www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Milagros Latasa Asso

Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti

Ilustraciones: Adela Salvador y Milagros Latasa

Índice

Resumen

En los mosaicos de la Alhambra como el de la fotografía puedes observar distintas figuras geométricas como rectas paralelas y rectas secantes, estrellas de 5 y de 10 puntas, polígonos…

En este capítulo vas a revisar tus conocimientos de geometría y a aprender muchas cosas nuevas sobre las figuras geométricas planas lo que te va a permitir ver con unos ojos nuevos el mundo que te rodea observando rectas paralelas en los edificios, ángulos interiores o exteriores, o como en el mosaico anterior, los motivos geométricos que lo forman. Estas formas geométricas pueden permitirte diseñar interesantes decoraciones.

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Milagros Latasa

1. ELEMENTOS DEL PLANO

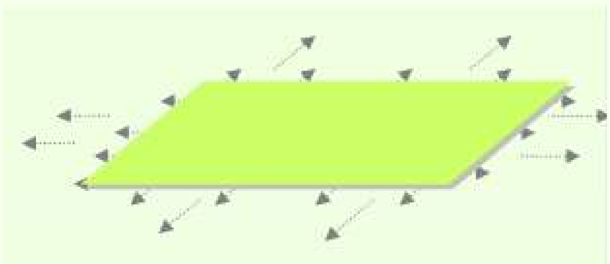
1.1. Puntos, rectas, semirrectas, segmentos.

El elemento más sencillo del plano es el **punto**. El signo de puntuación que tiene este mismo nombre sirve para dibujarlo o también un pequeño círculo si queremos destacarlo. Es muy útil nombrarlo y para ello se utilizan letras mayúsculas *A, B, C, …*

Al igual que el punto, **la recta** es un objeto elemental del plano. Constituye una sucesión infinita de puntos alineados en una misma dirección. Las rectas se nombran con letras minúsculas *r, s, t, …*

Una **semirrecta** es cada una de las partes en las que queda dividida una recta por un punto que pertenece a ella. El punto se denomina origen. Las semirrectas se nombran con letras minúsculas o referenciando su origen: semirrecta de origen O, semirrecta *p*, …

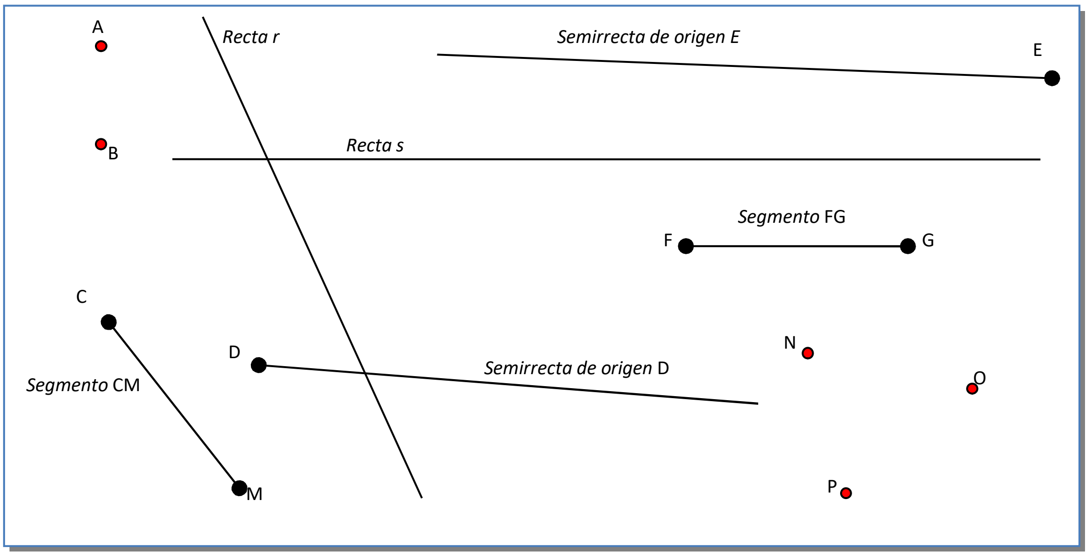
Un **segmento** es la porción de recta comprendida entre dos puntos de la misma. Los puntos se llaman extremos. Los segmentos se nombran mediante sus extremos, por ejemplo: segmento $\overline{AB}$ o segmento de extremos *A, B*.



Imagina que cada uno de los límites de la hoja de tu cuaderno, de la pizarra o de cada una de las paredes de la habitación en la que estás, se prolonga indefinidamente sin cambiar su inclinación o posición. Los objetos resultantes serían ejemplos de planos.

Para representarlos y estudiar bien sus elementos, nos quedaremos solo con una parte de cada uno. Por ejemplo, en los casos anteriormente citados, con la misma hoja, la pizarra o la pared tal como las vemos.

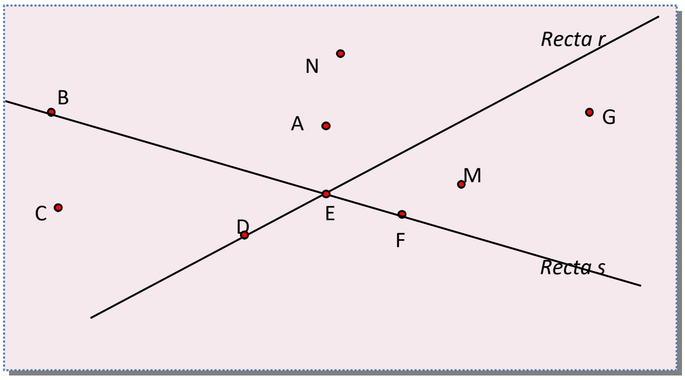
Ejemplo:



Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Milagros Latasa

Actividades propuestas

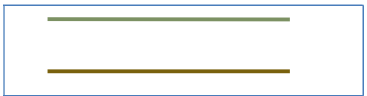
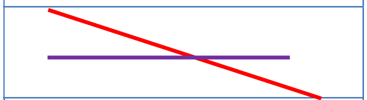
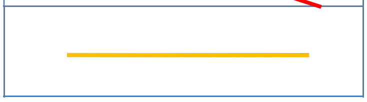
Copia en tu cuaderno el siguiente dibujo y realiza las siguientes actividades.



1. Dibuja tres segmentos que tengan sus extremos fuera de las rectas *r* y *s*.
2. ¿El punto *B* pertenece a la recta *s*? ¿Y a la recta *r*?
3. Dibuja un segmento que tenga como extremos *A* y un punto que esté en las rectas *r* y *s*
4. Dibuja una semirrecta de origen *C* y que pase por *B*.
5. ¿Es posible dibujar una recta que pase a la vez por *M, F* y *G*? ¿Y por *N, A* y *E*?

1.2. Rectas paralelas y secantes

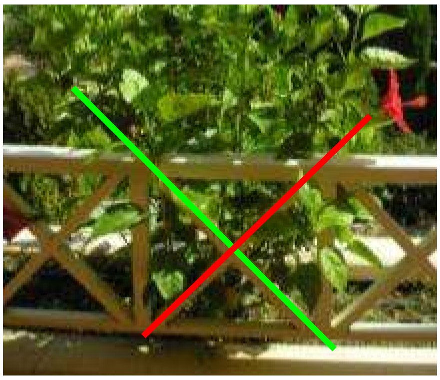
Pensemos ahora en las diferentes posiciones que pueden ocupar dos rectas en un plano:

Rectas paralelas: No tienen ningún punto común	
Rectas secantes: Tienen un único punto común	
Rectas coincidentes: Todos sus puntos son comunes	

Por un punto *P* exterior a una recta *r* solo puede trazarse una recta paralela a ella e infinitas secantes.

Ejemplo:

- A nuestro alrededor encontramos objetos cotidianos en los que se aprecian paralelas y secantes:

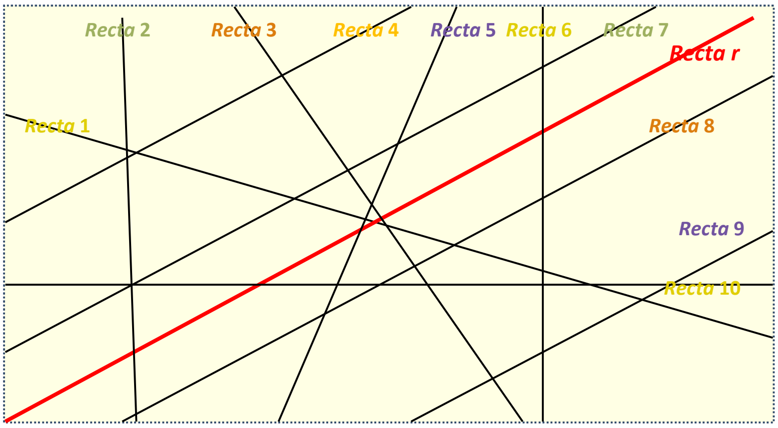



Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Milagros Latasa

Actividades propuestas

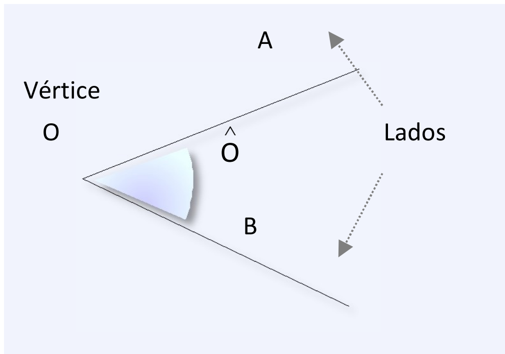
6. Dibuja cuatro rectas de modo que haya dos paralelas, dos perpendiculares y dos secantes no perpendiculares.

7. Observa el siguiente dibujo e indica qué rectas son paralelas a *r* y qué rectas son secantes a *r.*



1.3. Ángulos. Tipos de ángulos

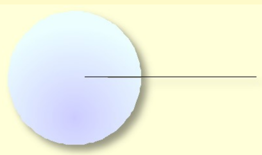
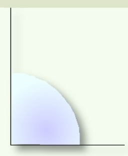
Se llama ***ángulo*** a la región del plano limitada por dos semirrectas con un origen común. Las semirrectas que lo limitan se llaman **lados** y el origen **vértice.**



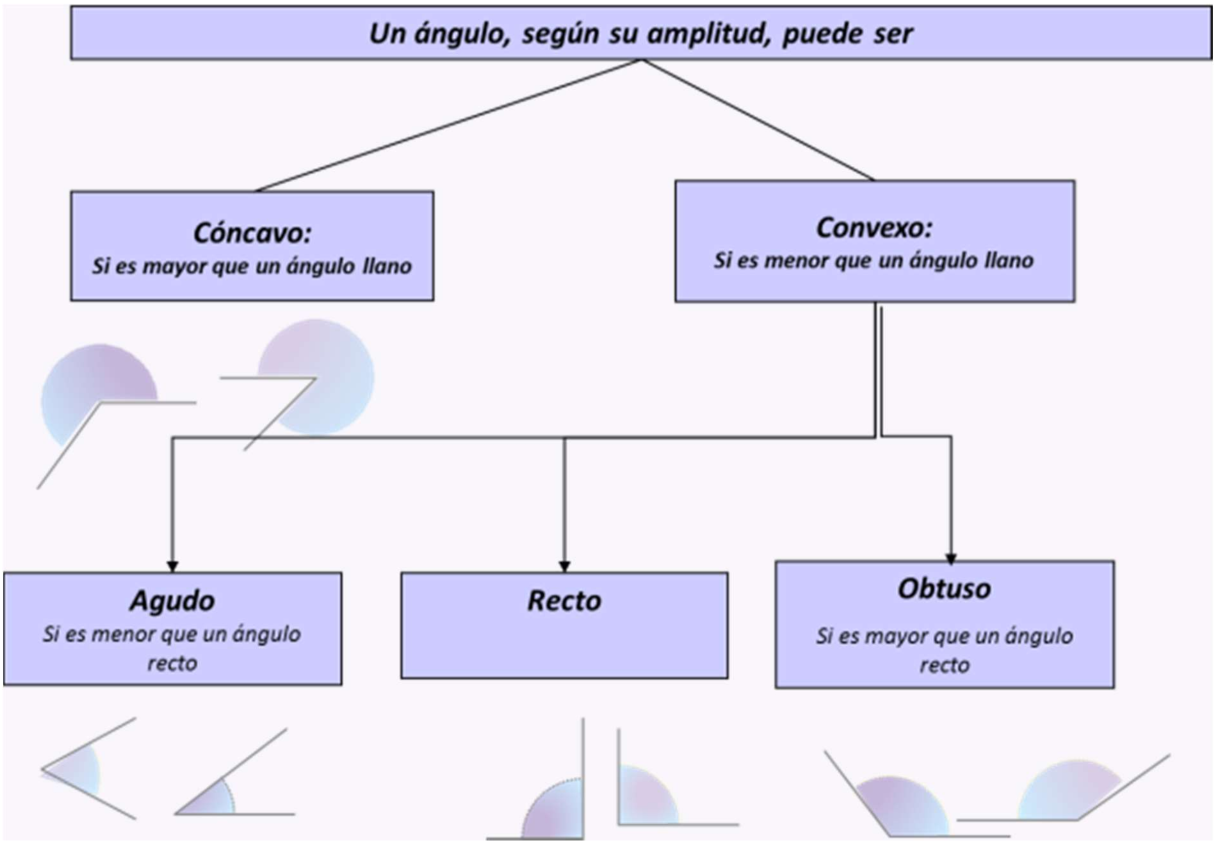
Para nombrar un ángulo podemos utilizar una sola letra o bien tres, que serán nombres de tres puntos: el primero y el último punto sobre los lados del ángulo y el central el vértice. En ambos casos se coloca encima el símbolo ^.

En el ángulo del dibujo: $\hat{O} = A\hat{O}B$

Asociados a semirrectas especiales definiremos tres ángulos que nos servirán tanto como referencia para clasificar los demás, como para definir una de las medidas angulares más utilizadas. Nos referimos a ángulos **completos**, **llanos** y **rectos**.

Ángulo completo: Es el definido por dos semirrectas iguales.	**Ángulo llano**: Es la mitad de un ángulo completo.	**Ángulo recto**: Es la mitad de un ángulo llano.
		

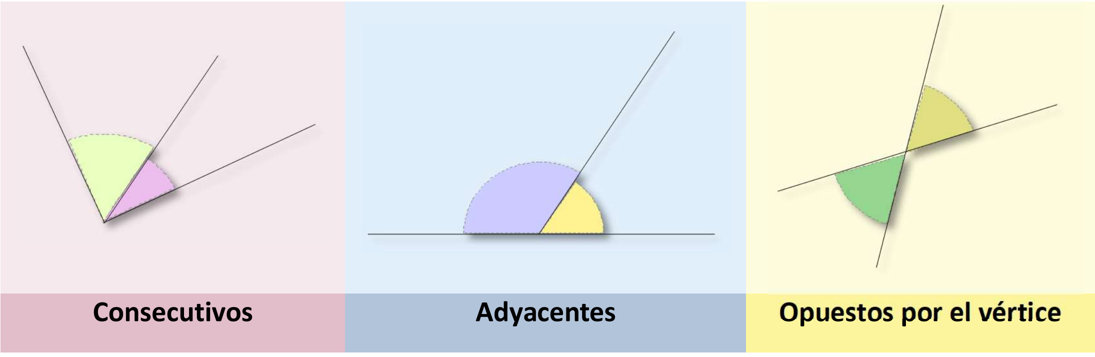
Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Milagros Latasa



Se llaman ángulos ***consecutivos*** a dos ángulos que tienen el mismo vértice y un lado común. Un caso particular son los ángulos ***adyacentes,*** que son ángulos consecutivos cuyos lados no comunes forman un ángulo llano.

Se llaman ángulos ***opuestos por el vértice*** a los ángulos que tienen el mismo vértice y tales que los lados de uno son semirrectas opuestas a los lados del otro. Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

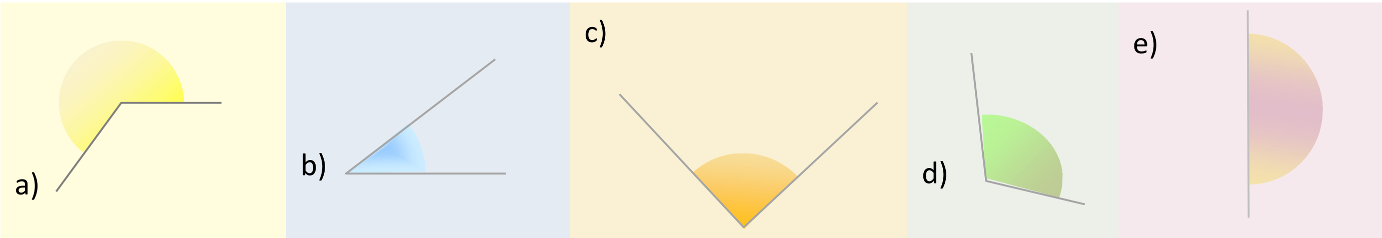
Ejemplo:



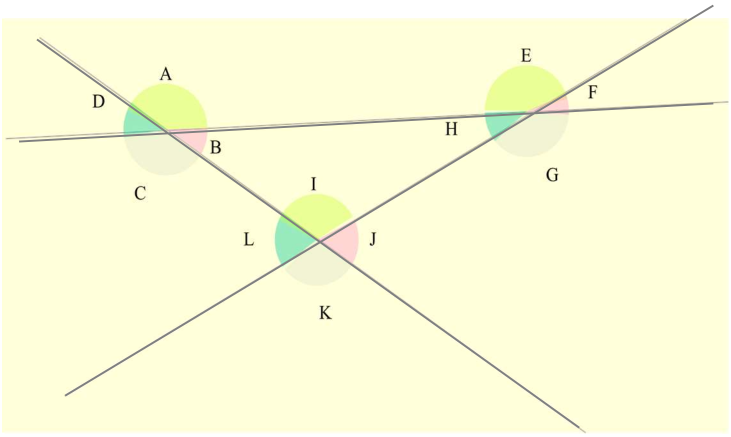
Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Milagros Latasa

Actividades propuestas

8. Nombra cada uno de estos ángulos según su abertura:



9. Indica todas las parejas de ángulos adyacentes, consecutivos y opuestos por el vértice que se encuentran en el siguiente dibujo:



1.4. Medida de ángulos

Para medir ángulos utilizamos el llamado ***sistema sexagesimal***. La unidad de medida es el ***grado sexagesimal***. Se representa con el símbolo ° y se define como 1/360 de un ángulo completo.

1° = 1 / 360 parte de un ángulo completo

El *grado sexagesimal* tiene dos divisores:

Minuto 1 minuto = 1´ = 1/ 60 parte de un grado.

Segundo 1 segundo = 1´´ = 1 / 60 parte de un minuto.

Las unidades de este sistema aumentan y disminuyen de 60 en 60, por eso el sistema se llama sexagesimal.

Si un ángulo viene expresado en dos o tres de estas unidades, se dice que está expresado en *forma compleja*. En la *forma incompleja* de la medida de un ángulo aparece una sola unidad.

El paso de una a otra forma se realiza mediante multiplicaciones o divisiones por 60, según haya que transformar una unidad de medida de ángulos en la unidad inmediata inferior o superior.

Recuerda estas relaciones:

1 ángulo completo = 360 °

1 ángulo llano = 180°

1 ángulo recto = 90°

1 ° = 60 minutos = 3 600 segundos

1 minuto = 60 segundos

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Milagros Latasa

Ejemplo:

- Forma compleja: A = 12º 40 ´ 32´´ B = 13´ 54´´ C = 120 º 23´´
- Forma incompleja: D = 35 000´´ E = 23 º F = 34´

Ejemplo:

- Pasaremos el ángulo D del ejemplo anterior a forma compleja:

35 000´´	60	583´	60
500	583´	**43´**	**9 º**
200			
20´´			

D = 35 000´´ = 583´ 20´´= 9 º 43´ 20´´

Ejemplo:

- A = 12 º 23´ 10´´ = 12 · 3 600´´ + 23 · 60´´+ 10´´ = 44 590 ´´

Actividades propuestas

10. Pasa a forma compleja los siguientes ángulos

a) 12 500´´ b) 83´ c) 230´´ d) 17 600´´

11. Pasa de forma compleja a forma incompleja

a) 12 º 34´ 40´´ b) 13 º 23´ 7 ´´ c) 49 º 56´ 32´´ d) 1 º 25´ 27´´

12. Completa la tabla:

EXPRESIÓN EN SEGUNDOS	EXPRESIÓN EN MINUTOS Y SEGUNDOS	EXPRESIÓN EN GRADOS, MINUTOS Y SEGUNDOS
8 465”		
	245´ 32´´	
		31º 3´ 55´´

1.5. Suma y resta de ángulos en el sistema sexagesimal

Para sumar ángulos expresados en el sistema sexagesimal, se colocan los sumandos haciendo coincidir grados, minutos y segundos, después se suman las cantidades correspondientes a cada unidad. Si los segundos sobrepasan 60, se transforman en minutos y se suman a los minutos resultantes de la primera fase de la suma. Si los minutos sobrepasan 60, los transformamos en grados y se suman a los grados anteriormente obtenidos.

Ejemplo 7:

24º 43´ 29´´	77´´	60	73´	60
45º 29´ 48´´	**17´´**	1´	**13´**	1º
69º 72´ 77´´	Nº minutos = 72´+ 1´= 73´		Nº de grados = 69º + 1º = 70º	

24º 43´ 29´´ + 45º 29´ 48´´ = 69º 72´ 77´´ = 69º 73´ 17´´ = **70º 13´ 17´´**

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Milagros Latasa

Para restar datos de medida de ángulos, ángulos expresados en el sistema sexagesimal, se colocan el minuendo y el sustraendo haciendo coincidir grados, minutos y segundos, después restamos. Si en alguna columna el minuendo es menor que el sustraendo, se pasa una unidad inmediatamente superior a la que presente el problema para que la resta sea posible.

Ejemplo:

65º 48´ 50´´ 45º 29´ 48´´ **20º 19´ 2´´**	65º 48´ 50´´ - 45º 29´ 48´´ = **20º 19´ 2´´**

Ejemplo:

37º 60´ ~~38º~~ 12´ 14´´ 15º 15´ 15´´	71´ 60´´ ~~37º~~ 72´ 14´´ 15º 15´ 15´´	37º 71´ 74´´ 15º 15´ 15´´ **22º 56´ 59´´**
38º 12´ 14´´ - 15º 15´ 15´´ = 37º 72´ 14´´- 15º 15´ 15´´ = 37º 71´ 74´´- 15º 15´ 15´´ = **= 22º 56´ 59´´**		

Actividades propuestas

13. Calcula:

a) 34º 45´ 30´´ + 12 º 27´ 15´´

b) 16 º 30´ 1´´+ 12 º 13´ 12´´ + 2 º 1´

c) 16 º 45' + 23 º 13'' + 30 º 20´ 30´´

d) 65 º 48´ 56´´ - 12 º 33´ 25´´

e) 35 º 54´ 23´´ - 15 º 1´ 35''

f) 43 º 32´ 1 ´´ - 15 º 50´ 50''

1.6. Ángulos complementarios y suplementarios

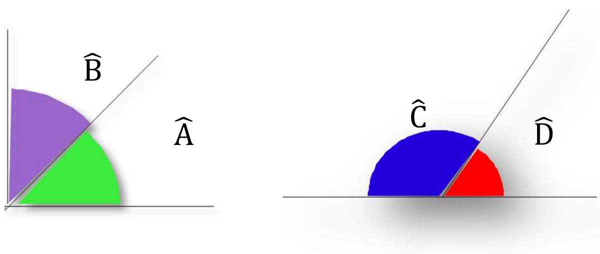
Se llaman **ángulos complementarios** a dos ángulos cuya suma es un ángulo recto (90 º)

Se llaman **ángulos suplementarios** a dos ángulos cuya suma es un ángulo llano (180 º)

Ejemplo:

- En la figura aparecen dos ejemplos gráficos:

A y *B* son ángulos complementarios. *C* y *D* son suplementarios.



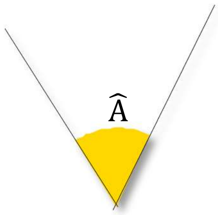
Ejemplo:

- El ángulo $\hat{A}$ = 12 º es el complementario de $\hat{B}$ = 78 º y el suplementario de $\hat{C}$ = 168 º

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Milagros Latasa

Actividades propuestas

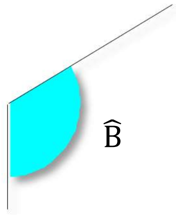
14. . Copia en tu cuaderno y dibuja el complementario del ángulo $\hat{A}$ y el suplementario del ángulo $\hat{B}$.



15. Calcula los ángulos complementario y suplementario de:

a) 35 º 54´ 23´´ b) 65 º 48´ 56´´

c) 43 º 32´ 1 ´´ d) 30 º 20´ 30´´



16. Indica si las siguientes parejas de ángulos son complementarios, suplementarios o ninguna de las dos cosas:

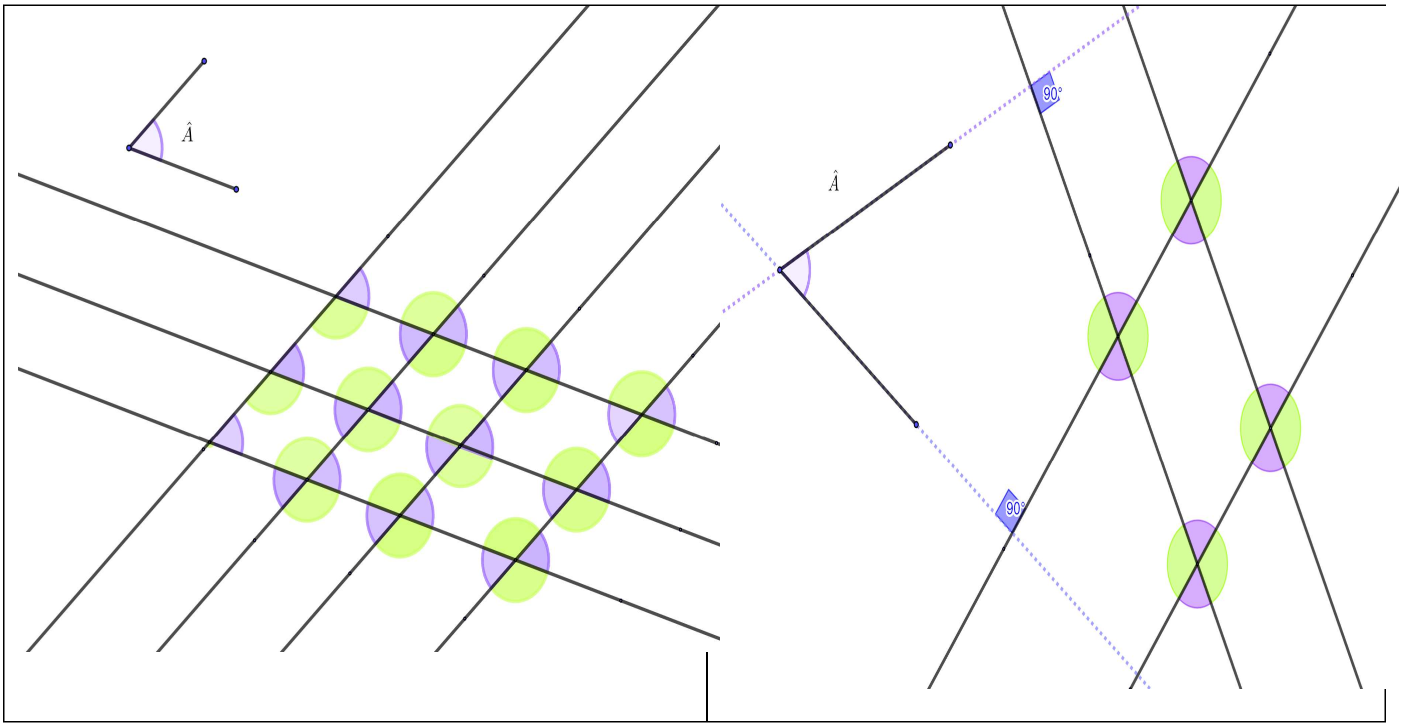
a) 15 º 34´ 20´´ y 164 º 25´ 40´´ b) 65 º 48´ 56´´ y 24 º 12´ 4´´ c) 43 º 32´ 1 ´´ y 30 º 26´ 59´´

1.7. Ángulos determinados por dos rectas paralelas y una secante

Ángulos de lados paralelos y perpendiculares

- Los ángulos que tienen sus lados paralelos son iguales o suplementarios.
- Los ángulos que tienen sus lados perpendiculares son iguales o suplementarios

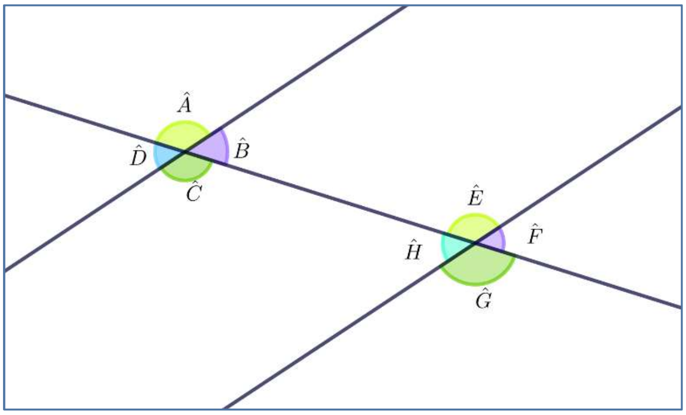
Observa los ejemplos:



Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Milagros Latasa

Ángulos determinados por dos rectas paralelas y una secante

Si una recta secante corta a dos rectas paralelas, forma con ellas ocho ángulos que reciben distintos nombres según la posición que ocupan



Ángulos internos son los que están en la franja del plano comprendida entre las dos paralelas. En la figura, son los ángulos $\hat{B}, \hat{C}, \hat{E}$ $y\ \hat{H}$.

Ángulos externos son los que están en cada uno de los dos semiplanos definidos por una paralela sin contener a la otra. En la figura, son los ángulos $A, \hat{D}, \hat{F}$ $y\ \hat{G}$.

Ángulos alternos son los no adyacentes situados a uno y otro lado de la secante. Pueden ser ***alternos internos o externos***, según se encuentren en la franja que limitan las dos paralelas o en las dos zonas exteriores. En la figura las parejas formadas por $\hat{B}$, $\hat{H}$ y $\hat{C}, \hat{E}$ son alternos internos. Las parejas $\hat{A}, \hat{G}$ y $\hat{D}, \hat{F}$ son alternos externos.

Ángulos correspondientes son los no adyacentes, uno interno y otro externo situados a un mismo lado de la secante. En nuestra figura, son ángulos correspondientes las parejas $\hat{A}\ y\ \hat{E}$,$\hat{B}\ y\ \hat{F}$, $\hat{D}\ y\ \hat{H}$ así como $\hat{C}\ y\ \hat{G}$.

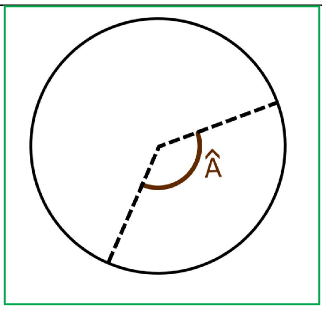
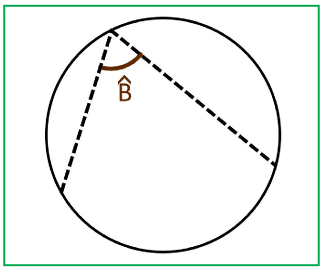
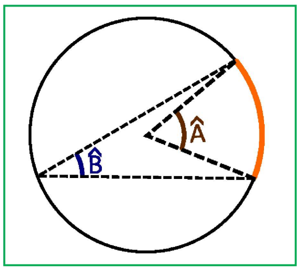
Estos ocho ángulos forman cuatro ángulos agudos iguales entre sí y cuatro ángulos obtusos iguales entre sí dado que

- Los ángulos alternos internos son iguales dos a dos: $\hat{B} = \hat{H}$ y $\hat{C} = \hat{E}$
- Los ángulos alternos externos son iguales dos a dos: $\hat{A} = \hat{G}\ y\ \hat{D} = \hat{F}$
- Los ángulos correspondientes son iguales dos a dos : $\hat{A} = \hat{E}$, $\hat{B} = \hat{F}, \hat{C} = \hat{G}$ y $\hat{D} = \hat{H}$

Es decir: $\hat{A} = \hat{C} = \hat{E} = \hat{G}$ Y $\hat{B} = \hat{D} = \hat{F} = \hat{H}$

1.8. Ángulos en la circunferencia

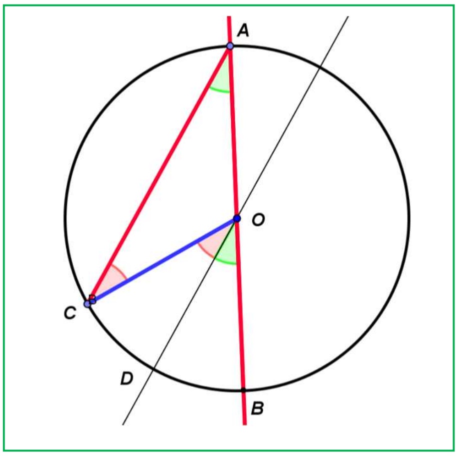
En una circunferencia tienen especial importancia los **ángulos centrales** (tienen su vértice en el centro de la circunferencia) y los **ángulos inscritos** (tienen su vértice en un punto de la circunferencia).

		
Ángulo central	**Ángulo inscrito**	$\hat{B} = \frac{\hat{A}}{2}$

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Milagros Latasa

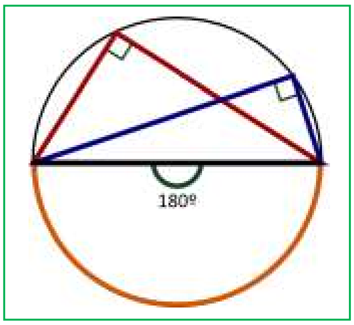
Se verifica además que un ángulo inscrito mide la mitad que un ángulo central que abarca el mismo arco de circunferencia.

Demostración:



Trazamos un ángulo inscrito en la circunferencia *CAB* que tenga un lado que pase por el centro *O* de la circunferencia. Trazamos su central *COB*. El triángulo *OAC* es isósceles pues dos de sus lados son radios de la circunferencia. Trazamos por *O* una recta paralela a *AC*. El ángulo *CAO* es igual al ángulo *DOB* pues tienen sus lados paralelos. El ángulo *ACO* es igual al ángulo *COD* por alternos internos entre paralelas, y es igual al ángulo *CAO* por ser el triángulo isósceles. Por tanto, el central mide el doble que el ángulo inscrito.

Actividades propuestas

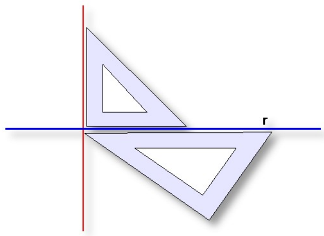


17. Un ángulo inscrito en la circunferencia que abarca un diámetro es un ángulo recto. ¿Por qué? Razona la respuesta.

18. ¿En qué posiciones tiene un futbolista el mismo ángulo de tiro que desde el punto de penalti?

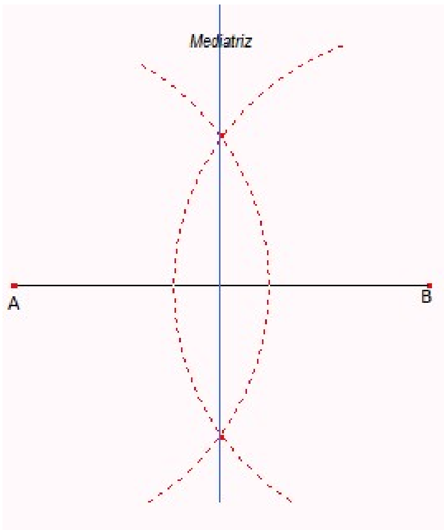
1.9. Rectas perpendiculares. Mediatriz de un segmento

Dos rectas son **perpendiculares** si forman un ángulo recto. Es un caso especial de rectas secantes.



Para construir una recta perpendicular a una recta dada *r*, se adapta un cartabón a *r* y sobre él se apoya uno de los lados que forma el ángulo recto (cateto) de la escuadra. El otro cateto de la escuadra nos sirve para realizar la construcción deseada. También pueden cambiarse las funciones de escuadra y cartabón.

La **mediatriz** de un segmento AB es la recta perpendicular a AB trazada desde el punto medio



Todos los puntos de la mediatriz de un segmento equidistan, es decir, están a la misma distancia, de los extremos.

Con un compás y una regla podemos trazar fácilmente la mediatriz de un segmento dado. Debemos seguir los pasos

Se dibuja el segmento *AB*.

Con centro en *A* y con radio *R* mayor que la mitad del segmento, se traza un arco que corte al segmento *AB*.

Con el mismo radio se traza un arco de centro *B*.

Se unen los puntos comunes de los dos arcos. Esta recta es la mediatriz.

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Milagros Latasa

Actividades propuestas

19. ¿Es posible dibujar tres rectas, secantes dos a dos de modo que haya exactamente: a) Una pareja de rectas perpendiculares? b) ¿Dos parejas de rectas perpendiculares? c) ¿Las tres parejas de rectas sean perpendiculares?

20. Dibuja la mediatriz de un segmento de 6 cm de longitud.

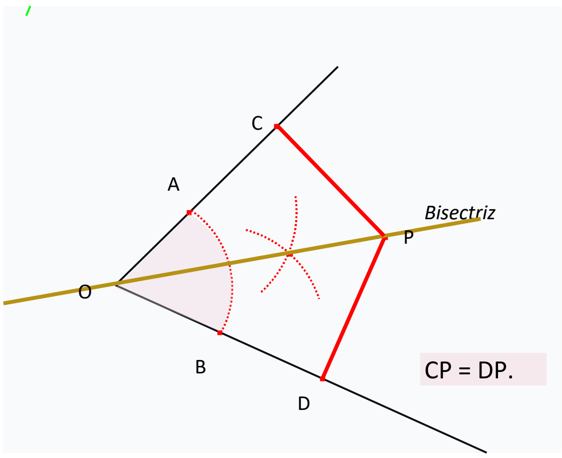
21. Dibuja un segmento de longitud 8 cm, su mediatriz y una recta perpendicular al segmento de partida que esté a una distancia de 5 cm de la mediatriz. ¿Qué posición ocupa esta recta con respecto al segmento de partida?

1.10. Bisectriz de un ángulo

La **bisectriz d**e un ángulo es la recta que pasa por el vértice del ángulo y lo divide en dos partes iguales.

Los puntos de la bisectriz son equidistantes a los 2 lados del ángulo. Puedes observar que en la figura del ejemplo adjunto que *CP = DP*.

Para trazar la bisectriz de un ángulo de vértice *O*, se traza un arco haciendo centro en O que determina dos puntos, *A* y *B*. A continuación, con centros en *A* y *B* respectivamente y con radio fijo mayor que la mitad de la distancia *AB*, trazamos dos arcos. Estos se cortan en un punto, que unido con el vértice *O* nos da la bisectriz.



Dos rectas secantes determinan cuatro ángulos y sus bisectrices se cortan conformando ángulos rectos entre ellas.

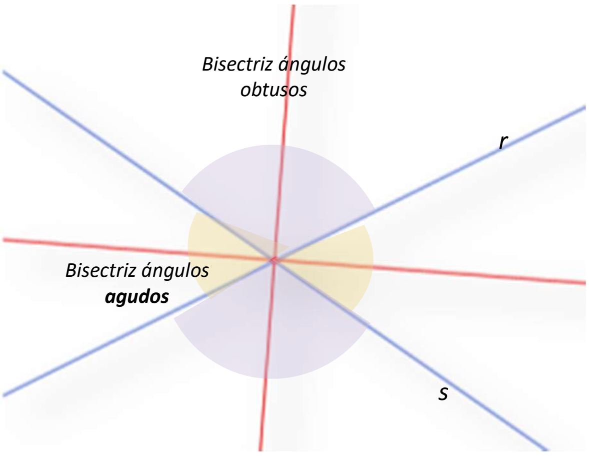
Ejemplo:

- *En la figura inferior observamos que las bisectrices de los ángulos que forman r y s son perpendiculares.*

Actividades propuestas

22. Utilizando un transportador de ángulos, una regla y un compás, dibuja los ángulos que se indican y la bisectriz de cada uno de ellos:

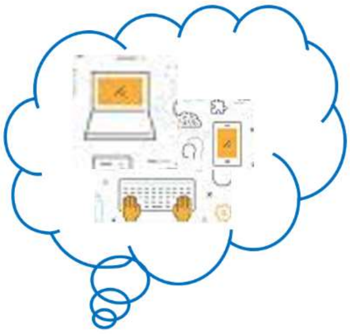
a) 45º b) 130º c) 70º d) 45º



Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Milagros Latasa

1.11. Primeros pasos con Geogebra

La ventana de Geogebra

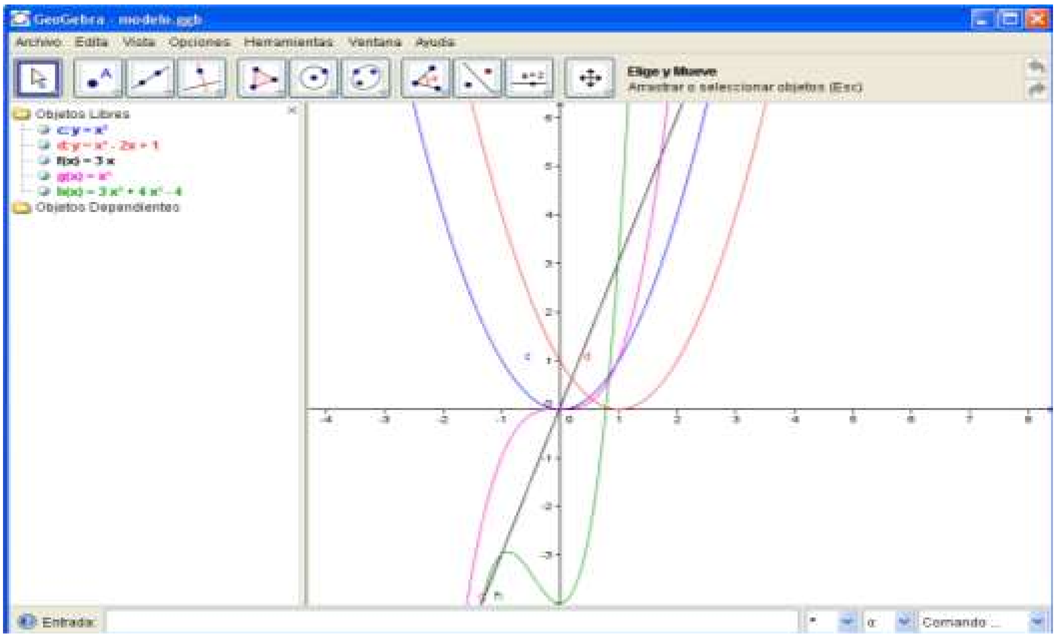


Al ejecutar el programa *Geogebra* la ventana que aparece tiene muchos componentes comunes con cualquier ventana de Windows.

El elemento más característico de este programa es la **barra de herramientas** en la que aparecen iconos. Cada uno de ellos se activa al hacer clic con el ratón sobre él y se desactiva cuando se selecciona otro. Estos primeros iconos que aparecen se corresponden con la primera opción que encontramos en el menú desplegable que se obtiene al mantener pulsado el ratón sobre cada uno de ellos.

Otra particularidad es que el área de trabajo está dividida en dos partes la **ventana geométrica**, donde se realizan las construcciones geométricas, y la **ventana algebraica** en la que aparecen características de los elementos que se construyen en la ventana geométrica como son las coordenadas de los puntos, las longitudes de los segmentos, el área de los polígonos, las ecuaciones de rectas, circunferencias, ….

También se pueden realizar operaciones introduciendo los números o el nombre de los elementos en el **Campo de Entrada** que se encuentra en la parte inferior de la ventana, los resultados aparecen en la ventana algebraica. Con las opciones de **Visualiza** de la barra de menús se puede ocultar o mostrar, la



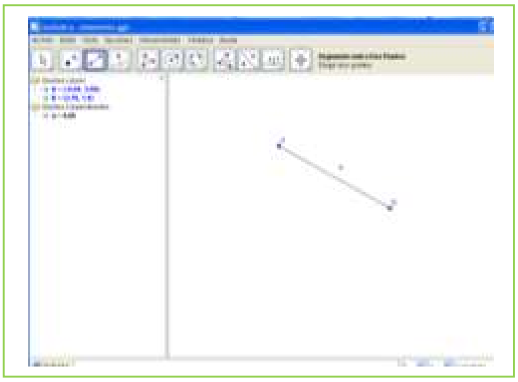
ventana algebraica, el campo de entrada, así como los ejes y la cuadrícula de la ventana geométrica.

Los iconos **Deshace** y **Rehace** que se encuentran en la parte superior derecha de la ventana geométrica y como opciones del menú **Edita** permiten eliminar o volver a mostrar una acción realizada.

El **menú contextual**, el que se obtiene al hacer clic con el botón derecho del ratón sobre el objeto de la ventana geométrica o de la algebraica, tiene múltiples posibilidades, permite entre otras funciones borrar, ocultar, cambiar el nombre y modificar la apariencia de los objetos construidos.

Elementos geométricos

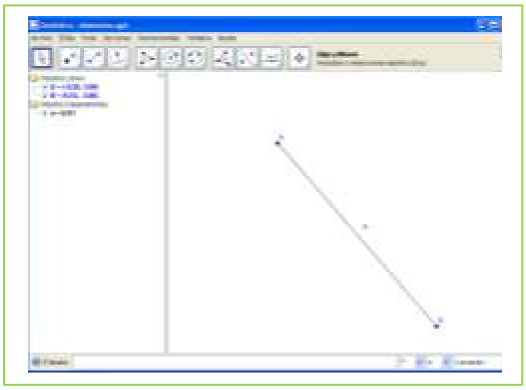
Actividades resueltas



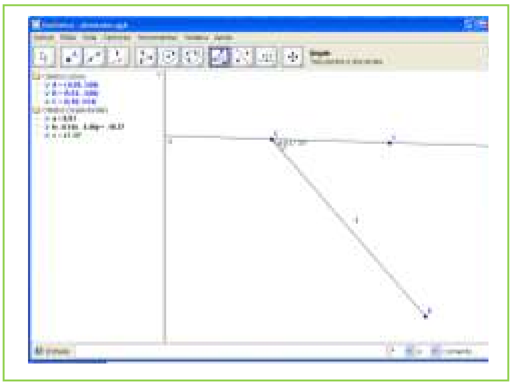
Antes de comenzar comprueba en la opción del menú **Visualiza** que está activada la ventana algebraica y desactiva ejes y cuadrícula.

- Con la herramienta **Nuevo punto** dibuja un punto en la ventana geométrica, el sistema lo denomina *A* y sus coordenadas aparecen en la ventana algebraica, en la carpeta de los objetos libres.

- Dibuja otro punto *B* y con la herramienta **Segmento entre dos puntos** traza el segmento, *a*, que pasa por los puntos *A* y *B*. En la ventana algebraica aparece la longitud del segmento en la carpeta de objetos dependientes.



- Con la herramienta **Desplaza**, la primera de la barra de herramientas, agarra el punto *B* y cambia su posición, observa de qué forma cambian sus coordenadas y la longitud del segmento.

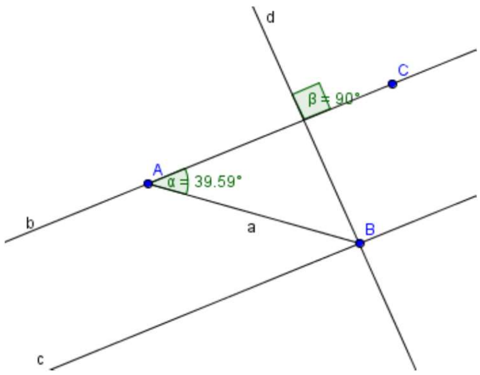


- Dibuja otro punto *C*, que no pertenezca al segmento, y con la herramienta **Recta que pasa por 2 puntos** traza la recta, *b*, que pasa por *A* y *C*.

- Activa la herramienta **Ángulo** y señala con el ratón los puntos *B*, *A* y *C*, obtienes la medida del ángulo que has señalado. El orden para señalar los puntos *B* y *C* debe ser el contrario al de las agujas del reloj.

Rectas paralelas y perpendiculares

Actividades resueltas



Con la herramienta **Recta paralela** traza una recta, *c*, que pasa por el punto *B* y es paralela a la recta *b* que pasa por los puntos *A* y *C*.

- Utiliza la herramienta **Recta perpendicular** para trazar una recta, *d*, que pasa por el punto *B* y es perpendicular a la recta *b*.

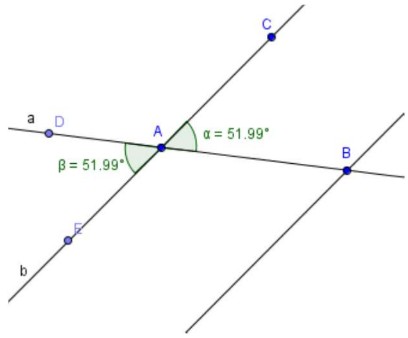
- Calcula la medida del **ángulo** que forman las rectas *b* y *d*.

- Con la herramienta **Desplaza**, mueve los puntos *A, B* y *C* y observa que cambian de posición, pero se mantienen las propiedades geométricas de la construcción, por ejemplo, las rectas *b* y *c* permanecen paralelas entre sí y perpendiculares a la recta *d*.

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Milagros Latasa

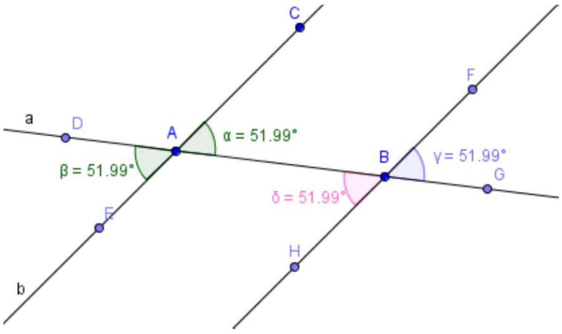
Ángulos

Actividades resueltas



Abre una nueva ventana de *Geogebra,* en el menú **Visualiza** desactiva **Ejes** y **Cuadricula**

- Determina tres **puntos** *A*, *B* y *C*, no alineados, la **recta**, *a*, que pasa por *A* y *B* y la recta, *b*, que pasa por los puntos *A* y *C*.
- Traza la **recta paralela**, *c***,** que pasa por *B* y es paralela a la recta *a*.
- Calcula la medida del **ángulo,** α, que determinan los puntos *B, A* y *C,* señalando los puntos *B* y *C* en orden contrario al sentido de las agujas del reloj.
- Elige un punto *D* de la recta *a* y otro *E* de la recta *b* para determinar y medir un ángulo, β, *opuesto por el vértice* al ángulo α.



- Determina y mide un ángulo γ tal que los ángulos α y γ sean *correspondientes entre paralelas* y con la opción **propiedades** del menú contextual cambia su color.
- Determina y mide un ángulo δ tal que los ángulos α y δ sean *alternos internos entre paralelas* y con la opción **propiedades** del menú contextual cambia su color.
- Con la herramienta **Desplaza**, mueve los puntos *A, B* y *C* y observa que cambian de posición, pero los ángulos α, β, γ y δ miden lo mismo.
- Indica dos ángulos de los que has dibujados que sean *alternos externos entre paralelas*.

Actividades propuestas

23. Repite la actividad resuelta de elementos geométricos. Colócate encima del segmento *a*, aprieta el botón derecho, entra en **Propiedades** y modifica el color, haz que sea rojo. Lo mismo con la recta *b*, pero ahora coloréala en azul. Mueve el punto *B* para observar cómo se modifican las longitudes y el ángulo.

24. Dibuja con *Geogebra* cuatro rectas de modo que haya dos paralelas, dos perpendiculares y dos secantes no perpendiculares.

25. Dibuja con *Geogebra* dos rectas paralelas cortadas por una secante y mide todos los ángulos que se formen.

26. Dibuja con *Geogebra* dos ángulos con lados paralelos y comprueba que miden lo mismo.

27. Dibuja con *Geogebra* dos ángulos con lados perpendiculares y comprueba que miden lo mismo.

28. Dibuja con *Geogebra* dos ángulos que sean complementarios y dos que sean suplementarios.

29. Dibuja con *Geogebra* un ángulo inscrito en la circunferencia y el central que abarca el mismo arco. Comprueba que el ángulo inscrito mide la mitad del central. Mueve uno de los puntos sobre la circunferencia y comprueba que esa relación permanece.

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Milagros Latasa

2. POLÍGONOS

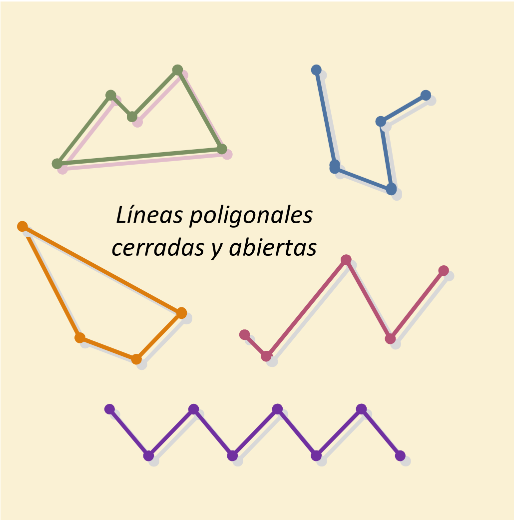
2.1. Líneas poligonales y polígonos

Una **línea poligonal** es una colección de segmentos consecutivos. Esto quiere decir que el primer segmento tiene un extremo común con el segundo. El extremo libre del segundo es común con el tercero y así sucesivamente.

Si los extremos libres del primero y del último coinciden, se dice que la línea poligonal es cerrada. En caso contrario, es *abierta*.

Un **polígono** es una región del plano limitada por una línea poligonal cerrada.

Ejemplo:



2.2. Elementos de un polígono: lados, ángulos, vértices, diagonales

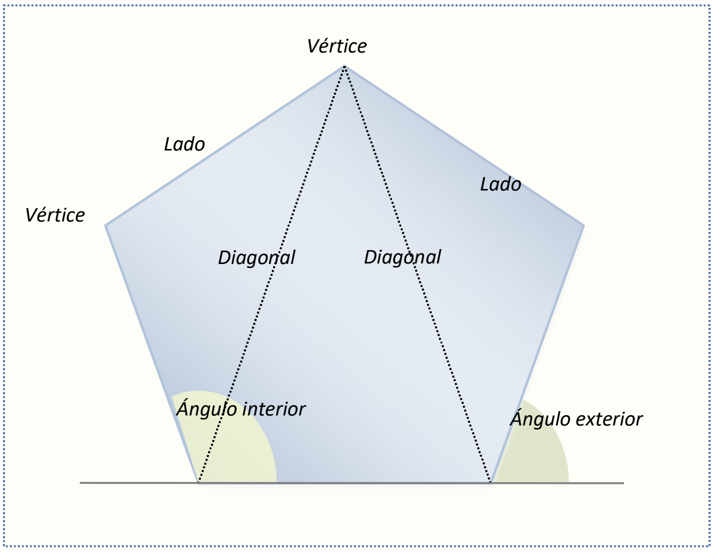
Se llama **lado** de un polígono a cada uno de los segmentos que forman la línea poligonal que lo limita.

Los ángulos limitados por dos lados consecutivos son los **ángulos interiores** del polígono.

Los ángulos limitados por un lado y la prolongación del lado consecutivo son los **ángulos exteriores** del polígono

Los puntos en los que se cortan los lados se llaman **vértices.**

Cada uno de los segmentos que une dos vértices no consecutivos se llama **diagonal.**

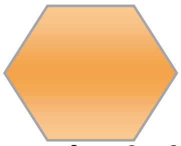
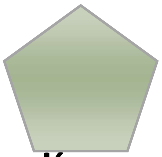
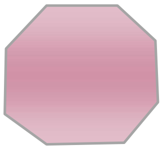
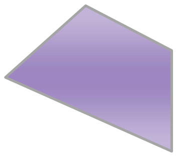


Cualquier polígono tiene el mismo número de lados, de ángulos interiores y de vértices.

Dos polígonos son **iguales** si tienen los lados y los ángulos iguales. En algunos casos basta con saber que se cumplen condiciones menos exigentes (llamadas criterios de igualdad) para garantizarlo. Veremos por ejemplo tres criterios de igualdad de triángulos.

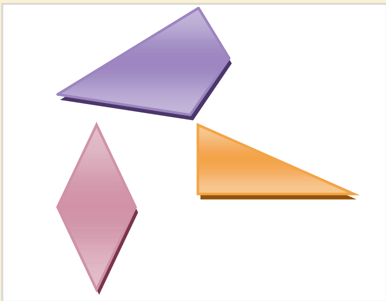
Actividades propuestas

30. Copia los dibujos siguientes y traza todas las diagonales de cada polígono:

a)  b)  c)  d) 

2.3. Clasificación de los polígonos

Según *los ángulos* los polígonos se clasifican en dos grandes grupos:



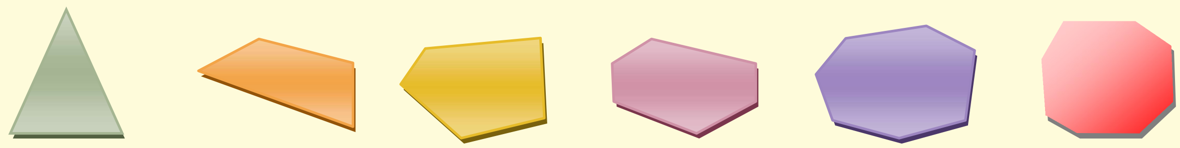
Convexos

Si todos sus ángulos son convexos.

Cóncavos

Si al menos uno de sus ángulos es cóncavo

Por *el número de lados,* los polígonos se clasifican en



Triángulo	Cuadrilátero	Pentágono	Hexágono	Heptágono	Octógono
Tres lados	*Cuatro lados*	*Cinco lados*	*Seis lados*	*Siete lados*	*Ocho lados*

Si un polígono tiene todos sus ángulos iguales se llama **equiángulo** y si tiene todos sus lados iguales se llama **equilátero**.

Un vídeo sobre los polígonos

JGF-PITÁGORAS 2.0 - Elementos y clasificación (google.com)

video

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Milagros Latasa

Los polígonos que tienen todos sus ángulos interiores y sus lados iguales se denominan **regulares.** Los polígonos regulares son entonces equiláteros y equiángulos. Si por lo menos una de estas condiciones se incumple, el polígono se llama **irregular.**

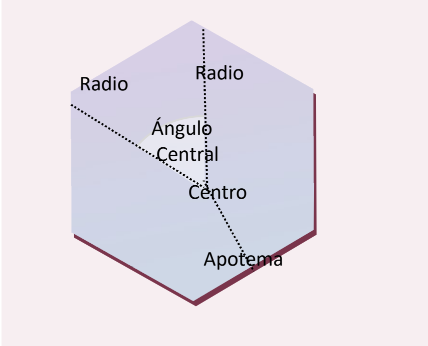
En un polígono regular aparecen nuevos elementos:

Centro que es un punto que equidista de los vértices.

Radio que es un segmento que une el centro con un vértice del polígono.

Ángulo central que es el menor de los ángulos que determinan dos radios que unen vértices consecutivos.

Apotema que es el segmento que une el centro con el punto medio de un lado. La apotema es perpendicular al lado.



video

La Eduteca - Los polígonos. ¿Qué es un polígono? Este vídeo del área de MATEMÁTICAS, está dedicado a los polígonos y todas aquellas cosas referentes a ellos. CONTENIDOS: - Concepto de polígonos. - Polígonos según sus lados y sus nombres. - Polígonos según sus ángulos. - Polígonos regulares y polígonos irregulares.

https://www.youtube.com/watch?v=a95Yy1YmXqE

Actividades propuestas

31. Dibuja los polígonos siguientes y traza todas sus diagonales:

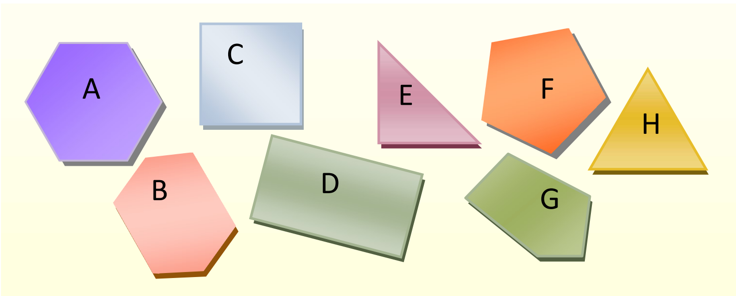
a) Hexágono b) Pentágono c) Octógono d) Trapezoide

32. Dibuja, si es posible, un ejemplo de polígono que sea:

a) triángulo cóncavo b) pentágono convexo

c) hexágono cóncavo d) cuadrilátero convexo regular.

33. Observa la figura adjunta e indica qué polígonos son equiángulos, equiláteros, regulares e irregulares. Puedes copiar la tabla inferior en tu cuaderno y completarla.



	A	B	C	D	E	F	G	H
EQUIÁNGULO								
EQUILÁTERO								
REGULAR								
IRREGULAR								

34. Dibuja en tu cuaderno la apotema de:

a) un triángulo equilátero, b) un cuadrado, c) un hexágono regular.

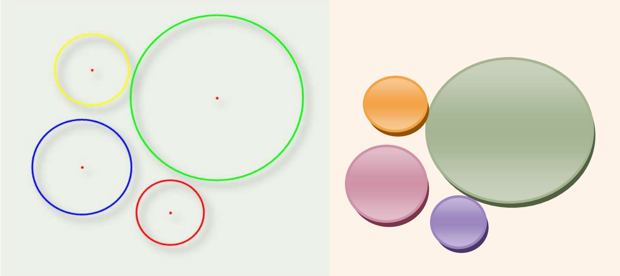
Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Milagros Latasa

3. CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

3.1. Circunferencia y círculo

Una **circunferencia** es una línea cerrada y plana cuyos puntos equidistan de un punto interior a la misma llamado centro.

La porción de plano limitado por una circunferencia se llama **círculo.**


Circunferencias *Círculos*

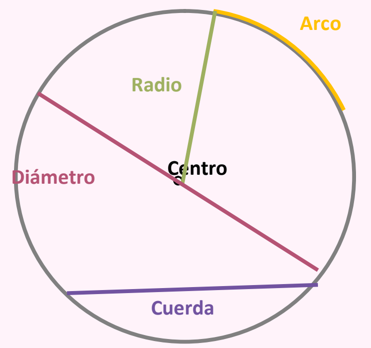
3.2. Elementos de una circunferencia.

Se llaman elementos de una circunferencia a ciertos puntos y segmentos singulares de la misma. Los describimos a continuación

El **centro** es el punto interior equidistante de todos los puntos de la circunferencia.

El **radio** de una circunferencia es el segmento que une el centro de la circunferencia con un punto cualquiera de la misma. Se nombra con la letra *r* o bien con sus puntos extremos. La medida del radio es constante.

El **diámetro** de una circunferencia es el segmento que une dos puntos de la circunferencia y pasa por el centro. El diámetro mide el doble del radio.



Una **cuerda** es un segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia. El diámetro es la cuerda de longitud máxima.

Cada una de las partes en que una cuerda divide a la circunferencia se llama **arco**.

Un arco de circunferencia se denota con el símbolo $\frown$ sobre las letras que designan los puntos extremos del arco. Por ejemplo, el arco de extremos *A*, *B* se escribe $\widehat{AB}$. Un caso particular es la semicircunferencia, arco delimitado por los extremos de un diámetro

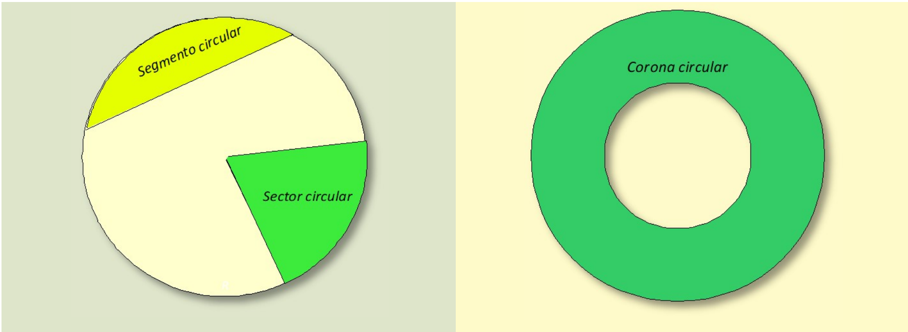
Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Milagros Latasa

3.3. Sector circular y segmento circular. Corona circular

Un **sector circular** es la porción de círculo comprendida entre dos radios.

Un **segmento circular** es la porción de círculo comprendido entre una cuerda y el arco que tiene sus mismos extremos.

Una **corona circular** es la superficie comprendida entre dos círculos concéntricos.



El ángulo que forman los dos radios que determinan un sector circular, se llama ángulo central. Si el ángulo central es llano, el sector circular es un semicírculo.

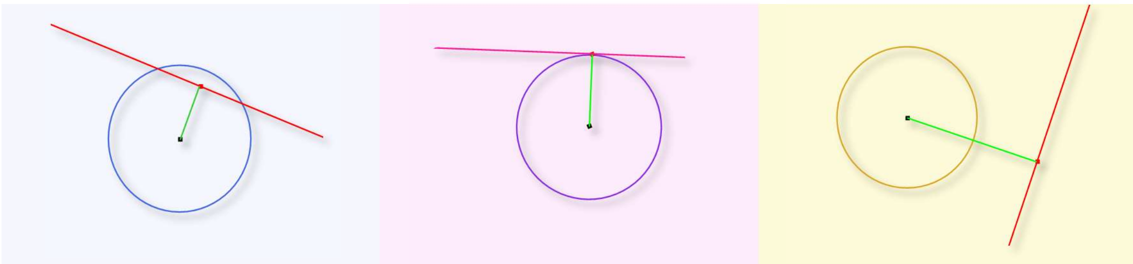
Actividades propuestas

35. Dibuja una circunferencia de radio 4 cm y en ella un sector circular de 30° de amplitud.

36. En la circunferencia anterior, indica si es posible trazar una cuerda en cada uno de los casos siguientes y hazlo en caso afirmativo: a) de 4 cm de longitud, b) de 8 cm, c) mayor de 8 cm.

3.4. Posiciones entre una recta y una circunferencia.

Una recta puede tener dos puntos comunes con una circunferencia, uno o ninguno.



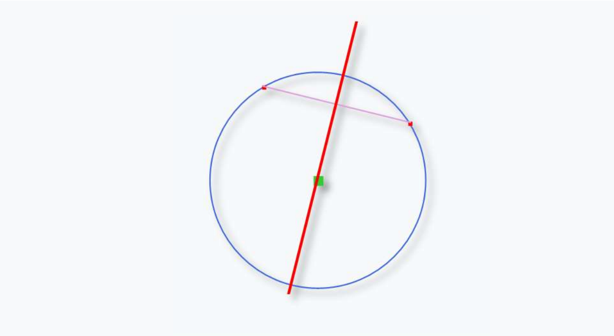
SECANTES Dos puntos en común	TANGENTES Un punto en común	RECTA EXTERIOR A LA CIRCUNFERENCIA Ningún punto común

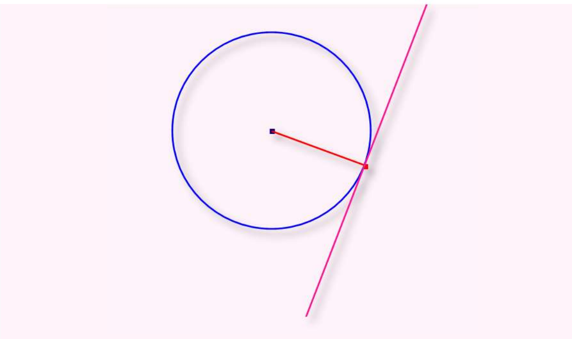
El punto común de una circunferencia y una recta tangentes, se llama **punto de tangencia.**

La distancia del centro de la circunferencia a una recta es menor, igual o mayor que el radio, dependiendo de que sean secantes, tangentes o exteriores.

3.5. Propiedades importantes de las circunferencias y sus elementos

Algunas construcciones geométricas como el trazado de la circunferencia que pasa por tres puntos dados, la búsqueda del centro de un arco de circunferencia o el dibujo de una recta tangente a una circunferencia cuando se conoce el punto de tangencia, se pueden resolver gracias a estas propiedades que seleccionamos.





Las mediatrices de todas las cuerdas de una circunferencia pasan por el centro.	La recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio que pasa por el punto de tangencia.

Actividades propuestas

37. Dibuja tres puntos que no estén en línea recta de modo que el primero esté a 2 cm de distancia del segundo y el segundo a 3 cm del tercero. Finalmente traza la circunferencia que pase por los tres.

video

Círculo y circunferencia. Todo lo que necesitas saber.

https://www.youtube.com/watch?v=OW1JrAHmmdU

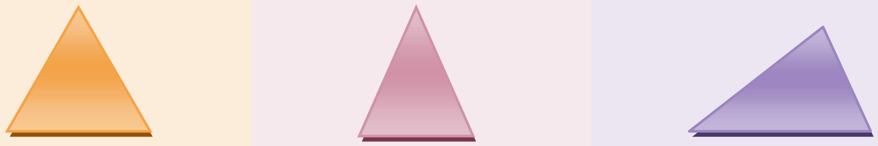
Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Milagros Latasa

4. TRIÁNGULOS

Como hemos visto antes, un triángulo es un polígono de tres lados. Estudiaremos en este párrafo dos clasificaciones de los triángulos, dos propiedades importantes comunes a todos los triángulos y descubriremos los llamados rectas y puntos notables de un triángulo.

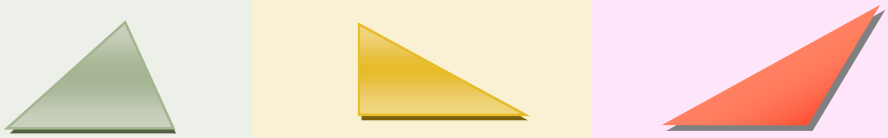
4.1. Clasificación de los triángulos

Según *los lados* los triángulos se clasifican en:



Equiláteros	**Isósceles**	**Escalenos**
Tienen tres lados iguales	*Tienen exactamente dos lados iguales*	*Los tres lados son desiguales*

Según *los ángulos* los triángulos se clasifican en:



Acutángulos	**Rectángulos**	**Obtusángulos**
Tienen tres ángulos agudos	*Tienen un ángulo recto*	*Tienen un ángulo obtuso*

En un triángulo rectángulo los lados que forman el ángulo recto se llaman *catetos* y el tercero se denomina *hipotenusa*.

4.2. Propiedades fundamentales de un triángulo

La suma de los ángulos de un triángulo es 180º.

De esta propiedad se deducen las consecuencias siguientes:

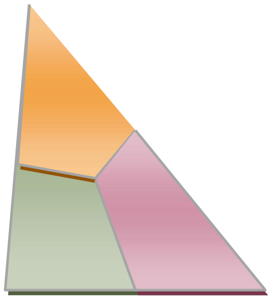
Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.
Cada ángulo de un triángulo equilátero vale 60º.

En un triángulo cualquier lado es siempre menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

Es preciso tener en cuenta esta propiedad para saber si tres segmentos dados pueden o no ser los lados de un triángulo

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Milagros Latasa

Actividades propuestas



38. Dibuja en un papel un triángulo, divídelo en tres partes y coloréalas con tres colores diferentes. Después recórtalas y forma con ellas un ángulo llano. De esta forma, habrás demostrado que la suma de sus ángulos es 180º

39. Calcula el valor del tercer ángulo de un triángulo si dos de ellos miden respectivamente:

a) 30º y 80º b) 20º y 50º c) 15º y 75º d) 40º 30´ y 63º 45´.

40. Clasifica, según sus ángulos, los triángulos del ejercicio anterior.

41. Construye un triángulo rectángulo isósceles.

42. Indica razonadamente si es posible construir un triángulo cuyos lados midan:

a) 5 cm, 4 cm y 3 cm b) 10cm, 2 cm y 5 cm c) 2dm, 2dm 4 dm d) 13 m, 12 m y 5 m

4.3. Rectas y puntos notables de un triángulo

En un triángulo se definen cuatro tipos de rectas denominadas, genéricamente, rectas notables. Esas rectas son: mediatrices, bisectrices, medianas y alturas.

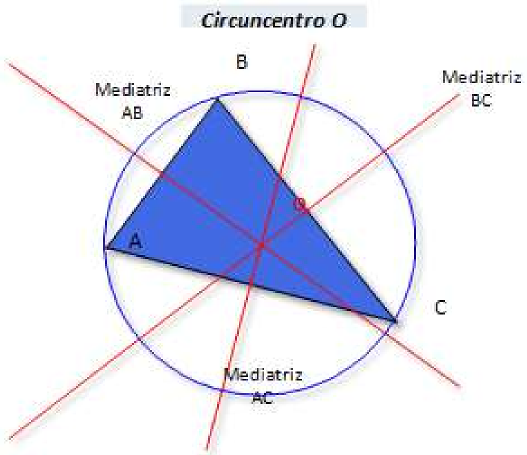
En todo triángulo existen tres rectas de cada uno de los tipos mencionados y tienen la propiedad de pasar por un mismo punto. Los puntos de intersección de estos grupos de rectas se denominan puntos notables

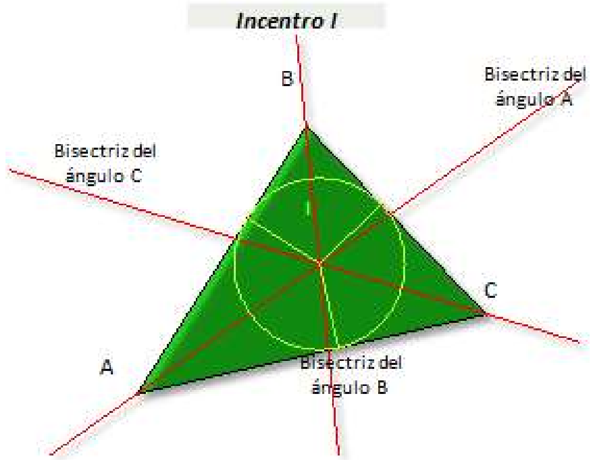
Las mediatrices de los tres lados del triángulo concurren en un punto llamado **circuncentro** (O en la figura izquierda del ejemplo 14). Dicho punto equidista de los vértices y, es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Las bisectrices de los ángulos de un triángulo concurren en un punto llamado incentro (I en la figura de la izquierda del ejemplo 14). Dicho punto equidista de los lados del triángulo y es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Milagros Latasa

Ejemplo:



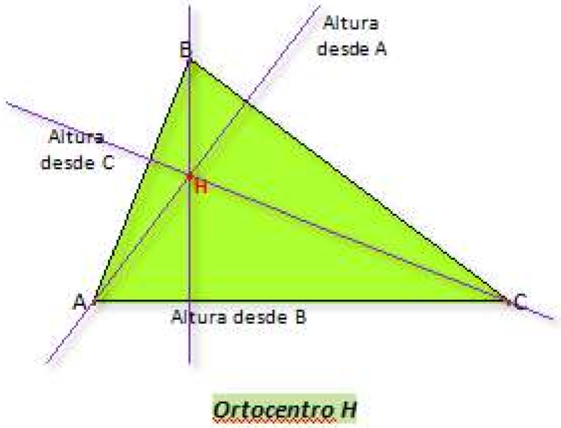


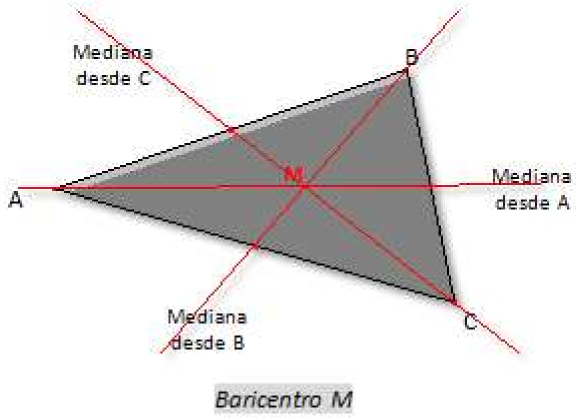
Se llama **altura** de un triángulo a la recta que pasa por un vértice y es perpendicular al lado opuesto.

Las tres alturas de un triángulo se cortan en el **ortocentro.**

Se llama **mediana** de un triángulo a la recta que pasa por un vértice y por el punto medio del lado opuesto. El punto de corte de las medianas se llama **baricentro**.

Ejemplo:





Actividades propuestas

43. Dibuja un triángulo equilátero de 10 cm de lado y comprueba que todos los puntos notables coinciden.

44. Calcula el circuncentro de un triángulo rectángulo. ¿Dónde se encuentra?

45. Calcula el ortocentro de un triángulo obtusángulo.

4.4. Igualdad de triángulos

Dos triángulos son iguales si los tres lados y los tres ángulos son iguales.

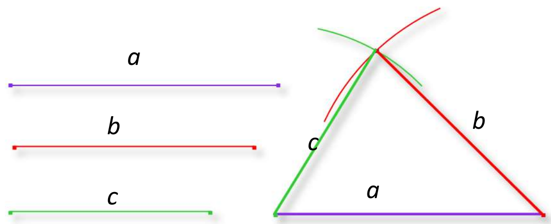
Para comprobar que dos triángulos son iguales es suficiente comprobar que se cumple uno de los tres criterios siguientes:

1º Tienen los tres lados iguales.

Es posible construir un triángulo tomando como punto de partida las longitudes de los tres lados: *a, b, c*

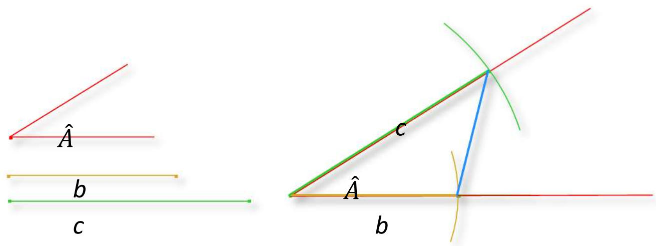
Para ello, se dibuja un segmento de longitud igual a uno de ellos (*a* por ejemplo). Sus extremos serán dos vértices del triángulo.

A continuación, desde un extremo se traza un arco con radio *b* y desde el otro se traza un arco con radio *c*. El punto común de los dos arcos es el vértice que falta:

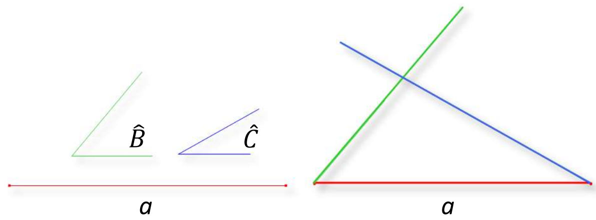


2º Tienen dos lados iguales e igual el ángulo comprendido entre ambos.

Pongamos que los datos son las longitudes b y c y el ángulo $\hat{A}$. Se dibuja en primer lugar el ángulo $\hat{A}$. Su vértice es un vértice del triángulo. Sobre sus lados se llevan con un compás las medidas b y c, estos arcos son los dos vértices restantes.



3º Tienen un lado igual adyacente a dos ángulos también iguales.



Suponemos conocido el lado a y los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{C}$. Podemos construir el triángulo con facilidad también en este caso.

Se dibuja en primer lugar el segmento *a*. Sus extremos son dos vértices de nuestro triángulo. En sus extremos, se dibujan los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{C}$ de modo que el segmento *a* sea un lado de cada uno de ellos. Por último, se prolongan los lados de $\hat{B}$ y $\hat{C}$ hasta que se corten.

Actividades propuestas

46. Dibuja un triángulo en los siguientes casos:

a) Sus lados miden 12 cm, 10 cm y 8 cm.

b) Un lado mide 10 cm y sus ángulos adyacentes 30º y 65º.

c) Dos lados miden 10 cm y 8 cm y el ángulo comprendido entre ellos 50º.

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Milagros Latasa

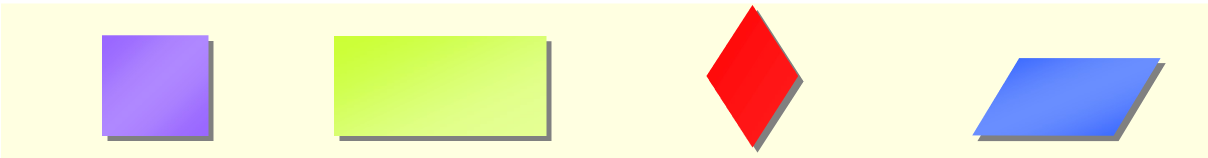
6. CUADRILÁTEROS

Un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados. Como otros polígonos, se clasifican en dos grandes grupos dependiendo del tipo de ángulos que tengan: cóncavos y convexos. Además, podemos distinguir varios tipos de cuadriláteros convexos.

6.1. Clasificación de los cuadriláteros convexos

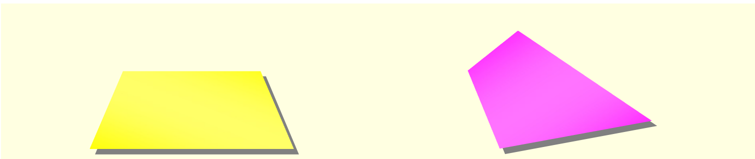
Los cuadriláteros convexos se clasifican en **paralelogramos** y **no paralelogramos.**

Un paralelogramo es un cuadrilátero que tiene los lados paralelos e iguales dos a dos. También sus ángulos son iguales dos a dos. Hay cuatro tipos de paralelogramos:



Cuadrado	**Rectángulo**	**Rombo**	**Romboide**
Los cuatro lados y los cuatro ángulos son iguales	*Sus lados son distintos y sus cuatro ángulos iguales*	*Los cuatro lados son iguales y los ángulos distintos*	*Lados y ángulos distintos*

Los cuadriláteros no paralelogramos pueden ser de dos tipos:

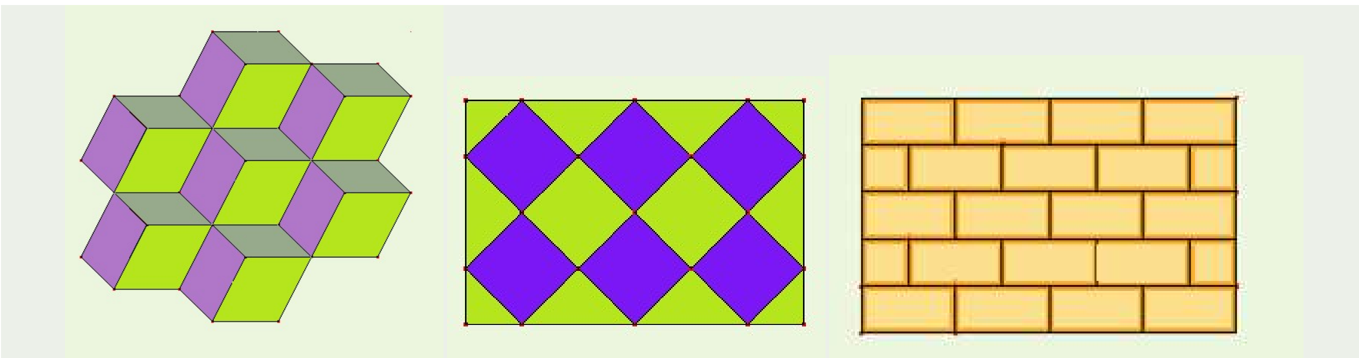


Trapecios	**Trapezoides**
Tienen exactamente dos lados paralelos	*No tienen ninguna pareja de lados paralelos*

Además, si un trapecio tiene dos lados iguales, se llama trapecio isósceles y si tiene dos ángulos rectos, se llama trapecio rectángulo.

Ejemplo:

Los paralelogramos tienen muchas y variadas aplicaciones en diseño y construcción:

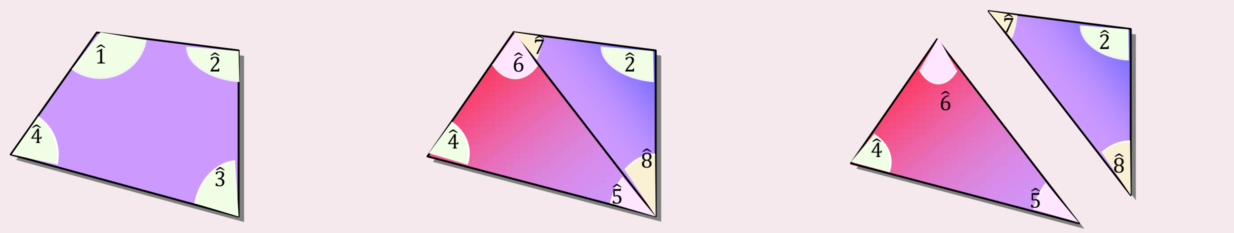


Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Milagros Latasa

6.2. Propiedades de los cuadriláteros

1. La suma de los ángulos de un cuadrilátero es 360 º.

Al trazar una de las diagonales de un cuadrilátero queda dividido en dos triángulos. La suma de los ángulos de ambos coincide con la suma de los ángulos del cuadrilátero.



Nombramos los ángulos del cuadrilátero

Dibujamos una diagonal y nombramos también los nuevos ángulos que aparecen :

$\hat{5}$, $\hat{6}$, $\hat{7}$ y $\hat{8}$

$\hat{6}+\hat{7}=\hat{1}$ $\quad$ $\hat{5}+\hat{8}=\hat{3}$

$$\hat{4}+\hat{5}+\hat{6}=180^\circ$$
$$\hat{2}+\hat{7}+\hat{8}=180^\circ$$
$$\hat{4}+\hat{5}+\hat{6}+\hat{2}+\hat{7}+\hat{8}=$$
$$=\hat{4}+\hat{3}+\hat{2}+\hat{1}=$$
$$=180^\circ+180^\circ=360^\circ$$

Otras propiedades de los cuadriláteros son

2. La diagonal de un paralelogramo lo divide en dos triángulos iguales.

3. Las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio.

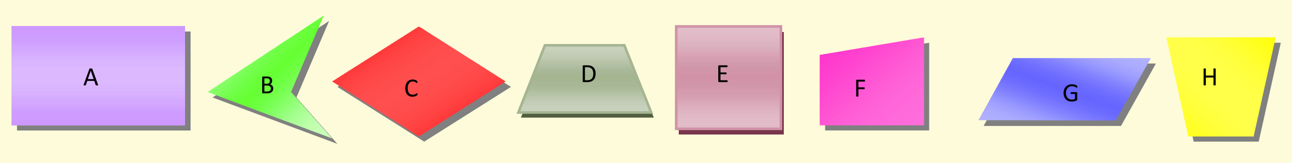
4. Las diagonales tanto de un rombo como de un cuadrado, son perpendiculares.

5. Al unir los puntos medios de un cuadrilátero, se forma un paralelogramo.

Actividades propuestas

47. Fíjate en el dibujo e indica qué cuadriláteros son:

a) cóncavos b) paralelogramos c) isósceles d) trapecios e) trapezoides f) regulares



48. Averigua qué tipo de paralelogramo aparece si se unen los puntos medios de:

a) un cuadrado b) un rombo c) un rectángulo d) un trapecio e) un trapezoide.

49. Los dos ángulos agudos de un romboide miden 32º. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos obtusos?

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Milagros Latasa

CURIOSIDADES. REVISTA

EUCLIDES, UN GRAN GEÓMETRA

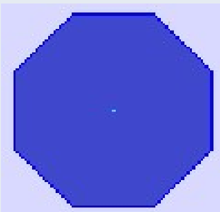
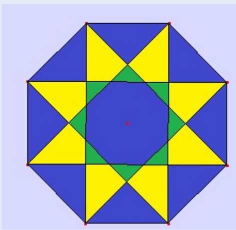
En el siglo III a. C. Euclides enseñaba Matemáticas en la escuela de Alejandría. Su obra principal fueron Los Elementos, que han sido durante siglos la base de la geometría.
Las aportaciones más interesantes de Euclides fueron definiciones y postulados como éstos:

"Un punto es aquello que no tiene partes"
"Una línea es una longitud sin anchura"
"Las extremidades de una línea son puntos"

POLÍGONOS REGULARES ESTRELLADOS

Un polígono regular estrellado puede construirse a partir del regular convexo uniendo vértices no consecutivos de forma continua.

Si N es el número de vértices del polígono regular convexo y M el salto entre vértices, la fracción N/M ha de ser irreducible, de lo contrario no se genera el polígono estrellado.

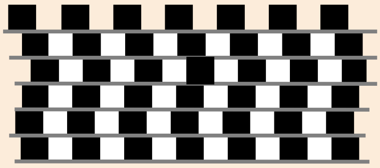
GRACE CHISHOLM YOUNG

(1868 - 1944)

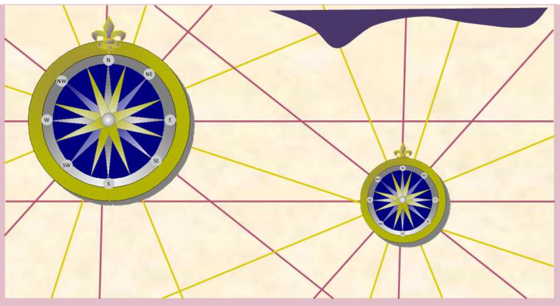
Grace Chisholm Young incluyó en su obra "Primer libro de Geometría" múltiples diagramas de figuras tridimensionales para ser recortadas y construidas.
Su innovadora forma de plantear la enseñanza de la Geometría ha trascendido hasta el momento actual.

ILUSIONES ÓPTICAS

¿Son rectas paralelas o curvas las líneas grises?



LA ROSA DE LOS VIENTOS



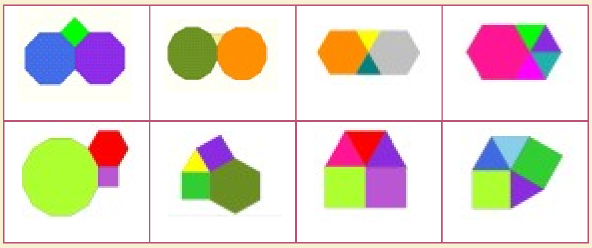
La *rosa de los vientos* ha aparecido en gráficas y mapas desde el año 1300. La base de su dibujo es un polígono estrellado. Las rectas que unen vértices opuestos son los rumbos de navegación

MOSAICOS

¿Sabes qué es un mosaico? Se llama mosaico a todo recubrimiento del plano mediante piezas que no pueden superponerse, ni pueden dejar huecos sin recubrir.

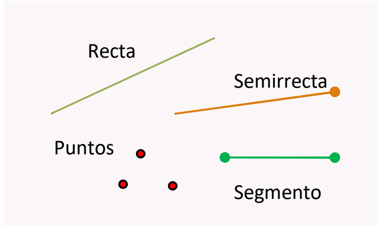
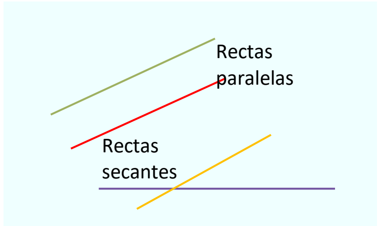
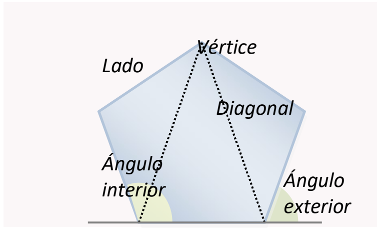
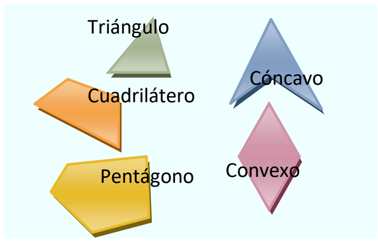
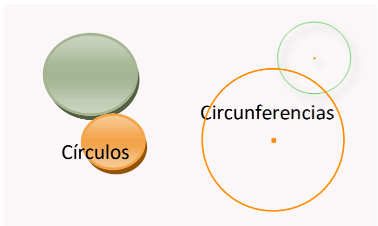
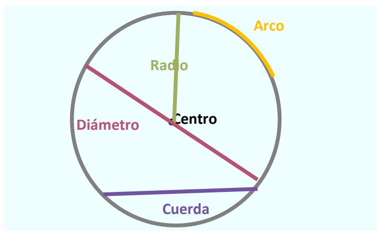
Los más sencillos son los **mosaicos regulares** formados por polígonos regulares todos iguales. Solo hay tres posibilidades para construir mosaicos regulares. Búscalas.

Un **mosaico semirregular** es el formado por polígonos regulares de forma que en cada vértice tengan la misma distribución. Solo hay ocho

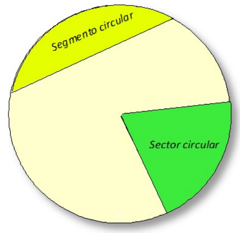
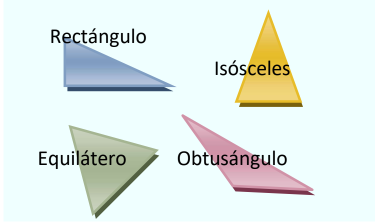
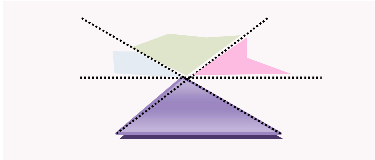
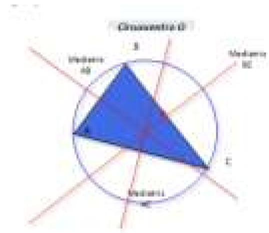
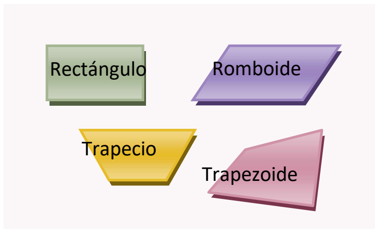


Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Milagros Latasa

RESUMEN

NOCIÓN	*DESCRIPCIÓN*	*Ejemplos*
Elementos del plano	Los elementos fundamentales del plano son: puntos, rectas, semirrectas, segmentos	
Posición relativa de dos rectas	Dos rectas distintas pueden ser paralelas o secantes	
Polígonos. Elementos de un polígono	Un polígono es una línea poligonal cerrada. Los elementos de un polígono son lados, vértices, diagonales, ángulos interiores y exteriores	
Clasificación de los polígonos	Por el tipo de ángulos cóncavos y convexos. Regulares o irregulares según tengan todos sus lados y ángulos iguales o no. Por el número de lados: triángulos, cuadriláteros, pentágonos, hexágonos, …	
Circunferencia y círculo	Una circunferencia es una línea cerrada que cumple que todos sus puntos están a la misma distancia de un punto fijo llamado centro. Un círculo es la parte de plano que encierra una circunferencia.	
Elementos de una circunferencia	Centro, radio, diámetro, cuerda, arco.	

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Milagros Latasa

Sector circular, segmento circular y corona circular	Un sector circular es la porción de círculo comprendida entre dos radios. Un segmento circular es la porción de círculo comprendido entre una cuerda y el arco que tiene sus mismos extremos. Una corona circular es la superficie comprendida entre dos círculos concéntricos.	
Clasificación de triángulos	Según los ángulos acutángulos, rectángulos y obtusángulos. Según los lados: equiláteros, isósceles y escalenos,	
Propiedades	La suma de los ángulos de un triángulo es 180º. En todo triángulo, cualquier lado es menor que la suma de los otros dos.	
Rectas y puntos notables en un triángulo	Las mediatrices concurren en el circuncentro, las bisectrices en el incentro, las alturas en el ortocentro y las medianas en el baricentro.	
Clasificación de los cuadriláteros	Paralelogramos si sus lados son paralelos e iguales dos a dos y no paralelogramos. Los paralelogramos se dividen en cuadrados, rectángulos, rombos y romboides. Los no paralelogramos pueden ser trapecios o trapezoides.	

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Milagros Latasa

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Dibuja una recta horizontal y otra que forme un ángulo de 60 º con ella.
2. Dibuja cuatro rectas de modo que tres de ellas pasen por un mismo punto y la cuarta sea paralela a una de ellas.
3. Dibuja dos rectas secantes y un segmento que tenga un extremo en cada una de ellas.
4. Si dos rectas *r* y *s* son perpendiculares y trazas una tercera recta *p* paralela a una de ellas, por ejemplo, a *r*, ¿cómo son las rectas *s* y *p*? Haz un dibujo.
5. Un ángulo mide ¾ de recto. Expresa esta medida en grados, minutos y segundos.
6. Calcula:

   a) 54º 25´ 10´´ + 32 º 17´ 14´´

   b) 14 º 30´ 15´´+ 62 º 1´ 16´´ + 42 º 1´´

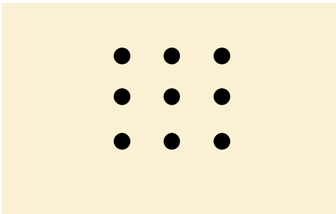
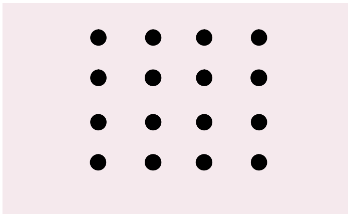
   c) 15 º 23' + 73 º 10'' + 70 º 28´ 38´´

   d) 45 º 45´ 45´´ - 12 º 48´ 85 “

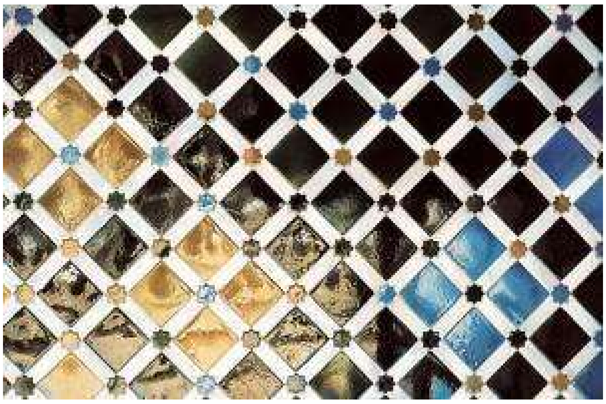
   e) 67º 4´ 23´´ - 15 º 4´ 37''

   f) 33 º 32´ 1 ´´ - 15 º 35´ 20''

7. La suma de dos ángulos es 125º 46' 35''. Si uno de ellos mide 57º 55' 47'', ¿cuánto mide el otro?
8. Cinco guardas de seguridad deben repartirse por igual un servicio de vigilancia de 24 horas. Expresa en horas y minutos el tiempo que debe permanecer vigilando cada uno de ellos
9. En un tablero de 3 × 3, ¿cuál es el mayor número de lados que puede tener un polígono? ¿Y en uno de 4 × 4?

10. La fotografía representa un mosaico de La Alhambra de Granada. Observa que está constituido por motivos geométricos.



   a. Este mosaico tiene dos tipos de polígonos regulares: ¿Cuáles son?
   b. Describe el polígono blanco. ¿Es cóncavo o convexo?
   c. El mosaico de la fotografía no es un mosaico regular. Si lo fuera estaría formado únicamente por polígono regulares todos iguales.
   d. Describe un octógono regular: número de lados, cuánto mide su ángulo central, cuánto mide sus ángulos interiores…

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Milagros Latasa

11. Calcula el número de diagonales que tienen los siguientes polígonos:

    a) Rombo b) trapecio c) trapezoide d) cuadrado e) rectángulo f) hexágono.

12. Dibuja un hexágono regular y un cuadrado. Marca el centro y sitúa en cada uno de ellos dos apotemas y dos radios.

13. Dibuja un decágono y todas sus diagonales.

14. Completa:

    a. Un triángulo rectángulo tiene un ángulo …………………..

    b. Un triángulo……………………………. tiene un ángulo obtuso.

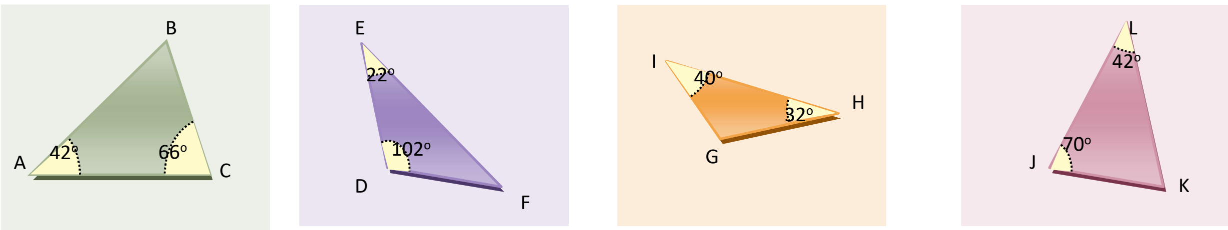
    c. Un triángulo……………………………. tiene los tres ángulos agudos.

15. Construye un triángulo sabiendo que *a = 9 cm*, *b = 7 cm* y el ángulo *C = 50* °.

16. ¿Se puede construir un triángulo de modo que sus ángulos midan 105º, 45º y 35º? Razona tu respuesta.

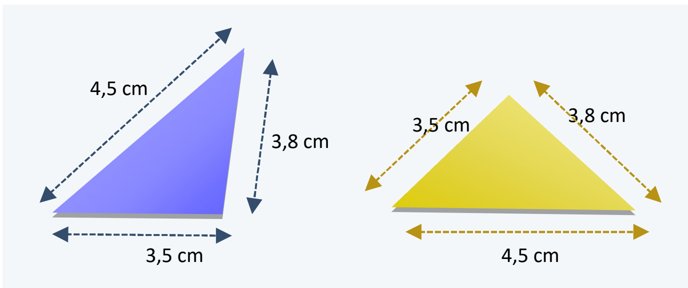
17. Dibuja un triángulo obtusángulo. ¿Crees que las tres alturas son iguales?

18. Observa las figuras y calcula los ángulos que faltan:



19. Dados tres segmentos de cualquier medida, ¿es siempre posible construir un triángulo? ¿Por qué? Recorta tiritas de papel de longitudes de 10 cm, 8 cm y 6 cm, ¿puedes construir un triángulo con ellas?

20. ¿Puedes asegurar que son iguales los triángulos de la figura derecha?



21. Si uno de los ángulos de un triángulo rectángulo es de 50º, indica el valor de los demás. Dibuja un triángulo rectángulo con estos ángulos y un cateto de 5 cm.

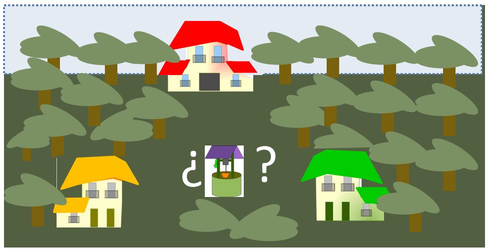
22. Si dos de los ángulos de un triángulo miden 30º y 70º, ¿cuánto mide el menor de los ángulos que forman las bisectrices correspondientes?

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Milagros Latasa

23. Construye un triángulo sabiendo que $a = 10$ *cm*, *los* ángulos, $B = 45°$, $C = 50°$.

24. Calcula el incentro del triángulo anterior y dibuja la circunferencia inscrita al triángulo.

25. ¿En qué punto colocarías un pozo para que tres casas de campo, no alineadas, estén a la misma distancia del mismo? Haz un gráfico esquemático en tu cuaderno y calcula el punto en tu dibujo.



26. Desde uno de los vértices de un hexágono se trazan tres diagonales que dividen al polígono en cuatro triángulos.
    a. Calcula la suma de los ángulos del hexágono.
    b. Si el hexágono es regular, calcula el valor de cada uno de sus ángulos interiores.
    c. En el mismo supuesto, calcula el valor del ángulo central.

27. Dibuja un polígono de 9 lados. ¿Cómo se llama?
    a. ¿Cuántos triángulos puedes formar al trazar todas las diagonales que parten de un vértice?
    b. ¿Cuánto vale la suma de los ángulos del polígono inicial?

28. Señala si las siguientes afirmaciones son verdaderas:

"Si las diagonales de un cuadrilátero son perpendiculares, se trata de un rombo"

"Los trapecios rectángulos tienen todos sus ángulos iguales"

"Los rectángulos son polígonos equiángulos".

"Las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio"

Justifica tus respuestas y haz un dibujo que acompañe a cada una.

29. Consigue un hilo grueso y un trozo de papel de color. Recorta el hilo o el trozo de papel, según proceda y construye:

a) Una circunferencia, b) un círculo, c) un radio, d) un segmento circular, e) un sector circular.

30. Dibuja una circunferencia de 3 cm de radio y dos arcos iguales, así como las cuerdas que tienen sus mismos extremos. Comprueba que las cuerdas también son iguales.

31. En el dibujo hecho para dar respuesta al ejercicio anterior, traza dos diámetros perpendiculares a las cuerdas. Mide después la distancia de cada cuerda al centro. ¿Qué observas?

32. Dibuja dos rectas paralelas de modo que la distancia entre ellas sea de 5 cm. Dibuja después una circunferencia tangente a ambas.

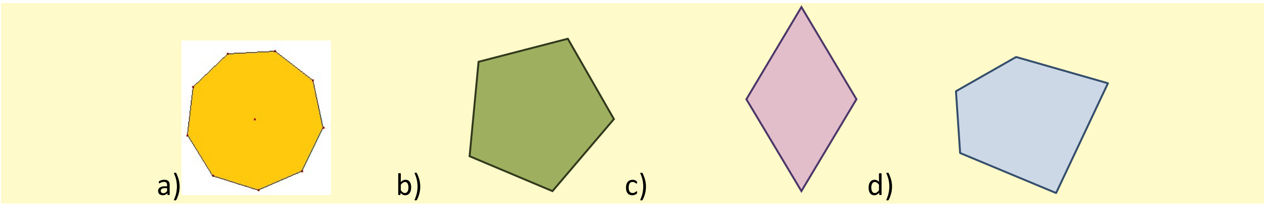
Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Milagros Latasa

AUTOEVALUACIÓN

1. Dibuja tres puntos *A, B, C* que no estén alineados y:
   a. Las recta *r* que pasa por *A* y *B*, y la recta *s* que pasa por *B* y *C*.
   b. La recta perpendicular a *r* que pasa por el punto *C*.
   c. La recta perpendicular a *s* que pasa por *B*.
   d. La recta paralela a *s* que pasa por *A*.
2. Calcula el complementario y suplementario de los ángulos siguientes:
   a) 54º b) 73º 40´ 56´´
3. ¿Cuánto valen los ángulos interior y exterior de un pentágono regular?

4. Dibuja un hexágono y todas sus diagonales.

5. Clasifica los siguientes polígonos, completando la tabla:



POLÍGONO	CÓNCAVO	REGULAR	EQUIÁNGULO	EQUILÁTERO	POR EL NÚMERO DE LADOS ES UN
a)	NO	SÍ	SI	SI	ENEÁGONO
b)					
c)					
d)					
e)			SI	NO	CUADRILÁTERO

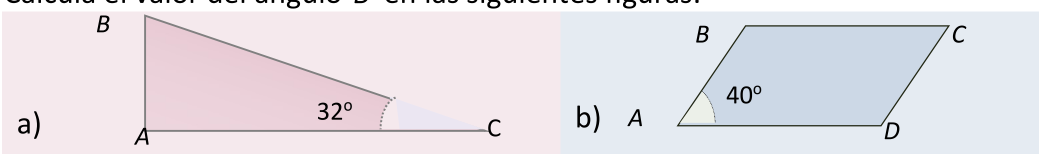
6. Dibuja un triángulo cuyos lados miden 3 cm, 6 cm y 5 cm y traza sus tres alturas.

7. a) Dibuja un sector circular de radio 4 cm de modo que su amplitud sea de 82º. b) Dibuja una corona circular definida por dos círculos de radios 4 cm y 2 cm.

8. Dibuja un triángulo en el que *a* = 6 cm, $\hat{B} = 30^o$ y $\hat{C} = 45$º. Calcula después su circuncentro.

9. Dibuja un trapecio isósceles, un trapecio rectángulo, un romboide, traza sus diagonales y estudia si se cortan en el punto medio.

10. Calcula el valor del ángulo $\hat{B}$ en las siguientes figuras:



Autora: Milagros Latasa Asso
Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Milagros Latasa