MATEMÁTICAS

1º DE ESO

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Textos Marea Verde

I.S.B.N. - 13: 978-84-695-9891-7

I.S.B.N. - 10: 84-695-9891-0

CAPÍTULO 1: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Adela Salvador

Revisores: Nieves Zuasti y Sergio Hernández

Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

Índice

Resumen

¿Qué es un problema? ¿Cómo enfrentarse a unos problemas nuevos que, quizás, no sean fáciles? ¿Es posible dar normas, conocer estrategias, para resolver mejor cualquier tipo de problema?

Un **problema** matemático es una situación en la que hay un objetivo que conseguir superando una serie de obstáculos, siempre que el sujeto que afronta la situación no conozca procedimientos o algoritmos que le permitan, de inmediato, alcanzar el objetivo.

Lo que para una persona es un problema, para otra puede ser un simple **ejercicio**, o mucho más que un problema, una **investigación**. La diferencia está en los conocimientos previos, y si para resolverlo debe hacerse preguntas, añadir hipótesis al enunciado.

Ante un auténtico problema muchas veces no sabe uno ni siquiera por dónde empezar. Veremos algunas **estrategias de pensamiento** útiles en toda clase de problemas.

Pensamos que enseñar a resolver problemas es lo mejor que se puede enseñar, pues el mundo evoluciona rápidamente y lo que hoy nos parece imprescindible, mañana puede haber quedado obsoleto, mientras que resolviendo problemas se prepara a las personas a enfrentarse a lo desconocido y los procesos mentales nunca envejecen.

Hay estudios que confirman que la enseñanza expresa de las etapas, cadencias, técnicas y estrategias consigue mejores resultados que la mera práctica espontánea.

Autora: Adela Salvador
Revisores: Nieves Zuasti y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. FASES EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

Ejemplo 1:

1. La madre de María observa que el cuentakilómetros de su coche marca 24.312 km. ¿Cuántos kilómetros le faltan para la próxima revisión, que debe ser cada 5.000 km?

Siempre que tengas que resolver un problema es conveniente que sigas los siguientes pasos:

Fase 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Lee con cuidado el enunciado, y piensa:

- ¿Cuáles son los datos?
- ¿Qué piden?

Fase 2: Busca una buena estrategia.

Es un problema con operaciones con números naturales, luego:

- ¿Qué operaciones aritméticas debo hacer? ¿Habrá que sumar? ¿Habrá que multiplicar? ¿Habrá que restar? ¿Habrá que dividir?

Fase 3: Lleva adelante tu estrategia

Ahora sí, ahora resolvemos el problema:

Si multiplicas 5.000 por 5 obtienes 25.000. Por tanto, la próxima revisión debe ser a los 25.000 km, luego a la madre de María le faltan 25.000 – 24.312 = 688 km para hacer la revisión.

Fase 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable. Comprueba la estrategia.

Si sumas a 24.312 los 688 km del resultado tenemos los 25.000 km de la próxima revisión.

Actividades propuestas

1. ¡Inventa problemas similares!

2. Estima cuánto mide tu aula de largo y cuánto de ancho. Se desea poner un zócalo que vale a 6 € el metro. ¿Cuántos euros costará ponerlo?

3. El cuentakilómetros del padre de Juan marca 64.731 km. Si las revisiones son cada 5.000 km, ¿cuántos kilómetros le faltan para la próxima revisión?

4. La piscina de Inés tiene forma de rectángulo. Sus lados miden 10 m de largo y 7 m de ancho. Desea rodear la piscina con una valla. El metro de valla vale 12 €. ¿Cuánto costará hacer la valla?

Autora: Adela Salvador
Revisores: Nieves Zuasti y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2. ESTRATEGIAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

2.1. Estima el resultado

En muchas ocasiones nos basta con estimar un resultado, no con la solución exacta.

Ya has estimado las dimensiones de tu aula.

A la madre de María, por ejemplo, para estar tranquila le basta saber que le faltan más de 600 km para la próxima revisión. Mientras que el padre de Juan quizás no necesite saber que exactamente le faltan 65.000 - 64.731 = 269 km para la próxima revisión, sino estimar que le faltan menos de 300 km para empezar a preocuparse por hacerla.

Para realizar buenas estimaciones es conveniente haber practicado mucho.

Actividades propuestas

Intenta ahora tú estimar las soluciones de estos problemas:

5. Si tu paga semanal es de ocho euros, y ahorras toda la paga de un mes ¿Podrías comprarte un ordenador portátil (que estimas que vale unos 1.500 euros)? ¿Y con todas las pagas de un año?

6. Un ascensor sólo puede con 500 kg, ¿cuántos de tus amigos piensas que podrían subirse?

7. Informan que a una manifestación han ido 40.000 personas, ¿cómo crees que las han contado?

8. Si toda la población mundial se diera la mano, ¿qué longitud se formaría?

9. ¿Cuánta gente cabe de pie en tu aula?

10. ¿Cuántos kilómetros andas al año?

11. ¿Cuántos granos de arroz hay en un kilo?

2.2. Experimenta, juega con el problema

Al experimentar con los datos del problema es fácil que se te ocurra qué debes hacer con ellos.

Actividades propuestas

12. a) Piensa un número de tres cifras.

b) Escríbelo al revés y resta el menor del mayor.

c) Escribe el resultado al revés y súmalo al resultado de la resta.

d) Escribe la solución final.

e) Prueba con varios números, ¿qué observas? ¿Hay algún caso en el que no se obtenga la misma solución?

f) Prueba con cuatro cifras. ¿Obtienes resultados del mismo tipo que las anteriores?

g) ¿Te atreves con cinco cifras?

Autora: Adela Salvador
Revisores: Nieves Zuasti y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.3. Hazlo más fácil para empezar

13. "Las torres de Hanoi": Cuenta la leyenda que en tres agujas de oro hay sesenta y cuatro discos todos de distinto tamaño, colocados de mayor a menor. Unos monjes cambian continuamente de sitio estos discos, uno cada segundo con las siguientes reglas: En cada movimiento sólo se puede mover un disco. Y no podemos colocar nunca un disco encima de otro de menor tamaño. Cuando hayan pasado todos los discos de una de las agujas a otra se acabará el mundo. ¿Cuánto falta para que termine el mundo?

Para enfrentarte a este problema, ten en cuenta, lo primero, las **fases**, intenta entender bien el problema.

Luego, **hazlo más fácil para empezar**. En lugar de con 64 discos, empieza sólo con un disco. A continuación, con dos, con tres... Manipula los objetos. Haz un esquema.

14. Cuadrado Mágico

Con los números del 10 al 18 completa en tu cuaderno el cuadro de forma que obtengas la misma suma en todas direcciones, en horizontal, en vertical, e incluso en las dos diagonales.

- Hazlo más fácil, comienza con un cuadrado mágico con los números del 1 al 9. ¿Cuánto debe sumar cada fila? ¿Cuál debe ser el número de la casilla central? ¿La suma de 1 + 2 + … + 9 = …? ¿Qué número dividido entre 3 nos da: …?

Luego hazte las mismas preguntas con los números del problema inicial.

2.4. Haz un diagrama, un esquema...

En muchas ocasiones hacer un diagrama nos resuelve el problema.

Actividades propuestas

15. "Color del pelo": Tres amigas A, B, C, una rubia, otra morena y otra pelirroja, están jugando a las cartas sentadas en una mesa circular, cada una pasa una carta a la que está a su derecha. La amiga B ha pasado una carta a la rubia. La amiga A ha pasado una carta a la que ha pasado una carta a la pelirroja. ¿Cuál es el color del pelo de A, B y C?

Al hacer un esquema y analizar las dos configuraciones que existen, se observa que una de ellas es inconsistente, ya que uno de las amigas es a la vez rubia y pelirroja. La solución es la otra configuración, que es consistente con el enunciado.

16. Una persona es 80 cm más alta que la mitad de su altura. ¿Qué estatura tiene?

Lee y comprende con cuidado el enunciado, dibuja un esquema y sabrás la solución.

17. Quieren cruzar un río en una barca tres mujeres y tres maridos celosos, si sólo caben dos personas en la barca, y nunca pueden quedar solos una mujer y un marido que no sean pareja, ¿cómo pueden hacerlo?

2.5. Mira si tu problema se parece a alguno que ya conozcas

Es posible que tu problema tenga el mismo aire que otro que ya has resuelto, lo que puede proporcionarte pistas útiles para resolver el nuevo.

Actividades propuestas

18. Observa las ofertas de una tienda:

	Precio anterior	*Oferta*
Camisetas	15 euros	12 euros
Chaquetas	40 euros	30 euros
Pantalones	32 euros	28 euros
Camisas	25 euros	21 euros

Una persona aprovecha estas ofertas y compra cinco camisas, una chaqueta, dos pantalones y tres camisetas. Averigua cuánto se gasta y cuánto se ahorra por comprar esa ropa en ofertas.

19. Se han apuntado 25 estudiantes a un viaje. Al pagar el billete 5 de ellos se dan cuenta que no han traído dinero. El resto decide pagárselo, y abonan cada uno 3 €. ¿Cuánto cuesta cada billete?

2.6. Escoge una buena notación

Actividades propuestas

20. Calcula mentalmente el producto de dos números y luego suma un tercero:

a) 5 x 9 + 26 = b) 200 x 7 + 128 = c) 60 x 8 + 321 =

Ahora al revés: nos dan el resultado y buscamos, de la forma anterior, con qué números puede obtenerse. Por ejemplo, nos dan 1000 y decimos 1000 = 100 x 7 + 300.

Sigue ese modelo para expresar los números siguientes: 2000, 4000 y 5500.

21. ***Emmy Noether***, una ilustre mujer matemática, nació el 23 de marzo de 1882 y murió el 14 de abril de 1935.

a) ¿Cuántos años tenía al morir?

b) ¿Cuántos años han pasado desde el año de su muerte?

c) ¿Cuántos años faltan para celebrar el centenario de su muerte? ¿Cuántos meses? ¿Cuántos días?

3. EMOCIONES Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

3.1. ¡Eureka!

Ya sabes que **Arquímedes** estaba en la bañera cuando exclamó **¡Eureka**! pues había descubierto una importante propiedad de los cuerpos sumergidos. Algo parecido ocurre en muchas ocasiones. Tú mismo, si trabajas en un problema, luego tu inconsciente continua trabajando y, de repente, cuando menos lo esperas ¡Eureka!, tienes la solución. Esta situación, esta emoción positiva y gratificante, también recibe el nombre de ¡**Ajá**!

En la Historia de la Ciencia se conocen muchas de estas situaciones. Busca alguna y reflexiona sobre cómo te sientes al resolver un problema, que en un primer momento, parecía imposible.

3.2. Bloqueos

Pero también pueden aparecer emociones negativas, a las que llamamos **bloqueos**. Muchas veces, al intentar resolver un problemas, éste nos parece imposible, nos desanimamos, entran ganas de dejarlo todo. Esto es un bloqueo. Pero eso le pasa a todo el mundo. Hay que sacar fuerzas y continuar. Buscar la causa del bloqueo.

Veamos algunos problemas sencillos que resultan complicados pues en ellos suele producirse un bloqueo. Intenta primero resolverlos y luego, si no te salen, lee la ayuda.

22. Sin levantar el lápiz une con 4 trazos rectos estos nueve puntos.

o o o

o o o

o o o

Dibuja en tu cuaderno nueve puntos como los de la figura y intenta unirlos, con 4 trazos sin levantar el lápiz.

Recuerda, lo primero es comprender el enunciado. Prueba a hacerlo. ¿Lo has conseguido? Estupendo. No lo consigues, inténtalo un poco más.

Bloqueo: Si no lo consigues es porque estás presuponiendo algo que no se ha dicho y es que no puedes salir del recinto limitado por los puntos. Haz trazos más largos y lo conseguirás enseguida.

23. Con 3 palillos, todos iguales, puedes construir un triángulo equilátero. Con 5 palillos puedes construir 2 triángulos equiláteros, ¿cómo podemos construir cuatro triángulos equiláteros iguales con seis palillos con la condición de que el lado de cada triángulo sea la longitud del palillo?

- Experimenta, juega con el problema. ¡Lo has conseguido! Entonces no has tenido un bloqueo.

Bloqueo: Nadie ha dicho que no pudieras salir del plano. Ahí está el bloqueo. Lo consigues con un tetraedro regular.

4. JUEGOS Y PROBLEMAS

¿Te gusta jugar? Para ser un buen jugador en juegos de estrategia puedes utilizar las técnicas que has aprendido con la resolución de problemas.

Fases: Lo primero, naturalmente, comprender bien las reglas del juego, que es similar a comprender el enunciado. Lo segundo, jugar, hasta encontrar una estrategia ganadora. Luego jugar y ver si tu estrategia es realmente buena. Por último, generalizar, intentar mejorar la estrategia.

Actividades propuestas

Utiliza todo lo que has aprendido.

24. ¡Y ahora un juego! **Las tres en raya**

Se juega de dos en dos. Copia en el cuaderno la tabla siguiente:

497	315	69	77
115	33	90	22
225	161	46	55
355	142	135	213

Una persona escoge dos números, uno del conjunto A = {2, 3, 5, 7} y otro del conjunto B = {11, 45, 71, 23}. Los multiplica mentalmente, y pone su marca (o una ficha, o una bolita de papel) sobre el número resultante. La otra persona hace lo mismo cuando le toque el turno. Gana quien pone tres marcas en línea recta.

Ahora ¡*a jugar*!

25. Realiza el mismo juego de la actividad anterior con este otro tablero, y con los grupos de números: A = {2, 5, 7, 4} y B = {3, 11, 9, 1}.

63	7	21	6
22	4	15	5
45	2	55	44
12	36	18	77

- Inventa con otros números tu propio tablero de juegos.

26. Otro juego

Es un juego de **calculadora** y puede ser un juego cooperativo; un juego en el que se ponen en común las diferentes estrategias y se discute sobre el mejor procedimiento, el más sencillo o el más original.

Consta de cuatro fichas como las de la figura, donde se indican las teclas que está permitido pulsar, y el resultado, en rojo, al que hay que llegar.

2 4	5 6	1 0	3 7
+ –	x /	+ –	+ –
/ =	+ =	x =	x =
34	147	123	93

- El juego consiste, en primer lugar, en obtener el resultado en la calculadora.
- Debes anotar todos los métodos encontrados. Piensa y anota en tu cuaderno cuál es el procedimiento que te ha resultado más eficaz.
- Escribe, utilizando paréntesis, las expresiones que ha utilizado la calculadora.
- Modifica el juego confeccionando nuevas fichas, modificando éstas con otras teclas y con otros resultados.

27. ¡Hagamos magia!

Dile a una persona que piense un número de tres cifras, que escriba ese número y, de nuevo, las tres cifras, para formar un número de seis cifras. Pídele que lo divida entre 7, luego entre 11 y luego entre 13. Se quedará sorprendida al comprobar que el resultado es el número que escribió. ¿Sabes por qué?

28. *Resuelve el crucigrama:* Cópialo en tu cuaderno y resuélvelo.

	x		x		=	24
x		x		x		
	x		x		=	35
x		x		x		
	x		x		=	30
=		=		=		
6		50		84		

CURIOSIDADES. REVISTA

ELLAS Y ELLOS INVESTIGAN PARA RESOLVER PROBLEMAS

El progreso que ahora disfrutamos ha sido posible gracias a la iniciativa y al trabajo de miles de hombres y mujeres. Superaron retos y resolvieron problemas para los que necesitaron muchos conocimientos matemáticos

CONSTRUYERON PUENTES QUE NOS COMUNICAN

DISEÑARON AVIONES QUE SOBREVUELAN OCÉANOS

LA INFORMÁTICA QUE NOS INVADE

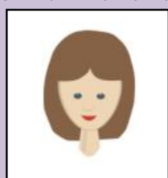
BARCOS QUE SURCAN LOS MARES

LA ELECTRICIDAD QUE LLEGA A TODAS PARTES

LA REINA DE LAS CIENCIAS DEL S. XIX

Mary Somerville dedicó su vida al estudio de las matemáticas y la física. Tradujo al inglés La Mecánica Celeste de Laplace, uno de los tratados científicos más importantes de su época. Escribió numerosas obras y artículos, viajó por Europa y se relacionó con los principales científicos. La Reina Victoria le concedió una pensión vitalicia en reconocimiento a su trabajo. Fue una mujer feliz. Mirad lo que escribió:

"Tengo 92 años..., mi memoria para los acontecimientos ordinarios es débil pero no para las matemáticas o las experiencias científicas. Soy todavía capaz de leer libros de álgebra superior durante cuatro o cinco horas por la mañana, e incluso de resolver problemas"



Autora: Adela Salvador
Revisores: Nieves Zuasti y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

Problema	Es una situación en la que hay un objetivo que conseguir superando una serie de obstáculos, siempre que el sujeto que afronta la situación no conozca procedimientos o algoritmos que le permitan alcanzar el objetivo.
Fases en la resolución de un problema	Fase 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema. Fase 2: Busca una buena estrategia. Fase 3: Lleva adelante tu estrategia. Fase 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable. Comprueba la estrategia.
Algunas estrategias	➢ Estima el resultado. ➢ Experimenta, juega con el problema. ➢ Hazlo más fácil para empezar. ➢ Haz un diagrama, un esquema... ➢ Mira si tu problema se parece a alguno que ya conozcas. ➢ Escoge una buena notación.
Emociones y resolución de problemas	Emoción positiva: Idea feliz. ¡Aja! ¡Eureka! Emoción negativa: Bloqueo
Juegos de estrategia	Para ser un buen jugador en juegos de estrategia puedes utilizar las técnicas que has aprendido con la resolución de problemas.

Autora: Adela Salvador
Revisores: Nieves Zuasti y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. La Jefe de Estudios de un colegio ha anotado en un cuadro el número de alumnos y alumnas que han faltado a clase. En ese colegio hay ocho clases de Secundaria.

	L	M	X	J	V	TOTAL
1º A	2	3	5	1	3	
1º B	3	4	1	3	2	
2º A	2	6	3	4	3	
2º B	5	1	0	2	1	
3º A	4	2	3	1	0	
3º B	6	3	1	2	3	
4º A	2	3	1	4	0	
4º B	4	2	2	2	0	
TOTAL						

Copia la tabla en tu cuaderno y resuelve allí el ejercicio.

a) Completa las últimas fila y columna del cuadro.

b) Sabiendo que el número total de alumnos y alumnas de ese colegio en Secundaria es de 205, averigua cuántos había en el colegio el jueves.

2. **"El extraordinario 37"**

37 x 3 = 111

37 x 6 = 222

37 x 9 = 333

Consigue tú ahora

444, 555, 666...

3. En una cuadrícula de cuatro por cuatro, coloca los números del 1 al 16 en los cuadrados, cada uno en uno. Multiplica los números de cada dos cuadrados adyacentes y escribe el producto en cada arista. Suma los números que hay en cada arista. Queremos que la suma sea lo menor posible, ¿Cómo debemos colocar los números del 1 al 16?

Autora: Adela Salvador
Revisores: Nieves Zuasti y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

4. Triángulos

$$1 \times 9 + 2 = 11$$

$$12 \times 9 + 3 = 111$$

$$123 \times 9 + 4 = 1111$$

$$1234 \times 9 + 5 = 11111$$

Comprueba que el triángulo sigue hasta llegar a +10.

5. Estudia las maneras de dividir un cuadrado en cuatro partes iguales en forma y en área.

6. Números en fuga: Estas operaciones se han quedado sin resolver por falta de algunos números. ¿Puedes completarlas? Cópialo en tu cuaderno y resuélvelo.

a)
3 □ 8 9 □
4 6 4 1 0
□ 2 5 □ 6
1 □ 9 5 3

b) 4 □ 2 : □ 5 = 17 resto 07

c) 2 □ 3□ x 75 = 2□0050

7. Dos mujeres habían ido al mercado a vender 30 manzanas cada una. La primera tenía la intención de vender cada dos manzanas por un €. ¿Cuánto pensaba ganar? La segunda quería vender cada tres manzanas por dos €. ¿Cuánto ganaría? Pero no querían hacerse la competencia por lo que llegaron al siguiente acuerdo: vender ambas cada cinco (2 + 3) manzanas por tres (1 + 2) €. Lo habían vendido todo. ¿Han ganado 36 €? ¡Les sobra un €! Con la venta anterior iban a ganar 35 €, y han ganado 36 €. ¿Puedes explicarles qué ha ocurrido?

8. Sofía, que es muy sabia, se lo ha explicado, y se han puesto tan contentas que han decidido ir a comer las tres juntas. Pagaron la comida con 30 €, y el camarero les devolvió 5 €. Cada una se quedó con un €, pero sobraban 2 que dejaron de propina. ¡De nuevo tenían un problema! ¡Ahora faltaba un €! Han pagado 10 – 1 = 9 € cada una, que por 3 son 27 €, más 2 de propina son 27 + 2 = 29. Y en un principio tenían 30. ¡Les falta uno! Explica lo sucedido.

9. Letras y números: Si sigues el orden alfabético estas cuatro operaciones dan como resultado letras con las que podrás formar una palabra:

(8 + 10): 3 + 7 x 1 – 5=

(23 – 15) + 2 x 4 =

1 x 4 + 6 : 2 + 5 x 1 =

45 x (1 + 0) – 45 + 1 =

Cópialo en tu cuaderno y resuélvelo.


A. I. Fernández

10. "El lobo, la cabra y el repollo": Un hombre tiene que cruzar un río en una barca con un lobo una cabra y un repollo, en la que sólo puede ir él y una de las tres cosas, teniendo en cuenta que si no está el hombre delante, el lobo se come la cabra y la cabra se come el repollo ¿Cómo consigue transportarlos al otro lado del río?

11. Juan, Jaime y Jorge tienen cada uno dos oficios. Hay un barbero, un chofer, un tabernero, un músico, un pintor y un jardinero. ¿A qué se dedica cada uno de ellos? Sabiendo que:

1: El chófer se burló del músico porque tenía el pelo largo

2: El músico y el jardinero pescan con Juan

3: El pintor compró al tabernero vino

4: El chófer cortejaba a la hermana del pintor

5: Jaime debía 5 dólares al jardinero

6: Jorge vio a lo lejos a Jaime y al pintor.

12. Sorpresas del 8 y el 9:

$0 \cdot 9 + 8 = 8$

$9 \cdot 9 + 7 = 88$

$98 \cdot 9 + 6 = 888$

$987 \cdot 9 + 6 = 8888$

$9876 \cdot 9 + 6 = 88888$

$98765 \cdot 9 + 6 = 888888$ ¿Te animas a continuar la pirámide?

13. Nos dan 16 bolas del mismo tamaño, pero una de ellas pesa un poco menos que las otras. Para averiguar cuál es disponemos de una balanza de dos platos. ¿Cuál es el mínimo número de pesadas que necesitas efectuar para, sin tener en cuenta la buena suerte, determinar la bola? ¿Y si son 32 bolas? ¿Y si son 27? ¿Y si 13? Generaliza el problema a cualquier número de bolas.

14. Un rajá dejó a sus hijas cierto número de perlas y determinó que se hiciera del siguiente modo: La hija mayor tomaría una perla y un séptimo de lo que quedara. La segunda hija recibiría dos perlas y un séptimo de lo que restante. La tercera joven recibiría tres perlas y un séptimo de lo que quedara. Y así sucesivamente. Hecha la división cada una de las hermanas recibió el mismo número de perlas. ¿Cuántas perlas había? ¿Cuántas hijas tenía el rajá?

15. ¿Cuál es el máximo número de ángulos rectos que puede haber en un polígono de *n* lados?

Autora: Adela Salvador
Revisores: Nieves Zuasti y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

PARA EL PROFESORADO

En la enseñanza de las matemáticas es conveniente, como afirmaba *Hans Freudenthal*, "*hacer matemáticas en la clase de matemáticas*" y una forma de conseguirlo, es organizar clases de resolución de problemas o proponer pequeñas investigaciones.

Al investigar a los buenos resolutores de problemas se han obtenido dos conclusiones: La primera es que **la capacidad para resolver problemas mejora con la práctica**, la segunda es que el análisis de los métodos matemáticos, así como el de las distintas estrategias que intervienen en la resolución de problemas también mejora dicha capacidad. Hay estudios que confirman que la enseñanza expresa de las etapas, cadencias, técnicas y estrategias consigue mejores resultados que la mera práctica espontánea. Es preciso resolver muchos problemas. Esa ayuda sólo puede ser eficaz si se ejerce sobre problemas concretos y no como pre-requisito teórico.

Trabajar en la resolución de problemas es lo mejor que se puede proporcionar a una persona, ya que ayuda a equiparla para su actividad integral, no solamente en lo que se refiere a sus capacidades matemáticas. El mundo evoluciona rápidamente, y tenemos la obligación de preparar personas que en el futuro van a enfrentarse a situaciones desconocidas. Los procesos mentales no se hacen obsoletos.

Un **problema matemático** es una situación en la que hay un objetivo que conseguir superando una serie de obstáculos, siempre que el sujeto que afronta la situación no conozca procedimientos o algoritmos que le permitan alcanzar el objetivo.

Un problema tiene distinta calificación en función de la persona que se lo plantee, y es evidente que lo que son problemas para unos, no lo son para otros. Así cuando una persona sabe los rudimentos del lenguaje algebraico, un problema que pueda resolverse planteando una ecuación de primer o segundo grado o un sistema de ecuaciones, no es un problema, sino un **ejercicio** al que se le aplica una regla fija que es la notación algebraica y los algoritmos para resolver las ecuaciones que resultan. También es distinto un problema de una **investigación**, que al ser un proceso más abierto, es la persona quien se plantea el objetivo que quiere conseguir. Así, cuando un estudiante al resolver un problema se hace preguntas, intentando generalizar el resultado o modificar las condiciones iniciales, está realizando una investigación. Podemos pues distinguir entre ejercicio, problema e investigación.

La **heurística**, término introducido por ***George Polya*** en su libro *Cómo plantear y resolver problemas,* es el "arte de resolver problemas" y trata de desvelar el conjunto de actitudes, procesos generales, estrategias y pautas que favorecen la resolución de problemas en general y en particular de los problemas matemáticos. Decía *Polya*: "*El profesor de matemáticas no debería contentarse con dispensar el saber, sino que también debería intentar desarrollar en los estudiantes la capacidad de utilizar ese saber; debería insistir en el saber – hacer, en las actitudes adecuadas, en los hábitos intelectuales deseables*".

Polya considera la resolución de problemas como un proceso lineal en el que establece cuatro fases:

1. Comprender el problema,
2. Concebir un plan,
3. Ejecutar un plan, y
4. Examinar la solución obtenida.

En cada una de estas fases hay una serie de pautas o sugerencias heurísticas que pretenden fijar la atención sobre aspectos concretos del problema, para sugerir ideas que permitan avanzar en su resolución.

Autora: Adela Salvador
Revisores: Nieves Zuasti y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

En España en 1991 se publica *Para pensar mejor* de *Miguel de Guzmán* en el que se destaca la identificación de los distintos tipos de bloqueos, la importancia de la actividad subconsciente en el proceso de resolución de problemas, el desarrollo de la creatividad, y la importancia de realizar un protocolo en el proceso de resolución. Aconsejaba *"enseñar matemáticas basándose fundamentalmente en la ocupación activa con problemas alrededor de los contenidos que se pretende impartir".* En *Cómo hablar, demostrar y resolver en Matemáticas* (2003) reflexiona sobre la organización de una clase de problemas y las técnicas que la facilitan, como el torbellino de ideas o el trabajo en grupo.

Una forma aconsejable para las clases de resolución de problemas es organizar el **trabajo en grupos**. Existen muchas formas de organizar el trabajo en grupo, por lo que antes de proponer cualquier actividad grupal debemos asegurarnos que el alumnado conoce algunas técnicas básicas. Si no es así gran parte de la rentabilidad esperada se pierde ante un mal reparto de responsabilidades, una deficiente organización, una incorrecta administración del tiempo, etc.

Los grupos, ni demasiado grandes, ni demasiado pequeños, podrían estar formados por unas seis o siete personas. En un grupo debe haber una persona responsable y una persona secretaria:

- La **persona responsable** tiene dos funciones, **dinamizadora** para mantener el interés del grupo y cuidar que nadie se quede sin participar y **organizadora** preocupándose de planificar los tiempos y las tareas asignadas a cada fase del trabajo.
- La persona **secretaria** se ocupa de anotar todas las ideas que vayan surgiendo y sistematizar las tareas que se vayan desarrollando y es **portavoz,** encargándose de exponer las conclusiones de su equipo a toda la clase.

Cada una de las funciones descritas no deben asociarse siempre a una misma persona sino que es recomendable un sistema de alternancia.

Papel del profesorado: En una clase de resolución de problemas, nuestra labor es dinamizar a los distintos equipos, supliendo las deficiencias y ayudando en los primeros momentos a las personas responsable y secretaria en sus funciones.

Cuando un profesor o una profesora plantea un trabajo en grupo para resolver problemas debe:

- Elegir problemas con un enunciado atractivo y motivador.
- Graduar de manera conveniente la dificultad del problema.
- Analizar detenidamente los bloqueos que puedan surgir en la resolución del problema y utilizar los métodos adecuados para superarlos.
- Percibir las dificultades que el trabajo en grupo plantea como tal y contar con recursos para actuar frente a los obstáculos que perturban su buen funcionamiento.
- Procurar establecer un ambiente adecuado dentro del aula que favorezca actitudes positivas hacia el aprendizaje.

Pero el aprendizaje de la resolución de problemas es un proceso a largo plazo. No es un objetivo operativo evaluable mediante un examen.

Decía Giner de los Ríos: El maestro es quien exige del discípulo que piense y reflexione por sí, y en la medida de sus fuerzas, que investigue, cuestione, intente, dude, despliegue las alas de su espíritu. O Cossio: Dad la ocasión al estudiante de pensar por él mismo y ser el creador de su propia instrucción.
Para saber más entra en: http://innovacioneducativa.upm.es/pensamientomatematico/node/91

Autora: Adela Salvador
Revisores: Nieves Zuasti y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CAPÍTULO 2: NÚMEROS NATURALES. DIVISIBILIDAD

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Fernanda Ramos

Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti

Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

Sistema de numeración griego clásico

Ilustración: A. Ortega

Índice

Resumen

Jaime, María y Raquel van a visitar a su abuela a menudo. Jaime va cada 2 días, María cada 4 y Raquel solo va un día a la semana. Un día que coincidieron los tres, comentaron que nunca habían comido un pastel tan rico como el que hace su abuela. Ella afirmó: “El próximo día que volváis a coincidir, lo vuelvo a hacer”. ¿Cuándo podrán volver a disfrutar del pastel?

En este capítulo aprenderemos a resolver problemas similares a este y profundizaremos en la tabla de multiplicar mediante conceptos como: divisibilidad, factorización o números primos.

Descubrirás algunos de los grandes secretos de los números y nunca te imaginarías que la tabla de multiplicar escondiese tantos misterios ocultos…

Fotografía: Clarisa Rodrígues

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. REPASO DE NÚMEROS NATURALES

1.1. Los sistemas de numeración

El sistema de numeración decimal

¿Por qué en otros países, aunque se hablen lenguas diferentes, se usan los mismos números?

Esos números, los que nosotros usamos, constituyen un lenguaje universal y se dice que están expresados en el sistema decimal.

El **sistema de numeración decimal** es el más usado en todo el mundo y en casi todos los ámbitos.

En este sistema el valor de una cifra en un número es diez veces mayor que el de la cifra situada a su derecha y diez veces menor que el valor de la situada a su izquierda. Por eso se dice que es un **sistema posicional**: el valor de una cifra en un número depende del lugar que ocupe esa cifra.

Actividades resueltas

- En el número 4 652 031 tenemos:

  - La cifra de las unidades: el 1

  - Luego la cifra de las decenas: el 3, cuyo valor en el número es 10 veces más que el anterior, luego su valor será:

  $$3\cdot 10 = 30$$

  - En tercer lugar, las centenas: el 0, cuyo valor será el que resulte de multiplicar la cifra situada en tercer lugar por 100:

  $$0\cdot 100 = 0$$

  - En cuarto lugar las unidades de millar: 2, cuyo valor obtenemos multiplicando por 1000 la cifra situada en ese lugar:

  $$2 \cdot 1\,000 = 2\,000$$

  - Luego, las decenas de millar: 5 cuyo valor será:

  $$5 \cdot 10\,000 = 50\,000$$

  - En sexto lugar, las centenas de millar: 6, cuyo valor se obtiene multiplicando la cifra por 100000.

  $$6 \cdot 100\,000 = 600\,000$$

  - Y, por último, las unidades de millón: 4, cuyo valor obtenemos multiplicándolo por 1 000 000:

  $$4 \cdot 1\,000\,000 = 4\,000\,000$$

Con esto observamos que el número 4 652 031 se puede escribir utilizando potencias de 10 de la forma:

$$4\,652\,031 = 4 \cdot 1\,000\,000 + 6 \cdot 100\,000 + 5 \cdot 10\,000 + 2 \cdot 1\,000 + 0 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 1$$

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

1. Escribe mediante potencias de 10 los siguientes números:

a) 7 653 b) 30 500 c) 275 643 d) 200 543

2. ¿Qué lugar ocupa la cifra 5 en los siguientes números? ¿En cuál de los números tiene mayor valor? ¿Y menor?

a) 508 744 b) 65 339 001 c) 7 092 157 d) 9 745

3. Razona por qué en un número natural con dos cifras repetidas, éstas no tienen el mismo valor.

Números romanos

Otro sistema de numeración que todavía se usa es el de los **números romanos**. ¿Te acuerdas de sus equivalencias?

I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1 000

Ejemplo:

- El número MDL equivale en el sistema decimal al 1 550. Si ahora le añadimos un V, es decir: MDLV, el número es el 1 555, pero las cifras siguen teniendo el mismo valor en ambos números.

Reloj con números romanos

Otros sistemas de numeración

Uno de los primeros sistemas de numeración que se utilizó fue el de **base 12** hace ya más de 5000 años. Todavía se usa cuando contamos objetos por docenas o con algunas mediciones del tiempo (como los meses de un año)

El sistema de **base 2** o sistema binario también es muy utilizado hoy en día, sobre todo en los ordenadores y calculadoras debido a su simplicidad, ya que para escribir números en este sistema solo se necesitan dos cifras distintas: el 0 y el 1

Cifras del sistema binario

Actividades propuestas

4. ¿Podrías escribir los números del 1 al 10 en el sistema binario?

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.2. Operaciones elementales

Multiplicación de números naturales

Como ya sabes, **multiplicar dos números naturales** es equivalente a sumar uno de ellos consigo mismo tantas veces como indica el otro.

Por ejemplo:

Hacer 6 · 5 es lo mismo que hacer 6 + 6 + 6 + 6 + 6

> ***Nota***:
> Aunque en primaria se usaba el símbolo "x" para denotar el producto, a partir de ahora y, por comodidad, lo simbolizaremos con un punto: ·

> ***Recuerda que:***
> Las palabras "**multiplicación**" y "**producto**" significan lo mismo, es decir, hacen referencia a la misma operación.

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma

> **Nota**
> Recuerda la **propiedad conmutativa** de la multiplicación:
> $\boldsymbol{a \cdot b = b \cdot a}$
> ***Ejemplo:***
> 2 · 3 = 3 · 2

Si llamamos *a, b* y *c* a tres números naturales, se verifica la siguiente propiedad:

$$\boldsymbol{a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)}$$

Por ejemplo:

Sustituyendo las letras *a* por 2, *b* por 5 y *c* por 7, tenemos que:

$$2 \cdot (5 + 7) = (2 \cdot 5) + (2 \cdot 7)$$

Esta propiedad también se verifica para la resta.

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la resta

Considerando otra vez, *a, b* y *c* números naturales cualesquiera, se cumple que:

$$\boldsymbol{a \cdot (b - c) = (a \cdot b) - (a \cdot c)}$$

Estas propiedades son muy útiles para hacer cálculos mentales rápidos descomponiendo números:

Calcular 15 · 23 mentalmente es complicado, pero si hacemos:

15 · 23 = 15 · (20 + 3) = (15 · 20) + (15 · 3) resulta más sencillo.

Si leemos la igualdad de derecha a izquierda, es decir:

(15 · 20) + (15 · 3) = 15 · (20 + 3) se suele decir que *hemos sacado factor común el número 15,* pero realmente estamos hablando otra vez de la propiedad distributiva.

Generalizando:

$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ es lo mismo que: $(a \cdot b) + (a \cdot c) = a \cdot (b + c)$, y utilizando la propiedad conmutativa: $(b \cdot a) + (c \cdot a) = (b + c) \cdot a$.

$a \cdot (b - c) = (a \cdot b) - (a \cdot c)$ es lo mismo que: $(a \cdot b) - (a \cdot c) = a \cdot (b - c)$, y utilizando la propiedad conmutativa: $(b \cdot a) - (c \cdot a) = (b - c) \cdot a$.

Ejemplos:

a) (870 · 4) – (870 · 3) = 870 · (4 – 3) = 870 · 1 = 870
b) (450 · 2) + (3 · 450) = (2 + 3) · 450 = 5 · 450 = 2 250
c) (45 · 6) – (45 · 5) = 45 · (6 – 5) = 45 · 1 = 45

División de números naturales

Nota:

La palabra "**cociente**" significa el resultado de hacer una "**división**" Los símbolos utilizados para representarlas son:

/, : , y la fracción: —

Ejemplo:

- En el comedor del instituto las mesas son de 6 personas y en la clase de 1º de la ESO hay 33 alumnos, ¿cuántas mesas ocuparán?

Vemos que habrá 5 mesas ocupadas y sobrarán 3 alumnos que han de sentarse en otra mesa:

$$\begin{array}{r|l} 33 & 6 \\ \cline{2-2} 3 & 5 \end{array}$$

Cada uno de los números que intervienen en la división se denominan:

33 → Dividendo 6 → Divisor 5 → Cociente 3 → Resto

Además, como ya sabes, se cumple que: 33 = (6 · 5) + 3

Esta propiedad se cumple siempre para cualquier división. En general:

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \cline{2-2} r & C \end{array}$$

Se verifica que:

$$\boldsymbol{D = (d \cdot c) + r}$$

Ejemplo:

- El cociente entre 3 658 y 65 es 56 y el resto 18. Escribe la relación que existe entre estos cuatro valores.

$$3\,658 = (65 \cdot 56) + 18$$

Ejemplos:

- 25/5, 25 : 5 y $\frac{25}{5}$ significan lo mismo: la división o el cociente de 25 entre 5.

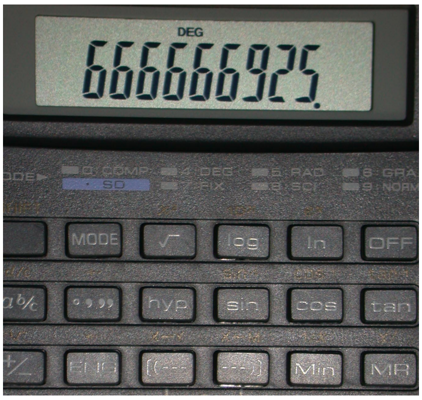
La expresión:

$$\begin{array}{r|l} 25 & 5 \\ \cline{2-2} 0 & 5 \end{array}$$

También significa lo mismo, pero en Secundaria y Bachillerato apenas se utiliza, así que conviene que te familiarices cuanto antes con las anteriores.

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Divisiones con calculadora



Ya sabemos que dividir con calculadora es muy fácil, pero ¿qué hacemos si nos piden el resto de la división y solo podemos usar la calculadora?

Es muy sencillo. Veámoslo con un ejemplo:

Si hacemos:

325 ÷ 5 = 65

Pero si hacemos:

325 ÷ 15 = 21.6666666667

En el primer caso está claro que el cociente es 65 y el resto es 0, pero ¿y en el segundo caso?

Claramente el cociente es 21. Ahora para calcular el resto tenemos que multiplicar este cociente por el divisor y restárselo al dividendo. El resto será: 325 – (15 · 21) = 10.

Jerarquía de las operaciones

En la expresión: 3 · 4 + 2, ¿qué operación realizarías antes, la multiplicación o la suma?

Existe una prioridad en las operaciones donde no existen paréntesis y es que la multiplicación y la división siempre se realizan antes que las sumas y las restas.

Por tanto, la operación anterior sería:

$$3 \cdot 4 + 2 = 12 + 2 = 14$$

¿Y en 8 : 2 · 3? Son divisiones y multiplicaciones con igual prioridad. Podemos convenir que primero se realiza la primera operación, la que está más a la izquierda: 8 : 2 · 3 = 4 · 3 = 12, en lugar de 8 : 2 · 3 = 8:6 = 4/3.

En general:

En operaciones con paréntesis, primero hay que realizar las que están entre **paréntesis** y luego las demás.

En operaciones sin paréntesis, primero se efectúan las **multiplicaciones** y **divisiones** y luego, las **sumas y restas.**

En operaciones de igual prioridad, primero la de más a la izquierda.

Ejemplo:

- Observa la diferencia entre estas dos operaciones:

$$(15 + 10) \cdot 3 = 25 \cdot 3 = 75$$

$$15 + 10 \cdot 3 = 15 + 30 = 45$$

Notas

a) Es importante escribir los paréntesis solo cuando sea necesario. Por ejemplo, en la expresión: (21 · 2) + 30 resulta innecesario, ya que por la prioridad en las operaciones, ya sabemos que tenemos que efectuar el producto antes que la suma.

b) Si realizamos una operación en la calculadora sin paréntesis ésta ya respeta la jerarquía en las operaciones, por lo que si la operación necesitase paréntesis, hemos de incluirlos en la calculadora.

Actividades propuestas

5. Saca factor común y calcula mentalmente:

a) 23 · 4 – 23 · 3 b) 540 · 8 + 540 · 2 c) 55 · 13 – 55 · 3 d) 600 · 33 – 600 · 3

6. Construye dos números con las cifras 4, 5 y 6 tal que su producto sea lo más grande posible.

7. Realiza las siguientes divisiones y comprueba con cada una de ellas la propiedad $D = d \cdot c + r$

a) 6 738 : 456 b) 34 540 : 30 c) 240 035 : 981 d) 397 : 45

8. ¿Recuerdas la definición de división exacta? ¿Qué ocurre en la igualdad anterior si la división es exacta?

9. El equipo de fútbol del instituto decide celebrar su victoria de liga yendo de viaje con su entrenador. Sabiendo que el equipo lo componen 20 alumnos, que el viaje les cuesta a cada uno 150 €, la noche en habitación individual 50 € y que han pagado 7 350 € en total, ¿cuántos días han estado de viaje?

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2. DIVISIBILIDAD

2.1. Múltiplos y divisores de un número entero

Múltiplos de un número

¿Recuerdas muy bien las tablas de multiplicar de todos los números?

- Escribe en tu cuaderno la del 5 y la del 7.

Sin darte cuenta, has escrito algunos de los múltiplos de 5 y de 7.

Se definen los **múltiplos** de un número entero ***n*** como los números que resultan de multiplicar ese número ***n*** por todos los números enteros.

Ejemplo:

- La tabla del 5 que has escrito antes está formada por los valores:

0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90,….

Todos ellos son múltiplos de 5.

La notación matemática de este concepto es: $\dot{5}$

Es decir: $\dot{5} = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, \ldots\}$

Ejemplo:

- Cuenta los múltiplos de 5 que has escrito antes. ¿Es posible hacerlo?

Efectivamente, los múltiplos que tiene cada número entero son una cantidad infinita.

Actividades propuestas

10. Calcula los siete primeros múltiplos de 8 y de 9

11. ¿Cuáles de los siguientes números son múltiplos de 12?

12, 13, 22, 24, 25, 100, 112, 142, 144

12. Halla los múltiplos de 11 comprendidos entre 12 y 90.

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Divisores enteros de un número

Un número entero ***a*** es **divisor** de otro número entero ***b*** cuando al dividir ***b*** entre ***a***, el resto es 0.

Nota

Todo número tiene siempre como divisor a 1 y a sí mismo.

Ejemplo:

a) 2 es **divisor** de 8 porque al dividir 8 entre 2, el resto es 0.

b) 10 es **divisor** de 20 porque al dividir 20 entre 10, el resto es 0.

c) 6 es **divisor** de 36 porque al dividir 36 entre 6, el resto es 0.

d) 1 es **divisor** de 18 porque al dividir 18 entre 1, el resto es 0.

e) 18 es **divisor** de 18 porque al dividir 18 entre 18, el resto es 0.

Si ***a*** es **divisor** de ***b***, entonces también se dice que ***b*** es **divisible** por ***a***.

Ejemplo:

a) 8 es **divisible** por 2 porque 2 es divisor de 8, es decir, al dividir 8 entre 2, el resto es 0.

b) 20 es **divisible** por 10 porque 10 es divisor de 20, es decir al dividir 20 entre 10, el resto es 0.

c) 36 es **divisible** por 6 porque 6 es divisor de 36, es decir, al dividir 36 entre 6, el resto es 0.

Notas

a) Como habrás deducido, las relaciones ser *múltiplo* y ser *divisor* son relaciones inversas.

b) No confundas las expresiones ser múltiplo, ser divisor y ser divisible. Veámoslo con un ejemplo:

Ejemplo:

- De la igualdad: 5 · 3 = 15, podemos deducir lo siguiente:
  - 5 y 3 son divisores de 15.
  - 15 es múltiplo de 3 y de 5.
  - 15 es divisible por 3 y por 5.

Actividades propuestas

13. A partir de la igualdad: 6 · 4 = 24, escribe las relaciones que existen entre estos tres números.

14. Escribe frases usando las expresiones: “ser múltiplo de”, “ser divisor de“ y “ser divisible por” y los números 10, 5 y 35.

2.2. Criterios de divisibilidad

Para ver si un número entero es divisible por otro número entero, basta con dividirlos y ver si el resto es 0. Pero cuando los números son grandes, las operaciones pueden resultar complicadas.

La tarea se simplifica si tenemos en cuenta los llamados **criterios de divisibilidad** que nos permiten saber si un número es divisible por otro sin necesidad de efectuar la división.

Criterio de divisibilidad por 2

Un número entero es divisible por **2** cuando su última cifra es 0 o cifra par.

Ejemplo:

- Los números: 312, 50, 346, 500, 780, 988 son divisibles por 2.

Criterio de divisibilidad por 3

Un número entero es divisible por **3** cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 3

Ejemplo:

- El número 231 es divisible por 3 ya que 2 + 3 + 1 = 6 que es múltiplo de 3.
- El número 1002 es divisible por 3 ya que 1 + 0 + 0 + 2 = 3.

Si al sumar las cifras obtienes un número aún grande y no sabes si es o no múltiplo de 3, puedes volver a aplicar el mismo sistema, solo tienes que volver a sumar todas sus cifras:

- El número 69 es divisible por 3 ya que 6 + 9 = 15, y 15 es divisible por 3, pues 1 + 5 = 6 que es múltiplo de 3. Por tanto, 6, 15 y 69 son múltiplos de 3.
- El número 78 596 778 696 es divisible por 3 ya que 7 + 8 + 5 + 9 + 6 + 7 + 7 + 8 + 6 + 9 + 6 = 78, y 78 es divisible por 3 pues 7 + 8 = 15, y 15 lo es.

Criterio de divisibilidad por 4

Un número entero es divisible por **4** si el número formado por las dos últimas cifras del número considerado es múltiplo de 4.

Ejemplo:

- El número 3 628 es divisible por 4 ya que termina en 28, que es múltiplo de 4.

Criterio de divisibilidad por 5

Un número entero es divisible por **5** cuando termina en 0 o en 5.

Ejemplo:

- Los números 4 875 y 34 590 son divisibles por 5.

Criterio de divisibilidad por 6

Un número entero es divisible por **6** cuando lo es a la vez por 2 y por 3.

Ejemplo:

- El número 7 332 es divisible por 6 ya que:
  - Lo es por 2 por ser par.
  - Lo es por 3, ya que sus cifras suman 15 que es múltiplo de 3.

Criterio de divisibilidad por 9

Un número entero es divisible por **9** cuando la suma de sus cifras es 9 o múltiplo de 9.

Ejemplo:

- El número 6 012 es divisible por 9 ya que: 6 + 0 + 1 + 2 = 9.
- El número 3 903 no es divisible por 9 ya que: 3 + 9 + 0 + 3 = 15 que no es múltiplo de 9.

Criterio de divisibilidad por 10

Un número entero es divisible por **10** cuando termina en 0.

Ejemplo:

- El número 59 870 es divisible por 10.

Nota

Observa que los números que son divisibles por 10 lo son por 2 y por 5 y viceversa.

Criterio de divisibilidad por 11

Un número entero es divisible por **11** cuando la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan lugar impar y la suma de las cifras que ocupan lugar par da 0 o múltiplo de 11

Ejemplo:

- El número 80 498 es divisible por 11 ya que: (8 + 4 + 8) – (0 + 9) = 11

Actividades propuestas

15. Di cuales de los siguientes números son múltiplos de 2:

23, 24, 56, 77, 89, 90, 234, 621, 400, 4 520, 3 411, 46 295, 16 392, 385 500

Los números elegidos, ¿coinciden con los divisores de 2? ¿Y con los que son divisibles por 2?

16. Escribe cuatro números que sean divisibles por 10 y por 3 a la vez.

17. Sustituye A por un valor apropiado para que:

a) 24 A75 sea múltiplo de 3.

b) 11 07A sea múltiplo de 6.

c) 5A 439 sea múltiplo de 11.

18. ¿Todos los números divisibles por 3 los son por 9? ¿Y al revés? Razona la respuesta.

19. ¿Sabrías deducir un criterio de divisibilidad por 15? Pon un ejemplo.

20. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla escribiendo verdadero o falso:

Número	¿Es…?	Verdadero/Falso
2567	Divisible por 2	
498 650	Divisible por 5	
98 370 034	Divisible por 3	
78 337 650	Divisible por 6	
984 486 728	Divisible por 4	
23 009 845	Divisible por 11	

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.3. Obtención de todos los divisores de un número entero

En principio, para hallar los divisores naturales de un número entero N, lo vamos dividiendo sucesivamente entre 1, 2, 3, 4,..., N. De esta manera, los divisores de N serán aquellos números que lo dividan exactamente, es decir den de resto 0.

Ejemplo:

- Si queremos hallar los divisores de 18 lo tendríamos que dividir entre 1, 2, 3, 4, 5,...., 18 y ver en qué casos el resto es 0. Puedes comprobar que los divisores de 18 son: 1, 2, 3, 6, 9, 18.

Lo que ocurre es que esta forma de calcular los divisores de un número se complica mucho cuando el número es grande. Por lo que, si utilizamos los criterios de divisibilidad que hemos aprendido, sólo tendremos que hacer las divisiones por los números por los que N sea divisible.
Si la división es exacta, ***N* : *d* = *c*,** entonces el divisor (***d***) y el cociente (***c***) son divisores de ***N***, lo que nos permite acortar la búsqueda de divisores, pues de cada división exacta obtenemos dos divisores.
Terminaremos de buscar más divisores cuando lleguemos a una división en la que el cociente sea menor o igual que el divisor.

Actividades resueltas

- Veamos, como ejemplo, el cálculo de los divisores del número 54.

Ya sabemos que todo número tiene como divisores a la unidad y a él mismo 1 y 54.
Es divisible por 2. (Termina en cifra par) → 54 : 2 = 27 → Ya tenemos dos divisores: 2 y 27.
Es divisible por 3. (5 + 4 = 9, múltiplo de 3) → 54 : 3 = 18 → Ya tenemos dos divisores: 3 y 18.
Es divisible por 6. (Al ser divisible por 2 y 3) → 54 : 6 = 9 → Ya tenemos dos divisores: 6 y 9.
Es divisible por 9. (5 + 4 = 9, múltiplo de 9) → 54 : 9 = 6.
Como el cociente 6 es menor que el divisor 9, ya hemos terminado. 9 y 6 (Repetidos).
Por tanto, los divisores de 54 son: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27 y 54.

Actividades propuestas

21. Calcula los múltiplos de 25 comprendidos entre 1 y 200.

22. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
   a) 40 es múltiplo de 10.
   b) 2 es divisor de 10.
   c) 4 es múltiplo de 8.
   d) 55 es divisible por 11.
   e) 90 es divisor de 9.
   f) 3 es divisible por 45.

23. Sustituye *x* e *y* por valores apropiados para el siguiente número sea divisible por 9 y por 10 a la vez: 256*x* 81*y.*

24. ¿Qué único número con tres cifras iguales es divisible por 2 y por 9 a la vez?

25. Calcula todos los divisores de los siguientes números:
a) 65   b) 33   c) 60   d) 75   e) 100   f) 150

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. NÚMEROS PRIMOS

3.1. Números primos y compuestos

¿Cuáles son los divisores de 2? ¿Y del 3? ¿Y del 5? ¿Y del 7? ¿Encuentras alguna similitud entre ellos? Pues sí, los divisores de estos números son el 1 y ellos mismos. A estos números se les llama primos.

Un **número primo** es aquel número natural que solo tiene dos divisores: el 1 y él mismo.

Se llama **número compuesto** a aquel número natural que tiene más de dos divisores, es decir, al que no es primo.

Nota

El 1 se considera que no es primo ni compuesto, ya que no verifica ninguna de las dos definiciones.

Ejemplo:

- Los números 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 son los diez primeros números primos.
- Números como: 22, 45, 60, 98, 345 o 39 867 657 son compuestos.

Actividades propuestas

26. Continúa la lista de números primos del ejemplo con 10 números primos más.

27. ¿Cuántos números primos crees que hay? ¿Crees que se acaban en un momento dado o que son infinitos?

3.2. La criba de Eratóstenes

La **criba de Eratóstenes** es un algoritmo (es decir, una secuencia de instrucciones) que permite hallar todos los números primos menores que un número natural dado.

Nosotros lo haremos para los menores o iguales que 100, es decir, vamos a averiguar cuáles son los números primos hasta el 100.

El algoritmo consta de los siguientes pasos:

a) Construimos una lista con los números del 1 al 100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

b) Inicialmente se tacha el 1, porque sabemos que no es primo.
c) El primer número que quede sin tachar ha de ser primo. Se marca y se tachan sus múltiplos.
d) Se repite de nuevo el paso c) hasta que se terminen los números.

Por tanto:

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- Dejamos sin tachar el siguiente número, que es el 2, que por lo tanto es primo, y tachamos todos los múltiplos de 2, quedando la criba como sigue:

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	39	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
51	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	57	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	63	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	69	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	75	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
81	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	87	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	93	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	99	~~100~~

- Conservamos el 3 porque al ser el primero que aparece sin tachar, sabemos que es primo, pero eliminamos todos los múltiplos de 3, es decir, tachamos uno de cada tres números. Nos queda una tabla así:

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

- No necesitamos tachar el 4 porque ya está tachado, entonces vamos al 5 que es el siguiente número, por tanto no lo tachamos y eliminamos todos los múltiplos de 5 (algunos de los cuales ya estaban tachados)

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

- Y luego seguimos de forma análoga con el 7 y tachando todos los múltiplos de 7.
- Después el siguiente número no tachado es el 11 y tachamos los múltiplos de 11.

- Después nos encontramos con el 13 y tachamos los múltiplos de 13.

De forma análoga vamos localizando los siguientes primos y tachando sus múltiplos hasta llegar a una tabla de la forma:

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Los números que no quedan tachados en ningún paso es porque no son múltiplos de ningún número anterior (señalados aquí en rojo).

En realidad, lo que *Eratóstenes* estaba haciendo era construir una especie de "filtro" por el cual, al hacer pasar a todos los números, sólo quedaban los "primos".

Por tanto, los números primos que hay entre los primeros cien números, son:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 91 y 97.

Actividades propuestas

28. ¿Te atreverías a repetir la criba de Eratóstenes, pero hasta el 150?

29. Busca los distintos significados de las palabras "criba" y "algoritmo", ¿en qué más contextos los puedes utilizar?

3.3. Descomposición de un número natural en factores primos

Sabemos que un **número primo** solo tiene dos divisores: él mismo y el 1.

Así que si quisiéramos expresar un número primo como producto de otros dos, los únicos factores serían el 1 y el propio número.

Por ejemplo, si quiero expresar 13 como producto de dos números, sería:

$$13 = 1 \cdot 13 \text{ o también } 13 = 13 \cdot 1$$

Sin embargo, si el número es **compuesto**, podrá expresarse como producto de otros números que no son ni el 1 ni él mismo.

Vamos a aprender a descomponer un número natural en factores primos, lo que significa expresar un número natural como producto de otros números pero han de ser primos.

Descomponer un número natural en factores primos es expresar dicho número como un producto, donde todos sus factores son números primos.

Para descomponer el número 20 podríamos hacer: $20 = 4 \cdot 5$, pero la descomposición en factores primos no sería correcta porque el 4 no es un número primo.

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Su descomposición sería $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$, que se expresaría como $20 = 2^2 \cdot 5$

Para descomponer un número compuesto (pues, como hemos visto, descomponer un número primo no tiene ningún interés ni dificultad) en sus factores primos, se debe seguir el siguiente procedimiento:

a) Dividir el número natural dado por el menor primo posible utilizando para ello los criterios de divisibilidad si es posible, o realizando la división si no hay otro remedio.

b) Realizar la división, y si el cociente es divisor de dicho número primo, realizar la división.

c) Si el cociente no es divisor de dicho número primo, buscar el menor número primo posible que sea divisor, recurriendo nuevamente a los criterios de divisibilidad o continuar dividiendo.

d) Seguir con el procedimiento hasta obtener el cociente igual a uno.

Notas

1) Para realizar las divisiones utilizaremos una barra vertical, a la derecha escribimos los divisores primos y a la izquierda los cocientes.

2) Los factores primos en la expresión del número ya factorizado se suelen escribir en orden creciente.

3) Cuando ya tengamos práctica, y con números no demasiado grandes, podemos descomponer un número en producto de dos y luego cada uno de ellos en otros productos hasta que todos los factores obtenidos sean primos.

Por ejemplo: $60 = 30 \cdot 2$.

Como $30 = 15 \cdot 2$ y $15 = 3 \cdot 5$, tenemos que: $60 = 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$ y por tanto, su descomposición es: $60=2^2 \cdot 3 \cdot 5$

Actividades resueltas

1. Vamos a realizar la descomposición en factores primos del número 90:
Como 90 es múltiplo de 2, lo dividimos: $90 : 2 = 45$
Como 45 no es múltiplo de 2, buscamos el menor primo posible por el que se pueda dividir, que es 3, lo dividimos: $45 : 3 = 15$.
Como 15 se puede volver a dividir entre 3, tenemos: $15 : 3 = 5$
Por tanto: $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$
Esto se suele realizar como se señala en la nota de la siguiente forma:

90	2
45	3
15	3
5	5
1	

2. Vamos a realizar otra factorización para el número 2 550:

2 550	2
1 260	2
630	2
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

Por tanto: $2\,550 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

30. Descompón en factores primos los siguientes números:

a) 40 b) 56 c) 75 d) 90

31. Descompón en factores primos los siguientes números:

a) 110 b) 124 c) 290 d) 366

32. Descompón en factores primos los siguientes números:

a) 1 290 b) 3 855 c) 4 520 d) 5 342

33. Si descomponemos en factores primos los números: 10, 100, 1 000, 10 000 y 100 000, ¿qué es lo que observas? ¿Lo podrías hacer de forma más rápida sin necesidad de usar el método general?

34. ¿Qué ocurre al descomponer en factores primos los números 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256?

¿Podrías continuar tú la serie con 5 números más?

3.4. Máximo común divisor de varios números

Ejemplo:

- Vamos a calcular los divisores de los números 24 y 36:

Divisores de 24 → 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

Divisores de 36 → 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

¿Cuáles son los mayores divisores comunes a ambos? Los divisores comunes a ambos son varios: 1, 2, 3, 4, 6 y 12, pero el mayor de ellos es 12 y se dice que 12 es el máximo común divisor de 24 y de 36.

Se llama **máximo común divisor** de varios números naturales al mayor de los divisores comunes a todos ellos y se escribe **M.C.D.**

En el ejemplo anterior, escribiríamos: M.C.D (24, 36) = 12

En principio, parece que hallar el M.C.D no es muy complicado, solo tenemos que calcular los divisores de los números, considerar los comunes y tomar el mayor de ellos. Pero este método sólo tiene sentido con pocos números y pequeños, ya que con muchos números o con números grandes, el cálculo se complica mucho.

Por eso, vamos a calcular el máximo común divisor utilizando una serie de pasos, mediante los cuales el cálculo se simplifica muchísimo:

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Cálculo del M.C.D.

1. Factorizamos los números.
2. Tomamos los factores comunes a todos los números elevados el menor exponente.
3. El producto de los factores considerados en el paso 2 es el M.C.D.

Actividades resueltas

- Vamos a calcular el máximo común divisor de los números: 72, 90 y 120

1. Factorizamos cada número:

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

$$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

2. Tomamos los factores comunes a todos los números elevados el menor exponente: Son 2 y 3

3. El producto de los factores considerados en el paso 2 es el M.C.D. Es decir:

M.C.D (72, 90, 120) = $2 \cdot 3 = 6$.

Nota

Dos números naturales siempre tienen al menos un divisor en común, el 1. Si ese es el M.C.D entonces decimos que esos números son **primos entre sí**.

Actividades propuestas

35. Calcula el M.C.D de los siguientes pares de números:

a) 60 y 45 b) 120 y 55 c) 34 y 66 d) 320 y 80

36. Calcula el M.C.D de los siguientes números:

a) 30, 12 y 22 b) 66, 45 y 10 c) 75, 15 y 20 d) 82, 44 y 16

3.5. Mínimo común múltiplo de varios números

El **mínimo común múltiplo** de varios números naturales es el menor de los múltiplos que tienen en común, y se escribe **m.c.m.**

Actividades resueltas

Igual que con el M.C.D., se puede calcular el mínimo común múltiplo aplicando la definición que acabamos de ver. Lo que ocurre es que se trata de una forma muy “rudimentaria” y que se complica mucho para números grandes.

- Vamos a calcular m.c.m (10, 15) aplicando esta definición:

Múltiplos de 10 → 10, 20, 30, 40, 50, 60, …

Múltiplos de 15 → 15, 30, 45, 60, 75, 90, …

Como vemos, múltiplos comunes a ambos son: 30, 60, 90, … pero el menor de ellos es el 30. Por tanto:

m.c.m (10, 15) = 30

Vamos a ver ahora los pasos a realizar para simplificar este cálculo y hacerlo más mecánico:

Cálculo del m.c.m.

1. Factorizamos los números
2. Tomamos los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente.
3. El producto de esos factores del paso anterior es el m.c.m.

Actividades resueltas

- Veamos cómo calcular el mínimo común múltiplo de 16, 24, 40 siguiendo estos pasos:

1. Factorizamos los números:

$$16 = 2^4$$

$$24 = 2^3 \cdot 3$$

$$40 = 2^3 \cdot 5$$

2. Tomamos los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente.

En nuestro caso: 2^4, 3 y 5.

3. Multiplicando estos factores tenemos que:

$$\text{m.c.m}(16, 24, 40) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 240.$$

Actividades propuestas

37. Calcula el m.c.m. de los siguientes pares de números:

a) 60 y 45 b) 120 y 55 c) 34 y 66 d) 320 y 80

38. Calcula el m.c.m de los siguientes números:

a) 30, 12 y 22 b) 66, 45 y 10 c) 75, 15 y 20 d) 82, 44 y 16

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Problemas

Pero, además, el cálculo del M.C.D. y del m.c.m. es muy útil para resolver **problemas reales**.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo:

- Una dependienta de una tienda de regalos tiene un rollo de lazo rojo de 15 m y uno azul de 20 m. Como para envolver cada regalo utiliza siempre trozos de 1 metro, y las quiere cortar en trozos de la misma longitud para tenerlas preparadas para hacer empaquetar cajas de modo que no sobre nada en los rollos. ¿Cuál es la longitud máxima que puede cortar cada rollo para hacer los paquetes?

Estamos buscando un número natural que sea divisor de 15 y de 20 a la vez. De los números que cumplan esto, escogeremos el mayor.

Esto es, precisamente, el M.C.D:

$$\text{M.C.D.}(15, 20) = 5$$

Por tanto, la longitud de cada trozo de lazo para los paquetes será de 5 m.

Ejemplo:

- El abuelo de Ana toma unas pastillas para el corazón cada 8 horas y otras para la circulación cada 12 horas. Acaba de tomar los dos medicamentos a la vez. ¿Dentro de cuantas horas volverá a tomárselos a la vez?

Estamos buscando un número de horas que será mayor o igual a 12, y múltiplo de 8 y de 12 a la vez. De todos los números que lo cumplan, nos interesa el más pequeño. Es decir, tenemos que calcular:

$$\text{m.c.m.}(8, 12) = 24$$

Por tanto, dentro de 24 horas se tomará ambos medicamentos a la vez.

Actividades propuestas

39. María y Paula tienen 25 cuentas blancas, 15 cuentas azules y 90 cuentas rojas. Quieren hacer el mayor número de collares iguales sin que sobre ninguna cuenta.

a) ¿Cuantos collares iguales pueden hacer?

b) ¿Qué número de cuentas de cada color tendrá cada collar?

40. Un autobús pasa por una parada cada 18 minutos, otro cada 25 minutos y un tercer autobús cada 36 minutos. Si a las 9 de la mañana han pasado en ese lugar los tres autobuses a la vez. ¿A qué hora vuelven a coincidir?

41. Se compran en una florería 24 rosas y 36 claveles. ¿Cuántos centros de mesa se pueden elaborar si se coloca la máxima cantidad de flores sin que sobre ninguna? ¿Cuántas rosas y claveles se colocan en cada centro de mesa?

42. Raúl tiene varios avisos en su móvil: uno que da una señal cada 60 minutos, otro que da una señal cada 150 minutos y un tercero que da una señal cada 360 minutos. Si a las 10 de la mañana las 3 señales de aviso han coincidido.

a) ¿Cuántas horas como mínimo han de pasar para que vuelvan a coincidir?

b) ¿A qué hora volverán a dar la señal otra vez juntos?

43. ¿Cuál será la menor cantidad de caramelos que se puede repartir en partes iguales entre grupos de 20, 30, o 60 niños? Determina en cada caso cuántos caramelos les toca a cada niño.

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

¿A qué pensabas que los números eran solo eso, pues números?

Pues no, hay **números perfectos, números amigos,¡¡ hasta números gemelos!!**

Números perfectos

Son **números perfectos** los que son iguales a la suma de sus divisores, excepto él mismo.

El más pequeño es el 6: $6 = 1 + 2 + 3$

El siguiente es el 28: $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

Después del 28, no aparece ningún número perfecto hasta el 496, el cuarto número perfecto es el 8.128, el quinto perfecto es 33.550.336. Se observa que cada número perfecto es mucho mayor que el anterior. ¡¡Qué curioso!!

¿Habrá alguna fórmula para obtener números perfectos?

Pues sí, la descubrió Euclides y es la siguiente:

$$2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$$

Siendo n un número natural y siempre que (2^n-1) sea primo

Números amigos

Dos **números amigos** son dos enteros positivos tales que la suma de los divisores propios de uno de ellos es igual al otro. (Se consideran divisores propios de un número a todos sus divisores excepto él mismo)

Un ejemplo es el par (220, 284), ya que:

Los divisores propios de 220 son 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 y 110, que suman 284

Los divisores propios de 284 son 1, 2, 4, 71 y 142, que suman 220

Para los pitagóricos los números amigos eran muy especiales, pues les atribuían propiedades casi mágicas.

Números gemelos

Se llaman números **primos gemelos** a los pares de números primos que son impares consecutivos (3 y 5, 11 y 13,…). ¿Puedes encontrar tú alguno más?

Se supone que el número de primos gemelos es infinito, pero está sin demostrar.

Lo que sí se puede demostrar es que existen dos números primos consecutivos cuya diferencia sea tan grande como queramos.

♫ Números primos en la música y literatura ♫

- El compositor francés Olivier Messiaen, inspirándose en la naturaleza, utilizó los números primos para crear música no métrica empleando sonidos con duración un número primo para crear ritmos impredecibles.
- *El curioso incidente del perro a medianoche*, de Mark Haddon, describe en primera persona la vida de un joven autista, utiliza únicamente los números primos para numerar los capítulos.
- *La soledad de los números primos*, novela escrita por Paolo Giordano, ganó el premio Strega en 2008.

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

Concepto	Definición	Ejemplos
El sistema de numeración decimal es posicional	El valor de una cifra en un número depende del lugar que ocupa en el número	El 1 no tiene el mismo valor en 1845 que en 6351
Jerarquía de las operaciones	-En las operaciones con paréntesis, primero se realizan los paréntesis y después lo demás. -En las operaciones sin paréntesis primero se realizan multiplicaciones y divisiones y luego sumas y restas.	La operación 2·3+7 tiene como resultado 13, no 20, que es lo que resultaría efectuando incorrectamente antes la suma que el producto.
- **Divisor** - **Divisible** - **Múltiplo**	- *a* es **divisor** de *b* cuando al dividir *b* entre *a* el resto es 0. - *a* es **múltiplo** de *b* o *a* es **divisible** por *b* cuando al dividir *a* entre *b* el resto es 0.	• 2 y 3 son divisores de 6. • 6 es múltiplo de 2 y de 3. • 6 es divisible por 2 y por 3.
Criterios de divisibilidad	Simplifican mucho el cálculo de la descomposición factorial y, en general averiguar cuando un número es divisible por otro.	• 3 742 es divisible por 2. • 4 980 es divisible por 2 y por 5. • 2 957 es divisible por 3.
Número primo	Es aquel que solo tiene dos divisores: el 1 y él mismo.	23 y 29 son números primos.
Número compuesto	Es aquel que tiene más de dos divisores, es decir, que no es primo.	25 y 32 son números compuestos.
Criba de Eratóstenes	Es un algoritmo que permite calcular todos los números primos menor que uno dado.	Los primos menores que 20 son: 2, 3, 5, 7, 11, 13,17 y 19
Descomponer un número en factores primos	Es expresarlo como producto de números primos.	$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
Mínimo común múltiplo de varios números	Es el menor de los múltiplos que tienen en común.	m.c.m.(18, 12)= 36
Máximo común divisor de varios números	Es el mayor de los divisores comunes a todos ellos.	M.C.D.(18, 12) = 4

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Repaso números naturales

1. Escribe mediante potencias de 10 los siguientes números:

a) 84 300 b) 3 333 c) 119 345 d) 903 711

2. ¿Qué lugar ocupa la cifra 4 en los siguientes números? ¿En cuál de los números tiene mayor valor? ¿Y menor?

a) 508 744 b) 653 349 001 c) 47 092 157 d) 9 745

3. Saca factor común y calcula mentalmente:

a) 28 · 4 – 28 · 3 b) 30 · 4 + 30 · 2 c) 66 · 23 – 66 · 13 d) 700 · 44 – 700 · 4

4. Construye dos números con las cifras 6,7 y 8 tal que su producto sea lo más grande posible.

5. Realiza las siguientes divisiones y comprueba con cada una de ellas la propiedad: D = d · c + r

a) 3 844 : 45 b) 74 840 : 30 c) 983 035 : 981 d) 847 : 45

6.Halla, utilizando solo la calculadora, los cocientes y los restos de las siguientes divisiones:

a) 654 : 77 b) 543 : 7 c) 8 374 : 85 d) 9 485 : 11 e) 6 590 : 41

7. Realiza las siguientes operaciones:

a) (55 + 12) · 4 b) 66 · 2 + 10 c) 55 + 70 · 3 + 11 d) 330 – 10 · 2 + 82

8. Di cuales de las siguientes operaciones tienen el mismo resultado:

a) 2 · (46 – 16) b) 2 · 46 – 16 c) 2 · 46 – 2 · 16 d) 2 · (46 + 16) e) 2 · 46 + 16

9. Realiza las operaciones del ejercicio anterior en la calculadora y comprueba la importancia de añadir los paréntesis.

10. Realiza las siguientes operaciones:

a) 4 · (44 + 5) – 6 · 2 + 9 b) 2·(3 + 11) – (4 + 12) c) (18 – 4)·5 + 3 · 7 – 13 d) 5·12+(3 – 2)·4 - 3 + 4·5 - 5

11. Inventa un problema en el que tengas que realizar la siguiente operación: 5 + 4(6 - 2)

12. Halla, utilizando solo la calculadora, los cocientes y los restos de las siguientes divisiones:

a) 376 : 37 b) 299 : 7 c) 3 524 : 65 d) 585 : 22 e) 2 060 : 51

13. Realiza las siguientes operaciones:

a) (34 + 23) · 5 b) 87 · 2 + 10 c) 55 + 65 · 3 + 11 d) 230 – 100 · 2 + 90

14. Di cuales de las siguientes operaciones tienen el mismo resultado:

a) 8 · (22 – 12) b) 8 · 22 – 12 c) 8 · 22 – 8 · 12 d) 8 · (22 + 12) e) 8 · 22 + 12

15. Realiza las operaciones del ejercicio anterior en la calculadora y comprueba la importancia de añadir los paréntesis.

16. Realiza las siguientes operaciones:

a) 4·(65 + 7) – 5 · 2 + 4 b) 2·(3 + 9) - (4 + 8) c) (22 - 4)·5 + 3 · 2 - 1 d) 5 · 4 + (4 - 2) · 5 – 3 + 4 · 6 - 5

17. Inventa un problema en el que tengas que realizar la siguiente operación: (34 + 7) · 8

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

18. Sabemos que para el viaje de fin de curso son necesarios 3 autobuses, ya que viajarán 103 alumnos. En los dos primeros autobuses viajan el mismo número de estudiantes y en el tercero un alumno más que en los otros dos. ¿Cuántas personas viajan en cada autobús?

19. ¡MAGIA!

Sigue los siguientes pasos:

- Piensa en dos números naturales de una cifra.
- Multiplica el primero por 2 y súmale 8.
- Multiplica el resultado anterior por 5.
- Suma el segundo número que habías pensado al resultado anterior.
- Resta 40 al último resultado

¿Qué ocurre? ¿Es casualidad? ¿Pasará siempre lo mismo? ¿Puedes explicarlo?

Divisibilidad

20. Escribe los diez primeros múltiplos de 6 y los diez primeros múltiplos de 9. ¿Cuáles son comunes a ambos?

21. Escribe cuatro números que cumplan que la cifra de las unidades sea el triple que la de las decenas de manera que dos de ellos sean divisibles por 2 y los otros dos no lo sean.

22. Indica cuales de los siguientes números son múltiplos de 15:

1, 30, 50, 60, 70, 75, 100, 125, 150

23. Di cuales de los siguientes números son múltiplos de 5. ¿Y de 10? ¿Cuáles coinciden? ¿Por qué?

23, 24, 56, 77, 89, 90, 234, 621, 400, 4 520, 3 411, 46 295, 16 392, 385 500

24. Escribe cuatro números de cuatro cifras que cumplan que la cifra de las decenas sea el doble que la de las unidades de manera que uno de ellos sean divisible por 3, otro por 11, otro por 2 y otro por 4.

25. Copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla escribiendo verdadero o falso:

Número	¿Es…?	Verdadero/Falso
327	Divisible por 11	
494 530	Divisible por 4	
39 470 034	Divisible por 6	
7 855 650	Divisible por 3	
985 555 328	Divisible por 2	
20 000 045	Divisible por 10	

26. Haz una lista con los valores de las monedas y billetes del sistema monetario euro.

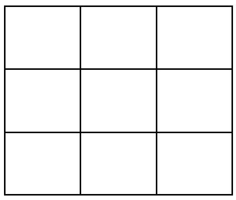
¿Figura entre ellos algún número primo? ¿Por qué crees que es así?

27. Pedro tiene una forma muy peculiar de dar el teléfono a sus amigos: les dice que consta de nueve cifras, que no se repite ninguna y que leyéndolo de izquierda a derecha se cumple:

- La primera cifra es un múltiplo de 3 mayor que 6.
- Las dos primeras cifras forman un múltiplo de 2 y de 5.
- Las tres primeras cifras forman un número par múltiplo de 3
- Las cuatro primeras cifras forman un número que es múltiplo de 5 pero no de 2.
- Las cinco primeras cifras forman un número múltiplo de 2 y de 3.
- Las seis primeras cifras forman un número múltiplo de 11.
- La séptima cifra es un múltiplo de 7.
- Las ocho primeras cifras forman un número impar.
- Las cuatro últimas cifras forman un múltiplo de 11.

¿Sabrías averiguar cuál es su teléfono?

28. Calcula cuántos cuadrados puedes contar en la siguiente figura:



29. Sustituye x e y por valores apropiados para el siguiente número sea divisible por 2 y por 11 a la vez:

2 56x 81y

30. Sabemos que el número 1 452 es múltiplo de 11. Calcula otro múltiplo de 11 solo cambiando de lugar las cifras de este número.

31. Completa en tu cuaderno con las expresiones ”ser múltiplo de”, “ser divisor de “ o “ser divisible por”:

a) 40 es ………… 10.

b) 2 es ……….. 10.

c) 4 es ……….. 8.

d) 935 es …………. 11.

e) 90 es …………. 45.

f) 3 es ……………..15.

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Números primos

32. Descompón en factores primos los siguientes números: 1 530, 2 457 y 7 440.

33. Observa la descomposición factorial de los siguientes números a, b, c, d y contesta:

$$a = 2 \cdot 3^2 \quad b = 2 \cdot 3 \quad c = 5 \cdot 7 \quad d = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$$

a) ¿Cuál de ellos es múltiplo de a?
b) ¿Cuáles son divisores de d?
c) ¿Cuáles son primos entre sí?

34. Averigua cuales son los números cuyas descomposiciones factoriales son:

a) $x = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ b) $y = 5^2 \cdot 2^2 \cdot 11$ c) $z = 2 \cdot 5^2 \cdot 7$

35. Calcula el M.C.D de los siguientes pares de números:

a) 9 y 12 b) 18 y 42 c) 8 y 15 d) 108 y 630

36. Calcula el m.c.m. de los siguientes pares de números:

a) 140 y 300 b) 693 y 1 485 c) 365 y 600 d) 315 y 1 845

37. Calcula el m.c.m y M.C.D. de los siguientes números:

a) 24, 60 y 80 b) 60, 84 y 132 c) 270, 315 y 360 d) 240, 270 y 36

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Cuál es el resultado de 20 + 15 · 3?

a) 105 b) 65 c) 303 d) 900

2. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera ?

a) En una división exacta el cociente siempre es cero.

b) En el sistema de numeración decimal el valor de una cifra es independiente del lugar que ocupa.

c) Si multiplicamos dividendo y divisor por el mismo número distinto de cero, el cociente no varía.

d) El producto y la división de números naturales cumplen la propiedad conmutativa.

3. ¿Cuál de las soluciones es la correcta para el conjunto de los divisores de 40?

a) D(40) = {1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40} c) D(40) = {1, 2, 4, 5, 8, 10, 12, 20, 40}

b) D(40) = {1, 2, 4, 6, 5, 8, 10, 20, 40} d) D(40) = {0, 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40}

4. El número de divisores de 12 es:

a) 3 b) 6 c) 4 d) 5

5. El número 315A es múltiplo de 9 para los siguientes valores de A:

a) A = 9 y A = 3 b) A = 9 y A = 1 c) A = 3 y A = 6 d) A = 9 y A = 0

6. ¿Cuál de estos números cumple que es un número de tres cifras par, divisible por 5 y por 17 y la suma de sus cifras es 7?

a) 170 b) 510 c) 610 d) 340

7. Sabiendo que a es divisible por b. Indica cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

a) El número a es divisor de b.

b) El número a es múltiplo de b.

c) El número b es un múltiplo de a.

d) Los números a y b son primos entre sí.

8. El M.C.D.(54, 360, 45) es:

a) 18 b) 27 c) 45 d) 9

9. María compra en el supermercado los zumos en paquetes de 2 y los refrescos en paquetes de 3. Hoy quería comprar el mismo número de zumos que de refrescos, pero el menor número posible para no llevar mucho peso en el camino a su casa. ¿Cuántos compró de cada tipo?

a) 3 b) 2 c) 6 d) 12

10. Paula quiere hacer un juego de cartas cortando una cartulina de 16 cm de largo y 12 cm de ancho en cuadrados iguales de forma que sean lo más grandes posible y no sobre cartulina. ¿Cuánto medirá el lado de cada carta?

a) 4 cm b) 2 cm c) 8 cm d) 6 cm

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CAPÍTULO 3: POTENCIAS Y RAÍCES

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Vallecas

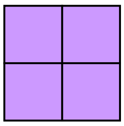
Autora: Ana Lorente

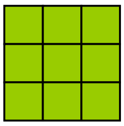
Revisora: Irene García Saavedra

Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

Índice

Para trabajar con números muy grandes, para calcular la superficie de una habitación cuadrada o el volumen de un cubo nos va a resultar útil a usar las potencias. Conoceremos en este capítulo como operar con ellas.





Si conocemos la superficie de un cuadrado o el volumen de un cubo y queremos saber cuál es su lado utilizaremos las raíces. En este capítulo aprenderás a usarlas con algo de soltura.

Autora: Ana Lorente
Revisora: Irene García Saavedra
Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

1. POTENCIAS

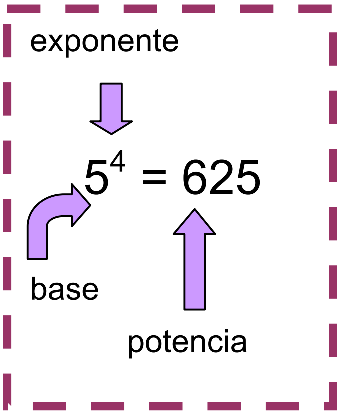
1.1. Concepto de potencia. Base y exponente

Ejemplo:

- María guarda 5 collares en una bolsa, cada 5 bolsas en una caja y cada 5 cajas en un cajón. Tiene 5 cajones con collares, ¿cuántos collares tiene?

Para averiguarlo debes multiplicar 5 x 5 x 5 x 5 que lo puedes escribir en forma de potencia: 5^4, que se lee 5 elevado a 4.

$$5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4 = 625.$$



Una **potencia** es una forma de escribir de manea abreviada una multiplicación de factores iguales. La **potencia** a^n de base un número natural a y exponente natural n es un producto de n factores iguales a la base:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \ldots^{n \text{ factores}} \ldots\ldots \cdot a \qquad (n > 0)$$

El factor que se repite es la **base** y el número de veces que se repite es el **exponente**. Al resultado se le llama **potencia.**

Actividades propuestas

1. Calcula mentalmente las siguientes potencias y escribe el resultado en tu cuaderno:

a) 4^2 b) 2^4 c) 10^5 d) 3^3 e) 1^4 f) 1000^2

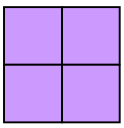
2. Calcula en tu cuaderno las siguientes potencias:

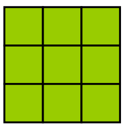
a) 3^5 b) 7^4 c) 4^5 d) 9^4 e) 25^2 f) 16^3.

1.2. Cuadrados y cubos

Ejemplo:

- Si un cuadrado tiene 2 cuadraditos por lado ¿Cuántos cuadraditos contiene ese cuadrado? El número de cuadraditos que caben es $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$. El área de este cuadrado es de 4 unidades. Y si tiene 3 cuadraditos por lado ¿Cuántos cuadraditos contiene ese cuadrado? El número de cuadraditos que caben es $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$. El área de este cuadrado es de 9 unidades.





- ¿De cuántos cubitos está compuesto el cubo grande si hay 3 a lo largo, 3 a lo ancho y 3 a lo alto? El número de cubitos es $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27$. El volumen de este cubo es 27 unidades.

$100 = 2^2 \cdot 5^2$
es un cuadrado perfecto y su raíz cuadrada es
$2 \cdot 5 = 10$.
$4900 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$
es un cuadrado perfecto y su raíz es
$2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$.
Son cuadrados perfectos.
$36 = 2^2 \cdot 3^2$
$81 = 3^2 \cdot 3^2$
¿Lo son también 144, 324 y 400?

Por esta relación con el área y el volumen de las figuras geométricas, las potencias de exponente 2 y de exponente 3 reciben nombres especiales:

Las potencias de exponente 2 se llaman **cuadrados** y las de exponente 3 se llaman **cubos**.

Autora: Ana Lorente
Revisora: Irene García Saavedra
Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

Actividades propuestas

3. Escribe en tu cuaderno el cuadrado y el cubo de los ocho primeros números naturales.

4. Indica cuáles de las siguientes potencias son cuadrados y cuáles son cubos:

a) 2^2 b) 3^2 c) 4^3 d) 5^4 e) 8^2 f) 16^3 g) 10^2

1.3. Lectura de potencias

Las potencias se pueden leer de dos maneras:

Ejemplo:

a) Así 5^2 se puede leer 5 elevado a 2 y también se lee 5 al cuadrado

b) 7^3 se puede leer 7 elevado a 3 y también se lee 7 al cubo

c) 8^4 se puede leer 8 elevado a 4 y también se lee 8 a la cuarta

d) 3^5 se puede leer 3 elevado a 5 y también se lee 3 a la quinta.

1.4. Potencias de uno y de cero

Una potencia, de cualquier base distinta de cero, elevada a cero es igual a 1.

Ejemplo:

$7^0 = 1$ $2459^0 = 1$ $1^0 = 1$.

$$\boxed{3^0 = 1}$$

Uno, elevado a cualquier exponente, es igual a 1.

Ejemplo:

$1^2 = 1 \cdot 1 = 1$ $1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ $1^{35} = 1$ $1^0 = 1$.

$$\boxed{1^8 = 1}$$

Cero, elevado a cualquier exponente distinto de cero, es igual a 0.

Ejemplo:

$0^2 = 0 \cdot 0 = 0$ $0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$ $0^{35} = 0$.

$$\boxed{0^8 = 0}$$

Observación: 0^0 no se sabe cuánto vale, se dice que es una *indeterminación*.

Actividades propuestas

5. Lee de dos maneras distintas las siguientes potencias:

a) 5^3 b) 7^2 c) 25^4 d) 30^2 e) 7^5 f) 7^6.

6. Calcula mentalmente:

a) 1^{2689} b) 0^{9826} c) 1927^0 d) 0^{1382} e) 1^{1000} f) 1961^0 .

7. Completa la tabla siguiente en tu cuaderno:

a	a^2	a^3	a^4	a^5
5				
	4			
		27		
			1	
				0

1.5. Potencias de 10. Notación científica.

Las potencias de base 10 tienen una propiedad muy particular, son iguales a la unidad seguida de tantos ceros como indica el exponente:

Ejemplo:

$10^1 = 10$

$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$

$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1.000$

$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10.000$

$$10^5 = 100\ 000$$

¿Sabrías hallar 10^7 sin hacer ninguna operación?

La unidad seguida de ceros es igual a una potencia de 10.

Esto nos permite expresar cualquier número en **forma polinómica** usando potencias de 10.

$$6928 = 6 \cdot 1000 + 9 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 8 = 6 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 8$$

Actividades propuestas

8. Busca los exponentes de las potencias siguientes:
a) $10^{\square} = 10.000$ b) $10^{\square} = 10.000.000$ c) $10^{\square} = 100$.

9. Expresa en forma polinómica usando potencias de 10:
a) 12.345 b) 6.780.912 c) 500.391 d) 9.078.280.

10. Utiliza la **calculadora** para obtener potencias sucesivas de un número. Si marcas un número, a continuación dos veces seguidas la tecla de multiplicar y después la tecla igual obtienes el cuadrado del número.

a) Compruébalo. Marca **7 * * =** , ¿qué obtienes?

b) Continúa pulsando la tecla igual y obtendrás las potencias sucesivas: **7 * * = = =**...

c) Utiliza tu calculadora para obtener las potencias sucesivas de 2.

d) Vuelve a utilizarla para obtener las potencias sucesivas de 31 y anótalas en tu cuaderno.

Autora: Ana Lorente
Revisora: Irene García Saavedra
Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

2. OPERACIONES CON POTENCIAS Y PROPIEDADES

2.1. Producto de potencias de igual base

Para calcular el **producto** de dos o más potencias de la misma base, se deja la misma base y se suman los exponentes.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$9^3 \cdot 9^4 = 9^{3+4} = 9^7$$

Ejemplo:

$$3^2 \cdot 3^3 = (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^{2+3} = 3^5$$

2.2. Cociente de potencias de igual base

El **cociente** de potencias de igual base es igual a otra potencia de la misma base y de exponente, la diferencia de los exponentes.

$$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$5^7 : 5^4 = 5^{7-4} = 5^3$$

Ejemplo:

$$3^5 : 3^3 = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3} = 3^{5-3} = 3^2$$

2.3. Elevar una potencia a otra potencia

Para elevar una **potencia** a otra potencia, se deja la misma base y se multiplican los exponentes.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$(6^3)^4 = 6^{3 \cdot 4} = 6^{12}$$

Ejemplo:

$(7^5)^3 = (7^5) \cdot (7^5) \cdot (7^5) = (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) = 7^{15}$

Actividades propuestas

11. Aplica las propiedades de las potencias en tu cuaderno:

a) $7^{10} \cdot 7^2$	b) $8^{23} \cdot 8^3$	c) $5^5 \cdot 5^3 \cdot 5^6$	d) $10^3 \cdot 10^5 \cdot 10^4$
e) $(8^3)^2$	f) $(7^2)^4$	g) $(9^0)^6$	h) $(4^3)^2$
i) $6^{10} : 6^2$	j) $2^{23} : 2^3$	k) $9^8 : 9^3$	l) $3^{30} : 3^9$
m) $12^4 : 12^4$	n) $1^{25} : 1^{25}$	o) $5^3 : 5^0$	p) $7^4 \cdot 7^0$

12. Te has preguntado por qué un número elevado a 0 es igual a 1. Analiza la siguiente operación:

$$\frac{25}{25} = 1 \text{ y también } \frac{25}{25} = \frac{5^2}{5^2} = 5^{2-2} = 5^0$$

Por ese motivo se dice que todo número distinto de cero elevado a cero es igual a uno.

Autora: Ana Lorente
Revisora: Irene García Saavedra
Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

2.4. Potencia de un producto

La potencia de un **producto** es igual al producto de cada uno de los factores elevados al mismo exponente.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Ejemplo:

$$(5 \cdot 4)^3 = 5^3 \cdot 4^3.$$

2.5. Potencia de un cociente

La potencia de un **cociente** es igual al cociente de cada uno de los factores elevados al mismo exponente.

$$(a : b)^n = a^n : b^n$$

Ejemplo:

$$(10 : 4)^3 = 10^3 : 4^3$$

Actividades propuestas

13. Calcula:

a) $(2 \cdot 5)^4$ b) $(32 : 4)^3$.

14. Calcula **mentalmente**

a) $2^2 \cdot 2^3$ b) $4^2 \cdot 4^2$ c) $3^2 \cdot 3^2$

d) $10^6 \cdot 10^3 \cdot 10^4 \cdot 10^2$ e) $1^4 \cdot 1^5 \cdot 1^{15}$ f) $0^{25} \cdot 0^5$.

15. Escribe en forma de una única potencia

a) $7^5 \cdot 7^6 \cdot 7^4$ b) $4^4 \cdot 4^6 \cdot 4^7$ c) $2^{20} \cdot 2^{17}$ d) $3^6 \cdot 3^7 \cdot 3^3$.

16. Calcula **mentalmente**

a) $2^3 \cdot 2^2 \cdot 2$ b) $1^4 \cdot 1^6 \cdot 1^7$ c) $10^{15} \cdot 10^5$ d) $0^2 \cdot 0^6 \cdot 0^{12}$.

17. Calcula **mentalmente**

a) $10^8 \cdot 10^3 \cdot 10^2$ b) $0^3 \cdot 0^7 \cdot 0^8$ c) $1^{46} \cdot 1^{200}$ d) $5^5 \cdot 2^5$.

18. Escribe en forma de una única potencia y calcula:

a) $2^5 \cdot 5^5$ b) $10^4 \cdot 3^4$ c) $2^{20} \cdot 5^{20}$ d) $10^{10} \cdot 5^{10}$.

19. Calcula utilizando la **calculadora**

a) $53^3 \cdot 53^2 \cdot 53$ b) $71^3 \cdot 71^2$ c) $3{,}2^2 \cdot 3{,}2$ d) $82^3 \cdot 82$.

20. Calcula utilizando la **calculadora**

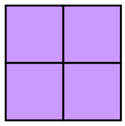
a) $49^2 \cdot 49^3 \cdot 49$ b) $35^4 \cdot 35^2$ c) $0'5^3 \cdot 0'5^5$ d) $147^2 \cdot 147$.

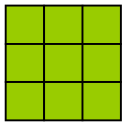
3. RAÍCES

3.1. Cuadrados perfectos

Si se quiere construir un cuadrado de lado 2, ¿cuántos cuadrados pequeños se necesitan?

Necesitamos 4. El 4 es un **cuadrado perfecto**. Observa que $2^2 = 4$.





Si queremos construir ahora un cuadrado de lado 3, ¿cuántos cuadrados pequeños necesitamos? Necesitamos 9. El 9 es también un cuadrado perfecto. Observa que $3^2 = 9$.

Ejemplo:

- ¿Cuál es el área de un cuadrado de 5 metros de lado?

Su área vale $5 \cdot 5 = 5^2 = 25$ metros cuadrados.

3.2. Raíz cuadrada. Interpretación geométrica

La raíz cuadrada **exacta** de un número *a* es otro número *b* cuyo cuadrado es igual al primero:

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$$

Ejemplo:

- Al poder construir un cuadrado de lado 2 con 4 cuadrados pequeños se dice que 2 es la raíz cuadrada de 4, ya que $2^2 = 4$, y por tanto decimos que 2 es la *raíz cuadrada* de 4, es decir:

$$\sqrt{4} = 2.$$

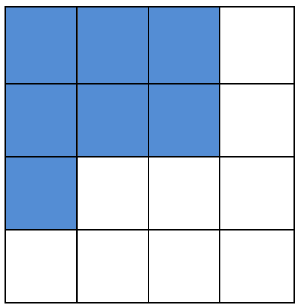
Obtener la raíz cuadrada exacta es la operación opuesta de la elevar al cuadrado.

- Por tanto, como $3^2 = 9$ entonces $\sqrt{9} = 3$.
- Al escribir $\sqrt{25} = 5$ se dice que la *raíz cuadrada* de 25 es 5.

Al signo √ se le denomina **radical**, se llama **radicando** al número colocado debajo, en este caso 25 y se dice que el **valor de la raíz** es 5.

Ejemplo:

- ¿Se puede construir un cuadrado con 7 cuadrados pequeños?



Observa que se puede formar un cuadrado de lado 2, pero sobran 3 cuadrados pequeños, y que para hacer un cuadrado de lado 3 faltan 2 cuadrados pequeños.

El número 7 no es un cuadrado perfecto, no tiene raíz cuadrada exacta porque con 7 cuadrados pequeños no se puede construir un cuadrado.

Ejemplo:

- Sabemos que el área de un cuadrado es 36, ¿cuánto vale su lado?

Su lado valdrá la raíz cuadrada de 36. Como $6^2 = 36$, entonces la raíz cuadrada de 36 es 6. El lado del cuadrado es 6.

Actividades propuestas

21. Calcula **mentalmente** en tu cuaderno las siguientes raíces:

a) $\sqrt{100}$ b) $\sqrt{64}$ c) $\sqrt{81}$ d) $\sqrt{49}$ e) $\sqrt{25}$ f) $\sqrt{1}$ g) $\sqrt{0}$.

Autora: Ana Lorente
Revisora: Irene García Saavedra
Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

3.3. Raíz *n*-ésima de un número

- Como $2^3 = 8$ se dice que $\sqrt[3]{8} = 2$ que se lee: *la raíz cúbica de 8 es 2*. El **radicando** es 8, el valor de la **raíz** es 2 y 3 es el **índice**.

La ***raíz enésima*** de un número *a*, es otro número *b*, cuya potencia enésima es igual al primero.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

$$\sqrt[3]{8} = 2 \text{ porque } 2^3 = 8$$

Ejemplo:

- Por ser $64 = 4^3$, se dice que 4 es la *raíz cúbica* de 64, es decir $\sqrt[3]{64} = 4$.
- Por ser $81 = 3^4$, se dice que 3 es la *raíz cuarta* de 81, es decir $\sqrt[4]{81} = 3$.

3.4. Introducir factores en el radical

Para introducir un número dentro del radical se eleva el número al índice de la raíz y se multiplica por el radicando.

Ejemplo:

$$10\sqrt{2} = \sqrt{10^2 \cdot 2} = \sqrt{200}$$

3.5. Extraer factores del radical

Para extraer números de un radical es preciso descomponer el radicando en factores:

Ejemplo:

$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{2^4 \cdot 2} = 2^2\sqrt{2}$$

3.6. Suma y resta de radicales

Decimos que dos radicales son semejantes si tienen el mismo índice y el mismo radicando.

Para sumar y restar radicales, estos deben ser semejantes; en ese caso, se operan los coeficientes y se deja el mismo radical.

Cuidado, un error muy común: la raíz de una suma (o una resta) **NO** es igual a la suma (o la resta) de las raíces:

$$10 = \sqrt{100} = \sqrt{64 + 36} \neq \sqrt{64} + \sqrt{36} = 8 + 6 = 14$$

Actividades propuestas

22. Calcula mentalmente en tu cuaderno las siguientes raíces:

a) $\sqrt[3]{1000}$ b) $\sqrt[3]{8}$ c) $\sqrt[4]{16}$ d) $\sqrt[4]{81}$ e) $\sqrt[3]{64}$ f) $\sqrt[5]{1}$ g) $\sqrt[3]{0}$.

23. Introducir los siguientes factores en el radical:

a) $2 \cdot \sqrt[3]{4}$ b) $3 \cdot \sqrt[3]{2}$ c) $5 \cdot \sqrt[5]{4}$ d) $10 \cdot \sqrt[3]{2}$ e) $2 \cdot \sqrt[4]{5}$.

24. Extraer los factores que se pueda del radical:

a) $\sqrt[3]{1000a^6b^3}$ b) $\sqrt[5]{100000000}$ c) $\sqrt[4]{81a^6b^5c^4}$ d) $\sqrt[3]{10000a^5b^3}$

25. Calcula:

a) $2\sqrt{8} + 3\sqrt{32} - 5\sqrt{2}$ b) $5\sqrt{27} + 2\sqrt{3} - \sqrt{81}$.

Autora: Ana Lorente
Revisora: Irene García Saavedra
Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

NÚMEROS ENORMES

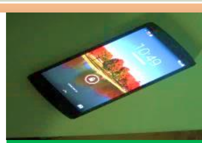
El cuerpo humano es uno de los mejores ejemplos para estudiar números de muchas cifras. Por ejemplo:

Un cuerpo humano adulto puede contener unos 50 trillones de células

Cada día nuestro organismo fabrica unos diez mil millones de glóbulos blancos que luchan contra las infecciones.

Se estima que tres mil millones de células mueren por minuto aunque la mayoría se renuevan

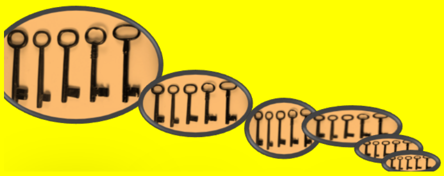
WhatsApp



El uso de esta aplicación supera los 420 millones de usuarios activos, y gestiona más de 54 mil millones de mensajes al día, de los cuales 38 mil millones son salientes y los restantes, 16 mil millones son entrantes.

POTENCIAS Y MÁS POTENCIAS

En un mueble hay seis estanterías con seis cajones cada una. Si se guardan seis llaveros en cada uno y en cada llavero hay seis llaves. ¿Cuántas llaves contiene el mueble? Expresa el resultado como potencia y calcúlalo.



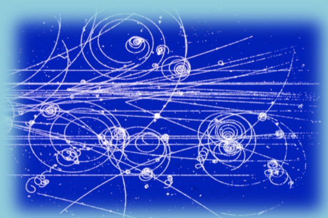
NÚMEROS PEQUEÑÍSIMOS

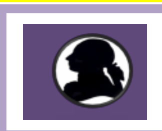
El **nanómetro** es la unidad de longitud que equivale a una mil millonésima parte de un metro (1 nm = 10^{-9} m).

Con esta unidad se mide, p. ej. la longitud de onda de las radiaciones infrarroja y ultravioleta .

La **nanotecnología**, es un área científica que estudia la aplicación de materiales que poseen dimensiones de unos pocos nanómetros en multitud de procesos de fabricación.

El símbolo del nanómetro es **nm**.



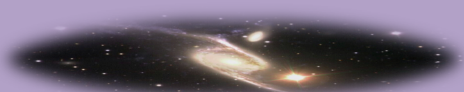


CAROLINA HERSCHE

Estudiar las estrellas fue una actividad apasionante para Carolina Herschel. Trabajó como ayudante de su famoso hermano William Herschel, lo que le proporcionó conocimientos sobre astronomía.

Tras la muerte de William, sus descubrimientos sobre la posición de mil quinientas nebulosas fueron tan precisos que se le concedió la Medalla de Oro de la Royal Society of Astronomy y otras muchas distinciones internacionales.

Todo un reconocimiento a su trabajo como astrónoma que compartió con la gran científica escocesa Mary Somerville, siendo las primeras mujeres en recibir esta distinción.



Autora: Ana Lorente
Revisora: Irene García Saavedra
Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

RESUMEN

		Ejemplos
Potencia	Una potencia a^n de base un número real a y exponente natural n es un producto de n factores iguales a la base	$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$. 5 es la base y 3 el exponente
Cuadrados y cubos	Las potencias de exponente 2 se llaman cuadrados y las de exponente 3, cubos	5^2 es 5 al cuadrado y 5^3 es 5 al cubo.
Potencias de 1 y de 0	Cualquier número distinto de cero elevado a 0 es igual a 1. El número 1 elevado a cualquier número es igual a 1. El número 0 elevado a cualquier número distinto de cero es igual a 0.	$7^0 = 1$; $1^{35} = 1$; $0^{234} = 0$.
Potencias de base 10	Una potencia de base 10 es igual a la unidad seguida de tantos ceros como unidades tiene el exponente. La unidad seguida de ceros es igual a una potencia de 10.	$10^3 = 1.000$ $10000 = 10^4$
Producto de potencias de igual base	Para multiplicar potencias de la misma base se deja la misma base y se suman los exponentes.	$4^2 \cdot 4^3 =$ $(4 \cdot 4) \cdot (4 \cdot 4 \cdot 4) =$ $4^{2+3} = 4^5$
Cociente de potencias de igual base	Para dividir potencias de igual base, se deja la misma base y se restan los exponentes.	$7^8 : 7^5 = 7^{8-5} = 7^3$
Elevar una potencia a otra potencia	Para calcular la potencia de otra potencia, se deja la misma base y se multiplican los exponentes.	$(2^4)^6 = 2^{24}$
Raíz cuadrada	La raíz cuadrada de un número a es otro número b que al elevarlo al cuadrado nos da a.	$\sqrt{4} = 2$ $\sqrt{49} = 7$

Autora: Ana Lorente
Revisora: Irene García Saavedra
Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Potencias

1. Calcula en tu cuaderno las siguientes potencias:

a) 7^3 b) 8^4 c) 5^5 d) 3^5 e) 5^2

f) 5^3 g) 3^4 h) 1^{47} i) 9^0 j) 10^8

2. Calcula mentalmente en tu cuaderno las 5 primeras potencias de 10.

3. Expresa en forma de potencia en tu cuaderno:

a) 100000 b) 1000000 c) 10000000

4. Expresa como una única potencia y calcula el resultado:

a) $(4^3)^2$ b) $(2^2)^2$ c) $(9^0)^5$ d) $(5^3)^2$

5. Calcula mentalmente en tu cuaderno las 5 primeras potencias de 2.

6. Escribe en tu cuaderno en forma de potencia el resultado de estas operaciones:

a) $6^{10} \cdot 6^2$ b) $8^{14} \cdot 8^3$ c) $3^5 \cdot 3^3 \cdot 3^6$ d) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$

e) $7 \cdot 7^4 \cdot 7^2$ f) $3^3 \cdot 3 \cdot 3^6$ g) $10^5 \cdot 10^3 \cdot 10^4$ h) $2 \cdot 2 \cdot 2$

7. Escribe en forma de una única potencia el resultado de estas operaciones:

a) $7^{10} : 7^2$ b) $9^{14} : 9^3$ c) $3^8 : 3^3$

d) $5^7 : 5^3$ e) $6^4 : 6^4$ f) $10^7 : 10^5$

8. Simplifica y calcula en tu cuaderno:

a) $(3 \cdot 2^4 \cdot 5^3) : (3 \cdot 2^2 \cdot 5^2)$ b) $(6^3 \cdot 4^5 \cdot 11^3) : (2^4 \cdot 3 \cdot 11^2)$

9. Escribe en tu cuaderno en forma de una única potencia:

a) $4^4 \cdot 2^5 \cdot 2^{10}$ b) $5^5 \cdot 25^6 \cdot 5^8$ c) $10^{12} \cdot 100^8$ d) $3^2 \cdot 9^5 \cdot 3^3$

10. Escribe en forma de potencias:

a) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$ b) $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$ c) $11 \cdot 11 \cdot 11$ d) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

Autora: Ana Lorente
Revisora: Irene García Saavedra
Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

11. Dibuja en un papel cuadriculado un cuadrado de lado igual a 2 cuadrados pequeños. ¿Cuántos cuadrados pequeños tiene? Dibuja también cuadrados de lados 3, 4 y 5 cuadrados pequeños e indica cuántos cuadrados pequeños tienen. Exprésalo en forma de potencias.

Fotógrafo Francisco Javier Martí-

12. Con cubitos se forman cubos mayores de lado 2, 3, 4 y 5. ¿Cuántos cubitos son necesarios en cada caso? Exprésalo en forma de potencias.

13. Efectúa las siguientes operaciones con potencias dando el resultado en forma de potencia de una sola base, la que creas más adecuada en cada caso:

a) $(4^5 \cdot 4^2)^3 : 16$ b) $1^3 \cdot 3^3$ c) $(16^4 : 8^3)^4$

d) $(5^3 : 5^2)^3$ e) $((7^5 \cdot 7^2)^2)^3$ f) $(27^2 \cdot 9^2)^3$

14. Efectúa las siguientes operaciones dando el resultado como una única potencia:

a) $2^{10} \cdot 2^2 \cdot 2^2$ b) $(5^{10} \cdot 25^2)^4$ c) $4^3 \cdot 4^5 \cdot (4^5)^2$

d) $16^7 : 8^2$ e) $(16^7)^3 : (8^2)^2$ f) $3^4 \cdot (3^2 : 3^5)$

15. Escribe los cuadrados de diez números mayores que 10 y menores que 100.

16. En un envase de un supermercado hay 16 cajas de batidos de chocolate, y cada caja tiene 8 batidos de 200 centímetros cúbicos. Expresa el número total de batidos de cada envase en forma de potencia de 2.

17. Calculadora: Algunas calculadoras tienen la tecla $\boxed{x^2}$ que calcula cuadrados. Por ejemplo: Para calcular 23^2 se pulsa:

23 $\boxed{x^2}$

y se obtiene 529. Usa la calculadora para obtener:

a) 13^2 b) 43^2 c) 75^2 d) 82^2.

18. Escribe los cubos de los diez números mayores que 10 y menores que 100.

19. Indica cuáles de los siguientes números son cuadrados y cuáles son cubos:

a) 1 b) 2 c) 4 d) 8 e) 16 f) 27 g) 1000

Raíces

20. Halla en tu cuaderno:

a) $\sqrt{4}$ b) $\sqrt{25}$ c) $\sqrt{81}$ d) $\sqrt{9}$

e) $\sqrt{64}$ f) $\sqrt{16}$ g) $\sqrt{225}$ h) $\sqrt{100}$

21. Calcula en tu cuaderno las siguientes raíces:

a) $\sqrt{121}$ b) $\sqrt[3]{125}$ c) $\sqrt[3]{8}$ d) $\sqrt[3]{1}$ e) $\sqrt[4]{16}$ f) $\sqrt{289}$

22. Introduce en tu cuaderno los siguientes factores en el radical:

a) $3\sqrt[3]{27}$ b) $8\sqrt[3]{4}$ c) $9\sqrt[5]{3}$ d) $5\sqrt[3]{7}$

e) $4\sqrt[5]{4}$ f) $5\sqrt[3]{2}$ g) $2\sqrt{7}$ h) $5\sqrt{7}$

23. Extrae en tu cuaderno factores de los radicales siguientes:

a) $\sqrt[3]{729}$ b) $\sqrt{32}$ c) $\sqrt{175}$ d) $\sqrt{1200}$

e) $\sqrt{180}$ f) $\sqrt[4]{50000}$ g) $\sqrt[3]{64}$ h) $\sqrt[4]{100000}$

i) $\sqrt{50}$ j) $\sqrt{360}$ k) $\sqrt[3]{80}$ l) $\sqrt{8}$

24. Calculadora: Algunas calculadoras tienen la tecla:

$$\boxed{\sqrt{\ }}$$

que calcula raíces cuadradas. Por ejemplo: Para calcular $\sqrt{64}$ se pulsa:

$$64 \quad \boxed{\sqrt{\ }}$$

y se obtiene 8.

Usa la calculadora para obtener las raíces cuadradas de 121, 144, 625, 2025.

25. En la pastelería quieren colocar en una caja cuadrada 196 bombones formando el mayor cuadrado posible, ¿cuántos bombones tendrá de lado? ¿Cuántos bombones se necesitan para formar el cuadrado que tenga un bombón más por lado?

26. Halla en tu cuaderno:

a) $3\sqrt{5} + 5\sqrt{20} – 7\sqrt{45}$ b) $4\sqrt{12} – 3\sqrt{75} + 6\sqrt{300}$

c) $5\sqrt{3} – 7\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$ d) $8\sqrt{2} – 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$

27. Calcula mentalmente las raíces cuadradas de 100; 10.000; 1.000.000.

28. Calcula en tu cuaderno:

a) $2 + 5^2 + (14 : 2) + (1\ )^7$ b) $3 + 4^2 + (12 : 6) + (1)^{14}$

c) $3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^0$ d) $4^3 + 7 \cdot 3^2$

29. Escribe en tu cuaderno las frases siguientes y complétalas:

a) La raíz cuadrada de ... ... es 10.

b) La raíz cuadrada de 36 es ... ...

c) El número al que se le halla la raíz cuadrada se llama ... ...

d) El cubo de 2 es ... ...

e) El cuadrado de ... ... es 81.

f) La raíz cuadrada aproximada de 5 es ... ... Observa con 5 cuadraditos podemos formar un cuadrado de lado 2 y nos sobra un cuadradito.

30. Se quieren plantar árboles en un jardín de forma que llenen un cuadrado. Hay 26 árboles. ¿Cuántos árboles habrá en cada lado del cuadrado? ¿Sobrará algún árbol?

31. Escribe al número 111 entre los cuadrados de dos números consecutivos.

32. Con 9 cuadrados hemos formado un cuadrado mayor de lado 3. ¿Cuántos cuadraditos debemos añadir para formar el siguiente cuadrado de lado 4? ¿Es 3 + 3 + 1? Y si ya tenemos el cuadrado de lado 4, cuántos para formar el cuadrado de lado 5?

Problemas

33. Una finca tiene forma cuadrada y mide 36 m de lado. Si el metro cuadrado se paga a 500 €, ¿cuánto vale la finca?

34. El suelo de una cocina es cuadrado y está formado por 121 losas cuadradas de 40 cm x 40 cm. Halla la medida del lado de la cocina y su área.

35. Preguntan la edad a una profesora de Matemáticas y contesta "Mi edad se obtiene si del cubo de 3 se suma el cuadrado de 2". ¿Qué edad tiene?

36. Nieves y Ana juegan tres partidas. Nieves tenía 10 cromos y Ana 80. En la primera partida ganó Nieves y elevó sus cromos al cuadrado, en la segunda perdió el cubo de 3, y en la tercera perdió el cuadrado de 4. ¿Cuántos cromos les quedan a Ana y a Nieves? ¿Quién ha ganado?

Fotógrafa: Manuela Morillo

37. Luis y Miriam tienen canicas. Luis tiene 8 elevado al cuadrado. Miriam tiene 2 elevado a la sexta potencia. ¿Quién tiene más canicas?

38. En un restaurante se puede elegir entre cuatro primeros platos, cuatro segundos y cuatro postres. ¿Cuántos menús distintos pueden hacerse?

Autora: Ana Lorente
Revisora: Irene García Saavedra
Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Cuál es el resultado de las tres potencias siguientes 2^4, 4^3 y 5^2

a) 16, 12, 25 b) 16, 64, 25 c) 32, 64, 10 d) 64, 32, 26

2. ¿Cuál es el resultado de la operación $4^2 + 5^2$?

a) 41 b) 64 c) 34 d) 16

3. Escribe = (igual) o ≠ (distinto) según corresponda:

a) 5^6 ____ 15625 b) 1^8 ____ 8 c) 14^0 ____ 14 d) 10^4 ____ 40

4. ¿Cuál de las respuestas corresponde a la multiplicación $3^3 \cdot 3^2 \cdot 3^5$?

a) 3^{30} b) 9^{10} c) 3^{10} d) 19683

5. ¿Cuál de las respuestas corresponde a la división $7^6 : 7^4$?

a) 7^{24} b) 7^2 c) 7^{10} d) 3/2

6. ¿Cuál de las soluciones es la correcta para la operación $(5 \cdot 2 \cdot 1)^3$

a) 1000 b) 30 c) 100 d) 60

7. Elige la respuesta que corresponda al resultado de $((2)^2)^4$

a) 2^8 b) 2^6 c) 32 d) 16

8. ¿Cuál es el resultado de la operación $(18 : 2)^3$

a) 81 b) 316 c) 401 d) 729

9. Señala el número que no es cuadrado perfecto:

a) 49 b) 36 c) 25 d) 1000

10. El lado de una superficie cuadrada de 64 centímetros cuadrados mide:

a) 6 cm b) 8 cm c) 7 cm d) 7,5 cm

Autora: Ana Lorente
Revisora: Irene García Saavedra
Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

CAPÍTULO 4: NÚMEROS ENTEROS

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Ana Lorente

Revisora: Adela Salvador

Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

Índice

Resumen

Si subes en un ascensor de un edificio con garaje habrás observado que las plantas de sótano son –1, –2... Son números negativos. Cómo habrás visto, también se usan números negativos en los termómetros para indicar temperaturas por debajo de cero grados centígrados, para anotar las deudas en un balance, al indicar la profundidad de un objeto bajo el nivel del mar, en algunas latitudes y longitudes geográficas, en una fecha anterior a Cristo, incluso al decir algunas horas…

En este capítulo vas a aprender a trabajar con números positivos y negativos, a sumarlos, restarlos, multiplicarlos, dividirlos y representarlos en una recta.

Autora: Ana Lorente
Revisora: Adela Salvador
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. NÚMEROS ENTEROS

1.1. Números positivos, negativos y cero

Existen ocasiones de la vida cotidiana en que es preciso usar números distintos de los naturales, números positivos y negativos. Los números naturales no resultar ser suficientes.

- Por ejemplo, si tienes 20 euros y gastas 25 euros, ¿de cuántos euros dispones? Tienes una deuda de 5 €, y por lo tanto tienes una cantidad negativa de dinero.

Fíjate en estos ejemplos:

Ejemplo:

- Al hacer las cuentas de tu dinero puedes indicar con números positivos lo que recibes y con negativos lo que gastas. Así, si recibes 10 € de paga semanal lo indicarás (+10) y si gastas 1 € en un helado lo indicarás (–1) €. Si te quedas sin dinero dirás que tienes 0 €.

Ejemplo:

- Cuando hace mucho frío, por ejemplo 5 grados bajo cero, se indica diciendo que hace –5 ºC, mientras que si se dice que hace 9 grados, se indica +9 ºC.

Ejemplo:

- Se dice que el monte Niblock mide 2 976 m, mientras que una sima marina, por ejemplo la fosa de las Marianas, la más profunda del mundo, que está a 11 516 m bajo el nivel del mar, se indica diciendo que está a –11 516 m. El nivel del mar es el nivel 0.

Monte Niblock Ilustración de INTEF. Banco de imágenes

Actividades propuestas

1. Escribe el número que mejor representa la situación que se plantea:
a) Un avión vuela a 1 292 m de altura
b) El lunes el termómetro marcaba 6º C bajo cero
c) El coche estaba en el sótano 2
d) Sócrates nació en el año 470 antes de Cristo

1.2. Donde aparecen los números negativos

Los números negativos aparecen al considerar:

- El capital de una empresa que ha quebrado.
- Temperaturas por debajo de cero grados.
- Fechas antes de Cristo.
- Profundidad de un submarino bajo el nivel del mar.
- Se dice “las seis menos cinco” o las “ocho menos veinte”.

Actividades propuestas

2. Expresa estos enunciados con un número positivo, negativo o cero:
a) Me he gastado toda la paga.
b) Mi ciudad está a 700 m sobre el nivel del mar.
c) El garaje está en el segundo sótano.

1.3. ¿Qué son?

Los **números enteros** son una ampliación de los números naturales:

- Los números enteros **positivos** son los números naturales y se escriben precedidos del signo +: +1, +2, +3, +4, +5…
- Los enteros negativos van precedidos del signo –: –1, –2, –3….
- El cero es el único número entero que no es ni negativo ni positivo y no lleva signo.

El conjunto de los números enteros se representa por **Z**.

$$\mathbf{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, +4, -4, \dots\}$$

Al escribir un número entero positivo no se suele escribir su signo: + 2 = 2; +6 = 6.

Actividades propuestas

3. Indica el significado de los números –5, 0 y +3 en cada una de las situaciones siguientes:

a) En un ascensor b) En un termómetro c) En una cuenta

1.4. Valor absoluto de un número entero

La distancia que separa un número entero del cero se define como **valor absoluto** del número.

- Es siempre un número positivo (o cero).
- Se escribe entre dos barras **| |**.

Ejemplo:

- El valor absoluto de +3 , es 3, y se escribe: |+3| = 3; el valor absoluto de –7 es 7, por tanto |–7| = 7, del mismo modo: |+8| = 8, |–5| = 5.

|+4| = 4

|–2| = 2

Actividades propuestas

4. Calcula el valor absoluto de los siguientes números:

a) |+9| b) |–11| c) |0| d) |–6|

1.5. Opuesto de un número entero

El **opuesto** de un número entero es otro número entero de igual valor absoluto y distinto signo.

Lo opuesto de “deber” es “tener”. Lo opuesto de 5 m de altura es 5 m bajo el nivel del mar. Lo opuesto de 4º C es 4º C bajo cero, etc.

Se escribe: Op(+a) = –a, Op(–a) = +a o bien: – (+a) = –a, –(–a) = +a

Ejemplo:

- Op(+3) = –3 Op(–8) = +8 – (+3) = –3 –(–8) = +8

Observa que...

Dos números opuestos tienen el mismo valor absoluto y distinto signo.

Ejemplo: **+5 y -5**

Actividades propuestas

5. Escribe en tu cuaderno:

a) |–5| b) |+7| c) Op(+6) d) Op(–4)

6. Escribe dos números que disten 4 de cero. ¿Cuánto dista de cero –3? ¿Y +3?

Autora: Ana Lorente
Revisora: Adela Salvador
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2. REPRESENTACIÓN GRÁFICA

2.1. Representación en la recta numérica y orden en el conjunto de los números enteros

Los números enteros se representan en la recta numérica así:

1. Debemos trazar una recta horizontal y marcamos el **cero**, que se llama **origen**
2. Dividimos la recta en segmentos iguales, de longitud 1
3. Colocamos los números positivos a partir del cero a la derecha y los números negativos a partir del cero a la izquierda.

–5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4

Ejemplo:

- Representa en una recta numérica: –2, 0, 4, –1, 8, –7, –3 y 1

–8 –7 –6 –5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4 5 6 7 8

De esta forma quedan ordenados los números enteros. Cuanto más a la derecha esté un número situado en la recta numérica es mayor, y cuanto más a la izquierda esté situado, es menor.

Ejemplo:

- –7 está más a la izquierda que +4 por tanto –7 es menor que +4. Se escribe –7 < +4

El signo **<** se lee "menor que" y el signo **>** se lee "mayor que".

Ejemplo:

- Podemos ordenar números utilizando los signos anteriores:

$$-7 < -3 < -2 < -1 < 0 < 2 < 4 < 8.$$

O bien:

$$8 > 4 > 2 > 0 > -1 > -2 > -3 > -7.$$

- Parece raro que el 0 sea mayor que otro número, pero piensa que se tiene más si no se tiene nada, que si se debe dinero. Si el termómetro marca 0 º C no hace mucho calor, pero menos calor hace si marca: –7 º C. Es decir: 0 > –7

Actividades propuestas

7. Representa en una recta numérica en tu cuaderno los siguientes números y ordénalos de menor a mayor: –7, 3, 1, –4, 6, –5, –2 y 0.

8. Completa en tu cuaderno con el signo < (menor) o > (mayor) según corresponda:

a) –11 –6 b) –8 +4 c) +2 +10 d) +3 –9 e) –2 |–6|

9. Ordena de menor a mayor:

a) +12, –4, –15, +13 b) +3, –25, –9, –6

10. *Tales de Mileto* vivió hacia el año 600 a. C. y Newton durante el siglo XVII, ¿qué diferencia de siglos hay entre ambas fechas?

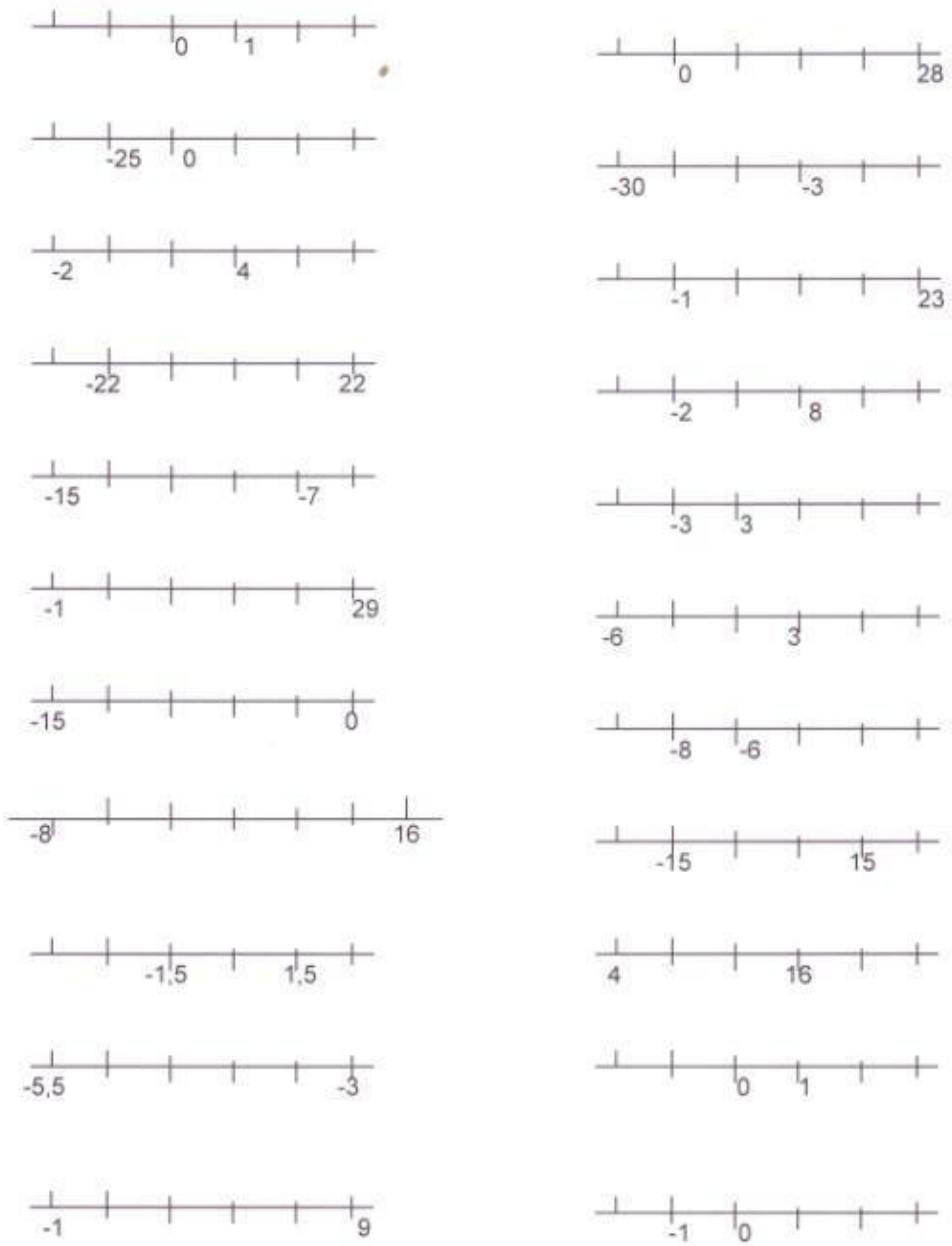
Ayuda: Representa ambas fechas en una recta numérica.

Autora: Ana Lorente
Revisora: Adela Salvador
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Recursos didácticos fotocopiables

Rectas numéricas

Escribe los números que faltan en los puntos señalados de las siguientes rectas numéricas:



Autora: Ana Lorente
Revisora: Adela Salvador
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS

3.1. Suma de números enteros

Ejemplo:

- Tienes 12 € y te dan 5 € entonces tienes 17 €: **+12 + 5** = **+17**.
- Debes 12 € y gastas 5 € entonces acumulas una deuda de 17 €: **–12 – 5 = –17.**

Para **sumar** dos números enteros de igual signo se suman sus valores absolutos y se pone el signo de los sumandos

- Tienes 12 € pero debes 5 € entonces tienes 7 €: **–5 + 12 = +7.**
- Debes 12 € y tienes 5 € entonces debes 7 €: **–12 + 5 = –7.**

Para **sumar** dos números enteros de distinto signo se restan sus valores absolutos y se pone el signo del sumando de mayor valor absoluto

Suma de tres o más enteros

Se puede sumar 3 o más enteros mediante dos procedimientos:

1) Se suman los dos primeros sumandos y se suma el tercer sumando al resultado:

Ejemplo:

+8 – 5 + 2 = + 3 + 2 = +5

En el caso de 4 sumandos se pueden sumar de dos en dos:

Ejemplo:

+8 – 5 + 2 – 6 = + 3 – 4 = –1

2) Se suman los positivos por un lado (**tengo**) y los negativos (**debo**) por otro y finalmente se obtiene el resultado:

Ejemplo:

Debo	**tengo**	**debo**			**tengo**	**debo**	
–12	**+ 19**	**– 4**		**=**	**+19**	**– 16**	**= +3**
tengo	**debo**	**tengo**	**debo**		**tengo**	**debo**	
+8	**– 5**	**+ 2**	**– 3**	**=**	**+ 10**	**– 8**	**= +2**

Observa que al sumar números enteros puedes hacerlo en cualquier orden y siempre se obtiene el mismo resultado. Y puedes asociar los términos como más te convenga y el resultado será el mismo.

Actividades propuestas

11. Realiza en tu cuaderno las siguientes sumas de números enteros

a) +9 + 5 b) (–6) + (–3) c) +7 +(–4) d) (–8) + 10

12. Halla el resultado de las siguientes sumas:

a) (+12) + (+5) + (–4) b) (–8) + (–2) + (–10) c) (–15) + (–4) + (+9) d) (–3) + (+11)

13. Efectúa estas operaciones

a) (+8) + (+2) + (–2) b) (–14) + (–7) + (–11) c) (–7) + (–2) + (+6) d) (–5) + (+2)

3.2. Resta de números enteros

Para **restar** dos números enteros se suma al primero el opuesto del segundo.

Ejemplo:

- Observa los cuatro casos siguientes:

$$(+12) – (+7) = (+12) + op(+7) = (+12) + (–7) = +5$$

$$(+12) – (–7) = (+12) + op(-7) = (+12) + (+7) = +19$$

$$(–12) – (+7) = (–12) + op(+7) = (–12) + (–7) = –19$$

$$(–12) – (–7) = (–12) + op(-7) = (–12) + (+7) = –5$$

El signo **menos delante de un paréntesis** cambia los signos de los números que hay dentro del paréntesis.

Ejemplo:

- Vamos a comprobar esa propiedad realizando de dos formas distintas las operaciones:
- Calculamos primero el paréntesis:

$$(+12) – ((–4) + 7) = (+12) – (+3) = +9$$

- Cambiamos primero los signos

$$(+12) – ((–4) + 7) = (+12) + ((+4) + (–7)) = (+12) + (–3) = +9$$

Actividades propuestas

14. Un autobús comienza el viaje con 45 pasajeros. En la primera parada se bajan 7 y se suben 12. En la segunda se bajan 10 y se suben 8, y en la tercera se bajan 4. ¿Cuántos pasajeros hay en el autobús?

Expresiones sencillas con paréntesis

El signo más (**+**) indica suma o que el número es positivo, y el signo menos (**–**) indica resta o que el número es negativo. Si se quiere escribir "*sumar al **8** el número **–3***" no es correcto escribir **8** + **–3**, lo correcto es escribir: **8** + (**–3**) añadiendo un paréntesis. Del mismo modo para escribir "***restar** al **7** el número **–3***", no es correcto **7 – –3**, se debe escribir **7 –** (**–3**) añadiendo el paréntesis.

Actividades propuestas

15. Un avión vuela a 4000 m y un submarino está sumergido a 60 m, ¿qué distancia en metros les separa?

16. El emperador romano Augusto nació el 23 de septiembre del año 63 a. C. y murió el 19 de agosto del año 14 d. C. ¿Cuántos años vivió?

17. Expresa al número 10 como suma y resta de 3 números enteros.

18. Expresa al número cero como suma y resta de cuatro números enteros.

Autora: Ana Lorente
Revisora: Adela Salvador
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.3. Operaciones combinadas de suma y restas

En las operaciones de sumas y restas combinadas, como el siguiente:

$$(+2) + (-1) - (+3) - (-5) + (-8)$$

Debemos:

1º) Eliminar los paréntesis

2º) Operar adecuadamente los números resultantes

Recuerda que:

$+ (+a) = +a$

$+ (-a) = -a$

$- (+a) = -a$

$- (-a) = +a$

Ejemplo:

$(+2) + (-1) - (+3) - (-5) + (-8) = +2 - 1 - 3 + 5 - 8 = 7 - 12 = -5.$

$(+8) - (+3) + (-2) = +8 - 3 - 2 = 8 - 5 = +3.$

$(-7) + (-3) - (-5) = -7 - 3 + 5 = -10 + 5 = -5.$

$(-4) - (-7) + (-5) - (-1) = -4 + 7 - 5 + 1 = -9 + 8 = -1.$

$(-5) + (-6) - (-2) + (-3) = -5 - 6 + 2 - 3 = -14 + 2 = +12$

Actividades propuestas

19. Realiza en tu cuaderno las siguientes sumas de números enteros

a) $+8 +3$ b) $(-7) + (-9)$ c) $+10 + (-4)$ d) $(-7) +7$

20. Realiza en tu cuaderno las siguientes sumas de números enteros usando el método de agrupar:

a) $-6 + 7 - 5$ b) $+5 -7 + 9$ c) $-5 + 7 - 1$ d) $+6 - 9 -2$

21. Realiza en tu cuaderno las siguientes sumas de números enteros usando el método de tener y deber:

a) $-3 + 6 - 4$ b) $+4 - 6 + 8$ c) $-4 + 6 - 9$ d) $+5 - 8 - 9$

22. Escribe en tu cuaderno el resultado:

a) $+ (+5)$ b) $- (+6)$ c) $- (-7)$ d) $+ (-42)$

23. Realiza en tu cuaderno las siguientes sumas y diferencias de números enteros

a) $+(+4) + (-6)$ b) $-(+5) - (+7)$ c) $- (-6) + (+8)$ d) $- (+4) + (+2) - (-5)$
e) $- (+3) - (+2) - (+7)$ f) $- (+3) + (-2) + (-5) - (-6)$ g) $- (+2) - (+4) - (-5) - (-6)$

24. Realiza en tu cuaderno las siguientes operaciones:

a) $+(+6) + (-8) + (+2)$ b) $-(+7) - (+9) + (+1)$ c) $- (-8) + (+1)$ d) $- (+6) + (+4) - (-7)$
e) $- (+5) - (+4) - (+9)$ f) $- (+5) + (-4) + (-7) - (-8)$ g) $- (+4) - (+6) - (-7) - (-8)$

Autora: Ana Lorente
Revisora: Adela Salvador
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.4. Producto y cociente de números enteros

Para **multiplicar** dos números enteros se debe:

1º) Multiplicar sus valores absolutos

2º) Aplicar la **regla de los signos** siguiendo lo siguiente:

Es decir, se asigna el signo **+** si ambos factores tienen el mismo signo, y el signo **–** si tienen distinto signo.

+ · + = +

– · – = +

+ · – = –

– · + = –

Ejemplo:

(+6) · (+4) = +24

(–3) · (–4) = +12

(+5) · (–3) = –15

(–7) · (+5) = –35

Ejemplo:

Luis gana 20 euros al mes, si no gasta nada, ¿cuánto ahorrará al cabo de 5 meses?

(+20) · (+5) =+100 € ahorrará al cabo de 5 meses.

Ejemplo:

El recibo mensual es de 30 euros al mes. ¿Cuánto gastará al cabo de 7 meses?

(–30) · (+7) = –210 € gastará al cabo de 7 meses.

Ejemplo:

Eva gasta 10 euros al mes en golosinas. Deja de comprarlas durante 3 meses. ¿Cuánto ha ahorrado?

(–10) · (–3) = +30 € ahorrará al cabo de 3 meses.

Para **dividir** dos números enteros se debe:

1º) Calcular el cociente de sus valores absolutos

2º) Asignar al resultado un signo mediante la siguiente regla:

+ : + = +

– : – = +

+ : – = –

– : + = –

Ejemplo:

(+25) : (+5) = +5

(–16) : (–2) = +8

(+21) : (–3) = –7

(–36) : (+9) = –4

Actividades propuestas

25. Realiza los siguientes productos y divisiones de números enteros:

a) (+3) · (+2) b) (+4) · (–7) c) (–8) · (–9) d) (–5) · (+6)

e) (+20) : (+2) f) (+21) : (–3) g) (–30) : (–2) h) (–54) : (+6)

26. Calcula en tu cuaderno los siguientes productos y divisiones de números enteros:

a) (+7) · (+3) b) (+5) · (–3) c) (–9) · (–2) d) (–6) · (+7)

e) (+30) : (+3) f) (+50) : (–5) g) (–16) : (–4) h) (–70) : (+2)

27. Efectúa mentalmente y anota los resultados en tu cuaderno:

a) (+2) · (+4) b) (+3) · (–2) c) (–6) · (–3) d) (–5) · (+8)

e) (+8) : (+4) f) (+15) : (–3) g) (–10) : (–5) h) (–60) : (+6)

Autora: Ana Lorente
Revisora: Adela Salvador
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.5. Potencias de números enteros

Para calcular la **potencia** de un número entero se multiplica la base por sí misma tantas veces como indique el exponente.

Ejemplo:

$$(+2)^4 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) = +16$$

$$(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$$

Conviene tener en cuenta algunas particularidades que nos ayudan a abreviar el cálculo:

Las potencias de **base negativa** y exponente **par** son números positivos.

$$(-2)^2 = +4$$

$$(-2)^3 = -8$$

Ejemplo:

$$(-5)^2 = +25$$

Las potencias de **base negativa** y exponente **impar** son números negativos

Ejemplo:

$$(-5)^3 = -125$$

3.6. Operaciones combinadas. Jerarquía de operaciones

En las operaciones combinadas es preciso tener en cuenta la **jerarquía de las operaciones**:

1ª) Se resuelven las operaciones que estén dentro de paréntesis

2º) Se realizan las multiplicaciones y las divisiones de izquierda a derecha

3º) Se efectúan las sumas y las restas

Ejemplo:

Jerarquía de operaciones	$[(+4-5) \cdot (+3-7-2)] + (-9) : (-3) + 5$
1) Se resuelven los paréntesis	$[(-1) \cdot (-6)] + (-9) : (-3) + 5$
2) Se realizan multiplicaciones y divisiones	$[+6] + (+3) + 5$
3) Se efectúan sumas y restas	Resultado = 14

Actividades propuestas

28. Realiza las siguientes operaciones:

a) $+4 - (+5) \cdot (-3)$ b) $+6 + (-9) : (+2-5)$ c) $-3 + [-4 - (-26) : (+2)]$

29. Realiza las siguientes operaciones:

a) $+8 + (-1) \cdot (+6)$ b) $-6 + (-7) : (+7)$ c) $+28 - (-36) : (-9-9)$

d) $+11 + (+7) \cdot (+6-8)$ e) $-7 - [+4 - (-6) : (+6)]$ f) $+9 + [+5 + (-8) \cdot (-1)]$

30. Halla:

$(+1)^{2374}$ b) $(-1)^{2375}$ c) $(-3)^2$ d) $(-3)^3$

Autora: Ana Lorente
Revisora: Adela Salvador
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.7. Operaciones con calculadora

Para utilizar la calculadora para hacer operaciones con números enteros debemos tener muy clara la **jerarquía de operaciones** y el uso de paréntesis. A la calculadora, o a un ordenador, haya que darle órdenes precisas. No puede comprender lo que hubiéramos querido escribir. Hay que hacerlo correctamente.

Ejemplo:

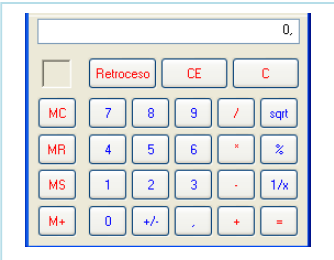
- Utiliza tu calculadora para calcular 11 + 7 · 6 – 8, antes de hacerlo, ¿qué opinas que va a salir?

¿Has obtenido 45? Si escribes directamente en tu calculadora 11 + 7 · 6 – 8, veamos en qué orden hace las operaciones. Primero calcula los productos: 7 □ 6 = 42. Y luego las sumas y restas: 11 + 42 – 8 = 45.

- Pero la operación que queríamos haber hecho era: +11 + (+7) · (+6 – 8). ¿Cómo debemos hacerla con calculadora?

De nuevo tienes que tener muy claro el uso de paréntesis y la jerarquía de operaciones. Recuera, primero se hace lo que está entre paréntesis: 6 – 8 = –2. Después los productos: 7 □ (–2) = –14. Y por último las sumas y restas: 11 – 14 = –3. Es decir, hay que teclear: 6 – 8 * 7 + 11 y se obtiene –3.

- Calcula 11^6.



Para calcular una potencia con la calculadora (dependiendo del tipo de calculadora) o en un ordenador, debes escribir: 11^6, y obtienes 1771561. En calculadoras demasiado sencillas deberás multiplicar 11 por sí mismo 6 veces. Una posible forma de hacerlo es multiplicar 11 □ 11 = 121. Y a continuación:

121 □ 121 □121 = 1771561.

Actividades propuestas

31. Utiliza la calculadora para realizar las siguientes operaciones:

a) +2 – (+6) · (–4)   b) +9 + (–6) : (+3 – 6)   c) –1 + [–5 – (–27) : (+2)]

32. Utiliza la calculadora para realizar las siguientes operaciones:

a) +3 + (–2) · (+7)   b) –4 + (–11) : (+11)   c) +14 – (–27) : (–9 – 9)

d) +5 + (+2) · (+9 – 4)   e) –3 – [+5 – (–7) : (+7)]   f) +8 + [+3 + (–5) · (–2)]

33. Utiliza la calculadora para realizar las siguientes operaciones:

$(+3)^{16}$ b) $(-2)^{15}$ c) $(-3)^{11}$ d) $(-2)^{20}$

CURIOSIDADES. REVISTA

Pacto con el diablo

Una persona protestaba por su mala suerte. Había perdido su trabajo y sólo le quedaban unos euros en el bolsillo.

El diablo se le acercó y le hizo una extraña proposición:

–Yo puedo hacer que tu dinero se duplique cada vez que cruces el puente que atraviesa el río. La única condición es que yo te esperaré al otro lado y debes entregarme 24 €.

El trato parecía ventajoso. Sin embargo, cuando cruzó por tercera vez, al dar al diablo los 24 € se quedó sin nada. Había sido engañado.
¿Cuánto dinero tenía en un principio?

Un juego

Rellena con números enteros las casillas en blanco de tal manera que la suma de todas las filas y columnas sea siempre **3**.

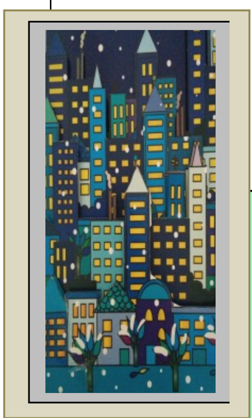
–6		+6
	+2	
		0

Rellena con números enteros las casillas en blanco de tal manera que el producto de todas las filas y columnas sea siempre **–70**.

		+7
	–7	
–7		+2

Rellena con los números **–6, –5, 1, 2, 3, 5, 7, 9** y **11** de forma que todas las filas y columnas sumen lo mismo.

Rellena con los números **–8, –6, –4, –3, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9** y **11** de forma que todas las filas y columnas sumen lo mismo. Dos números pueden repetirse.



SUBIR Y BAJAR

El Empire State Building, uno de los rascacielos más emblemáticos de Nueva York, necesitó para la construcción de sus 103 plantas, unos diez millones de ladrillos. En su construcción, 3000 obreros invirtieron, en 410 días, más de siete millones de horas de trabajo.

Para ascender casi sus 414 m de altura, hay que superar los 1860 escalones que llegan hasta la planta 102.

Si quisiéramos llegar hasta el centro de la Tierra bajando por una escalera semejante, el número de escalones que bajaríamos sería…………………. (el radio de la Tierra mide aproximadamente 6371 km)

Autora: Ana Lorente
Revisora: Adela Salvador
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

		Ejemplos
Números positivos, negativos y cero.	Los primeros llevan un signo + o no llevan signo, los segundos un signo -. El cero no tiene signo.	+2; 3; –5; 0
Números enteros	Z = {… –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4 … }	
Valor absoluto de un número	Es su distancia al cero.	$\|+4\| = 4$; $\|-8\| = 8$.
Números opuestos	Tienen el mismo valor absoluto pero distinto signo.	Op(+5) = –5; Op(–9) = +9
Ordenación de números	Es mayor el que esté más a la derecha en la recta numérica.	$410 > 20 > 0 > -21 > -43$ $-5 < -3$
Suma de números del mismo signo	Se suman sus valores absolutos y se pone el mismo signo.	$(+3) + (+9) = +12$ $(-4) + (-6) = -10$
Suma de números enteros de distinto signo	Se restan sus valores absolutos y se pone el signo del de mayor valor absoluto.	$(-2) + (+8) = +6$ $(-9) + (+2) = -7$
Sustracción	Se suma el minuendo con el opuesto del sustraendo.	$(-6)-(-3) = (-6)+(+3) = -3$ $(-4) - (+5) = (-4) + (-5) = -9$
Multiplicación	Se multiplican los valores absolutos y se aplica la regla de los signos: **$+ \cdot + = +$; $- \cdot - = +$; $+ \cdot - = -$; $- \cdot + = -$**	$(+4) \cdot (+6) = +24$ $(-1) \cdot (-8) = +8$ $(-3) \cdot (+3) = -9$ $(+9) \cdot (-3) = -27$
Cociente	Se dividen sus valores absolutos y se aplica la misma regla de signos de la multiplicación.	$(-16) : (-2) = +8$ $(+27) : (-3) = -9$
Potencias de base negativa	Si el exponente es par, la potencia es positiva. Si el exponente es impar, la potencia es negativa	$(-2)^4 = +16$ $(-2)^3 = -8$

Autora: Ana Lorente
Revisora: Adela Salvador
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Calcula en tu cuaderno:

a. (+7) – (–5) – (+2) + (–6) b. –(–9) – (+7) + (–8) + (+6)

c. +(–1) – (+15) – (–13) + (+7) d. –(+2) + (–5) – (–17) – (+8) – (+4)

2. Calcula mentalmente:

a. 7 – 3 b. 6 – 14 c. 12 – 8 d. 25 – 32

e. 31 – 43 f. 56 – 63 g. –10 – 16 h. –31 – 18

i. –44 – 11 j. –18 + 18 k. –27 + 9 l. –42 + 32

3. Efectúa en tu cuaderno aplicando la regla de los signos:

a. (–6) · (–7) b. (–24) : (+4) c. (–5) · (+8) d.(+49) : (–7) e.(–7) · (–9)

f. (+48) : (+6) g. (+11) · (+6) h. (–60) : (–10) i. (–12) · (–6) j. (+75) : (–15)

4. Halla y escribe el resultado en tu cuaderno:

a. 6 – 9 – 5 + 4 – 7 + 1 b. 11 – 12 + 8 – 14 + 16 – 7

c. 1 – 3 – 8 – 12 + 4 + 19 – 2 d. –8 – 16 + 9 + 2 – 8 – 7 + 12

5. Utiliza la jerarquía de operaciones para calcular en tu cuaderno:

a. 4 · (10 – 12) b. –6 · (5 – 1) c. 6 · (1 – 5) – 10

d. 10 + 5 · (8 – 12) e. 7 · (9 – 2) – 4 · (6 – 12) f. 5 · (12 – 9) + 4 · (2 – 17)

6. Efectúa en tu cuaderno aplicando la regla de los signos:

a. (+16) · (+3) b. (–4) · (+9) c. (+5) · (–6) d. (–8) · (–3) e. (–2) · (+5)

f. (+150) : (+15) g. (–75) : (+25) h. (+63) : (–21) i. (–40) · (+5) j. (–80) · (–10)

7. Utiliza la jerarquía de operaciones para calcular en tu cuaderno:

a. 7 – 5 · 4 b. 3 · 8 – 6 c. 5 · 6 – 7 · 4

d. 3 · 9 – 5 · 4 e. 25 – 5 · 8 + 2 · 6 – 33 f. 6 · 7 – 40 – 4 · 8 + 57

8. Efectúa en tu cuaderno y explica qué conclusiones obtienes:

a. $(-3)^4$ b. $(+3)^4$ c. -3^4 d. $+3^4$ e. $(-3)^3$ f. -3^3

9. Utiliza la jerarquía de operaciones para calcular en tu cuaderno:

a. 6 · (– 5) – 3 · (–7) + 20 b. –8 · (+5) + (–4) · 9 + 50

c. (–3) · (+9) – (–6) · (–7) + (–2) · (+5) d. –(–1) · (+6) · (–9) · (+8) – (+5) · (–7)

10. Representa gráficamente y ordena en sentido creciente, calcula los opuestos y los valores absolutos de los siguientes números enteros:

9, –5, –6, 4, –3, 5, –6, 0, 8

Autora: Ana Lorente
Revisora: Adela Salvador
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Problemas

11. En un campo de extracción de petróleo una bomba lo extrae de un pozo a 1528 m de profundidad y lo eleva a un depósito situado a 34 m de altura. ¿Qué nivel ha tenido que superar el petróleo?

12. La temperatura del aire baja según se asciende en la atmósfera, a razón de 9 ºC cada 300 metros. ¿A qué altura vuela un avión si la temperatura del aire es de −90 ºC, si la temperatura al nivel del mar en ese punto es de 15 ºC?

13. Nieves vive en la planta 8 de un edificio y su plaza de garaje está en el sótano 3. ¿Cuántas plantas separan su vivienda de su plaza de garaje?

14. La fosa de Filipinas está aproximadamente a 10 mil metros bajo el nivel del mar, y el monte Everest está a una altura de 8848 metros, ¿qué diferencia de altura hay entre el monte más alto y la sima más profunda en la Tierra?

15. Hay oscuridad absoluta en los océanos a 500 metros de profundidad, y su profundidad media es de 4 km. Expresa con números enteros esas cifras.

16. El saldo de la cartilla de ahorros de Manuel es hoy 289 €, pero le cargan una factura de 412 €. ¿Cuál es el saldo ahora?

17. Cuando Manuel fue a la Sierra a las 7 de la mañana el termómetro marcaba −7 ºC, aunque a la hora de comer el termómetro había subido 9 ºC, y a la hora de volver había vuelto a bajar 5 ºC, qué temperatura hacía a esa hora?

18. ¿Cuál era la temperatura inicial de un termómetro que ahora marca ahora 12 ºC después de haber subido 9 ºC?

19. Lourdes tenía ayer en su cartilla –169 euros y hoy tiene 56 euros. ¿Ha ingresado o ha gastado dinero? ¿Qué cantidad?

20. ¿Cuál es la diferencia de temperatura que debe soportar una persona que pasa de la cámara de conservación de las frutas, que se encuentra a 4 ºC, a la de la carne congelada, que está a −18 ºC? ¿Y si pasara de la cámara de la carne a la de la fruta?

21. Hace 5 semanas Ana tenía dinero ahorrado, si cada semana se gasta 7 euros, ¿cuánto dinero tenía más del que tiene ahora?

22. Roma fue fundada en el año 73 antes de Cristo, y el acueducto de Segovia se construyó hacia el año 160 d. C. ¿Cuántos años habían pasado desde la fundación de Roma?

AUTOEVALUACIÓN

1. El resultado de la operación: $\{(-1 + 3) \cdot (-2 - 3) + (-5 + 1) : (+3 - 2)\}$ es:

a) –10 b) +14 c) –14 d) +16

2. El producto (–2) · (–6) · (–5) es:

a) menor que –100 b) mayor que 0 c) menor que –4 d) mayor que 50

3. El resultado de la operación (+4) · (–2) · (–5) · (–1) es:

a) – 12 b) + 40 c) – 40 d) +20

4. Desde el año 63 a. C. hasta el 77 d. C. transcurren:

a) 140 años b) 14 años c) –14 años d) –40 años

5. ¿Cuál de las siguientes potencias es positiva?

a) $(-2)^5$ b) $(-3)^2$ c) $(-4)^3$ d) $(-1)^7$

6. Un termómetro ha subido 10 ºC, luego ha bajado 8 ºC y, por último, marca –5 º C. La temperatura inicial era:

a) –7 ºC b) –13 ºC c) +3 ºC d) –3 ºC

7. Al viajar desde una latitud de 6º Sur hasta otra de 40º Norte, la variación de latitud es:

a) 46º Norte b) 34º Sur c) 34º Norte d) 50º Sur

8. La temperatura es de 15 ºC bajo cero y, a lo largo del día, el termómetro sube 20 ºC y después desciende 8º C. Por tanto la temperatura final es:

a) – 2 ºC b) – 3 ºC c) 2 ºC d) 3 ºC

9. Si estás situada en el punto –9 de la recta numérica de los números enteros, ¿qué movimientos te llevan hasta +5?

a) +13 – 3 + 4 b) – 1 + 14 c) + 18 – 5

10. El resultado de la operación (+3) – (+5) + (–4) – (–7) + (–6) es:

a) –2 b) –3 c) –4 d) –5

Autora: Ana Lorente
Revisora: Adela Salvador
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CAPÍTULO 5: FRACCIONES

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Eduardo Cuchillo

Revisora: Nieves Zuasti

Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

Índice

Resumen

Seguro que ya has utilizado fracciones. Seguro que sabes que media docena de huevos son seis huevos, que un cuarto de hora son 15 minutos, incluso que tres cuartos de kilo son 750 gramos.

En este capítulo vas a familiarizarte con el uso de las fracciones aprendiendo a operar con ellas, a sumarlas, restarlas, multiplicarlas y dividirlas. Para ello aprenderás cuando dos fracciones son equivalentes o se pueden simplificar…

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. INTERPRETACIÓN DE UNA FRACCIÓN

1.1. Introducción

En una fiesta de cumpleaños, cuando llega el momento de repartir la tarta, una persona se encarga de dividirla en porciones. Esa persona está fraccionando la tarta. Cada porción es una fracción de tarta. Además, como quien parte y reparte disfruta de la tarta en último lugar, esa persona intentará que todos los trozos sean prácticamente idénticos, se propondrá dividir la tarta en fracciones iguales.

En muchas situaciones cotidianas hemos de fraccionar. Para pelar una manzana es normal partirla primero por la mitad. De esta forma resultan dos mitades de manzana.

En otras ocasiones nos encontramos con algo que ya ha sido dividido. En Europa, un partido de baloncesto tiene una duración de 40 minutos distribuidos en cuatro tiempos, llamados cuartos, de 10 minutos cada uno. Cada tiempo es una fracción del partido completo, concretamente una cuarta parte.

Algunas fábricas funcionan durante las 24 horas del día. Si cada operario trabaja ocho horas al día, todo encaja si fraccionamos el día en tres turnos de ocho horas cada uno. Así, cada turno se corresponde con la tercera parte de un día completo, es un tercio de día.

Los objetos matemáticos llamados **fracciones** permiten que las personas se entiendan al hablar de trozos, partes o porciones, tanto si se ha troceado en porciones idénticas como si son de diferentes tamaños.

1.2. Términos de una fracción

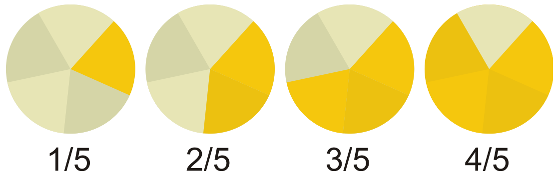
Comencemos con un ejemplo. Si dividimos un bizcocho en 5 partes iguales, cada porción es una de las cinco partes en las que hemos dividido el bizcocho. Escribiremos

$$\frac{1}{5}$$

para representar cada trozo, es decir, cada una de las cinco quintas partes del bizcocho.

Si colocamos en una bandeja tres de esas porciones, sobre la bandeja habrá tres quintas partes de bizcocho:

$$\frac{3}{5}$$



El bizcocho completo puede representarse de la siguiente forma

$$\frac{5}{5} = 1$$

ya que está formado por cinco quintas partes.

En general, una ***fracción*** es una expresión de la forma

$$\frac{m}{n}$$

donde tanto *m* como *n* son números naturales. Para referirnos a ella diremos *"m partido de n"*; *m* recibe el nombre de ***numerador*** y *n* es el ***denominador***.

Para valores bajos del denominador, disponemos de denominaciones alternativas:

$\frac{1}{2}$, un medio $\frac{2}{3}$, dos tercios $\frac{2}{4}$, dos cuartos

$\frac{3}{5}$, tres quintos $\frac{7}{10}$, siete décimos

A partir del valor 11 del denominador:

$\frac{8}{11}$, ocho onceavos $\frac{6}{23}$, seis veintitresavos

Una pregunta natural que surge es la siguiente: ¿es posible, o tiene sentido, que sea mayor el numerador que el denominador? La respuesta es afirmativa, sí. Vamos a comprobarlo en la siguiente circunstancia: imaginemos que hemos comprado dos pasteles idénticos, se ha partido cada uno de ellos por la mitad y alguien se ha comido una mitad. ¿Cómo expresamos la cantidad de pasteles que quedan? Diríamos que quedan tres mitades de pastel, es decir

$$\frac{3}{2} \text{ de pastel}$$

¿Cómo podríamos entender la fracción 12/7 (doce séptimos)? Supongamos que disponíamos de varias naranjas iguales y que cada una de ellas ha sido dividida en siete porciones iguales. Si después de comer parte de la fruta solo quedan doce porciones, entonces tendremos

$$\frac{12}{7} \text{ de naranja}$$

Las fracciones cuyo numerador es mayor que el denominador reciben el nombre de **fracciones impropias**. Las fracciones cuyo numerador es menor que el denominador reciben el nombre de **fracciones propias.**

Con lo que se ha expuesto hasta este momento, intuimos que las fracciones están muy ligadas a la acción de dividir. El denominador de una fracción señala en cuántas porciones se ha dividido cada unidad, lo que nos lleva a conocer el tamaño de cada porción.

Ejemplos:

$\frac{16}{9}$, tenemos 16 porciones, cada una de ellas de tamaño 1/9. Son dieciseis novenas partes.

$\frac{11}{5}$, hay 11 trozos de tamaño 1/5. Son once quintas partes.

$\frac{23}{12}$, hay 23 porciones de tamaño 1/12, es decir, 23 doceavas partes.

¿Qué representa la fracción 4/1? Indica 4 porciones de tamaño 1/1 = 1, es decir 4 porciones de algo que no ha sido dividido, con lo cual son 4 unidades:

$$\frac{4}{1} = 4$$

Al principio, en el ejemplo del bizcocho, surgió la fracción 5/5. Representa 5 porciones de tamaño 1/5, cinco quintas partes. Eso es un bizcocho completo:

$$\frac{5}{5} = 1$$

A la vista de lo anterior podemos escribir **unas primeras propiedades de las fracciones** que sirven de conexión con los números naturales:

$$\frac{m}{1} = m$$

$$\frac{m}{m} = 1$$

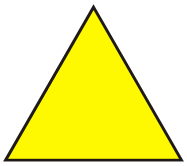
Actividades propuestas

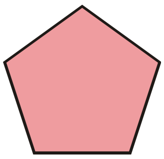
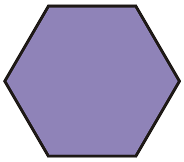
1. En cada una de las siguientes imágenes escribe en tu cuaderno la fracción que representan los quesitos de la caja:

a)  b)  c)  d) 

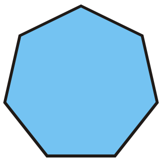
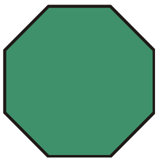
2. Copia en tu cuaderno y divide adecuadamente cada una de las siguientes figuras para poder destacar, en cada caso, la fracción indicada:

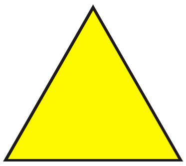
a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{3}{6}$



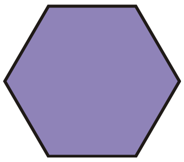
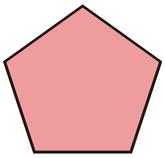



e) $\frac{7}{7}$ f) $\frac{1}{4}$ g) $\frac{2}{3}$ h) $\frac{3}{4}$



i) $\frac{4}{9}$ j) $\frac{1}{4}$ k) $\frac{7}{10}$ l) $\frac{5}{8}$


3. Señala diferentes acciones que obliguen a repartir, o subdividir, cierto objeto, ente o actividad.

4. Encuentra situaciones de la vida cotidiana en las que aparezcan fracciones.

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2. SUMA Y RESTA DE FRACCIONES

2.1. Suma y resta de fracciones con igual denominador

En el comentado ejemplo del bizcocho, después de dividirlo en 5 partes iguales situamos en una bandeja 3 de esas porciones. De esa manera, sobre la bandeja había tres quintas partes de bizcocho:

$$\frac{3}{5}$$

Como cada porción es 1/5 de bizcocho, al colocar uno a uno cada trozo sobre la bandeja lo que estamos haciendo es añadir, sumar:

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$$

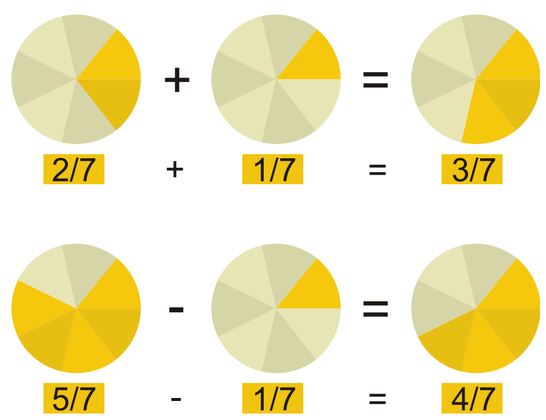
Cuando alguien coja uno de los trozos de la bandeja, en ella quedará una porción menos de bizcocho:

$$\frac{3}{5}-\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$$

Vemos que resulta sencillo sumar y restar fracciones cuando tienen el mismo denominador. Basta realizar la suma, o la diferencia, con los numeradores y mantener el denominador común.

Ejemplos:

- $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}$
- $\frac{6}{11}+\frac{13}{11}=\frac{6+13}{11}=\frac{19}{11}$
- $\frac{8}{10}-\frac{7}{10}=\frac{8-7}{10}=\frac{1}{10}$
- $\frac{9}{4}-\frac{5}{4}=\frac{9-5}{4}=\frac{4}{4}=1$



En general,

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{n}=\frac{m+p}{n}$$

$$\frac{m}{n}-\frac{r}{n}=\frac{m-r}{n}$$

Para poder sumar fracciones con diferente denominador antes debemos saber qué son *fracciones equivalentes*.

Actividades propuestas

5. Calcula:

a) $\frac{5}{9}+\frac{2}{9}$ b) $\frac{4}{13}+\frac{6}{13}$ c) $\frac{3}{5}+\frac{6}{5}$ d) $\frac{7}{1}+\frac{2}{1}$ e) $4+\frac{8}{1}$ f) $1+\frac{2}{5}$

6. Halla:

a) $\frac{5}{6}-\frac{1}{6}$ b) $\frac{15}{11}-\frac{7}{11}$ c) $1-\frac{4}{7}$ d) $\frac{8}{3}-1$

2.2. Fracciones equivalentes

Si hemos cortado una pera en dos mitades y otra en cuatro cuartas partes, vemos que

$$2 \text{ peras} = \frac{2}{2}+\frac{4}{4}=1+1$$

Cuando solo nos quede una porción de la primera pera y una porción de la segunda pera, es decir, una mitad de pera más una cuarta parte de pera, tendremos

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4} \text{ pera}$$

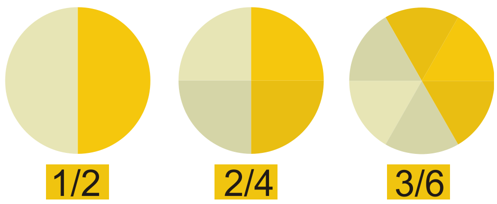
Pero si partimos la mitad de pera en dos trozos iguales, esa mitad de pera se convierte en dos cuartas partes de pera

$$\frac{1}{2}=\frac{2\cdot 1}{2\cdot 2}=\frac{2}{4}$$

y, de esta forma,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

Si analizamos lo anterior, apreciamos que las fracciones 1/2 y 2/4 son **equivalentes**, representan la misma proporción. Es lo mismo media pera que dos cuartos de pera. Además, transformar una fracción en otra equivalente nos va a permitir sumar, o restar, fracciones con distinto denominador:



$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{2}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

A partir de una fracción *m*/*n*, si *r* es cualquier número natural entonces la fracción **(*m*·*r*)/(*n*·*r*)** es equivalente a *m*/*n*,

$$\frac{m\cdot r}{n\cdot r}=\frac{m}{n}$$

Ejemplo:

Una fracción equivalente a 5/3 es, por ejemplo, 20/12, ya que

$$\frac{5}{3}=\frac{5\cdot 4}{3\cdot 4}=\frac{20}{12}$$

Actividades propuestas

7. Obtén tres fracciones equivalentes a cada una de las que figuran a continuación:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{7}{4}$ c) $\frac{24}{9}$

8. Decide si las siguientes parejas de fracciones son o no equivalentes:

a) $\frac{4}{3}$ y $\frac{12}{9}$ b) $\frac{2}{5}$ y $\frac{10}{15}$ c) $\frac{4}{8}$ y $\frac{3}{6}$

2.3. Suma y resta de fracciones con distinto denominador

Para realizar la suma

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$$

deberemos buscar y encontrar dos números naturales *r* y *s* que nos transformen cada una de las anteriores fracciones en otras **equivalentes**, (*m·r*)/(*n·r*) y (*p·s*)/(*q·s*), de forma que las nuevas fracciones tengan el **mismo denominador**, es decir, que *n·r* = *q·s*, en cuyo caso

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{m\cdot r}{n\cdot r}+\frac{p\cdot s}{q\cdot s}=\frac{m\cdot r}{n\cdot r}+\frac{p\cdot s}{n\cdot r}=\frac{m\cdot r+p\cdot s}{n\cdot r}$$

Como hay muchas parejas de números naturales *r* y *s* que hacen posible esa igualdad, buscaremos los más pequeños.

Puesto que *n·r* es múltiplo de *n* y *q·s* es múltiplo de *q*, alcanzaremos *r* y *s* a partir del **mínimo común múltiplo** de *n* y *q*.

$$n\cdot r=q\cdot s=m.c.m.(n,q)$$

El valor de *r* resulta de dividir ese mínimo común múltiplo entre *n* y el de *s* se obtiene al dividir el mínimo común múltiplo entre *q*.

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

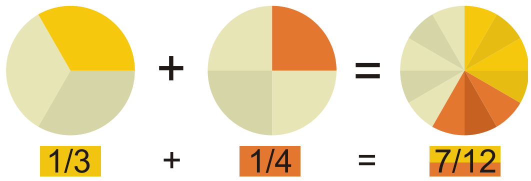
Ejemplo:

$$\frac{5}{4}+\frac{1}{6}$$

Los denominadores son diferentes, 4 y 6. Su mínimo común múltiplo es 12. Al dividir 12 entre 4 nos da 3 y al hacerlo entre 6 obtenemos 2.

$$\frac{5}{4}=\frac{5\cdot 3}{4\cdot 3}=\frac{15}{12}$$

$$\frac{1}{6}=\frac{1\cdot 2}{6\cdot 2}=\frac{2}{12}$$



Finalmente

$$\frac{5}{4}+\frac{1}{6}=\frac{15}{12}+\frac{2}{12}=\frac{17}{12}$$

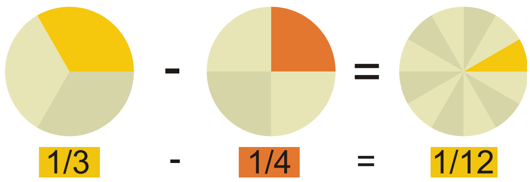
Ejemplo:

$$\frac{5}{7}-\frac{2}{3}$$

Los denominadores son diferentes, 7 y 3. Su mínimo común múltiplo es 21. Al dividir 21 entre 7 nos da 3 y al hacerlo entre 3 obtenemos 7.

$$\frac{5}{7}=\frac{5\cdot 3}{7\cdot 3}=\frac{15}{21}$$

$$\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 7}{3\cdot 7}=\frac{14}{21}$$



$$\frac{5}{7}-\frac{2}{3}=\frac{15}{21}-\frac{14}{21}=\frac{15-14}{21}=\frac{1}{21}$$

Actividades propuestas

9. Realiza las siguientes sumas de fracciones:

a) $\frac{4}{5}+\frac{2}{3}$ b) $\frac{5}{6}+\frac{2}{9}$ c) $\frac{7}{8}+\frac{3}{2}$ d) $\frac{13}{100}+\frac{17}{24}$

10. Calcula:

a) $\frac{3}{14}-\frac{1}{6}$ b) $\frac{5}{6}-\frac{3}{5}$ c) $\frac{11}{10}-\frac{11}{24}$ d) $\frac{10}{21}-\frac{1}{3}$

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.4. Propiedades de la suma de fracciones

Propiedad conmutativa. Nos indica que no importa el orden en el que coloquemos los sumandos:

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{p}{q}+\frac{m}{n}$$

Ejemplo:

$$\frac{5}{6}+\frac{4}{9}=\frac{5\cdot 3}{6\cdot 3}+\frac{4\cdot 2}{9\cdot 2}=\frac{15}{18}+\frac{8}{18}=\frac{23}{18}$$

$$\frac{4}{9}+\frac{5}{6}=\frac{4\cdot 2}{9\cdot 2}+\frac{5\cdot 3}{6\cdot 3}=\frac{8}{18}+\frac{15}{18}=\frac{23}{18}$$

Propiedad asociativa. Nos señala cómo se pueden sumar tres o más fracciones. Basta hacerlo agrupándolas de dos en dos:

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{m}{n}+\left(\frac{p}{q}+\frac{r}{s}\right)=\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)+\frac{r}{s}$$

Ejemplo:

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}+\left(\frac{9}{12}+\frac{2}{12}\right)=\frac{1}{2}+\frac{11}{12}=\frac{6}{12}+\frac{11}{12}=\frac{17}{12}$$

También:

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{6}=\left(\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{6}=\frac{5}{4}+\frac{1}{6}=\frac{15}{12}+\frac{2}{12}=\frac{17}{12}$$

Actividades propuestas

11. Halla:

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{2}+\frac{5}{6}+\frac{5}{3}$ c) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ d) $\frac{7}{6}+\frac{3}{10}+\frac{1}{4}$

12. Calcula:

a) $\frac{11}{8}+\frac{5}{6}-\frac{4}{3}$ b) $\frac{11}{3}-\frac{5}{12}+\frac{13}{18}$ c) $\frac{15}{6}-\frac{4}{9}-\frac{1}{2}$

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. PRODUCTO Y COCIENTE DE FRACCIONES

3.1. Reducción de una fracción. Fracciones irreducibles

Anteriormente dijimos que 1/2 y 2/4 son fracciones equivalentes. Por la misma razón, otras fracciones equivalentes son 3/5, 6/10 y 24/40 puesto que

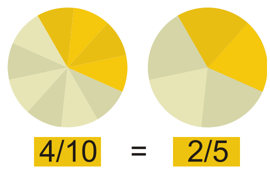
$$\frac{3}{5}=\frac{3\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{6}{10}$$

$$\frac{6}{10}=\frac{6\cdot 4}{10\cdot 4}=\frac{24}{40}$$

$$\frac{3}{5}=\frac{3\cdot 8}{5\cdot 8}=\frac{24}{40}$$

Una manera alternativa de destacar estas relaciones consiste en decir que las fracciones 3/5 y 6/10 son reducciones de la fracción 24/40, mientras que 3/5 es una reducción de 6/10. Podemos intuir que la fracción 3/5 no puede reducirse más, es una **fracción irreducible**.

En general, si tenemos dos fracciones *m/n* y *p/q* diremos que *m/n* es una reducción de *p/q* si *m<p* y el resultado de dividir *p* entre *m* es el mismo que el de *q* entre *n*. Dicho de otro modo, si tenemos una fracción *p/q* y *d* es un número natural que divide tanto a *p* como a *q*, si *p:d* = *r* y *q:d* = *s*, entonces las fracciones *r/s* y *p/q* son equivalentes y *r/s* es una reducción de *p/q*. En este caso:



$$\frac{r}{s}=\frac{r\cdot d}{s\cdot d}=\frac{p}{q}$$

Obtendremos la mayor reducción de una fracción *p/q* al dividir tanto *p* como *q* entre su **máximo común divisor**.

Una fracción es **irreducible** cuando el máximo común divisor de su numerador y denominador es 1.

Ejemplo:

Una reducción de 24/40 es 6/10, pues la obtenemos al dividir tanto 24 como 40 entre 4.

Como el máximo común divisor de 24 y 40 es 8, la mayor reducción de la fracción 24/40 es 3/5. Al ser el máximo común divisor de 3 y 5 igual a 1, la fracción 3/5 es irreducible, tal y como era de esperar.

Ejemplo:

En ocasiones, una fracción se reduce a un número natural como, por ejemplo, la fracción 30/6. Así es, pues el máximo común divisor de 30 y 6 es igual a 6, y al dividir 30, el numerador, entre 6 obtenemos 5, y al dividir 6, el denominador, también entre 6 obtenemos el número 1:

$$\frac{30}{6}=\frac{5}{1}=5$$

Dos fracciones son equivalentes si se reducen a una misma fracción irreducible. Por esta razón:

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Dos fracciones $\frac{m}{n}$ y $\frac{p}{q}$ son **equivalentes** si

$$m \cdot q = n \cdot p$$

Actividades propuestas

13. Reduce las siguientes fracciones a su expresión irreducible:

a) $\frac{48}{18}$ b) $\frac{14}{49}$ c) $\frac{8}{8}$ d) $\frac{60}{148}$

14. Determina si las siguientes parejas de fracciones son o no equivalentes:

a) $\frac{4}{8}$ y $\frac{3}{6}$ b) $\frac{3}{7}$ y $\frac{4}{9}$ c) $\frac{5}{8}$ y $\frac{105}{168}$

3.2. Producto de fracciones

Podemos multiplicar un número natural por una fracción si razonamos de la siguiente manera:

2 · 5/7 o 5/7 · 2 lo leemos como "dos veces la fracción 5/7". Así:

$$2 \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{7} \cdot 2 = \frac{5}{7} + \frac{5}{7} = \frac{5+5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{7} = \frac{10}{7}$$

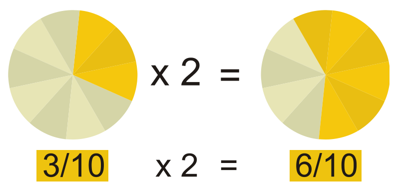
De otra forma, 5/7 indica 5 porciones de tamaño 1/7. El producto 2 · 5/7 señala dos veces 5 porciones de tamaño 1/7, esto es, 2 · 5 = 10 porciones de tamaño 1/7, es decir, 10/7.

En general,

$$a \cdot \frac{m}{n} = \frac{a \cdot m}{n}$$

¿Cómo podemos entender el producto de dos fracciones ambas con numerador igual a uno? Por ejemplo, 1/2 · 1/3:

Al ser 1/3 = 1 · 1/3, 1/3 es UNA porción de algo que se ha dividido en tres partes, de igual manera que 2/3 = 2 · 1/3 representa DOS porciones de algo que se ha dividido en tres partes. Análogamente, 1/2·1/3 nos apunta hacia la mitad de una porción de algo dividido en tres partes, es decir, una sexta parte, puesto que primero dividimos en tres porciones y luego cada una de ellas en dos:



$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$$

En general,

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{q}=\frac{1}{n\cdot q}$$

A la vista de lo anterior:

Para **multiplicar** dos fracciones multiplicaremos sus numeradores entre sí y lo mismo haremos con los denominadores:

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{m\cdot p}{n\cdot q}$$

Justificación:

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\left(m\cdot\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{1}{q}\cdot p\right)=m\cdot\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{q}\right)\cdot p=m\cdot\left(\frac{1}{n\cdot q}\right)\cdot p=\frac{m\cdot 1}{n\cdot q}\cdot p=\frac{m}{n\cdot q}\cdot p=\frac{m\cdot p}{n\cdot q}$$

Ejemplo:

$$\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}=\frac{4\cdot 3}{7\cdot 6}=\frac{12}{42}$$

Podemos simplificar, reducir, el resultado:

$$\frac{12}{42}=\frac{4\cdot 3}{7\cdot 6}=\frac{2\cdot 2\cdot 3}{7\cdot 2\cdot 3}=\frac{2\cdot 3}{7\cdot 3}=\frac{2}{7}$$

Actividades propuestas

15. Calcula:

a) $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}$ b) $7\cdot\frac{5}{9}$ c) $8\cdot\frac{1}{7}$ d) $\frac{6}{10}\cdot\frac{11}{2}$

16. Multiplica las siguientes fracciones y reduce, simplifica, el resultado:

a) $\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{8}$ b) $\frac{9}{12}\cdot\frac{4}{3}$ c) $\frac{14}{6}\cdot\frac{5}{21}$ d) $\frac{6}{5}\cdot\frac{10}{3}$

3.3. Propiedades del producto de fracciones

Propiedad conmutativa. Nos indica que no importa el orden en el que coloquemos los factores:

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{p}{q}\cdot\frac{m}{n}$$

Ejemplo:

$$\frac{7}{9}\cdot\frac{11}{5}=\frac{7\cdot 11}{9\cdot 5}=\frac{77}{45}$$

$$\frac{11}{5}\cdot\frac{7}{9}=\frac{11\cdot 7}{5\cdot 9}=\frac{77}{45}$$

Propiedad asociativa. Nos señala cómo se pueden multiplicar tres o más fracciones. Basta hacerlo agrupándolas de dos en dos:

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}=\frac{m}{n}\cdot\left(\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}\right)=\left(\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}\right)\cdot\frac{r}{s}=\frac{m\cdot p\cdot r}{n\cdot q\cdot s}$$

Ejemplo:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1\cdot 3\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6}=\frac{3}{48}$$

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma. Cuando en una multiplicación uno de los factores viene dado como la suma de dos fracciones como, por ejemplo,

$$\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{6}{5}+\frac{1}{4}\right)$$

tenemos dos opciones para conocer el resultado:

a) realizar la suma y, después, multiplicar

$$\frac{6}{5}+\frac{1}{4}=\frac{6\cdot 4}{5\cdot 4}+\frac{1\cdot 5}{4\cdot 5}=\frac{24}{20}+\frac{5}{20}=\frac{24+5}{20}=\frac{29}{20}$$

$$\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{6}{5}+\frac{1}{4}\right)=\frac{8}{3}\cdot\frac{29}{20}=\frac{8\cdot 29}{3\cdot 20}=\frac{2\cdot 4\cdot 29}{3\cdot 4\cdot 5}=\frac{2\cdot 29}{3\cdot 5}=\frac{58}{15}$$

b) distribuir, aplicar, la multiplicación a cada uno de los sumandos y, después, sumar:

$$\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{6}{5}+\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{8}{3}\cdot\frac{6}{5}\right)+\left(\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{4}\right)$$

Comprobemos que obtenemos el mismo resultado:

$$\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{6}{5}+\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{8}{3}\cdot\frac{6}{5}\right)+\left(\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{4}\right)=\frac{8\cdot 6}{3\cdot 5}+\frac{8\cdot 1}{3\cdot 4}=\frac{8\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5}+\frac{2\cdot 4\cdot 1}{3\cdot 4}=\frac{8\cdot 2}{5}+\frac{2\cdot 1}{3}=\frac{16}{5}+\frac{2}{3}=\frac{16\cdot 3}{5\cdot 3}+\frac{2\cdot 5}{3\cdot 5}=\frac{48}{15}+\frac{10}{15}=\frac{48+10}{15}=\frac{58}{15}$$

En general, la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma nos dice que

$$\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}\right)+\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{p}{q}\right)$$

Conviene comentar que la anterior propiedad distributiva leída en sentido contrario, de derecha a izquierda, es lo que comúnmente denominamos **sacar factor común**:

$$\frac{12}{5}+\frac{22}{15}=\frac{2\cdot 6}{5}+\frac{2\cdot 11}{5\cdot 3}=\left(\frac{2}{5}\cdot 6\right)+\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{11}{3}\right)=\frac{2}{5}\cdot\left(6+\frac{11}{3}\right)$$

Actividades propuestas

17. Realiza los productos indicados:

a) $\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{4}\right)$ b) $\left(\frac{8}{3}\cdot\frac{6}{5}\right)\cdot\frac{1}{4}$ c) $\frac{8}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{4}$

18. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\frac{7}{2}+\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{9}{8}\right)$ b) $\left(\frac{7}{2}+\frac{5}{3}\right)\cdot\frac{9}{8}$ c) $\frac{7}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}+\frac{9}{8}\right)$

3.4. Cociente de fracciones

Son cuatro las operaciones básicas de los números naturales y enteros, a saber: la suma, la resta o diferencia, el producto o multiplicación y la división. Para las fracciones ya han sido establecidas las tres primeras, nos falta la división.

Recordemos cómo podemos entender la división de dos números naturales. Por ejemplo, la división de 6 entre 2, cuyo resultado es 3, podemos entenderla como que si tenemos 6 objetos y los agrupamos de dos en dos resultarán 3 grupos.

De esta forma, la división de 6 (o de la fracción equivalente 6/1) entre la fracción 3/4 nos llevará al número de grupos que obtenemos al repartir 6 unidades en agrupaciones formadas por 3/4 partes:

- 6 unidades, ¿a cuántas cuartas partes equivalen? Respuesta: a 24, ya que 6·4 = 24. De esta manera, 6 = 6/1 = 24/4
- si colocamos 24 cuartas partes de tres en tres, ¿cuántas agrupaciones tenemos? Respuesta: 8, pues 24:3 = 8

Es decir,

$$6:\frac{3}{4}=\frac{6}{1}:\frac{3}{4}=8$$

Observemos que

$$8=\frac{6}{1}:\frac{3}{4}=\frac{6\cdot 4}{1\cdot 3}=\frac{6}{1}\cdot\frac{4}{3}$$

En general,

$$\frac{m}{n}:\frac{p}{q}=\frac{m}{n}\cdot\frac{q}{p}=\frac{m\cdot q}{n\cdot p}$$

Ejemplo:

$$\frac{12}{5}:\frac{4}{7}=\frac{12}{5}\cdot\frac{7}{4}=\frac{12\cdot 7}{5\cdot 4}=\frac{84}{20}=\frac{21\cdot 4}{5\cdot 4}=\frac{21}{5}$$

Actividades propuestas

19. Calcula:

a) $\frac{7}{2}:\frac{3}{4}$ b) $\frac{11}{6}:\frac{2}{5}$ c) $\frac{5}{7}:\frac{5}{7}$ d) $\frac{6}{4}:\frac{12}{8}$ e) $\frac{16}{5}:3$

20. Realiza las siguientes divisiones y reduce, simplifica, el resultado:

a) $\frac{15}{2}:\frac{5}{4}$ b) $\frac{6}{5}:\frac{1}{5}$ c) $\frac{4}{3}:\frac{4}{7}$ d) $15:\frac{3}{5}$

4. OTROS ASPECTOS DE LAS FRACCIONES

4.1. Comparación, representación y ordenación de fracciones

Puesto que las fracciones son números, es interesante que sepamos compararlas, que podamos dictaminar cuál es mayor o cuál es menor. Para averiguarlo podemos transformarlas en otras fracciones equivalentes, de manera que tengan el mismo denominador, y, a la vista de los numeradores, ya es muy sencillo decidir.

Ejemplo:

- ¿Cuál de las siguientes fracciones es la mayor? 5/4 y 7/5

Los denominadores son 4 y 5. Su mínimo común múltiplo es 20:

$$\frac{5}{4}=\frac{5\cdot 5}{4\cdot 5}=\frac{25}{20}$$
$$\frac{7}{5}=\frac{7\cdot 4}{5\cdot 4}=\frac{28}{20}$$

Conclusión: 7/5 es mayor que 5/4

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo:

- Ordena las siguientes fracciones de menor a mayor:

$$\frac{7}{4}, \frac{19}{12}, \frac{17}{10}$$

Los denominadores son 4, 12 y 10. Su mínimo común múltiplo es 60 ya que

$$4 = 2\cdot 2$$
$$12 = 2\cdot 2\cdot 3$$
$$10 = 2\cdot 5$$
$$m.c.m.(4,12,10) = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5 = 60$$

$$\frac{7}{4} = \frac{7\cdot 15}{4\cdot 15} = \frac{105}{60}$$

$$\frac{19}{12} = \frac{19\cdot 5}{12\cdot 5} = \frac{95}{60}$$

$$\frac{17}{10} = \frac{17\cdot 6}{10\cdot 6} = \frac{102}{60}$$

Conclusión:

$$\frac{19}{12} < \frac{17}{10} < \frac{7}{4}$$

Podemos comprobar que si

$$\frac{m}{n} < \frac{p}{q}$$

debe cumplirse que

$$m\cdot q < p\cdot n$$

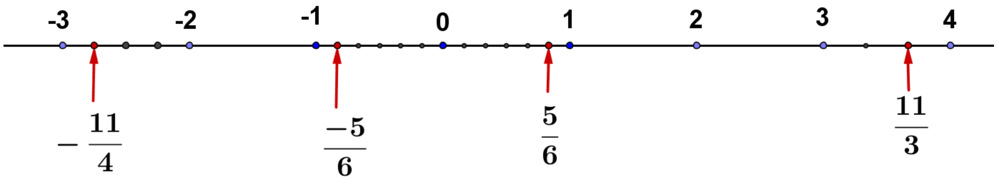
Representación en la recta

Para representar una fracción en la recta numérica podemos seguir dos caminos, escribirla en forma de número decimal, y así representarla, o dividir la unidad en tantas partes como diga en denominador, y tomar sobre la recta las partes que diga el numerador. En cursos próximos aprenderás a representarlas con más detenimiento.

Ejemplo:

- Representa en la recta numérica las fracciones siguientes: $\frac{11}{3}, \frac{5}{6}, \frac{-5}{6}, \frac{-11}{4}$.

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF



Actividades propuestas

21. En cada uno de los siguientes pares de fracciones, indica cuál es la mayor:

a) $\frac{7}{8}$ y $\frac{3}{2}$ b) $\frac{7}{8}$ y $\frac{10}{11}$ c) $\frac{2}{3}$ y $\frac{14}{21}$ d) $\frac{11}{18}$ y $\frac{14}{21}$

22. Ordena las siguientes fracciones de menor a mayor:

$\frac{12}{7}, \frac{4}{7}, \frac{8}{5}, \frac{6}{11}$

4.2. Descomposición de una fracción

Cuando tenemos una fracción *m/n* impropia, es decir, una fracción en la que es mayor el numerador *m* que el denominador *n*, podemos descomponerla como la suma de un número natural más otra fracción en la que ya es mayor el denominador. Para ello basta con dividir el numerador entre el denominador y tener en cuenta tanto el resto como el cociente.

La fracción 26/3 es impropia al ser mayor su numerador. Al dividir 26 entre 3 obtenemos un cociente igual a 8 y un resto igual a 2. Por ello:

$$\frac{26}{3} = \frac{(8 \cdot 3) + 2}{3} = \frac{8 \cdot 3}{3} + \frac{2}{3} = 8 \cdot \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = 8 \cdot 1 + \frac{2}{3} = 8 + \frac{2}{3}$$

Luego 26/3 es igual a ocho unidades más dos terceras partes. En algunas ocasiones, en lugar de escribir

$$8 + \frac{2}{3}$$

se opta por la expresión

$$8\frac{2}{3}$$

lo que se denomina ***número mixto***, pues recoge su *parte entera* y su *parte fraccionada*. Hay que tener cuidado con no confundirlo con

$$8 \cdot \frac{2}{3}$$

Actividades propuestas

23. Escribe como número mixto las fracciones:

a) $\frac{11}{6}$ b) $\frac{34}{5}$

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

4.3. Fracciones negativas

En este capítulo todos los ejemplos de fracciones han sido a partir de dos números naturales, o enteros positivos; uno, el numerador, y, otro, el denominador. Igual que en otros cursos, después de estudiar los números naturales, se dio paso a los números negativos y, con ellos, a los números enteros, vamos a introducirnos ahora en las fracciones negativas. No se ha hecho así desde el principio del capítulo porque parece conveniente adquirir antes cierta soltura y conocimientos sobre fracciones positivas.

En adelante, una fracción será una expresión de la forma *m/n* donde tanto *m* como *n* son números enteros, y el denominador, *n*, es distinto de cero.

Las conocidas reglas de los signos de los números enteros, a la hora de multiplicar o dividir, también son válidas para las fracciones. Por ello un convenio extendido sobre el aspecto de una fracción consiste en que el denominador sea un número entero positivo, es decir, un número natural.

Vamos a exponer una serie variada de ejemplos en los que aparecen fracciones negativas y algunas de sus propiedades.

Ejemplos:

- $\frac{(-5)}{(-4)} = \frac{(-1)\cdot 5}{(-1)\cdot 4} = \frac{5}{4}$
- $\frac{(-2)}{3} = \frac{2}{(-3)} = -\frac{2}{3} = (-1)\cdot\frac{2}{3} = (-2)\cdot\frac{1}{3}$
- $\frac{(-3)}{4} + \frac{6}{5} = \frac{6}{5} + \frac{(-3)}{4} = \frac{6}{5} - \frac{3}{4} = \frac{6\cdot 4}{5\cdot 4} - \frac{3\cdot 5}{4\cdot 5} = \frac{24}{20} - \frac{15}{20} = \frac{24-15}{20} = \frac{9}{20}$
- $-\frac{7}{2} - \frac{4}{3} = -\left(\frac{7}{2} + \frac{4}{3}\right) = (-1)\cdot\left(\frac{7}{2} + \frac{4}{3}\right) = (-1)\cdot\left(\frac{7\cdot 3}{2\cdot 3} + \frac{4\cdot 2}{3\cdot 2}\right) = (-1)\cdot\left(\frac{21}{6} + \frac{8}{6}\right) = (-1)\cdot\frac{29}{6} = -\frac{29}{6}$
- $\frac{3}{8} - \frac{5}{6} = \frac{3\cdot 3}{8\cdot 3} - \frac{5\cdot 4}{6\cdot 4} = \frac{9}{24} - \frac{20}{24} = \frac{9-20}{24} = \frac{-11}{24} = -\frac{11}{24}$

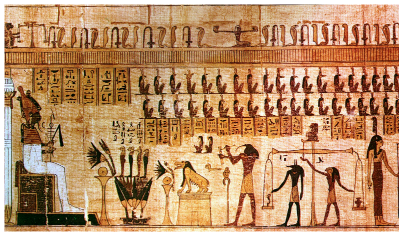
Actividades propuestas

24. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $-\frac{5}{3} - \frac{7}{2}$ b) $\frac{4}{7} + \frac{(-7)}{9}$ c) $\frac{(-9)}{5} + \frac{(-1)}{8}$

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA



¿Sabías que ya los egipcios usaban fracciones?

En el papiro de Ahmes (o de Rhind), de hace casi cuatro mil años, se usaban fracciones. Usaban algunas fracciones como 2/3, pero sobre todo usaban las fracciones unitarias, aquellas en las que el numerador es un 1: 1/2, 1/3, 1/4, 1/5… Para representar, por ejemplo, 1/5, escribían sobre su número 5 un punto o un círculo: $\dot{5}$. Busca en Internet Ahmes o Rhind para conocer más sobre el uso que los egipcios daban a las fracciones.

Quebrado

Aunque se encuentra en claro desuso, una manera alternativa para referirse a las fracciones es la palabra ***quebrados***.

Reflexiona brevemente y ofrece una justificación a esa denominación.

Posteriormente busca en un diccionario la definición de la palabra *quebrado* y compárala con tu argumentación.

Observa que tanto “*quebrado*” como “*fracción*” significan “*roto*”.

Crucigrama

	1	2	3	4	5	6
1		■				
2		■				■
3	■		■		■	
4				■		

HORIZONTALES

1. Numerador de un cuarto. Los 3/4 de 6500.
2. Diferencia entre 1/4 y 2/8. Los 11/3 de 69.
3. Producto de 2/5 por 5/2. Cociente entre 8/3 y 2/3. Parte entera del número mixto de 22/5.
4. Denominador de una fracción equivalente a 7/240 de numerador 21. Parte entera de 71/3 como número mixto.

VERTICALES

1. Denominador de una décima. Parte entera de 39/5 expresado como número mixto.
2. Denominador que resulta al simplificar 130/120.
3. Numerador del cociente entre 6/5 y 11/7. Diferencia entre 3/2 y 6/4.
4. Los 7/4 de 488.
5. Numerador de simplificar 146/22. Las 3/4 partes de 8/3.
6. Producto entre 15/2 y 2/3. Numerador de la suma de 7/5 y 3/4.

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

NOCIÓN	*DESCRIPCIÓN*	*EJEMPLOS*
Fracción	Expresión de la forma $\frac{m}{n}$ donde tanto *m*, el *numerador*, como *n*, el *denominador*, son números enteros. Leeremos *"m partido de n"*.	$\frac{5}{6}$, cinco sextos $\frac{30}{19}$, treinta diecinueveavos
Fracciones impropias	Fracciones cuyo numerador es mayor que el denominador.	$\frac{2}{3}, \frac{15}{25}, \frac{10}{11}$
Suma y resta de fracciones con igual denominador	Realizamos la suma, o la diferencia, con los numeradores y mantenemos el denominador común.	$\frac{3}{5}+\frac{6}{5}=\frac{3+6}{5}=\frac{9}{5}$ $\frac{13}{7}-\frac{8}{7}=\frac{13-8}{7}=\frac{5}{7}$
Fracciones equivalentes	Son fracciones que representan la misma proporción.	$\frac{10}{25}$ y $\frac{6}{15}$
Suma y resta de fracciones con distinto denominador	Transformamos cada fracción en otra equivalente de manera que las nuevas fracciones tengan el mismo denominador, y las sumamos.	$\frac{9}{10}+\frac{7}{15}=\frac{9\cdot 3}{10\cdot 3}+\frac{7\cdot 2}{15\cdot 2}=$ $=\frac{27}{30}+\frac{14}{30}=\frac{27+14}{30}=\frac{41}{30}$
Fracción irreducible	Una fracción es irreducible cuando el máximo común divisor de su numerador y denominador es 1.	$\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{10}{9}$
Producto de fracciones	Multiplicamos sus numeradores entre sí y lo mismo hacemos con los denominadores.	$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{9}=\frac{5\cdot 1}{6\cdot 9}=\frac{5}{54}$
Cociente de fracciones	Multiplicamos la primera fracción por la que resulta de intercambiar el numerador y el denominador de la segunda fracción.	$\frac{3}{11}:\frac{5}{7}=\frac{3}{11}\cdot\frac{7}{5}=\frac{3\cdot 7}{11\cdot 5}=\frac{21}{55}$
Comparación de fracciones	Podemos determinar cuál es la mayor de dos o más fracciones reduciendo a común denominador.	$\frac{18}{11}<\frac{7}{4}<\frac{15}{8}$
Fracciones negativas	Podemos extender la noción de fracción para que tanto el numerador como el denominador puedan ser números enteros, distinto de cero el denominador.	$\frac{(-3)}{(-7)}=\frac{(-1)\cdot 3}{(-1)\cdot 7}=\frac{3}{7}$ $-\frac{4}{5}=\frac{(-4)}{5}=\frac{4}{(-5)}=(-1)\cdot\frac{4}{5}$

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Razona si son ciertas o no las siguientes afirmaciones:
   a) Si el denominador de una fracción es un número primo entonces la fracción es irreducible.
   b) Si el denominador de una fracción no es un número primo entonces la fracción no es irreducible.
   c) Hay fracciones irreducibles cuyo denominador no es un número primo.
   d) Cualquier fracción puede ser reducida a una fracción irreducible.

2. Ana ha recibido de sus padres 36 euros y su hermano menor, Ernesto, la tercera parte de lo que ha percibido Ana. ¿Qué cantidad recibió Ernesto?

3. A una fiesta de cumpleaños asisten 6 personas. La tarta ya ha sido dividida en seis porciones iguales cuando, sin esperarlo, llegan 2 personas más. Describe qué se ha de hacer con la tarta para que todas las personas coman la misma cantidad de tarta.

4. Si en la fiesta anterior en lugar de llegar repentinamente 2 personas se marchan 2, antes de distribuir la tarta ya cortada en 6 porciones iguales, comenta lo que se puede hacer con la tarta para que las 4 personas que se han quedado reciban la misma fracción de tarta, y no quede nada de ella.

5. Una persona dispone de 1172 euros y ha decidido invertir tres cuartas partes de esa cantidad en cierto producto bancario. ¿Cuál es el importe de lo invertido?

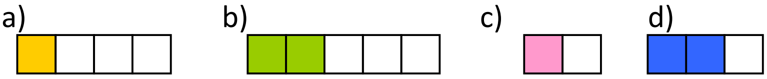
6. Una figura maciza pesa ocho kilos y medio. ¿Cuánto pesará una figura y media?

7. Dibuja en tu cuaderno para cada caso un rectángulo, que será la unidad, y colorea en él la fracción correspondiente a:

a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $\frac{5}{6}$ e) $\frac{7}{9}$

8. Expresa mediante una fracción la parte coloreada de cada figura:

a) b) c) d)



9. Calcula:

a) $\frac{1}{13}$ de 39 b) $\frac{1}{10}$ de 50 c) $\frac{1}{7}$ de 35 d) $\frac{1}{3}$ de 21

10. Convierte en fracción los siguientes números mixtos:

a) $4\frac{1}{3}$ b) $5\frac{2}{9}$ c) $3\frac{4}{7}$ d) $2\frac{1}{4}$ e) $7\frac{3}{11}$

11. Pilar ha leído las $\frac{3}{4}$ partes de un libro de 300 hojas. Javier ha leído los $\frac{6}{8}$ del mismo libro. ¿Cuántas páginas han leído cada uno? ¿Cómo son las fracciones utilizadas?

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

12. Decide calculando mentalmente cuáles de las siguientes fracciones son equivalentes a $\frac{1}{3}$:

a) $\frac{2}{6}$ b) $\frac{-1}{-3}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{7}{21}$ e) $\frac{5}{15}$

13. Si se congela. el agua aumenta su volumen en 1/10. Metes en el congelador unas botella de un litro y medio, ¿cuánto debes dejar vacío para que no explote?

14. Escribe en tu cuaderno las siguientes operaciones y luego calcula el resultado:

a) $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}$ c) $\frac{7}{3}\cdot\frac{4}{2}$ d) $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}$

15. En una obra de teatro han trabajado los 3/8 del alumnado de 1º A, 1/2 del de 1º B y 4/5 del de 1º C. ¿En qué clase han trabajado más estudiantes? Ordena las clases según que hayan trabajado más o menos estudiantes.

16. Copia en tu cuaderno y completa los siguientes pares de fracciones para que resulten equivalentes:

- $\frac{5}{3}$ y $\frac{}{60}$
- $\frac{6}{8}$ y $\frac{21}{}$

17. Expresa de forma numérica y calcula el resultado:

a) Un cuarto de tres tercios

b) Dos séptimos de la mitad

c) La mitad de la quinta parte

18. En un almacén quieren envasar tres mil litros con botellas de 1/3, ¿cuántas botellas necesitan?

19. Copia en tu cuaderno y rellena los lugares vacíos:

a) $\frac{13}{6}+\frac{1}{6}=\frac{}{6}=\frac{}{3}$; b) $\frac{5}{8}-\frac{3}{8}=\frac{}{8}=\frac{}{4}$; c) $\frac{14}{9}+\frac{}{9}=\frac{10}{3}$; d) $\frac{}{10}-\frac{7}{10}=\frac{2}{5}$

20. Escribe en forma de fracción irreducible las cantidades:

a) 30 minutos de una hora; b) 45 minutos de una hora; c) 4 meses de un año;

d) 6 meses de un año; e) 3 días de una semana; f) 6 horas de un día.

21. Copia en tu cuaderno y completa las siguientes fracciones de forma que resulten impropias:

a) $\frac{}{5}$ b) $\frac{34}{}$ c) $\frac{}{2}$

22. Finaliza las siguientes frases para dos fracciones con numerador y denominador positivos:

- si tienen el mismo numerador entonces es mayor la que tiene el ……………… denominador
- si tienen el mismo denominador entonces es mayor la que tiene el ……………… numerador

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN

1. Señala la fracción que no sea impropia:

a) $\frac{16}{9}$ b) $\frac{15}{4}$ c) $\frac{5}{9}$ d) $\frac{9}{7}$

2. Indica cuál de las fracciones siguientes es equivalente $\frac{7}{9}$:

a) $\frac{21}{28}$ b) $\frac{63}{81}$ c) $\frac{15}{18}$ d) $\frac{28}{35}$

3. La suma $\frac{2}{3}+\frac{7}{2}+\frac{5}{6}$ es :

a) 5 b) $\frac{29}{6}$ c) $\frac{14}{3}$ d) $\frac{11}{2}$

4. El lugar vacío que falta es: $\frac{13}{6}+\frac{1}{6}=\frac{\ }{6}=\frac{\ }{3}$

a) 14 y 8 b) 13 y 7 c) 12 y 6 d) 14 y 7

5. Con 6 kilos de azúcar, ¿cuántos azucareros de 2/3 kg podemos rellenar?

a) 18 b) 4 c) 9 d) 12

6. Se sabe que un refresco con gas al congelarlo aumentará su volumen 1/9 respecto al que tiene a temperatura ambiente. Para congelar 2 litros de esa bebida, el envase debe tener una capacidad al menos de:

a) 2,12 litros, b) 2,22 litros, c) 2,23 litros d) 1,95 litros

7. Elige la fracción que sea el resultado de la división $\frac{2}{3}:\frac{3}{4}$

a) $\frac{8}{9}$ b) $\frac{6}{12}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{7}{8}$

8. En cada hoja de un álbum caben seis fotografías. He llenado ya con fotos 7 hojas y me quedan los $\frac{2}{3}$ de mis fotografías por colocar, en total quiero pegar:

a) 81 fotos b) 42 fotos c) 147 fotos d) 126 fotos

9. La cuarta parte de los $\frac{2}{3}$ de 600 equivale a:

a) 120 b) 100 c) 150 d) 400

10. Indica cuál de las siguientes fracciones es mayor que $\frac{6}{8}$:

a) $\frac{7}{9}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{5}{9}$ d) $\frac{4}{7}$

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1º ESO

CAPÍTULO 6: EXPRESIONES DECIMALES

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Eduardo Cuchillo

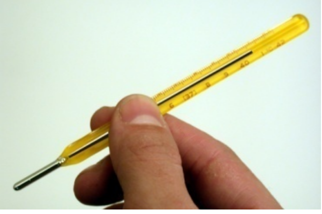
Revisora: Nieves Zuasti

Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

Índice

Resumen

Si prestamos atención a nuestro entorno, es fácil que nos encontremos con *"números que tienen decimales"*: al medir la temperatura corporal con un termómetro, en los precios de los productos de una empresa que leemos en una hoja de publicidad, etc.



En este tema vamos a trabajar con ellos, y lo haremos a partir de lo que hemos aprendido en el capítulo anterior sobre las fracciones. A lo largo de este capítulo veremos que hay fuertes conexiones entre esos dos entes matemáticos: fracciones y expresiones decimales.

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. PRIMERAS EXPRESIONES DECIMALES

1.1. Introducción. Números decimales

En el capítulo anterior surgieron las fracciones para que nos sea posible y fácil hablar de porciones, partes, en las que algo ha sido dividido. Sin embargo, en la vida cotidiana nos encontramos con otras formas que expresan cantidades que no se corresponden con unidades completas.

Ejemplo:

- En cualquier mercado vemos precios de un kilo de fruta tales como 2'38 €/kg. Un kilo de esa fruta nos cuesta 2 euros y 38 céntimos de euro, cantidad que se encuentra entre 2 y 3 euros, es mayor que 2 y menor que 3. Como cada céntimo de euro es la porción de euro que resulta al dividir un euro en cien partes iguales, tenemos una primera conexión entre la expresión 2'38 y las fracciones:

$$2'38 = 2 + \frac{38}{100} = \frac{238}{100}$$

que interpretamos como que 2 euros y 38 céntimos de euro es lo mismo que 238 céntimos de euro.

Ejemplo:

- En algunas calles o plazas de las ciudades se sitúan paneles que nos informan de la temperatura ambiente. En días calurosos la temperatura puede alcanzar, por ejemplo, los 37'4 grados. Esta temperatura es superior a 37 grados e inferior a 38 grados. Podemos decir que disponemos de dos números: a la izquierda de la coma el número 37, a la derecha de la coma el 4. Ellos nos informan de que la temperatura exacta de la calle es de 37 grados más 4 décimas de grado, esto es, 37 grados más lo que resulta de dividir un grado en diez partes iguales y tomar cuatro de ellas:

$$37'4 = 37 + \frac{4}{10}$$

Ejemplo:

- Si pesamos en una balanza la fruta que hemos escogido y vemos que su peso es de 1'692 kg sabremos que tenemos más de un kilogramo de fruta y menos de 2 kilogramos. La cantidad exacta es un kilogramo de fruta más 692 milésimas de kg. Una milésima de kilogramo (recibe el nombre de *gramo*) es cada una de las porciones de kilogramo que resultan tras dividir un kilogramo en mil partes iguales.

$$1'692 = 1 + \frac{692}{1000} = \frac{1692}{1000}$$

Esta igualdad nos indica que 1'692 kg es lo mismo que 1692 milésimas de kg, es decir, 1692 gramos.

En las tres situaciones anteriores han aparecido **números decimales**.

Un **número decimal** consta de dos partes:

- su **parte entera**, el número que está a la izquierda de la coma
- y su **parte decimal**, lo que se encuentra a la derecha de la coma

Como podemos apreciar, la parte entera de un número decimal recoge cierta cantidad de unidades completas, mientras que su parte decimal señala el número de porciones que hay que añadir, porciones que resultan de dividir una unidad en 10, 100, 1000, etc., partes iguales según tengamos, respectivamente, 1, 2, 3, etc., cifras decimales. Por ello, según vimos en el capítulo anterior, un número decimal está conectado con las descomposiciones de fracciones cuyo denominador es potencia del número 10.

Ejemplos:

$$2'9 = 2 + \frac{9}{10}$$

$$2'09 = 2 + \frac{9}{100}$$

$$0'3 = 0 + \frac{3}{10} = \frac{3}{10}$$

$$0'035 = 0 + \frac{35}{1000} = \frac{35}{1000}$$

Actividades propuestas

1. Busca otras situaciones de la vida real donde aparezcan números decimales.

1.2. Conversión de una expresión decimal a fracción

Ya hemos visto que una expresión decimal se convierte en la fracción cuyo numerador coincide con el número decimal, tras eliminar la coma, y el denominador es el número 1 seguido de tantos ceros como cifras tenía la parte decimal del número en cuestión.

Ejemplo:

$$73'18 = 73 + \frac{18}{100} = \frac{7318}{100}$$

Números decimales equivalentes. Si en un número decimal su parte decimal finaliza con el número cero podemos suprimir ese cero sin que alteremos la cantidad que expresa el número decimal.

Ejemplos:

$$3'90 = 3 + \frac{90}{100} = 3 + \frac{9}{10} = 3'9$$

$$76'0 = 76 + \frac{0}{10} = 76 + 0 = 76$$

$$8'200 = 8 + \frac{200}{1000} = 8 + \frac{2}{10} = 8'2$$

Recíprocamente, en ocasiones puede resultar conveniente, debido al contexto, añadir algún cero a la parte decimal:

$$46'54 = 46 + \frac{54}{100} = 46 + \frac{540}{1000} = 46'540$$

Actividades propuestas

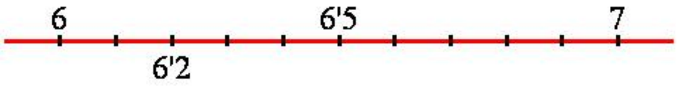
2. Transforma en fracciones los siguientes números decimales:

a) $0'87$ b) $0'0701$ c) $30'56$ d) $17'03$ e) $10'050$

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.3. Representación en la recta numérica

La relación que hemos alcanzado entre los números decimales y las fracciones nos permite *situarlos* en la recta numérica. Para representar un número decimal como 6'2 en primer lugar nos fijamos en su parte entera, 6, lo que nos informa de que 6'2 se encuentra entre los números naturales 6 y 7. Como su parte decimal posee una sola cifra, son 2 décimas, deberemos dividir el segmento de extremos 6 y 7 en diez partes iguales para, finalmente, situar 6'2 sobre la segunda de las marcas.



Si el número decimal tiene más de una cifra decimal, tendremos que realizar una subdivisión más exigente. El número decimal 3'76 tiene dos cifras decimales. Al ser su parte entera 3, se encuentra ubicado entre los números 3 y 4. La posición exacta la alcanzaríamos si dividiésemos el segmento de extremos 3 y 4 en 100 partes iguales y buscamos, a partir del número 3, la centésima número 76.

Actividades propuestas

3. Sitúa en la siguiente recta los números 8'43, 8'48, 8'51 y 8'38

Comparación entre expresiones decimales.

Decidir si un número decimal es mayor o menor que otro es bastante sencillo. Si sus partes enteras son distintas, ellas ya determinan cuál es mayor.

Ejemplo:

- 13'66 es mayor que 11'4, pues el primero tiene parte entera 13 y el segundo 11.

Si tienen igual parte entera pasamos a mirar su primera cifra decimal, la de las decenas. Si son diferentes, ya podemos decidir.

Ejemplo:

- 7'25 es menor que 7'3, ya que tienen la misma parte entera y la primera cifra decimal de 7'3 es mayor que la primera cifra decimal de 7'25.

En general, si coinciden las partes enteras buscamos la primera cifra decimal en la que los números difieren. La que sea mayor pertenecerá al mayor número decimal.

Actividades propuestas

4. Señala qué número es el mayor para cada una de las siguientes parejas:

a) 0'87 y 0'789 b) 3'58 y 4'1 c) 7'005 y 7'1 d) 32'4 y 27'9

5. Escribe dos números decimales que sean, simultáneamente, mayores que 6'147 y menores que 6'2.

1.4. Suma y resta de expresiones decimales

Debido a que hemos relacionado las expresiones decimales con las fracciones, vamos a trasladar las operaciones entre fracciones a operaciones entre expresiones decimales.

Suma de expresiones decimales. Si para sumar fracciones debíamos primero alterar, para que coincidieran, los denominadores, ahora basta con que las partes decimales tengan el mismo número de cifras. Si no lo tienen desde un principio, añadimos los ceros que sean necesarios para ello.

Ejemplos:

$$4'76 + 12'15 = 4 + \frac{76}{100} + 12 + \frac{15}{100} = 16 + \frac{76+15}{100} = 16 + \frac{91}{100} = 16'91$$

$$24'7 + 83'15 = 24'70 + 83'15 = 107'85$$

$$53'39 + 56 = 53'39 + 56'00 = 109'39$$

En estos ejemplos hemos sumado las partes enteras (en el primero de ellos, 3 + 12 = 15), y las partes decimales (76 + 15 = 91). La operación suma no siempre será exactamente así.

Ejemplos:

- Si una persona tiene 4 euros y 37 céntimos de euro y otra tiene 5 euros y 82 céntimos ¿cuánto dinero tienen entre las dos? Tenemos que sumar. En total tienen 4 + 5 = 9 euros y 37 + 82 = 119 céntimos. Pero, como 100 céntimos de euro es lo mismo que 1 euro, 119 céntimos de euro es igual a 1 euro más 19 céntimos. De esta forma, esas dos personas tienen 9+1=10 euros y 19 céntimos.

$$4'37 + 5'82 = 4 + \frac{37}{100} + 5 + \frac{82}{100} = 9 + \frac{119}{100} =$$

$$= 9 + \frac{100+19}{100} = 9 + \frac{100}{100} + \frac{19}{100} = 9 + 1 + \frac{19}{100} = 10 + \frac{19}{100} = 10'19$$

Observamos que, a veces, al sumar las partes decimales el valor que resulta tiene más cifras de las que tiene asignadas y eso afecta a la parte entera resultante.

Ejemplos:

$$5'25 + 2'98 = 8'23$$

$$11'5 + 4'77 = 16'27$$

$$24'7 + 83'35 = 108'05$$

Nos damos cuenta de que para sumar dos expresiones decimales debemos:

- Observar, en primer lugar, si sus partes decimales tienen la misma cantidad de cifras.
- Si no es así, provocamos esa coincidencia completando con ceros, por la derecha, la parte decimal más corta.
- Una vez que las expresiones decimales ya tienen sus partes decimales con la misma longitud, procedemos a sumar los números ignorando la coma que posee cada uno de ellos.
- Al resultado de esa suma le ponemos una coma para que surja una expresión decimal con parte decimal de la misma longitud que las expresiones decimales sumados.

Propiedades de la suma de expresiones decimales.

Conmutativa. No importa en qué orden sumemos dos expresiones decimales.

Ejemplo:

$$314'66 + 2'47 = 317'13$$
$$2'47 + 314'66 = 317'13$$

Asociativa. Nos permite sumar más de dos expresiones decimales. Para ello agrupamos, como queramos, de dos en dos.

Ejemplo:

$$5'7 + 30'02 + 17'4 = (5'7 + 30'02) + 17'4 = 35'72 + 17'4 = 53'12$$
$$5'7 + 30'02 + 17'4 = 5'7 + (30'02 + 17'4) = 5'7 + 47'42 = 53'12$$

Elemento neutro. El número 0 sumado a cualquier otro número decimal no lo altera.

Ejemplo:

$$0 + 42'324 = 42'324 = 42'324 + 0$$

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Diferencia de expresiones decimales.

Al igual que con la suma, si hiciera falta, hemos de forzar que las partes decimales tengan la misma cantidad de cifras.

Ejemplos:

$$32'45-29'36=\left(32+\frac{45}{100}\right)-\left(29+\frac{36}{100}\right)=32+\frac{45}{100}-29-\frac{36}{100}=(32-29)+\left(\frac{45}{100}-\frac{36}{100}\right)=3+\frac{9}{100}=3'09$$

$$7'71-5'3=7'71-5'30=2'41$$

En estos ejemplos hemos restado las partes enteras (en el primero de ellos, 32 – 29 = 3) y las partes decimales (45 – 36 = 09). La operación diferencia no siempre se realizará exactamente así.

Ejemplo:

$$82'53-9'72=\left(82+\frac{53}{100}\right)-\left(9+\frac{72}{100}\right)=82+\frac{53}{100}-9-\frac{72}{100}=82-9+\left(\frac{53}{100}-\frac{72}{100}\right)=73+\frac{53-72}{100}=$$

$$=73+\frac{(-19)}{100}=73-\frac{19}{100}=72+1-\frac{19}{100}=72+\frac{100}{100}-\frac{19}{100}=72+\frac{100-19}{100}=72+\frac{81}{100}=72'81$$

$$23-16'32=23'00-16'32=6'68$$

Apreciamos que para restar dos expresiones decimales debemos:

- Observar si sus partes decimales tienen la misma cantidad de cifras.
- Si no es así, provocamos esa coincidencia **completando con ceros**, por la derecha, la parte decimal más corta.
- Una vez que las expresiones decimales ya tienen sus partes decimales con la misma longitud, procedemos a restar los números ignorando la coma que posee cada uno de ellos.
- Al resultado de esa resta le ponemos una coma para que surja un número decimal con parte decimal de la misma longitud que las expresiones decimales restadas.

Como es habitual, la operación diferencia no es conmutativa.

Actividades propuestas

6. Realiza las operaciones:

a) $17'03+5'46$ b) $26'84+15'57$ c) $6'64-5'47$ d) $35'21-23'57$

7. Efectúa los siguientes cálculos:

a) $27'3+5'87$ b) $2'553+6'7$ c) $13'51-4'7$ d) $9'1-8'57$

8. Halla:

a) $5'57+32'6+9'115$ b) $46'77-15'6+2'3$ c) $33'2-16'53-12'4$

1.5. Producto de expresiones decimales

De nuevo el paso de decimal a fracción va a indicarnos cómo se debe operar.

Ejemplos:

$$5'7 \cdot 3'3 = \frac{57}{10} \cdot \frac{33}{10} = \frac{57 \cdot 33}{10 \cdot 10} = \frac{1881}{100} = 18'81$$

$$93'05 \cdot 72'4 = \frac{9305}{100} \cdot \frac{724}{10} = \frac{9305 \cdot 724}{100 \cdot 10} = \frac{6736820}{1000} = 6736'820 = 6736'82$$

$$44'16 \cdot 8 = \frac{4416}{100} \cdot \frac{8}{1} = \frac{4416 \cdot 8}{100 \cdot 1} = \frac{35328}{100} = 353'28$$

Estos ejemplos nos hacen ver cómo hemos de proceder, en la práctica, para realizar el producto de dos expresiones decimales:

- Multiplicar, en primer lugar, los números ignorando la coma que posee cada uno de ellos.
- Al resultado de ese producto le ponemos una coma para que surja una expresión decimal con una parte decimal de longitud igual a la suma de las cantidades de cifras decimales que tienen las expresiones decimales multiplicadas.

Propiedades de la multiplicación de expresiones decimales.

Conmutativa. No importa en qué orden multipliquemos dos expresiones decimales.

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Ejemplo:

$$1'552 \cdot 5'9 = 9'1568$$
$$5'9 \cdot 1'552 = 9'1568$$

Asociativa. Nos permite multiplicar más de dos expresiones decimales. Para ello los agrupamos, como queramos, de dos en dos.

$$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Ejemplo:

$$5'7 \cdot 3'2 \cdot 7'14 = (5'7 \cdot 3'2) \cdot 7'14 = 18'24 \cdot 7'14 = 130'2336$$
$$5'7 \cdot 3'2 \cdot 7'14 = 5'7 \cdot (3'2 \cdot 7'14) = 5'7 \cdot 22'848 = 130'2336$$

Elemento neutro. El número 1 multiplicado por cualquier otro número decimal no lo altera.

$$1 \cdot a = a = a \cdot 1$$

Ejemplo:

$$1 \cdot 92'77 = 92'77 = 92'77 \cdot 1$$

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma. Cuando en una multiplicación uno de los factores es la suma de dos expresiones decimales, como, por ejemplo,

$$8'3 \cdot (6'5 + 1'04)$$

tenemos dos opciones para conocer el resultado:

a) realizar la suma y, después, multiplicar

$$6'5 + 1'04 = 6'50 + 1'04 = 7'54$$

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$$8'3 \cdot 7'54 = 62'582$$

b) distribuir, aplicar, la multiplicación a cada uno de los sumandos y, después, sumar:

$$8'3 \cdot (6'5 + 1'04) = (8'3 \cdot 6'5) + (8'3 \cdot 1'04)$$

Comprobemos que obtenemos el mismo resultado:

$$(8'3 \cdot 6'5) + (8'3 \cdot 1'04) = 53'95 + 8'632 = 62'582$$

La propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma nos dice que

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

Actividades propuestas

9. Calcula:

a) $4'6 \cdot 7'5$ b) $1'16 \cdot 3'52$ c) $3'2 \cdot 5'1 \cdot 1'4$ d) $2'3 \cdot 4'11 \cdot 3'5$

10. Efectúa:

a) $4 \cdot (3'01 + 2'4)$ b) $5'3 \cdot (12 + 3'14)$ c) $3'9 \cdot (25'8 - 21'97)$

1.6. División de expresiones decimales (I)

Para dividir dos expresiones decimales, si ambos tienen parte decimal con igual cantidad de cifras, podemos olvidarnos de que estamos operando con números decimales y actuar como si las comas no estuvieran:

Ejemplo:

$$\frac{16'11}{2'25} = \frac{1611}{100} : \frac{225}{100} = \frac{1611}{100} \cdot \frac{100}{225} = \frac{1611 \cdot 100}{100 \cdot 225} = \frac{1611}{225} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 179}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{179}{5 \cdot 5} = \frac{179}{25}$$

Si el número de cifras decimales es distinto, lo primero que hacemos es igualarlas:

Ejemplos:

$$\frac{9'3}{4'81} = \frac{9'30}{4'81} = \frac{930}{100} : \frac{481}{100} = \frac{930}{100} \cdot \frac{100}{481} = \frac{930 \cdot 100}{100 \cdot 481} = \frac{930}{481}$$

$$\frac{6'32}{3'4} = \frac{6'32}{3'40} = \frac{632}{100} : \frac{340}{100} = \frac{632}{100} \cdot \frac{100}{340} = \frac{632 \cdot 100}{100 \cdot 340} = \frac{632}{340} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 79}{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 17} = \frac{2 \cdot 79}{5 \cdot 17} = \frac{158}{85}$$

Observamos que, por este camino, la división de dos expresiones decimales nos da como resultado una fracción. Queremos dar un paso más y, para ello, vamos a estudiar cómo convertir fracciones en expresiones decimales. De ese modo sabremos qué número decimal aparece al dividir dos expresiones decimales.

Actividades propuestas

11. Transforma en fracción las siguientes divisiones entre expresiones decimales:

a) $\frac{11'1}{3'7}$ b) $\frac{31'54}{2'7}$ c) $\frac{25'6}{1'39}$ d) $\frac{5}{3'5}$

1.7. Conversión de una fracción a expresión decimal

Ya sabemos escribir en forma de fracción una expresión decimal como, por ejemplo, 31'528:

$$31'528 = \frac{31528}{1000}$$

o, si queremos ir más despacio,

$$31'528 = 31 + 0'528 = 31 + \frac{528}{1000} = 31 + \frac{500+20+8}{1000} = 31 + \frac{500}{1000} + \frac{20}{1000} + \frac{8}{1000} = 31 + \frac{5}{10} + \frac{2}{100} + \frac{8}{1000}$$

Con esta descomposición,

$$31'528 = 31 + \frac{5}{10} + \frac{2}{100} + \frac{8}{1000}$$

apreciamos, claramente separadas, su parte entera y cada una de sus tres cifras decimales, el 5 de las décimas, el 2 de las centésimas y el 8 de las milésimas.

Ahora vamos a proceder en sentido contrario. Escogeremos una fracción y la convertiremos en una expresión decimal. Para que resulte más sencillo, elegiremos una fracción concreta como, por ejemplo, 93/8. Si procedemos a efectuar la usual división, 93 entre 8, nos aparece como cociente el número 11 y como resto 5:

$$\begin{array}{l|l} 93 & 8 \\ \hline 13 & 11 \\ \ \ 5 & \end{array} \qquad\qquad \frac{93}{8} = \frac{8\cdot 11+5}{8} = 11 + \frac{5}{8}$$

Esto nos hace saber que la parte entera de 93/8 es igual a 11, puesto que la fracción 5/8 no contiene ninguna unidad completa ya que 5, el resto, es menor que 8, el divisor. De momento:

$$\frac{93}{8} = 11'\ldots\ldots$$

Averigüemos su primera cifra decimal, las decenas:

$$\frac{93}{8} = 11 + \frac{5}{8} = 11 + \frac{\frac{5}{8}\cdot 10}{10} = 11 + \frac{\frac{50}{8}}{10} = 11 + \frac{6+\frac{2}{8}}{10} = 11 + \frac{6}{10} + \frac{\frac{2}{8}}{10}$$

En la anterior igualdad, cuando apareció 50/8, dividimos 50 entre 8. Nos dio de cociente 6 y de resto 2. Podemos asegurar que la primera cifra decimal de 93/8, la cifra de las decenas, será igual a 6 porque ha aparecido 6/10 y la otra fracción no puede aportar ninguna decena más debido a que 2/8 es menor que 1.

$$\frac{93}{8} = 11'6\ldots..$$

La segunda cifra decimal de 93/8, la correspondiente a las centenas, surgirá del último sumando de la expresión anterior:

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$$11+\frac{6}{10}+\frac{\frac{2}{8}}{10}=11+\frac{6}{10}+\frac{\frac{2}{8}\cdot 10}{10\cdot 10}=11+\frac{6}{10}+\frac{\frac{20}{8}}{100}=11+\frac{6}{10}+\frac{2+\frac{4}{8}}{100}=11+\frac{6}{10}+\frac{2}{100}+\frac{\frac{4}{8}}{100}$$

Cuando nos encontramos con 20/8, se procedió a dividir 20 entre 8 y se obtuvo 2 como cociente y 4 como resto. Debido a la fracción 2/100, la segunda cifra decimal de 93/8 es 2, puesto que la última fracción no añade ninguna otra centena ya que 4/8 es menor que 1.

$$\frac{93}{8}=11'62....$$

Conozcamos la siguiente cifra decimal, la de las milésimas:

$$11+\frac{6}{10}+\frac{2}{100}+\frac{\frac{4}{8}}{100}=11+\frac{6}{10}+\frac{2}{100}+\frac{\frac{4}{8}\cdot 10}{100\cdot 10}=11+\frac{6}{10}+\frac{2}{100}+\frac{\frac{40}{8}}{1000}=11+\frac{6}{10}+\frac{2}{100}+\frac{5}{1000}$$

En esta ocasión, con la fracción 40/8, al dividir 40 entre 8 nos encontramos con que era una división exacta, de resto cero. Esto nos señala que hemos acabado ya que

$$\frac{93}{8}=11+\frac{6}{10}+\frac{2}{100}+\frac{5}{1000}$$

y, finalmente,

$$\frac{93}{8}=11'625$$

Si analizamos con atención el proceso anterior, seremos capaces de agilizarlo:

- La fracción original era 93/8. El cociente de la simple división de 93 entre 8 nos proporciona su parte entera: 11.
- Como el resto era 5, dividimos 5·10 = 50 entre 8. Obtuvimos cociente 6 y resto 2. Primera cifra decimal: 6
- A partir del resto anterior, 2, dividimos 2·10 = 20 entre 8. Salen cociente 2 y resto 4. Segunda cifra decimal: 2
- A partir del resto anterior, 4, dividimos 4·10 = 40 entre 8. Salen cociente 5 y resto 0. Tercera cifra decimal: 5
- Como el último resto es 0, hemos concluido

Visualicemos lo expuesto recordando que 93=93’000:

$$\begin{array}{l|l}
93'000 & 8 \\ \cline{2-2}
13 & 11'625 \\
\ \ 50 & \\
\ \ \ 20 & \\
\ \ \ \ 40 & \\
\ \ \ \ \ 0 &
\end{array}$$

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

12. Convierte en expresión decimal las fracciones siguientes:

a) $\frac{9}{2}$ b) $\frac{31}{4}$

Asoma una pregunta lógica: en las conversiones de fracción a expresión decimal, ¿antes o después hemos de toparnos, necesariamente, con que es igual a cero el resto en alguna etapa?

En el ejemplo que nos ha ilustrado, 93/8, dejando al margen la parte entera, apreciamos que se "enfrentaron", y por este orden, los números 5 frente a 8, 2 frente a 8, 4 frente a 8, antes de ser multiplicados los primeros por 10. Siempre aparece el número 8, ya que es el denominador original. Como 8 siempre es el divisor, los únicos restos posibles son 0 (si la división es exacta), 1, 2, 3, 4, 5, 6, y 7. De esta manera si, con otra fracción distinta de 93/8, en algún momento aparece un resto que ya ha salido antes entraremos en un bucle o ciclo. Lo vemos con otra fracción, con 46/11:

$$\begin{array}{l|l} 46'000 & 11 \\ \cline{2-2} \;\;20 & 4'181 \\ \;\;\;90 & \\ \;\;\;\;20 & \\ \;\;\;\;\;9 & \end{array}$$

Tenemos

$$\frac{46}{11} = 4'181...$$

Como, al final de cada paso, los únicos restos que surgen son los números 2 y 9, todo lo que sigue es predecible: la cuarta cifra decimal es un 8, la quinta un 1, la sexta otro 8, la séptima otro 1, ….

$$\frac{46}{11} = 4'1818181818181....$$

Con lo que acabamos de alcanzar, podemos retornar a la división de números decimales.

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.8. División de expresiones decimales (II)

Si vamos a dividir dos expresiones decimales como, por ejemplo, 34'24 entre 2'7, lo primero que haremos será multiplicar ambas expresiones por un uno seguido de tantos ceros como cifras decimales tenga el denominador. De este modo, el denominador pasa a ser un número natural:

$$\frac{34'24}{2'7}=\frac{34'24\cdot 10}{2'7\cdot 10}=\frac{342'4}{27}$$

Seguidamente iniciamos el conocido algoritmo de la división limitándolo, en un principio, a la parte entera del numerador:

$$\begin{array}{r|l} 342' & 27 \\ \cline{2-2} 72 & 12' \\ 18 & \end{array}$$

Hemos acabado con la parte entera del numerador y nos encontramos, de momento, con cociente 12 y resto 18. En cuanto entran en acción las cifras decimales del numerador, hemos de poner una coma en el cociente ya que comienza a surgir su parte decimal:

$$\begin{array}{l|l} 342'4000 & 27 \\ \cline{2-2} \ \ 72 & 12'6814 \\ \ \ \ 184 & \\ \ \ \ \ \ 220 & \\ \ \ \ \ \ \ \ 040 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 130 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 22 & \end{array}$$

Por lo tanto:

$$\frac{34'24}{2'7}=\frac{342'4}{27}=12'68148148....$$

Actividades propuestas

13. Efectúa las siguientes divisiones:

a) $\frac{42'78}{6}$ b) $\frac{15'2}{3'8}$ c) $\frac{12'505}{4'1}$ d) $\frac{6'42}{1'3}$

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2. EXPRESIONES DECIMALES PERIÓDICAS

2.1. Decimales periódicos: puros y mixtos

En el paso de fracción a número decimal de, por ejemplo, la fracción 46/11 hemos apreciado que en ninguna etapa tenemos resto igual a cero. Aparece así un nuevo tipo de expresión decimal, es un **número decimal periódico**. Así los llamamos porque tienen un desarrollo decimal que, aunque no tenga final, se repite de manera periódica. Sobre el ejemplo anterior, diremos que el desarrollo decimal de 46/11 es periódico de **periodo** igual a 18. Escribiremos:

$$\frac{46}{11} = 4'1818181818181.... = 4'\overline{18}$$

Debido a lo que expusimos antes sobre los restos, cualquier fracción tiene un desarrollo decimal **exacto** o **periódico**.

Ejemplo:

$$\frac{3424}{27} = 126'\overline{814}$$

Las expresiones decimales periódicas cuyo desarrollo decimal periódico comienza inmediatamente después de la coma se llaman **periódicos puros**. Si el periodo se encuentra más allá de la coma estamos ante un número decimal **periódico mixto** y la parte decimal situada entre la coma y el periodo se llama **anteperiodo**.

Ejemplo:

- Halla el desarrollo decimal de la fracción 178/70.

a) Aplicamos el algoritmo de la división según lo dicho antes sobre la entrada en acción de las cifras decimales del numerador:

$$\begin{array}{l|l} 178'000... & 70 \\ \hline \;\; 380 & 2'54285714... \\ \;\;\;\; 300 & \\ \;\;\;\;\;\; 200 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\; 600 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\; 400 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\; 500 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\; 100 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\; 300 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\; 20 & \end{array}$$

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

b) Cuando situamos en el cociente el número 1 y operamos, apareció por segunda vez el resto 30. Esa repetición de un resto nos hizo saber que estábamos ante un desarrollo decimal periódico. Lo hemos ratificado dando un paso más, añadiendo la cifra 4 en el cociente, y observamos que aparece como nuevo resto el que ya apareció antes tras el resto 30, el resto 20.

c) De acuerdo con lo anterior

$$\frac{178}{70} = 2'5\overline{428571}$$

Hemos llegado a la expresión decimal de la fracción 178/70. Es el número decimal de parte entera 2, anteperiodo 5 y periodo 428571.

Actividades propuestas

14. Transforma las siguientes fracciones en expresión decimal:

a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{7}{11}$ c) $\frac{5}{6}$ d) $\frac{4}{7}$ e) $\frac{25}{9}$ f) $\frac{17}{12}$ g) $\frac{50}{13}$

2.3. Conversión de una expresión decimal periódica en fracción

Apreciamos al comienzo del tema que es muy sencillo realizar el paso a fracción de los **números decimales exactos**, aquellos cuyo desarrollo decimal es finito. Ahora vamos a conseguir lo mismo para las expresiones decimales periódicas, tanto si son puros como mixtos. Como es habitual, un caso concreto nos abrirá camino.

Ejemplo:

- Vamos a convertir en fracción el número

$$42'\overline{7}$$

a) Aislamos su parte entera

$$42'\overline{7} = 42 + 0'\overline{7}$$

b) Vamos a transformar en una fracción el número decimal $0'\overline{7}$. Hay que buscar una fracción *m/n* que cumpla *m/n* = $0'\overline{7}$. Para simplificar la escritura, escribiremos X en lugar de la fracción que perseguimos *m/n*:

$$X = 0'\overline{7} = 0'777777.....$$

$$10 \cdot X = 10 \cdot 0'\overline{7} = 10 \cdot 0'777777..... = 7'777777..... = 7'\overline{7} = 7 + 0'\overline{7} = 7 + X$$

$$10 \cdot X - X = 7$$

$$9 \cdot X = 7$$

$$X = \frac{7}{9}$$

c) Ya sabemos que $0'\overline{7}$ = 7/9. En la fracción 7/9 reconocemos en el numerador el periodo del número decimal $0'\overline{7}$. Luego encontraremos la justificación del número 9.

d) Solo nos queda añadir la parte entera:

$$42'\overline{7} = 42 + 0'\overline{7} = 42 + \frac{7}{9} = \frac{42 \cdot 9 + 7}{9} = \frac{378 + 7}{9} = \frac{385}{9}$$

$$42'\overline{7} = \frac{385}{9}$$

Ejemplo:

- Analicemos otro caso. Busquemos una fracción cuyo desarrollo decimal sea $0'\overline{31}$:

$$X = 0'\overline{31}$$

$$100 \cdot X = 100 \cdot 0'\overline{31} = 100 \cdot 0'31313131..... = 31'313131..... = 31'\overline{31} = 31 + 0'\overline{31} = 31 + X$$

$$100 \cdot X - X = 31$$

$$99 \cdot X = 31$$

$$X = \frac{31}{99}$$

Al hilo de estos dos ejemplos podemos vaticinar que:

Un número decimal periódico puro, **con parte entera igual a cero**, se convierte en aquella fracción que tiene por numerador al periodo y por denominador al número formado por una cantidad de nueves igual al número de cifras del periodo.

Ejemplos:

$$0'\overline{5} = \frac{5}{9}$$

$$0'\overline{934} = \frac{934}{999}$$

$$4'\overline{6} = 4 + 0'\overline{6} = 4 + \frac{6}{9} = 4 + \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 4 + 2}{3} = \frac{14}{3}$$

Ya sabemos transformar un número decimal periódico puro en una fracción. Para alcanzar ese mismo cambio en el caso periódico mixto vamos a realizar una simple pero muy efectiva argucia: convertiremos el número decimal periódico mixto en otro que sea periódico puro, transformaremos éste en fracción y, por último, desharemos la primera conversión.

Ejemplo:

- Transformad en fracción el número decimal $8'07\overline{458}$.

a) Su parte entera es 8, su anteperiodo es 07 y su periodo es 458. Como su anteperiodo posee dos cifras, multiplicamos al número por 100

$$8'07\overline{458}\cdot 100 = 807'\overline{458}$$

b) De esta forma estamos ante un número periódico puro, $807'\overline{458}$, al que convertimos en fracción

$$807'\overline{458} = 807 + 0'\overline{458} = 807 + \frac{458}{999} = \frac{807\cdot 999 + 458}{999} = \frac{806193 + 458}{999} = \frac{806651}{999}$$

c) Recuperamos el número decimal periódico mixto

$$8'07\overline{458} = \frac{807'\overline{458}}{100} = \frac{\frac{806651}{999}}{100} = \frac{806651}{999\cdot 100} = \frac{806651}{99900}$$

Ejemplo:

- Represéntese por medio de una fracción el número $0'3\overline{49}$.

a) Su parte entera es 0, su anteperiodo es 3 y su periodo es 49. Como su anteperiodo consta de una sola cifra, multiplicamos al número por 10

$$0'3\overline{49}\cdot 10 = 3'\overline{49}$$

b) Convertimos en fracción al número $3'\overline{49}$

$$3'\overline{49} = 3 + 0'\overline{49} = 3 + \frac{49}{99} = \frac{99\cdot 3 + 49}{99} = \frac{297 + 49}{99} = \frac{346}{99}$$

c) Por último

$$0'3\overline{49} = \frac{3'\overline{49}}{10} = \frac{\frac{346}{99}}{10} = \frac{346}{99\cdot 10} = \frac{346}{990}$$

d) Si ralentizamos las últimas operaciones podremos apreciar una regla para estas conversiones

$$0'3\overline{49} = \frac{3'\overline{49}}{10} = \frac{3 + 0'\overline{49}}{10} = \frac{3 + \frac{49}{99}}{10} = \frac{3}{10} + \frac{49}{990} = \frac{99\cdot 3 + 49}{990} = \frac{100\cdot 3 - 3 + 49}{990} = \frac{349 - 3}{990}$$

Una expresión decimal periódica mixta, **con parte entera igual a cero**, se convierte en aquella fracción que tiene por numerador al número natural formado por el anteperiodo inmediatamente seguido del periodo menos el anteperiodo y por denominador al número formado por una cantidad de nueves igual al número de cifras del periodo seguido de una cantidad de ceros coincidente con el número de cifras del anteperiodo.

Actividades propuestas

15. Expresa mediante una fracción cada uno de los siguientes números decimales:

a) $0'\overline{13}$ b) $14'\overline{5}$ c) $0'2\overline{6}$ d) $24'01\overline{8}$ e) $5'1\overline{101}$ f) $3'5\overline{40}$

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.3. Operaciones con expresiones decimales periódicas

Para operar con números decimales periódicos lo más prudente es transformarlos en fracciones y luego realizar la operación a través de ellas. De esta manera podemos evitar cometer errores debido a la falta de costumbre de trabajar con un número infinito de decimales.

A título de curiosidad calculemos la suma $0'\overline{3}+0'\overline{6}$. Parece natural que

$$0'\overline{3}+0'\overline{6}=0'333333.....+0'666666.....=0'999999.....=0'\overline{9}$$

Por otro lado

$$0'\overline{3}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3} \qquad \text{y} \qquad 0'\overline{6}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

Así

$$0'\overline{3}+0'\overline{6}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{3}{3}=1$$

de modo que

$$1=0'\overline{9}=0'999999.....$$

Entonces ¿algo está fallando? No, no hay ningún error. Debemos entender que una expresión decimal no es más que una **representación** de una fracción, o de un número natural. Otra representación decimal, sin ninguna utilidad, del número 1 sería

$$1=1'\overline{0}=1'00000.....$$

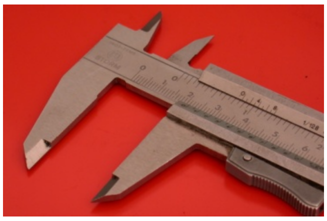
3. APROXIMACIONES, TRUNCAMIENTOS Y REDONDEOS

3.1. Aproximaciones

En la vida cotidiana resulta más sencillo trabajar, o manejarnos, con unidades completas antes que con partes o cantidades fraccionadas. Cuando vamos al mercado, no es fácil reconocer la exactitud de medio pollo pero no tenemos ningún problema en reconocer un pollo entero. Si tenemos sed y demandamos un vaso lleno de agua ésta es una petición "más simple" que si solicitamos un tercio de vaso. Naturalmente, en el mercado no cuestionaremos si nos ofrecen medio pollo exacto o no; lo aceptaremos simplemente si "parece" que es medio pollo. Tampoco tiene sentido que dediquemos tiempo a constatar si el agua que nos ofrecen se corresponde con la tercera parte del vaso. En ninguna de estas dos situaciones tenemos interés en la exactitud, en ambas nos conformamos con una ***aproximación***.

Son muy frecuentes las circunstancias en las que aparecen aproximaciones, habitualmente de expresiones decimales o fracciones:

- Si vamos a pagar con un billete de 50 euros una compra que asciende a 32'69 euros, esperamos una vuelta de 17'31 euros. Si en la caja no hay monedas de un céntimo, nos propondrán que demos por buena una vuelta de 17'30 euros. Es una *aproximación a la baja*.
- Si realizamos una compra por un importe de 12'44 euros y la saldamos con 12'45 euros estamos ante una *aproximación al alza*.
- Los instrumentos de medida, incluso los de alta precisión, siempre nos ofrecen mediciones aproximadas.



Actividades propuestas

16. Escribe en tu cuaderno tres circunstancias de la vida cotidiana donde se realicen aproximaciones.

3.2. Truncamientos y redondeos.

Aunque estemos en un contexto en el que no busquemos la exactitud, y nos baste con una aproximación, sí es conveniente que conozcamos la magnitud de la aproximación, cómo se ha llegado a ella.

Una manera de realizar una aproximación a la baja de un número decimal es el ***truncamiento***. Consiste en decidir cuántas cifras decimales queremos considerar y, simplemente, eliminar las restantes a partir de la última cifra decimal mostrada.

Ejemplo:

- Si truncamos el número decimal $12'3763$
  a) en las centésimas, aparece la aproximación $12'37$
  b) en las milésimas, surge $12'376$

Ejemplo:

- Si disponemos del número decimal periódico $7'\overline{49}$
  a) y lo truncamos en las décimas nos encontramos con la aproximación $7'4$
  b) al truncarlo en la quinta cifra decimal obtenemos $7'49494$

Actividades propuestas

17. Aproxima por truncamiento los siguientes números decimales de forma que aparezca un desarrollo decimal hasta las milésimas:

a) $11'1234$ b) $6'\overline{6}$ c) $9'3\overline{50}$ d) $8'\overline{71}$ e) $8'334\overline{8}$ f) $2'64\overline{08}$

Otra forma de realizar una aproximación es a través de un ***redondeo***. Éste consiste en decidir cuántas cifras decimales va a tener la aproximación, realizar el truncamiento oportuno y, en función de cuál sea la primera cifra decimal no considerada, mantener o incrementar en una unidad la parte decimal del truncamiento. El criterio para efectuar, o no, dicho incremento es el siguiente:

- Cuando la primera cifra decimal eliminada es 0, 1, 2, 3 o 4, el redondeo coincide con el truncamiento.
- Si la primera cifra decimal no considerada es un 5, 6, 7, 8 o 9, el redondeo se obtiene al aumentar en una unidad la parte decimal del truncamiento.

De acuerdo con lo anterior, un redondeo es una aproximación que puede ser a la baja o al alza.

Ejemplo:

- Si redondeamos el número decimal $12'3763$
  a) hasta las centésimas, aparece la aproximación $12'38$
  b) hasta las milésimas, surge $12'376$

Ejemplo:

- Si disponemos del número decimal periódico $7'\overline{49}$
  a) y lo redondeamos en las décimas nos encontramos con la aproximación $7'5$
  b) al redondearlo en la quinta cifra decimal obtenemos $7'49495$
  c) resulta 7’49 si se redondea hasta las centésimas.

Actividades propuestas

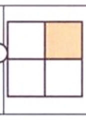
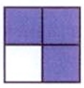
18. Aproxima por redondeo hasta la milésima los siguientes números decimales:

a) $11'1234$ b) $6'\overline{6}$ c) $9'3\overline{50}$ d) $8'\overline{71}$ e) $8'334\overline{8}$ f) $2'64\overline{08}$ g) $3'99\overline{96}$

Recursos didácticos fotocopiables:

Dominó de fracciones y decimales

Objetivo: Reforzar el cálculo mental de operaciones con fracciones, decimales y porcentajes.

$\frac{1}{2}$	5/10	0,5	3/15	1/4		9/12	2/10
0,25		0,5 + 0,25		4/6	1/3	2/4	2/3
	1/5	0,2	1/4	0,25 + 0,25	3/4	0,66...	5/20
6/8	1/3 + 1/3	2/10	0,1	25/100	33,3... %	5/50	10/15
2/6	3/9	3/30	2/4	75/100		0,1 + 0,15	0,75
6/9		0,1 + 0,1		20/100	2/6		5/15
2/20	50/100	0,05 + 0,05	15/20	1/10	2/8	50/100	0,33...

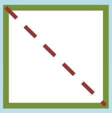
Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

Un número irracional no se puede expresar en forma de fracción

La idea del uso de la coma o el punto para los decimales se atribuye a matemáticos como Giovani Magini, o John Napier, a finales del s XVI. En 1698, Leibnitz, propuso usar el punto como símbolo de multiplicación, la coma quedó para separar la parte decimal del número. Pero en Inglaterra, se siguió utilizando el símbolo x para la multiplicación y el punto para separar los decimales ya que no eran seguidores de Leibnitz. En el mundo digital, el punto ha ganado a la coma, que seguimos utilizando en los escritos matemáticos

π = 3’141592… es el más famoso de los números irracionales. Es el cociente entre la longitud de la circunferencia y su diámetro. Busca información sobre los millones de cifras decimales de π



Hipaso de Metaponto buscaba el cálculo de la medida de la diagonal de un cuadrado de lado 1 y se encontró con el número $\sqrt{2}$, un número irracional de infinitas cifras decimales no periódicas.

La leyenda dice que este hallazgo llenó de ira a los pitagóricos que no concebían la existencia de números irracionales. Su intolerancia terminó con Hipaso ahogado en el mar.

Alberto Coto (Lada de Langreo, Asturias 1970). Campeón mundial de Cálculo Mental.

Licenciado en Ciencias del Trabajo, asesor fiscal, ha desarrollado técnicas de cálculo mental con las que ha establecido hasta en 14 ocasiones record Guiness en operaciones aritméticas.

Con sus actividades calculistas, ha ganado 9 medallas de oro, 2 de plata y 3 de bronce en torneos mundiales de “Deporte Mental”

Uno de sus records más famoso ha consistido en realizar sumas de 100 dígitos en 17,04 segundos. Eso supone una velocidad de 6 operaciones mentales por segundo.

Ha realizado actividades relacionadas con la pedagogía matemática y cuenta con numerosas publicaciones.

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

NOCIÓN		*Ejemplos*
Expresiones decimales	Alternativa a las fracciones para expresar cantidades que no se corresponden con unidades completas. Constan de dos partes: su parte entera y su parte decimal	$21'375$ Parte entera: 21 Parte decimal: 375
Expresión decimal exacta	Su parte decimal tiene una cantidad finita de cifras	$5'7767$
Expresión decimal periódica	Su parte decimal tiene una cantidad infinita de cifras que se repiten periódicamente. Pueden ser puros o mixtos	Puro: $3'\overline{07} = 3'0707070.....$ Mixto: $4'8\overline{13} = 4'813131.....$
Paso de expresión decimal a fracción	Podemos expresar cualquier expresión decimal exacta o periódica en forma de fracción	$5'7767 = \frac{57767}{10000}$ $3'\overline{07} = 3 + \frac{7}{99} = \frac{304}{99}$ $4'8\overline{13} = 4 + \frac{813-8}{990} = \frac{4765}{990}$
Operaciones con expresiones decimales	Se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir	
Conversión en expresión decimal de una fracción	Podemos representar cualquier fracción mediante un número decimal, el cual podrá ser exacto o periódico (puro o mixto)	$\frac{11}{4} = 2'75$ $\frac{10}{11} = 0'\overline{90}$ $\frac{32}{15} = 2'1\overline{3}$
Truncamiento de una expresión decimal	Es una aproximación de un expresión decimal que consiste en eliminar su parte decimal a partir de cierta cifra decimal	Truncamiento en las centésimas de 21'375: $21'37$
Redondeo de una expresión decimal	Es otra aproximación que, a diferencia del truncamiento, sí considera la primera cifra decimal eliminada	Redondeo hasta las centésimas de 21'375: $21'38$

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Escribe con palabras la expresión de los números siguientes:

a) 2'5 b) 32'05 c) 45'50 d) 72'050

2. Multiplica mentalmente por a) 10, b) 100, c) 1000, d) 1000000 el número 3'761937

3. Ordena de menor a mayor los números: 5'67; 5'68; 5,6666; 5'63; 5'5; 5'8; 5'6070.

4. Ordena de mayor a menor los números: 7'45; 6'9999; 7'3456; 7'4378; 7'44444; 7'4501; 7'45012.

5. Indica entre qué dos números enteros se encuentran los siguientes números: 5,6666; 7,999; 1'0001; 3'099.

6. Redondea a las décimas los números siguientes: 5'67; 5'68; 5,6666; 7'45; 6'9999; 7'3456; 7'4378.

7. Redondea a las centésimas los números siguientes: 5'676767; 5'688989; 5,6666; 7'459; 6'9999; 7'3456; 7'4378.

8. Redondea a las milésimas los números siguientes: 5'676767; 5'688989; 5,6666; 7'45911; 6'9999; 7'3456; 7'4378.

9. Ordena de menor a mayor los siguientes números: 1/2; 0'45; 0,999; 2/3; 0,75; 5/4; 0,3939; 1/5.

10. Trunca por las centésimas los siguientes números: 5'676767; 5'688989; 5,6666; 7'459; 6'9999; 7'3456; 7'4378.

11. Completa las siguientes igualdades:

- $38'532 = 38 + \frac{\quad}{10} + \frac{\quad}{100} + \frac{\quad}{1000}$
- $0'078 = \frac{\quad}{10} + \frac{\quad}{100} + \frac{\quad}{1000}$
- $6'36 = \frac{\quad}{100}$
- $5'149 = \frac{\quad}{10} + \frac{\quad}{1000}$

12. Convierte en fracción los siguientes números decimales:

a) $0'124$ b) $5'23$ c) $49'350$ d) $0'013$

13. Efectúa las operaciones:

a) $1'34 + 51'7$ b) $53'4 - 3'72$ c) $4'83 + 9'77 - 5'9$ d) $1'42 - 9'77$

14. Rellena adecuadamente los lugares vacíos:

- $6'36 + \quad = 10$
- $36'76 - \quad = 10$
- $6'54 - \quad = 1'38$
- $2'7 + \quad = 15'29$

15. Realiza las siguientes operaciones:

- $43'76 \cdot 10 =$

- $43'76 \cdot 1000 =$
- $0'017 \cdot 10 =$
- $3'76 : 10 =$
- $5'67 : 100 =$

16. Halla:

a) $3'6 \cdot 0'2$ b) $10'01 \cdot 3'5$ c) $0'6 \cdot 0'6$ d) $5'6 \cdot 3'2 \cdot \frac{2}{5}$

17. Calcula:

a) $\frac{15'6}{3'23}$ b) $\frac{1'1 \cdot (5'8 + 2'6)}{3'23 - 2'9}$ c) $\frac{2'5 \cdot (3'1 - 2'6)}{2'23 - 2'9}$ d) $\frac{(1'1 + 2'9) \cdot 2'53}{2'2 \cdot 0'1}$

18. Determina el desarrollo decimal de las fracciones siguientes:

a) $\frac{13}{50}$ b) $\frac{110}{9}$ c) $\frac{22}{12}$ d) $\frac{170}{125}$ e) $\frac{53}{22}$

19. Transforma en fracción los números decimales que siguen:

a) $0'\overline{5}$ b) $0'\overline{70}$ c) $21'4\overline{5}$ d) $3'0\overline{02}$ e) $1'\overline{500}$

20. Realiza los siguientes cálculos:

a) $\frac{4}{7} + 1'\overline{46}$ b) $3'\overline{7} \cdot \frac{2}{5}$ c) $\frac{6'\overline{41} - 4}{3 - 2'\overline{3}}$ d) $1'\overline{07} \cdot 2'\overline{5}$

21. Razona si son ciertas o no las siguientes afirmaciones:

a) Toda fracción posee una representación decimal.

b) Si el denominador de una fracción es un número primo entonces su representación decimal es periódica.

c) Si el denominador de una fracción no es un número primo entonces su representación decimal es finita.

d) Dos fracciones equivalentes tienen la misma representación decimal.

22. Hemos visto que los números decimales exactos se pueden transformar en una fracción cuyo denominador es una potencia del número 10. Escribe una fracción cuya representación decimal sea finita y cuyo denominador no sea el número 10.

23. Después de lo que hemos razonado en el problema anterior, elabora una regla que nos sirva para distinguir las fracciones cuya representación decimal es finita.

24. Determina cuáles de las siguientes fracciones tienen representación decimal finita (decídelo sin calcularlas):

a) $\frac{12}{20}$ b) $\frac{5}{7}$ c) $\frac{12}{5}$ d) $\frac{12}{45}$ e) $\frac{9}{48}$

25. Si se reparten equitativamente 270 euros entre 120 personas ¿qué cantidad recibe cada persona?

26. Escribe un número decimal que sumado a $7'63$ origine un número natural.

27. Señala otro número decimal que restado a $20'09$ nos dé un número natural.

28. Halla una fracción tal que al multiplicarla por el número $2'5\overline{7}$ dé como resultado un número

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

natural.

29. Aproxima por truncamiento, de diferentes maneras, los siguientes números decimales:

a) $7'123$ b) $15'001$ c) $7'\overline{7}$ d) $0'21\overline{87}$ e) $3'99\overline{96}$

30. Redondea los siguientes números decimales hasta la cifra que te parezca adecuada o significativa:

a) $7'391$ b) $6'1\overline{90}$ c) $24'\overline{74}$ d) $13'99$ e) $33'\overline{01}$

31. En cada uno de los redondeos que has realizado en el ejercicio anterior, distingue si se trata de una aproximación al alza o a la baja.

32. Manuel compró en la papelería 4 bolígrafos y 3 lapiceros. Si cada bolígrafo costaba 0’78 euros y cada lapicero 0’63 euros ¿cuánto se gastó Manuel?

33. Claudia se ha comprado tres bolígrafos iguales que, en total, le han costado 2’46 euros. También compró un cuaderno que costaba el precio de un bolígrafo multiplicado por cuatro. Calcula el precio del cuaderno y cuánto dinero se ha gastado Claudia.

34. Un depósito contiene 46’22 litros de agua que vamos a traspasar a botellas de litro y medio. Halla cuántas botellas llenaremos e indica la cantidad de agua sobrante.

35. Escribe un número decimal que satisfaga la siguiente condición: sus truncamientos coinciden con sus redondeos.

36. Construye un número decimal que cumpla este requisito: ninguno de sus truncamientos coincide con los redondeos.

37. Muestra un número decimal que verifique la siguiente condición: alguno de sus truncamientos coincide con los redondeos, pero no todos.

38. El examen de Matemáticas constaba de cuatro ejercicios. En ellos Jaime obtuvo las siguientes calificaciones: 5, 7, 8 y 7. Calcula la nota media del examen de Jaime y aproxímala tanto por truncamiento como por redondeo hasta las décimas.

39. Los padres de Alicia están comprando varias macetas y plantas. El importe de todo ello es de 135’80 euros. El comercio realiza un descuento del 2’5 % si se paga en metálico y no con tarjeta de crédito. Si los padres de Alicia optan por el pago en metálico, ¿qué cantidad deberán abonar?

40. Si nos fijamos en los precios del litro de combustible que suelen exhibir las gasolineras en grandes postes o paneles observaremos que figuran hasta la milésima de euro, pese a que las monedas solo “llegan” al céntimo de euro. El importe de cada carga de combustible se realiza, en general, a través de una aproximación. Si, en una estación de servicio concreta, el precio del litro de gasolina es de 1’412 euros y el depósito de nuestro vehículo tiene una capacidad de 53 litros, analiza con cuántos litros de repostaje el importe no requiere ser aproximado.

AUTOEVALUACIÓN

1. Señala la fracción cuyo desarrollo decimal es 8’37

a) $\frac{837}{1000}$ b) $\frac{800}{37}$ c) $\frac{837}{100}$ d) $\frac{83737}{100}$

2. El resultado del producto $15'06 \cdot 1000$ es:

a) 1506 b) 15060 c) 156 d) $1500'6$

3. El valor de la suma $2'5 + 4'83$ es

a) $7'3\overline{3}$ b) $7'\overline{3}$ c) $6'33$ d) $7'33$

4. El periodo y el anteperiodo del número $18'9\overline{03}$ son, respectivamente,

a) 18 y 9 b) 9 y 3 c) 3 y 9 d) 03 y 9 e) 18 y 3

5. La expresión decimal de la fracción 5/9 es:

a) $0'59$ b) $5'9$ c) $0'\overline{5}$ d) $0'\overline{59}$

6. ¿Cuál es la solución correcta para el paso a fracción del número decimal $13'\overline{57}$?

a) $\frac{1357}{9900}$ b) $\frac{1357}{99}$ c) $\frac{1344}{99}$ d) $\frac{1357}{9999}$

7. Finaliza las siguientes frases:

- Las fracciones impropias son aquellas cuya representación decimal presenta una parte entera ……………………………
- Cualquier número decimal, exacto o periódico, puede transformarse en una fracción cuyo denominador es ………………….. , ………………….. o …………………..

8. Clasifica los siguientes números según sean aproximaciones al alza o a la baja del número 375432’45

a) 375432’5 b) 375432 c) 375400 d) 375450 e) 375432’4

9. Si redondeamos el número $2'9\overline{36}$ hasta la centésima nos queda:

a) $2'93$ b) $2'94$ c) $2'96$ d) $2'95$ e) $2'9\overline{4}$

10. Si la nota de un examen se muestra con una cifra decimal, ¿cómo escogerías que se obtuviese?

a) por truncamiento b) por redondeo

Autor: Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1º ESO

CAPÍTULO 7: MAGNITUDES PROPORCIONALES. PORCENTAJES

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Nieves Zuasti

Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos

Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

Índice

Resumen

En este capítulo aprenderemos a utilizar instrumentos que nos permitan establecer comparaciones entre magnitudes.

Estudiaremos los procedimientos de la proporcionalidad directa como la regla de tres y el cálculo de porcentajes, en la resolución de problemas relacionados con la vida cotidiana.

Estudiaremos las diferencias entre proporcionalidad directa e inversa, aplicando métodos de resolución de problemas. Utilizaremos también la regla de tres compuesta.

Aprenderemos a aplicar e interpretar todo lo relacionado con la proporcionalidad y su aplicación en la vida cotidiana.

Si conoces la escala o proporción de esta fotografía puedes saber el tamaño real de estas flores midiendo sobre la foto.

Si conoces la escala o proporción de una fotografía, una fotocopia… puedes saber el tamaño real del objeto midiendo sobre la foto o fotocopia.

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RAZÓN Y PROPORCIÓN

1.1. Razón

Razón, en Matemáticas, es una comparación entre los valores de dos variables.

Se expresa en forma de cociente, de forma similar a una fracción y se lee ***"A es a B"***

Ejemplo:

- Compramos 3 kg de cerezas por 6 €. Podemos establecer la relación entre el precio (6 €) y la cantidad (3 kg)

6 : 3 = 2 € el kilo

$\frac{6}{3}$ es **la razón** entre euros y cerezas.

De esta manera si compramos otras cantidades de cerezas podremos calcular el precio a pagar.

Observa:

Una fracción expresa una parte de un todo de **una única magnitud**, mediante sus términos, numerador (las partes que se toman) y denominador (el total de las partes en las que se ha dividido ese todo)

Sin embargo, los términos de **una razón** se refieren a cantidades de **dos magnitudes**, el primero se llama "antecedente" y el segundo "consecuente"

Ejemplo:

- La razón que relaciona el gasto de 4 personas y los 200 litros de agua que gastan en un día, puede escribirse:

$$\frac{4\ \textit{personas}}{200\ \textit{litros}} \text{ o bien } \frac{200\ \textit{litros}}{4\ \textit{personas}}$$

En cualquiera de los casos estamos expresando que la razón entre litros de agua y personas es:

200 : 4 = 50 litros por persona

Si son 40 personas, la cantidad de agua será 2000 litros, si son dos personas la cantidad de agua será 100 litros, es decir:

$$\frac{4}{200}=\frac{40}{2000}=\frac{2}{100}=\frac{1}{50} \text{ o bien } \frac{200}{4}=\frac{2000}{40}=\frac{100}{2}=\frac{50}{1}$$

Ideas claras

Una **razón** es un cociente. Se expresa en forma de **fracción** pero sus términos no expresan una parte de una misma magnitud sino la **relación** entre dos magnitudes.
Los términos de la razón pueden ser números enteros o decimales.

Actividades propuestas

1. Tres personas gastan 150 litros de agua diariamente.
¿Cuál es la razón entre los litros consumidos y el número de personas? ¿Cuál es la razón entre las personas y los litros consumidos?

2. Seis kilos de naranjas costaron 6,90 €. Expresa la razón entre kilos y euros.

3. La razón entre dos magnitudes es 56. Escribe un ejemplo de los valores que pueden tener estas dos magnitudes.

4. Siete personas gastan 280 litros de agua diariamente.

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

¿Cuál es la razón entre los litros consumidos y el número de personas? ¿Cuál es la razón entre las personas y los litros consumidos?

5. Medio kilo de cerezas costó 1,90 €. Expresa la razón entre kilos y euros.

6. La razón entre dos magnitudes es 36. Escribe un ejemplo de los valores que pueden tener estas dos magnitudes

1.2. Proporción

Una **proporción** es la **igualdad** entre dos razones.

Los términos primero y cuarto son los **extremos** y el segundo y tercero son los **medios.**

$$\frac{extremo}{medio} = \frac{medio}{extremo}$$

Se llama "***razón de proporcionalidad***" al cociente entre dos variables. Y su valor constante nos permite obtener razones semejantes.

Cuando manejamos una serie de datos de dos pares de magnitudes que presentan una misma razón, se pueden ordenar en un cuadro de proporcionalidad.

Ejemplo:

- En el cuadro de abajo se observa que cada árbol da $\frac{200}{4}$ = 50 kg de fruta. Es la **razón de proporcionalidad.**

  Con ese dato podemos completar el cuadro para los siguientes casos.

kg de fruta	**200**	400	100	50	500	150	3000	1000
nº de árboles	**4**	8	2	1	10	3	60	20

Propiedad fundamental de las proporciones:

En toda proporción, el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Ejemplo:

- $\frac{45}{27} = \frac{30}{18} \Rightarrow 45 \cdot 18 = 30 \cdot 27$

Ideas claras

Observa que la razón de proporcionalidad nos sirve para establecer una relación entre las dos variables para cualquiera de los valores que puedan adoptar

Actividades propuestas

7. Completa las siguientes proporciones:

a) $\frac{18}{12} = \frac{30}{x}$ **b)** $\frac{0,4}{x} = \frac{6}{9}$ **c)** $\frac{x}{7,5} = \frac{3,6}{2,4}$ **d)** $\frac{0,05}{10} = \frac{x}{300}$

e) $\frac{5}{22} = \frac{45}{x}$ f) $\frac{0,3}{x} = \frac{7}{14}$ g) $\frac{x}{9,5} = \frac{4,7}{1,9}$ h) $\frac{0,05}{100} = \frac{x}{400}$

8. Ordena estos datos para componer una proporción:

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

a) 12, 3, 40, 10   b) 24, 40, 50, 30   c) 0,36; 0,06; 0,3; 1,8

9. Copia en tu cuaderno y completa la tabla sabiendo que la razón de proporcionalidad es 4,5:

0,5	**7**	**3**		**20**			**3,6**
		13,5	**36**		**45**	**18**	

2. MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

2.1. Proporcionalidad directa

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda multiplicada o dividida por el mismo número.

Ejemplo:

- El número de personas que vienen a comer y la cantidad de comida que necesito. Por ejemplo si el número de personas es el triple habrá que preparar triple cantidad de comida.

Sin embargo, hay relaciones entre magnitudes que no son de proporcionalidad porque cuando una se multiplica o se divide por un número, la otra no queda multiplicada o dividida de la misma forma.

Ejemplo:

- El peso y la edad de una persona no son magnitudes proporcionales: El doble de la edad no significa el doble de peso

Ideas claras

Cuando dos magnitudes son directamente proporcionales, el doble, triple, … de la primera supone el doble, triple ... de la segunda

Hay magnitudes que no se relacionan proporcionalmente.

Actividades propuestas

10. Señala de estos pares de magnitudes, las que son directamente proporcionales:

- El tamaño de un recipiente y el número de litros que puede contener
- La edad de una persona y su altura
- El número de pisos que sube un ascensor y las personas que caben en él
- Los kilos de pienso y el número de animales que podemos alimentar
- Las entradas vendidas para un concierto y el dinero recaudado
- El número de calzado y la edad de la persona

11. Calcula los términos que faltan para completar las proporciones:

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

a) $\frac{18}{24}=\frac{30}{x}$ b) $\frac{25}{100}=\frac{40}{x}$ c) $\frac{3{,}6}{21{,}6}=\frac{x}{3}$ d) $\frac{25}{50}=\frac{30}{x}$ e) $\frac{300}{100}=\frac{7}{x}$ f) $\frac{7{,}5}{56{,}9}=\frac{x}{2}$

12. Ordena estos valores de manera que formen una proporción directa:

a) 3,9 0,3 1,3 0,1 b) 5, 12, 6,10 c) 0,18 4 0,4 1.8.

¿Hay más de una solución?

2.2. Regla de tres directa

Para resolver problemas de proporcionalidad directa, podemos utilizar el **método de reducción a la unidad.**

Ejemplo:

- Cinco billetes de avión costaron 690 €. ¿Cuánto pagaremos por 18 billetes para el mismo recorrido?

Primero calculamos el precio de un billete, 690 : 5 = 138 €.

Después calculamos el coste de los 18 billetes: 138 · 18 = 2484 €

La **regla de tres** es otro procedimiento para calcular el cuarto término de una proporción

Ejemplo:

- Con dos kilos de pienso mis gatos comen durante 6 días. ¿Cuántos kilos necesitaré para darles de comer 15 días?

Formamos la proporción ordenando los datos: $\frac{2\,kg}{x\,kg}=\frac{6\,días}{15\,días} \Rightarrow x=\frac{2\cdot 15}{6}=5\,kg$

Otra forma habitual de plantear la regla de tres es situando los datos de esta forma:

2 kg ———— 6días

x kg ———— 15 días

$x=\frac{2\cdot 15}{6}=5\,kg$

Ideas claras

En la **regla de tres directa** ordenamos los datos de forma que el valor desconocido se obtiene multiplicando en cruz y dividiendo por el tercer término.

Reducir a la unidad significa calcular el valor de uno para poder calcular cualquier otra cantidad.

Actividades propuestas

13. Un coche gasta 7 litros de gasolina cada 100 km, ¿cuántos litros gastará en un viaje de 825 km?

14. En una rifa se han vendido 320 papeletas y se han recaudado 640 euros. ¿A cuánto se vendía cada papeleta? ¿Cuánto habrían recaudado si hubieran vendido 1000 papeletas?

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

15. Una paella para 6 personas necesita 750 g de arroz, ¿cuántas personas pueden comer paella si utilizamos 9 kg de arroz?

16. Tres camisetas nos costaron 24,90 €, ¿cuánto pagaremos por 11 camisetas iguales?

17. El coche de Juan gasta 5,5 litros de gasolina cada 100 km, ¿cuántos litros gastará en un viaje de 673 km?

18. Una fabada para 6 personas necesitas 750 g de judías, ¿cuántas personas pueden comer fabada si utilizamos 6 kg de judías?

2.3. Porcentajes

El porcentaje o **tanto por ciento** es la proporción directa más utilizada en nuestra vida cotidiana.

En los comercios, informaciones periodísticas, o en los análisis de resultados de cualquier actividad aparecen porcentajes.

Un porcentaje es una razón con denominador 100.

Su símbolo es **%**.

Su aplicación se realiza mediante un sencillo procedimiento:

"Para calcular el % de una cantidad se multiplica por el tanto y se divide entre 100"

Ejemplo:

- Calcula el 23 % de 800 El 23 % de 800 = $\frac{23 \cdot 800}{100} = 184$

Algunos porcentajes se pueden calcular mentalmente al tratarse de un cálculo sencillo:

- El 50 % equivale a la mitad de la cantidad
- El 25 % es la cuarta parte de la cantidad
- El 75 % son las tres cuartas partes de la cantidad
- El 10 % es la décima parte de la cantidad
- El 200 % es el doble de la cantidad

¡¡GRANDES REBAJAS!!

40 % DE DESCUENTO

EN TODOS LOS ARTÍCULOS

Ejemplo:

- El 25 % de 600 es la cuarta parte de 600, por tanto es 600 : 4 = 150

Ideas claras

Si cualquier cantidad la divides en 100 partes, el 22 % son veintidós partes de esas cien.
El total de una cantidad se expresa como el 100 %

Actividades propuestas

19. Calcula mentalmente:

a) El 50 % de 190 b) el 1 % 360 c) el 10 % de 200 d) el 300 % de 7

20. Completa la tabla:

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Cantidad inicial	%	Resultado
280	16	
720		108
60	140	
	60	294

21. En un hotel están alojadas 320 personas. De ellas, 40 son italianas, 120 francesas, 100 son alemanas y el resto rusas. Calcula el % que representa cada grupo sobre el total.

2.4. Descuento porcentual

En muchos comercios aparecen los precios antes de la rebaja y los precios rebajados. Con esos dos datos podemos calcular el % de descuento.

Ejemplo:

- Una camisa costaba 34 € y en temporada de rebajas se vende a 24 €, ¿qué % de descuento se ha aplicado sobre el precio anterior?

Calculamos el importe de la rebaja 34 – 24 = 10 €.

Establecemos la proporción: $\frac{34}{10} = \frac{100}{x}$, $x = \frac{10 \cdot 100}{34} = 29{,}41\ \%$

Ejemplo:

- Al comprar un ordenador me ofrecen un 12 % de descuento por pagarlo al contado. He pagado 528 €. ¿Cuánto valía el ordenador sin descuento?

El precio inicial equivale al 100 %. Al aplicar el descuento, sólo pagaremos 100 – 12 = 88 %.

Por tanto, debemos calcular el 100 %: $\frac{528 \cdot 100}{88} = 600\ €$

Ideas claras

El **descuento** es la diferencia entre la cantidad inicial y la cantidad final. Con estos datos podremos calcular el % de descuento aplicado.

Al descontarnos un *x* % de una cantidad, sólo pagaremos el (100 – *x*) %.

Actividades propuestas

22. En una tienda ofrecen un 15 % de descuento al comprar una lavadora que cuesta 420 €. ¿Cuánto supone el descuento? ¿Cuál es el precio final de la lavadora?

23. ¿Cuál de estas dos oferta ofrece un mayor % de descuento:

Antes 44,99 € Ahora 31,99 €

Antes 11,99 Ahora

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

24. Completa:

a) De una factura de 540 € he pagado 459 €. Me han aplicado un ……… % de descuento

b) Me han descontado el 16 % de una factura de ……………. € y he pagado 546 €.

c) Por pagar al contado un mueble me han descontado el 12 % y me he ahorrado 90 €. ¿Cuál era el precio del mueble sin descuento?

2.5. Incremento porcentual

En los **incrementos porcentuales**, la cantidad inicial es menor que la final ya que el tanto por ciento aplicado se añade a la cantidad inicial.

Ejemplo:

- Por no pagar una multa de 150 € me han aplicado un 12 % de recargo.

Puedo calcular el 12 % de 150 y sumarlo a 150: $\frac{12 \cdot 150}{100} = 18$ €.

En total pagaré 150 + 18 = 168 €.

Ejemplo:

- Otra forma de aplicar el incremento porcentual puede ser calcular el % final a pagar:

En el caso anterior: 100 + 12 = 112 %

Calculamos el 112 % de 150 €: $\frac{112 \cdot 150}{100} = 168$ €.

Ejemplo:

- En un negocio he obtenido un 36 % de ganancias sobre el capital que invertí. Ahora mi capital asciende a 21760 €. ¿Cuánto dinero tenía al principio?

El incremento porcentual del 36 % indica que los 21760 € son el 136 % del capital inicial.

Debemos calcular el 100 %: $\frac{21760 \cdot 100}{136} = 16000$ €.

2.6. Impuesto sobre el valor añadido IVA

Los artículos de consumo y las actividades económicas llevan asociadas un impuesto IVA que supone un incremento sobre su precio de coste. En España el IVA general que se aplica es el 21 %.

Es importante que, en la publicidad, observemos si el precio que se indica de un artículo o servicio es con IVA incluido.

Ideas claras

En los **incrementos** porcentuales, la cantidad inicial aumenta porque se le aplica un tanto por ciento mayor que el 100 %.

El **IVA** es un impuesto que supone un incremento sobre el precio inicial

Actividades propuestas

25. Calcula el precio final después de aplicar el 68 % de incremento porcentual sobre 900 €.

26. Una persona invierte 3570 € en acciones, y al cabo de un año su inversión se ha convertido en 3659,25 €. Calcula el aumento porcentual aplicado a su dinero.

27. El precio de venta de los artículos de una tienda es el 135 % del precio al que los compró el comerciante. ¿A qué precio compró el comerciante un artículo que está a la venta por 54 €?

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

28. En Estados Unidos existe la norma de dejar un mínimo del 10 % de propina en restaurantes o taxis sobre el importe de la factura. Calcula en esta tabla lo que han debido pagar estos clientes que han quedado muy satisfechos y añaden un 15 % de propina:

Importe factura	34 $	105 $	90,4 $	100,20 $	12 $
Precio final					

29. El precio de un televisor es 650€ + 21% IVA. Lo pagaremos en seis mese sin recargo. Calcula la cuota mensual.

3. ESCALAS: PLANOS Y MAPAS

Los dibujos, fotografías, mapas o maquetas representan objetos, personas, edificios, superficies, distancias...

Para que la representación sea perfecta, deben guardar en todos sus elementos una misma razón de proporcionalidad que denominamos **"escala"**

La **escala** es una razón de proporcionalidad entre la medida representada y la medida real, expresadas en una misma unidad de medida

Ejemplo:

En un mapa aparece señalada la siguiente escala **1 : 20 000** y se interpreta que 1 cm del mapa representa 20 000 cm en la realidad.

Ejemplo:

Hemos fotografiado la catedral de Santiago de Compostela. El tamaño de la foto nos da una escala:

1 : 600.

Las dos torres de la fachada tienen en la foto una altura de 3,5 cm. La altura real de las torres será:

3,5 · 600 = 2100 cm = 21 m.

CATEDRAL DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Las escalas nos permiten observar que la imagen real y la del dibujo son **semejantes.**

Ideas claras

La escala utiliza el cm como unidad de referencia y se expresa en comparación a la unidad.
Por ejemplo: 1 : 70000

Dos figuras son semejantes cuando tienen la misma forma y sus lados son proporcionales.

Actividades propuestas

30. Escribe cuatro ejemplos en los que se utilicen escalas.

31. La distancia entre Madrid y Burgos es 243 km. En el mapa, la distancia entre ambas ciudades es 8,1 cm, ¿a qué escala está dibujado el mapa?

32. Completa la siguiente tabla teniendo en cuenta que la escala aplicada es 1 : 5000

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Dibujo	Medida real
18 cm	
	3 km
0,008 m	

33. Calcula la escala correspondiente en cada ejemplo de la tabla:

Dibujo	Medida real	Escala
2,5 cm	800 m	
4 cm	6,4 hm	
5 cm	9 km	

4. MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES

4.1. Proporcionalidad inversa

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda dividida o multiplicada por el mismo número.

Ejemplo:

- Un coche va a 90 km/h y tarda 3 horas en llegar a su destino. Si una moto va a 45 km/h, tardará 6 horas en recorrer la misma distancia.

Se comprueba que si la velocidad es el doble, el tiempo será la mitad, y ambos han recorrido los mismos kilómetros: $90 \cdot 3 = 270$ km $45 \cdot 6 = 270$ km

En la proporcionalidad inversa, **la razón de proporcionalidad** es el producto de ambas magnitudes

Hay muchas situaciones en las que encontramos una relación de proporcionalidad inversa entre dos magnitudes.

Ejemplos:

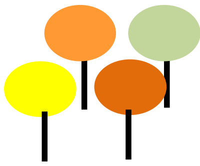
- El número de invitados a un cumpleaños y el trozo de tarta que le toca a cada uno.
- Las personas que colaboran en una mudanza y el tiempo que tardan.

Cuando conocemos la razón entre dos magnitudes inversamente proporcionales, podemos elaborar una tabla para diferentes valores:

Ejemplo:

- Tenemos una bolsa con 60 caramelos. Podemos repartirlos de varias maneras según el número de niños: 60 es la razón de proporcionalidad.

Número de niños	6	12	30	15	20
Número de caramelos para cada uno	10	5	2	4	3



Observa que cuando el número de niños aumenta, los caramelos que recibe cada uno disminuyen.

Ideas claras

Para que dos magnitudes sean inversamente proporcionales, cuando una crece la otra decrece en la misma proporción.

La razón de proporcionalidad inversa se calcula multiplicando las dos magnitudes.

Actividades propuestas

34. Cinco trabajadores terminan su tarea en 8 días. El número de trabajadores y el número de días que tardan, ¿son magnitudes directa o inversamente proporcionales? ¿Cuál es la razón de proporcionalidad?

35. Completa la tabla de proporcionalidad inversa y señala el coeficiente de proporcionalidad.

Velocidad en km/h	100	120			75
Tiempo en horas	6		20	4	

3.2. Regla de tres inversa

Una proporción entre dos pares de magnitudes inversamente proporcionales en la que se desconoce uno de sus términos se puede resolver utilizando la **regla de tres inversa**.

Ejemplo:

- Seis personas realizan un trabajo en 12 días, ¿cuánto tardarían en hacer el mismo trabajo 8 personas?

El coeficiente de proporcionalidad inversa es el mismo para las dos situaciones: 12 · 6 = 72

Planteamos al regla de tres:

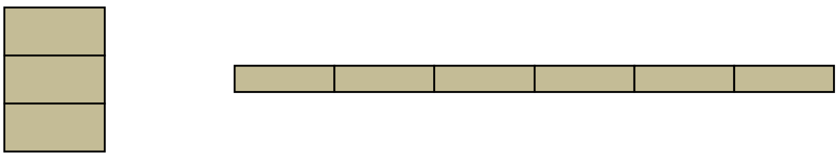
6 personas tardan 12 días $\quad 12 \cdot 6 = 8 \cdot x \quad x = \frac{6 \cdot 12}{8} = 9$ días

8 personas tardan X días

En geometría encontramos ejemplos de proporcionalidad inversa

Ejemplo:

- Estas dos superficies tienen distinta forma pero la misma área:



Observa que la primera tiene tres unidades de altura y una de base y la segunda, una altura de media unidad y seis unidades de base.

$$3 \cdot 1 = 0{,}5 \cdot 6 = 3$$

Ejemplo:

- Observa estos vasos. Su capacidad depende tanto de su altura como de su base. Si dos vasos distintos tienen la misma capacidad pero distinta forma a mayor base menor altura y viceversa.

Ideas claras

Para resolver la regla de tres inversa se tiene en cuenta que el producto de cada par de magnitudes ha de ser el mismo, su coeficiente de proporcionalidad inversa.

Actividades propuestas

36. Hemos cortado una pieza de tela en 24 paños de 0,80 cm de largo cada uno. ¿Cuántos paños de 1,20 m de largo podremos cortar?

37. Cinco amigos quieren hacer un regalo de cumpleaños. Deben poner cada uno 5,40 €. Otros cuatro amigos se unen para contribuir al regalo, ¿cuántos euros debe poner ahora cada uno?

Para pintar una casa, el pintor dedica 8 horas diarias durante 6 días. Si trabajara 10 días, ¿cuántas horas diarias necesitaría?

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

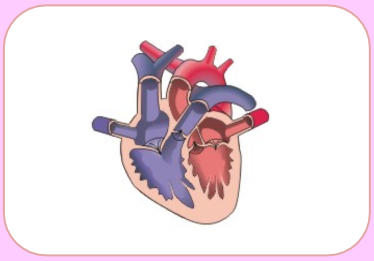
CURIOSIDADES. REVISTA

Si el planeta Tierra fuera
una canica de 1 cm de diámetro,
Júpiter sería una bola de
11,20 cm de diámetro,
ya que sus diámetros
son 12.756 km y 142.984 km

PROPORCIONALMENTE UNA HORMIGA COMÚN ES MÁS FUERTE QUE UN ELEFANTE, porque es capaz de levantar, gracias a sus músculos, 50 veces su propio peso y 30 veces el volumen de su cuerpo. Algunos tipos más de 80 veces. Es el animal con el cerebro más grande respecto a su tamaño

El perezoso de tres dedos se mueve a una velocidad de 2,2 metros por hora.
El caracol tarda una hora en caminar medio metro.

El corazón impulsa 80 ml de sangre por latido, alrededor de 5 litros de sangre por minuto. Late entre 60 y 80 veces por minuto, lo que supone más de 30 millones de veces al año y 2000 millones de veces en toda la vida.



Si por alguna razón el sol dejara de emitir luz, en la tierra tardaríamos 8 minutos en darnos cuenta ya que estamos a 149.600.000 km de distancia

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

La velocidad como objetivo

En el mundo moderno, la gestión del tiempo ha primado frente a otros objetivos.

Esto se refleja en la incorporación masiva de la alta velocidad en nuestros trenes. El AVE puede alcanzar los 300 km por hora.

Un ascensor de alta velocidad es capaz de subir, sin realizar paradas, hasta la planta 80 en 48 segundos

EL PESO DE LAS HORMIGAS

Estudios recientes afirman que el 10 % de la biomasa animal está formada por hormigas. La biomasa, el peso total de todos los individuos del planeta. Se estima que hay unos 7000 billones de hormigas, es decir un millón por cada humano.

Teniendo en cuenta que el peso medio de una hormiga es de 0,000065 kg y que el peso de las personas vivas se estima en 455 gigatoneladas, se puede concluir que las hormigas llegan a igualar el peso de los humanos a pesar de su pequeño tamaño.

Suponiendo un **peso medio unitario de 65 kilos, todos los humanos vivos juntos pesamos 455 gigatoneladas**, un peso parecido, según Wilson, al de todas las hormigas pero con un pequeño matiz: **ellas son 7.000 billones, a razón de un millón por cada uno de nosotros**. Y no pienses que son todas iguales, pues la mayor de todas, la hormiga gigante (*formicium giganteum*) podría albergar en su cabeza una colonia entera de la más pequeña (*pheidole*).

Si nos ceñimos a la biomasa, es decir, al peso total de todos los individuos, **las hormigas ganan de calle la competición por ser el animal más abundante del planeta**, igualando el peso de todos los hombres (y mujeres) juntos. Lo cual tiene mucho mérito, teniendo en cuenta que la hormiga media pesa una millonésima parte del humano medio, es decir 0,000065 kilos.

Según los cálculos de Bert Hölldobler y Edward Osborne Wilson en su maravilloso compendio **"Las hormigas"** (1990), **las hormigas y sus lejanas parientes las termitas acapararían "un tercio de toda la biomasa animal terrestre".** Un estudio realizado en Finlandia concluyó que **el 10 % de la biomasa animal estaba formada por hormigas**, una cifra que se elevaba hasta el **15 % en el caso de la selva de Brasil**. En el Amazonas, nos cuenta Wilson, "las hormigas tienen más de cuatro veces la biomasas de todos los vertebrados terrestres juntos: aves reptiles, anfibios y mamíferos".

TORTILLA RECORD

16000 huevos, 1600 kg de patatas, 26 kg de cebolla, 150 litros de aceite y 15 kg de sal han permitido conseguir el record de la tortilla de patatas más grande cocinada. Esta súper tortilla midió 5,20 metros de diámetro, 7 cm de grosor y una tonelada y media de peso

Este record se consiguió el 2 de agosto en Vitoria-Gasteiz.

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

La divina proporción

La proporción armónica

La proporción áurea

¡Imaginas que existe una proporción con esos nombres! Además, ¡Está en **TODAS** partes!

¿Qué es?

Como su nombre indica es una proporción. Una longitud se divide en dos, $a + b$, de forma que se verifique:

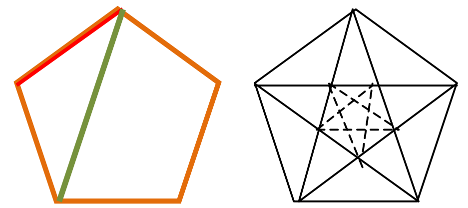
$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Ese cociente da un número, un valor, al que se llama **número de oro** y es aproximadamente igual a 1,618…

Teano fue una matemática griega que vivió en el siglo sexto antes de nuestra era. Se casó con Pitágoras y trabajó en su escuela difundiendo los conocimientos científicos y matemáticos por todos los pueblos del Mediterráneo, entre ellos **la proporción áurea**. Se sabe que Teano escribió muchas obras y tratados sobre todo tipo de temas.

Se le atribuyen escritos sobre poliedros regulares, sobre temas filosóficos y sobre las propiedades del pentágono regular, símbolo de la Escuela Pitagórica, y su relación con la divina proporción.

Si dibujamos un pentágono regular, y trazamos sus diagonales. Se forma en su interior otro pentágono regular más pequeño, y el proceso puede realizarse de forma sucesiva



La razón entre la diagonal del pentágono y uno de sus lados es el número de oro:

$$\frac{\text{Segmento verde}}{\text{Segmento rojo}} = \frac{\text{Diagonal}}{\text{Lado}} = \mathbf{1{,}618\ldots}$$

Se llama "La Divina Proporción" porque los objetos con esta proporción son armoniosos a la vista.

Muchas flores son pentagonales

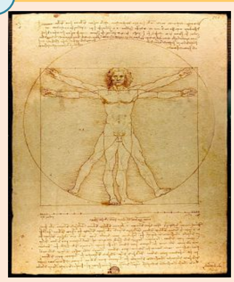
La relación entre la distancia entre las espiras del interior de algunos caracoles es la proporción áurea

Si quieres saber si tú eres armónica debes medir tu altura y también la distancia desde tu ombligo al suelo. Si esa razón es próxima al número de oro, ¡lo eres!

La relación entre las falanges de los dedos es la divina proporción

En el Hombre de Vitruvio, Leonardo da Vinci estudió la Divina Proporción.

Busca en Internet para saber más



Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

Concepto	Definición	*Ejemplo*
Razón	Comparación entre los valores de dos variables	Precio y cantidad
Proporción	Igualdad entre dos razones	A es a B como C es a D
Magnitudes directamente proporcionales	Si se multiplica o divide una de las magnitudes por un número, la otra queda multiplicada o dividida por el mismo número	24 es a 10 como 240 es a 100
Razón de Proporcionalidad directa	Cociente entre los valores de dos magnitudes	$\frac{300}{25}$
Porcentajes	Razón con denominador 100	$\frac{23}{100}$
Escalas y planos	Comparación entre tamaño real y tamaño representado	1 : 20000
Magnitudes inversamente proporcionales	Si se multiplica o divide una de las magnitudes por un número, la otra queda dividida o multiplicada por el mismo número	A por B es igual a C por D
Razón de proporcionalidad inversa	Producto de ambas magnitudes	45 · 70

PORCENTAJE CON CALCULADORA

En la calculadora puedes encontrar una función que te permite calcular el % de manera directa.

Para ello debes seguir los siguientes pasos:

1. **Escribe la cantidad**
2. **Multiplica por el tanto**
3. **Pulsa SHIFT y %. El resultado que aparece en la pantalla es la solución.**

Ejemplo:

650	*****	**16**	**SHIF**	**%**	**=**	**104**

Una forma fácil de añadir o restar el importe del tanto por ciento a la cantidad final puede hacerse de la siguiente forma:

- **Sigue los pasos 1, 2 y 3 anteriores**
- **Pulsa la tecla + si lo que quieres es un aumento porcentual**
- **Pulsa la tecla – para una disminución porcentual**

Ejemplo:

1370	*	12	SHIFT	%	164.4	+	1534.4

1370	*	12	SHIFT	%	164.4	–	1205.6

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Expresa la razón entre las edades de Jorge, 26 años, y Andrés, 32 años

2. Expresa la razón entre las 20 personas que acuden a comer un restaurante y los 440 € que se recaudan.

3. ¿Qué es una razón entre dos números? ¿Cómo se llaman sus términos? Escribe varios ejemplos.

4. ¿Cómo se llaman los términos de una proporción? Escribe proporciones que se pueden formar con estos números y comprueba la propiedad fundamental:

a) 6, 24, 12, 3 b) 35 0,5 1,25 7

5. Con 8 kg de harina hemos confeccionado 15 pasteles. ¿Cuántos pasteles podemos elaborar con 30 kg de harina?

6. En un examen de 30 preguntas un estudiante ha contestado 21 bien y 9 mal. Expresa las razones entre estos resultados y el total de las preguntas.

7. Completa la tabla y calcula el coeficiente de proporcionalidad:

Litros de gasolina	8	25		4	
Euros	11,36		56,8		25,56

8. Copia en tu cuaderno y relaciona las magnitudes de ambas columnas para que cada ejemplo responda a pares de magnitudes directamente proporcionales:

Número de kilos de patatas y	Litros de gasolina necesarios,
Cantidad de agua necesaria y	Personas que viven en un edificio
Dinero disponible y	Vestidos confeccionados
Kilómetros a recorrer y	Número de personas que vienen a comer
Metros de tela y	Prendas que podemos comprar

9. Con estas seis magnitudes debes elaborar tres razones:

Número de personas, horas, cantidad de leche, litros de refresco, distancia entre dos ciudades, número de vacas

10. Calcula el cuarto término de las siguientes proporciones:

a) $\frac{36}{20} = \frac{45}{x}$ b) $\frac{12,6}{x} = \frac{0,2}{0.5}$ c) $\frac{1}{0,25} = \frac{x}{3}$ d) $\frac{x}{2} = \frac{35}{5}$

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

11. Esta receta es para 4 personas. Elabora dos recetas similares para 6 personas y para 15 personas

ARROZ CON VERDURAS

380 g de arroz
1 kg de tomate triturado
800 g de calabacín
3 dientes de ajo
120 cl de aceite
1 kg champiñón
1/2 kg pimientos rojos y verdes

12. Completa la tabla de proporcionalidad directa:

Distancia	100	240		360	
Litros	6,5		52		2,6

13. Una lata de mejillones de 200 g vale 2,40 €. Otra lata de 700 g se vende a 7,20 €, ¿cuál de las dos es proporcionalmente más barata?

14. ¿Cuánto dinero nos costarán 6 ordenadores sabiendo que 56 ordenadores han costado 28 000 €?

15. Cálculo Mental

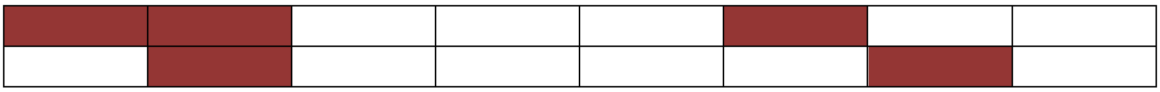
3 % de 40	20 % de 800	12 % de 70	3 % de 120
25 % de 300	15 % de 60	150 % de 30	200 % de 2

16. Completa mentalmente:

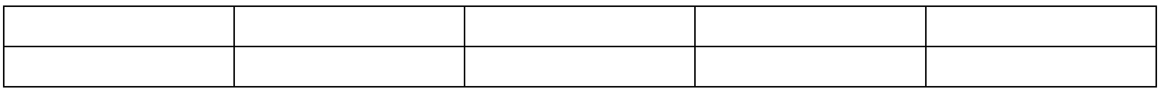
a) El ………….% de 30 es 3	b) El ………….% de 500 es 250	c) El ……….% de 400 es 4
d) El 20% de ………… es 8	e) El 75% de ………………. es 30	f) El 150% de …….. es 60

17. Calcula el 300 % del 10 % de 480.

18. ¿Qué porcentaje ocupan los cuadros negros?



19. Copia esta tabla en tu cuaderno y colorea un porcentaje que represente el 40 %.



20. Rosana gasta el 15 % de su dinero y Marta gasta el 50 % del suyo. Sin embargo Marta ha gastado menos dinero que Rosana, ¿cómo es posible?

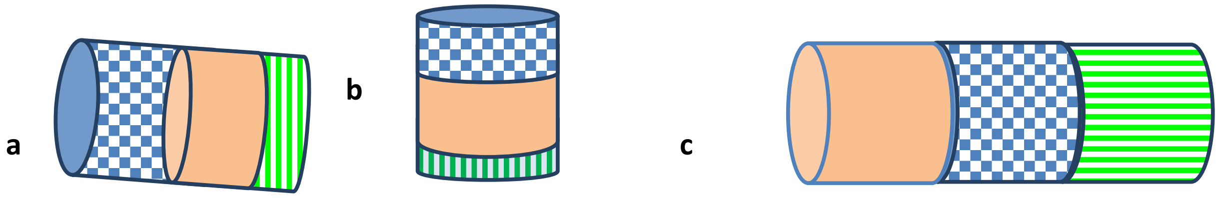
21. Completa la tabla:

%	**Cantidad**	**Resultado**
45	1024	

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

	23	115
18		162

22. ¿Cuál de estos dibujos contiene mayor proporción de color naranja en relación a su tamaño? ¿Y de rayas? ¿y de cuadros?



Haz una estimación en tantos por ciento para cada cilindro y cada parte.

23. En la oficina de mi madre, el 18 % de sus compañeros juegan a la BONOLOTO, el 56 % juegan al EUROMILLÓN, el 20 % juegan a la PRIMITIVA, y los 3 trabajadores restantes no juegan a nada. ¿Cuántas personas trabajan en esa oficina?

24. Un adulto respira unos 5 litros de aire por minuto. ¿Cuántos litros respira en una semana?

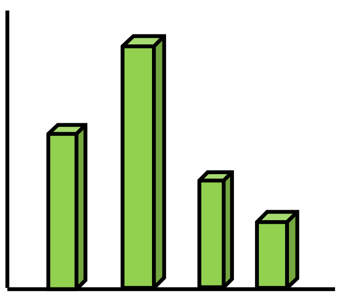
25. En 2 km ascendemos 40 m, respecto a la horizontal, ¿qué % hemos ascendido?

26. El guepardo es el animal terrestre más rápido, ya que es capaz de alcanzar una velocidad máxima de 130 km hora. ¿Cuántas horas tardaría un guepardo, sin parar, en viajar desde Valencia hasta Barcelona? ¿Y de Palencia hasta Cádiz?

27. Haz un informe sobre el animal que más corre, el que más vive, el que más come, el que más tiempo puede pasar sin comer o sin beber.

28. Si el dólar se cotiza a 1,12 €, ¿Cuántos dólares obtendremos al cambiar 360 €?

29. En estadística se utilizan los gráficos para expresar la evolución de los valores de una variable respecto a otra.



Si asignamos a la barra más alta el valor 100, calcula de forma aproximada la altura de las demás.

Si la barra más pequeña pesa 0,5 kg. ¿Cuánto pesarán cada una de las otras barras?

30. En un plano de carreteras la distancia entre dos ciudades es de 6 cm. Si la escala es 1 : 40000, calcula la distancia real.

31. En el antiguo Egipto, para definir la proporción de las diferentes partes del cuerpo, se usaba la longitud de los dedos y para el canon, los puños. Una cabeza debía medir dos puños. Los griegos utilizaban, al igual que los egipcios, la proporción para valorar los distintos cánones de belleza. Un cuerpo bien proporcionado debía tener una longitud proporcional a la cabeza. Alguno de los más conocidos corresponden a famosos escultores:

	Canon de Praxíteles	Canon de Polikletos	Canon egipcio
Medida del cuerpo	Ocho cabezas	Siete cabezas	16 puños

Con estos datos puedes investigar sobre qué proporción es la más frecuente entre tus amigos

32. Hay otras maneras de estudiar la proporción en la figura humana. La proporción áurea, conocida por los griegos y desarrollada de manera brillante por Leonardo de Vinci nos ha dejado imágenes como el famoso "Hombre de Vitrubio". Busca información sobre esta figura.

33. ¿En cuál de estas recetas es mayor la proporción entre la harina y el azúcar?

MASA DE ROSQUILLAS	MASA DE ROSQUILLAS
2kg de harina 6 huevos 1kg y medio de azúcar	Medio kilo de harina 4 huevos 400 g de azúcar

34. Tenemos el pienso suficiente para dar de comer a las 45 vacas durante 30 días. Si vendemos 9 vacas, con la misma cantidad de pienso, ¿cuántos días podremos dar de comer a las restantes?

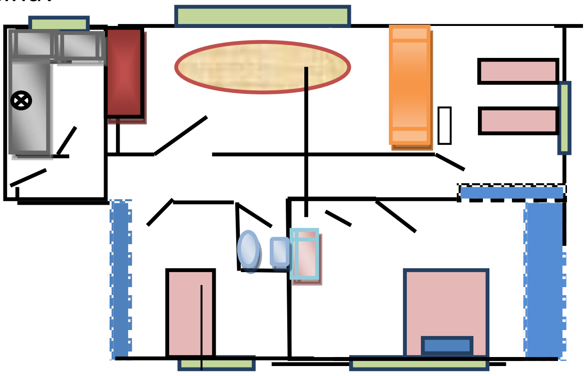
35. Calcula la razón de proporcionalidad y completa la tabla de proporcionalidad inversa:

Velocidad en km/h	90	120		75	
Tiempo en horas	4,5		10		3

36. Cada gominola cuesta 5 centimos y pesa 4 g. Compramos una bolsa de 100 g de gominolas. ¿Cuántas gominolas contiene la bolsa? ¿Cuánto nos costarán?

37. Si abrimos dos grifos el depósito se llena en 4 horas y media. ¿Cuánto tiempo tardarán el llenar el mismo depósito 5 grifos con el mismo caudal?

38. Observa el plano de esta vivienda dibujado a una escala 1 : 400. ¿Cuáles son las dimensiones reales del salón? ¿Y de la cocina?



Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

39. Expresa en euros el cambio de 1400 $, si cada euro cotiza a 1,26 $

40. El agua al congelarse aumenta un 10 % su volumen. ¿Cuántos litros de agua necesitamos para conseguir una barra de hielo de 75 dm^3?

41. Un pantalón costaba 36 € pero en las rebajas se vende a 28 €. ¿Qué % han rebajado?

42. El precio de una televisión es 847 €, IVA incluido. Calcula el precio sin IVA.

43. Señala en cada par de magnitudes si son directa o inversamente proporcionales:

a) La cantidad de árboles talados y los kilos de leña almacenados

b) La velocidad del tren y el tiempo que tarda en llegar a su destino

c) El tamaño de la bolsa y la cantidad de bolsas necesarias para guardar la compra

d) La distancia que recorre un automóvil y la gasolina que gasta

e) Las personas que asisten al cumpleaños y el tamaño del trozo de tarta que toca a cada uno

f) El radio de una circunferencia y su longitud

g) Las bombillas que iluminan una sala y el gasto en electricidad.

44. Para vaciar un depósito hemos empleado 17 cubos de 22 litros cada uno. Si la siguiente vez los cubos tienen una capacidad de 34 litros ¿cuántos necesitaremos?

45. En esta etiqueta se ve el precio inicial y el precio rebajado. Calcula el % de rebaja que se ha aplicado

Antes	**Después**
23,95	**15,95**

46. El 1 de enero de 2010 el bono de 10 viajes del metro de Madrid pasó a costar 9 €, lo que suponía un aumento de un 21,6 % sobre su anterior precio. En 2013, el bono de 10 viajes cuesta 12,20 €. ¿Qué % ha aumentado el precio del bono entre 2010 y 2013? ¿Cuánto costaba el bono antes de la subida de 2010? ¿Qué % ha aumentado su coste desde antes de la subida de 2010?

47. Un empleado público que gana 1154€ netos al mes sufrirá un recorte de sueldo del 5% a partir del 1 de enero de 2014. ¿Cuánto dinero dejará de ganar al cabo de un trimestre?

48. En las ciudades se han instalado parquímetros, de manera que se cobra el aparcamiento mediante unas tarifas. Hay dos tipos de zonas con distintas tarifas.

A la vista de este cuadro de precios ¿Cuánto cuesta estacionar un coche en zona azul y en zona verde durante 80 minutos? ¿Y durante 45 minutos?

Zona azul	Tarifa		Zona verde	Tarifa
Hasta veinte minutos	0,25 €		Hasta veinte minutos	0,55 €
Media hora	0,45 €		Media hora	1,05 €
Una hora	1,20 €		Una hora	2,25 €
Hora y media	1,90 €		Hora y media (estancia máxima	3,50 €

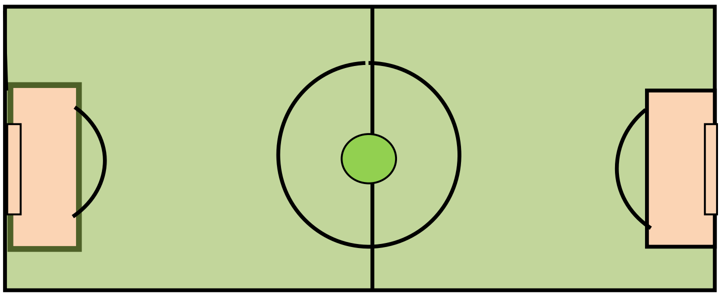
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

			autorizada)	
Dos horas	2,50 €			

49. El precio de un ordenador portátil es 899 € IVA (21%) incluido. Calcula su precio sin IVA.

50. El juego cuatro de neumáticos para un coche se oferta a 324 € + IVA (21%). Calcula el precio de cada rueda.

51. En un dibujo, el campo de fútbol mide 24 cm por 16 cm. El campo mide 90 m de largo ¿Cuánto mide de ancho? ¿A qué escala está dibujado?



52. En un mapa dibujado a escala 1 : 250000, la distancia entre dos puntos es de 0,15 m. Calcula la distancia real en km

53. La base y la altura de un rectángulo miden 14 cm y 32 cm. ¿A qué escala hemos dibujado otro rectángulo semejante al anterior, de 49 cm de base? Calcula su altura.

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN

1. La cantidad de animales de un zoológico y los excrementos diarios que se recogen es una relación

a) Proporcional directa b) proporcional inversa c) no es proporcional

2. Siete cajas de galletas de un kilo y medio cada una nos han costado 12.6 €. Si quiero comprar 22 kg de galletas, me costarán:

a) 22,4 € b) 30.6 € c) 26.4 € d) 24.2 €

3. Al aplicar un 24 % de descuento sobre una factura, hemos tenido que pagar 699,20€. El importe total de la factura sin descuento era:

a) 920€ b) 1220€ c) 880€

4. De Jaén a Cádiz se tardan 4h y 15 minutos por carretera a una media de 86 km/h. Si subimos la velocidad a 100 km/h, ¿cuánto se tardará en hacer el recorrido?

a) 3h 39 minutos b) 3h 6 minutos c) 3h 56 minutos

5. La distancia entre dos ciudades es 108 km. En el mapa se representa con una distancia de 6 cm. La escala del mapa es:

a) 1:180000 b) 1: 18000 c) 1:1600000 d) 1:1800000

6. Una sala de espectáculos tiene capacidad para 280 personas. El precio de cada entrada es 14 €. Hoy se han vendido el 85 % de la sala, y de ellas, 50 con un 15 % de descuento. La recaudación total ha sido:

a) 3227 € b) 2998 € c) 3028 €

7. Los datos que completan esta tabla de proporcionalidad inversa son:

Personas que realizan un trabajo	30		10	9	
Días que tardan en realizarlo	15	6			25

a) 12; 5; 4,5; 50 b) 75; 45; 30; 18 c) 75; 45; 50; 18

8. Cuatro personas han pagado 1540 € por siete noches de hotel. ¿Cuánto pagarán 6 personas si desean pasar 12 noches en el mismo hotel?

a) 3690 € b) 3960 € c) 3820 €

9. Un carpintero tarda 18 días en realizar 3 armarios trabajando 5 horas al día. ¿Cuántos días necesitará para construir 5 armarios, empleando 3 horas al día?

a) 40 días b) 30 días c) 50 días

10. 48 estudiantes necesitan 12450 € para organizar un viaje de estudios de 10 días. ¿Cuántos días durará el viaje si disponen de un 15 % más de dinero y acuden 8 estudiantes menos?

a) 12 días b) 18 días c) 15 días

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Raquel Caro

Revisor: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Índice

Resumen

El Álgebra es una materia nueva que ahora vamos a empezar a estudiar. Hay autores que opinan que el álgebra comienza cuando se utilizan letras en lugar de números, pero, recuerda, los romanos ya utilizaban letras, y eso no era álgebra. En realidad el origen del álgebra está en hacer operaciones con números simbolizados con letras, lo que supone un ahorro de esfuerzo, pues permite hacer de una sola vez lo que de otra manera habría que repetir muchas veces.

En la época de *El Quijote*, en la puerta de las barberías, se leía el siguiente cartel:

"ALGEBRISTA Y SANGRADOR"

¿Y eso, por qué? La palabra "*Álgebra*" es una palabra árabe que utilizó el matemático *Al-Khwarizmi*. Si logras leer ese nombre verás que te suena a otra palabra: "*algoritmo*". Hacia el año 825 escribió un libro titulado:

Al-jabr w'almuqabalah

La palabra árabe *jabr* significa restaurar. El libro trataba de álgebra, de sumas y otras operaciones, pero como los barberos también restauraban huesos, por eso se llamaban algebristas.

En este capítulo aprenderemos a utilizar el lenguaje algebraico,.

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. LENGUAJE ALGEBRAICO

1.1. Letras y números

A nuestro alrededor nos encontramos con multitud de símbolos cuyo significado conocemos, como las señales de tráfico o algunos logotipos.

El **lenguaje algebraico** consigue que podamos expresar mensajes en los que las letras representan variables de valor desconocido. Utiliza letras, números y operaciones para representar una información.

Ejemplo:

- Ya has utilizado el lenguaje algebraico para indicar el área de un cuadrado de lado a: $A = a^2$; el área de un círculo de radio r: $A = \pi r^2$.

Para cada situación podemos utilizar la letra que queramos, aunque, cuando hablamos de algo desconocido, la letra más utilizada es la ***x***.

Ejemplo:

- El doble de la edad de una persona $2x$
- El triple de un número menos 4 $3x - 4$

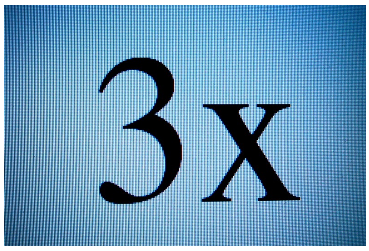
El propio *Al-Khwarizmi* usó originariamente la palabra *"cosa"*, (por ejemplo, en lugar de $2x$ decía "*el doble de una cosa*"), que en árabe suena como *"šay*" y que se tradujo al español como "*xei*". De aquí procede la x actual.

Las expresiones que nos permiten reflejar mediante letras y números una situación se llaman **expresiones algebraicas.**

Actividades resueltas

- Expresa las siguientes frases en lenguaje algebraico:

El triple de un número	$3x$
La suma de dos números consecutivos	$x + (x + 1)$
La edad de una niña hace 2 años	$x - 2$
La suma de dos números	$a + b$



El triple de un número

- Lee las expresiones algebraicas siguientes:

$x - 3x$ Un número menos su triple

$2(x - 4)$ El doble de la diferencia de un número menos 4.

Actividades propuestas

1. Expresa las siguientes frases en lenguaje algebraico:

a) El doble de un número más su triple

b) La edad de una persona dentro de 7 años

c) La quinta parte de un número

d) La diferencia entre dos números

1.2. Coeficiente y parte literal

Una **expresión algebraica** puede estar formada por uno o varios sumandos que se denominan **términos** o **monomios**. Una suma de monomios es un **polinomio**.

En un monomio la **parte literal** son las letras y se llama **coeficiente** al número por el que van multiplicadas.

Ejemplo:

- En la expresión 4*x*, el coeficiente es 4 y la parte literal *x*. En 7*ab* el coeficiente es 7 y la parte literal *ab*.

Cuando la expresión es positiva no suele ir precedida del signo +, aunque siempre aparecerá el signo – en las expresiones negativas.

Ejemplo:

- Señala el coeficiente y la parte literal en la expresión –6*a*. El coeficiente es –6 y la parte literal *a*.

Actividades resueltas

- Señala los coeficientes, las partes literales y el número de monomios de la expresión algebraica:

$$3a - 5b + c + 6$$

Esta expresión algebraica tiene 4 términos o 4 monomios: 3*a*, –5*b*, *c* y 6. Los coeficientes son +3, –5, + 1 y +6 respectivamente. Las partes literales son *a, b* y *c*. El último término no tiene parte literal.

- Señala en el polinomio 8*x* + 5*x* – 2*x* cuáles son los coeficientes. Los coeficientes son 8, 5 y –2.

1.3. Valor numérico de una expresión algebraica

Si a las letras de una expresión algebraica se les da un valor concreto, se puede calcular el **valor numérico** de dicha expresión.

Actividades resueltas

- Calcula el valor numérico de la expresión 3*x* + 2 cuando *x* vale 5.

Hay que sustituir en la expresión, *x* por su valor, 5.
Por tanto: 3 · 5 + 2 = 15 + 2 = 17, que es el valor numérico cuando *x* vale 5.

1.4. Equivalencia y simplificación de expresiones algebraicas

La expresión algebraica 4*x* + 4*x* es equivalente a la expresión 8*x*, que es su expresión más simplificada. Esto significa que puedes agrupar los monomios que tienen la misma parte literal (que se llaman **semejantes**) únicamente sumando o restando sus coeficientes.

Actividades resueltas

- Simplifica la expresión algebraica $11x - 3a + 5a - x$.

Según lo que acabamos de decir, son semejantes $11x$ y $-x$, en cuyo caso hay que hacer 11-1=10, con lo que queda $11x$; y también lo son $-3a$ y $5a$ y hacemos $5 - 3 = 2$ y nos queda $2a$. Por tanto

$$11x - 3a + 5a - x = 1x - 2a$$

Debes también aprender a **quitar paréntesis**. Es algo similar a lo que has hecho ya al operar con números. Si tenemos $-3(2x-1)$, para quitar el paréntesis multiplicamos el número que hay fuera x del paréntesis (atención al signo) por el coeficiente del monomio que hay dentro y después por el número que hay dentro $-3(2x-1)=(-3)2x-(-3)1=-6x+3$.

Actividades resueltas

- Elimina los paréntesis y simplifica agrupando $5x-2(x+1)+3(2x-2a)$.

Hacemos como antes $5x-2(x+1)+3(2x-2a)=5x-2x-2+6x-6a$. Ya hemos quitado los paréntesis y ahora agrupamos

$$5x-2(x+1)+3(2x-2a)=5x-2x-2+6x-6a=9x-6a-2.$$

.Actividades propuestas

2. Señala el coeficiente, la parte literal y el número de términos o monomios de los polinomios siguientes:

a) $2-7x$ b) $a+3b-8c$ c) $4x+5$ d) $7x+9-5y$

3. Calcula el valor numérico de los siguientes polinomios:

a) $2x+3y$ para $x=3$, $y=2$.

b) $6-a$ para $a=-5$.

c) $3a+4b-c$ para $b=-1$, $a=-1$ y $c=+2$.

4. Reduce simplificando las expresiones siguientes:

a) $x+x+x-x+x-x$; b) $2a+3b-a$; c) $11x-3x+5x$;

d) $6a-3a+2x+2a-3x+1$; e) $7x-(x+2)$; f) $3(2x-6)-2(-3x+1)$

g) $2x-3(-2x+1)+2(x-1)$; h) $-(x-1)-2(2-x)$; i) $2(2x+2)-3x$

5. Une cada expresión algebraica de la columna de la izquierda con la que le corresponde reducida en la columna de la derecha:

$x+x+1$
$2(x-1)-3(1-x)$
$x-x+x-x$
$-x+3-(x-6)$
$3x-(4x-3x)$
$3x-2(-x-1)$

$-2x+9$
$5x-5$
$2x$
$5x+2$
$2x+1$
0

6. Saber construir expresiones algebraicas y obtener su valor numérico puede ayudar a realizar algunos cálculos. Veamos si eres capaz. Un granjero tiene gallinas y cabras; semanalmente compra y vende animales de los dos tipos. Si al final de una semana tiene "x" gallinas e "y" cabras, puedes escribir "fórmulas" (expresiones algebraicas) para:

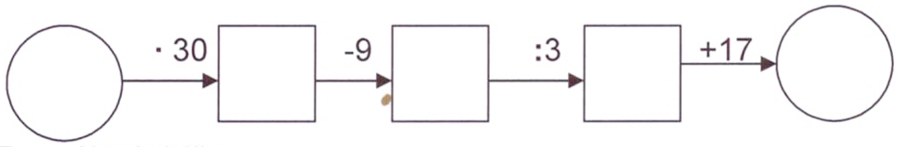
a) El número total de animales que tiene.
b) El número total de patas de animales.
c) Si para alimentar cada gallina una semana gasta 1 euro y para cada cabra 2 euros, ¿cuánto le cuesta alimentar todos los animales de esa semana?
d) Utiliza las fórmulas para calcular a), b) y c) en una semana en la que tenía 17 gallinas y 20 cabras.

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Material didáctico fotocopiable:
Cadenas numéricas

Completa las siguientes cadenas numéricas dando a *x* los valores siguientes: 3, 5, 7 y 10.
Expresa simbólicamente lo que hacen estas cadenas, y simplifica:

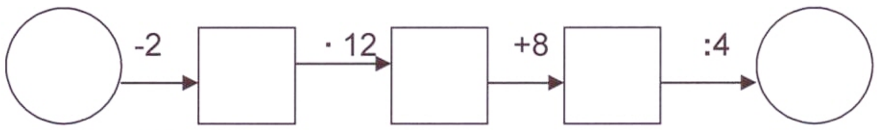
I.-



3	
5	
7	
10	

a) Expresión simbólica:
b) Simplificación:
c) Calcula el número por el que debes comenzar para que la cadena dé como resultado 54.

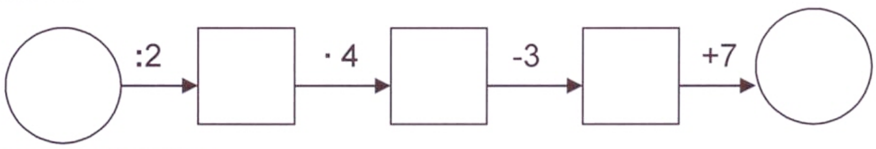
II.-



3	
5	
7	
10	

a) Expresión simbólica:
b) Simplificación:
c) Calcula el número por el que debes comenzar para que la cadena dé como resultado 8.

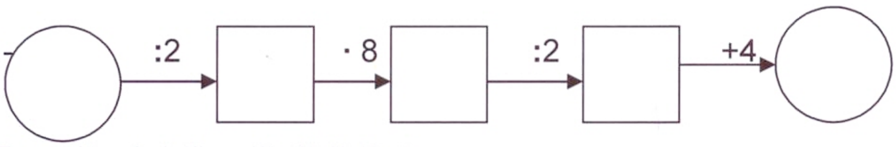
III.-



3	
5	
7	
10	

a) Expresión simbólica:
b) Simplificación:
c) Calcula el número por el que debes comenzar para que la cadena dé como resultado 16.

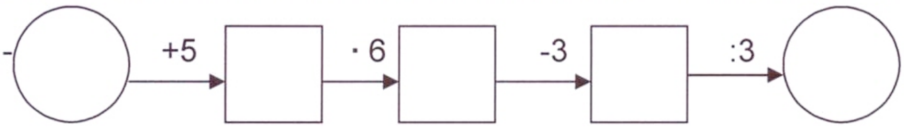
IV.-



3	
5	
7	
10	

a) Expresión simbólica: $(((x:2)\cdot 8):2)+4$
b) Simplificación: $(((x:2)\cdot 8):2)+4=(4x:2)+4=2x+4$
c) Calcula el número por el que debes comenzar para que la cadena dé como resultado 9.

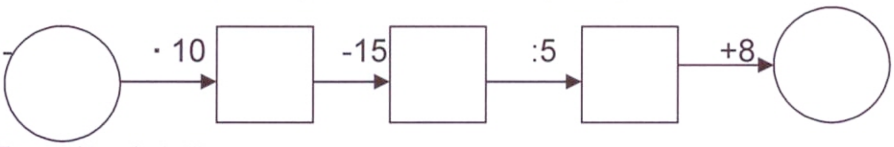
V.-



3	
5	
7	
10	

a) Expresión simbólica: $(((x+5)6)-3):4=(6x+30-3):3=2x+9$
b) Simplificación:
c) Calcula el número por el que debes comenzar para que la cadena dé como resultado 17.

VI.-



3	
5	
7	
10	

a) Expresión simbólica:
b) Simplificación:
c) Calcula el número por el que debes comenzar para que la cadena dé como resultado 9.

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2. ECUACIONES DE PRIMER GRADO

2.1. El lenguaje de las ecuaciones

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.

Ejemplo:

- Si tenemos dos expresiones algebraicas: $3x$ y $2x + 1$, y las unimos con el signo igual obtenemos una ecuación: $3x = 2x + 1$.

Las expresiones que hay a cada lado del igual se llaman **miembros** de la ecuación. Todas las ecuaciones tienen dos miembros: la expresión que está a la izquierda del signo igual se llama primer miembro y la que está a la derecha, segundo miembro.

Las letras que contienen las ecuaciones algebraicas (las "partes literales" de sus dos expresiones) se llaman **incógnitas**, que significa literalmente "desconocidas". Si todas las letras son iguales, se dice que la ecuación tiene una sola incógnita.

2X + Y = 5
X - 2 = 3Y

Ejemplo:

- $3x - 2 = 2x + 1$ es una ecuación con una sola incógnita, mientras que:
- $2x + y = 5$ o $x - 2 = 3y$ son ecuaciones con dos incógnitas: x e y.

El **grado** de una ecuación es el mayor exponente que aparece en alguna de sus incógnitas.

Ejemplo:

- $7x - 5 = x + 7$ es una ecuación de primer grado, mientras que $x + 3y^2 = 9$ es una ecuación de segundo grado.

Actividades propuestas

7. Copia en tu cuaderno la siguiente tabla y complétala:

Ecuación	Primer miembro	Segundo miembro	Incógnitas
$7x - 3 = 4x - 5$			
	$6x + 2$	$x - 8$	
$4a + 9 = 23$			
	$x - y$	$5 + y$	

8. Indica el número de incógnitas de las siguientes ecuaciones:

a) $7x - 5y = x + 7$; b) $x + 3y^2 = 9$ c) $a + 4a^2 = 7$ d) $9x + 3x^2 = 5$

9. Indica el grado de las siguientes ecuaciones:

a) $2x - 6 = 3x + 8$; b) $5x + 2y^2 = 11$ c) $x + 2x^2 = 3$ d) $x + 6xy^2 = 1$

2.2. Ecuaciones equivalentes. Resolución de ecuaciones

Solución de una ecuación:

Una **solución** de una ecuación es un número que, cuando la incógnita toma ese valor, se verifica la igualdad, es decir, los dos términos de la ecuación valen lo mismo.

Algunas ecuaciones solo tienen una solución, pero otras pueden tener varias.

Resolver una ecuación es encontrar todas sus posibles soluciones numéricas.

Actividades resueltas

- Si te fijas en la ecuación: $3x - 2 = 2x + 1$, verás que al darle valores a x la igualdad no siempre se cumple.

Por ejemplo, para $x = 1$, el primer miembro vale $3 \cdot 1 - 2 = +1$, mientras que el valor del segundo miembro es: $2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3$. Luego 1 **no** es solución de la ecuación. Para $x = 3$, el primer miembro toma el valor: $3 \cdot 3 - 2 = 9 - 2 = 7$; y el segundo miembro: $2 \cdot 3 + 1 = 6 + 1 = 7$. Por tanto 3 es una **solución** de la ecuación.

Si se desconoce la solución de una ecuación, resulta muy pesado resolverla probando un número tras otro. Por eso lo que se hace habitualmente es transformarla en otras ecuaciones **equivalentes** más sencillas.

Ecuaciones equivalentes son las que tienen las mismas soluciones.

Ejemplo:

- $2x - 5 = 11$ es equivalente a $2x = 16$, puesto que la solución de ambas ecuaciones es $x = 8$.

Para obtener ecuaciones equivalentes se tienen en cuenta las siguientes propiedades:

- Si se **suma** o se **resta** a los dos miembros de una ecuación una misma cantidad, se obtiene una ecuación equivalente.

- Si se **multiplican** o **dividen** los dos miembros de una ecuación por una misma cantidad (distinta de cero), se obtiene una ecuación equivalente.

Actividades resueltas

- Resuelve la ecuación $3x + 7 = x - 3$ transformándola en otra más sencilla equivalente.

Transformar una ecuación hasta que sus soluciones se hagan evidentes se llama "*resolver la ecuación*". Siguiendo estos pasos intentaremos resolver la ecuación: $3x + 7 = x - 3$

1) Sumamos a los dos miembros $-x$ y restamos a los dos miembros 7:

$$3x - x + 7 - 7 = x - x - 3 - 7.$$

2) Hacemos operaciones y conseguimos otra ecuación que tiene en el primer miembro los términos con x y en el segundo, los términos sin x:

$$3x - x = -3 - 7.$$

3) Efectuamos las sumas en el primer miembro y en el segundo:

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$$2x = -10.$$

4) Despejamos x dividiendo los dos miembros por 2:

$$\frac{2x}{2} = \frac{-10}{2} \text{ de donde } x = -5.$$

5) Comprueba que todas las ecuaciones que hemos obtenido en este proceso son equivalentes y que su solución es $x = -5$.

- Resuelve la ecuación $8 - x = 2x - 4$.

1) Sumamos x y 4 para pasar a un miembro los términos con x y al otro miembro los términos sin x:

$$8 - x + x + 4 = 2x + x - 4 + 4,$$

2) Hacemos operaciones:

$$8 + 4 = 2x + x$$

3) Efectuamos las sumas:

$$12 = 3x.$$

4) Despejamos x dividiendo los dos miembros por 3:

$$4 = x.$$

La solución de la ecuación es $x = 4$.

5) Comprobamos que en efecto es la solución:

$$8 - x = 2x - 4 \Rightarrow 8 - 4 = 4;\ 2\square 4 - 4 = 4.$$

- Resuelve la ecuación $2(x-1) + 3x = -(2x+3) - 3$

Atención, cuando en una ecuación hay paréntesis, en primer lugar hay que quitarlos tal y como hemos aprendido antes.

1) Quitamos paréntesis:

$$2x - 2 + 3x = -2x - 6 - 3$$

2) Sumamos +2 y $+2x$ para pasar al la izquierda todos los términos que llevan x y a la derecha los que no llevan:

$$2x - 2 + 3x + 2 + 2x = -2x - 6 - 3 + 2 + 2x$$

3) Simplificamos agrupando:

$$7x = -7$$

4) Despejamos dividiendo los dos miembros por 7

$$x = -1$$

Actividades propuestas

10. Averigua cuál de los números es la solución de la ecuación y escríbelo en tu cuaderno:

Ecuación	Posibles soluciones		Ecuación	Posibles soluciones
$3x + 7 = x - 3$	2, –1, –5		$a^2 - 5 = -1$	–2, –10, 2
$x + 2 = 4x - 1$	1, –2, –3		$b - 3 = 7 - b$	2, 4, 6

11. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x - 5 = 2x - 7$ b) $6x + 8 = 3x - 4$ c) $5x + 2 = 12$ d) $4x - 7 = 3x - 7$

e) $10x + 3 - 2x + 7 = -2 - 3x + 7 - 5x$ f) $-2(x - 1) = -2x + 3 - x$

g) $3x - 8 + x = 3(x - 2) + 2(3x + 1)$ h) $3(1 - 4x) + 7 = 5 - (8x + 7)$

12. Elige entre las siguientes ecuaciones todas las que sean equivalentes a la ecuación $3x - 6 = 2x + 9$.

a) $x + 10 = 5$ b) $10 - x = 3x - 5x$ c) $4x = 30$ d) $2x = 10 + 20$ e) $15 = x$

13. Escribe dos ecuaciones equivalentes a cada una de las ecuaciones siguientes:

a) $2x - 4 = 11$ b) $3x = 12$ c) $5x + 11 = 6$ d) $x = -3$

3. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE ECUACIONES

3.1. Procedimiento

Muchos problemas pueden resolverse mediante una ecuación.

Actividades resueltas

- Busca un número que sumado con su siguiente dé como resultado 7.

Para resolverlo, sigue los siguientes pasos:

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Lee con mucho cuidado el enunciado, y pregúntate:

¿Qué te piden? ¿Qué datos tienes?

Nos piden un número. La **incógnita** es ese número. Llama a ese número *x*. Su siguiente, será $x + 1$. Nos dicen que la suma de ambos es 7.

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Es un problema que queremos resolver mediante una ecuación. Escribe en lenguaje algebraico el enunciado del problema y plantea una ecuación:

$$x + (x + 1) = 7.$$

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Subervia y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Pregúntate si efectivamente resuelve el problema releyendo el enunciado.

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Ahora sí, ahora resuelve la ecuación. Para resolver una ecuación conviene seguir un orden de actuación que nos ayude a no cometer errores, para ello seguimos el procedimiento que acabamos de aprender.

Quita, si los hay, paréntesis y denominadores: $x + x + 1 = 7$

Para poner en el primer miembro los términos con x, y en el segundo los que no lo tienen, **haz lo mismo a los dos lados**, resta 1 a los dos miembros: $x + x + 1 - 1= 7 - 1$, luego $x + x = 7 - 1$. Opera: $2x = 6$. Despeja:

Para despejar la x, se hace lo mismo a los dos lados, se dividen por 2 ambos miembros: $2x/2 = 6/2$, por tanto, $x = 3$.

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

En efecto, comprueba que: $3 + 4 = 7$.

Actividades propuestas

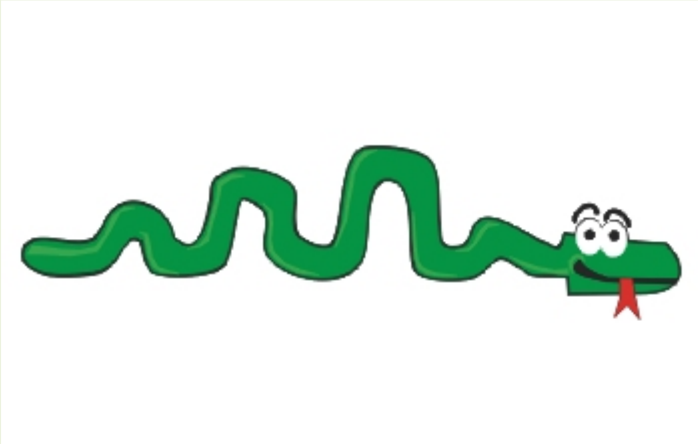
14. La suma de tres números consecutivos es igual al doble del mayor más 1. Calcula dichos números.

15. La madre de Álvaro tiene el triple de la edad de su hijo, y éste tiene 30 años menos que su madre. ¿Cuántos años tienen cada uno?

16. El perímetro de un triángulo isósceles mide 30 centímetros. El lado desigual mide la mitad de uno de sus lados iguales. ¿Cuánto mide cada lado?

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES Y REVISTA



- Me encontré con una serpiente muy, muy larga.
- Medía 20 metros más la mitad de su longitud.
- ¡Ah! ¡30 metros!
- ¡NO! La mitad de 30 metros son 15, y 20 + 15 no son 30.

Para saber cuánto medía la serpiente utiliza la *x*.

Haz magia

- Piensa un número.
- Súmale 10.
- Dobla el resultado.
- Réstale 6.
- Calcula la mitad.
- Quita el número del principio.
- ¿Cuál es el resultado?

¡El resultado es **7**!

Analiza como tú, el mago, has podido conocer el resultado

122
104
60
45
30
4
365

¡SIN TIEMPO PARA IR AL INSTITUTO!

Álvaro le cuenta a su amigo Jaime que, según sus cálculos, no le queda tiempo para ir al instituto porque:

- ✓ Dormimos ocho horas diarias que equivalen a 122 días al año
- ✓ No hay clase los sábados y domingos, que son 104 días al año
- ✓ Tenemos 60 días de vacaciones de verano
- ✓ Dedicamos tres horas diarias a comer, que son unos 45 días al año
- ✓ Dos horas diarias para otras actividades son 30 días al año
- ✓

La suma de todas estos días 122 + 104 + 60 + 45 + 30 = 361 días
Si me pongo enfermo alguno de los cuatro días que quedan, se demuestra que no tengo tiempo en todo el año para ir al instituto.

Esta no es la realidad. ¿puedes explicar dónde está el error de Álvaro?

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

		Ejemplos
Lenguaje algebraico	Utiliza letras y números para representar una información	Área de un rectángulo = base por altura: A = b× a
Expresión algebraica	Expresiones que reflejan una situación mediante letras y números	$x + 3x$
Monomio o término algebraico	Consta de coeficiente y parte literal. Van separados por los signos +, –, =.	$5x^2$
Coeficiente	Número que multiplica en un monomio	El coeficiente de $5x^2$ es 5.
Valor numérico de una expresión algebraica	Número que se obtiene al sustituir las letras por números y hacer las operaciones.	El valor numérico de $x + 3x + 5$ para $x = -2$ es: $-2 + 3(-2) + 5 = -2 - 6 + 5 = -3$
Ecuación	Igualdad entre dos expresiones algebraicas.	$3x - 1 = 2x + 5$
Miembros de una ecuación	Cada una de las dos expresiones algebraicas que forman la ecuación. Van separados por el signo =.	En la ecuación anterior $3x - 1$ es el primer miembro, y $2x + 5$ es el segundo miembro
Incógnitas	Letras de valor desconocido que contienen una ecuación	En $3x - 1 = 2x + 5$ la incógnita es x.
Grado de una ecuación	El mayor exponente de la incógnita.	La ecuación $3x - 1 = 2x + 5$ es de primer grado. La ecuación $3x^2 = 27$ es de segundo grado.
Solución de una ecuación	Número por el que se puede sustituir la incógnita para que la igualdad sea cierta.	La solución de $3x - 1 = 2x + 5$ es $x = 6$.
Resolver una ecuación	Es hallar su solución.	$\mathbf{3x - 1 = 2x + 5}$ $3x - 2x - 1 + 1 = 2x - 2x + 5 + 1$ $x = 6$
Ecuaciones equivalentes	Tienen las mismas soluciones	$2x - 5 = x + 2$ es equivalente a: $2x - x = 2 + 5$
Pasos para resolver una ecuación:	Quitar paréntesis Quitar denominadores Agrupar los términos con x en un miembro y los términos sin x en el otro. Operar Despejar la x.	**(3x – 1) = 7/2** 1. $6x - 2 = 7/2$ 2. $12x - 4 = 7$ 3. $12x = 7 + 4$ 4. $12x = 11$ 5. $x = 11/12$
Pasos para resolver un problema mediante ecuaciones	Leer el enunciado. Escribir la ecuación. Resolver la ecuación. Comprobar la solución.	Hallar un número que sumado a 7 da lo mismo que su doble menos 3. 1) Comprender el enunciado 2) $x + 7 = 2x - 3$ 3) $x - 2x = -3 - 7$; $-x = -10$; $x = 10$ 4) $10 + 7 = 2 \cdot 10 - 3$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Lenguaje algebraico

1. Expresa en tu cuaderno en lenguaje algebraico

a) El triple de un número es igual a 21.

b) A un cierto número se le suma 2, se multiplica el resultado por 3, y se divide entre 4.

c) El doble de un número más 6.

d) Un número más su anterior.

2. Copia en tu cuaderno y relaciona:

a) El doble de un número	1) $x - 17$
b) La diferencia entre un número y 17	2) $\frac{x^2}{3}$
c) El producto de un número por –3	3) $2(x + 5)$
d) La quinta parte de un número	4) $2x^2$
e) El doble del cuadrado de un número	5) $x + y$
f) El número siguiente a x	6) $2x$
g) La suma de dos números	7) $x + 1$
h) El doble de la suma de un número y 5	8) $x/5$
i) La tercera parte del cuadrado de un número	9) $-3x$

3. Si llamamos *x* a los ahorros que tiene Laura, expresa algebraicamente:

a) A María le faltan 7 € para tener los mismos ahorros que Laura.

b) Alfonso tiene 14 € más que Laura.

c) Martín tiene 3 € menos que el doble de Laura.

d) Fátima tiene igual que Laura y Rosa.

4. He aquí lo que sabemos de las edades de un grupo de amigos:

a) Juan tiene 3 años más que Antonio;

b) Elena tiene el doble que Juan;

c) Félix tiene 5 años menos que Elena y Laura tiene la mitad que Antonio.

d) Si la edad de Antonio es *x*, indica, mediante expresiones algebraicas, las edades de los otros amigos.

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

5. Escribe en lenguaje algebraico las siguientes informaciones relativas a la base *x* y la altura *y* de un rectángulo:

a) La base es doble que la altura

b) La base excede en 5 unidades a la altura

c) La altura es 3/7 de la base

d) El área del rectángulo vale 20 cm^2.

e) La diferencia entre la altura y la base es de 10 unidades.

6. Escribe las siguientes operaciones en lenguaje ordinario

a) $x + 5$ b) $a – 4$ c) $2x$ d) y^2

7. Completa en tu cuaderno las frases siguientes:

a) En una expresión ... ... puede haber números, letras y signos de operación.

b) Un número cualquiera se indica en álgebra mediante una ... ..., por ejemplo, la x.

c) En la expresión –3x el número –3 es el ... .

d) La ecuación $x^2 = 25$ es de ... ... grado.

e) El primer miembro de la ecuación 3x + 1 = 2x – 7 es ... ...

f) Dos ecuaciones que tienen las mismas soluciones se llaman ... ...

g) Una ... ... es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.

h) El número por el que se sustituye la incógnita de una ecuación de manera que la igualdad sea cierta se llama ... ... de la ecuación.

i) ... ... una ecuación es hallar el valor de la incógnita.

j) Si el mayor exponente de la incógnita de una ecuación es 1, entonces la ecuación es de ... ... grado.

8. El kilo de melocotones cuesta *x* euros. Indica en lenguaje algebraico el precio de:

a) El cuarto de kilo de melocotones

b) Tres kilos de melocotones

c) El kilo de mandarinas sabiendo que es 75 céntimos más barato que el kilo de melocotones.

9. Llamamos *x* a una cantidad. Escribe en lenguaje algebraico:

a) El doble de esa cantidad más 9.

b) Esa cantidad más 5.

c) 20 menos esa cantidad.

d) Cuatro veces esa cantidad menos 7.

e) La mitad de esa cantidad más 8.

f) Siete veces esa cantidad menos la tercera parte de la cantidad.

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

10. Calcula el valor numérico de las expresiones siguientes para $x = 2$.

a) $5x - 3$ b) $2(x + 5)$ c) $(x - 4)/2$ d) $7(2 - x^2)$

11. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $x + x + x - x$ b) $2x + 3x + 5x - x$ c) $x/2 + x/2$ d) $2(x + 3x - 2x)$

12. Escribe en tu cuaderno el valor numérico de cada expresión para el valor de x que se indica en cada caso:

	Expresión	Valor de x	Valor numérico
a)	$5x - 4 + x$	-1	
b)	$x - 3 + 7x$	-2	
c)	$x + 3 + 2x$	-3	
d)	$3x - x$	-4	
e)	$2x - 3$	2	

13. Realiza las operaciones siguientes

a) $3x + 5x - 2y + 9y - 4x - 3y$ b) $(2x - 5x^2) - (3x^2 + 5x)$

c) $3(7x - 3) - 2(2x + 5)$ d) $2a - 5a + 7a - 8a + b$

Ecuaciones

14. Copia en tu cuaderno la siguiente tabla y complétala:

Ecuación	Primer miembro	Segundo miembro	Incógnitas
$8x - 5 = 2x - 1$			
	$7x + 3$	$2x - 8$	
$4x + 3 = 6x + 9$			
$4a + 11 = 23$			
	$x - y$	$5 + y$	

15. Calcula mentalmente el valor que se debe asignar a cada círculo:

a) $2 \cdot \text{O} = 30$ b) $10 = \text{O} : 5$ c) $3 \cdot \text{O} = 27$ d) $5 = \text{O} : 3$

16. Escribe dos ecuaciones equivalentes a cada una de las ecuaciones siguientes:

a) $3x - 4 = 11$ b) $2x = 9$ c) $x + 11 = 6$ d) $x = -3$

17. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $2x + 4 = 7$ b) $4x + 3 = 15$ c) $5x - 2 = 37$ d) $-2x - 3x = -55$

18. Relaciona cada ecuación con su solución:

a) $x + 5 = 7x - 1$ b) $3x - 2 = 4 - x$ c) $x - 9 = 3 - 2x$ d) $5 = x + 9$ e) $8 - 2x = 5 - 3x$

f) $9x - 2 = 5x$ g) $3 + 2x = 1$ h) $6 - x = 5 + 9x$ i) $x = 6 - 2x$ j) $2x + 4 = x + 7$

Soluciones:

1) $x = 4$ 2) $x = -4$ 3) $x = -3$ 4) $x = 1{,}5$ 5) $x = 0{,}5$

6) $x = 1$ 7) $x = 0{,}1$ 8) $x = -1$ 9) $x = 3$ 10) $x = 2$.

19. Di si las siguientes frases son verdaderas o falsas. Razona la respuesta.

a) La ecuación $x + 3 = 5$ es equivalente a $x + 5 = 3$.

b) La ecuación $2x + 3 = 7x - 1$ tiene dos incógnitas.

c) La ecuación $x^3 + 5 = 2x^2$ es de tercer grado.

d) El valor numérico de $5x - 2$ para $x = -1$ es -7.

e) La solución de la ecuación $6x = 3$ es 2.

20. Encuentra los números que faltan:

a) 15 = 25 –2·O b) 100 = 25 – O c) 200 = O – (–25) d) 40 = O – (–20)

21. Resuelve en tu cuaderno las siguientes ecuaciones:

a) $x + 3 = 9$ b) $x + 5 = 4$ c) $x + 1 = 78$ d) $x + 7 = 46$

22. En el tren se puede transportar un perrito siempre que su peso no exceda de 6 kg. Averigua a cuál de mis perritos podría llevarme de viaje en el tren sabiendo que Eder pesa 8 kilos y que el valor de x es el mismo en todos los casos:

Nombre	***Peso en kg***
Eder	$2x$
Peque	$-3(x - 7)$
Gosca	$3x - 5 + 6x$
Atila	$4x + 6 - 5x$
Clea	$1 - 2x + 9x$

23. Encuentra los números que faltan:

a) O + 3 = 8 b) O + 7 = 3 c) O – 6 = 10 d) O – 8 = –2

24. Resuelve las siguientes ecuaciones: (Sugerencia: ilustra las ecuaciones mediante balanzas equilibradas. Mantenlas equilibradas hasta conseguir la ecuación equivalente que nos dé el resultado).

a) $x + 5 = 10$ b) $x + 7 = 4$ c) $x + 3 = 8$ d) $x + 7 = 12$

25. Resuelve en tu cuaderno las siguientes ecuaciones:

a) $x - 4 = -7$ b) $x - 34 = 12$ c) $x - 21 = 84$ d) $x - 28 = 7$

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Problemas

26. Si el doble de un número menos 3 es igual a 7, ¿cuál es el número?

27. Un rectángulo tiene 7 cm de base y su área es de 21 cm^2, ¿qué altura tiene?

28. La suma de tres números consecutivos es 48. ¿Cuánto vale cada número?

29. Si en una familia la suma de la edades de los tres hijos es de 37 años, Ana es 2 años menor que Antonio, y este es 3 años menor que Maite, ¿qué edad tiene cada hijo?

30. Si una parcela rectangular tiene 4 m menos de ancho que de largo, y la valla que lo rodea mide 88 m, ¿qué dimensiones tiene la parcela?

31. Para cada uno de los siguientes enunciados, dibuja la figura que corresponda, escribe una ecuación y resuélvela:

a) Halla las dimensiones de un rectángulo si la base mide 3 cm más que la altura y el perímetro es 22 cm.

b) El perímetro de un cuadrado es 28 mm. ¿Cuánto mide su lado?

c) El lado desigual de un triángulo isósceles mide 7 cm y su perímetro mide 35 cm. ¿Cuánto mide cada uno de los lados iguales?

d) El perímetro de un octógono regular es 28 cm mayor que el de un cuadrado de 36 cm^2 de área. Averigua el lado del octógono.

e) Cada uno de los ángulos de un cuadrilátero irregular mide 30º más que el ángulo anterior. ¿Cuánto mide cada uno de los cuatro ángulos del cuadrilátero? (Ayuda: recuerda que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es 360º).

f) Las medidas de los lados de un triángulo escaleno son números consecutivos y el perímetro es 33 cm. ¿Cuánto mide cada lado?

g) Dos ángulos son complementarios y se diferencian en 18º. ¿Cuánto miden?

h) Dos ángulos suplementarios se diferencian en 25º. ¿Cuánto mide cada uno?

32. Escribe en lenguaje algebraico: “La suma de los ángulos interiores de un polígono es tantas veces 180º, como lados tenga menos 2”. ¿Cuántos lados tiene un polígono si la suma de sus ángulos interiores es 720º?

33. Si un triángulo isósceles tiene un perímetro de 36 cm, y su lado desigual mide 5 cm menos que sus lados iguales, ¿cuánto miden sus lados?

34. Halla las edades de tres hermanos sabiendo que suman 52 años, que los dos pequeños se llevan dos años, y que el mayor tiene tantos años como los otros dos juntos.

35. Un montañero hace una ruta de 48 km en tres etapas. El segundo día recorre 10 km más que el primero y el tercer día recorre 7 km más que el segundo. ¿Cuánto recorre cada día?

36. Tengo 26 monedas de 1 € y de 2 €, que valen en total 37 €. ¿Cuántas monedas tengo de cada clase?

37. Alfonso quiere saber cuánto pesa la compota de moras que ha hecho, pero solo tiene pesas de 1 kg y de 200 gr. Comprueba que si pone los dos botes iguales de compota, junto con la pesa de 200 gr en un plato de la balanza, y en el otro plato la pesa de 1 kg, la balanza queda equilibrada.

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

¿Cuánto pesa cada bote?

38. Si multiplicas a un número por 5 y luego le sumas 12, obtienes 62, ¿de qué número se trata?

39. El patio de un colegio es rectangular, el doble de largo que de ancho, y su perímetro es de 600 m. Si se quiere poner una valla que cuesta a 3 € el metro en el lado más largo. ¿Cuánto habrá que pagar?

40. Alberto ha sacado un 8 en un examen de 10 preguntas. En la primera pregunta sacó un punto, y en la última, que dejó en blanco por falta de tiempo, un cero. La profesora le ha dicho que en todas las preguntas centrales ha obtenido la misma puntuación. ¿Cuál ha sido esa nota?

41. Mario estudia lo que más le gusta las 2/5 partes del tiempo diario que dedica al estudio, y le sobran 72 minutos para el resto de materias. ¿Cuánto estudia cada día?

42. Si Cristina tiene 12 años y su madre, 36, ¿cuántos años deben pasar para que la edad de la madre sea el doble de la de su hija?

43. Miriam le dice al mago, piensa un número, multiplícalo por 2, ahora súmale 10, divide el resultado entre 2 y resta el número que has pensado. ¿Tienes un 5?

a) Escribe en forma algebraica el juego de magia de Miriam, y descubre su truco.

b) Inventa un nuevo juego de magia.

44. Carlos ha comprado 25 cuadernos, los ha pagado con un billete de 20 €, y le han devuelto 12 €. Escribe una ecuación que permita calcular el precio de cada cuaderno.

45. Un triángulo equilátero tiene un perímetro de 36 cm, ¿cuánto mide su lado?

46. Braulio, Rosa y Guillermo han ganado 1200 € en la lotería. Si Braulio había pagado la tercera parte del décimo, Rosa, la mitad, y Guillermo, el resto, ¿cómo deben repartir lo que han ganado.

AUTOEVALUACIÓN

1. Los coeficientes de la expresión algebraica 5 x – 7 + *y*, son:

a) 5, 7 y 1 b) +5, –7 y +1 c) + 5 y – 7

2. El valor numérico de la expresión algebraica 2 a + 6 b, cuando $a = 2$ y $b = -1$, es:

a) 2 b) –2 c) – 4

3. La solución de la ecuación $3 + x - 4x = 8 + 2x$ es:

a) +5 b) +1 c) – 1

4. El doble de un número más 2, equivale a su triple menos 10. El número es:

a) 5 b) 11 c) 12

5. La suma de las edades de dos personas es de 48 años y su diferencia, 14 años. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones nos permite calcular sus edades?

a) $x + x + 14 = 48$ b) $x - 14 = 48$ c) $48 + x = 14 - x$

6. El perímetro de un rectángulo es 72 cm. Si la base es el doble de la altura menos 9 cm, las dimensiones del rectángulo son:

a) 21 y 15 b) 20 y 16 c) 30 y 6

7. Tres números suman 77. El mediano es el doble del menor, y el mayor es triple del menor menos 7. ¿Cuál de estas ecuaciones nos permite hallar los números?

a) $2x + x + 3x = 77$ b) $x + 3x + 2x = 77 + 7$ c) $x + 2x + 3x = 77 - 7$

8. Tenemos 12 monedas de 2 € y 1 €. Si en total tenemos 19 €, de cada clase de monedas, tenemos:

a) 6 y 6 b) 7 y 5 c) 8 y 4

9. La madre de Juan tiene el doble de la edad de este más 5 años. La suma de sus edades es 38 años. La ecuación que planteamos para saber sus edades es:

a) $x + 2x + 5 = 38$ b) $x + 5 = 2x$ c) $x + 2x = 38$

10. Con 24 € hemos comprado 5 objetos iguales y nos han sobrado 6 € . El precio de cada objeto podemos conocerlo al resolver la ecuación:

a) $5x = 24 + 6$ b) $x + 5 = 24$ c) $5x + 6 = 24$

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Nieves Zuasti

Revisores: Raquel Caro y Sergio Hernández

Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

Índice

Resumen

Si quieres conocer la estatura o el peso de las personas que tienen entre 11 y 13 años en España, puedes recoger los datos de cada una de las personas de esas edades. Pero esto es muy laborioso. Lo que hace la Estadística es recoger una **muestra** que nos permita representar la totalidad de la población objeto de estudio.

La recogida de datos es muy antigua. El emperador Augusto mandó hacer un censo, (o recogida de datos) de todo su Imperio.

La Ciencia progresa deduciendo, mediante razonamientos lógicos correctos, e infiriendo, en que con unas observaciones experimentales, se induce algo más general.

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. VARIABLES.

Cuando ves la televisión o se te ocurre echarle un vistazo a un periódico, es difícil no encontrarte con cantidades de datos, por ejemplo sobre el aumento o disminución del paro, los goles que mete un futbolista famoso, las audiencias de los programas de TV y un largo etc. Vienen expresados en forma de tablas y gráficos que suelen ser llamativos. El tratamiento y presentación que se hace de esos datos, eso, es la estadística.

1.1. Variable estadística

La estatura de los alumnos de 1º de ESO, el color del pelo, la comida preferida por los alumnos y alumnas del instituto o los goles que mete un futbolista, son datos que podemos estudiar.

Una **variable estadística** es una característica o una propiedad que queremos estudiar respecto de un determinado conjunto de cosas o personas.

La **variable es cuantitativa** si los datos son numéricos (como la estatura o el número de goles).

La **variable es cualitativa** si los datos no son numéricos (como el color del pelo o la comida que te gusta).

Actividades propuestas

1. Indica si cada una de las siguientes variables estadísticas son cualitativas o cuantitativas:

a) Localidad de nacimiento.
b) Calificaciones de matemáticas.
c) Tipos de fruta que se consumen.
d) Número de parados en tu pueblo.
e) Tiempo que se tarda en recorrer una etapa ciclista.

Si queremos estudiar la estatura de los alumnos de 12 años de la Región de Murcia, medirlos a todos puede ser un trabajo realmente complicado. Nos podemos plantear si sería factible reducir el número de chicos y chicas que midamos sin que eso perjudique el resultado de nuestro estudio. Es decir, si podemos elegir unos cuantos que representen bien lo que ocurre con la estatura de la mayoría.

La **población** es el conjunto de personas o de cosas sobre el que queremos hacer un estudio estadístico. Cada uno de los elementos que forman parte de la población se llama **individuo.**

Una **muestra** es un subconjunto, es decir, una parte de la población que elegimos para estudiar una determinada propiedad. El **tamaño de la muestra** es el número de individuos que forman parte de esa muestra.

- Si queremos hacer un estudio sobre la estatura de los alumnos de 1º de ESO de nuestra Comunidad Autónoma, la población está formada por todos y cada uno de los alumnos y alumnas de dicha Comunidad. Como el número de alumnos es muy grande, podemos elegir una muestra formada, por ejemplo, por tres alumnos y tres alumnas de 1º de ESO de cada instituto; esa sería la muestra. El tamaño de la muestra es el número de alumnos que la forman, así si en nuestra comunidad autónoma hubiera 50 institutos, como hemos tomado 6 chicos y chicas de cada uno de ellos, tendríamos en total 300 alumnos.

Actividades propuestas

2. Señala, en los casos siguientes la variable aleatoria la población, la muestra, los individuos y, si

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

es posible, el tamaño de la muestra:

- Una fábrica de baterías para teléfonos móviles, hace un control de calidad cada semana probando el tiempo de duración de una batería de cada caja. Esta semana han fabricado 570 cajas.
- Un agricultor toma una naranja de cada árbol que tiene plantado para estudiar la cantidad de zumo que producen sus naranjas.
- Una fábrica de gomas para el pelo toma una goma de cada 10 cajas que fabrica cada día para comprobar que el color es el adecuado. Hoy ha fabricado 1050 cajas.

2. FRECUENCIA. TABLAS DE FRECUENCIA.

2.1. Frecuencia absoluta y relativa, porcentajes. Frecuencias acumuladas

Al realizar es estudio de una variable estadística se pueden dar diferentes resultados.

Ejemplo:

- Si queremos saber el tipo de deporte que prefieren los alumnos de tu clase entre fútbol, tenis, baloncesto o bádminton, la variable aleatoria "deporte que prefieres" puede tomar los cuatro valores que acabamos de señalar; es decir, o fútbol, o tenis, o baloncesto, o bádminton.

La **frecuencia absoluta** de un dato es el número de veces que se ha obtenido ese dato.

La **frecuencia relativa** de un suceso se obtiene dividiendo la frecuencia absoluta por el número total de datos.

El **porcentaje** de un dato es el tanto por ciento que supone la frecuencia absoluta de ese dato respecto del total de datos.

La **frecuencia absoluta acumulada** de un dato es la suma de todas las frecuencias absolutas de los datos anteriores a ese dato.

La **frecuencia relativa acumulada** de un dato es la suma de todas las frecuencias relativas de los datos anteriores a ese dato.

El **porcentaje acumulado** de un dato es la suma de todos los porcentajes de los datos anteriores a ese dato.

Si sumas todas las frecuencias absolutas de todos los datos obtendrás en número total de datos.

Si sumas las frecuencias relativas de todos los posibles resultados de un experimento, esa suma siempre es igual a 1.

Si sumas los porcentajes correspondientes a cada dato el resultado debe ser 100.

Por comodidad y para facilitar la visualización y el manejo de los estudios estadísticos, las frecuencias se suelen escribir en forma de tabla. Estas tablas se llaman **tablas de frecuencias.** Observa cómo se hace en el ejemplo siguiente.

Actividad resuelta

Se ha preguntado a los 26 alumnos de una clase de 1º de ESO lo que hacen principalmente en su tiempo libre resultando que 8 hacen deporte, 4 leen, 7 juegan con videoconsola, 3 no tienen una actividad fija y el resto ve la tele. Cada uno de los números asociados a cada actividad es la frecuencia absoluta de dicho dato. Vamos a ponerlo en forma de tabla

Actividad principal	Frecuncia absoluta	Frecuncia absoluta acumulada	Frecuncia relativa	Frecuncia relativa acumulada	Porcentaje
Deporte	8	8	8/26=0'31	0'31	31%
Leer	4	12	4/26=0'145	0'455	14'5%
Videoconsola	7	19	7/26=0'29	0'745	29%
Nada fijo	3	22	3/26=0'11	0'855	11%
TV	4	26	4/26=0'145	1	14'5%
Totales	26		1		100%

Actividades propuestas

3. Hemos preguntado a los 24 compañeros por el número de hermanos que cada uno de ellos tiene, obteniéndose el resultado siguiente; 0, 2, 1, 1, 1, 0, 4, 2, 3, 2, 1, 1, 6, 1, 2 , 0, 0, 1, 1, 3, 3, 2, 2, 1. Elabora una tabla de frecuencias absolutas, absolutas acumuladas, relativas, relativas acumuladas y porcentajes.

3. GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

Si hacemos una representación gráfica de los datos podremos comprender su significado con mucha más facilidad que si, simplemente los dejamos en forma de tabla. Para ello, naturalmente, ya tendremos que haber recogido los datos y elaborado una tabla.

Vamos a estudiar cuatro tipos de representaciones, el diagrama de barras o de rectángulos, el diagrama de líneas, el pictograma y el diagrama de sectores, aunque hay algunas otras representaciones posibles.

3.1. Diagrama de rectángulos o de barras

En un diagrama de rectángulos o de barras se indican en el eje horizontal todos los posibles resultados del experimento y en el eje vertical la frecuencia con la que dichos datos aparecen, por tanto podrá ser un diagrama de rectángulos de frecuencias absolutas o de frecuencias relativas según la frecuencia utilizada.

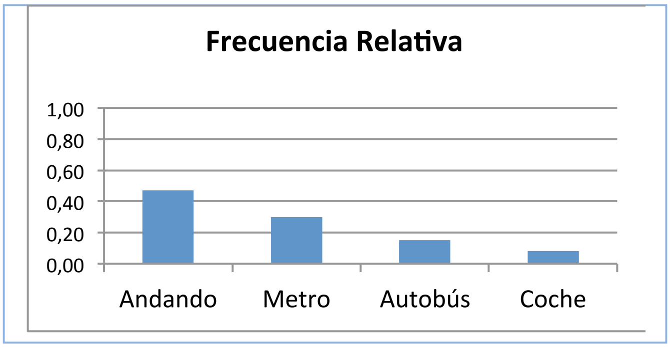
Actividad resuelta

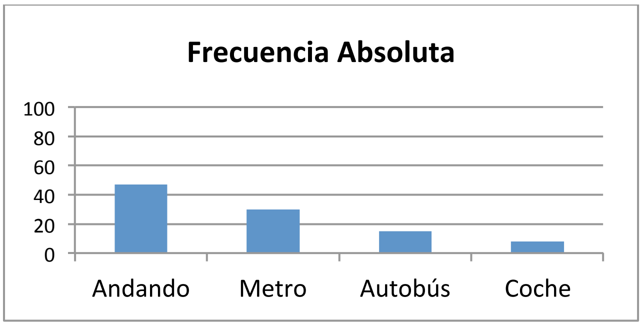
- Preguntamos a 100 estudiantes cuál es el medio de transporte que utilizan para ir a la escuela. Las respuestas aparecen en la tabla del margen. Dibujamos el diagrama de rectángulos.
- Si queremos dibujar el diagrama de barras de frecuencias relativas, utilizamos la columna de frecuencias

Medio de transporte	Frecuencia Absoluta	Frecuencia relativa
Andando	47	0,47
Metro	30	0,3
Autobús	15	0,15
Coche	8	0,8

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

relativas para hacerlo, y se obtiene el diagrama denominado *"Frecuencia Relativa"*. Si comparamos el diagrama de barras de frecuencias absolutas con el de relativas se observa que son iguales salvo en las unidades del eje de ordenadas, que en Frecuencias Absolutas llegan al total, 100, y en Frecuencias Relativas siempre llegan hasta 1.





Actividades propuestas

4. Dibuja los diagramas de barras correspondientes a frecuencias absolutas, frecuencias relativas y porcentajes de la actividad resuelta en la página anterior.

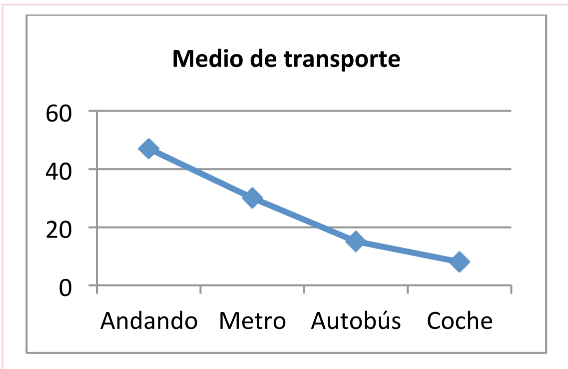
5. Dibuja los diagramas de barras correspondientes a frecuencias absolutas, frecuencias relativas y porcentajes de la actividad propuesta número 6 de la página anterior.

3.2. Diagrama de líneas

Igual que en el diagrama de rectángulos, se indica en el eje horizontal todos los posibles resultados del experimento y en el eje vertical las frecuencias. En lugar de dibujar barras, ahora simplemente se unen los puntos obtenidos con líneas.

Actividad resuelta

- El diagrama de líneas absolutas de la actividad resuelta anterior es el del margen:



Actividades propuestas

6. Dibuja los diagramas de líneas de frecuencias absolutas, frecuencias relativas y porcentajes correspondientes a las actividades propuestas 7 y 8. del experimento tirar un dado de la actividad propuesta 15.

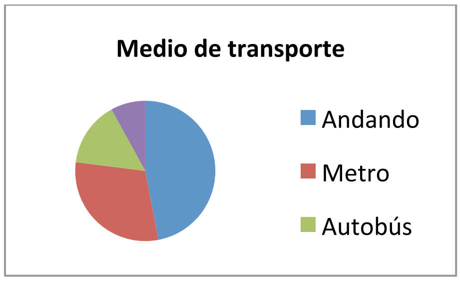
3.3. Diagrama de sectores

En los diagramas de sectores las frecuencias se representan en un círculo que se divide en sectores de amplitudes proporcionales a las frecuencias.

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividad resuelta

- El diagrama de sectores de la tabla sobre el medio de transporte utilizado es:



Puedes observa que con una simple mirada sabes que algo menos de la mitad de los estudiantes van andando y algo más de la cuarta parte van en metro.

Pero realizarlo a mano requiere un trabajo previo pues debes calcular los ángulos mediante una regla de tres: multiplicas por los 360º que mide un ángulo completo y divides por el número total que en este caso es 100.

Medio de transporte	Frecuencia	Ángulo
Andando	47	47 · 360º / 100 = 47 · 3,6 = 169,2
Metro	30	30 · 360º / 100 = 108
Autobús	15	15 · 360º / 100 = 54
Coche	8	8 · 360º / 100 = 28,8
TOTAL	100	360º

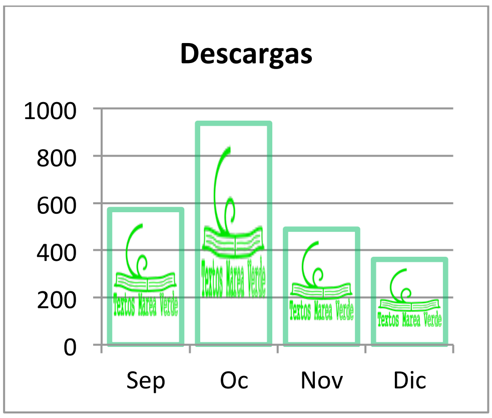
Actividades propuestas

7. Haz una encuesta entre tus compañeros y compañeras de clase sobre el número de libros que leen al mes. Confecciona una tabla y representa los datos en un diagrama de rectángulos, un diagrama de líneas, un pictograma y un diagrama de sectores.

8. Haz una encuesta entre tus compañeros y compañeras de clase sobre el número de horas diarias que ven la televisión. Confecciona una tabla y representa los datos en un diagrama de rectángulos, un diagrama de líneas, un pictograma y un diagrama de sectores.

9. Se han obtenido datos sobre el número de descargas que se han hecho de los Textos Marea Verde y se tienen los datos indicados en la tabla. Se representan con un pictograma, sustituyendo el rectángulo por un dibujo alusivo.

Marea verde	Descargas
Septiembre	572
Octubre	937
Noviembre	489
Diciembre	361



Haz un diagrama de sectores y un pictograma relativos al número de descargas de Textos Marea

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

4. MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN Y MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Vamos a poder obtener unos números de una tabla de frecuencias o de unos datos que nos den información sobre su "*centro*" e información sobre lo que se alejan de dicho centro.

4.1. Media aritmética

Actividad resuelta

- Sabes muy bien calcular la media de tus notas. Juan ha tenido en Matemáticas, 7, 3, 5, 9, 8. Tu nota media la calculas sumando todas las notas: 7 + 3 + 5 + 9 + 8 = 33, y dividiendo la suma entre el número total de notas: 33/5 = 6,6.

En general si se quiere calcular la media de x_1, x_2, …, x_n, se hace lo mismo, se suman todos y se divide por el número total de datos.

Media = $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n$

Actividades propuestas

10. Dadas las temperatura en una ciudad a una hora determinada el día 1 de cada mes se tiene la siguiente tabla:

	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Temperatura	-1	3	8	9	11	13	20	25	21	14	9	4

Calcula la temperatura media.

Actividad resuelta

Pero si tienes muchos datos y los tienes agrupados en una tabla de frecuencias, puedes hacerlo mejor de otra manera.

- Imagina que tienes las siguientes notas, a las que llamas x_i, con las frecuencias absolutas, a las que llamas f_i:

												Suma total
x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
f_i	1	2	1	2	3	8	7	6	6	4	3	**43**

Esto significa que hay dos 1, hay dos 3, y que hay 8 personas que han sacado un 5. No vamos a sumar 1 +1 dos veces, o 5 + 5 + 5… ocho veces, sino multiplicar 1 · 2, 3 · 2, 5 · 8…

Añadimos una fila a la tabla con esos productos:

$x_i \cdot f_i$	0	2	2	6	12	40	42	42	48	36	30	**260**

Sumamos esa fila $x_i \cdot f_i$ y obtenemos 260. Como la de frecuencias f_i suma 43, las dividimos, por lo que la media resulta: Media = 260 / 43 = 6,04.

En general si la variable toma los valores x_1, x_2, …, x_n, con una frecuencia absoluta f_1, f_2, …, f_n, para calcular la media se multiplica cada valor por su frecuencia, se suman dichos productos y se divide por el total de datos:

Media = $(x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \ldots + x_n \cdot f_n)/(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)$

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

11. Se ha lanzado un dado 50 veces y se ha confeccionado la siguiente tabla de frecuencias absolutas:

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	9	8	7	8	8	10

Calcula la media y comprueba que es 3,56.

12. Lanzamos 2 dados y sumamos los valores obtenidos. Repetimos el experimento 100 veces y obtenemos las siguiente tabla de frecuencias absolutas.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f_i	3	6	7	8	16	20	15	8	7	6	4

a) Calcula la media.

b) Repite ahora tú los lanzamientos, ahora sólo 20, y calcula de nuevo la media.

Actividad resuelta

- Una compañía de seguros de automóvil ha realizado un estudio sobre 1000 asegurados para saber cuánto dinero ha gastado la compañía en reparaciones por accidente. Los datos están en la tabla:

Dinero gastado en euros	De 0 a 100	De 100 a 300	De 300 a 500	De 500 a 900	De 900 a 1100	De 1100 a 1500	Más de 1500 euros
Número de asegurados	167	150	145	131	106	57	24

Ahora la cosa se complica. No conoces el valor de x_i. Puedes construir la tabla de frecuencia sustituyendo cada intervalo por su punto medio:

							Suma Total
x_i	50	200	400	700	1000	1300	1700	
f_i	167	150	145	131	106	57	24	780

Y ahora ya sabes calcular la media. Añadimos la fila de los productos $x_i \cdot f_i$.

$x_i \cdot f_i$	8350	30000	58000	91700	106000	74100	40800	408950

La suma de esos productos es: 408950, y la suma de las frecuencias es: 780, luego la media del dinero gastado en seguros es: Media = 408950 / 780 = 524'3 €.

Actividades propuestas

13. Calcula la media de los pesos de 40 estudiantes de un centro escolar, sabiendo que la tabla de frecuencias absolutas, con intervalos es:

Peso	35 - 41	41 - 47	47 - 53	53 - 59	59 - 65	65 - 71	71 - 77
Estudiantes	1	10	12	9	5	1	2

4.2. Moda

¿Qué es lo que está de moda? Lo que más se lleva.

La **moda** de una distribución de frecuencias es el valor más frecuente.

Actividad resuelta

La moda de las tablas de frecuencias siguientes es la indicada:

- Medio de transporte

Medio de transporte	Frecuencia
Andando	47
Metro	30
Autobús	15
Coche	8
TOTAL	100

La moda es ir *andando*.

- Notas

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_i	1	2	1	2	3	8	7	6	6	4	3

La moda es 5.

- Lanzamiento de un dado

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	9	8	7	8	8	10

La moda es 6.

- Lanzamiento de dos dados

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f_i	3	6	7	8	16	20	15	8	7	6	4

La moda es 7.

Nota

Puede ocurrir que una distribución de frecuencias tenga más de una moda. Por ejemplo, la distribución:

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	9	8	9	8	8	9

tiene 3 modas, 1, 3 y 6, ya que el valor más alto de la frecuencia absoluta es 9 en los tres casos.

La moda permite clasificar los conjuntos de datos en *unimodales*, *bimodales* o *plurimodales*, según el número de modas que tengan.

4.3. Mediana

La **mediana** es el valor central que deja por debajo el mismo número de datos que por encima.

Una forma de calcular la mediana es ordenar los valores de menor a mayor, y si el número de datos es impar, el valor central es la mediana. Si el número de datos es par, la mediana es la media de los dos datos centrales.

Actividad resuelta

- La mediana de las notas, ya ordenadas siguientes: 2, 3, 5, 7, 9, 9, 10, es 7, pues es el valor central de un número impar de datos.
- La mediana de las notas: 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 10, es la media entre 5 y 7, es decir, es 6, pues 5 y 7 son los valores centrales de un número par de datos.

Hay que destacar que esta medida de tendencia central, a diferencia de la media, no se ve afectada por valores extremos. Es decir, la mediana de las notas: 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 1000, sigue siendo la media entre 5 y 7, es decir, 6.

Actividades propuestas

14. Calcula la media, la mediana y la moda de las distribuciones siguientes:

a) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 1000

b) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 10

c) 0, 0, 4, 5, 7, 9, 9, 1000, 2000

Observa en cada caso cómo influyen los valores extremos.

4. MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Varianza es la media de los cuadrados de las distancias de los datos a la media.

$$\text{Varianza} = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2}{n} = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}$$

Equivalentemente (desarrollando los cuadrados que aparecen en la expresión) se puede calcular mediante esta otra expresión:

$$\text{Varianza} = \frac{\sum x_i^{\,2}}{n} - \bar{x}$$

Desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza.

Se representa por σ.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^{\,2}}{n} - \bar{x}}$$

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- Las alturas de los 12 jugadores de la Selección Española de Baloncesto (en metros) que participaron en la Eurocopa 2013 se recogen en la siguiente tabla:

2’03	1’96	1’91	2’11	1’91	1’93	2’08	1’99	1’90	2’16	2’06	2’03

Calculamos la media y se obtiene 2’0058. Calcula la varianza y la desviación típica.

Para calcular la **varianza** primero calcularemos la suma que aparece en el numerador, de modo similar a como acabamos de hacer. Después terminaremos dividiendo entre el número de datos.

$(2'03 - 2'0058)^2 + (2'06 - 2'0058)^2 + (2'16 - 2'0058)^2 + (1'90 - 2'0058)^2 + (1'99 - 2'0058)^2 +$

$(2'08 - 2'0058)^2 + (1'93 - 2'0058)^2 + (1'91 - 2'0058)^2 + (2'11 - 2'0058)^2 + (1'91 - 2'0058)^2 +$

$(1'96 - 2'0058)^2 + (2'03 - 2'0058)^2 = 0'08934$

Así la **varianza** es 0’08934/12 = 0’00744

La **desviación típica** es la raíz cuadrada de la varianza: $\sigma = \sqrt{0'00744}$ = 0’08628.

Actividades propuestas

15. Calcula la media, la varianza y la desviación típica de los datos siguientes:

a) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 1000

b) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 10

c) 0, 0, 4, 5, 7, 9, 9, 1000, 2000

16. Dadas las temperatura en una ciudad a una hora determinada el día 1 de cada mes se tiene la siguiente tabla:

	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Temperatura	-1	3	8	9	11	13	20	25	21	14	9	4

Calcula la media, la varianza y la desviación típica de los datos siguientes:

Si tenemos frecuencias relativas las expresiones son:

$$\text{Varianza} = \sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i} = \sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2$$

Por tanto la **desviación típica** se calcula:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}} = \sqrt{\frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2}$$

Actividades propuestas

17. Se ha lanzado un dado 50 veces y se ha confeccionado la siguiente tabla de frecuencias absolutas:

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	9	8	7	8	8	10

La media es 3,56. Calcula la varianza y la desviación típica.

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

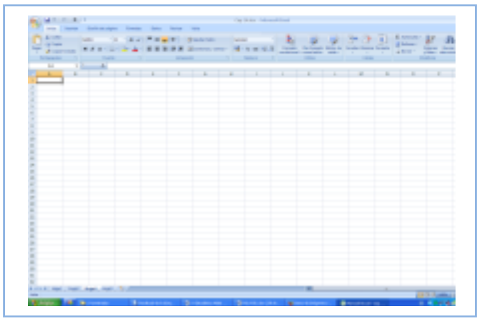
5. EL ORDENADOR Y LA ESTADÍSTICA

El ordenador puede ayudar mucho en los cálculos estadísticos. Hay muchos programas para ello. En particular son fáciles de usar las hojas de cálculo. Vamos a resolver un problema utilizando una de ellas.

Actividad resuelta

- Se conocen las cantidades de residuos sólidos recogidos en m^3/semana durante 12 semanas de una urbanización:

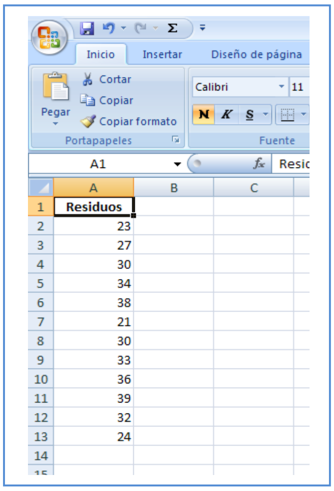
  23, 27, 30, 34, 38, 21, 30, 33, 36, 39, 32, 24.



Queremos utilizar el ordenador para dibuja las representaciones gráficas de estos datos.

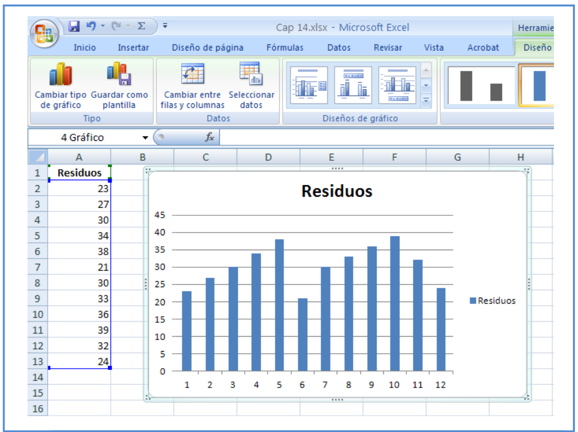
Abrimos una hoja de Excel.

Para que tenga sentido deberíamos agrupar los datos en una tabla. En la casilla A1 escribimos “Residuos”, y en las casillas A2, …, A13 copiamos los datos.



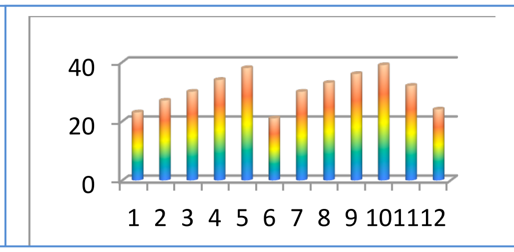
Para dibujar las gráficas se utiliza en Menú: Insertar.

En el menú *Insertar*, en *Gráficos*, desarrolla *Columnas*, elegimos Columna en 2 D, y obtenemos el diagrama de **barras** de la figura.

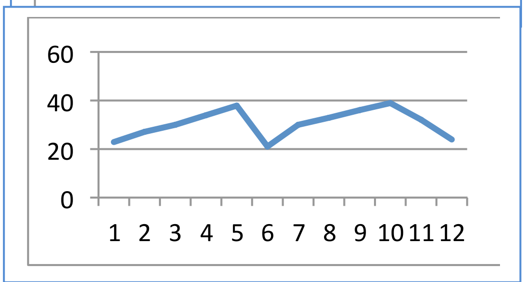


Podíamos haber elegido “Columnas en 3D”, “Cilíndrico”, “Cónico”, “Pirámide”, o modificar el color, añadir o quitar rótulos…

Vemos un diagrama de barras cilíndrico en varios colores.

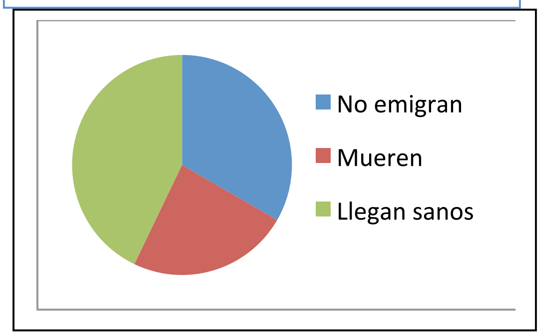


Ahora queremos representar un diagrama de **líneas** con los mismos datos. Volvemos al menú: Insertar, seleccionamos “Línea” y de nuevo tenemos varias opciones. Seleccionamos en nuestra hoja los datos, desde A2 hasta A13, y marcamos la primara línea 2D, y obtenemos:



Para hacer un diagrama de **sectores** hemos tomado datos sobre emigrantes africanos. Seleccionamos los datos, y en el menú Insertar simplemente elegimos “Circular” gráfico 2D, y ya obtenemos un gráfico de sectores.

	Datos %
No emigran	35
Mueren	25
Llegan sanos	45



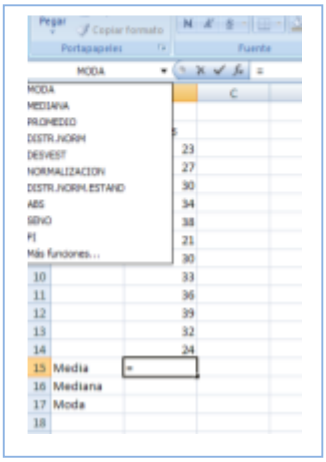
Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Para calcular la **media**, la **mediana** o la moda, abrimos la hoja de cálculo. Consta de filas indicadas por las letras A, B, C… y columnas indicadas por los números 1, 2, 3… cada casilla se identifica por su columna y su fila, por ejemplo, A1 es la primera casilla.

Escribimos los datos que nos han dado en la columna B a partir de la fila 3, dejando la primera columna y las dos primeras filas para poner títulos.

Escribimos en B2: Residuos; en A15: Media; en A16: Mediana; y en A17: Moda.

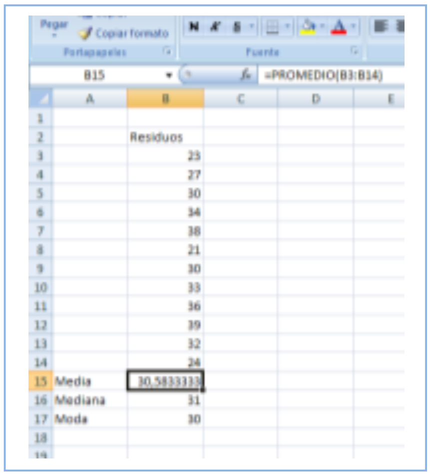
Nos colocamos sobre la casilla B15. En la ventana *fx* escribimos el signo igual: **=**, y desplegamos las funciones de la lista de la izquierda. Nos interesan: PROMEDIO (que es la media), MEDIANA y MODA.



Escribimos en la casilla B15:

=PROMEDIO(B3:B14),

y obtenemos la media que es 30,58.



Observa lo que esa expresión significa. Estás diciendo al ordenador que calcule la media (promedio) de los datos que están entre la casilla B3 y la casilla B14.

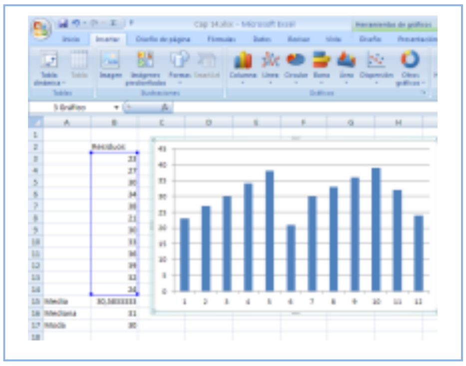
Para calcula la mediana nos colocamos en la casilla B16 y escribimos:

=MEDIANA(B3:B14),

y para calcular la moda nos colocamos en B17 y escribimos: =MODA(B3:B14).

Hemos obtenido que la mediana es 31 y la moda es 30.

Puedes investigar la cantidad de funciones que tiene el ordenador que también calcula (y que aún no conoces), desviación típica, coeficiente de curtosis, valor mínimo, valor máximo, cuartil…



También dibuja gráficas con facilidad. Para que tenga sentido deberíamos agrupar los datos en una tabla. Pero si desarrollas el menú de "*Insertar*" puedes ver los tipos de gráficas que puedes dibujar: de *columna*, *línea*, *circular*, *barra*, *dispersión*…

Hemos dibujado un diagrama de rectángulos seleccionado los datos e insertando un gráfico de columnas.

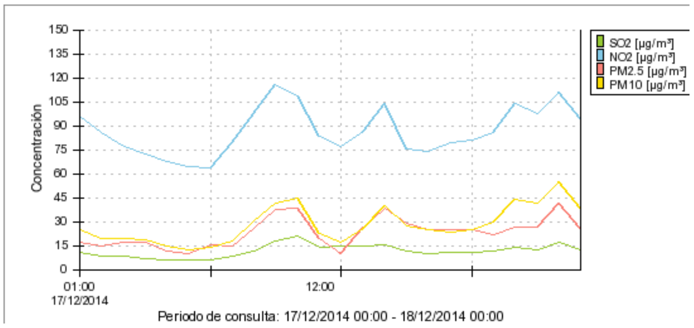
Juega con el ordenador. Inserta otros gráficos distintos de columna, de línea, circular, barra, dispersión e indica a qué tipo de representación corresponden.

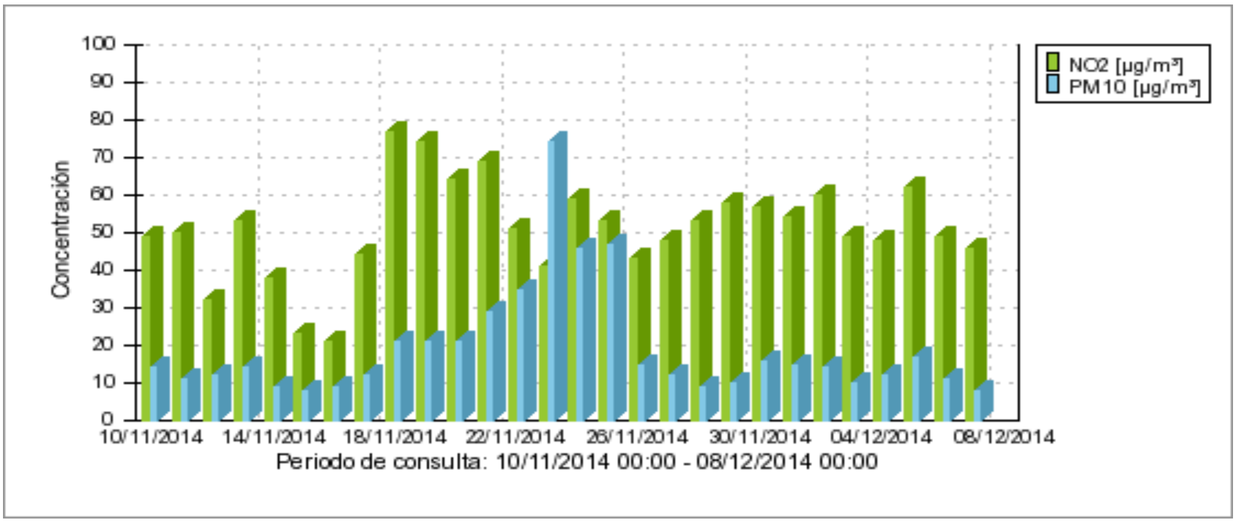
Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

Series temporales sobre la calidad del aire en Madrid

En Madrid se controla la calidad del aire. Puedes ver el **diagrama de líneas** de las concentraciones de **NO_2, SO_2 y partículas** durante un día en la estación de Cuatro Caminos. En el eje de abscisas aparece el tiempo, las 24 horas. En el eje de ordenadas las distintas concentraciones.





Tenemos ahora un **diagrama de barras** también de la estación de Cuatro Caminos de únicamente NO_2 y partículas con los valores **medios** diarios durante cuatro semanas, a partir del 8 de diciembre. Analiza esta nueva serie temporal. Consideras que estos valores son altos o son bajos

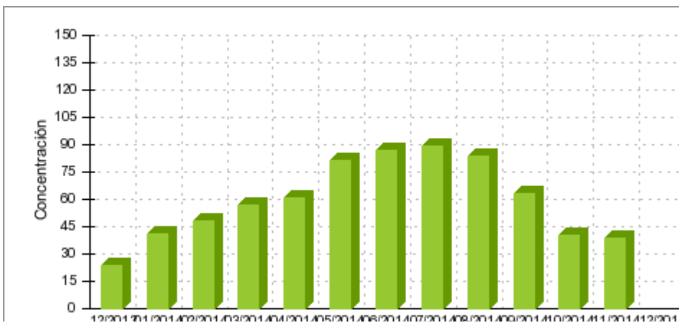
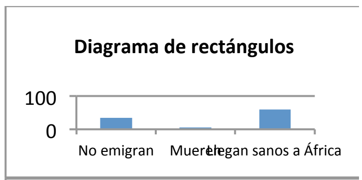
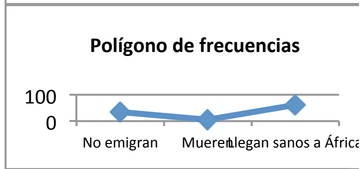
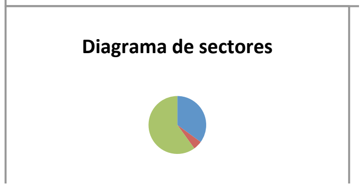


Diagrama de barras de la concentración de **ozono** en la estación de la Casa de Campo con los valores **medios** mensuales obtenidos durante un **año**. Cuándo es mayor la concentración de ozono, ¿en invierno o en verano?

La Comunidad de Madrid y el Ayuntamiento de Madrid controlan la calidad del aire, lo que es obligatorio para cumplir con las directivas europeas. Puedes buscar información en Internet escribiendo: http://www.mambiente.munimadrid.es/svca/index.php. o simplemente “calidad del aire en Madrid”.

RESUMEN

		Ejemplos
Frecuencia absoluta	Número de veces que se repite un dato estadístico	Si al tirar un dado hemos 2 veces el 3, 2 es la frecuencia absoluta de 3.
Frecuencia relativa	Frecuencia absoluta dividido por el número de experimentos	Si se realiza un experimento 500 veces y la frecuencia absoluta de un suceso es 107, la frecuencia relativa es 107/500.
Diagrama de rectángulos	Los datos se representan mediante rectángulos de igual base y de altura proporcional a la frecuencia. Se indica en el eje horizontal la variable y en el vertical las frecuencias.	
Diagrama de líneas	De unen los puntos superiores de un una diagrama de rectángulos	
Pictograma	Se sustituye los rectángulos por un dibujo representativo	
Diagrama de sectores	En un círculo se dibujan sectores de ángulos proporcionales a las frecuencias	
Media aritmética	Es el cociente entre la suma de todos los datos y el número total de datos.	En los datos 3, 5, 5, 7, 8, la **media** es: (3 + 5 + 5 + 7 + 8)/5 = 28/5 = 5,6. La **moda** es: 5. La **mediana** es 5
Mediana	Deja por debajo la mitad de los valores y por encima la otra mitad	
Moda	El valor que más se repite.	

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

El azar y la probabilidad

1. Se lanzar un dado 500 veces y se obtienen los siguientes resultados:

Resultado	1	2	3	4	5	6
Número de veces	70	81	92	85		81

a) ¿Cuántas veces ha salido el 5?

b) Escribe en tu cuaderno una tabla con las frecuencias absolutas

c) Escribe en tu cuaderno una tabla con las frecuencias relativas

2. En una clase se ha medido el tamaño de las manos de cada uno de los alumnos y alumnas, y el resultado en centímetros ha sido el siguiente:

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

19, 18, 20, 19, 18, 21, 19, 17, 16, 20,

16, 19, 20, 21, 18, 17, 20, 19, 22, 21,

23, 21, 17, 18, 17, 19, 21, 20, 16, 19

a) ¿Qué tamaño ha sido el valor mínimo? ¿Y el máximo?

b) Haz una tabla de frecuencias absolutas y otra de frecuencias relativas.

c) Haz una tabla de frecuencias absolutas acumuladas y otra de frecuencias relativas acumuladas.

3. Calcula la frecuencia absoluta de los datos de una encuesta en la que se ha elegido entre ver la televisión, t, o leer un libro, l:

t, l, t, t, t, l, t, t, l, t, l, t, l, t, t, t, l, l, t, l, t, l, t, l, t.

Gráficos estadísticos

4. Se ha preguntado en un pueblo de la provincia de Madrid el número de hermanos que tenían y se ha obtenido la siguiente tabla de frecuencias absolutas sobre el número de hijos de cada familia:

Número de hijos	1	2	3	4	5	6	7	8 o más
Número de familias	46	249	205	106	46	21	15	6

a) Escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias relativas.

b) Haz un diagrama de rectángulos de frecuencias absolutas y otro de frecuencias relativas.

c) Haz un diagrama de líneas de frecuencias absolutas y otro de frecuencias relativas.

5. Haz una encuesta con tus compañeros y compañeras de curso preguntando el número de hermanos y confeccionando una tabla sobre el número de hijos y el número de familias.

a) Haz una tabla de frecuencias relativas

b) Haz un diagrama de rectángulos de frecuencias relativas

c) Compara la tabla de frecuencias relativas y el diagrama de rectángulos de frecuencias relativas que obtengas con el obtenido en el ejercicio anterior.

6. Un batido de frutas contiene 25 % de naranja, 15 % de plátano; 50 % de manzana y, el resto de leche. Representa en un diagrama de sectores la composición del batido.

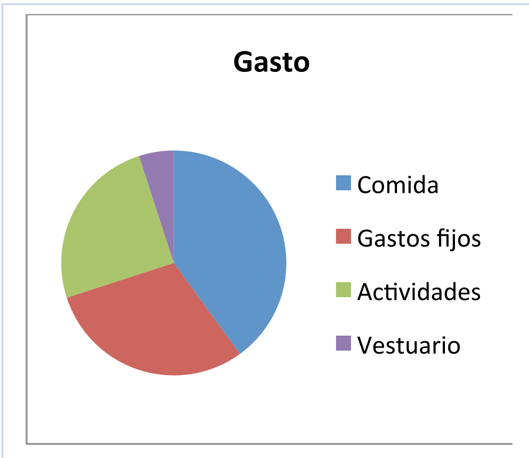
7. En un campamento de verano se han gastado diez mil euros. El gráfico muestra la distribución del gasto:

1. Comida: 40 %
2. Limpieza y mantenimiento: 30 %
3. Actividades: 25 %
4. Vestuario: ....

a) ¿Qué porcentaje se gastó en vestuario?

b) ¿Cuántos euros se gastaron en comida?

c) ¿Cuánto mide el ángulo del sector correspondiente a



actividades?

8. Busca en revistas o periódicos dos gráficas estadísticas, recórtalas y pégalas en tu cuaderno. En muchas ocasiones estas gráficas tienen errores. Obsérvalas detenidamente y comenta las siguientes cuestiones:

a) ¿Está clara la variable a la que se refiere? ¿Y las frecuencias?

b) ¿Son correctas las unidades? ¿Pueden mejorarse?

c) Comenta las gráficas.

9. Se hace un estudio sobre el número de video juegos del alumnado de una clase. El resultado se representa en la tabla siguiente:

Número de video juegos	0	1	2	3	4	5
Número de estudiantes	3	4	3	5	9	7

a) Copia la tabla en tu cuaderno y haz una tabla de frecuencias relativas y de frecuencias relativas acumuladas.

b) ¿Qué porcentaje tienen menos de 3 video juegos?

c) Representa los datos en un diagrama de sectores y en un diagrama de líneas.

MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN

10. Javier ha tirado un dado 10 veces y ha obtenido los siguientes resultados:

6, 3, 1, 4, 2, 2, 1, 4, 3, 4

Calcula la media aritmética.

11. Raquel ha tenido las siguientes notas en sus exámenes de Lengua: 7, 5, 6, 4, 7, 10, 7. Calcula la media aritmética.

12. Se ha medido el tamaño de la mano de 10 alumnos y alumnas, y el resultado en centímetros ha sido el siguiente:

19, 18, 21, 21, 18, 17, 18, 17, 19, 21

Calcula la media aritmética.

13. Nos interesa conocer la distribución de notas obtenidas por 20 estudiantes. Las notas son:

2, 8, 9, 0, 0, 5, 8, 2, 7, 1, 6, 3, 7, 2, 4, 9, 4, 9, 5, 1

a) Escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias absolutas.

b) Haz un diagrama de líneas de frecuencias absolutas.

c) Calcula la media.

14. Los jugadores de un equipo de baloncesto tiene las siguientes edades:

13, 12, 14, 11, 12, 12.

Calcula la media.

15. Hacemos una encuesta preguntando a 10 familias cuántas hijos tienen. Los resultados son:

0, 1, 0, 2, 1, 4, 3, 2, 1, 1

Calcula la media.

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

16. Pepa ha tirado un dado 25 veces y ha obtenido los siguientes resultados:

1, 2, 5, 6, 3, 1, 4, 5, 6, 1, 3, 1, 2, 2, 1, 6, 2, 2, 4, 3, 4, 6, 6, 1, 4

a) Calcula la media aritmética

b) Calcula la mediana

c) ¿Cuál es la moda? ¿Es única?

17. Sara ha tenido las siguientes notas en sus exámenes de Matemáticas: 9, 7, 8, 6, 9, 10, 9

a) Calcula la media aritmética

b) Calcula la mediana

c) ¿Cuál es la moda? ¿Es única?

18. Se ha tenido el resultado de medir en una clase el tamaño de las manos de cada uno de los alumnos y alumnas, y el resultado en centímetros ha sido el siguiente:

19, 18, 20, 19, 18, 21, 19, 17, 16, 20,

16, 19, 20, 21, 18, 17, 20, 19, 22, 21,

23, 21, 17, 18, 17, 19, 21, 20, 16, 19

a) Calcula la media aritmética

b) Calcula la mediana

c) ¿Cuál es la moda? ¿Es única?

19. Nos interesa conocer la distribución de notas obtenidas por 40 estudiantes. Las notas son:

4, 1, 7, 10, 3, 2, 8, 9, 0, 0, 5, 8, 2, 7, 1, 2, 8, 10, 2, 10,

3, 4, 8, 9, 3, 6, 3, 7, 2, 4, 9, 4, 9, 5, 1, 3, 3, 9, 7, 8, 10

d) Escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias absolutas.

e) Haz un diagrama de líneas de frecuencias absolutas.

f) Calcula la media

g) Calcula la mediana

h) Calcula la moda

20. Hacemos una encuesta preguntando a 10 familias cuántas mascotas tienen. Los resultados son:

0, 1, 0, 2, 1, 4, 3, 0, 0, 1

Calcula la media, la mediana y la moda.

21. Los jugadores de un equipo de balonmano tiene las siguientes edades:

12, 14, 13, 12, 15, 11, 12, 12, 13, 14, 11, 12, 12.

a) Calcula la media

b) Calcula la mediana

c) Calcula la moda

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ordenador

22. Introduce los datos de la encuesta sobre el número de hijos en el ordenador.

23. Organiza los datos en una tabla calculando las frecuencias absolutas de 0, 1, 2, 3 y 4. Introduce esta tabla en el ordenador y haz una representación de barras, un diagrama de líneas y un diagrama de sectores.

24. Utiliza el ordenador para comprobar los resultados obtenidos en los ejercicios anteriores.

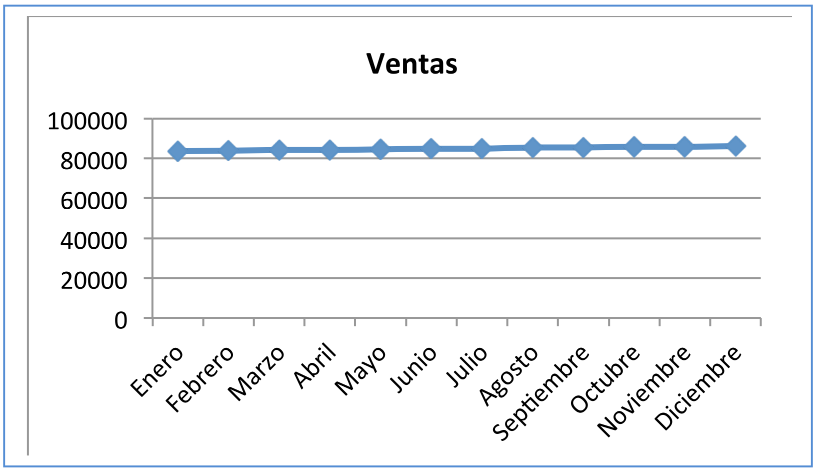
25. Realiza una encuesta en tu clase y lleva los resultados a un ordenador para hacer un informe. La encuesta podría ser, por ejemplo, si le gusta o no una determinada serie de televisión, o un programa; o el número de días de la sema que hacen algún deporte, el tipo de música que les gusta; o... Piensa sobre qué podrías preguntar.

Problemas

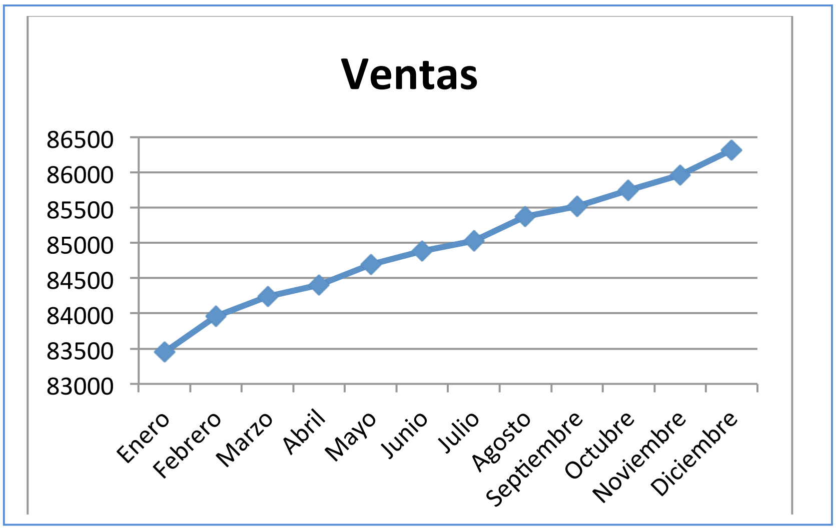
26. El Director Comercial de una empresa va a ser evaluado. Para ello debe dar cuanta de los resultados obtenidos. Quiere quedar bien, pues eso le puede suponer un aumento de sueldo. Se han vendido las siguientes cantidades:

Meses	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Ventas	83451	83962	84238	84401	84693	84889	85032	85378	85524	85751	859967	86316

El estadístico de la empresa le ha entregado la siguiente gráfica:



No le ha gustado nada, y para la presentación él se ha confeccionado el siguiente gráfico:



Ambos gráficos son correctos.

Escribe un informe sobre cómo pueden los distintos gráficos dar impresiones tan diferentes.

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

27. Tira una moneda 100 veces y anota los resultados obtenidos: C, C, x, …. Construye una nueva lista anotando, cada vez que haya salido cara, el resultado siguiente: C, x, …Confecciona luego dos tablas: una de frecuencias absolutas y otra de frecuencias relativas. Representa los resultados en un diagrama de barras y en un diagrama de sectores.

28. Se conoce el volumen semanal de residuos sólidos recogidos en m^3 durante las 52 semanas de un año, en un municipio pequeño: 25'5, 27'1, 31'8, 34'2, 38'9, 21'3, 28'7, 33'2, 36'5, 39'6, 25'2, 24'7, 23'2, 23'3, 22'2, 26'4, 26'7, 29'6, 31'3, 30'5, 28'3, 29'1, 26'7, 25'2, 24'5, 23'7, 25'4, 27'2, 31'7, 34'5, 38'4, 21'2, 28'1, 33'7, 36'8, 39'9, 31'7, 34'4, 38'2, 21'9, 28'1, 33'5, 25'2, 24'7, 23'2, 23'3, 22'2, 26'4, 25'9, 24'1, 23'2, 23'6, 26'4.

Calcula la media, la moda, la mediana , la varianza y la desviación típica.

29. Con los datos del problema anterior:

a) Representa los datos en una tabla tomando intervalos de longitud dos m^3: (21, 23), (23, 25), … (39, 41)

b) Dibuja un diagrama de rectángulos y un diagrama de líneas de frecuencias absolutas..

c) ¿Cuántas familias tienen un volumen de basuras mayor que 31 m^3?

d) ¿Qué porcentaje de familias tienen un volumen de basuras menor que 35 m3?

30. Busca en revistas o periódicos dos gráficas estadísticas, recórtalas y pégalas en tu cuaderno. En muchas ocasiones estas gráficas tienen errores. Obsérvalas detenidamente y comenta las siguientes cuestiones:

a) ¿Está clara la variable a la que se refiere? ¿Y las frecuencias?

b) ¿Son correctas las unidades? ¿Pueden mejorarse?

c) Comenta las gráficas.

31. La media de seis números es 5. Se añaden dos números más pero la media sigue siendo 5. ¿Cuánto sumas estos dos números?

AUTOEVALUACIÓN

1. Indica la respuesta correcta:

a) La frecuencia relativa se obtiene dividiendo por 100 la frecuencia absoluta

b) La frecuencia relativa se obtiene sumando todos los valores anteriores

c) La frecuencia relativa se obtiene dividiendo la frecuencia absoluta por el total de experimentos.

d) Frecuencia relativa es lo mismo que probabilidad

2. Se extrae una carta de una baraja española. La probabilidad de que sea un rey es:

a) 1/40 b) 0,25 c) 4/40 d) 10/40

3. Indica cual es la frase que falta en la siguiente definición:

En … … …. … … …. las frecuencias se representan en un círculo que se divide en sectores circulares de amplitudes proporcionales a las frecuencias.

a) Diagrama de líneas b) Diagrama de rectángulos c) Pictograma d) Diagrama de sectores

4. Si en una tabla de frecuencias a un valor le corresponde una frecuencia relativa de 0,125, al dibujar un diagrama de sectores el ángulo correspondiente es de:

a) 45 º b) 30 º c) 60 º d) 72 º

5. En un diagrama de rectángulos de frecuencias relativas, la suma de sus alturas es igual a:

a) 100 b) 1 c) Total de datos d) Suma de sus bases

6. La media de los siguientes datos 7; 0; 9,5; 2; 4,1; 3,8, es:

a) 6,3 b) 3,8 c) 4,4 d) 5,5

7. La mediana de los siguientes datos 3, 4, 6, 7, 8, es:

a) 6 b) 7 c) 4 d) 5

8. La moda de los siguientes datos 3, 4, 6, 7, 5, 8, 7, 7, es:

a) 6 b) 7 c) 4 d) 5

9. Se tira un dado. ¿Cuál es la probabilidad de que no sea un 2?

a) 3/4 b) 1/6 c) 2/6 d) 5/6

10. Queremos saber los deportes que hacen los escolares de un cierto centro. Pasamos una encuesta a 20 de 2º A. Indica en este caso quién es la población y quien es una muestra:

a) Estudiantes de España y estudiantes de ese centro

b) Estudiantes de ese centro y estudiantes de 2º A

c) Estudiantes de ese centro y los 20 estudiantes de 2º A

d) Estudiantes de 2º A y los 20 estudiantes elegidos de 2º A

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Nieves Zuasti

Revisores: Raquel Caro y Sergio Hernández

Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

Índice

Resumen

El origen de la Probabilidad puede encontrarse en los juegos de azar, y los juegos de azar, dados, cartas, lotería… hacen un buen uso de la Estadística y la Probabilidad.

Por ejemplo, si lanzamos un dado y gana aquel que acierta el número que saldrá, ¿da igual el número que digamos? Parece que sí.

Sin embargo, si en lugar de lanzar un dado lanzamos dos, uno azul y otro rojo, por ejemplo y ahora el juego consiste en sumar los números que salen en cada dado y apostamos a acertar la suma. Ahora no es lo mismo apostar a una suma que a otra. De hecho hay resultados que te harán ganar con más facilida que otros ¿sabes la razón? ¿sabrías decir que resultados son esos?

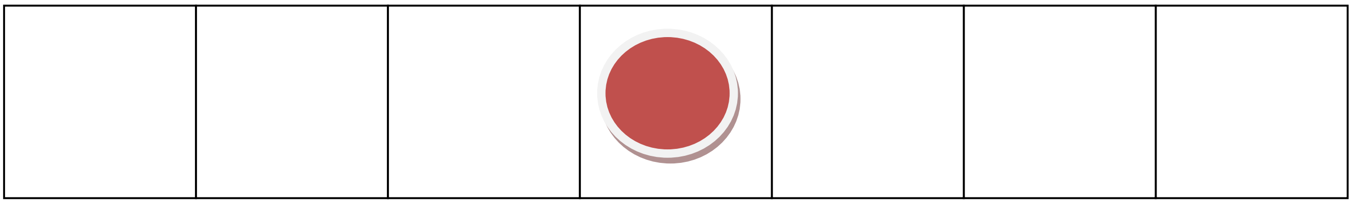
En este capítulo vamos a estudiar esta parte de las matemáticas que se llama probabilidad

1. EL AZAR Y LA PROBABILIDAD

1.1. Fenómenos o experimentos aleatorios

Un **fenómeno o experimento aleatorio** es aquel, que manteniendo las mismas condiciones en la experiencia, el resultado no es siempre el mismo.

Veamos un juego: Dibuja 3 casillas hacia la derecha, una casilla central y 3 casillas hacia la izquierda. Coloca una ficha en la casilla central. Tira una chincheta varias veces.



Si cae con la punta hacia arriba, avanza una casilla hacia la derecha, en caso contrario avanzas hacia la izquierda. Anota cuántas tiradas necesitas para llegar a una de las metas. Es un *ejemplo* de **fenómeno o experimento aleatorio** porque no se puede predecir el resultado.

Sin embargo, calcular el coste de una mercancía, sabiendo el peso y el precio por kg, no es un experimento aleatorio. Tampoco lo es calcular el coste del recibo de la luz sabiendo el gasto.

Actividad resuelta

Son experimentos aleatorios:

Lanzar una moneda y anotar si sale cara o cruz

Lanzar un dado

Si en una urna hay 5 bolas blancas y 3 rojas, sacamos una y anotamos el color.

Sacar una carta de una baraja

Abrir un libro y anotar la página por la que se ha abierto

No son experimentos aleatorios

Si sales sin paraguas cuando llueve seguro que te mojas.

El precio de medio kilo de rosquillas si las rosquillas cuestan a 3 € el kilo.

Soltar un objeto y ver si cae

Actividades propuestas

Indica si es un fenómeno aleatorio:

La superficie de las comunidades autónomas españolas
Anotar el sexo del próximo bebé nacido en una clínica determinada
El área de un cuadrado del que se conoce el lado
Tiramos dos dados y anotamos la suma de los valores obtenidos

Saber si el próximo año es bisiesto.

1.3. Experimentos aleatorios. Sucesos

Al realizar un experimento aleatorio existen varios posibles resultados o **sucesos posibles**.

Por ejemplo los posibles resultados al tirar una moneda son que salga *cara* o salga *cruz*.
Los posibles resultados al tirar un dado es que nos salga 1, 2, 3, 4, 5 o 6.

Al realizar el experimento siempre se obtendrá uno de los posibles resultados.

Al conjunto de resultados de un experimento aleatorio se le denomina **espacio muestral**.

A los elementos del espacio muestral se les llama **sucesos elementales**.

Un **suceso** es un subconjunto del espacio muestral.

Actividad resuelta

El espacio muestral del experimento aleatorio:
Extraer una bola de una bolsa con 7 bolas blancas y 2 negras es {*blanca*, *negra*}
Sacar una carta de una baraja española y mirar el palo es {*oros*, *copas*, *bastos*, *espadas*}
Al sacar un papel de una bolsa donde se han puesto 5 papeles numerados del 1 al 5, es {1, 2, 3, 4, 5}
Tirar dos monedas es: {(*cara*, *cara*), (*cara*, *cruz*), (*cruz*, *cara*), (*cruz*, *cruz*)}

Así, para el lanzamiento de un dado, aunque el espacio muestral habitual será {1, 2, 3, 4, 5, 6}, es posible que sólo sea de interés si el resultado obtenido es par o impar, en cuyo caso el espacio muestral sería {*par*, *impar*}. En el caso del lanzamiento consecutivo de dos monedas, el espacio muestral puede ser {{C, C}, {C, +}, {+, C}, {+, +}}, o bien: {*0 caras*, 1 *cara*, 2 *caras*}, si nos interesa únicamente el número de caras obtenidas.

Algunos sucesos del experimento aleatorio tirar un dado son:
Sacar un número par {2, 4, 6}.
Sacar un número mayor que 3 {4. 5, 6}.
Sacar un número menor que 5 {1, 2, 3, 4}.

Actividades propuestas

Inventa cinco experimentos aleatorio y escribe el conjunto de posibles resultados
Escribe el espacio muestral del experimento aleatorio: “*Escribir en cinco tarjetas cada una de las vocales y sacar una al azar*”
Escribe el espacio muestral del experimento aleatorio: “*Tirar una chincheta y anotar en que postura cae*”
Inventa dos sucesos del experimento aleatorio de tirar dos monedas.
En el juego de lotería, indica dos sucesos respecto a la cifra de las unidades del primer premio.
En el juego de dominó, indica tres sucesos con fichas dobles.
Escribe tres sucesos aleatorios de sacar una carta de una baraja.

1.3. Probabilidad

Dados todos los sucesos posibles de un experimento aleatorio, asignaremos a cada suceso A, una cantidad que denotaremos por P(A) y que llamaremos la probabilidad del suceso A.

Ya sabes que la probabilidad es una medida que nos indica el grado de confianza de que ocurra un determinado suceso.

La **probabilidad** se expresa mediante un número comprendido entre 0 y 1.

Si ese número está próximo a 0 diremos que es un suceso improbable (ojo, improbable no quiere decir que sea imposible), mientras que si está próximo a 1 diremos que ese suceso es mucho más probable.

La probabilidad es una medida de la certeza que tenemos que se verifique un suceso. Sirve para prevenir el futuro usando lo que se sabe sobre situaciones pasadas o presentes.

Pero la palabra "probable" es de uso común, por lo que siempre sabes si algo es "*muy probable*", "*bastante probable*", "*poco probable*" o "*muy improbable*".

Actividad resuelta

- Si no has estudiado nada un examen es *bastante probable* que te suspendan, y si te lo sabes, es *muy probable* que saques buena nota.
- Si una persona roba un banco *es probable* que acabe en la cárcel.
- Es *poco probable* que se caiga el avión que acaba de salir de Barajas
- Es *seguro* que después del lunes llega el martes.
- Es *muy improbable* que mañana haya un maremoto.

Actividades propuestas

9. Señala si son *poco probables* o *muy probables* los siguientes sucesos:

a) El jueves vas al colegio.

b) Cruzas la calle y te pilla un coche.

c) Hace una quiniela y le toca el premio máximo.

d) Le toca la lotería a Juan.

e) Le pongan una multa a una persona que conduce habiendo bebido alcohol.

f) Sales a la calle y te cae una cornisa encima.

g) ¿Amanecerá mañana?

h) Mañana haya un terremoto en Madrid.

Para calcular probabilidades se usan dos técnicas, una **experimental**, analizando las frecuencias relativas de que ocurra el suceso, y la otra **por simetría**.

Ejemplo

En una bolsa que contiene 20 bolas blancas introducimos una bola negra (indistinguible al

tacto).Mezclamos bien las bolas de la bolsa, y realizamos el experimento consistente en meter la mano en la bolsa y sacar una bola.
Sin que hayamos estudiado nada formalmente sobre probabilidad. ¿Qué piensas que es más probable, que la bola sacada sea blanca o que sea negra? ¡Estamos de acuerdo en que es más probable sacar una bola blanca!

Ahora ya sí que podemos plantearnos una pregunta: ¿En qué medida es más probable sacar una bola blanca?

No es difícil de calcular. Los datos que tenemos son los siguientes:

- La bolsa tiene 21 bolas
- 1 bola es negra
- 20 bolas son blancas

La probabilidad de sacar la bola negra es 1 de entre 21. La probabilidad de sacar una bola blanca es de 20 entre 21.

Lo que acabamos de utilizar es conocido como **Ley de Laplace.** Si todos los casos posibles de un espacio muestral son **equiprobables** (esto es, tienen la misma probabilidad de ocurrir), y S es un suceso de ese experimento aleatorio se tiene que

Regla de Laplace:

La probabilidad de un suceso es igual al número de casos favorables dividido por el número de casos posibles

$$P(S) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso } S}{\text{número de casos posibles}}$$

Pero, ¿y si no podemos asegurar que todos los casos sean equiprobables?

La probabilidad de que ocurra un cierto resultado al realizar el experimento, aunque ya se verá en otros cursos en detalle, se calcula como la frecuencia relativa de ese resultado repitiendo el experimento muchas veces. Cuantas más veces repitas el experimento, más se aproximará la frecuencia relativa al valor de la probabilidad.

- Por ejemplo, si tiras una moneda al aire una sola vez y sale cara, parecerá que la probabilidad de sacar cara es 1, pero si repites más veces el experimento, la frecuencia relativa de sacar cara se irá acercando a 0,5 con el tiempo. Eso nos dice que la probabilidad de sacar cara es 0,5.

Actividad resuelta

Mezclamos una baraja española de 40 cartas (los palos son oros, copas, espadas y bastos y en cada palo hay cartas numeradas del 1 al 7 además de una sota, un caballo y un rey).
Se realiza el experimento consistente en cortar la baraja y quedarnos con la carta superior.

Consideraremos los siguientes sucesos:

a) Obtener una figura
b) Obtener una carta con un número impar
c) Obtener una carta de espadas
d) Obtener una carta de espadas o una figura
e) Obtener la sota de oros

En principio las cartas no van a estar marcadas, con lo que la probabilidad de que salga cada una de ellas es la misma. Esto es, estamos ante un experimento aleatorio con todos los casos equiprobables.

En la baraja hay 12 figuras (3 por cada palo). Así

Casos favorables: 12

Casos posibles: 40

Probabilidad: 12/40= 3/10

Por cada palo hay 4 cartas con números impares: 1, 3, 5 y 7.

Casos favorables: 16

Casos posibles: 40

Probabilidad: 16/40=2/5

Hay 10 cartas de espadas en la baraja

Casos favorables: 10

Casos posibles: 40

Probabilidad: 10/40=1/4

Hay 10 cartas de espadas y además otras 9 figuras que no son de espadas (claro, las 3 figuras de espadas ya las hemos contado).

Casos favorables: 19

Casos posibles: 40

Probabilidad: 19/40

Solo hay una sota de oros

Casos favorables: 1

Casos posibles: 40

Probabilidad: 1/40

Más actividades resueltas

- La probabilidad de que salga cara al tirar una moneda es 1/2, pues sólo hay dos casos posibles {*cara*, *cruz*} y suponemos que la moneda no está trucada
- La probabilidad de sacar un 5 al tirar un dado es 1/6, pues hay seis casos posibles {1, 2, 3, 4, 5, 6} y suponemos que el dado no está trucado luego todos ellos son equiprobables.
- La probabilidad de que al cruzar la calle te pille un coche NO es 1/2, pues ya te habría pillado un montón de veces. Para calcular esa probabilidad se recogen datos de peatones atropellados.
- La probabilidad de sacar bola roja de una bolsa con 7 bolas rojas y 3 bolas blancas es 7/10.
- La probabilidad de que un bebé sea niña es aproximadamente 0,5, pero al hacer el estudio con las frecuencias relativas se ha visto que es 0,49.

Observa que para poder utilizar la Regla de Laplace debes haberte cerciorado que los sucesos elementales son equiprobables.

Si cruzas una calle pueden ocurrir dos cosas, que te pille un coche o que no te pille, sin embargo es evidente que la mitad de las veces que cruzas calles no te pilla un coche.

En este caso lo útil es utilizar las frecuencias relativas para estimar probabilidades cuando éstas no son conocidas.

La **ley de los grandes números** nos dice que cuando se repite muchas veces un experimento aleatorio la frecuencia relativa de cada suceso S se aproxima a su probabilidad. Cuanto más grande sea el número de repeticiones, mejor va siendo la aproximación.

En juegos de dados, monedas, cartas… suponemos que no están trucadas y que por eso los sucesos elementales son equiprobables.

- Sacamos una carta de una baraja española. La probabilidad de que sea un oro es 10/40 = 1/4, y la probabilidad de sacar un rey es 4/40 = 1/10.
- Tiramos dos monedas y queremos calcular la probabilidad de que sea cara. Podemos considerar que el espacio de sucesos elementales es: {0 caras, 1 cara, 2 caras}, o bien {(C, C), (C, +), (+, C), (+, +). Para decidir tendremos que saber en cuál de los casos son equiprobables. Jugando, jugando, es decir, le experiencia no dice que son equiprobables en el segundo caso y por tanto la probabilidad de que alguna sea cara es 3/4, en lugar de 2/3 como sería en el primer caso.

Actividades propuestas

10. Calcula la probabilidad de que al tirar con esta ruleta salga el plátano.

11. Calcula la probabilidad de que al sacar una carta de la baraja sea: a) el as de copas, b) una copa, c) un as, d) el as de copas o bien un oro, e) un as o bien una copa.

12. Para saber la probabilidad de que un incendio haya sido intencionado, ¿te basarías en el estudio de las frecuencias relativas o la asignarías por simetría?

Actividades resueltas

Una bolsa de bolas contiene 26 negras y 26 rojas. Se mezcla el contenido de la bolsa, se mete la mano y se saca una bola, se mira el color y se devuelve a la bolsa. A continuación se saca otra bola y se mira el color. ¿Cuál es la probabilidad de que hayan salido una bola roja y una bola negra?
Antes de seguir leyendo, piénsalo. Si te equivocas no pasa nada: el sentido de probabilidad no lo tenemos demasiado desarrollado, pero este es el momento de hacerlo.

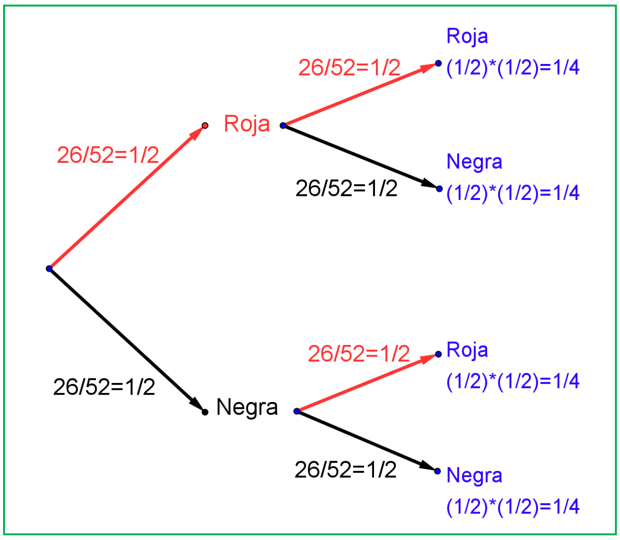
Este problema lo hemos planteado muchas veces a otros estudiantes. Algunos dicen que la probabilidad es 1/3 porque hay 3 casos posibles: Roja-Roja, Negra-Negra y Roja-Negra. Esa respuesta no es correcta.

En realidad el suceso *sacar una bola de cada color* consta de 2 casos Roja-Negra y Negra-Roja. Dependiendo de cómo hubiésemos escrito el espacio muestral o de cómo hubiésemos planteado el problema ese detalle se podría ver con mayor o menor claridad.

Así, la probabilidad de sacar una bola de cada color es, en realidad 1/2.

Si no te lo crees puedes hacer un experimento: será difícil que tengas 26 bolas negras y 26 bolas rojas, pero sí que es fácil que tengas una baraja francesa. Mézclala, corta y mira el color de la carta que ha quedado arriba en el montón. Apúntalo. Vuelve a dejar las cartas en el mazo, vuelve a mezclar, corta de nuevo y mira el color de la carta que ha quedado arriba ahora. Apunta los colores. Repite este experimento muchas veces: 20, 50 o 100.

Si tienes en cuenta los resultados verás que, aproximadamente, la mitad de las veces las dos cartas son del mismo color y la otra mitad las cartas son de colores diferentes. Con eso, hemos podido "comprobar" que la probabilidad de ese suceso era 1/2.



Otra forma que te puede ayudar a razonar sobre este problema, y otros muchos de probabilidad, es confeccionar un **diagrama en árbol**. La primera bola que sacamos tiene una probabilidad de ser Roja igual a 26/52 = 1/2. Ese número lo escribimos en la rama del árbol. Si devolvemos a la bolsa la bola y volvemos a sacar otra bola de la bolsa, la probabilidad de que sea Roja vuelve a ser 26/52 = 1/2. Completamos con idéntico razonamiento el resto de las ramas.

La probabilidad de que las dos bolas que hayamos sacado sean rojas es el producto de sus ramas: (1/2)·(1/2) = 1/4. Igual probabilidad obtenemos para los sucesos Negra-Negra, Negra-Roja y Roja-Negra. La probabilidad de Roja-Negra es por tanto 1/4, igual a la de Negra-Roja. Como son sucesos elementales la probabilidad de que las dos bolas sean de distinto color es la suma: 1/4 + 1/4 = 1/2.

Actividades propuestas

13. La probabilidad no es un concepto intuitivo. Para ello vamos a hacer una prueba. Consideraremos el experimento aleatorio *lanzar una moneda*. Copia la tabla en tu cuaderno

Escribe en la 1ª fila de esta tabla lo que tú crees que saldría al repetir el experimento 30 veces. Piénsalo y rellena la tabla. Como tú quieras (invéntatelo, pero "con sentido").
En la 2ª fila de la tabla escribe el resultado real de 30 lanzamientos de la moneda.

a) ¿Qué observas en ambos casos? ¿Alguna pauta? Presta atención a estas cuestiones para cada una de las filas de la tabla.
b) ¿Hay más o menos 15 caras y 15 cruces?
c) ¿Aparecen grupos seguidos de caras o de cruces?
d) ¿Cuál es el mayor número de caras que han salido seguidas? ¿Y el de cruces?

Normalmente cuando "te inventas" los resultados sí sueles poner la mitad de caras y la mitad de cruces. En un experimento aleatorio estos números están cerca de la mitad pero no suelen ser la mitad exacta.

Cuando te lo inventas, en general pones pocos grupos seguidos de caras o cruces.

El cerebro nos engaña y en temas probabilísticos tenemos que educarlo mucho más. Por eso este tema es muy importante, aunque sea el que muchas veces se queda sin dar. Nos ayuda a que, como ciudadanos, no nos engañen. Ni con loterías, ni con cartas, ni con estadísticas electorales.

RESUMEN

Fenómeno o experimento aleatorio	Es aquel en el que no se puede predecir el resultado. Los datos estadísticos son los valores que se obtienen en un experimento.	Tirar una moneda y saber si va a salir cara o cruz
Suceso posible.	Posible resultado de un experimento aleatorio	En el experimento aleatorio tirar un dado el conjunto de posibles resultados, o el conjunto de sucesos elementales o espacio muestral es {1, 2, 3, 4, 5, 6}, por tanto, un posible resultado es, por ejemplo, 3.
Espacio muestral	Conjunto de resultados posibles	
Sucesos elementales	Elementos del espacio muestral	
Probabilidad de un suceso	Número comprendido entre 0 y 1 que se le asigna a un suceso	La probabilidad se obtiene dividiendo en número de casos favorables entre el número de casos posibles

CURIOSIDADES. REVISTA

Probabilidad y estadística

La probabilidad y la estadística han ido de la mano en gran cantidad de casos. Fíate, cuando hay elecciones, se hacen encuestas y estudios estadísticos para intentar saber lo que van a hacer los ciudadanos con su voto. Entonces se utiliza el cálculo de probabilidades para establecer las posibles tendencias del voto que cada partido político puede obtener.

Probabilidad

El origen del cálculo de probabilidades se suele situar en la corte francesa de mediados del s. XVII. Estaban de moda los juegos de azar en los que se apostaban buenas cantidades de dinero.

El señor **de Meré** era un jugador profesional y propuso a su amigo el físico y matemático **Pascal**, que estudiara si era posible utilizar algunas estrategias matemáticas para ganar. Pascal se puso en contacto con otro eminente matemático francés: **Pierre de Fermat**. Entre los dos empezaron a dar forma al calculo de probabilidades.

Dados

Se han encontrado dados en tumbas egipcias anteriores al año 2000 a. C. El juego de dados ha sido muy popular en muchos países en el mundo antiguo y la Edad Media.

La ruleta

William Jaggers llegó a Montecarlo con unos pocos francos en el bolsillo y, durante un mes anotó los números que salían en cada ruleta, y en cuatro días ganó dos millones cuatrocientos mil francos. Jaggers consiguió quebrar a la banca en Montecarlo analizando las frecuencias relativas de cada número de la ruleta y observando que se había desgastado algo del mecanismo de una de ellas, con lo que todos los valores no tenían igual probabilidad. Apostó a los números más probables y ganó.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

El azar y la probabilidad

1. Miriam y Luis han escrito en tarjetas los 4 nombres que más les gustan para la hija que van a tener: Adela, Miriam, Amelia y Elena. Mezclan bien las tarjetas y extraen una al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que la niña se llame Amelia?

Se lanza una moneda 750 veces y se obtiene cara 360 veces. Expresa en una tabla las frecuencias absolutas, relativas y calcula también las frecuencias acumuladas absolutas y acumuladas relativas de caras y cruces en este experimento.

Se lanzar un dado 500 veces y se obtienen los siguientes resultados:

Resultado	1	2	3	4	5	6
Número de veces	70	81	92	85		81

¿Cuántas veces ha salido el 5?

Escribe en tu cuaderno una tabla con las frecuencias absolutas

Escribe en tu cuaderno una tabla con las frecuencias relativas

2. En una clase se ha medido el tamaño de las manos de cada uno de los alumnos y alumnas, y el resultado en centímetros ha sido el siguiente:

19, 18, 20, 19, 18, 21, 19, 17, 16, 20,
16, 19, 20, 21, 18, 17, 20, 19, 22, 21,
23, 21, 17, 18, 17, 19, 21, 20, 16, 19

a) ¿Qué tamaño ha sido el valor mínimo? ¿Y el máximo?
b) Haz una tabla de frecuencias absolutas y otra de frecuencias relativas.
c) Haz una tabla de frecuencias absolutas acumuladas y otra de frecuencias relativas acumuladas.

3. Calcula la frecuencia absoluta de los datos de una encuesta en la que se ha elegido entre ver la televisión, t, o leer un libro, l:

t, l, t, t, t, l, t, t, l, t, l, t, l, t, t, t, l, l, t, l, t, l, t, l, t.

4. Una urna que contiene 10 bolas numeradas del 0 al 9, sacamos una bola, anotamos el número y devolvemos la bola a la urna. Repetimos el experimento 1000 veces y se han obtenido los resultados indicados en la tabla:

Resultado	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Frecuencia absoluta	79	102			93	98	104	77		
Frecuencia relativa			0,12	0,13					0,1	
Frecuencia absoluta acumulada	79	181								
Frecuencia relativa acumulada										1

¿Cuál es la frecuencia absoluta de 9?. ¿Cuál es la frecuencia absoluta acumulada de 2?. ¿Cuál es la frecuencia relativa acumulada de 1?. Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

5. Clasifica los siguientes sucesos en imposibles, poco probables, posibles, muy probables y seguros:

a) Tener un accidente de tráfico.
b) Salir de paseo y cruzar alguna calle.
c) Salir de paseo y que te caiga un rayo.
d) Mañana nazca algún niño en París.
e) Mañana no amanezca.
f) Mañana llueva.

6. Pepa ha tirado un dado 25 veces y ha obtenido los siguientes resultados:

1, 2, 5, 6, 3, 1, 4, 5, 6, 1, 3, 1, 2, 2, 1, 6, 2, 2, 4, 3, 4, 6, 6, 1, 4

a) Escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias absolutas.
b) Escribe otra de frecuencias relativas.
c) Dibuja un diagrama de rectángulos.
d) Dibuja un diagrama de líneas y una representación por sectores.

7. La duración en minutos de unas llamadas telefónicas ha sido:

7, 3, 6, 3, 7, 5, 4, 3, 5, 7, 10, 1, 9, 12, 2

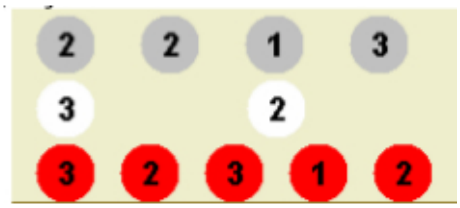
Elabora una tabla de frecuencias absolutas y una tabla de frecuencias relativas.

Problemas

8. Tira una chincheta 15 veces y anota las veces que cae con la punta hacia arriba y las que no. Construye luego dos tablas: una de frecuencias absolutas y otra de frecuencias relativas. Representa el resultado en un diagrama de frecuencias y en un diagrama de líneas

9. Si escribimos la palabra PROBABILIDAD en una tira de papel, recortamos las letras de modo que quede una en cada papel y ponemos todos los papeles en una bolsa, ¿cuál es la probabilidad de obtener una B al extraer uno de los papeles?, ¿y la de extraer una A?, ¿Y la de una L?

10. En la urna cuya imagen puedes ver, hay bolas coloreadas y numeradas, Halla la probabilidad de que al extraer una bola de la urna del gráfico sea a) una bola b) un 2 c) roja y con 2 d) roja o con 2.

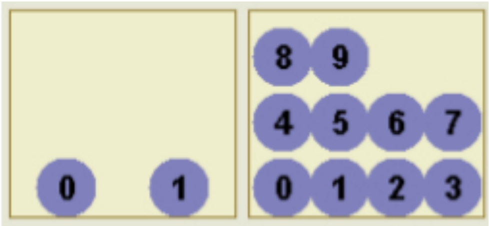


11. En el lanzamiento de un penalti se consideran los posibles sucesos: “gol” o “no marcar” ¿La probabilidad de gol es ½?

12. Al comienzo del partido con una moneda se decide cuál será la portería de cada equipo ¿La probabilidad de que al equipo A le toque la portería sur es ½?

13. Hallar la probabilidad de que al tirar tres dados la suma total sea 4. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea 5?

14. Tenemos dos urnas como puedes ver a la derecha. Entre 12 amigos se va a sortear un premio, para ello se reparten números del 0 al 11 y se extrae un número, la decena, de la urna izquierda y según la decena extraída, iremos a la urna dcha. o izda. para extraer las unidades ¿La probabilidad de ser premiados es la misma para todos? ¿Será el sorteo justo si se procede de la misma manera con 20 amigos y se reparten números del 0 al 19?



AUTOEVALUACIÓN

Indica la respuesta correcta: Los fenómenos aleatorios son

a) Los que suceden raras veces.

b) Los que suceden una vez de cada 100.

c) Aquellos en los que no se puede predecir el resultado.

d) Los que son equiprobables.

Indica cuál de los siguientes sucesos tiene una probabilidad 1/2. Observa que en todos los casos únicamente puede pasar ese suceso y lo contrario.

Al cruzar la calle nos atropelle un coche

El incendio ha sido intencionado

Sacar cara al tirar una moneda

Se hunda la casa mañana

Se extrae una carta de una baraja española. La probabilidad de que sea una copa es:

a) 1/40 b) 0,1 c) 4/40 d) 10/40

Indica cual es la frase que falta en la siguiente definición:

En un … … … … … … se sustituyen los rectángulos por un dibujo representativo

a) Diagrama de líneas b) Diagrama de rectángulos c) Pictograma d) Diagrama de sectores

Si en una tabla de frecuencias a un valor le corresponde una frecuencia relativa de 0,1, al dibujar un diagrama de sectores el ángulo correspondiente es de:

a) 36 º b) 30 º c) 3,6 º d) 72 º

En un diagrama de rectángulos de frecuencias absolutas, la suma de sus alturas es igual a:

a) 100 b) 1 c) Total de datos d) Suma de sus bases

Se tira un dado. ¿Cuál es la probabilidad de que el resultado sea un múltiplo de 2?

a) 1 b) 1/2 c) 2/6 d) 4/6

Una determinada frecuencia absoluta es 4, y la suma total es 20, el porcentaje vale:

a) 20 b) 10 c) 25 d) 50

Se tiran dos monedas. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean caras?

a) 1/3 b) 1/2 c) 3/4 d) 1/4

De una baraja española se extrae al azar una carta. ¿Cuál es la probabilidad de que no sea de oros?

a) 3/4 b) 1/4 c) 2/3 d) 1/40

1º DE ESO

ÍNDICE