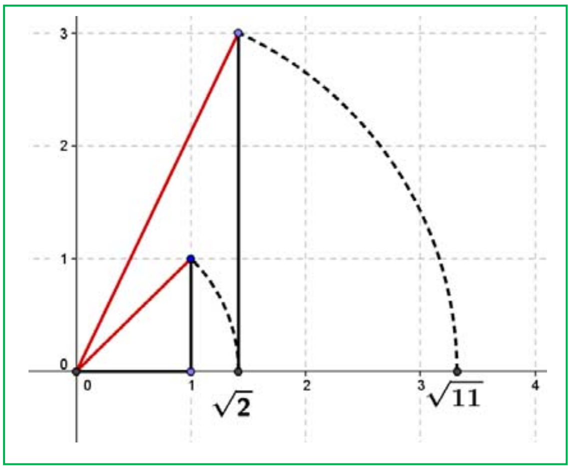
Pillaches o truco?, o radicando hai que expresalo como suma de 2 cadrados. O triángulo rectángulo terá como catetos eses dous números.

- Así, para representar $\sqrt{13}$, expresamos 13 como suma de 2 cadrados: $13 = 9 + 4 = 3^2 + 2^2 \Rightarrow \sqrt{13} = \sqrt{3^2 + 2^2}$ logo nun triángulo rectángulo de lados 3 e 2 a hipotenusa será $\sqrt{13}$.

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

- Pero, e se o número non pode poñerse como suma de 2 cadrados? Por exemplo o 11 (sempre complicando as cousas! ☹).

Haberá que facelo en 2 pasos. 11 = 2 + 9, hai algún número cuxo cadrado sexa 2?, por suposto que si, $\sqrt{2}$. Polo tanto $\sqrt{11}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+3^2}$, temos que facer un triángulo rectángulo de catetos $\sqrt{2}$ e 3. Para iso primeiro constrúese $\sqrt{2}$ como antes e trázase unha perpendicular de lonxitude 3 (ver figura).



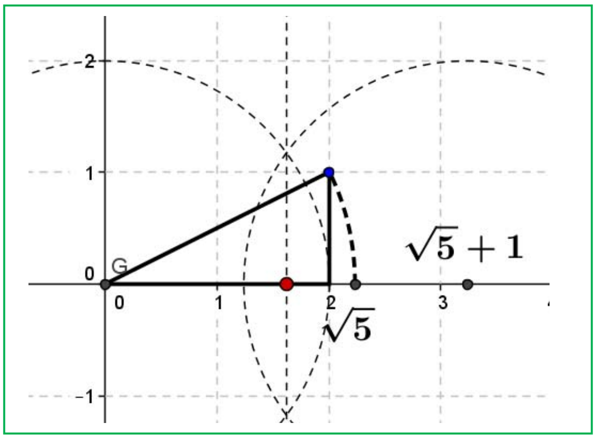
Poden debuxarse xa así todas as raíces?, non. Hai algunhas para as que hai que facer máis pasos ($\sqrt{7}$ por exemplo require 3), pero mellor deixámolo aquí, non?

Actividades resoltas

- Representa na recta numérica de forma exacta o número de ouro $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Oíches falar do número de ouro?

O número de ouro (ou razón áurea ou proporción harmónica ou divina proporción) é igual a $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

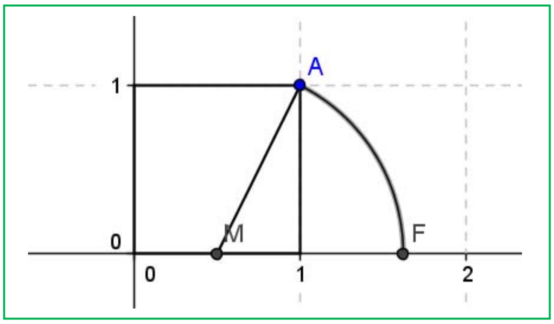


- Como o representamos na recta?

Só hai que construír $\sqrt{5}$ como arriba, sumar 1 (trasladamos 1 unidade co compás) e dividir entre 2 calculando o punto medio (coa mediatriz), feito.

- Outra forma distinta:

Construímos un cadrado de lado 1 (un que?, un o que queiras!). Calculamos o punto medio do lado inferior (*M*) e levamos a distancia *MA* co compás ao eixe horizontal, *OF* é o número de ouro.



Vexamos:

$$MA=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$OF=\frac{1}{2}+MA=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

35. Busca *rectángulo áureo* e *espiral áurea* en Internet.

36. Xa de paso busca a relación entre o *número de ouro* e a *sucesión de Fibonacci*.

37. Busca en Youtube "algo pasa con phi" e cóntasme.

38. Representa na recta numérica de forma exacta:

$$\sqrt{20};\ -\sqrt{8};\ \sqrt{14};\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Densidade dos números reais

Os números reais son **densos**: entre cada dous números reais hai infinitos números reais no medio.

Iso é fácil de deducir, se *a*, *b* son dous números con *a* < *b* sabemos que $a < \frac{a+b}{2} < b$, é dicir, a media está entre os dous números. Como isto podemos facelo as veces que queiramos, pois de aí o resultado.

Curiosamente os racionais son tamén densos nos números reais, así como os irracionais.

Actividades propostas

39. Calcula 3 números reais que estean entre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e 1.

40. Calcula 5 números racionais que estean entre $\sqrt{2}$ e 1.5

41. Calcula 5 números irracionais que estean entre 3.14 e π.

3.3. Ferramenta informática para estudar a proporción áurea

Nesta actividade vaise utilizar o programa *Xeoxebra* para realizar un estudo da proporción áurea.

Un segmento está dividido en dúas partes que están en proporción áurea se a razón entre a lonxitude do segmento e a lonxitude da parte maior coincide coa razón entre a lonxitude da parte maior e a da parte menor.

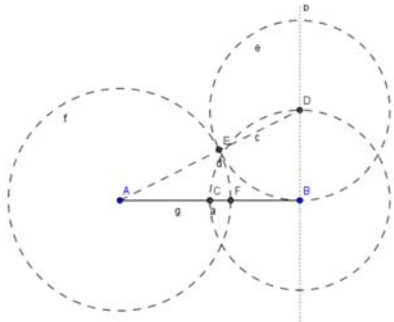
Actividades resoltas

- *Utiliza Xeoxebra para dividir un segmento en dúas partes que estean en proporción áurea.*

Abre unha nova ventá de *Xeoxebra,* no menú **Visualiza** desactiva **Eixes** e **Cuadrícula.**

- Determina con **Novo punto** os puntos *A* e *B* e debuxa o segmento, *a*, que os une.
- Traza un segmento *BD* perpendicular ao segmento *AB* no punto *B*, cuxa lonxitude sexa a metade de *AB,* podes seguir as seguintes instrucións:
  - Calcula o **Punto medio ou centro do** segmento *AB* e chámao *C*.
  - Debuxa con **Circunferencia con centro e punto que cruza** a que ten centro en *B* e pasa por *C*.

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF



- Traza a **Recta Perpendicular** ao segmento *AB* que pase por *B*.
- Define *D* como o **Punto de Intersección** entre esta recta e a circunferencia.

- Debuxa o segmento *AD* e unha circunferencia con centro *D* que pase por *B*. Sexa *E* o **Punto de Intersección** desta circunferencia co segmento *AD*.
- Con centro en *A* traza a circunferencia que pasa por *E* e determina o **punto de Intersección,** *F*, desta circunferencia co segmento *AB*.
- Traza o segmento, *g*, que une os puntos *A* e *F*.
- Comproba que o punto *F* divide ao segmento *AB* en dúas partes que están en proporción áurea:
  - Elixe no menú **Opcións**, 5 **Posicións decimais**.
  - Calcula na liña de **Entrada os** cocientes *a/g e g/(a-g).*

Observa na **Ventá alxébrica** que estes valores coinciden, calculaches un valor aproximado do número de ouro, Φ.

- Coa ferramenta **Despraza**, cambia a posición dos puntos iniciais *A* ou *B* e comproba que o cociente entre as lonxitudes dos segmentos *AF* e *FB* permanece constante.
- Para visualizar mellor a construción podes debuxar os elementos auxiliares con trazo descontinuo, elixindo no menú contextual, **Propiedades e Estilo de trazo**.

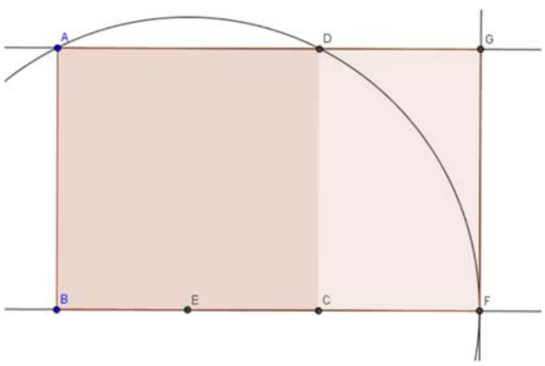
Un rectángulo é áureo se os seus lados están en proporción áurea.

Se a un rectángulo áureo lle quitamos (ou lle engadimos) un cadrado obtemos un rectángulo semellante ao de partida e polo tanto tamén áureo.

Utiliza Xeoxebra para debuxar un rectángulo áureo.

Abre unha nova ventá de *Xeoxebra,* no menú **Visualiza** desactiva **Eixes** e **Cuadrícula.**

- Define dous puntos *A* e *B* que van ser os extremos do lado menor do rectángulo e coa ferramenta **polígono regular** debuxa, a partir dos puntos *A* e *B*, o cadrado *ABCD* e oculta os nomes dos lados coa ferramenta **Expón/Oculta rótulo**.



- Calcula o **Punto medio**, *E*, do lado *BC*. Con centro en *E* debuxa a **Circunferencia** con centro en *E* que pasa por *A*.
- Traza a recta, *a*, que pasa por *BC* e define como *F* o **Punto de intersección** entre esta recta e a circunferencia.
- Debuxa a **Recta perpendicular** á recta *a* que pasa por *F*, e a **recta** que pasa polos puntos *A e D*, chama *G* ao **Punto de intersección** destas rectas e define con **Polígono** o rectángulo *ABFG*.

- Na ventá alxébrica aparecen as lonxitudes dos lados do rectángulo como *f* e *g*, introduce na liña de **Entrada** *g/f* e observa nesta ventá que aparece o valor *e* que é unha aproximación ao número áureo. Elixe no menú **Opcións**, 5 **Posicións decimais.**
- Debuxa o **segmento** *CF*, na ventá alxébrica aparece a súa lonxitude, *h*, introduce na liña de **Entrada** *f/h*, observa que este cociente coincide con *g/f* e é unha aproximación do número áureo.
- Coa ferramenta **Despraza**, cambia a posición dos puntos iniciais *A* ou *B* e observa que o cociente entre as lonxitudes dos lados dos rectángulos é constante.

O rectángulo *ABFG é* áureo xa que o cociente entre a lonxitude do seu lado maior e a do menor é o número de ouro, ademais o rectángulo *DCFG*, que se obtén ao quitar un cadrado de lado o menor do rectángulo, é tamén áureo e polo tanto semellante ao primeiro.

- *Crea as túas propias ferramentas con Xeoxebra. Crea unha que debuxe rectángulos áureos.*

Vaise crear unha ferramenta que a partir de dous puntos *A* e *B* debuxe o rectángulo áureo no que o segmento *AB* é o lado menor.

- Na figura anterior oculta o nome dos puntos *C, D, E, F* e *G* coa ferramenta **Expón/Oculta rótulo** facendo clic co rato sobre eles, na área de traballo ou na ventá alxébrica.
- Activa no menú **Ferramentas**, a opción **Creación de nova ferramenta** e define:

Obxectos de saída: o polígono cadrado, o polígono rectángulo e os puntos *C, D, F*, e *G*.

Obxectos de entrada: os dous puntos iniciais *A* e *B*.

E elixe como **nome da ferramenta** *rectanguloaureo*. Observa que aparece na barra de ferramentas.

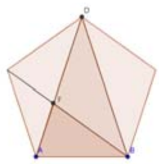
Na opción **Manexo de útiles** do menú **Ferramentas** grava a ferramenta creada como *rectanguloaureo*, que se garda como *rectanguloaureo.ggt*

Utiliza a ferramenta **Desprazamento da zona gráfica** para ir a unha parte baleira da pantalla e comprobar que a ferramenta *rectanguloaureo* funciona perfectamente.

Actividades propostas

42. Comproba que a lonxitude do lado do pentágono regular e a da súa diagonal están en proporción áurea.

43. Calcula con Xeoxebra unha aproximación da razón de semellanza entre un pentágono regular e o que se forma no seu interior ao debuxar as súas diagonais. Determina sen utilizar Xeoxebra o valor real da razón de semellanza entre estes dous pentágonos.



44. Comproba que os triángulos *ABD* e *ABF* da figura son semellantes e calcula aproximadamente con *Xeoxebra* a súa razón de semellanza.

45. Calcula con *Xeoxebra* o valor aproximado da razón de semellanza entre un decágono regular e o decágono que se forma ao trazar as diagonais da figura. Determina sen utilizar Xeoxebra o valor real da razón de semellanza entre estes dous polígonos.

4. INTERVALOS, SEMIRRECTAS E ENTORNOS

Como xa sabemos, entre dous números reais hai infinitos números. Hai unha notación especial para referirse a eses infinitos números que deberás dominar para este e futuros cursos.

4.1. Intervalos. Tipos e significado

(Do lat. *intervallum*): **2.** m. Conxunto da recta real limitado por dous valores. RAG.

Definición:

Un subconxunto de $\mathfrak{R}$ é un intervalo se para calquera par de elementos, *a* e *b*, dese subconxunto se verifica que se $a < x < b$ entón *x* debe pertencer a este subconxunto.

Imos estudar neste apartado intervalos acotados de distintos tipos: os intervalos abertos, os intervalos pechados e os intervalos semiabertos (ou semipechados).

Intervalos abertos

Se nos queremos referir ao conxunto dos números que hai entre dous valores pero sen contar os extremos, usamos un **intervalo aberto.**

Exemplo:

- Os números superiores a 2 pero menores ca 7 represéntanse por (2, 7) e lese "*intervalo aberto de extremos 2 e 7*". A el pertencen infinitos números como 2.001; 3.5; 5; 6.999; … pero non son deste conxunto nin o 2 nin o 7. Iso representan as parénteses, que entran todos os números do medio pero non os extremos.

Exemplo:

- Os números positivos menores que 10 represéntanse por (0, 10), o intervalo aberto de extremos 0 e 10. Fíxate que 0 non é positivo, polo que non entra e o 10 non é menor que 10, polo que tampouco entra.

Nota: *non* se admite poñer (7, 2), o menor sempre á esquerda!

Tamén hai que dominar a expresión destes conxuntos usando desigualdades, prepárate:

$$(2, 7) = \{x \in \mathfrak{R};\ 2 < x < 7\}.$$

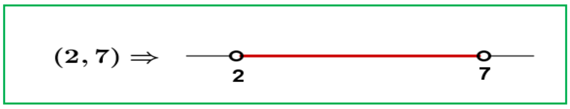
Traducimos: as chaves utilízanse para dar os elementos dun conxunto, dentro delas enuméranse os elementos ou dáse a propiedade que cumpren todos eles. Utilízase o *x* para denotar un número real, a / significa "tal que" (en ocasións utilízase un punto e coma ";" ou unha raia vertical "|") e, por último, dise a propiedade que cumpren mediante unha dobre desigualdade. Así que non te asustes, o de arriba lese: os *números reais tal que son maiores que 2 e menores que 7*.

Usaremos indistintamente varias destas nomenclaturas para que todas che resulten familiares.

É necesario dominar esta linguaxe matemática pois a oración en galego pode non entenderse noutros países pero asegurámosche que iso das chaves e a | enténdeno todos os estudantes de matemáticas do mundo (ben, case todos).

O outro exemplo: $(0, 10) = \{x \in \mathfrak{R};\ 0 < x < 10\}$.

Por último a **representación gráfica**:



Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Póñense **puntos sen encher** nos extremos e resáltase a zona intermedia.

En ocasións tamén se poden poñer no 2 e no 7 parénteses: “( )”, ou corchetes ao revés: “] [“.

Pregunta: Cal é número que está máis preto de 7, sen ser 7?

Pensa que 6.999…=7 e que entre 6.999 e 7 hai “moitos, moitísimos …” números.

Nota:

Nalgúns textos os intervalos abertos represéntanse así:]2, 7[o cal ten algunhas vantaxes como que os estudantes non confundan o intervalo (3, 4) co punto do plano (3, 4), que aseguramos que ocorreu (pero ti non serás un destes, non?), ou a cargante necesidade de poñer (2,3 ; 3,4) porque (2,3,3,4) non o entendería nin Gauss.

Intervalos pechados

Igual que os abertos pero agora si pertencen os extremos.

Exemplo:

- O intervalo dos números maiores ou iguais que –2 pero menores ou iguais que 5. Agora o –2 e o 5 si entran. Faise igual pero poñendo corchetes: [–2, 5].

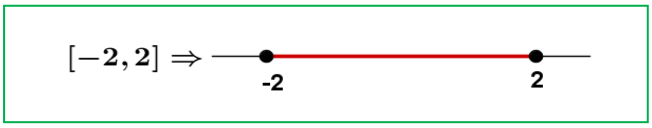
En forma de conxunto escríbese:

$$[-2, 5] = \{x \in \mathfrak{R}; -2 \leq x \leq 5\}.$$

Fíxate que agora poñemos $\leq$ que significa “*menor ou igual*”.

Exemplo:

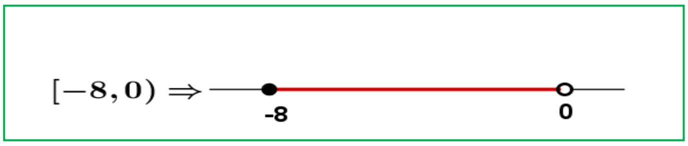
- O intervalo dos números cuxo cadrado non é superior a 4. Se o pensas un pouco verás que son os números entre o –2 e o 2, ambos os dous incluídos (non superior $\Leftrightarrow$ menor ou igual). Polo tanto: $[-2, 2] = \{x \in \mathfrak{R}; -2 \leq x \leq 2\}$.



A representación gráfica é igual pero poñendo **puntos recheos**. En ocasións tamén se pode representar graficamente con corchetes: “[ ]”.

Intervalos semiabertos (ou semipechados, a elixir)

Por suposto que un intervalo pode ter un extremo aberto e outro pechado. A notación será a mesma.



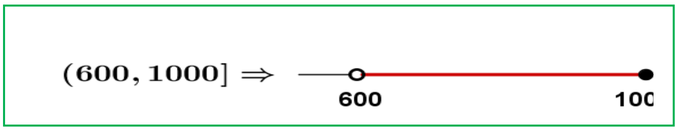
Exemplo:

- Temperatura negativa pero non por debaixo de –8 °C: $[-8, 0) = \{x \in \mathfrak{R}; -8 \leq x < 0\}$.

É o intervalo pechado á esquerda de extremos –8 e 0.

- Números superiores a 600 pero que non excedan de 1 000.

  $(600, 1\,000] = \{x \in \mathfrak{R}; 600 < x \leq 1\,000\}$.



É o intervalo pechado á dereita de extremos 600 e 1 000.

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

4.2. Semirrectas

Moitas veces o conxunto de interese non está limitado por un dos seus extremos.

Exemplo:

- Os números reais positivos: non hai ningún número positivo que sexa o maior. Recórrese entón ao símbolo ∞ e escríbese: $(0, +\infty) = \{x \in \mathfrak{R};\ x > 0\}$.

Nótese que é equivalente poñer $x > 0$ que poñer $0 < x$, pódese poñer de ambas as formas.

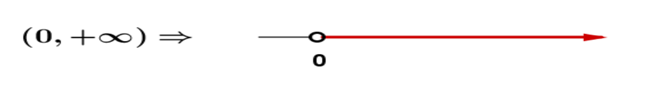
Exemplo:

- Números non maiores que 5: $(-\infty, 5] = \{x \in \mathfrak{R};\ x \leq 5\}$.

Aquí o 5 si entra e por iso o poñemos pechado ("non maior" equivale a "menor ou igual").

Exemplo:

- Solución de $x > 7$: $(7, +\infty) = \{x \in \mathfrak{R};\ x > 7\}$.
  Nota: **o extremo non acoutado sempre se pon aberto**. Non queremos ver isto: $(7, +\infty]$.



As semirrectas tamén son intervalos. Son intervalos non acotados.

Mesmo a recta real é un intervalo: $(-\infty, +\infty) = \{x \in \mathfrak{R};\ -\infty < x < +\infty\} = \mathfrak{R}$.

É o único intervalo non acoutado nin superior nin inferiormente.

Observa que con esta nomenclatura estamos dicindo que $-\infty$ e que $+\infty$ non son números reais.

4.3. Entornos

É unha forma especial de representar os intervalos abertos.

Defínese o entorno de centro a e radio r e denótase E(a, r) (outra forma usual é $E_r(a)$) como o conxunto de números que están a unha **distancia de *a* menor que *r***.

$$\mathbf{E(a, r) = (a - r, a + r)}$$

Observa que un entorno é sempre un intervalo aberto e acoutado.

Cun exemplo enténdelo mellor:

Exemplo:

- O entorno de centro 5 e radio 2 son os números que están de 5 a unha distancia menor que 2. Se o pensamos un pouco, serán os números entre 5 – 2 e 5 + 2, é dicir, o intervalo (3, 7). É como coller o compás e con centro en 5 marcar con abertura 2.

Fíxate que o 5 está no centro e a distancia do 5 ao 7 e ao 3 é 2.

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Exemplo:

- E(2, 4) = (2 – 4, 2 + 4) = (–2, 6)

É moi fácil pasar dun entorno a un intervalo. Imos facelo ao revés.

Exemplo:

- Se teño o intervalo aberto (3, 10), como se pon en forma de entorno?

Calculamos o punto medio $\frac{3+10}{2}=\frac{13}{2}$ = 6.5 que será o centro do entorno. Fáltanos calcular o radio:

(10 – 3) : 2 = 3.5 é o radio (a metade do ancho).

Polo tanto, (3, 10) = E(6.5, 3.5)

En xeral:

O intervalo (*b*, c) é o entorno $E\left(\frac{b+c}{2},\frac{c-b}{2}\right)$.

Exemplo:

- O intervalo (–8, 1) = $E(\frac{-8+1}{2},\frac{1-(-8)}{2}) = E(-3.5, 4.5)$.

Actividades propostas

46. Expresa como intervalo ou semirrecta, en forma de conxunto (usando desigualdades) e representa graficamente:

a) Porcentaxe superior ao 15 %.
b) Idade inferior ou igual a 21 anos.
c) Números cuxo cubo sexa superior a 27.
d) Números positivos cuxa parte enteira ten 2 cifras.
e) Temperatura inferior a 24 °C.
f) Números que estean de 2 a unha distancia inferior a 3.
g) Números para os que existe a súa raíz cadrada (é un número real).

47. Expresa en forma de intervalo os seguintes entornos:

a) E(2, 7) b) E(–3, $\frac{8}{3}$) c) E(–1; 0.001)

48. Expresa en forma de entorno os seguintes intervalos:

a) (1, 7) b) (–5, –1) c) (–4, 2)

49. Os soldos superiores a 500 € pero inferiores a 1 000 € pódense poñer como intervalo de números reais? **Pista:* 600.222333€ pode ser un soldo?

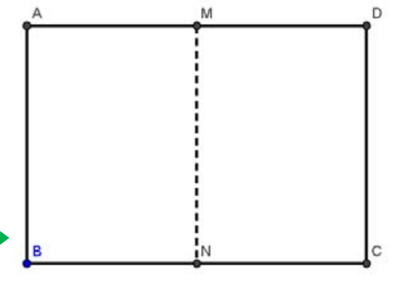
Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

Folios e $\sqrt{2}$

Xa sabemos que un cadrado de lado L ten unha diagonal que vale $\sqrt{2}$ *L*, vexamos algo máis:

A imaxe representa un folio coa norma DIN 476 que é a máis utilizada a nivel mundial.



Esta norma especifica que un folio DIN A0 ten unha superficie de 1 m^2 e que ao partilo pola metade obteremos un DIN A1 que debe ser un rectángulo semellante ao anterior. Partindo o A1 en 2 iguais obtemos o DIN A2, despois o DIN A3 e o DIN A4 que é o máis usado. Todos son semellantes aos anteriores.

Que significa ser semellante?

Pois que $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AM}$, pero AM = AD/2 logo

$$AB^2 = \frac{1}{2}AD^2 \Rightarrow AB = \frac{AD}{\sqrt{2}} \Rightarrow AD = \sqrt{2}AB$$

Polo tanto, nos folios DIN 476 a razón entre o longo e o ancho é $\sqrt{2}$.

Unha táboa

	Longo (cm)	Ancho (cm)	Área (cm^2)
A0	**118.92**	**84.09**	**10000**
A1	**84.09**	**59.46**	**5000**
A2	**59.46**	**44.04**	**2500**
A3	**42.04**	**29.83**	**1250**
A4	**29.73**	**21.02**	**625**
A5	**21.02**	**14.87**	**415.2**

Non queda aquí a cousa, fíxate que ao partir o folio en 2 partes iguais o novo folio ten o lado maior que coincide co lado menor do orixinal: *AB* é agora o lado maior e antes era o menor. Como *AB* = *AD*/$\sqrt{2}$ resulta que a razón de semellanza é $\sqrt{2}$. É dicir, para pasar dun folio A0 a outro A1 dividimos os seus lados entre $\sqrt{2}$. O mesmo para os seguintes.

Calculemos as dimensións:

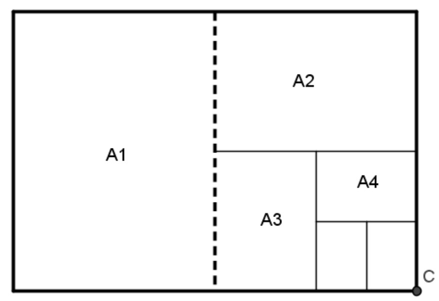
Para o A0 temos que a área é *AD* · *AB* = 1m^2

$$\Rightarrow \frac{AD \cdot AD}{\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow AD^2 = \sqrt{2} \Rightarrow AD = \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2} \approx 1.189 \text{ m;}$$

AB = $\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}} \approx$ 0.841 m. Para obter as medidas do A4 dividimos 4 veces entre $\sqrt{2}$:

Longo = $\frac{\sqrt[4]{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^4} \approx$ 0.297 m = 29.7 cm

Ancho= Longo/$\sqrt{2} \approx$ 0.210 m = 21.0 cm



Cuestións

1) Comproba os valores da táboa anterior (hai polo menos tres valores equivocados ☺)
2) Cantos folios A4 caben nun folio A0?
3) Cales son as dimensións do A6?, e do A7?

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

O número de ouro

Dividimos un segmento en dúas partes de forma que se dividimos a lonxitude do segmento total entre a parte maior debe dar o mesmo que ao dividir a parte maior entre a parte menor.
Temos que $(a + b)/a = a/b$.

O número de ouro (ou razón áurea) chamado Φ (fi) é precisamente o valor desa proporción, así:

$$\Phi = \frac{a}{b};\ \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \Rightarrow 1 + \frac{1}{\Phi} = \Phi \Rightarrow \Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618034$$

Xa temos dúas curiosidades:

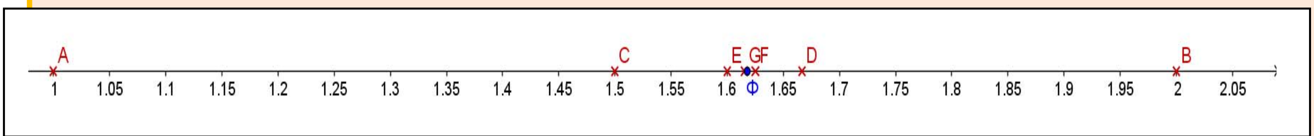
1

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$
$$\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$$

2

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$
$$\Phi^3 = 2\Phi + 1$$
$$\Phi^4 = 3\Phi + 2$$
$$\ldots\Phi^n = F_n\Phi + F_{n-1}$$

Onde F_n é o *n*-ésimo número de *Fibonacci*. Estes números son 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34… onde cada termo a partir do terceiro se obtén sumando os dous anteriores.
Máis relacións entre o número de ouro e a sucesión de *Fibonacci*:
a) se imos dividindo un número da sucesión entre o seu anterior obtemos: 1/1 = 1; 2/1 = 2; 3/2 = 1.5; 5/3 = 1.666…; 8/5 = 1.6; 13/8 = 1.625



Como pode verse, achegámonos rapidamente ao valor do número de ouro, primeiro por debaixo, despois por arriba, por debaixo… alternativamente.

b) Formula de *Binet*:

Para calcular un número de *Fibonacci*, por exemplo, o que ocupa o lugar 20 hai que calcular os 19 anteriores.
Isto non ten que ser necesariamente así pois *Binet* deduciu esta fórmula, que para os autores é unha das máis bonitas das matemáticas.

$$F_n = \frac{\Phi^n - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Se por exemplo substituímos *n* por 20 obtemos F_{20} = 6 765.
Realmente podemos prescindir do 2º termo do numerador, para *n*> 3 faise moito máis pequeno que o primeiro. Por exemplo, para *n*= 6, se facemos $\frac{\Phi^6}{\sqrt{5}}$ obtemos 8.0249 que redondeado é 8, o valor correcto.

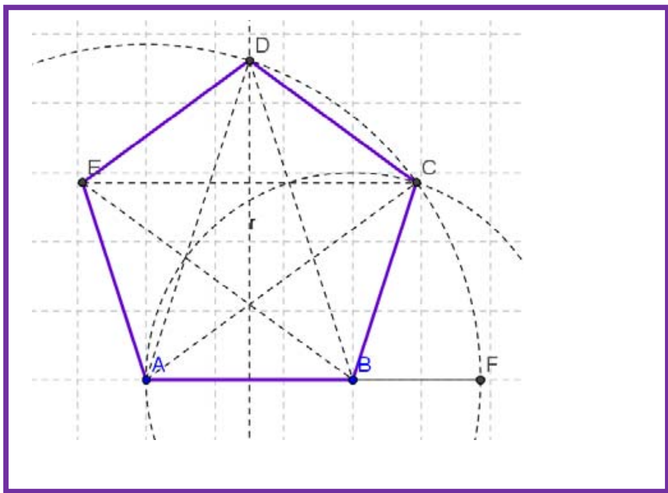
Actividades

a) Calcula F_{31} e F_{30} coa fórmula de Binet.

b) Fai o cociente e mira se é unha boa aproximación do número de ouro.

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

O pentágono regular e o número de ouro.



Nun pentágono regular a razón entre unha diagonal e o lado é Φ. Como sabemos construír Φ, a construción dun pentágono regular é moi sinxela:

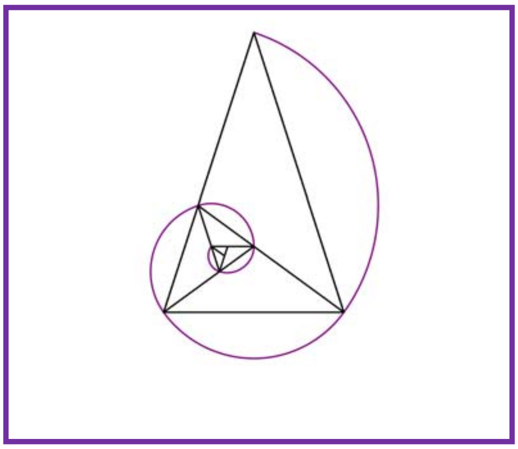
Se *AB* vai ser un lado do noso pentágono, construímos o punto *F* aliñado con *A* e *B* que cumpra *AF/AB* igual a Φ (indícase como facelo no texto).

Entón *AB* será o lado e *AF* a medida da diagonal.

Trazamos a mediatriz de *AB* e unha circunferencia de centro *A* e radio *AF*. Córtanse en *D* que é un vértice do pentágono.

Trazamos agora unha circunferencia con centro *B* e radio *AB*, córtase coa anterior en *C* que é outro vértice do pentágono. Só queda calcular *E* que é moi fácil.

O pentágono regular coas súas diagonais coñécese como "pentagrama místico" e parece ser que volvía toliños aos pitagóricos, nel o número de ouro aparece de forma desmesurada.



Do pentagrama sacamos este triángulo, chamado triángulo áureo que permite obter máis triángulos áureos facendo a bisectriz nun dos ángulos iguais e formar esta espiral. Esta espiral é parecida á espiral áurea, á de *Fibonacci* e á espiral logarítmica que aparece en: galaxias, furacáns, cunchas, xirasoles...

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

O xadrez

Conta a lenda que cando o inventor do xadrez lle amosou este xogo ao rei *Shirham* da India, este se entusiasmou tanto que lle ofreceu regalarlle todo o que quixera.

O inventor pediu un gran de trigo para a primeira casa do xogo, dous para a segunda, 4 para a terceira, e así duplicando a cantidade en cada casa.

Ao rei pareceulle unha petición modesta pero... como se pode comprobar ese número de grans dan pouco máis de 15 billóns de toneladas métricas o que corresponde á produción mundial de trigo de 21 685 anos.

Imposible que o rei tivese tanto trigo!

Gústache facer maxia!

Podes facer este xogo cos teus amigos. Para facelo precisas papel e lapis, ou mellor, unha calculadora, ou aínda mellor, unha folla de cálculo.

Escribe nunha columna os números do 1 ao 20. Ao lado do 1 escribe o número que che diga o teu amigo ou amiga, dunha, dúas ou tres cifras (376). Ao lado do 2 escribe tamén outro número inventado de 1, 2 ou 3 cifras (712). Ao lado do 3, a suma dos dous números anteriores (1 088). Ao lado do 4, o mesmo, a suma dos dous números anteriores (agora os do lado do 2 e do 4), e así ata chegar á casa 20.

Agora divide o número do lado do 20 (3 948 456) entre o número do lado do 19 (2 440 280), e maxia!, podes adiviñar o resultado. Aproxímase ao número de ouro!

1.618...

Por que? Sabes algo da sucesión de *Fibonacci*? Búscaa en Internet.

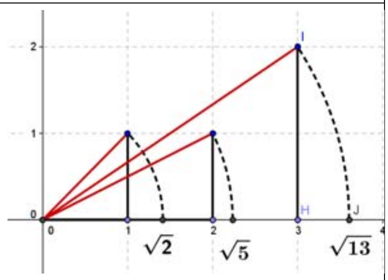
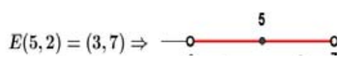
Fai unha folla de cálculo como a da marxe.

E22 =B21/B20

	A	B	C	D	E
1	Gústache facer maxia!				
2	1	376			
3	2	712			
4	3	1088			
5	4	1800			
6	5	2888			
7	6	4688			
8	7	7576			
9	8	12264			
10	9	19840			
11	10	32104			
12	11	51944			
13	12	84048			
14	13	135992			
15	14	220040			
16	15	356032			
17	16	576072			
18	17	932104			
19	18	1508176			
20	19	2440280			
21	20	3948456			
22	3948456	dividido por	2440280	é igual a	1,618

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

RESUMO

Conxuntos de números	**Naturais** ➔ $\mathrm{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$; **Enteiros** ➔ $\mathrm{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ **Racionais** ➔ $\mathrm{Q} = \{\frac{a}{b}; a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}$; **Irracionais** ➔ $\mathrm{I} = \mathfrak{R} - \mathrm{Q}$; $\mathfrak{R} = \mathrm{Q} \cup \mathrm{I}$	
Fraccións e expresión decimal	Todas as fraccións teñen expresión decimal exacta ou periódica. Toda expresión decimal exacta ou periódica pode poñerse como fracción.	$0.175 = \frac{175}{1\,000} = \frac{7}{40}$ $x = 1.7252525\ldots = 854/495$
Números racionais	A súa expresión decimal é exacta ou periódica.	2/3; 1.5; 0.333333333….
Representación na recta real	Fixada unha orixe e unha unidade, existe unha bixección entre os números reais e os puntos da recta. A cada punto da recta correspóndelle un número real e viceversa.	
N. Reais	Toda expresión decimal finita ou infinita é un número real e reciprocamente.	0.333333; π; $\sqrt{2}$
Intervalo aberto	Intervalo aberto no que os extremos non pertencen ao intervalo.	$(2, 7) = \{x \in \mathfrak{R};\ 2 < x < 7\}$. 
Intervalo pechado	Os extremos si pertencen ao intervalo.	$[-2, 2] = \{x \in \mathfrak{R};\ -2 \leq x \leq 2\}$ 
Intervalos semiabertos (ou semipechados)	Intervalo cun extremo aberto e outro pechado.	$[-8,0) = \{x \in \mathbb{R} / -8 \leq x < 0\}$ 
Entornos	Forma especial de expresar un intervalo aberto: **E(*a*, *r*) = (*a* − *r*, *a* + *r*)**	

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Números

1. Efectúa as seguintes operacións con fraccións:

a) $-\frac{4}{7}-\frac{5}{2}$ b) $\frac{3}{5}+\frac{(-7)}{9}$ c) $\frac{(-2)}{3}+\frac{(-1)}{8}$ d) $\frac{5}{3}+\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{9}{2}\right)$

e) $\left(\frac{3}{2}+\frac{7}{3}\right)\cdot\frac{5}{2}$ f) $\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}+\frac{9}{2}\right)$ g) $\frac{25}{3}:\frac{5}{9}$ h) $\frac{7}{3}:\frac{14}{9}$ i) $15:\frac{3}{5}$

2. Simplifica as seguintes fraccións alxébricas:

a) $\left(\frac{a-1}{3}+\frac{a+1}{2}\right)\cdot\frac{6}{a}$ b) $\frac{x-2}{x^2-4}$ c) $\frac{x^2+6x+9}{x-3}:\frac{x^2-9}{x+3}$ d) $\frac{a^2-4}{a^2}\cdot\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a-2}\right)$

3. Realiza as operacións:

a) (24.67 + 6.91)3.2 b) 2(3.91 + 98.1) c) 3.2(4.009 + 5.9)4.8

4. Calcula o valor exacto de $\frac{0.\overset{\frown}{4}}{0.4}$ sen calculadora.

5. Di cales destas fraccións teñen expresión decimal exacta e cales periódica:

$$\frac{9}{40};\frac{30}{21};\frac{37}{250};\frac{21}{15}$$

6. Calcula 3 fraccións *a, b, c* tal que $\frac{3}{4}<a<b<c<\frac{19}{25}$

7. Cantos decimais ten $\frac{1}{2^7\cdot 5^4}$?, atréveste a explicar o motivo?

8. Fai a división 999 999 : 7 e despois fai 1 : 7. Será casualidade?

9. Agora divide 999 entre 37 e despois fai 1 : 37, é casualidade?

10. Fai no teu caderno unha táboa e di a que conxuntos pertencen os seguintes números:

2.73535...; $\pi-2$; $\sqrt[5]{-32}$; 10^{100}; $\frac{102}{34}$; −2.5; 0.1223334444...

11. Contesta verdadeiro ou falso, xustificando a resposta.

a) $\mathrm{Q}\cap(\Re-\mathrm{Q})=\{0\}$

b) $\mathrm{Z}\subset\mathrm{Q}$

c) a raíz cadrada dun número natural é irracional.

d) $\sqrt{7}\notin\mathrm{Q}$

e) 1/47 ten expresión decimal periódica.

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

12. Pon exemplos que xustifiquen:

a) a suma e a resta de números irracionais pode ser racional.

b) o produto ou a división de números irracionais pode ser racional.

13. Que será a suma dun número racional con outro irracional? (Pensa na súa expresión decimal).

14. A suma de 2 números con expresión decimal periódica pode ser un enteiro?

15. Calcula a área e o perímetro dun rectángulo de lados $\sqrt{2}$ *e* $\sqrt{8}$ m.

16. Calcula a área e o perímetro dun cadrado cuxa diagonal mide 2 m.

17. Calcula a área e o perímetro dun hexágono regular de lado $\sqrt{3}$ m.

18. Calcula a área e o perímetro dun círculo de radio $\sqrt{10}$ m.

19. Calcula a área total e o volume dun cubo de lado $\sqrt[3]{7}$ m.

20. Por que número temos que multiplicar os lados dun rectángulo para que a súa área se faga o triplo?

21. Canto debe valer o radio dun círculo para que a súa área sexa 1 m^2?

22. Temos unha circunferencia e un hexágono regular inscrito nela. Cal é a razón entre os seus perímetros? (Razón é división ou cociente).

Potencias

23. Calcula:

a) $(+2)^7$ b) $(-1)^{9345}$ c) $(-5)^2$ d) $(-5)^3$ e) $(1/3)^3$ f) $(\sqrt{2})^8$

24. Expresa como única potencia:

a) $(-5/3)^4 \cdot (-5/3)^3 \cdot (-5/3)^{-8}$ b) $(1/9)^{-5} : (1/9)^4 \cdot (1/9)^{-2}$

c) $(2/3)^8 \cdot (-3/2)^8 : (-3/5)^8$ d) $(-3/5)^{-4} \cdot (-8/3)^{-4} : (-5/4)^{-4}$

25. Calcula:

a) $(-2/3)^{-4}$ b) $(-1/5)^{-2}$ c) $\dfrac{(11^4 \cdot (-2)^4 \cdot 5^4)^3}{(25^2 \cdot 4^2 \cdot 11^2)^3}$ d) $\dfrac{3^2 \cdot \dfrac{25^5}{9^5}}{(-5)^2 \cdot 4^5}$ e) $\dfrac{\left(\dfrac{-2}{5}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{-25}{6}\right)^3}{\left(\dfrac{5}{8}\right)^{-4} \cdot \left(\dfrac{5}{8}\right)^6}$

26. Extrae os factores posibles en cada radical:

a) $\sqrt[4]{a^7 \cdot b^6}$ b) $\sqrt[3]{15^5 \cdot 3^4 \cdot 5^6}$ c) $\sqrt{25 \cdot 7^3 \cdot 16^3}$

27. Expresa en forma de única raíz:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{50}}$ b) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{9}}$

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

28. Expresa en forma de potencia: a) $\sqrt[4]{5^3}\cdot\sqrt{5^5}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{3^2}}{\sqrt{3^3}}$

29. Simplifica a expresión:

a) $\left(\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x}}\right)^3$ b) $\dfrac{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[5]{x^{11}}}{\sqrt[3]{x}}$

30. Estímase que o volume da auga dos océanos é de 1 285 600 000 km^3 e o volume da auga doce é de 35 000 000 km^3. Escribe esas cantidades en notación científica e calcula a proporción de auga doce.

31. Sábese que nun átomo de hidróxeno o núcleo constitúe o 99 % da masa, e que a masa dun electrón é aproximadamente de 9.109 · 10^{-31} kg. Que masa ten o núcleo dun átomo de hidróxeno? (*Recorda*: Un átomo de hidróxeno está formado polo núcleo, cun protón, e por un único electrón).

32. A Xoán fixéronlle unha análise de sangue e ten 5 millóns de glóbulos vermellos en cada mm^3. Escribe en notación científica o número aproximado de glóbulos vermellos que ten Xoán estimando que ten 5 litros de sangue.

Representación na recta real

33. Pitágoras viviu entre o 569 e o 475 anos a. C. e Gauss entre o 1777 e o 1855, que diferenza de anos hai entre ambas as datas?

34. Representa de forma exacta na recta numérica: –2.45; 3.666…

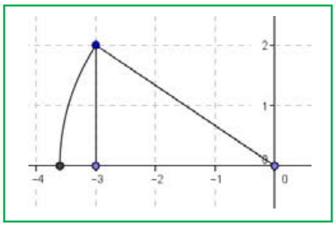
35. Sitúa na recta real os números 0.5; 0.48; 0.51 e 0.505.

36. Ordena os seguintes números de maior a menor: 2.4; –3.62; –3.6; 2.5; 2.409; –3.9999…

37. Representa na recta numérica de forma exacta os seguintes números:

$$\frac{2}{3};\ \frac{-3}{5};\ \frac{5}{2};\ 1.256;\ 3.\hat{5}$$

38. A imaxe é a representación dun número irracional, cal?



39. Representa de forma exacta na recta numérica: $-\sqrt{8};\ 2\sqrt{5};\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

40. Calcula 5 números racionais que estean entre 3.14 e π.

Intervalos

41. Expresa con palabras os seguintes intervalos ou semirrectas:

a. $(-5, 5]$ b. $\{x \in \Re;\ -2 < x \leq 7\}$.

c. $\{x \in \Re;\ x > 7\}$ d. $(-3, +\infty)$

42. Calcula:

a. $(2, 4]\ U\ (3, 5]$ b. $(2, 4] \cap (3, 5]$ c. $(-\infty, 1] \cap (-1, +\infty)$

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

43. Pode expresarse como entorno unha semirrecta? Razoa a resposta.

44. Expresa como entornos abertos, se é posible, os seguintes intervalos:

a. (0, 8) b. (–6, –2) c. $(2, +\infty)$

45. Expresa como intervalos abertos os seguintes entornos:

a. $E_{2/3}(4)$ b. $E_{1/2}(-7)$ c. E(1, 2) d. E(0, 1)

46. Que números ao cadrado dan 7?

47. Que números reais ao cadrado dan menos de 7?

48. Que números reais ao cadrado dan máis de 7?

Varios

49. Un numero irracional tan importante como Pi é o número "e", $e \approx 2.718281828...$, que parece periódico pero non, non o é. É un número irracional. Defínese como o número ao que se achega $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ cando *n* se fai moi, pero que moi, grande. **Colle a calculadora** e dálle a *n* valores cada vez maiores, por exemplo: 10, 100, 1 000, …

Apunta os resultados nunha **táboa**.

50. Outra forma de definir *e* é $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ...$

Que dirás ti, que son eses números tan admirados!, chámase factorial e é moi sinxelo: 4! = 4·3·2·1 = 24, multiplícase desde o número ata chegar a 1. Por exemplo: 6! = 6·5·4·3·2·1= 720. Non te preocupes, que a tecla "!" está na calculadora. Podes calcular e con 6 cifras decimais correctas? **Nota:* Fíxate que agora a converxencia é moito máis rápida, só tiveches que chegar ata *n* = ?

51. Ordena de menor a maior as seguintes masas:

Masa dun electrón	$9.11 \cdot 10^{-31}$ quilogramos
Masa da Terra	$5.983 \cdot 10^{24}$ quilogramos
Masa do Sol	$1.99 \cdot 10^{30}$ quilogramos
Masa da Lúa	$7.3 \cdot 10^{22}$ quilogramos.

52. Tomando $1.67 \cdot 10^{-24}$ gramos como masa dun protón e $1.2 \cdot 10^{-15}$ metros como radio, e supoñéndoo esférico, calcula: a) o seu volume en cm^3 (Recorda o volume dunha esfera é $(4/3)\pi r^3$. b) Encontra o peso dun centímetro cúbico dun material formado exclusivamente por protóns. c) Compara o resultado co peso dun centímetro cúbico de auga (un gramo) e dun centímetro cúbico de chumbo (11.34 gramos).

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

AUTOAVALIACIÓN

1. Indica que afirmación é falsa. O número –0.3333333… é un número

a) real b) racional c) irracional d) negativo

2. Operando e simplificando a fracción $\frac{a^2-4a+4}{a-2} : \frac{a-2}{a+3}$ obtense:

a) $a + 3$ b) $1/(a + 3)$ c) $a - 2$ d) $1/(a - 2)$

3. A expresión decimal 0.63636363…. escríbese en forma de fracción como

a) 63/701 b) 7/11 c) 5/7 d) 70/111

4. Ao simplificar $\sqrt{2}\,(7\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2})$ obtés:

a) $6\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2}\,(5\sqrt{2})$ c) 12 d) 8

5. Contesta sen facer operacións. As fraccións 4/7; 9/150; 7/50 teñen unha expresión decimal:

a) periódica, periódica, exacta b) periódica, exacta, periódica c) periódica, exacta, exacta

6. O conxunto dos números reais menores ou iguais a –2 escríbese:

a) $(-\infty, -2)$ b) $(-\infty, -2]$ c) $(-2, +\infty)$ d) $(-\infty, -2[$

7. O entorno de centro –2 e radio 0.7 é o intervalo:

a) (–3.7, –2.7) b) (–2.7, –1.3) c) (–3.3, –2.7) d) (–2.7, –1.3]

8. O intervalo (–3, –2) é o entorno:

a) E(–2.5, 1/2) b) E(–3.5, –0.5) c) (–3.5, 1/2) d) (–2.5, –0.5)

9. Ao efectuar a operación $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{7}{6}} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ obtense:

a) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{7}{2}}$ b) 25/4 c) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{6}}$ d) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{2}}$

10. Ao efectuar a operación $0.000078 + 2.4 \cdot 10^{-5}$ obtense:

a) $3.6 \cdot 10^{-10}$ b) $1.8912 \cdot 10^{-10}$ c) $10.2 \cdot 10^{-5}$ d) $18.72 \cdot 10^{-5}$

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Matemáticas orientadas ás ensinanzas aplicadas

4ºA ESO
Capítulo 2: Proporcionalidade

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Nieves Zuasti

Revisores: Javier Rodrigo e María Molero

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Índice

Resumo

Na vida cotiá é interesante saber manexar a proporcionalidade, por exemplo para calcular o desconto dunhas rebaixas, ou o interese que se debe pagar por un préstamo. En multitude de ocasións debemos efectuar repartos proporcionais, directos ou inversos: premios de lotería, herdos, mesturas, aliaxes…

O tanto por cento e o interese é un concepto que aparece constantemente nos medios de comunicación e na nosa propia economía. Neste capítulo faremos unha primeira aproximación á denominada "*economía financeira*".

A proporcionalidade é unha realidade coa que convivimos ao noso arredor. Para comprendela e utilizala correctamente, necesitamos coñecer as súas regras. Recoñeceremos a proporcionalidade directa ou inversa, simple e composta, e realizaremos exercicios e problemas de aplicación.

INTRODUCIÓN

A Esther gústalle ir en bicicleta á escola e ten comprobado que en facer ese percorrido tarda andando catro veces máis. Temos aquí tres magnitudes: tempo, distancia e velocidade.

Recorda que:

Unha **magnitude** é unha propiedade física que se pode medir.

A máis velocidade percórrese máis distancia.

Son **magnitudes directamente proporcionais**.

A máis velocidade tárdase menos tempo.

Son **magnitudes inversamente proporcionais**.

Pero, coidado, non todas as magnitudes son proporcionais. Isto é unha confusión moi frecuente. Porque ao medrar unha magnitude, a outra tamén medra, aínda que non se poida asegurar que sexan directamente proporcionais. Por exemplo, Esther recorda que hai uns anos tardaba máis en percorrer o mesmo camiño, pero a idade non é directamente proporcional ao tempo que se tarda. Imos estudalo con detalle para aprender a recoñecelo ben.

1. PROPORCIONALIDADE DIRECTA

1.1. Magnitudes directamente proporcionais

Recorda que:

Dúas magnitudes son **directamente proporcionais** cando ao multiplicar ou dividir a primeira por un número, a segunda queda multiplicada ou dividida polo mesmo número.

Exemplo:

- Se tres bolsas conteñen 15 caramelos, sete bolsas (iguais ás primeiras) conterán 35 caramelos, porque:

$$3 \cdot \mathbf{5} = 15 \quad 7 \cdot \mathbf{5} = 35$$

A **razón de proporcionalidade directa *k* é *o*** cociente de calquera dous valores dunha variable e os correspondentes da outra:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = k$$

Exemplo:

- No exemplo anterior a razón de proporcionalidade é 5, porque: $\frac{15}{3} = \frac{35}{7} = 5$

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Exemplo:

- Copia no teu caderno a seguinte táboa, calcula a razón de proporcionalidade e completa os ocos que faltan sabendo que é unha táboa de proporcionalidade directa:

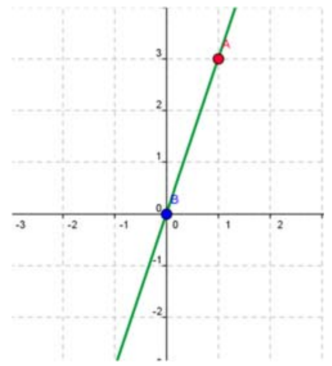
Magnitude A	18	1.5	60	2.7	0.21
Magnitude B	6	0.5	20	0.9	0.07

A razón de proporcionalidade é $\boldsymbol{k} = \frac{18}{6} = 3$**.** Polo tanto, todos os valores da magnitude B son tres veces menores cós da magnitude A:

$$\frac{\mathbf{18}}{\mathbf{6}} = \frac{\mathbf{1.5}}{\mathbf{0.5}} = \frac{\mathbf{60}}{\mathbf{20}} = \frac{\mathbf{2.7}}{\mathbf{0.9}} = \frac{\mathbf{0.21}}{\mathbf{0.07}} = \mathbf{3}.$$

Observa que:

Se se representan graficamente os puntos dunha proporcionalidade directa, todos eles están sobre unha **recta** que pasa pola orixe de coordenadas. A razón de proporcionalidade é a **pendente** da recta. A función lineal e =*kx* denomínase tamén **función de proporcionalidade directa**.



Recta e = 3x

Exemplo:

- Ecuación da recta do exemplo anterior

A ecuación da recta é *y* = 3*x*. Comprobamos que todos os puntos a verifican:

18 = 3 · 6; 1.5 = 3 · 0.5; 60 = 3 · 20; 2.7 = 3 · 0.9; 0.21 = 3 · 0.07.

Redución á unidade

Se debemos usar a mesma ecuación da recta en distintas ocasións o problema pode simplificarse coa **redución á unidade**. Se *x* = 1 entón *y* = ***k***.

Exemplo:

- Para celebrar o seu aniversario Xosé comprou 3 botellas de refresco que lle custaron 4.5 €. Pensa que non van ser suficientes e decide comprar 2 máis. Calcula o prezo das 2 botellas utilizando a redución á unidade.

  $y = \frac{4.5}{3}x \Rightarrow y = \frac{4.5}{3} \cdot 1 \Rightarrow k = 1.5 \Rightarrow y = 1.5x$. Agora podemos calcular o prezo de calquera número de botellas. No noso caso *x* = 2, logo *y* = 1.5 · 2 = 3 €.

Actividades propostas

1. Copia no teu caderno e completa a táboa de proporción directa. Calcula a razón de proporcionalidade. Representa graficamente os puntos. Determina a ecuación da recta.

Litros	12	7.82		1		50
Euros	36		9.27		10	

2. Calcula os termos que faltan para completar as proporcións:

a) $\frac{24}{100} = \frac{30}{x}$ b) $\frac{x}{80} = \frac{46}{12}$ c) $\frac{3.6}{12.8} = \frac{x}{60}$

3. Se o AVE tarda unha hora e trinta e cinco minutos en chegar desde Madrid a Valencia, que distan 350 quilómetros, canto tardará en percorrer 420 km?

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

1.2. Proporcionalidade simple directa

Acabamos de ver que a proporcionalidade simple directa consiste en atopar a ecuación dunha recta que pasa pola orixe: $y = kx$.

- ***Exemplo:*** Vinte caixas pesan 400 kg, cantos kg pesan 7 caixas?

Buscamos a ecuación da recta: $y = kx \Rightarrow 400 = k20 \Rightarrow k = 400 / 20 = 20 \Rightarrow y = 20x$. Ecuación da recta

Se $x = 7$ entón $y = 20 \cdot 7 = 140$ kg.

Actividades propostas

4. Nunha receita dinnos que para facer unha marmelada de froitas do bosque precisamos un quilogramo de azucre por cada dous quilogramos de froita. Queremos facer 7 quilogramos de marmelada, cantos quilogramos de azucre e cantos de froita debemos poñer?

5. A altura dunha torre é proporcional á súa sombra (a unha mesma hora). Unha torre que mide 12 m ten unha sombra de 25 m. Que altura terá outra torre cuxa sombra mida 43 m?

6. Unha fonte enche unha garrafa de 12 litros en 8 minutos. Canto tempo tardará en encher un bidón de 135 litros?

7. Gastamos 12 litros de gasolina para percorrer 100 km. Cantos litros precisaremos para unha distancia de 1374 km?

8. O meu coche gasta 67 litros de gasolina en percorrer 1 250 km, cantos litros gastará nunha viaxe de 5 823 km?

9. Un libro de 300 páxinas pesa 127 g. Canto pesará un libro da mesma colección de 420 páxinas?

10. Dous pantalóns custáronnos 28 €, canto pagaremos por 7 pantalóns?

1.3. Porcentaxes

A porcentaxe ou tanto por cento é a razón de proporcionalidade de maior uso na vida cotiá.

O **tanto por cento** é unha razón con denominador 100.

Exemplo:

- 37 % = $\frac{37}{100}$. A ecuación da recta é: $y = \frac{37}{100}x$.

As porcentaxes son proporcións directas.

Exemplo:

- A poboación de Zarzalejo era en 2013 de 7 380 habitantes. En 2014 incrementouse nun 5 %. Cal é a súa poboación ao final de 2014?

$y = \frac{7\,380}{100}x$, polo que o 5 % de 7 392 é $y = \frac{7\,380}{100} \cdot 5 = 369$ habitantes. A poboación incrementouse en 369 habitantes, logo ao final de 2014 a poboación será de: 7 380 + 369 = 7 749 habitantes.

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

11. Expresa en tanto por cento as seguintes proporcións:

a) $\frac{27}{100}$ b) "1 de cada 2" c) $\frac{52}{90}$

12. Se sabemos que os alumnos louros dunha clase son o 16 % e hai 4 alumnos louros, cantos alumnos hai en total?

13. Un depósito de 2 000 litros de capacidade contén neste momento 1 036 litros. Que tanto por cento representa?

14. A proporción dos alumnos dunha clase de 4º de ESO que aprobaron Matemáticas foi do 70 %. Sabendo que na clase hai 30 alumnos, cantos suspenderon?

1.4. Incremento porcentual. Desconto porcentual. Porcentaxes encadeadas

Incremento porcentual

Exemplo:

- O exemplo anterior pode resolverse mediante **incremento porcentual**: 100 + 5 = 105%

$y = \frac{7\,380}{100}x$, polo que o 105 % de 7 392 é $y = \frac{7\,380}{100} \cdot 105 = 7\,749$ habitantes.

Desconto porcentual

- Nas rebaixas a todos os artigos á venda aplícanlles un 30 % de desconto. Calcula o prezo dos que aparecen na táboa:

Prezo sen desconto	75 €	159 €	96 €	53 €
Prezo en rebaixas	52.50 €	111.3 €	67.2 €	37.1 €

Xa que nos descontan o 30 %, pagaremos o 70 %. Polo tanto: $k = \frac{70}{100} = 0.7$ é a razón directa de proporcionalidade que aplicaremos aos prezos sen desconto para calcular o prezo rebaixado. Polo tanto: $y = 0.7\,x$.

Porcentaxes encadeadas

Moitas veces hai que calcular varios incrementos porcentuais e descontos porcentuais. Podemos **encadealos**. Nestes casos o máis sinxelo é calcular, para cada caso, o tanto por un, e ilos multiplicando.

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Exemplo:

- Nunhas rebaixas aplícase un desconto do 30 %, e o IVE do 21 %. Canto nos custará un artigo que sen rebaixar e sen aplicarlle o IVE custaba 159 euros? Cal é o verdadeiro desconto?

Nun desconto do 30 % debemos pagar un 70 % ((100 – 30) %), polo que o tanto por un é de 0.7. Polo incremento do prezo polo IVE do 21 % ((100 + 21) %) o tanto por un é de 1.21. Encadeando o desconto co incremento teremos un índice ou tanto por un de 0.7 · 1.21 = 0.847, que aplicamos ao prezo do artigo, 159 €, 0.847 · 159 = 134.673 € ≈ 134.67 €. Polo tanto, descontáronnos 24.33 euros.

Se estamos pagando o 84.7 % o verdadeiro desconto é o 15.3 %.

Exemplo:

- Calcula o prezo inicial dun televisor que, despois de subilo un 20 % e de rebaixalo un 20 %, nos custou 432 €. Cal foi a porcentaxe de variación?

Ao subir o prezo un 20 % estamos pagando o 120 % e o tanto por un é 1.2. No desconto do 20 % estamos pagando o 80 % e o tanto por un é 0.8. En total coas dúas variacións sucesivas o tanto por un é de 0.8 ·1.2 = 0.96, e o prezo inicial é 432 : 0.96 = 450 €. Prezo inicial = 450 €.

O tanto por un 0.96 é menor que 1 polo tanto houbo un desconto porque pagamos o 96 % do valor inicial e este desconto foi do 4 %.

Actividades propostas

15. Unha fábrica pasou de ter 130 obreiros a ter 90. Expresa a diminución en porcentaxe.

16. Calcula o prezo final dun lavalouzas que custaba 520 € máis un 21 % de IVE, ao que se lle aplicou un desconto sobre o custe total do 18 %.

17. Copia no teu caderno e completa:

a) Dunha factura de 1 340 € paguei 1 200 €. Aplicáronme un ……… % de desconto
b) Descontáronme o 9 % dunha factura de .... € e paguei 280 €.
c) Por pagar ao contado un moble descontáronme o 20 % e aforrei 100 €. Cal era o prezo do moble sen desconto?

18. O prezo inicial dun electrodoméstico era 500 euros. Primeiro subiu un 10 % e despois baixou un 30 %. Cal é o seu prezo actual? Cal é a porcentaxe de incremento ou desconto?

19. Unha persoa comprou accións de bolsa no mes de xaneiro por un valor de 10 000 €. De xaneiro a febreiro estas accións aumentaron un 8 %, pero no mes de febreiro diminuíron un 16 %. Cal é o seu valor a finais de febreiro? En que porcentaxe aumentaron ou diminuíron?

20. O prezo inicial dunha enciclopedia era de 300 € e ao longo do tempo sufriu variacións. Subiu un 10 %, logo un 25 % e despois baixou un 30 %. Cal é o seu prezo actual? Calcula a variación porcentual.

21. Nunha tenda de venda por Internet anúncianse rebaixas do 25 %, pero logo cargan na factura un 20 % de gastos de envío. Cal é a porcentaxe de incremento ou desconto? Canto teremos que pagar por un artigo que custaba 30 euros? Canto custaba un artigo polo que pagamos 36 euros?

1.7. Escalas

En planos e mapas encontramos anotada na súa parte inferior a escala á que están debuxados.

Principais calzadas romanas

A **escala** é a proporción entre as medidas do debuxo e as medidas na realidade.

Exemplo:

- Exprésase da forma 1:2000 que significa que 1 cm do plano corresponde a 2 000 cm = 20 m na realidade.

Polo tanto se "*y*" son as medidas na realidade, e "*x*" no plano, esta escala pódese escribir coa ecuación da recta:

$$y = 2\,000x.$$

As escalas tamén se representan en forma gráfica, mediante unha barra dividida en segmentos de 1 cm de lonxitude

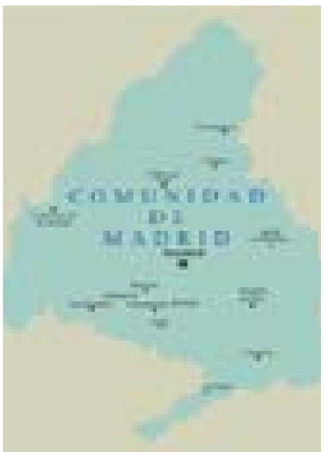
Exemplo:

Escalímetro

Esta escala identifica cada centímetro do mapa con 20 m na realidade é dicir 1:2000, $y = 2\,000x$.

Ao estudar a semellanza volveremos insistir nas escalas.

Un instrumento sinxelo para realizar traballos a escala é o ***pantógrafo*** que facilita copiar unha imaxe ou reproducila a escala.



O pantógrafo é un paralelogramo articulado que, ao variar a distancia entre os puntos de articulación, permite obter diferentes tamaños de debuxo sobre un modelo dado.

Actividades propostas

22. A distancia real entre dúas vilas é 28.6 km. Se no mapa están a 7 cm de distancia. A que escala está debuxado?

23. Que altura ten un edificio se a súa maqueta construída a escala 1:200 presenta unha altura de 8 cm?

24. Debuxa a escala gráfica correspondente á escala 1:60000.

25. As dimensións dunha superficie rectangular no plano son 7 cm e 23 cm. Se está debuxado a escala 1:50, calcula as súas medidas reais.

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

2. PROPORCIONALIDADE INVERSA

2.1. Magnitudes inversamente proporcionais

Recorda que:

Dúas magnitudes son **inversamente proporcionais** cando ao multiplicar ou dividir a primeira por un número, a segunda queda dividida ou multiplicada polo mesmo número.

Exemplo:

- Cando un automóbil vai a 90 km/h, tarda catro horas en chegar ao seu destino. Se fose a 120 km/h tardaría 3 horas en facer o mesmo percorrido.

$$90 \cdot 4 = 120 \cdot 3$$

A velocidade e o tempo son magnitudes inversamente proporcionais.

A **razón de proporcionalidade inversa** k' é o produto de cada par de magnitudes: $\boldsymbol{k' = a \cdot b = a' \cdot b'}$

Exemplo:

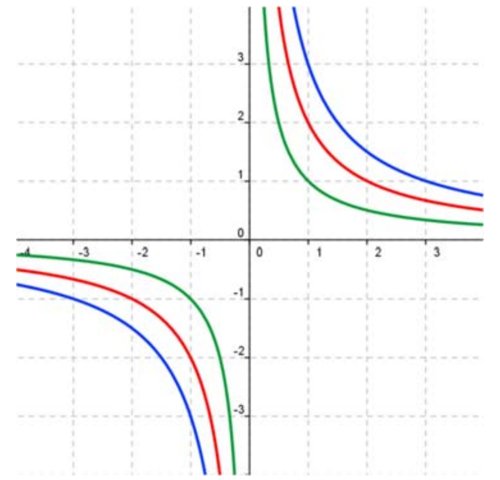
- Copia a táboa no teu caderno, calcula a razón de proporcionalidade inversa e completa a táboa de proporcionalidade inversa:

a	18	150	1.5	3 600	100
b	50	6	600	0.25	9

$\boldsymbol{k'}$ = 18 · 50 = 900. Comproba que todas as columnas dan este resultado.

Observa que:

Se se representan graficamente os puntos dunha proporcionalidade inversa, todos eles están sobre a gráfica dunha **hipérbole** de ecuación $y = \frac{k'}{x}$. A razón de proporcionalidade inversa é a **constante** $\boldsymbol{k'}$. A esta hipérbole $y = \frac{k'}{x}$ tamén se lle chama **función de proporcionalidade inversa**.



Hipérboles: e = 3/x; e = 2/x; e = 1/x

Exemplo:

- Ecuación da hipérbole do exemplo anterior.

A hipérbole é $y = \frac{900}{x}$. Comprobamos que todos os puntos verifican a ecuación desta hipérbole:

$$y = \frac{900}{18} = 50; \quad y = \frac{900}{150} = 6; \quad y = \frac{900}{1.5} = 600; \quad y = \frac{900}{3\,600} = 0.25; \quad y = \frac{900}{100} = 9.$$

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

26. Para embaldosar un recinto, 7 obreiros dedicaron 80 horas de traballo. Completa no teu caderno a seguinte táboa e determina a constante de proporcionalidade. Escribe a ecuación da hipérbole.

Número de obreiros	1	5	7	12			60
Horas de traballo			80		28	10	

2.2. Proporcionalidade simple inversa

Para calcular o cuarto termo entre dúas magnitudes inversamente proporcionais calculamos a constante de proporcionalidade e escribimos a ecuación da hipérbole.

Exemplo:

- Catro persoas realizan un traballo en 18 días, cantas persoas necesitaremos para realizar o mesmo traballo en 8 días?

$$k' = 4 \cdot 18 = 8 \cdot y \Rightarrow y = \frac{18}{8} \cdot 4 = 9 \text{ persoas.}$$

Actividades propostas

27. Ao cortar unha cantidade de madeira conseguimos 5 paneis de 1.25 m de longo. Cantos paneis conseguiremos se agora teñen 3 m de largo?

28. Nunha horta ecolóxica utilízanse 5 000 kg dun tipo de esterco de orixe animal que se sabe que ten un 12 % de nitratos. Se cambia o tipo de esterco, que agora ten un 15 % de nitratos, cantos quilogramos se necesitarán do novo esterco para que as plantas reciban a mesma cantidade de nitratos?

29. Esa mesma horta necesita 200 caixas para envasar as súas berenxenas en caixas dun quilogramo. Cantas caixas necesitaría para envasalas en caixas de 1.7 quilogramos? E para envasalas en caixas de 2.3 quilogramos?

30. Para envasar certa cantidade de leite precísanse 8 recipientes de 100 litros de capacidade cada un. Queremos envasar a mesma cantidade de leite empregando 20 recipientes. Cal deberá ser a capacidade deses recipientes?

31. Copia no teu caderno a táboa seguinte, calcula a razón de proporcionalidade e completa a táboa de proporcionalidade inversa. Escribe a ecuación da hipérbole.

Magnitude A	40	0.07		8	
Magnitude B	0.25		5		6.4

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

2.3. Proporcionalidade composta

Unha proporción na que interveñen máis de dúas magnitudes ligadas entre si por relacións de proporcionalidade directa ou inversa denomínase **proporción composta**.

Exemplo:

- No instituto 30 alumnos de 4º A de ESO foron esquiar e pagaron 2 700 € por 4 noites de hotel; 25 alumnos de 4º B de ESO gañaron na lotería 3 375 € e deciden ir ao mesmo hotel. Cantas noites de aloxamento poden pagar?

Temos tres magnitudes: o número de alumnos, a cantidade en € que pagan polo hotel e o número de noites de hotel. Observa que a máis alumnos se paga máis diñeiro, logo estas magnitudes son directamente proporcionais. A máis noites de hotel págase máis diñeiro, logo estoutras dúas magnitudes son tamén directamente proporcionais. Pero para unha cantidade de diñeiro fixa, máis alumnos poden ir menos noites, logo o número de alumnos é inversamente proporcional ao número de noites de hotel.

O mellor método é reducilo a un problema de proporcionalidade simple, para iso obtemos o prezo da viaxe por alumno.

Cada alumno de 4º A pagou 2 700 : 30 = 90 € por 4 noites de hotel. Logo pagou por unha noite 90/4 = 22.5 €. A ecuación de proporcionalidade directa é: $y = 22.5x$, onde "y" é o que paga cada alumno e "x" o número de noites.

Cada alumno de 4º B conta con 3 375 : 25 = 135 € para pasar x noites de hotel, polo que 135 = 22.5x, logo poden estar 6 noites.

Actividades propostas

32. Seis persoas realizan unha viaxe de 12 días e pagan en total 40 800 €. Canto pagarán 15 persoas se a súa viaxe dura 4 días?

33. Se 16 lámpadas orixinan un gasto de 4 500 €, estando acesas durante 30 días, 5 horas diarias, que gasto orixinarían 38 lámpadas en 45 días, acesas durante 8 horas diarias?

34. Para alimentar a 6 vacas durante 17 días precísanse 240 quilos de alimento. Cantos quilos de alimento se precisarán para manter 29 vacas durante 53 días?

35. Se 12 homes constrúen 40 m de tapia en 4 días traballando 8 horas diarias, cantas horas diarias deben traballar 20 homes para construír 180 m en 15 días?

36. Cunha cantidade de penso podemos dar de comer a 24 animais durante 50 días cunha ración de 1 kg para cada un. Cantos días poderemos alimentar a 100 animais se a ración é de 800 g?

37. Para encher un depósito ábrense 5 billas que lanzan 8 litros por minuto e tardan 10 horas. Canto tempo tardarán 7 billas similares que lanzan 10 litros por minuto?

38. Se 4 máquinas fabrican 2 400 pezas funcionando 8 horas diarias. Cantas máquinas se deben poñer a funcionar para conseguir 7 000 pezas durante 10 horas diarias?

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

3. REPARTOS PROPORCIONAIS

Cando se realiza un reparto en partes desiguais débese establecer previamente se se trata dun reparto proporcional directo ou inverso.

3.1. Reparto proporcional directo

Nun reparto proporcional directo corresponderalle máis a quen teña máis partes.

Actividade resolta

- Tres amigos deben repartir os 400 € que gañaron nunha competición de acordo aos puntos que cada un obtivo. O primeiro obtivo 10 puntos, o segundo 7 e o terceiro 3 puntos.

  O reparto directamente proporcional iniciase sumando os puntos: 10 + 7 + 3 = 20 puntos.

  Calculamos o premio por punto: 400 : 20 = 20€.

  O primeiro obterá 20 · 10 = 200 €.

  O segundo: 20 · 7 = 140 €.

  O terceiro: 20 · 3 = 60 €.

  A suma das tres cantidades é 200 + 140 + 60 = 400 €, a cantidade total a repartir.

Como se trata dunha proporción, débese establecer a seguinte regra:

Sexa *N* (no exemplo anterior 400) a cantidade a repartir entre catro persoas, ás que lles corresponderá *A, B, C, D* de maneira que *N* = *A* + *B* + *C* + *D*. Estas cantidades son proporcionais á súa participación no reparto: *a, b, c, d*.

a + *b* + *c* + *d* = *n* é o número total de partes nas que debe distribuírse N.

N : *n* = *k* que é a cantidade que corresponde a cada parte. No exemplo anterior: *k* = 400 : 20 = 20.

O reparto finaliza multiplicando *k* por *a*, *b*, *c* e *d*, obténdose así as cantidades correspondentes *A, B, C* e *D*.

É dicir, agora a ecuación da recta é: $y = \frac{A+B+C+D}{a+b+c+d}x = \frac{N}{n}x$

Actividades propostas

39. Cinco persoas comparten lotería, con 10, 6, 12, 7 e 5 participacións respectivamente. Se obtiveron un premio de 18 000 €, canto corresponde a cada un?

40. Tres socios investiron 20 000 €, 34 000 € e 51 000 € este ano na súa empresa. Se os beneficios a repartir a final de ano ascenden a 31 500 €, canto corresponde a cada un?

41. A Unión Europea concedeu unha subvención de 48 000 000 € para tres Estados de 60, 46 e 10 millóns de habitantes. Como debe repartirse o diñeiro, sabendo que é directamente proporcional ao número de habitantes?

42. Repártese unha cantidade de diñeiro, entre tres persoas, directamente proporcional a 2, 5 e 8. Sabendo que á segunda lle corresponde 675 €, calcula o que lle corresponde á primeira e á terceira.

43. Unha avoa reparte 100 € entre os seus tres netos de 12, 14 e 16 anos de idade; proporcionalmente ás súas idades. Canto corresponde a cada un?

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

3.2. Reparto proporcional inverso

Nun reparto proporcional inverso recibe máis quen menos partes ten.

Sexa *N* a cantidade a repartir e *a*, *b* e *c* as partes. Ao ser unha proporción inversa, o reparto realízase aos seus inversos 1/*a*, 1/*b*, 1/*c*.

Para calcular as partes totais, reducimos as fraccións a común denominador, para termos un patrón común, e tomamos os numeradores que son as partes que corresponden a cada un.

Actividade resolta

- Repartir 4 000 € de forma inversamente proporcional a 12 e 20.

Calculamos o total das partes: 1/12 + 1/20 = **5**/60 + **3**/60 = **8**/60.

4 000 : 8 = 500 € cada parte.

500 · 5 = 2 500 €.

500 · 3 = 1 500 €.

En efecto, 2 500 + 1 500 = 4 000.

Actividades propostas

44. Nun concurso acumúlase puntuación de forma inversamente proporcional ao número de erros. Os catro finalistas, con 10, 5, 2 e 1 erros, deben repartir os 2 500 puntos. Cantos puntos recibirá cada un?

45. No testamento, o avó establece que quere repartir entre os seus netos 4 500 € de maneira proporcional ás súas idades, 12, 15 e 18 anos. Coidando que a maior cantidade sexa para os netos menores, canto recibirá cada un?

46. Repártese diñeiro inversamente proporcional a 5, 10 e 15; ao menor correspóndenlle 3 000 €. Canto corresponde aos outros dous?

47. Tres irmáns axudan ao mantemento familiar entregando anualmente 6 000 €. Se as súas idades son de 18, 20 e 25 anos e as achegas son inversamente proporcionais á idade, canto achega cada un?

48. Un pai vai cos seus dous fillos a unha feira e, na tómbola, gaña 50 € que reparte de forma inversamente proporcional á súas idades, que son 15 e 10 anos. Cantos euros debe dar a cada un?

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

3.3. Mestura e aliaxes

As **mesturas** que imos estudar son o resultado final de combinar distintas cantidades de produtos, de distintos prezos.

Actividade resolta

- Calcula o prezo final do litro de aceite se mesturamos 13 litros a 3.5 € o litro, 6 litros a 3.02 €/l e 1 litro a 3.9 €/l.

  Calculamos o custe total dos distintos aceites:

  $$13 \cdot 3.5 + 6 \cdot 3.02 + 1 \cdot 3.9 = 67.52 \text{ €}.$$

  E o número total de litros: 13 + 6 + 1 = 20 l.

  O prezo do litro de mestura valerá 67.52 : 20 = 3.376 €/l.

Actividades propostas

49. Calcula o prezo do quilo de mestura de dous tipos de café: 3.5 kg a 4.8 €/kg e 5.20 kg a 6 €/kg.

50. Cantos litros de zume de pomelo de 2.40 €/l deben mesturarse con 4 litros de zume de laranxa a 1.80 €/l para obter unha mestura a 2.13 €/l?

Grans de café

Unha **aliaxe** é unha mestura de metais para conseguir un determinado produto final con mellores propiedades ou aspecto.

As aliaxes realízanse en xoiaría mesturando metais preciosos, ouro, prata, platino, con cobre ou rodio. Segundo a proporción de metal precioso, dise que unha xoia ten máis ou menos **lei.**

A lei dunha aliaxe é a relación entre o peso do metal máis valioso e o peso total.

Exemplo:

- Una xoia de prata de 50 g de peso contén 36 g de prata pura. Cal é a súa lei?

$$\textbf{Lei} = \frac{peso\ metal\ \ puro}{peso\ total} = \frac{36}{50} = 0.72$$

Outra forma de medir o grao de pureza dunha xoia é o **quilate**.

Un quilate dun metal precioso é 1/24 da masa total da aliaxe.

Para que unha xoia sexa de ouro puro debe ter 24 quilates.

Exemplo:

Una xoia de ouro de 18 quilates pesa 62 g. Que cantidade do seu peso é de ouro puro?

$$\text{Peso en ouro} = \frac{62 \cdot 18}{24} = 46.5 \text{ g.}$$

O termo ***quilate*** vén da palabra grega *"keration" (alfarroba)*. Esta planta, de sementes moi uniformes, utilizábase para pesar xoias e xemas na antigüidade.

Actividades propostas

51. Calcula a lei dunha xoia sabendo que pesa 87 g e contén 69 g de ouro puro.

Cantos quilates ten, aproximadamente, a xoia anterior?

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

4. INTERESE

4.1. Cálculo de interese simple

O **interese** é o beneficio que se obtén ao depositar un capital nunha entidade financeira a un determinado tanto por cento durante un tempo.

No **interese simple**, ao capital *C* depositado aplícaselle un tanto por cento ou rédito *r* anualmente.

O cálculo do interese obtido ao cabo de varios anos realízase mediante a fórmula:

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$$

Se o tempo que se deposita o capital son meses ou días, o interese calcúlase dividindo a expresión anterior entre 12 meses ou 360 días (ano comercial).

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{1200} \text{ tempo en meses} \qquad I = \frac{C \cdot r \cdot t}{36\,000} \text{ tempo en días}$$

Actividades resoltas

- Depositamos 4 000 € ao 2 % anual. Canto diñeiro teremos ao cabo de 30 meses?

Calculamos o interese simple:

$$I = \frac{4\,000 \cdot 2 \cdot 30}{1\,200} = 200 \text{ €}$$

Sumamos capital e réditos:

$$4\,000 + 200 = 4\,200 \text{ €}$$

Actividades propostas

52. Calcula o interese simple que producen 10 000 € ao 3 % durante 750 días.

53. Que capital hai que depositar ao 1.80 % durante 6 anos para obter un interese simple de 777.6 €?

4.2. Interese composto

Desde outro punto de vista, o interese é a porcentaxe que se aplica a un préstamo ao longo dun tempo, incrementando a súa contía á hora de devolvelo.

Este tipo de interese non se calcula como o interese simple senón que se establece o que se chama "*capitalización*".

O **interese composto** aplícase tanto para calcular o capital final dunha inversión, como a cantidade a devolver para amortizar un préstamo.

Normalmente os préstamos devólvense mediante cotas mensuais que se calcularon a partir dos xuros xerados polo préstamo ao tipo de interese convido.

A capitalización composta propón que, a medida que se van xerando xuros, pasen formar parte do capital inicial, e ese novo capital producirá xuros nos períodos sucesivos.

Se se trata dun depósito bancario, o capital final calcularase seguindo o seguinte procedemento:

C_i (capital inicial)	1 ano	i (tanto por un)	$C_f = C_i \cdot (1 + i)$
$C_i \cdot (1 + i)$	2 anos	$C_i \cdot (1 + i) \cdot (1 + i)$	$C_f = C_i \cdot (1 + i)^2$
$C_i \cdot (1 + i)^2$	3 anos	$C_i \cdot (1 + i)^2 \cdot (1 + i)$	$C_f = C_i \cdot (1 + i)^3$
…………..	……….	……………	…………….
	n anos		$C_f = C_i \cdot (1 + i)^n$

Al cabo de n anos, o capital final será $\boldsymbol{C_f = C_i \cdot (1 + i)^n}$.

Para facer os cálculos podes utilizar unha "Folla de cálculo". Basta que na folla de cálculo adxunta modifiques os datos das casas B5 onde está o "Capital inicial", casa B6 onde está o "Tanto por un" e da casa B7 onde aparece o número de "Anos", e arrastres na columna B ata que o número final de anos coincida con esta casa.

F15 =E15-$B$5

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Interese composto**							
2	**Problema:**							
3	O capital inicial dun depósito ascende a 82 000 €. O tanto por cento aplicado é 3 % a interese compostol durante 5 anos. Calcula o capital final.							
4								
5	Capital inicial:	82000						
6	Tanto por cento ou rédito:	3						
7	Número de anos:	5						
8								
9								
10	**Capital inicial: C_i**	**Anos**	**r (tanto por uno)**	**(1+r)^n**	**Capital final: C_f**	**Interés total**		
11	82000,00	1	0,03	1,03	84460,00	2460,00		
12	84460,00	2	0,03	1,0609	86993,80	4993,80		
13	86993,80	3	0,03	1,092727	89603,61	7603,61		
14	89603,61	4	0,03	1,12550881	92291,72	10291,72		
15	92291,72	5	0,03	1,15927407	95060,47	13060,47		
16								
17	O capital final es:	**13060,47**						

Actividades resoltas

- O capital inicial dun depósito ascende a 82 000 €. O tanto por cento aplicado é o 3 % a interese composto durante 5 anos. Calcula o capital final.

$$C_f = C_i \cdot (1 + i)^n = 82\,000 \cdot (1 + 0.03)^5 = 82\,000 \cdot 1.159... = 95\,060 \text{ €}$$

Actividades propostas

54. Ao 5% de interese composto durante 12 anos, cal será o capital final que obteremos ao depositar 39 500 €?

CURIOSIDADES. REVISTA

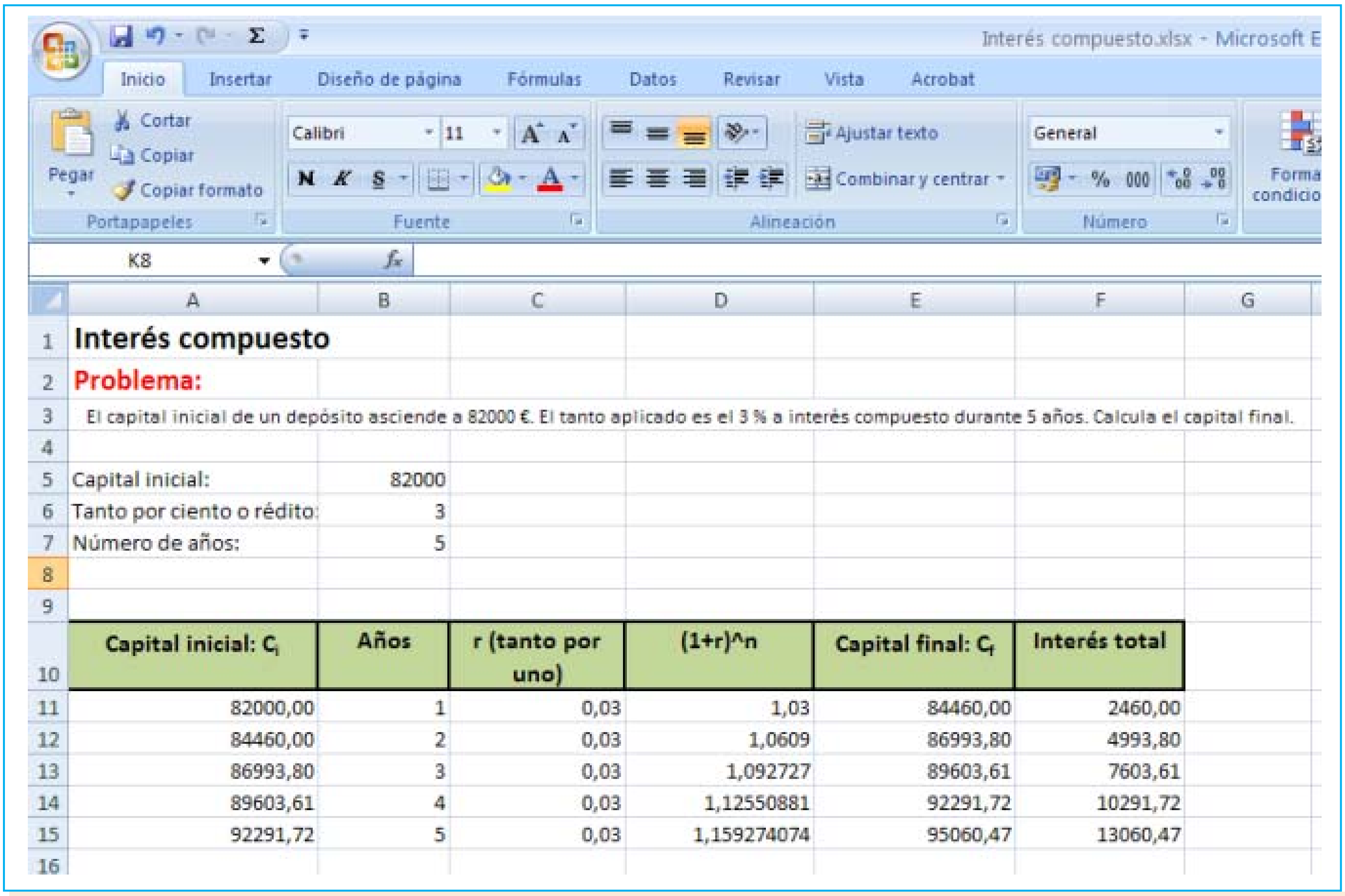
Confecciona a túa propia folla de cálculo

Imos resolver o problema “O capital inicial dun depósito ascende a 82 000 €. O tanto aplicado é o 3 % a interese composto durante 5 anos. Calcula o capital final” confeccionando unha folla de cálculo.

Abre Excel ou calquera outra folla de cálculo. Verás que as follas están formadas por cuadrículas, con letras na horizontal e números na vertical. Así cada cuadrícula da folla pode designarse por unha letra e un número: A1, B7, …

Imos deixar as primeiras 9 filas para poñer títulos, anotacións…

Na fila 10 imos escribir os títulos das casas. Na casa A10 escribe: Capital inicial. Na B10: Anos. Na C10: Tanto por un. Na D10: $(1 + r)^n$. Na E10: capital final. Na F10: Interese total.



	A	B	C	D	E	F	G
1	Interés compuesto						
2	Problema:						
3	El capital inicial de un depósito asciende a 82000 €. El tanto aplicado es el 3 % a interés compuesto durante 5 años. Calcula el capital final.						
4							
5	Capital inicial:	82000					
6	Tanto por ciento o rédito:	3					
7	Número de años:	5					
8							
9							
10	Capital inicial: C_i	Años	r (tanto por uno)	(1+r)^n	Capital final: C_f	Interés total	
11	82000,00	1	0,03	1,03	84460,00	2460,00	
12	84460,00	2	0,03	1,0609	86993,80	4993,80	
13	86993,80	3	0,03	1,092727	89603,61	7603,61	
14	89603,61	4	0,03	1,12550881	92291,72	10291,72	
15	92291,72	5	0,03	1,159274074	95060,47	13060,47	
16							

Na fila 11 comezamos os cálculos. En A11 anotamos 82000, que é o capital inicial.

En B11, escribimos 1, pois estamos no ano primeiro; en B12, escribimos 2 e, seleccionando as casas B11 e B12, arrastramos ata B15, pois pídennos 5 anos.

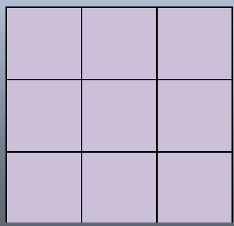
Como se puxo o capital ao 3 %, o tanto por un é 0,03, cantidade que copiamos en C11 e arrastramos ata C15.

Para calcular $(1 + r)^n$, podemos facelo usando a función POTENCIA. Para iso escribimos un signo = na casa D11 e buscamos a función POTENCIA, en número escribiremos 1+C11 e en expoñente B11. Quedarache: =POTENCIA(1+C11;B11). Agora, sinálalo e arrástralo ata D15.

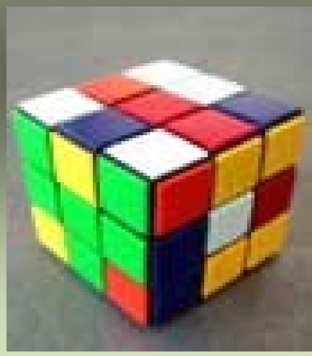
Para calcular $C \cdot (1 + r)^n$, na columna E, só temos que multiplicar A11*D11. Queremos deixar invariante o capital inicial, para dicirllo a Excel, que non nolo cambie, escribimos: =$A$11*D11 e arrastramos ata a fila E15.

Proporcionalidade en áreas e volumes

Ao aumentar o lado dun cadrado ao dobre, a súa superficie queda multiplicada por 4. Ao multiplicar por 3 o lado, a área multiplícase por 9.



Ao aumentar o lado dun cubo ao dobre, o seu volume queda multiplicado por 8. Ao multiplicar por 3 o lado, o volume multiplícase por 27.



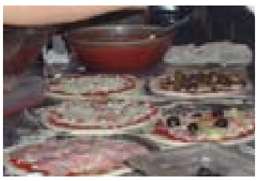
En xeral, se facemos un cambio de escala de factor de proporcionalidade k, a área ten un factor de proporcionalidade k^2, e o volume k^3.

Utiliza esta observación para resolver os seguintes problemas:

A torre Eiffel de París mide 300 metros de altura e pesa uns 8 millóns de quilos. Está construída en ferro. Se encargamos un modelo a escala da torre, tamén de ferro, que pese só un quilo, que altura terá? Será maior ou menor que un lapis?

Antes de empezar a calcular, dá a túa opinión.

Axuda: $k^3 = 8\,000\,000/1$ logo $k = 200$. Se a Torre Eiffel mide 300 metros de altura, a nosa torre medirá 300/200 = 1.5 m. Metro e medio! Moito máis que un lapis!



1. Nunha pizzería a pizza de 20 cm de diámetro vale 3 euros e a de 40 cm vale 6 euros. Cal ten mellor prezo?
2. Vemos no mercado unha pescada de 40 cm que pesa un quilo. Parécenos un pouco pequena e pedimos outra un pouco maior, que resulta pesar 2 quilos. Canto medirá?
3. Nun día frío un pai e un fillo pequeno van exactamente igual abrigados, cal dos dous terá máis frío?

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

RESUMO

Noción	*Definición*	*Exemplos*
Proporcionalidade directa	Dúas magnitudes son **directamente** proporcionais cando ao multiplicar ou dividir á primeira por un número, a segunda queda multiplicada ou dividida polo mesmo número. A función de proporcionalidade directa é unha recta que pasa pola orixe: $y = kx$. A pendente da recta, ***k***, é a **razón de proporcionalidade directa**.	Para empapelar 300 m^2 utilizamos 24 rolos de papel, Se agora a superficie é de 104 m^2, necesitaremos 8.32 rolos, pois $k = 300/24 = 12.5$, $y = 12.5x$, polo que $x = 104/12.5 = 8.32$ rolos.
Proporcionalidade inversa	Dúas magnitudes son **inversamente** proporcionais cando ao multiplicar ou dividir á primeira por un número, a segunda queda dividida ou multiplicada polo mesmo número. A función de proporcionalidade inversa é a hipérbole $y = k'/x$. Polo tanto a **razón de proporcionalidade inversa** k' é o produto de cada par de magnitudes: $k' = a \cdot b = a' \cdot b'$.	Dúas persoas pintan unha vivenda en 4 días. Para pintar a mesma vivenda, 4 persoas tardarán: $k' = 8$, $y = 8/x$, polo que tardarán 2 días.
Porcentaxes	Razón con denominador 100.	O 87 % de 2 400 é $\frac{87 \cdot 2\,400}{100} = 2\,088$
Escalas	A escala é a proporción entre as medidas do debuxo e as medidas na realidade.	A escala 1:50000, 35 cm son 17.5 km na realidade.

Reparto proporcional directo	**Reparto proporcional inverso**
Repartir directamente a 6, 10 e 14, 105 000 € 6 + 10 + 14 = 30 105 000 : 30 = 3 500 6 · 3 500 = 21 000 € 10 · 3 500 = 35 000 € 14 · 3 500 = 49 000 €	Repartir 5 670 inversamente a 3, 5 e 6 $1/3 + 1/5 + 1/6 = \frac{10+6+5}{30} = \frac{21}{30}$ 5 670 : 21 = 270 270 · 10 = **2 700** 270 · 6 = **1 620** 270 · 5 = **1 350**

Mesturas e aliaxes	Mesturar distintas cantidades de produtos, de distintos prezos. A **lei** dunha **aliaxe** é a relación entre o peso do metal máis valioso e o peso total.	Una xoia que pesa 245 g e contén 195 g de prata, a súa lei é: $\frac{195}{245} = 0.795$
Interese simple e composto	O interese é o beneficio que se obtén ao depositar un capital nunha entidade financeira a un determinado tanto por cento durante un tempo	$C = 3\,600$; $r = 4.3$ %; $t = 8$ anos $I = \frac{3\,600 \cdot 4.3 \cdot 8}{100} = 1\,238.4$ €

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

EXERCICIOS E PROBLEMAS

1. Copia no teu caderno, calcula a razón de proporcionalidade e completa a táboa de proporcionalidade directa:

litros	8.35		0.75	1.5	
euros		14	2.25		8

2. Estima cantas persoas caben de pé nun metro cadrado. Houbo unha festa e encheuse completamente un local de 400 m^2, cantas persoas estimas que foron a esa festa?

3. Cada semana pagamos 48 € en transporte. Canto gastaremos durante o mes de febreiro?

4. Con 85 € pagamos 15 m de tea, canto nos custarán 23 m da mesma tea?

5. Para tapizar cinco cadeiras utilicei 0.6 m de tea, cantas cadeiras poderei tapizar coa peza completa de 10 m?

6. Un camión transportou en 2 viaxes 300 sacos de patacas de 25 kg cada un. Cantas viaxes serán necesarias para transportar 950 sacos de 30 kg cada un?

7. Unha edición de 400 libros de 300 páxinas cada un acada un peso total de 100 kg. Cantos kg pesará outra edición de 700 libros de 140 páxinas cada un?

8. Sabendo que a razón de proporcionalidade directa é *k* = 1.8, copia no teu caderno e completa a seguinte táboa:

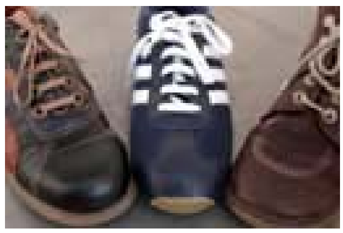
Magnitude A	15.9			0.01	
Magnitude B		6	0.1		10

9. O modelo de teléfono móbil que custaba 285€ + IVE está agora cun 15 % de desconto. Cal é o seu prezo rebaixado? (IVE 21 %)

10. Por atrasarse no pagamento dunha débeda de 1 500 €, unha persoa debe pagar unha recarga do 12 %. Canto ten que devolver en total?

11. Se un litro de leite de 0.85 € aumenta o seu prezo nun 12 %, canto vale agora?

12. Que tanto por cento de desconto se aplicou nunha factura de 1 900 € se finalmente se pagaron 1 200 €?



13. Se unhas zapatillas de 60 € se rebaixan un 15 %, cal é o valor final?

14. Ao comprar un televisor obtiven un 22 % de desconto, polo que ao final paguei 483.60 €, cal era o prezo do televisor sen desconto?

15. Luís comprou unha camisola que estaba rebaixada un 20 % e pagou por ela 20 €. Cal era o seu prezo orixinal?

16. Por liquidar unha débeda de 35 000 € antes do previsto, unha persoa paga finalmente 30 800 €, que porcentaxe da súa débeda aforrou?

17. O prezo dunha viaxe anúnciase a 500 € IVE incluído. Cal era o prezo sen IVE? (IVE 21 %)

18. Que incremento porcentual se efectuou sobre un artigo que antes valía 25 € e agora se paga a 29 €?

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

19. Un balneario recibiu 10 mil clientes no mes de xullo e 12 mil en agosto. Cal é o incremento porcentual de clientes de xullo a agosto?

20. Un mapa está debuxado a escala 1:800000. A distancia real entre dúas cidades é 200 km. Cal é a súa distancia no mapa?

21. A distancia entre Oviedo e A Coruña é de 340 km. Se no mapa están a 12 cm, cal é a escala á que está debuxado?

22. Interpreta a seguinte escala gráfica e calcula a distancia na realidade para 21 cm.

0	3	6	9	12 km

23. Copia no teu caderno e completa a seguinte táboa:

Tamaño no debuxo	Tamaño real	Escala
20 cm longo e 5 cm de ancho		1:25000
10 cm	15 km	
	450 m	1:30000

24. Copia no teu caderno, calcula a razón de proporcionalidade inversa e completa a táboa:

Magnitude A	8	7.5		3.5	
Magnitude B		12	0.15		10

25. Determina se as seguintes magnitudes se encontran en proporción directa, inversa ou en ningunha delas:

a) Velocidade á que circula un coche e espazo que percorre.

b) Diñeiro que tes para gastar e bolsas de améndoas que podes comprar.

c) Talle de zapatos e prezo dos mesmos.

d) Número de membros dunha familia e litros de leite que consomen.

e) Número de entradas vendidas para un concerto e diñeiro recadado.

f) Números de billas que enchen unha piscina e tempo que esta tarda en encherse.

g) Idade dunha persoa e estatura que ten.

h) Número de traballadores e tempo que tardan en facer un valado.

i) Idade dunha persoa e número de amigos que ten.

26. Que velocidade debería levar un automóbil para percorrer en 4 horas certa distancia, se a 80 km/h tardou 5 horas e 15 minutos?

27. A razón de proporcionalidade inversa entre A e B é 5. Copia no teu caderno e completa a táboa seguinte:

A	20		7		10.8

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

B		0.05		0.3	

28. Na granxa faise o pedido de forraxe para alimentar a 240 porcos durante 9 semanas. Véndense 60 porcos, cantas semanas lles durará a forraxe? E se en lugar de vender, compra trinta porcos? E se decide rebaixar a ración unha cuarta parte cos 240 porcos?

29. Un granxeiro con 65 galiñas ten millo para alimentalas 25 días. Se vende 20 galiñas, cantos días poderá alimentar ás restantes?

30. Con 15 paquetes de 4 kg cada un poden comer 150 galiñas diariamente. Se os paquetes fosen de 2.7 kg, cantos necesitariamos para dar de comer ás mesmas galiñas?

31. Determina se as dúas magnitudes son directa ou inversamente proporcionais e completa a táboa no teu caderno:

A	24	8	0.4	6		50
B	3	9	180		20	

32. Se a xornada laboral é de 8 horas necesitamos a 20 operarios para realizar un traballo. Se rebaixamos a xornada en media hora diaria, cantos operarios serán necesarios para realizar o mesmo traballo?

33. Nun almacén gárdanse reservas de comida para 100 persoas durante 20 días con 3 racións diarias, cantos días duraría a mesma comida para 75 persoas con 2 racións diarias?

34. Se 15 operarios instalan 2 500 m de valado en 7 días. Cantos días tardarán 12 operarios en instalar 5 250 m de valado?

35. Nun concurso o premio de 168 000 € repártese de forma directamente proporcional aos puntos conseguidos. Os tres finalistas conseguiron 120, 78 e 42 puntos. Cantos euros recibirá cada un?

36. Repartir 336 en partes directamente proporcionais a 160, 140, 120.

37. Un traballo págase a 3 120 €. Tres operarios fano achegando o primeiro 22 xornadas, o segundo 16 xornadas e o terceiro 14 xornadas. Canto recibirá cada un?

38. Repartir 4 350 en partes inversamente proporcionais a 18, 30, 45.

39. Mesturamos 3 kg de améndoas a 14 €/kg, 1.5 kg de noces a 6 €/kg e 1.75 kg de castañas 8 €/kg. Calcula o prezo final do paquete de 250 g de mestura de froitos secos.

40. Calcula o prezo do litro de zume que se consegue mesturando 8 litros de zume de ananás a 2.5 €/l, 15 litros de zume de laranxa a 1.6 €/l e 5 litros de zume de uva a 1.2 €/l. A canto debe venderse unha botella de litro e medio se se lle aplica un aumento do 40 % sobre o prezo de custe?

41. Para conseguir un tipo de pintura mestúranse tres produtos: 5 kg do produto X a 18 €/kg, 19 kg do produto E a 4.2 €/kg e 12 kg do produto Z a 8 €/kg. Calcula o prezo do kg de mestura.

42. Cinco persoas comparten un microbús para realizaren distintos traxectos. O custe total é de 157.5 € máis 20 € de suplemento por servizo nocturno. Os quilómetros percorridos por cada pasaxeiro foron 3, 5, 7, 8 e 12 respectivamente. Canto debe abonar cada un?

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

43. Decidiuse penalizar ás empresas que máis contaminan. Para iso repártense 2 350 000 € para subvencionar a tres empresas que presentan un 12 %, 9 % e 15 % de grao de contaminación. Canto recibirá cada unha?

44. Un lingote de ouro pesa 340 g e contén 280.5 g de ouro puro. Cal é a súa lei?

45. Cantos gramos de ouro contén unha xoia de 0.900 de lei, que se formou cunha aliaxe de 60 g de 0.950 de lei e 20 g de 0.750 de lei?

46. Que capital hai que depositar ao 3.5% de rédito en 5 anos para obter un interese simple de 810 €?

47. Cal é o capital final que se recibirá por depositar 25 400 € ao 1.4 % en 10 anos?

48. Cantos meses debe depositarse un capital de 74 500 € ao 3 % para obter un interese de 2 980 €?

49. Ao 3 % de interese composto, un capital converteuse en 63 338.5 €. De que capital se trata?

50. Na construción dunha ponte de 850 m utilizáronse 150 vigas, pero o enxeñeiro non está moi seguro e decide reforzar a obra engadindo 50 vigas máis. Se as vigas se colocan uniformemente ao longo de toda o ponte, a que distancia se colocarán as vigas?

51. Nun colexio de primaria convócase un concurso de ortografía no que se dan varios premios. O total que se reparte entre os premiados son 500 €. Os alumnos que non cometeron ningunha falta reciben 150 €, e o resto distribúese de maneira inversamente proporcional ao número de faltas. Hai dous alumnos que non tiveron ningunha falta, un tivo unha falta, outro dúas faltas e o último tivo catro faltas, canto recibirá cada un?

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

AUTOAVALIACIÓN

1. Os valores que completan a táboa de proporcionalidade directa son:

A	10	0.25		0.1	100
B		50	5		

a) 612.5; 1 000; 0.0005; 0.5 b) 1.25; 2.5; 125; 0.125 c) 62; 500; 0.005; 0.05

2. Con 500 € pagamos os gastos de gas durante 10 meses. En 36 meses pagaremos:

a) 2 000 € b) 1 900 € c) 1 800 € d) 1 500 €.

3. Un artigo que custaba 2000€ rebaixouse a 1750€. A porcentaxe de rebaixa aplicada é:

a) 10 % b) 12.5 % c) 15.625 % d) 11.75 %

4. Para envasar 510 litros de auga utilizamos botellas de litro e medio. Cantas botellas necesitaremos se queremos utilizar envases de tres cuartos de litro?

a) 590 botellas b) 700 botellas c) 650 botellas d) 680 botellas

5. Os valores que completan a táboa de proporcionalidade inversa son:

A	5.5	10		11	
B	20		0.5		0.1

a) 40; 200; 11.5; 1 000 b) 11; 200; 20; 300 c) 11; 220; 10; 1 100 d) 40; 220; 10; 500

6. Tres agricultores reparten os quilogramos da colleita de forma proporcional ao tamaño das súas parcelas. A meirande, que mide 15 ha, recibiu 30 toneladas; a segunda é de 12 ha e a terceira de 10 ha recibirán:

a) 24 t e 20 t b) 20 t e 24t c) 24 t e 18 t d) 25 t e 20 t

7. A escala á que se debuxou un mapa no que 2.7 cm equivalen a 0.81 km é:

a) 1:34000 b) 1:3000 c) 1:30000 d) 1:300

8. Con 4 rolos de papel de 5 m de longo, podo forrar 32 libros. Cantos rolos necesitaremos para forrar 16 libros se agora os rolos de papel son de 2 m de longo?

a) 3 rolos b) 5 rolos c) 4 rolos d) 2 rolos

9. O prezo final do kg de mestura de 5 kg de fariña clase A, a 1.2 €/k; 2.8 kg clase B a 0.85 €/kg e 4 kg clase C a 1 €/kg é:

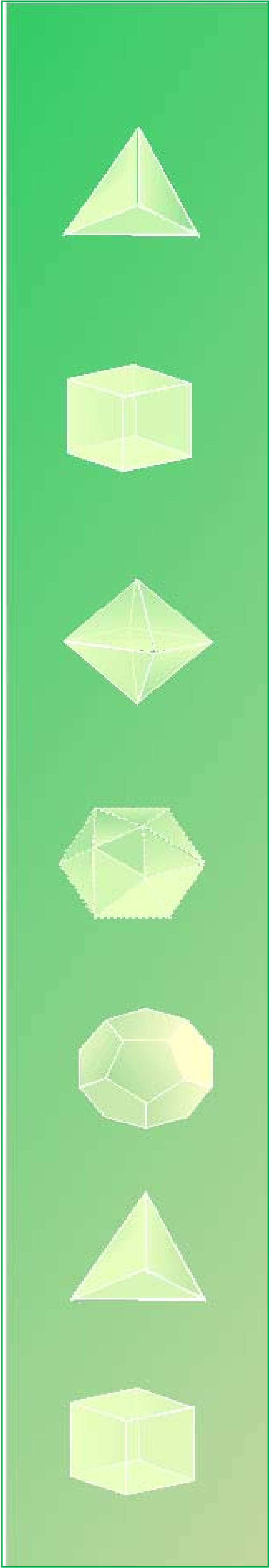
a) 1.12 € b) 0.98 € c) 1.03 € d) 1.049 €

10. A lei dunha aliaxe é 0.855. Se o peso da xoia é 304 g, a cantidade de metal precioso é:

a) 259.92 g b) 255.4 g c) 248.9 g d)

306 g

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF



Matemáticas orientadas ás ensinanzas aplicadas

4ºA ESO
Capítulo 3: Polinomios. Fraccións alxébricas

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisora: María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF. commons.wikimedia

Índice

Resumo

En Babilonia xa utilizaban a Álxebra, pero os exipcios e os gregos tratábana utilizando a Xeometría. Os árabes recolleron o saber antigo de Oriente e de Occidente e trouxeron a Álxebra a Europa. A palabra "*álxebra*" en árabe significa "*restaurar*" e no *Quijote* aparecen alxebristas que restauraban os ósos rotos. No século XIII, *Fibonacci* (Leonardo de Pisa) viaxou e contactou con matemáticos árabes e hindús. O seu libro, *Liber abaci*, pode ser considerado o primeiro libro de Álxebra europeo. No Renacemento italiano xa houbo grandes alxebristas que se ocupaban, principalmente, da resolución de ecuacións.

Logo, o punto de vista cambiou. A *Álxebra Moderna* ocúpase das estruturas alxébricas, que vén ser atopar as propiedades comúns que poidan ter distintos conxuntos, como por exemplo, encontrar similitudes entre os números enteiros, que xa coñeces, e os polinomios que imos traballar neste capítulo.

Hoxe os ordenadores son capaces de traballar con expresións alxébricas.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

1. INTRODUCIÓN. EXPRESIÓNS ALXÉBRICAS

1.1. Introdución

Non fai falla imaxinar situacións rebuscadas para que, á hora de realizar un razoamento, nos topemos con algunha das catro operacións matemáticas básicas: suma, resta, multiplicación ou división.

Exemplos:

- Ana, Antón e Duarte fixeron unha viaxe e, á volta, sumaron os gastos efectuados que ascenden a 522 €. O gasto realizado por cada un foi de $\frac{522}{3}$ €, é dicir, 174 €.

- Se imos comprar mazás á froitaría e o prezo dun quilogramo é de 1.3€ resulta habitual que, segundo imos colocando a froita na balanza, vaia indicando o importe final. Para iso realiza a operación: $1.3 \cdot x$, onde x é a cantidade de quilogramos que nos indica a balanza. Despois de cada pesada, o resultado desa multiplicación reflicte o importe das mazás que, nese momento, contén a bolsa.
- Recordas a fórmula do interese: $I = \frac{Crt}{100}$, onde I é o interese que se recibe ao colocar un capital C, cun rédito r, durante un número de anos t.
- Supoñamos que temos un contrato cunha compañía de telefonía móbil polo que pagamos 5 céntimos de euro por minuto, así como 12 céntimos por establecemento de chamada. Con esa tarifa, unha chamada de 3 minutos custaranos:

$$(0.05 \cdot 3) + 0.12 = 0.15 + 0.12 = 0.27 \text{ euros}$$

Pero cal é o prezo dunha chamada calquera? Como descoñecemos a súa duración, atopámonos cunha cantidade non determinada, ou indeterminada, polo que en calquera resposta que deamos á pregunta anterior se apreciará a ausencia dese dato concreto. Podemos dicir que o custe dunha chamada calquera é

$$(0.05 \cdot x) + 0.12 = 0.05 \cdot x + 0.12 \text{ euros}$$

onde x sinala a súa duración en minutos.

- Para calcular o valor do perímetro dun rectángulo de lados a e b utilízase a expresión:

$$2 \cdot a + 2 \cdot b$$

- A expresión alxébrica que nos representa o produto dos cadrados de dous números calquera x e y simbolízase como $x^2 \cdot y^2$.

Actividades propostas

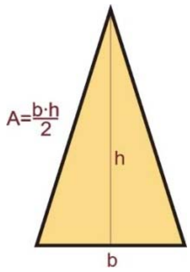
1. A finais de cada mes a empresa de telefonía móbil proporciónanos a factura mensual. Nela aparece moita información, en particular, o número total de chamadas realizadas (N) así como a cantidade total de minutos de conversa (M). Cos datos do anterior exemplo, xustifica que o importe das chamadas efectuadas durante ese mes é:

$$(0.05 \cdot M) + (0.12 \cdot N) = 0.05 \cdot M + 0.12 \cdot N \text{ euros}$$

Exemplo:

- É ben coñecida a *fórmula* da área dun triángulo de base *b* e altura asociada *h*:

$$\frac{b \cdot h}{2}$$



En todos estes exemplos xurdiron **expresións alxébricas**.

1.2. Expresións alxébricas

Chamamos **expresión alxébrica** a calquera expresión matemática que se constrúa con números reais, letras e as operacións matemáticas básicas: suma, resta, multiplicación e/ou división.

Nunha expresión alxébrica pode haber datos non concretados; unhas veces deberemos obter os valores que "resolven" a expresión e, noutras, como a fórmula da área do triángulo, verifícanse para calquera valor. Segundo o contexto, recibirán o nome de ***variable***, ***indeterminada***, ***parámetro***, entre outros.

Se nunha expresión alxébrica non hai *variables*, esta expresión non é máis que un número real:

Ao fixar un valor concreto para cada indeterminada dunha expresión alxébrica aparece un número real: o valor numérico desa expresión alxébrica para tales valores das indeterminadas.

O **valor numérico** dunha expresión alxébrica é o que se obtén ao substituír as letras desa expresión por determinados valores.

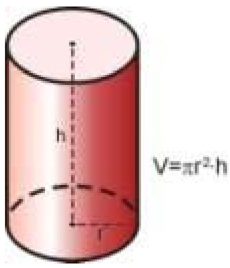
Exemplo:

- O volume dun cilindro vén dado pola expresión alxébrica

$$\pi \cdot r^2 \cdot h$$

na que *r* é o radio do círculo base e *h* é a súa altura. Deste modo, o volume dun cilindro cuxa base ten un radio de 10 cm e de altura 15 cm é igual a:

$$\pi \cdot 10^2 \cdot 15 = 1\,500 \cdot \pi \quad cm^3$$



- O valor da expresión 2*a* + 5 para o caso concreto de *a* igual a 3 calculámolo substituíndo *a* por 3. Así resulta 2 · 3 + 5 = 11, e dise que o valor numérico de 2*a* + 5 para *a* = 3 é 11.

- Se na expresión $7 + \frac{x}{2} + x \cdot y^3 - \frac{6}{z}$ particularizamos as tres variables cos valores $x = 4$, $y = -1$, $z = \frac{1}{2}$ xorde o número real

$$7 + \frac{4}{2} + 4 \cdot (-1)^3 - \frac{6}{1/2} = 7 + 2 - 4 - 12 = -7$$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Nunha expresión alxébrica pode non ter sentido outorgar algún valor a certa indeterminada. En efecto, no último exemplo non é posible facer $z = 0$.

Actividades propostas

2. Escribe a expresión alxébrica que nos proporciona a área dun círculo.

3. Escribe en linguaxe alxébrica os seguintes enunciados, referidos a dous números calquera x e y:

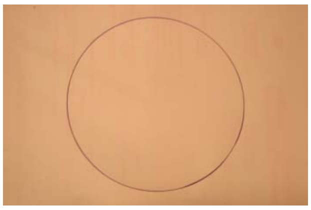
a) a metade do oposto da súa suma.

b) a suma dos seus cubos.

c) o cubo da súa suma.

d) o inverso da súa suma.

e) a suma dos seus inversos.



4. Traduce a un enunciado en linguaxe natural as seguintes expresións alxébricas:

a) $3x + 4$ b) $x / 3 – x^3$ c) $(x^3 + y^3 + z^3) / 3$ d) $(x^2 – y^2) / (x – y)^2$

5. Unha tenda de roupa anuncia nos seus escaparates que está de rebaixas e que todos os seus artigos están rebaixados un 15 % sobre o prezo impreso en cada etiqueta. Escribe o que pagaremos por unha peza en función do que aparece na súa etiqueta.

6. O anterior comercio, nos últimos días do período de rebaixas, desexa desfacerse das súas existencias e para iso decide aumentar o desconto. Mantén o 15 % para a compra dunha única peza e, a partir da segunda, o desconto total aumenta un 5 % por cada nova peza de roupa, ata un máximo de 10 artigos. Analiza canto pagaremos ao realizar unha compra en función da suma total das cantidades que figuran nas etiquetas e do número de artigos que se adquiran.

7. Calcula o valor numérico das seguintes expresións alxébricas para o valor ou valores que se indican:

a) $x^2 + 7x – 12$ para $x = 0$.

b) $(a + b)^2 – (a^2 + b^2)$ para $a = –3$ y $b = 4$.

c) $a^2 – 5a + 2$ para $a = –1$.

8. Indica en cada caso o valor numérico da seguinte expresión: $10x + 20y + 30z$

a) $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$.

b) $x = 2$, $y = 0$, $z = 5$.

c) $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

2. POLINOMIOS. SUMA E PRODUTO

2.1. Monomios. Polinomios

Unhas expresións alxébricas de grande utilidade son os **polinomios**, cuxa versión máis simple e, á vez, xeradora deles, son os **monomios**.

Un monomio vén dado polo produto de números reais e variables (ou indeterminadas). Chamaremos coeficiente dun monomio ao número real que multiplica á parte literal, indeterminada ou indeterminadas.

Exemplos:

- A expresión que nos proporciona o dobre dunha cantidade, $2 \cdot x$, é un monomio cunha única variable, x, e coeficiente 2.
- O volume dun cilindro, $\pi \cdot r^2 \cdot h$, é un monomio con dúas indeterminadas, r e h, e coeficiente π. A súa parte literal é $r^2 \cdot h$.
- Outros monomios: $\frac{4}{7} \cdot x^2 \cdot y^3$, $5 \cdot \sqrt{2} \cdot x \cdot y^2 \cdot z$
- A expresión $7xy^2 + 3xy - 2x$ está formada por tres termos, tres monomios. Cada un ten un coeficiente e unha parte literal:

  No primeiro, $7xy^2$, o coeficiente é 7 e a parte literal xy^2

  O segundo, $3xy$, ten por coeficiente 3 e parte literal xy.

  E no terceiro, $-2x$, o coeficiente é -2 e a parte literal x

Dous monomios son **semellantes** se teñen a mesma parte literal.

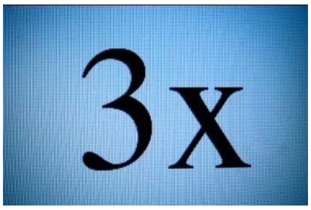
Por exemplo:

- Son monomios semellantes: $7xy^3$ e $3xy^3$.

Atendendo ao expoñente da variable, ou variables, adxudicaremos un **grao** a cada monomio consonte o seguinte criterio:

- Cando haxa unha única indeterminada, o grao do monomio será o expoñente da súa indeterminada.
- Se aparecen varias indeterminadas, o grao do monomio será a suma dos expoñentes desas indeterminadas.

Exemplos:



- $3x$ é un monomio de grao 1 na variable x.
- $\pi \cdot r^2 \cdot h$ é un monomio de grao 3 nas indeterminadas r e h.
- $\frac{4}{7} \cdot x^2 \cdot y^3$ é un monomio de grao 5 en x e y.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

- $5\cdot\sqrt{2}\cdot x\cdot y^2\cdot z$ é un monomio de grao 4 en x, y e z.

Un número real pode ser considerado como un monomio de grao 0.

Actividades propostas

9. Indica o coeficiente e a parte literal dos seguintes monomios:

a) $(3/2)x^2y^3$ b) $(1/2)a^27b4c$ c) $(2x5z9c)/2$

Un **polinomio** é unha expresión construída a partir da suma de monomios.

O **grao dun polinomio** virá dado polo maior grao dos seus monomios.

Exemplos:

- $\frac{1}{5}\cdot x^2-7\cdot x^3+2$ é un polinomio de grao 3 na variable x.
- $-3\cdot y^4+8\cdot x^2+2\cdot x$ é un polinomio de grao 4 nas indeterminadas x e y.
- $4\cdot x^2\cdot y^3-7+3\cdot y^2$ é un polinomio de grao 5 en x e y.
- $x-2\cdot y+6\cdot z$ é un polinomio de grao 1 en x, y e z.

O aspecto xenérico dun polinomio na variable x é

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+......+a_2x^2+a_1x+a_0$$

onde os coeficientes a_k son números reais.

Dicimos que un polinomio é **mónico** cando o coeficiente do seu termo de maior grao é igual a 1.

Un polinomio está **ordenado** se os seus monomios están escritos de menor a maior grao ou viceversa.

Un polinomio é **completo** se están os monomios de todos os graos, sen coeficientes nulos.

Exemplos:

- $-8x^4+\frac{1}{4}x^2+23$ é un polinomio de grao 4 na variable x. Está ordenado e non é completo.
- $7y^3+4y-9$ é un polinomio de grao 3 na indeterminada y. Está ordenado e non é completo.
- z^2-6z+8 é un polinomio de grao 2 en z. Ademais, é un polinomio mónico, ordenado e completo.
- $5x+2$ é un polinomio de grado 1 en x. Ademais, é un polinomio ordenado e completo.

Como ocorre con calquera expresión alxébrica, se fixamos, ou escollemos, un valor concreto para a variable dun polinomio aparece un número real: o **valor numérico** do polinomio para ese valor determinado da variable. Se chamamos p a un polinomio, á avaliación de p en, por exemplo, o número -3 denotámola por $p(-3)$, e lemos *"p de menos tres"* ou *"p en menos tres"*. Con este criterio, se p é

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

un polinomio cuxa indeterminada é a variable x, podemos referirnos a el como p ou $p(x)$ indistintamente. Desta forma apreciamos que un polinomio pode ser entendido como unha maneira concreta de asignar a cada número real outro número real. Nese caso a $y = p(x)$ dicimos que é unha función polinómica.

Exemplos:

- Se avaliamos o polinomio $p \equiv -3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ en $x = 5$ atopámonos co número

$$p(5) = -3 \cdot 5^4 + \frac{1}{5} \cdot 5^2 + 2 = -3 \cdot 625 + 5 + 2 = -1\,875 + 7 = -1\,868$$

- O valor do polinomio $q(y) = 4y^3 + 3y - 7$ para $y = -1$ é

$$q(-1) = 4 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1) - 7 = 4 \cdot (-1) - 3 - 7 = -4 - 10 = -14$$

- Ao particularizar o polinomio $r \equiv z^2 - 3z + 12$ en $z = 0$ resulta o número $r(0) = 12$.

2.2. Suma de polinomios

Como un polinomio é unha suma de monomios, a suma de dous polinomios é outro polinomio. Á hora de sumar dous polinomios, coa mesma indeterminada, procederemos a sumar os monomios de igual parte literal.

Exemplos:

- A suma dos polinomios $-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ e $-x^4 + 4x^2 - 5x - 6$ é o polinomio

$$\left(-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2\right) + (-x^4 + 4x^2 - 5x - 6) = (-3x^4 - x^4) + \left(\frac{1}{5}x^2 + 4x^2\right) - 5x + (2 - 6) =$$

$$= (-3 - 1) \cdot x^4 + \left(\frac{1}{5} + 4\right) \cdot x^2 - 5x + (2 - 6) = -4x^4 + \frac{21}{5}x^2 - 5x - 4$$

- $(5x^2 - 3x + 1) + (x^2 + 4x - 7) = (5x^2 + x^2) + (-3x + 4x) + (1 - 7) = 6x^2 + x - 6$
- $(2x^3 + 1) + (-x^4 + 4x) = -x^4 + 2x^3 + 4x + 1$
- $(x^3 + 9) + (-x^3 + 2) = 11$
- $3xy + 5xy + 2x = 8xy + 2x$
- $5abx^2 + 3abx - 2abx^2 - 4abx + 3abx^2 = (5abx^2 - 2abx^2 + 3abx^2) + (3abx - 4abx) = 6\,abx^2 - abx$

No seguinte exemplo sumaremos dous polinomios dispoñéndoos, adecuadamente, un sobre o outro.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Exemplo:

$$\begin{array}{rrrrrrr} & 4x^5 & +2x^4 & +x^3 & -5x^2 & +x & +4 \\ + & -7x^5 & & +4x^3 & +5x^2 & -3x & -6 \\ \hline & -3x^5 & +2x^4 & +5x^3 & & -2x & -2 \end{array}$$

Propiedades da suma de polinomios

Propiedade conmutativa. Se *p* e *q* son dous polinomios, non importa a orde na que os coloquemos á hora de sumalos:

$$p + q \equiv q + p$$

Exemplo:

$$(4x^2 - 2x + 7) + (-x^3 + x^2 - 3x + 1) = -x^3 + (4x^2 + x^2) + (-2x - 3x) + (7 + 1) = -x^3 + 5x^2 - 5x + 8$$

$$(-x^3 + x^2 - 3x + 1) + (4x^2 - 2x + 7) = -x^3 + (x^2 + 4x^2) + (-3x - 2x) + (1 + 7) = -x^3 + 5x^2 - 5x + 8$$

Propiedade asociativa. Sinala como se poden sumar tres ou máis polinomios. Basta facelo agrupándoos dous a dous:

$$(p + q) + r \equiv p + (q + r)$$

Exemplo:

$$(4x^2 - 2x + 7) + (-x^3 + x^2 - 3x + 1) + (x - 6) = (4x^2 - 2x + 7 - x^3 + x^2 - 3x + 1) + (x - 6) =$$
$$= (-x^3 + 5x^2 - 5x + 8) + (x - 6) = -x^3 + 5x^2 - 4x + 2$$

Tamén:

$$(4x^2 - 2x + 7) + (-x^3 + x^2 - 3x + 1) + (x - 6) = (4x^2 - 2x + 7) + (-x^3 + x^2 - 3x + 1 + x - 6) =$$
$$= (4x^2 - 2x + 7) + (-x^3 + x^2 - 2x - 5) = -x^3 + 5x^2 - 4x + 2$$

Actividades propostas

10. Realiza as seguintes sumas de polinomios:

- $(2x^2 - 2x) + (-3x^2 - 4x + 2) + (3x^3 - 3x^2 + 2x - 3)$
- $-2x^4 + (2x^3 + 3x - 4) + (-4x^2 - 6x + 5) + (3x^3 - 2x + 6)$

11. Simplifica as seguintes expresións alxébricas:

a) $3x - 4 - (3x + 2) + 4x$

b) $3(x^2 - 4x + 6) - (x^2 - 6x + 5)$

c) $(-3)(2a + 4b) - (2b - 3a)$

d) $4(2a^2 - 2ab + 2b^2) - (3a^2 - 4ab)$

Elemento neutro. Hai un polinomio cunha propiedade particular: o resultado de sumalo con calquera outro sempre é este último. Trátase do polinomio dado polo número 0, ou *polinomio cero*.

Exemplo:

$$0+(-7x^3+3x+7)=(-7x^3+3x+7)+0=-7x^3+3x+7$$

Elemento oposto. Cada polinomio ten asociado outro, ao que chamaremos o seu *polinomio oposto*, tal que a suma de ambos os dous é igual ao polinomio cero. Acadamos o polinomio oposto dun dado, simplemente, cambiando o signo de cada monomio.

Exemplo:

- O polinomio oposto de $p\equiv -2x^4+x^3+2x-7$ es $2x^4-x^3-2x+7$, ao que denotaremos como "$-p$". Ratifiquemos que a súa suma é o polinomio cero:

  $$(-2x^4+x^3+2x-7)+(2x^4-x^3-2x+7)=(-2x^4+2x^4)+(x^3-x^3)+(2x-2x)+(-7+7)=0$$

Actividades propostas

12. Escribe o polinomio oposto de cada un dos seguintes polinomios:

a) $4x^4+6x^3+2x^2+5x-2$

b) $9x$

c) $-2x^4+4x^2$

13. Considera os polinomios $p\equiv -2x^3-6x+3$, $q\equiv 2x^2+2x+9$, así como o polinomio suma $s\equiv p+q$. Calcula os valores que adopta cada un deles para $x=-2$, é dicir, calcula $p(-2)$, $q(-2)$ y $s(-2)$. Estuda se existe algunha relación entre eses tres valores.

14. Obtén o valor do polinomio $p\equiv -2x^3-6x+3$ en $x=3$. Que valor toma o polinomio oposto de p en $x=3$?

2.3. Produto de polinomios

Outra operación que podemos realizar con polinomios é a multiplicación.

O resultado do produto de polinomios sempre será outro polinomio. Aínda que nun polinomio temos unha indeterminada, ou variable, como esta toma valores nos números reais, á hora de multiplicar polinomios utilizaremos as propiedades da suma e do produto dos números reais, en particular a propiedade distributiva do produto respecto da suma; así todo queda en función do produto de monomios, cuestión que resolvemos con facilidade:

$$ax^n\cdot bx^m=abx^{n+m}$$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Exemplos:

- $(-5)x^2 \cdot 2x^4 = (-5)\cdot 2 \cdot x^{2+4} = -10x^6$
- $5x^3 \cdot (-4) = 5\cdot(-4)\cdot x^3 = -20x^3$
- $3x^2 \cdot (2x^2 - 4x + 6) = (3x^2 \cdot 2x^2) - (3x^2 \cdot 4x) + (3x^2 \cdot 6) = 6x^4 - 12x^3 + 18x^2$
- $(-x^3 + 3x - 1)\cdot(-2x) = (-x^3)\cdot(-2x) + (3x)\cdot(-2x) + (-1)\cdot(-2x) = 2x^4 - 6x^2 + 2x$
- $(3x-2)\cdot(x^2-4x-5) = (3x)\cdot(x^2-4x-5) + (-2)\cdot(x^2-4x-5) = (3x^3 - 12x^2 - 15x) + (-2x^2 + 8x + 10) =$
  $= 3x^3 + (-12x^2 - 2x^2) + (-15x + 8x) + 10 = 3x^3 - 14x^2 - 7x + 10$
- $(x-6)\cdot(x^3 - 2x) = (x-6)\cdot x^3 + (x-6)\cdot(-2x) = (x^4 - 6x^3) + (-2x^2 + 12x) = x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 12x$

Tamén podemos materializar o produto de polinomios tal e como multiplicamos números enteiros:

Exemplo:

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & -2x^3 & & +x & +4 \\
\times & & & x^2 & -3x & +1 \\
\hline
 & & -2x^3 & & +x & +4 \\
 & 6x^4 & & -3x^2 & -12x & \\
-2x^5 & & +x^3 & +4x^2 & & \\
\hline
-2x^5 & +6x^4 & -x^3 & +x^2 & -11x & +4
\end{array}$$

Recordemos que o polinomio *oposto* doutro se obtén simplemente cambiando o signo de cada monomio. Esta acción correspóndese con multiplicar polo número "-1" o polinomio orixinal. Desta forma o polinomio oposto de p é

$$-p \equiv (-1)\cdot p$$

Neste momento aparece de maneira natural a **operación diferenza**, ou **resta**, de polinomios. Definímola coa axuda do polinomio oposto dun dado:

$$p - q \equiv p + (-q) \equiv p + (-1)\cdot q$$

Exemplo:

$$(-5x^2 - 3x + 2) - (-2x^4 + x^3 + 3x^2 + 6) = (-5x^2 - 3x + 2) + (2x^4 - x^3 - 3x^2 - 6) =$$
$$= 2x^4 - x^3 + (-5x^2 - 3x^2) - 3x + (2-6) = 2x^4 - x^3 - 8x^2 - 3x - 4$$

Actividades propostas

15. Efectúa os seguintes produtos de polinomios:

a) $(-5x^3+3x)\cdot(-4x^2)$

b) $(3x^4+2x)\cdot(-4x-5)$

c) $(3x^3+2x^2-2x)\cdot(4x^2-x)$

d) $(-1)\cdot(6x^3-3x^2-2x+3)$

16. Realiza as seguintes diferenzas de polinomios:

a) $(-3x^3+x)-(-2x^2)$

b) $(3x^4+2x)-(-4x-5)$

c) $(4x^2-2x)-(x^3+2x^2-2x)$

17. Multiplica cada un dos seguintes polinomios por un número de tal forma que xurdan polinomios mónicos:

a) $3x^3-2x^2+x$

b) $-4x^4+2x-5$

c) $-x^2+2x-6$

18. Calcula e simplifica os seguintes produtos:

a) $3x\cdot(2x^2+4x-6)$

b) $(3x-4)\cdot(4x+6)$

c) $(2a^2-5b)\cdot(4b-3a^3)$

d) $(3a-6)\cdot(8-2a)\cdot(9a-2)$

Propiedades do produto de polinomios

Propiedade conmutativa. Se p e q son dous polinomios, non importa a orde na que os coloquemos á hora de multiplicalos:

$$p\cdot q \equiv q\cdot p$$

Exemplo:

$$(2x-7)\cdot(-x^3+x^2)=2x\cdot(-x^3+x^2)-7\cdot(-x^3+x^2)=-2x^4+2x^3+7x^3-7x^2=-2x^4+9x^3-7x^2$$

$$(-x^3+x^2)\cdot(2x-7)=-x^3\cdot(2x-7)+x^2\cdot(2x-7)=-2x^4+7x^3+2x^3-7x^2=-2x^4+9x^3-7x^2$$

Propiedade asociativa. Sinala como se poden multiplicar tres ou máis polinomios. Basta facelo agrupándoos dous a dous: $(p\cdot q)\cdot r \equiv p\cdot(q\cdot r)$

Exemplo:

$$\left((4x^2-2)\cdot(-3x+1)\right)\cdot(-x^3+x)=(-12x^3+4x^2+6x-2)\cdot(-x^3+x)=$$
$$=12x^6-12x^4-4x^5+4x^3-6x^4+6x^2+2x^3-2x=12x^6-4x^5-18x^4+6x^3+6x^2-2x$$

Tamén:

$$(4x^2-2)\cdot\left((-3x+1)\cdot(-x^3+x)\right)=(4x^2-2)\cdot(3x^4-3x^2-x^3+x)=$$
$$=12x^6-12x^4-4x^5+4x^3-6x^4+6x^2+2x^3-2x=12x^6-4x^5-18x^4+6x^3+6x^2-2x$$

Actividades propostas

19. Realiza os seguintes produtos de polinomios:

- $x^2\cdot(-3x^2-4x+2)\cdot 3x^3$
- $(3x-4)\cdot(-4x^2-6x+5)\cdot(-2x)$

Elemento neutro. Hai un polinomio cunha propiedade particular: ao multiplicalo por calquera outro sempre nos dá este último. Trátase do polinomio dado polo número 1 ou *polinomio unidade*.

Exemplo:

$$1\cdot(-5x^3-2x+3)=(-5x^3-2x+3)\cdot 1=-5x^3-2x+3$$

Propiedade distributiva da multiplicación respecto da suma. Cando nunha multiplicación de polinomios un dos factores vén dado como a suma de dous polinomios como, por exemplo,

$$(3x^2-x)\cdot\left((-2x+7)+(x^3-4x)\right)$$

temos dúas opcións para coñecer o resultado:

a) realizar a suma e, despois, multiplicar

$$(3x^2-x)\cdot\left((-2x+7)+(x^3-4x)\right)=(3x^2-x)\cdot\left(x^3-6x+7\right)=$$
$$=3x^5-18x^3+21x^2-x^4+6x^2-7x=3x^5-x^4-18x^3+27x^2-7x$$

b) distribuír, aplicar, a multiplicación a cada un dos sumandos e, despois, sumar:

$$(3x^2-x)\cdot\left((-2x+7)+(x^3-4x)\right)=(3x^2-x)\cdot(-2x+7)+(3x^2-x)\cdot(x^3-4x)=$$
$$=(-6x^3+21x^2+2x^2-7x)+(3x^5-12x^3-x^4+4x^2)=3x^5-x^4-18x^3+27x^2-7x$$

Comprobamos que obtemos o mesmo resultado.

En xeral, a **propiedade distributiva** da multiplicación respecto da suma dinos que

$$p\cdot(q+r)\equiv(p\cdot q)+(p\cdot r)$$

Convén comentar que a anterior propiedade distributiva lida en sentido contrario, de dereita a esquerda, é o que comunmente se denomina **sacar factor común**.

Exemplo: $6x^5-4x^4-18x^3+2x^2=(3x^3-2x^2-9x+1)\cdot 2x^2$

Actividades propostas

20. De cada un dos seguintes polinomios extrae algún factor que sexa común aos seus monomios:

a) $-20x^3-40x^2+10x$ b) $60x^4-30x^2$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

3. DIVISIÓN DE POLINOMIOS

3.1. Introdución ás fraccións polinómicas

Ata este momento estudamos varias operacións con polinomios: suma, resta e produto. En calquera dos casos o resultado sempre é outro polinomio. Cando establecemos unha **fracción polinómica** como, por exemplo,

$$\frac{3x^3 - x}{2x^2 + x - 3}$$

o que temos é unha expresión alxébrica, unha **fracción alxébrica**, que, en xeral, non é un polinomio. Si aparece un polinomio no caso, moi particular, no que o denominador é un número real diferente de cero, isto é, un polinomio de grao 0.

É sinxelo constatar que a expresión anterior non é un polinomio: calquera polinomio pode ser avaliado en calquera número real. Porén, esa expresión non pode ser avaliada para $x=1$, xa que nos quedaría o número 0 no denominador.

Poderiamos crer que a seguinte fracción polinómica si é un polinomio:

$$\frac{-2x^3 + 5x^2 - 3x}{x} = \frac{-2x^3}{x} + \frac{5x^2}{x} + \frac{-3x}{x} = -2x^2 + 5x - 3$$

A expresión da dereita si é un polinomio, pois trátase dunha suma de monomios, pero a da esquerda non o é xa que non pode ser avaliada en $x = 0$. Porén, esa fracción alxébrica e o polinomio, cando son avaliados en calquera número diferente de cero, ofrecen o mesmo valor. Son **expresións equivalentes** alí onde ambas as dúas teñen sentido.

3.2. División de polinomios

Aínda que, como vimos no apartado anterior, unha fracción polinómica, en xeral, non é un polinomio, imos estudar a división de polinomios pois é unha cuestión importante e útil.

Analicemos detidamente a división de dous números enteiros positivos. Cando dividimos dous números, *D* (dividendo) entre *d* (divisor, distinto de 0), xorden outros dous, o cociente (*c*) e o resto (*r*). Estes encóntranse ligados pola chamada *proba da división*:

$$D = d \cdot c + r$$

Alternativamente:

$$\frac{D}{d} = c + \frac{r}{d}$$

Ademais, dicimos que a división é exacta cando $r = 0$.

O coñecido algoritmo da división persegue encontrar un número enteiro, o cociente *c*, tal que o resto *r* sexa un número menor que o divisor *d*, e maior ou igual que cero. Fixémonos en que, sen esta esixencia para o resto *r*, podemos escoller arbitrariamente un valor para o cociente *c* o cal nos subministra o seu valor asociado como resto *r*. En efecto, se temos como dividendo *D*=673 e como divisor *d*=12, "se queremos" que o cociente sexa *c*=48 o seu resto asociado é

$$r = D - d \cdot c = 673 - 12 \cdot 48 = 673 - 576 = 97$$

e a conexión entre estes catro números é

$$673 = 12 \cdot 48 + 97$$

Esta última "lectura" da división de números enteiros vai guiarnos á hora de dividir dous polinomios.

Dados dous polinomios $p(x)$ e $q(x)$, a división de $p(x)$, polinomio dividendo, entre $q(x)$, polinomio divisor, proporcionaranos outros dous polinomios, o polinomio cociente $c(x)$ e o polinomio resto $r(x)$. Tamén aquí pesará unha esixencia sobre o polinomio resto: o seu grao deberá ser menor que o grao do polinomio divisor. A relación entre os catro será, naturalmente,

$$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$$

Tamén escribiremos

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

aínda que, en tal caso, seremos conscientes das cautelas sinaladas no apartado anterior canto ás equivalencias entre polinomios e outras expresións alxébricas.

Ao igual que ocorre co algoritmo da división enteira, o algoritmo da división de polinomios consta de varias etapas, de carácter repetitivo, en cada unha das cales aparecen uns polinomios cociente e resto "provisionais" de forma que o grao deses polinomios resto vai descendendo ata que topamos cun cuxo grao é inferior ao grao do polinomio divisor, o que indica que concluímos. Vexamos este procedemento cun exemplo concreto.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Exemplo:

- Imos dividir o polinomio $p(x)=6x^4+5x^3+x^2+3x-2$ entre o polinomio $q(x)=2x^2-x+3$. Como o polinomio divisor, $q(x)$, é de grao 2, debemos atopar dous polinomios, un polinomio cociente $c(x)$, e un polinomio resto $r(x)$ de grao 1 ou 0, tales que

$$p(x)=q(x)\cdot c(x)+r(x)$$

ou, como igualdade entre expresións alxébricas,

$$\frac{p(x)}{q(x)}=c(x)+\frac{r(x)}{q(x)}$$

Á vista dos polinomios $p(x)$ e $q(x)$, e do xa dito sobre $r(x)$, é evidente que o grao do polinomio cociente, $c(x)$, será igual a 2. Imos obtelo monomio a monomio.

- Primeira aproximación aos polinomios cociente e resto:

Para poder lograr a igualdade $p\equiv q\cdot c+r$, como o grao de $r(x)$ será 1 ou 0, o termo de maior grao de $p(x)$, $6x^4$, xurdirá do produto $q(x)\cdot c(x)$. Así obtemos a primeira aproximación de $c(x)$, o seu monomio de maior grao:

$$c_1(x)=3x^2$$

e, de maneira automática, tamén un primeiro resto $r_1(x)$:

$$r_1(x)=p(x)-q(x)\cdot c_1(x)=(6x^4+5x^3+x^2+3x-2)-(2x^2-x+3)\cdot 3x^2=$$
$$=(6x^4+5x^3+x^2+3x-2)-(6x^4-3x^3+9x^2)=8x^3-8x^2+3x-2$$

Como este polinomio $r_1(x)$ é de grao 3, maior que 2, o grao do polinomio divisor $q(x)$, ese polinomio resto non é o definitivo; debemos continuar.

- Segunda aproximación aos polinomios cociente e resto:

Se particularizamos a igualdade entre expresións alxébricas $\frac{p(x)}{q(x)}=c(x)+\frac{r(x)}{q(x)}$ ao que temos ata agora resulta

$$\frac{6x^4+5x^3+x^2+3x-2}{2x^2-x+3}=3x^2+\frac{8x^3-8x^2+3x-2}{2x^2-x+3}$$

Esta segunda etapa consiste en dividir o polinomio $r_1(x)=8x^3-8x^2+3x-2$, xurdido como resto da etapa anterior, entre o polinomio $q(x)=2x^2-x+3$, o divisor inicial. É dicir, repetimos o feito antes pero considerando un novo polinomio dividendo: o polinomio resto do paso anterior.

O novo obxectivo é acadar a igualdade $r_1\equiv q\cdot c_2+r$. Ao igual que antes, o grao de $r(x)$ debería ser 1 ou 0. Como o termo de maior grao de $r_1(x)$, $8x^3$, sae do produto $q(x)\cdot c_2(x)$, é necesario que o polinomio cociente conteña o monomio

$$c_2(x)=4x$$

Isto lévanos a un segundo resto $r_2(x)$:

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

$$r_2(x) = r_1(x) - q(x)\cdot c_2(x) = (8x^3 - 8x^2 + 3x - 2) - (2x^2 - x + 3)\cdot 4x =$$
$$= (8x^3 - 8x^2 + 3x - 2) - (8x^3 - 4x^2 + 12x) = -4x^2 - 9x - 2$$

Como este polinomio $r_2(x)$ é de grao 2, igual que o grao do polinomio divisor $q(x)$, ese polinomio resto non é o definitivo; debemos continuar.

- Terceira aproximación aos polinomios cociente e resto:

O realizado na etapa segunda permítenos avanzar na adecuada descomposición da expresión alxébrica que nos ocupa:

$$\frac{6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3} = 3x^2 + \frac{8x^3 - 8x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3} = 3x^2 + 4x + \frac{-4x^2 - 9x - 2}{2x^2 - x + 3}$$

Esta terceira etapa consiste en dividir o polinomio $r_2(x) = -4x^2 - 9x - 2$, o resto da etapa anterior, entre o polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$, o divisor inicial. De novo repetimos o algoritmo pero con outro polinomio dividendo: o polinomio resto do paso anterior.

Perseguimos que $r_2 \equiv q\cdot c_3 + r$. Como en cada paso, o grao de $r(x)$ debería ser 1 ou 0. O termo de maior grao de $r_2(x)$, $-4x^2$, xorde do produto $q(x)\cdot c_3(x)$, polo que

$$c_3(x) = -2$$

e o terceiro resto $r_3(x)$ é

$$r_3(x) = r_2(x) - q(x)\cdot c_3(x) = (-4x^2 - 9x - 2) - (2x^2 - x + 3)\cdot(-2) =$$
$$= (-4x^2 - 9x - 2) - (-4x^2 + 2x - 6) = -11x + 4$$

Como este polinomio $r_3(x)$ é de grao 1, menor que 2, grao do polinomio divisor $q(x)$, ese polinomio resto si é o definitivo. Concluímos:

$$\frac{6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3} = 3x^2 + \frac{8x^3 - 8x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3} = 3x^2 + 4x + \frac{-4x^2 - 9x - 2}{2x^2 - x + 3} = 3x^2 + 4x - 2 + \frac{-11x + 4}{2x^2 - x + 3}$$

Se o expresamos mediante polinomios:

$$6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 = (2x^2 - x + 3)\cdot(3x^2 + 4x - 2) + (-11x + 4)$$

Conclusión: ao dividir o polinomio $p(x) = 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2$ entre o polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$ obtemos como polinomio cociente $c(x) = 3x^2 + 4x - 2$ e como polinomio resto $r(x) = -11x + 4$.

Seguidamente imos axilizar a división de polinomios:

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

21. Comproba que os cálculos que tes a continuación reflicten o que se fixo no exemplo anterior para dividir o polinomio $p(x)=6x^4+5x^3+x^2+3x-2$ entre o polinomio $q(x)=2x^2-x+3$.

- Primeira etapa:

$$\begin{array}{rl} 6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & \mid\ 2x^2-x+3 \\ \underline{-6x^4+3x^3-9x^2} & \quad 3x^2 \\ 8x^3-8x^2+3x-2 & \end{array}$$

- Primeira e segunda etapas:

$$\begin{array}{rl} 6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & \mid\ 2x^2-x+3 \\ \underline{-6x^4+3x^3-9x^2} & \quad 3x^2+4x \\ 8x^3-8x^2+3x-2 & \\ \underline{-8x^3+4x^2-12x} & \\ -4x^2-9x-2 & \end{array}$$

- As tres etapas:

$$\begin{array}{rl} 6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & \mid\ 2x^2-x+3 \\ \underline{-6x^4+3x^3-9x^2} & \quad 3x^2+4x-2 \\ 8x^3-8x^2+3x-2 & \\ \underline{-8x^3+4x^2-12x} & \\ -4x^2-9x-2 & \\ \underline{4x^2-2x+6} & \\ -11x+4 & \end{array}$$

22. Divide os seguintes polinomios:

a) $3x^3-2x^2-2x+6$ entre x^2-3x+5

b) $-15x^3-3x^2+4x+5$ entre $5x^3-2x^2-2x+4$

c) $6x^4-7x^3+7x^2-4x-8$ entre $-2x^2+2x+5$

d) $-16x^5-3x^4+7x^3+3x^2+4x+6$ entre $4x^3+2x^2+x-2$

e) $-7x^5+3x^2+2$ entre x^2+4

23. Encontra dous polinomios tales que ao dividilos apareza $q(x)=x^2+2x-1$ como polinomio cociente e $r(x)=-2x^2+3$ como resto.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

3.3. Operacións con fraccións alxébricas

Posto que tanto os polinomios como as fraccións alxébricas obtidas a partir de dous polinomios son, en potencia, números reais, operaremos con tales expresións seguindo as propiedades dos números reais.

- **Suma ou resta.** Para sumar ou restar dúas fraccións polinómicas deberemos conseguir que teñan igual denominador. Unha maneira segura de logralo, aínda que pode non ser a máis adecuada, é esta:

$$\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\equiv\frac{p_1\cdot q_2}{q_1\cdot q_2}+\frac{p_2\cdot q_1}{q_2\cdot q_1}\equiv\frac{p_1\cdot q_2+p_2\cdot q_1}{q_1\cdot q_2}$$

- **Produto.** Basta multiplicar os numeradores e denominadores entre si:

$$\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_2}{q_2}\equiv\frac{p_1\cdot p_2}{q_1\cdot q_2}$$

- **División.** Segue a coñecida regra da división de fraccións numéricas:

$$\frac{\frac{p_1}{q_1}}{\frac{p_2}{q_2}}\equiv\frac{p_1\cdot q_2}{q_1\cdot p_2}$$

Actividades propostas

24. Efectúa os seguintes cálculos:

a) $\frac{3x+2}{x^2+1}+\frac{5}{2x}$ b) $\frac{1}{x-3}-\frac{3}{x+2}$ c) $\frac{-2x}{5x^2+4x}\cdot\frac{5}{3x-2}$ d) $\frac{x-4}{x^2+5x}:\frac{x-4}{x+5}$

25. Realiza as seguintes operacións alterando, en cada apartado, unicamente un dos denominadores, e o seu respectivo numerador:

a) $\frac{-3x^2+2x-1}{x^3}+\frac{4x-1}{x^2}$

b) $\frac{x-1}{x^2+5x}-\frac{6}{x+5}$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

26. Comproba, simplificando, as seguintes igualdades:

a) $\frac{8a^4b^2}{2a^2b}=4a^2b$

b) $\frac{4x^3y^2-3xy^2}{2xy}=2x^2y-\frac{3}{2}y$

c) $\frac{3x^2-9x}{6x+12}=\frac{x^2-3x}{x+4}$

d) $\frac{6y^3+4y^2}{2y^2-8y}=\frac{3y^2+2y}{y-4}$

e) $\frac{6a^2b^3+2a^3b-4ab}{2ab^2+8a^2b}=\frac{3ab^2+a^2-2}{b+4a}$

27. Calcula os seguintes cocientes:

a) $(3x^3 - 9x^2 - 6x) : 3x$

b) $(7a^3 - 70a^2 - 21) : 7$

c) $(25x^4 - 10x^2) : 5x^2$

d) $(3x^2y^3 - 8xy^2) : xy^2$

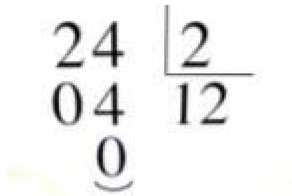
28. Simplifica as seguintes fraccións alxébricas:

a) $\frac{3x^2-6x}{9x^2+15}$ b) $\frac{a^3-5a^2}{7a^3+4a^2}$ c) $\frac{x^2y+3xy^2}{4xy}$ d) $\frac{2a^2b^2+3ab}{a^3b-ab}$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

4. DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DUN POLINOMIO

4.1. Factorización dun polinomio



Tal e como ocorre coa división enteira, a división de polinomios tamén pode ser **exacta**, é dicir, o resto pode ser o polinomio cero.

Exemplo:

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
3x^5 & -3x^4 & -4x^3 & +18x^2 & -16x & +8 & -3x^2+3x-2 \\ \cline{7-7}
-3x^5 & +3x^4 & -2x^3 & & & & -x^3+2x-4 \\ \cline{1-3}
 & & -6x^3 & +18x^2 & -16x & +8 & \\
 & & 6x^3 & -6x^2 & +4x & & \\ \cline{3-5}
 & & & 12x^2 & -12x & +8 & \\
 & & & -12x^2 & +12x & -8 & \\ \cline{4-6}
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

Neste caso escribimos $\frac{3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8}{-3x^2+3x-2}=-x^3+2x-4$

e diremos que $q(x)=-3x^2+3x-2$ divide a $p(x)=3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8$. Se optamos por unha igualdade polinómica:

$$3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8=(-3x^2+3x-2)\cdot(-x^3+2x-4)$$

Observamos que obter como resto o polinomio 0 nos permite expresar o polinomio dividendo, $p(x)$, como produto doutros dous polinomios, os polinomios divisor e cociente, $q(x)\cdot c(x)$. Acadamos unha **factorización** do polinomio $p(x)$, ou unha **descomposición en factores** de $p(x)$.

En xeral, un polinomio concreto pode ser factorizado, ou descomposto, por medio de diferentes grupos de factores. Se continuamos co polinomio $p(x)$ anterior, unha maneira de obter unha descomposición alternativa consiste en, á súa vez, acadar unha factorización dalgún dos polinomios $q(x)$ o $c(x)$. Constatemos que o polinomio $-x^2+2x-2$ divide a $c(x)=-x^3+2x-4$:

$$\begin{array}{rrrr|l}
-x^3 & & +2x & -4 & -x^2+2x-2 \\ \cline{5-5}
x^3 & -2x^2 & +2x & & x+2 \\ \cline{1-3}
 & -2x^2 & +4x & -4 & \\
 & 2x^2 & -4x & +4 & \\ \cline{2-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

En efecto, a división é exacta e iso lévanos á seguinte igualdade:

$$-x^3+2x-4=(-x^2+2x-2)\cdot(x+2)$$

Se a trasladamos á descomposición que tiñamos de $p(x)$:

$$3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8=(-3x^2+3x-2)\cdot(-x^2+2x-2)\cdot(x+2)$$

Actividades propostas

29. Completa, cando sexa posible, as seguintes factorizacións:

a) $-3x^3+3x=-3x\cdot(\qquad)$

b) $-6x^2+5x+6=(2x-3)\cdot(\qquad)$

c) $-6x^4+3x^3-3x+6=(2x^2-x+1)\cdot(\qquad)$

d) $-6x^4+3x^3-3x+6=(2x^2-x+2)\cdot(\qquad)$

30. Determina un polinomio de grao 4 que admita unha descomposición factorial na que participe o polinomio $6x^3-x^2+3x-1$.

Dicimos que un polinomio é **reducible** se admite unha factorización mediante polinomios de grao inferior ao seu. En caso contrario o polinomio será **irredutible**.

É claro que os polinomios de grao 1 non poden ser descompostos como produto doutros dous polinomios de menor grao. Son polinomios irredutibles. No seguinte apartado constataremos que hai polinomios de grao 2 que tamén son irredutibles.

Das diferentes factorizacións que pode admitir un polinomio a que máis información nos proporciona é aquela na que todos os factores que interveñen son polinomios irredutibles, xa que *non é mellorable*. Convén advertir que, en xeral, non é doado acadar ese tipo de descomposicións. Seguidamente imos afondar nesta cuestión.

4.2. Raíces dun polinomio

Dado un polinomio $p(x)$ diremos que un número real concreto α é unha **raíz**, ou **un cero**, do polinomio p, se ao avaliar p en $x=\alpha$ obtemos o número 0, isto é, se

$$p(\alpha)=0$$

Exemplo:

- Consideremos o polinomio $s(x)=2x^3+2x^2-8x-8$.

O número 2 é unha raíz de $s(x)$, xa que

$$s(2)=2\cdot2^3+2\cdot2^2-8\cdot2-8=2\cdot8+2\cdot4-16-8=16+8-16-8=0$$

Outra raíz de $s(x)$ é o número -1:

$$s(-1)=2\cdot(-1)^3+2\cdot(-1)^2-8\cdot(-1)-8=2\cdot(-1)+2\cdot(+1)+8-8=-2+2+8-8=0$$

En cambio, o número 1 non é unha raíz de $s(x)$:

$$s(1)=2\cdot1^3+2\cdot1^2-8\cdot1-8=2+2-8-8=4-16=-12\neq0$$

Tampouco é raíz de $s(x)$ o número 0:

$$s(0)=2\cdot0^3+2\cdot0^2-8\cdot0-8=0+0-0-8=-8\neq0$$

Actividades propostas

31. Estuda se os seguintes números son ou non raíz dos polinomios indicados:

a) $x=3$ de x^3-3x^2+1

b) $x=-2$ de x^3+3x^2+3x+2

c) $x=1$ de x^3-3x^2+x+1

d) $x=0$ de x^3-3x^2+1

e) $x=-1$ de x^3-3x^2-x+3

No seguinte exercicio imos recoller algunhas conexións entre as raíces dun polinomio e as operacións de suma e produto de polinomios.

Actividades propostas

32. Supoñamos que temos dous polinomios, $p_1(x)$ e $p_2(x)$, e un número real α.

a) Se α é unha raíz de $p_1(x)$, tamén é raíz do polinomio suma $p_1(x)+p_2(x)$?

b) Se α é unha raíz de $p_1(x)$, tamén é raíz do polinomio produto $p_1(x)\cdot p_2(x)$?

c) Hai algunha relación entre as raíces do polinomio $p_1(x)$ e as do polinomio $4\cdot p_1(x)$?

Que un número real sexa raíz dun polinomio está fortemente conectado coa factorización do polinomio:

Se un número real concreto α é unha raíz do polinomio $p(x)$, entón o polinomio $x-\alpha$ divide a $p(x)$. Dito doutro modo, o polinomio $p(x)$ admite unha descomposición factorial da seguinte forma:

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$$

para certo polinomio $c(x)$, o cal pode ser coñecido ao dividir $p(x)$ entre $x-\alpha$.

Imos demostrar a anterior afirmación.

Se dividimos $p(x)$ entre $x-\alpha$, obteremos

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)+r(x)$$

Como o polinomio divisor, $x-\alpha$, é de grao 1, e o polinomio resto debe ser de inferior grao, deducimos que o resto anterior é un número real β. Escribamos $r(x)\equiv\beta$:

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)+\beta$$

O polinomio da esquerda, $p(x)$, é idéntico ao da dereita, $(x-\alpha)\cdot c(x)+\beta$. Por esa razón, ao avalialos en certo número real obteremos o mesmo valor. Procedamos a particularizalos para $x=\alpha$. Ao ser α raíz de $p(x)$, $p(\alpha)=0$. Isto lévanos a

$$0=p(\alpha)=(\alpha-\alpha)\cdot c(\alpha)+\beta=0\cdot c(\alpha)+\beta=0+\beta=\beta$$

e, así, o resto é 0, e

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$$

É natural que nos preguntemos se é certo o recíproco do resultado anterior. A resposta é afirmativa:

Se un polinomio $p(x)$ admite unha descomposición factorial da forma

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$$

para certo polinomio $c(x)$ e certo número real α, entón o número α é unha raíz do polinomio $p(x)$, isto é, $p(\alpha)=0$.

A súa demostración é sinxela. Basta que avaliemos p en $x=\alpha$:

$$p(\alpha)=(\alpha-\alpha)\cdot c(\alpha)=0\cdot c(\alpha)=0$$

Se fundimos estes dous últimos resultados nun só atopámonos perante o denominado *teorema do factor*:

Teorema do factor. Un número real concreto α é raíz dun polinomio $p(x)$ se, e só se, o polinomio $x-\alpha$ divide a $p(x)$, é dicir, se e só se o polinomio $p(x)$ admite unha descomposición factorial da forma

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$$

Exemplo:

- Volvamos co polinomio $s(x)=2x^3+2x^2-8x-8$.

Sabemos que o número 2 é unha raíz de $s(x)$. Ratifiquemos que $x-2$ divide a $s(x)$:

$$\begin{array}{rl}
2x^3+2x^2-8x-8 & \underline{|\; x-2 \quad} \\
\underline{-2x^3+4x^2} \qquad\qquad & 2x^2+6x+4 \\
6x^2-8x-8 & \\
\underline{-6x^2+12x} \quad & \\
4x-8 & \\
\underline{-4x+8} & \\
0 &
\end{array}$$

Podemos descompoñer $s(x)$ da seguinte forma:

$$2x^3+2x^2-8x-8=(x-2)\cdot(2x^2+6x+4)$$

- Vimos que outra raíz de $s(x)$ é o número -1. Se observamos a precedente factorización de

$s(x)$, é evidente que este número -1 non é raíz do factor $x-2$, polo que necesariamente debe selo doutro factor $c(x)=2x^2+6x+4$:

$$c(-1)=2\cdot(-1)^2+6\cdot(-1)+4=2\cdot(+1)-6+4=0$$

Ao ter constatado que -1 é raíz do polinomio $c(x)$, deducimos que $x-(-1)=x+1$ nos vai axudar a descompoñer $c(x)$:

$$\begin{array}{rl} 2x^2+6x+4 & \underline{|\;\; x+1 \;\;} \\ \underline{-2x^2-2x} & \;\; 2x+4 \\ 4x+4 & \\ \underline{-4x-4} & \\ 0 & \end{array}$$

Logo:

$$2x^2+6x+4=(x+1)\cdot(2x+4)$$

- Se reunimos o feito nos apartados precedentes deste exemplo:

$$s(x)=2x^3+2x^2-8x-8=(x-2)\cdot(2x^2+6x+4)=(x-2)\cdot(x+1)\cdot(2x+4)=$$
$$=(x-2)\cdot(x+1)\cdot 2\cdot(x+2)=2\cdot(x-2)\cdot(x+1)\cdot(x+2)$$

Descompúxose $s(x)$ como produto de tres polinomios irredutibles de grao 1. Á vista deles coñecemos todas as raíces de $s(x)$, os números 2, -1 e -2.

Os resultados teóricos que establecemos condúcennos a estoutro:

Todo polinomio de grao n ten como moito n raíces reais, algunha das cales pode aparecer repetida entre eses non máis de n números reais.

Hai polinomios que non admiten raíces, é dicir, que non se anulan nunca:

Exemplos:

- O polinomio $t(x)=x^2+1$ non ten raíces xa que ao avalialo en calquera número real α sempre nos dá un valor positivo e, polo tanto, distinto de 0:

$$t(\alpha)=\alpha^2+1>0$$

Ademais, este polinomio de grao dous, $t(x)=x^2+1$, é un polinomio irredutible porque, ao carecer de raíces, non podemos expresalo como produto de polinomios de menor grao.

- Outro polinomio sen raíces é

$$u(x)=(x^2+1)^2=(x^2+1)\cdot(x^2+1)=x^4+2x^2+1$$

Porén, $u(x)=x^4+2x^2+1$ é un polinomio reducible xa que, obviamente, pode ser expresado como produto de dous polinomios de inferior grao.

Aínda que non sexa posible demostralo, pola súa dificultade, si se pode anunciar que todo polinomio de grao impar posúe, polo menos, unha raíz real.

Actividades propostas

33. Constrúe un polinomio de grao 3 tal que posúa tres raíces distintas.

34. Determina un polinomio de grao 3 tal que teña, polo menos, unha raíz repetida.

35. Constrúe un polinomio de grao 3 de forma que teña unha única raíz.

36. Conxectura, e logo demostra, unha lei que nos permita saber cando un polinomio calquera

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$$

admite o número 0 como raíz.

37. Demostra unha norma que sinale cando un polinomio calquera $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$ admite o número 1 como raíz.

38. Obtén todas as raíces de cada un dos seguintes polinomios:

a) $x+6$ b) $-x+4$ c) $2x-7$ d) $-4x-5$

e) $-3x$ f) x^2-5x g) $4x^2-x-3$ h) x^3-4x i) x^3+4x

4.3. Regra de *Ruffini*

No apartado anterior probouse a equivalencia entre que un número real α sexa raíz dun polinomio $p(x)$ e o feito de que o polinomio mónico de grao un $x-\alpha$ divida a $p(x)$, isto é, que exista outro polinomio $c(x)$ tal que sexa posible unha factorización de $p(x)$ do tipo:

$$p(x) = (x-\alpha)\cdot c(x)$$

Debido á importancia que ten a división de polinomios cando o polinomio divisor é da forma $x-\alpha$, é conveniente axilizar tales divisións.

Exemplo:

- Consideremos o polinomio $p(x) = 3x^3 - 4x^2 + x + 3$. Imos dividilo entre $x+2$. Se o resto é 0 o número -2 será unha raíz de $p(x)$; no caso contrario, se non é 0 o resto, entón -2 non será raíz de $p(x)$.

$$\begin{array}{rrrr|l}
3x^3 & -4x^2 & +x & +3 & \; x+2 \\ \cline{5-5}
\underline{-3x^3} & \underline{-6x^2} & & & 3x^2-10x+21 \\
 & -10x^2 & +x & +3 & \\
 & \underline{10x^2} & \underline{+20x} & & \\
 & & 21x & +3 & \\
 & & \underline{-21x} & \underline{-42} & \\
 & & & -39 &
\end{array}$$

Xa que o resto non é cero, -2 non é unha raíz de $p(x)$.

Vexamos como xurdiron tanto o polinomio cociente como o resto. Que o grao do dividendo sexa tres e que o divisor sexa de grao un impón que o cociente teña grao dous e que o resto sexa un número real. O cociente consta dos monomios $3x^2$, $-10x$ e 21, os cales coinciden cos monomios de maior grao de cada un dos dividendos despois de diminuír os seus graos nunha unidade: $3x^2$ procede de $3x^3-4x^2+x+3$ (o dividendo inicial), $-10x$ vén de $-10x^2+\ x\ +3$ e, por último, 21 de $21x+3$. Este feito, coincidencia no coeficiente e diminución do grao nunha unidade, débese a que o divisor, $x+2$, é mónico e de grao un.

Seguidamente, imos ter en conta unicamente os coeficientes do dividendo, por orde de grao, 3,–4, 1 e 3; canto ao divisor, como é mónico e de grao un, basta considerar o seu termo independente, +2, pero como o resultado de multiplicar os monomios que van conformando o cociente polo divisor temos que restarllo a cada un dos dividendos, atendendo a este cambio de signo, en lugar do termo independente, +2, operaremos co seu oposto, –2, número que, á vez, é a raíz do divisor $x+2$ e sobre o que pesa a pregunta de se é ou non raíz de $p(x)$.

- Primeiro paso da división:

$$\begin{array}{ll} 3x^3-4x^2+x+3 & \underline{|\ x+2\quad} \\ \underline{-3x^3-6x^2} & 3x^2 \\ \quad -10x^2+\ x\ +3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 3 & -4 & 1 & 3 \\ -2 & & -6 & & \\ \hline & 3 & -10 & & \end{array}$$

Aparece no cociente o monomio $3x^2$ (coeficiente 3), o cal provoca a "desaparición" de $3x^3$ no dividendo e a aparición do monomio $-6x^2$ (coeficiente $-6=(-2)\cdot 3$). Despois de operar (sumar) atopámonos con $-10x^2$ (coeficiente $-10=(-4)+(-6)$) e, no cociente, $-10x$.

- Segundo paso. O dividendo pasa ser $-10x^2+\ x\ +3$.

$$\begin{array}{ll} 3x^3-4x^2+x+3 & \underline{|\ x+2\quad} \\ \underline{-3x^3-6x^2} & 3x^2-10x \\ \quad -10x^2+\ x\ +3 & \\ \quad \underline{10x^2+20x} & \\ \qquad\qquad 21x+3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 3 & -4 & 1 & 3 \\ -2 & & -6 & 20 & \\ \hline & 3 & -10 & 21 & \end{array}$$

A irrupción no cociente do monomio $-10x$ (coeficiente -10) provoca a "desaparición" de $-10x^2$ no dividendo e a aparición do monomio $20x$ (coeficiente $20=(-2)\cdot(-10)$). Despois de operar (sumar) atopámonos con $21x$ (coeficiente $21=1+20$) e, no cociente, 21.

- Terceiro paso. O dividendo pasa a ser $21x\ +3$.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

$$
\begin{array}{rrrr|l}
3x^3 & -4x^2 & +x & +3 & \; x+2 \\ \cline{5-5}
\underline{-3x^3} & \underline{-6x^2} & & & 3x^2-10x+21 \\
 & -10x^2 & +x & +3 & \\
 & \underline{10x^2} & \underline{+20x} & & \\
 & & 21x & +3 & \\
 & & \underline{-21x} & \underline{-42} & \\
 & & & -39 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|rrrr}
 & 3 & -4 & 1 & 3 \\
-2 & & -6 & 20 & -42 \\ \hline
 & 3 & -10 & 21 & \multicolumn{1}{|r}{-39}
\end{array}
$$

Temos no cociente o termo independente 21. Isto provoca a eliminación de $21x$ no dividendo e a aparición do termo $-42=(-2)\cdot 21$. Despois de operar (sumar) atopámonos co resto $-39=3-42$.

En cada un dos pasos figura, na parte dereita, o mesmo que se realizou na división convencional, pero coa vantaxe de que todo é máis áxil debido a que unicamente se manexan números reais: os coeficientes dos distintos polinomios participantes.

Estamos ante a chamada **regra de *Ruffini***, un algoritmo que nos proporciona tanto o cociente como o resto que resultan de dividir un polinomio calquera entre outro da forma $x-\alpha$.

Exemplo:

- Dividamos o polinomio $p(x)=-x^4+2x^3+5x+4$ entre $x-3$:

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & -1 & 2 & 0 & 5 & 4 \\
3 & & -3 & -3 & -9 & -12 \\ \hline
 & -1 & -1 & -3 & -4 & \multicolumn{1}{|r}{-8}
\end{array}
$$

O cociente é $-x^3-x^2-3x-4$ e o resto -8. Como o resto non é 0 deducimos que o número 3 non é raíz de $p(x)=-x^4+2x^3+5x+4$. A relación entre dividendo, divisor, cociente e resto é, como sempre:

$$p(x)=-x^4+2x^3+5x+4=(x-3)\cdot(-x^3-x^2-3x-4)+(-8)$$

Se avaliamos $p(x)$ en $x=3$ non pode dar cero pero, que valor resulta?

$$p(3)=(3-3)\cdot(-3^3-3^2-3\cdot 3-4)+(-8)=0+(-8)=-8$$

Naturalmente obtivemos o resto anterior. Este feito vén recollido no denominado teorema do resto.

Teorema do resto. O valor numérico que adopta un polinomio $p(x)$ ao particularizalo en $x=\alpha$

coincide co resto que aparece ao dividir $p(x)$ entre $x-\alpha$.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

39. Usa a regra de *Ruffini* para realizar as seguintes divisións de polinomios:

a) $-3x^2+2x+2$ entre $x+1$ b) x^3+3x^2-3x+6 entre $x+2$

c) $5x^3-4x^2-2$ entre $x-1$ d) x^3-8x+2 entre $x-3$

40. Emprega a regra de *Ruffini* para ditaminar se os seguintes números son ou non raíces dos polinomios citados:

a) $\alpha=3$ de x^3-4x^2+5 b) $\beta=-2$ de $-x^3-2x^2+x+2$

c) $\gamma=1$ de $-2x^4+x+1$ d) $\sigma=-1$ de $2x^3+2x^2$

41. Utiliza a regra de *Ruffini* para coñecer o valor do polinomio $-2x^3+3x^2+2x+3$ en $x=3$.

42. Estuda se é posible usar a regra de *Ruffini*, dalgunha forma, para dividir x^3+3x^2+3x+2 entre $2x+6$.

Para facilitar a comprensión dos conceptos e resultados deste tema a maioría dos números que apareceron ata agora, coeficientes, raíces, etc., foron números enteiros. Por suposto que podemos atopar polinomios con coeficientes racionais, ou irracionais, ou con polinomios con raíces dadas por unha fracción ou un número irracional. Tamén existen polinomios que carecen de raíces.

Exemplos:

- Comprobemos, mediante a regra de *Ruffini*, que $\alpha=\dfrac{1}{2}$ é raíz do polinomio $2x^2-3x+1$:

$$\begin{array}{c|ccc} & 2 & -3 & 1 \\ 1/2 & & 1 & -1 \\ \hline & 2 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

- Para coñecer as raíces do polinomio x^2-2 debemos estudar se hai algún número real α tal que o anule, é dicir, para o que se teña

$$\alpha^2-2=0$$
$$\alpha^2=2$$
$$\alpha=\pm\sqrt{2}$$

Así, o polinomio de grao dous x^2-2 ten dúas raíces distintas, que son números irracionais.

- Xa sabemos que hai polinomios que carecen de raíces, como por exemplo x^2+4.

Apreciamos que a regra de *Ruffini* nos informa sobre se un número concreto é ou non raíz dun polinomio. Naturalmente, cando estamos perante un polinomio, e nos interesa coñecer as súas raíces, non é posible efectuar unha proba con cada número real para determinar cales son raíz do polinomio. No próximo apartado destacaremos certos "números candidatos" a seren raíz dun polinomio.

4.4. Cálculo das raíces dun polinomio

Á hora de buscar as **raíces enteiras dun polinomio** dispoñemos do seguinte resultado:

Dado un polinomio calquera

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

cuxos coeficientes son todos números enteiros, as súas **raíces enteiras**, se as tivese, encóntranse necesariamente entre os divisores enteiros do seu termo independente a_0.

Procedamos á súa demostración. Supoñamos que certo número enteiro α é unha raíz dese polinomio. Tal número debe anulalo:

$$a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 0$$
$$a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_2\alpha^2 + a_1\alpha = -a_0$$
$$\alpha \cdot (a_n \alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2} + ... + a_2\alpha + a_1) = -a_0$$
$$a_n \alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2} + ... + a_2\alpha + a_1 = \frac{-a_0}{\alpha}$$

Na última igualdade, o número do lado esquerdo é enteiro, porque está expresado como unha suma de produtos de números enteiros. Por iso, o número do lado dereito, $\frac{-a_0}{\alpha}$, tamén é enteiro. Ao seren tamén enteiros tanto $-a_0$ como α, acadamos que α é un divisor de a_0.

Exemplos:

- Determinemos, con amaño ao anterior resultado, que números enteiros son candidatos a seren raíces do polinomio $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$:

  Tales números enteiros candidatos deben ser divisores de -6, o termo independente do polinomio. Por iso, os únicos números enteiros que poden ser raíz dese polinomio son $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

  Pode comprobarse que os números enteiros 2 e -3 son raíces; os demais non o son.
- As únicas posibles raíces enteiras do polinomio $2x^3 + x^2 + 12x + 6$ tamén son:

  $$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

  Neste caso ningún deses números é raíz do polinomio.

Actividades propostas

43. Para cada un dos seguintes polinomios sinala, en primeiro lugar, que números enteiros son candidatos a seren raíces súas e, despois, determina cales o son:

a) $x^3 - x^2 + 2x - 2$

b) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 3$

c) $2x^3 + x^2 - 18x - 9$

d) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 6x$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Algo máis xeral podemos afirmar sobre clases de números e raíces dun polinomio:

Dado un polinomio calquera

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

cuxos coeficientes son todos números enteiros, as súas **raíces racionais**, se as tivese, necesariamente teñen por numerador algún divisor do termo independente, a_0, e por denominador algún divisor do coeficiente do termo de maior grao, a_n.

Exemplos:

- Volvendo a un dos polinomios do exemplo anterior, $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$, os números racionais candidatos a seren raíces súas teñen por numerador un divisor de -6 e por denominador un divisor de 2. Polo tanto, os únicos números racionais que poden ser raíz dese polinomio son:

$$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6,\ \frac{\pm 1}{2},\ \frac{\pm 2}{2} = \pm 1,\ \frac{\pm 3}{2},\ \frac{\pm 6}{2} = \pm 3$$

Ademais de 2 e -3, tamén é raíz $\frac{-1}{2}$; os demais non o son.

- As únicas posibles raíces racionais do polinomio $2x^4 + 2x^3 - x^2 - 3x - 3$ son:

$$\pm 1,\ \pm 3,\ \frac{\pm 1}{2},\ \frac{\pm 3}{2}$$

Neste caso ningún deses números é raíz do polinomio.

Actividades propostas

44. Completa o exemplo precedente comprobando que, en efecto, $\frac{-1}{2}$ é raíz do polinomio $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$.

45. Para cada un dos seguintes polinomios indica que números racionais son candidatos a seren raíces súas e, despois, determina cales o son:

a) $3x^2 + 4x + 1$

b) $2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$

No capítulo próximo, dedicado ás ecuacións, seremos capaces de obter as raíces de todo polinomio de grao dous, se as tivese.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

4.5. Factorización de polinomios e fraccións alxébricas

A factorización de polinomios pode ser utilizada para simplificar algunhas expresións nas que interveñen fraccións alxébricas. Vexámolo a través dun par de exemplos:

Exemplo:

- Unha fracción alxébrica como:

$$\frac{x^4-8x^2-9}{x^5-6x^3-6x^2-7x-6}$$

pode ser simplificada grazas a que o numerador e o denominador admiten factorizacións nas que algún polinomio está presente en ambas as dúas.

$$\frac{x^4-8x^2-9}{x^5-6x^3-6x^2-7x-6}=\frac{(x^2+1)\cdot(x+3)\cdot(x-3)}{(x^2+1)\cdot(x+2)\cdot(x+1)\cdot(x-3)}=\frac{x+3}{(x+2)\cdot(x+1)}$$

Como xa apuntamos noutras ocasións, as expresións final e inicial non son idénticas pero si son equivalentes en todos aqueles valores para os que ambas as dúas teñen sentido, isto é, para aqueles nos que non se anula o denominador.

Exemplo:

- Nunha suma de fraccións polinómicas como esta

$$\frac{3x-2}{x^2+x}+\frac{4}{x^2-x-2}$$

podemos acadar un común denominador nas fraccións a partir da descomposición de cada denominador:

$$\frac{3x-2}{x^2+x}+\frac{4}{x^2-x-2}=\frac{3x-2}{x\cdot(x+1)}+\frac{4}{(x+1)\cdot(x-2)}=\frac{(3x-2)\cdot(x-2)}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}+\frac{4\cdot x}{(x+1)\cdot(x-2)\cdot x}=$$
$$=\frac{(3x-2)\cdot(x-2)+4x}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}=\frac{3x^2-4x+4}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}$$

Convén destacar que no resultado final se optou por deixar o denominador factorizado. Desa forma, entre outras cuestións, apréciase rapidamente para que valores da indeterminada esa fracción alxébrica non admite ser avaliada.

Actividades propostas

46. Simplifica, se é posible, as seguintes expresións:

a) $\frac{x^2+4x}{x^3+3x^2-6x-8}$ b) $\frac{x^2-1}{x^3+3x^2-6x-8}$ c) $\frac{x^2-1}{x^3+x^2-6x}$

47. Realiza as seguintes operacións tendo en conta as factorizacións dos denominadores:

a) $\frac{5}{-3x+12}+\frac{x+2}{x^2-4x}$ b) $\frac{-x}{x^2-2x+1}-\frac{3x-1}{x^2-1}$

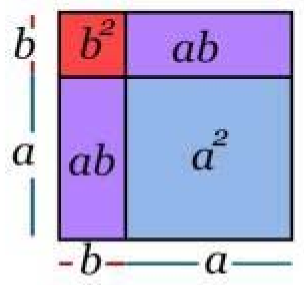
Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

4.6. Produtos notables de polinomios

Neste apartado imos destacar unha serie de produtos concretos de polinomios que xorden frecuentemente. Podemos expoñelos de moi diversas formas. Tal e como o faremos, aparecerá máis dunha indeterminada; debemos ser capaces de apreciar que se, nalgún caso concreto, algunha indeterminada pasa ser un número concreto isto non fará máis que particularizar unha situación máis xeral.

Potencias dun binomio. As seguintes igualdades obtéñense, simplemente, tras efectuar os oportunos cálculos:

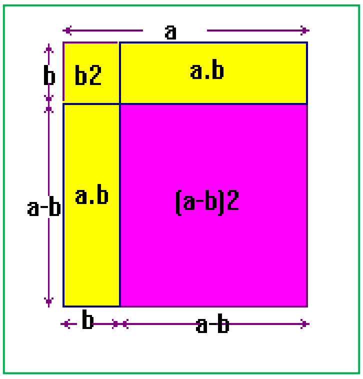
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



Observa os cadrados da ilustración e comproba como se verifica.

O cadrado dunha suma é igual ao cadrado do primeiro, máis o dobre produto do primeiro polo segundo, máis o cadrado do segundo.

- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$



O cadrado dunha diferenza é igual ao cadrado do primeiro, menos o dobre produto do primeiro polo segundo, máis o cadrado do segundo.

Observa os cadrados e rectángulos da ilustración.

- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Podemos observar que, en cada un dos desenvolvementos, o expoñente do binomio coincide co grao de cada un dos monomios.

Exemplos:

- $(a+3)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot 3 + 3^2 = a^2 + 6a + 9$
- $(x-4)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 4 + 4^2 = x^2 - 8x + 16$
- $(3x+5)^2 = (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot 5 + (5)^2 = 9x^2 + 30x + 25$
- $(x-6y)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 6y + (6y)^2 = x^2 - 12xy + 36y^2$
- $(2x-5)^3 = (2x)^3 - 3\cdot(2x)^2\cdot 5 + 3\cdot(2x)\cdot 5^2 - 5^3 = 8x^3 - 30x^2 + 150x - 125$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

48. Realiza os cálculos:

a) $(1+4a)^2$

b) $(-x+5)^2$

c) $(-2x-3)^2$

d) $(x^2-1)^3$

e) $(5x+3)^3$

49. Obtén as fórmulas dos cadrados dos seguintes trinomios:

a) $(a+b+c)^2$

b) $(a+b-c)^2$

50. Desenvolve as seguintes potencias:

a) $(2x + 3y)^2$ b) $(3x + y/3)^2$ c) $(5x - 5/x)^2$

d) $(3a - 5)^2$ e) $(a^2 - b^2)^2$ f) $(3/5y - 2/y)^2$

51. Expresa como cadrado dunha suma ou dunha diferenza as seguintes expresións alxébricas:

a) $a^2 + 6a + 9$ b) $4x^2 - 4x + 1$ c) $b^2 - 10b + 25$

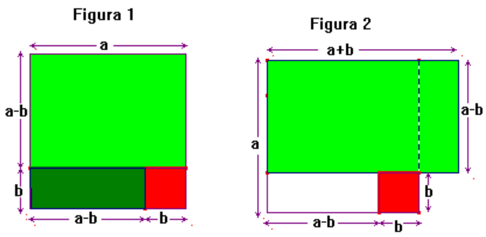
d) $4y^2 + 12y + 9$ e) $a^4 - 2a^2 + 1$ f) $y^4 + 6y^2 + 9$

Suma por diferenza. De novo a seguinte igualdade obtense tras efectuar o produto sinalado:

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

Observa a ilustración.

Suma por diferenza é igual a diferenza de cadrados.



Exemplos:

- $(a+7)\cdot(a-7) = a^2 - 7^2 = a^2 - 49$
- $(x+1)\cdot(x-1) = x^2 - 1^2 = x^2 - 1$
- $(2x+3)\cdot(2x-3) = (2x)^2 - 3^2 = 4x^2 - 9$
- $(-3x-5)\cdot(-3x+5) = (-1)\cdot(3x+5)\cdot(-3x+5) = (-1)\cdot(5+3x)\cdot(5-3x) =$

$= (-1)\cdot(5^2 - (3x)^2) = -25 + 9x^2$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

52. Efectúa estes produtos:

a) $(3x+2y)\cdot(3x-2y)$

b) $(5x^2+1)\cdot(5x^2-1)$

c) $(-x^2+2x)\cdot(x^2+2x)$

Convén darse conta de que as súas fórmulas, lidas ao revés, constitúen unha factorización dun polinomio.

Exemplos:

- $x^2+12x+36=x^2+2\cdot 6\cdot x+6^2=(x+6)^2$
- $2x^3-12x^2+18x=2x\cdot(x^2-6x+9)=2x\cdot(x^2-2\cdot 3\cdot x+3^2)=2x\cdot(x-3)^2$
- $x^2-5=(x+\sqrt{5})\cdot(x-\sqrt{5})$
- $x^4-16=(x^2+4)\cdot(x^2-4)=(x^2+4)\cdot(x+2)\cdot(x-2)$

Actividades propostas

53. De acordo co exposto, factoriza os seguintes polinomios:

a) x^2-4x+4

b) $3x^2+18x+27$

c) $3x^5-9x^3$

54. Calcula os seguintes produtos:

a) $(3x + 1) \cdot (3x - 1)$ b) $(2a - 3b) \cdot (2a + 3b)$

c) $(x^2 - 5) \cdot (x^2 + 5)$ d) $(3a^2 + 5) \cdot (3a^2 - 5)$

55. Expresa como suma por diferenza as seguintes expresións

a) $9x^2 - 25$ b) $4a^4 - 81b^2$ c) $49 - 25x^2$ d) $100a^2 - 64$

56. Simplifica as seguintes fraccións alxébricas

a) $\dfrac{x^2-1}{3x+3}$ b) $\dfrac{2x^2+12x+18}{x^2-9}$ c) $\dfrac{6-3a}{a^2-4}$

CURIOSIDADES. REVISTA

Fai maxia

- Pensa un número.
- Multiplícao por 2.
- Suma 4.
- Multiplica por 5.
- Divide por 10.
- Resta o número.
- Maxia, maxia, maxia...
- O resultado é **2**!

Analiza como ti, o mago, puideches coñecer o resultado.

Pasatempo

A B A

A B A

A B A

B C B

Emmy Noether (1882 - 1935)

Emmy Noether foi unha matemática alemá de orixe xudía que realizou as súas investigacións nas primeiras décadas do século XX. Demostrou dous teoremas esenciais para a teoría da relatividade que permitiron resolver o problema da conservación da enerxía.

Traballou en estruturas alxébricas e na actualidade o cualificativo ***noetheriano*** utilízase para designar moitos conceptos en álxebra: aneis *noetherianos*, grupos *noetherianos*, módulos *noetherianos*, espazos topolóxicos *noetherianos*, etc.

Cando intentou dar clases na Universidade de *Göttingen,* o regulamento indicaba explicitamente que os candidatos debían ser homes polo que *Noether* non puido acceder á docencia universitaria. Cóntase, como anécdota, que *Hilbert* dixo nun Consello desta Universidade:

> *"non vexo por que o sexo da candidata é un argumento contra o seu nomeamento como docente. Despois de todo non somos un establecemento de baños".*

Dela dixo *Albert Einstein*:

> *"No reino da Álxebra no que os mellores matemáticos traballaron durante séculos, ela descubriu métodos que se demostrou que teñen unha importancia enorme... A matemática pura é, á súa maneira, a poesía das ideas lóxicas... Neste esforzo cara á beleza lóxica descóbrense fórmulas espirituais para conseguir unha penetración máis profunda nas leis da natureza".*

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

RESUMO

Noción	*Descrición*	*Exemplos*
Expresión alxébrica	Expresión matemática que se constrúe con números reais e as operacións matemáticas básicas de suma, resta, multiplicación e/ou división.	$\frac{-3x}{2x+y^3} - x\cdot y^2 \cdot z$
Valor numérico dunha expresión alxébrica	Ao fixar un valor concreto para cada indeterminada, ou variable, dunha expresión alxébrica aparece un número real: o **valor numérico** desa expresión alxébrica para tales valores das indeterminadas.	Se, na expresión precedente, facemos $x = 3$, $y = -2$, $z = 1/2$ obtemos $\frac{-3\cdot 3}{2\cdot 3+(-2)^3} - 3\cdot(-2)^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{-3}{2}$
Monomio	Expresión dada polo produto de números reais e indeterminadas.	$-5\cdot x\cdot y^3\cdot z^2$ de grao 6 e coeficiente –5 $7\cdot x^2$ de grao 2 e coeficiente 7
Polinomio	Expresión construída a partir da suma de monomios.	$-x^3+4x^2+8x+6$
Grao dun polinomio	O maior grao dos seus monomios.	O anterior polinomio é de grao 3.
Suma e produto de polinomios	O resultado sempre é outro polinomio	$2ax - ax = ax$ $2ax \cdot ax = 2a^2x^2$
División de dous polinomios	Ao dividir o polinomio $p(x)$ entre $q(x)$ obtéñense outros dous polinomios, os polinomios cociente, $c(x)$, e resto, $r(x)$, tales que $p(x)=q(x)\cdot c(x)+r(x)$	$p(x)=q(x)\cdot c(x)+r(x)$
Factorización dun polinomio	Consiste en expresalo como produto doutros polinomios de menor grao.	$x^5-3x^3-x^2+3=$ $=(x^2-3)\cdot(x^3-1)$
Raíces e factorización	Se α é unha raíz do polinomio $p(x)$ é equivalente a que o polinomio $p(x)$ admita unha descomposición factorial da forma $p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$ para certo polinomio $c(x)$	-2 é unha raíz de x^3+2x^2-x-2 $x^3+2x^2-x-2=(x+2)\cdot(x^2-1)$
Regra de *Ruffini*	Pódemos axudar á hora de factorizar un polinomio e coñecer as súas raíces.	

EXERCICIOS E PROBLEMAS

1. Neste exercicio vaise presentar un *truco* mediante o cal imos adiviñar o número que resulta tras manipular repetidamente un número descoñecido. Converte nunha expresión alxébrica as sucesivas alteracións do número descoñecido e xustifica o que ocorre.

i. Dille a un compañeiro que escriba nun papel un número natural e que non o amose.
ii. Que o multiplique por 3.
iii. Que ao resultado anterior lle sume 18.
iv. Que multiplique por 2 o obtido.
v. Que divida entre 6 a última cantidade.
vi. Que ao resultado precedente lle reste o número que escribiu.
vii. Independentemente do número descoñecido orixinal, que número xurdiu?

2. Nestoutro exercicio imos *adiviñar* dous números que pensou un compañeiro. Constrúe unha expresión alxébrica que recolla todos os pasos e, finalmente, descobre o truco.

i. Solicita a un compañeiro que escriba nun papel, e non amose, dous números naturais: un dunha cifra (entre 1 e 9) e outro de dúas cifras (entre 10 e 99
ii. Que multiplique por 4 o número elixido dunha cifra.
iii. Que multiplique por 5 o obtido.
iv. Que multiplique o resultado precedente por 5.
v. Que lle sume ao anterior o número de dúas cifras que elixiu.
vi. Se o teu compañeiro che di o resultado destas operacións, ti descobres os seus dous números. Se che di, por exemplo, 467, entón sabes que o número dunha cifra é 4 e o de dúas cifras é 67, por que?

3. Estuda se hai números reais nos que as seguintes expresións non poden ser avaliadas:

a) $\dfrac{7x-9}{(x+5)\cdot(2x-32)}$

b) $\dfrac{-x}{x^2-6x+9}$

c) $\dfrac{3x^3-x}{-2x^4-3x^2-4}$

d) $\dfrac{5x-y+1}{x^2+y^2}$

4. Unha persoa ten aforrados 2 500 euros e decide depositalos nun produto bancario cun tipo de interese anual do 2 %. Se decide recuperar os seus aforros ao cabo de dous anos, cal será a cantidade total da que disporá?

5. Xeneralicemos o exercicio anterior: Se ingresamos X euros nun depósito bancario cuxo tipo de interese é do i % anual, cal será a cantidade que recuperaremos ao cabo de n anos?

6. Constrúe un polinomio de grao 2, $p(x)$, tal que $p(5)=-2$.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

7. Consideremos os polinomios $p(x) = -3x^3 + 2x^2 - 4x - 3$, $q(x) = 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x + 8$ e $r(x) = 5x^2 + 6x - 2$. Realiza as seguintes operacións:

a) $p + q + r$

b) $p - q$

c) $p \cdot r$

d) $p \cdot r - q$

8. Calcula os produtos:

a) $\left(\frac{ax}{3} - \frac{by}{2}\right) \cdot \left(\frac{-xy}{6}\right)$ b) $(0.3x - 0.2y + 0.1z) \cdot (0.1x + 0.2y - 0.3z)$ c) $(x - 1)(x - a)(x - b)$

9. Efectúa as divisións de polinomios:

a) $3x^4 - 4x^3 - 9x^2 + x - 2$ entre $3x^2 + 4x - 4$

b) $5x^5 - 6x^4 + 7x^3 + 3x^2 - x - 7$ entre $x^3 + 3x + 4$

10. Calcula os cocientes:

a. a) $(5x^4) : (x^2)$ b) $(3x^2y^4z^6) : ((1/2)xy^3z^5)$ c) $(x^4 + 2x^2y + y^2) : (x^2 + y)$

11. Realiza as operacións entre as seguintes fraccións alxébricas:

a) $\frac{2x-3}{x^2-3x} + \frac{3x}{x^2-6x+9}$

b) $\frac{2x-3}{x^2-3x} - \frac{3x}{x^2-6x+9}$

c) $\frac{2x-3}{x^2-3x} \cdot \frac{3x}{x^2-6x+9}$

d) $\frac{2x-3}{x^2-3x} : \frac{3x}{x^2-6x+9}$

12. Constrúe un polinomio de grao 2 tal que o número -5 sexa raíz súa.

13. Determina un polinomio de grao 3 tal que as súas raíces sexan 6, -3 e 0.

14. Determina un polinomio de grao 4 tal que as súas raíces sexan 6 , -3 , 2 e 0 .

15. Constrúe un polinomio de grao 4 tal que teña unicamente dúas raíces reais.

16. Determina un polinomio de grao 5 tal que as súas raíces sexan 6 , -3 , 2, 4 e 5.

17. Encontra un polinomio $q(x)$ tal que ao dividir $p(x) = 2x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 3$ entre $q(x)$ se obteña como polinomio resto $r(x) = x^2 + x + 1$.

18. Calcula as raíces enteiras dos seguintes polinomios:

a) $3x^3 + 11x^2 + 5x - 3$

b) $3x^3 + 2x^2 + 8x - 3$

c $3x^3 + 5x^2 + x - 1$

d) $2x^3 + x^2 - 6x - 3$

19. Obtén as raíces racionais dos polinomios do exercicio anterior.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

20. Descompón os seguintes polinomios como produto de polinomios irredutibles:

a) $3x^3+11x^2+5x-3$

b) $3x^3+5x^2+x-1$

c) $2x^3+x^2-6x-3$

d) $3x^3-6x^2+x-2$

21. Calcula as potencias:

a) $(x-2y+z)^2$ b) $(3x-y)^3$ c) $((1/2)a+b^2)^2$ d) $(x^3-y^2)^2$

22. Analiza se os seguintes polinomios xurdiron do desenvolvemento de potencias de binomios, ou trinomios, ou dun produto *suma por diferenza*. En caso afirmativo expresa a súa procedencia.

x^2-36 $5x^2+1$

$5x^2-11$ x^2-3y^2

x^2-6x+9 x^4-8x^2+16

$x^2+\sqrt{20}\,xy+5y^2$ $x^4+2x^3+x^2+2x+1$

$x^4-2x^3+x^2+2x+1$

23. Descompón en factores:

a) x^4-1 b) x^2-y^2 c) $x^2y^2-z^2$ d) $x^4-2x^2y+y^2$

24. Con este exercicio preténdese amosar a conveniencia á hora de non operar unha expresión polinómica que temos factorizada total ou parcialmente.

a) Comproba a igualdade $x^4-5x^2+6=(x^2-2)\cdot(x^2-3)$.

b) Determina todas as raíces do polinomio x^4-5x^2+6.

25. Factoriza numerador e denominador e simplifica:

a) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$ b) $\dfrac{x^4+2x^2y^2+y^4}{x^2+y^2}$ c) $\dfrac{x^3-x}{x^4-1}$

26. Efectúa as seguintes operacións e simplifica todo o posible:

a) $\dfrac{2}{x(5-x)}-\dfrac{3}{2(5-x)}$ b) $\dfrac{x-y}{x+y}\cdot\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ c) $\dfrac{2x+1}{4x^2-1}$

27. Efectúa as seguintes operacións e simplifica todo o posible:

a) $\dfrac{x^4-1}{x^7}:\dfrac{x^2+1}{x^8}$ b) $\dfrac{2x+3y}{a-b}-\dfrac{3x+4y}{2a-2b}$ c) $-4x+(1-x^4)\left(\dfrac{x+1}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

28. Efectúa as seguintes operacións e simplifica todo o posible:

a) $\left(x^4-\dfrac{1}{x^2}\right):\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)$ b) $\dfrac{x^3-3ax^2+3a^2x-a^3}{x+a}:\dfrac{x-a}{x+a}$ c) $\left(\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}\right):\dfrac{ab}{a+b}$

29. Efectúa as seguintes operacións e simplifica todo o posible:

a) $\dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{x+y}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{x+y}}:\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a+y}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{a+y}}$ b) $\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right):\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}\right)$ c) $\dfrac{\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{y}}\cdot\dfrac{\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{y}}{\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{y}}$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

AUTOAVALIACIÓN

1. Sinala os coeficientes que aparecen nas seguintes expresións alxébricas:

a) $\frac{5x-8}{3-4y^2}+6xy^3-\frac{7}{z}$ b) $-3x^5+2x^4-x^3+4x-5$ c) $7\cdot\sqrt{2}\cdot x\cdot y^2\cdot z$

2. O valor numérico da expresión $\frac{3x-7}{2-3y^2}+5xy^3-\frac{6}{z}$ en $x=2,\ y=-1,\ z=-1$ é:

a) 17 b) 15 c) -3 d) -5

3. Completa adecuadamente as seguintes oracións:

a) A suma de dous polinomios de grao tres é sempre outro polinomio de grao ……….

b) A suma de tres polinomios de grao dous é sempre outro polinomio de grao ……….

c) O produto de dous polinomios de grao dous é sempre outro polinomio de grao ……….

d) A diferenza de dous polinomios de grao catro é sempre outro polinomio de grao ……….

4. Ao dividir o polinomio $p(x)=5x^5+6x^4+3x^3+2$ entre $q(x)=3x^2+5x+8$ o polinomio resto resultante:

a) debe ser de grao 2. b) pode ser de grao 2.

c) debe ser de grao 1. d) debe ser de grao menor que 2.

5. Considera o polinomio $5x^4-8x^3+4x^2-6x+2$. Cales dos seguintes números enteiros son *razoables candidatos* para seren unha raíz súa?

a) 3 b) 2 c) 4 d) 7

6. Considera o polinomio $2x^4+7x^3+x^2-7x-3$. Cales dos seguintes números racionais son *razoables candidatos* para seren unha da súas raíces?

a) -3 b) 2 y $\frac{-1}{2}$ c) –3 y $\frac{1}{3}$ d) –3 y $\frac{3}{2}$

7. Todo polinomio con coeficientes enteiros de grao tres

a) ten tres raíces reais; b) ten, como moito, tres raíces reais. c) ten, polo menos, tres raíces.

8. É posible que un polinomio, con coeficientes enteiros, de grao catro teña exactamente tres raíces, xa sexan diferentes ou con algunha múltiple?

9. Xustifica a veracidade ou falsidade de cada unha das seguintes oracións:

a) A regra de Ruffini serve para dividir dous polinomios calquera.

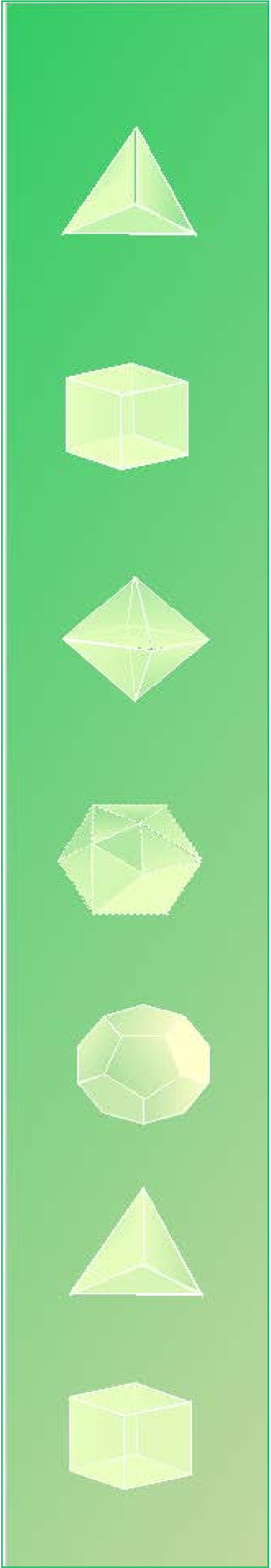
b) A regra de Ruffini permite ditaminar se un número é raíz ou non dun polinomio.

c) A regra de Ruffini só é válida para polinomios con coeficientes enteiros.

d) A regra de Ruffini é un algoritmo que nos proporciona todas as raíces dun polinomio.

10. Analiza se pode haber algún polinomio de grao dez que non teña ningunha raíz real.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF



Matemáticas orientadas ás ensinanzas aplicadas

4ºA ESO
Capítulo 4:
Ecuacións e sistemas lineais

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Raquel Hernández

Revisores: María Molero e Javier Rodrigo

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: Raquel Hernández e Banco de Imaxes de INTEF

Índice

Resumo

Xa sabes resolver moitas ecuacións e sistemas de ecuacións, e utilizalos para resolver gran número de problemas do máis variado. Neste capítulo imos repasar a resolución de ecuacións que xa coñeces, de primeiro grao, de segundo… e aprenderemos a resolver algunhas novas ecuacións e a utilizar o aprendido para resolver problemas da vida cotiá por medio das ecuacións.

Repasaremos tamén os sistemas de ecuacións lineais, como se resolven por diferentes métodos e a súa aplicación para resolver problemas que nos rodean, pero utilizaremos eses métodos para resolver algúns sistemas novos que non sexan lineais.

Os matemáticos tardaron preto de tres mil anos en comprender e resolver ecuacións tan sinxelas e que tan ben coñeces como $ax + b = 0$. Xa os exipcios resolvían problemas que se poden considerar de ecuacións aínda que non existía a notación alxébrica. O matemático grego *Diofanto* no século III resolveu ecuacións de primeiro e segundo grao. No século XV houbo un desafío para premiar a quen resolvese unha ecuación de terceiro grao. No século XIX demostrouse que non existe unha fórmula xeral que resolva as ecuacións de quinto grao.

ECUACIÓNS

1.1. Concepto de ecuación

Unha **ecuación** é unha igualdade alxébrica que unicamente é certa para algúns valores das incógnitas. Os valores das incógnitas que fan certa a igualdade son as **solucións** da ecuación.

Resolver unha ecuación é atopar as súas solucións, é dicir, os valores que ao substituílos na ecuación a converten nunha identidade numérica.

Comprobar a solución consiste en substituíla na ecuación e ver se a igualdade obtida é unha identidade.

Hai que diferenciar unha **ecuación** dunha **identidade** alxébrica como $x(x + 2) = x^2 + 2x$ que é certa para todo valor de x.

As ecuacións poden ter unha única incógnita, ou máis dunha. Poden ser polinómicas ou doutro tipo (exponencial, racional, irracional…). Nas ecuacións polinómicas os expoñentes das incógnitas son números naturais. Poden ser de primeiro grao, se o expoñente máis alto da incógnita é un, de segundo grao se é dous…

Exemplo:

- A ecuación $(x + 3)^2 = 4x^3$ é unha ecuación polinómica de terceiro grao cunha incógnita.
- A ecuación $7x+\frac{1}{x-2}=0$ é unha ecuación racional. Non é polinómica.
- A ecuación $7x + sen2x = 0$ non é unha ecuación polinómica.
- A ecuación $4xy + 8x = 0$ é polinómica de dúas variables.

Dúas ecuacións son **equivalentes** se teñen a mesma solución.

Para resolver ecuacións imos substituíndoa por outra equivalente ata chegar á solución. Para obter ecuacións equivalentes podemos:

1) Sumar ou restar un mesmo termo a ambos os membros da ecuación.
2) Multiplicar ambos os membros por un mesmo número.
3) Dividir ambos os membros por un mesmo número coidando que ese valor non sexa cero.

Exemplo:

- Para resolver 5x + 3 = 9 imos substituíndoa por outras equivalentes:

$5x + 3 = 9 \Rightarrow$ (restamos 3 a ambos os membros da ecuación).

$5x + 3 – 3 = 9 – 3 \Rightarrow 5x = 6 \Rightarrow$ (dividimos ambos os membros por 5 que é distinto de cero).

$5x/5 = 6/5 \Rightarrow x = 6/5$. Xa coñecemos a solución, $x = 6/5$.

Comprobamos se x = 6/5 é a solución substituíndo na ecuación:

$5x + 3 = 9 \Rightarrow 5(6/5) + 3 = 9 \Rightarrow 6 + 3 = 9$. En efecto, 6/5 é solución.

O **procedemento** para resolver ecuacións de primeiro grao cunha incógnita, recorda que é:

1) Eliminar os denominadores.
2) Eliminar as parénteses.
3) Agrupar os termos coa incógnita nun membro e os termos independentes no outro.
4) Efectuar operacións.
5) Despexar a incógnita.

Exemplo:

- Resolver: $\mathbf{9(2-3x)+\frac{4}{5}(x-3)=4x-\frac{7-3x}{5}}$

1) Eliminar os denominadores

$9(2-3x)+\frac{4}{5}(x-3)=4x-\frac{7-3x}{5} \Rightarrow \mathbf{5\cdot 9(2-3x)+4(x-3)=5\cdot 4x-(7-3x)} \Rightarrow$

2) Eliminar as parénteses

$90 - 135x + 4x - 12 = 20x - 7 + 3x \Rightarrow$

3) Agrupar os termos coa incógnita nun membro e os termos independentes no outro.

$-135x + 4x - 20x - 3x = -7 - 90 + 12 \Rightarrow$

4) Efectuar operacións: $-154x = -85 \Rightarrow$
5) Despexar a incógnita: $x = -85/-154 = 85/154$

Actividades propostas

1. Escribe tres ecuacións equivalentes a $4x - 5xy + 7 - 2yx = 8x$.

2. Resolve as seguintes ecuacións:

a) $5(7x + 6)= 21$ b) $-2x+ 7 =-7(3x- 2)- 8x$ c) $2x- 6(9 + 5x)= 4(x+ 6)+ 7$

3. Resolve as seguintes ecuacións:

a) $9(2-3x)+\frac{4}{5}(x-3)=4x-\frac{7-3x}{5}$ b) $6-\left(8-4\left(3x-\frac{3}{7}\right)\right)=2x-\frac{5-9x}{7}$ c) $8(3x-5)=7(6-9x)$

4. Comproba que a solución de $\frac{x-1}{2}-\frac{x+1}{3}=\frac{1}{6}$ é $x = 6$.

5. Escribe tres ecuacións de primeiro grao que teñan como solución 3, outras tres que teñan infinitas solucións e tres que non teñan solución.

6. Calcula as dimensións dun rectángulo sabendo que o seu perímetro é 30 cm e que a súa base é o dobre que a súa altura.

7. Resolve as seguintes ecuacións:

a) $2(3x + 4) = 7$ b) $-4x + 6 = -9(5x - 1) - 5x$ c) $4x - 7(11 + 2x) = 6(x + 8) + 9$

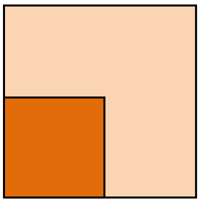
d) $2(3-4x)+\frac{4}{7}(x-2)=2x-\frac{5-4x}{7}$ e) $2-\left(7-5\left(2x-\frac{1}{3}\right)\right)=4x-\frac{6-2x}{3}$ f) $3(7x-1)=9(3-2x)$

1.2. Ecuacións de 2º grao

Hai ecuacións de segundo grao que xa sabes resolver. Neste capítulo imos afondar e aprender a resolver este tipo de ecuacións. Por exemplo, o seguinte problema xa sabes resolvelo:

Actividades resoltas

- Auméntase o lado dunha baldosa cadrada en 3 cm e a súa área quedou multiplicada por 4, que lado tiña a baldosa?



Formulamos a ecuación:

$$(x + 3)^2 = 4x^2$$

Esta ecuación si sabes resolvela! $x + 3 = 2x$, logo o lado é de 3 cm.

Hai outra solución, $x = -1$, que non ten sentido como lado dun cadrado.

Imos repasar de forma ordenada o estudo destas ecuacións.

Unha **ecuación de segundo grao** é unha ecuación polinómica na que a maior potencia da incógnita é 2. As ecuacións de segundo grao pódense escribir da forma:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$$

onde *a, b* e *c* son números reais, con $a \neq 0$.

Exemplo:

- Son ecuacións de 2º grao por exemplo:

$$5x^2 - 8x + 3 = 0; \qquad -3x^2 + 9x + -6 = 0; \qquad x^2 - (3/4)x - 2.8 = 0$$

Exemplo:

- *Os coeficientes das ecuacións de* 2º grao son números reais, polo tanto poden ser fraccións ou raíces. Por exemplo:

$$\frac{3}{5}x^2 - 4x + \frac{1}{2} = 0; \quad \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{3}{4} = 0; \quad -5.8x^2 + 1.7x + -0.02 = 0; \quad \sqrt{2}x^2 + 3x - \sqrt{5} = 0$$

Actividades propostas

8. Indica se son ecuacións de segundo grao as seguintes ecuacións:

a) $5x^2 - \sqrt{2}x + 8 = 0$ c) $3.2x^2 - 1.25 = 0$ e) $2x^2 - \dfrac{3}{x} = 0$

b) $5xy^2 - 8 = 0$ d) $28 - 6.3x = 0$ f) $2x^2 - 3\sqrt{x} + 4 = 0$

9. Nas seguintes ecuacións de segundo grao, indica quen son *a*, *b* e *c.*

a) $3 - 8x^2 + 10x = 0$ b) $-3.4x^2 + 7.8x = 0$ c) $6x^2 - 1 = 0$ d) $1.25x^2 - 3.47x + 2.75 = 0$.

10. Nas seguintes ecuacións de segundo grao, indica quen son *a*, *b* e *c.*

a) $2 - 7x^2 + 11x = 0$ b) $-2.3x^2 + 6.7x = 0$

c) $5x^2 - 9 = 0$ d) $9.1x^2 - 2.3x + 1.6 = 0$

1.3. Resolución de ecuacións de 2º grao completas

Chámase **ecuación de segundo grao completa** a aquela que ten valores distintos de cero para *a*, *b* e *c*. Para resolver as ecuacións de segundo grao completas utilízase a fórmula:

$$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Esta fórmula permite calcular as dúas solucións da ecuación.

Chamamos **discriminante** á parte da fórmula que está no interior da raíz:

$$\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$$

Actividades resoltas

- Resolve a ecuación de segundo grao $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Primeiro debemos saber quen son *a*, *b* e *c:*

$$a = 1;\ b = -5;\ c = 6.$$

Substituíndo estes valores na fórmula, obtemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Polo tanto, as dúas solucións son:

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = 3; \qquad x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$$

En efecto, $3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$, e $2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$, logo 3 e 2 son as solucións da ecuación.

Actividades propostas

11. Resolve as seguintes ecuacións de 2º grao completas:

a) $x^2 - 7x + 12 = 0$ b) $3x^2 + 2x - 24 = 0$

c) $2x^2 - 9x + 6 = 0$ d) $x^2 - 3x - 10 = 0$

12. Resolve as seguintes ecuacións:

a) $5x - 2 \cdot \frac{x-1}{5} = x^2 - \frac{10x+8}{5}$ b) $4 \cdot \frac{x-3}{5} - \frac{7-4x}{x} = 8$ c) $x(x-2) + 3(x^2 - 7) + 11 = -11$

d) $6(x^2 - 7) + 2(x^2 - 9) + 3 = 2$ e) $\frac{3-6x^2}{2x} - \frac{1}{3} = \frac{2x-5}{6}$ f) $\frac{1-2x^2}{3x} - \frac{2}{5} = \frac{4x-2}{15}$

1.4. Número de solucións dunha ecuación de 2º grao completa

Antes definimos o que era o **discriminante**, lémbraste?

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Para saber cantas solucións ten unha ecuación de 2º grao, imos fixarnos no signo do discriminante.

Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, a ecuación ten **dúas solucións reais e distintas**.

Se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, a ecuación ten dúas solucións reais iguais (unha **solución dobre**).

Se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, a ecuación non **ten solución**.

Exemplo:

- A ecuación $x^2 - 4x - 12 = 0$ ten como discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 16 + 48 = 64 > 0$$

Polo tanto, a ecuación dada ten 2 solucións reais e distintas, 6 e -2.

(***Comprobación:*** $6^2 - 4 \cdot 6 - 12 = 36 - 24 - 12 = 0$ e $(-2)^2 - 4(-2) -12 = 4 + 8 -12 = 0$).

- A ecuación $x^2 - 4x + 4 = 0$ ten como discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$$

Polo tanto, a ecuación ten dúas solucións reais iguais. Pódese escribir como:

$x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = 0$, que ten a solución dobre $x = 2$.

- A ecuación $x^2 + 5x + 9 = 0$ ten como discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac = (5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (9) = 25 - 36 = -11 < 0$$

Polo tanto, a ecuación non ten solución real. Ningún número real verifica a ecuación.

Actividades propostas

13. Pescuda cantas solucións teñen as seguintes ecuacións de 2º grao:

a) $5x^2 + 2x + 4 = 0$ **b)** $2x^2 - 7x + 8 = 0$

c) $x^2 - 5x -11 = 0$ **d)** $3x^2 - 8x + 6 = 0$

1.5. Resolución de ecuacións de 2º grao incompletas

Chamamos **ecuación de 2º grao incompleta** a aquela ecuación de segundo grao na que o coeficiente *b* vale 0 (falta *b*), ou o coeficiente *c* vale 0 (falta *c*).

Observa: se o coeficiente *a* vale cero non é unha ecuación de segundo grao.

Exemplo:

- A ecuación de 2º grao $2x^2 - 18 = 0$ é incompleta porque o coeficiente $b = 0$, é dicir, falta *b*.
- A ecuación de 2º grao $3x^2 - 15x = 0$ é incompleta porque non ten *c*, é dicir, $c = 0$.

Unha ecuación de segundo grao incompleta tamén se pode resolver utilizando a fórmula das completas pero é un proceso máis lento e é máis doado equivocarse.

Se o **coeficiente *b* = 0:** Despexamos a incógnita normalmente, como faciamos nas ecuacións de primeiro grao:

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{-c}{a}}$$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$. Si $\frac{-c}{a} > 0$ ten dúas solucións distintas, se $\frac{-c}{a} < 0$ non existe solución.

Resumo

Se $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, despexamos a incógnita:

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}, \text{ si } c \leq 0.$$

Se $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$, sacamos factor común:

$$x = 0 \text{ e } x = \frac{-b}{a}.$$

Se o coeficiente *c* = 0, sacamos factor común:

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0.$$

Para que o produto de dous factores valla cero, un dos factores debe valer cero.

Polo tanto $x = 0$, o $ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$

Exemplo:

- Na ecuación $2x^2 - 50 = 0$ falta o *b*. Para resolvela despexamos a incógnita, é dicir,x^2:

$$2x^2 - 50 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 50 \Rightarrow x^2 = 50/2 = 25$$

Unha vez que chegamos aquí, fáltanos quitar ese cadrado que leva a nosa incógnita. Para isto, facemos a raíz cadrada nos 2 membros da ecuación:

$$x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$$

Así obtivemos as dúas solucións da nosa ecuación, 5 e –5. En efecto, $2 \cdot 5^2 - 50 = 2 \cdot 25 - 50 = 0$, e $2 \cdot (-5)^2 - 50 = 2 \cdot 25 - 50 = 0$

Exemplo:

- Na ecuación $4x^2 - 24x = 0$ falta o *c*. Para resolvela, sacamos factor común:

$$4x^2 - 24x = 0 \Rightarrow 4x(x - 6) = 0$$

Unha vez que chegamos aquí, temos dúas opcións:

1) $4x = 0 \Rightarrow x = 0$.
2) $x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$.

Así obtivemos as dúas solucións da ecuación $x = 0$ e $x = 6$.

En efecto, $4 \cdot 0^2 - 24 \cdot 0 = 0$, e $4 \cdot (6)^2 - 24 \cdot 6 = 4 \cdot 36 - 24 \cdot 6 = 144 - 144 = 0$.

Actividades resoltas

- Resolve a ecuación de 2º grao $3x^2 - 27 = 0$:

  Solución: Trátase dunha ecuación de 2º grao incompleta onde falta o b. Polo tanto, despexamos a incógnita:

$3x^2 - 27 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 27 \Rightarrow x^2 = 27/3 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$. As solucións son 3 e –3.

- Resolve a ecuación de 2º grao $x^2 + 8x = 0$:

Solución: Trátase dunha ecuación de 2º grao incompleta onde falta o *c*.

Polo tanto, sacamos factor común: $x^2 + 8x = 0 \Rightarrow x(x + 8) = 0$.

Obtemos as dúas solucións: $x = 0$ e $x + 8 = 0 \Rightarrow x = -8$. As solucións son 0 e –8.

Actividades propostas

14. Resolve as seguintes ecuacións de 2º grao incompletas:

a) $3x^2 + 18x = 0$ b) $5x^2 - 180 = 0$ c) $x^2 - 49 = 0$

d) $2x^2 + x = 0$ e) $4x^2 - 25 = 0$ f) $5x^2 - 10x = 0$

1.6. Suma e produto das solucións nunha ecuación de segundo grao

Se nunha ecuación de segundo grao: $x^2 + bx + c = 0$, con $a = 1$, coñecemos as súas solucións: x_1 e x_2 sabemos que podemos escribir a ecuación de forma factorizada:

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

Facemos operacións:

$$x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0 \Rightarrow x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0,$$

polo que o coeficiente c é igual ao produto das solucións e a suma das solucións é igual ao oposto do coeficiente b, é dicir, $-b$.

$$\boldsymbol{x_1 \cdot x_2 = c; \qquad x_1 + x_2 = -b.}$$

Se a ecuación é $ax^2 + bx + c = 0$, dividindo por a, xa temos unha de coeficiente $a = 1$, e obtemos que:

$$\boldsymbol{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}; \qquad x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}}$$

Esta propiedade permítenos, en ocasións, resolver mentalmente algunhas ecuacións de segundo grao.

Actividades resoltas

- Resolve mentalmente a ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Buscamos, mentalmente, dous números cuxo produto sexa 6 e cuxa suma sexa 5. En efecto, $2 \cdot 3 = 6$, e $2 + 3 = 5$, logo as solucións da ecuación son 2 e 3.

- Resolve mentalmente a ecuación $x^2 - 6x + 9 = 0$.

O produto debe ser 9. Probamos con 3 como solución e, en efecto, $3 + 3 = 6$. As solucións son a raíz 3 dobre.

- Resolve mentalmente a ecuación $x^2 - x - 2 = 0$.

As solucións son -1 e 2, pois o seu produto é -2 e a súa suma 1.

- Resolve mentalmente a ecuación $x^2 + x - 2 = 0$.

As solucións son 1 e -2, pois o seu produto é -2 e a súa suma -1.

Actividades propostas

15. Resolve mentalmente as seguintes ecuacións de 2º grao:

a) $x^2 + 6x = 0$ b) $x^2 + 2x - 8 = 0$
c) $x^2 - 25 = 0$ d) $x^2 - 9x + 20 = 0$
e) $x^2 - 3x - 4 = 0$ f) $x^2 - 4x - 21 = 0$

16. Escribe unha ecuación de segundo grao cuxas solucións sexan 3 e 7.

17. O perímetro dun rectángulo mide 16 cm e a súa área 15 cm^2. Calcula as súas dimensións.

18. Se 3 é unha solución de $x^2 - 5x + a = 0$, canto vale a?

1.7. Outras ecuacións

Durante séculos os alxebristas buscaron fórmulas, como a que xa coñeces da ecuación de segundo grao, que resolveran as ecuacións de terceiro grao, de cuarto, de quinto… sen éxito a partir do quinto grao. As fórmulas para resolver as ecuacións de terceiro e cuarto grao son complicadas. Só sabemos resolver de forma sinxela algunhas destas ecuacións.

Exemplo:

- Resolve: $(x - 2) \cdot (x - 6) \cdot (x + 1) \cdot (x - 3) \cdot (x - 7) = 0$.

É unha ecuación **polinómica** de grao cinco pero, ao estar factorizada, sabemos resolvela pois para que o produto de varios factores sexa cero, un deles debe valer cero. Igualando a cero cada factor temos que as solucións son 2, 6, –1, 3 e 7.

Exemplo:

- A ecuación $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ é unha ecuación polinómica de cuarto grao, pero cunha forma moi especial. Chámase ecuación **bicadrada** porque podemos transformala nunha ecuación de segundo grao chamando a x^2 por exemplo, z.

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow z^2 - 5z + 4 = 0 \Rightarrow z = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

Unha solución da ecuación de segundo grao é $z = 4$, e a outra é $z = 1$.

Polo tanto se $z = x^2 = 4$, entón $x = 2$ e $x = -2$.

E se $z = x^2 = 1$, entón $x = 1$ e $x = -1$.

A nosa ecuación de cuarto grao ten catro solucións: 2, –2, 1 e –1.

Exemplo:

Se hai incógnitas no denominador, a ecuación denomínase **racional** e resólvese de forma similar, quitando denominadores.

- Resolve $\dfrac{3x - 8 + 9x}{2x} = 4$

Quitamos denominadores: $\dfrac{3x - 8 + 9x}{2x} = 4 \Rightarrow 3x - 8 + 9x = 8x \Rightarrow 3x + 9x - 8x = 8 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2$.

Exemplo:

Se hai incógnitas dentro dun radical, a ecuación denomínase **irracional** e resólvese illando o radical e elevando ao cadrado (ou ao índice do radical). Agora é preciso ter unha precaución, ao elevar ao cadrado, a ecuación obtida non é equivalente, pódense ter engadido solucións.

Resolve $2+\sqrt{x-3}=x-1$

Íllase o radical: $2+\sqrt{x-3}=x-1 \Rightarrow \sqrt{x-3}=x-1-2 \Rightarrow \sqrt{x-3}=x-3$

Elevamos ao cadrado: $(\sqrt{x-3})^2=(x-3)^2 \Rightarrow x-3=x^2-6x+9 \Rightarrow x^2-7x+12=0$.

Resolvemos a ecuación de segundo grao que ten por solucións 4 e 3, e comprobando na ecuación inicial, ambas as dúas son solucións desta ecuación.

Exemplo:

Se a incógnita está nun expoñente a ecuación denomínase **exponencial**. Se podemos expresar os dous membros da ecuación como potencias da mesma base, iguálanse os expoñentes.

- Resolve: $3^{2x}=\frac{1}{81}$

Expresamos a ecuación como potencias dunha mesma base: $3^{2x}=\frac{1}{81} \Rightarrow 3^{2x}=3^{-4}$

Igualamos os expoñentes: $2x=-4 \Rightarrow x=-2$.

Actividades propostas

19. Resolve as ecuacións seguintes:

a) $(x-6)\cdot(x-3)\cdot(x+7)\cdot(x-1)\cdot(x-9)=0$ b) $3(x-4)\cdot(x-8)\cdot(x+5)\cdot(x-2)\cdot(x-1)=0$

20. Resolve as ecuacións bicadradas seguintes:

a) $x^4-13x^2+36=0$ b) $x^4-29x^2+100=0$ c) $x^4-10x^2+9=0$ d) $x^4-26x^2+25=0$

21. Resolve as ecuacións racionais seguintes:

a) $\frac{2x-1+7x}{3x}=\frac{3}{x}-2$ b) $\frac{1}{x}+1-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{4}{3}$ d) $\frac{2x-3}{x}+\frac{1}{x}=1$

22. Resolve as ecuacións irracionais seguintes:

a) $5+\sqrt{x-1}=x+2$ b) $\sqrt{x-2}+3\sqrt{x-2}=x+1$ c) $\sqrt{x}-4=x-1$ d) $7+\sqrt{x+4}=x+9$

23. Resolve as ecuacións exponenciais seguintes:

a) $2^{x+5}\cdot 2^{x+4}\cdot 2^{x+3}=8$ b) $5^{3x}=\frac{1}{625}$ c) $2^{2x}\cdot 4^{x}=\frac{1}{16}$

2. SISTEMAS DE ECUACIÓNS

2.1. Concepto de sistema de ecuacións lineais

Unha **ecuación** con varias incógnitas é unha igualdade que as relaciona.

Por exemplo:

- $x^2 + y^2 = 36$, é a ecuación dunha circunferencia de centro a orixe e radio 6.

Un **sistema de ecuacións** é, polo tanto, un conxunto de ecuacións con varias incógnitas.

- ***Por exemplo:*** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$

A primeira ecuación é a dunha circunferencia de centro a orixe e radio 6, e a segunda é a ecuación dunha recta que pasa pola orixe. As solucións do sistema son os puntos de intersección entre a circunferencia e a recta.

Chámase **solución do sistema** a cada un dos conxuntos de números que verifican todas as ecuacións do sistema.

Dous sistemas son **equivalentes** cando teñen as mesmas solucións.

Un **sistema de ecuacións lineais** con dúas incógnitas está formado por ecuacións de primeiro grao e pódese expresar da forma:

$$\begin{cases} \boldsymbol{ax + by = c} \\ \boldsymbol{a'x + b'y = c'} \end{cases}$$

onde *a, b, a'* e *b'* son números reais que se denominan **coeficientes** e *c* e *c'* tamén son números reais chamados **termos independentes**.

A **solución** do sistema é un par de valores (*x*, *y*) que satisfán as dúas ecuacións do sistema.

Exemplo:

- Son sistemas de ecuacións lineais, por exemplo:

$\begin{cases} 5x - 3y = -2 \\ 7x + 9y = 4 \end{cases}$; $\begin{cases} 6x + 3y = 7 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 8x - 4y = 5 \end{cases}$; $\begin{cases} 5y + 3 = 4x \\ 8x - 4 = 6y \end{cases}$

Exemplo:

- **Non** é un sistema lineal $\begin{cases} 4xy + 6y = 1 \\ 5x - 7xy = 3 \end{cases}$ porque ten termos en *xy*, aínda que é un sistema de dúas ecuacións.
- Tampouco o é $\begin{cases} 4x^2 + 6y = 5 \\ 3x - 7y = 8 \end{cases}$ porque ten un termo en x^2, aínda que é un sistema de dúas ecuacións.

Actividades propostas

24. Razoa se son ou non sistemas de ecuacións lineais os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 3xy + y = 5 \\ 5x - 4y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6y - 4x = 3 \\ x - 7y = -8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x - 3 = 2y \\ 4x + 6y = 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ 3x + y^2 = 4 \end{cases}$

2.2. Clasificación de sistemas de ecuacións lineais

Nun sistema de ecuacións lineais con dúas incógnitas, cada unha das ecuacións representa unha recta no plano.

Estas rectas poden estar posicionadas entre si de tres maneiras distintas, o que nos axudará a clasificar o noso sistema en:

1) **Compatible determinado**: o sistema ten unha única solución, polo que as rectas son **SECANTES**, córtanse nun único punto.

2) **Compatible indeterminado**: o sistema ten infinitas solucións, polo que as rectas son **COINCIDENTES.**

3) **Incompatible**: o sistema non ten solución, polo que as rectas son **PARALELAS.**

Compatible determinado	**Compatible indeterminado**	**Incompatible**
Rectas secantes	**Rectas coincidentes**	**Rectas paralelas**

Actividades resoltas

- Engade unha ecuación a $x - 2y = 2$ para que o sistema resultante sexa:

  a) Compatible determinado.

  b) Incompatible.

  c) Compatible indeterminado.

Solución:

a) Para que o sistema sexa compatible determinado, engadiremos unha ecuación que non teña os mesmos coeficientes que a que nos dan. Por exemplo, x + e = 1.

b) Para que sexa incompatible, os coeficientes das incógnitas teñen que ser os mesmos (ou proporcionais) pero teren diferente termo independente. Por exemplo, $x - 2y = -3$, (ou $2x - 4y = 0$).

c) Para que sexa compatible indeterminado, poñeremos unha ecuación proporcional á que temos. Por exemplo $2x - 4y = 4$.

Unha forma de resolver un sistema lineal de dúas ecuacións é o de **resolución gráfica**, representando, como vimos no exemplo anterior, as dúas rectas definidas polas ecuacións do sistema nos mesmos eixes coordenados, clasificando o sistema e se é compatible e determinado, determinando o punto de intersección.

Actividades propostas

25. Resolve graficamente os seguintes sistemas e clasifícaos:

a) $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ -3x + y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ -2y + 2x = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 4x - 6y = 6 \end{cases}$

26. Resolve graficamente os seguintes sistemas e clasifícaos:

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ -3x + y = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ -2y + x = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x - 4y = 4 \end{cases}$

27. Dado o sistema de ecuacións:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Inventa un enunciado que resolva este sistema.

2.3. Resolución de sistemas lineais polo método de substitución

O **método de substitución** consiste en despexar unha incógnita dunha das ecuacións do sistema e substituír a expresión obtida na outra ecuación.

Así, obtemos unha ecuación de primeiro grao na que poderemos calcular a incógnita despexada. Co valor obtido, obtemos o valor da outra incógnita.

Exemplo:

- Imos resolver o sistema $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \end{cases}$ polo método de substitución:

Despexamos *x* da segunda ecuación:

$$\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \Rightarrow x=3-2y \end{cases}$$

e substituímolo na primeira:

$2(3-2y)-3y=-1 \Rightarrow 6-4y-3y=-1 \Rightarrow -4y-3y=-1-6 \Rightarrow -7y=-7 \Rightarrow y=(-7)/(-7)=1$

Co valor obtido de *y*, calculamos o *x*:

$x=3-2y \Rightarrow x=3-2\cdot 1=1.$

Solución:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x=1} \\ \boldsymbol{y=1} \end{cases}$$

Actividades propostas

28. Resolve os seguintes sistemas polo método de substitución:

a) $\begin{cases} 3x+4y=26 \\ x-2y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+4y=26 \\ 3x+y=24 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-2y=8 \\ 2x+3y=14 \end{cases}$

2.4. Resolución de sistemas lineais polo método de igualación

O **método de igualación** consiste en despexar a mesma incógnita das dúas ecuacións que forman o sistema e igualar os resultados obtidos.

Así, obtemos unha ecuación de primeiro grao na que poderemos calcular a incógnita despexada. Co valor obtido, calculamos o valor da outra incógnita.

Exemplo:

- Imos resolver o sistema $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ polo método de igualación:

Despexamos a mesma incógnita das dúas ecuacións que forman o sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \Rightarrow x = \dfrac{3y - 1}{2} \\ x + 2y = 3 \Rightarrow x = 3 - 2y \end{cases}$$

Igualamos agora os resultados obtidos e resolvemos a ecuación resultante:

$$\frac{3y-1}{2} = 3 - 2y \Rightarrow 3y - 1 = 2(3 - 2y) = 6 - 4y \Rightarrow 3y + 4y = 6 + 1 \Rightarrow 7y = 7 \Rightarrow y = \frac{7}{7} = 1$$

Co valor obtido de y, calculamos o x:

$x = 3 - 2y \Rightarrow x = 3 - 2 \cdot (1) = 1$

Solución:

$$\begin{cases} \mathbf{x = 1} \\ \mathbf{y = 1} \end{cases}$$

Actividades propostas

29. Resolve os seguintes sistemas polo método de igualación:

a) $\begin{cases} 3x + y = 18 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 4x + 2y = 26 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x - 4y = 10 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$

2.5. Resolución de sistemas lineais polo método de redución

O **método de redución** consiste en eliminar unha das incógnitas sumando as dúas ecuacións. Para iso multiplícanse unha ou ambas as ecuacións por un número de modo que os coeficientes de *x* ou *y* sexan iguais pero de signo contrario.

Exemplo:

- Imos resolver o sistema $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ polo método de redución:

Multiplicamos a segunda ecuación por -2 para que os coeficientes do *x* sexan iguais pero de signo contrario e sumamos as ecuacións obtidas:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)} \begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ -2x - 4y = -6 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumamos}} \begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 0 - 7y = -7 \end{cases} \Rightarrow y = (-7)/(-7) = 1$$

Co valor obtido de *y*, calculamos o *x*:

$2x - 3 \cdot 1 = -1 \Rightarrow 2x = -1 + 3 = 2 \Rightarrow x = 2/2 = 1$

Solución:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 1} \\ \boldsymbol{y = 1} \end{cases}$$

Actividades propostas

30. Resolve os seguintes sistemas polo método de redución:

a) $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ 2x - 5y = -23 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ 4x + y = 11 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x - 2y = 13 \end{cases}$

2.6. Sistemas de ecuacións non lineais

Se algunha das ecuacións do sistema **non** é lineal, o sistema xa non é lineal.

Resólvese por calquera dos métodos anteriores, por exemplo por substitución, despexando, se é posible unha incógnita de expoñente un.

Exemplo:

- Para resolver $\begin{cases} x+y=14 \\ xy=-15 \end{cases}$ despexamos "*y*" da primeira ecuación: $y = 14 - x$, e substituímolo na segunda: $xy = x(14-x) = -15 \Rightarrow 14x - x^2 = -15 \Rightarrow x^2 - 14x - 15 = 0$.

Resolvemos a ecuación de segundo grao, e as solucións son: 15 e –1.

Como $y = 14 - x$, se $x = 15$ entón $y = -1$, e se $x = -1$ entón $y = 15$.

As solucións son os puntos (15, –1) e (–1, 15), puntos de intersección entre a hipérbole $xy = 15$, e a recta $x + y = 14$.

Actividades propostas

31. Resolve os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = -2 \\ 2x^2 - 3y^2 = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 3 \\ 5x^2 - 2y^2 = 5 \end{cases}$ *Axuda*: Utiliza o método de redución:

c) $\begin{cases} xy = \dfrac{1}{2} \\ x+y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 - 4y = -3 \\ xy = 1 \end{cases}$ e) $\left.\begin{matrix} x + y - \dfrac{y}{x} = 1 \\ x + y = 2 \end{matrix}\right\}$

32. A traxectoria dun proxectil é unha parábola de ecuación: $y = -x^2 + 5x$, e a traxectoria dun avión é unha recta de ecuación: $y = 3x$. En que puntos coinciden ambas as traxectorias? Representa graficamente a recta e a parábola para comprobar o resultado

33. Resolve os seguintes sistemas e comproba graficamente as solucións:

a) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 1 \\ xy = 2 \end{cases}$ c) $\left.\begin{matrix} x^2 + y^2 = 17 \\ xy = 4 \end{matrix}\right\}$

d) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17 \\ x + y = 5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$ f) $\left.\begin{matrix} x^2 + y^2 = 18 \\ y = x \end{matrix}\right\}$

2.7. Sistemas de ecuacións lineais de máis de dúas incógnitas

A mellor forma de resolver sistemas lineais de máis de dúas incógnitas é ir substituíndo o sistema por outro equivalente de forma que cada vez se consiga que sexan cero os coeficientes de máis incógnitas.

Exemplo:

- Para resolver o sistema: $\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ x + 2y + z = 4 \\ x + 4y - 2z = 3 \end{cases}$, deixamos a primeira ecuación sen modificar.

  Queremos que a segunda ecuación teña un cero como coeficiente do "*x*", para iso multiplicámola por 2 e restámoslle a primeira. Para que a terceira ecuación teña un cero como coeficiente do "*x*", multiplicámola por 2 e restámoslle a primeira:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ x + 2y + z = 4 \\ x + 4y - 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 0 + 3y + 5z = 8 \\ 0 + 7y - z = 6 \end{cases}$$

Agora podemos resolver o sistema de dúas ecuacións e dúas incógnitas formado polas dúas últimas ecuacións, ou continuar co noso procedemento. Para conseguir que na terceira ecuación o coeficiente do "*y*" sexa un cero multiplicamos a terceira ecuación por 3 e a segunda por 7 e restámolas:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 0 + 3y + 5z = 8 \\ 0 + 7y - z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 0 + 3y + 5z = 8 \\ 0 + 0 + 32z = 32 \end{cases}$$

e agora xa podemos despexar cada unha das incógnitas de forma ordenada:

$$\begin{cases} z = 1 \\ 3y + 5(1) = 8 \\ 2x + y - 3(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Actividades propostas

34. Resolve os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + y - 3z = -2 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y + 2z = 6 \\ x + 2y + 2z = 4 \\ 3x - 2y - 3z = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 5 \\ x - 2y + 2z = -1 \\ x - 2y - 3z = -6 \end{cases}$

3. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

3.1. Resolución de problemas mediante ecuacións de 2º grao

Para resolver problemas por medio de ecuacións de 2º grao, primeiro teremos que pasar á linguaxe alxébrica o enunciado do problema e logo resolvelo seguindo estes pasos:

1.- Comprender o enunciado.

2.- Identificar a incógnita.

3.- Traducir o enunciado á linguaxe alxébrica.

4.- Propor a ecuación e resolvela.

5.- Comprobar a solución obtida.

Actividades resoltas

Imos resolver o seguinte problema:

- *Cal é o número natural cuxo quíntuplo, aumentado en 6 unidades, é igual ao seu cadrado?*

Unha vez comprendido o enunciado, identificamos a incógnita que, neste caso, é o número que estamos buscando.

2.- Número buscado = $\boldsymbol{x}$

3.- Traducimos agora o problema á linguaxe alxébrica:

$$\mathbf{5}\boldsymbol{x} + \mathbf{6} = \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}$$

4.- Resolvemos a ecuación:

$$5x + 6 = x^2 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+7}{2} = 6; \qquad x_2 = \frac{5-7}{2} = -1$$

Solución: Como o enunciado di “número natural” o número buscado é o 6.

5.- *Comprobación*: En efecto $5\cdot 6 + 6 = 36 = 6^2$.

Actividades propostas

35. Que número multiplicado por 4 é 5 unidades menor có seu cadrado?

36. Nunha clase deciden que todos van enviar unha carta ao resto de compañeiros. Un di: Imos escribir 380 cartas! Calcula o número de alumnos que hai na clase.

37. Calcula tres números consecutivos tales que a suma dos seus cadrados sexa 365.

38. Unha fotografía rectangular mide 14 cm de base e 10 cm de altura. Arredor da foto hai unha marxe de igual anchura para a base que para a altura. Calcula o ancho da marxe, sabendo que a área total da foto e a marxe é de 252 cm^2.

39. O triplo do cadrado dun número aumentado no seu duplo é 85. Cal é o número?

40. Un triángulo isósceles ten un perímetro de 20 cm e a base mide 4 cm, calcula os lados do triángulo e a súa área.

41. Unha folla de papel cadrada dóbrase pola metade. O rectángulo resultante ten unha área de 8 cm^2. Cal é o perímetro deste rectángulo?

42. Un pai di: "O produto da idade do meu fillo hai 5 anos polo da súa idade hai 3 anos é a miña idade actual, que son 35 anos". Calcula a idade do fillo.

43. Calcula as dimensións do rectángulo cuxa área é 21 m^2, sabendo que os seus lados se diferencian en 4 metros.

44. Nun triángulo rectángulo o cateto maior mide 4 cm menos que a hipotenusa e 4 cm máis que o outro cateto. Canto miden os lados do triángulo?

45. Calcula dous números pares consecutivos cuxo produto sexa 224.

46. Calcula tres números impares consecutivos tales que se ao cadrado do maior se lle restan os cadrados dos outros dous se obtén como resultado 15.

3.2. Resolución de problemas mediante sistemas de ecuacións

Para resolver problemas por medio de sistemas de ecuacións, primeiro teremos que pasar a linguaxe alxébrica o enunciado do problema e logo resolvelo seguindo estes pasos:

1.- Comprender o enunciado.

2.- Identificar as incógnitas.

3.- Traducir o enunciado a linguaxe alxébrica.

4.- Propor o sistema e resolvelo.

5.- Comprobar a solución obtida.

Actividades resoltas

Imos resolver o seguinte problema:

- *A suma das idades dun pai e do seu fillo é 39 e a súa diferenza 25. Cal é a idade de cada un?*

Unha vez comprendido o enunciado, identificamos as incógnitas que, neste caso, son a idade do pai e o fillo.

2.- Idade do pai = x.

Idade do fillo = y.

3.- Pasamos o enunciado á linguaxe alxébrica:

A suma das súas idades é 39:

$$x + y = 39$$

E a súa diferenza 25:

$$x - y = 25$$

4.- Propomos o sistema e resolvémolo polo método que nos resulte máis sinxelo. Neste caso, facémolo por redución:

$$\begin{cases} x+y=39 \\ x-y=25 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumamos}} \begin{cases} x+y=39 \\ 2x+0=64 \end{cases} \Rightarrow x = 64/2 = 32$$

$x + y = 39 \Rightarrow 32 + y = 39 \Rightarrow y = 39 - 32 = 7$.

Solución: o pai ten 32 anos e o fillo ten 7 anos.

5.- ***Comprobación***: En efecto, a suma das idades é 32 + 7 = 39 e a diferenza é 32 – 7 = 25.

Actividades propostas

47. A suma das idades de María e Afonso son 65 anos. A idade de Afonso menos a metade da idade de María é igual a **35**. Que idade ten cada un?

48. A suma das idades de Mariló e Xabier é 32 anos. Dentro de 7 anos, a idade de Xabier será igual á idade de Mariló máis 20 anos. Que idade ten cada un na actualidade?

49. Encontra dous números cuxa diferenza sexa 24 e a súa suma sexa 104.

50. Un hotel ten 42 habitacións (individuais e dobres) e 62 camas, cantas habitacións ten de cada tipo?

51. Nun triángulo rectángulo a hipotenusa mide 10 cm e as lonxitudes dos seus dous catetos suman 14 cm. Calcula a área do triángulo.

52. Neves pregúntalle a Míriam polas súas cualificacións en Matemáticas e en Lingua. Míriam dille “A suma das miñas cualificacións é 19 e o produto 90”. Neves dálle os parabéns. Que cualificacións obtivo?

53. Dun número de tres cifras sábese que suman 12, que a suma dos seus cadrados é 61, e que a cifra das decenas é igual á das centenas máis 1. Que número é?

54. Hai tres zumes compostos do seguinte modo:

O primeiro de 40 dl de laranxa, 50 dl de limón e 90 dl de pomelo.

O segundo de 30 dl de laranxa, 30 dl de limón e 50 dl de pomelo.

O terceiro de 20 dl de laranxa, 40 dl de limón e 40 dl de pomelo.

Que volume haberá tomarse de cada un dos zumes anteriores para formar un novo zume de 34 dl de laranxa, 46 dl de limón e 67 dl de pomelo.

55. Véndense tres especies de cereais: trigo, cebada e millo. Cada kg de trigo véndese por 2 €, o da cebada por 1 € e o de millo por 0.5 €. Se se venden 200 kg en total e se obtén pola venda 300 €, cantos volumes de cada cereal se venderon?

56. Desexase mesturar fariña de 2 €/kg con fariña de 1 €/kg para obter unha mestura de 1.2 €/kg. Cantos kg deberemos poñer de cada prezo para obter 300 kg de mestura?

57. Nunha tenda hai dous tipos de xoguetes, os de tipo A que utilizan 2 pilas e os de tipo B que utilizan 5 pilas. Se en total na tenda hai 30 xoguetes e 120 pilas, cantos xoguetes hai de cada tipo?

58. Un peón sae dunha cidade A e diríxese a unha cidade B que está a 15 km de distancia a unha velocidade de 4 km/h e, no mesmo momento, sae un ciclista da cidade B a unha velocidade de 16 km/h e diríxese cara a A. Canto tempo leva o peón camiñando no momento do encontro? A que distancia de B se cruzan?

CURIOSIDADES. REVISTA

Obtención da fórmula para resolver ecuacións de segundo grao.

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ con } a \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$ax^2 + bx = -c$$

$$\Downarrow \text{ Multiplicamos por } 4a$$

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

$$\Downarrow \text{ Sumamos } b^2$$

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$$

$$\Downarrow \text{ Completamos cadrados}$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

$$\Downarrow \text{ Calculamos a raíz cadrada}$$

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\Downarrow \text{Despexamos o } x$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Tres ecuacións de segundo grao interesantes

$x^2 = 2$

Esta ecuación aparece ao aplicarlle o Teorema de Pitágoras a un triángulo rectángulo isósceles de lados iguais a 1, ou ao calcular a diagonal dun cadrado de lado 1. A súa solución é a lonxitude da hipotenusa ou da diagonal. Ten de interesante que se demostra que esta solución NON é un número racional, un número que poida escribirse como cociente de dous números enteiros.

$x + 1 = x^2$

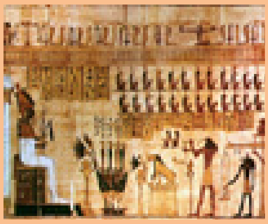
Tamén se pode escribir como: $\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$ que é unha proporción, onde x toma o valor $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ≈ 1.618… que é o número de ouro, outro número irracional.

$x^2 = -1$

A terceira ecuación non ten solución real. Ningún número real ao elevalo ao cadrado pode dar un número negativo, pero, se ampliamos o campo real coa súa raíz, $\sqrt{-1} = i$, resulta que xa todas as ecuacións de segundo grao teñen solución. Aos números $a + b \cdot i$ chámaselles **números complexos**.

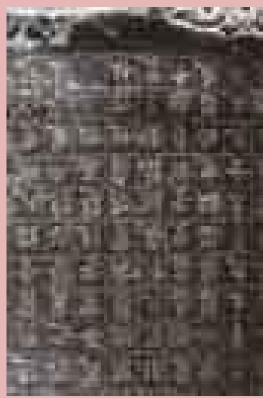
Emmy Noether foi unha matemática alemá de orixe xudía cuxos traballos en Álxebra permitiron resolver o problema da conservación da enerxía.

Os matemáticos tardaron preto de tres mil anos en comprender e resolver ecuacións tan sinxelas e que tan ben coñeces como $ax + b = 0$. Xa os **exipcios** no papiro do *Rhid* (1650 a.C.) e no de *Moscú* (1850 a.C.) resolven algúns problemas que se poderían considerar de ecuacións como, por exemplo: "*Un montón e un sétimo do mesmo é igual a 24*".



En **Mesopotamia** e **Babilonia** xa se sabía resolver sistemas de dúas ecuacións e dúas incógnitas e ecuacións de segundo grao.
Un problema que aparece nunha taboíña é: "A *cuarta parte da anchura máis unha lonxitude é igual a 7 mans. E lonxitude máis anchura é igual a 10 mans*". Neste problema "lonxitude" e "anchura" son incógnitas non relacionadas con estas medidas.

En China no século III a.C. editouse *A arte matemática* onde utilizaban o ábaco e se resolvían ecuacións de primeiro e segundo grao e sistemas.
Un dos problemas resoltos pode considerarse como a resolución dun sistema de tres ecuacións con tres incógnitas utilizando o método matricial.



En Grecia, no século III, Diofanto de Alexandría publicou *Aritmética*, traballou con ecuacións e utilizou a primeira letra da palabra grega "*arithmos*", que significa número, para representar a incógnita.

Na súa tumba aparece este problema:

"Transeúnte, esta é a tumba de Diofanto. É el quen con esta sorprendente distribución che di o número de anos que viviu. A súa xuventude ocupou a súa sexta parte, despois durante a doceava parte a súa meixela cubriuse co primeiro vello. Pasou aínda unha sétima parte da súa vida antes de tomar esposa e, cinco anos despois, tivo un precioso neno que, unha vez acadada a metade da idade do seu pai, pereceu dunha morte desgraciada. O seu pai tivo que sobrevivilo, chorándoo, durante catro anos".

No século VII, os **hindús** coñecían procedementos alxébricos e traballaban con eficacia os números.

No século IX, o matemático musulmán **Al-Jwarizmi** traballou sobre procedementos alxébricos.

En 1489 inventáronse os símbolos **+** e **–**.
En 1525 o símbolo da raíz cadrada.
En 1557 o símbolo **=**.
En 1591 François Viète representaba as incógnitas con vogais e as constantes con consoantes.
En 1637 René Descartes inventou a xeometría analítica coa notación que hoxe usamos de *x, y z*… para as incógnitas e *a, b, c*… para as constantes.

RESUMO

Noción	*Definición*	*Exemplos*
Ecuación de primeiro grao	Quitar denominadores. Quitar parénteses. Traspor termos. Simplificar e despexar.	$5/3x + 3(x + 1) = 2 \Rightarrow$ $5/3x + 3x + 3 = 2 \Rightarrow$ $5x + 9x + 9 = 6 \Rightarrow$ $14x = -3 \Rightarrow x = -3/14$.
Ecuación de segundo grao	Ten a forma: $ax^2 + bx + c = 0$ Úsase a fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 - 5x + 6 = 0$: $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2}$ $x_1 = 3$, $x_2 = 2$
Número de solucións dunha ecuación de 2º grao	Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, ten dúas solucións reais e distintas. Se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, ten unha solución dobre. Se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, a ecuación non ten solución.	$x^2 - 4x - 5 = 0$: $\Delta = 36 > 0$, ten dúas solucións 5 e -1. $x^2 - 2x + 1 = 0$: $\Delta = 0$, ten unha raíz dobre: $x = 1$. $x^2 + 3x + 8 = 0$: $\Delta = -23$. Non ten solución real.
Resolución de ecuacións de 2º grao incompletas	Se $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, despexamos a incógnita: $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$. Se $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$: $x = 0$ e $x = \frac{-b}{a}$	$2x^2 - 18 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$ $3x^2 - 15x = 0 \Rightarrow 3x(x - 5) = 0$ $\Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = 5$.
Suma e produto de raíces	$x_1\, x_2 = \frac{c}{a}$; $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$	$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$; $x_2 = 3$
Sistema de ecuacións lineais	$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}$
Clasificación	**Compatible determinado**: Unha única solución, o punto de intersección. As rectas son **secantes**: $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$ **Compatible indeterminado**: Infinitas solucións, polo que as rectas son **coincidentes:** $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 6 \end{cases}$ **Incompatible**: Non ten solución, as rectas son **paralelas:** $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 2 \end{cases}$	
Métodos de resolución	**Substitución:** despexar unha incógnita e substituír na outra ecuación. **Igualación:** despexar a mesma incógnita das dúas ecuacións. **Redución:** sumar as dúas ecuacións, multiplicándoas por números adecuados.	

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Ecuacións

1. Resolve estas ecuacións:

a) $4(3-2x)+\frac{5}{7}(6x-2)=2x-\frac{1-9x}{7}$ b) $4-\left(3-5\left(2x-\frac{1}{6}\right)\right)=3x-\frac{4-5x}{3}$ c) $4(2x-5)=6(9-4x)$

2. Resolve as seguintes ecuacións de 2º grao:

a) $-3x^2-5x-2=0$ b) $2x(-3+x)=5$ c) $3x^2=27x$

d) $5(3x+2)-4x(x+6)=3$ e) $4(x-9)+2x(2x-3)=6$ f) $10(2x^2-2)-5(3+2x)=-21$

g) $4(x+5)\cdot(x-1)=-2x-4$ h) $3x\cdot(5x+1)=99$ i) $2(3x^2-4x+2)-2x(3x-2)=-5$

3. Resolve as seguintes ecuacións de 2º grao con denominadores:

a) $\frac{x^2-1}{3}-\frac{x+1}{2}=1$ b) $\frac{x^2-3}{5}+\frac{x^2-4x+1}{5}=2$ c) $\frac{2x^2+3}{3}+\frac{x+5}{6}=2$

d) $\frac{1-x^2}{3}+\frac{4x-1}{2}=\frac{1}{6}$ e) $\frac{x^2-3}{2}-\frac{3x-7}{4}=2x-5$ f) $\frac{3x+2x^2}{5}-\frac{4x-7}{10}=2$

4. Resolve mentalmente as seguintes ecuacións de 2º grao:

a) $x^2-3x-10=0$ b) $x^2+3x-10=0$ c) $x^2+7x+10=0$

d) $x^2-7x+10=0$ e) $x(-1+x)=0$ f) $2x^2=50$

g) $x^2-5x+6=0$ h) $x^2-x-6=0$ i) $x^2+x-6=0$

5. Factoriza as ecuacións do problema anterior. Así, se as solucións son 2 e 5, escribe:

$2x^2-50=0 \Leftrightarrow 2(x+5)\cdot(x-5)=0.$

Observa que se o coeficiente de x^2 fose distinto de 1 os factores teñen que estar multiplicados por este coeficiente.

6. Cando o coeficiente b é par ($b = 2B$), podes simplificar a fórmula:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2B\pm\sqrt{4B^2-4ac}}{2a}=\frac{-2B\pm2\sqrt{B^2-ac}}{2a}=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-ac}}{a}$$

Así para resolver $x^2-6x+8=0$ basta dicir $x=3\pm\sqrt{9-8}=3\pm1$, logo as súas solucións son 2 e 4.

Utiliza esa expresión para resolver:

a) $x^2-10x+24=0$ b) $x^2-6x-7=0$ c) $x^2+4x-5=0$

7. Resolve mentalmente as ecuacións seguintes, logo desenvolve as expresións e utiliza a fórmula xeral para volver resolvelas.

a) $(x-3)\cdot(x-7)=0$ b) $(x+2)\cdot(x-4)=0$ c) $(x-8)\cdot(x-4)=0$

d) $(x-2)\cdot(x+5)=0$ e) $(x+6)\cdot(x-3)=0$ f) $(x-5)\cdot(x+3)=0$

8. Determina o número de solucións reais que teñen as seguintes ecuacións de segundo grao calculando o seu discriminante, e logo resólveas.

a) $x^2+5x-2=0$ b) $5x^2+2x-4=0$ c) $2x^2+4x+11=0$

d) $2x^2-3x+8=0$ e) $3x^2-x-5=0$ f) $4x^2+2x-7=0$

9. Escribe tres ecuacións de segundo grao que non teñan ningunha solución real. *Axuda*: Utiliza o discriminante.

10. Escribe tres ecuacións de segundo grao que teñan unha solución dobre.

11. Escribe tres ecuacións de segundo grao que teñan dúas solucións reais e distintas.

12. Resolve as seguintes ecuacións polinómicas:

a) $x^5-37x^3+36x=0$ b) $x^3-2x^2-8x=0$ c) $2x^3+2x^2-12x=0$

d) $x^4-5x^2+6=0$ e) $2x^4=32x^2-96$ f) $x(x-3)(2x+3)(3x-5)=0$

13. Resolve as seguintes ecuacións aplicando un cambio de variable:

a) $x^8+81=82x^4$ b) $x^4-24x^2+144=0$ c) $x^6-7x^3-8=0$ d) $x^4+8x^2-9=0$

14. Resolve as seguintes ecuacións racionais:

a) $2x+\frac{3}{x}=5$ b) $\frac{3}{5x}+\frac{1}{2x}=x$ c) $\frac{1}{x-3}+2=\frac{5}{x-3}$ d) $\frac{2x}{3-2x}-5x=1$

e) $\frac{2}{x+1}=\frac{3(2x+1)}{x-1}+3$ f) $\frac{2x-3}{x+1}-\frac{4+5x}{x}=7$ g) $\frac{3x-2}{x+1}-\frac{2+3x}{x-1}=4$

h) $\frac{3}{1-x}=\frac{5}{x}+\frac{2}{x-x^2}$ i) $\frac{3x}{x-2}-\frac{5x}{x^2-4}=\frac{3x}{2}$ j) $\frac{1}{2}=\frac{x-5}{3-4x}$

15. Resolve as seguintes ecuacións irracionais:

a) $x=-3+\sqrt{5+2x^2}$ b) $\sqrt{25-x}=x-5$ c) $7+\sqrt{x^2-3x+2}=3x$

d) $\sqrt{x}-\sqrt{x-2}=1$ e) $\sqrt{1-x}-\sqrt{x+1}+1=0$ f) $\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}=5$

g) $3\sqrt{x-2}-4=\frac{-2}{\sqrt{x+1}}$ h) $\sqrt{x-1}-\frac{2}{\sqrt{x}-1}=1$ i) $\sqrt{x+2}+\frac{1}{\sqrt{x-3}}=4$

16. Resolve as ecuacións seguintes: a) $3^{3x}=\frac{1}{81}$ b) $5^{2x}=\frac{1}{625}$

Sistemas

17. Resolve os seguintes sistemas polo método de substitución:

a) $\begin{cases} 4x-3y=1 \\ 3x-y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+4y=6 \\ 2x+5y=9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3y=10 \\ x+y=4 \end{cases}$

18. Resolve os seguintes sistemas polo método de igualación:

a) $\begin{cases} -3x+2y=-1 \\ 3x-y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x-2y=1 \\ 4x-y=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x-4y=10 \\ -8x+3y=-13 \end{cases}$

19. Resolve os seguintes sistemas polo método de redución:

a) $\begin{cases} 7x-2y=5 \\ 2x+y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+2y=10 \\ -x-6y=-14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-6y=0 \\ -7x+5y=-9 \end{cases}$

20. Resolve de forma gráfica os seguintes sistemas

a) $\begin{cases} x+y=6 \\ x-y=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+3y=5 \\ x-7y=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-y=1 \\ -7x+5y=3 \end{cases}$

21. Resolve os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} \dfrac{2x-3}{3}-\dfrac{y-1}{5}=-1 \\ \dfrac{2x+3}{2}+\dfrac{3y-1}{4}=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}-\dfrac{2y+3}{5}=-3 \\ 5x+2y=-10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{2x+3}{2}+\dfrac{3y-2}{3}=2 \\ 7x-y=1 \end{cases}$

22. Copia no teu caderno e completa os seguintes sistemas incompletos de forma que se cumpra o que se pide en cada un:

Compatible indeterminado / Incompatible / A súa solución sexa $x = 2$ e e = 1

a) $\begin{cases} (\ )x+3y=(\ ) \\ 2x-y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -5x+y=2 \\ (\ )x+y=6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-y=(\ ) \\ (\ )x+y=7 \end{cases}$

Incompatible / A súa solución sexa x =–1 e y=1 / Compatible indeterminado

d) $\begin{cases} 2x-5y=-1 \\ 4x+(\ )y=(\ ) \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3x+(\ )y=-1 \\ (\ )x+3y=5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} (\ )x+6y=(\ ) \\ 2x+3y=-2 \end{cases}$

23. Resolve os seguintes sistemas polo método de igualación e comproba a solución graficamente. De que tipo é cada sistema?

a) $\begin{cases} -2x+6y=13 \\ x-3y=8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=-3 \\ 4x-4y=-12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y=4 \\ -x+3y=-5 \end{cases}$

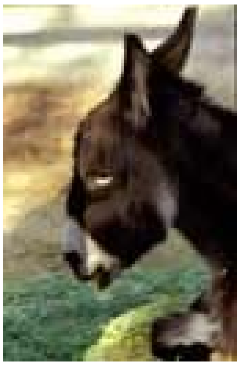
Problemas

24. Nunha tenda alugan bicicletas e triciclos. Se teñen 51 vehículos cun total de 133 rodas, cantas bicicletas e cantos triciclos teñen?

25. Cal é a idade dunha persoa se ao multiplicala por 15 lle faltan 100 unidades para completar o seu cadrado?

26. Descompón 8 en dous factores cuxa suma sexa 6.

27. O triplo do cadrado dun número aumentado no seu duplo é 85. Que número é?



28. A suma dos cadrados de dous números impares consecutivos é 394. Determina estes números.

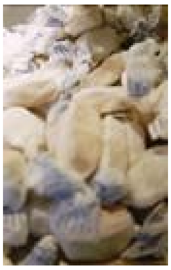
29. Van cargados un asno e un macho. O asno queixábase do peso que levaba enriba. O macho contestoulle: se eu levara un dos teus sacos, levaría o dobre de carga ca ti pero se ti tomas un dos meus, os dous levaremos igual carga. Cantos sacos leva cada un?

30. Que número multiplicado por 3 é 40 unidades menor có seu cadrado?

31. Calcula tres números consecutivos cuxa suma de cadrados é 365.

32. Dentro de 11 anos, a idade de Mario será a metade do cadrado da idade que tiña hai 13 anos. Que idade ten Mario?

33. Dous números naturais diferéncianse en 2 unidades e a suma dos seus cadrados é 580. Cales son estes números?



34. A suma de dous números é 5 e o seu produto é –84. De que números se trata?

35. María quere formar bandexas dun quilogramo con mazapáns e polvoróns. Se os polvoróns lle custan a 5 euros o quilo e os mazapáns a 7 euros o quilo, e quere que o prezo de cada bandexa sexa de 6 euros, que cantidade deberá poñer de cada produto? Se quere formar 25 bandexas, que cantidade de polvoróns e de mazapáns vai necesitar?

36. Determina os catetos dun triángulo rectángulo cuxa suma é 7 cm e a hipotenusa deste triángulo mide 5 cm.

37. O produto de dous números é 4 e a suma dos seus cadrados 17. Calcula estes números.

38. A suma de dous números é 20. O dobre do primeiro máis o triplo do segundo é 45. De que números se trata?

39. Nun garaxe hai 30 vehículos entre coches e motos. Se en total hai 100 rodas, cantos coches e motos hai no garaxe?

40. A idade actual de Pedro é o dobre da de Raquel. Dentro de 10 anos, as súas idades sumarán 65. Cantos anos teñen actualmente Pedro e Raquel?

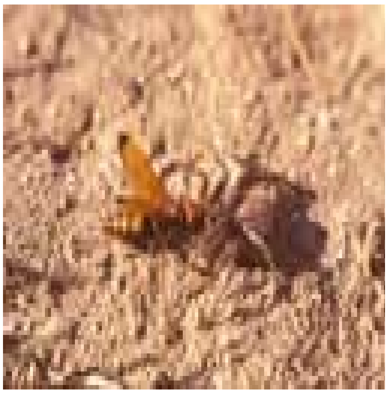
41. Na miña clase hai 35 persoas. Regaláronnos a cada moza 2 bolígrafos e a cada mozo 1 caderno. Se en total había 55 regalos. Cantos mozos e mozas somos na clase?

42. Entre o meu avó e o meu irmán teñen 56 anos. Se o meu avó ten 50 anos máis que o meu irmán, que idade ten cada un?

43. Dous bocadillos e un refresco custan 5 €. Tres bocadillos e dous refrescos custan 8 €. Cal é o prezo do bocadillo e o refresco?

44. Nunha granxa hai polos e vacas. Se se contan as cabezas, son 50. Se se contan as patas, son 134. Cantos polos e vacas hai na granxa?

45. Un rectángulo ten un perímetro de 172 metros. Se o longo é 22 metros maior có ancho, cales son as dimensións do rectángulo?



46. Nunha bolsa hai moedas de 1 € e 2 €. Se en total hai 40 moedas e 53 €, cantas moedas de cada valor hai na bolsa?

47. Nunha pelexa entre arañas e avespas, hai 70 cabezas e 488 patas. Sabendo que unha araña ten 8 patas e unha avespa 6, cantas avespas e arañas hai na pelexa?

48. Unha clase ten 32 estudantes, e o número de alumnos é triplo ao de alumnas, cantos rapaces e rapazas hai?

49. Iolanda ten 6 anos máis que o seu irmán Paulo, e a súa nai ten 50 anos. Dentro de 2 anos a idade da nai será o dobre da suma das idades dos seus fillos, que idades teñen?

50. Mestúranse 15 kg de millo de 2.1 € o quilogramo con 27 kg de millo de prezo descoñecido, resultando o prezo da mestura de 3 € o kg. Que prezo tiña o segundo millo?

51. A altura dun trapecio isósceles é de 4 cm, o perímetro, 24 cm, e os lados inclinados son iguais á base menor. Calcula a área do trapecio.

52. Dous autobuses saen, un desde Madrid e o outro desde Valencia (que está a 350 km de Madrid) ás 8 da mañá. Un vai a 100 km/h e o outro a 120 km/h. A que hora se cruzan? Cantos km percorreu cada un?

53. Nun concurso gáñanse 50 euros por cada resposta acertada e pérdense 100 por cada fallo. Despois de 20 preguntas, Pilar leva gañados 250 euros. Cantas preguntas acertou?

54. Xoán mercou 6 zumes e 4 batidos por 4.6 €, logo mercou 4 zumes e 7 batidos e custáronlle 4.8 €. Calcula os prezos de ambas as cousas.

55. Que fracción é igual a 1 cando se suma 1 ao numerador e é igual a $\frac{1}{2}$ cando se suma 2 ao denominador?

56. O cociente dunha división é **3** e o resto é **2**. Se o divisor diminúe en 1 unidade, o cociente aumenta en **2** e o resto novo é 1. Calcular o dividendo e o divisor.

57. Dúas amigas foron pescar. Ao final do día unha dixo: "Se ti me dás un dos teus peixes, entón eu terei o dobre ca ti". A outra respondeulle: "Se ti me dás un dos teus peixes, eu terei o mesmo número de peixes ca ti". Cantos peixes tiña cada unha?

58. Calcula as dimensións dun rectángulo sabendo que a súa área é 30 cm^2, e cuxo perímetro mide 26 cm.

59. Un peón sae dunha cidade "A" a unha velocidade de 4 km/h, e diríxese a unha cidade "B" que está a 12 km da cidade "A", 30 minutos despois sae un ciclista da cidade "B" a unha velocidade de 16 km/h e diríxese cara a "A", canto tempo leva o peón camiñando no momento do encontro? A que distancia de "B" se cruzan?

60. Deséxase mesturar aceite de 3 €/l con outro aceite de 4.2 €/l de modo que a mestura resulte a 3.50 €/l. Cantos litros de cada clase deben mesturarse para obter 200 litros da mestura?

61. Ao intercambiar as cifras dun número de dúas cifras obtense outro que é 27 unidades maior. Calcula o número inicial.

62. A diagonal dun rectángulo mide 30 cm, e o perímetro 84 cm. Calcula os lados do rectángulo.

63. Un valado rodea un terreo rectangular de 1 000 m^2. Se o valado mide 130 metros, calcula as dimensións do terreo.

64. Varios amigos van a facer un regalo de vodas que custa 900 euros, que pagarán a partes iguais. A última hora apúntanse dous amigos máis, co que cada un toca a 15 euros menos. Cantos amigos eran inicialmente? Canto pagará ao final cada un?

65. As diagonais dun rombo diferéncianse en 3 cm e a súa área é de 20 cm^2. Calcula o seu perímetro.

66. Un tren sae de Bilbao cara a Alcázar de San Juan a unha velocidade de 140 km/h. Unha hora máis tarde sae outro tren de Alcázar de San Juan cara a Bilbao a 100 km/h; a distancia entre as dúas cidades é de 500 km. Ao cabo de canto tempo se cruzan os dous trens? A que distancia de Alcázar de San Juan?

67. Un coche sae dunha cidade "A" a unha velocidade de 70 km/h e 30 minutos máis tarde outro coche sae de "A" na mesma dirección e sentido a unha velocidade de 120 km/h, canto tempo tardará o segundo en acadar ao primeiro e a que distancia de "A" se produce o encontro?

AUTOAVALIACIÓN

1. A solución da ecuación $3(x-1)-2(x-2)=5$ é:

a) $x = 2$ b) $x = 4$ c) $x = -2/3$ d) $x = 3$

2. As solucións da ecuación $156 = x(x-1)$ son:

a) $x = 11$ e $x = -13$ b) $x = 13$ e $x = -12$ c) $x = 10$ e $x = 14$ d) $x = -12$ e $x = -11$

3. As solucións da ecuación $\frac{4x-1}{3}-\frac{x+2}{6}=\frac{x^2}{2}$ son:

a) $x = 2$ e $x = 2/3$ b) $x = 1/3$ e $x = 4$ c) $x = 1$ e $x = 4/3$ d) $x = 5/3$ e $x = 3$

4. As solucións da ecuación $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ son:

a) 1, –1, 4, –4 b) 1, –1, 2, –2 c) 2, –2, 3, –3 d) 2, –2, 5, –5

5. As solucións da ecuación $2(x + 2) - x(2 - x) = 0$ son:

a) Infinitas b) $x = 9$ e $x = 5$ c) Non ten solución d) $x = 1$ e $x = 4$

6. As rectas que forman o sistema $\begin{cases} x+3y=2 \\ 2x+6y=4 \end{cases}$ son:

a) Secantes b) Paralelas c) Coincidentes d) Crúzanse

7. A solución do sistema $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ -2x+3y=1 \end{cases}$ é:

a) $x = 2$ e $y = 1$ b) $x = 1$ e $y = 1$ c) $x = 3$ e $y = 2$ d) Non ten solución

8. A solución do sistema $\begin{cases} 3+2x-7=x-1+y \\ 2x-9y=13 \end{cases}$ é:

a) $x = 2$ e $y = -1$ b) $x = -2$ e $y = 1$ c) $x = 1$ e $y = 0$ d) $x = 3$ e $y = 1$

9. Nunha granxa, entre polos e porcos hai 27 animais e 76 patas. Cantos polos e porcos hai na granxa?

a) 16 polos e 11 porcos b) 15 polos e 12 porcos c) 13 polos e 14 porcos

10. Cal é a idade dunha persoa se ao multiplicala por 15, lle faltan 100 unidades para chegar ao seu cadrado?

a) 20 anos b) 7 anos c) 25 anos d) 8 anos

Matemáticas orientadas ás ensinanzas aplicadas

4ºA ESO

Capítulo 5: Xeometría do plano e do espazo. Lonxitudes, áreas e volumes

www.apuntesmareaverde.org.es

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Autoras: Milagros Latasa Asso e Fernanda Ramos Rodríguez

Revisores: Javier Rodrigo e David Hierro

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

Índice

Resumo

A Xeometría é unha das ramas máis antigas das Matemáticas e ou seu estudo axúdanos a interpretar mellor a realidade que percibimos. O seu nome significa "*medida da Terra*". Medir é calcular lonxitudes, áreas e volumes. Neste tema recordarás as fórmulas que estudaches xa o ano pasado e afondarás sobre as súas aplicacións na vida real.

Movémonos no espazo de dimensión tres, camiñamos sobre unha esfera (que, por ser grande, consideramos plana), as casas son case sempre ortoedros. A información que percibimos por medio dos nosos sentidos interpretámola en termos xeométricos. Precisamos das fórmulas de áreas e volumes dos corpos xeométricos para calcular as medidas dos mobles que caben no noso salón ou para facer un orzamento da reforma da nosa vivenda.

Moitas plantas distribúen as súas follas buscando o máximo de iluminación e as súas flores en forma esférica buscando un aproveitamento óptimo do espazo. O átomo de ferro dispón os seus electróns en forma de cubo, os sistemas de cristalización dos minerais adoptan formas poliédricas, os panais das abellas son prismas hexagonais. Estes son algúns exemplos da presenza de corpos xeométricos na natureza.

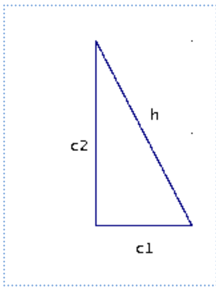
ORIXE DA IMAXE: WIKIPEDIA

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Milagros Latasa Asso e Fernanda Ramos Rodríguez
Ilustracións: Milagros Latasa/Banco de Imaxes de INTEF

1. TEOREMA DE PITÁGORAS E TEOREMA DE TALES

1.1. Teorema de *Pitágoras*

Teorema de *Pitágoras* no plano



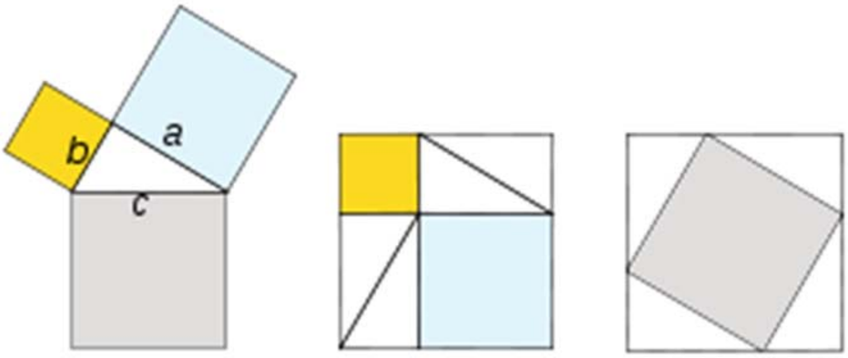
Xa sabes que:

Nun triángulo rectángulo chamamos **catetos** aos lados incidentes co ángulo recto e **hipotenusa** ao outro lado.

Nun triángulo rectángulo, a hipotenusa ao cadrado é igual á suma dos cadrados dos catetos.

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2$$

Demostración:



Exemplo:

- Se os catetos dun triángulo rectángulo miden 6 *cm* e 8 *cm*, a súa hipotenusa vale 10 *cm*, xa que:

$$h = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10\,cm.$$

Actividades resoltas

- *Se a hipotenusa dun triángulo rectángulo mide 13 dm e un dos seus catetos mide 12 dm, calcula a medida do outro cateto:*

  Solución: Polo teorema de *Pitágoras*:

$$c = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{(13-12)\times(13+12)} = \sqrt{25} = 5\ dm$$

Actividades propostas

1. É posible atopar un triángulo rectángulo cuxos catetos midan 12 e 16 *cm* e a súa hipotenusa 30 *cm*? Se a túa resposta é negativa, calcula a medida da hipotenusa dun triángulo rectángulo cuxos catetos miden 12 e 16 *cm*.

2. Calcula a lonxitude da hipotenusa dos seguintes triángulos rectángulos de catetos:

a) 4 *cm* e 3 *cm* b) 1 *m* e 7 *m*

c) 2 *dm* e 5 dm d) 23.5 *km* e 47.2 *km*.

Utiliza a calculadora se che resulta necesaria.

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Milagros Latasa Asso e Fernanda Ramos Rodríguez
Ilustracións: Milagros Latasa/Banco de Imaxes de INTEF

3. Calcula a lonxitude do cateto que falta nos seguintes triángulos rectángulos de hipotenusa e cateto:

   a) 8 *cm* e 3 *cm* b) 15 *m* e 9 *m*

   c) 35 *dm* e 10 *dm* d) 21.2 *km* e 11.9 *km*

4. Calcula a área dun triángulo equilátero de lado 5 *m*.
5. Calcula a área dun hexágono regular de lado 7 *cm*.

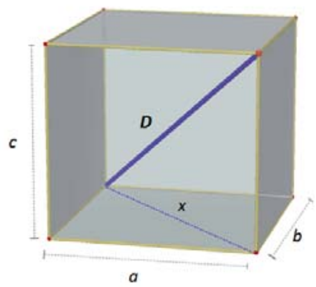
Teorema de *Pitágoras* no espazo

Xa sabes que:

A diagonal dun ortoedro ao cadrado coincide coa suma dos cadrados das súas arestas.

Demostración:

Sexan *a, b* e *c* as arestas do ortoedro que supoñemos apoiado no rectángulo de dimensións *a, b*.



Se *x* é a diagonal deste rectángulo, verifica que: $x^2 = a^2 + b^2$

O triángulo de lados *D, x, a* é rectángulo logo: $D^2 = x^2 + c^2$

E tendo en conta a relación que verifica x*:*

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Actividades resoltas

- *Calcula a lonxitude da diagonal dun ortoedro de arestas 7, 9 e 12 cm.*

  $D^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 7^2 + 9^2 + 12^2 = 274$. $D \approx 16.55$ cm.

- *As arestas da base dunha caixa con forma de ortoedro miden 7 cm e 9 cm e a súa altura 12 cm. Estuda se podes gardar nela tres barras de lonxitudes 11 cm, 16 cm e 18 cm.*

O rectángulo da base ten unha diagonal *d* que mide: $d = \sqrt{7^2 + 9^2} = \sqrt{130} \approx 11.4$ cm.

Logo a barra máis curta cabe apoiada na base.

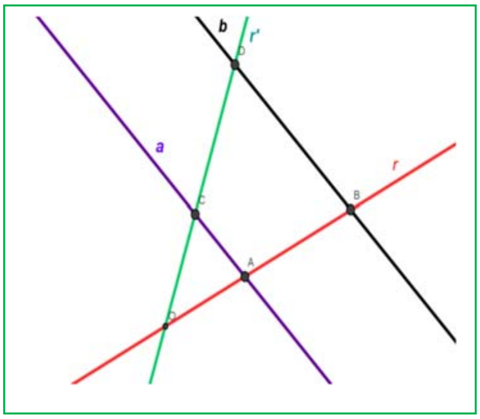
A diagonal do ortoedro vimos na actividade anterior que mide 16.55, logo a segunda barra si cabe, inclinada, pero a terceira, non.

Actividades propostas

6. Unha caixa ten forma cúbica de 3 *cm* de aresta. Canto mide a súa diagonal?
7. Calcula a medida da diagonal dunha sala que ten 8 metros de longo, 5 metros de ancho e 3 metros de altura.

1.2. Teorema de *Tales*

Xa sabes que:



Dadas dúas rectas, *r* e *r'*, que se cortan no punto *O*, e dúas rectas paralelas entre si, *a* e *b*. A recta *a* corta ás rectas *r* e *r'* nos puntos *A* e *C*, e a recta *b* corta ás rectas *r* e *r'* nos puntos *B* e *D*. Entón o Teorema de Tales afirma que os segmentos son proporcionais:

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$$

Dise que os triángulos *OAC* e *OBD* están en posición *Tales*. Son **semellantes**. Teñen un ángulo común (coincidente) e os lados proporcionais.

Actividades resoltas

- *Sexan OAC e OBD dous triángulos en posición Tales. O perímetro de OBD é 20 cm, OA mide 2 cm, AC mide 5 cm e OC mide 3 cm. Calcula as lonxitudes dos lados de OBD.*

Utilizamos a expresión: $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}=\frac{OA+OC+AC}{OB+OD+BD}$ substituíndo os datos:

$\frac{2}{OB}=\frac{3}{OD}=\frac{5}{BD}=\frac{2+3+5}{20}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$, polo que despexando, sabemos que: *OB* = 2 · 2 = 4 cm; *OD* = 3 · 2 = 6 cm, e *BD* = 5 · 2 = 10 cm. En efecto: 4 + 6 + 10 = 20 cm, perímetro do triángulo.

- *Conta a lenda que Tales mediu a altura da pirámide de Keops comparando a sombra da pirámide coa sombra do seu bastón. Temos un bastón que mide 1 m. Se a sombra dunha árbore mide 12 m e a do bastón (á mesma hora do día e no mesmo momento) mide 0.8 m, canto mide a árbore?*

As alturas da árbore e do bastón son proporcionais ás súas sombras (forman triángulos en posición *Tales*) polo que, se chamamos *x* á altura da árbore, podemos dicir:

$\frac{0.8}{1}=\frac{12}{x}$. Polo tanto, *x* = 12/0.8 = 15 metros.

Actividades propostas

8. Nunha foto hai un neno, que sabemos que mide 1.5 *m*, e un edificio. Medimos a altura do neno e do edificio na foto e resultan ser: 0.2 *cm* e 10 *cm*. Que altura ten o edificio?

9. Debúxase un hexágono regular. Trázanse as súas diagonais e obtense outro hexágono regular. Indica a razón de semellanza entre os lados de ambos os hexágonos.

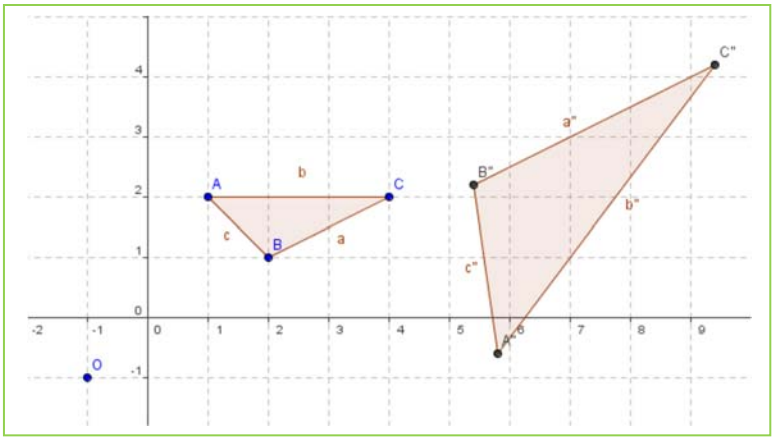
10. Nun triángulo regular *ABC* dado, 1 *cm*, trazamos os puntos medios, *M* e *N*, de dous dos seus lados. Trazamos as rectas *BN* e *CM* que se cortan nun punto *O*. Son semellantes os triángulos *MON* e *COB*? Cal é a razón de semellanza? Canto mide o lado *MN*?

11. Unha pirámide regular hexagonal de lado da base 3 *cm* e altura 10 *cm*, córtase por un plano a unha distancia de 4 *cm* do vértice, co que se obtén unha nova pirámide. Canto miden as súas dimensións?

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Milagros Latasa Asso e Fernanda Ramos Rodríguez
Ilustracións: Milagros Latasa/Banco de Imaxes de INTEF

1.3. Aplicación informática para comprender a semellanza de triángulos

Utiliza Xeoxebra para analizar a semellanza entre triángulos.



- Abre unha nova ventá de *Xeoxebra*, comproba que aparecen os **Eixes** e a **Cuadrícula**.
- Coa ferramenta **Novo Punto** define os puntos A (1, 2), B (2, 1) e C (4, 2).
- Utiliza **Polígono** para debuxar o triángulo ABC.
- Define un **Novo Punto** de coordenadas (–1, –1), o programa chámalle D. Co botón dereito do rato e a opción **Renomea**, chámao O.
- Utiliza a ferramenta **Dilata obxecto desde punto indicado, segundo factor**, para dilatar o polígono ABC desde o punto O, con factor 2. Obtense o triángulo $A'B'C'$.
- Coa ferramenta **Reflicte obxecto en recta**, debuxa o simétrico do triángulo $A'B'C'$ con respecto ao segmento *a* do triángulo ABC. Obtense o triángulo $A''B''C''$.
- Selecciona o polígono $A'B'C'$ na Ventá alxébrica ou na área de traballo, e co botón dereito do rato desactiva a opción **Expón obxecto**, o triángulo $A'B'C'$ queda oculto. Observa que podes volvelo visualizar activando esta opción. Oculta da mesma forma os puntos A', B' e C'.
- Para que as medidas aparezan con 5 decimais, activa **Posicións decimais** no menú **Opcións** e elixe 5.
- Despraza co punteiro o punto C, de modo que o triángulo ABC siga sendo un triángulo. Modifícanse ambos os triángulos pero mantéñense as súas propiedades, seguen sendo semellantes.

Actividades propostas

12. Xustifica que os triángulos ABC e $A''B''C''$ son semellantes. Calcula a razón de semellanza e a razón entre as súas áreas. Busca unha relación entre a razón de semellanza e a razón entre as áreas de dous triángulos semellantes.

13. Por que son semellantes os triángulos ABC e $A''B''C''$? Observa na **Ventá alxébrica** as lonxitudes dos seus lados e os valores das súas áreas. Cal é a razón de semellanza? Cal é a razón entre as áreas?

14. Debuxa distintos pentágonos e hexágonos que non sexan regulares e coa ferramenta **Dilata obxecto desde punto indicado, segundo factor,** constrúe outros semellantes.

a) Argumenta por que son semellantes.
b) Calcula en cada caso a razón de semellanza e a razón entre as súas áreas.
c) Pescuda como podes calcular a razón entre as áreas de polígonos semellantes a partir da razón de semellanza.

1.4. Proporcionalidade en lonxitudes, áreas e volumes

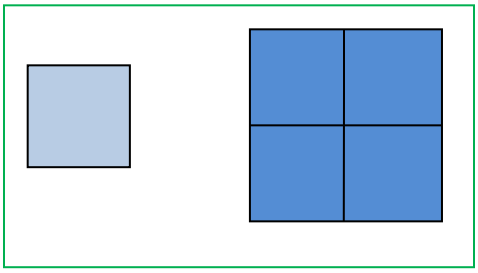
Xa sabes que:

Dúas figuras son semellantes se as lonxitudes de elementos correspondentes son proporcionais. Ao coeficiente de proporcionalidade chámaselle razón de semellanza. En mapas, planos… á razón de semellanza chámase **escala.**

Áreas de figuras semellantes

Se a razón de semellanza entre as lonxitudes dunha figura é k, entón a razón entre as súas áreas é $\boldsymbol{k^2}$.

Exemplo:

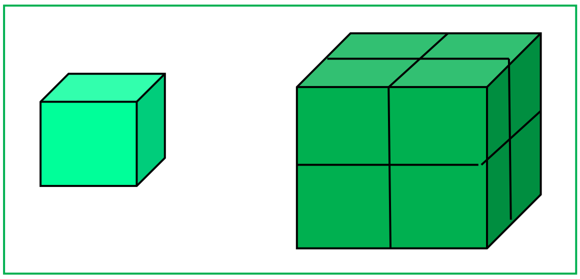


Observa a figura da marxe. Se multiplicamos por 2 o lado do cadrado pequeno, a área do cadrado grande é $2^2 = 4$ veces a do pequeno.

Volumes de figuras semellantes

Se a razón de semellanza entre as lonxitudes dunha figura é k, entón entre os seus volumes é $\boldsymbol{k^3}$.

Exemplo:



Observa a figura da marxe. Ao multiplicar por 2 o lado do cubo pequeno obtense o cubo grande. O volume do cubo grande é 8 (2^3) o do cubo pequeno.

Actividades resoltas

- *A torre Eiffel de París mide 300 metros de altura e pesa uns 8 millóns de quilos. Está construída de ferro. Se encargamos un modelo a escala da torre, tamén de ferro, que pese só un quilo, que altura terá? Será maior ou menor que un lapis?*
- O peso está relacionado co volume. A torre Eiffel pesa 8 000 000 quilos e queremos construír unha, exactamente do mesmo material, que pese 1 quilo. Polo tanto, k^3 = 8 000 000/1 = 8 000 000, e k = 200. A razón de proporcionalidade entre as lonxitudes é de 200.
- Se a Torre Eiffel mide 300 m e chamamos x ao que mide a nosa temos: $300/x = 200$. Despexamos x que resulta igual a $x = 1.5$ m. Mide metro e medio! É moito maior que un lapis!

Actividades propostas

15. O diámetro dun pexego é tres veces maior có do seu óso e mide 8 *cm*. Calcula o volume do pexego, supoñendo que é esférico, e o do seu óso, tamén esférico. Cal é a razón de proporcionalidade entre o volume do pexego e o do óso?

16. Na pizzería teñen pizzas de varios prezos: 1 €, 2 € e 3 €. Os diámetros destas pizzas son: 15 *cm*, 20 *cm* e 30 *cm*, cal resulta máis económica? Calcula a relación entre as áreas e comparáa coa relación entre os prezos.

17. Unha maqueta dun depósito cilíndrico de 1 000 litros de capacidade e 5 metros de altura, queremos que teña unha capacidade de 1 litro. Que altura debe ter a maqueta?

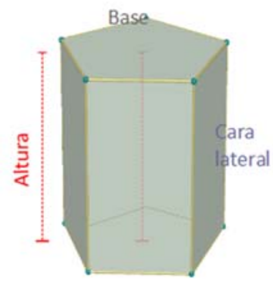
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Milagros Latasa Asso e Fernanda Ramos Rodríguez
Ilustracións: Milagros Latasa/Banco de Imaxes de INTEF

2. LONXITUDES, ÁREAS E VOLUMES

2.1. Lonxitudes, áreas e volumes en prismas e cilindros

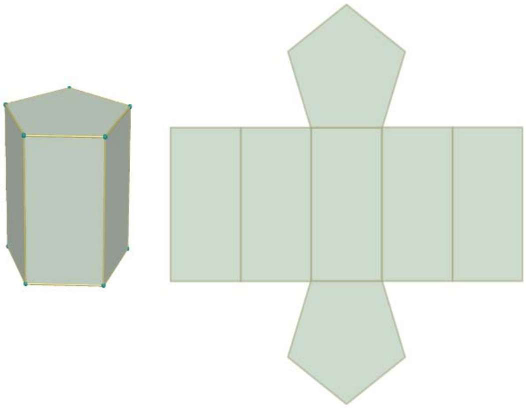
Recorda que:

Prismas



Un ***prisma*** é un poliedro determinado por dúas caras paralelas que son polígonos iguais e tantas caras laterais, que son paralelogramos, como lados teñen as bases.

Áreas lateral e total dun prisma



A **área lateral** dun prisma é a suma das áreas das caras laterais.

Como as caras laterais son paralelogramos da mesma altura, que é a altura do prisma, podemos escribir:

Área lateral = Suma das áreas das caras laterais =

=Perímetro da base · altura do prisma.

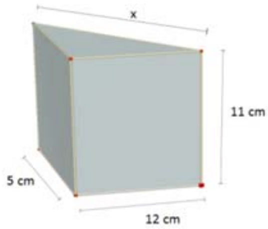
Se denotamos por *h* a altura e por *PB* o perímetro da base

Área lateral = *AL* = *PB* · *h*

A **área total** dun prisma é a área lateral máis o dobre da suma da área da base:

Área total = $A_T = A_L + 2 \cdot A_B$

Actividades resoltas



- *Calcula as áreas lateral e total dun prisma triangular recto de 11 cm de altura se a súa base é un triángulo rectángulo de catetos 12 cm e 5 cm.*

Calculamos en primeiro lugar a hipotenusa do triángulo da base:

$$x^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow x = \sqrt{169} = 13 \quad cm$$

$P_B = 12 + 5 + 13 = 30$ *cm*; $A_B = \dfrac{12 \cdot 5}{2} = 30\, cm^2$

$A_L = P_B \cdot h = 30 \cdot 11 = 330\ cm^2$ $A_T = A_L + 2 \cdot A_B = 330 + 60 = 390\ cm^2$

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Milagros Latasa Asso e Fernanda Ramos Rodríguez
Ilustracións: Milagros Latasa/Banco de Imaxes de INTEF

Volume dun corpo xeométrico. Principio de *Cavalieri*

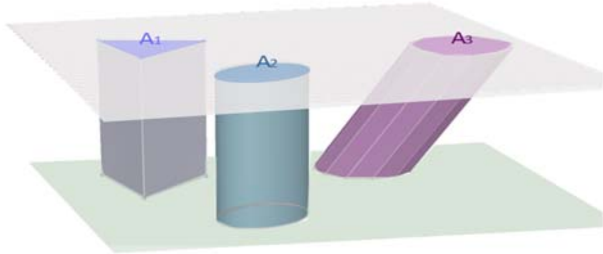
Recorda que:

Bonaventura Cavalieri, matemático do século XVII, enunciou o principio que leva o seu nome e que afirma:

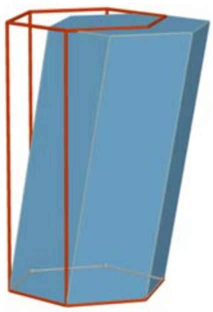
"Se dous corpos teñen a mesma altura e, ao cortalos por planos paralelos ás súas bases, se obteñen seccións coa mesma área, entón os volumes dos dous corpos son iguais".

Exemplo:

Na figura adxunta as áreas das seccións A_1, A_2, A_3, producidas por un plano paralelo ás bases, son iguais entón, segundo este principio, os volumes dos tres corpos son tamén iguais.



Volume dun prisma e dun cilindro



O volume dun prisma recto é o produto da área da base pola altura. Ademais, segundo o principio de *Cavalieri*, o volume dun prisma oblicuo coincide co volume dun prisma recto coa mesma base e altura. Se denotamos por *V* este volume, A_B a área da base e *h* a altura:

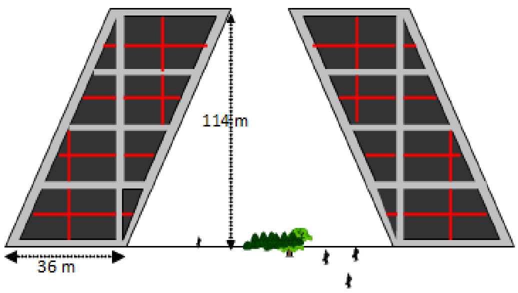
Volume prisma = $V = A_B \cdot h$

Tamén o volume dun cilindro, recto ou oblicuo é área da base por altura. Se chamamos *R* ao radio da base, A_B a área da base e *h* a altura, o volume escríbese:

Volume cilindro = $V = A_B \cdot h = \pi R^2 \cdot h$

Actividades resoltas

- *As coñecidas torres Kio de Madrid son dúas torres xemelgas que están no Paseo da Castellana, xunto á Praza de Castilla. Caracterízanse pola súa inclinación e representan unha porta cara a Europa.*
  Cada unha delas é un prisma oblicuo cuxa base é un cadrado de 36 metros dado e teñen unha altura de 114 metros. O volume interior de cada torre pode calcularse coa fórmula anterior:



$V = A_B \cdot h = 36^2 \cdot 114 = 147\ 744\ m^3$

Actividades propostas

18. Calcula o volume dun prisma recto de 20 *dm* de altura cuxa base é un hexágono de 6 *dm* de lado.

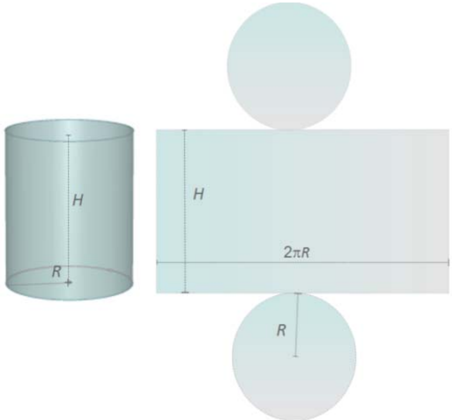
19. Calcula a cantidade de auga que hai nun recipiente con forma de cilindro sabendo que a súa base ten 10 *cm* de diámetro e que a auga acada 12 *dm* de altura.

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Milagros Latasa Asso e Fernanda Ramos Rodríguez
Ilustracións: Milagros Latasa/Banco de Imaxes de INTEF

Áreas lateral e total dun cilindro

O cilindro é un corpo xeométrico desenvolvible. Se recortamos un cilindro recto ao longo dunha xeratriz, e o estendemos nun plano, obtemos dous círculos e unha rexión rectangular. Desta maneira obtense o seu desenvolvemento.

A partir deste podemos ver que a área lateral do cilindro está determinada pola área do rectángulo que ten como dimensións a lonxitude da circunferencia da base e a altura do cilindro.



Suporemos que a altura do cilindro é H e que R é o radio da base co que a área lateral A_L é:

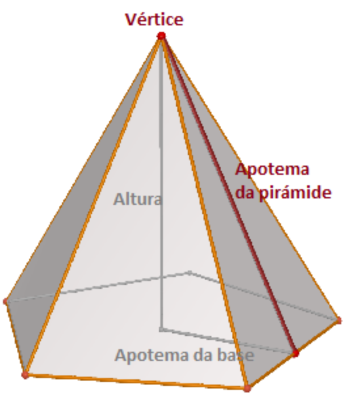
$$A_L = \text{Lonxitude da base} \cdot \text{Altura} = (2\pi\ R) \cdot H = 2\pi RH$$

Se á expresión anterior lle sumamos a área dos dous círculos que constitúen as bases, obtemos a área total do cilindro.

$$A_T = A_L + \pi R^2 + \pi R^2 = 2\pi RH + 2\pi R^2$$

2.2. Lonxitudes, áreas e volumes en pirámides e conos

Áreas lateral e total dunha pirámide e dun tronco de pirámide regulares



Unha **pirámide** é un poliedro determinado por unha cara poligonal denominada base e tantas caras triangulares cun vértice común como lados ten a base.

A área lateral dunha pirámide regular é a suma das áreas das caras laterais.

Son triángulos isósceles iguais polo que, se a aresta da base mide b, a apotema da pirámide é Ap e a base ten n lados, esta área lateral é:

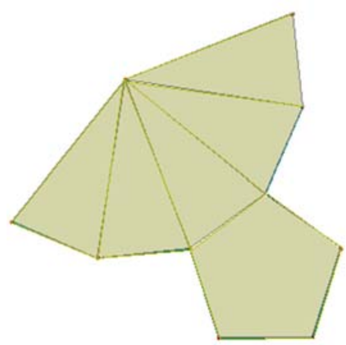
$$\text{Área lateral} = A_L = n \cdot \frac{b \cdot Ap}{2} = \frac{n \cdot b \cdot Ap}{2}$$

e como $n \cdot b$ = Perímetro da base

$$A_L = \frac{\text{Perímetro da base} \cdot \text{Apotema da pirámide}}{2} = \frac{\text{Perímetro da base}}{2} \cdot \text{Apotema}$$

A área lateral dunha pirámide é igual ao semiperímetro pola apotema.

Desenvolvemento de pirámide pentagonal regular



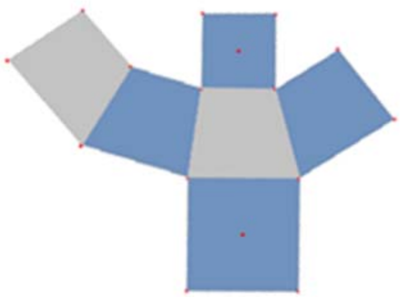
A área total dunha pirámide é a área lateral máis a área da base:

$$\text{Área total} = A_T = A_L + A_B$$

Un tronco de pirámide regular é un corpo xeométrico desenvolvible. No seu desenvolvemento aparecen tantas caras laterais como lados teñen as bases. Todas elas son trapecios isósceles.

Se B é o lado do polígono da base maior, b o lado da base

Desenvolvemento de tronco de pirámide cuadrangular



menor, *n* o número de lados das bases e *Ap* é a altura dunha cara lateral

$$\text{Área lateral} = ao = \boldsymbol{n} \cdot \frac{(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{b})\cdot \boldsymbol{Ap}}{\boldsymbol{2}} = \frac{(\boldsymbol{P_B}+\boldsymbol{P_b})\cdot \boldsymbol{Ap}}{\boldsymbol{2}} =$$

$$= \frac{\text{Suma de perímetro das bases} \cdot \text{Apotema do tronco}}{2}$$

A área total dun tronco de pirámide regular é a área lateral máis a suma das áreas das bases:

$$\text{Área total} = A_T = A_L + A_B + A_b$$

Actividades resoltas

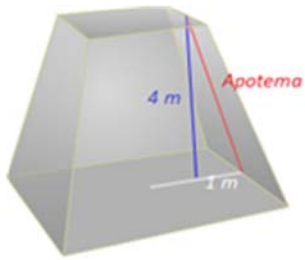
- *Calculemos a área total dun tronco de pirámide regular de 4 m de altura se sabemos que as bases paralelas son cadrados de 4 m e de 2 m de lado.*

En primeiro lugar, calculamos o valor da apotema. Tendo en conta que o tronco é regular e que as bases son cadradas fórmase un triángulo rectángulo no que se cumpre:

$$Ap^2 = 4^2 + 1^2 = 17 \Rightarrow Ap = \sqrt{17} \approx 4.12\ m$$

$$A_L = \frac{(P_B + P_b)\cdot Ap}{2} = \frac{(16+8)\cdot 4{,}12}{2} = 49.44\ m^2$$

$$A_T = A_L + A_B + A_b = 49.44 + 16 + 4 = 69.44\ m^2$$



Actividades propostas

20. Calcula as áreas lateral e total dun prisma hexagonal regular sabendo que as arestas das bases miden 3 *cm* e cada aresta lateral 2 *dm*.

21. A área lateral dun prisma regular de base cadrada é 16 m^2 e ten 10 m de altura. Calcula o perímetro da base.

22. O lado da base dunha pirámide triangular regular é de 7 *cm* e a altura da pirámide 15 *cm*. Calcula a apotema da pirámide e a súa área total.

23. Calcula a área lateral dun tronco de pirámide regular, sabendo que as súas bases son dous octógonos regulares de lados 3 e 8 *dm* e que a altura de cada cara lateral é de 9 *dm*.

24. Se a área lateral dunha pirámide cuadrangular regular é 104 cm^2 e a aresta da base mide 4 cm, calcula a apotema da pirámide e a súa altura.

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Milagros Latasa Asso e Fernanda Ramos Rodríguez
Ilustracións: Milagros Latasa/Banco de Imaxes de INTEF

Áreas lateral e total dun cono

Recorda que:

Tamén o cono é un corpo xeométrico desenvolvible. Ao recortar, seguindo unha liña xeratriz e a circunferencia da base, obtemos un círculo e un sector circular con radio igual á xeratriz e lonxitude de arco igual á lonxitude da circunferencia da base.

Chamemos agora *R* ao radio da base e *G* á xeratriz. A área lateral do cono é a área do sector circular obtido. Para calculala pensemos que esta área debe ser directamente proporcional á lonxitude de arco que á súa vez debe coincidir coa lonxitude da circunferencia da base. Podemos escribir entón:

$$\frac{A\ Lateral\ do\ cono}{Lonxitude\ de\ arco\ correspondente\ ao\ \ sector} = \frac{A\ total\ do\ círculo\ de\ radio\ G}{Lonxitude\ da\ circunferencia\ de\ radio\ G}$$

É dicir: $\frac{A_L}{2\pi R} = \frac{\pi\ G^2}{2\pi G}$ e despexando A_L temos:

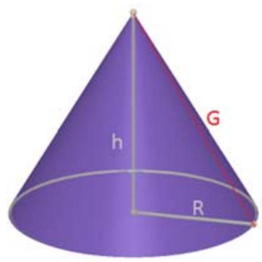
$$A_L = \frac{2\pi R\ \pi\ G^2}{2\pi G} = \pi RG$$

Se á expresión anterior lle sumamos a área do círculo da base, obtemos a área total do cono.

$$\boldsymbol{A_T = A_L + \pi \cdot R^2 = \pi \cdot R \cdot G + \pi \cdot R^2}$$

Actividades resoltas

- *Calcula a área total dun cono de 12 dm de altura, sabendo que a circunferencia da base mide 18.84 dm.* (*Toma 3.14 como valor de* π)



Calculamos en primeiro lugar o radio *R* da base:

$$2\pi R = 18.84 \Rightarrow \quad R = \frac{18.84}{2\pi} \approx \frac{18.84}{6.28} = 3\ dm.$$

Calculamos agora a xeratriz *G*:

$$G = \sqrt{R^2 + h^2} \ \Rightarrow \quad G = \sqrt{3^2 + 12^2} = \sqrt{153} \approx 12.37\ dm.$$

Entón $A_T = A_L + \pi \cdot R^2 = \pi \cdot R \cdot G + \pi \cdot R^2 = 3.14 \cdot 3 \cdot 12.37 + 3.14 \cdot 3^2 \approx 144.79\ dm^2$.

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Milagros Latasa Asso e Fernanda Ramos Rodríguez
Ilustracións: Milagros Latasa/Banco de Imaxes de INTEF

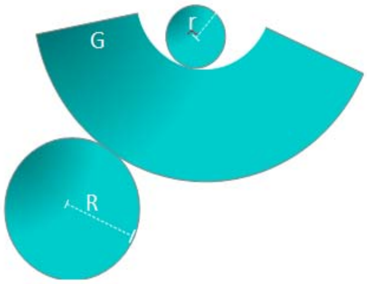
Áreas lateral e total dun tronco de cono

Recorda que:

Ao cortar un cono por un plano paralelo á base, obtense un tronco de cono. Ao igual que o tronco de pirámide, é un corpo desenvolvible e o seu desenvolvemento constitúeno os dous círculos das bases xunto cun trapecio circular, cuxas bases curvas miden o mesmo que as circunferencias das bases.

Chamando *R* e *r* aos radios das bases e *G* á xeratriz resulta:

$$A_L = \frac{(2\pi\ R + 2\pi\ r\ )G}{2} = \frac{2(\pi\ R + \pi\ r)\ G}{2} = (\pi\ R + \pi\ r)\ G$$



Se á expresión anterior lle sumamos as áreas dos círculos das bases, obtemos a área total do tronco de cono:

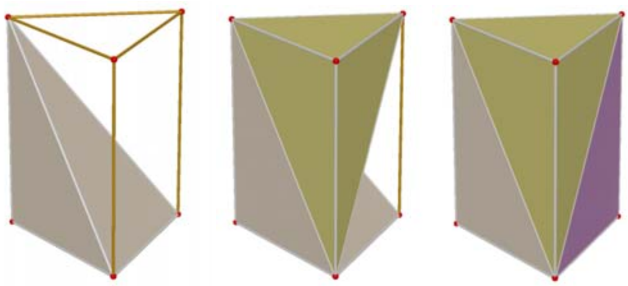
$$A_T = A_L + \pi \cdot R^2 + \pi \cdot r^2$$

Volume dunha pirámide e dun cono

Recorda que:

Tamén nos casos dunha pirámide ou cono, as fórmulas do volume coinciden en corpos rectos e oblicuos.

O volume dunha pirámide é a terceira parte do volume dun prisma que ten a mesma base e altura.



$$\text{Volume pirámide} = V = \frac{A_B \cdot h}{3}$$

Se comparamos cono e cilindro coa mesma base e altura, concluímos un resultado análogo

$$\text{Volume cono} = V = \frac{A_B \cdot h}{3} = \frac{\pi\ R^2 \cdot h}{3}$$

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Milagros Latasa Asso e Fernanda Ramos Rodríguez
Ilustracións: Milagros Latasa/Banco de Imaxes de INTEF

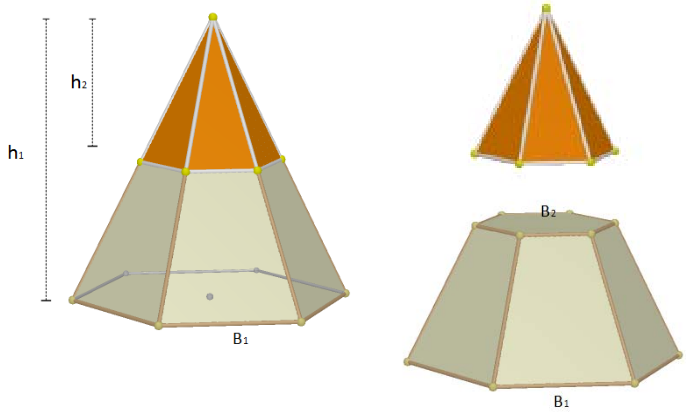
Volume dun tronco de pirámide e dun tronco de cono

Existe unha fórmula para calcular o volume dun tronco de pirámide regular pero evitarémola. Resulta máis sinxelo obter o volume dun tronco de pirámide regular restando os volumes das dúas pirámides a partir das que se obtén.

Se representamos por A_{B1} e A_{B2} as áreas das bases e por h_1 e h_2 as alturas das pirámides citadas, o volume do tronco de pirámide é:

Volume tronco de pirámide =

$$V = \frac{A_{B1} \cdot h_1}{3} - \frac{A_{B2} \cdot h_2}{3}$$



O volume do tronco de cono obtense de modo parecido. Se R_1 e R_2 son os radios das bases dos conos que orixinan o tronco e h_1 e h_2 as súas alturas, o volume do tronco de cono resulta:

$$\text{Volume tronco de cono} = V = \frac{\pi \cdot R_1^2 \cdot h_1}{3} - \frac{\pi \cdot R_2^2 \cdot h_2}{3}$$

Actividades resoltas

- *Calcula o volume dun tronco de pirámide regular de 10 cm de altura se as súas bases son dous hexágonos regulares dados 8 cm e 3 cm.*

Primeiro paso: calculamos as apotemas dos hexágonos das bases:

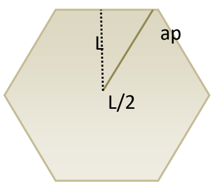


Figura 1

Para cada un destes hexágonos:

$$L^2 = ap^2 + (L/2)^2 \Rightarrow ap^2 = L^2 - \frac{L^2}{4} = \frac{3L^2}{4} \Rightarrow ap = \frac{\sqrt{3}\,L}{2}$$

Logo as apotemas buscadas miden: $\boldsymbol{ap_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx\ 2.6\ cm;\ ap_2 = \frac{8\sqrt{3}}{2} \approx\ 6.1\ cm}$

Como segundo paso, calculamos a apotema do tronco de pirámide

$$A^2 = 10^2 + 3.5^2 \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{112.25} \approx\ 10.6\ cm$$

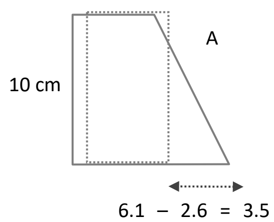


Figura 2

En terceiro lugar, calculamos o valor dos segmentos *x, y* da figura 3 que nos servirán para obter as alturas e apotemas das pirámides que xeran o tronco co que traballamos. Polo teorema de *Tales*:

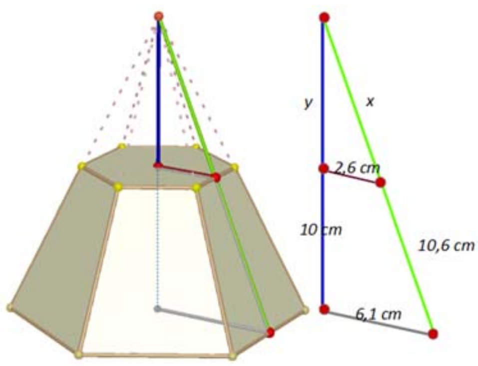


Figura 3

$$\boldsymbol{\frac{x}{2.6} = \frac{10.6+x}{6.1} \Rightarrow 6.1\ x = (10.6+x)2.6 \Rightarrow 6.1\ x - 2.6x = 27.56\ \Rightarrow x = \frac{27.56}{3.5} \approx\ 7.9\ cm}$$

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Milagros Latasa Asso e Fernanda Ramos Rodríguez
Ilustracións: Milagros Latasa/Banco de Imaxes de INTEF

Entón a apotema da pirámide grande é 10.6 + 7.9 = 18.5 cm e o da pequena 7.9 *cm*. E aplicando o teorema de *Pitágoras*:

$$y^2 = x^2 - 2.6^2 = 7.9^2 - 2.6^2 = 55.65 \Rightarrow y = \sqrt{55.65} \approx 7.5cm$$

Logo as alturas das pirámides xeradoras do tronco miden 10 + 7.5 = 17.5 *cm* e 7.5 *cm.*

Por último calculamos o volume do tronco de pirámide:

$$V = \frac{A_{B1} \cdot h_1}{3} - \frac{A_{B2} \cdot h_2}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{48 \cdot 18.5 \cdot 17.5}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{18 \cdot 7.9 \cdot 7.5}{2} = \frac{15\,540}{6} - \frac{1\,066.5}{6} = 2\,412.25\ cm^3$$

Actividades propostas

25. Unha columna cilíndrica ten 35 *cm* de diámetro e 5 *m* de altura. Cal é a súa área lateral?

26. O radio da base dun cilindro é de 7 *cm* e a altura é o triplo do diámetro. Calcula a súa área total.

27. Calcula a área lateral dun cono recto sabendo que a súa xeratriz mide 25 *dm* e o seu radio da base 6 *dm*.

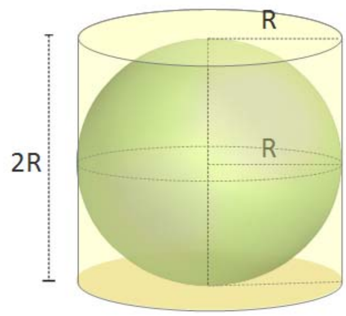
28. A circunferencia da base dun cono mide 6.25 *m* e a súa xeratriz 12 *m*. Calcula a área total.

2.3. Lonxitudes, áreas e volumes na esfera

Recorda que:

Área dunha esfera

A esfera non é un corpo xeométrico desenvolvible polo que é máis complicado que nos casos anteriores encontrar unha fórmula para calcular a súa área.



Arquímedes demostrou que a área dunha esfera é igual que a área lateral dun cilindro circunscrito á esfera, é dicir, un cilindro co mesmo radio da base que o radio da esfera e cuxa altura é o diámetro da esfera.

Se chamamos *R* ao radio da esfera:

$$A_T = (2\pi R) \cdot (2R) = 4\pi R^2$$

A área dunha esfera equivale á área de catro círculos máximos.

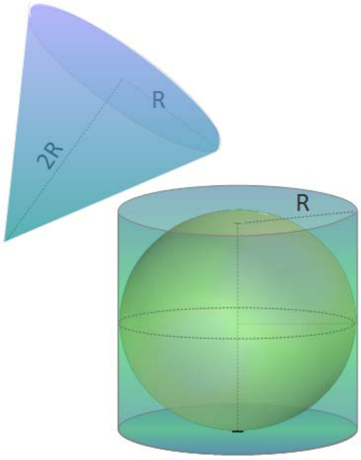
Actividades propostas

29. Unha esfera ten 4 *m* de radio. Calcula:

a) A lonxitude da circunferencia máxima.

b) A área da esfera.

Volume da esfera

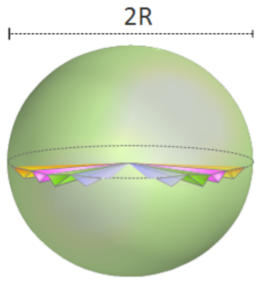


Volvamos pensar nunha esfera de radio R e no cilindro que a circunscribe. Para encher con auga o espazo que queda entre o cilindro e a esfera, precísase unha cantidade de auga igual a un terzo do volume total do cilindro circunscrito.

Dedúcese entón que a suma dos volumes da esfera de radio R e do cono de altura $2R$ e radio da base R, coincide co volume do cilindro circunscrito á esfera de radio R. Polo tanto:

Volume $_{\text{esfera}}$ = Volume $_{\text{cilindro}}$ – Volume $_{\text{cono}} \Rightarrow$

Volume $_{\text{esfera}}$ = $\pi R^2(2R) - \dfrac{\pi R^2(2R)}{3} = \dfrac{6\pi R^3 - 2\pi R^3}{3} = \dfrac{4\pi R^3}{3} = \dfrac{4}{3}\pi R^3$



Existen demostracións máis rigorosas que avalan este resultado experimental que describimos. Así, por exemplo, o volume da esfera pódese obter como suma dos volumes das pirámides que a recobren, todas elas de base triangular sobre a superficie da esfera e con vértice no centro da mesma.

Actividades propostas

30. O depósito de gasóleo da casa de Irene é un cilindro de 1 *m* de altura e 2 *m* de diámetro. Irene chamou ao subministrador de gasóleo porque no depósito soamente quedan 140 litros.

a. Cal é, en dm^3, o volume do depósito? (Utiliza 3.14 como valor de π).

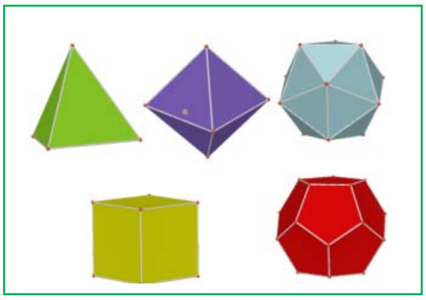
b. Se o prezo do gasóleo é de 0.80 € cada litro, canto deberá pagar a nai de Irene por encher o depósito?

31. Comproba que o volume da esfera de radio 4 *dm*, sumado co volume dun cono do mesmo radio da base e 8 *dm* de altura, coincide co volume dun cilindro que ten 8 *dm* de altura e 4 *dm* de radio da base.

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Milagros Latasa Asso e Fernanda Ramos Rodríguez
Ilustracións: Milagros Latasa/Banco de Imaxes de INTEF

2.4. Lonxitudes, áreas e volumes de poliedros regulares

Recorda que:



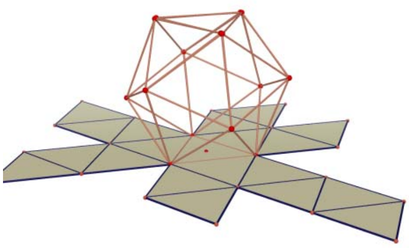
Un poliedro regular é un poliedro no cal todas as súas caras son polígonos regulares iguais e no cal os seus ángulos poliedros son iguais.

Hai cinco poliedros regulares: tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo e dodecaedro.

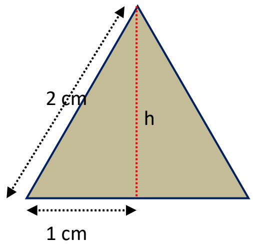
Área total dun poliedro regular

Como as caras dos poliedros regulares son iguais, o cálculo da área total dun poliedro regular redúcese a calcular a área dunha cara e despois multiplicala polo número de caras.

Actividades resoltas



Calcula a área total dun icosaedro de 2 cm de aresta.



Todas as súas caras son triángulos equiláteros de 2 *cm* de base. Calculamos a altura *h* que divide á base en dous segmentos iguais

$$h^2 + 1^2 = 2^2 \Rightarrow h^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow h = \sqrt{3}\ cm$$

Logo a área dunha cara é:

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{b.h}{2} = \frac{2.\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\ cm^2 \text{ e polo tanto:}$$

$$\text{Área icosaedro} = 20\sqrt{3}cm^2$$

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Milagros Latasa Asso e Fernanda Ramos Rodríguez
Ilustracións: Milagros Latasa/Banco de Imaxes de INTEF

3. INICIACIÓN Á XEOMETRÍA ANALÍTICA

3.1. Puntos e vectores

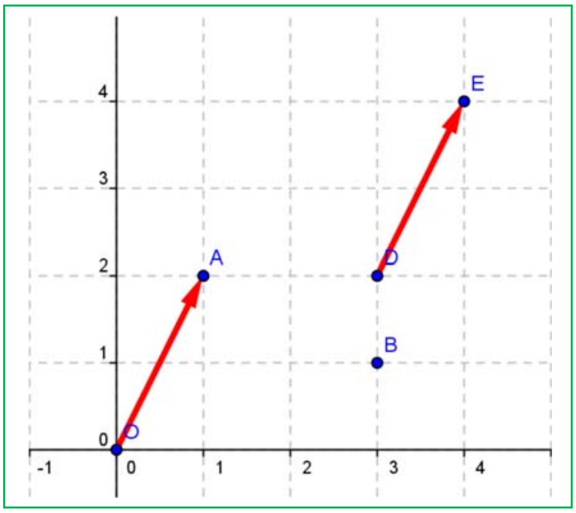
No plano

Xa sabes que

Un conxunto formado pola **orixe** *O*, os dous **eixes de coordenadas** e a **unidade de medida** é un **sistema de referencia cartesiano**.

As **coordenadas dun punto** *A* son un par ordenado de números reais **(*x*, *y*)**, sendo "***x***" a primeira coordenada ou **abscisa** e "***y***" a segunda coordenada ou **ordenada**.

Dados dous puntos, $D(d_1, d_2)$ e $E(e_1, e_2)$, as compoñentes do vector de orixe *D* e extremo *E*, ***DE***, veñen dadas por ***DE*** = $(e_1 - d_1, e_2 - d_2)$.



Exemplo:

As coordenadas dos puntos da figura son:

O(0, 0), *A*(1, 2), *B*(3, 1), *D*(3, 2) e *E*(4, 4).

As compoñentes do vector ***DE*** son:

DE = (4 – 3, 4 – 2) = (1, 2)

As compoñentes do vector ***OA*** son:

OA = (1 – 0, 2 – 0) = (1, 2).

DE e ***OA*** son representantes do mesmo vector libre de compoñentes (1, 2).

No espazo de dimensión tres

As **coordenadas dun punto** *A* son unha terna ordenada de números reais **(*x*, *y*, *z*)** sendo "***z***" a altura sobre o plano *OXY*.

Dados dous puntos, $D(d_1, d_2, d_3)$ e $E(e_1, e_2, e_3)$, as compoñentes do vector de orixe *D* e extremo *E*, ***DE***, veñen dadas por ***DE*** = $(e_1 - d_1, e_2 - d_2, e_3 - d_3)$.

Exemplo:

As coordenadas de puntos no espazo son:

O(0, 0, 0), *A*(1, 2, 3), *B*(3, 1, 7), *D*(3, 2, 1) e *E*(4, 4, 4).

As compoñentes do vector ***DE*** son: ***DE*** = (4 – 3, 4 – 2, 4 – 1) = (1, 2, 3).

As compoñentes do vector ***OA*** son: ***OA*** = (1 – 0, 2 – 0, 3 – 0) = (1, 2, 3).

DE e ***OA*** son representantes do mesmo vector libre de compoñentes (1, 2, 3).

Actividades propostas

32. Representa nun sistema de referencia no espazo de dimensión tres os puntos:

O(0, 0, 0), *A*(1, 2, 3), *B*(3, 1, 7), *D*(3, 2, 1) e *E*(4, 4, 4) e vectores: ***DE*** e ***OA***.

33. O vector de compoñentes ***u*** = (2, 3) e orixe *A* = (1, 1), que extremo ten?

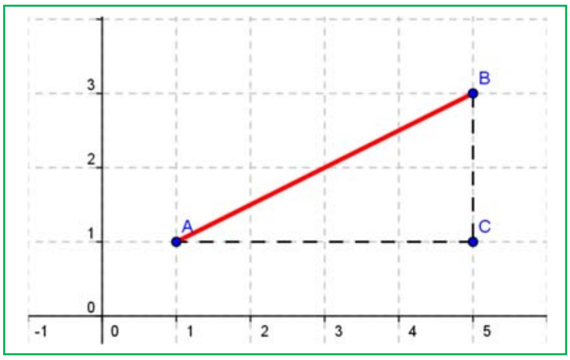
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Milagros Latasa Asso e Fernanda Ramos Rodríguez
Ilustracións: Milagros Latasa/Banco de Imaxes de INTEF

3.2. Distancia entre dous puntos

No plano

A distancia entre dous puntos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ é:

$$D = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$



Exemplo:

Polo Teorema de *Pitágoras* sabemos que a distancia ao cadrado entre os puntos $A = (1, 1)$ e $B = (5, 3)$ é igual a:

$$D^2 = (5 - 1)^2 + (3 - 1)^2 = 4^2 + 2^2 = 20$$

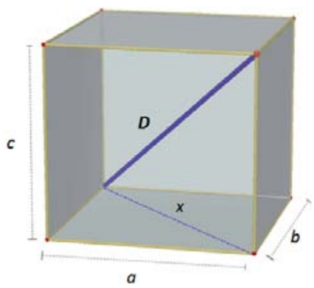
xa que o triángulo *ABC* é rectángulo de catetos 4 e 2.

Logo $D \approx 4.47$.

No espazo de dimensión tres

A distancia entre dous puntos $A(a_1, a_2, a_3)$ e $B(b_1, b_2, b_3)$ é igual a:

$$D = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$



Exemplo:

A distancia ao cadrado entre os puntos $A = (1, 1, 2)$ e $B = (5, 3, 8)$ é igual, polo Teorema de *Pitágoras* no espazo, a

$D^2 = (5 - 1)^2 + (3 - 1)^2 + (8 - 2)^2 = 4^2 + 2^2 + 6^2 = 16 + 4 + 36 = 56$.

Logo $D \approx 7.5$.

Actividades propostas

34. Calcula a distancia entre os puntos $A(6, 2)$ e $B(3, 9)$.

35. Calcula a distancia entre os puntos $A(6, 2, 5)$ e $B(3, 9, 7)$.

36. Calcula a lonxitude do vector de compoñentes $\boldsymbol{u} = (3, 4)$

37. Calcula a lonxitude do vector de compoñentes $\boldsymbol{u} = (3, 4, 1)$.

38. Debuxa un cadrado de diagonal o punto $O(0, 0)$ e $A(3, 3)$. Que coordenadas teñen os outros vértices do cadrado? Calcula a lonxitude do lado e da diagonal do cadrado.

39. Debuxa un cubo de diagonal $O(0, 0, 0)$ e $A(3, 3, 3)$. Que coordenadas teñen os outros vértices do cubo? Xa sabes, son 8 vértices. Calcula a lonxitude da aresta, da diagonal dunha cara e da diagonal do cubo.

40. Sexa $X(x, y)$ un punto xenérico do plano e $O(0, 0)$ a orixe de coordenadas, escribe a expresión de todos os puntos X que distan de O unha distancia D.

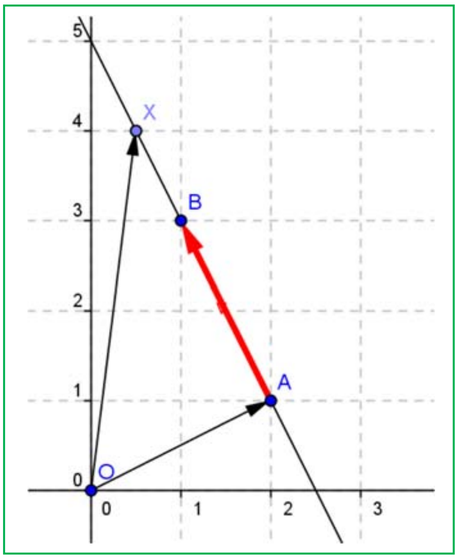
41. Sexa $X(x, y, z)$ un punto xenérico do espazo e $O(0, 0, 0)$ a orixe de coordenadas, escribe a expresión de todos os puntos X que distan de O unha distancia D.

3.3. Ecuacións e rectas e planos

Ecuacións da recta no plano

Xa sabes que a **ecuación dunha recta** no plano é: y = $mx + n$. É a expresión dunha recta como función. Esta ecuación denomínase **ecuación explícita** da recta.

Se pasamos todo ao primeiro membro da ecuación, quédanos unha ecuación: $ax + by + c = 0$, que se denomina **ecuación implícita** da recta.



Ecuación vectorial: Tamén unha recta queda determinada se coñecemos un punto: $A(a_1, a_2)$ e un vector de dirección $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$. Observa que o vector ***OX*** pode escribirse como suma do vector ***OA*** e dun vector da mesma dirección que ***v***, *t**v***. É dicir:

$$\boldsymbol{OX} = \boldsymbol{OA} + t\boldsymbol{v},$$

onde *t* se denomina parámetro. Para cada valor de *t*, tense un punto distinto da recta. Con coordenadas quedaría:

$$\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \end{cases}$$

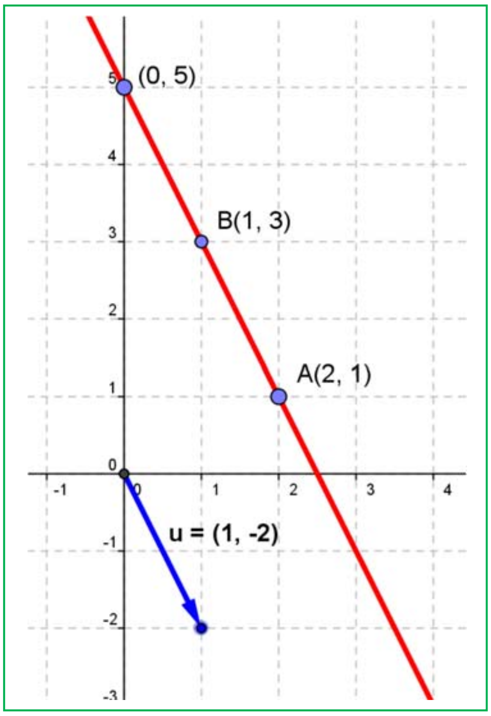
que é a **ecuación paramétrica** da recta.

Actividades resoltas

- *Da recta de ecuación explícita y* = –2*x* + 5 coñecemos a pendente, –2, e a ordenada na orixe, 5. A pendente dános un vector de dirección da recta, en xeral (1, *m*) e neste exemplo: (1, –2). A ordenada na orixe proporciónanos un punto, en xeral o (0, *n*), e neste exemplo, (0, 5). A ecuación paramétrica desta recta é:

$$\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 5 - 2t \end{cases}$$

A súa ecuación implícita é: $-2x - y + 5 = 0$.



- *Escribe a ecuación paramétrica da recta* que pasa polo punto *A*(2, 1) e ten como vector de dirección ***v*** = (1, –2).

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$$

- *Escribe a ecuación da recta* que pasa polos puntos *A*(2, 1) e *B*(1, 3). Podemos tomar como vector de dirección o vector ***AB*** = (1 – 2, 3 – 1) = (–1, 2), e escribir a súa ecuación paramétrica:

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$

A recta é, nos tres exemplos, a mesma, a da figura. Con iso podemos observar que unha recta pode ter moitas ecuacións paramétricas dependendo do punto e do vector de dirección que se tome. Pero eliminando o parámetro e despexando "*y*" chegamos a unha única ecuación explícita.

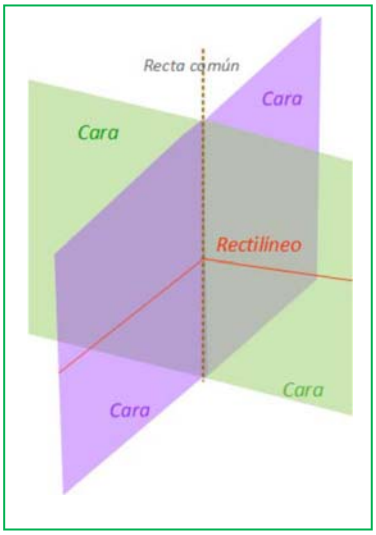
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Milagros Latasa Asso e Fernanda Ramos Rodríguez
Ilustracións: Milagros Latasa/Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

42. Escribe a ecuación da recta que pasa polos puntos *A*(6, 2) e *B*(3, 9), de forma explícita, implícita e paramétrica. Represéntaa graficamente.

Ecuacións da recta e o plano no espazo.

A ecuación **implícita dun plano** é: $ax + by + cz + d = 0$. Observa que é parecida á ecuación implícita da recta pero cunha compoñente máis.



A **ecuación vectorial dunha recta** no espazo é: ***OX*** = ***OA*** + ***tv***, aparentemente igual á ecuación vectorial dunha recta no plano pero ao escribir as coordenadas, agora puntos e vectores, ten tres compoñentes:

$$\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \\ z = a_3 + tv_3 \end{cases}$$

Unha recta tamén pode vir dada como intersección de dous planos:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Dous puntos determinan unha recta e tres puntos determinan un plano.

Actividades resoltas

- *Escribe a ecuación da recta no espazo que pasa polos puntos A(1, 2, 3) e B(3, 7, 1).*

Tomamos como vector de dirección da recta o vector ***AB*** = (3 – 1, 7 – 2, 1 – 3) = (2, 5, –2) e como punto, por exemplo o *A*, entón:

$$\begin{cases} x = 1 + t2 \\ y = 2 + t5 \\ z = 3 - t2 \end{cases}$$

Podemos encontrar as ecuacións de dous planos que se corten na recta, eliminando *t* en dúas ecuacións. Por exemplo, sumando a primeira coa terceira tense: $x + z = 4$. Multiplicando a primeira ecuación por 5, a segunda por 2 e restando tense: $5x - 2y = 1$. Logo outra ecuación da recta, como intersección de dous planos, é:

$$\begin{cases} x + z = 4 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$$

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Milagros Latasa Asso e Fernanda Ramos Rodríguez
Ilustracións: Milagros Latasa/Banco de Imaxes de INTEF

Escribe a ecuación do plano que pasa polos puntos A e B da actividade anterior, e C(2, 6, 2).

Impoñemos á ecuación $ax + by + cz + d = 0$ que pase polos puntos dados:

$a + 2b + 3c + d = 0$

$3a + 7b + c + d = 0$

$2a + 6b + 2c + d = 0.$

Restamos á segunda ecuación a primeira, e á terceira, tamén a primeira:

$a + 2b + 3c + d = 0$

$2a + 5b - 2c = 0$

$a + 4b - c = 0$

Multiplicamos por 2 a terceira ecuación e restámoslle a segunda:

$a + 2b + 3c + d = 0$

$a + 4b - c = 0$

$3b = 0$

Xa coñecemos un coeficiente, $b = 0$. Substituímolo nas ecuacións:

$a + 3c + d = 0$

$a - c = 0$

Vemos que $a = c$, que substituído na primeira: $4c + d = 0$. Sempre, ao ter 3 ecuacións e 4 coeficientes, teremos unha situación como a actual, na que o podemos resolver salvo un factor de proporcionalidade. Se $c = 1$, entón $d = -4$. Logo $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$ e $d = -4$. É o plano de ecuación:

$$x + z = 4$$

plano que xa obtivemos na actividade anterior.

Actividades propostas

43. Escribe a ecuación da recta que pasa polos puntos $A(6, 2, 5)$ e $B(3, 9, 7)$, de forma explícita, e como intersección de dous planos.

44. Escribe as ecuacións dos tres planos coordenados.

45. Escribe as ecuacións dos tres eixes coordenados no espazo.

46. No cubo de diagonal $O(0, 0, 0)$ e $A(6, 6, 6)$ escribe as ecuacións dos planos que forman as súas caras. Escribe as ecuacións de todas as súas arestas e as coordenadas dos seus vértices.

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Milagros Latasa Asso e Fernanda Ramos Rodríguez
Ilustracións: Milagros Latasa/Banco de Imaxes de INTEF

3.4. Algunhas ecuacións

Actividades resoltas

- Que puntos verifican a ecuación $x^2 + y^2 = 1$?

Depende! Depende de se estamos nun plano ou no espazo.

No plano podemos ver a ecuación como que o cadrado da distancia dun punto xenérico $X(x, y)$ á orixe $O(0, 0)$ é sempre igual a 1:

$$D^2 = (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 1^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

O lugar de todos os puntos do plano que distan 1 da orixe é a circunferencia de centro $O(0, 0)$ e radio 1.

No espazo o punto xenérico $X(x, y, z)$ ten tres coordenadas e $O(0, 0, 0)$, tamén. Non é unha circunferencia, nin unha esfera. Que é entón? O que está claro é que se cortamos polo plano OXY, ($z = 0$) temos a circunferencia anterior. E se cortamos polo plano $z = 3$? Tamén unha circunferencia. É un cilindro. O cilindro de eixe, o eixe vertical, e de radio da base 1.

- Que puntos verifican a ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$?

Agora si. Si podemos aplicar a distancia dun punto xenérico $X(x, y, z)$ á orixe $O(0, 0, 0)$,

$$D^2 = (x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = 1^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

É a ecuación da superficie esférica de centro a orixe e radio 1.

Actividades propostas

47. Escribe a ecuación do cilindro de eixe, o eixe OZ e radio 2.

48. Escribe a ecuación da esfera de centro a orixe de coordenadas e radio 2.

49. Escribe a ecuación do cilindro de eixe, a recta $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$ e radio 1.

50. Escribe a ecuación da circunferencia no plano de centro $A(2, 5)$ e radio 2.

51. Ao cortar a un certo cilindro por un plano horizontal tense a circunferencia do exercicio anterior. Escribe a ecuación do cilindro.

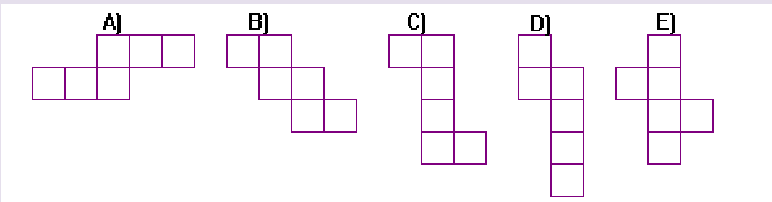
CURIOSIDADES. REVISTA

Grace Chisholm Young (1868 - 1944)

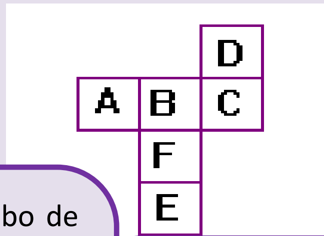
Grace Chisholm Young naceu o 15 de marzo de 1868, preto de Londres, Inglaterra, durante o reinado da raíña Vitoria. Para facérmonos unha idea sobre o estado da educación nesa época recordemos que cara a 1881, o 20 % da poboación de Inglaterra aínda non sabía escribir o seu nome. Era a máis pequena de catro irmáns (tres superviventes) e tamén a máis consentida. Só lle ensinaban o que quería aprender e, neste sentido, a súa educación foi un tanto informal. Gustáballe o cálculo mental e a música. Porén foi unha preparación suficiente para, aos 17 anos, pasar os exames de *Cambridge* (*Cambridge Senior Examination*). Estudou Matemáticas pero, para doutorarse, foi a *Göttingen* onde se doutorou en 1895. En 1896 casou con *William Young* co que tivo seis fillos. Ocupou moito do seu tempo na educación dos seus fillos.

Escribiu libros e moitos artigos. Escribiu ***Primeiro libro de Xeometría.*** Nel *Grace* escribía que a xeometría en dimensión tres recibía, en primaria e na secundaria, moita menos atención que a xeometría do plano. Opinaba que isto non debía ser así porque *"en certo sentido a xeometría plana é máis abstracta que a tridimensional"*, pois consideraba que a xeometría tridimensional era máis natural. Pero admitía, porén, é moi difícil representar figuras tridimensionales nunha superficie bidimensional como é a páxina dun libro, e consideraba que esta era a razón pola que non se traballaba (e actualmente tampouco se traballa) adecuadamente. *Grace* opinaba que o alumnado debía construír figuras espaciais, polo que incluíu no seu libro moitos diagramas de figuras tridimensionais para seren recortados e construídos. Opinaba que esa era a forma na que o alumnado debía familiarizarse coas propiedades destas figuras e que utilizándoas, coa súa axuda, podía visualizar os teoremas da xeometría tridimensional.

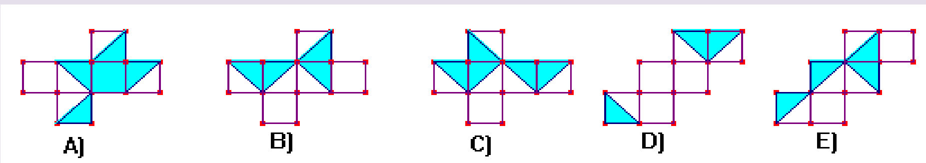
Cal das seguintes figuras non representa o desenvolvemento dun cubo?

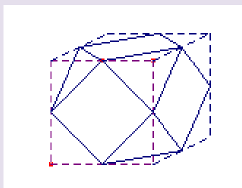


Ao formar un cubo co desenvolvemento da figura, cal será a letra oposta a F?



A partir dun destes desenvolvementos bicolores pódese fabricar un cubo de forma que as cores sexan as mesmas nas dúas partes de cada unha das arestas. Cal deles o verifica?

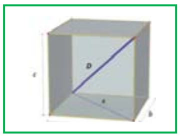
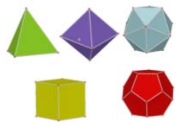
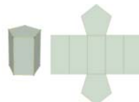
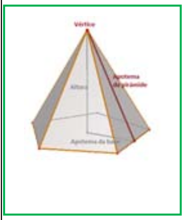




Desenvólveo .

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Milagros Latasa Asso e Fernanda Ramos Rodríguez
Ilustracións: Milagros Latasa/Banco de Imaxes de INTEF

RESUMO

Teorema de Pitágoras no espazo	$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$ 	$A = 2$, $b = 3$, $c = 4$, entón $D^2 = 4 + 9 + 16 = 29$ $D = \sqrt{29} = 5.4$.
Teorema de Tales	Dadas dúas rectas, *r* e *r'*, que se cortan no punto *O*, e dúas rectas paralelas entre si, *a* e *b*. Se a recta *a* corta ás rectas *r* e *r'* nos puntos *A* e *C*, e a recta *b* corta ás rectas *r* e *r'* nos puntos *B* e *D*, entón os segmentos correspondentes son proporcionais.	
Poliedros regulares	Un poliedro regular é un poliedro no que todas as súas caras son polígonos regulares iguais e no que os seus ángulos poliedros son iguais. Hai cinco poliedros regulares: tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo e dodecaedro.	
Prismas	 $A_{Lateral} = Perímetro_{Base} \cdot Altura$ $A_{total} = Área_{Lateral} + 2Área_{Base}$ $Volume = Área_{base} \cdot Altura$	
Pirámides	 $A_{Lateral} = \dfrac{Perímetro_{Base} \cdot Apotema_{pirámide}}{2}$ $A_{total} = Área_{Lateral} + Área_{Base}$ $Volume = \dfrac{Área_{base} \cdot Altura}{3}$	
Cilindro	 $A_{Lateral} = 2\pi R H$; $A_{total} = 2\pi R H + 2\pi R^2$ $Volume = Área_{base} \cdot Altura$	
Cono	$A_{Lateral} = \pi R G$; $A_{total} = \pi R G + \pi R^2$ $Volume = \dfrac{Área_{base} \cdot Altura}{3}$	
Esfera	$A_{total} = 4\pi R^2$; $Volume = \frac{4}{3}\pi R^3$	
Ecuacións da recta no plano	**Ecuación explícita:** $y = mx + n$. **Ecuación implícita:** $ax + by + c = 0$ **Ecuación paramétrica:** $\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \end{cases}$	
Ecuacións da recta e o plano no espazo.	**Ecuación implícita dun plano**: $ax + by + cz + d = 0$ **Ecuación paramétrica dunha recta:** $\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \\ z = a_3 + tv_3 \end{cases}$	

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Milagros Latasa Asso e Fernanda Ramos Rodríguez
Ilustracións: Milagros Latasa/Banco de Imaxes de INTEF

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Teorema de *Pitágoras* e teorema de *Tales*

1. Calcula o volume dun tetraedro regular de lado 7 *cm*.

2. Calcula a lonxitude da diagonal dun cadrado de lado 1 *m*.

3. Calcula a lonxitude da diagonal dun rectángulo de base 15 *cm* e altura 6 *cm*.

4. Debuxa un paralelepípedo cuxas arestas midan 4 *cm*, 5 *cm* e 6 *cm* que non sexa un ortoedro. Debuxa tamén o seu desenvolvemento.

5. Se o paralelepípedo anterior fose un ortoedro, canto mediría a súa diagonal?

6. Un vaso de 11 *cm* de altura ten forma de tronco de cono no que os radios das bases son de 5 e 3 *cm*. Canto medirá como mínimo unha culleriña para que sobresaia do vaso polo menos 2 *cm*?

7. É posible gardar nunha caixa con forma de ortoedro de arestas 4 *cm*, 3 *cm* e 12 *cm* un bolígrafo de 13 *cm* de lonxitude?

8. Calcula a diagonal dun prisma recto de base cadrada sabendo que o lado da base mide 6 *cm* e a altura do prisma 8 *cm*.

9. Se un ascensor mide 1.2 *m* de ancho, 1.6 *m* de longo e 2.3 *m* de altura, é posible introducir nel unha escaleira de 3 *m* de altura?

10. Cal é a maior distancia que se pode medir en liña recta nunha habitación que ten 6 *m* de ancho, 8 *m* de longo e 4 *m* de altura?

11. Calcula a lonxitude da aresta dun cubo sabendo que a súa diagonal mide 3.46 *cm*.

12. Calcula a distancia máxima entre dous puntos dun tronco de cono cuxas bases teñen radios 5 *cm* e 2 *cm*, e altura 10 *cm*.

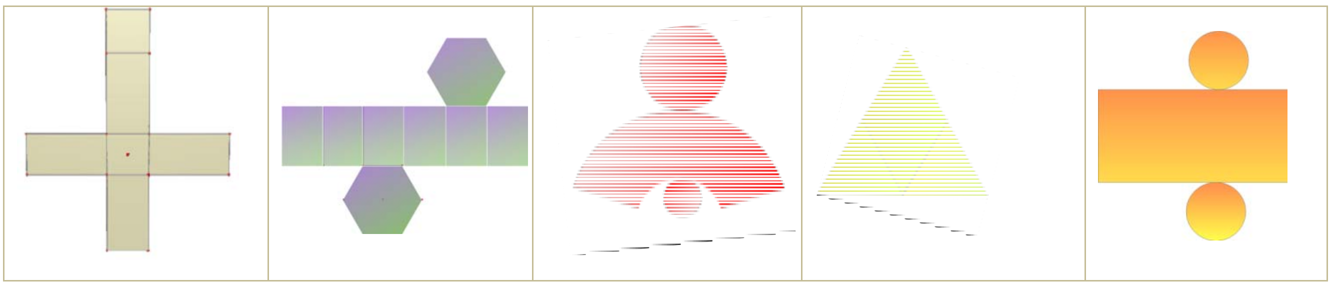
13. Nunha pizzería a pizza de 15 *cm* de diámetro vale 2 € e a de 40 *cm* vale 5 €. Cal ten mellor prezo?

14. Vemos no mercado unha pescada de 30 *cm* que pesa un quilo. Parécenos un pouco pequena e pedimos outra un pouco maior que resulta pesar 2 quilos. Canto medirá?

15. Nun día frío un pai e un fillo pequeno van exactamente igual abrigados, cal dos dous terá máis frío?

Lonxitudes, áreas e volumes

16. Identifica a que corpo xeométrico pertencen os seguintes desenvolvementos:

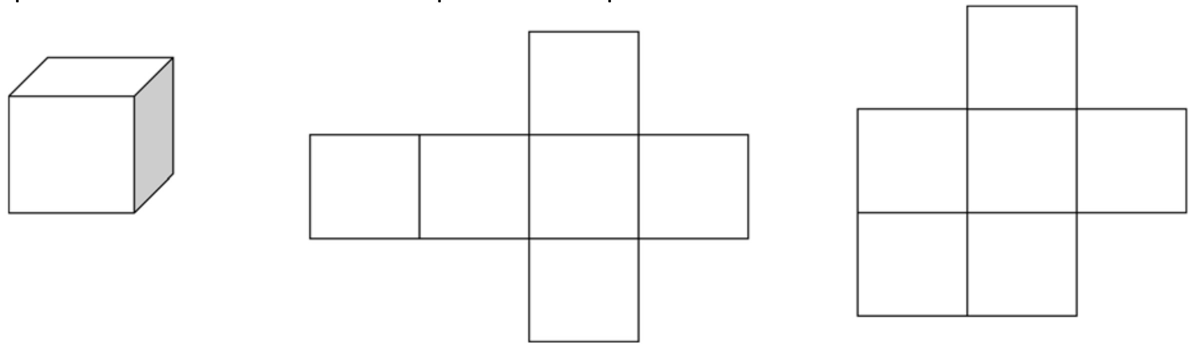


17. Poderá existir un poliedro regular cuxas caras sexan hexagonais? Razoa a resposta.

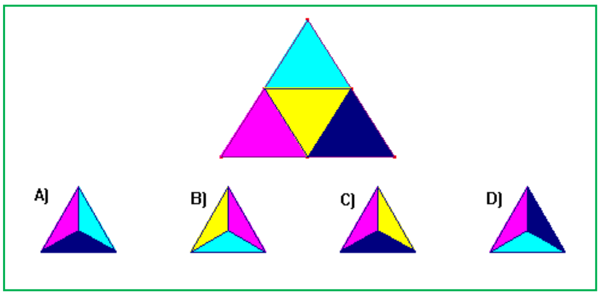
18. Cantas diagonais podes trazar nun cubo? E nun octaedro?

19. Podes encontrar dúas arestas paralelas nun tetraedro? E en cada un dos restantes poliedros regulares?

20. Utiliza unha trama de cadrados ou papel cuadriculado e busca todos os deseños de seis cadrados que se che ocorran. Decide cales poden servir para construír un cubo.



21. O triángulo da figura pregouse para obter un tetraedro. Tendo en conta que o triángulo non está pintado por detrás, cal das seguintes vistas en perspectiva do tetraedro é falsa?



22. Un prisma de 8 *dm* de altura ten como base un triángulo rectángulo de catetos 3 *dm* e 4 *dm*. Calcula as áreas lateral e total do prisma.

23. Debuxa un prisma hexagonal regular que teña 3 *cm* de aresta basal e 0.9 *dm* de altura e calcula as áreas da base e total.

24. Un prisma pentagonal regular de 15 *cm* de altura ten unha base de 30 cm^2 de área. Calcula o seu volume.

25. Calcula a área total dun ortoedro de dimensións 2.7 *dm*, 6.2 *dm* e 80 *cm*.

26. Calcula a superficie total e o volume dun cilindro que ten 7 *m* de altura e 3 *cm* de radio da base.

27. Calcula a área total dunha esfera de 7 *cm* de radio.

28. Calcula a apotema dunha pirámide regular sabendo que a súa área lateral é de 150 cm^2 e a súa base é un hexágono de 4 *cm* dado.

29. Calcula a apotema dunha pirámide hexagonal regular sabendo que o perímetro da base é de 36 *dm* e a altura da pirámide é de 6 *dm*. Calcula tamén a área total e o volume desta pirámide.

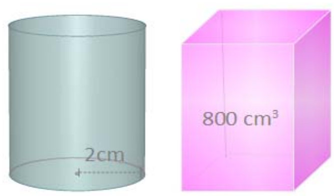
30. Un triángulo rectángulo de catetos 12 *cm* e 16 *cm* xira arredor do seu cateto menor xerando un cono. Calcula a área lateral, a área total e o volume.

31. Tres bólas de metal de radios 15 *dm*, 0.4 *m* e 2 *m* fúndense nunha soa, cal será o diámetro da esfera resultante?

32. Cal é a capacidade dun pozo cilíndrico de 1.50 *m* de diámetro e 30 *m* de profundidade?

33. Canto cartón precisamos para construír unha pirámide cuadrangular regular se queremos que o lado da base mida 12 *cm* e que a súa altura sexa de 15 *cm*?

34. Calcula o volume dun cilindro que ten 2 *cm* de radio da base e a mesma altura que un prisma cuxa base é un cadrado de 4 *cm* de lado e 800 cm^3 de volume.



Autoras: Milagros Latasa Asso e Fernanda Ramos Rodríguez
Ilustracións: Milagros Latasa/Banco de Imaxes de INTEF

35. Cal é a área da base dun cilindro de 1.50 *m* de alto e 135 dm^3 de volume?

36. A auga dun manancial condúcese ata uns depósitos cilíndricos que miden 10 *m* de radio da base e 20 *m* de altura. Logo embotéllase en bidóns de 2.5 litros. Cantos envases se enchen con cada depósito?

37. Calcula a cantidade de cartolina necesaria para construír un anel de 10 tetraedros cada un dos cales ten un centímetro de aresta.

38. Ao facer o desenvolvemento dun prisma triangular regular de 5 *dm* de altura, resultou un rectángulo dun metro de diagonal como superficie lateral. Calcula a área total.

39. Determina a superficie mínima de papel necesaria para envolver un prisma hexagonal regular de 2 *cm* de lado da base e 5 *cm* de altura.

40. O Concello de Madrid colocou unhas xardineiras de pedra nas súas rúas que teñen forma de prisma hexagonal regular. A cavidade interior, onde se deposita a terra, ten 80 *cm* de profundidade e o lado do hexágono interior é de 60 *cm*. Calcula o volume de terra que enchería unha xardineira por completo.

41. Unha habitación ten forma de ortoedro e as súas dimensións son directamente proporcionais aos números 2, 4 e 8. Calcula a área total e o volume se ademais se sabe que a diagonal mide 18.3 *m*.

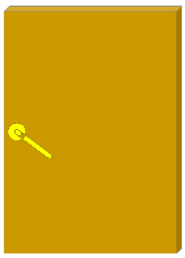
42. Un ortoedro ten 0.7 *dm* de altura e 8 dm^2 de área total. A súa lonxitude é o dobre da súa anchura, cal é o seu volume?

43. Se o volume dun cilindro de 15 *cm* de altura é de 424 cm^3, calcula o radio da base do cilindro.

44. Instalaron na casa de Xoán un depósito de auga de forma cilíndrica. O diámetro da base mide 2 metros e a altura é de 3 metros. a) Calcula o volume do depósito en m^3. b) Cantos litros de auga caben no depósito?

45. Un envase dun litro de leite ten forma de prisma, a base é un cadrado que ten 10 *cm* de lado. a) Cal é, en cm^3, o volume do envase? b) Calcula a altura do envase en cm.

46. Unha circunferencia de lonxitude 18.84 *cm* xira arredor dun dos seus diámetros xerando unha esfera. Calcula o seu volume.



47. Unha porta mide 1.8 *m* de alto, 70 *cm* de ancho e 3 *cm* de espesor. O prezo da instalación é de 100 € e cóbrase 5 € por m^2 en concepto de vernizado, ademais do custe da madeira, que é de 280 € cada m^3. Calcula o custe da porta se só se realiza o vernizado das dúas caras principais.

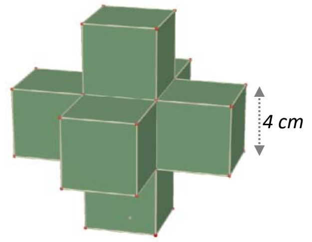
48. A auga contida nun recipiente cónico de 21 *cm* de altura e 15 *cm* de diámetro da base vértese nun vaso cilíndrico de 15 *cm* de diámetro da base. Ata que altura chegará a auga?

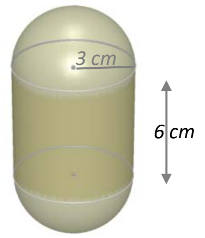
49. Segundo *Arquímedes*, que dimensións ten o cilindro circunscrito a unha esfera de 7 *cm* de radio que ten a súa mesma área? Calcula esta área.

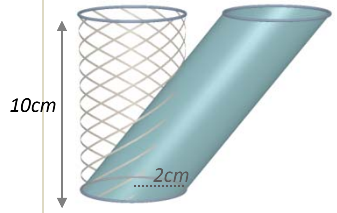
50. Cal é o volume dunha esfera na que a lonxitude dunha circunferencia máxima é 251.2 *m*?

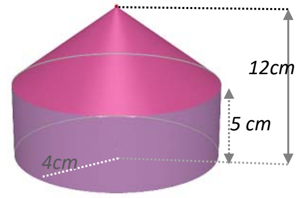
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Milagros Latasa Asso e Fernanda Ramos Rodríguez
Ilustracións: Milagros Latasa/Banco de Imaxes de INTEF

51. Calcula a área lateral e o volume dos seguintes corpos xeométricos

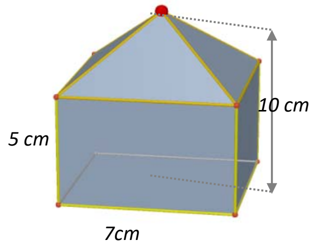




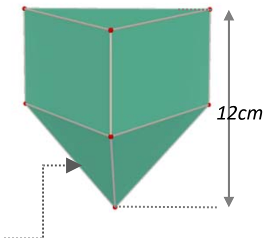




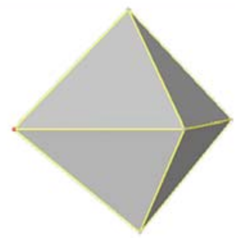
52. Calcula a área lateral e o volume dos seguintes corpos xeométricos



A base é cadrada



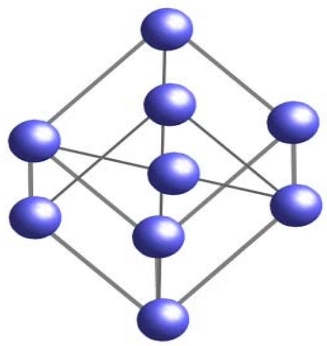
Tetraedro de 5cm de aresta



Octaedro de 6cm de aresta

Pirámides construídas no interior dunha estrutura cúbica de 5 dm de aresta.

53. Na construción dun globo aerostático esférico dun metro de radio emprégase lona que ten un custe de 300 €/m^2. Calcula o importe da lona necesaria para a súa construción.



54. Calcula o radio dunha esfera que ten 33.51 dm^3 de volume.

55. O *Atomium* é un monumento de Bruxelas que reproduce unha molécula de ferro. Consta de 9 esferas de aceiro de 18 m de diámetro que ocupan os vértices e o centro dunha estrutura cúbica de 103 m de diagonal realizada con cilindros de 2 metros de diámetro. Se utilizamos unha escala 1:100 e tanto as esferas como os cilindros son macizos, que cantidade de material necesitaremos?

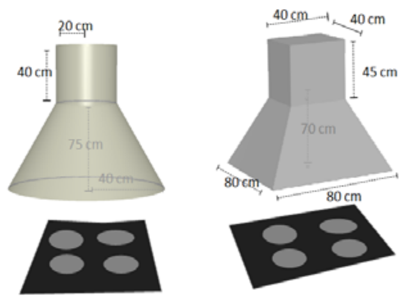
56. Pintouse por dentro e por fóra un depósito sen tapa de 8 dm de alto e 3 dm de radio. Tendo en conta que a base só se pode pintar por dentro, e que se utilizou pintura de 2 €/dm^2, canto diñeiro custou en total?

57. Unha piscina mide 20 m de longo, 5 m de ancho e 2 m de alto.

a. Cantos litros de auga son necesarios para enchela?

b. Canto custará recubrir o chan e as paredes con PVC se o prezo é de 20 €/ m^2?

58. Cal das dúas cambotas extractoras da figura esquerda ten un custe de aceiro inoxidable menor?

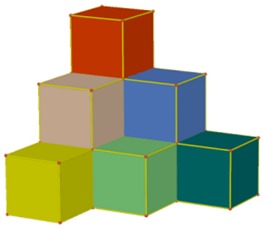


59. Nunha vasilla cilíndrica de 3 *m* de diámetro e que contén auga introdúcese unha bóla. Cal é o seu volume se despois da inmersión sobe 0.5 *m* o nivel da auga?

60. O prezo das tellas é de 12.6 €/m^2. Canto custará retellar unha vivenda cuxo tellado ten forma de pirámide cuadrangular regular de 1.5 *m* de altura e 15 m de lado da base?

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Milagros Latasa Asso e Fernanda Ramos Rodríguez
Ilustracións: Milagros Latasa/Banco de Imaxes de INTEF

61. Enrólase unha cartolina rectangular de lados 40 *cm* e 26 *cm* formando cilindros das dúas formas posibles, facendo coincidir lados opostos. Cal dos dous cilindros resultantes ten maior volume?



62. Cada un dos cubos da figura ten 2 *cm* de aresta. Cantos hai que engadir para formar un cubo de 216 cm^3 de volume?

63. Un tubo de ensaio ten forma de cilindro aberto na parte superior e rematado por unha semiesfera na inferior. Se o radio da base é de 1 *cm* e a altura total é de 12 *cm*, calcula cantos centilitros de líquido caben nel.

64. O lado da base da pirámide de *Keops* mide 230 *m*, e a súa altura 146 *m*. Que volume encerra?

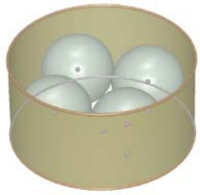
65. A densidade dun tapón de cortiza é de 0.24 g/cm^3, canto pesan mil tapóns se os diámetros das súas bases miden 2.5 *cm* e 1.2 *cm*, e a súa altura 3 *cm*?

66. Comproba que o volume dunha esfera é igual ao do seu cilindro circunscrito menos o do cono de igual base e altura.

67. Calcula o volume dun octaedro regular de aresta 2 *cm*.

68. Constrúe en cartolina un prisma cuadrangular regular de volume 240 cm^3, e de área lateral 240 cm^2.

69. O cristal dun farol ten forma de tronco de cono de 40 *cm* de altura e bases de radios 20 e 10 *cm*. Calcula a súa superficie.



70. Un bote cilíndrico de 15 *cm* de radio e 30 *cm* de altura ten no seu interior catro pelotas de radio 3.5 *cm*. Calcula o espazo libre que hai no seu interior.

71. Un funil cónico de 15 *cm* de diámetro ten un litro de capacidade, cal é a súa altura?

72. Nun depósito con forma de cilindro de 30 *dm* de radio, unha billa verte 15 litros de auga cada minuto. Canto aumentará a altura da auga despois de media hora?

73. A lona dun parasol aberto ten forma de pirámide octogonal regular de 0.5 *m* de altura e 40 *cm* de lado da base. Fíxase un mastro no chan no que se encaixa e o vértice da pirámide queda a unha distancia do chan de 1.80 *m*. No momento no que os raios de sol son verticais, que área ten o espazo de sombra que determina?

74. Unha peixeira con forma de prisma recto e base rectangular énchese con 65 litros de auga. Se ten 65 *cm* de longo e 20 *cm* de ancho, cal é a súa profundidade?

75. Nun xeado de cornete, a galleta ten 12 *cm* de altura e 4 *cm* diámetro. Cal é a súa superficie? Se o cornete está completamente cheo de xeado e sobresae unha semiesfera perfecta, cantos cm^3 de xeado contén?

Iniciación á Xeometría Analítica

76. Calcula a distancia entre os puntos *A*(7, 3) e *B*(2, 5).

77. Calcula a distancia entre os puntos *A*(7, 3, 4) e *B*(2, 5, 8).

78. Calcula a lonxitude do vector de compoñentes ***u*** = (4, 5).

79. Calcula a lonxitude do vector de compoñentes ***u*** = (4, 5, 0).

80. O vector ***u*** = (4, 5) ten a orixe no punto *A*(3, 7). Cales son as coordenadas do seu punto extremo?

81. O vector ***u*** = (4, 5, 2) ten a orixe no punto *A*(3, 7, 5). Cales son as coordenadas do seu punto extremo?

82. Debuxa un cadrado de diagonal o punto *A*(2, 3) e *C*(5, 6). Que coordenadas teñen os outros vértices do cadrado? Calcula a lonxitude do lado e da diagonal deste cadrado.

83. Debuxa un cubo de diagonal *A*(1, 1, 1) e *B*(4, 4, 4). Que coordenadas teñen os outros vértices do cubo? Xa sabes, son 8 vértices. Calcula a lonxitude da aresta, da diagonal dunha cara e da diagonal do cubo.

84. Sexa *X*(*x*, *y*) un punto do plano, e *A*(2, 4), escribe a expresión de todos os puntos *X* que distan de *A* unha distancia 3.

85. Sexa *X*(*x*, *y*, *z*) un punto do espazo, e *A*(2, 4, 3), escribe a expresión de todos os puntos *X* que distan de *A* unha distancia 3.

86. Escribe a ecuación paramétrica da recta que pasa polo punto *A*(2, 7) e ten como vector de dirección ***u*** = (4, 5). Represéntaa graficamente.

87. Escribe a ecuación da recta que pasa polos puntos *A*(2, 7) e *B*(4, 6), de forma explícita, implícita e paramétrica. Represéntaa graficamente.

88. Escribe a ecuación da recta que pasa polos puntos *A*(2, 4, 6) e *B*(5, 2, 8), de forma explícita, e como intersección de dous planos.

89. No cubo de diagonal *A*(1, 1, 1) e *B*(5, 5, 5) escribe as ecuacións dos planos que forman as súas caras. Escribe tamén as ecuacións de todas as súas arestas, e as coordenadas dos seus vértices.

90. Escribe a ecuación do cilindro de eixe $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ e radio 3.

91. Escribe a ecuación de a esfera de centro *A*(2, 7, 3) e radio 4.

92. Escribe a ecuación do cilindro de eixe, a recta $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$ e radio 2.

93. Escribe a ecuación da circunferencia no plano de centro *A*(3, 7) e radio 3.

94. Ao cortar a un certo cilindro por un plano horizontal tense a circunferencia do exercicio anterior. Escribe a ecuación do cilindro.

AUTOAVALIACIÓN

1. As lonxitudes dos lados do triángulo de vértices $A(2, 2)$, $B(1, 4)$ e $C(0, 3)$ son:

a) 2, 5, 5 b) $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ d) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$

2. No triángulo rectángulo de catetos 3 e 4 *cm* multiplícanse por 10 todas as súas lonxitudes. A área do novo triángulo é:

a) 6 m^2 b) 6 dm^2 c) 60 cm^2 d) 0.6 m^2

3. A altura dun prisma de base cadrada é 20 *cm* e o lado da base é 5*cm*, a súa área total é:

a) 450 cm^2 b) 45 dm^2 c) 425 cm^2 d) 0.45 m^2

4. Un depósito de auga ten forma de prisma hexagonal regular de 5 *m* de altura e lado da base 1 *m*. O volume de auga que hai nel é:

a) $60\sqrt{2}$ m³ b) $45\sqrt{2}$ m³ c) $30\,000\sqrt{2}$ dm³ d) $7.5\sqrt{3}$ m³

5. O tellado dunha caseta ten forma de pirámide cuadrangular regular de 0.5*m* de altura e 1000*cm* de lado da base. Se se necesitan 15 tellas por metro cadrado para recubrir o tellado, utilízanse un total de:

a) 1 508 tellas. b) 150 tellas. c) 245 tellas. d) 105 tellas.

6. Unha caixa de dimensións 30, 20 e 15 *cm*, está chea de cubos de 1 *cm* de aresta. Se se utilizan todos para construír un prisma recto de base cadrada de 10 *cm* de lado, a altura medirá:

a) 55 *cm* b) 65 *cm* c) 75 *cm* d) 90 *cm*

7. O radio dunha esfera que ten o mesmo volume que un cono de 5 *dm* de radio da base e 120 *cm* de altura é:

a) $5\sqrt{3}$ *dm* b) $\sqrt[3]{75}$ *dm* c) 150 *cm* d) $\sqrt[3]{2\,250}$ *cm*

8. Distribúense 42.39 litros de disolvente en latas cilíndricas de 15 *cm* de altura e 3 *cm* de radio da base. O número de envases necesario é:

a) 100 b) 10 c) 42 d) 45

9. A ecuación dunha recta no plano que pasa polos puntos $A(2, 5)$ e $B(1, 3)$ é:

a) $y = -2x + 1$ b) $3y - 2x = 1$ c) $y = 2x + 1$ d) $y = -2x + 9$.

10. A ecuación da esfera de centro A(2, 3, 5) e radio 3 é:

a) $x^2 - 2x + y^2 - 3y + z^2 - 5z + 29 = 0$ b) $x^2 - 4x + 3y^2 - 6y + 5z^2 - 10z + 29 = 0$

c) $x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 - 10z + 38 = 0$ d) $x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 - 10z + 29 = 0$

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Milagros Latasa Asso e Fernanda Ramos Rodríguez
Ilustracións: Milagros Latasa/Banco de Imaxes de INTEF

Matemáticas orientadas ás ensinanzas aplicadas

4ºA ESO

Capítulo 6: Funcións e gráficas

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: José Gallegos e David Miranda

Revisor: Miguel Paz

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Índice

1. FUNCIÓNS

2. CARACTERÍSTICAS DUNHA FUNCIÓN

3. TIPOS DE FUNCIÓNS

Resumo

A Ciencia utiliza modelos e moitos modelos conséguense axustando unha función a unha táboa de valores. Por exemplo, neste momento estamos axustando unhas parábolas á relación entre a duración do desenvolvemento en días e a temperatura dos diferentes estadios da cochinilla vermella, *Aonidiella aurantii*, que é unha praga que ataca aos cítricos producindo desde a morte da árbore á súa desvalorización comercial, e dos seus inimigos naturais, como os do xénero *Aphytis*, que baixo certas condicións poden chegar regular as poboacións de tal forma que non faga falla utilizar outras medidas adicionais de control como insecticidas.

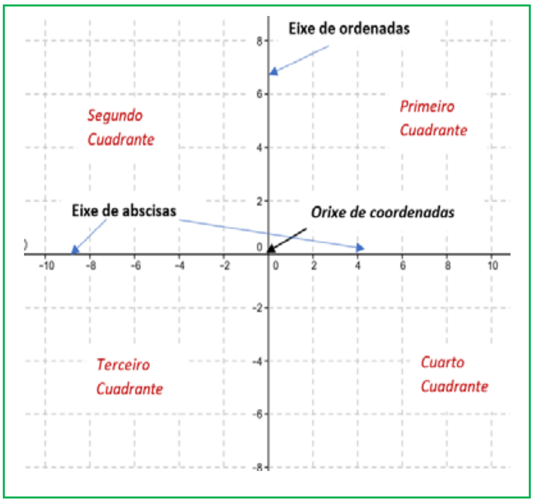
Unha vez conseguida unha función que se axuste a unha táboa de valores pódese prognosticar o que vai ocorrer ou dar valores que non se coñecían previamente.

Axustar modelos mediante funcións que sirvan nas situacións máis variadas é unha das súas aplicacións máis importantes.

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

1. FUNCIÓNS

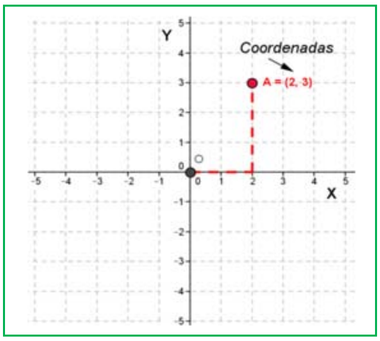
1.1. Eixes de coordenadas ou cartesianos. Coordenadas cartesianas



Recorda que:

Un conxunto formado pola orixe *O*, os dous **eixes de coordenadas** e a **unidade de medida** é un **sistema de referencia cartesiano**.

As **coordenadas dun** punto *A* son un par ordenado de números reais **(*x*, *y*)**, sendo ***"x" a*** primeira coordenada ou **abscisa** e ***"y"*** a segunda coordenada u **ordenada**. A toda parella ordenada de números (*x*, *y*) correspóndelle un punto do plano.

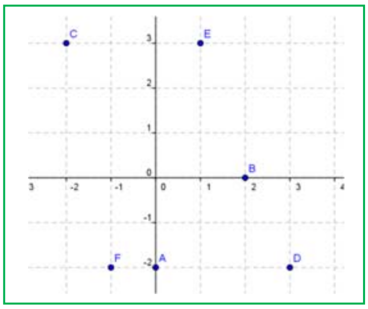


Tamén calquera punto do plano queda totalmente determinado mediante as súas coordenadas.

Exemplo:

- No gráfico anterior, o punto *A* ten coordenadas (2, 3).

Actividades propostas



1. Copia no teu caderno e indica as coordenadas de todos os puntos que están sinalados no plano.
2. Representa graficamente no teu caderno os seguintes puntos do plano: *A* (2, –3); *B* (0, –1); *C* (3, 4).

1.2. Concepto intuitivo de función

Xa sabes que:

Existen multitude de fenómenos na nosa vida cotiá nos que aparecen relacionadas dúas magnitudes. Por exemplo, o prezo dun quilo de mazás e o número de quilos que compramos, a duración dun traxecto e a velocidade á que imos…

Unha **función é** unha relación entre dúas magnitudes de forma que a un valor calquera dunha, chamada **variable independente** ("*x*"), lle facemos corresponder, como moito, un único valor da outra, chamada **variable dependente** ("*y*").

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Observa que se a un mesmo valor de *x* lle corresponden dous ou máis valores de *y*, entón a relación non é unha función. En cambio, á inversa, nunha función un mesmo valor de *y* pode provir de distintos valores de *x*.

As relacións funcionais poden establecerse mediante unha táboa de valores, unha gráfica ou unha expresión matemática ou fórmula.

Exemplo:

- Un quilo de tomates custa 0.8 €/kg. A función que establece canto debemos pagar en función da cantidade de tomates que levamos é $y = f(x) = 0.8x$.

Na expresión $y = f(x)$, ***f*** é o nome que lle poñemos á **función**, (poderiamos chamala usando outras letras, as que se usan máis frecuentemente son "*f*", "*g*" e "*h*"). Entre paréntese vai a variable "***x***" que representa o número de quilos que compramos, é a **variable independente** xa que nós eliximos libremente a cantidade de tomates que queremos ou necesitamos. A variable "***y***"representa o prezo que debemos pagar, é a **variable dependente** xa que "depende" de cantos quilos levamos, é dicir, de "*x*".

A expresión, ***f*(*x*)**, que se le "*f* de *x*", soe usarse con moita frecuencia para designar á variable dependente porque resulta moi cómodo escribir canto nos custaría comprar unha cantidade concreta, por exemplo, 5 kg, expresaríase "*f* de 5" e o seu valor é $f(5) = 0.8 \cdot 5 = 4$ €.

Actividades propostas

3. Das seguintes relacións entre dúas variables, razoa cales son funcionais e cales non:

a. Idade e peso dunha persoa concreta ao longo da súa vida.
b. Peso e idade desa mesma persoa.
c. Un número e a súa metade.
d. Un número e o seu cadrado.
e. Prezo da gasolina e o día do mes.
f. Día do mes e prezo da gasolina.

4. Se hoxe o cambio de euros a dólares está a 1 € = 1.3 $, completa no teu caderno a seguinte táboa de equivalencia entre as dúas moedas:

€	2	5	10	27	*x*
$					

Expresa mediante unha fórmula a relación que existe entre ambas as dúas, na que, coñecendo os euros, se obteñan os dólares. Pódese expresar de forma única esta relación? É unha función?

Se cando realizas o cambio nunha oficina che cobran unha comisión fixa de 1.5 €, como quedaría a fórmula neste caso?

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

1.3. Grafo e gráfica dunha función

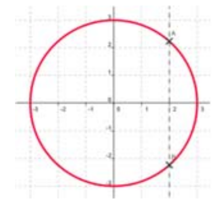
Xa que en toda función temos dous valores que se relacionan de forma única, podemos debuxar ambos os dous nos eixes cartesianos de forma que, se unimos todos eses puntos, obtemos unha curva que nos permite visualizar esta función.

Esta representación ten unha serie de limitacións, moitas delas comúns a calquera debuxo que se poida facer: é aproximada xa que os instrumentos que se utilizan para facelo (regra, compás, lapis…), por moi precisos que sexan (ordenadores), sempre teñen unha marxe de erro; tamén existen fallos de tipo visual ou dos instrumentos de medida; ou moitas veces temos que representar os infinitos puntos do grafo nun espazo finito, o cal é imposible e fai que só poidamos debuxar unha parte do que se pretende, pero non todo.

Malia todos estes inconvenientes, representar graficamente esta serie de puntos relacionados que conforman a función, aínda que sexa de forma aproximada, é importante, xa que nos permite entender moitas propiedades a simple vista: "*máis vale unha imaxe que mil palabras*".
Ademais, unha representación tamén nos permite descubrir se a mesma representa a unha función ou non, xa que no debuxo é fácil interpretar se a un valor da variable independente lle corresponde unicamente un da dependente ou máis de un, propiedade fundamental que define ás funcións.

Exemplo:

- No seguinte debuxo, que corresponde a unha circunferencia, ao valor **0** da variable independente correspóndenlle os valores **3 e** –**3** da dependente. Ademais, hai outros moitos valores aos que lles pasa o mesmo, como para x = 2, que corta á gráfica nos puntos A e B. A circunferencia non pode ser a representación dunha función.



$x^2 + y^2 = 9$

A fórmula que corresponde a esta gráfica é $x^2 + y^2 = 9$ ou tamén $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$.

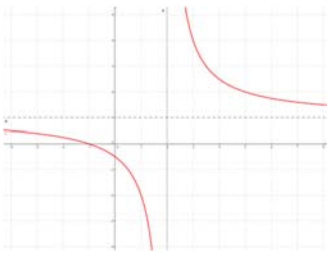
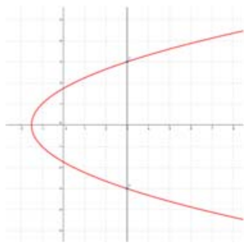
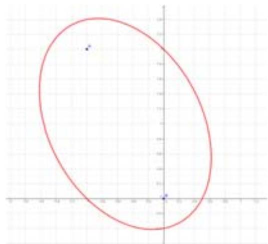
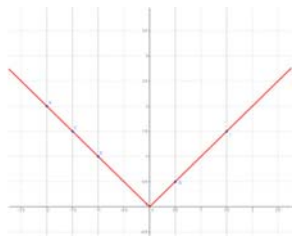
O **grafo dunha función** é o conxunto de todos os pares ordenados nos que o primeiro valor corresponde a un calquera da variable independente e o segundo ao que se obtén ao transformalo mediante a función:

$$Grafo\,(f) = \{(x, y);\, x \in \Re,\, y = f(x)\}$$

A **gráfica dunha función é** a representación no plano cartesiano de todos os puntos que forman o grafo da mesma.

Actividade resolta

- *Indica cales das seguintes gráficas corresponden a unha función e cales non:*

SI ***NON*** ***NON*** ***SI***

Cal é a clave ou regra para recoñecer, a partir do debuxo, se este corresponde a unha función ou non?

Se trazamos rectas verticais imaxinarias e estas chocan co debuxo, como moito, nun punto, a gráfica corresponde a unha función. Se choca en dous ou máis puntos, non é unha función.

Actividades propostas

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

5. Realiza no teu caderno o debuxo de dúas gráficas, unha que corresponda a unha función e outra que non. Identifica cada cal e explica o porque desta correspondencia.

6. Razoa se os valores da seguinte táboa poden corresponder aos dunha función e por que:

x	–10	–5	10	–10	27
$f(x)$	–3	0	5	4	0

7. Unha persoa camiña a unha velocidade de 4 km/h e parte do quilómetro 10. Escribe a expresión alxébrica da función que indica os quilómetros percorridos en función do tempo. Sinala cales son os valores que non ten sentido dar á variable independente e en que se traduce iso na gráfica.

8. Nunha folla de papel cuadriculado raia un cadrado de lado un cadradiño. A súa área é 1 u^2. Agora fai o mesmo cun cadrado de lado 2. Continúa tomando cadrados de lados 3, 4, 5… e calcula as súas áreas. Cos resultados completa unha táboa de valores e debuxa a súa gráfica. Ten sentido para valores negativos da variable? Busca unha fórmula para esta función.

9. Para aparcar en zona azul (non residentes) hai unhas tarifas. A tarifa mínima é de 0,50 euros, o tempo máximo de aparcamento é de 2 horas, cada media hora máis custa 0,90 euros, e cada fracción, 0,05 euros. Representa unha gráfica da función cuxa variable independente sexa o tempo que se espera vai estar aparcado o vehículo e a variable dependente o prezo (en euros) que hai que pagar.

10. Un fabricante quere construír vasos cilíndricos medidores de volumes, que teñan de radio da base 5 cm e de altura total do vaso 18 cm. Escribe unha fórmula que indique como varía o volume ao ir variando a altura do líquido. Constrúe unha táboa cos volumes correspondentes ás alturas tomadas de 3 en 3 cm. Escribe tamén unha fórmula que permita obter a altura coñecendo os volumes. A que altura haberá que colocar a marca para ter un decilitro?

11. A seguinte gráfica resume a excursión que realizamos pola serra de Guadarrama:

a) Canto tempo durou a excursión?

b) Canto tempo se descansou? A que horas?

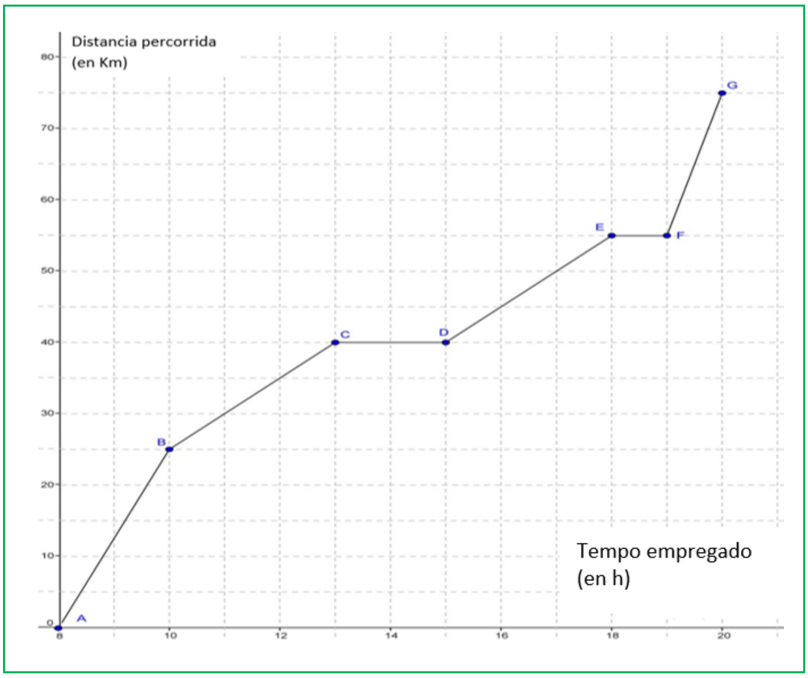
c) Cantos quilómetros se percorreron?

d) En que intervalos de tempo se foi máis rápido que entre as 11 e as 13 horas?

e) Fai unha breve descrición do desenvolvemento da excursión.

f) Constrúe unha táboa de valores a partir dos puntos sinalados na gráfica.

g) Se no eixe de ordenadas representaramos a variable "distancia ao punto de partida", sería a mesma gráfica? Cos datos de que dispós, podes facela?



12. A relación entre a altura e a idade dos diferentes compoñentes dun equipo de baloncesto é unha relación funcional? Por que? E a relación entre a idade e a altura? Escribe tres correspondencias que sexan funcionais e tres que non.

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

2. CARACTERÍSTICAS DUNHA FUNCIÓN

2.1. Dominio e continuidade

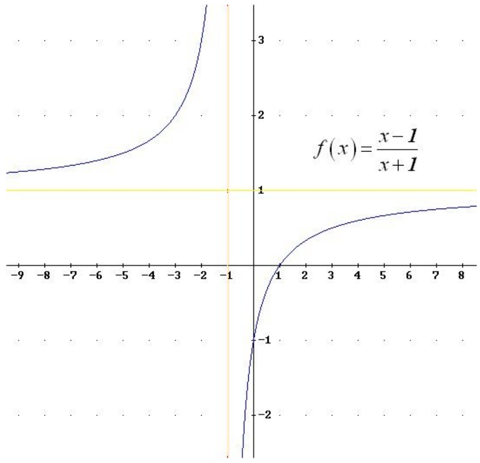
O **dominio** dunha función é o conxunto de puntos nos que está definida.

$$Dom(f) = \{x \in \Re; \exists f(x)\}$$

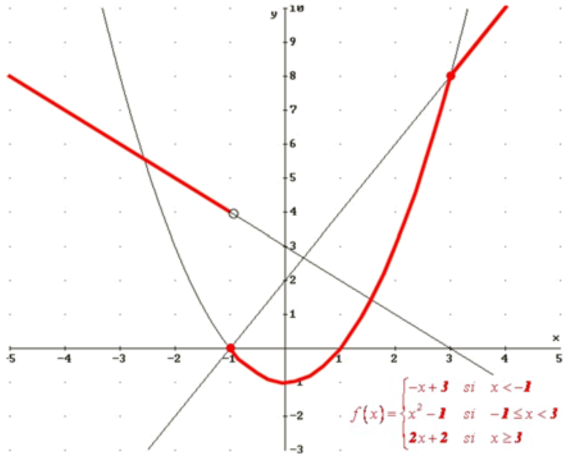
O concepto de **continuidade** dunha función é moi intuitivo xa que se corresponde con que a gráfica se poida debuxar sen levantar o lapis do papel. Cando isto non ocorre, prodúcense "*saltos*" en determinados puntos que reciben o nome de descontinuidades.

Actividade resolta

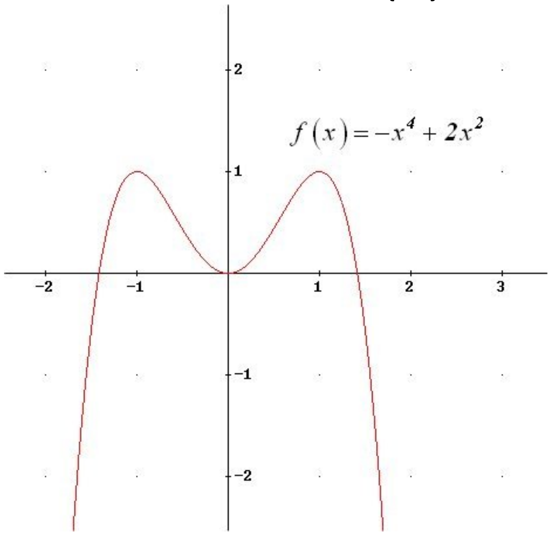
- *Que funcións son continuas segundo a súa gráfica e cales non? Indica nestas últimas o/os valor/es da variable independente onde se produce a descontinuidade:*



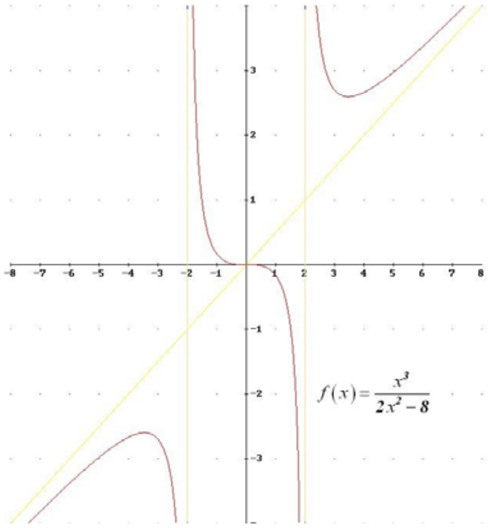
NON é continua en $x = -1$ onde ten un salto infinito. É continua no resto dos puntos
O seu dominio é $\Re - \{-1\}$.



NON é continua en $x = -1$ onde ten un salto finito de 4 unidades. No resto, é continua.
O seu dominio é $\Re$.



SI, é continua para calquera valor de x.
O seu dominio é $\Re$.



NON é continua nin en $x = -2$ nin en $x = 2$ onde ten saltos infinitos.
É continua en $\Re - \{-2, 2\}$, que é o seu dominio.

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

2.2. Monotonía: crecemento e decrecemento

Unha función é **crecente** nun intervalo cando ao aumentar o valor da variable independente aumenta tamén o da variable dependente.

Unha función é **decrecente** nun intervalo se ao aumentar o valor da variable independente diminúe o da variable dependente.

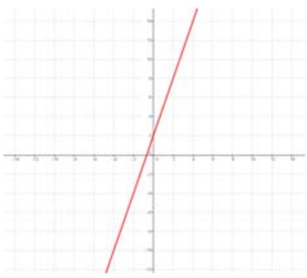
Unha función é **monótona** nun intervalo cando é unicamente crecente (ou unicamente decrecente) nese intervalo.

Unha función é **constante** nun intervalo cando a variable dependente toma sempre o mesmo valor.

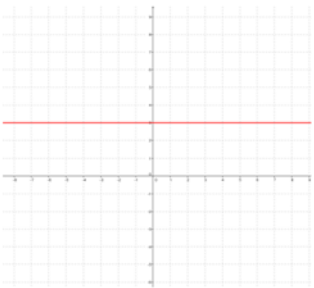
Como indican as definicións, a monotonía ou non dunha función dáse nun intervalo. Polo tanto, unha función pode ser crecente para unha serie de valores, para outros ser decrecente ou constante, logo pode volver ser crecente ou decrecente ou constante…

Actividade resolta

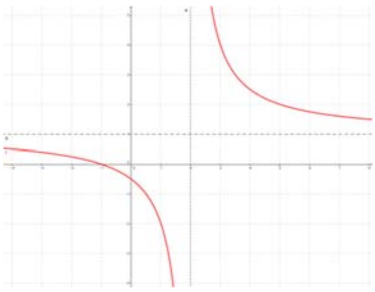
- *Estuda o crecemento e o decrecemento das funcións seguintes:*



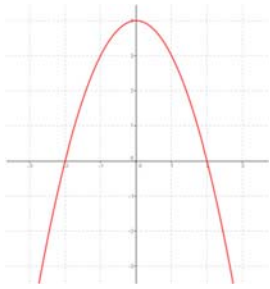
CRECENTE sempre (monótona)



CONSTANTE sempre



DECRECENTE ata x = 2
DECRECENTE desde x = 2



CRECENTE ata x = 0
DECRECENTE desde x = 0

2.3. Taxa de variación

A **taxa de variación** é o que aumenta ou diminúe unha función entre dous valores. Defínese como:

$$\mathbf{TV} = f(x_2) - f(x_1), \text{ para } x_2 > x_1.$$

Se a función é crecente nun intervalo, entón a taxa de variación é positiva e, se é decrecente, negativa.

A taxa de variación media defínese como: TVM = $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

A TVM é moi importante porque non é o mesmo que unha función varíe o seu valor unha mesma cantidade nun intervalo pequeno que nun intervalo grande. Por exemplo, non é o mesmo pasar de 0 a 100 km/h en 5 segundos que en 20 segundos.

Exemplo:

- No desprazamento dun vehículo en función do tempo, a taxa de variación é o que se desprazou nun intervalo de tempo e a taxa de variación media indica a velocidade media nese intervalo de tempo.

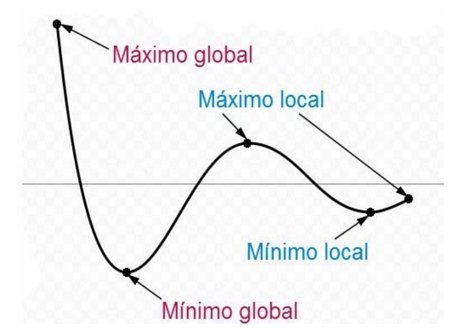
Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

2.4. Extremos: máximos e mínimos

Unha función presenta un **máximo relativo** (ou máximo **local**) nun punto cando o valor da función nese punto é maior que calquera dos valores que están ao seu arredor (no seu *entorno*).

$(a, f(a))$ é **máximo relativo** se $f(a) \geq f(x)$, para todo $x \in$ Intervalo.

Se, ademais, o valor é maior que en calquera outro punto da función, dise que a función acada un **máximo absoluto** (ou máximo global) nel.



$(a, f(a))$ é **máximo absoluto** se $f(a) \geq f(x)$, para todo $x \in Dom(f)$.

Unha función presenta un **mínimo relativo** (ou mínimo **local**) nun punto cando o valor da función neste punto é menor que en calquera dos valores que están ao seu arredor (no seu *entorno*).

$(a, f(a))$ é **mínimo relativo** se $f(a) \leq f(x)$, para todo $x \in$ Intervalo.

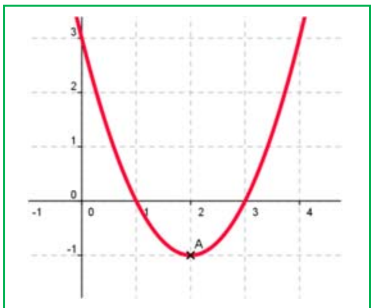
Se, ademais, o valor é menor que en calquera outro punto da función, dise que a función acada un **mínimo absoluto** (ou mínimo **global**) nel.

$(a, f(a))$ é **mínimo absoluto** se $f(a) \leq f(x)$, para todo $x \in Dom(f)$.

Se unha función presenta un máximo ou un mínimo nun punto, dise que ten un **extremo** nese punto que poderá ser relativo ou absoluto.

Actividades resoltas

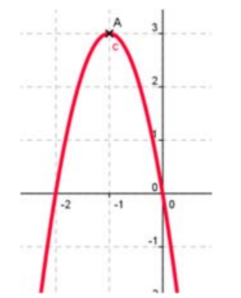
- *Estuda os máximos e mínimos das funcións seguintes:*



$y = x^2 - 4x + 3$

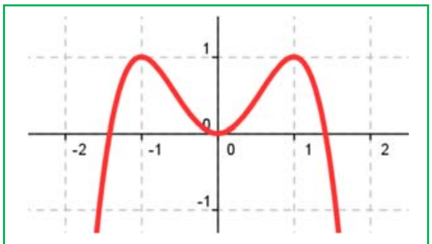
- A parábola $y = x^2 - 4x + 3$ ten un mínimo absoluto no seu vértice (2, –1). Non ten máximos, nin relativos nin absoluto. Antes do vértice é decrecente e despois é crecente.

- A parábola $y = -3x^2 - 6x$ ten un máximo absoluto no seu vértice (–1, 3). Non ten mínimos, nin relativos nin absoluto. Antes do vértice, para $x < -1$, a función é crecente e despois, para $x > -1$, a función é decrecente.



$y = -3x^2 - 6x$

Todas as parábolas teñen un máximo ou un mínimo absoluto no seu vértice.

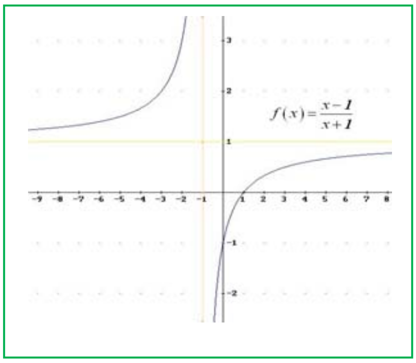


$y = -x^4 + 2x^2$

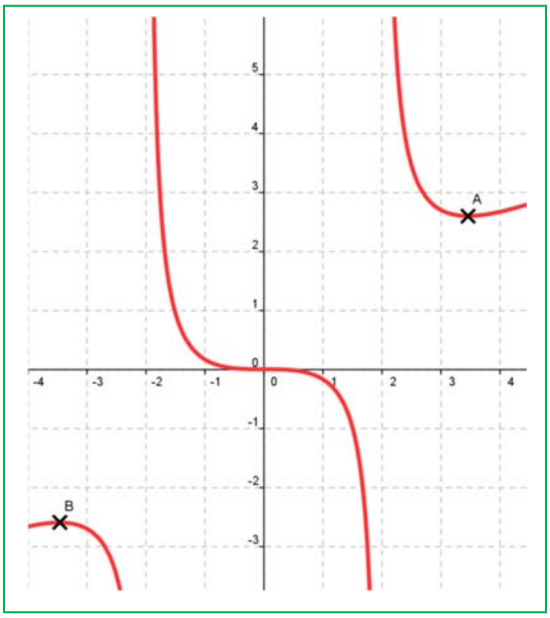
- A función $y = -x^4 + 2x^2$ ten un mínimo absoluto na orixe (0, 0) e dous máximos en (1, 1) e en (–1, 1). Para $x < -1$ é unha función crecente, para $-1 < x < 0$ é unha función decrecente, para $0 < x < 1$ é crecente e para $x > 1$ é decrecente.

Observa, nos **máximos** sempre a función pasa de ser **crecente** a ser **decrecente** e, nos **mínimos,** de ser **decrecente** a ser **crecente**.

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

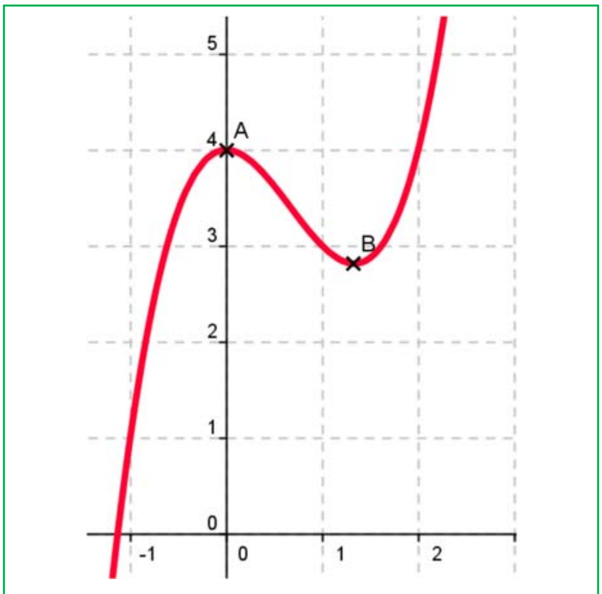


- A función $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ non ten nin máximos nin mínimos (nin relativos nin absolutos). É unha función sempre crecente.



- A gráfica da función $f(x)=\dfrac{x^3}{2x^2-8}$ non ten máximo nin mínimo absoluto, pero ten un mínimo relativo cara a x = 3, A(3.46, 2.6), e un máximo relativo cara a x = –3, B(–3.46, –2.6). Observa que o valor do mínimo relativo, 2.6, é maior que a do máximo relativo, –2.6. Pero en valores próximos ao mínimo si é o menor valor, por este motivo denomínanse "*relativo*", "*local*". Non son os valores menores (ou maiores) que acada a función pero, se unicamente miramos nun entorno do punto, si son valores máximos ou mínimos.
- A función $f(x) = x^2(x-1)^2(x-2)^2$ non ten ningún máximo absoluto pero si ten dous máximos relativos, un no intervalo (–2, –1) e o outro no intervalo (0, 1). Ten, porén, tres mínimos absolutos nos puntos: (–2, 0), (0, 0) e (1, 0). A función é sempre positiva e o seu valor mínimo absoluto é **0**.

$\boldsymbol{f(x) = x^2(x-1)^2(x-2)^2}$



$\boldsymbol{y = f(x) = x^3 - 2x^2 + 4}$

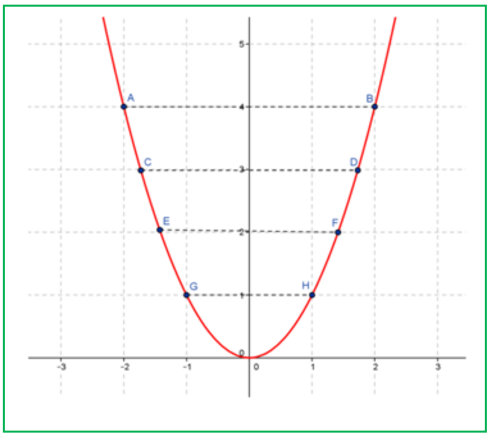
- A función $y = f(x) = x^3 - 2x^2 + 4$ non ten nin máximos nin mínimos absolutos pero ten un máximo relativo no punto A(0, 4) e un mínimo relativo no punto B(4/3, 2.8). É crecente para $x < 0$, decrecente para $0 < x < 4/3$, e crecente para $x > 4/3$.

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

2.5. Simetría

Unha **función par é** aquela na que se obtén o mesmo ao substituír un número que o seu oposto:

$$f(-x) = f(x)$$



Se unha función é par entón é **simétrica** respecto ao eixe **de ordenadas**, é dicir, se dobramos o papel por este eixe, a gráfica da función coincide en ambos os lados.

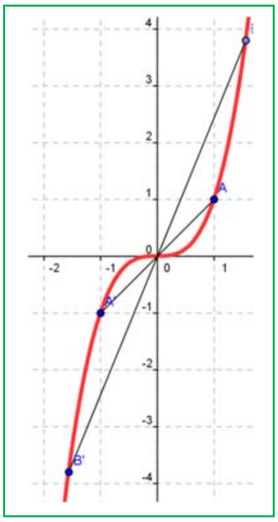
Exemplo:

- A función cuadrática $f(x) = x^2$ é par:

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

Unha **función impar é** aquela na que se obtén o oposto ao substituír un número polo seu oposto:

$$f(-x) = -f(x)$$



Se unha función é impar entón é **simétrica** respecto á **orixe** de coordenadas, é dicir, se trazamos un segmento que parte de calquera punto da gráfica e pasa pola orixe de coordenadas, ao prolongalo cara ao outro lado, encontraremos outro punto da gráfica á mesma distancia.

Exemplo:

- A función $y = x^3$ é unha función impar pois é simétrica respecto da orixe.

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x).$$

O segmento *AO* é igual ao segmento *OA'*, e o segmento *BO* é igual ao segmento *OB'*.

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

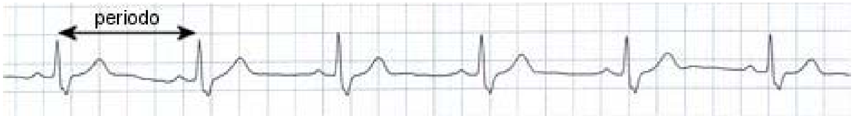
2.6. Periodicidade

Unha **función periódica é** aquela na que os valores da función se repiten sempre que se lle engade á variable independente unha cantidade fixa, ***T***, chamada ***período***. As funcións periódicas verifican que:

$$f(x + T) = f(x).$$

Exemplo:

- Un exemplo de función periódica é o seguinte, que corresponde a un electrocardiograma:



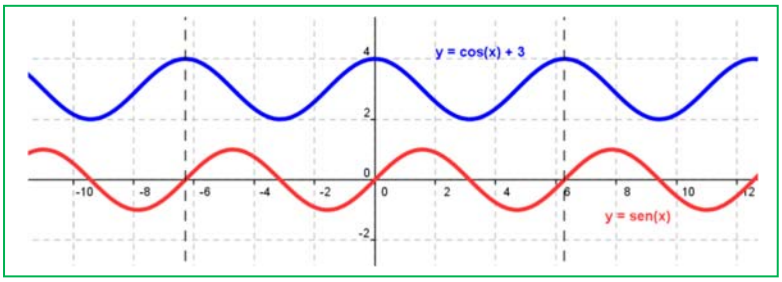
Obsérvase claramente que a gráfica se repite a intervalos iguais, xa que os latexos do corazón son rítmicos.

Actividade resolta

- As funcións:

$y = sen(x)$,

$y = cos(x) + 3$,



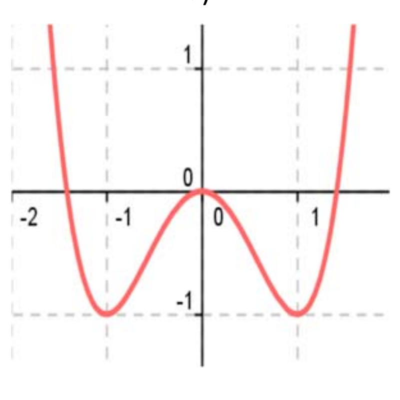
son funcións periódicas. Observa que o seu período é algo maior que 6, é 2π. En cada intervalo de lonxitude 2π repítese unha oscilación. Verifican que

$sen(x + 2\pi) = sen(x)$, e que $cos(x + 2\pi) + 3 = cos(x) + 3$.

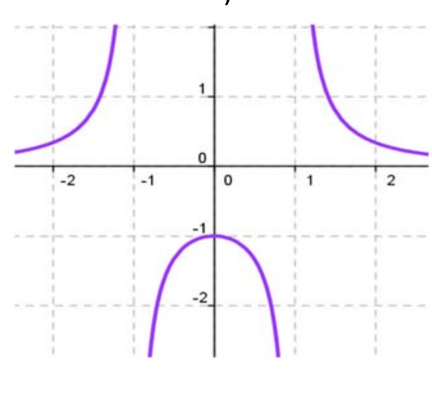
Actividades propostas

13. Copia as seguintes gráficas no teu caderno e sinala todas as características que poidas das funcións representadas. Indica o seu dominio, se é continua (ou puntos de descontinuidade se os houbese), se é simétrica e o tipo de simetría, intervalos de crecemento e decrecemento, máximos e mínimos, período (se o houbese)…

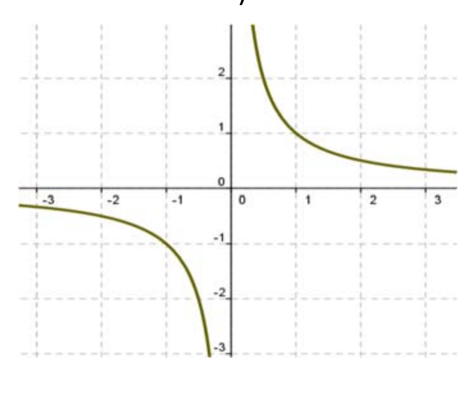
a)



b)



c)



Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

3. TIPOS DE FUNCIÓNS

3.1. Funcións polinómicas de primeiro grao. A recta

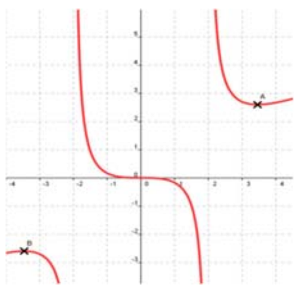
Proporcionalidade directa

Recorda que:

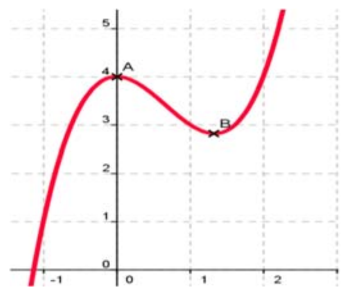
Dúas magnitudes son **directamente proporcionais** cando ao multiplicar ou dividir á primeira por un número, a segunda queda multiplicada ou dividida polo mesmo número.

Ao realizar o cociente de calquera dos valores dunha variable, e os correspondentes doutra, obtemos a **razón de proporcionalidade directa *k***.

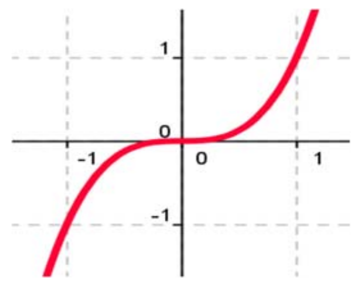
a)



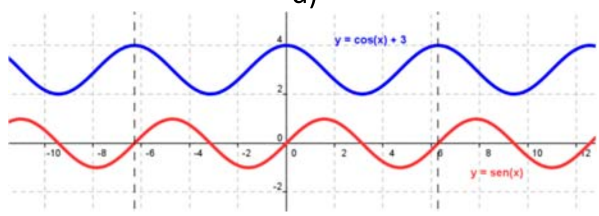
b)



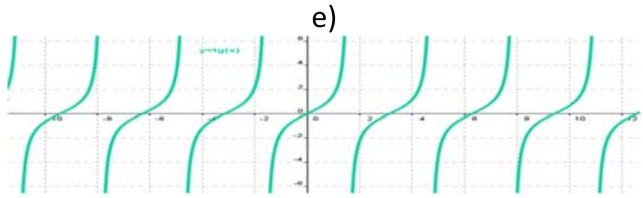
c)



d)



e)



Exemplo:

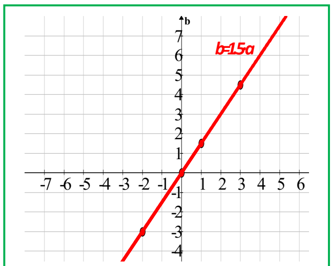
Representar graficamente a relación de proporcionalidade dada na seguinte táboa:

Magnitude A (*x*)		–5	–2	0	1		3
Magnitude B (*y*)		–7.5	–3	0	1.5		4.5

$$k = \frac{-7.5}{-5} = \frac{-3}{-2} = \frac{1.5}{1} = \frac{4.5}{3} = 1.5$$

A relación defínese así: *y* = 1.5·*x*.

Ao calcular a razón de proporcionalidade obtense *k* = 1.5.



Recorda que:

A representación gráfica no plano cartesiano de dúas **magnitudes directamente proporcionais** é unha **recta** que pasa pola orixe de coordenadas.

Pódese escribir a relación entre a magnitude A (a) e a magnitude B (b) como $\boldsymbol{b = k \cdot a}$ onde *k* é a **razón de proporcionalidade**.

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Exemplo:

- A relación entre o peso en quilogramos e o custe de calquera produto é unha proporcionalidade e represéntase con rectas da forma $y = kx$, onde k é o prezo dun quilo.

Moitas das relacións en Física son proporcionais e represéntanse mediante rectas como espazo – tempo, peso – densidade , forza – masa…

Actividades propostas

14. O consumo medio de auga ao día por habitante é de 150 litros. Representa graficamente o consumo de auga dunha persoa ao longo dunha semana.

Función lineal. Rectas da forma $y = m \cdot x$

Recorda que:

Unha **función lineal** é a que ten a fórmula $\boldsymbol{y = m \cdot x}$.

É unha función polinómica de primeiro grao á que lle falta o termo independente.

Unha función lineal corresponde a unha relación de proporcionalidade directa.

Polo tanto, a relación de proporcionalidade directa é unha **función lineal** da forma $\boldsymbol{y = m \cdot x}$.

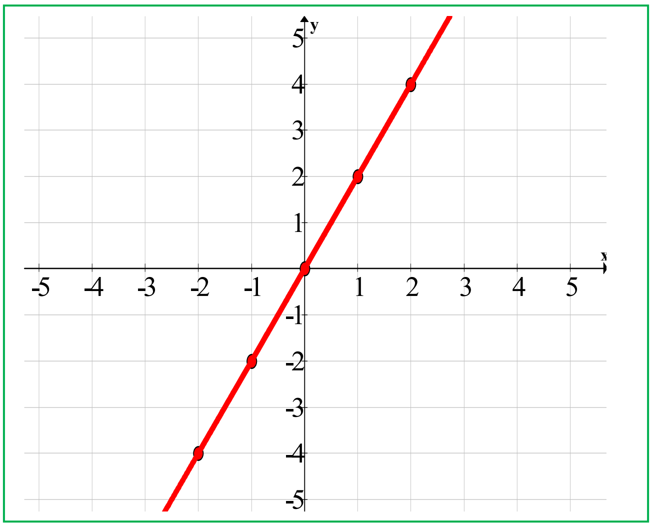
A representación gráfica de dúas magnitudes directamente proporcionais é unha **recta** que pasa pola orixe.

Polo que a gráfica dunha **función lineal** é unha recta.

Exemplo

- Representa a recta $y = 2 \cdot x$

Nota: para definir unha recta é suficiente con coñecer dous dos seus puntos (1, 2), (0, 0).



Recorda que:

- As rectas $y = m \cdot x$ teñen os seguintes compoñentes:
- x é a variable **independente**.
- y é a variable **dependente**.
- m é a **pendente** da recta.

As características máis importantes das funcións lineais son:

- Pasan pola orixe de coordenadas, é dicir, o punto (0, 0) pertence á recta.
- O seu dominio e o seu percorrido son todo o conxunto dos números reais: tanto x como y aceptan calquera valor.
- Son simétricas respecto á orixe ou, o que é o mesmo, son funcións impares.

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Interpretación xeométrica da pendente

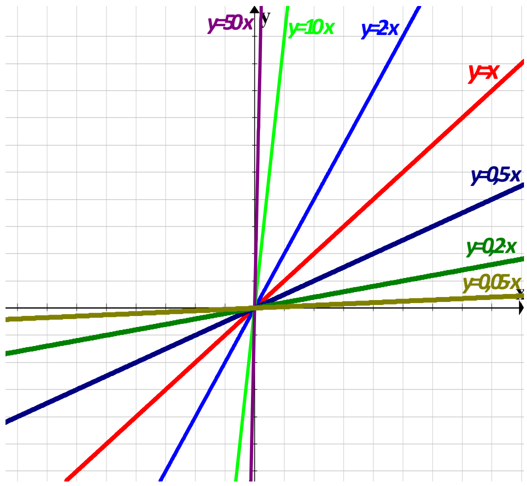
O coeficiente *m* (que é a razón de proporcionalidade) chámase **pendente da recta.** A pendente *m* é o que diferenza unhas funcións lineais doutras. Mide a inclinación da recta respecto ao eixe de abscisas e determina o seu crecemento.

Se $m > 0$, a función é **crecente**.

Se $m < 0$, a función é **decrecente**.

Se $m = 0$, a función é **constante**, nin crece nin decrece.

Nas relacións de proporcionalidade directa, a pendente vén dada pola razón de proporcionalidade *k*.



Actividades resoltas

- *Representa graficamente as funcións:*

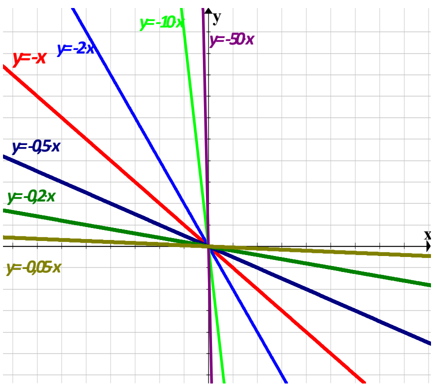
$y = x$; $y = 2x$; $y = 10x$; $y = 50x$; $y = 0.5x$; $y = 0.2x$; $y = 0.05x$.

Analiza o resultado.

- a recta $y = x$, ten de pendente $m = 1$.

- se aumenta *m*, entón a recta faise cada vez máis vertical, ata case converterse no eixe *y*.

- Se diminúe *m*, entón a recta faise cada vez máis horizontal, ata converterse no eixe *x* cando $m = 0$.



- *Representa graficamente as funcións:*

$y = -x$; $y = -2x$; $y = -10x$; $y = -50x$; $y = -0.5x$; $y = -0.2x$; $y = -0.05x$.

Analiza o resultado.

- Se aumenta *m* (é dicir, diminúe en valor absoluto pois é negativo), entón a recta faise cada vez máis horizontal, ata case converterse no eixe *x*: $y = 0$.

- Se diminúe *m* (é dicir, aumenta en valor absoluto pois é negativo), entón a recta faise cada vez máis vertical, ata case converterse no eixe *y*.

A **pendente** da recta $y = mx$ é o valor que mide a inclinación da recta, é dicir, mide o crecemento ou decrecemento da función lineal:

-Se $m > 0$, a recta é crecente.

-Se $m < 0$, a recta é decrecente.

A pendente da recta non só indica o crecemento e decrecemento da función senón que tamén mide canto crece ou canto decrece. Pódese dicir que a pendente mide o crecemento da recta en función do que avanza. Observamos que:

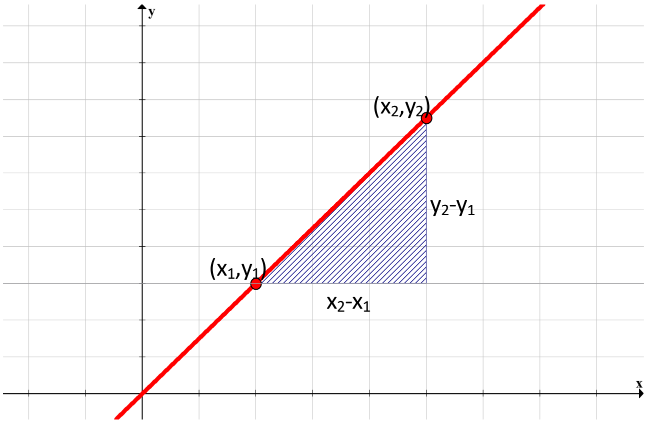
- Se $m > 0$:

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

- Para valores altos de *m* a recta crece con maior rapidez, isto é, a recta "sobe" moito e avanza pouco.
- Para valores pequenos de *m* a recta crece con menos rapidez, é dicir, "sobe" pouco e avanza moito.

➢ Se $m < 0$:

- Para valores altos de *m* a recta decrece con menos rapidez, é dicir, baixa pouco e avanza moito.
- Para valores pequenos de *m* a recta decrece con maior rapidez, isto é, a recta "baixa" moito e "avanza" pouco.



Unha maneira de calcular a pendente é dividindo o valor do que sobe a recta entre o que avanza, como se amosa no seguinte debuxo:

Dados dous puntos calquera da recta, a **pendente** calcúlase da seguinte forma:

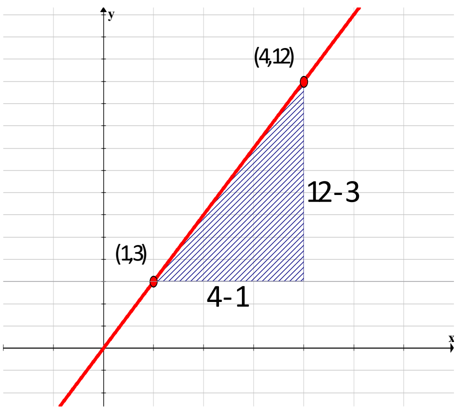
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

é dicir, $m = \dfrac{o\ que\ sobe}{o\ que\ avanza}$

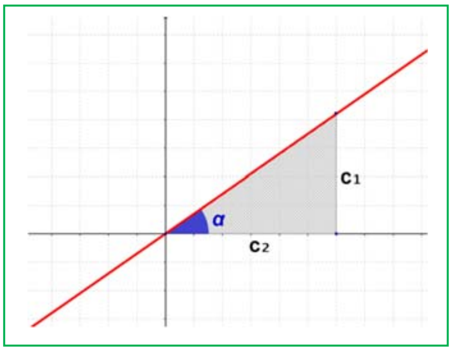
A **taxa de crecemento media** dunha función lineal coincide coa súa pendente: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Exemplo:

- A recta que pasa polos puntos (1, 3) e (4, 12) sobe 12 – 3 = 9 e avanza 4 – 1 = 3, entón



$$m = \frac{12-3}{4-1} = \frac{9}{3} = 3$$



Para calcular a pendente tómanse como referencia a base e a altura do triángulo rectángulo que forman os vértices dos puntos da recta.

O cociente entre a altura e a base é a pendente. Como o triángulo construído é un triángulo rectángulo, a pendente é o cociente entre os seus dous catetos.

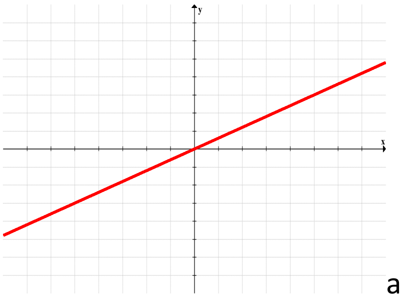
Actividades propostas

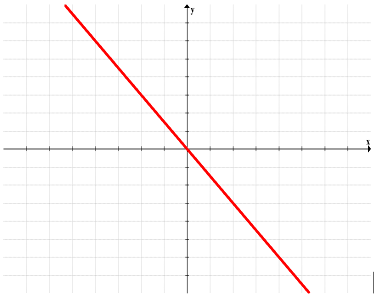
15. Representa no teu caderno, estuda o dominio, máximos e mínimos e simetrías das funcións lineais seguintes:

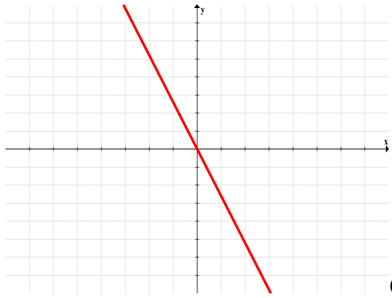
Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

a) $y = 1.25 \cdot x$;   b) $y = (3/5) \cdot x$;   c) $y = 3 \cdot x$;   d) $y = 0.5 \cdot x$;

16. Calcula a pendente e a expresión alxébrica (fórmula) das seguintes rectas:


a.


b.


c.

Función lineal. Rectas da forma $y = m \cdot x + n$

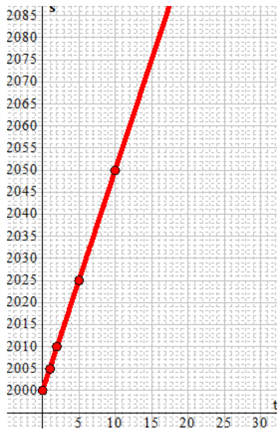
Xa sabes que:

As funcións polinómicas de primeiro grao, ou **funcións afíns**, descríbense alxebricamente da forma $y = m \cdot x + n$ e represéntanse mediante **rectas**.

Exemplo:

- *U*n ciclista trasladouse 2 Km antes de empezar o percorrido e desprázase cunha velocidade de 5 m/s. A súa táboa de valores e a súa representación gráfica son:

Tempo (t)	Espazo (s)
0	2 000
1	2 005
2	2 010
5	2 025
10	2 050



A fórmula é $s = s_0 + v \cdot t$

A gráfica desta recta ten como expresión alxébrica:

$$y = 5 \cdot x + 2\,000,$$

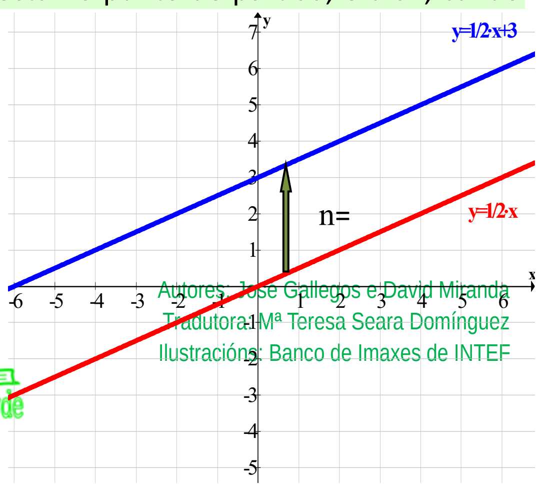
onde x corresponde ao tempo t e y ao espazo s, sendo 2 000 o espazo inicial s_0.

A **pendente** é 5 pero a recta non pasa polo punto (0, 0) senón que corta ao eixe de ordenadas no punto (2 000, 0). Dise que a **ordenada na orixe** é 2 000.

As rectas da forma ***y = mx + n*** teñen a mesma pendente que as rectas *y = mx* pero están desprazadas no eixe de ordenadas (eixe *y*) *n* posicións (cara arriba se *n* é positiva e cara abaixo se é negativa). Por esta razón, a *n* chámaselle **ordenada na orixe** xa que é o valor da recta no punto de partida, é dicir, cando *x* = 0.

Actividades resoltas

- *Compara a recta y* = (1/2)*x coa recta y* = (1/2)*x* + 3.



Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

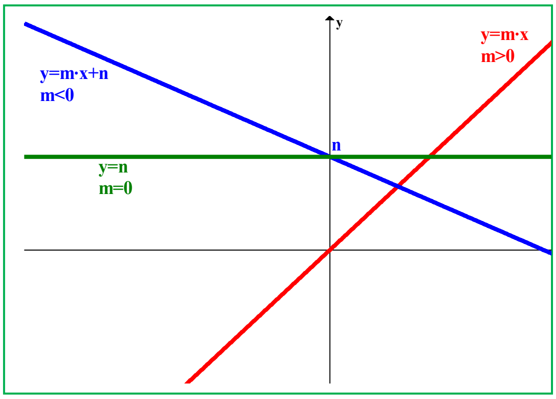
As dúas rectas teñen a mesma pendente. En ambos os casos m = 1/2. Son dúas rectas paralelas.
A diferenza está no valor da ordenada na orixe n: a recta $y = (1/2)x$ (onde n = 0) se desprazou 3 posicións no eixe y para converterse na recta $y = (1/2)x + 3$ (onde n = 3).

A recta $y = mx + n$ é paralela á recta $y = mx$ (teñen a mesma pendente, m) desprazada verticalmente n posicións.

As funcións ***y* = *mx* + *n*** chámanse **funcións afíns** e son tamén funcións lineais.

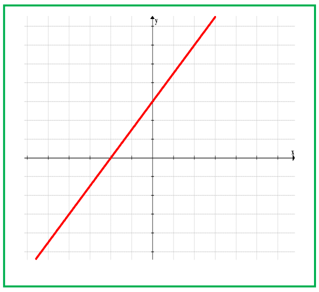
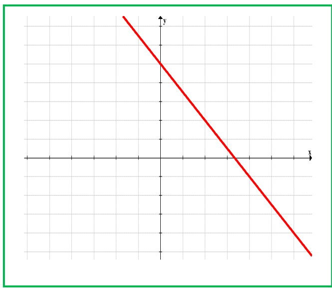
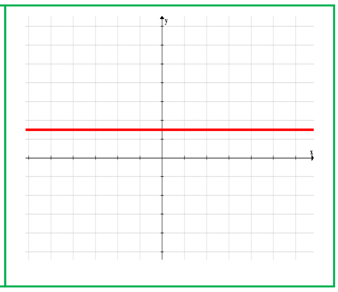
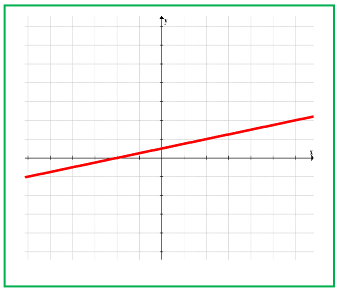
En canto á súa pendente, ten o mesmo significado:
Se m> 0, a función é **crecente**.
Se m< 0, a función é **decrecente**.
Se m = 0, a función é **constante**, nin crece nin decrece. Pasa polo punto (n, 0) e é paralela ao eixe x.

A **taxa de crecemento media** dunha función afín tamén coincide coa súa pendente: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, e é constante ao longo de toda a recta.



Actividades propostas

17. Calcula a expresión alxébrica das seguintes rectas:

18. Escribe tres funcións cuxas gráficas sexan tres rectas que pasen pola orixe de coordenadas e as súas pendentes sexan 5, –4, e 1/3 respectivamente.

19. Que ángulo forma co eixe de abscisas a recta $y = x$? E a recta $y = -x$?

20. Como son entre si dúas rectas de igual pendente e distinta ordenada na orixe?

21. Representa as seguintes funcións lineais:

a. $y = 3 \cdot x + 4$ b. $y = -\frac{3}{7} \cdot x - 2$ c. $2x + \cdot 4y = 5$

d. $y = 5$ e. $y = 0$ f. $y = -3$

22. Un metro de certa tea custa 2.05 €, canto custan 7 metros? E 20 m? E 15.2 m? Canto custan "x" metros de tea? Escribe a fórmula desta situación.

3.2. Funcións polinómicas de segundo grao. Función cuadrática

As **funcións cuadráticas** son aquelas que teñen como expresión alxébrica un polinomio de segundo grao, é dicir, son da forma ***y* = *ax*² + *bx* + *c***. A curva que aparece ao representar graficamente unha función cuadrática chámase **parábola**.

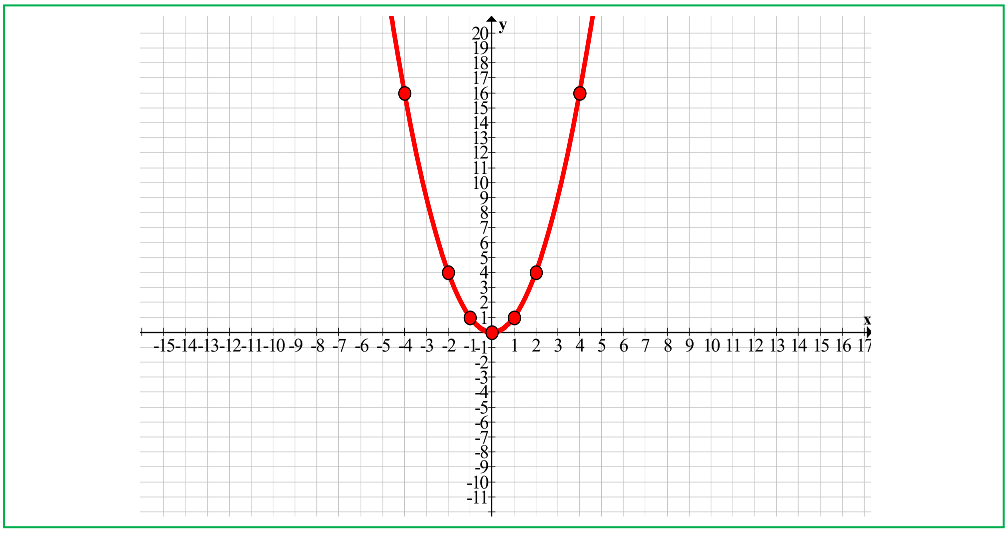
Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

En Física, a traxectoria de moitos movementos represéntase mediante parábolas e por iso recibe o nome de tiro parabólico: lanzar un proxectil con certo ángulo, a aterraxe dun avión nun portaavións, etc.

Parábola $y = ax^2$

Para representar a parábola $y = x^2$ construímos unha táboa de valores e representamos os pares de puntos no plano cartesiano.

x	y
-10	100
-5	25
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
5	25

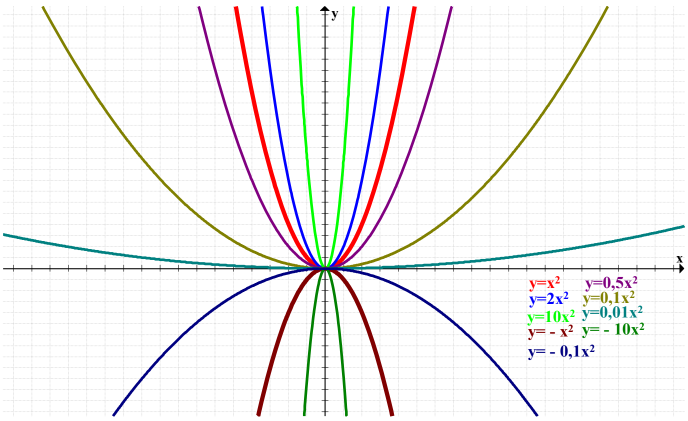


Observamos que é **decrecente** ata o 0 e despois **crecente**, logo ten un **mínimo** absoluto no (0, 0). Se $a = -1$, $y = -x^2$, a parábola ten a mesma forma pero está aberta cara abaixo e, en vez dun mínimo, ten un máximo no (0, 0).

Actividades resoltas

- *Representa graficamente nuns mesmos eixes coordenados:*

$$y = x^2,\ y = 0.5x^2,\ y = 2x^2,\ y = 0.1x^2,\ y = 10x^2,\ y = 0.01x^2,\ y = -10x^2,\ y = -0.01x^2.$$



Obsérvase que:

A parábola cuxa expresión alxébrica é $y = ax^2$ ten as seguintes características:

- O dominio é toda a recta real.
- A función é **continua** porque non presenta saltos.

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

- É **simétrica** respecto ao eixe ***y***, é dicir, é unha función **par**: $y = f(x) = x^2$, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$
- Se $a > 0$ ten un **mínimo absoluto** no punto (0, 0):
  - o ao aumentar a, a parábola faise máis estreita e vaise achegando ao eixe y.
  - o ao diminuír a, a parábola faise máis ancha (plana) e vaise achegando ao eixe x.
- Se $a < 0$ ten un **máximo absoluto** no punto (0, 0):
  - o ao aumentar a, a parábola faise máis ancha (plana) e vaise achegando ao eixe x.
  - o ao diminuír a, a parábola faise máis estreita e vaise achegando ao eixe y.
- Ao punto (0, 0) chámaselle **vértice** da parábola $y = ax^2$.

A **taxa de crecemento media** dunha parábola:

$$\text{TCM} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{a{x_2}^2 - a{x_1}^2}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a(x_2 + x_1)$$

Varía ao movernos pola parábola e é maior canto maior é o coeficiente a, como se observa nas gráficas destas parábolas.

Actividades propostas

23. Debuxa en papel cuadriculado a gráfica da función $y = x^2$.

a) Para iso fai unha táboa de valores, tomando valores de abscisa positiva.
b) Tomando valores de abscisa negativa.
c) Que lle ocorre á gráfica para valores grandes de "x"? E para valores negativos grandes en valor absoluto?
d) A curva é simétrica? Indica o seu eixe de simetría.
e) Ten un mínimo? Cal é? Coordenadas do vértice.
f) Recorta un modelo desta parábola marcando o seu vértice e o eixe de simetría, que usaremos noutros problemas.

24. A partir da parábola $y = x^2$, debuxa a gráfica das seguintes parábolas:

a. $y = \frac{5}{3}x^2$ b. $y = -3x^2$ c. $y = -\frac{15}{3}x^2$

d. $y = 4.12x^2$ e. $y = -\frac{6}{10}x^2$ f. $y = \frac{7}{8}x^2$

25. Completa este resumo. A gráfica de $y = ax^2$ obtense da de $y = x^2$:

a) Se $a > 1$ entón ??
b) Se $0 < a < 1$ entón ??
c) Se $a < -1$ entón ??
d) Se $-1 < a < 0$ entón ??

Desprazamentos verticais: Translacións na dirección do eixe *y*: $y = x^2 + k$

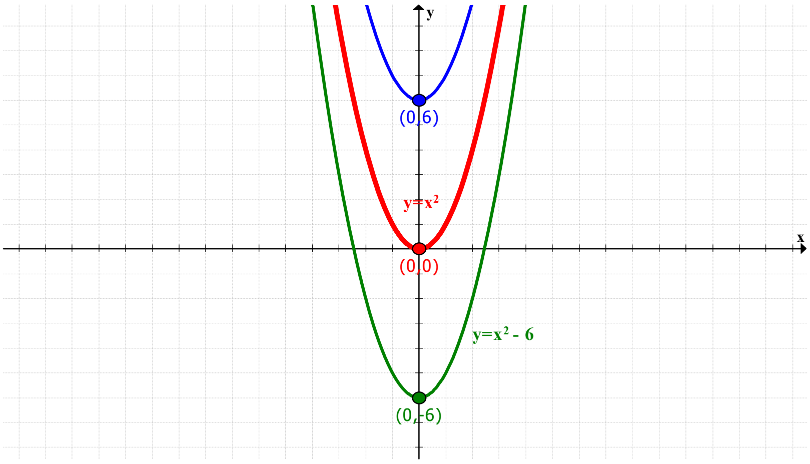
Utilizando como modelo a gráfica de $y = x^2$, poden obterse as gráficas doutras parábolas máis complexas, dependendo do tipo de desprazamento que utilicemos.

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Exemplo:

- Comparemos as parábolas $y = x^2 + 6$ e $y = x^2 - 6$ con noso modelo de $y = x^2$.

Comproba que neste caso, trátase de mover a parábola en dirección vertical, é dicir, cara arriba ou cara abaixo.



Ao sumar 6 á parábola $y = x^2$ a gráfica é idéntica pero desprazada 6 unidades en sentido positivo no eixe y, é dicir, a parábola subiu 6 unidades. O novo vértice pasa ser o punto (0, 6).

Algo parecido ocorre cando se lle restan 6 unidades a $y = x^2$. Neste caso a gráfica desprazouse 6 unidades en sentido negativo ata o vértice (0, –6), é dicir, baixa 6 unidades.

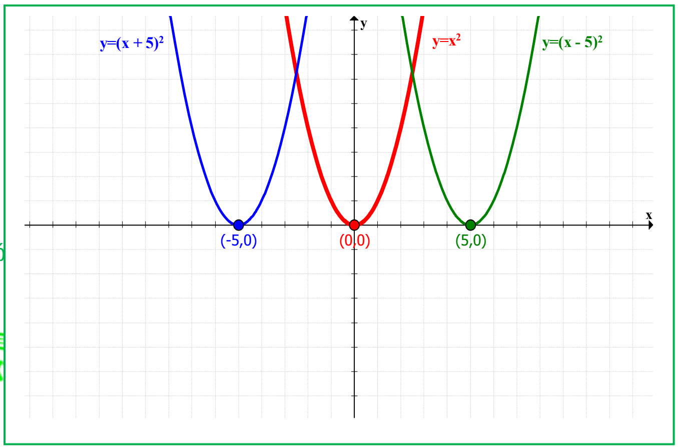
A parábola $y = x^2 + k$ ten a mesma forma que $y = x^2$ pero trasladada k unidades verticalmente no eixe y. Se k é positivo, a translación é cara arriba e se k é negativo, cara abaixo. O **vértice** da parábola sitúase no punto $(0, k)$.

Actividades propostas

26. Tomando a mesma unidade que no problema anterior debuxa no teu caderno, nun mesmo sistema de referencia, as gráficas das parábolas: $y = x^2 + 2$; $y = x^2 - 3$; $y = -x^2$; $y = -x^2 + 2$; $y = x^2 - 1$. Observa que podes utilizar o modelo do exercicio anterior. Fai un resumo indicando o que obtiveches. Terás observado que en todos os casos podes utilizar o modelo trasladándoo en sentido vertical, cara arriba no caso de $y = x^2 + 2$; e cara abaixo no caso de $y = x^2 - 3$. A parábola $y = -x^2$; é simétrica (cara abaixo) de $y = x^2$. En xeral, se trasladamos q unidades na dirección do eixe de ordenadas temos a parábola $y = x^2 + q$.

Desprazamentos horizontais: Translacións na dirección do eixe *x*:

$$y = (x - q)^2$$



Exemplo:

- Compara as parábolas $y = (x + 5)^2$ e $y = (x - 5)^2$ co modelo de $y = x^2$.

Agora trasladamos a parábola en dirección horizontal. Cara á dereita ou cara á esquerda.

Neste caso, ao aumentar a variable que se eleva ao cadrado, é dicir, sumar 5 unidades, a gráfica trasládase horizontalmente cara á esquerda 5 unidades, sendo o novo vértice o punto (–5, 0). Ao diminuír esta variable, é dicir, restar 5 unidades, a parábola desprázase cara á dereita sendo o novo vértice o punto (5, 0).

A parábola $y = (x - q)^2$ ten a mesma gráfica que $y = x^2$ trasladada q unidades no eixe x cara á dereita se $q > 0$ e cara á esquerda se $q < 0$. O **vértice** da parábola sitúase no punto $(q, 0)$**.**

Actividades propostas

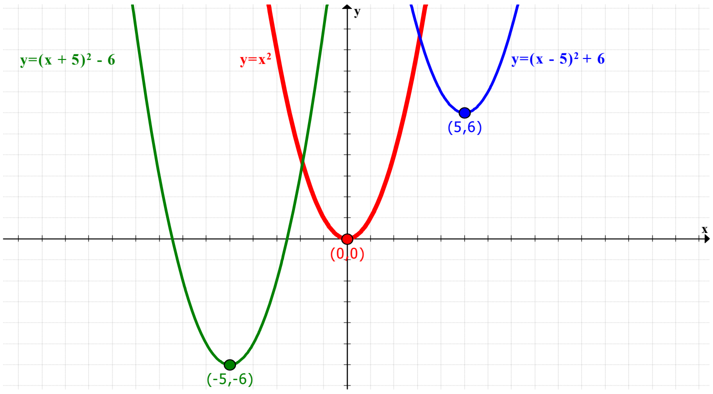
27. Tomando a mesma unidade que no problema anterior debuxa no teu caderno, nun mesmo sistema de referencia, as gráficas das parábolas: $y = (x + 3)^2$; $y = (x - 2)^2$; $y = (x + 5)^2$; $y = (x - 5)^2$. Observa que podes utilizar o modelo do exercicio anterior. Fai un resumo indicando o que obtiveches. Terás observado que en todos os casos podes utilizar o modelo trasladándoo en sentido horizontal, cara á dereita no caso de $y = (x - 2)^2$ e cara á esquerda no caso de $y = (x + 3)^2$. Polo que, en xeral, se trasladamos p unidades na dirección do eixe de abscisas, obtemos a parábola $y = (x - q)^2$.

Desprazamentos oblicuos: translacións en ambos os eixes: $y = (x - q)^2 + k$

O último movemento é o que combina os dous anteriores, é dicir, trasladamos o modelo de $y = x^2$, k posicións de maneira vertical e q posicións de maneira horizontal, resultando unha translación oblicua no plano.

Exemplo:

- Comparamos as parábolas $y = (x + 5)^2 - 6$ e $y = (x - 5)^2 + 6$ co modelo de $y = x^2$.



A parábola $y = (x - 5)^2 + 6$ trasládase 5 unidades á dereita e 6 unidades cara arriba, mentres que a parábola $y = (x + 5)^2 - 6$ trasládase 5 unidades cara á esquerda e 6 unidades cara abaixo. É dicir, é a composición dos dous movementos anteriores.

A parábola $y = (x - q)^2 + k$ ten a mesma forma que $y = x^2$ trasladada da seguinte forma:

$$q \ unidades \begin{cases} cara \text{ á } dereita \ se \quad q > 0 \\ cara \text{ á } esquerda \ se \ \ q > 0 \end{cases} \quad ; \quad k \ unidades \begin{cases} cara \ arriba \ se \ \ k > 0 \\ cara \ abaixo \ se \ \ k < 0 \end{cases}$$

O **vértice** da parábola sitúase no punto (q, k). O eixe de simetría en $x = q$.

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Representación de parábolas da forma $y = x^2 + rx + s$

Sabemos representar as parábolas da forma $y = (x - q)^2 + k$ mediante translacións. Como podemos representar a gráfica das parábolas cuxa expresión alxébrica é $y = x^2 + rx + s$?

Actividades resoltas

- *Representa a gráfica da función polinómica* $y = x^2 + 6x - 4$

A función vén dada da forma $y = x^2 + rx + s$ e queremos convertela en $y = (x - q)^2 + k$.

$$y = x^2 + rx + s \Leftrightarrow y = (x - q)^2 + k$$

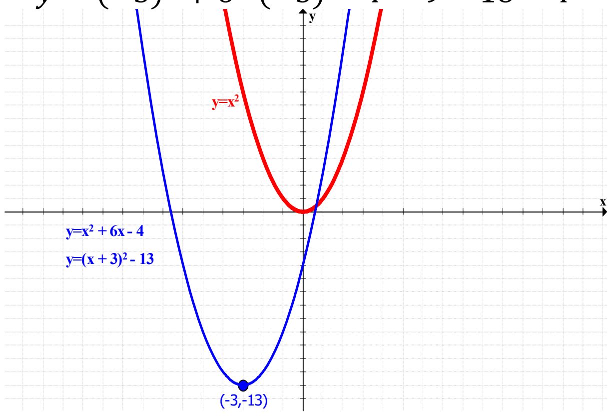
Sabemos que $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$, onde xa nos aparece $x^2 + 6x$. Agora temos que axustar o resto:

$$y = x^2 + 6x - 4 = (x+3)^2 + K = x^2 + 6x + 9 + K \Rightarrow K = -13 \Rightarrow \boxed{y = (x+3)^2 - 13}$$

Coa parábola expresada desta maneira, basta con trasladar a gráfica de $y = x^2$, 3 unidades á esquerda e 13 unidades cara abaixo, sendo o vértice o punto $(-3, -13)$.

Como $r = 6$ observa que a primeira coordenada do vértice é $x = \frac{-r}{2} = \frac{-6}{2} = -3$. Substituíndo o valor de $x = -3$ na expresión $y = x^2 + 6x - 4$ obtense:

$$y = (-3)^2 + 6 \cdot (-3) - 4 = 9 - 18 - 4 = -13$$



O vértice da parábola $y = x^2 + rx + s$ encóntrase no punto $x = \frac{-r}{2}$. A outra coordenada obtense substituíndo x na expresión da función.

Actividades propostas

28. Escribe a ecuación dunha parábola de igual forma que $y = x^2$, pero trasladada 7 unidades en sentido horizontal á dereita e 4 unidades en sentido vertical cara arriba. Que coordenadas ten o seu vértice?

29. Representa a gráfica das seguintes parábolas e localiza o vértice:

a. $y = (x+4)^2 - 5$ b. $y = -(x - \frac{4}{5})^2 + 6$ c. $y = x^2 - 5$

d. $y = x^2 - 6x + 16$ e. $y = x^2 + 4x + \frac{5}{2}$ f. $y = -x^2 + 12x - 26$

g. $y = x^2 - 10x + 17$ h. $y = -x^2 + 2x - 4$ i. $y = -x^2 + \frac{4}{3}x - 1$

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Función cuadrática. Parábolas da forma $y = ax^2 + bx + c$

Ata agora só estudamos as funcións de tipo $y = x^2 + rx + s$, que é unha parábola coa mesma forma que $y = x^2$ aberta cara arriba ou $y = -x^2 + rx + s$, aberta cara abaixo.

Tamén sabemos como afecta o valor do coeficiente "*a*" na gráfica da parábola $y = ax^2$, facéndoa máis estreita ou máis ancha.

Para representar as funcións cuadráticas $y = ax^2 + bx + c$ convértese esta expresión nunha máis familiar que sabemos representar completando cadrados:

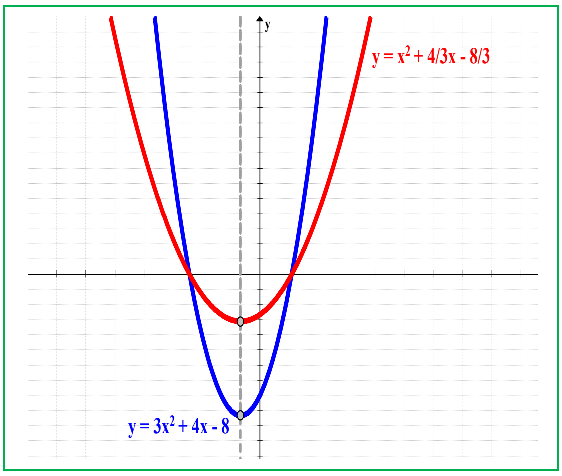
$$y = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a}) = y = a(x^2 + r \cdot x + s)$$

Actividades resoltas

- *Representa a parábola* $y = 3x^2 + 4x - 8$:

  Convertemos a función nunha expresión máis fácil de representar:

$$y = 3x^2 + 4x - 8 = 3 \cdot (x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3})$$



e comparámola con $x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}$.

$$x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3} = (x + \frac{4}{6})^2 - \frac{20}{9}$$

As dous parábolas teñen o vértice no mesmo punto de abscisa, e a coordenada y queda multiplicada por 3.

Canto á forma, a parábola é máis estreita, como se estudou anteriormente.

A parábola no caso xeral é:

$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a}) = a \cdot (x^2 + r \cdot x + s)$, é dicir, $r = \frac{b}{a}$, entón a primeira coordenada do vértice é $\frac{-r}{2} = \frac{\frac{-b}{a}}{2} = \frac{-b}{2a}$.

A segunda coordenada sae ao substituír $x = \frac{-b}{2a}$ na función cuadrática.

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

En resumo:

A función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ ten o seu vértice no punto de abscisa $x = \frac{-b}{2a}$, a súa ordenada no que resulta de substituír ese valor na ecuación: $y = a\left(\left(\frac{-b}{2a}\right)^2\right) + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$. A forma dependerá do valor absoluto do coeficiente "*a*", sendo máis estreita para valores grandes e máis ancha para valores máis pequenos.

A orientación da parábola será:

- cara arriba se $a > 0$
- cara abaixo se $a < 0$

Actividades propostas

30. Volvemos usar o modelo.

a) Traslada o vértice da parábola $y = x^2$ ao punto (3, 1). Escribe a súa ecuación e a ecuación do seu eixe de simetría. Debuxa a súa gráfica.

b) Traslada o vértice da parábola $y = x^2$ ao punto (–4, –2). Escribe a súa ecuación e a ecuación do seu eixe de simetría. Debuxa a súa gráfica.

Elementos da parábola

Os elementos máis característicos da parábola axudan a representar a súa gráfica.

Coeficiente a:

Se $a > 0$ a parábola está aberta cara arriba.

Se $a < 0$ a parábola está aberta cara abaixo.

Vértice:

O **vértice** da parábola está no punto $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2 + 4 \cdot a \cdot c}{4a}\right)$.

Puntos de corte co eixe OX:

Son os puntos onde a parábola corta o eixe X, é dicir, é a intersección da parábola coa recta $y = 0$. Indica cando a parábola é positiva ou negativa. Para calculalos, resólvese a ecuación de segundo grao $y = ax^2 + bx + c = 0$.

Punto de corte co eixe OY:

É o punto onde a parábola corta o eixe y, é dicir, é a intersección da parábola coa recta $x=0$. Cando $x=0$ a parábola toma o valor de c, logo o punto de corte é o punto (0, c).

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Eixe de simetría:

A parábola é simétrica na recta paralela ao eixe y que pasa polo vértice da parábola, é dicir, o eixe **de simetría** da parábola é a recta $x = \dfrac{-b}{2a}$.

O eixe de simetría tamén pasa polo punto medio do segmento formado polos dous puntos de corte co eixe x.

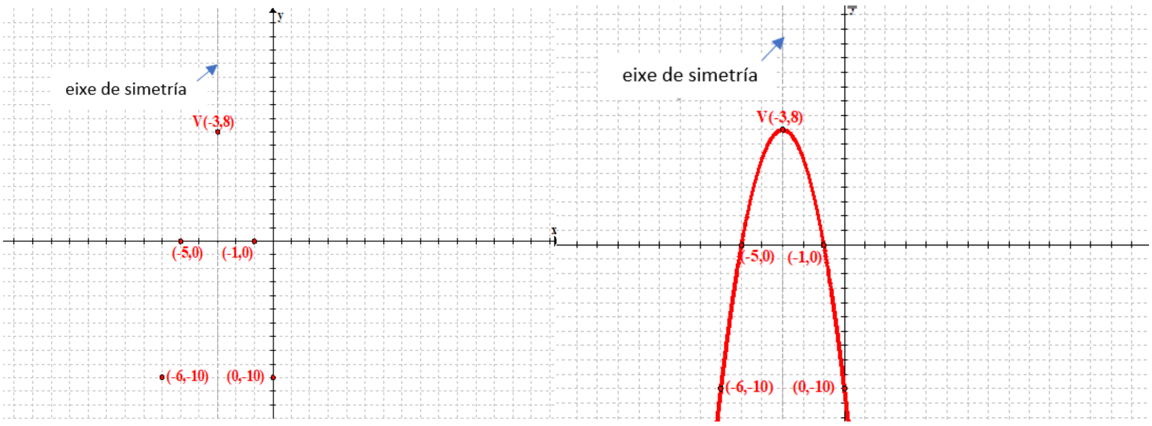
A partir destes elementos, pódese representar a gráfica dunha función cuadrática.

Actividades resoltas

- *Determina os elementos da parábola* $y = -2x^2 - 12x - 10$
  - $a = -2$, entón a parábola está aberta cara abaixo.
  - Vértice: $\begin{cases} x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{12}{2\cdot(-2)} = \dfrac{-12}{4} = -3 \\ y = -2\cdot(-3)^2 - 12\cdot(-3) - 10 = -18 + 36 - 10 = 8 \end{cases} \Rightarrow \textit{Vértice}: V(-3, 8)$
  - Puntos de corte:
    - Eixe OX: $y = -2x^2 - 12x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{12 \pm \sqrt{144 - 80}}{-4} = \begin{cases} x_1 = -5 \Rightarrow (-5, 0) \\ x_2 = -1 \Rightarrow (-1, 0) \end{cases}$

      $y = -2x^2 - 12x - 10 = -2\cdot(x + 5)\cdot(x + 1)$
    - Eixe OY: $\begin{cases} y = -2x^2 - 12x - 10 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -2\cdot 0^2 - 12\cdot 0 - 10 = -10 \Rightarrow (0, -10)$

      A parábola tamén pasa polo seu simétrico: (–6, –10).
  - Eixe de simetría: recta $x = -3$.



Actividades propostas

31. Calcula os elementos característicos e representa as seguintes parábolas:

a. $y = 2x^2 + 4x - 6$	b. $y = 6x^2 - 24x$	c. $y = -2x^2 + 4x - 2$
d. $y = 2x^2 + 5x - 12$	e. $y = 3x^2 + 6x - 9$	f. $y = -2x^2 + 7x + 3$
g. $y = 7x^2 + 21x - 28$	h. $y = 5x^2 - 9x + 4$	i. $y = -4x^2 - 4x - 1$

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

3.3. Axustes a outras funcións polinómicas

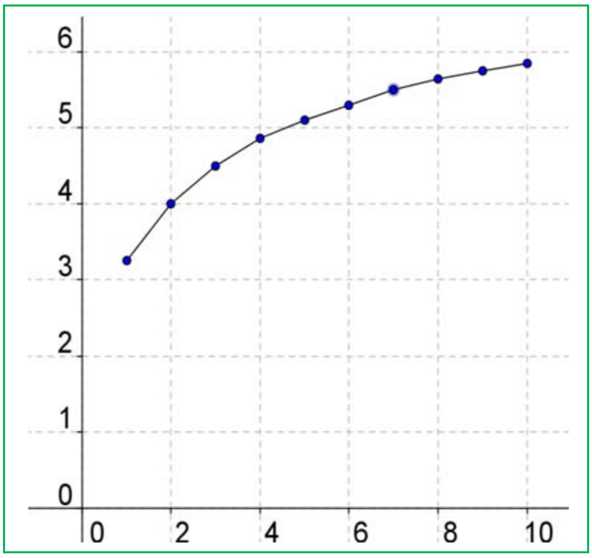
Vimos que as rectas $y = mx + b$ e que as parábolas $y = ax^2 + bx + c$ serven de modelo para situacións moi diversas. Pero estas situacións non son máis que unha pequena parte da gran variedade de situacións que existen. Debemos polo tanto ampliar o arsenal das nosas funcións. Se temos uns datos nunha táboa de valores, queremos analizar se somos capaces de encontrar unha fórmula matemática que se axuste a eses datos, é dicir, que nos permita facer predicións respecto a valores da variable non considerados.

Actividade resolta

- *Para o tratamento dunha enfermidade estase probando un novo medicamento con distintas doses, anotando, para cada dose a porcentaxe de curacións. Os resultados recóllense na táboa:*

Dose (mg): *x*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Curacións (%): *y*	3.25	4.0	4.5	4.86	5.1	5.3	5.5	5.64	5.75	5.85

Representamos graficamente os puntos indicados na táboa:



A gráfica dos puntos unidos mediante segmentos dános unha idea do modelo pero non podemos aínda descubrir a lei. Non existe unha única forma de unir os datos. Coñecer o mellor modelo está relacionado co problema en estudo aínda que esta primeira aproximación gráfica xa nos dá bastante información. Parece que, segundo se aumenta a dose, medra a porcentaxe de curacións. Non parece plausible que para unha dose intermedia, por exemplo 4.5 mg, a porcentaxe de curacións medre a 10 ou diminúa ao 3 %, quizais podemos asegurar que estará entre 4.86 e 5.1. Poderiamos estimalo mediante unha interpolación lineal e dicir que a porcentaxe de curacións para unha dose de 4.5 mg se podería estimar en 4.98.

As funcións polinómicas, das que acabas de estudar as rectas e as parábolas, pero que son todas aquelas ecuación $y = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + dx + e$, teñen unha interesante propiedade.

Se os valores do *x* están en progresión aritmética e calculamos as diferenzas entre os valores do *"y"*, aos que chamamos **diferenzas primeiras**, e indicamos $\Delta_1 y$, cando estas diferenzas son constantes, entón os puntos están nunha recta.

Se de novo calculamos as diferenzas, agora das diferenzas primeiras, e as chamamos **diferenzas segundas**, e as indicamos $\Delta_2 y$, cando estas diferenzas son constantes, entón os puntos están nunha parábola.

En xeral, os valores da abscisa están en progresión aritmética e se as diferenzas *n*-ésimas, $\boldsymbol{\Delta_n y}$, son **constantes** os puntos axústanse a unha **función polinómica de grao *n***.

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Exemplo:

- Imos calcular as diferenzas sucesivas da actividade resolta anterior:

Doses (mg): ***x***	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Curacións (%): ***y***	3.25	4.0	4.5	4.86	5.1	5.3	5.5	5.64	5.75	5.85
$\Delta_1 y$		0.75	0.5	0.36	0.24	0.2	0.2	0.14	0.11	0.1
$\Delta_2 y$			–0.25	–0.14	–0.12	–0.04	0	–0.06	–0.03	–0.01
$\Delta_3 y$				0.11	0.02	0.08	0.04	–0.06	0.03	0.02

O primeiro no que nos fixamos é que os valores de *x* están en progresión aritmética: 1, 2, 3…

Repasa as operacións para comprobar que estas diferenzas están ben calculadas. Por exemplo, a primeira diferenza é: 4.0 – 3.25 = 0.75. O primeiro valor das segundas diferenzas é: 0.5 – 0.75 = –0.25. O primeiro valor das terceiras diferenzas é: –0.14 – (– 0.25) = +0.11.

As diferenzas primeiras non son constantes, logo os datos non se axustan a unha recta, o que xa se observaba na gráfica. As diferenzas segundas non son tampouco constantes, logo non existe unha parábola que se axuste a eses datos. Tampouco son constantes as diferenzas terceiras, logo tampouco existe unha función polinómica de terceiro grao que se axuste a eses datos.

Actividade resolta

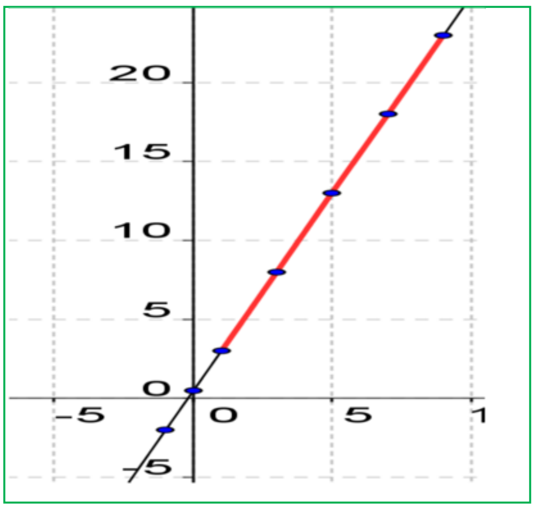
- *Comproba que os datos da táboa seguinte se axustan a unha recta e escribe a súa fórmula.*

x:	1	3	5	7	9
y:	3	8	13	18	23
$\Delta_1 y$		5	5	5	5

O primeiro no que nos fixamos é que os valores de *x* están en progresión aritmética: 1, 3, 5, 7, 9…

As diferenzas primeiras son constantes polo que as diferenzas segundas son todas cero. Os datos axústanse a unha recta.

Representamos os datos.



Buscamos a ecuación da recta $y = mx + b$ impoñendo que pase por dous dos puntos: $3 = m \cdot 1 + b$; $8 = 3m + b$. Restamos: $5 = 2m$, polo que a pendente é: $m = 2.5$; e, ao substituír na primeira ecuación, obtense que a ordenada na orixe é $b = 0.5$. A ecuación da recta é: $y = 2.5\,x + 0.5$.

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

- *Os datos da táboa indican os metros percorridos por un móbil no tempo t segundos. Axústanse a unha parábola. Represéntaos graficamente e escribe a súa fórmula. Que distancia terá percorrido aos 6 segundos? E aos 12 segundos?*

t (s):	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d (m):	15	24	35		63	80	99		143	
$\Delta_1 y$		9	11			17	19			
$\Delta_2 y$		2				2				

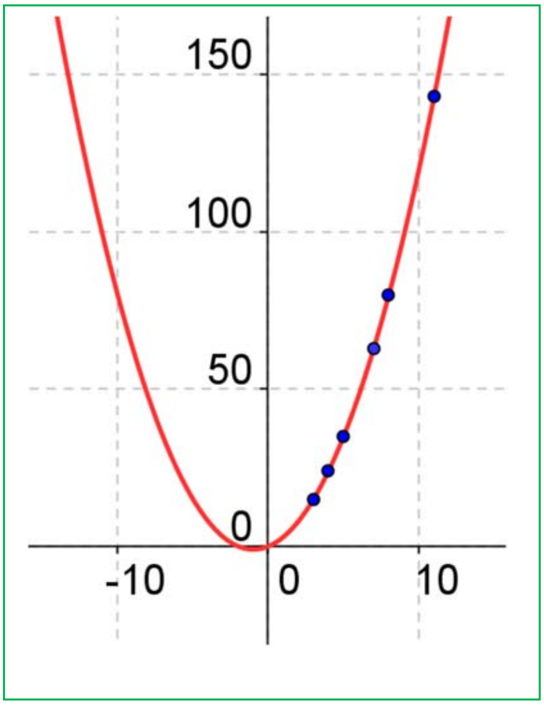
Faltan datos pero as dúas únicas diferenzas segundas son iguais, logo como o enunciado di que se axustan a unha parábola, imos impoñer que todas as diferenzas segundas sexan iguais a 2 e con esa información completamos a táboa.

t (s):	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d (m):	15	24	35	48	63	80	99	120	143	168
$\Delta_1 y$		9	11	13	15	17	19	21	23	25
$\Delta_2 y$		2	2	2	2	2	2	2	2	

Primeiro completamos todas as diferenzas segundas iguais a 2. Despois as diferenzas primeiras que faltaban. E por último os metros. Aos 6 segundos percorreu unha distancia de 48 metros e aos 12 segundos de 168 metros.

Buscamos a función polinómica de segundo grao $y = ax^2 + bx + c$, que pasa polos puntos:

(3, 15), (4, 24) e (5, 35):



$15 = a9 + b3 + \mathrm{c}$

$24 = a16 + b4 + c$

$35 = a25 + b5 + c$

Restamos: $9 = 7a + b$; $11 = 9a + b$. Volvemos restar: $2 = 2a$. Logo $a = 1$; $b = 11 - 9 \cdot 1 = 2$; $c = 15 - 9 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 0$. A parábola é $y = x^2 + 2x$.

Comprobamos que, en efecto, pasa polos outros puntos da táboa:

$$143 = 11^2 + 2 \cdot 11 = 121 + 22.$$

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

32. Calcula a función cuadrática determinada polos puntos: (1, 14); (2, 20); (3, 28). Represéntaa graficamente.

33. Calcula a función polinómica que pasa polos puntos: (0, 5); (1, 7); (2, 11) e (3, 23).

34. Calcula a función polinómica determinada polos puntos: (0, 3); (1, 3); (2, 5); (3, 15); (4, 39); (5, 83). Calcula as diferenzas sucesivas e debuxa a gráfica.

35. Fanse probas medindo a distancia que percorre un avión desde que toca terra nunha pista de aterraxe. Os datos están na táboa adxunta. Existe algunha función polinómica que se axuste a eses datos? Se a hai, escribe a súa fórmula.

Tempo (s):	0	1	2	3	4	5	6
Distancia (m):	0	100	175	230	270	300	325

36. Nunha fábrica os prezos dos cables de aceiro dependen dos diámetros e vén dado o prezo de cada metro en euros na táboa seguinte. Existe algunha función polinómica que se axuste perfectamente a eses datos?

Diámetro (mm):	3	4	5	6	7	8	9
Prezo (€):	3.6	8	18	25.3	39.2	57.6	81

37. Dada a táboa seguinte, pódese axustar exactamente unha recta? Considera se algún dato é erróneo e se é así, corríxeo.

Tempo (s):	1	2	3	4	5	6	76
Distancia (m):	1.53	4.65	7.78	10.89	14.01	17.13	20.29

Ao realizar un experimento é moi raro encontrar situacións nas que unha recta, unha función cuadrática, unha cúbica… se axusten aos datos á perfección.

Na actividade resolta das doses de medicamento e a porcentaxe de curacións, se tiveramos seguido calculando as diferenzas sucesivas nunca chegarían a ser ningunha delas iguais e chegariamos á diferenza de orde 9m, que xa só sería unha e nos daría: $\Delta_9 y = -0.67$. Teriamos que escribir unha función polinómica de grao 9!

Unha función polinómica de grao *n* coñécese se sabemos que pasa por *n* + 1 puntos.

Así, unha recta queda determinada por 2 puntos. Unha parábola queda determinada por 3 puntos. E a función polinómica de grao 9 por 10 puntos. Hai outras funcións. Os datos do medicamento axústanse a unha hipérbole: $y = 7 - \frac{15}{x+3}$, un tipo de función que imos estudar a continuación.

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

3.4. Funcións de proporcionalidade inversa. A hipérbole *y = k/x*

Recorda que:

Dúas magnitudes son **inversamente proporcionais** cando ao multiplicar ou dividir a primeira por un número, a segunda queda dividida ou multiplicada polo mesmo número. A **razón de proporcionalidade inversa** *k* é o produto de cada par de magnitudes: $k = a \cdot b = a' \cdot b'$.

Exemplo

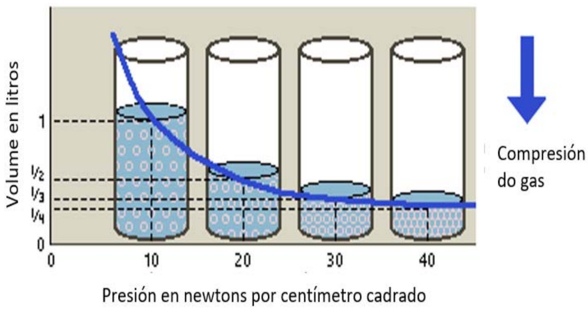
- En Física, encontramos moitos exemplos de magnitudes inversamente proporcionais: a velocidade dun vehículo e o tempo que tarda en percorrer un traxecto son magnitudes inversamente proporcionais. Neste caso, o espazo percorrido mantense constante sendo a razón de proporcionalidade inversa $s = v \cdot t$. Outros exemplos son: a densidade e o volume, a potencia e o tempo, a presión e a superficie…

Actividades resoltas

- *Representa no plano a lei de Boyle-Mariotte: "a temperatura constante, o volume dunha masa fixa de gas é inversamente proporcional á presión que este exerce".*

  A fórmula que describe esta lei é $P \cdot V = k$.

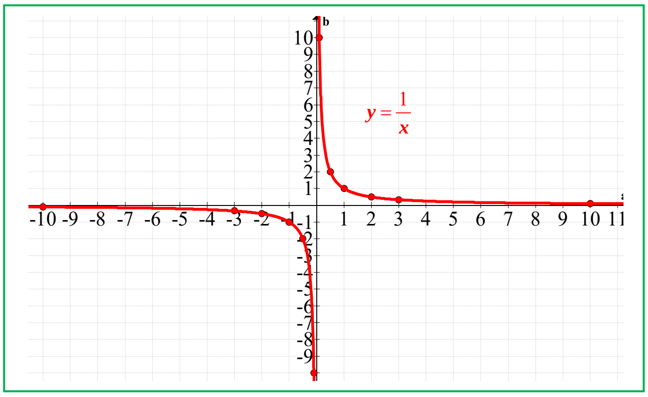
  Se despexamos o volume final *V*, obtemos a seguinte expresión: $V = \dfrac{k}{P}$.



  A gráfica describe unha curva que, a medida que aumenta a presión inicial, diminúe o volume e se vai aproximando ao eixe X e, ao contrario, se diminúe a presión, o volume aumenta.

A **función de proporcionalidade inversa** defínese mediante a expresión $y = \dfrac{k}{x}$ onde k é a **razón de proporcionalidade inversa** e as variables *x* e *y* son os distintos valores que teñen as dúas magnitudes.

A súa representación gráfica no plano cartesiano é unha curva chamada **hipérbole**.



Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Exemplo

- Representa a hipérbole $y = \frac{1}{x}$

x	–10	–3	–2	–1	–1/2	1/2	1	2	3	10
y	–1/10	–1/3	–1/2	–1	–2	2	1	1/2	1/3	1/10

Completamos unha táboa de valores e representamos os puntos nun sistema de coordenadas.

Pódese observar que a gráfica nunca corta aos eixes de coordenadas, xa que nin o *x* nin o *y* poden valer 0. O 0 non está no dominio e tampouco no percorrido da función (non se pode dividir por 0). O seu dominio é $\Re - \{0\}$.

Como se ve na gráfica, e é fácil comprobar, a función é continua en todo o dominio e simétrica respecto da orixe (función impar).

Actividades propostas

38. Representa as seguintes funcións de proporcionalidade inversa no mesmo sistema de coordenadas:

a. $y = \frac{-1}{x}$ b. $y = \frac{5}{x}$ c. $y = \frac{1}{2x}$

d. $y = \frac{3}{8x}$ e. $y = \frac{-5}{3x}$ f. $y = \frac{-12}{5x}$

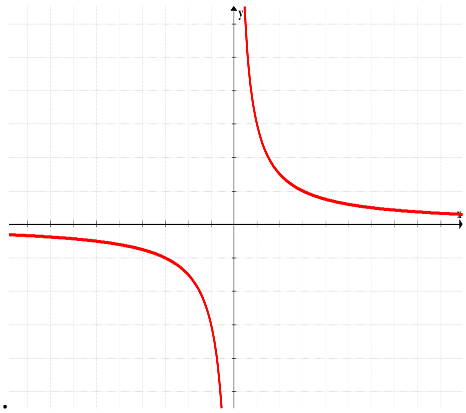
39. Describe o que sucede cando varía o valor de *k*. Axúdate das gráficas do exercicio anterior.

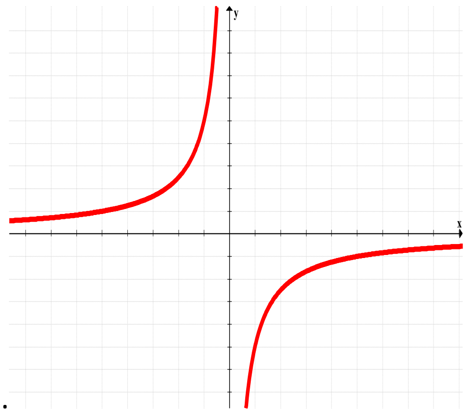
40. Calcula a expresión analítica e representa a gráfica das hipérboles que pasa por cada un destes puntos. Escribe os intervalos onde a función é crecente ou decrecente.

a. (5, 3) b. (2, –1) c. (1/2, 6)

d. (10, 4) e. (*a*, 1) f. (1, *b*)

41. Calcula o dominio, percorrido, continuidade, máximos e mínimos e o crecemento das seguintes hipérboles:

a. 

b. 

c. $y = \frac{9}{2x}$ d. $y = \frac{-5}{3x}$ e. $y = \frac{-0.3}{x}$

f. $(-5, 2)$ g. $(4, -9)$ h. $(1, 1/2)$

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

En xeral, as hipérboles cuxa expresión é $y = \frac{k}{x}$ teñen as seguintes propiedades:

$|k|$:

- S o valor absoluto de k aumenta, a curva afástase da orixe de coordenadas.
- Se o valor absoluto de k diminúe, a curva aproxímase á orixe de coordenadas.

Dominio: Son todos os reais menos o 0: *Dom* = $\Re - \{0\}$.

Percorrido: O seu percorrido son todos os reais menos o 0: $\Re - \{0\}$.

Continuidade: a función de proporcionalidade inversa é continua en todo o seu dominio pero descontinua na recta real, xa que o 0 non está no dominio e, polo tanto, en 0 hai un salto infinito.

Simetría: Son funcións impares, isto é, son simétricas respecto á orixe de coordenadas.

Asíntotas: Son as rectas cuxa distancia á gráfica é moi pequena, cando a curva se afasta da orixe.

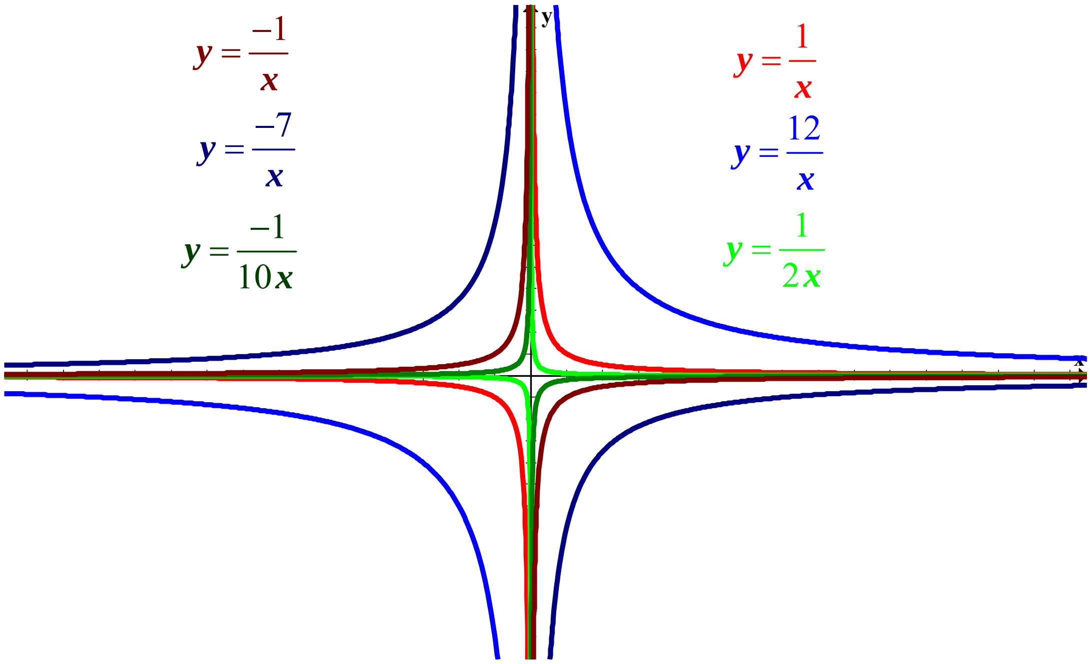
Vimos que non está definida en 0 pero, cando o valor de *x* se achega a cero, o valor de *y* faise moi grande en valor absoluto. Por iso se di que a recta *x* = 0 é unha asíntota vertical de *y* = *k*/*x*.

Do mesmo modo, se nos fixamos nas gráficas, obsérvase que cando os valores de *x* crecen en valor absoluto, os valores de *y* achéganse a 0 (sen tocalo). Dise que a recta *y* = 0 é unha asíntota horizontal.

Crecemento: depende do signo de k :

- Se $k > 0$: a función é sempre **decrecente**.
- Se $k < 0$: a función é sempre **crecente**.

As asíntotas dividen á hipérbole en dous anacos que reciben o nome de **ramas da hipérbole**.



Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

A hipérbole $y = \dfrac{k}{x-b} + a$

A partir da representación da función $y = \dfrac{k}{x}$, é posible representar outro tipo de hipérboles? Ao igual que ocorre coas parábolas, podemos trasladar as hipérboles no plano en dirección horizontal ou vertical, segundo os valores que tomen os parámetros a e b.

Actividades propostas

42. Representa nos mesmos eixes de coordenadas as seguintes hipérboles:

$$y=\frac{5}{x} \qquad y=\frac{5}{x}+3 \qquad y=\frac{5}{x}-3$$

$$y=\frac{-12}{x} \qquad y=\frac{-12}{x-3} \qquad y=\frac{-12}{x+3}$$

$$y=\frac{3}{x} \qquad y=\frac{3}{x-1}+4 \qquad y=\frac{5x-2}{x-1}$$

43. Describe o que sucede cando varían os parámetros *a* e *b* nas hipérboles do exercicio anterior.

En xeral, a representación gráfica das hipérboles cuxa expresión alxébrica é $y=\dfrac{k}{x-b}+a$ é unha translación no plano dependendo dos valores de a e b.

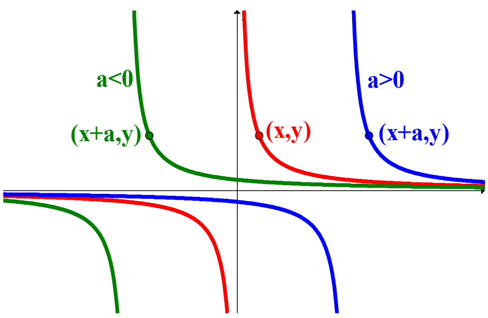
Desprazamentos horizontais

Ao variar o valor de $\boldsymbol{a}$, a representación gráfica da hipérbole desprázase horizontalmente a unidades:

- Se $\boldsymbol{a} > \mathbf{0}$: a hipérbole desprázase cara á dereita.
- Se $\boldsymbol{a} < \mathbf{0}$: a hipérbole desprázase cara á esquerda.
- O punto (x, y) convértese no punto $(x+a, y)$:

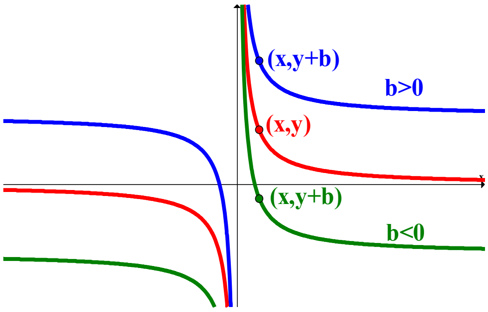
$$(x, y) \rightarrow (x+a, y)$$

- O vector de translación é o vector $(a,\ 0)$



Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Desprazamentos verticais



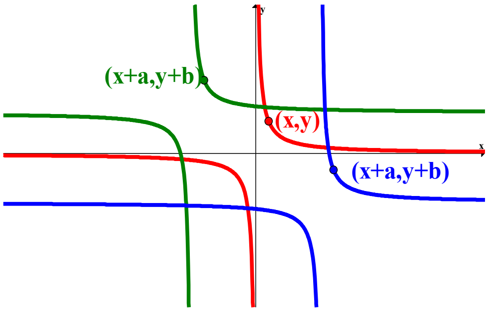
Ao variar o valor de $\boldsymbol{b}$, a representación gráfica da hipérbole desprázase verticalmente b unidades:

- Se $\boldsymbol{b} > \mathbf{0}$: a hipérbole desprázase cara arriba.
- Se $\boldsymbol{b} < \mathbf{0}$: a hipérbole desprázase cara abaixo.
- O punto (x, y) convértese no punto $(x, y+b)$:

$$(x, y) \to (x, y+b)$$

- O vector de translación é o vector $(0,\ b)$

Desprazamentos oblicuos



Ao variar tanto o valor de $\boldsymbol{a}$ como o valor de $\boldsymbol{b}$, a representación gráfica da hipérbole desprázase diagonalmente tantas unidades como sexa o valor dos parámetros:

- As direccións cara a onde se traslada dependerán dos signos de a e b .
- O punto (x, y) convértese no punto $(x+a, y+b)$:

$$(x, y) \to (x+a, y+b)$$

- O vector de translación é o vector (a,b).
- A orixe de coordenadas (0, 0) trasládase ao punto (*a, b*).

Actividades propostas

44. Representa as seguintes funcións de proporcionalidade inversa a partir da hipérbole $y = \frac{5}{x}$:

a. $y = \frac{10}{x-5} + 3$ b. $y = \frac{1}{x+4} + 8$ c. $y = \frac{100}{x+10} + 1$

d. $y = \frac{10}{2x-4} - 7$ e. $y = 6 - \frac{4}{x}$ f. $y = \frac{20}{5-x} - 2$

45. Estuda o dominio, percorrido, continuidade, simetría, asíntotas e crecemento das funcións de proporcionalidade inversa do exercicio anterior.

46. Escribe unha regra para expresar como se trasladan as asíntotas segundo os parámetros a e b .

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Hipérbole $y = \dfrac{mx+n}{px+q}$

As funcións que se definen mediante esta expresión tamén se representan mediante hipérboles. Para iso, necesitamos facer unha modificación nunha expresión como a estudada no apartado anterior que nos resulte máis doada de manexar e representar:

$$y=\frac{mx+n}{px+q} \rightarrow \text{Dividindo } (mx+n):(px+q) \rightarrow y=\frac{k}{x-a}+b$$

Actividades resoltas

- *Converter a función* $y=\dfrac{3x+2}{x-7}$ *nunha función cuxa expresión sexa máis sinxela de representar.*

  Dividimos $3x+2$ entre $x-7$:

  $$(3x+2)=3(x-7)+23 \Leftrightarrow \frac{(3x+2)}{(x-7)}=\frac{3(x-7)}{(x-7)}+\frac{23}{(x-7)}=\frac{23}{(x-7)}+3$$

  Esta última expresión é doada de representar.

Actividades propostas

47. Representa as seguintes hipérboles:

a. $y=\dfrac{2x-4}{x+5}$ b. $y=\dfrac{3-5x}{x+2}$ c. $y=\dfrac{4x-12}{x-3}$

d. $y=\dfrac{6x+8}{1-x}$ e. $y=\dfrac{7x+5}{x-4}$ f. $y=\dfrac{6x+10}{2x-1}$

48. Representa a gráfica da función: $y=7-\dfrac{15}{x+3}$. A) Cando x crece, "*y*" tende a 7? Ten unha asíntota horizontal *y* = 7? B) Se *x* se achega a –3, o *y* crece? Ten unha asíntota vertical, *x* = –3? C) Analiza se esta hipérbole se axusta aos valores da actividade resolta da táboa:

Doses (mg): *x*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Curacións (%): *y*	3.25	4.0	4.5	4.86	5.1	5.3	5.5	5.64	5.75	5.85

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

3.5. Funcións exponenciais

Estudamos funcións polinómicas, de proporcionalidade inversa… Agora imos estudar outro tipo de funcións.

Hai dous tipos de funcións cuxa **expresión analítica,** ou **fórmula,** é unha **potencia**:

- Se a variable independente está na base, $y = x^3$, chámase **función potencial** e, cando ademais o expoñente é un número natural, é unha función polinómica.
- Se a variable independente está no expoñente, $y = 3^x$, chámase **función exponencial**.

Exemplo:

- Son funcións exponenciais: $y = 10^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = 2^{3x}$, $y = 5^{-x}$.

Unha función exponencial é aquela na que a variable independente está no expoñente.

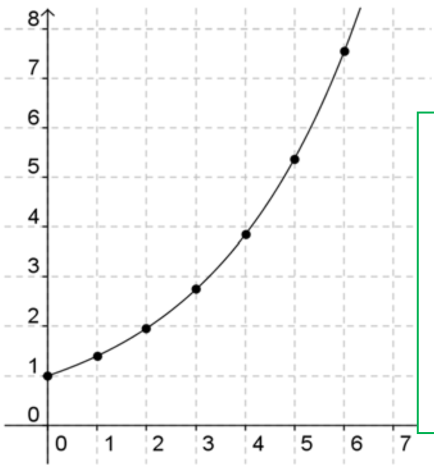
Actividade resolta

- Se a cantidade de bacterias dunha determinada especie se multiplica por 1.4 cada hora, podemos escribir a seguinte fórmula para calcular o número *"y"* de bacterias que haberá ao cabo de *"x"* horas (comezando por unha soa bacteria): $y = 1.4^x$.

Número de bacterias en cada hora
(**Táboa de valores da función**):

Horas transcorridas (*x*)	Núm. bacterias (*y*)
0	1
1	1.4
2	1.96
3	2.74
4	3.84
5	5.38
6	7.53
…	…

Gráfica da función



Actividades propostas

49. Proba agora a realizar no teu caderno unha táboa de valores e a gráfica para un caso similar, supoñendo que o número de bacterias se multiplica cada hora por 2 en lugar de por 1.4.

Observa que os valores de *"y"* aumentan moito máis á presa: mentres que os valores de *"x"* aumentan de 1 en 1, os valores de *y* vanse multiplicando por 2. Isto chámase **crecemento exponencial**. Se en lugar de multiplicar se trata de dividir, temos o caso de **decrecemento exponencial**.

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

50. No teu caderno, representa conxuntamente as gráficas de $y = x^2$ (función potencial) e $y = 2^x$ (función exponencial), con valores de "x" entre 0 e 6. Observa a diferenza cuantitativa entre o crecemento potencial e o crecemento exponencial.

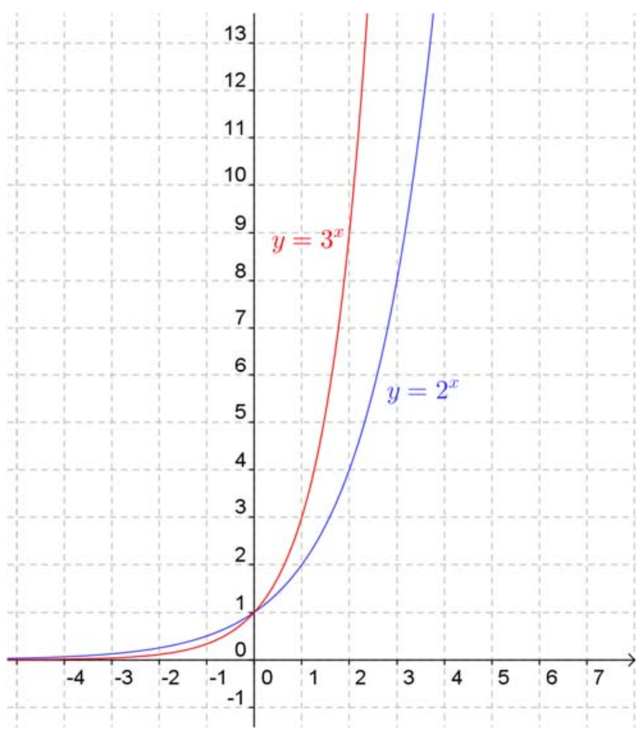
As gráficas das funcións exponenciais $y = b^x$ diferéncianse segundo o valor da base "b". Especialmente diferéncianse se $0 < b < 1$ ou $b > 1$.

No caso no que $b = 1$ temos a función constante $y = 1$, cuxa gráfica é unha recta horizontal.

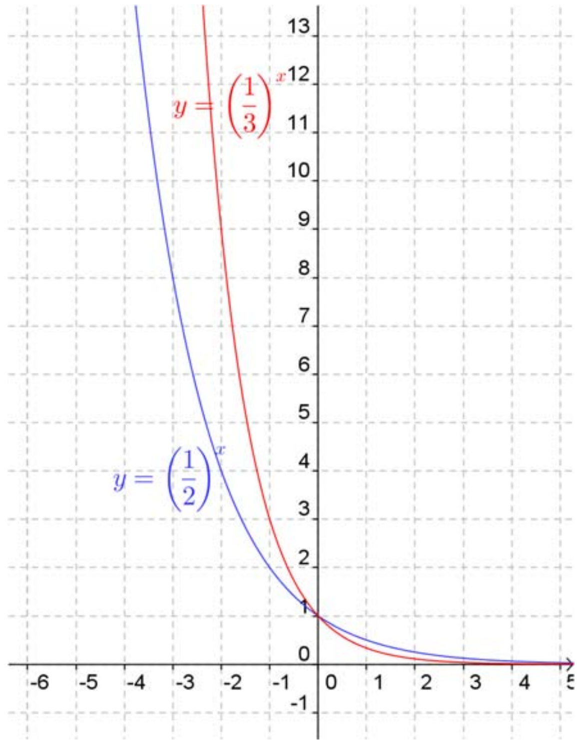
Actividades resoltas

- *Representa as gráficas de $y = 2^x$ e de $y = 3^x$. Tamén as gráficas de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e de $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Analiza as similitudes e as diferenzas.*

Funcións $y = 2^x$ **e** $y = 3^x$



Funcións $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ **e** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



Observamos os seguintes aspectos comúns nas catro gráficas:

- O seu **dominio** é toda a recta real. Ademais son continuas.
- O seu **percorrido** é $(0, +\infty)$. É dicir, "y" nunca é cero nin negativo.
- Pasan todas polos puntos (0, 1), (1, b) e (–1, 1/b).
- A gráfica de $y = a^x$ e a de $y = (1/a)^x$ son simétricas respecto do eixe OY.

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

E observamos tamén aspectos diferenciados en ambas as ilustracións:

Cando a base é $b > 1$

Son funcións **crecentes**. Canto maior é a base, o crecemento é máis rápido.
Cando $x \to -\infty$, a función tende a 0. Polo tanto presenta unha **asíntota horizontal** na parte esquerda do eixe OX.
Aínda que nalgúns casos poida aparentalo, non presentan asíntota vertical pois non se aproximan a ningunha recta.

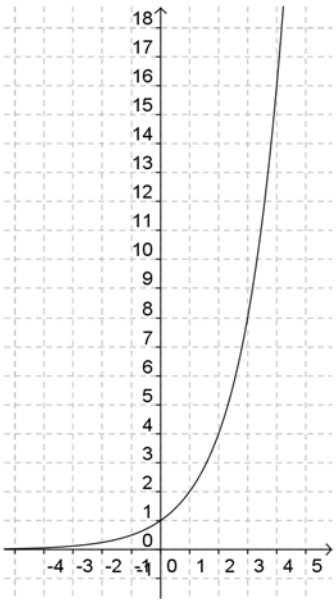
Cando a base é $0 < b < 1$

Son funcións **decrecentes**. Canto menor é a base, o decrecemento é máis rápido.
Cando $x \to +\infty$, a función tende a 0. Polo tanto presenta unha **asíntota horizontal** na parte dereita do eixe OX.
Aínda que nalgúns casos poida aparentalo, non presentan asíntota vertical pois non se aproximan a ningunha recta.

- *Representa graficamente as seguintes funcións exponenciais* $y = 2^x$ *e* $y = 2^{-x}$.

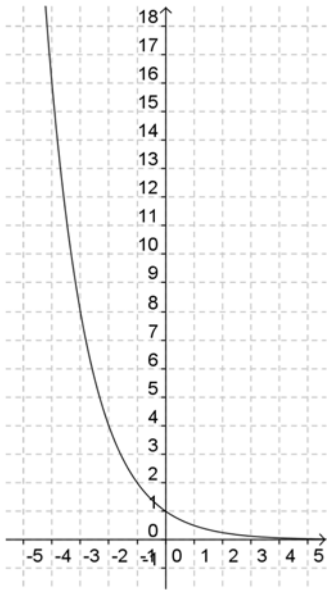
Función $y = 2^x$

x	***y***
…	…
-5	1/32
-4	1/16
-3	1/8
-2	1/4
-1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
…	…



Función $y = 2^{-x}$

x	***y***
…	…
-5	32
-4	16
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	1/2
2	1/4
3	1/8
4	1/16
5	1/32
6	1/64
…	…



Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

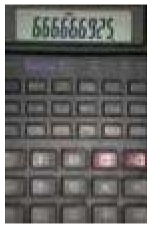
O número *e*. A función *y* = e^x

O número e ten unha gran importancia en Matemáticas, comparable mesmo ao número π aínda que a súa comprensión non é tan elemental e tan popular. Para comprender a súa importancia hai que acceder a contidos de cursos superiores. O seu valor aproximado é e = 2.71828182846... Trátase dun número irracional (aínda que ao velo pode parecer periódico). Este número aparece nas ecuacións de crecemento de poboacións, desintegración de substancias radioactivas, intereses bancarios, etc.

Tamén se pode obter directamente o valor de e coa calculadora (sempre como aproximación decimal, xa que é un número irracional). Normalmente hai unha tecla coa etiqueta e pero podes usar tamén a tecla etiquetada e^x. Para iso terás que calcular o valor de e^1.

A función $y = e^x$ comparte as características descritas máis arriba para funcións exponenciais de base maior que 1.

Actividades propostas



51. Utilizando a calculadora, fai unha táboa de valores e representa no teu caderno as funcións $y = e^x$, $y = e^{-x}$.

52. Unha persoa ingresou unha cantidade de 5 000 euros a un interese do 3 % nun banco, de modo que cada ano o seu capital se multiplica por 1.03.

a. Escribe no teu caderno unha táboa de valores co diñeiro que terá esta persoa ao cabo de 1, 2, 3, 4, 5 e 10 anos.

b. Indica a fórmula da función que expresa o capital en función do número de anos.

c. Representa no teu caderno, graficamente, esta función. Pensa ben que unidades deberás utilizar nos eixes.

53. Un determinado antibiótico fai que a cantidade de certas bacterias se multiplique por 2/3 cada hora. Se a cantidade ás 7 da mañá é de 50 millóns de bacterias, (a) fai unha táboa calculando o número de bacterias que hai cada hora, desde as 2 da mañá ás 12 do mediodía (observa que tes que calcular tamén "cara atrás"), e (b) representa graficamente estes datos.

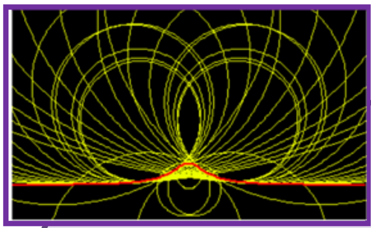
Cultivo da bacteria *Salmonella*

54. Representa no teu caderno as seguintes funcións e explica a relación entre as súas gráficas:

a) $y = 2^x$ b) $y = 2^{x+1}$ c) $y = 2^{x-1}$.

55. Coñecendo a gráfica da función $f(x) = 2^x$, que se viu máis arriba, e sen calcular táboa de valores, debuxa no teu caderno as gráficas das funcións $g(x) = 2^x - 3$ e $h(x) = 2^{x-3}$.

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF



CURIOSIDADES. REVISTA

Foto de M. G. *Agnesi*. RSM

María Gaetana Agnesi

María Gaetana Agnesi é unha matemática italiana cuxa obra máis importante, *Institucións Analíticas*, foi traducida a varios idiomas e utilizada para aprender Matemáticas durante máis de cincuenta anos en moitos países de Europa. Nela trataba con sinxeleza e claridade temas tan novedosos por entón, como o Cálculo Diferencial e Integral. Ao final da súa vida era famosa en toda Europa como unha das mulleres de ciencia máis capaces do século XVIII. No seu honor, un cráter de Venus leva o seu nome. Na *Biblioteca Ambrosiana* de Milán gárdanse as súas obras inéditas que ocupan vintecinco volumes.

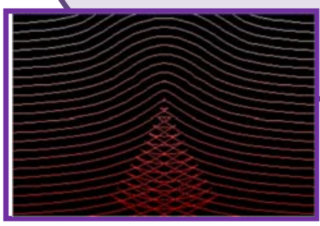
Naceu en Milán no século XVIII e foi unha nena dotada, que con nove anos falaba sete idiomas.

O seu pai tivo 21 fillos e fillas, sendo María a maior, e proporcionoulles a todos unha boa formación, mesmo científica. Gustáballe amosar o talento dos seus fillos nas reunións que organizaba nos seus salóns. Moi pronto os sabios e eruditos e os intelectuais locais empezaron a asistir ao salón dos Agnesi para oír as disertacións de María sobre temas filosóficos, científicos e matemáticos. Á idade de nove anos, María estivo durante unha hora perante unha asemblea culta falando en latín sobre o dereito da muller a estudar ciencias e sobre como as artes liberais non eran contrarias ao sexo feminino.

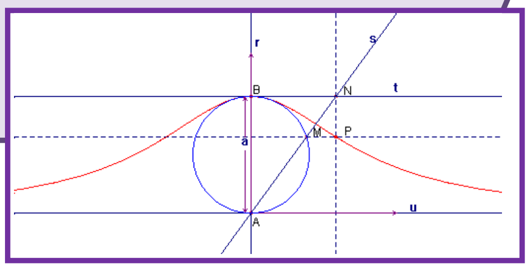
Parece ser que María era somnámbula e, en ocasións, despois de traballar intensamente, exhausta, ía durmir deixando un problema sen resolver sobre o escritorio. Á mañá seguinte, ao espertar, vía que o resolvera mentres durmía. Escribira a solución completa e voltara á cama.

O seu libro, que escribiu para que os seus irmáns puidesen estudar, converteuse nunha obra importante, onde trataba as Matemáticas máis actuais da súa época de forma clara, e tivo unha acollida espectacular. Foi traducido a moitos idiomas e utilizouse como libro de texto en moitas universidades.

Pero… Pero a súa reputación histórica foi distorsionada polo feito de que, nas súas *Instituzioni Analitiche,* traballara coa “curva de Agnesi” ou curva sinusoidal versa, “*versiera*” que se traduciu ao inglés, por un erro do tradutor, John Colson, como a “bruxa de Agnesi” confundindo o termo “*versiera*” por "*aversiera*" que significa bruxa, feiticeira, (“*witch*”).



$$y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$$



Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

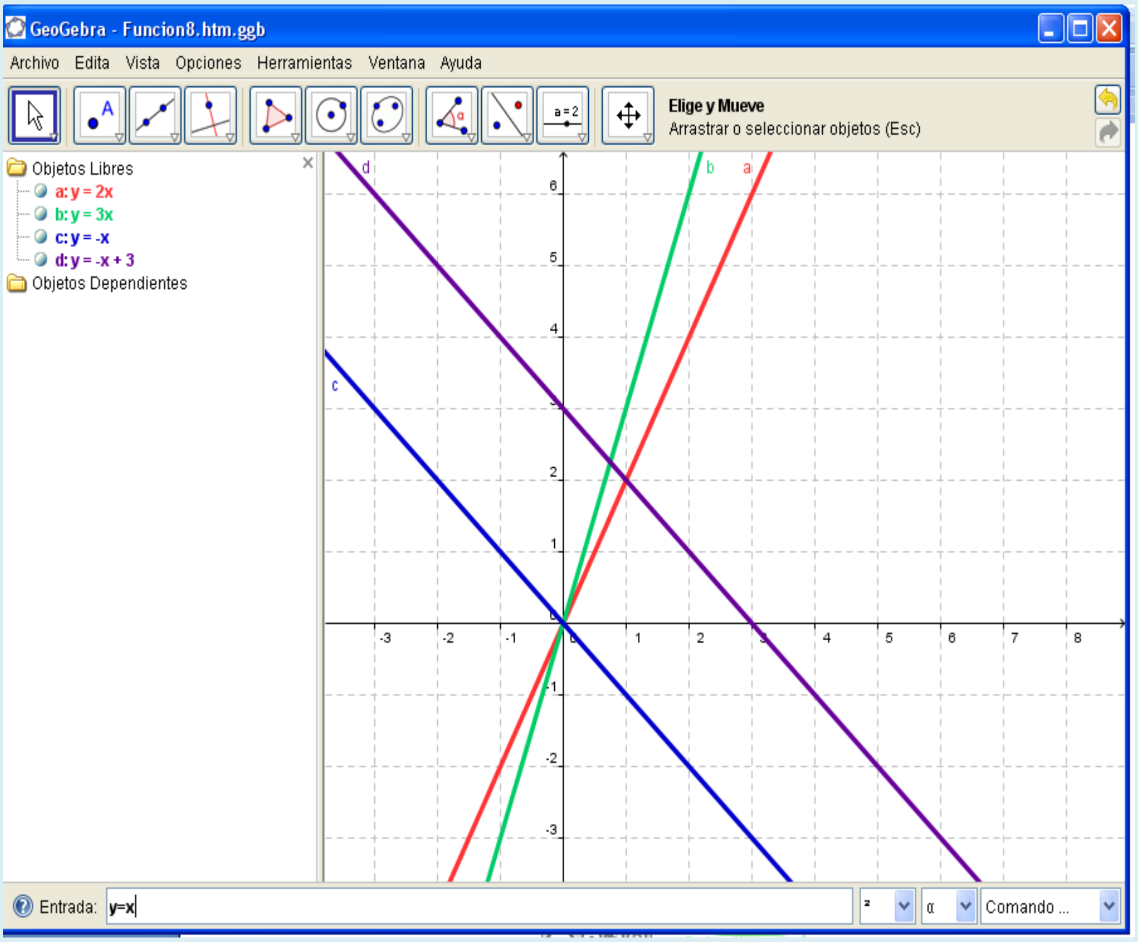
Utiliza o ordenador

Podes utilizar o ordenador para debuxar funcións. Para iso necesitas un programa adecuado como *Derive*, *Cabri*, *Mathematica*, *Xeoxebra*…

Uns son máis sinxelos de utilizar que outros pero, utilizando a axuda, pronto dominarás calquera deles.

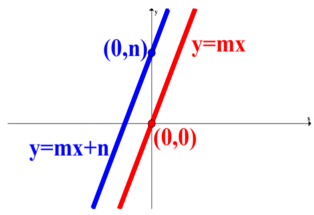
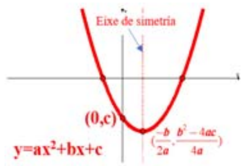
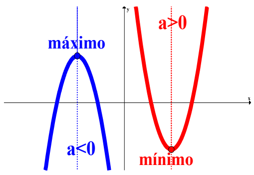
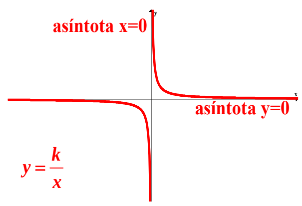
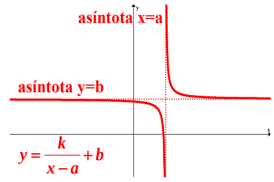
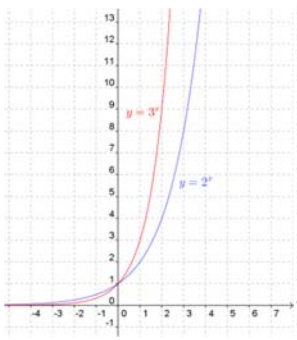
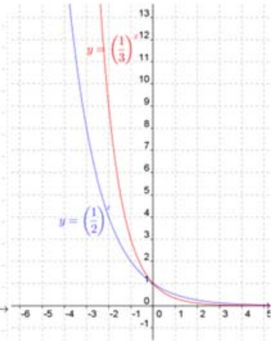
Moitas das gráficas que viches neste capítulo utilizáronos.

Por exemplo, utilizando *Xeoxebra* podemos debuxar rectas:



Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

RESUMO

Función	Relación entre dúas magnitudes de forma que a un valor calquera dunha lle facemos corresponder, como moito, un único valor da outra.	$y = 2x + 3$
Características das funcións	Continuidade. Crecemento e decrecemento. Máximos e mínimos. Simetría. Periodicidade.	A recta $y = 2x + 3$ é continua, crecente, non ten máximos nin mínimos, nin é simétrica, nin periódica.
Función polinómica de primeiro grao: Rectas: ***y = mx*** ***y = mx + n***	Represéntanse mediante **rectas**: Hai dous tipos: - **Funcións lineais ou de proporcionalidade directa**: $y = mx$, pasan pola orixe de coordenadas. - **Funcións afíns**: $y = mx + n$, son translacións no eixe y, n unidades. Pasan polo punto $(0,n)$.	
Función polinómica de segundo grao: Parábolas $y = ax^2 + bx + c$	Represéntanse mediante **parábolas.** **Vértice:** $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2+4\cdot a\cdot c}{4a}\right)$ **Puntos de corte co eixe OX:** $ax^2 + bx + c = 0$. **Punto de corte co eixe OY:** $x=0$, é o punto $(0,c)$ **Eixe de simetría**: é a recta $x = \frac{-b}{2a}$.	 
Función de proporcionalidad e inversa: Hipérboles ***y = k/x***	$\lvert k\rvert$: afasta ou achega a curva á orixe de coordenadas. **Dominio e percorrido:** $\Re - \{0\}$ **Continuidade:** Descontinua en $x = 0$. **Simetría:** Función impar. **Asíntotas:** As rectas $x=0$ e $y = 0$.	
Hipérboles $y = \frac{k}{x-a} + b$	Translación da hipérbole $y = \frac{k}{x}$ polo vector (a, b). Dominio: $\Re - \{a\}$ Percorrido: $\Re - \{b\}$ - Asíntotas: $x = a$; $y = b$.	
Función exponencial	$y = b^x$. Se $b > 1$ é crecente. Se $0 < b < 1$ é decrecente.	 

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Funcións

1. Debuxa no teu caderno un sistema de referencia cartesiano e nel, os puntos seguintes, elixindo unha escala nos eixes que permita debuxalos todos de forma cómoda. Sinala en cada caso a que cuadrante pertence o punto ou, no seu caso, en que eixe está: $A(2, 4)$; $B(0, 1)$; $C(-3, 0)$; $D(2, -1.5)$; $E(1.5, 0)$; $F(0, 0)$; $G(-1, -2/3)$.

2. Escribe as coordenadas de tres puntos situados no terceiro cuadrante.

3. Sitúa nun sistema de referencia cartesiano os puntos seguintes:

$A(0, 3)$; $B(0, 1.7)$; $C(0, -1)$; $D(0, -4)$. Que teñen en común todos eles?

4. Escribe as coordenadas e representa tres puntos do eixe de abscisas. Que teñen en común?

5. Debuxa no teu caderno un triángulo rectángulo cun cateto igual a 3, e o vértice do ángulo recto na orixe de coordenadas. Indica as coordenadas de todos os vértices.

6. Indica cales das seguintes correspondencias son funcións:

a) A cada número natural asócianselle os seus divisores primos.

b) A cada circunferencia do plano asóciaselle o seu centro.

c) A cada circunferencia do plano asóciaselle un diámetro.

7. A distancia, *d*, percorrida por un tren, depende do número de voltas, *n*, que dá cada roda da locomotora.

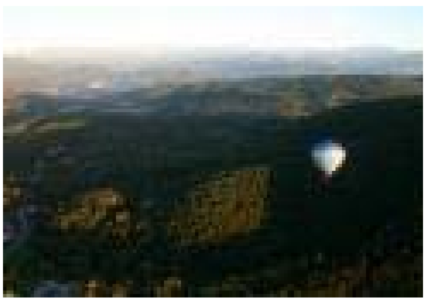
a) Escribe a fórmula que permite obter *d* coñecido *n*, sabendo que o diámetro das rodas da locomotora é de 78 cm.

b) Debuxa a gráfica.

c) Que distancia terá percorrido o tren cando a roda teña dado mil voltas? (toma como valor de π o número 3.14).

d) Cantas voltas terá dado a roda ao cabo de 7 km?

8. Un globo sonda utilizado polo Servizo Meteorolóxico dos Pireneos para medir a temperatura a distintas alturas leva incorporado un termómetro. Obsérvase que cada 180 m de altura a temperatura diminúe un grao. Certo día a temperatura na superficie é de 9°C. Determina:



a) Que temperatura haberá a 3 km de altura?

b) A que altura haberá unha temperatura de –30°C?

c) Escribe unha fórmula que permita calcular a temperatura T coñecendo a altura A. Confecciona unha táboa e debuxa a gráfica. Que tipo de función é?

d) Se a temperatura na superficie é de 12°C, cal é entón a fórmula? Que tipo de función é?

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

9. Debuxa a gráfica da función *parte enteira*: $y = E(x)$, que indica o número enteiro menor, máis próximo a x, así, por exemplo, E(2.3) = 2.

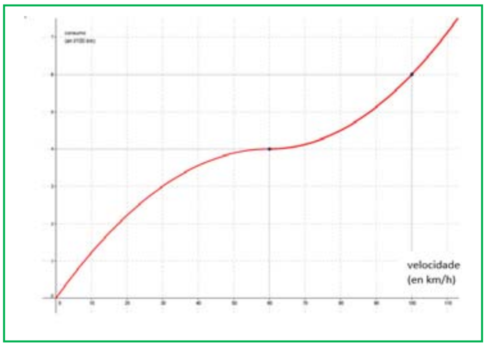
10. Un rectángulo ten un perímetro de 100 cm. Chama x á lonxitude dun dos seus lados e escribe a fórmula que dá a área en función de x. Debuxa a súa gráfica. Que tipo de función é?

11. Unha caixa cadrada ten unha altura de 20 cm. Como depende o seu volume do lado da base? Debuxa a gráfica da función que resulta.

12. Cunha folla de papel de 32 cm de longo e 22 cm de ancho recórtase un cadrado de 2 cm de lado en cada unha das esquinas, dóbrase e constrúese unha caixa. Cal é o volume da caixa? E se se recortan cadrados de 3 cm? Cal é o volume se o lado do cadrado recortado é x? Escribe a fórmula e debuxa a gráfica.

13. Constrúense boias unindo dous conos iguais pola base, sendo o diámetro da base de 90 cm. O volume da boia é función da altura "*a*" dos conos. Se queremos unha boia para sinalar a entrada de barcos a pedais bástanos cunha altura de 50 cm: que volume terá? Se é para barcos maiores precísase unha altura de 1.5 m: que volume terá? Escribe a expresión da función que calcula o volume en función da altura. Debuxa a súa gráfica.

14. O consumo de gasolina dun coche por cada 100 km vén representado mediante a gráfica. Utiliza a gráfica para explicar como varía o consumo de gasolina dependendo da velocidade do coche.



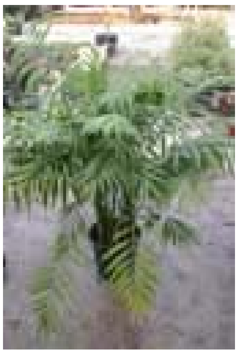
a) Cal é a variable dependente?

b) E a independente?

c) Cal é o consumo para unha velocidade de 60 km/h?

d) A que velocidade o consumo é de 6 l/100 km?

15. Ao estudar o crecemento dunha planta observamos que durante os primeiros 30 días faino moi á présa, nos 15 días seguintes o crecemento é máis lento e despois mantense coa mesma altura. Realiza un bosquexo da gráfica que relaciona o tempo coa altura acadada pola planta.



Se temos máis información podemos mellorar o bosquexo. Por exemplo, fai a táboa e a gráfica no caso de que o crecemento da planta se axuste ás seguintes fórmulas (o tempo exprésase en días e a altura en centímetros):

a) Durante os primeiros 30 días: altura = 4 · tempo.

b) Nos 15 días seguintes: altura = 90 + tempo.

c) A partir do día 45: altura = 135.

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Características dunha función

16. Xaquín chegou a un acordo co seu pai para recibir a súa paga. Cobrará 20 euros ao mes o primeiro ano e 5 euros máis por cada ano que pase. Canto lle corresponderá dentro de 7 anos? Fai unha táboa de valores e representa a súa gráfica. É continua? Indica os puntos de descontinuidade e o seu tipo. Busca unha fórmula que permita calcular a paga cando teñan pasado *n* anos.

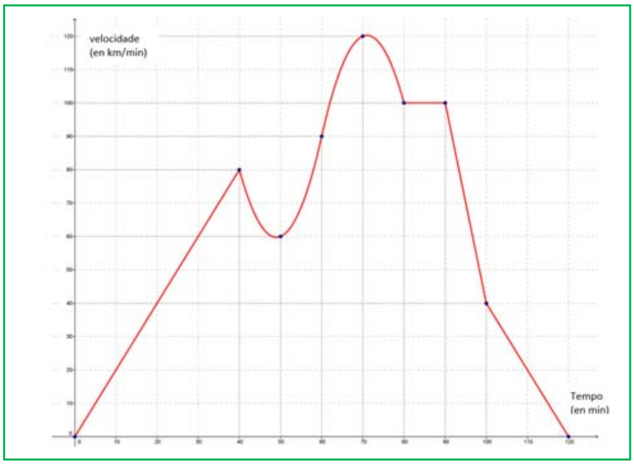
17. Ao entrar no aparcamento dun centro comercial encontramos un letreiro cos prezos que nos indican que 1 hora ou fracción custa 1.20 € e as dúas primeiras horas son gratis para os clientes con tarxeta de compra do centro. Fai unha táboa que relacione o tempo co importe pagado durante unha xornada completa (12 horas) nos casos dun cliente con tarxeta ou sen ela. Deseña a gráfica e contesta ás preguntas:

a) Que valores toma a variable dependente? E a independente?

b) Podes unir os puntos da gráfica? Como se debe facer?

c) Existen puntos de descontinuidade? Se a resposta é afirmativa, sinálaos e explica o seu significado.

18. Durante unha viaxe, a velocidade do coche varía dependendo do tipo de estrada, das condicións nas que se encontra, do tempo meteorolóxico… a seguinte gráfica reflicte a velocidade dun vehículo en cada instante do traxecto que seguiu.



a) É funcional a relación de dependencia entre o tempo e a velocidade?

b) Cal é a variable independente? E a dependente?

c) A que velocidade ía cando levaba unha hora de viaxe? En que momentos ía a unha velocidade de 40 km/h?

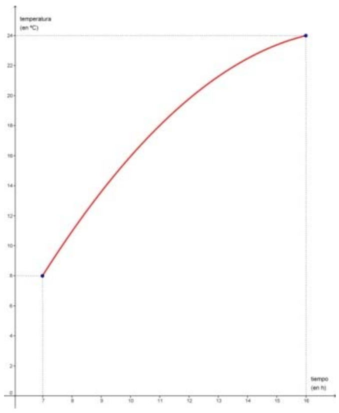
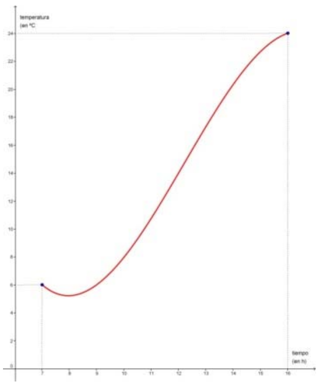
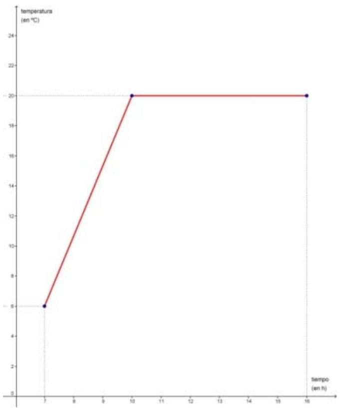
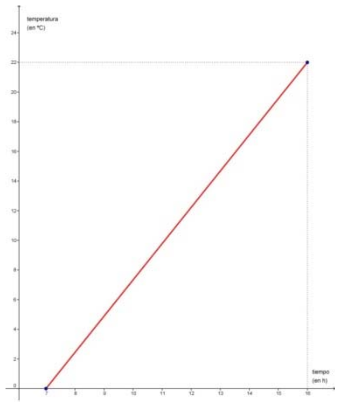
d) Indica os intervalos nos que a velocidade aumentou e diminuíu. Foi constante nalgún momento? Cando? Durante canto tempo?

e) Cal foi a velocidade máxima acadada ao longo de todo a viaxe? En que momento se acadou? E durante a primeira hora da mesma?

f) Cal foi a velocidade mínima acadada ao longo de toda a viaxe? Cando se acadou? E entre a primeira media hora e a hora e media?

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

19. As gráficas seguintes amosan a evolución, un día calquera, da temperatura acadada entre as 7 da mañá e as 4 da tarde en catro cidades (Madrid, Granada, Valladolid e Sevilla):

a) Explica a monotonía de todas as gráficas.

b) Nalgunha cidade a temperatura se mantivo constante durante todo o intervalo? E en parte del?

c) Que cidade cres que presenta un cambio de temperatura máis suave ao longo de toda a mañá?

d) Tendo en conta que en Madrid o incremento da temperatura foi sempre lineal, en Granada a temperatura mínima se acadou despois das 7 h, en Sevilla ás veces se mantivo constante, indica que gráfica corresponde a cada unha das cidades e explica cales foron as temperaturas máximas e mínimas en cada unha delas.

20. Unha viaxe realizada por un tren, nun certo intervalo da mesma, vén dada da seguinte forma: Durante as dúas primeiras horas, a distancia "*d*" (en quilómetros) ao punto de partida é: $2t + 1$, onde "*t*" é o tempo (en horas) de duración do traxecto. Entre a 2ª e 3ª hora, esta distancia vén dada por $-t + 7$. Entre a 3ª e 4ª hora, ambas as dúas inclusive, $d = 4$. Desde a 4ª e ata a 6ª (inclusive), a distancia axústase a $3t - 8$.

a) Realiza unha táboa e unha gráfica que recolla a viaxe da forma máis precisa posible (para iso debes calcular, como mínimo, os valores da variable tempo nos instantes 0, 2, 3, 4 e 6).

b) Explica se a relación anteriormente explicada entre a distancia percorrida e o tempo tardado en percorrela é funcional.

c) A relación anterior, presenta algunha descontinuidade?

d) En que momento a distancia ao punto de partida é de 7 km?

e) Que indican os puntos de corte da gráfica cos eixes?

f) Determina os intervalos onde a función é crecente, decrecente e constante.

g) Encontra os puntos onde a función acada os seus máximos e mínimos relativos e absolutos. Interpreta o significado que poidan ter.

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

21. Representa graficamente as seguintes funcións, estudando nelas todas as características que se traballaron no capítulo: continuidade, monotonía, extremos, simetría e periodicidade.

a) Valor absoluto dun número: $f(x) = |x|$, que se define: $|x| = \begin{cases} x, & se\ x > 0 \\ -x, & se\ x < 0 \end{cases}$.

b) Oposto e inverso do número *x*: $f(x) = \frac{-1}{x}$.

Tipos de funcións

22. Escribe a ecuación da recta paralela a $y = 5x + 1$ de ordenada na orixe 6.

23. Sen representalos graficamente, di se están aliñados os puntos $A(2, 4)$, $B(6, 9)$ e $C(12, 15)$.

24. Debuxa no teu caderno, nun mesmo sistema coordenado, as rectas: $y = 2x$; $y = -2x$; $y = 3x$; $y = -3x$.

25. Debuxa no teu caderno, nun mesmo sistema coordenado, as rectas: $y = 2x + 1$; $y = 2x + 3$; $y = 2x - 1$; $y = 2x - 2$; $y = 2x - 3$. Como son?

26. Unha empresa de alugueiro de vehículos ofrece dúas fórmulas diferentes. Fórmula 1: Alúgao por 300 euros ao día con quilometraxe ilimitada. Fórmula 2: Alúgao por 200 euros ao día e 7 euros o quilómetro. Queremos facer unha viaxe de 10 días e mil quilómetros, canto nos custará con cada unha das fórmulas? Como non sabemos a quilometraxe exacta que acabaremos facendo, interésanos facer un estudo para saber a fórmula máis beneficiosa. Escribe as fórmulas de ambas as situacións e debuxa as súas gráficas. Razoa, a partir destas gráficas, que fórmula é máis rendible segundo o número de quilómetros que vaiamos facer.

27. Calcula a ecuación e debuxa a gráfica das rectas seguintes:

a) A súa pendente é 3 e a súa ordenada na orixe é 5.

b) Pasa polos puntos $A(1, 4)$ e $B(0, 9)$.

c) A súa ordenada na orixe é 0 e a súa pendente é 0.

d) Pasa polos puntos $C(-2, 7)$ e $D(-3, 10)$.

e) Pasa polo punto (a, b) e ten de pendente m.

28. Debuxa no teu caderno, sen calcular a súa ecuación, as rectas seguintes:

a) De pendente 2 e ordenada na orixe 0.

b) Pasa polos puntos $A(1, 3)$ e $B(2, 1)$.

c) A súa pendente é 2 e pasa polo punto $(4, 5)$.

29. Calcula o vértice, o eixe de simetría e os puntos de intersección cos eixes das seguintes parábolas. Debuxa as súas gráficas.

a) $y = x^2 + 8x - 13$ b) $y = -x^2 + 8x - 13$ c) $y = x^2 - 4x + 2$ d) $y = x^2 + 6x$ e) $y = -x^2 + 4x - 7$

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

30. Debuxa a gráfica de $y = 2x^2$. Fai un modelo. Determina o vértice das seguintes parábolas e utiliza o modelo para debuxar a súa gráfica:

a) $y = 2x^2 + 8x - 12$ b) $y = -2x^2 + 8x - 10$ c) $y = 2x^2 - 4x + 2$ d) $y = 2x^2 + 6x$

Axuda: $2x^2 + 8x - 12 = 2(x^2 + 4x - 6) = 2((x + 2)^2 - 4 - 6) = 2((x + 2)^2 - 10)$. Vértice $(-2, -10)$

31. Axusta unha función polinómica aos datos da táboa:

***x*:**	0	1	2	3	4	5	6
***y*:**	1	5	11	19	29	41	55

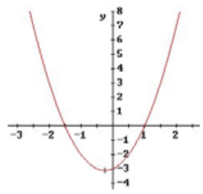
32. Debuxa as gráficas de: $y = 2/x$; $y = 4 + 2/x$; $y = 2/(x + 3)$; $y = 4 + 2/(x + 3)$. Indica en cada caso os puntos de descontinuidade e as asíntotas.

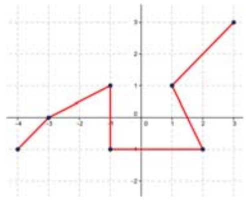
33. Debuxa as gráficas de: $y = 3^x$; $y = (1/3)^x$; $y = 3^{-x}$; $y = (1/3)^{-x}$; $y = 2 + 3^x$; $y = 3^{x+2}$.

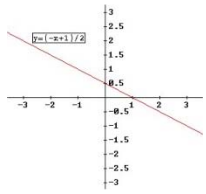
Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

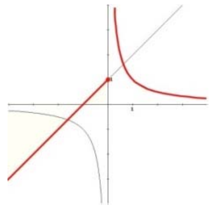
AUTOAVALIACIÓN

1. A única gráfica que non corresponde a unha función é:

a) 

b) 

c) 

d) 

2. A única táboa que non pode ser dunha relación funcional é:

a)

x	y
0	5
1	7
2	32
3	41

b)

x	y
–1	–2
0	–2
1	–2
2	–2

c)

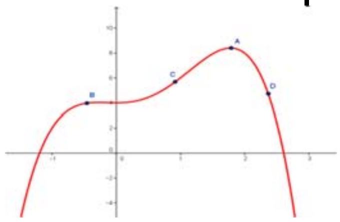
x	y
–3	1
–1	2
0	3
2	4

d)

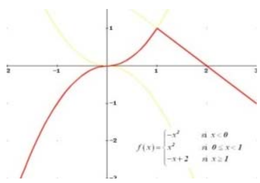
x	y
0	1
1	2
4	3
0	4

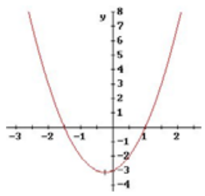
3. O máximo absoluto da función acádase no punto:

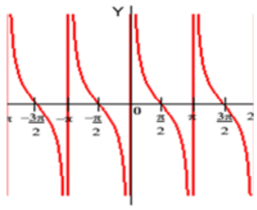
a) b) c) d)

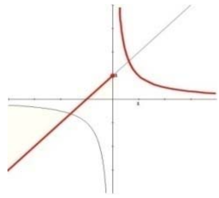


4. A única gráfica que corresponde a unha función periódica é:

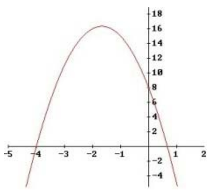
a) 

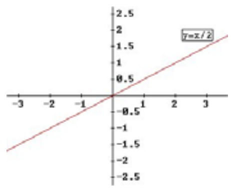
b) 

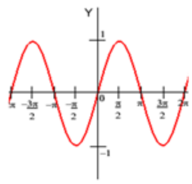
c) 

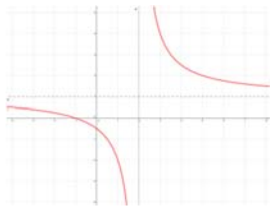
d) 

5. A única gráfica que corresponde a unha función que é sempre crecente é:

a) 

b) 

c) 

d) 

6. A única función afín que, ademais, é lineal é:

a) $y = -7x$ b) $y = 7x + 4$ c) $y = -4x + 7$ d) $y = -6x - 9$

7. A única función cuadrática é:

a) $y = -8x$ b) $y = 2x + 3$ c) $y = -2x^2 + 3x$ d) $y = -2x^3 - 3x$

8. A función cuadrática que ten o seu vértice no punto (2, 0) é:

a) $y = -2x^2$ b) $y = x^2 - 4x + 4$ c) $y = -2x^2 + 4x$ d) $y = -x^2 + 4x - 2$

9. A hipérbole de asíntotas $x = 3$ e $y = 5$ é:

a) $y = 5 + 8/(x - 3)$ b) $y = 3 + 6/(x - 5)$ c) $y = -5 + 2/(x + 3)$ d) $y = 5 + 1/(x + 3)$

10. A única función exponencial é:

a) $y = x^7 + x^6$ b) $y = 3^x$ c) $y = 3^x + x^2$ d) $y = 1/3^x + x^2$

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Matemáticas orientadas ás ensinanzas aplicadas

4ºA da ESO

Capítulo 7: Estatística. Azar e probabilidade

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: María Molero e Andrés García Mirantes

Revisoras: Raquel Caro e Nieves Zuasti

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Índice

Resumo

A estatística ocúpase de interpretar gran número de datos. O Instituto Nacional de Estatística recolle estudos de todo tipo sobre a poboación española. Entra en Internet escribindo INE e terás un montón de información ao teu alcance sobre: a) Entorno físico e medio ambiente; b) Demografía e poboación; c) Sociedade; d) Economía…

Nun estudo estatístico conflúen distintas partes da estatística, a Teoría de Mostras que indica a forma de seleccionar unha mostra para que sexa representativa da poboación, a estatística descritiva que utiliza táboas, gráficos e parámetros estatísticos como a media e a desviación típica para describir os datos, e a inferencia estatística que utiliza a Teoría de Probabilidades para obter conclusións.

Como saberás, en tempo de Xesucristo, xa o emperador Augusto fixo censos para coñecer a poboación do Imperio Romano.

A Teoría da probabilidade tivo os seus inicios moi ligados aos xogos de azar, e é sorprendente que con ese inicio teña resultado de tanta utilidade na Ciencia. Preguntábanse que é máis probable ao tirar dous dados, que a suma das súas caras superiores sexa 9 ou sexa 10. Analizando xogos como este foi avanzando a Ciencia.

Autores: María Molero e Andrés García
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

1. ESTATÍSTICA

1.1. MOSTRAS. ESTUDOS ESTATÍSTICOS

Se queremos facer un estudo estatístico temos que:

a) Recoller os datos.

b) Describir eses datos con táboas e gráficas, cálculo de parámetros estatísticos….

c) Extraer conclusións.

Para recoller os datos e determinar os valores da variable pódese utilizar toda a poboación, todo o universo sobre o que se realiza o estudo, ou facer unha mostra. En moitas ocasións non é conveniente recoller valores de toda a poboación, porque é complicado ou demasiado custoso, ou mesmo porque é imposible como no caso dun control de calidade no que se destrúa o obxecto a analizar. A parte da estatística que se ocupa de cómo seleccionar adecuadamente as mostras denomínase Teoría de Mostras.

Poboación ou universo é todo o conxunto de individuos sobre o que se realiza o estudo.

Unha **mostra** é un subconxunto representativo desa poboación.

Cada un dos elementos da poboación é un **individuo**.

As características da poboación que se estudan denomínanse **variables estatísticas**, que se clasifican en **cuantitativas** e **cualitativas** segundo os valores que tomen sexan ou non numéricos. As variables cuantitativas que toman valores illados denomínanse **variables discretas** e as que poden tomar calquera valor dun intervalo da recta real, **variables continuas**.

A parte da Estatística que ordena, analiza e representa un conxunto de datos para describir as súas características denomínase **Estatística Descritiva**.

Para extraer conclusións utilízanse as probabilidades e a parte da Estatística que se ocupa diso é a **Inferencia Estatística**.

Exemplos:

- Se queremos coñecer as preferencias en deportes do alumnado de 4º, é posible preguntar a toda a poboación (alumnado de 4º), aínda que é adecuado elixir unha mostra representativa, seleccionando algúns estudantes.
- Neste estudo sobre preferencias deportivas, a variable utilizada é cualitativa.
- Para coñecer a intención de voto perante unhas eleccións europeas, municipais, autonómicas… utilízanse mostras, pois preguntar a toda a poboación sería moi custoso (e iso xa se fai nas eleccións). A variable neste caso tamén é cualitativa.
- Para estudar o que máis preocupa a unha poboación: paro, terrorismo, corrupción… tamén se utilizan mostras. Neste caso sería moi custoso preguntar a toda a poboación, aínda que sería factible. A variable neste caso tamén é cualitativa.
- Pero se unha fábrica quere coñecer as horas de vida útil dunha lámpada, unha neveira, un camión… non pode poñer a funcionar toda a poboación (todas as lámpadas ou neveiras ou camións…) ata que se avaríen pois queda sen produción. Neste caso é imprescindible seleccionar unha mostra. A variable neste caso é cuantitativa e o tempo toma calquera valor, é unha variable cuantitativa continua.
- Se preguntamos polo número de irmáns é unha variable cuantitativa discreta.
- En *control de calidade* fanse estudos estatísticos e tómanse mostras.

Actividades propostas

1. Queremos realizar un estudo estatístico sobre o tempo dedicado ao estudo polo alumnado de ESO de Madrid. Para iso selecciónanse adecuadamente 100 alumnos. Indica cal é a poboación, cal a mostra, que tamaño ten a mostra e quen sería un individuo.

2. Queres pasar unha enquisa para coñecer, o mesmo que no problema anterior, o tempo dedicado ao estudo, neste caso o dos compañeiros e compañeiras do teu centro escolar. Pasaríaslla só ás mozas? Só aos mozos? Preguntarías aos mellores da clase? Aos de peores notas? Indica o criterio que seguirías para seleccionar a mostra á que preguntar.

1.2. Variable discreta. Táboas e gráficos

Táboas

Ao facer un estudo estatístico ou realizar un experimento aleatorio a información obtida resúmese nunha táboa ou distribución de frecuencias.

Exemplo:

Posibles resultados	Frecuencia absoluta
Gústalles	28
Non lles gusta	12
Total	40

- Preguntamos a 40 estudantes de 4º se lles gusta, ou non, o fútbol. Na táboa da marxe reflectimos os resultados.

É unha táboa de frecuencias absolutas.

Ao dividir a frecuencia absoluta entre o número total temos a frecuencia relativa, así a frecuencia relativa dos que lles gusta o fútbol é 28/40 = 0.7, e a dos que non lles gusta o fútbol é 12/40 = 3/10 = 0.3.

A **frecuencia absoluta** é o número de veces que se obtivo ese resultado.
A **frecuencia relativa** obtense dividindo a frecuencia absoluta entre o número total de datos.

A suma das frecuencias relativas é sempre igual a 1.

Multiplicando por 100 obtéñense as porcentaxes.

Posibles resultados	Frecuencias relativas	Porcentaxe
Gústalles	0.7	70
Non lles gusta	0.3	30
Suma total	1	100

Actividade resolta

- *Obtivéronse os datos sobre o número de visitas que se fixeron aos Textos Marea Verde de Matemáticas nos meses indicados e reflectíronse nunha táboa. Fai unha táboa de frecuencias absolutas, relativas e porcentaxes, de frecuencias acumuladas absolutas e de frecuencias relativas acumuladas.*

Marea verde	Frecuencias absolutas	Frecuencias relativas	Porcentaxes	Frecuencias acumuladas absolutas	Frecuencias acumuladas relativas
Setembro	1 834	0.51	51	1 834	0.52
Outubro	956	0.26	26	2 790	0.77
Novembro	432	0.12	12	3 222	0.89
Decembro	389	0.11	11	3 611	1
TOTAL	3 611	1	100		

Observa que as **frecuencias acumuladas** se obteñen sumando a frecuencia anterior e indica, neste exemplo, o número de visitas ata ese momento.

Resultados	Frecuencias absolutas
1	17
2	12
3	17
4	15
5	21
6	14

Actividades propostas

3. Copia no teu caderno e completa a seguinte táboa de frecuencias absolutas dos valores obtidos ao tirar un dado, coas frecuencias relativas e porcentaxes, e con frecuencias acumuladas absolutas e frecuencias relativas acumuladas.

Autores: María Molero e Andrés García
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Gráficos estatísticos

As representacións gráficas axudan a comprender o significado dos datos.

Dada unha táboa de frecuencias (absolutas, relativas, porcentaxes, acumuladas absolutas ou acumuladas relativas) para representar un **diagrama de rectángulos ou de barras** trázase para cada valor da variable un rectángulo ou barra da altura proporcional á frecuencia que se estea representando.

Se se unen os puntos medios dos extremos superiores das barras temos un **polígono de frecuencias ou diagrama de liñas**.

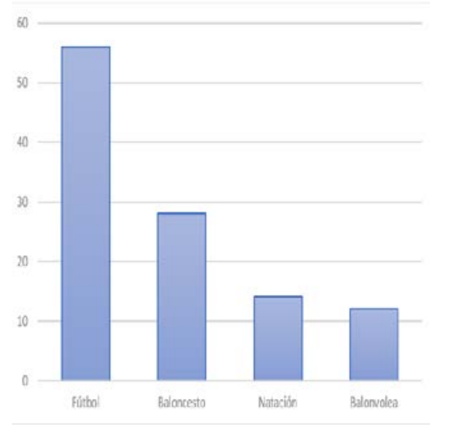
Nun **diagrama de sectores** debúxase un círculo que se divide en sectores de amplitudes proporcionais ás frecuencias.

Actividade resolta

- *Temos un estudo estatístico sobre as preferencias deportivas do alumnado de 4º dun determinado centro escolar. Represéntaos nun diagrama de barras de frecuencias absolutas, nun polígono de frecuencias relativas e nun diagrama de sectores.*

Deportes	Frecuencia Absoluta
Fútbol	56
Baloncesto	28
Natación	14
Balonvolea	12

Diagrama de barras de frecuencias absolutas



Polígono de frecuencias relativas ou diagrama de liñas

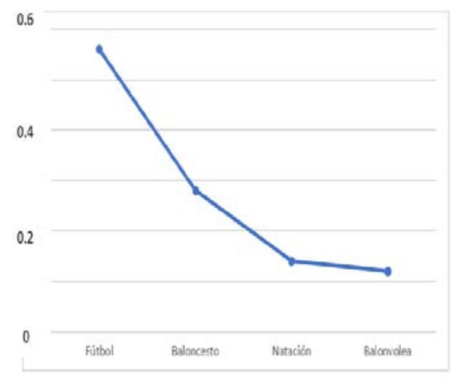
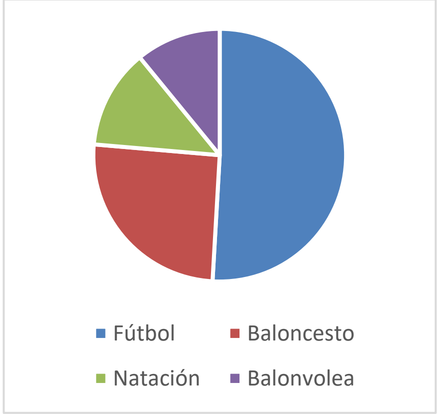


Diagrama de sectores



Actividades propostas

4. Coa táboa de valores do exercicio anterior, debuxa no teu caderno o diagrama de frecuencias relativas, o polígono de frecuencias absolutas acumuladas e o diagrama de sectores.

5. Fai un estudo estatístico preguntando aos teus compañeiros e compañeiras de clase sobre o número de libros que len ao mes. Confecciona unha táboa e represéntaa nun diagrama de rectángulos, un polígono de frecuencias e un diagrama de sectores.

6. Selecciona unha mostra entre os teus compañeiros e compañeiras e realiza un estudo estatístico sobre o deporte que máis lle gusta a cada un. Fai a representación que sexa máis sinxela de interpretar.

Utiliza o ordenador

- As follas de cálculo son unha ferramenta moi útil para traballar a estatística. Suman, multiplican, e debuxan os gráficos con gran facilidade. Para a Actividade resolta anterior, copiamos a táboa cos datos na folla de cálculo a partir da casa A1. Calculamos a suma total na casa B6, simplemente apertando a tecla: $\sum$, ou ben escribindo =SUMA(B2:B5) que significa que queremos sumar o que hai desde a casa B2 á B5.

Para calcular as frecuencias relativas escribimos en C1: Frecuencia relativa e, en C2, escribimos o signo igual (co que lle estamos dicindo á folla que imos calcular algo), facemos clic na casa B2, escribimos: /, e facemos clic en B6: =B2/B6, sáenos *0,50909…* A casa B2 va ir variando cando calculemos C3, C4…, pero queremos que a casa B6 quede fixa. Para dicir iso, poñemos o símbolo $: =B2/$B$6. E agora arrastramos ata a casa C5 (se arrastramos antes de poñer o $ sáenos un erro, pois está dividindo por cero ao ir modificando a casa). Temos as frecuencias relativas calculadas.

Para debuxar os gráficos só temos que seleccionar as filas e columnas que nos interesen e no menú de "Inserir" seleccionar o tipo de gráfico desexado: Columna, Liña, Circular…

Autores: María Molero e Andrés García
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

1.3. Parámetros de centralización e dispersión

Parámetros de centralización

Xa sabes que os parámetros de centralización nos dan información sobre o "*centro*" dun conxunto de datos. Estudamos a media aritmética, a moda e a mediana.

Actividade resolta

- *Neves obtivo en Matemáticas as seguintes notas: 8, 4, 6, 10 e 10. Calcula a súa media, a súa moda e a súa mediana.*

A súa nota media calcúlase sumando todas as notas: 8 + 4 + 6 + 10 + 10 = 38, e dividindo a suma entre o número total de notas que é 5: 38/5 = 7.6.

A moda é 10 pois é o valor máis frecuente.

Unha forma de calcular a mediana é ordenar os valores de menor a maior, e se o número de datos é impar, o valor central é a mediana. Se o número de datos é par, a mediana é a media dos dous datos centrais.

No noso caso: $4 \leq 6 \leq \mathbf{8} \leq 10 \leq 10$, polo que a mediana é 8.

Para calcular a **media** (**m**) de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, súmanse todos e divídese polo número total de datos (n).

$$\textbf{Media} = m = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n$$

Que é o que está de moda? O que máis se leva.

A **moda** (***mo***) dunha distribución de frecuencias é o valor máis frecuente.

A **mediana** (***me***) é o valor central que deixa por debaixo o mesmo número de valores da variable que por enriba.

Utiliza o ordenador

- Para calcular a media, a mediana e a moda coa folla de cálculo, copiamos na casa B2, B3… os datos: 8, 4, 6, 10 e 10. Escribimos na casa A7, Media, e para calcular a media escribimos un signo igual en B7. Buscamos, despregando as posibles funcións, a función TERMO MEDIO, e escribimos

=TERMO MEDIO(B2:B6),

que significa que calcule a media dos valores que hai nas casas desde B2 ata B6.

Do mesmo modo calculamos a mediana buscando nas funcións ou escribindo =MEDIANA(B2:B6) e a moda buscando nas funcións ou escribindo =MODA(B2,B6).

Autores: María Molero e Andrés García
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

7. Dadas as temperaturas nunha cidade a unha hora determinada o día 1 de cada mes tense a seguinte táboa:

	Xaneiro	Febreiro	Marzo	Abril	Maio	Xuño	Xullo	Agosto	Setembro	Outubro	Novembro	Decembro
Temperatura	–2	5	8	9	11	13	27	33	21	14	9	4

a) Calcula a temperatura media, a moda e a mediana.
b) Utiliza o ordenador para comprobar o resultado.

8. Calcula a media, a mediana e a moda das distribucións seguintes:

a) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 1 000 b) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 10 c) 0, 0, 4, 5, 7, 9, 9, 100, 200

Utiliza o ordenador para comprobar os resultados.

Observa en cada caso como inflúen os valores extremos. Inflúen na moda? E na mediana? E na media?

Actividade resolta

- *Nunha clase de 40 alumnos as cualificacións foron:*

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	**Suma**
f_i	1	2	0	1	2	8	7	6	6	4	3	**40**

A cada nota chamámola x_i e á frecuencia absoluta desa nota: f_i. Isto significa que houbo un cero, dos uns, ningún 2… e 3 deces.

Para calcular a media aritmética engadimos á táboa unha fila cos produtos $x_i \cdot f_i$ e sumamos esa fila:

$x_i \cdot f_i$	0	2	0	3	8	40	42	42	48	36	30	**251**

Ao ser 40 o número total de estudantes a media é: **Media** = m = 251 / 40 = 6.275.

A **moda** é a nota máis frecuente, que é mo = 5 pois é a de maior frecuencia.

Para calcular a **mediana** engadimos unha nova fila, a das frecuencias acumuladas:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencias acumuladas	1	3	3	4	6	14	21	27	33	37	40

A metade dos datos é 40/2 = 20, e como 14 < 20 < 21, a mediana é 6.

Se a variable toma os valores $x_1, x_2, …, x_n$, cunha frecuencia absoluta $f_1, f_2, …, f_n$, para calcular a **media** multiplícase cada valor pola súa frecuencia absoluta, súmanse estes produtos e divídese por n o total de valores da variable:

$$\mathbf{m} = \textbf{Media} = (x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + … + x_n \cdot f_n) / (f_1 + f_2 + … + f_n)$$

A **moda** é a frecuencia máis alta.

Pode ocorrer que unha distribución de frecuencias teña máis dunha moda. Por exemplo, a distribución:

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	10	9	10	8	7	10

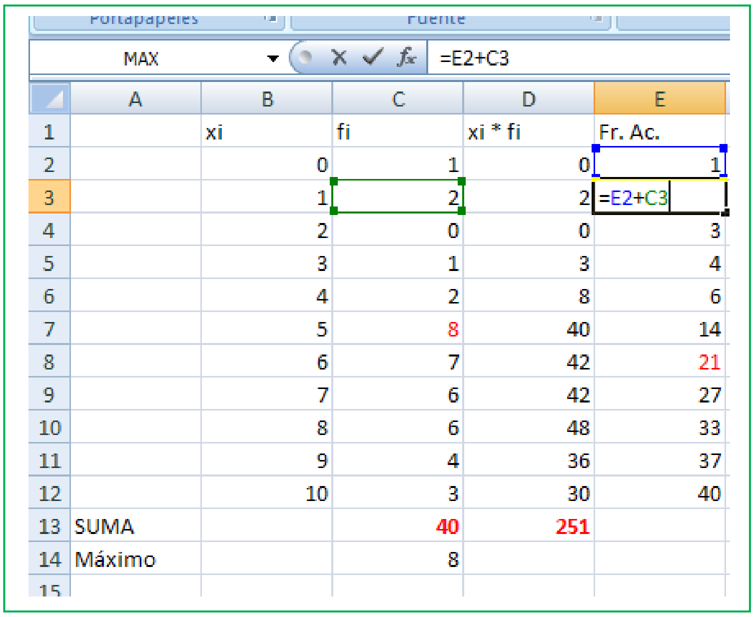
ten 3 modas, 1, 3 e 6, xa que o valor máis alto da frecuencia absoluta é 10 nos tres casos.

Autores: María Molero e Andrés García
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

A moda permite clasificar os conxuntos de datos en *unimodais*, *bimodais* ou *plurimodais*, segundo o número de modas que teñan.

Para obter a **mediana** calcúlanse as frecuencias acumuladas e búscase o valor da variable que ocupa o lugar central: $n/2$.

Utiliza o ordenador



	A	B	C	D	E
1		xi	fi	xi * fi	Fr. Ac.
2		0	1	0	1
3		1	2	2	=E2+C3
4		2	0	0	3
5		3	1	3	4
6		4	2	8	6
7		5	8	40	14
8		6	7	42	21
9		7	6	42	27
10		8	6	48	33
11		9	4	36	37
12		10	3	30	40
13	SUMA		40	251	
14	Máximo		8		

- Copiamos os datos da actividade resolta nunha folla de cálculo, escribindo xi na casa B1, fi na C1. En B2 escribimos 0, e en B3, 1. Seleccionamos estas dúas casas e arrastramos ata a casa B12. Copiamos as frecuencias na columna C. En A13 escribimos SUMA. Calculamos a suma das frecuencias coa tecla: $\sum$ e obtense 40 na casa C13. Na columna D1 escribimos $x_i \cdot f_i$. En D2 escribimos = e facemos clic en B2, escribimos * e facemos clic en C2 (=B2*C2). Seleccionamos D2 e arrastramos ata D12. Calculamos a suma (251) e dividimos o valor da casa D12 entre o da casa C12.

Podemos calcular o valor máximo das frecuencias, que neste caso se ve a ollo, pero se houbese moitos máis valores, moitas máis filas, pódese utilizar a función MAX.

Para calcular as frecuencias acumuladas utilizamos a columna E. En E2 escribimos =C2. En E3 escribimos =E2+C3. Por que? E seleccionando E3, arrastramos ata E12.

Actividades propostas

9. Lanzouse un dado 100 veces e confeccionouse a seguinte táboa de frecuencias absolutas:

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	18	16	14	16	16	20

a) Calcula a media, a moda e a mediana.

b) Utiliza o ordenador para comprobar os resultados.

10. Lanzamos 2 dados e sumamos os valores obtidos. Repetimos o experimento 1000 veces e obteremos a seguinte táboa de frecuencias absolutas.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f_i	24	65	73	81	158	204	148	79	68	59	41

a) Calcula a media, a mediana e a moda.

b) Utiliza o ordenador para comprobar os resultados.

c) Repite ti os lanzamentos, agora só dez veces, e calcula de novo a media, a mediana e a moda.

11. Utiliza o ordenador para calcular a media, a mediana e a moda da seguinte táboa de frecuencias absolutas, que indica o número de fillos que teñen 200 familias entrevistadas:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_i	14	65	73	27	9	6	2	1	0	2	1

Autores: María Molero e Andrés García
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Parámetros de dispersión

Dannos unha medida do “*dispersos*” que están os datos.

A primeira medida dánola o **percorrido** ou o valor máximo menos o valor mínimo.

As máis utilizadas son a **varianza** e a **desviación típica** (ou desviación estándar) que mide a distancia dos datos respecto da media.

Xa sabes que a mediana indica o valor da variable que ocupa o lugar central. Denomínase **primeiro cuartil (Q1)** ao valor da variable que deixa menores ou iguais ca el á cuarta parte dos datos (ou un 25 %), sendo, polo tanto, as tres cuartas partes maiores ou iguais ca el. A mediana é o segundo cuartil, que deixa por debaixo a metade dos datos ou un 50 %. O **terceiro cuartil (Q3)** é o valor da variable que deixa menores ou iguais ca el as tres cuartas partes dos datos ou un 75 % (e maiores ou iguais a cuarta parte). Chámase **rango intercuartílico ou percorrido intercuartílico** á distancia entre o terceiro e o primeiro cuartil (**Q3 – Q1**). Polo que dixemos, nese intervalo están a metade dos datos.

Actividade resolta

Seguimos coa mesma actividade anterior.

- Neves tivo en Matemáticas as seguintes notas: 8, 4, 6, 10 e 10. Calcula o seu percorrido, a varianza, a desviación típica, os cuartís e o percorrido intercuartílico.

A maior cualificación foi un 10 e a menor un 4, logo o **percorrido** é 10 – 4 = 6.

Percorrido = Máximo – Mínimo.

A media xa calculamos e é 7.6. Queremos analizar como as observacións se separan da media. Se a cada valor lle restamos a media, uns saen positivos e outros negativos, e se sumamos todos, compénsanse, polo que sae 0. É posible superar esa dificultade calculando esas diferenzas en valor absoluto ou elevándoas ao cadrado. Se as elevamos o cadrado, sumamos todo e dividimos polo número total de valores da variable menos 1, obteremos a varianza.

Divídese por n – 1 para mellorar as propiedades do estatístico: Varianza.

Se despois calculamos a raíz cadrada, obtense a desviación típica. Estamos avaliando a distancia dos valores da variable á media.

	x_i	x_i – media	(x_i – media)^2
1	8	0.4	0.16
2	4	–3.6	12.96
3	6	–1.6	2.56
4	10	2.4	5.76
5	10	2.4	5.76
Media = 7.6			Suma = 27.2

Se dividimos 27.2 entre 5 (*n*)*,* obtense 5.44 que é a varianza.

Calculamos a raíz cadrada: 2.33 que é a desviación típica.

Autores: María Molero e Andrés García
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Varianza = $((x_1 - \text{media})^2 + (x_2 - \text{media})^2 + \ldots + (x_n - \text{media})^2)/n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2}{n}$

S = Desviación típica = $\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2}{n}}$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 =$$
$$\sum_{i=1}^{n}(x_i^{\,2} - 2x_i \cdot m + m^2) =$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - 2m\sum_{i=1}^{n} x_i + n \cdot m^2 =$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - 2m(n \cdot m) + n \cdot m^2 =$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - n \cdot m^2$$

Pódese demostrar, facendo operacións, unha fórmula máis cómoda para calcular a varianza e a desviación típica:

Varianza = $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}{n} - m^2$ **S** = $\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}{n} - m^2}$

	x_i	x_i^2
	8	64
	4	16
	6	36
	10	100
	10	100
m = 7.6	Suma = 38	Suma = 316

Varianza = (316/5) – (7.6)^2 = 63.2 – 57.76 = 5.44.

A desviación típica é a raíz cadrada da varianza, é dicir, s = 2.33.

Para calcular os cuartís debemos ordenar os datos; 4 ≤ 6 ≤ 8 ≤ 10 ≤ 10.

1	2	3	4	5
4	**6**	8	**10**	10

O primeiro cuartil deixa por debaixo a cuarta parte ou o 25 % dos datos. Hai 5 datos e 5/4 = 1.25, como 1 < 1.25 < 2, o primeiro cuartil é 6. Q1 = 6. O terceiro cuartil deixa por debaixo as tres cuartas partes ou o 75 % dos datos: 3(5/4) = 3.75. Como 3 < 3.75 < 4, entón Q3 = 10.

Percorrido intercuartílico = Q3 – Q1.

No exemplo o percorrido intercuartílico = Q3 – Q1 = 10 – 6 = 4.

Autores: María Molero e Andrés García
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Utiliza o ordenador

Igual que calculamos a media, a mediana e a moda, a folla de cálculo pódese utilizar para obter:

- O percorrido calculando MAX – MIN.
- A varianza utilizando VARP.
- A desviación típica usando DESVESTP.
- Os cuartís (CUARTIL), sendo o cuartil 0 o mínimo; o cuartil 1, Q1; o cuartil 2, a mediana; o cuartil 3, Q3; e o cuartil 4, o máximo.

Actividades propostas

12. Dadas as temperaturas nunha cidade dun exercicio anterior:

Meses	Xaneiro	Febreiro	Marzo	Abril	Maio	Xuño	Xullo	Agosto	Setembro	Outubro	Novembro	Decembro
Temperatura	–2	5	8	9	11	13	27	33	21	14	9	4

a. Calcula o percorrido, a varianza, a desviación típica, os cuartís e o percorrido intercuartílico.

b. Utiliza o ordenador para comprobar os resultados.

13. Calcula o percorrido, a varianza, a desviación típica, os cuartís e o percorrido intercuartílico das distribucións seguintes:

a) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 1 000 b) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 10 c) 0, 0, 4, 5, 7, 9, 9, 100, 200

Utiliza o ordenador para comprobar os resultados.

1.4. Diagrama de caixa

O **diagrama de caixa ou** de **bigotes** é unha representación gráfica na que se utilizan cinco medidas estatísticas: o valor mínimo, o valor máximo, a mediana, o primeiro cuartil e o terceiro cuartil… intentando visualizar todo o conxunto de datos.

O máis atraente do gráfico é a «caixa». Fórmase un rectángulo (ou caixa) cuxos lados son os cuartís (Q_1 e Q_3) e onde se sinala, no centro, a mediana (*Me*). De maneira que o cadrado/rectángulo contén o 50 por cento dos valores centrais.

Engádense dous brazos (ou *bigotes*) onde se sinalan o valor máximo (*Máx*) e o valor mínimo (*Mín*).

Pódense calcular, ademais, uns límites superior e inferior. O inferior, L_i, é Q_1– 1.5 polo percorrido intercuartílico, e o superior, Ls, é Q_3 + 1.5 polo percorrido intercuartílico.

Exemplo

- Neves tivo en Matemáticas as seguintes notas: 8, 4, 6, 10 e 10. Calcula o seu percorrido, a varianza, a desviación típica, os cuartís e o percorrido intercuartílico.

Ordenamos os datos: $4 \leq 6 \leq 8 \leq 10 \leq 10$, e calculamos que:

Mediana = *Me* = 8.

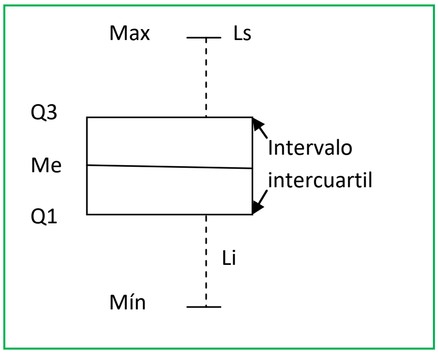
$Q_1 = 6$. $Q_3 = 10$.

Percorrido intercuartílico = 10 – 6 = 4.

Os bigotes indican:

Máx = 10. Mín = 4.

Ls = Q3 + 4*1.5 = 16. Li = Q1 – 4*1.5 = 0.



Neste exemplo o máximo é igual a 10, que é menor que o posible extremo superior, igual a 16. O mínimo é 4, maior que o extremo inferior, logo non hai valores *atípicos* que sexan maiores que o límite superior ou menores que o límite inferior. Os extremos dos bigotes no noso exemplo son 10 e 4. O diagrama de caixa é o da figura da marxe.

Actividades propostas

14. Nunha excursión de montaña participan 25 persoas coas seguintes idades:

9 9 10 11 12 20 36 37 38 40 42 43 43 44
45 47 48 50 52 53 55 58 61 63 65

a) Facer unha táboa de frecuencias clasificando as idades en 6 intervalos que comezan en 7.5 e terminan en 67.5. Calcular, a partir dela, os parámetros $\bar{x}$ e σ.

b) Calcular $\bar{x}$ e σ introducindo os 25 datos na calculadora, é dicir, sen agrupalos en intervalos.

c) Prescindindo dos 5 primeiros nenos, obteremos un colectivo de 20 persoas. Calcular de novo os seus parámetros $\bar{x}$ e σ, e comparar cos obtidos no grupo inicial.

d) Calcular os parámetros de posición Q_1, Q_3 e Me, da distribución orixinal, e construír o diagrama de caixa ou de bigotes correspondente.

1.5. Variable continua: intervalos e marcas de clase. Histogramas

Recorda que as variables poden ser cualitativas, se non son numéricas, ou cuantitativas, que á súa vez poden ser discretas ou continuas.

Por exemplo: Se se fai un estudo estatístico sobre a poboación de estudantes, pódese preguntar sobre a profesión dos seus pais e nais, que é unha variable cualitativa, sobre o número de irmáns, que é unha variable cuantitativa discreta (ninguén ten 3,7 irmáns), ou sobre a idade, a estatura, a cualificación media… que son variables cuantitativas continuas.

Coas variables cuantitativas continuas ten sentido agrupar os valores en intervalos.

Ao valor central do intervalo chámaselle **marca de clase**.

A representación gráfica máis adecuada é o **histograma** que é un diagrama de rectángulos no que a área de cada rectángulo é proporcional á frecuencia. Ten a vantaxe de que desa forma a frecuencia de cada suceso vén representada pola área.

Actividade resolta

- Realiza un estudo estatístico sabendo que a táboa de frecuencias absolutas, con intervalos, dos pesos de 40 estudantes dun centro escolar, é:

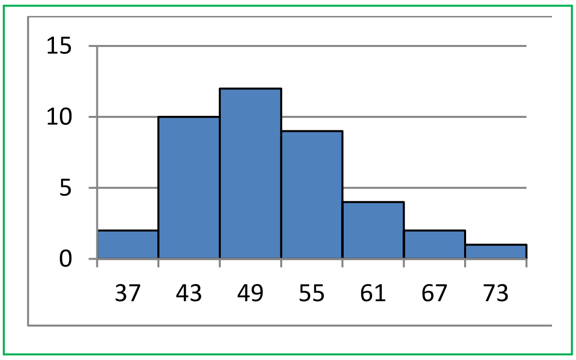
Peso	[34, 40)	[40, 46)	[46, 52)	[52, 58)	[58, 64)	[64, 70)	[70, 76)
Estudantes	2	10	12	9	4	2	1

A táboa dinos que hai 2 estudantes cuxo peso é maior ou igual a 34 e é menor que 40.

Calculamos as marcas de clase buscando o punto medio de cada intervalo: (40 – 34)/2 = 3 e 34+3 =37. Todos os intervalos neste exemplo teñen unha lonxitude de 6. Reescribimos a táboa coas marcas de clase e as frecuencias absolutas:

x_i	37	43	49	55	61	67	73
f_i	2	10	12	9	4	2	1

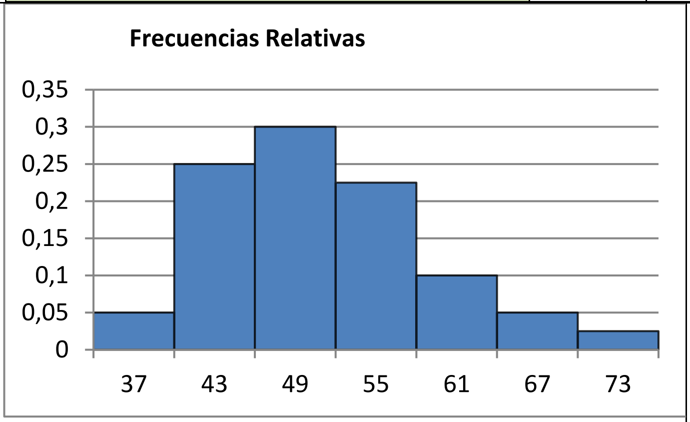
Neste caso o histograma das frecuencias absolutas é moi sinxelo pois todos os intervalos teñen igual lonxitude. Se non fose así, habería que calcular con coidado as alturas dos rectángulos para que as áreas fosen proporcionais ás frecuencias.

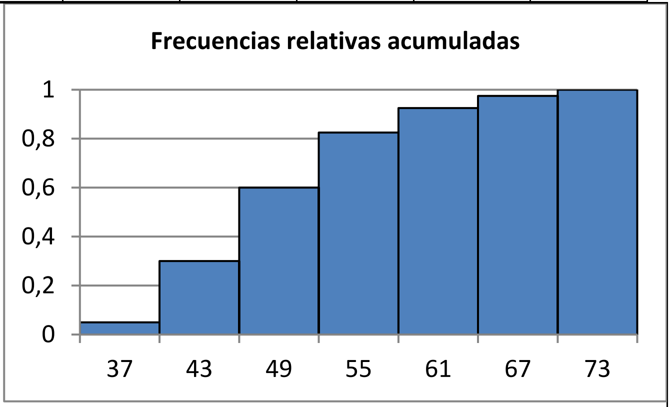


Autores: María Molero e Andrés García
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Imos representar tamén o histograma das frecuencias relativas e das frecuencias relativas acumuladas:

x_i	37	43	49	55	61	67	73
Frecuencias relativas	0.05	0.25	0.3	0.225	0.1	0.05	0.025
Frecuencias relativas acumuladas	0.05	0.3	0.6	0.825	0.925	0.975	1





Cálculo da media e a desviación típica

Procedemos da forma que xa coñecemos, calculando o produto das marcas de clase polas frecuencias:

x_i	37	43	49	55	61	67	73	Suma
f_i	2	10	12	9	4	2	1	40
$x_i \cdot f_i$	74	430	588	495	244	134	73	2 038

A **media** é igual a 2 038/40 = 50.95

Para calcular a **desviación típica** restamos a cada marca de clase, a media, elevamos ao cadrado e multiplicamos pola frecuencia relativa:

x_i	37	43	49	55	61	67	73	Suma
f_i	2	10	12	9	4	2	1	40
$x_i - m$	−13.95	−7.95	−1.95	4.05	10.05	16.05	22.05	
$(x_i - m)^2$	194.60	63.2025	3.8025	16.4025	101.0025	257.6025	486.2025	1122.8175
f_i	2	10	12	9	4	2	1	40
$(x_i - m)^2 \cdot f_i$	389.20	632.025	45.63	147.62	404.01	515.205	486.2025	2 619.9

A suma das diferenzas da media ao cadrado polas frecuencias relativas é 2 619.9. Agora dividimos entre *n* que no noso caso é 40, e obtense 65.5 que é a varianza. Calculamos a raíz cadrada. A desviación típica é 8.09.

Actividade resolta

- Utilizamos a outra fórmula: *Varianza* = $\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 \cdot f_i\right)}{n} - m^2$

x_i	37	43	49	55	61	67	73	**Suma**
f_i	2	10	12	9	4	2	1	40
x_i^2	1 369	1 849	2 401	3 025	3 721	4 489	5 329	22 183
$x_i^2 \cdot f_i$	2 738	18 490	28 812	27 225	14 884	8 978	5 329	106 456

Varianza = (106 456/40) – (50.95)^2 = 2 661.4 – 2 595.9 = 65.5 e *desviación típica* = *s* = 8.09.

- *Vexamos outro exemplo de cálculo da media e da desviación típica utilizando a outra fórmula:*

$$Varianza = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 \cdot f_i\right)}{n} - m^2$$

x_i	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	**Suma**
f_i	1	0	2	5	9	22	16	12	8	3	1	1	80
$x_i \cdot f_i$	64	0	132	335	612	1 518	1 120	852	576	219	74	75	5 577
x_i^2	4 096	4 225	4 356	4 489	4 624	4 761	4 900	5 041	5 184	5 329	5 476	5 625	
$x_i^2 \cdot f_i$	4 096	0	8 712	22 445	41 616	104 742	78 400	60 492	41 472	15 987	5 476	5 625	389 063

n = 80.

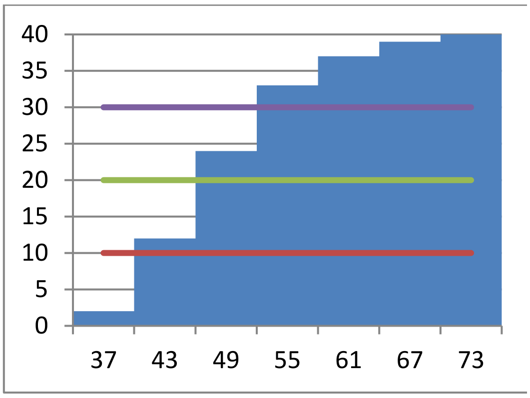
A **media** é igual a *m* = 5 577/80 = 69.7.

A **varianza** é igual a $\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 \cdot f_i\right)}{n} - m^2 = \frac{389\,063}{80} - 69.7^2$ = 4 863.2875 – 4 858.09 = 5.1975

A *desviación típica* é igual á raíz cadrada da varianza, *s* = 2.28.

Autores: María Molero e Andrés García
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Cálculo da mediana e dos cuartís



- Representamos o histograma de frecuencias absolutas acumuladas e cortamos polas liñas $n/2$ para a mediana, $n/4$ para o primeiro cuartil, e $3n/4$ para o segundo. No noso caso por 20, 10 e 30.

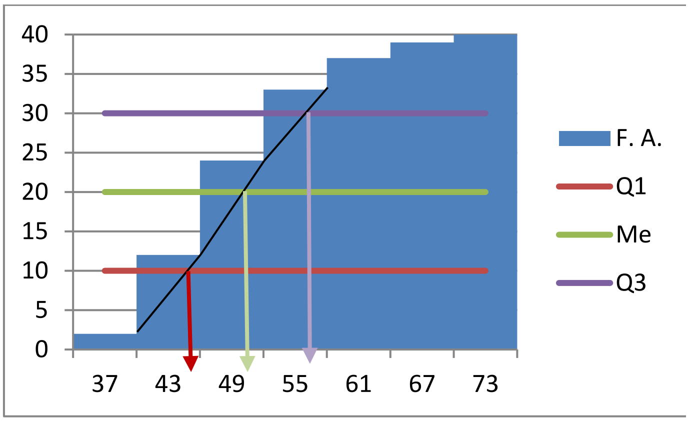
Observamos, vendo onde as rectas horizontais $y = 20$, $y = 10$ e $y = 30$ cortan ao histograma, que a mediana está no intervalo [46, 52) cuxa marca de clase é 49, o primeiro cuartil no intervalo [40, 46) cuxa marca de clase é 43, e o terceiro cuartil en [52, 58) cuxa marca de clase é 55.

x_i	[34, 40)	[40, 46)	[46, 52)	[52, 58)	[58, 64)	[64, 70)	[70, 76)
f_i	2	10	12	9	4	2	1
F_i	2	12	24	33	37	39	40

Podemos axustalo máis facendo unha interpolación lineal, é dicir, aproximando cunha recta.

Para a mediana trazamos a recta que pasa polos puntos (46, 12) e (52, 24) ($y = 2x - 80$) e calculamos onde corta á recta $y = 20$. Corta en $x = 50$. Polo tanto a mediana é $Me = 50$.

O terceiro cuartil está no intervalo [52, 58). Calculamos a ecuación da recta que pasa polos puntos (52, 24) e (58, 33), que é $y = (3/2)x - 54$. Calculamos onde corta o y = 30, que é en $x = 56$. Polo tanto Q3 = 56.



O primeiro cuartil está no intervalo [40, 46). A recta que pasa polos puntos:

(40, 2) e (46, 12)

ten por ecuación $y = (5/3)x - 64.6666$, que corta o y = 10 en $x = 44.79999$…. Q1 = 44.8.

Utiliza o ordenador

- Para debuxar histogramas co ordenador utilizando unha folla de cálculo encontrámonos coa dificultade de que este debuxa os rectángulos separados. Debuxa un diagrama de rectángulos. Para amañalo no caso de que a lonxitude de todos os intervalos sexa a mesma, debes sinalar un dos rectángulos, entrar en "*dar formato á serie de datos*" e, en "*Opcións de serie*", seleccionar en "*Ancho do intervalo*" un ancho do 0 %, é dicir, "*sen intervalo*". Se as lonxitudes son distintas débese calcular previamente as alturas dos rectángulos.

Actividades propostas

15. Utiliza o ordenador para debuxar o histograma da actividade 11.

16. Coñécense as cantidades de residuos sólidos recollidos en m^3/semana durante 12 semanas dunha urbanización: 23, 27, 30, 34, 38, 21, 30, 33, 36, 39, 32, 24. Escribe no teu caderno unha táboa de frecuencias absolutas con catro intervalos: [20, 25), [25, 30), [30, 35) e [35, 40). Calcula as marcas de clase. Debuxa o histograma de frecuencias absolutas. Calcula a media e a desviación típica. Calcula graficamente a mediana e os cuartís.

17. Fai un estudo estatístico preguntando aos teus compañeiros e compañeiras de clase sobre o número de libros que len ao mes. Confecciona unha táboa e represéntaa nun diagrama de rectángulos, un polígono de frecuencias e un diagrama de sectores.

2. DATOS BIDIMENSIONAIS

2.1. Ideas xerais

Posiblemente, a aplicación máis importante da Estatística non sexa o estudo dunha variable illada senón a análise das relacións entre variables. Se temos dúas medidas que se dan xuntas, é lóxico querer saber en que medida unha inflúe na outra. Vexamos algúns exemplos.

Exemplos:

- Nunha tenda de camisas, queremos saber cantas venderemos (por termo medio) en función do prezo.
- Se sabemos a altura do pai dun neno, cal será a altura do fillo?
- Se a un grupo de alumnas lle damos unha paga e medimos as súas cualificacións. As alumnas que reciben máis diñeiro sacan mellores notas? Canto máis? Este mesmo estudo pode facerse cos traballadores dunha empresa. Se se lles paga máis aumenta a produción?
- Son máis intelixentes os homes que as mulleres? Ou viceversa?

Pode parecerche que algún destes casos é elemental. É obvio que os pais altos teñen fillos altos e que se baixo o prezo, vendo máis. Pero o importante é canto. Se eu teño unha tenda, o que quero é gañar diñeiro. E por suposto que se poño as camisas a 0 € vou vender moito… pero non gañarei nada. O que quero é unha estimación de canto vendo a cada prezo para poder saber o prezo que me interesa poñer.

2.2. Variables bidimensionais. Frecuencias conxuntas

Unha **variable bidimensional** son dúas variables que se miden conxuntamente. Se X e Y son as variables, a variable bidimensional é (X, Y).

Exemplos:

- O prezo ao que poñemos as camisas (X) e o prezo anterior (Y).
- A altura dun pai (X) e a altura do fillo (Y)
- A cor do pelo (X) e a cor dos ollos (Y).
- O sexo dunha persoa (X) e o seu coeficiente de intelixencia (Y).

Date conta que as variables bidimensionais poden ser cualitativas ou cuantitativas e mesmo cada unha dun tipo. Así mesmo poderíamos ter os datos agrupados, e entón o que habería sería parellas de intervalos.

A representación de forma de táboa de frecuencias é exactamente igual que no caso unidimensional coa excepción de que agora temos parellas. Imos primeiro cun exemplo e logo introduciremos os conceptos.

Exemplo:

- Temos unha mostra de 8 persoas e miramos a súa cor de ollos e de pelo. Hai 4 morenos de ollos marróns, 1 moreno de ollos verdes, dos louros de ollos azuis e un louro de ollos verdes.

Aínda non definimos as frecuencias pero cremos que o podes entender igual. A táboa é:

Individuo	Frecuencias absolutas	Frecuencias relativas
(Moreno, marróns)	4	0.5 = 4/8
(Moreno, verdes)	1	0.125 = 1/8
(Louro, azuis)	2	0.25 = 2/8
(Louro, verdes)	1	0.125 = 1/10
TOTAL	8	1

Como podes ver, para que dous elementos sexan iguais, deben ser iguais as dúas compoñentes. A variable *X* é a cor do pelo e a variable Y a cor dos ollos. Tense *X* = {“Moreno”,”Louro”} e Y={“Marróns”, “Verdes”, “Azuis”}. Non ten por que haber o mesmo número de valores en cada variable.

As definicións son as mesmas.

A **frecuencia absoluta** é o número de veces que se obtivo esa parella de resultados (dúas parellas son iguais se os seus dous compoñentes son iguais).

A **frecuencia relativa** é a frecuencia absoluta dividida entre o número total de datos.

Táboa de frecuencias conxunta

Ás veces, en vez de amosar os datos en pares, póñense nunha **táboa de dobre entrada ou táboa de continxencia**. Chámase así porque o *X* está en vertical e o Y en horizontal. Nos cruces póñense as frecuencias, xa sexan absolutas ou relativas. Se se poñen as absolutas dise **táboa de dobre entrada de frecuencias absolutas e** se se poñen as relativas pois **táboa de dobre entrada de frecuencias relativas**.

A táboa anterior, con (x_i, y_i), non ten un nome especial universalmente aceptado. Podemos chamala **táboa de frecuencias de pares.**

Autores: María Molero e Andrés García
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Exemplo:

- Temos a mesma mostra de antes: 4 morenos de ollos marróns, 1 moreno de ollos verdes, dos louros de ollos azuis e un louro de ollos verdes. Imos colocalos en táboas de dobre entrada de frecuencias absolutas e logo relativas.

Limitámonos a poñer na primeira columna os dous valores que temos do *X*, que é a cor do pelo ("Moreno" e "Louro") e na primeira fila os do *Y*, que é a cor dos ollos ("Marróns", "Verdes" e "Azuis").

Y / ***X***	**Marróns**	**Verdes**	**Azuis**
Moreno	4	1	0
Louro	0	1	2

Observa que nesta táboa poden aparecer ceros, que representan que non hai ningún con esa parella de características.

Se dividimos as frecuencias absolutas polo número total de datos (que neste caso é 8) obteremos a táboa de dobre entrada de frecuencias relativas.

Y / ***X***	**Marróns**	**Verdes**	**Azuis**
Moreno	0.5 = 4/8	0.125 = 1/8	0
Louro	0	0.125 = 1/8	0.25 = 2/8

Actividades propostas

18. Coa táboa de valores do exemplo, constrúe a táboa de frecuencias absolutas e relativas da variable *X* ("Cor de pelo") e a variable Y ("Cor de ollos") por separado, como variables unidimensionais.

19. Completa a seguinte táboa e exprésaa en forma de táboa de dobre entrada, primeiro con frecuencias relativas e logo con frecuencias absolutas.

(x_i, y_i)	**Frecuencia absoluta**	**Frecuencia relativa**
(0, 1)	12	
(1, 2)	14	
(2, 3)	14	

20. Completa a seguinte táboa de frecuencias conxunta e exprésaa en frecuencias de pares (x_i, y_i), tanto con frecuencias relativas como absolutas.

2.3. Diagrama de dispersión e recta de regresión

Un **diagrama de dispersión**, tamén chamado **nube de puntos** pola súa aparencia, é un gráfico que se obtén representando cada parella como un punto do plano cartesiano. Úsase principalmente con variables cuantitativas e datos sen agrupar (se estivesen agrupados tomariamos as marcas de clase).

É moi simple de debuxar. Basta con poñer un punto en cada parella. Ás veces, se hai valores repetidos, póñense os puntos máis gordos pero tamén é común poñelos todos igual.

Exemplo:

- Temos unha tenda e queremos estudar as vendas dunha camisa en función do prezo. Para iso, probamos cada semana cun prezo distinto e calculamos as vendas medias. Obteremos así unha táboa como a que segue

Prezo	11	11.5	12	12.5	13	13.5	14	14.5	15	15.5	16
Vendas (medias)	18.2	17.2	16.1	15.3	14.6	13.5	12.5	11.4	10.1	9.1	8.1

Se copiamos os datos a unha folla de cálculo e lle damos a debuxar un diagrama de dispersión, obteremos algo como o seguinte:

que é o típico gráfico que pode verse para facer un estudo de resultados en calquera empresa.

A recta de regresión

O problema coa nube de puntos é que simplemente describe o que pasa. Isto certamente é importante en si mesmo pero o que é realmente interesante é PREDICIR que pasará. No exemplo anterior, os nosos datos chegan a prezos de 16 €. Que pasaría se subimos o prezo a 17 €? Ou se o baixamos a 9 €? E cos prezos intermedios, como 12.25 €?

Como hai infinitos prezos, non imos poder ter en conta infinitos prezos. O interesante é ter un modelo matemático que nos diga, para un prezo dado, cal é o valor esperado das vendas. Ou, en xeral, para un valor de *X* cal é o valor esperado de *Y*.

O máis fácil é facer unha recta que se aproxime. Pódese debuxar practicamente a man, pero hai unha fórmula matemática que a calcula. Esa fórmula é complicada e está fora do alcance deste curso pero si imos ensinarche como facela con ordenador.

Autores: María Molero e Andrés García
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Antes de nada, imos mostrarche no exemplo anterior a liña de tendencia.

Observa que non pasa por todos os puntos, senón que uns quedan arriba e outros abaixo. De feito é imposible que unha recta pase por todos e, no mundo real, o axuste nunca é exacto. A recta pasa polo medio dos puntos.

Utiliza o ordenador

- O seguinte son datos da altura dun pai e da do seu fillo con 15 anos de idade. As alturas están en metros.

Pai	1.7	2	1.6	1.7	1.65	1.9	1.9	1.81
Fillo	1.75	1.9	1.7	1.8	1.6	1.88	2	1.95

O primeiro, imos facer o diagrama de dispersión. Copiamos os datos nunha folla de cálculo. Ímolos poñer en vertical para que se vexa mellor, pero podería facerse exactamente igual en horizontal.

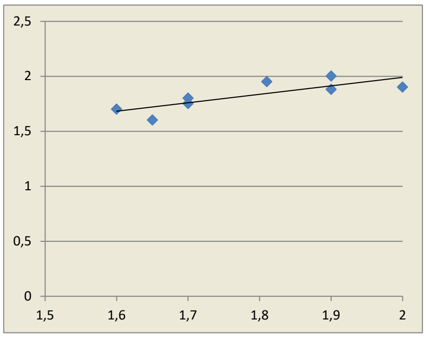
Despois, sinalamos as dúas series e dámoslle a *Inserir gráfico de dispersión*.

Automaticamente aparece o diagrama de dispersión (nube de puntos). Se xogas un pouco coas opcións podes modificar o título, o formato, a escala dos eixes…

Aínda máis, a recta de regresión é moi fácil de debuxar. Basta con que selecciones o gráfico e lle deas a *análise* e a *liña de tendencia*. Escollendo unha tendencia lineal, xa tes a recta de regresión.

Ao final, se o fixeches ben, o debuxo debe ser máis ou menos algo similar a isto:

E fíxate, a recta ten todos os valores posibles. Para ver que valor correspondería a unha altura do pai de 1.75 m, buscámolo na recta.



Autores: María Molero e Andrés García
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

2.4. Interpretación da recta. Introdución á correlación

Unha vez debuxamos a recta de regresión, podemos ver como é a relación entre as dúas variables. En esencia o tipo de relación vén dada pola pendente da recta.

1. Se a recta de regresión ten pendente positiva (máis informalmente, "se vai cara arriba") dise que a relación entre as variables é **positiva**.
2. Se a recta de regresión ten pendente cero (máis informalmente, "se queda horizontal") dise que a relación entre as variables é **nula ou** que non **hai relación lineal**.
3. Se a recta de regresión ten pendente negativa (máis informalmente "se vai cara abaixo") dise que a relación entre as variables é **negativa**

A cuestión é, pois, sinxela. Basta debuxar a recta e ver cara a onde vai. Pero tamén nos interesa ver se os puntos están preto da recta ou lonxe. Noutras palabras, mirar se a recta *axusta ben* ou *axusta mal*.

Para calcular isto, obtense o que se chama **coeficiente de correlación**. Defínese como:

$$\rho = r = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{N}(x_i \cdot y_i)}{N} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{s_x \cdot s_y}$$

Xa ves, moi complicado! Pero, como antes, basta con usar Excel ou calquera folla de cálculo. A orde en Excel é COEF.DE.CORREL(serie1;serie2).

O coeficiente de correlación mide se a relación é positiva, negativa ou nula. E TAMÉN nos di se o axuste é bo. Imos ver nun cadro os detalles.

O **coeficiente de correlación, ρ,** mide a relación entre as dúas variables. É un número entre –1 e 1 (pode ser exactamente –1 ou exactamente 1).

Se o coeficiente de correlación é exactamente 1 a relación é **perfecta positiva**. A recta vai cara arriba e TODOS os puntos están sobre ela.

Se o coeficiente de correlación está no intervalo (0, 1) a relación é **positiva**. A recta vai cara arriba pero non pasa por todos os puntos.

Se o coeficiente de correlación é exactamente 0, a relación é **nula** (non hai relación lineal).

Se o coeficiente de correlación está en (–1, 0) a relación é **negativa**. A recta vai cara abaixo pero non pasa por todos os puntos.

Resumo

ρ = 1 → correlación perfecta positiva

ρ = –1 → correlación perfecta negativa

ρ = 0 → correlación nula

ρ ∈ (0, 1) → correlación positiva

ρ ∈ (–1, 0) → correlación negativa

Se o coeficiente de correlación é exactamente –1 a relación é **perfecta negativa**. A recta vai cara abaixo e TODOS os puntos están sobre ela.

Isto é o que é obxectivo. Nalgunhas ocasións, fálase de correlación positiva forte (se está achegada a 1) ou positiva débil (se está entre 0 e 1 pero próxima a 0) e o mesmo negativa. Pero claro, iso depende da interpretación de cada un. Así, unha correlación de 0.96 é positiva forte e unha de –0.02 é negativa débil. Pero e 0.55? Pois depende do que consideres. O que si é obxectivo é se é perfecta ou nula, positiva ou negativa.

Autores: María Molero e Andrés García
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Utiliza o ordenador

- Cos datos da actividade anterior, imos calcular o coeficiente de correlación.

O único que hai que facer é poñer, na casa correspondente =COEF.DE.CORR. No noso Exemplo é a casa D2.

Automaticamente dános a escoller dúas matrices e escollemos primeiro a do *X* e despois a do *Y*.

Dános o coeficiente de correlación que, neste caso, resulta ser 0.8057828. É unha relación positiva forte como xa imaxinabamos pola nube de puntos e a recta de regresión.

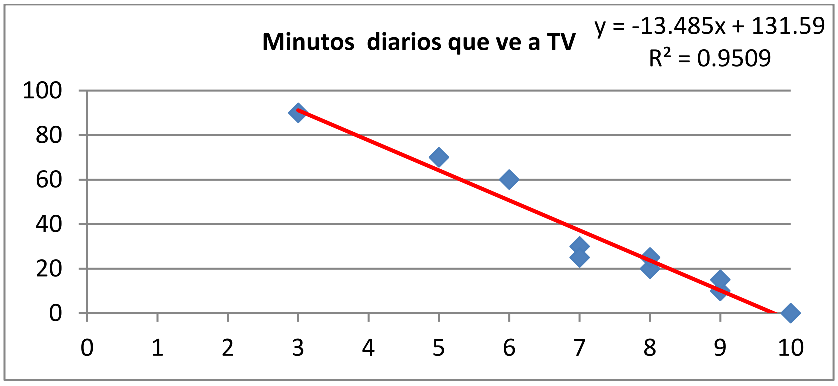
Utiliza o ordenador

- Preguntamos a 10 alumnos de 4º ESO polas súas cualificacións en Matemáticas, polo número de minutos diarios que ven a televisión, polo número de horas semanais que dedican ao estudo, e pola súa estatura en centímetros. Os datos recóllense na táboa adxunta. Queremos debuxar as nubes de puntos que os relacionan coas cualificacións de Matemáticas, o coeficiente de correlación e a recta de regresión.

Cualificacións de Matemáticas	10	3	7	8	5	9	9	8	6	7
Minutos diarios que ve a TV	0	90	30	20	70	10	15	25	60	25
Horas semanais de estudo	15	2	9	12	7	14	13	11	7	8
Estatura (en cm)	177	168	157	159	163	179	180	175	169	170

Para facelo, entramos en Excel, e copiamos os datos. Seleccionamos a primeira e a segunda fila, logo a primeira e a terceira e por último a primeira fila e a cuarta.

Coa primeira e segunda filas seleccionadas, imos a *Inserir*, *Dispersión* e eliximos a *nube de puntos*. Podemos conseguir que o eixe de abscisas vaia de 0 a 10 en "*Dar formato ao eixe*". Pinchamos sobre un punto da nube e eliximos "*Agregar Liña de tendencia*". Para que debuxe o ordenador a recta de regresión a liña de tendencia debe ser *Lineal*. Na pantalla que aparece marcamos a casa que di: "*Presentar ecuación no gráfico*" e a casa que di "*Presentar o valor de R cadrado no gráfico*".



Observa, a recta de regresión, en cor vermella, é decrecente e a súa ecuación é aproximadamente:

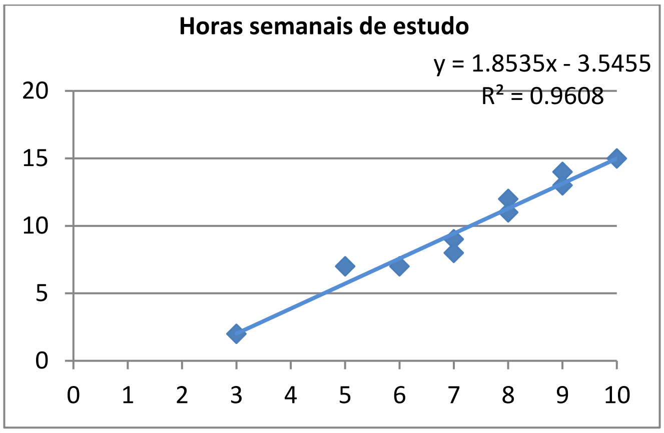
$$y = -13.5\,x + 132.$$

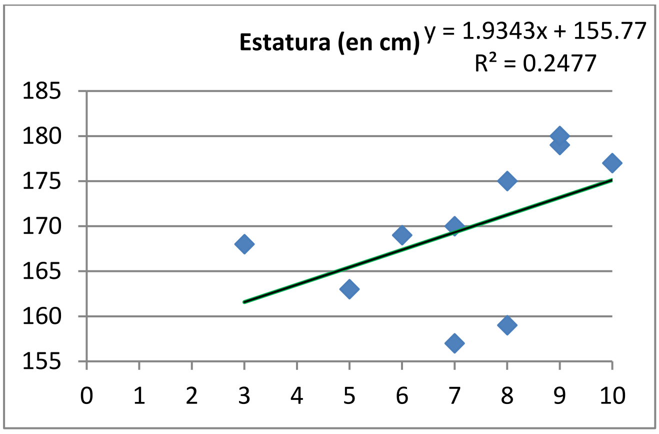
O cadrado do coeficiente de correlación é $\rho^2 = 0.95$. A correlación é negativa e alta:

$$\rho = \sqrt{0.95} = -0.975$$

Autores: María Molero e Andrés García
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Facemos o mesmo coa primeira e terceira filas e coa primeira e cuarta filas. Obteremos os gráficos:





Observa que en ambos os casos a pendente da recta de regresión é positiva pero, no primeiro, o coeficiente de correlación, positivo, é próximo a 1, $\rho = \sqrt{0.96} = 0.98$. A correlación é alta e positiva. No segundo $\rho = \sqrt{0.25} = 0.5$

Actividades resoltas

- O propietario dunha instalación mixta solar-eólica está realizando un estudo do volume de enerxía que é capaz de producir a instalación. Para iso, mide a enerxía ao longo dun total de *N*=16 días que considera suficientemente representativos. A enerxía (en kWh) producida nestes días polas instalacións solar e eólica encóntrase recollida na seguinte táboa:

Xeración solar (x_i)	13.1	10.5	4.1	14.8	19.5	11.9	18	8.6	5.7	15.9	11.2	6.8	14.2	8.2	2.6	9.7
Xeración eólica (y_i)	8.5	14.3	24.7	4	2.3	6.4	3.6	9.2	13.5	1.4	7.6	12.8	10.3	16.5	21.4	10.9

Imos realizar unha actividade resolta completa utilizando as fórmulas da media, a desviación típica e da correlación para que poida servirche de modelo se necesitas algunha vez calculalas sen axuda do ordenador.

Imos denotar á xeración solar como variable ***X*** e a xeración eólica como variable ***Y***. Engadíoslle novas filas á nosa táboa, os cadrados de *x*, de *y* e os produtos de ambas as dúas:

Xeración solar (x_i)	13.1	10.5	4.1	14.8	19.5	11.9	18	8.6	5.7	15.9	11.2	6.8	14.2	8.2	2.6	9.7
Xeración eólica (y_i)	8.5	14.3	24.7	4	2.3	6.4	3.6	9.2	13.5	1.4	7.6	12.8	10.3	16.5	21.4	10.9
x_i^2	171.6	110.3	16.81	219.0	380.3	141.6	324	73.96	32.49	252.8	125.4	46.24	201.6	67.24	6.76	94.09
y_i^2	72.25	204.5	610.1	16	5.29	40.96	12.96	84.64	182.3	1.96	57.76	163.8	106.1	272.3	457.9	118.8
$x_i \cdot y_i$	111.4	150.2	101.3	59.2	44.85	76.16	64.8	79.12	76.95	22.26	85.12	87.04	146.2	135.3	55.64	105.7

Autores: María Molero e Andrés García
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Cálculo das medias

Sumando a primeira fila e dividindo por N = 16, obteremos a media da xeración Solar en Kwh.

Recorda $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{13.1+10.5+4.1+14.8+19.5+11.9+18+8.6+5.7+15.9+11.2+6.8+14.2+8.2+2.6+9.7}{16} = 10.925\text{Kwh}$$

Sumando a segunda fila e dividindo por N = 16 obteremos a media da xeración Eólica en Kwh:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N} = \frac{8.5+14.3+24.7+4+2.3+6.4+3.6+9.2+13.5+1.4+7.6+12.8+10.3+16.5+21.4+10.9}{16} = 10.463\text{Kwh}$$

As medias son:

$$\bar{x} = 10.925\text{Kwh e } \bar{y} = 10.463 \text{ Kwh},$$

Moi parecidas.

Cálculo das desviacións típicas

Na terceira fila calculamos os cadrados dos valores da primeira variable e utilizámolos para calcular a varianza:

Recorda ${s_x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} {x_i}^2}{N} - \bar{x}^2$:

$${s_x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} {x_i}^2}{N} - \bar{x}^2 =$$

$$\frac{13.1^2 + 10.5^2 + 4.1^2 + 14.8^2 + 19.5^2 + 11.9^2 + 18^2 + 8.6^2 + 5.7^2 + 15.9^2 + 11.2^2 + 6.8^2 + 14.2^2 + 8.2^2 + 2.6^2 + 9.7^2}{16} - 10.9^2$$

$$= \frac{141.5}{16} - 10.9^2 = 22.16$$

Na cuarta fila os cadrados dos valores da segunda variable e calculamos a súa varianza:

$${s_y}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} {y_i}^2}{N} - \bar{y}^2 =$$

$$\frac{8.5^2 + 14.3^2 + 24.7^2 + 4^2 + 2.3^2 + 6.4^2 + 3.6^2 + 9.2^2 + 13.5^2 + 1.4^2 + 7.6^2 + 12.8^2 + 10.3^2 + 16.5^2 + 21.4^2 + 10.9^2}{16} - 10.5^2$$

$$= \frac{150.48}{16} - 10.5^2 = 41.01$$

A desviación típica é a raíz cadrada da varianza, polo tanto:

$$s_x = \sqrt{22.16} = 4.71 \text{ e}$$

$$s_y = \sqrt{41.01} = 6.4$$

Cálculo do coeficiente de correlación

Para calcular o coeficiente de correlación calculamos na quinta fila os produtos da variable *x* pola variable *y*. Así, 13.1 · 8.5 = 111.4.

Queremos calcular o termo: $\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i \cdot y_i)}{N}$.

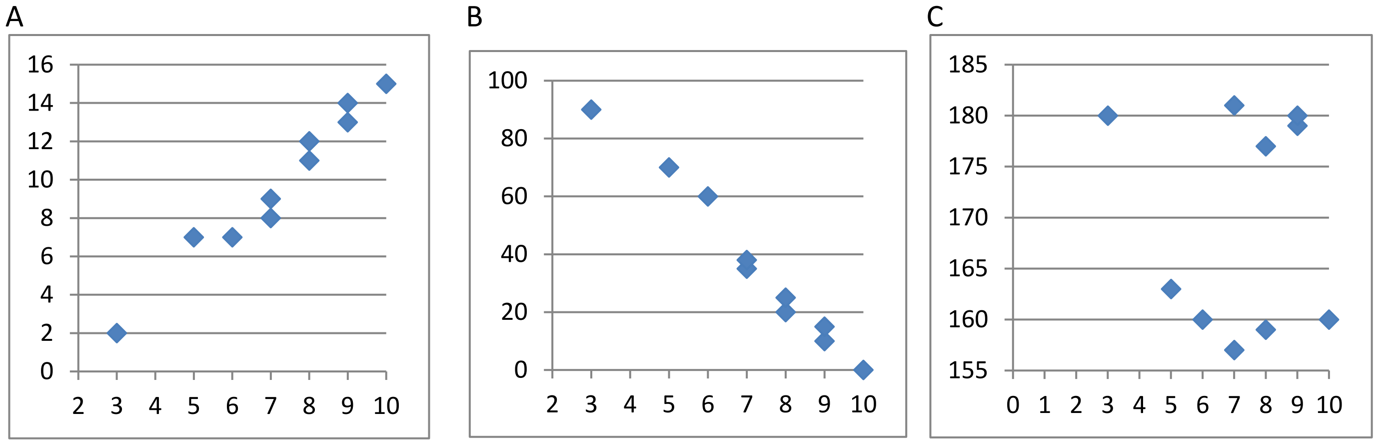
Ao sumar esa fila obteremos 1 401.2, que dividimos entre 16, restámoslle o produto das medias e dividimos polo produto das desviacións típicas:

$$\rho = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i \cdot y_i)}{N} - \bar{x}\cdot\bar{y}}{s_x \cdot s_y} = \frac{\frac{1\,401.2}{16} - (10.9\cdot 10.5)}{4.71\cdot 6.4} = \frac{-26.728}{4.71\cdot 6.4} = -0.887$$

Este coeficiente de correlación negativo e próximo a –1 indícanos que a relación entre as dúas variables é negativa e bastante importante.

Actividades propostas

21. María calculou os coeficientes de correlación das tres nubes de puntos adxuntas e obtivo: –0.05, 0.98 e –0.99, pero agora non recorda cal é de cada unha. Podes axudala a decidir que coeficiente corresponde con cada nube?



22. Fai unha enquisa entre os teus compañeiros de clase. Con ela vas realizar un traballo de investigación e presentar un informe. Elixe con coidado as preguntas. Vas preguntar a cada un dos teus compañeiros seleccionados, a mostra, dúas preguntas, como por exemplo o que mide a súa man e a súa nota en lingua, pero a ti poden interesarche outras cuestións moi distintas.

a. O primeiro que vas facer é tabular as respostas e confeccionar dúas táboas de frecuencias absolutas. Logo completa esas mesmas táboas coas frecuencias relativas e as frecuencias acumuladas. Fai representacións gráficas desas frecuencias: de barras, de liñas, de sectores.

b. Calcula as medias, modas e medianas así como o percorrido, a desviación típica, os cuartís, o intervalo intercuartílico… Representa os datos nunha táboa de dobre entrada e debuxa a nube de puntos. Calcula o coeficiente de correlación. Presenta un informe deste traballo.

Autores: María Molero e Andrés García
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

3. AZAR E PROBABILIDADE

3.1. Experimento aleatorio e suceso

Un **fenómeno ou experimento aleatorio** é aquel que, mantendo as mesmas condicións na experiencia, non se pode predicir o resultado.

- Son experimentos aleatorios:

a) Lanzar unha moeda e anotar se sae cara ou cruz.

b) Lanzar un dado e anotar o número da cara superior.

c) Lanzar dous dados ou dúas moedas.

d) Se nunha urna hai bólas brancas e vermellas, sacar unha ao azar e anotar a cor.

e) Sacar unha carta dunha baralla.

f) Sacar, sen substitución, dúas cartas da baralla.

g) Abrir un libro e anotar a páxina pola que se abriu.

Porén, calcular o custe dunha mercadoría, sabendo o peso e o prezo por kg, non é un experimento aleatorio. Tampouco o é calcular o custe do recibo da luz sabendo o gasto.

- Non son experimentos aleatorios

a) Saír á rúa sen paraugas cando chove e ver se te mollas.

b) O prezo de medio quilo de roscas se as roscas custan 3 € o quilo.

c) Soltar un obxecto e ver se cae.

Actividades propostas

23. Indica se son, ou non, fenómenos aleatorios:

a) A superficie das comunidades autónomas españolas.

b) Anotar o sexo do próximo bebé nacido nunha clínica determinada.

c) A área dun cadrado do que se coñece o lado.

d) Tirar tres dados e anotar a suma dos valores obtidos.

e) Saber se o próximo ano é bisesto.

Ao realizar un experimento aleatorio existen varios posibles resultados ou **sucesos posibles**.

Ao realizar un experimento aleatorio sempre se obterá un dos **posibles resultados**.

Chámase **suceso elemental** a cada un dos posibles resultados dun experimento aleatorio.

O conxunto dos posibles resultados dun experimento aleatorio denomínase **espazo dunha mostra**.

Un **suceso** é un subconxunto do conxunto de posibles resultados, é dicir, do espazo dunha mostra.

Actividade resolta

- ***Por exemplo*** os posibles resultados ao tirar unha moeda son que saia *cara* ou *cruz*. O conxunto de sucesos elementais é {cara, cruz}.
- *O conxunto de posibles resultados dos experimentos aleatorios seguintes:*

a) Extraer unha bóla dunha bolsa con 9 bólas brancas e 7 negras é {*branca*, *negra*}.

b) Sacar unha carta dunha baralla española é {AO, 2O, 3O, …CO, RO, AC, … RC, AB, … RB, AE, …RE}.

c) Tirar dúas moedas é: {(*cara*, *cara*), (*cara*, *cruz*), (*cruz*, *cara*), (*cruz*, *cruz*)}.

- *Ao lanzar un dado, o* conxunto de posibles resultados é {1, 2, 3, 4, 5, 6}, o suceso obter par é {2, 4, 6}, o suceso obter impar é {1, 3, 5}, o suceso obter múltiplo de 3 é {3, 6}, sacar un número menor que 3 é {1, 2}.
- *Ao lanzar dúas moedas o* conxunto de posibles resultados é {(C, C), (C, +), (+, C), (+, +)}. O suceso *sacar cero caras* é {(+, +)}, *sacar unha cara* é {(C, +), (+, C)} e *sacar dúas caras* {(C, C)}.

Actividades propostas

24. Escribe o conxunto de posibles resultados do experimento aleatorio: "*Escribir en cinco tarxetas cada unha das vogais e sacar unha ao azar*".

25. Escribe o conxunto de posibles resultados do experimento aleatorio: "*Tirar unha chincheta e anotar se cae de punta ou non*".

26. Inventa dous sucesos do experimento aleatorio: *Tirar dúas moedas*.

27. No xogo de lotaría, indica dous sucesos respecto á cifra das unidades do primeiro premio.

28. Escribe tres sucesos aleatorios do experimento aleatorio sacar unha carta dunha baralla española.

Autores: María Molero e Andrés García
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

3.2. Frecuencia e Probabilidade

Non imos definir "Probabilidade" pois existen varias definicións posibles. Existe unha axiomática debida a *Kolmogorov* relativamente recente (1930) pero antes xa fora usado este concepto, por exemplo, por *Fermat* e *Pascal* no século XVII que escribiron cartas reflexionando sobre o que ocorría nos xogos de azar. Cando non comprendían como asignar unha determinada Probabilidade, xogaban moitas veces ao xogo que fose e vían a que valor se aproximaban as frecuencias relativas. Así, a **Probabilidade dun suceso** podería definirse como o **límite ao que tenden as frecuencias relativas** dese suceso cando o número de experimentos é moi alto. Polo tanto,

Para calcular probabilidades úsanse dúas técnicas, unha experimental, analizando as frecuencias relativas de que ocorra o suceso, e a outra por simetría, cando se sabe que os sucesos elementais son **equiprobables,** é dicir, que **todos eles teñen a mesma Probabilidade**, entón **divídese o número de casos favorables polo número de casos posibles.**

Isto último, cando se pode usar, simplifica a forma de asignar probabilidades e coñécese como **Regra de *Laplace*** que di que: *"Se os sucesos elementais son equiprobables, a Probabilidade dun suceso é o número de casos favorables dividido polo número de casos posibles"*.

Actividade resolta

- A Probabilidade de que saia cara ao tirar unha moeda é 1/2, pois só hai dous casos posibles {*cara*, *cruz*}, un único caso favorable, *cara*, e supoñemos que a moeda non está trucada. Se sospeitaramos que a moeda estivese trucada para asignar esa Probabilidade habería que tirar a moeda un montón de veces para observar cara a que valor se achega a frecuencia relativa de obter cara.
- A Probabilidade de sacar un 5 ao tirar un dado é 1/6 pois hai seis casos posibles {1, 2, 3, 4, 5, 6}, un único caso favorable, 5, e supoñemos que o dado non está trucado, logo todos eles son equiprobables.
- A Probabilidade de que ao cruzar a rúa te pille un coche non é 1/2, aínda que só hai dous casos posibles, que te pille o coche e que non te pille, pois xa te tería pillado un montón de veces. Para calcular esa Probabilidade recóllense datos de peóns atropelados e calcúlase utilizando as frecuencias relativas.
- A Probabilidade de sacar unha bóla vermella dunha bolsa con 7 bólas vermellas e 3 brancas é 7/10.
- A Probabilidade de que un bebé sexa nena é aproximadamente 0.5, pero ao facer o estudo coas frecuencias relativas viuse que é 0.49.
- Se consideramos unha baralla española de 40 cartas e eliximos unha carta, algúns dos sucesos que poden ocorrer son "*sacar un ouro*", ou "*sacar un as*", ou "*sacar o cabalo de copas*"… Como de antemán non sabemos o que vai ocorrer dicimos que estes sucesos son *aleatorios* ou de *azar*. Antes de sacar ningunha carta todas elas son igualmente factibles e como pode saír unha calquera das 40 cartas dicimos que a Probabilidade de, por exemplo, *sacar o cabalo de copas* é 1/40, a de *sacar un ouro* é 10/40, e a dun *as* é 4/40.
- Cal é a Probabilidade de sacar o rei de copas? E de sacar un rei? E unha copa?

A Probabilidade de sacar o *as de copas* é 1/40. Pero o suceso *sacar un as* cúmprese se sae o as de ouros, ou de copas, ou de bastos ou de espadas. É dicir, non é un suceso simple, está formado, neste caso por 4 sucesos elementais, logo a súa Probabilidade é 4/40 = 1/10. O mesmo lle ocorre a *sacar unha copa*. É un suceso composto e como hai 10 copas a súa Probabilidade é 10/40 = 1/4.

Actividades propostas

29. Calcula a Probabilidade de que ao sacar unha carta da baralla sexa unha espada.

30. Para saber a Probabilidade de que un recén nado sexa zurdo, basearíaste no estudo das frecuencias relativas ou asignaríala por simetría?

Autores: María Molero e Andrés García
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

3.3. Asignación de probabilidades

Suceso contrario

Actividades resoltas

- *Cal é a Probabilidade de sacar un as na baralla de 40 cartas? E a de non sacar un as? E a de sacar unha copa? E a de non sacar unha copa?*

O suceso non *sacar un as* é o suceso **contrario** ao de *sacar un as*. Cartas que non son ases hai 36, logo a probabilidade de non sacar as é 36/40 = 9/10. Observa que se obtén que p(as) + p(non as) = 1/10 + 9/10 = 10/10 = 1.

A probabilidade de *sacar copa* é 10/40, e hai 30 cartas que non son copas, logo a probabilidade de non *sacar copa* é 30/40, e 10/40 + 30/40 = 1.

Se designamos por p(X) á probabilidade dun suceso X e por p(non X) á probabilidade do seu **suceso contrario** resulta que:

p(X) + p(non X) = 1.

A probabilidade dun suceso máis a probabilidade do seu suceso contrario é igual a 1.

Actividades propostas

31. Cal é a probabilidade de non sacar un 5 ao tirar un dado? E de non sacar un múltiplo de 3? E de non sacar un número menor que 2?

32. Ao tirar unha moeda dúas veces, cal é a probabilidade de non sacar ningunha cara? E de sacar polo menos unha cara? Observa que sacar polo menos unha cara é o suceso contrario de non sacar ningunha cara.

Sucesos dependentes e independentes

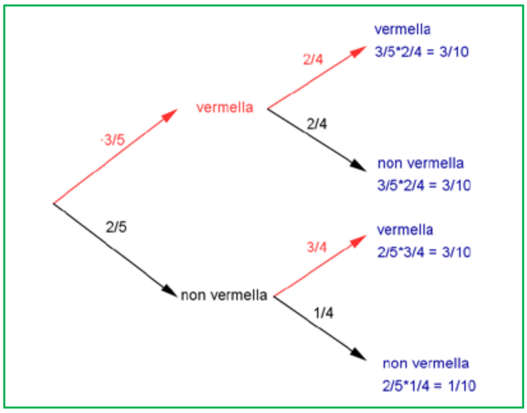
Exemplo:

- Temos unha bolsa con 3 bólas vermellas e 2 bólas negras. Cal é a probabilidade de *sacar unha bóla vermella*? Se sacamos dúas bólas, cal é a probabilidade de *sacar dúas bólas vermellas*?

A probabilidade de sacar unha bóla vermella é 3/5. Pero a de sacar dúas bólas vermellas, depende!

Depende de se volvemos meter na bolsa a primeira bóla vermella, ou se a deixamos fóra.

No primeiro caso dicimos que é **con substitución** e no segundo, **sen substitución**.



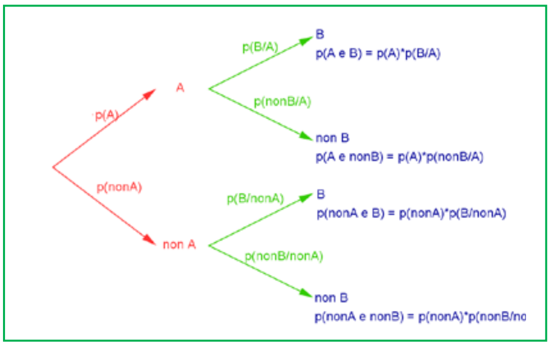
Se a volvemos meter, a probabilidade de sacar bóla vermella volverá ser 3/5 e a probabilidade de sacar dúas bólas vermellas é 3/5 · 3/5 = 9/25. A probabilidade desta segunda bóla non *depende* do que xa teñamos sacado e, neste caso, a probabilidade obtense multiplicando.

Se os sucesos A e B son **independentes: p(A e B) = p(A) · p(B)**.

Pero se a deixamos fóra, agora na bolsa só hai 4 bólas e delas só quedan 2 bólas vermellas, logo a probabilidade de que esa

Autores: María Molero e Andrés García
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

segunda bóla sexa vermella é 2/4, e está condicionada polo que antes teñamos sacado. Escríbese: p(Vermella/Vermella) e lese *"probabilidade de vermella condicionado a ter sacado vermella"*. A probabilidade de sacar dúas bólas vermellas é agora: 3/5 · 2/4 = 6/20 = 3/10.



Observa o diagrama de árbore e comproba que a probabilidade de sacar primeiro unha bóla vermella e logo unha bóla negra (non vermella) é 3/5 · 2/4 = 3/10 pois despois de sacar unha bóla vermella na bolsa quedan só 4 bólas e delas 2 son negras. A probabilidade de sacar primeiro unha bóla negra e logo bóla vermella é 2/5 · 3/4 = 6/20 = 3/10, e a de sacar dúas bólas negras é: 2/5 · 1/4 = 2/20 = 1/10. Pero observa máis cousas.

Por exemplo, 3/5 + 2/5 = 1; 2/4 + 2/4 = 1; 3/4 + 1/4 = 1; 3/10 + 3/10 + 3/10 + 1/10 = 1.

Os sucesos non son independentes. O que ocorra A, ou non ocorra A, afecta á probabilidade de B. Por iso se di que B **está condicionado** a A.

Se os sucesos A e B son **dependentes** entón: **p(A e B) = p(A) · p(B/A)**

Actividades resoltas

- *Sacamos dúas cartas dunha baralla de 40 cartas sen substitución. Cal é a probabilidade de sacar dous ases?*

Se fose con substitución a probabilidade sería 4/40 · 4/40, pero ao ser sen substitución a probabilidade do segundo *as* vén condicionada por que teñamos sacado un as previamente. Agora na baralla xa non quedan 40 cartas senón 39, e non quedan 4 ases senón só 3, logo a probabilidade é:

4/40 · 3/39 = 1/130.

Observa que:

Se dous sucesos son **dependentes** entón: **p(B/A) ≠ p(B)**.

Pero se dous sucesos son **independentes** entón: **p(B/A) = p(B/non A) = p(B)**.

Actividades propostas

33. No teu caderno fai un diagrama en árbore similar ao anterior cos sucesos A e B: A = *sacar un as* na primeira extracción (non A = non sacalo), e B = *sacar un as* na segunda extracción (non B = non sacalo). Cal é a probabilidade de *sacar as* na segunda extracción condicionado a non telo sacado na primeira? E a de non sacar as na segunda extracción condicionado a non telo sacado na primeira? Cal é a probabilidade de *sacar dous ases*? E a de sacar un só as?

34. No diagrama de árbore anterior indica cal é a probabilidade de "*non saen 2 ases*" e a de "*non b sae ningún as*".

35. No experimento "sacar tres cartas seguidas", cal é a probabilidade de *sacar tres ases*? Primeiro con substitución, e logo sen substitución.

36. Ao tirar dúas veces un dado calcula a probabilidade de que saia un seis dobre.

37. Ao tirar dúas veces un dado calcula a probabilidade de sacar polo menos un 6. *Axuda*: Quizais che sexa máis doado calcular a probabilidade de non *sacar ningún* 6, e utilizar o suceso contrario.

Autores: María Molero e Andrés García
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Sucesos compatibles e incompatibles

Exemplo:

- Cal é a probabilidade de, nunha baralla de 40 cartas, sacar unha copa ou un ouro?

Hai 10 copas e 10 ouros e ningunha carta é á vez copa e ouro, logo a probabilidade é 20/40.

- Cal é a probabilidade de, nunha baralla de 40 cartas, sacar un as ou un ouro?

Hai 4 ases e hai 10 ouros pero hai o *as de ouros*, logo as cartas que son ou ben un as ou ben un ouro son 13, logo a probabilidade é 13/40.

Chamamos sucesos incompatibles aos que, como copa e ouro, non poden realizarse á vez, e sucesos compatibles aos que, como as e ouro, poden realizarse á vez.

Designamos p(A ou B) á probabilidade do suceso "*verifícase A ou ben verifícase B*". Vimos no exemplo que se os sucesos son incompatibles a súa probabilidade é igual á suma das probabilidades.

p(A ou B) = p(A) + p(B), se A e B son incompatibles.

Pero se A e B se poden verificar á vez haberá que restar eses casos, esas veces nas que se verifican A e B á vez.

p(A ou B) = p(A) + p(B) – p(A e B), se A e B son compatibles.

Esta segunda expresión é máis xeral que a primeira, xa que no caso no que A e B son incompatibles entón p(A e B) = 0.

Resumo:

Suceso **contrario**: **p(X) + p(non X) = 1.**

Sucesos **dependentes: p(A e B) = p(A) · p(B/A).**

Sucesos **compatibles: p(A ou B) = p(A) + p(B) – p(A e B).**

Actividades resoltas

- *Calcula a probabilidade dos sucesos seguintes: a) Sacar un rei ou unha figura; b) non sae un rei ou sae un rei; c) Sacar un basto ou unha figura.*

a) Hai 4 reis e hai 4 · 4 = 16 figuras (as, sota, cabalo e rei), pero os catro reis son figuras, polo tanto p(Rei ou Figura) = 4/40 + 16/40 – 4/40 = 16/40 = 0,4.

b) Hai 40 – 4 = 36 cartas que non son reis e hai 4 reis, logo p(non rei ou rei) = 36/40 + 4/40 = 1. Esta conclusión é máis xeral. Sempre:

p(non A ou A) = 1,

pois un suceso e o seu contrario xa vimos que verificaban que p(A) + p(non A) = 1.

c) Hai 10 bastos e hai 12 figuras pero hai 4 figuras que son á vez bastos (as, sota, cabalo e rei), logo p(Basto ou Figura) = 10/40 + 16/40 – 4/40 = 22/40 = 11/20.

Actividades propostas

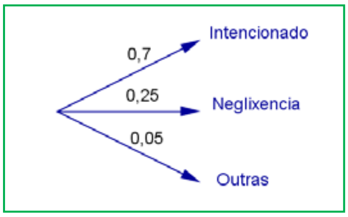
38. Lanzamos dous dados que non estean trucados e anotamos os números da súa cara superior. Consideramos o suceso A que a suma das dúas caras sexa 8, e o suceso B que eses números difiran en dúas unidades. a) Comproba que p(A) = 5/36 (2 + 6; 3 + 5; 4 + 4; 5 + 3; 6 + 2) e que p(B) = 8/36 ((1,3), (2, 4), …). b) Calcula as probabilidades de: p(A e B); p(A ou B); p(A e non B); p(non A e B); p(non A e non B). c) Calcula p(A/B); p(A/non B); p(non A/B).

Autores: María Molero e Andrés García
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

3.4. Experiencias compostas: táboas de continxencia e diagramas de árbore

Diagramas de árbore

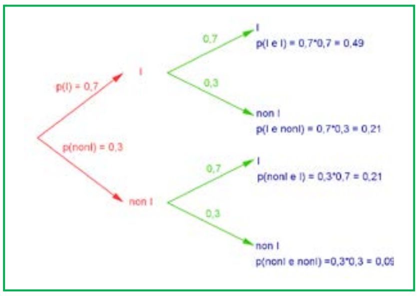
Exemplo:



- Faise un estudo sobre os incendios e compróbase que nunha determinada zona o 70 % dos incendios son intencionados, un 25 % débense a neglixencias e o 5 % a causas naturais como raios ou outras causas. Representa esta situación cun diagrama de árbore.

Actividades resoltas

- Se consideramos que a probabilidade de que un incendio sexa intencionado é 0,7, cal é a probabilidade de que ao considerar dous incendios polo menos un teña sido intencionado?



Chamamos I ao suceso "ser intencionado" e nonI ao suceso "non ser intencionado". Representamos a situación nun diagrama de árbore. Como que un incendio sexa intencionado é independente de cómo sexa o segundo, temos que:

$$p(I \text{ e } I) = 0.7 \cdot 0.7 = 0.49$$

$$p(I \text{ e } nonI) = 0.7 \cdot 0.3 = 0.21$$

xa que é a probabilidade de que o primeiro incendio sexa intencionado e o segundo non.

$$p(nonI \text{ e } I) = 0.3 \cdot 0.7 = 0.21$$

$$p(nonI \text{ e } nonI) = 0.3 \cdot 0.3 = 0.09$$

A probabilidade de que polo menos un teña sido intencionado podemos calculala sumando as probabilidades de (I e I), (I e nonI), e (nonI e I) que é 0.49 + 0.21 + 0.21 = 0.91. Pero máis sinxelo é calcular a probabilidade do suceso contrario p(nonI e nonI) = 0.09 e restala de 1:

$$p(\text{polo menos un intencionado}) = 1 – 0.09 = 0.91.$$

Actividades propostas

39. Debuxa no teu caderno un diagrama en árbore para tres incendios e calcula a probabilidade de que polo menos un teña sido intencionado sendo p(I) = 0.7.

40. Nunha aeronave instaláronse tres dispositivos de seguridade: A, B e C. Se falla A ponse B en funcionamento e, se tamén falla B, empeza a funcionar C. As probabilidades de que funcione correctamente cada dispositivo son: p(A) = 0.95; p(B) = 0.97 e p(C) = 0.98. a) Calcula a probabilidade de que fallen os tres dispositivos. b) Calcula a probabilidade de que todo vaia ben.

41. Unha fábrica de bonecas desbota normalmente o 0.5 % da súa produción por fallos debidos ao azar. Calcula a probabilidade de que: a) ao coller dúas bonecas ao azar haxa que desbotar ambas as dúas. b) ao coller dúas bonecas ao azar haxa que desbotar só unha. c) ao coller dúas bonecas ao azar non haxa que desbotar ningunha d) Verificamos 4 bonecas, calcula a probabilidade de desbotar unicamente a terceira boneca elixida.

42. Lanzamos unha moeda ata que apareza dúas veces seguidas do mesmo lado. Calcula as probabilidades de que: A) A experiencia termine ao segundo lanzamento. B) Termine ao terceiro lanzamento. C) Termine no cuarto. D) Termine como moito no cuarto lanzamento (é dicir, que

Autores: María Molero e Andrés García
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

termine no segundo ou no terceiro ou no cuarto lanzamentos).

Táboas de continxencia

Exemplo:

- Estudáronse 500 enfermos do fígado analizando, por un procedemento novo, se as lesións son benignas ou malignas. Logo volveron ser analizados polo procedemento usual determinando que diagnósticos foran correctos e cales incorrectos. Os valores obtidos represéntanse na táboa:

	Diagnóstico correcto	**Diagnóstico incorrecto**	**Totais**
Lesión maligna	206	12	218
Lesión benigna	268	14	282
Totais	474	26	500

Determinamos a táboa de frecuencias relativas:

	Diagnóstico correcto (C)	**Diagnóstico incorrecto (I)**	**Totais**
Lesión maligna (M)	0.412	0.024	0.436
Lesión benigna (B)	0.536	0.028	0.564
Totais	0.948	0.052	1

Actividades resoltas

- *Imaxina que estas frecuencias relativas puideran tomarse como probabilidades. Interpretamos entón o significado de cada un destes valores.*

0.412 sería a probabilidade de que o diagnóstico de lesión maligna fose correcto: p(M e C).

0.024 = p(M e I); 0.536 = p(B e C); 0.028 = p(B e I).

E 0.436? o número de lesións malignas é 218, logo 0.436 = p(M).

Do mesmo modo: 0.564 = p(B); 0.948 = p(C); 0.052 = p(I).

Observa que p(M) + p(B) = 1 e que p(C) + p(I) = 1. Son sucesos contrarios.

- *Son dependentes ou independentes os sucesos M e C?*

Recorda que p(M e C) = p(M) · p(C/M), polo tanto: 0.412 = 0.436 · p(C/M), de onde p(C/M) = 0.412/0.436 = 0.945 que é distinto de 0.948 que é a probabilidade de C. Pódese afirmar que M e C son dependentes xa que p(C/M) ≠ p(C).

En xeral denomínase **táboa de continxencias** a:

	A	**No A**	
B	P(A e B)	P(non A e B)	P(B)
Non B	P(A e non B)	P(non A e non B)	P(non B)

Autores: María Molero e Andrés García
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

	P(A)	P(non A)	1

Nunha táboa de continxencia figuran todas as probabilidades ou continxencias dos sucesos compostos.

Observa que, como sabemos pola probabilidade do suceso contrario:

p(A) + p(non A) = 1 e p(B) + p(non B) = 1.

Observa tamén que:

p(A) = p(A e B) + p(A e non B), do mesmo modo que p(B) = p(A e B) + p(non A e B)

pois obtéñense sumando respectivamente a primeira columna e a primeira fila.

Tamén:

p(non A) = p(non A e B) + p(non A e non B) e p(non B) = p(A e non B) + p(non A e non B).

Actividades propostas

43. Fíxose un estudo estatístico sobre accidentes de tráfico e determináronse as seguintes probabilidades reflectidas na táboa de continxencia:

	Accidente en estrada (C)	**Accidente en zona urbana (U)**	**Totais**
Accidente con vítimas (V)	0.27		0.56
Accidente con só danos materiais (M)			
Totais	0.58		1

a) Copia a táboa no teu caderno e complétaa.

b) Determina as seguintes probabilidades: p(V e C); p(V e U); p(M e C); p(M e U); p(V); p(M); p(C) e p(U).

c) Calcula p(U/V); p(C/V); p(V/U); p(V/C). Son dependentes ou independentes os sucesos: accidente con vítimas e accidente en estrada?

44. Inventa unha táboa de continxencia considerando que os accidentes poidan ser de estrada (C) ou urbanos (U) pero que agora clasificamos en leves (L), graves (G) ou mortais (M). *Observa que* o fundamental para confeccionar a táboa é que os sucesos sexan incompatibles dous a dous.

Diagramas de árbore e táboas de continxencia

Os diagramas de árbore e as táboas de continxencia están relacionados. Dada unha árbore podes obter a táboa de continxencia e viceversa. Ten interese esta relación pois cos datos do problema ás veces é máis sinxelo construír un deles e dar a solución pasando ao outro.

Actividades resoltas

- Dada a táboa de continxencia, obter o diagrama de árbore que comeza con A e non A.

	A	**Non A**	
B	2/9	5/9	7/9
Non B	1/9	1/9	2/9
	3/9 = 1/3	6/9 = 2/3	1

Coñecemos a p(A) = 3/9 = 1/3, p(non A) = 6/9 = 2/3, p(B) = 7/9 e p(non B) = 2/9.

Tamén coñecemos p(A e B) = 2/9; p(A e non B) =1/9; p(non A e B) = 5/9 e p(non A e non B) = 1/9.

Fáltanos coñecer p(B/A) que podemos obter dividindo p(A e B) entre p(A):

p(B/A) = p(A e B)/p(A) = 2/9 : 3/9 = 2/3.

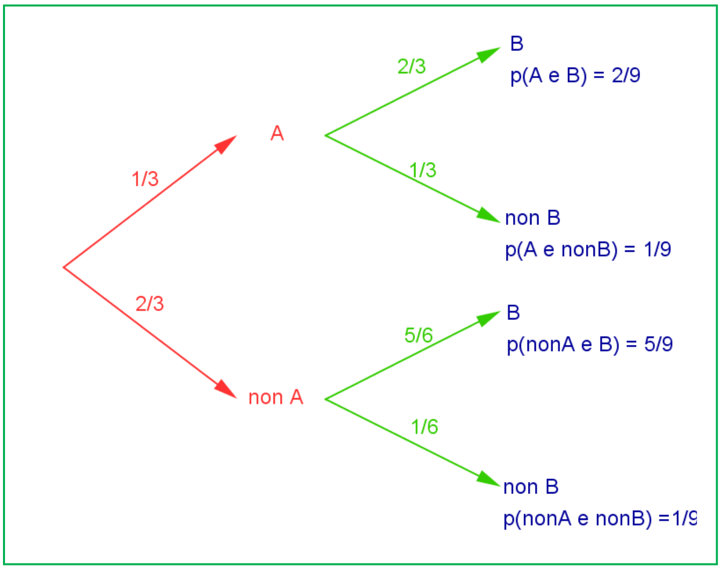
Do mesmo modo calculamos:

p(non B/A) = p(A e non B)/p(A) = 1/9 : 3/9 = 1/3

p(B/non A) = p(non A e B)/p(non A) = 5/9 : 6/9 = 5/6

p(non B/non A) = p(non A e non B)/p(non A) = 1/9 : 6/9 = 1/6.

A árbore é:



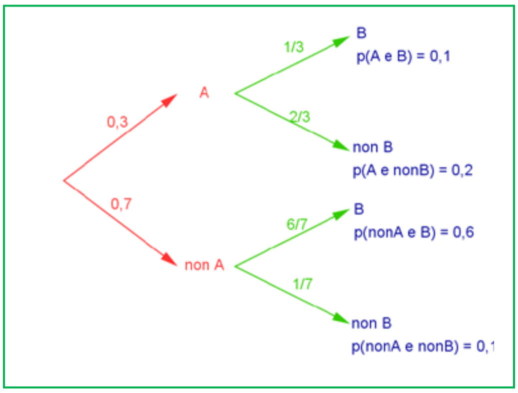
Autores: María Molero e Andrés García
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Actividades resoltas

- Reciprocamente, dado o diagrama de árbore obter o diagrama de continxencia:

Agora coñecemos p(A) = 0,3 e p(non A) = 0,7. Ademais coñecemos p(B/A) = 1/3; p(B/non A) = 6/7; p(non B/A) = 2/3 e p(non B/non A) = 1/7.

Calculamos, multiplicando: p(A e B) = 0.3·(1/3) = 0.1; p(A e non B) = 0.3·(2/3) = 0.2; p(non A e B) = 0.7·(6/7) = 0.6 e p(non A e non B) = 0.7·(1/7) = 0.1 que poñemos tamén na árbore.



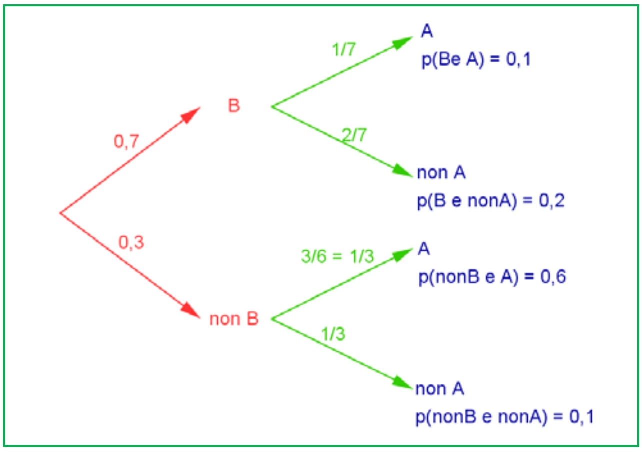
Enchemos con estes datos, unha táboa de continxencia:

	A	Non A	
B	0.1	0.6	
Non B	0.2	0.1	
	0.3	0.7	1

Calculamos, sumando, as casas que nos faltan, p(B) = 0.1 + 0.6 = 0.7 e p(non B) = 0.2 + 0.1 = 0.3.

	A	Non A	
B	0.1	0.6	0.7
Non B	0.2	0.1	0.3
	0.3	0.7	1

Pode ser moi interesante pasar dun diagrama de árbore á táboa de continxencia e desta, ao outro diagrama de árbore, co que podemos coñecer p(A/B) = 0.1/0.7 = 1/7; p(non A/B) = 0.2/0.7 = 2/7; p(A/non B) = 0.3/0.6 = 3/6 = 1/2 e p(non A/non B) = 0.1/0.3 = 1/3.



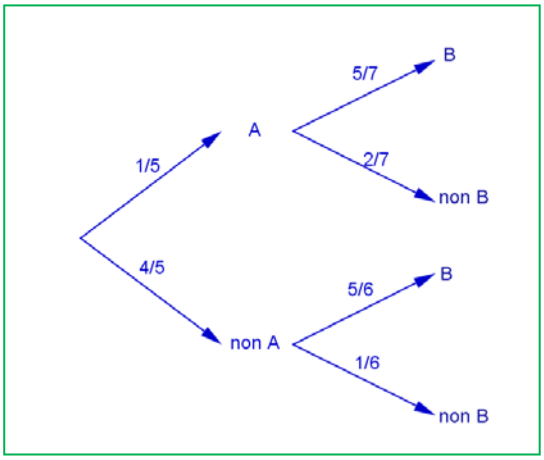
Autores: María Molero e Andrés García
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

45. Dada a táboa de continxencia, constrúe dous diagramas de árbore.

	A	Non A	
B	0.4	0.2	0.6
Non B	0.15	0.25	0.4
	0.55	0.45	1

46. Dado o diagrama de árbore, constrúe a táboa de continxencia, e despois o outro diagrama de árbore.



47. Temos dúas urnas, A e B. A primeira con 8 bólas brancas e 2 bólas negras. A segunda con 4 bólas brancas e 6 bólas negras. Sácase unha bóla ao azar dunha das dúas urnas, elixida tamén ao azar, e resulta ser negra. Cal é a probabilidade de que proceda da urna A?

48. Estase estudando un tratamento cun novo medicamento, para o que se seleccionan 100 enfermos. 60 son tratados co medicamento e 40 cun placebo. Os valores obtidos represéntanse na táboa adxunta

	Medicamento (M)	Placebo (non M)	
Curados (C)	50	30	80
Non curados (no C)	10	10	20
	60	40	100

Utilízanse eses valores para asignar probabilidades. Calcula:

a) A probabilidade de que un enfermo curado teña sido tratado co medicamento. *Axuda*: p(M/C)

b) A probabilidade de que un enfermo curado teña sido tratado co placebo. *Axuda*: p(non M/C).

Autores: María Molero e Andrés García
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

CURIOSIDADES E REVISTA

Estatística

O nome de Estatística provén do s. XIX, porén xa se utilizaban representacións gráficas e outras medidas en peles, rochas, paus de madeira e paredes de covas para controlar o número de persoas, animais ou certas mercadorías desde a Prehistoria. Os babilonios usaban xa envases de arxila para recompilar datos sobre a produción agrícola. Os exipcios analizaban os datos da poboación e a renda do país moito antes de construíren as pirámides. Os antigos gregos realizaban censos cuxa información se utilizaba cara ao 600 a.C.

O inicio da Teoría da Probabilidade, como sabes, foron os xogos de azar.

Cabaleiro da Meré

Ao *Cabaleiro da Meré* gustáballe xogar e era un gran xogador por iso sabía que era favorable apostar, ao tirar un dado, "sacar polo menos un 6 en 4 tiradas dun dado" e que non o era, ao tirar dous dados, o "sacar polo menos un 6 dobre en 24 xogadas".

Vese que xogara moito para saber que as frecuencias relativas lle dicían que o primeiro suceso tiña unha probabilidade superior a 0.5, e o segundo a tiña inferior. Pero non o comprendía. Non era matemático e só sabía a regra de tres. Isto non é unha proporcionalidade! Dixo 6 : 4 = 36 : 24. Pero as frecuencias relativas dicíanlle que non era así polo que escribiu a Pascal para que lle solucionara o problema.

Ti xa sabes o suficiente para solucionarllo. Antes de seguir lendo, intenta resolvelo.

En lugar de calcular a probabilidade de *sacar polo menos un 6* en 4 tiradas, calcula a probabilidade de non *sacar un 6*, que é o seu suceso contrario, e é $\left(\frac{5}{6}\right)^4$. Polo tanto a probabilidade de *sacar polo menos un 6* en 4 tiradas é:

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.5177 > 0.5.$$

Calculamos do mesmo modo a probabilidade de sacar polo *menos un seis dobre* ao tirar dous dados 24 veces, calculando a do seu suceso contrario, a de non *sacar ningún seis dobre*: $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$, polo que sacar polo menos un 6 dobre é:

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0.4914 < 0.5.$$

Canto debeu xogar o *Cabaleiro da Meré* para darse conta desa pequena diferenza nas probabilidades!

Autores: María Molero e Andrés García
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Galileo

No século XVI formulou o seguinte problema: ao tirar tres dados, por que é máis probable obter que a suma das caras superiores sexa 10, a que sexa 9?

Continuaba a reflexión coas posibles descomposicións nesas sumas:

9 = 3 + 3 + 3	10 = 4 + 3 + 3
9 = 4 + 3 + 2	10 = 4 + 4 + 2
9 = 4 + 4 + 1	10 = 5 + 3 + 2
9 = 5 + 2 + 2	10 = 5 + 4 + 1
9 = 5 + 3 + 1	10 = 6 + 2 + 2
9 = 6 + 2 + 2	10 = 6 + 3 + 1

En ambos os casos hai 6 descomposicións posibles, porén, tirando moitas veces os 3 dados, comprobaba que é máis probable sacar un 10.

Se fas un diagrama en árbore comprobarás que todas esas descomposicións non son igualmente probables.

Por exemplo: (3, 3, 3) ten unha probabilidade de 1/216, mentres que a suma 6 + 2 + 2 pode saír con tres sucesos (6, 2, 2), (2, 6, 2) e (2, 2, 6), logo a súa probabilidade é 3/216.

- Calcula as probabilidades de cada unha das sumas e a de sacar 10 e de sacar 9.

Se queres saber máis, busca:

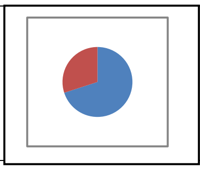
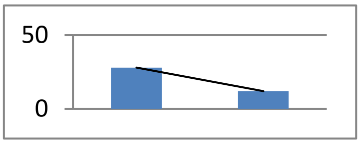
http://www.miscelaneamatematica.org/Misc34/caballero.pdfhttp://www.miscelaneamatematica.org/Misc34/caballero.pdf

A ruleta

William Jaggers chegou a Montecarlo cuns poucos francos no peto e, durante un mes, anotou os números que saían en cada ruleta e en catro días gañou dous millóns catrocentos mil francos. *Jaggers* conseguiu quebrar a banca en *Montecarlo* analizando as frecuencias relativas de cada número da ruleta e observando que se desgastara algo do mecanismo dunha delas co que todos os valores non tiñan igual probabilidade. Apostou aos números máis probables e gañou.

Autores: María Molero e Andrés García
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

RESUMO

<table>
<tr><th>Noción</th><th>Definición</th><th>Exemplos</th></tr>
<tr><td>Poboación e mostra</td><td>Poboación: Todo o conxunto de individuos sobre o que se fai o estudo. Mostra: Unha parte desa poboación.</td><td>Para coñecer a intención de voto, a poboación é todo o país, e selecciónase unha mostra.</td></tr>
<tr><td>Frecuencia absoluta, relativa e acumulada</td><td>Frecuencia absoluta: Número de veces que se obtivo ese resultado. Frecuencia relativa: Obtense dividindo a frecuencia absoluta polo número total. Frecuencia acumulada: Obtense sumando as frecuencias anteriores.</td><td><table><tr><th></th><th>Fr. Absoluta</th><th>Fr. Relativa</th><th>Fr. Acumulada Absoluta</th></tr><tr><td>A</td><td>28</td><td>0.7</td><td>28</td></tr><tr><td>B</td><td>12</td><td>0.3</td><td>40</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Gráficos estatísticos</td><td>Diagrama de barras
Diagrama de liñas
Diagrama de sectores
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Media</td><td>Media = m = $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n$</td><td>Con: 8, 4, 6, 10 e 10. Media = 38/5 = 7.6</td></tr>
<tr><td>Moda</td><td>É o valor máis frecuente.</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Mediana</td><td>Deixa por debaixo a metade.</td><td>4 < 6 < 8 < 10 = 10. Me = 8.</td></tr>
<tr><td>Varianza e Desviación típica</td><td>Varianza = $\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n} - m^2$. s = $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n} - m^2}$</td><td>Varianza = 5.4.
s = 2.33.</td></tr>
<tr><td>Cuartís</td><td>Q1 deixa por debaixo a cuarta parte. Q3 deixa por debaixo as tres cuartas partes. Percorrido intercuartílico = Q3 – Q1.</td><td>Q1 = 6; Q3 = 10;
Percorrido intercuartílico = Q3 – Q1 = 4.</td></tr>
<tr><td>Histograma</td><td>A área de cada rectángulo é proporcional á frecuencia.</td><td></td></tr>
<tr><td>Correlación</td><td>O coeficiente de correlación, ρ, mide a relación entre dúas variables. É un número entre –1 e 1.</td><td>ρ = 1 → correlación perfecta positiva.
ρ = –1 → correlación perfecta negativa.
ρ = 0 → correlación nula.
ρ ∈ (0, 1) → correlación positiva.
ρ ∈ (–1, 0) → correlación negativa.</td></tr>
<tr><td>Suceso</td><td>Ao realizar un experimento aleatorio existen varios posibles resultados ou sucesos posibles.
Un suceso é un subconxunto do conxunto de posibles resultados.</td><td>Tiramos un dado.
Posibles resultados = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
Suceso obter múltiplo de 3 = {3, 6}</td></tr>
<tr><td>Probabilidade</td><td>Límite ao que tenden as frecuencias relativas.
Se os sucesos elementais son equiprobables entón:
p = casos favorables / casos posibles.</td><td>P(5) = 1/6.
P(sacar múltiplo de 3) = 2/6</td></tr>
<tr><td>Asignación de probabilidades</td><td>Suceso contrario: p(X) + p(non X) = 1.
Sucesos dependentes: p(A e B) = p(A) · p(B/A).
Sucesos compatibles: P(A ou B) = p(A) + p(B) – p(A e B).</td><td>P(no 5) = 1 – 1/6 = 5/6.
P(5 ou múl. 3) = 1/6 + 2/6 = 3/6
P sacar primeiro un 5 e logo múltiplo de 3 = 1/6 · 2/6 = 2/36</td></tr>
</table>

Autores: María Molero e Andrés García
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Estatística

1. Nunha clase mírase a cor dos ollos de cada alumno e alumna e obtense o seguinte:

N := negro; A := azul e V := verde.

N, N, A, V, N, V, A, N, A, N, V, A, A, N, N, N, V, A, N, N, A, N, V, N, N, A, N, A, N, N.

Fai unha táboa de frecuencias absolutas, representa os valores nun diagrama de sectores e calcula a moda.

2. As notas dun conxunto de alumnos de 4º son:

2, 10, 7, 8, 1, 0, 3, 5, 6, 9, 2, 4, 1, 6, 9, 10, 5, 6, 7, 8, 3, 1, 0, 1, 5, 9, 10, 9, 8, 7.

a) Fai unha táboa de frecuencias absolutas, frecuencias relativas, frecuencias acumuladas absolutas e frecuencias relativas acumuladas.
b) Calcula a media, a mediana e a moda.
c) Calcula a desviación típica e os cuartís.

3. Preguntouse a 40 alumnos polo número de irmáns que tiñan e obtívose

Número de irmáns	0	1	2	3	4	5	6 ou máis
Número de veces	5	15	7	6	4	2	1

a) Representa un diagrama de barras de frecuencias absolutas e un diagrama de liñas de frecuencias relativas.
b) Calcula a media, a mediana e a moda.

4. Lanzáronse catro moedas 100 veces e anotouse o número de veces que saíu cara. Os resultados están reflectidos na táboa seguinte:

Número de caras	0	1	2	3	4
Número de veces	7	25	36	26	6

a) Escribe no teu caderno unha táboa de frecuencias absolutas, frecuencias relativas, frecuencias acumuladas absolutas e frecuencias relativas acumuladas. b) Representa un diagrama de barras de frecuencias absolutas acumuladas, un diagrama de liñas de frecuencias relativas e un diagrama de sectores de frecuencias absolutas. c) Calcula a media e a desviación típica. d) Calcula a mediana e os cuartís.

5. Para coñecer a distribución nun certo país das persoas segundo a súa idade recolleuse unha mostra de dez mil persoas e os valores obtidos veñen reflectidos na táboa seguinte:

Idades	[0, 5)	[5, 10)	[10, 15)	[15, 25)	[25, 35)	[35, 45)	[45, 55)	[55, 65)	[65,100)
Número de persoas	900	1 000	900	1 500	1 300	1 200	1 300	900	1 000

a) Utiliza as marcas de clase e escribe no teu caderno unha táboa de frecuencias absolutas, frecuencias relativas, frecuencias acumuladas absolutas e frecuencias relativas acumuladas. b) Representa un histograma de frecuencias absolutas. *Coidado*: os intervalos non son todos iguais. *Recorda: a* área dos rectángulos debe ser proporcional ás frecuencias. c) Calcula a media e a desviación típica. d) Calcula a mediana e os cuartís de forma gráfica usando un histograma de frecuencias absolutas acumuladas.

6. Cos datos do problema anterior calcula o intervalo [media – desviación típica, media + desviación típica]. Cantas persoas están nese intervalo? Que porcentaxe? Calcula tamén o intervalo:

[media – 2*desviación típica, media + 2*desviación típica] e

[media – 3*desviación típica, media + 3*desviación típica].

Se a distribución fose normal habería no primeiro intervalo un 68 % da mostra, no segundo un 95 % e no terceiro máis dun 99.7 %. Compara os teus resultados con estes.

7. Cos mesmos datos calcula o percorrido intercuartílico, e indica cantas persoas están nese intervalo e que porcentaxe.

8. Unha compañía de seguros desexa establecer unha póliza de accidentes. Para iso, selecciona ao azar a 200 propietarios e pregúntalles cantos euros gastaron en reparacións do automóbil. Agrupáronse en intervalos os valores da variable obtidos:

Euros	[0, 100)	[100, 200)	[200, 400)	[400, 600)	[600, 800)	[800, 3000)
Número de persoas	40	30	20	40	50	20

a) Calcula as marcas de clase e escribe no teu caderno unha táboa de frecuencias absolutas, frecuencias relativas, frecuencias acumuladas absolutas e frecuencias relativas acumuladas.
b) Representa un histograma de frecuencias relativas. *Coidado*: os intervalos non son todos iguais.
c) Calcula a media e a desviación típica.
d) Calcula a mediana e os cuartís de forma gráfica usando un histograma de frecuencias absolutas acumuladas.

9. Dous fabricantes de baterías de coches ofrecen o seu produto a unha fábrica ao mesmo prezo. A fábrica quere elixir a mellor. Para iso escolle unha mostra de 60 baterías de cada marca e obtén de cada unha os meses que funcionou sen avariarse. Obtén a seguinte táboa:

Vida da batería en meses	20	22	24	26	28	30	32
Marca A	2	7	13	16	12	8	2
Marca B	1	4	17	20	15	3	0

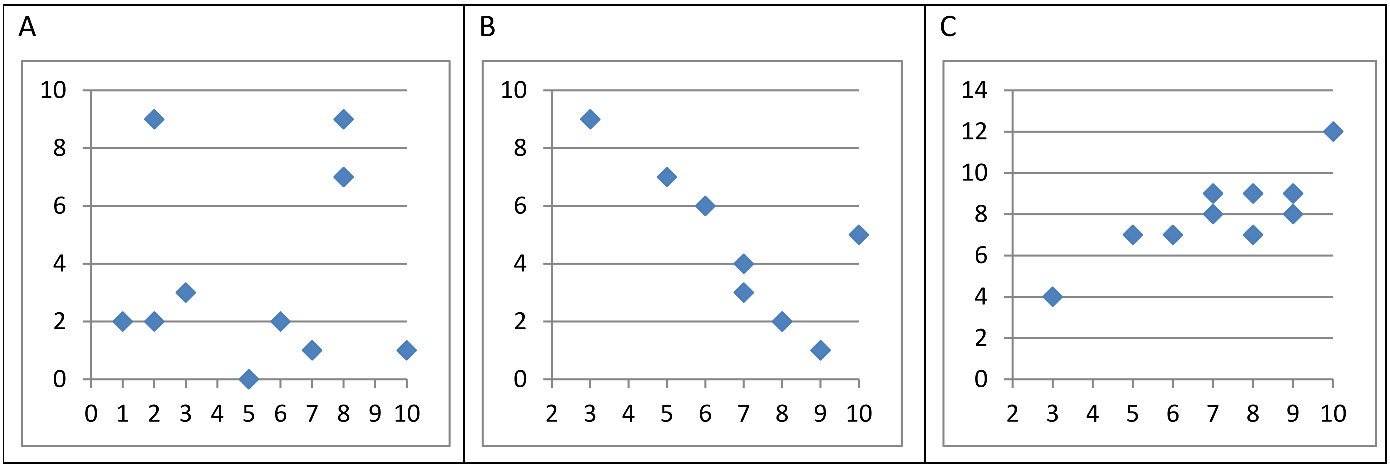
Que marca cres que elixirá?
Para tomar a decisión, calcula a media, a moda e a mediana para cada marca.
Se aínda non te decides, calcula o percorrido, a desviación típica, o intervalo [m – s, m + s] e o percorrido intercuartílico.

10. Fai un traballo. Pasa unha enquisa aos teus compañeiros e compañeiras da clase. Failles unha pregunta con datos numéricos, como por exemplo, canto mide a súa man, que número de zapato calzan, o número de libros que le nun mes, o número de horas que ve a televisión á semana, diñeiro que gasta ao mes en comprar música… Representa os datos obtidos nunha táboa e fai un estudo completo. Podes utilizar o ordenador:

a) Escribe no teu caderno unha táboa de frecuencias absolutas, frecuencias relativas, frecuencias acumuladas absolutas e frecuencias relativas acumuladas.
b) Debuxa un diagrama de barras, un diagrama de liñas e un diagrama de sectores.
c) Calcula a media, a mediana e a moda.
d) Calcula a varianza e a desviación típica.
e) Calcula os cuartís e o percorrido intercuartílico.
f) Reflexiona sobre os resultados e escribe un informe.

Coeficiente de correlación

11. Andrés calculou os coeficientes de correlación das tres nubes de puntos adxuntas e obtivo: –0.8, 0.85 e 0.03, pero agora non recorda cal é de cada unha. Podes axudalo a decidir que coeficiente corresponde con cada nube?



Probabilidade

12. Nun colexio selecciónase un grupo de 200 estudantes dos cales todos estudan francés ou inglés. Deles 150 estudan inglés e 70 estudan francés. Cantos estudan francés e inglés? Noutro centro escolar estúdanse varios idiomas: francés, inglés, alemán, italiano. Selecciónanse tamén 200 estudantes dos cales, 150 estudan inglés, 70 francés e 40 ambos os idiomas, cantos estudantes dese centro non estudan nin francés nin inglés?

13. Lanzamos un dado. Calcula a probabilidade de: a) Sacar un número impar. b) Non sacar un 3. c) Sacar un número maior que 3. d) Sacar un número maior que 3 e que sexa impar. e) Sacar un número maior que 3 ou ben que sexa impar.

14. Nunha clase hai 24 alumnos e 14 alumnas. A metade das alumnas e a terceira parte dos alumnos teñen os ollos azuis. Elíxese un estudante ao azar. A) Calcula a probabilidade de que sexa mozo e teña os ollos azuis. B) Calcula a probabilidade de que sexa mozo ou teña os ollos azuis.

15. Antón, Xoán e Xurxo teñen unha proba de natación. Antón e Xoán teñen a mesma probabilidade de gañar, é o dobre da probabilidade de Xurxo. Calcula a probabilidade de que gañen Xoán ou Xurxo.

16. Lanzamos dúas moedas distintas, unha de 50 céntimos e outra dun euro. Calcula a probabilidade de que: A) na moeda dun euro saia cara. B) Saia unha cara. C) Saia polo menos unha cara. D) non saia ningunha cara. E) Saian unha cara e unha cruz.

17. Lanzamos tres moedas. Calcula as probabilidades de: A) non saia ningunha cara. B) Saia polo menos unha cara. C) Saian dúas caras e unha cruz.

18. Lanzamos dous dados e anotamos os valores das caras superiores. Calcula as probabilidades de que a suma sexa 1, sexa 2, sexa 3, …. sexa 12.

19. Que é máis probable ao tirar tres dados, que a suma das súas caras superiores sexa 9 ou sexa 10? Escribe o suceso "sexa 9" e o suceso "sexa 10" e calcula as probabilidades dos seus sucesos elementais. Sabes xa máis que *Galileo*!

20. Lanzamos á vez unha moeda e un dado. Chama A ao suceso "Saia cara e un número par", B ao suceso "Saia cruz e un número primo" e C ao suceso "saia un número primo". Calcula as probabilidades de A, B e C. Como son estes sucesos? Indica cales deles son compatibles e cales son incompatibles.

21. Lanzamos unha moeda 50 veces, que é máis probable, obter 50 caras seguidas ou obter nas primeiras 25 tiradas cara e nas 25 seguintes cruz? Razoa a resposta.

22. Unha moeda está trucada. A probabilidade de obter cara é dobre que a de obter cruz. Calcula as probabilidades dos sucesos obter cara e obter cruz ao tirar a moeda.

23. Tres mozos e dúas mozas xogan un torneo de xadrez. Todos os mozos teñen idéntica probabilidade de gañar e todas as mozas, tamén. Pero a probabilidade de gañar unha moza é o dobre da de gañar un mozo. Calcula a probabilidade de que un mozo gañe o torneo.

24. Sete parellas de noivos están nunha habitación. Selecciónanse dúas persoas ao azar. Calcula a probabilidade de: a) Sexan un mozo e unha moza. b) Sexan unha parella de noivos. Agora elíxense 4 persoas ao azar. Calcula a probabilidade de: c) Haxa polo menos unha parella de noivos. d) Non haxa ningunha parella de noivos.

25. Temos un dado trucado de forma que os números impares teñen unha probabilidade dobre á dos números pares. Calcula as probabilidades de: A) Saia un número impar. B) Saia un número primo. C) Saia un número primo impar. D) Saia un número que sexa primo ou sexa impar.

26. Nun grupo de 12 amigas hai 3 louras. Elíxense dúas mozas ao azar. Calcula a probabilidade de que: A) Ambas sexan louras. B) Polo menos unha sexa loura. C) Ningunha sexa loura. D) Unha sexa loura e a outra non.

27. Lanzamos dous dados e anotamos os valores das caras superiores. Calcula as probabilidades de que: A) os números obtidos sexan iguais. B) os números obtidos difiran en 3 unidades. C) os números obtidos sexan pares.

28. Lanzamos unha moeda ata que saia cara. Calcula a probabilidade de que: A) Saia cara antes do cuarto lanzamento. B) Saia cara despois do oitavo lanzamento.

29. Un lote de 20 artigos ten 2 defectuosos. Sácanse 4 ao azar, cal é a probabilidade de que ningún sexa defectuoso?

30. Lánzanse dous dados e a suma das caras superiores é 7. Cal é a probabilidade de que nun dos dados saíse un 3?

31. Téñense 3 caixas, A, B e C. A caixa A ten 10 bólas das cales 4 son negras. A caixa B ten 6 bólas cunha bóla negra. A caixa C ten 8 bólas con 3 negras. Cóllese unha caixa ao azar e desa caixa sácase unha bóla, tamén ao azar. Comproba que a probabilidade de que a bóla sexa negra é 113/360.

32. Temos unha moeda trucada cuxa probabilidade de obter cara é 3/5 e a de cruz é 2/5. Se sae cara escóllese ao azar un número do 1 ao 8 e, se sae cruz, escóllese un número do 1 ao 6. Calcula a probabilidade de que o número escollido sexa impar.

33. Nun proceso de fabricación de móbiles detéctase que o 2 % saen defectuosos. Utilízase un dispositivo para detectalos que resulta que detecta o 90 % dos móbiles defectuosos pero sinala como defectuoso un 1 % que non o é. A) Calcula a probabilidade de que sexa correcto un móbil que o dispositivo cualificou como defectuoso. B) Calcula a probabilidade de que sexa defectuoso un móbil que o dispositivo cualificou como correcto. *Axuda*: Utiliza primeiro un diagrama en árbore e logo unha táboa de continxencia.

AUTOAVALIACIÓN

Cos datos seguintes, 1, 5, 2, 8, 9, 4, 7, 7, 5, 7, calcula:

1. A media:

a) 5 b) 5.5 c) 6 d) 7

2. A mediana:

a) 5 b) 5.5 c) 6 d) 7

3. A moda:

a) 5 b) 5.5 c) 6 d) 7

4. A desviación típica:

a) 2 b) 2.3 c) 2.5 d) 2.6

5. O percorrido intercuartílico

a) 3 b) 2.75 c) 4 d) 2

6. Ao tirar dous dados, a probabilidade de sacar polo menos un 5 é:

a) 5/6 b) 11/36 c) 25/36 d) 30/36

7. Ao tirar 3 moedas, a probabilidade de sacar exactamente dúas caras é:

a) 1/2 b) 3/4 c) 3/8 d) 5/8

8. Ao tirar 3 moedas, a probabilidade de sacar polo menos dúas caras é:

a) 1/2 b) 3/4 c) 3/8 d) 5/8

9. Sacamos unha carta dunha baralla de 40 cartas, a probabilidade de que sexa un ouro ou un múltiplo de 2 é:

a) 22/40 b) 19/40 c) 36/40 d) 3/4

10. Indica cal das afirmacións seguintes é **sempre** correcta:

a) p(A) + p(non A) = 1

b) p(A e B) = p(A) · p(B)

c) p(A ou B) = p(A) + p(B)

Autores: María Molero e Andrés García
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Matemáticas orientadas ás ensinanzas aplicadas

CUARTO A DA ESO

ÍNDICE

NÚMEROS. ÁLXEBRA

XEOMETRÍA

FUNCIÓNS E ESTATÍSTICA