Matemáticas orientadas ás ensinanzas académicas

4º B de ESO
Exercicios e Problemas

ÍNDICE:

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores de Libros Marea Verde.
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF e VVAA (anteriores)

CAPÍTULO 1: NÚMEROS REAIS

ACTIVIDADES PROPOSTAS

1. NÚMEROS RACIONAIS E IRRACIONAIS

1. Mentalmente decide cales das seguintes fraccións teñen unha expresión decimal exacta e cales a teñen periódica:

   a) 2/3 b) 3/5 c) 7/30 d) 6/25 e) 7/8 f) 9/11
2. Calcula a expresión decimal das fraccións do exercicio anterior e comproba se a túa dedución era correcta.
3. Calcula a expresión decimal das fraccións seguintes:
   a) 1/3 b) 1/9 c) 7/80 d) 2/125 e) 49/400 f) 36/11
4. Escribe en forma de fracción as seguintes expresións decimais exactas e redúceas, comproba coa calculadora que está ben:

   a) 7.92835; b) 291.291835; c) 0.23
5. Escribe en forma de fracción as seguintes expresións decimais periódicas, redúceas e comproba que está ben:
   a) 2.353535….. b) 87.2365656565…. c) 0.9999….. d) 26.5735735735…..
6. Copia no teu caderno a táboa adxunta e sinala cun X a que conxuntos pertencen os seguintes números:

Número	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\Re$
–2.01					
$\sqrt[3]{-4}$					
0.121212…					
$\sqrt[3]{-1\,000}$					
1.223334…					
$\sqrt{-4}$					
$\frac{1}{2}$					

7. Copia no teu caderno o esquema seguinte e mete os números do exercicio anterior no seu lugar:
8. Podes demostrar que 4.99999… = 5? Canto vale 2.5999…?
9. Demostra que $\sqrt[3]{7}$ é irracional.
10. Cantas cifras pode ter como máximo o período de $\frac{1}{47}$?
11. Cantos decimais ten $\frac{1}{2^7 \cdot 5^4}$? Atréveste a dar a razón?
12. Fai a división 999 999:7 e despois fai 1:7. Será casualidade?
13. Agora divide 999 entre 37 e despois 1:37. É casualidade?

2. APROXIMACIÓNS E ERROS

14. Redondea $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ata as centésimas e calcula os erros absoluto e relativo cometidos.
15. Calcula unha cota do erro absoluto nas seguintes aproximacións:

    a) 2.1 b) 123 c) 123.00 d) 4 000 con redondeo nas decenas.
16. Unha balanza ten un erro inferior ou igual a 50 g nas súas medidas. Usamos esa balanza para elaborar 10 paquetes de azucre de 1 Kg cada un que son un lote. Determina o peso mínimo e máximo do lote. Cal é a cota do erro absoluto para o lote?
17. Os números A = 5.5 e B =12 foron redondeados. Calcula unha cota do erro absoluto e do erro relativo para:
    a) A + B b) A · B c) B/A d) A^B

Nota: Determina os valores máximo e mínimo de A e B. Despois os valores máximos e mínimos de cada apartado (recorda que a resta e a división funcionan distinto).

18. Como medir o grosor dun folio cun erro inferior a 0.0001 cm coa axuda dunha regra milimetrada e a do/a conserxe do instituto?, faino.

3. REPRESENTACIÓN NA RECTA REAL DOS NÚMEROS REAIS

19. Calcula 3 números reais que estean entre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e 1.

20. Calcula 5 números racionais que estean entre $\sqrt{2}$ e 1.5

21. Calcula 5 números irracionais que estean entre 3.14 e π

22. Representa na recta numérica os seguintes números: $\frac{7}{6}; \frac{-17}{4}; 2.375; -3.\overset{\frown}{6}$

23. Representa na recta numérica de forma exacta: $\sqrt{20};\ -\sqrt{8};\ \sqrt{14};\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

24. Busca rectángulo áureo e espiral Áurea en Internet.

25. Xa de paso busca a relación entre o Número de Ouro e a Sucesión de Fibonacci.

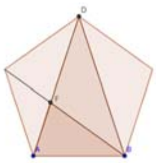
26. Busca en Youtube "algo pasa con phi" e cóntasme.

27. Comproba que a lonxitude do lado do pentágono regular e a da súa diagonal están en proporción áurea.

28. Calcula con Xeoxebra unha aproximación da razón de semellanza entre un pentágono regular e o que se forma no seu interior ao debuxar as súas diagonais. Determina sen utilizar Xeoxebra o valor real da razón de semellanza entre estes dous pentágonos.

29. Comproba que os triángulos *ABD* e *ABF* da figura son semellantes e calcula aproximadamente con *Xeoxebra* a súa razón de semellanza.

30. Calcula con *Xeoxebra* o valor aproximado da razón de semellanza entre un decágono regular e o decágono que se forma ao trazar as diagonais da figura. Determina sen utilizar Xeoxebra o valor real da razón de semellanza entre estes dous polígonos



4. INTERVALOS, SEMIRRECTAS E ENTORNOS

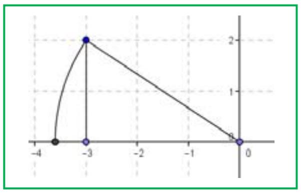
31. Expresa como intervalo ou semirrecta, en forma de conxunto (usando desigualdades) e representa graficamente:
    a) Porcentaxe superior ao 26 %.
    b) Idade inferior ou igual a 18 anos.
    c) Números cuxo cubo sexa superior a 8.
    d) Números positivos cuxa parte enteira ten 3 cifras.
    e) Temperatura inferior a 25°C.
    f) Números para os que existe a súa raíz cadrada (é un número real).
    g) Números que estean de 5 a unha distancia inferior a 4.

32. Expresa en forma de intervalo os seguintes entornos: a) E(1, 5); b) E(–2, $\frac{8}{3}$); c) E(–10,0.001)

33. Expresa en forma de entorno os seguintes intervalos:
    a) (4, 7)
    b) (–7, -4)
    c) (–3, 2)

34. Os soldos superiores a 500 € pero inferiores a 1 000 € pódense poñer como intervalo de números reais?
    *Pista: 600.222333 € pode ser un soldo?

EXERCICIOS E PROBLEMAS



1. A imaxe é a representación dun número irracional, cal?
2. Representa na recta numérica: –3.375; 3.666…
3. Representa na recta numérica: $-\sqrt{8};\ 2\sqrt{5};\dfrac{\sqrt{10}}{2}$
4. Calcula o valor exacto de $\dfrac{0.\overset{\frown}{4}}{0.4}$ sen calculadora.
5. Di cales destas fraccións teñen expresión decimal exacta e cales periódica:

$$\frac{9}{40};\frac{30}{21};\frac{37}{250};\frac{21}{15}$$

6. Calcula 3 fraccións *a, b, c* tais que $\dfrac{3}{4} < a < b < c < \dfrac{19}{25}$
7. Fai no teu caderno unha táboa e di a que conxuntos pertencen os seguintes números:

   2.73535…; $\pi - 2$; $\sqrt[5]{-32}$; $\dfrac{2}{0}$; 10^{100} ; $\dfrac{102}{34}$; –2.5 ; 0.1223334444…
8. Contesta verdadeiro ou falso, xustificando a resposta.

   a) $Q \cap (\Re - Q) = \{0\}$

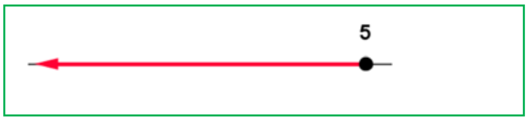
   b) $Z \subset Q$

   c) a raíz cadrada dun número natural é irracional.

   d) $\sqrt{7} \notin Q$

   e) 1/47 ten expresión decimal periódica.
9. Pon exemplos que xustifiquen:

   a) a suma e a resta de números irracionais pode ser racional.

   b) o produto ou división de números irracionais pode ser racional.
10. Que será a suma dun número racional con outro irracional? (Pensa na súa expresión decimal).
11. A suma de 2 números con expresión decimal periódica, pode ser un enteiro?
12. Expresa con palabras os seguintes intervalos ou semirrectas:
    a. (–7, 7]
    b. $\{x \in \Re \,/\, -3 \le x < 5\}$
    c. 

    d. (–2, +∞)
13. Cantos metros hai de diferenza ao calcular o perímetro da Terra poñendo $\pi \approx$ 3.14 en lugar do seu valor real?, é moito ou pouco?

    Basicamente tes que calcular o erro absoluto e o relativo.

    *Radio aproximadamente 6 370 km.
14. Os antigos fixeron boas aproximacións de Pi, entre elas citemos a Arquímedes (século III a.C.) con 211875/67441 e a Ptolomeo (século II d.C.) con 377/120.

    Cal cometeu menor erro relativo?
15. O seguinte é un Pi-texto: "Son e serei a todos definible, o meu nome teño que darvos, cociente diametral sempre inmensurable son dous redondos aros" (Manuel Golmayo).

    Conta e anota o número de letras de cada palabra e verás de onde vén o seu nome. Inventa unha oración coa mesma propiedade, non é necesario que sexa tan longa (polo menos 10 palabras).
16. Calcula: a) (3, 5] U (4, 6]; b) (3, 5] ∩ (4, 6]; c) (–∞ , 2] ∩ (–2, +∞)
17. Pode expresarse como entorno unha semirrecta?
18. Expresa como entornos abertos os seguintes intervalos:
    a. (0 , 7)
    b. (–8 , –2)
    c. (2, +∞)
19. Expresa como intervalos abertos os seguintes entornos: a) E(2 , 2/3); b) E(–7, 1/2)

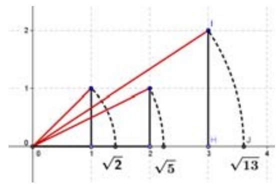
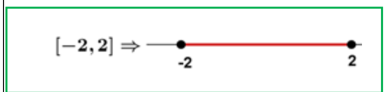
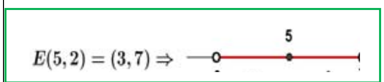
20. Un numero irracional tan importante como Pi é o número "e": $e \approx 2.718281828...$ que parece periódico pero non, non o é. Defínese como o número ao que se achega $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ cando *n* se fai moi, pero que moi, grande. **Colle a calculadora** e dálle a *n* valores cada vez maiores, por exemplo: 10, 100, 1000… Anota os resultados nunha **táboa**.
21. Calcula a área e o perímetro dun rectángulo de lados $\sqrt{2}$ e $\sqrt{8}$ m.
22. Calcula a área e o perímetro dun cadrado cuxa diagonal mide 2 m.
23. Calcula a área e o perímetro dun hexágono regular de lado $\sqrt{3}$ m.
24. Calcula a área e o perímetro dun círculo de radio $\sqrt{10}$ m.
25. Calcula a área total e o volume dun cubo de lado $\sqrt[3]{7}$ m.
26. Por que número temos que multiplicar os lados dun rectángulo para que a súa área se faga o triplo?
27. Canto debe valer o radio dun círculo para que a súa área sexa 1 m^2?
28. Temos unha circunferencia e un hexágono inscrito nela. Cal é a razón entre os seus perímetros? (Razón é división ou cociente).
29. Que números ao cadrado dan 7?
30. Que números reais ao cadrado dan menos de 7?
31. Que números reais ao cadrado dan máis de 7?
32. Medir o tamaño das pantallas en polgadas (") xa non parece moi boa idea. A medida refírese á lonxitude da diagonal do rectángulo. Así unha televisión de 32" refírese a que a diagonal mide 32". Iso non dá moita información se non sabemos a proporción entre os lados. As máis usuais nas pantallas de televisión e ordenador son 4:3 e 16:9.

    Se unha polgada son 2.54 cm, cales serán as dimensións dunha pantalla de 32" con proporción 4:3?, e se a proporción é 16/9? Cal ten maior superficie?

AUTOAVALIACIÓN

1) *Sabes a que conxuntos pertencen os distintos números.*
   Indica nunha táboa ou nun diagrama (como o do texto) a que conxuntos numéricos pertencen os seguintes números: 0; -2; 3/4, 7.3; 6.252525…, $\pi - 2$; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[4]{-16}$; 1.123124125…; 2.999…
2) *Sabes redondear cun número adecuado de cifras e calculas o erro relativo para comparar aproximacións. Sabes calcular unha cota para o erro absoluto e o relativo.*
   a) Os seguintes números redondeáronse, calcula unha cota do erro absoluto e do erro relativo:
      a_1) 3.14
      a_2) 45 600 con redondeo nas centenas.
   b) Se tomamos $\sqrt{10} \approx 3.16$ *e* $\frac{2}{3} \approx 0.67$ en cal das aproximacións cometemos proporcionalmente menor erro?
3) *Sabes cando unha fracción ten expresión decimal exacta ou periódica sen facer a división.* Próbao con estas: 30/150; 30/21
4) *Sabes pasar de decimal a fracción para traballar con valores exactos:*
   Calcula: 0.72525…+0.27474…
5) *Sabes representar números racionais e irracionais de forma exacta*
   Representa de forma exacta $\frac{-21}{9};\frac{30}{7};\sqrt{10};\sqrt{7}$
6) *Dominas as distintas formas e notacións dun intervalo ou semirrecta (intervalo, conxunto con desigualdades e gráfica).*
   Expresa en forma de intervalo (ou semirrecta), en forma de desigualdade e representa graficamente:
   a) Números reais inferiores ou iguais que -1.
   b) Números reais comprendidos entre -4 e 2, incluído o 1º pero non o 2º.
7) *Sabes pasar dun entorno a un intervalo e viceversa.*
   a) Escribe como intervalo: E(-2 , 2/3)
   b) Escribe como entorno ou intervalo (-5/2 , 7/3)
8) *Sabes resolver problemas traballando con cantidades exactas.*
   Calcula a área, o volume e a diagonal principal dun ortoedro de lados $\sqrt{5}$; $2\sqrt{5}$ e $3\sqrt{5}$ m.

RESUMO

Conxuntos de números	**Naturais** ➔ N = {0, 1, 2, 3, …}; **Enteiros** ➔ Z = {…, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, …} **Racionais** ➔ $Q = \{\frac{a}{b}; a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}$; **Irracionais** ➔ $I = \Re - Q$; $\Re = Q \cup I$	
Fraccións e expresión decimal	Todas as fraccións teñen expresión decimal exacta ou periódica. Toda expresión decimal exacta ou periódica pode poñerse como fracción.	$0.175 = \frac{175}{1000} = \frac{7}{40}$ X = 1.7252525… = 854/495
$\sqrt{2}$ **irracional**	$\sqrt{2}$ **non** pode poñerse como fracción.	
Erro Absoluto	Erro Absoluto (*EA*) = $\lvert valor\ real - valor\ aproximado \rvert$	$\sqrt{3} \approx 1.73$: $EA \approx 0.0021$.
Cota do erro	Calculamos a cota calculando un valor maior	$EA \leq 0.003$
Erro Relativo	$ER = \frac{EA}{\lvert Valor\ real \rvert}$	$ER = \frac{0.0021}{\sqrt{3}} \approx 0.00121$
Control do erro	En cada suma ou resta o erro absoluto é a suma dos erros absolutos. Os erros relativos súmanse ao multiplicar dous números.	
Densidade	Os números reais e os números racionais son densos. Entre cada dous números sempre podemos encontrar outro.	
Representación na recta real	Fixada unha orixe e unha unidade, existe unha bixección entre os números reais e os puntos da recta	
Intervalo aberto	Intervalo aberto no que os extremos non pertencen ao intervalo.	(2, 7) = {$x \in \Re$/ $2 < x < 7$}. 
Intervalo pechado	Os extremos si pertencen ao intervalo	[−2, 2] = {$x \in \Re$; $-2 \leq x \leq 2$} 
Intervalos semiabertos (ou semipechados)	Intervalo cun extremo aberto e o outro pechado.	$[-8,0) = \{x \in \mathbb{R} / -8 \leq x < 0\}$ 
Entornos	Forma especial de expresar un intervalo aberto: E(*a*, *r*) = (*a* − *r* , *a* + *r*)	

CAPÍTULO 2: POTENCIAS E RAÍCES

ACTIVIDADES PROPOSTAS

1. POTENCIAS DE EXPOÑENTE ENTEIRO. PROPIEDADES

1. Calcula as seguintes potencias:

   a) $-x^3$ b) $(x + 1)^3$ c) $-(-2x)^2$

2. PROPIEDADES DAS POTENCIAS.EXEMPLOS:

2. Efectúa as seguintes operacións con potencias:

   a) $(x + 1) \cdot (x + 1)^3$ b) $(x + 2)^3 : (x + 2)^4$ c) $\{(x - 1)^3\}^4$ d) $(x + 2) \cdot (x + 1)^{-3}$

3. POTENCIAS DE EXPOÑENTE RACIONAL.RADICAIS

3. Calcula:

   a) $(\sqrt[3]{a^6 . b^9})^2$ b) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} . \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ c) $(\sqrt[12]{(x+1)^3})^2$

4. Calcula:

   a) $\sqrt[2]{\sqrt[4]{\frac{x}{5y}}} : \sqrt{\sqrt[4]{\frac{3x}{y^2}}}$ b) $\sqrt{\frac{5}{3}} : \sqrt{\frac{2}{3}}$

5. Realiza as seguintes operacións con radicais:

   a) $\sqrt[4]{\frac{x}{5y}} : \sqrt[4]{\frac{3x}{y^2}}$ b) $(\sqrt[5]{(x+3)^2})^3$

4. OPERACIÓNS CON RADICAIS: RACIONALIZACION.

6. Escribe baixo un só radical e simplifica: $\sqrt[2]{2 \cdot \sqrt[2]{3 \cdot \sqrt[2]{4 \cdot \sqrt[2]{5 \cdot \sqrt[2]{6 \cdot \sqrt[2]{8}}}}}}$

7. Calcula e simplifica: $\frac{\sqrt[4]{x^3 \cdot y^3} \cdot \sqrt[3]{x^4 \cdot y^5}}{\sqrt[6]{x^5 \cdot y^4}}$

8. Realiza a seguinte operación: $\sqrt{x^3} + \sqrt{16x^7} + \sqrt{x}$

9. Calcula e simplifica: $\sqrt[2]{\frac{3}{x}} . \sqrt[3]{\frac{x^2}{8}} . \sqrt[4]{\frac{9}{5}}$

10. Racionaliza a expresión: $\frac{x+3y}{\sqrt{x}-\sqrt{2y}}$

11. Racionaliza: $\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

12. Racionaliza: $\frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{\sqrt{5}-2}$

5. NOTACION CIENTÍFICA.

13. Calcula: a) $(7.83 \cdot 10^{-5}) \cdot (1.84 \cdot 10^{13})$ b) $(5.2 \cdot 10^{-4}) : (3.2 \cdot 10^{-6})$

14. Efectúa e expresa o resultado en notación científica:

    a) $\frac{3.10^{-5} + 7.10^{-4}}{10^6 - 5.10^5}$ b) $\frac{7.35 \cdot 10^4}{5.10^{-3}} + 3.2 \cdot 10^7$

15. Realiza as seguintes operacións e efectúa o resultado en notación científica:

    a) $(4.3 \cdot 10^3 - 7.2 \cdot 10^5)^2$ b) $(7.8 \cdot 10^{-7})^3$

6. LOGARITMOS

16. Copia a táboa adxunta no teu caderno e emparella cada logaritmo coa súa potencia:

$2^5 = 32$	$\log_5 1 = 0$	$2^0 = 1$	$5^2 = 25$
$5^1 = 5$	$\log_2 2 = 1$	$5^0 = 1$	$\log_2 32 = 5$
$2^1 = 2$	$\log_2 1 = 0$	$\log_5 5 = 1$	$\log_5 25 = 2$
$2^4 = 16$	$\log_3 81 = 4$	$\log_2 16 = 4$	$3^4 = 81$

17. Calcula utilizando a definición de logaritmo: a) $\log_2 2^5$ b) $\log_5 25$ c) $\log_2 2^{41}$ d) $\log_5 5^{30}$

18. Calcula utilizando a definición de logaritmo: a) $\log_3 27$ b) $\log_{10} 100$ c) $\log_{1/2} (1/4)$ d) $\log_{10} 0.0001$

19. Calcula x utilizando a definición de logaritmo: a) $\log_2 64 = x$ b) $\log_{1/2} x = 4$ c) $\log_x 25 = 2$

20. Calcula utilizando a definición de logaritmo:

a) $\log_2 64 + \log_2 1/4 - \log_3 9 - \log_2\sqrt{2}$

b) $\log_2 1/32 + \log_3 1/27 - \log_2 1$

21. Desenvolve as expresións que se indican: a) $\ln \sqrt[5]{\dfrac{4x^2}{e^3}}$ b) $\log\left(\dfrac{a^3 \cdot b^2}{c^4 . d}\right)$

22. Expresa os logaritmos dos números seguintes en función de log 3 = 0.4771212

a) 81 b) 27 c) 59 049

23. Simplifica a seguinte expresión: $\frac{1}{2} \log m - 2 \log t - \log p + \frac{5}{2} \log h$

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Potencias

1. Expresa en forma exponencial: a) $\dfrac{1}{64}$ b) $\dfrac{t}{t^5}$ c) $(\dfrac{1}{z+1})^2$ d) $\dfrac{27^{-2}}{81^{-5}}$ e) $\dfrac{x^{-2}.y^{-7}}{x^8.y^{-4}}$

2. Calcula: $4^{\frac{1}{2}}$ b) $125^{\frac{1}{3}}$ c) $625^{\frac{5}{6}}$ d) $(64^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{6}}$ e) $(8^{\frac{-4}{3}})^{\frac{2}{5}}$

Radicais

3. Expresar en forma de radical: a) $x^{\frac{7}{9}}$ b) $(m^5 \cdot n^3)^{\frac{1}{3}}$ c) $[(x^2)^{\frac{1}{3}}]^{\frac{1}{5}}$ d) $a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}}$

4. Expresar en forma exponencial:

a) $(\sqrt[3]{x^2})^5$ b) $\sqrt{\dfrac{a^{13}}{a^6}}$ c) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^k}}$ d) $\sqrt[3]{x^{(5x+1)}}$ e) $\sqrt[4]{(x^2)^{(3x+2)}}$ f) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[2]{(x^2)^{\frac{1}{5}}}}}$

5. Expresa como potencia única:

a) $\dfrac{\sqrt[3]{a^8}}{a^2}$ b) $\dfrac{\sqrt{125}}{\sqrt[3]{25}}$ c) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{a.\sqrt{a}}$ d) $2 \cdot \sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$ e) $a. \sqrt{\dfrac{1}{a}}$ f) $\dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2}$ g) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{a^3} \cdot \dfrac{a^3}{\sqrt{a}}$

Propiedades dos radicais

6. Simplifica:

a) $\sqrt[9]{64}$ b) $\dfrac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3 \cdot b^5 \cdot c}}{\sqrt{a.b^3.c^3}}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^5 \cdot x^7}}$ e) $(\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}})^8$ f) $\dfrac{\sqrt[4]{x^3 \cdot y^3 \cdot \sqrt[3]{x^4 \cdot y^5}}}{\sqrt[6]{x^5 . y^4}}$ g) $\sqrt[5]{x^2 \cdot 3 \cdot \sqrt[10]{x^2 . \sqrt{x^3}}}$

7. Extraer factores do radical:

a) $\sqrt[3]{32x^4}$ b) $\sqrt[3]{81a^3b^5c}$ c) $(\sqrt{\sqrt{2}})^{10}$ d) $\sqrt[4]{\dfrac{25a^2b}{c^6}}$ d) $\sqrt{\dfrac{8a^5}{b^4}}$ e) $\sqrt{\dfrac{28x^5}{75y^3}}$ f) $\sqrt{\dfrac{32a^3}{45b^4}}$

8. Introducir factores no radical: a) $2\sqrt{\frac{3}{2}}$ b) $3\sqrt{\frac{2}{3}}$ c) $2\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ d) $2\cdot\sqrt[4]{\frac{5}{12}}$ e) $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{12}$ f) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$

Operacións con radicais:

9. a) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{b^4}\cdot\sqrt[3]{b^2}$ b) $\sqrt{5a}\cdot\sqrt{10ab}\cdot\sqrt{8a^3b}\cdot\sqrt{a}$ c) $\frac{\sqrt[6]{20}}{\sqrt[4]{10}}$ d) $\sqrt[4]{\frac{5}{12}}:\sqrt[4]{\frac{20}{3}}$ e) $\sqrt{\frac{3}{2}}:\sqrt{\frac{2}{3}}$ f) $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}$

10. Efectúa:

a) $\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{2}-\sqrt{8}$ b) $\sqrt{50a}-\sqrt{18a}$ c) $\sqrt{320}+\sqrt{80}-\sqrt{500}$ d) $\sqrt{\frac{7}{64}}+\sqrt{\frac{7}{4}}$

e) $5\sqrt{96}-\sqrt[5]{\frac{3}{32}}$ f) $\sqrt[3]{\frac{135}{8}}-\sqrt[3]{\frac{5}{8}}$ g) $\sqrt{150}+\sqrt{54}-\sqrt{24}$

Racionalizar

11. Racionaliza os denominadores: a) $\frac{5}{\sqrt[3]{2}}$ b) $\frac{3}{2-\sqrt{3}}$ c) $\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ d) $\frac{6}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ f) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

12. Racionaliza e simplifica:

a) $\frac{11}{2\cdot\sqrt{5}+3}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{2}+3}$ c) $\frac{\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$ d) $\frac{\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2\cdot\sqrt{2}}$ e) $\frac{4\cdot\sqrt{15}-2\cdot\sqrt{21}}{2\cdot\sqrt{5}-\sqrt{7}}$ f) $\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$

13. Efectúa e simplifica: a) $\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}\right)(3+2\sqrt{2}$ b) $\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{\sqrt{5}-1}-3\sqrt{5}$ c) $(1-\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}):(1+\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}})$

Notación científica

14. A masa do Sol é 330 000 veces a da Terra, aproximadamente, e esta é $5.98\cdot10^{21}$ t. Expresa en notación científica a masa do Sol, en quilogramos.

15. O ser vivo máis pequeno é un virus que pesa arredor de 10^{-18} g e o máis grande é a balea azul, que pesa, aproximadamente, 138 t. Cantos virus serían precisos para conseguir o peso da balea?

16. Os cinco países máis contaminantes do mundo (Estados Unidos, China, Rusia, Xapón e Alemaña) emitiron 12 billóns de toneladas de CO_2 no ano 1995, cantidade que representa o 53.5% das emisións de todo o mundo. Que cantidade de CO_2 se emitiu no ano 1995 en todo o mundo?

17. Expresa en notación científica:

a) Recadación das quinielas nunha xornada da liga de fútbol: 1 628 000 €.

b) Toneladas de CO_2 que se emitiron á atmosfera en 1995 en Estados Unidos 5 228.5 miles de millóns.

c) Radio do átomo de osíxeno: 0.000000000066 m.

18. Efectúa e expresa o resultado en notación científica:

a) $(3\cdot10^{-7})\cdot(8\cdot10^{18})$ b) $(4\cdot10^{-12})\cdot(5\cdot10^{-3})$ c) $(5\cdot10^{12}):(2\cdot10^{-3})$ d) $3.1\cdot10^{12}+2\cdot10^{10}$ e) $(4\cdot10^5)^{-2}$

19. Expresa en notación científica e calcula:

a) $(75\ 800)^4:(12\ 000)^4$ b) $\frac{0.000541\cdot10\ 318\ 000}{1\ 520\ 000\cdot0.00302}$ c) $(0.0073)^2\cdot(0.0003)^2$ d) $\frac{2\ 700\ 000-13\ 000\ 000}{0.00003-0.00015}$

20. Efectúa e expresa o resultado en notación científica:

a) $\frac{3\cdot10^{-5}+7\cdot10^{-4}}{10^6-5\cdot10^5}$ b) $\frac{7.35\cdot10^4}{5\cdot10^{-3}}+3.2\cdot10^7$ c) $(4.3\cdot10^3-7.2\cdot10^5)$

21. Que resultado é correcto da seguinte operación expresada en notación científica:

a) $4.35968\cdot10^{12}$ b) $43.5968\cdot10^{13}$ c) $4.35968\cdot10^{11}$ d) $4.35968\cdot10^{13}$

AUTOAVALIACIÓN

1 O número $8^{-4/3}$ vale:

a) un dezaseisavo b) Dous c) Un cuarto d) Un medio.

2.Expresa como potencia de base 2 cada un dos números que van entre paréntese e efectúa despois a operación: $(16^{1/4})\cdot(\sqrt[6]{4})\cdot(\frac{1}{8})$. O resultado é:

a) $2^{-1/3}$ b) $2^{-5/4}$ c) $2^{-5/3}$ d) 2^{-5}

3. O número: $\sqrt[3]{4\sqrt[3]{6\sqrt{8}}}$ é igual a:

a) $6^{1/4}$ b) $2^{1/3}$ c) $2^{5/6}\cdot 6^{1/9}$ d) 2

4. Cal é o resultado da seguinte expresión se a expresamos como potencia única?: $\dfrac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{16}}$

a) $\dfrac{1}{2.\sqrt[3]{2}}$ b) $\dfrac{2}{2\cdot\sqrt[3]{2}}$ c) $\dfrac{2}{3\cdot\sqrt[3]{2}}$ d) $\sqrt[3]{2}$

5. Simplificando e extraendo factores a seguinte expresión ten un valor: $\sqrt[2]{\sqrt{625\cdot a^6\cdot b^7\cdot c^6}}$

a) $5^3\cdot a\cdot b\cdot c^2\cdot\sqrt[4]{a\cdot b^2\cdot c}$; b) $5\cdot a^2\cdot b\cdot c\cdot\sqrt[4]{a^2\cdot b^3\cdot c^2}$ c) $5\cdot a\cdot b\cdot c\cdot\sqrt[4]{a^3\cdot b^2\cdot c^3}$ d) $5\cdot a\cdot b\cdot c\cdot\sqrt[4]{a^2\cdot b^3\cdot c^2}$

6. Cal dos seguintes valores é igual a $a^{3/2}$?

a) $a^{1/2}\cdot a^2$ b) $a^{5/2}\cdot a^{-1}$ c) $(a^2)^2$ d) $a^3\cdot a^{-2}$

7. Cal é o resultado desta operación con radicais?: $\sqrt{63}-\frac{5}{2}\cdot\sqrt{28}+\dfrac{\sqrt{112}}{3}$

a) $2\cdot\sqrt{7}$ b) $\frac{11}{8}\cdot\sqrt{7}$ c) $-\frac{2}{3}.\sqrt{7}$ d) $\frac{-2}{5}.\sqrt{7}$

8.Unha expresión cun único radical de: $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{(x+2)^3}\cdot\sqrt{(x+1)}$ está dada por:

a) $\sqrt[6]{x^2\cdot(x+2)\cdot(x+1)}$ b) $\sqrt[8]{x^2\cdot(x+2)^3\cdot(x+1)}$ c) $\sqrt[12]{x^8\cdot(x+2)^9\cdot(x+1)^6}$ d) $\sqrt[12]{x^2\cdot(x+2)^3\cdot(x+1)}$

9. Para racionalizar a expresión: $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ hai que multiplicar numerador e denominador por:

a) $\sqrt{3}-\sqrt{5}$ b) $2\cdot\sqrt{3}-\sqrt{5}$ c) $2+\sqrt{5}$ d) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$

10.Cal é o resultado en notación científica da seguinte operación?: $5.83\cdot 10^9 + 6.932\cdot 10^{12} - 7.5\cdot 10^{10}$

a) $6.86283\cdot 10^{12}$ b) $6.86283\cdot 10^{13}$ c) $6.8623\cdot 10^{11}$ d) $6.8628\cdot 10^{12}$

11. Cal é o resultado da seguinte operación expresado en notación científica?: $\dfrac{5.24\cdot 10^{10}}{6.3\cdot 10^{-7}}$

a) $0.8317\cdot 10^{17}$ b) $8.317\cdot 10^{16}$ c) $8.317\cdot 10^{15}$ d) $83.17\cdot 10^{16}$

RESUMO

Potencias de expoñente natural e enteiro	$a^{-n} = 1/a^n$	$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$ $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} = (-2)^2 = 4$
Propiedades das potencias	$a^n \cdot a^m = a^{m+n}$ $a^n : a^m = a^{n-m}$ $(a^n)^m = a^{n.m}$ $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ $a^n/b^n = (a/b)^n$	$(-3)^3 \cdot (-3)^3 = (-3)^{3+3} = (-3)^6$ $5^3 : 5^2 = 5^{2-1} = 5^1$ $(-3^5)^2 = (-3)^{5\cdot 2} = (-3)^{10}$ $(-2)^3 \cdot (-5)^3 = ((-2) \cdot (-5))^3$ $3^4/2^4 = (3/2)^4$
Potencias de expoñente racional. Radicais	$a^{r/s} = \sqrt[s]{a^r}$	$(16)^{3/4} = \sqrt[4]{16^3}$
Propiedades dos radicais	$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n.p]{a^p}$ $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$	$\sqrt[3\cdot 2]{5^2} = \sqrt[6]{25}$ $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3\cdot 2} = \sqrt[3]{6}$ $\frac{\sqrt[3]{a^7}}{\sqrt[3]{a^4}} = \sqrt[3]{\frac{a^7}{a^4}} = \sqrt[3]{a^{7-4}} = \sqrt[3]{a^3} = a$ $(\sqrt[5]{2})^3 = \sqrt[5]{2^3}$ $\sqrt[3]{\sqrt[2]{5}} = \sqrt[3\cdot 2]{5} = \sqrt[6]{5}$
Racionalización de radicais	Suprímense as raíces do denominador. Multiplícase numerador e denominador pola expresión adecuada (conxugado do denominador, radical do numerador, etc.)	$\frac{1}{\sqrt[3]{25}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^2} \cdot \sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{5}$ $\frac{1}{5-\sqrt{3}} = \frac{5+\sqrt{3}}{(5-\sqrt{3}) \cdot (5+\sqrt{3})} =$ $= \frac{5+\sqrt{3}}{5^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{5+\sqrt{3}}{22}$
Notación científica	Un número posto en notación científica consta dunha parte enteira formada por unha soa cifra que non é o cero (a das unidades). O resto das cifras significativas postas como parte decimal. Unha potencia de base 10 que dá a orde de magnitude do número: $N = a.bcd... \cdot 10^n$	$5.83 \cdot 10^9 + 6.932 \cdot 10^{12} - 7.5 \cdot 10^{10} =$ $5.83 \cdot 10^9 + 6\,932 \cdot 10^9 - 75 \quad 10^9 = (5.83 + 6\,932 - 75) \cdot 10^9$ $= 6\,862.83 \cdot 10^9 = 6.86283 \cdot 10^{12}$ $(5.24 \cdot 10^6) \cdot (6.3 \cdot 10^8) = 33.012 \cdot 10^{14} =$ $3.32012 \cdot 10^{15}$ $\frac{5.24 \cdot 10^6}{6.3 \cdot 10^{-8}} = (5.24 : 6.3) \cdot 10^{6-(-8)} = 0.8317 \cdot 10^{14}$ $= 8.317 . 10^{13}$
Logaritmos	Se $a > 0$, $\log_a m = z \Leftrightarrow m = a^z$ $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ $\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$ $\log_a x^y = y \cdot \log_a x$	$\log_a (75/25) = \log_a 75 - \log_a 25$ $\log_a 2^5 = 5 \cdot \log_a 2$ $\log_a \sqrt[3]{27} = \left(\frac{\log_a 27}{3}\right)$

CAPÍTULO 3: EXPRESIÓNS ALXÉBRICAS. POLINOMIOS

ACTIVIDADES PROPOSTAS

1. INTRODUCIÓN. EXPRESIÓNS ALXÉBRICAS

1. A finais de cada mes a empresa de telefonía móbil proporciónanos a factura mensual. Nela aparece moita información, en particular, o número total de chamadas realizadas (N) así como a cantidade total de minutos de conversa (M). Cos datos do anterior exemplo, xustifica que o importe das chamadas efectuadas durante ese mes é:
$$(0.05 \cdot M) + (0.12 \cdot N) = 0.05 \cdot M + 0.12 \cdot N \text{ euros}$$
2. Recorda a expresión alxébrica que nos proporciona a lonxitude dunha circunferencia.
3. Escribe en linguaxe alxébrica os seguintes enunciados, referidos a dous números calquera x e y:

   a) a metade do oposto da súa suma.
   b) a suma dos seus cubos.
   c) o cubo da súa suma.
   d) o inverso da súa suma.
   e) a suma dos seus inversos.
4. Unha tenda de roupa anuncia nos seus escaparates que está de rebaixas e que todos os seus artigos están rebaixados un 20 % sobre o prezo impreso en cada etiqueta. Escribe o que pagaremos por unha peza en función do que aparece na súa etiqueta.
5. O anterior comercio, nos últimos días do período de rebaixas, desexa desfacerse das súas existencias e para iso decide aumentar o desconto. Mantén o 20 % para a compra dunha única peza e, a partir da segunda, o desconto total aumenta un 5 % por cada nova peza de roupa, ata un máximo de 10 artigos. Analiza canto pagaremos ao realizar unha compra en función da suma total das cantidades que figuran nas etiquetas e do número de artigos que se adquiran.
6. Calcula o valor numérico das seguintes expresións alxébricas para o valor ou valores que se indican:
   a) $x^2 + 7x - 12$ para $x = 0$.   b) $(a + b)^2 - (a^2 + b^2)$ para $a = -3$ y $b = 4$.   c) $a^2 - 5a + 2$ para $a = -1$.
7. Indica, en cada caso, o valor numérico da seguinte expresión: $10x + 20y + 30z$
   a) $x = 1, y = 2, z = 1$ b) $x = 2, y = 0, z = 5$ c) $x = 0, y = 1, z = 0$.

2. POLINOMIOS. SUMA E PRODUTO

8. Realiza as seguintes sumas de polinomios:
   a) $(x^2 - x) + (-2x^2 - 3x + 1) + (2x^3 - 2x^2 + x - 2)$
   b) $-x^4 + (x^3 + 2x - 3) + (-3x^2 - 5x + 4) + (2x^3 - x + 5)$
9. Escribe o polinomio oposto de cada un dos seguintes polinomios:

   a) $3x^4 + 5x^3 + x^2 + 4x - 1$ b) $7x$ c) $-x^4 + 3x^2$
10. Considera os polinomios $p \equiv -x^3 - 5x + 2$, $q \equiv 3x^2 + 3x + 1$, así como o polinomio suma $s \equiv p + q$. Calcula os valores que adopta cada un deles para $x = -2$, é dicir, calcula $p(-2)$, $q(-2)$ e $s(-2)$. Estuda se existe algunha relación entre eses tres valores.
11. Obtén o valor do polinomio $p \equiv -x^3 - 5x + 2$ en $x = 3$. Que valor toma o polinomio oposto de p en $x = 3$?
12. Efectúa os seguintes produtos de polinomios:
a) $(-4x^3 + 2x) \cdot (-3x^2)$; b) $(2x^4 + x) \cdot (-3x - 4)$; c) $(2x^3 + x^2 - x) \cdot (3x^2 - x)$; d) $(-1) \cdot (7x^3 - 4x^2 - 3x + 1)$
13. Realiza as seguintes diferenzas de polinomios:
a) $(-4x^3 + 2x) - (-3x^2)$ b) $(2x^4 + x) - (-3x - 4)$ c) $(3x^2 - x) - (2x^3 + x^2 - x)$
14. Multiplica cada un dos seguintes polinomios por un número de tal forma que xurdan polinomios mónicos:
$4x^3 - 3x^2 + 2x$ $-2x^4 + x - 1$ $-x^2 + x - 7$
15. Calcula e simplifica os seguintes produtos:
a) $3x \cdot (2x^2 + 4x - 6)$b) $(3x - 4) \cdot (4x + 6)$ c) $(2a^2 - 5b) \cdot (4b - 3a^3)$ d)$(3a - 6) \cdot (8 - 2a) \cdot (9a - 2)$
16. Realiza os seguintes produtos de polinomios:
   a) $x^2 \cdot (-2x^2 - 3x + 1) \cdot 2x^3$ b) $(2x - 3) \cdot (-3x^2 - 5x + 4) \cdot (-x)$
17. De cada un dos seguintes polinomios extrae algún factor que sexa común aos seus monomios:
   a) $-15x^3 - 20x^2 + 10x$;   b) $24x^4 - 30x^2$

3. DIVISIÓN DE POLINOMIOS

18. Comproba que os cálculos que tes a continuación reflicten o que se fixo no exemplo anterior para dividir o polinomio $p(x) = 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2$ entre o polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$.

Primeira etapa:

$$\begin{array}{rl} 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 & \underline{|\ 2x^2 - x + 3} \\ \underline{-6x^4 + 3x^3 - 9x^2} & 3x^2 \\ 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 & \end{array}$$

Primeira e segunda etapas:

$$\begin{array}{rl} 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 & \underline{|\ 2x^2 - x + 3} \\ \underline{-6x^4 + 3x^3 - 9x^2} & 3x^2 + 4x \\ 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 & \\ \underline{-8x^3 + 4x^2 - 12x} & \\ -4x^2 - 9x - 2 & \end{array}$$

As tres etapas:

$$\begin{array}{rl} 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 & \underline{|\ 2x^2 - x + 3} \\ \underline{-6x^4 + 3x^3 - 9x^2} & 3x^2 + 4x - 2 \\ 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 & \\ \underline{-8x^3 + 4x^2 - 12x} & \\ -4x^2 - 9x - 2 & \\ \underline{4x^2 - 2x + 6} & \\ -11x + 4 & \end{array}$$

19. Divide os seguintes polinomios:

a) $2x^3 - x^2 - x + 7$ entre $x^2 - 2x + 4$;

b) $-10x^3 - 2x^2 + 3x + 4$ entre $5x^3 - x^2 - x + 3$

c) $4x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 3x - 7$ entre $-2x^2 + x + 3$

d) $-8x^5 - 2x^4 + 10x^3 + 2x^2 + 3x + 5$ entre $4x^3 + x^2 + x - 1$

e) $-6x^5 + x^2 + 1$ entre $x^2 + 1$

20. Encontra dous polinomios tales que ao dividilos apareza $q(x) = x^2 + x - 3$ como polinomio cociente e $r(x) = -3x^2 + 1$ como resto.

21. Efectúa os seguintes cálculos: a) $\frac{2x+1}{x^2+1} + \frac{3}{x}$ b) $\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+1}$ c) $\frac{-x}{x^2+3x} \cdot \frac{1}{x-1}$ d) $\frac{x-2}{x^2+3x} : \frac{x-2}{x+3}$

22. Realiza as seguintes operacións alterando, en cada apartado, unicamente un dos denominadores, e o seu respectivo numerador: a) $\frac{-x^2+x-1}{x^3} + \frac{3x-2}{x^2}$ b) $\frac{x-2}{x^2+3x} - \frac{4}{x+3}$

23. Comproba as seguintes identidades simplificando a expresión do lado esquerdo de cada igualdade:

a) $\frac{8a^4b^2}{2a^2b} = 4a^2b$ b) $\frac{4x^3y^2 - 3xy^2}{2xy} = 2x^2y - \frac{3}{2}y$ c) $\frac{3x^2 - 9x}{6x + 12} = \frac{x^2 - 3x}{x + 4}$

d) $\frac{6y^3 + 4y^2}{2y^2 - 8y} = \frac{3y^2 + 2y}{y - 4}$ e) $\frac{6a^2b^3 + 2a^3b - 4ab}{2ab^2 + 8a^2b} = \frac{3ab^2 + a^2 - 2}{b + 4a}$

24. Calcula os seguintes cocientes:

a) $(3x^3 - 9x^2 - 6x) : 3x$ b) $(7a^3 - 70a^2 - 21) : 7$ c) $(25x^4 - 10x^2) : 5x^2$ d) $(3x^2y^3 - 8xy^2) : xy^2$

25. Simplifica as seguintes fraccións alxébricas: a) $\frac{3x^2 - 6x}{9x^2 + 15}$ b) $\frac{a^3 - 5a^2}{7a^3 + 4a^2}$ c) $\frac{x^2y + 3xy^2}{4xy}$ d) $\frac{2a^2b^2 + 3ab}{a^3b - ab}$

4. DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DUN POLINOMIO

26. Completa, cando sexa posible, as seguintes factorizacións:

a) $-2x^3 + 2x = -2x \cdot ()$ b) $-6x^2 + 5x + 6 = (2x - 3) \cdot ()$
c) $-6x^4 + 3x^3 - 3x + 6 = (2x^2 - x + 1) \cdot ()$ d) $-6x^4 + 3x^3 - 3x + 6 = (2x^2 - x + 2) \cdot ()$

27. Determina un polinomio de grao 4 que admita unha descomposición factorial na que participe o polinomio $6x^3 - x^2 + 3x - 1$.

28. Estuda se os seguintes números son ou non raíz dos polinomios indicados:

- $x=3$ de $x^3 - 3x^2 + 1$ $x=-2$ de $x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ $x=1$ de $x^3 - 3x^2 + x + 1$
- $x=0$ de $x^3 - 3x^2 + 1$ $x=-1$ de $x^3 - 3x^2 - x + 3$

29. Supoñamos que temos dous polinomios, $p_1(x)$ e $p_2(x)$, e un número real α.

a) Se α é unha raíz de $p_1(x)$, tamén é raíz do polinomio suma $p_1(x) + p_2(x)$?

b) Se α é unha raíz de $p_1(x)$, tamén é raíz do polinomio produto $p_1(x) \cdot p_2(x)$?

c) Hai algunha relación entre as raíces do polinomio $p_1(x)$ e as do polinomio $4 \cdot p_1(x)$?

30. Constrúe un polinomio de grao 3 tal que posúa tres raíces distintas.

31. Determina un polinomio de grao 3 tal que teña, polo menos, unha raíz repetida.

32. Constrúe un polinomio de grao 3 de forma que teña unha única raíz.

33. Conxectura, e logo demostra, unha lei que nos permita saber cando un polinomio calquera $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$ admite ao número 0 como raíz.

34. Demostra unha norma que sinale cando un polinomio calquera $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$ admite o número 1 como raíz.

35. Obtén todas as raíces de cada un dos seguintes polinomios:

- $x+7$ $-x+5$ $2x-3$ $-4x-9$ $-2x$
- $x^2 - 3x$ $4x^2 - x - 3$ $x^3 - x$ $x^3 + x$

36. Usa a regra de Ruffini para realizar as seguintes divisións de polinomios:

a) $-2x^2 + x + 1$ entre $x+1$ b) $x^3 + 2x^2 - 2x + 1$ entre $x+2$ c) $4x^3 - 3x^2 - 1$ entre $x-1$ d) $x^3 - 9x + 1$ entre $x-3$

37. Emprega a regra de Ruffini para ditaminar se os seguintes números son ou non raíces dos polinomios citados:

a) $\alpha = 3$ de $x^3 - 4x^2 + 5$ b) $\beta = -2$ de $-x^3 - 2x^2 + x + 2$ c) $\gamma = 1$ de $-2x^4 + x + 1$ d) $\sigma = -1$ de $2x^3 + 2x^2$

38. Utiliza a regra de Ruffini para coñecer o valor do polinomio $-x^3 + 2x^2 + x + 2$ en $x = 3$.

39. Estuda se é posible usar a regra de Ruffini, dalgunha forma, para dividir $x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ entre $2x + 6$.

40. Para cada un dos seguintes polinomios sinala, en primeiro lugar, que números enteiros son candidatos a seren raíces súas e, despois, determina cales o son:

a) $2x^3 + x^2 - 18x - 9$; b) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 6x$

41. Completa o exemplo precedente comprobando que, en efecto, $\frac{-1}{2}$ é raíz do polinomio $2x^3 + x^2 - 18x - 9$.

42. Para cada un dos seguintes polinomios indica que números racionais son candidatos a seren raíces súas e, despois, determina cales o son: a) $3x^2 + 4x + 1$ b) $2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$

43. Simplifica, se é posible, as seguintes expresións:

a) $\frac{x^2 + 4x}{x^3 + 3x^2 - 6x - 8}$ b) $\frac{x^2 - 1}{x^3 + 3x^2 - 6x - 8}$ c) $\frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 - 6x}$

44. Realiza as seguintes operacións tendo en conta as factorizacións dos denominadores:

a) $\frac{5}{-3x + 12} + \frac{x+2}{x^2 - 4x}$ b) $\frac{-x}{x^2 - 2x + 1} - \frac{3x - 1}{x^2 - 1}$

45. Realiza os cálculos: a) $(1+3a)^2$; b) $(-x+3)^2$; c) $(-3x-2)^2$; d) $(x^2-1)^3$; e) $(4x+2)^3$

46. Obtén as fórmulas dos cadrados dos seguintes trinomios: a) $(a+b+c)^2$; b) $(a+b-c)^2$

47. Desenvolve as seguintes potencias: a) $(2x + 3y)^2$; b) $(3x + y/3)^2$; c) $(5x - 5/x)^2$; d) $(3a - 5)^2$; e) $(a^2 - b^2)^2$; f) $(3/5y - 2/y)^2$

48. Expresa como cadrado dunha suma ou dunha diferenza as seguintes expresións alxébricas:
a) $a^2 + 6a + 9$ b) $4x^2 - 4x + 1$ c) $b^2 - 10b + 25$ d) $4y^2 + 12y + 9$ e) $a^4 - 2a^2 + 1$ f) $y^4 + 6y^2 + 9$

49. Efectúa estes produtos: a) $(4x+3y)\cdot(4x-3y)$; b) $(2x^2+4)\cdot(2x^2-4)$; c) $(-x^2+3x)\cdot(x^2+3x)$

50. De acordo co exposto, factoriza os seguintes polinomios: a) x^2-2x+1; b) $3x^2+18x+27$; c) $4x^5-16x^3$

51. Calcula os seguintes produtos: a) $(3x + 1)\cdot(3x - 1)$; b) $(2a - 3b)\cdot(2a + 3b)$; c) $(x^2 - 5)\cdot(x^2 + 5)$; d) $(3a^2 + 5)\cdot(3a^2 - 5)$

52. Expresa como suma por diferenza as seguintes expresións: a) $9x^2 - 25$; b) $4a^4 - 81b^2$; c) $49 - 25x^2$; d) $100a^2 - 64$

53. Simplifica as seguintes fraccións alxébricas: a) $\frac{x^2-1}{3x+3}$; b) $\frac{2x^2+12x+18}{x^2-9}$; c) $\frac{6-3a}{a^2-4}$

EXERCICIOS E PROBLEMAS

1. Neste exercicio vaise presentar un *truco* mediante o cal imos adiviñar o número que resulta tras manipular repetidamente un número descoñecido. Converte nunha expresión alxébrica as sucesivas alteracións do número descoñecido e xustifica o que ocorre.
   i. Dille a un compañeiro que escriba nun papel un número natural e que non o amose.
   ii. Que o multiplique por 10.
   iii. Que ao resultado anterior lle sume 100.
   iv. Que multiplique por 1 000 o obtido.
   v. Que divida entre 10 000 a última cantidade.
   vi. Que ao resultado precedente lle reste o número que escribiu.
   vii. Independentemente do número descoñecido orixinal, que número xurdiu?

2. Nestoutro exercicio imos *adiviñar* dous números que pensou un compañeiro. Constrúe unha expresión alxébrica que recolla todos os pasos e, finalmente, descobre o truco.
   i. Solicita a un compañeiro que escriba nun papel, e non amose, dous números naturais: un dunha cifra (entre 1 e 9) e outro de dúas cifras (entre 10 e 99).
   ii. Que multiplique por 4 o número escollido dunha cifra.
   iii. Que ao resultado anterior lle sume 3.
   iv. Que multiplique por 5 o obtido.
   v. Que á última cantidade lle reste 15.
   vi. Que multiplique o resultado precedente por 5.
   vii. Que lle sume ao anterior o número de dúas cifras que elixiu.
   viii. Dille ao compañeiro que desvele cal é o resultado de todos eses cambios.
   ix. Que debemos facer para descubrir os dous números que escolleu o compañeiro?

3. Estuda se hai números reais nos que as seguintes expresións non poden ser avaliadas:

a) $\frac{3x-6}{(x+2)\cdot(2x-14)}$ $\frac{-x}{x^2-4x+4}$ $\frac{3x^3-x}{-2x^4-3x^2-4}$ $\frac{5x-y+1}{x^2+y^2}$

4. Unha persoa ten aforrados 1000 euros e decide depositalos nun produto bancario cun tipo de interese anual do 3%. Se decide recuperar os seus aforros ao cabo de dous anos, cal será a cantidade total da que disporá?

5. Xeneralicemos o exercicio anterior: Se ingresamos X euros nun depósito bancario cuxo tipo de interese é do i% anual, cal será a cantidade que recuperaremos ao cabo de n anos?

6. Constrúe un polinomio de grao 2, $p(x)$, tal que $p(3) = -7$.

7. Consideremos os polinomios $p(x) = -5x^3 + x^2 - 3x - 2$, $q(x) = 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 7$ e $r(x) = 4x^2 + 5x - 1$. Realiza as seguintes operacións:

a) $p + q + r$
b) $p - q$
c) $p \cdot r$
d) $p \cdot r - q$

8. Calcula os produtos: a) $\left(\frac{ax}{3}-\frac{by}{2}\right)\cdot\left(\frac{-xy}{6}\right)$ b) $(0.3x - 0.2y + 0.1z) \cdot (0.1x + 0.2y - 0.3z)$ c) $(x - 1)(x - a)(x - b)$

9. Efectúa as divisións de polinomios: a) $2x^4-3x^3-8x^2+9x-1$ entre $2x^2+3x-3$;
b) $4x^5-5x^4+6x^3+2x^2-10x-6$ entre x^3+2x+3

10. Calcula os cocientes: a) $(5x^4):(x^2)$ b) $(3x^2y^4z^6) : ((1/2)xy^3z^5)$ c) $(x^4 + 2x^2y + y^2) : (x^2 + y)$

11. Realiza as operacións entre fraccións alxébricas:
$\frac{x-1}{x^2-3x}+\frac{2x}{x^2-6x+9}$ $\frac{x-1}{x^2-3x}-\frac{2x}{x^2-6x+9}$ $\frac{x-1}{x^2-3x}\cdot\frac{2x}{x^2-6x+9}$ $\frac{x-1}{x^2-3x}:\frac{2x}{x^2-6x+9}$

12. Constrúe un polinomio de grao 2 tal que o número -5 sexa raíz súa.

13. Determina un polinomio de grao 3 tal que as súas raíces sexan 6, -3 e 0.

14. Constrúe un polinomio de grao 4 tal que teña unicamente dúas raíces reais.

15. Encontra un polinomio $q(x)$ tal que ao dividir $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ entre $q(x)$ se obteña como polinomio resto $r(x) = 5x^2 + 5x + 1$.

16. Calcula as raíces enteiras dos seguintes polinomios:
$3x^3+11x^2+5x-3$ $3x^3+2x^2+8x-3$ $3x^3+5x^2+x-1$ $2x^3+x^2-6x-3$

17. Obtén as raíces racionais dos polinomios do exercicio anterior.

18. Descompón os seguintes polinomios como produto de polinomios irredutibles:
$3x^3+11x^2+5x-3$ $3x^3+5x^2+x-1$ $2x^3+x^2-6x-3$ $3x^3-6x^2+x-2$

19. Calcula as potencias: a) $(x - 2y + z)^2$ b) $(3x - y)^3$ c) $((1/2)a + b^2)^2$ d) $(x^3 - y^2)^2$

20. Analiza se os seguintes polinomios xurdiron do desenvolvemento de potencias de binomios, ou trinomios, ou dun produto *suma por diferenza*. En caso afirmativo, expresa a súa procedencia.
x^2+6x+9 x^4-8x^2+16 $x^2+\sqrt{20}xy+5y^2$
$x^4+2x^3+x^2+2x+1$ $x^4-2x^3+x^2+2x+1$ x^2-36
$5x^2+1$ $5x^2-11$ x^2-3y^2

21. Descompón en factores: a) $x^4 - 1$ b) $x^2 - y^2$ c) $x^2y^2 - z^2$ d) $x^4 - 2x^2y + y^2$

22. Con este exercicio preténdese amosar a conveniencia á hora de non operar unha expresión polinómica que temos factorizada total ou parcialmente.
    a) Comproba a igualdade $x^4 - 5x^2 + 6 = (x^2 - 2)\cdot(x^2 - 3)$.
    b) Determina todas as raíces do polinomio x^4-5x^2+6.

23. Factoriza numerador e denominador e simplifica: a) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$ b) $\frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{x^2+y^2}$ c) $\frac{x^3-x}{x^4-1}$

24. Efectúa as seguintes operacións e simplifica todo o posible:
a) $\frac{2}{x(5-x)}-\frac{3}{2(5-x)}$ b) $\frac{x-y}{x+y}\cdot\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ c) $\frac{2x+1}{4x^2-1}$

25. Efectúa as seguintes operacións e simplifica todo o posible:
a) $\frac{x^4-1}{x^7}:\frac{x^2+1}{x^8}$ b) $\frac{2x+3y}{a-b}-\frac{3x+4y}{2a-2b}$ c) $-4x+(1-x^4)\left(\frac{x+1}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}\right)$

26. Efectúa as seguintes operacións e simplifica todo o posible:
a) $\left(x^4-\frac{1}{x^2}\right):\left(x^2+\frac{1}{x}\right)$ b) $\frac{x^3-3ax^2+3a^2x-a^3}{x+a}:\frac{x-a}{x+a}$ c) $\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right):\frac{ab}{a+b}$

27. Efectúa as seguintes operacións e simplifica todo o posible:
a) $\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{x+y}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{x+y}}:\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a+y}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{a+y}}$ b) $\left(1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right):\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)$ c) $\frac{\frac{3}{x}+\frac{2}{y}}{\frac{1}{x}-\frac{3}{y}}\cdot\frac{\frac{2}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{3}{x}+\frac{5}{y}}$

AUTOAVALIACIÓN

1. Sinala os coeficientes que aparecen nas seguintes expresións alxébricas:

   a) $\frac{3x-7}{2-3y^2}+5xy^3-\frac{6}{z}$ b) $-2x^5+x^4-x^3+5x-1$ c) $5\cdot\sqrt{2}\cdot x\cdot y^2\cdot z$

2. O valor numérico da expresión $\frac{3x-7}{2-3y^2}+5xy^3-\frac{6}{z}$ en $x=2,\ y=-1,\ z=-1$ é:

   a) 17 b) 15 c) -3 d) -5

3. Completa adecuadamente as seguintes oracións:

   a) A suma de dous polinomios de grao dous é sempre outro polinomio de grao ……….

   b) A suma de tres polinomios de grao dous é sempre outro polinomio de grao ……….

   c) O produto de dous polinomios de grao dous é sempre outro polinomio de grao ……….

   d) A diferenza de dous polinomios de grao dous é sempre outro polinomio de grao ……….

4. Ao dividir o polinomio $p(x)=x^5+x^4+x^3+1$ entre $q(x)=x^2+x+1$ o polinomio resto resultante:

   a) debe ser de grao 2. b) pode ser de grao 2.

   c) debe ser de grao menor que 2. d) ningunha das opcións precedentes.

5. Considera o polinomio $2x^4-7x^3+5x^2-7x+3$. Cales dos seguintes números enteiros son razoables candidatos para seren unha raíz súa?

   a) 3 b) 2 c) –5 d) -7

6. Considera o polinomio $2x^4+7x^3+x^2-7x-3$. Cales dos seguintes números racionais son *razoables candidatos* para seren unha das súas raíces?

   a) -3 b) 2 e $\frac{-1}{2}$ c) –3 e $\frac{1}{3}$ d) –3 e $\frac{3}{2}$

7. Todo polinomio con coeficientes enteiros de grao tres
   a) ten tres raíces reais. b) ten, como moito, tres raíces reais. c) ten, polo menos, tres raíces.

8. É posible que un polinomio, con coeficientes enteiros, de grao catro teña exactamente tres raíces, xa sexan diferentes ou con algunha múltiple?

9. Xustifica a veracidade ou falsidade de cada unha das seguintes oracións:
   a) A regra de Ruffini serve para dividir dous polinomios calquera.
   b) A regra de Ruffini permite ditaminar se un número é raíz ou non dun polinomio.
   c) A regra de Ruffini só é válida para polinomios con coeficientes enteiros.
   d) A regra de Ruffini é un algoritmo que nos proporciona todas as raíces dun polinomio.

10. Analiza se pode haber algún polinomio de grao oito que non teña ningunha raíz.

RESUMO

Expresión alxébrica	Expresión matemática que se constrúe con números reais e as operacións matemáticas básicas de suma, resta, multiplicación e/ou división.	$\frac{-3x}{2x+y^3}-x\cdot y^2\cdot z$
Variable, indeterminada	O non concretado nunha expresión alxébrica.	As variables, ou indeterminadas, do exemplo anterior son *x*, *y*, *z*.
Valor numérico dunha expresión alxébrica	Ao fixar un valor concreto para cada indeterminada, ou variable, dunha expresión alxébrica aparece un número real: o **valor numérico** desa expresión alxébrica para tales valores das indeterminadas.	Se, na expresión precedente, facemos *x* = 3, *y* = -2, *z* = 1/2 obtemos $\frac{-3\cdot 3}{2\cdot 3+(-2)^3}-3\cdot(-2)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{-3}{2}$
Monomio	Expresión dada polo produto de números reais e indeterminadas.	$-5\cdot x\cdot y^3\cdot z^2,\ 7\cdot x^2$
Coeficiente dun monomio	O número real que multiplica a indeterminada, ou indeterminadas, do monomio.	Os coeficientes dos anteriores monomios son, respectivamente, -5 e 7
Parte literal dun monomio	A indeterminada, ou produto de indeterminadas, que multiplica o coeficiente do monomio.	A parte literal de $-5\cdot x\cdot y^3\cdot z^2$ é $x\cdot y^3\cdot z^2$
Grao dun monomio	Cando hai unha única indeterminada é o expoñente desta indeterminada. Se aparecen varias, o grao do monomio será a suma dos expoñentes desas indeterminadas.	Os graos dos monomios precedentes son 6 e 2, respectivamente
Polinomio	Expresión construída a partir da suma de monomios.	$-x^3+4x^2+8x+6$
Grao dun polinomio	O maior grao dos seus monomios.	O anterior polinomio é de grao 3
Suma, resta e produto de polinomios	O resultado sempre é outro polinomio.	$p = -3x + 6$; $q = x^2 + 4$. $p + q = x^2 - 3x + 10$; $p - q = -x^2 - 3x + 2$; $p\cdot q = -3x^3 + 6x^2 - 12x + 24$.
División de dous polinomios	Obtéñense outros dous polinomios, os polinomios cociente (*c*(*x*)) e resto (*r*(*x*)), ligados aos polinomios iniciais, os polinomios dividendo (*p*(*x*)) e divisor (*q*(*x*)).	$p(x)=q(x)\cdot c(x)+r(x)$
Factorización dun polinomio	Consiste en expresalo como produto doutros polinomios de menor grao.	$x^5-3x^3-x^2+3 == (x^2-3)\cdot(x^3-1)$
Polinomio irredutible	É aquel que non pode ser expresado como produto doutros polinomios de grao inferior.	$-3x+6$, x^2+4
Raíz dun polinomio	Un número real concreto α é unha **raíz**, ou un **cero**, do polinomio p, se ao avaliar p en $x=\alpha$ obtemos o número 0, é dicir, se $p(\alpha)=0$.	2 é raíz de $-3x+6$ 1 e -3 son raíces de x^2+2x-3
Raíces e factorización	Que un número real concreto α sexa unha raíz do polinomio $p(x)$ é equivalente a que o polinomio $p(x)$ admita unha descomposición factorial da forma $p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$ para certo polinomio $c(x)$.	-2 é unha raíz de x^3+2x^2-x-2 $x^3+2x^2-x-2=(x+2)\cdot(x^2-1)$
Número de raíces e grao	Todo polinomio de grao n ten como moito n raíces reais, algunha das cales pode aparecer repetida entre eses non máis de n números reais.	x^2+2x-3 ten dúas raíces, 1 e -3 $3x^2+7$ non ten raíces
Regra de *Ruffini*	Pódemos axudar á hora de factorizar un polinomio e coñecer as súas raíces.	

CAPÍTULO 4: ECUACIÓNS E SISTEMAS

ACTIVIDADES PROPOSTAS

1. ECUACIÓNS DE SEGUNDO GRAO

1. Indica se son ecuacións de segundo grao as seguintes ecuacións:

a) $3x^2-\sqrt{7}x+5=0$ b) $4.7x^2-6.25=0$ c) $7x^2-\frac{2}{x}+5x=0$ d) $2xy^2-5=0$ e) $33-2.35x=0$ f) $9x^2-52\sqrt{x}+3.2=0$

2. Nas seguintes ecuacións de segundo grao, indica quen son *a*, *b* e *c*.
   a) $3-8x^2+10x=0$ b) $-3.4x^2+7.8x=0$ c) $6x^2-1=0$ d) $1.25x^2-3.47x+2.75=0$.
3. Resolve as seguintes ecuacións de 2º grao completas:
   a) $x^2-8x+7=0$ b) $2x^2+3x-12=0$ c) $10x^2-9x+50=0$ d) $x^2-13x+22=0$
4. Resolve as seguintes ecuacións:

a) $2x-3\cdot\frac{x-1}{5}=6x^2-\frac{8x-3}{5}$; b) $2\cdot\frac{x-7}{5}-\frac{3-2x}{x}=10$; c) $5x\cdot(x-3)+4(x^2-5)+10=-10$;

d) $5(x^2-1)+3(x^2-5)+4=16$; e) $\frac{2-5x^2}{3x}-\frac{4}{3}=\frac{4x-7}{6}$; f) $\frac{2-3x^2}{5x}-\frac{4}{3}=\frac{2x-1}{15}$.

5. Pescuda cantas solucións teñen as seguintes ecuacións de 2º grao:

a) $9x^2+4x+7=0$ b) $3x^2-5x+2=0$ c) $x^2-9x-12=0$ d) $2x^2-7x+9=0$.

6. Resolve as seguintes ecuacións de 2º grao incompletas:

a) $5x^2+75x=0$ b) $4x^2-160=0$ c) $x^2-64=0$ d) $3x^2+2x=0$ e) $9x^2-49=0$ f) $3x^2-33x=0$.

7. Resolve as seguintes ecuacións de 2º grao incompletas:

a) $3x^2+18x=0$ b) $5x^2-180=0$ c) $x^2-49=0$ d) $2x^2+x=0$ e) $4x^2-25=0$ f) $5x^2-10x=0$.

8. Resolve mentalmente as seguintes ecuacións de 2º grao:

a) $2x^2+8x=0$ b) $x^2+6x-27=0$ c) $x^2-81=0$ d) $x^2-13x+22=0$ e) $x^2-3x-4=0$ f) $x^2-5x-24=0$

9. Escribe unha ecuación de segundo grao cuxas solucións sexan 5 e 9.
10. O perímetro dun rectángulo mide 20 cm e a súa área 24 cm^2. Calcula mentalmente as súas dimensións.
11. Se 3 é unha solución de $x^2-7x+a=0$, canto vale *a*?

2. OUTROS TIPOS DE ECUACIÓNS

12. Resolve as ecuacións seguintes:
    a) $(x-7)\cdot(x-2)\cdot(x+5)\cdot(x-3)\cdot(x-11)=0$ b) $3(x-5)\cdot(x-7)\cdot(x+2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)=0$
13. Resolve as seguintes ecuacións bicadradas:
    a) $x^4-3x^2+2=0$ b) $x^4+12x^2+35=0$ c) $x^4-4x^2-12=0$.
14. Resolve as ecuacións bicadradas seguintes:
    a) $x^4-13x^2+36=0$ b) $x^4-29x^2+100=0$ c) $x^4-10x^2+9=0$ d) $x^4-26x^2+25=0$.
15. Resolve as seguintes ecuacións racionais:
    a) $\frac{1}{x^2-x}-\frac{1}{x-1}=0$ b) $\frac{1}{x-6}+\frac{x}{x-2}=\frac{4}{x^2-8x+12}$ c) $\frac{3}{x}=1+\frac{x-13}{6}$.
16. Resolve as seguintes ecuacións irracionais:
    a) $\sqrt{5x+4}-1=2x$ b) $\sqrt{x+19}+1=\sqrt{2x+4}$ c) $\mathbf{3\sqrt{x-1}+11=2x}$.
17. Resolve as ecuacións seguintes:
    a) $(x-9)\cdot(x-1)\cdot(x+24)\cdot(x-5)\cdot(x-3)=0$ b) $3(x-5)\cdot(x-9)\cdot(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x-4)=0$
18. Resolve as ecuacións bicadradas seguintes:
    a) $x^4+5x^2-36=0$ b) $x^4-21x^2+12100=0$ c) $x^4-45x^2+234=0$ d) $x^4-37x^2+36=0$
19. Resolve as ecuacións racionais seguintes:
    a) $\frac{2x-1+7x}{3x}=\frac{3}{x}-2$ b) $\frac{1}{x}+1-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{4}{3}$ d) $\frac{2x-3}{x}+\frac{1}{x}=1$
20. Resolve as ecuacións irracionais seguintes:
    a) $5+\sqrt{x-1}=x+2$ b) $\sqrt{x-2}+3\sqrt{x-2}=x+1$ c) $\sqrt{x}-4=x-1$ d) $7+\sqrt{x+4}=x+9$
21. Resolve as ecuacións exponenciais seguintes:
    a) $5^{3x}=\frac{1}{625}$ b) $2^{2x}\cdot4^x=\frac{1}{16}$ c) $2^{x+5}\cdot2^{x+4}\cdot2^{x+3}=8$

3. SISTEMAS DE ECUACIÓNS LINEAIS

22. Razoa se son ou non sistemas de ecuacións lineais os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 7xy + 5y = 2 \\ 3x - 5y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2y - 4x = 3 \\ 3x - 5y = -6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 4 = 2y \\ 6x + 8y = 9 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x^2 + 3y = 5 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$

23. Representa os seguintes sistemas e clasifícaos:

a) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ -y + 3x = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 9y = 9 \\ 2x - 6y = 6 \end{cases}$

24. Resolve graficamente os seguintes sistemas e clasifícaos:

a) $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ -3x + y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ -2y + 2x = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 4x - 6y = 6 \end{cases}$

25. Resolve graficamente os seguintes sistemas e clasifícaos:

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ -3x + y = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ -2y + x = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x - 4y = 4 \end{cases}$

26. Resolve os seguintes sistemas polo método de substitución:

a) $\begin{cases} 2x + 5y = -6 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 4x + y = 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x - 2y = 3 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$

27. Resolve os seguintes sistemas polo método de substitución:

a) $\begin{cases} 3x + 4y = 26 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 4y = 26 \\ 3x + y = 24 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ 2x + 3y = 14 \end{cases}$

28. Resolve os seguintes sistemas polo método de igualación:

a) $\begin{cases} x + y = 11 \\ -x + 3y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 5y = 4 \\ 2x + 7y = -11 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x - 3y = 5 \\ 3x + 4y = 11 \end{cases}$

29. Resolve os seguintes sistemas polo método de igualación:

a) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ -2x + y = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ 4x + 5y = 12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x - 2y = 7 \\ x + 3y = 8 \end{cases}$

30. Resolve os seguintes sistemas polo método de redución:

a) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ -2x - 5y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x - 4y = 5 \end{cases}$

31. Resolve os seguintes sistemas polo método de redución:

a) $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ x - 5y = -9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 3y = 9 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - 2y = 7 \end{cases}$

5. SISTEMAS DE ECUACIÓNS NON LINEAIS

32. Razoa se son ou non sistemas de ecuacións lineais os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x \cdot y + 2y = 6 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5y - x = 4 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x - 2 = y \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ 3x + y^2 = 4 \end{cases}$

33. Resolve os seguintes sistemas non lineais:

a) $\begin{cases} x \cdot y + 2 = 4x \\ y - x = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y^2 - x^2 = 5 \\ 5x - 3y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x \cdot y = 12 \end{cases}$

34. Resolve os seguintes sistemas e comproba graficamente as solucións:

a) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 1 \\ xy = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ xy = 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17 \\ x + y = 5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 18 \\ y = x \end{cases}$

35. A traxectoria dun proxectil é unha parábola de ecuación: e = $-x^2 + 5x$, e a traxectoria dun avión é unha recta de ecuación: $y = 3x$. En que puntos coinciden ambas as traxectorias? Representa graficamente a recta e a parábola para comprobar o resultado.

36. Resolve os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = -2 \\ 2x^2 - 3y^2 = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 3 \\ 5x^2 - 2y^2 = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} xy = \frac{1}{2} \\ x + y = \frac{3}{2} \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 - 4y = -3 \\ xy = 1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + y - \frac{y}{x} = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$

37. Resolve os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + y - 3z = -2 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y + 2z = 6 \\ x + 2y + 2z = 4 \\ 3x - 2y - 3z = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 5 \\ x - 2y + 2z = -1 \\ x - 2y - 3z = -6 \end{cases}$

3. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

38. Que número multiplicado por 4 é 5 unidades menor có seu cadrado?

39. Nunha clase deciden que todos van enviar unha carta ao resto de compañeiros. Un di: Imos escribir 380 cartas! Calcula o número de alumnos que hai na clase.

40. Calcula tres números consecutivos tales que a suma dos seus cadrados sexa 365.

41. Unha fotografía rectangular mide 14 cm de base e 10 cm de altura. Arredor da foto hai unha marxe de igual anchura para a base que para a altura. Calcula o ancho da marxe, sabendo que a área total da foto e a marxe é de 252 cm^2.

42. O triplo do cadrado dun número aumentado no seu duplo é 85. Cal é o número?
43. Un triángulo isósceles ten un perímetro de 20 cm e a base mide 4 cm, calcula os lados do triángulo e a súa área.
44. Unha folla de papel cadrada dóbrase pola metade. O rectángulo resultante ten unha área de 8 cm^2. Cal é o perímetro deste rectángulo?
45. Un pai di: "O produto da idade do meu fillo hai 5 anos polo da súa idade hai 3 anos é a miña idade actual, que son 35 anos". Calcula a idade do fillo.
46. Calcula as dimensións do rectángulo cuxa área é 21 m^2, sabendo que os seus lados se diferencian en 4 metros.
47. Nun triángulo rectángulo o cateto maior mide 4 cm menos que a hipotenusa e 4 cm máis que o outro cateto. Canto miden os lados do triángulo?
48. Calcula dous números pares consecutivos cuxo produto sexa 224.
49. Calcula tres números impares consecutivos tales que se ao cadrado do maior se lle restan os cadrados dos outros dous se obtén como resultado 15.
50. A suma das idades de María e Afonso son 65 anos. A idade de Afonso menos a metade da idade de María é igual a 35. Que idade ten cada un?
51. A suma das idades de Mariló e Xabier é 32 anos. Dentro de 7 anos, a idade de Xabier será igual á idade de Mariló máis 20 anos. Que idade ten cada un na actualidade?
52. Encontra dous números cuxa diferenza sexa 24 e a súa suma sexa 104.
53. Un hotel ten 42 habitacións (individuais e dobres) e 62 camas, cantas habitacións ten de cada tipo?
54. Nun triángulo rectángulo a hipotenusa mide 10 cm e as lonxitudes dos seus dous catetos suman 14 cm. Calcula a área do triángulo.
55. Neves pregúntalle a Míriam polas súas cualificacións en Matemáticas e en Lingua. Míriam dille "A suma das miñas cualificacións é 19 e o produto 90". Neves dálle os parabéns. Que cualificacións obtivo?

56. Dun número de tres cifras sábese que suman 12, que a suma dos seus cadrados é 61, e que a cifra das decenas é igual á das centenas máis 1. Que número é?

57. Hai tres zumes compostos do seguinte modo: O primeiro de 40 dl de laranxa, 50 dl de limón e 90 dl de pomelo. O segundo de 30 dl de laranxa, 30 dl de limón e 50 dl de pomelo. O terceiro de 20 dl de laranxa, 40 dl de limón e 40 dl de pomelo. Que volume deberá tomarse de cada un dos zumes anteriores para formar un novo zume de 34 dl de laranxa, 46 dl de limón e 67 dl de pomelo.

58. Véndense tres especies de cereais: trigo, cebada e millo. Cada kg de trigo véndese por 2 €, o da cebada por 1 € e o de millo por 0,5 €. Se se venden 200 kg en total e se obtén pola venda 300 €, cantos volumes de cada cereal se venderon?

59. Deséxase mesturar fariña de 2 €/kg con fariña de 1 €/kg para obter unha mestura de 1,2 €/kg. Cantos kg deberemos poñer de cada prezo para obter 300 kg de mestura?

60. Nunha tenda hai dous tipos de xoguetes, os de tipo A que utilizan 2 pilas e os de tipo B que utilizan 5 pilas. Se en total na tenda hai 30 xoguetes e 120 pilas, cantos xoguetes hai de cada tipo?

61. Un peón sae dunha cidade A e diríxese a unha cidade B que está a 15 km de distancia a unha velocidade de 4 km/h e, no mesmo momento, sae un ciclista da cidade B a unha velocidade de 16 km/h e diríxese cara a A. Canto tempo leva o peón camiñando no momento do encontro? A que distancia de B se cruzan?

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Ecuacións de segundo grao

1. Resolve as seguintes ecuacións de 2º grao

a) $-x^2 - 7x - 12 = 0$ b) $x(-5 + x) = 3$ c) $3x^2 = 30x$

d) $3(x + 1) - x(5x + 2) = 7$ e) $3(7x - 2) + 3x(x - 4) = 1$ f) $4(x^2 - 4) - 5(3 + 2x) = -7$

g) $(3x + 2)\cdot(4x - 2) = -6x - 2$ h) $x\cdot(x + 13) = 168$ i) $2(3x^2 - 5x + 2) - 5x(6x - 3) = -2$

2. Resolve as seguintes ecuacións de 2º grao con denominadores:

a) $\frac{x^2-3}{2}-\frac{x+2}{4}=5$ b) $\frac{x^2-5}{2}+\frac{2x^2-3x+7}{2}=5$ c) $\frac{2x^2+1}{5}+\frac{x+3}{10}=1$

d) $\frac{2-2x^2}{3}+\frac{4x-3}{2}=\frac{5}{6}$ e) $\frac{x^2-1}{3}-\frac{5x-9}{6}=4x-3$ f) $\frac{2x+3x^2}{7}-\frac{3x-8}{14}=1$

3. Resolve mentalmente as seguintes ecuacións de 2º grao:

a) $x^2 - 3x - 10 = 0$ b) $x^2 + 3x - 10 = 0$ c) $x^2 + 7x + 10 = 0$ d) $x^2 - 7x + 10 = 0$

e) $x(-1 + x) = 0$ f) $2x^2 = 50$ g) $x^2 - 5x + 6 = 0$ h) $x^2 - x - 6 = 0$ i) $x^2 + x - 6 = 0$

4. Factoriza as ecuacións do problema anterior. Así, se as solucións son 2 e 3, escribe:

$5x^2 - 25x + 30 = 0 \Leftrightarrow 5(x - 2)\cdot(x - 3) = 0$. Observa que se o coeficiente de x^2 fose distinto de 1 os factores teñen que estar multiplicados por este coeficiente.

5. Cando o coeficiente b é par (b = 2B), podes simplificar a fórmula:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2B\pm\sqrt{4B^2-4ac}}{2a}=\frac{-2B\pm2\sqrt{B^2-ac}}{2a}=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-ac}}{a}$$

Así para resolver $x^2 - 8x + 12 = 0$ basta dicir $x=4\pm\sqrt{16-12}=4\pm2$, logo as súas solucións son 6 e 2. Utiliza esa expresión para resolver:

a) $x^2 - 2x - 8 = 0$ b) $x^2 - 6x - 7 = 0$ c) $x^2 + 4x - 5 = 0$

6. Resolve mentalmente as ecuacións seguintes, logo desenvolve as expresións e utiliza a fórmula xeral para volver resolvelas.

a) $(x - 2)\cdot(x - 5) = 0$ b) $(x + 1)\cdot(x - 6) = 0$ c) $(x - 3)\cdot(x - 5) = 0$

d) $(x - 4)\cdot(x + 7) = 0$ e) $(x + 8)\cdot(x - 9) = 0$ f) $(x - 2)\cdot(x + 3) = 0$

7. Determina o número de solucións reais que teñen as seguintes ecuacións de segundo grao calculando o seu discriminante, e logo resólveas.

a) $x^2 + 7x - 3 = 0$ b) $5x^2 + 7x - 8 = 0$ c) $2x^2 + 3x + 9 = 0$

d) $2x^2 - 2x + 7 = 0$ e) $3x^2 - 2x - 7 = 0$ f) $4x^2 + x - 5 = 0$

8. Escribe tres ecuacións de segundo grao que non teñan ningunha solución real. *Axuda*: Utiliza o discriminante.
9. Escribe tres ecuacións de segundo grao que teñan unha solución dobre.
10. Escribe tres ecuacións de segundo grao que teñan dúas solucións reais e distintas.
11. Resolve as seguintes ecuacións polinómicas:

a) $x^5 - 37x^3 + 36x = 0$ b) $x^3 - 2x^2 - 8x = 0$ c) $2x^3 + 2x^2 - 12x = 0$

d) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$ e) $2x^4 = 32x^2 - 96$ f) $x(x - 3)(2x + 3)(3x - 5) = 0$

12. Resolve as seguintes ecuacións aplicando un cambio de variable:

a) $x^8 + 81 = 82x^4$ b) $x^4 - 24x^2 + 144 = 0$ c) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ d) $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$

13. Resolve as seguintes ecuacións racionais:

a) $3x + \frac{2}{x} = 1$ b) $\frac{2}{3x} + \frac{5}{6x} = x$ c) $\frac{2}{x-5} + 3 = \frac{1}{x-2}$ d) $\frac{3x}{2-x} - 4x = 2$

e) $\frac{3}{x+2} = \frac{2(3x+1)}{x-2} + 1$ f) $\frac{3x-1}{x+2} - \frac{5+2x}{2x} = 4$ g) $\frac{5x-3}{x+1} - \frac{5+3x}{x-1} = 2$

h) $\frac{4}{1-x} = \frac{3}{x} + \frac{1}{x-x^2}$ i) $\frac{5x}{x-2} - \frac{2x}{x^2-4} = \frac{x}{3}$ j) $\frac{1}{3} = \frac{x-4}{6-x}$

14. Resolve as seguintes ecuacións irracionais:

a) $x = -2 + \sqrt{5 + 4x^2}$; b) $\sqrt{16 - x} = x - 4$; c) $5 + \sqrt{x^2 - 3x + 2} = 2x$; d) $\sqrt{x} - \sqrt{x-2} = 5$; e) $\sqrt{1-x} - \sqrt{x+1} + 2 = 0$;

f) $\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} = 3$; g) $5\sqrt{x-2} + 1 = \frac{2}{\sqrt{x+1}}$; h) $\sqrt{x-2} - \frac{1}{\sqrt{x-2}} = 2$; i) $\sqrt{x+1} + \frac{1}{\sqrt{x-2}} = 3$

15. Resolve as ecuacións seguintes: a) $3^{2x} = \frac{1}{81}$ b) $2^{2x} = \frac{1}{1\,024}$

Sistemas lineais de ecuacións

16. Resolve os seguintes sistemas polo método de substitución:

a) $\begin{cases} 4x - 3y = 1 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 4y = 5 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x + y = 2 \end{cases}$

17. Resolve os seguintes sistemas polo método de igualación:

a) $\begin{cases} -3x + 2y = -1 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 2y = 1 \\ 4x - y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x - 4y = 10 \\ -8x + 3y = -13 \end{cases}$

18. Resolve os seguintes sistemas polo método de redución:

a) $\begin{cases} 7x - 2y = 5 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 5y = 20 \\ -x - 6y = -14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 6y = 0 \\ -5x + 2y = -9 \end{cases}$

19. Resolve de forma gráfica os seguintes sistemas

a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 3y = 5 \\ x - 7y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ -7x + 5y = 3 \end{cases}$

20. Resolve os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} \frac{x-2}{5} - \frac{3y-1}{2} = -1 \\ \frac{3x+1}{2} + \frac{3y-1}{4} = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{x-1}{3} - \frac{5y+7}{6} = -2 \\ 4x + y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{5x+1}{2} + \frac{2y-5}{3} = 4 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$

21. Copia no teu caderno e completa os seguintes sistemas incompletos de forma que se cumpra o que se pide en cada un:

Compatible indeterminado

a) $\begin{cases} (\ )x + 2y = (\ ) \\ 3x - y = 5 \end{cases}$

Incompatible

b) $\begin{cases} -3x + y = 1 \\ (\ )x + y = 6 \end{cases}$

A súa solución sexa $x = 2$ e $y = 1$

c) $\begin{cases} 2x - 3y = (\ ) \\ (\ )x + 2y = 8 \end{cases}$

Incompatible

d) $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 6x + (\ )y = (\ ) \end{cases}$

A súa solución sexa $x = -1$ e $y = 1$

e) $\begin{cases} 4x + (\ )y = -1 \\ (\ )x + y = 5 \end{cases}$

Compatible indeterminado

f) $\begin{cases} (\ )x + 8y = (\ ) \\ x + 2y = -3 \end{cases}$

22. Resolve os seguintes sistemas polo método de igualación e comproba a solución graficamente. De que tipo é cada sistema?

$\begin{cases} -2x + 6y = 4 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = -3 \\ 3x - 3y = -9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y = 4 \\ -x + 3y = -5 \end{cases}$

Problemas

23. Nunha tenda alugan bicicletas e triciclos. Se teñen 30 vehículos cun total de 80 rodas, cantas bicicletas e cantos triciclos teñen?

24. Cal é a idade dunha persoa se ao multiplicala por 12 lle faltan 64 unidades para completar o seu cadrado?
25. Descompón 12 en dous factores cuxa suma sexa 7.
26. O triplo do cadrado dun número aumentado no seu duplo é 616. Que número é?
27. A suma dos cadrados de dous números impares consecutivos é 130. Determina estes números.
28. Van cargados un asno e un macho. O asno queixábase do peso que levaba enriba. O macho contestoulle: se eu levara un dos teus sacos, levaría o dobre de carga ca ti pero se ti tomas un dos meus, os dous levaremos igual carga. Cantos sacos leva cada un?
29. Que número multiplicado por 3 é 28 unidades menor có seu cadrado?
30. Calcula tres números consecutivos cuxa suma de cadrados é 110.
31. Dentro de 2 anos, a idade de Raquel será a metade do cadrado da idade que tiña hai 10 anos. Que idade ten Raquel?
32. Dous números diferéncianse en 3 unidades e a suma dos seus cadrados é 185. Cales son estes números?
33. A suma de dous números é 2 e o seu produto é –80, de que números se trata?
34. María quere formar bandexas dun quilogramo con caramelos e bombóns. Se os caramelos lle custan a 3 euros o quilo e os bombóns a 7 euros o quilo, e quere que o prezo de cada bandexa sexa de 5 euros, que cantidade deberá poñer de cada produto? Se quere formar 100 bandexas, que cantidade de caramelos e de bombóns vai precisar?
35. Determina os catetos dun triángulo rectángulo cuxa suma é 17 cm e a hipotenusa mide 13 cm.
36. O produto de dous números é 6 e a suma dos seus cadrados 13. Calcula estes números.
37. A suma de dous números é 12. O dobre do primeiro máis o triplo do segundo é 31. De que números se trata?
38. Nun garaxe hai 30 vehículos entre coches e motos. Se en total hai 80 rodas, cantos coches e motos hai no garaxe?
39. A idade actual de Luís é o dobre da de Míriam. Dentro de 10 anos, as súas idades sumarán 50. Cantos anos teñen actualmente Luís e Míriam?
40. Na miña clase hai 25 persoas. Regaláronnos a cada rapaza 3 adhesivos e a cada rapaz 2 chapas. Se en total había 65 regalos. Cantos rapaces e rapazas somos na clase?
41. Entre o meu avó e o meu irmán teñen 80 anos. Se o meu avó ten 50 anos máis có meu irmán, que idade ten cada un?
42. Tres bocadillos e un refresco custan 8 €. Catro bocadillos e dous refrescos custan 12 €. Cal é o prezo do bocadillo e do refresco?
43. Nunha granxa hai galiñas e ovellas. Se se contan as cabezas, son 40. Se se contan as patas, son 100. Cantas galiñas e ovellas hai na granxa?
44. Un rectángulo ten un perímetro de 180 metros. Se o longo é 10 metros maior có ancho, cales son as dimensións do rectángulo?
45. Nun moedeiro hai billetes de 5€ e 10€. Se en total hai 10 billetes e 75€, cantos billetes de cada valor hai no moedeiro?
46. Nunha pelexa entre arañas e avespas, hai 13 cabezas e 90 patas. Sabendo que unha araña ten 8 patas e unha avespa 6, cantas avespas e arañas hai na pelexa?
47. Unha clase ten 30 estudantes e o número de alumnas é o dobre do de alumnos. Cantos rapaces e rapazas hai?
48. Neves ten 8 anos máis có seu irmán Daniel, e a súa nai ten 50 anos. Dentro de 2 anos a idade da nai será o dobre da suma das idades dos seus fillos, que idades teñen?
49. Mestúranse 18 kg de arroz de 1,3 € o quilogramo con 24 kg de arroz de prezo descoñecido, resultando o prezo da mestura de 1,7 € o kg. Que prezo tiña o segundo arroz?
50. A altura dun trapecio isósceles é de 3 cm, o perímetro, 28 cm, e os lados inclinados son iguais á base menor. Calcula a área do trapecio.
51. Dous autobuses saen, un desde Madrid e o outro desde Cáceres ás 9 da mañá. Un vai a 80 km/h e o outro a 100 km/h. A que hora se cruzan? A cantos km de Madrid estarán?
52. Nun concurso gáñanse 40 euros por cada resposta acertada e pérdense 80 por cada erro. Despois de 10 preguntas, Carmela leva gañados 280 euros. Cantas preguntas acertou?
53. Paco comprou 5 zumes e 4 batidos por 5,7 €, logo comprou 7 zumes e 5 batidos e custáronlle 7,8 €. Calcula os prezos de ambas as cousas.
54. Que fracción é igual a 1 cando se suma 1 ao numerador e é igual a 1/2 se se suma 2 ao denominador?
55. O cociente dunha división é 2 e o resto é 1. Se o divisor diminúe en 1 unidade, o cociente aumenta en 1 e o resto novo é 1. Calcular o dividendo e o divisor.
56. Dúas amigas foron pescar. Ao final do día unha dixo: "Se ti me dás un dos teus peixes, entón eu terei o dobre ca ti". A outra respondeulle: "Se ti me dás un dos teus peixes, eu terei o mesmo número de peixes ca ti". Cantos peixes tiña cada unha?
57. Calcula as dimensións dun rectángulo sabendo que a súa área é 35 cm^2 e o perímetro, 24 cm.
58. Un peón sae dunha cidade "A" a unha velocidade de 4 km/h, e diríxese a unha cidade "B" que está a 20 km da cidade "A". 30 minutos despois sae un ciclista da cidade "B" a unha velocidade de 20 km/h e diríxese cara a "A". Canto tempo leva o peón camiñando no momento do encontro? A que distancia de "B" se cruzan?
59. Deséxase mesturar un aceite de 2,7 €/l con outro aceite de 3,6 €/l de modo que a mestura resulte a 3 €/l. Cantos litros de cada clase deben mesturarse para obter 100 litros da mestura?
60. Ao intercambiar as cifras dun número de dúas cifras obtense outro que é 45 unidades maior. Calcula o número inicial.

61. A diagonal dun rectángulo mide 25 cm e o perímetro 70 cm. Calcula os lados do rectángulo.
62. Un balado rodea un terreo rectangular de 300 m². Se o balado mide 70 metros, calcula as dimensións do terreo.
63. Varios amigos van facer un agasallo de vodas que custa 800 euros, que pagarán a partes iguais. A última hora apúntanse seis amigos máis, co que cada un toca a 30 euros menos. Cantos amigos eran inicialmente? Canto pagará ao final cada un?
64. As diagonais dun rombo diferéncianse en 2 cm e a súa área é de 24 cm². Calcula o seu perímetro.
65. Un tren sae de Barcelona cara a Madrid a unha velocidade de 200 km/h. Unha hora máis tarde sae outro tren de Madrid cara a Barcelona a 220 km/h; a distancia entre as dúas cidades é de 618 km. Ao cabo de canto tempo se cruzan os dous trens? A que distancia de Barcelona?
66. Un coche sae dunha cidade "A" a unha velocidade de 100 km/h e 30 minutos máis tarde outro coche sae de "A" na mesma dirección e sentido a unha velocidade de 120 km/h. Canto tempo tardará o segundo en alcanzar ao primeiro e a que distancia de "A" se produce o encontro?

AUTOAVALIACIÓN

1. A solución da ecuación $2(x-3)-3(x^2-4)=1$ é:

a) $x = 10/3 \wedge x = -2$ b) $x = 5/3 \wedge x = -1$ c) $x = 1 \wedge x = -2/3$ d) $x = 3/2 \wedge x = -7/6$

2. As solucións da ecuación $80 = x(x-2)$ son:

a) $x = 8 \wedge x = -10$ b) $x = 40 \wedge x = 2$ c) $x = 10 \wedge x = -8$ d) $x = 10 \wedge x = 8$

3. As solucións da ecuación $\frac{3x-1}{2}-\frac{x+5}{6}=\frac{x^2}{3}$ son:

a) $x = 4 \wedge x = -2$ b) $x = 3 \wedge x = -2$ c) $x = 1/5 \wedge x = 2$ d) $x = 2 \wedge x = 2$

4. As solucións da ecuación $x^4-29x^2+100=0$ son:

a) 2, –2, 5, –5 b) 3, –3, 2, –2 c) 1, –1, 4, –4 d) 3, –3, 5, –5

5. As rectas que forman o sistema $\begin{cases} 7x+21y=14 \\ 2x+6y=4 \end{cases}$ son:

a) Secantes b) Paralelas c) Coincidentes d) Crúzanse

6. A solución do sistema $\begin{cases} 3x-2y=2 \\ -2x+3y=2 \end{cases}$ é:

a) $x = 2$ e $y = 1$ b) $x = 2$ e $y = 2$ c) $x = 3$ e $y = 2$ d) non ten solución

7. A solución do sistema $\begin{cases} 3+2x=x-1+y \\ 2x-9y=-43 \end{cases}$ é:

a) $x = 1$ e $y = 5$ b) $x = -2$ e $y = -5$c) $x = -43/2$ e $y = 0$ d) $x = 3$ e $y = 4$

8. A solución do sistema $\begin{cases} 3x-2y+z=2 \\ -2x+3y+z=7 \\ 2x-3y+2z=2 \end{cases}$ é:

a) $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$ b) $x = 2$, $y = 1$, $z = 3$ c) $x = -1$, $y = -2$, $z = -3$ d) $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$

9. Nunha granxa, entre galiñas e vacas hai 120 animais e 280 patas. Cantas galiñas e vacas hai na granxa?

a) 90 galiñas e 30 vacas b) 100 galiñas e 20 vacas c) 80 galiñas e 40 vacas

10. Cal é a idade dunha persoa se ao multiplicala por 5, lle faltan 234 unidades para chegar ao seu cadrado?

a) 18 anos b) 20 anos c) 25 anos d) 28 anos

RESUMO

Ecuación de segundo grao	É unha ecuación alxébrica na que a maior potencia da incógnita é 2. T na forma: $ax^2 + bx + c = 0$ onde *a, b* e *c* son números reais, con $a \neq 0$.	$-4x^2 + 5x - 8/3 = 0$
Resolución de ecuacións de segundo grao completas	Úsase a fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 - 7x + 10 = 0$: $x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2}$ $x_1 = 5$, $x_2 = 2$
Discriminante	$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 49 - 40 = 9$
Número de solucións dunha ecuación de segundo grao	Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, ten dúas solucións reais e distintas Se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, ten unha solución dobre. Se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, a ecuación non ten solución.	$x^2 - 3x - 4 = 0$: $\Delta = 25 > 0$, ten dúas solucións 4 e -1. $x^2 - 4x + 4 = 0$: $\Delta = 0$, ten unha raíz dobre: $x = 2$. $x^2 + 3x + 8 = 0$: $\Delta = -23$, non ten solución real.
Resolución de ecuacións de segundo grao incompletas	Se $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, despexamos a incógnita: $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$. Se $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$: $x = 0$ e $x = \frac{-b}{a}$	$2x^2 - 50 = 0$: $x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$ $3x^2 - 18x = 0 \Rightarrow 3x(x - 9) = 0 \Rightarrow$ $x_1 = 0$; $x_2 = 9$.
Suma e produto de raíces	$x_1\, x_2 = \frac{c}{a}$; $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$	$x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow x_1 = 5$; $x_2 = 2$.
Sistema de ecuacións lineais	$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$	$\begin{cases} 6x + 5y = 8 \\ 4x - 2y = -3 \end{cases}$
Clasificación	Compatible determinado: unha única solución, o punto de intersección. As rectas son secantes: $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ -2x - y = 1 \end{cases}$ Compatible indeterminado: Infinitas solucións, polo que as rectas son coincidentes: $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x - 4y = 6 \end{cases}$ **Incompatible**: non ten solución, as rectas son **paralelas**: $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x - 4y = 9 \end{cases}$	
Métodos de resolución	Substitución: despexar unha incógnita e substituír na outra ecuación. Igualación: despexar a mesma incógnita das dúas ecuacións. Redución: sumar as dúas ecuacións, multiplicándoas por números adecuados.	

CAPÍTULO 5: INECUACIÓNS

ACTIVIDADES PROPOSTAS

1. INTERVALOS

1. Escribe os seguintes intervalos mediante conxuntos e represéntaos na recta real:

   a) $[1, 7)$ b) $(-3, 5)$ c) $(2, 8]$ d) $(-\infty, 6)$

2. Representa na recta real e escribe en forma de intervalo:

   a) $2 < x < 5$ b) $4 < x$ c) $3 \leq x < 6$ d) $x \geq 7$

2. INECUACIÓNS

3. Dada a seguinte inecuación $2 + 3x < x + 1$, determina cales dos seguintes valores son solución da mesma:

   0, 1, –1, 2, –2, 3, –4, 6, –7, 12, –15

4. Realiza as transformacións indicadas de modo que se obteñan ecuacións equivalentes:

   a) Sumar 3: $x - 1 > 4$
   b) Restar 5: $x - 3 > 7$
   c) Multiplicar por 5: $-8x \geq 9$
   d) Multiplicar por –5: $-3x \geq 7$
   e) Dividir entre 2: $4x < 10$
   f) Dividir entre –2: $4x \geq 10$

5. Escribe unha inecuación que sexa certa para $x = 3$ e falsa para $x = 3.5$.

3. INECUACIÓNS CUNHA INCÓGNITA

6. Resolve as seguintes inecuacións e representa a solución na recta real:

   a) $2 + 3x < x + 1$ b) $5 + 2x \leq 7x + 4$ c) $6 + 5x > 6x + 4$ d) $4 + 8x \geq 2x + 9$

7. Resolve as seguintes inecuacións e representa a solución na recta real:

   a) $3(2 + 3x) < -(x + 1)$ b) $5(1 + 2x) \leq 2(7x + 4)$ c) $2(6 + 5x) + 3(x - 1) > 2(6x + 4)$

8. Resolve as seguintes inecuacións e representa a solución na recta real:

   a) $3 + 4x < x/2 + 2$ b) $4 + 4x/3 \leq 7x/2 + 5$ c) $(5 + 7x)/3 > 8x + 2$ d) $(4 + 8x)5 + 3 \geq (2x + 9)/7$

9. Escribe unha inecuación cuxa solución sexa o seguinte intervalo:

   a) $[1, \infty)$ b) $(-\infty, 5)$ c) $(2, \infty)$ d) $(-\infty, 6)$

10. Calcula os valores de x para que sexa posible calcular as seguintes raíces:

    a) $\sqrt{3x-5}$ b) $\sqrt{-x-12}$ c) $\sqrt{3-5x}$ d) $\sqrt{-3x+12}$

11. Resolve as seguintes inecuacións de segundo grao:

    a) $x^2 - 1 \geq 0$ b) $x^2 - 4 \leq 0$ c) $x^2 - 9 > 0$ d) $x^2 + 4 \geq 0$

    e) $2x^2 - 50 < 0$ f) $3x^2 + 12 \leq 0$ g) $5x^2 - 45 > 0$ h) $x^2 + 1 \geq 0$

12. Resolve as seguintes inecuacións de segundo grao:

    a) $x^2 + x \leq 0$ b) $x^2 - 5x > 0$ c) $x^2 \leq 8x$

    d) $x^2 \leq 3x$ e) $2x^2 - 3x > 0$ f) $5x^2 - 10x < 0$

13. Resolve as seguintes inecuacións de segundo grao:

    a) $3x^2 - 5x \geq 0$ b) $3x^2 - 27 > 0$ c) $x^2 \leq 0$ d) $2x^2 > 4x$

    e) $2x^2 - 8 > 0$ f) $5x^2 + 5x \geq 0$ g) $5x^2 - 5 \leq 0$ h) $x^2 - x > 0$

14. Resolve as seguintes inecuacións de segundo grao:

a) $x^2 - 2x - 3 \le 0$ b) $-x^2 - 2x + 8 \ge 0$ c) $x^2 + 9x + 14 > 0$ d) $x^2 - 6x + 9 \le 0$

e) $-x^2 - 4x - 5 < 0$ f) $x^2 + 8x + 16 > 0$ g) $x^2 + x + 3 \ge 0$ h) $2x^2 - 3x - 5 \le 0$

15. Resolve as seguintes inecuacións de segundo grao:

a) $x^2 + x - 6 > 0$ b) $x^2 - x - 12 \le 0$ c) $x^2 - x - 20 < 0$ d) $x^2 + 5x - 14 \ge 0$

e) $-2x^2 + 3x + 2 > 0$ f) $3x^2 + 2x - 1 \le 0$ g) $5x^2 - 7x - 6 \ge 0$ h) $2x^2 + x - 15 < 0$

16. Calcula os valores de *x* para que sexa posible obter as seguintes raíces:

a) $\sqrt{x^2 - 1}$ b) $\sqrt{-x^2 + 4}$ c) $\sqrt{x^2 + 5x + 6}$ d) $\sqrt{x^2 - 5x + 6}$

17. Resolve as seguintes inecuacións de segundo grao:

a) $(2x + 5)(2x - 5) \le 11$ b) $(2x - 5)(4x - 3) - (x - 10)(x - 2) \ge 51$ c) $\frac{3x-2}{x} \le \frac{5-2x}{x+6}$

18. Resolve os seguintes sistemas de inecuacións cunha incógnita:

a) $\begin{cases} 4x - 3 < 1 \\ x + 6 > 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 6 \le 0 \\ x - 4 > -5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 1 \ge x + 9 \\ x + 5 \le 2 - 3x \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - 3 \le 3x + 7 \\ \frac{2x}{5} - \frac{x}{4} \ge \frac{2}{3} \end{cases}$

19. Indica un número positivo que ao sumarlle 5 sexa menor ca 7.

20. Expresa mediante unha inecuación a área dun cadrado sabendo que o seu perímetro é maior que o dun rectángulo de lados 3 e 7 cm.

21. Determina as posibles idades de Pepita e da súa filla Charo sabendo que difiren en máis de 20 anos e que dentro de 2 anos, a cuarta parte da idade da nai é menor cá idade da filla.

22. Resolve as seguintes inecuacións:

a) $|x + 3| < 2$ b) $|2x + 5| > 1$ c) $|x - 6| \le 2$ d) $|x - 2| \ge 2$

4. INECUACIÓNS CON DÚAS INCÓGNITAS

23. Representa os seguintes semiplanos:

a) $x + y < 5$ b) $3x + 2y > 0$ c) $2x + y \le 7$ d) $x - 3y \ge 5$

24. Representa a rexión factible de cada un dos seguintes sistemas de inecuacións:

a) $\begin{cases} x - y < 1 \\ x + y \le 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y \ge 0 \\ y \le 2 \end{cases}$

EXERCICIOS E PROBLEMAS

1. Representa na recta real e escribe en forma de intervalo:

a) $-\infty \le x \le \frac{3}{2}$ b) $-11 < x < 11$ c) $-2 < x \le \frac{1}{3}$

2. Escribe os seguintes intervalos mediante conxuntos e represéntaos na recta real:

a) [2, 6) b) (–7, 1) c) (0, 9]

3. Dada a seguinte inecuación $5 + 3x > 2x + 1$, determina se os seguintes valores son solución da mesma:

0, 1, –1, 2, –2, 3, –4, 6, –7, 12, –15

4. Realiza as transformacións indicadas de modo que se obteñan ecuacións equivalentes i) Sumar 4: $x - 2 > 5$ ii) Restar 6: $x - 4 > 8$ iii) Multiplicar por 6: $5x \ge 10$

iv) Multiplicar por –4: $-2x \ge 8$ v) Dividir entre 2: $6x < 12$ vi) Dividir entre –2: $20x \ge 60$

5. Resolve as seguintes inecuacións e representa a solución na recta real:
a) $2x - 3 \le -5$ b) $x - 2 \le 3x - 5$ c) $12 - x \le -6$ d) $-5x - 3 \le -2x + 9$
e) $2(3x-3) > 6$ f) $-3(3-2x) < -2(3+x)$ g) $2(x+3)+3(x-1) \le 2(x+2)$

6. Resolve:
a) $\frac{x}{2} - 6 < 4$ b) $\frac{2x}{3} - 3 \le -x$ c) $2(3x-2) > 3 - x$ d) $\frac{2(x+2)}{3} < 2x$ e) $\frac{x-4}{4} + 2 > \frac{x+4}{8}$ f) $\frac{x}{2} - 4 < x - \frac{x+1}{7}$

7. Escribe unha inecuación cuxa solución sexa o seguinte intervalo:
a) $(-\infty, -3]$ b) $[4, +\infty)$ c) $(-\infty, 5)$ d) $(-2, +\infty)$

8. Calcula os valores de x para que sexa posible calcular as seguintes raíces:
a) $\sqrt{2x-6}$ b) $\sqrt{-x+5}$ c) $\sqrt{10-5x}$ d) $\sqrt{-6x-30}$

9. Resolve as seguintes inecuacións de segundo grao:
a) $3x^2 - 75 < 0$ b) $-x^2 + 16 \le 0$ c) $-x^2 + 25 \ge 0$ d) $5x^2 - 80 \ge 0$
e) $4x^2 - 1 > 0$ f) $25x^2 - 4 < 0$ g) $9x^2 - 16 < 0$ h) $36x^2 + 16 \le 0$

10. Resolve as seguintes inecuacións de segundo grao:
a) $-4x^2 + 5x \le 0$ b) $3x^2 + 7x \ge 0$ c) $2x^2 < 8x$
d) $-3x^2 - 6x \ge 0$ e) $-x^2 + 3x < 0$ f) $-5x^2 - 10x \ge 0$

11. Resolve as seguintes inecuacións de segundo grao:
a) $3x^2 \le 0$ b) $8x^2 > 0$ c) $-5x^2 < 0$ d) $9x^2 \ge 0$

12. Resolve as seguintes inecuacións de segundo grao:
a) $x^2 - 1 \le 0$ b) $-x^2 - 4x \le 0$ c) $x^2 + 1 \ge 0$ d) $-3x^2 > 30$
e) $-x^2 - 4 \le 0$ f) $-3x^2 - 12x \ge 0$ g) $-5x^2 < 0$ h) $x^2 + 9 \ge 0$

13. Resolve as seguintes inecuacións de segundo grao:
a) $x^2 - 2x > 0$ b) $3x^2 - 3 \le 0$ c) $5x^2 - 20 \ge 0$ d) $x^2 + 4x > 0$
e) $2x(x-3) + 1 \ge x - 2$ f) $(x-2)(x+3) - x + 5 \le 2x - 1$ g) $x^2 + 5x + 2 < 2x + 12$ h) $2 - x(x+3) + 2x \ge 2(x+1)$

14. Calcula os valores de x para que sexa posible obter as seguintes raíces:
a) $\sqrt{2x^2+x-3}$ b) $\sqrt{x^2+2x+1}$ c) $\sqrt{-1+2x-x^2}$ d) $\sqrt{x^2+3x+5}$
e) $\sqrt{-x^2+12x-36}$ f) $\sqrt{x^2+6x-27}$ g) $\sqrt{1-4x^2}$

15. Resolve as seguintes inecuacións:
a) $2(x-1)^2 > 2$ b) $3(x+1)^2 \le -12$ c) $-x^2 < 2$
d) $4(x-2)^2 > 1$ e) $-5(x+4)^2 \le 0$ f) $9(x+1)^2 \le 81$

16. Resolve as seguintes inecuacións:
a) $x(2x-3) - 3(5-x) > 83$ b) $(2x+5)(2x-5) \le 11$ c) $(7+x)^2 + (7-x)^2 > 130$
d) $(2x-3)(3x-4) - (x-13)(x-4) \ge 40$ e) $(3x-4)(4x-3) - (2x-7)(3x-2) < 214$
f) $8(2-x)^2 > 2(8-x)^2$ g) $\frac{x^2-6}{2} - \frac{x^2+4}{4} \ge 5$ h) $\frac{5x-3}{x} \le \frac{7-x}{x+2}$

17. Resolve os seguintes sistemas de inecuacións cunha incógnita:
a) $\begin{cases} 2x-3>0 \\ 5x+1\le 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-4<4x+1 \\ -2x+3<4x-5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-3>x-2 \\ 3x-7<x-1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{x}{5}<8 \\ \frac{x}{2}-\frac{4x}{9}<5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \frac{x-1}{3}-\frac{x+3}{2}\le x \\ \frac{4x-2}{4}-\frac{x-1}{3}\ge x \end{cases}$

18. Resolve as seguintes inecuacións:
a) $|2x+1| \le 5$ b) $|-x+1| \ge 2$ c) $|-x+9| \le 10$ d) $|2x-1| > 4$ e) $|-4x+12| < -6$ f) $\left|\frac{x+1}{2}\right| \le 10$ g) $|-4x+8| < 3$

19. Representa graficamente a parábola $y = x^2 - 5x + 6$ e indica en que intervalos é $x^2 - 5x + 6 > 0$, onde $x^2 - 5x + 6 < 0$, onde $x^2 - 5x + 6 \ge 0$, e onde $x^2 - 5x + 6 \le 0$.

20. Representa os seguintes semiplanos:
a) $x < 0$ b) $y \ge 0$ c) $x + y < 0$ d) $x - y \le 1$
e) $2x - y < 3$ f) $-x + y \ge -2$ g) $3x - y > 4$

21. Representa a rexión factible de cada un dos seguintes sistemas de inecuacións:
a) $\begin{cases} 2x-y\ge 3 \\ 5x+y\le 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-y\ge -3 \\ 5x+y\le 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y\ge 0 \\ 2x+y>2 \end{cases}$

22. Cales son os números cuxo triplo é maior ou igual que o seu dobre máis 30?

23. Pescuda cal é o menor número enteiro múltiplo de 3 que verifica a inecuación:

$$x + 2 > -3x + 10.$$

24. Un coche desprázase por unha estrada a unha velocidade comprendida entre 70 Km/h e 110 Km/h. Entre que valores oscila a distancia do coche ao punto de partida ao cabo de 4 horas?

25. A tarifa de telefonía da empresa A é 25 euros fixos mensuais máis 10 céntimos de euro por minuto de conversa, a da empresa B é 20 euros fixos máis 20 céntimos por minuto de conversa. A partir de cantos minutos comeza a ser más rendible a tarifa da empresa A?

26. Unha fábrica paga aos seus comerciais 20 € por artigo vendido máis unha cantidade fixa de 600 €. Outra fábrica da competencia paga 40 € por artigo e 400 € fixos. Cantos artigos debe vender un comercial da competencia para gañar más diñeiro que o primeiro?

27. A un vendedor de aspiradoras ofrécenlle 1 000 euros de soldo fixo máis 20 euros por aspiradora vendida. A outro ofrécenlle 800 euros de fixo máis 25 euros por aspiradora vendida. Explica razoadamente que soldo é mellor a partir de que cantidade de aspiradoras vendidas.

28. A área dun cadrado é menor ou igual que 64 cm^2. Determina entre que valores está a medida do lado.

29. O perímetro dun cadrado é menor que 60 metros. Determina entre que valores está a medida do lado.

30. Un panadeiro fabrica barras e bolas. A barra de pan leva 200 gramos de fariña e 5 gramos de sal, mentres que a bola leva 500 gramos de fariña e 10 gramos de sal. Dispone de 200 kg de fariña e 2 kg de sal, determina cantos pans de cada tipo poden facerse.

AUTOAVALIACIÓN

1. A desigualdade $2 < x < 7$ verifícase para os valores:

a) 2, 3 e 6 b) 3, 4.7 e 6 c) 3, 5.2 e 7 d) 4, 5 e 8

2. Ten como solución $x = 2$ a inecuación seguinte:

a) $x < 2$ b) $x > 2$ c) $x \le 2$ d) $x + 3 < 5$

3. A solución da inecuación $3.4 + 5.2x - 8.1x < 9.4 + 7.3x$ é:

a) $x < -10/17$ b) $x > -3 / 5.1$ c) $x > -10/1.7$ d) $x < +6/10.2$

4. A ecuación $x^2 \le 4$ ten de solucións:

a) $x \in (-2, 2)$ b) $x \in [-2, 2]$ c) $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ d) $x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

5. A suma das idades de dúas persoas é maior de 40 anos e a súa diferenza menor ou igual que 8 anos. Cal dos seguintes sistemas de inecuacións nos permite calcular as súas idades?

a) $\begin{cases} x + y > 40 \\ y - x \le 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y \ge 40 \\ y - x < 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y > 40 \\ x - y < 8 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y < 40 \\ x - y \le 8 \end{cases}$

6. O perímetro dun rectángulo é menor que 14 cm. Se a base é maior que o dobre da altura menos 3 cm, algún valor que verifica o sistema é:

a) base = 4 cm, altura = 1 cm b) base = 2 cm, altura = 3 cm

c) base = 6, altura = 4 cm d) base = 9 cm, altura = 2 cm

7. A solución da inecuación $|-x + 7| \le 8$ é:

a) $[-1, 15]$ b) $(-\infty, -1]$ c) $(-1, 1)$ d) $[1, \infty)$

8. As solucións posibles de $\sqrt{5x - 9}$ son:

a) $x < 9/5$ b) $x > 9/5$ c) $x \le 9/5$ d) $x \ge 9/5$

9. A solución da inecuación $\frac{2x-3}{x-2} < 1$ é:

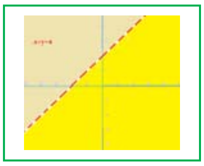
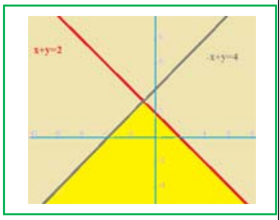
a) $(1, 2)$ b) $(-\infty, 1)$ c) $x < 1 \cup x > 2$ d) $(-1, 2)$

10. Unha inecuación cuxa solución sexa o intervalo $(-\infty, 5)$ é:

a) $5x - 3x + 2 < 9x + 2$ b) $8x - 3x + 7 < 9x + 2$

c) $5x - 3x + 2 < 7x + 27$ d) $5x - 3x - 2 > 7x - 27$

RESUMO

Noción	Definición	Exemplos
Inecuación	Desigualdade alxébrica na que aparecen unha ou máis incógnitas	$4 \geq x + 2$
Inecuacións equivalentes	Se teñen a mesma solución.	$4 \geq x + 2 \Leftrightarrow 2 \geq x$
Propiedades das desigualdades	• Sumar ou restar a mesma expresión aos dous membros da desigualdade: $a < b,\ \forall c \Rightarrow a + c < b + c$ • Multiplicar ou dividir ambos os membros por un número positivo: $a < b,\ \forall c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$ • Multiplicar ou dividir ambos os membros por un número negativo e cambiar a orientación do signo da desigualdade: $a < b,\ \forall c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$	• $3x + 2 < 5 \Leftrightarrow$ $3x + 2 - 2 < 5 - 2 \Leftrightarrow 3x < 3$ • $3x < 3$ $\Leftrightarrow 3x : 3 < 3 : 3 \Leftrightarrow x < 1$ • $-x < 2 \Leftrightarrow$ $(-x) \cdot (-1) > 2 \cdot (-1) \Leftrightarrow x > -2$ • $3 - x < 2 \Leftrightarrow$ $-x < -1 \Leftrightarrow x > 1$
Inecuación de primeiro grao cunha incógnita	$ax > b,\ ax \geq b,\ ax < b,\ ax \leq b$	$x < 1$
Inecuación de segundo grao cunha incógnita	$ax^2 + bx + c > 0$	$x^2 - 1 \geq 0$ $\Re = (-\infty, -1] \cup [-1, 1] \cup [1, \infty)$ Solución: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
Sistema de inecuacións de primeiro grao cunha incógnita	$\begin{cases} a_1 x < b_1 \\ a_2 x < b_2 \end{cases}$; $\begin{cases} x > 4 \\ x - 3 \geq 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x \leq -3 \end{cases}$. Non hai solución.	
Inecuación en valor absoluto	$\lvert ax + b \rvert \leq c$ por definición $\begin{cases} ax + b \leq c \\ -ax - b \leq c \end{cases}$	$\lvert x - 3 \rvert \leq 2 \Leftrightarrow$ $x - 3 \leq 2$ e $-(x - 3) \leq 2 \Leftrightarrow$ $x \leq 5$ e $x \geq 1 \Leftrightarrow [1, 5]$
Inecuacións de primeiro grao con dúas incógnitas	$ax + by > c$ Representamos graficamente dous semiplanos que separan a recta e decidimos.	$-x + y < 4$ 
Sistemas de inecuacións de primeiro grao con dúas incógnitas	Representamos as rexións angulares separadas polas dúas rectas e decidimos cal ou cales son a solución. $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x - y \geq -4 \end{cases}$	

CAPÍTULO 6: PROPORCIÓNS

ACTIVIDADES PROPOSTAS

1. PROPORCIONALIDADE DIRECTA

1. Copia no teu caderno e completa a táboa de proporción directa. Calcula a razón de proporcionalidade. Representa graficamente os puntos. Determina a ecuación da recta.

Litros	12	7.82		1		50
Euros	36		9.27		10	

2. Calcula os termos que faltan para completar as proporcións:

a) $\frac{24}{100}=\frac{30}{x}$ b) $\frac{x}{80}=\frac{46}{12}$ c) $\frac{3.6}{12.8}=\frac{x}{60}$

3. Se o AVE tarda unha hora e trinta e cinco minutos en chegar desde Madrid a Valencia, que distan 350 quilómetros, canto tardará en percorrer 420 km?
4. Nunha receita dinnos que para facer unha marmelada de froitas do bosque precisamos un quilogramo de azucre por cada dous quilogramos de froita. Queremos facer 7 quilogramos de marmelada, cantos quilogramos de azucre e cantos de froita debemos poñer?
5. A altura dunha torre é proporcional á súa sombra (a unha mesma hora). Unha torre que mide 12 m ten unha sombra de 25 m. Que altura terá outra torre cuxa sombra mida 43 m?
6. Unha fonte enche unha garrafa de 12 litros en 8 minutos. Canto tempo tardará en encher un bidón de 135 litros?
7. Gastamos 12 litros de gasolina para percorrer 100 km. Cantos litros precisaremos para unha distancia de 1 374 km?
8. O meu coche gasta 67 litros de gasolina en percorrer 1 250 km, cantos litros gastará nunha viaxe de 5 823 km?
9. Un libro de 300 páxinas pesa 127 g. Canto pesará un libro da mesma colección de 420 páxinas?
10. Dous pantalóns custáronnos 28 €, canto pagaremos por 7 pantalóns?
11. Expresa en tanto por cento as seguintes proporcións:

a) $\frac{27}{100}$ b) "1 de cada 2" c) $\frac{52}{90}$

12. Se sabemos que os alumnos louros dunha clase son o 16 % e hai 4 alumnos louros, cantos alumnos hai en total?
13. Un depósito de 2 000 litros de capacidade contén neste momento 1036 litros. Que tanto por cento representa?
14. A proporción dos alumnos dunha clase de 4º de ESO que aprobaron Matemáticas foi do 70 %. Sabendo que na clase hai 30 alumnos, cantos suspenderon?
15. Unha fábrica pasou de ter 130 obreiros a ter 90. Expresa a diminución en porcentaxe.
16. Calcula o prezo final dun lavalouzas que custaba 520 € máis un 21 % de IVE, ao que se lle aplicou un desconto sobre o custe total do 18 %.
17. Copia no teu caderno e completa:
    a) Dunha factura de 1 340 € paguei 1 200 €. Aplicáronme un ……… % de desconto
    b) Descontáronme o 9 % dunha factura de …………….. € e paguei 280 €.
    c) Por pagar ao contado un moble descontáronme o 20 % e aforrei 100 €. Cal era o prezo do moble sen desconto?
18. O prezo inicial dun electrodoméstico era 500 euros. Primeiro subiu un 10 % e despois baixou un 30 %. Cal é o seu prezo actual? Cal é a porcentaxe de incremento ou desconto?
19. Unha persoa comprou accións de bolsa no mes de xaneiro por un valor de 10 000 €. De xaneiro a febreiro estas accións aumentaron un 8 %, pero no mes de febreiro diminuíron un 16 %. Cal é o seu valor a finais de febreiro? En que porcentaxe aumentaron ou diminuíron?
20. O prezo inicial dunha enciclopedia era de 300 € e ao longo do tempo sufriu variacións. Subiu un 10 %, logo un 25 % e despois baixou un 30 %. Cal é o seu prezo actual? Calcula a variación porcentual.
21. Nunha tenda de venda por Internet anúncianse rebaixas do 25 %, pero logo cargan na factura un 20 % de gastos de envío. Cal é a porcentaxe de incremento ou desconto? Canto teremos que pagar por un artigo que custaba 30 euros? Canto custaba un artigo polo que pagamos 36 euros?
22. A distancia real entre dúas vilas é 28.6 km. Se no mapa están a 7 cm de distancia. A que escala está debuxado?
23. Que altura ten un edificio se a súa maqueta construída a escala 1 : 200 presenta unha altura de 8 cm?
24. Debuxa a escala gráfica correspondente á escala 1: 60000.
25. As dimensións dunha superficie rectangular no plano son 7 cm e 23 cm. Se está debuxado a escala 1: 50, calcula as súas medidas reais.

PROPORCIONALIDADE INVERSA

26. Para embaldosar un recinto, 7 obreiros dedicaron 80 horas de traballo. Completa no teu caderno a seguinte táboa e determina a constante de proporcionalidade. Escribe a ecuación da hipérbole.

Número de obreiros	1	5	7	12			60
Horas de traballo			80		28	10	

27. Ao cortar unha cantidade de madeira conseguimos 5 paneis de 1.25 m de longo. Cantos paneis conseguiremos se agora teñen 3 m de largo?
28. Nunha horta ecolóxica utilízanse 5 000 kg dun tipo de esterco de orixe animal que se sabe que ten un 12 % de nitratos. Se cambia o tipo de esterco, que agora ten un 15 % de nitratos, cantos quilogramos se necesitarán do novo esterco para que as plantas reciban a mesma cantidade de nitratos?
29. Esa mesma horta necesita 200 caixas para envasar as súas berenxenas en caixas dun quilogramo. Cantas caixas necesitaría para envasalas en caixas de 1.7 quilogramos? E para envasalas en caixas de 2.3 quilogramos?
30. Para envasar certa cantidade de leite precísanse 8 recipientes de 100 litros de capacidade cada un. Queremos envasar a mesma cantidade de leite empregando 20 recipientes. Cal deberá ser a capacidade deses recipientes?
31. Copia no teu caderno a táboa seguinte, calcula a razón de proporcionalidade e completa a táboa de proporcionalidade inversa. Escribe a ecuación da hipérbole.

Magnitude A	40	0.07		8	
Magnitude B	0.25		5		6.4

32. Seis persoas realizan unha viaxe de 12 días e pagan en total 40 800 €. Canto pagarán 15 persoas se a súa viaxe dura 4 días?
33. Se 16 lámpadas orixinan un gasto de 4 500 €, estando acesas durante 30 días, 5 horas diarias, que gasto orixinarían 38 lámpadas en 45 días, acesas durante 8 horas diarias?
34. Para alimentar a 6 vacas durante 17 días precísanse 240 quilos de alimento. Cantos quilos de alimento se precisarán para manter 29 vacas durante 53 días?
35. Se 12 homes constrúen 40 m de tapia en 4 días traballando 8 horas diarias, cantas horas diarias deben traballar 20 homes para construír 180 m en 15 días?
36. Cunha cantidade de penso podemos dar de comer a 24 animais durante 50 días cunha ración de 1 kg para cada un. Cantos días poderemos alimentar a 100 animais se a ración é de 800 g?
37. Para encher un depósito ábrense 5 billas que lanzan 8 litros por minuto e tardan 10 horas. Canto tempo tardarán 7 billas similares que lanzan 10 litros por minuto?
38. Se 4 máquinas fabrican 2 400 pezas funcionando 8 horas diarias. Cantas máquinas se deben poñer a funcionar para conseguir 7 000 pezas durante 10 horas diarias??

3. REPARTOS PROPORCIONAIS

39. Cinco persoas comparten lotería, con 10, 6, 12, 7 e 5 participacións respectivamente. Se obtiveron un premio de 18 000 €, canto corresponde a cada un?
40. Tres socios investiron 20 000 €, 34 000 € e 51 000 € este ano na súa empresa. Se os beneficios a repartir a final de ano ascenden a 31 500 €, canto corresponde a cada un?
41. A Unión Europea concedeu unha subvención de 48 000 000 € para tres Estados de 60, 46 e 10 millóns de habitantes. Como debe repartirse o diñeiro, sabendo que é directamente proporcional ao número de habitantes?
42. Repártese unha cantidade de diñeiro, entre tres persoas, directamente proporcional a 2, 5 e 8. Sabendo que á segunda lle corresponde 675 €, calcula o que lle corresponde á primeira e á terceira.
43. Unha avoa reparte 100 € entre os seus tres netos de 12, 14 e 16 anos de idade; proporcionalmente ás súas idades. Canto corresponde a cada un?
44. Nun concurso acumúlase puntuación de forma inversamente proporcional ao número de erros. Os catro finalistas, con 10, 5, 2 e 1 erros, deben repartir os 2 500 puntos. Cantos puntos recibirá cada un?
45. No testamento, o avó establece que quere repartir entre os seus netos 4 500 € de maneira proporcional ás súas idades, 12, 15 e 18 anos. Coidando que a maior cantidade sexa para os netos menores, canto recibirá cada un?
46. Repártese diñeiro inversamente proporcional a 5, 10 e 15; ao menor correspóndenlle 3 000 €. Canto corresponde aos outros dous?
47. Tres irmáns axudan ao mantemento familiar entregando anualmente 6 000 €. Se as súas idades son de 18, 20 e 25 anos e as achegas son inversamente proporcionais á idade, canto achega cada un?

48. Un pai vai cos seus dous fillos a unha feira e, na tómbola, gaña 50 € que reparte de forma inversamente proporcional á súas idades, que son 15 e 10 anos. Cantos euros debe dar a cada un?
49. Calcula o prezo do quilo de mestura de dous tipos de café: 3.5 kg a 4.8 €/kg e 5.20 kg a 6 €/kg.
50. Cantos litros de zume de pomelo de 2.40 €/l deben mesturarse con 4 litros de zume de laranxa a 1.80 €/l para obter unha mestura a 2.13 €/l?
51. Calcula a lei dunha xoia sabendo que pesa 87 g e contén 69 g de ouro puro.
52. Cantos quilates ten, aproximadamente, a xoia anterior?

4. INTERESE

53. Calcula o interese simple que producen 10 000 € ao 3 % durante 750 días.
54. Que capital hai que depositar ao 1.80 % durante 6 anos para obter un interese simple de 777.6 €?
55. Ao 5 % de interese composto durante 12 anos, cal será o capital final que obteremos ao depositar 39 500 €?

CURIOSIDADES. REVISTA

- A torre Eiffel de París mide 300 metros de altura e pesa uns 8 millóns de quilos. Está construída en ferro. Se encargamos un modelo a escala da torre, tamén de ferro, que pese só un quilo, que altura terá? Será maior ou menor que un lapis? Antes de empezar a calcular, dá a túa opinión.

1. Nunha pizzería a pizza de 20 cm de diámetro vale 3 euros e a de 40 cm vale 6 euros. Cal ten mellor prezo?
2. Vemos no mercado unha pescada de 40 cm que pesa un quilo. Parécenos un pouco pequena e pedimos outra un pouco maior, que resulta pesar 2 quilos. Canto medirá?
3. Nun día frío un pai e un fillo pequeno van exactamente igual abrigados, cal dos dous terá máis frío?

EXERCICIOS E PROBLEMAS

1. Copia no teu caderno, calcula a razón de proporcionalidade e completa a táboa de proporcionalidade directa:

litros	8.35		0.75	1.5	
euros		14	2.25		8

2. Estima cantas persoas caben de pé nun metro cadrado. Houbo unha festa e encheuse completamente un local de 400 m^2, cantas persoas estimas que foron a esa festa?
3. Cada semana pagamos 48 € en transporte. Canto gastaremos durante o mes de febreiro?
4. Con 85 € pagamos 15 m de tea, canto nos custarán 23 m da mesma tea?
5. Para tapizar cinco cadeiras utilicei 0.6 m de tea, cantas cadeiras poderei tapizar coa peza completa de 10 m?
6. Un camión transportou en 2 viaxes 300 sacos de patacas de 25 kg cada un. Cantas viaxes serán necesarias para transportar 950 sacos de 30 kg cada un?
7. Unha edición de 400 libros de 300 páxinas cada un acada un peso total de 100 kg. Cantos kg pesará outra edición de 700 libros de 140 páxinas cada un?
8. Sabendo que a razón de proporcionalidade directa é k = 1.8, copia no teu caderno e completa a seguinte táboa:

Magnitude A	15.9			0.01	
Magnitude B		6	0.1		10

9. O modelo de teléfono móbil que custaba 285 € + IVE está agora cun 15 % de desconto. Cal é o seu prezo rebaixado? (IVE 21 %)
10. Por atrasarse no pagamento dunha débeda de 1 500 €, unha persoa debe pagar unha recarga do 12%. Canto ten que devolver en total?
11. Se un litro de leite de 0.85 € aumenta o seu prezo nun 12 %, canto vale agora?
12. Que tanto por cento de desconto se aplicou nunha factura de 1 900 € se finalmente se pagaron 1 200 €?
13. Se unhas zapatillas de 60 € se rebaixan un 15 %, cal é o valor final?
14. Ao comprar un televisor obtiven un 22 % de desconto, polo que ao final paguei 483.60 €, cal era o prezo do televisor sen desconto?

15. Luís comprou unha camisola que estaba rebaixada un 20 % e pagou por ela 20 €. Cal era o seu prezo orixinal?

16. Por liquidar unha débeda de 35 000€ antes do previsto, unha persoa paga finalmente 30 800 €, que porcentaxe da súa débeda aforrou?

17. O prezo dunha viaxe anúnciase a 500€ IVE incluído. Cal era o prezo sen IVE? (IVE 21%)

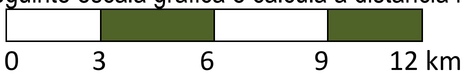
18. Que incremento porcentual se efectuou sobre un artigo que antes valía 25€ e agora se paga a 29€?

19. Un balneario recibiu 10 mil clientes no mes de xullo e 12 mil en agosto. Cal é o incremento porcentual de clientes de xullo a agosto?

20. Un mapa está debuxado a escala 1: 800000. A distancia real entre dúas cidades é 200 km. Cal é a súa distancia no mapa?

21. A distancia entre Oviedo e A Coruña é de 340 km. Se no mapa están a 12 cm, cal é a escala á que está debuxado?

22. Interpreta a seguinte escala gráfica e calcula a distancia na realidade para 21 cm.



23. Copia no teu caderno e completa a seguinte táboa:

Tamaño no debuxo	Tamaño real	Escala
20 cm longo e 5 cm de ancho		1:25000
10 cm	15 km	
	450 m	1:30000

24. Copia no teu caderno, calcula a razón de proporcionalidade inversa e completa a táboa:

Magnitude A	8	7.5		3.5	
Magnitude B		12	0.15		10

25. Determina se as seguintes magnitudes se encontran en proporción directa, inversa ou en ningunha delas:

a) Velocidade á que circula un coche e espazo que percorre.
b) Diñeiro que tes para gastar e bolsas de améndoas que podes comprar.
c) Talle de zapatos e prezo dos mesmos.
d) Número de membros dunha familia e litros de leite que consomen.
e) Número de entradas vendidas para un concerto e diñeiro recadado.
f) Números de billas que enchen unha piscina e tempo que esta tarda en encherse.
g) Idade dunha persoa e estatura que ten.
h) Número de traballadores e tempo que tardan en facer un valado.
i) Idade dunha persoa e número de amigos que ten.

26. Que velocidade debería levar un automóbil para percorrer en 4 horas certa distancia, se a 80 km/h tardou 5 horas e 15 minutos?

27. A razón de proporcionalidade inversa entre A e B é 5. Copia no teu caderno e completa a táboa seguinte:

A	20		7		10.8
B		0.05		0.3	

28. Na granxa faise o pedido de forraxe para alimentar a 240 porcos durante 9 semanas. Véndense 60 porcos, cantas semanas lles durará a forraxe? E se en lugar de vender, compra trinta porcos? E se decide rebaixar a ración unha cuarta parte cos 240 porcos?

29. Un granxeiro con 65 galiñas ten millo para alimentalas 25 días. Se vende 20 galiñas, cantos días poderá alimentar ás restantes?

30. Con 15 paquetes de 4 kg cada un poden comer 150 galiñas diariamente. Se os paquetes fosen de 2.7 kg, cantos necesitariamos para dar de comer ás mesmas galiñas?

31. Determina se as dúas magnitudes son directa ou inversamente proporcionais e completa a táboa no teu caderno:

A	24	8	0.4	6		50
B	3	9	180		20	

32. Se a xornada laboral é de 8 horas necesitamos a 20 operarios para realizar un traballo. Se rebaixamos a xornada en media hora diaria, cantos operarios serán necesarios para realizar o mesmo traballo?

33. Nun almacén gárdanse reservas de comida para 100 persoas durante 20 días con 3 racións diarias, cantos días duraría a mesma comida para 75 persoas con 2 racións diarias?

34. Se 15 operarios instalan 2 500 m de valado en 7 días. Cantos días tardarán 12 operarios en instalar 5 250 m de valado?

35. Nun concurso o premio de 168 000 € repártese de forma directamente proporcional aos puntos conseguidos. Os tres finalistas conseguiron 120, 78 e 42 puntos. Cantos euros recibirá cada un?

36. Repartir 336 en partes directamente proporcionais a 160, 140, 120.

37. Un traballo págase a 3 120 €. Tres operarios fano achegando o primeiro 22 xornadas, o segundo 16 xornadas e o terceiro 14 xornadas. Canto recibirá cada un?

38. Repartir 4 350 en partes inversamente proporcionais a 18, 30, 45.

39. Mesturamos 3 kg de améndoas a 14 €/kg, 1.5 kg de noces a 6 €/kg e 1.75 kg de castañas 8 €/kg. Calcula o prezo final do paquete de 250 g de mestura de froitos secos.

40. Calcula o prezo do litro de zume que se consegue mesturando 8 litros de zume de ananás a 2.5 €/l, 15 litros de zume de laranxa a 1.6 €/l e 5 litros de zume de uva a 1.2 €/l. A canto debe venderse unha botella de litro e medio se se lle aplica un aumento do 40 % sobre o prezo de custe?

41. Para conseguir un tipo de pintura mestúranse tres produtos: 5 kg do produto X a 18 €/kg, 19 kg do produto E a 4.2 €/kg e 12 kg do produto Z a 8 €/kg. Calcula o prezo do kg de mestura.

42. Cinco persoas comparten un microbús para realizaren distintos traxectos. O custe total é de 157.5 € máis 20 € de suplemento por servizo nocturno. Os quilómetros percorridos por cada pasaxeiro foron 3, 5, 7, 8 e 12 respectivamente. Canto debe abonar cada un?

43. Decidiuse penalizar ás empresas que máis contaminan. Para iso repártense 2 350 000 € para subvencionar a tres empresas que presentan un 12 %, 9 % e 15 % de grao de contaminación. Canto recibirá cada unha?

44. Un lingote de ouro pesa 340 g e contén 280.5 g de ouro puro. Cal é a súa lei?

45. Cantos gramos de ouro contén unha xoia de 0.900 de lei, que se formou cunha aliaxe de 60 g de 0.950 de lei e 20 g de 0.750 de lei?

46. Que capital hai que depositar ao 3.5 % de rédito en 5 anos para obter un interese simple de 810 €?

47. Cal é o capital final que se recibirá por depositar 25 400 € ao 1.4 % en 10 anos?

48. Cantos meses debe depositarse un capital de 74 500 € ao 3 % para obter un interese de 2 980 €?

49. Ao 3% de interese composto, un capital converteuse en 63 338.5 €. De que capital se trata?

50. Na construción dunha ponte de 850 m utilizáronse 150 vigas, pero o enxeñeiro non está moi seguro e decide reforzar a obra engadindo 50 vigas máis. Se as vigas se colocan uniformemente ao longo de toda o ponte, a que distancia se colocarán as vigas?

51. Nun colexio de primaria convócase un concurso de ortografía no que se dan varios premios. O total que se reparte entre os premiados son 500 €. Os alumnos que non cometeron ningunha falta reciben 150 €, e o resto distribúese de maneira inversamente proporcional ao número de faltas. Hai dous alumnos que non tiveron ningunha falta, un tivo unha falta, outro dúas faltas e o último tivo catro faltas, canto recibirá cada un?

AUTOAVALIACIÓN

1. Os valores que completan a táboa de proporcionalidade directa son:

A	10	0.25		0.1	100
B		50	5		

a) 612.5; 1 000; 0.0005; 0.5 b) 1.25; 2.5; 125; 0.125 c) 62; 500; 0.005; 0.05

2. Con 500 € pagamos os gastos de gas durante 10 meses. En 36 meses pagaremos:

a) 2 000 € b) 1 900 € c) 1 800 € d) 1 500 €.

3. Un artigo que custaba 2 000 € rebaixouse a 1 750 €. A porcentaxe de rebaixa aplicada é:

a) 10 % b) 12.5 % c) 15.625 % d) 11.75 %

4. Para envasar 510 litros de auga utilizamos botellas de litro e medio. Cantas botellas necesitaremos se queremos utilizar envases de tres cuartos de litro?

a) 590 botellas b) 700 botellas c) 650 botellas d) 680 botellas

5. Os valores que completan a táboa de proporcionalidade inversa son:

A	5.5	10		11	
B	20		0.5		0.1

a) 40; 200; 11.5; 1 000 b) 11; 200; 20; 300 c) 11; 220; 10; 1 100 d) 40; 220; 10; 500

6. Tres agricultores reparten os quilogramos da colleita de forma proporcional ao tamaño das súas parcelas. A meirande, que mide 15 ha, recibiu 30 toneladas; a segunda é de 12 ha e a terceira de 10 ha recibirán:

a) 24 t e 20 t b) 20 t e 24t c) 24 t e 18 t d) 25 t e 20 t

7. A escala á que se debuxou un mapa no que 2.7 cm equivalen a 0.81 km é:

a) 1:34000 b) 1:3000 c) 1:30000 d) 1:300

8. Con 4 rolos de papel de 5 m de longo, podo forrar 32 libros. Cantos rolos necesitaremos para forrar 16 libros se agora os rolos de papel son de 2 m de longo?

a) 3 rolos b) 5 rolos c) 4 rolos d) 2 rolos

9.O prezo final do kg de mestura de 5 kg de fariña clase A, a 1.2 €/k; 2.8 kg clase B a 0.85 €/kg e 4 kg clase C a 1 €/kg é:

a) 1.12 € b) 0.98 € c) 1.03 € d) 1.049 €

10. A lei dunha aliaxe é 0.855. Se o peso da xoia é 304 g, a cantidade de metal precioso é:

a) 259.92 g b) 255.4 g c) 248.9 g d)306 g

RESUMO

Noción	***Definición***	***Exemplos***
Proporcionalidade directa	Dúas magnitudes son **directamente** proporcionais cando ao multiplicar ou dividir á primeira por un número, a segunda queda multiplicada ou dividida polo mesmo número. A función de proporcionalidade directa é unha recta que pasa pola orixe: $y = kx$. A pendente da recta, k, é a **razón de proporcionalidade directa**.	Para empapelar 300 m^2 utilizamos 24 rolos de papel, Se agora a superficie é de 104 m^2, necesitaremos 8.32 rolos, pois $k = 300/24 = 12.5$, $y = 12.5x$, polo que $x = 104/12.5 = 8.32$ rolos.
Proporcionalidade inversa	Dúas magnitudes son **inversamente** proporcionais cando ao multiplicar ou dividir á primeira por un número, a segunda queda dividida ou multiplicada polo mesmo número. A función de proporcionalidade inversa é a hipérbole $y = k'/x$. Polo tanto a **razón de proporcionalidade inversa** k' é o produto de cada par de magnitudes: $k' = a \cdot b = a' \cdot b'$.	Dúas persoas pintan unha vivenda en 4 días. Para pintar a mesma vivenda, 4 persoas tardarán: $k' = 8$, $y = 8/x$, polo que tardarán 2 días.
Porcentaxes	Razón con denominador 100.	O 87 % de 2 400 é $\frac{87 \cdot 2\,400}{100} = 2\,088$
Escalas	A escala é a proporción entre as medidas do debuxo e as medidas na realidade.	A escala 1:50000, 35 cm son 17.5 km na realidade.

Reparto proporcional directo	**Reparto proporcional inverso**
Repartir directamente a 6, 10 e 14, 105 000 €	Repartir 5 670 inversamente a 3, 5 e 6
$6 + 10 + 14 = 30$	$1/3 + 1/5 + 1/6 = \frac{10+6+5}{30} = \frac{21}{30}$
$105\,000 : 30 = 3\,500$	$5\,670 : 21 = 270$
$6 \cdot 3\,500 =$ **21 000 €**	$270 \cdot 10 =$ **2 700**
$10 \cdot 3\,500 =$ **35 000 €**	$270 \cdot 6 =$ **1 620**
$14 \cdot 3\,500 =$ **49 000 €**	$270 \cdot 5 =$ **1 350**

Mesturas e aliaxes	Mesturar distintas cantidades de produtos, de distintos prezos. A **lei** dunha **aliaxe** é a relación entre o peso do metal máis valioso e o peso total.	Unha xoia que pesa 245 g e contén 195 g de prata, a súa lei é: $\frac{195}{245} = 0.795$
Interese simple e composto	O interese é o beneficio que se obtén ao depositar un capital nunha entidade financeira a un determinado tanto por cento durante un tempo	$C = 3\,600$; $r = 4.3$ %; $t = 8$ años $I = \frac{3\,600 \cdot 4.3 \cdot 8}{100} = 1\,238.4$ €

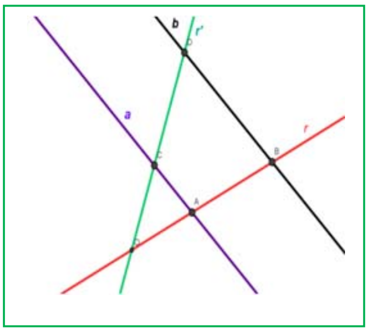
CAPÍTULO 7: SEMELLANZA

ACTIVIDADES PROPOSTAS

1. FIGURAS SEMELLANTES

1. Mide a túa altura nunha foto e calcula o factor de semellanza
2. O diámetro dun pexego é tres veces maior có do seu óso, e mide 8 *cm*. Calcula o volume do pexego, supoñendo que é esférico, e o do seu óso, tamén esférico. Cal é a razón de proporcionalidade entre o volume do pexego e o do óso?
3. Na pizzería teñen pizzas de varios prezos: 3 €, 6 € e 9 €. Os diámetros destas pizzas son: 15 *cm*, 20 *cm* e 30 *cm*, cal resulta máis económica? Calcula a relación entre as áreas e compáraa coa relación entre os prezos.
4. Unha maqueta dun depósito cilíndrico de 1 000 litros de capacidade e 5 metros de altura, queremos que teña unha capacidade de 1 litro. Que altura debe ter a maqueta?

2. O TEOREMA DE TALES



5. Nunha foto hai un neno, que sabemos que mide 1.5 *m*, e un edificio. Medimos a altura do neno e do edificio na foto e resultan ser: 2 *cm* e 10 *cm*. Que altura ten o edificio? *Comprobación*: O resultado paréceche real? É posible que un edificio teña esa altura?
6. Debúxase un hexágono regular. Trázanse as súas diagonais e obtense outro hexágono regular. Indica a razón de semellanza entre os lados de ambos os hexágonos.
7. Nun triángulo regular *ABC* dado 1 *cm* trazamos os puntos medios, *M* e *N*, de dous dos seus lados. Trazamos as rectas *BN* e *CM* que se cortan nun punto *O*. Son semellantes os triángulos *MON* e *COB*? Cal é a razón de semellanza? Canto mide o lado *MN*?
8. Unha pirámide regular hexagonal, de lado da base 3 *cm* e altura 10 *cm*, córtase por un plano a unha distancia de 4 *cm* do vértice, co que se obtén unha nova pirámide. Canto miden as súas dimensións?
9. Sexan *ABC* e *AED* dous triángulos en posición Tales. Sábese que *AB* = 7 m, *BC* = 5 m, *AC* = 4 m e *AD* = 14 m. Calcula as dimensións de *AED* e o seu perímetro.
10. *Reto*: Utiliza unha folla en branco para demostrar o teorema de Tales sen axuda. Non fai falla que utilices o mesmo procedemento que o libro. Hai moitas maneiras de demostrar o teorema.
11. Sexan *O*, *A* e *B* tres puntos aliñados e sexan *O*, *C*, *D* outros tres puntos aliñados nunha recta diferente á anterior. Verifícase que $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}$. Podemos asegurar que o segmento *AC* é paralelo ao segmento *BD*? Razoa a resposta.
12. Sexan *O*, *A* e *B* tres puntos aliñados e sexan *O*, *C*, *D* outros tres puntos aliñados nunha recta diferente á anterior. Verifícase que $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$. Podemos asegurar que o segmento *AC* é paralelo ao segmento *BD*? Razoa a resposta.
13. Se divides o segmento *AB* en 6 partes iguais, busca a relación de semellanza entre o sexto segmento e o terceiro.
14. Debuxa no teu caderno un segmento e divídeo en 5 partes iguais utilizando regra e compás. Demostra que, utilizando o teorema de Tales os segmentos obtidos son, en efecto, iguais.
15. Debuxa no teu caderno un segmento de 7 cm de lonxitude, e divídeo en dous segmentos que estean nunha proporción de 3/5.
16. Debuxa no teu caderno unha recta numérica e representa nela as seguintes fraccións:
    a) 1/2 b) 5/7 c) –3/8 d) 5/3

3. SEMELLANZA DE TRIÁNGULOS

17. Indica se son semellantes os seguintes pares de triángulos:

    a) Un ángulo de 60° e outro de 40°. Un ángulo de 80° e outro de 60°.

    b) Triángulo isósceles con ángulo desigual de 80°. Triángulo isósceles con ángulo igual de 50°.
    c) *a* = 30°, *b* = 8 cm, *c* = 10 cm. *a'*= 30°, *b'* = 4 cm, *c'* =5 cm
    d) *a* = 7 cm, *b* = 8 cm, *c* = 12 cm. *a'* = 14 cm, *b'* = 16 cm, *c'* = 25 cm

18. Calcula o valor descoñecido para que os triángulos sexan semellantes:

    a) *a* = 12 cm, *b* = 15 cm, *c* =10 cm. *a'* = 5 cm, *b', c'*?
    b) *a* = 37°, *b* = 10 cm, c = 12 cm. a' = 37°, *b'* = 10 cm, *c'*?

19. Un triángulo ten lados de 12 cm, 14 cm e 8 cm. Un triángulo semellante a el ten un perímetro de 80 cm. Canto miden os seus lados?

20. Os catetos dun triángulo rectángulo miden 3 e 4 cm, canto mide a altura sobre a hipotenusa?

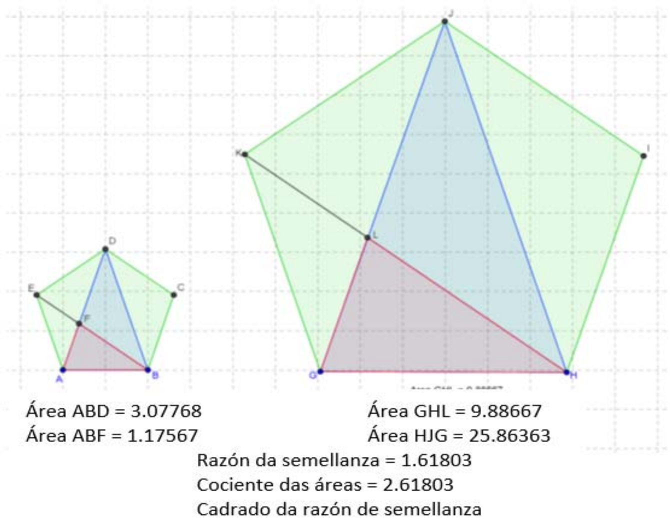
21. Os catetos dun triángulo rectángulo miden 3 e 4 cm, canto mide a proxección sobre a hipotenusa de cada un deses catetos?

22. Debuxa os tres triángulos semellantes para o triángulo rectángulo de catetos 3 e 4 en posición de Tales.

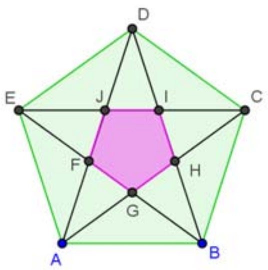
Comproba estes resultados noutro pentágono

23. Debuxa un pentágono *GHIJK* do mesmo modo que construíches o *ABCDE* coa condición de que a lonxitude dos seus lados sexa o triplo do que xa está construído. Para facilitar a tarefa podes activar a **cuadrícula** e mover os puntos iniciais.

a) Calcula as áreas dos triángulos *HJG* e *GHL*, a súa razón de semellanza, o cociente entre as súas áreas e o cadrado da razón de semellanza.

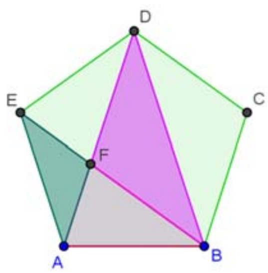


b) Comproba que a razón de semellanza, o cociente entre as áreas e o cadrado da razón de semellanza dos triángulos *GHJ* e *GHL* do pentágono *GHIJK* coinciden coas dos triángulos *ABD* e *ABF* do pentágono *ABCDE.*

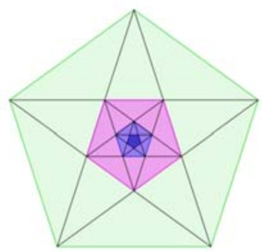


24. Calcula as áreas dos dous pentágonos anteriores e relaciona o seu cociente co cadrado da razón de semellanza.

25. *Outros triángulos do pentágono.* Investiga se os triángulos *AFE* e *BDF* son semellantes e, se o son, calcula a súa razón de semellanza, o cociente entre as súas áreas e compara este resultado co cadrado da razón de semellanza.



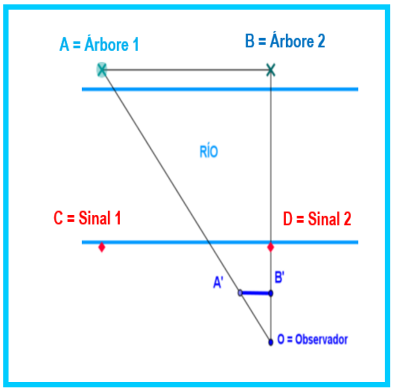
26. *Pentágono dentro dun pentágono.* Debuxa o pentágono *FGHIJ* que se forma no pentágono *ABCDE* ao trazar as súas diagonais ambos os dous son semellantes porque son polígonos regulares. Calcula a razón de semellanza e o cociente entre as súas áreas. Observa os triángulos AGF e ABD, son semellantes?



27. Observa os pentágonos regulares da figura: a) Son todos semellantes? b) Paréceche que o proceso de debuxar pentágonos dentro de pentágonos é infinito, por que? c) Cal é a sucesión das razóns de semellanza entre o pentágono maior e cada un dos seguintes.

CURIOSIDADES. REVISTA

- Calcula a altura da Pirámide de Keops sabendo que a súa sombra mide 175.93 metros e que ao mesmo tempo a sombra dun bastón, de altura un metro, mide 1.2 metros.
- Calcula a altura dunha árbore sabendo que a súa sombra mide 15 metros e que ao mesmo tempo a sombra dun pau, de altura un metro, mide 1.5 metros.
- Uns exploradores atopan un río e queren construír unha pasarela para cruzalo pero como coñecer a anchura do río, se non podemos ir á outra beira? Pensa! Pensa! Seguro que se che ocorren moitas boas ideas, mellores que a que che imos comentar a continuación.
- *Buscas na beira oposta dúas árbores (ou dúas rochas, ou …), A e B. Colocándote na túa beira perpendicular a eles, marcas dous sinais (Sinal 1 e Sinal 2) e mides así a distancia entre esas dúas árbores. Agora medindo ángulos debuxas dous triángulos semellantes. Un, na túa beira, podes medilo e, por semellanza de triángulos, calculas os lados do outro.*



- Imaxina que a distancia *CD* é de 10 metros, que *A'B'* mide 2 metros e que *OB'* = 2.5 m. Canto mide *OB*? Se *OD* mide 5 metros, canto mide a anchura de río
- Como poderías coñecer a que distancia da costa está un barco?

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Figuras semellantes

1. Busca fotografías, planos, fotocopias, figuras a escala, etc. Toma medidas e determina as razóns de semellanza. Calcula as medidas reais e comproba que a razón de semellanza obtida é correcta.
2. Nun mapa de estradas de escala 1:3000 a distancia entre dúas cidades é de 2.7 cm. Calcula a distancia real entre as cidades.
3. Un microscopio ten un aumento de 500X, que tamaño ten a imaxe que se ve polo obxectivo se observamos un paramecio de 0.034 mm de diámetro?
4. Pericles morreu de peste no ano 429 a. C. Consultado o oráculo de Apolo debían construír un altar en forma de cubo cuxo volume duplicara exactamente o que xa existía. Cal debía ser a razón de proporcionalidade dos lados? É posible construír exactamente un cubo con esta razón?
5. Nunha fotografía unha persoa que sabe que mide 1.75 m ten unha altura de 2.3 cm. Aparece unha árbore que na fotografía mide 5.7 cm, canto mide na realidade?
6. Canto mide o lado dun icosaedro cuxa superficie é o triplo doutro icosaedro de lado 4 cm?
7. Supoñemos que un pexego é unha esfera e que o seu óso ten un diámetro que é un terzo do do pexego. Canto é maior a polpa do pexego có seu óso?
8. Son semellantes todos os cadrados? E todos os rombos? E todos os rectángulos? Cando son semellantes dous rombos? E dous rectángulos?
9. A área dun rectángulo é 10 cm^2 e un dos seus lados mide 2 cm. Que área ten un rectángulo semellante ao anterior no que o lado correspondente mide 1 cm? Que perímetro ten?
10. Son semellantes todas as esferas? E os icosaedros? E os cubos? E os dodecaedros? Cando son semellantes dous cilindros?
11. A aresta dun octaedro mide 7.3 cm e a doutro 2.8 cm. Que relación de proporcionalidade hai entre as súas superficies? E entre os seus volumes?
12. A medida normalizada A$ ten a propiedade de que partimos o rectángulo pola metade da súa parte máis longa, o rectángulo que se obtén é semellante ao primeiro. Duplicando, ou dividindo, obtéñense as dimensións dos rectángulos A1, A2, A3, A4, A5…. O rectángulo A4 mide 29.7 cm x 21 cm. Determina as medidas de A3 e de A5.
13. Debuxa un pentágono regular e traza as súas diagonais. Tes un novo pentágono regular. Cal é a razón de semellanza?
14. Debuxa no teu caderno un pentágono regular e traza as súas diagonais. Canto miden os ángulos do triángulo formado por un lado do pentágono e as dúas diagonais do vértice oposto? Este triángulo denomínase *triángulo áureo* pois ao dividir o lado maior entre o menor obtense o número de ouro. Na figura que trazaches hai outros triángulos semellantes ao áureo, que relación de proporcionalidade hai entre eles?
15. O mapa a escala 1:1500000 dunha rexión ten unha área de 1 600 cm^2, canto mide a superficie verdadeira desta rexión?

16. *Eratostenes de Alexandría* (276 – 196 a. C.) observou que en Siena a dirección dos raios solares era perpendicular á superficie da Terra no solsticio de verán. Viaxou seguindo o curso do Nilo unha distancia de 790 km (5 mil estadios) e mediu a inclinación dos raios do sol no solsticio de verán en Alexandría que era de $\alpha = 7° 12'$. Utilizou a proporcionalidade: $2\pi R/790 = 360°/\alpha$ para determinar o radio da Terra. Que obtivo?
17. Temos un conxunto de rectángulos dados: A: 4 e 7, B: 2 e 5, C: 8 e 14, D: 4 e 10, E: 3 e 7, F: 9 e 21. Indica cales son semellantes. Debuxa e recorta o rectángulo A, e debuxa o resto dos rectángulos. Superpón o rectángulo A cos outros rectángulos e explica que observas co que é semellante. Que lonxitude ten o outro lado dun rectángulo semellante a A cuxo lado menor mide 10 cm?

O teorema de Tales

18. Divide un segmento calquera en 5 partes iguais utilizando o teorema de Tales. Saberías facelo por outro procedemento exacto?
19. Divide un segmento calquera en 3 partes proporcionais a 2, 3, 5 utilizando o teorema de Tales.

20. Se alguén mide 1.75 m e a súa sombra mide 1 m, calcula a altura do edificio cuxa sombra mide 25 m á mesma hora.
21. Un rectángulo ten unha diagonal de 75 m. Calcula as súas dimensións sabendo que é semellante a outro rectángulo de lados 36 m e 48 m.
22. Sexan *OAC* e *OBD* dous triángulos en posición Tales. O perímetro de *OBD* é 200 cm, e *OA* mide 2 cm, *AC* mide 8 cm e *OC* mide 10 cm. Determina as lonxitudes dos lados de *OBD.*
23. No museo de Bagdad consérvase unha taboíña na que aparece debuxado un triángulo rectángulo *ABC*, de lados $a = 60$, $b = 45$ e $c = 75$, subdividido en 4 triángulos rectángulos menores *ACD*, *CDE*, *DEF* e *EFB*, e o escriba calculou a lonxitude do lado *AD*. Utiliza o teorema de Tales para determinar as lonxitudes dos segmentos *AD*, *CD*, *DE, DF, EB, BF* e *EF*. Calcula a área do triángulo *ABC* e dos triángulos *ACD, CDE, DEF* e *EFB*.

Semellanza de triángulos

24. O triángulo rectángulo *ABC* ten un ángulo de 54° e outro triángulo rectángulo ten un ángulo de 36°. Podemos asegurar que son semellantes? Razoa a resposta.
25. A hipotenusa dun triángulo rectángulo mide 25 cm e a altura sobre a hipotenusa mide 10 cm, canto miden os catetos?
26. Indica se son semellantes os seguintes pares de triángulos:
    a) Un ángulo de 50° e outro de 40°. Un ángulo de 90° e outro de 40°.
    b) Triángulo isósceles cun ángulo desigual de 40°. Triángulo isósceles cun ángulo igual de 70°.
    c) $A = 72°$, $b = 10$ cm, $c = 12$ cm. $A' = 72°$, $b' = 5$ cm, $c' = 6$ cm.
    d) $a = 7$ cm, $b = 5$ cm, $c = 8$ cm. $a' = 21$ cm, $b' = 15$ cm, $c' = 24$ cm.
27. Calcula o valor descoñecido para que os triángulos sexan semellantes:
    a) $a = 12$ cm, $b = 9$ cm, $c = 15$ cm. $a' = 8$ cm, b', c'?
    b) $A = 45º$, $b = 6$ cm, c = 4 cm. $A' = 45º$, $b' = 24$ cm, c'?
28. As lonxitudes dos lados dun triángulo son 7 cm, 9 cm e 10 cm. Un triángulo semellante a el ten un perímetro de 65 cm. Canto miden os seus lados?
29. A sombra dun edificio mide 23 m e a do primeiro piso 3 m. Sabemos que a altura dese primeiro piso é de 2.7 m, canto mide o edificio?
30. Demostra que en dous triángulos semellantes as bisectrices son proporcionais.
31. Un triángulo rectángulo isósceles ten a hipotenusa de lonxitude 9 cm, igual a un cateto doutro triángulo semellante ao primeiro. Canto valen as áreas de ambos os triángulos?
32. Unindo os puntos medios dos lados dun triángulo obtense outro triángulo. Son semellantes? Que relación hai entre os seus perímetros? E entre as súas áreas?
33. A altura e a base dun triángulo isósceles miden respectivamente 7 e 5 cm; e é semellante a outro de base 12 cm. Calcula a altura do novo triángulo e as áreas de ambos os dous.
34. Os triángulos seguintes son semellantes. Pescuda a medida dos ángulos que faltan sabendo que:
    a) Son rectángulos e un ángulo do primeiro triángulo mide 52°.
    b) Dous ángulos do primeiro triángulo miden 30° e 84.
35. Os triángulos seguintes son semellantes. Averigua as medidas que faltan sabendo que:
    a) Os lados do primeiro triángulo miden 10 m, 15 m e *z* m. Os do segundo: *x* m, 9 m e 8 m.
    b) Os lados do primeiro triángulo miden 4 m, 6 m e 8 m. Os do segundo: 6 m, *x* m e *z* m.
    c) Un lado do primeiro triángulo mide 12 cm e a altura sobre este lado 6 cm. O lado correspondente do segundo mide 9 cm e a altura *x* cm.
    d) Un triángulo isósceles ten o ángulo desigual de 35° e o lado igual de 20 cm e o desigual de 7 cm; o outro ten o lado igual de 5 cm. Canto miden os seus outros lados e ángulos?

36. Enuncia o primeiro criterio de semellanza de triángulos para triángulos rectángulos.
37. Os exipcios usaban unha corda con nós, todos á mesma distancia, para obteren ángulos rectos. Formaban triángulos de lonxitude 3, 4 e 5. Por que? Os indios e os chineses usaban un procedemento similar, aínda que utilizando cordas cos nós separados en 5, 12 e 13, e tamén 8, 15 e 17. Por que? Escribe as lonxitudes dos lados de triángulos semellantes aos indicados.
38. Quérese calcular a altura dunha árbore para o que se mide a súa sombra: 13 m, e a sombra dun pau de 1.2 m de lonxitude, 0.9 m. Que altura ten a árbore?
39. Agora non podemos usar o procedemento da sombra porque a árbore é inaccesible (hai un río no medio) pero sabemos que está a 30 m de nós. Como o farías? Pepe colleu un lapis que mide 10 cm e colocouno a 50 cm de distancia. Dese modo conseguiu ver aliñada a base da árbore cun extremo do lapis, e a punta da árbore co outro. Canto mide esta árbore?
40. Arquímedes calculaba a distancia á que estaba un barco da costa. Cunha escuadra *ABC* aliñaba os vértices *BC* co barco, *C'*, e coñecía a altura do cantil ata o vértice *B*. Debuxa a situación, determina que triángulos son semellantes. Calcula a distancia do barco se *BB'* = 50 m, *BA* = 10 cm, *AC* = 7 cm.

AUTOAVALIACIÓN

1. Nun mapa de estradas de escala 1:1200 a distancia entre dúas vilas é de 5 cm. A distancia real entre estas vilas é de:

a) 60 m b) 60 km c) 240 km d) 240 cm

2. Se un microscopio ten un aumento de 1000X, que tamaño (aparente) pensas que terá a imaxe que se vexa polo obxectivo se observamos unha célula de 0.01 mm de diámetro

a) 1 cm b) 1 mm c) 0.1 cm d) 100 mm

3. Queremos construír un cadrado de área dobre dun dun metro de lado. O lado do novo cadrado debe medir:

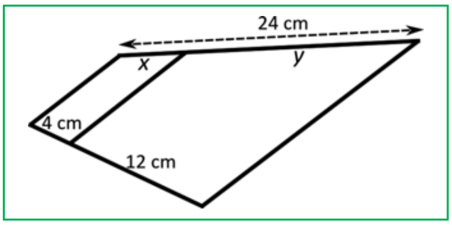
a) 2 metros b) $\sqrt{2}$ metros c) $\sqrt[3]{2}$ metros d) 1.7 metros

4. Sexan *OAC* e *OBD* dous triángulos en posición *Tales*. O perímetro de *OBD* é 50 cm, e *OA* mide 1 cm, *AC* mide 1.5 cm e OC mide 2.5 cm. As lonxitudes dos lados de *OBD* son:

a) *OB* = 10 cm, *OD* = 20 cm, *BD* = 30 cm b) *OB* = 25 cm, *OD* = 10 cm, *BD* = 15 cm

c) *OB* = 10 cm, *OD* = 15 cm, *BD* = 25 cm d) *OB* = 15 cm, *OD* = 25 cm, *BD* = 30 cm.

5. Na figura adxunta os valores de *x* e y son:



a) 6 e 12 cm b) 5 e 19 cm c) 6 e 18 cm d) 5 e 20 cm

6. Os triángulos *ABC* e *DEF* son semellantes. Os lados de *ABC* miden 3, 5 e 7 cm, e o perímetro de *DEF* mide 60 m. Os lados de *DEF* miden:

a) 6, 10 e 14 cm b) 12, 20 e 28 cmc) 9, 15 21 m d) 12, 20 e 28 m

7. Dous triángulos rectángulos son proporcionais se:

a) Teñen a hipotenusa proporcional.

b) Teñen un ángulo igual.

c) Teñen un ángulo distinto do recto igual.

d) As súas áreas son proporcionais.

8. Os triángulos *ABC* e *DEF* son semellantes. O ángulo A mide 30°, e B, 72°. Canto miden os ángulos *D*, *E* e *F*?

a) *D* = 72°, *E* = 78° e *F* = 30° b) *D* = 30°, *E* = 88° e *F* = 72° c) *D* = 30°, *E* = 72° e *F* = 68°

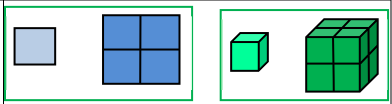
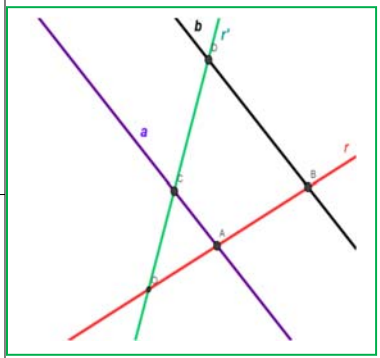
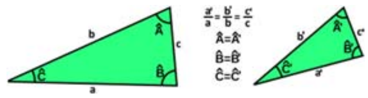
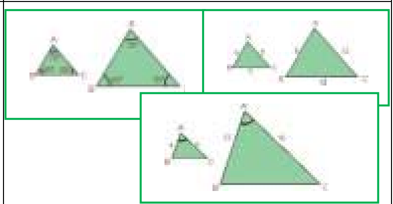
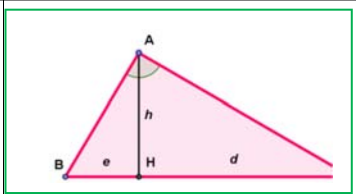
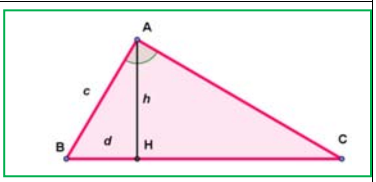
9. A altura dun triángulo rectángulo divide á hipotenusa en dous segmentos de lonxitude 5 e 4 cm, canto mide a altura?

a) 5.67 cm b) 4.47 cm c) 6 cm d) 5 cm

10. A proxección dun cateto sobre a hipotenusa dun triángulo rectángulo mide 4 cm, e a hipotenusa 9 cm, canto mide o cateto?

a) 7 cm b) 5 cm c) 5.67 cm d) 6 cm.

RESUMO

Noción	Definición	*Exemplos*
Figuras semellantes	Se as lonxitudes dos elementos correspondentes son proporcionais.	
Razón de semellanza	Coeficiente de proporcionalidade.	
Semellanza en lonxitudes, áreas e volumes	Se a razón de semellanza entre as lonxitudes dunha figura é k, entón a razón entre as súas áreas é k^2 e entre os seus volumes é k^3.	
Teorema de Tales	Dadas dúas rectas, *r* e *r'*, que se cortan no punto *O*, e dúas rectas paralelas entre si, *a* e *b*. A recta *a* corta ás rectas *r* e *r'* nos puntos *A* e *C*, e a recta *b* corta ás rectas *r* e *r'* nos puntos *B* e *D*. Entón: $$\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$$	
Recíproco do teorema de Tales	Se $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$ entón *a* e *b* son paralelas.	
Semellanza de triángulos	Dous triángulos son **semellantes** se teñen todos os ángulos iguais e os lados proporcionais.	
Criterios de semellanza de triángulos	Dous triángulos son semellantes se: **Primeiro:** Teñen dous ángulos iguais. **Segundo:** Teñen os tres lados proporcionais. **Terceiro:** Teñen dous lados proporcionais e o ángulo que forman é igual.	
Teorema da altura	Nun triángulo rectángulo a altura é media proporcional dos segmentos nos que divide á hipotenusa: $\frac{h}{e}=\frac{d}{h}$ logo $h^2 = ed$.	
Teorema do cateto	Nun triángulo rectángulo un cateto é media proporcional entre a hipotenusa e a súa proxección sobre ela: $\frac{a}{c}=\frac{c}{d}$ logo $c^2 = ad$.	

CAPÍTULO 8: TRIGONOMETRÍA

ACTIVIDADES PROPOSTAS

1. SISTEMAS DE MEDIDA DE ÁNGULOS

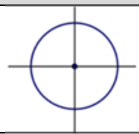
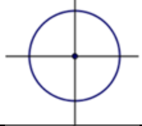
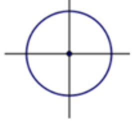
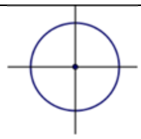
1. Expresa en radiáns as seguintes medidas: 45°, 150°, 210°, 315°.
2. Expresa en graos sesaxesimais: $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{5}$ e $\frac{3\pi}{8}$ radiáns.
3. Dous ángulos dun triángulo miden respectivamente 40º e $\frac{\pi}{3}$ radiáns. Calcula en radiáns o que mide o terceiro ángulo.
4. Un ángulo dun triángulo isósceles mide $\frac{5\pi}{6}$ radiáns. Calcula en radiáns a medida dos outros dous.
5. Debuxa un triángulo rectángulo isósceles e expresa en radiáns a medida de cada un dos seus ángulos.

2. RAZÓNS TRIGONOMÉTRICAS DUN ÁNGULO AGUDO

6. Sabendo que $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, calcula as razóns trigonométricas secante, cosecante e cotanxente de α.
7. Se *cotan*α = 2, calcula as cinco razóns trigonométricas do ángulo α.
8. Demostra que $cosec^2\,\alpha = 1 + cotan^2\alpha$

3. RAZÓNS TRIGONOMÉTRICAS DUN ÁNGULO CALQUERA

9. Sitúa no cuadrante que corresponda e expresa en función dun ángulo agudo, o seno, o coseno e a tanxente dos seguintes ángulos:

Ángulo	*cuadrante*	*seno*	*coseno*	*tanxente*
165°				
–230°				
315°				
3 625°				

10. Utiliza a calculadora e o aprendido neste epígrafe para encontrar todos os ángulos positivos menores que 360º cuxo seno é de 0.4.
11. Ídem todos os ángulos negativos menores en valor absoluto que 360º cuxa tanxente vale 2.
12. Ídem todos os ángulos comprendidos entre 360º e 720º cuxo coseno vale 0.5.

4. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS CALQUERA

13. Calcula a lonxitude do lado *a* dun triángulo, sabendo que *C* = 25, *b* = 7 cm e *c* = 4 cm.
14. Calcula os ángulos do triángulo de lados: *a* = 6, *b* = 8 e *c* = 5.

EXERCICIOS E PROBLEMAS

1. Expresa as seguintes medidas de ángulos en radiáns:

   a) 30º b) 60º c) 100º d) 330º

2. Canto mide en graos sesaxesimais un ángulo de 1 rad? Aproxima o resultado con graos, minutos e segundos.
3. Calcula a medida en graos dos seguintes ángulos expresados en radiáns:

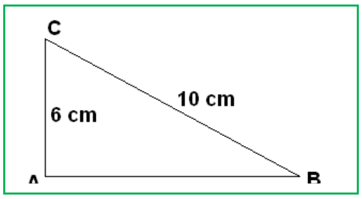
   a) π b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{5\pi}{6}$ d) 2π

4. Usando a calculadora calcula o seno, o coseno e a tanxente de :

   a) 28º b) 62º

Encontras algunha relación entre as razóns trigonométricas de ambos os ángulos?

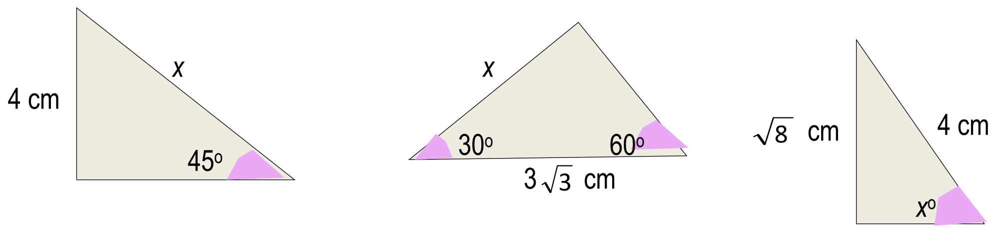
5. Calcula o seno e o coseno dos ángulos *B* e *C* do debuxo. Que relación atopas?



6. Nun triángulo rectángulo *ABC* con ángulo recto en A, se *tan B* = 1.2 e *b* = 3 cm, canto mide *c*?
7. Traballando con ángulos agudos, é certo que a maior ángulo lle corresponde maior seno? E para o coseno?
8. Usando a calculadora calcula o seno, o coseno e a tanxente de 9º e 81º. Atopas algunha relación entre as razóns trigonométricas de ambos os ángulos?
9. Se *a* é un ángulo agudo e *cos a* = 0.1, canto valen as outras dúas razóns trigonométricas?
10. Comprobar as relacións trigonométricas fundamentais con 30º, 45º e 60º sen utilizar decimais nin calculadora.
11. Se *a* é un ángulo agudo e *tan a* = 0.4, canto valen as outras dúas razóns trigonométricas?
12. Completa no teu caderno o seguinte cadro sabendo que α é un ángulo agudo.

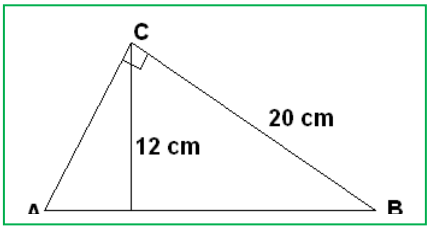
$sen\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$
	0.7	
1/3		
		2

13. É rectángulo un triángulo cuxos lados miden 12, 13 e 5 cm? En caso afirmativo determina o seno, coseno e tanxente dos dous ángulos agudos.
14. Os catetos dun triángulo rectángulo miden 5 e 12 cm. Calcula as razóns trigonométricas dos seus ángulos agudos. Que amplitude teñen?
15. Se α é un ángulo agudo tal que $sen\ \alpha = \frac{1}{3}$, calcula:
    i) As restantes razóns trigonométricas de α.
    ii) As razóns trigonométricas de $180° - \alpha$.
    iii) As razóns trigonométricas de $180° + \alpha$.
    iv) As razóns trigonométricas de $360° - \alpha$.
16. Sen utilizar calculadora, calcula o valor de *x* nos seguintes triángulos rectángulos:



17. Beatriz suxeita un papaventos cunha corda de 42 m. A que altura se atopa este no momento no que o cable tenso forma un ángulo de 52° 17' co chan??

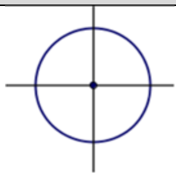
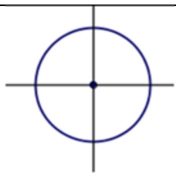
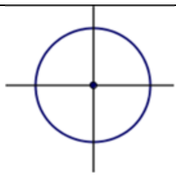
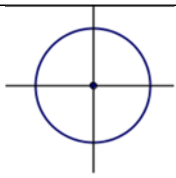
18. Calcula o seno, o coseno e a tanxente do ángulo *A* no seguinte debuxo:



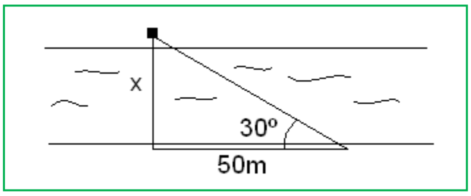
19. Se *a* é un ángulo do segundo cuadrante e *cos a* = –0.05, canto valen as outras dúas razóns trigonométricas?

20. Se *a* é un ángulo obtuso e *sen a* = 0.4, canto valen as outras dúas razóns trigonométricas?

21. Debuxa no teu caderno a táboa seguinte e sitúa no cuadrante que corresponda e expresa en función dun ángulo agudo, o seno, coseno, tanxente, secante, cosecante e cotanxente dos seguintes ángulos. Se podes, calcúlaos:

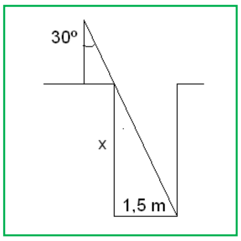
Ángulo	*cuadrante*	*seno*	*coseno*	*tanxente*	*secante*	*cosecante*	*cotanxente*
–225°							
150°							
–60°							
3645°							

22. Calcula a anchura do río representado na figura da marxe:



23. Averigua a altura da torre dunha igrexa se a una distancia de 80 m, e medido cun teodolito de altura 1.60 m, o ángulo de elevación do pararraios que está no alto da torre é de 23°.

24. Calcula a área dun hexágono regular de lado 10 cm.

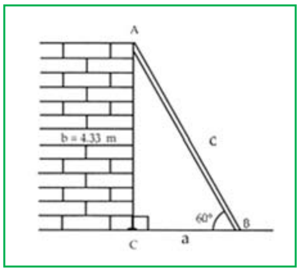


25. Calcula a profundidade dun pozo de 1.5 m de diámetro sabendo o ángulo indicado na figura da marxe:

26. Cal é a altura dunha montaña cuxa cima, se nos situamos a una distancia de 3 000 m do pé da súa vertical e medimos cun teodolito de altura 1.50 m, presenta un ángulo de inclinación de 49º.

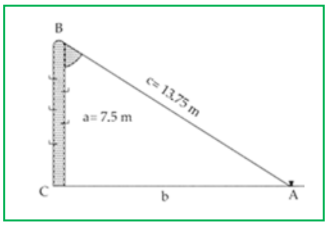
27. Cal é o ángulo de inclinación dos raios solares no momento no que un bloque de pisos de 25 m de altura proxecta unha sombra de 10 m de lonxitude?

28. Calcula a altura e a área dun triángulo isósceles cuxa base mide 20 cm e cuxo ángulo desigual vale 26º.



29. Calcula a área dun dodecágono regular de lado 16 cm.

30. Obter a lonxitude dunha escaleira apoiada nunha parede de 4.33 m de altura que forma un ángulo de 60º con respecto ao chan.

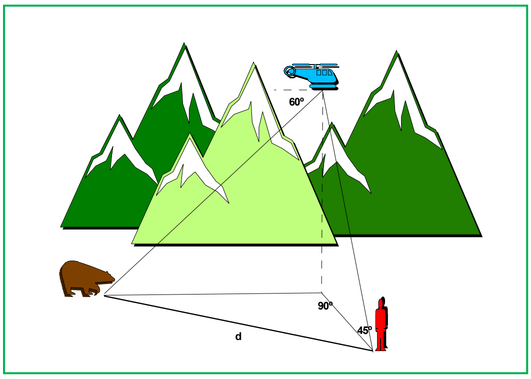


31. O fío dun papaventos totalmente estendido mide 150 m e forma un ángulo co chan de 40° mentres o suxeito a 1.5 m do chan. A que altura do chan está o papaventos?

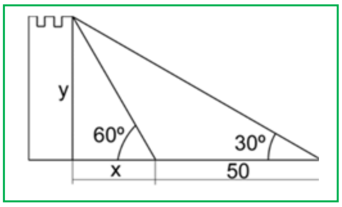
32. Para medir a altura dun campanario a cuxa base non podemos acceder, tendemos unha corda de 30 m de longo desde o alto da torre ata tensala no chan, formando con este un ángulo de 60°. Cal é a altura do campanario?

33. Obter o ángulo que forma un poste de 7.5 m de alto cun cable tirante que vai, desde a punta do primeiro ata o chan, e que ten un longo de 13.75 m.

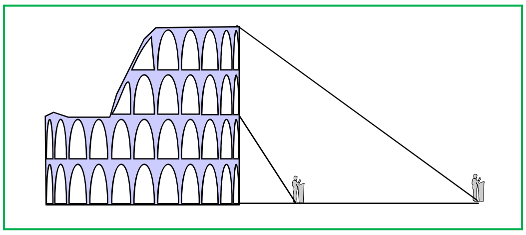
34. Dous amigos observan desde a súa casa un globo que está situado na vertical da liña que une as súas casas. A distancia entre as súas casas é de 3 km. Os ángulos de elevación medidos polos amigos son de 45º e 60º. Calcula a altura do globo e a distancia deles ao globo.



35. Un biólogo encóntrase no porto de Somiedo facendo un seguimento dos osos pardos. Conta coa axuda dun cámara e dun piloto que voan nun helicóptero, manténdose a unha altura constante de $40\sqrt{3}$ m. No momento que describe a figura, o cámara ve desde o helicóptero ao oso cun ángulo de depresión (ángulo que forma a súa visual coa horizontal marcado no debuxo) de 60°. O biólogo dirixe unha visual ao helicóptero que forma co chan un ángulo de 45°. Calcula a distancia d entre o biólogo e o oso.

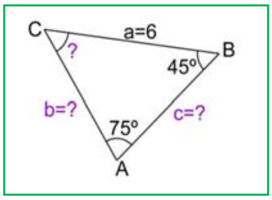


36. Desde certo lugar do chan vese o punto máis alto dunha torre, formando a visual un ángulo de 30° coa horizontal. Se nos achegamos 50 m á torre, ese ángulo faise de 60°. Calcula a altura da torre.



37. Cun teodolito de 1 metro de altura, dúas persoas pretenden medir a altura do Coliseo de Roma. Unha delas achégase ao anfiteatro, separándose 40 m. da outra. Esta última obtén que o ángulo de elevación do punto máis alto é de 30°. A outra non divisa o Coliseo completo polo que mide o ángulo de elevación ao punto que marca a base do terceiro piso, obtendo 60° como resultado. Calcular a altura do Coliseo e a distancia dos dous observadores á base do mesmo.

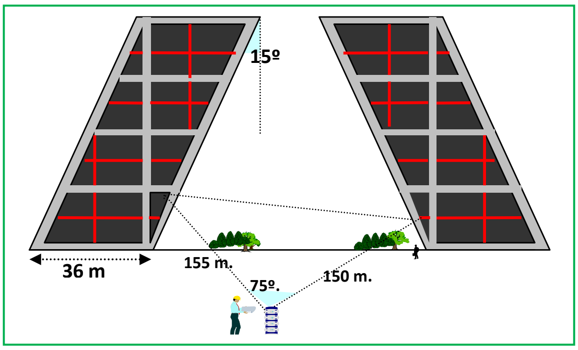
38. Resolve o triángulo: $a = 6$; $B = 45º$; $A = 75º$.



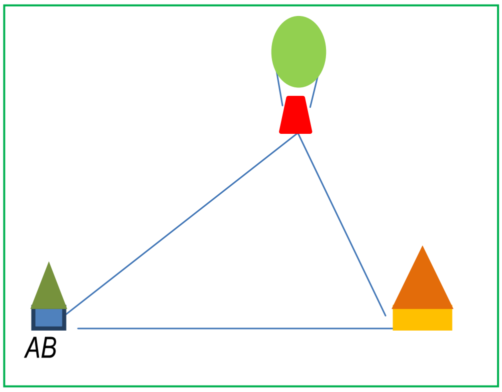
39. Os pais de Pedro teñen unha parcela no campo de forma triangular cuxos lados miden 20, 22 e 30 m. Pedro quere calcular os ángulos. Cales son eses ángulos?

40. Estando situado a 100 m dunha árbore, vexo a súa copa baixo un ángulo de 30°. O meu amigo ve a mesma árbore baixo un ángulo de 60°. A que distancia está o meu amigo da árbore?

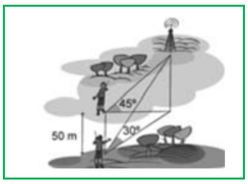
41. As coñecidas *torres Kío* de Madrid son dúas torres xemelgas que están no Paseo da Castellana, xunto á Praza de Castilla. Caracterízanse pola súa inclinación e representan unha porta cara a Europa.
    a. Cos datos que aparecen na figura, determina a súa altura.
    b. Desde dúas oficinas situadas en torres distintas estendéronse dous cables ata un mesmo punto que miden 155 e 150 metros e que forman un ángulo de 75° no seu punto de encontro. Que distancia en liña recta hai entre ambas as dúas?



42. Tres vilas están unidas por estradas: *AB* = 10 km, *BC* = 12 km e o ángulo formado por *AB* e *BC* é de 120°. Canto distan *A* e *C*.
43. Van construír un túnel do punto *A* ao punto *B*. Tómase como referencia unha antena de telefonía (*C*) visible desde ambos os puntos. Mídese entón a distancia *AC* = 250 m. Sabendo que o ángulo en A é de 53° e o ángulo *B* é de 45° calcula cal será a lonxitude do túnel.

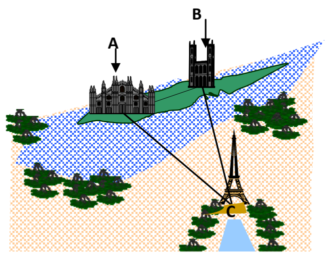


44. Calcular o lado dun pentágono regular inscrito nunha circunferencia de radio 6 m.
45. O punto máis alto dun repetidor de televisión, situado na cima dunha montaña, vese desde un punto do chan *P* baixo un ángulo de 67°. Se nos achegamos á montaña 30 m vémolo baixo un ángulo de 70° e desde ese mesmo punto vemos a cima da montaña baixo un ángulo de 66°. Calcular a altura do repetidor.
46. Desde o alto dun globo obsérvase unha vila A cun ángulo de 50°. Outra vila, B situada ao lado e en liña recta obsérvase desde un ángulo de 60°. O globo atópase a 6 km da vila A e a 4 km de B. Calcula a distancia entre A e B.
47. Resolve os triángulos:
    a) a = 20 m; *B* = 45°; *C* = 65°
    b) *c* = 6 m, *A* = 105°, *B* = 35°
    c) *b* = 40 m; *c* = 30 m, *A* = 60°.
48. Dado o triángulo de vértices *A*, *B*, *C*, e sabendo que *A* = 60°, *B* = 45° e que *b* = 20 m. Resolvelo e calcular a súa área.
49. Calcula a lonxitude dos lados dun paralelogramo cuxas diagonais son de 20 e 16 m. E as diagonais forman entre si un ángulo de 37°.
50. Un triángulo isósceles con base 30 m ten dous ángulos iguais de 80°. Canto miden os outros dous lados?
51. Tres amigos sitúanse nun campo de fútbol. Entre Álvaro e Bartolo hai 25m e entre Bartolo e César, 12 metros. O ángulo formado na esquina de César é de 20°. Calcula a distancia entre Álvaro e César.



52. Un home que está situado ao oeste dunha emisora de radio observa que o seu ángulo de elevación é de 45º. Camiña 50 m cara ao sur e observa que o ángulo de elevación é agora de 30º. Calcula a altura da antena.
53. Os brazos dun compás miden 12 cm e forman un ángulo de 60°. Cal é o radio da circunferencia que pode trazarse con esa abertura?
54. Escribe catro ángulos co mesmo seno que 135º.
55. Encontra dous ángulos que teñan a tanxente oposta á de 340º.
56. Busca dous ángulos co mesmo seno que 36º e coseno oposto.
57. Que ángulos negativos, comprendidos entre –360º e 0º, teñen o mesmo seno que 60º?

58. En En París e na l' Île da Cité atópanse Nôtre Dame e a Sainte Chapelle a unha distancia de 200 metros. Imaxinemos que un observador situado en A ve B e C cun ángulo de 56° e que outro, situado en B, ve A e C cun ángulo de 117°. Calcular as distancias entre a torre Eiffel (C) e Nôtre Dame (B), así como entre a torre Eiffel (C) e a Sainte Chapelle (A).



AUTOAVALIACIÓN

1. A expresión en radiáns de 65º é:

   a) 1.134 rad b) 1.134π rad c) 2.268 rad d) 2.268π rad

2. O valor da hipotenusa nun triángulo rectángulo cun ángulo de 25º e cun dos catetos de 3 cm é:

   a) 3.3 cm b) 7.1 cm c) 6.4 cm d) 2.2 cm

3. Se α é un ángulo agudo e $sen\,\alpha$ = 0.8, a tanxente de α é:

   a) 0.6 b) –0.6 c) –1.33 d) 1.33

4. Selecciona a opción correcta:

a) $tan\,\hat{A} = \frac{2}{3}$ significa que $sen\ \hat{A} = 2$ e $cos\ \hat{A} = 3$

b) a secante dun ángulo sempre está comprendida entre –1 e 1

c) No segundo e cuarto cuadrantes a tanxente e cotanxente dun ángulo teñen signo negativo .

d) O seno dun ángulo é sempre menor cá súa tanxente.

5. Se o seno dun ángulo do segundo cuadrante é $\frac{4}{5}$, entón as súas tanxente e secante son respectivamente:

   a) $-\frac{3}{5}$ e $-\frac{5}{3}$ b) $\frac{3}{5}$ e $\frac{5}{3}$ c) $-\frac{4}{3}$ e $-\frac{3}{4}$ d) $\frac{4}{3}$ e $\frac{3}{4}$

6. A altura dun edificio é de 50 m, a medida da súa sombra cando os raios do sol teñen unha inclinación de 30º coa horizontal é de

   a) 25 m b) 100 m c) $50\sqrt{3}$ m d) $\frac{100\sqrt{3}}{3}$ m

7. O ángulo de -420º é un ángulo que se sitúa en

a) o primeiro cuadrante b) o segundo cuadrante c) o terceiro cuadrante d) o cuarto cuadrante

8. Se α é un ángulo agudo e β é o seu suplementario, cúmprese:

   a) $sen\ \alpha = -sen\ \beta$ e $\cos\alpha = \cos\beta$ b) $sen\ \alpha = sen\ \beta$ e $\cos\alpha = -\cos\beta$

   c) $sen\ \alpha = sen\ \beta$ e $\cos\alpha = \cos\beta$ d) $sen\ \alpha = -sen\ \beta$ e $\cos\alpha = -\cos\beta$

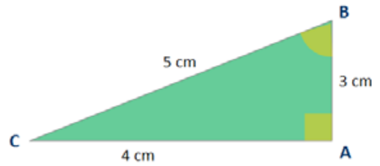
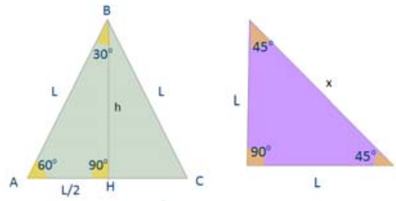
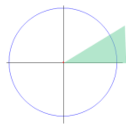
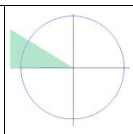
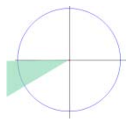
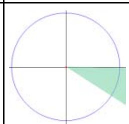
9. Para calcular a altura dunha montaña mídese cun teodolito desde *A* o ángulo que forma a visual á cima coa horizontal, que é $\hat{A}$ = 30 º. Avanzando 200 m, vólvese medir e o ángulo resulta ser $\hat{B}$ = 35.2º. A altura da montaña é de:

   a) 825 m b) 773 m c) 595 m d) 636 m

10. Se o radio dun pentágono regular é 8 cm, a súa área mide

    a) 305.86 cm^2 b) 340.10 cm^2 c) 275.97 cm^2 d) 152.17 cm^2

RESUMO

<table>
<tr><th>Noción</th><th>Definición</th><th colspan="2">Exemplos</th></tr>
<tr><td>Radián</td><td>É un ángulo tal que calquera arco que se lle asocie mide exactamente o mesmo que o radio utilizado para trazalo. Denótase por rad.
Nº de radiáns dun ángulo completo= 2π rad</td><td colspan="2">90 ou son $\pi/2$ rad
1 radián = 57.216 ou =
57 ou 12’ 58 ’’</td></tr>
<tr><td>Razóns trigonométricas dun ángulo agudo</td><td>$sen\,\alpha = \dfrac{cateto \quad oposto}{hipotenusa} = \dfrac{b}{a}$
$\cos\alpha = \dfrac{cateto \quad adxacente}{hipotenusa} = \dfrac{c}{a}$
$tan\alpha = \dfrac{cateto \quad oposto}{cateto \quad adxacente} = \dfrac{b}{c}$</td><td colspan="2">
$senC = \dfrac{3}{5}$, $cosC = \dfrac{4}{5}$</td></tr>
<tr><td>Relacións fundamentais</td><td>$(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \ \alpha)^2 = 1$
$tan\ \ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \ \alpha}$</td><td colspan="2">$(sen\,30^o)^2 + (cos\,30^o)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} = 1$</td></tr>
<tr><td>Outras razóns trigonométricas</td><td>$cosec\alpha = \dfrac{1}{sen\alpha}$ $sec\alpha = \dfrac{1}{cos\alpha}$ $cotan\alpha = \dfrac{1}{tan\alpha}$</td><td colspan="2">cosec 90º =1
sec 90º non existe
cotan 45º=1</td></tr>
<tr><td>Razóns trigonométricas de 30º,45º e 60º</td><td>
<table>
<tr><th></th><th>seno</th><th>coseno</th><th>tanxente</th></tr>
<tr><td>30º</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{\sqrt{3}}{2}$</td><td>$\frac{\sqrt{3}}{3}$</td></tr>
<tr><td>45º</td><td>$\frac{\sqrt{2}}{2}$</td><td>$\frac{\sqrt{2}}{2}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>60º</td><td>$\frac{\sqrt{3}}{2}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\sqrt{3}$</td></tr>
</table></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Redución ao primeiro cuadrante</td><td rowspan="2">As razóns trigonométricas de calquera ángulo α poden expresarse en función das dun ángulo agudo β.
2º CUADRANTE: $sen\ \alpha = sen\ \beta$ e $\cos\ \alpha = -\cos\ \beta$
3º CUADRANTE: $sen\ \alpha = -sen\ \beta$ e $\cos\ \alpha = -\cos\ \beta$
4º CUADRANTE: $sen\ \alpha = -sen\ \beta$ e $\cos\ \alpha = \cos\ \beta$</td><td></td><td>
$sen\ 135^o = sen\ 45^o$</td></tr>
<tr><td>
$sen\ 200^o = -sen\ 20^o$</td><td>
$cos\ (-60^o) = cos\ 60^o$</td></tr>
<tr><td>Teorema dos senos</td><td>$\dfrac{a}{sen\hat{A}} = \dfrac{b}{sen\hat{B}} = \dfrac{c}{sen\hat{C}}$</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Teorema dos cosenos</td><td>$a^2 = b^2 + c^2 - 2\ bccosA;\ b^2 = a^2 + c^2 - 2\ ac\ cosB;$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2\ ab\ cosC;$</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

CAPÍTULO 9: XEOMETRÍA

ACTIVIDADES PROPOSTAS

1. TEOREMA DE PITÁGORAS E TEOREMA DE TALES

1. É posible atopar un triángulo rectángulo cuxos catetos midan 12 e 16 *cm* e a súa hipotenusa 30 *cm*? Se a túa resposta é negativa, calcula a medida da hipotenusa dun triángulo rectángulo cuxos catetos miden 12 e 16 *cm*.
2. Calcula a lonxitude da hipotenusa dos seguintes triángulos rectángulos de catetos:
   a) 4 *cm* e 3 *cm* b) 1 *m* e 7 *m*
   c) 2 *dm* e 5 dm d) 23.5 *km* e 47.2 *km*.
   Utiliza a calculadora se che resulta necesaria
3. Calcula a lonxitude do cateto que falta nos seguintes triángulos rectángulos de hipotenusa e cateto:
   a) 8 *cm* e 3 *cm* b) 15 *m* e 9 *m* c) 35 *dm* e 10 *dm* d) 21.2 *km* e 11.9 *km*
4. Calcula a área dun triángulo equilátero de lado 5 *m*.
5. Calcula a área dun hexágono regular de lado 7 *cm*.
6. Unha caixa ten forma cúbica de 3 *cm* de aresta. Canto mide a súa diagonal?
7. Calcula a medida da diagonal dunha sala que ten 8 metros de longo, 5 metros de ancho e 3 metros de altura.
8. Nunha foto hai un neno, que sabemos que mide 1.5 *m*, e un edificio. Medimos a altura do neno e do edificio na foto, e resultan ser: 0.2 *cm* e 10 *cm*. Que altura ten o edificio?
9. Debúxase un hexágono regular. Trázanse as súas diagonais e obtense outro hexágono regular. Indica a razón de semellanza entre os lados de ambos os hexágonos.
10. Nun triángulo regular *ABC* dado, 1 *cm*, trazamos os puntos medios, *M* e *N*, de dous dos seus lados. Trazamos as rectas *BN* e *CM* que se cortan nun punto *O*. Son semellantes os triángulos *MON* e *COB*? Cal é a razón de semellanza? Canto mide o lado *MN*?
11. Unha pirámide regular hexagonal de lado da base 3 *cm* e altura 10 *cm*, córtase por un plano a unha distancia de 4 *cm* do vértice, co que se obtén unha nova pirámide. Canto miden as súas dimensións?
12. O diámetro dun pexego é tres veces maior có do seu óso e mide 8 *cm*. Calcula o volume do pexego, supoñendo que é esférico, e o do seu óso, tamén esférico. Cal é a razón de proporcionalidade entre o volume do pexego e o do óso?
13. Na pizzería teñen pizzas de varios prezos: 1 €, 2 € e 3 €. Os diámetros destas pizzas son: 15 *cm*, 20 *cm* e 30 *cm*, cal resulta máis económica? Calcula a relación entre as áreas e compáraa coa relación entre os prezos.
14. Unha maqueta dun depósito cilíndrico de 1 000 litros de capacidade e 5 metros de altura, queremos que teña unha capacidade de 1 litro. Que altura debe ter a maqueta?

2. LONXITUDES, ÁREAS E VOLUMES

15. Calcula o volume dun prisma recto de 20 *dm* de altura cuxa base é un hexágono de 6 *dm* de lado.
16. Calcula a cantidade de auga que hai nun recipiente con forma de cilindro sabendo que a súa base ten 10 *cm* de diámetro e que a auga acada 12 *dm* de altura.
17. Calcula as áreas lateral e total dun prisma hexagonal regular sabendo que as arestas das bases miden 3 *cm* e cada aresta lateral 2 *dm*.
18. A área lateral dun prisma regular de base cadrada é 16 m^2 e ten 10 *m* de altura. Calcula o perímetro da base.
19. O lado da base dunha pirámide triangular regular é de 7 *cm* e a altura da pirámide 15 *cm*. Calcula a apotema da pirámide e a súa área total.
20. Calcula a área lateral dun tronco de pirámide regular, sabendo que as súas bases son dous octógonos regulares de lados 3 e 8 *dm* e que a altura de cada cara lateral é de 9 *dm*.

21. Se a área lateral dunha pirámide cuadrangular regular é 104 cm^2 e a aresta da base mide 4 cm, calcula a apotema da pirámide e a súa altura.
22. Unha columna cilíndrica ten 35 *cm* de diámetro e 5 *m* de altura. Cal é a súa área lateral?
23. O radio da base dun cilindro é de 7 *cm* e a altura é o triplo do diámetro. Calcula a súa área total.
24. Calcula a área lateral dun cono recto sabendo que a súa xeratriz mide 25 *dm* e o seu radio da base 6 *dm*.
25. A circunferencia da base dun cono mide 6.25 *m* e a súa xeratriz 12 *m*. Calcula a área total.

26. Unha esfera ten 4 *m* de radio. Calcula:

a) A lonxitude da circunferencia máxima.
b) A área da esfera.

27. (CDI Madrid 2008) O depósito de gasóleo da casa de Irene é un cilindro de 1 *m* de altura e 2 *m* de diámetro. Irene chamou ao subministrador de gasóleo porque no depósito soamente quedan 140 litros.

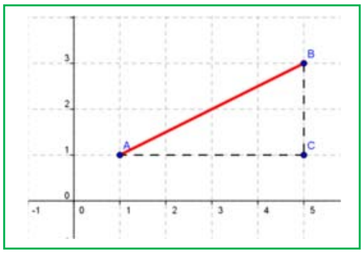
a. Cal é, en dm^3, o volume do depósito? (Utiliza 3.14 como valor de π).
b. Se o prezo do gasóleo é de 0.80 € cada litro, canto deberá pagar a nai de Irene por encher o depósito?

28. Comproba que o volume da esfera de radio 4 *dm*, sumado co volume dun cono do mesmo radio da base e 8 *dm* de altura, coincide co volume dun cilindro que ten 8 *dm* de altura e 4 *dm* de radio da base.

3. INICIACIÓN Á XEOMETRÍA ANALÍTICA

29. Representa nun sistema de referencia no espazo de dimensión tres os puntos:

O(0, 0, 0), *A*(1, 2, 3), *B*(3, 1, 7), *D*(3, 2, 1) y *E*(4, 4, 4) e vectores: *DE* e *OA*.



30. O vector de compoñentes ***u*** = (2, 3) e orixe en A = (1, 1), que extremo ten?
31. Calcula a distancia entre os puntos *A*(6, 2) e *B*(3, 9).
32. Calcula a distancia entre os puntos *A*(6, 2, 5) e *B*(3, 9, 7).
33. Calcula a lonxitude do vector de compoñentes ***u*** = (3, 4)
34. Calcula a lonxitude do vector de compoñentes ***u*** = (3, 4, 1).
35. Debuxa un cadrado de diagonal o punto *O*(0, 0) e *A*(3, 3). Que coordenadas teñen os outros vértices do cadrado? Calcula a lonxitude do lado e da diagonal deste cadrado.
36. Debuxa un cubo de diagonal *O*(0, 0, 0) e *A*(3, 3, 3). Que coordenadas teñen os outros vértices do cubo? Xa sabes, son 8 vértices. Calcula a lonxitude da aresta, da diagonal dunha cara e da diagonal do cubo.
37. Sexa *X*(*x*, *y*) un punto xenérico do plano e *O*(0, 0) a orixe de coordenadas, escribe a expresión de todos os puntos *X* que distan de O unha distancia *D*.
38. Sexa *X*(*x*, *y*, *z*) un punto xenérico do espazo e *O*(0, 0, 0) a orixe de coordenadas, escribe a expresión de todos os puntos *X* que distan de O unha distancia *D*.
39. Escribe a ecuación da recta que pasa polos puntos *A*(6, 2) e *B*(3, 9), de forma explícita, implícita e paramétrica. Represéntaa graficamente.
40. Escribe a ecuación da recta que pasa polos puntos *A*(6, 2, 5) e *B*(3, 9, 7), de forma explícita, e como intersección de dous planos.
41. Escribe as ecuacións dos tres planos coordenados.
42. Escribe as ecuacións dos tres eixes coordenados no espazo.
43. No cubo de diagonal *O*(0, 0, 0) e *A*(6, 6, 6) escribe as ecuacións dos planos que forman as súas caras. Escribe as ecuacións de todas as súas arestas e as coordenadas dos seus vértices..
44. Escribe a ecuación do cilindro de eixe, o eixe *OZ* e radio 2.
45. Escribe a ecuación da esfera de centro a orixe de coordenadas e radio 2.
46. Escribe a ecuación do cilindro de eixe, a recta $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$ e radio 1.
47. Escribe a ecuación da circunferencia no plano de centro *A*(2, 5) e radio 2.
48. Ao cortar a un certo cilindro por un plano horizontal tense a circunferencia do exercicio anterior. Escribe a ecuación do cilindro.

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Teorema de *Pitágoras* e teorema de *Tales*

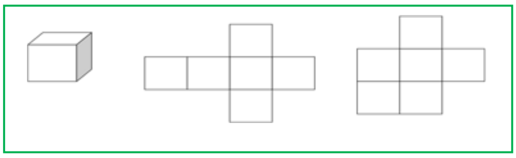
1. Calcula o volume dun tetraedro regular de lado 7 *cm*.
2. Calcula a lonxitude da diagonal dun cadrado de lado 1 *m*.
3. Calcula a lonxitude da diagonal dun rectángulo de base 15 *cm* e altura 6 *cm*.
4. Debuxa un paralelepípedo cuxas arestas midan 4 *cm*, 5 *cm* e 6 *cm* que non sexa un ortoedro. Debuxa tamén o seu desenvolvemento.
5. Se o paralelepípedo anterior fose un ortoedro, canto mediría a súa diagonal?

6. Un vaso de 11 *cm* de altura ten forma de tronco de cono no que os radios das bases son de 5 e 3 *cm*. Canto medirá como mínimo unha culleriña para que sobresaia do vaso polo menos 2 *cm*?
7. É posible gardar nunha caixa con forma de ortoedro de arestas 4 *cm*, 3 *cm* e 12 *cm* un bolígrafo de 13 *cm* de lonxitude?
8. Calcula a diagonal dun prisma recto de base cadrada sabendo que o lado da base mide 6 *cm* e a altura do prisma 8 *cm*.
9. Se un ascensor mide 1.2 *m* de ancho, 1.6 *m* de longo e 2.3 *m* de altura, é posible introducir nel unha escaleira de 3 *m* de altura?
10. Cal é a maior distancia que se pode medir en liña recta nunha habitación que ten 6 *m* de ancho, 8 *m* de longo e 4 *m* de altura?
11. Calcula a lonxitude da aresta dun cubo sabendo que a súa diagonal mide 3.46 *cm*.
12. Calcula a distancia máxima entre dous puntos dun tronco de cono cuxas bases teñen radios 5 *cm* e 2 *cm*, e altura 10 *cm*.
13. Nunha pizzería a pizza de 15 *cm* de diámetro vale 2 € e a de 40 *cm* vale 5 €. Cal ten mellor prezo?
14. Vemos no mercado unha pescada de 30 *cm* que pesa un quilo. Parécenos un pouco pequena e pedimos outra un pouco maior que resulta pesar 2 quilos. Canto medirá?
15. Nun día frío un pai e un fillo pequeno van exactamente igual abrigados, cal dos dous terá máis frío?

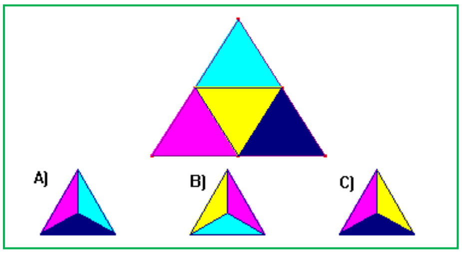
Lonxitudes, áreas e volumes

16. Identifica a que corpo xeométrico pertencen os seguintes desenvolvementos:

17. ¿ Poderá existir un poliedro regular cuxas caras sexan hexagonais? Razoa a resposta.
18. Podes encontrar dúas arestas paralelas nun tetraedro? E en cada un dos restantes poliedros regulares?



19. Utiliza unha trama de cadrados ou papel cuadriculado e busca todos os deseños de seis cadrados que se che ocorran. Decide cales poden servir para construír un cubo.
20. Cantas diagonais podes trazar nun cubo? E nun octaedro?



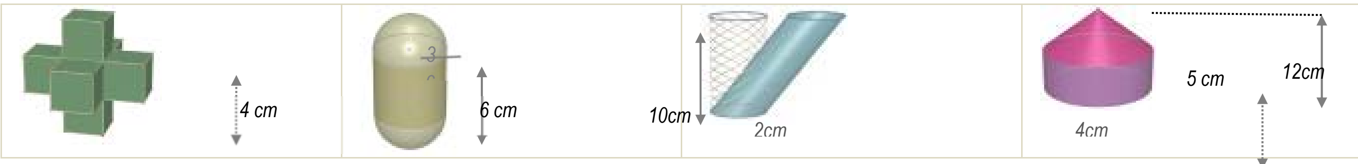
21. O triángulo da figura pregouse para obter un tetraedro. Tendo en conta que o triángulo non está pintado por detrás, cal das seguintes vistas en perspectiva do tetraedro é falsa?
22. Un prisma de 8 *dm* de altura ten como base un triángulo rectángulo de catetos 3 *dm* e 4 *dm*. Calcula as áreas lateral e total do prisma.
23. Debuxa un prisma hexagonal regular que teña 3 *cm* de aresta basal e 0.9 *dm* de altura e calcula as áreas da base e total.
24. Un prisma pentagonal regular de 15 *cm* de altura ten unha base de 30 cm^2 de área. Calcula o seu volume.
25. Calcula a área total dun ortoedro de dimensións 2.7 *dm*, 6.2 *dm* e 80 *cm*.

26. Calcula a superficie total e o volume dun cilindro que ten 7 *m* de altura e 3 *cm* de radio da base.
27. Calcula a área total dunha esfera de 7 *cm* de radio.
28. Calcula a apotema dunha pirámide regular sabendo que a súa área lateral é de 150 cm^2 e a súa base é un hexágono de 4 *cm* dado.
29. Calcula a apotema dunha pirámide hexagonal regular sabendo que o perímetro da base é de 36 *dm* e a altura da pirámide é de 6 *dm*. Calcula tamén a área total e o volume desta pirámide.
30. Un triángulo rectángulo de catetos 12 *cm* e 16 *cm* xira arredor do seu cateto menor xerando un cono. Calcula a área lateral, a área total e o volume.
31. Tres bólas de metal de radios 15 *dm*, 0.4 *m* e 2 *m* fúndense nunha soa, cal será o diámetro da esfera resultante?

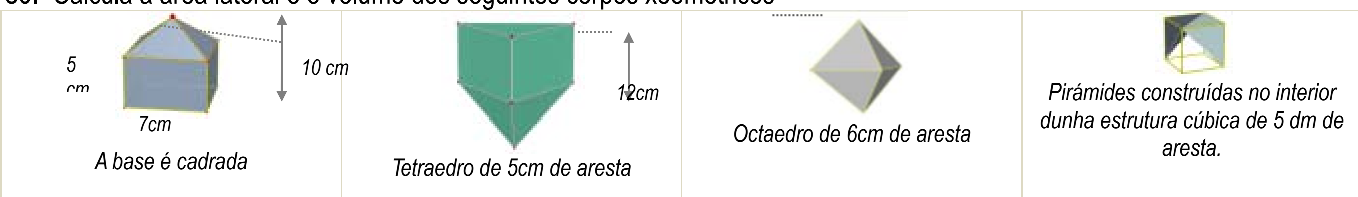
32. Cal é a capacidade dun pozo cilíndrico de 1.50 *m* de diámetro e 30 *m* de profundidade?
33. Canto cartón precisamos para construír unha pirámide cuadrangular regular se queremos que o lado da base mida 12 *cm* e que a súa altura sexa de 15 *cm*?
34. Calcula o volume dun cilindro que ten 2 *cm* de radio da base e a mesma altura que un prisma cuxa base é un cadrado de 4 *cm* de lado e 800 cm^3 de volume.
35. Cal é a área da base dun cilindro de 1.50 *m* de alto e 135 dm^3 de volume?
36. A auga dun manancial condúcese ata uns depósitos cilíndricos que miden 10 *m* de radio da base e 20 *m* de altura. Logo embotéllase en bidóns de 2.5 litros. Cantos envases se enchen con cada depósito?

37. Calcula a cantidade de cartolina necesaria para construír un [anel](#) de 10 tetraedros cada un dos cales ten un centímetro de aresta.
38. Ao facer o desenvolvemento dun prisma triangular regular de 5 *dm* de altura, resultou un rectángulo dun metro de diagonal como superficie lateral. Calcula a área total.
39. Determina a superficie mínima de papel necesaria para envolver un prisma hexagonal regular de 2 *cm* de lado da base e 5 *cm* de altura.

40. O Concello de Madrid colocou unhas xardineiras de pedra nas súas rúas que teñen forma de prisma hexagonal regular. A cavidade interior, onde se deposita a terra, ten 80 *cm* de profundidade e o lado do hexágono interior é de 60 *cm*. Calcula o volume de terra que enchería unha xardineira por completo.
41. Unha habitación ten forma de ortoedro e as súas dimensións son directamente proporcionais aos números 2, 4 e 8. Calcula a área total e o volume se ademais se sabe que a diagonal mide 18.3 *m*.
42. Un ortoedro ten 0.7 *dm* de altura e 8 dm^2 de área total. A súa lonxitude é o dobre da súa anchura, cal é o seu volume?
43. Se o volume dun cilindro de 15 *cm* de altura é de 424 cm^3, calcula o radio da base do cilindro.
44. Instalaron na casa de Xoán un depósito de auga de forma cilíndrica. O diámetro da base mide 2 metros e a altura é de 3 metros. a) Calcula o volume do depósito en m^3. b) Cantos litros de auga caben no depósito?
45. Un envase dun litro de leite ten forma de prisma, a base é un cadrado que ten 10 *cm* de lado. a) Cal é, en cm^3, o volume do envase? b) Calcula a altura do envase en cm.
46. Unha circunferencia de lonxitude 18.84 *cm* xira arredor dun dos seus diámetros xerando unha esfera. Calcula o seu volume.
47. Unha porta mide 1.8 *m* de alto,70 *cm* de ancho e 3 *cm* de espesor. O prezo da instalación é de 100 € e cóbrase 5 € por m^2 en concepto de vernizado, ademais do custe da madeira, que é de 280 € cada m^3. Calcula o custe da porta se só se realiza o vernizado das dúas caras principais.
48. Cal é o volume dunha esfera na que a lonxitude dunha circunferencia máxima é 251.2 *m*?
49. Calcula a área lateral e o volume dos seguintes corpos xeométricos

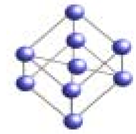


50. Calcula a área lateral e o volume dos seguintes corpos xeométricos

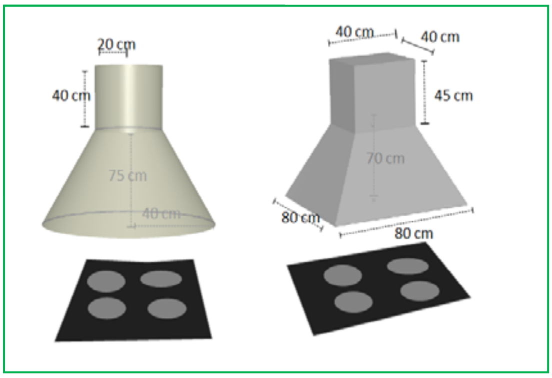


51. A auga contida nun recipiente cónico de 21 *cm* de altura e 15 *cm* de diámetro da base vértese nun vaso cilíndrico de 15 *cm* de diámetro da base. Ata que altura chegará a auga?

52. Segundo Arquímedes, que dimensións ten o cilindro circunscrito a unha esfera de 7*cm* de radio que ten a súa mesma área? Calcula esta área.
53. Na construción dun globo aerostático esférico dun metro de radio emprégase lona que ten un custe de 300 €/m^2. Calcula o importe da lona necesaria para a súa construción.
54. Calcula o radio dunha esfera que ten 33.51 dm^3 de volume.
55. O Atomium é un monumento de Bruxelas que reproduce unha molécula de ferro. Consta de 9 esferas de aceiro de 18 m de diámetro que ocupan os vértices e o centro dunha estrutura cúbica de 103 m de diagonal realizada con cilindros de 2 metros de diámetro. Se utilizamos unha escala 1:100 e tanto as esferas como os cilindros son macizos, que cantidade de material necesitaremos?



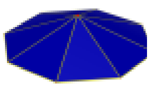
56. Unha piscina mide 20 m de longo, 5 m de ancho e 2 m de alto.
    a. Cantos litros de auga son necesarios para enchela?
    b. Canto custará recubrir o chan e as paredes con PVC se o prezo é de 20 €/ m^2?
57. Pintouse por dentro e por fóra un depósito sen tapa de 8 dm de alto e 3 dm de radio. Tendo en conta que a base só se pode pintar por dentro, e que se utilizou pintura de 2 €/dm^2, canto diñeiro custou en total?



58. Cal das dúas cambotas extractoras da figura esquerda ten un custe de aceiro inoxidable menor?
59. Nunha vasilla cilíndrica de 3 *m* de diámetro e que contén auga introdúcese unha bóla. Cal é o seu volume se despois da inmersión sobe 0.5 *m* o nivel da auga?
60. O prezo das tellas é de 12.6 €/m^2. Canto custará retellar unha vivenda cuxo tellado ten forma de pirámide cuadrangular regular de 1.5 *m* de altura e 15 m de lado da base?
61. Enrolase unha cartolina rectangular de lados 40 *cm* e 26 *cm* formando cilindros das dúas formas posibles, facendo coincidir lados opostos. Cal dos dous cilindros resultantes ten maior volume?
62. Cada un dos cubos da figura ten 2 *cm* de aresta. Cantos hai que engadir para formar un cubo de 216 cm^3 de volume?

63. Un tubo de ensaio ten forma de cilindro aberto na parte superior e rematado por unha semiesfera na inferior. Se o radio da base é de 1 *cm* e a altura total é de 12 *cm*, calcula cantos centilitros de líquido caben nel.
64. O lado da base da pirámide de Keops mide 230 *m*, e a súa altura 146 *m*. Que volume encerra?
65. A densidade dun tapón de cortiza é de 0,24 g/cm^3, canto pesan mil tapóns se os diámetros das súas bases miden 2.5 *cm* e 1.2 *cm*, e a súa altura 3 *cm*?
66. Comproba que o volume dunha esfera é igual ao do seu cilindro circunscrito menos o do cono de igual base e altura.
67. Calcula o volume dun octaedro regular de aresta 2 *cm*.
68. Constrúe en cartolina un prisma cuadrangular regular de volume 240 cm^3, e de área lateral 240 cm^2.
69. O cristal dun farol ten forma de tronco de cono de 40 *cm* de altura e bases de radios 20 e 10 *cm*. Calcula a súa superficie.

70. Un bote cilíndrico de 15 *cm* de radio e 30 *cm* de altura ten no seu interior catro pelotas de radio 3.5 *cm*. Calcula o espazo libre que hai no seu interior.
71. Un funil cónico de 15 *cm* de diámetro ten un litro de capacidade, cal é a súa altura



72. Nun depósito con forma de cilindro de 30 *dm* de radio, unha billa verte 15 litros de auga cada minuto. Canto aumentará a altura da auga despois de media hora?
73. A lona dun parasol aberto ten forma de pirámide octogonal regular de 0.5 *m* de altura e 40 *cm* de lado da base. Fíxase un mastro no chan no que se encaixa e o vértice da pirámide queda a unha distancia do chan de 1.80 *m*. No momento no que os raios de sol son verticais, que área ten o espazo de sombra que determina?
74. Unha peixeira con forma de prisma recto e base rectangular énchese con 65 litros de auga. Se ten 65 *cm* de longo e 20 *cm* de ancho, cal é a súa profundidade?
75. Nun xeado de cornete, a galleta ten 12 *cm* de altura e 4 *cm* diámetro. Cal é a súa superficie? Se o cornete está completamente cheo de xeado e sobresae unha semiesfera perfecta, cantos cm^3 de xeado contén?

Iniciación á Xeometría Analítica

76. Calcula a distancia entre os puntos $A(7, 3)$ e $B(2, 5)$.
77. Calcula a distancia entre os puntos $A(7, 3, 4)$ e $B(2, 5, 8)$.
78. Calcula a lonxitude do vector de compoñentes $u = (4, 5)$.
79. Calcula a lonxitude do vector de compoñentes $u = (4, 5, 0)$.

80. O vector $u = (4, 5)$ ten a orixe no punto $A(3, 7)$. Cales son as coordenadas do seu punto extremo?
81. O vector $u = (4, 5, 2)$ ten a orixe no punto $A(3, 7, 5)$. Cales son as coordenadas do seu punto extremo?
82. Debuxa un cadrado de diagonal o punto $A(2, 3)$ e $C(5, 6)$. Que coordenadas teñen os outros vértices do cadrado? Calcula a lonxitude do lado e da diagonal do cadrado.
83. Debuxa un cubo de diagonal $A(1, 1, 1)$ e $B(4, 4, 4)$. Que coordenadas teñen os outros vértices do cubo? Xa sabes, son 8 vértices. Calcula a lonxitude da aresta, da diagonal dunha cara e da diagonal do cubo.
84. Sexa $X(x, y)$ un punto do plano e $A(2, 4)$, escribe a expresión de todos os puntos X que distan de A unha distancia 3.
85. Sexa $X(x, y, z)$ un punto do espazo e $A(2, 4, 3)$, escribe a expresión de todos os puntos X que distan de A unha distancia 3.
86. Escribe a ecuación paramétrica da recta que pasa polo punto $A(2, 7)$ e ten como vector de dirección $u = (4, 5)$. Represéntaa graficamente.
87. Escribe a ecuación da recta que pasa polos puntos $A(2, 7)$ e $B(4, 6)$, de forma explícita, implícita e paramétrica. Represéntaa graficamente.
88. Escribe a ecuación da recta que pasa polos puntos $A(2, 4, 6)$ e $B(5, 2, 8)$, de forma explícita, e como intersección de dous planos.
89. No cubo de diagonal $A(1, 1, 1)$ e $B(5, 5, 5)$ escribe as ecuacións dos planos que forman as súas caras. Escribe tamén as ecuacións de todas as súas arestas e as coordenadas dos seus vértices.
90. Escribe a ecuación do cilindro de eixe $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ e radio 3.
91. Escribe a ecuación da esfera de centro $A(2, 7, 3)$ e radio 4.
92. Escribe a ecuación do cilindro de eixe, a recta $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$ e radio 2.
93. Escribe a ecuación da circunferencia no plano de centro $A(3, 7)$ e radio 3.
94. Ao cortar un certo cilindro por un plano horizontal tense a circunferencia do exercicio anterior. Escribe a ecuación do cilindro.

AUTOAVALIACIÓN

1. As lonxitudes dos lados do triángulo de vértices $A(2, 2)$ $B(1, 4)$ e $C(0, 3)$ son:
a) 2, 5, 5 b) $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ d) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$

2. No triángulo rectángulo de catetos 3 e 4 *cm* multiplícanse por 10 todas as súas lonxitudes. A área do novo triángulo é:
a) 6 m^2 b) 6 dm^2 c) 60 cm^2 d) 0,6 m^2

3. A altura dun prisma de base cadrada é 20 *cm* e o lado da base é 5 *cm*, a súa área total é:
a) 450 cm^2 b) 45 dm^2 c) 425 cm^2 d) 0.45 m^2

4. Un depósito de auga ten forma de prisma hexagonal regular de 5 *m* de altura e lado da base 1 *m*. O volume de auga que hai neles:
a) $60\sqrt{2}$ m³ b) $45\sqrt{2}$ m³ c) $30\,000\sqrt{2}$ dm³ d) $7.5\sqrt{3}$ m³

5. O tellado dunha caseta ten forma de pirámide cuadrangular regular de 0.5 *m* de altura e 1000 *cm* de lado da base. Se se precisan 15 tellas por metro cadrado para recubrir o tellado, utilízanse un total de:
a) 1 508 tellas. b) 150 tellas. c) 245 tellas. d) 105 tellas.

6. Unha caixa de dimensións 30, 20 e 15 *cm*, está chea de cubos de 1 *cm* de aresta. Se se utilizan todos para construír un prisma recto de base cadrada de 10 *cm* de lado, a altura medirá:
a) 55 *cm* b) 65 *cm* c) 75 *cm* d) 90 *cm*

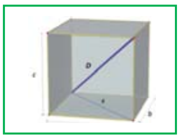
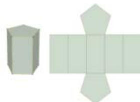
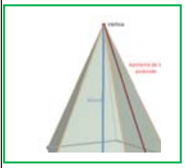
7. O radio dunha esfera que ten o mesmo volume que un cono de 5 *dm* de radio da base e 120 *cm* de altura é:
a) $5\sqrt{3}dm$ b) $\sqrt[3]{75}\ dm$ c) 150 *cm* d) $\sqrt[3]{2\,250}\ cm$

8. Distribúense 42.39 litros de disolvente en latas cilíndricas de 15 *cm* de altura e 3 *cm* de radio da base. O número de envases necesario é:
a) 100 b) 10 c) 42 d) 45

9. A ecuación dunha recta no plano que pasa polos puntos $A(2, 5)$ e $B(1, 3)$ é:
a) $y = -2x + 1$ b) $3y - 2x = 1$ c) $y = 2x + 1$ d) $y = -2x + 9$.

10. A ecuación da esfera de centro A(2, 3, 5) e radio 3 é:
a) $x^2 - 2x + y^2 - 3y + z^2 - 5z + 29 = 0$ b) $x^2 - 4x + 3y^2 - 6y + 5z^2 - 10z + 29 = 0$
c) $x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 - 10z + 38 = 0$ d) $x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 - 10z + 29 = 0$.
c) $x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 - 10z + 38 = 0$ d) $x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 - 10z + 29 = 0$

RESUMO

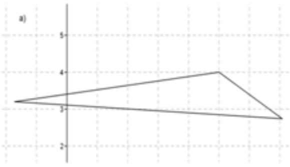
Noción	Definición	*Exemplos*
Teorema de Pitágoras no espazo	$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$ 	$A = 2$, $b = 3$, $c = 4$, entón $D^2 = 4 + 9 + 16 = 29$ $D = \sqrt{29} = 5.4$.
Teorema de Tales:	Dadas dúas rectas, *r* e *r'*, que se cortan no punto *O*, e dúas rectas paralelas entre si, *a* e *b*. Se a recta *a* corta ás rectas *r* e *r'* nos puntos *A* e *C*, e a recta *b* corta ás rectas *r* e *r'* nos puntos *B* e *D*, entón os segmentos correspondentes son proporcionais.	
Poliedros regulares	Un poliedro regular é un poliedro no que todas as súas caras son polígonos regulares iguais e no que os seus ángulos poliedros son iguais. Hai cinco poliedros regulares: tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo e dodecaedro.	
Prismas	 $A_{Lateral} = Perímetro_{Base} \cdot Altura$; $A_{total} = Área_{Lateral} + 2Área_{Base}$; $Volume = Área_{base} \cdot Altura$	
Pirámides	 $A_{Lateral} = \frac{Perímetro_{Base} \cdot Apotema_{pirámide}}{2}$ $A_{total} = Área_{Lateral} + Área_{Base}$ $Volume = \frac{Área_{base} \cdot Altura}{3}$	
Cilindro	 $A_{Lateral} = 2\pi RH$; $A_{total} = 2\pi RH + 2\pi R^2$ $Volume = Área_{base} \cdot Altura$	
Cono	$A_{Lateral} = \pi RG$; $A_{total} = \pi RG + \pi R^2$ $Volume = \frac{Área_{base} \cdot Altura}{3}$	
Esfera	$A_{total} = 4\pi R^2$; $Volume = \frac{4}{3}\pi R^3$	
Ecuacións da recta no plano	**Ecuación explícita:** $y = mx + n$. **Ecuación implícita:** $ax + by + c = 0$ **Ecuación paramétrica:** $\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \end{cases}$	
Ecuacións da recta e do plano no espazo.	**Ecuación implícita dun plano**: $ax + by + cz + d = 0$ **Ecuación paramétrica dunha recta:** $\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \\ z = a_3 + tv_3 \end{cases}$	

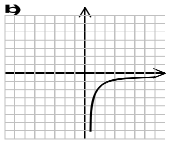
CAPÍTULO 10: FUNCIÓNS E GRÁFICAS

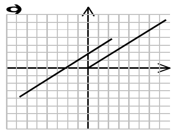
ACTIVIDADES PROPOSTAS

1. FUNCIÓNS REAIS

1. Das seguintes gráficas indica cales corresponden a funcións.







2. Un ciclista bebe 1/2 litro de auga cada 10 km de percorrido. Se no coche de equipo levan un bidón de 40 litros, fai unha táboa que indique a súa variación e escribe a función que a representa.

3. Un ciclista participa nunha carreira percorrendo 3 km cada minuto. Tendo en conta que non partiu da orixe senón 2 km por detrás representa nunha táboa o percorrido durante os tres primeiros minutos. Escribe a función que expresa os quilómetros en función do tempo en minutos e debúxaa.

4. Representa as seguintes funcións por pedazos. Indícanse os puntos que tes que calcular.

a. $f(x)=\begin{cases} x-1, & si\ \ x<-3 \\ -x+1, & si\ \ -3\le x<0 \\ 3, & si\ \ 0\le x<\infty \end{cases}$ Puntos: –5, –3.1, –3, –1, –0.1, 0, 1.

b. $g(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & si\ \ x<-2 \\ 3, & si\ \ -2\le x<1 \\ \sqrt{x}, & si\ \ 1\le x \end{cases}$ Puntos: –3, –2.1, –2, 0, 0.9, 1, 4, 9.

5. Indica o dominio das seguintes funcións:

a) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ **b)** $y=\sqrt{x+\frac{1}{x+2}}$

6. Indica o dominio e o percorrido das seguintes funcións:

a) $y = 14x + 2$ **b)** $y=\frac{1}{x-1}$ **c)** $y=\sqrt{2+x}$

7. Representa as seguintes funcións e indica o seu dominio e percorrido:

a) $f\,(x)=\begin{cases} \text{x, si } x\in[-3,0) \\ \text{2, si } x\in[0,2] \end{cases}$ **b)** $g(x)=\begin{cases} -\text{x, si } x\in[-2,1] \\ \text{x, si } x\in(1,2] \end{cases}$

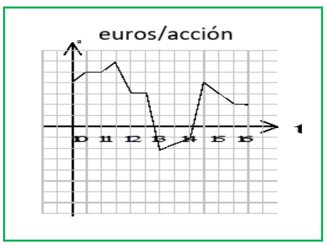
2. CARACTERÍSTICAS DUNHA FUNCIÓN

8. Indica o dominio e percorrido das seguintes funcións e debúxaas:

a. $y=\frac{1}{2x+6}$ b. $y=x+\frac{1}{3x-6}$ c. $y=x^3-3x$

9. Debuxa as seguintes funcións e indica os seus intervalos de crecemento e decrecemento.

a) $y = x^3$ b) $y = x^5$ c) $y=\frac{1}{x^2}$



10. A gráfica que se dá a continuación indica a evolución dun valor da bolsa (no eixe vertical en miles de euros por acción) durante unha xornada. Estuda o seu dominio, percorrido, puntos de corte, simetría, periodicidade, crecemento, continuidade, máximos e mínimos.

11. Estuda a seguinte gráfica, indicando: dominio, percorrido, puntos de corte cos eixes, simetría, periodicidade, crecemento, continuidade, máximos e mínimos.

12. A gráfica que se dá a continuación representa o volume de combustible no depósito dunha gasolineira ao ao cabo dun día. Estuda o seu dominio, percorrido, puntos de corte, simetría, periodicidade, crecemento, continuidade, máximos e mínimos.

13. Representa a función $y = 10 + \frac{1}{2}9.8x^2$ que poñiamos como exemplo e interpreta o seu sentido físico.

14. Representa graficamente as seguintes funcións:

a) $y = x^2 + 2$ b. $y = 2 - x^2$ c. $y = 2x^2$ d. $y = -2x^2$

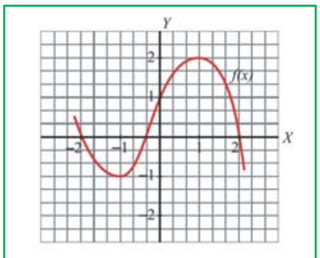
15. Representa graficamente as seguintes funcións:

a) $y = \frac{1}{x} + 5$ b. $y = \frac{5}{x}$ c. $y = \frac{1}{x} - 2$ d. $y = \frac{2}{x} + 3$

16. Representa a función $f(x) = 4 - x^2$ e, a partir dela, debuxa as gráficas das funcións:

a. $y = f(x) - 3$ b. $y = f(x) + 3$ c. $y = f(x - 3)$ d. $y = f(x + 3)$

3. VALORES ASOCIADOS ÁS FUNCIÓNS



17. Dada a función $f(x) = (x-1)^3$, calcula a taxa de variación media no intervalo [0, 1]. É crecente ou decrecente a función nese intervalo?

18. Dada a función $f(x) = \frac{3}{x}$, calcula a taxa de variación media no intervalo [–3, –1]. É crecente ou decrecente a función nese intervalo?

19. Calcula a TVM desta función $f(x)$ nos seguintes intervalos: a) [–1, 0] e b) [1, 2].

20. Consideremos a función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2}$. Calcula a taxa de variación media no intervalo [0, 2] e indica se é crecente ou decrecente nese intervalo.

21. Calcula a taxa de variación media da función $f(x) = 2x^2 - 3x$ no intervalo [1, 2] e indica se $f(x)$ crece o decrece nese intervalo.

22. Dada a función $f(x) = (x+1)^3$, calcula a taxa de crecemento no intervalo [0, 1].

23. A función $f(x) = 1\,000 \cdot (1.03)^x$ representa o resultado de ingresar 1 000 € no banco (x = 0 é o estado inicial e, naturalmente, vale 1 000 €). Calcula a súa taxa de crecemento entre 0 e 1, entre 1 e 2 e entre 2 e 3. Que relación hai entre elas? Podes dar unha explicación de por que?

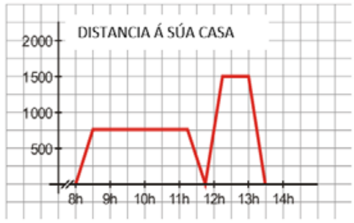
24. A seguinte táboa representa a poboación mundial (estimada) en millóns de persoas. Calcula a taxa de crecemento para cada intervalo de 5 anos. Que observas?

Ano	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
Poboación	3 692	4 068	4 435	4 831	5 264	5 674	6 071	6 456	6 916

25. Poderías dar un exemplo dunha función cuxa taxa de crecemento sexa constantemente 2?

EXERCICIOS E PROBLEMAS

1. Paulo saíu da súa casa ás 8 da mañá para ir ao instituto. No recreo, tivo que volver á casa para ir co seu pai ao médico. A seguinte gráfica reflicte a situación. As distancias veñen dadas en metros, (non en km).



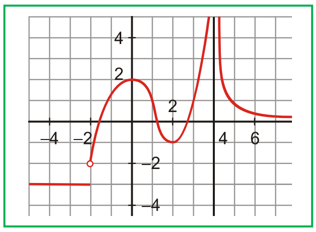
   a. A que hora comezan as clases e a que hora empeza o recreo?
   b. A que distancia da súa casa está o instituto? Que velocidade leva cando vai a clase?
   c. A que distancia da súa casa está o consultorio médico? Que velocidade levan cando se dirixen alí?
   d. Canto tempo estivo na clase? E no consultorio médico?

2. Dada a función a través da seguinte gráfica:

   a) Indica cal é o seu dominio de definición.

   b) É continua? Se non o é, indica os puntos de descontinuidade.

   c) Cales son os intervalos de crecemento e cales os de decrecemento da función? Que ocorre no intervalo (–∞, –2]?



3. Debuxa as gráficas destas hipérboles e determina os seus dominios, calcula a súas asíntotas e os puntos de corte cos eixes de coordenadas:

   a. $y = \frac{2x}{x-2}$ b. $y = \frac{2x-3}{x-2}$ c. $y = \frac{4x}{2x+1}$

4. Debuxa a gráfica de $f(x) = \begin{cases} 1-x & si \quad x \le 1 \\ x^2 - 4x & si \quad 1 < x \end{cases}$ e explica se é continua en $x = 1$.

5. Tres quilos de peras custáronnos 4.5 €; e, por sete quilos, teriamos pagado 10.5 €. Encontra a ecuación da recta que nos dá o prezo total, "y", en función dos quilos que compremos, "x". Represéntaa graficamente.

6. Describe as seguintes funcións cuadráticas e fai un bosquexo da súa gráfica:

   a. $y = 4x^2 + 8x - 5$ b. $y = x^2 + 3x - 4$ c. $y = 8 - 2x - x^2$

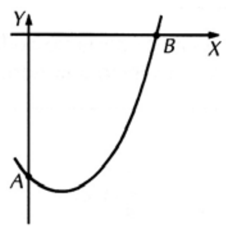
7. Calcula os puntos de corte cos eixes e o vértice das seguintes parábolas e utiliza estes datos para representalas graficamente

   a. $y = x^2 + 5x + 6$ b. $y = -x^2 + 4x + 5$

8. A altura sobre o chan dun proxectil lanzado desde o alto dunha muralla vén dada, en función do tempo, por $h(t) = -5t^2 + 15t + 20$, onde *t* se expresa en segundos, e *h*, en metros. Debuxa a gráfica desta función e calcula:

   a. A altura da muralla.
   b. A altura máxima acadada polo proxectil e o tempo que tarda en acadala.
   c. O tempo que tarda en impactar contra o chan.

9. A gráfica amosa o debuxo aproximado da curva $y = x^2 - 2x - 8$. Calcula:



   a. As coordenadas dos puntos A e B.
   b. A ecuación dunha recta que pase polos puntos A e B.

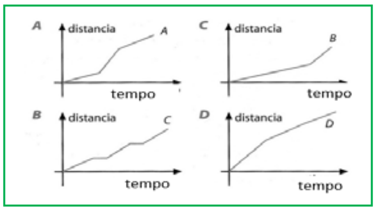
10. Representa as seguintes funcións:

   a. $y = 3/x$ b. $y = 4/x - 5$ c. $y = \sqrt{x+4}$

   d. $y = \sqrt{x-2}$ e. $y = \begin{cases} x+3 & si & x < -1 \\ 2 & si & -1 \le x < 4 \\ x^2 - 10 & si & 4 \le x \end{cases}$

11. O custe diario de fabricación, en euros, de *x* artigos exprésase coa igualdade $C = 40x + 250$, e o ingreso diario da súa venda, mediante $V = -2x^2 + 100x$. Que cantidade de artigos se deben fabricar ao día para que a súa venda reporte un beneficio máximo? *Nota*: o beneficio é a diferenza entre o ingreso e o custe.

12. A base e a altura dun triángulo suman 4 centímetros. Que lonxitude deben ter ambas as dúas para que a área do triángulo sexa máxima.?



13. Asigna as gráficas ao percorrido efectuado polos seguintes estudantes no seu camiño diario ao Instituto:
    a) Emilio é o que vive máis lonxe do Instituto.
    b) Ana debe recoller a dúas amigas polo camiño e sempre lle toca esperar.
    c) Filipe é o que menos tempo tarda.
    d) Isabel é durmiñona; sempre lle toca correr no último tramo, aínda que é a que vive máis preto do Instituto.

14. Un rectángulo ten un perímetro de 14 cm. Supoñendo que a base do mesmo ten unha lonxitude de *x* cm,
    a) Probar que a área do mesmo *A* está dada pola función $A(x) = x(7 - x)$.
    b) Debuxa a gráfica correspondente a esta función, tomando para iso valores de *x* de 0 a 7. Utilizando a gráfica, calcula os seguintes apartados.
    c) A área do rectángulo cando $x = 2.25\ cm$.
    d) As dimensións do rectángulo cando a súa área é 9 cm^2.
    e) A área máxima do rectángulo.
    f) As dimensións do rectángulo correspondentes a esa área máxima.

15. A velocidade *v* en m/s dun mísil *t* segundos despois do seu lanzamento vén dada pola ecuación $v = 54t - 2t^3$. Utilizando a gráfica desta función, calcula:
    a. A máxima velocidade que acada o mísil.
    b. O tempo que necesita para acelerar ata conseguir unha velocidade de 52 m/s.
    c. O intervalo (aproximado, resolve graficamente) de tempo no cal o mísil voa a máis de 100 m/s.

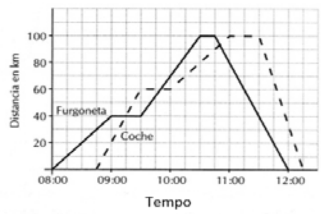
16. O prezo da viaxe de fin de curso dun grupo de alumnos é de 200 euros por persoa se van 30 alumnos ou menos. En cambio, se viaxan máis de 30 e menos de 40, rebaixan un 5 % por cada alumno que exceda o número de 30, e se viaxan 40 ou máis, o prezo por persoa é de 100 euros. Calcula a expresión e debuxa a gráfica da función que fai corresponder ao número de viaxeiros o prezo da viaxe.

17. Calcula o dominio das seguintes funcións:

    a. $y = \frac{5x-3}{4x-1}$ c. $y = \sqrt{3x+6}$ e. $y = \frac{4x^2-3x}{1+5x-6x^2}$

    b. $y = 2x^4 - 3x^2 + 1$ d. $y = 2 - \frac{3}{x^2-3x}$ f. $y = \sqrt[3]{x^2+2x}$

18. A seguinte gráfica amosa as viaxes feitas por unha furgoneta e un coche saíndo desde Teruel cara á poboación de Alcañiz, ida e volta.
    a) Canto tempo se detivo a furgoneta durante o traxecto?
    b) A que hora adiantou o coche á furgoneta?
    c) Que velocidade levaba a furgoneta entre as 9:30 e as 10:00?
    d) Cal foi a maior velocidade acadada polo coche durante a viaxe?
    e) Cal foi a velocidade media do coche na viaxe completa?



19. Representa graficamente a seguinte función: $f(x) = \begin{cases} x + 4 & si\, x < -2 \\ -\frac{1}{2}x^2 si - 2 \leq x \end{cases}$. Unha vez representada estuda as zonas de crecemento-decrecemento, os extremos (máximos-mínimos) e a súa continuidade.

20. Representa graficamente unha función, *f*, que cumpra as seguintes condicións:
    a. Dom (*f*) = [–5, 6]
    b. Crece nos intervalos (–5, –3) e (0, 6); decrece no intervalo (–3, 0).
    c. É continua no seu dominio.
    d. Corta ao eixe X nos puntos (–5, 0), (–1, 0) e (4, 0).
    e. Ten un mínimo en (0, –2) e máximos en (–3, 3) e (6, 3).

21. Constrúe unha gráfica que represente a audiencia dunha determinada cadea de televisión durante un día, sabendo que:

a. Ás 0 horas había, aproximadamente, 0.5 millóns de espectadores.
b. Este número se mantivo practicamente igual ata as 6 da mañá.
c. Ás 7 da mañá acadou a cifra de 1.5 millóns de espectadores.
d. A audiencia descendeu de novo ata que, ás 13 horas, había 1 millón de espectadores.
e. Foi aumentando ata as 21 horas, momento no que acadou o máximo: 6.5 millóns de espectadores.
A partir dese momento, a audiencia foi descendendo ata as 0 horas, que volve haber, aproximadamente, 0.5 millóns de espectadores

AUTOAVALIACIÓN

1. Indica cal das seguintes expresións alxébricas é unha función real:

a) $x^2 + y^2 = 1$ b) $y = -2x^5 + x^4 - x^3 + 5x - 1$ c) $y = 5 \cdot \sqrt{2} \cdot x \cdot y^2 \cdot z$ d) $y^2 = x + 1$

2. Estamos confeccionando unha táboa de valores da función $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Indica que punto (ou puntos) non debería estar na táboa:

a) (0, 1) b) (1/2, 2) c) (2, 1/5) d) (1, 0)

3. O dominio da función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ é:

a) a recta real b) $\{x \in \Re \mid x < 1\}$ c) $\{x \in \Re \mid x \geq 1\}$ d) $\{x \in \Re \mid x \geq 0\}$

4. Indica que tipo de descontinuidade ou continuidade presenta a función $f(x) = \begin{cases} -x, & si \ x \in [-2,1] \\ x, & si \ x \in (1,2] \end{cases}$ no punto $x = 1$:

a) é continua b) Ten unha descontinuidade evitable

c) Ten un salto finito de tamaño 2 d) Ten un salto infinito

5. Sinala a función que ten simetría par:

a) $y = x$ b) $y = x^2 + 3$ c) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ d) $f(x) = \begin{cases} -x, & si \ x \in [-2,1] \\ x, & si \ x \in (1,2] \end{cases}$

6. Sinala a función que ten como asíntota horizontal á recta e = 0:

a) $y = x$ b) $y = x^2 + 3$ c) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ d) $f(x) = \begin{cases} -x, & si \ x \in [-2,1] \\ x, & si \ x \in (1,2] \end{cases}$

7. A taxa de variación da función $f(x) = \begin{cases} -x, & si \ x \in [-2,1] \\ x, & si \ x \in (1,2] \end{cases}$ entre –1 e 2 é igual a:

a) TV[–1, 2] = 1 b) TV[–1, 2] = 2 c) TV[–1, 2] = 3 d) TV[–1, 2] = 0

8. A taxa de variación media da función $f(x) = \begin{cases} -x, & si \ x \in [-2,1] \\ x, & si \ x \in (1,2] \end{cases}$ entre –1 e 2 é igual a:

a) TV[–1, 2] = 1/3 b) TV[–1, 2] = 2/3 c) TV[–1, 2] = 1 d) TV[–1, 2] = 3

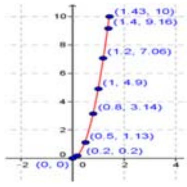
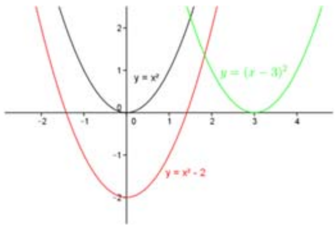
9. A taxa de crecemento da función $f(x) = \begin{cases} -x, & si \ x \in [-2,1] \\ x, & si \ x \in (1,2] \end{cases}$ entre –1 e 2 é igual a:

a) T_{crec} [–1, 2] = 3 b) T_{crec} [–1, 2] = 2 c) T_{crec} [–1, 2] =0 d) T_{crec} [–1, 2] = 1

10. A función $y = x^2 + 3$ ten un mínimo absoluto no punto:

a) (1, 4) b)(0, 0) c) (0, 3) d) (3, 0)

RESUMO

<table>
<tr><th>Noción</th><th>Definición</th><th>Exemplos</th></tr>
<tr><td>Función</td><td>Unha relación ou correspondencia entre dúas magnitudes, tales que a cada valor da variable independente, x, lle corresponde un só valor da dependente, y.</td><td>$y = 2x + 3$, $y = \frac{1}{x^2+1}$</td></tr>
<tr><td>Gráfica dunha función</td><td>Son os (normalmente infinitos) puntos polos que pasa. É dicir, todos os valores $(x,\ f(x))$ posto que e = f(x).</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Maneiras de describir unha función</td><td>- Dando unha táboa de valores. Como na columna do lado.
- Dando unha expresión. $y = 2^x$
- Por pedazos: Varias expresións. $y = \begin{cases} x+1, x > 2 \\ x,\ x \le 2 \end{cases}$</td><td><table><tr><th>X</th><th>Y</th></tr><tr><td>−3</td><td>2</td></tr><tr><td>−2</td><td>0</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Dominio e percorrido</td><td>- Dominio. Son os valores de “x” onde a función teña sentido.
- Percorrido. Son os valores de “y” que se acadan.</td><td>O dominio da función $\sqrt{2-x}$ é $(-\infty, 2)$ e o seu percorrido $[0, +\infty)$.</td></tr>
<tr><td>Características dunha función</td><td>Debemos estudar a súa continuidade, crecemento, máximos e mínimos, curvatura, simetrías e comportamento no infinito.</td><td>$y = x^2 + 2$ é continua, crecente en $(-\infty, 0)$, decrecente en $(0, \infty)$, ten un mínimo absoluto en 0 e é sempre convexa.</td></tr>
<tr><td>Translacións</td><td>- Vertical. y = f(x) + K. En sentido de K: se K é positivo cara arriba, se non cara abaixo.
- Horizontal. y = f(x + K). En sentido contrario de K: se K é positivo cara á esquerda, se non cara á dereita.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Valores asociados</td><td>- Taxa de variación (TV): $f(b) - f(a)$
- Taxa de variación media (TVM):
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
- Taxa de crecemento TT_{crec}: $\frac{f(b)-f(a)}{f(a)}$</td><td>$y = x + 2$
$TV\,[3,5] = 2$
$TVM[3,5] = \frac{2}{5-3} = 1$
$T_{crec}[3,5] = \frac{2}{5} = 40\,\%$</td></tr>
</table>

CAPÍTULO 11: FUNCIÓNS POLINÓMICAS, DEFINIDAS POR PEDAZOS E DE PROPORCIONALIDADE INVERSA

ACTIVIDADES PROPOSTAS

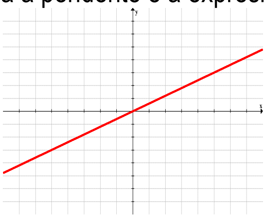
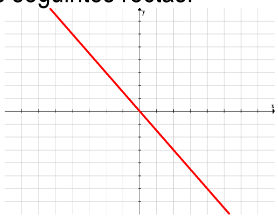
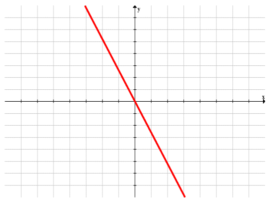
1. FUNCIÓNS POLINÓMICAS DE PRIMEIRO GRAO

1. O consumo medio de auga ao día por habitante (en 2011) é de 142 litros. Representa graficamente o consumo dunha persoa nunha semana.

2. A auga virtual é a auga necesaria para crear un produto. Representa graficamente as seguintes relacións:
   a. 71 litros para producir unha mazá.
   b. 10.850 litros para producir uns vaqueiros.
   c. litros para producir unha camisola.

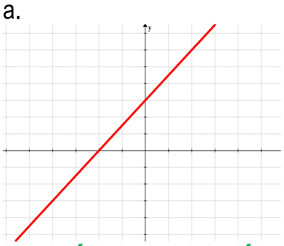
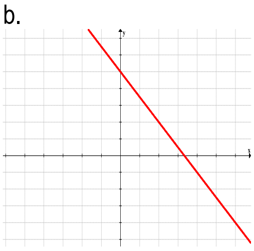
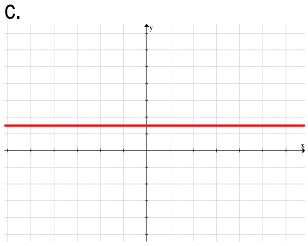
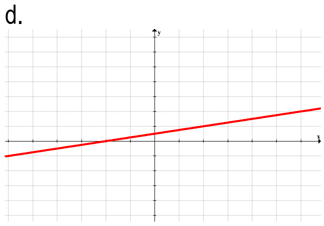
3. Calcula o dominio, máximos e mínimos e a simetría das seguintes rectas:
   a. $y = 4 \cdot x$ b. $y = \frac{x}{3}$ c. $y = 2.65 \cdot x$

4. Calcula a pendente e a expresión alxébrica das seguintes rectas:

a. 
b. 
c. 

5. Representa as seguintes funcións lineais:
   a. $y = 3 \cdot x + 4$ b. $y = -\frac{3}{7} \cdot x - 2$ c. $2x + \cdot 4y = 5$
   d. $y = 5$ e. $y = 0$ f. $x = 3$

6. Calcula a expresión das seguintes rectas:

a. 
b. 
c. 
d. 

2. FUNCIÓNS POLINÓMICAS DE SEGUNDO GRAO

7. A partir da parábola $y = x^2$, debuxa a gráfica das seguintes parábolas:
   a. $y = \frac{5}{3}x^2$ b. $y = -3x^2$ c. $y = -\frac{15}{3}x^2$
   d. $y = 4.12x^2$ e. $y = -\frac{6}{10}x^2$ f. $y = \frac{7}{8}x^2$

8. Representa a gráfica das seguintes parábolas e localiza o vértice:
   a. $y = (x+4)^2 - 5$ b. $y = -(x - \frac{4}{5})^2 + 6$ c. $y = x^2 - 5$
   d. $y = x^2 - 6x + 16$ e. $y = x^2 + 4x + \frac{5}{2}$ f. $y = -x^2 + 12x - 26$
   g. $y = x^2 - 10x + 17$ h. $y = -x^2 + 2x - 4$ i. $y = -x^2 + \frac{4}{3}x - 1$

9. Calcula os elementos característicos e representa as seguintes parábolas:
   a. $y = 2x^2 + 4x - 6$ b. $y = 6x^2 - 24x$ c. $y = -2x^2 + 4x - 2$
   d. $y = 2x^2 + 5x - 12$ e. $y = 3x^2 + 6x - 9$ f. $y = -2x^2 + 7x + 3$
   g. $y = 7x^2 + 21x - 28$ h. $y = 5x^2 - 9x + 4$ i. $y = -4x^2 - 4x - 1$

3. FUNCIÓNS DE PROPORCIONALIDADE INVERSA

10. Representa as seguintes funcións de proporcionalidade inversa no mesmo sistema de coordenadas:

a. $y=\frac{-1}{x}$ b. $y=\frac{5}{x}$ c. $y=\frac{1}{2x}$

d. $y=\frac{3}{8x}$ e. $y=\frac{-5}{3x}$ f. $y=\frac{-12}{5x}$

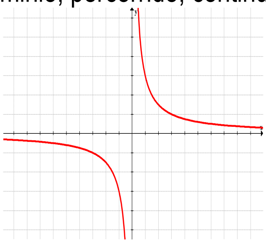
11. Describe o que sucede cando varía o valor de k. Axúdate das gráficas do exercicio anterior.

12. Calcula a expresión analítica e representa a gráfica das hipérboles que pasan por cada un destes puntos. Escribe os intervalos onde a función é crecente ou decrecente.

a. $(4,2)$ b. $(3,-1)$ c. $(1/3,5)$

d. $(12,3)$ e. $(a,1)$ f. $(1,b)$

13. Calcula o dominio, percorrido, continuidade, máximos e mínimos e o crecemento das seguintes hipérboles:


a)


b)

14. Calcula o dominio, percorrido, continuidade, máximos e mínimos e o crecemento das seguintes hipérboles:

a. $y=\frac{9}{2x}$ b. $y=\frac{-5}{3x}$ c. $y=\frac{-0.3}{x}$

d. $(-5,2)$ e. $(4,-9)$ f. $(1,1/2)$

15. Representa nos mesmos eixes de coordenadas, as seguintes hipérboles:

a. $y=\frac{5}{x}$ $y=\frac{5}{x}+3$ $y=\frac{5}{x}-3$

b. $y=\frac{-12}{x}$ $y=\frac{-12}{x-3}$ $y=\frac{-12}{x+3}$

c. $y=\frac{3}{x}$ $y=\frac{3}{x-1}+5$ $y=\frac{5x-2}{x-1}$

16. Describe o que sucede cando varían os parámetros a e b nas hipérboles do exercicio anterior.

17. Representa as seguintes funcións de proporcionalidade inversa a partir da hipérbole $y=\frac{5}{x}$:

a. $y=\frac{10}{x-5}+3$ b. $y=\frac{1}{x+4}+8$ c. $y=\frac{100}{x+10}+1$

d. $y=\frac{10}{2x-4}-7$ e. $y=6-\frac{4}{x}$ f. $y=\frac{20}{5-x}-2$

18. Estuda o dominio, percorrido, continuidade, simetría, asíntotas e crecemento das funcións de proporcionalidade inversa do exercicio anterior.

19. Escribe unha regra para expresar como se trasladan as asíntotas segundo os parámetros a e b.

20. Representa as seguintes hipérboles:

a. $y=\frac{2x-4}{x+5}$ b. $y=\frac{3-5x}{x+2}$ c. $y=\frac{4x-12}{x-3}$

d. $y=\frac{6x+8}{1-x}$ e. $y=\frac{7x+5}{x-4}$ f. $y=\frac{6x+10}{2x-1}$

4. FUNCIÓNS DEFINIDAS POR PEDAZOS

21. Representa graficamente a función $f(x)=\begin{cases}2x-1 & se\ x<0\\ x-1 & se\ x>0\end{cases}$.

22. Representa graficamente a función $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & se\ x<0 \\ 2x+2 & se\ x>0 \end{cases}$.

23. Representa graficamente a función $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & se\ x<1 \\ x+3 & se\ x>1 \end{cases}$.

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Función lineal

1. Representa graficamente a seguinte relación de proporcionalidade dada na seguinte táboa e escribe a súa ecuación. Describe que tipo de relación é.

Magnitude A (a)	–5	–2	0	1	3
Magnitude B (b)	–15	–6	0	3	9

2. Representa as rectas a) $y = 5x$, b) $y = –5x$, c) $y = (1/2)x$, d) $y = 2.3x$.
3. Estuda o dominio, máximos e mínimos e simetrías das funcións lineais: a) $y = 1.5x$, b) $y = –0.5x$.
4. Estuda a función $y = 0.7x$ no intervalo [–2, 5].
5. Calcula a pendente da recta que pasa polos puntos (1, 4) e (0, 0) e determina a súa expresión alxébrica.
6. Representa as seguintes funcións lineais:
   a) $y = 2x + 3$ b) $y = –x + 5$ c) $y = 3x– 2$ d) $y = –2x– 3$.
7. Calcula a pendente da recta que pasa polos puntos (1, 4) e (2, 1) e determina a súa expresión alxébrica.
8. Calcula a pendente das rectas que pasa polos puntos que se indican e determina a súa expresión alxébrica.
   a) (5, 1), (3, –2) b) (–3, 4), (4, –1) c) (1, 4), (0, 6) d) (–2, –4), (–1, 0)
9. Dúas empresas de telefonía móbil lanzan as súas ofertas: a empresa StarTo ofrece por cada chamada pagar 50 céntimos máis 2 céntimos por minuto falado; Tel-Hello ofrece 75 céntimos por chamada e minutos ilimitados. Que oferta é máis económica? Para dar a resposta, realiza os seguintes pasos, expresando os resultados analítica e graficamente:
   a. Hai algún momento no que as dúas ofertas sexan iguais?
   b. Se falo unha media de 15 minutos ao día, que oferta me convén?
   c. Se falo unha media de 35 minutos ao día, que oferta me convén?
   d. Se fago unha media de 10 chamadas ao día de 3 minutos de duración, que oferta me convén?
   e. Se fago unha media de 2 chamadas ao día de 30 minutos de duración, que oferta é a mellor?
   f. Que oferta é máis económica?
10. O escritor Xaime Joyce ten distintas ofertas editoriais para publicar a súa última novela. A editorial Dole ofrécelle 100 €, ademais do 20 % de cada libro que venda; a editorial Letrarte ofrécelle 350 €; e a editorial Paco ofrécelle segundo a venda dos libros: 50 € se vende ata 250 libros, 100 € se vende ata 500 libros, 300 € se vende ata 1 000 libros e 500 € se vende máis de 1 000 libros. Entre todas as editoriais, cal cres que é mellor oferta para Xaime?

Funcións cuadráticas

11. A partir da parábola e = x^2, debuxa a gráfica das seguintes parábolas:
   a) $y = x^2 + 3$ b) $y = –x^2 + 5$ c) $y = (x – 2)^2$ d) $y = (–x – 3)^2$.
12. A partir da parábola e = x^2, debuxa a gráfica das seguintes parábolas:
   a) $y = 2.5x^2$ b) $y = –1.2x^2$ c) $y = (1/2)x^2$ d) $y = –0.7x^2$.
13. Representa a gráfica das funcións parabólicas seguintes e indica o vértice:
   a) $y = x^2 + 3x + 2$ b) $y = –x^2 + 5x – 4$ c) $y = (x– 2)^2+ 4$ d) $y = –x^2 + x – 3$.
14. Determina os elementos das parábolas seguintes
   a) $y = 3x^2 + 2x + 5$ b) $y = –2x^2 + 4x – 1$ c) $y = 4(x– 2)^2 + 9$ d) $y = –5x^2 + 2x – 6$.

Funcións de proporcionalidade inversa

15. Calcula a expresión analítica e representa a gráfica das hipérboles $y = k/x$ que pasan polos puntos que se indican. Escribe os intervalos onde a función é crecente ou decrecente.
   a) (5, 1), b) (4, –1) c) (1, 4) d) (–2, –4).
16. Representa as seguintes funcións de proporcionalidade inversa:
   a) $y = 2/x$ b) $y = –1/x$ c) $y = 3/x$ d) $y = –2/x$.
17. Determina o dominio, percorrido, continuidade, máximos e mínimos e o crecemento das seguintes hipérboles:
   a) $y = 2.3/x$ b) $y = –1.7/x$ c) $y = 3.2/x$ d) $y = –2.1/x$.

18. Representa as seguintes hipérboles:

a) $y = 2/x + 3$ b) $y = -1/x + 5$ c) $y = 3/x - 2$ d) $y = -2/x - 3$.

19. Representa as seguintes hipérboles:

a) $y = 2/(x + 3)$ b) $y = -1/(x + 5)$ c) $y = 3/(x - 2)$ d) $y = -2/(x - 3)$.

20. Representa as seguintes hipérboles:

a) $y = \frac{2x-3}{x+4}$ b) $y = \frac{-x-3}{2x+1}$ c) $y = \frac{2x-3}{3x-2}$ d) $y = \frac{x+2}{-x-3}$.

Funcións definidas por pedazos

21. Representa graficamente a función $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & se\ x < -1 \\ x^2 - 1 & se\ x > -1 \end{cases}$.

22. Determina os puntos de intersección cos eixes coordenados da función $f(x) = \begin{cases} x+1 & si\ x < 2 \\ 2x+1 & si\ x > 2 \end{cases}$.

23. Indica os intervalos onde a función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & se\ x < 2 \\ -x^2 + 4 & se\ x > 2 \end{cases}$ é crecente.

24. Representa graficamente a función $f(x) = \begin{cases} 3x-2 & se\ x < 1 \\ 1/x & se\ x > 1 \end{cases}$.

AUTOAVALIACIÓN

1. A recta $y = 4x + 2$ ten de pendente m e ordenada na orixe b:

a) $m = 4$, $b = 0$ b) $m = 1/2$, $b = 6$ c) $m = 2$, $b = 4$ d) $m = 4$, $b = 2$

2. A recta que pasa polos puntos (1, 6) e (–2, 4) ten de pendente m e ordenada na orixe b:

a) $m = 2$, $b = 4$ b) $m = 3/2$, $b = 6$ c) $m = 2/3$, $b = 16/3$ d) $m = 6$, $b = 2/3$

3. Indica cal das seguintes funcións lineais é simétrica respecto da orixe de coordenadas:

a) $y = (-10/17)x$ b) $y = 3x + 1$ c) $y = 4x + 2$ d) $y = -x + 3$

4. Indica cal das seguintes funcións cuadráticas é simétrica respecto do eixe de ordenadas:

a) $y = (-10/17)x^2 + 3x$ b) $y = 3x^2 + 2x + 1$ c) $y = 4x^2$ d) $y = -x^2 + 3x + 2$

5. Indica o vértice da función cuadrática $y = 3x^2 + 1$:

a) (0, 1) b) (1, 2) c) (0, 2) d) (0, 3)

6. Sinala cal das seguintes funcións cuadráticas é *máis estreita* que $y = x^2$:

a) $y = (-10/17)x^2 + 3x$ b) $y = 3x^2 + 2x + 1$ c) $y = (-1/2)x^2 + 3x + 2$ d) $y = -x^2 + 3$

7. Indica cal das seguintes hipérboles é simétrica respecto da orixe de coordenadas:

a) $y = -15/(21x)$ b) $y = 3/x + 1$ c) $y = 4/x + 2$ d) $y = -1/x + 3$

8. Sinala cal das seguintes hipérboles ten como asíntotas ás rectas $x = 2$ e $y = 3$:

a) $y = -15/(x - 3) - 2$ b) $y = 3/(x - 2) + 3$ c) $y = 4/(x + 2) - 3$ d) $y = -12/(x + 3) + 2$

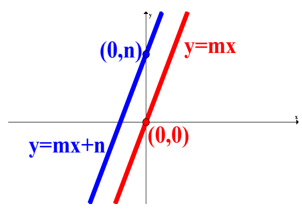
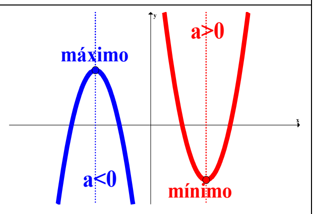
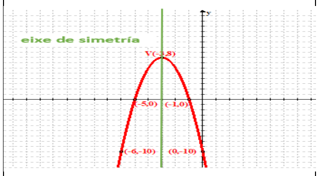
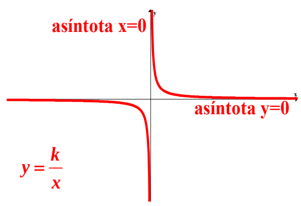
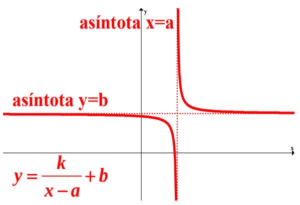
9. Se traslado a hipérbole e = $3/x$ mediante o vector de translación (1, 3) obteño a hipérbole:

a) $y = 3/(x - 1) + 3$ b) $y = 3/(x - 3) + 1$ c) $y = 3/(x + 3) - 1$ d) $y = -3/(x + 1) - 3$

10. Sinala cal das seguintes funcións cuadráticas acada un mínimo absoluto:

a) $y = (-10/17)x^2 + 3x$ b) $y = 3x^2 + 2x + 1$ c) $y = (-1/2)x^2 + 3x + 2$ d) $y = -x^2 + 3$

RESUMO

Función polinómica de primeiro grao: Rectas $y=m\cdot x$ $y=m\cdot x+n$	A súa expresión son polinomios de grao un. Represéntanse mediante **rectas**: Hai dous tipos: - **Funcións lineais ou de proporcionalidade directa**: $y=m\cdot x$, pasan pola orixe de coordenadas. - **Funcións afíns**: $y=m\cdot x+n$, son translacións no eixe y, n unidades. Pasan polo punto $(0,n)$.	
Función polinómica de segundo grao: Parábolas $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$	A súa expresión son polinomios de grao dous. Represéntanse mediante **parábolas**: **Vértice:** $\left(\frac{-b}{2a},\frac{-b^2+4\cdot a\cdot c}{4a}\right)$ Puntos de corte co eixe OX: $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$. Punto de corte co eixe OY: $x=0$, é o punto (0, *c*). **Eixe de simetría**: é a recta $x=\frac{-b}{2a}$.	
Función de proporcionalidade inversa: Hipérboles $y=\frac{k}{x}$	$\lvert k\rvert$: afasta ou achega a curva á orixe de coordenadas. Dominio e percorrido: son todos os números reais menos o 0. Continuidade: continua en todo o seu dominio, descontinua en $x=0$. Simetría: impar, simétricas respecto á orixe de coordenadas. Asíntotas: as rectas $x=0$ e $y=0$. Crecemento: - Se $k>0$: decrecente en $(-\infty,0)$ e crecente en $(0,+\infty)$. - Se $k<0$: crecente en $(-\infty,0)$ e decrecente en $(0,+\infty)$.	
Hipérboles $y=\frac{k}{x-a}+b$	Son o resultado de trasladar a hipérbole $y=\frac{k}{x}$ polo vector de translación (a,b): - Dominio: $\Re-\{a\}$ Percorrido: $\Re-\{b\}$ - Puntos: $(x,y)\to(x+a,y+b)$ - Asíntotas: $\{x=0\to x=a\};\{y=0\to y=b\}$	

CAPÍTULO 12: FUNCIÓNS EXPONENCIAIS, LOGARÍTMICAS E TRIGONOMÉTRICAS

ACTIVIDADES PROPOSTAS

1. FUNCIÓNS EXPONENCIAIS

1. Proba agora a realizar no teu caderno unha táboa de valores e a gráfica para un caso similar, supoñendo que o número de bacterias se multiplica cada hora por 3 en lugar de por 1.4.

   Observarás que os valores de “y” aumentan moito máis á présa e deseguida *se saen do papel*. Mentres que os valores de “x” aumentan de 1 en 1, os valores de e vanse multiplicando por 3. Isto chámase **crecemento exponencial**. Se en lugar de multiplicar se trata de dividir temos o caso de **decrecemento exponencial**.

2. No teu caderno, representa conxuntamente as gráficas de $y = x^2$ (función potencial) e $y = 2^x$ (función exponencial), con valores de “x” entre 0 e 6. Observa a diferenza cuantitativa entre o crecemento potencial e o crecemento exponencia.
3. Utilizando a calculadora,no teu caderno fai unha táboa de valores e representa no teu caderno as funcións $y = e^x$, $y = e^{-x}$
4. Unha persoa ingresou unha cantidade de 5 000 euros a interese do 3% nun banco, de modo que cada ano o seu capital se multiplica por 1.03. a) Escribe no teu caderno unha táboa de valores co diñeiro que terá esta persoa ao cabo de 1, 2, 3, 4, 5 e 10 anos. b) Indica a fórmula da función que expresa o capital en función do número de anos. c) Representa no teu caderno graficamente esta función. Pensa ben que unidades deberás utilizar nos eixes.
5. Un determinado antibiótico fai que a cantidade de certas bacterias se multiplique por 2/3 cada hora. Se a cantidade ás 7 da mañá é de 50 millóns de bacterias, (a) fai unha táboa calculando o número de bacterias que hai cada hora, desde as 2 da mañá ás 12 do mediodía (observa que tes que calcular tamén “cara atrás”), e (b) representa graficamente estes datos.
6. Representa no teu caderno as seguintes funcións e explica a relación entre as súas gráficas:

   a) $y = 2^x$ b) $y = 2^{x+1}$ c) $y = 2^{x-1}$.

7. Coñecendo a gráfica da función $f(x) = 2^x$, que se viu máis arriba, e sen calcular táboa de valores, debuxa no teu caderno as gráficas das funcións $g(x) = 2^x - 3$ e $h(x) = 2^{x-3}$.

2. FUNCIÓNS LOGARÍTMICAS

8. Calcula os seguintes logaritmos utilizando a definición (sen calculadora):

   a) $\log_3 81$ b) $\log_2 256$ c) $\log 10\,000$ d) $\log_5 125$ e) $\log_2 0.25$ f) $\log 0.001$

9. Calcula os seguintes logaritmos utilizando a definición e igualando expoñentes (sen calculadora):

   a) $\log_4 2$ b) $\log_9 27$ c) $\log_{81} 27$ d) $\log_2 0.125$ e) $\log_3 \frac{1}{9}$ f) $\log_2 \frac{3}{12}$

   g) $\log_{16} 2$ h) $\log_{64} 32$ i) $\log_4 \sqrt{2}$ j) $\log_3 \sqrt{27}$ k) $\log \sqrt[3]{100}$

10. Calcula o valor de x nas seguintes igualdades:

    a) $\log_8 x = \frac{2}{3}$ b) $\log_x 81 = 4$ c) $\log_{\frac{1}{3}} 27 = x$ d) $\log_x 0.5 = -1$ e) $\log x = -4$.

11. Calcula os seguintes logaritmos coa calculadora utilizando a fórmula do cambio de base e compara os resultados cos obtidos na actividade:

    a) $\log_4 2$ b) $\log_9 27$ c) $\log_{81} 27$ d) $\log_{16} 2$ e) $\log_2 0.125$ f) $\log_3 1/9$.

12. Sabendo que $\log 2 = 0.301$ e que $\log 3 = 0.477$ calcula: a) $\log 5$ b) $\log 25$ c) $\log 24$ d) $\log 60$

13. Sabendo que $\log 8 = 0.903$, e sen utilizar calculadora, calcula os seguintes:

    a) log 80 b) log 2 c) log 64 d) log 0.8 e) log 1.25 f) log $\sqrt[3]{800}$

14. Toma logaritmos e desenvolve: a) $A=\frac{2x^3y^2}{3z}$ b) $B=\frac{\sqrt{x^3y^2}}{10z}$

15. Reduce a un único logaritmo cada expresión: a) $\log 2 - \log 12 + 1 + \log 3$; b) $2 \log 5 + \frac{1}{2}\log 5 - 2$; c) $2 \log 2a - \log a$

16. Resolve as seguintes ecuacións logarítmicas:

    a) $\log (x + 1)^2 = 6$ b) $\log x + \log 5 = \log 20$ c) $\log (7 - 3x) - \log (1 - x) = \log 5$

17. Cando naceu un neno os seus pais colocaron 1 000 euros nunha cartilla de aforro ao 2.5 % de interese composto anual. Canto diñeiro terá a conta cando o neno cumpra 15 anos?

18. A poboación de certas bacterias multiplícase por 1.5 cada día. Se ao comezo hai 18 millóns de bacterias, cantas haberá ao cabo dunha semana?

19. A que tanto por cento de interese composto hai que investir un capital de 20 000 euros para gañar 1 000 euros en tres anos?

20. Se investimos 7 000 euros ao 1.35 % de interese composto anual, cantos anos deben transcorrer para ter gañado polo menos 790 euros?

21. Calcula en cantos anos se duplica unha poboación que crece ao ritmo do 10 % anual.

22. Se unha poboación de 8 millóns de habitantes se converteu en 15 millóns en 7 anos, canto medrou cada ano? (*Ollo*: non se trata de dividir entre 7!).

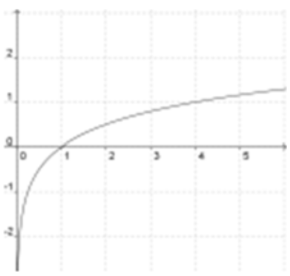
23. Representa no teu caderno, mediante táboas de valores, as gráficas das seguintes funcións:

    a) $f(x)=\log_2 x$ b) $f(x)=\log_{1/2} x$ c) $f(x)=\log_{1,5} x$

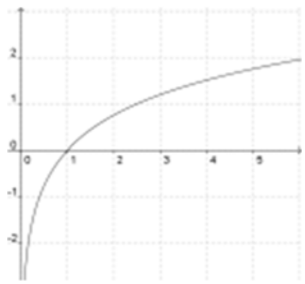
    Comproba que en todos os casos pasan polos puntos (1, 0), (*b*, 1) e (1/*b*, –1).

24. Identifica as fórmulas das seguintes funcións a partir das súas gráficas, sabendo que son funcións logarítmicas:

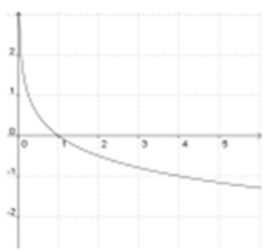
a)



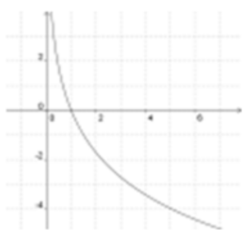
b)



c)



d)



25. Repite no teu caderno o debuxo da función $f(x)=\log_2 x$ representada no exercicio 23. Despois pensa que desprazamento sofren respecto a ela as funcións seguintes e represéntaas na mesma gráfica sen facer táboas de valores:

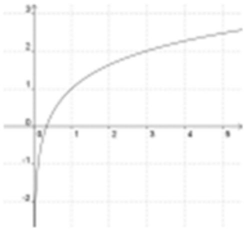
a) $g(x)=\log_2 x+3$ b) $h(x)=\log_2 x-3$ c) $i(x)=\log_2(x+3)$ d) $j(x)=\log_2(x-3)$

26. Fai o mesmo proceso do exercicio anterior coas funcións seguintes:

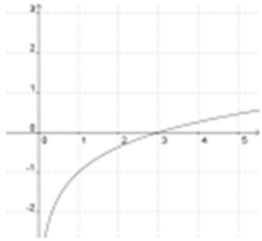
a) $g(x)=\log_2 x+2$ b) $h(x)=\log_2 x-2$ c) $i(x)=\log_2(x+2)$ d) $j(x)=\log_2(x-2)$

27. Identifica as fórmulas das seguintes funcións a partir das súas gráficas, sabendo que son funcións logarítmicas:

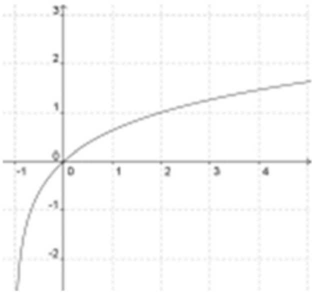
a)



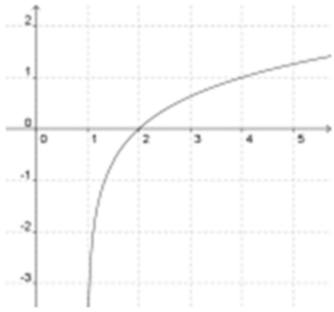
b)



c)



d)



28. Representa no teu caderno a función $y = 3^x$ usando unha táboa de valores. A continuación, a partir dela e sen calcular valores, representa as funcións seguintes: $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y=\log_3 x$, $y=\log_{1/3} x$.

3. FUNCIÓNS TRIGONOMÉTRICAS

Recorda que:

Un radián defínese como a medida do ángulo central cuxo arco de circunferencia ten unha lonxitude igual ao radio. Polo tanto:

360° equivalen a 2π radiáns

De onde se deduce que:

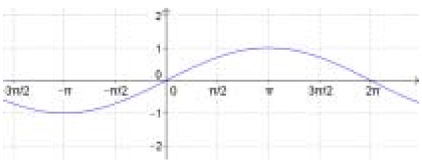
180° equivalen a π radiáns

90° equivalen a π/2 radiáns …

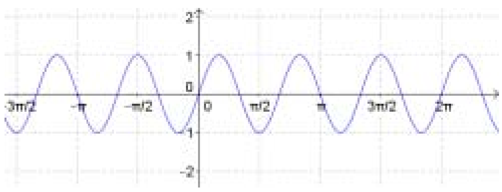
29. Representa no teu caderno as gráficas das funcións $y = \cos x$, $y = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ e $y = \frac{1}{2}\cos x$ comparándoas despois coa gráfica de $y = \cos x$.

30. Partindo da gráfica da función $y = \operatorname{sen} x$, representa no teu caderno, sen facer táboas de valores, as gráficas de $y = 1 + \operatorname{sen} x$ e de $y = \operatorname{sen}(x + \pi/6)$.

31. Identifica as gráficas das seguintes funcións trigonométricas:



a)



b)

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Función exponencial

1. Representa mediante unha táboa de valores as seguintes funcións:

a) $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ b) $y=\left(\frac{4}{3}\right)^x$ c) $y=2^{x/2}$ d) $y=3^{-2x}$

2. Representa mediante unha táboa de valores a función $y=3^x$ e a continuación, sen táboa de valores, representa estoutras sobre o mesmo debuxo:

a) $y=3^x-1$ b) $y=3^x+1$ c) $y=3^{x+1}$ d) $y=3^{x-1}$

3. Encontra unha función exponencial $f(x)=b^x$ sabendo que $f(2)=9$.

4. Encontra unha función $f(x)=k\cdot b^x$ sabendo que $f(4)=48$ e que $f(0)=3$.

5. Se un capital de 3 500 euros se multiplica cada ano por 1.02 representa nun gráfico a evolución dese capital nos 10 primeiros anos. Escolle unhas proporcións adecuadas para os eixes.

6. Certo tipo de células reprodúcese por bipartición, comprobándose que o número delas se duplica cada día. Se nun día determinado o número de células era de 4 millóns:
   a) Expresa mediante unha función o número de células en función do número de días.
   b) Calcula o número de células que haberá dentro de 3 días e o que había hai 3 días.
   c) En que día pensas que o número de células era de 31 250?

7. A descomposición de certo isótopo radioactivo vén dada pola fórmula $y = y_0 \cdot 2.7^{-0.25t}$, onde y_0 representa a cantidade inicial e t o número de milenios transcorrido. Se a cantidade actual é de 50 gramos, cal será a cantidade que queda ao cabo de 8 000 anos? Cal era a cantidade que había hai 5 000 anos?

Función logarítmica

8. Calcula os seguintes logaritmos utilizando a definición e sen utilizar a calculadora:

a) $\log_5 625$ b) $\log_2 128$ c) $\log 1\,000$ d) $\log_3 \frac{1}{27}$ e) $\log_5 0.2$ f) $\log 0.1$

9. Calcula os seguintes logaritmos utilizando a definición e igualando expoñentes, sen calculadora:

a) $\log_9 3$ b) $\log_4 32$ c) $\log_2 0.125$ d) $\log_9 27$ e) $\log_2 \sqrt{8}$ f) $\log_8 2$
g) $\log_3 0.333...$ h) $\log_8 \sqrt{2}$ i) $\log_3 \sqrt[4]{27}$ j) $\log \sqrt{1\,000}$

10. Calcula os seguintes logaritmos coa calculadora utilizando a fórmula do cambio de base:

a) $\log_5 7$ b) $\log_9 12$ c) $\log_{20} 0.1$ d) $\log_{13} \sqrt{8}$ e) $\log_{16} \sqrt{1\,000}$

11. Utilizando os valores $\log 2 = 0.301$ e que $\log 3 = 0.477$ calcula, aplicando as propiedades dos logaritmos e sen calculadora:

a) $\log 27$ b) $\log 12$ c) $\log 20$ d) $\log 50$ e) $\log \sqrt{6}$ f) $\log \sqrt[3]{25}$

12. Chamando $\log 9 = x$ expresa en función de x os seguintes logaritmos:

a) $\log 81$ b) $\log 900$ c) $\log 0.\hat{1}$ d) $\log 0.9$ e) $\log \sqrt[3]{900}$

13. Resolve as seguintes ecuacións logarítmicas:

a) $2 \log x = \log(10 - 3x)$ b) $\log 2 + \log(11 - x^2) = 2\log(5 - x)$
c) $\log(x^2 + 3x + 2) - \log(x^2 - 1) = \log 2$ d) $\log x + \log(x + 15) = 2$

14. Que relación hai entre o logaritmo dun número x e o do seu inverso $1/x$?

15. Se se multiplica por 36 o número x, o seu logaritmo en certa base aumenta en dúas unidades. Cal é esta base?

16. A escala *Richter*, usada para medir a intensidade dos terremotos, é unha escala logarítmica: un terremoto de magnitude 5 é 100 veces máis intenso que un de magnitude 3, porque 5 = log 100 000 e 3 = log 1 000. Tendo isto en conta, se o famoso terremoto de San Francisco (en 1906) tivo unha magnitude de 8.2 e o de Haití (en 2010) foi de 7.2, cantas veces máis forte foi un que outro?

Funcións trigonométricas

17. Determina todos os ángulos que verifican que $sen\ x$ = 1/2.
18. Determina todos os ángulos que verifican que $sen\ x$ = –1/2.
19. Determina todos os ángulos que verifican que $cos\ x$ = 1/2.
20. Determina todos os ángulos que verifican que $cos\ x$ = –1/2.
21. Determina todos os ángulos que verifican que $tg\ x$= –1.
22. Calcula $sen\ x$ e $cos\ x$ se $tg\ x$ = –3.
23. Calcula $sen\ x$ e $tg\ x$ se $cos\ x$ = 0.4.
24. Calcula $tg\ x$ e $cos\ x$ se $sen\ x$ = –0.3.
25. Calcula as razóns trigonométricas dos ángulos expresados en radiáns seguintes:

    a) 17π/3, b) –20π/3, c) 13π/2, d) –9π/2.

26. Debuxa no teu caderno sobre uns mesmos eixes as gráficas das funcións seno, coseno e tanxente e indica o seguinte: a) Se o seno vale cero, canto valen o coseno e a tanxente? b) Se o coseno vale cero, canto valen o seno e a tanxente? c) Se a tanxente vale cero, canto valen o seno e o coseno? d) Cando a tanxente tende a infinito, canto vale o coseno?
27. Debuxa a gráfica da función $y = sen(2x)$, completando previamente a táboa seguinte no teu caderno:

x					
$2x$	0	π/2	π	3π/2	2π
$sen(2x)$					
y					

a) A amplitude é a ordenada do máximo. Cal é a amplitude desta función?
b) Cal é o seu período?
c) A frecuencia é a inversa do período, cal é a súa frecuencia?

28. Debuxa a gráfica da función $y = 3\text{sen}(\pi x)$, completando previamente a táboa seguinte no teu caderno:

x					
πx	0	π/2	π	3π/2	2π
$sen(\pi x)$					
y					

a) Cal é a amplitude desta función?
b) Cal é o seu período?
c) Cal é a súa frecuencia?

29. Debuxa a gráfica da función $y = 2sen((\pi/3)x) + \pi/2$, completando previamente a táboa seguinte no teu caderno:

x					
$(\pi/3)x$	0	π/2	π	3π/2	2π
$sen((\pi/3)x)$					
y					

a) Cal é a amplitude desta función?
b) Cal é o seu período?
c) Cal é a súa frecuencia?

30. Debuxa a gráfica da función $y = 3sen(\pi x + 2)$, completando previamente a táboa seguinte no teu caderno:

x					
$\pi x + 2$	0	π/2	π	3π/2	2π
$sen(\pi x + 2)$					
y					

a) Cal é a amplitude desta función?
b) Cal é o seu período?
c) Cal é a súa frecuencia?

31. Debuxa a gráfica da función $y = cos(2x)$, completando previamente a táboa seguinte no teu caderno:

x					
$2x$	0	π/2	π	3π/2	2π
$cos(2x)$					
y					

a) Cal é a amplitude desta función?
b) Cal é o seu período?
c) Cal é a súa frecuencia?

32. Debuxa a gráfica da función $y = 3cos(\pi x)$, completando previamente a táboa seguinte no teu caderno:

x					
πx	0	π/2	π	3π/2	2π
$cos(\pi x)$					
y					

a) Cal é a amplitude desta función?
b) Cal é o seu período?
c) Cal é a súa frecuencia?

33. Debuxa a gráfica da función $y = 2cos(\pi x + 2)$, completando previamente a táboa seguinte no teu caderno:

x					
$\pi x + 2$	0	π/2	π	3π/2	2π
$cos(\pi x + 2)$					
y					

a) Cal é a amplitude desta función?
b) Cal é o seu período?
c) Cal é a súa frecuencia?

34. Debuxa a gráfica da función $y = tg(2x)$, completando previamente a táboa seguinte no teu caderno:

x					
$2x$	0	π/2	π	3π/2	2π
$tg(2x)$					
y					

Cal é o seu período?

Problemas

35. Por efecto dun antibiótico o número de bacterias dunha colonia redúcese nun 7 % cada hora. Se no momento de administrarse o antibiótico había 40 millóns de bacterias, cantas haberá ao cabo de 10 horas?

36. Unha persoa inxire ás 8 da mañá unha dose de 10 mg de medicamento. Este medicamento vaise eliminando a través dos ouriños e a cantidade que queda no corpo ao cabo de t horas vén dada pola fórmula $M(t) = 10 \cdot 0.8^t$. Para que o medicamento faga efecto ten que haber polo menos unha cantidade de 2 mg no corpo. Canto tempo seguirá facendo efecto despois da súa inxestión?

37. A medida da presión atmosférica P (en milibares) a unha altitude de x quilómetros sobre o nivel do mar está dada pola ecuación $P(x) = 1035 \cdot e^{-0.12x}$.

a) Se a presión na cima dunha montaña é de 449 milibares, cal é a altura da montaña?
b) Cal será a presión na cima do Everest (altitude 8 848 metros)?

38. A que tanto por cento hai que investir un capital para duplicalo en 10 anos?

39. Cantos anos debe estar investido un capital para que ao 5% de interese se converta en 1.25 veces o capital inicial?

40. Coñeces esas bonecas rusas que levan dentro outra boneca igual pero de menor tamaño e así sucesivamente? Supoñamos que cada boneca ten dentro outra que ocupa 2/3 do seu volume. Se a boneca maior ten un volume de 405 cm^3 e a máis pequena é de 80 cm^3, cantas bonecas hai en total na serie? Poderías dar unha fórmula xeral para este cálculo?

41. Indica, sen debuxar a gráfica, o período, a amplitude e a frecuencia das funcións seguintes:

a) $y = 2\,sen\,(x/2)$, b) $y = 0.4\,cos\,(\pi x/2)$, c) $y = 5\,sen\,(\pi x/3)$, d) $y = 3\,cos\,(\pi x)$.

AUTOAVALIACIÓN

1. O valor de *x* que verifica a ecuación exponencial $\frac{4^{x+3}}{2^{x-1}} = 64$ é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) –1

2. A función exponencial $y = e^x$ tende a *** cando *x* tende a $-\infty$ e a *** cando *x* tende a $+\infty$. Indica con que valores habería que encher os asteriscos:

a) 0, $+\infty$ b) $+\infty$, 0 c) 0, $-\infty$ d) $-\infty$, 0

3. Indica cal é a función exponencial $f(x) = b^x$ que verifica que $f(3) = 27$:

a) $f(x) = 2^x$ b) $f(x) = 3^x$ c) $f(x) = 27^x$ d) $f(x) = 5^x$

4. O valor de *x* que verifica $x = \log_2 1024$ é:

a) 0 b) 5 c) 10 d) Outro valor

5. A ecuación logarítmica log *x* + log 6 = log 30 ten como solución:

a) 2 b) 3 c) 4 d)5

6. Indica a afirmación verdadeira:
a) a función exponencial de base maior que 1 é decrecente.
b) a función logarítmica de base maior que 1 é decrecente.
c) a función exponencial sempre é crecente.
d) a función exponencial de base maior que 1 é crecente.

7. A expresión xeral de todos os ángulos cuxa tanxente vale 1, onde *k* é un número enteiro, é:

a) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ b) $\frac{\pi}{4} + k\pi$ c) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ d) $\frac{\pi}{2} + k\pi$

8. A función $f(x) = 3\,sen(4x)$ ten de amplitude, período e frecuencia, respectivamente:

a) 3, π/2, 2/π b) 4, π/3, 3/π c) 4, 3/π, π/3 d) 3, 2/π, π/2

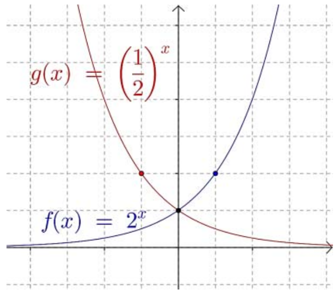
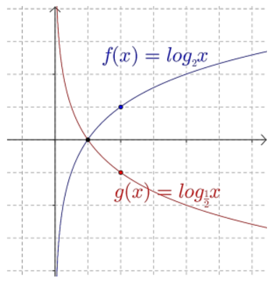
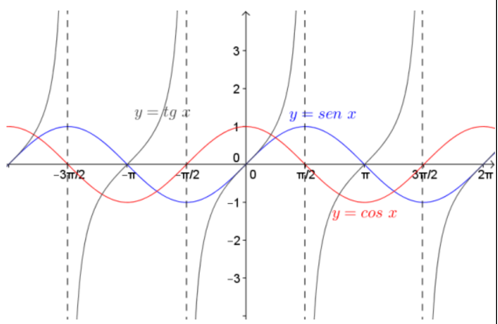
9. O seno, o coseno e a tanxente de $-\frac{7\pi}{4}$ valen respectivamente:

a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}, \ -\frac{\sqrt{2}}{2}, \ 1$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}, \ -\frac{1}{2}, \ \sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}, \ \frac{1}{2}, \ \sqrt{3}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}, \ \frac{\sqrt{2}}{2}, \ 1$

10. O seno, o coseno e a tanxente de $\frac{13\pi}{6}$ valen respectivamente:

a) $\frac{1}{2}, \ \frac{\sqrt{3}}{2}, \ \frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}, \ -\frac{1}{2}, \ \sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}, \ \frac{1}{2}, \ \sqrt{3}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}, \ \frac{\sqrt{2}}{2}, \ 1$

RESUMO

Noción	*Definición*	*Exemplos*
Función exponencial $y = b^x$	Dominio: Todos os números reais. Percorrido: Todos os números reais positivos. Continua en todo o dominio Asíntota horizontal: $y = 0$ $b > 1 \Leftrightarrow$ Crecente en todo o dominio. $0 < b < 1 \Leftrightarrow$ Decrecente en todo o dominio Puntos destacables: $(0, 1)$, $(1, b)$, $(-1, 1/b)$	
Definición de logaritmo	$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a \quad (a > 0, b > 0, b \neq 1)$ Consecuencias elementais: $\log_b b = 1 \qquad \log_b 1 = 0$	$\log_5 125 = 3$ $\log_4 8 = 3/2$
Cambio de base	$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$	$log_4 7 = \frac{log\ 7}{log\ 4} = 1.40$
Operacións con logaritmos	Log. dun produto: $\mathbf{\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y}$ Log. dun cociente: $\mathbf{\log_b (x : y) = \log_b x - \log_b y}$ Log. dunha potencia: $\mathbf{\log_b x^y = y \cdot \log_b x}$	$\log \frac{\sqrt{b^3 c}}{x^2} =$ $\frac{1}{2}(3\log b + \log c) - 2\log x$
Función logarítmica $y = \log_b x$	*Dominio*: Todos os números reais positivos. *Percorrido*: Todos os números reais. **Continua** en todo o dominio Asíntota vertical: $x = 0$ $b > 1 \Leftrightarrow$ Crecente en todo o dominio. $0 < b < 1 \Leftrightarrow$ Decrecente en todo o dominio Puntos destacables: $(1, 0)$, $(b, 1)$, $(1/b, -1)$	
Funcións trigonométricas $y = \text{sen}\ x$ $y = \cos x$ $y = \text{tg}\ x$	<u>**Funcións seno e coseno**</u>: *Dominio*: Todos os números reais *Percorrido*: $[-1, 1]$ Continuas en todo o dominio. Periódicas de período 2π. <u>**Función tanxente**</u>: *Dominio e continuidade*: Todo $\Re$ agás $(2n + 1) \cdot \pi/2$ (Neses valores hai asíntotas verticais). *Percorrido*: Todos os números reais. Periódica de período π. <u>**Simetría**</u>: Funcións seno e tanxente: simetría impar. Función coseno: simetría par.	

CAPÍTULO 13: ESTATÍSTICA

ACTIVIDADES PROPOSTAS

2. POBOACIÓN E MOSTRA. VARIABLES ESTATÍSTICAS

1. Sinalar en que caso é máis conveniente estudar a poboación ou unha mostra:
   a) O diámetro dos parafusos que fabrica unha máquina diariamente.
   b) A altura dun grupo de seis amigos.
2. Pódese ler o seguinte titular no xornal que publica o teu instituto: "*A nota media dos alumnos de 4º ESO da Comunidade de Madrid é de* 7.9". Como se chegou a esta conclusión? Estudouse toda a poboación? Se tivesen seleccionado para o seu cálculo só ás mulleres, sería representativo o seu valor?
3. Indica o tipo de variable estatística que estudamos e razoa, en cada caso, se sería mellor analizar unha mostra ou a poboación:
   a) O sexo dos habitantes dun país.
   b) O diñeiro gastado á semana polo teu irmán.
   c) A cor de pelo dos teus compañeiros de clase.
   d) A temperatura da túa provincia.
   e) O talle de pé dos alumnos do instituto.
4. Para realizar un estudo facemos unha enquisa entre os mozos dun barrio e preguntámoslles polo número de veces que van ao cine ao mes. Indica que características debería ter a mostra elixida e se deberían ser todos os mozos da mostra da mesma idade.

3. TÁBOAS DE FRECUENCIAS

5. Obter a táboa de frecuencias absolutas das notas en inglés de 24 alumnos:

6	6	7	8	4	9	8	7	6	5	3	5
7	6	6	6	5	4	3	9	8	8	4	5

6. Construír unha táboa de frecuencias relativas coa cor de pelo de 24 persoas elixidas ao azar:

M = moreno; L = louro; P = pelirroxo

M	L	P	L	L	L	L	P	P	M	M	M	M	L	L
	L	L	L	M	M	M	M	M	P					

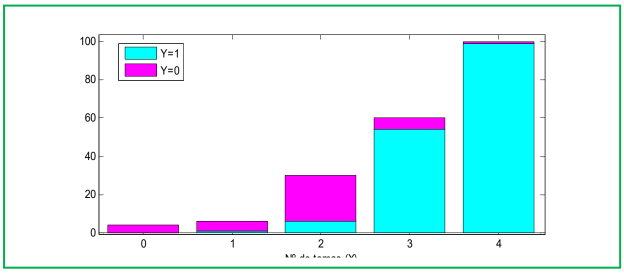
7. O número de horas diarias de estudo de 14 alumnos é o seguinte:

3	4	2	5	3	4	3	2	3	4	5	4	3	2

   a) Efectúa un reconto e organiza os resultados obtidos nunha táboa de frecuencias absolutas acumuladas.
   b) Que significan as frecuencias acumuladas que calculaches?
8. Nunha avaliación, dos 30 alumnos dunha clase, o 30 % aprobou todo, o 10 % suspendeu unha materia, o 40 % suspendeu dúas materias e o resto máis de dúas materias.
   a. Realiza a táboa de frecuencias completa correspondente (frecuencias absolutas, frecuencias relativas, frecuencias absolutas acumuladas e frecuencias relativas acumuladas).
   b. Hai algún tipo de frecuencia que corresponda á pregunta de cantos alumnos suspenderon menos de dúas materias? Razoa a resposta.

4. GRÁFICOS ESTATÍSTICOS

9. Se queremos representar conxuntamente valores da variable correspondentes a diferentes períodos de tempo, ou a distintas calidades, para comparar situacións podemos construír un diagrama de barras apiladas. Poderías interpretar este gráfico correspondente ao número de temas que os alumnos dunha materia de 4º ESO levan estudados? Tómase información en dúas clases dun instituto (azul e rosa).



10. O sexo de 18 bebés nados nun hospital de Madrid foi:

H	M	H	H	M	H
H	M	M	H	M	H
M	M	H	H	M	H

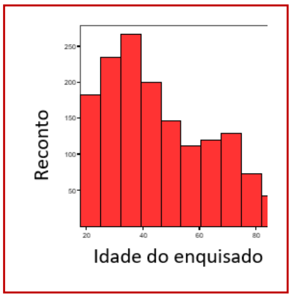
Constrúe a táboa asociada a estes datos e represéntaos.

11. Representa os valores da variable da táboa adxunta co gráfico adecuado correspondentes a unha enquisa realizada sobre o sector ao que pertence nun grupo de traballadores madrileños.

SECTOR	INDUSTRIAL	AGRARIO	SERVIZOS	OUTROS
% TRABALLADORES	20	16	45	19

12. Completa a táboa de frecuencias para poder representar a información mediante o histograma de frecuencias acumuladas:

IDADE	[15, 25)	[25, 35)	[35, 45)	[45, 55)
NÚMERO DE PERSOAS	25	45	55	65



13. A que representación gráfica corresponde o seguinte gráfico correspondente á información recollida sobre a idade de 100 persoas? Por que cres que se utilizou este e non outro?

14. Dos 100 asistentes a unha voda, o 34 % comeu tenreira de segundo prato, o 25 % pato, o 24 % cordeiro e o resto peixe.

15. Organiza a información anterior nunha táboa de frecuencias e representa os datos nun gráfico de sectores.

16. Realiza un diagrama de barras e explica como o fas. Cal dos dous gráficos prefires? Por que?

17. Recolleuse información sobre o contido de sales minerais de 24 botellas de auga dun grupo de escolares nunha excursión tal que:

45	45	65	56	33	65	23	23
34	23	43	67	22	43	34	23
12	34	45	34	19	34	23	43

a) Clasifica a variable estatística estudada

b) Sería conveniente tomar ou non intervalos ao facer unha táboa de frecuencias?

c) Realiza o gráfico que consideres máis oportuno.

5. MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

18. Unha persoa ingresa 10 000 euros nun fondo de inversión o 1 de xaneiro de 2009. As rendibilidades anuais do fondo durante os anos seguintes foron as seguintes:

Ano	2009	2010	2011	2012
Rendibilidades (%)	5	3	–1	4

Se non retirou o capital, cal foi a rendibilidade media do fondo durante estes anos?

19. Interpreta os valores da variable desta táboa que representa o peso de 100 000 bombonas de butano dunha fábrica, en quilogramos. Que gráfico utilizarías? Calcula a media e interprétaa.

Peso [)	*fi* %	n_i	N_i
14.5 - 15	0.3	300	300
15 - 15.5	1.6	1 600	1 900
15.5 - 16	7.4	7 400	9 300
16 - 16.5	21.5	21 500	30 800
16.5 - 17	30.5	30 500	61 300
17 - 17.5	24.5	24 500	85 800
17.5 - 18	10.7	10 700	96 500
18 - 18.5	21.5	21 500	30 800

20. Obter a media e a moda dos seguintes valores da variable referidos ao resultado de lanzar un dado 50 veces.

1	2	3	2	3	4	3	3	3	5
5	5	5	6	5	6	5	6	4	4
3	2	1	2	3	4	5	6	5	4
3	2	3	4	5	6	5	4	3	2
3	4	5	5	5	5	6	6	6	3

21. Realizar a actividade anterior pero agrupando en intervalos de amplitude 2, empezando en 0. Obtés os mesmos resultados? Por que?

22. Debuxar un diagrama de caixa coñecendo os seguintes datos.

 Mínimo valor = 2; cuartil 1 = 3; mediana = 6; cuartil 3 = 7; máximo valor = 12.

23. Un corredor de maratón adestra, de luns a venres percorrendo as seguintes distancias: 2, 3, 3, 6 e 4, respectivamente. Se o sábado tamén adestra:

 a) Cantos quilómetros debe percorrer para que a media sexa a mesma?

 b) E para que a mediana non varíe?

 c) E para que a moda non varíe?

24. O salario mensual en euros dos 6 traballadores dunha empresa téxtil é o que se presenta. Cal dos tres tipos de medidas de tendencia central describe mellor os soldos da empresa?

1 700	1 400	1 700	1 155	1 340	4 565

25. Que valor ou valores poderiamos engadir a este conxunto de valores da variable para que a mediana siga sendo a mesma?

12	19	24	23	23	15	21	32	12	6	32	12	12	21

26. Saen 25 prazas para un posto de auxiliar de enfermaría e preséntanse 200 persoas coas seguintes notas.

notas	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i	6	34	25	56	29	10	30	10

 a) Con que nota se obtén unha das prazas mediante o exame? b) Que percentil é a nota 5?

6. MEDIDAS DE DISPERSIÓN

27. Un grupo de cans pastor alemán ten unha media de 70 kg e desviación típica 2 kg. Un conxunto de cans caniche ten unha media de 15 kg e desviación típica 2 kg. Compara ambos os grupos.

28. O tempo, en minutos, que un conxunto de estudantes de 4º ESO dedica a preparar un exame de Matemáticas é:

234	345	345	123	234	234	556
234	234	345	223	167	199	490

 As cualificacións dese conxunto de estudantes son as seguintes:

4	5	6	7	6	5	8
9	8	7	8	7	6	8

 a) Que teremos que facer para comparar a súa variabilidade? b) En que conxunto os valores da variable están máis dispersos? c) É a media sempre maior que a desviación típica?

29. Recolleuse unha mostra de 20 recipientes cuxos diámetros son

0.91	1.04	1.01	1	0.77	0.78	1	1.3	1.02	1
1	0.88	1.26	0.92	0.98	0.78	0.82	1.2	1.16	1.14

 a. Calcula todas as medidas de dispersión que coñezas.

 b. A partir de que valor de diámetro dos recipientes se consideran o 20 % con maior diámetro?

7. CONSTRUCIÓN E INTERPRETACIÓN DE DIAGRAMAS DE DISPERSIÓN. INTRODUCIÓN Á CORRELACIÓN

30. Medíronse os pesos e alturas de 6 persoas, como mostra das persoas que están nunha fila ou cola de espera, obténdose os seguintes resultados:

Pesos (kg)	65	60	65	63	68	68
Alturas (cm)	170	150	168	170	175	180

Pídese:

a) Calcular as medias e as varianzas deses dous conxuntos de datos unidimensionais.

b) Que medidas están máis dispersas, os pesos ou as alturas?

c) Representar graficamente ese conxunto de datos bidimensional. Calcular a covarianza e interpretar o seu valor.

d) Dar unha medida da correlación entre ambas as variables. Interpretar o seu valor.

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Poboación e mostra. Variables estatísticas. Táboas de frecuencias

1. Lánzase unha moeda 700 veces e obtense cara 355 veces. Expresa nunha táboa as frecuencias absolutas, relativas e calcula tamén as frecuencias acumuladas absolutas e acumuladas relativas de caras e cruces neste experimento.

2. Lánzase un dado 500 veces e obtéñense os seguintes resultados:

Resultado	1	2	3	4	5	6
Número de veces	70	81	92	85		81

a) Cantas veces saíu o 5?

b) Construír unha táboa coas frecuencias absolutas e as frecuencias absolutas acumuladas.

c) Construír unha táboa coas frecuencias relativas e as frecuencias relativas acumuladas.

3. Unha urna contén 10 bólas numeradas do 0 ao 9. Sacamos unha bóla, anotamos o número e devolvemos a bóla á urna. Repetimos o experimento 1 000 veces e obtivéronse os resultados indicados na táboa:

Resultado	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Frecuencia absoluta	79	102			93	98	104	77		
Frecuencia relativa			0.12	0.13					0.1	
Frecuencia absoluta acumulada	79	181								
Frecuencia relativa acumulada										1

a) Cal é a frecuencia absoluta de 9?

b) Cal é a frecuencia absoluta acumulada de 2?

c) Cal é a frecuencia relativa acumulada de 1?

d) Copia a táboa no teu caderno e complétaa.

4. Pepa tirou un dado 25 veces e obtivo os seguintes resultados:

1, 2, 5, 6, 3, 1, 4, 5, 6, 1, 3, 1, 2, 2, 1, 6, 2, 2, 4, 3, 4, 6, 6, 1, 4

a) Construír unha táboa de frecuencias absolutas.

b) Construír unha táboa de frecuencias relativas.

c) Debuxa un diagrama de barras.

d) Debuxa un polígono de frecuencias e unha representación por sectores.

5. Nunha clase mediuse o tamaño das mans de cada un dos alumnos e alumnas, e o resultado en centímetros foi o seguinte:

19, 18, 20, 19, 18, 21, 19, 17, 16, 20,

16, 19, 20, 21, 18, 17, 20, 19, 22, 21,

23, 21, 17, 18, 17, 19, 21, 20, 16, 19

a) Que tamaño foi o valor mínimo? E o máximo? Cal é o rango total da variable?

b) Construír unha táboa de frecuencias absolutas e outra de frecuencias relativas.

c) Construír unha táboa de frecuencias absolutas acumuladas e outra de frecuencias relativas acumuladas.

6. Calcula a frecuencia absoluta dos datos dunha enquisa na que se elixiu entre ver a televisión, t, ou ler un libro, l:

t, l, t, t, t, l, t, t, l, t, l, t, l, t, t, t, l, l, t, l, t, l, t, l, t.

7. A duración en minutos dunhas chamadas telefónicas foi:

7, 3, 6, 3, 7, 5, 4, 3, 5, 7, 10, 1, 9, 12, 2

Construír unha táboa de frecuencias absolutas e unha táboa de frecuencias relativas.

Gráficos estatísticos

8. Preguntouse nunha vila da provincia de Madrid o número de irmáns que teñen e obtívose a seguinte táboa de frecuencias absolutas sobre o número de fillos de cada familia:

Número de fillos	1	2	3	4	5	6	7	8 ou máis
Número de familias	46	249	205	106	46	21	15	6

a) Escribe no teu caderno unha táboa de frecuencias relativas.
b) Fai un diagrama de barras de frecuencias absolutas e outro de frecuencias relativas.
c) Fai un polígono de frecuencias absolutas e outro de frecuencias absolutas acumuladas.

9. Fai unha enquisa similar cos teus compañeiros e compañeiras de curso preguntando o número de irmáns e confeccionando unha táboa sobre o número de fillos e o número de familias.

a) Constrúe unha táboa de frecuencias relativas.

b) Fai un diagrama de barras de frecuencias absolutas e relativas. Completa cun polígono de frecuencias.

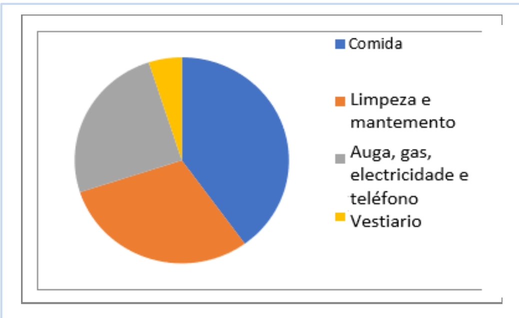
c) Compara a táboa de frecuencias relativas e o diagrama de barras de frecuencias relativas que obteñas co obtido no exercicio anterior.

10. Un batido de froita contén 25 % de laranxa, 15 % de plátano; 50 % de mazá e o resto de leite. Representa nun diagrama de sectores a composición do batido.

11. Nun campamento de verán gastáronse dez mil euros. O gráfico amosa a distribución do gasto:

1. Comida: 40 %
2. Limpeza e mantemento: 30 %
3. Auga, gas, electricidade e teléfono: 25 %
4. Vestiario: ....

a) Que porcentaxe se gastou en vestiario?
b) Cantos euros se gastaron en comida?
c) Canto mide o ángulo do sector correspondente a actividades?



12. Busca en revistas ou periódicos dúas gráficas estatísticas, recórtaas e pégaas no teu caderno. En moitas ocasións estas gráficas teñen erros. Obsérvaas detidamente e comenta as seguintes cuestións:

a) Está clara a variable á que se refire? E as frecuencias?
b) Son correctas as unidades? Poden mellorarse?
c) Comenta as gráficas.

13. Faise unha enquisa sobre o número de veces que van ao cine uns mozos ao mes. Os valores da variable están na táboa:

Veces que van ao cine	0	1	2	3	4	5
Frecuencia absoluta	1	7	9	5	2	1

a) Representa un diagrama de barras de frecuencias absolutas.
b) Representa un polígono de frecuencias relativas.
c) Representa os valores da variable nun diagrama de sectores.

14. Nunha clase preguntouse polas preferencias deportivas e obtívose:

Fútbol	Baloncesto	Natación	Karate	Ciclismo
8	9	7	6	10

a) Copia a táboa no teu caderno e constrúe unha táboa de frecuencias relativas.
b) Representa estes valores da variable nun diagrama de sectores.

15. Nun exercicio anterior obtívose o resultado de medir nunha clase o tamaño das mans de cada un dos alumnos e alumnas, e o resultado en centímetros foi o seguinte 19, 18, 20, 19, 18, 21, 19, 17, 16, 20, 16, 19, 20, 21, 18, 17, 20, 19, 22, 21, 23, 21, 17, 18, 17, 19, 21, 20, 16, 19. Representa os valores da variable nun diagrama de barras e nun polígono de frecuencias.

16. 35 % das cegoñas non emigrou este ano a África e o 6 % morreu polo camiño. Debuxa un diagrama por sector que describa esta situación.

17. Faise un estudo sobre o que se recicla nunha cidade e faise unha táboa co peso en porcentaxe dos distintos tipos de residuos:

Tipo de residuo	Porcentaxe
Orgánico	15
Papel e cartón	1
Vidro	15
Plástico	1
Pilas	15

a) Constrúe un diagrama de barras
b) Representa un polígono de frecuencias.
c) Representa os valores da variable nun diagrama de sectores.

Medidas de centralización e dispersión

18. Pepa tirou un dado 25 veces nun exercicio anterior e obtivo os seguintes resultados:

1, 2, 5, 6, 3, 1, 4, 5, 6, 1, 3, 1, 2, 2, 1, 6, 2, 2, 4, 3, 4, 6, 6, 1, 4

a) Calcula a media aritmética.
b) Calcula a mediana.
c) Cal é a moda? É única?
d) Calcula a varianza e desviación típica interpretando o seu resultado.

19. Sara tivo as seguintes notas nos seus exames de Matemáticas: 9, 7, 8, 6, 9, 10, 9

a) Calcula a media aritmética.
b) Calcula a mediana.
c) Cal é a moda? É única?
d) Calcula o percentil 45 interpretando o seu resultado.
e) Calcula o percentil 75 interpretando o seu resultado. Que outro nome recibe?
f) Calcula a varianza e a desviación típica interpretando o seu resultado.
g) Calcula o coeficiente de variación interpretando o seu resultado.

20. Nun exercicio anterior obtívose o resultado de medir nunha clase o tamaño das mans de cada un dos alumnos e alumnas, e o resultado en centímetros foi o seguinte:

19, 18, 20, 19, 18, 21, 19, 17, 16, 20, 16, 19, 20, 21, 18, 17, 20, 19, 22, 21, 23, 21, 17, 18, 17, 19, 21, 20, 16, 19

a) Calcula a media aritmética.
b) Calcula a mediana.
c) Cal é a moda? É única?
d) Calcula o percentil 45 interpretando o seu resultado.
e) Calcula o percentil 75 interpretando o seu resultado. Que outro nome recibe?
f) Calcula a varianza e desviación típica interpretando o seu resultado.
g) Calcula o coeficiente de variación interpretando o seu resultado.

21. Interésanos coñecer a distribución de notas obtidas por 40 estudantes. As notas son:

4, 1, 7, 10, 3, 2, 8, 9, 0, 0, 5, 8, 2, 7, 1, 2, 8, 10, 2, 10,
3, 4, 8, 9, 3, 6, 3, 7, 2, 4, 9, 4, 9, 5, 1, 3, 3, 9, 7, 8, 10

a) Escribe no teu caderno unha táboa de frecuencias absolutas.
b) Fai un polígono de frecuencias absolutas.
c) Calcula a media.
d) Calcula a mediana.
e) Calcula a moda.
f) Calcula o percentil 45 interpretando o seu resultado.
g) Calcula o percentil 75 interpretando o seu resultado. Que outro nome recibe?
h) Calcula a varianza e desviación típica interpretando o seu resultado.
i) Calcula o coeficiente de variación interpretando o seu resultado.
j) Se as notas dos mesmos alumnos respecto a outra materia teñen unha media de 5,3 e desviación típica de 2, cal das dúas materias ten unha media máis homoxénea?

22. Os xogadores dun equipo de balonmán teñen as seguintes idades:

12, 14, 13, 12, 15, 11, 12, 12, 13, 14, 11, 12, 12.

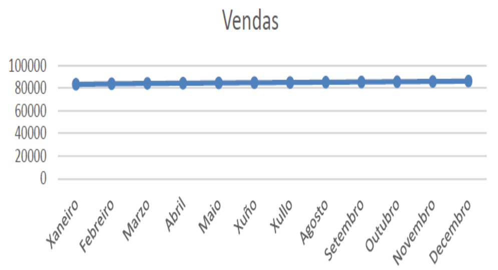
a. Calcula a media.
b. Calcula a mediana.
c. Calcula a moda.
d. Calcula o percentil 45 interpretando o seu resultado.
e. Calcula o percentil 75 interpretando o seu resultado. Que outro nome recibe?
f. Calcula a varianza e desviación típica interpretando o seu resultado.
g. Calcula o coeficiente de variación interpretando o seu resultado

Problemas

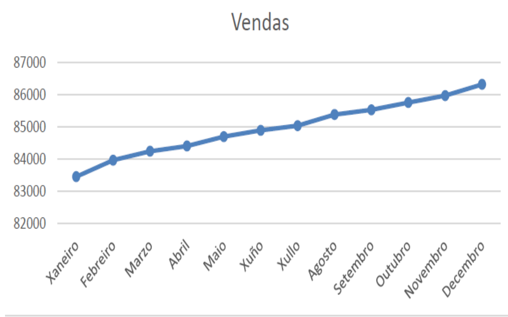
23. O Director Comercial dunha empresa vai ser avaliado. Para iso debe dar conta dos resultados obtidos. Quere quedar ben, pois iso pódelle supoñer un aumento de soldo. Vendeu as seguintes cantidades:

Meses	Xaneiro	Febreiro	Marzo	Abril	Maio	Xuño	Xullo	Agosto	Setembro	Outubro	Novembro	Decembro
Vendas	83 451	83 962	84 238	84 401	84 693	84 889	85 032	85 378	85 524	85 751	85 996	86 316

O estatístico da empresa entregoulle a seguinte gráfica:



Non lle gustou nada e, para a presentación, confeccionou el o seguinte gráfico:



Ambos os gráficos son correctos. Escribe un informe sobre como poden os distintos gráficos dar impresións tan diferentes.

24. Tira unha moeda 15 veces e anota as veces que cae cara e as que non. Constrúe logo dúas táboas: unha de frecuencias absolutas e outra de frecuencias relativas. Representa o resultado nun diagrama de frecuencias e nun polígono de frecuencias.

25. A media de seis números é 5. Engádense dous números máis pero a media segue sendo 5. Canto suman estes dous números?

26. A seguinte táboa expresa as estaturas, en metros, de 1 000 soldados:

Talle	1.50 - 156	1.56 – 1.62	1.62 – 1.68	1.68 - 1.74	1.74 - 1.80	1.80-1.92
Nº de soldados	20	150	200	330	200	100

Calcula:

a) A media e a desviación típica.

b) Os intervalos onde se encontran a mediana e os cuartís.

c) O intervalo ($\overline{X}$ - σ, $\overline{X}$ + σ) e a porcentaxe de individuos neste intervalo.

d) Representa os datos nun histograma.

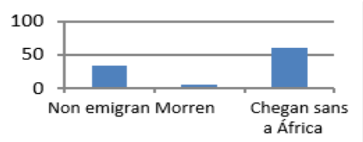
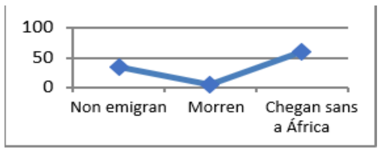
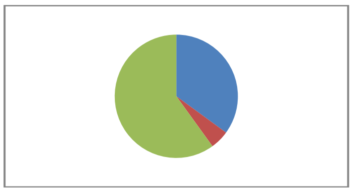
27. Unha compañía aérea sospeita que existe unha relación entre as variables *X*, tempo dun voo, en horas; e *Y*, consumo de combustible (gasóleo) para este voo, en litros. Por esta razón, obtivéronse os seguintes datos, dentro do rango de niveis de interese para X nesta compañía.

X_i	0.4	0.5	0.6	0.65	0.7	0.8	1	1.15	1.2	1.4	1.5	1.6	1.8	2.2	3
Y_i	1 350	2 220	2 900	3 150	3 350	3 550	3 900	4 330	4 500	5 050	5 320	5 650	6 400	7 500	10 250

Pídese:

a) Mediante a representación do diagrama de dispersión razoar o interese de relacionar estas variables.
b) Obter a covarianza e o coeficiente de correlación entre ambas as variables. Interpretar os resultados

RESUMO

Noción	*Definición*	*Exemplos*
Poboación estatística, colectivo ou universo	O conxunto de todos os individuos (persoas, obxectos, animais, etc.) que conteñan información sobre o fenómeno que se estuda.	Número de persoas en España entre 16 - 65 anos.
Mostra	É un subconxunto representativo que se selecciona da poboación e sobre o que se vai realizar a análise descritiva. O tamaño da mostra é o número dos seus elementos. Cando a mostra comprende todos os elementos da poboación, denomínase censo.	Número de persoas nun barrio de Madrid entre 16 e 65 anos.
Variable observable ou estatística *X*	En xeral, suporemos que se está analizando unha determinada poboación, da que nos interesa certa característica que vén dada pola variable *X*.	As variables que están baixo estudo pódense clasificar en dúas categorías: Variables cualitativas ou atributos (datos non métricos). Variables cuantitativas, que teñen un valor numérico.
Frecuencia absoluta	Número de veces que se repite un valor da variable	Se ao tirar un dado obtivemos 2 veces o 3, 2 é a frecuencia absoluta de 3.
Frecuencia relativa	Frecuencia absoluta dividido polo número de experimentos	Se se realiza un experimento 500 veces e a frecuencia absoluta dun suceso é 107, a frecuencia relativa é 107/500.
Frecuencia acumulada	Súmanse as frecuencias anteriores	
Diagrama de rectángulos ou barras	Os valores da variable represéntanse mediante rectángulos de igual base e de altura proporcional á frecuencia. Indícanse no eixe horizontal a variable e no vertical as frecuencias.	
Polígono de frecuencias	Únense os puntos medios superiores dun diagrama de barras.	
Diagrama de sectores	Nun círculo debúxanse sectores de ángulos proporcionais ás frecuencias.	
Media aritmética	É o cociente entre a suma de todos os valores da variable e o número total de datos.	Nos datos 3, 5, 5, 7, 8, a media é: (3 + 5 + 5 + 7 + 8)/5 = 28/5 = 5.6.
Mediana	Deixa por debaixo a metade dos valores e por enriba a outra metade.	A mediana é 5.
Moda	O valor que máis se repite.	A moda é 5.

Varianza	Medida de desviación que recolle as desviacións dos valores da variable respecto da media aritmética.	$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left[(x_i - \bar{x})^2\right]}{N}$
Desviación típica	A desviación típica é a raíz cadrada da varianza.	
Coeficiente de variación	Permite comparar a variabilidade de distintas mostras, independentemente das súas unidades de medida.	$g = \frac{s}{\lvert\bar{x}\rvert}$
Rango total ou percorrido	Diferenza entre os valores máximos e mínimos que toma a variable na mostra.	$R = x_{\{N\}} - x_{\{1\}}$
Percorrido intercuartílico	Diferenza entre o terceiro e o primeiro cuartil.	$R_I = Q_3 - Q_1$

AUTOAVALIACIÓN

1. Un diagrama de caixa informa sobre:

a) Os cuartís e curtosis. b) Asimetría e varianza. c) Datos atípicos e simetría.

2. Sexa a variable aleatoria o número de persoas que é capaz de levantar un ascensor. Para calcular o nº de persoas a partir do cal se recolle o 30% dos valores da variable necesitamos obter

a) O percentil 30 b) o percentil 3 c) o percentil 70

3. O 25 % dos madrileños gastan na factura do móbil por enriba de 100 euros mentres que o 25 % gastan por debaixo de 20 euros. Entón coñecemos:
a) 100 e 20 son valores que corresponden ao cuartil 1 e 3, respectivamente.
b) 100 e 20 son valores que corresponden ao cuartil 3 e 1, respectivamente.
c) 100 e 20 son valores que non corresponden a ningún cuartil.

4. Nun diagrama de barras de frecuencias absolutas, a suma das súas alturas é proporcional a:

a) 100 b) 1 c) Total de valores da variable d) Suma das súas bases

5. A media dos seguintes valores da variable 3, 4, 6, 7, 5, 8, é:

a) 6 b) 7 c) 4.8 d) 5.5

6. A mediana dos seguintes valores da variable 3, 4, 6, 7, 8, é:

a) 6 b) 7 c) 4 d) 5

7. A moda dos seguintes valores da variable 3, 4, 6, 7, 5, 8, 7, 7, é:

a) 6 b) 7 c) 4 d) 5

8. A media de 7 números é 8. Engádense dous números máis pero a media segue sendo 8. Canto suman estes dous números?

a) 10 b) 16 c) 20 d)14

9. Dúas revistas especializadas en emprego, A e B, publicaron unha media de ofertas de traballo de $m_A = 10$ e $m_B = 20$ con varianzas, respectivamente, de $s^2_A = 4$ e $s^2_B = 9$.
a) A revista B presenta maior coeficiente de variación que a revista A.
b) A revista A presenta maior coeficiente de variación que a revista B.
c) A revista B presenta igual coeficiente de variación que A

10. O 70 % dos madrileños gastan en regalos de Nadal por enriba de 100 euros mentres que o 5 % gastan por enriba de 500 euros. Entón coñecemos:
a) O valor correspondente ao percentil 30.
b) O valor correspondente ao percentil 70.
c) O valor correspondente ao percentil 5.

CAPÍTULO 14: COMBINATORIA

ACTIVIDADES PROPOSTAS

1. PERMUTACIÓNS

1. Fai diagramas en árbore e calcula:
   a) Cantas palabras de dúas letras distintas (con significado ou sen el) podes escribir coas letras A, B ou C.
   b) Cantas palabras de tres letras distintas que empecen por vogal e terminen por consoante se poden formar coas letras do alfabeto. (*Recorda* que hai 5 vogais e 20 consoantes).
2. Ana ten 5 camisolas, 3 pantalóns e 4 pares de zapatillas. Pode levar unha combinación diferente de camisola, pantalón e zapatillas durante dous meses (61 días)? Cantos días deberá repetir combinación? *Axuda*: Seguro que un diagrama en árbore che resolve o problema.
3. Nun taboleiro cadrado con 25 casas, de cantas formas diferentes podemos colocar dúas fichas idénticas de modo que estean en distinta fila e en distinta columna? *Suxestión*: Confecciona un diagrama de árbore. Cantas casas hai para colocar a primeira ficha? Se descartamos a súa fila e a súa columna, en cantas casas podemos colocar a segunda ficha?
4. De cantas formas poden repartir 4 persoas, 4 pasteis distintos comendo cada persoa un pastel?
5. Nunha carreira de cabalos participan cinco cabalos cos números 1, 2, 3, 4 e 5. Cal deles pode chegar o primeiro? Se a carreira está amañada para que o número catro chegue o primeiro, cales poden chegar en segundo lugar? Se a carreira non está amañada, de cantas formas distintas poden chegar á meta? Fai un diagrama en árbore para responder.
6. De cantas maneiras podes meter catro obxectos distintos en catro caixas diferentes se só podes poñer un obxecto en cada caixa?
7. Cantos países forman actualmente a Unión Europea? Podes ordenalos seguindo diferentes criterios, por exemplo, pola súa poboación, ou con respecto á súa produción de aceiro, ou pola superficie que ocupan. De cantas maneiras distintas é posible ordenalos?
8. No ano 1973 había seis países no Mercado Común Europeo. De cantas formas podes ordenalos?
9. O desemprego aumenta e nunha oficina de colocación hai sete persoas. De cantas formas distintas poden ter chegado?
10. Calcula: a) $\frac{6!}{4!}$; b) $\frac{7!}{3!}$; c) $\frac{8!}{5!\cdot 3!}$; d) $\frac{6!}{5!}$; e) $\frac{12!}{11!}$; f) $\frac{347!}{346!}$.
11. Calcula: a) $\frac{(n+1)!}{n!}$; b) $\frac{(n+4)!}{(n+3)!}$; c) $\frac{(n+4)!}{(n+2)!}$; d) $\frac{n!}{(n-1)!}$.
12. Expresa utilizando factoriais: a) 5·4·3; b) 10·11·12·13; c) 8·7·6; d) 10·9.
13. Expresa utilizando factoriais: a) $(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)$; b) $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)$; c) $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k)$.
14. Escribe en forma de factorial as distintas formas que teñen de sentar nunha clase os 30 alumnos nos 30 postos que hai. Non o calcules. É un número moi grande.
15. Nove ciclistas circulan por unha estrada en fila india. De cantas formas distintas poden ir ordenados?

2. VARIACIÓNS

16. Cos 10 díxitos, cantos números distintos poden formarse de 6 cifras?
17. Cos 10 díxitos e as 26 letras do alfabeto, cantas matrículas de coche poden formarse tomando catro díxitos e tres letras?
18. Un byte ou octeto é unha secuencia de ceros e uns tomados de 8 en 8. Cantos bytes distintos poden formarse?
19. Calcula: a) $VR_{4,2}$; b) $VR_{4,4}$; c) $VR_{11,2}$; d) $VR_{2,11}$.
20. Expresa cunha fórmula:
   a) As variacións con repetición de 3 elementos tomadas 5 a 5.
   b) As variacións con repetición de 7 elementos tomadas 2 a 2.
   c) As variacións con repetición de 5 elementos tomadas 4 a 4.
21. Disparamos ao prato 4 veces. En cada disparo pode que deas no branco (B) ou que non deas no branco (NB). Cantos resultados distintos hai?

22. Cantas palabras de tres letras (con significado ou non) podes formar que empecen por consoante e terminen coa letra R?

23. Tres persoas van a unha pastelaría na que unicamente quedan catro pasteis, distintos entre si. De cantas formas distintas poden elixir o seu pastel se cada unha compra un?

24. Cos díxitos 3, 5, 7, 8 e 9, cantos números de 3 cifras distintas podes formar?

25. Cos 10 díxitos deséxanse escribir números de catro cifras, todas elas distintas. Cantas posibilidades hai para escribir a primeira cifra? Unha vez elixida a primeira, cantas hai para elixir a segunda? Unha vez elixidas as dúas primeiras, cantas hai para a terceira? Cantas posibilidades hai en total?

26. Se tes 9 elementos diferentes e os tes que ordenar 5 a 5 de todas as formas posibles, cantas hai?

27. Coas letras A, B e C, cantas palabras de 2 letras non repetidas poderías escribir?

28. Calcula: a) $V_{11,6}$; b) $V_{7,5}$; c) $V_{8,4}$.

29. Calcula: a) $\frac{7!}{3!}$; b) $\frac{6!}{4!}$; c) $\frac{10!}{8!}$.

3. COMBINACIÓNS

30. Temos 5 bombóns (iguais) que queremos repartir entre 7 amigos, de cantas formas se poden repartir os bombóns se a ningún lle imos dar máis dun bombón?

31. Xoán quere regalar 3 DVDs a Pedro dos 10 que ten, de cantas formas distintas pode facelo?

32. No xogo do póker dáselle a cada xogador unha man formada por cinco cartas, das 52 que ten a baralla francesa, cantas mans diferentes pode recibir un xogador?

33. Engade ao triángulo de Tartaglia da marxe 3 filas máis.

34. Suma os números de cada fila e comproba que a suma da fila *m* dá sempre 2^m.

35. Sen calculalo, mirando ao triángulo, canto vale $C_{5,3}$; $C_{5,4}$; $C_{5,2}$; $C_{5,5}$.

1 1	$2 = 2^1$
1 2 1	$4 = 2^2$
1 3 3 1	$8 = 2^3$

36. Desenvolve $(a + b)^6$

37. Desenvolve a) $(a - b)^6$; b) $(x - 3)^4$; c) $(x + 2)^7$; d) $(-x + 3)^5$.

38. Calcula o coeficiente de x^7 do polinomio que se obtén ao desenvolver $\left(3x - \frac{x^2}{2}\right)^5$

39. Expresa con radicais simplificados o polinomio que se obtén ao desenvolver $\left(-\frac{x}{2} + \sqrt{2}\right)^5$

4. OUTROS PROBLEMAS DE COMBINATORIA

40. Tres amigos “A”, “B” e “C” están xogando ás cartas. Cada un pasa unha carta ao que está á súa dereita. Un é español, outro italiano e o outro portugués. “A” pásalle unha carta ao italiano. “B” pasoulla ao amigo que lla pasou ao español. Cal dos amigos é español, cal italiano e cal portugués? *Axuda*: Fai un diagrama circular como o anterior.

41. Ana e Alexandre convidan a cear a 3 amigos e 3 amigas, cantas formas teñen de colocarse nunha mesa redonda? En cantas están xuntos Ana e Alexandre? En cantas non hai dous mozos nin dúas mozas xuntos?

42. Cantas poligonais pechadas se poden debuxar cos 8 vértices dun octógono?

43. Cos díxitos 1, 2, e 3 cantos números distintos de 7 cifras podes formar con tres veces a cifra 1, dúas veces a cifra 2 e dúas veces a cifra 3.

44. Coas letras da palabra APARTARAS, cantas palabras con estas 9 letras, con sentido ou sen el, se poden formar?

45. Temos dúas fichas brancas, tres negras e catro vermellas, de cantas formas distintas podemos amontoalas? En cantas non quedan as dúas fichas brancas xuntas?

46. O cadeado da miña maleta ten 7 posicións nas que se pode poñer calquera dos 10 díxitos do 0 ao 9. Cantos contrasinais diferentes podería poñer? Cantos teñen todos os seus números distintos? Cantos teñen algún número repetido? Cantos teñen un número repetido dúas veces? *Axuda:* Observa que para calcular os que teñen algún número repetido o máis fácil é restar do total os que teñen todos os seus números distintos?

47. De cantas maneiras se poden introducir 7 bólas idénticas en 5 caixas diferentes colocándoas todas se ningunha caixa pode quedar baleira? E se podemos deixar algunha caixa baleira? *Axuda:* Ordena as bólas nunha fila separadas por 4 puntos, así quedan divididas en 5 partes, que indican as que se colocan en cada caixa.

48. Cantas pulseiras diferentes podemos formar con 4 doas brancas e 6 vermellas? *Axuda:* Este problema é equivalente a introducir 6 bólas iguais en 4 caixas idénticas podendo deixar caixas baleiras.

49. Cantas formas hai de colocar o rei branco e o rei negro nun taboleiro de xadrez de forma que non se ataquen mutuamente. E dous alfís? E dúas raíñas?

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Permutacións

1. Tres nadadores botan unha carreira. De cantas formas poden chegar á meta se non hai empates? E se son 8 nadadores?
2. Loli, Paco, Ana e Xurxo queren fotografarse xuntos, de cantas maneiras poden facer a fotografía? Queren situarse de maneira que alternen mozos con mozas, de cantas maneiras poden agora facer a fotografía?
3. De cantas maneiras se poden introducir 6 obxectos distintos en 6 caixas diferentes se só se pode poñer un obxecto en cada caixa?
4. Nunha parada de autobús hai 5 persoas, en cantas ordes distintas poden ter chegado á parada? Ao chegar unha nova persoa aposta con outra a que adiviña a orde de chegada, que probabilidade ten de gañar?
5. Sete mozas participan nunha carreira, de cantas formas poden chegar á meta? Non hai empates. Cal é a probabilidade de acertar a orde de chegada á meta?
6. Cantos números distintos e de cinco cifras distintas poden formarse cos díxitos 3, 4, 5, 6, e 7? Cantos poden formarse se todos empezan por 5? E se deben empezar por 5 e terminar en 7?

Variacións

7. Cantas bandeiras de 3 franxas horizontais de cores distintas se poden formar coas cores vermello, amarelo e morado? E se se dispón de 5 cores? E se se dispón de 5 cores e non é preciso que as tres franxas teñan cores distintas?
8. Cantos números de 4 cifras distintas se poden escribir cos díxitos: 1, 2, 3, 4, 5 e 6? Cantos deles son impares? Cantos son múltiplos de 4? *Recorda*: Un número é múltiplo de 4 se o número formado polas súas dúas últimas cifras é múltiplo de 4.
9. Cantos números de 4 cifras, distintas ou non, se poden escribir cos díxitos: 1, 2, 3, 4, 5 e 6? Calcula a suma de todos eles. *Suxestión*: Ordénaos de menor a maior e suma o primeiro co último, o segundo co penúltimo, o terceiro co antepenúltimo e así sucesivamente
10. A Mario encántalle o cine e vai a todas as estreas. Esta semana hai seis e decide ir cada día a unha. De cantas formas distintas pode ordenar as películas? Mala sorte. Anúncianlle un exame e decide ir ao cine soamente o martes, o xoves e o sábado. Entre cantas películas pode elixir o primeiro día? E o segundo? E o terceiro?
11. Cos díxitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, cantos números de catro cifras diferentes se poden formar? (*Observa: se* comeza por 0 non é un número de catro cifras). Cantos son menores de 3 000?
12. Coas letras da palabra “ARQUETIPO” cantas palabras de 6 letras se poden formar que non teñan dúas vogais nin dúas consoantes xuntas? a) Se todas as letras son distintas. b) Se se poden repetir letras.
13. Cantos números de tres cifras, diferentes ou non, se poden formar? Destes, cantos son maiores que 123?

14. A linguaxe do ordenador está escrita en secuencias de ceros e uns (díxitos binarios ou bits) de tamaño fixo. No contexto da informática estas cadeas de bits denomínanse palabras. Os ordenadores normalmente teñen un tamaño de palabra de 8, 16, 32 ou 64 bits. O código ASCII, co que se representaban inicialmente os caracteres para transmisión telegráfica, tiña 7 bits. Despois aplicouse aos ordenadores persoais, ampliándoo a 8 bits que é o que se denomina un byte ou ASCII estendido. Máis tarde substituíuse por Unicode, cunha lonxitude variable de máis de 16 bits. Cantos bytes diferentes (8 díxitos) se poden formar? Nun ordenador cuxa lonxitude de palabra tivera 16 díxitos, cantas se poderían formar que fosen diferentes? Se existira un ordenador cuxa lonxitude de palabra tivera 4 díxitos, poderíase escribir con eles as letras do alfabeto?

Combinacións

15. Escribe dous números combinatorios con elementos diferentes que sexan iguais e outros dous que sexan distintos.
16. Tes sete bólas de igual tamaño, catro brancas e tres negras, se as colocas en fila. De cantas formas podes ordenalas?
17. Con 5 latas de pintura de distintas cores, cantas mesturas de 3 cores poderás facer?
18. Calcula: a) $\binom{6}{3}$; b) $\binom{8}{5}$; c) $\binom{20}{1}$; d) $\binom{34}{0}$; e) $\binom{47}{47}$.
19. Calcula: a) $C_{9,3}$; b) $C_{10,6}$; c) $C_{8,4}$; d) $C_{20,19}$; e) $C_{47,1}$.
20. De cantas maneiras se pode elixir unha delegación de 4 estudantes dun grupo de 30? E no teu propio grupo?
21. Cantos produtos diferentes se poden formar cos números: 2, 1/3, 7, 5 e π tomándoos de 3 en 3? Cantos deses produtos darán como resultado un número enteiro? Cantos un número racional non enteiro? Cantos un número irracional?
22. Cantas aliaxes de 3 metais poden facerse con 7 tipos distintos de metal?
23. Calcula: a) $\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}$ b) $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}$
24. ¿Poderías calcular $\binom{8}{0}+\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\binom{8}{3}+\binom{8}{4}+\binom{8}{5}+\binom{8}{6}+\binom{8}{7}+\binom{8}{8}$ sen calcular cada un dos números combinatorios?
25. De cantas formas podes separar un grupo de 10 estudantes en dous grupos de 3 e 7 estudantes respectivamente?
26. Unha materia componse de 20 temas e vaise realizar un exame no que caen preguntas de dous temas. Cantas posibilidades hai para elixir os temas que caen? Se só estudaches 16 temas, cantas posibilidades hai de que che toquen dous temas que non saibas? Cal é a probabilidade de que che toquen dous temas que non saibas? E a de que che toque só un tema que non saibas?
27. Un grupo de 10 alumnos de 4º de ESO vai visitar un museo no que poden elixir entre dúas actividades diferentes. Cantas formas distintas pode haber de formar os grupos de alumnos?
28. Desenvolve o binomio a) $(4 - x)^5$; b) $(3 - 2x)^4$; c) $(2ab - 3c)^6$; d) $(\frac{x}{2}-\sqrt{2x})^3$.
29. Calcula x nas seguintes expresións:

a) $\binom{x+2}{x}=\binom{6}{4}+\binom{6}{x}$ b) $\binom{10}{x}=\binom{10}{x+2}$ c) $\binom{x+3}{x}=\binom{7}{4}+\binom{7}{x}$ d) $\binom{12}{x}=\binom{12}{x+2}$

30. Escribe o valor de x nas igualdades seguintes:

a) $\binom{4}{3}=\binom{4}{x}$, $x \neq 3$; b) $\binom{7}{3}=\binom{7}{x}$, $x \neq 3$; c) $\binom{4}{3}=\binom{3}{x}+\binom{3}{2}$;

d) $\binom{2x+1}{5}=\binom{8}{x}+\binom{8}{5}$; e) $\binom{7}{x-3}=\binom{6}{3}+\binom{x}{2}$; f) $\binom{7}{x}=\binom{7}{x+3}$

31. Calcula en función de n a suma dos seguintes números combinatorios:

a) $\binom{n}{3}+\binom{n}{4}$ b) $\binom{n}{2}+n$ c) $\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{3}$

32. Calcula o sexto termo no desenvolvemento de: $\left(\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^{10}$

33. Calcula o coeficiente de x^2 no desenvolvemento de: $(-1 - 5x)^9$.

34. Cantas opcións hai para elixir catro materias entre sete optativas?

35. Xógase unha partida de tiro ao prato na que se lanzan sucesivamente doce pratos. Cal é o número de sucesos nos que se obteñen catro éxitos, é dicir, acértase catro veces no branco? No mesmo caso anterior, cal é a probabilidade de ter éxito no derradeiro tiro?

Problemas

36. Con 7 discos e 6 letras en cada disco, cantas combinacións distintas se poden facer? *Axuda:* No primeiro disco podemos poñer calquera das 6 letras. O mesmo no segundo. E no terceiro? Pero se é facilísimo! Se xa sabemos resolvelo.

37. Nun restaurante hai 5 primeiros pratos, 4 segundos e 6 sobremesas, de cantas formas diferentes se pode combinar o menú?

38. Lanzamos unha moeda e logo un dado, cantos resultados distintos podemos obter? E se lanzamos dúas moedas e un dado? E se fosen 3 moedas e 2 dados?

39. Estanse elixindo os actores e actrices para facer de protagonistas nunha teleserie. Presentáronse 6 mozos e 8 mozas. Cantas parellas distintas poderían formarse?

40. Unha caixa dun coñecido xogo educativo ten figuras vermellas, amarelas e azuis que poden ser triángulos, círculos ou cadrados, e de dous tamaños, grandes e pequenas. De cantas pezas consta a caixa?

41. Nun restaurante hai 8 primeiros pratos e 5 segundos, cantos tipos de sobremesas debe elaborar o restaurante para poder asegurar un menú diferente os 365 días do ano?

42. Nunha reunión todas as persoas se saúdan estreitando a man. Sabendo que houbo 91 saúdos. Cantas persoas había? E se houbo 45 saúdos, cantas persoas había?

43. De cantas maneiras se poden introducir 5 obxectos distintos en 5 caixas diferentes se só se pode poñer un obxecto en cada caixa? E se se poden poñer varios obxectos en cada caixa colocando todos? Cal é a probabilidade de que na primeira caixa non haxa ningún obxecto?

44. A meirande parte dos contrasinais das tarxetas de crédito son números de 4 cifras. Cantos posibles contrasinais podemos formar? Cantos teñen algún número repetido? Cantos teñen un número repetido dúas veces?

45. Temos 10 rectas no plano que se cortan 2 a 2, é dicir, non hai rectas paralelas. Cantos son os puntos de intersección?, e se tes 15 rectas?, e se tes *n* rectas?

46. Cantas diagonais ten un octógono regular?, e un polígono regular de 20 lados?

47. Cantas diagonais ten un icosaedro regular?, e un dodecaedro regular? *Axuda*: Recorda que o icosaedro e o dodecaedro son poliedros duais, é dicir, o número de caras dun coincide co número de vértices doutro. Para saber o número de arestas podes utilizar a *Relación de Euler*: C + V = A + 2

48. Cantos números diferentes de 5 cifras distintas podes formar cos díxitos 1, 2, 3, 5 e 7? Cantos que sexan múltiplos de 5? Cantos que empecen por 2? Cantos que ademais de empezar por 2 terminen en 7?

49. Con 5 bólas de 3 cores distintas, a) cantas filas diferentes podes formar? b) Cantas pulseiras distintas podes formar?

50. Hai moitos anos as placas de matrícula eran como esta: M 677573; logo foron como esta: M 1234 AB; e actualmente como esta: 6068 BPD. Investiga que vantaxes ten cada un destes cambios respecto ao anterior.

51. Cos díxitos 1, 2, 3, 4, 5, cantos números de cinco cifras distintas se poden formar? Calcula a suma de todos estes números.

52. Calcula *x* nos seguintes casos: a) $V_{x,3} = C_{x,2}$ b) $V_{x,5} = 6\ V_{x,3}$ c) $\frac{C_{x+1,4}}{C_{x,2}} = \frac{7}{3}$

53. Iker e María xogan ao tenis e deciden que gaña aquel que primeiro gañe 3 sets. Cal é o número máximo de sets que terán que disputar? Cantos desenvolvementos posibles pode ter o encontro?

54. Pedro coñeceu onte a unha moza. Pasárono moi ben e ela deulle o seu número de móbil pero el non levaba nin o seu móbil nin bolígrafo. Pensou que se acordaría pero… só recorda que empezaba por 656, que había outras catro cifras que eran todas distintas entre si e menores que 5. Calcula cantas posibilidades ten de acertar se marca un número. Moi poucas. Fai memoria e recorda que as dúas últimas son 77. Cantas posibilidades hai agora de acertar facendo unha chamada?

55. Un club de alpinistas organizou unha expedición ao Kilimanjaro formada por 11 persoas, 7 expertos e 4 que están en formación. Nun determinado tramo só poden ir 3 expertos e 2 que non o sexan, de cantas formas pode estar composto ese equipo de 5 persoas? Ti es un experto e vas ir nese tramo, cantas formas hai agora de compoñelo?

56. Nos billetes dunha liña de autobuses van impresos os nomes da estación de partida e da de chegada. Hai en total 8 posibles estacións. Cantos billetes diferentes tería que imprimir a empresa de autobuses? Agora queren cambiar o formato e só imprimir o prezo, que é proporcional á distancia. As distancias entre as estacións son todas distintas. Cantos billetes diferentes tería que imprimir neste caso?

57. Unha parella ten un fillo de 3 anos que entra na gardería ás 9 da mañá. O pai traballa nunha fábrica que ten 3 quendas mensuais rotativas: de 0 a 8, de 8 a 16 e de 16 a 24 horas. A nai traballa nun supermercado que ten dúas quendas rotativas mensuais, de 8 a 14 e de 14 a 20 horas. Cantos días ao ano, por termo medio, non poderá ningún dos dous levar o seu fillo á gardería?

58. Un tiro ao branco ten 10 cabaliños numerados que xiran. Se se acerta a un deles acéndese unha luz co número do cabaliño. Tiras 3 veces, de cantas maneiras se poden acender as luces? E se o primeiro tiro non lle dá a ningún cabaliño?

59. Nunha festa hai 7 mozas e 7 mozos. Xoán baila sempre con Ana. Antón é o máis decidido e sempre sae bailar o primeiro, de cantas formas pode elixir parella nos próximos 4 bailes?

60. Cos díxitos 0, 1, 2, 3, 4, 5:
    a) Cantos números de cinco cifras se poden formar?
    b) Cantos hai con dúas veces a cifra 1 e tres a cifra 2?
    c) Calcula a suma de todos estes últimos números.

61. Cantas palabras, con ou sen sentido, se poden formar coas letras da palabra PORTA que non teñan dúas vogais nin dúas consoantes xuntas?

62. Nunha compañía militar hai 10 soldados, cantas gardas de 3 soldados poden facerse? Un dos soldados é Alexandre, en cantas destas gardas estará? E en cantas non estará?

63. Cantos números capicúa de dúas cifras existen? E de tres cifras? E de catro cifras?

64. Coas letras da palabra ARGUMENTO, cantas palabras de 5 letras se poden formar que non teñan dúas vogais nin dúas consoantes xuntas? a) Se todas as letras son distintas. b) Se se poden repetir letras.

65. Cantos números hai entre o 6 000 e o 9 000 que teñan todas as súas cifras distintas.

66. Unha fábrica de xoguetes ten á venda 8 modelos distintos. Cantos mostrarios distintos pode facer de 4 xoguetes cada un? Cal é a probabilidade de que o último modelo de avión fabricado chegue a un determinado cliente? Se se quere que neses mostrarios sempre estea o último modelo de xoguete fabricado, cantos mostrarios distintos pode facer agora?

67. A encargada dun gardarroupa distraeuse e sabe que dos cinco últimos bolsos que recolleu a tres bolsos lles puxo o resgardo equivocado e a dous non. De cantas formas se pode ter producido o erro? E se fosen dous os equivocados

68. A primeira obra impresa con resultados de Combinatoria é *Summa* de *Luca Pacioli*, de 1494. Nesta obra proponse o seguinte problema: de cantas formas distintas poden sentar catro persoas nunha mesa circular?

69. Cantos números de catro cifras teñen polo menos un 5?

70. Coas letras da palabra SABER, cantas palabras, con ou sen sentido, de letras diferentes, se poden formar que non teñan dúas vogais nin dúas consoantes xuntas. O mesmo para as palabras CORTE, PORTA e ALBERTE".

71. Considera a sucesión de números naturais 1, 3, 6, 10, 15, … cal é o seguinte termo desta sucesión? Que lei de recorrencia permite calcular o seguinte termo da sucesión? Cal é o seu termo xeral?

72. Cos díxitos 1, 3 e 5, cantos números menores de 6 000 se poden formar? Cantos hai con 4 cifras que teñan dúas veces a cifra 5

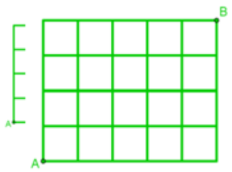
73. Coas letras da palabra GRUPO, cantas palabras de 5 letras con ou sen sentido se poden formar que teñan algunha letra repetida?

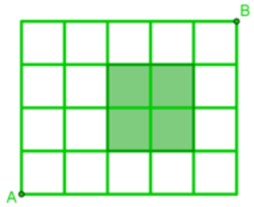
74. Nunha baralla española facemos 5 extraccións con substitución, cal é a probabilidade de obter máis de 3 ases? e a probabilidade de obter menos de 4 ases?

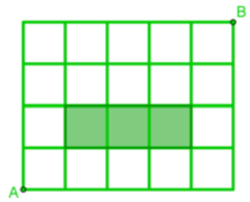
75. Camiños nunha cuadrícula. a) Cantos camiños hai para ir de A ata B se só podemos ir cara á dereita e cara arriba?

b) Se non podemos atravesar o cadrado verde, nin camiñar polos seus lados, cantas formas temos agora para ir desde A cara a B?

c) Se non podemos atravesar o rectángulo verde, nin camiñar polos seus lados, cantas formas temos agora para ir desde A cara a B?







d) Cantos camiños hai nunha cuadrícula cadrada con *n* cadrados en cada lado?

e) Cantos camiños hai nunha cuadrícula rectangular con *m* cadrados verticais e *n* horizontais?

AUTOAVALIACIÓN

1. Tes nove moedas iguais que colocas en fila. Se catro amosan a cara e cinco a cruz, de cantas formas distintas podes ordenalas?

a) $V_{9,4}$ b) P_9 c) $C_{9,5}$ d) $VR_{9,5}$

2. Nunha compañía aérea hai dez auxiliares de voo e un avión necesita levar catro na súa tripulación, de cantas formas se poden elixir?

a) $V_{10,4}$ b) P_{10} c) $C_{10,4}$ d) $VR_{10,4}$

3. Cantos produtos distintos poden obterse con tres factores diferentes elixidos entre os díxitos: 2, 3, 5 e 7?

a) $V_{4,3}$ b) P_4 c) $C_{4,3}$ d) $VR_{4,3}$

4. Temos cinco obxectos distintos e queremos gardalos en cinco caixas diferentes poñendo un obxecto en cada caixa, de cantas formas podemos facelo?

a) $V_{5,1}$ b) P_5 c) $C_{5,5}$ d) $VR_{5,1}$

5. Permutacións de n+4 elementos dividido entre permutacións de n+1 elementos é igual a:

a) $(n + 4) \cdot (n + 3) \cdot (n + 2) = \dfrac{(n+4)!}{(n+1)!}$ b) $V_{n+4,n+2}$ c) $\dfrac{(n+4)!}{n!}$ d) $V_{n+4,n+2}/C_{n+4,n+1}$

6. As variacións de 10 elementos tomados de 6 en 6 é igual a

a) $VR_{6,10}$ b) $V_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \dfrac{10!}{6!}$ c) $V_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = \dfrac{10!}{4!}$ d) $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \dfrac{6!}{3!}$

7. Indica que afirmación é falsa:

a) $0! = 1$ b) $V_{m,n} = m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot \ldots \cdot (m - n)$ c) $VR_{m,n} = m^n$ d) $P_n = n!$

8. O valor dos seguintes números combinatorios $\binom{5}{0}$, $\binom{9}{9}$, $\binom{4}{1}$ é:

a) 0, 1, e 1 b) 0, 9 e 4 c) 1, 1 e 4 d) 5, 9 e 4

9. O valor de x, distinto de 4, na igualdade $\binom{7}{4} = \binom{7}{x}$ é:

a) 3 b) 7 c) 1 d) 0

10. O coeficiente do termo cuarto do desenvolvemento do Binomio de Newton de $(a + b)^7$ é:

a) $\binom{7}{3}$ b) 1 c) $\binom{7}{4}$ d) $V_{7,4}$

RESUMO

Noción	***Definición***	***Exemplos***
Permutacións	Considérase só a **orde**. $P_n = n!$	$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
Variacións con repetición	Considéranse a **orde** e os **elementos**. Os elementos poden **repetirse**. $VR_{m,n} = m^n$.	$VR_{2,4} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$
Variacións sen repetición	Inflúen a **orde** e os **elementos**. Os elementos **NON** poden repetirse. $V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) = \dfrac{m!}{(m-n)!}$	$V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \dfrac{6!}{3!} = 120$
Combinacións	Inflúen só os **elementos**. $C_{m,n} = \dfrac{V_{m,n}}{P_n} = \dfrac{m!}{(m-n)! \cdot n!} = \dbinom{m}{n}$	$C_{9,7} = \dbinom{9}{7} = \dfrac{9!}{2! \cdot 7!} = 36$
Propiedades dos números combinatorios	$\dbinom{m}{0} = 1;\ \dbinom{m}{m} = 1;$ $\dbinom{m}{n} = \dbinom{m}{m-n};$ $\dbinom{m}{n} = \dbinom{m-1}{n} + \dbinom{m-1}{n-1}$	$\dbinom{5}{0} = \dbinom{5}{5} = 1;$ $\dbinom{5}{2} = \dbinom{5}{3} = 10;$ $\dbinom{5}{3} = \dbinom{4}{3} + \dbinom{4}{2} = 6 + 4$
Triángulo de Tartaglia	$\dbinom{0}{0}$ $\dbinom{1}{0}\ \dbinom{1}{1}$ $\dbinom{2}{0}\ \dbinom{2}{1}\ \dbinom{2}{2}$ $\dbinom{3}{0}\ \dbinom{3}{1}\ \dbinom{3}{2}\ \dbinom{3}{3}$	1 1 1 1 2 1 1 3 3 1 …

CAPÍTULO 15: PROBABILIDADE

ACTIVIDADES PROPOSTAS

1. EXPERIENCIA E PROBABILIDADE

1. Nunha caixa temos mesturados 25 cravos de 2 cm de longo, 15 cravos de 3 cm, 20 cravos de 2.5 cm e 40 cravos de 3.5 cm. Sacamos ao chou un cravo da caixa (asúmese que todos os cravos teñen a mesma probabilidade de seren elixidos). Que probabilidade hai de que o cravo extraído teña a menor lonxitude?

2. a) A ruleta francesa consta dos números que van do 0 ao 36. Se sae 0 gaña a banca. Decidimos apostar a "*par*" (gañaremos se sae un número par non nulo). a) Que probabilidade temos de gañar a aposta?

   b) A ruleta americana consta dun 0, un 00 e dous números que van do 1 ao 36. Se sae 0 ou 00 gaña a banca. Decidimos apostar a "*par*" (gañaremos se sae un número par non nulo). Que probabilidade temos de gañar a aposta?

3. Nun instituto de 800 alumnos hai 400 estudantes que falan inglés, 300 que falan francés, 100 que falan alemán, 100 que falan inglés e francés, 80 que falan inglés e alemán, 50 que falan francés e alemán e 30 que falan os tres idiomas. Elíxese un estudante ao chou. Cal é a probabilidade de que fale soamente unha lingua estranxeira?

4. Volve facer todos os apartados do exemplo anterior pero substituíndo en cada caso "bóla branca" por "bóla vermella". É dicir, a bolsa ten agora 6 bólas vermellas e unha bóla negra:

   a) Extráense dúas bólas ao mesmo tempo. Cal é a probabilidade de que sexan unha vermella e unha negra?

   b) Extráese unha bóla da bolsa. Despois sácase unha segunda bóla, sen volver meter na bolsa a primeira. Cal é a probabilidade de que tras a segunda extracción teñamos unha bóla vermella e unha bóla negra?

   c) Extráese unha bóla da bolsa. Despois sácase unha segunda bóla, sen volver meter na bolsa a primeira. Cal é a probabilidade de que a primeira bóla sexa vermella e a segunda negra?

   d) Extráese unha bóla da bolsa. Tras mirar de que cor é introdúcese na bolsa de novo. Sácase unha segunda bóla. Cal é a probabilidade de que a primeira bóla sexa vermella e a segunda negra?

   e) Extráese unha bóla da bolsa. Tras mirar de que cor é introdúcese na bolsa de novo. Sácase unha segunda bóla. Cal é a probabilidade de que as dúas veces teña saído a bóla negra?

   f) Extráese unha bóla da bolsa. Tras mirar de que cor é introdúcese na bolsa de novo. Sácase unha segunda bóla. Cal é a probabilidade de que as dúas veces teña saído unha bóla vermella?

5. Na lotería primitiva unha aposta consiste en marcar 6 casas de entre 49 posibles. O día do sorteo extráense 6 bólas (de entre 49). Cal é a probabilidade de que a túa aposta coincida coa combinación gañadora? Cal é a probabilidade de que acertes unicamente 5 números? E a de que acertes unicamente 4 números?

   a) Chámase *trío* á xogada que consiste en 3 cartas do mesmo valor e outras dúas de diferente valor ao desas 3 e ademais con diferentes valores entre si. Calcula a probabilidade de obter un *trío de ases* nunha xogada de 5 cartas.

   b) Calcula a probabilidade de obter un *trío* calquera.

7. a) Chámase *escaleira de cor* a unha xogada composta por 5 cartas do mesmo pau ordenadas consecutivamente. Calcula a probabilidade de obter esta *escaleira de cor*:

   b) Calcula a probabilidade de obter unha *escaleira de cor* calquera. A escaleira de cor pode ser As, 2, 3, 4, 5, que é a escaleira de cor mínima, ou ben, 10, J, Q, K, As que é a escaleira de cor máxima ou escaleira real.

8. Chámase *cor* a unha xogada composta por 5 cartas do mesmo pau que non son consecutivas. Calcula a probabilidade de obter *cor* nunha xogada.

2. AFONDANDO NA TEORÍA

9. Considéranse os seguintes experimentos aleatorios:

1) Téñense 5 fichas de Scrabble formando a palabra CASAS. Métense nunha bolsa e extráense 3 fichas.
2) Mestúrase unha baralla de póker, córtase e mírase o valor da carta superior.
3) Un moedeiro contén 4 moedas de 5 céntimos, 2 moedas de 10 céntimos e 1 moeda de 20 cm. Extráense ao chou dúas moedas del.
4) Dos 30 alumnos dunha clase elíxese un ao chou. Pregúntaselle en que mes naceu.

a) Describe os espazos dunha mostra de cada un dos 4 experimentos aleatorios anteriores.

b) Indica os sucesos contrarios a

1. {AAC}.
2. {A, 2, 3, 4, 5}.
3. Sacar unha cantidade par de céntimos.
4. Ter nacido nun mes no que seguro que é verán.

c) Son independentes estes pares de sucesos?

1. {AAC} e {{ASA}, {CAS}}.
2. "Obter un 6" e "obter un número par".
3. "Obter unha cantidade par de céntimos" e "sacar dúas moedas de 5 céntimos".
4. "Ter nacido nun mes que seguro é de verán" e "ter nacido en xuño".

10. Elabora unha árbore de probabilidades para calcular a probabilidade de obter *dobre parella* nunha xogada de 5 cartas de póker. (*Dobre parella* consiste en 2 pares de cartas do mesmo valor, diferentes entre si e unha carta, indiferente, de valor distinto aos dos anteriores. Por exemplo, AA 33 Q).

11. No moedeiro teño 3 moedas dun céntimo, 2 de 5 céntimos, 3 de 10 céntimos, 1 de 20 e 1 de 50 céntimos. Saco 3 moedas ao chou. Cal é a probabilidade de que obteña un número par de céntimos?

12. Un analista deportivo, que se equivoca o 20% das veces, dixo que o noso equipo favorito vai gañar a liga. O analista da competencia, que se equivoca o 25% das veces, dixo que o noso equipo favorito non vai gañar a liga. Á vista destas análises, que probabilidade hai de que o noso equipo gañe a liga?

13. Unha compañía de produtos avícolas empaqueta ducias de ovos en tres lugares diferentes. O 40 % da produción ten lugar na planta A, o 25 % en B e o resto en C. Un control de calidade dinos que un 5 % dos paquetes elaborados en A, un 10 % dos de B e un 8 % dos de C conteñen algún ovo roto. Que probabilidade hai de que nos toque unha ducia de ovos con algún ovo roto?

14. Nun instituto con 300 alumnos estase estudando se a cualificación obtida en *Lingua Galega* ten que ver coa cualificación obtida en *Matemáticas*. Tras facer unha enquisa, obtéñense os seguintes resultados:

		Matemáticas		
		Sobresaliente	Notable	Outro
Lingua	Sobresaliente	110	25	18
	Notable	420	70	40
	OUtro	10	5	2

Elíxese un alumno ao chou. Cal é a probabilidade de que teña un sobresaliente en *Lingua*, se o tivo en *Matemáticas*?

Cal é a probabilidade de que teña un sobresaliente en *Matemáticas*, se o tivo en *Lingua*?

3. CÁLCULO DE PROBABILIDADES

15. Unha bolsa contén 9 bólas vermellas e 6 bólas negras. Extráese ao chou unha delas e substitúese por dúas doutra cor. Tras isto extráese unha segunda bóla. Que probabilidade hai de que a segunda bóla sexa vermella? Que probabilidade hai de que a segunda bóla sexa da mesma cor que a primeira?

16. No comedor escolar a probabilidade de que non haxa pasta unha semana é 1/3; a probabilidade de que haxa polo é 3/5 e a probabilidade de que haxa pasta e polo é 4/7. Calcula a probabilidade de que non haxa nin pasta nin polo. Calcula a probabilidade de que non haxa polo sabendo que houbo pasta.

17. Temos no peto moedas procedentes de 3 países: españolas (60 %), francesas (30 %) e alemás (o resto). O 30 % das moedas españolas e o 20 % das francesas son de 50 céntimos. Tamén sabemos que, do total de moedas, o 30 % son de 50 céntimos. Extráese unha moeda ao chou. Que probabilidade hai de que sexa unha moeda francesa de 50 céntimos? Que probabilidade hai de que sexa unha moeda de 50 céntimos, sabendo que é alemá?

18. Nunha clase hai 24 alumnos e 16 alumnas. Fórmanse equipos de traballo de 5 persoas. Calcula a probabilidade de formar un equipo nas seguintes condicións:

    a) Todos os participantes son do mesmo sexo.

    b) No equipo hai polo menos 3 mozas.

    c) No equipo hai exactamente 3 mozas.

    d) No equipo hai 3 estudantes dun sexo e 2 doutro.

19. Supón que se sortea ser delegado da túa clase polo método descrito antes. Quen tería máis probabilidade de saír? Hai alguén que non tería ningunha posibilidade? Faino cunha lista da túa clase.

20. Toma 2 cartolinas de cores, cada unha dunha cor distinta (por exemplo, vermella e azul) e recorta en cada unha delas 3 rectángulos do mesmo tamaño. Pega eses rectángulos entre si de modo que un sexa vermello-vermello, outro azul-azul e outro vermello-azul. Mete as 3 cartolinas así preparadas nun sobre e saca unha ao chou, con coidado de non amosar nada máis que un lado. Pregunta a un compañeiro que "*adiviñe*" a cor da cara que está oculta. Repite o proceso con todos os compañeiros. Escribe os resultados do experimento nunha táboa como esta que copies no teu caderno:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Oculto																														
Aposta																														
Sae																														
Acerta?																														

Que observas? É mellor dicir que a cor oculta é a mesma que a visible? Ou é peor?

EXERCICIOS E PROBLEMAS

1. Nunha clase hai 15 mozos e 18 mozas. Como non se presenta ninguén para ser delegado faise un sorteo. Cal é a probabilidade de que na clase haxa delegada?

2. No moedeiro temos 8 moedas de 1 céntimo, 3 moedas de 5 céntimos, 8 moedas de 10 céntimos e 5 moedas de 50 céntimos. Sacamos unha moeda ao chou, cal é a probabilidade de que a cantidade obtida sexa un número par de céntimos?

3. Nunha caixa temos mesturados 50 cravos de 2 cm de longo, 30 cravos de 3 cm, 35 cravos de 2.5 cm e 60 cravos de 3.5 cm. Sacamos ao chou un cravo da caixa (asúmese que todos os cravos teñen a mesma probabilidade de ser elixidos). Que probabilidade hai de que o cravo extraído teña a menor lonxitude?

4. Nun instituto de mil estudantes hai 700 que falan inglés, 400 que falan francés, 50 que falan alemán, 200 que falan inglés e francés, 30 que falan inglés e alemán, 10 que falan francés e alemán e 5 que falan os tres idiomas. Elíxese un estudante ao chou. Cal é a probabilidade de que fale soamente unha lingua estranxeira??

5. A ruleta francesa consta dos números que van do 0 ao 36. Se sae 0 gaña a banca. Decidimos apostar a "*par*" (gañaremos se sae un número par non nulo). Que probabilidade temos de gañar á aposta? E se apostamos a 7? E se apostamos a un número impar?

6. Unha bolsa contén 7 bólas brancas, 5 bólas vermellas e 3 bólas negras. Extráense dúas bólas ao mesmo tempo. Cal é a probabilidade de que sexan unha branca e unha negra?
7. Unha bolsa contén 10 bólas brancas, 9 bólas vermellas e unha bóla negra. Extráese unha bóla da bolsa. Despois sácase unha segunda bóla sen volver meter na bolsa a primeira. Cal é a probabilidade de que tras a segunda extracción teñamos unha bóla branca e unha bóla negra?
8. Unha bolsa contén 15 bólas brancas, 4 bólas vermellas e unha bóla negra. Extráese unha bóla da bolsa. Despois sácase unha segunda bóla, sen volver meter na bolsa a primeira. Cal é a probabilidade de que a primeira bóla sexa branca e a segunda negra?
9. Unha bolsa contén 15 bólas brancas, 4 bólas vermellas e unha bóla negra. Extráese unha bóla da bolsa. Tras mirar de que cor é introdúcese na bolsa de novo. Sácase unha segunda bóla. Cal é a probabilidade de que a primeira bóla sexa branca e a segunda negra?
10. Unha bolsa contén 15 bólas brancas, 4 bólas vermellas e unha bóla negra. Extráese unha bóla da bolsa. Tras mirar de que cor é introdúcese na bolsa de novo. Sácase unha segunda bóla. Cal é a probabilidade de que as dúas veces teña saído a bóla negra?
11. Unha bolsa contén 15 bólas brancas, 4 bólas vermellas e unha bóla negra. Extráese unha bóla da bolsa. Tras mirar de que cor é, introdúcese na bolsa de novo. Sácase unha segunda bóla. Cal é a probabilidade de que as dúas veces teña saído unha bóla branca?
12. Na lotería primitiva unha aposta consiste en marcar 6 casas de entre 49 posibles. O día do sorteo extráense 6 bólas (de entre 49). Cal é a probabilidade de que a túa aposta coincida coa combinación gañadora? Cal é a probabilidade de que acertes un número? E a de que acertes 2 números?
13. Repártense ao chou 5 cartas dunha baralla española. Cal é a probabilidade de que teñas 4 cartas do mesmo número?
14. Nunha xogada repártense 5 cartas. Cal é a probabilidade de conseguir tres ases e dous reis? Cal é a probabilidade de ter tres cartas iguais? E unha parella? E de ter tres cartas iguais e as outras dúas tamén iguais entre si?
15. Nunha xogada repártense 5 cartas. Chámase *escaleira de cor* unha xogada composta por 5 cartas do mesmo pau ordenadas consecutivamente. Calcula a probabilidade de obter unha escaleira de cor de trevos.
16. Nunha xogada repártense 5 cartas. Chámase *cor* unha xogada composta por 5 cartas do mesmo pau que non son consecutivas. Calcula a probabilidade de obter *cor* de trevos.
17. Considera o experimento aleatorio "mesturar unha baralla, cortar e mirar a cor das dúas cartas que quedaron arriba". Cal é a probabilidade de que ambas as dúas teñan a mesma cor?
18. Temos unha caixa con 12 bólas vermellas e 8 bólas brancas. Sácase unha bóla ao chou. Se é branca vólvese meter na caixa. Se é vermella déixase fóra. Nestas condicións sácase outra bóla da caixa. Que probabilidade hai de que esta bóla sexa vermella?
19. Nun caixón temos 10 calcetíns: 6 negros e 4 brancos. Sacamos, sen mirar, dous calcetíns do caixón. Que é máis probable, que sexan ambos da mesma cor ou que sexan de cores distintas?
20. Elabora unha árbore de probabilidades para calcular a probabilidade de obter *dobre parella* de ases e de treses nunha xogada de 5 cartas de póker. (*Dobre parella* consiste en 2 pares de cartas do mesmo valor, diferentes entre si, e unha carta indiferente, de valor distinto aos dous anteriores. Por exemplo, AA 33 Q).
21. No moedeiro teño 7 moedas dun céntimo, 4 de 5 céntimos, 6 de 10 céntimos, 5 de 20 e 7 de 50 céntimos. Saco 3 moedas ao chou. Cal é a probabilidade de que obteña un número impar de céntimos?
22. O 60 % dunha determinada poboación fuma, o 30 % é hipertenso, e o 12 % fuma e é hipertenso. Utiliza estas frecuencias para obter probabilidades e determina se ser hipertenso é dependente ou independente de fumar. Cal é a probabilidade condicionada de que unha persoa fumadora sexa hipertensa?
23. Un analista deportivo, que se equivoca o 10 % das veces, dixo que o noso equipo favorito vai gañar a liga. O analista da competencia, que se equivoca o 20 % das veces, dixo que o noso equipo favorito non vai gañar a liga. Á vista destas análises. Que probabilidade hai de que o noso equipo gañe a liga?
24. Unha compañía de produtos avícolas empaqueta ducias de ovos en tres lugares diferentes. O 60 % da produción ten lugar na planta A, o 30 % en B e o resto en C. Un control de calidade dinos que un 5 % dos paquetes elaborados en A, un 7 % dos de B e un 10 % dos de C conteñen algún ovo roto. Que probabilidade hai de que nos toque unha ducia de ovos con algún ovo roto?

25. Nun caixón teño un par de calcetíns vermellos, un par de calcetíns negros e un par de calcetíns brancos. Ao facer a maleta, coas présas, collo 3 calcetíns sen mirar. Que probabilidade teño de ter collido 2 da mesma cor?

26. Faise un estudo de consumo nunha poboación. Descóbrese que ao 70 % das persoas ás que lles gusta a marmelada de laranxa tamén lles gusta a de grosella e que ao 80 % das persoas ás que lles gusta a marmelada de grosella tamén lles gusta a de laranxa. Ao 40 % desa poboación non lle gusta nin a marmelada de laranxa nin a de grosella. Elíxese ao chou unha persoa desa poboación. Cal é a probabilidade de que lle gusten ambas as marmeladas?

27. Na lotería primitiva apóstanse 6 números de entre 49. Xogando a dúas apostas, cal é a probabilidade de que che toque un premio de 5 acertos máis complementario?

28. Nun instituto hai Bacharelato e Formación Profesional. En Bacharelato estudan 1/3 dos estudantes e o resto faino en Formación Profesional. A cuarta parte dos estudantes de Bacharelato e a sexta parte dos Formación Profesional utiliza un medio de transporte para ir ao instituto. O resto chega camiñando. Elíxese ao chou un estudante dese instituto. Que probabilidade hai de que vaia á clase utilizando un medio de transporte?

29. Un tafur xoga cunha baralla trucada de 40 cartas. Saca unha carta, míraa, volve metela na baralla e mestura. Repite este procedemento outras 2 veces máis. A baralla está preparada de tal modo que o feito de que unha das tres cartas vistas sexa unha figura ten unha probabilidade de 19/27. Cantas figuras ten a súa baralla?

30. Unha bolsa contén 10 bólas vermellas e 5 bólas negras. Extráese ao chou unha delas e substitúese por dúas da outra cor. Tras isto extráese unha segunda bóla. Que probabilidade hai de que a segunda bóla sexa negra? Que probabilidade hai de que a segunda bóla sexa da mesma cor que a primeira?

31. No comedor escolar a probabilidade de que non haxa patacas unha semana é 2/5; a probabilidade de que haxa peixe é 2/5 e a probabilidade de que haxa patacas e peixe é 1/10. Calcula a probabilidade de que non haxa nin patacas nin peixe. Calcula a probabilidade de que non haxa peixe sabendo que houbo patacas.

32. Nunha clase hai 20 alumnos e 10 alumnas. Fórmanse equipos de traballo de 6 persoas. Calcula a probabilidade de formar un equipo: a) con unicamente mozas, b) con 3 mozas, c) con unicamente mozos, d) con polo menos 3 mozas.

33. Aínda que pareza unha casualidade, por ter o ano 365 días, é moi probable que nunha clase de 35 alumnos haxa dous que celebren o seu aniversario o mesmo día. Calcula esta probabilidade. O mesmo se a clase ten 20 estudantes.

34. Utiliza a táboa para obter unha táboa de continxencia sobre os accidentes de tráfico:

	En estrada (C)	En zona urbana (U)	Total
Con vítimas (V)	34 092	32 295	66 387
Só danos materiais (D)	11 712	20 791	32 503
Total	45 804	53 086	98 890

Calcula P(V); P(D); P(C); P(U); P(V $\cap$ C); P(D $\cap$ U); P(U/V); P(V/U); P(V/C); P(C/V); P(C/D). Sábese que houbo un accidente na estrada, cal é a probabilidade de que tivese vítimas? Son independentes os sucesos do accidente con vítimas e accidente na estrada?

35. Realízanse estudos sobre unha determinada enfermidade e coñécese que a probabilidade de que unha persoa a teña é de 0.04. Unha determinada proba detecta se unha persoa está enferma cunha probabilidade de 0.97 pero tamén cualifica como enferma, en ocasións, a unha persoa sa cunha probabilidade de 0.01. Representa esta situación nun diagrama en árbore. Constrúe a táboa de continxencia asociada. Calcula a probabilidade de que unha persoa sa sexa detectada como enferma.

36. No control de calidade dun proceso de fabricación sábese que a probabilidade de que un circuíto sexa defectuoso é 0.02. Un dispositivo para detectar os defectuosos ten unha probabilidade de detectalos de 0.9 pero tamén cualifica como defectuosos a 0.03 dos correctos. Representa esta situación nun diagrama en árbore. Constrúe a táboa de continxencia asociada. Calcula a probabilidade de que un circuíto defectuoso sexa cualificado como correcto.

37. Nunha clase hai 25 alumnas e 15 alumnos e sábese que o 80 % das alumnas aproban as matemáticas mentres que as aproban o 60 % dos alumnos. Utiliza estas porcentaxes para asignar probabilidades e calcula a probabilidade que hai ao elixir unha persoa da clase ao chou de que:

a) Sexa alumna e aprobe as matemáticas.
b) Sexa alumna ou aprobe as matemáticas.
c) Sexa alumno e suspenda matemáticas.
d) Teña aprobado as matemáticas.

38. Estúdanse as familias de tres fillos. Para simplificar facemos a hipótese de que a probabilidade de mozo sexa igual á de moza. Calcula a probabilidade dos seguintes sucesos:
a) A = O primeiro fillo é moza.
b) B = polo menos hai un home.
c) $A \cup B$.
d) $A \cap B$.

39. Nunha bolsa hai 3 bólas verdes, 4 bólas vermellas e unha bóla branca. Sacamos dúas bólas da bolsa. Calcula a probabilidade dos sucesos: A = "algunha das bólas é verde", B = "saíu a bóla branca". Calcula tamén: $P(A^c)$, $P(B^c)$, $P(A \cup B)$ e $P(A^c \cap B)$. Son A e B sucesos incompatibles? Son sucesos independentes?

40. Dados os sucesos A e B de probabilidades: $P(A^c) = 3/5$; $P(A \cap B) = 1/8$; $P(B \cup A) = 3/4$; calcula as seguintes probabilidades: $P(A)$; $P(B)$; $P(B^c)$; $P(B/A^c)$; $P(A^c \cap B^c)$; $P(A/B)$. Son A e B sucesos independentes?

41. Determina se son compatibles ou incompatibles os sucesos A e B tales que:
a) $P(A) = 1/7$; $P(B) = 3/7$; $P(B \cup A) = 4/7$;
b) $P(A) = 1/5$; $P(B) = 0$;

42. Dados os sucesos A e B de probabilidades: $P(A^c) = 2/5$; $P(B) = 3/5$; $P(A^c \cap B^c) = 1/5$; calcula as seguintes probabilidades: $P(A)$; $P(B^c)$; $P(B \cup A)$; $P(B/A^c)$; $P(A \cap B)$; $P(A/B)$. Son A e B sucesos independentes?

43. Dous tiradores ao prato teñen unhas marcas xa coñecidas. O primeiro acerta cunha probabilidade de 0.8 e o segundo de 0.6. Lánzase un prato e ambos os dous disparan. Expresa mediante un diagrama de árbore e a táboa de continxencia asociada as distintas posibilidades. Calcula: a) Que probabilidade hai de que, polo menos, un dos tiradores dea no prato? b) Probabilidade de que ningún acerte? c) Sabemos que o disparo acertou no branco, cal é a probabilidade de que o fixera o primeiro tirador??

44. Disponse de dúas urnas A e B. A urna A ten 7 bólas verdes e 3 amarelas. A urna B ten 5 bólas verdes e 7 amarelas. Sácase unha bóla ao chou dunha das dúas urnas, tamén ao chou, e resulta ser amarela. Calcula a probabilidade de que sexa da urna B. (*Axuda*: Representa as posibilidades mediante un diagrama en árbore, escribe a táboa de continxencia asociada e o outro diagrama en árbore).

45. Sábese que, en certa poboación, a probabilidade de ser home e daltónico é un décimo e a probabilidade de ser muller e daltónica é 1/20. A proporción de persoas de ambos os sexos é a mesma. Elíxese unha persoa ao chou.
a) Calcular a probabilidade de que non sexa daltónico.
b) Se a persoa elixida é muller, calcular a probabilidade de que sexa daltónica.
c) Cal é a probabilidade de que a persoa elixida padeza daltonismo?

46. En certo instituto ofrécese informática e teatro como materias optativas. O grupo A consta de 35 estudantes e o B ten 30 estudantes. O 60 % do grupo A elixiu teatro, así como o 40 % do grupo B e o resto elixiu informática.
a) Se se pregunta a un estudante elixido ao chou, calcular a probabilidade de que teña elixido informática.
b) Se un estudante elixiu teatro, calcula a probabilidade de que pertenza ao grupo B.

47. Nunha baralla española de corenta cartas elimináronse varias cartas. Sábese que a probabilidade de extraer un as entre as que quedan é 0.1, a probabilidade de que saia unha copa é 0.3 e a probabilidade de que non sexa nin as nin copa é 0.6.
a) Calcular a probabilidade de que a carta extraída sexa as ou copa.
b) Calcular a probabilidade de que a carta sexa o as de copas. Pódese afirmar que entre as cartas que non se eliminaron está o as de copas?

48. Nunha cidade na que hai dobre número de homes que de mulleres, hai unha epidemia. O 10 % dos homes e o 5 % das mulleres están enfermos. Elíxese ao chou un individuo. Calcular a probabilidade de:
a) Que sexa home.
b) Que estea enfermo.
c) Que sexa home, sabendo que está enfermo.

AUTOAVALIACIÓN

1. Nunha bolsa hai 6 bólas negras e 3 bólas brancas, a probabilidade de sacar unha bóla negra é:

   a) 1/2 b) 2/3 c) 1/3 d) 5/9

2. Indica cal dos seguintes experimentos non é un experimento aleatorio:

   a) Tirar un xiz e anotar o número de anacos nos que rompe.

   b) Tirar un dado trucado e anotar o número da cara superior.

   c) Cruzar unha rúa e estudar se hai un atropelo.

   d) Calcular o consumo de gasolina dun coche.

3. O espazo dunha mostra de tirar 3 moedas ao aire e anotar se caen en cara (C) ou en cruz (X) con sucesos elementais equiprobables é:

   a) {CCC, CCX, CXX, XXX} b) {3C, 2C, 1C, 0C}

   c) {CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX} d) {CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC}

4. O suceso contrario a sacar polo menos unha cara no experimento anterior é:

   a) {XXX} b) {CCC, CCX, CXX} c) {CXX, XCX, XXC} d) {CCC, CCX, CXC, XCC}

5. Indica cal dos seguintes sucesos non son independentes:

   a) Sacar un ouro e sacar un rei con substitución.

   b) Tirar unha moeda e sacar cara e volver tirala e volver sacar cara.

   c) Tirar un dado e sacar 6 e volver tiralo e volver sacar 6.

   d) Tirar un dado e sacar un múltiplo de 2, e sacar un 6.

6. A probabilidade de non sacar un as nunha baralla de póker é:

   a) 4/52 b) 48/52 c) 36/40 d) 1 – 36/40

7. A probabilidade de que a suma das caras superiores sexa 7 do experimento tirar dous dados é:

   a) 1/6 b) 7/36 c) 5/36 d) 2/3

8. Nunha bolsa hai 7 bólas vermellas e 4 brancas. Sácase unha bóla ao chou e se é branca vólvese meter na bolsa, mentres que se é vermella déixase fóra. Sácase outra bóla da bolsa, a probabilidade de que sexa vermella é:

   a) 42/110 b) 28/121 c) 371/605 d) 411/605

9. Nunha bolsa hai 4 bólas vermellas e 3 brancas. Sacamos sen mirar dúas bólas. A probabilidade de que sexan da mesma cor é:

   a) 1/7 b) 2/7 c) 3/7 d) 4/7

10. Ao lanzar un dado saíu un número par, a probabilidade de que sexa un 6 é P (sacar 6/ a par):

    a) 1/3 b) 1/6 c) 2/5 d) 3/6

RESUMO

Concepto	*Definición*	*Exemplos*
Experimento aleatorio	O resultado depende do azar.	Tirar unha moeda ou un dado.
Suceso elemental	Cada un dos posibles resultados dun experimento aleatorio.	Cara ou cruz serían sucesos elementais no experimento “tirar unha moeda e observar o resultado”.
Espazo dunha mostra	Conxunto de casos posibles.	{cara, cruz}. {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
Suceso	Subconxunto do espazo dunha mostra.	{2, 4, 6}.
Lei de *Laplace*	Se os sucesos elementais son equiprobables entón $P(S)=\dfrac{\text{número de casos favorables ao suceso } S}{\text{número de casos posibles}}$	Ao tirar un dado: *P* (sacar 3) = 1/6. P (sacar múltiplo 2) = 3/6.
Combinatoria	Utiliza a combinatoria (combinacións, variacións, variacións con repetición…) para contar ben os casos favorables e os posibles.	A probabilidade de ter póker nunha baralla francesa é: $P(póker) = \dfrac{13 \cdot 12}{C_{52,2}}$
Diagrama en árbore	Problemas moi difíciles que podes resolver representando un diagrama en árbore.	
Suceso contrario	O suceso contrario de S (S^c) verifícase se non se verifica S. $P(S^C) = 1 – P(S)$.	Suceso contrario de sacar par é: {1, 3, 5} = 1 – 3/6 = 1/2.
Sucesos independentes	Dous sucesos son independentes se a probabilidade de que se verifique un, non queda afectada por que se teña verificado o outro.	A probabilidade de sacar un 3 ao tirar un dado e volver tiralo.
Intersección de sucesos	Se A e B son independentes: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. En xeral $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$.	Nunha baralla española a probabilidade de sacar dous ases é (4/40) · (3/39).
Probabilidade condicionada	$P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$	Probabilidade de sacar un as tendo xa sacado outro as sen substitución é 3/39.
Unión de sucesos	Se A e B son incompatibles $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. En xeral $P(A \cup B) = P(A) + P(B) – P(A \cap B)$.	Nunha baralla española a probabilidade de sacar un as ou ben un ouro é (4/40) + (10/49) – (1/40) = 13/40.