Matemáticas orientadas ás ensinanzas aplicadas

3ºB da ESO

Versión en galego

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

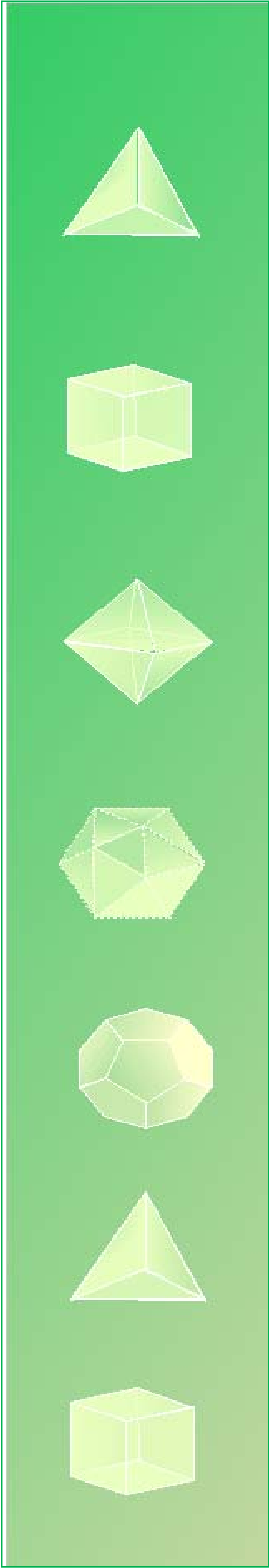
Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos

www.apuntesmareaverde.org.es

Textos Marea Verde

I.S.B.N. - 13: 978-84-697-0275-8

I.S.B.N. - 10: 84-697-0275-0



Matemáticas orientadas ás ensinanzas académicas

3º B da ESO
Capítulo 1:
Números Racionais

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Paco Moya
Revisora: María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Índice

0.CONVENCHE RECORDAR

0.1. PRIORIDADE DAS OPERACIÓNS

0.2. USO DE PARÉNTESES

0.3. OPERACIÓNS CON ENTEIROS

1. NÚMEROS RACIONAIS

1.1. DEFINICIÓN

1.2. FRACCIÓNS EQUIVALENTES

1.3. ORDENACIÓN DE FRACCIÓNS

1.4. REPRESENTACIÓN NA RECTA NUMÉRICA

1.5. OPERACIÓNS CON FRACCIÓNS

2. APROXIMACIÓNS E ERROS

2.1. REDONDEO

2.2. CIFRAS SIGNIFICATIVAS

2.3. ERRO ABSOLUTO E ERRO RELATIVO

3. FRACCIÓNS E DECIMAIS

3.1. EXPRESIÓN DECIMAL DUNHA FRACCIÓN

3.2. FORMA DE FRACCIÓN DUNHA EXPRESIÓN DECIMAL. FRACCIÓN XERATRIZ

4. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE FRACCIÓNS

Resumo

Neste capítulo imos recordar moitas das cousas que xa sabes de cursos anteriores, como as operacións con números naturais e enteiros, as operacións con fraccións e expresións decimais. Estudaremos os números racionais.

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

0.CONVENCHE RECORDAR

0.1. Prioridade das operacións

Cando non hai parénteses que nos indiquen que operación facer primeiro ou en operacións dentro dunha paréntese chegouse a un acordo para saber como actuar. Deste xeito:

1º Resólvense as parénteses interiores.

Se non hai parénteses ou dentro dunha paréntese faremos:

2º As potencias e as raíces.

3º As multiplicacións e as divisións.

4º As sumas e as restas.

Débense evitar:

Expresións do tipo 1 – 100 : 5 · 5, onde non está claro que hai que facer (a multiplicación e división teñen igual prioridade). Débense poñer parénteses para indicar cal facer primeiro. A expresión de arriba pode ser:

$$1 - (100 : 5) \cdot 5 = -99 \text{ ou ben } 1 - 100 : (5 \cdot 5) = -3.$$

De todas formas, se a encontras, farás:

5º Se hai varias operacións con igual prioridade faranse de esquerda a dereita.

Exemplos:

- $(5 - 7) \cdot 10 - 8$ **Non podemos facer 10 – 8** (en realidade si que podes, pero non debes)

Primeiro a paréntese ➔ $-2 \cdot 10 - 8$ Despois o produto ➔ $-20 - 8$ Por último a resta ➔ -28

- $10 - 2 \cdot 3^2 = 10 - 2 \cdot 9 = 10 - 18 = -8$. Aquí está prohibido facer 10 – 2 e facer 2 · 3.
- $3 \cdot (-2 + 4)^2 - 8 - 5 \cdot 2^2 = 3 \cdot 2^2 - 8 - 5 \cdot 4 = 12 - 8 - 20 = -16$
- -10^2 vale –100 xa que primeiro se fai a potencia e ademais o signo menos non está elevado a 2. Porén $(-10)^2$ si que vale +100.
- $-10^2 = -10 \cdot 10 = -100$
- $(-10)^2 = (-10) \cdot (-10) = +100$
- $\sqrt{9} \cdot 25 = 3 \cdot 25 = 75$. Primeiro faise a raíz.
- $10 - 9x$ **non é** $1x$ xa que non pode facerse a resta baixo ningún concepto.

Ten en conta que esta prioridade é **válida sempre**, para operacións con todo tipo de números ou outros obxectos (por exemplo: os polinomios). Merece a pena sabela, non?

0.2. Uso de parénteses

As parénteses indícannos as operacións que se teñen que facer primeiro. De feito o primeiro que faremos serán as **parénteses interiores** e seguiremos **de dentro cara a fóra**. É como vestirte: primeiro pos a camisola, logo o xersei e despois a cazadora. É complicado facelo ao revés. Por iso, antes de poñerte a calcular ao chou, mira toda a expresión para ver que se fai primeiro.

- Debe haber tantas parénteses abertas como pechadas, en caso contrario dise que "as parénteses non están ben balanceadas".
- Se algo multiplica a unha paréntese non é preciso poñer o símbolo "·".

Exemplos:

- $2 \cdot (2 - 2 \cdot (2 - 2 \cdot 2)) = 2 \cdot (2 - 2 \cdot (2 - 4)) = 2 \cdot (2 - 2 \cdot (-2)) = 2 \cdot (2 + 4) = 2 \cdot 6 = 12$
- $2(3 - 2) = 2 \cdot 1 = 1$
- $(2 - 3) \cdot (6 - 4) = -1 \cdot 2 = -2$
- Se queremos dividir entre 2 o resultado de facer 75 – 90 ***non poñeremos isto 75 – 90 : 2***, aquí o 2 só divide a 90. Escribiremos (75 – 90) : 2

As parénteses utilízanse para meter argumentos de funcións.

Por exemplo:

- Se nun programa ou na calculadora queremos facer a raíz de $100 \cdot 3^4$, escribiremos *raíz* ($100*3^4$).

0.3. Operacións con enteiros

Recordamos o máis importante:

Regra dos signos para a suma:

Suma	+	-
+	+	>
-	>	-

- A suma de 2 números positivos é positiva. ***Exemplo:*** +5 + 7 = +12
- A suma de 2 números negativos é negativa. ***Exemplo:*** –10 – 17 = –27

Ponse o signo –, e súmanse os seus valores absolutos.

Exemplo:

- Se perdo 10 e despois perdo outros 17, perdín 27.

A suma dun número positivo con outro negativo terá o signo do maior en valor absoluto.

Exemplo:

- $-7 + 15 = +8$; $+8 + (-20) = 8 - 20 = -12$

Ponse o signo do máis grande (en valor absoluto) e réstanse.

Exemplo:

- Se perdo 7 e despois gaño 15, gañei 8 (son maiores as ganancias cás perdas).

Exemplo:

- Se gaño 8 pero despois perdo 20, perdín 12 (son maiores as perdas).

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Regrados signos para a multiplicación (e a división):

- Positivo x Positivo = Positivo
- Positivo x Negativo = Negativo x Positivo = Negativo
- Negativo x Negativo = Positivo.

x	+	-
+	+	-
-	-	+

Exemplos:

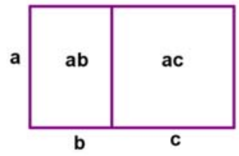
- +2 · (–7) = –14. Se recibo de herdo 2 débedas de 7 €, teño unha débeda de 14 €.
- –2 · (–7) = +14. Se me quitan 2 débedas de 7 €, gañei 14 €!

Agora algo de matemáticas serias, que xa estamos en 3º!

***Demostración* rigorosa de que "0 · *x* = 0 para todo *x*" e de que "(–1) · (–1) = +1"**

Para isto imos utilizar 4 propiedades dos números que coñeces:

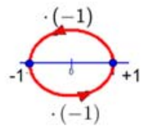
1ª) $a + 0 = a$ para todo número a (0 é o elemento neutro da suma)
2ª) **A propiedade distributiva: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$**
3ª) $1 \cdot a = a$ para todo número a (1 é o elemento neutro do produto)
4ª) $-a$ é o oposto de $+a$, é dicir $-a + a = a + (-a) = 0$



Demostramos "$0 \cdot x = 0$ para todo número x":

Como $a - a = 0$, pola propiedade distributiva: $x(a - a) = x \cdot 0 = xa - xa = 0$

Demostramos que "(–1) · (–1) = +1":



$(-1) \cdot (-1 + 1) = (-1) \cdot 0 = 0$; pero pola propiedade distributiva

$(-1) \cdot (-1 + 1) = (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = (-1) \cdot (-1) + (-1)$.

Logo $(-1) \cdot (-1) + (-1) = 0$.

Se sumamos 1 en ambos os membros: $(-1) \cdot (-1) + (-1) + 1 = +1 \Rightarrow (-1) \cdot (-1) + 0 = +1 \Rightarrow (-1) \cdot (-1) = +1$

Actividades resoltas

- *Calcula paso a paso*:

$$(((-15 - 5 \cdot (-20 - 6)) : (15 - 4^2)) + 5 - 4 \cdot 2) \cdot (-10)$$

Calculamos en primeiro lugar $-20 - 6 = -26$; $4^2 = 16$ e $4 \cdot 2 = 8$ e quédanos:

$(((-15 - 5 \cdot (-26)) : (15 - 16)) + 5 - 8) \cdot (-10) = (((-15 + 130) : (-1)) - 3) \cdot (-10) =$

$((115 : (-1)) - 3) \cdot (-10) = (-115 - 3) \cdot (-10) = -118 \cdot (-10) = +1\,180$

Actividades propostas

1. Calcula:

a) $-20 + 15$ b) $-2 \cdot (-20 + 15)$ c) $-20 : (10 - 2(-20 + 15))$ d) $(-80 - 20:(10-2(-20 + 15)))\cdot(3 - 2\cdot 3^2)$

2. Calcula:

a) $-10 + 20 : (-5)$ b) $(-10 + 20) : (-5)$ c) $-100 : ((-20) : (-5))$

d) $(-100 : (-20)) : (-5)$ e) $\sqrt{36} \cdot 4$

3. Calcula:

a) $3-(4\cdot 3-2\cdot 5)^2-(3-5)^3$ b) $5-3^2-2\cdot(-5)-(7-9)^2$

c) $7-2\cdot(3-5)^2+2\cdot(-3)+8-(-2)^2$ d) $2-(2\cdot 3-3\cdot 4)^2-(2-4)^3$

1. NÚMEROS RACIONAIS

1.1. Definición

Os **números racionais** son todos aqueles números que ***poden*** expresarse mediante unha fracción de números enteiros. É dicir, o número *r* é **racional** se $r = \frac{a}{b}$, con *a*, *b* números enteiros e *b*≠ 0.

Unha fracción é unha división indicada, así $\frac{7}{3} = 7:3$, pero a división non se realiza ata que o precisemos. Hai moitas ocasións nas que é mellor deixar as operacións indicadas.

Cun exemplo bastará:

- Proba facer a división 1.142857142857…: 8, difícil, non?, porén, $\frac{8}{7} : 8 = \frac{1}{7}$ é algo máis sinxela e ademais **exacta**.

O nome "racional" vén de "***razón***", que en matemáticas significa división ou cociente.

O conxunto dos números racionais represéntase por $\mathbb{Q}$.

Un número racional ten infinitas representacións en forma de fracción.

Así: $\frac{1}{3} = \frac{3}{9} = \frac{6}{18} = \ldots$ son infinitas fraccións que representan o mesmo número racional, chámaselles "**equivalentes**" pois teñen igual valor numérico. Se facemos as divisións no exemplo todas valen 0.333… que é a súa expresión decimal.

Os números "*enteiros*" son racionais pois poden expresarse mediante unha fracción, por exemplo $-2 = \frac{-8}{4}$

Todo número racional ten un representante que é a súa **fracción irredutible**, aquela que ten os números máis pequenos posibles no numerador e o denominador. A esta fracción chégase partindo de calquera outra dividindo o numerador e o denominador polo mesmo número. Se se quere facer nun só paso dividirase entre o Máximo Común Divisor (M.C.D.) do numerador e o denominador. Por exemplo: $\frac{60}{80} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ onde dividimos primeiro entre 10 e despois entre 2, pero podiamos ter dividido entre 20 directamente xa que 20 é o MCD (60, 80). Polo tanto $\frac{3}{4}$ é a fracción irredutible e por iso a que representa ao número racional que ten outras moitas formas de fracción como 60/80 = 6/8 = 30/40 = 12/16 = 9/12 = 15/20 = 18/24 = 21/28 = 24/32 = 27/36 … e por expresión decimal 0.75

1.2. Fraccións equivalentes

Dúas fraccións son equivalentes se se verifican as seguintes condicións (todas equivalentes):

- Ao facer a división obteremos a mesma **expresión decimal**. Esta é a definición.

Exemplo:

4 : 5 = 8 : 10 = 0.8 logo $\frac{4}{5}$ *e* $\frac{8}{10}$ son equivalentes e pode escribirse $\frac{4}{5}=\frac{8}{10}$.

- Os **produtos cruzados son iguais**: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$

É doado de demostrar, multiplicamos a ambos os lados do igual por *b* e por *d*

$\frac{a}{b} \cdot b \cdot d = \frac{c}{d} \cdot b \cdot d$, como *b* : *b* = 1 e *d* : *d* = 1 quédanos *a* · *d* = *c* · *b*.

Por exemplo:

- $\frac{12}{8}=\frac{6}{4}$ posto que 12 · 4 = 8 · 6 = 48.

- **Ao simplificar as fraccións chégase á mesma fracción irredutible.**

Se A = B e C = B á forza A = C.

Exemplo:

- $\frac{80}{60}=\frac{4}{3}; \frac{12}{9}=\frac{4}{3}\ logo\ \frac{80}{60}=\frac{12}{9}$

- **Pódese pasar dunha fracción a outra multiplicando (ou dividindo) o numerador e o denominador por un mesmo número.**

Exemplo:

$\frac{6}{4}=\frac{24}{16}$ xa que basta multiplicar o numerador e o denominador da primeira por 4 para obter a segunda.

En xeral $\frac{a}{b}=\frac{a \cdot n}{b \cdot n}$

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Redución a común denominador

Co obxecto de comparar 2 ou máis fraccións (ver cal é maior) e tamén para poder sumalas ou restalas é importante obter fraccións equivalentes que teñan o mesmo denominador.

Primeiro un ***exemplo*** e despois a teoría:

- Quero saber se $\frac{5}{6}$ é maior que $\frac{6}{7}$ sen facer a división. Buscamos un múltiplo común de 6 e de 7 (se é o mínimo común múltiplo mellor, pero non é imprescindible), 42 é múltiplo de 6 e de 7. Escribímolo como novo denominador para as 2 fraccións: $\frac{5}{6}=\frac{}{42};\frac{6}{7}=\frac{}{42}$

  Agora calculamos os novos numeradores: como o 6 o multipliquei por 7 para chegar a 42 pois o 5 multiplicámolo tamén por 7 para obter unha fracción equivalente $\frac{5}{6}=\frac{5\cdot 7}{6\cdot 7}=\frac{35}{42}$ e como o 7 o multipliquei por 6, o 6 tamén o multiplico por 6 obtendo $\frac{6}{7}=\frac{6\cdot 6}{7\cdot 6}=\frac{36}{42}$, agora está claro cal das 2 é maior, non?

Para obter fraccións equivalentes a $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ co **mesmo denominador** buscamos un múltiplo común de *b* e *d* (se é o mínimo común múltiplo mellor) que chamamos *m* e facemos $\frac{a\cdot\frac{m}{b}}{m}$ e $\frac{c\cdot\frac{m}{d}}{m}$

1.3. Ordenación de fraccións

Para ordenar unha serie de fraccións existen varios procedementos:

i) Facer as divisións e comparar as expresións decimais.

Este procedemento é o máis fácil pero non o máis rápido (agás que teñas calculadora).

Por exemplo: Pídennos que ordenemos de menor a maior as seguintes fraccións:

$$\frac{20}{19};\frac{21}{20};\frac{-20}{19};\frac{-21}{20};\frac{29}{30};\frac{28}{29}$$

Facemos as divisións que dan respectivamente: 1.0526…; 1.05; –1.0526…; –1.05; 0.9666… e 0.9655…Mirando os números decimais sabemos que:

$$\frac{-20}{19}<\frac{-21}{20}<\frac{28}{29}<\frac{29}{30}<\frac{21}{20}<\frac{20}{19}$$

Recorda que

Os números negativos son sempre menores cós positivos e ademais entre números negativos é menor o que ten maior valor absoluto (–4 < –3).

ii) Usar a lóxica e o seguinte truco: Para fraccións positivas $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d < b \cdot c$.

Exemplo: $\frac{8}{9} < \frac{10}{11}$ xa que 8 · 11 < 9 · 10.

Demostración:

8 · 11 < 9 · 10 $\Rightarrow \frac{8 \cdot 11}{9 \cdot 11} < \frac{9 \cdot 10}{9 \cdot 11} \Rightarrow \frac{8}{9} < \frac{10}{11}$; dividimos entre 9 · 11. E simplificado.

E ao revés: $\frac{8}{9} < \frac{10}{11} \Rightarrow \frac{8 \cdot 9 \cdot 11}{9} < \frac{10 \cdot 9 \cdot 11}{11} \Rightarrow 8 \cdot 11 < 10 \cdot 9$; multiplicamos por 9 · 11 e simplificado.

Non é preciso que uses a demostración, poñémola só para que vexas que en matemáticas "case" todo ten a súa explicación.

E o de usar a lóxica que é?

Empezamos polo máis fácil,

Exemplo: Comparar $\frac{20}{19}$ e $\frac{28}{29}$

$\frac{20}{19} > 1$ posto que 20 > 19. Pero $\frac{28}{29} < 1$ xa que 28 < 29. Está claro que a segunda é menor.

- Un pouco máis difícil, comparamos $\frac{20}{19}$ e $\frac{21}{20}$:

$$\frac{20}{19} = \frac{19+1}{19} = \frac{19}{19} + \frac{1}{19} = 1 + \frac{1}{19}$$

$\frac{21}{20} = \frac{20+1}{20} = \frac{20}{20} + \frac{1}{20} = 1 + \frac{1}{20}$. Pero, que é maior 1/19 ou 1/20?

É maior 1/19 e polo tanto é maior a primeira. Pensa que se dividimos unha pizza en 19 anacos iguais estes son maiores que se a dividimos en 20 anacos iguais.

Se a e b son positivos $\Rightarrow a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

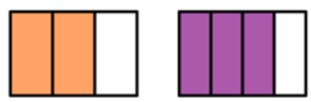
- Así que 1/3 > 1/4 por exemplo.

Máis difícil aínda:

- Comparamos $\frac{19}{20}$ e $\frac{18}{19}$. Agora 19/20 = 1 – 1/20 e 18/19 = 1 – 1/19.

Como 1/19 > 1/20 agora a fracción maior é 19/20 pois fáltalle menos para chegar a 1.

Con números máis sinxelos enténdese mellor: 2/3 < 3/4 pois a 2/3 fáltalle 1/3 para chegar a 1, e a 3/4 só 1/4.



2/3 < 3/4

Importante: Se a e b son positivos entón $a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

iii) Reducir a común denominador e comparar os numeradores:

- Pídennos que ordenemos de maior a menor as seguintes fraccións:

$$\frac{5}{6};\frac{7}{8};\frac{-9}{4};\frac{-7}{3};\frac{-2}{1}$$

Primeiro buscamos un número que sexa múltiplo de 6, de 8, de 4 e de 3 (se é o mínimo común múltiplo mellor que mellor). Atopamos o 24 que é múltiplo de todos eles. Poñémolo como novo denominador de todas as fracción se calculamos os novos numeradores para que as fraccións sexan equivalentes: 24 : 6 = 4 logo o 6 hai que multiplicalo por 4 para chegar a 24, facemos o mesmo co 5, 5 · 4 = 20 é o novo numerador. Así coas demais.

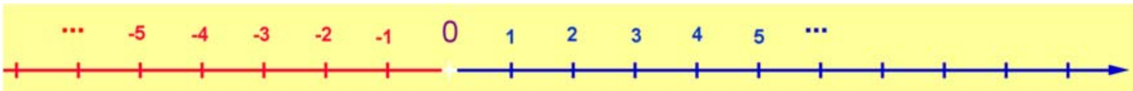
$$\frac{5}{6}=\frac{5\cdot 4}{6\cdot 4}=\frac{20}{24}$$
$$\frac{7}{8}=\frac{7\cdot 3}{8\cdot 3}=\frac{21}{24}$$
$$\frac{-9}{4}=\frac{-9\cdot 6}{4\cdot 6}=\frac{-54}{24}$$
$$\frac{-7}{3}=\frac{-7\cdot 8}{3\cdot 8}=\frac{-56}{24}$$
$$\frac{-2}{1}=\frac{-2\cdot 24}{1\cdot 24}=\frac{-48}{24}$$

Despois comparamos os numeradores e obtemos que:

$$\frac{7}{8}>\frac{5}{6}>-2>\frac{-9}{4}>\frac{-7}{3}$$

xa que 21 > 20 > –48 > –54 > –56

1.4. Representación na recta numérica



Esta é a recta numérica, nela todo número real ten un lugar exacto.

Recordamos cousas que xa sabes:

- Para debuxala só se poden tomar dúas decisións: onde colocamos o 0 e onde colocamos o 1, é dicir, onde está a orixe e cal é o tamaño da unidade.
- As unidades deben ser sempre do mesmo tamaño.
- Os números positivos van á dereita do 0 e os negativos á esquerda.
- O 0 non é nin positivo nin negativo.
- A recta numérica non ten nin principio nin fin. Nós só podemos debuxar unha “pequena” parte.
- Dados 2 números *a*, *b* cúmprese: ***a* < *b* se *a* está á esquerda de *b*** e viceversa.

Así por exemplo:

1 < 3; –1 < 1; –4 < –2

Todo número racional ten unha posición predeterminada na recta numérica. As infinitas fraccións equivalentes que forman un número racional caen no mesmo punto da recta. Así que 2/3 e 4/6, que son o mesmo número, caen no mesmo punto.

Vexamos como representar as fraccións de forma exacta.

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Fracción propia, fracción impropia e forma mixta

Fracción propia: Dise da fracción *a/b* onde ***a<b***. É dicir, o numerador é menor que o denominador.

Por exemplo:

- 4/5 ou 99/100.

Se $a < b$ ao facer a división **a expresión decimal será menor que 1**.

Por exemplo:

- 4/5 = 4 : 5 = 0.8.

Fracción impropia: Dise da fracción *a/b* onde ***a>b*, ** numerador maior que o denominador.

Exemplo:

- 15/4 ou 37/27. Se facemos a división **a expresión decimal é maior de 1.** 15/4 = 3.75 e 37/27 = 1.37037037…

Número mixto: As fraccións impropias poden escribirse como a suma dun número enteiro e dunha fracción propia.

Así por exemplo:

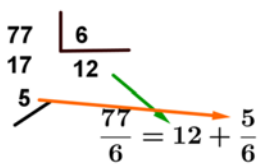
- $\frac{9}{5}=\frac{5+4}{5}=1+\frac{4}{5}$, esta última é a forma mixta.

En España non é frecuente, pero no mundo anglosaxón soe escribirse $1\frac{4}{5}$ que significa o mesmo.

A calculadora científica pasa á forma mixta, investígao.

A forma rápida e automática de escribir unha fracción en forma mixta é a seguinte:

- $\frac{77}{6}$ é impropia pois 77 > 6, para escribila en forma mixta facemos a división enteira 77 : 6, é dicir, sen decimais, interésannos o cociente e o resto.



O cociente é a parte enteira, o resto é o numerador da fracción e o divisor é o denominador.

É importante que o intentes facer de cabeza (cando sexa razoable), é doado, por exemplo:

- 47/6, buscamos o múltiplo de 6 máis próximo a 47 por abaixo, este é **7** · 6 = 42, polo tanto:

47/6 = 7 + 5/6

xa que de 42 a 47 van 5. Pénsao, se comemos 47/6 de pizza, temos comido 7 pizzas enteiras e ademais 5/6 de pizza.

Nota:

Tamén é doado calcular o cociente e o resto coa calculadora, por se tes présa.

Para 437/6, fai a división 437 : 6, obtés 72.83333…, a parte enteira é 72, só queda calcular o resto. Temos 2 camiños:

1º) Fas 437 – 72·6 =5 e listo.

2º) Multiplica a parte decimal polo divisor: 0.8333… · 6 = 5, que é o resto. Se é preciso redondea (0.8333 · 6 = 4.9998 que redondeamos a 5).

Só che permitimos facer isto se sabes por que funciona; se non o sabes, esquéceo.

Se a fracción é negativa procedemos da seguinte forma:

- $\frac{-19}{5} = -\left(3 + \frac{4}{5}\right) = -3 - \frac{4}{5}$, xa que a división dá 3 de cociente e 4 de resto.

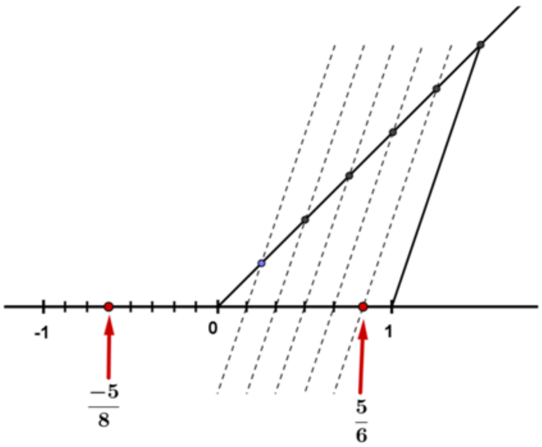
Representación de fraccións

a) Se a fracción é propia:

Por exemplo

- *Representa a fracción* 5/6: o valor está entre 0 e 1, polo tanto dividimos a primeira unidade en 6 partes iguais e tomamos 5.

Na figura indícase como facelo de forma exacta usando o ***Teorema de Tales***. Trazamos unha recta oblicua calquera que pase por 0, marcamos co compás 6 puntos a igual distancia entre si (a que sexa, pero igual). Unimos o último punto co 1 e trazamos paralelas a ese segmento que pasen polos puntos intermedios da recta oblicua (as liñas descontinuas). Estas rectas paralelas dividen o intervalo [0, 1] en 6 partes iguais.



Fíxate que para dividir en 6 partes iguais só hai que marcar 5 puntos intermedios a igual distancia, sempre un menos. Para dividir en 8 partes iguais marcamos 7 puntos intermedios.

Se a fracción é negativa faise igual pero no intervalo [–1, 0].

Na figura representamos –5/8, dividimos o intervalo [–1, 0] en 8 partes iguais e contamos 5 empezando no 0. Asegúrate de entendelo e, se non é o caso, pregunta. *Por certo, a frecha apunta ao punto e non ao espazo que hai entre eles.*

Se queremos representar a fracción propia *a/b* **divídese a primeira unidade en “*b*” partes iguais e cóntanse “*a*” divisións.**

No caso de ser **negativa** faise igual pero contando desde 0 cara á **esquerda.**

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

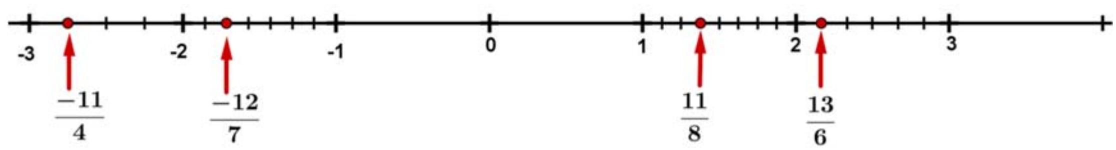
b) Se a fracción é impropia:

Actividades resoltas

- *Representamos* 13/6. O primeiro é escribila na súa forma mixta, $\frac{13}{6}=2+\frac{1}{6}$, agora é doado representala, imos ao 2, a unidade que vai do 2 ao 3 dividímola en 6 partes iguais e tomamos 1 (ver imaxe).
- Igual para $\frac{11}{8}=1+\frac{3}{8}$, imos ao 1 e a unidade que vai do 1 ao 2 dividímola en 8 partes iguais e tomamos 3.

Se a fracción é negativa procedemos así:

- *Representamos* $\frac{-12}{7}=-\left(1+\frac{5}{7}\right)=-1-\frac{5}{7}$, imos ao –1, a unidade que vai do –1 ao –2 dividímola en 7 partes iguais e contamos 5 cara á esquerda empezando en –1.
- *Representamos* $\frac{-11}{4}=-\left(2+\frac{3}{4}\right)=-2-\frac{3}{4}$, imos ao –2, dividimos en 4 partes iguais e tomamos 3, contando cara á esquerda e empezando en –2 (ver imaxe).



Actividades propostas

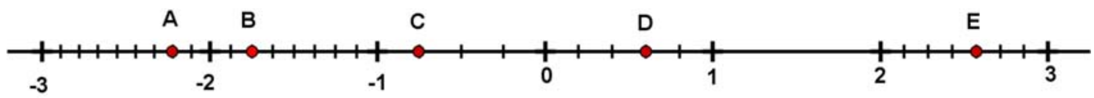
4. Pasa a forma mixta as seguintes fraccións: $\frac{50}{7};\frac{25}{11};\frac{101}{6}$

5. Pasa a forma mixta as fraccións: $\frac{-30}{7};\frac{-50}{13};\frac{-100}{21}$

6. Representa na recta numérica as fraccións: $\frac{1}{5};\frac{3}{7};\frac{-5}{8};\frac{-3}{4}$

7. Pasa a forma mixta e representa as fraccións: $\frac{23}{8};\frac{-23}{8};\frac{180}{50};\frac{-26}{6}$

8. Calcula as fraccións que corresponden cos puntos *A, B, C, D* e *E,* expresando en forma mixta e como fraccións impropias as representadas polos puntos *A, B* e *E*.



1.5. Operacións con fraccións

Imos repasar as operacións con fraccións, en concreto, a suma, a resta, o produto e a división.

Suma e resta de fraccións

A suma e a resta son as operacións máis esixentes pois só poden sumarse ou restarse cousas iguais. Non podemos sumar metros con segundos, nin € con litros. Da mesma forma **non poden sumarse terzos con quintos** nin cuartos con medios. É dicir, non se pode facer a suma $\frac{5}{6}+\frac{3}{4}$ así tal cal, xa que os sextos e os cuartos son de distinto tamaño. Pero, haberá algunha maneira de sumalas?, si.

O primeiro é calcular 2 fraccións equivalentes que teñan o mesmo denominador e entón xa se poderán sumar.

Vexamos o exemplo:

- Un múltiplo de 6 e 4 é 12. Escribimos 12 como novo denominador e calculamos os numeradores para que as fraccións sexan equivalentes:

  $\frac{5}{6}+\frac{3}{4}=\frac{5\cdot 2}{12}+\frac{3\cdot 3}{12}=\frac{10}{12}+\frac{9}{12}=\frac{10+9}{12}=\frac{19}{12}$, os doceavos xa se poden sumar e o resultado son doceavos.

Outro exemplo:

- $\frac{13}{6}-\frac{51}{10}+\frac{8}{12}=\frac{13\cdot 10}{60}-\frac{51\cdot 6}{60}+\frac{8\cdot 5}{60}=\frac{130-306+40}{60}=\frac{-136}{60}=\frac{-34}{15}$

Calculamos un múltiplo de 6, de 10 e de 12 (Se é o mínimo común múltiplo mellor que mellor), escríbese como denominador común e facemos 60:6= 10, logo o 13 multiplicámolo por 10, 60 : 10 = 6 logo o 51 multiplicámolo por 6, etc.

Cando todas as fraccións teñen igual denominador, súmanse ou réstanse os numeradores, deixando o mesmo denominador. Se é posible simplifícase a fracción resultante.

Nos casos nos que non sexa fácil calcular o mínimo común múltiplo, faise o seguinte:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{c\cdot b}{b\cdot d}=\frac{ad+cb}{bd}$$

Así por exemplo:

$$\frac{15}{387}+\frac{19}{155}=\frac{15\cdot 155+19\cdot 387}{387\cdot 155}=\frac{9\,678}{59\,985}=\frac{3\,226}{19\,995}$$

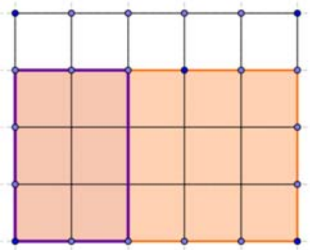
Produto e división de fraccións:

Sorprende que o produto e a división de fraccións sexan máis sinxelos que a suma e a resta.

Produto: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$, multiplícanse os numeradores entre si para obter o numerador da fracción produto e os denominadores entre si para determinar o denominador da devandita fracción. Doado, non?

Así:

$$\frac{3}{11}\cdot\frac{5}{7}=\frac{3\cdot 5}{11\cdot 7}=\frac{15}{77}$$



Por que as fraccións se multiplican así?

Non imos demostrar o caso xeral, cun exemplo bastará.

- $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}$ significa dividir en 4 partes iguais e coller 3 (as 3 franxas inferiores da figura). Agora debemos facer 2/5 do que nos quedou, esas 3 franxas dividímolas en 5 partes iguais e tomamos 2. Como se pode ver quédannos 6 partes iguais das 20 totais.

$$\frac{17}{15}\cdot\frac{5}{17}=\frac{\cancel{17}\cdot 5}{15\cdot\cancel{17}}=\frac{1\cdot\cancel{5}}{3\cdot\cancel{5}}=\frac{1}{3}$$

Ás veces convén facer a multiplicación con intelixencia:

- Antes de multiplicar fixámonos en que o 17 se pode simplificar (para que imos multiplicar por 17 e logo dividir por 17?) e despois o 5 xa que 15 = 3 · 5.

Outro exemplo:

- $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}$ faina, esperamos que chegues ao resultado correcto xa simplificado que é 1/6 ☺

Temos algo importante que dicirche, non queremos ver isto nunca, nunca:

$$\frac{\cancel{7}+3}{\cancel{7}+5}=\frac{3}{5}$$

é **absolutamente falso** (10/12 = 5/6 é o correcto). Só poden simplificarse se o número está multiplicando no numerador e no denominador (se é factor común).

Isto tampouco está **nada ben**.

$$\frac{\cancel{7}\cdot 2+3}{\cancel{7}\cdot 4+5}=\frac{2+3}{4+5}$$

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Fracción inversa:

A fracción inversa de $\frac{a}{b}$ é $\frac{b}{a}$ pois cúmprese que $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{ab}{ab}=1$ que é a definición de inverso.

Exemplos:

- A inversa de 3/4 é 4/3 e a inversa de 2 é 1/2.

División:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

Polo tanto para dividir multiplícase pola inversa da fracción que divide $\frac{6}{10}:\frac{9}{15}=\frac{6}{10}\cdot\frac{15}{12}=\frac{2\cdot 3\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 5\cdot 2\cdot 2\cdot 3}=\frac{3}{4}$

Tamén podes multiplicar e logo simplificar: $\frac{90}{120}=\frac{3}{4}$

Preguntarás se podes multiplicar en **X**, pois dependerá do teu profesor.

Casos curiosos:

- Dividir entre unha décima é multiplicar por 10 xa que a: $\frac{1}{10}=\frac{a}{1}\cdot\frac{10}{1}=10a$

Como caso xeral: dividir entre 1/*a* é multiplicar por *a*.

- Dividir entre un número é como multiplicar polo seu inverso: *a* : 2 = $a\cdot\frac{1}{2}=\frac{a}{2}$
- ***Torres de fraccións:*** Non te asustes se ves isto $\dfrac{\frac{6}{10}}{\frac{4}{15}}$, é moi fácil, é o mesmo que $\frac{6}{10}:\frac{4}{15}=\frac{3}{5}\cdot\frac{15}{4}=\frac{3\cdot 3\cdot 5}{5\cdot 4}=\frac{9}{4}$, non esquezas que "__" é o mesmo que ":"

Agora todo xunto.

Operacións combinadas.

Aplicaremos todo o que "sabemos" sobre prioridade e uso de parénteses.

Actividades resoltas

- *Calcula **paso a paso e simplifica**:*

$$\left(\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{6}\right)\right):\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{14}\cdot\frac{2}{3}\right)$$

Primeiro facemos as parénteses de dentro e a multiplicación da segunda paréntese que ten prioridade sobre a resta.

$$\left(\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{6}-\frac{4}{6}\right)\right):\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{7}\right)=\left(\frac{3}{4}-\left(\frac{-1}{6}\right)\right):\left(\frac{7}{14}-\frac{2}{14}\right)=$$

$$=\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{6}\right):\frac{5}{14}=\left(\frac{9}{12}+\frac{2}{12}\right):\frac{5}{14}=\frac{11}{12}\cdot\frac{14}{5}=\frac{154}{60}=\frac{77}{30}$$

A fracción como operador

a) Fracción dun número:

- Pídennos calcular as 3 cuartas partes de 120.

  Traducimos: calcular $\frac{3}{4}$ de 120. Este "de" tradúcese en matemáticas por un "por", logo:

$$\frac{3}{4}\ de\ 120 = \frac{3}{4}\cdot 120 = \frac{3\cdot 120}{4} = 3\cdot 30 = 90$$

En xeral $\frac{a}{b}\ de\ c = \frac{a}{b}\cdot c = \frac{ac}{b}$

b) Fracción dunha fracción:

Exemplos:

$$\frac{10}{6}\ de\ \frac{4}{15} = \frac{10}{6}\cdot\frac{4}{15} = \frac{40}{90} = \frac{4}{9}$$

- Calcula as dúas quintas partes das dez doceavas partes de 360.

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{10}{12}\cdot 360 = \frac{2\cdot 10\cdot 360}{5\cdot 12} = \frac{20\cdot 360}{60} = 20\cdot 6 = 120$$

c) Problema inverso:

- Dinme que as tres cuartas partes dun número valen 66. Que número é?

  Está claro que un cuarto será 66 : 3 = 22 e os 4 cuartos son 22·4 = 88.

  Resumindo $66\cdot\frac{4}{3}$ = 88

O caso xeral é: $\frac{a}{b}\cdot x = c \Rightarrow x = c\cdot\frac{b}{a}$, **multiplícase o número pola fracción inversa**.

Actividades propostas

9. Calcula as catro quintas partes das tres cuartas partes de 12.

10. As cinco sextas partes dun número son 100, que número é?

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

2. APROXIMACIÓNS E ERROS

Na vida cotiá e tamén nas Ciencias Aplicadas é preciso traballar con números aproximados.

Uns exemplos:

- Queremos comprar un terzo de metro de tea, temos que dicirlle ao dependente canto queremos e non imos ser tan idiotas como para dicirlle que nos dea 0.333… metros ou 33.333…cm que é o exacto. O normal é pedir 33 cm ou 333 mm se somos moi finos.
- Medimos un folio A4 coa regra e dános 29.7 cm, a regra chega aos mm. Queremos dividilo en 8 partes iguais, canto medirá cada parte? Se facemos 29.7 : 8 dános 3.7125 cm, pero a regra non chega a tanto, será mellor aproximar a 3.7 cm.
- Facemos un exame con 9 preguntas que valen todas igual. Temos 5 ben e as demais en branco. Que nota temos?, 10 · 5 / 9 = 5.555555556 segundo a calculadora. Poñémolas todas? Se o facemos estamos supoñendo que somos capaces de distinguir 1 parte de entre 10 000 millóns de partes iguais do exame. O razoable é 5.6 ou 5.56 se somos moi pero que moi precisos.
- Resulta curioso e debería ser delito que nas gasolineiras se anuncie: Prezo do gasóleo 1.399 €/litro. Se alguén vai e pide un litro exacto, ou 2 ou 15 non llo poden cobrar exactamente xa que non existen as milésimas de €! Deberían escribir 1.40 €/litro. É certo que desa maneira aforras 5 céntimos se botas 50 litros, pero a eles compénsalles o tema psicolóxico. A xente pouco culta en números ve 1.3 en lugar de 1.4.
- Exactamente o mesmo pasa nos supermercados: pescada 5.99 €/Kg. Son trucos baratos que unha mente adestrada sabe detectar e actuar en consecuencia. A diferenza entre 6 €/Kg e 5.99 €/Kg é que aforras 1 céntimo! Se compras 1 Kg. Se compras medio, canto aforras? Nada! 5.99:2 = 2.995 que redondeado é 3, que é o que cobran. Aínda que ben mirada, a oferta non está tan mal, se compras 5 Kg. de pescada aforras para mercar un caramelo, iso si, tes que comprar máis de medio Kg por vez.

Utilizar demasiadas cifras decimais sen estar seguro delas non é sinónimo de precisión senón de torpeza.

2.1. Redondeo

Lembrámosche como se redondean correctamente os números.

- Redondear π ás dez milésimas: π = 3.1415926535…, a cifra das dez milésimas é 5, como a cifra seguinte é 9 que é $\geq$ 5, sumámoslle 1 ao 5 e poñeremos $\pi \approx 3.1416$.

  Fíxate que π está máis preto de 3.1416 que de 3.1415.

- Redondear $\sqrt{2}$ ás centésimas: $\sqrt{2}$ = 1.41421356…, agora a cifra seguinte é 4 < 5 polo que a deixamos tal cal, $\sqrt{2} \approx 1.41$

A regra é: localizamos a cifra de redondeo, miramos a seguinte cifra (só a seguinte), se esta é menor que 5 deixamos a cifra de redondeo igual; se a cifra seguinte é 5 ou maior que 5 incrementamos en 1 a cifra de redondeo.

Máis exemplos:

Redondea

- 1.995 ás centésimas ➔ 2.00 e os ceros hai que escribilos para indicar onde redondeamos.
- 1 555 555 nos miles ➔ 1 556 000 onde hai que completar con ceros despois dos miles.
- 6.94999 nas décimas ➔ 6.9 só hai que mirar o 4.

Nota importante: Se o resultado dun problema son **€ redondearase sempre nos céntimos.**

Outra nota importante: Se queremos dar un resultado con 2 decimais nos pasos intermedios traballaremos con máis decimais, polo menos 3 ou 4, do contrario o resultado non terá a precisión que pretendemos, un exemplo:

- A = 9.65; B = 6.98 e C = 4.99. Queremos facer (A · B) · C^2. Se facemos A · B e redondeamos nas centésimas quédanos 67 . 36 e se agora multiplicamos por 4.99^2 = 24.90 sae 1 677.26.

  O resultado correcto é 1 677.20 onde só redondeamos ao final.

2.2. Cifras significativas

É o número de cifras "*con valor*" que se utilizan para expresar un número aproximado.

Uns cantos ***exemplos e*** xa o entendes:

- 2.25 ten 3 cifras significativas; 28.049 ten 5 cifras significativas.
- 5.00 ten 3; 4 000.01 ten 6;
- 10 000 non sabemos as cifras significativas que ten, pode ser 1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5. Téñennos que dicir en que cifra se aproximou. Para este último caso pode recorrerse á notación científica para dicir con precisión o número de cifras significativas, así:

  $1 \cdot 10^4$ ten unha cifra significativa, $1.0 \cdot 10^4$ ten 2 e así ata $1.0000 \cdot 10^4$ que ten 5.

Consideracións:

- As cifras **distintas** de 0 sempre son significativas.
- Os ceros á esquerda nunca son cifras significativas: 0.0002 ten unha cifra significativa.
- Os ceros no medio doutras cifras distintas de 0 sempre son significativos. 2 004 ten 4 cifras significativas.

Máis que o número de decimais a precisión dunha aproximación mídese polo número de cifras significativas.

Non deben utilizarse máis cifras das que requira a situación.

Actividades propostas

12. Copia esta táboa no teu caderno e redondea co número de cifras indicado

	Cifras significativas			
Número	1	2	3	4
$\sqrt{10}$				
1/7				
95 549	100 000			
30 000	$3\cdot 10^4$			
1.9995				2.000
20.55				

2.3. Erro absoluto e erro relativo

I.- Erro absoluto

Defínese o **erro absoluto** (EA) como EA = $\left| valor\ real - valor\ aproximado \right|$.

As barras verticais lense "valor absoluto" e significan que o resultado se dará sempre positivo.

Exemplo:

- Aproximamos 1/3 de litro por 0.33 litros.

$$\text{EA} = \left|\frac{1}{3} - 0.33\right| = 0.00333\ldots \approx 0.0033 \text{ litros.}$$

Outro exemplo:

- Aproximamos 16/6 Kg. con 2 cifras significativas (2.7 Kg.)

$$\text{EA} = \left|\frac{16}{6} - 2.7\right| = |-0.0333\ldots| \approx 0.033 \text{ Kg.}$$

- **Non deben poñerse demasiadas cifras significativas no erro absoluto, 2 ou 3 son suficientes.**
- **O erro absoluto ten as mesmas unidades que a magnitude que se aproxima.**

Estes erros son grandes ou pequenos? A resposta é, comparados con que?

Para iso defínese o erro relativo que si nos dá unha medida do grande ou do pequeno que é o erro absoluto.

II.- Erro relativo

Para comparar erros de distintas magnitudes ou números defínese o Erro Relativo (ER) como:

$$\text{ER} = \frac{EA}{\left|Valor\ real\right|}$$

que soe multiplicarse por 100 para falar de % de erro relativo.

Se non se coñece o valor real, substitúese polo valor aproximado (a diferenza normalmente é pequena).

Calculamos o erro relativo para os exemplos de arriba:

1º) $ER = \frac{0.0033}{1/3} = 0.0099 \Rightarrow 0.99\%$ de ER 2ª) $ER = \frac{0.033}{8/3} \approx 0.0124 \Rightarrow 1.2\%$ de ER

Agora si que podemos dicir que a 1ª aproximación ten menos erro que a 2ª, xa que o erro relativo é menor.

O **erro relativo** (ER) **non ten unidades e** por iso se poden comparar erros de distintas magnitudes ou con distintas unidades.

Que facer se non se coñece o valor exacto?

Neste caso non se pode calcular o erro absoluto, porén todos os aparellos de medida teñen un erro absoluto máximo.

- Balanzas de baño que miden de 100 g en 100 g. O seu erro absoluto máximo é de 50 g.
- Cronómetros que miden centésimas de segundo. O seu erro absoluto máximo será de 0.005 s, media centésima.
- Regras normais que miden mm. O seu erro absoluto máximo será de 0.5 mm = 0.05 cm = 0.0005 m

Isto recibe o nome de **cota de erro absoluto**.

Actividades resoltas

- Pésaste nunha báscula de baño e marca 65.3 Kg, o erro absoluto máximo é de 0.05 Kg (50 g)

  Agora pesamos un coche nunha báscula especial e pesa 1 250 Kg con erro absoluto máximo de 10 Kg. Que medida é máis precisa?

  Ti ➔ $ER \le \frac{0.05}{65.3} = 0.00077 \Rightarrow ER \le 0.077\%$ Coche ➔ $ER \le \frac{10}{1\,250} = 0.008 \Rightarrow ER \le 0.8\,\%$

É moito máis precisa a báscula de baño neste caso. Porén se na mesma báscula pesamos a un bebé e marca 3.1 Kg, o erro relativo sae menor ou igual que 1.6 % (próbao) e agora a medida da báscula de baño é moito menos precisa.

Así que o erro depende da precisión da máquina e da medida que fagamos con ela.

Actividades propostas

13. Proba que 123.45 con EA = 0.005 e 0.12345 con EA = 0.000005 teñen o mesmo ER.

14. Contesta Verdadeiro ou Falso e xustifica a túa resposta:
a) Para unha mesma máquina de medir o erro cometido é menor canto máis pequena sexa a medida.
b) Non se poden comparar erros relativos de distintas magnitudes.
c) Poñer prezos como 1.99 €/Kg é un intento de engano.
d) Comprar a 1.99 €/Kg fronte a 2 €/Kg supón un aforro.
e) Poñer moitas cifras nun resultado significa que un é un gran matemático.
f) A precisión mídese polo número de cifras decimais.

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

3. FRACCIÓNS E DECIMAIS

Imos ver como se pasa de fracción a decimal e de decimal a fracción.

3.1. Expresión decimal dunha fracción

Toda fracción ten unha expresión decimal que se obtén dividindo o numerador entre o denominador:

a/b = a : b.

Exemplos:

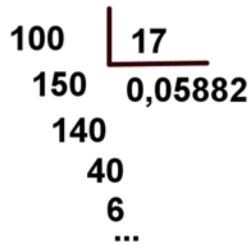
$$\frac{3}{25} = 0.12;\ \frac{68}{99} = 0.686868\ldots;\ \frac{91}{80} = 1.1375;\ \frac{177}{90} = 1.9666\ldots$$

Como podes observar unhas veces a expresión decimal é exacta (xa que o resto sae 0) e outras veces sae periódica, infinitos decimais entre os que se repite un bloque de cifras que se denomina período.

Sempre sae así, exacto o periódico?, ti mesmo contestarás cando leas o seguinte.

- Facemos 1/17 = 1:17 = 0.05882352941…, que son as cifras que amosa a calculadora, non parece ter período, pero será posible que si o teña pero que non o vexamos por ser moi longo?

Empezamos a facer a división:



Os restos obtidos son 10; 15; 14; 4; 6; …

Como sabes os restos son inferiores ao divisor e neste caso poden ser 1; 2; 3; 4; …; 15 ou 16, o 0 non pode saír, explicámolo despois.

Facemos agora 2 preguntas: que ocorre se volve saír o mesmo resto 2 veces?, ten á forza que repetirse algunha vez un resto?

A resposta á primeira pregunta é que se se repite un resto repetirase a cifra do cociente e a partir de aí repetiranse todas en forma de período.

A resposta á segunda pregunta é: Si, á forza, seguro que si! Se teño 16 posibles restos e supoñemos que saíron os 16 posibles xa, que ocorre ao sacar o seguinte?

Enténdelo mellor con caramelos. Teño moitos caramelos para repartir entre 16 persoas. Xa lle dei 1 caramelo a cada un, é dicir, todos teñen xa 1 caramelo. Dispóñome a repartir o seguinte, tocaralle a alguén que xa ten?

A isto chámaselle en matemáticas ***"Principio do Pombal"*** e é unha ferramenta moi potente. Busca algo sobre el.

- Meto 5 pelotas en 4 caixas, haberá algunha caixa con máis de 1 pelota?

Esperamos que o entenderas: **no peor dos casos** o resto número 17 ten que coincidir con algún dos anteriores, repetiranse as cifras do cociente e polo tanto a expresión decimal é periódica.

- Podes comprobar que efectivamente os restos son 10, 15, 14, 4, 6, 9, 5, 16, 7, 2, 3, 13, 11, 8, 12, 1, 10, …, o peor dos casos posibles, repítese o que fai o número 17. O normal é que se repita antes.

Por certo, que a división sae:

1 : 17 = 0.**0588235294117647**0588235294117647… un período de só 16 cifras!

Aínda que vimos un caso particular, esta é unha regra xeral:

A expresión decimal dunha fracción é exacta ou periódica.

O número de cifras do período de $1/n$ é menor ou igual que $n - 1$.

Cando sae exacta e cando periódica?

- Pois é fácil, dannos unha fracción como por exemplo $\frac{27}{150}$, primeiro simplificámola ata obter a irredutible: $\frac{27}{150} = \frac{9}{50}$, fixámonos só no denominador e descompoñémolo en factores primos, $50 = 5 \cdot 10 = 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 5^2$, como os factores primos son só 2 e 5 a expresión decimal é exacta.

Vexamos a razón:

- $2 \cdot 5^2$ é divisor de $2^2 \cdot 5^2 = 100$ unha potencia de 10. Cúmprese $\frac{2^2 \cdot 5^2}{2 \cdot 5^2} = 2 \Rightarrow \frac{1}{2 \cdot 5^2} = \frac{2}{100} = 0.02$, só resta multiplicar por 9 ➔ $\frac{9}{2 \cdot 5^2} = 0.02 \cdot 9 = 0.18$.

  Fíxate que o número de decimais é 2, o maior dos expoñentes de 2 e 5.

- Por exemplo $\frac{1}{2^4 \cdot 5^3} = 0.0005$ ten 4 cifras decimais pois o maior expoñente é 4.

En xeral $\frac{1}{2^n \cdot 5^m}$ ten expresión decimal exacta e o número de cifras decimais é o máximo entre n e m.

- O outro caso: $\frac{20}{42} = \frac{10}{21}$, descompoñemos o 21 en factores primos, $21 = 3 \cdot 7$, como hai factores distintos de 2 e 5 a expresión será periódica.

  Vexamos: Se a expresión fose exacta poderiamos escribir $\frac{10}{3 \cdot 7} = \frac{a}{10^n} \Rightarrow \frac{10 \cdot 10^n}{3 \cdot 7} = a$, con "$a$" un número enteiro. Pero isto non pode ser!, 10 só ten os factores 2 e 5 e os factores 3 e 7 non poden simplificarse. Como non pode ser exacta será periódica.

$$1.175 = \frac{1\,175}{1\,000} = \frac{47}{40}$$
$$20.68 = \frac{2\,068}{100} = \frac{517}{25}$$
$$3.1416 = \frac{31\,416}{10\,000} = \frac{3\,927}{1\,250}$$

Se no denominador dunha fracción irredutible aparecen factores primos distintos de 2 e de 5 a expresión decimal será periódica.

Actividades propostas

15. Sen facer a división indica se as seguintes fraccións teñen expresión decimal exacta ou periódica:

a) $\frac{21}{750}$ b) $\frac{75}{21}$ c) $\frac{11}{99}$ d) $\frac{35}{56}$

3.2. Forma de fracción dunha expresión decimal

$$1.175=\frac{1\,175}{1\,000}=\frac{47}{40}$$
$$20.68=\frac{2\,068}{100}=\frac{517}{25}$$
$$3.1416=\frac{31\,416}{10\,000}=\frac{3\,927}{1\,250}$$

Os números decimais exactos ou periódicos poden expresarse como unha fracción. A esta fracción chámaselle **fracción xeratriz**.

De decimal exacto a fracción:

É moi doado, mira os exemplos da dereita.

Pillaches o truco?

Para obter a fracción xeratriz ponse no numerador o número sen a coma e no denominador a unidade seguida de tantos ceros como cifras decimais ten. Simplifícase a fracción.

As persoas intelixentes comproban o que fixeron, divide 47 entre 40, se che dá 1.175 está ben!, e non fai falla que ninguén cho diga. ☺

De decimal periódico a fracción:

Antes de ver o método rigoroso imos xogar un pouco.

- Colle a **calculadora** e fai as seguintes divisións e anota os resultados decimais no teu caderno:

1:9; 2:9; 3:9; 8:9; 1:99; 13:99; 37:99; 98:99; 1:999; 123:999; 567:999; 998:999.

Nota:

Ao facer 6/9 a calculadora dá 0.6666666667, realmente é 6 periódico, a calculadora faino ben e redondea na última cifra.

Se observaches ben xa sabes escribir un montón de expresións decimais periódicas á súa forma de fracción, é dicir, sabes calcular a súa **fracción xeratriz**.

Por exemplo:

- 0.444… = 4/9;
- 0.333… = 3/9 = 1/3.
- 0.171717… = 17/99;
- 0.454545… = 45/99 = 5/11;
- 0.878787 = 87/99 = 29/33
- 0.337337337… = 337/999;
- 0.549549… = 549/999 = 61/111
- Como será 0.1234512345…?, pois 12345/99999 = 4115/33333

Así que xa o sabes, para ter un período de *n* cifras o denominador ten *n* noves.

- Pero o truco anterior non serve para 5.888…

Adaptámolo: 5.888… = 5 + 0.888… = $5+\frac{8}{9}=\frac{45}{9}+\frac{8}{9}=\frac{53}{9}$

- Segue sen servir para 0.7333…

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Facemos 0.7333... = 0.7 +0.0333... = $\frac{7}{10}+\frac{3}{9}:10=\frac{7}{10}+\frac{3}{90}=\frac{21}{30}+\frac{1}{30}=\frac{22}{30}=\frac{11}{15}$

Combinando os 3 trucos anteriores saen todos, pero non seguimos, deixamos que investigues ti. Nós imos explicar o método serio.

Outro exemplo:

- Pídennos expresar o número 7.3252525... á súa forma de fracción. O primeiro será poñerlle un nome, por exemplo, *N* = 7.3252525…; o segundo é **conseguir 2 números coa mesma parte decimal**.

  O ante período ten 1 cifra e o período 2. Para conseguir a mesma parte decimal multiplicamos por 1 000 e a coma vaise ata despois do primeiro período. Se multiplicamos por 10 a coma vaise para diante do primeiro período.

  $$\begin{array}{rl} 1000N = & 7325{,}25\cancel{25}\ldots \\ -\ 10N = & 73{,}25\cancel{25}\ldots \\ \hline 990N = & 7252 \end{array} \Rightarrow N = \frac{7252}{990} = \frac{3626}{495}$$

  Xa temos 2 números coa mesma parte decimal, se os restamos esta desaparece e podemos despexar *N*.

  Fíxate que a resta se fai nos 2 membros á vez.

Método formal:

Para obter a fracción xeratriz dunha expresión decimal multiplicamos o número pola potencia de 10 necesaria para levarmos a coma ao final do primeiro período, logo multiplicámolo outra vez para que a coma quede ao principio do primeiro período.

Outro exemplo e xa o entendes:

- *N* = 15.25636363…

  Como conseguir 2 números coa parte decimal .636363…?

  Pois o máis doado é 10 000*N* = 152 563.6363… e 100*N* = 1 525.6363…

  Restamos: 9 900*N* = 151 038 ➔ *N* = $\frac{151\,038}{9\,900}=\frac{8\,391}{550}$

  Estes son os casos máis difíciles (periódicos mixtos), cando non haxa ante período (periódico puro) só haberá que multiplicar unha vez posto que xa temos o período xusto despois da coma:

- *N* = 4.545454…

  100*N* = 454.5454…

  – 1*N* = 4.5454…

  99*N* = 450 ➔ *N* = $\frac{450}{99}=\frac{50}{11}$

Exemplos:

N	**10N –**	**1N =**	**9N**	
1.333…	**13.333…–**	**1.333…=**	**12**	**N=12/9**
N	**100N –**	**10N =**	**90N**	
5.6777…	**567.77…–**	**56.77…=**	**511**	**N =511/90**
N	**1000N –**	**100N =**	**900N**	
8.65888…	**8658.88…–**	**865.88…=**	**7 793**	**N = 7 793/900**

Por último, se che din que hai un truco para facer isto en segundos e sen quentar a cabeza, é certo. Haino. Coñecémolo. É unha regra que se esquece e polo tanto non vale para nada, non é razoada.

Actividades propostas

16. Pasa a fracción e simplifica:

a) 1.4142

b) 0.125

c) 6.66

17. Pasa a fracción e simplifica:

a. 1.41424142…

b. 0.125125…

c. 6.666…

18. Pasa a fracción e simplifica:

1) 1.041424142…

2) 0.7125125…

3) 6.7666…

19. Determina a fracción xeratriz de:

A. 0.333… + 0.666…

B. 0.888… · 2.5

C. 0.65 : 0.656565…

4.- RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE FRACCIÓNS

Vemos uns cantos exemplos:

i) Cantos litros hai en 80 botellas de 3 cuartos de litro cada unha?

O primeiro que debes facer é poñer un exemplo con números máis fáciles.

Teño 10 botellas cada unha de 2 litros. Está claro que temos 20 litros, que operación fixemos?, multiplicar?, pois o mesmo facemos cos números do problema:

$$\frac{3}{4}\,litros\big/_{botella}\cdot 80 botellas=\frac{3\cdot 80}{4}=60 litros$$

(Observa que botellas van con botellas e as unidades finais son litros).

ii) Cantas botellas de 3 oitavos de litro necesito para envasar 900 litros?

Novamente cambiamos os números por outros máis sinxelos: quero envasar 10 litros en botellas de 2 litros. Está claro que necesito 5 botellas (10:2).

Facemos o mesmo cos nosos números:

$$900 \text{ litros} : \frac{3}{8} \text{ litros/botella} = 900 : \frac{3}{8} = 900 \cdot \frac{8}{3} = 300 \cdot 8 = 2\,400 \text{botellas}$$

Fíxate que litros vai con litros e que as botellas que dividen no denominador ao final pasan multiplicando no numerador, polo que a unidade do resultado é “botellas”.

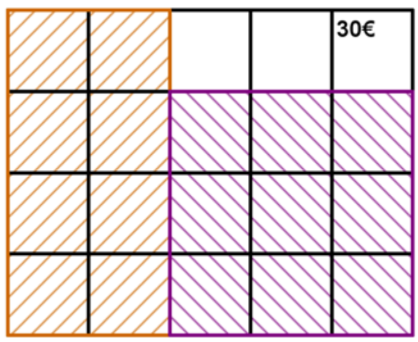
$$\frac{litros}{1}:\frac{litros}{botella}=\frac{litros\cdot botella}{litros}=botella$$

*iii) Uxía gaña certo diñeiro ao mes. Se gasta o 40 % del en pagar a letra do piso, o 75 % **do que lle queda** en facturas e lle sobran 90 € para comer. Canto gaña e canto gasta no piso e en facturas?*

O primeiro: 40 % = $\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$ e 75 % = $\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$

Facémolo de 2 maneiras e elixes a que máis che guste:

a) Método gráfico:



Facemos un rectángulo de 5x4 cadrados que son os denominadores.

Das 5 franxas verticais iguais quitamos 2 que é o que gasta na letra do piso.

O que queda está dividido en 4 partes iguais e quitamos 3 que é o que gasta en facturas. Quédannos 3 cadrados que son os 90 € da comida. Logo un cadrado é 90 : 3 = 30 €.

O que gaña é 30 · 20 = 600 €.

Na letra gasta **30 · 8 = 240 €** e en facturas **30 · 9 = 270 €**.

b) Con fraccións:

Se a unha cantidade lle quitamos os seus 2/5 quédannos 3/5 dela (1 – 2/5 = 5/5 – 2/5)

En facturas gastamos $\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}=\frac{9}{20}$

Se tiñamos 3/5 e gastamos 9/20 quédannos $\frac{3}{5}-\frac{9}{20}=\frac{12-9}{20}=\frac{3}{20}$ da cantidade inicial. Eses 3/20 dinnos que son 90 €. Polo tanto 1/20 serán 90 : 3 = 30 €.

A cantidade total son os 20/20 logo 30·20 = 600 €.

Na letra do piso gasto 2/5 de 600 = 1200:5= 240 € e en facturas 3/4 de(600 – 240) = 3/4 de 360 = 270 €.

En calquera caso os problemas compróbanse.

40% de 600 = 0.4 · 600 = 240 € gasta na letra.

600 – 240 = 360 € quedan.

75% de 360 = 0.75 · 360 = 270 € gasta en facturas.

360 – 270 = 90 € que lle quedan para comer. Funciona!

Teño	Quito	Quédame
1	2/5	3/5
3/5	3/4 de 3/5 = 9/20	3/5 – 9/20 = 3/20

iv) Unha pelota perde en cada bote 1 quinto da altura desde a que cae.

a) Cantos botes debe dar para que a altura acadada sexa inferior a 1 décimo da inicial?

b) Se despois do cuarto bote a súa altura é de 12.8 cm, cal era a altura inicial?

O primeiro é darse conta de que se perde un quinto da altura queda cos 4 quintos desta.

Polo tanto en cada bote a altura multiplícase por 4/5.

a) Temos que ver para que n se cumpre $\left(\frac{4}{5}\right)^n<\frac{1}{10}=0.1$

E isto facémolo probando coa calculadora: $\left(\frac{4}{5}\right)^{10}\approx 0.107>0.1$ pero $\left(\frac{4}{5}\right)^{11}\approx 0.0859<0.1$, logo fan falla 11 botes.

b) $\left(\frac{4}{5}\right)^4=\frac{256}{625}$ que é a fracción pola que se multiplicou a altura inicial.

$$\frac{256}{625}h=12.8\Rightarrow h=12.8\cdot\frac{625}{256}=31.25\ cm$$

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

v) A Mariana descóntanlle a quinta parte do seu soldo bruto en concepto de IRPF e a sexta parte do mesmo para a Seguridade Social. Se cobra 600€ netos, cal é o seu soldo bruto?

Sumamos as dúas fraccións xa que se refiren á mesma cantidade:

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{6+5}{30}=\frac{11}{30}$$

que é a parte que descontan do soldo bruto para ter o neto. Quédanlle $1-\frac{11}{30}=\frac{19}{30}$ da cantidade inicial.

Eses 19/30 dinnos que son 600 €.

Para calcular o soldo bruto facemos:

$$600\cdot\frac{30}{19}\approx 947.37\text{ €}.$$

Comprobación:

1/5 de 947.37 = 189.47 € paga de IRPF

1/6 de 947.37 = 157.90 € paga á S.S.

947.37 – 189.47 – 157.90 = 600 € que é o soldo neto. Ben!

Podería haber un pequeno desfase dalgún céntimo debido ás aproximacións.

CURIOSIDADES. REVISTA

Suma de infinitas fraccións

O sentido común diche que se sumamos infinitos números positivos a suma ten que ser infinita. Pois, non necesariamente!

Propoñémosche un reto, imos sumar $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots$ onde cada fracción é a metade da anterior.

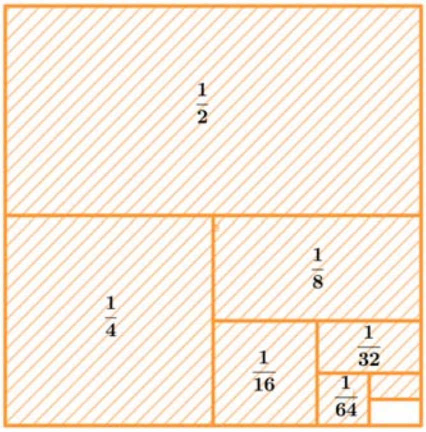
Os puntos suspensivos indican que isto non acaba nunca, en teoría deberiamos sumar e sumar e seguir sumando de forma indefinida. Na práctica non pode facerse, pero para iso están as matemáticas.

Colle a calculadora e empeza: 1:2 + 1:4 + 1:8 + 1:16 +1:32 + 1:64

Dáche 0.984375 ou se tes sorte 63/64, só falta 1/64 para chegar a 1!

Suma agora ao resultado anterior 1/128, obtemos 0.9921875 ou o que é o mesmo 127/128, só falta 1/128 para chegar a 1. Debes seguir, os seguintes números a sumar son 1/256, 1/512, 1/1024…

Se te fixaches achegámonos cada vez máis a 1. Vale, non imos chegar nunca, pero se quixeramos darlle un valor á suma infinita de arriba, cal lle darías?



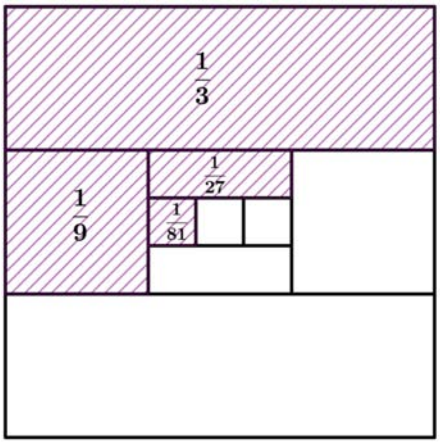
Os matemáticos danlle o valor 1.

Observa. Tes unha folla de papel cadrada de área 1. Córtala pola metade e deixas o anaco cortado enriba da mesa e o sen cortar na túa man. Volves cortar pola metade o anaco que tes na man e volves deixar enriba da mesa o anaco cortado. E segues, e segues… Sumas os anacos de papel que tes na mesa. Podería algunha vez sumar máis de 1? Non, evidentemente, son anacos dun papel de área 1. Algunha vez terías todo o papel enriba da mesa? Cada vez tes menos papel na man, e máis na mesa, pero ao cortar pola metade, nunca o terías todo. Porén os matemáticos din que no infinito esa suma vale 1.

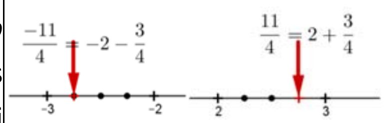
Agora temos unha pizza e imos comela de “terzos en terzos”, é dicir, primeiro 1/3, despois 1/3 de 1/3, logo 1/3 de 1/3 de 1/3, e así sucesivamente…

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\ldots=$$

Canto cres que vale esta suma?



RESUMO

Prioridade das operacións	1º Parénteses interiores, 2º Potencias e raíces, 3º Produtos e divisións, 4º Sumas e restas.	$10 - 5 \cdot (4 - 3\cdot 2^2) = 50$
Signo da suma	(+) + (+) = (+) súmanse, (–) + (–) = (–) súmanse. (+) + (–) = ? ten o signo do maior en valor absoluto.	–7/3 – 8/3 = –15/3 = –5 –12/5 + 8/5 = –4/5
Signo do produto e a división	Se teñen igual signo dá positivo. (+) · (+) = (–) · (–) = (+) Se teñen signo contrario dá negativo. (+) · (–) = (–) · (+) = (–)	–4 · (–10) = +40 +2 · (–15) = –30
Número Racional	Un número *r* é racional se pode escribirse como *r* = *a*/*b* con *a*, *b* enteiros e $b \neq 0$.	2; 3/8; –7/2 son racionais. Tamén 0.125 e 2.6777… $\sqrt{2}$ *e* π non o son.
Fracción irredutible	Obtense dividindo o numerador e o denominador polo mesmo número. Numerador e denominador son primos entre si.	360/840 = 3/7, a última é irredutible.
Fraccións equivalentes	Son equivalentes as fraccións que teñen igual expresión decimal. Dúas fraccións equivalentes representan ao mesmo número racional. Os seus produtos cruzados valen o mesmo.	$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{15}{20}$ = 0.75 son equivalentes. 3·20 = 4·15
Ordenación de fraccións	Pásanse a común denominador ou calcúlase o seu valor decimal ou úsase a lóxica e o truco *a*/*b*<*c*/*d*s e *ad*<*bc* para números positivos.	$\frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{9}{10}$ *ya que* $\frac{15}{20} < \frac{16}{20} < \frac{18}{20}$ Entre outros motivos
Representación	Se é preciso pásanse á forma mixta. Para *n* + *a*/*b* dividimos a unidade que vai de *n* a *n*+1 en *b* partes iguais e tomamos *a*. Para –*n* – *a*/*b* dividimos a unidade que vai de –*n* a –*n* – 1 en *b* partes iguais e contamos *a* empezando en –*n*.	
Suma e resta de fraccións	Pásanse a común denominador e súmanse (réstanse) os numeradores.	$\frac{5}{6} - \frac{7}{8} = \frac{20}{24} - \frac{21}{24} = \frac{-1}{24}$
Produto e división	*a*/*b* · *c*/*d* = *ac*/*bd* *a*/*b* : *c*/*d* = *a*/*b* · *d*/*c* = *ad*/*bc*	$\frac{2}{7} \cdot \frac{14}{6} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 7}{7 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$ $\frac{6}{5} : \frac{14}{10} = \frac{6}{5} \cdot \frac{10}{14} = \frac{6}{7}$
Fracción dun número	*a*/*b* de *x* = *a*/*b* ·*x* = (*ax*)/*b*	3/4 de 60 = 3/4 · 60 = 45 3/4 de 4/5 = 3/4 · 4/5 = 3/5
Cifras significativas	É o número de cifras “*con valor*” que se utilizan para aproximar un número.	0.025 ten 2 3.020 ten 4 3 000 non sabemos as que ten
Erros	Erro absoluto: EA = $\lvert valor\ real - valor\ aproximado \rvert$	$\frac{2}{3} \approx 0.7 \Rightarrow EA \approx 0.033$

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

	Erro relativo: ER = $\frac{EA}{\lvert Valor\ real \rvert}$ multiplícase por 100 para obter o % de ER.	$\Rightarrow ER \approx \frac{0.033}{2/3} \approx 0.050 \Rightarrow 5\ \%$
Fraccións e decimais	A expresión decimal dunha fracción sempre é exacta ou periódica. Exacta se o denominador só ten como factores primos o 2 ou o 5. Periódica no caso contrario.	3/40 = 0.075 exacta 5/12 = 0.41666... periódica
Paso de decimal a fracción	Expresión decimal exacta: divídese o número sen a coma entre a unidade seguida de tantos ceros como cifras decimais. Expresión decimal periódica: multiplícase *N* por potencias de *10* ata conseguir 2 números coa mesma parte decimal, réstanse e despéxase *N.*	3.175 = 3175/1000 = 127/40 *N* = 2.0333... 100*N* – 10*N* =183 90*N* = 183➔ *N* = 183/90 = 61/30.

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

EXERCICIOS E PROBLEMAS

1. Calcula paso a paso

(–5 + 4 · (–2) + 7) : (7 – (3 – 4) · (–1))

2. Ordena de menor a maior:

$$\frac{8}{9};\frac{-8}{9};\frac{4}{5};\frac{38}{45};\frac{77}{90};\frac{-9}{8}$$

3. Indica razoadamente que fracción é maior:

$$a)\ \frac{102}{101}\ e\ \frac{98}{99}\quad b)\ \frac{98}{99}\ e\ \frac{97}{98}\quad c)\ \frac{-102}{101}\ e\ \frac{-103}{102}$$

4. Demostra que 4.999… = 5

Xeneraliza: Canto vale *n*.999…?

5. Pasa a forma mixta: $\frac{16}{9};\frac{152}{6};\frac{-17}{5};\frac{-23}{4}$

6. Representa de forma **exacta** na recta numérica:

$$\frac{760}{240};\ 3.125;-\frac{46}{14};-2.1666\ldots$$

7. Simplifica:

$$a)\ \frac{2\cdot 7\cdot 15}{21\cdot 10}\quad b)\ \frac{10+6}{10-2}\quad c)\ \frac{2\cdot 3+4}{2\cdot 5+10}$$

8. Calcula a fracción que cae xusto no medio de 3/2 e 9/4 na recta numérica.

Pista: a media aritmética $\frac{a+b}{2}$

Representa as 3 fraccións na recta numérica.

9. A media harmónica defínese como H(*a*, *b*) = $\dfrac{1}{\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}}$, o inverso da media aritmética dos inversos.

a) Demostra que H(a, b) = $\frac{2ab}{a+b}$

b) Calcula $H\left(\frac{3}{2},\frac{11}{3}\right)$

10. Calcula a fracción inversa de $3+\frac{4}{5}:\frac{6}{10}$

11. Opera e simplifica: $\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{14}\cdot\frac{10}{12}\cdot\frac{7}{2}$

12. Resolve paso a paso:

$$\frac{\frac{3}{5}-\frac{2}{5}:\frac{4}{6}}{\frac{3}{5}:\left(\frac{1}{6}-2\right)}$$

13. Calcula as dúas terceiras partes da sexta parte do 80 % de 900.

14. Calcula o número tal que os seus catro terzos valen 520.

15. Cantos botes de tres oitavos de litro podo encher con 12 litros?

16. Calcula a fracción pola que hai que multiplicar 450 para obter 720.

17. Se 100 polgadas son 254 cm:

a) Calcula o longo en centímetros dunha televisión se a altura son 19.2 polgadas e longo/alto = 4/3

b) Igual pero agora longo/alto = 16/9.

18. Se nunha clase o 77.777… % dos alumnos aproban e hai máis de 30 alumnos, pero menos de 40, cantos alumnos son e cantos aproban?

19. Tres peregrinos deciden iniciar unha viaxe de 8 días. O primeiro deles achega 5 pans para o camiño, o segundo peregrino, 3 pans; e o terceiro non achega ningún pero promete pagarlles aos seus compañeiros ao final da viaxe o pan que coma. Cada un dos días que durou a viaxe, á hora de comer sacaban un pan da bolsa, dividíano en tres anacos e cada peregrino comía un anaco. Cando chegaron ao seu destino, o camiñante que non achegara ningún pan sacou 8 moedas e déullelas aos seus compañeiros: 5 moedas para o que puxera 5 pans e 3 moedas para o que contribuíra con 3 pans. Poderías explicar por que este reparto de moedas non é xusto? Cal sería o reparto xusto? (*Problema da Olimpíada de Albacete*! Débense ter en conta non os pans que un puxo senón o que realmente achega (o posto menos o comido)).

20. Aproxima os números 32 567 e 1.395 con 2 cifras significativas e di en cal se comete menor erro relativo.

21. π non pode representarse mediante una fracción de enteiros, pero podes calcular unha fracción que o aproxime con 5 cifras significativas?

22. Aproximamos π por:

$$3+\frac{1}{7+\frac{1}{16}}$$

a) Simplifica ata unha fracción impropia irredutible.

b) Calcula o erro absoluto e o erro relativo.

23. Cantas botellas de 3/4 de litro necesito para ter a mesma cantidade que en 60 botellas de 3/5 de litro?

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

24. Calcula un número enteiro de tal forma que: a súa metade, a súa terceira parte, a súa cuarta parte, a súa quinta parte, a súa sexta parte e a súa sétima parte sexan números enteiros.

25. Á unidade quítolle as súas 2 quintas partes. Por que fracción hai que multiplicar o resultado para chegar outra vez á unidade?

26. Calcula a fracción resultante:

a) Quito 1 terzo do que teño e logo engado 1 terzo do que queda.

b) Engado 1 terzo do que teño e despois quito 1 terzo do resultado.

27. Estás aburrido e decides xogar ao seguinte: Avanzas un metro en liña recta, retrocedes a metade, avanzas a metade do que retrocediches no último paso, retrocedes a metade do que avanzaches no último paso…

Se o fas moitas, pero que moitas veces, canto avanzas en total?

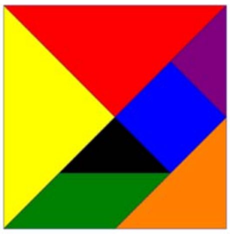
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\ldots=$$

28. Darío dá pasos de 3/5 de metro, o seu can Raio dá pasos de ¼ de metro. Se ambos os dous van a igual velocidade e Raio dá 360 pasos por minuto, cantos pasos por minuto dará Darío?

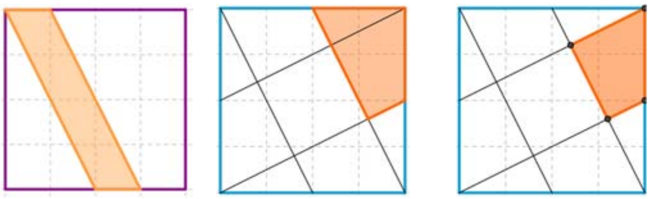
29. A figura do lado é un “*Tamgran*”.

a) Calcula a fracción que se corresponde con cada unha das 7 pezas.

b) Se o lado do cadrado é de 20 cm, calcula a área de cada peza.



30. Se o lado do cadrado é de 4 cm calcula a fracción e a área da zona coloreada:



31. Calcula*:*

a) $\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}:\frac{1}{3}\right)^2+\left(2-\frac{1}{2}\right)^2$ b) $\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{3}{2}:\frac{3}{4}\right)^3+\left(2-\frac{3}{2}\right)^2$ c) $\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}:\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-1\right)^3$

AUTOAVALIACIÓN

1. Sabes operar con números enteiros, coñeces a prioridade das operacións e o uso das parénteses. Resolve paso a paso:

$$(-8-7\cdot(-4+6):(2+(-3))+5-4\cdot 2^2)\cdot(-2)$$

2. Sabes obter fraccións equivalentes. Ordena de **maior a menor**:

$$\frac{5}{6};\frac{7}{8};\frac{-7}{8};\frac{-5}{6};\frac{-5}{4}$$

3. Sabes representar fraccións de forma exacta na recta numérica. Representa:

$$\frac{3}{4};\frac{17}{6};\frac{-11}{7};-0.125$$

4. Sabes operar con fraccións. Resolve paso a paso e simplifica:

$$\frac{\frac{2}{3}-\frac{5}{6}:\left(2-\frac{11}{3}\right)}{\frac{2}{6}}$$

5. Sabes calcular a fracción dun número e a fracción dunha fracción.
a) Calcula as catro quintas partes dos cinco oitavos de 360.
b) Unha botella ten cheas as súas sete oitavas partes. Se contén 840 cm^3, canto lle cabe chea?

6. Sabes redondear e calcular o erro relativo cometido. Aproxima os números 9.859 e 9.945 con 2 cifras significativas e calcula os erros relativos cometidos (en %), cal é menor?

7. Sabes distinguir cando unha fracción ten unha expresión decimal exacta.

a) Di cales das seguintes fraccións teñen expresión decimal exacta e cales periódica:

$$\frac{6}{120};\frac{5}{180};\frac{42}{210}$$

b) Cantos decimais ten $\frac{1}{2^{10}\cdot 5^6}$?

c) Cantas cifras como máximo pode ter o período de 1/97?

8. Sabes pasar de decimal a fracción. Pasa a fracción e simplifica:

a) 2.225 b) 2.2252525... c) $\frac{0.125}{0.125125125\ldots}$

9. Sabes resolver problemas mediante fraccións.

Unha medusa medra cada semana un terzo do seu volume.

a) Cantas semanas deben pasar para que o seu volume se multiplique por máis de 3?

b) Se o seu volume actual é de 1.200 cm^3, cal era o seu volume hai 3 semanas?

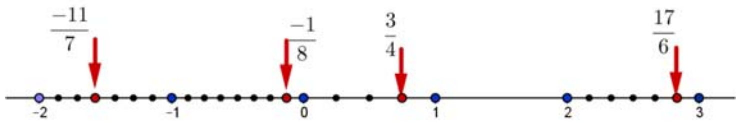
10. A un traballador báixanlle o soldo a sexta parte, do que **lle queda** o 25 % vai destinado a impostos e por último do resto que **lle queda** as dúas quintas partes gástaas en pagar a hipoteca do piso. Se aínda ten dispoñibles 450 €, canto cobraba antes da baixada de soldo?, canto paga de impostos e de hipoteca?

Solucións:

1) 10.

2) $\frac{7}{8} > \frac{5}{6} > \frac{-5}{6} > \frac{-7}{8} > \frac{-5}{4}$.

3)



4) $\frac{7}{2}$.

5) a) 180;

b) 960 cm^3.

6) 9 859 : 9 900 ➔ EA = 41 ➔ ER = 0.42 %.

9.945: 9.9 ➔ EA = 0.045 ➔ ER = 0.45 %, é un pouco menor o primeiro.

7) a) Primeiro simplifícanse, son exactas 6/120 e 42/150. 5/180 ten expresión decimal periódica.

b) 10 cifras decimais.

c) 96 cifras (de feito tenas).

8) a) $\frac{89}{40}$

b) $\frac{2\,203}{990}$

c) $\frac{999}{1\,000} = 0.999$

9) a) 4 semanas.

b) 506.25 cm^3.

10) Cobraba 1 200 €. Agora cobra 1 000 €, paga 250 € de impostos e 300 € de hipoteca.

Matemáticas orientadas ás ensinanzas académicas

3º B da ESO

Capítulo 2: Potencias e raíces

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Nieves Zuasti

Revisor: Sergio Hernández

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Índice

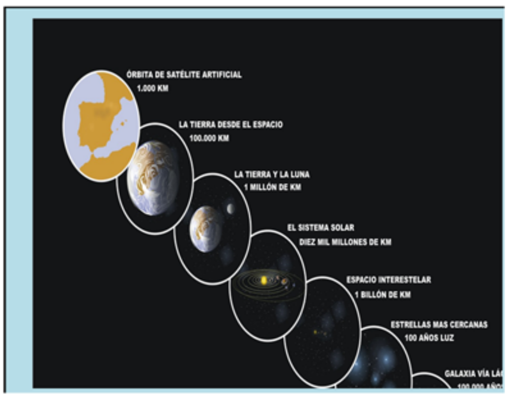
1. OPERACIÓNS CON POTENCIAS
1.1. PRODUTO DE POTENCIAS
1.2. COCIENTE DE POTENCIAS
1.3. POTENCIA DUN PRODUTO
1.4. POTENCIA DUN COCIENTE
1.5. POTENCIA DOUTRA POTENCIA

2. POTENCIAS DE NÚMEROS RACIONAIS
2.1. POTENCIAS DE BASE RACIONAL E EXPOÑENTE NEGATIVO
2.2. PRODUTO DE POTENCIAS DE BASE RACIONAL
2.3. COCIENTE DE POTENCIAS DE BASE RACIONAL
2.4. OPERACIÓNS COMBINADAS CON POTENCIAS

3. NOTACIÓN CIENTÍFICA
3.1.NÚMEROS GRANDES E NÚMEROS PEQUENOS
3.2. OPERACIÓNS CON NOTACIÓN CIENTÍFICA

4. RAÍCES
4.1. RADICAIS DE ÍNDICE CALQUERA
4.2. POTENCIAS DE EXPOÑENTE FRACCIONARIO
4.3. EXTRACCIÓN DE FACTORES DUN RADICAL
4.4. OPERACIÓNS CON RADICAIS
4.5.OPERACIÓNS COMBINADAS
4.6. RAÍCES CADRADAS

Resumo



Neste capítulo utilizamos os grandes números, as potencias, que nos permiten describir de maneira máis fácil a inmensidade do Universo, expresar as súas distancias, a masa dos corpos celestes, o número de galaxias, estrelas e planetas.

Tamén nos fixaremos nos pequenos números. O mundo microscópico expresado en forma de potencia de expoñente negativo.

Utilizaremos a notación científica para grandes e pequenos números.

Repasaremos as operacións con potencias de expoñente un número natural introducindo as potencias con expoñentes negativos e racionais. Xa coñecemos as potencias de base un número natural, agora usaremos as mesmas ideas utilizando bases de números negativos e racionais. Xa coñeces os radicais, agora veremos que un radical é unha potencia de expoñente un número fraccionario e que podemos utilizar as propiedades das potencias con eles.

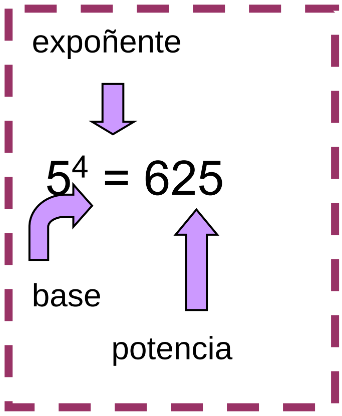
Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

1. OPERACIÓNS CON POTENCIAS

Recorda que a **potencia** a^n de base un número natural a e expoñente natural n é un produto de n factores iguais á base:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \ldots^{n \text{ factores}} \ldots \cdot a \quad (n > 0)$$

O factor que se repite é a **base** e o número de veces que se repite é o **expoñente**. Ao resultado chámaselle **potencia.**



Xa coñeces as propiedades das operacións con potencias que imos repasar. Neste capítulo veremos que se o expoñente ou se a base é un número negativo ou fraccionario, esas propiedades mantéñense.

Recorda:

$a^0 = 1$

$1^m = 1$

$(-1)^m = 1$ m par

$(-1)^n = -1$ n impar

$0^n = 0$

$a = a^1$

1.1. Produto de potencias

Coa mesma base

O produto de potencias da mesma base é outra potencia coa mesma base e de expoñente a suma dos expoñentes.

$$b^m \cdot b^n \cdot b^p = b^{m+n+p}$$

Exemplo:

$(-5)^4 \cdot (-5)^{-3} \cdot (-5)^2 \cdot (-5)^{-6} = (-5)^{4+(-3)+2+(-6)} = (-5)^{-3} = 1/(-5)^3 = 1/-125$

Co mesmo expoñente

O produto de potencias co mesmo expoñente é outra potencia cuxa base se calcula multiplicando as bases elevadas ao mesmo expoñente.

$$a^m \cdot b^m \cdot c^m = (a \cdot b \cdot c)^m$$

Exemplo:

$(-3)^2 \cdot (5)^2 \cdot (-1)^2 \cdot (-4)^2 = [(-3) \cdot (5) \cdot (-1) \cdot (-4)]^2 = (+60)^2 = 3\,600$

1.2. Cociente de potencias

Coa mesma base

O cociente entre dúas potencias da mesma base é outra potencia coa mesma base e o seu expoñente calcúlase restando os expoñentes.

$$c^m : c^n = c^{m-n}$$

Exemplo:

$(-12)^7 : (-12)^2 = (-12)^{7-2} = (-12)^5$

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Co mesmo expoñente

Para dividir potencias co mesmo expoñente divídense as bases e o resultado elévase ao mesmo expoñente.

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Exemplo:

$18^4 : 3^4 = (18/3)^4 = 6^4$

Exemplo:

$(5)^3 : (–14)^3 = (5/–14)^3$

Potencias de expoñente enteiro negativo

Unha potenciade base real $a \neq 0$ e expoñente natural $n < 0$ é o inverso da mesma con expoñente positivo.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

A expresión a^{-n} pode ser o resultado de dividir dúas potencias da mesma base. Xa que:

$a^x : a^y = a^{x-y}$ se $x < y$ $(x - y) < 0$.

Exemplo:

$6^3 : 6^8 = 6^{3-8} = 6^{-5} = 1/6^5$

1.3. Potencia dun produto

A potencia dun produto pode calcularse realizando primeiro o produto e elevando o resultado á devandita potencia ou ben elevando cada un dos factores á devandita potencia e realizando despois o produto.

$(a \cdot b \cdot c \cdot d)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n \cdot d^n$

Exemplo:

$[(–2) \cdot (+5) \cdot (–4)]^3 = (+40)^3 = +64\,000 = (–2)^3 \cdot (+5)^3 \cdot (–4)^3 = (–8) \cdot (+125) \cdot (–64) = +64\,000$

1.4. Potencia dun cociente

A potencia dun cociente pode calcularse efectuando primeiro o cociente e elevando o resultado á devandita potencia. Ou ben elevar o dividendo e o divisor á potencia e despois efectuar o cociente.

$(a : b)^m = a^m : b^m$

Exemplo:

$[(5) : (—4)]^2 = (5/—4)^2 = (—1.25)^2 = +1.5625 = (5)^2 : (—4)^2 = 25 : 16 = 1.5625$

1.5. Potencia doutra potencia

Ao elevar unha potencia a outra potencia obtemos unha potencia coa mesma base e cuxo expoñente é o produto dos expoñentes:

$((d)^m)^n = d^{m \cdot n}$

Exemplo:

$((—5)^3)^6 = (—5)^{3x6} = (—5)^{18}$

Actividades resoltas

- Cóntase que o inventor do xadrez llo amosou ao rei Shirham da India que se entusiasmou tanto que lle ofreceu regalarlle o que quixera. O inventor pediulle un gran de trigo para a primeira casa, dous para a segunda, 4 para a terceira e así duplicando a cantidade en cada casa. Cantos grans de trigo habería que poñer na derradeira casa, na 64?

Observamos que o número de grans de trigo da casa n é 2^{n-1} polo que debemos calcular 2^{63}. Calculamos $2^2 = 4$. Logo:

$(2^2)^2 = 2^4 = 16$

$((2^2)^2)^2 = 2^8 = 16 \cdot 16 = 256$

$(((2^2)^2)^2)^2 = (2^8)^2 = 2^{16} = 256 \cdot 256 = 65\,536$

$((((2^2)^2)^2)^2)^2 = (2^{16})^2 = 2^{32} = 65\,536 \cdot 65\,536 = 4\,294\,967\,296$

$(((((2^2)^2)^2)^2)^2)^2 = (2^{32})^2 = 2^{64} = 4\,294\,967\,296 \cdot 4\,294\,967\,296 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616$

E agora para calcular 2^{63} podemos dividir potencias da mesma base:

$2^{63} = 2^{64}/2 = 9\,223\,372\,036\,854\,775\,808$ grans de trigo. Un número enorme e difícil de manexar.

Para calcular o número total de grans de trigo observamos que a suma de grans ata a casa n é 2^n polo que entón debemos calcular 2^{64} que estimando 1 200 grans por kg dan pouco máis de 15 billóns de Tm e iso corresponde á produción mundial de 21 685 anos. Imposible que o rei tivese tanto trigo!

Actividades propostas

1. Determina o signo das potencias:

$(-1)^9$ $(5)^{12}$ $(-12)^{-5}$ $(8)^{-4}$

1. Expresa en forma dunha única potencia:

$(-7)^3 \cdot (-7)^5 \cdot (-7)^2 \cdot (-7)^6$

$(3)^2 \cdot (3)^7 \cdot (3) \cdot (3)^4 \cdot (3)^3$

2. Expresa en forma de potencia:

$(-6)^4 \cdot (4)^4 \cdot (-1)^4 \cdot (-5)^4$

3. Expresa en forma de potencia:

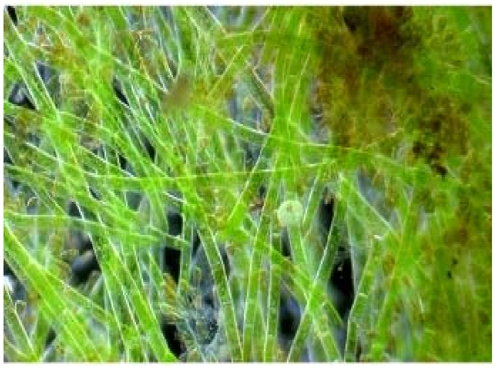
$(-8)^9 : (-8)^3$ $(-3)^2 : (-3)^7$

4. Expresa en forma de potencia:

$(+75)^4 : (-3)^4$ $(-5)^8 : (8)^8$

5. Expresa en forma de potencia: $((-2)^5)^6$ $((7)^3)^{-5}$

Alga marina (fotografía microscópica)



Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

2. POTENCIAS DE NÚMEROS RACIONAIS

A potencia dun número racional é outro número racional cuxo numerador e denominador quedan elevados a esta potencia.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Exemplo:

$$\left(\frac{-2}{5}\right)^4 = \left(\frac{-2}{5}\right)\cdot\left(\frac{-2}{5}\right)\cdot\left(\frac{-2}{5}\right)\cdot\left(\frac{-2}{5}\right) = \frac{(-2)^4}{5^4} = \frac{16}{625}$$

2.1.Potencias de base racional e expoñente negativo

O resultado de elevar un número racional a unha potencia negativa é outra potencia cuxa base é o número racional inverso elevado ao mesmo expoñente positivo.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Exemplo:

$(4/9)^{-5} = (9/4)^5$

2.2. Produto de potencias de base racional

Mantéñense as propiedades das potencias de base un número natural.

Coa mesma base

O resultado de multiplicar potencias coa mesma base é outra potencia coa mesma base e expoñente a suma dos expoñentes.

$$(a/b)^m \cdot (a/b)^n \cdot (a/b)^p = (a/b)^{m+n+p}$$

Exemplo:

$(2/5)^3 \cdot (2/5) \cdot (2/5)^{-4} \cdot (2/5)^5 = (2/5)^{3+1+(-4)+5} = (2/5)^5$

Co mesmo expoñente

O resultado de multiplicar potencias co mesmo expoñente é outra potencia cuxa base é o produto das bases elevada ao mesmo expoñente.

$$(a/b)^m \cdot (c/d)^m \cdot (e/f)^m = [(a/b) \cdot (c/d) \cdot (e/f)]^m$$

Exemplo:

$(-2/3)^4 \cdot (1/4)^4 \cdot (3/5)^4 = [(-2/3) \cdot (1/4) \cdot (3/5)]^4 = (-6/60)^4 = (-1/10)^4$

Actividades propostas

1. Calcula: a) $(5/3)^3$ b) $(-2/7)^{-4}$ c) $(-1/6)^4$ d) $(-5/2)^{-2}$

2. Expresa como única potencia: a) $(-3/4)^3 \cdot (-3/4)^2 \cdot ((-3/4)^{-8}$ b) $(1/8)^{-5} \cdot (1/8)^4 \cdot (1/8)^{-2}$

3. Expresa como única potencia:

a) $(5/4)^6 \cdot (-2/3)^6 \cdot (-1/7)^6$ b) $(-3/5)^{-4} \cdot (-3/8)^{-4} \cdot (-1/4)^{-4}$

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

2.3. Cociente de potencias de base racional

Coa mesma base

O resultado de dividir potencias coa mesma base é outra potencia coa mesma base e o expoñente a diferenza dos expoñentes.

(a/b)^m^ : (a/b)^n^ = (a/b)^m−n^

$$(a/b)^m : (a/b)^n = (a/b)^{m-n}$$

Exemplo:

$(-1/3)^3 : (-1/3)^4 = (-1/3)^{3-4} = (-1/3)^{-1}$

Co mesmo expoñente

O resultado de dividir potencias co mesmo expoñente é outra potencia cuxa base é o cociente das bases elevada ao mesmo expoñente.

$$(a/b)^m : (c/d)^m = [(a/b) : (c/d)]^m$$

Exemplo:

$(-3/4)^{-5} : (7/8)^{-5} = [(-3/4) : (7/8)]^{-5} = (-24/28)^{-5} = (-6/7)^{-5} = (-7/6)^5$

2.4. Operacións combinadas con potencias

Exemplo:

$$\frac{(-3)^3\cdot(-3)^{-5}\cdot(-3)}{(-3)^8\cdot(-3)^{-6}} = \frac{(-3)^{3-5+1}}{(-3)^{8-6}} = \frac{(-3)^{-1}}{(-3)^2} = (-3)^{-1-2} = (-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = -\frac{1}{27}$$

Exemplo:

$$\frac{(5^4\cdot(-2)^4\cdot 3^4)^3}{(9^2\cdot 4^2)^3} = \frac{[(5\cdot(-2)\cdot 3)^4]^3}{[(3^2)^2\cdot(2^2)^2]^3} = \frac{[(-30)^4]^3}{[[(3\cdot 2)^2]^2]^3} = \frac{[(-30)^4]^3}{[6^4]^3} = [(-5)^4]^3 = (-5)^{12} = 244\,140\,625.$$

Actividades propostas

4. Calcula:

a) $(-2/5)^4 : (-2/5)^7$ b) $(5/8)^3 : (5/8)^{-2}$

5. Calcula:

a) $(1/5)^{-3} : (2/9)^{-3}$ b) $(-6)^5 : (-2/9)^5$

6. Calcula:

a) $\dfrac{3^2\cdot\dfrac{2^5}{5^5}}{(-4)\cdot 4^5}$ b) $\dfrac{\left(\dfrac{-2}{3}\right)^2\cdot\left(\dfrac{-1}{6}\right)^2}{\left(\dfrac{3}{8}\right)^{-4}\cdot\left(\dfrac{3}{8}\right)^6}$

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

3. NOTACIÓN CIENTÍFICA

3.1. Números grandes e números pequenos

Un número expresado en notación científica está formado por un número decimal cuxa parte enteira está entre 1 e 9 multiplicado por 10^n sendo n un número enteiro positivo ou negativo.

$$a \cdot 10^n \text{ sendo } 1 \leq a \leq 9$$

Se o expoñente n é positivo utilízase para expresar números grandes e se o expoñente n é negativo para expresar números pequenos

Exemplo:

$3\ 420\ 000\ 000\ 000 = 3.42 \cdot 10^{12}$ $0.000000000057 = 5.7 \cdot 10^{-11}$

Actividades resoltas

- Na lenda do xadrez utilizamos números moi grandes. Se non nos interesa tanta aproximación senón facernos unha idea unicamente do grandes que son podemos usar anotación científica.

Unha aproximación para o número de grans de trigo da casa 64 é $9 \cdot 10^{18}$ co que nos facemos unha idea mellor do enorme que é que co número: 9 223 372 036 854 775 808 que dá un pouco de mareo.

- Escribe en notación científica: 2^{16}; 2^{32} e 2^{64}

$2^{16} = 65\ 536 \approx 6.5 \cdot 10^4$

$2^{32} = 4\ 294\ 967\ 296 = 4 \cdot 10^9$

$2^{64} = 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 616 = 1.8 \cdot 10^{19}$

3.2. Operacións con notación científica

Suma ou diferenza

Para realizar sumas e restas con expresións en notación científica transfórmase cada expresión decimal de maneira que se igualen os expoñentes de 10 en cada un dos termos.

Exemplo:

- Para calcular $4 \cdot 10^8 + 2.3 \cdot 10^6 - 6.5 \cdot 10^5$ expresamos todos os sumandos coa mesma potencia de 10 elixindo a menor. Neste caso 10^5:

$$4\ 000 \cdot 10^5 + 23 \cdot 10^5 - 6.5 \cdot 10^5$$

Sacamos factor común: $10^5 \cdot (4\ 000 + 23 - 6.5) = 4\ 016.5 \cdot 10^5 = 4.0165 \cdot 10^8$

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Produto

O produto de expresións en notación científica é o resultado de multiplicar os números decimais e sumar os expoñentes de base 10.

Exemplo:

$2.5 \cdot 10^{5} \cdot 1.36 \cdot 10^{6} = (2.5 \cdot 1.36) \cdot 10^{5+6} = 3.4 \cdot 10^{11}$

Cociente

O cociente de dúas expresións en notación científica é o resultado de dividir os números decimais e restar os expoñentes de base 10.

Exemplo:

$5.4 \cdot 10^{9} : 4 \cdot 10^{7} = (5.4 : 4) \cdot 10^{9-7} = 1.35 \cdot 10^{2}$

Actividades resoltas

- Para facer o cociente para calcular 2^{63} dividindo 2^{64} entre 2 en notación científica:

$2^{63} = 2^{64} / 2 = 1.8 \cdot 10^{19} / 2 = 0.9 \cdot 10^{19} = 9 \cdot 10^{18}$.

Usa a calculadora

As calculadoras utilizan a notación científica. Moitas calculadoras para escribir $9 \cdot 10^{18}$ escriben 9e+18.

7. Utiliza a túa calculadora para obter 2^{16}; 2^{32} e 2^{64} e observa como dá o resultado.

8. Utiliza a calculadora para obter a túa idade en segundos en notación científica.

Actividades propostas

9. Efectúa as operacións en notación científica:

a) $0.000257 + 1.4 \cdot 10^{-5}$ b) $200\,000\,000 - 3.5 \cdot 10^{6} + 8.5 \cdot 10^{5}$

10. Efectúa as operacións en notación científica:

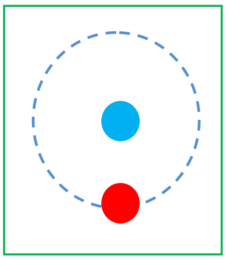
a) $(1.3 \cdot 10^{5}) \cdot (6.1 \cdot 10^{-3})$ b) $(4.7 \cdot 10^{-8}) \cdot (3 \cdot 10^{6}) \cdot (2.5 \cdot 10^{-4})$

11. Efectúa as operacións en notación científica:

- $(5 \cdot 10^{-8}) : (1.5 \cdot 10^{-3})$ b) $(3.25 \cdot 10^{-5}) \cdot (5 \cdot 10^{2}) : (6.15 \cdot 10^{-7})$

12. Estímase que o volume da auga dos océanos é de 1 285 600 000 km^{3} e o volume de auga doce é de 35 000 000 km^{3}. Escribe esas cantidades en notación científica e calcula a proporción de auga doce.

13. Sábese que nun átomo de hidróxeno o núcleo constitúe o 99 % da masa e que a masa dun electrón é aproximadamente de $9.109 \cdot 10^{-31}$ kg. Que masa ten o núcleo dun átomo de hidróxeno? (*Recorda*: Un átomo de hidróxeno está formado polo núcleo cun protón e por un único electrón)



14. A Xoán fixéronlle unha análise de sangue e ten 5 millóns de glóbulos vermellos en cada mm^{3}. Escribe en notación científica o número aproximado de glóbulos vermellos que ten Xoán estimando que ten 5 litros de sangue.

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

4. RAÍCES

5.1. Radicais de índice calquera

A raíz enésima dun número *a* é un número *x* que ao elevalo a *n* dá como resultado *a*.

$$\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a.$$

***Recorda*:**
n = índice da raíz
a = radicando
$x = \sqrt[n]{a}$ raíz

A **raíz cadrada** dun número real non negativo *a é* un único número non negativo *x* que elevado ao cadrado nos dea *a*:

Observación

Non confundas resolver unha **ecuación** $x^2 = 9$ que ten dúas raíces 3 e –3 con calcular unha **raíz** como $\sqrt{9}$ que é **unicamente** 3.

Imaxina que lío tan horrible sería calcular $\sqrt{9} + \sqrt{1} + \sqrt{4}$ se o resultado puidese ser:

3 + 1 + 2 = 6 ou ben 3 – 1 – 2 = 0 ou ben –3 + 1 – 2 = –4 ou ben 3 – 1 + 2 = 4 …

A raíz enésima dun número no campo real ou non existe ou é **única**.

$$\sqrt{a} = x \Leftrightarrow x^2 = a;\ a \geq 0;\ x \geq 0.$$

Observa que $\sqrt{-1}$ non existe no campo real. Ningún número real ao elevalo ao cadrado dá un número negativo. Só podemos calcular raíces de expoñente par de números positivos.

Porén $\sqrt[3]{-1} = -1$ pois $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$.

Actividades resoltas

- Canto mide o lado dunha habitación cadrada embaldosada con 144 baldosas cadradas de 25 cm de lado?

Cada lado terá $\sqrt{144}$ = 12 baldosas que miden 25 cm. Logo medirá: 12 · 25 = 300 cm = 3 m de longo.

- Nun depósito cúbico caben 1 000 cubos de 1 dm^3. Canto mide a súa aresta? E se caben 12 167 cubos?

Calculamos $\sqrt[3]{1\,000}$ = 10. A aresta mide 10 dm. Calculamos agora $\sqrt[3]{12\,167}$ = 23. A aresta mide 23 dm porque 23 · 23 · 23 = 12 167.

- Calcula $\sqrt[3]{-64};\ \sqrt[3]{-8};\ \sqrt[3]{-27};\ \sqrt[3]{-1\,000}$.

As raíces de radicando negativo e índice impar si existen:

$$\sqrt[3]{-64} = -4;\ \sqrt[3]{-8} = -2;\ \sqrt[3]{-27} = -3;\ \sqrt[3]{-1\,000} = -10.$$

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

4.2. Potencias de expoñente fraccionario

Defínese $x^{\frac{1}{n}}$ como $\sqrt[n]{x}$:

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

Polo tanto a potencia $x^{\frac{m}{n}}$ pode expresarse en forma de radical de maneira que ***n*** será o índice da raíz e ***m*** o expoñente do radicando.

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

Exemplo:

- $5^{2/3} = \sqrt[3]{5^2}$

As propiedades das potencias de expoñente fraccionario coinciden coas das potencias de expoñente un número natural.

Actividades resoltas

- Simplifica os radicais $\sqrt[4]{2^{12}}$. $\sqrt[10]{7^{15}}$ usando potencias de expoñente fraccionario.

Escribimos o radical como potencia de expoñente fraccionario e simplificamos as fraccións:

$$\sqrt[4]{2^{12}} = 2^{\frac{12}{4}} = 2^3 = 8.$$

$$\sqrt[10]{7^{15}} = 7^{\frac{15}{10}} = 7^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{7^3} = 7 \cdot \sqrt{7}$$

- Calcula $\sqrt{484}$ e $\sqrt[3]{27\,000}$ factorizando previamente os radicandos

$$\sqrt{484} = \sqrt{2^2 \cdot 11^2} = 2 \cdot 11 = 22$$

$$\sqrt[3]{27\,000} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

- Calcula $25^{0.5}$; $32^{\frac{3}{5}}$ e $\left(3^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{5}{2}}$

$$25^{0.5} = 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$$

$$32^{\frac{3}{5}} = (2^5)^{\frac{3}{5}} = 2^{\frac{5 \cdot 3}{5}} = 2^3 = 8$$

$$\left(3^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{5}{2}} = 3^{\frac{6 \cdot 5}{5 \cdot 2}} = 3^3 = 27$$

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

4.3. Extracción de factores dun radical

Temos $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ con $m > n$. Para extraer factores da raíz realizamos o cociente: m dividido entre n ten de cociente p e de resto r : $m = n \cdot p + r$. O resultado é $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n]{x^{n\cdot p+r}} = x^{\frac{n\cdot p+r}{n}} = x^{p+\frac{r}{n}} = x^p \cdot \sqrt[n]{x^r}$ **.**

Se $m > n$, $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = x^p \cdot \sqrt[n]{x^r}$.

Exemplo:

$$\sqrt[3]{x^5} = x \cdot \sqrt[3]{x^2}$$

$$\sqrt{2^4 \cdot 3^3 \cdot 5} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 5} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3 \cdot 5} = 12 \cdot \sqrt{15}$$

Actividades propostas

15. Calcula todas as solucións:

a) $\sqrt{121}$ b) $\sqrt[3]{-8}$ c) $\sqrt[4]{10\,000}$ d) $\sqrt[5]{-1}$ e) $\sqrt[7]{1}$

16. Expresa en forma de radical

a) $(-3)^{4/5}$ b) $8^{1/3}$ c) $5^{2/3}$

17. Extrae os factores posibles en cada radical:

a) $\sqrt[4]{a^6 b^5}$ b) $\sqrt[3]{6^5 \cdot 3^4 \cdot 2^6}$ c) $\sqrt{4 \cdot 5^3 \cdot 9^3}$

4.4. Operacións con radicais

Como os radicais se poden escribir como potencias teñen as propiedades que xa coñeces das potencias.

Recorda

Hai operacións con radicais que **NON** están permitidas.

10 = $\sqrt{100}$ = $\sqrt{64+36}$ que é distinto de:

$\sqrt{64}$ + $\sqrt{36}$ = 8 + 6 = 14.

Raíz dun produto

A raíz dun produto é igual ao produto das raíces dos factores

$$\sqrt[n]{x \cdot y \cdot z} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} \cdot \sqrt[n]{z}$$

Exemplo:

$$\sqrt[3]{8 \cdot 27 \cdot 64} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{64} = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

Raíz dun cociente

A raíz dun cociente é igual ao cociente da raíz do dividendo e a raíz do divisor

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

Exemplo:

$$\sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{243}} = \frac{2}{3}$$

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Raíz dunha raíz

A raíz dunha raíz é igual a outra raíz co mesmo radicando e cuxo índice é o produto dos índices.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n\cdot m]{x}$$

Exemplo:

$$\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[3\cdot 2]{64} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$$

4.5.Operacións combinadas

Exemplo:

$$x^{2/3} \cdot y^{1/3} = \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x^2 \cdot y}$$

Exemplo:

$$\frac{x^{\frac{7}{4}}}{x^{\frac{5}{3}}} = \frac{\sqrt[4]{x^7}}{\sqrt[3]{x^5}} = \frac{x \cdot \sqrt[4]{x^3}}{x \cdot \sqrt[3]{x^2}} = \frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x^2}}$$

Actividades propostas

18. Expresa en forma de produto ou de cociente:

a) $\sqrt[3]{a \cdot b}$ b) $\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7}$ c) $\sqrt[2]{\frac{7}{6}}$ d) $\sqrt{\frac{x^3}{y}}$

19. Expresa en forma de única raíz:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{18}}$ b) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{25}}$

20. Expresa en forma de potencia:

a) $\sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt{2^5}$ b) $\frac{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{5^2}}{\sqrt{5^3}}$

21. Simplifica a expresión:

a) $\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x}}\right)^3$ b) $\frac{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[5]{x^{11}}}{\sqrt[3]{x}}$

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

4.6. Raíces cadradas

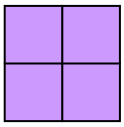
Xa sabes que:

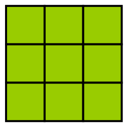
A raíz cadrada **exacta** dun número *a* é outro número *b* cuxo cadrado é igual ao primeiro:

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$$

Exemplo:

- Ao poder construír un cadrado de lado 2 con 4 cadrados pequenos dise que 2 é a raíz cadrada de 4. Xa que $2^2 = 4$ e polo tanto dicimos que 2 é a *raíz cadrada* de 4, é dicir:





$$\sqrt{4} = 2.$$

Obter a raíz cadrada exacta é a operación oposta de elevar ao cadrado.

- Podemos construír un cadrado de lado 3 con 9 cadrados pequenos polo tanto como $3^2 = 9$ entón:

$$\sqrt{9} = 3.$$

- Ao escribir $\sqrt{64} = 8$ lese que a *raíz cadrada* de 64 é 8.

Ao signo √ chámaselle **radical**. Chámase **radicando** ao número colocado debaixo. Neste caso 64 e dise que o **valor da raíz** é 8.

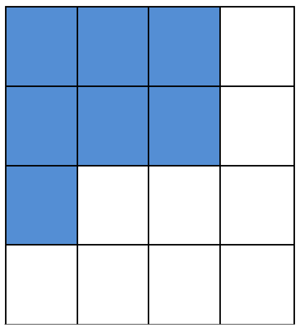
Exemplo:

- Sabemos que a área dun cadrado é 121 cm². Canto vale o seu lado?

O seu lado valerá a raíz cadrada de 121. Como $11^2 = 121$ entón a raíz cadrada de 121 é 11. O lado do cadrado é 11.

Exemplo:

- Pódese construír un cadrado con 7 cadrados pequenos?



Observa que se pode formar un cadrado de lado 2 pero sobran 3 cadrados pequenos e que para facer un cadrado de lado 3 faltan 2 cadrados pequenos.

O número 7 non é un cadrado perfecto. Non ten raíz cadrada exacta porque con 7 cadrados pequenos non se pode construír un cadrado.

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

É máis, a expresión decimal daqueles números naturais que non teñen raíz cadrada exacta é un número irracional con infinitas cifras decimais non periódicas.

Pero podemos afirmar que $2 < \sqrt{7} < 3$.

Como 4 é un cadrado perfecto e $\sqrt{4} = 2$ e 9 é tamén outro cadrado perfecto e $\sqrt{9} = 3$ os números 5, 6, 7 e 8 non son cadrados perfectos e a súa raíz cadrada é un número irracional.

Con máis dificultade pódense aproximar eses valores. Así $2.6 < \sqrt{7} < 2.7$ (Multiplica 2.6 por si mesmo e 2.7 por si mesmo e comproba que se verifica a desigualdade) ou podemos obter máis cifras decimais:

$2.64 < \sqrt{7} < 2.65$ ou ben $2.64575131 < \sqrt{7} < 2.64575132$.

Podemos encontrar un valor aproximado da raíz.

Para calcular raíces cadradas podes utilizar a calculadora coa tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$

É importante coñecer os cadrados perfectos pois mentalmente axúdache a saber entre que valores enteiros está a raíz cadrada que queres calcular.

Observa que:

O cadrado dun número positivo ou negativo é sempre un número positivo. Logo non existe a raíz cadrada dun número negativo.

Actividades propostas

22. Escribe a lista dos 12 primeiros cadrados perfectos.

23. Calcula **mentalmente** no teu caderno as seguintes raíces:

a) $\sqrt{49}$ b) $\sqrt{25}$ c) $\sqrt{100}$ d) $\sqrt{64}$ e) $\sqrt{81}$ f) $\sqrt{1}$ g) $\sqrt{0}$.

24. Calcula **mentalmente** no teu caderno as aproximacións enteiras das seguintes raíces:

a) $\sqrt{51}$ b) $\sqrt{27}$ c) $\sqrt{102}$ d) $\sqrt{63}$ e) $\sqrt{80}$ f) $\sqrt{2}$ g) $\sqrt{123}$.

25. Indica que raíces cadradas van ser números naturais, cales números irracionais e cales non existen:

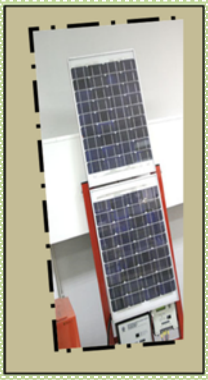
a) $\sqrt{36}$ b) $\sqrt{-25}$ c) $\sqrt{-100}$ d) $\sqrt{32}$ e) $\sqrt{-7}$ f) $\sqrt{10}$ g) $\sqrt{100}$.

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

Células solares de silicio de tamaño microscópico

O programa de Tecnoloxía Solar do Departamento de Enerxía de Estados Unidos, no seu obxectivo de conseguir maior eficiencia na produción de enerxía solar, creou células microscópicas de silicio. Estas células utilizan 100 veces menos material de silicio policristalino de 20 micrómetros de grosor cun significativo custe menor de fabricación. Estas células converten case un 15 % da luz solar en enerxía eléctrica.



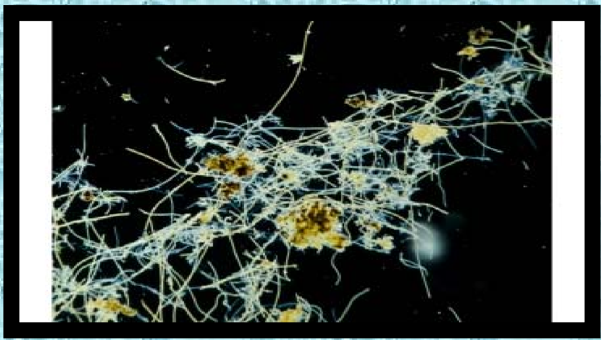
Sabías que…

ás operacións en notación exponencial tamén se lles chama de “**coma flotante**" porque o expoñente equivale á posición do decimal? Nos ordenadores a potencia de cálculo mídese en *mflops* ou miles de operacións en coma flotante por segundo, en inglés *floating point operations per secound*, abreviado "flops". O teu ordenador igual pode facer un millón destas operacións por segundo. Un "*xiga flops*"!

A cruz de Einstein

Albert Einstein anunciara, a partir da súa teoría da relatividade xeral, o chamado “espellismo cósmico” ou"lente gravitacional". Este efecto pode explicar a formación de catro ou máis imaxes a partir dunha soa fonte moi distante. A cruz da imaxe resultou ser un só quásar situado a uns 10.000 millóns de anos-luz ao que se lle chamou a Cruz de Einstein cuxa luz queda curvada na súa traxectoria por unha galaxia-lente situada dez veces máis preto.

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF



A presenza das bacterias

Estímase que existen 100 millóns de bacterias de 600 especies diferentes por cada milímetro cúbico de cuspe e 40 millóns de bacterias nun gramo de terra.

Algúns científicos calculan que no interior da Terra podería haber ata 100.000 billóns de toneladas de bacterias de maneira que se todas estiveran sobre a superficie cubrirían o noso planeta ata unha altura de 15 metros. Hai moita máis vida no interior que no exterior.

No Papiro de Ajmeed (1650 a. C.) amósase como os exipcios extraían raíces cadradas. Na antiga India, nos manuscritos do Baudhayana Sulbasutra Aryabhata (800-500 a. C.) anótase un método para calcular raíces cadradas.

En Europa non se encontraron referencias antes de Cataneo (1546). O símbolo da raíz cadrada foi introducido en 1525 polo matemático Christoph Rudolff e é unha forma estilizada do r minúsculo.

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

RESUMO

	POTENCIAS E RAÍCES	*Exemplos*
Produto e cociente de potencias	No produto de potencias coa mesma base súmanse os expoñentes. No cociente réstanse os expoñentes co mesmo expoñente: no produto multiplícanse as bases e elévase o resultado ao mesmo expoñente. No cociente divídense as bases e elévase o resultado ao mesmo expoñente.	$(-5)^4 \cdot (-5)^2 = (-5)^6$ $3^2 : 3^7 = 3^{-5}$ $2^5 \cdot 7^5 = 14^5$ $(-5)^3 : (4)^3 = (-5/4)^3$
Potencia dun produto e dun cociente	A potencia dun produto é igual ao produto de cada un dos factores elevados a dita potencia $(a \cdot b \cdot c \cdot d)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n \cdot d^n$ A potencia dun cociente é igual ao cociente do dividendo e o divisor elevados a dita potencia $c^m : c^n = c^{m-n}$	$(5 \cdot 2 \cdot 3)^4 = 5^4 \cdot 2^4 \cdot 3^4$ $(-7/2)^6 = 7^6/(-2)^6$
Potencia doutra potencia	$((d)^m)^n = d^{mxn}$	$((-4)^3)^5 = (-4)^{15}$
Potencia de base racional	$(a/b)^n = a^n/b^n$	$(6/5)^2 = 6^2/5^2$
Potencia de expoñente negativo	$a^{-n} = 1/a^n$	$8^{-3} = 1/8^3$
Notación científica: operacións	$a \cdot 10^{\pm n}$ sendo $1 \leq a \leq 9$. $+n$ para grandes números $-n$ para pequenos números	$320\ 000\ 000 = 3.2 \cdot 10^8$ $0.0000000009 = 9 \cdot 10^{-10}$
Radicais: raíces de índice calquera	$\sqrt{49} = 7;\ \sqrt[3]{-216} = -6;\ \sqrt[3]{64} = 4;\ \sqrt[4]{81} = 3;\ \sqrt[5]{-32} = -2$	
Potencias de expoñente racional	Unha potencia con expoñente racional pode expresarse en forma de raíz cuxo índice é o denominador do expoñente e o radicando queda elevado ao numerador do expoñente: $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$	$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$
Extracción de factores dun radical	Se $m = n \cdot c + r$ entón $\sqrt[n]{a^m} = a^c \cdot \sqrt[n]{a^r}$	Se $m = n \cdot c + r$ entón $\sqrt[n]{a^m} = a^c \cdot \sqrt[n]{a^r}$
Operacións con radicais	$\sqrt[n]{x \cdot y \cdot z} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} \cdot \sqrt[n]{z}\ ;\ \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$	$\sqrt[n]{x \cdot y \cdot z} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} \cdot \sqrt[n]{z}$ $;\ \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Potencias

1. Expresa en forma de única potencia:

a) $2^5 \cdot (-3)^5 \cdot (-1)^5$

b) $(-1)^3 \cdot (-1)^8 \cdot (1)^5$

c) $4^3 \cdot (-2)^3 \cdot (-1)^3 \cdot 5^3$

d) $(-5)^2 \cdot (-5)^4 \cdot (5)$

e) $(-9)^2 \cdot 9^3 \cdot 9^4 \cdot 9$

f) $(-18)^4 : (-3)^4$

g) $(6)^5 : (6)^2$

h) $(-3)^2 : (-3)^4$

2. Expresa en forma de única potencia:

a) $\dfrac{4^2 \cdot 4^3 \cdot 4}{5^6 \cdot (-1)^6}$

b) $[(2)^7 : (-3)^7] \cdot (-4)^3 \cdot (-4)^4$

c) $\dfrac{[-2^4 \cdot (-3)^4 \cdot 6^4]^3 : [(-4)^8 \cdot (-4)^4]}{9^6 \cdot 9^4 : 9}$

d) $\dfrac{(-3)^2 \cdot (10)^2 : (-5)^2}{7^5 : 7^3}$

3. Expresa en forma de potencia de expoñente positivo:

a) $(-4)^{-3}$ b) $(9)^{-3}$ c) $(-2)^5 : (-2)^9$ d) $(-5) \cdot (-5)^2 : (-5)^6$

4. Expresa en forma de única potencia:

a) $((2)^4)^3$ b) $((-3)^{-2})^5$ c) $((-1)^4)^3$ d) $((5)^2)^{3/5}$

5. Expresa en forma de única potencia:

a) $(-3/5)^4$ b) $(2/9)^4$ c) $(1/5)^{-3}$ d) $(2/3)^{-4}$

6. Expresa en forma de única potencia:

a) $(2/3)^{-4} \cdot (2/3)^3 \cdot (2/3)^5$

b) $(1/6)^3 \cdot (3/5)^3 \cdot (-6/7)^3$

c) $(-5/3)^4 : (-2/3)^4$

d) $(4/9)^3 : (4/9)^5$

e) $((-4/3)^{-3})^5$

f) $((2/7)^{-1})^{-3}$

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

7. Expresa en forma de única potencia:

a) $\dfrac{(2/3)^3 \cdot (-1/5)^3 \cdot (-4/9)^3 \cdot (1/2)^3}{(-1/4)^3 \cdot (-1/4)^{-2} \cdot (-1/4) \cdot (-1/4)^4}$

b) $((-1/3)^4)^{3/2} \cdot (2/5)^{1/6}$

c) $\dfrac{(2/5)^{1/2} \cdot (2/5)^{3/4} \cdot (2/5)^{-1/6}}{(7/8)^3 : (1/6)^3}$

8. Expresa en forma de notación científica:

a) 140 000 000

b) 32 800

c) 71 000 000 000 000 000

d) 0.0000075

e) –18 000 000

f) 0.00000000042

g) –0.009

h) 0.00000000007

9. Busca información expresada en notación científica sobre:

a) A distancia entre a Terra e a Lúa

b) Unidade de masa atómica.

c) Km que corresponden a un ano luz.

d) Un gúgol.

e) A lonxitude de onda dos raios cósmicos.

10. Realiza as operacións e expresa o resultado en notación científica:

a) $4 \cdot 10^3 + 2.4 \cdot 10^6 - 1.7 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^3$

b) $2.3 \cdot 10^{-5} - 3.45 \cdot 10^{-4} + 6 \cdot 10^{-3}$

c) $3 \cdot 10^{-4} \cdot 4.5 \cdot 10^2$

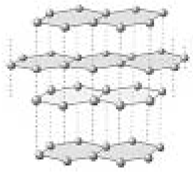
d) $1.8 \cdot 10^5 : 5 \cdot 10^8$

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

11. A estrela Sirio está a uns 8 611 anos luz do noso planeta. Expresa en metros, mediante notación científica, a distancia que percorrería unha nave espacial que realizara un traxecto de ida e volta a Sirio. (*Recorda*: Un ano luz, a lonxitude que percorre a luz nun ano, é aproximadamente igual a 9.46×10^{12} km (9 460 730 472 580.8 km con máis aproximación)).

12. A masa dun electrón en repouso estímase en $9.11 \cdot 10^{-31}$kg. A dun protón é de $1.672 \cdot 10^{-27}$kg. E a dun neutrón 1.64×10^{-27} kg. Calcula a masa dun átomo de carbono 14 (C_{14}) formado por seis protóns, seis electróns e 6 + 2 = 8 neutróns. (O C_{14} é un isótopo que ten dous neutróns máis que o carbono normal e que se utiliza para datar).

13. Calcula e expresa en notación científica:



Grafito

a) $0.00829 + 4 \cdot 10^{-3} + 7.45 \cdot 10^{-5} - 6.32 \cdot 10^{-4}$

b) $5 \cdot 10^{6} - 2.8 \cdot 10^{7} - 3 \cdot 10^{5}$

c) $5 \cdot 10^{-2} - 4 \cdot 10^{2} + 1.4 \cdot 10^{-3}$

d) $3 \cdot 10^{-5} \cdot (-2.7) \cdot 10^{-3} + 4.2 \cdot 10^{-6}$

14. Expresa o resultado desta operación en notación científica:

a) $\frac{2.4 \cdot 10^{-3} - 1.5 \cdot 10^{-4}}{0.025 + 3 \cdot 10^{-4}}$

b) $\frac{(1.3 \cdot 10^{4}) \cdot (5 \cdot 10^{3})}{(4 \cdot 10^{5}) \cdot (2.3 \cdot 10^{6})}$

Cultivo de Escherichiacoli

15. Estímase que existen 40 millóns de bacterias nun gramo de terra. Expresa en notación científica de forma aproximada o número de bacterias que existen nuns camións que están descargando 50 toneladas métricas de area nunha praia.

16. Se $x = 240\,000$ $y = 0.00058$ $z = 7.2 \cdot 10^{6}$. Calcula e expresa en notación científica a) $x \cdot y$ b) $2x + y \cdot 10^{7}$ c) $3x - 5y$

17. **Arquímedes**, no seu tratado *O arenario*, conta unha maneira para expresar números moi grandes como o número de grans de area que hai en toda a Terra. Imos estimalos agora por outro procedemento. Estimamos cantos grans de area necesitamos para ter un gramo de area. Paréceche que 50 grans de area. Estímase que a masa da Terra é de:

$$M_T = 5\,980\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 \text{ g} = 598 \cdot 10^{25} \text{ g}$$

Calcula de forma aproximada o número de grans de area que hai en toda a Terra.

18. Vemos en Internet que a masa de Marte é de 639E21 kg, que a masa de Xúpiter é de 1.898E27 kg e que amasa da Terra é de 5 972E24 kg. a) Calcula cantas veces cabería a Terra no planeta Xúpiter. b) Calcula a relación entre a masa da Terra e a de Marte.

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Raíces

1. Calcula:

a) $\sqrt{12\,100}$ b) $\sqrt[3]{-0.008}$ c) $\sqrt[3]{-125}$ d) $\sqrt[5]{-1}$ e) $\sqrt{0.49}$

2. Calcula:

a) $\sqrt[4]{2.0736}$ b) $\sqrt[5]{-0.00001}$ c) $\sqrt{33\,640\,000}$ d) $\sqrt[3]{-2.7\cdot 10^{-6}}$

3. Expresa en forma de raíz:

a) $(-4)^{3/5}$ b) $7^{1/6}$ c) $(21)^{1/3}$ d) $(-5)^{2/3}$

4. Expresa en forma de potencia:

a) $\sqrt[5]{6^3}$ b) $\sqrt{(-7)^5}$ c) $\sqrt{3^5}$ d) $\sqrt[3]{(-30)^4}$

5. Extrae os factores posibles destes radicais:

a) $\sqrt{3^3\cdot 10^5\cdot 2}$ b) $\sqrt[3]{6^9\cdot 2^5}$ c) $\sqrt[4]{x^{11}\cdot y^5}$ d) $\sqrt[3]{3^4\cdot 5^6}$

6. Extrae os factores posibles destes radicais:

a) $\sqrt[3]{a^7\cdot b^3\cdot c^{-6}}$ b) $\sqrt{5^{-5}\cdot 3^{-6}}$ c) $\sqrt[4]{10^5 : 6^8}$ d) $\sqrt{x^3\cdot x^8\cdot x}$

7. Simplifica:

a) $\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^3}$ b) $\sqrt[3]{\left(\frac{-4}{5}\right)\cdot\left(\frac{-4}{5}\right)^5}$ c) $\sqrt{\frac{x^3\cdot y^4}{x^8\cdot y}}$ d) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{4}\right)^5 : \left(\frac{4}{3}\right)^5}$

8. Expresa en forma de produto:

a) $\sqrt{3\cdot 50\cdot 12}$ b) $\sqrt[3]{5^2\cdot 2^4\cdot 3^6}$ c) $\sqrt{8\cdot 3^4\cdot 9}$ d) $\sqrt[3]{a^8\cdot b^2\cdot c^6}$

9. Expresa en forma de cociente:

a) $\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)}$ b) $\sqrt[5]{\frac{15}{32}}$ c) $\sqrt[3]{\frac{-7}{9}}$ d) $\sqrt{\frac{15}{24}}$

10. Expresa en forma de única raíz:

a) $\sqrt{\sqrt{48}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{450}}$ c) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{9000}}$ d) $\sqrt[2]{\sqrt[5]{-1}}$

11. Simplifica as operacións:

a) $\sqrt[3]{3^5}\cdot\sqrt[3]{2^4}$ b) $\left(\sqrt[3]{-27}\right)\cdot 5^{\frac{2}{3}}$ c) $\sqrt[5]{2^{12}} : \sqrt[5]{3^8}$ d) $\sqrt[2]{3}\cdot\sqrt[2]{10^5} : \sqrt{2^3}$

12. Simplifica as operacións:

a) $\sqrt[3]{x^5} : \sqrt[2]{x^3}$ b) $\sqrt{\sqrt{10^{12}}}$ c) $\sqrt{5\cdot(-2)^6\cdot(-3)^6}$ d) $\sqrt[5]{(-6)^{12}} : \sqrt[5]{(-6)^7\cdot 3^{10}}$

13. Simplifica as operacións:

a) $\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} : 5^{\frac{2}{3}}$ b) $\dfrac{(-4)^5\cdot\sqrt[3]{(-4)}}{\sqrt{2^3} : \sqrt{2^5}}$ c) $\dfrac{\left((-7^3)\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt[3]{(-7)^2}}{\sqrt{\sqrt{(-7)}}}$

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

AUTOAVALIACIÓN

1. O resultado das operacións seguintes é: $(-6)^3 \cdot (-6)^{-5} \cdot (-6)$ e $(12)^7 : (12)^5$

a) 6 e 12^2 b) $1/6$ e 12^5 c) $-1/6$ e 12^2

2. O resultado das operacións seguintes é: $(-5)^4 \cdot (-1)^4 \cdot (6)^4$ e $(-8)^7 : (5)^7$

a) $(-30)^4$ e $(-3)^7$ b) 30^4 e $(-8/5)^7$ c) 30^4 e $(-3)^7$

3. O resultado das operacións seguintes é: $((-2)^5)^3$; $((-1)^5)^7$ e $((-5)^{2/3})^6$

a) $(-2)^{15}$; (-1) e $(5)^{8/3}$ b) -2^{15}; (-1) e -5^4 c) $(-2)^{15}$; (-1) e $(-5)^4$

4. O resultado das operacións seguintes é: $(8)^{-3}$; $(-2)^{-4}$ e $(10^5)^{-2}$

a) $1/512$; $1/16$ e $1/10^{10}$ b) $1/8^3$; $-1/2^4$ e $1/10^{10}$

5. O resultado das operacións seguintes é: $(5/7)^3$; $(-1/3)^{-2}$ e $(-2/5)^4$

a) $5^3/7^3$; $1/3^2$ e $-2^4/5^4$ b) $5^3/7^3$; 3^2 e $2^4/5^4$

6. O resultado das operacións seguintes é: $(2/3)^3 \cdot (2/3)^2 \cdot (2/3)^{-5}$

a) 1 b) $2/3$ c) $-2/3$ d) $(2/3) \cdot (-3/2)$

7. As expresións $3.1 \cdot 10^8$ e 0.0000000095 corresponden a:

a) $3\,100\,000\,000$ e $9.5 \cdot 10^{-10}$ b) $310\,000\,000$ e $9.5 \cdot 10^{-10}$ c) $310\,000\,000$ e $9.5 \cdot 10^{-9}$

8. O resultado desta operación é: $(0.00098 + 3 \cdot 10^{-6} - 4.2 \cdot 10^{-4}) \cdot 2.5 \cdot 10^5$

a) 124.5 b) $2\,407.5$ c) 107.5 d) 140.75

9. O resultado das operacións seguintes é: $\sqrt[3]{-1\,331}$; $\sqrt{256}$ e $\sqrt[5]{-1}$

a) -11; 16; -1 b) 11; 16; 1 c) -11; -16; -1

10. As seguintes expresións corresponden a: $(-4)^{3/5}$; $(3)^{1/2}$ e $(-5)^{4/3}$

a) $\sqrt[5]{-4^3}$; $\sqrt{3}$ e $\sqrt[3]{-5^4}$ b) $\sqrt[5]{(-4)^3}$; $\sqrt{3}$ e $\sqrt[3]{(-5)^4}$ c) $-\sqrt[5]{4^3}$; $\sqrt{3}$ e $\sqrt[3]{-(5^4)}$

11. O resultado de extraer factores destes radicais é: $\sqrt[3]{(-5)^4}$ e $\sqrt{2^3 \cdot 5^5}$

a) $(-5)\cdot\sqrt[3]{(-5)}$ e $2\cdot 5^3\sqrt{2\cdot 5}$ b) $(-5)\cdot\sqrt[3]{(-5)}$ e $50\sqrt{10}$ c) $(-5)\cdot\sqrt[3]{(-5)}$ e $50\sqrt{5}$

12. As operacións seguintes poden expresarse: $\sqrt[3]{-(5):12}$ e $\sqrt[3]{\sqrt[3]{-18}}$

a) $\dfrac{\sqrt[3]{-5}}{\sqrt[3]{12}}$ e $\sqrt[9]{-18}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{12}}$ e $\sqrt[6]{-18}$ c) $\dfrac{\sqrt[3]{-5}}{\sqrt[2]{12}}$ e $\sqrt[9]{18}$

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Matemáticas orientadas ás ensinanzas académicas

3º B da ESO

Capítulo 3: Sucesións

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-042249

Fecha y hora de registro: 2014-05-08 18:00:21.0
Licencia de distribución: CC by-nc-sa

www.apuntesmareaverde.org.es

Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Revisores: Javier Rodrigo e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Índice

1. SUCESIÓNS DE NÚMEROS REAIS

1.1. DEFINICIÓNS

1.2. FORMAS DE DEFINIR UNHA SUCESIÓN

2. PROGRESIÓNS ARITMÉTICAS

2.1. TERMO XERAL DUNHA PROGRESIÓN ARITMÉTICA

2.2. SUMA DOS TERMOS DUNHA PROGRESIÓN ARITMÉTICA

3. PROGRESIÓNS XEOMÉTRICAS

3.1. TERMO XERAL DUNHA PROGRESIÓN XEOMÉTRICA

3.2. PRODUTO DOS TERMOS DUNHA PROGRESIÓN XEOMÉTRICA

3.3. SUMA DOS TERMOS DUNHA PROGRESIÓN XEOMÉTRICA

3.4. APLICACIÓNS DAS PROGRESIÓNS XEOMÉTRICAS

Resumo

Que teñen en común conceptos tan dispares como o número de coellos fillos concibidos por unha parella de coellos, a estrutura dunha folerpa ou o interese que obtemos ao depositar determinada cantidade de diñeiro nunha entidade financeira?

Detrás destes casos atopamos o concepto de sucesión. As sucesións numéricas teñen gran importancia e utilidade en moitísimos aspectos da vida real, algúns deles irás descubríndoos ao longo deste tema.

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso

Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

1. SUCESIÓNS DE NÚMEROS REAIS

1.1. Definicións

Unha **sucesión** de números reais é unha secuencia ordenada de números.

Exemplo:

- As seguintes secuencias son sucesións:
  a) 1, 2, 3, 4, 5, 6,…
  b) 2, 4, 6, 8, 10, 12,…
  c) $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$

Chámase **termo dunha sucesión** a cada un dos elementos que constitúen a sucesión.

Para representar os diferentes termos dunha sucesión úsase unha mesma letra con distintos subíndices. Estes subíndices indican o lugar que ocupa ese termo na sucesión.

Exemplo:

- Na sucesión a) teriamos que: $a_5 = 5$, xa que é o termo da sucesión que ocupa o quinto lugar.
- Na sucesión b), o terceiro termo, denotaríase b_3 e correspondería ao 6.
- Na sucesión c), por exemplo, $c_2 = \frac{1}{2}$

O realmente importante á hora de nomear os termos dunha sucesión é o subíndice porque denota o lugar que ocupan na sucesión. As letras coas que se designa a sucesión son distintas para sucesións distintas e soen ser letras minúsculas.

Chámase **termo xeral dunha sucesión** ao termo que ocupa o lugar *n*-ésimo e escríbese coa letra que denote á sucesión (por exemplo *a*) co subíndice *n*: (a_n)

Exemplo:

- Nos casos que estamos considerando, os termos xerais das sucesións serían: a_n, b_n e c_n.

Se nos fixamos, os valores que toman os subíndices son números naturais, pero os termos da sucesión non teñen por que selo, é dicir, os valores que toma a sucesión son números reais. Por iso, podemos definir sucesión de números reais de forma máis rigorosa como:

Definición:

Chámase **sucesión de números reais** a unha aplicación que fai corresponder a cada número natural un número real.

Actividades resoltas

- *Nas sucesións anteriores, observamos que:* $a_{1003} = 1\,003$, $b_{12} = 24$ *e* $c_{37} = \frac{1}{37}$

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

1. Escribe os dez primeiros termos das seguintes sucesións:

a) –1, –2, –3, –4,…

b) 1, 4, 9, 16,…

c) 1, 3, 5, 7,…

2. Escribe o termo que ocupa o lugar 100 de cada unha das sucesións anteriores.

3. Sabemos que un corpo con densidade suficiente que cae libremente sobre a Terra ten unha velocidade que aumenta 9.8 m/s (aproximadamente 10 m/s). Se no primeiro segundo a súa velocidade é de 15 m/s, escribe no teu caderno a velocidade nos segundos indicados na táboa. Observas algunha regra que che permita coñecer a velocidade ao cabo de 20 segundos? Representa graficamente esta función.

Tempo en segundos	1	2	3
Velocidade en m/s	15		

1.2. Formas de definir unha sucesión

Existen varias formas de definir unha sucesión:

1. **Dando unha propiedade que cumpran os termos desa sucesión**

Exemplo:

- Sucesión dos números pares: 2, 4, 6, 8, 10…
- Sucesión dos números primos: 2, 3, 5, 7, 11,..
- Sucesión dos números naturais acabados en 9: 9, 19, 29, 39, ...
- Sucesión dos cadrados dos números naturais: 1, 4, 9, 16,…

2. **Dando o seu termo xeral ou termo *n*-ésimo**:

É unha expresión alxébrica en función de *n.*

Exemplo:

- $a_n = n^2 + 3$

Sabendo isto, podemos construír os termos da sucesión sen máis que substituír *n* polos números naturais. Así, teriamos:

$$a_1 = 1^2 + 3 = 4$$

$$a_2 = 2^2 + 3 = 7$$

$$a_3 = 3^2 + 3 = 12$$

$$a_4 = 4^2 + 3 = 19$$

- $d_n = (-1)^n \frac{1}{n}$

$$d_1 = (-1)^1 \frac{1}{1} = -1$$

$$d_2 = (-1)^2 \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$d_3 = (-1)^3 \frac{1}{3} = \frac{-1}{3}$$

$$d_4 = (-1)^4 \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

3. **Por unha lei de recorrencia**:

É unha expresión que permite obter un termo a partir dos anteriores.

Exemplo:

- A sucesión:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,…

coñecida como sucesión de *Fibonacci* obtense coa seguinte lei de recorrencia:

$$a_1 = a_2 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

É dicir, cada termo, agás os dous primeiros, obtense como suma dos dous anteriores.

Actividades resoltas

- *Sexa a sucesión de termo xeral:* $a_n = 2n + 3$.

  Os seus cinco primeiros termos son: $a_1 = 5$, $a_2 = 7$, $a_3 = 9$, $a_4 = 11$, $a_5 = 13$

- *Dada a sucesión en forma recorrente:* $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 3$

  Os seus catro primeiros termos son:

$a_1 = 1$ (xa vén dado),

$a_2 = 1 + 3 = 4$,

$a_3 = 4 + 3 = 7$,

$a_4 = 7 + 3 = 10$

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

4. Escribe os catro primeiros termos das seguintes sucesións:

a) $a_n = 2n^2 + 1$

b) $b_n = \dfrac{4n-1}{3n}$

c) $c_1 = 1$, $c_n = 3c_{n-1} + 5$

d) $d_1 = 2$, $d_2 = 5$, $d_n = 2d_{n-1} + d_{n-2}$

5. Escribe a expresión do termo xeral das seguintes sucesións:

a) {–1, 1, –1, 1, –1, 1, –1, 1,…}

b) {0, 3, 8, 15, 24, 35,…}

c) {2, 4, 6, 8, 10,…}

d) $\left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{5}{6}, \frac{7}{7}, \frac{9}{8}, \ldots\right\}$

6. Nunha sucesión o primeiro termo é 2 e os demais obtéñense sumando 4 ao termo anterior. Calcula os 6 primeiros termos da sucesión.

7. Un satélite artificial foi posto en órbita ás 17 horas e 30 minutos. Tarda en dar unha volta completa á súa órbita 87 minutos. A) Completa no teu caderno a táboa adxunta. B) Escribe unha expresión xeral que che permita coñecer a hora na que completou a volta *n*-ésima. C) Busca unha expresión que che permita coñecer a hora en función da hora da órbita anterior. D) Busca unha expresión que che permita coñecer a hora en función da hora doutra órbita anterior. E) Cantas voltas completas terá dado 20 días máis tarde ás 14 horas?

Nº de órbitas	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Hora na que a completou						

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

2. PROGRESIÓNS ARITMÉTICAS

Exemplo:

- *Alicia ten en sete días un exame de Matemáticas. Decide preparalo facendo cada día tres exercicios máis que o día anterior. Empeza hoxe facendo dous exercicios. Se escribimos os exercicios que vai facendo Alicia a medida que pasan os días son:* 2, 5, 8, 11, 14,…

Observamos que os termos da sucesión van aumentando nunha cantidade constante: 3. Estas sucesións chámanse *progresións aritméticas*.

Unha **progresión aritmética** é unha sucesión de números reais na que a diferenza entre dous termos consecutivos da sucesión é constante. A esta constante chámaselle **diferenza da progresión e** soe denotarse coa letra *d*.

Doutra forma, nunha progresión aritmética verifícase:

$$a_{i+1} - a_i = d$$

sendo *i* calquera número natural.

É dicir, cada termo obtense sumando ao anterior a diferenza, *d*:

$$a_{i+1} = a_i + d$$

Exemplo:

- A sucesión formada polos números naturais: {1, 2, 3, 4, 5,…} é unha progresión aritmética, xa que cada termo se obtén sumando 1 ao termo anterior.

Actividades resoltas

- Se $a_1 = 3$ e $d = 2$, imos ver como se escriben os cinco primeiros termos da progresión aritmética:

  $a_1 = 3$,

  $a_2 = a_1 + d = 3 + 2 = 5$

  $a_3 = a_2 + d = 5 + 2 = 7$

  $a_4 = a_3 + d = 7 + 2 = 9$

  $a_5 = a_4 + d = 9 + 2 = 11$

Actividades propostas

8. Sinala razoadamente se a seguinte sucesión é unha progresión aritmética:

{1, 10, 100, 1 000, 100 000 …}.

9. Calcula os tres primeiros termos dunha progresión aritmética sabendo que o primeiro é 1 e a diferenza é –2.

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

2.1. Termo xeral dunha progresión aritmética

Unha progresión aritmética, ao igual que ocorre con todas as sucesións, queda perfectamente definida se coñecemos o seu termo xeral. Imos calculalo utilizando a definición que vimos de progresión aritmética e supoñendo coñecidos o primeiro termo a_1 e a diferenza da sucesión, d.

a_1 dado

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$

$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$

$a_5 = a_4 + d = a_1 + 3d + d = a_1 + 4d$

…….

De forma xeral:

$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-2)\cdot d + d = a_1 + (n-1)d$

Polo tanto, o **termo xeral dunha progresión aritmética** é:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)\,d}$$

Xeneralizando este resultado, podemos calcular o termo xeral dunha progresión aritmética coñecendo d e outro termo da progresión, non necesariamente o primeiro:

Máis xeral, o **termo xeral dunha progresión aritmética** é:

$$\boldsymbol{a_n = a_k + (n-k)\,d}$$

Sendo a_k o termo da progresión que ocupa o lugar k.

NOTAS

Dependendo do valor de *d*, podemos encontrar distintos tipos de progresións aritméticas:

a) Se $d > 0$, a progresión é crecente, é dicir, cada termo é maior cós anteriores. Por exemplo: {2, 4, 6, 8, …}

b) Se $d < 0$, a progresión é decrecente, é dicir, cada termo é menor cós anteriores. Por exemplo: {12, 9, 6, 3, …}

c) Se $d = 0$, a progresión é constante, é dicir, todos os seus termos son iguais. Por exemplo: {4, 4, 4, 4, …}

Dependendo dos datos que teñamos, calcularemos o termo xeral dunha progresión aritmética dunha forma ou doutra:

a) Se coñecemos a_1 e d, vimos que: $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$

b) Se coñecemos un termo calquera a_i e d, sabemos que: $a_n = a_k + (n-k)\,d$

c) Se coñecemos dous termos calquera a_r e a_s, faltaríanos a diferenza d para poder aplicar a fórmula anterior. Pero, como sabemos que:

$$a_n = a_r + (n-r)\cdot d \text{ e que } \quad a_n = a_s + (n-s)\cdot d$$

podemos despexar d en función de r, s, a_r e a_s e quédanos: $d = \dfrac{a_r - a_s}{r - s}$

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso

Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Actividades resoltas

- *Calcular o termo xeral dunha progresión aritmética cuxo primeiro termo é* 7 e a súa *diferenza tamén é* 7.

  Basta con substituír na fórmula dada: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 7 + (n - 1)7 = 7 + 7n - 7 = 7n$.

- *Calcula o termo que ocupa o lugar* 15 *nunha progresión aritmética cuxo primeiro termo é* 2 *e a diferenza é* 3.

  Neste caso, $a_{15} = a_1 + (15 - 1) \cdot d = 2 + 14 \cdot 3 = 2 + 42 = 44$.

- *Calcula o primeiro termo dunha progresión aritmética con* $a_5 = 6$ e $d = -2$.

  $a_5 = a_1 + (5 - 1) \cdot d$. Despexamos $a_1 = a_5 - 4d = 6 - 4 \cdot (-2) = 14$.

Actividades propostas

10. Dada unha progresión aritmética dous de cuxos termos son: $a_3 = 4$ e $a_{10} = 18$:

a) Calcula a súa diferenza.

b) Calcula o seu termo xeral.

11. Calcula o primeiro termo dunha progresión aritmética con diferenza 2 e $a_{30} = 60$.

12. Cal é o termo xeral dunha progresión aritmética con $a_{22} = 45$ e $d = 3$?

13. Os lados dun pentágono están en progresión aritmética de diferenza 5. Sabendo ademais que o seu perímetro é 65, calcula o valor dos lados.

14. Calcula os 5 primeiros termos dunha progresión aritmética de primeiro termo 2 e de diferenza 3. Represéntaos graficamente. Observa que a súa representación gráfica é un conxunto de puntos illados que están sobre unha recta.

15. Calcula a expresión xeral das progresións aritméticas:

a) De diferenza $d = 2.5$ e de primeiro termo 2.
b) De diferenza $d = -2$ e de primeiro termo 0.
c) De diferenza $d = 1/3$ e de segundo termo 5.
d) De diferenza $d = 4$ e de quinto termo 1.

16. Cantos múltiplos de 7 están comprendidos entre o 4 e o 893?

2.2. Suma dos termos dunha progresión aritmética

Nunha progresión aritmética, a suma de dous termos equidistantes é constante.

É dicir, se os subíndices naturais p, q, r e s verifican que $p + q = r + s$, entón: $a_p + a_q = a_r + a_s$

A ***demostración*** desta propiedade é moi sinxela:

$$a_p + a_q = a_1 + d\cdot(p - 1) + a_1 + d\cdot(q - 1) = 2a_1 + d\cdot(p + q - 2)$$

$$a_r + a_s = a_1 + d\cdot(r - 1) + a_1 + d\cdot(s - 1) = 2a_1 + d\cdot(r + s - 2)$$

E como: $p + q = r + s$, entón: $a_p + a_q = a_r + a_s$

Queremos calcular a suma dos n termos dunha progresión aritmética, S_n. É dicir:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

Aplicando a propiedade conmutativa da suma, temos que:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_3 + a_2 + a_1$$

Sumando estas dúas igualdades termo a termo obtemos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + ... + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Como se observa, os subíndices correspondentes a cada par de termos entre parénteses suman $n + 1$, polo que a suma dos seus termos será sempre a mesma, entón:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + ... + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) = n\cdot(a_1 + a_n)$$

Despexando S_n:

$$S_n = \frac{n\cdot(a_1 + a_n)}{2}$$

A **suma** dos n primeiros termos dunha **progresión aritmética** vén dada por:

$$S_n = \frac{n\cdot(a_1 + a_n)}{2}.$$

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Actividades resoltas

- *Suma os* 30 *primeiros termos da progresión aritmética:* a_n = {17, 13, 9, 5, 1, …}.

  Observamos que d = –4. Para aplicar a fórmula da suma temos que calcular primeiro o termo que ocupa o lugar 30, a_{30}:

  $a_{30} = a_1 + (n - 1)d = 17 + (30 - 1) \cdot (-4) = 17 + 29 \cdot (-4) = -99$

  Entón: $S_{30} = 30 \cdot \frac{17 + (-99)}{2} = -1230$

- *Calcula a suma dos números impares menores que* 1 000.

  Temos que ter en conta que os números impares forman unha progresión aritmética de diferenza 2 e ademais: $a_1 = 1$, $n = 500$, $a_{500} = 999$

  Entón: $S_{500} = 500 \cdot \frac{1 + 999}{2} = 250\,000$.

Actividades propostas

17. Suma os 10 primeiros termos da progresión aritmética: {–5, 4, 13, 22, 31, 40, …}

18. Calcula a suma dos 50 primeiros múltiplos de 3.

19. Nunha sucesión aritmética dun número impar de termos o central vale 12, canto valerá a suma do primeiro máis o último?

20. O dono dun pozo contrata a un rabdomante para coñecer a profundidade á que se atopa a auga e este ditamina que a 5 m hai auga en abundancia. Pide un orzamento a un contratista, que lle di que o primeiro metro lle custará 50 euros e por cada medio metro máis 6 euros máis que polo medio metro anterior. Canto lle custará o pozo se se cumpren as predicións?

21. Antón comprou un móbil, pero non pode pagalo ao contado. Paga 60 euros cada semana, pero o vendedor sóbelle 5 euros cada semana en concepto de pagamento aprazado. Logra pagalo en 10 semanas. Canto lle custou? Canto pagou de máis? Que porcentaxe supón esta recarga sobre o prezo de venda?

22. Un nadador adestra nunha piscina de 50 m e quere controlar as perdas de velocidade por cansazo. Cronometra en cinco días consecutivos os tempos que tarda en facer 2, 5, 8, 11, 14 longos. A) Calcula o termo xeral da sucesión a_n que dá os metros percorridos no día n. B) Cantos metros terá nadado nas cronometraxes?

Propóñoche agora ver este vídeo sobre progresións aritméticas

Copia este enderezo en, por exemplo, Google para velo:

https://youtu.be/GiwteW-_sns

3. PROGRESIÓNS XEOMÉTRICAS

Exemplo:

- *Un pai quere meter nun peto 1 € o día que o seu fillo recén nado cumpra un ano e duplicar a cantidade en cada un dos seus aniversarios.*

  É dicir, a sucesión cuxos termos son o diñeiro que mete no peto cada ano é: {1, 2, 4, 8, 16,…}.

Observamos que os termos da sucesión van aumentando de forma que cada termo é o anterior multiplicado por 2. Estas sucesións chámanse progresións xeométricas.

Unha **progresión xeométrica** é unha sucesión de números reais na que o cociente entre cada termo e o anterior é constante. A esta constante chámaselle **razón da progresión** e soe denotarse coa letra *r*. É dicir, $\frac{a_{i+1}}{a_i} = r$ sendo *i* un número natural e sempre que a_i sexa distinto de cero.

Ou o que é o mesmo, cada termo obtense multiplicando o anterior pola razón *r*:

$$a_{i+1} = a_i \cdot r$$

Exemplo:

- A sucesión:{1, 3, 9, 27, 81…} é unha progresión xeométrica, xa que tomando dous termos calquera consecutivos, sempre se obtén o mesmo cociente, que é 3, razón da progresión.

  3 : 1 = 9 : 3 = 27 : 9 = 81 : 27 = 3

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

3.1. Termo xeral dunha progresión xeométrica

Unha progresión xeométrica, por ser unha sucesión, queda totalmente definida se coñecemos o seu termo xeral. Imos obtelo sen máis que aplicar a definición de progresión xeométrica:

$a_2 = a_1 \cdot r$

$a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r \cdot r = a_1 \cdot r^2$

$a_4 = a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^2 \cdot r = a_1 \cdot r^3$

$a_5 = a_4 \cdot r = a_1 \cdot r^3 \cdot r = a_1 \cdot r^4$

………

$a_n = a_{n-1} \cdot r = a_1 \cdot r^{n-2} \cdot r = a_1 \cdot r^{n-1}$

Polo tanto, o **termo xeral dunha progresión xeométrica** é:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$$

Xeneralizando este resultado, podemos calcular o termo xeral dunha progresión xeométrica coñecendo r e outro termo da progresión, non necesariamente o primeiro:

Máis xeral, o **termo xeral dunha progresión xeométrica** é:

$$\boldsymbol{a_n = a_k \cdot r^{n-k}}$$

sendo a_k o termo da progresión que ocupa o lugar k.

Exemplo:

- A sucesión $a_n = 3 \cdot 5^{n-1}$ é unha progresión xeométrica.

NOTAS

1. **Dependendo do valor de *r*, podemos encontrar distintos tipos de progresións xeométricas:**
   a) Se $r > 1$, e o primeiro termo é positivo, a progresión é crecente, é dicir, cada termo é maior cós anteriores. Por exemplo: se $r = 2$, {2, 4, 8, 16, …}, pero se o primeiro termo é negativo, é decrecente: {–2, –4, –8, –16, …},
   b) Se $0 < r < 1$, e o primeiro termo é positivo, a progresión é decrecente, é dicir, cada termo é menor cós anteriores. Por exemplo: se $r = 1/3$, {90, 30, 10, 10/3, 10/9, …}, pero se o primeiro termo é negativo, é crecente: {–90, –30, –10, –10/3, –10/9, …},
   c) Se $r < 0$, a progresión é alternada, é dicir, os seus termos van cambiando de signo segundo o valor de n. Por exemplo: se $r = -2$, {–2, 4, –8, 16, …}, ou ben: {2, –4, 8,–16, …}.
   d) Se $r = 0$, a progresión é a progresión formada por ceros a partir do segundo termo. Por exemplo: {7, 0, 0, 0, }
   e) Se $r = 1$, a progresión é a progresión constante formada polo primeiro termo: {2, 2, 2, 2 …}.

2. **Dependendo dos datos que teñamos, calcularemos o termo xeral dunha progresión xeométrica dunha forma ou doutra:**
   a) Se coñecemos a_1 e r, vimos que: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$.
   b) Se coñecemos un termo calquera a_k e r, sabemos que: $a_n = a_k \cdot r^{n-k}$
   c) Se coñecemos dous termos calquera a_p e a_q, con a_p non nulo, fáltanos coñecer a razón r para poder aplicar a fórmula anterior. Pero, como sabemos que:

   $a_n = a_p \cdot r^{n-p}$ e que $a_n = a_q \cdot r^{n-q}$

   podemos despexar r en función de p, q, a_p e a_q e quédanos: $r = \sqrt[q-p]{\dfrac{a_q}{a_p}}$

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Actividades resoltas

- *Calcular o termo xeral dunha progresión xeométrica cuxo primeiro termo é* 7 e *a súa razón tamén é* 7.

  Basta con substituír na fórmula dada: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 7 \cdot 7^{n-1} = 7^n$.

- *Calcula o termo que ocupa o lugar* 5 *nunha progresión xeométrica cuxo primeiro termo é* 2 e a *razón* 3.

  Neste caso, $a_5 = a_1 \cdot r^{n-1} = 2 \cdot 3^{5-1} = 2 \cdot 3^4 = 162$.

- *Calcula o primeiro termo dunha progresión xeométrica con* $a_3=6$ e $r=-2$.

  Despexamos a_1 de $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ e temos: $a_1 = \dfrac{a_n}{r^{n-1}}$.

  Para $n=3$, temos: $a_1 = \dfrac{a_3}{r^2} = \dfrac{6}{(-2)^2} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$.

Actividades propostas

23. Pescuda a razón dunha progresión xeométrica cuxo primeiro termo é 27 e o cuarto é 8.

24. O cuarto termo dunha progresión xeométrica é 1/9 e a razón 1/3. Calcula o primeiro termo.

25. Calcula o sexto termo da seguinte progresión xeométrica: $\{\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4\ldots\}$

26. Dada unha progresión xeométrica dous de cuxos termos son: $a_3= -8$ e $a_{11}= -2\,048$

a) Calcula a súa razón.

b) Calcula o seu termo xeral.

27. Certa clase de alga, chamada *clorella*, reprodúcese dobrando a súa cantidade cada dúas horas e media. Ao cabo doutras dúas horas e media volve dobrar a súa cantidade, e así sucesivamente. Se se ten no momento inicial un quilo, ao cabo de dúas horas e media hai dous quilos. A) Fai unha táboa de valores na que indiques para cada período de reprodución o número de quilos de *clorella*. B) Indica o termo xeral. C) Ao cabo de 4 días, transcorreron 40 períodos, consideras posible este crecemento?

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

3.2. Produto dos termos dunha progresión xeométrica

Nunha progresión xeométrica, o produto de dous termos equidistantes é constante.

É dicir, se os subíndices naturais p, q, t e s verifican que $p + q = t + s$, entón: $a_p \cdot a_q = a_t \cdot a_s$

A demostración desta propiedade é moi sinxela:

$$a_p \cdot a_q = a_1 \cdot r^{p-1} \cdot a_1 \cdot r^{q-1} = a_1^2 \cdot r^{p-1} \cdot r^{q-1} = a_1^2 \cdot r^{p+q-2}$$
$$a_t \cdot a_s = a_1 \cdot r^{t-1} \cdot a_1 \cdot r^{s-1} = a_1^2 \cdot r^{t-1} \cdot r^{s-1} = a_1^2 \cdot r^{t+s-2}$$

E como: $p + q = t + s$, entón: $a_p \cdot a_q = a_t \cdot a_s$

Queremos calcular o produto dos n termos dunha progresión xeométrica, P_n. É dicir:

$$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots\ldots \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

Aplicando a propiedade conmutativa do produto, temos que:

$$P_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot \ldots\ldots \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot a_1$$

Multiplicando estas dúas igualdades:

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots\ldots \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n) \cdot (a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot \ldots\ldots \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot a_1)$$

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_2 \cdot a_{n-1}) \cdot (a_3 \cdot a_{n-2}) \cdot \ldots\ldots \cdot (a_{n-2} \cdot a_3) \cdot (a_{n-1} \cdot a_2) \cdot (a_n \cdot a_1)$$

Como se observa, os subíndices correspondentes a cada par de termos entre paréntese suman n+1, polo que o produto será sempre o mesmo en cada factor, entón: $P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)^n$

Despexando P_n: $P_n = \pm\sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$

O signo será positivo ou negativo dependendo da progresión.

O **produto** dos n primeiros termos dunha progresión **xeométrica** vén dado por:

$$\boldsymbol{P_n} = \pm\sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

Actividades resoltas

- *Calcula o produto dos sete primeiros termos dunha progresión xeométrica cuxo primeiro termo é* $a_1 = -1/8$ e a razón $r = 2$

  Observamos que todos os termos da sucesión son negativos, polo que o produto dun número par de termos é positivo e o produto dun número impar é negativo. Calculamos a_7 para poder utilizar a fórmula deducida anteriormente:

  $$a_7 = a_1 r^{n-1} = -\frac{1}{8} \cdot 2^{7-1} = (-1/8) \cdot 2^6 = -8$$

  Entón: $P_7 = \pm\sqrt{[(a_1)\cdot(a_7)]^7} = \pm\sqrt{[(-1/8)(-8)]^7} = -1$

Actividades propostas

28. O primeiro termo dunha progresión xeométrica é 3 e o oitavo 384. Calcula a razón e o produto dos 8 primeiros termos.

29. Calcula o produto dos 5 primeiros termos da progresión: 3, 6, 12, 24…

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

3.3. Suma dos termos dunha progresión xeométrica

A) Suma dun número limitado de termos consecutivos dunha progresión xeométrica

Exemplo:

- Xoán comprou 20 libros, polo 1º pagou 1 €, polo 2º, 2 €; polo 3º, 4 €; polo 4º, 8 € e así sucesivamente. Como podemos saber o que pagou en total sen necesidade de facer a suma?

Trátase dunha progresión xeométrica con $a_1 = 1$ e $r = 2$. Habería que calcular: $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{20}$. Imos velo en xeral, para unha progresión xeométrica calquera:

Queremos calcular: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$

Para isto, multiplicamos esta igualdade por r:

$r \cdot S_n = r \cdot a_1 + r \cdot a_2 + r \cdot a_3 + \ldots + r \cdot a_{n-1} + r \cdot a_n$

Pero como: $a_2 = r \cdot a_1$

$a_3 = r \cdot a_2$

$a_4 = r \cdot a_3$

....

$a_n = r \cdot a_{n-1}$

A igualdade anterior queda:

$r \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + r \cdot a_n$

Restando:

$r \cdot S_n \quad = \qquad a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + r \cdot a_n$

$\quad -S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$

$r \cdot S_n - S_n = -a_1 + r \cdot a_n$

$(r-1) \cdot S_n = r \cdot a_n - a_1 \rightarrow S_n = \dfrac{r \cdot a_n - a_1}{r-1}$ sempre que $r \neq 1$, e como $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

Entón:

$S_n = \dfrac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$ sempre que $r \neq 1$.

A **suma** dos n primeiros termos dunha progresión **xeométrica** vén dada por:

$$S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r-1} = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1} \text{ sempre que } r \neq 1.$$

Considérase $r \neq 1$ xa que ser $= 1$ a progresión é a progresión constante formada polo primeiro termo: $\{a_1, a_1, a_1, a_1, \ldots\}$ e $S_n = n \cdot a_1$

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Analicemos a suma segundo os distintos valores de r:

a) Se $|r| > 1$, os termos en valor absoluto medran indefinidamente e o valor de S_n vén dado pola fórmula anterior.

b) Se $|r| < 1$, a suma dos seus termos cando n é grande aproxímase a $S_n \approx \frac{a_1}{1-r}$, xa que se en $S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$, elevamos a razón $|r| < 1$ a unha potencia, canto maior sexa o expoñente n, menor será o valor de r^n e se n é suficientemente grande, r^n aproxímase a 0. Por iso,

$$S_n \approx \frac{a_1 \cdot (-1)}{r-1} = \frac{a_1}{1-r}$$

c) Se $r = -1$, os termos consecutivos son opostos: $\{a_1, -a_1, a_1, -a_1, \ldots\}$ e S_n é igual a cero se n é par, e igual a a_1 se n é impar. A suma da serie oscila entre eses dous valores.

d) Se $|r| > 1$, os termos en valor absoluto medran indefinidamente e o valor de S_n vén dado pola fórmula anterior.

e) Se $|r| < 1$, a suma dos seus termos cando n é grande aproxímase a $S_n \approx \frac{a_1}{1-r}$, xa que se en $S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$, elevamos a razón $|r| < 1$ a unha potencia, canto maior sexa o expoñente n, menor será o valor de r^n e se n é suficientemente grande, r^n aproxímase a 0. Por iso,

$$S_n \approx \frac{a_1 \cdot (-1)}{r-1} = \frac{a_1}{1-r}$$

f) Se $r = -1$, os termos consecutivos son opostos: $\{a_1, -a_1, a_1, -a_1, \ldots\}$ e S_n é igual a cero se n é par, e igual a a_1 se n é impar. A suma da serie oscila entre eses dous valores.

Actividades resoltas

- *Calcular a suma dos* 11 *primeiros termos dunha progresión xeométrica sabendo que o primeiro termo é* –2 *e a razón* –3.

$$S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r-1} = \frac{(-2)\,[(-3)^{11} - 1]}{-3 - 1} = -88\,574.$$

- *Calcular a suma dos* 7 *primeiros termos dunha progresión xeométrica sabendo que o sétimo termo é* 20 480*, o primeiro é* 5 *e a razón é* 4.

Agora utilizamos a fórmula: $S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r-1}$

Substituíndo:

$$S_7 = \frac{r\,a_7 - a_1}{r-1} = \frac{20\,480 \cdot 4 - 5}{4 - 1} = 27\,305.$$

Actividades propostas

30. Un agricultor na súa granxa ten 59 049 litros de auga para dar de beber aos animais. Un día utiliza a metade do contido, ao seguinte a metade do que lle quedaba e así sucesivamente cada día. Cantos litros de auga utilizou ata o sexto día?

31. Suma os quince primeiros termos dunha progresión xeométrica na que $a_1 = 5$ e $r = ½$

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Suma dun número ilimitado de termos consecutivos dunha progresión xeométrica

Que ocorrerá se repetimos o proceso anterior indefinidamente? É dicir, que ocorrerá se sumamos un número ilimitado de termos?

Dependendo do valor de *r* será posible ou non obter a suma dun número ilimitado de termos:

a) Se$r = 1$, a progresión é a progresión constante formada polo primeiro termo: $\{a_1, a_1, a_1, a_1, \ldots\}$ e se a_1 é positivo a suma dos termos será cada vez maior (se fose a_1 negativo sería a suma cada vez maior en valor absoluto, pero negativa). Polo tanto, se o número de termos é ilimitado, esta suma será infinita.

b) Se$|r| > 1$, os termos medran indefinidamente e o valor de S_n para un número ilimitado determos, tamén será infinito.

c) Se$|r| < 1$, a suma dos seus termos aproxímase cando *n* é grande a $S_n \approx \frac{a_1}{1-r}$.

   Observamos que a suma non depende do número de termos, xa que ao facerse cada vez máis pequenos, chega un momento no que non se consideran.

d) Se$r = -1$, os termos consecutivos son opostos: $\{a_1, -a_1, a_1, -a_1, \ldots\}$ e S_n é igual a cero se$n$ é par, e igual a a_1 se$n$ é impar. A suma da serie oscila entre eses dous valores para un número finito de termos. Para un número de termos ilimitado non sabemos se é par ou impar, co que a suma non se pode realizar a non ser que $a_1 = 0$, caso no que $S = 0 = \frac{a_1}{1-r}$. No resto dos casos dicimos que a suma de infinitos termos non existe pois o seu valor é oscilante.

e) Se$r < -1$, os termos oscilan entre valores positivos e negativos, medrando en valor absoluto. A suma dos seus infinitos termos non existe pois o seu valor tamén é oscilante.

En resumo,

A **suma** dun número **ilimitado** de termos dunha **progresión xeométrica** só toma un valor finito se $|r| < 1$, e entón vén dada por: $S = \frac{a_1}{1-r}$. No resto dos casos, ou vale infinito, ou non existe pois oscila.

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Actividades resoltas

- *Calcula a suma de todos os termos da progresión xeométrica cuxo primeiro termo é* 4 e a *razón* 1/2.

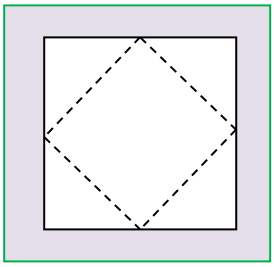
$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8$$

- *Nunha progresión xeométrica a razón é* 1/4 *e a suma de todos os seus termos é* 8. *Canto vale o primeiro termo?*

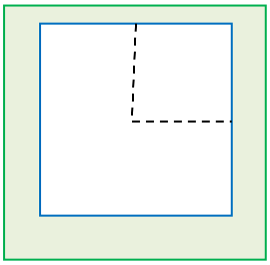
Despexamos a_1 de: $S = \frac{a_1}{1-r}$ e: $a_1 = S\,(1-r) = 8 \cdot (1-1/4) = 6$

Actividades propostas

32. Calcula a suma dos infinitos termos da sucesión: 6, 3, 3/2, 3/4,…



33. Temos na man un cadrado de área 1. Cortamos as catro esquinas polos puntos medios dos lados. O novo cadrado, que área ten? Deixamos os recortes enriba da mesa. Que área de recortes hai sobre a mesa? Co novo cadrado que temos na man efectuamos a mesma operación de cortar as catro esquinas e deixalas sobre a mesa, e así sucesivamente. Que área teñen os sucesivos cadrados que teño na man? E os recortes que quedan sobre a mesa? Calcula a suma das infinitas áreas de recortes así obtidas.



34. De novo temos un cadrado de área 1 na man, e cortámolo polas liñas de puntos como indica a figura. O anaco maior deixámolo sobre a mesa e quedamos na man co cadrado, que volvemos cortar da mesma maneira. E así sucesivamente. Que área teñen os sucesivos cadrados que teño na man? Medran ou diminúen? Escribe o termo xeral da sucesión de áreas que temos na man. E os recortes que quedan sobre a mesa? Medra a área ou diminúe? Imos sumando áreas, calcula a suma destas áreas se fixeramos infinitos cortes.

Propóñoche agora ver este vídeo sobre progresións xeométricas.

Copia este enderezo en, por exemplo, Google para velo:

https://youtu.be/d_DfQuusVQI

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

3.4. Aplicacións das progresións xeométricas

Fracción xeratriz

O curso pasado estudaches como pasar dun decimal periódico puro ou periódico mixto a unha fracción. Agora imos utilizar as progresións xeométricas para que comprendas mellor o proceso.

Exemplo:

- *Se temos un **número decimal periódico puro**, podémolo escribir como:*

$$2.\widehat{37} = 2 + 0.37 + 0.0037 + 0.000037\ldots$$

Ou o que é o mesmo:

$$2 + \frac{37}{100} + \frac{37}{100\cdot 100} + \frac{37}{100\cdot 100\cdot 100} + \ldots$$

onde os sumandos a partir do segundo forman unha progresión xeométrica de razón $r = \frac{1}{100} < 1$, cuxa suma infinita vale: $S = \frac{a_1}{1-r}$. Polo tanto:

$$2 + \frac{\frac{37}{100}}{1-\frac{1}{100}} = 2 + \frac{\frac{37}{100}}{\frac{99}{100}} = 2 + \frac{37}{99} = \frac{198}{99} + \frac{37}{99} = \frac{235}{99}$$

- *Se temos un **número decimal periódico mixto**, utilízase un proceso similar:*

$$1.32\widehat{8} = 1.32 + 0.008 + 0.0008 + \ldots$$

Ou o que é o mesmo:

$$1.32 + \frac{8}{1000} + \frac{8}{1000\cdot 10} + \frac{8}{1000\cdot 10\cdot 10} + \ldots$$

Neste caso, os sumandos a partir do segundo forman unha progresión xeométrica de razón $r = \frac{1}{10} < 1$.

Polo tanto:

$$1.32 + \frac{\frac{8}{1000}}{1-\frac{1}{10}} = 1 + 0.32 + \frac{8}{900} = 1 + \frac{32}{100} + \frac{8}{900} = 1 + \frac{296}{900}$$

Nota

Con este proceso estamos ilustrando o concepto de fracción xeratriz como aplicación das progresións xeométricas, pero a efectos prácticos é máis cómodo efectualo segundo o proceso visto.

Capitalización composta

O interese composto estudaralo detidamente no capítulo 6, pero agora é interesante que saibas que entón vas usar as progresións xeométricas para calculalo e que tes unha folla de cálculo para facer as operacións.

Se depositamos nunha entidade financeira unha cantidade de diñeiro C_0 durante un tempo t e un rédito r, dado en tanto por un, obteremos un beneficio: $I = C_0 \cdot r \cdot t$ chamado **interese.**

A principal característica da capitalización composta é que os intereses que se xeran nun ano, pasan a formar parte do capital inicial e producen intereses nos períodos seguintes.

Entón:

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

- Ao final do *primeiro ano*, o capital será o capital inicial C_0 xunto cos intereses producidos durante ese ano. É dicir:

$$C_1 = C_0 + I = C_0 + C_0 \cdot r \cdot 1 = C_0 \cdot (1 + r)$$

- Ao final do *segundo ano*, o capital que teremos será o capital que tiñamos ao finalizar o primeiro ano máis os intereses producidos ese segundo ano. É dicir:

$$C_2 = C_1 + C_1 \cdot r \cdot 1 = C_1 \cdot (1 + r) = C_0 \cdot (1 + r) \cdot (1 + r) = C_0 \cdot (1 + r)^2$$

Observando os capitais obtidos: C_1, C_2, …, C_n concluímos que se trata dunha progresión xeométrica de razón $(1 + r)$. Polo tanto:

- O *ano n-ésimo*, teremos:

O capital final obtido despois de n anos dado un capital inicial C_0 e un rédito r dado en tanto por un é:
$C_n = C_0 \cdot (1 + r)^n$

Actividades resoltas

- *Vexamos a fracción xeratriz de* $23.\overline{45}$ *como aplicación das progresións xeométricas.*

$$23.\overline{45} = 23 + 0.45 + 0.0045 + 0.000045 + \ldots$$

Ou o que é o mesmo:

$$23 + \frac{45}{100} + \frac{45}{100 \cdot 100} + \frac{45}{100 \cdot 100 \cdot 100} + \ldots$$

onde os sumandos a partir do segundo forman unha progresión xeométrica de razón $r = \frac{1}{100} < 1$, cuxa suma infinita vale: $S = \frac{a_1}{1 - r}$. Polo tanto:

$$23 + \frac{\frac{45}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = 23 + \frac{\frac{45}{100}}{\frac{99}{100}} = 23 + \frac{45}{99} = \frac{2277}{99} + \frac{45}{99} = \frac{2322}{99} = \frac{258}{11}.$$

- *Depositamos nun banco* 1 500 € ao 3.5 % *de capitalización composta durante tres anos. Canto diñeiro teriamos ao finalizar o terceiro ano?*

  Utilizamos a expresión: $C_t = C_0 \cdot (1 + r)$ onde $C_0 = 1\,500$ €, $r = 0.035$ pois é o tanto por un e $t = 3$ anos. Polo tanto: $C_t = C_0 \cdot (1+r)^t = 1\,500(1 + 0.035)^3 = 1\,663.08$ €.

Actividades propostas

35. Calcula a fracción xeratriz do número $4.5\widehat{6}\widehat{1}$.

36. Un empresario acode a unha entidade financeira para informarse sobre como investir os 6 000 € de beneficios que tivo nun mes. Ofrécenlle dúas opcións.

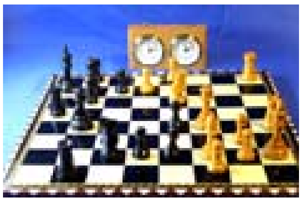
a) Manter ese capital durante 5 anos ao 3.5 % anual ou

b) Recibir o 5 % do capital durante os dous primeiros anos e o 3 % os tres anos restantes. Que opción lle interesa máis?

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

A) O inventor do xadrez



Xa vimos no capítulo sobre potencias a lenda sobre o xadrez. Agora podes utilizar os teus coñecementos sobre progresións para facer os cálculos:

Conta a lenda como o inventor do xadrez o presentou a un príncipe da India. O príncipe quedou tan impresionado que quixo premialo xenerosamente, para o cal lle dixo: "Pídeme o que queiras, que cho darei".

O inventor do xadrez formulou a súa petición do modo seguinte:

"Desexo que me entregues un gran de trigo pola primeira casa do taboleiro, dous pola segunda, catro pola terceira, oito pola cuarta, dezaseis pola quinta, e así sucesivamente ata a casa 64".

A sorpresa foi cando o secretario do príncipe calculou a cantidade de trigo que representaba a petición do inventor, porque toda a Terra sementada de trigo era insuficiente para obter o que pedía o inventor.

Que tipo de progresión se utiliza? Aritmética ou xeométrica? Cal é a razón?

Cantos trillóns de grans de trigo pedía aproximadamente?

Poderías calcular o total de grans de trigo utilizando fórmulas e usando a calculadora?

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{62} + 2^{63}$$

Potencias de 2 no tenis

As potencias de 2 tamén aparecen nos torneos de tenis. En moitos torneos enfróntanse os xogadores da seguinte forma: na final xogan dous xogadores; na semifinal hai catro; nos cuartos de final hai oito xogadores. Así, en cada ronda adicional a cantidade de xogadores duplícase, tal e como ocorría cos grans de trigo no taboleiro de xadrez. Se o torneo tivese 25 rondas, imaxinas cantos habería? Pois, poderían participar case todos os habitantes de España!! e con 33 rondas, poderían participar todos os habitantes do planeta!!

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Sucesión de *Fibonacci*

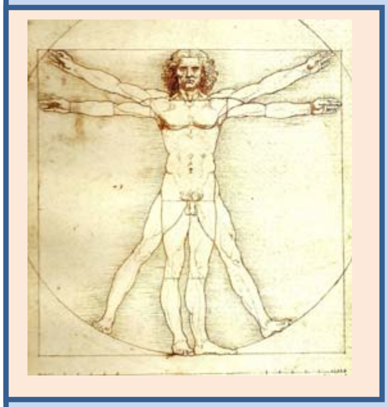
Para os que pensades que é imposible ver Matemáticas fóra da aula e moito menos na natureza, presentámosvos un dos máis fermosos conceptos matemáticos estreitamente relacionado coa natureza e a arte.

Trátase dunha sucesión moi simple, na que cada termo é a suma dos dous anteriores.

- A sucesión comienza polo número 1,
- E segue con 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1 597, 2 584…, xa que 1 = 0 + 1; 2 = 1 + 1; 3 = 1 + 2; 5 = 2 + 3; 8 = 3 + 5; 13 = 5 + 8; 21 = 8 + 13… etc.

Unha das propiedades máis curiosas, é que o cociente de dous números consecutivos da serie se aproxima á chamada **"sección áurea" ou "divina proporción".**

Este número, descuberto polos renacentistas, é $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ = 1.61803… e noméase coa letra griega ϕ. A sucesión formada polos cocientes de números consecutivos da sucesión de *Fibonacci* achégase rapidamente cara ao número áureo. Os gregos e renacentistas estaban fascinados con este número e considerábano o ideal da beleza.



De feito, *Leonardo da Vinci* na súa obra "*O home de Vitrubio*" utiliza este número para conseguir as perfectas proporcións da súa obra.

Como pode ser que o cociente de dous números dunha secuencia inventada polo home se relacione coa beleza? Pois porque a sucesión de *Fibonacci* está estreitamente relacionada coa natureza. Crese que Leonardo encontrou estes números cando estudaba o crecemento das poboacións de coellos. Supoñamos que unha parella de coellos tarda un mes en acadar a idade fértil e a partir dese momento cada vez enxendra outra parella de coellos, que á súa vez enxendrarán cada mes unha parella de coellos.

Cantos coellos haberá ao cabo dun determinado número de meses?

Pois si, cada mes haberá un número de coellos que coincide con cada un dos termos da sucesión de *Fibonacci*. Parece maxia, verdade?

Pois moitas plantas, como os ananás ou as margaridas seguen unha disposición relacionada tamén coa sucesión de *Fibonacci*, o que ilustra a famosa frase de Galileo

"A naturaliza está escrita en linguaxe matemática".

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

RESUMO

Progresión aritmética	É unha sucesión de números reais na que a diferenza entre dous termos consecutivos da sucesión é constante. A esta constante chámaselle diferenza da progresión e soe denotarse coa letra *d*.	2, 5, 8, 11, 14, 17, …
Termo xeral	$a_n = a_k + d \cdot (n - k)$ sendo a_k o termo que ocupa o lugar k	$a_n = 2 + 3n$
Suma dos *n* primeiros termos	$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$	$S_8 = (8/2) \cdot (2 + (2 + 3 \cdot 8)) =$ $4 \cdot (4 + 24) = 4 \cdot 28 = 112$
Progresión xeométrica	É unha sucesión de números reais na que o cociente entre cada termo e o anterior é constante. A esta constante chámaselle razón da progresión e soe denotarse coa letra *r*. É dicir, $\frac{a_{i+1}}{a_i} = r$ sendo *i* un número natural.	3, 6, 12, 24, … 1, 1/2, 1/4, 1/8…
Termo xeral	$a_n = a_k \cdot r^{n-k}$ sendo a_k o termo da sucesión que ocupa o lugar k	$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ $a_n = 1 \cdot (1/2)^n$
Suma	-Para $r \neq 1$, e un número finito de termos: $S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r - 1} = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$ - Para $r \neq 1$, e unha cantidade ilimitada de termos: $S = \frac{a_1}{1 - r}$	$S_8 = 3(2^8 - 1)/(2 - 1) =$ $3(256 - 1) = 3(255) = 765$. $S = 1/(1 - 1/2) = 2$
Produto dos *n* primeiros termos	$P_n = \pm\sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$.	$P_9 = + \sqrt{(3 \cdot 3 \cdot 2^8)^9} = (3 \cdot 2^4)^9$

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

EXERCICIOS E PROBLEMAS

1. Calcula o termo que ocupa o lugar 100 dunha progresión aritmética cuxo primeiro termo é igual a 4 e a diferenza é 5.
2. O décimo termo dunha progresión aritmética é 45 e a diferenza é 4. Calcula o primeiro termo.
3. Sabendo que o primeiro termo dunha progresión aritmética é 4, a diferenza 7 e o termo n-ésimo 88, calcula n.
4. Calcula o primeiro termo dunha progresión aritmética e a diferenza, sabendo que $a_3 = 24$ e $a_{10} = 66$.
5. O termo sexto dunha progresión aritmética é 4 e a diferenza 1/2. Calcula o termo 20.
6. Calcula os lados dun triángulo rectángulo sabendo que as súas medidas, expresadas en metros, están en progresión aritmética de diferenza 3.
7. Calcula tres números que estean en progresión aritmética e tales que, aumentados en 5, 4 e 7 unidades respectivamente, sexan proporcionais a 5, 6 e 9.
8. Calcula a suma dos múltiplos de 59 comprendidos entre 1 000 e 2 000.
9. O produto de tres termos consecutivos dunha progresión aritmética é 80 e a diferenza é 3. Calcula estes termos.
10. Cantos termos hai que sumar da progresión aritmética 2, 8, 14... para obter como resultado 1 064?
11. A suma de n números naturais consecutivos tomados a partir de 11 é 1715. Cantos termos sumamos?
12. Sabendo que o quinto termo dunha progresión aritmética é 18 e a diferenza é 2, calcula a suma dos nove primeiros termos da sucesión.
13. A suma de tres números en progresión aritmética é 33 e o seu produto 1 287. Calcula estes números.
14. Tres números en progresión aritmética teñen por produto 16 640; o máis pequeno vale 20. Calcula os outros dous.
15. O produto de cinco números en progresión aritmética é 12 320 e a súa suma 40. Calcula estes números sabendo que son enteiros.
16. Calcula tres números sabendo que están en progresión aritmética, que a súa suma é 18 e que a suma do primeiro e do segundo é igual ao terceiro diminuído en dúas unidades.
17. A suma dos once primeiros termos dunha progresión aritmética é 176 e a diferenza dos extremos é 30. Calcula os termos da progresión.
18. Calcula catro números en progresión aritmética, coñecendo a súa suma, que é 22, e a suma dos seus cadrados, 166.
19. A diferenza dunha progresión aritmética é 4. O produto dos catro primeiros termos é 585. Calcula os termos.
20. Calcula os seis primeiros termos dunha progresión aritmética sabendo que os tres primeiros suman –3 e os tres últimos 24.
21. Nunha progresión aritmética o onceavo termo excede en 2 unidades ao oitavo, e o primeiro e o noveno suman 6. Calcula a diferenza e os termos mencionados.
22. Nunha progresión aritmética, os termos segundo e terceiro suman 19, e os termos quinto e sétimo suman 40. Calcúlaos.
23. Sabendo que as medidas dos tres ángulos dun triángulo están en progresión aritmética e que un deles mide 100°, calcula os outros dous.
24. Calcula as dimensións dun ortoedro sabendo que están en progresión aritmética, que suman 78 m e que o volume do ortoedro é de 15 470 m^3.
25. Os seis ángulos dun hexágono están en progresión aritmética. A diferenza entre o maior e o menor é 60°. Calcula o valor de cada ángulo.

26. As lonxitudes dos tres lados dun triángulo rectángulo están en progresión aritmética e suman 36 metros. Canto mide cada lado?

27. Un coronel manda 5 050 soldados e quere formar con eles un triángulo para unha exhibición, de modo que a primeira fila teña un soldado, a segunda dous, a terceira tres, etc. Cantas filas ten que haber?

28. Polo aluguer dunha casa acórdase pagar 800 euros ao mes durante o primeiro ano, e cada ano aumentarase o aluguer en 50 euros mensuais. Canto se pagará mensualmente ao cabo de 12 anos?

29. As idades de catro irmáns forman unha progresión aritmética, e a súa suma é 32 anos. O maior ten 6 anos máis que o menor. Calcula as idades dos catro irmáns.

30. Un esquiador comeza a pretempada de esquí facendo pesas nun ximnasio durante unha hora. Decide incrementar o adestramento 10 minutos cada día. Canto tempo deberá adestrar ao cabo de 15 días? Canto tempo en total terá dedicado ao adestramento ao longo de todo un mes de 30 días?

31. Nunha sala de cine, a primeira fila de butacas dista da pantalla 86 dm, e a sexta, 134 dm. En que fila estará unha persoa se a súa distancia á pantalla é de 230 dm?

32. Calcula o termo onceavo dunha progresión xeométrica cuxo primeiro termo é igual a 1 e a razón é 2.

33. O quinto termo dunha progresión xeométrica é 81 e o primeiro é 1. Calcula os cinco primeiros termos da progresión.

34. Nunha progresión xeométrica de primeiro termo 7 e razón 2, un certo termo é 28 672. Que lugar ocupa este termo?

35. Sabendo que o sétimo termo dunha progresión xeométrica é 1 e a razón 1/2, calcula o primeiro termo.

36. Nunha progresión xeométrica sábese que o termo décimo quinto é igual a 512 e que o termo décimo é igual a 16. Calcula o primeiro termo e a razón.

37. Descompón o número 124 en tres sumandos que formen progresión xeométrica, sendo 96 a diferenza entre o maior e o menor.

38. O volume dun ortoedro é de 3 375 cm^3. Calcula a lonxitude das súas arestas, sabendo que están en progresión xeométrica e que a aresta intermedia mide 10 cm máis cá menor.

39. Calcula o produto dos oito primeiros termos da progresión 3, 6, 12, 24,...

40. Calcula a suma dos dez primeiros termos da progresión xeométrica 3, 6, 12, 24,...

41. A suma dos oito primeiros termos dunha progresión xeométrica é 16 veces a suma dos catro primeiros. Calcula o valor da razón.

42. Calcula a suma dos termos da progresión ilimitada: 8, 4, 2, 1,...

43. Calcula tres números en progresión xeométrica sabendo que a súa suma é 26 e o seu produto 216.

44. Calcula o produto dos once primeiros termos dunha progresión xeométrica sabendo que o termo central vale 2.

45. Tres números en progresión xeométrica suman 525 e o seu produto vale un millón. Calcula estes números.

46. Determina catro números en progresión xeométrica de maneira que os dous primeiros sumen 0.5 e os dos últimos 0.125.

47. Cantos termos se tomaron nunha progresión xeométrica, sabendo que o primeiro termo é 7, o último 448 e a súa suma 889?

48. A suma dos sete primeiros termos dunha progresión xeométrica de razón 3 é 7 651. Calcula os termos primeiro e sétimo.

49. Calcula tres números en progresión xeométrica cuxo produto é 328 509, sabendo que o maior excede en 115 á suma dos outros dous.

50. Tres números están en progresión xeométrica; o segundo é 32 unidades maior que o primeiro, e o terceiro, 96 unidades maior que o segundo. Calcula os números.

51. Calcula os catro primeiros termos dunha progresión xeométrica, sabendo que o segundo é 20 e a suma dos catro primeiros é 425.

52. Calcula os ángulos dun cuadrilátero, se se sabe que están en progresión xeométrica e que o maior é 27 veces o menor.

53. As dimensións dun ortoedro están en progresión xeométrica. Calcula estas dimensións sabendo que as súas arestas suman 420 m e o seu volume 8 000 m^3.

54. Divide o número 221 en tres partes enteiras que forman unha progresión xeométrica tal que o terceiro termo excede ao primeiro en 136.

55. A suma de tres números en progresión xeométrica é 248 e a diferenza entre os extremos 192. Calcula estes números.

56. Calcula catro números en progresión xeométrica sabendo que a suma dos dous primeiros é 28 e a suma dos dous últimos 175.

57. Nunha progresión xeométrica, os termos primeiro e décimo quinto son 6 e 54, respectivamente. Calcula o termo sexto.

58. Unha progresión xeométrica ten cinco termos, a razón é igual á cuarta parte do primeiro termo e a suma dos dous primeiros termos é 24. Calcula os cinco termos.

59. Calcula x para que $x - 1$, $x + 1$, $2(x + 1)$ estean en progresión xeométrica.

60. A unha corda de 700 m de lonxitude dánselle dous cortes, de modo que un dos anacos extremos ten unha lonxitude de 100 m. Sabendo que as lonxitudes dos anacos están en progresión xeométrica, determina a lonxitude de cada anaco.

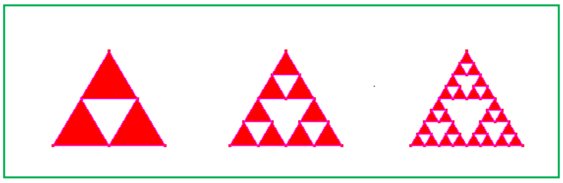
61. Calcula a fracción xeratriz do número decimal 0.737373... como suma dos termos dunha progresión xeométrica ilimitada.

62. Temos un bocoi de viño que contén 1 024 litros. O 1 de outubro baleirouse a metade do contido; ao día seguinte volveuse baleirar a metade do que quedaba, e así sucesivamente todos os días. Que cantidade de viño se sacou o día 10 de outubro?

63. Dado un cadrado de 1 m de lado, unimos dous a dous os puntos medios dos seus lados; obtemos un novo cadrado, no que volvemos efectuar a mesma operación, e así sucesivamente. Calcula a suma das infinitas áreas así obtidas.

64. Tres números cuxa suma é 36 están en progresión aritmética. Calcula estes números sabendo que se se lles suma 1, 4 e 43, respectivamente, os resultados forman unha progresión xeométrica.

65. *Triángulo de Sierspinky*: Imos construír un fractal. Pártese dun triángulo equilátero. Únense os puntos medios dos lados e fórmanse catro triángulos. Elimínase o triángulo central. En cada un dos outros tres triángulos repítese o proceso. E así sucesivamente. A figura formada por iteración infinita denomínase Triángulo de *Sierspinky* e é un fractal. Imaxina que o primeiro triángulo ten unha área A. Cando aplicamos a primeira iteración, a área é (3/4)A. E na segunda? Escribe a sucesión das áreas. É crecente ou decrecente? Imaxina agora que a lonxitude de cada lado do triángulo inicial é L. Escribe a sucesión das lonxitudes. É crecente ou decrecente?



Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

AUTOAVALIACIÓN

1. Cal é a razón da seguinte progresión xeométrica: $a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$?

a) 5 b) 3 c) 2 d) Non é unha progresión xeométrica

2. Na sucesión de múltiplos de 13, o 169 ocupa o lugar:

a) 1 b) 2 c) 13 d) 169

3. A suma dos dez primeiros termos da progresión aritmética: 7, 13, 19, 31, … é:

a) 170 b) 34 c) 19 d) 340

4. A sucesión 5, 15, 45, 135, 405, 1215...:

a) é unha progresión xeométrica de razón 5 b) é unha progresión aritmética de diferenza 5

c) é unha progresión xeométrica de razón 3 d) é unha progresión aritmética de diferenza 3.

5. Sexa a sucesión: 2, 10, 50, 250, 1 250... o seu termo xeral é:

a) $a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$ b) $a_n = 2 \cdot 2^{n-1}$ c) $a_n = 5 \cdot 5^{n-1}$ d) $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$

6. Canto suman as potencias de 2 comprendidas entre 2^1 e 2^{10}?

a) 1 022 b) 2 046 c) 1 024 d) 2 048

7. A progresión aritmética cuxo primeiro termo é 1 e a súa diferenza 2, ten como termo xeral:

a) $a_n = 2n$ b) $a_n = 2n + 1$ c) $a_n = 2n – 1$ d) $a_n = 2n – 2$

8. Cal é o valor da suma: 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 999?

a) 500 000 b) 250 000 c) 50 000 d) 25 000

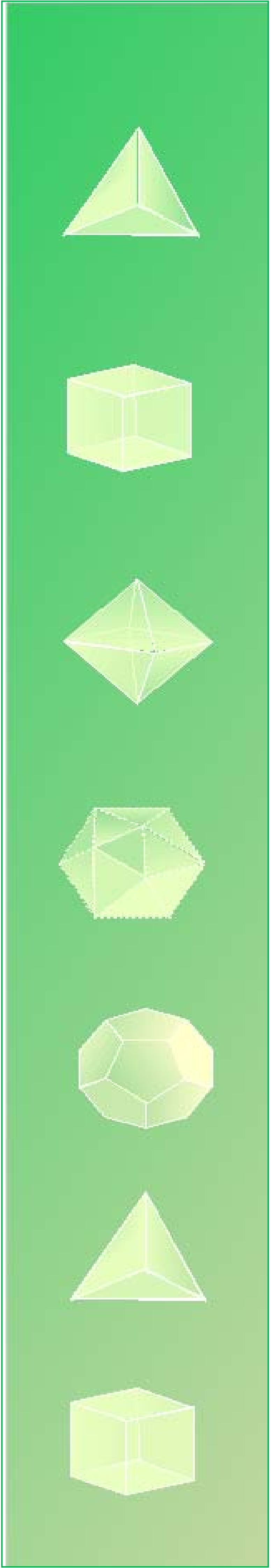
9. María está preparando o exame de selectividade. Para non deixar toda a materia para o final decidiu estudar cada día o dobre de páxinas que o día anterior. Se o primeiro día estudou tres páxinas, cantas terá estudado ao cabo de 7 días?

a) 381 b) 192 c) 765 d) 378

10. A Roberto tócanlle 6 000 € na lotería e decide depositalos no banco a un tipo de interese composto do 4 %. Canto diñeiro terá ao cabo de 5 anos?

a) 6 240 € b) 6 104 € c) 7 832.04 € d) 7 299.92 €

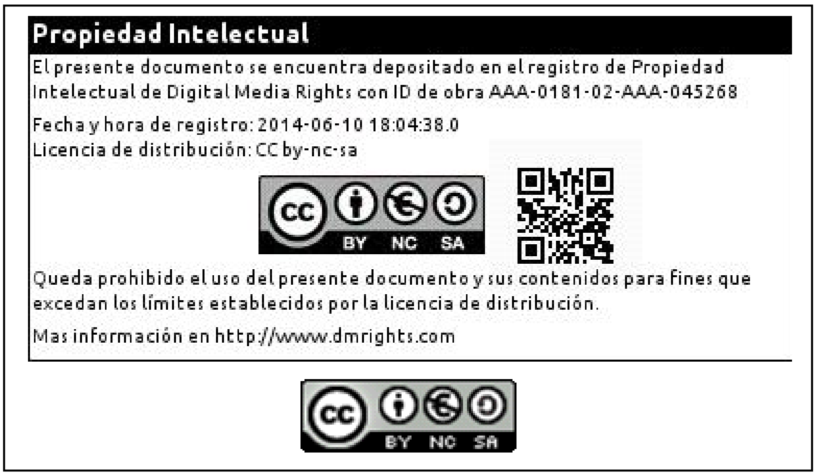
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF



Matemáticas orientadas ás ensinanzas académicas

3º B da ESO

Capítulo 4: Expresións alxébricas. Polinomios



www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez

Revisor: Javier Rodrigo

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

ecommons.wikimedia

Índice

1. INTRODUCIÓN. EXPRESIÓNS ALXÉBRICAS

1.1. INTRODUCIÓN

1.2. EXPRESIÓNS ALXÉBRICAS

2. POLINOMIOS. SUMA E PRODUTO

2.1. MONOMIOS. POLINOMIOS

2.2. SUMA DE POLINOMIOS

2.3. PRODUTO DE POLINOMIOS

3. DIVISIÓN DE POLINOMIOS

3.1. INTRODUCIÓN ÁS FRACCIÓNS POLINÓMICAS

3.2. DIVISIÓN DE POLINOMIOS

3.3. IGUALDADES NOTABLES

3.4. OPERACIÓNS CON FRACCIÓNS ALXÉBRICAS

Resumo

Segundo avanzamos nos nosos estudos vanse ampliando os nosos coñecementos, en particular os de Matemáticas. Isto non se debe a ningún tipo de capricho, todo o contrario: ao longo da historia as Matemáticas desenvólvense empuxadas polas necesidades das persoas. É indubidable a conveniencia de que unha persoa teña soltura cos números e as súas operacións básicas: suma, resta, multiplicación e división. Por soltura non debe entenderse que se saiba de memoria "todas" as táboas de multiplicar, senón que sexa consciente do que significa realizar unha operación concreta, que sexa capaz de dar resposta a preguntas cotiás que se solucionan *operando* adecuadamente os datos dispoñibles. Para ese propósito é útil fomentar a nosa capacidade de abstracción; ela permítenos recoñecer como equivalentes situacións en aparencia moi afastadas. Neste capítulo vaise dar un paso nese sentido ao manipular, manexar, datos numéricos non concretados, non coñecidos, a través de indeterminadas ou variables. Desa maneira aparecerán as expresións alxébricas e, dentro delas, unhas expresións particulares de abundante uso e simplicidade de exposición, os polinomios.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

1. INTRODUCIÓN. EXPRESIÓNS ALXÉBRICAS

1.1. Introdución

Non é preciso imaxinar situacións rebuscadas para que, á hora de realizar un razoamento, nos atopemos con algunha das catro operacións matemáticas básicas: suma, resta, multiplicación ou división.

Exemplos:

- O pai, a nai e o fillo foron ao cine e as entradas custaron 27 euros. Para calcular o prezo de cada entrada divídese entre 3: 27/ 3 = 9 euros.
- Se imos comprar pastas de té e o prezo dun quilogramo é de 18.3 euros, resulta habitual que, segundo vai a dependenta introducindo pastas nunha bandexa, imos vendo o importe final. Para iso se a bandexa está sobre unha balanza, executamos a operación 18.3 · *x* onde *x* é a cantidade de quilogramos que nos indica a balanza. Despois de cada pesada, o resultado desa multiplicación reflicte o importe das pastas que, nese momento, contén a bandexa.

- Supoñamos que temos un contrato cunha compañía de telefonía móbil polo que pagamos 5 céntimos de euro por minuto, así como 12 céntimos por establecemento de chamada. Con esa tarifa, unha chamada de 3 minutos custaranos:

$(0.05 \cdot 3) + 0.12 = 0.15 + 0.12 = 0.27$ euros

Pero cal é o prezo dunha chamada calquera? Como descoñecemos a súa duración, encontrámonos cunha cantidade non determinada, ou indeterminada, polo que en calquera resposta que deamos á pregunta anterior se apreciará a ausencia dese dato concreto. Podemos dicir que o custe dunha chamada calquera é

$$(0.05 \cdot x) + 0.12 = 0.05 \cdot x + 0.12 \text{ euros}$$

onde x sinala a súa duración, en minutos.

Actividades propostas

1. A finais de cada mesa empresa de telefonía móbil proporciónanos a factura mensual. Nela aparece moita información, en particular, o número total de chamadas realizadas (*N*) así como a cantidade total de minutos de conversa (*M*). Cos datos do anterior exemplo, xustifica que o importe das chamadas efectuadas durante ese mes é:

$$(0.05 \cdot M) + (0.12 \cdot N) = 0.05 \cdot M + 0.12 \cdot N \text{ euros}$$

Exemplo:

- É ben coñecida a *fórmula* da área dun rectángulo de base *b* e altura asociada *h*:

A = *b* · *h*


h
b

En todos estes exemplos xurdiron **expresións alxébricas**.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

1.2. Expresións alxébricas

Chamaremos **expresión alxébrica a** calquera expresión matemática que se constrúa con números e coas operacións matemáticas básicas: suma, resta, multiplicación e/ou división. Nunha expresión alxébrica pode haber datos non concretados; segundo o contexto, recibirán o nome de ***variable***, ***indeterminada***, ***parámetro***, entre outros.

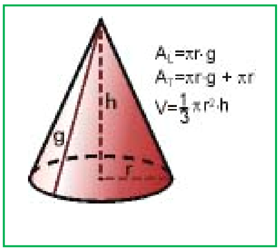
Se nunha expresión alxébrica non hai *variables*, esa expresión non é máis que un número:

Exemplo:

$$\frac{3\cdot(-7)}{\frac{4}{5}-\frac{2}{3}}+1=\frac{-21}{\frac{4\cdot3}{5\cdot3}-\frac{2\cdot5}{3\cdot5}}+1=\frac{-21}{\frac{12}{15}-\frac{10}{15}}+1=\frac{-21}{\frac{2}{15}}+1=\frac{-21\cdot15}{2}+1=\frac{-315}{2}+1=\frac{-315}{2}+\frac{2}{2}=\frac{-313}{2}$$

Ao fixar un valor concreto para cada *indeterminada* dunha expresión alxébrica aparece un número, o **valor numérico** desa expresión alxébrica para tales valores das indeterminadas.

Exemplo:



- O volume dun cono vén dado pola expresión alxébrica:

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot r^2\cdot h$$

na que r é o radio do círculo base e h é a súa altura. Deste modo, o volume dun cono cuxa base ten un radio de 10 cm e de altura 15 cm é igual a:

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot r^2\cdot h=\frac{1}{3}\pi\cdot 10^2\cdot 15=500\cdot\pi\, cm^3.$$

- A área lateral do cono vén dada por $A_L = \pi \cdot r \cdot g$, onde r é o radio da base e g a xeratriz. A superficie total é $A_T = \pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2$.
- A expresión alxébrica que representa o produto dos cadrados de dous números calquera x e y simbolízase por $x^2 \cdot y^2$. Se nela fixamos $x=-2$ e $y=\frac{3}{5}$ resulta

$$(-2)^2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2=4\cdot\frac{9}{25}=\frac{36}{25}.$$

- Se na expresión

$$7+\frac{x}{2}+x\cdot y^3-\frac{6}{z}$$

particularizamos as tres variables cos valores

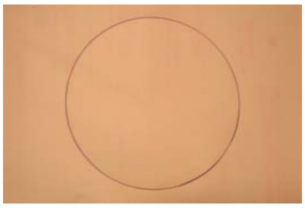
$$x = 4\ ,\ \ y = -1\ ,\ \ z = \frac{1}{2}$$

xorde o número

$$7 + \frac{4}{2} + 4 \cdot (-1)^3 - \frac{6}{1/2} = 7 + 2 - 4 - 12 = -7$$

Nunha expresión alxébrica pode non ter sentido outorgar algún valor a certa indeterminada. En efecto, no último exemplo non é posible facer $z = 0$.

Actividades propostas



2. Escribe as expresións alxébricas que nos proporcionan a lonxitude dunha circunferencia e a área dun trapecio.

3. Reescribe, en linguaxe alxébrica, os seguintes enunciados, referidos a dous números calquera x e y:

a) o triplo da súa diferenza b) a suma dos seus cadrados c) o cadrado da súa suma

d) o inverso do seu produto e) a suma dos seus opostos f) o produto dos seus cadrados

4. Unha tenda de roupa anuncia nos seus escaparates que está de rebaixas e que todos os seus artigos están rebaixados un 30% sobre o prezo impreso en cada etiqueta. Escribe o que pagaremos por unha peza en función do que aparece na súa etiqueta.

5. Calcula o valor numérico das seguintes expresións alxébricas para o valor ou valores que se indican:

a) $-3x^2 + \frac{4}{x} - 5$ para $x = -2$.

b) $3b + \frac{a+b}{2-b^3} + a \cdot b^2 - 1$ para $a = \frac{1}{3}$ e $b = \frac{1}{2}$.

6. Indica, en cada caso, o valor numérico da expresión $x - 2y + 3z$:

a) $x = 1, y = 2, z = 1$

b) $x = 2, y = 0, z = -1$

c) $x = 0, y = 1, z = 0$

7. Calcula o valor numérico das seguintes expresións alxébricas para o valor ou os valores que se indican:

a) $x^2 + 2x - 7$ para $x = 2$ b) $(a + b)^2 - (a^2 + b^2)$ para a 3 e $b = -2$ c) $c^2 + 3c + 7$ para $c = 1$.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

2. POLINOMIOS. SUMA E PRODUTO

2.1. Monomios. Polinomios

Unhas expresións alxébricas de gran utilidade son os **polinomios**, cuxa versión máis simple e, á vez, xeradora deles son os **monomios**.

Un **monomio** vén dado polo produto de números e indeterminadas. Chamaremos **coeficiente** dun monomio ao número que multiplica á indeterminada, ou indeterminadas; a indeterminada, ou indeterminadas, conforman a **parte literal** do monomio.

Exemplos:

- A expresión que nos proporciona o triplo dunha cantidade, $3\cdot x$, é un monomio cunha única variable, x, e coeficiente 3.
- O volume dun cono, $\frac{1}{3}\pi\cdot r^2\cdot h$, é un monomio con dúas indeterminadas, r e h, e coeficiente $\frac{1}{3}\pi$. A súa parte literal é $r^2\cdot h$.
- Outros monomios: $5a^2b^3$, $\sqrt{2}\cdot x^3\cdot y^2\cdot z^2$
- A expresión $5xy^2+\sqrt{3}xy-\frac{3}{7}x$ está formada por tres termos, tres monomios. Cada un ten un coeficiente e unha parte literal:

  No primeiro, $5xy^2$, o coeficiente é 5 e a parte literal xy^2

  O segundo, $\sqrt{3}xy$, ten por coeficiente $\sqrt{3}$ e parte literal xy

  E no terceiro, $-\frac{3}{7}x$, o coeficiente é $-\frac{3}{7}$ e a parte literal x

Atendendo ao expoñente da variable, ou variables, adxudicaremos un **grao** a cada monomio con amaño ao seguinte criterio:

- Cando haxa unha única indeterminada, o grao do monomio será o expoñente da súa indeterminada.
- Se aparecen varias indeterminadas, o grao do monomio será a suma dos expoñentes desas indeterminadas.

Exemplos:

- $3x$ *é* un monomio de grao 1 na variable x.
- $\frac{1}{3}\pi\cdot r^2\cdot h$ é un monomio de grao 3 nas indeterminadas r e h.
- $5a^2b^3$ é un monomio de grao 5 en a e b.
- $\sqrt{2}\cdot x^3\cdot y^2\cdot z^2$ é un monomio de grao 7 en x, y e z.

Un número pode ser considerado como un monomio de grao 0.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

8. En cada un dos seguintes monomios sinala o seu coeficiente, a súa parte literal e o seu grao:

a) $-12x^3$

b) a^4b^3c

c) $4xy^2$

Un **polinomio** é unha expresión construída a partir da suma de monomios. O **grao dun polinomio** virá dado polo maior grao dos seus monomios.

Exemplos:

- $\frac{1}{5}\cdot x^2 - 7\cdot x^3 + 2$ é un polinomio de grao 3 na variable x.
- $-3\cdot y^4 + 8\cdot x^2 + 2\cdot x$ é un polinomio de grao 4 nas indeterminadas x e y.
- $4\cdot x^2\cdot y^3 - 7 + 3\cdot y^2$ é un polinomio de grao 5 en x e y.
- $x - 2\cdot y + 6\cdot z$ é un polinomio de grao 1 en x, y e z.

Tanto nesta sección como na seguinte limitarémonos, basicamente, a considerar polinomios cunha única variable. É habitual escribir os diferentes monomios dun polinomio de forma que os seus graos vaian en descenso para, con este criterio, apreciar no seu primeiro monomio cal é o grao do polinomio.

O aspecto xenérico dun polinomio na variable x é

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

onde os coeficientes a_k son números. O monomio de grao cero, a_0, recibe o nome de **termo independente**. Diremos que un polinomio é **mónico** cando o coeficiente do seu termo de maior grao é igual a 1.

Exemplos:

- $-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ é un polinomio de grao 4 na variable x, cuxo termo independente é 2.
- $4y^3 + 3y - 7$ é un polinomio de grao 3 na indeterminada y con termo independente -7.
- $z^2 - 3z + 12$ é un polinomio de grao 2 en z. Ademais, é un polinomio mónico.
- $3x + 9$ é un polinomio de grao 1 en x.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

9. Para cada un dos seguintes polinomios destaca o seu grao e os monomios que o constitúen:

a) $5x^4 + 7x^2 - x$

b) $6x^2 + 10 - 2x^3$

c) $2xy^3 - x^5 + 7x^2y^2$

Como ocorre con calquera expresión alxébrica, se fixamos, ou escollemos, un valor concreto para a variable dun polinomio aparece un número: o **valor numérico** do polinomio para ese valor determinado da variable. Se chamamos p a un polinomio, á avaliación de p en, por exemplo, o número -3 denotarémola por $p(-3)$, e leremos *"p de menos tres"* ou*" p en menos tres"*. Con este criterio, se p é un polinomio cuxa indeterminada é a variable x, podemos referirnos a el como p ou $p(x)$ indistintamente.

Desta forma apreciamos que un polinomio pode ser entendido como unha maneira concreta de asignar a cada número outro número.

Exemplos:

- Se avaliamos o polinomio $p \equiv -3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ en $x = 5$ encontrámonos co número

$$p(5) = -3 \cdot 5^4 + \frac{1}{5} \cdot 5^2 + 2 = -3 \cdot 625 + 5 + 2 = -1\,875 + 7 = -1\,868$$

- O valor do polinomio $q(y) = 4y^3 + 3y - 7$ para $y = -1$ é

$$q(-1) = 4 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1) - 7 = 4 \cdot (-1) - 3 - 7 = -4 - 10 = -14$$

- Ao particularizar o polinomio $r \equiv z^2 - 3z + 12$ en $z = 0$ resulta o número $r(0) = 12$.

Actividades propostas

10. Consideremos o polinomio $p(x) = x^3 - 3x + 2$. Calcula os seguintes valores numéricos de p: $p(0)$, $p(1)$, $p(-1)$, $p(-2)$ y $p(1/2)$.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

2.2. Suma de polinomios

Como un polinomio é unha suma de monomios, a suma de dous polinomios é outro polinomio. Á hora de sumar dous polinomios procederemos a sumar os monomios de igual parte literal.

Exemplos:

- A suma dos polinomios $-3x^4+\frac{1}{5}x^2+2$ e $-x^4+4x^2-5x-6$ é o polinomio

$$\left(-3x^4+\frac{1}{5}x^2+2\right)+(-x^4+4x^2-5x-6)=(-3x^4-x^4)+\left(\frac{1}{5}x^2+4x^2\right)-5x+(2-6)=$$
$$=(-3-1)\cdot x^4+\left(\frac{1}{5}+4\right)\cdot x^2-5x+(2-6)=-4x^4+\frac{21}{5}x^2-5x-4$$

- $(5x^2-3x+1)+(x^2+4x-7)=(5x^2+x^2)+(-3x+4x)+(1-7)=6x^2+x-6$
- $(2x^3+1)+(-x^4+4x)=-x^4+2x^3+4x+1$
- $(x^3+9)+(-x^3+2)=11$
- $3xy + 5xy + 2x = 8xy+2x$

No seguinte exemplo sumaremos dous polinomios dispoñéndoos, adecuadamente, un sobre o outro.

Exemplo:

$$\begin{array}{rrrrrrr} & 4x^5 & +2x^4 & +x^3 & -5x^2 & +x & +4 \\ + & -7x^5 & & +4x^3 & +5x^2 & -3x & -6 \\ \hline & -3x^5 & +2x^4 & +5x^3 & & -2x & -2 \end{array}$$

Propiedades da suma de polinomios

Propiedade conmutativa. Se p e q son dous polinomios, non importa a orde na que os coloquemos á hora de sumalos:

$$p+q\equiv q+p$$

Exemplo:

$$(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)=-x^3+(4x^2+x^2)+(-2x-3x)+(7+1)=-x^3+5x^2-5x+8$$
$$(-x^3+x^2-3x+1)+(4x^2-2x+7)=-x^3+(x^2+4x^2)+(-3x-2x)+(1+7)=-x^3+5x^2-5x+8$$

Propiedade asociativa. Sinala como se poden sumar tres ou máis polinomios. Basta facelo agrupándoos dous a dous:

$$(p+q)+r\equiv p+(q+r)$$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Exemplo:

$$(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)+(x-6)=(4x^2-2x+7-x^3+x^2-3x+1)+(x-6)=$$
$$=(-x^3+5x^2-5x+8)+(x-6)=-x^3+5x^2-4x+2$$

Tamén:

$$(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)+(x-6)=(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1+x-6)=$$
$$=(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-2x-5)=-x^3+5x^2-4x+2$$

Actividades propostas

11. Realiza as seguintes sumas de polinomios:

a) $(-x^3+x-5)+(2x^2+5x+4)+(-4x^3-2x^2+3x)$

b) $(x^2+4)+(-2x+4)+(-6x^3+3x^2+x+1)-x^2$

Elemento neutro. Hai un polinomio cunha propiedade particular: o resultado de sumalo con calquera outro sempre é este último. Trátase do polinomio dado polo número 0, o *polinomio cero*.

Exemplo:

$$0+(-7x^3+3x+7)=(-7x^3+3x+7)+0=-7x^3+3x+7$$

Elemento oposto. Cada polinomio ten asociado outro, ao que chamaremos o seu *polinomio oposto*, tal que a suma de ambos os dous é igual ao polinomio cero. Acadamos o polinomio oposto de un dado, simplemente, cambiando o signo de cada monomio.

Exemplo:

- O polinomio oposto de $p\equiv-2x^4+x^3+2x-7$ é $2x^4-x^3-2x+7$, ao que denotaremos como "$-p$". Ratifiquemos que a súa suma é o polinomio cero:

$$(-2x^4+x^3+2x-7)+(2x^4-x^3-2x+7)=(-2x^4+2x^4)+(x^3-x^3)+(2x-2x)+(-7+7)=0$$

Actividades propostas

12. Escribe o polinomio oposto de cada un dos seguintes polinomios:

a) $2x^3-2x^2-3x+9$

b) $-5x$

c) $-x^3+7x$

13. Considera os polinomios $p\equiv x^2-x+1$, $q\equiv-x^3+2x-3$, así como o polinomio suma $s\equiv p+q$. Calcula os valores que adopta cada un deles para $x=-2$, é dicir, calcula $p(-2)$, $q(-2)$ e $s(-2)$. Estuda se existe algunha relación entre eses tres valores.

14. Obtén o valor do polinomio $p\equiv4x^3-x^2+1$ en $x=2$. Que valor toma o polinomio oposto de p en $x=2$?

2.3. Produto de polinomios

Outra operación que podemos realizar con polinomios é a multiplicación.

O resultado do produto de polinomios sempre será outro polinomio. Aínda que nun polinomio temos unha indeterminada, ou variable, como ela adopta valores numéricos, á hora de multiplicar polinomios utilizaremos as propiedades da suma e o produto entre números, en particular a propiedade distributiva do produto respecto da suma; así todo queda en función do produto de monomios, cuestión que resolvemos con facilidade:

$$ax^n \cdot bx^m = abx^{n+m}$$

Exemplos:

- $(-5)x^2 \cdot 2x^4 = (-5)\cdot 2 \cdot x^{2+4} = -10x^6$
- $5x^3 \cdot (-4) = 5\cdot(-4)\cdot x^3 = -20x^3$
- $3x^2 \cdot (2x^2 - 4x + 6) = (3x^2 \cdot 2x^2) - (3x^2 \cdot 4x) + (3x^2 \cdot 6) = 6x^4 - 12x^3 + 18x^2$
- $(-x^3 + 3x - 1)\cdot(-2x) = (-x^3)\cdot(-2x) + (3x)\cdot(-2x) + (-1)\cdot(-2x) = 2x^4 - 6x^2 + 2x$
- $(3x-2)\cdot(x^2 - 4x - 5) = (3x)\cdot(x^2 - 4x - 5) + (-2)\cdot(x^2 - 4x - 5) = (3x^3 - 12x^2 - 15x) + (-2x^2 + 8x + 10) =$
  $= 3x^3 + (-12x^2 - 2x^2) + (-15x + 8x) + 10 = 3x^3 - 14x^2 - 7x + 10$
- $(x-6)\cdot(x^3 - 2x) = (x-6)\cdot x^3 + (x-6)\cdot(-2x) = (x^4 - 6x^3) + (-2x^2 + 12x) = x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 12x$

Tamén podemos materializar o produto de polinomios tal e como multiplicamos números enteiros:

Exemplo:

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & -2x^3 & & +x & +4 \\
\times & & & x^2 & -3x & +1 \\
\hline
 & & -2x^3 & & +x & +4 \\
 & 6x^4 & & -3x^2 & -12x & \\
-2x^5 & & +x^3 & +4x^2 & & \\
\hline
-2x^5 & +6x^4 & -x^3 & +x^2 & -11x & +4
\end{array}$$

Recordemos que o polinomio *oposto* doutro obtense simplemente cambiando o signo de cada monomio. Esta acción correspóndese con multiplicar polo número "-1" o polinomio orixinal. Desta forma o polinomio oposto de p é

$$-p \equiv (-1)\cdot p$$

Neste momento aparece de maneira natural a **operación diferenza**, ou **resta**, de polinomios. Definímola coa axuda do polinomio oposto de un dado:

$$p - q \equiv p + (-q) \equiv p + (-1)\cdot q$$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Exemplo:

$$(-5x^2-3x+2)-(-2x^4+x^3+3x^2+6)=(-5x^2-3x+2)+(2x^4-x^3-3x^2-6)=$$
$$=2x^4-x^3+(-5x^2-3x^2)-3x+(2-6)=2x^4-x^3-8x^2-3x-4$$

Actividades propostas

15. Efectúa os seguintes produtos de polinomios:

a) $(-2x)\cdot(3x^2-4)$

b) $(2x^3+1)\cdot(-4x+5)$

c) $(4x^3-x^2-1)\cdot(2x+6)$

d) $(-1)\cdot(8x^2+7x-9)$

16. Realiza as seguintes diferenzas de polinomios:

a) $(5x^2+2)-(-2x)$

b) $(-2x^3+4x)-(-2x-1)$

c) $(7x^2-2x)-(3x^3+4x^2-x+1)$

17. Multiplica cada un dos seguintes polinomios por un número de tal forma que xurdan polinomios mónicos:

a) $3x^2-x+2$

b) $-6x^3+2x-3$

c) $-x^2+9x-2$

18. Calcula e simplifica os seguintes produtos:

a) $x\cdot(-2x+4)$ b) $(2x-3)\cdot(3x+2)$

c) $(a-2)\cdot(4-3a)$ d) $(3a-b^2)\cdot(2b-a^2)$

Propiedades do produto de polinomios

Propiedade conmutativa. Se *p* e *q* son dous polinomios, non importa a orde na que os coloquemos á hora de multiplicalos:

$$p \cdot q \equiv q \cdot p$$

Exemplo:

$$(2x-7)\cdot(-x^3+x^2)=2x\cdot(-x^3+x^2)-7\cdot(-x^3+x^2)=-2x^4+2x^3+7x^3-7x^2=-2x^4+9x^3-7x^2$$

$$(-x^3+x^2)\cdot(2x-7)=-x^3\cdot(2x-7)+x^2\cdot(2x-7)=-2x^4+7x^3+2x^3-7x^2=-2x^4+9x^3-7x^2$$

Propiedade asociativa. Sinala como se poden multiplicar tres ou máis polinomios. Basta facelo agrupándoos dous a dous:

$$(p \cdot q)\cdot r \equiv p \cdot (q \cdot r)$$

Exemplo:

$$\left((4x^2-2)\cdot(-3x+1)\right)\cdot(-x^3+x)=(-12x^3+4x^2+6x-2)\cdot(-x^3+x)=$$
$$=12x^6-12x^4-4x^5+4x^3-6x^4+6x^2+2x^3-2x=12x^6-4x^5-18x^4+6x^3+6x^2-2x$$

Tamén:

$$(4x^2-2)\cdot\left((-3x+1)\cdot(-x^3+x)\right)=(4x^2-2)\cdot(3x^4-3x^2-x^3+x)=$$
$$=12x^6-12x^4-4x^5+4x^3-6x^4+6x^2+2x^3-2x=12x^6-4x^5-18x^4+6x^3+6x^2-2x$$

Actividades propostas

19. Realiza os seguintes produtos de polinomios:

a) $x\cdot(-3x^2+4x+2)\cdot x^2$

b) $(-2x+1)\cdot(5x^2-x+3)\cdot(-x)$

c) $(3a-1)\cdot(2-a)\cdot(5-4a)$

Elemento neutro. Hai un polinomio cunha propiedade particular: ao multiplicalo por calquera outro sempre nos dá este último. Trátase do polinomio dado polo número 1, o *polinomio unidade*.

Exemplo:

$$1\cdot(-5x^3-2x+3)=(-5x^3-2x+3)\cdot 1=-5x^3-2x+3$$

Propiedade distributiva da multiplicación respecto da suma. Cando nunha multiplicación de polinomios un dos factores vén dado como a suma de dous polinomios como, por exemplo,

$$(3x^2-x)\cdot\left((-2x+7)+(x^3-4x)\right)$$

temos dúas opcións para coñecer o resultado:

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

a) realizar a suma e, despois, multiplicar

$$(3x^2-x)\cdot\left((-2x+7)+(x^3-4x)\right)=(3x^2-x)\cdot\left(x^3-6x+7\right)=$$
$$=3x^5-18x^3+21x^2-x^4+6x^2-7x=3x^5-x^4-18x^3+27x^2-7x$$

b) distribuír, aplicar a multiplicación a cada un dos sumandos e, despois, sumar:

$$(3x^2-x)\cdot\left((-2x+7)+(x^3-4x)\right)=(3x^2-x)\cdot(-2x+7)+(3x^2-x)\cdot(x^3-4x)=$$
$$=(-6x^3+21x^2+2x^2-7x)+(3x^5-12x^3-x^4+4x^2)=3x^5-x^4-18x^3+27x^2-7x$$

Comprobamos que obtemos o mesmo resultado.

En xeral, a **propiedade distributiva** da multiplicación respecto da suma dinos que

$$p\cdot(q+r)\equiv(p\cdot q)+(p\cdot r)$$

Convén comentar que a anterior propiedade distributiva lida en sentido contrario, de dereita a esquerda, é o que comunmente se denomina **sacar factor común**.

Exemplo:

$$6x^5-4x^4-18x^3+2x^2=(3x^3-2x^2-9x+1)\cdot 2x^2$$

Actividades propostas

20. De cada un dos seguintes polinomios extrae algún factor que sexa común aos seus monomios:

a) $-10x^3-15x^2+20x$

b) $30x^4+24x^2$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

3. DIVISIÓN DE POLINOMIOS

3.1. Introdución ás fraccións polinómicas

Ata este momento estudamos varias operacións con polinomios: suma, resta e produto. En calquera dos casos o resultado sempre é outro polinomio. Cando establecemos unha **fracción polinómica** como, por exemplo,

$$\frac{3x^3 - x}{2x^2 + x - 3}$$

o que temos é unha expresión alxébrica, unha **fracción alxébrica**, que, en xeral, non é un polinomio. Si aparece un polinomio no caso, moi particular, en que o denominador é un número diferente de cero, isto é, un polinomio de grao 0.

É sinxelo constatar que a expresión anterior non é un polinomio: calquera polinomio pode ser avaliado en calquera número. Porén, esa expresión non pode ser avaliada para $x = 1$, xa que nos quedaría o número 0 no denominador.

Poderiamos crer que a seguinte fracción polinómica si é un polinomio:

$$\frac{-2x^3 + 5x^2 - 3x}{x} = \frac{-2x^3}{x} + \frac{5x^2}{x} + \frac{-3x}{x} = -2x^2 + 5x - 3$$

A expresión da dereita si é un polinomio pois trátase dunha suma de monomios, pero a da esquerda non o é xa que non pode ser avaliada en $x = 0$. Con todo, esa fracción alxébrica e o polinomio, cando son avaliados en calquera número diferente de cero, ofrecen o mesmo valor. Son **expresións equivalentes** alí onde ambas as dúas teñen sentido, isto é, para aqueles números nos que o denominador non se fai cero.

3.2. División de polinomios

Aínda que, como vimos no apartado anterior, unha fracción polinómica, en xeral, non é un polinomio, imos aprender a división de polinomios pois é unha cuestión importante e útil.

Analicemos con detemento a división de dous números enteiros positivos. Cando dividimos dous números, *D* (dividendo) entre *d* (divisor, distinto de 0), xorden outros dous, o cociente (*c*) e o resto (*r*). Estes encóntranse ligados pola chamada *proba da división*:

$$D = d \cdot c + r$$

Alternativamente:

$$\frac{D}{d} = c + \frac{r}{d}$$

Ademais, dicimos que a división é exacta cando $r = 0$.

O coñecido algoritmo da división persegue encontrar un número enteiro, o cociente *c*, tal que o resto *r* sexa un número menor que o divisor *d*, e maior ou igual que cero. Fixémonos en que, sen esta esixencia para o resto *r*, podemos escoller arbitrariamente un valor para o cociente *c* o cal nos subministra o seu valor asociado como resto *r*. En efecto, se temos como dividendo *D*=673 e como divisor *d*=12, "se queremos" que o cociente sexa *c*=48 o seu resto asociado é

$$r = D - d \cdot c = 673 - 12 \cdot 48 = 673 - 576 = 97$$

e a conexión entre estes catro números é

$$673 = 12 \cdot 48 + 97$$

Esta última "lectura" da división de números enteiros vai guiarnos á hora de dividir dous polinomios.

Dados dous polinomios $p(x)$ e $q(x)$, a división de $p(x)$, polinomio dividendo, entre $q(x)$, polinomio divisor, proporcionaranos outros dous polinomios, o polinomio cociente $c(x)$ e o polinomio resto $r(x)$. Tamén aquí pesará unha esixencia sobre o polinomio resto: o seu grao deberá ser menor que o grao do polinomio divisor. A relación entre os catro será, naturalmente,

$$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$$

Tamén escribiremos

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

aínda que, en tal caso, seremos conscientes das cautelas sinaladas no apartado anterior en canto ás equivalencias entre polinomios e outras expresións alxébricas.

Ao igual que ocorre co algoritmo da división enteira, o algoritmo da división de polinomios consta de varias etapas, de carácter repetitivo, en cada unha das cales aparecen uns polinomios cociente e resto "provisionais" de forma que o grao deses polinomios resto vai descendendo ata que topamos con un cuxo grao é inferior ao grao do polinomio divisor, o que indica que concluímos. Vexamos este procedemento cun exemplo concreto.

Exemplo:

- Imos dividir o polinomio $p(x) = 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2$ entre o polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$. Como o polinomio divisor, $q(x)$, é de grao 2, debemos encontrar dous polinomios, un polinomio cociente $c(x)$ e un polinomio resto $r(x)$ de grao 1 ou 0 tales que

$$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$$

ou, como igualdade entre expresións alxébricas,

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

Á vista dos polinomios $p(x)$ e $q(x)$, e do dito sobre $r(x)$, é evidente que o grao do polinomio cociente, $c(x)$ será igual a 2. Imos obtelo monomio a monomio.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

- Primeira aproximación aos polinomios cociente e resto:

Para poder lograr a igualdade $p \equiv q \cdot c + r$, como o grao de $r(x)$ será 1 ou 0, o termo de maior grao de $p(x)$, $6x^4$, xurdirá do produto $q(x) \cdot c(x)$. Así obtemos a primeira aproximación de $c(x)$, o seu monomio de maior grao:

$$c_1(x) = 3x^2$$

e, de maneira automática, tamén un primeiro resto $r_1(x)$:

$$r_1(x) = p(x) - q(x) \cdot c_1(x) = (6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2) - (2x^2 - x + 3) \cdot 3x^2 =$$
$$= (6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2) - (6x^4 - 3x^3 + 9x^2) = 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2$$

Como este polinomio $r_1(x)$ é de grao 3, maior que 2, o grao do polinomio divisor $q(x)$, ese polinomio resto non é o definitivo; debemos continuar.

- Segunda aproximación aos polinomios cociente e resto:

Se particularizamos a igualdade entre expresións alxébricas $\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$ ao que temos ata agora resulta

$$\frac{6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3} = 3x^2 + \frac{8x^3 - 8x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3}$$

Esta segunda etapa consiste en dividir o polinomio $r_1(x) = 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2$, xurdido como resto da etapa anterior, entre o polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$, o divisor inicial. É dicir, repetimos o feito antes pero considerando un novo polinomio dividendo: o polinomio resto do paso anterior.

O novo obxectivo é acadar a igualdade $r_1 \equiv q \cdot c_2 + r$. Ao igual que antes, o grao de $r(x)$ debería ser 1 ou 0. Como o termo de maior grao de $r_1(x)$, $8x^3$ sae do produto $q(x) \cdot c_2(x)$, é necesario que o polinomio cociente conteña o monomio

$$c_2(x) = 4x$$

Isto lévanos a un segundo resto $r_2(x)$:

$$r_2(x) = r_1(x) - q(x) \cdot c_2(x) = (8x^3 - 8x^2 + 3x - 2) - (2x^2 - x + 3) \cdot 4x =$$
$$= (8x^3 - 8x^2 + 3x - 2) - (8x^3 - 4x^2 + 12x) = -4x^2 - 9x - 2$$

Como este polinomio $r_2(x)$ é de grao 2, igual que o grao do polinomio divisor $q(x)$, ese polinomio resto non é o definitivo; debemos continuar.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

- Terceira aproximación aos polinomios cociente e resto:

O realizado na etapa segunda permítenos avanzar na adecuada descomposición da expresión alxébrica que nos ocupa:

$$\frac{6x^4+5x^3+x^2+3x-2}{2x^2-x+3}=3x^2+\frac{8x^3-8x^2+3x-2}{2x^2-x+3}=3x^2+4x+\frac{-4x^2-9x-2}{2x^2-x+3}$$

Esta terceira etapa consiste en dividir o polinomio $r_2(x)=-4x^2-9x-2$, o resto da etapa anterior, entre o polinomio $q(x)=2x^2-x+3$, o divisor inicial. De novo repetimos o algoritmo pero con outro polinomio dividendo: o polinomio resto do paso anterior.

Perseguimos que $r_2 \equiv q\cdot c_3+r$. Como en cada paso, o grao de $r(x)$ debería ser 1 ou 0. O termo de maior grao de $r_2(x)$, $-4x^2$ xorde do produto $q(x)\cdot c_3(x)$, polo que

$$c_3(x)=-2$$

e o terceiro resto $r_3(x)$ é

$$r_3(x)=r_2(x)-q(x)\cdot c_3(x)=(-4x^2-9x-2)-(2x^2-x+3)\cdot(-2)=$$
$$=(-4x^2-9x-2)-(-4x^2+2x-6)=-11x+4$$

Como este polinomio $r_3(x)$ é de grao 1, menor que 2, grao do polinomio divisor $q(x)$, ese polinomio resto si é o definitivo. Concluímos:

$$\frac{6x^4+5x^3+x^2+3x-2}{2x^2-x+3}=3x^2+\frac{8x^3-8x^2+3x-2}{2x^2-x+3}=3x^2+4x+\frac{-4x^2-9x-2}{2x^2-x+3}=3x^2+4x-2+\frac{-11x+4}{2x^2-x+3}$$

Se o expresamos mediante polinomios:

$$6x^4+5x^3+x^2+3x-2=(2x^2-x+3)\cdot(3x^2+4x-2)+(-11x+4)$$

Conclusión: ao dividir o polinomio $p(x)=6x^4+5x^3+x^2+3x-2$ entre o polinomio $q(x)=2x^2-x+3$ obtemos como polinomio cociente $c(x)=3x^2+4x-2$ e como polinomio resto $r(x)=-11x+4$.

Seguidamente imos axilizar a división de polinomios:

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

21. Comproba que os cálculos que tes a continuación reflicten o que se fixo no exemplo anterior para dividir o polinomio $p(x)=6x^4+5x^3+x^2+3x-2$ entre o polinomio $q(x)=2x^2-x+3$.

- Primeira etapa:

$$\begin{array}{rl} 6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & \lfloor\ 2x^2-x+3 \\ \underline{-6x^4+3x^3-9x^2} & 3x^2 \\ 8x^3-8x^2+3x-2 & \end{array}$$

- Primeira e segunda etapas:

$$\begin{array}{rl} 6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & \lfloor\ 2x^2-x+3 \\ \underline{-6x^4+3x^3-9x^2} & 3x^2+4x \\ 8x^3-8x^2+3x-2 & \\ \underline{-8x^3+4x^2-12x} & \\ -4x^2-9x-2 & \end{array}$$

- As tres etapas:

$$\begin{array}{rl} 6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & \lfloor\ 2x^2-x+3 \\ \underline{-6x^4+3x^3-9x^2} & 3x^2+4x-2 \\ 8x^3-8x^2+3x-2 & \\ \underline{-8x^3+4x^2-12x} & \\ -4x^2-9x-2 & \\ \underline{4x^2-2x+6} & \\ -11x+4 & \end{array}$$

Divide os seguintes polinomios:

a) $3x^3+4x^2-9x+7$ entre x^2+2x-1

b) $-6x^3+2x^2+3x+4$ entre $3x^3+x^2-2x+1$

c) $-6x^4-13x^3-4x^2-13x+7$ entre $-3x^2-2x+1$

d) $3x^5-9x^4+7x^3+4x^2-14x+14$ entre x^3-2x^2-x+3

e) x^5-4x-6 entre x^2+3

22. Encontra dous polinomios tales que ao dividilos apareza $q(x)=x^2-2x-1$ como polinomio cociente e $r(x)=2x^2-3$ como resto.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

3.3. Igualdades notables

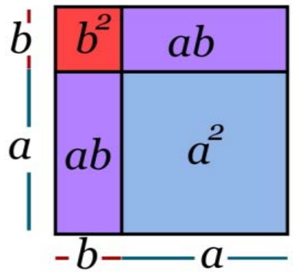
Neste apartado imos destacar unha serie de produtos concretos de polinomios que xorden frecuentemente. Podemos expoñelos de moi diversas formas. Tal e como o faremos, aparecerá máis dunha indeterminada; debemos ser capaces de apreciar que se, nalgún caso particular, algunha indeterminada pasa a ser un número concreto isto non fará nada máis que particularizar unha situación máis xeral.

Potencias dun binomio. As seguintes igualdades obtéñense, simplemente, tras efectuar os oportunos cálculos:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

O cadrado dunha suma é igual ao cadrado do primeiro, máis o dobre produto do primeiro polo segundo, máis o cadrado do segundo.

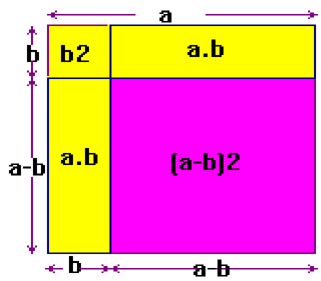
Comproba a igualdade a partir dos cadrados e rectángulos da ilustración.

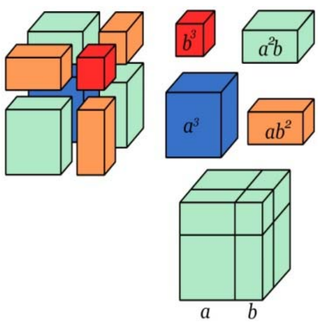


$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

O cadrado dunha diferenza é igual ao cadrado do primeiro, menos o dobre produto do primeiro polo segundo, máis o cadrado do segundo.

Observa a figura e conéctaa coa igualdade.





- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Ratifica a igualdade cos cubos e prismas da figura.

- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Podemos observar que, en cada un dos desenvolvementos, o expoñente do binomio coincide co grao de cada un dos monomios.

Exemplos:

- $(a+3)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot 3 + 3^2 = a^2 + 6a + 9$
- $(x-4)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 4 + 4^2 = x^2 - 8x + 16$
- $(3x+5)^2 = (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot 5 + (5)^2 = 9x^2 + 30x + 25$
- $(x-6y)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 6y + (6y)^2 = x^2 - 12xy + 36y^2$
- $(2x-5)^3 = (2x)^3 - 3\cdot(2x)^2\cdot 5 + 3\cdot(2x)\cdot 5^2 - 5^3 = 8x^3 - 30x^2 + 150x - 125$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

23. Realiza os cálculos:

a) $(1+x)^2$

b) $(-x+2)^2$

c) $(x-2)^2$

d) $(2a-3)^2$

e) $(x^2+1)^3$

f) $(2b-4)^3$

24. Obtén as fórmulas dos cadrados dos seguintes trinomios:

$(a+b+c)^2$ $\qquad$ $(a-b+c)^2$

25. Desenvolve as seguintes potencias:

a) $(3x–y)^2$ $\qquad$ b) $(2a + x/2)^2$ $\qquad$ c) $(4y– 2/y)^2$

d) $(5a+a^2)^2$ $\qquad$ e) $(–a^2+ 2b^2)^2$ $\qquad$ f) $((2/3)y– 1/y)^2$

26. Expresa como cadrado dunha suma ou dunha diferenza as seguintes expresións alxébricas:

a) $a^2–6a + 9$ b) $4x^2+ 4x + 1$c) $b^2– 10b + 25$

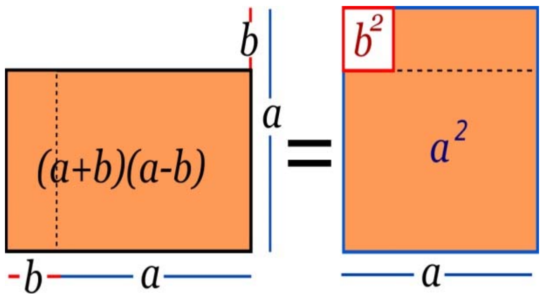
d) $4y^2– 12y + 9$ e) $a^4+ 2a^2 +1$f) $y^4 + 6xy^2 + 9x^2$

Suma por diferenza. De novo a seguinte igualdade obtense tras efectuar o produto sinalado:

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

Suma por diferenza é igual a diferenza de cadrados.

Observa as figuras e conéctaas coa igualdade.



Exemplos:

- $(a+7)\cdot(a-7)=a^2-7^2=a^2-49$
- $(x+1)\cdot(x-1)=x^2-1^2=x^2-1$
- $(2x+3)\cdot(2x-3)=(2x)^2-3^2=4x^2-9$
- $(-3x-5)\cdot(-3x+5)=(-1)\cdot(3x+5)\cdot(-3x+5)=(-1)\cdot(5+3x)\cdot(5-3x)=$

  o $=(-1)\cdot(5^2-(3x)^2)=-25+9x^2$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

27. Efectúa estes produtos:

a. $(3x+2)\cdot(3x-2)$

b. $(2x+4y)\cdot(2x-4y)$

c. $(4x^2+3)\cdot(4x^2-3)$

d. $(3a-5b)\cdot(3a+5b)$

e. $(-x^2+5x)\cdot(x^2+5x)$

28. Expresa como suma por diferenza as seguintes expresións

a) $9x^2-25$ b) $4a^4-81b^2$ c) $49-25x^2$ d) $100a^2-64$

De volta aos polinomios dunha variable, podemos dicir que neste apartado expandimos *potencias dun polinomio*, ou produtos dun polinomio por si mesmo, así como produtos da forma *suma por diferenza*. Convén darse conta de que as súas fórmulas, lidas ao revés, nos informan do resultado de certas divisións de polinomios. En efecto, ao igual que cando lemos $17\times 11=187$ deducimos que $\frac{187}{17}=11$ e, tamén, $\frac{187}{11}=17$, a partir do desenvolvemento dun binomio como, por exemplo, $(-3x^2+2x)^2=(-3x^2+2x)\cdot(-3x^2+2x)=9x^4-12x^3+4x^2$, podemos obter que

$$\frac{9x^4-12x^3+4x^2}{-3x^2+2x}=-3x^2+2x$$

O mesmo ocorre co produto de polinomios da forma *suma por diferenza*. Posto que, por exemplo, $(2x^3-5)\cdot(2x^3+5)=4x^6-25$, deducimos que $\frac{4x^6-25}{2x^3-5}=2x^3+5$, e tamén $\frac{4x^6-25}{2x^3+5}=2x^3-5$.

Actividades propostas

29. Realiza as seguintes divisións de polinomios a partir da conversión do dividendo na potencia dun binomio ou nun produto da forma suma por diferenza:

a) $x^2+12x+36$ entre $x+6$

b) $4x^4-16x^2$ entre $2x^2-4x$

c) $9x^2-24x+16$ entre $3x-4$

d) x^2-5 entre $x+\sqrt{5}$

3.4. Operacións con fraccións alxébricas

Posto que tanto os polinomios como as fraccións alxébricas obtidas a partir de dous polinomios son, en potencia, números, operaremos con tales expresións seguindo as propiedades dos números.

- **Suma ou resta.** Para sumar ou restar dúas fraccións polinómicas deberemos conseguir que teñan igual denominador. Unha maneira segura de logralo, aínda que pode non ser a máis adecuada, é esta:

$$\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\equiv\frac{p_1\cdot q_2}{q_1\cdot q_2}+\frac{p_2\cdot q_1}{q_2\cdot q_1}\equiv\frac{p_1\cdot q_2+p_2\cdot q_1}{q_1\cdot q_2}$$

- **Produto.** Basta multiplicar os numeradores e os denominadores entre si:

$$\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_2}{q_2}\equiv\frac{p_1\cdot p_2}{q_1\cdot q_2}$$

- **División.** Segue a coñecida regra da división de fraccións numéricas:

$$\frac{\frac{p_1}{q_1}}{\frac{p_2}{q_2}}\equiv\frac{p_1\cdot q_2}{q_1\cdot p_2}$$

Exemplos:

- $$\frac{x-1}{x}+\frac{3x+1}{x+1}=\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x\cdot(x+1)}+\frac{(3x+1)\cdot x}{(x+1)\cdot x}=\frac{x^2-1}{x^2+x}+\frac{3x^2+x}{x^2+x}=$$
$$=\frac{(x^2-1)+(3x^2+x)}{x^2+x}=\frac{4x^2+x-1}{x^2+x}$$

- $$\frac{x+2}{x+1}-\frac{7}{x+2}=\frac{(x+2)\cdot(x+2)}{(x+1)\cdot(x+2)}-\frac{7\cdot(x+1)}{(x+2)\cdot(x+1)}=\frac{x^2+4x+4}{(x+1)\cdot(x+2)}-\frac{7x+7}{(x+2)\cdot(x+1)}=$$
$$=\frac{(x^2+4x+4)-(7x+7)}{(x+1)\cdot(x+2)}=\frac{x^2+4x+4-7x-7}{(x+1)\cdot(x+2)}=\frac{x^2-3x-3}{(x+1)\cdot(x+2)}$$

- $$\frac{x+1}{x-5}\cdot\frac{3x-1}{x^2-1}=\frac{(x+1)\cdot(3x-1)}{(x-5)\cdot(x^2-1)}$$

- $$\frac{-3x+2}{x+3}:\frac{x^2+x}{x-1}=\frac{-3x+2}{x+3}\cdot\frac{x-1}{x^2+x}=\frac{(-3x+2)\cdot(x-1)}{(x+3)\cdot(x^2+x)}$$

En ocasións pode ser útil apreciar que unha fracción polinómica pode ser reescrita como a suma, diferenza, produto ou cociente doutras dúas fraccións polinómicas. En particular, isto pode ser aproveitado para **simplificar** unha expresión polinómica:

Exemplos:

- $$\frac{4x^2-3x}{8x-6}=\frac{x\cdot(4x-3)}{2\cdot(4x-3)}=\frac{x}{2}\cdot\frac{(4x-3)}{(4x-3)}=\frac{x}{2}\cdot 1=\frac{x}{2}$$

- $$\frac{x^2-6x+9}{9-x^2}=\frac{(x-3)^2}{(3+x)\cdot(3-x)}=\frac{(x-3)}{(3+x)}\cdot\frac{(x-3)}{(3-x)}=\frac{(x-3)}{(3+x)}\cdot(-1)=\frac{-x+3}{3+x}$$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

30. Efectúa os seguintes cálculos:

a) $\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x-1}$ b) $\frac{x-2}{x^2-1}-\frac{5}{x}$

c) $\frac{-x+1}{x+3}\cdot\frac{3x^2}{x+1}$ d) $\frac{2+x}{x^2}:\frac{x}{x-3}$

31. Realiza as seguintes operacións alterando, en cada apartado, só un dos denominadores, o seu respectivo numerador:

a) $\frac{-2x^2-x+1}{x^3}+\frac{3x+1}{x^2}$

b) $\frac{2x-1}{x^2-2x}-\frac{3x}{x-2}$

32. Calcula os seguintes cocientes:

a) $(2x^3 - 8x^2 + 6x) : 2x$

b) $(5a^3 + 60a^2 - 20) : 5$

c) $(16x^3 + 40x^2) : 8x^2$

d) $(6x^2y^3 - 4xy^2) : xy^2$

33. Comproba as seguintes identidades simplificando a expresión do lado esquerdo de cada igualdade:

a) $\frac{6a^8b^2}{2a^3b}=3a^5b$

b) $\frac{8x^3y-2xy^2}{4xy}=2x^2-\frac{1}{2}y$

c) $\frac{4x^2+2x}{2x-8}=\frac{2x^2+x}{x-4}$

d) $\frac{6a^2b^2-4a^2b^3+4ab}{2ab^2-8a^2b}=\frac{3ab-2ab^2+2}{b-4a}$

34. Simplifica as seguintes fraccións alxébricas:

a) $\frac{3x^2+6x}{9x^2+18}$ b) $\frac{a^3-7a^2}{3a^3+5a^2}$ c) $\frac{x^2y^2-7xy^2}{2xy}$ d) $\frac{a^2b^2-ab}{a^3b+ab}$

35. En cada unha das seguintes fraccións alxébricas escribe, cando sexa posible, o polinomio numerador, ou denominador, en forma de potencia dun binomio ou de suma por diferenza para, posteriormente, poder simplificar cada expresión:

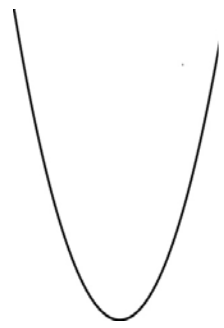
a) $\frac{x^2-4}{3x+6}$ b) $\frac{2x^2-16x+32}{x^2-16}$ c) $\frac{6-4a}{4a^2-9}$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

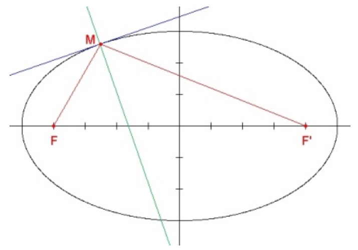
CURIOSIDADES. REVISTA

XEOMETRÍA

Tal e como poderás comprobar durante este curso e os seguintes, grazas aos polinomios será posible e sinxelo describir numerosos obxectos xeométricos como rectas, circunferencias, elipses, parábolas, planos, esferas, cilindros, conos, etc.

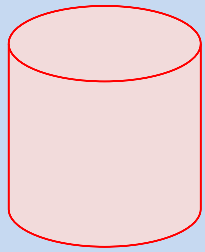


$y = ax^2 + bx + c$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$



$x^2 + y^2 = r^2$

Para ver xeometricamente o cadrado dun trinomio:

http://recursostic.educacion.es/bancoimagenes/web/172241_am:1.swf

Para ver xeometricamente suma por diferenza:

http://recursostic.educacion.es/bancoimagenes/web/172242_am:1.swf

Para ver xeometricamente o cadrado dunha diferenza:

http://recursostic.educacion.es/bancoimagenes/web/172456_am:1.swf

OUTRAS CIENCIAS

Vimos neste capítulo que as fórmulas que nos proporcionan a área e o volume de diferentes figuras veñen dadas por polinomios. Estes tamén aparecen en numerosos **principios** ou **leis da Física** e **da Química** como, por exemplo, en diferentes *Leis de Conservación*, a *Lei Xeral dos Gases*, etc.

Así mesmo, son de frecuente uso á hora de obter distintos **índices** ou **indicadores** propios da **Economía** como, por exemplo, o *IPC* (índice de prezos ao consumo), o *euríbor*, etc.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

RESUMO

Noción	Descrición	Exemplos
Expresión alxébrica	Constrúese con números e coas operacións matemáticas básicas de suma, resta, multiplicación e/ou división	$\frac{-3x}{2x+y^3}-x\cdot y^2\cdot z$
Variable, indeterminada	O non concretado nunha expresión alxébrica	As variables, ou indeterminadas, do exemplo anterior son *x*, *y*, *z*
Valor numérico dunha expresión alxébrica	Ao fixar un valor concreto para cada indeterminada, ou variable, dunha expresión alxébrica obtense un número, o **valor numérico** desa expresión alxébrica para tales valores das indeterminadas.	Se facemos *x* = 3, *y* = –2, *z* = 1/2, obtemos: $\frac{-3\cdot 3}{2\cdot 3+(-2)^3}-3\cdot(-2)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{-3}{2}$
Monomio	Expresión dada polo produto de números e indeterminadas.	$-5\cdot x\cdot y^3\cdot z^2, 7\cdot x^2$
Coeficiente dun monomio	O número que multiplica a indeterminada, ou indeterminadas, do monomio.	Os coeficientes dos anteriores monomios son, respectivamente, –5 e 7
Parte literal dun monomio	A indeterminada, ou produto de indeterminadas, que multiplica ao coeficiente do monomio	A parte literal de $-5\cdot x\cdot y^3\cdot z^2$ é $x\cdot y^3\cdot z^2$
Grao dun monomio	Cando hai unha única indeterminada é o expoñente desa indeterminada. Se aparecen varias, o grao do monomio será a suma dos expoñentes desas indeterminadas.	Os graos dos monomios precedentes son 6 e 2, respectivamente.
Polinomio	Expresión construída partindo da suma de monomios.	$-x^3+4x^2+8x+6$
Grao dun polinomio	O maior grao dos seus monomios	O anterior polinomio é de grao 3
Suma, resta e produto de polinomios	O resultado sempre é outro polinomio	$p\equiv x+3,\ q\equiv x^2-2$ $p+q\equiv x^2+x+1$ $p-q\equiv -x^2+x+5$ $p\cdot q\equiv x^3+3x^2-2x-6$
División de dous polinomios	Obtéñense outros dous polinomios, os polinomios cociente (*c*(*x*)) e resto (*r*(*x*)), ligados aos polinomios iniciais: os polinomios dividendo (*p*(*x*)) e divisor (*q*(*x*))	$p(x)=q(x)\cdot c(x)+r(x)$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

EXERCICIOS E PROBLEMAS

1. Unha empresa comerciante por xunto de viaxes está confeccionando unha oferta para distribuíla en diferentes axencias de viaxe. Trátase dunha viaxe en avión, de ida e volta, a Palma de Mallorca cuxo prezo dependerá do número final de viaxeiros. Os datos concretos son:
   a) Se non hai máis de 100 persoas interesadas, o voo custará 150 euros por persoa.
   b) Se hai máis de 100 persoas interesadas, por cada viaxeiro que pase do centenar, o prezo da viaxe reducirase en 1 euro. Non obstante, o prezo do voo en ningún caso será inferior a 90 euros.

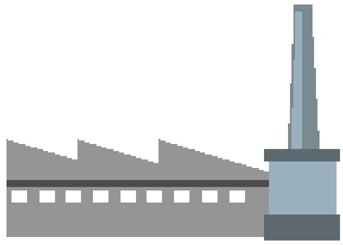
   Estuda e determina o prezo final do voo, por persoa, en función do número total de viaxeiros. Así mesmo, expresa a cantidade que ingresará a empresa segundo o número de viaxeiros.

2. Neste exercicio vaise presentar un *truco* mediante o cal imos adiviñar o número que resulta tras manipular repetidamente un número descoñecido. Converte nunha expresión alxébrica as sucesivas alteracións do número descoñecido e xustifica o que ocorre.

   i. Dille a un compañeiro que escriba nun papel un número par e que non o mostre.
   ii. Que o multiplique por 5.
   iii. Que ao resultado anterior lle sume 5.
   iv. Que multiplique por 2 o obtido.
   v. Que ao resultado anterior lle sume 10.
   vi. Que multiplique por 5 o obtido.
   vii. Que divida entre 100 a última cantidade.
   viii. Que ao resultado precedente lle reste a metade do número que escribiu.
   ix. Independentemente do número descoñecido orixinal, que número xurdiu?

3. Os responsables dunha empresa, en previsión duns futuros altibaixos nas vendas dos produtos que fabrican, pensan propoñer aos seus traballadores a finais do ano 2014 o seguinte:
   a) A diminución dos soldos, para o próximo ano 2015, nun 10 %.
   b) Para 2016 ofrecen aumentar un 10 % os salarios de 2015.
   c) En xeral, suxiren que o soldo diminúa un 10 % cada ano impar e que aumente un 10 % cada ano par.

   Se finalmente se aplica o exposto, estuda se os traballadores recuperarán no ano 2016 o salario que tiñan en 2014. Analiza que ocorre cos soldos tras moitos anos.



4. Os responsables da anterior empresa, despois de recibir o informe dunha consultora, alteran a súa intención inicial e van propoñer aos seus traballadores, a finais do ano 2014, o seguinte:
   a) Un aumento dos soldos, para o próximo ano 2015, dun 10 %.
   b) Para 2016, unha redución do 10 % sobre os salarios de 2015.
   c) En xeral, suxiren que o soldo aumente un 10 % cada ano impar e que diminúa un 10 % cada ano par.

   Se se aplica o exposto, analizase o salario dos traballadores do ano 2016 coincidirá co que tiñan en 2014. Estuda como evolucionan os soldos tras moitos anos.

5. Observa se hai números nos que as seguintes expresións non poden ser avaliadas:
   a) $\frac{x-3}{x+1}$
   b) $\frac{2x-1}{(x-5)\cdot(2x+7)}$
   c) $\frac{x}{x^2-2x+1}$
   d) $\frac{x+y-2}{x^2+3y^2}$

6. Calcula o valor numérico das seguintes expresións nos números que se indican:
   a) $\frac{x-3}{x+1}$ en $x=1$
   b) $\frac{x}{x^2-2x+1}$ para $x=-2$
   c) $\frac{x+y-2}{x^2+3y^2}$ en $x=3$ e $y=-1$
   d) $\frac{-2a+b^2-4}{a^2c-3abc}$ para $a=-1$, $b=0$ e $c=2$
   e) $\frac{2x-1}{(x-5)\cdot(2x+7)}$ en $x=\frac{1}{2}$

7. Unha persoa ten aforrados 3 000 euros e decide depositalos nun produto bancario cun tipo de interese anual do 2.5 %. Decide recuperar os seus aforros ao cabo de dous anos, cal será a cantidade total da que disporá?

8. Constrúe un polinomio de grao 2, $p(x)$, tal que $p(-2)=-6$.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

9. Considera os polinomios $p(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 1$, $q(x) = -x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x - 5$ y $r(x) = x^2 - 3x + 2$. Fai as seguintes operacións:

   a) $p + q + r$
   b) $p - q$
   c) $p \cdot r$
   d) $p \cdot r - q$

10. Calcula os produtos:

    a) $\left(\frac{3ax}{2} - \frac{y}{5}\right) \cdot \left(\frac{-by}{3}\right)$ b) $(0.1x + 0.2y - 0.3z) \cdot (0.3x - 0.2y + 0.1z)$ c) $(x - y) \cdot (y - 1) \cdot (x + a)$

11. Efectúa as divisións de polinomios:

    a) $2x^3 + x^2 - 12x + 7$ entre $x + 3$
    b) $-4x^4 + 8x^3 + 7x^2 - 21x + 8$ entre $2x^2 - 3x + 1$
    c) $-3x^5 - 2x^3 + 9x^2 + 6x - 14$ entre $-x^3 - 2x + 3$

12. Calcula os cocientes:

    a) $(4x^3) : (x^2)$ b) $(4x^3y^3z^4) : (3x^2yz^2)$ c) $(x^4 - 4x^2y + 4y^2) : (x^2 - 2y)$

13. Realiza as operacións entre fraccións alxébricas:

    a) $\frac{x-1}{x^2} + \frac{2x-1}{x}$
    b) $\frac{2x+3}{x} + \frac{5}{x+1}$
    c) $\frac{x-1}{x^2-3x} - \frac{2-x}{x}$
    d) $\frac{x-1}{x^2-3x} \cdot \frac{2-x}{x}$
    e) $\frac{x-1}{x^2-3x} : \frac{2-x}{x}$

14. Encontra un polinomio $p(x)$ tal que ao dividir $p(x)$ entre $q(x) = x^3 - x^2 + 2x - 3$ se obteña como polinomio resto $r(x) = -3x^2 + 1$.
15. Calcula as potencias:

    a) $(x + 2y - z)^2$ b) $(x - 3y)^3$ c) $\left(a + \frac{b}{3}\right)^2$ d) $(x^2 - 2z^3)^2$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

16. Analiza se os seguintes polinomios xurdiron do desenvolvemento de potencias de binomios, ou trinomios, ou dun produto *suma por diferenza*. En caso afirmativo expresa a súa procedencia.

a) $x^2 - 6x + 9$
b) $x^4 + 8x^2 + 16$
c) $x^2 - \sqrt{12}\,xy + 3y^2$
d) $y^4 + 2y^3 + y^2 + 2y + 1$
e) $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x + 1$
f) $x^2 - 25$
g) $x^2 + 5$
h) $5x^2 - 1$
i) $x^2 - 8y^2$
j) $x^4 - 1$
k) $x^2 - y^2$
l) $x^2 - 2y^2z^2$

17. Analiza se o numerador e o denominador das seguintes expresións alxébricas proceden do desenvolvemento dun binomio, ou dun produto suma por diferenza, e simplifícaas:

a) $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$ b) $\dfrac{x^4 - 2x^2y^2 + y^4}{x^2 + y^2}$ c) $\dfrac{xy^3 - yx}{y^4 - 1}$

18. Efectúa as seguintes operacións e simplifica todo o posible:

a) $\dfrac{3}{x(3-x)} - \dfrac{1}{2(3-x)}$ b) $3x^4 - 5x^3 + \dfrac{x^4 - 1}{x^3} \cdot \dfrac{x^5}{x^2 + 1}$ c) $\dfrac{x - 2y}{a - b} + \dfrac{4x + 5y}{3a - 3b}$

19. Simplifica todo o posible:

a) $\left(yx^4 - \dfrac{y}{x^2}\right) : \left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)$ b) $\dfrac{b^3 + 3ab^2 + 3a^2b + a^3}{b - a} : \dfrac{b + a}{b - a}$ c) $\left(\dfrac{a + b}{a - b} - \dfrac{a - b}{a + b}\right) : \dfrac{4}{a - b}$

20. Simplifica todo o posible:

a) $\dfrac{\dfrac{1}{a+y} - \dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{a+y} + \dfrac{1}{x}} : \dfrac{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{x+y}}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{x+y}}$ b) $\left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x^3}\right) : \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{3}{x^3}\right)$ c) $\dfrac{\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{y}}{\dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{y}} \cdot \dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{y}}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{y}}$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

AUTOAVALIACIÓN

1. Sinala os coeficientes que aparecen nas seguintes expresións alxébricas:

a) $3 \cdot \sqrt{5} \cdot x \cdot y^2$ b) $-3x^4 - x^3 + x + 7$ c) $\frac{x+8}{4-2y^2} + 6xa^2 - \frac{3}{a} + 9$

2. Destaca as variables, ou indeterminadas, das precedentes expresións alxébricas.

3. Do polinomio $5x^4 - 8x^2 - x + 9$ indica o seu grao e os monomios que o integran.

4. A expresión $\frac{x-7}{4-2x}$ non ten sentido para

a) $x = 7$ b) $x = 2$ c) $x = 7$ e $x = 2$ d) $x = 0$

5. Calquera polinomio:

a) pode ser avaliado en calquera número.
b) non pode ser avaliado no número cero.
c) non pode ser avaliado en certos números concretos.

6. O valor numérico da expresión $\frac{x+7}{4-2y^2} + 6xz^2 - \frac{3}{z}$ en $x = 1,\ y = 2,\ z = -1$ é:

a) -11 b) 7 c) 1 d) -5

7. Completa adecuadamente as seguintes oracións:

a) A suma de dous polinomios de grao dous soe ser outro polinomio de grao ……….
b) A suma de tres polinomios de grao dous soe ser outro polinomio de grao ……….
c) O produto de dous polinomios de grao dous é sempre outro polinomio de grao ……….
d) A diferenza de dous polinomios de grao dous soe ser outro polinomio de grao ……….

8. Finaliza adecuadamente as seguintes oracións:

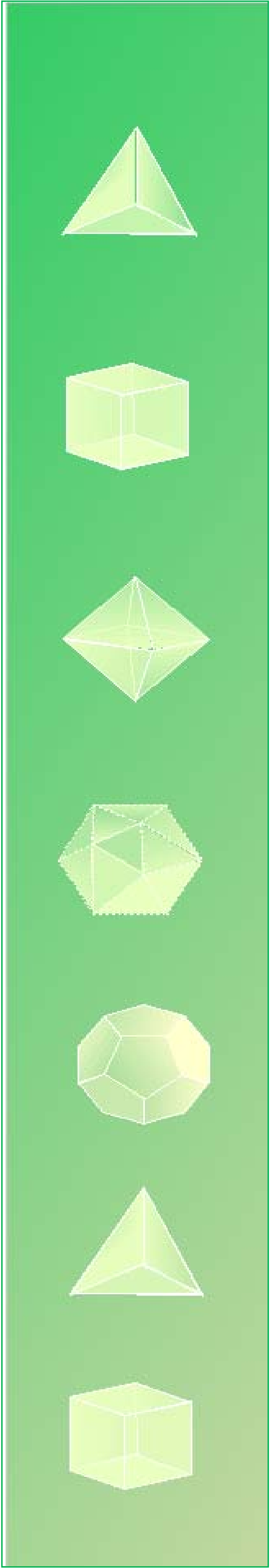
a) A suma de dous polinomios de grao dous é sempre outro polinomio de grao ……….
b) A suma de tres polinomios de grao dous é sempre outro polinomio de grao ……….
c) A diferenza de dous polinomios de grao dous é sempre outro polinomio de grao ……….

9. Ao dividir o polinomio $p(x) = 2x^4 - x^3 + 4$ entre $q(x) = x^2 + 2x + 2$ o polinomio resto resultante:

a) debe ser de grao 2.
b) pode ser de grao 2.
c) debe ser de grao 1.
d) ningunha das opcións precedentes.

10. Para que unha fracción polinómica $\frac{p(x)}{q(x)}$ sexa *equivalente* a un polinomio:

a) os polinomios $p(x)$ e $q(x)$ deben ser do mesmo grao.
b) non importan os graos de $p(x)$ e $q(x)$.
c) o grao do polinomio numerador, $p(x)$, debe ser superior ou igual ao grao do polinomio denominador, $q(x)$.
d) o grao do polinomio numerador, $p(x)$, debe ser inferior ao grao do polinomio denominador, $q(x)$.



Matemáticas orientadas ás ensinanzas académicas

3º B da ESO

Capítulo 5: Ecuacións e sistemas

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Raquel Hernández

Revisores: Sergio Hernández e María Molero

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: Raquel Hernández e Banco de Imaxes de INTEF

Índice

1. ECUACIÓNS DE PRIMEIRO GRAO

1.1. A LINGUAXE DAS ECUACIÓNS
1.2. ECUACIÓNS EQUIVALENTES. RESOLUCIÓN DE ECUACIÓNS

2. ECUACIÓNS DE 2º GRAO

2.1. CONCEPTO DE ECUACIÓN DE 2º GRAO
2.2. RESOLUCIÓN DE ECUACIÓNS DE 2º GRAO COMPLETAS
2.3. NÚMERO DE SOLUCIÓNS DUNHA ECUACIÓN DE 2º GRAO COMPLETA
2.4. RESOLUCIÓN DE ECUACIÓNS DE 2º GRAO INCOMPLETAS
2.5. SUMA E PRODUTO DAS RAÍCES
2.6. RESOLUCIÓN DE ECUACIÓNS SINXELAS DE GRAO SUPERIOR A DOUS

3. SISTEMAS DE ECUACIÓNS LINEAIS

3.1. CONCEPTO DE SISTEMAS DE ECUACIÓNS LINEAIS
3.2. CLASIFICACIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIÓNS
3.3. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS POLO MÉTODO DE SUBSTITUCIÓN
3.4. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS POLO MÉTODO DE IGUALACIÓN
3.5. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS POLO MÉTODO DE REDUCIÓN

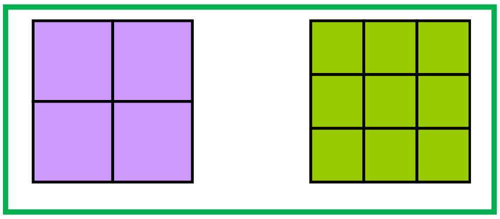
4. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

4.1. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE ECUACIÓNS DE PRIMEIRO GRAO
4.2. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE ECUACIÓNS DE 2º GRAO
4.3. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE SISTEMAS DE ECUACIÓNS LINEAIS

Resumo

Xa sabes resolver algunhas ecuacións de segundo grao. Se a área dun cadrado é 4 coñeces que o seu lado é 2, e se a área é 9, coñeces que o lado mide 3.

Sabes resolver $x^2 = 4$, cuxas solucións son 2 y –2, porque $(2)^2 = 4$, y $(-2)^2 = 4$.



Para resolver $(x - 3) \cdot (x + 4) = 0$, observas que as solucións son 3 e –4 pois $(3 - 3) \cdot (3 + 4) = 0$, e$((-4) - 3)\cdot((-4) + 4) = 0$.

Neste capítulo aprenderemos a resolver as ecuacións de segundo grao, xa sexan completas ou incompletas, e a utilizar ou aprendido para resolver problemas da vida cotiá por medio das ecuacións.

Veremos ademais que son os sistemas de ecuacións lineais, como se resolven por diferentes métodos e a súa aplicación para resolver problemas que nos rodean.

Recorda

Se o produto de dous factores é cero, un dos factores debe ser cero.
Polo tanto na ecuación:

$$(x + 4) \cdot (x - 3) = 0$$

ou ben $x + 4 = 0$ ou ben $x - 3 = 0$, polo que $x = -4$ e $x = 3$.

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Raquel Hernández e Banco de Imaxes de INTEF

1. ECUACIÓNS DE PRIMEIRO GRAO

1.1. A linguaxe das ecuacións

Xa sabes que:

Unha **ecuación** é unha igualdade entre dúas expresións alxébricas.

Exemplo:

- Se temos dúas expresións alxébricas: $7x + 3$ e $5x + 2$, e as unimos co signo igual obtemos unha ecuación: $7x + 3 = 5x + 2$.

As expresións que hai a cada lado do igual chámanse **membros** da ecuación. Todas as ecuacións teñen dous membros: a expresión que está á esquerda do signo igual chámase **primeiro membro** e a que está á dereita, **segundo membro**.

As letras que conteñen as ecuacións alxébricas (as "partes literais" das súas dúas expresións) chámanse **incógnitas**, que significa literalmente "*descoñecidas*". Se todas as letras son iguais, dise que a ecuación ten unha soa incógnita.

Exemplo:

- $8x - 2 = 4x + 7$ é unha ecuación cunha soa incógnita, mentres que
- $3x + y = 5$ ou $5x - 9 = 3y$ son ecuacións con dúas incógnitas: x e y.

O **grao** dunha ecuación é ou maior expoñente que aparece nalgunha das súas incógnitas.

Exemplo:

- $8x - 2 = 4x + 7$ é unha ecuación de primeiro grao, mentres que $2x + 4xy^2 = 1$ é unha ecuación de terceiro grao xa que o monomio $5xy^2$ ten grao 3 (1 + 2 = 3).

Actividades propostas

1. Copia no teu caderno a seguinte táboa e complétaa:

Ecuación	Primeiro membro	Segundo membro	Incógnitas
$8x - 1 = 4x - 7$			
	$5x + 9$	$3x - 1$	
$2a + 3 = 32$			
	$2x - 5y$	$5 + 4y$	

2. Indica o número de incógnitas das seguintes ecuacións:

a) $4x - 5y = 7x + 6$; b) $2x + 8y^2 = 5$ c) $3a + 6a^2 = 3$ d) $4x + 8x^2 = 12$.

3. Indica o grao das seguintes ecuacións:

a) $2x - 4 = 6x + 8$; b) $3x + 9y^2 = 12$ c) $5x + 10x^2 = 30$ d) $2x + 2xy^2 = 3$

1.2. Ecuacións equivalentes. Resolución de ecuacións

Xa sabes que:

Unha **solución** dunha ecuación é un número que, cando a incógnita toma ese valor, se verifica a igualdade, é dicir, os dous termos da ecuación valen o mesmo.

Algunhas ecuacións só teñen unha solución, pero outras poden ter varias.

Resolver unha ecuación é encontrar todas as súas posibles solucións numéricas.

Para resolver unha ecuación o que se fai habitualmente é transformala noutra ecuación **equivalente** máis sinxela.

Ecuacións equivalentes son as que teñen as mesmas solucións.

Exemplo:

- $2x - 9 = 15$ é equivalente a $2x = 24$, pois a solución de ambas as ecuacións é $x = 12$.

Para obter ecuacións equivalentes téñense en conta as seguintes propiedades:

Se lle se **suma** ou se lle **resta** aos dous membros dunha ecuación unha mesma cantidade, obtense unha ecuación equivalente.

Se se **multiplican** ou **dividen** os dous membros dunha ecuación por unha mesma cantidade (distinta de cero), obtense unha ecuación equivalente.

Actividades resoltas

- Resolve a ecuación $5x + 7 = x - 3$ transformándoa noutra máis sinxela equivalente.

Transformar unha ecuación ata que as súas solucións se fagan evidentes chámase "*resolver a ecuación*". Seguindo estes pasos intentaremos resolver a ecuación: $5x + 7 = x - 5$.

1) Sumamos aos dous membros $-x$ e restamos aos dous membros 7: $5x - x + 7 - 7 = x - x - 5 - 7$.

2) Facemos operacións e conseguimos outra ecuación que ten no primeiro membro os termos con x e no segundo os termos sen x: $5x - x = -5 - 7$.

3) Efectuamos as sumas no primeiro membro e no segundo: $4x = -12$.

4) Despexamos x dividindo os dous membros por 4: $\frac{4x}{4} = \frac{-12}{4}$ de onde $x = -3$.

5) Comproba que todas as ecuacións que obtivemos neste proceso son equivalentes e que a súa solución é $x = -3$.

O procedemento utilizado nas actividades é un método universal para **resolver** calquera ecuación de grao 1, é dicir, onde x aparece sen elevar a outro expoñente como en x^2. As ecuacións de primeiro grao teñen sempre unha única solución pero, en xeral, as solucións non teñen porque ser números enteiros como nos exemplos.

Actividades propostas

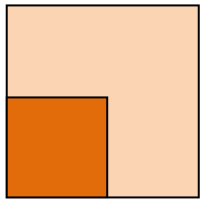
4. Resolve as seguintes ecuacións: a) $2x - 3 = 4x - 5$ b) $3x + 6 = 9x - 12$ c) $4x + 8 = 12$

2. ECUACIÓNS DE 2º GRAO

Hai ecuacións de segundo grao que xa sabes resolver. Neste capítulo imos afondar e aprender a resolver este tipo de ecuacións. Por exemplo, o seguinte problema xa sabes resolvelo:

Actividades resoltas

- Auméntase o lado dunha baldosa cadrada en 3 cm e a súa área queda multiplicada por 4, que lado tiña a baldosa?



Propoñemos a ecuación:

$$(x + 3)^2 = 4x^2$$

Esta ecuación sabes resolvela! $x + 3 = 2x$, logo o lado é de 3 cm.

Hai outra solución, $x = -1$, que non ten sentido como lado dun cadrado.

Imos estudar de forma ordenada estas ecuacións.

2.1. Concepto de ecuación de 2º grao

Unha **ecuación de segundo grao** é unha ecuación polinómica na que a maior potencia da incógnita é 2. As ecuacións de segundo grao pódense escribir da forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

onde *a, b e c* son números reais, con $a \neq 0$.

Exemplo:

- Son ecuacións de 2º grao por exemplo

$$3x^2 - 7x + 1 = 0; \qquad -2x^2 + 5x + -2 = 0; \qquad x^2 - 9x - 11 = 0.$$

Exemplo:

- Os coeficientes das ecuacións de 2º grao son números reais, polo tanto poden ser fraccións ou raíces. Por exemplo:

$$\frac{3}{5}x^2 - 4x + \frac{1}{2} = 0\,; \quad \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{3}{4} = 0\,; \quad -2.7x^2 + 3.5x - 0.2 = 0; \qquad \sqrt{2}x^2 + 3x - \sqrt{5} = 0.$$

Actividades propostas

5. Indica se son ecuacións de segundo grao as seguintes ecuacións:

a) $5x^2 - \sqrt{2}x + 8 = 0$ c) $8x^2 - 9 = 0$ e) $2x^2 - \frac{3}{x} = 0$

b) $3xy^2 - 5 = 0$ d) $8 - 7.3x = 0$ f) $2x^2 - 3\sqrt{x} + 4 = 0$

6. Nas seguintes ecuacións de segundo grao, indica quen son *a*, *b* e *c.*

a) $3 - 4x^2 + 9x = 0$ b) $-3x^2 + 5x = 0$

c) $2x^2 - 3 = 0$ d) $x^2 - 8x + 1 = 0$

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Raquel Hernández e Banco de Imaxes de INTEF

2.2. Resolución de ecuacións de 2º grao completas

Chámase **ecuación de segundo grao completa** a aquela que ten valores distintos de cero para *a*, *b* e *c*.

Para resolver as ecuacións de segundo grao completas, usaremos a fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta fórmula permítenos calcular as dúas solucións da nosa ecuación.

Chamaremos **discriminante** á parte da fórmula que está no interior da raíz:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Actividades resoltas

- Resolve a ecuación de segundo grao $x^2 - 5x + 6 = 0$

Primeiro debemos saber quen son *a*, *b* e *c:*

$$a = 1;\ b = -5;\ c = 6$$

Substituíndo estes valores na nosa fórmula, obtemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Polo tanto, as nosas dúas solucións son:

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = 3; \qquad x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$$

En efecto, $3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$, e $2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$, logo 3 e 2 son solucións da ecuación.

Actividades propostas

7. Resolve as seguintes ecuacións de 2º grao completas:

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$ b) $2x^2 + 2x - 24 = 0$

c) $3x^2 - 9x + 6 = 0$ d) $x^2 - 4x - 12 = 0$

2.3. Número de solucións dunha ecuación de 2º grao completa

Antes definimos o que era o **discriminante**, lémbraste?

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Para saber cantas solucións ten unha ecuación de 2º grao, imos fixarnos nos signos do discriminante.

Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, a ecuación ten dúas solucións reais e distintas.

Se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, a ecuación ten unha única solución real (as dúas solucións son iguais, é polo tanto unha solución dobre).

Se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, a ecuación non ten ningunha solución real.

Exemplo:

- a) A ecuación $2x^2 - 4x - 7 = 0$ ten como discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\cdot 2\cdot(-7) = 16 + 36 = 52 > 0$$

Polo tanto, a ecuación dada ten 2 solucións reais e distintas.

- b)A ecuación $x^2 - 4x - 5 = 0$ ten como discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\cdot(-5) = 16 + 20 = 36 > 0$$

Polo tanto, a ecuación dada ten 2 solucións reais e distintas, 5 e –1.

Comprobación: $5^2 - 4\cdot 5 - 5 = 25 - 20 - 5 = 0$ e $(-1)^2 - 4(-1) - 5 = 1 + 4 - 5 = 0$.

- c) A ecuación $x^2 - 2x + 1 = 0$ ten como discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = 4 - 4 = 0$$

Polo tanto, a ecuación ten dúas solucións reais iguais. Pódese escribir como:

$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 = 0$, que ten a solución dobre $x = 1$.

- d)A ecuación $x^2 + 3x + 8 = 0$ ten como discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4\cdot 1\cdot(8) = 9 - 32 = -23 < 0$$

Polo tanto, a ecuación non ten solución real. Ningún número real verifica a ecuación.

Actividades propostas

8. Pescuda cantas solucións teñen as seguintes ecuacións de 2º grao:

a) $x^2 + x + 4 = 0$ **b)** $x^2 - 6x + 9 = 0$

c) $x^2 - 6x - 7 = 0$ **d)** $x^2 - 3x + 5 = 0$

2.4. Resolución de ecuacións de 2º grao incompletas

Chamamos **ecuación de 2º grao incompleta** a aquela ecuación de segundo grao na que o coeficiente *b* vale 0 (falta *b*) ou o coeficiente *c* vale 0 (falta *c*).

Exemplo:

- A ecuación de 2º grao $2x^2 - 18 = 0$ é incompleta porque o coeficiente $b = 0$, é dicir, falta *b*.
- A ecuación de 2º grao $3x^2 - 15x = 0$ é incompleta porque non ten *c*, é dicir, $c = 0$.

As ecuacións de 2º grao incompletas resólvense dunha maneira ou doutra dependendo do tipo que sexan.

Se o coeficiente *b* = 0: Despexamos a incógnita normalmente, como faciamos nas ecuacións de primeiro grao:

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{-c}{a}} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Se o coeficiente *c* = 0: Sacamos factor común:

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0.$$

Para que o produto de dous factores valla cero, un dos factores debe valer cero.

Polo tanto, $x = 0$, ou $ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$

Resumo

Se $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, despexamos a incógnita:

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}.$$

Se $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$, sacamos factor común:

$$x = 0 \text{ e } x = \frac{-b}{a}.$$

Exemplo:

- Na ecuación $2x^2 - 18 = 0$ falta o *b*. Para resolvela despexamos a incógnita, é dicir, x^2:

$$2x^2 - 18 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 18/2 = 9$$

Unha vez que chegamos aquí, fáltanos quitar ese cadrado que leva a nosa incógnita. Para iso, faremos a raíz cadrada nos 2 membros da ecuación:

$$\boldsymbol{x = \pm\sqrt{9} = \pm 3}$$

Así obtivemos as dúas solucións da nosa ecuación, 3 e –3. En efecto, $2\cdot 3^2 - 18 = 2\cdot 9 - 18 = 0$, e $2\cdot(-3)^2 - 18 = 2\cdot 9 - 18 = 0$

Exemplo:

- Na ecuación $3x^2 - 15x = 0$ falta o c. Para resolvela, sacamos factor común:

$3x^2 - 15x = 0 \Rightarrow 3x(x - 5) = 0$

Unha vez que chegamos aquí, temos dúas opcións

1) $3x = 0 \Rightarrow x = 0$.
2) $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$.

Así obtivemos as dúas solucións da ecuación $x = 0$ e $x = 5$

Unha ecuación de segundo grao incompleta tamén se pode resolver utilizando a fórmula das completas pero é un proceso máis lento e é máis fácil equivocarse.

Actividades resoltas

- Resolve a ecuación de 2º grao $2x^2 - 32 = 0$:

Solución: Trátase dunha ecuación de 2º grao incompleta onde falta o b. Polo tanto, despexamos a incógnita

$2x^2 - 32 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 32 \Rightarrow x^2 = 32/2 = 16 \Rightarrow x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$. As raíces son 4 e –4.

- Resolve a ecuación de 2º grao $x^2 + 7x = 0$:

Solución: Trátase dunha ecuación de 2º grao incompleta onde falta o c. Polo tanto, sacamos factor común:

$$x^2 + 7x = 0 \Rightarrow x(x + 7) = 0$$

e obtemos as dúas solucións:

$$x = 0 \text{ e } x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7.$$

Actividades propostas

9. Resolve as seguintes ecuacións de 2º grao incompletas:

a) $3x^2 + 6x = 0$ b) $3x^2 - 27 = 0$

c) $x^2 - 25 = 0$ d) $2x^2 + x = 0$

e) $4x^2 - 9 = 0$ f) $5x^2 - 10x = 0$

2.5. Suma e produto de raíces

Se nunha ecuación de segundo grao: $x^2 + bx + c = 0$, con $a = 1$, coñecemos as súas solucións: x_1 e x_2 sabemos que podemos escribir a ecuación de forma factorizada:

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

Facemos operacións:

$x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0 \Rightarrow x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0$,

polo que o coeficiente c é igual ao produto das solucións e a suma das solucións é igual ao oposto do coeficiente b, é dicir, $-b$.

$$\boldsymbol{x_1 \cdot x_2 = c;\ x_1 + x_2 = -b.}$$

Se a ecuación é $ax^2 + bx + c = 0$, dividindo por a, xa temos unha de coeficiente $a = 1$, e obtemos que:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a};\ x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

Esta propiedade permítenos, en ocasións, resolver mentalmente algunhas ecuacións de segundo grao.

Actividades resoltas

- Resolve mentalmente a ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Buscamos, mentalmente dous números cuxo produto sexa 6 e cuxa suma sexa 5. En efecto, $2 \cdot 3 = 6$, e $2 + 3 = 5$, logo as solucións da ecuación son 2 e 3.

- Resolve mentalmente a ecuación $x^2 - 6x + 9 = 0$.

O produto debe ser 9. Probamos con 3 como solución e, en efecto, $3 + 3 = 6$. As solucións son a raíz 3 dobre.

- Resolve mentalmente a ecuación $x^2 - x - 2 = 0$.

As solucións son -1 e 2, pois o seu produto é -2 e a súa suma 1.

- Resolve mentalmente a ecuación $x^2 + x - 2 = 0$.

As solucións son 1 e -2, pois o seu produto é -2 e a súa suma -1.

Actividades propostas

10. Resolve mentalmente as seguintes ecuacións de 2º grao:

a) $x^2 + 6x = 0$ b) $x^2 + 2x - 8 = 0$

c) $x^2 - 25 = 0$ d) $x^2 - 9x + 20 = 0$

e) $x^2 - 3x - 4 = 0$ f) $x^2 - 4x - 21 = 0$

11. Escribe unha ecuación de segundo grao cuxas solucións sexan 3 e 7.

12. O perímetro dun rectángulo mide 16 cm e a súa área 15 cm^2. Calcula as súas dimensións.

13. Se 3 é unha solución de $x^2 - 5x + a = 0$, canto vale a?

2.6. Resolución de ecuacións sinxelas de grao superior a dous

Durante séculos os alxebristas buscaron fórmulas, como a que xa coñeces da ecuación de segundo grao, que resolveran as ecuacións de terceiro grao, de cuarto, de quinto… sen éxito a partir do quinto grao. As fórmulas para resolver as ecuacións de terceiro e cuarto grao son complicadas. Só sabemos resolver de forma sinxela algunhas destas ecuacións.

Exemplo:

- Resolve: $(x-5)\cdot(x-3)\cdot(x+2)\cdot(x-9)\cdot(x-6)=0$.

É unha ecuación **polinómica** de grao cinco pero, ao estar factorizada, sabemos resolvela pois para que o produto de varios factores sexa cero, un deles debe valer cero. Igualando a cero cada factor temos que as solucións son 5, 3, –2, 9 e 6.

Ecuacións bicadradas

Unha **ecuación bicadrada** é unha ecuación da forma $ax^{2n}+bx^n+c=0$.

Para resolvela, facemos o cambio $x^n=t$, converténdoa así nunha ecuación de segundo grao de fácil resolución.

Cando teñamos calculado o valor de t, desfacemos o cambio efectuado, $x=\sqrt[n]{t}$ para obter a solución x.

As ecuacións bicadradas máis comúns son as de cuarto grao.

Exemplo:

- *Para resolver a ecuación bicadrada* $x^4-10x^2+9=0$, facemos o cambio obtendo a ecuación de segundo grao $t^2-10t+9=0$.

Resolvemos a devandita ecuación de segundo grao:

$$t=\frac{10\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot1\cdot9}}{2\cdot1}=\frac{10\pm8}{2}$$

$$t_1=\frac{10+8}{2}=9 \quad y \quad t_2=\frac{10-8}{2}=1$$

Desfacemos o cambio para obter os valores de x:

$$Si\ t_1=9\to x=\pm\sqrt{9}=\pm3$$

$$Si\ t_2=1\to x=\pm\sqrt{1}=\pm1$$

Actividades resoltas

- *A ecuación* $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ é unha ecuación polinómica de cuarto grao pero cunha forma moi especial, é unha ecuación **bicadrada** porque podemos transformala nunha ecuación de segundo grao chamando a x^2, por exemplo, t.

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2} = \frac{5\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{5\pm 3}{2}$$

Unha solución da ecuación de segundo grao é $t = 4$, e a outra é $t = 1$.

Polo tanto se $t = x^2 = 4$, entón $x = 2$ e $x = -2$.

E se $t = x^2 = 1$, entón $x = 1$ e $x = -1$.

A nosa ecuación de cuarto grao ten catro solucións:

2, –2, 1 e –1.

Actividades propostas

14. Resolve as ecuacións seguintes:

a) $(x - 7) \cdot (x - 2) \cdot (x + 5) \cdot (x - 3) \cdot (x - 11) = 0$

b) $3(x - 5) \cdot (x - 7) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4) = 0$

15. Resolve as seguintes ecuacións bicadradas:

a) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

b) $x^4 + 12x^2 + 35 = 0$

c) $x^4 - 4x^2 - 12 = 0$.

16. Resolve as ecuacións bicadradas seguintes:

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

b) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$

c) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

d) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$.

3. SISTEMAS DE ECUACIÓNS LINEAIS

3.1. Concepto de sistema de ecuacións lineais

Un **sistema de ecuacións lineais** con dúas incógnitas pódese expresar da forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Onde *a, b, a'* e *b'* son números reais que se denominan **coeficientes** e *c* e *c'* tamén son números reais chamados **termos independentes**.

Chamamos **solución** do sistema ao par de valores (*x*, *y*) que satisfán as dúas ecuacións do sistema.

Dise que dous sistemas de ecuacións son **equivalentes** cando teñen a mesma solución.

Exemplo 7:

- Son sistemas de ecuacións lineais, por exemplo:

$$\begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}; \quad \begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ x - y = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} 4y + 2 = 3x \\ 7x - 3 = 5y \end{cases}$$

Exemplo 8:

- **Non** é un sistema lineal $\begin{cases} 3xy + 5y = 7 \\ 4x - 8xy = 9 \end{cases}$ porque ten termos en *xy*.

Tampouco o é $\begin{cases} 3x^2 + 5y = 7 \\ 4x - 8y = 9 \end{cases}$ porque ten un termo en x^2.

Actividades propostas

17. Razoa se son ou non sistemas de ecuacións lineais os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} xy + 2y = 6 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5y - x = 4 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - 2 = y \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ 3x + y^2 = 4 \end{cases}$

3.2. Clasificación de sistemas de ecuacións

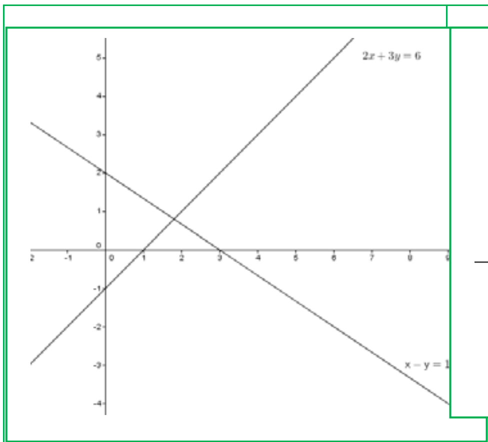
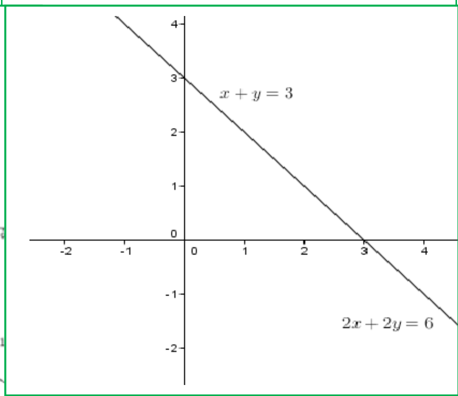
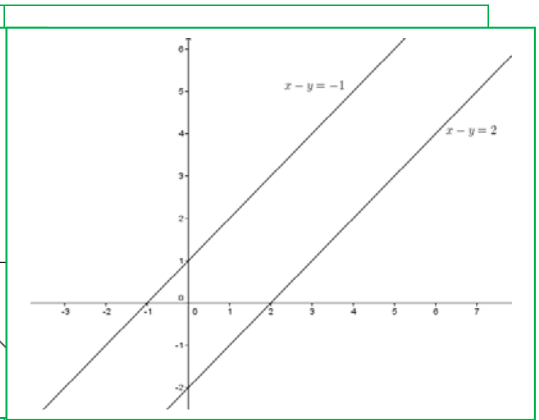
Nun sistema de ecuacións lineais con dúas incógnitas, cada unha das ecuacións representa unha recta nun plano.

Estas rectas poden estar posicionadas entre si de tres maneiras distintas, o que nos axudará a clasificar o noso sistema en:

1) **Compatible determinado**: o sistema ten unha única solución polo que as rectas son **SECANTES**, córtanse nun punto.

2) **Compatible indeterminado**: o sistema ten infinitas solucións polo que as rectas son **COINCIDENTES.**

3) **Incompatible**: o sistema non ten solución polo que as rectas son **PARALELAS.**

		
Compatible determinado	**Compatible indeterminado**	**Incompatible**
Rectas secantes	**Rectas coincidentes**	**Rectas paralelas**

Actividades resoltas

- Engade unha ecuación a $x - 2y = 2$ para que o sistema resultante sexa:

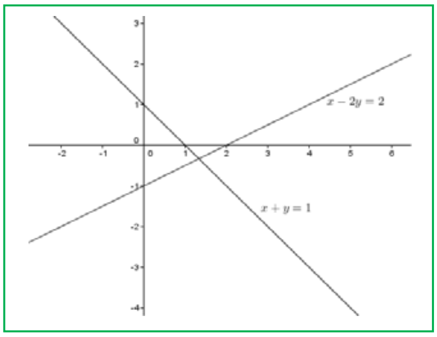
  a) Compatible determinado

  b) Incompatible

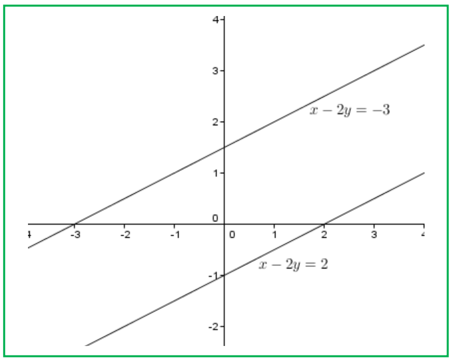
  c) Compatible indeterminado

Solución:

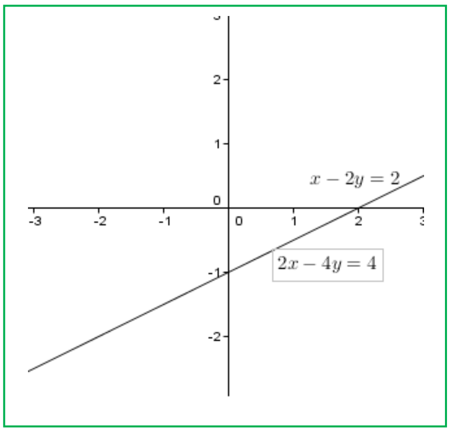
a) Para que o sistema sexa compatible determinado, engadiremos unha ecuación que non teña os mesmos coeficientes que a que nos dan. Por exemplo, x + e = 1.



b) Para que sexa incompatible, os coeficientes das incógnitas teñen que ser os mesmos (ou proporcionais) pero teren diferente termo independente. Por exemplo $x - 2y = -3$, (o $2x - 4y = 0$).



c) Para que sexa compatible indeterminado, poñeremos unha ecuación proporcional á que temos. Por exemplo $2x - 4y = 4$.



Actividades propostas

18. Representa os seguintes sistemas e clasifícaos:

a) $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -y + 2x = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 6 \end{cases}$

3.3. Resolución de sistemas polo método de substitución

O **método de substitución** consiste en despexar unha incógnita dunha das ecuacións do sistema e substituír a expresión obtida na outra ecuación.

Así obtemos unha ecuación de primeiro grao na que podemos calcular a incógnita despexada. Co valor obtido, obtemos o valor da outra incógnita.

Exemplo 8:

- Imos resolver o sistema $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ polo método de substitución:

Despexamos *x* da segunda ecuación:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \Rightarrow x = 3 - 2y \end{cases}$$

e substituímolo na primeira:

$$2(3 - 2y) - 3y = -1 \Rightarrow 6 - 4y - 3y = -1 \Rightarrow -4y - 3y = -1 - 6 \Rightarrow -7y = -7 \Rightarrow y = (-7)/(-7) = 1$$

Co valor obtido de *y*, calculamos o *x*:

$$x = 3 - 2y \Rightarrow x = 3 - 2\cdot 1 = 1.$$

Solución:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Actividades propostas

19. Resolve os seguintes sistemas polo método de substitución:

a) $\begin{cases} 3x + 4y = -7 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}$

3.4. Resolución de sistemas polo método de igualación

O **método de igualación** consiste en despexar a mesma incógnita das dúas ecuacións que forman o sistema e igualar os resultados obtidos.

Así obtemos unha ecuación de primeiro grao na que poderemos calcular a incógnita despexada. Co valor obtido, calculamos o valor da outra incógnita.

Exemplo 8:

- Imos resolver o sistema $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ polo método de igualación:

Despexamos a mesma incógnita das dúas ecuacións que forman o sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \Rightarrow x = \dfrac{3y-1}{2} \\ x + 2y = 3 \Rightarrow x = 3 - 2y \end{cases}$$

Igualamos agora os resultados obtidos e resolvemos a ecuación resultante:

$$\frac{3y-1}{2} = 3 - 2y \Rightarrow 3y - 1 = 2(3 - 2y) = 6 - 4y \Rightarrow 3y + 4y = 6 + 1 \Rightarrow 7y = 7 \Rightarrow y = \frac{7}{7} = 1$$

Co valor obtido de *y*, calculamos o *x*:

$$x = 3 - 2y \Rightarrow x = 3 - 2\cdot(1) = 1$$

Solución:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Actividades propostas

20. Resolve os seguintes sistemas polo método de igualación:

a) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ -2x + 3y = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x - 4y = 3 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$

3.5. Resolución de sistemas polo método de redución

O **método de redución** consiste en eliminar unha das incógnitas sumando as dúas ecuacións. Para iso multiplícanse unha ou ambas as ecuacións por un número de modo que os coeficientes de *x* ou *y* sexan iguais pero de signo contrario.

Exemplo 9:

- Imos resolver o sistema $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \end{cases}$ polo método de redución:

Multiplicamos a segunda ecuación por –2 para que os coeficientes do *x* sexan iguais pero de signo contrario e sumamos as ecuacións obtidas:

$$\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)} \begin{cases} 2x-3y=-1 \\ -2x-4y=-6 \end{cases} \xrightarrow{sumamos} -7y=-7 \Rightarrow y=(-7)/(-7)=1$$

Co valor obtido de *y*, calculamos o *x*:

$$2x-3\cdot 1=-1 \Rightarrow 2x=-1+3=2 \Rightarrow x=2/2=1$$

Solución:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Actividades propostas

21. Resolve os seguintes sistemas polo método de redución:

a) $\begin{cases} 3x+y=4 \\ 2x-5y=14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+3y=2 \\ 4x+y=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3y=0 \\ 3x-2y=13 \end{cases}$

4. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

4.1. Resolución de problemas mediante ecuacións de primeiro grao

Xa sabes que:

Moitos problemas poden resolverse mediante unha ecuación.

Actividades resoltas

- Busca un número que sumado co seu seguinte dea como resultado 15.

Para resolvelo imos seguir técnicas xerais de resolución de problemas:

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender ben o problema

Le con moito coidado o enunciado e pregúntate:

Que che piden? Que datos tes?

Pídennos un número. A **incógnita** é ese número. Chama a ese número x. O seu seguinte será $x + 1$. Dinnos que a suma de ambos é 15.

Paso 2: Busca unha boa estratexia.

É un problema que queremos resolver mediante unha ecuación. Escribe en linguaxe alxébrica o enunciado do problema e propón unha ecuación:

$$x + (x + 1) = 15.$$

Pregúntate se efectivamente resolve o problema relendo o enunciado.

Paso 3: Leva adiante a túa estratexia

Agora si, resolve a ecuación. Para resolver unha ecuación convén seguir unha orde de actuación que nos axuda a non cometer erros, para iso seguimos o procedemento que acabamos de aprender.

- Quita, se os hai, parénteses e denominadores: $x + x + 1 = 15$.
- Para poñer no primeiro membro os termos con x, e no segundo os que non o teñen, **fai o mesmo aos dous lados**, resta 1 aos dous membros: $x + x + 1 – 1 = 15 – 1$, logo $x + x = 15 – 1$. Opera: $2x = 14$. Despexa:
- Para despexar o x, faise o mesmo aos dous lados, divídense por 2 ambos os membros:

$$2x/2 = 14/2, \text{ polo tanto, } x = 7.$$

Paso 4: Comproba o resultado. Pensa se é razoable.

En efecto, comproba que: $7 + 8 = 15$.

Actividades propostas

22. Nun pequeno hotel hai 47 habitacións simples e dobres. Se en total ten 57 camas, cantas habitacións son simples e cantas son dobres?

23. Nunha granxa hai 100 animais entre galiñas e coellos, e entre todos os animais suman 280 patas. Cantas galiñas hai na granxa?

4.2. Resolución de problemas mediante ecuacións de 2º grao

Para resolver problemas por medio de ecuacións de 2º grao, do mesmo modo que os problemas de ecuacións de primeiro grao, primeiro teremos que pasar a linguaxe alxébrica o enunciado do problema e logo resolvelo seguindo estes pasos:

1.- Comprender o enunciado.

2.- Identificar a incógnita.

3.- Traducir o enunciado á linguaxe alxébrica.

4.- Propor a ecuación e resolvela.

5.- Comprobar a solución obtida.

Actividades resoltas

Imos resolver o seguinte problema:

- *Cal é o número natural cuxo quíntuplo aumentado en 6 é igual ao seu cadrado?*

Unha vez comprendido o enunciado, identificamos a incógnita que, neste caso, é o número que estamos buscando.

2.- Número buscado = x

3.- Traducimos agora o problema á linguaxe alxébrica:

$$5x + 6 = x^2$$

4.- Resolvemos a ecuación:

$$5x + 6 = x^2 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+7}{2} = 6; \qquad x_2 = \frac{5-7}{2} = -1$$

Solución: Como o enunciado di "número natural" o número buscado é o 6.

5.- ***Comprobación***: En efecto $5 \cdot 6 + 6 = 36 = 6^2$.

Actividades propostas

24. Que número multiplicado por 3 é 40 unidades menor que o seu cadrado?

25. Calcula tres números consecutivos tales que a suma dos seus cadrados sexa 365.

26. O triplo do cadrado dun número aumentado no seu duplo é 85. Cal é o número?

27. Un triángulo isósceles ten un perímetro de 20 cm e a base mide 4 cm, calcula os lados do triángulo e a súa área.

4.3. Resolución de problemas mediante sistemas de ecuacións

Para resolver problemas por medio de sistemas de ecuacións, primeiro teremos que pasar a linguaxe alxébrica o enunciado do problema e logo resolvelo seguindo estes pasos:

1.- Comprender o enunciado.

2.- Identificar as incógnitas.

3.- Traducir o enunciado a linguaxe alxébrica.

4.- Propor o sistema e resolvelo.

5.- Comprobar a solución obtida.

Actividades resoltas

Imos resolver o seguinte problema:

- *A suma das idades dun pai e do seu fillo é 39 e a súa diferenza 25. Cal é a idade de cada un?*

Unha vez comprendido o enunciado, identificamos as incógnitas que, neste caso, son a idade do pai e a do fillo

2.- Idade do pai = x

Idade do fillo = y

3.- Pasamos o enunciado a linguaxe alxébrica:

A suma das súas idades é 39:

$$x + y = 39$$

E a súa diferenza 25:

$$x - y = 25$$

4.- Propoñemos o sistema e resolvémolo polo método que nos resulte máis sinxelo. Neste caso, facémolo por redución:

$$\begin{cases} x + y = 39 \\ x - y = 25 \end{cases} \xrightarrow{sumamos} 2x = 64 \Rightarrow x = 64/2 = 32$$

$$x + y = 39 \Rightarrow 32 + y = 39 \Rightarrow y = 39 - 32 = 7.$$

Solución: O pai ten 32 anos e o fillo ten 7 anos.

5.- *Comprobación:* En efecto, a suma das idades é 32 + 7 = 39 e a diferenza é 32 – 7 = 25.

Actividades propostas

28. A suma das idades de Raquel e Luís son 65 anos. A idade de Luís máis catro veces a idade de Raquel é igual a 104. Que idade ten cada un?

29. A suma das idades de María e Alberte é 32 anos. Dentro de 8 anos, a idade de Alberte será dúas veces a idade de María. Que idade ten cada un na actualidade?

30. Encontra dous números cuxa diferenza sexa 24 e a súa suma sexa 123.

CURIOSIDADES. REVISTA

Obtención da fórmula para resolver ecuacións de segundo grao

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ con } a \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$ax^2 + bx = -c$$

$$\Downarrow \text{ Multiplicamos por } 4a$$

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

$$\Downarrow \text{ Sumamos } b^2$$

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$$

$$\Downarrow \text{ Completamos cadrados}$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

$$\Downarrow \text{ Calculamos a raíz cadrada}$$

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\Downarrow \text{Despexamos o } x$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

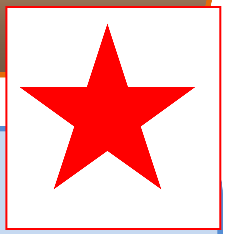
$$\Downarrow$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Tres ecuacións de segundo grao interesantes

$x^2 = 2$

Esta ecuación aparece ao aplicarlle o Teorema de *Pitágoras* a un triángulo rectángulo isósceles de lados iguais a 1, ou ao calcular a diagonal dun cadrado de lado 1. A súa solución é a lonxitude da hipotenusa ou da diagonal. Ten de interesante que se demostra que a solución NON é un número racional, un número que poida escribirse como cociente de dous números enteiros.



$x + 1 = x^2$

Tamén se pode escribir como: $\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$ que é unha proporción onde x toma o valor $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx$ 1.618… que é o número de ouro, outro número irracional.

$x^2 = -1$

A terceira ecuación non ten solución real, ningún número real ao elevalo ao cadrado pode dar un número negativo pero, se ampliamos o campo real coa súa raíz $\sqrt{-1}$ = i, resulta que xa todas as ecuacións de segundo grao teñen solución, e aos números a + b·i chámaselles **números complexos**.

Emmy Noether foi unha matemática alemá de orixe xudía cuxos traballos en Álxebra permitiron resolver o problema da conservación da enerxía.

RESUMO

Ecuación de primeiro grao	É unha ecuación alxébrica na que a maior potencia da incógnita é 1.	$-5x + 6 = 0$
Ecuación de segundo grao	É unha ecuación alxébrica na que a maior potencia da incógnita é 2. Ten a forma: $ax^2 + bx + c = 0$ onde *a, b e c* son números reais, con $a \neq 0$.	$-3x^2 + 7x + -8 = 0$
Resolución de ecuacións de 2º grao completas	Úsase a fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 - 5x + 6 = 0$: $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2}$ $x_1 = 3, x_2 = 2$
Discriminante	$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$
Número de solucións dunha ecuación de 2º grao	Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, ten dúas solucións reais e distintas Se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, ten unha solución dobre. Se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, a ecuación non ten solución	$x^2 - 4x - 5 = 0$: $\Delta = 36 > 0$, ten dúas solucións 5 e -1. $x^2 - 2x + 1 = 0$: $\Delta = 0$, ten unha raíz dobre: $x = 1$. $x^2 + 3x + 8 = 0$: $\Delta = -23$. Non ten solución real.
Resolución de ecuacións de 2º grao incompletas	Se $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, despexamos a incógnita: $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$. Se $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$: $x = 0$ e $x = \frac{-b}{a}$	$2x^2 - 18 = 0$: $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$ $3x^2 - 15x = 0 \Rightarrow 3x(x - 5) = 0$ $\Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 5$.
Suma e produto de raíces	$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$; $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$	$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = 3$
Sistema de ecuacións lineais	$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}$
Clasificación	**Compatible determinado**: unha única solución, o punto de intersección. As rectas son **secantes**: $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$ **Compatible indeterminado**: Infinitas solucións, polo que as rectas son **coincidentes**: $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 6 \end{cases}$ **Incompatible**: Non ten solución, as rectas son **paralelas**: $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 2 \end{cases}$	
Métodos de resolución	**Substitución:** despexar unha incógnita e substituír na outra ecuación. **Igualación:** despexar a mesma incógnita das dúas ecuacións. **Redución:** sumar as dúas ecuacións, multiplicándoas polos números adecuados.	

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Raquel Hernández e Banco de Imaxes de INTEF

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Ecuacións de primeiro grao

1. Resolve as seguintes ecuacións de primeiro grao:

a) $-x - 6x - 8 = 0$ b) $-1 + x = 6$ c) $7x = 70x + 5$

d) $2(x + 3) - (2x + 1) = 5$ e) $5(2x - 1) + (x - 1) = 5$ f) $12(x - 1) - 6(2 + x) = -18$

g) $(2x + 3) + (x - 1) = -x - 3$ h) $x + 2 = 2x + 168$ i) $6(2x - 3x + 1) - 2x - 1 = -1$

2. Resolve as seguintes ecuacións de primeiro grao con denominadores:

a) $\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{3} = 10$ b) $\frac{x-3}{3} + \frac{-x+1}{7} = 3$ c) $\frac{x+1}{5} + \frac{2x+6}{10} = 2$

d) $\frac{1-x}{2} + \frac{3x-1}{3} = \frac{1}{3}$ e) $\frac{2x-8}{5} - \frac{3x-9}{10} = x-1$ f) $\frac{2x+3x}{5} - \frac{3x-6}{10} = 1$

Ecuacións de segundo grao

3. Resolve as seguintes ecuacións de 2º grao:

a) $-x^2 - 6x - 8 = 0$ b) $x(-1 + x) = 6$ c) $7x^2 = 70x$

d) $2(x + 3) - x(2x + 1) = 5$ e) $5(2x - 1) + x(x - 1) = 5$ f) $12(x^2 - 1) - 6(2 + x) = -18$

g) $(2x + 3) \cdot (x - 1) = -x - 3$ h) $x \cdot (x + 2) = 168$ i) $6(2x^2 - 3x + 1) - x(2x - 1) = -1$

4. Resolve as seguintes ecuacións de 2º grao con denominadores:

a) $\frac{x^2-1}{2} - \frac{x+1}{3} = 10$ b) $\frac{x^2-3}{3} + \frac{x^2-x+1}{7} = 3$ c) $\frac{x^2+1}{5} + \frac{2x+6}{10} = 2$

d) $\frac{1-x^2}{2} + \frac{3x-1}{3} = \frac{1}{3}$ e) $\frac{2x^2-8}{5} - \frac{3x-9}{10} = x-1$ f) $\frac{2x+3x^2}{5} - \frac{3x-6}{10} = 1$

5. Resolve mentalmente as seguintes ecuacións de 2º grao:

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$ b) $x(-1 + x) = 0$ c) $2x^2 = 50$

d) $x^2 - 3x - 10 = 0$ e) $x^2 + 3x - 10 = 0$ f) $x^2 + 7x + 10 = 0$

g) $x^2 - 5x + 6 = 0$ h) $x^2 - x - 6 = 0$ i) $x^2 + x - 6 = 0$

6. Factoriza as ecuacións do problema anterior. Así, se as solucións son 2 e 5, escribe:

$x^2 – 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow (x – 2) \cdot (x – 5) = 0$.

Observa que se p coeficiente de x^2 fose distinto de 1 os factores teñen que estar multiplicados por este coeficiente.

7. Cando o coeficiente b é par ($b = 2B$), podes simplificar a fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2B \pm \sqrt{4B^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2B \pm 2\sqrt{B^2 - ac}}{2a} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - ac}}{a}$$

Así para resolver $x^2 – 6x + 8 = 0$ basta dicir $x = 3 \pm \sqrt{9-8} = 3 \pm 1$, logo as súas solucións son 2 e 4.

Utiliza esa expresión para resolver:

a) $x^2 – 8x – 12 = 0$ b) $x^2 – 10x + 24 = 0$ c) $x^2 + 4x + 7 = 0$

8. Resolve mentalmente as ecuacións seguintes, logo desenvolve as expresións e utiliza a fórmula xeral para volver resolvelas.

a) $(x – 2)\cdot(x – 6) = 0$ b) $(x + 1)\cdot(x – 3) = 0$ c) $(x – 9)\cdot(x – 3) = 0$

d) $(x – 1)\cdot(x+ 4) = 0$ e) $(x + 7)\cdot(x – 2) = 0$ f) $(x – 4)\cdot(x + 6) = 0$

9. Determina o número de solucións reais que teñen as seguintes ecuacións de segundo grao calculando o seu discriminante, e logo resólveas.

a) $x^2 + 3x – 4 = 0$ b) $7x^2 + 12x – 4 = 0$ c) $3x^2 + 7x + 10 = 0$

d) $x^2 – x + 5 = 0$ e) $6x^2 – 2x – 3 = 0$ f) $5x^2 + 8x – 6 = 0$

10. Escribe tres ecuacións de segundo grao que non teñan ningunha solución real. *Axuda*: Utiliza o discriminante.

11. Escribe tres ecuacións de segundo grao que teñan unha solución dobre.

12. Escribe tres ecuacións de segundo grao que teñan dúas solucións reais e distintas.

13. Poderías escribir unha ecuación de segundo grao con unicamente unha solución real que non fose dobre?

Sistemas lineais de ecuacións

14. Resolve os seguintes sistemas polo método de substitución:

a) $\begin{cases} 2x-5y=-4 \\ 3x-y=7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+y=4 \\ 2x+5y=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 6x+5y=7 \\ 2x+3y=1 \end{cases}$

15. Resolve os seguintes sistemas polo método de igualación:

a) $\begin{cases} -2x+3y=13 \\ 3x-7y=-27 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x-2y=-3 \\ 4x-y=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x-5y=4 \\ -8x+3y=-5 \end{cases}$

16. Resolve os seguintes sistemas polo método de redución:

a) $\begin{cases} 3x-5y=1 \\ 2x+y=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x+3y=14 \\ -x-6y=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x-5y=4 \\ -7x+5y=-2 \end{cases}$

17. Resolve de forma gráfica os seguintes sistemas

a) $\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x+3y=4 \\ x-6y=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x-5y=13 \\ -7x+5y=-9 \end{cases}$

18. Resolve os seguintes sistemas polo método que creas máis apropiado:

a) $\begin{cases} \frac{4x-1}{3}-\frac{2y+2}{5}=-1 \\ \frac{x+3}{2}+\frac{4y-1}{3}=7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{3x-1}{2}-\frac{y+3}{5}=-3 \\ 3x+y=-1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{x+1}{2}+\frac{y+2}{3}=2 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$

19. Copia no teu caderno e completa os seguintes sistemas incompletos de forma que se cumpra o que se pide en cada un:

Compatible indeterminado

a) $\begin{cases} (\ )x+3y=(\ ) \\ 2x-y=3 \end{cases}$

Incompatible

b) $\begin{cases} -5x+y=2 \\ (\ )x+y=6 \end{cases}$

A súa solución sexa x = 2 e *y* = 1

c) $\begin{cases} 3x-y=(\ ) \\ (\ )x+y=7 \end{cases}$

Incompatible

d) $\begin{cases} 2x-5y=-1 \\ 4x+(\ )y=(\ ) \end{cases}$

A súa solución sexa *x* = –1 e *y* = 1

e) $\begin{cases} 3x+(\ )y=-1 \\ (\ )x+3y=5 \end{cases}$

Compatible indeterminado

f) $\begin{cases} (\ )x+6y=(\ ) \\ 2x+3y=-2 \end{cases}$

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Raquel Hernández e Banco de Imaxes de INTEF

20. Escribe tres sistemas lineais que sexan incompatibles.

21. Escribe tres sistemas lineais que sexan compatibles indeterminados.

22. Escribe tres sistemas lineais que sexan compatibles determinados.

23. Resolve os seguintes sistemas polo método de igualación e comproba a solución graficamente. De que tipo é cada sistema?

a) $\begin{cases} -2x+6y=13 \\ x-3y=8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=-3 \\ 4x-4y=-12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y=4 \\ -x+3y=-5 \end{cases}$

Problemas

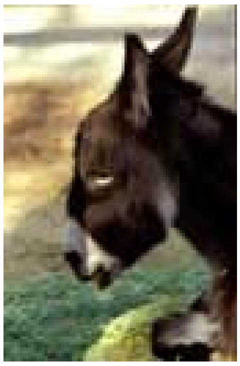
24. Nunha tenda alugan bicicletas e triciclos. Se teñen 51 vehículos cun total de 133 rodas, cantas bicicletas e cantos triciclos teñen?

25. Cal é a idade dunha persoa se ao multiplicala por 15 lle faltan 100 unidades para completar o seu cadrado?

26. Descompón 8 en dous factores cuxa suma sexa 6.

27. O triplo do cadrado dun número aumentado no seu duplo é 85. Que número é?

28. A suma dos cadrados de dous números impares consecutivos é 394. Determina estes números.



29. Van cargados un asno e un macho. O asno queixábase do peso que levaba enriba. O macho contestoulle: se eu levara un dos teus sacos, levaría o dobre de carga ca ti, pero se ti tomas un dos meus, os dous levaremos igual carga. Cantos sacos leva cada un?

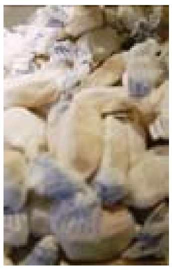
30. Que número multiplicado por 3 é 40 unidades menor có seu cadrado?

31. Calcula tres números consecutivos cuxa suma de cadrados é 365.

32. Dentro de 11 anos, a idade de Mario será a metade do cadrado da idade que tiña hai 13 anos. Que idade ten Mario?

33. Dous números naturais diferéncianse en 2 unidades e a suma dos seus cadrados é 580. Cales son estes números?

34. A suma de dous números é 5 e o seu produto é –84. De que números se trata?



35. María quere formar bandexas dun quilogramo con mazapáns e polvoróns. Se os polvoróns lle custan a 5 euros o quilo e os mazapáns a 7 euros o quilo, e quere que o prezo de cada bandexa sexa de 6 euros, que cantidade deberá poñer de cada produto? Se quere formar 25 bandexas, que cantidade de polvoróns e de mazapáns vai precisar?

36. Determina os catetos dun triángulo rectángulo cuxa suma é 7 cm e a hipotenusa mide 5 cm.

37. O produto de dous números é 4 e a suma dos seus cadrados 17. Calcula estes números.

38. A suma de dous números é 20. O dobre do primeiro máis o triplo do segundo é 45. De que números se trata?

39. Nun garaxe hai 30 vehículos entre coches e motos. Se en total hai 100 rodas, cantos coches e motos haino garaxe?

40. A idade actual de Pedro é o dobre da de Raquel. Dentro de 10 anos, as súas idades sumarán 65. Cantos anos teñen actualmente Pedro e Raquel?

41. Na miña clase hai 35 persoas. Regaláronnos a cada rapaza 2 bolígrafos e a cada rapaz 1 caderno. Se en total había 55 regalos. Cantos rapaces e rapazas somos na clase?

42. Entre o meu avó e o meu irmán teñen 56 anos. Se o meu avó ten 50 anos máis có meu irmán, que idade ten cada un?

43. Dous bocadillos e un refresco custan 5 €. Tres bocadillos e dous refrescos custan 8 €. Cal é o prezo do bocadillo e mais o refresco?

44. Nunha granxa hai polos e vacas. Se se contan as cabezas, son 50. Se se contan as patas, son 134. Cantos polos e vacas hai na granxa?

45. Un rectángulo ten un perímetro de 172 metros. Se o longo é 22 metros maior que o ancho, cales son as dimensións do rectángulo?

46. Nunha bolsa hai moedas de 1 € e 2 €. Se en total hai 40 moedas e 53 €, cantas moedas de cada valor hai na bolsa?

47. Nunha pelexa entre arañas e avespas hai 70 cabezas e 488 patas. Sabendo que unha araña ten 8 patas e unha avespa 6, cantas avespas e arañas hai na pelexa?

48. Unha clase ten 32 estudantes e o número de alumnos é o triplo có de alumnas, cantos rapaces e rapazas hai?

49. Iolanda ten 6 anos máis có seu irmán Paulo e a súa nai ten 50 anos. Dentro de 2 anos a idade da nai será o dobre da suma das idades dos seus fillos, que idades teñen?

AUTOAVALIACIÓN

1. As solucións da ecuación $3(x^2 – 1) + 2(x^2 – 2x) = 9$ son:

a) $x = 2$ e $x = 1$ b) $x = 1$ e $x = –3$ c) $x = 1$ e $x = –2/3$ d) $x = 2$ e $x = –6/5$

2. As solucións da ecuación $156 = x(x – 1)$ son:

a) $x = 11$ e $x = –13$ b) $x = 13$ e $x = –12$ c) $x = 10$ e $x = 14$ d) $x = –12$ e $x = –11$

3. As solucións da ecuación $3x^2 – 14x + 15 = 0$ son:

a) $x = 2$ e $x = 2/3$ b) $x = 1/3$ e $x = 4$ c) $x = 1$ e $x = 4/3$ d) $x = 5/3$ e $x = 3$

4. As solucións da ecuación $(x – 14)^2 + x^2 = (x + 2)^2$ son:

a) $x = 24$ e $x = 8$ b) $x = 21$ e $x = 3$ c) $x = 5$ e $x = 19$ d) $x = 23$ e $x = 2$

5. As solucións da ecuación $2(x + 2) – x(2 – x) = 0$ son:

a) Infinitas b) $x = 9$ e $x = 5$ c) non ten solución d) $x = 1$ e $x = 4$

6. As rectas que forman o sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 5x - 4y = 9 \end{cases}$ son:

a) Secantes b) Paralelas c) Coincidentes d) Crúzanse

7. A solución do sistema $\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ 6x - 8y = 12 \end{cases}$ é:

a) $x = 2$ e $y = 1$ b) $x = 1$ e $y = 1$ c) $x = 3$ e $y = 2$ d) Non ten solución

8. A solución do sistema $\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 5x - y = 11 \end{cases}$ é:

a) $x = 4$ e $y = 2$ b) $x = 3$ e $y = 3$ c) $x = 2$ e $y = –1$ d) $x = 5$ e $y = 1$

9. Nunha granxa, entre polos e porcos hai 27 animais e 76 patas. Cantos polos e porcos hai na granxa?

a) 16 polos e 11 porcos b) 15 polos e 12 porcos c) 13 polos e 14 porcos

10. Cal é a idade dunha persoa se ao multiplicala por 15, lle faltan 100 unidades para chegar ao seu cadrado?

a) 16 anos b) 17 anos c) 20 anos d) 18 anos

Matemáticas orientadas ás ensinanzas académicas

3º B da ESO

Capítulo 6: Proporcionalidade

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Índice

1. PROPORCIONALIDADE DIRECTA

1.1. MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONAIS

1.2. REGRA DE TRES SIMPLE DIRECTA

1.3. REGRA DE TRES COMPOSTA DIRECTA

1.4. PORCENTAXES

1.5. INCREMENTO PORCENTUAL

1.6. DESCONTO PORCENTUAL

1.7. ESCALAS

2. PROPORCIONALIDADE INVERSA

2.1. MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

2.2. REGRA DE TRES SIMPLE INVERSA

2.3. REGRA DE TRES COMPOSTA INVERSA

3. REPARTOS PROPORCIONAIS

3.1. REPARTO PROPORCIONAL DIRECTO

3.2. REPARTO PROPORCIONAL INVERSO

3.3. MESTURAS E ALIAXES

4. INTERESE SIMPLE

4.1. CÁLCULO DE INTERESE SIMPLE

4.2. INTERESE COMPOSTO

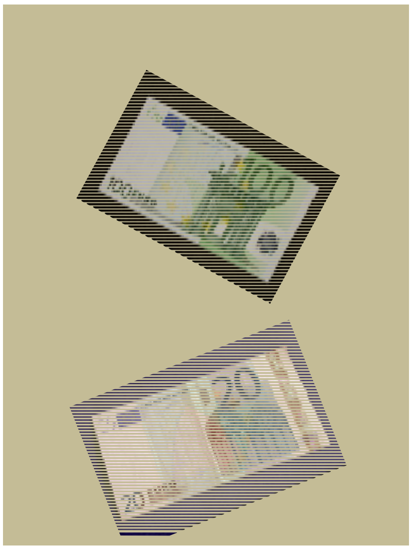
Resumo

A proporcionalidade é unha realidade coa que convivimos ao noso arredor. Para comprendela e utilizala correctamente, necesitamos coñecer as súas regras.

Recoñeceremos a proporcionalidade directa ou inversa, simple e composta, e realizaremos exercicios e problemas de aplicación.

En multitude de ocasións debemos efectuar repartos proporcionais, directos ou inversos: premios de lotería, herdanzas, mesturas, aliaxes…

O tanto por cento e o interese é un concepto que aparece constantemente nos medios de comunicación e na nosa propia economía. Neste capítulo faremos unha primeira aproximación á denominada "*economía financeira*".



Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

1. PROPORCIONALIDADE DIRECTA

1.1. Magnitudes directamente proporcionais

Recorda que:

Dúas magnitudes son **directamente proporcionais** cando ao multiplicar ou ao dividir a primeira por un número, a segunda queda multiplicada ou dividida polo mesmo número.

Exemplo:

- Se dúas caixas conteñen 12 bombóns, dez caixas (iguais á primeira) conterán sesenta bombóns.

$2 \cdot \mathbf{6} = 12;\ 10 \cdot \mathbf{6} = 60$

A **razón de proporcionalidade directa *k*** obtense mediante o cociente de calquera dos valores dunha variable e os correspondentes da outra:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = k$$

Exemplo:

- No exemplo anterior a razón de proporcionalidade é: $\frac{12}{2} = \frac{60}{10} = 6$

Exemplo:

- Calcula a razón de proporcionalidade, copia no teu caderno e completa a táboa de proporcionalidade directa seguinte:

Magnitude A	18	2.4	60	2.8	0.20
Magnitude B	4.5	0.6	15	0.7	0.05

A razón de proporcionalidade é $\boldsymbol{k} = \frac{\mathbf{18}}{\mathbf{4.5}} = \mathbf{4.}$ Polo tanto, todos os valores da magnitude B son catro veces menores que os da magnitude A.

1.2.Regra de tres simple directa

Recorda que:

O cuarto termo dunha proporción directa entre dúas magnitudes pódese calcular mediante o procedemento denominado "***regra de tres***"

Exemplo:

- Quince paquetes pesan 330 kg, cantos kg pesan 6 paquetes?

15 paquetes —— 330 kg

6 paquetes —— *x* kg

$$\frac{15}{330} = \frac{6}{x} \Rightarrow x = \frac{330 \cdot 6}{15} = 132\ kg$$

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

1.3. Regra de tres composta directa

Unha proporción na que interveñen máis de dúas magnitudes denomínase **proporción composta**.

Para calcular o valor descoñecido de unha das súas magnitudes utilízase a "***regra de tres composta***".

Exemplo:

- Nove persoas gastaron en transporte 630 € en 20 días. Canto gastarán 24 persoas en 8 días realizando o mesmo percorrido?

Observamos que as tres magnitudes son directamente proporcionais.

9 persoas   630 €   20 días

24 persoas   *x* €   8 días

$$x = \frac{630 \cdot 24 \cdot 8}{9 \cdot 20} = 672\ €$$

1.4.Porcentaxes

A porcentaxe ou tanto por cento é a razón de proporcionalidade de maior uso na vida cotiá.

O **tanto por cento** é unha razón con denominador 100.

Exemplo:

- $24\ \% = \frac{24}{100}$

As porcentaxes son proporcións directas nas que se pode aplicar a regra de tres.

Exemplo:

- A poboación de Robles era en 2012 de 5 680 habitantes. En 2013 incrementouse nun 5 %. Cal é a súa poboación a final de 2013?

O 5 % de 5 680 é $\frac{5 \cdot 5\,680}{100}$ = 284 habitantes. A poboación incrementouse en 284 habitantes, logo ao final de 2013 será de: 5 680 + 284 = 5 964 habitantes.

Actividades propostas

1. Estima cantas persoas caben de pé nun metro cadrado. Houbo unha festa e encheuse por completo un local de 260 m^2, cantas persoas estimas que foron a esa festa?

2. Nunha receita dinnos que para facer unha marmelada de amorodo precisamos un quilogramo de azucre por cada dous quilogramos de amorodos. Queremos facer 5 quilogramos de marmelada, cantos quilogramos de azucre e cantos de amorodos debemos poñer?

3. A altura dunha árbore é proporcional á súa sombra (a unha mesma hora). Unha árbore que mide 1.2 m ten unha sombra de 2.1 m. Que altura terá unha árbore cuxa sombra mida 4.2 m?

1.5. Incremento porcentual

Exemplo:

O exemplo anterior pode resolverse mediante **incremento porcentual**: 100 + 5 = 105%

- O 105 % de 5680 é $\frac{105 \cdot 5\,680}{100}$ = 5 964 habitantes

1.6.Desconto porcentual

- Nas rebaixas a todos os artigos á venda aplícanlles un 20 % de desconto. Calcula o prezo dos que aparecen na táboa:

Prezo sen desconto	74 €	105 €	22 €	48 €
Prezo en rebaixas	59.20 €	84 €	17.6 €	38.4 €

Xa que nos descontan o 20 %, pagaremos o 80 %. Polo tanto: $\frac{80}{100}$ = 0.8 é a razón directa de proporcionalidade que aplicaremos aos prezos sen desconto para calcular o prezo rebaixado.

Actividades propostas

4. Copia no teu caderno e completa a táboa de proporción directa. Calcula a razón de proporcionalidade.

Litros	16	4.5		1		50
Euros	36		8.10		10	

5. Gastamos 72 litros de gasolina para percorrer 960 km. Cantos litros necesitaremos para unha distancia de 1 500 km?

6. O meu coche gasta 6 litros de gasolina cada 100 km, cantos litros gastará nunha viaxe de 1 250 km?

7. Un libro de 420 páxinas pesa 200 g. Canto pesará un libro da mesma colección de 300 páxinas?

8. Seis persoas realizan unha viaxe de oito días e pagan en total 40 800 €. Canto pagarán 15 persoas se a súa viaxe dura 5 días?

9. Calcula o prezo final dun lavavaixelas que custaba 430 € máis un 21 % de IVE, ao que se lle aplicou un desconto sobre o custe total do 15 %.

10. Calcúlaos termos que faltan para completar as proporcións:

a) $\frac{24}{100} = \frac{30}{x}$ b) $\frac{x}{80} = \frac{46}{12}$ c) $\frac{3.6}{12.8} = \frac{x}{60}$

11. Copia no teu caderno e completa:

a) Dunha factura de 127 € paguei 111 €. Aplicáronme un ……… % de desconto.
b) Descontáronme o 12 % dunha factura de …………….. € e paguei 365 €.
c) Por pagar ao contado un moble descontáronme o 15 % e aforrei 100 €. Cal era o prezo do moble sen desconto?

12. Dous pantalóns custáronnos 32 €, canto pagaremos por 5 pantalóns?

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

1.7. Escalas

Principais calzadas romanas

En planos e mapas encontramos anotada na súa parte inferior a escala á que están debuxados.

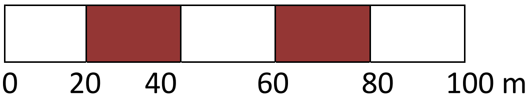
A **escala** é a proporción entre as medidas do debuxo e as medidas na realidade.

Exemplo:

- Se unha certa escala se expresa da forma 1: 20000 significa que 1 cm do plano corresponde a 20000 cm = 200 m na realidade.

As escalas tamén se representan en forma gráfica, mediante unha barra dividida en segmentos de 1 cm de lonxitude.

Exemplo:

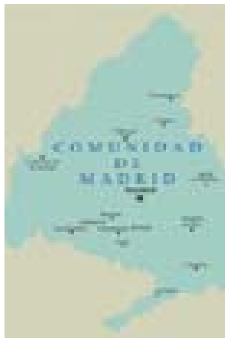


Escalímetro

Esta escala identifica cada centímetro do mapa con 20 m na realidade é dicir 1:2000.

Un instrumento sinxelo para realizar traballos a escala é o ***pantógrafo*** que facilita copiar unha imaxe ou reproducila a escala.

O pantógrafo é un paralelogramo articulado que, ao variar a distancia entre os puntos de articulación, permite obter diferentes tamaños de debuxo sobre un modelo dado.



Actividades propostas

13. A distancia real entre dúas vilas é de 18.5 km. Se no mapa están a 10 cm de distancia. A que escala está debuxado?

14. Que altura ten un edificio se a súa maqueta construída a escala 1:300 presenta unha altura de 12 cm?

15. Debuxa a escala gráfica correspondente á escala 1: 60000.

16. As dimensións dunha superficie rectangular no plano son 6cm e 14 cm. Se está debuxado a escala 1: 40, calcula as súas medidas reais.

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

2. PROPORCIONALIDADE INVERSA

2.1.Magnitudes inversamente proporcionais

Recorda que:

Dúas magnitudes son **inversamente proporcionais** cando ao multiplicar ou dividir a primeira por un número, a segunda queda dividida ou multiplicada polo mesmo número.

Exemplo:

- Cando un automóbil vai a 90 km/h, tarda catro horas en chegar ao seu destino. Se fose a 120 km/h tardaría 3 horas en facer o mesmo percorrido.

$$90 \cdot 4 = 120 \cdot 3$$

A velocidade e o tempo son magnitudes inversamente proporcionais.

A **razón de proporcionalidade inversa** k' é o produto de cada par de magnitudes: $k' = a \cdot b = a' \cdot b'$

Exemplo:

- Copia a táboa no teu caderno, calcula a razón de proporcionalidade inversa e completa a táboa de proporcionalidade inversa:

a	18	150	1.5	3 600	100
b	50	6	600	0.25	9

k' = 18 · 50 = 900. Comproba que todas as columnas dan este resultado.

2.2.Regra de tres simple inversa

Para calcular o cuarto termo entre dúas magnitudes inversamente proporcionais aplicamos a regra de tres inversa.

Exemplo:

- Catro persoas realizan un traballo en 18 días. Cantas persoas necesitaremos para realizar o mesmo traballo en 8 días?

4 persoas —— 18 días

x persoas —— 8 días

$$k' = 4 \cdot 18 = 8 \cdot x \Rightarrow x = \frac{4 \cdot 18}{8} = 9 \text{ persoas.}$$

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

2.3. Regra de tres composta inversa

Na regra de tres **composta inversa** interveñen varias magnitudes inversamente proporcionais entre si.

Exemplo:

- Cunha cantidade de penso podemos dar de comer a 48 animais durante 30 días cunha ración de 1.2 kg para cada un. Cantos días poderemos alimentar a 60 animais se a ración é de 800 g?

  48 animais —— 30 días —— 1.2 kg

  60 animais —— *x* días —— 0.800 kg

As tres magnitudes son inversamente proporcionais entre si.

Polo tanto, $k' = 48 \cdot 30 \cdot 1.2 = 1728 \Rightarrow x = \frac{48 \cdot 30 \cdot 1.2}{60 \cdot 0.800} = 36$ días.

Actividades propostas

17. Copia no teu caderno a táboa seguinte, calcula a razón de proporcionalidade e completa a táboa de proporcionalidade inversa:

Magnitude A	36	0.09		12	
Magnitude B	0.25		6		72

18. Ao cortar unha cantidade de madeira conseguimos 6 paneis de 2.25 m de longo. Cantos paneis conseguiremos se agora teñen 1.5 m de longo?

19. Para encher un depósito ábrense tres billas que lanzan 2 litros por minuto cada unha e tardan 6 horas. Canto tempo tardarán 4 billas similares que lanzan 5 litros por minuto cada unha?

20. Tres máquinas fabrican 1 200 pezas funcionando 5 horas diarias. Cantas máquinas se deben poñer a funcionar para conseguir 6 000 pezas durante 9 horas diarias?

21. Na construción dunha ponte de 900 m utilizáronse 250 vigas, pero o enxeñeiro non está moi seguro e decide reforzar a obra engadindo 75 vigas máis. Se as vigas se colocan uniformemente ao longo de toda a ponte, a que distancia se colocarán as vigas?

22. Nunha horta ecolóxica utilízanse 3 000 kg dun tipo de esterco de orixe animal que se sabe que ten un 10 % de nitratos. Cámbiase o tipo de esterco, que agora ten un 15 % de nitratos, cantos quilogramos se necesitarán do novo esterco para que as plantas reciban a mesma cantidade de nitratos?

23. Esa mesma horta necesita 1 200 caixas para envasar as súas mandarinas en caixas dun quilogramo. Cantas caixas necesitaría para envasalas en caixas de medio quilogramo? E para envasalas en caixas de 2 quilogramos?

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

3. REPARTOS PROPORCIONAIS

Cando se realiza un reparto en partes desiguais débese establecer previamente se se trata dun reparto proporcional directo ou inverso.

3.1. Reparto proporcional directo

Nun reparto proporcional directo corresponderalle máis a quen ten máis partes.

Actividade resolta

- Tres amigos deben repartir os 300 € que gañaron nunha competición de acordo aos puntos que cada un obtivo. O primeiro obtivo 7 puntos, o segundo 5 e o terceiro 3 puntos.

  O reparto directamente proporcional iníciase sumando os puntos: 7 + 5 + 3 = 15 puntos.

  Calculamos o premio por punto: 300 : 15 = 20 €.

  O primeiro obterá 20 · 7 = 140 €.

  O segundo: 20 · 5 = 100 €.

  O terceiro: 20 · 3 = 60 €.

  A suma das tres cantidades é 300 €, a cantidade total a repartir.

Como se trata dunha proporción, débese establecer a seguinte regra:

Sexa N (no exemplo anterior 300) a cantidade a repartir entre catro persoas, ás que lles corresponderá A, B, C, D de maneira que N = A + B + C + D. Estas cantidades son proporcionais á súa participación no reparto: *a, b, c, d*.

a + b + c + d = n é o número total de partes nas que se distribuirá N.

N : *n* = *k* que é a cantidade que corresponde a cada parte. No exemplo anterior: *k* = 300 : 15 = 20.

O reparto finaliza multiplicando *k* por *a*, *b*, *c* e *d*, obténdose así as cantidades correspondentes A,B,C e D.

3.2. Reparto proporcional inverso

Nun reparto proporcional inverso recibe máis quen menos partes ten.

Sexa N a cantidade a repartir e *a*, *b* e *c* as partes. Ao ser unha proporción inversa, o reparto realízase aos seus inversos 1/*a*, 1/*b*, 1/*c*.

Para calcular as partes totais, reducimos as fraccións a común denominador, para ter un patrón común, e tomamos os numeradores que son as partes que corresponden a cada un.

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Actividade resolta

- Repartir 3.000 € de forma inversamente proporcional a 12 e 20.

Calculamos o total das partes: 1/12 + 1/20 = **5**/60 +**3**/60 = **8**/60.

3 000 : 8 = 375 € cada parte.

375 · 5 = 1 875 €.

375 · 3 = 1 125 €.

Actividades propostas

24. Cinco persoas comparten lotería con 10, 6, 12, 7 e 5 participacións respectivamente. Se obtiveron un premio de 18 000 €, canto corresponde a cada unha?

25. Nun concurso acumúlase puntuación de forma inversamente proporcional ao número de erros. Os catro finalistas, con 6, 5, 2 e 1 erro, deben repartir os 1 400 puntos. Cantos puntos recibirá cada un?

26. No testamento o avó establece que quere repartir entre os seus netos 22 200 € de maneira proporcional ás súas idades, 12, 15 e 18 anos, coidando que a maior cantidade sexa para os netos menores. Canto recibirá cada un?

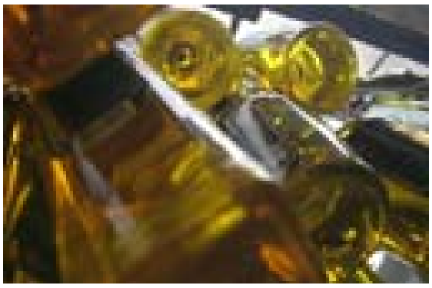
27. Tres socios investiron 20 000 €, 34 000 € e 51 000 € este ano na súa empresa. Se os beneficios a repartir ao final de ano ascenden a 31 500 €, canto corresponde a cada un?

3.3. Mestura e aliaxes

As **mesturas** que imos estudar son o resultado final de combinar distintas cantidades de produtos de distintos prezos.

Actividade resolta

- Calcula o prezo final do litro de aceite se mesturamos 12 litros a 2.85 €/l, 5 litros a 3.02 €/l e 3 litros a 3.10€/l.



Calculamos o custe total dos distintos aceites:

12 · 2.85 + 5 · 3.02 + 3 · 3.10 = 58.60 €.

E o número total de litros: 12 + 5 + 3 = 20 l.

O prezo do litro de mestura valerá 58.60 : 20 = 2.93 €/l.

Unha **aliaxe** é unha mestura de metais para conseguir un determinado produto final con mellores propiedades ou aspecto.

As aliaxes realízanse en xoiaría mesturando metais preciosos, ouro, prata, platino, con cobre ou rodio. Segundo a proporción de metal precioso, dise que unha xoia ten máis ou menos **lei.**

A **lei** dunha aliaxe é a relación entre o peso do metal máis valioso e o peso total.

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Exemplo:

- Unha xoia de prata de 50 g de peso contén 42 g de prata pura. Cal é a súa lei?

$$\textbf{Lei} = \frac{peso\,metal\ puro}{peso\,total} = \frac{42}{50} = 0.84$$

Outra forma de medir o grao de pureza dunha xoia é o **quilate**.

Un quilate dun metal precioso é 1/24 da masa total da aliaxe.

Para considerar unha xoia de ouro puro ha ter 24 quilates.

Exemplo:

- Unha xoia de ouro de 18 quilates pesa 44 g. Que cantidade do seu peso é de ouro puro?

$$\text{Peso en ouro} = \frac{44 \cdot 18}{24} = 33 \text{ g.}$$

Actividades propostas

Grans de café

28. Calcula o prezo do quilo de mestura de dous tipos de café: 3.5 kg a 4.8 €/kg e 5.20 kg a 6 €/kg.

29. Cantos litros de zume de pomelo de 2.40 €/l deben mesturarse con 4 litros de zume de laranxa a 1.80 €/l para obter unha mestura a 2.13 €/l?

30. Calcula a lei dunha xoia sabendo que pesa 110 g e contén 82 g de ouro puro.

31. Cantos quilates, aproximadamente ten a xoia anterior?

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

4. INTERESE

4.1.Interese simple

O **interese** é o beneficio que se obtén ao depositar un capital nunha entidade financeira a un determinado tanto por cento durante un tempo.

No **interese simple**, ao capital *C* depositado aplícaselle un tanto por cento do rédito *r* anualmente.

O cálculo do interese obtido ao cabo de varios anos realízase mediante a fórmula:

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$$

Se o tempo que se deposita o capital son meses ou días, o interese calcúlase dividindo a expresión anterior entre 12 meses ou 360 días (ano comercial).

$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{1200}$ tempo en meses $I = \frac{C \cdot r \cdot t}{36000}$ tempo en días

4.2.Interese composto

Desde outro punto de vista, o interese é a porcentaxe que se aplica a un préstamo ao longo dun tempo, incrementando a súa contía á hora de devolvelo.

Este tipo de interese non se calcula como o interese simple, senón que se establece o que se chama "*capitalización*".

O **interese composto** aplícase tanto para calcular o capital final dunha inversión como a cantidade a devolver para amortizar un préstamo.

Normalmente os préstamos devólvense mediante cotas mensuais que se calculan a partir dos intereses xerados polo préstamo ao tipo de interese convido.

A capitalización composta propón que, a medida que se van xerando intereses, pasan a formar parte do capital inicial, e ese novo capital producirá intereses nos períodos sucesivos.

Se se trata dun depósito bancario, o capital final calcularase seguindo o seguinte procedemento:

C_i (capital inicial)	1 ano	i (tanto por un)	$C_f = C_i \cdot (1 + i)$
$C_i \cdot (1 + i)$	2 anos	$C_i \cdot (1 + i) \cdot (1 + i)$	$C_f = C_i \cdot (1 + i)^2$
$C_i \cdot (1 + i)^2$	3 anos	$C_i \cdot (1 + i)^2 \cdot (1 + i)$	$C_f = C_i \cdot (1 + i)^3$
…………..	……….	……………	…………….
	n anos		$C_f = C_i \cdot (1 + i)^n$

Ao cabo de *n* anos, o capital final será $\boldsymbol{C_f = C_i \cdot (1 + i)^n}$.

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Para facer os cálculos podes utilizar unha "Folla de cálculo":

(http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/Interes_composto.xlsx).

Basta que na folla de cálculo adxunta modifiques os datos das casas B5 onde está o "Capital inicial", casa B6 onde está o "Tanto por un" e da casa B7 onde aparece o número de "Anos", e arrastres na columna B ata que o número final de anos coincida con devandita casa.

Actividades resoltas

- *Depositamos* 5 400 € ao 2.25 % anual. Canto diñeiro teremos ao cabo de 28 meses?

Calculamos o interese simple:

$$I = \frac{5\,400 \cdot 2.25 \cdot 28}{1\,200} = 283.5 \text{ €}$$

Sumamos capital e intereses:

$$5\,400 + 283.5 = 5\,683.5 \text{€}$$

- *O capital inicial dun depósito ascende a* 82 000 €. O tanto por cento aplicado é o 3 % a interese composto durante 5 anos. Calcula o capital final.

$C_f = C_i \cdot (1 + i)^n = 82\,000 \cdot (1 + 0.03)^5 = 82\,000 \cdot 1.159... = 95\,060$ €

Actividades propostas

32. Calcula o interese simple que producen 105 000 € ao 4.8 % durante 750 días. (*Solución*: 10 500)

33. Ao 5 % de interese composto durante 12 anos, cal será o capital final que obteremos ao depositar 39 500 €?

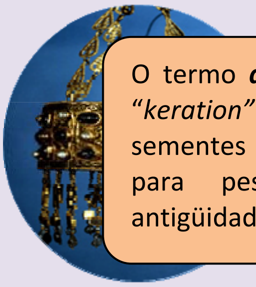
Axuda: tamén podes utilizar a folla de cálculo:

(http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/Interes_composto.xlsx).

34. Que capital hai que depositar ao 1.80 % durante 6 anos para obter un interese simple de 777.6 €?

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA



O termo ***quilate*** vén da palabra grega *"keration" (alfarroba)***.** Esta planta, de sementes moi uniformes, utilizábase para pesar xoias e xemas na antigüidade.

A escala musical é un conxunto de sons ordenados de forma ascendente ou descendente.

As escalas pentatónicas son as máis utilizadas no blues, o heavy metal e o rock

Durante séculos, homes e mulleres observaron o ceo utilizando instrumentos que lles permitían debuxar a escala a bóveda celeste.

Mulleres como *Hipatia de Alejandría, Carolina Herschel, María Michell, María Kirch,* estudaron as constelacións, catalogaron estrelas e galaxias, descubriron cometas e deixaron un enorme legado malia traballaren no anonimato, sen recoñecemento, ou con serias dificultades por seren mulleres.

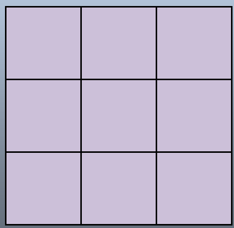
En 2009, Ano Internacional da Astronomía, a Unión Astronómica Internacional e a UNESCO, impulsaron o proxecto "Ela é unha astrónoma" co fin de promover a igualdade entre xéneros neste campo da Ciencia.

A UNED, TVE a 2 e TVE internacional elaboraron unha serie titulada "***Mulleres nas estrelas***" que aporta unha perspectiva histórica e actual das científicas españolas e a súa contribución á astronomía.

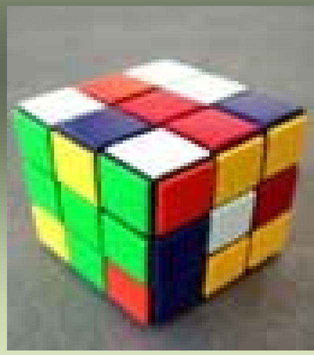
Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Proporcionalidade en áreas e volumes

Ao aumentar o lado dun cadrado ao dobre, a súa superficie queda multiplicada por 4. Ao multiplicar por 3 o lado, a área multiplícase por 9.



Ao aumentar o lado dun cubo ao dobre, o seu volume queda multiplicado por 8. Ao multiplicar por 3 o lado, o volume multiplícase por 27.



En xeral, se facemos un cambio de escala de factor de proporcionalidade k, a área ten un factor de proporcionalidade k^2 e o volume k^3.

Utiliza esta observación para resolver os seguintes problemas:

A **Torre Eiffel de París** mide 300 metros de altura e pesa uns 8 millóns de quilos. Está construída en ferro. Se encargamos un modelo a escala da torre, tamén de ferro, que pese só un quilo, que altura terá? Será maior ou menor ca un lapis?

Antes de empezar a calcular, dá a túa opinión.

- Nunha pizzería a pizza de 20 cm de diámetro vale 3 euros e a de 40 cm vale 6 euros. Cal ten mellor prezo?
- Vemos no mercado unha pescada de 40 cm que pesa un quilo. Parécenos un pouco pequena e pedimos outra un pouco maior que resulta pesar 2 quilos. Canto medirá?
- Nun día frío un pai e un fillo pequeno van exactamente igual de abrigados, cal dos dous terá máis frío?

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Textos Marea Verde

RESUMO

Concepto	Definición	*Exemplos*
Proporcionalidade directa	Dúas magnitudes son **directamente** proporcionais cando ao multiplicar ou dividir a primeira por un número, a segunda queda multiplicada ou dividida polo mesmo número. A **razón de proporcionalidade directa *k* é o** valor que se obtén mediante o cociente de calquera dos valores dunha variable e os correspondentes da outra.	Para empapelar 300 m^2 utilizamos 24 rolos de papel, se agora a superficie é de 104 m^2, necesitaremos 8.32 rolos, pois k = 300/24 = 12.5 e 12.5 = 104/x, polo que x = 104/12.5 = 8.32.
Proporcionalidade inversa	Dúas magnitudes son **inversamente** proporcionais cando ao multiplicar ou dividir a primeira por un número, a segunda queda dividida ou multiplicada polo mesmo número. A **razón de proporcionalidade inversa** *k´* é o produto de cada par de magnitudes: k’ = a· b = a´· b´	Dúas persoas pintan unha vivenda en 4 días traballando 9 h diarias. Para pintar a mesma vivenda, 3 persoas, traballando 8 h diarias tardarán… 3 días
Porcentaxes	Razón con denominador 100.	O 87 % de 2 400 é $\frac{87 \cdot 2400}{100}$ = 2 088
Escalas	A escala é a proporción entre as medidas do debuxo e as medidas na realidade.	A escala 1:50000, 35 cm son 17.5 km na realidade.
Reparto proporcional directo	Recibe máis cantidade quen máis partes ten.	Repartir directamente a 6, 10 e 14, 105 000 € 6 + 10 + 14 = 30 105 000 : 30 = 3 500 6 · 3 500 = 21 000 € 10 · 3 500 = 35 000 € 14 · 3 500 = 49 000 €
Reparto proporcional inverso	Recibe máis cantidade quen menos partes ten.	Repartir 5 670 inversamente a 3, 5 e 6 1/3 + 1/5 + 1/6 = $\frac{10+6+5}{30} = \frac{21}{30}$ 5 670 : 21 = 270; 270 · 10 = **2 700** 270 · 6 = **1 620;** 270 · 5 = **1 350**
Mesturas e aliaxes	Mesturar distintas cantidades de produtos, de distintos prezos. A **lei** dunha **aliaxe** é a relación entre o peso do metal máis valioso e o peso total.	Unha xoia que pesa 245 g e contén 195 g de prata, a súa lei é: $\frac{195}{245}$ = 0.795
Interese simple e composto	O interese é o beneficio que se obtén ao depositar un capital nunha entidade financeira a un determinado tanto por cento durante un tempo	C = 3 600; r = 4.3 %; t = 8 anos I = $\frac{3\,600 \cdot 4.3 \cdot 8}{100}$ = 1 238.4 €

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

EXERCICIOS E PROBLEMAS

1. Copia no teu caderno, calcula a razón de proporcionalidade e completa a táboa de proporcionalidade directa:

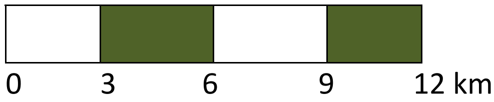
litros	6.25		0.75	1.4	
euros		15	2.25		4.5

2. Con 76 € pagamos 12.5 m de tea, canto nos custarán 22.5 m?
3. Cada semana pagamos 82 € en transporte. Canto gastaremos os meses de xuño e xullo?
4. Para tapizar cinco cadeiras utilicei 2.3 m de tela, cantas cadeiras poderei tapizar coa peza completa de 23 m?
5. Un camión transportou en 3 viaxes 220 sacos de patacas de 24 kg cada un. Cantas viaxes serán necesarias para transportar 550 sacos de 30 kg cada un?
6. Unha edición de 350 libros de 210 páxinas cada un acada un peso total de 70 kg. Cantos kg pesará outra edición de 630 libros de 140 páxinas cada un?
7. Sabendo que a razón de proporcionalidade directa é $\frac{A}{B} = 1.8$, copia no teu caderno e completa a seguinte táboa:

Magnitude A	12.6			4.14	
Magnitude B		9	0.1		2.7

8. O modelo de teléfono móbil que custaba 285 € + IVE está agora cun 15% de desconto. Cal é o seu prezo rebaixado? (IVE 21 %)
9. Por atrasarse dos meses no pago dunha débeda de 1 520 €, unha persoa debe pagar un recargo do 12 %, canto ten que devolver en total?
10. Que tanto por cento de desconto se aplicou nunha factura de 1 820 € se finalmente se pagaron 1 274 €?
11. Ao comprar un televisor obtiven un 22 % de desconto, polo que ao final paguei 483.60 €, cal era o prezo do televisor sen desconto?
12. Por liquidar unha débeda de 3 500 € antes do previsto, unha persoa paga finalmente 3 080 €, que porcentaxe da súa débeda aforrou?
13. O prezo dunha viaxe anúnciase a 907.50 € IVE incluído. Cal era o prezo sen IVE? (IVE 21 %)
14. Que incremento porcentual se efectuou sobre un artigo que antes valía 38€ e agora se paga a 47.12 €?
15. Un mapa está debuxado a escala 1:700000. A distancia real entre dúas cidades é de 21 km. Cal é a súa distancia no mapa?
16. A distancia entre Oviedo e A Coruña é de 340 km. Se no mapa están a 10 cm, cal é a escala á que está debuxado?

17. Interpreta a seguinte escala gráfica e calcula a distancia na realidade para 21 cm.



18. Copia no teu caderno e completa a seguinte táboa:

Tamaño no debuxo	Tamaño real	Escala
24 cm longo e 5 cm de ancho		1:25000
6 cm	15 km	
	450 m	1:30000

19. Copia no teu caderno, calcula a razón de proporcionalidade inversa e completa a táboa:

Magnitude A	4	7.5		3.6	
Magnitude B		12	0.18		10

20. Que velocidade debe levar un automóbil para percorrer en 4 horas certa distancia se a 80 km/h tardou 5 horas e 15 minutos?

21. A razón de proporcionalidade inversa entre A e B é 5.4. Copia no teu caderno e completa a táboa seguinte:

A	18		9		10.8
B		0.03		2.7	

22. Na granxa faise o pedido de forraxe para alimentar a 240 vacas durante 9 semanas. Se o granxeiro vende 60 vacas, a) Cantas semanas lle durará a forraxe? b) E se en lugar de vender, compra trinta vacas? c) E se decide rebaixar a ración unha cuarta parte coas 240 vacas?

23. Con doce paquetes de 3.5 kg cada un poden comer 80 galiñas diariamente. Se os paquetes fosen de 2 kg, cantos necesitariamos para dar de comer ás mesmas galiñas?

24. Determina se as dúas magnitudes son directa ou inversamente proporcionais e completa a táboa no teu caderno:

A	24	8	0.4	6		50
B	3	9	180		20	

25. Se a xornada laboral é de 8 horas necesitamos a 15 operarios para realizar un traballo. Se rebaixamos a xornada en media hora diaria, cantos operarios serán necesarios para realizar o mesmo traballo?

26. Nun almacén gárdanse reservas de comida para 80 persoas durante 15 días con 3 racións diarias, cantos días duraría a mesma comida para 75 persoas con 4 racións diarias?

27. Dez operarios instalan 3 600 m de valla en 6 días. Cantos días tardarán 12 operarios en instalar 5 040 m de valla?

28. Nun concurso o premio de 168 000 € repártese de forma directamente proporcional aos puntos conseguidos. Os tres finalistas conseguiron 120, 78 e 42 puntos. Cantos euros recibirá cada un?

29. Reparte 336 en partes directamente proporcionais a 160, 140, 120.

30. Un traballo págase a 3 120 €. Tres operarios realízano achegando o primeiro 22 xornadas, o segundo 16 xornadas e o terceiro 14 xornadas. Canto recibirá cada un?

31. Reparte 4 350 en partes inversamente proporcionais a 18, 30, 45.

32. Cinco persoas comparten un microbús para realizaren distintos traxectos. O custe total é de 157.5 € máis 20 € de suplemento por servizo nocturno. Os quilómetros percorridos por cada pasaxeiro foron 3, 5, 7, 8 e 12 respectivamente. Canto debe abonar cada un?

33. Decidiuse penalizar ás empresas que máis contaminan. Para iso repártense 2 350 000 € para subvencionar a tres empresas que presentan un 12 %, 9 % e 15 % de grao de contaminación. Canto recibirá cada unha?

34. Mesturamos 3 kg de améndoas a 14 €/kg, 1.5 kg de noces a 6 €/kg, 1.75 kg de anacardios a 18 €/kg. Calcula o prezo final do paquete de 250 g de mestura de froitos secos.

35. Calcula o prezo do litro de zume que se consegue mesturando 8 litros de zume de ananás a 2.5 €/l, 15 litros de zume de laranxa a 1.6 €/l e 5 litros de zume de uva a 1.2 €/l. A canto debe venderse unha botella de litro e medio se se lle aplica un aumento do 40 % sobre o prezo de custe?

36. Para conseguir un tipo de pintura mestúranse tres produtos: 5 kg do produto X a 18 €/kg, 19 kg do produto Y a 4.2 €/kg e 12 kg do produto Z a 8 €/kg. Calcula o prezo do kg de mestura.

37. Un lingote de ouro pesa 340 g e contén 280.5 g de ouro puro. Cal é a súa lei?

38. Cantos gramos de ouro contén unha xoia que se forma cunha aliaxe de 60 g de 0.950 de lei e 20 g de 0.750 de lei?

39. Que capital hai que depositar ao 3.5 % de rédito en 5 anos para obter un interese simple de 810 €?

40. Cal é o capital final que se recibirá por depositar 25 400 € ao 1.4 % en 10 anos?

41. Cantos meses debe depositarse un capital de 74 500 € ao 3 % para obter un interese de 2 980 €?

42. Ao 3 % de interese composto durante 5 anos un capital converteuse en 69 556.44 €. De que capital se trata?

AUTOAVALIACIÓN

1. Os valores que completan a táboa de proporcionalidade directa son:

A	8	0.75		4.5	100
B		15	6		

a) 160; 0.3; 90; 2000 b) 16, 3, 90, 200 c) 160, 3, 9, 20

2. Con 450 € pagamos os gastos de gas durante 8 meses. En 30 meses pagaremos:

a) 1 850€ b) 1 875 € c) 1 687.5 €

3. Un artigo que custaba 1 600 € rebaixouse a 1 400 €. A porcentaxe de rebaixa aplicada é:

a) 12.5 % b) 14 % c) 15.625 % d) 16.25 %

4. Para envasar 360 litros de auga, cantas botellas necesitaremos se queremos utilizar envases de tres cuartos de litro?

a) 440 botellas b) 280 botellas c) 480 botellas d) 360 botellas

5. Tres agricultores repártense os quilogramos da colleita de forma proporcional ao tamaño das súas parcelas. A maior, que mide 15 ha recibe 24 toneladas; a segunda que é de 10 ha e a terceira, de 8 ha, recibirán:

a) 16 t e 5 t b) 12.8 t e 16 t c) 16 t e 12.8 t d) 16 t e 11 t

6. A escala á que se debuxou un mapa no que 3.4 cm equivalen a 1.02 km é:

a) 1:34000 b) 1:3000 c) 1:30000 d) 1:300

7. Con 4 rolos de papel de 5 m de longo, podo forrar 32 libros. Cantos rolos necesitaremos para forrar 16 libros se agora os rolos de papel son de 2 m de longo?

a) 3 rolos b) 5 rolos c) 4 rolos d) 2 rolos

8. O prezo final do kg de mestura de 5 kg de fariña clase A, a 1.2 €/kg; 2.8 kg clase B a 0.85 €/kg e 4 kg clase C a 1 €/kg é:

a) 1.12 € b) 0.98 € c) 1.03 € d) 1.05 €

9. A lei dunha aliaxe é 0.855. Se o peso da xoia é 304 g, a cantidade de metal precioso é:

a) 259.92 g b) 255.4 g c) 248.9 g d) 306 g

10. A 2 % de interese composto, durante 6 anos, 14 500 € teranse convertido en:

a) 16 225.35 € b) 16 329.35 € c) 15 632.35 € d) 14 550 €

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Matemáticas orientadas ás ensinanzas académicas

3º B da ESO

Capítulo 7: Xeometría no plano

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Pedro Luis Suberviola

Revisor: Alberto da Torre

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF; Pedro Luis Suberviola e Milagros Latasa

Índice

1. LUGARES XEOMÉTRICOS

1.1. A CIRCUNFERENCIA
1.2. MEDIATRIZ DUN SEGMENTO
1.3. BISECTRIZ DUN ÁNGULO
1.4. RECTAS E PUNTOS NOTABLES DUN TRIÁNGULO
1.5. USO DE XEOXEBRA PARA O ESTUDO DOS PUNTOS E RECTAS NOTABLES DUN TRIÁNGULO

2. SEMELLANZA

2.1. FIGURAS SEMELLANTES
2.2. TRIÁNGULOS SEMELLANTES. CRITERIOS DE SEMELLANZA
2.3.TRIÁNGULOS EN POSICIÓN DE TALES
2.4. TEOREMA DE TALES

3. ÁNGULOS, LONXITUDES E ÁREAS

3.1. TEOREMA DE PITÁGORAS
3.2. ÁNGULOS DUN POLÍGONO
3.3. LONXITUDES E ÁREAS DE FIGURAS POLIGONAIS
3.4. ÁNGULOS DA CIRCUNFERENCIA
3.5. LONXITUDES E ÁREAS DE FIGURAS CIRCULARES

Resumo

Tales, Pitágoras e moi posteriormente *Euclides* son matemáticos gregos aos que debemos o estudo da Xeometría dedutiva. Anteriormente exipcios e babilonios utilizaron a Xeometría para resolver problemas concretos, como volver poñer lindes ás terras despois das inundacións do Nilo. Pero en Grecia utilizouse o razoamento lóxico para deducir as propiedades. *Euclides* intentou recoller o coñecemento que existía e escribiu os *Elementos* que consta de 13 libros ou capítulos, dos que os seis primeiros tratan de Xeometría Plana e o último de Xeometría no espazo. Neste libro define conceptos, tan difíciles de definir como punto ou recta, e enuncia os cinco axiomas (de *Euclides*) dos que parte como verdades non demostrables, e a partir deles demostra o resto das propiedades ou teoremas. Estes axiomas son:

Euclides

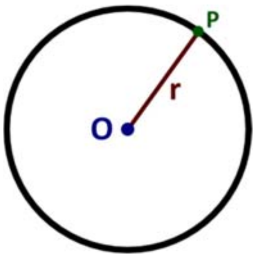
1. Dados dous puntos pódese trazar unha recta que os une.
2. Calquera segmento pode ser prolongado de forma continua nunha recta ilimitada.
3. Pódese trazar unha circunferencia de centro en calquera punto e radio calquera.
4. Todos os ángulos rectos son iguais.
5. Dada unha recta e un punto, pódese trazar unha única recta paralela á recta por este punto.

Neste capítulo imos recordar cuestións que xa coñeces de Xeometría no plano, afondando nalgunhas delas, como nos criterios de semellanza dos triángulos. Deste modo vas ser capaz de resolver un bo número de problemas.

Autor: Pedro Luis Suberviola
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF e Pedro Luis Suberviola

1. LUGARES XEOMÉTRICOS

Moitas veces definimos unha figura xeométrica como os puntos do plano que cumpren unha determinada condición. Dicimos entón que é un *lugar xeométrico do plano*.



1.1. A circunferencia

A **circunferencia** é o lugar xeométrico dos puntos do plano cuxa distancia a un punto do mesmo (o centro) é un valor determinado (o radio).

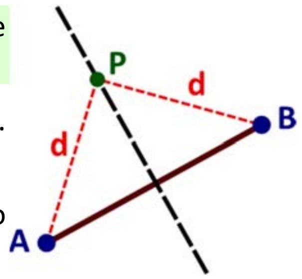
Todos os puntos da circunferencia teñen unha distancia igual ao radio (*r*) do centro (*O*).

1.2. Mediatriz dun segmento

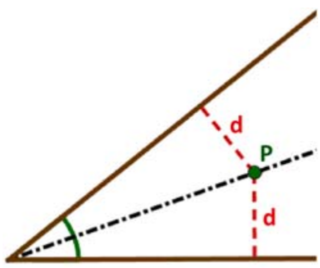
A **mediatriz** dun segmento é o lugar xeométrico dos puntos do plano que equidistan dos extremos do mesmo.

Un punto *P* da mediatriz verifica que está á mesma distancia de A que de *B*. Calquera outro punto que o cumpra pertence á mediatriz.

A mediatriz é unha recta perpendicular ao segmento e pasa polo punto medio do mesmo.



1.3. Bisectriz dun ángulo



Dado un ángulo delimitado por dúas rectas, a **bisectriz** do ángulo é o lugar xeométrico dos puntos do plano que equidistan das mesmas.

Un punto *P* da bisectriz verifica que está á mesma distancia das dúas rectas que forman o ángulo. Calquera outro punto que o cumpra pertence á bisectriz.

A bisectriz pasa polo vértice do ángulo e divídeo en dous ángulos iguais.

Actividades propostas

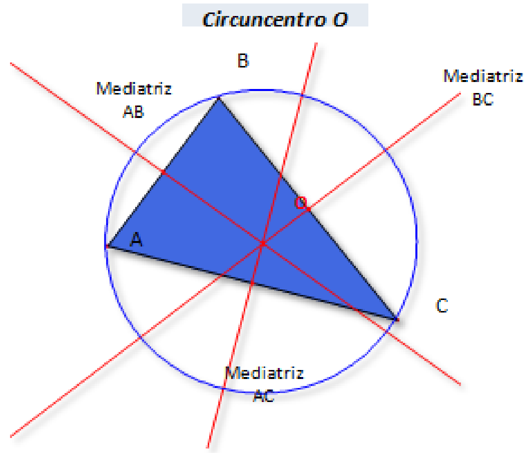
1. Un agricultor encontra no seu campo unha bomba da Guerra Civil. As autoridades establecen unha distancia de seguridade de 50 metros. Como se debe acordoar a zona?
2. Un xogo de dous participantes consiste en que se sitúan a unha distancia de dous metros entre si e póñense varias bandeiras á mesma distancia de ambos os dous. A primeira a 5 metros, a segunda a 10 metros, a terceira a 15 e así sucesivamente. Sobre que liña imaxinaria estarían situadas as bandeiras?
3. Cando nunha acampada sentan arredor do lume, fano formando un círculo. Porque?
4. Utiliza regra e compás para debuxar a bisectriz dun ángulo e a mediatriz dun segmento.

1.4. Rectas e puntos notables dun triángulo

Recorda que:

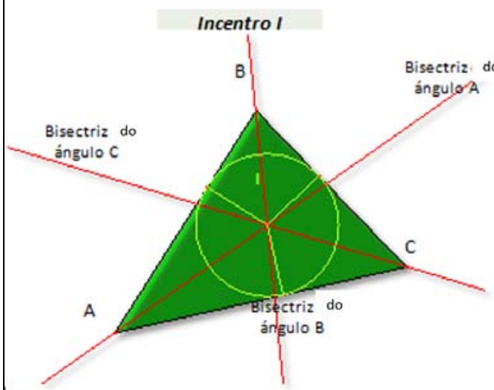
En calquera triángulo podemos atopar as súas mediatrices, bisectrices, alturas e medianas.

Mediatrices. Circuncentro.



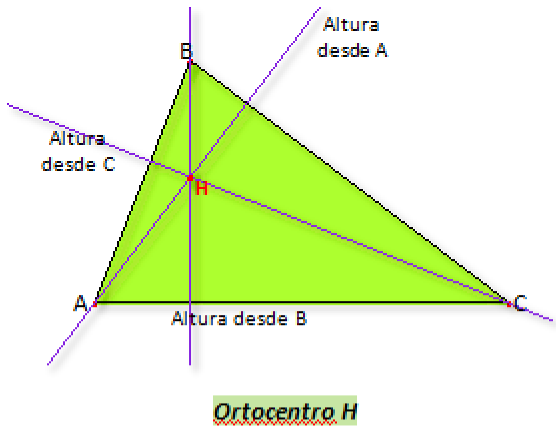
As mediatrices córtanse no circuncentro.
O circuncentro está á mesma distancia dos tres vértices. É o centro da circunferencia circunscrita.

Bisectrices. Incentro.



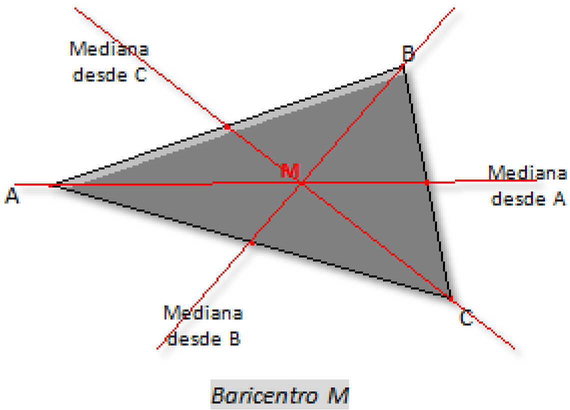
As bisectrices córtanse no incentro.
O incentro está á mesma distancia dos tres lados. É o centro da circunferencia inscrita.

Alturas. Ortocentro.



As alturas son as perpendiculares a un lado trazadas desde o vértice oposto. Córtanse no ortocentro.

Medianas. Baricentro.



As medianas son as rectas que pasan por un vértice e polo punto medio do lado oposto. Dividen o triángulo en dous triángulos de igual área.
Córtanse no baricentro. A distancia do mesmo a cada vértice é o dobre da súa distancia ao punto medio do lado oposto correspondente.

Se a **mediatriz** dun segmento é o lugar xeométrico dos puntos que equidistan dos extremos do segmento, cada mediatriz dun triángulo equidistará de dous dos vértices do triángulo e é a mediatriz dun dos seus lados. As tres mediatrices córtanse nun punto, o **circuncentro**, que, polo tanto, distará o mesmo de cada un dos tres vértices do triángulo, e é o centro dunha circunferencia circunscrita ao triángulo, que pasa polos seus tres vértices.

Se a bisectriz dun ángulo equidista dos lados do ángulo, agora cada unha das tres bisectrices dun triángulo equidistará de dous dos lados do triángulo. As tres bisectrices córtanse nun punto, o **incentro**, que, polo tanto, equidista dos tres lados do triángulo e é o centro da circunferencia inscrita ao triángulo.

En calquera triángulo circuncentro, ortocentro e baricentro están sobre unha mesma liña recta, á que se lle chama *Recta de Euler*. Esta recta contén outros puntos notables. O incentro está nesta recta só se o triángulo é isósceles.

Actividades propostas

5. Debuxa no teu caderno un triángulo de lados 7, 6 e 4 cm. Traza nel as circunferencias inscritas e circunscritas.

6. Debuxa no teu caderno un triángulo de lado 8 cm e ángulos adxacentes ao mesmo de 40° e 30°. Encontra o seu ortocentro e o seu baricentro.

7. Debuxa no teu caderno un triángulo cun ángulo de 40° comprendido entre dous lados de 6 e 4 cm. Obtén o seu circuncentro e o seu incentro.

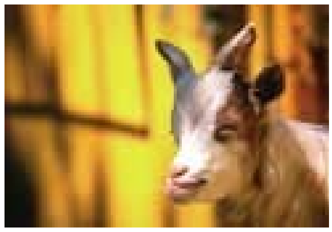
8. Que pasa coas rectas e cos puntos notables nun triángulo equilátero?

9. Debuxa un triángulo isósceles co ángulo desigual de 40°. Traza as rectas notables para o lado desigual e para un dos lados iguais. Que pasa?

10. Unha formiga anda por unha mediana dun triángulo partindo do vértice. Cando chega ao baricentro percorreu 8 centímetros. Que distancia lle falta para chegar ao punto medio do lado oposto ao vértice de onde partiu?

11. Queremos situar un farol nunha praza triangular. Onde o poñeriamos?

12. Temos un campo triangular sen cercar e queremos atar unha cabra de forma que non saia do campo pero que acceda ao máximo de pasto posible. Onde poñeriamos o poste?



13. A Alba e ao seu irmán Aitor encántalles a torta. A súa nai fíxolles unha triangular. Alba ten que cortala pero Aitor elixirá primeiro o seu anaco. Como debería cortar Alba a torta?

14. O ortocentro dun triángulo rectángulo, onde está?

15. Comproba que o circuncentro dun triángulo rectángulo está sempre no punto medio da hipotenusa.

16. O baricentro é o centro de gravidade. Constrúe un triángulo de cartolina e debuxa o seu baricentro. Se pos o triángulo horizontalmente no aire só suxeito pola punta dun lapis no baricentro comprobarás que se suxeita.

17. Calcula o lado dun triángulo equilátero inscrito nunha circunferencia de 10 cm de radio. [*Axuda*: Aplica que neste caso o circuncentro coincide co baricentro e que este último está ao dobre de distancia do vértice que do lado oposto.]

1.5. Uso de Xeoxebra para o estudo dos puntos e rectas notables dun triángulo

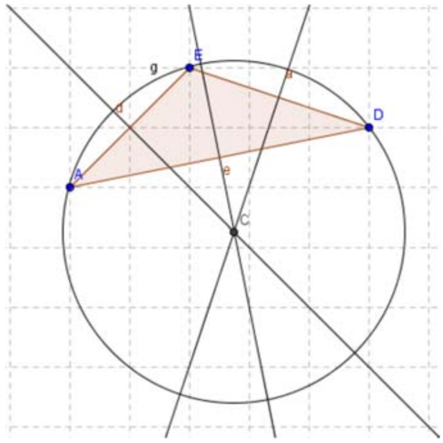
Utilízase o programa **Xeoxebra** para determinar o *circuncentro*, o *incentro* e o *baricentro* dun triángulo, estudar as súas propiedades e debuxar a *recta de Euler*.

Actividades resoltas

Unha vez aberto o programa na opción do menú **Visualiza**, oculta **Eixes** e activa **Cuadrícula.**

Circuncentro:

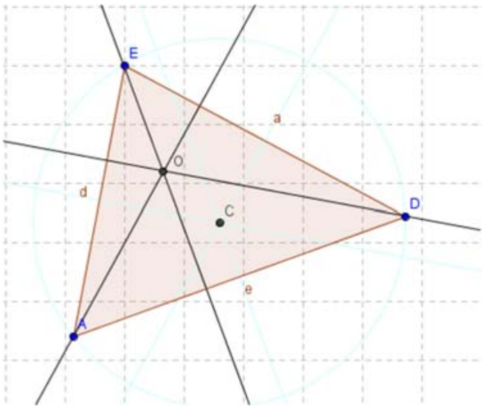
Debuxa as tres mediatrices dun triángulo e determina o seu circuncentro.



- Define tres puntos *A*, *D* e *E*, observa que o programa os define como *A, B* e *C*, utiliza o botón dereito do rato e a opción **Renomea** para cambiar o nome.
- Coa ferramenta **Polígono** activada debuxa o triángulo que ten por vértices estes puntos. Observa que cada lado ten a mesma letra que o ángulo oposto con minúscula.
- Coa ferramenta **Mediatriz** debuxa as mediatrices de dous lados, os segmentos *a* e *d*.
- Determina con **Intersección de dous obxectos** o punto común destas rectas e con **Renomea** chámao *C*. Este punto é o *circuncentro* do triángulo.
- Debuxa a **Mediatriz** do segmento *e* e observa que pasa polo punto *C*.
- Activa **circunferencia por centro e punto que cruza** para debuxar a circunferencia circunscrita ao triángulo.
- Utiliza o **Punteiro** para desprazar os vértices *A*, *D* o *E* e comprobar que a circunferencia permanece circunscrita ao triángulo.

Ortocentro:

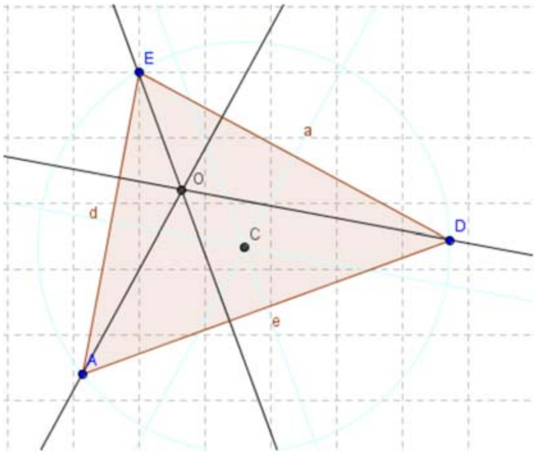
Debuxa as tres alturas dun triángulo e determina o seu ortocentro.



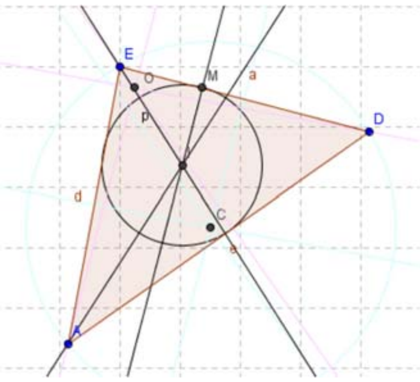
- No mesmo triángulo cambia a cor das mediatrices e a circunferencia situándote co rato sobre o trazo ou sobre a súa ecuación e co botón dereito elixe en **Propiedades, Cor** un azul moi próximo ao branco.
- Debuxa dúas alturas coa ferramenta **Recta Perpendicular**. Observa que o programa che pide que o punto polo que vas trazala e a recta ou o segmento respecto ao que é perpendicular.
- Determina con **Intersección de dous obxectos o** *ortocentro* como o punto de corte das dúas alturas e con **Renomea** denomínao *O*.
- Debuxa a terceira altura e comproba que pasa polo *ortocentro*, desprazando co **Punteiro** os vértices do triángulo.

Incentro:

- *Debuxa as tres bisectrices dun triángulo e determina o seu incentro.*



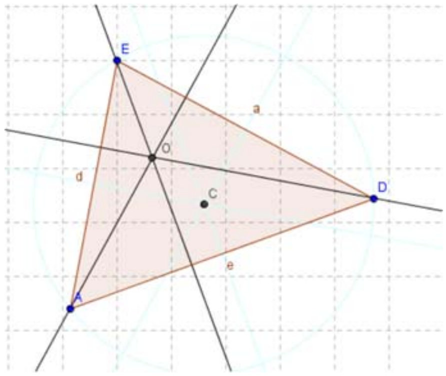
- Cambia a cor das alturas como na construción anterior, agora con cor rosa pálido.
- Coa ferramenta **Bisectriz** debuxa dúas bisectrices. Observa que para determinar a bisectriz dun ángulo é suficiente sinalar tres puntos que poden ser os vértices do triángulo na orde adecuada.
- Determina o *incentro* con **Intersección de dous obxectos** como o punto de corte das dúas bisectrices e con **Renomea** denomínao *I*.
- Debuxa a terceira bisectriz e comproba que sempre pasa polo *incentro*, desprazando co **Punteiro** os vértices do triángulo.



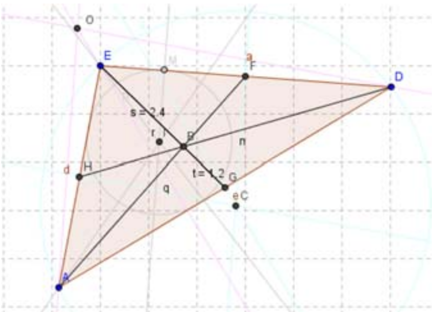
- Traza desde o punto *I unha* **Recta perpendicular** a un dos lados e con **Intersección de dous obxectos** calcula o punto de corte entre esta recta e o lado do triángulo e con **Renomea** chámao *M*.
- Activa **Circunferencia por centro e punto que cruza** para debuxar con centro en *I* e radio o segmento *IM* a circunferencia inscrita ao triángulo.
- Despraza co **punteiro** os vértices do triángulo para comprobar que a circunferencia permanece inscrita ao triángulo.

Baricentro:

- *Debuxa as tres medianas dun triángulo e determina o seu baricentro.*



- Cambia a cor das bisectrices, do punto *M* e da circunferencia inscrita, con gris moi pálido, como nas construcións anteriores.
- Coa ferramenta **Punto medio ou centro** calcula os puntos medios de dous lados. Se o programa nomea algún coa letra *B*, utiliza **Renomea** para chamalo *H*.
- Coa ferramenta **Segmento entre dous puntos** debuxa dúas medianas e con **Intersección de dous obxectos**, o seu punto de corte, o **baricentro**, que chamarás *B*.



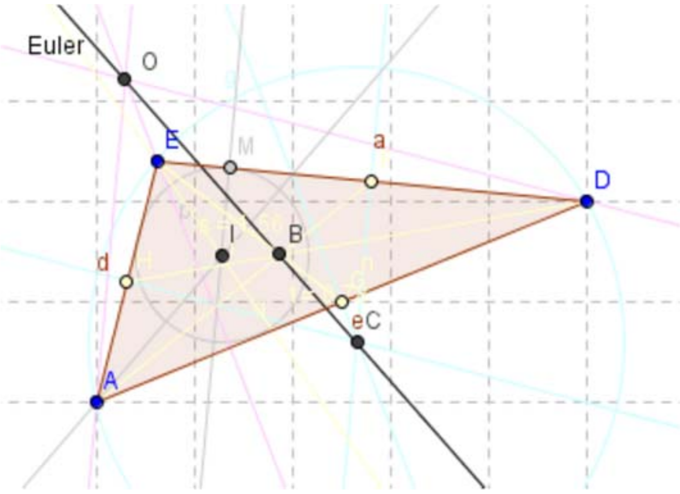
- Traza a terceira mediana e verifica que o baricentro pertence a este segmento desprazando co **Punteiro** os vértices do triángulo.
- Activa **Segmento entre dous puntos** e determina os dous segmentos determinados polo baricentro nunha das medianas.
- Activa **Distancia** para medir estes segmentos.
- Despraza os vértices do triángulo co **Punteiro** e observa a relación que existe entre as medidas realizadas.

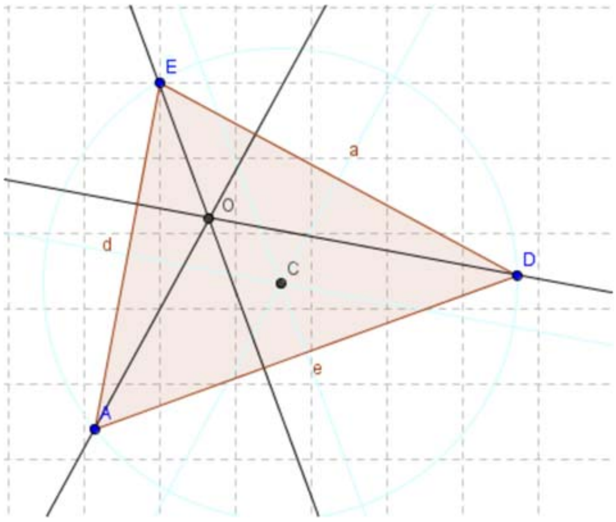
Autor: Pedro Luis Suberviola
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF e Pedro Luis Suberviola

Recta de Euler

Debuxa a recta que pasa polo circuncentro e o ortocentro.

- Cambia a cor das medianas, dos puntos medios dos lados e dos dous segmentos da mediana, con amarelo moi pálido.
- Coa ferramenta **Recta que pasa por dous puntos** debuxa a recta de Euler que pasa polo *circuncentro* e o *ortocentro* e utiliza **Renomea** para chamala *Euler*. Comproba que o baricentro pertence á recta de Euler e que o incentro non sempre pertence.





Actividades propostas

18. Repite as actividades resoltas con *Xeoxebra*. Modifica ao teu gusto cores e liñas.

19. Move un dos vértices orixinais do triángulo e indica que cousas permanecen invariantes.

20. Comproba que se verifican as propiedades de *circuncentro*, como centro da circunferencia circunscrita, e do *incentro*, como centro da circunferencia inscrita.

21. En *baricentro* divide a mediana en dúas partes, sendo unha dous terzos da outra. Compróbao.

22. A recta de *Euler* pasa polo *circuncentro*, o *baricentro* e o *ortocentro*, e o *incentro* non sempre pertence á recta de *Euler*. Como debe ser o triángulo para que pertenza?

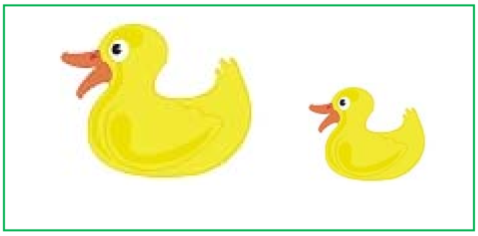
23. Move os vértices do triángulo para determinar se é posible que os seus catro puntos notables coincidan.

Autor: Pedro Luis Suberviola
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF e Pedro Luis Suberviola

2. SEMELLANZA

2.1. Figuras semellantes

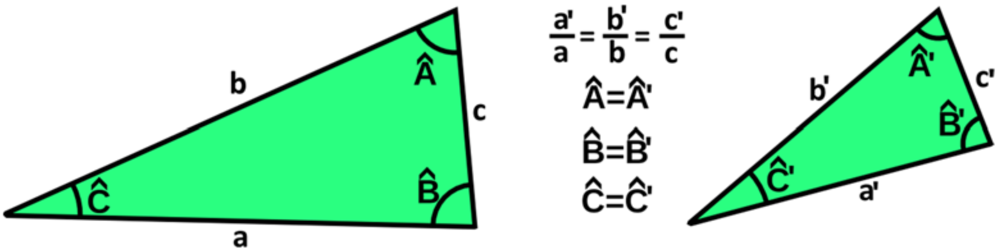
Dúas figuras semellantes teñen a *mesma forma*. É moi útil saber recoñecer a semellanza para poder estudar unha figura e inferir así propiedades dunha figura semellante a ela que é máis grande ou inaccesible. A semellanza conserva os ángulos e mantén a proporción entre as distancias.



Dous polígonos son semellantes se os seus lados son proporcionais e os seus ángulos son iguais.

2.2. Triángulos semellantes. Criterios de semellanza.

Dous triángulos son **semellantes** se teñen todos os ángulos iguais e os lados proporcionais.



Para recoñecer dous triángulos semellantes non é necesario coñecer todos os lados e ángulos, é suficiente con que se cumpra algún dos seguintes **criterios de semellanza.**

Dous triángulos son semellantes se:

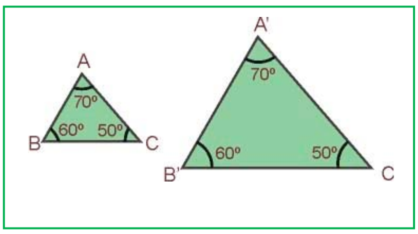
Primeiro: Teñen dous ángulos iguais.

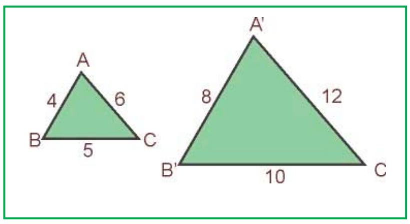
Segundo: Teñen os tres lados proporcionais.

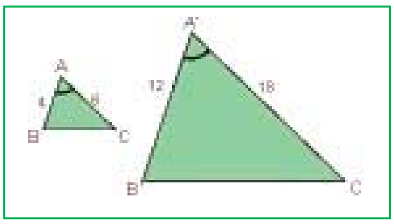
Terceiro: Teñen dous lados proporcionais e o ángulo que forman é igual.

A demostración baséase nos criterios de igualdade de triángulos. Xa sabes que dous triángulos son iguais se teñen os seus tres lados iguais e os seus tres ángulos iguais, pero non é necesario que se verifiquen esas seis igualdades para que o sexan. Basta por exemplo que teñan un lado e dous ángulos iguais. Así, pódese construír un triángulo igual a un dos dados en posición *Tales* co segundo e deducir a semellanza.

Exemplo







Autor: Pedro Luis Suberviola
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF e Pedro Luis Suberviola

Actividades propostas

24. Indica se son semellantes os seguintes pares de triángulos:

a) Un ángulo de 80° e outro de 40°. Un ángulo de 80° e outro de 60°.
b) Triángulo isósceles con ángulo desigual de 70°. Triángulo isósceles con ángulo igual de 50°.
c) A = 30°, b = 7 cm, c = 9 cm. A'= 30°, b' = 3.5 cm, c' = 4.5 cm
d) a = 4 cm, b = 5 cm, c = 7 cm. a' = 10 cm, b' = 12.5 cm, c' = 24.5 cm

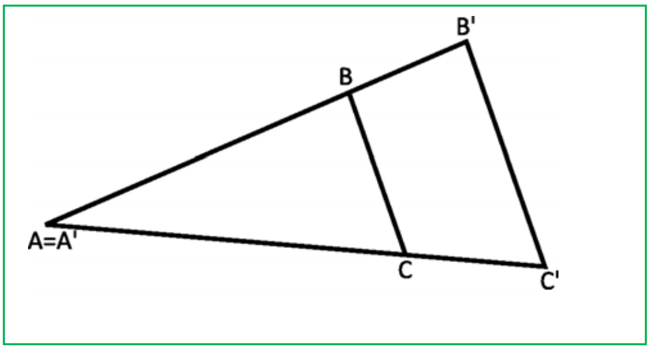
25. Calcula o valor descoñecido para que os triángulos sexan semellantes:

a) a = 9 cm, b = 6 cm, c =12 cm. a' = 6 cm, b' = 4 cm, c'?

b) A = 45°, b = 8 cm, c = 4 cm. A' = 45°, b' = 8 cm, a'?

26. Un triángulo ten lados de 6 cm, 7 cm e 7 cm. Un triángulo semellante a el ten un perímetro de 60 cm. Canto miden os seus lados?

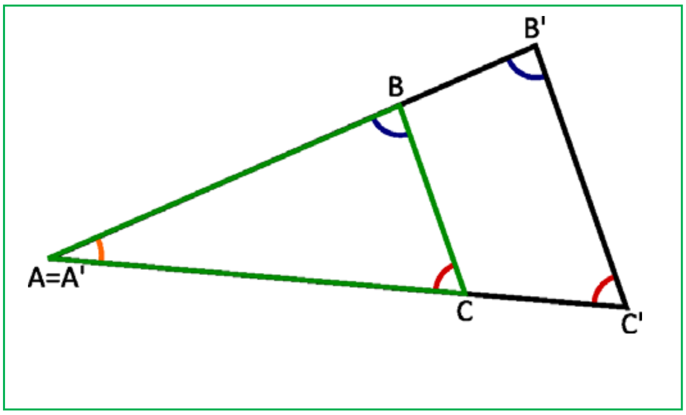
2.3. Triángulos en posición de Tales



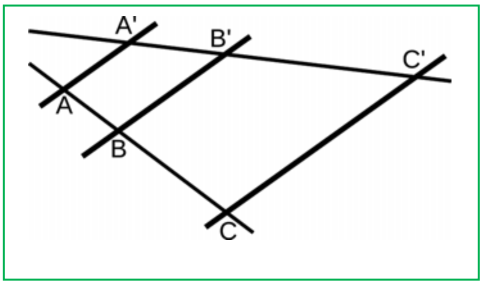
Dicimos que dous triángulos están en posición de Tales cando dous dos lados de cada un están sobre as mesmas rectas e os outros lados son paralelos.

Os ángulos son iguais. Un porque é o mesmo. Os outros por estaren formados por rectas paralelas. Polo tanto, polo primeiro criterio de semellanza de triángulos, os triángulos son proporcionais e cúmprese:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}$$

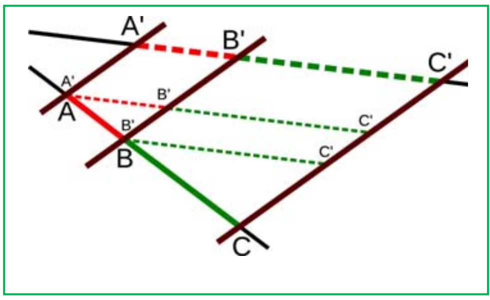


2.4. Teorema de Tales



O teorema de *Tales* establece unha relación entre os segmentos formados cando dúas rectas calquera son cortadas por varias rectas paralelas.

Na segunda figura pódese apreciar como se forman neste caso tres triángulos semellantes e que polo tanto se establece que:

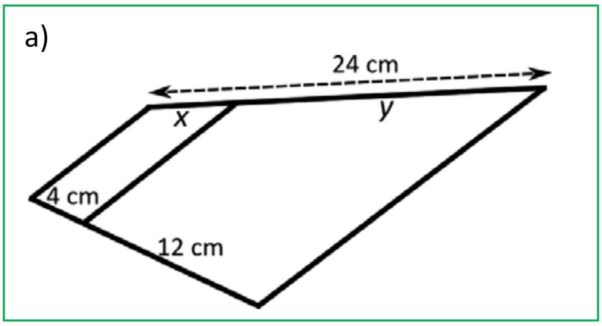


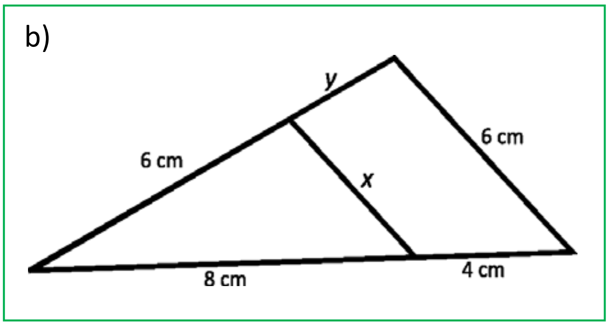
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$

Observación: Neste caso non relacionamos os segmentos *AA'*, *BB'* e *CC'* que se forman sobre os lados paralelos.

Actividades propostas

27. Calcula os valores de *x* e y nas seguintes figuras.

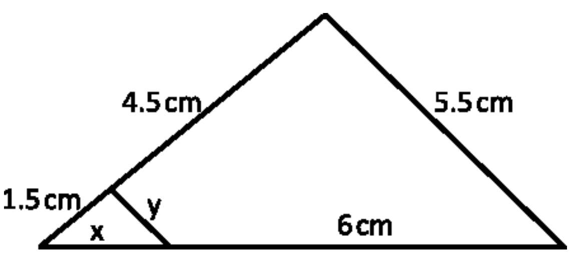


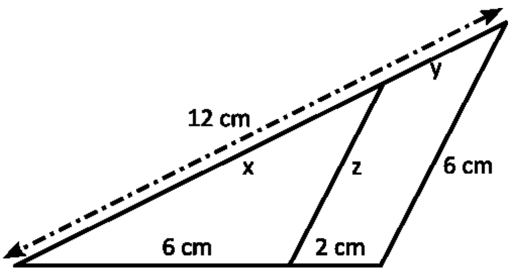


28. Un poste moi alto suxéitase con cables de aceiro que van do seu extremo superior ao chan. A distancia da ancoraxe dun dos cables á base do poste é de 6 metros. Poñemos unha barra de 120 centímetros de forma que estea perpendicular ao chan e xusto toca o chan e o cable. A súa distancia á ancoraxe do cable é 90 centímetros. Calcula a lonxitude do poste e a lonxitude do cable de aceiro.

29. María mide 160 cm. A súa sombra mide 90 cm. Nese mesmo instante mídese a sombra dun edificio e mide 7.2 m. Canto mide o edificio?

30. Calcula as lonxitudes que se indican:

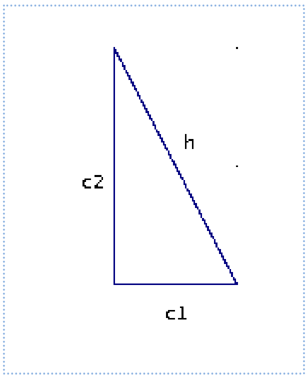




3. ÁNGULOS, LONXITUDES E ÁREAS

3.1. Teorema de *Pitágoras*

Teorema de *Pitágoras*



Nun triángulo rectángulo, a hipotenusa ao cadrado é igual á suma dos cadrados dos catetos.

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2$$

Utilizando o teorema de *Pitágoras* podemos obter o valor da hipotenusa dun triángulo rectángulo se coñecemos o que miden os catetos: $h = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, ou tamén podemos obter o valor dun cateto a partir dos valores da hipotenusa e do outro cateto: $c_2 = \sqrt{h^2 - c_1^2}$

Exemplo:

- Se os catetos dun triángulo rectángulo miden 10 *cm* e 24 *cm*, a súa hipotenusa vale 26 *cm* xa que:

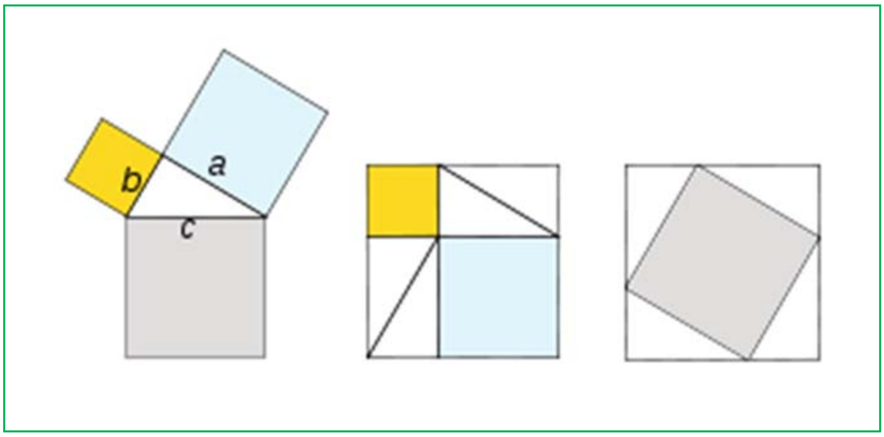
$$h = \sqrt{10^2 + 24^2} = \sqrt{100 + 576} = \sqrt{676} = 26cm.$$

Interpretación do teorema de *Pitágoras*

Se debuxamos un cadrado de lado a hipotenusa *h* dun triángulo rectángulo, a súa área é h^2 (ver o primeiro exemplo de 1.1). Se debuxamos dous cadrados de lados os catetos c_1 e c_2 dese triángulo rectángulo, as súa áreas son c_1^2, c_2^2. Entón o teorema de *Pitágoras* di que a área do primeiro cadrado (cadrado gris da figura da esquerda) é igual á suma das áreas dos outros dous (cadrados azul claro e amarelo da figura da esquerda).

Existen máis de 367 demostracións diferentes do Teorema de *Pitágoras*.

Unha comprobación gráfica consiste en debuxar dous cadrados iguais de lado a suma dos catetos *a* e *b* (figuras do centro e da dereita). Nun debúxanse os cadrados de lado *a* e *b*, en amarelo e azul no debuxo. Noutro o cadrado de lado a hipotenusa (en gris no debuxo). Observa que quitando 4 triángulos iguais ao de partida queda que o cadrado gris é igual á suma dos cadrados amarelo e azul.



Polo tanto:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Actividades propostas

31. É posible encontrar un triángulo rectángulo cuxos catetos midan 5 e 12 *cm* e a súa hipotenusa 24 *cm*? Se a túa resposta é negativa, calcula a medida da hipotenusa dun triángulo rectángulo cuxos catetos miden 5 e 12 *cm*. Utiliza calculadora para resolver esta actividade se che resulta necesaria.

32. Calcula a lonxitude da hipotenusa dos seguintes triángulos rectángulos de catetos:

a) 6 *cm* e 8 *cm*

b) 4 *m* e 3 *m*

c) 8 *dm* e 15 dm

d) 13.6 *km* e 21.4 *km*.

33. Calcula a lonxitude do cateto que falta nos seguintes triángulos rectángulos de hipotenusa e cateto:

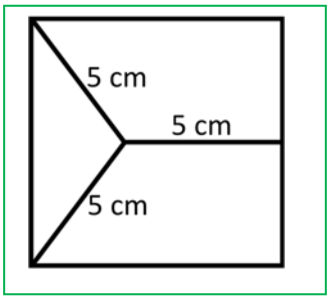
a) 26 *cm* e 10 *cm*

b) 17 *m* e 8 *m*

c) 37 *dm* e 35 *dm*

d) 14.7 *km* e 5.9 *km*

34. Calcula o lado do cadrado da figura da marxe:



35. Calcula a área dun triángulo equilátero de lado 9 *m*.

36. Calcula a área dun hexágono regular de lado 2 *cm*.

37. Calcula o volume dun tetraedro regular de lado 7 *dm*.

38. Calcula a lonxitude da diagonal dun cadrado de lado 3 *m*.

39. Calcula a lonxitude da diagonal dun rectángulo de base 15 *cm* e altura 8 *cm*.

40. Unha portería de fútbol mide 7.32 m de ancho por 2.44 m de alto. O punto de penalti está a 10 metros. Calcula a distancia que percorre o balón en:

a) Un tiro directo á base do poste.

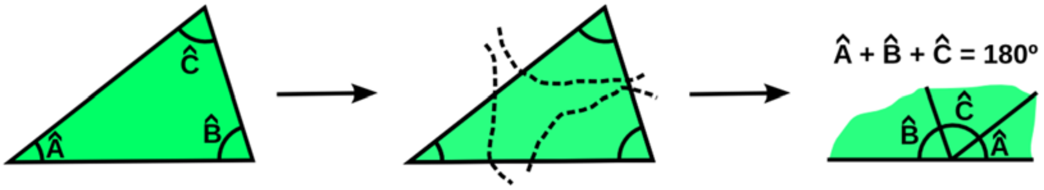
b) Un tiro directo á escuadra.

41. Demostra que o diámetro dun cadrado de lado x é $d = \sqrt{2}x$.

42. Demostra que a altura dun triángulo equilátero de lado x é $d = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

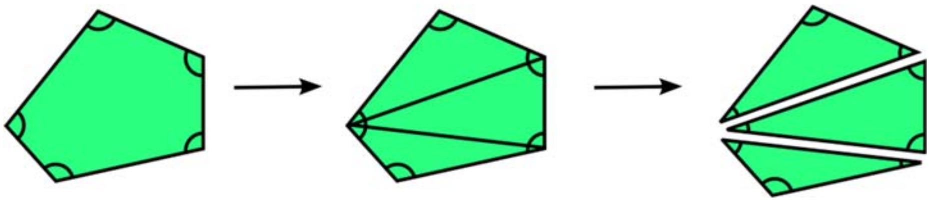
3.2. Suma de ángulos dun polígono

A suma dos ángulos interiores dun triángulo é 180° · *n*.



A suma dos ángulos interiores dun polígono de *n* lados é (n – 2) · 180°.

Para comprobalo basta con trazar as diagonais dun polígono desde un vértice e xa o teremos dividido en triángulos.

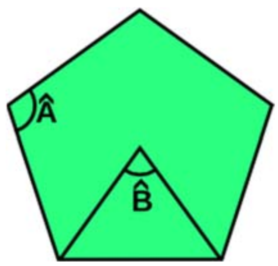


Polo tanto:

Polígono	Suma de ángulos	Polígono	Suma de ángulos
Triángulo	180°	Cuadrilátero	180° · 2 = 360°
Pentágono	180° · 3 = 540°	Hexágono	180° · 4 = 720°

Se o polígono de *n* lados é regular, todos os ángulos interiores son iguais e para calcular o valor do seu ángulo interior divídese entre *n* a suma dos ángulos interiores.

Exemplo:



- *Nun pentágono a suma dos ángulos interiores é* 180 · 3 = 540°.

Polo tanto, o **ángulo interior:** $\widehat{A} = \frac{540^o}{5} = 108^o$

Tamén é moi común calcular o **ángulo central**: $\hat{B} = \frac{360^o}{5} = 72^o$

Actividades propostas

43. Calcula os ángulos central e interior do triángulo equilátero, cadrado, pentágono regular, hexágono regular e enneágono regular.

44. Xustifica que un hexágono regular se pode descompoñer en 6 triángulos equiláteros.

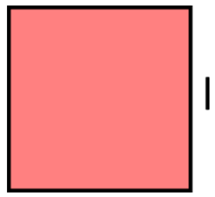
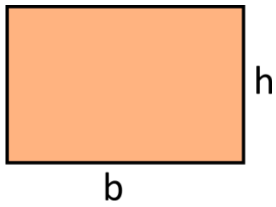
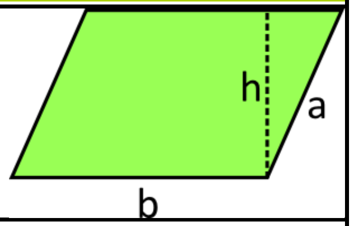
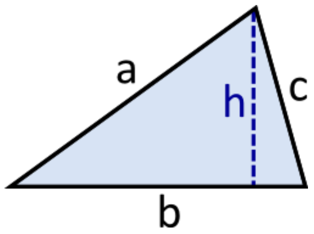
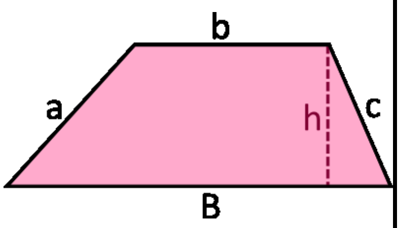
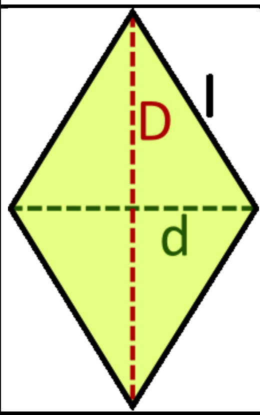
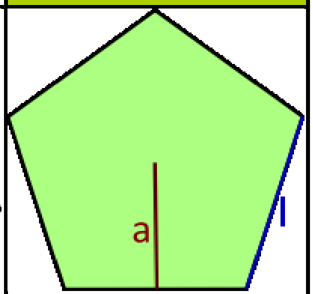
45. Dous ángulos dun triángulo isósceles miden 36° e 72°, canto pode medir o ángulo que falta?

46. Dous ángulos dun trapecio isósceles miden 108° e 72°, canto miden os ángulos que faltan?

47. Canto mide a suma dos ángulos interiores dun decágono irregular?

3.3. Lonxitudes e áreas de figuras poligonais

Recorda que:

Cadrado	**Rectángulo**	**Romboide**	
			
Perímetro: P = 4*l*; **Área: A** = l^2	**P** = 2*b* + 2*h*; **A** = *b* · *h*	**P** = 2*b* + 2*a*;	**A** = *b* · *h*
Triángulo	**Trapecio**	**Rombo**	**Polígono regular de *n* lados**
			
P = *a* + *b* + *c*; $A = \frac{b \cdot h}{2}$	**P** = *a* + *B* + *b* + *c*; $A = \frac{B+b}{2} \cdot h$	$A = \frac{d \cdot D}{2}$	**P** = *n* · *l*; $A = \frac{P \cdot a}{2}$

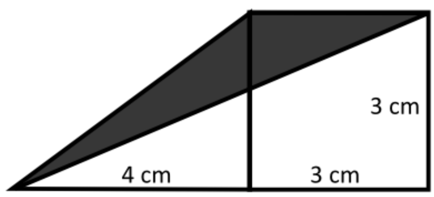
Actividades propostas

48. Calcula a área e o perímetro dun trapecio isósceles de bases 50 cm e 26 cm e altura 5 cm.

49. Calcula a área e perímetro dun trapecio rectángulo de bases 100 cm e 64 cm e de altura 77 cm.

50. Calcula a área e o perímetro dun trapecio isósceles de bases 100 cm e 60 cm e lados laterais 29 cm.

51. Utiliza o teorema de Tales para determinar a área e o perímetro da zona sombreada da figura.



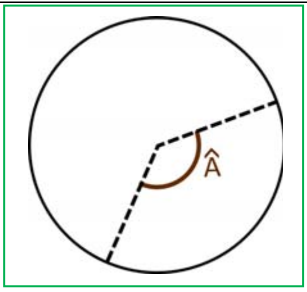
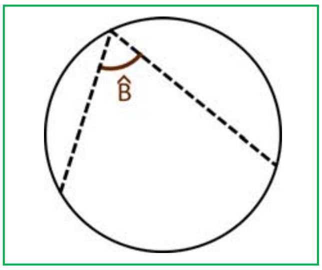
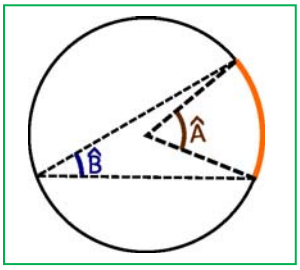
52. Tendo en conta que un hexágono regular se pode dividir en seis triángulos equiláteros (cuxa altura é a apotema do hexágono regular), calcula a área dun hexágono regular de 5 cm de lado.

53. Queremos cubrir o plano con polígonos regulares de 100 cm^2. As únicas opcións posibles son o triángulo equilátero, o cadrado e o hexágono. Calcula cal destas tres figuras ten menor perímetro. Que polígono aplica este resultado? [Utiliza a relación entre lado e altura dun triángulo equilátero obtida anteriormente]

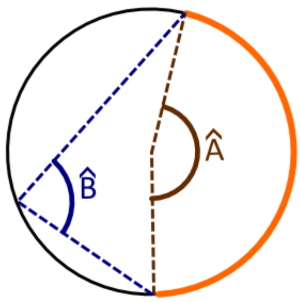
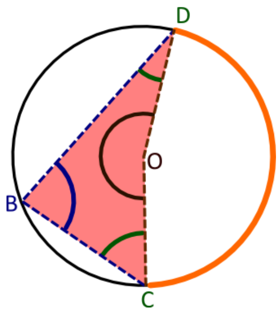
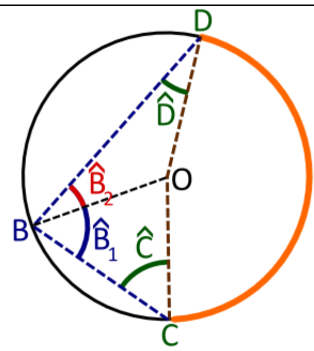
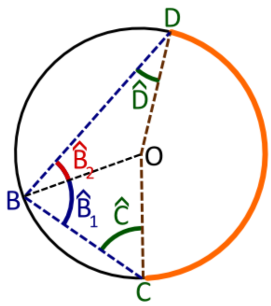
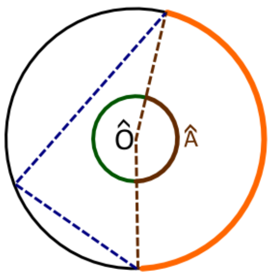
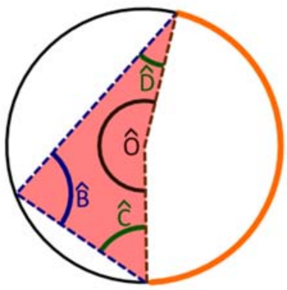
Autor: Pedro Luis Suberviola
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF e Pedro Luis Suberviola

3.4. Ángulos da circunferencia

Nunha circunferencia teñen especial importancia os **ángulos centrais** (teñen o seu vértice no centro da circunferencia) e os **ángulos inscritos** (teñen o seu vértice nun punto da circunferencia).

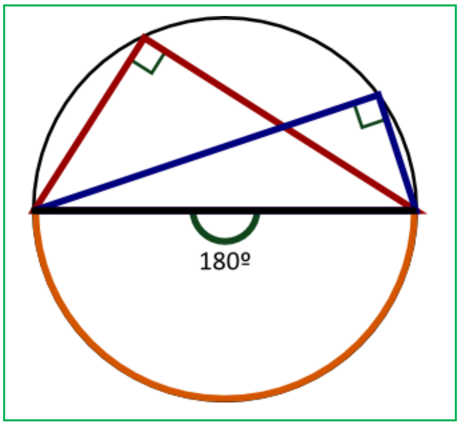
		
Ángulo central	**Ángulo inscrito**	$\hat{B} = \frac{\hat{A}}{2}$

Verifícase ademais que un ángulo inscrito mide a metade que un ángulo central que abrangue o mesmo arco de circunferencia.

Demostración da propiedade		
		
Debemos comprobar que o ángulo $\hat{B}$ é a metade de $\hat{A}$. $2\hat{B} = \hat{A}$	Imos estudar o cuadrilátero *BCOD* e aplicar no último paso que os seus ángulos suman 360°.	*BO* e *OD* son radios da circunferencia. Polo tanto *BDO* é isósceles e $\hat{B}_2$ e $\hat{D}$ son iguais.
		
O mesmo para $\hat{B}_1 e\ \hat{C}$ Entón $\hat{C} + \hat{D}$ = $\hat{B}_2 + \hat{B}_2$ = $\hat{B}$	Ademais, o ángulo Ô do cuadrilátero mide $360° – \hat{A}$.	$\hat{B} + (\hat{C} + \hat{D}) + \hat{O} = 360°$. $\hat{B} + (\hat{B}) + 360° – \hat{A} = 360°$. $2\hat{B} = \hat{A}$

Actividades propostas

54. Tales observou que en calquera triángulo rectángulo o circuncentro sempre estaba no punto medio da hipotenusa. Observa a figura e razoa a afirmación.

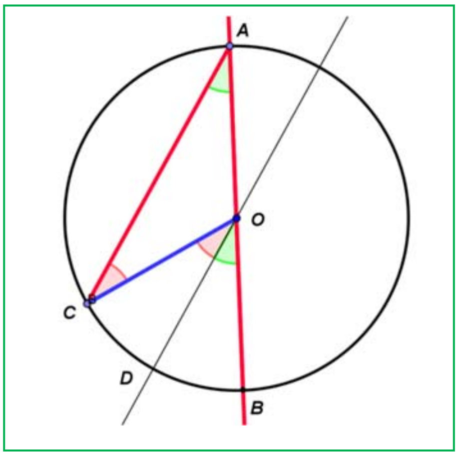


55. Un ángulo inscrito na circunferencia que abrangue un diámetro é un ángulo recto. Por que? Razoa a resposta.

56. En que posicións ten un futbolista o mesmo ángulo de tiro que desde o punto de penalti?

57. Outra demostración. Intenta comprendela.

Trazamos un ángulo inscrito na circunferencia *CAB* que teña un lado que pase polo centro *O* da circunferencia. Trazamos o seu central *COB*. O triángulo *OAC* é isósceles pois dous dos seus lados son radios da circunferencia. Trazamos por O unha recta paralela a *AC*. O ángulo *CAO* é igual ao ángulo *DOB* pois teñen os seus lados paralelos. O ángulo *ACO* é igual ao ángulo *COD* por alternos internos entre paralelas, e é igual ao ángulo *CAO* por ser o triángulo isósceles. Polo tanto o central mide o dobre que o ángulo inscrito.



Autor: Pedro Luis Suberviola
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF e Pedro Luis Suberviola

3.5. Lonxitudes e áreas de figuras circulares

Xa sabes que:

O **número π** defínese como o cociente entre a lonxitude da circunferencia e o seu diámetro.

π = Lonxitude da circunferencia / Diámetro

Xa sabes que é un número irracional, con infinitas cifras decimais non periódicas. Unha aproximación de **π** é 3.14, outra 3.1416 e outra 3.141592. Desde a antigüidade máis afastada ata hoxe en día os matemáticos seguen investigando sobre el.

Se unha circunferencia ten un radio r, entón o seu diámetro mide $2r$, e a súa lonxitude, pola definición de π, mide $2 \cdot \pi \cdot r$.

Lonxitude da circunferencia = $2 \cdot \pi \cdot r$.

Para calcular a lonxitude **dun arco de circunferencia** que abrangue un ángulo de α grados, debemos ter en conta que a circunferencia completa abrangue un ángulo de 360°. Polo tanto:

$$L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \alpha/360.$$

A **área do círculo é** igual ao produto do número π polo cadrado do radio.

$$A = \pi \cdot r^2.$$

A **área dunha coroa circular** é igual á área do círculo maior menos a área do círculo menor.

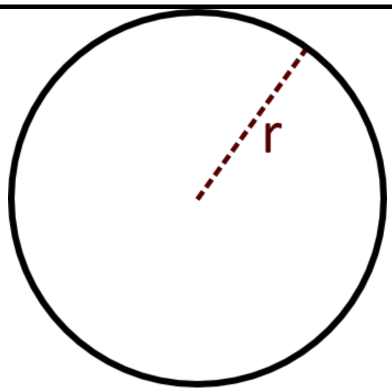
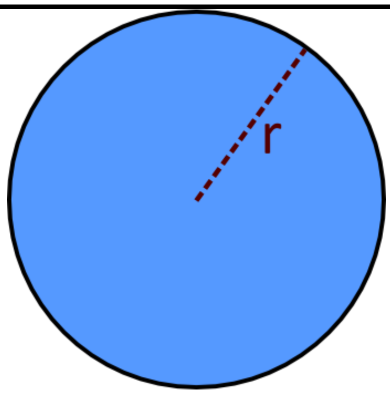
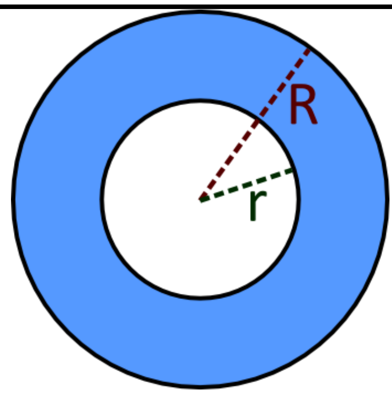
$$A = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

A **área dun sector circular** que abrangue un ángulo de n graos é igual a:

$$A = \pi \cdot r^2 \cdot n / 360.$$

Para calcular a **área do segmento circular** restamos á área do sector circular a área do triángulo.

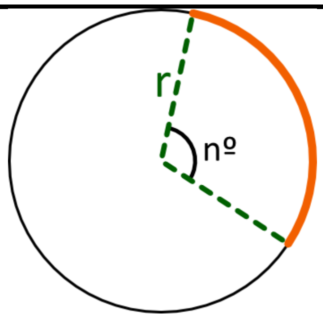
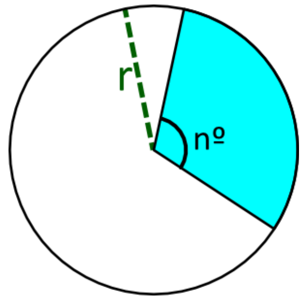
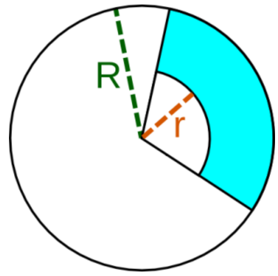
En resumo

Lonxitude da circunferencia	Área do círculo	Área da coroa circular
		
L = $2 \cdot \pi \cdot r$	**A** = $\pi \cdot r^2$	**A** = $\pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (R^2 - r^2)$

π é a razón entre a lonxitude dunha circunferencia e o seu diámetro.

É un número irracional, con infinitas cifras decimais non periódicas.

Unha aproximación de π é 3.14, outra 3.1416 e outra 3.141592

Lonxitude do arco da circunferencia	Área do sector circular	Área do trapecio circular
		
$L = \frac{nº \cdot 2 \cdot \pi \cdot r}{360º}$	$A = \frac{nº \cdot \pi \cdot r^2}{360º}$	$A = \frac{nº \cdot \pi \cdot (R^2 - r^2)}{360º}$

Actividades resoltas

- A circunferencia de radio 5 *cm* ten unha lonxitude L = 2·π·*r* = 2·π·5 = 10·π ≈ 31.416.
- As rodas dun carro miden 60 *cm* de diámetro e teñen 16 radios. A lonxitude do arco entre cada radio é:

  L = 2 · π · *r* · α / 360 = 60 · π / 16 ≈ 11.78 *cm*.

- A área dun círculo de radio 8 *cm* é A = 64 π ≈ 201.06 cm^2. E a dun círculo de 10 *cm* de radio é A = π ≈ 314.16 cm^2.
- A área dun círculo de diámetro 10 m é A = 25π ≈ 78.54 m^2.
- A área da coroa circular formada polas circunferencias concéntricas de radios 9 *cm* e 5 *cm* é igual a: A = π · ($R^2 – r^2$) = π · ($9^2 – 5^2$) = π · (81 – 25) = π · 56 ≈ 175.93 cm^2.
- Para calcular a área do *sector* circular de radio 10 m que abrangue un ángulo de 90°, calculamos a área do círculo completo: π · 10^2 = 100 π e calculamos a proporción:

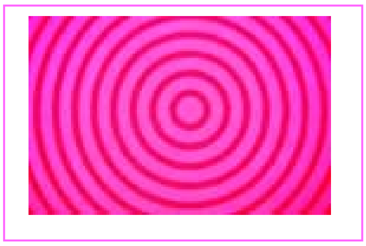
  A_S = 100π · 90 / 360 = 25π ≈ 78.54 m^2.

- Para calcular a área do *segmento* circular, restamos á área anterior a área do triángulo rectángulo de base 10 *m* e altura 10 *m*, A_T = 10 · 10 / 2 = 50 m^2. Logo a área do segmento é:

  A = $A_S – A_T$ = 78.54 – 50 = 28.54 m^2.

Autor: Pedro Luis Suberviola
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF e Pedro Luis Suberviola

Actividades propostas



58. As circunferencias de tamaño real da ilustración da marxe teñen como radio, a menor 1 *cm*, a seguinte, un pouco máis escura 2 *cm*; a clara seguinte 3 *cm*, e así, aumenta un centímetro. Calcula as lonxitudes das 10 primeiras circunferencias.

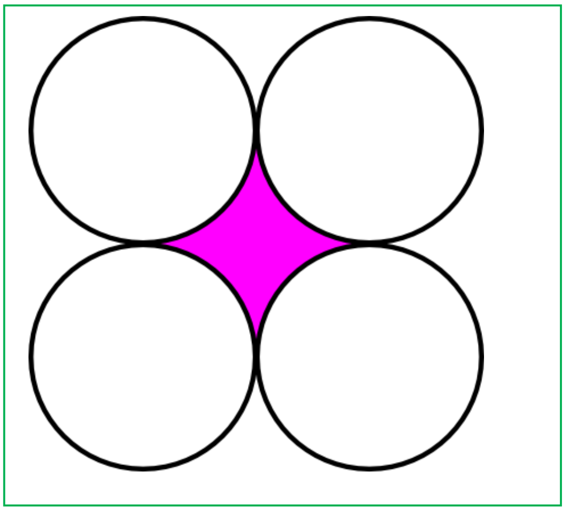
59. A Terra é aproximadamente unha esfera de radio 6 379 *km*. Canto mide o Ecuador?

60. Antigamente definíase un metro como: *"a dez millonésima parte do cuadrante do meridiano terrestre que pasa por París*". Segundo esta definición, canto mide (en metros) o diámetro terrestre?

61. Un faro xira describindo un arco de 170°. A unha distancia de 5 *km*, cal é a lonxitude do arco de circunferencia no que se ve a luz?

62. Determina o lado do triángulo equilátero da figura construído usando arcos de circunferencia de 10 cm de radio.

63. Calcula a área encerrada por unha circunferencia de radio 9 cm.



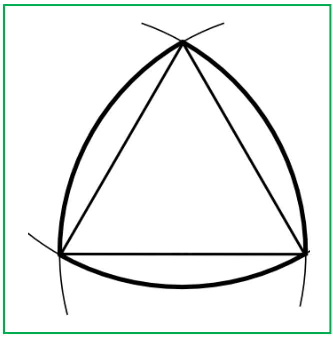
64. Calcula a área da coroa circular de radios 12 e 5 *cm*.

65. Calcula a área do sector circular e do segmento circular de radio 6 *cm* e que forma un ángulo de 60°.

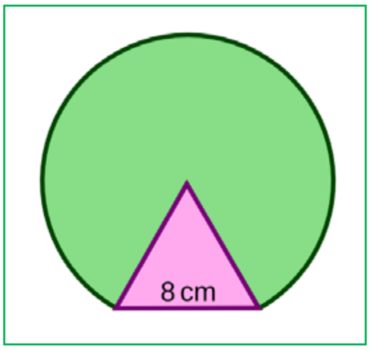
66. Calcula a área do sector de coroa circular de radios 25 *cm* e 18 *cm* e que forma un ángulo de 60°.

67. Calcula a área encerrada entre estes círculos de 5 cm de radio.

68. Queremos construír unha rotonda para unha estrada de 9 metros de ancho de forma que o círculo interior da rotonda teña a mesma área que a coroa circular que forma a estrada. Que radio debe ter a rotonda?

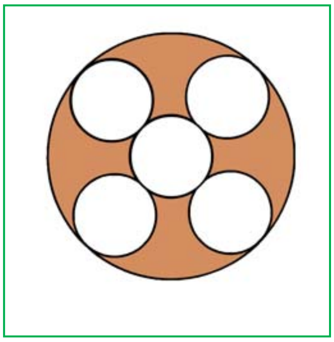


69. Unha figura típica da arquitectura gótica debúxase a partir dun triángulo equilátero trazando arcos de circunferencia con centro en cada un dos seus vértices e que pasan polos dous vértices restantes. Calcula a área dunha destas figuras se se constrúe a partir dun triángulo equilátero de 2 metros de lado.

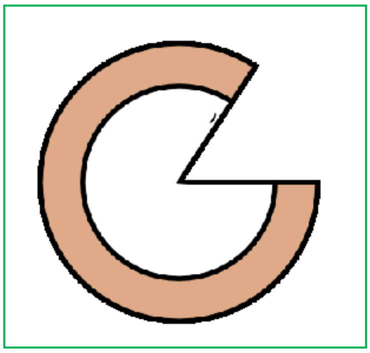


70. Calcula a área e o perímetro da figura formada por un triángulo equilátero de 8 cm de lado sobre o que se constrúe un sector circular.

71. Hai 5 circunferencias inscritas nunha circunferencia de 12 cm de radio tal como indica a figura. Canto vale a área sombreada?

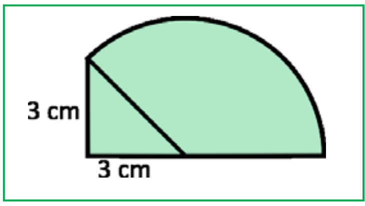


72. Un queixo cilíndrico ten unha base circular de 14 cm de diámetro e unha etiqueta circular de 8 cm de diámetro. Córtase unha porción de 70°. Que área ten o anaco de etiqueta cortada?

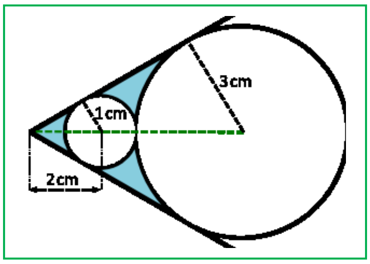


73. Dun queixo de 18 cm de diámetro cortamos unha porción de 50°. A etiqueta ten 7 cm de radio. Que área do queixo está visible?

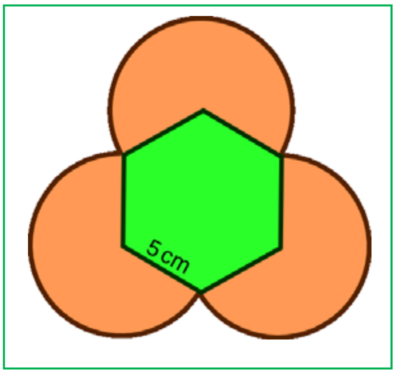
74. A partir dun triángulo rectángulo isósceles de 3 cm de cateto construímos un sector circular. Calcula a área da figura.



75. En dúas rectas que forman 60° inscríbense dúas circunferencias tanxentes entre si. A primeira ten o centro a 2 centímetros do vértice e o radio de 1 centímetro. A segunda ten de radio 3 centímetros. Canto vale a área sombreada?



76. Trazamos tres arcos circulares desde tres vértices dun hexágono de 5 cm de lado. Calcula a área e o perímetro da figura.



Todo o que vimos neste capítulo, agás o enunciado do teorema de *Tales* e a semellanza de triángulos xa o coñecías. Estudáchelo en primeiro de ESO. Alí viuse con detemento. Se non o recordas e precisas máis explicacións ou problemas podes velo no capítulo 8: Figuras Planas, de Primeiro de ESO, páxina 184, e no capítulo 9: Lonxitudes e áreas, de primeiro de ESO, páxina 216.

Autor: Pedro Luis Suberviola
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF e Pedro Luis Suberviola

CURIOSIDADES. REVISTA

Algo de historia da Xeometría

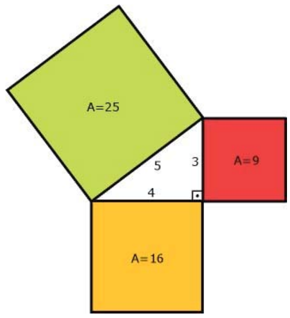
Conxectúrase que o inicio da Xeometría pode ser anterior a **exipcios e babilonios** pero, como non existe información escrita, é imposible afirmalo.

Herodoto opinaba que se orixinara en Exipto pola necesidade de refacer os lindes das terras despois das inundacións do Nilo.

No *papiro de Moscú* aparece o volume dunha pirámide cadrada.

En Mesopotamia coñecíase moita Xeometría. Na taboíña Plimpton, que non se conserva enteira, pódense identificar con dificultade *ternas pitagóricas* (moi anteriores a *Pitágoras*).

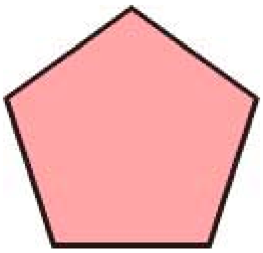
A **terna pitagórica** máis coñecida é 3, 4 e 5. Facíanse nós a esas distancias e así construíanse triángulos rectángulos.



Noutras taboíñas babilónicas, as de Susa, aparecen as áreas dos polígonos e as relacións entre elas.

Aínda que podemos coñecer moi pouco de **Tales** e de **Pitágoras**, pois non quedou ningunha obra escrita por eles, acéptase que foron grandes matemáticos e xeómetras.

Ambos os dous viaxaron aos centros do saber, Exipto e Babilonia. Xa vimos que xa se coñecía o que chamamos teorema de Tales ou de *Pitágoras*. A súa importancia está na forma de pensar, en utilizar o razoamento dedutivo para obter os resultados matemáticos.



O pentágono, e a estrela pitagórica, que obtés trazando as diagonais do pentágono, teñen grandes propiedades relacionadas co número de ouro, recórdalo? A escola tomou a estrela como emblema.

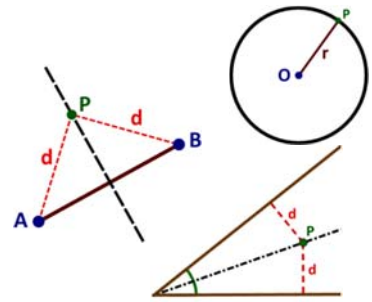
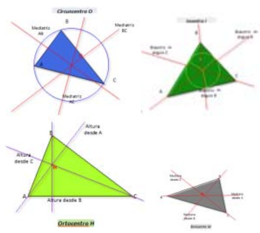
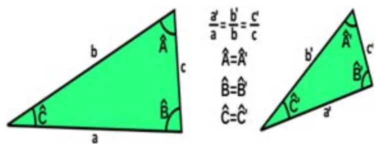
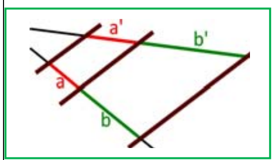
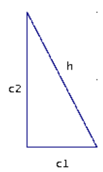
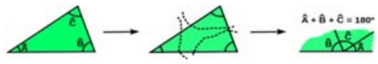
Teano, a muller de *Pitágoras*, dirixiu a Escola Pitagórica á morte deste.

Euclides de Alexandría é o autor dos *Elementos* onde destaca a forma de expoñer o fundamento da Matemática cunha orde lóxica.

Consta de 13 libros sendo os seis primeiros de Xeometría plana e o último sobre corpos. Con definicións e postulados constrúe o saber.

Autor: Pedro Luis Subervioła
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF e Pedro Luis Subervioła

RESUMO

Concepto	Definición	*Exemplos*
Lugares xeométricos	**Circunferencia** é o lugar xeométrico dos puntos do plano que equidistan do centro. **Mediatriz dun segmento** é o lugar xeométrico dos puntos do plano que equidistan dos extremos do mesmo. Dado un ángulo delimitado por dúas rectas, a **bisectriz** do ángulo é o lugar xeométrico dos puntos do plano que equidistan das mesmas.	
Rectas e puntos notables dun triángulo	Mediatrices e circuncentro Bisectrices e incentro Alturas e ortocentro Medianas e baricentro	
Semellanza	Dúas figuras semellantes teñen a *mesma forma*. Dous polígonos son semellantes se os seus lados son proporcionais e os seus ángulos son iguais.	
Criterios de semellanza de triángulos	Dous triángulos son semellantes se: 1) Teñen 2 ángulos iguais. 2) Teñen os 3 lados proporcionais. 3) Teñen dous lados proporcionais e o ángulo que forman é igual.	
Teorema de Tales	Establece unha relación entre os segmentos formados cando dúas rectas calquera son cortadas por varias rectas paralelas: $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{a'+b'}{a+b}$	
Teorema de Pitágoras	Nun triángulo rectángulo, a hipotenusa ao cadrado é igual á suma dos cadrados dos catetos: $h^2 = c_1^2 + c_2^2$ $h = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5\,cm.$	
Suma dos ángulos dun polígono	A suma dos ángulos interiores dun triángulo é 180·*n*.	

Autor: Pedro Luis Suberviola
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF e Pedro Luis Suberviola

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Lugares xeométricos

1. Debuxa no teu caderno un triángulo de lados 2 cm, 3 cm e 4 cm. Traza nel, utilizando regra e compás, as mediatrices e bisectrices. Determina o circuncentro e o incentro. Traza as circunferencias inscritas e circunscritas.

2. Debuxa no teu caderno un triángulo de lado 5 cm e ángulos adxacentes ao mesmo de 30° e 50°. Traza nel, utilizando regra e compás, as medianas e as alturas. Determina o seu ortocentro e o seu baricentro.

3. Debuxa no teu caderno un triángulo cun ángulo de 50° comprendido entre dous lados de 5 e 8 cm. Obtén o seu circuncentro e o seu incentro.

4. Como son as rectas e puntos notables dun triángulo rectángulo?

5. Como son as rectas e puntos notables dun triángulo isósceles?

Semellanza

6. Indica se son semellantes os seguintes pares de triángulos:

a) Un ángulo de 70° e outro de 20°. Un ángulo de 90° e outro de 20°.

b) Triángulo isósceles con ángulo desigual de 80°. Triángulo isósceles cun ángulo igual de 50°.

c) A = 40°, b = 8 cm, c = 10 cm. A'= 40°, b' = 4 cm, c' = 5 cm

d) a = 3 cm, b = 4 cm, c = 6 cm. a' = 9 cm, b' = 12 cm, c' = 19 cm

7. Calcula o valor descoñecido para que os triángulos sexan semellantes:

a) a = 15 cm, b = 9 cm, c = 12 cm. a' = 10 cm, b' = 4 cm, c'?

b) A = 50°, b = 6 cm, c = 4 cm. A' = 50°, b' = 18 cm, c'?

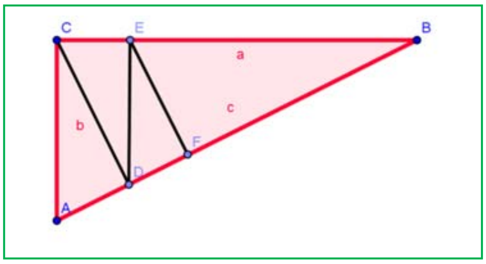
8. As lonxitudes dos lados dun triángulo son 12 cm, 14 cm e 14 cm. Un triángulo semellante a el ten un perímetro de 90 cm. Canto miden os seus lados?

9. Debuxa no teu caderno un pentágono regular. Traza as súas diagonais. O triángulo formado por un lado do pentágono e as dúas diagonais do vértice oposto denomínase triángulo áureo, pois ao dividir o lado maior entre o menor obtense o número de ouro, canto miden os seus ángulos? Busca, na figura que trazaches, outros triángulos áureos. Cal é a relación de proporcionalidade?

10. Canto é a suma dos ángulos interiores dun rombo?

11. A sombra dun edificio mide 15 m e a do primeiro andar 2 m. Sabemos que a altura dese primeiro andar é de 3 m, canto mide o edificio?

12. No museo de Bagdad consérvase unha taboíña na que aparece debuxado un triángulo rectángulo *ABC*, de lados $a = 60$, $b = 45$ e $c = 75$, subdividido en 4 triángulos rectángulos menores *ACD*, *CDE*, *DEF* e *EFB*, e o escriba calcula a lonxitude do lado *AD* como 27. Utilizou a semellanza de triángulos? Como se podería calcular? Que datos necesitas? Calcula a área do triángulo *ABC* e do triángulo *ACD*. Determina a lonxitude dos segmentos *CD*, *DE* e *EF*.



13. Demostra que en dous triángulos semellantes as medianas son proporcionais.

14. Un triángulo rectángulo isósceles ten un cateto de lonxitude 7 cm, igual á hipotenusa doutro triángulo semellante ao primeiro. Canto valen as áreas de ambos os triángulos?

15. O mapa a escala 1:3000000 dunha vila ten unha área de 2 500 cm^2, canto mide a superficie verdadeira da vila?

16. Unindo os puntos medios dos lados dun triángulo obtense outro triángulo. Como son? Que relación hai entre os seus perímetros? E entre as súas áreas?

17. A altura e a base dun triángulo rectángulo miden respectivamente 4 e 7 cm; e é semellante a outro de base 26 cm. Calcula a altura do novo triángulo e as áreas de ambos os dous.

Ángulos, lonxitudes e áreas

18. Constrúe un triángulo coñecendo a altura sobre o lado *a*, o lado *a* e o *c*.

19. Calcula a lonxitude do lado dun octógono regular inscrito nunha circunferencia de radio 5 cm.

20. Calcula a apotema dun hexágono regular lado 7 cm.

21. Calcula a área dun círculo cuxa circunferencia mide 50 cm.

22. Calcula a lonxitude dunha circunferencia cuxo círculo ten unha superficie que mide 50 cm^2.

23. A Terra dá unha volta cada 24 horas, a que velocidade se move un punto do Ecuador?

24. Que relación hai entre as áreas dun triángulo inscrito nun círculo e a do círculo?

25. Os gregos coñecían as dúas seguintes posibles formas de construír un triángulo rectángulo cos seus tres lados de lonxitude un número natural, sen máis que dar valores a n. Comproba se se verifican para $n = 1, 2, \ldots$. a) Catetos: $2n$ e $n^2 - 1$, hipotenusa: $n^2 + 1$. b) Catetos: $2n + 1$ e $2n^2 + 2n$, hipotenusa: $2n^2 + 2n + 1$.

26. Ao aumentar en 3 cm o lado dun cadrado a súa área aumenta 32 cm^2. Canto mide o lado dos cadrados?

27. Quérese cubrir un terreo circular de 25 m de diámetro con grava, botando 10 kg por cada metro cadrado. Canta grava se precisa?

Autor: Pedro Luis Superviola
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF e Pedro Luis Superviola

28. Unha escaleira de 4 m de lonxitude está apoiada sobre unha parede. O pé da escaleira dista 1.5 m da parede. Que altura acada a escaleira sobre a parede?

29. Calcula a área da circunferencia circunscrita a un rectángulo de lados 7 e 9 cm.

30. Calcula a área dun hexágono regular de 3 cm de lado. Prolonga os lados do hexágono e debuxa un hexágono estrelado. Calcula a súa área.

31. O sinal de tráfico de STOP ten forma de octógono regular. A súa altura mide 90 cm e o seu lado 37 cm, canto mide a súa superficie?

32. Calcula a área dun triángulo equilátero de lado 10 cm.

33. Calcula a área dun hexágono regular de perímetro 60 cm.

34. Calcula a área dun trapecio isósceles de base menor 5 cm, lado 3 cm e altura 4 cm.

35. Calcula a área dun trapecio isósceles de bases 8 e 6 cm e lado 3 cm.

36. Calcula a área e o perímetro dun rectángulo de lado 4 cm e diagonal 7 cm.

37. Calcula a área e o perímetro dun cadrado de diagonal 9 cm.

38. Calcula a área e o perímetro dun triángulo isósceles de base 8 cm e altura 6 cm.

39. Un triángulo mide de altura π e de base $\pi + 1$. É rectángulo?

40. Debuxa un triángulo rectángulo isósceles de catetos de lonxitude 1, canto mide a hipotenusa? Tomando esta hipotenusa como cateto e co outro cateto igual a 1 debuxa un novo triángulo rectángulo. Canto mide a nova hipotenusa? Continúa o proceso 4 veces, canto mide a última hipotenusa?

41. Debuxa un triángulo rectángulo de catetos de lonxitude 1 e 2 cm, canto mide a hipotenusa? Tomando esta hipotenusa como cateto e co outro cateto de lonxitude 1 cm debuxa un novo triángulo rectángulo. Canto mide a nova hipotenusa? Continúa o proceso 3 veces, canto mide a última hipotenusa?

42. Calcula a altura dunha pirámide regular cuadrangular de lado da base 10 m e de aresta 15 m.

43. Calcula a xeratriz dun cono de radio da base 5 m e de altura 7 m.

44. Dous ascetas hindús viven no alto dun cantil de 10 m de altura cuxo pé está a 200 metros da vila máis próxima. Un dos ascetas baixa do cantil e vai á vila. O outro, que é mago, ascende unha distancia *x e* viaxa voando en liña recta á vila. Ambos os dous percorren a mesma distancia. Canto ascendeu o mago?

45. Canto mide a aresta da base da pirámide de *Keops* se mide 138 m de altura e 227 m de aresta?

Autor: Pedro Luis Superviola
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF e Pedro Luis Superviola

AUTOAVALIACIÓN

1. Todos os puntos que están á mesma distancia de dous puntos dados están en:

a) unha bisectriz b) unha circunferencia c) unha elipse d) unha mediatriz

2. As tres medianas dun triángulo córtanse no:

a) ortocentro b) baricentro c) incentro d) circuncentro

3. O circuncentro é o centro de:

a) gravidade do triángulo b) a circunferencia inscrita c) a circunferencia circunscrita

4. Dous triángulos son semellantes se:

a) teñen dous ángulos iguais b) teñen dous lados proporcionais

c) teñen un ángulo igual d) as súas áreas son semellantes

5. Sabemos que os triángulos *ABC* e *A'B'C'* son semellantes. Calcula o valor de a' e c' para que o sexan sabendo que a = 10 cm, b = 6 cm, b' = 3 cm, c = 8 cm:

a) a' = 4 cm e c'= 6 cm b) a' = 5 cm e c'= 6 cm

c) a' = 4 cm e c'= 4 cm d) a' = 5 cm e c'= 4 cm

6. Se a hipotenusa dun triángulo rectángulo mide 7 cm e un cateto mide 3 cm, entón o outro cateto mide aproximadamente:

a) 6.3 cm b) 5 cm c) 5.8 cm d) 6.9 cm

7. A suma dos ángulos interiores dun polígono irregular de dez lados é:

a) 1 440° b) 1 620° c) 1 800° d) 1 260°

8. A área dun rombo de lado 5 cm e unha diagonal de 8 cm mide:

a) 48 cm^2 b) 36.7 cm^2 c) 24 cm^2 d) 21.2 cm^2

9. O ángulo central do inscrito na circunferencia que abrangue un ángulo de 72° mide:

a) 720° b) 108° c) 36° d) 144°

10. A lonxitude da circunferencia e a área do círculo de radio 3 cm son respectivamente:

a) 6π cm e 9π cm^2 b) 9π cm e 6π cm^2 c) 3π cm e 3π cm^2 d) 18 cm e 27 cm^2

Matemáticas orientadas ás ensinanzas académicas

3º B da ESO

Capítulo 8: Movementos no plano e no espazo

www.apuntesmareaverde.org.es

Autoras: Adela Salvador e María Molero

Revisores: Javier Rodrigo e Sergio Hernández

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: María Molero, Milagros Latasa, Banco de Imaxes de INTEF e Adela Salvador

Índice

1. TRANSFORMACIÓNS XEOMÉTRICAS

1.1. ISOMETRÍAS
1.2. ISOMETRÍAS DIRECTAS E INVERSAS
1.3. SEMELLANZAS
1.4. COMPOSICIÓN DE TRANSFORMACIÓNS XEOMÉTRICAS

2. TRANSLACIÓNS

2.1. VECTORES
2.2. TRANSLACIÓNS NO PLANO
2.3. COORDENADAS
2.4. COMPOSICIÓN DE TRANSLACIÓNS
2.5. TRANSLACIÓNS NO ESPAZO

3. XIROS OU ROTACIÓNS

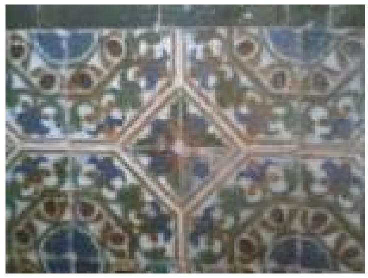
3.1. XIROS NO PLANO
3.2. COMPOSICIÓN DE XIROS. ELEMENTOS INVARIANTES
3.3. SIMETRÍA CENTRAL NO PLANO. CENTRO DE SIMETRÍA
3.4. XIROS NO ESPAZO
3.5. SIMETRÍA CENTRAL NO ESPAZO. CENTRO DE SIMETRÍA

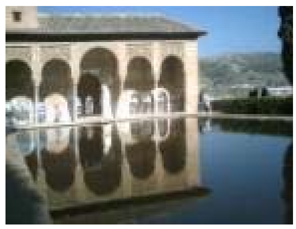
4. SIMETRÍAS

4.1. SIMETRÍAS AXIAIS. EIXE DE SIMETRÍA
4.2. COMPOSICIÓN DE SIMETRÍAS
4.3. SIMETRÍA ESPECULAR NO ESPAZO. PLANO DE SIMETRÍA
4.4. ISOMETRÍAS NO PLANO
4.5. ISOMETRÍAS NO ESPAZO
4.5. USO DE XEOXEBRA PARA ANALIZAR AS ISOMETRÍAS NO PLANO

5. MOSAICOS, FRISOS E ROSETÓNS

5.1. MOSAICOS
5.2. FRISOS
5.3. ROSETÓNS





Resumo

Todo se move no Universo, a Terra xira arredor do seu eixe e desprázase arredor do Sol. O Sol móvese dentro da nosa galaxia, e a galaxia tamén se move. Mareo me dá pensar a que velocidade me estou movendo! Observa que nin o tamaño nin a forma dos obxectos varían con estes movementos. Estas transformacións que manteñen a forma e o tamaño son os movementos ou isometrías que estudaremos neste capítulo.

Analizar o que nos rodea con ollos matemáticos axúdanos a comprender máis e máis cousas. Aprender a mirar as torres, ese reflexo sobre a auga dun palacio da Alhambra, os mosaicos… ou os pratos das rodas dos coches, os animais e os obxectos cotiáns. Todos eles encerran moitas matemáticas: moitas transformacións xeométricas. Estudaremos as simetrías, os xiros e as translacións e analizarémolas no noso entorno.

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

1. TRANSFORMACIÓNS XEOMÉTRICAS

Moitas decoracións fanse repetindo un motivo. Nos mosaicos da Alhambra, nas reixas, nas puntillas e as grecas, nos rosetóns das igrexas… en todas as partes podes ver deseños feitos mediante outro máis sinxelo. Ao observar un edificio podes ver que en ocasións está composto por algún anaco que se foi desprazando, ou xirando, ou procurando o simétrico.

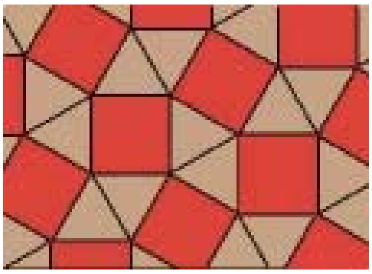
Imaxina que estás manipulando un mapa nun móbil cos dous dedos: podes desprazarte, xirar o mapa, amplialo, reducilo... pero o mapa sempre é basicamente o mesmo. Estas manipulacións son "transformacións xeométricas" porque manteñen as propiedades xeométricas máis básicas dos obxectos: lonxitudes, ángulos, áreas, volumes, ou a proporción entre as lonxitudes, a forma…

1.1. Isometrías

No mosaico da marxe todos os cadrados son iguais e tamén son iguais todos os triángulos.

Ás transformacións xeométricas que nos levan dun cadrado a outro (ou dun triángulo a outro) que manteñen a forma e o tamaño chamámolas isometrías ou movementos.

A palabra *isometría* provén do grego: Iso = Igual. Metría = Medida. Significa polo tanto: *Igual medida*.



Isometrías

No exemplo do mapa, sempre que non fagas zoom, estarás usando unha isometría.

As **isometrías** (**movementos** ou **congruencias**) son transformacións xeométricas que conservan ángulos e distancias (aínda que non teñen por que conservar a orientación dos ángulos).

Isometrías no plano son as **translacións**, os **xiros** e as **simetrías**.

Actividades propostas

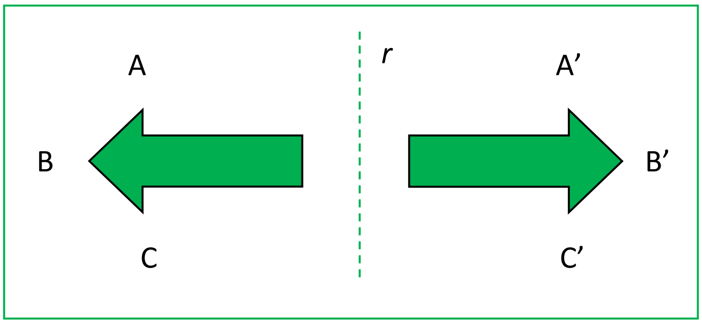
1. No teu caderno debuxa un triángulo. Cálcao e copia a figura calcada de novo no teu caderno. Mide todos os lados das figuras homólogas. Miden o mesmo? Mide todos os seus ángulos. Miden o mesmo?
2. Debuxa no teu caderno unha letra B e fai un deseño con ela, trasladándoa, xirándoa ou debuxando letras B simétricas.

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

1.2. Isometrías directas e inversas

Actividades resoltas

- Na figura da marxe observa que unha frecha se transforma na outra mediante a simetría de eixe *r*. O ángulo *ABC*, é igual ao ángulo *A’B’C’*? Teñen a mesma amplitude, que en ambos os dous é de 90°, pero a súa orientación é distinta. Mentres que *ABC* xira no sentido das agullas do reloxo, é dicir, ten sentido negativo, mide –90°, *A’B’C’* xira no sentido contrario ás agullas do reloxo, polo que o seu sentido é positivo e mide +90°.



Entre as isometrías hai dous tipos de transformacións, as que conservan os ángulos (a súa amplitude e o su sentido) que se chaman isometrías **directas**, e as que conservan a amplitude dos ángulos pero cambian o seu sentido, que se chaman isometrías **inversas**.

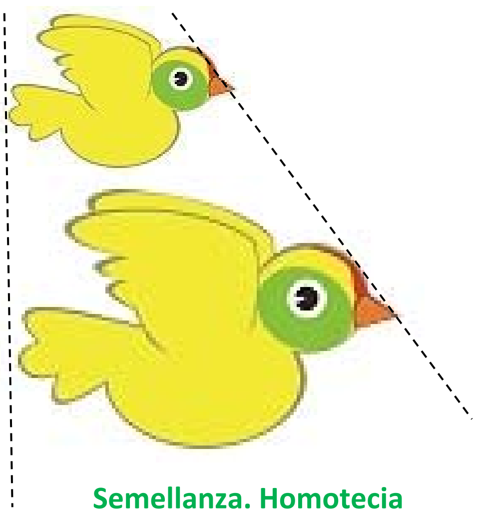
- As translacións e os xiros no plano son isometrías directas. As simetrías son isometrías inversas.
- As túas mans son simétricas. Son iguais. Pero, pódelas superpoñer? E os teus pés? A simetría é unha isometría inversa.
- Imaxina o mapa feito sobre plástico transparente: Se volteas o mapa sobre a mesa, as lonxitudes e ángulos mantéñense (é unha isometría) pero agora non poderías colocar a cidade de Valencia deste novo mapa, sobre a cidade de Valencia do mapa orixinal, por máis que o moveras nunca che poderían coincidir. É unha isometría inversa.

Observación:

Uns autores denominan movementos ás isometrías, e outros estiman que se movendo as mans nunca imos poder superpoñelas, as isometrías inversas non deben chamarse movementos.

1.3. Semellanzas

Se fas zoom no móbil cos dous dedos no mapa, as lonxitudes cambian, así que non é unha isometría, pero o mapa segue sendo o mesmo: os ángulos e os seus sentidos si que se conservan, e as proporcións entre as medidas tamén (a rúa que era o dobre de longa que outra ségueo sendo). Estes cambios de escala denomínanse "semellanzas".



Semellanza. Homotecia

A figuras da marxe son **semellantes**. É a mesma imaxe só que ampliada. Mantense a mesma proporción en todas as direccións. Mantense a forma, pero non o mesmo tamaño. A estas transformacións chamámolas **semellanzas**, ou se teñen unha determinada posición: **homotecias**.

Nunha semellanza as figuras homólogas teñen os ángulos iguais e os lados proporcionais.

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

Exemplo

- Cando fas zoom nunha foto co móbil estás facendo unha homotecia. Ao poñer os dous dedos sobre a pantalla defines dous puntos: a orixe *O* sería o punto xusto entre os teus dous dedos e non se moverá ao facer zoom, e o punto *P* estaría no teu primeiro dedo. Ao mover ese dedo estás definindo o terceiro e derradeiro punto *P'* e o móbil amplía a foto para que o punto *O* quede fixo e *P* se estire ata *P'*. É unha homotecia directa.

As homotecias teñen un centro de homotecia, *O*, e un punto *P* transfórmase por unha homotecia no punto *P'* que está na recta *OP*, se se verifica que: ***OP'*** = *r* · ***OP*** onde *r* é un número chamado **razón de homotecia**.

Actividades propostas

3. No teu caderno debuxa unha letra b minúscula, e a continuación outra letra b minúscula o dobre de grande. Como son as súas lonxitudes e os seus ángulos? É unha semellanza?

4. Debuxa agora unha letra d minúscula. É semellante á letra b anterior?

1.4. Composición de transformacións xeométricas

Exemplo:

- Observa como se construíu este belo mosaico da Alhambra:

  http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/195378_am_1Alhambra1.swf

Analizouse buscando a cela unidade (un cadrado formado por catro cadrados) e o motivo mínimo (a metade de un deses cadrados). No motivo mínimo, un triángulo rectángulo isósceles, debuxouse unha sinxela poligonal. Aplicáronselle distintas isometrías: unha simetría de eixe a hipotenusa. Ao motivo formado polo inicial e o seu simétrico aplicáronselle catro xiros de 90°. Volveuse xirar o conxunto. Déuselle cor. Trasladouse horizontal e verticalmente.

Cando aplicamos varias transformacións, estamos compoñendo transformacións xeométricas.

Actividades propostas

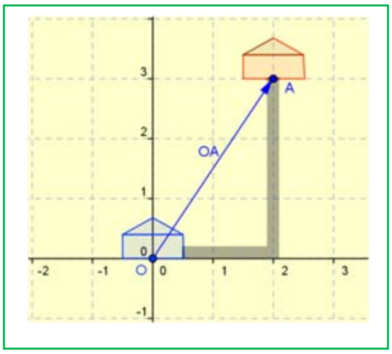
5. No teu caderno marca unha trama formada por cadrados de dous cadradiños de lado. Nun cadradiño fai un garabato, unha poligonal, unha liña curva… Debuxa a simétrica tomando como eixe de simetría un lado do cadrado. Debuxa a figura simétrica do conxunto obtido tomando como eixes sempre os lados da trama inicial. Colorea a figura obtida. Trasládaa horizontal e verticalmente.

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

2. TRANSLACIÓNS

2.1. Vectores

Se Susana está na súa casa e quere ir á casa de Nadia, que vive 2 rúas ao leste e 3 rúas ao norte, o traxecto que debe facer é o que na figura está debuxado en gris.



Chamamos *"O"* á posición da casa de Susana e *"A"* á posición da casa de Nadia. Se Susana tivese un helicóptero podería ir directamente en liña recta e seguiría a dirección *OA*. Representámolo cunha frecha e denomínase vector fixo.

Un vector fixo ***OA*** é un segmento orientado con orixe no punto *O* e extremo no punto *A*. Ten unha dirección, a da recta; un sentido, desde *O* ata *A*, e unha lonxitude, á que chamamos módulo.

Un **vector fixo *OA***, de **orixe** en *O* e **extremo** no punto *A*, caracterízase por:

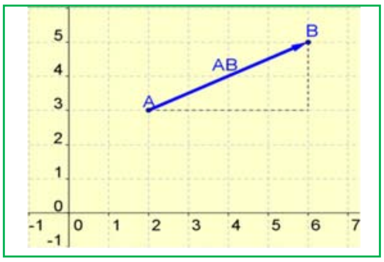
O seu **módulo**, que é a lonxitude do segmento *OA* e que se escribe $|OA|$.

A súa **dirección**, que é a recta que contén ao segmento.

O seu **sentido** que vai desde a orixe *O* ata o extremo *A*.

As coordenadas ou compoñentes dun vector veñen determinadas pola súa orixe e o seu extremo.

Exemplo:



- Se coñecemos as coordenadas do punto orixe e do punto final podemos calcular as coordenadas do vector. Observa o debuxo da marxe e comproba que se *A* (2, 3) e *B* (6, 5) as coordenadas do vector fixo ***AB*** son ***AB*** = (6 – 2, 5 – 3) = (4, 2).

En xeral, se *A* (*a, b*) e *B* (*c, d*) entón ***AB*** = (*c* – *a*, *d* – *b*)

O módulo dun vector calcúlase utilizando o Teorema de *Pitágoras*. Así, o vector de coordenadas ***u*** = (*x*, *y*) ten de módulo: $|\boldsymbol{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

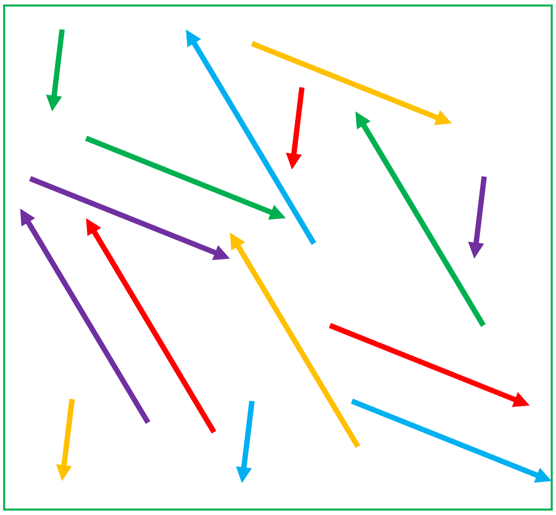
Actividades propostas

6. Debuxa no teu caderno os puntos de coordenadas *A* (–5, 2), *B* (–1, 6) e *C* (2, –3). Calcula as coordenadas dos vectores fixos ***AB***, ***AC***, ***BC***, ***CA*** e ***CB***. Comproba no teu debuxo que esas son as súas coordenadas.
7. O vector fixo ***AB*** ten de coordenadas (4, 2), calcula as coordenadas da súa orixe *A* sabendo que as coordenadas do seu extremo *B* son (–1, 1). Represéntao graficamente.
8. As coordenadas de *A* son (2, 3) e as do vector fixo ***AB*** son (4, –2). Calcula as coordenadas do punto *B*. Represéntao graficamente.

Todos os segmentos orientados ou vectores fixos que teñen o mesmo módulo, dirección e sentido, teñen as mesmas coordenadas, entón dise que son o mesmo vector libre e podemos usalo en diferentes puntos orixe.

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

Dous vectores fixos son **equipolentes** cando teñen igual módulo, dirección e sentido, e polo tanto teñen as mesmas coordenadas.

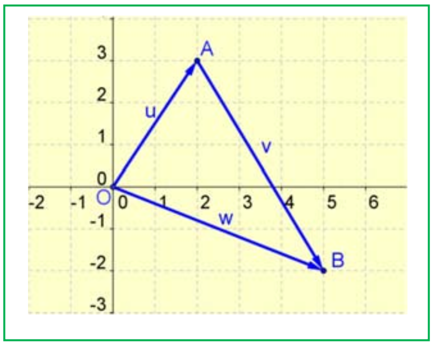


Todos os vectores que son equipolentes dise que son un **vector libre**, e cada un dos seus vectores fixos, un **representante** do vector. Ao vector libre identificámolo polas súas coordenadas.

Actividades propostas

9. Nomea os vectores fixos da figura e indica cales son representantes dun mesmo vector libre.
10. Debuxa no teu caderno catro vectores equipolentes ao vector fixo con orixe en *A* (–3, 4) e extremo *B* (5, 0), con orixes nos puntos *C* (0, 3), *D* (5, 2), *E* (–4, 0) e *F* (–2, –5).
11. Debuxa no teu caderno os puntos *A* (–2, 2), *B* (–3, 0), *C* (2, 4), *D* (6, 2), *E* (2, 0), *F* (6, –2) e *G*(2, –4). Cos vectores fixos de orixe e extremo nestes puntos, indica cales deles son equipolentes.
12. Cos puntos do exercicio anterior, calcula as coordenadas dos vectores fixos ***DE*** e ***FG***. Como son? Son dous representantes dun mesmo vector libre?

Actividades resoltas



O vector fixo ***OA*** = ***u*** que indica o traxecto de Susana ten de coordenadas (2, 3). Se logo Susana quere desprazarse á casa doutra amiga que está a 3 rúas ao leste e 5 rúas ao sur fará un desprazamento de vector: ***v*** = (3, –5). En conxunto Susana fixo un desprazamento que é a suma dos dous desprazamentos anteriores. Finalmente está no punto:

$$(2, 3) + (3, -5) = (5, -2).$$

Encóntrase 5 rúas ao leste e dúas rúas ao sur da súa casa.

Súmanse dous vectores, sumando os seus compoñentes: **(*a*, *b*) + (*c*, *d*) = (*a* + *c*, *b* + *d*)**

Multiplícase un vector por un número, multiplicando os seus compoñentes: ***r*** · **(*a*, *b*) = (*r* · *a*, *r* · *b*)**

Actividades propostas

13. Debuxa no teu caderno un sistema de referencia cartesiano e sinala nel os puntos de coordenadas: *A* (4, 5), *B* (–5, 6) e *C* (2, –5). a) Chama **u** ao vector fixo ***AB*** e indica os seus compoñentes. b) Chama **v** ao vector fixo ***BC*** e indica os seus compoñentes. c) Calcula as compoñentes do vector **w** = **u** + **v**. d) Representa no teu caderno os vectores libres **u** e **v** con orixe na orixe de coordenadas e representa tamén ao vector suma **w**. Observa que está sobre a diagonal do paralelogramo construído sobre **u** e **v**.

14. Debuxa no teu caderno o punto *A* (1, 2), debuxa agora o vector **u** = (2, 3) con orixe en *A* e o vector **v** = (4, –1) tamén con orixe en A. Calcula as coordenadas do vector suma **u** + **v**, e debúxao con orixe en *A*. O resultado coincide co que obtiveches graficamente? Observa que o vector

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

suma é a diagonal dun paralelogramo construído sobre **u** e **v**.

15. Efectúa as seguintes operacións con vectores:

a) $3 \cdot \left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{6}\right) + \frac{1}{2} \cdot (4, 8)$ b) (5, –9) – [(6, 3) + (–4, –6)]

c) 5·[(–1, 0) – (–2, 3)] + (–3) · [(4, –2) – 6 · (4, –5)] d) 9.3 · (2, 6) + (3.7, 5.2)

16. Efectúa as seguintes operacións cos vectores ***u*** = (–5, 6), ***v*** = (4, –7) e ***w*** = (3, 4):

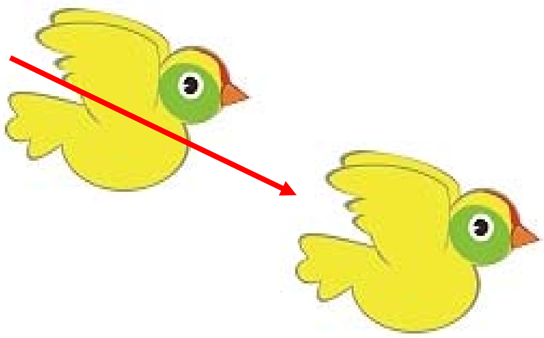
a) 2***u*** – (***v***+ ***w***) b) 3***w*** – 2***u*** + ***v*** c) 2(***u*** + ***v***) – 3***w***

2.2. Translacións no plano

Un coche móvese pola cidade desde o domicilio do dono ata o seu traballo, e trasládase 4 rúas cara ao norte e 3 rúas cara ao leste.

É posible coñecer unha **translación** se sabemos o punto de orixe *A* e o de destino *B*. Estes dous puntos, *A* e *B*, determinan o **vector de translación *AB***. ***AB*** é un vector fixo, representante do vector libre ***u*** de iguais coordenadas.

Una figura e a súa trasladada.

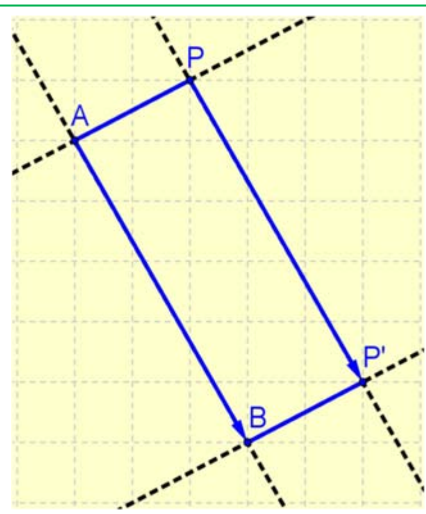


Para definir unha **translación** basta coñecer o seu **vector de translación**.

Se a translación de vector libre ***u = AB*** transforma un punto do plano *P* noutro *P'*, entón ***AB*** e ***PP'*** teñen igual módulo, dirección e sentido. Son o mesmo vector libre. Teñen as mesmas coordenadas.

Se coa translación de vector ***AB*** trasladamos o punto *P* ata o punto *P'* entón *ABP'P* é un **paralelogramo**, e ***AB*** = ***PP'***

Para trasladar unha figura trasládanse os puntos que a determinan. Como nunha translación todos os puntos se moven sobre rectas paralelas e unha mesma distancia, pódese usar a escuadra e o cartabón para trazar as rectas paralelas e trasladar sobre ela algúns puntos da figura, para o que se debe medir sempre a mesma distancia sobre a recta.



Propiedades das translacións

Os paralelogramos teñen, como sabes, os seus lados iguais dous a dous e paralelos dous a dous.

A recta *AB* é paralela á recta *PP'*, e a recta *AP* é paralela á recta *BP'*. Os segmentos *AB e PP'* son iguais, o mesmo que *AP e BP'*.

Por este motivo, entre unha figura e a súa trasladada **consérvanse todas as distancias e todos os ángulos**.

A translación é unha **isometría**, un **movemento directo**.

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

Identidade

A translación de vector de translación nulo, **0** = (0, 0) deixa todos os puntos invariantes, é dicir, non traslada nada, e denomínase tamén translación identidade ou simplemente: **identidade**.

Puntos invariantes

Un **punto invariante** é o que se transforma en si mesmo. Unha **recta invariante** é a que se transforma nela mesma, aínda que os seus puntos non sexan invariantes. Unha **recta invariante de puntos invariantes** é un caso particular de recta invariante na que cada un dos seus puntos é un punto invariante.

Que puntos deixa invariantes unha translación? Observa que agás a translación identidade (que deixa todo o plano invariante), unha translación non deixa ningún punto invariante.

Actividades propostas

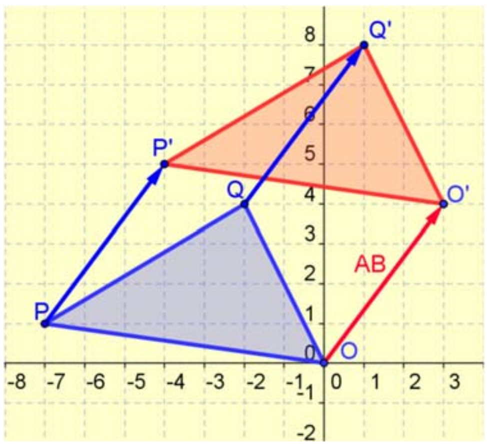
17. Debuxa no teu caderno unha figura e utiliza escuadra e cartabón para trasladala 5 centímetros cara á dereita.
18. Debuxa no teu caderno unha figura. (Se non se che ocorre ningunha outra, debuxa a letra G). Coloca enriba un papel vexetal e cálcaa. Despraza en liña recta o papel vexetal e volve calcar a figura. As dúas figuras que obtiveches, teñen todas as súas medidas, tanto lonxitudes como ángulos, iguais? Traza as rectas que unen pares de puntos correspondentes, como son esas rectas? Que traxectoria seguiron os puntos no desprazamento?

Un friso en Cambodia

19. Con axuda de papel cuadriculado transforma mediante unha translación unha recta, unha circunferencia, un segmento, un triángulo, dúas rectas paralelas e dúas rectas perpendiculares. En que se transforman? Analiza os resultados.
20. Observa este friso dun templo de Cambodia. É unha figura que se repite por translación. Que dirección ten o vector de translación? De onde a onde iría?

2.3. Coordenadas

Para traballar con translacións podes utilizar as coordenadas:



Actividades resoltas

- Aos puntos P (–7, 1), Q (–2, 4) e O (0, 0) aplícaselles unha translación de 3 unidades cara á dereita e 4 unidades cara arriba de modo que o seu vector de translación é:

  $$\boldsymbol{AB} = (3, 4)$$

  Entón as **coordenadas dos puntos trasladados** obtéñense sumando á abscisa do punto que queremos trasladar a abscisa do vector de translación, e á ordenada do punto, a ordenada do vector de translación:

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

Para trasladar P (–7, 1) segundo o vector ***AB*** = (3, 4) calcúlase –7 + 3 = –4; 1 + 4 = 5, polo que o seu punto trasladado é: P' (–4, 5).

Ao trasladar Q (–2, 4) obtense Q' (–2 + 3, 4 + 4) = (1, 8).

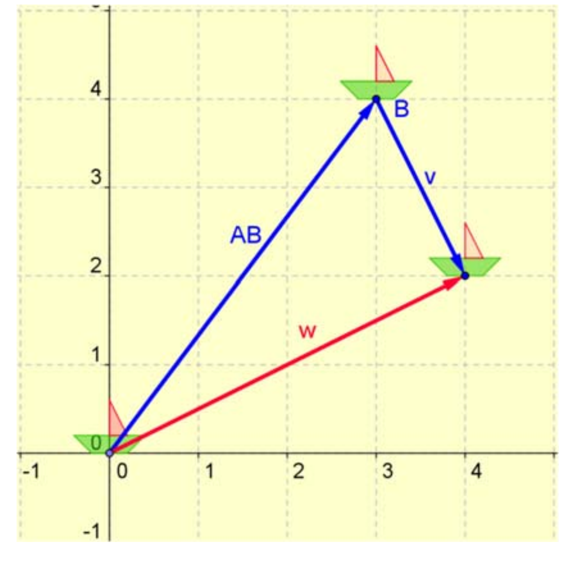
Ao trasladar O (0, 0) segundo o vector ***AB*** = (3, 4) obtense O' (3, 4).

Actividades propostas

21. Utiliza papel cuadriculado e debuxa no teu caderno unha letra F de 2 cadradiños de alta e 1 cadradiño de ancha e aplícalle a translación de vector (2, 5).
22. Debuxa no teu caderno uns eixes cartesianos e o triángulo de vértices A (3, 1), B (3, 3) e C (1, 3). Aplícalle a translación de vector (4, 2): 4 unidades á dereita e 2 unidades cara arriba. Cales son as coordenadas dos puntos trasladados A', B' e C'?

2.4. Composición de translacións

Se trasladas unha figura mediante unha translación de vector **u**, e logo volves trasladala mediante outra de vector **v**, podes comprobar que podes ir da primeira figura á última mediante unha única translación. O vector de translación desta última translación podes obtelo sumando os vectores de translación das dúas primeiras: **u** + **v**.



Actividades resoltas

- Trasladamos mediante o vector de translación ***AB*** = (3, 4) e logo mediante o vector de translación **v** = (1, –2). A composición de ambas as translacións é outra translación de vector de translación **w**:

w = ***AB*** + **v** = (3 + 1, 4 – 2) = (4, 2)

Actividades propostas

23. As puntillas da imaxe deseñáronse a partir dun motivo que se foi trasladando a todo o longo. Debuxa no teu caderno un motivo parecido a algún da figura, unha flor, un V, un zigzag… e trasládao compoñendo varias translacións dun mesmo vector de translación. Debuxaches un friso.

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

Translación inversa

Actividades resoltas

- Se trasladamos unha figura 4 unidades cara á dereita e 3 cara arriba, como debemos trasladala para que ocupe a posición inicial? Hai que trasladala co vector: (–4, –3).

Dicimos que estas translacións son unha inversa da outra.

En xeral, a **translación inversa** da de vector de translación **v** = (a, b) é a translación de vector:

$$\mathbf{w} = -\mathbf{v} = (-a, -b)$$

Actividades propostas

24. Traslada unha figura (por exemplo unha letra L) mediante a translación de vector (–4, 5) e repite o proceso coa figura trasladada empregando o vector (3, –6). Que movemento utilizas para ir da primeira figura á última? É unha translación? Cal é o seu vector?

25. O mosaico da marxe está confeccionado utilizando un motivo mínimo que se despraza por todo o mosaico. Se utilizas como motivo mínimo a estrela de seis puntas, sen ter en conta os cambios de cor, determina os vectores de translación de dúas translacións, unha horizontal e outra vertical, que mediante composicións che permitan ter o resto do mosaico. Observa que ao sumar a translación horizontal coa vertical obtés translacións oblicuas. Debuxa no teu caderno unha figura e trasládaa de forma similar para tener un mosaico.

2.5. Translacións no espazo

As translacións no espazo teñen as mesmas propiedades que as translacións no plano.

Imaxina un avión que se move. O avión trasládase.

Unha translación no espazo, igual que unha translación no plano, é o movemento que consiste en deslizar un obxecto segundo unha dirección. A translación está determinada pola distancia que se traslada, a dirección da recta sobre a que se traslada, e polo seu sentido. Polo tanto:

Para determinar unha translación no espazo basta coñecer o seu **vector de translación**.

A única diferenza é que agora o vector de translación ten tres compoñentes: ***AB*** = (a, b, c).

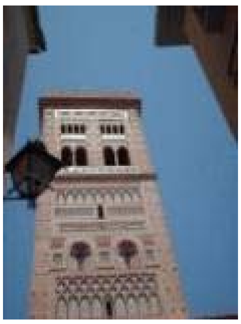
Exemplo:

- Para trasladar o punto P (2, 4, –1) mediante a translación de vector ***AB*** = (–3, 5, 2), simplemente sumamos as coordenadas:

$$P' = (2 - 3, 4 + 5, -1 + 2) = (-1, 9, 1).$$

A translación no espazo no deixa ningún punto invariante.

Actividades propostas



26. En edificación utilízanse moito as translacións. Pensa nas ventás dun edificio e elixe unha. Podes obter outra distinta mediante translación? Fai un debuxo que represente esta situación.
27. Na fachada desta torre mudéxar de Teruel podemos ver distintas translacións. Na parte superior hai dous conxuntos de catro ventás. Un é trasladado do outro. E cada ventá forma ás outras catro mediante unha translación. Ao seguir baixando, os dous arcos trasládanse formando outros dous arcos. Observa, neste caso todas as translacións teñen un vector de translación horizontal. Continúa describindo as translacións que ves no deseño desta torre.

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

3. XIROS OU ROTACIÓNS

3.1. Xiros no plano

Son as 4 en punto. Se retrasamos o reloxo 15 minutos, a agulla dos minutos xirou un ángulo de 90°en sentido positivo.

Para determinar un **xiro** ou **rotación** é necesario coñecer un punto, *O*, o **centro de xiro**; un **ángulo** α e o **sentido** de xiro dese ángulo.

Existe o acordo de considerar *positivo* (+) ao sentido contrario das agullas dun reloxo e sentido *negativo* (–) o das agullas do reloxo.

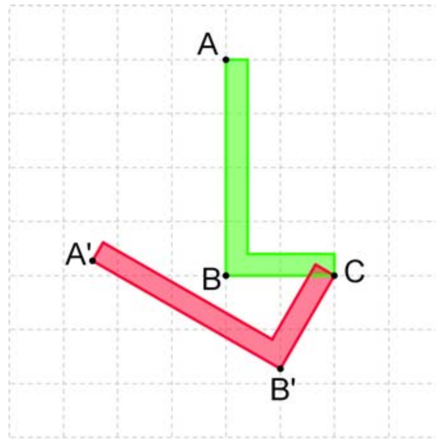
Se *A'* é o punto xirado de *A*, con centro *O* e ángulo α, entón: $|OA| = |OA'|$ e o segmento *OA* forma un ángulo α con *OA'*.

Para xirar unha figura xíranse os puntos que a forman.

Exemplo:

- Se pasaron 15 minutos a agulla dos minutos xirou –90° (90° en sentido negativo), cando pase media hora terá xirado –180°, e se só pasan 10 minutos terá xirado –60°.

Actividades resoltas

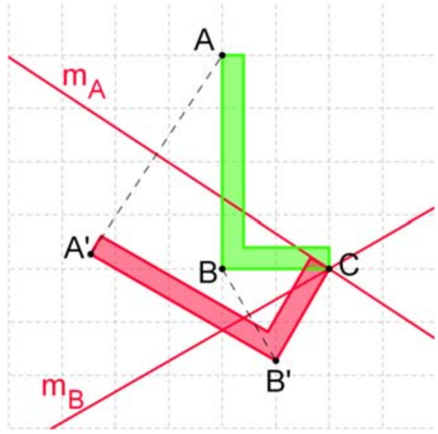


Para debuxar rotacións no caderno podes utilizar un transportador de ángulos e un compás.

- Para xirar a letra L segundo un xiro de centro *C* e ángulo 60°, tomamos varios puntos da figura, neste caso os puntos *A*, *B* e *C*. Co compás facendo centro en *C* trazamos arcos, e sobre eles, utilizando o transportador, medimos 60°. Obtemos os puntos *B'* e *A'*.

A nova letra L mantén as distancias: *BC* = *B'C* e *AB* = *A'B'*. Tamén mantén os ángulos: o ángulo *ABC* é recto e o novo ángulo *A'B'C* tamén é un ángulo recto e coa mesma orientación que o anterior. En xeral:

Os xiros manteñen as distancias polo que son **isometrías** ou movementos. Manteñen os ángulos e o sentido dos ángulos polo que son **movementos directos**.



Para saber se dúas figuras son dúas figuras xiradas trazamos as mediatrices dos puntos correspondentes e todas elas deben cortarse nun mesmo punto, o centro de xiro. Co transportador de ángulos podemos entón medir o ángulo de xiro.

Actividades resoltas

- Trazamos o segmento *BB'* e a súa mediatriz. Trazamos o segmento *AA'* e a súa mediatriz. Ambas as mediatrices córtanse no punto *C*, que é o centro de xiro. O ángulo que forman as mediatrices é de 60°.

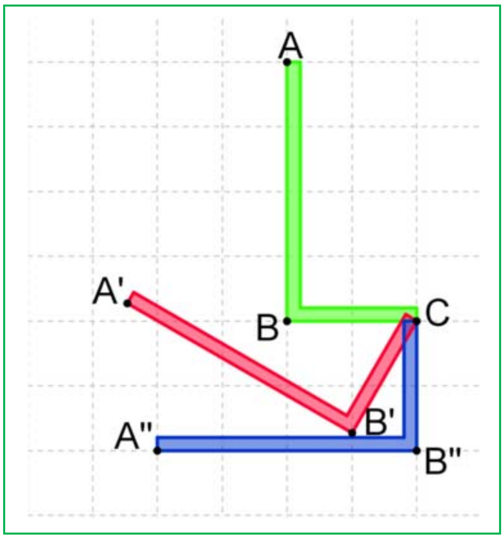
Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

28. Debuxa no teu caderno un punto *O* e outro punto distinto *A*. Xira ao punto *A* con centro en *O* un ángulo de 30° en sentido positivo e denomina *A’* o punto xirado.
29. Debuxa no teu caderno un punto *O* e dous segmentos, un *OA* que pase por *O*, e outro *BC* que non pase por *O*. Debuxa os segmentos xirados *OA’* e *B’C’* do xiro de centro *O* e ángulo 60°.
30. Debuxa no teu caderno o triángulo de vértices *A* (4, 2), *B* (3, –2) e *C* (5, 0). Debuxa o triángulo que se obtén ao xiralo con centro na orixe de coordenadas un ángulo de 90° en sentido positivo. Cales son as coordenadas dos vértices *A'*, *B'* e *C'* do triángulo xirado?
31. Coa axuda de papel cuadriculado, transforma mediante un xiro, unha recta, unha circunferencia, un segmento, un triángulo, dúas rectas paralelas e dúas rectas perpendiculares. En que se transforman? Analiza os resultados.

3.2. Composición de xiros. Elementos invariantes

Exemplo:



- Se xiramos a letra L con centro *C*, 60° en sentido positivo e logo, tamén con centro *C*, 30° en sentido positivo, a figura obtida está xirada respecto á primeira 90° co mesmo centro de xiro. En xeral:

A **composición** de dous xiros do mesmo centro é outro xiro do mesmo centro e de ángulo, a suma dos ángulos de xiro.

- Se unha vez xirada a nosa letra L 30° en sentido positivo, a xiramos, co mesmo centro de xiro, 30° en sentido negativo. Que ocorre? En efecto, volvemos á posición inicial. Dise que son xiros inversos e que ao compoñelos temos a identidade, xa que non nos movemos.

Un xiro de centro *O* e ángulo α é o **xiro inverso** ao xiro do mesmo centro *O* e ángulo $-\alpha$.

Observa que a composición de xiros de distinto centro non é conmutativa, pois depende da orde en que fagamos os xiros.

Actividades resoltas

- Pensemos agora en que elementos deixa invariantes un xiro de centro *O* e ángulo de xiro que non sexa 0° nin 180°. Deixa algunha recta invariante? Hai algunha recta do plano que non se mova? Non, todas xiran. Non hai rectas invariantes. E puntos? Algún punto do plano non se move ao xirar? Si, o centro de xiro queda invariante. O centro de xiro transfórmase en si mesmo.

Nun xiro de centro *O* e ángulo distinto de 0° e de 180°, o único elemento **invariante** é un punto, o **centro de xiro.**

Centro de xiro: Centro de xiro é un punto dunha figura plana tal que ao xirar un certo ángulo, a figura coincide consigo mesma.

- Observa que o rosetón do centro deste mosaico ten un **centro de xiro** de 60°. Se o xiramos 60°, volve coincidir. Tamén se o xiramos 120° o 180° o 240° o 300°.

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

3.3. Simetría central no plano. Centro de simetría

A simetría central de centro *O* no plano é un xiro dese centro *O* e ángulo 180°. No plano, a simetría central é, polo tanto, un movemento que xa coñecemos. Observa que a simetría central é, polo tanto, un movemento directo.

Se *P' é* o simétrico de *P* na **simetría central** de centro de simetría *O*, entón *O* é o punto medio do segmento *PP'*.

Actividades resoltas

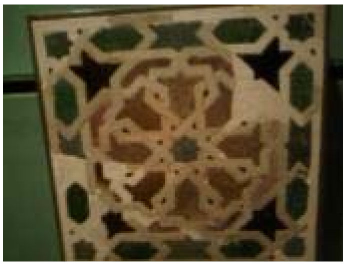
- Dous puntos *P* e *P'* son **simétricos respecto da orixe de coordenadas** se tanto as súas abscisas como as súas ordenadas son opostas. Así, o simétrico respecto da orixe do punto (–2, 4) é o punto (2, –4).
- Observa con esta animación como se constrúe o simétrico, respecto a unha simetría central de centro (2, 3), dun polígono:

  http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/183284_am_1.swf

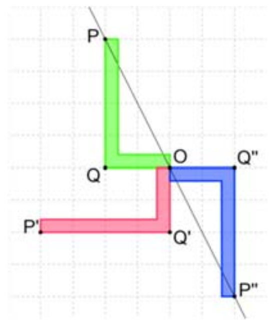
  O simétrico do punto *A* (8, 1) é o punto *A'* (–4, 5). Viches que se trazou a recta *OA*. Con centro en *O* e radio *OA* trázase un arco de circunferencia que corta á recta *OA* en *A'*. O mesmo para obter o simétrico dos outros vértices do polígono. Se os outros vértices son *B* (12, 7), *C* (9, 10), *D* (5, 8) e *E* (7, 6), cales son os seus simétricos respecto á simetría central de centro (2, 3)?
- Que elementos deixa invariantes unha simetría central? Deixa invariante o centro de simetría e todas as rectas que pasan polo centro de xiro.

Centro de simetría: Un punto *O* é un centro de simetría dunha figura se todo punto dela ten como transformado pola simetría central de centro *O*, outro punto da figura. A simetría central transforma á figura nela mesma.

Exemplo:



- O mosaico da *Alhambra* da marxe ten simetría central.
- O círculo, o cadrado, o rectángulo teñen centro de simetría, porén, un triángulo nunca ten centro de simetría.
- Os polígonos regulares cun número par de lados teñen centro de simetría.
- O pentágono regular, non o ten.



Actividades resoltas

- Aplicamos á letra L un xiro de 90° e logo outro xiro tamén de 90°. A composición dun xiro de 90°, con outro do mesmo centro e 90°, é un xiro de 180°. O punto *P* primeiro transfórmase en *P'* e logo en P''. Se unimos cada punto da figura co seu transformado pola composición dos dous xiros, a recta *OP* transfórmase na *OP''*, que é a mesma recta. Os puntos *Q*, O e *Q''* tamén están aliñados. As rectas que pasan polo centro de simetría son invariantes.

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

32. Debuxa no teu caderno dous puntos calquera *P* e *P'*. Encontra o seu centro de simetría.
33. Que ocorre ao aplicar un xiro de 60° a unha figura? Hai rectas invariantes? E nun xiro de 180°? As rectas que pasan polo centro de xiro, en que rectas se transforman? E cun xiro de 0°? E cun xiro de 360°?
34. Debuxa un triángulo *ABC* e o seu simétrico *A'B'C'* respecto dun punto *O*. Como son os seus lados? Son iguais? E os seus ángulos? Mantense o sentido dos ángulos? Comproba como é o ángulo *ABC* e o ángulo *A'B'C'*. É un movemento directo?
35. Imos analizar as letras maiúsculas. Indica cales das seguintes letras non teñen simetría central e cales si a teñen, indicando entón o seu centro de simetría: B, H, N, O, P, S, T, X, Z. Recorda, buscas un punto tal que a simetría central de centro ese punto deixe invariante á letra.

3.4. Xiros no espazo

Ao abrir ou pechar unha porta, esta xira, as patillas das lentes xiran, as rodas dun coche xiran... Observa que para determinar un xiro no espazo necesitas, ademais do ángulo (e o seu sentido), coñecer o **eixe de xiro**. Recorda, no plano tiñamos un centro de xiro, un punto, agora un eixe de xiro, unha recta.

Pensa noutros exemplos cotiáns de xiros no espazo.
Cando xiras unha porta, cambia o sentido dos seus ángulos? Naturalmente que non. Os xiros no espazo son movementos directos.

- Que puntos se transforman en si mesmos? O xiro no espazo deixa invariantes aos puntos do eixe de xiro.

Eixe de xiro: Eixe de xiro dunha figura, no espazo, é unha recta imaxinaria tal, que ao xirar a figura un certo ángulo, coincide consigo mesma.

3.5. Simetría central no espazo. Centro de simetría

Unha figura ten simetría central se ao unir cada un dos seus puntos co centro se obtén outro punto da figura.

Se *P' é* o simétrico de *P* na **simetría central** de centro *O*, entón *O* é o punto medio do segmento *PP'*.

A simetría central no espazo non é un xiro. Ademais só deixa un punto invariante, o centro (non unha recta)

Centro de simetría: Un punto *O* é un centro de simetría dunha figura se todo punto dela ten como transformado pola simetría central de centro *O*, outro punto da figura.

Exemplos:

- A esfera e o cubo teñen centro de simetría; o tetraedro, non.
- O cilindro ten centro de simetría. O cono non ten centro de simetría.
- Un prisma regular ten centro de simetría. Unha pirámide, non.

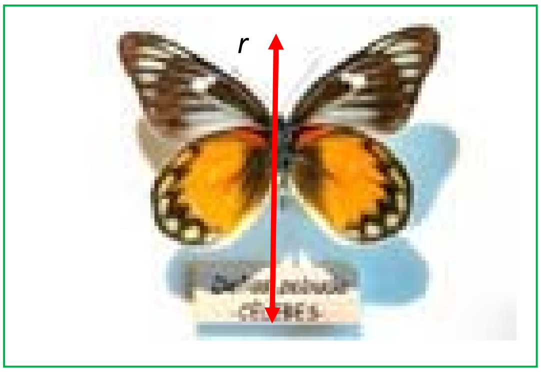
Actividades propostas

36. Escribe cinco exemplos de obxectos do espazo que xiren.
37. Mediante un xiro no espazo, en que se transforma un plano? E unha esfera? E un cono? E dous planos paralelos? E dous planos ortogonais? Analiza os resultados.

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

4. SIMETRÍAS

4.1. Simetrías axiais. Eixe de simetría



A bolboreta da figura é simétrica respecto do eixe de simetría *r*.

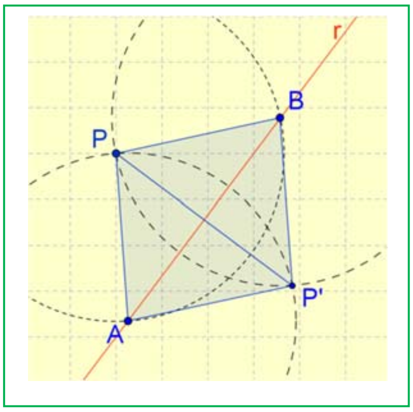
Para determinar unha simetría (simetría axial) é necesario coñecer o **eixe de simetría**.

Se *P'* é o simétrico de *P* respecto da **simetría axial** de eixe *r*, entón *r* é a **mediatriz** do segmento *PP'*.

A simetría axial conserva todas as lonxitudes e a magnitude dos ángulos, pero cambia o sentido destes. Por iso non é posible facer coincidir unha figura coa súa simétrica (a non ser que as propias figuras sexan simétricas).

A simetría é polo tanto un movemento inverso.

Actividades resoltas



- Para calcular o simétrico do punto *P* respecto do eixe de simetría *r*, utiliza un compás e, facendo centro en *P* con radio suficientemente grande, traza un arco de circunferencia que corte a *r* en dous puntos, *A* e *B*. Sen variar de radio e con centro en *A* e en *B* traza outros dous arcos que se cortan en *P'*, simétrico de *P* respecto a *r*. Observa que *PAP'B* é un rombo pois os seus catro lados son iguais, polo que sabemos que as súas diagonais son perpendiculares e córtanse no punto medio.
- Na animación podes ver como se debuxa o punto simétrico doutro utilizando regra e escuadra:
  http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/183282_am_1Punto_simetrico.swf
  Temos o eixe de simetría e queremos encontrar o simétrico do punto *P* (4, 1). Debuxamos o punto *P* (4, 1) nun sistema de coordenadas e tomamos a escuadra. Apoiamos a escuadra sobre o eixe de simetría e ata que toque ao punto. Trazamos unha recta auxiliar, perpendicular ao eixe e que pase polo punto *P*. Medimos a distancia do punto ao eixe e levamos esa lonxitude sobre a recta auxiliar, e xa temos o punto simétrico.
  - Tamén podes obter figuras simétricas dobrando un papel. A dobra é o eixe de simetría. Se debuxas unha figura, dobras o papel e a calcas obtés a figura simétrica.
  - Outra forma é dobrar un papel e recortar unha figura: obtense unha figura simétrica respecto á dobra.

Se debuxamos en papel cuadriculado o triángulo de vértices *A* (–3, 2), *B* (–5, 4) e *C* (–4, 7) e calculamos o simétrico respecto ao eixe de ordenadas, as coordenadas dos vértices do triángulo simétrico son: *A'*(3, 2), *B'* (5, 4) e *C'* (4, 7). En xeral, o simétrico de *P* (*x*, *y*) respecto ao eixe de ordenadas é *P'* (–*x*, *y*).
Se debuxas o triángulo simétrico de *ABC* respecto ao eixe de abscisas, observa que as coordenadas dos ssus vértices son: A' (–3, –2), B' (–5, –4) e C' (–4, –7). En xeral, o punto simétrico de *P* (*x*, *y*) respecto ao eixe de abscisas é *P'* (*x*, –*y*).

Dous puntos **simétricos respecto do eixe de ordenadas** teñen a mesma ordenada e as súas abscisas son opostas. Dous puntos **simétricos respecto do eixe de abscisas** teñen a mesma abscisa e as súas ordenadas son opostas.

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

Puntos invariantes

Nunha simetría, os puntos do eixe de simetría transfórmanse en si mesmos.

A simetría axial deixa invariantes os puntos do eixe de simetría. O eixe de simetría é unha recta invariante de puntos invariantes.

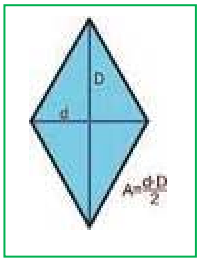
- Que outros elementos deixa invariantes? Hai máis puntos? Hai outras rectas? Observa que as rectas perpendiculares ao eixe de simetría se transforman en si mesmas.

Actividades propostas

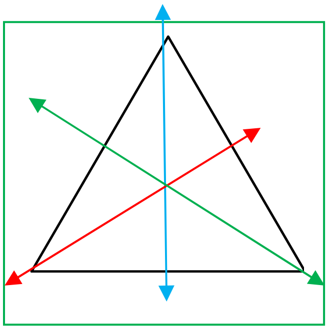
38. Debuxa no teu caderno un eixe *r* de simetría oblicuo, e un punto *P*. Debuxa o punto P' simétrico respecto de *r*. Comproba que a recta *r* é a mediatriz do segmento *PP'*. (*Recorda*: a mediatriz dun segmento é a perpendicular polo punto medio).
39. Debuxa no teu caderno dous puntos calquera *P* e *P'*. Debuxa o eixe de simetría *r* respecto ao que son simétricos.
40. Debuxa en papel cuadriculado unha letra L e un eixe de simetría vertical. Debuxa a letra L simétrica respecto a ese eixe. Calca unha delas e move o papel de calco para intentar facelas coincidir. É imposible porque a simetría é un movemento inverso.
41. Reproduce no teu caderno a figura da marxe. Debuxa un eixe de simetría oblicuo e debuxa a figura simétrica.

42. Calcula as coordenadas dos vértices do triángulo simétrico respecto do eixe de ordenadas do triángulo *A*(3, –4), *B* (5, 6), *C* (–4, 5). O mesmo respecto do eixe de abscisas.

Eixe de simetría dunha figura

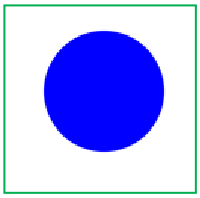


Se a recta *r* é un eixe de simetría dunha figura entón todo punto desa figura ten como transformado pola simetría de eixe *r* a outro punto da figura.



Exemplos:

- Un triángulo isósceles ten un eixe de simetría e un triángulo equilátero, tres.



- Un rectángulo ou un rombo teñen dous eixes de simetría, e un cadrado catro.
- Un círculo ten unha infinidade de eixes de simetría (todos os seus diámetros).

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

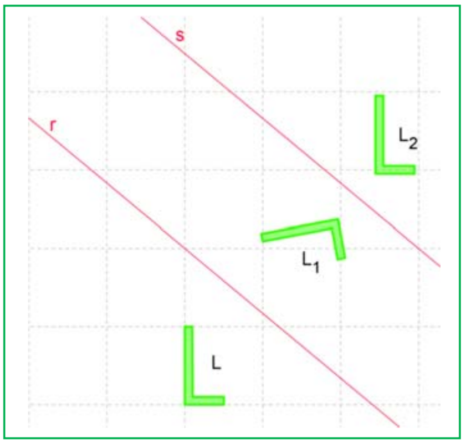
Actividades propostas

43. Indica cales das seguintes letras maiúsculas son simétricas, e se o son, indica se os seus eixes de simetría son horizontais ou verticais: A, B, D, F, K, M, N, R, T, U, V, W, Z.
44. Con axuda de papel cuadriculado, transforma mediante unha simetría, unha recta, unha circunferencia, un segmento, un triángulo, dúas rectas paralelas e dúas rectas perpendiculares. En que se transforman? Analiza a túa resposta.
45. Debuxa un rectángulo *ABCD*. Debuxa o eixe de simetría que transforma *AB* en *CD*, e o eixe de simetría que transforma *AD* en *BC*.
46. Debuxa un hexágono regular e debuxa os seus eixes de simetría. Cantos ten? Ten 6. Descríbeos.
47. Debuxa un pentágono regular e os seus eixes de simetría. Cantos ten? Descríbeos.

4.2. Composición de simetrías

Imos estudar agora a composición de simetrías. Xa sabes que unha simetría é un movemento inverso. Se cambias o sentido dun ángulo e logo volves cambialo, quédache o sentido orixinal. Polo tanto a composición de dúas simetrías non vai ser un movemento inverso senón un directo.

Vexámolo primeiro nun caso particular.



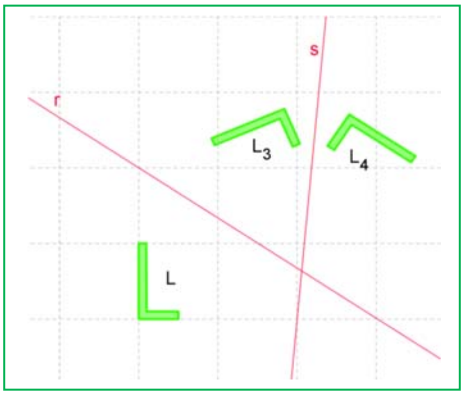
Actividades resoltas

- Trazamos dous eixes de simetría, *r* e *s*, paralelos. Debuxamos unha letra L, e debuxamos a letra L_1 simétrica de L con respecto da recta *r*, e despois a letra L_2 simétrica de L_1 respecto da recta *s*. Mediante que transformación pasamos directamente de L a L_2? Pode ser unha simetría? (Observa que si se poden superpoñer L e L_2, logo é un movemento directo). É un xiro? É unha translación? Si, é unha translación, de que vector?

A composición de dúas simetrías de eixes paralelos é unha translación. É a translación de vector de dirección a recta ortogonal aos eixes de simetría, de módulo o dobre da distancia entre ambos os eixes, e de sentido o que vai do primeiro eixe ao segundo.

A composición de simetrías **non é conmutativa**. Comproba que se ao L primeiro lle aplicamos a simetría de eixe *s* e logo a simetría de eixe *r* obtemos unha translación, pero o vector de translación é o oposto ao do caso anterior.

- Trazamos agora dous eixes de simetría secantes, *r* e *s*, e unha letra L. Debuxamos a letra L_3 simétrica de L con respecto á recta *r*, e debuxamos a letra L_4 simétrica de L_3 respecto á recta *s*. Mediante que transformación pasamos directamente de L a L_4? Pode ser unha simetría? (Observa que se poden superpoñer L e L_4, logo é un movemento directo). É unha translación? É un xiro? Si, é un xiro, de que centro e de que ángulo?



A composición de dúas simetrías de eixes secantes é un xiro. É o xiro de centro o punto de intersección dos eixes de simetría, de ángulo dobre ao que forman ambos eixes e de sentido do ángulo, o que vai do primeiro eixe ao segundo.

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

A composición de simetrías **non é conmutativa**. Comproba que se ao L primeiro lle aplicamos a simetría de eixe *s* e logo a simetría de eixe *r* obtemos un xiro, pero o ángulo de xiro é o oposto ao do caso anterior.

Actividades propostas

48. Reproduce no teu caderno a figura P da marxe.

a) Debuxa o paxaro P' simétrico respecto ao eixe de ordenadas.

b) Debuxa o paxaro P'' simétrico respecto ao eixe de abscisas.

c) Existe algunha simetría axial que transforme P' en P''? Existe algunha simetría central que transforme P' en P''?

d) Se o pico do paxaro P tivese unhas coordenadas (–2, 5), que coordenadas tería o pico do paxaro P'? E o do paxaro P''?

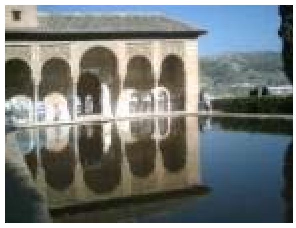
49. Debuxa no teu caderno dous eixes de simetría paralelos e unha letra F. Debuxa a composición de ambas as simetrías a esta letra, comprobando que a composición delas é unha translación e determina o vector de translación.

50. Debuxa no teu caderno dous eixes de simetría secantes e unha letra F. Debuxa a composición de ambas as simetrías a esta letra, comprobando que a composición delas é un xiro e determina o centro e o ángulo de xiro.

51. Se aplicamos unha simetría a unha figura, que transformación debemos aplicarlle para obter a figura inicial?

52. A composición de dúas simetrías planas de eixes secantes é un xiro. Como deben ser os eixes para que sexa un xiro de 180 ° (ou unha simetría central)?

4.3. Simetría especular no espazo. Plano de simetría



Moitos mobles son simétricos: moitas mesas, moitas cadeiras… Moitos animais son case simétricos. Os coches, os avións, os trens son simétricos. Se nos miramos nun espello vemos unha imaxe reflectida que é simétrica á nosa. Moitos edificios son case simétricos ou teñen elementos de simetría.

Para determinar unha simetría no espazo é necesario coñecer un plano, o **plano de simetría**.

Unha simetría no espazo deixa invariantes os puntos pertencentes ao plano de simetría. Deixa invariantes as rectas ortogonais ao plano de simetría, e deixa invariante ao plano de simetría.

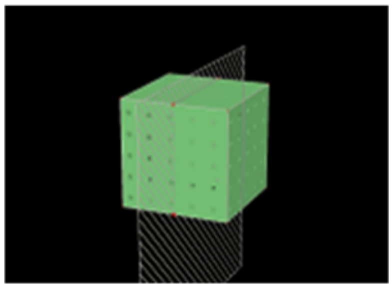
Plano de simetría: o plano de simetría dunha figura é un plano imaxinario tal, que todo punto da figura se transforma pola simetría respecto dese plano noutro punto da figura.

A torre coa porta da marxe ten un plano de simetría.

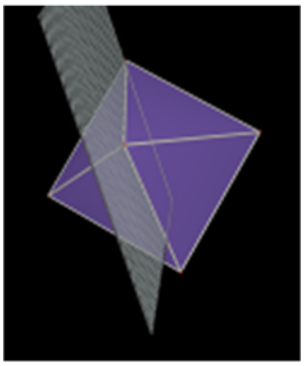
Un plano de simetría é como un espello que reflicte exactamente un fragmento da figura no outro fragmento.

Actividades resoltas

Constrúe poliedros regulares, con cartolina, con palliñas, con …, para comprobar o que segue:



- Analizamos o plano de simetría do cubo da ilustración da marxe. Vemos que pasa polos puntos medios das arestas. Cantos planos de simetría hai similares a este? Como o cubo ten 12 arestas e cada plano pasa por 4 hai 3 deste tipo. Outro plano de simetría pasa por unha diagonal dunha cara, unha aresta, outra diagonal e outra aresta. Cantos hai desoutro tipo? Como o cubo ten 12 arestas e tomamos 2, hai 6 dese tipo.
- Busca un eixe de xiro do cubo. Observa que ten un eixe de xiro de 90° que vai de centro de cara a centro de cara. Cantos eixes de xiro ten dese tipo? Comproba que hai 3 (6 caras: 2 = 3). Observa que tamén hai un eixe de xiro de 120° que vai de vértice a vértice oposto. Cantos hai desoutro tipo? Como o cubo ten 8 vértices hai 4 deste tipo. Observa que tamén hai un eixe de xiro de 180° que vai de centro de aresta a centro de aresta oposta. Cantos hai desoutro tipo? Como o cubo ten 12 arestas, hai 6 dese tipo. Hai simetría central? Observa que si.



- Imos analizar agora as isometrías dun octaedro. Observa que ten centro de simetría, igual que o cubo. Planos de simetría: Hai planos, como o da figura, que pasan por catro arestas. Como ten 12 arestas hai 3 deste tipo. Tamén hai planos que pasan polo eixe de simetría das caras. Cantos hai? Temos o mesmo número de planos de simetría que no cubo? Si. O cubo e o octaedro son duais. Se no cubo fixamos os centros das caras e os unimos, temos un octaedro. E se no octaedro unimos os centros das caras, temos un cubo. Observa que o número de caras dun cubo, 6, coincide co número de vértices dun octaedro, e que o número de caras dun octaedro, 8, coincide co número de vértices do cubo. E ambos os dous teñen o mesmo número de arestas, 12.
- Buscamos agora eixes de xiro nun octaedro. Ten eixes de xiro de 90°? Si, van de vértice a vértice oposto. Hai 6 vértices, logo hai 3 eixes de xiro deste tipo. Hai eixes de xiro de 120°, como no cubo? Naturalmente, van de centro de cara a centro de cara, e como ten 8 caras, hai 4 deste tipo. E os eixes de xiro de 180°? Van, como no cubo, de centro de aresta a centro de aresta, e hai 6.
- O estudo do tetraedro é máis sinxelo. Comproba que NON ten centro de simetría. Os planos de simetría pasan por unha aresta, o eixe de simetría dunha cara e o eixe de simetría doutra. Hai 6 arestas, logo hai 6 deste tipo. Ten eixes de xiro de 120°. Pasan por un vértice e o centro da cara oposta. Como ten 4 caras hai 4 deste tipo.

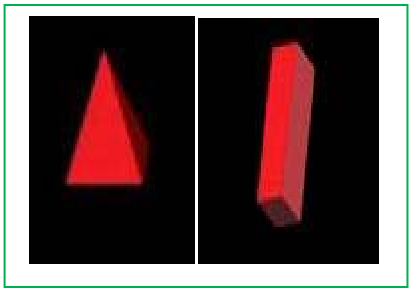
- O estudo do dodecaedro e do icosaedro é máis complicado. Observa que tamén son duais. Se unimos os centros das caras dun dodecaedro obtense un icosaedro, e se unimos os centros das caras dun icosaedro, obtense un dodecaedro. O dodecaedro ten 12 caras e o icosaedro 12 vértices. O icosaedro ten 20 caras e o dodecaedro 20 vértices. Ambos os dous teñen 30 arestas. Imos describir o plano de simetría do dodecaedro da figura da marxe: Vemos que pasa polos dous eixes de simetría de dúas caras, por unha aresta. E logo? Xa non o vemos? Observa que volve pasar por dous eixes de simetría de caras e por outra aresta. Como o dodecaedro ten 20 arestas, hai 10 planos de simetría deste tipo.

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

53. Escribe cinco obxectos que estean ao teu arredor que sexan simétricos e indica o seu plano de simetría. Mira na aula e busca simetrías. Son simétricas as cadeiras, a lámpada, a ventá, as mesas...? Cal é o seu plano de simetría?

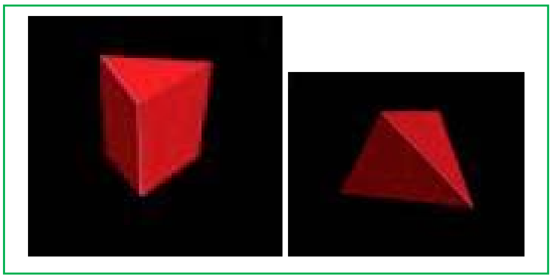
54. Define os planos de simetría e os eixes de rotación das seguintes figuras:



a) Un prisma recto de base cadrada. E se é oblicuo?

b) Unha pirámide recta de base cadrada.

c) Se o prisma e a pirámide son rectos, pero as súas bases son rectángulos, que simetrías se manteñen?



55. Determina os planos de simetría e os eixes de rotación destas figuras:

a) Un prisma recto cuxa base é un triángulo equilátero.

b) unha pirámide recta de base un triángulo equilátero. E se é oblicua?

c) Se o prisma e a pirámide son rectos pero de base un triángulo isósceles, que simetrías se manteñen?

56. Mediante unha simetría especular, en que se transforma un plano? E unha esfera? E un cono? E dous planos paralelos? E dous planos ortogonais? Analiza os resultados.

4.4. Isometrías no plano

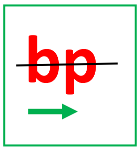
As **isometrías** son transformacións xeométricas que conservan as distancias e os ángulos.

No plano estudamos as translacións, os xiros e as simetrías (axiais) que son isometrías.

Xa sabemos que a simetría central no plano coincide cun caso particular de xiro, o xiro de 180°.

Os xiros e as translacións son isometrías directas, pois non cambian o sentido dos ángulos. As simetrías son isometrías inversas pois si que os cambian.

Vimos que a composición de dúas translacións é sempre outra translación, que a composición de dous xiros do mesmo centro é outro xiro de igual centro, que a composición de dúas simetrías é un xiro ou unha translación. Poderiamos seguir estudando que ocorre se compoñemos xiros de distinto centro, xiros con translacións, translacións con simetrías e simetrías con xiros. Veriamos que case sempre obteriamos unha simetría, unha translación ou un xiro. Agás cando compoñemos unha translación cunha simetría. Obtemos unha isometría nova que chamaremos **simetría con deslizamento**. Pasamos da letra b da marxe á letra p por unha simetría de eixe horizontal (en negro) e unha translación (de vector de translación en verde).



Puntos invariantes: a translación non deixa ningún punto invariante. Os xiros deixan un, o centro de xiro, e a simetría axial deixa unha recta, o eixe de simetría. A simetría con deslizamento tampouco deixa ningún punto invariante.

Se nun plano unha isometría deixa tres puntos invariantes non aliñados, entón deixa invariante todo o plano, logo é a identidade.

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

No plano			
	Puntos invariantes	**Rectas de puntos invariantes**	**Rectas invariantes**
Translación	Ningún	Ningunha	As de dirección igual á do vector de translación
Xiros (de ángulo de xiro distinto a 180° e 0°)	Centro de xiro	Ningunha	Ningunha
Simetría (axial)	Os do eixe de simetría	O eixe de simetría	O eixe de simetría e as rectas ortogonais ao eixe de simetría.
Identidade	Todo o plano	Todas	Todas
Simetría con deslizamento	Ningún	Ningunha	As de dirección igual ao vector de translación e do eixe de simetría.

4.5. Uso de Xeoxebra para analizar as isometrías no plano

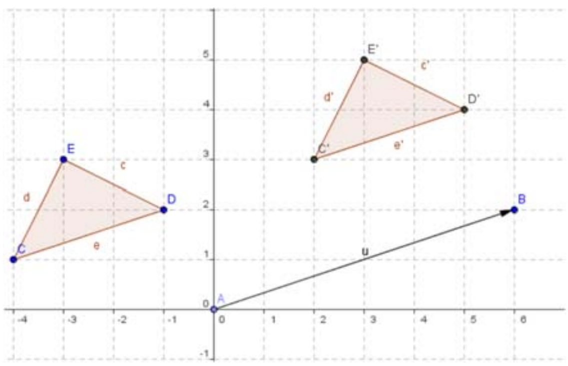
Imos utilizar o programa **Xeoxebra** para estudar os movementos no plano. Estudaremos as translacións e a simetría axial.

Actividades resoltas

Translación

Utiliza Xeoxebra para estudar vectores e translacións.

- Nun arquivo de *Xeoxebra* **Visualiza os** eixes, a cuadrícula e a ventá alxébrica.
- Coa ferramenta **Novo Punto** define a orixe de coordenadas como *A e* o punto de coordenadas (6, 2) como *B. E* coa ferramenta **Vector entre dous puntos** determina o vector *u* de orixe *A* e extremo *B* que terá coordenadas (6, 2).



- Define con **Novo Punto** *C* (–4, 1), *D* (–1, 2) e *E* (–3, 3) e con **Polígono** debuxa o triángulo que ten por vértices estes puntos.
  - Observa que os puntos que debuxaches aparecen na ventá alxébrica como obxectos libres e o triángulo como obxecto dependente.
- Utiliza a ferramenta **Trasladar obxecto acorde a vector** para trasladar o triángulo *CDE* segundo o vector *u*, obtense o triángulo *C'D'E'*.

57. Que tipo de cuadriláteros son os polígonos *ACC'B, ADD'B e AEE'B*?

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

58. Comproba na ventá alxébrica que:

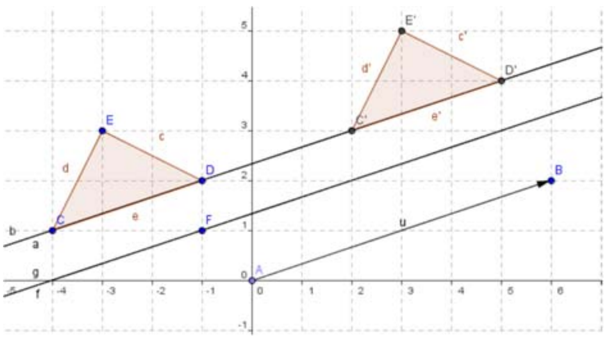
a) As coordenadas dos puntos *C', D' e E'* se obteñen respectivamente ao sumar as coordenadas dos puntos *C, D, e E* as coordenadas do vector *u.*

b) A lonxitude de cada lado do triángulo é a mesma que a do seu trasladado e as áreas dos triángulo *CDE* e *C'D'E'* coinciden.

- Debuxa con **Recta que pasa por 2 puntos**, a recta *a* que pasa polos puntos *C* e *D* e comproba, coa ecuación da recta, que *C'* e *D'* están na mesma recta.
- Traslada agora a recta *a* segundo o vector *u*, aparece, denominada *b*, a mesma recta.

Que propiedade ten a recta a para que permaneza invariante mediante a translación? Unha conxectura é que a recta a é paralela ao vector u.

- Para comprobar a conxectura define un **Novo Punto** *F* (–1, 1) e con **Recta paralela** debuxa unha recta *f* que pase por *F* e paralela ao vector *u*.
- Traslada a recta *f* segundo o vector *u* e verás que aparece a recta *g* que coincide con ela. Debuxa outras rectas paralelas ao vector u e comproba que a translación as deixa invariantes.



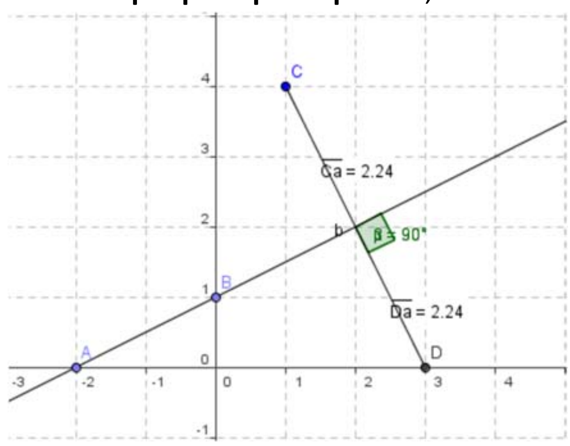
- Move co punteiro o punto *B*, para que o vector *u* teña distinta dirección e observa como a recta *a* xa non ten a mesma dirección que o vector *u* e a súa trasladada, a recta *b*, é distinta e paralela a ela, porén a recta *f* ten a mesma dirección que o vector *u* e a súa trasladada *g* coincide con ela.

59. Investiga se algún punto do plano permanece invariante mediante translacións segundo diferentes vectores.

Simetría axial

Utiliza Xeoxebra para estudar as propiedades da simetría axial.

- Abre unha nova ventá de *Xeoxebra* e visualiza os eixes, a cuadrícula e a ventá alxébrica.
- Coa ferramenta **Novo Punto** define *A* (-2, 0) e *B* (0, 1) e con **Recta que pasa por 2 puntos**, debuxa a recta *a* que pasa por A e *B*, que será o eixe de simetría.
- Determina o punto *C* (1, 4) e coa ferramenta **Reflicte obxecto en recta**, o seu simétrico con respecto á recta *a*, que é o punto *D* (3, 0).
- Coa ferramenta **Distancia** comproba que a distancia do punto *C* á recta *a* coincide coa do punto *D* a esta recta.
- Debuxa con **Segmento entre dous puntos** o que une os puntos *C* e *D*.
- Coa ferramenta **Ángulo** calcula a medida do ángulo que forman o segmento *CD* e a recta *a* para verificar que son perpendiculares.

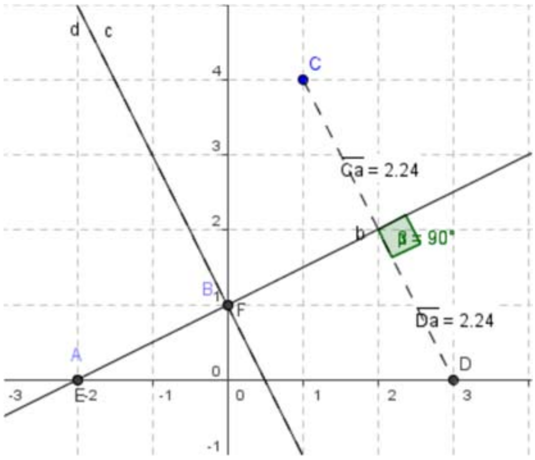


Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

As seguintes propiedades, que acabas de comprobar, caracterizan a simetría axial:

1ª: as distancias dun punto e do seu simétrico ao eixe de simetría coinciden.

2ª: o segmento que une un punto e o seu simétrico é perpendicular ao eixe de simetría.



- Coa ferramenta **Reflicte obxecto en recta** calcula o simétrico dos puntos *A* e *B* con respecto ao eixe *a* e comproba que *A* e o seu simétrico de *E* coinciden o mesmo que *B* e *F*. Proba con outros puntos da recta *a* para verificar que todos os puntos do eixe resultan invariantes mediante unha simetría axial con respecto a este eixe. Verifica, tamén, que o eixe, a recta *a*, e a súa simétrica a recta *b* coinciden.
- Utiliza **Recta perpendicular** para trazar a recta *c*, perpendicular ao eixe *a* que pasa polo punto *B*.
- Calcula a recta simétrica da recta *c* con respecto ao eixe *a*, obtense a recta *d* que coincide con *c*.
- Mellora o aspecto da construción debuxando o segmento CD e as rectas *c* e *d* con trazo descontinuo. Fai clic co botón dereito do rato sobre o elemento ou a súa ecuación e en **Propiedades**, **Estilo**, elixe un trazo descontinuo.

60. Cales son os puntos invariantes dunha simetría axial? E as rectas invariantes?

Actividades propostas

61. Utiliza a ferramenta **Rota obxecto en torno a un punto, o ángulo indicado** para estudar os xiros no plano. Define un punto *O* como centro de xiro, por exemplo, o centro de coordenadas. Define tres puntos para determinar con **Ángulo** un de 45°.

a) Debuxa rectas e polígonos e observa como se transforman mediante este xiro.

b) Investiga se ao realizar un xiro existen puntos e/ou rectas que permanecen invariantes.

62. Utiliza a ferramenta **Reflicte obxecto por punto** para estudar a simetría central. Define un punto *O* como centro de simetría, por exemplo, o centro de coordenadas.

a) Debuxa rectas e polígonos e observa como se transforman por unha simetría central.

b) Comproba que unha simetría central equivale a un xiro de 180°.

c) Investiga se nunha simetría central hai puntos e/ou rectas que permanecen invariantes.

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

4.6. Isometrías no espazo

No espazo estudamos as translacións, os xiros, as simetrías centrais e as simetrías (especulares). A simetría central é un movemento novo diferente dos xiros.

No espazo, translacións e xiros son isometrías directas, e as simetrías especulares e as simetrías centrais son isometrías inversas.

Non estudamos a súa composición, pero non nos custaría nada ver que a composición de dúas translacións é outra translación, de vector a suma dos vectores de translación. A composición de dous xiros do mesmo eixe é outro xiro do mesmo eixe e de ángulo a suma dos ángulos. A composición de dúas simetrías de planos paralelos é unha translación, e a composición de dúas simetrías de planos secantes é un xiro de eixe, a recta de intersección dos planos. A composición de dúas simetrías centrais do mesmo centro é a identidade. O comportamento destas composicións é similar ao que ocorre no plano.

Máis complicado é estudar no espazo a composición de xiros de distinto eixe, xiros con simetrías, simetrías con translacións e translacións con xiros no espazo. Igual que no plano apareceron novas isometrías, a simetría con deslizamento, agora tamén nos aparecen novas isometrías: simetría rotativa, simetría con deslizamento…

Puntos invariantes: a translación non deixa **ningún** punto invariante. A **simetría central** deixa **un** punto invariante, o centro. Os **xiros** deixan unha **recta**, o eixe de xiro. A **simetría** especular deixa un **plano** de puntos invariantes, o plano de simetría. E se unha isometría no espazo deixa catro puntos invariantes non coplanarios, é a identidade.

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

5. MOSAICOS, FRISOS E ROSETÓNS

Ao pasear por unha cidade ou polo campo podes ver montóns de transformacións xeométricas: verás simetrías, xiros e translacións por todos lados, formando mosaicos, frisos ou rosetóns; ou ben nas formas das flores.

5.1. Mosaicos

63. Mira este azulexo dun mosaico de Istambul. A cela unidade é cada un dos azulexos coa que se constrúe todo o mosaico mediante translacións. Indica os vectores de translación. Pero podes reducir o motivo mínimo. Utilizando xiros? Utilizando simetrías? Mira a ampliación: Comproba que podes utilizar como motivo mínimo a oitava parte do azulexo.

Realiza a mesma observación cos outros dous azulexos de Istambul seguintes:

64. **Análise de mosaicos da *Alhambra***: Observa o mosaico da marxe. Imaxina que é infinito, que completa todo o plano. Podes tomar como motivo mínimo un par de folliñas. Para pasar dun par de folliñas ao outro par adxacente que transformación utilizaches? É unha simetría? É un xiro? Hai centros de xiro de 60°? E de 180°? E de 30°?

Utiliza unha trama de triángulos, ou debuxa unha no teu caderno, para deseñar un mosaico parecido a este. Marca na trama os centros de xiros de 60°, de 180° e de 30°. Debuxa un motivo mínimo sinxeliño, por exemplo unha poligonal o unha folla, e móveo usando esas transformacións.

65. Analiza a animación de xeración dun mosaico mediante xiros e translacións:
http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/185487_am_1_Alhambra_3.swf

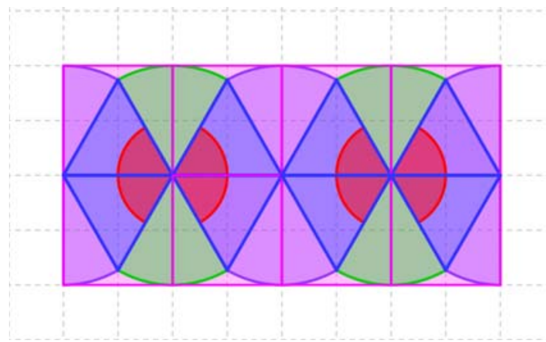
Observa como primeiro debuxa unha trama de cadrados, debuxa un motivo mínimo formado por dous segmentos, logo aplícalle isometrías a ese motivo: xiros de 90°, cos que debuxa a estrela, que por simetría completa a cela unidade á que por último traslada por todo o mosaico.

66. Tamén podes ver na seguinte animación:
http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/195377_am_1Alhambra2.swf

como se realiza un estudo do **mosaico** da marxe, buscando a cela unidade, o motivo mínimo e estudando os seus xiros (de 90° e 180°) e os sus eixes de simetría.
Utiliza unha trama de cadrados, ou debuxa unha no teu caderno, para deseñar un mosaico parecido a este. Marca na trama os centros de xiros de 90° e de 180°. Marca os eixes de simetría. Debuxa un motivo mínimo sinxeliño, por exemplo unha poligonal, e móveo usando esas transformacións. Completa primeiro a cela unidade, e logo trasládaa.

5.2. Frisos

As puntillas, as grecas dos bordados, as teas estampadas, as reixas... utilizan moi a miúdo as translacións nos seus deseños. Son os frisos.



Observa o friso da marxe. Como todos os frisos obtense trasladando un motivo. Pero poden ter outras isometrías ademais da translación. A combinación de translación, simetrías e xiros permite obter sete tipos de frisos diferentes.

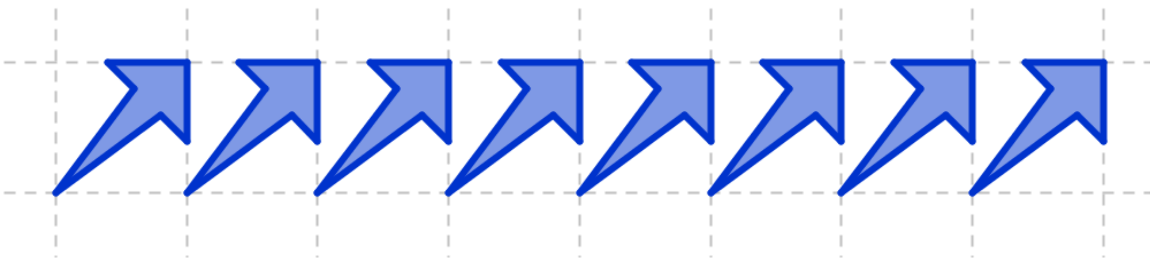
67. Formamos frisos utilizando as letras do alfabeto. Todos eles fórmanse por translación. Pero en ocasións hai outras isometrías. A) En cales hai unha simetría de eixe horizontal? B) En cales hai xiros de 180°. C) En cales hai simetrías de eixe vertical? D) Hai simetrías con deslizamento? E) Sinala todas as familias de simetrías respecto a un eixe, de xiros e de translacións polas cales un punto do friso se transforma noutro punto do mesmo (supoñendo que se prolongue ata o infinito).

L1. LLLLL,L2. NNNNN, L3. VVVVV,L4. CCCCC, L5. HHHHH, L6. pbpbpb,L7. pqdbpqdbp

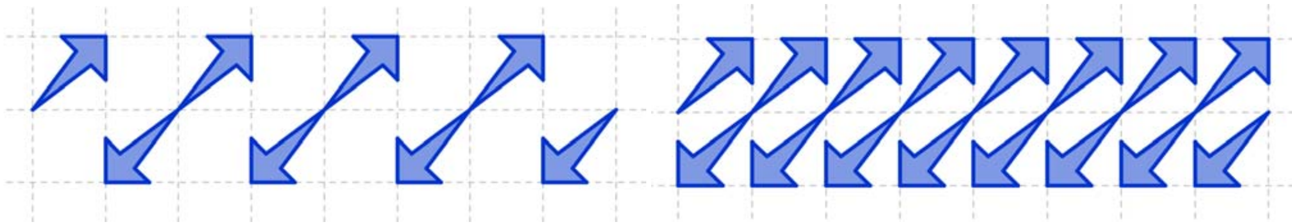
68. Sae á rúa, ou na túa casa, e busca frisos. Fotografa reixas, mira puntillas e grecas… e fai un estudo dos diferentes frisos que encontres. Debuxa no teu caderno o seu deseño e intenta clasificalos segundo o esquema das letras do problema anterior, segundo as transformacións que utilicen. Para iso faite as seguintes preguntas: 1) Ten xiros? Se a resposta é NON, entón: 2) Ten simetría horizontal? Se a resposta é SI, é un L4, que como o friso formado pola letra C ou a letra D, non ten xiros e si simetría de eixe horizontal. Se a resposta é NON, entón: 3) Ten simetría vertical? Se a resposta é SI, é un L3, como o friso formado pola letra V ou a letra A, que non ten ni xiros, nin simetría horizontal e si simetría vertical. Se a resposta é NON, entón: 4) Ten simetría con deslizamento? Se o ten é un L6, e se non é un L1. Pero se ten xiros pode ter tamén simetría horizontal e é un L5, ou ter simetría con deslizamento e ser un L7, ou só ter o xiro e ser un L2, como o friso formado pola letra N ou a letra S.

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

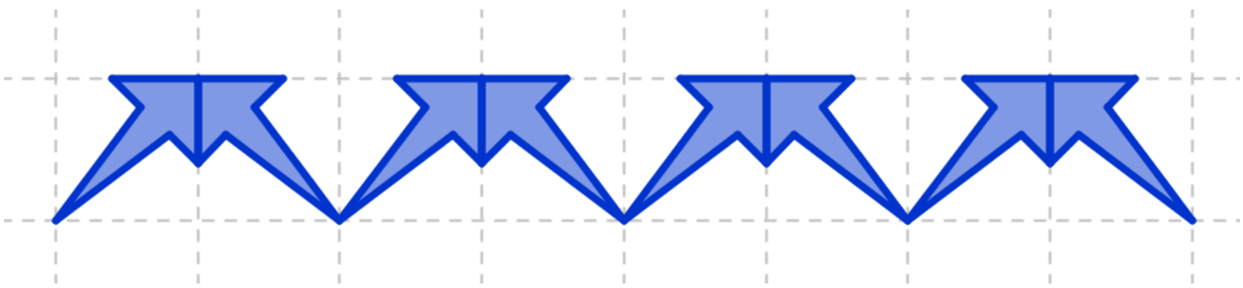
69. Nos frisos seguintes sinala todas as familias de simetrías respecto a un eixe, de xiros e de translacións polas cales un punto do friso se transforma noutro punto do mesmo (suposto que se prolongue ata o infinito).



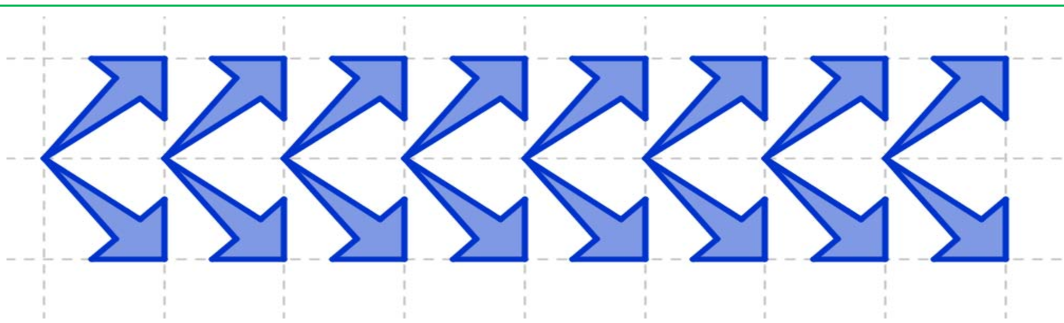
Friso L1: Só translación



Frisos L2: Xiros de 180º

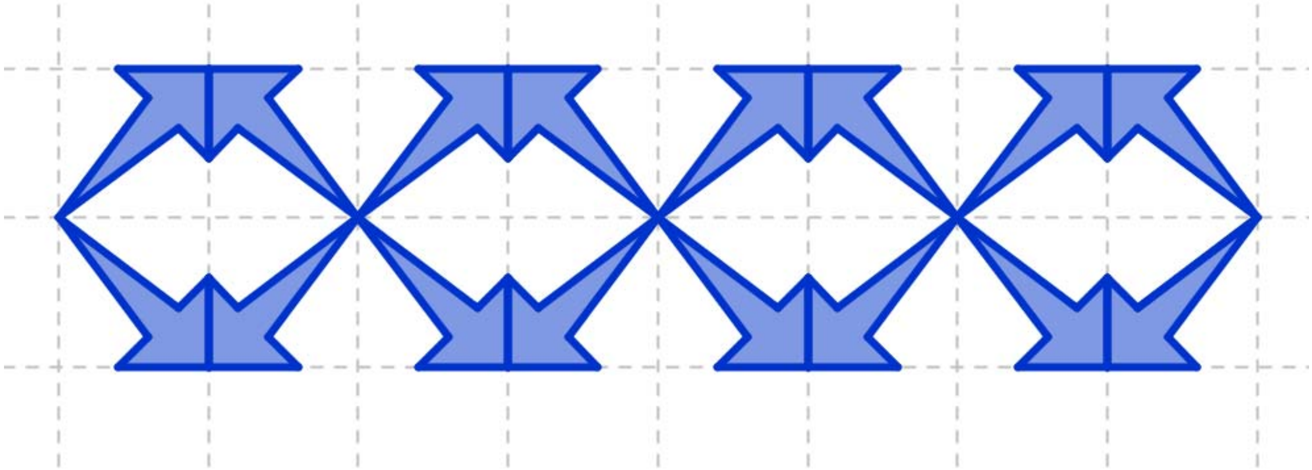


Friso L3: Simetría vertical

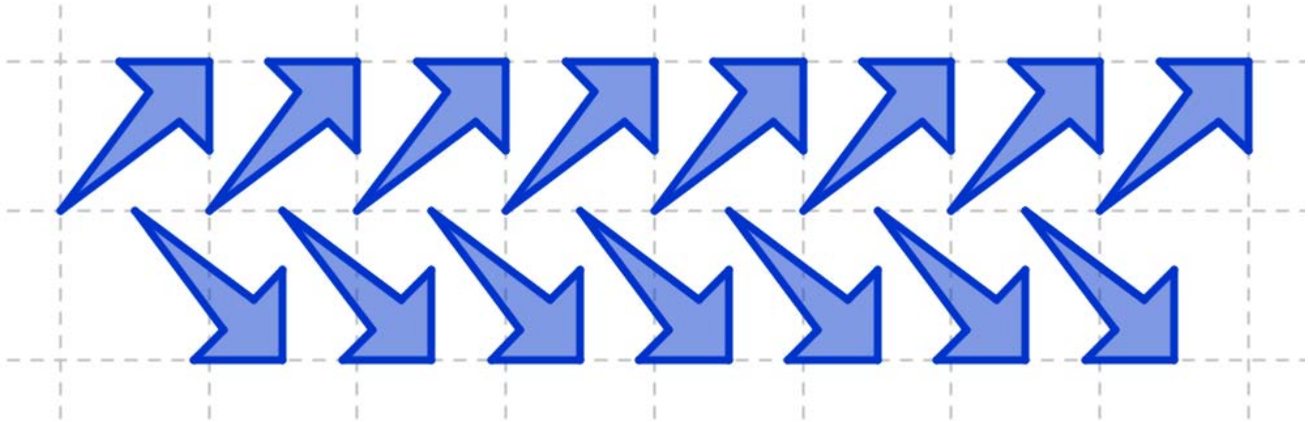


Friso L4: Simetría horizontal

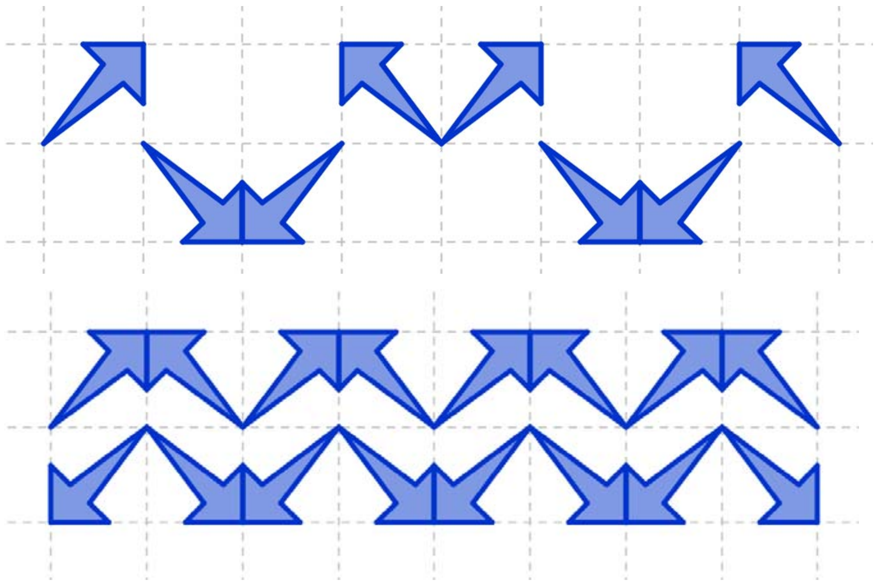
Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF



Friso L5: Xiros, simetrías verticais e simetrías horizontais



Friso L6: Simetría con deslizamento



Frisos L7: Simetría con deslizamento e simetría vertical.

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

5.3. Rosetóns

Os rosetóns das catedrais son espectaculares, pero tamén se poden ver en situacións máis cotiás, como no prato das rodas dos coches.

Denomínanse grupos de Leonardo os grupos de isometrías destes rosetóns. Poden tener simetrías ou unicamente xiros. Este rosetón dunha catedral ten eixes de simetría e divide a circunferencia en 12 anacos iguais. Dicimos que é un D12. Se non hai simetrías, só xiros dicimos que é un C5, ou un C6… segundo divida a circunferencia en 5 ou en 6… partes iguais.

Por exemplo, fíxachete nos pratos das rodas dos coches? En ocasións teñen deseños interesantes. Recollemos fotografías de algúns para que os estudes.

70. **Análises de prato das rodas:** Observa os seguintes pratos das rodas. Indica, para cada un deles, as seguintes cuestións:

 1	 2	 3	 4
 5	 6	 7	 8
 9	 10	 11	 12

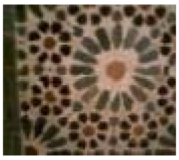
a) Ten simetría central?

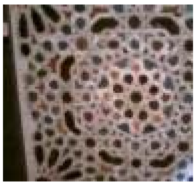
b) Ten eixes de simetría axial. Cantos?

c) Ten centro de xiro, cal é o menor ángulo de xiro que o deixa invariante?

d) Sae á rúa e fotografa ou debuxa os pratos das rodas que vexas e che parezan interesantes. Fai un estudo deles.

CURIOSIDADES. REVISTA

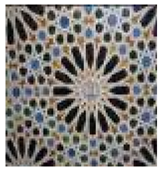
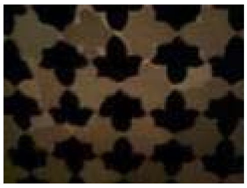
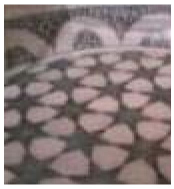
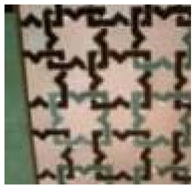




Mosaicos da *Alhambra*

Como sabes os árabes de España eran grandes matemáticos e nos mosaicos da *Alhambra* demostran, ademais do seu sentido artístico, os seus coñecementos de Matemáticas. Tense demostrado que, partindo dun motivo mínimo, e aplicándolle xiros, simetrías, translacións… só hai 17 formas distintas de completar o plano facendo un mosaico. É sorprendente que esas 17 formas xa se encontren nos mosaicos da *Alhambra*.



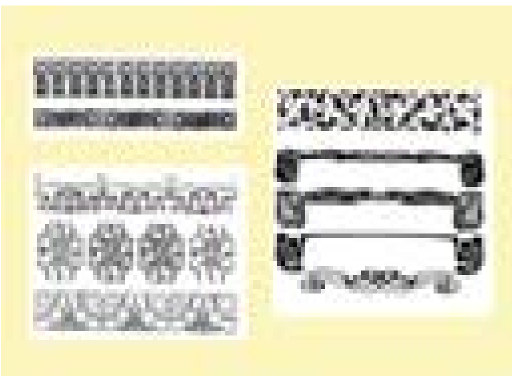
Podes ver a xeración dun destes mosaicos da *Alhambra* mediante simetrías:

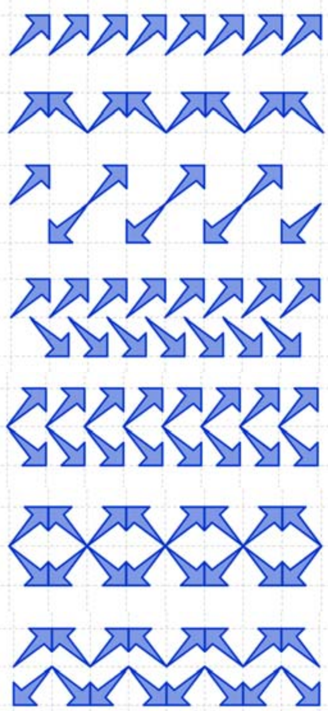
http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/195375_am_1.swf

Busca “mosaicos” en Internet, e saberás máis sobre a xeración de mosaicos.

Frisos

Nas cenefas, puntillas…, nas reixas, en… podemos ver deseños que se repiten ao longo dunha liña por translación. Tense demostrado que só hai 7 formas distintas de facer eses deseños utilizando, ademais das translacións, xiros e simetrías.





Podes ver a xeración dun friso: (http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/195415_am_1Friso.swf)

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

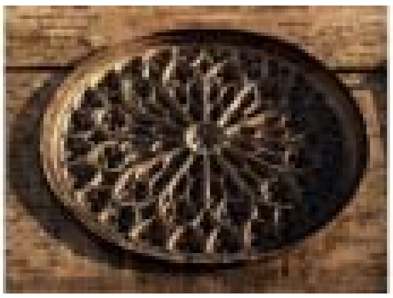
Cristais

Igual que no plano só existen 17 posibles deseños de mosaicos, no espazo existen 230 posibles tipos de deseños cristalográficos que compacten o espazo.

Para ser matemático hai que ser poeta. *Sonya Kovalevkaya.*

Rosetóns

Xiros e simetrías pasando todos por un centro. Así se deseñan os rosetóns. Se só hai xiros chámanse C_n, sendo C_2. Se só ten un xiro de 180°, C_3. Se o ten de 120°… o prato das rodas de abaixo é, polo tanto, un C_5. E se teñen simetrías, chámanse D_n como os rosetóns que vemos que son D_{12} o D_{16}. Busca en Internet "grupos de Leonardo" e verás máis cousas sobre eles.



Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

RESUMO

Concepto	Definición	*Exemplos*
Semellanza	Transformación xeométrica que conserva os ángulos e as distancias son proporcionais.	Unha fotocopia reducida
Translación	Vén determinada polo seu vector de translación. Son isometrías directas. A composición de dúas translacións é unha translación.	O trasladado do punto *P* (1, 2) pola translación de vector **v** = (4, 5) é *P'* (5, 7).
Xiro ou rotación no plano	Vén determinado polo centro de xiro e o ángulo de xiro.	O xirado do punto *P* (1, 2) polo xiro de centro ou orixe e ángulo 90° é *P'* (2, –1)
Xiro no espazo	Vén determinado polo eixe de xiro e o ángulo	
Simetría axial	Coñécese polo seu eixe de simetría	O simétrico do punto *P* (1, 2) pola simetría de eixe ou eixe de ordenadas é *P'* (–1, 2)
Simetría especular	Coñécese polo seu plano de simetría	
Isometrías	Son transformacións xeométricas que conservan as distancias e os ángulos.	Translacións, xiros e simetrías
Composición de isometrías	A composición de dúas isometrías directas é unha isometría directa. A composición de dúas isometrías inversas é unha isometría directa. A composición dunha isometría directa cunha inversa é unha isometría inversa.	
Composición de isometrías no plano	A composición de dous xiros do mesmo centro é un xiro do mesmo centro. A composición de dúas simetrías é un xiro ou unha translación.	
Elementos invariantes no plano	A **translación** non deixa **ningún** punto invariante. O **xiro** deixa invariante **un** punto, o centro de xiro. A **simetría** deixa invariante unha **recta**, o eixe de simetría. A **identidade** deixa invariante **todo** o plano.	
Elementos invariantes no espazo	A **translación** non deixa **ningún** punto invariante. A **simetría central** deixa invariante **un** único punto, o centro de simetría. O **xiro** deixa invariante unha **recta**, o eixe de xiro. A **simetría** deixa invariante o **plano** de simetría A **identidade** deixa invariante **todo** o espazo.	

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

MATERIAIS PARA A AULA

Presentacións:

- Un bo resumo deste capítulo telo nesta presentación en Power Point:

  http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/Mosaicosyfrisos.pdf

- Algunhas presentacións de *Power Point*:

  ➢ Sobre frisos e mosaicos

  http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/Movementosenelplano.pdf

  ➢ Frisos e mosaicos na *web*: En Pensamento Matemático:

  http://innovacioneducativa.upm.es/sandbox/pensamiento/chip_geometrico/geometria_y_arte.pdf

- Traballos realizados por estudantes que poden servir de modelo para que, agora eles, realicen outros similares:

➢ Frisos e reixas unidos polas Matemáticas.

http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/rejas.pdf

Presentación confeccionada por dúas alumnas de 2º de Bacharelato do Instituto Salvador Victoria de Monreal do Campo de Teruel: Pilar Lorente Lorente e Paloma Plumed Martín. É un traballo interesante sobre frisos e reixas, aínda que, opinamos, que algún friso non está correctamente clasificado. Porén é un magnífico modelo para inspirar outros traballos de saír á rúa e fotografar ou debuxar as reixas (ou mosaicos, ou outros tipos de frisos) que se vaian vendo.

➢ *Power Point* que recolle traballos sobre mosaicos de diferentes alumnos da Universidade Politécnica de Madrid. Pode tamén servir de inspiración para propoñer ao alumnado que confeccione os seus propios mosaicos.

http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/Mosaico.pdf

Internet

- Buscando en internet encontramos, baixo o título dos 17 grupos de simetría no plano, a seguinte entrada: http://www.acorral.es/index3.htm. Son prácticas con Xeoxebra sobre mosaicos, frisos e celosías. Están deseñados, con deseños vistosos e orixinais mosaicos cos 17 grupos. Ao final hai unha táboa, a modo de resumo, que permite identificar e clasificar cada grupo de simetría. Tamén hai unha folla de traballo para o alumnado.
- Tamén en Internet, en http://www.xtal.iqfr.csic.es/Cristalografia e en particular en:

  http://www.xtal.iqfr.csic.es/Cristalografia/parte_03.html

  un traballo sobre os grupos de autosimetría dos cristais sumamente interesante e dun nivel moi alto. Existe 32 clases de redes cristalinas: triclínico, monoclínico, tetragonal, cúbico, hexagonal… Estuda que só 11 teñen centro de simetría. Ao analizar cales son compatibles coa translación obtéñense as redes (ou redes de Bravais) das que hai 11 redes. Combinando os 32 grupos cristalográficos coas 11 redes encontra que hai 230 formas posibles de repetir un obxecto finito (motivo mínimo) no espazo de dimensión tres.

Libros:

La Alhambra. Traballo monográfico editado pola Asociación de Profesores de Matemáticas de Andalucía, en 1987, que recolle traballos de diversos autores, que permite aprender moito máis sobre transformacións xeométricas e os grupos de autosimetría no plano. Editado pola revista *Epsilón*.

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

EIXERCICIOS E PROBLEMAS

Translación

1. Debuxa no teu caderno un paralelogramo sobre un sistema de referencia e unha cuadrícula. Tes catro segmentos orientados. Determina as coordenadas dos vectores sobre estes segmentos. Cales teñen as mesmas coordenadas?

2. Temos os puntos *A* (0, 5), *B* (3, 6), *C* (4, -2) e *D* (7, 3). Calcula as coordenadas dos vectores ***AB***; ***AC***; ***AD***; ***BC***; ***BD***; ***CD***; ***DC***; ***BA***.

3. Determina o vector de translación que traslada o punto *A* (3, 7) ao punto *A'* (1, 5).

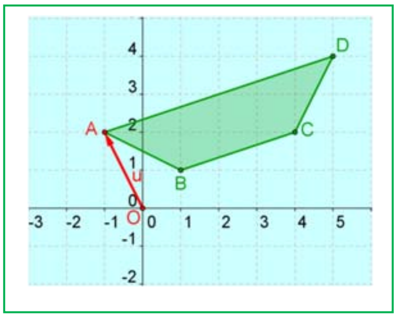
4. Pola translación de vector **u** = (2, 8) trasládase o punto *A* (9, 4) ao punto *A'*. Cales son as coordenadas de *A'*?

5. Pola translación de vector **u** = (–3, –1) trasládase o punto *A* ao punto *A'* (3, 3). Cales son as coordenadas de *A*?

6. Trasladamos a circunferencia de centro *C* (5, 2) e radio 3 unidades coa translación de vector **u** = (–5, –2). Determina o centro e o radio da circunferencia trasladada.

7. Debuxa no teu caderno uns eixes coordenados e neles un cadrado de lado 2 unidades ao que chamas *C*, aplícaslle unha translación segundo o vector ***u*** = (4, 1) e chamas *C*' ao seu trasladado. Agora aplicas a *C'* unha translación segundo o vector ***v*** = (–2, 4). A isometría que transforma *C* en *C*'', é unha translación? Escribe as coordenadas do seu vector. Mediante esa translación, en que punto se transforma a orixe de coordenadas?

8. O vértice inferior esquerdo dun cadrado é A (3, 1) e o vértice superior esquerdo é B (1, 3). Aplícaslle unha translación de vector ***u*** = (–2, 4), cales son as coordenadas dos catro vértices do cadrado transformado?



9. Debuxa a imaxe que resulta de aplicar ao trapecio da figura a translación de vector ***OA*** = (–1, 2). Determina as coordenadas dos puntos transformados de *A* (–1, 2), *B* (1, 1), *C* (4, 2) e *D* (5, 4) por esta translación.

10. Aplica a translación de vector ***u*** = (–3, 4) ao triángulo *ABC* de vértices *A* (3, 1), *B* (4, 4), *C* (6, 5), e calcula as coordenadas do triángulo transformado.

11. Debuxa no teu caderno un círculo de centro a orixe e radio 2 unidades.

a) Trasládao coa translación de vector **u** = (3, 0).

b) Trasládao despois mediante a translación de vector **v** = (0, 4).

c) Indica as coordenadas do centro do segundo círculo trasladado.

d) Indica as coordenadas do trasladado do punto (0, 2) ao aplicarlle cada unha das dúas translacións.

12. Trasladamos o triángulo *ABC* de vértices *A* (6, 1), *B* (–3, 4) e *C* (0, 8), mediante a translación de vector **u** = (7, 1), e logo mediante a translación de vector **v** = (2, 8). Determina as coordenadas do triángulo transformado analítica e graficamente.

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

13. A composición de dúas translacións ten por vector (5, 9). Se unha delas é a translación de vector **u** = (7, 3), que compoñentes ten o outro vector de translación?

14. a) Debuxa no teu caderno un triángulo *ABC* e trasládao 5 cm á dereita. Denomina *A'B'C'* ao triángulo obtido.

b) Traslada *A'B'C'* agora 4 cm cara arriba e denomina *A''B''C''* ao novo triángulo.

c) Debuxa o vector que permite pasar directamente do triángulo *ABC* ao *A''B''C''* e mide a súa lonxitude. Cales son as súas coordenadas?

15. Determina o vector de translación da translación inversa á de vector ***u*** = (–2, 5).

16. a) Debuxa no teu caderno unha figura, e repite o debuxo trasladando a figura 4 veces coa mesma translación. Ao facelo, debuxarás un friso.

b) Un friso confeccionado con letras L é: **L L L L L**. Debuxa un friso confeccionado con letras J. Outro confeccionado con letras M. Ademais de translación, ten simetrías?

c) Busca un friso. Mira as reixas da túa rúa, un bordado ou unha puntilla, as grecas duns azulexos… e debuxa o seu deseño no teu caderno.

17. Mediante unha translación no espazo, en que se transforma un plano? E unha esfera? E un cono? E dous planos paralelos? E dous planos ortogonais? Analiza os resultados.

Xiros

18. Debuxa no teu caderno o punto *A* (5, 4). Indica as coordenadas do punto *A'* que se obtén ao xirar 180° e con centro a orixe o punto *A*. Indica as coordenadas do punto *A''* obtido ao xirar *A'* 90° co mesmo centro de xiro.

19. Debuxa unha figura no teu caderno, cálcaa, recórtaa e pégaa inclinada ao lado da inicial. As dúas figuras, teñen todas as lonxitudes iguais?, e os seus ángulos? Determina, con compás e transportador, o centro e o ángulo de xiro.

20. Debuxa no teu caderno unha letra F e a letra F xirada 30° con centro de xiro o seu punto máis inferior.

21. Debuxa no teu caderno un triángulo rectángulo isósceles e con centro no vértice de un dos ángulos agudos aplícalle un xiro de 45° en sentido positivo. Logo aplícalle outro xiro de 45°, e así sucesivamente ata chegar ao triángulo inicial. Que xiros estiveches facendo?

22. Debuxa no teu caderno un círculo de centro *O*, dous diámetros perpendiculares *AB* e *CD* e unha corda *CB*. Sobre o mesmo debuxo traza as figuras obtidas facendo xirar a figura formada polos dous diámetros e a corda, con xiros de centro *O* e ángulos 45°, 90°, 135°, 180°, 225°, 270° e 315°. Terás feito a composición de xiros de 45° varias veces.

23. A letra H ten centro de simetría? Indica tres obxectos cotiáns que teñan simetría central.

24. Sobre uns eixes cartesianos representa os puntos *A* (2, 6), *B* (–2, 5), *C* (5, 3) e os seus simétricos respecto á orixe *A', B'* e *C'*. Que coordenadas teñen *A'*, *B'* e *C'*?

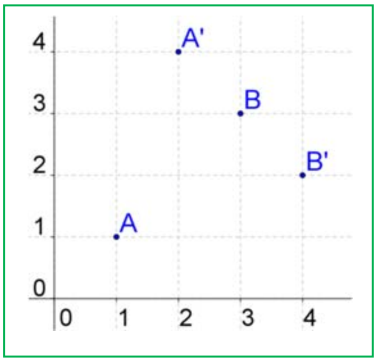
25. Debuxa no teu caderno o triángulo de vértices *A* (3, 7), *B* (5, –5) e *C* (7, 2). Debuxa o triángulo que se obtén ao xiralo con centro no punto *D* (8, 8) un ángulo de 180°. É unha simetría central. Cales son as coordenadas dos vértices *A'*, *B'* e *C'* do novo triángulo?

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

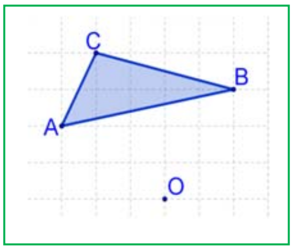
26. Debuxa nun sistema de referencia un punto *P* e o seu simétrico *P’* respecto da orixe. Se as coordenadas de *P* son (*x*, *y*), cales son as de *P’*?

27. Dado o triángulo *A* (3, –4), *B* (5, 6), *C* (–4, 5), calcula as coordenadas dos vértices do triángulo simétrico respecto da orixe.

28. Debuxa un triángulo equilátero *ABC* e con centro no vértice *A* aplícalle un xiro de ángulo 60°. O triángulo dado e o transformado, que figura forman? Volve aplicar ao triángulo transformado o mesmo xiro de centro *A*, que xiros estiveches facendo? Cantos xiros debes aplicar ao triángulo inicial para que volva ocupar a posición inicial?



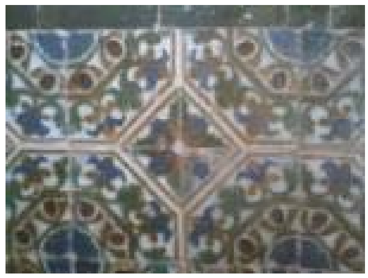
29. Debuxa no teu caderno os catro puntos da figura. Determina, con regra, compás e transportador, o centro e o ángulo de xiro sabendo que os puntos *A* e *B* se transformaron mediante un xiro en *A'* e *B'*.



30. Debuxa a imaxe que resulta de aplicar ao triángulo da figura o xiro de centro *O* que transforma o punto *A* no punto *B*.

31. Utiliza un transportador de ángulos, regra e compás, para xirar unha recta 60° respecto a un punto *O* exterior a ela (é suficiente xirar dos puntos da recta). Mide os ángulos que forman as dúas rectas, a inicial e a xirada. Observas algunha regularidade? Investiga un método para xirar unha recta transformando un só punto. Que punto debes elixir e porque?

32. Xogo para dous xogadores: Forma sobre a mesa un polígono regular utilizando moedas (ou fichas ou bólas de papel) como vértices. Alternativamente cada xogador retira ou unha ou dúas moedas adxacentes. Gaña quen retire a última moeda. (***Axuda***: é un xogo de estratexia gañadora que podes descubrir utilizando a simetría central).



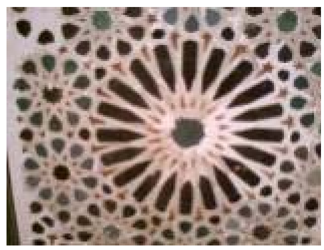
33. No deseño deste mosaico utilizáronse xiros no plano. Non o vemos completo, pero podemos imaxinar que fora infinito. Indica os centros de xiro que vexas. No centro da figura hai un centro de xiro clarísimo, de que ángulo? Hai xiros de 45°? Cales son os seus centros de xiro? Hai centros de simetría? Indícaos.

34. Para cada un dos seguintes polígonos indica o centro de xiro e o mínimo ángulo de xiro que deixan invariantes a cada un deles:

a) Pentágono regular	b) Hexágono regular	c) Decágono regular
d) Triángulo equilátero	e) Rectángulo	f) Cadrado
g) Rombo	h) Paralelepípedo	i) Octógono regular

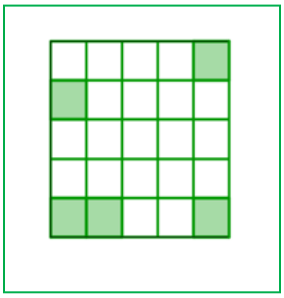
35. Na simetría central de centro (2, 3) vimos que o simétrico do punto *A* (8, 1) é o punto *A’* (–4, 5). Calcula os simétricos dos puntos *B* (12, 7), *C* (9, 10), *D* (5, 8) e *E* (7, 6).

36. Indica se o mosaico da Alhambra da marxe ten centro de xiro, e determina cal é o menor ángulo de xiro que fai que o mosaico se superpoña (sen ter en conta os cambios de cor). Hai centros de simetría?



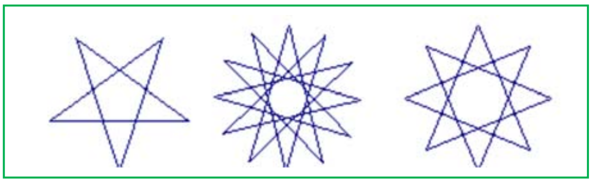
Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

37. Con axuda de papel cuadriculado transforma mediante unha simetría central, unha recta, unha circunferencia, un segmento, un triángulo, dúas rectas paralelas e dúas rectas perpendiculares. En que se transforman? Analiza os resultados.



38. Que número mínimo de cadrados é necesario pintar de verde para que o cadrado grande teña un centro de simetría?

39. Xiramos o punto A (3, 5) e obtemos o punto A' (7, –2). Determina o centro de xiro e o ángulo utilizando regra, compás e transportador de ángulos.

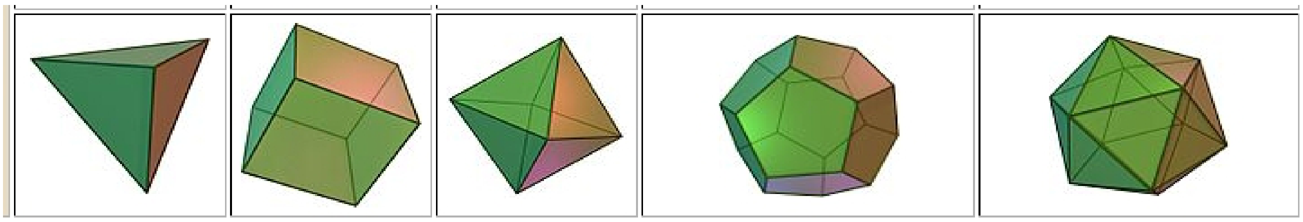


40. Cales dos polígonos estrelados da figura da marxe teñen centro de simetría? Indica o centro de xiro e o mínimo ángulo de xiro que deixa invariantes a cada un deles.

41. Determina tres obxectos cotiáns que teñan algún eixe de xiro.

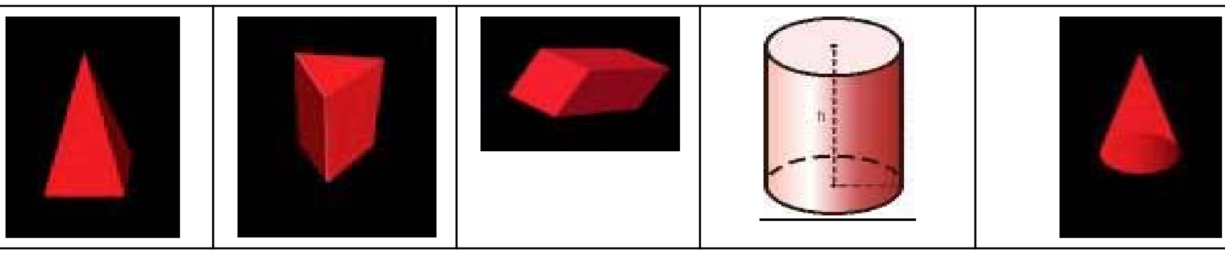
42. Observa esta torre mudéxar de Teruel. Está deseñada utilizando xiros no espazo. Cal é o seu eixe de xiro? E o ángulo de xiro?

43. Pensa nos cinco poliedros regulares. Uns teñen simetría central no espazo, outros non. Cales a teñen?



TETRAEDRO HEXAEDRO OCTAEDRO DODECAEDRO ICOSAEDRO

44. Pensa agora nos seguintes corpos xeométricos: unha pirámide cuadrangular regular, un prisma triangular regular, un prisma romboidal oblicuo, un cilindro e un cono. Cales poden formarse mediante xiros no espazo? Cal é o seu eixe de xiro? Cales teñen simetría central e cales non?



Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

Simetrías

45. Debuxa no teu caderno un sistema de referencia e unha letra B. Debuxa a letra simétrica de B respecto do eixe de abscisas e respecto do eixe de ordenadas.

46. Clasifica as letras maiúsculas do alfabeto, a) nas que son simétricas respecto dun eixe de simetría horizontal e un eixe de simetría vertical. b) nas que só son simétricas respecto dun eixe de simetría vertical, c) nas que só o son respecto do eixe de simetría horizontal, e d) nas que non teñen ningún eixe de simetría. e) Comproba que as letras que teñen dous eixes de simetría teñen centro de simetría. A razón xa a sabes: a composición de dúas simetrías de eixes secantes é un xiro.

47. Cales das seguintes sucesións de letras teñen un único eixe de simetría? Cales teñen dous eixes? Cales ningún? Cales teñen centro de simetría?

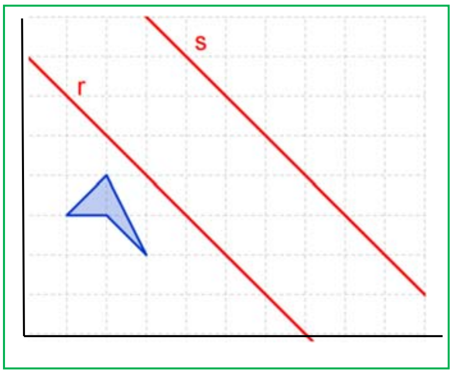
a) ONO b) NON c) DODO d) OIO e) HEMO f) HOOH

48. Indica os eixes de simetría das seguintes figuras:

a) Cadrado. b) Triángulo equilátero. c) Trapecio isósceles. d) Hexágono.

e) Circunferencia. f) Rectángulo. g) Rombo. h) Pentágono.

49. Considera que os vértices do cuadrilátero da figura teñen de coordenadas: (1, 3), (2, 3), (3, 2) e (2, 4). Aplícalle dúas simetrías axiais de eixes paralelos, a primeira respecto ao eixe *r* e a segunda respecto ao eixe *s*.

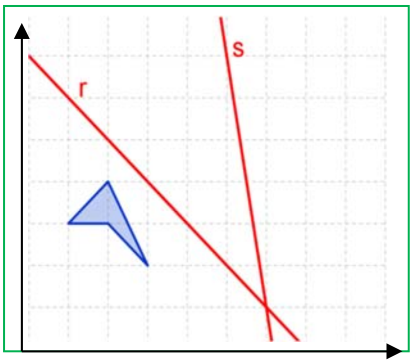


a) Indica as coordenadas dos vértices das figuras transformadas por esta composición de simetrías.

Se chamamos *C* ao cuadrilátero inicial, *C'* ao seu simétrico respecto ao eixe *r* e *C''* ao simétrico de *C'* respecto ao eixe *s*:

b) Que isometría nos permite trasformar directamente *C* en *C''*. *c)* Que elementos a definen? d) Que ocorre se aplicamos as dúas simetrías en distinta orde, primeiro respecto ao eixe *s* e despois respecto ao eixe *r*? Cales son agora as coordenadas dos vértices da figura *C'''* transformada?

50. Considera que os vértices do cuadrilátero da figura teñen de coordenadas: (1, 3), (2, 3), (3, 2) e (2, 4). Aplícalle dúas simetrías axiais de eixes secantes, a primeira respecto ao eixe *r* e a segunda respecto ao eixe *s*.



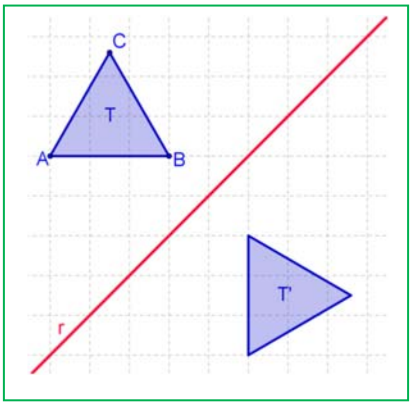
a) Indica as coordenadas dos vértices das figuras transformadas pola composición de simetrías.

b) Se chamamos *C* ao polígono inicial, *C'* ao simétrico respecto ao eixe *r* e *C''* ao simétrico de *C'* respecto ao eixe *s*: Que isometría nos permite trasformar directamente *C* en *C''*? Que elementos a definen?

c) Que ocorre se aplicamos as dúas simetrías en distinta orde, primeiro respecto ao eixe *s* e despois respecto ao eixe *r*? Que isometría temos agora? Que elementos a definen?

d) Indica as coordenadas dos vértices da figura transformada se primeiro aplicamos a simetría de eixe *s e* logo a de eixe *r*.

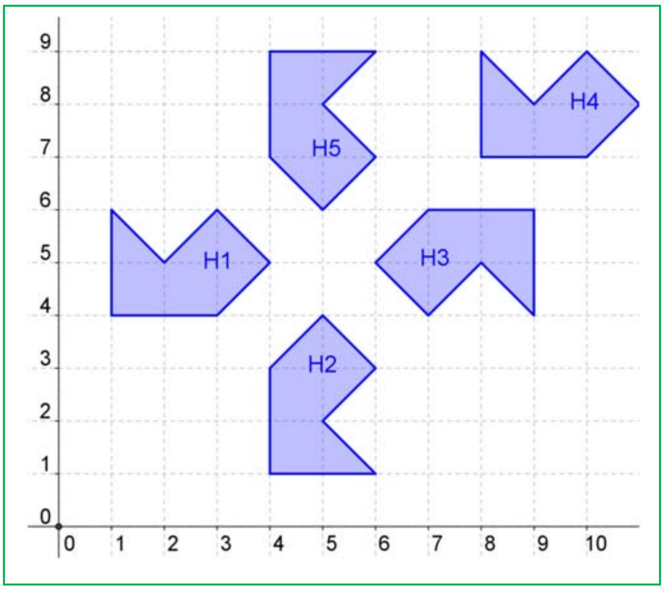
51. Debuxa nun papel o contorno dunha figura irregular, en polo menos cinco posicións. (Se no se che ocorre ningunha figura, debuxa unha letra G). a) Son iguais estas figuras? Explica o teu razoamento. b) Como podes pasar dunha figura á outra? c) Colorea coa mesma cor todas as figuras que podes acadar desde a posición inicial, desprazando a figura sen levantala. Utiliza outra cor para as restantes. Pódese pasar sempre dunha figura á outra da mesma cor, deslizando a figura sen darlle a volta? Cambian as dimensións da figura?



52. O triángulo equilátero T da figura transformouse no triángulo T' mediante unha simetría axial de eixe *r*. a) Copia o debuxo no teu caderno e nomea no debuxo a *A'*, *B'* e *C'*, que son os transformados de *A, B e C* respectivamente. b) Encontra un xiro que transforme T en T', indicando o centro e o ángulo de xiro, cales son agora os transformados dos vértices *A, B e C*?

53. Libro de espellos: Utiliza un libro de espellos para obter simetrías. Podes construír un con dous rectángulos de metacrilato unidos con cinta de embalar. Mira polo libro de espellos un segmento, unha circunferencia, diferentes figuras…

Problemas



54. Indica os puntos invariantes e as rectas invariantes en cada un dos seguintes movementos: a) Unha translación segundo o vector (1, 3); b) Unha simetría axial respecto ao eixe de ordenadas; c) Unha simetría central respecto ao centro de coordenadas.

55. Na figura adxunta o hexágono 1, denominado H1, cambiou de posición mediante movementos. A) Indica o tipo de movemento: translación, xiro ou simetría que transforma H1 en cada un dos outros hexágonos. B) Determina, en cada caso, os elementos básicos que definen cada transformación indicando as coordenadas de cada un dos vértices de H1, que coordenadas ten en cada un dos transformados, e se é posible, xeraliza.

56. Sabemos que as translacións non deixan ningún punto invariante, pero, a) deixa alguna recta invariante?, b) a simetría central deixa un punto invariante, o centro, pero, que rectas deixa invariantes unha simetría central no plano? E unha simetría central no espazo?; c) unha simetría axial deixa invariantes todos os puntos do seu eixe, que é unha recta invariante de puntos invariantes, pero que outras rectas invariantes deixa unha simetría axial? E que outros puntos?; d) unha simetría especular, no espazo, deixa un plano invariante de puntos invariantes, o plano de simetría, que outros planos deixa invariantes? Que outras rectas? Que outros puntos?

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

57. Copia no teu caderno e completa as seguintes táboas:

Táboa I: no plano	Puntos invariantes	Rectas invariantes	Rectas invariantes de puntos invariantes
Translación			
Simetría central			
Xiro			
Simetría axial			
Simetría con deslizamento			

Táboa II: no espazo	Puntos invariantes	Rectas invariantes	Planos invariantes
Translación			
Simetría central			
Xiro			
Simetría especular			
Simetría con deslizamento			

58. Debuxa o triángulo T de vértices $A(2, 1)$, $B(4, 2)$ e $C(1, 3)$

a) Aplica a T unha translación segundo o vector $\boldsymbol{u} = (–3, 2)$, chama T' ao seu transformado e indica as coordenadas dos seus vértices.

b) Debuxa o triángulo T'' que resulta de aplicar a T un xiro de 270° respecto á orixe de coordenadas e indica as coordenadas dos seus vértices.

59. Debuxa o cadrado *K* de vértices $A(2, 1)$, $B(4, 2)$ $C(1, 3)$ e $D(3, 4)$.

a) Aplica a *K* unha translación segundo o vector $\boldsymbol{u} = (–3, –1)$, chama *K*' ao seu transformado e indica as coordenadas dos seus vértices.

b) Debuxa o cadrado *C*'' que resulta de aplicar a *C* unha simetría central respecto ao punto (3, 0) e indica as coordenadas dos seus vértices.

Problemas de ampliación

60. Transforma a letra L mediante dúas isometrías consecutivas. Podes obter o resultado final mediante unha única isometría? Analiza posibles situacións.

61. Prega unha tira de papel como un acordeón. Fai algúns cortes e desprégaa. Confeccionaches un friso. Sinala nel todas as isometrías. Ensaia outros deseños de frisos.

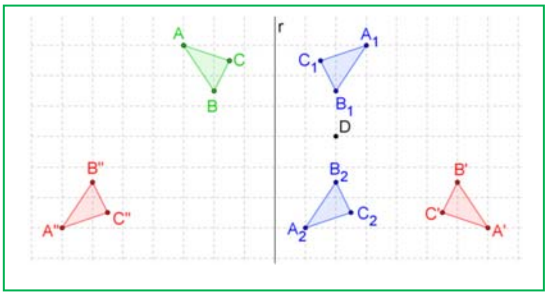
Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

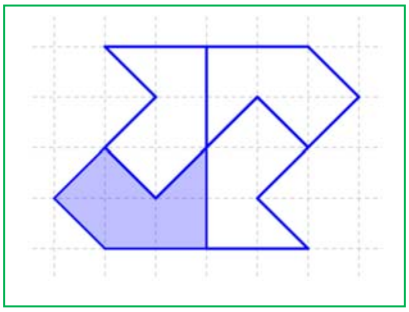
62. A composición de isometrías non é conmutativa. Observa a figura adxunta:

a) Determina a isometría que transforma o triángulo *ABC* en $A_1B_1C_1$ e a que transforma este en $A_2B_2C_2$

b) Indica a isometría que transforma o triángulo *ABC* en *A'B'C'* e a que transforma este en *A''B''C''*.

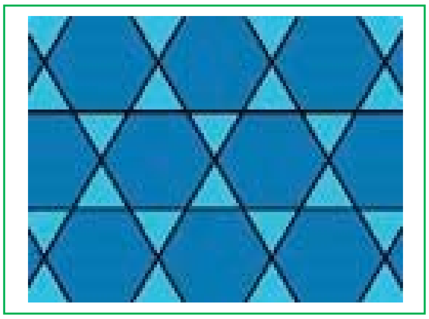
c) Que conclusión obtés?





63. Indica as isometrías que hai que aplicar á figura coloreada en azul para obter a figura completa. Determina os elementos que definen cada isometría. Colorea de distinta cor cada un dos catro polígonos e constrúe un friso.

64. 1) A letra A ten un eixe de simetría vertical. 2) A letra H ten dous eixes de simetría, un vertical e o outro horizontal, ademais dun centro de simetría. 3) A letra Z ten centro de simetría, pero ningún eixe de simetría. 4) A letra E ten un eixe de simetría horizontal. 5) A letra F non ten centro de simetría nin ningún eixe de simetría. Clasifica as letras do **abecedario** nestes grupos, no primeiro grupo estarán as que teñen un eixe de simetría vertical, como a letra A; no segundo as que teñen dous eixes de simetría, un vertical e o outro horizontal, como a letra H; no terceiro as que só teñen centro de simetría como a letra Z, e no cuarto as que como a letra E teñen un eixe de simetría horizontal. Por último, nun quinto grupo as que non teñen ningún tipo de simetría como a letra F.



65. Análise dun mosaico: Debuxa no teu caderno unha trama de triángulos, nela un esquema do mosaico da marxe e sinala no teu debuxo todos os eixes de simetría, os centros de xiro e os vectores de translacións polos cales o transformado dun punto do mosaico (suposto que se prolonga ata o infinito) é tamén un punto do mosaico.

a) Hai xiros de 60°? Se os hai marca os centros destes xiros cun asterisco *.

b) Hai xiros de 180°? Se os hai marca os centros destes xiros cun círculo o.

c) Sinala os eixes de simetría que encontres cunha liña de puntos.

d) Debuxa á marxe os vectores de translación, horizontais e verticais, que haxa.

e) Deseña o teu propio mosaico que manteña os mesmos movementos facendo algo sinxelo (un arco, unha poligonal) que se vaia movendo.

66. Analiza estoutro mosaico. Indica as transformacións que temos que aplicar ao elemento mínimo do mosaico adxunto para deixalo invariante. Indica tamén os elementos que as caracterizan.

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

67. Na animación seguinte observa a forma de obter un mosaico.

http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/195375_am_1.swf

Tomou unha cela unidade de 4 cadradiños, seleccionou un motivo mínimo… Indica que simetrías utilizou, que xiros e que translacións.

68. Determina os eixes e centros de simetría das seguintes gráficas de funcións. Sinala cales son pares e cales impares. (Debuxa previamente a súa gráfica).

a) $y = x^2$ *b)* $y = x^3$ *c)* $y = x^4$ *d)* $y = x$

69. Un tetraedro regular ten 6 planos de simetría, debúxaos no teu caderno e indica a forma de determinalos.

70. Un octaedro ten 9 planos de simetría, debúxaos, 6 pasan polos puntos medios de arestas opostas, sabes caracterizar os outros 3? Intenta encontrar planos de simetría nun dodecaedro e nun icosaedro.

71. Un ser humano é máis o menos simétrico. Os mamíferos, paxaros e peixes tamén o son. Teñen un plano de simetría. A) E as estrelas de mar como a da figura, teñen un plano de simetría? B) Teñen máis? Cantos? C) Teñen un eixe de xiro? De qué ángulos? D) Teñen simetría central? E) Debuxa no teu caderno unha estrela de cinco puntas e indica os seus eixes de simetría e o seu centro de xiro. (É un grupo de Leonardo D_5).

72. Un prisma recto de base un rectángulo, ten simetría central? Ten planos de simetría? Cantos? Descríbeos. Ten eixes de xiro? Descríbeos. De que ángulos?

73. Unha pirámide regular de base un triángulo equilátero, ten simetría central? Ten planos de simetría? Cantos? Descríbeos. Ten eixes de xiro? Descríbeos. De que ángulos?

74. Describe as **isometrías** que deixan invariantes aos seguintes corpos xeométricos, analizando os seus elementos:

a) Esfera b) Cilindro recto c) Prisma regular de base cadrada

d) Cono e) Cilindro oblicuo f) Pirámide recta de base un triángulo equilátero

75. Recorta un triángulo isósceles obtusángulo. Colócao no libro de espellos de forma que dous lados queden apoiados na superficie dos espellos e o outro sobre a mesa. Move as páxinas do libro de forma que vexas distintas pirámides cuxa base son polígonos regulares. Isto permítenos estudar o xiro das pirámides, de que ángulo é? (Podes construír un libro de espellos con dous espellos pequenos ou dúas follas de metacrilato, pegados con cinta de embalar adhesiva).

76. Pensa nos poliedros regulares. Copia a seguinte táboa no teu caderno e complétaa:

POLIEDRO	Ten centro de simetría? SI/NON	Ten eixes de xiro? SI/NON	Cantos eixes de xiro ten? De que ángulos?	Ten planos de simetría? SI/NON	Cantos planos de simetría ten?
Tetraedro					
Cubo					
Octaedro					
Dodecaedro					
Icosaedro					

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

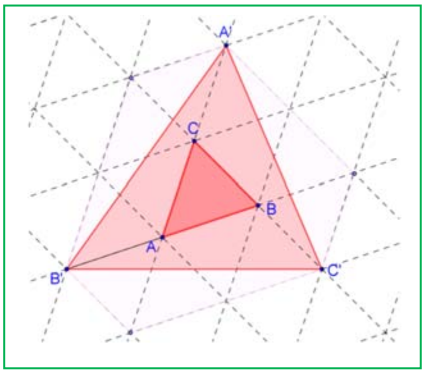
77. Contesta ás seguintes preguntas xustificando as respostas.

a) É posible que unha figura teña dous eixes de simetría paralelos?

b) A intersección de dous eixes de simetría, é sempre un centro de simetría?

c) Por que un espello cambia a dereita pola esquerda e non cambia o de arriba polo de abaixo?

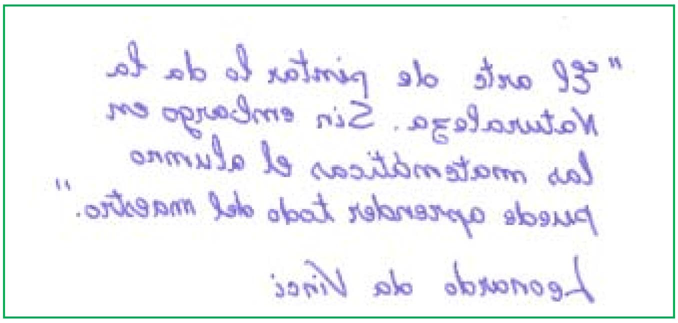
d) É certo que dous círculos simétricos respecto a un plano son sempre cortes dunha esfera?



78. A partir dun triángulo calquera *ABC* construímos o triángulo *A'B'C'*, no que *A'* é o simétrico de *A* con respecto ao centro *C*, *B'* é o simétrico de *B* con respecto ao centro *A* e *C'* é o simétrico de *C* con respecto ao centro *B*. Utiliza a trama de triángulos para calcular a área do triángulo *A'B'C'* sabendo que o valor da área do triángulo *ABC é* 1 u^2.

79. Caleidoscopios diédricos: Miraches algunha vez por un caleidoscopio? Están formados por un tubo de cartón, dous espellos formando ángulo e anaquiños de plástico ou cristaliños que combinan as súas imaxes dando lugar a preciosas composicións cheas de simetrías. Fabrica un e estuda os xiros e simetrías que observes.

80. Simetrías pregando papel: a) Dobra unha folla de papel e recorta unha figura. Ao desdobrar obtés a figura simétrica. b) Dobra unha folla de papel mediante dúas dobras perpendiculares (Terás que facer coincidir a dobra consigo mesma). Mantendo o papel dobrado recorta unha figura. Ao desdobrar, a figura obtida terá unha dobre simetría. c) Con outra folla de papel, volve dobrar mediante dúas dobras perpendiculares. Dobra de novo pola metade o ángulo recto obtido. Recorta os deseños que máis che gusten. Estás construíndo modelos de folerpa. Cantos eixes de simetría obtiveches? d) Intenta agora dobrar a folla de papel para obter eixes de simetría que formen ángulos de 60° e de 30°. Utiliza a túa imaxinación para obter novos deseños de folerpas.



81. A simetría na escritura de Leonardo Da Vinci: Sabías que se miras o escrito por Leonardo nun espello podes lelo con facilidade? É un bo exemplo de simetría especular. Le o seguinte texto de Leonardo.

82. Utiliza a propiedade da composición de dúas simetrías de eixes secantes para demostrar que un ángulo inscrito nunha circunferencia é a metade do central que abrangue o mesmo arco. *Axuda*: Traza a circunferencia, un ángulo inscrito e o seu central. Traza dúas rectas perpendiculares polo centro da circunferencia aos lados do ángulo inscrito.

83. Estuda as isometrías que deixan invariante a un triángulo equilátero. Nomea os seus vértices e os seus eixes de simetría. a) Aplica ao triángulo un xiro de 120° e logo unha simetría. Podes obter o mesmo resultado cunha única transformación? b) Repite o mesmo cun xiro de 240° e outra simetría. c) Comproba que sempre a composición dun xiro por unha simetría é outra simetría. d) Fai agora un xiro de 120° e outro de 240°, que obtés? e) E con dous xiros de 240°? f) Comproba que a composición de dous xiros do mesmo centro é sempre un xiro (ou a identidade).

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

84. Ao pasear pola cidade, mirar a aula, en todo o que nos rodea podemos ver como a Xeometría permite explicalo. Mira este mosaico. Busca un motivo mínimo, é dicir, un trozo de mosaico que che permite, mediante movementos, recompoñelo. No deseño deste mosaico, utilizáronse simetrías?

- Hai simetrías de eixe vertical?
- Hai simetrías de eixe horizontal?
- Hai outros eixes de simetría? Cales?
- Hai xiros de 90°?
- Hai xiros de 45°?
- Hai translacións?

85. Deseña no teu caderno un motivo mínimo (se non se che ocorre ningún, usa a letra L), e utiliza as mesmas simetrías, xiros e translacións que se usan neste mosaico para facer o teu propio deseño de mosaico.

Observa o teu deseño e responde ás seguintes preguntas:

- Se compós dúas simetrías de eixes paralelos, que movemento obtés? É outra simetría? É un xiro? É unha translación? Indica no teu deseño de mosaico en que ocasión compuxeches dúas simetrías de eixes paralelos e describe completamente o movemento que obtiveches.
- Se compós dúas simetrías de eixes secantes, que movemento obtés? É outra simetría? É un xiro? É unha translación? Indica no teu deseño en que ocasión compuxeches dúas simetrías de eixes secantes e describe completamente o movemento que obtiveches.

86. Mira estoutro mosaico. É o famoso mosaico nazarí dos ósos. Non imos ter en conta a cor. Para deseñar o óso, debuxa no teu caderno un cadrado. Mira a figura. Corta nos lados verticais un trapecio e colócao sobre os lados horizontais. Xa tes o óso. É simétrico? Ten un eixe de simetría vertical e outro horizontal, polo que poderiamos tomar como motivo mínimo a cuarta parte do óso.

- Para pasar dun óso de cor a un óso branco, que transformación se usou?
- Debuxa no teu caderno, en cor vermella, eixes de simetría verticais e en cor azul, eixes de simetría horizontais.
- Sinala, cun asterisco (*), centros de xiro de 90° e cun círculo, (o), centros de simetría.
- Utilizando o óso debuxa no teu caderno o mosaico completo.

87. Debuxa no teu caderno unha letra F maiúscula e traza tamén dúas rectas m e n que formen un ángulo de 30° e se corten nun punto O. Debuxa o seu transformado por:

a) Un xiro de centro o punto O e ángulo 60°.

b) A simetría de eixe n.

c) A simetría de eixe m.

d) A composición da simetría de eixe n coa de eixe m.

e) Compara o resultado obtido no apartado a) co do apartado d). Que observas?

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

AUTOAVALIACIÓN

1. Coa translación de vector **u** = (–3, 8) trasladamos o punto *P* (5, –4) ata o punto *P'* e as coordenadas de *P´* son:

a) (8, 4) b) (2, 4) c) (2, 12) d) (6, 3).

2. Ao trasladar *A* (–1, 8) ata *A'* (4, 6) utilízase o vector **u**:

a) **u** = (3, 2) b) **u** = (3, –2) c) **u** = (5, –2) d) **u** = (5, 14).

3. A transformación que leva o punto *A* (2, 0) no punto *A'* (0, 2) **non** pode ser:

a) Un xiro de centro a orixe e ángulo 90º.

b) Unha translación de vector **u** = (2, 2).

c) Un xiro de centro a orixe e ángulo 270º.

d) Unha simetría de eixe y = *x*.

4. A transformación identidade tamén se chama:

a) Simetría central b) Simetría axial c) Xiro de 180º d) Translación de vector nulo (0, 0)

5. Como debe ser un triángulo para ter máis de dous eixes de simetría?

a) rectángulo b) isósceles c) equilátero d) rectángulo isósceles.

6. A simetría central no plano é un xiro de:

a) 360º b) 180º c) 90º d)0º

7. No plano, a composición de dúas simetrías de eixes secantes sempre é:

a) unha translación b) un xiro c) outra simetría d) a simetría central.

8. As coordenadas do punto simétrico ao punto *A* (3, 7) respecto do eixe de ordenadas son:

a) *A'* (–3, 7) b) *A'* (3, –7) c) *A'* (–3, –7) d) *A'* (7, 3)

9. Indica cal das seguintes letras **non** ten simetría central:

a) O b) H c) S d) D

10. Sempre se obtén un xiro facendo sucesivamente:

a) Dous xiros de distinto centro.

b) Dúas simetrías de eixes secantes.

c) Un xiro e unha simetría.

d) Dúas simetrías de eixes paralelos.

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: María Molero; Milagros Latasa; Adela Salvador; Banco de Imaxes de INTEF

Matemáticas orientadas ás ensinanzas académicas

3º B da ESO

Capítulo 9: Revisión de Xeometría no espazo. Globo terráqueo

www.apuntesmareaverde.org.es

Autoras: Milagros Latasa Asso e Fernanda Ramos Rodríguez

Revisores: Javier Rodrigo e Nieves Zuasti

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

Índice

1. PERPENDICULARIDADE E PARALELISMO NO ESPAZO

1.1. POSICIÓNS RELATIVAS NO ESPAZO
1.2. ÁNGULOS DIEDROS, TRIEDROS E POLIEDROS
1.3. PERPENDICULARIDADE NO ESPAZO

2. POLIEDROS

2.1. POLIEDROS. ELEMENTOS DUN POLIEDRO
2.2. POLIEDROS CONVEXOS. TEOREMA DE EULER
2.3. POLIEDROS REGULARES
2.4. DUAL DUN POLIEDRO REGULAR
2.5. PRISMAS
2.6. PARALELEPÍPEDOS
2.7. TEOREMA DE PITÁGORAS NO ESPAZO
2.8. PIRÁMIDES

3. ÁREA LATERAL E TOTAL DUN POLIEDRO

3.2. ÁREA TOTAL DUN POLIEDRO REGULAR
3.3. ÁREAS LATERAL E TOTAL DUN PRISMA
3.4. ÁREAS LATERAL E TOTAL DUNHA PIRÁMIDE E DUN TRONCO DE PIRÁMIDE

4. CORPOS DE REVOLUCIÓN

4.1. CORPOS DE REVOLUCIÓN. CILINDROS, CONOS E ESFERAS
4.2. A ESFERA. INTERSECCIÓNS DE PLANOS E ESFERAS
4.3. ÁREAS LATERAL E TOTAL DUN CILINDRO
4.4. ÁREAS LATERAL E TOTAL DUN CONO
4.5. ÁREAS LATERAL E TOTAL DUN TRONCO DE CONO
4.6. ÁREA TOTAL DUNHA ESFERA

5. VOLUME DUN CORPO XEOMÉTRICO

5.1. PRINCIPIO DE CAVALIERI
5.2. VOLUME DUN PRISMA E DUN CILINDRO
5.3. VOLUME DUNHA PIRÁMIDE E DUN CONO
5.4. VOLUME DUN TRONCO DE PIRÁMIDE E DUN TRONCO DE CONO
5.5. VOLUME DA ESFERA

6. GLOBO TERRÁQUEO

6.1. O GLOBO TERRÁQUEO
6.2. LONXITUDE E LATITUDE. COORDENADAS XEOGRÁFICAS
6.3. FUSOS HORARIOS

Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

Resumo

Moitas plantas distribúen as súas flores en forma esférica buscando un aproveitamento óptimo do espazo. O átomo de ferro dispón os seus electróns en forma de cubo, os sistemas de cristalización dos minerais adoptan formas poliédricas, os panais das abellas son prismas hexagonais. Estes son algúns exemplos da presenza de corpos xeométricos na natureza.

Movémonos no espazo, camiñamos sobre un plano, observamos a liña do horizonte, habitamos e movémonos habitualmente en poliedros. A información que percibimos por medio dos nosos sentidos interpretámola en termos xeométricos. Precisamos das fórmulas de áreas e volumes dos corpos xeométricos para calcular as medidas dos mobles que caben no noso salón ou para facer un orzamento da reforma da nosa vivenda.

A Xeometría é unha das ramas máis antigas das Matemáticas e o seu estudo axúdanos a interpretar mellor a realidade que percibimos. Neste tema recordarás as fórmulas que estudaches xa o ano pasado e afondarás sobre as súas aplicacións na vida real.

ORIXE DA IMAXE: WIKIPEDIA

Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

1. PERPENDICULARIDADE E PARALELISMO NO ESPAZO

1.1. Posicións relativas no espazo

No espazo de tres dimensións en que nos movemos, os elementos xeométricos máis sinxelos son puntos, rectas e planos. O noso primeiro obxectivo é describir as posicións que pode presentar calquera parella destes elementos. Trata de imaxinalas antes de ler.

Distinguiremos varios casos:

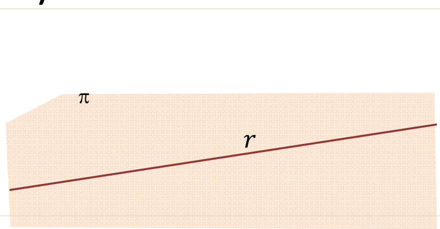
a) **Punto – recta:**

Pode ser que o punto pertenza á recta ou que sexa exterior a ela.

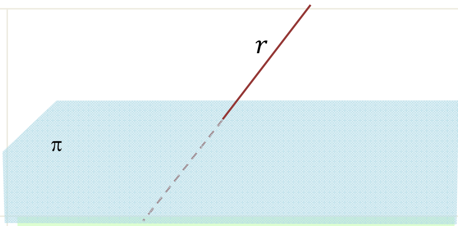
b) **Punto – plano:**

O mesmo ocorre cun punto e un plano: só hai dúas posicións posibles, o punto está no plano ou fóra do mesmo.

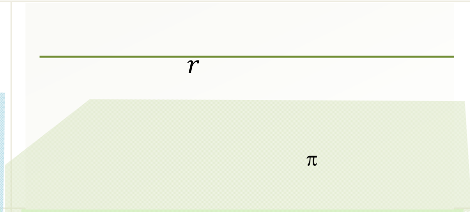
c) **Plano – recta:**



r está contida no plano



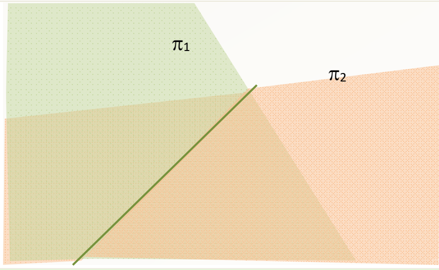
A recta *r* e o plano π córtanse nun punto



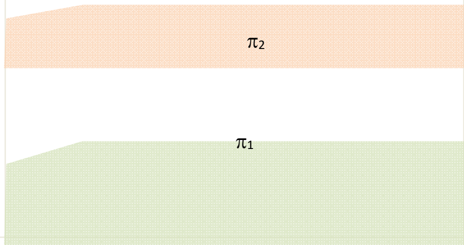
A recta *r* e o plano π son paralelos

d) **Plano- plano:**

π_1 e π_2 son iguais e todos os seus puntos coinciden.



π_1 e π_2 son secantes. Teñen en común todos os puntos dunha recta

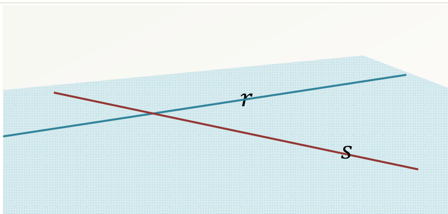


π_1 e π_2 son paralelos. Non teñen ningún punto común

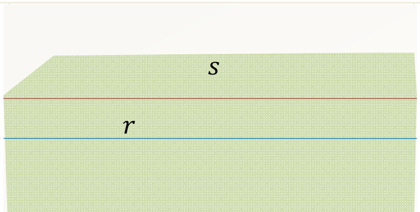
e) **Recta - recta:**

Dúas rectas no espazo poden ser *coplanarias* se é posible debuxalas nun mesmo plano ou *non coplanarias* no outro caso.

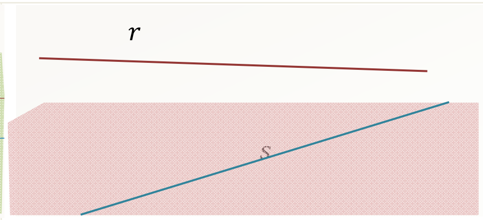
Se dúas rectas son coplanarias poden ser *paralelas*, se teñen a mesma dirección; *secantes,* se teñen un punto común, ou *coincidentes* se teñen comúns todos os seus puntos. Se dúas rectas son non coplanarias non teñen ningún punto común e dise que as dúas rectas *se cruzan.*



r e *s* son secantes.



r e *s* son paralelas.

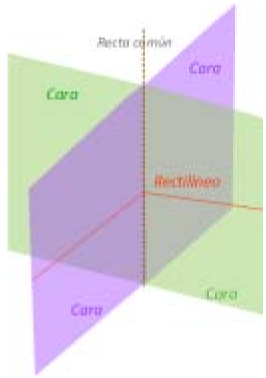


r e *s* crúzanse.

Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

1.2. Ángulos diedros, triedros e poliedros

Todo plano divide ao espazo en dous semiespazos. Dous planos que se cortan quedan divididos en catro semiplanos que pasan por unha mesma recta e que á súa vez dividen ao espazo en catro rexións.



Cada unha das rexións do espazo comprendida entre dous semiplanos que teñen unha recta común, chámase *ángulo diedro*. Os semiplanos que o definen chámanse *caras* do ángulo diedro e a recta común *aresta.*

Se nun diedro trazamos dúas perpendiculares á aresta no mesmo punto, situadas cada unha delas nunha cara, o ángulo que forman estas perpendiculares chámase *ángulo rectilíneo do diedro.*

Un ángulo poliedro é a rexión do espazo limitada por tres ou máis semiplanos que son secantes dous a dous e que teñen un punto común que se chama *vértice*. Cada semiplano é unha cara do poliedro e as rectas intersección das caras son as *arestas* do ángulo poliedro.

A suma dos ángulos dos diedros que forman un ángulo poliedro debe ser menor que 360 º.

No caso de que un ángulo poliedro teña exactamente tres caras chámase *triedro*.

Exemplo:

- Observa calquera das esquinas do teito da habitación na que estás. Cada unha delas é o vértice dun triedro no que as caras son dúas paredes consecutivas e o teito.

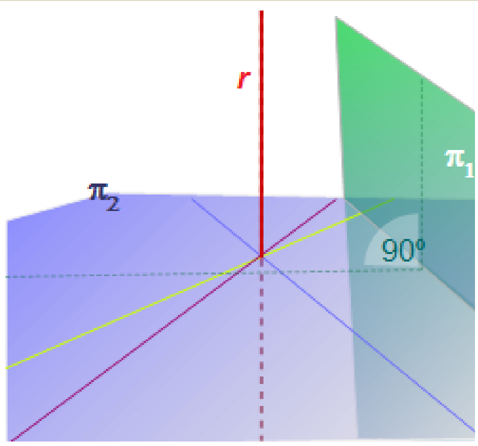
1.3. Perpendicularidade no espazo

No espazo debemos tratar varios casos de perpendicularidade.

Dous planos son perpendiculares se os catro ángulos rectilíneos que determinan son ángulos rectos.

Unha recta é perpendicular a un plano se o corta e é perpendicular a calquera recta que estea contida no plano.

Dúas rectas son *perpendiculares* se forman un ángulo recto. É o caso máis sorprendente por dúas razóns en primeiro lugar no espazo dúas rectas poden ser perpendiculares sen cortarse e en segundo hai infinitas rectas perpendiculares a unha recta *r* dada e que pasan por un punto P dado. Todas elas están contidas nun plano perpendicular á recta *r* que pasa polo punto P.



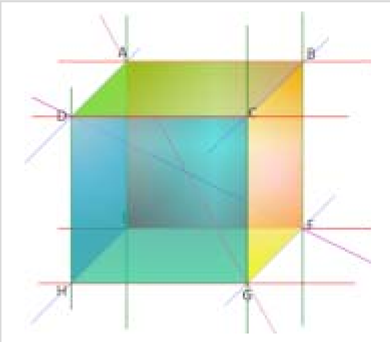
r é perpendicular a π_2 e a todas as rectas contidas en π_2.

Os planos π_1 e π_2 son perpendiculares

Actividades resoltas

- *Busca un exemplo na figura de:*

a) Planos paralelos. b) Planos perpendiculares. c) Rectas paralelas. d) Rectas perpendiculares e coplanarias. e) Rectas perpendiculares e non coplanarias. f) Recta e plano paralelos.



a) O plano que contén a cara *ABCD* é paralelo ao plano que contén á cara *EFGH*.

b) O plano que contén a cara *ABCD* é perpendicular aos planos que conteñen as caras *DCGH*, *CBFG*, *ABFE* e *ADHE*.

c) A recta que pasa por *A* e *B* é paralela á recta que pasa por *D* e *C*, á recta que pasa por *E* e *F*, e á recta que pasa por *H* e *G*.

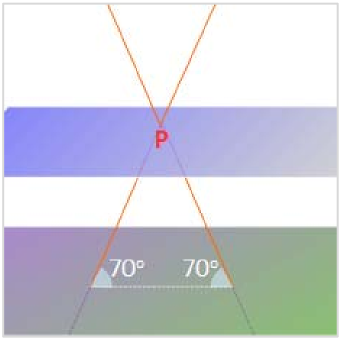
d) A recta que pasa por *H* e *G* é perpendicular á recta que pasa por *G* e *F*, e ambas as dúas están no plano que contén á cara *EFGH*, polo que son tamén coplanarias.

e) A recta que pasa por *H* e *G* é perpendicular á recta que pasa por *A* e *D*. Estas dúas rectas pertencen a planos diferentes.

f) A recta que pasa por *A* e *B* é paralela ao plano que contén á cara *EFGH*.

- *Se dous planos paralelos determinan segmentos iguais ao cortar dúas rectas, podes afirmar que as rectas son paralelas?*

Non necesariamente. Observa a figura da dereita e daraste conta. As rectas do debuxo determinan un triángulo isósceles ao cortar a dous planos paralelos e cortarse entre si, tal e como aparece na figura. Os segmentos interceptados polos planos ao cortar ás dúas rectas son iguais, porén, as rectas non son paralelas.



Actividades propostas

1. Busca na habitación na que te encontras, exemplos de:

   a. Planos paralelos e perpendiculares.
   b. Rectas paralelas, rectas perpendiculares e coplanarias, rectas perpendiculares e non coplanarias.
   c. Recta paralela a plano, recta e plano secantes, recta contida no plano.

2. As follas dunha porta xiratoria forman entre si 5 ángulos diedros consecutivos e iguais. Canto mide cada un deles?

3. Desde un punto interior a unha sala de planta hexagonal regular trázase unha recta perpendicular a cada parede. Canto medirá o ángulo que forman dúas perpendiculares consecutivas?

4. Dous triedros teñen as tres caras iguais, pódese asegurar que son iguais? Razoa a resposta.

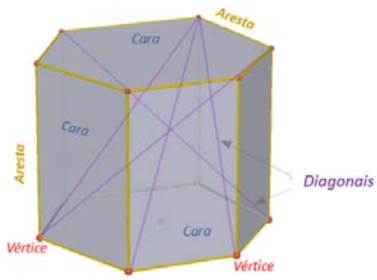
Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

2. POLIEDROS

2.1. Poliedros. Elementos dun poliedro

Un *poliedro* é unha rexión pechada do espazo limitada por polígonos.

En todo poliedro podemos considerar os seguintes elementos: *caras, arestas, vértices, ángulos diedros* e *poliedros*, así como as *diagonais*.



As *caras* son os polígonos que o limitan, as *arestas e vértices os* lados e vértices dos polígonos que forman as caras.

Os *ángulos diedros* están formados por dúas caras que teñen unha aresta común. Os *ángulos poliedros* están formados por varias caras que teñen un vértice común.
Unha *diagonal* dun poliedro é un segmento que une dous vértices pertencentes a caras diferentes.

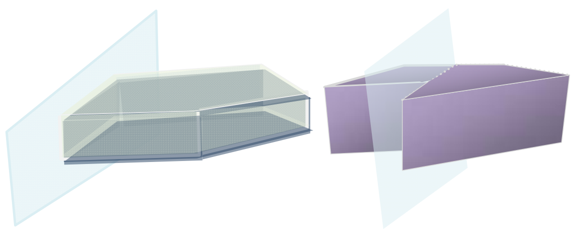
Un *plano diagonal* é un plano que contén tres vértices que non pertencen á mesma cara.

2.2. Poliedros convexos. Teorema de *Euler*

É posible clasificar poliedros atendendo a diferentes criterios. Se nos fixamos na amplitude dos seus ángulos diedros, clasifícanse en ***cóncavos e convexos***.

Un poliedro é *convexo* se o segmento que une dous puntos calquera do poliedro está dentro do mesmo. En poliedros convexos, unicamente un dos dous semiespazos que determina cada un dos planos que conteñen ás caras, contén tamén ao resto do poliedro.

Un poliedro é *cóncavo* no caso contrario. Nos poliedros cóncavos algúns dos planos que conteñen ás caras divide ao poliedro en dous corpos que pertencen a semiespazos distintos.



Poliedro convexo Poliedro cóncavo

Nos poliedros convexos cúmprese o chamado *Teorema de Euler* que relaciona as caras, vértices e arestas e afirma que en todo poliedro convexo o número de caras máis o número de vértices coincide co número de arestas máis 2. Se caras, vértices e arestas se representan polas súas iniciais, escríbese:

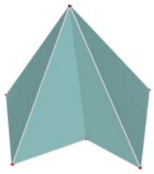
$$C + V = A + 2$$

Existen poliedros cóncavos que cumpren esta relación e poliedros cóncavos que non a cumpren.

Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

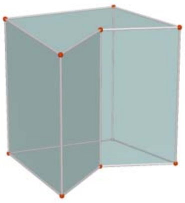
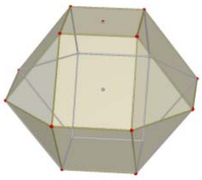
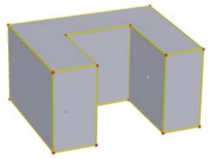
Actividades resoltas

- *Comproba que os seguintes corpos xeométricos verifican o teorema de Euler.*

 Hai dúas caras ocultas que son cuadriláteros	Este corpo xeométrico é un poliedro convexo. Ten 7 caras das cales 5 son cuadriláteros, 1 é un pentágono e 1 é un triángulo. Ten 9 vértices e para calcular o número de arestas sumamos o total de lados das caras e dividimos entre 2, xa que cada aresta é o lado de dúas caras: Nº de arestas = $\frac{5.4+5+3}{2} = 14$ *C* + *V* = 7 + 9 = 16; A + 2 = 14 + 2 = 16 Cumpre o teorema de *Euler*
 Todos os vértices están á vista	Se se ven todos os vértices, hai dúas caras ocultas: unha delas é un triángulo e a outra é un pentágono cóncavo. É un poliedro cóncavo. Ten un total de 6 caras, 6 vértices e Nº de arestas = $\frac{5+5.3}{2} = 10$ *C* + *V* = 6 + 6 = 12; A + 2 = 10 + 2 = 12 Verifica o teorema de *Euler*

Actividades propostas

5. Investiga se os seguintes corpos son poliedros e, en caso afirmativo, se cumpren o teorema de *Euler*. Indica tamén se son cóncavos ou convexos

Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

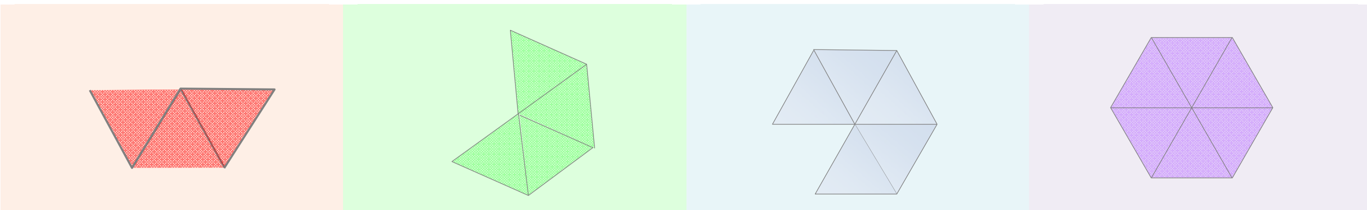
2.3. Poliedros regulares

Un poliedro regular é un poliedro que cumpre que todas as súas caras son polígonos regulares iguais e que os seus ángulos poliedros son iguais.

En todo poliedro regular coincide o mesmo número de caras en cada vértice. É sinxelo probar que só existen cinco poliedros regulares.

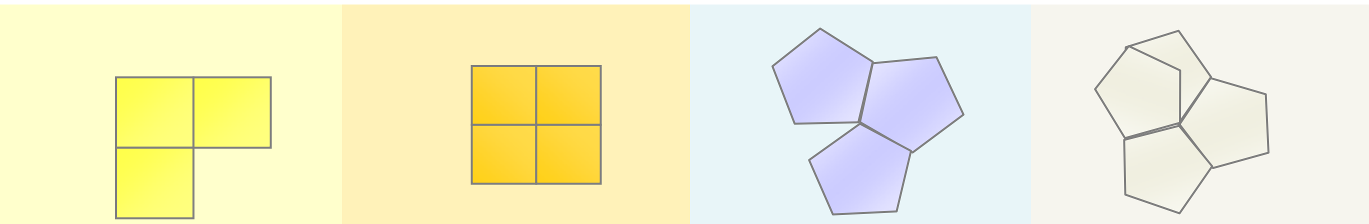
O polígono regular con menos lados é o triángulo equilátero. Busquemos os poliedros regulares que poden construírse con caras triangulares:

Como mínimo son necesarios tres triángulos por vértice e como máximo poden concorrer cinco para que sexa posible formar un ángulo poliedro



Se unimos tres triángulos equiláteros iguais por vértice, fórmase un tetraedro. O octaedro aparece ao unir catro triángulos equiláteros iguais en cada vértice. Con cinco triángulos equiláteros, tamén iguais, por vértice, fórmase un icosaedro. Se unimos seis triángulos equiláteros nun vértice, a suma dos ángulos das caras concorrentes é de 360° e non se pode formar ningún ángulo poliedro, así que non hai máis poliedros regulares con caras triangulares.

Estudemos agora os poliedros regulares que é posible construír con caras cadradas e pentagonais



Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

Con tres cadrados iguais en cada vértice construímos un cubo. Ao unir catro cadrados nun vértice, a suma dos ángulos no vértice común aos catro é de 360° co que non podemos formar ningún poliedro máis que o cubo de caras cadradas.

Só é posible construír un poliedro regular con caras pentagonais unindo tres pentágonos en cada vértice. É o dodecaedro. Un número maior de pentágonos por vértice daría unha suma de ángulos superior a 360°.

Entón queda probado que só existen cinco poliedros regulares:

Os poliedros regulares son *desenvolvibles* porque poden ser construídos a partir dun desenvolvemento plano formado por todas as súas caras.

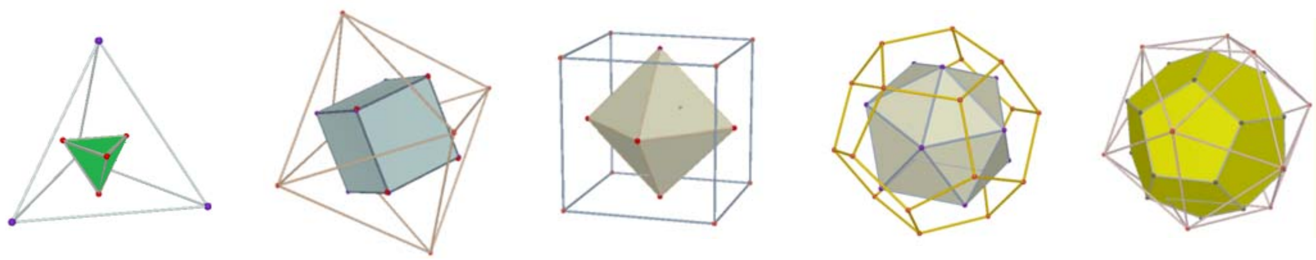
Todos cumpren a relación de Euler para poliedros convexos. Podes comprobalo:

	TETRAEDRO	CUBO	OCTAEDRO	DODECAEDRO	ICOSAEDRO
N° DE CARAS	4	6	8	12	20
N° DE VÉRTICES	4	8	6	20	12
N° DE ARESTAS	6	12	12	30	30
FORMA DAS CARAS	TRIANGULARES	CADRADAS	TRIANGULARES	PENTAGONAIS	TRIANGULARES

2.4. Dual dun poliedro regular

Defínese o poliedro dual dun poliedro regular como o poliedro resultante de unir os centros das caras do poliedro inicial e tomalos como vértices do novo poliedro. Fíxate que entón o número de caras dun poliedro coincide co número de vértices do seu poliedro dual.

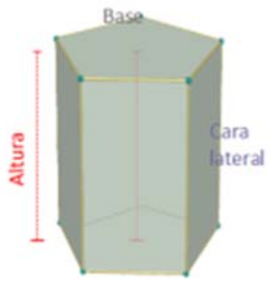
O poliedro dual do tetraedro é o tetraedro. O cubo e o octaedro son duais entre si. Tamén o dodecaedro é dual do icosaedro e reciprocamente.



Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

2.5. Prismas

Un *prisma* é un poliedro determinado por dúas caras paralelas que son polígonos iguais e tantas caras laterais, que son paralelogramos, como lados teñen as bases.

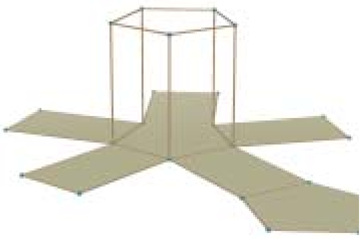


Os prismas son corpos desenvolvibles. O desenvolvemento dun prisma recto está composto polas súas dúas bases e por tantos paralelogramos como caras laterais teña.

A altura do prisma é a distancia entre as bases.

É posible clasificar un prisma atendendo a diferentes conceptos:

Pola forma das caras laterais poden ser *rectos ou oblicuos*. Son *rectos* se as citadas caras son rectángulos e son *oblicuos* se son rombos ou romboides.



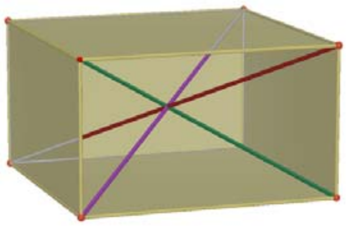
Pola forma das bases poden ser triangulares, cuadrangulares, pentagonais, hexagonais dependendo de que o polígono da base sexa triángulo, cadrado, pentágono, hexágono, etc...

Se ademais un prisma é recto e ten polígonos regulares como bases, o prisma chámase *regular*. En calquera outro caso o prisma chámase *irregular*.

Pola forma dos seus ángulos diedros poden ser cóncavos e convexos.

2.6. Paralelepípedos

Os paralelepípedos son prismas nos que as bases son paralelogramos.



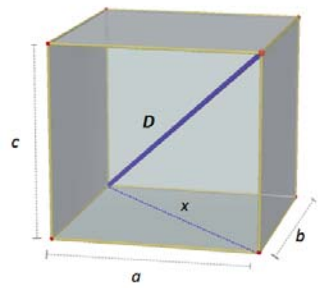
Ademais, todas as caras laterais son tamén paralelogramos e as caras opostas son iguais entre si polo que calquera cara pode tomarse como base.

Os paralelepípedos poden ser*: cubos* se teñen todas as súas caras cadradas, *ortoedros* se todas as súas caras son rectángulos, *romboedros* se todas as súas caras son rombos ou *romboiedros* se todas as súas caras son romboides.

Unha propiedade importante de todos os paralelepípedos é que as catro diagonais se cortan no punto medio.

2.7. Teorema de *Pitágoras* no espazo

A diagonal dun ortoedro ao cadrado coincide coa suma dos cadrados das súas arestas.



Imos demostralo: Sexan *a, b* e *c* as arestas do ortoedro que supoñemos apoiado no rectángulo de dimensións *a, b*. Se *x* é a diagonal deste rectángulo, cumpre: $x^2 = a^2 + b^2$. O triángulo de lados *D, x, c* é rectángulo logo: $D^2 = x^2 + c^2$. E tendo en conta a relación que cumpre *x:*

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Actividades resoltas

- *As arestas da base dunha caixa con forma de ortoedro miden 10 cm e 11 cm e a súa altura 8 cm. Estuda se podes gardar nela tres barras de lonxitudes 14 cm, 16 cm e 18 cm.*

O rectángulo da base ten unha diagonal *d* que mide: $d = \sqrt{10^2 + 11^2} = \sqrt{221} \approx 14.9$ cm. Logo a barra máis curta cabe apoiada na base. Calculemos agora canto mide a diagonal do ortoedro:

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 8^2 + 10^2 + 11^2 = 285 \Rightarrow D = \sqrt{285} \approx 16.9 \text{ cm.}$$

Logo, a barra de 16 cm cabe tamén na caixa pero a de 18 cm, non.

Actividades propostas

6. É posible demostrar cun crebacabezas o teorema de *Pitágoras* no espazo. Propoñémosche que o intentes. Poderás encontrar na revista e entre os recursos para imprimir as pezas que che axudarán. Na fotografía amósase o crebacabezas resolto.

7. É posible construír un prisma cóncavo triangular? E un prisma cóncavo regular? Razoa as respostas.

8. Entre os poliedros regulares, hai algún que sexa prisma? En caso afirmativo clasifícao.

9. Basta que un paralelepípedo teña dúas caras rectangulares para que sexa un prisma recto?

10. Debuxa un prisma pentagonal regular e comproba que cumpre a relación de *Euler*.

11. Unha caixa ten forma cúbica de 2 dm de aresta. Canto mide a súa diagonal?

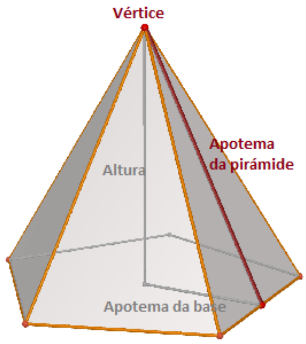
12. Calcula a medida da diagonal dunha sala que ten 10 metros de longo, 4 metros de ancho e 3 metros de altura.

13. Clasifica os seguintes poliedros

2.8. Pirámides

Unha pirámide é un poliedro determinado por unha cara poligonal denominada base e tantas caras triangulares cun vértice común como lados ten a base.

O punto onde converxen todos os triángulos laterais denomínase *vértice* ou cúspide.



As pirámides pódense clasificar por conceptos análogos aos dos prismas. Así destacamos que as pirámides, segundo a forma da base, se clasifican en *triangulares, cuadrangulares, pentagonais…*

Unha pirámide é *regular* cando o é o polígono da base e ademais as caras laterais son triángulos isósceles iguais. A altura destes triángulos laterais chámase *apotema da pirámide*. Non debes confundir a apotema dunha pirámide regular coa apotema do polígono da base.

A *altura* dunha pirámide é a distancia do vértice á base. Se unha pirámide é regular, coincide coa distancia entre o vértice da pirámide e o centro do polígono da base.

As pirámides son desenvolvibles. O desenvolvemento dunha pirámide fórmano o polígono da base e tantas caras triangulares como lados teña a base. Se a pirámide é regular, os triángulos son isósceles e iguais.

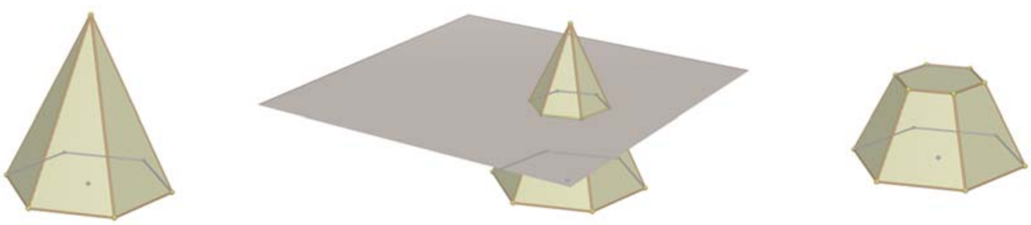
Actividades propostas

14. Hai algunha pirámide regular que sexa poliedro regular? E pirámides con caras paralelas? En caso afirmativo pon un exemplo e en caso negativo, xustifica as túas respostas.

15. Debuxa unha pirámide hexagonal regular e distingue a apotema da pirámide da apotema da base. Debuxa tamén o seu desenvolvemento.

2.9. Tronco de pirámide

Un tronco de pirámide é o poliedro resultante ao cortar unha pirámide por un plano paralelo á base. As bases son polígonos semellantes e as caras laterais son trapecios.



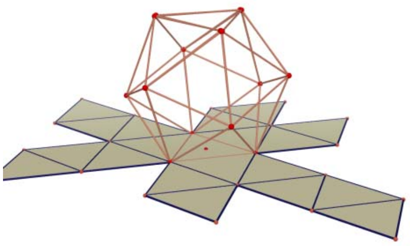
Un tronco de pirámide é regular cando é unha porción de pirámide regular. Neste caso as caras laterais son trapecios isósceles e as bases son polígonos regulares semellantes.

3. ÁREA LATERAL E TOTAL DUN POLIEDRO

3.1. Área total dun poliedro regular

Como as caras dos poliedros regulares son iguais, o cálculo da área total dun poliedro regular redúcese a calcular a área dunha cara e despois multiplicala polo número de caras.

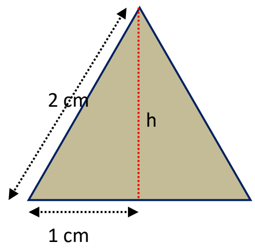
Actividades resoltas



- *Calcula a área total dun icosaedro de 2 cm de aresta.*

Todas as súas caras son triángulos equiláteros de 2 cm de base. Calculamos a altura h que divide á base en dous segmentos iguais

$h^2 + 1^2 = 2^2 \Rightarrow h^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow h = \sqrt{3}$ cm

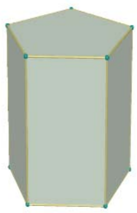


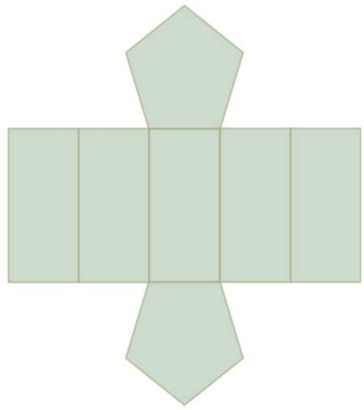
Logo a área dunha cara será:

$A_{\text{triángulo}} = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ cm² e polo tanto Área icosaedro = 20 $\sqrt{3}$ cm²

3.2. Áreas lateral e total dun prisma

A área lateral dun prisma é a suma das áreas das caras laterais.





Como as caras laterais son paralelogramos da mesma altura, que é a altura do prisma, podemos escribir:

Área lateral = Suma das áreas das caras laterais =

= Perímetro da base · altura do prisma.

Se denotamos por h a altura e por P_B o perímetro da base:

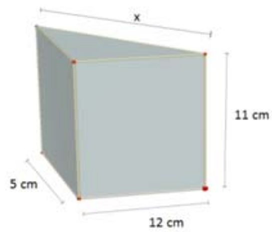
Área lateral = ao = $P_B \cdot h$

A área total dun prisma é a área lateral máis o dobre da suma da área da base:

Área total = $A_T = ao + 2 \cdot A_B$

Actividades resoltas

- *Calcula as áreas lateral e total dun prisma triangular recto de 11 cm de altura se a súa base é un triángulo rectángulo de catetos 12 cm e 5 cm.*



Calculamos en primeiro lugar a hipotenusa do triángulo da base:

$x^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow x = \sqrt{169} = 13$ cm

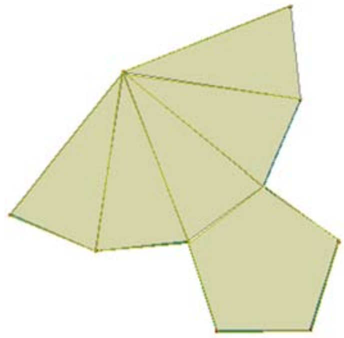
$P_B = 12 + 5 + 13 = 30$ *cm*; $A_B = \dfrac{12 \cdot 5}{2} = 30\ cm^2$

$A_L = P_B \cdot h = 30 \cdot 11 = 330\ cm^2$ $\qquad A_T = ao + 2 \cdot A_B = 330 + 60 = 390\ cm^2$

3.3. Áreas lateral e total dunha pirámide e dun tronco de pirámide regulares

A área lateral dunha pirámide regular é a suma das áreas das caras laterais.

Desenvolvemento de pirámide pentagonal regular



Son triángulos isósceles iguais polo que, se a aresta da base mide *b*, a apotema da pirámide é *Ap* e a base ten *n* lados, entón a área lateral é:

$$\text{Área lateral} = ao = \boldsymbol{n} \cdot \frac{\boldsymbol{b \cdot Ap}}{\boldsymbol{2}} = \frac{\boldsymbol{n \cdot b \cdot Ap}}{\boldsymbol{2}}$$

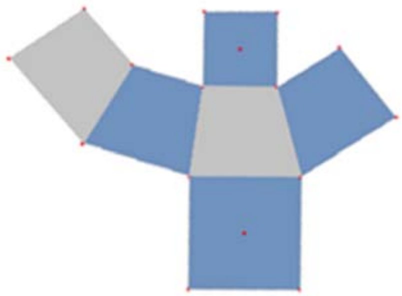
e como $n \cdot b$ = Perímetro da base

$$A_L = \frac{P_B \cdot Ap}{2} = \frac{\text{Perímetro da base} \cdot \text{Apotema da pirámide}}{2}$$

A área total dunha pirámide é a área lateral máis a área da base:

$$\text{Área total} = A_T = ao + A_B$$

Desenvolvemento de tronco de pirámide cuadrangular



Un tronco de pirámide regular é un corpo xeométrico desenvolvible. No seu desenvolvemento aparecen tantas caras laterais como lados teñen as bases. Todas elas son trapecios isósceles.

Se *B* é o lado do polígono da base maior, *b* o lado da base menor, *n* o número de lados das bases e *Ap* é a altura dunha cara lateral

$$\text{Área lateral} = ao = \boldsymbol{n} \cdot \frac{\boldsymbol{(B+b) \cdot Ap}}{\boldsymbol{2}} = \frac{\boldsymbol{(P_B + P_b) \cdot Ap}}{\boldsymbol{2}} =$$

$$= \frac{\text{Suma do perímetro das bases} \cdot \text{Apotema do tronco}}{2}$$

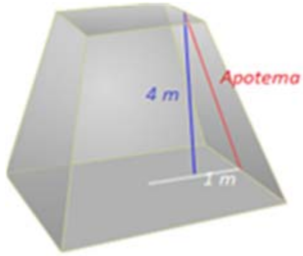
A área total dun tronco de pirámide regular é a área lateral máis a suma de áreas das bases:

$$\text{Área total} = A_T = ao + A_B + A_b$$

Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

Actividades resoltas

- *Calculemos a área total dun tronco de pirámide regular de 4 m de altura se sabemos que as bases paralelas son cadrados de 4 m e de 2 m de lado.*



En primeiro lugar, calculamos o valor da apotema. Tendo en conta que o tronco é regular e que as bases son cadradas fórmase un triángulo rectángulo no que se cumpre:

$$Ap^2 = 4^2 + 1^2 = 17 \Rightarrow Ap = \sqrt{17} \approx 4.12 \text{ m}; A_L = \frac{(P_B + P_b) \cdot Ap}{2} = \frac{(16+8) \cdot 4.12}{2} = 49.44 \text{ m}^2$$

$$A_T = A_L + A_B + A_b = 49.44 \text{ m}^2 + 16 \text{ m}^2 + 4 \text{ m}^2 = 69.44 \text{ m}^2$$

Actividades propostas

16. Calcula as áreas lateral e total dun prisma triangular regular sabendo que as arestas das bases miden 2 cm e cada aresta lateral 8 cm.

17. A área lateral dun prisma regular de base cadrada é 63 m^2 e ten 7 m de altura. Calcula o perímetro da base.

18. O lado da base dunha pirámide hexagonal regular é de 6 cm e a altura da pirámide 10 cm. Calcula a apotema da pirámide e a súa área total.

19. Calcula a área lateral dun tronco de pirámide regular, sabendo que as súas bases son dous octógonos regulares de lados 4 e 7 dm e que a altura de cada cara lateral é de 8 dm.

20. Se a área lateral dunha pirámide cuadrangular regular, de lado da base 4 cm, é 104 cm^2, calcula a apotema da pirámide e a súa altura.

Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

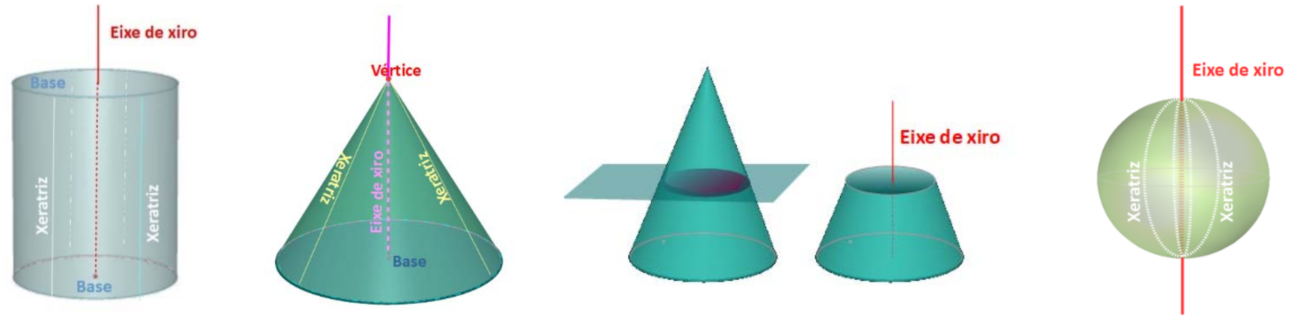
4. CORPOS DE REVOLUCIÓN

4.1. Corpos de revolución: Cilindros, conos e esferas

Os corpos de revolución son corpos xeométricos que se obteñen ao facer xirar unha liña arredor dunha recta fixa denominada *eixe*. A liña que xira chámase *xeratriz*.

Tamén pode obterse un corpo de revolución mediante o xiro dunha figura plana arredor dun eixe de xiro.

Os principais corpos de revolución son: *cilindros, conos e esferas*.

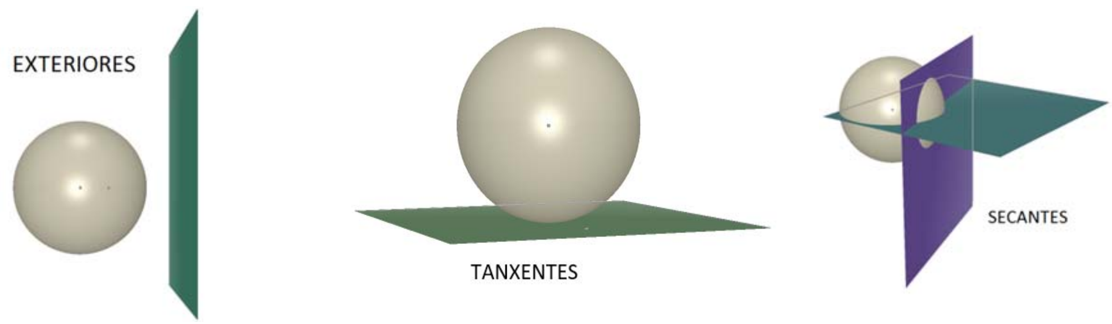


CILINDRO CONO TRONCO DE CONO ESFERA

A xeratriz dun cilindro é unha recta paralela ao eixe de xiro. A dun cono é unha recta secante co eixe e a dunha esfera é unha semicircunferencia cuxo centro está no eixe de xiro.

4.2. A esfera. Interseccións de planos e esferas

Unha esfera e un plano poden ser exteriores, tanxentes e secantes. Se son secantes, a súa intersección é sempre un círculo. Se o plano é tanxente, a intersección redúcese a un punto. E se son exteriores, é o conxunto baleiro. Podes comprendelo con facilidade pensando nunha esfera (unha laranxa, por exemplo) e un plano (o corte que fas cun coitelo).



A intersección dunha superficie esférica cun plano é, polo tanto, unha circunferencia, un punto ou o conxunto baleiro.

Con ecuacións resúltanos máis complicado pois unha superficie esférica ten unha ecuación de segundo grao en dúas variables, x e y. Un plano ten unha ecuación de primeiro grao tamén en x e y. As ecuacións de segundo grao poden non ter ningunha raíz (no campo real) co que o plano non cortaría á esfera; ter unha raíz dobre (co que sería tanxente) ou cortala (e nese caso teriamos unha circunferencia).

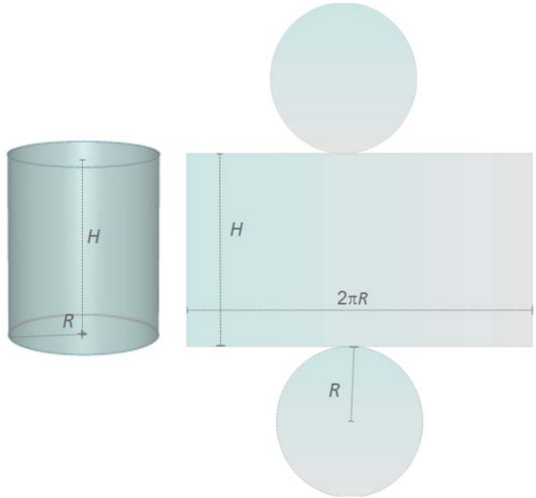
Se o plano corta á esfera pasando polo centro da esfera, a intersección é un círculo máximo. No caso da esfera terrestre, o Ecuador ou os meridianos.

4.3. Áreas lateral e total dun cilindro

Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

O cilindro é un corpo xeométrico desenvolvible. Se recortamos un cilindro recto ao longo dunha xeratriz, e o estendemos nun plano, obtemos dous círculos e unha rexión rectangular. Desta maneira obtense o seu desenvolvemento.

A partir deste podemos ver que a área lateral do cilindro está determinada pola área do rectángulo que ten como dimensións a lonxitude da circunferencia da base e a altura do cilindro.



Suporemos que a altura do cilindro é H e que R é o radio da base co que a área lateral A_L é:

A_L = *Lonxitude da base* · *Altura* = $(2\pi\ R) \cdot H = 2\ \pi R\ H$

Se á expresión anterior lle sumamos a área dos dous círculos que constitúen as bases, obtemos a área total do cilindro.

$$A_T = ao + \pi R^2 + \pi R^2 = 2\pi R\ H + 2\pi R^2$$

4.4. Áreas lateral e total dun cono

Tamén o cono é un corpo xeométrico desenvolvible. Ao recortar seguindo unha liña xeratriz e a circunferencia da base, obtemos un círculo e un sector circular con radio igual á xeratriz e lonxitude de arco igual á lonxitude da circunferencia da base.

Chamemos agora R ao radio da base e G á xeratriz. A área lateral do cono é a área do sector circular obtido. Para calculala pensemos que esta área debe ser directamente proporcional á lonxitude de arco que á súa vez debe coincidir coa lonxitude da circunferencia da base. Podemos escribir entón:

$$\frac{A\ Lateral\ do\ cono}{Lonxitude\ de\ arco\ correspondente\ ao\ \ sec\,t\,or} = \frac{A\ total\ do\ círculo\ de\ radio\ G}{Lonxitude\ da\ circunferencia\ de\ radio\ G}$$

É dicir: $\frac{A_L}{2\pi R} = \frac{\pi\ \ G^2}{2\pi G}$ e despexando A_L temos:

$$A_L = \frac{2\pi R\ \pi\ \ G^2}{2\pi G} = \pi\ \ R\ \ G$$

Se á expresión anterior lle sumamos a área do círculo da base, obtemos a área total do cono.

$$\boldsymbol{A_T = A_L + \pi \cdot R^2 = \pi \cdot R \cdot G + \pi \cdot R^2}$$

Actividades resoltas

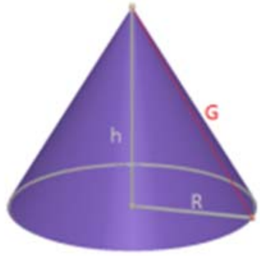
- *Calcula a área total dun cono de 12 dm de altura, sabendo que a circunferencia da base mide 18.84 dm. (Toma 3.14 como valor de π)*

  Calculamos en primeiro lugar o radio *R* da base:

  $2\pi R = 18.84 \Rightarrow \quad R = \frac{18.84}{2\pi} \approx \frac{18.84}{6.28} = 3$ dm.

  Calculamos agora a xeratriz *G*:

  $G = \sqrt{R^2 + h^2} \Rightarrow \quad G = \sqrt{3^2 + 12^2} = \sqrt{153} \approx 12.37$ dm.



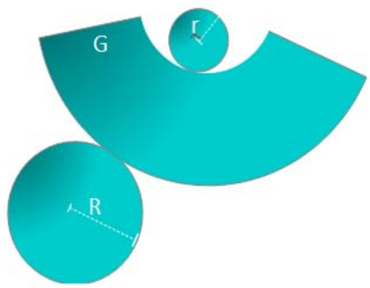
Entón A_T = ao + $\pi \cdot R^2 = \pi \cdot R \cdot G + \pi \cdot R^2 = 3.14 \cdot 3 \cdot 12.37 + 3.14 \cdot 3^2 \approx 144.79$ dm^2.

4.5. Áreas lateral e total dun tronco de cono

Ao cortar un cono por un plano paralelo á base, obtense un tronco de cono. Ao igual que o tronco de pirámide, é un corpo desenvolvible e o seu desenvolvemento constitúeno os dous círculos das bases xunto cun trapecio circular, cuxas bases curvas miden o mesmo que as circunferencias das bases.

Chamando *R e r* aos radios das bases e *G* á xeratriz resulta:

$$A_L = \frac{(2\pi\ R + 2\pi\ r)G}{2} = \frac{2(\pi\ R + \pi\ r)\ G}{2} = (\pi\ R + \pi\ r)\ G$$



Se á expresión anterior lle sumamos as áreas dos círculos das bases, obtemos a área total do tronco de cono:

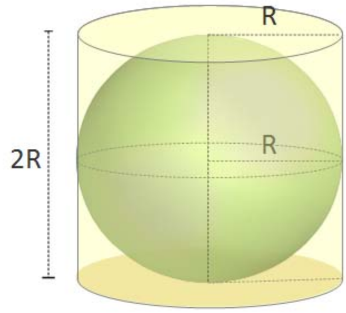
$$A_T = A_L + \pi \cdot R^2 + \pi \cdot r^2$$

Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

4.6. Área total dunha esfera

A esfera non é un corpo xeométrico desenvolvible, polo que é máis complicado que nos casos anteriores encontrar unha fórmula para calcular a súa área.

Arquímedes demostrou que a área dunha esfera é igual que a área lateral dun cilindro circunscrito á esfera, é dicir un cilindro co mesmo radio da base que o radio da esfera e cuxa altura é o diámetro da esfera.



Se chamamos *R* ao radio da esfera:

$$A_T = (2\pi R)\cdot(2R) = 4\pi R^2$$

A área dunha esfera equivale á área de catro círculos máximos.

Actividades propostas

21. Unha columna cilíndrica ten 76 cm de diámetro e 4 m de altura. Cal é a súa área lateral?

22. O radio da base dun cilindro é de 38 cm e a altura é o triplo do diámetro. Calcula a súa área total.

23. Calcula a área lateral dun cono recto sabendo que a súa xeratriz mide 50 dm e o seu radio da base 30 dm.

24. A circunferencia da base dun cono mide 6.25 m e a súa xeratriz 8 m. Calcula a área total.

25. Unha esfera ten 4 m de radio. Calcula: a) a lonxitude da circunferencia máxima; b) a área da esfera.

5. VOLUME DUN CORPO XEOMÉTRICO

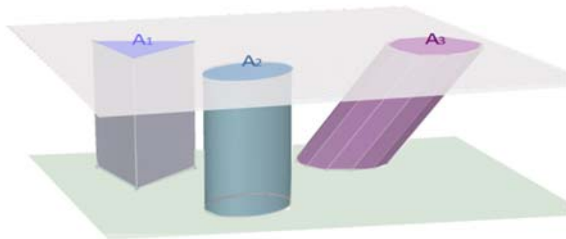
5.1. Principio de *Cavalieri*

Bonaventura Cavalieri, matemático do século XVII, enunciou o principio que leva o seu nome e que afirma:

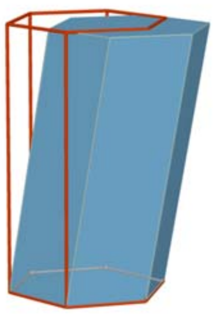
"Se dous corpos teñen a mesma altura e ao cortalos por planos paralelos ás súas bases se obteñen seccións coa mesma área, entón os volumes dos dous corpos son iguais"

Exemplo:

- Na figura adxunta as áreas das seccións A_1,A_2, A_3, producidas por un plano paralelo ás bases, son iguais, entón, segundo este principio os volumes dos tres corpos son tamén iguais.



5.2. Volume dun prisma e dun cilindro



O volume dun prisma recto é o produto da área da base pola altura. Ademais, segundo o principio de *Cavalieri*, o volume dun prisma oblicuo coincide co volume dun prisma recto coa mesma base e altura. Se denotamos por V este volume, A_B á área da base e *h* a altura:

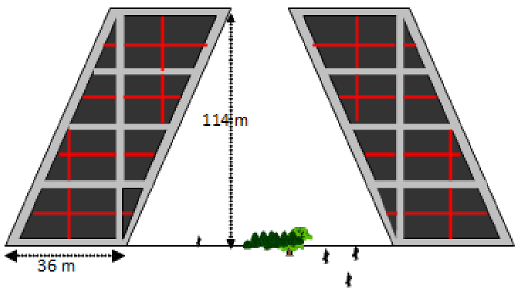
Volume prisma = $V = A_B \cdot h$

Tamén o volume dun cilindro, recto ou oblicuo é a área da base pola altura. Se chamamos *R* ao radio da base, A_B á área da base e *h* á altura, o volume escríbese:

Volume cilindro = $V = A_B \cdot h = \pi R^2 \cdot h$

Actividades resoltas

- *As coñecidas torres Kio de Madrid son dúas torres xemelgas que están no Paseo da Castellana, xunto á Praza de Castilla. Caracterízanse pola súa inclinación e representan unha porta cara a Europa.*
  Cada unha delas é un prisma oblicuo cuxa base é un cadrado de 36 metros de lado e teñen unha altura de 114 metros. O volume interior de cada torre pode calcularse coa fórmula anterior:



$V = A_B \cdot h = 36^2 \cdot 114 = 147\,744 \text{ m}^3$

Actividades propostas

26. Calcula o volume dun prisma recto de 12 dm de altura cuxa base é un hexágono de 4 dm de lado.

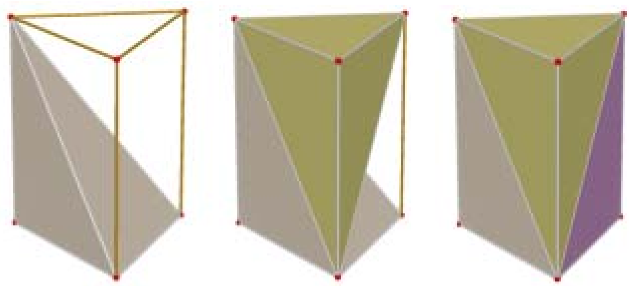
27. Calcula a cantidade de auga que hai nun recipiente con forma de cilindro sabendo que a súa base ten 12 cm de diámetro e que a auga acada 1 dm de altura.

Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

5.3. Volume dunha pirámide e dun cono

Tamén nos casos dunha pirámide ou cono, as fórmulas do volume coinciden en corpos rectos e oblicuos.

O volume dunha pirámide é a terceira parte do volume dun prisma que ten a mesma base e altura.



Volume pirámide = $V = \frac{A_B \cdot h}{3}$

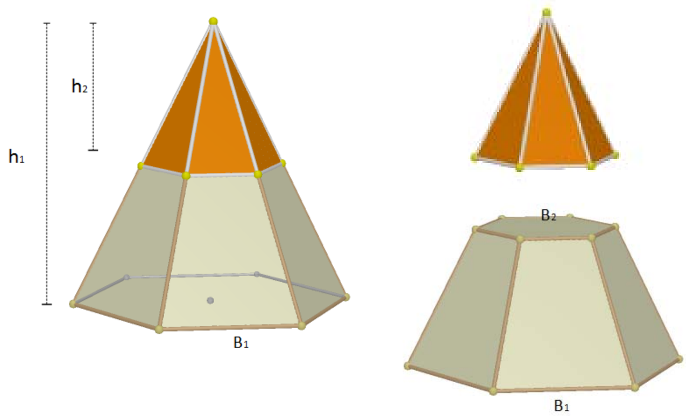
Se comparamos cono e cilindro coa mesma base e altura, concluímos un resultado análogo

Volume cono = $V = \frac{A_B \cdot h}{3} = \frac{\pi R^2 \cdot h}{3}$

5.4. Volume dun tronco de pirámide e dun tronco de cono

Existe unha fórmula para calcular o volume dun tronco de pirámide regular pero evitarémola. Resulta máis sinxelo obter o volume dun tronco de pirámide regular restando os volumes das dúas pirámides a partir das que se obtén.

Se representamos por A_{B1} e A_{B2} as áreas das bases e por h_1 e h_2 as alturas das pirámides citadas, o volume do tronco de pirámide é:



Volume tronco de pirámide =

$V = \frac{A_{B1} \cdot h_1}{3} - \frac{A_{B2} \cdot h_2}{3}$

O volume do tronco de cono obtense de modo parecido. Se R_1 e R_2 son os radios das bases dos conos que orixinan o tronco e h_1 e h_2 as súas alturas, o volume do tronco de cono resulta:

Volume tronco de cono = $V = \frac{\pi \cdot R_1^2 \cdot h_1}{3} - \frac{\pi \cdot R_2^2 \cdot h_2}{3}$

Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

Actividades resoltas

- *Calcula o volume dun tronco de pirámide regular de 10 cm de altura se as súas bases son dous hexágonos regulares de lados 7 cm e 3 cm.*

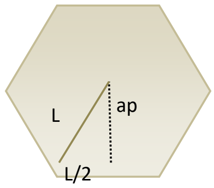


Figura 1

Primeiro paso: calculamos as apotemas dos hexágonos das bases:

Para cada un destes hexágonos:

$$L^2 = ap^2 + (L/2)^2 \Rightarrow ap^2 = L^2 - \frac{L^2}{4} = \frac{3L^2}{4} \Rightarrow ap = \frac{\sqrt{3}\,L}{2}$$

Logo as apotemas buscadas miden: $\boldsymbol{ap_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx\ 2.6\ cm;\ ap_2 = \frac{7\sqrt{3}}{2} \approx\ 6.1\ cm}$

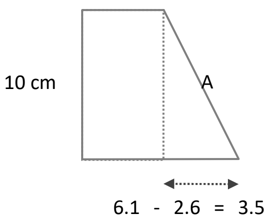


Figura 2

Como segundo paso, calcularemos a apotema do tronco de pirámide

$$A^2 = 10^2 + 3.5^2 \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{\mathbf{112.25}} \approx\ \mathbf{10.6}\ \boldsymbol{cm}$$

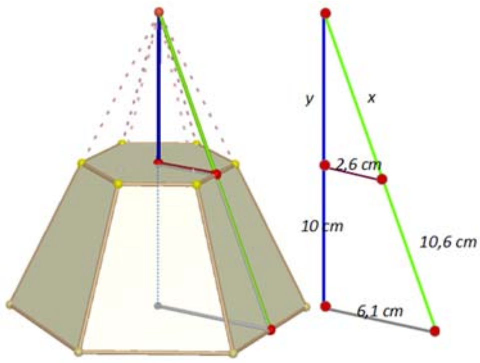


Figura 3

En terceiro lugar, calcularemos o valor do segmento *y* da figura 3 que nos servirá para obter as alturas das pirámides que xeran o tronco co que traballamos:

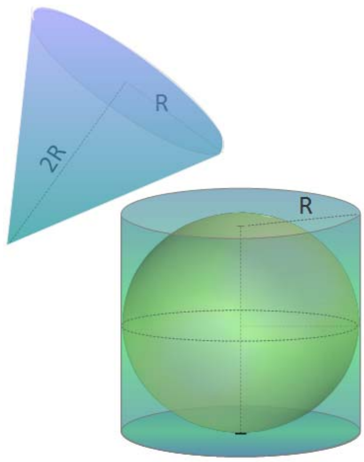
Polo teorema de *Tales*: $\frac{\mathbf{6.1}}{\mathbf{2.6}} = \frac{\mathbf{10}+\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}} \Rightarrow 6.1y = 2.6(10 + y) \Rightarrow 6.1y - 2.6y = 26 \Rightarrow \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{26}}{\mathbf{3.5}} \approx\ \mathbf{7.5}\ \boldsymbol{cm}$.

Logo as alturas das pirámides xeradoras do tronco miden 10 + 7.5 = 17.5 cm e 7.5 cm.

Por último calculamos o volume do tronco de pirámide:

$$V = \frac{A_{B1} \cdot h_1}{3} - \frac{A_{B2} \cdot h_2}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{42 \cdot 6.1}{2} \cdot 17.5 - \frac{1}{3} \cdot \frac{18 \cdot 2.6}{2} \cdot 7.5 = \frac{4\,483.5}{6} - \frac{351}{6} = 688.75\ cm^3$$

5.5. Volume da esfera

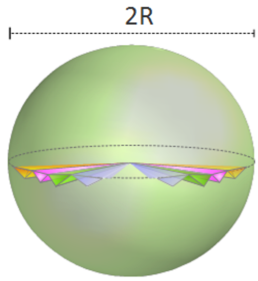


Volvamos pensar nunha esfera de radio *R* e no cilindro que a circunscribe. Para encher con auga o espazo que queda entre o cilindro e a esfera, necesítase unha cantidade de auga igual a un terzo do volume total do cilindro circunscrito.

Dedúcese entón que a suma dos volumes da esfera de radio *R* e do cono de altura *2R* e radio da base *R*, coincide co volume do cilindro circunscrito á esfera de radio *R*. Polo tanto:

Volume $_{esfera}$ = Volume $_{cilindro}$ – Volume $_{cono} \Rightarrow$

Volume $_{esfera}$ = $\pi R^2(2R) - \dfrac{\pi R^2(2R)}{3} = \dfrac{6\pi R^3 - 2\pi R^3}{3} = \dfrac{4\pi R^3}{3} = \dfrac{4}{3}\pi R^3$



Existen demostracións máis rigorosas que avalan este resultado experimental que describimos. Así, por exemplo, o volume da esfera pódese obter como suma dos volumes de pirámides que a recobren, todas elas de base triangular sobre a superficie da esfera e con vértice no centro da mesma.

Actividades propostas

28. O depósito de gasóleo da casa de Irene é un cilindro de 1 m de altura e 2 m de diámetro. Irene chamou ao subministrador do gasóleo porque no depósito só quedan 140 litros.

a. Cal é, en dm^3, o volume do depósito? (Utiliza 3.14 como valor de π).
b. Se o prezo do gasóleo é de 0.80 € cada litro, canto deberá pagar a nai de Irene por encher o depósito?

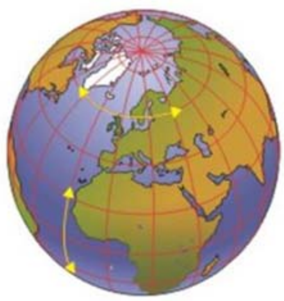
29. Comproba que o volume da esfera de radio 5 dm sumado co volume dun cono do mesmo radio da base e 10 dm de altura, coincide co volume dun cilindro que ten 10 dm de altura e 5 dm de radio da base.

Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

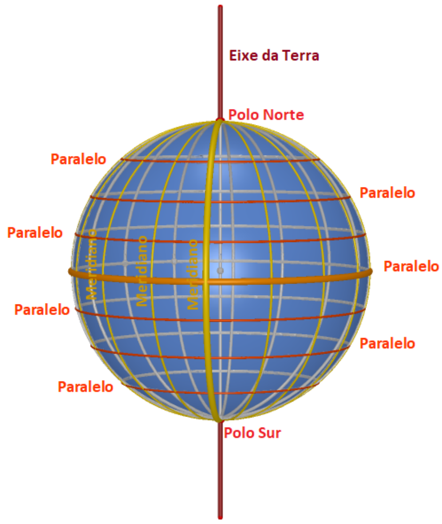
6. GLOBO TERRÁQUEO

6.1. O globo terráqueo



A Terra ten unha forma de esfera algo achatada polos polos. No seu movemento de rotación xira arredor dunha liña imaxinaria que se denomina *eixe.* Os *polos xeográficos Norte e Sur* son os puntos de corte do eixe coa superficie da Terra.

Un *globo terráqueo* é unha representación tridimensional a escala da Terra. É a representación máis precisa que existe porque non presenta distorsións á hora de tomar datos para calcular ángulos e distancias.



O resto das representacións a escala da Terra son bidimensionais e entre elas destacan os *planisferios* que son proxeccións do globo terráqueo sobre o plano.

O obxectivo destas representacións da Terra é a situación precisa de calquera punto xeográfico. Para logralo, no globo terráqueo defínense un conxunto de liñas imaxinarias que se denominan *meridianos* e *paralelos*.

Os *meridianos* son semicircunferencias centradas no centro da Terra e que pasan polos polos. Entre eles destacan o chamado meridiano de *Greenwich* ou meridiano cero que pasa por Londres e o Antemeridiano, situado no Océano Pacífico.

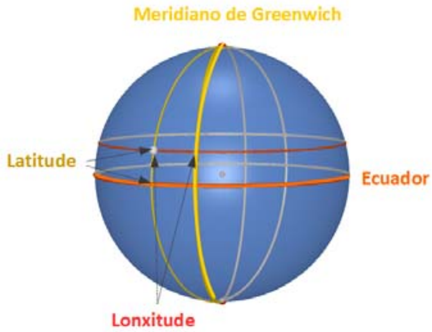
Os *paralelos* son circunferencias que teñen o seu centro no eixe da Terra e que cortan ao globo terráqueo. Só un deles ten como centro o da Terra. Denomínase *Ecuador ou paralelo cero e* é unha circunferencia de radio máximo.

Outros paralelos destacados son os *Trópicos de Cáncer* e *Capricornio*, achegados ao Ecuador no norte e sur respectivamente e tamén o *Círculo Polar Ártico* no Polo Norte e o *Círculo Polar Antártico* no Polo Sur.

O Ecuador divide á Terra en dúas semiesferas denominadas *hemisferio norte* (N) e *hemisferio sur* (S). O meridiano de *Greenwich* divide á Terra nos *hemisferios leste* (E) e *oeste* (W).

Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

6.2. Lonxitude e latitude. Coordenadas xeográficas



Tomando como sistema de referencia o Ecuador e o meridiano de *Greenwich*, a cada punto da Terra asóciaselle unha parella de números que son as súas *coordenadas xeográficas* e que reciben o nome de *latitude e lonxitude*. Estas coordenadas exprésanse en graos sexaxesimais.

A *latitude é* a distancia que existe entre un punto calquera do globo terráqueo e o Ecuador. Mídese sobre o meridiano que pasa por este punto.

A *lonxitude* é a distancia que existe entre un punto calquera e o Meridiano de *Greenwich*, medida sobre o paralelo que pasa polo punto.

Se un punto está no hemisferio norte, diremos que ten latitude norte e escribiremos latitude N. Analogamente se está no hemisferio sur, diremos que ten latitude sur e escribiremos latitude S.

Tamén falaremos de lonxitude leste e lonxitude oeste e escribiremos lonxitude E o lonxitude W dependendo de que un punto se encontre á esquerda ou á dereita do meridiano de Greenwich. Soe identificarse a lonxitude E con lonxitude negativa e a lonxitude W con lonxitude positiva.

6.3. Fusos horarios

Durante moito tempo a hora determinábase mediante cálculos baseados nos movementos dos astros e a hora oficial era a hora solar. Isto ocasionaba múltiples problemas nos horarios dos transportes entre diferentes localidades polo que se acordou establecer un horario oficial coordinado. Nun principio este horario estaba baseado na chamada hora media de *Greenwich* (**GMT**) que se calculaba facendo a media da hora solar de todas as localidades pertencentes ao meridiano de *Greenwich*. Hoxe en día a hora solar foi substituída pola hora que calculan reloxos atómicos moito máis precisos. Con eles a hora **GMT** deu paso á hora universal coordinada (**UTC**).

A Terra dá unha volta completa en 24 horas, percorre 360º: 24 = 15º nunha hora. Prodúcese entón unha diferenza dunha hora de tempo por cada diferenza de 15º de lonxitude entre dous puntos xeográficos.

Chámase ***fuso horario*** a unha zona do globo terráqueo comprendida entre dous meridianos que se diferencian en 15º de lonxitude. A velocidade da Terra no seu movemento de rotación orixina 24 *fusos horarios*. Partindo do meridiano de *Greenwich* numéranse segundo a súa distancia ao Leste ou ao Oeste de *Greenwich*.

Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

Dentro de cada fuso horario todos os reloxos deben marcar a mesma hora, e entre un fuso e o seguinte hai unha diferenza dunha hora. Xeralmente, os fusos horarios están determinados por meridianos dunha lonxitude que é múltiplo de 15°; porén, como consecuencia das fronteiras políticas, as delimitacións poden seguir liñas que adoptan formas moi irregulares.

Tendo en conta que o movemento de rotación é un xiro de oeste a leste, se nos desprazamos dun fuso horario a outro en dirección Leste- Oeste, debemos atrasar o reloxo unha hora e, se o desprazamento se produce de Oeste a Leste, debemos adiantalo unha hora.

Atravesar o Antemeridiano supón o cambio de data, exactamente un día.

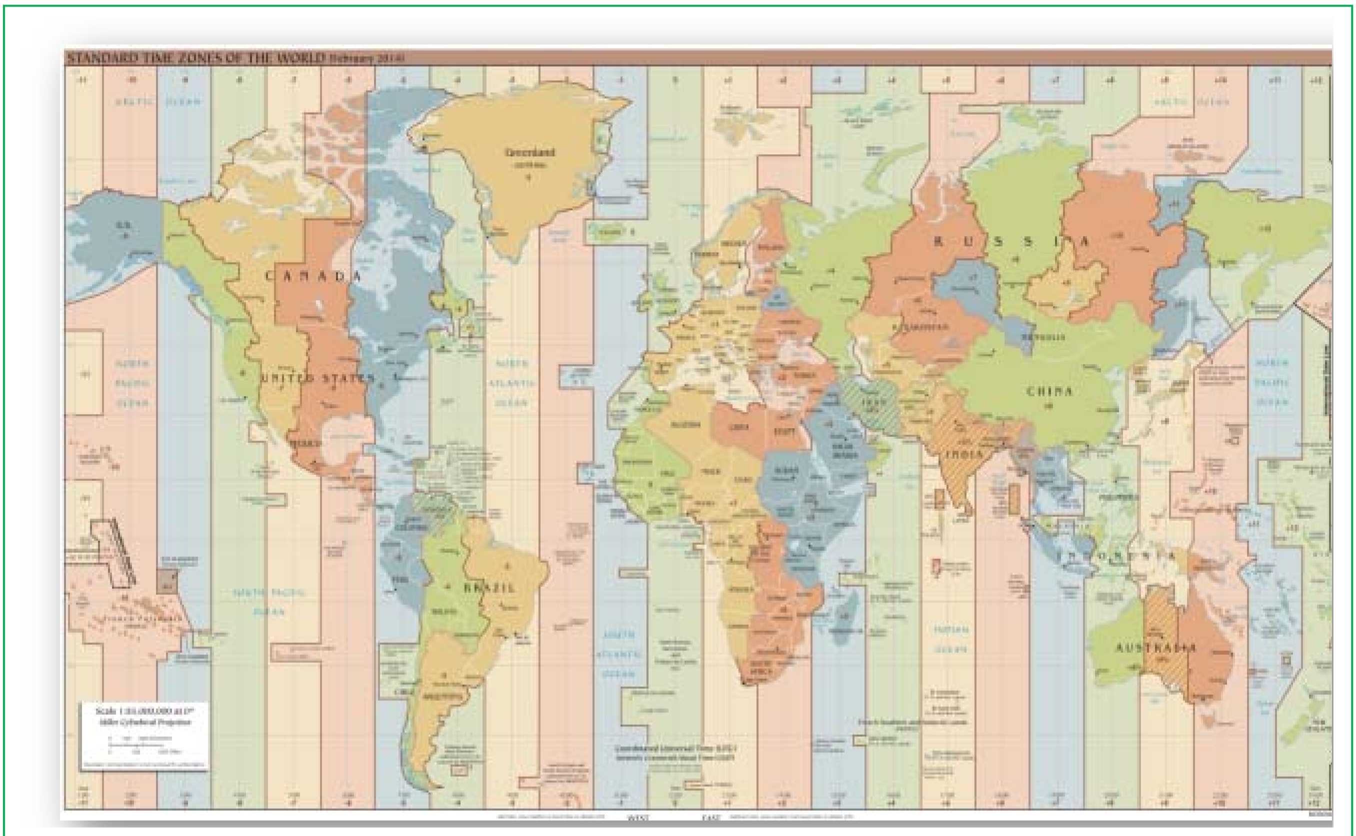
Actividades propostas

30. Un avión percorre 20º en dirección oeste ao longo do Ecuador. Se chega a un punto cuxa lonxitude é de 170º leste, cales son as coordenadas do lugar de partida?

31. Xoán sae da súa casa e percorre 10 Km en dirección sur, 20 Km cara ao leste e 10 Km cara ao norte. Se se encontra de novo na casa, onde está situada a súa casa?

32. Na esfera terrestre, que paralelo mide máis?, que meridiano mide máis? Razoa as túas respostas.

33. Busca as coordenadas xeográficas do lugar no que vives.



MAPA DE FUSOS HORARIOS DE 30 MARZO 2014 (ORIXE DA IMAXE: WIKIPEDIA)

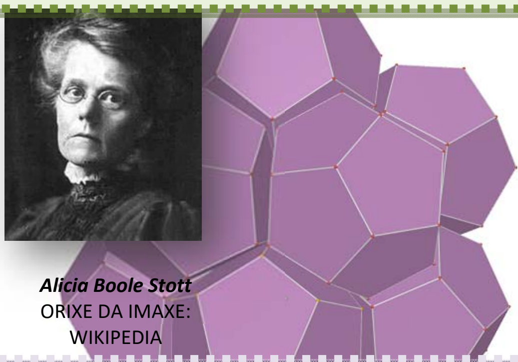
Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA


Arquímedes pensativo** e**Cicerón e os maxistrados descubrindo a tumba de Arquímedes en Siracusa

ORIXE DAS IMAXES: WIKIPEDIA

Arquímedes (287 a. C.- 212 a. C.) Matemático, enxeñeiro, físico, realizou múltiples aportacións á ciencia. Entre outras e como estudaches neste tema, a demostración das fórmulas da área e o volume dunha esfera. Dise que resultaron os seus descubrimentos favoritos. Na súa tumba gravouse un cilindro cunha esfera inscrita como homenaxe.

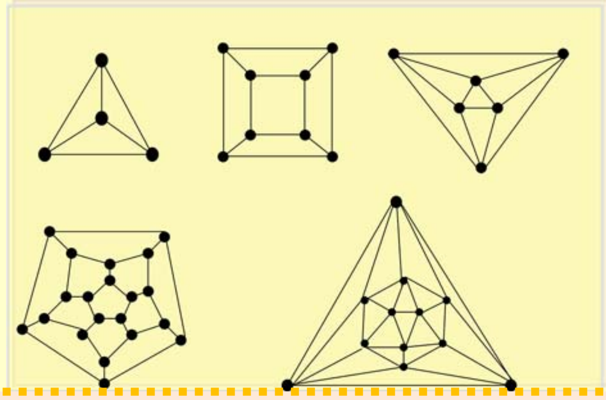


Alicia Boole Stott

ORIXE DA IMAXE: WIKIPEDIA

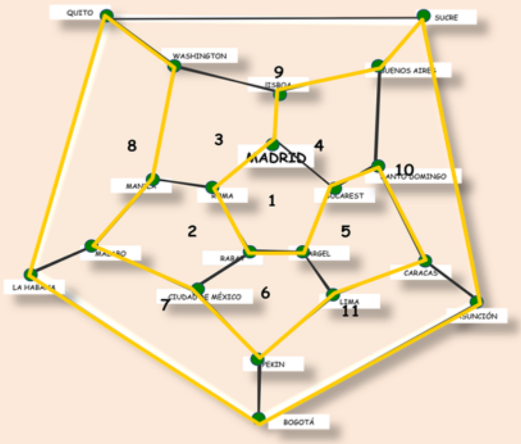
Alicia BooleStott, (1860 - 1940) filla do matemático *George Boole*, destacou pola súa marabillosa capacidade para visualizar a cuarta dimensión. Calculou e representou as seccións dos chamados ***politopos regulares de dimensión 4***, obxectos xeométricos equivalentes, nun espazo de catro dimensións, aos polígonos regulares no plano ou aos poliedros regulares no espazo.

Os poliedros regulares poden ser "aplastados" sobre un plano, elixindo unha cara e proxectando os lados do poliedro desde un punto por enriba do centro desta cara. A figura que se obtén chámase diagrama de *Schlegel*. Estes diagramas son exemplos de grafos. Gran parte das propiedades dos poliedros consérvanse neles e axudan a que moitos problemas se resolvan con facilidade.



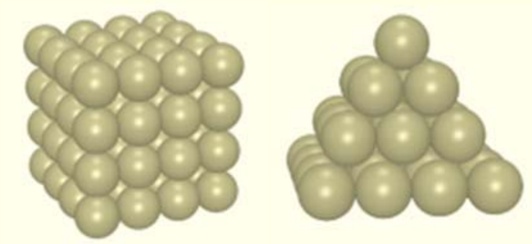
En 1859 *Hamilton* ideou o seguinte xogo: Dado un dodecaedro, se en cada un dos seus vértices se pon o nome dunha cidade, é posible atopar un circuíto pechado a través das arestas do dodecaedro que pase unha soa vez por cada cidade?

Grazas ao grafo do dodecaedro, é moi sinxelo resolver o problema.

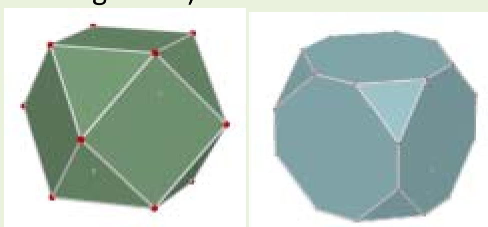


Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

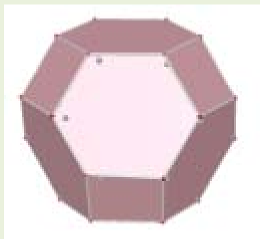
O matemático inglés **Thomas Harriot** (1560 - 1621), propuxo o problema do ***empaquetamento de esferas*** que estriba en atopar a forma de amontoar esferas do mesmo radio de modo que o espazo comprendido entre elas sexa mínimo. O astrónomo alemán **Johannes Kepler** (1571-1630) resolveuno, chegando á conclusión de que a mellor colocación era a que entón se facía espontaneamente nos barcos para amontoar as balas de canón ou a que utilizan os tendeiros para amorear as laranxas nos postos do mercado.



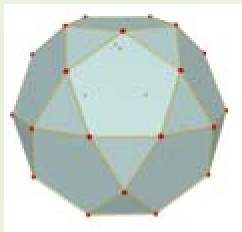
Os ***sólidos arquimedianos*** ou **sólidos de Arquímedes** son un grupo de poliedros convexos cuxas caras son polígonos regulares de dous ou máis tipos. En todos os sólidos de *Arquímedes* concorre o mesmo número de caras en cada vértice e coas mesmas formas. Algúns deles obtéñense truncando os sólidos platónicos (poliedros regulares).



Cubos truncados



Octaedro truncado

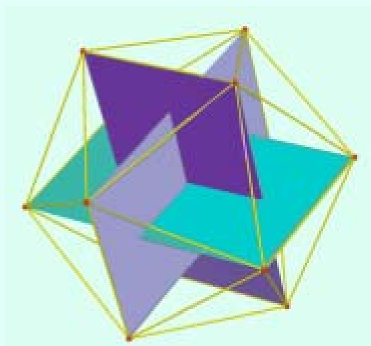


Dodecaedro truncado

Un anel de tetraedros ou caleidociclo é un anel tridimensional composto por tetraedros unidos polas súas arestas. Poden xirar sobre si mesmos arredor do seu centro infinitas veces sen romperse ni deformarse.

Entre os materiais atoparás un modelo para construír un coas imaxes dalgunhas mulleres matemáticas celébres.

Os vértices do icosaedro determinan 3 rectángulos áureos perpendiculares dous a dous. No icosaedro podemos atopar un total de 15 rectángulos áureos. Cada un deles ten dous lados paralelos que son arestas opostas do poliedro.



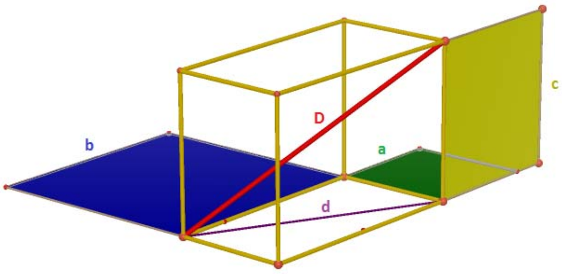
Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

TEOREMA DE PITÁGORAS NO ESPAZO

Se un ortoedro ten arestas de lonxitudes *a*, *b*, *c*, segundo o teorema de *Pitágoras*, no espazo, a suma dos cadrados das arestas, coincide co cadrado da diagonal, *D*, do ortoedro:

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Como consecuencia, a suma das áreas dos cadrados de lados iguais ás arestas, coincide coa área do cadrado que ten como lado a diagonal do ortoedro.

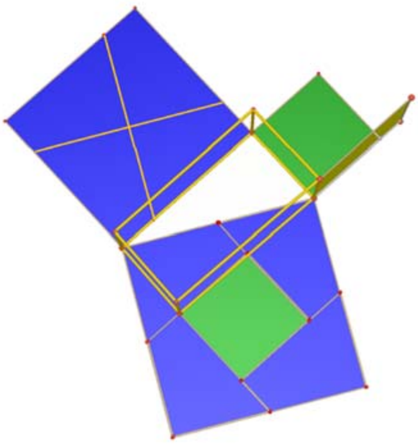


Construiremos un crebacabezas, baseado na demostración que *Perigal* ideou para demostrar o teorema de *Pitágoras* no plano. Hai que aplicar dúas veces o seu método e atoparemos as pezas clave que demostran o teorema no espazo.

Ao trazar a diagonal *d* da base, queda dividida en dous triángulos rectángulos de catetos *a* e *b*.

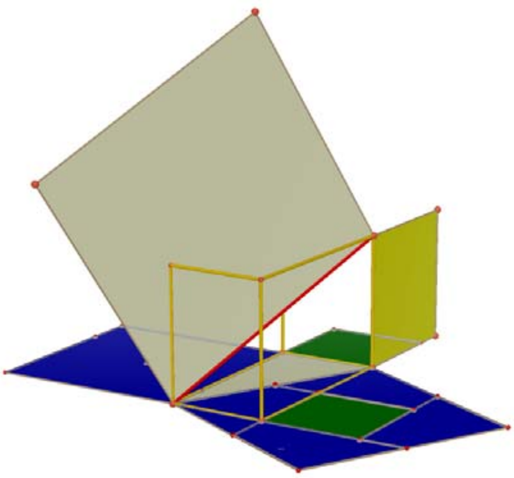
Construímos o cadrado sobre a súa hipotenusa e as pezas de *Perigal* que demostran o teorema de *Pitágoras* nun destes triángulos.

Para iso no cadrado construído sobre o cateto maior (na nosa figura, *b* de cor azul) e, polo seu centro, trazamos dous segmentos un paralelo e outro perpendicular á hipotenusa, de modo que ambos os dous corten os dous lados do cadrado. O cadrado queda dividido en catro pezas exactamente iguais que xunto co cadrado de lado *a*, recobren o cadrado de lado *d*.

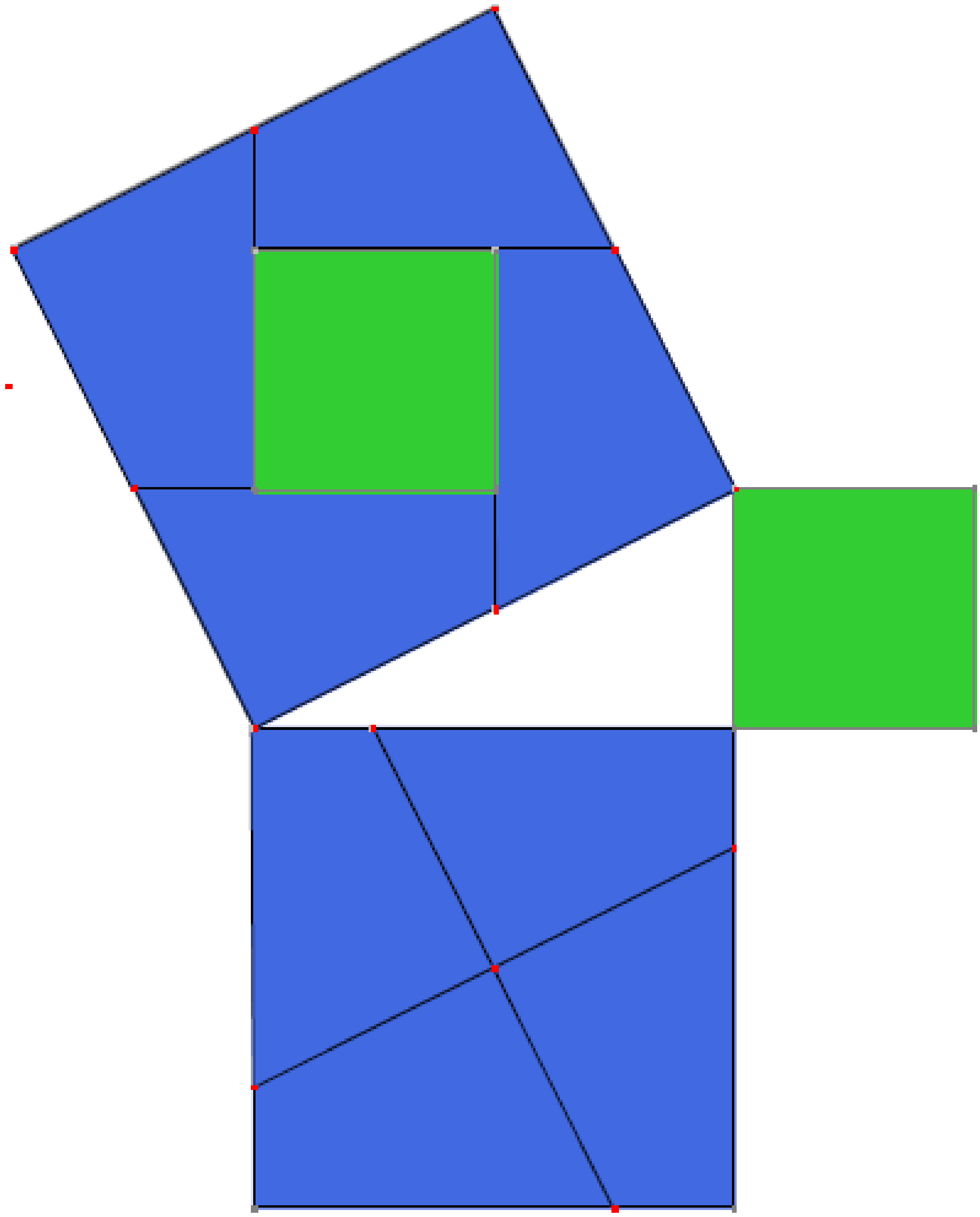


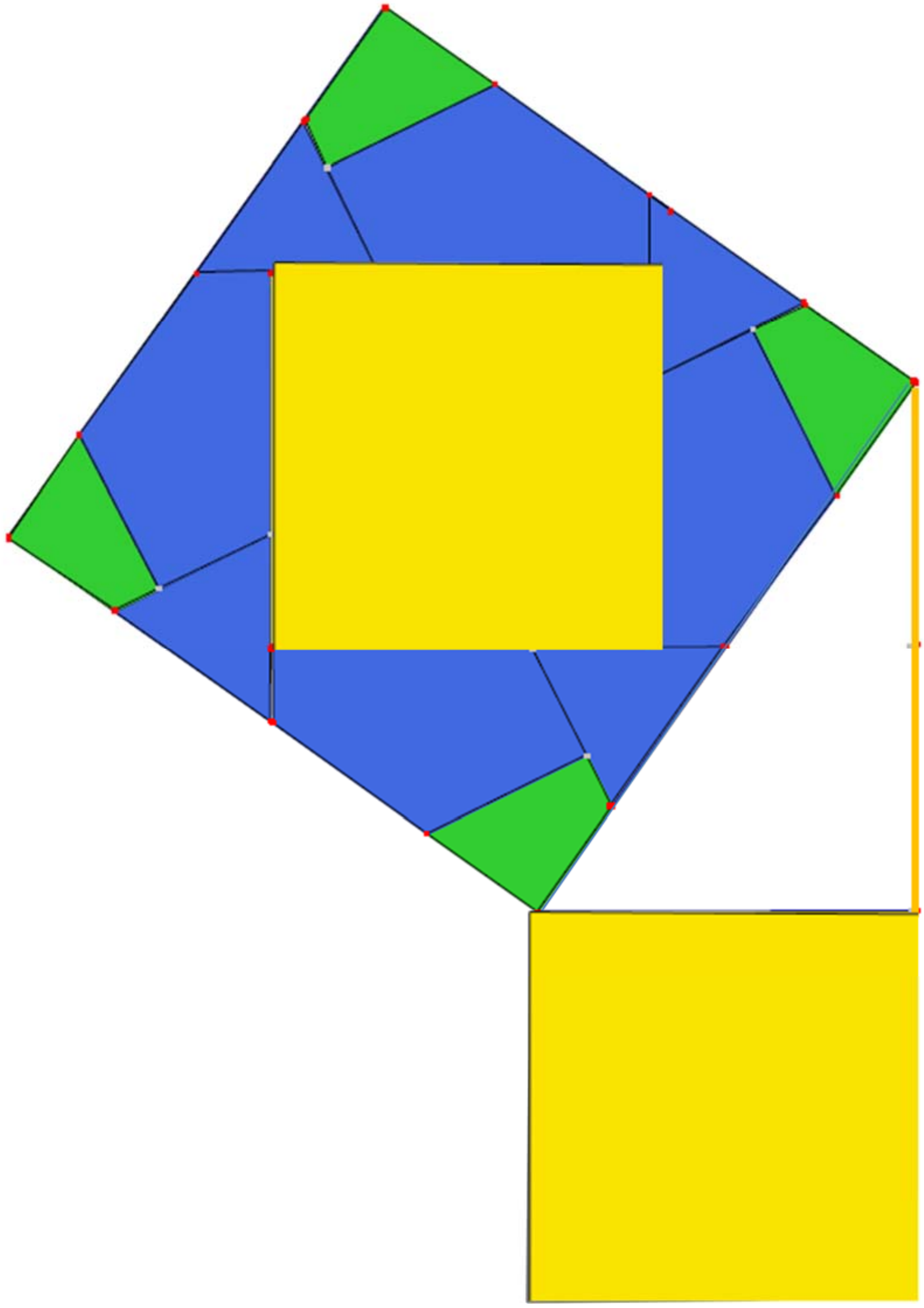
Agora hai que fixarse no triángulo rectángulo de catetos *c, d* e cuxa hipotenusa é *D* e repetir o proceso anterior, iso si utilizando o cadrado de lado *d* recuberto coas pezas azuis e o cadrado verde.

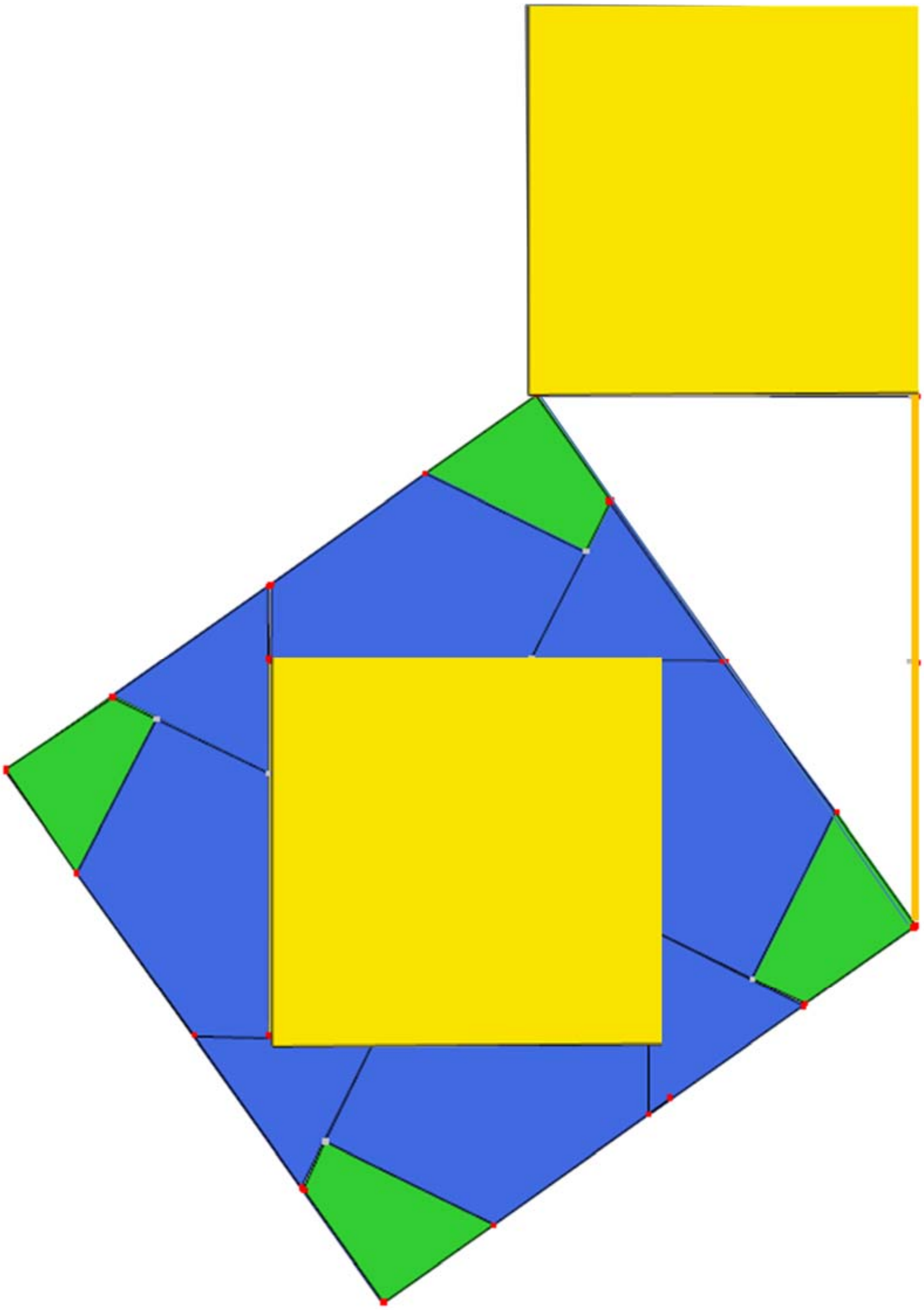
Nas páxinas seguintes encontrarás as láminas que che permiten construír a túa propia demostración. Unicamente tes que recortar as dúas últimas, pegalas unha contra a outra e construír un ortoedro con arame que teña como dimensións as lonxitudes dos lados dos cadrados verde, azul e amarelo.



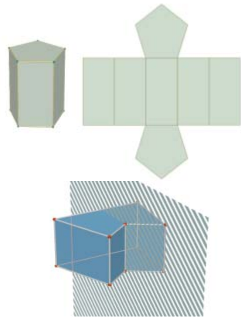
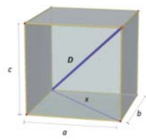
Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF



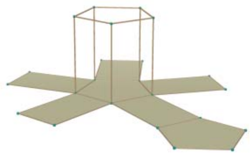
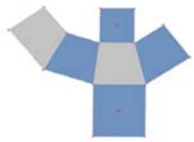
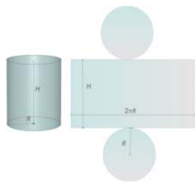
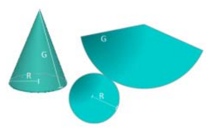
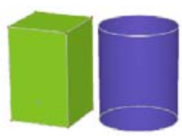




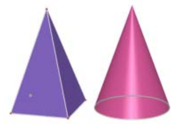
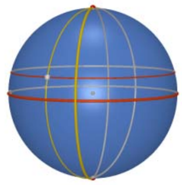
RESUMO

Concepto	Definición	*Exemplos*
Poliedro. Elementos dun poliedro. Tipos de poliedros	Un poliedro é unha rexión pechada do espazo limitada por polígonos. Os seus principais elementos son: caras, arestas, vértices, ángulos diedros e poliedros, así como as diagonais. Os poliedros poden ser cóncavos e convexos dependendo de que algunha das súas caras sexa un polígono cóncavo ou ningunha o sexa. Entre os poliedros destacan poliedros regulares, prismas e pirámides.	
Teorema de Euler	En todo poliedro convexo o número de caras máis o número de vértices coincide co número de arestas máis 2.	C + V = A + 2
Poliedros regulares	Un poliedro regular é un poliedro que cumpre que todas as súas caras son polígonos regulares iguais e que os seus ángulos poliedros son iguais. Hai cinco poliedros regulares: tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo e dodecaedro.	
Prismas	Un prisma é un poliedro determinado por dúas caras paralelas que son polígonos iguais e tantas caras laterais, que son paralelogramos, como lados teñen as bases. Poden ser cóncavos ou convexos; rectos ou oblicuos, regulares ou irregulares; triangulares, cuadrangulares, pentagonais… Destacan os paralelepípedos que son prismas con todas as súas caras paralelogramos e dentro destes os ortoedros que son paralelepípedos con todas as súas caras rectangulares.	
Teorema de Pitágoras no espazo	A diagonal dun ortoedro é a raíz cadrada da suma dos cadrados das súas arestas.	
Pirámides	Unha pirámide é un poliedro determinado por unha cara poligonal denominada base e tantas caras triangulares cun vértice común, como lados ten a base. Poden ser cóncavas ou convexas; rectas ou oblicuas, regulares ou irregulares; triangulares, cuadrangulares, pentagonais…	
Tronco de pirámide	Un tronco de pirámide é o poliedro resultante ao cortar unha pirámide por un plano paralelo á base. As bases son polígonos semellantes e as caras laterais son trapecios.	

Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

Corpos de revolución	Os corpos de revolución son corpos xeométricos que se obteñen ao facer xirar unha liña arredor dunha recta fixa denominada *eixe*. A liña que xira chámase *xeratriz*. Entre os corpos de revolución destacan cilindros, conos e esferas.	
Áreas lateral e total dun prisma	$A_{Lateral} = Perímetro_{Base} \cdot Altura$ $A_{total} = Área_{Lateral} + 2Área_{Base}$	
Áreas lateral e total dunha pirámide regular	$A_{Lateral} = \dfrac{Perímetro_{Base} \cdot Apotema_{pirámide}}{2}$ $A_{total} = Área_{Lateral} + Área_{Base}$	
Áreas lateral e total dun tronco de pirámide regular	$A_{Lateral} = \dfrac{Perímetro_{Base} \cdot Apotema_{tronco}}{2}$ $A_{total} = Área_{Lateral} + Área_{Base\ 1} + Área_{Base\ 2}$	
Áreas lateral e total dun cilindro	$A_{Lateral} = 2\pi R H$ $A_{total} = 2\pi R H + 2\pi R^2$	
Áreas lateral e total dun cono	$A_{Lateral} = \pi R G$ $A_{total} = \pi R G + \pi R^2$	
Áreas lateral e total dun tronco de cono	$A_{Lateral} = (\pi R + \pi r)\ G$ $A_{Total} = A_{Lateral} + \pi R^2 + \pi r^2$	
Área total dunha esfera	$A_{total} = 4\pi R^2$	
Volume dun prisma e dun cilindro	$Volume = Área_{base} \cdot Altura$	

Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

Volume dunha pirámide e dun cono	$Volume = \dfrac{Área_{\ base} \cdot Altura}{3}$	
Volume dunha esfera	$Volume = \dfrac{4}{3}\pi R^3$	
Coordenadas xeográficas	**Latitude**: Distancia do punto xeográfico ao Ecuador medida sobre o meridiano que pasa polo punto. **Lonxitude:** Distancia do punto xeográfico ao meridiano cero ou de Greenwich, medida sobre o paralelo que pasa polo punto.	
Fusos horarios	Cada **fuso horario** é unha zona do globo terráqueo comprendida entre dous meridianos que se diferencian en 15º de lonxitude.	

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Ángulos poliedros. Paralelismo e perpendicularidade. Poliedros: elementos e tipos

1. Se estamos nunha habitación sen columnas, atendendo ao chan e ás súas catro paredes, cantos ángulos diedros se forman?

2. Dobra pola metade unha folla de papel, constrúe un ángulo diedro e traza o seu rectilíneo. Poderías medir a amplitude de diferentes ángulos diedros mediante este rectilíneo?

3. Determina a amplitude dos ángulos diedros que forman as caras laterais dun poliedro que é un prisma recto de base un octógono regular.

4. Dúas caras dun triedro miden 60º e 118º, entre que valores pode oscilar a outra?

5. Pódese formar un ángulo poliedro cun ángulo dun triángulo equilátero, dous ángulos dun rectángulo e un dun pentágono regular?

6. Poderá existir un poliedro regular cuxas caras sexan hexagonais? Razoa a resposta.

7. Cantas diagonais podes trazar nun cubo? E nun octaedro?

8. Podes atopar dúas arestas paralelas nun tetraedro? E en cada un dos restantes poliedros regulares?

9. Prolonga unha parella de arestas nunha pirámide pentagonal, de modo que se obteñan rectas non coplanarias.

10. Debuxa un prisma regular de base cadrada e sinala: a) dúas arestas que sexan paralelas, b) dúas arestas que sexan perpendiculares e coplanarias, c) dúas arestas perpendiculares e non coplanarias, d) dúas caras paralelas, e) dúas caras perpendiculares.

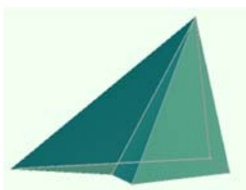
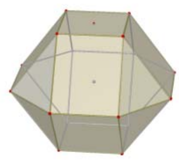
11. Se un poliedro convexo ten 16 vértices e 24 arestas, cantas caras ten? Podería ser unha pirámide? E un prisma?

12. Con 12 variñas de 5 cm de longo cada unha, usando todas as variñas que poliedros regulares se poden construír?

13. Dun prisma sabemos que o número de vértices é 16 e que o número de arestas é 24, cantas caras ten?

14. Clasifica os seguintes corpos xeométricos e indica, cando sexan poliedros, o número de vértices, caras e arestas que teñen. Cales cumpren o teorema de *Euler*?




15. Describe a diferenza entre un prisma recto e un prisma oblicuo. É suficiente que un paralelepípedo teña dúas caras paralelas rectangulares para que sexa un ortoedro?

Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

Teorema de Pitágoras no espazo

16. Debuxa un paralelepípedo cuxas arestas midan 4 cm, 5 cm e 6 cm que non sexa un ortoedro. Debuxa tamén o seu desenvolvemento.

17. Se o paralelepípedo anterior fose un ortoedro, canto mediría a súa diagonal?

18. Un vaso de 12 cm de altura ten forma de tronco de cono no que os radios das bases son de 5 e 4 cm. Canto medirá como mínimo unha culleriña para que sobresaia do vaso polo menos 2 cm?

19. É posible gardar nunha caixa con forma de ortoedro de arestas 4 cm, 3 cm e 12 cm un bolígrafo de 13 cm de lonxitude?

20. Calcula a diagonal dun prisma recto de base cadrada sabendo que o lado da base mide 6 cm e a altura do prisma 8 cm.

21. Se un ascensor mide 1 m de ancho, 1.5 m de longo e 2.2 m de altura, é posible introducir nel unha escaleira de 3 m de altura?

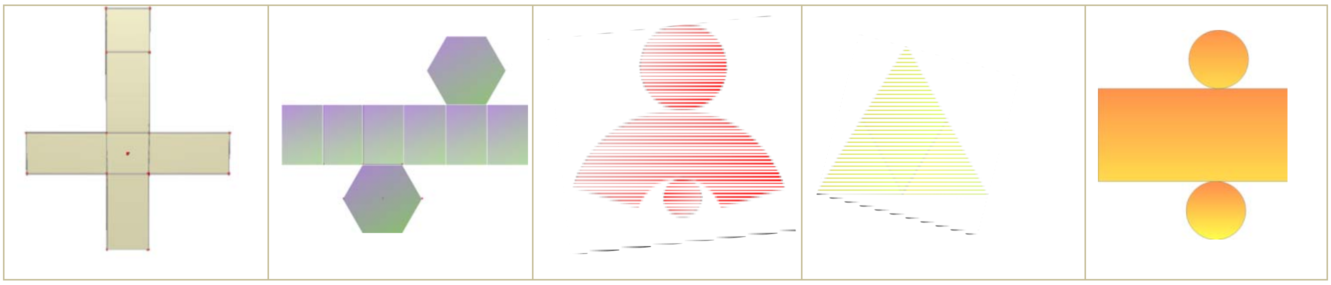
22. Cal é a maior distancia que se pode medir en liña recta nunha habitación que ten 6 m de ancho, 8 m de longo e 4 metros de altura?

23. Calcula a lonxitude da aresta dun cubo sabendo que a súa diagonal mide 3.46 cm.

24. Calcula a distancia máxima entre dous puntos dun tronco de cono cuxas bases teñen radios 5 cm e 2 cm, e altura 10 cm.

Área lateral, total e volume de corpos xeométricos

25. Identifica a que corpo xeométrico pertencen os seguintes desenvolvementos:



26. Un prisma de 8 dm de altura ten como base un triángulo rectángulo de catetos 3 dm e 4 dm. Calcula as áreas lateral e total do prisma.

27. Debuxa un prisma hexagonal regular que teña 4 cm de aresta basal e 1 dm de altura e calcula as áreas da base e total.

28. Un prisma pentagonal regular de 12 cm de altura ten unha base de 30 cm^2 de área. Calcula o seu volume.

29. Calcula a área total dun ortoedro de dimensións 3.5 dm, 8.2 dm e 75 cm.

30. Calcula a superficie total e o volume dun cilindro que ten 8 m de altura e 5 cm de radio da base.

31. Calcula a área total dunha esfera de 5 cm de radio.

Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

32. Calcula a apotema dunha pirámide regular sabendo que a súa área lateral é de 120 m^2 e a súa base é un hexágono de 5 m de lado.

33. Calcula a apotema dunha pirámide hexagonal regular sabendo que o perímetro da base é de 32 dm e a altura da pirámide é de 4 dm. Calcula tamén a área total e o volume desta pirámide.

34. Un triángulo rectángulo de catetos 12 cm e 5 cm xira arredor dun dos seus catetos xerando un cono. Calcula a área lateral, a área total e o volume.

35. Tres bólas de metal de radios 12 dm, 0.3 m e 4 m fúndense nunha soa, cal será o diámetro da esfera resultante?

36. Cal é a capacidade dun pozo cilíndrico de 1.20 m de diámetro e 20 metros de profundidade?

37. Canto cartón necesitaremos para construír unha pirámide cuadrangular regular se queremos que o lado da base mida 10 cm e que a súa altura sexa de 25 cm?

38. Calcula o volume dun cilindro que ten 2 cm de radio da base e a mesma altura que un prisma cuxa base é un cadrado de 4 cm de lado e 800 cm^3 de volume.

39. Cal é a área da base dun cilindro de 1.20 m de alto e 248 dm^3 de volume?

40. A auga dun manancial condúcese ata uns depósitos cilíndricos que miden 12 m de radio da base e 20 m de altura. Despois embotéllase en bidóns de 2.5 litros. Cantos envases se enchen con cada depósito?

41. Calcula a cantidade de cartolina necesaria para construír un anel de 10 tetraedros cada un dos cales ten 2 cm de aresta.

42. Ao facer o desenvolvemento dun prisma triangular regular de 8 dm de altura, resultou un rectángulo de 1 metro de diagonal como superficie lateral. Calcula a área total.

43. Determina a superficie mínima de papel necesaria para envolver un prisma hexagonal regular de 1 m de lado da base e 2 m de altura.

44. O Concello de Madrid colocou unhas xardineiras de pedra nas súas rúas que teñen forma de prisma hexagonal regular. A cavidade interior, onde se deposita a terra, ten 80 cm de profundidade e o lado do hexágono interior é de 60 cm. Calcula o volume de terra que enchería unha xardineira por completo.

45. Unha habitación ten forma de ortoedro e as súas dimensións son directamente proporcionais aos números 3, 5 e 7. Calcula a área total e o volume se ademais se sabe que a diagonal mide 14.5 m.

46. Un ortoedro ten 1 dm de altura e 6 dm^2 de área total. A súa lonxitude é o dobre da súa anchura, cal é o seu volume?

47. Se o volume dun cilindro de 10 cm de altura é de 314 cm^3, calcula o radio da base do cilindro. (Utiliza 3.14 como valor de π).

Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

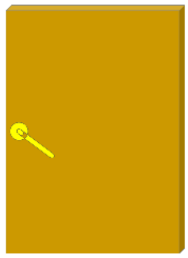
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

48. Instalaron na casa de Xoán un depósito de auga de forma cilíndrica. O diámetro da base mide 2 metros e a altura é de 3 metros. a) Calcula o volume do depósito en m^3. (Tomar $\pi = 3.14$). b) Cantos litros de auga caben no depósito?

49. Un envase dun litro de leite ten forma de prisma, a base é un cadrado que ten 10 cm de lado. a) Cal é, en cm^3, o volume do envase? b) Calcula a altura do envase en cm.

50. Unha circunferencia de lonxitude 2.24 cm xira arredor dun dos seus diámetros xerando unha esfera. Calcula o seu volume. (Tomar $\pi = 3.14$).

51. Unha porta mide 2 m de alto, 80 cm de ancho e 4 cm de espesor. O prezo de instalación é de 200 € e cóbrase 6 € por m^2 en concepto de vernizado, ademais do custe da madeira, que é de 300 € cada m^3. A) Calcula o volume de madeira dunha porta. B) O custe da madeira dunha porta máis a súa instalación. C) O custe do vernizado de cada porta, se só se cobra o vernizado das dúas caras principais.

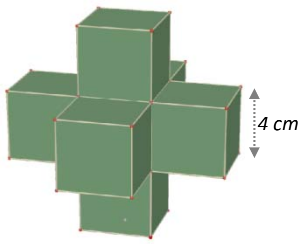


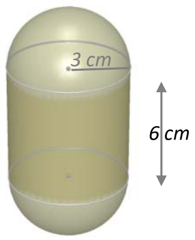
52. A auga contida nun recipiente cónico de 18 cm de altura e 24 cm de diámetro da base vértese nun vaso cilíndrico de 10 cm de diámetro. Ata que altura chegará a auga?

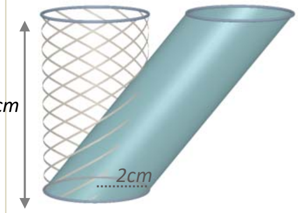
53. Segundo *Arquímedes* que dimensións ten o cilindro circunscrito a unha esfera de 5 cm de radio que ten a súa mesma área? Calcula esta área.

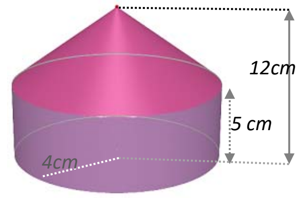
54. Cal é o volume dunha esfera na que unha circunferencia máxima mide 31.40 m?

55. Calcula a área lateral e o volume dos seguintes corpos xeométricos

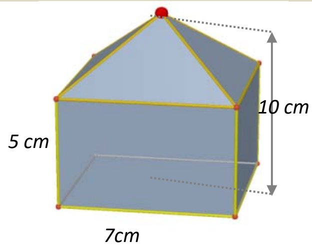




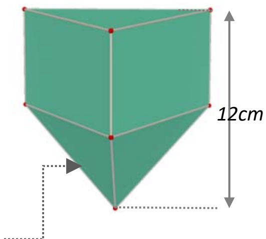




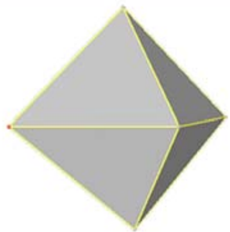
56. Calcula a área lateral e o volume dos seguintes corpos xeométricos



A base é cadrada



Tetraedro de 5cm de aresta



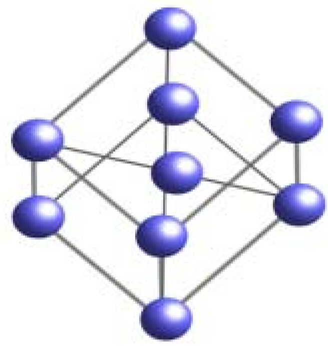
Octaedro de 6cm de aresta

Pirámides construídas no interior dunha estrutura cúbica de 5 dm de aresta.

57. Na construción dun globo aerostático de radio de 2.5 m emprégase lona que ten un custe de 300 €/m^2. Calcula o importe da lona necesaria para a súa construción.

Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

58. Calcula o radio dunha esfera que ten 33.51 dm^3 de volume.



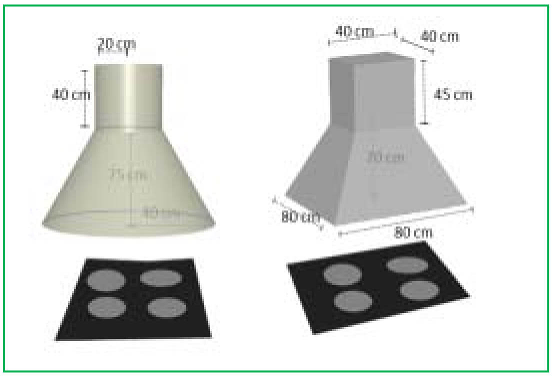
59. O *Atomium* é un monumento de Bruxelas que reproduce unha molécula de ferro. Consta de 9 esferas de aceiro de 18 m de diámetro que ocupan os vértices e o centro dunha estrutura cúbica de 103 m de diagonal, realizada con cilindros de 2 metros de diámetro. Se utilizamos unha escala 1:100 e tanto as esferas como os cilindros son macizos, que cantidade de material necesitaremos?

60. Pintouse por dentro e por fóra un depósito sen tapadeira de 8 dm de alto e 3 dm de radio. Tendo en conta que a base só se pode pintar por dentro, e que se utilizou pintura de 2 €/dm^2, canto diñeiro custou en total?

61. Unha piscina mide 20 m de longo, 5 m de ancho e 2 m de alto.

a. Cantos litros de auga son necesarios para enchela?

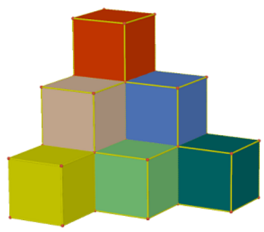
b. Canto custará recubrir o chan e as paredes con PVC se o prezo é de 20 €/ m^2?



62. Cal das dúas cambotas da figura esquerda ten un custe de aceiro inoxidable menor?

63. Nunha vasilla cilíndrica de 8 dm de diámetro e que contén auga, introdúcese unha bóla. Cal é o seu volume se despois da inmersión sobe 0.3 metros o nivel da auga?

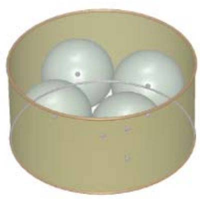
64. O prezo das tellas é de 14.30 €/m^2. Canto custará retellar unha vivenda cuxo tellado ten forma de pirámide cuadrangular regular de 4 metros de altura e 8 metros de lado da base?



65. Enrólase unha cartolina rectangular de lados 30 cm e 25 cm das dúas formas posibles, facendo coincidir lados opostos. Cal dos dous cilindros resultantes ten maior volume?

66. Cada un dos cubos da figura ten 2 cm de aresta. Cantos hai que engadir para formar un cubo de 216 cm^3 de volume?

67. Un tubo de ensaio ten forma de cilindro aberto na parte superior e rematado por unha semiesfera na inferior. Se o radio da base é de 1.5 cm e a altura total é de 15 cm, calcula cantos centilitros de líquido caben nel.



68. O cristal dun farol ten forma de tronco de cono de 50 cm de altura e bases de radios 20 e 30 cm. Calcula a súa superficie.

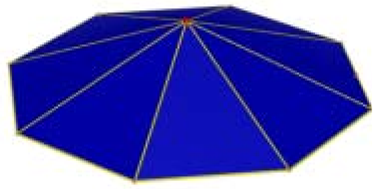
69. Un bote cilíndrico de 10 cm de radio e 40 cm de altura ten no seu interior catro pelotas de radio 3.5 cm. Calcula o espazo libre que hai no seu interior.

70. Construímos un cono con cartolina recortando un sector circular de 120º e radio 20 cm. Calcula o volume do cono resultante.

71. Un funil cónico de 20 cm de diámetro debe ter 2 litros de capacidade, cal será a súa altura?

72. Nun depósito con forma de cilindro de 25 cm de radio, unha billa verte 15 litros de auga cada minuto. Canto aumentará a altura da auga despois dun cuarto de hora?

73. A lona dun parasol aberto ten forma de pirámide octogonal regular de 1 m de altura e 45 cm de lado da base. Fíxase un mastro ao chan no que se encaixa e o vértice da pirámide queda a unha distancia do chan de 1.80 m. No momento no que os raios de sol son verticais, que espazo de sombra determina?



74. Unha peixeira con forma de prisma recto e base rectangular énchese con 56 litros de auga. Se ten 48 cm de longo e 36 cm de ancho, cal é a súa profundidade?

75. Un rectángulo de 1 m de base e 10 m de altura xira 360° arredor dunha recta paralela á altura, que está situada a 2 m de distancia. Calcula a superficie e o volume do corpo que resulta.

76. Nun xeado de cornete, a galleta ten 15 cm de altura e 5 cm de diámetro. Cal é a súa superficie? Se o cornete está completamente cheo de xeado e sobresae unha semiesfera perfecta, cantos gramos de xeado contén?

Fusos horarios

77. Que diferenza de lonxitude existe entre dúas cidades se a diferenza horaria entre ambas as dúas é de 5 horas? Podemos saber se existe diferenza entre as súas latitudes?

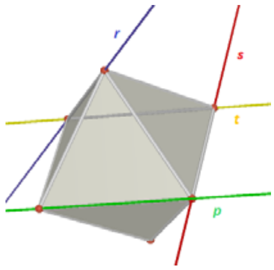
78. Un avión emprende viaxe cara a unha cidade situada ao oeste de Madrid. A viaxe dura 10 horas e o seu rumbo mantén en todo momento a latitude de partida. Se a diferenza de lonxitude entre Madrid e a cidade de chegada é de 45° e o avión despega do aeroporto Adolfo Suárez ás 9 da mañá. A que hora local aterrará na cidade de destino?

79. A distancia entre Londres e Pequín é de 8 149 Km e a distancia entre Londres e São Paulo é de 9 508 Km, porén en Pequín o reloxo marca 7 horas máis que en Londres e en São Paulo 3 horas menos que en Londres. Como explicas esta diferenza?

CIDADE	LONXITUDE	LATITUDE
LONDRES	0º	51º 30´ latitude N
PEQUÍN	116º lonxitude E	40º latitude N
SÃO PAULO	46º 30´de lonxitude W	23º 30´de latitude S

Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

AUTOAVALIACIÓN



1. Cada unha das rectas *r, s, t e p* pasa por dous vértices consecutivos dun octaedro tal e como se observa na figura. Sinala que afirmación das seguintes é verdadeira:

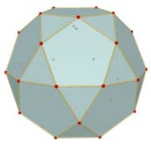
a) As rectas *r e s* son coplanarias e secantes.

b) As rectas *t* e *p* non son coplanarias.

c) As rectas *r* e *p* crúzanse.

d) *r* e *s* conteñen arestas dunha mesma cara do octaedro.

2. Observa os seguintes corpos xeométricos e selecciona a opción verdadeira:

I)	II)	III)	IV)	V)	VI)
					

a) Os corpos I), II), IV) e V) cumpren a relación de Euler. **b)** Hai dous corpos de revolución III) e VI).

c) Son poliedros regulares II) e IV). **d)** Son cóncavos I) e V).

3. Se a altura dun prisma de base cadrada é 10 cm e o lado da base é 4 cm, a súa área total é:

a) 160 cm^2 **b)** 320 cm^2 **c)** 400 cm^2 **d)** 192 cm^2

4. Un depósito de auga ten forma de prisma hexagonal regular de 5 m de altura e lado da base 1 m. Se só contén as tres cuartas partes da súa capacidade, o número aproximado de litros de auga que hai neles:

a) 13 000 L **b)** 9 750 L **c)** 3 750 L **d)** 3 520 L.

5. O tellado dunha caseta ten forma de pirámide cuadrangular regular de 1.5 m de altura e 80 cm de lado da base. Se se necesitan 15 tellas por metro cadrado para recubrir o tellado, en total utilizaranse:

a) 38 tellas **b)** 76 tellas **c)** 72 tellas **d)** 36 tellas.

6. Unha caixa de dimensións $30 \times 20 \times 15\ cm$, está chea de cubos de 1 *cm* de aresta. Se se utilizan todos para construír un prisma recto de base cadrada de 10 *cm* de lado, a altura medirá:

a) 55 cm **b)** 65 cm **c)** 75 cm **d)** 90 cm.

7. O radio dunha esfera que ten o mesmo volume que un cono de 5 dm de radio da base e 120 cm de altura é:

a) $5\sqrt{3}$ dm **b)** $\sqrt[3]{75}$ dm **c)** 150 cm **d)** $\sqrt[3]{2\,250}$ cm.

8. Distribúense 42.39 litros de disolvente en latas cilíndricas de 15 cm de altura e 3 cm de radio da base. O número de envases necesario é:

a) 100 **b)** 10 **c)** 42 **d)** 45.

Autoras: Milagros Latasa e Fernanda Ramos
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

9. A área lateral dun tronco de cono que ten 20 cm de altura e bases de radios 30 e 15 cm, é:

a) 2 250π cm^2 **b)** 900π cm^2 **c)** 1 125π cm^2 **d)** 450π cm^2

10. A partir das coordenadas xeográficas das cidades A, B, C deduce que afirmación é correcta

CIDADE	LONXITUDE	LATITUDE
A	15° E	15° N
B	15° W	15° N
C	15° E	15° S

a) As cidades A e B teñen a mesma hora e a cidade C dúas horas menos.

b) As cidades A e B teñen a mesma hora e a cidade C dúas horas máis.

c) As cidades A e C teñen a mesma hora e a cidade B dúas horas máis.

d) As cidades A e C teñen a mesma hora e a cidade B dúas horas menos.

Matemáticas orientadas ás ensinanzas académicas

3º B da ESO

Capítulo 10: Funcións e gráficas

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: José Gallegos Fernández

Revisores: Concha Fidalgo e Javier Brihuega

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: José Gallegos Fernández

Índice

1. SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN NO PLANO

1.1. EIXES DE COORDENADAS OU CARTESIANOS
1.2. COORDENADAS CARTESIANAS

2. FUNCIÓNS

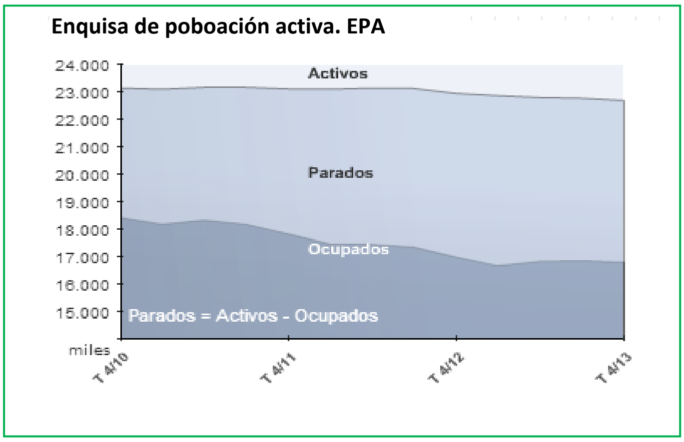
2.1. CONCEPTO INTUITIVO DE FUNCIÓN
2.2. GRÁFICA DUNHA FUNCIÓN
2.3. EXEMPLOS DE FUNCIÓNS: FUNCIÓN AFÍN E CUADRÁTICA
2.4. GRÁFICAS DE FUNCIÓNS CON XEOXEBRA. GRÁFICAS DE FUNCIÓNS LINEAIS E AFÍNS

3. CARACTERÍSTICAS DUNHA FUNCIÓN

3.1. CONTINUIDADE
3.2. MONOTONÍA: CRECEMENTO E DECRECEMENTO
3.3. EXTREMOS: MÁXIMOS E MÍNIMOS
3.4. SIMETRÍA
3.5. PERIODICIDADE

Resumo

O concepto de función é bastante abstracto, o que fai complicada a súa definición e comprensión. Porén, as súas aplicacións son múltiples e moi útiles, o que as fai moi importantes.



Por exemplo, as FUNCIÓNS serven para poder explicar moitos fenómenos que ocorren en campos tan diversos como a Física, a Economía ou a Socioloxía.

Malia as dificultades, algunhas características que posúen as FUNCIÓNS enténdense doadamente cando se representan graficamente, por resultaren entón moi intuitivas, e iso é suficiente para poder analizar e resolver moitas cuestións. Por exemplo, se observamos a gráfica anterior non é difícil interpretar se o paro subiu ou se baixou no cuarto trimestre entre dous anos consecutivos, ou globalmente ao longo do período completo estudado, ou calcular este incremento/diminución ou estudar en que ano houbo máis persoas ocupadas ou menos persoas activas...

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

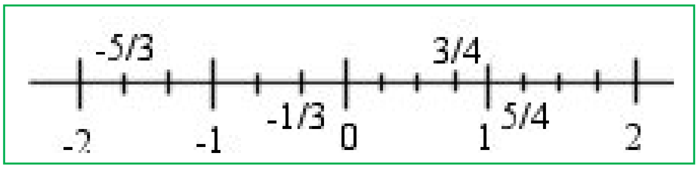
1. SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN NO PLANO

1.1. Eixes de coordenadas ou cartesianos

Recorda que:

Cando queremos representar graficamente un número, normalmente debuxámolo sobre unha recta, chamada *recta numérica*, na cal establecemos un punto de referencia, que é o 0, a partir do que trazamos os números positivos (cara á dereita) e os negativos (cara á esquerda).

Pois ben, se estamos traballando cunha única variable que toma valores numéricos e os queremos representar, farémolo igualmente sobre esta recta.



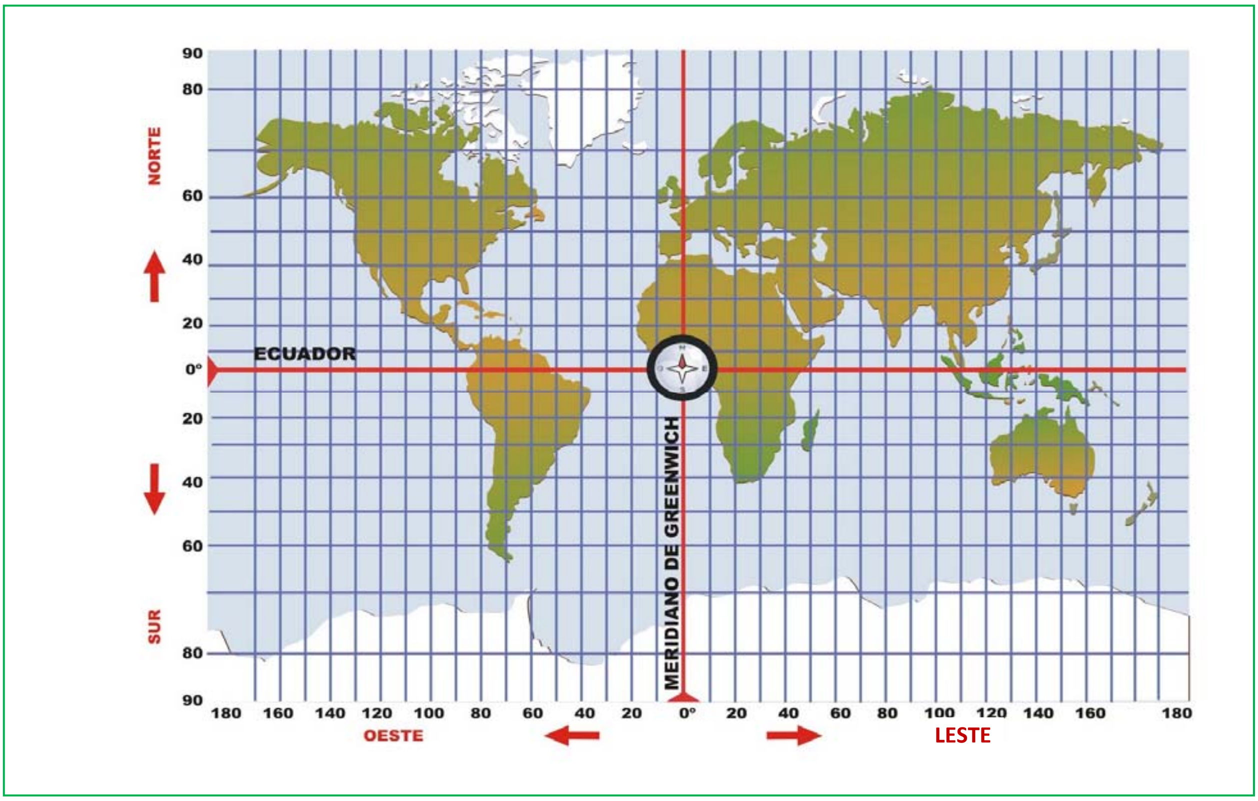
É importante facer notar que, como temos unha única variable, necesitamos unha única recta e, polo tanto, estamos traballando cunha única dimensión (lonxitude).

No plano:

Agora ben, se traballamos con obxectos de dúas dimensións, no plano, necesitamos dous valores para referirnos a eles, xa que están determinados pola súa lonxitude e a súa anchura, que non teñen por que ser iguais e que seguen direccións diferentes.

Exemplo:

- Nun mapa, para poder situar un punto calquera (por exemplo, unha cidade), temos unha referencia a partir da cal tomar as medidas: o paralelo do Ecuador e o meridiano de *Greenwich*. Ambos os dous córtanse nun punto, que é a orixe deste sistema de referencia:

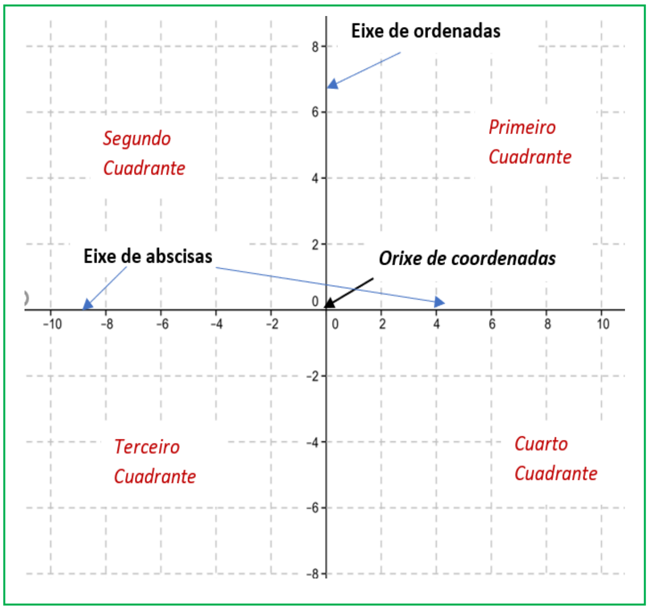


Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

De igual forma, se temos dúas variables *que están relacionadas dalgunha maneira,* que toman valores numéricos e queremos debuxalo, teremos que utilizar dúas rectas ou eixes diferentes (cada un para os datos correspondentes a unha variable) e que sexan secantes, é dicir, córtanse nun punto (sen o cal non se podería establecer a relación entre ambas as dúas).

Se as rectas se cortan de forma perpendicular, é máis sinxelo establecer a conexión entre valores, e as medidas que se representan en cada eixe (agás escalas) pódense corresponder de forma directa coa realidade, polo que sempre se soen debuxar desta forma (formando un ángulo de 90° entre si).

O sistema de representación de puntos no plano máis común está formado por dous eixes perpendiculares, un horizontal chamado ***eixe de abscisas***, onde se representan os valores da variable independente (que toma os valores libremente, e que soe chamarse *"x"*), e outro vertical chamado ***eixe de ordenadas***, onde se representan os valores da variable dependente (porque se calculan a partir da outra, e que soe chamarse *"y"*). Ambos reciben o nome de ***eixes de coordenadas*** ou ***eixes cartesianos*** (en honor do famoso filósofo e matemático francés *Renè Descartes*). O punto onde se cortan ambos eixes chamase ***orixe de coordenadas*** e, ao cortárense os dous eixes, o plano queda dividido en catro zonas, que se coñecen como cuadrantes, e que se nomean no sentido contrario ás agullas do reloxo empezando desde a parte positiva do eixe de abscisas.



Un conxunto formado pola orixe *O*, os dous eixes de coordenadas e a unidade de medida é un **sistema de referencia cartesiano**.

1.2. Coordenadas cartesianas

Unha vez establecido o sistema de referencia con respecto ao cal poder situar os puntos, para chegar a un en concreto partimos da orixe, "O", percorremos unha determinada cantidade cara á dereita ou a esquerda e logo outra cara arriba ou cara abaixo. Así cada punto queda determinado por un par de números, a medida dos camiños realizados en ambas as direccións, aos que chamamos **coordenadas do punto**.

Exemplo:

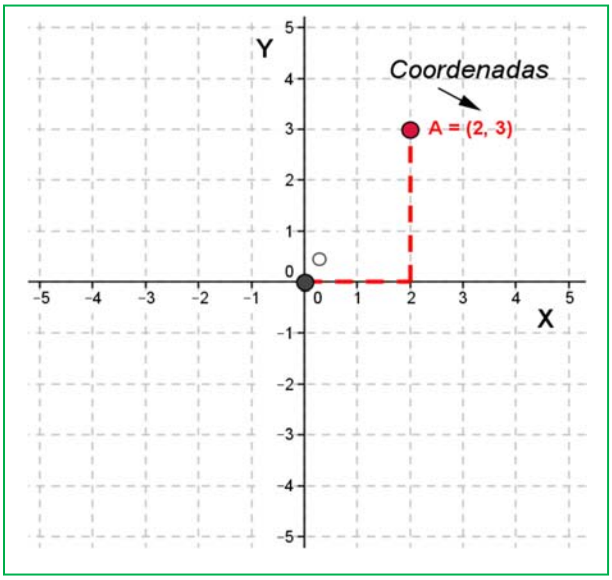
- Nun mapa como o do exemplo anterior, un punto queda determinado pola súa *latitude* (distancia ao Ecuador, medida sobre o meridiano que pasa por este punto) e a *lonxitude* (distancia ao Meridiano de *Greenwich*, medida sobre o paralelo que pasa por este punto), chamadas *coordenadas xeográficas*. Por exemplo, a situación de Madrid é (–3.41, 40.24):

  Lonxitude –3.41 ou 3.41 O, é dicir, hai que trasladarse 3.41 cara ao oeste (esquerda) do meridiano de *Greenwich*.
  Latitude +40.24 ou 40.24 N, é dicir, hai que trasladarse 40.24 cara ao norte (por enriba) do Ecuador.

As **coordenadas dun** punto *A* son un par ordenado de números reais **(*x*, *y*)**, sendo "***x***" a primeira coordenada ou **abscisa** (indícanos a distancia á que o punto se encontra do eixe vertical) e "***y***" a segunda coordenada ou **ordenada** (indícanos a distancia á que o punto se encontra do eixe horizontal).

Cando ese valor se toma cara á esquerda ou cara abaixo indicámolo cun número **negativo** e se é cara arriba ou á dereita indicámolo cun **positivo**, da mesma maneira que faciamos ao representar os números na recta.

Desta forma, calquera punto do plano queda totalmente determinado mediante as súas coordenadas e viceversa, a toda parella ordenada de números lle corresponde un punto do plano.

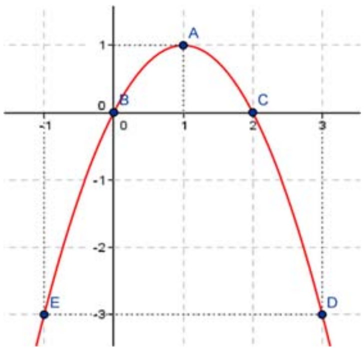


Exemplo:

- No gráfico anterior, o punto *A* ten coordenadas (2, 3).

Actividades resoltas

- *Na seguinte gráfica, indica as coordenadas dos puntos sinalados:*



***A*(1, 1)**

***B*(0, 0)**

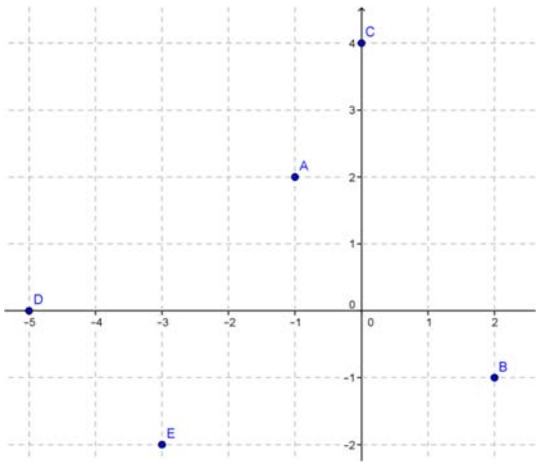
***C*(2, 0)**

***D*(3, –3)**

***E*(–1, –3)**

- *Representa graficamente os puntos*:

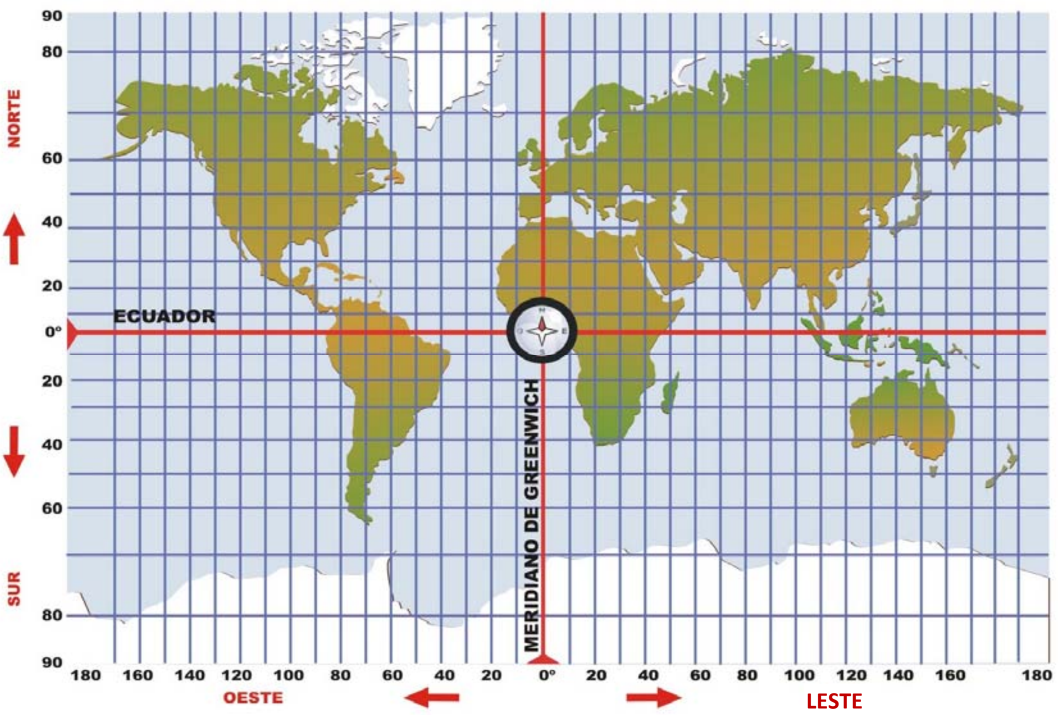
$A(-1, 2);\ B(2, -1);\ C(0, 4);$
$D(-5, 0);\ E(-3, -2)$



Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

Actividades propostas

1. Fíxate no mapa seguinte, localiza os países ou cidades que se piden e indica no teu caderno:



a) Os cuadrantes onde se encontran os seguintes países:

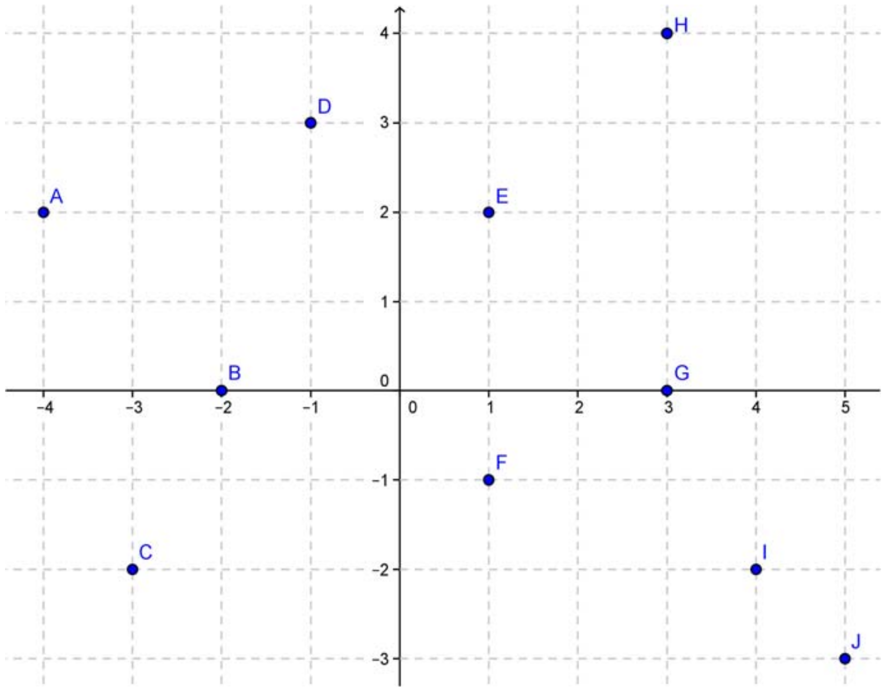
- México:
- Madagascar:
- India:
- Chile:
- España:
- Arxentina:
- Australia:
- Xapón:
- Arabia Saudita:
- Alemaña:
- EEUU:
- Marrocos:

b) As coordenadas (aproximadas) das seguintes cidades:

- Cidade do Cabo:
- Nova York:
- Río de Janeiro:
- Alacante:
- Pequín:
- Rabat:
- Sidney:
- Oviedo:
- Londres:
- Córdoba (México):

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

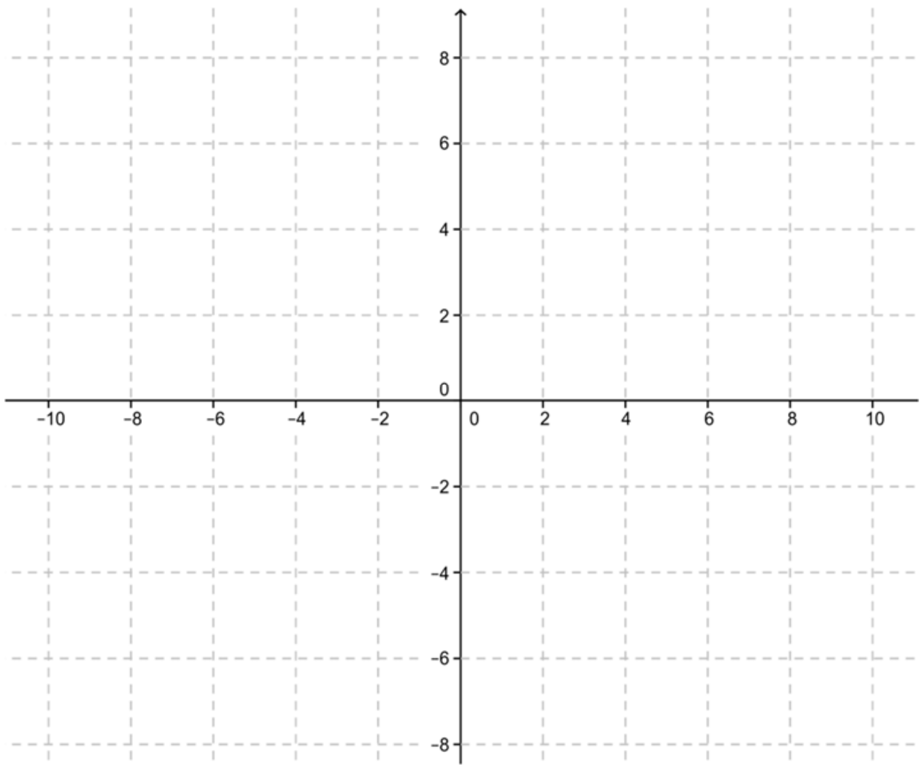
2. Copia no teu caderno e indica as coordenadas de todos os puntos que están sinalados no plano:



3. Representa graficamente no teu caderno os seguintes puntos do plano:

A (0, –2) *B* (–2, 0) *C* (4, 0) *D* (–6, 0) *E* (0, 6) *F* (1, 7) *G* (7, 1) *H* (–4, 8) *I* (–1, –4) *J* (–4, –1)

K (5, –3) *L* (9, 6) *M* (–2, 1) *N* (7, –4) *Ñ* (–3, –3) *O*(0, 0) *P(–2, –1)* *Q*(2, 1) *R*(2, –1) *S*(–2, 2)



Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

2. FUNCIÓNS

2.1. Concepto intuitivo de función

Existen multitude de fenómenos na nosa vida cotiá nos que aparecen relacionadas dúas magnitudes. Por exemplo, o prezo dun billete nun medio de transporte e a distancia ou tempo de duración da viaxe, o prezo dun quilo de froita ou carne e o número de quilos que compramos, a duración dun traxecto e a velocidade á que imos, o número de latexos do corazón nunha unidade de tempo…

Moitas desas relacións réxense por unha lei de proporcionalidade, directa ou inversa, pero hai outras moitas nas que a correspondencia entre ambas as magnitudes é máis complexa.

Unha **función é unha** relación entre dúas magnitudes de forma que a un valor calquera dunha (**variable independente**) lle facemos corresponder, como moito, un único valor da outra (**variable dependente**).

Esta relación funcional pódese establecer, moitas veces, mediante unha expresión matemática ou fórmula, o que nos permitirá traballar de forma cómoda con ela. Outras veces vén dada mediante unha táboa onde aparecen os valores relacionados entre si. En ocasións temos a relación en forma de gráfica… E tamén existen FUNCIÓNS que non se poden escribir mediante unha expresión alxébrica!

Exemplos:

- *Un quilo de tomates custa* 0.59 €/kg*. A función que establece canto debemos pagar en función da cantidade de tomates que levamos é y = f(x) =* 0.59 *x.*

  Nela, ***f*** é o nome que lle poñemos á función e poderiamos chamala usando outras letras (as que se usan máis frecuentemente son "*f*", "*g*" e "*h*"). Entre parénteses vai a variable "***x***" que representa o número de quilos que compramos, e é a variable independente xa que nós eliximos libremente a cantidade que queremos ou precisamos. Por último, a variable "***y***" representa o prezo que debemos pagar, e é a variable dependente xa que "depende" de cantos quilos levamos, é dicir, de "*x*".

  A expresión, *f*(x) que se le "*f* de *x*", sóese usar con moita frecuencia para designar á variable dependente porque:

  1º) nela vese cal é a variable independente e, polo tanto,

  2º) resulta moi cómodo escribir canto nos custaría comprar unha cantidade concreta, por exemplo, 2 kg. Expresaríase "*f* de *2*" e o seu valor é *f*(2) = 0.59 · 2 = *1.18 €*.

- *Unha persoa que vai paseando sempre á mesma velocidade, quere percorrer unha rúa recta de* 1 *km nun tempo determinado. A relación entre o tempo que tardará (en segundos) e a velocidade que leva (en metros por segundo) vén dada pola fórmula* $v(t) = \frac{1\,000}{t}$.

  Nela, "***v***" é o nome da función velocidade, 1 000 son os metros que ten que percorrer e "***t***" o tempo que tarda en percorrer este espazo.

- Todos os números decimais teñen a súa parte enteira e a súa parte decimal. Pois ben, todo número real pódese relacionar de forma única co *número enteiro inmediatamente inferior*, chamado a súa "*parte enteira*" e representado $E(x)$. O feito de que este número sexa único fai que nos encontremos perante unha función.
  Por exemplo, a parte enteira de 8.3 é 8: $E(8.3) = 8$; a de –4.2 é –5: $E(-4.2) = -5$...
  Pois ben, esta función, malia a súa sinxela descrición mediante palabras que nos din que debemos facer, non se pode escribir mediante unha fórmula alxébrica.

Actividades propostas

4. Das seguintes relacións entre dúas variables, razoa cales son funcionais e cales non:

a. Idade – altura da persoa ao longo da súa vida.
b. Altura – idade da persoa.
c. Prezo da gasolina – día do mes.
d. Día do mes – prezo da gasolina.
e. Un número e a súa quinta parte.
f. Un número e o seu cadrado.
g. Un número e a súa raíz cadrada.

5. Se hoxe o cambio € a $ está 1 € = 1.37 $, completa no teu caderno a seguinte táboa de equivalencia entre as dúas moedas:

€	2	5	10	27	60
$					

Expresa mediante unha fórmula a relación que existe entre ambas as dúas. Pódese expresar de forma única esta relación? É unha función?
Se realizas o cambio nunha oficina, cóbranche unha pequena comisión fixa por realizar a operación de 1.5 €. Como quedaría/n a fórmula/s neste caso?

6. A ponte *Golden Gate* permite a comunicación entre os dous lados da baía de San Francisco. As súas torres, de 746 pés de altura, están separadas por unha distancia de 4 200 pés aproximadamente. A calzada, que ten unha anchura de 90 pés e se encontra a unha altura de 220 pés sobre o nivel da auga, está suxeita ás torres mediante dous cables, de 3 pés de diámetro, que teñen forma de parábola e que tocan a calzada no centro da ponte.

- Realiza un debuxo onde queden reflectidos os datos máis significativos do problema.
- Determina a relación que existe entre a altura á que se encontra un punto do cable e a distancia da súa proxección vertical ao centro da ponte.
- Aplica a devandita fórmula para calcular a altura dun punto do cable cuxa vertical está a 1 000 pés do centro da ponte.

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

2.2. Gráfica dunha función

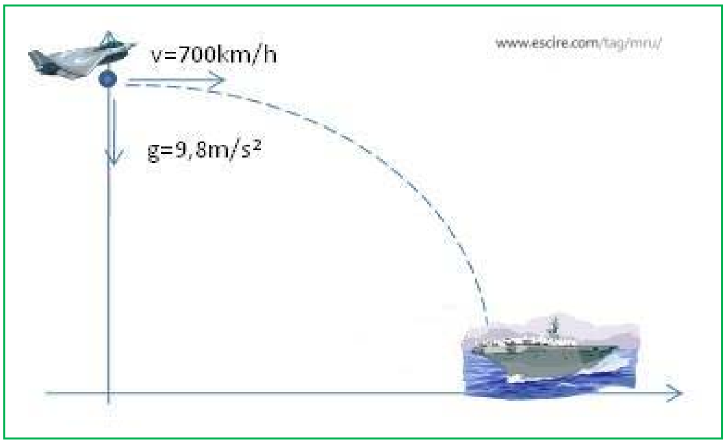
Xa que en toda función temos dous valores que se relacionan de forma única, podemos debuxalos ambos os dous nos eixes cartesianos de forma que, se unimos todos eses puntos, obtemos unha curva que nos permite visualizar esta función.

Esta representación ten unha serie de limitacións, moitas delas comúns a calquera debuxo que poidamos facer: é aproximada xa que os instrumentos que se utilizan para facelo (regra, compás, lapis…), por moi precisos que sexan (ordenadores), sempre teñen unha marxe de erro; tamén existen fallos de tipo visual ou dos instrumentos de medida; ou moitas veces temos que representar os infinitos puntos do grafo nun espazo finito, o cal é imposible e fai que só poidamos debuxar unha parte do que se pretende, pero non todo.

Malia todos estes inconvenientes, representar graficamente esta serie de puntos relacionados que conforman a función, aínda que sexa de forma aproximada, é importante xa que nos fai moito máis concreto un concepto moi abstracto, ao poder visualizalo: "máis vale unha imaxe que mil palabras".

Exemplo:

- *A traxectoria que debe seguir un avión para aterrar nun portaavións correspóndese coa representación da función que relaciona a distancia percorrida por el mesmo dependendo do tempo que tarda en percorrela:*

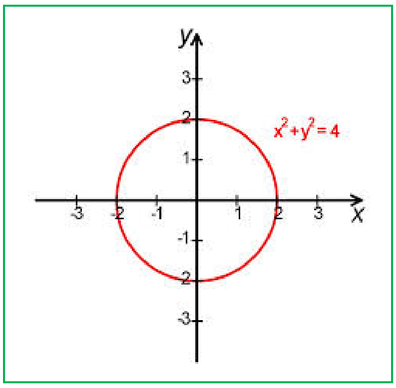


Ademais, unha representación tamén nos permite descubrir se a mesma representa a unha función ou non, xa que no debuxo é fácil interpretar se a un valor da variable independente lle corresponde unicamente un da dependente ou máis de un, propiedade fundamental que define ás FUNCIÓNS.

Exemplo:

- No seguinte debuxo, que corresponde a unha circunferencia, ao valor **0** da variable independente correspóndenlle os valores **2** e – **2** da dependente. Ademais, hai outros moitos valores aos que lles pasa o mesmo, polo que non pode ser a representación dunha función.

  A fórmula que corresponde a esta gráfica é $x^2 + y^2 = 4$ ou, tamén, $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$.



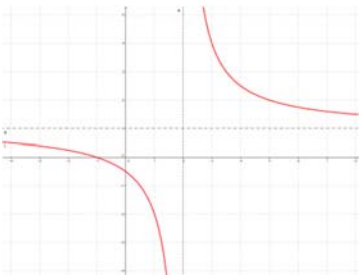
Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

A **gráfica dunha función é a** representación no plano cartesiano de todos os pares ordenados nos que o primeiro valor corresponde a un calquera da variable independente e o segundo ao que se obtén ao transformalo mediante a función:

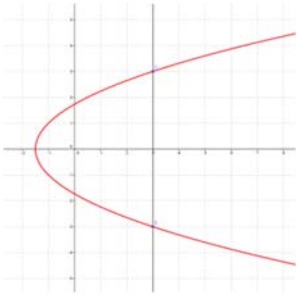
$$\{(x, y) \mid x \in \Re,\ y = f(x)\}$$

Actividades resoltas

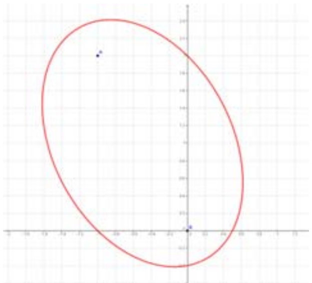
- *Indica cales das seguintes gráficas corresponden a unha función e cales non:*



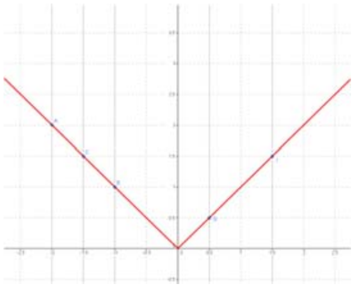
SI



NON



NON



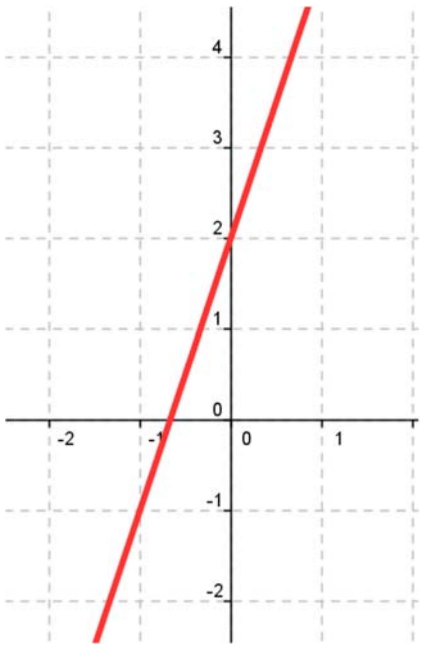
SI

Cal é a clave ou regra para saber, a partir do debuxo, se este corresponde a unha función ou non?

Se trazamos rectas verticais imaxinarias e estas chocan co debuxo, como moito, nun punto, a gráfica corresponde a unha función. No outro caso, non.

- *Debuxa no plano cartesiano os valores da seguinte táboa e conxectura sobre que tipo de figura corresponde á gráfica da función:*

GRÁFICA



x	–4	–2	0	1	3
$f(x)$	–10	–4	2	5	11

Observamos que os puntos, ao representalos, están aliñados. Polo tanto, o debuxo que corresponde á gráfica da función é unha RECTA.

Neste caso, non é demasiado difícil descubrir que a fórmula que relaciona ambas as variables é:

$$f(x) = 3x + 2$$

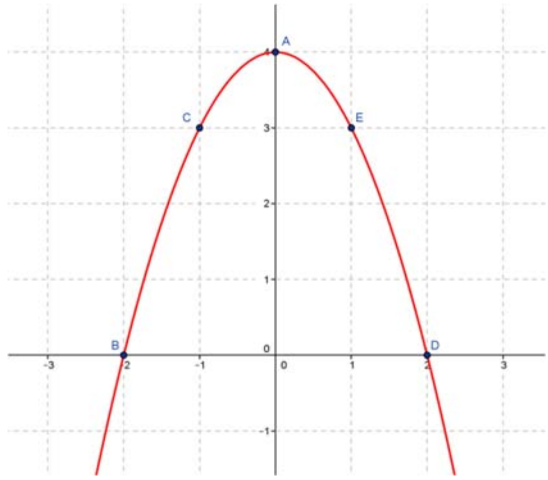
Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

Completa a seguinte táboa a partir da fórmula da función $f(x) = -x^2 + 4$*, debuxa os puntos nos eixes cartesianos e intenta unilos mediante unha curva:*

x	–2	–1	0	1	2
f(x)	***0***	***3***	***4***	***3***	***0***

A curva obtida recibe o nome de **PARÁBOLA** (que é unha das catro cónicas).

GRÁFICA



Actividades propostas

7. Realiza no teu caderno o debuxo de dúas gráficas, unha que corresponda a unha función e a outra non. Identifica cada unha e explica o porque desta correspondencia.

8. Realiza no teu caderno unha táboa con 10 valores da función $e(t) = 5t + 20$, represéntaos graficamente e indica a figura que determinan. Se esta función representa o espazo (en quilómetros) que percorre unha persoa que leva andados 20 km e camiña a unha velocidade de 5 km/h, en función do tempo que tarda en percorrelo (en horas), indica cales serían os valores que non tería sentido dar á variable independente e en que se traduce iso na gráfica.

9. Razoa se os valores da seguinte táboa poden corresponder aos dunha función e por que:

x	–13	–7	10	–13	24
f(*x*)	–15	0	14	3	0

10. Nunha folla de papel cuadriculado raia un cadrado de lado un cadradiño. Cal é a súa área? Agora fai o mesmo cun cadrado de lado 2. Continúa tomando cadrados de lados 3, 4, 5… e calcula as súas áreas. Cos resultados completa unha táboa de valores e debuxa a súa gráfica. Ten sentido para valores negativos da variable? Busca unha fórmula para esta función.

11. Para aparcar en zona azul (non residentes) hai unhas tarifas. Representa unha gráfica da función cuxa variable independente sexa o tempo e a variable dependente o prezo (en euros) que hai que pagar.

12. Un fabricante quere construír vasos cilíndricos medidores de volumes que teñan de radio da base 4 cm e de altura total do vaso 24 cm. Escribe unha fórmula que indique como varía o volume ao ir variando a altura do líquido. Constrúe unha táboa cos volumes correspondentes ás alturas tomadas de 3 en 3 cm. Escribe tamén unha fórmula que permita obter a altura coñecendo os volumes. A que altura haberá que colocar a marca para ter un decilitro?

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

2.3. Exemplos de FUNCIÓNS: función afín e cuadrática

Durante todos os apartados anteriores fomos analizando distintos exemplos de relacións entre dúas variables que eran función e outros que non. Fixémolo desde o punto de vista gráfico, de táboas de valores e de fórmulas matemáticas.

Nesta sección, simplemente imos analizar uns cantos exemplos de FUNCIÓNS que son bastante sinxelas e que teñen bastantes aplicacións prácticas.

Unha **función afín** é aquela función na que a relación entre as dúas variables vén dada por un polinomio de grao menor ou igual a un:

$$y = f(x) = mx + n.$$

A súa representación gráfica é sempre unha **recta**, a súa **pendente** é o coeficiente líder (m) e indica a inclinación da mesma (se é positivo a recta será **crecente e se** é negativo **decrecente**) e a súa **ordenada na orixe** (n) é o termo independente, que nos proporciona o punto onde a recta corta o eixe de ordenadas.

Exemplo:

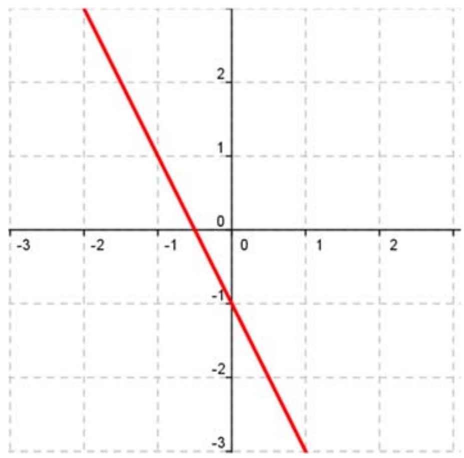
- $y = -3x - 1$ (polinomio de primeiro grao)

X	-2	-1	$-1/2$	0	1
$f(x)$	3	1	0	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{-3}$

(–2, 3) (–1, 1) (–1/2, 0) (0, –1) (1, –3)

Pendente: **–3** $\Rightarrow$ recta decrecente
Ordenada na orixe: **–1** $\Rightarrow$ **(0, –1)** punto de corte da recta co eixe de ordenadas

GRÁFICA



Como casos particulares de FUNCIÓNS afíns temos:

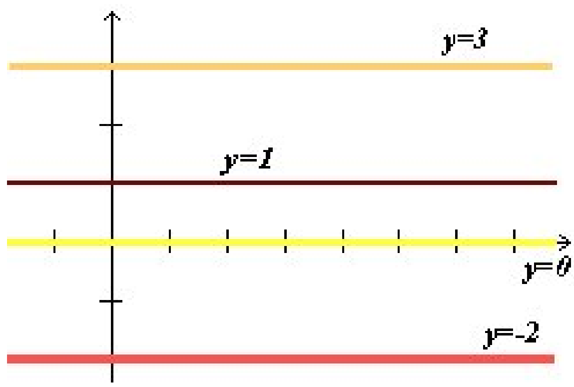
Función constante (recta horizontal): é aquela que sempre toma o mesmo valor para todos os valores da variable independente (a pendente é nula):

$$y = n$$

Exemplo:

- Gráficas de $y = 3$; $y = 1$; $y = 0$; $y = -2$.

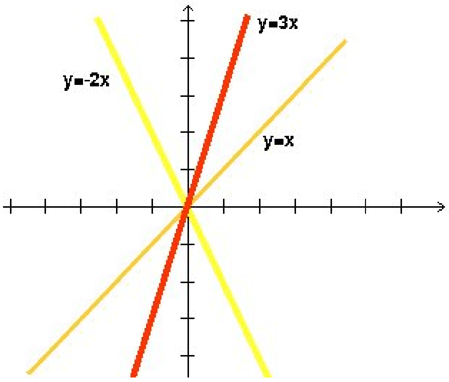
Polo tanto, a recta non ten inclinación, é dicir, é paralela ao eixe de abscisas.



Observa que

A ecuación do eixe de abscisas é $y = 0$.

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández



Función lineal ou de proporcionalidade directa: é aquela que ten ordenada na orixe igual a **0** (pasa pola orixe de coordenadas): $y = mx$

Cada valor de "***y***" conserva unha mesma proporción respecto ao de "***x***":

$y = 3x$ (*y* é o triplo de *x*)

$y = -2x$ (*y* é o oposto do dobre de *x*)

$y = x$ (**función identidade**: *y* é igual a *x*)

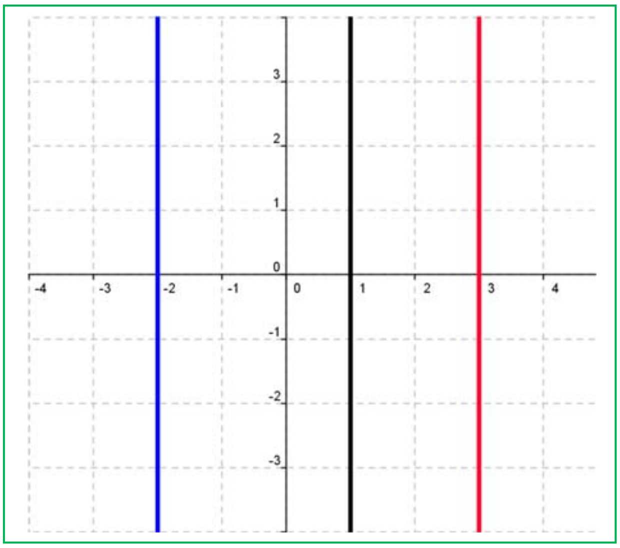
Observa que:

A gráfica de *x* = *a* é unha recta vertical, pero non é unha función porque para o valor da variable independente "*a*", a ordenada toma infinitos valores.

Exemplo:

- Debuxa a gráfica de *x* = 3; *x* = –2; *x* = 1.

A ecuación do eixe de ordenadas é *x* = 0.



Actividades propostas

13. Escribe tres FUNCIÓNS cuxas gráficas sexan tres rectas que pasen pola orixe de coordenadas e as súas pendentes sexan 3, –2, e 1/2 respectivamente.

14. Que ángulo forma co eixe de abscisas a recta *y* = *x*? E a recta *y* = –x?

15. Un metro de certa tea custa 1.35 €, canto custan 5 metros? E 10 m? E 12.5 m? Canto custan "*x*" metros de tea? Escribe a fórmula desta situación.

16. Calcula a ecuación e debuxa a gráfica das rectas seguintes:

a) A súa pendente é 2 e a súa ordenada na orixe é 3.
b) Pasa polos puntos *A*(1, 3) e *B*(0, 4).
c) A súa ordenada na orixe é 0 e a súa pendente é 0.
d) Pasa polos puntos *C*(–1, 3) e *D*(–2, 5).
e) Pasa polo punto (*a*, *b*) e ten de pendente *m*.

17. Como son entre si dúas rectas de igual pendente e distinta ordenada na orixe?

18. Debuxa no teu caderno, sen calcular a súa ecuación, as rectas seguintes:

a) De pendente 3 e ordenada na orixe 0.
b) Pasa polos puntos *A*(2, 3) e *B*(4, 1).
c) A súa pendente é 2 e pasa polo punto (4, 5).

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

Unha **función cuadrática** é aquela función na que a relación entre as dúas variables vén dada por un polinomio de grao dous:

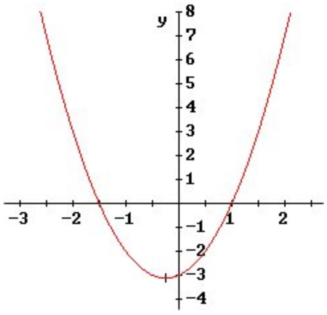
$$y = f(x) = ax^2 + bx + c.$$

A gráfica deste tipo de FUNCIÓNS chámase **parábola**

Se o coeficiente líder ou cuadrático é positivo (**$a > 0$**), a parábola está aberta cara ao eixe Y positivo (**convexa**).

$y = 2x^2 + x - 3$

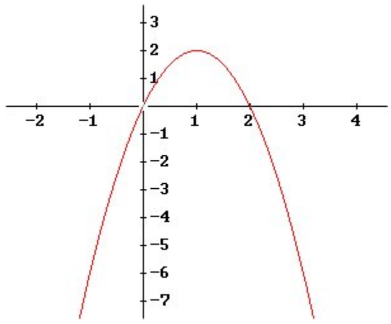
$2 > 0$



Se o coeficiente líder ou cuadrático é negativo (**$a < 0$**), a parábola está aberta cara ao eixe Y negativo (**cóncava**).

$y = -2x^2 + 4x$

$-2 < 0$



Os outros coeficientes do polinomio afectan á posición que ocupa a parábola respecto aos eixes.

Non podemos dicir que unha función cuadrática é crecente ou decrecente, xa que hai un anaco (**rama**) que medra e outro que diminúe. O punto onde se produce ese cambio chámase **vértice** e é o maior (*máximo*) ou menor (*mínimo*) valor que toma a función. Podemos dicir que este punto é o máis significativo nunha parábola, e por iso é importante saber calculalo. Para iso, dámoslle á variable independente o valor $x = \frac{-b}{2a}$, e substituímolo na función para calcular "***y***". Este valor é fácil de recordar xa que é o mesmo que aparece na fórmula das ecuacións de 2º grao quitándolle a raíz cadrada, e obtense precisamente polo carácter de máximo ou mínimo que ten o vértice.

Exemplo:

- $y = \underbrace{x^2 - 6x + 5}_{\text{polinomio 2º grao}}$

X	3	1	5	0	6
f(x)	–4	0	0	5	5
	(3, –4)	(1, 0)	(5, 0)	(0, 5)	(6, 5)

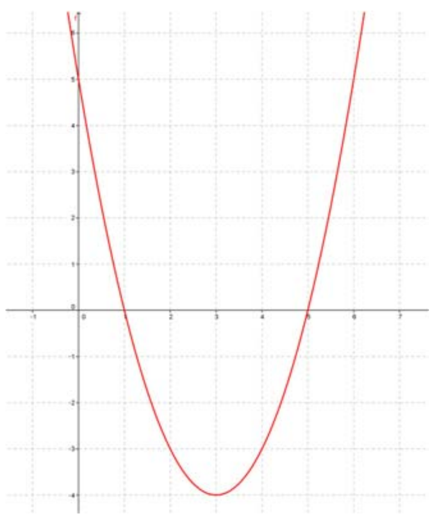
Coeficiente líder: **1** > 0 $\Rightarrow$ parábola convexa

Vértice: $x = \left[\frac{-b}{2a}\right]_{\substack{a=1\\b=-6}} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow$ **(3,–4)**

Ordenada na orixe: **5** $\Rightarrow$ **(0, 5)** *punto de corte co eixe de ordenadas.*

Puntos de intersección co eixe de abscisas: **(1, 0)** e **(5, 0)**

GRÁFICA



Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

Actividades propostas

19. Copia no teu caderno e completa:

$\boxed{y = 3x + 3} \rightarrow$ *Función* ______________________ porque ____

X	y

$\rightarrow$
$\rightarrow$
$\rightarrow$
$\rightarrow$
$\rightarrow$

Solución

Gráfica

Operacións:

$\boxed{y = \frac{-x}{2}} \rightarrow$ *Función* ______________________ porque ____

X	y

$\rightarrow$
$\rightarrow$
$\rightarrow$
$\rightarrow$
$\rightarrow$

Solución

Gráfica

Operacións:

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

$\boxed{y = -3x^2 + 6x - 4}$ → *Función* ________________ porque ________________________________

X	*y*

Solución

→

→

→

→

→

Gráfica

Operacións:

$\boxed{y = 2x^2 - 8}$ → *Función* ________________ porque ________________________________

X	*y*

Solución

→

→

→

→

→

Gráfica

Operacións:

Autor: José Gallegos Fernández

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Ilustracións: José Gallegos Fernández

20. Debuxa a gráfica da función $y = x^2$.

a) Para iso fai unha táboa de valores, tomando valores de abscisa positiva.

b) Tomando valores de abscisa negativa.

c) Que lle ocorre á gráfica para valores grandes de "x"? E para valores negativos grandes en valor absoluto?

d) A curva é simétrica? Indica o seu eixe de simetría.

e) Ten un mínimo? Cal é? Coordenadas do vértice.

f) Recorta un modelo desta parábola marcando o seu vértice e o eixe de simetría, que usaremos noutros problemas.

21. Tomando a mesma unidade que no problema anterior debuxa no teu caderno, nun mesmo sistema de referencia, as gráficas das parábolas: $y = x^2 + 2$; $y = x^2 - 3$; $y = -x^2$; $y = -x^2 + 2$; $y = x^2 - 1$. Observa que podes utilizar o modelo do exercicio anterior. Fai un resumo indicando o que obtiveches. Terás observado que en todos os casos podes utilizar o modelo trasladándoo en sentido vertical, cara arriba no caso de $y = x^2 + 2$; e cara abaixo no caso de $y = x^2 - 3$. A parábola $y = -x^2$; é simétrica (cara abaixo) de $y = x^2$. En xeral, se trasladamos q unidades na dirección do eixe de ordenadas temos a parábola $y = x^2 + q$.

22. Tomando a mesma unidade que no problema anterior debuxa no teu caderno, nun mesmo sistema de referencia, as gráficas das parábolas: $y = (x + 2)^2$; $y = (x - 3)^2$; $y = (x + 1)^2$; $y = (x - 1)^2$. Observa que podes utilizar o modelo do exercicio anterior. Fai un resumo indicando o que obtiveches. Terás observado que en todos os casos podes utilizar o modelo trasladándoo en sentido horizontal, cara á dereita no caso de $y = (x - 3)^2$; e cara á esquerda no caso de $y = (x + 2)^2$. Polo que, en xeral, se trasladamos p unidades na dirección do eixe de abscisas obtemos a parábola $y = (x - p)^2$.

23. Escribe a ecuación dunha parábola de igual forma que $y = x^2$, pero trasladada 5 unidades en sentido horizontal á dereita e 3 unidades en sentido vertical cara arriba. Que coordenadas ten o seu vértice?

24. Debuxa no teu caderno, nun mesmo sistema de referencia, as gráficas das parábolas:

$y = x^2$; $y = 2x^2$; $y = 1/3x^2$; $y = -x^2$; $y = -1/2x^2$; $y = -3x^2$.

Observa que agora xa non che serve o modelo empregado. Agora as parábolas estréitanse ou ensánchanse.

25. Completa este resumo. A gráfica de $y = ax^2$ obtense da de $y = x^2$:

a) Se $a > 1$ entón…?

b) Se $0 < a < 1$ entón…?

c) Se $a < -1$ entón…?

d) Se $-1 < a < 0$ entón…?

26. Volvemos usar o modelo.

a) Traslada o vértice da parábola $y = x^2$ ao punto (4, 2). Escribe a súa ecuación e a ecuación do seu eixe de simetría. Debuxa a súa gráfica.

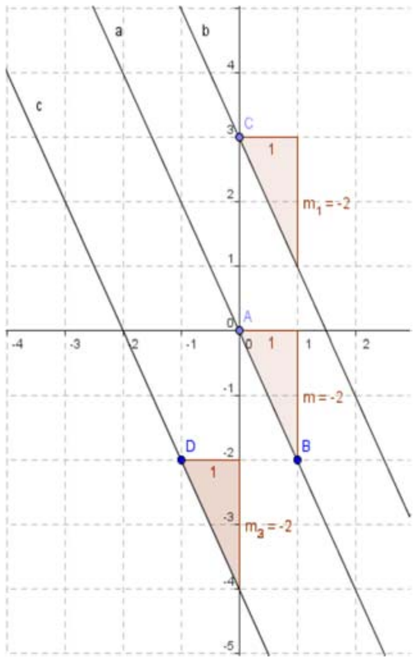
b) Traslada o vértice da parábola $y = x^2$ ao punto (–3, –1). Escribe a súa ecuación e a ecuación do seu eixe de simetría. Debuxa a súa gráfica.

2.4. Gráficas de FUNCIÓNS con Xeoxebra. Gráficas de FUNCIÓNS lineais e afíns

Nesta actividade vaise utilizar o programa ***Xeoxebra*** para representar FUNCIÓNS lineais e afíns, as gráficas destas FUNCIÓNS son rectas. Primeiro represéntanse rectas coa mesma pendente para observar a relación que existe entre elas e determinar a propiedade que as caracteriza. Tamén se representan rectas que teñen a mesma ordenada na orixe para observar a relación que existe entre elas e determinar unha característica común.

Actividades resoltas

Utiliza Xeoxebra para estudar rectas con igual pendente.



- Abre o programa Xeoxebra e en **Visualiza** activa **Cuadrícula** para que sexa máis fácil definir puntos.
- Coa ferramenta **Novo Punto** define un punto na orixe de coordenadas. Observa que na **Ventá Alxébrica** aparece o punto, que o sistema denomina *A*, como obxecto libre e coordenadas (0, 0).
- Define un **Novo Punto** de coordenadas (1, –2), o programa chámao *B* e na **Ventá Alxébrica** aparece como obxecto libre coas súas coordenadas: B = (1, –2).
- Utiliza a ferramenta **Recta que pasa por 2 puntos** para debuxar a recta que pasa polos puntos *A* e *B*. Observa que o programa a denomina *a* e na **Ventá Alxébrica** aparece como obxecto dependente e a súa ecuación a: $2x + y = 0$. Esta ecuación pódese expresar por: $y = –2x$.
- Define un **Novo Punto** de coordenadas (0, 3), o programa chámao *C* e na **Ventá Alxébrica** aparece como obxecto libre coas súas coordenadas: *C* = (0, 3).
- Coa ferramenta **Recta Paralela**, debuxa unha recta paralela á recta a que pase por *C*. Observa que o programa a denomina *b* e na **Ventá Alxébrica** aparece como obxecto dependente e a súa ecuación a: $2x + y = 3$. Esta ecuación pódese expresar por: $y = –2x + 3$.
- Define un **Novo Punto** de coordenadas (–1, –2), o programa chámao *D* e na **Ventá Alxébrica** aparece como obxecto libre coas súas coordenadas: *D* = (–1, –2).
- Coa ferramenta **Recta Paralela**, debuxa unha recta paralela á recta a que pase por *D*. Observa que o programa a denomina *c* e na **Ventá Alxébrica** aparece como obxecto dependente e a súa ecuación a: $2x + y = –4$. Esta ecuación pódese expresar por: $y = –2x– 4$.
- Utiliza a ferramenta **Pendente** para calcular as pendentes das rectas *a*, *b* e *c*. Observa que ao calcular a pendente da recta *a* aparece na gráfica e na **Ventá Alxébrica** como obxecto dependente $m = –2$. Analogamente ao calcular a pendente da recta *b*, obtense $m_1 = –2$ e ao calcular a pendente da recta *c*, tense $m_2 = –2$.

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

27. Como son as pendentes das rectas paralelas? En función dos resultados anteriores realiza unha conxectura e debuxa outras rectas paralelas á recta *a* para comprobala.

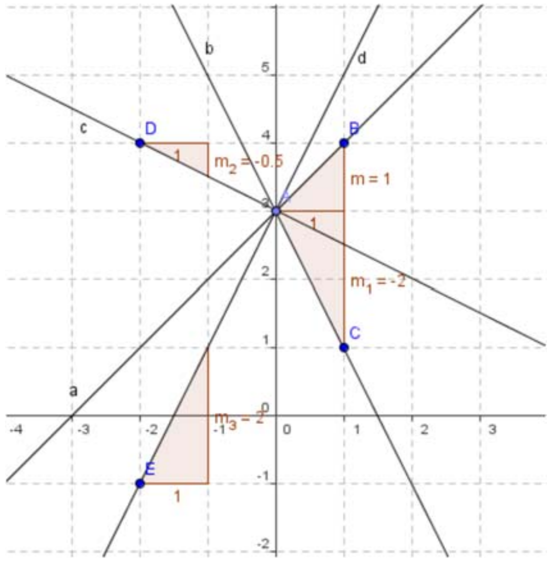
Observa que a ecuación de todas as rectas paralelas á recta *a* son da forma:

$y = -2x + n$, con *n* variable.

Algunha das rectas que debuxaches é a gráfica dunha función lineal?

Rectas coa mesma ordenada na orixe

Utiliza Xeoxebra para estudar rectas con igual ordenada na orixe.



- Abre unha **Nova Ventá** que é unha opción do menú **Arquivo**.
- Coa ferramenta **Novo Punto** define un punto de coordenadas (0, 3). Observa que na **Ventá Alxébrica** aparece o punto, que o sistema denomina *A*, como obxecto libre e aparecen as súas coordenadas *A* = (0, 3).
- Define un **Novo Punto** *B* de coordenadas (1, 4) e coa ferramenta **Recta que pasa por 2 puntos** debuxa a recta que pasa por *A* e *B*, o programa denomínaa *a* e na **Ventá Alxébrica** aparece a súa ecuación, *a*: $-x + y = 3$ equivalente a $y = x + 3$.
- Define un **Novo Punto** *C* de coordenadas (1, 1) e coa ferramenta **Recta que pasa por 2 puntos** debuxa a recta que pasa por *A* e *C*, o programa denomínaa *b* e na Ventá Alxébrica aparece a súa ecuación, *b*: $2x + y = 3$ equivalente a $y = -2x + 3$
- Cun proceso similar debuxa a recta *c* que pasa por *A* e *D*, con *D* = (–2, 4) que ten por ecuación *c*: $x + 2y = 6$. Esta ecuación pódese expresar por: $y = -\frac{1}{2}x + 3$.
- Debuxa tamén a recta *d* que pasa por *A* e *E*, con *E* = (–2, –1), a ecuación da recta *d* que aparece é:

  d: $-4x + 2y = 6$, equivalente a $y = 2x + 3$.
- Utiliza a ferramenta **Pendente** para calcular as pendentes das catro rectas que debuxaches.
  - Observa que as catro rectas que debuxaches pasan polo punto *A* = (0, 3), as súas ecuacións coa variable e despexada son:

a: $y = x + 3$ b: $y = -2x + 3$ c: $y = -\frac{1}{2}x + 3$ d: $y = 2x + 3$.

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

28. Que teñen en común as ecuacións das rectas que pasan polo punto *A* (0, 3)? En función dos resultados anteriores realiza unha conxectura e compróbaa debuxando outras rectas que pasen polo punto *A*.

Observa que a ecuación de todas as rectas que pasan polo punto *A*(0, 3) son da forma:

$y = mx + 3$, sendo *m* a pendente da recta.

Na ecuación da recta $y = mx + n$, o parámetro *n* denomínase ordenada na orixe.

29. Cal é o valor da ordenada na orixe das catro rectas que debuxaches?

30. Observa as ecuacións das catro rectas que debuxaches, dúas delas teñen pendente positiva *a* e *d* e as outras dúas, *b* e *c* teñen pendente negativa. Relaciona o signo da pendente da recta co crecemento ou decrecemento da función que representan.

Actividades propostas

31. Calcula dous puntos das rectas de ecuacións: $y = 2x + 2$ e $y = -\frac{x}{2} + 2$, para debuxalas con Xeoxebra. Indica dúas propiedades comúns de ambas as gráficas.

32. Representa, tamén, as rectas de ecuacións: $y = -3x + 1$ e $y = \frac{x}{3} - 3$.

33. Que condición deben verificar as pendentes de dúas rectas para que sexan perpendiculares?

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

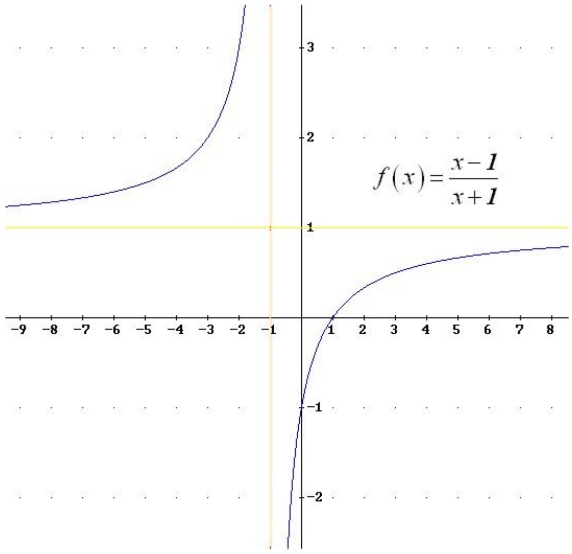
3. CARACTERÍSTICAS DUNHA FUNCIÓN

3.1. Continuidade

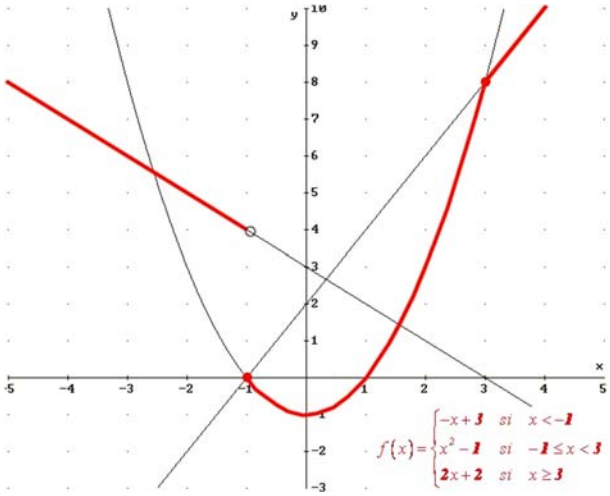
O concepto de continuidade dunha función é moi intuitivo (na maioría das FUNCIÓNS) xa que se corresponde con que a gráfica se poida debuxar sen levantar o lapis do papel. Cando isto non ocorre, prodúcense “saltos” en determinados puntos que reciben o nome de descontinuidades.

Exemplos:

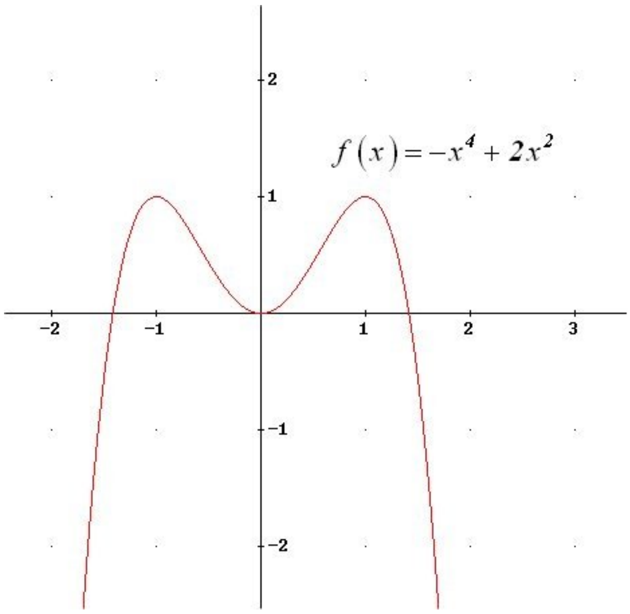
- *Que FUNCIÓNS son continuas segundo o seu debuxo e cales non? Indica nestas últimas o/os valor/es da variable independente onde se produce a descontinuidade:*



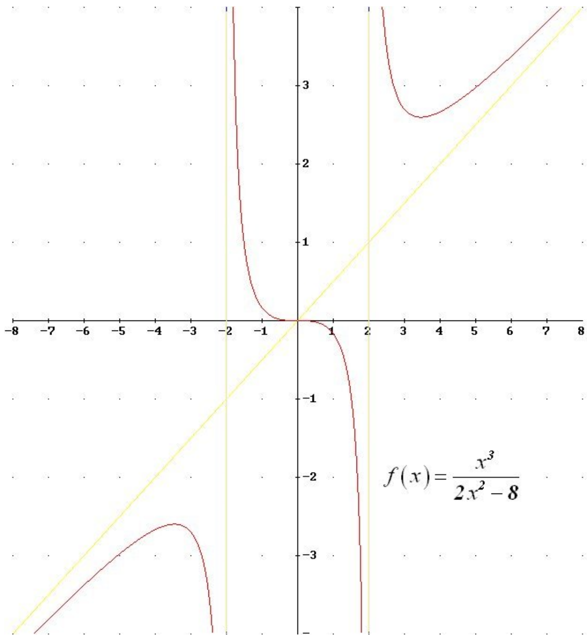
NON (en x = –1 ten un salto infinito)



NON (en x = –1 ten un salto finito de 4 unidades)



SI (continua para calquera valor de x)



NON (en x = –2 e x = 2 ten saltos infinitos)

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

3.2. Monotonía: crecemento e decrecemento

Unha función é **crecente** nun intervalo cando ao aumentar o valor da variable independente aumenta tamén o da dependente.

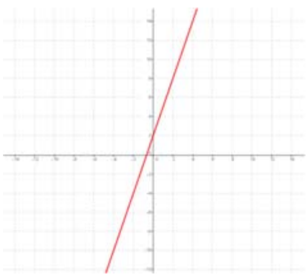
Unha función é **decrecente** nun intervalo se ao aumentar o valor da variable independente diminúe o da dependente.

Unha función é **monótona** nun intervalo cando é crecente ou decrecente nese intervalo.

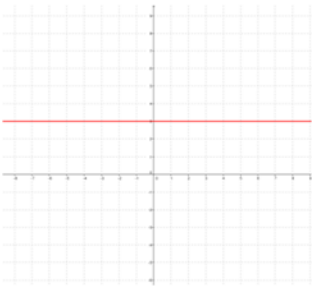
Unha función é **constante** nun intervalo cando tome o valor que tome a variable independente, a dependente toma sempre o mesmo valor.

Como indican as definicións, a monotonía ou non dunha función dáse nun intervalo. Polo tanto, unha función pode ser crecente para unha serie de valores, para outros ser decrecente ou constante, logo pode volver ser crecente ou decrecente ou constante…

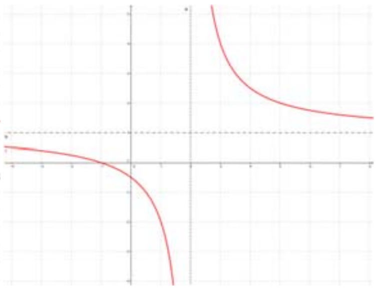
Exemplo:



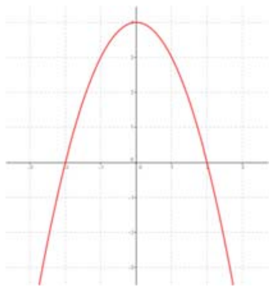
CRECENTE sempre



CONSTANTE sempre



DECRECENTE ata x = 2
DECRECENTE desde x = 2



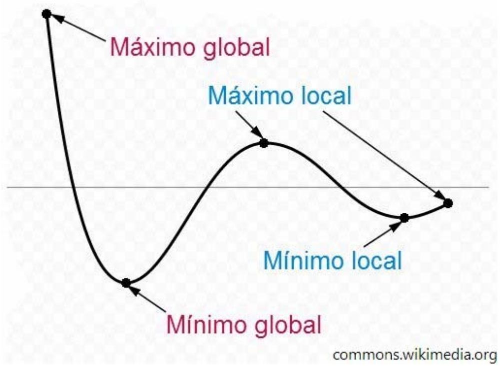
CRECENTE ata x = 0
DECRECENTE desde x = 0

3.3. Extremos: máximos e mínimos

Unha función presenta un **máximo relativo** (ou máximo *local*) nun punto cando o valor da función nese punto é maior que calquera dos valores que están ao seu arredor (no seu *entorno*). Se, ademais, o valor é maior que en calquera outro punto da función dise que a función acada un **máximo absoluto** (ou máximo *global*) nel.

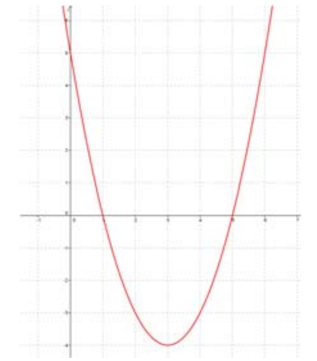
Unha función presenta un **mínimo relativo** (ou mínimo *local*) nun punto cando o valor da función nese punto é menor que en calquera dos valores que están ao seu arredor (no seu *entorno*). Se, ademais, o valor é menor que en calquera outro punto da función dise que a función acada un **mínimo absoluto** (ou *global*) nel.

Se unha función presenta un máximo ou un mínimo nun punto, dise que ten un **extremo** nese punto que poderá ser relativo ou absoluto.



Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

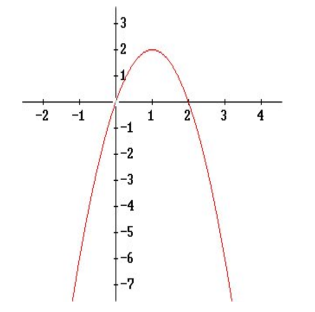
Exemplos



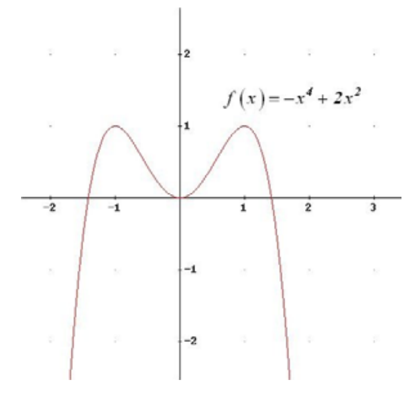
$y = x^2 - 6x + 5$

- A parábola $y = x^2 - 6x + 5$ ten un mínimo absoluto no seu vértice (3, – 4). Non ten máximos, nin relativos nin absoluto. Antes do vértice é decrecente e despois é crecente.
- A parábola $y = -2x^2 - 4x$ ten un máximo absoluto no seu vértice (1, 2). Non ten mínimos, nin relativos nin absoluto. Antes do vértice, para $x < 1$, a función é crecente, e despois, para $x > 1$, a función é decrecente.

Todas as parábolas teñen un máximo ou un mínimo absoluto no seu vértice.



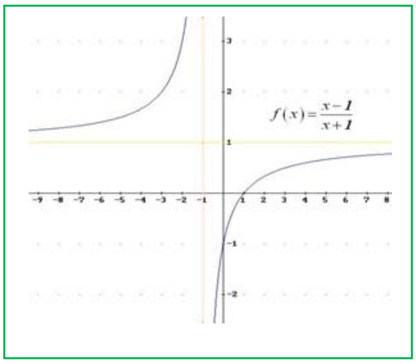
$y = -2x^2 - 4x$

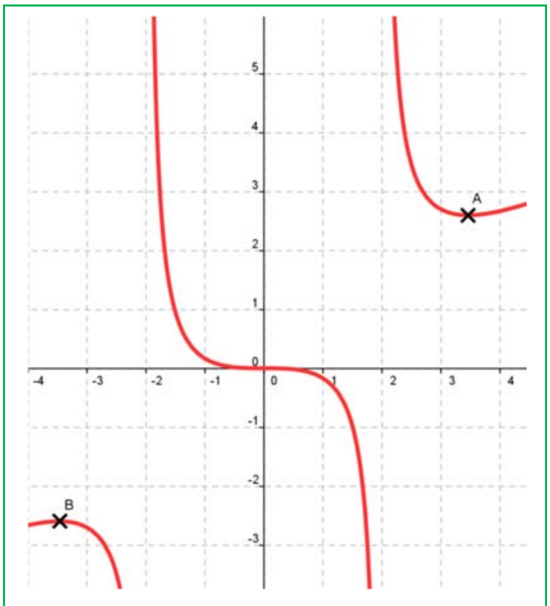


- A función $y = -x^4 + 2x^2$ ten un mínimo absoluto na orixe (0, 0) e dous máximos en (1, 1) e en (–1, 1). Para $x < -1$ é unha función crecente, para $-1 < x < 0$, é unha función decrecente, para $0 < x < 1$ é crecente, e para $x > 1$ é decrecente.

Observa, nos **máximos** sempre a función pasa de ser **crecente** a ser **decrecente**, e nos **mínimos** de ser **decrecente** a ser **crecente**.

- A función $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ non ten ni máximos ni mínimos (nin relativos nin absolutos). É unha función sempre crecente.





- A gráfica da función $f(x) = \frac{x^3}{2x^2 - 8}$ non ten máximo nin mínimo absoluto, pero ten un mínimo relativo cara a $x = 3$, *A*(3.46, 2.6), e un máximo relativo cara a $x = -3$, *B*(–3.46, –2.6). Observa que o valor do mínimo relativo, 2.6, é maior que a do máximo relativo, –2.6. Pero en valores próximos ao mínimo si é o menor valor, por este motivo denomínase “*relativo*”, “*local*”. Non son os valores maiores ou menores que acada a función, pero se unicamente miramos nun entorno do punto si son valores máximos ou mínimos.

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

3.4. Simetría

Unha **función par é** aquela na que se obtén o mesmo ao substituír un número que o seu oposto:

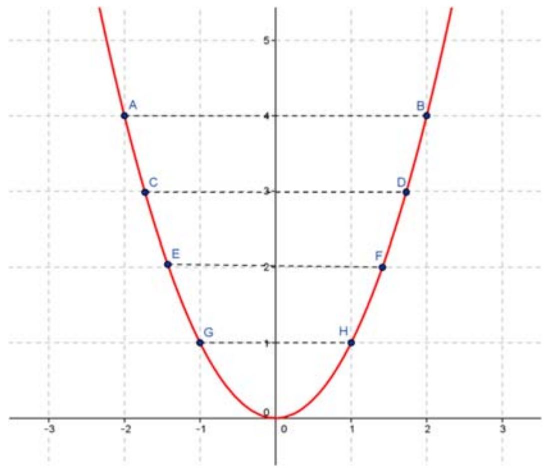
$$f(-x) = f(x)$$

Esta propiedade tradúcese en que a función é **simétrica** respecto ao **eixe de ordenadas**, é dicir, se dobramos o papel por este eixe, a gráfica da función coincide en ambos os lados.

Exemplo:

- A función cuadrática $f(x) = x^2$ é par:

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

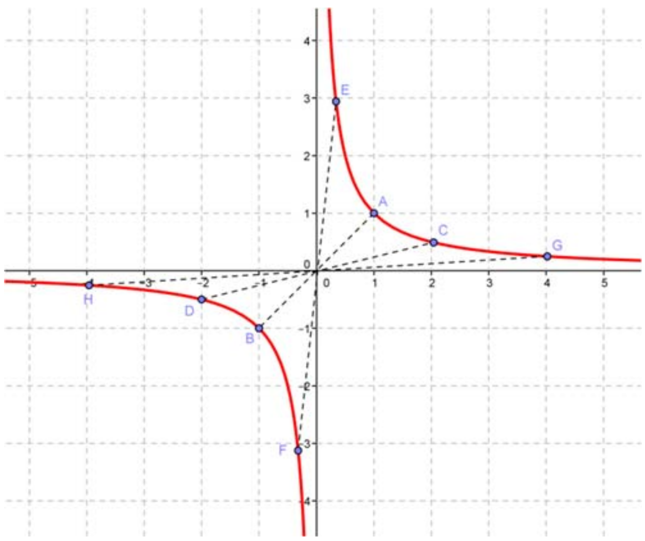


Unha **función impar** é aquela na que se obtén o mesmo ao substituír un número que o seu oposto:

$$f(-x) = -f(x)$$

Esta propiedade tradúcese en que a función é **simétrica** respecto á **orixe** de coordenadas, é dicir, se trazamos un segmento que parte de calquera punto da gráfica e pasa pola orixe de coordenadas, ao prolongalo cara ao outro lado encontraremos outro punto da gráfica á mesma distancia.

Exemplo:



- A **función de proporcionalidade inversa** $f(x) = \frac{1}{x}$ é impar porque:

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)} = \frac{-1}{x} = -f(x)$$

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

3.5. Periodicidade

Unha **función periódica é** aquela na que as imaxes da función se repiten sempre que se lle engade á variable independente unha cantidade fixa, chamada *período.*

Exemplo:

- Un exemplo de función periódica é o seguinte, que corresponde a un electrocardiograma:

Obsérvase claramente que a gráfica se repite a intervalos iguais, xa que os latexos do corazón son rítmicos.

Actividades resoltas

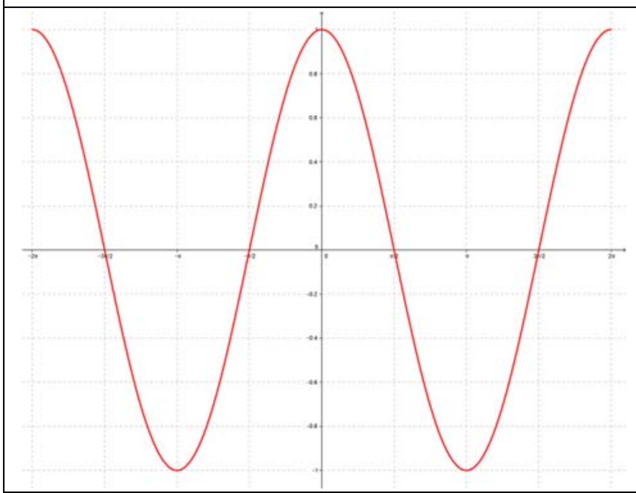
- *Que significaría, na gráfica anterior, que os intervalos de repetición non fosen iguais?*
  Se non temos un período fixo, querería dicir que o corazón non está funcionando de forma rítmica e, polo tanto, diriamos que se produciu unha "arritmia".

- *Como influiría na gráfica anterior que o período sexa máis ou menos grande? Que significado tería?*
  Se o período é máis grande, é dicir, os intervalos de repetición atópanse máis distanciados, teriamos un ritmo de latexo máis lento (menos pulsacións por minuto), o que se coñece como "bradicardia".

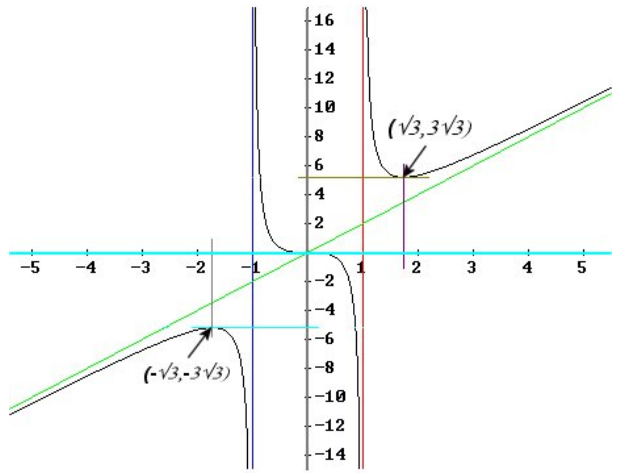
  Se o período é menor, pasaría xusto todo o contrario, isto é, o corazón estaría latexando máis rápido do normal (máis pulsacións por minuto) e teriamos unha "taquicardia".

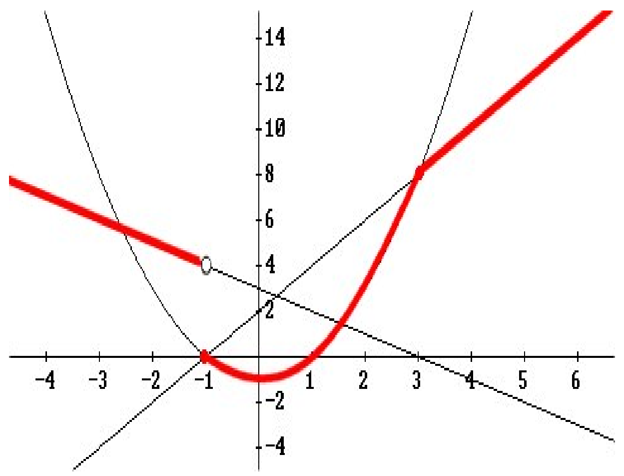
Actividades propostas

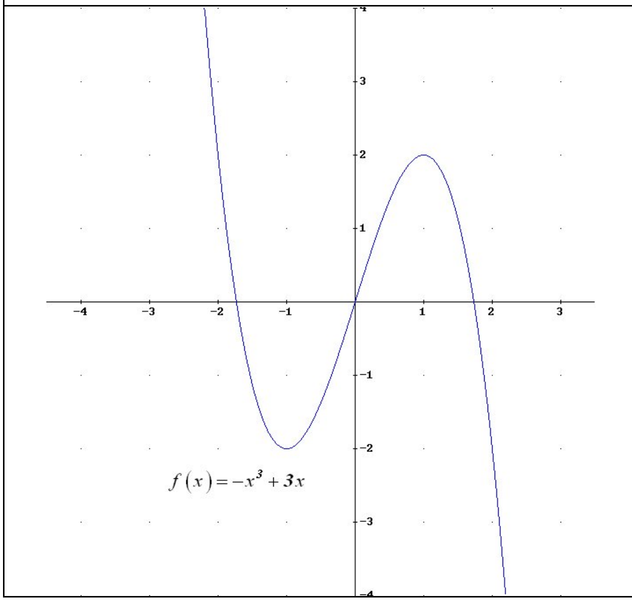
34. Copia as seguintes táboas no teu caderno e sinala todas as características que poidas das FUNCIÓNS representadas mediante as súas gráficas:

<table>
<tr><th>GRÁFICA 1</th><th colspan="2">CARACTERÍSTICAS</th></tr>
<tr><td rowspan="12"></td><td colspan="2">Valores variable independente:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Valores variable dependente:</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Simetría</td><td>Par:</td></tr>
<tr><td>Impar:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Punto corte eixe ordenadas:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Punto/s corte eixe abscisas:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Continuidade:</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Monotonía</td><td>Crecente:</td></tr>
<tr><td>Decrecente:</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Extremos</td><td>Máximos:</td></tr>
<tr><td>Mínimos:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Periódica:</td></tr>
</table>

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

GRÁFICA 2	CARACTERÍSTICAS	
	Valores variable independente:	
	Valores variable dependente:	
	Simetría	Par:
		Impar:
	Punto corte eixe ordenadas:	
	Punto/s corte eixe abscisas:	
	Continuidade:	
	Monotonía	Crecente:
		Decrecente:
	Extremos	Máximos:
		Mínimos:
	Periódica:	

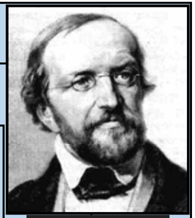
GRÁFICA 3	CARACTERÍSTICAS	
	Valores variable independente:	
	Valores variable dependente:	
	Simetría	Par:
		Impar:
	Punto corte eixe ordenadas:	
	Punto/s corte eixe abscisas:	
	Continuidade:	
	Monotonía	Crecente:
		Decrecente:
	Extremos	Máximos:
		Mínimos:
	Periódica:	

GRÁFICA 4	CARACTERÍSTICAS	
	Valores variable independente:	
	Valores variable dependente:	
	Simetría	Par:
		Impar:
	Punto corte eixe ordenadas:	
	Punto/s corte eixe abscisas:	
	Continuidade:	
	Monotonía	Crecente:
		Decrecente:
	Extremos	Máximos:
		Mínimos:
	Periódica:	

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

CURIOSIDADES. REVISTA

Dirichlet



Johann Peter Gustav Leixeune Dirichlet

Johann Peter Gustav Leixeune Dirichlet (13/02/1805–5/5/1859) foi un matemático alemán ao que se lle atribúe a definición "formal" moderna de *función*.
Dirichlet naceu en Düren, onde o seu pai era o xefe da oficina de correos. Foi educado en Alemaña e, despois, en Francia, onde aprendeu de algúns dos máis afamados matemáticos da súa época, relacionándose con algúns como *Fourier*.
Foron alumnos seus *Leopold Kronecker* e *Rudolf Lipschitz*. Tras a súa morte, o seu amigo e colega matemático *Richard Dedekind* compilou, editou e publicou as súas leccións e outros resultados na teoría de números.

Unha versión simple da ***función de Dirichlet*** defínese como:

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \ (x \text{ é racional}) \\ 0 & \text{se } x \in I \ (x \text{ é irracional}) \end{cases}$$

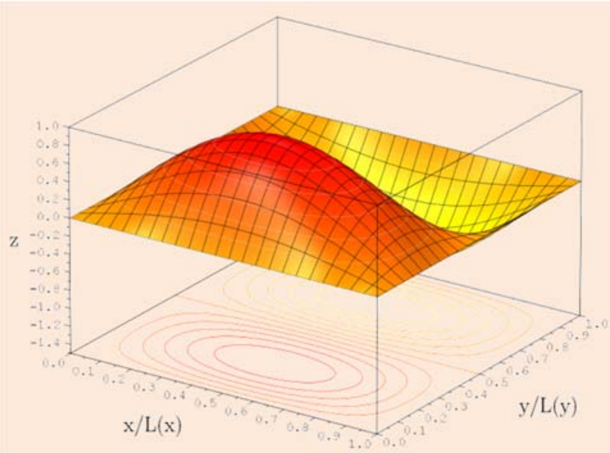
Esta función ten a "curiosa" propiedade de que é descontinua para calquera valor que lle deamos á variable independente.

Nikki Grazziano: "Funcións e fotografía"

Nikki encontrou unha forma de reunir os seus dous intereses, matemáticas e fotografía da natureza, nunha serie de imaxes chamada **Found Functions** nas que superpón gráficas xeradas mediante fórmulas matemáticas a fotografías tomadas por ela.
Pero o orixinal é que non busca imaxes que poidan adaptarse a certas fórmulas, senón que cando ten unha fotografía que lle gusta é cando busca e axusta a fórmula necesaria para xerar que a representación gráfica se adapte. Unha curiosa forma de aprender matemáticas e ver que todo se pode representar con elas.

Se queres consultar máis e ver as fotografías (que teñen copyright), visita a páxina:

http://www.nikkigraziano.com/index.php/project/found-functions/

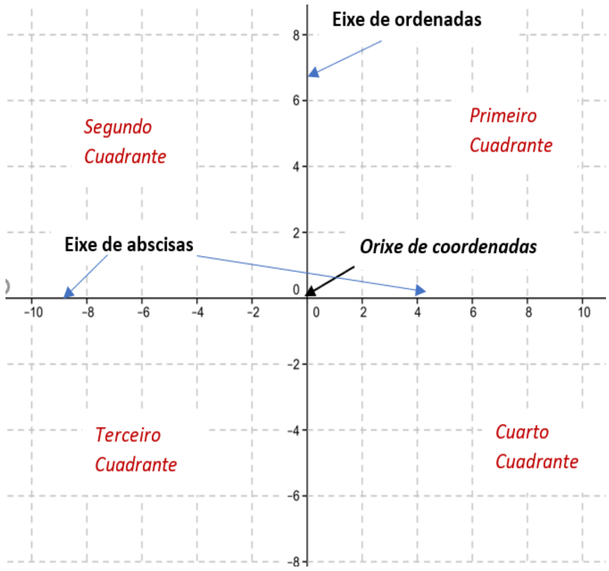
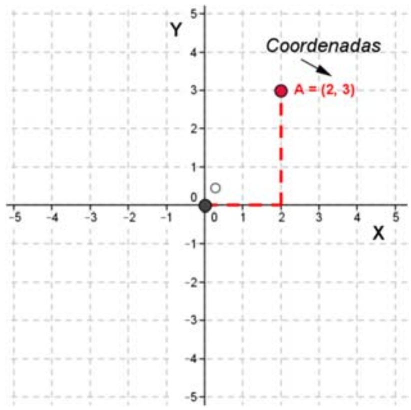
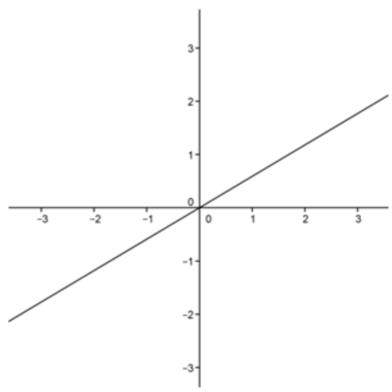


FUNCIÓNS 3D

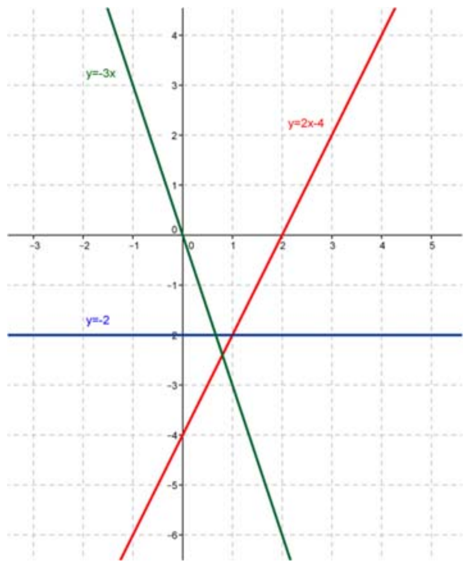
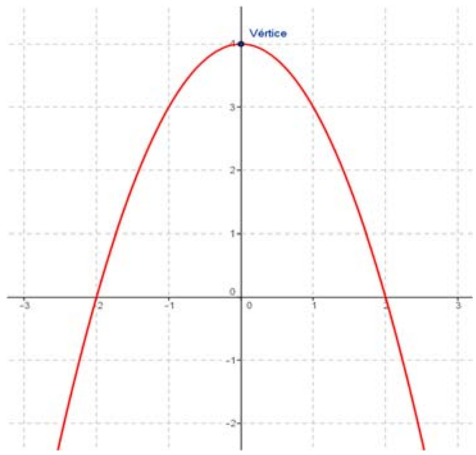
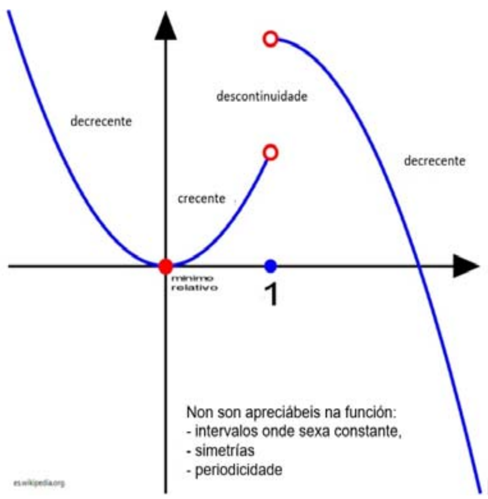
Cando a relación funcional se establece entre tres variables, a gráfica tense que facer en tres dimensións, o que a fai máis complexa de representar pero máis rechamante. Os ordenadores son de gran axuda para facelas e velas desde distintos puntos de vista. Serven para realizar modelos moi reais de multitude de situacións tridimensionais.

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

RESUMO

CONCEPTOS		*Exemplos*
Eixes cartesianos e coordenadas dun punto no plano		
Función	Unha **función é unha** relación entre dúas magnitudes de forma que a un valor calquera dunha (**variable independente**) lle facemos corresponder, como moito, un único valor da outra (**variable dependente**).	$y = f(x) = 0.59 \cdot x$ $f(2) = 0.59 \cdot 2 = 1.18$ $f(5) = 0.59 \cdot 5 = 2.95$
Gráfica dunha función	A **gráfica dunha función é a** representación no plano cartesiano de todos os pares ordenados nos que o primeiro valor corresponde a un calquera da variable independente e o segundo ao que se obtén ao transformalo mediante a función: $\{(x, y) \mid x \in \Re, y = f(x)\}$	$y = f(x) = 0.59x$ $\{(2, 1.18), (5, 2.95)...\}$  *Gráfica:*

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

CONCEPTOS		*Exemplos*
Función afín, función lineal e función constante	Unha **función afín** é aquela función na que a relación entre as dúas variables vén dada por un polinomio de grao menor ou igual a un: $y = f(x) = mx + n$. A representación gráfica é unha recta. "m" recibe o nome de **pendente** e "n" **ordenada na orixe.** Unha **función lineal ou de proporcionalidade directa** é unha función afín con ordenada na orixe nula: $y = mx$ (pasa pola orixe). Unha **función constante é unha** función afín con pendente nula: $y = n$ (sempre toma o mesmo valor e a súa gráfica é unha recta horizontal).	
Función cuadrática	Unha función cuadrática é aquela función na que a relación entre as dúas variables vén dada por un polinomio de grao dous: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$. A gráfica deste tipo de FUNCIÓNS chámase parábola. O punto máis significativo da parábola é o **vértice** e calcúlase dándolle á variable independente o valor $x = {-b}/{2a}$. Se o coeficiente líder é positivo, o vértice é un mínimo e, se é negativo, un máximo.	
Continuidade **Monotonía** **Extremos** **Simetría** **Periodicidade**	Unha función pode ser continua nun intervalo se a súa gráfica non sofre "rupturas" (chamadas **descontinuidades**), **crecente** (**decrecente**) se o seu valor aumenta (diminúe) cando o fai a variable independente, **constante** cando sempre toma o mesmo valor, **par** se a imaxe da variable independente coincide coa do seu oposto, **impar** cando o valor da función para o oposto da variable independente tamén é o oposto e **periódica** se as imaxes dos valores obtidos ao sumar unha cantidade fixa (**período**) á variable independente coinciden.	

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Sistemas de representación

1. Sitúa nun sistema de referencia cartesiano os puntos seguintes, elixindo unha escala nos eixes que permita debuxalos todos de forma cómoda: $A(5, 4)$; $B(0, 2)$; $C(-2, 0)$; $D(3, -1.3)$; $E(1.5, 0)$; $F(0, 0)$; $G(-1, -2/3)$. Sinala en cada caso a que cuadrante pertence o punto ou, no seu caso, en que eixe está.

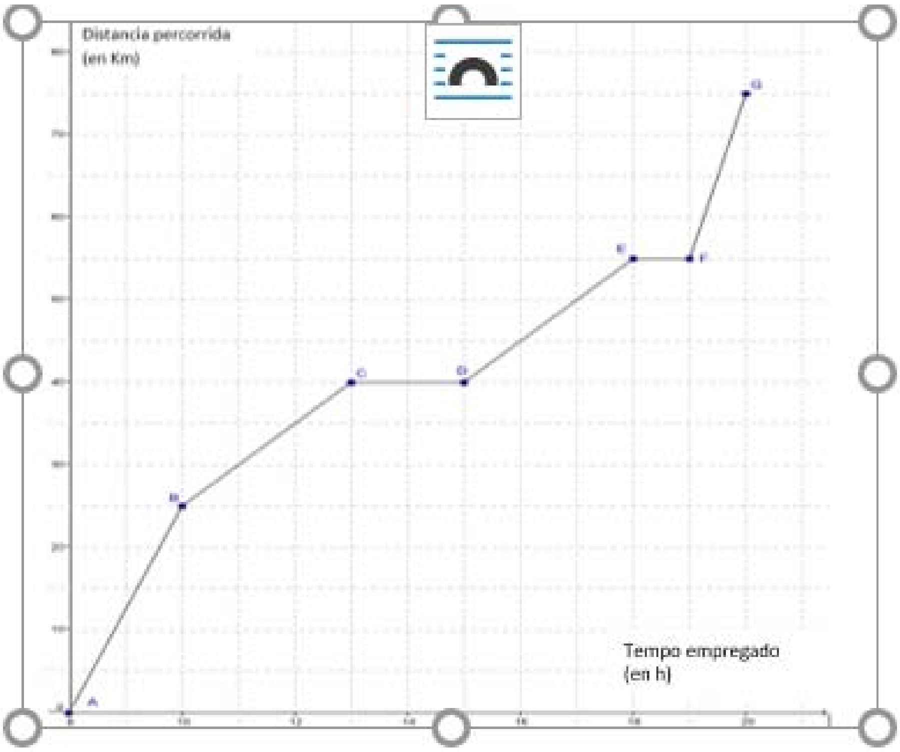
2. Escribe as coordenadas de tres puntos situados no terceiro cuadrante.

3. Sitúa nun sistema de referencia cartesiano os puntos seguintes:
$A(0, 4)$; $B(0, 2.3)$; $C(0, -2)$; $D(0, -1)$. Que teñen en común todos eles?

4. Escribe as coordenadas e representa tres puntos do eixe de ordenadas. Que teñen en común?

5. Debuxa no teu caderno un triángulo rectángulo cun cateto igual a 3, e o vértice do ángulo recto na orixe de coordenadas. Indica as coordenadas de todos os vértices.

6. A seguinte gráfica resume a excursión que realizamos pola serra de Guadarrama:



a) Canto tempo durou a excursión?
b) Canto tempo se descansou? A que horas?
c) Cantos quilómetros se percorreron?
d) En que intervalos de tempo se foi máis rápido que entre as 11 e as 13 horas?
e) Fai unha breve descrición do desenvolvemento da excursión.
f) Constrúe unha táboa de valores a partir dos puntos sinalados na gráfica.
g) Se no eixe de ordenadas representaramos a variable "distancia ao punto de partida", sería a mesma gráfica? Cos datos de que dispós, podes facela?

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

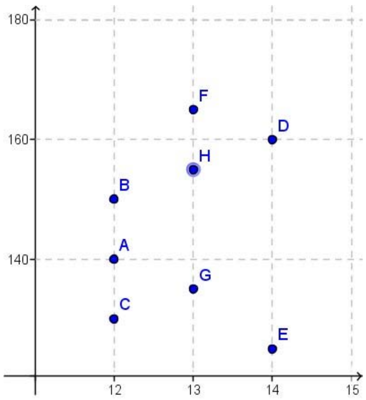
FUNCIÓNS E TIPOS DE FUNCIÓNS

7. Indica cales das seguintes correspondencias son FUNCIÓNS:

a) A cada número natural sonlle asociados os seus divisores primos.

b) A cada circunferencia do plano élle asociado o seu centro.

8. A altura e a idade dos compoñentes dun equipo de baloncesto están relacionados segundo amosa a seguinte gráfica:



a) Se Xoán ten 14 anos, cal pode ser a súa altura?

b) Se María mide 165 cm, cal pode ser a súa idade?

c) A relación entre a altura e a idade dos diferentes compoñentes do equipo, é unha relación funcional? Por que?

d) E a relación entre a idade e a altura? Realiza unha gráfica similar á anterior para representar esta situación.

9. A distancia, *d*, percorrida por un tren depende do número de voltas, *n*, que dá cada roda da locomotora.

a) Escribe a fórmula que permite obter *d* coñecido *n*, sabendo que o diámetro das rodas da locomotora é de 78 cm.

b) Debuxa a gráfica.

c) Que distancia terá percorrido o tren cando a roda teña dado mil voltas? (Toma como valor de π o número 3.14).

d) Cantas voltas terá dado a roda ao cabo de 7 km?

10. Un globo sonda utilizado polo Servizo Meteorolóxico dos Pireneos para medir a temperatura a distintas alturas leva incorporado un termómetro. Obsérvase que cada 180 m de altura a temperatura diminúe un grao. Certo día a temperatura na superficie é de 9°C. Determina:

a) Que temperatura haberá a 3 km de altura?

b) A que altura haberá unha temperatura de –30°C?

c) Escribe unha fórmula que permita calcular a temperatura T coñecendo a altura A. Confecciona unha táboa e debuxa a gráfica. Que tipo de función é?

d) Se a temperatura na superficie é de 12°C, cal é entón a fórmula? Que tipo de función é?

11. Debuxa a gráfica da función parte enteira: e = $E(x)$.

12. Un rectángulo ten un perímetro de 100 cm. Llama *x* á lonxitude dun dos seus lados e escribe a fórmula que dá a área en función de *x*. Debuxa a súa gráfica. Que tipo de función é?

13. Unha caixa cadrada ten unha altura de 20 cm. Como depende o seu volume do lado da base? Debuxa a gráfica da función que resulta.

14. Nunha folla de papel de 32 cm de largo e 22 cm de ancho recórtase un cadrado de 2 cm de lado en cada unha das esquinas, dóbrase e constrúese unha caixa. Cal é o volume da caixa? E se se recortan cadrados de 3 cm? Cal é o volume se o lado do cadrado recortado é *x*? Escribe a fórmula e debuxa a gráfica.

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

15. Escribe a ecuación da recta paralela a $y = 4x + 2$ de ordenada na orixe 6.

16. Sen representalos graficamente, di se están aliñados os puntos $A(3, 4)$, $B(7, 9)$ e $C(13, 15)$.

17. Unha empresa de aluguer de vehículos ofrece dúas fórmulas diferentes. Fórmula 1: alúgao por 300 euros ao día con quilometraxe ilimitada. Fórmula 2: alúgao por 200 euros ao día e 7 euros o quilómetro. Queremos facer unha viaxe de 10 días e mil quilómetros, canto nos custará con cada unha das fórmulas? Como non sabemos a quilometraxe exacta que acabaremos facendo, interésanos facer un estudo para saber a fórmula máis beneficiosa. Escribe as fórmulas de ambas as situacións e debuxa as súas gráficas. Razoa, a partir das gráficas, que fórmula é máis rendible segundo o número de quilómetros que vaiamos facer.

18. Constrúense boias unindo dous conos iguais pola base, sendo o diámetro da base de 90 cm. O volume da boia é función da altura "*a*" dos conos. Se queremos unha boia para sinalar a entrada de barcos a pedal bástanos cunha altura de 50 cm: que volume terá? Se é para barcos maiores precísase unha altura de 1.5 m: que volume terá? Escribe a expresión da función que calcula o volume en función da altura. Debuxa a súa gráfica.

19. Calcula o vértice, o eixe de simetría e os puntos de intersección cos eixes das seguintes parábolas. Debuxa as súas gráficas.

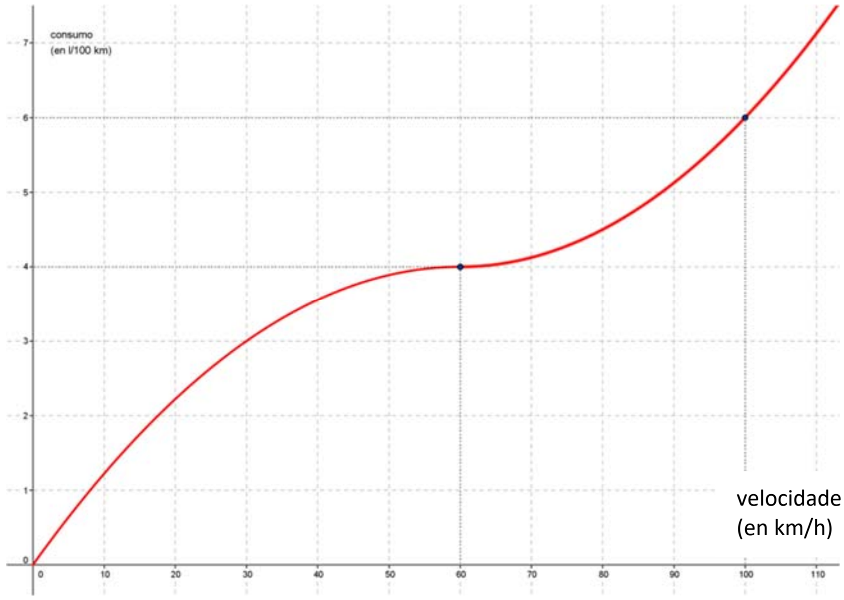
a) $y = x^2 + 8x - 13$ b) $y = -x^2 + 8x - 13$ c) $y = x^2 - 4x + 2$ d) $y = x^2 + 6x$ e) $y = -x^2 + 4x - 7$

20. Debuxa a gráfica de e = $2x^2$. Fai un modelo. Determina o vértice das seguintes parábolas e utiliza o modelo para debuxar a súa gráfica:

a) $y = 2x^2 + 8x - 12$ b) $y = -2x^2 + 8x - 10$ c) $y = 2x^2 - 4x + 2$ d) $y = 2x^2 + 6x$

Axuda: $2x^2 + 8x - 12 = 2(x^2 + 4x - 6) = 2((x + 2)^2 - 4 - 6) = 2((x + 2)^2 - 10)$. Vértice $(-2, -10)$

21. O consumo de gasolina dun coche por cada 100 km vén representado mediante a gráfica.



a) Cal é a variable dependente?

b) E a independente?

c) Cal é o consumo para unha velocidade de 60 km/h?

d) A que velocidade o consumo é de 6 l/100 km?

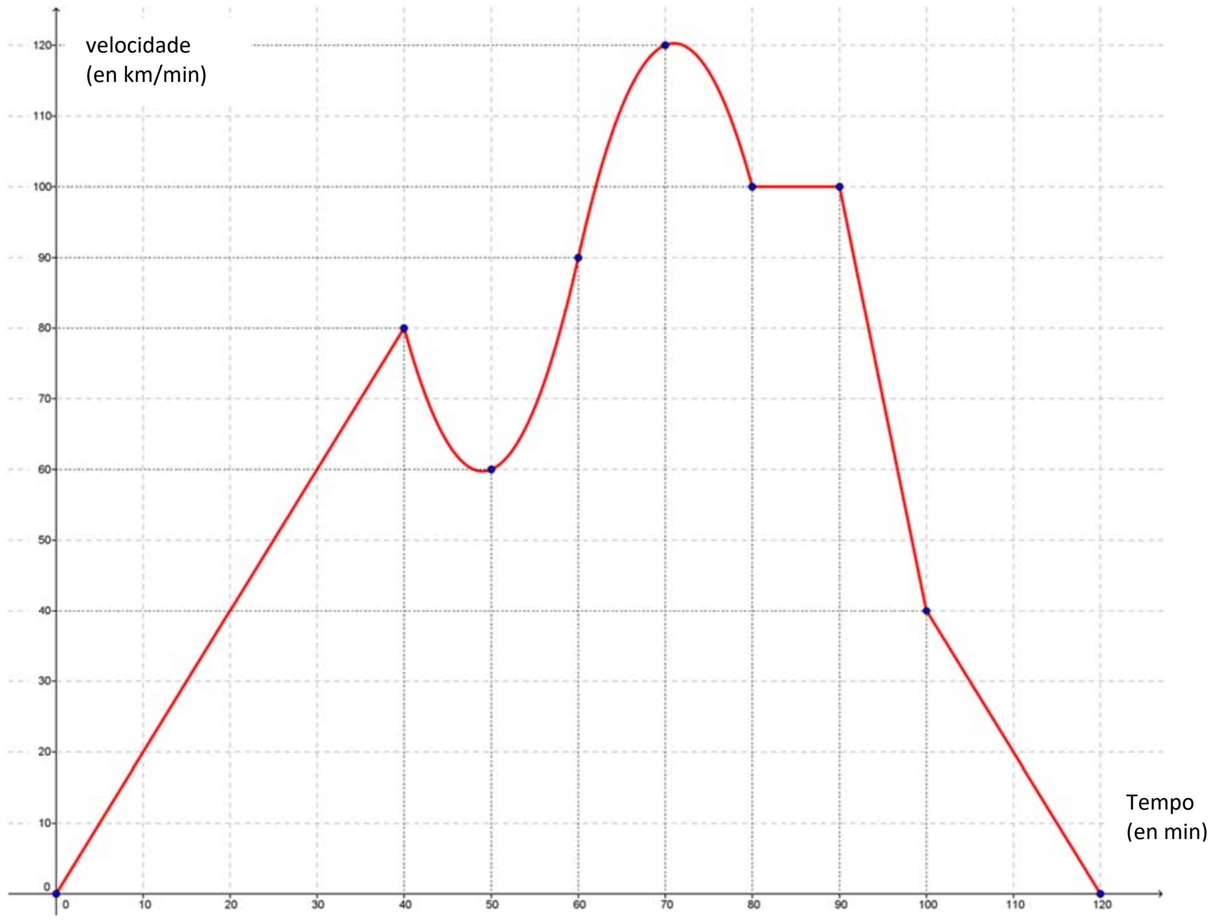
e) Utiliza a gráfica para explicar como varía o consumo de gasolina dependendo da velocidade do coche.

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

Características das FUNCIÓNS

22. Xaquín chegou a un acordo co seu pai para recibir a súa paga. Cobrará 20 euros ao mes o primeiro ano, e 5 euros máis por cada ano que pase. Canto lle corresponderá dentro de 7 anos? Fai unha táboa de valores e representa a súa gráfica. É continua? Indica os puntos de descontinuidade e o seu tipo. Busca unha fórmula que permita calcular a paga cando teñan pasado *n* anos.

23. Durante unha viaxe, a velocidade do coche varía dependendo do tipo de estrada, das condicións en que se encontra, do tempo meteorolóxico… a seguinte gráfica reflicte a velocidade dun vehículo en cada instante do traxecto que seguiu.



a) É funcional a relación de dependencia entre o tempo e a velocidade?

b) Cal é a variable independente? E a dependente?

c) A que velocidade ía cando levaba unha hora de viaxe? En que momentos ía a unha velocidade de 40 km/h?

d) Indica os intervalos nos que a velocidade aumentou e diminuíu. Foi constante nalgún momento? Cando? Durante canto tempo?

e) Cal foi a velocidade máxima acadada ao longo de toda a viaxe? En que momento se acadou? E durante a primeira hora da mesma?

f) Cal foi a velocidade mínima acadada ao longo de toda a viaxe? Cando se acadou? E entre a primeira media hora e a hora e media?

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

24. Ao entrar no aparcamento dun centro comercial encontramos un letreiro cos prezos que nos indican que 1 hora ou fracción custa 1.20 € e as dúas primeiras horas son gratis para os clientes con tarxeta de compra do centro. Fai unha táboa que relacione o tempo co importe pagado durante unha xornada completa (12 horas) nos casos dun cliente con tarxeta ou sen ela. Traza a gráfica e contesta ás preguntas:

a) Que valores toma a variable dependente? E a independente?
b) Podes unir os puntos da gráfica? Como se debe facer?
c) Existen puntos de descontinuidade? Se a resposta é afirmativa, sinálaos e explica o seu significado.

25. Ao estudar o crecemento dunha planta observamos que durante os primeiros 30 días o fai moi a présa, nos 15 días seguintes o crecemento é máis lento e despois mantense coa mesma altura. Realiza un bocexo da gráfica que relaciona o tempo coa altura acadada pola planta.

Se temos máis información podemos mellorar o bocexo. Por exemplo, fai a táboa e a gráfica no caso de que o crecemento da planta se axuste ás seguintes fórmulas (o tempo exprésase en días e a altura en centímetros):

a) Durante os primeiros 30 días: altura = 4 x tempo
b) Nos 15 días seguintes: altura = 90 + tempo
c) A partir do día 45: altura = 135.

26. Unha viaxe realizada por un tren, nun certo intervalo da mesma, vén dada da seguinte forma:

- Durante as dúas primeiras horas, a distancia "*d*" (en quilómetros) ao punto de partida é $2\cdot t + 1$, onde "*t*" é o tempo (en horas) de duración do traxecto.
- Entre a 2ª e 3ª hora, a distancia vén dada por $-t + 7$.
- Entre a 3ª e 4ª hora, ambas as dúas inclusive, $d = 4$.
- Desde a 4ª e ata a 6ª (inclusive), a distancia axústase a $3\cdot t - 8$.

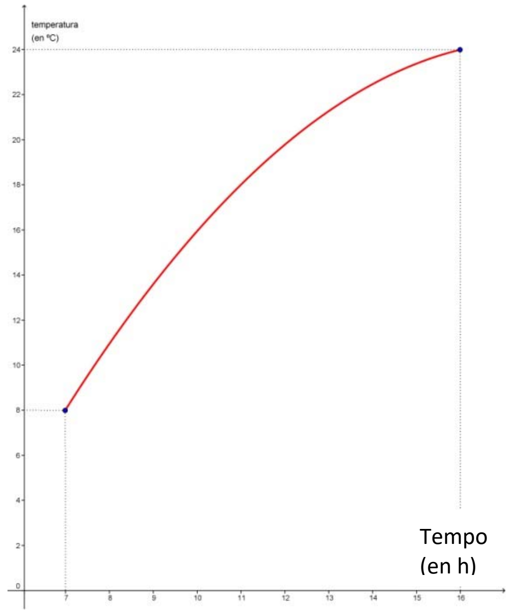
a) Realiza unha táboa e unha gráfica que recolla a viaxe da forma máis precisa posible (para iso debes calcular, como mínimo, os valores da variable tempo nos instantes 0, 2, 3, 4 e 6).
b) Explica se a relación anteriormente explicada entre a distancia percorrida e o tempo tardado en percorrela é funcional.
c) A relación anterior, presenta algunha descontinuidade?
d) En que momento a distancia ao punto de partida é de 7 km?
e) Que indican os puntos de corte da gráfica cos eixes?
f) Determina os intervalos onde a función é crecente, decrecente e constante.
g) Encontra os puntos onde a función acada os seus máximos e mínimos relativos e absolutos. Interpreta o significado que poidan ter.

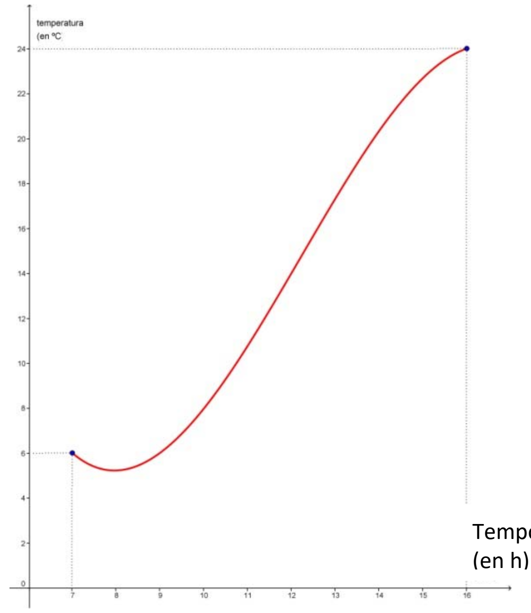
27. Representa graficamente as seguintes FUNCIÓNS, estudando nela todas as características que se traballaron no tema: monotonía, extremos, simetría e periodicidade.

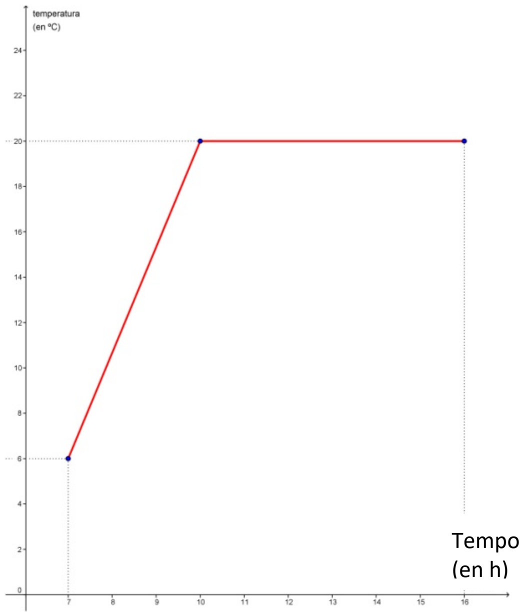
a) Valor absoluto dun número: $f(x) = |x|$.
b) Oposto e inverso dun número: $f(x) = \frac{-1}{x}$.
c) *Mantisa* (a cada número faille corresponder a diferenza entre este número e a súa parte enteira): $M(x) = x - E(x)$.

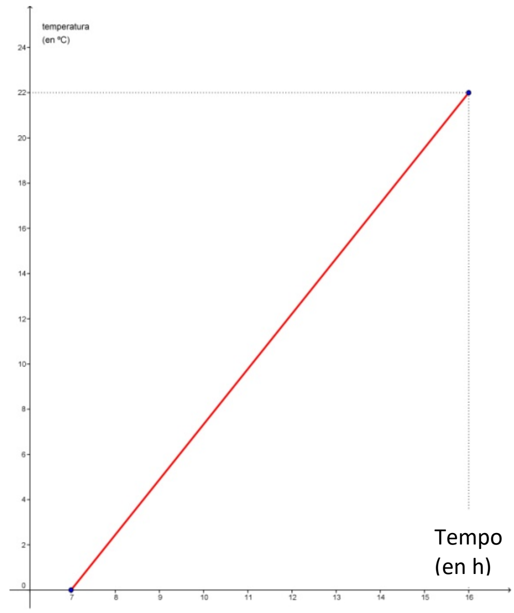
Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

28. As gráficas seguintes amosan a evolución, un día calquera, da temperatura acadada entre as 7 da mañá e as 4 da tarde en catro cidades (Madrid, Granada, Valladolid e Sevilla):









a) Estuda a monotonía de todas as gráficas.

b) Nalgunha cidade a temperatura mantívose constante durante todo o intervalo? E en parte del?

c) Que cidade cres que presenta un cambio de temperatura máis suave ao longo de toda a mañá?

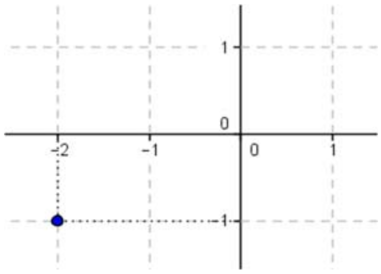
d) Tendo en conta que en Madrid o incremento da temperatura foi sempre lineal, en Granada a temperatura mínima acadouse despois das 7 h e en Valladolid a partir do mediodía a temperatura baixou, indica que gráfica corresponde a cada unha das cidades e explica cales foron as temperaturas máximas e mínimas en cada unha delas.

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

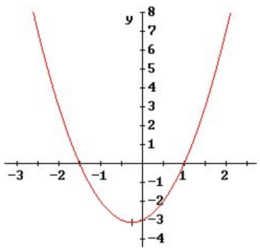
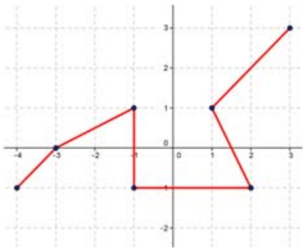
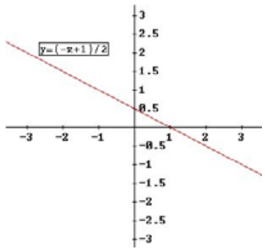
AUTOAVALIACIÓN

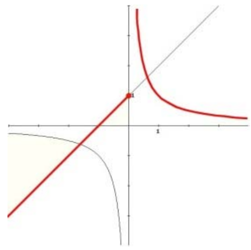
1. As coordenadas do punto sinalado son:

a) (–1, 2)
b) (–2, –1)
c) (1, 2)
d) (1, –2)



2. A única gráfica que non corresponde a unha función é:

a) 
b) 
c) 

d) 

3. A única táboa que non pode ser dunha relación funcional é:

a)

x	*y*
0	1
1	2
2	3
3	4

b)

x	*y*
–1	–3
0	–3
1	–3
2	–3

c)

x	*y*
–3	9
–1	1
0	0
2	4

d)

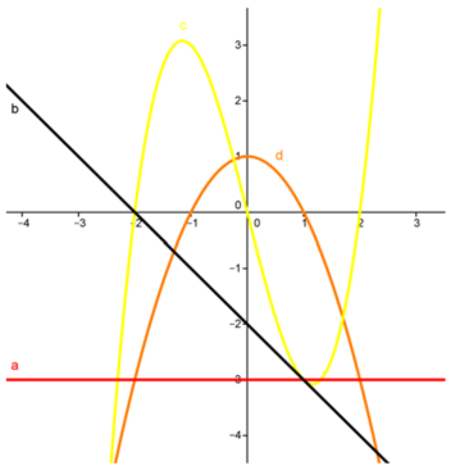
x	*y*
0	2
1	3
4	6
0	3

4. A única función afín que, ademais, é lineal é:

a) $y = -4x$ b) $y = 3x + 1$ c) $y = -2x + 3$ d) $y = -x-1$

5. A única gráfica dunha función afín non constante é:

a)
b)
c)
d)



6. A única función cuadrática é:

a) $y = –2x$ b) $y = 3x + 1$ c) $y = –2x^2 + 3x$ d) $y = –x^3 –1$

7. A función cuadrática que ten o seu vértice no punto (3, 4) é:

a) $y = –2x^2$ b) $y = 3x^2 – x + 1$ c) $y = –2x^2 + 3x$ d) $y = –x^2 + 6x – 5$

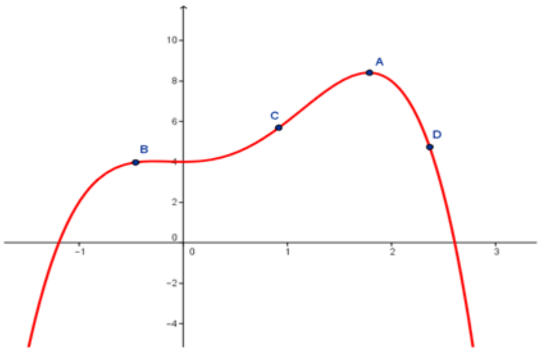
8. O máximo absoluto da función acádase no punto:

a)

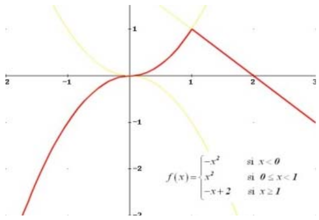
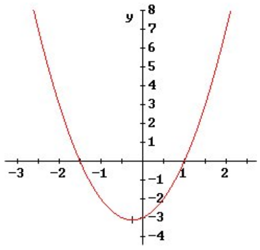
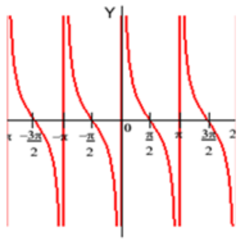
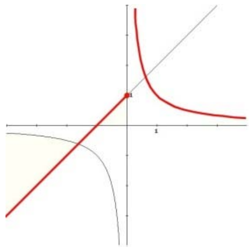
b)

c)

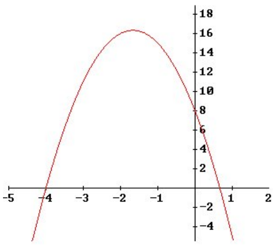
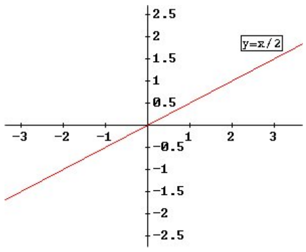
d)

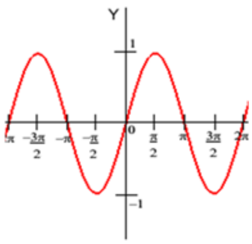
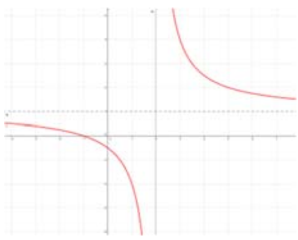


9. A única gráfica que corresponde a unha función periódica é:

a)  b)  c)  d) 

10. A única gráfica que corresponde a unha función que é crecente ata $x = –2$, pero logo deixa de selo, é:

a)  b) 

c)  d) 

Autor: José Gallegos Fernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: José Gallegos Fernández

Matemáticas orientadas ás ensinanzas académicas

3º B da ESO
Capítulo 11:
Estatística e probabilidade

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Fernando Blasco

Revisor: David Hierro

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Índice

1. A TOMA DE DATOS

1.1. UN EXEMPLO PARA REALIZAR UNHA ANÁLISE

1.2. VARIABLES ESTATÍSTICAS

1.3. AS FASES DUN ESTUDO ESTATÍSTICO

1.4. MÉTODOS DE SELECCIÓN DUNHA MOSTRA ESTATÍSTICA. REPRESENTATIVIDADE DUNHA MOSTRA

2. REPRESENTACIÓN DA INFORMACIÓN

2.1. EXEMPLOS PARA TRABALLAR

2.2. DIAGRAMA DE BARRAS

2.3. HISTOGRAMA DE FRECUENCIAS

2.4. POLÍGONO DE FRECUENCIAS

2.5. DIAGRAMA DE SECTORES

3. PARÁMETROS ESTATÍSTICOS

3.1. INTRODUCIÓN

3.2. MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN

3.3. MEDIDAS DE DISPERSIÓN

3.4. CÁLCULO DETIDO DOS PARÁMETROS ESTATÍSTICOS

3.5. INTERPRETACIÓN CONXUNTA DA MEDIA E A DESVIACIÓN TÍPICA.

3.6. DIAGRAMA DE CAIXAS OU DE BIGOTES

4. INTRODUCIÓN AO CÁLCULO DE PROBABILIDADES

4.1. CONCEPTOS BÁSICOS DE PROBABILIDADE

4.2. CÁLCULO DE PROBABILIDADES

4.3. PROBABILIDADE E FRECUENCIA RELATIVA

Resumo

A Estatística é unha Ciencia que xurdiu para levar a contabilidade do Estado. De aí vén ou seu nome. No século XX desenvolvéronse as súas técnicas e separouse das Matemáticas, pasando a ser unha ciencia con entidade propia. Nos medios de comunicación encontramos frecuentes estatísticas. En Medicina precísanse métodos estatísticos para probar os novos medicamentos. En todo experimento científico, tras da recollida de datos, precísase utilizar probas estatísticas que permitan sacar información deses datos.

A orixe da Probabilidade encóntrase nos xogos de azar. *Cardano, Galileo, Pascal, Fermat* son algúns dos matemáticos que se ocuparon nos seus inicios.

1. A TOMA DE DATOS

1.1. Un exemplo para realizar unha análise

Exemplo:

- *A Casa da Moeda quere estudar cantas moedas debe emitir, tendo en conta as que están en circulación e as que quedan atesouradas (ben en casas particulares, en máquinas de refrescos ou depositadas nun banco). Fíxose unha enquisa a pé de rúa a 60 persoas e apuntouse cantas moedas levaba cada unha delas no peto. Obtivemos estes datos:*

12	7	11	8	8	9	6	12	7	7	13	0	10	9	13	18	7	6	11	12	16	0	10	10	8	8	9	11	10	8
16	8	5	2	12	8	14	14	16	6	2	0	18	10	10	12	14	6	7	3	12	11	10	18	9	7	12	1	15	8

O primeiro paso consiste en facer un esquema para o reconto: usaremos unha táboa e marcaremos barras cada vez que apareza ese número.

0	///
1	/
2	//
3	/
4	
5	/
6	////

7	///// /
8	///// ///
9	////
10	///// //
11	////
12	///// //
13	//

14	///
15	/
16	///
17	
18	///
19	
20	

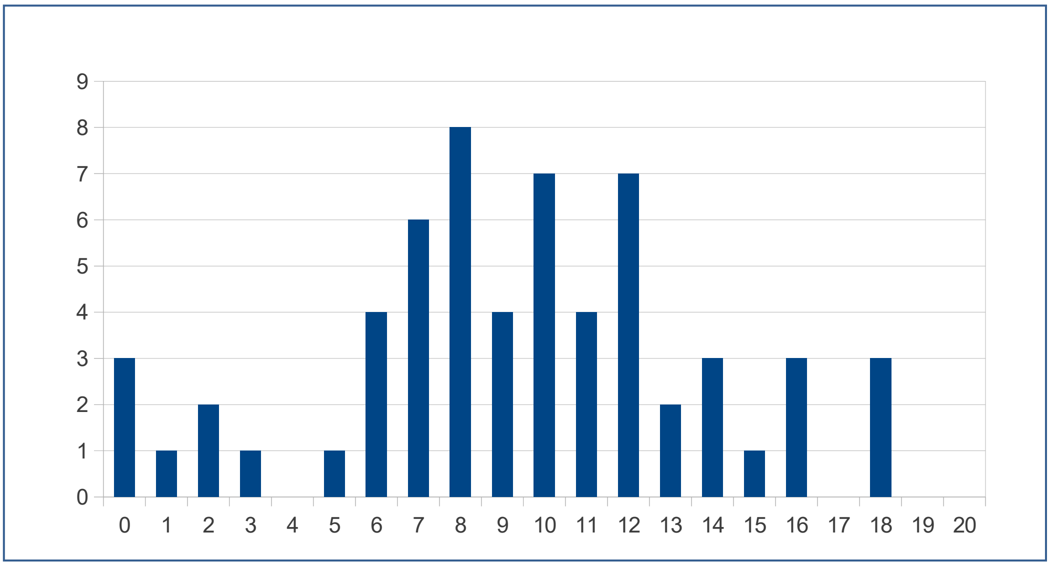
Pasar dese reconto a unha táboa de **frecuencias absolutas** é moi sinxelo: só hai que substituír as barras polo número que representan.

0	3
1	1
2	2
3	1
4	0
5	1
6	4

7	6
8	8
9	4
10	7
11	4
12	7
13	2

14	3
15	1
16	3
17	0
18	3
19	0
20	0

É moito mellor analizar os datos de modo visual. Estamos máis acostumados a traballar desa maneira. Podemos representar os datos da táboa de frecuencias nun **diagrama de barras**, onde a altura de cada barra representa a frecuencia de aparición.



O procesamento de datos estatísticos utilízase moito. Obviamente non se fan as operacións a man senón que se utilizan calculadoras ou follas de cálculo. Dispoñer deses medios tecnolóxicos será un bo complemento para o capítulo, aínda que recordamos que o máis importante é comprender que se fai en cada momento.

Comezaremos introducindo algo de **nomenclatura**. Case todos estes nomes os escoitaches xa que os medios de comunicación os utilizan moitísimo:

Poboación é o colectivo sobre o que se quere facer o estudo.

Mostra é un subconxunto da poboación de modo que a partir do seu estudo se poden obter características da poboación completa.

Individuo é cada un dos elementos da poboación ou a mostra.

Exemplo:

- *Quérese facer un estudo sobre hábitos alimenticios dos estudantes de 3º de ESO de todo Madrid. Pero como é moi custoso entrevistar a todos os estudantes decídese tomar un IES por cada distrito e entrevistar aos alumnos de 3º de ESO deses colexios elixidos.*

  A **poboación** obxecto do estudo serán todos os estudantes madrileños matriculados en 3º de ESO.

  A **mostra** son os estudantes de 3º de ESO matriculados nos institutos elixidos.

  Cada un dos estudantes de 3º de ESO é un **individuo** para este estudo estatístico.

Actividades propostas

1. Queremos facer un estudo da cantidade de moedas que levan no peto os estudantes da túa clase. Pero para non preguntar a todos elixe 10 compañeiros ao azar e anota no teu caderno cantas moedas leva cada un.

a) Cal é a poboación obxecto do estudo?

b) Cal é a mostra elixida?

c) Especifica 5 individuos que pertenzan á poboación e non á mostra.

1.2. Variables estatísticas

Exemplo:

- *Nun estudo estatístico pódense preguntar cousas tan variadas como*
  - Que froitas comes ao longo dunha semana?
  - Cantas pezas de froita comes ao día?
  - Cantas moedas levas no peto?
  - Cal é a túa altura?
  - Cantas marcas de chocolate recordas?
  - Cales son as marcas de chocolate que recordas?
  - Cantos irmáns tes?
  - Cal é a túa cor favorita para un coche?
  - Canto tempo pasas ao día vendo a televisión?
  - Cantos seguidores tes en *twitter*?

Esas preguntas poden corresponder a estudos de saúde, económicos, publicitarios ou socioeconómicos. Algunhas respóndense cun número e outras cun nome ou un adxectivo. Mesmo hai diferenzas entre as que se responden con números: o número de moedas que levas ou o número de seguidores de *twitter* contéstanse con números enteiros, mentres que para calcular a túa altura ou as horas que pasas diante do televisor necesitamos utilizar números reais (normalmente con representación decimal).

Unha variable dise **cuantitativa** se os seus valores se expresan con números.

As variables cuantitativas poden ser

- **discretas** se só admiten valores illados
- **continuas** se entre dous valores poden darse tamén todos os intermedios.

Unha variable estatística é **cualitativa** cando os seus valores non se expresan mediante un número, senón cunha calidade.

Actividades propostas

2. Clasifica en variables cualitativas e cuantitativas as que aparecen no primeiro exemplo desta sección. Para as cuantitativas indica se son continuas ou discretas.

1.3. As fases dun estudo estatístico

Nun estudo estatístico hai 6 fases fundamentais:

1. Determinación do obxecto do estudo. Isto é, saber que queremos estudar.
2. Selección das variables que se van estudar.
3. Recollida dos datos.
4. Organización dos datos.
5. Representación e tratamento dos datos.
6. Interpretación e análise.

Neste libro empezaremos os exemplos a partir do punto 4, con datos xa proporcionados nos enunciados, aínda que a continuación imos reflexionar algo sobre a selección dunha mostra.

1.4. Métodos de selección dunha mostra estatística. Representatividade dunha mostra

Para recoller os datos e determinar os valores da variable pódese utilizar a toda a poboación, todo o universo sobre o que se realiza o estudo, ou seleccionar unha mostra. En moitas ocasións non é conveniente recoller valores de toda a poboación, porque é complicado ou demasiado custoso, ou mesmo porque é imposible como no caso dun control de calidade no que se destrúa o obxecto a analizar. A parte da Estatística que se ocupa de como seleccionar adecuadamente as mostras denomínase *Teoría de Mostras*.

Exemplos:

- Se estudamos o peso dos habitantes dunha cidade, a poboación será o total das persoas da devandita cidade.
- Pero o normal será non recoller información sobre todas as persoas da cidade (xa que sería un labor moi complexo e custoso), senón que se soe seleccionar un subgrupo (mostra) que se entenda que é suficientemente representativo.
- Para coñecer a intención de voto perante unhas eleccións europeas, municipais, autonómicas… utilízanse mostras, pois preguntar a toda a poboación sería moi custoso (e iso xa se fai nas eleccións).
- Pero se unha fábrica quere coñecer as horas de vida útil dun tipo de lámpada, non pode poñer a funcionar todas as lámpadas ata que se avaríen pois queda sen produción. Neste caso é imprescindible seleccionar unha mostra.
- En *control de calidade* fanse estudos estatísticos e tómanse mostras.

Para determinar a mellor forma de seleccionar unha mostra existe toda unha parte da Estatística, a *Teoría de Mostras*, que nos indica varios detalles a termos en conta:

- Como se deben elixir os elementos da mostra?
- Cal debe ser o tamaño da mostra?
- Ata que punto a mostra é representativa da poboación?

A forma de seleccionar a mostra, ***mostraxe***, debe reunir unhas determinadas características para que poida caracterizar á poboación, ser ***representativa*** da poboación. Debe ser unha mostraxe **aleatoria**, é dicir, ao azar. Se a mostra está mal elixida, non é representativa, e prodúcense **nesgos**, erros nos resultados do estudo.

Todos os individuos da poboación deben ter as mesmas posibilidades de seren seleccionados para a mostra.

Exemplos:

- *Quérese estudar o nivel adquisitivo das persoas dunha cidade, para o que pasamos unha enquisa na porta duns grandes almacéns, paréceche unha mostraxe aleatoria?*

Non o é. As persoas que entran nun determinado establecemento non representan a toda a poboación.

- *Vas facer un estudo sobre os gustos musicais dos mozos, e para iso, preguntas a cinco de entre as túas amizades, paréceche unha mostraxe aleatoria?*

Non o é. As túas amizades poden ter uns gustos diferentes aos do resto da poboación.

Métodos de selección dunha mostra

Hai varios métodos para seleccionar unha mostra, que darían para analizar nun libro sobre "Mostraxe". Pero é conveniente coñecer algún. Vexamos tres deles:

Mostraxe aleatoria simple

Todos os individuos da poboación teñen a mesma probabilidade de seren elixidos na mostra.

Mostraxe aleatoria sistemática

Ordénanse os individuos da poboación. Elíxese ao azar un individuo e selecciónase a mostra tomando individuos mediante saltos igualmente espazados.

Mostraxe aleatoria estratificada

Divídese á poboación en grupos homoxéneos dunha determinada característica, *estratos*, por exemplo, idade, e tómase unha mostra aleatoria simple en cada estrato.

Exemplo:

- Estúdase o estado dos ósos da poboación dun país, e divídese a poboación en "nenos", "mozos", "idade mediana" e "terceira idade". En cada grupo faise unha mostraxe aleatoria simple.

Representatividade dunha mostra

Cando se elixe unha mostra os dous aspectos que hai que ter en conta son, o tamaño e a representatividade da mostra.

Se a mostra é demasiado pequena, aínda que estea ben elixida, o resultado non será fiable.

Exemplo:

- *Queremos estudar a estatura da poboación española. Para iso eliximos a unha persoa ao azar e medímola.*

Evidentemente este resultado non é fiable. A mostra é demasiado pequena.

Se a mostra é demasiado grande os resultados serán moi fiables, pero o gasto pode ser demasiado elevado. Mesmo, en ocasións, mostras demasiado grandes non nos proporcionan mellores resultados.

Cando unha mostra teña o tamaño adecuado, e teña sido elixida de forma aleatoria diremos que é unha **mostra representativa**.

Se a mostra non foi elixida de forma aleatoria diremos que a mostra é **nesgada**.

Actividades propostas

3. Sinala en que caso é máis conveniente estudar a poboación ou unha mostra:

a) O diámetro dos parafusos que fabrica unha máquina diariamente.

b) A altura dun grupo de seis amigos.

4. Pódese ler o seguinte titular no xornal que publica o teu instituto: "*A nota media dos alumnos de 3º ESO é de* 7.9". Como se chega a esta conclusión? Estudouse toda a poboación? Se tivesen seleccionado para o seu cálculo só ás alumnas, sería representativo o seu valor?

5. Nunha serie de televisión teñen dúbidas sobre que facer coa protagonista, que teña un accidente ou se debe casar. Van facer unha consulta. A toda a poboación ou seleccionando unha mostra representativa? Razoa a resposta.

2. REPRESENTACIÓN DA INFORMACIÓN

2.1. Exemplos para traballar

Na sección anterior comezabamos analizando unha variable discreta: o número de moedas que se levan no peto. Podes repasar que faciamos alí: como recontabamos os datos, como os levabamos despois a unha táboa de frecuencias e como representabamos a información nun gráfico.

Faremos agora o mesmo proceso cunha variable continua.

Xa sabes que:

Podemos distinguir entre **frecuencias absolutas**, se, como neste exemplo, facemos un reconto do número de veces que aparece cada dato. **Frecuencias relativas**, que estudaremos con máis detemento ao final do capítulo, e que consiste en dividir cada frecuencia absoluta polo número total de observacións. **Frecuencias acumuladas**, tanto frecuencias absolutas acumuladas como frecuencias relativas acumuladas se se calculan todos os valores menores ou iguais a el.

Exemplos:

- Estase realizando un control do peso dun grupo de nenos. Para iso, contabilízase o número de veces que comen ao día unha barriña de chocolate 13 nenos durante un mes, obtendo os seguintes números: 2, 5, 3, 2, 0, 4, 1, 7, 4, 2, 1, 0, 2.

A información obtida pódese resumir nunha táboa de frecuencias **absolutas** e frecuencias **absolutas acumuladas**:

Valores	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Frecuencia absoluta	2	2	4	1	2	1	0	1
Frecuencia absoluta acumulada	2	4	8	9	11	12	12	13

Tamén se pode resumir nunha táboa de frecuencias **relativas** e frecuencias **relativas acumuladas**:

Valores	0	1	2	3	4	5	6	7
Frecuencia relativa	0.154	0.154	0.307	0.077	0.154	0.077	0	0.077
Frecuencia relativa acumulada	0.154	0.308	0.615	0.692	0.846	0.923	0.923	1

- Nunha fábrica realízase un estudo sobre o espesor, en *mm*, dun certo tipo de latas de refresco. Con este fin, selecciona unha mostra de tamaño N = 25, obtendo os seguintes valores: 7.8, 8.2, 7.6, 10.5, 7.4, 8.3, 9.2, 11.3, 7.1, 8.5, 10.2, 9.3, 9.9, 8.7, 8.6, 7.2, 9.9, 8.6, 10.9, 7.9, 11.1, 8.8, 9.2, 8.1, 10.5.

Esta información pódese resumir facendo cinco intervalos e facendo unha táboa de frecuencias absolutas, frecuencias absolutas acumuladas, frecuencias relativas e frecuencias relativas acumuladas

Intervalos de clase	(7, 8]	(8, 9]	(9, 10]	(10, 11]	(11, 12]
Marcas de clase	7.5	8.5	9.5	10.5	11.5
Frecuencia absoluta	6	8	5	4	2
Frecuencia relativa	0.24	0.32	0.2	0.16	0.08
Frecuencia relativa acumulada	0.24	0.56	0.76	0.92	1

Exemplo:

- As alturas dos 12 xogadores da Selección Española de Baloncesto (en metros) que participaron na Eurocopa 2013 recóllense na seguinte táboa :

2.03	1.96	1.91	2.11	1.91	1.93	2.08	1.99	1.90	2.16	2.06	2.03

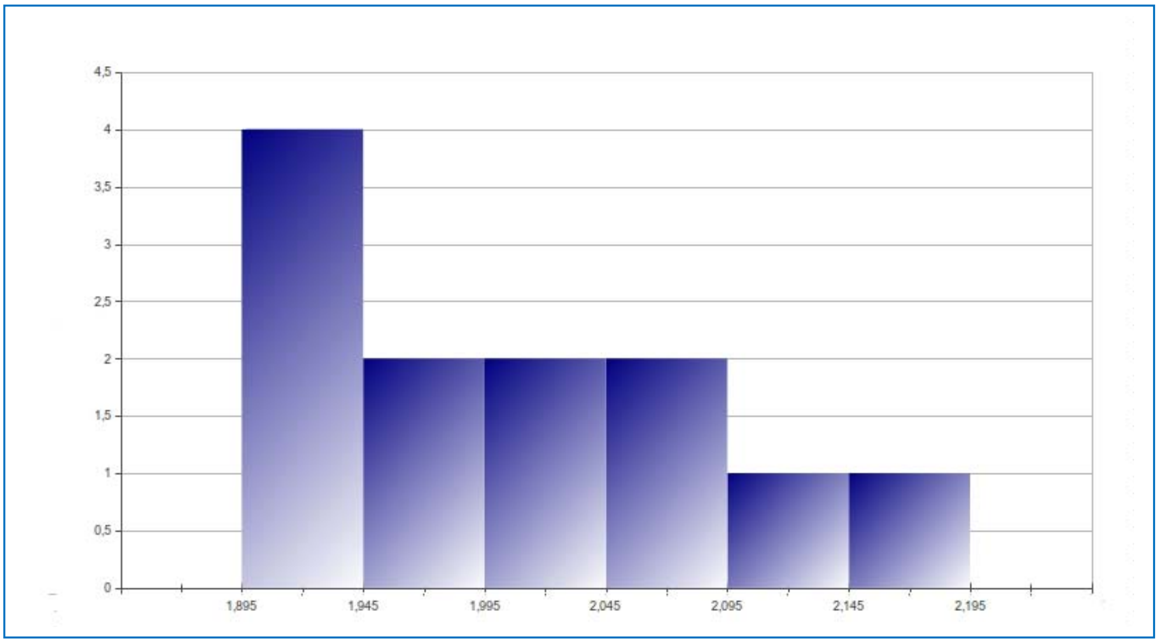
Como os datos son continuos, para facer o reconto fixaremos **intervalos** de altura:

- entre 1.895 e 1.945 ////
- entre 1.945 e 1.995 //
- entre 1.995 e 2.045 //
- entre 2.045 e 2.095 //
- entre 2.095 e 2.145 /
- entre 2.145 e 2.195 /

Agora levamos os datos do reconto a un diagrama de frecuencias:

entre 1.895 e 1.945	4
entre 1.945 e 1.995	2
entre 1.995 e 2.045	2
entre 2.045 e 2.095	2
entre 2.095 e 2.145	1
entre 2.145 e 2.195	1

Neste caso a representación gráfica facémola cun **histograma de frecuencias**.

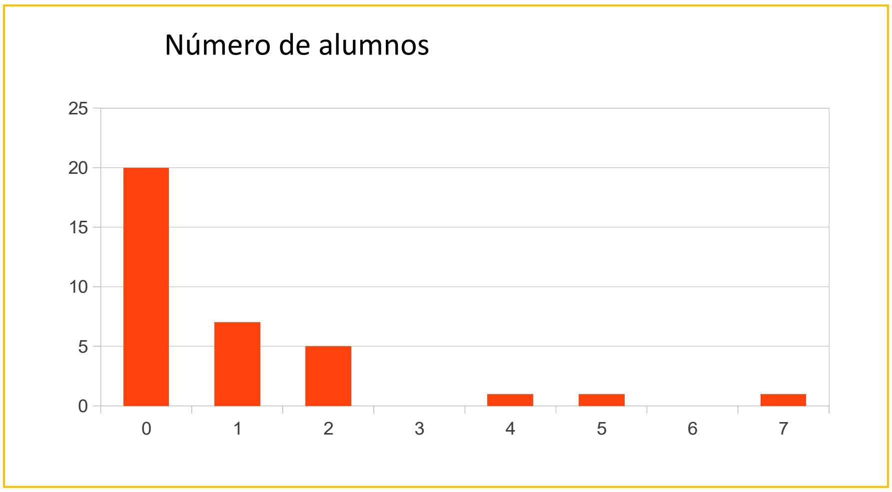


Observa a diferenza entre este gráfico (correspondente a unha variable continua) e o que fixemos para o reconto de moedas (que representaba unha variable discreta). Este gráfico denomínase histograma de frecuencias e é similar a un diagrama de barras pero agora representamos unhas barras pegadas a outras, para recordar que se trata de intervalos de clase e non de valores illados das variables. No noso exemplo todos os intervalos teñen a mesma lonxitude, 0.05 cm. Se as lonxitudes dos intervalos fosen diferentes, as alturas dos rectángulos deberían ser proporcionais á área.

2.2. Diagrama de barras

Utilízase para representar datos de variables estatísticas discretas ou variables estatísticas cualitativas.

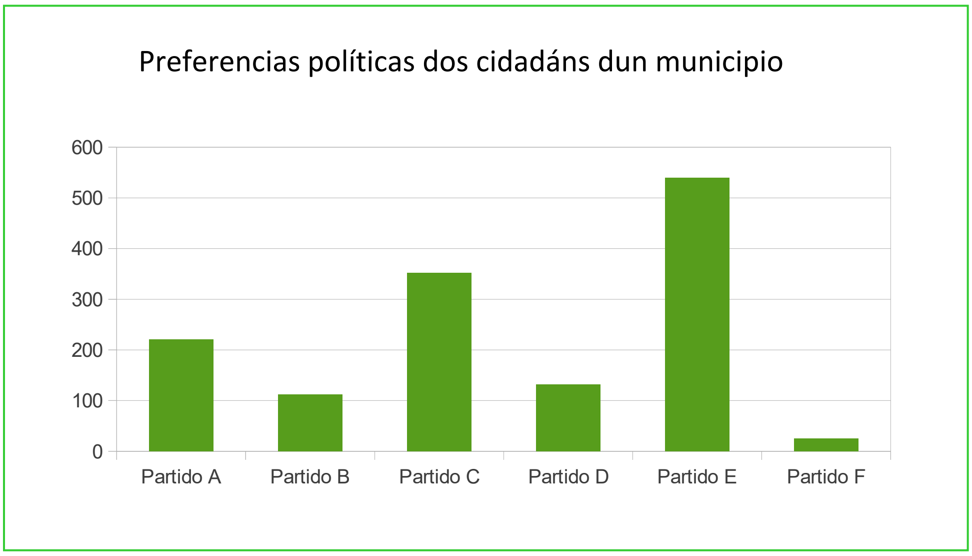
Ao principio do capítulo estudamos o número de moedas que se levan no peto. Podemos utilizar este tipo de gráfico noutras situacións.



O gráfico anterior representa o número de alumnos (dunha clase de 35) que aprobaron todo, o de alumnos cunha materia suspensa, con dúas materias suspensas, etc. O bo da representación gráfica é que dunha **soa ollada sabemos que 20 alumnos aprobaron todo e que hai un alumno que ten 7 materias suspensas.**

Autor: Fernando Blasco
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Tamén podemos utilizar diagramas de barras para representar variables cualitativas, como a elección da modalidade de bacharelato que cursan os alumnos dun IES ou as preferencias políticas dos cidadáns dun municipio.

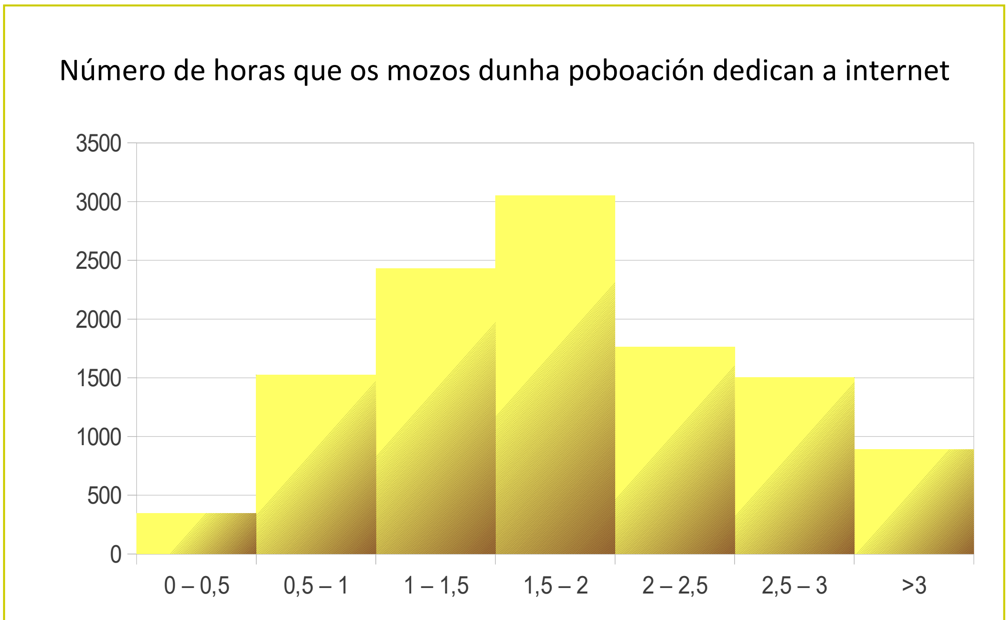


2.3. Histograma de frecuencias

Este tipo de gráfico utilizámolo antes para representar as alturas dos xogadores da Selección Española de Baloncesto.

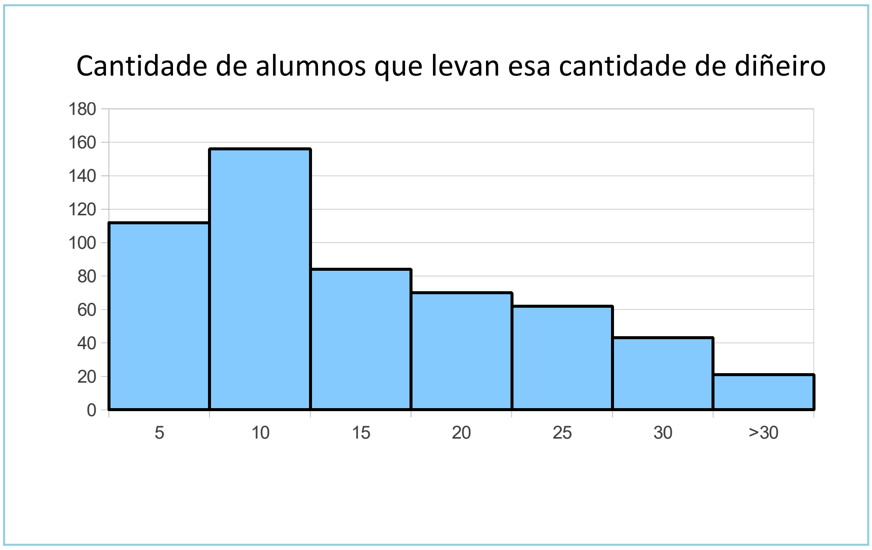
É similar a un diagrama de barras pero a altura de cada barra vén dada polo número de elementos que hai en cada clase.

Outras variables que podemos considerar como variables continuas son o número de horas que os mozos dunha poboación dedican a internet nos seus momentos de ocio ou a cantidade de diñeiro que se leva no peto (ollo, isto non é o número de moedas).



Autor: Fernando Blasco
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

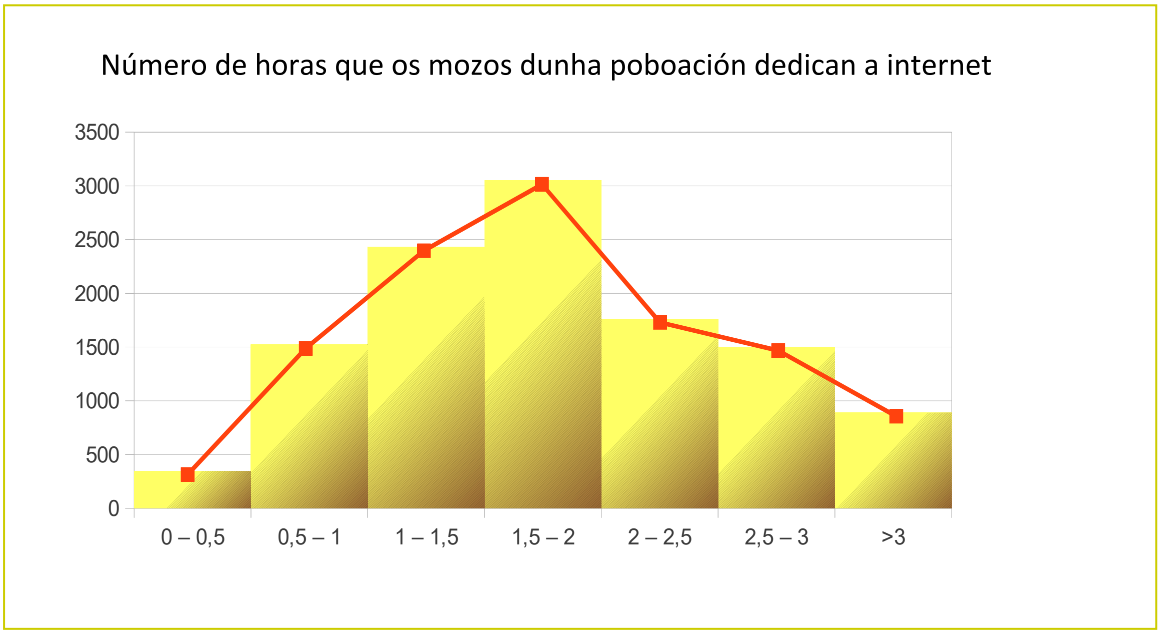
No gráfico que incluímos a continuación as marcas do eixe do *x* refírense aos tramos de diñeiro expresados de 5 en 5 euros. A altura do gráfico correspóndese coa cantidade de alumnos que levan esa cantidade de diñeiro. Dunha simple ollada vese que hai algo máis de 150 alumnos que levan entre 5 € e 10 € ao instituto e que pouco máis de 40 alumnos levan entre 25 € e 30 €.



As barras son máis anchas e aparecen unhas a continuación doutras para destacar que estamos representando unha variable continua e que as alturas se corresponden con individuos dentro dun intervalo de datos. Pero recorda, se os intervalos fosen distintos, as alturas dos rectángulos serían proporcionais á área.

2.4. Polígono de frecuencias

Utilízase nos mesmos casos que o histograma. Pero dá idea da variación da tendencia. A liña poligonal constrúese unindo os puntos medios dos lados superiores dos rectángulos.



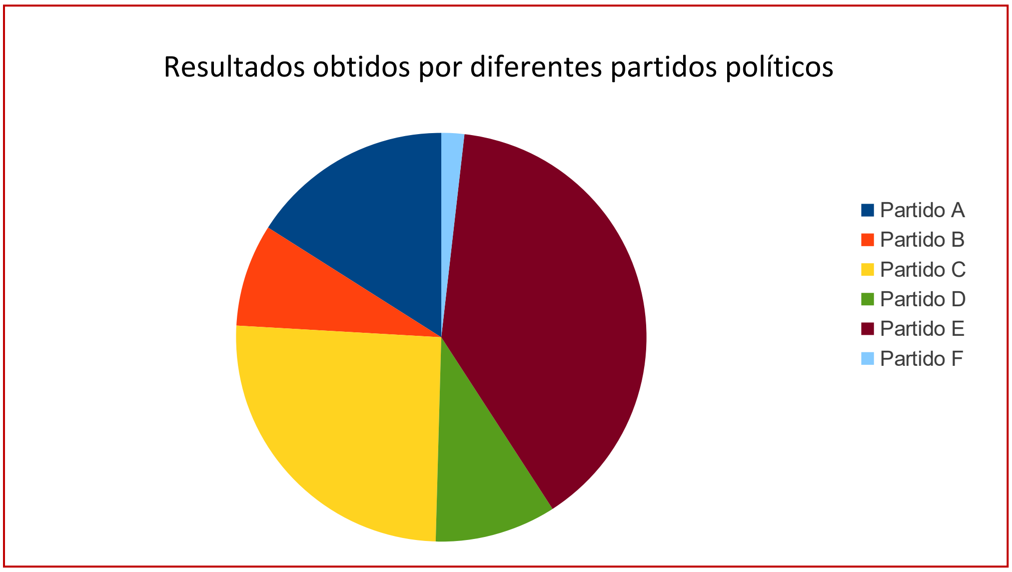
Autor: Fernando Blasco
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

2.5. Diagrama de sectores

Nalgunhas ocasións interésanos facernos idea da proporción que ten cada resultado en relación cos demais. Utilízase moito con variables cualitativas. Por exemplo, esta representación utilízase para amosar os resultados dunhas eleccións cando queremos comparar os votos obtidos polos diferentes partidos.

Nun diagrama de sectores aparecen representados sectores circulares. O ángulo destes sectores é proporcional á frecuencia absoluta.

Retomando o exemplo dos resultados obtidos por diferentes partidos políticos imos representar eses mesmos resultados mediante un diagrama de sectores:



Actividades propostas

6. Reúne a 10 amigos. Reconta cantas moedas de cada valor (1 céntimo, 2 céntimos, 5 céntimos…) tedes entre todos. Representa mediante un gráfico adecuado o número de moedas de cada clase que hai. Hai algún outro diagrama que che permita ver que tipos de moedas son máis abundantes na mostra que tomaches?

7. Na clase de Educación Física o profesor mediu o tempo que tarda cada alumno en percorrer 100 metros. Os resultados están nesta táboa:

14.92	13.01	12.22	16.72	12.06	10.11	10.58	18.58	20.07	13.15	20.10	12.43	17.51	11.59	11.79
16.94	16.45	10.94	16.56	14.87	17.59	13.74	19.71	18.63	19.87	11.12	12.09	14.20	18.30	17.64

Agrupa estes resultados por clases, comezando en 10 segundos e facendo intervalos de lonxitude 1 segundo. Realiza unha táboa de frecuencias e representa adecuadamente estes datos.

3. PARÁMETROS ESTATÍSTICOS

3.1. Introdución

Seguro que sabes que é a media de dous números e probablemente sabes calcular a media dunha serie de datos. Pero ademais desa medida estatística hai outras medidas que poden ser interesantes para coñecer propiedades dos datos que temos.

Agora estudaremos as **medidas de centralización** (media, mediana e moda) que nos proporcionan un valor de referencia arredor do cal se distribúen os datos e as **medidas de dispersión** (percorrido, desviación media, varianza e desviación típica). Estas medidas indícannos como están de separados os datos da media.

Exemplo:

- *Imaxina que en dous exames de Matemáticas obtés un 6 e un 5. A media é 5.5. Supón agora que as notas que tiveches son 10 e 1. A media tamén é 5.5 pero deberás estudar aparte na que sacaches 1 para recuperar. As medidas de dispersión vannos servir para detectar cando temos valores extremos, afastados da media.*

3.2. Medidas de centralización

A **media** calcúlase sumando todos os valores e dividindo entre o número de datos.

Se x_1, x_2, ..., x_n son os valores que toma a variable estatística que estamos considerando, a media represéntase por $\overline{x}$ e calcúlase mediante a fórmula:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Esa suma pódese escribir abreviadamente como $\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{\sum \boldsymbol{x_i}}{\boldsymbol{n}}$. O símbolo $\sum$ utilízase habitualmente para representar sumas de varios sumandos. Utilizaralo moito a partir de agora.

Para calcular a **mediana** ordénanse todos os datos de menor a maior e quedamos co que ocupa a posición central. Se temos un número par de datos, tomamos como mediana a media dos dous números que ocupan as posicións centrais. Representarémola por *Me*.

A ***mediana*** *Me* é un valor tal que o 50 % das observacións son inferiores a el.

Os ***cuartís*** Q_1, Q_2 e Q_3 son os valores tales que o 25 %, 50 % e 75 % (respectivamente) dos valores da variable son inferiores a el. Polo tanto, a mediana coincide co segundo cuartil.

Usamos o termo **moda** para referirnos ao valor que máis se repite. Denotámola por *Mo*.

Actividades resoltas

- Continuamos utilizando os datos de estatura correspondentes aos 12 xogadores da Selección Española de Baloncesto *(ver sección 2.1 deste capítulo).*

A estatura **media** calcúlase sumando todas as alturas e dividindo entre o número de datos.

Autor: Fernando Blasco
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

$\sum x_i$ = 2.03 + 2.06 + 2.16 + 1.90 + 1.99 + 2.08 + 1.93 + 1.91 + 2.11 + 1.91 + 1.96 + 2.03 = 24.07

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{24.07}{12} = 2.0058.$$

Neste exemplo non podemos falar de **moda**, xa que non hai un único valor que sexa o que máis se repite.

A **mediana** neste caso é 2.01. Para calculala ordenamos todos os datos de menor a maior e quedamos co que ocupa a posición central. Como neste caso temos un número impar de datos, tomamos como mediana a media aritmética dos 2 que ocupan as posicións centrais.

Os datos, tras ordenalos, quedarían así:

1.90	1.91	1.91	1.93	1.96	1.99	2.03	2.03	2.06	2.08	2.11	2.16

Media de ambos os dous = 2.01

Para calcular os **cuartís** temos que dividir o total de datos, neste exemplo 12, entre 4, (ou multiplicar por 0.25 que é o mesmo) e obtemos 3. Logo o primeiro cuartil observamos que está entre 1.91 e 1.93, facemos a media e obtemos que Q_1 = 1.92. Para calcular o terceiro cuartil multiplicamos por 3 e dividimos por 4, (ou multiplicamos por 0.75) e neste caso obtense o valor que está entre 9, 2.06, e 10, 2.08, polo que Q_3 = 2.07.

3.3. Medidas de dispersión

Percorrido é a diferenza entre o dato maior e o dato menor. Tamén se denomina **rango**.

Desviación media é a media das distancias dos datos á media dos datos dos que dispoñamos.

$$DM = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \ldots + |x_n - \bar{x}|}{n} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}$$

Varianza é a media dos cadrados das distancias dos datos á media.

$$\text{Varianza} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

De forma equivalente (desenvolvendo os cadrados que aparecen na expresión) pódese calcular mediante estoutra expresión:

$$\text{Varianza} = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

Desviación típica é a raíz cadrada da varianza.

Represéntase por σ.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2}$$

Percorrido intercuartílico ou **rango intercuartílico** é a distancia entre o terceiro e o primeiro cuartil:

R = Percorrido intercuartílico = $Q_3 - Q_1$.

Estas fórmulas proveñen de diferentes modos de medir as distancias. Para o cálculo da desviación media úsanse valores absolutos, que é como se mide a distancia entre números na recta real. A desviación típica ten que ver coa forma de medir distancias no plano (recordemos que a hipotenusa dun triángulo é a raíz cadrada da suma dos cadrados dos catetos). Non é preciso que comprendas agora de onde saen estas fórmulas, pero si é conveniente que saibas que non é por capricho dos matemáticos que o inventaron. Cada cousa ao seu tempo...

Actividades resoltas

- Volvemos usar os datos do exemplo da Selección Española cos que vimos traballando.

Percorrido: 2.16 – 1.90 = 0.26 (metros). Isto é a diferenza de alturas entre o xogador máis alto e o máis baixo.

Para calcular a **desviación media** primeiro calcularemos a suma que aparece no numerador. Despois dividiremos entre o número de datos.

$|2.03 - 2.0058| + |2.06 - 2.0058| + |2.16 - 2.0058| + |1.90 - 2.0058| + |1.99 - 2.0058| +$

$|2.08 - 2.0058| + |1.93 - 2.0058| + |1.91 - 2.0058| + |2.11 - 2.0058| + |1.91 - 2.0058| +$

$|1.96 - 2.0058| + |2.03 - 2.0058| = 0.0242 + 0.0458 + 0.0958 + 0.1042 + 0.0958 + 0.0758 + 0.0742 + 0.0158 + 0.1058 + 0.1542 + 0.9458 + 0.0242 = 0.87$

Así a **desviación media** é 0.87/12 = 0.0725

Para calcular a **varianza** primeiro calcularemos a suma que aparece no numerador, de modo similar a como acabamos de facer. Despois terminaremos dividindo entre o número de datos.

$(2.03 - 2.0058)^2 + (2.06 - 2.0058)^2 + (2.16 - 2.0058)^2 + (1.90 - 2.0058)^2 + (1.99 - 2.0058)^2 +$

$(2.08 - 2.0058)^2 + (1.93 - 2.0058)^2 + (1.91 - 2.0058)^2 + (2.11 - 2.0058)^2 + (1.91 - 2.0058)^2 +$

$(1.96 - 2.0058)^2 + (2.03 - 2.0058)^2 = 0.08934.$

Así a **varianza** é 0.08934/12 = 0.00744.

A **desviación típica** é a raíz cadrada da varianza: $\sigma = \sqrt{0.00744}$ = 0.08628.

Percorrido intercuartílico ou **rango intercuartílico** calcúlase restando $Q_3 - Q_1$ = 2.07 – 1.92 = 0.15.

As medidas de posición e dispersión permítennos realizar outro tipo de gráfico estatístico que se chama ***gráfico de caixa***.

3.4. Cálculo detido dos parámetros estatísticos

O máis cómodo para calcular parámetros estatísticos é utilizar unha folla de cálculo. As calculadoras científicas tamén incorporan funcións para obter os principais parámetros estatísticos. Para saber como usar a túa calculadora podes ler o manual que vén con ela.

Agora veremos como se poden utilizar as táboas de frecuencias para calcular a media e a varianza.

Cando hai valores repetidos en vez de sumar ese valor varias veces podemos multiplicar o valor pola súa frecuencia absoluta. Tamén o número de datos é a suma das frecuencias.

Deste modo obtemos a seguinte **fórmula para a media**

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i}$$

Analogamente, a **varianza** pódese calcular mediante

$$\text{Varianza} = \sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}$$

ou, alternativamente, mediante a expresión

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2$$

(Estas dúas fórmulas son equivalentes. A segunda expresión obtense desenvolvendo os cadrados da primeira e simplificando).

Polo tanto a **desviación típica** calcúlase:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}} = \sqrt{\frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2}$$

Actividades resoltas

- *As notas de 15 alumnos nun exame de matemáticas reflíctense na seguinte táboa*

7	7	6	6	10	1	4	5	5	3	9	5	5	8	6

Queremos calcular a súa media e a súa varianza.

En primeiro lugar, elaboramos unha táboa de frecuencias con eses datos:

Autor: Fernando Blasco
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

x_i	f_i
1	1
2	0
3	1
4	1
5	4
6	3
7	2
8	1
9	1
10	1

Engadimos unha columna na que escribiremos o resultado de multiplicar a frecuencia e o valor, isto é, ***xi · fi.***

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
1	1	1
2	0	0
3	1	3
4	1	4
5	4	20
6	3	18
7	2	14
8	1	8
9	1	9
10	1	10
	$\sum f_i = n = 15$	$\sum x_i \cdot f_i = 87$

Sumando as frecuencias (columna central) obtemos o número de datos.

Así a media é o cociente entre a suma da columna da dereita entre a suma da columna central.

$$\bar{x} = \frac{87}{15} = 5.8$$

Para calcular a varianza engadiremos unha columna máis á táboa anterior. Nesa columna escribiremos o produto da frecuencia polo cadrado do valor.

Autor: Fernando Blasco
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
1	1	1	1
2	0	0	0
3	1	3	9
4	1	4	16
5	4	20	100
6	3	18	108
7	2	14	98
8	1	8	64
9	1	9	81
10	1	10	100
	$\sum f_i = n = 15$	$\sum x_i \cdot f_i = 87$	$\sum x_i^2 \cdot f_i = 577$

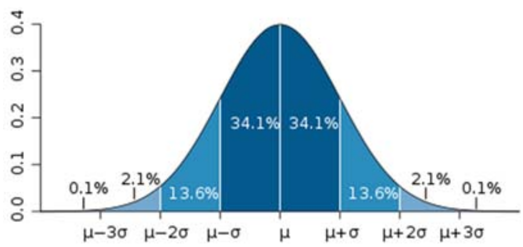
Así a **varianza** é $\sigma^2 = \frac{577}{15} - 5.8^2 = 4.826$

E a **desviación típica** é $\sigma = \sqrt{4.826} = 2.2$.

3.5. Interpretación conxunta da media e a desviación típica

Vimos que a desviación típica mide a distancia dos datos respecto da media. Dános moita información. Informa sobre como se agrupan os datos arredor da media.

Se os datos que recollemos tivesen unha distribución normal (de momento non sabemos o que isto significa exactamente dentro da Estatística, pero podes supoñer que significa iso, que son normais, que non lles pasa nada raro) resulta que no intervalo entre a media menos unha desviación típica e a media máis unha desviación típica están máis do 68 % dos datos. No intervalo entre a media menos 2 desviacións típicas e a media máis 2 desviacións típicas están máis do 95 % dos datos, e entre a media menos 3 desviacións típicas e a media máis 3 desviacións típicas están máis do 99.7 % dos datos.



Media e desviación típica. Imaxe de wikipedia

Poderíase dicir que algo, por exemplo a intelixencia dunha persoa, a altura dunha planta ou o peso dun animal... é normal se está dentro dese intervalo ($\bar{x} - \sigma$, $\bar{x} + \sigma$), que é intelixente, alto ou pesado se está entre ($\bar{x} + \sigma$, $\bar{x} + 2\sigma$), ou que é un xenio, xigante ou moi pesado se está no intervalo

($\bar{x} + 2\sigma$, $\bar{x} + 3\sigma$).

Observa que estamos dicindo que practicamente todos os datos distan da media menos de 3 desviacións típicas e que máis do 68 % distan menos dunha desviación típica. Isto vai ser de gran utilidade pois conecta con outras ramas da Estatística. Ata agora estivemos describindo o que ocorre. Agora imos poder tomar decisións, inferir ou predicir cunha certa probabilidade o que vai ocorrer. Por iso imos estudar a continuación as probabilidades.

3.6. Diagrama de caixa ou de bigotes

O **diagrama de caixa** ou de **bigotes** é unha representación gráfica na que se utilizan cinco medidas estatísticas: o valor mínimo, o valor máximo, a mediana, o primeiro cuartil e o terceiro cuartil… intentando visualizar todo o conxunto de datos.

O máis rechamante do gráfico é a «caixa». Fórmase un rectángulo (ou caixa) cuxos lados son os cuartís (Q_1 e Q_3) e onde se sinala no centro a mediana (*Me*). De maneira que o cadrado/rectángulo contén o 50 por cento dos valores centrais.

Engádenselle dous brazos (ou *bigotes*) onde se sinalan o valor máximo (*Máx*) e o valor mínimo (*Mín*).

Pódense calcular, ademais, uns límites superior e inferior. O inferior, L_i; é $Q_1 - 1.5$ polo percorrido intercuartílico, e o superior Ls é $Q_3 + 1.5$ polo percorrido intercuartílico.

Exemplo

- Neves tivo en Matemáticas as seguintes notas: 8, 4, 6, 10 e 10. Calcula o seu percorrido, a varianza, a desviación típica, os cuartís e o percorrido intercuartílico.

Ordenamos os datos: $4 \le 6 \le 8 \le 10 \le 10$, e calculamos que:

Mediana = *Me* = 8.

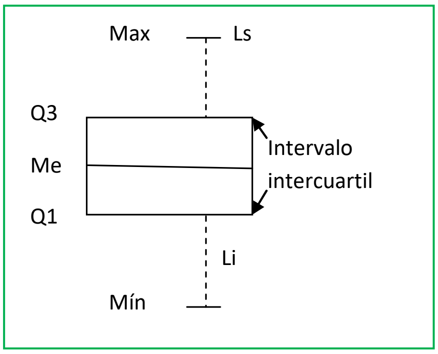
$Q_1 = 6$. $Q_3 = 10$.

Percorrido intercuartílico = 10 – 6 = 4.

Os bigotes indícannos:

Máx = 10. Mín = 4.

Ls = Q3 + 4 * 1.5 = 16. Li = Q1 – 4 * 1.5 = 0.



Neste exemplo o máximo é igual a 10, que é menor que o posible extremo superior, igual a 16. O mínimo é 4, maior que o extremo inferior, logo non hai valores *atípicos* que sexan maiores que o límite superior ou menores que o límite inferior. Os extremos dos bigotes no noso exemplo son 10 e 4. O diagrama de caixa é o da figura da marxe.

Actividades propostas

8. Nunha excursión de montaña participan 25 persoas coas seguintes idades:

8	10	10	11	12	36	37	37	38	40	42	43	43	44
	45	47	48	50	52	53	55	58	61	63	67		

a) Facer unha táboa de frecuencias clasificando as idades en 6 intervalos que comezan en 7.5 e terminan en 67.5. Calcular, a partir dela, os parámetros $\overline{x}$ e σ.

b) Calcular $\overline{x}$ e σ introducindo os 25 datos na calculadora, é dicir, sen agrupalos en intervalos.

c) Prescindindo dos 5 primeiros nenos, obtemos un colectivo de 20 persoas. Calcular de novo os seus parámetros $\overline{x}$ e σ, e comparar cos obtidos no grupo inicial.

d) Calcular os parámetros de posición Q_1, Q_3 e *Me*, da distribución orixinal, e construír o diagrama de caixa ou de bigotes correspondente.

4. INTRODUCIÓN AO CÁLCULO DE PROBABILIDADES

4.1. Conceptos básicos en probabilidade

Todos os días aparecen na nosa vida feitos que teñen que ver coa probabilidade. Se xogamos ao parchís, intuímos que *máis ou menos* unha de cada 6 veces sairá un 5, co que poderemos sacar unha ficha a percorrer o taboleiro. No "Monopoly" sacar un dobre tres veces seguidas mándanos ao cárcere ("sen pasar pola casa de saída"). Isto non ocorre moitas veces; porén, todos os que xogamos a isto fomos ao cárcere por ese motivo.

A **probabilidade** é unha medida do factible que é que teña lugar un determinado suceso.

Para estudar a probabilidade debemos introducir algúns nomes. Ímolo facer coa axuda dun caso concreto.

Exemplo

- *Imaxinemos que temos unha bolsa con 5 bólas: 2 brancas, 2 vermellas e unha negra. Facemos o seguinte **experimento aleatorio**: meter a man na bolsa e mirar a cor da bóla que saíu.*

Hai 3 *casos* posibles: "que a bóla sexa branca", "que a bóla sexa vermella" ou "que a bóla sexa negra". Abreviadamente representarémolos por *branca*, *vermella* ou *negra* (tamén poderemos representar as cores ou escribir B, R ou N; recorda que en matemáticas sempre se debe simplificar, mesmo a maneira de escribir).

O **espazo dunha mostra** é o conxunto de todos os casos posibles: {B, R, N}.

Os diferentes **sucesos** son os subconxuntos do espazo dunha mostra. No noso exemplo os sucesos posibles son {B}, {R}, {N}, {B, R}, {B, N}, {R, N}, {B, R, N}.

É seguro que no noso experimento a bóla que sacamos é "branca", "negra" ou "vermella". Por iso ao espazo dunha mostra chámaselle tamén **suceso seguro**.

Recorda estes nomes:

Un **experimento aleatorio** é unha acción (experimento) cuxo resultado depende do azar.

A cada un dos resultados posibles dun experimento aleatorio chamarémoslle **caso** ou **suceso individual**.

O conxunto de todos os casos posibles chámase **espazo dunha mostra** ou **suceso seguro**.

Un **suceso** é un subconxunto do espazo dunha mostra.

Exemplos.

1. Baralla española de 40 cartas. Experimento: sacamos unha carta ao azar e miramos o seu pau.

   Espazo dunha mostra {ouros, copas, espadas, bastos}.

2. Experimento: lanzamos simultaneamente 1 moeda de euro e unha de 2 euros ao aire.

   Espazo dunha mostra: {Cara-Cara, Cara-Cruz, Cruz-Cara, Cruz-Cruz}.

3. Experimento: lanzamos simultaneamente 2 moedas de 1 euro (indistinguibles).

   Espazo dunha mostra: {Saen 2 caras, Saen 2 cruces, Sae 1 cara e unha cruz}

Autor: Fernando Blasco
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

4. Experimento: lanzamos unha moeda de 1 euro e apuntamos o que saíu; volvémola lanzar e apuntamos o resultado.

   Espazo dunha mostra: {CC, CX, XC, XX}.

5. Experimento: lanzamos simultaneamente dous dados e sumamos os números que se ven nas caras superiores.

   Espazo dunha mostra: {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}.

6. Experimento: lanzamos un dado usual e sumamos os números que aparecen na cara superior e na cara inferior (a que non se ve, que está sobre a mesa).

   Espazo de sucesos: {7}

Nos exemplos anteriores, (2) e (4) son equivalentes: os posibles resultados do lanzamento de 2 moedas que se distinguen son os mesmos que os do lanzamento dunha mesma moeda dúas veces (por exemplo, equiparamos o resultado do lanzamento da moeda de 1 euro do exemplo 3 co primeiro lanzamento da moeda do exemplo 4 e o resultado do lanzamento da moeda de 2 euros co segundo lanzamento).

No experimento 6 sempre sae o mesmo resultado (por algunha razón os puntos nos dados usuais distribúense sempre de modo que as caras opostas suman 7). Tecnicamente este non é un experimento aleatorio, xa que o resultado non depende do azar.

Actividades propostas

9. Para cada un dos exemplos 1 a 5 anteriores indica 3 sucesos diferentes que non sexan sucesos individuais.

10. Nunha bolsa temos 10 bólas vermellas numeradas do 1 ao 10. Fanse os dous experimentos seguintes:

EXPERIMENTO A: Sácase unha bóla da bolsa e mírase a súa cor.

EXPERIMENTO B: Sácase unha bóla da bolsa e mírase o seu número.

Cal destes experimentos non é un experimento aleatorio? Por que?

Para o experimento que si é un experimento aleatorio indica o seu espazo dunha mostra.

11. Unha baralla francesa ten 52 cartas, distribuídas en 13 cartas de picas, 13 de corazóns, 13 de trevos e 13 de diamantes. As picas e os trevos son cartas negras mentres que os corazóns e os diamantes son cartas vermellas. Mestúrase a baralla, córtase e faise o seguinte experimento: coller as dúas cartas que quedaron arriba de todo e observar de que cor son.

Describe o espazo dunha mostra.

4.2. Cálculo de probabilidades

Xa indicamos que a probabilidade é unha medida que nos indica o grao de confianza de que ocorra un determinado suceso.

A **probabilidade** exprésase mediante un número comprendido entre 0 e 1.

Se ese número está próximo a 0 diremos que é un suceso improbable (ollo, improbable no quere dicir que sexa imposible), mentres que se está próximo a 1 diremos que ese suceso será moito máis probable.

Exemplo

- *Nunha bolsa que contén 20 bólas brancas introducimos unha bóla negra (indistinguible ao tacto). Mesturamos ben as bólas da bolsa, e realizamos o experimento consistente en meter a man na bolsa e sacar unha bóla.*

Sen que estudaramos nada formalmente sobre probabilidade, que pensas que é máis probable? que a bóla sacada é branca ou que é negra? Estaremos de acordo en que é máis probable sacar unha bóla branca.

Agora xa si que podemos preguntarnos: En que medida é máis probable sacar unha bóla branca?

Non é difícil de calcular. Os datos que temos son os seguintes:

- A bolsa ten 21 bólas
- 1 bóla é negra
- 20 bólas son brancas

A probabilidade de sacar a bóla negra é 1 de entre 21. A probabilidade de sacar unha bóla branca é de 20 entre 21.

O que acabamos de utilizar é coñecido como **Lei de *Laplace*.** Se todos os casos dun espazo dunha mostra son **equiprobables** (isto é, teñen a mesma probabilidade de ocorrer), e S é un suceso dese experimento aleatorio tense que

$$P(S) = \frac{\text{número de casos favorables ao suceso } S}{\text{número de casos posibles}}$$

Exemplo.

- *Mesturamos unha baralla española de 40 cartas (os paus son ouros, copas, espadas e bastos e en cada pau hai cartas numeradas do 1 ao 7 ademais dunha sota, un cabalo e un rei).*

Realízase o experimento consistente en *cortar a baralla e quedarmos coa carta superior*.

Consideraremos os seguintes sucesos:

1) Obter unha figura.
2) Obter unha carta cun número impar.
3) Obter unha carta de espadas.
4) Obter unha carta de espadas ou unha figura.
5) Obter a sota de ouros.

En principio as cartas non van estar marcadas, co que a probabilidade de que saia cada unha delas é a mesma. Isto é, estamos perante un experimento aleatorio con todos os casos equiprobables.

1) Na baralla hai 12 figuras (3 por cada pau). Así

   Casos favorables: 12

   Casos posibles: 40

   Probabilidade: 12/40 = 3/10.

2) Por cada pau hai 4 cartas con números impares: 1, 3, 5 e 7.

   Casos favorables: 16

   Casos posibles: 40

   Probabilidade: 16/40 = 2/5.

3) Hai 10 cartas de espadas na baralla

   Casos favorables: 10

   Casos posibles: 40

   Probabilidade: 10/40 = 1/4.

4) Hai 10 cartas de espadas e ademais outras 9 figuras que non son de espadas (claro, as 3 figuras de espadas xa as contamos).

   Casos favorables: 19

   Casos posibles: 40

   Probabilidade: 19/40.

5) Só hai unha sota de ouros

   Casos favorables: 1

   Casos posibles: 40

   Probabilidade: 1/40.

O que é capaz de calcular probabilidades rapidamente ten vantaxe nalgúns xogos nos que se mestura azar con estratexia. Por exemplo, xogos de cartas ou de dominó. Se sabemos que cartas ou fichas foron xogadas podemos estimar a probabilidade de que outro xogador teña unha determinada xogada. Obviamente neses casos non *cuantificamos* (non facemos os cálculos exactos) pero si que *estimamos* se teremos a probabilidade ao noso favor ou na nosa contra.

Para aprender máis…

Jerónimo Cardano (1501-1576) foi un personaxe inquedo e prolífico. Ademais de dedicarse ás matemáticas era médico, pero tamén era un xogador. De feito, el foi quen escribiu o primeiro traballo que se coñece sobre xogos de azar. Un século despois o *Cabaleiro de Meré*, un coñecido xogador, propúxolle a *Blas Pascal* diversos problemas que lle aparecían nas súas partidas. Un dos problemas que lle propuxo é o do reparto das ganancias cando unha partida se ten que interromper. Este problema xa fora tratado con anterioridade por *Luca Pacioli* (o matemático que inventou a táboa de dobre entrada para axudar aos *Medici* a levar a contabilidade da súa Banca).

O problema enunciado e resolto por *Pacioli* é este:

- *Dous equipos xogan á pelota de modo que gaña o xogo o primeiro equipo que gaña 6 partidos. A aposta é de 22 ducados, que levará o gañador. Por algún motivo hai que interromper o xogo cando un equipo gañou 5 partidos e o outro 3. Quérese saber como repartir os 22 ducados da aposta, dun modo xusto.*

Pénsao!

Malia ter pasado á historia das Matemáticas, a solución que deu *Pacioli* a este problema hoxe non se consideraría correcta por non ter en conta a probabilidade. Que propós ti? Este é un problema curioso porque non temos todos os datos nin coñecemos as probabilidades que interveñen na súa resolución, pero é un bonito exemplo para pensar en equipo e discutir sobre o tema. Dicir que é e que non é xusto é moi complicado.

Actividades resoltas

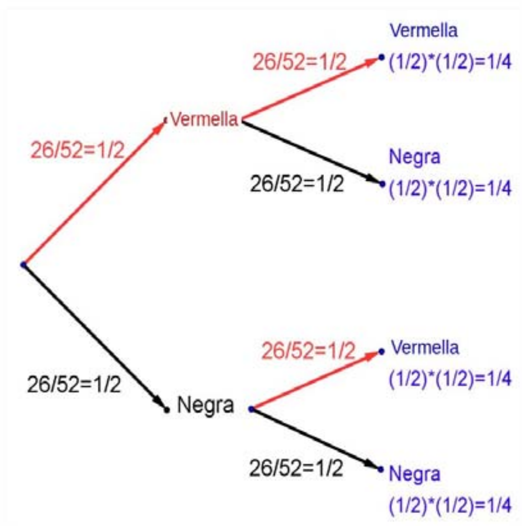
- *Unha bolsa de bólas contén 26 negras e 26 vermellas. Mestúrase o contido da bolsa, métese a man e sácase unha bóla, mírase a cor e devólvese á bolsa. A continuación, sácase outra bóla e mírase a cor. Cal é a probabilidade de que saíran unha bóla vermella e unha bóla negra?*

Antes de seguir lendo, pénsao. Se te equivocas non pasa nada: o sentido de probabilidade non o temos demasiado desenvolvido, pero este é o momento de facelo.

Este problema propuxémosllo moitas veces a outros estudantes. Algúns din que a probabilidade é 1/3 porque hai 3 casos posibles: Vermella-Vermella, Negra-Negra e Vermella-Negra. Esa resposta non é correcta.

En realidade, o suceso *sacar unha bóla de cada cor* consta de 2 casos Vermella-Negra e Negra-Vermella. Dependendo de como escribiramos o espazo dunha mostra ou de como propuxeramos o problema ese detalle podería verse con maior ou menor claridade.

Así, a probabilidade de sacar unha bóla de cada cor é, en realidade 1/2.



Se non o cres podes facer un experimento: será difícil que teñas 26 bólas negras e 26 bólas vermellas, pero si que é fácil que teñas unha baralla francesa. Mestúraa, corta e mira a cor da carta que quedou arriba no montón. Apúntaa. Volve deixar as cartas no mazo, volve mesturar, corta de novo e mira a cor da carta que quedou arriba agora. Apunta as cores. Repite este experimento moitas veces: 20, 50 ou 100.

Se tes en conta os resultados verás que, aproximadamente, a metade das veces as dúas cartas son da mesma cor e a outra metade as cartas son de cores diferentes. Con iso, puidemos "comprobar" que a probabilidade dese suceso era 1/2.

Outra forma que che pode axudar a razoar sobre este problema, e outros moitos de probabilidade, é confeccionar un **diagrama en árbore**. A primeira bóla que sacamos ten unha probabilidade de ser vermella igual a 26/52 = 1/2. Ese número escribímolo na póla da árbore. Se devolvemos á bolsa a bóla e volvemos sacar outra bóla da bolsa, a probabilidade de que sexa vermella volve ser 26/52 = 1/2. Completamos con idéntico razoamento o resto das pólas.

A probabilidade de que as dúas bólas que sacaramos sexan vermellas é o produto das súas pólas: (1/2)·(1/2) = 1/4. Igual probabilidade obtemos para os sucesos Negra-Negra, Negra-Vermella e Vermella-Negra. A probabilidade de Vermella-Negra é polo tanto 1/4, igual á de Negra-Vermella. Como son sucesos elementais a probabilidade de que as dúas bólas sexan de distinta cor é a suma: 1/4 + 1/4 = 1/2.

4.3. Probabilidade e frecuencia relativa

Ao principio do capítulo, cando introducimos os principais conceptos estatísticos, falabamos da frecuencia. A esa frecuencia chámaselle **frecuencia absoluta** para distinguila doutro concepto, que é moito máis próximo á probabilidade.

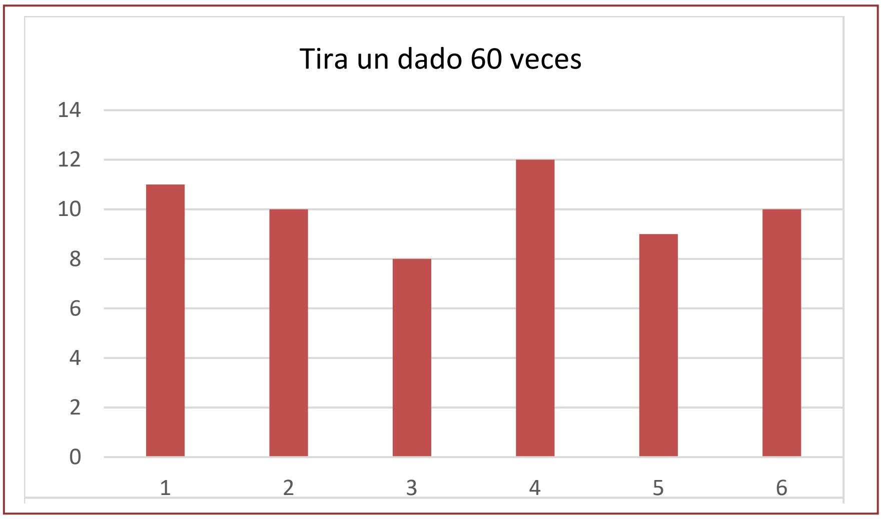
Chamaremos **frecuencia relativa** dun resultado dun experimento aleatorio á súa frecuencia absoluta dividida entre o número de repeticións do experimento.

Exemplo

- *Tira un dado 60 veces, copia esta táboa no teu caderno e apunta o que sae:*

Se debuxas un diagrama de barras cos resultados do experimento obterás algo parecido a isto:

Autor: Fernando Blasco
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

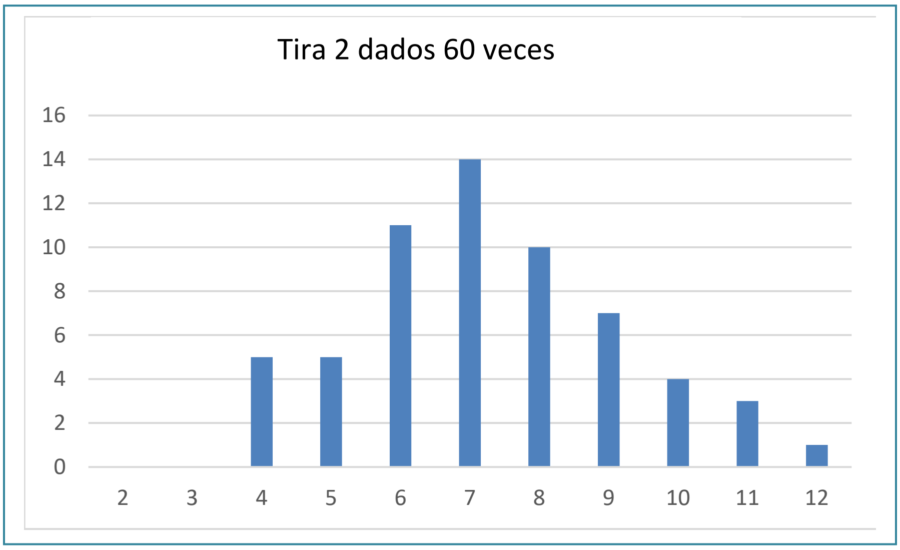


A frecuencia relativa de cada un dos casos é bastante parecida á probabilidade dese caso (que é 1/6).

Exemplo

- *Fai agora outro experimento: tira 2 dados 60 veces e apunta asuma dos valores dos dous dados nesta táboa.*

Debuxa agora un diagrama de barras. O que obterás será algo parecido a isto:



Se a probabilidade "se ten que parecer" ás frecuencias relativas, neste caso vemos que o suceso *que a suma dea 7* é máis probable que calquera dos demais. E moito máis probable que a *suma dea 2* ou *que a suma dea 12*.

A **lei dos grandes números** dinos que cando se repite moitas veces un experimento aleatorio a frecuencia relativa de cada suceso S aproxímase á súa probabilidade. Canto máis grande sexa o número de repeticións, mellor vai sendo a aproximación.

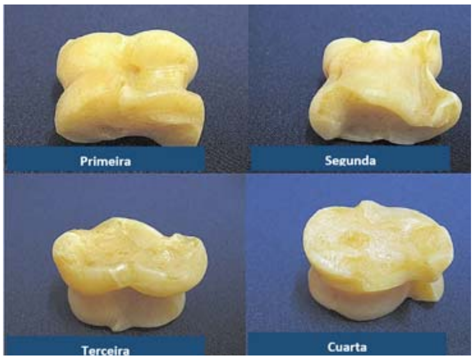
Neste caso o útil é utilizar as frecuencias relativas para estimar probabilidades cando estas non son coñecidas.

Actividades propostas

12. Nalgúns lugares de España séguese xogando á chuca. A chuca é un óso de año que non é regular. Pode caer en catro posicións distintas. Podemos pensar nela como se fose un dado "raro".

Considera o experimento "lanzar a chuca ao aire e ver o que marca a súa cara superior: primeira, segunda, terceira ou cuarta".

Aproxima a probabilidade de cada un dos casos deste experimento aleatorio.



(Imaxe: WikimediaCommons)

13. A túa calculadora probablemente terá unha función que serve para xerar números aleatorios. Normalmente dea un número comprendido entre 0 e 1.

Realiza o experimento aleatorio "xera un número aleatorio e apunta o seu segundo decimal". Fai 40 repeticións deste experimento. Debuxa un histograma de frecuencias.

14. A probabilidade non é un concepto intuitivo. Para iso imos facer unha proba. Consideraremos o experimento aleatorio *lanzar unha moeda*. Copia a táboa no teu caderno

- Escribe na 1ª fila desta táboa o que ti cres que sairía ao repetir o experimento 30 veces. Pénsao e enche a táboa. Como ti queiras (invéntao pero "con sentido").
- Na 2ª fila da táboa escribe o resultado real de 30 lanzamentos da moeda.

Que observas en ambos os casos? Algunha pauta? Presta atención a estas cuestións para cada unha das filas da táboa.

Hai máis ou menos 15 caras e 15 cruces?

Aparecen grupos seguidos de caras ou de cruces?

Cal é o maior número de caras que saíron seguidas? E o de cruces?

Normalmente cando "inventas" os resultados soes poñer a metade de caras e a metade de cruces. Nun experimento aleatorio estes números están preto da metade pero non soen ser a metade exacta.

Cando o inventas, en xeral pos poucos grupos seguidos de caras ou cruces.

O cerebro engánanos e en temas de probabilidade temos que educalo moito máis. Por iso este tema é moi importante, aínda que sexa o que moitas veces queda sen dar. Axúdanos a que, como cidadáns, non nos enganen. Nin con loterías, nin con cartas, nin con estatísticas electorais.

CURIOSIDADES. REVISTA

Un problema resolto: as tres ruletas

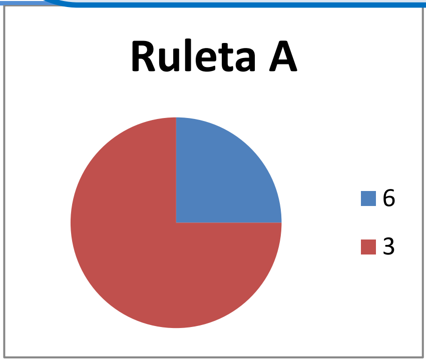
Dispoñemos de tres ruletas A, B e C cada unha delas dividida en 32 sectores iguais con distintos puntos:

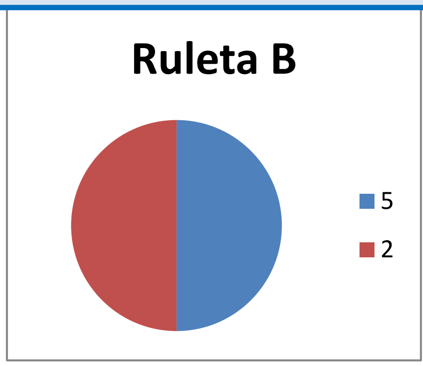
A: 8 sectores coa cifra 6 e 24 sectores coa cifra 3.

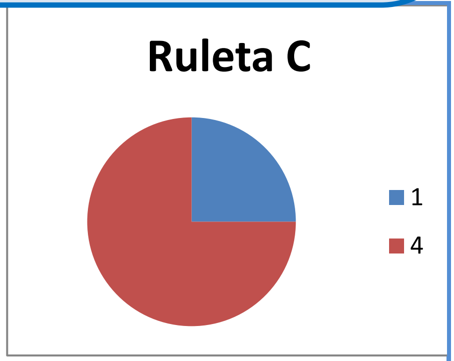
B: 16 sectores coa cifra 5 e 16 sectores coa cifra 2.

C: 8 sectores coa cifra 1 e 24 sectores coa cifra 4.

Dous xogadores seleccionan unha ruleta cada un. Gaña quen obteña maior puntuación coa ruleta. **Quen ten vantaxe ao elixir ruleta, a persoa que elixe primeiro ou a que elixe en segundo lugar?**







Solución: "As tres ruletas"

Fai un **diagrama de árbore** e comproba que:

Xogando coa Ruleta A e a Ruleta B.

$$P(\text{gañar A}) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{8} \qquad P(\text{gañar B}) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

Gaña o que xoga coa Ruleta A.

Xogando coa Ruleta A e a Ruleta C.

$$P(\text{gañar A}) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{7}{16} \qquad P(\text{gañar C}) = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

Gaña o que xoga coa Ruleta C.

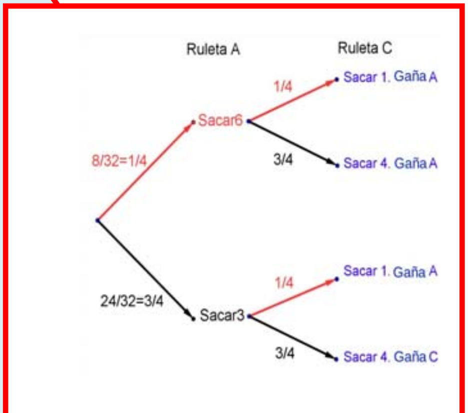
Xogando coa Ruleta B e a Ruleta C

$$P(\text{gañar B}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{5}{8} \qquad P(\text{gañar C}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

Gaña o que xoga coa Ruleta B.

Gaña o xogador que elixe en segundo lugar:

Se o primeiro elixe a Ruleta A → o segundo elixe a Ruleta C e gaña.
Se o primeiro elixe a Ruleta B → o segundo elixe a Ruleta A e gaña
Se o primeiro elixe a Ruleta C → o segundo elixe a Ruleta B e gaña



Autor: Fernando Blasco
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Breve historia da Probabilidade

Jerónimo Cardano (1501-1576) foi un personaxe inquedo e prolífico. Ademais de dedicarse ás matemáticas era médico, pero tamén era un xogador. De feito el foi quen escribiu o primeiro traballo que se coñece sobre xogos de azar.

Un século despois o *Cabaleiro de Mérè* propúxolle a *Blaise Pascal* algúns problemas sobre **xogos** como o seguinte:

- *Un xogador intenta obter un 1 en 8 lanzamentos sucesivos dun dado, pero o xogo interrómpese despois de 3 lanzamentos erróneos. En que proporción debe ser compensado o xogador?*

Pascal escribiu a *Fermat* sobre este problema e a correspondencia intercambiada pódese considerar como o inicio da Teoría de Probabilidades, pero non publicaron por escrito as súas conclusións. Este problema xa fora tratado con anterioridade por *Luca Pacioli* (o matemático que inventou a táboa de dobre entrada para axudar aos Medici a levar a contabilidade da súa Banca).

Huygens en 1657 publicou un breve escrito "*Os xogos de azar*" onde narra esta correspondencia.

Pero o primeiro libro sobre Probabilidade é de 1713 de *Jacques Bernoulli*, *A arte da conxectura*.

Nel enúnciase a **lei dos grandes números** que vén dicir que *A probabilidade dun suceso achégase ás frecuencias relativas cando o número de experimentos é grande*. Coñecer isto levou a grandes xogadores a gañar no Casino de Montecarlo, como se narra máis abaixo.

A Estatística e a Probabilidade usáronse en problemas sociais como defender a **vacinación da varíola**, a educación pública… na Ilustración Francesa.

Ata aquí, xa sabes resolver todos os problemas históricos. Pero hai outros máis difíciles, que requiren máis coñecementos de Matemáticas, como o da **agulla de *Buffon***, que utilizou para calcular cifras de π:

A ruleta

William Jaggers chegou a Montecarlo cuns poucos francos no peto e, durante un mes anotou os números que saían en cada ruleta, e en catro días gañou dous millóns catrocentos mil francos. *Jaggers* conseguiu quebrar a banca en *Montecarlo* analizando as frecuencias relativas de cada número da ruleta e observando que se desgastara algo do mecanismo dunha delas, co que todos os valores non tiñan igual probabilidade. Apostou aos números máis probables e gañou.

Luca Pacioli

Luca Pacioli (1445 – 1517), de nome completo **Frei Luca Bartolomeo de Pacioli** ou **Luca di Borgo San Sepolcro**, cuxo apelido tamén aparece escrito como ***Paccioli*** e ***Paciolo*** foi un frade franciscano e matemático italiano, precursor do cálculo de probabilidades. Xa falamos del nestas revistas polos seus traballos sobre a proporción áurea ou divina proporción como el a chamou.

Escribiu un libro con 36 capítulos sobre **contabilidade** onde utiliza a partida dobre ou táboa de dobre entrada para axudar aos Medici a levar a contabilidade da súa Banca, define as súas regras, tales como non hai debedor sen acredor, ou que a suma do que se debe ten que ser igual ao que se paga. Non foi o seu inventor, pero si o seu divulgador.

Ducado

O problema enunciado e resolto por *Pacioli* é este:

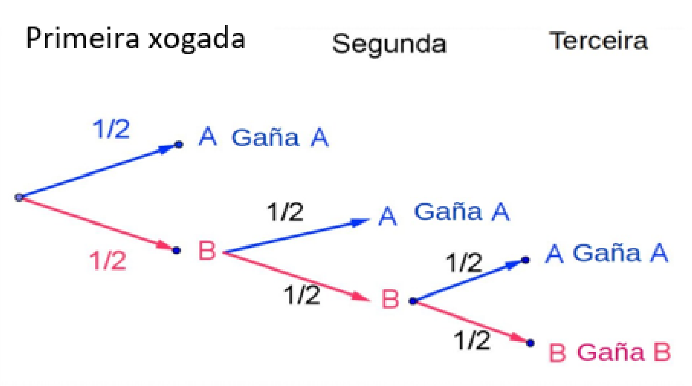
- *Dous equipos xogan á pelota de modo que gaña o xogo o primeiro equipo que gaña 6 partidos. A aposta é de 22 ducados, que levará o gañador. Por algún motivo hai que interromper o xogo cando un equipo gañou 5 partidos e o outro 3. Quérese saber como repartir os 22 ducados da aposta, dun modo xusto.*

Luca sabía de proporcións e a solución que deu hoxe non se considera válida. Non sabía probabilidades! Pero ti, si.

Partimos da hipótese de que cada un dos xogadores ten a mesma probabilidade de gañar: 1/2. Chamamos A ao xogador que xa gañou 5 partidas e B ao que leva gañadas 3.

Se fixeran unha nova partida podería gañar A con probabilidade 1/2 ou B con igual probabilidade. Se gaña A xa leva a bolsa. Se gaña B entón B levaría 4 xogadas gañadas e A 5. Continúa o xogo. Pode gañar A ou B. Observa o diagrama de árbore.

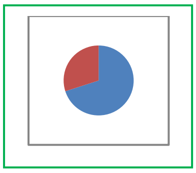
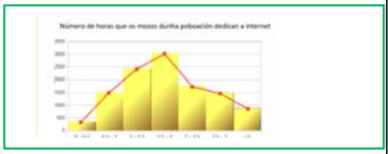
A probabilidade de que gañe B é (1/2)·(1/2)·(1/2) = 1/8, e a de que gañe A é 7/8.



Como repartirías os 22 ducados?

Autor: Fernando Blasco
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

RESUMO

Concepto	Definición	*Exemplos*
Poboación	Colectivo sobre o que se fai o estudo	Estudantes de todo Madrid
Mostra	Subconxunto da poboación que permite obter características da poboación completa.	Estudantes de 3º da ESO seleccionados
Individuo	Cada un dos elementos da poboación ou mostra	Xoán Pérez
Variable estatística	Cuantitativa discreta Cuantitativa continua Cualitativa	Número de pé que calza Estatura Deporte que practica
Gráficos estatísticos	Diagrama de barras Histograma de frecuencias Polígono de frecuencias Diagrama de sectores 	
Media	$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ = $(x_1 + x_2 + ... + x_n)/n$	Cos datos: 8, 2, 5, 10 e 10 *Media* = 35/5 = 7
Moda	É o valor máis frecuente	*Mo* = 10
Mediana	Deixa por debaixo a metade	4 < 6 < **8** < 10 = 10. *Me* = 8.
Rango ou percorrido	É a diferenza entre o dato maior e o dato menor.	10 – 2 = 8
Desviación media	É a media das distancias dos datos á media dos datos dos que dispoñamos.	(|8–7|+|2–7|+|5–7|+|10–7|+|10–7|)/5 = (1 + 5 + 2 + 3 + 3)/5 = 14/5 = DM
Varianza	É a media dos cadrados das distancias dos datos á media: $\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - m^2$	V = (1 + 25 + 4 + 9 + 9)/5 = 47/5 = 9.4
Desviación típica	É raíz cadrada da varianza= $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - m^2}$	$\sigma = \sqrt{47/5}$ = 3.06
Probabilidade	Valor entre 0 e 1 que nos dá unha medida do factible que sexa que se verifique un determinado suceso.	P(3) = 1/6 ao tirar un dado
Espazo dunha mostra	O conxunto de todos os casos posibles	{1, 2, 3, 4, 5, 6}
Suceso	Subconxunto do espazo dunha mostra	Sacar par: {2, 4, 6}
Lei de Laplace	$P(S) = \frac{\text{número de casos favorables ao suceso } S}{\text{número de casos posibles}}$	*P*(par) = 3/6 = 1/2.

Autor: Fernando Blasco
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Estatística

1. Recolléronse os datos sobre o número de fillos que teñen 20 matrimonios. Como é a variable utilizada? Escribe unha táboa de frecuencias dos datos recollidos e representa os datos nun diagrama de sectores:

3, 1, 1, 2, 0, 2, 3, 1, 1, 1, 1, 0, 3, 2, 1, 2, 1, 2, 2, 3.

2. Cos datos do problema anterior calcula a media, a mediana, a moda e os cuartís.

3. Cos datos do problema anterior calcula o rango, a desviación media, a varianza, a desviación típica e o percorrido intercuartílico.

4. Representa eses datos nun diagrama de caixas.

5. A seguinte táboa expresa as estaturas, en metros, de 1000 soldados:

Talle	1.50 – 1.56	1.56 – 1.62	1.62 – 1.68	1.68 - 1.74	1.74 - 1.80	1.80-1.92
Nº de soldados	10	140	210	340	210	90

a) Representa os datos nun histograma.

b) Calcula a media e a desviación típica.

c) Determina o intervalo onde se encontra a mediana.

6. Pregúntase a un grupo de persoas polo número de televisores que hai no seu fogar e os resultados son:

Número de televisores	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Número de fogares	2	27	15	4	2	1

Que tipo de variables é? Representa os datos na representación que che pareza máis adecuada.

Calcula a media e a desviación típica.

7. Cos datos do problema anterior calcula a mediana e o percorrido intercuartílico.

8. Nun centro escolar recolleuse información sobre o número de ordenadores nas casas de 100 familias e obtivéronse os seguintes resultados:

Número ordenadores	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Número de familias:	24	60	14	1	1

Representa os datos nun diagrama de barras e calcula a media, a mediana e a moda.

9. Cos datos do problema anterior calcula o rango, a desviación media, a varianza e a desviación típica. Fai un diagrama de caixas.

10. Pregúntase a un grupo de persoas polo número de veces que visitaron o dentista no último ano. As respostas obtidas recóllense na seguinte táboa :

Número de visitas:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Número de persoas:	13	18	7	5	7

Representa os datos nun diagrama de sectores e calcula a media, a mediana e a moda.

11. Preguntase a un grupo de persoas polo número de veces que visitaron o dentista no último ano. As respostas obtidas recóllense na seguinte táboa :

Número de visitas:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Número de persoas:	13	18	7	5	7

Calcula o rango, a desviación media, a varianza e a desviación típica.

12. Nas eleccións de 2014 ao Parlamento Europeo obtivéronse os seguintes escanos por grupo parlamentario (DM: demócrata – cristiáns; S: socialistas; L: liberais; V: verdes; C: conservadores; I: esquerda unitaria; LD: liberdade e democracia; NI: Non inscritos; Outros).

Partidos	**DM**	**S**	**L**	**V**	**C**	**I**	**LD**	**NI**	**Outros**	**Total**
Escanos	213	190	64	52	46	42	38	41	65	751

Que representación dos datos che parece máis adecuada? Podes calcular a media ou o rango? Que tipo de variables é a da táboa ?

13. Nas eleccións de 2014 ao Parlamento Europeo obtivéronse os seguintes escanos por algún dos Estados membro:

Estado	**Alemaña**	**España**	**Francia**	**Italia**	**Poloña**	**Reino Unido**	**Portugal**	**Grecia**	**Outros**	**Total**
Escanos	96	54	74	73	51	73	21	21		751

Que representación dos datos che parece máis adecuada? Podes calcular a media ou o rango? Que tipo de variables é a da táboa? Determina o número de escanos dos outros países membros da Unión Europea.

14. Nas eleccións de 2004, 2009, 2014 ao Parlamento Europeo obtivéronse as seguintes porcentaxes de voto por algúns dos Estados membro:

Estado	**Alemaña**	**España**	**Francia**	**Italia**	**Reino Unido**	**Portugal**	**Grecia**	**Bélxica**	**% total**
2004	43	45.14	42.76	71.72	38.52	38.6	63.22	90.81	45.47
2009	43.27	44.87	40.63	65.05	34.7	36.77	52.61	90.39	43
2014	47.6	45.9	43.5	60	36	34.5	58.2	90	43.09

Que representación dos datos che parece máis adecuada? Podes calcular a media ou o rango? Que tipo de variables é a da táboa? Ordena os países de maior a menor porcentaxe de votantes nas eleccións de 2014.

15. Cos datos do problema anterior sobre as eleccións de 2004, 2009 e 2014 ao Parlamento Europeo obtivéronse as seguintes porcentaxes de votos por algúns dos Estados membro:

Estado	**Alemaña**	**España**	**Francia**	**Italia**	**Reino Unido**	**Portugal**	**Grecia**	**Bélxica**	**% total**
2004	43	45.14	42.76	71.72	38.52	38.6	63.22	90.81	45.47
2009	43.27	44.87	40.63	65.05	34.7	36.77	52.61	90.39	43
2014	47.6	45.9	43.5	60	36	34.5	58.2	90	43.09

Representa nun polígono de frecuencias as porcentaxes de participación do total dos Estados membro.

16. Cos datos do problema anterior sobre as eleccións de 2004, 2009 e 2014 ao Parlamento Europeo obtivéronse as seguintes porcentaxes de votos por algúns dos Estados membro:

Estado	Alemaña	España	Francia	Italia	Reino Unido	Portugal	Grecia	Bélxica	% total
2004	43	45.14	42.76	71.72	38.52	38.6	63.22	90.81	45.47
2009	43.27	44.87	40.63	65.05	34.7	36.77	52.61	90.39	43
2014	47.6	45.9	43.5	60	36	34.5	58.2	90	43.09

Separa os Estados membro en dous grupos, os que tiveron unha porcentaxe superior á porcentaxe media e o que a tiveron menor en 2004. Fai o mesmo para 2014. Son os mesmos? Analiza o resultado.

17. Cos datos do problema anterior sobre as eleccións de 2004, 2009 e 2014 ao Parlamento Europeo obtivéronse as seguintes porcentaxes de votos por algúns dos Estados membro:

Estado	Alemaña	España	Francia	Italia	Reino Unido	Portugal	Grecia	Bélxica	% total
2004	43	45.14	42.76	71.72	38.52	38.6	63.22	90.81	45.47
2009	43.27	44.87	40.63	65.05	34.7	36.77	52.61	90.39	43
2014	47.6	45.9	43.5	60	36	34.5	58.2	90	43.09

Calcula a porcentaxe de participación media para Alemaña nesas tres convocatorias e a desviación típica. O mesmo para España, para Bélxica e para Portugal.

18. Nas eleccións de 2014 ao Parlamento Europeo os resultados de España foron:

Censo	Total de votantes	Abstención	Votos nulos	Votos en branco
35 379 097	15 920 815	19 458 282	290 189	357 339

Representa nun diagrama de sectores estes datos. Fai unha táboa de porcentaxes: o censo é o 100 %. Determina as outras porcentaxes. Consideras que gañou a abstención?

19. Nas eleccións de 2014 ao Parlamento Europeo os resultados de España foron:

PP	PSOE	Esquerda plural	Podemos	UPyD	Outros	Total de votantes
4 074 363	8 001 754	1 562 567	1 245 948	1 015 994		15 920 815

Determina o número de votos dos outros partidos. Representa nun diagrama de barras estes datos. Fai unha táboa de porcentaxes para cada partido. Tes que distribuír 54 escanos, como os distribuirías por partidos?

Autor: Fernando Blasco
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Probabilidade

20. Considérase o experimento aleatorio de tirar un dado dúas veces. Calcula as probabilidades seguintes:

a) Sacar algún 1.
b) A suma dos díxitos é 8.
c) Non sacar ningún 2.
d) Sacar algún 1 ou ben non sacar ningún 2.

21. Considérase o experimento aleatorio sacar dúas cartas da baralla española. Calcula a probabilidade de:

a) Sacar algún rei.
b) Obter polo menos un basto.
c) Non obter ningún basto.
d) Non obter o rei de bastos.
e) Sacar algunha figura: sota, cabalo, rei ou as.
f) Non sacar ningunha figura.

22. Considérase o experimento aleatorio de tirar unha moeda tres veces. Calcula as probabilidades seguintes:

a) Sacar cara na primeira tirada.

b) Sacar cara na segunda tirada.

c) Sacar cara na terceira tirada.

d) Sacar algunha cara.

e) Non sacar ningunha cara.

f) Sacar tres caras.

23. Cunha baralla española faise o experimento de sacar tres cartas, con substitución, cal é a probabilidade de sacar tres reis? E se o experimento se fai sen substitución, cal é agora a probabilidade de ter 3 reis?

24. Nunha urna hai 6 bólas brancas e 14 bólas negras. Sácanse dúas bólas con substitución. Determina a probabilidade de que:

a) As dúas sexan negras.

b) Haxa polo menos unha negra.

c) Ningunha sexa negra.

25. Nunha urna hai 6 bólas brancas e 14 bólas negras. Sácanse dúas bólas sen substitución. Determina a probabilidade de que:

a) As dúas sexan negras.

b) Haxa polo menos unha negra.

c) Ningunha sexa negra.

d) Compara os resultados cos da actividade anterior.

26. Ao lanzar catro moedas ao aire

a) Cal é a probabilidade de que as catro sexan caras?

b) Cal é a probabilidade de obter como moito tres caras?

c) Cal é a probabilidade de ter exactamente 3 caras?

27. Dous tiradores ao prato teñen unhas marcas xa coñecidas. O primeiro acerta cunha probabilidade de 0.7 e o segundo de 0.5. Lánzase un prato e ambos os dous disparan. Expresa mediante un diagrama de árbore as distintas posibilidades: a) Que probabilidade hai de que un dos tiradores dea no prato? b) Calcula a probabilidade de que ningún acerte. c) Calcula a probabilidade de que os dous acerten.

28. Lánzase unha moeda ata que apareza cara dúas veces seguidas. a) Calcula a probabilidade de que a experiencia termine no segundo lanzamento. b) Calcula a probabilidade de que termine no terceiro lanzamento.

29. No lanzamento de naves espaciais instaláronse tres dispositivos de seguridade A, B e C. Se falla A ponse automaticamente en marcha o dispositivo B e, se falla este, ponse en marcha C. Sábese que a probabilidade de que falle A é 0.1, a probabilidade de que B funcione é 0.98 e a probabilidade de que falle C é 0.05. Calcula a probabilidade de que todo funcione ben.

30. Faise un estudo sobre os incendios forestais dunha zona e compróbase que o 40 % son intencionados, o 50 % débense a neglixencias e o 10 % a causas naturais. Producíronse tres incendios, a) cal é a probabilidade de que polo menos un fose intencionado? b) Probabilidade de que os tres incendios se deban a causas naturais. c) Probabilidade de que ningún incendio sexa por neglixencias.

31. Lánzase dúas veces un dado equilibrado con seis caras. Calcular a probabilidade de que asuma dos valores que aparecen na cara superior sexa múltiplo de tres.

32. Sábese que se eliminaron varias cartas dunha baralla española que ten corenta. A probabilidade de extraer un as entre as que quedan é de 0.12, a probabilidade de que saia unha copa é de 0.08 e a probabilidade de que non sexa nin as nin copa é de 0.84.

Calcular a probabilidade de que a carta sexa o as de copas. Pódese afirmar que entre as cartas que non se eliminaron está o as de copas?

33. Unha persoa despistada ten oito calcetíns negros, seis azuis e catro vermellos, todos eles soltos. Un día con moita présa, elixe dous calcetíns ao azar. Calcula a probabilidade de:

a) que os calcetíns sexan negros.
b) que os dous calcetíns sexan da mesma cor.
c) que polo menos un deles sexa vermello.
d) que un sexa negro e o outro non.

34. Tres persoas viaxan nun coche. Suponse que a probabilidade de nacer en calquera día do ano é a mesma e sabemos que ningún naceu nun ano bisesto,

a) calcular a probabilidade de que soamente unha delas celebre o seu aniversario ese día.
b) calcular a probabilidade de que polo menos dúas cumpran anos ese día.

AUTOAVALIACIÓN

1. Faise un estudo sobre a cor que prefiren os habitantes dun país para un coche. A variable utilizada é:

a) cuantitativa b) cualitativa c) cuantitativa discreta d) cuantitativa continua

2. Nun histograma de frecuencias relativas a área de cada rectángulo é:

a) proporcional á área b) igual á frecuencia absoluta

c) proporcional á frecuencia relativa d) proporcional á frecuencia acumulada

3. Ana obtivo en Matemáticas as seguintes notas: 7, 8, 5, 10, 8, 10, 9 e 7. A súa nota media é de:

a) 7.6 b) 8.2 c) 8 d) 9

4. Nas notas anteriores de Ana a mediana é:

a) 9 b) 8 c) 7.5 d) 8.5

5. Nas notas anteriores de Ana a moda é:

a) 10 b) 8 c) 7 d)7, 8 e 10

6. O espazo dunha mostra de sucesos elementais equiprobables do experimento "tirar dúas moedas e contar o número de caras" é:

a) {2C, 1C, 0C} b) {CC, CX, XC, XX} c) {XX, XC, CC} d) {CC, CX, XC, CC}

7. Tiramos dous dados e contamos os puntos das caras superiores. A probabilidade de que a suma sexa 7 é:

a) 1/6 b) 7/36 c) 5/36 d) 3/36

8. Ao sacar unha carta dunha baralla española (de 40 cartas), a probabilidade de que sexa un ouro ou ben un rei é:

a) 14/40 b) 13/40 c) 12/40 d) 15/40

9. Nunha bolsa hai 7 bólas vermellas, 2 negras e 1 bóla branca. Sácanse 2 bólas. A probabilidade de que as dúas sexan vermellas é:

a) 49/100 b) 42/100 c) 49/90 d) 7/15

10. Tiramos tres moedas ao aire. A probabilidade de que as tres ao caer sexan cara é:

a) 1/5 b) 1/7 c) 1/8 d) 1/6

Matemáticas orientadas ás ensinanzas aplicadas

TERCEIRO B de ESO

ÍNDICE

NÚMEROS.ÁLXEBRA

1. Números racionais 3
2. Potencias e raíces 40
3. Sucesións. Progresións aritméticas e xeométricas 63
4. Expresións alxébricas. Polinomios 91
5. Ecuacións de segundo grao e sistemas lineais 122
6. Proporcionalidade 148

XEOMETRÍA

7. Revisión de xeometría no plano 168
8. Movementos no plano e no espazo 195
9. Revisión de xeometría no espazo. Globo terráqueo 241

FUNCIÓNS E ESTATÍSTICA

10. Funcións e gráficas 285
11. Estatística. Azar e probabilidade 329

ÍNDICE 367