

Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas

4º B de ESO

Ejercicios y Problemas

ÍNDICE:

1. Números reales	2
2. Potencias y raíces	7
3. Expresiones algebraicas. Polinomios	12
4. Ecuaciones y sistemas	19
5. Inecuaciones	27
6. Porcentajes	32
7. Semejanza	38
8. Trigonometría	44
9. Geometría	50
10. Funciones y gráficas	60
11. Funciones polinómicas, definidas a trozos y de proporcionalidad inversa	66
12. Funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas	72
13. Derivadas	80
14. Estadística	89
15. Combinatoria	98
16. Azar y probabilidad	105

Total: 112

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores de Libros Marea Verde.

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y VVAA (anteriores)



Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-044030

Fecha y hora de registro: 2014-05-28 17:53:18.0

Licencia de distribución: CC BY-NC-SA

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>

CAPÍTULO 1: NÚMEROS REALES

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. NÚMEROS RACIONALES E IRRACIONALES

- Mentalmente decide cuáles de las siguientes fracciones tiene una expresión decimal exacta y cuáles la tienen periódica
a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{7}{30}$ d) $\frac{6}{25}$ e) $\frac{7}{8}$ f) $\frac{9}{11}$
- Calcula la expresión decimal de las fracciones del ejercicio anterior y comprueba si tu deducción era correcta
- Calcula la expresión decimal de las fracciones siguientes:
a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{9}$ c) $\frac{7}{80}$ d) $\frac{2}{125}$ e) $\frac{49}{400}$ f) $\frac{36}{11}$
- Escribe en forma de fracción las siguientes expresiones decimales exactas y redúcelas, comprueba con la calculadora que está bien:
a) 7.92835; b) 291.291835; c) 0.23
- Escribe en forma de fracción las siguientes expresiones decimales periódicas, redúcelas y comprueba que está bien:
a) 2.353535..... b) 87.2365656565..... c) 0.9999..... d) 26.5735735735.....
- Copia en tu cuaderno la tabla adjunta y señala con una X a qué conjuntos pertenecen los siguientes números:

Número	N	Z	Q	I	R
-2.01					
$\sqrt[3]{-4}$					
0.121212...					
$\sqrt[3]{-1\ 000}$					
1.223334...					
$\sqrt{-4}$					
$\frac{1}{2}$					

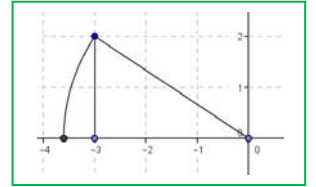
- Copia en tu cuaderno el esquema siguiente y mete los números del ejercicio anterior en su lugar:
- ¿Puedes demostrar que $4.99999... = 5$? ¿cuánto vale $2.5999...$?
- Demuestra que $\sqrt[3]{7}$ es irracional.
- ¿Cuántas cifras puede tener como máximo el periodo de $\frac{1}{47}$?
- ¿Cuántos decimales tiene $\frac{1}{2^7 \cdot 5^4}$? ¿te atreves a dar la razón?
- Haz la división $999\ 999:7$ y después haz $1:7$. ¿Será casualidad?
- Ahora divide 999 entre 37 y después $1:37$, ¿es casualidad?

2. APROXIMACIONES Y ERRORES

- Redondea $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ hasta las centésimas y halla los errores absoluto y relativo cometidos.
 - Halla una cota del error absoluto en las siguientes aproximaciones:
a) 2.1 b) 123 c) 123.00 d) 4 000 con redondeo en las decenas.
 - Una balanza tiene un error inferior o igual a 50 g en sus medidas. Usamos esa balanza para elaborar 10 paquetes de azúcar de 1 Kg cada uno que son un lote. Determina el peso mínimo y máximo del lote. ¿Cuál es la cota del error absoluto para el lote?
 - Los números $A = 5.5$ y $B = 12$ han sido redondeados. Halla una cota del error absoluto y del error relativo para:
a) $A+B$ b) $A \cdot B$ c) B/A d) A^B
- Nota:** Determina los valores máximo y mínimo de A y B. Después los valores máximos y mínimos de cada apartado (recuerda que la resta y la división funcionan distinto)
- ¿Cómo medir el grosor de un folio con un error inferior a 0.0001 cm con la ayuda de una regla milimetrada y la de el/la ordenanza del instituto?, hazlo.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. La imagen es la representación de un número irracional, ¿cuál?
2. Representa en la recta numérica: -3.375 ; $3.666\dots$



3. Representa en la recta numérica: $-\sqrt{8}$; $2\sqrt{5}$; $\frac{\sqrt{10}}{2}$
4. Halla el valor exacto de $\frac{0.4}{0.4}$ sin calculadora.
5. Di cuáles de estas fracciones tienen expresión decimal exacta y cuáles periódica: $\frac{9}{40}$; $\frac{30}{21}$; $\frac{37}{250}$; $\frac{21}{15}$

6. Halla 3 fracciones a, b, c tal que $\frac{3}{4} < a < b < c < \frac{19}{25}$
7. Haz en tu cuaderno una tabla y di a qué conjuntos pertenecen los siguientes números:
 $2.73535\dots$; $\pi - 2$; $\sqrt[5]{-32}$; $\frac{2}{0}$; 10^{100} ; $\frac{102}{34}$; -2.5 ; $0.1223334444\dots$

8. Contesta verdadero o falso, justificando la respuesta.

- a) $\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \{0\}$
- b) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
- c) La raíz cuadrada de un número natural es irracional.
- d) $\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$
- e) $1/47$ tiene expresión decimal periódica.

9. Pon ejemplos que justifiquen:

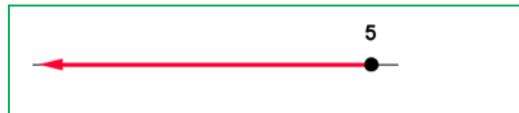
- a) La suma y la resta de números irracionales puede ser racional.
- b) El producto o división de números irracionales puede ser racional.

10. ¿Qué será la suma de número racional con otro irracional? (Piensa en su expresión decimal)

11. La suma de 2 números con expresión decimal periódica ¿puede ser un entero?

12. Expresa con palabras los siguientes intervalos o semirrectas:

- a. $(-7, 7]$
- b. $\{x \in \mathbb{R} / -3 \leq x < 5\}$
- c.
- d. $(-2, +\infty)$



13. ¿Cuántos metros hay de diferencia al calcular el perímetro de la Tierra poniendo $\pi \approx 3.14$ en lugar de su valor real?, ¿es mucho o poco?

Básicamente tienes que hallar el error absoluto y el relativo.

*Radio aproximadamente 6 370 km

14. Los antiguos hicieron buenas aproximaciones de Pi, entre ellas citemos a *Arquímedes* (siglo III a.C) con $211\,875 / 67\,441$ y a *Ptolomeo* (siglo II d.C.) con $377/120$.

¿Cuál cometió menor error relativo?

15. Lo siguiente es un **Pi-texto**: "Soy y seré a todos definible, mi nombre tengo que daros, cociente diametral siempre inmedible soy de los redondos aros." (Manuel Golmayo)

Cuenta y apunta el número de letras de cada palabra y verás de donde viene su nombre. Inventa una frase con la misma propiedad, no es necesario que sea tan largo (al menos 10 palabras)

16. Halla: a) $(3, 5] \cup (4, 6]$; b) $(3, 5] \cap (4, 6]$; c) $(-\infty, 2] \cap (-2, +\infty)$

17. ¿Puede expresarse como entorno una semirrecta?

18. Expresa como entornos abiertos los siguientes intervalos: a) $(0, 7)$; b) $(-8, -2)$; c) $(2, +\infty)$

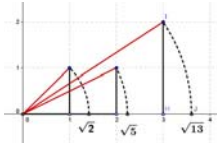

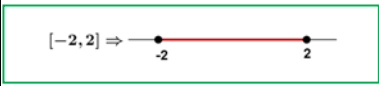

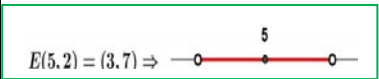
19. Expresa como intervalos abiertos los siguientes entornos: a) $E(2, 2/3)$; b) $E(-7, 1/2)$

20. Un número irracional tan importante como Pi es el número "e". $e \approx 2.718281828...$ que parece periódico, pero no, no lo es. Se define como el número al que se acerca $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ cuando n se hace muy, pero que muy grande. Coge la calculadora y dale a n valores cada vez mayores, por ejemplo: 10, 100, 1000, ... Apunta los resultados en una tabla.
21. Halla el área y el perímetro de un rectángulo de lados $\sqrt{2}$ y $\sqrt{8}$ m.
22. Halla el área y el perímetro de un cuadrado cuya diagonal mide 2 m.
23. Halla el área y el perímetro de un hexágono regular de lado $\sqrt{3}$ m.
24. Halla el área y el perímetro de un círculo de radio $\sqrt{10}$ m.
25. Halla el área total y el volumen de un cubo de lado $\sqrt[3]{7}$ m.
26. ¿Por qué número hemos de multiplicar los lados de un rectángulo para que su área se haga el triple?
27. ¿Cuánto debe valer el radio de un círculo para que su área sea 1 m^2 ?
28. Tenemos una circunferencia y un hexágono inscrito en ella. ¿Cuál es la razón entre sus perímetros? (Razón es división o cociente)
29. ¿Qué números al cuadrado dan 7?
30. ¿Qué números reales al cuadrado dan menos de 7?
31. ¿Qué números reales al cuadrado dan más de 7?
32. Medir el tamaño de las pantallas en pulgadas (") ya no parece muy buena idea. La medida se refiere a la longitud de la diagonal del rectángulo, así, una televisión de 32" se refiere a que la diagonal mide 32". Eso no da mucha información si no sabemos la proporción entre los lados. Las más usuales en las pantallas de televisión y ordenador son 4:3 y 16:9.
- Si una pulgada son 2.54 cm, ¿cuáles serán las dimensiones de una pantalla de 32" con proporción 4:3?, ¿y si la proporción es 16/9? ¿Cuál tiene mayor superficie?

AUTOEVALUACIÓN

- 1) Sabes a qué conjuntos pertenecen los distintos números.
Indica en una tabla o un diagrama (como el del texto) a qué conjuntos numéricos pertenecen los siguientes números:
 $0; -2; 3/4, 7.3; 6.252525..., \pi - 2; \sqrt[3]{4}; \sqrt[4]{-16}; 1.123124125...; 2.999...$
- 2) Sabes redondear con un número adecuado de cifras y calculas el error relativo para comparar aproximaciones. Sabes hallar una cota para el error absoluto y el relativo.
- a) Los siguientes números se han redondeado, halla una cota del error absoluto y del error relativo:
a_1) 3.14; a_2) 45 600 con redondeo en las centenas.
- 3) b) Si tomamos $\sqrt{10} \approx 3.16$ y $\frac{2}{3} \approx 0.67$ ¿en cuál de las aproximaciones cometemos proporcionalmente menor error?
- 4) Sabes cuándo una fracción tiene expresión decimal exacta o periódica sin hacer la división. Pruébalo con estas:
 $30/150; 30/21$
- 5) Sabes pasar de decimal a fracción para trabajar con valores exactos:
Halla: $0.72525...+0.27474...$
- 6) Sabes representar números racionales e irracionales de forma exacta
Representa de forma exacta $\frac{-21}{9}; \frac{30}{7}; \sqrt{10}; \sqrt{7}$
- 7) Dominas las distintas formas y notaciones de un intervalo o semirrecta (intervalo, conjunto con desigualdades y gráfica).
Expresa en forma de intervalo (o semirrecta), en forma de desigualdad y representa gráficamente:
a) Números reales inferiores o iguales que -1 . b) Números reales comprendidos entre -4 y 2 , incluido el 1º pero no el 2º.
- 8) Sabes pasar de un entorno a un intervalo y viceversa.
a) Escribe como intervalo: $E(-2, 2/3)$. b) Escribe como entorno el intervalo $(-5/2, 7/3)$
- 9) Sabes resolver problemas trabajando con cantidades exactas.
Halla el área, el volumen y la diagonal principal de un ortoedro de lados $\sqrt{5}; 2\sqrt{5}$ y $3\sqrt{5}$ m.

RESUMEN

Conjuntos de números	Naturales $\rightarrow N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$; Enteros $\rightarrow Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ Racionales $\rightarrow Q = \{\frac{a}{b}; a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}$; Irracionales $\rightarrow I = \mathbb{R} - Q$; $\mathbb{R} = Q \cup I$	
Fraciones y expresión decimal	Todas las fracciones tienen expresión decimal exacta o periódica. Toda expresión decimal exacta o periódica se puede poner como fracción.	$0.175 = \frac{175}{1000} = \frac{7}{40}$ $X = 1.7252525\dots = 854/495$
$\sqrt{2}$ irracional	$\sqrt{2}$ no puede ponerse como fracción.	
Error Absoluto	Error Absoluto (EA) = $ valor\ real - valor\ aproximado $	$\sqrt{3} \approx 1.73$: EA ≈ 0.0021 .
Cota del error	Hallamos la cota calculando un valor mayor	EA ≤ 0.003
Error Relativo	$ER = \frac{EA}{ Valor\ real }$	$ER = \frac{0.0021}{\sqrt{3}} \approx 0.00121$
Control del error	En cada suma o resta el error absoluto es la suma de los errores absolutos. Los errores relativos se suman al multiplicar dos números.	
Densidad	Los números reales y los números racionales son densos. Entre cada dos números, siempre podemos encontrar a otro.	
Representación en la recta real	Fijado un origen y una unidad, existe una biyección entre los números reales y los puntos de la recta	
Intervalo abierto	Intervalo abierto en el que los extremos no pertenecen al intervalo	$(2, 7) = \{x \in \mathbb{R} / 2 < x < 7\}$. $(2, 7) \Rightarrow$ 
Intervalo cerrado	Los extremos SI pertenecen al intervalo	$[-2, 2] = \{x \in \mathbb{R}; -2 \leq x \leq 2\}$ $[-2, 2] \Rightarrow$ 
Intervalos Semiabiertos (o semicerrados)	Intervalo con un extremo abierto y otro cerrado	$[-8, 0) = \{x \in \mathbb{R} / -8 \leq x < 0\}$ $[-8, 0) \Rightarrow$ 
Entornos	Forma especial de expresar un intervalo abierto: $E(a, r) = (a - r, a + r)$	$E(5, 2) = (3, 7) \Rightarrow$ 

CAPÍTULO 2: POTENCIAS Y RAÍCES

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. POTENCIAS DE EXPONENTE ENTERO. PROPIEDADES

1. Calcula las siguientes potencias:

a) $-x^3$

b) $(x + 1)^3$

c) $-(-2x)^2$

2. PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS. EJEMPLOS:

2. Efectúa las siguientes operaciones con potencias:

a) $(x + 1) \cdot (x + 1)^3$

b) $(x + 2)^3 : (x + 2)^4$

c) $\{(x - 1)^3\}^4$

d) $(x + 2) \cdot (x + 1)^{-3}$

3. POTENCIAS DE EXPONENTE RACIONAL. RADICALES

3. Calcula:

a) $(\sqrt[3]{a^6 \cdot b^9})^2$

b) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$

c) $(\sqrt[12]{(x+1)^3})^2$

4. Hallar

a) $\sqrt[2]{\sqrt[4]{\frac{x}{5y}}} : \sqrt[4]{\sqrt[4]{\frac{3x}{y^2}}}$

b) $\sqrt{\frac{5}{3}} : \sqrt{\frac{2}{3}}$

5. Realiza las siguientes operaciones con radicales:

a) $\sqrt[4]{\frac{x}{5y}} : \sqrt[4]{\frac{3x}{y^2}}$

b) $(\sqrt[5]{(x+3)^2})^3$

4. OPERACIONES CON RADICALES: RACIONALIZACION.

6. Escribe bajo un solo radical y simplifica: $\sqrt[2]{2 \cdot \sqrt[2]{3 \cdot \sqrt[2]{4 \cdot \sqrt[2]{5 \cdot \sqrt[2]{6 \cdot \sqrt[2]{8}}}}}}$

7. Calcula y simplifica: $\frac{\sqrt[4]{x^3 \cdot y^3} \cdot \sqrt[3]{x^4 \cdot y^5}}{\sqrt[6]{x^5 \cdot y^4}}$

8. Realiza la siguiente operación: $\sqrt{x^3} + \sqrt{16x^7} + \sqrt{x}$

9. Calcula y simplifica: $\sqrt[2]{\frac{3}{x}} \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2}{8}} \cdot \sqrt[4]{\frac{9}{5}}$

10. Racionaliza la expresión: $\frac{x + 3y}{\sqrt{x} - \sqrt{2y}}$

11. Racionaliza: $\frac{3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

12. Racionaliza: $\frac{5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}}{\sqrt{5} - 2}$

5. NOTACION CIENTÍFICA.

13. Calcula: a) $(7.83 \cdot 10^{-5}) \cdot (1.84 \cdot 10^{13})$

b) $(5.2 \cdot 10^{-4}) : (3.2 \cdot 10^{-6})$

14. Efectúa y expresa el resultado en notación científica:

a) $\frac{3 \cdot 10^{-5} + 7 \cdot 10^{-4}}{10^6 - 5 \cdot 10^5}$

b) $\frac{7.35 \cdot 10^4}{5 \cdot 10^{-3}} + 3.2 \cdot 10^7$

15. Realiza las siguientes operaciones y efectúa el resultado en notación científica:

a) $(4.3 \cdot 10^3 - 7.2 \cdot 10^5)^2$

b) $(7.8 \cdot 10^{-7})^3$

6. LOGARITMOS:

16. Copia la tabla adjunta en tu cuaderno y empareja cada logaritmo con su potencia:

$2^5 = 32$	$\log_5 1 = 0$	$2^0 = 1$	$5^2 = 25$
$5^1 = 5$	$\log_2 2 = 1$	$5^0 = 1$	$\log_2 32 = 5$
$2^1 = 2$	$\log_2 1 = 0$	$\log_5 5 = 1$	$\log_5 25 = 2$
$2^4 = 16$	$\log_3 81 = 4$	$\log_2 16 = 4$	$3^4 = 81$

17. Calcula utilizando la definición de logaritmo: a) $\log_2 2^5$ b) $\log_5 25$ c) $\log_2 2^{41}$ d) $\log_5 5^{30}$
 18. Calcula utilizando la definición de logaritmo: a) $\log_3 27$ b) $\log_{10} 100$ c) $\log_{1/2} (1/4)$ d) $\log_{10} 0.0001$
 19. Calcula x utilizando la definición de logaritmo: a) $\log_2 64 = x$ b) $\log_{1/2} x = 4$ c) $\log_x 25 = 2$
 20. Calcula utilizando la definición de logaritmo:
 a) $\log_2 64 + \log_2 1/4 - \log_3 9 - \log_2 \sqrt{2}$
 b) $\log_2 1/32 + \log_3 1/27 - \log_2 1$
 21. Utiliza la calculadora para obtener a) $\log 0.000142$; b) $\log 142$; c) $\log 9 + \log 64$.
 22. Desarrolla las expresiones que se indican: a) $\ln \sqrt[5]{\frac{4x^2}{e^3}}$ b) $\log \left(\frac{a^3 \cdot b^2}{c^4 \cdot d} \right)$
 23. Expresa los logaritmos de los números siguientes en función de $\log 3 = 0.4771212$
 a) 81 b) 27 c) 59 049
 24. Simplifica la siguiente expresión: $\frac{1}{2} \log m - 2 \log t - \log p + \frac{5}{2} \log h$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Potencias

1. Expresa en forma exponencial: a) $\frac{1}{64}$ b) $\frac{t}{t^5}$ c) $\left(\frac{1}{z+1}\right)^2$ d) $\frac{27^{-2}}{81^{-5}}$ e) $\frac{x^{-2} \cdot y^{-7}}{x^8 \cdot y^{-4}}$
 2. Calcula: a) $4^{\frac{1}{2}}$ b) $125^{\frac{1}{3}}$ c) $625^{\frac{5}{6}}$ d) $(64^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{6}}$ e) $(8^{\frac{-4}{3}})^{\frac{2}{5}}$

Radicales

3. Expresar en forma de radical: a) $x^{\frac{7}{9}}$ b) $(m^5 \cdot n^3)^{\frac{1}{3}}$ c) $[(x^2)^{\frac{1}{3}}]^{\frac{1}{5}}$ d) $a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}}$
 4. Expresar en forma exponencial:
 a) $(\sqrt[3]{x^2})^5$ b) $\sqrt{\frac{a^{13}}{a^6}}$ c) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^k}}$ d) $\sqrt[3]{x^{(5x+1)}}$ e) $\sqrt[4]{(x^2)^{(3x+2)}}$ f) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[2]{(x^2)^{\frac{1}{5}}}}}$
 5. Expresa como potencia única:
 a) $\frac{\sqrt[3]{a^8}}{a^2}$ b) $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt[3]{25}}$ c) $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a \cdot \sqrt{a}}$ d) $2 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ e) $a \cdot \sqrt{\frac{1}{a}}$ f) $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2}$ g) $\frac{\sqrt[3]{a^2} \cdot a^3}{a^3 \cdot \sqrt{a}}$

Propiedades de los radicales

6. Simplifica:

$$a) \sqrt[9]{64} \quad b) \frac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}} \quad c) \frac{\sqrt[4]{a^3 \cdot b^5 \cdot c}}{\sqrt{a \cdot b^3 \cdot c^3}} \quad d) \sqrt[3]{\sqrt[4]{x^5 \cdot x^7}} \quad e) (\sqrt{\sqrt{2}})^8 \quad f) \frac{\sqrt[4]{x^3 \cdot y^3 \cdot \sqrt[3]{x^4 \cdot y^5}}}{\sqrt[6]{x^5 \cdot y^4}} \quad g) \sqrt[5]{x^2 \cdot 3 \cdot \sqrt[10]{x^2 \cdot \sqrt{x^3}}}$$

7. Extraer factores del radical:

$$a) \sqrt[3]{32x^4} \quad b) \sqrt[3]{81a^3b^5c} \quad c) (\sqrt{\sqrt{2}})^{10} \quad d) \sqrt[4]{\frac{25a^2b}{c^6}} \quad e) \sqrt{\frac{8a^5}{b^4}} \quad f) \sqrt{\frac{28x^5}{75y^3}} \quad g) \sqrt{\frac{32a^3}{45b^4}}$$

8. Introducir factores en el radical:

$$a) 2\sqrt[3]{\frac{3}{2}} \quad b) 3\sqrt[2]{\frac{2}{3}} \quad c) 2\sqrt[3]{\frac{1}{4}} \quad d) 2 \cdot \sqrt[4]{\frac{5}{12}} \quad e) \frac{1}{2} \cdot \sqrt{12} \quad f) \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{9}{4}}$$

Operaciones con radicales:

$$9. a) \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{b^4} \cdot \sqrt[3]{b^2} \quad b) \sqrt{5a} \cdot \sqrt{10ab} \cdot \sqrt{8a^3b} \cdot \sqrt{a} \quad c) \sqrt[6]{20} \quad d) \sqrt[4]{\frac{5}{12}} : \sqrt[4]{\frac{20}{3}} \quad e) \sqrt{\frac{3}{2}} : \sqrt{\frac{2}{3}} \quad f) \sqrt[3]{\frac{9}{2}}$$

10. Efectúa:

$$a) \sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8} \quad b) \sqrt{50a} - \sqrt{18a} \quad c) \sqrt{320} + \sqrt{80} - \sqrt{500} \quad d) \sqrt{\frac{7}{64}} + \sqrt{\frac{7}{4}}$$

$$e) 5\sqrt{96} - 5\sqrt{\frac{3}{32}} \quad f) \sqrt[3]{\frac{135}{8}} - \sqrt[3]{\frac{5}{8}} \quad g) \sqrt{150} + \sqrt{54} - \sqrt{24}$$

Racionalizar

$$11. Racionaliza los denominadores: \quad a) \frac{5}{\sqrt[3]{2}} \quad b) \frac{3}{2-\sqrt{3}} \quad c) \frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \quad d) \frac{6}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \quad e) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \quad f) \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

12. Racionaliza y simplifica:

$$a) \frac{11}{2\sqrt{5}+3} \quad b) \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+3} \quad c) \frac{\sqrt{3}+2\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} \quad d) \frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2\sqrt{2}} \quad e) \frac{4\sqrt{15}-2\sqrt{21}}{2\sqrt{5}-\sqrt{7}} \quad f) \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$$

$$13. Efectúa y simplifica: \quad a) \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}\right)(3+2\sqrt{2}) \quad b) \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{\sqrt{5}-1} - 3\sqrt{5} \quad c) \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right) : \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right)$$

Notación científica

14. La masa del Sol es 330 000 veces la de la Tierra, aproximadamente, y esta es $5,98 \cdot 10^{21}$ t. Expresa en notación científica la masa del Sol, en kilogramos.
15. El ser vivo más pequeño es un virus que pesa del orden de 10^{-18} g y el más grande es la ballena azul, que pesa, aproximadamente, 138 t. ¿Cuántos virus serían necesarios para conseguir el peso de la ballena?.
16. Los cinco países más contaminantes del mundo (Estados Unidos, China, Rusia, Japón y Alemania) emitieron 12 billones de toneladas de CO₂ en el año 1995, cantidad que representa el 53.5 % de las emisiones de todo el mundo. ¿Qué de CO₂ se emitió en el año 1995 en todo el mundo?
17. Expresa en notación científica:
- Recaudación de las quinielas en una jornada de la liga de fútbol: 1 628 000 €
 - Toneladas de CO₂ que se emitieron a la atmósfera en 1995 en Estados Unidos 5228,5 miles de millones.
 - Radio del átomo de oxígeno: 0.00000000066 m
18. Efectúa y expresa el resultado en notación científica:
- $(3 \cdot 10^{-7}) \cdot (8 \cdot 10^{18})$
 - $(4 \cdot 10^{-12}) \cdot (5 \cdot 10^{-3})$
 - $(5 \cdot 10^{12}) : (2 \cdot 10^{-3})$
 - $3.1 \cdot 10^{12} + 2 \cdot 10^{10}$
 - $(4 \cdot 10^5)^{-2}$
19. Expresa en notación científica y calcula:
- $(75\,800)^4 : (12\,000)^4$
 - $\frac{0.000541 \cdot 10318000}{1520000 \cdot 0.00302}$
 - $(0.0073)^2 \cdot (0.0003)^2$
 - $\frac{2\,700\,000 - 13\,000\,000}{0.00003 - 0.00015}$
20. Efectúa y expresa el resultado en notación científica:
- $\frac{3 \cdot 10^{-5} + 7 \cdot 10^{-4}}{10^6 - 5 \cdot 10^5}$
 - $\frac{7.35 \cdot 10^4}{5 \cdot 10^{-3}} + 3.2 \cdot 10^7$
 - $(4.3 \cdot 10^3 - 7.2 \cdot 10^5)$
21. Que resultado es correcto de la siguiente operación expresada en notación científica: $(5.24 \cdot 10^6) \cdot (8.32 \cdot 10^5)$:
- $4.35968 \cdot 10^{12}$
 - $43.5968 \cdot 10^{13}$
 - $4.35968 \cdot 10^{11}$
 - $4.35968 \cdot 10^{13}$

AUTOEVALUACIÓN

1. El número $8^{-3/4}$ vale:

- a) un dieciseisavo b) Dos c) Un cuarto d) Un medio.

2. Expresa como potencia de base 2 cada uno de los números que van entre paréntesis y efectúa después la operación: $(16^{1/4}) \cdot (\sqrt[6]{4}) \cdot (\frac{1}{8})$. El resultado es:

- a) $2^{-1/3}$ b) $2^{-5/4}$ c) $2^{-5/3}$ d) 2^{-5}

3. El número: $\sqrt[3]{4^3 \sqrt[3]{6\sqrt{8}}}$ es igual a:

- a) $6^{1/4}$ b) $2^{1/3}$ c) $2^{5/6} \cdot 6^{1/9}$ d) 2

4. ¿Cuál es el resultado de la siguiente expresión si la expresamos como potencia única?: $\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{16}}$

- a) $\frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{2}}$ b) $\frac{2}{2 \cdot \sqrt[3]{2}}$ c) $\frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{2}}$ d) $\sqrt[3]{2}$

5. Simplificando y extrayendo factores la siguiente expresión tiene un valor: $\sqrt[3]{\sqrt{625 \cdot a^6 \cdot b^7 \cdot c^6}}$

- a) $5^3 \cdot a \cdot b \cdot c^2 \cdot \sqrt[4]{a \cdot b^2 \cdot c}$ b) $5 \cdot a^2 \cdot b \cdot c \cdot \sqrt[4]{a^2 \cdot b^3 \cdot c^2}$ c) $5 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \sqrt[4]{a^3 \cdot b^2 \cdot c^3}$ d) $5 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \sqrt[4]{a^2 \cdot b^3 \cdot c^2}$

6. ¿Cuál de los siguientes valores es igual a $a^{3/2}$?

- a) $a^{1/2} \cdot a^2$ b) $a^{5/2} \cdot a^{-1}$ c) $(a^2)^2$ d) $a^3 \cdot a^{-2}$

7. ¿Cuál es el resultado de esta operación con radicales?: $\sqrt{63} - \frac{5}{2} \cdot \sqrt{28} + \frac{\sqrt{112}}{3}$

- a) $2 \cdot \sqrt{7}$ b) $\frac{11}{8} \cdot \sqrt{7}$ c) $-\frac{2}{3} \cdot \sqrt{7}$ d) $-\frac{2}{5} \cdot \sqrt{7}$

8. Una expresión con un único radical de: $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{(x+2)^3} \cdot \sqrt{(x+1)}$ está dada por:

- a) $\sqrt[6]{x^2 \cdot (x+2) \cdot (x+1)}$ b) $\sqrt[8]{x^2 \cdot (x+2)^3 \cdot (x+1)}$ c) $\sqrt[12]{x^8 \cdot (x+2)^9 \cdot (x+1)^6}$ d) $\sqrt[12]{x^2 \cdot (x+2)^3 \cdot (x+1)}$

9. Para racionalizar la expresión: $\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ hay que multiplicar numerador y denominador por:

- a) $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ b) $2 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{5}$ c) $2 + \sqrt{5}$ d) $\sqrt{5} + \sqrt{3}$

10. ¿Cuál es el resultado en notación científica de la siguiente operación?: $5.83 \cdot 10^9 + 6.932 \cdot 10^{12} - 7.5 \cdot 10^{10}$

- a) $6.86283 \cdot 10^{12}$ b) $6.86283 \cdot 10^{13}$ c) $6.8623 \cdot 10^{11}$ d) $6.8628 \cdot 10^{12}$

11. ¿Cuál es el resultado de la siguiente operación expresado en notación científica?: $\frac{5.24 \cdot 10^{10}}{6.3 \cdot 10^{-7}}$

- a) $0.8317 \cdot 10^{17}$ b) $8.317 \cdot 10^{16}$ c) $8.317 \cdot 10^{15}$ d) $83.17 \cdot 10^{16}$

RESUMEN

Potencias de exponente natural y entero	$a^n = 1/a^n$	$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$. $(-\frac{1}{2})^{-2} = (-2)^2 = 4$
Propiedades de las potencias	$a^n \cdot a^m = a^{m+n}$ $a^n : a^m = a^{n-m}$ $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ $a^n / b^n = (a/b)^n$	$(-3)^3 \cdot (-3)^3 = (-3)^{3+3} = (-3)^6$ $5^3 : 5^2 = 5^{3-2} = 5^1$; $(-3)^5)^2 = (-3)^{5 \cdot 2} = (-3)^{10}$ $(-2)^3 \cdot (-5)^3 = ((-2) \cdot (-5))^3$ $3^4 / 2^4 = (3/2)^4$
Potencias de exponente racional. Radicales	$a^{p/s} = \sqrt[s]{a^p}$	$(16)^{3/4} = \sqrt[4]{16^3}$
Propiedades de los radicales	$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n^p]{a^p}$ $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$	$3 \cdot \sqrt[2]{5^2} = 6\sqrt{25}$; $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3 \cdot 2} = \sqrt[3]{6}$ $\frac{\sqrt[3]{a^7}}{\sqrt[3]{a^4}} = \sqrt[3]{\frac{a^7}{a^4}} = \sqrt[3]{a^{7-4}} = \sqrt[3]{a^3} = a$ $(\sqrt[5]{2})^3 = \sqrt[5]{2^3}$ $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[3 \cdot 2]{2} = \sqrt[6]{2}$
Racionalización de radicales	Se suprimen las raíces del denominador. Se multiplica numerador y denominador por la expresión adecuada (conjugado del denominador, radical del numerador, etc.)	$\frac{1}{\sqrt[3]{25}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^2 \cdot 3\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{5}$ $\frac{1}{5 - \sqrt{3}} = \frac{5 + \sqrt{3}}{(5 - \sqrt{3})(5 + \sqrt{3})} =$ $= \frac{5 + \sqrt{3}}{5^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{5 + \sqrt{3}}{22}$
Notación científica	$5.83 \cdot 10^9 + 6.932 \cdot 10^{12} - 7.5 \cdot 10^{10} = 5.83 \cdot 10^9 + 6932 \cdot 10^9 - 75 \cdot 10^9 = (5.83 + 6932 - 75) \cdot 10^9 = 6862.83 \cdot 10^9 = 6.86283 \cdot 10^{12}$ $(5.24 \cdot 10^6) \cdot (6.3 \cdot 10^8) = 33.012 \cdot 10^{14} = 3.32012 \cdot 10^{15}$ $\frac{5.24 \cdot 10^6}{6.3 \cdot 10^{-8}} = (5.24 : 6.3) \cdot 10^{6 - (-8)} =$ $0.8317 \cdot 10^{14} = 8.317 \cdot 10^{13}$	
Logaritmos	Si $a > 0$, $\log_a m = z \Leftrightarrow m = a^z$ $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ $\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$ $\log_a x^y = y \cdot \log_a x$	$\log_a (75/25) = \log_a 75 - \log_a 25$ $\log_a 2^5 = 5 \cdot \log_a 2$ $\log_a \sqrt[3]{27} = \left(\frac{\log_a 27}{3} \right)$

CAPÍTULO 3: EXPRESIONES ALGEBRAICAS. POLINOMIOS

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. INTRODUCCIÓN. EXPRESIONES ALGEBRAICAS

- A finales de cada mes la empresa de telefonía móvil nos proporciona la factura mensual. En ella aparece mucha información, en particular, el número total de llamadas realizadas (N) así como la cantidad total de minutos de conversación (M). Con los datos del anterior ejemplo, justifica que el importe de las llamadas efectuadas durante ese mes es: $(0.05 \cdot M) + (0.12 \cdot N) = 0.05 \cdot M + 0.12 \cdot N$ euros
- Recuerda la expresión algebraica que nos proporciona la longitud de una circunferencia.
- Escribe en lenguaje algebraico los siguientes enunciados, referidos a dos números cualesquiera x e y :
 - La mitad del opuesto de su suma.
 - La suma de sus cubos.
 - El cubo de su suma
 - El inverso de su suma.
 - La suma de sus inversos
- Una tienda de ropa anuncia en sus escaparates que está de rebajas y que todos sus artículos están rebajados un 20 % sobre el precio impreso en cada etiqueta. Escribe lo que pagaremos por una prenda en función de lo que aparece en su etiqueta.
- El anterior comercio, en los últimos días del periodo de rebajas, desea deshacerse de sus existencias y para ello ha decidido aumentar el descuento. Mantiene el 20 % para la compra de una única prenda y, a partir de la segunda, el descuento total aumenta un 5 % por cada nueva pieza de ropa, hasta un máximo de 10 artículos. Analiza cuánto pagaremos al realizar una compra en función de la suma total de las cantidades que figuran en las etiquetas y del número de artículos que se adquieran.
- Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para el valor o valores que se indican:
 - $x^2 + 7x - 12$ para $x = 0$.
 - $(a + b)^2 - (a^2 + b^2)$ para $a = -3$ y $b = 4$.
 - $a^2 - 5a + 2$ para $a = -1$.
- Indica, en cada caso, el valor numérico de la siguiente expresión: $10x + 20y + 30z$
 - $x = 1, y = 2, z = 1$
 - $x = 2, y = 0, z = 5$
 - $x = 0, y = 1, z = 0$.

2. POLINOMIOS. SUMA Y PRODUCTO

- Realiza las siguientes sumas de polinomios:
 - $(x^2 - x) + (-2x^2 - 3x + 1) + (2x^3 - 2x^2 + x - 2)$
 - $-x^4 + (x^3 + 2x - 3) + (-3x^2 - 5x + 4) + (2x^3 - x + 5)$
- Escribe el polinomio opuesto de cada uno de los siguientes polinomios:
 - $3x^4 + 5x^3 + x^2 + 4x - 1$
 - $7x$
 - $-x^4 + 3x^2$
- Considera los polinomios $p \equiv -x^3 - 5x + 2$, $q \equiv 3x^2 + 3x + 1$, así como el polinomio suma $s \equiv p + q$. Halla los valores que adopta cada uno de ellos para $x = -2$, es decir, calcula $p(-2)$, $q(-2)$ y $s(-2)$. Estudia si existe alguna relación entre esos tres valores.
- Obtén el valor del polinomio $p \equiv -x^3 - 5x + 2$ en $x = 3$. ¿Qué valor toma el polinomio opuesto de p en $x = 3$?
- Efectúa los siguientes productos de polinomios:
 - $(-4x^3 + 2x) \cdot (-3x^2)$
 - $(2x^4 + x) \cdot (-3x - 4)$
 - $(2x^3 + x^2 - x) \cdot (3x^2 - x)$
 - $(-1) \cdot (7x^3 - 4x^2 - 3x + 1)$
- Realiza las siguientes diferencias de polinomios:
 - $(-4x^3 + 2x) - (-3x^2)$
 - $(2x^4 + x) - (-3x - 4)$
 - $(3x^2 - x) - (2x^3 + x^2 - x)$
- Multiplica cada uno de los siguientes polinomios por un número de tal forma que surjan polinomios mónicos:
 $4x^3 - 3x^2 + 2x$ $-2x^4 + x - 1$ $-x^2 + x - 7$
- Calcula y simplifica los siguientes productos:
 - $3x \cdot (2x^2 + 4x - 6)$
 - $(3x - 4) \cdot (4x + 6)$
 - $(2a^2 - 5b) \cdot (4b - 3a^3)$
 - $(3a - 6) \cdot (8 - 2a) \cdot (9a - 2)$
- Realiza los siguientes productos de polinomios:
 - $x^2 \cdot (-2x^2 - 3x + 1) \cdot 2x^3$
 - $(2x - 3) \cdot (-3x^2 - 5x + 4) \cdot (-x)$
- De cada uno de los siguientes polinomios extrae algún factor que sea común a sus monomios:
 - $-15x^3 - 20x^2 + 10x$;
 - $24x^4 - 30x^2$

3. DIVISIÓN DE POLINOMIOS

18. Comprueba que los cálculos que tienes a continuación reflejan lo que se hizo en el ejemplo anterior para dividir el polinomio $p(x) = 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2$ entre el polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$.

1. Primera etapa:

$$\begin{array}{r} 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 \\ -6x^4 + 3x^3 - 9x^2 \\ \hline 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 2x^2 - x + 3 \\ 3x^2 \end{array} \right.$$

2. Primera y segunda etapas:

$$\begin{array}{r} 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 \\ -6x^4 + 3x^3 - 9x^2 \\ \hline 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 \\ -8x^3 + 4x^2 - 12x \\ \hline -4x^2 - 9x - 2 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 2x^2 - x + 3 \\ 3x^2 + 4x \end{array} \right.$$

3. Las tres etapas:

$$\begin{array}{r} 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 \\ -6x^4 + 3x^3 - 9x^2 \\ \hline 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 \\ -8x^3 + 4x^2 - 12x \\ \hline -4x^2 - 9x - 2 \\ 4x^2 - 2x + 6 \\ \hline -11x + 4 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 2x^2 - x + 3 \\ 3x^2 + 4x - 2 \end{array} \right.$$

19. Divide los siguientes polinomios:

b) $-10x^3 - 2x^2 + 3x + 4$ entre $5x^3 - x^2 - x + 3$

a) $2x^3 - x^2 - x + 7$ entre $x^2 - 2x + 4$;

c) $4x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 3x - 7$ entre $-2x^2 + x + 3$

d) $-8x^5 - 2x^4 + 10x^3 + 2x^2 + 3x + 5$ entre $4x^3 + x^2 + x - 1$

e) $-6x^5 + x^2 + 1$ entre $x^2 + 1$

20. Encuentra dos polinomios tales que al dividirlos aparezca $q(x) = x^2 + x - 3$ como polinomio cociente y $r(x) = -3x^2 + 1$ como resto.

21. Efectúa los siguientes cálculos: a) $\frac{2x+1}{x^2+1} + \frac{3}{x}$ b) $\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+1}$ c) $\frac{-x}{x^2+3x} \cdot \frac{1}{x-1}$ d) $\frac{x-2}{x^2+3x} : \frac{x-2}{x+3}$

22. Realiza las siguientes operaciones alterando, en cada apartado, únicamente uno de los denominadores, y su respectivo numerador: a) $\frac{-x^2+x-1}{x^3} + \frac{3x-2}{x^2}$ b) $\frac{x-2}{x^2+3x} - \frac{4}{x+3}$

23. Comprueba las siguientes identidades simplificando la expresión del lado izquierdo de cada igualdad:

a) $\frac{8a^4b^2}{2a^2b} = 4a^2b$

b) $\frac{4x^3y^2 - 3xy^2}{2xy} = 2x^2y - \frac{3}{2}y$

c) $\frac{3x^2 - 9x}{6x + 12} = \frac{x^2 - 3x}{x + 4}$

d) $\frac{6y^3 + 4y^2}{2y^2 - 8y} = \frac{3y^2 + 2y}{y - 4}$

e) $\frac{6a^2b^3 + 2a^3b - 4ab}{2ab^2 + 8a^2b} = \frac{3ab^2 + a^2 - 2}{b + 4a}$

24. Calcula los siguientes cocientes:

a) $(3x^3 - 9x^2 - 6x) : 3x$

b) $(7a^3 - 70a^2 - 21) : 7$

c) $(25x^4 - 10x^2) : 5x^2$

d) $(3x^2y^3 - 8xy^2) : xy^2$

25. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas: a) $\frac{3x^2 - 6x}{9x^2 + 15}$ b) $\frac{a^3 - 5a^2}{7a^3 + 4a^2}$

c) $\frac{x^2y + 3xy^2}{4xy}$ d) $\frac{2a^2b^2 + 3ab}{a^3b - ab}$

4. DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE UN POLINOMIO

26. Completa, cuando sea posible, las siguientes factorizaciones:

a) $-2x^3 + 2x = -2x \cdot ()$

b) $-6x^2 + 5x + 6 = (2x - 3) \cdot ()$

c) $-6x^4 + 3x^3 - 3x + 6 = (2x^2 - x + 1) \cdot ()$

d) $-6x^4 + 3x^3 - 3x + 6 = (2x^2 - x + 2) \cdot ()$

27. Determina un polinomio de grado 4 que admita una descomposición factorial en la que participe el polinomio $6x^3 - x^2 + 3x - 1$.

28. Estudia si los siguientes números son o no raíz de los polinomios indicados:

• $x=3$ de $x^3 - 3x^2 + 1$

$x=-2$ de $x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

$x=1$ de $x^3 - 3x^2 + x + 1$

• $x=0$ de $x^3 - 3x^2 + 1$

$x=-1$ de $x^3 - 3x^2 - x + 3$

29. Supongamos que tenemos dos polinomios, $p_1(x)$ y $p_2(x)$, y un número real α .

• Si α es una raíz de $p_1(x)$, ¿también es raíz del polinomio suma $p_1(x) + p_2(x)$?

• Si α es una raíz de $p_1(x)$, ¿también es raíz del polinomio producto $p_1(x) \cdot p_2(x)$?

• ¿Hay alguna relación entre las raíces del polinomio $p_1(x)$ y las del polinomio $4 \cdot p_1(x)$?

30. Construye un polinomio de grado 3 tal que posea tres raíces distintas.

31. Determina un polinomio de grado 3 tal que tenga, al menos, una raíz repetida.

32. Construye un polinomio de grado 3 de forma que tenga una única raíz.

33. Conjetura, y luego demuestra, una ley que nos permita saber cuándo un polinomio cualquiera $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ admite al número 0 como raíz.

34. Demuestra una norma que señale cuándo un polinomio cualquiera $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ admite al número 1 como raíz.

35. Obtén todas las raíces de cada uno de los siguientes polinomios:

• $x+7$

$-x+5$

$2x-3$

$-4x-9$

$-2x$

• $x^2 - 3x$

$4x^2 - x - 3$

$x^3 - x$

$x^3 + x$

36. Usa la regla de Ruffini para realizar las siguientes divisiones de polinomios:

a) $-2x^2 + x + 1$ entre $x+1$

b) $x^3 + 2x^2 - 2x + 1$ entre $x+2$

c) $4x^3 - 3x^2 - 1$ entre $x-1$

d) $x^3 - 9x + 1$ entre $x-3$

37. Emplea la regla de Ruffini para dictaminar si los siguientes números son o no raíces de los polinomios citados:

a) $\alpha=3$ de $x^3 - 4x^2 + 5$

b) $\beta=-2$ de $-x^3 - 2x^2 + x + 2$

c) $\gamma=1$ de $-2x^4 + x + 1$

d) $\sigma=-1$ de $2x^3 + 2x^2$

38. Utiliza la regla de Ruffini para conocer el valor del polinomio $-x^3 + 2x^2 + x + 2$ en $x=3$.

39. Estudia si es posible usar la regla de Ruffini, de alguna forma, para dividir $x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ entre $2x+6$.

40. Para cada uno de los siguientes polinomios señala, en primer lugar, qué números enteros son candidatos a ser raíces tuyas y, después, determina cuáles lo son: a) $x^3 - x^2 + 2x - 2$; b) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 3$.

c) $2x^3 + x^2 - 18x - 9$; d) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 6x$

41. Completa el ejemplo precedente comprobando que, en efecto, $-\frac{1}{2}$ es raíz del polinomio $2x^3 + x^2 - 18x - 9$.

42. Para cada uno de los siguientes polinomios indica qué números racionales son candidatos a ser raíces tuyas y, después, determina cuáles lo son: a) $3x^2 + 4x + 1$

b) $2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$

43. Simplifica, si es posible, las siguientes expresiones: a) $\frac{x^2 + 4x}{x^3 + 3x^2 - 6x - 8}$; b) $\frac{x^2 - 1}{x^3 + 3x^2 - 6x - 8}$; c) $\frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 - 6x}$

44. Realiza las siguientes operaciones teniendo en cuenta las factorizaciones de los denominadores:

a) $\frac{5}{-3x+12} + \frac{x+2}{x^2-4x}$

b) $\frac{-x}{x^2-2x+1} - \frac{3x-1}{x^2-1}$

45. Realiza los cálculos: a) $(1+3a)^2$; b) $(-x+3)^2$; c) $(-3x-2)^2$; d) $(x^2-1)^3$; e) $(4x+2)^3$

46. Obtén las fórmulas de los cuadrados de los siguientes trinomios: a) $(a+b+c)^2$; b) $(a+b-c)^2$

47. Desarrolla las siguientes potencias: a) $(2x+3y)^2$; b) $(3x+y/3)^2$; c) $(5x-5/x)^2$; d) $(3a-5)^2$; e) $(a^2-b^2)^2$; f) $(3/5y-2/y)^2$

48. Expresa como cuadrado de una suma o de una diferencia las siguientes expresiones algebraicas:
 a) $a^2 + 6a + 9$ b) $4x^2 - 4x + 1$ c) $b^2 - 10b + 25$ d) $4y^2 + 12y + 9$ e) $a^4 - 2a^2 + 1$ f) $y^4 + 6y^2 + 9$
49. Efectúa estos productos: a) $(4x + 3y) \cdot (4x - 3y)$; b) $(2x^2 + 4) \cdot (2x^2 - 4)$; c) $(-x^2 + 3x) \cdot (x^2 + 3x)$
50. De acuerdo con lo expuesto, factoriza los siguientes polinomios: a) $x^2 - 2x + 1$; b) $3x^2 + 18x + 27$; c) $4x^5 - 16x^3$
51. Calcula los siguientes productos: a) $(3x + 1) \cdot (3x - 1)$; b) $(2a - 3b) \cdot (2a + 3b)$; c) $(x^2 - 5) \cdot (x^2 + 5)$; d) $(3a^2 + 5) \cdot (3a^2 - 5)$
52. Expresa como suma por diferencia las siguientes expresiones: a) $9x^2 - 25$; b) $4a^4 - 81b^2$; c) $49 - 25x^2$; d) $100a^2 - 64$
53. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas: a) $\frac{x^2 - 1}{3x + 3}$; b) $\frac{2x^2 + 12x + 18}{x^2 - 9}$; c) $\frac{6 - 3a}{a^2 - 4}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. En este ejercicio se va a presentar un *truco* mediante el cual vamos a adivinar el número que resulta tras manipular repetidamente un número desconocido. Convierte en una expresión algebraica las sucesivas alteraciones del número desconocido y justifica lo que ocurre.
 - i. Dile a un compañero que escriba en un papel un número natural y que no lo muestre
 - ii. Que lo multiplique por 10
 - iii. Que al resultado anterior le sume 100
 - iv. Que multiplique por 1 000 lo obtenido
 - v. Que divida entre 10 000 la última cantidad
 - vi. Que al resultado precedente le reste el número que escribió
 - vii. Independientemente del número desconocido original ¿qué número ha surgido?
2. En este otro ejercicio vamos a *adivinar* dos números que ha pensado un compañero. Construye una expresión algebraica que recoja todos los pasos y, finalmente, descubre el truco.
 - i. Solicita a un compañero que escriba en un papel, y no muestre, dos números naturales: uno de una cifra (entre 1 y 9) y otro de dos cifras (entre 10 y 99).
 - ii. Que multiplique por 4 el número escogido de una cifra.
 - iii. Que al resultado anterior le sume 3.
 - iv. Que multiplique por 5 lo obtenido.
 - v. Que a la última cantidad le reste 15.
 - vi. Que multiplique el resultado precedente por 5.
 - vii. Que le sume a lo anterior el número de dos cifras que eligió.
 - viii. Dile al compañero que desvele cuál es el resultado de todos esos cambios.
 - ix. ¿Qué debemos hacer para descubrir los dos números que escogió el compañero?
3. Estudia si hay números reales en los que las siguientes expresiones no pueden ser evaluadas:

$$\frac{3x - 6}{(x + 2) \cdot (2x - 14)}$$

$$\frac{-x}{x^2 - 4x + 4}$$

$$\frac{3x^3 - x}{-2x^4 - 3x^2 - 4}$$

$$\frac{5x - y + 1}{x^2 + y^2}$$

4. Una persona tiene ahorrados 1000 euros y decide depositarlos en un producto bancario con un tipo de interés anual del 3%. Si decide recuperar sus ahorros al cabo de dos años, ¿cuál será la cantidad total de la que dispondrá?
5. Generalicemos el ejercicio anterior: Si ingresamos X euros en un depósito bancario cuyo tipo de interés es del i % anual, ¿cuál será la cantidad que recuperaremos al cabo de n años?
6. Construye un polinomio de grado 2, $p(x)$, tal que $p(3) = -7$.
7. Consideremos los polinomios $p(x) = -5x^3 + x^2 - 3x - 2$, $q(x) = 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 7$ y $r(x) = 4x^2 + 5x - 1$. Realiza las siguientes operaciones: a) $p + q + r$; b) $p - q$; c) $p \cdot r$; d) $p \cdot r - q$
8. Calcula los productos: a) $\left(\frac{ax}{3} - \frac{by}{2}\right) \cdot \left(\frac{-xy}{6}\right)$ b) $(0.3x - 0.2y + 0.1z) \cdot (0.1x + 0.2y - 0.3z)$ c) $(x - 1)(x - a)(x - b)$
9. Efectúa las divisiones de polinomios: a) $2x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 9x - 1$ entre $2x^2 + 3x - 3$;
 b) $4x^5 - 5x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 10x - 6$ entre $x^3 + 2x + 3$
10. Calcula los cocientes: a) $(5x^4) : (x^2)$ b) $(3x^2y^4z^6) : ((1/2)xy^3z^5)$ c) $(x^4 + 2x^2y + y^2) : (x^2 + y)$

11. Realiza las operaciones entre fracciones algebraicas:

$$\frac{x-1}{x^2-3x} + \frac{2x}{x^2-6x+9}$$

$$\frac{x-1}{x^2-3x} - \frac{2x}{x^2-6x+9}$$

$$\frac{x-1}{x^2-3x} \cdot \frac{2x}{x^2-6x+9}$$

$$\frac{x-1}{x^2-3x} : \frac{2x}{x^2-6x+9}$$

12. Construye un polinomio de grado 2 tal que el número -5 sea raíz suya.

13. Determina un polinomio de grado 3 tal que sus raíces sean 6 , -3 y 0 .

14. Construye un polinomio de grado 4 tal que tenga únicamente dos raíces reales.

15. Encuentra un polinomio $q(x)$ tal que al dividir $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ entre $q(x)$ se obtenga como polinomio resto $r(x) = 5x^2 + 5x + 1$.

16. Halla las raíces enteras de los siguientes polinomios:

$$3x^3 + 11x^2 + 5x - 3$$

$$3x^3 + 2x^2 + 8x - 3$$

$$3x^3 + 5x^2 + x - 1$$

$$2x^3 + x^2 - 6x - 3$$

17. Obtén las raíces racionales de los polinomios del ejercicio anterior.

18. Descompón los siguientes polinomios como producto de polinomios irreducibles:

$$3x^3 + 11x^2 + 5x - 3$$

$$3x^3 + 5x^2 + x - 1$$

$$2x^3 + x^2 - 6x - 3$$

$$3x^3 - 6x^2 + x - 2$$

19. Calcula las potencias: a) $(x - 2y + z)^2$

b) $(3x - y)^3$

c) $((1/2)a + b^2)^2$

d) $(x^3 - y^2)^2$

20. Analiza si los siguientes polinomios han surgido del desarrollo de potencias de binomios, o trinomios, o de un producto *suma por diferencia*. En caso afirmativo expresa su procedencia.

$$x^2 + 6x + 9$$

$$x^4 - 8x^2 + 16$$

$$x^2 + \sqrt{20}xy + 5y^2$$

$$x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1$$

$$x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x + 1$$

$$x^2 - 36$$

$$5x^2 + 1$$

$$5x^2 - 11$$

$$x^2 - 3y^2$$

21. Descompón en factores: a) $x^4 - 1$

b) $x^2 - y^2$

c) $x^2y^2 - z^2$

d) $x^4 - 2x^2y + y^2$

22. Con este ejercicio se pretende mostrar la conveniencia a la hora de no operar una expresión polinómica que tenemos factorizada total o parcialmente. a) Comprueba la igualdad $x^4 - 5x^2 + 6 = (x^2 - 2) \cdot (x^2 - 3)$. b) Determina todas las raíces del polinomio $x^4 - 5x^2 + 6$.

23. : Factoriza numerador y denominador y simplifica: a) $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$

b) $\frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{x^2 + y^2}$

c) $\frac{x^3 - x}{x^4 - 1}$

24. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

$$a) \frac{2}{x(5-x)} - \frac{3}{2(5-x)}$$

$$b) \frac{x-y}{x+y} \cdot \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$$

$$c) \frac{2x+1}{4x^2-1}$$

25. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

$$a) \frac{x^4-1}{x^7} : \frac{x^2+1}{x^8}$$

$$b) \frac{2x+3y}{a-b} - \frac{3x+4y}{2a-2b}$$

$$c) -4x + (1-x^4) \left(\frac{x+1}{1-x} - \frac{1-x}{1+x} \right)$$

26. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

$$a) \left(x^4 - \frac{1}{x^2} \right) : \left(x^2 + \frac{1}{x} \right)$$

$$b) \frac{x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3}{x+a} : \frac{x-a}{x+a}$$

$$c) \left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} \right) : \frac{ab}{a+b}$$

27. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

$$a) \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{x+y}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{x+y}} : \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a+y}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{a+y}}$$

$$b) \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) : \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right)$$

$$c) \frac{\frac{3}{x} + \frac{2}{y}}{\frac{1}{x} - \frac{3}{y}} - \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{y}}{\frac{3}{x} + \frac{5}{y}}$$

28. Confecciona una hoja de cálculo que te permita dividir un polinomio usando la Regla de Ruffini.

AUTOEVALUACIÓN

1. Señala los coeficientes que aparecen en las siguientes expresiones algebraicas:
 - a) $\frac{3x-7}{2-3y^2} + 5xy^3 - \frac{6}{z}$
 - b) $-2x^5 + x^4 - x^3 + 5x - 1$
 - c) $5 \cdot \sqrt{2} \cdot x \cdot y^2 \cdot z$

2. El valor numérico de la expresión $\frac{3x-7}{2-3y^2} + 5xy^3 - \frac{6}{z}$ en $x=2, y=-1, z=-1$ es:
 - a) 17
 - b) 15
 - c) -3
 - d) -5

3. Completa adecuadamente las siguientes frases:
 - a) La suma de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado
 - b) La suma de tres polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado
 - c) El producto de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado
 - d) La diferencia de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado

4. Al dividir el polinomio $p(x) = x^5 + x^4 + x^3 + 1$ entre $q(x) = x^2 + x + 1$ el polinomio resto resultante:
 - a) debe ser de grado 2.
 - b) puede ser de grado 2.
 - c) debe ser de grado menor que 2.
 - d) ninguna de las opciones precedentes.

5. Considera el polinomio $2x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 7x + 3$. ¿Cuáles de los siguientes números enteros son *razonables candidatos* para ser una raíz suya?
 - a) 3
 - b) 2
 - c) -5
 - d) -7

6. Considera el polinomio $2x^4 + 7x^3 + x^2 - 7x - 3$. ¿Cuáles de los siguientes números racionales son *razonables candidatos* para ser una de sus raíces?
 - a) -3
 - b) $2 \text{ y } \frac{-1}{2}$
 - c) $-3 \text{ y } \frac{1}{3}$
 - d) $-3 \text{ y } \frac{3}{2}$

7. Todo polinomio con coeficientes enteros de grado tres
 - a) tiene tres raíces reales.
 - b) tiene, a lo sumo, tres raíces reales.
 - c) tiene, al menos, tres raíces.

8. ¿Es posible que un polinomio, con coeficientes enteros, de grado cuatro tenga exactamente tres raíces, ya sean diferentes o con alguna múltiple?

9. Justifica la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes frases:
 - a) La regla de Ruffini sirve para dividir dos polinomios cualesquiera.
 - b) La regla de Ruffini permite dictaminar si un número es raíz o no de un polinomio.
 - c) La regla de Ruffini solo es válida para polinomios con coeficientes enteros.
 - d) La regla de Ruffini es un algoritmo que nos proporciona todas las raíces de un polinomio.

10. Analiza si puede haber algún polinomio de grado ocho que no tenga ninguna raíz.

RESUMEN

Expresión algebraica	Expresión matemática que se construye con números reales y las operaciones matemáticas básicas de suma, resta, multiplicación y/o división	$\frac{-3x}{2x+y^3} - x \cdot y^2 \cdot z$
Variable, indeterminada	Lo no concretado en una expresión algebraica	Las variables, o indeterminadas, del ejemplo anterior son x, y, z .
Valor numérico de una expresión algebraica	Al fijar un valor concreto para cada indeterminada, o variable, de una expresión algebraica aparece un número real: el valor numérico de esa expresión algebraica para tales valores de las indeterminadas	Si, en la expresión precedente, hacemos $x = 3, y = -2, z = 1/2$ obtenemos $\frac{-3 \cdot 3}{2 \cdot 3 + (-2)^3} - 3 \cdot (-2)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{-3}{2}$
Monomio	Expresión dada por el producto de números reales e indeterminadas	$-5 \cdot x \cdot y^3 \cdot z^2, 7 \cdot x^2$
Coefficiente de un monomio	El número real que multiplica a la indeterminada, o indeterminadas, del monomio	Los coeficientes de los anteriores monomios son, respectivamente, -5 y 7
Parte literal de un monomio	La indeterminada, o producto de indeterminadas, que multiplica al coeficiente del monomio	La parte literal de $-5 \cdot x \cdot y^3 \cdot z^2$ es $x \cdot y^3 \cdot z^2$
Grado de un monomio	Cuando hay una única indeterminada es el exponente de dicha indeterminada. Si aparecen varias, el grado del monomio será la suma de los exponentes de esas indeterminadas	Los grados de los monomios precedentes son 6 y 2 , respectivamente
Polinomio	Expresión construida a partir de la suma de monomios	$-x^3 + 4x^2 + 8x + 6$
Grado de un polinomio	El mayor grado de sus monomios	El anterior polinomio es de grado 3
Suma, resta y producto de polinomios	El resultado siempre es otro polinomio	$p = -3x + 6; q = x^2 + 4.$ $p + q = x^2 - 3x + 10; p - q = -x^2 - 3x + 2;$ $p \cdot q = -3x^3 + 6x^2 - 12x + 24.$
División de dos polinomios	Se obtienen otros dos polinomios, los polinomios cociente ($c(x)$) y resto ($r(x)$), ligados a los polinomios iniciales, los polinomios dividendo ($p(x)$) y divisor ($q(x)$)	$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$
Factorización de un polinomio	Consiste en expresarlo como producto de otros polinomios de menor grado	$x^5 - 3x^3 - x^2 + 3 = (x^2 - 3) \cdot (x^3 - 1)$
Polinomio irreducible	Es aquel que no puede ser expresado como producto de otros polinomios de grado inferior	$-3x + 6, x^2 + 4$
Raíz de un polinomio	Un número real concreto α es una raíz, o un cero, del polinomio p , si al evaluar p en $x = \alpha$ obtenemos el número 0 , es decir, si $p(\alpha) = 0$	2 es raíz de $-3x + 6$ 1 y -3 son raíces de $x^2 + 2x - 3$
Raíces y factorización	El que un número real concreto α sea una raíz del polinomio $p(x)$ es equivalente a que el polinomio $p(x)$ admita una descomposición factorial de la forma $p(x) = (x - \alpha) \cdot c(x)$ para cierto polinomio $c(x)$	-2 es una raíz de $x^3 + 2x^2 - x - 2$ $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x + 2) \cdot (x^2 - 1)$
Número de raíces y grado	Todo polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces reales, alguna de las cuales puede aparecer repetida entre esos no más de n números reales	$x^2 + 2x - 3$ tiene dos raíces, 1 y -3 $3x^2 + 7$ no tiene raíces
Regla de Ruffini	Nos puede ayudar a la hora de factorizar un polinomio y conocer sus raíces	

CAPÍTULO 4: ECUACIONES Y SISTEMAS

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

- Indica si son ecuaciones de segundo grado las siguientes ecuaciones:
 a) $3x^2 - \sqrt{7}x + 5 = 0$ b) $4.7x^2 - 6.25 = 0$ c) $7x^2 - \frac{2}{x} + 5x = 0$ d) $2xy^2 - 5 = 0$ e) $33 - 2.35x = 0$ f) $9x^2 - 52\sqrt{x} + 3.2 = 0$
- En las siguientes ecuaciones de segundo grado, indica quiénes son a , b y c .
 a) $3 - 8x^2 + 10x = 0$ b) $-3.4x^2 + 7.8x = 0$ c) $6x^2 - 1 = 0$ d) $1.25x^2 - 3.47x + 2.75 = 0$.
- Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado completas:
 a) $x^2 - 8x + 7 = 0$ b) $2x^2 + 3x - 12 = 0$ c) $10x^2 - 9x + 50 = 0$ d) $x^2 - 13x + 22 = 0$
- Resuelve las siguientes ecuaciones:
 a) $2x - 3 \cdot \frac{x-1}{5} = 6x^2 - \frac{8x-3}{5}$; b) $2 \cdot \frac{x-7}{5} - \frac{3-2x}{x} = 10$; c) $5x \cdot (x-3) + 4(x^2-5) + 10 = -10$;
 d) $5(x^2-1) + 3(x^2-5) + 4 = 16$; e) $\frac{2-5x^2}{3x} - \frac{4}{3} = \frac{4x-7}{6}$; f) $\frac{2-3x^2}{5x} - \frac{4}{3} = \frac{2x-1}{15}$.
- Averigua cuántas soluciones tienen las siguientes ecuaciones de 2º grado:
 a) $9x^2 + 4x + 7 = 0$ b) $3x^2 - 5x + 2 = 0$ c) $x^2 - 9x - 12 = 0$ d) $2x^2 - 7x + 9 = 0$.
- Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado incompletas:
 a) $5x^2 + 75x = 0$ b) $4x^2 - 160 = 0$ c) $x^2 - 64 = 0$ d) $3x^2 + 2x = 0$ e) $9x^2 - 49 = 0$ f) $3x^2 - 33x = 0$.
- Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado incompletas:
 a) $3x^2 + 18x = 0$ b) $5x^2 - 180 = 0$ c) $x^2 - 49 = 0$ d) $2x^2 + x = 0$ e) $4x^2 - 25 = 0$ f) $5x^2 - 10x = 0$.
- Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones de 2º grado:
 a) $2x^2 + 8x = 0$ b) $x^2 + 6x - 27 = 0$ c) $x^2 - 81 = 0$ d) $x^2 - 13x + 22 = 0$ e) $x^2 - 3x - 4 = 0$ f) $x^2 - 5x - 24 = 0$
- Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean 5 y 9.
- El perímetro de un rectángulo mide 20 cm y su área 24 cm². Calcula mentalmente sus dimensiones.
- Si 3 es una solución de $x^2 - 7x + a = 0$, ¿cuánto vale a ?

2. OTROS TIPOS DE ECUACIONES

- Resuelve las ecuaciones siguientes:
 a) $(x-7) \cdot (x-2) \cdot (x+5) \cdot (x-3) \cdot (x-11) = 0$ b) $3(x-5) \cdot (x-7) \cdot (x+2) \cdot (x-3) \cdot (x-4) = 0$
- Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas:
 a) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ b) $x^4 + 12x^2 + 35 = 0$ c) $x^4 - 4x^2 - 12 = 0$.
- Resuelve las ecuaciones bicuadradas siguientes:
 a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ b) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$ c) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ d) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$.
- Resuelve las siguientes ecuaciones racionales:
 a) $\frac{1}{x^2-x} - \frac{1}{x-1} = 0$ b) $\frac{1}{x-6} + \frac{x}{x-2} = \frac{4}{x^2-8x+12}$ c) $\frac{3}{x} = 1 + \frac{x-13}{6}$.
- Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales:
 a) $\sqrt{5x+4} - 1 = 2x$ b) $\sqrt{x+19} + 1 = \sqrt{2x+4}$ c) $3\sqrt{x-1} + 11 = 2x$.
- Resuelve las ecuaciones siguientes:
 a) $(x-9) \cdot (x-1) \cdot (x+24) \cdot (x-5) \cdot (x-3) = 0$ b) $3(x-5) \cdot (x-9) \cdot (x+2) \cdot (x-1) \cdot (x-4) = 0$
- Resuelve las ecuaciones bicuadradas siguientes:
 a) $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$ b) $x^4 - 21x^2 + 12100 = 0$ c) $x^4 - 45x^2 + 234 = 0$ d) $x^4 - 37x^2 + 36 = 0$
- Resuelve las ecuaciones racionales siguientes:
 a) $\frac{2x-1+7x}{3x} = \frac{3}{x} - 2$ b) $\frac{1}{x} + 1 - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{4}{3}$ d) $\frac{2x-3}{x} + \frac{1}{x} = 1$
- Resuelve las ecuaciones irracionales siguientes:
 a) $5 + \sqrt{x-1} = x + 2$ b) $\sqrt{x-2} + 3\sqrt{x-2} = x + 1$ c) $\sqrt{x} - 4 = x - 1$ d) $7 + \sqrt{x+4} = x + 9$
- Resuelve las ecuaciones exponenciales siguientes:
 a) $5^{3x} = \frac{1}{625}$ b) $2^{2x} \cdot 4^x = \frac{1}{16}$ c) $2^{x+5} \cdot 2^{x+4} \cdot 2^{x+3} = 8$

3. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

22. Razona si son o no sistemas de ecuaciones lineales los siguientes sistemas:

$$a) \begin{cases} 7xy + 5y = 2 \\ 3x - 5y = 8 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2y - 4x = 3 \\ 3x - 5y = -6 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3x - 4 = 2y \\ 6x + 8y = 9 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 2x^2 + 3y = 5 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

23. Representa los siguientes sistemas y clasifícalos:

$$a) \begin{cases} 2x + y = 4 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x - y = 4 \\ -y + 3x = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3x - 9y = 9 \\ 2x - 6y = 6 \end{cases}$$

24. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas y clasifícalos:

$$a) \begin{cases} 2x + y = 6 \\ -3x + y = -1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - y = 3 \\ -2y + 2x = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 4x - 6y = 6 \end{cases}$$

25. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas y clasifícalos:

$$a) \begin{cases} x + y = 5 \\ -3x + y = -3 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - y = 3 \\ -2y + x = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x - 4y = 4 \end{cases}$$

26. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

$$a) \begin{cases} 2x + 5y = -6 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 4x + y = 8 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 5x - 2y = 3 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$$

27. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

$$a) \begin{cases} 3x + 4y = 26 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x + 4y = 26 \\ 3x + y = 24 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ 2x + 3y = 14 \end{cases}$$

28. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

$$a) \begin{cases} x + y = 11 \\ -x + 3y = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x - 5y = 4 \\ 2x + 7y = -11 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 7x - 3y = 5 \\ 3x + 4y = 11 \end{cases}$$

29. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

$$a) \begin{cases} 3x + y = 2 \\ -2x + y = -5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ 4x + 5y = 12 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 9x - 2y = 7 \\ x + 3y = 8 \end{cases}$$

30. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

$$a) \begin{cases} x + 2y = 3 \\ -2x - 5y = 4 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x - 4y = 5 \end{cases}$$

31. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

$$a) \begin{cases} 3x + y = 8 \\ x - 5y = -9 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + 3y = 9 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - 2y = 7 \end{cases}$$

5. SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

32. Razona si son o no sistemas de ecuaciones lineales los siguientes sistemas:

$$a) \begin{cases} x \cdot y + 2y = 6 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 5y - x = 4 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 4x - 2 = y \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x^2 + y = 2 \\ 3x + y^2 = 4 \end{cases}$$

33. Resuelve los siguientes sistemas no lineales:

$$a) \begin{cases} x \cdot y + 2 = 4x \\ y - x = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} y^2 - x^2 = 5 \\ 5x - 3y = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + y = 7 \\ x \cdot y = 12 \end{cases}$$

34. Resuelve los siguientes sistemas y comprueba gráficamente las soluciones:

$$a) \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x + y = 3 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x - y = 1 \\ xy = 2 \end{cases} \quad c) \begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ xy = 4 \end{cases} \quad d) \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17 \\ x + y = 5 \end{cases} \quad e) \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = 6 \end{cases} \quad f) \begin{cases} x^2 + y^2 = 18 \\ y = x \end{cases}$$

35. La trayectoria de un proyectil es una parábola de ecuación: $y = -x^2 + 5x$, y la trayectoria de un avión es una recta de ecuación: $y = 3x$. ¿En qué puntos coinciden ambas trayectorias? Representa gráficamente la recta y la parábola para comprobar el resultado.

36. Resuelve los siguientes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = -2 \\ 2x^2 - 3y^2 = -1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 3x^2 + y^2 = 3 \\ 5x^2 - 2y^2 = 5 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} xy = \frac{1}{2} \\ x + y = \frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} x^2 - 4y = -3 \\ xy = 1 \end{cases} \quad \text{e) } \begin{cases} x + y - \frac{y}{x} = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

37. Resuelve los siguientes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y - 3z = -2 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x + y + 2z = 6 \\ x + 2y + 2z = 4 \\ 3x - 2y - 3z = 3 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 3x + 2y - 2z = 5 \\ x - 2y + 2z = -1 \\ x - 2y - 3z = -6 \end{cases}$$

3. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

38. ¿Qué número multiplicado por 4 es 5 unidades menor que su cuadrado?
39. En una clase deciden que todos van a enviar una carta al resto de compañeros. Uno dice: ¡Vamos a escribir 380 cartas! Calcula el número de alumnos que hay en la clase.
40. Calcula tres números consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 365.
41. Una fotografía rectangular mide 14 cm de base y 10 cm de altura. Alrededor de la foto hay un margen de igual anchura para la base que para la altura. Halla el ancho del margen, sabiendo que el área total de la foto y el margen es de 252 cm².
42. El triple del cuadrado de un número aumentado en su duplo es 85. ¿Cuál es el número?
43. Un triángulo isósceles tiene un perímetro de 20 cm y la base mide 4 cm, calcula los lados del triángulo y su área.
44. Una hoja de papel cuadrada se dobla por la mitad. El rectángulo resultante tiene un área de 8 cm². ¿Cuál es perímetro de dicho rectángulo?
45. Un padre dice: "El producto de la edad de mi hijo hace 5 años por el de su edad hace 3 años es mi edad actual, que son 35 años". Calcula la edad del hijo.
46. Halla las dimensiones de rectángulo cuya área es 21 m², sabiendo que sus lados se diferencian en 4 metros.
47. En un triángulo rectángulo el cateto mayor mide 4 cm menos que la hipotenusa y 4 cm más que el otro cateto. ¿Cuánto miden los lados del triángulo?
48. Halla dos números pares consecutivos cuyo producto sea 224.
49. Halla tres números impares consecutivos tales que si al cuadrado del mayor se le restan los cuadrados de los otros dos se obtiene como resultado 15.
50. La suma de las edades de María y Alfonso son 65 años. La edad de Alfonso menos la mitad de la edad de María es igual a 35. ¿Qué edad tienen cada uno?
51. La suma de las edades de Mariló y Javier es 32 años. Dentro de 7 años, la edad de Javier será igual a la edad de Mariló más 20 años. ¿Qué edad tiene cada uno en la actualidad?
52. Encuentra dos números cuya diferencia sea 24 y su suma sea 104.
53. Un hotel tiene 42 habitaciones (individuales y dobles) y 62 camas, ¿cuántas habitaciones tiene de cada tipo?
54. En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 10 cm y las longitudes de sus dos catetos suman 14 cm. Calcula el área del triángulo.
55. Nieves le pregunta a Miriam por sus calificaciones en Matemáticas y en Lengua. Miriam le dice "La suma de mis calificaciones es 19 y el producto 90". Nieves le da la enhorabuena. ¿Qué calificaciones obtuvo?
56. De un número de tres cifras se sabe que suman 12, que la suma de sus cuadrados es 61, y que la cifra de las decenas es igual a la de las centenas más 1. ¿Qué número es?
57. Se tienen tres zumos compuestos del siguiente modo: El primero de 40 dl de naranja, 50 dl de limón y 90 dl de pomelo. El segundo de 30 dl de naranja, 30 dl de limón y 50 dl de pomelo. El tercero de 20 dl de naranja, 40 dl de limón y 40 dl de pomelo. Se pide qué volumen habrá de tomarse de cada uno de los zumos anteriores para formar un nuevo zumo de 34 dl de naranja, 46 dl de limón y 67 dl de pomelo.
58. Se venden tres especies de cereales: trigo, cebada y mijo. Cada kg de trigo se vende por 2 €, el de la cebada por 1 € y el de mijo por 0.5 €. Si se vende 200 kg en total y se obtiene por la venta 300 €, ¿cuántos volúmenes de cada cereal se han vendido?
59. Se desea mezclar harina de 2 €/kg con harina de 1 €/kg para obtener una mezcla de 1.2 €/kg. ¿Cuántos kg deberemos poner de cada precio para obtener 300 kg de mezcla?
60. En una tienda hay dos tipos de juguetes, los de tipo A que utilizan 2 pilas y los de tipo B que utilizan 5 pilas. Si en total en la tienda hay 30 juguetes y 120 pilas, ¿cuántos juguetes hay de cada tipo?
61. Un peatón sale de una ciudad A y se dirige a una ciudad B que está a 15 km de distancia a una velocidad de 4 km/h, y en el mismo momento sale un ciclista de la ciudad B a una velocidad de 16 km/h y se dirige hacia A, ¿cuánto tiempo lleva el peatón caminando en el momento del encuentro? ¿A qué distancia de B se cruzan?

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Ecuaciones de segundo grado

- Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado

a) $-x^2 - 7x - 12 = 0$	b) $x(-5 + x) = 3$	c) $3x^2 = 30x$
d) $3(x + 1) - x(5x + 2) = 7$	e) $3(7x - 2) + 3x(x - 4) = 1$	f) $4(x^2 - 4) - 5(3 + 2x) = -7$
g) $(3x + 2) \cdot (4x - 2) = -6x - 2$	h) $x \cdot (x + 13) = 168$	i) $2(3x^2 - 5x + 2) - 5x(6x - 3) = -2$
- Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado con denominadores:

a) $\frac{x^2 - 3}{2} - \frac{x + 2}{4} = 5$	b) $\frac{x^2 - 5}{2} + \frac{2x^2 - 3x + 7}{2} = 5$	c) $\frac{2x^2 + 1}{5} + \frac{x + 3}{10} = 1$
d) $\frac{2 - 2x^2}{3} + \frac{4x - 3}{2} = \frac{5}{6}$	e) $\frac{x^2 - 1}{3} - \frac{5x - 9}{6} = 4x - 3$	f) $\frac{2x + 3x^2}{7} - \frac{3x - 8}{14} = 1$
- Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $x^2 - 3x - 10 = 0$	b) $x^2 + 3x - 10 = 0$	c) $x^2 + 7x + 10 = 0$	d) $x^2 - 7x + 10 = 0$
e) $x(-1 + x) = 0$	f) $2x^2 = 50$	g) $x^2 - 5x + 6 = 0$	h) $x^2 - x - 6 = 0$
		i) $x^2 + x - 6 = 0$	
- Factoriza las ecuaciones del problema anterior. Así, si las soluciones son 2 y 3, escribe: $5x^2 - 25x + 30 = 0 \Leftrightarrow 5(x - 2) \cdot (x - 3) = 0$. Observa que si el coeficiente de x^2 fuese distinto de 1 los factores tienen que estar multiplicados por dicho coeficiente.
- Cuando el coeficiente b es par ($b = 2B$), puedes simplificar la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2B \pm \sqrt{4B^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2B \pm 2\sqrt{B^2 - ac}}{2a} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - ac}}{a}$$

Así para resolver $x^2 - 8x + 12 = 0$ basta decir $x = 4 \pm \sqrt{16 - 12} = 4 \pm 2$, luego sus soluciones son 6 y 2. Utiliza esa expresión para resolver: a) $x^2 - 2x - 8 = 0$ b) $x^2 - 6x - 7 = 0$ c) $x^2 + 4x - 5 = 0$
- Resuelve mentalmente las ecuaciones siguientes, luego desarrolla las expresiones y utiliza la fórmula general para volver a resolverlas.

a) $(x - 2) \cdot (x - 5) = 0$	b) $(x + 1) \cdot (x - 6) = 0$	c) $(x - 3) \cdot (x - 5) = 0$
d) $(x - 4) \cdot (x + 7) = 0$	e) $(x + 8) \cdot (x - 9) = 0$	f) $(x - 2) \cdot (x + 3) = 0$
- Determina el número de soluciones reales que tienen las siguientes ecuaciones de segundo grado calculando su discriminante, y luego resuélvelas.

a) $x^2 + 7x - 3 = 0$	b) $5x^2 + 7x - 8 = 0$	c) $2x^2 + 3x + 9 = 0$
d) $2x^2 - 2x + 7 = 0$	e) $3x^2 - 2x - 7 = 0$	f) $4x^2 + x - 5 = 0$
- Escribe tres ecuaciones de segundo grado que no tengan ninguna solución real. *Ayuda:* Utiliza el discriminante.
- Escribe tres ecuaciones de segundo grado que tengan una solución doble.
- Escribe tres ecuaciones de segundo grado que tengan dos soluciones reales y distintas.
- Resuelve las siguientes ecuaciones polinómicas:

a) $x^5 - 37x^3 + 36x = 0$	b) $x^3 - 2x^2 - 8x = 0$	c) $2x^3 + 2x^2 - 12x = 0$
d) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$	e) $2x^4 = 32x^2 - 96$	f) $x(x - 3)(2x + 3)(3x - 5) = 0$
- Resuelve las siguientes ecuaciones aplicando un cambio de variable:

a) $x^8 + 81 = 82x^4$	b) $x^4 - 24x^2 + 144 = 0$	c) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$	d) $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$
-----------------------	----------------------------	-------------------------	-------------------------
- Resuelve las siguientes ecuaciones racionales:

a) $3x + \frac{2}{x} = 1$	b) $\frac{2}{3x} + \frac{5}{6x} = x$	c) $\frac{2}{x-5} + 3 = \frac{1}{x-2}$	d) $\frac{3x}{2-x} - 4x = 2$
e) $\frac{3}{x+2} = \frac{2(3x+1)}{x-2} + 1$	f) $\frac{3x-1}{x+2} - \frac{5+2x}{2x} = 4$	g) $\frac{5x-3}{x+1} - \frac{5+3x}{x-1} = 2$	
h) $\frac{4}{1-x} = \frac{3}{x} + \frac{1}{x-x^2}$	i) $\frac{5x}{x-2} - \frac{2x}{x^2-4} = \frac{x}{3}$	j) $\frac{1}{3} = \frac{x-4}{6-x}$	

14. Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales:

a) $x = -2 + \sqrt{5 + 4x^2}$; b) $\sqrt{16 - x} = x - 4$; c) $5 + \sqrt{x^2 - 3x + 2} = 2x$; d) $\sqrt{x} - \sqrt{x-2} = 5$; e) $\sqrt{1-x} - \sqrt{x+1} + 2 = 0$;
 f) $\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} = 3$; g) $5\sqrt{x-2} + 1 = \frac{2}{\sqrt{x+1}}$; h) $\sqrt{x-2} - \frac{1}{\sqrt{x-2}} = 2$; i) $\sqrt{x+1} + \frac{1}{\sqrt{x-2}} = 3$

15. Resuelve las ecuaciones siguientes: a) $3^{2x} = \frac{1}{81}$ b) $2^{2x} = \frac{1}{1024}$

Sistemas lineales de ecuaciones

16. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 4x - 3y = 1 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 4y = 5 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x + y = 2 \end{cases}$

17. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{cases} -3x + 2y = -1 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 2y = 1 \\ 4x - y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x - 4y = 10 \\ -8x + 3y = -13 \end{cases}$

18. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases} 7x - 2y = 5 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 5y = 20 \\ -x - 6y = -14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 6y = 0 \\ -5x + 2y = -9 \end{cases}$

19. Resuelve de forma gráfica los siguientes sistemas

a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 3y = 5 \\ x - 7y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ -7x + 5y = 3 \end{cases}$

20. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} \frac{x-2}{5} - \frac{3y-1}{2} = -1 \\ \frac{3x+1}{2} + \frac{3y-1}{4} = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{x-1}{3} - \frac{5y+7}{6} = -2 \\ 4x+y=5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{5x+1}{2} + \frac{2y-5}{3} = 4 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$

21. Copia en tu cuaderno y completa los siguientes sistemas incompletos de forma que se cumpla lo que se pide en cada uno:

Compatible indeterminado Incompatible Su solución sea $x = 2$ e $y = 1$
 a) $\begin{cases} ()x + 2y = () \\ 3x - y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -3x + y = 1 \\ ()x + y = 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y = () \\ ()x + 2y = 8 \end{cases}$

Incompatible Su solución sea $x = -1$ e $y = 1$ Compatible indeterminado
 d) $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 6x + ()y = () \end{cases}$ e) $\begin{cases} 4x + ()y = -1 \\ ()x + y = 5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} ()x + 8y = () \\ x + 2y = -3 \end{cases}$

22. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación y comprueba la solución gráficamente. ¿De qué tipo es cada sistema?

a) $\begin{cases} -2x + 6y = 4 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = -3 \\ 3x - 3y = -9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y = 4 \\ -x + 3y = -5 \end{cases}$

Problemas

- En una tienda alquilan bicicletas y triciclos. Si tienen 30 vehículos con un total de 80 ruedas, ¿cuántas bicicletas y cuántos triciclos tienen?
- ¿Cuál es la edad de una persona si al multiplicarla por 12 le faltan 64 unidades para completar su cuadrado?
- Descompón 12 en dos factores cuya suma sea 7.
- El triple del cuadrado de un número aumentado en su duplo es 616. ¿Qué número es?
- La suma de los cuadrados de dos números impares consecutivos es 130. Determina dichos números.
- Van cargados un asno y un mulo. El asno se quejaba del peso que llevaba encima. El mulo le contestó: Si yo llevara uno de tus sacos, llevaría el doble de carga que tú, pero si tú tomas uno de los míos, los dos llevaremos igual carga. ¿Cuántos sacos lleva cada uno?
- ¿Qué número multiplicado por 3 es 28 unidades menor que su cuadrado?
- Calcula tres números consecutivos cuya suma de cuadrados es 110.
- Dentro de 2 años, la edad de Raquel será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 10 años. ¿Qué edad tiene Raquel?
- Dos números se diferencian en 3 unidades y la suma de sus cuadrados es 185. ¿Cuáles son dichos números?
- La suma de dos números es 2 y su producto es -80 , ¿de qué números se trata?
- María quiere formar bandejas de un kilogramo con caramelos y bombones. Si los caramelos le cuestan a 3 euros el kilo y los bombones a 7 euros el kilo, y quiere que el precio de cada bandeja sea de 5 euros, ¿qué cantidad deberá poner de cada producto? Si quiere formar 100 bandejas, ¿qué cantidad de caramelos y de bombones va a necesitar?

35. Determina los catetos de un triángulo rectángulo cuya suma es 17 cm y la hipotenusa de dicho triángulo mide 13 cm.
36. El producto de dos números es 6 y la suma de sus cuadrados 13. Calcula dichos números
37. La suma de dos números es 12. El doble del primero más el triple del segundo es 31. ¿De qué números se trata?
38. En un garaje hay 30 vehículos entre coches y motos. Si en total hay 80 ruedas, ¿cuántos coches y motos hay en el garaje?
39. La edad actual de Luis es el doble de la de Miriam. Dentro de 10 años, sus edades sumarán 50. ¿Cuántos años tienen actualmente Luis y Miriam?
40. En mi clase hay 25 personas. Nos han regalado a cada chica 3 pegatinas y a cada chico 2 chapas. Si en total había 65 regalos. ¿Cuántos chicos y chicas somos en clase?
41. Entre mi abuelo y mi hermano tienen 80 años. Si mi abuelo tiene 50 años más que mi hermano, ¿qué edad tiene cada uno?
42. Tres bocadillos y un refresco cuestan 8 €. Cuatro bocadillos y dos refrescos cuestan 12 €. ¿Cuál es el precio del bocadillo y el refresco?
43. En una granja hay gallinas y ovejas. Si se cuentan las cabezas, son 40. Si se cuentan las patas, son 100. ¿Cuántos gallinas y ovejas hay en la granja?
44. Un rectángulo tiene un perímetro de 180 metros. Si el largo es 10 metros mayor que el ancho, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?
45. En un monedero hay billetes de 5 € y 10 €. Si en total hay 10 billetes y 75 €, ¿cuántas billetes de cada valor hay en el monedero?
46. En una pelea entre arañas y avispas, hay 13 cabezas y 90 patas. Sabiendo que una araña tiene 8 patas y una avispa 6, ¿cuántas avispas y arañas hay en la pelea?
47. Una clase tiene 30 estudiantes, y el número de alumnas es doble al de alumnos, ¿cuántos chicos y chicas hay?
48. Nieves tiene 8 años más que su hermano Daniel, y su madre tiene 50 años. Dentro de 2 años la edad de la madre será doble de la suma de las edades de sus hijos, ¿qué edades tienen?
49. Se mezclan 18 kg de arroz de 1.3 € el kilogramo con 24 kg de arroz de precio desconocido, resultando el precio de la mezcla de 1.7 € el kg. ¿Qué precio tenía el segundo arroz?
50. La altura de un trapecio isósceles es de 3 cm, el perímetro, 28 cm, y los lados inclinados son iguales a la base menor. Calcula el área del trapecio.
51. Dos autobuses salen, uno desde Madrid y el otro desde Cáceres a las 9 de la mañana. Uno va a 80 km/h y el otro a 100 km/h. ¿A qué hora se cruzan? ¿A cuántos km de Madrid estarán?
52. En un concurso se ganan 40 euros por cada respuesta acertada y se pierden 80 por cada fallo. Después de 10 preguntas, Carmela lleva ganados 280 euros. ¿Cuántas preguntas ha acertado?
53. Paco ha comprado 5 zumos y 4 batidos por 5,7 €, luego ha comprado 7 zumos y 5 batidos y le han costado 7,8 €. Calcula los precios de ambas cosas.
54. ¿Qué fracción es igual a 1 cuando se suma 1 al numerador y es igual a $\frac{1}{2}$ cuando se suma 2 al denominador?
55. El cociente de una división es 2 y el resto es 1. Si el divisor disminuye en 1 unidad, el cociente aumenta en 1 y el resto nuevo es 1. Hallar el dividendo y el divisor.
56. Dos amigas fueron a pescar. Al final del día una dijo: "Si tú me das uno de tus peces, entonces yo tendré el doble que tú". La otra le respondió: "Si tú me das uno de tus peces, yo tendré el mismo número de peces que tú". ¿Cuántos peces tenía cada una?
57. Calcula las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su área es 35 cm^2 , y cuyo perímetro mide 24 cm.
58. Un peatón sale de una ciudad "A" a una velocidad de 4 km/h, y se dirige a una ciudad "B" que está a 20 km de la ciudad "A", 30 minutos después sale un ciclista de la ciudad "B" a una velocidad de 20 km/h y se dirige hacia "A", ¿cuánto tiempo lleva el peatón caminando en el momento del encuentro? ¿A qué distancia de "B" se cruzan?
59. Se desea mezclar aceite de 2,7 €/l con otro aceite de 3.6 €/l de modo que la mezcla resulte a 3 €/l. ¿Cuántos litros de cada clase deben mezclarse para obtener 100 litros de la mezcla?
60. Al intercambiar las cifras de un número de dos cifras se obtiene otro que es 45 unidades mayor. Halla el número inicial.
61. La diagonal de un rectángulo mide 25 cm y el perímetro 70 cm. Halla los lados del rectángulo.
62. Una valla rodea un terreno rectangular de 300 m^2 . Si la valla mide 70 metros, calcula las dimensiones del terreno.
63. Varios amigos van a hacer un regalo de bodas que cuesta 800 euros, que pagarán a partes iguales. A última hora se apuntan seis amigos más, con lo que cada uno toca a 30 euros menos. ¿Cuántos amigos eran inicialmente? ¿Cuánto pagará al final cada uno?
64. Las diagonales de un rombo se diferencian en 2 cm y su área es de 24 cm^2 . Calcula su perímetro.
65. Un tren sale de Barcelona hacia Madrid a una velocidad de 200 km/h. Una hora más tarde sale otro tren de Madrid hacia Barcelona a 220 km/h; la distancia entre las dos ciudades es de 618 km. ¿Al cabo de cuánto tiempo se cruzan los dos trenes? ¿A qué distancia de Barcelona?
66. Un coche sale de una ciudad "A" a una velocidad de 100 km/h y 30 minutos más tarde otro coche sale de "A" en la misma dirección y sentido a una velocidad de 120 km/h, ¿cuánto tiempo tardará el segundo en alcanzar al primero y a qué distancia de "A" se produce el encuentro?
67. Diseña una página de cálculo que resuelva ecuaciones de segundo grado y sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas.
68. Utiliza la Hoja de cálculo [Ecuaciones y sistemas](#) para comprobar las soluciones de los ejercicios de este capítulo.

AUTOEVALUACIÓN

1. La solución de la ecuación $2(x-3) - 3(x^2-4) = 1$ es:

- a) $x = 10/3 \wedge x = -2$ b) $x = 5/3 \wedge x = -1$ c) $x = 1 \wedge x = -2/3$ d) $x = 3/2 \wedge x = -7/6$

2. Las soluciones de la ecuación $80 = x(x-2)$ son:

- a) $x = 8 \wedge x = -10$ b) $x = 40 \wedge x = 2$ c) $x = 10 \wedge x = -8$ d) $x = 10 \wedge x = 8$

3. Las soluciones de la ecuación $\frac{3x-1}{2} - \frac{x+5}{6} = \frac{x^2}{3}$ son:

- a) $x = 4 \wedge x = -2$ b) $x = 3 \wedge x = -2$ c) $x = 1/5 \wedge x = 2$ d) $x = 2 \wedge x = 2$

4. Las soluciones de la ecuación $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$ son:

- a) 2, -2, 5, -5 b) 3, -3, 2, -2 c) 1, -1, 4, -4 d) 3, -3, 5, -5

5. Las rectas que forman el sistema $\begin{cases} 7x + 21y = 14 \\ 2x + 6y = 4 \end{cases}$ son:

- a) Secantes b) Paralelas c) Coincidentes d) Se cruzan

6. La solución del sistema $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ -2x + 3y = 2 \end{cases}$ es:

- a) $x = 2$ e $y = 1$ b) $x = 2$ e $y = 2$ c) $x = 3$ e $y = 2$ d) No tiene solución

7. La solución del sistema $\begin{cases} 3 + 2x = x - 1 + y \\ 2x - 9y = -43 \end{cases}$ es:

- a) $x = 1$ e $y = 5$ b) $x = -2$ e $y = -5$ c) $x = -43/2$ e $y = 0$ d) $x = 3$ e $y = 4$

8. La solución del sistema $\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ -2x + 3y + z = 7 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \end{cases}$ es:

- a) $x = 3, y = 2, z = 1$ b) $x = 2, y = 1, z = 3$ c) $x = -1, y = -2, z = -3$ d) $x = 1, y = 2, z = 3$

9. En una granja, entre gallinas y vacas hay 120 animales y 280 patas. ¿Cuántos gallinas y vacas hay en la granja?

- a) 90 gallinas y 30 vacas b) 100 gallinas y 20 vacas c) 80 gallinas y 40 vacas

10. ¿Cuál es la edad de una persona si al multiplicarla por 5, le faltan 234 unidades para llegar a su cuadrado?

- a) 18 años b) 20 años c) 25 años d) 28 años

RESUMEN

Ecuación de segundo grado	Es una ecuación algebraica en la que la mayor potencia de la incógnita es 2. Tiene la forma: $ax^2 + bx + c = 0$, donde a , b y c son números reales, con $a \neq 0$.	$-4x^2 + 5x - 8/3 = 0$
Resolución de ecuaciones de segundo grado completas	Se usa la fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 - 7x + 10 = 0$: $x_1 = 5, x_2 = 2$
Número de soluciones de una ecuación de segundo grado	Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, tiene dos soluciones reales y distintas Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, tiene una solución doble. Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene solución real	$x^2 - 3x - 4 = 0$: $\Delta = 25 > 0$, tiene dos soluciones 4 y -1 $x^2 - 4x + 4 = 0$: $\Delta = 0$, tiene una raíz doble: $x = 2$ $x^2 + 3x + 8 = 0$: $\Delta = -23$. No tiene solución real
Resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas	Si $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, despejamos la incógnita: $x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$. Si $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$: $x = 0$ y $x = \frac{-b}{a}$	$2x^2 - 50 = 0$: $x = \pm \sqrt{25} = \pm 5$ $3x^2 - 18x = 0 \Rightarrow 3x(x - 9) = 0 \Rightarrow$ $x_1 = 0; x_2 = 9.$
Sistema de ecuaciones lineales	$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$	$\begin{cases} 6x + 5y = 8 \\ 4x - 2y = -3 \end{cases}$
Clasificación	Compatible determinado: Una única solución, el punto de intersección. Las rectas son secantes: $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ -2x - y = 1 \end{cases}$ Compatible indeterminado: Infinitas soluciones, por lo que las rectas son coincidentes: $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x - 4y = 6 \end{cases}$ Incompatible: No tiene solución, las rectas son paralelas: $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x - 4y = 9 \end{cases}$	
Métodos de resolución	Sustitución: despejar una incógnita y sustituir en la otra ecuación. Igualación: despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones. Reducción: sumar las dos ecuaciones, multiplicándolas por números adecuados.	

CAPÍTULO 5: INECUACIONES

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. INTERVALOS

- Escribe los siguientes intervalos mediante conjuntos y represéntalos en la recta real:
a) $[1, 7)$ b) $(-3, 5)$ c) $(2, 8]$ d) $(-\infty, 6)$
- Representa en la recta real y escribe en forma de intervalo:
a) $2 < x < 5$ b) $4 < x$ c) $3 \leq x < 6$ d) $x \geq 7$

2. INECUACIONES

- Dada la siguiente inecuación $2 + 3x < x + 1$, determina cuáles de los siguientes valores son solución de la misma:
 $0, 1, -1, 2, -2, 3, -4, 6, -7, 12, -15$
- Realiza las transformaciones indicadas de modo que se obtengan ecuaciones equivalentes:
a) Sumar 3: $x - 1 > 4$ b) Restar 5: $x - 3 > 7$ c) Multiplicar por 5: $-8x \geq 9$
d) Multiplicar por -5 : $-3x \geq 7$ e) Dividir entre 2: $4x < 10$ f) Dividir entre -2 : $4x \geq 10$
- Escribe una inecuación que sea cierta para $x = 3$ y falsa para $x = 3.5$.
- Te puedes ayudar de GeoGebra para representar las rectas, las parábolas o las regiones factibles, así, resolver las inecuaciones.

3. INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA

- Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución en la recta real:
a) $2 + 3x < x + 1$ b) $5 + 2x \leq 7x + 4$ c) $6 + 5x > 6x + 4$ d) $4 + 8x \geq 2x + 9$
- Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución en la recta real:
a) $3(2 + 3x) < -(x + 1)$ b) $5(1 + 2x) \leq 2(7x + 4)$ c) $2(6 + 5x) + 3(x - 1) > 2(6x + 4)$
- Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución en la recta real:
a) $3 + 4x < x/2 + 2$ b) $4 + 4x/3 \leq 7x/2 + 5$ c) $(5 + 7x)/3 > 8x + 2$ d) $(4 + 8x)5 + 3 \geq (2x + 9)/7$
- Escribe una inecuación cuya solución sea el siguiente intervalo:
a) $[1, \infty)$ b) $(-\infty, 5)$ c) $(2, \infty)$ d) $(-\infty, 6)$
- Calcula los valores de x para que sea posible calcular las siguientes raíces:
a) $\sqrt{3x-5}$ b) $\sqrt{-x-12}$ c) $\sqrt{3-5x}$ d) $\sqrt{-3x+12}$
- Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:
a) $x^2 - 1 \geq 0$ b) $x^2 - 4 \leq 0$ c) $x^2 - 9 > 0$ d) $x^2 + 4 \geq 0$
e) $2x^2 - 50 < 0$ f) $3x^2 + 12 \leq 0$ g) $5x^2 - 45 > 0$ h) $x^2 + 1 \geq 0$
- Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:
a) $x^2 + x \leq 0$ b) $x^2 - 5x > 0$ c) $x^2 \leq 8x$
d) $x^2 \leq 3x$ e) $2x^2 - 3x > 0$ f) $5x^2 - 10x < 0$
- Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:
a) $3x^2 - 5x \geq 0$ b) $3x^2 - 27 > 0$ c) $x^2 \leq 0$ d) $2x^2 > 4x$
e) $2x^2 - 8 > 0$ f) $5x^2 + 5x \geq 0$ g) $5x^2 - 5 \leq 0$ h) $x^2 - x > 0$
- Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:
a) $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ b) $-x^2 - 2x + 8 \geq 0$ c) $x^2 + 9x + 14 > 0$ d) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$
e) $-x^2 - 4x - 5 < 0$ f) $x^2 + 8x + 16 > 0$ g) $x^2 + x + 3 \geq 0$ h) $2x^2 - 3x - 5 \leq 0$
- Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:
a) $x^2 + x - 6 > 0$ b) $x^2 - x - 12 \leq 0$ c) $x^2 - x - 20 < 0$ d) $x^2 + 5x - 14 \geq 0$
e) $-2x^2 + 3x + 2 > 0$ f) $3x^2 + 2x - 1 \leq 0$ g) $5x^2 - 7x - 6 \geq 0$ h) $2x^2 + x - 15 < 0$
- Calcula los valores de x para que sea posible obtener las siguientes raíces:
a) $\sqrt{x^2 - 1}$ b) $\sqrt{-x^2 + 4}$ c) $\sqrt{x^2 + 5x + 6}$ d) $\sqrt{x^2 - 5x + 6}$
- Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:
a) $(2x + 5)(2x - 5) \leq 11$ b) $(2x - 5)(4x - 3) - (x - 10)(x - 2) \geq 51$ c) $\frac{3x - 2}{x} \leq \frac{5 - 2x}{x + 6}$

19. Resolver los siguientes sistemas de inecuaciones con una incógnita:

$$a) \begin{cases} 4x - 3 < 1 \\ x + 6 > 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x - 6 \leq 0 \\ x - 4 > -5 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3x + 1 \geq x + 9 \\ x + 5 \leq 2 - 3x \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 2x - 3 \leq 3x + 7 \\ \frac{2x}{5} - \frac{x}{4} \geq \frac{2}{3} \end{cases}$$

20. Indica un número positivo que al sumarle 5 sea menor que 7.

21. Expresa mediante una inecuación el área de un cuadrado sabiendo que su perímetro es mayor que el de un rectángulo de lados 3 y 7 cm.

22. Determina las posibles edades de Pepita y de su hija Charo sabiendo que difieren en más de 20 años y que dentro de 2 años, la cuarta parte de la edad de la madre es menor que la edad de la hija.

23. Resuelve las siguientes inecuaciones:

$$a) |x + 3| < 2$$

$$b) |2x + 5| > 1$$

$$c) |x - 6| \leq 2$$

$$d) |x - 2| \geq 2$$

4. INECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

24. Representa los siguientes semiplanos :

$$a) x + y < 5$$

$$b) 3x + 2y > 0$$

$$c) 2x + y \leq 7$$

$$d) x - 3y \geq 5$$

25. Representa la región factible de cada uno de los siguientes sistemas de inecuaciones:

$$a) \begin{cases} x - y < 1 \\ x + y \leq 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x - y \geq 0 \\ y \leq 2 \end{cases}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Representa en la recta real y escribe en forma de intervalo:

$$a) -\infty < x \leq \frac{3}{2}$$

$$b) -11 < x < 11$$

$$c) -2 < x \leq \frac{1}{3}$$

2. Escribe los siguientes intervalos mediante conjuntos y represéntalos en la recta real:

$$a) [2, 6)$$

$$b) (-7, 1)$$

$$c) (0, 9]$$

3. Dada la siguiente inecuación $5 + 3x > 2x + 1$, determina si los siguientes valores son solución de la misma: 0, 1, -1, 2, -2, 3, -4, 6, -7, 12, -15

4. Realiza las transformaciones indicadas de modo que se obtengan ecuaciones equivalentes:

$$i) \text{ Sumar 4: } x - 2 > 5$$

$$ii) \text{ Restar 6: } x - 4 > 8$$

$$iii) \text{ Multiplicar por 6: } 5x \geq 10$$

$$iv) \text{ Multiplicar por } -4: -2x \geq 8$$

$$v) \text{ Dividir entre 2: } 6x < 12$$

$$vi) \text{ Dividir entre } -2: 20x \geq 60$$

5. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución en la recta real:

$$a) 2x - 3 \leq -5$$

$$b) x - 2 \leq 3x - 5$$

$$c) 12 - x \leq -6$$

$$d) -5x - 3 \leq -2x + 9$$

$$e) 2(3x - 3) > 6$$

$$f) -3(3 - 2x) < -2(3 + x)$$

$$g) 2(x + 3) + 3(x - 1) \leq 2(x + 2)$$

6. Resuelve:

$$a) \frac{x}{2} - 6 < 4$$

$$b) \frac{2x}{3} - 3 \leq -x$$

$$c) 2(3x - 2) > 3 - x$$

$$d) \frac{2(x + 2)}{3} < 2x$$

$$e) \frac{x - 4}{4} + 2 > \frac{x + 4}{8}$$

$$f) \frac{x}{2} - 4 < x - \frac{x + 1}{7}$$

7. Escribe una inecuación cuya solución sea el siguiente intervalo:

$$a) (-\infty, -3]$$

$$b) [4, +\infty)$$

$$c) (-\infty, 5)$$

$$d) (-2, +\infty)$$

8. Calcula los valores de x para que sea posible calcular las siguientes raíces:

$$a) \sqrt{2x - 6}$$

$$b) \sqrt{-x + 5}$$

$$c) \sqrt{10 - 5x}$$

$$d) \sqrt{-6x - 30}$$

9. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

$$a) 3x^2 - 75 < 0$$

$$b) -x^2 + 16 \leq 0$$

$$c) -x^2 + 25 \geq 0$$

$$d) 5x^2 - 80 \geq 0$$

$$e) 4x^2 - 1 > 0$$

$$f) 25x^2 - 4 < 0$$

$$g) 9x^2 - 16 < 0$$

$$h) 36x^2 + 16 \leq 0$$

10. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

$$a) -4x^2 + 5x \leq 0$$

$$b) 3x^2 + 7x \geq 0$$

$$c) 2x^2 < 8x$$

$$d) -3x^2 - 6x \geq 0$$

$$e) -x^2 + 3x < 0$$

$$f) -5x^2 - 10x \geq 0$$

11. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

$$a) 3x^2 \leq 0$$

$$b) 8x^2 > 0$$

$$c) -5x^2 < 0$$

$$d) 9x^2 \geq 0$$

12. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

$$a) x^2 - 1 \leq 0$$

$$b) -x^2 - 4x \leq 0$$

$$c) x^2 + 1 \geq 0$$

$$d) -3x^2 > 30$$

$$e) -x^2 - 4 \leq 0$$

$$f) -3x^2 - 12x \geq 0$$

$$g) -5x^2 < 0$$

$$h) x^2 + 9 \geq 0$$

13. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

- a) $x^2 - 2x > 0$ b) $3x^2 - 3 \leq 0$ c) $5x^2 - 20 \geq 0$ d) $x^2 + 4x > 0$
 e) $2x(x - 3) + 1 \geq x - 2$ f) $(x - 2)(x + 3) - x + 5 \leq 2x - 1$ g) $x^2 + 5x + 2 < 2x + 12$ h) $2 - x(x + 3) + 2x \geq 2(x + 1)$

14. Calcula los valores de x para que sea posible obtener las siguientes raíces:

- a) $\sqrt{2x^2 + x - 3}$ b) $\sqrt{x^2 + 2x + 1}$ c) $\sqrt{-1 + 2x - x^2}$ d) $\sqrt{x^2 + 3x + 5}$
 e) $\sqrt{-x^2 + 12x - 36}$ f) $\sqrt{x^2 + 6x - 27}$ g) $\sqrt{1 - 4x^2}$

15. Resuelve las siguientes inecuaciones:

- a) $2(x - 1)^2 > 2$ b) $3(x + 1)^2 \leq -12$ c) $-x^2 < 2$
 d) $4(x - 2)^2 > 1$ e) $-5(x + 4)^2 \leq 0$ f) $9(x + 1)^2 \leq 81$

16. Resuelve las siguientes inecuaciones:

- a) $x(2x - 3) - 3(5 - x) > 83$ b) $(2x + 5)(2x - 5) \leq 11$ c) $(7 + x)^2 + (7 - x)^2 > 130$
 d) $(2x - 3)(3x - 4) - (x - 13)(x - 4) \geq 40$ e) $(3x - 4)(4x - 3) - (2x - 7)(3x - 2) < 214$
 f) $8(2 - x)^2 > 2(8 - x)^2$ g) $\frac{x^2 - 6}{2} - \frac{x^2 + 4}{4} \geq 5$ h) $\frac{5x - 3}{x} \leq \frac{7 - x}{x + 2}$

17. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones con una incógnita:

- a) $\begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ 5x + 1 \leq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 4 < 4x + 1 \\ -2x + 3 < 4x - 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3 > x - 2 \\ 3x - 7 < x - 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{x}{5} < 8 \\ \frac{x}{2} - \frac{4x}{9} < 5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \frac{x - 1}{3} - \frac{x + 3}{2} \leq x \\ \frac{4x - 2}{4} - \frac{x - 1}{3} \geq x \end{cases}$

18. Resuelve las siguientes inecuaciones:

- a) $|2x + 1| \leq 5$ b) $|-x + 1| \geq 2$ c) $|-x + 9| \leq 10$ d) $|2x - 1| > 4$ e) $|-4x + 12| < -6$ f) $\left| \frac{x + 1}{2} \right| \leq 10$ g) $|-4x + 8| < 3$

19. Representa gráficamente la parábola $y = x^2 - 5x + 6$ e indica en qué intervalos es $x^2 - 5x + 6 > 0$, dónde $x^2 - 5x + 6 < 0$, dónde $x^2 - 5x + 6 \geq 0$, y dónde $x^2 - 5x + 6 \leq 0$.

20. Representa los siguientes semiplanos:

- a) $x < 0$ b) $y \geq 0$ c) $x + y < 0$ d) $x - y \leq 1$
 e) $2x - y < 3$ f) $-x + y \geq -2$ g) $3x - y > 4$

21. Representa la región factible de cada uno de los siguientes sistemas de inecuaciones:

- a) $\begin{cases} 2x - y \geq 3 \\ 5x + y \leq 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - y \geq -3 \\ 5x + y \leq 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ 2x + y > 2 \end{cases}$

22. ¿Cuáles son los números cuyo triple es mayor o igual que su doble más 30?

23. Averigua cual es el menor número entero múltiplo de 3 que verifica la inecuación: $x + 2 < -3x + 10$.

24. Un coche se desplaza por una carretera a una velocidad comprendida entre 70 Km/h y 110 Km/h. ¿Entre qué valores oscila la distancia del coche al punto de partida al cabo de 4 horas?

25. La tarifa de telefonía de la empresa A es 25 euros fijos mensuales más 10 céntimos de euro por minuto de conversación, la de la empresa B es 20 euros fijos más 20 céntimos por minuto de conversación. ¿A partir de cuantos minutos empieza a ser más rentable la tarifa de la empresa A?

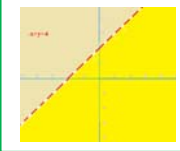

26. Una fábrica paga a sus comerciales 20 € por artículo vendido más una cantidad fija de 600 €. Otra fábrica de la competencia paga 40 € por artículo y 400 € fijos. ¿Cuántos artículos debe vender un comercial de la competencia para ganar más dinero que el primero?

27. A un vendedor de aspiradoras le ofrecen 1 000 euros de sueldo fijo más 20 euros por aspiradora vendida. A otro le ofrecen 800 euros de fijo más 25 euros por aspiradora vendida. Explica razonadamente qué sueldo es mejor a partir de qué cantidad de aspiradoras vendidas.
28. El área de un cuadrado es menor o igual que 64 cm^2 . Determina entre qué valores se halla la medida del lado.
29. El perímetro de un cuadrado es menor que 60 metros. Determina entre qué valores se halla la medida del lado.
30. Un panadero fabrica barras y hogazas. La barra de pan lleva 200 gramos de harina y 5 gramos de sal, mientras que la hogaza lleva 500 gramos de harina y 10 gramos de sal. Si dispone de 200 kg de harina y 2 kg de sal, determina cuántos panes de cada tipo pueden hacerse.

AUTOEVALUACIÓN

1. La desigualdad $2 < x < 7$ se verifica para los valores:
 a) 2, 3 y 6 b) 3, 4.7 y 6 c) 3, 5.2 y 7 d) 4, 5 y 8
2. Tiene como solución $x = 2$ la inecuación siguiente: a) $x < 2$ b) $x > 2$ c) $x \leq 2$ d) $x + 3 < 5$
3. La solución de la inecuación $3.4 + 5.2x - 8.1x < 9.4 + 7.3x$ es:
 a) $x < -10/17$ b) $x > -3/5.1$ c) $x > -10/1.7$ d) $x < +6/10.2$
4. La ecuación $x^2 \leq 4$ tiene de soluciones:
 a) $x \in (-2, 2)$ b) $x \in [-2, 2]$ c) $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ d) $x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
5. La suma de las edades de dos personas es mayor de 40 años y su diferencia menor o igual que 8 años. ¿Cuál de los siguientes sistemas de inecuaciones nos permite calcular sus edades?
 a) $\begin{cases} x+y > 40 \\ y-x \leq 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y \geq 40 \\ y-x < 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y > 40 \\ x-y < 8 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y < 40 \\ x-y \leq 8 \end{cases}$
6. El perímetro de un rectángulo es menor que 14 cm. Si la base es mayor que el doble de la altura menos 3 cm, algún valor que verifica es sistema es:
 a) base = 4 cm, altura = 1 cm b) base = 2 cm, altura = 3 cm c) base = 6, altura = 4cm d) base = 9 cm, altura = 2 cm
7. La solución de la inecuación $|-x + 7| \leq 8$ es: a) $[-1, 15]$ b) $(-\infty, -1]$ c) $(-1, 1)$ d) $[1, \infty)$
8. Las soluciones posibles de $\sqrt{5x-9}$ son: a) $x < 9/5$ b) $x > 9/5$ c) $x \leq 9/5$ d) $x \geq 9/5$
9. La solución de la inecuación $\frac{2x-3}{x-2} < 1$ es: a) (1, 2) b) $(-\infty, 1)$ c) $x < 1 \cup x > 2$ d) $(-1, 2)$
10. Una inecuación cuya solución sea el intervalo $(-\infty, 5)$ es:
 a) $5x - 3x + 2 < 9x + 2$ b) $8x - 3x + 7 < 9x + 2$ c) $5x - 3x + 2 < 7x + 27$ d) $5x - 3x - 2 > 7x - 27$

RESUMEN

Inecuación	Desigualdad algebraica en la que aparecen una o más incógnitas	$4 \geq x + 2$
Inecuaciones equivalentes	Si tienen la misma solución	$4 \geq x + 2 \Leftrightarrow 2 \geq x$
Propiedades de las desigualdades	<ul style="list-style-type: none"> Sumar o restar la misma expresión a los dos miembros de la desigualdad: $a < b, \forall c \Rightarrow a + c < b + c$ Multiplicar o dividir ambos miembros por un número positivo: $a < b, \forall c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$ Multiplicar o dividir ambos miembros por un número negativo y cambiar la orientación del signo de la desigualdad: $a < b, \forall c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$ 	$3x + 2 < 5 \Leftrightarrow$ $3x + 2 - 2 < 5 - 2 \Leftrightarrow 3x < 3$ $3x < 3$ $\Leftrightarrow 3x : 3 < 3 : 3 \Leftrightarrow x < 1$ $-x < 2 \Leftrightarrow$ $(-x) \cdot (-1) > 2 \cdot (-1) \Leftrightarrow x > -2$ $3 - x < 2 \Leftrightarrow$ $-x < -1 \Leftrightarrow x > 1$
Inecuación de primer grado con una incógnita	$ax > b, ax \geq b, ax < b, ax \leq b$	$x < 1$
Inecuación de segundo grado con una incógnita	$ax^2 + bx + c > 0$	$x^2 - 1 \geq 0$ $\mathbb{R} = (-\infty, -1] \cup [-1, 1] \cup [1, \infty)$ Solución: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
Sistema de inecuaciones de primer grado con una incógnita	$\begin{cases} a_1 x < b_1 \\ a_2 x < b_2 \end{cases}; \begin{cases} x > 4 \\ x - 3 \geq 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x \leq -3 \end{cases}$. No hay solución	
Inecuación en valor absoluto	$ ax + b \leq c$ por definición $\begin{cases} ax + b \leq c \\ -ax - b \leq c \end{cases}$	$ x - 3 \leq 2 \Leftrightarrow$ $x - 3 \leq 2 \vee -(x - 3) \leq 2 \Leftrightarrow$ $x \leq 5 \vee x \geq 1 \Leftrightarrow [1, 5]$
Inecuaciones de primer grado con dos incógnitas	$ax + by > c$ Representamos gráficamente dos semiplanos que separa la recta y decidimos.	$-x + y < 4$ 
Sistemas de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas	Representamos las regiones angulares separadas por las dos rectas y decidimos cuál o cuáles son solución. $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x - y \geq -4 \end{cases}$	

CAPÍTULO 6: PROPORCIONES

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. PROPORCIONALIDAD DIRECTA

1. Copia en tu cuaderno y completa la tabla de proporción directa. Calcula la razón de proporcionalidad. Representa gráficamente los puntos. Determina la ecuación de la recta.

Litros	12	7.82		1		50
Euros	36		9.27		10	

2. Calcula los términos que faltan para completar las proporciones:
 a) $\frac{24}{100} = \frac{30}{x}$ b) $\frac{x}{80} = \frac{46}{12}$ c) $\frac{3.6}{12.8} = \frac{x}{60}$
3. Si el AVE tarda una hora y treinta y cinco minutos en llegar desde Madrid a Valencia, que distan 350 kilómetros, ¿cuánto tardará en recorrer 420 km?
4. En una receta nos dicen que para hacer una mermelada de frutas del bosque necesitamos un kilogramo de azúcar por cada dos kilogramos de fruta. Queremos hacer 7 kilogramos de mermelada, ¿cuántos kilogramos de azúcar y cuántos de fruta debemos poner?
5. La altura de una torre es proporcional a su sombra (a una misma hora). Una torre que mide 12 m tiene una sombra de 25 m. ¿Qué altura tendrá otra torre cuya sombra mida 43 m?
6. Una fuente llena una garrafa de 12 litros en 8 minutos. ¿Cuánto tiempo tardará en llenar un bidón de 135 litros?
7. Hemos gastado 12 litros de gasolina para recorrer 100 km. ¿Cuántos litros necesitaremos para una distancia de 1 374 km?
8. Mi coche ha gastado 67 litros de gasolina en recorrer 1 250 km, ¿cuántos litros gastará en un viaje de 5 823 km?
9. Un libro de 300 páginas pesa 127 g. ¿Cuánto pesará un libro de la misma colección de 420 páginas?
10. Dos pantalones nos costaron 28 €, ¿cuánto pagaremos por 7 pantalones?
11. Expresa en tanto por ciento las siguientes proporciones:
 a) $\frac{27}{100}$ b) "1 de cada 2" c) $\frac{52}{90}$
12. Si sabemos que los alumnos rubios de una clase son el 16 % y hay 4 alumnos rubios, ¿cuántos alumnos hay en total?
13. Un depósito de 2 000 litros de capacidad contiene en este momento 1 036 litros. ¿Qué tanto por ciento representa?
14. La proporción de los alumnos de una clase de 4º de ESO que han aprobado Matemáticas fue del 70 %. Sabiendo que en la clase hay 30 alumnos, ¿cuántos han suspendido?
15. Una fábrica ha pasado de tener 130 obreros a tener 90. Expresa la disminución en porcentaje.
16. Calcula el precio final de un lavavajillas que costaba 520 € más un 21 % de IVA, al que se le ha aplicado un descuento sobre el coste total del 18 %.
17. Copia en tu cuaderno y completa:
 a) De una factura de 1 340 € he pagado 1 200 €. Me han aplicado un % de descuento
 b) Me han descontado el 9 % de una factura de € y he pagado 280 €.
 c) Por pagar al contado un mueble me han descontado el 20 % y me he ahorrado 100 €. ¿Cuál era el precio del mueble sin descuento?
18. El precio inicial de un electrodoméstico era 500 euros. Primero subió un 10 % y después bajó un 30 %. ¿Cuál es su precio actual? ¿Cuál es el porcentaje de incremento o descuento?
19. Una persona ha comprado acciones de bolsa en el mes de enero por un valor de 10 000 €. De enero a febrero estas acciones han aumentado un 8 %, pero en el mes de febrero han disminuido un 16 % ¿Cuál es su valor a finales de febrero? ¿En qué porcentaje han aumentado o disminuido?
20. El precio inicial de una enciclopedia era de 300 € y a lo largo del tiempo ha sufrido variaciones. Subió un 10 %, luego un 25 % y después bajó un 30 %. ¿Cuál es su precio actual? Calcula la variación porcentual.
21. En una tienda de venta por Internet se anuncian rebajas del 25 %, pero luego cargan en la factura un 20 % de gastos de envío. ¿Cuál es el porcentaje de incremento o descuento? ¿Cuánto tendremos que pagar por un artículo que costaba 30 euros? ¿Cuánto costaba un artículo por el que hemos pagado 36 euros?
22. La distancia real entre dos pueblos es 28.6 km. Si en el mapa están a 7 cm de distancia. ¿A qué escala está dibujado?
23. ¿Qué altura tiene un edificio si su maqueta construida a escala 1 : 200 presenta una altura de 8 cm?
24. Dibuja la escala gráfica correspondiente a la escala 1 : 60000.
25. Las dimensiones de una superficie rectangular en el plano son 7 cm y 23 cm. Si está dibujado a escala 1 : 50, calcula sus medidas reales.

PROPORCIONALIDAD INVERSA

26. Para embaldosar un recinto, 7 obreros han dedicado 80 horas de trabajo. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla y determina la constante de proporcionalidad. Escribe la ecuación de la hipérbola.

Número de obreros	1	5	7	12			60
Horas de trabajo			80		28	10	

27. Al cortar una cantidad de madera hemos conseguido 5 paneles de 1.25 m de largo. ¿Cuántos paneles conseguiremos si ahora tienen 3 m de largo?
28. En un huerto ecológico se utilizan 5 000 kg de un tipo de abono de origen animal que se sabe que tiene un 12 % de nitratos. Se cambia el tipo de abono, que ahora tiene un 15 % de nitratos, ¿cuántos kilogramos se necesitarán del nuevo abono para que las plantas reciban la misma cantidad de nitratos?
29. Ese mismo huerto necesita 200 cajas para envasar sus berenjenas en cajas de un kilogramo. ¿Cuántas cajas necesitaría para envasarlas en cajas de 1.7 kilogramos? ¿Y para envasarlas en cajas de 2.3 kilogramos?
30. Para envasar cierta cantidad de leche se necesitan 8 recipientes de 100 litros de capacidad cada uno. Queremos envasar la misma cantidad de leche empleando 20 recipientes. ¿Cuál deberá ser la capacidad de esos recipientes?
31. Copia en tu cuaderno la tabla siguiente, calcula la razón de proporcionalidad y completa la tabla de proporcionalidad inversa. Escribe la ecuación de la hipérbola.

Magnitud A	40	0.07		8	
Magnitud B	0.25		5		6.4

32. Seis personas realizan un viaje de 12 días y pagan en total 40 800 €. ¿Cuánto pagarán 15 personas si su viaje dura 4 días?
33. Si 16 bombillas originan un gasto de 4 500 €, estando encendidas durante 30 días, 5 horas diarias, ¿qué gasto originarían 38 bombillas en 45 días, encendidas durante 8 horas diarias?
34. Para alimentar 6 vacas durante 17 días se necesitan 240 kilos de alimento. ¿Cuántos kilos de alimento se necesitan para mantener 29 vacas durante 53 días?
35. Si 12 hombres construyen 40 m de tapia en 4 días trabajando 8 horas diarias, ¿cuántas horas diarias deben trabajar 20 hombres para construir 180 m en 15 días?
36. Con una cantidad de pienso podemos dar de comer a 24 animales durante 50 días con una ración de 1 kg para cada uno. ¿Cuántos días podremos alimentar a 100 animales si la ración es de 800 g?
37. Para llenar un depósito se abren 5 grifos que lanzan 8 litros por minuto y tardan 10 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán 7 grifos similares que lanzan 10 litros por minuto?
38. Si 4 máquinas fabrican 2 400 piezas funcionando 8 horas diarias. ¿Cuántas máquinas se deben poner a funcionar para conseguir 7 000 piezas durante 10 horas diarias?

3. REPARTOS PROPORCIONALES

39. Cinco personas comparten lotería, con 10, 6, 12, 7 y 5 participaciones respectivamente. Si han obtenido un premio de 18 000 € ¿Cuánto corresponde a cada uno?
40. Tres socios han invertido 20 000 €, 34 000 € y 51 000 € este año en su empresa. Si los beneficios a repartir a final de año ascienden a 31 500 €, ¿cuánto corresponde a cada uno?
41. La Unión Europea ha concedido una subvención de 48 000 000 € para tres estados de 60, 46 y 10 millones de habitantes, ¿cómo debe repartirse el dinero, sabiendo que es directamente proporcional al número de habitantes?
42. Se reparte una cantidad de dinero, entre tres personas, directamente proporcional a 2, 5 y 8. Sabiendo que a la segunda le corresponde 675 €. Hallar lo que le corresponde a la primera y tercera.
43. Una abuela reparte 100 € entre sus tres nietos de 12, 14 y 16 años de edad; proporcionalmente a sus edades. ¿Cuánto corresponde a cada uno?
44. En un concurso se acumula puntuación de forma inversamente proporcional al número de errores. Los cuatro finalistas, con 10, 5, 2 y 1 error, deben repartirse los 2 500 puntos. ¿Cuántos puntos recibirá cada uno?
45. En el testamento, el abuelo establece que quiere repartir entre sus nietos 4 500 €, de manera proporcional a sus edades, 12, 15 y 18 años, cuidando que la mayor cantidad sea para los nietos menores, ¿cuánto recibirá cada uno?
46. Se reparte dinero inversamente proporcional a 5, 10 y 15; al menor le corresponden 3 000 €. ¿Cuánto corresponde a los otros dos?
47. Tres hermanos ayudan al mantenimiento familiar entregando anualmente 6 000 €. Si sus edades son de 18, 20 y 25 años y las aportaciones son inversamente proporcionales a la edad, ¿cuánto aporta cada uno?
48. Un padre va con sus dos hijos a una feria y en la tómbola gana 50 € que los reparte de forma inversamente proporcional a sus edades, que son 15 y 10 años. ¿Cuántos euros debe dar a cada uno?

49. Calcula el precio del kilo de mezcla de dos tipos de café: 3.5 kg a 4.8 €/kg y 5.20 kg a 6 €/kg.
50. ¿Cuántos litros de zumo de pomelo de 2,40 €/l deben mezclarse con 4 litros de zumo de naranja a 1.80 €/l para obtener una mezcla a 2.13 €/l?
51. Calcula la ley de una joya sabiendo que pesa 87 g y contiene 69 g de oro puro.
52. ¿Cuántos quilates tiene, aproximadamente, la joya anterior?

4. INTERÉS

53. Calcula el interés simple que producen 10 000 € al 3 % durante 750 días.
54. ¿Qué capital hay que depositar al 1.80 % durante 6 años para obtener un interés simple de 777.6 €?
55. Al 5 % de interés compuesto durante 12 años, ¿cuál será el capital final que obtendremos al depositar 39 500 €?

CURIOSIDADES. REVISTA

✚ La torre Eiffel de París mide 300 metros de altura y pesa unos 8 millones de kilos. Está construida de hierro. Si encargamos un modelo a escala de dicha torre, también de hierro, que pese sólo un kilo, ¿qué altura tendrá? ¿Será mayor o menor que un lápiz? Antes de empezar a calcular, da tu opinión.

- En una pizzería la pizza de 20 cm de diámetro vale 3 euros y la de 40 cm vale 6 euros. ¿Cuál tiene mejor precio?
- Vemos en el mercado una merluza de 40 cm que pesa un kilo. Nos parece un poco pequeña y pedimos otra un poco mayor, que resulta pesar 2 kilos. ¿Cuánto medirá?
- En un día frío un padre y un hijo pequeño van exactamente igual abrigados, ¿Cuál de los dos tendrá más frío?

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Copia en tu cuaderno, calcula la razón de proporcionalidad y completa la tabla de proporcionalidad directa:

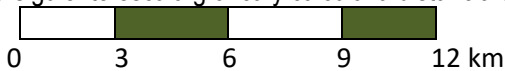
litros	8.35		0.75	1.5	
euros		14	2.25		8

- Estima cuántas personas caben de pie en un metro cuadrado. Ha habido una fiesta y se ha llenado completamente un local de 400 m², ¿cuántas personas estimas que han ido a esa fiesta?
- Cada semana pagamos 48 € en transporte. ¿Cuánto gastaremos durante el mes de febrero?
- Con 85 € hemos pagado 15 m de tela, ¿cuánto nos costarán 23 m de la misma tela?
- Para tapizar cinco sillas he utilizado 0.6 m de tela, ¿cuántas sillas podré tapizar con la pieza completa de 10 m?
- Un camión ha transportado en 2 viajes 300 sacos de patatas de 25 kg cada uno. ¿Cuántos viajes serán necesarios para transportar 950 sacos de 30 kg cada uno?
- Una edición de 400 libros de 300 páginas cada uno alcanza un peso total de 100 kg. ¿Cuántos kg pesará otra edición de 700 libros de 140 páginas cada uno?
- Sabiendo que la razón de proporcionalidad directa es $k = 1.8$, copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla:

Magnitud A	15.9			0.01	
Magnitud B		6	0.1		10

- El modelo de teléfono móvil que costaba 285 € + IVA está ahora con un 15 % de descuento. ¿Cuál es su precio rebajado? (IVA 21 %)
- Por retrasarse en el pago de una deuda de 1 500 €, una persona debe pagar un recargo del 12 %. ¿Cuánto tiene que devolver en total?
- Si un litro de leche de 0.85 € aumenta su precio en un 12 %, ¿cuánto vale ahora?
- ¿Qué tanto por ciento de descuento se ha aplicado en una factura de 1 900 € si finalmente se pagaron 1 200 €?
- Si unas zapatillas de 60 € se rebajan un 15 %, ¿cuál es el valor final?
- Al comprar un televisor he obtenido un 22 % de descuento, por lo que al final he pagado 483.60 €, ¿cuál era el precio del televisor sin descuento?
- Luis compró una camiseta que estaba rebajada un 20 % y pagó por ella 20 €. ¿Cuál era su precio original?
- Por liquidar una deuda de 35 000 € antes de lo previsto, una persona paga finalmente 30 800 €, ¿qué porcentaje de su deuda se ha ahorrado?
- El precio de un viaje se anuncia a 500 € IVA incluido. ¿Cuál era el precio sin IVA? (IVA 21 %)
- ¿Qué incremento porcentual se ha efectuado sobre un artículo que antes valía 25 € y ahora se paga a 29 €?
- Un balneario recibió 10 mil clientes en el mes de julio y 12 mil en agosto. ¿Cuál es el incremento porcentual de clientes de julio a agosto?
- Un mapa está dibujado a escala 1 : 800000. La distancia real entre dos ciudades es 200 km. ¿Cuál es su distancia en el mapa?
- La distancia entre Oviedo y Coruña es de 340 km. Si en el mapa están a 12 cm, ¿cuál es la escala a la que está dibujado?

22. Interpreta la siguiente escala gráfica y calcula la distancia en la realidad para 21 cm.



23. Copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla:

Tamaño en el dibujo	Tamaño real	Escala
20 cm largo y 5 cm de ancho		1 : 25000
10 cm	15 km	
	450 m	1 : 30000

24. Copia en tu cuaderno, calcula la razón de proporcionalidad inversa y completa la tabla:

Magnitud A	8	7.5		3.5	
Magnitud B		12	0.15		10

25. Determina si las siguientes magnitudes se encuentran en proporción directa, inversa o en ninguna de ellas:

- Velocidad a la que circula un coche y espacio que recorre
- Dinero que tienes para gastar y bolsas de almendras que puedes comprar
- Talla de zapatos y precio de los mismos
- Número de miembros de una familia y litros de leche que consumen
- Número de entradas vendidas para un concierto y dinero recaudado
- Números de grifos que llenan una piscina y tiempo que esta tarda en llenarse
- Edad de una persona y estatura que tiene
- Número de trabajadores y tiempo que tardan en hacer una valla
- Edad de una persona y número de amigos que tiene

26. ¿Qué velocidad debería llevar un automóvil para recorrer en 4 horas cierta distancia, si a 80 km/h ha tardado 5 horas y 15 minutos?

27. La razón de proporcionalidad inversa entre A y B es 5. Copia en tu cuaderno y completa la tabla siguiente:

A	20		7		10.8
B		0.05		0.3	

28. En la granja se hace el pedido de forraje para alimentar a 240 cerdos durante 9 semanas. Si vende 60 cerdos, ¿cuántas semanas le durará el forraje? ¿Y si en lugar de vender, compra treinta cerdos? ¿Y si decide rebajar la ración una cuarta parte con los 240 cerdos?

29. Un granjero con 65 gallinas tiene maíz para alimentarlas 25 días. Si vende 20 gallinas, ¿Cuántos días podrá alimentar a las restantes?

30. Con 15 paquetes de 4 kg cada uno pueden comer 150 gallinas diariamente. Si los paquetes fueran de 2,7 kg, ¿cuántos necesitaríamos para dar de comer a las mismas gallinas?

31. Determina si las dos magnitudes son directa o inversamente proporcionales y completa la tabla en tu cuaderno:

A	24	8	0.4	6		50
B	3	9	180		20	

32. Si la jornada laboral es de 8 horas necesitamos a 20 operarios para realizar un trabajo. Si rebajamos la jornada en media hora diaria, ¿cuántos operarios serán necesarios para realizar el mismo trabajo?

33. En un almacén se guardan reservas de comida para 100 personas durante 20 días con 3 raciones diarias, ¿cuántos días duraría la misma comida para 75 personas con 2 raciones diarias?

34. Si 15 operarios instalan 2 500 m de valla en 7 días. ¿Cuántos días tardarán 12 operarios en instalar 5 250 m de valla?

35. En un concurso el premio de 168 000 € se reparte de forma directamente proporcional a los puntos conseguidos. Los tres finalistas consiguieron 120, 78 y 42 puntos. ¿Cuántos euros recibirán cada uno?

36. Repartir 336 en partes directamente proporcionales a 160, 140, 120.

37. Un trabajo se paga a 3 120 €. Tres operarios lo realizan aportando el primero 22 jornadas, el segundo 16 jornadas y el tercero 14 jornadas. ¿Cuánto recibirá cada uno?

38. Repartir 4 350 en partes inversamente proporcionales a 18, 30, 45.

39. Mezclamos 3 kg de almendras a 14 €/kg, 1.5 kg de nueces a 6 €/kg, 1.75 kg de castañas 8 €/kg. Calcula el precio final del paquete de 250 g de mezcla de frutos secos.

40. Calcula el precio del litro de zumo que se consigue mezclando 8 litros de zumo de piña a 2.5 €/l, 15 litros de zumo de naranja a 1.6 €/l y 5 litros de zumo de uva a 1.2 €/l. ¿A cuánto debe venderse una botella de litro y medio si se le aplica un aumento del 40 % sobre el precio de coste?

41. Para conseguir un tipo de pintura se mezclan tres productos 5 kg del producto X a 18 €/kg, 19 kg del producto Y a 4.2 €/kg y 12 kg del producto Z a 8 €/kg. Calcula el precio del kg de mezcla.

42. Cinco personas comparten un microbús para realizar distintos trayectos. El coste total es de 157.5 € más 20 € de suplemento por servicio nocturno. Los kilómetros recorridos por cada pasajero fueron 3, 5, 7, 8 y 12 respectivamente. ¿Cuánto debe abonar cada uno?
43. Se ha decidido penalizar a las empresas que más contaminan. Para ello se reparten 2 350 000 € para subvencionar a tres empresas que presentan un 12 %, 9 % y 15 % de grado de contaminación. ¿Cuánto recibirá cada una?
44. Un lingote de oro pesa 340 g y contiene 280.5 g de oro puro. ¿Cuál es su ley?
45. ¿Cuántos gramos de oro contiene una joya de 0.900 de ley, que se ha formado con una aleación de 60 g de 0.950 de ley y 20 g de 0.750 de ley?
46. ¿Qué capital hay que depositar al 3.5 % de rédito en 5 años para obtener un interés simple de 810 €?
47. ¿Cuál es el capital final que se recibirá por depositar 25 400 € al 1.4 % en 10 años?
48. ¿Cuántos meses debe depositarse un capital de 74 500 € al 3 % para obtener un interés de 2 980 €?
49. Al 3 % de interés compuesto, un capital se ha convertido en 63 338.5 €. ¿De qué capital se trata?
50. En la construcción de un puente de 850 m se han utilizado 150 vigas, pero el ingeniero no está muy seguro y decide reforzar la obra añadiendo 50 vigas más. Si las vigas se colocan uniformemente a lo largo de todo el puente, ¿a qué distancia se colocarán las vigas?
51. En un colegio de primaria se convoca un concurso de ortografía en el que se dan varios premios. El total que se reparte entre los premiados es 500 €. Los alumnos que no han cometido ninguna falta reciben 150 €, y el resto se distribuye de manera inversamente proporcional al número de faltas. Hay dos alumnos que no han tenido ninguna falta, uno ha tenido una falta, otros dos faltas y el último ha tenido cuatro faltas, ¿cuánto recibirá cada uno?
52. El capital inicial de un depósito asciende a 82 000 €. El tanto aplicado es el 3 % a interés compuesto durante 5 años. Calcula el capital final. Puedes usar la [Hoja de cálculo](#).
53. Un empleado desea conocer qué cantidad recibirá después de 20 años si al principio de cada uno de ellos entrega 2 000 euros. Puedes usar la [Hoja de cálculo](#).
54. El ayuntamiento de una ciudad ha emitido un empréstito de 300 000 €, que abona al 6 % de interés compuesto y que desea. Puedes usar la [Hoja de cálculo](#).

AUTOEVALUACIÓN

1. Los valores que completan la tabla de proporcionalidad directa son:

A	10	0.25		0.1	100
B		50	5		

- a) 612.5; 1 000; 0.0005; 0.5 b) 1.25; 2.5; 125; 0.125 c) 62; 500; 0.005; 0.05
2. Con 500 € pagamos los gastos de gas durante 10 meses. En 36 meses pagaremos:
a) 2 000 € b) 1 900 € c) 1 800 € d) 1 500 €.
3. Un artículo que costaba 2000 € se ha rebajado a 1750 €. El porcentaje de rebaja aplicado es:
a) 10 % b) 12.5 % c) 15.625 % d) 11.75 %
4. Para envasar 510 litros de agua utilizamos botellas de litro y medio. ¿Cuántas botellas necesitaremos si queremos utilizar envases de tres cuartos de litro?
a) 590 botellas b) 700 botellas c) 650 botellas d) 680 botellas
5. Los valores que completan la tabla de proporcionalidad inversa son:

A	5.5	10		11	
B	20		0.5		0.1

- a) 40; 200; 11.5; 1 000 b) 11; 200; 20; 300 c) 11; 220; 10; 1 100 d) 40; 220; 10; 500
6. Tres agricultores se reparten los kilogramos de la cosecha de forma proporcional al tamaño de sus parcelas. La mayor, que mide 15 ha recibido 30 toneladas, la segunda es de 12 ha y la tercera de 10 ha recibirán:
a) 24 t y 20 t b) 20 t y 24 t c) 24 t y 18 t d) 25 t y 20 t
7. La escala a la que se ha dibujado un mapa en el que 2,7 cm equivalen a 0.81 km es:
a) 1 : 34000 b) 1 : 3000 c) 1 : 30000 d) 1 : 300
8. Con 4 rollos de papel de 5 m de largo, puedo forrar 32 libros. ¿Cuántos rollos necesitaremos para forrar 16 libros si ahora los rollos de papel son de 2 m de largo?
a) 3 rollos b) 5 rollos c) 4 rollos d) 2 rollos
9. El precio final del kg de mezcla de 5 kg de harina clase A, a 1.2 €/kg, 2.8 kg clase B a 0.85 €/kg y 4 kg clase C a 1 €/kg es:
a) 1.12 € b) 0.98 € c) 1.03 € d) 1.049 €
10. La ley de una aleación es 0.855. Si el peso de la joya es 304 g, la cantidad de metal precioso es:
a) 259.92 g b) 255.4 g c) 248.9 g d) 306 g

RESUMEN

Proporcionalidad directa	Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda multiplicada o dividida por el mismo número. La función de proporcionalidad directa es una recta que pasa por el origen: $y = kx$. La pendiente de la recta, k , es la razón de proporcionalidad directa.	Para empapelar 300 m ² hemos utilizado 24 rollos de papel, si ahora la superficie es de 104 m ² , necesitaremos 8.32 rollos, pues $k = 300/24 = 12.5$, $y = 12.5x$, por lo que $x = 104/12.5 = 8.32$ rollos.
Proporcionalidad inversa	Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda dividida o multiplicada por el mismo número. La función de proporcionalidad inversa es la hipérbola $y = k'/x$. Por tanto la razón de proporcionalidad inversa k' es el producto de cada par de magnitudes: $k' = a \cdot b = a' \cdot b'$.	Dos personas pintan una vivienda en 4 días. Para pintar la misma vivienda, 4 personas tardarán: $k' = 8$, $y = 8/x$, por lo que tardarán 2 días.
Porcentajes	Razón con denominador 100.	El 87 % de 2 400 es $\frac{87 \cdot 2\,400}{100} = 2\,088$
Escalas	La escala es la proporción entre las medidas del dibujo y las medidas en la realidad.	A escala 1:50000, 35 cm son 17.5 km en la realidad.
Reparto proporcional directo Repartir directamente a 6, 10 y 14, 105 000 € $6 + 10 + 14 = 30$ $105\,000 : 30 = 3\,500$ $6 \cdot 3\,500 = 21\,000$ €; $10 \cdot 3\,500 = 35\,000$ €; $14 \cdot 3\,500 = 49\,000$ €		Reparto proporcional inverso Repartir 5 670 inversamente a 3, 5 y 6 $1/3 + 1/5 + 1/6 = \frac{10+6+5}{30} = \frac{21}{30}$ $5\,670 : 21 = 270$ $270 \cdot 10 = 2\,700$ $270 \cdot 6 = 1\,620$ $270 \cdot 5 = 1\,350$
Mezclas y aleaciones	Mezclar distintas cantidades de productos, de distintos precios. La ley de una aleación es la relación entre el peso del metal más valioso y el peso total.	Una joya que pesa 245 g y contiene 195 g de plata, su ley es: $\frac{195}{245} = 0.795$
Interés simple y compuesto	El interés es el beneficio que se obtiene al depositar un capital en una entidad financiera a un determinado tanto por ciento durante un tiempo	$C = 3\,600$; $r = 4.3\%$; $t = 8$ años $I = \frac{3\,600 \cdot 4.3 \cdot 8}{100} = 1\,238.4$ €

CAPÍTULO 7: SEMEJANZA

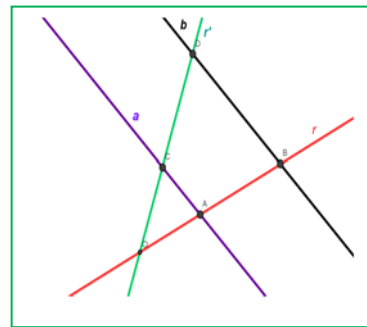
ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. FIGURAS SEMEJANTES

- Mide tu altura en una foto y calcula el factor de semejanza.
- El diámetro de un melocotón es tres veces mayor que el de su hueso, y mide 8 cm. Calcula el volumen del melocotón, suponiendo que es esférico, y el de su hueso, también esférico. ¿Cuál es la razón de proporcionalidad entre el volumen del melocotón y el del hueso?
- En la pizzería tienen pizzas de varios precios: 3 €, 6 € y 9 €. Los diámetros de estas pizzas son: 15 cm, 20 cm y 30 cm, ¿cuál resulta más económica? Calcula la relación entre las áreas y compárala con la relación entre los precios.
- Una maqueta de un depósito cilíndrico de 1 000 litros de capacidad y 5 metros de altura, queremos que tenga una capacidad de 1 litro. ¿Qué altura debe tener la maqueta?

2. EL TEOREMA DE TALES

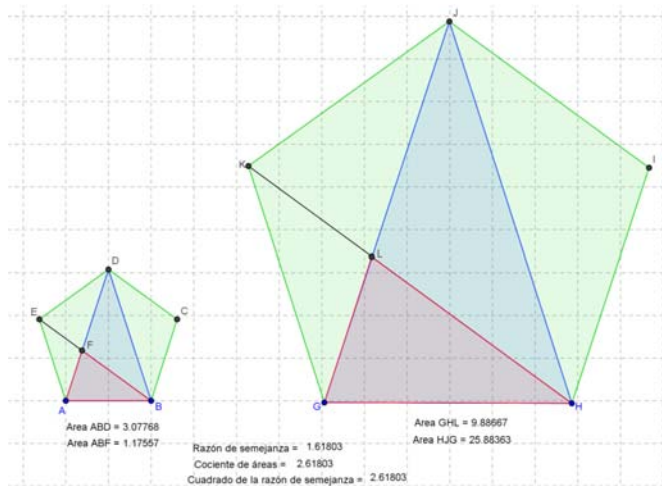
- En una foto hay un niño, que sabemos que mide 1.5 m, y un edificio. Medimos la altura del niño y del edificio en la foto, y resultan ser: 2 cm y 10 cm. ¿Qué altura tiene el edificio? *Comprobación:* ¿El resultado te parece real? ¿Es posible que un edificio tenga esa altura?
- Se dibuja un hexágono regular. Se trazan sus diagonales y se obtiene otro hexágono regular. Indica la razón de semejanza entre los lados de ambos hexágonos.
- En un triángulo regular ABC de lado 1 cm, trazamos los puntos medios, M y N, de dos de sus lados. Trazamos las rectas BN y CM que se cortan en un punto O. ¿Son semejantes los triángulos MON y COB? ¿Cuál es la razón de semejanza? ¿Cuánto mide el lado MN?
- Una pirámide regular hexagonal, de lado de la base 3 cm y altura 10 cm, se corta por un plano a una distancia de 4 cm del vértice, con lo que se obtiene una nueva pirámide. ¿Cuánto miden sus dimensiones?
- Sean ABC y AED dos triángulos en posición Tales. Se sabe que AB = 7 m, BC = 5 m, AC = 4 m y AD = 14 m. Calcula las dimensiones de AED y su perímetro.
- Reto:* Utiliza una hoja en blanco para demostrar el teorema de Tales sin ayuda. No hace falta que utilices el mismo procedimiento que el libro. Hay muchas maneras de demostrar el teorema.
- Sean O, A y B tres puntos alineados y sean O, C, D otros tres puntos alineados en una recta diferente a la anterior. Se verifica que $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$. ¿Podemos asegurar que el segmento AC es paralelo al segmento BD? Razona la respuesta.
- Sean O, A y B tres puntos alineados y sean O, C, D otros tres puntos alineados en una recta diferente a la anterior. Se verifica que $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD}$. ¿Podemos asegurar que el segmento AC es paralelo al segmento BD? Razona la respuesta.
- Si divides el segmento AB en 6 partes iguales. Busca la relación de semejanza entre el sexto segmento y el tercero.
- Dibuja en tu cuaderno un segmento y divídelo en 5 partes iguales utilizando regla y compás. Demuestra que, utilizando el teorema de Tales los segmentos obtenidos son, en efecto, iguales.
- Dibuja en tu cuaderno un segmento de 7 cm de longitud, y divídelo en dos segmentos que estén en una proporción de 3/5.
- Dibuja en tu cuaderno una recta numérica y representa en ella los siguientes fracciones:
 - 1/2
 - 5/7
 - 3/8
 - 5/3



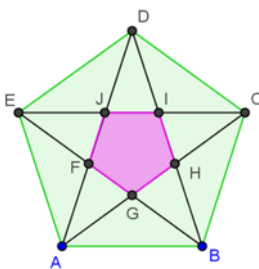
3. SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

- Indica si son semejantes los siguientes pares de triángulos:
 - Un ángulo de 60° y otro de 40°. Un ángulo de 80° y otro de 60°.
 - Triángulo isósceles con ángulo desigual de 80°. Triángulo isósceles con ángulo igual de 50°.
 - $A = 30^\circ$, $b = 8$ cm, $c = 10$ cm. $A' = 30^\circ$, $b' = 4$ cm, $c' = 5$ cm
 - $a = 7$ cm, $b = 8$ cm, $c = 12$ cm. $a' = 14$ cm, $b' = 16$ cm, $c' = 25$ cm

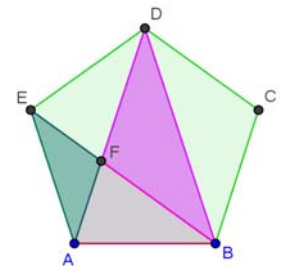
18. Calcula el valor desconocido para que los triángulos sean semejantes:
- $a = 12$ cm, $b = 15$ cm, $c = 10$ cm. $a' = 5$ cm, ¿ b' , c' ?
 - $A = 37^\circ$, $b = 10$ cm, $c = 12$ cm. $A' = 37^\circ$, $b' = 10$ cm, ¿ c' ?
19. Un triángulo tiene lados de 12 cm, 14 cm y 8 cm. Un triángulo semejante a él tiene un perímetro de 80 cm. ¿Cuánto miden sus lados?
20. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 3 y 4 cm, ¿cuánto mide la altura sobre la hipotenusa?
21. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 3 y 4 cm, ¿cuánto mide la proyección sobre la hipotenusa de cada uno de esos catetos?
22. Dibuja los tres triángulos semejantes para el triángulo rectángulo de catetos 3 y 4 en posición de Tales.
- Comprueba estos resultados en otro pentágono
23. Dibuja un pentágono $GHIJK$ del mismo modo que has construido el $ABCDE$ con la condición de que la longitud de sus lados sea el triple del que ya está construido. Para facilitar la tarea puedes activar la cuadrícula y mover los puntos iniciales.
- Calcula las áreas de los triángulos HJG y GHL , su razón de semejanza, el cociente entre sus áreas y el cuadrado de la razón de semejanza.



- Comprueba que la razón de semejanza, el cociente entre las áreas y el cuadrado de la razón de semejanza de los triángulos GHJ y GHL del pentágono $GHIJK$ coinciden con las de los triángulos ABD y ABF del pentágono $ABCDE$.

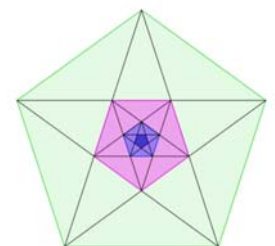


24. Calcula las áreas de los dos pentágonos anteriores y relaciona su cociente con el cuadrado de la razón de semejanza.



25. Otros triángulos del pentágono. Investiga si los triángulos AFE y BDF son semejantes y si lo son calcula su razón de semejanza, el cociente entre sus áreas y compara este resultado con el cuadrado de la razón de semejanza.

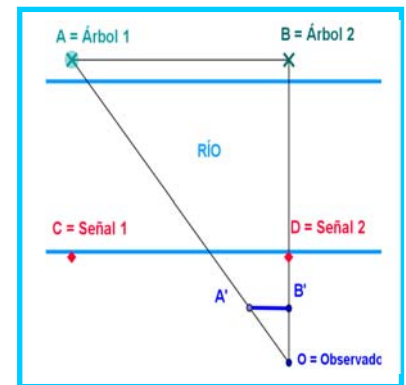
26. *Pentágono dentro de un pentágono.* Dibuja el pentágono $FGHIJ$ que se forma en el pentágono $ABCDE$ al trazar sus diagonales ambos son semejantes porque son polígonos regulares. Calcula la razón de semejanza y el cociente entre sus áreas. Observa los triángulos AGF y ABD ¿son semejantes?



27. Observa los pentágonos regulares de la figura: a) ¿Son todos semejantes? b) Te parece que el proceso de dibujar pentágonos dentro de pentágonos es infinito ¿Por qué? c) ¿Cuál es la sucesión de las razones de semejanza entre el pentágono mayor y cada uno de los siguientes?

CURIOSIDADES. REVISTA

- Calcula la altura de la Pirámide de Keops sabiendo que su sombra mide 175,93 metros y que al mismo tiempo la sombra de un bastón de altura un metro, mide 1.2 metros.
- Calcula la altura de un árbol sabiendo que su sombra mide 15 metros y que al mismo tiempo la sombra de un palo de altura un metro, mide 1.5 metros.
- Unos exploradores encuentran un río y quieren construir una pasarela para cruzarlo, pero, ¿cómo conocer la anchura del río, si no podemos ir a la otra orilla? ¡Piensa! ¡Piensa! Seguro que se te ocurren muchas buenas ideas, mejores que la que te vamos a comentar a continuación.
Buscas en la orilla opuesta dos árboles, (o dos rocas, o ...), A y B. Colocándote en tu orilla perpendicular a ellos, marcas dos señales, (Señal 1 y Señal 2), y mides así la distancia entre esos dos árboles. Ahora midiendo ángulos dibujas dos triángulos semejantes. Uno, en tu orilla, lo puedes medir, y por semejanza de triángulos calculas los lados del otro.
- Imagina que la distancia CD es de 10 metros, que $A'B'$ mide 2 metros y que $OB' = 2.5$ m. ¿Cuánto mide OB ? Si OD mide 5 metros, ¿cuánto mide la anchura de río?
- ¿Cómo podrías conocer a qué distancia de la costa está un barco?



EJERCICIOS Y PROBLEMAS

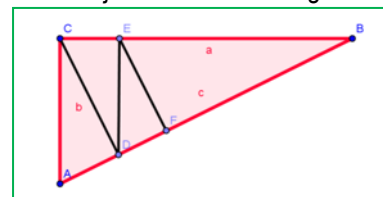
Figuras semejantes

1. Busca fotografías, planos, fotocopias, figuras a escala, etc. toma medidas y determina las razones de semejanza. Calcula las medidas reales y comprueba que la razón de semejanza obtenida es correcta.
2. En un mapa de carretera de escala 1:3000 la distancia entre dos ciudades es de 2.7 cm. Calcula la distancia real entre dichas ciudades.
3. Un microscopio tiene un aumento de 500X, ¿qué tamaño tiene la imagen que se ve por el objetivo si observamos un paramecio de 0.034 mm de diámetro?
4. Pericles murió de peste en el año 429 a. C. Consultado el oráculo de Apolo debían construir un altar en forma de cubo cuyo volumen duplicara exactamente el que ya existía. ¿Cuál debía ser la razón de proporcionalidad de los lados? ¿Es posible construir exactamente un cubo con dicha razón?
5. En una fotografía una persona que sabe que mide 1.75 m tiene una altura de 2.3 cm. Aparece un árbol que en la fotografía mide 5.7 cm, ¿cuánto mide en la realidad?
6. ¿Cuánto mide el lado de un icosaedro cuya superficie es el triple del de otro icosaedro de lado 4 cm?
7. Suponemos que un melocotón es una esfera, y que su hueso tiene un diámetro que es un tercio del del melocotón. ¿Cuánto es mayor la pulpa del melocotón que su hueso?
8. ¿Son semejantes todos los cuadrados? ¿Y todos los rombos? ¿Y todos los rectángulos? ¿Cuándo son semejantes dos rombos? ¿Y dos rectángulos?
9. El área de un rectángulo es 10 cm², y uno de sus lados mide 2 cm, ¿qué área tiene un rectángulo semejante al anterior en el que el lado correspondiente mide 1 cm? ¿Qué perímetro tiene?
10. ¿Son semejantes todas las esferas? ¿Y los icosaedros? ¿Y los cubos? ¿Y los dodecaedros? ¿Cuándo son semejantes dos cilindros?
11. La arista de un octaedro mide 7.3 cm, y la de otro 2.8 cm, ¿Qué relación de proporcionalidad hay entre sus superficies? ¿Y entre sus volúmenes?
12. La medida normalizada A_5 tiene la propiedad de que partimos el rectángulo por la mitad de su parte más larga, el rectángulo que se obtiene es semejante al primero. Duplicando, o dividiendo se obtienen las dimensiones de los rectángulo $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots$. El rectángulo A_4 mide 29.7 cm x 21 cm. Determina las medidas de A_3 y de A_5 .
13. Dibuja un pentágono regular y traza sus diagonales. Tienes un nuevo pentágono regular. ¿Cuál es la razón de semejanza?
14. Dibuja en tu cuaderno un pentágono regular y traza sus diagonales. ¿Cuánto miden los ángulos del triángulo formado por un lado del pentágono y las dos diagonales del vértice opuesto? Este triángulo se denomina *triángulo áureo*, pues al dividir el lado mayor entre el menor se obtiene el número de oro. En la figura que has trazado hay otros triángulos semejantes al áureo, ¿qué relación de proporcionalidad hay entre ellos?
15. El mapa a escala 1:1500000 de una región tiene un área de 1 600 cm², ¿cuánto mide la superficie verdadera de dicha región?

16. *Eratostenes de Alejandría* (276 – 196 a. C.) observó que en Siena la dirección de los rayos solares era perpendicular a la superficie de la Tierra en el solsticio de verano. Viajó siguiendo el curso del Nilo una distancia de 790 km (5 mil estadios) y midió la inclinación de los rayos del sol en el solsticio de verano en Alejandría que era de $\alpha = 7^\circ 12'$. Utilizó la proporcionalidad: $2\pi R / 790 = 360^\circ / \alpha$ para determinar el radio de la Tierra. ¿Qué obtuvo?
17. Tenemos un conjunto de rectángulos de lados: A: 4 y 7, B: 2 y 5, C: 8 y 14, D: 4 y 10, E: 3 y 7, F: 9 y 21. Indica cuáles son semejantes. Dibuja y recorta el rectángulo A, y dibuja el resto de rectángulos. Superpón el rectángulo A con los otros rectángulos y explica que observas con el que es semejante. ¿Qué longitud tiene el otro lado de un rectángulo semejante a A cuyo lado menor mida 10 cm?

El teorema de Tales

18. Divide un segmento cualquiera en 5 partes iguales utilizando el teorema de Tales. ¿Sabrías hacerlo por otro procedimiento exacto?
19. Divide un segmento cualquiera en 3 partes proporcionales a 2, 3, 5 utilizando el teorema de Tales.
20. Si alguien mide 1.75 m y su sombra mide 1 m, calcula la altura del edificio cuya sombra mide 25 m a la misma hora.
21. Un rectángulo tiene una diagonal de 75 m. Calcula sus dimensiones sabiendo que es semejante a otro rectángulo de lados 36 m y 48 m.
22. Sean OAC y OBD dos triángulos en posición Tales. El perímetro de OBD es 200 cm, y OA mide 2 cm, AC mide 8 cm y OC mide 10 cm. Determina las longitudes de los lados de OBD.
23. En el museo de Bagdad se conserva una tablilla en la que aparece dibujado un triángulo rectángulo ABC, de lados $a = 60$, $b = 45$ y $c = 75$, subdividido en 4 triángulos rectángulos menores ACD, CDE, DEF y EFB, y el escriba ha calculado la longitud del lado AD. Utiliza el teorema de Tales para determinar las longitudes de los segmentos AD, CD, DE, DF, EB, BF y EF. Calcula el área del triángulo ABC y de los triángulos ACD, CDE, DEF y EFB.



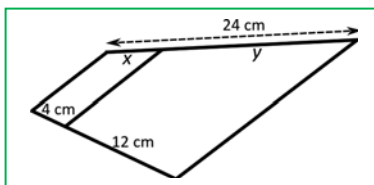
Semejanza de triángulos

24. El triángulo rectángulo ABC tiene un ángulo de 54° y otro triángulo rectángulo tiene un ángulo de 36° . ¿Podemos asegurar que son semejantes? Razona la respuesta.
25. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 25 cm y la altura sobre la hipotenusa mide 10 cm, ¿cuánto miden los catetos?
26. Indica si son semejantes los siguientes pares de triángulos:
- Un ángulo de 50° y otro de 40° . Un ángulo de 90° y otro de 40° .
 - Triángulo isósceles con ángulo desigual de 40° . Triángulo isósceles con un ángulo igual de 70° .
 - $A = 72^\circ$, $b = 10$ cm, $c = 12$ cm. $A' = 72^\circ$, $b' = 5$ cm, $c' = 6$ cm.
 - $a = 7$ cm, $b = 5$ cm, $c = 8$ cm. $a' = 21$ cm, $b' = 15$ cm, $c' = 24$ cm.
27. Calcula el valor desconocido para que los triángulos sean semejantes:
- $a = 12$ cm, $b = 9$ cm, $c = 15$ cm. $a' = 8$ cm, ¿ b' , c' ?
 - $A = 45^\circ$, $b = 6$ cm, $c = 4$ cm. $A' = 45^\circ$, $b' = 24$ cm, ¿ c' ?
28. Las longitudes de los lados de un triángulo son 7 cm, 9 cm y 10 cm. Un triángulo semejante a él tiene un perímetro de 65 cm. ¿Cuánto miden sus lados?
29. La sombra de un edificio mide 23 m, y la del primer piso 3 m. Sabemos que la altura de ese primer piso es de 2,7 m, ¿cuánto mide el edificio?
30. Demuestra que en dos triángulos semejantes las bisectrices son proporcionales.
31. Un triángulo rectángulo isósceles tiene la hipotenusa de longitud 9 cm, igual a un cateto de otro triángulo semejante al primero. ¿Cuánto valen las áreas de ambos triángulos?
32. Uniendo los puntos medios de los lados de un triángulo se obtiene otro triángulo. ¿Son semejantes? ¿Qué relación hay entre sus perímetros? ¿Y entre sus áreas?
33. La altura y la base de un triángulo isósceles miden respectivamente 7 y 5 cm; y es semejante a otro de base 12 cm. Calcula la altura del nuevo triángulo y las áreas de ambos.
34. Los triángulos siguientes son semejantes. Averigua la medida de los ángulos que faltan sabiendo que:
- Son rectángulos y un ángulo del primer triángulo mide 52° .
 - Dos ángulos del primer triángulo miden 30° y 84° .

35. Los triángulos siguientes son semejantes. Averigua las medidas que faltan sabiendo que:
- Los lados del primer triángulo miden 10 m, 15 m y z m. Los del segundo: x m, 9 m y 8 m.
 - Los lados del primer triángulo miden 4 m, 6 m y 8 m. Los del segundo: 6 m, x m y z m.
 - Un lado del primer triángulo mide 12 cm y la altura sobre dicho lado 6 cm. El lado correspondiente del segundo mide 9 cm, y la altura x cm
 - Un triángulo isósceles tiene el ángulo desigual de 35° y el lado igual de 20 cm y el desigual de 7 cm; el otro tiene el lado igual de 5 cm. ¿Cuánto miden sus otros lados y ángulos?
36. Enuncia el primer criterio de semejanza de triángulos para triángulos rectángulos.
37. Los egipcios usaban una cuerda con nudos, todos a la misma distancia, para obtener ángulos rectos. Formaban triángulos de longitud 3, 4 y 5. ¿Por qué? Los indios y los chinos usaban un procedimiento similar aunque utilizando cuerdas con los nudos separados en 5, 12 y 13, y también 8, 15 y 17. ¿Por qué? Escribe las longitudes de los lados de triángulos semejantes a los indicados.
38. Se quiere calcular la altura de un árbol para lo que se mide su sombra: 13 m, y la sombra de un palo de 1.2 m de longitud, 0.9 m. ¿Qué altura tiene el árbol?
39. Ahora no podemos usar el procedimiento de la sombra porque el árbol es inaccesible (hay un río en medio) pero sabemos que está a 30 m de nosotros. ¿Cómo lo harías? Pepe ha cogido un lápiz que mide 10 cm y lo ha colocado a 50 cm de distancia. De ese modo ha conseguido ver alineado la base del árbol con un extremo del lápiz, y la punta del árbol con el otro. ¿Cuánto mide este árbol?
40. Arquímedes calculaba la distancia a la que estaba un barco de la costa. Con una escuadra ABC alineaba los vértices BC con el barco, C' , y conocía la altura del acantilado hasta el vértice B . Dibuja la situación, determina qué triángulos son semejantes. Calcula la distancia del barco si $BB' = 50$ m, $BA = 10$ cm, $AC = 7$ cm.


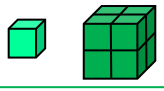
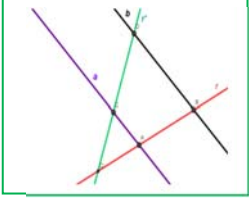

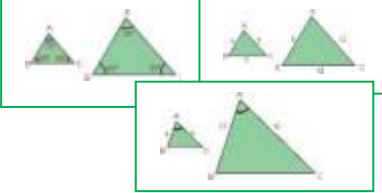
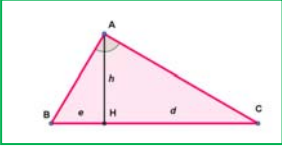
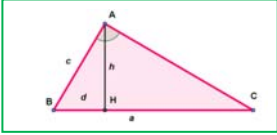
AUTOEVALUACIÓN

1. En un mapa de carretera de escala 1:1200 la distancia entre dos pueblos es de 5 cm. La distancia real entre dichos pueblos es de:
- 60 m
 - 60 km
 - 240 km
 - 240 cm
2. Si un microscopio tiene un aumento de 1000X, ¿qué tamaño (aparente) piensas que tendrá la imagen que se vea por el objetivo si observamos una célula de 0.01 mm de diámetro
- 1 cm
 - 1 mm
 - 0.1 cm
 - 100 mm
3. Queremos construir un cuadrado de área doble de uno de un metro de lado. El lado del nuevo cuadrado debe medir:
- 2 metros
 - $\sqrt{2}$ metros
 - $\sqrt[3]{2}$ metros
 - 1.7 metros
4. Sean OAC y OBD dos triángulos en posición *Tales*. El perímetro de OBD es 50 cm, y OA mide 1 cm, AC mide 1.5 cm y OC mide 2,5 cm. Las longitudes de los lados de OBD son:
- $OB = 10$ cm, $OD = 20$ cm, $BD = 30$ cm
 - $OB = 25$ cm, $OD = 10$ cm, $BD = 15$ cm
 - $OB = 10$ cm, $OD = 15$ cm, $BD = 25$ cm
 - $OB = 15$ cm, $OD = 25$ cm, $BD = 30$ cm.



5. En la figura adjunta los valores de x e y son:
- 6 y 12 cm
 - 5 y 19 cm
 - 6 y 18 cm
 - 5 y 20 cm
6. Los triángulos ABC y DEF son semejantes. Los lados de ABC miden 3, 5 y 7 cm, y el perímetro de DEF mide 60 m. Los lados de DEF miden:
- 6, 10 y 14 cm
 - 12, 20 y 28 cm
 - 9, 15 y 21 m
 - 12, 20 y 28 m
7. Dos triángulos rectángulos son proporcionales si:
- Tienen la hipotenusa proporcional
 - Tienen un ángulo igual
 - Tienen un ángulo distinto del recto igual
 - Sus áreas son proporcionales
8. Los triángulos ABC y DEF son semejantes. El ángulo A mide 30° , y B , 72° . ¿Cuánto miden los ángulos D , E y F ?
- $D = 72^\circ$, $E = 78^\circ$ y $F = 30^\circ$
 - $D = 30^\circ$, $E = 88^\circ$ y $F = 72^\circ$
 - $D = 30^\circ$, $E = 72^\circ$ y $F = 68^\circ$
9. La altura de un triángulo rectángulo divide a la hipotenusa en dos segmentos de longitud 5 y 4 cm, ¿cuánto mide la altura?
- 5.67 cm
 - 4.47 cm
 - 6 cm
 - 5 cm
10. La proyección de un cateto sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 4 cm, y la hipotenusa 9 cm, ¿cuánto mide el cateto?
- 7 cm
 - 5 cm
 - 5.67 cm
 - 6 cm.

RESUMEN

Figuras semejantes	Si las longitudes de elementos correspondientes son proporcionales.	
Razón de semejanza	Coefficiente de proporcionalidad	
Semejanza en longitudes, áreas y volúmenes	Si la razón de semejanza entre las longitudes de una figura es k , entonces la razón entre sus áreas es k^2 y entre sus volúmenes es k^3 .	 
Teorema de Tales	Dadas dos rectas, r y r' , que se cortan en el punto O , y dos rectas paralelas entre sí, a y b . La recta a corta a las rectas r y r' en los puntos A y C , y la recta b corta a las rectas r y r' en los puntos B y D . Entonces:	
Recíproco del teorema de Tales	$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD}$ <p>Si $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD}$ entonces a y b son paralelas.</p>	
Semejanza de triángulos	Dos triángulos son semejantes si tienen todos los ángulos iguales y los lados proporcionales.	
Criterios de semejanza de triángulos	Dos triángulos son semejantes si: Primero: Tienen dos ángulos iguales. Segundo: Tienen los tres lados proporcionales. Tercero: Tienen dos lados proporcionales y el ángulo que forman es igual.	
Teorema de la altura	En un triángulo rectángulo la altura es media proporcional de los segmentos en los que divide a la hipotenusa: $\frac{h}{e} = \frac{d}{h} \Rightarrow h^2 = ed$.	
Teorema del cateto	En un triángulo rectángulo un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella: $\frac{a}{c} = \frac{c}{d} \Rightarrow c^2 = ad$.	

CAPÍTULO 8: TRIGONOMETRÍA

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. SISTEMAS DE MEDIDA DE ÁNGULOS

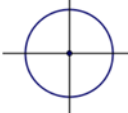
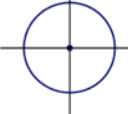
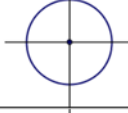
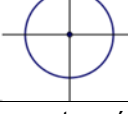
1. Expresa en radianes las siguientes medidas: 45° , 150° , 210° , 315° .
2. Expresa en grados sexagesimales: $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{5}$ y $\frac{3\pi}{8}$ radianes.
3. Dos ángulos de un triángulo miden respectivamente 40° y $\frac{\pi}{3}$ radianes. Calcula en radianes lo que mide el tercer ángulo.
4. Un ángulo de un triángulo isósceles mide $\frac{5\pi}{6}$ radianes. Calcula en radianes la medida de los otros dos.
5. Dibuja un triángulo rectángulo isósceles y expresa en radianes la medida de cada uno de sus ángulos.

2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO

6. Sabiendo que $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, calcula las razones trigonométricas secante, cosecante y cotangente de α .
7. Si $\cotan \alpha = 2$, calcula las cinco razones trigonométricas del ángulo α .
8. Demuestra que $\operatorname{cosec}^2 \alpha = 1 + \cotan^2 \alpha$

3. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO CUALQUIERA

9. Sitúa en el cuadrante que corresponda y expresa en función de un ángulo agudo, el seno, coseno y tangente de los siguientes ángulos:

Ángulo	cuadrante	seno	coseno	tangente
165°				
-230°				
315°				
3625°				

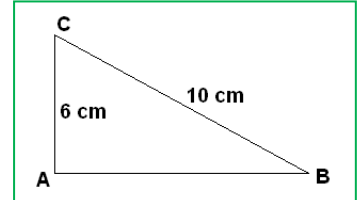
10. Utiliza la calculadora y lo aprendido en este epígrafe para encontrar todos los ángulos positivos menores que 360° cuyo seno es de 0.4.
11. Ídem todos los ángulos negativos menores en valor absoluto que 360° cuya tangente vale 2.
12. Ídem todos los ángulos comprendidos entre 360° y 720° cuyo coseno vale 0.5.

4. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS CUALESQUIERA

13. Calcula la longitud del lado a de un triángulo, sabiendo que $C = 25^\circ$, $b = 7$ cm y $c = 4$ cm.
14. Calcula los ángulos del triángulo de lados: $a = 6$, $b = 8$ y $c = 5$.

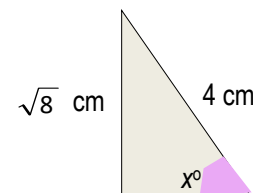
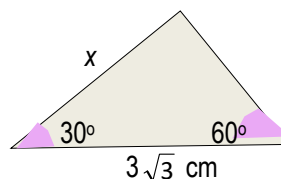
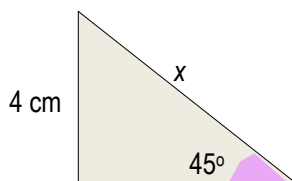
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Expresa las siguientes medidas de ángulos en radianes:
 - a) 30°
 - b) 60°
 - c) 100°
 - d) 330°
2. ¿Cuánto mide en grados sexagesimales un ángulo de 1 rad? Aproxima el resultado con grados, minutos y segundos.
3. Halla la medida en grados de los siguientes ángulos expresados en radianes: a) π ; b) $\frac{\pi}{3}$; c) $\frac{5\pi}{6}$; d) 2π .
4. Usando la calculadora halla el seno, el coseno y la tangente de: a) 28° b) 62° .
¿Encuentras alguna relación entre las razones trigonométricas de ambos ángulos?
5. Halla el seno y el coseno de los ángulos B y C del dibujo. ¿Qué relación encuentras?
6. En un triángulo rectángulo ABC con ángulo recto en A, si $\tan B = 1.2$ y $b = 3$ cm, ¿cuánto mide c?
7. Trabajando con ángulos agudos, ¿es cierto que a mayor ángulo le corresponde mayor seno? ¿Y para el coseno?
8. Usando la calculadora halla el seno, el coseno y la tangente de 9° y 81° . ¿Encuentras alguna relación entre las razones trigonométricas de ambos ángulos?
9. Si a es un ángulo agudo y $\cos a = 0.1$, ¿cuánto valen las otras dos razones trigonométricas?
10. Comprobar las relaciones trigonométricas fundamentales con 30° , 45° y 60° sin utilizar decimales ni calculadora.
11. Si a es un ángulo agudo y $\tan a = 0.4$, ¿cuánto valen las otras dos razones trigonométricas?
12. Completa en tu cuaderno el siguiente cuadro sabiendo que α es un ángulo agudo.

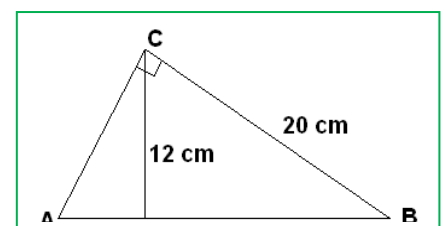


$\text{sen } \alpha$	$\text{cos } \alpha$	$\text{tg } \alpha$
	0.7	
1/3		
		2

13. ¿Es rectángulo un triángulo cuyos lados miden 12, 13 y 5 cm? En caso afirmativo determina el seno, coseno y tangente de los dos ángulos agudos.
14. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 5 y 12 cm. Calcula las razones trigonométricas de sus ángulos agudos. ¿Qué amplitud tienen?
15. Si α es un ángulo agudo tal que $\text{sen } \alpha = 1/3$, calcula:
 - i) Las restantes razones trigonométricas de α .
 - ii) Las razones trigonométricas de $180^\circ - \alpha$
 - ii) Las razones trigonométricas de $180^\circ + \alpha$.
 - iv) Las razones trigonométricas de $360^\circ - \alpha$
16. Sin utilizar calculadora, calcula el valor de x en los siguientes triángulos rectángulos:



17. Beatriz sujeta una cometa con una cuerda de 42 m. ¿A qué altura se encuentra ésta en el momento en que el cable tenso forma un ángulo de $52^\circ 17'$ con el suelo?
18. Calcula el seno, coseno y tangente del ángulo A en el siguiente dibujo:
19. Si a es un ángulo del segundo cuadrante y $\cos a = -0.05$, ¿cuánto valen las otras dos razones trigonométricas?
20. Si a es un ángulo obtuso y $\text{sen } a = 0.4$, ¿cuánto valen las otras dos razones trigonométricas?

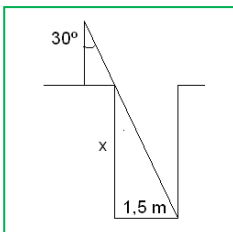
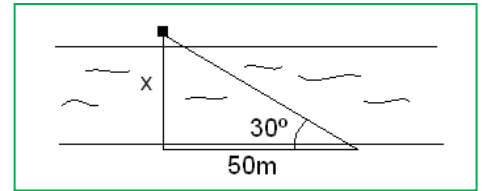


21. Dibuja en tu cuaderno la tabla siguiente y sitúa en el cuadrante que corresponda y expresa en función de un ángulo agudo, el seno, coseno y tangente de los siguientes ángulos:

Ángulo	cuadrante	seno	coseno	tangente	secante	cosecante	cotangente
-225°							
150°							
-60°							
3645°							

22. Calcula la anchura del río representado en la figura del margen:

23. Averigua la altura de la torre de una iglesia si a una distancia de 80 m, y medido con un teodolito de altura 1.60 m, el ángulo de elevación del pararrayos que está en lo alto de la torre es de 23° .



24. Halla el área de un hexágono regular de lado 10 cm.

25. Calcula la profundidad de un pozo de 1.5 m de diámetro sabiendo el ángulo indicado en la figura del margen:

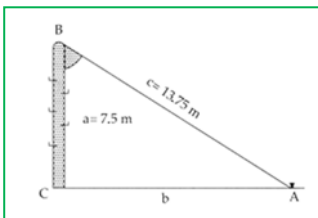
26. Cuál es la altura de una montaña cuya cima, si nos situamos a una distancia de 3 000 m del pie de su vertical y medimos con un teodolito de altura 1.50 m, presenta un ángulo de inclinación de 49° .

27. ¿Cuál es el ángulo de inclinación de los rayos solares en el momento en que un bloque de pisos de 25 m de altura proyecta una sombra de 10 m de longitud?

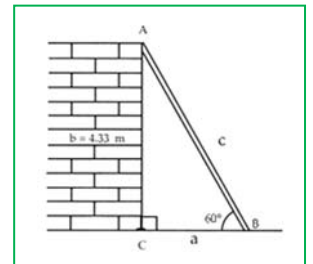
28. Halla la altura y el área de un triángulo isósceles cuya base mide 20 cm y cuyo ángulo desigual vale 26° .

29. Halla el área de un dodecágono regular de lado 16 cm.

30. Obtener la longitud de una escalera apoyada en una pared de 4.33 m de altura que forma un ángulo de 60° con respecto al suelo



31. El hilo de una cometa totalmente extendida mide 150 m, y forma un ángulo con el suelo de 40° mientras lo sujeto a 1.5 m del suelo. ¿A qué altura del suelo está la cometa?

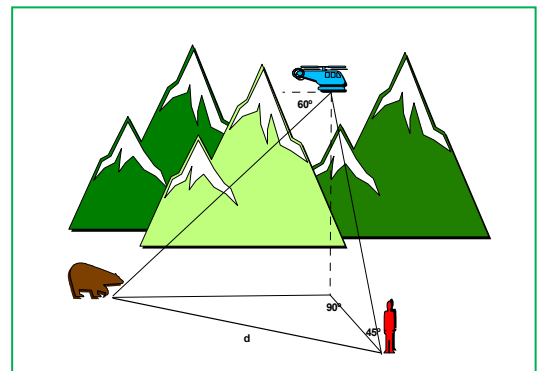


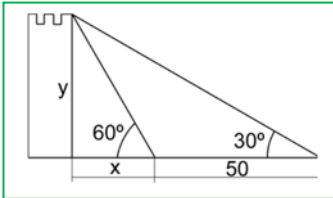
32. Para medir la altura de un campanario a cuya base no podemos acceder, tendemos una cuerda de 30 m de largo desde lo alto de la torre hasta tensarla en el suelo, formando con éste un ángulo de 60° . ¿Cuál es la altura del campanario?

33. Obtener el ángulo que forma un poste de 7.5 m de alto con un cable tirante que va, desde la punta del primero hasta el piso, y que tiene un largo de 13.75 m.

34. Dos amigos observan desde su casa un globo que está situado en la vertical de la línea que une sus casas. La distancia entre sus casas es de 3 km. Los ángulos de elevación medidos por los amigos son de 45° y 60° . Halla la altura del globo y la distancia de ellos al globo.

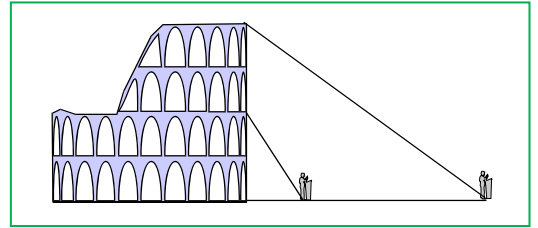
35. Un biólogo se encuentra en el puerto de Somiedo haciendo un seguimiento de los osos pardos. Cuenta con la ayuda de una cámara y un piloto que vuelan en un helicóptero, manteniéndose a una altura constante de $40\sqrt{3}$ m. En el momento que describe la figura, el cámara ve desde el helicóptero al oso con un ángulo de depresión (ángulo que forma su visual con la horizontal marcado en el dibujo) de 60° . El biólogo dirige una visual al helicóptero que forma con el suelo un ángulo de 45° . Calcular la distancia d entre el biólogo y el oso.





36. Desde cierto lugar del suelo se ve el punto más alto de una torre, formando la visual un ángulo de 30° con la horizontal. Si nos acercamos 50 m a la torre, ese ángulo se hace de 60° . Calcula la altura de la torre.

37. Con un teodolito de 1 metro de altura, dos personas pretenden medir la altura del Coliseo de Roma. Una de ellas

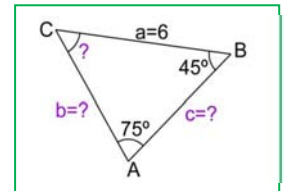


se acerca al anfiteatro, separándose 40 m. de la otra. Esta última obtiene que el ángulo de elevación del punto más alto es de 30° . La otra no divisa el Coliseo completo por lo que mide el ángulo de elevación al punto que marca la base del tercer piso, obteniendo 60° como resultado. Calcula la altura del Coliseo y la distancia de los dos observadores a la base del mismo.

38. Resuelve el triángulo: $a = 6$; $B = 45^\circ$; $A = 75^\circ$.

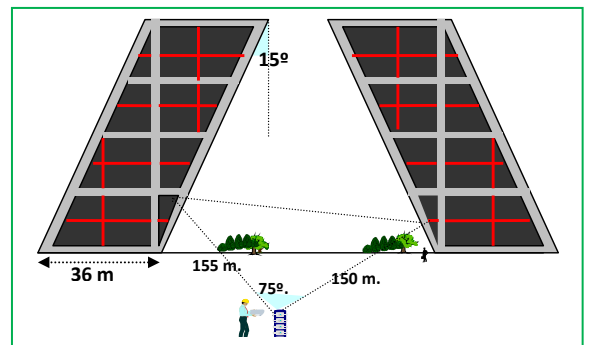
39. Los padres de Pedro tienen una parcela en el campo de forma triangular cuyos lados miden 20, 22 y 30 m. Pedro quiere calcular los ángulos. ¿Cuáles son esos ángulos?

40. Estando situado a 100 m de un árbol, veo su copa bajo un ángulo de 30° . Mi amigo ve el mismo árbol bajo un ángulo de 60° . ¿A qué distancia está mi amigo del árbol?



41. Las conocidas *torres Kío* de Madrid son dos torres gemelas que están en el Paseo de la Castellana, junto a la Plaza de Castilla. Se caracterizan por su inclinación y representan una puerta hacia Europa.

- Con los datos que aparecen en la figura, determina su altura.
- Desde dos oficinas situadas en torres distintas se han extendido dos cables hasta un mismo punto que miden 155 y 150 metros y que forman un ángulo de 75° en su punto de encuentro. ¿Qué distancia en línea recta hay entre ambas?

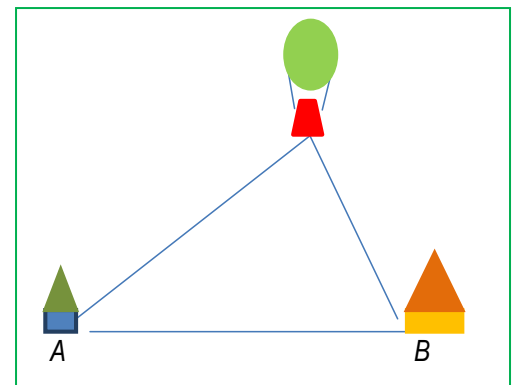


42. Tres pueblos están unidos por carreteras: $AB = 10$ km, $BC = 12$ km y el ángulo formado por AB y BC es de 120° . Cuánto distan A y C .

43. Van a construir un túnel del punto A al punto B . Se toma como referencia una antena de telefonía (C) visible desde ambos puntos. Se mide entonces la distancia $AC = 250$ m. Sabiendo que el ángulo en A es de 53° y el ángulo B es de 45° calcula cuál será la longitud del túnel.

44. Calcular el lado de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 6 m.

45. El punto más alto de un repetidor de televisión, situado en la cima de una montaña, se ve desde un punto del suelo P bajo un ángulo de 67° . Si nos acercamos a la montaña 30 m lo vemos bajo un ángulo de 70° y desde ese mismo punto vemos la cima de la montaña bajo un ángulo de 66° . Calcula la altura del repetidor.



46. Desde lo alto de un globo se observa un pueblo A con un ángulo de 50° . Otro pueblo, B situado al lado y en línea recta se observa desde un ángulo de 60° . El globo se encuentra a 6 km del pueblo A y a 4 km de B . Calcula la distancia entre A y B .

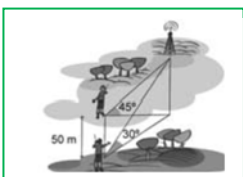
47. Resuelve los triángulos: a) $a = 20$ m; $B = 45^\circ$; $C = 65^\circ$; b) $c = 6$ m, $A = 105^\circ$, $B = 35^\circ$; c) $b = 40$ m; $c = 30$ m, $A = 60^\circ$.

48. Dado el triángulo de vértices A , B , C , y sabiendo que $A = 60^\circ$, $B = 45^\circ$ y que $b = 20$ m. Resolverlo y calcular su área.

49. Calcula la longitud de los lados de un paralelogramo cuyas diagonales son de 20 y 16 m. y las diagonales forman entre sí un ángulo de 37° .

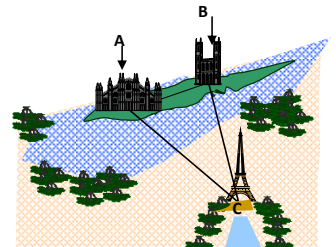
50. Un triángulo isósceles con base 30 m tiene dos ángulos iguales de 80° . ¿Cuánto miden los otros dos lados?

51. Tres amigos se sitúan en un campo de fútbol. Entre Álvaro y Bartolo hay 25 m y entre Bartolo y César, 12 metros. El ángulo formado en la esquina de César es de 20° . Calcula la distancia entre Álvaro y César.



52. Un hombre que está situado al oeste de una emisora de radio observa que su ángulo de elevación es de 45° . Camina 50 m hacia el sur y observa que el ángulo de elevación es ahora de 30° . Halla la altura de la antena.

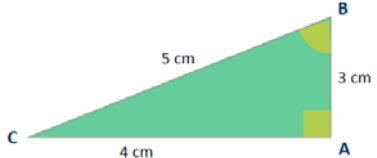
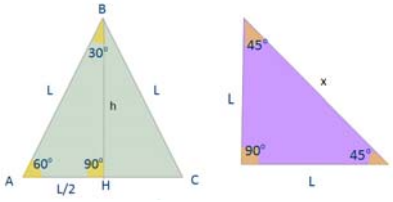
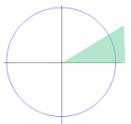
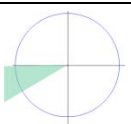
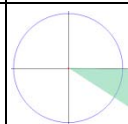
53. Los brazos de un compás miden 12 cm y forman un ángulo de 60° . ¿Cuál es el radio de la circunferencia que puede trazarse con esa abertura?
54. Escribe cuatro ángulos con el mismo seno que 135° .
55. Encuentra dos ángulos que tengan la tangente opuesta a la de 340° .
56. Busca dos ángulos con el mismo seno que 36° y coseno opuesto.
57. ¿Qué ángulos negativos, comprendidos entre -360° y 0° tienen el mismo seno que 60° ?
58. En París y en *l'Île de la Cité* se encuentran *Nôtre Dame* y la *Sainte Chapelle* a una distancia de 200 metros. Imaginemos que un observador situado en A ve B y C con un ángulo de 56° y que otro, situado en B ve A y C con un ángulo de 117° . Calcular las distancias entre la *Torre Eiffel* (C) y *Nôtre Dame* (B), así como entre la *Torre Eiffel* (C) y la *Sainte Chapelle* (A).



AUTOEVALUACIÓN

- La expresión en radianes de 65° es:
 - 1.134 rad
 - 1.134π rad
 - 2.268 rad
 - 2.268π rad
- El valor de la hipotenusa en un triángulo rectángulo con un ángulo de 25° y con uno de los catetos de 3 cm es:
 - 3.3 cm
 - 7.1 cm
 - 6.4 cm
 - 2.2 cm
- Si α es un ángulo agudo y $\operatorname{sen}\alpha = 0.8$, la tangente de α es:
 - 0.6
 - 0.6
 - 1.33
 - 1.33
- Selecciona la opción correcta:
 - $\operatorname{tg} A = 2/3$ significa que $\operatorname{sen} A = 2$ y $\operatorname{cos} A = 3$.
 - La secante de un ángulo siempre está comprendida entre -1 y 1
 - En el segundo y cuarto cuadrantes la tangente y cotangente de un ángulo tienen signo negativo
 - El seno de un ángulo es siempre menor que su tangente.
- Si el seno de un ángulo del segundo cuadrante es $4/5$, entonces su tangente y secante son respectivamente:
 - $-\frac{3}{5}$ y $-\frac{5}{3}$
 - $\frac{3}{5}$ y $\frac{5}{3}$
 - $-\frac{4}{3}$ y $-\frac{3}{4}$
 - $\frac{4}{3}$ y $\frac{3}{4}$
- La altura de un edificio es de 50 m, la medida de su sombra cuando los rayos del sol tienen una inclinación de 30° con la horizontal es de
 - 25 m
 - 100 m
 - $50\sqrt{3}$ m
 - $\frac{100\sqrt{3}}{3}$ m
- El ángulo de -420° es un ángulo que se sitúa en
 - El primer cuadrante
 - El segundo cuadrante
 - El tercer cuadrante
 - El cuarto cuadrante
- Si α es un ángulo agudo y β es su suplementario, se cumple:
 - $\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}\beta$ y $\operatorname{cos}\alpha = \operatorname{cos}\beta$
 - $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta$ y $\operatorname{cos}\alpha = -\operatorname{cos}\beta$
 - $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta$ y $\operatorname{cos}\alpha = \operatorname{cos}\beta$
 - $\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}\beta$ y $\operatorname{cos}\alpha = -\operatorname{cos}\beta$
- Para calcular la altura de una montaña se mide con un teodolito desde A el ángulo que forma la visual a la cima con la horizontal, que es $A = 30^\circ$. Avanzando 200 m, se vuelve a medir y el ángulo resulta ser $B = 35.2^\circ$. La altura de la montaña es de:
 - 825 m
 - 773 m
 - 595 m
 - 636 m
- Si el radio de un pentágono regular es 8 cm, su área mide
 - 305.86 cm²
 - 340.10 cm²
 - 275.97 cm²
 - 152.17 cm²

RESUMEN

Radián	Es un ángulo tal que cualquier arco que se le asocie mide exactamente lo mismo que el radio utilizado para trazarlo. Se denota por rad. Nº de radianes de un ángulo completo = 2π rad	90° son $\pi/2$ rad 1 radian = 57.216° = $57^\circ 12' 58''$																
Razones trigonométricas de un ángulo agudo	$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$ $\operatorname{cos} \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$ $\operatorname{tan} \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{b}{c}$	 $\operatorname{sen} C = \frac{3}{5}$, $\operatorname{cos} C = \frac{4}{5}$																
Relaciones fundamentales	$(\operatorname{sen} \alpha)^2 + (\operatorname{cos} \alpha)^2 = 1$ $\operatorname{tan} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}$	$(\operatorname{sen} 30^\circ)^2 + (\operatorname{cos} 30^\circ)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$																
Otras razones trigonométricas	$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$ $\operatorname{sec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{cos} \alpha}$ $\operatorname{cotan} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tan} \alpha}$	$\operatorname{cosec} 90^\circ = 1$ $\operatorname{sec} 90^\circ$ No existe $\operatorname{cotan} 45^\circ = 1$																
Razones trigonométricas de $30^\circ, 45^\circ$ y 60°	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>seno</th> <th>coseno</th> <th>tangente</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>30°</td> <td>$\frac{1}{2}$</td> <td>$\frac{\sqrt{3}}{2}$</td> <td>$\frac{\sqrt{3}}{3}$</td> </tr> <tr> <td>45°</td> <td>$\frac{\sqrt{2}}{2}$</td> <td>$\frac{\sqrt{2}}{2}$</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>60°</td> <td>$\frac{\sqrt{3}}{2}$</td> <td>$\frac{1}{2}$</td> <td>$\sqrt{3}$</td> </tr> </tbody> </table>		seno	coseno	tangente	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	
	seno	coseno	tangente															
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$															
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1															
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$															
Reducción al primer cuadrante	Las razones trigonométricas de cualquier ángulo α pueden expresarse en función de las de un ángulo agudo β 2º CUADRANTE: $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \beta$ y $\operatorname{cos} \alpha = -\operatorname{cos} \beta$ 3º CUADRANTE: $\operatorname{sen} \alpha = -\operatorname{sen} \beta$ y $\operatorname{cos} \alpha = -\operatorname{cos} \beta$ 4º CUADRANTE: $\operatorname{sen} \alpha = -\operatorname{sen} \beta$ y $\operatorname{cos} \alpha = \operatorname{cos} \beta$	 $\operatorname{sen} 135^\circ = \operatorname{sen} 45^\circ$  $\operatorname{sen} 200^\circ = -\operatorname{sen} 20^\circ$  $\operatorname{cos} (-60^\circ) = \operatorname{cos} 60^\circ$																
Teorema de los senos	$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}}$																	
Teorema de los cosenos	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \operatorname{cos} A$; $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \operatorname{cos} B$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \operatorname{cos} C$;																	

CAPÍTULO 9: GEOMETRÍA

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. TEOREMA DE PITÁGORAS Y TEOREMA DE TALES

- 1) ¿Es posible encontrar un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 12 y 16 *cm* y su hipotenusa 30 *cm*? Si tu respuesta es negativa, halla la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 12 y 16 *cm*.
- 2) Calcula la longitud de la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos de catetos:

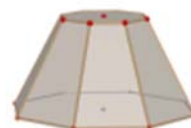
a) 4 <i>cm</i> y 3 <i>cm</i>	b) 1 <i>m</i> y 7 <i>m</i>
c) 2 <i>dm</i> y 5 <i>dm</i>	d) 23.5 <i>km</i> y 47.2 <i>km</i> .

 Utiliza la calculadora si te resulta necesaria.
- 3) Calcula la longitud del cateto que falta en los siguientes triángulos rectángulos de hipotenusa y cateto:

a) 8 <i>cm</i> y 3 <i>cm</i>	b) 15 <i>m</i> y 9 <i>m</i>
c) 35 <i>dm</i> y 10 <i>dm</i>	d) 21.2 <i>km</i> y 11.9 <i>km</i>
- 4) Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 5 *m*.
- 5) Calcula el área de un hexágono regular de lado 7 *cm*.
- 6) Una caja tiene forma cúbica de 3 *cm* de arista. ¿Cuánto mide su diagonal?
- 7) Calcula la medida de la diagonal de una sala que tiene 8 metros de largo, 5 metros de ancho y 3 metros de altura.
- 8) En una foto hay un niño, que sabemos que mide 1.5 *m*, y un edificio. Medimos la altura del niño y del edificio en la foto, y resultan ser: 0.2 *cm* y 10 *cm*. ¿Qué altura tiene el edificio?
- 9) Se dibuja un hexágono regular. Se trazan sus diagonales y se obtiene otro hexágono regular. Indica la razón de semejanza entre los lados de ambos hexágonos.
- 10) En un triángulo regular *ABC* de lado, 1 *cm*, trazamos los puntos medios, *M* y *N*, de dos de sus lados. Trazamos las rectas *BN* y *CM* que se cortan en un punto *O*. ¿Son semejantes los triángulos *MON* y *COB*? ¿Cuál es la razón de semejanza? ¿Cuánto mide el lado *MN*?
- 11) Una pirámide regular hexagonal de lado de la base 3 *cm* y altura 10 *cm*, se corta por un plano a una distancia de 4 *cm* del vértice, con lo que se obtiene una nueva pirámide. ¿Cuánto miden sus dimensiones?
- 12) El diámetro de un melocotón es tres veces mayor que el de su hueso, y mide 8 *cm*. Calcula el volumen del melocotón, suponiendo que es esférico, y el de su hueso, también esférico. ¿Cuál es la razón de proporcionalidad entre el volumen del melocotón y el del hueso?
- 13) En la pizzería tienen pizzas de varios precios: 1 €, 2 € y 3 €. Los diámetros de estas pizzas son: 15 *cm*, 20 *cm* y 30 *cm*, ¿cuál resulta más económica? Calcula la relación entre las áreas y compárala con la relación entre los precios.
- 14) Una maqueta de un depósito cilíndrico de 1000 litros de capacidad y 5 metros de altura, queremos que tenga una capacidad de 1 litro. ¿Qué altura debe tener la maqueta?

2. LONGITUDES, ÁREAS Y VOLÚMENES

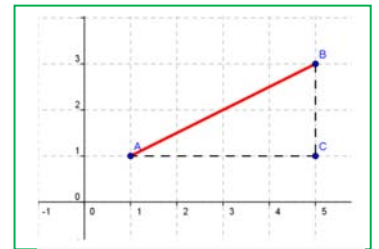
- 15) Calcula el volumen de un prisma recto de 20 *dm* de altura cuya base es un hexágono de 6 *dm* de lado.
- 16) Calcula la cantidad de agua que hay en un recipiente con forma de cilindro sabiendo que su base tiene 10 *cm* de diámetro y que el agua alcanza 12 *dm* de altura.
- 17) Calcula las áreas lateral y total de un prisma hexagonal regular sabiendo que las aristas de las bases miden 3 *cm* y cada arista lateral 2 *dm*.
- 18) El área lateral de un prisma regular de base cuadrada es 16 *m*² y tiene 10 *m* de altura. Calcula el perímetro de la base.
- 19) El lado de la base de una pirámide triangular regular es de 7 *cm* y la altura de la pirámide 15 *cm*. Calcula el apotema de la pirámide y su área total.
- 20) Calcula el área lateral de un tronco de pirámide regular, sabiendo que sus bases son dos octógonos regulares de lados 3 y 8 *dm* y que la altura de cada cara lateral es de 9 *dm*.
- 21) Si el área lateral de una pirámide cuadrangular regular es 104 *cm*² y la arista de la base mide 4 *cm*, calcula la apotema de la pirámide y su altura.
- 22) Una columna cilíndrica tiene 35 *cm* de diámetro y 5 *m* de altura. ¿Cuál es su área lateral?
- 23) El radio de la base de un cilindro es de 7 *cm* y la altura es el triple del diámetro. Calcula su área total.
- 24) Calcula el área lateral de un cono recto sabiendo que su generatriz mide 25 *dm* y su radio de la base 6 *dm*.
- 25) La circunferencia de la base de un cono mide 6.25 *m* y su generatriz 12 *m*. Calcula el área total.



- 26) Una esfera tiene 4 m de radio. Calcula:
 a) La longitud de la circunferencia máxima;
 b) El área de la esfera.
- 27) (CDI Madrid 2008) El depósito de gasoil de la casa de Irene es un cilindro de 1 m de altura y 2 m de diámetro. Irene ha llamado al suministrador de gasoil porque en el depósito solamente quedan 140 litros.
 a. ¿Cuál es, en dm^3 , el volumen del depósito? (Utiliza 3.14 como valor de π).
 b. Si el precio del gasoil es de 0.80 € cada litro, ¿cuánto deberá pagar la madre de Irene por llenar el depósito?
- 28) Comprueba que el volumen de la esfera de radio 4 dm sumado con el volumen de un cono del mismo radio de la base y 8 dm de altura, coincide con el volumen de un cilindro que tiene 8 dm de altura y 4 dm de radio de la base.

3. INICIACIÓN A LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

- 29) Representa en un sistema de referencia en el espacio de dimensión tres los puntos:
 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 2, 3)$, $B(3, 1, 7)$, $D(3, 2, 1)$ y $E(4, 4, 4)$ y vectores: DE y OA .
- 30) El vector de componentes $u = (2, 3)$ y origen $A = (1, 1)$, ¿qué extremo tiene?
- 31) Calcula la distancia entre los puntos $A(6, 2)$ y $B(3, 9)$.
- 32) Calcula la distancia entre los puntos $A(6, 2, 5)$ y $B(3, 9, 7)$.
- 33) Calcula la longitud del vector de componentes $u = (3, 4)$
- 34) Calcula la longitud del vector de componentes $u = (3, 4, 1)$.
- 35) Dibuja un cuadrado de diagonal el punto $O(0, 0)$ y $A(3, 3)$. ¿Qué coordenadas tienen los otros vértices del cuadrado? Calcula la longitud del lado y de la diagonal de dicho cuadrado.
- 36) Dibuja un cubo de diagonal $O(0, 0, 0)$ y $A(3, 3, 3)$. ¿Qué coordenadas tienen los otros vértices del cubo? Ya sabes, son 8 vértices. Calcula la longitud de la arista, de la diagonal de una cara y de la diagonal del cubo.
- 37) Sea $X(x, y)$ un punto genérico del plano, y $O(0, 0)$ el origen de coordenadas, escribe la expresión de todos los puntos X que distan de O una distancia D .
- 38) Sea $X(x, y, z)$ un punto genérico del espacio, y $O(0, 0, 0)$ el origen de coordenadas, escribe la expresión de todos los puntos X que distan de O una distancia D .
- 39) Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(6, 2)$ y $B(3, 9)$, de forma explícita, implícita y paramétrica. Representala gráficamente.
- 40) Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(6, 2, 5)$ y $B(3, 9, 7)$, de forma explícita, y como intersección de dos planos.
- 41) Escribe las ecuaciones de los tres planos coordenados.
- 42) Escribe las ecuaciones de los tres ejes coordenados en el espacio.
- 43) En el cubo de diagonal $O(0, 0, 0)$ y $A(6, 6, 6)$ escribe las ecuaciones de los planos que forman sus caras. Escribe las ecuaciones de todas sus aristas, y las coordenadas de sus vértices.
- 44) Escribe la ecuación del cilindro de eje el eje OZ y radio 2.
- 45) Escribe la ecuación de la esfera de centro el origen de coordenadas y radio 2.
- 46) Escribe la ecuación del cilindro de eje, la recta $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$ y radio 1.
- 47) Escribe la ecuación de la circunferencia en el plano de centro $A(2, 5)$ y radio 2.
- 48) Al cortar a un cierto cilindro por un plano horizontal se tiene la circunferencia del ejercicio anterior. Escribe la ecuación del cilindro



4. MOVIMIENTOS Y TRANSFORMACIONES

- 49) Dibuja en tu cuaderno una figura y utiliza escuadra y cartabón para trasladarla 5 centímetros hacia la derecha.
- 50) Dibuja en tu cuaderno una figura. (Si no se te ocurre ninguna otra, dibuja la letra G). Coloca encima un papel vegetal y cálcala. Desplaza en línea recta el papel vegetal y vuelve a calcar la figura. Las dos figuras que has obtenido, ¿tienen todas sus medidas, tanto longitudes como ángulos, iguales? Traza las rectas que unen pares de puntos correspondientes, ¿cómo son esas rectas? ¿Qué trayectoria han seguido los puntos en el desplazamiento?



Un friso en Camboya

51) Con ayuda de papel cuadriculado transforma mediante una traslación una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza los resultados.

52) Observa este friso de un templo de Camboya. Es una figura que se repite por traslación. ¿Qué dirección tiene el vector de traslación? ¿De dónde a dónde iría?

53) En edificación se utilizan mucho las traslaciones. Piensa en las ventanas de un edificio y elige una. ¿Puedes obtener otra distinta mediante traslación? Haz

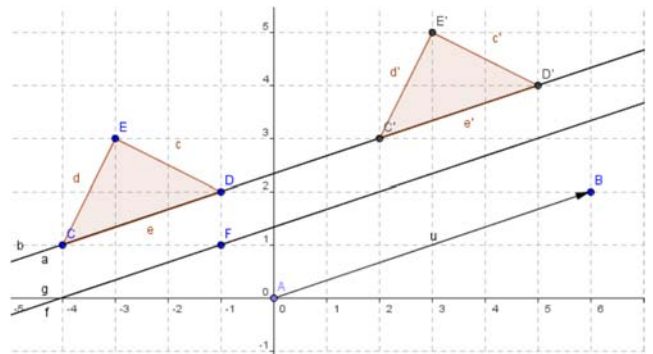
un dibujo que represente esta situación.



- 54) En la fachada de esta torre mudéjar de Teruel podemos ver distintas traslaciones. En la parte superior hay dos conjuntos de cuatro ventanitas. Uno es trasladado del otro. Y cada ventanita forma a las otras cuatro mediante una traslación. Al seguir bajando, los dos arcos se trasladan formando otros dos arcos. Observa, en este caso todas las traslaciones tienen un vector de traslación horizontal. Continúa describiendo las traslaciones que ves en el diseño de esta torre.
- 55) Dibuja en tu cuaderno un punto O y otro punto distinto A. Gira al punto A con centro en O un ángulo de 30° en sentido positivo y denomina A' el punto girado.
- 56) Dibuja en tu cuaderno un punto O y dos segmentos, uno OA que pase por O, y otro BC que no pase por O. Dibuja los segmentos girados OA' y B'C' del giro de centro O y ángulo 60° .
- 57) Dibuja en tu cuaderno el triángulo de vértices A (4, 2), B (3, -2) y C (5, 0). Dibuja el triángulo que se obtiene al girarlo con centro en el origen de coordenadas un ángulo de 90° en sentido positivo. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices A', B' y C' del triángulo girado?
- 58) Con ayuda de papel cuadriculado, transforma mediante un giro, una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza los resultados.
- 59) Dibuja en tu cuaderno dos puntos cualesquiera P y P'. Encuentra su centro de simetría.
- 60) ¿Qué ocurre al aplicar un giro de 60° a una figura? ¿Hay rectas invariantes? ¿Y en un giro de 180° ? Las rectas que pasan por el centro de giro, ¿en qué rectas se transforman? ¿Y con un giro de 0° ? ¿Y con un giro de 360° ?
- 61) Dibuja un triángulo ABC y su simétrico A'B'C' respecto un punto O. ¿Cómo son sus lados? ¿Son iguales? ¿Y sus ángulos? ¿Se mantiene el sentido de los ángulos? Comprueba cómo es el ángulo ABC y el ángulo A'B'C'. ¿Es un movimiento directo?
- 62) Vamos a analizar las letras mayúsculas. Indica cuáles de las siguientes letras no tienen simetría central y cuáles si la tienen, indicando entonces su centro de simetría: B, H, N, O, P, S, T, X, Z. Recuerda, buscas un punto tal que la simetría central de centro ese punto deje invariante a la letra.
- 63) Escribe cinco ejemplos de objetos del espacio que giren.
- 64) Mediante un giro en el espacio, ¿en qué se transforma un plano? ¿Y una esfera? ¿Y un cono? ¿Y dos planos paralelos? ¿Y dos planos ortogonales? Analiza los resultados.
- 65) Indica cuáles de las siguientes letras mayúsculas son simétricas, y si lo son, indica si sus ejes de simetría son horizontales o verticales: A, B, D, F, K, M, N, R, T, U, V, W, Z.

- 66) Con ayuda de papel cuadriculado, transforma mediante una simetría, una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza la respuesta.
- 67) Dibuja un rectángulo ABCD. Dibuja el eje de simetría que transforma AB en CD, y el eje de simetría que transforma AD en BC.
- 68) Dibuja un hexágono regular y dibuja sus ejes de simetría. ¿Cuántos tiene? Tiene 6. Descríbelos.
- 69) Dibuja un pentágono regular y sus ejes de simetría. ¿Cuántos tiene? Descríbelos.
- 70) Escribe cinco objetos que estén a tu alrededor que sean simétricos e indica su plano de simetría. Mira en el aula y busca simetrías. ¿Son simétricas las sillas, la lámpara, la ventana, las mesas...? ¿Cuál es su plano de simetría?
- 71) Comprueba en la ventana algebraica que:

- Las coordenadas de los puntos C' , D' y E' se obtienen respectivamente al sumar a las coordenadas de los puntos C, D, y E las coordenadas del vector u .
- La longitud de cada lado del triángulo es la misma que la de su trasladado y las áreas de los triángulos CDE y $C'D'E'$ coinciden



- 72) ¿Cuáles son los puntos invariantes de una simetría axial? ¿Y las rectas invariantes?
- 73) Utiliza la herramienta Rota objeto en torno a un punto, el ángulo indicado para estudiar los giros en el plano. Define un punto O como centro de giro, por ejemplo, el centro de coordenadas.
- Define tres puntos para determinar con Angulo uno de 45° .
 - Dibuja rectas y polígonos y observa cómo se transforman mediante este giro.
 - Investiga si al realizar un giro existen puntos y/o rectas que permanecen invariantes.
- 74) Utiliza la herramienta Refleja objeto por punto para estudiar la simetría central. Define un punto O como centro de simetría, por ejemplo, el centro de coordenadas.
- Dibuja rectas y polígonos y observa cómo se transforman por una simetría central.
 - Comprueba que una simetría central equivale a un giro de 180° .
 - Investiga si en una simetría central hay puntos y/o rectas que permanecen invariantes.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Teorema de *Pitágoras* y teorema de *Tales*

1. Calcula el volumen de un tetraedro regular de lado 7 cm .
2. Calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1 m .
3. Calcula la longitud de la diagonal de un rectángulo de base 15 cm y altura 6 cm .
4. Dibuja un paralelepípedo cuyas aristas midan 4 cm , 5 cm y 6 cm que no sea un ortoedro. Dibuja también su desarrollo.
5. Si el paralelepípedo anterior fuera un ortoedro, ¿cuánto mediría su diagonal?
6. Un vaso de 11 cm de altura tiene forma de tronco de cono en el que los radios de las bases son de 5 y 3 cm . ¿Cuánto ha de medir como mínimo una cucharilla para que sobresalga del vaso por lo menos 2 cm ?
7. ¿Es posible guardar en una caja con forma de ortoedro de aristas 4 cm , 3 cm y 12 cm un bolígrafo de 13 cm de longitud?
8. Calcula la diagonal de un prisma recto de base cuadrada sabiendo que el lado de la base mide 6 cm y la altura del prisma 8 cm .
9. Si un ascensor mide 1.2 m de ancho, 1.6 m de largo y 2.3 m de altura, ¿es posible introducir en él una escalera de 3 m de altura?
10. ¿Cuál es la mayor distancia que se puede medir en línea recta en una habitación que tiene 6 m de ancho, 8 m de largo y 4 m de altura?
11. Calcula la longitud de la arista de un cubo sabiendo que su diagonal mide 3.46 cm .
12. Calcula la distancia máxima entre dos puntos de un tronco de cono cuyas bases tienen radios 5 cm y 2 cm , y altura 10 cm .
13. En una pizzería la pizza de 15 cm de diámetro vale 2 € y la de 40 cm vale 5 € . ¿Cuál tiene mejor precio?
14. Vemos en el mercado una merluza de 30 cm que pesa un kilo. Nos parece un poco pequeña y pedimos otra un poco mayor, que resulta pesar 2 kilos . ¿Cuánto medirá?
15. En un día frío un padre y un hijo pequeño van exactamente igual abrigados, ¿Cuál de los dos tendrá más frío?

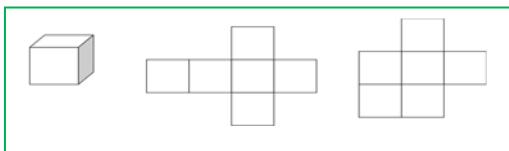


Longitudes, áreas y volúmenes

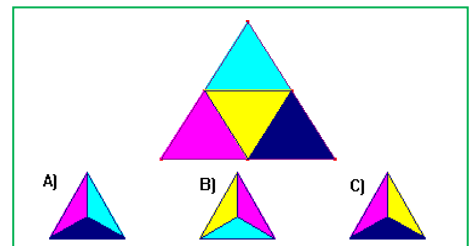
16. Identifica a qué cuerpo geométrico pertenecen los siguientes desarrollos:



17. ¿Podrá existir un poliedro regular cuyas caras sean hexagonales? Razona la respuesta.
18. ¿Puedes encontrar dos aristas paralelas en un tetraedro? ¿Y en cada uno de los restantes poliedros regulares?



19. Utiliza una trama de cuadrados o papel cuadrulado, y busca todos los diseños de seis cuadrados que se te ocurran. Decide cuáles pueden servir para construir un cubo
20. ¿Cuántas diagonales puedes trazar en un cubo? ¿Y en un octaedro?



21. El triángulo de la figura se ha plegado para obtener un tetraedro. Teniendo en cuenta que el triángulo no está pintado por detrás, ¿cuál de las siguientes vistas en perspectiva del tetraedro es falsa?
22. Un prisma de 8 dm de altura tiene como base un triángulo rectángulo de catetos 3 dm y 4 dm . Calcula las áreas lateral y total del prisma.
23. Dibuja un prisma hexagonal regular que tenga 3 cm de arista basal y 0.9 dm de altura. Calcula las áreas de la base y total.
24. Un prisma pentagonal regular de 15 cm de altura tiene una base de 30 cm^2 de área. Calcula su volumen.
25. Calcula el área total de un ortoedro de dimensiones 2.7 dm , 6.2 dm y 80 cm .
26. Calcula la superficie total y el volumen de un cilindro que tiene 7 m de altura y 3 cm de radio de la base.
27. Calcula el área total de una esfera de 7 cm de radio.
28. Calcula el apotema de una pirámide regular sabiendo que su área lateral es de 150 cm^2 y su base es un hexágono de 4 cm de lado.
29. Calcula el apotema de una pirámide hexagonal regular sabiendo que el perímetro de la base es de 36 dm y la altura de la pirámide es de 6 dm . Calcula también el área total y el volumen de esta pirámide.
30. Un triángulo rectángulo de catetos 12 cm y 16 cm gira alrededor de su cateto menor generando un cono. Calcula el área lateral, el área total y el volumen.
31. Tres bolas de metal de radios 15 dm , 0.4 m y 2 m se funden en una sola, ¿Cuál será el diámetro de la esfera resultante?

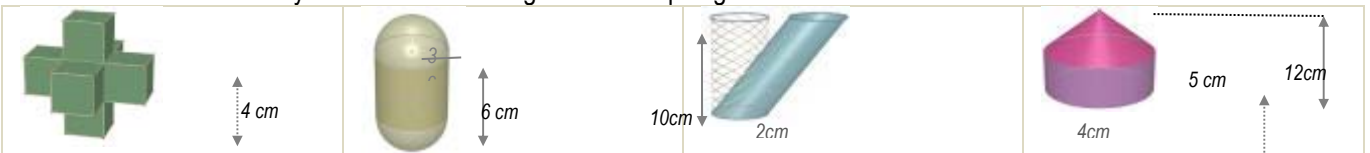
32. ¿Cuál es la capacidad de un pozo cilíndrico de 1.50 m de diámetro y 30 m de profundidad?
33. ¿Cuánto cartón necesitamos para construir una pirámide cuadrangular regular si queremos que el lado de la base mida 12 cm y que su altura sea de 15 cm ?
34. Calcula el volumen de un cilindro que tiene 2 cm de radio de la base y la misma altura que un prisma cuya base es un cuadrado de 4 cm de lado y 800 cm^3 de volumen.
35. ¿Cuál es el área de la base de un cilindro de 1.50 m de alto y 135 dm^3 de volumen?
36. El agua de un manantial se conduce hasta unos depósitos cilíndricos que miden 10 m de radio de la base y 20 m de altura. Luego se embotella en bidones de 2.5 litros. ¿Cuántos envases se llenan con cada depósito?



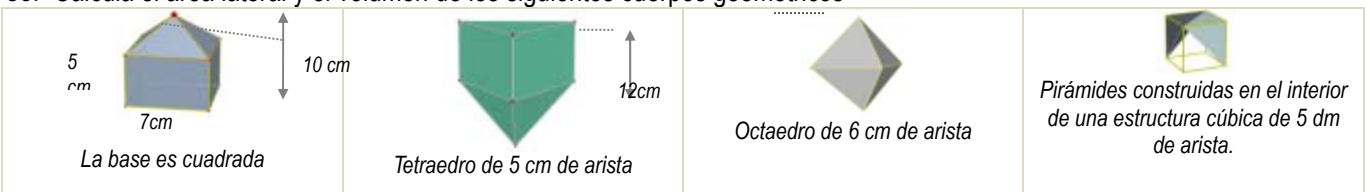
37. Calcula la cantidad de cartulina necesaria para construir un [anillo](#) de 10 tetraedros cada uno de los cuales tiene un centímetro de arista.
38. Al hacer el desarrollo de un prisma triangular regular de 5 dm de altura, resultó un rectángulo de un metro de diagonal como superficie lateral. Calcula el área total.
39. Determina la superficie mínima de papel necesaria para envolver un prisma hexagonal regular de 2 cm de lado de la base y 5 cm de altura.



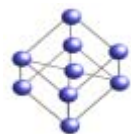
40. El ayuntamiento de Madrid ha colocado unas jardineras de piedra en sus calles que tienen forma de prisma hexagonal regular. La cavidad interior, donde se deposita la tierra, tiene 80 cm de profundidad y el lado del hexágono interior es de 60 cm . Calcula el volumen de tierra que llenaría una jardinera por completo.
41. Una habitación tiene forma de ortoedro y sus dimensiones son directamente proporcionales a los números $2, 4$ y 8 . Calcula el área total y el volumen si además se sabe que la diagonal mide 18.3 m .
42. Un ortoedro tiene 0.7 dm de altura y 8 dm^2 de área total. Su longitud es el doble de su anchura, ¿cuál es su volumen?
43. Si el volumen de un cilindro de 15 cm de altura es de 424 cm^3 , calcula el radio de la base del cilindro.
44. Han instalado en casa de Juan un depósito de agua de forma cilíndrica. El diámetro de la base mide 2 metros y la altura es de 3 metros. a) Calcula el volumen del depósito en m^3 . b) ¿Cuántos litros de agua caben en el depósito?
45. Un envase de un litro de leche tiene forma de prisma, la base es un cuadrado que tiene 10 cm de lado. a) ¿Cuál es, en cm^3 , el volumen del envase? b) Calcula la altura del envase en cm .
46. Una circunferencia de longitud 18.84 cm gira alrededor de uno de sus diámetros generando una esfera. Calcula su volumen.
47. Una puerta mide 1.8 m de alto, 70 cm de ancho y 3 cm de espesor. El precio de instalación es de 100 € y se cobra 5 € por m^2 en concepto de barnizado, además del coste de la madera, que es de 280 € cada m^3 . Calcula el coste de la puerta si sólo se realiza el barnizado de las dos caras principales.
48. ¿Cuál es el volumen de una esfera en la que la longitud de una circunferencia máxima es 251.2 m ?
49. Calcula el área lateral y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos



50. Calcula el área lateral y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos



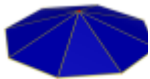
51. El agua contenida en un recipiente cónico de 21 cm de altura y 15 cm de diámetro de la base se vierte en un vaso cilíndrico de 15 cm de diámetro de la base. ¿Hasta qué altura llegará el agua?
52. Según Arquímedes, ¿qué dimensiones tiene el cilindro circunscrito a una esfera de 7 cm de radio que tiene su misma área? Calcula esta área.
53. En la construcción de un globo aerostático esférico de un metro de radio se emplea lona que tiene un coste de 300 €/m^2 . Calcula el importe de la lona necesaria para su construcción.
54. Calcula el radio de una esfera que tiene 33.51 dm^3 de volumen.
55. El Atomium es un monumento de Bruselas que reproduce una molécula de hierro. Consta de 9 esferas de acero de 18 m de diámetro que ocupan los vértices y el centro de una estructura cúbica de 103 m de diagonal, realizada con cilindros de 2 metros de diámetro. Si utilizamos una escala $1:100$ y tanto las esferas como los cilindros son macizos, ¿qué cantidad de material necesitaremos?



56. Una piscina mide 20 m de largo, 5 m de ancho y 2 m de alto.
 a) ¿Cuántos litros de agua son necesarios para llenarla?
 b) ¿Cuánto costará recubrir el suelo y las paredes con PVC si el precio es de 20 €/m²?
57. Se ha pintado por dentro y por fuera un depósito sin tapadera de 8 dm de alto y 3 dm de radio. Teniendo en cuenta que la base sólo se puede pintar por dentro, y que se ha utilizado pintura de 2 €/dm², ¿cuánto dinero ha costado en total?



58. ¿Cuál de las dos campanas extractoras de la figura izquierda tiene un coste de acero inoxidable menor?
59. En una vasija cilíndrica de 3 m de diámetro y que contiene agua, se introduce una bola. ¿Cuál es su volumen si después de la inmersión sube 0.5 m el nivel del agua?
60. El precio de las tejas es de 12,6 €/m². ¿Cuánto costará retejar una vivienda cuyo tejado tiene forma de pirámide cuadrangular regular de 1.5 m de altura y 15 m de lado de la base?
61. Se enrolla una cartulina rectangular de lados 40 cm y 26 cm formando cilindros de las dos formas posibles, haciendo coincidir lados opuestos. ¿Cuál de los dos cilindros resultantes tiene mayor volumen?
62. Cada uno de los cubos de la figura tiene 2 cm de arista. ¿Cuántos hay que añadir para formar un cubo de 216 cm³ de volumen?
63. Un tubo de ensayo tiene forma de cilindro abierto en la parte superior y rematado por una semiesfera en la inferior. Si el radio de la base es de 1 cm y la altura total es de 12 cm, calcula cuántos centilitros de líquido caben en él.
64. El lado de la base de la pirámide de Keops mide 230 m, y su altura 146 m. ¿Qué volumen encierra?
65. La densidad de un tapón de corcho es de 0.24 g/cm³, ¿cuánto pesan mil tapones si los diámetros de sus bases miden 2,5 cm y 1.2 cm, y su altura 3 cm?
66. Comprueba que el volumen de una esfera es igual al de su cilindro circunscrito menos el del cono de igual base y altura.
67. Calcula el volumen de un octaedro regular de arista 2 cm.
68. Construye en cartulina un prisma cuadrangular regular de volumen 240 cm³, y de área lateral 240 cm².
69. El cristal de una farola tiene forma de tronco de cono de 40 cm de altura y bases de radios 20 y 10 cm. Calcula su superficie.
70. Un bote cilíndrico de 15 cm de radio y 30 cm de altura tiene en su interior cuatro pelotas de radio 3,5 cm. Calcula el espacio libre que hay en su interior.
71. Un embudo cónico de 15 cm de diámetro tiene un litro de capacidad, ¿cuál es su altura?
72. En un depósito con forma de cilindro de 30 dm de radio, un grifo vierte 15 litros de agua cada minuto. ¿Cuánto aumentará la altura del agua después de media hora?
73. La lona de una sombrilla abierta tiene forma de pirámide octogonal regular de 0.5 m de altura y 40 cm de lado de la base. Se fija un mástil en el suelo en el que se encaja y el vértice de la pirámide queda a una distancia del suelo de 1.80 m. En el momento en que los rayos de sol son verticales, ¿qué área tiene el espacio de sombra que determina?
74. Una pecera con forma de prisma recto y base rectangular se llena con 65 litros de agua. Si tiene 65 cm de largo y 20 cm de ancho, ¿cuál es su profundidad?
75. En un helado de cucurucho la galleta tiene 12 cm de altura y 4 cm diámetro. ¿Cuál es su superficie? Si el cucurucho está completamente lleno de helado y sobresale una semiesfera perfecta, ¿cuántos cm³ de helado contiene?



Iniciación a la Geometría Analítica

76. Calcula la distancia entre los puntos $A(7, 3)$ y $B(2, 5)$.
77. Calcula la distancia entre los puntos $A(7, 3, 4)$ y $B(2, 5, 8)$.
78. Calcula la longitud del vector de componentes $u = (4, 5)$.
79. Calcula la longitud del vector de componentes $u = (4, 5, 0)$.
80. El vector $u = (4, 5)$ tiene el origen en el punto $A(3, 7)$. ¿Cuáles son las coordenadas de su punto extremo?
81. El vector $u = (4, 5, 2)$ tiene el origen en el punto $A(3, 7, 5)$. ¿Cuáles son las coordenadas de su punto extremo?
82. Dibuja un cuadrado de diagonal el punto $A(2, 3)$ y $C(5, 6)$. ¿Qué coordenadas tienen los otros vértices del cuadrado? Calcula la longitud del lado y de la diagonal de dicho cuadrado.
83. Dibuja un cubo de diagonal $A(1, 1, 1)$ y $B(4, 4, 4)$. ¿Qué coordenadas tienen los otros vértices del cubo? Ya sabes, son 8 vértices. Calcula la longitud de la arista, de la diagonal de una cara y de la diagonal del cubo.
84. Sea $X(x, y)$ un punto del plano, y $A(2, 4)$, escribe la expresión de todos los puntos X que distan de A una distancia 3.

85. Sea $X(x, y, z)$ un punto del espacio, y $A(2, 4, 3)$, escribe la expresión de los puntos X que distan de A una distancia 3.
86. Escribe la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto $A(2, 7)$ y tiene como vector de dirección $u = (4, 5)$. Representala gráficamente.
87. Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(2, 7)$ y $B(4, 6)$, de forma explícita, implícita y paramétrica. Representala gráficamente.
88. Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(2, 4, 6)$ y $B(5, 2, 8)$, de forma explícita, y como intersección de dos planos.
89. En el cubo de diagonal $A(1, 1, 1)$ y $B(5, 5, 5)$ escribe las ecuaciones de los planos que forman sus caras. Escribe también las ecuaciones de todas sus aristas, y las coordenadas de sus vértices.
90. Escribe la ecuación del cilindro de eje $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ y radio 3.
91. Escribe la ecuación de la esfera de centro $A(2, 7, 3)$ y radio 4.
92. Escribe la ecuación del cilindro de eje, la recta $\begin{cases} x=5+t \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$ y radio 2.
93. Escribe la ecuación de la circunferencia en el plano de centro $A(3, 7)$ y radio 3.
94. Al cortar a un cierto cilindro por un plano horizontal se tiene la circunferencia del ejercicio anterior. Escribe la ecuación del cilindro.

Movimientos

95. Transforma la letra L mediante dos isometrías consecutivas. ¿Puedes obtener el resultado final mediante una única isometría? Analiza posibles situaciones.
96. Pliega una tira de papel como un acordeón. Haz algunos cortes y desplégala. Habrás confeccionado un friso. Señala en él todas las isometrías. Ensayá otros diseños de frisos.
97. Determina los ejes y centros de simetría de las siguientes gráficas de funciones. Señala cuáles son pares y cuáles impares. (Dibuja previamente su gráfica).

$$a) y = x^2 \quad b) y = x^3 \quad c) y = x^4 \quad d) y = x$$

98. Un tetraedro regular tiene 6 planos de simetría, dibújalos en tu cuaderno e indica la forma de determinarlos.
99. Un prisma recto de base un rectángulo, ¿tiene simetría central? ¿Tiene planos de simetría? ¿Cuántos? Descríbelos. ¿Tiene ejes de giro? Descríbelos. ¿De qué ángulos?
100. Una pirámide regular de base un triángulo equilátero, ¿tiene simetría central? ¿Tiene planos de simetría? ¿Cuántos? Descríbelos. ¿Tiene ejes de giro? Descríbelos. ¿De qué ángulos?
101. Piensa en los poliedros regulares. Copia la siguiente tabla en tu cuaderno y complétala:

POLIEDRO	¿Tiene centro de simetría? SI/NO	¿Tiene ejes de giro? SI/NO	¿Cuántos ejes de giro tiene? ¿De qué ángulos?	¿Tiene planos de simetría? SI/NO	¿Cuántos planos de simetría tiene?
Tetraedro					
Cubo					
Octaedro					
Dodecaedro					
Icosaedro					

102. Estudia las isometrías que dejan invariante a un triángulo equilátero. Nombra sus vértices y sus ejes de simetría. a) Aplica al triángulo un giro de 120° y luego una simetría. ¿Puedes obtener el mismo resultado con una única transformación? b) Repite lo mismo con un giro de 240° y otra simetría. c) Comprueba que siempre la composición de un giro por una simetría es otra simetría. d) Haz ahora un giro de 120° y otro de 240° , ¿qué obtienes? e) ¿Y con dos giros de 240° ? f) Comprueba que la composición de dos giros del mismo centro es siempre un giro (o la identidad).

103. Al pasear por la ciudad, mirar el aula, en todo lo que nos rodea podemos ver como la Geometría permite explicarlo. Mira este mosaico. Busca un motivo mínimo, es decir, un trozo de mosaico que te permite, mediante movimientos, recomponerlo. En el diseño de este mosaico, ¿se han utilizado simetrías?

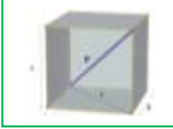


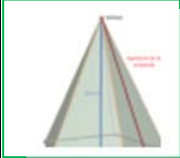




- ✚ ¿Hay simetrías de eje vertical?
- ✚ ¿Hay simetrías de eje horizontal?
- ✚ ¿Hay otros ejes de simetría? ¿Cuáles?
- ✚ ¿Hay giros de 90° ?
- ✚ ¿Hay giros de 45° ?
- ✚ ¿Hay traslaciones?



AUTOEVALUACIÓN

- Las longitudes de los lados del triángulo de vértices $A(2, 2)$, $B(1, 4)$ y $C(0, 3)$ son:
 - 2, 5, 5
 - $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$
 - $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$
 - $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$
- En el triángulo rectángulo de catetos 3 y 4 cm se multiplican por 10 todas sus longitudes. El área del nuevo triángulo es:
 - 6 m^2
 - 6 dm^2
 - 60 cm^2
 - 0.6 m^2
- La altura de un prisma de base cuadrada es 20 cm y el lado de la base es 5 cm, su área total es:
 - 450 cm^2
 - 45 dm^2
 - 425 cm^2
 - 0.45 m^2
- Un depósito de agua tiene forma de prisma hexagonal regular de 5 m de altura y lado de la base 1 m. El volumen de agua que hay en él es:
 - 60 $\sqrt{2}$ m^3
 - 45 $\sqrt{2}$ m^3
 - 30 000 $\sqrt{2}$ dm^3
 - 7.5 $\sqrt{3}$ m^3
- El tejado de una caseta tiene forma de pirámide cuadrangular regular de 0.5 m de altura y 1000 cm de lado de la base. Si se necesitan 15 tejas por metro cuadrado para recubrir el tejado, se utilizan un total de:
 - 1 508 tejas.
 - 150 tejas.
 - 245 tejas.
 - 105 tejas.
- Una caja de dimensiones 30, 20 y 15 cm, está llena de cubos de 1 cm de arista. Si se utilizan todos para construir un prisma recto de base cuadrada de 10 cm de lado, la altura medirá:
 - 55 cm
 - 65 cm
 - 75 cm
 - 90 cm
- El radio de una esfera que tiene el mismo volumen que un cono de 5 dm de radio de la base y 120 cm de altura es:
 - 5 $\sqrt{3}$ dm
 - $\sqrt[3]{75}$ dm
 - 150 cm
 - $\sqrt[3]{2\,250}$ cm
- Se distribuyen 42.39 litros de disolvente en latas cilíndricas de 15 cm de altura y 3 cm de radio de la base. El número de envases necesario es:
 - 100
 - 10
 - 42
 - 45
- La ecuación de una recta en el plano que pasa por los puntos $A(2, 5)$ y $B(1, 3)$ es:
 - $y = -2x + 1$
 - $3y - 2x = 1$
 - $y = 2x + 1$
 - $y = -2x + 9$.
- La ecuación de la esfera de centro $A(2, 3, 5)$ y radio 3 es:
 - $x^2 - 2x + y^2 - 3y + z^2 - 5z + 29 = 0$
 - $x^2 - 4x + 3y^2 - 6y + 5z^2 - 10z + 29 = 0$
 - $x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 - 10z + 38 = 0$
 - $x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 - 10z + 29 = 0$

RESUMEN

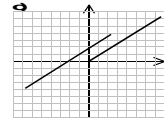
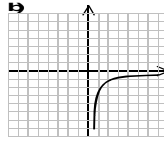
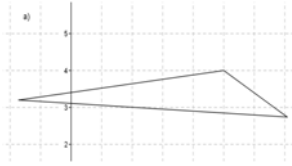
Teorema de Pitágoras en el espacio	$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$ 	$a = 2, b = 3, c = 4$, entonces $D^2 = 4 + 9 + 16 = 29$ $D = \sqrt{29} = 5.4$.
Teorema de Tales:	Dadas dos rectas, r y r' , que se cortan en el punto O , y dos rectas paralelas entre sí, a y b . Si la recta a corta a las rectas r y r' en los puntos A y C , y la recta b corta a las rectas r y r' en los puntos B y D , entonces los segmentos correspondientes son proporcionales	
Poliedros regulares	Un poliedro regular es un poliedro en el que todas sus caras son polígonos regulares iguales y en el que sus ángulos poliedros son iguales. Hay cinco poliedros regulares: tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo y dodecaedro	
Prismas	 $A_{Lateral} = Perímetro_{Base} \cdot Altura ;$ $A_{total} = Área_{Lateral} + 2Área_{Base} ;$ $Volumen = Área_{base} \cdot Altura$	
Pirámides	 $A_{Lateral} = \frac{Perímetro_{Base} \cdot Apotema_{pirámide}}{2}$ $A_{total} = Área_{Lateral} + Área_{Base}$ $Volumen = \frac{Área_{base} \cdot Altura}{3}$	
Cilindro	 $A_{Lateral} = 2 \pi R H ; A_{total} = 2 \pi R H + 2 \pi R^2$ $Volumen = Área_{base} \cdot Altura$	
Cono	$A_{Lateral} = \pi R G ; A_{total} = \pi R G + \pi R^2$ $Volumen = \frac{Área_{base} \cdot Altura}{3}$	
Esfera	$A_{total} = 4 \pi R^2 ; Volumen = \frac{4}{3} \pi R^3$	
<i>Ecuaciones de la recta en el plano</i>	Ecuación explícita: $y = mx + n$; Ecuación implícita: $ax + by + c = 0$; Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \end{cases}$	
<i>Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio.</i>	Ecuación implícita de un plano: $ax + by + cz + d = 0$ Ecuación paramétrica de una recta: $\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \\ z = a_3 + tv_3 \end{cases}$	

CAPÍTULO 10: FUNCIONES Y GRÁFICAS

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. FUNCIONES REALES

1. De las siguientes gráficas indica cuáles de ellas corresponden a funciones.



2. Un ciclista bebe $\frac{1}{2}$ litro de agua cada 10 km de recorrido. Si en el coche de equipo llevan un bidón de 40 litros, haz una tabla que indique su variación y escribe la función que la representa.
3. Un ciclista participa en una carrera recorriendo 3 km cada minuto. Teniendo en cuenta que no partió del origen sino 2 km por detrás representa en una tabla el recorrido durante los tres primeros minutos. Escribe la función que expresa los kilómetros en función del tiempo en minutos y dibújala.
4. Representa las siguientes funciones a trozos. Se indican los puntos que tienes que calcular.

$$a. f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{si } x < -3 \\ -x+1, & \text{si } -3 \leq x < 0 \\ 3, & \text{si } 0 \leq x < \infty \end{cases} \quad \text{Puntos: } -5, -3.1, -3, -1, -0.1, 0, 1.$$

$$b. g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{si } x < -2 \\ 3, & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ \sqrt{x}, & \text{si } 1 \leq x \end{cases} \quad \text{Puntos: } -3, -2.1, -2, 0, 0.9, 1, 4, 9.$$

5. Indica el dominio de las siguientes funciones:

$$a) y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} \quad b) y = \sqrt{x + \frac{1}{x+2}}$$

6. Indica el dominio y el recorrido de las siguientes funciones:

$$a) y = 14x + 2 \quad b) y = \frac{1}{x-1} \quad c) y = \sqrt{2+x}$$

7. Representa las siguientes funciones e indica su dominio y recorrido:

$$a) f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in [-3, 0) \\ 2, & \text{si } x \in [0, 2] \end{cases} \quad b) g(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x \in [-2, 1] \\ x, & \text{si } x \in (1, 2] \end{cases}$$

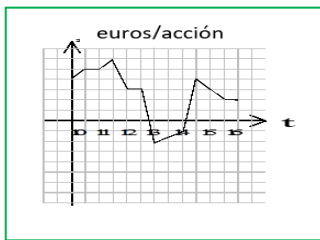
2. CARACTERÍSTICAS DE UNA FUNCIÓN

8. Indica el dominio y recorrido de las siguientes funciones y dibújlas:

$$a. y = \frac{1}{2x+6} \quad b. y = x + \frac{1}{3x-6} \quad c. y = x^3 - 3x$$

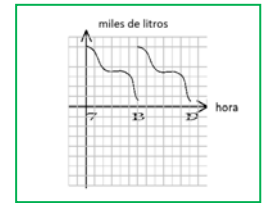
9. Dibuja las siguientes funciones e indica sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$$a) y = x^3 \quad b) y = x^5 \quad c) y = \frac{1}{x^2}$$



10. La gráfica que se da a continuación indica la evolución de un valor de la bolsa (en el eje vertical en miles de euros por acción) durante una jornada. Estudia su dominio, recorrido, puntos de corte, simetría, periodicidad, crecimiento, continuidad, máximos y mínimos.

11. Estudia la siguiente gráfica, indicando: dominio, recorrido, puntos de corte con los ejes, simetría, periodicidad, crecimiento, continuidad, máximos y mínimos.



12. La gráfica que se da a continuación representa el volumen de combustible en el depósito de una gasolinera al cabo de un día. Estudia su dominio, recorrido, puntos de corte, simetría, periodicidad, crecimiento, continuidad, máximos y mínimos.

13. Representa la función $y = 10 + \frac{1}{2}9.8x^2$ que poníamos como ejemplo e interpreta su sentido físico.

14. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = x^2 + 2$

b) $y = 2 - x^2$

c) $y = 2x^2$

d) $y = -2x^2$

15. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = \frac{1}{x} + 5$

b) $y = \frac{5}{x}$

c) $y = \frac{1}{x} - 2$

d) $y = \frac{2}{x} + 3$

16. Representa la función $f(x) = 4 - x^2$ y, a partir de ella, dibuja las gráficas de las funciones:

a) $y = f(x) - 3$

b) $y = f(x) + 3$

c) $y = f(x - 3)$

d) $y = f(x + 3)$

17. Utiliza GeoGebra para dibujar las siguientes funciones y comprueba tus anteriores representaciones:

a) $y = x^5$

b) $y = \frac{1}{x^2}$

c) $y = \frac{2}{x} + 3$

d) $y = 2 - x^2$

3. VALORES ASOCIADOS A LAS FUNCIONES

18. Dada la función $f(x) = (x - 1)^3$, calcula la tasa de variación media en el intervalo $[0, 1]$. ¿Es creciente o decreciente la función en dicho intervalo?

19. Dada la función $f(x) = \frac{3}{x}$, calcula la tasa de variación media en el intervalo $[-3, -1]$. ¿Es creciente o decreciente la función en dicho intervalo?

20. Calcula la TVM de esta función $f(x)$ en los siguientes intervalos: a) $[-1, 0]$ y b) $[1, 2]$.

21. Consideremos la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2}$. Halla la tasa de variación media en el intervalo $[0, 2]$ e indica si es creciente o decreciente en ese intervalo.

22. Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = 2x^2 - 3x$ en el intervalo $[1, 2]$ e indica si $f(x)$ crece o decrece en ese intervalo.

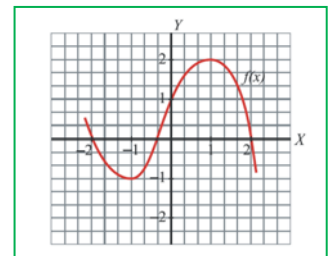
23. Dada la función $f(x) = (x + 1)^3$, calcula la tasa de crecimiento en el intervalo $[0, 1]$.

24. La función $f(x) = 1\,000 \cdot (1.03)^x$ representa el resultado de ingresar 1 000 € en el banco ($x = 0$ es el estado inicial y, naturalmente, vale 1 000 €). Calcula su tasa de crecimiento entre 0 y 1, entre 1 y 2 y entre 2 y 3. ¿Qué relación hay entre ellas? ¿Puedes dar una explicación de por qué?

25. La siguiente tabla representa la población mundial (estimada) en millones de personas. Calcula la tasa de crecimiento para cada intervalo de 5 años. ¿Qué observas?

Año	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
Población	3 692	4 068	4 435	4 831	5 264	5 674	6 071	6 456	6 916

26. ¿Podrías dar un ejemplo de una función cuya tasa de crecimiento sea constantemente 2?

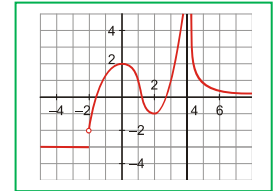


EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Pablo salió de su casa a las 8 de la mañana para ir al instituto. En el recreo, tuvo que volver a su casa para ir con su padre al médico. La siguiente gráfica refleja la situación:
- ¿A qué hora comienzan las clases y a qué hora empieza el recreo?
 - ¿A qué distancia de su casa está el instituto? ¿Qué velocidad lleva cuando va a clase?
 - ¿A qué distancia de su casa está el consultorio médico? ¿Qué velocidad llevan cuando se dirigen allí?
 - ¿Cuánto tiempo ha estado en clase? ¿Y en el consultorio médico?



2. Dada la función a través de la siguiente gráfica:
- Indica cuál es su dominio de definición.
 - ¿Es continua? Si no lo es, indica los puntos de discontinuidad.
 - ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento y cuáles los de decrecimiento de la función? ¿Qué ocurre en el intervalo $(-\infty, -2]$?



3. Dibuja las gráficas de estas hipérbolas y determina sus dominios, calcula sus asíntotas y los puntos de corte con los ejes de coordenadas:

a. $y = \frac{2x}{x-2}$

b. $y = \frac{2x-3}{x-2}$

c. $y = \frac{4x}{2x+1}$

4. Dibuja la gráfica de $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 4x & \text{si } 1 < x \end{cases}$ y explica si es continua en $x = 1$.

5. Tres kilos de peras nos han costado 4.5 €; y, por siete kilos, habríamos pagado 10.5 €. Encuentra la ecuación de la recta que nos da el precio total, "y", en función de los kilos que compremos, "x". Representala gráficamente.

6. Describe las siguientes funciones cuadráticas y haz un boceto de su gráfica:

a. $y = 4x^2 + 8x - 5$

b. $y = x^2 + 3x - 4$

c. $y = 8 - 2x - x^2$

7. Calcula los puntos de corte con los ejes y el vértice de las siguientes parábolas y utiliza estos datos para representarlas gráficamente

a. $y = x^2 + 5x + 6$

b. $y = -x^2 + 4x + 5$

8. La altura sobre el suelo de un proyectil lanzado desde lo alto de una muralla viene dada, en función del tiempo, por $h(t) = -5t^2 + 15t + 20$, donde t se expresa en segundos, y h , en metros. Dibuja la gráfica de esta función y calcula:

a. La altura de la muralla.

b. La altura máxima alcanzada por el proyectil y el tiempo que tarda en alcanzarla.

c. El tiempo que tarda en impactar contra el suelo.

9. La gráfica muestra el dibujo aproximado de la curva $y = x^2 - 2x - 8$. Calcula:

a. Las coordenadas de los puntos A y B.

b. La ecuación de una recta que pase por los puntos A y B.

10. Representa las siguientes funciones:

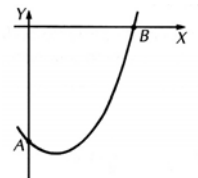
a. $y = 3/x$

b. $y = 4/x - 5$

c. $y = \sqrt{x+4}$

d. $y = \sqrt{x-2}$

e. $y = \begin{cases} x+3 & \text{si } x < -1 \\ 2 & \text{si } -1 \leq x < 4 \\ x^2 - 10 & \text{si } 4 \leq x \end{cases}$



11. El coste diario de fabricación, en euros, de x artículos se expresa con la igualdad $C = 40x + 250$, y el ingreso diario de su venta, mediante $V = -2x^2 + 100x$. ¿Qué cantidad de artículos se deben fabricar al día para que su venta reporte un beneficio máximo? Nota: el beneficio es la diferencia entre el ingreso y el coste.

12. La base y la altura de un triángulo suman 4 centímetros. ¿Qué longitud deben tener ambas para que el área del triángulo sea máxima?

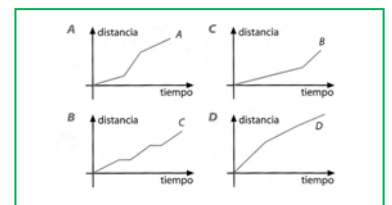
13. Asigna las gráficas al recorrido efectuado por los siguientes estudiantes en su camino diario al Instituto:

a. Emilio es el que vive más lejos del Instituto.

b. Ana debe recoger a dos amigas por el camino y siempre le toca esperar.

c. Felipe es el que menos tiempo tarda.

d. Isabel es dormilona; siempre le toca correr en el último tramo, aunque es la que vive más cerca del Instituto.



14. Un rectángulo tiene un perímetro de 14 cm. Suponiendo que la base del mismo tiene una longitud de x cm,
- Probar que el área del mismo A está dada por la función $A(x) = x(7 - x)$.
 - Dibuja la gráfica correspondiente a esta función, tomando para ello valores de x de 0 a 7. Utilizando la gráfica, calcula los siguientes apartados.
 - El área del rectángulo cuando $x = 2.25$ cm.
 - Las dimensiones del rectángulo cuando su área es 9 cm^2 .
 - El área máxima del rectángulo.
 - Las dimensiones del rectángulo correspondientes a esa área máxima.
15. La velocidad v en m/s de un misil t segundos después de su lanzamiento viene dada por la ecuación $v = 54t - 2t^3$. Utilizando la gráfica de esta función, calcula:
- La máxima velocidad que alcanza el misil.
 - El tiempo que necesita para acelerar hasta conseguir una velocidad de 52 m/s.
 - El intervalo (aproximado, resuelve gráficamente) de tiempo en el cual el misil vuela a más de 100 m/s.
16. El precio del viaje de fin de curso de un grupo de alumnos es de 200 euros por persona si van 30 alumnos o menos. En cambio, si viajan más de 30 y menos de 40, rebajan 10 euros por cada alumno que sobrepase el número de 30, y si viajan 40 o más, el precio por persona es de 100 euros. Halla la expresión y dibuja la gráfica de la función que hace corresponder al número de viajeros el precio del viaje.

17. Halla el dominio de las siguientes funciones:

a. $y = \frac{5x-3}{4x-1}$

c. $y = \sqrt{3x+6}$

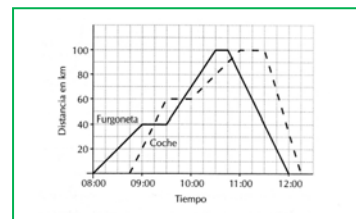
e. $y = \frac{4x^2 - 3x}{1 + 5x - 6x^2}$

b. $y = 2x^4 - 3x^2 + 1$

d. $y = 2 - \frac{3}{x^2 - 3x}$

f. $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x}$

18. La siguiente gráfica muestra los viajes hechos por una furgoneta y un coche saliendo desde Teruel hacia la población de Alcañiz, ida y vuelta.



- ¿Cuánto tiempo se detuvo la furgoneta durante el trayecto?
- ¿A qué hora adelantó el coche a la furgoneta?
- ¿Qué velocidad llevaba la furgoneta entre las 9:30 y las 10:00?
- ¿Cuál fue la mayor velocidad alcanzada por el coche durante el viaje?
- ¿Cuál fue la velocidad media del coche en el viaje completo?

19. Representa gráficamente la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{si } x < -2 \\ -\frac{1}{2}x^2 & \text{si } -2 \leq x \end{cases}$. Una vez representada estudia las zonas de crecimiento-decrecimiento, los extremos (máximos-mínimos) y su continuidad.

20. Representa gráficamente una función, f , que cumpla las siguientes condiciones:

- $\text{Dom}(f) = [-5, 6]$
- Crece en los intervalos $(-5, -3)$ y $(0, 6)$; decrece en el intervalo $(-3, 0)$.
- Es continua en su dominio.
- Corta al eje X en los puntos $(-5, 0)$, $(-1, 0)$ y $(4, 0)$.
- Tiene un mínimo en $(0, -2)$ y máximos en $(-3, 3)$ y $(6, 3)$.

21. Construye una gráfica que represente la audiencia de una determinada cadena de televisión durante un día, sabiendo que
- A las 0 horas había, aproximadamente, 0.5 millones de espectadores.
 - Este número se mantuvo prácticamente igual hasta las 6 de la mañana.
 - A las 7 de la mañana alcanzó la cifra de 1.5 millones de espectadores.
 - La audiencia descendió de nuevo hasta que, a las 13 horas, había 1 millón de espectadores.
 - Fue aumentando hasta las 21 horas, momento en el que alcanzó el máximo: 6.5 millones de espectadores.
 - A partir de ese momento, la audiencia fue descendiendo hasta las 0 horas, que vuelve a haber, aproximadamente, 0.5 millones de espectadores.

AUTOEVALUACIÓN

1. Indica cuál de las siguientes expresiones algebraicas es una función real:

a) $x^2 + y^2 = 1$ b) $y = -2x^5 + x^4 - x^3 + 5x - 1$ c) $y = 5 \cdot \sqrt{2} \cdot x \cdot y^2 \cdot z$ d) $y^2 = x + 1$
2. Estamos confeccionando una tabla de valores de la función $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$. Indica qué punto (o puntos) no debería estar:

a) (0, 1) b) (1/2, 2) c) (2, 1/5) d) (1, 0)
3. El dominio de la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ es:

a) La recta real b) $\{x \in \mathfrak{R} \mid x < 1\}$ c) $\{x \in \mathfrak{R} \mid x \geq 1\}$ d) $\{x \in \mathfrak{R} \mid x \geq 0\}$
4. Indica que tipo de discontinuidad o continuidad presenta la función $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x \in [-2, 1] \\ x, & \text{si } x \in (1, 2] \end{cases}$ en el punto $x = 1$:

a) Es continua b) Tiene una discontinuidad evitable c) Tiene un salto finito d) Tiene un salto infinito
5. Señala la función que tiene simetría par:

a) $y = x$ b) $y = x^2 + 3$ c) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ d) $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x \in [-2, 1] \\ x, & \text{si } x \in (1, 2] \end{cases}$
6. Señala la función que tiene como asíntota horizontal a la recta $y = 0$:

a) $y = x$ b) $y = x^2 + 3$ c) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ d) $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x \in [-2, 1] \\ x, & \text{si } x \in (1, 2] \end{cases}$
7. La tasa de variación de la función $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x \in [-2, 1] \\ x, & \text{si } x \in (1, 2] \end{cases}$ entre -1 y 2 es igual a:

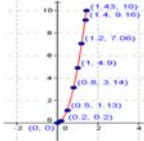

a) $TV[-1, 2] = 1$ b) $TV[-1, 2] = 2$ c) $TV[-1, 2] = 3$ d) $TV[-1, 2] = 0$
8. La tasa de variación media de la función $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x \in [-2, 1] \\ x, & \text{si } x \in (1, 2] \end{cases}$ entre -1 y 2 es igual a:

a) $TV[-1, 2] = 1/3$ b) $TV[-1, 2] = 2/3$ c) $TV[-1, 2] = 1$ d) $TV[-1, 2] = 3$
9. La tasa de crecimiento de la función $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x \in [-2, 1] \\ x, & \text{si } x \in (1, 2] \end{cases}$ entre -1 y 2 es igual a:

a) $T_{\text{crec}}[-1, 2] = 3$ b) $T_{\text{crec}}[-1, 2] = 2$ c) $T_{\text{crec}}[-1, 2] = 0$ d) $T_{\text{crec}}[-1, 2] = 1$
10. La función $y = x^2 + 3$ tiene un mínimo absoluto en el punto:

a) (1, 4) b) (0, 0) c) (0, 3) d) (3, 0)

RESUMEN

Función	Una relación o correspondencia entre dos magnitudes, tales que a cada valor de la variable independiente, x , le corresponde <i>un solo</i> valor de la dependiente, y .	$y = 2x + 3$, $y = \frac{1}{x^2 + 1}$								
Gráfica de una función	Son los (normalmente infinitos) puntos por los que pasa. Es decir, todos los valores $(x, f(x))$ puesto que $y = f(x)$.									
Maneras de describir una función.	<ul style="list-style-type: none"> - Dando una tabla de valores. Como en la columna de al lado - Dando una expresión. $y = 2^x$ - A trozos: Varias expresiones. $y = \begin{cases} x + 1, & x > 2 \\ x, & x \leq 2 \end{cases}$ 	<table border="1" data-bbox="1125 454 1500 622"> <thead> <tr> <th>X</th> <th>Y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>-3</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>-2</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>3</td> </tr> </tbody> </table>	X	Y	-3	2	-2	0	2	3
X	Y									
-3	2									
-2	0									
2	3									
Dominio y recorrido.	<ul style="list-style-type: none"> - Dominio. Son los valores de "x" donde la función tenga sentido. - Recorrido. Son los valores de "y" que se alcanzan. 	El dominio de la función $\sqrt{2-x}$ es $(-\infty, 2)$ y su recorrido $[0, +\infty)$								
Características de una función	Debemos estudiar su continuidad, crecimiento, máximos y mínimos, curvatura, simetrías y comportamiento en el infinito.	$y = x^2 + 2$ es continua, creciente en $(-\infty, 0)$, decreciente en $(0, \infty)$, tiene un mínimo absoluto en 0 y es siempre convexa								
Traslaciones	<ul style="list-style-type: none"> - Vertical. $y = f(x) + K$. En sentido de K: Si K es positivo hacia arriba, si no hacia abajo. - Horizontal. $y = f(x + K)$. En sentido contrario de K: Si K es positivo hacia la izquierda, si no hacia la derecha. 									
Valores asociados	Tasa de variación (TV): $f(b) - f(a)$ Tasa de variación media (TVM): $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ Tasa de crecimiento T_{crec} : $\frac{f(b) - f(a)}{f(a)}$	$y = x + 2$; $TV [3, 5] = 2$ $TVM [3, 5] = \frac{2}{5-3} = 1$. $T_{\text{crec}} [3, 5] = \frac{2}{5} = 40\%$								

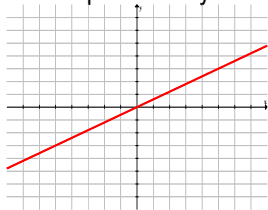
CAPÍTULO 11: FUNCIONES POLINÓMICAS, DEFINIDAS A TROZOS Y DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

ACTIVIDADES PROPUESTAS

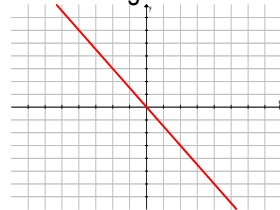
1. FUNCIONES POLINÓMICAS DE PRIMER GRADO

- El consumo medio de agua al día por habitante (en 2011) es de 142 litros. Representa gráficamente el consumo de una persona en una semana.
- El agua virtual es el agua necesaria para crear un producto. Representa gráficamente las siguientes relaciones:
 - 71 litros para producir una manzana.
 - 10 850 litros para producir unos vaqueros.
 - 4 000 litros para producir una camiseta.
- Halla el dominio, máximos y mínimos y la simetría de las siguientes rectas:
 - $y = 4 \cdot x$
 - $y = \frac{x}{3}$
 - $y = 2.65 \cdot x$

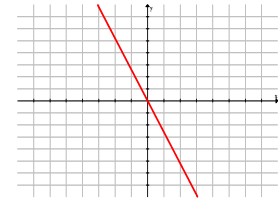
- Halla la pendiente y la expresión algebraica de las siguientes rectas:



a.



b.



c.

- Representa las siguientes funciones lineales:

a. $y = 3 \cdot x + 4$

b. $y = -\frac{3}{7} \cdot x - 2$

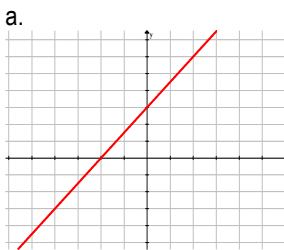
c. $2x + 4y = 5$

d. $y = 5$

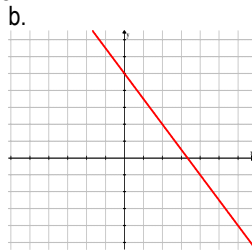
e. $y = 0$

f. $x = 3$

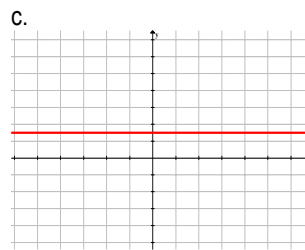
- Halla la expresión de las siguientes rectas:



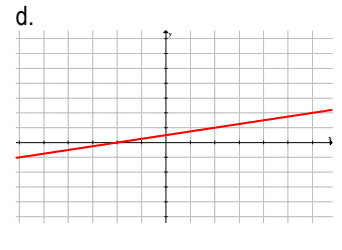
a.



b.



c.



d.

- Utiliza GeoGebra para comprobar tus anteriores representaciones:

a. $y = 3 \cdot x + 4$

b. $y = -\frac{3}{7} \cdot x - 2$

c. $2x + 4y = 5$

2. FUNCIONES POLINÓMICAS DE SEGUNDO GRADO

- A partir de la parábola $y = x^2$, dibuja la gráfica de las siguientes parábolas:

a. $y = \frac{5}{3}x^2$

b. $y = -3x^2$

c. $y = -\frac{15}{3}x^2$

d. $y = 4.12x^2$

e. $y = -\frac{6}{10}x^2$

f. $y = \frac{7}{8}x^2$

- Representa la gráfica de las siguientes parábolas y localiza el vértice:

a. $y = (x+4)^2 - 5$

b. $y = -(x - \frac{4}{5})^2 + 6$

c. $y = x^2 - 5$

d. $y = x^2 - 6x + 16$

e. $y = x^2 + 4x + \frac{5}{2}$

f. $y = -x^2 + 12x - 26$

g. $y = x^2 - 10x + 1$

h. $y = -x^2 + 2x - 4$

i. $y = -x^2 + \frac{4}{3}x - 1$

10. Halla los elementos característicos y representa las siguientes parábolas:

a. $y = 2x^2 + 4x - 6$

b. $y = 6x^2 - 24x$

c. $y = -2x^2 + 4x - 2$

d. $y = 2x^2 + 5x - 12$

e. $y = 3x^2 + 6x - 9$

f. $y = -2x^2 + 7x + 3$

g. $y = 7x^2 + 21x - 28$

h. $y = 5x^2 - 9x + 4$

i. $y = -4x^2 - 4x - 1$

11. Utiliza GeoGebra para comprobar tus anteriores representaciones:

d. $y = 2x^2 + 4x - 6$

e. $y = 6x^2 - 24x$

f. $y = -2x^2 + 4x - 2$

3. FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

12. Representa las siguientes funciones de proporcionalidad inversa en el mismo sistema de coordenadas:

a. $y = \frac{-1}{x}$

b. $y = \frac{5}{x}$

c. $y = \frac{1}{2x}$

d. $y = \frac{3}{8x}$

e. $y = \frac{-5}{3x}$

f. $y = \frac{-12}{5x}$

13. Describe lo que sucede cuando varía el valor de k . Ayúdate de las gráficas del ejercicio anterior.

14. Halla la expresión analítica y representa la gráfica de las hipérbolas que pasa por cada uno de estos puntos. Escribe los intervalos donde la función es creciente o decreciente.

a. $(4, 2)$

b. $(3, -1)$

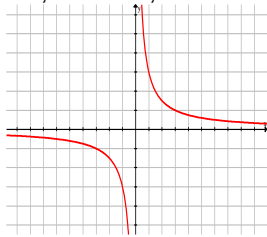
c. $(1/3, 5)$

d. $(12, 3)$

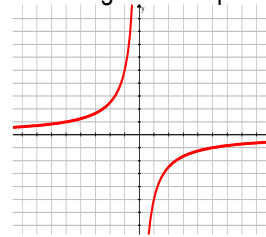
e. $(a, 1)$

f. $(1, b)$

15. Halla el dominio, recorrido, continuidad, máximos y mínimos y el crecimiento de las siguientes hipérbolas:



a)



b)

16. Halla el dominio, recorrido, continuidad, máximos y mínimos y el crecimiento de las siguientes hipérbolas:

a. $y = \frac{9}{2x}$

b. $y = \frac{-5}{3x}$

c. $y = \frac{-0.3}{x}$

d. $(-5, 2)$

e. $(4, -9)$

f. $(1, 1/2)$

17. Representa en los mismos ejes de coordenadas, las siguientes hipérbolas:

a. $y = \frac{5}{x}$

$y = \frac{5}{x} + 3$

$y = \frac{5}{x} - 3$

b. $y = \frac{-12}{x}$

$y = \frac{-12}{x-3}$

$y = \frac{-12}{x+3}$

c. $y = \frac{3}{x}$

$y = \frac{3}{x-1} + 5$

$y = \frac{5x-2}{x-1}$

18. Describe lo que sucede cuando varían los parámetros a y b en las hipérbolas del ejercicio anterior.

19. Representa las siguientes funciones de proporcionalidad inversa a partir de la hipérbola $y = \frac{5}{x}$:

a. $y = \frac{10}{x-5} + 3$

b. $y = \frac{1}{x+4} + 8$

c. $y = \frac{100}{x+10} + 1$

d. $y = \frac{10}{2x-4} - 7$

e. $y = 6 - \frac{4}{x}$

f. $y = \frac{20}{5-x} - 2$

20. Estudia el dominio, recorrido, continuidad, simetría, asíntotas y crecimiento de las funciones de proporcionalidad inversa del ejercicio anterior.

21. Escribe una regla para expresar cómo se trasladan las asíntotas según los parámetros a y b .

22. Representa las siguientes hipérbolas:

a. $y = \frac{2x-4}{x+5}$

b. $y = \frac{3-5x}{x+2}$

c. $y = \frac{4x-12}{x-3}$

d. $y = \frac{6x+8}{1-x}$

e. $y = \frac{7x+5}{x-4}$

f. $y = \frac{6x+10}{2x-1}$

23. Utiliza GeoGebra para comprobar tus anteriores representaciones:

a. $y = \frac{2x-4}{x+5}$

h. $y = \frac{3-5x}{x+2}$

i. $y = \frac{4x-12}{x-3}$

4. FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

24. Representa gráficamente la función $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x < 0 \\ x-1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

25. Representa gráficamente la función $f(x) = \begin{cases} x^2+2 & \text{si } x < 0 \\ 2x+2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

26. Representa gráficamente la función $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < 1 \\ x+3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

27. Utiliza GeoGebra para comprobar tus anteriores representaciones.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Función lineal

1. Representa gráficamente la siguiente relación de proporcionalidad dada en la siguiente tabla y escribe su ecuación. Describe qué tipo de relación es.

Magnitud A (a)	-5	-2	0	1	3
Magnitud B (b)	-15	-6	0	3	9

- Representa las rectas a) $y = 5x$, b) $y = -5x$, c) $y = (1/2)x$, d) $y = 2.3x$.
- Estudia el dominio, máximos y mínimos y simetrías de las funciones lineales a) $y = 1.5x$, b) $y = -0.5x$.
- Estudia la función $y = 0.7x$ en el intervalo $[-2, 5]$.
- Calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(1, 4)$ y $(0, 0)$ y determina su expresión algebraica.
- Representa las siguientes funciones lineales:
 - $y = 2x + 3$
 - $y = -x + 5$
 - $y = 3x - 2$
 - $y = -2x - 3$
- Calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(1, 4)$ y $(2, 1)$ y determina su expresión algebraica.
- Calcula la pendiente de las rectas que pasa por los puntos que se indican y determina su expresión algebraica.
 - $(5, 1), (3, -2)$
 - $(-3, 4), (4, -1)$
 - $(1, 4), (0, 6)$
 - $(-2, -4), (-1, 0)$
- Dos empresas de telefonía móvil lanzan sus ofertas: la empresa StarTel ofrece por cada llamada pagar 50 céntimos más 2 céntimos por minuto hablado; Tel-Hello ofrece 75 céntimos por llamada y minutos ilimitados. ¿Qué oferta es más económica? Para dar la respuesta, realiza los siguientes pasos, expresando los resultados analítica y gráficamente:
 - ¿Hay algún momento en que las dos ofertas sean iguales?
 - Si hablo una media de 15 minutos al día, ¿qué oferta me conviene?
 - Si hablo una media de 35 minutos al día, ¿qué oferta me conviene?
 - Si hago una media de 10 llamadas al día de 3 minutos de duración, ¿qué oferta me conviene?
 - Si hago una media de 2 llamadas al día de 30 minutos de duración, ¿qué oferta es la mejor?
 - ¿Qué oferta es más económica?
- El escritor Jaime Joyce tiene distintas ofertas editoriales para publicar su última novela. La editorial Dole le ofrece 100 €, además del 20 % de cada libro que venda; la editorial Letrarte le ofrece 350 €; y la editorial Paco le ofrece según la venta de libros: 50 € si vende hasta 250 libros, 100 € si vende hasta 500 libros, 300 € si vende hasta 1000 libros y 500 € si vende más de 1000 libros. Entre todas las editoriales, ¿cuál crees que es mejor oferta para Jaime?

Funciones cuadráticas

11. A partir de la parábola $y = x^2$, dibuja la gráfica de las siguientes parábolas:
 a) $y = x^2 + 3$ b) $y = -x^2 + 5$ c) $y = (x - 2)^2$ d) $y = (-x - 3)^2$.
12. A partir de la parábola $y = x^2$, dibuja la gráfica de las siguientes parábolas:
 a) $y = 2.5x^2$ b) $y = -1.2x^2$ c) $y = (1/2)x^2$ d) $y = -0.7x^2$.
13. Representa la gráfica de las funciones parabólicas siguientes e indica el vértice:
 a) $y = x^2 + 3x + 2$ b) $y = -x^2 + 5x - 4$ c) $y = (x - 2)^2 + 4$ d) $y = -x^2 + x - 3$.
14. Determina los elementos de las parábolas siguientes
 a) $y = 3x^2 + 2x + 5$ b) $y = -2x^2 + 4x - 1$ c) $y = 4(x - 2)^2 + 9$ d) $y = -5x^2 + 2x - 6$.

Funciones de proporcionalidad inversa

15. Halla la expresión analítica y representa la gráfica de las hipérbolas $y = k/x$ que pasan por los puntos que se indican. Escribe los intervalos donde la función es creciente o decreciente.
 a) (5, 1), b) (4, -1) c) (1, 4) d) (-2, -4).
16. Representa las siguientes funciones de proporcionalidad inversa:
 a) $y = 2/x$ b) $y = -1/x$ c) $y = 3/x$ d) $y = -2/x$.
17. Determina el dominio, recorrido, continuidad, máximos y mínimos y el crecimiento de las siguientes hipérbolas:
 a) $y = 2.3/x$ b) $y = -1.7/x$ c) $y = 3.2/x$ d) $y = -2.1/x$.
18. Representa las siguientes hipérbolas:
 a) $y = 2/x + 3$ b) $y = -1/x + 5$ c) $y = 3/x - 2$ d) $y = -2/x - 3$.
19. Representa las siguientes hipérbolas:
 a) $y = 2/(x + 3)$ b) $y = -1/(x + 5)$ c) $y = 3/(x - 2)$ d) $y = -2/(x - 3)$.
20. Representa las siguientes hipérbolas:
 a) $y = \frac{2x - 3}{x + 4}$ b) $y = \frac{-x - 3}{2x + 1}$ c) $y = \frac{2x - 3}{3x - 2}$ d) $y = \frac{x + 2}{-x - 3}$.

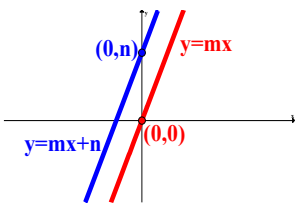
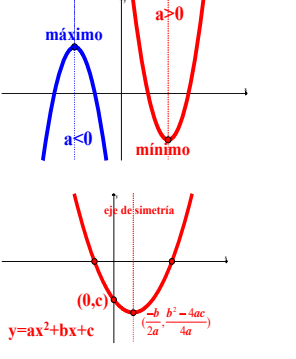
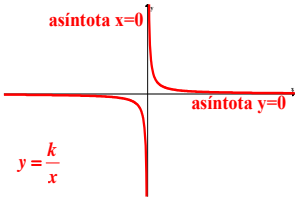
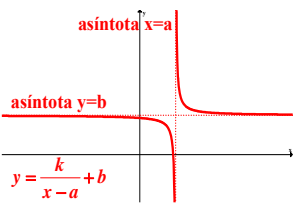
Funciones definidas a trozos

21. Representa gráficamente la función $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < -1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$.
22. Determina los puntos de intersección con los ejes coordenados de la función $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 2 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$.
23. Indica los intervalos donde la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ es creciente.
24. Representa gráficamente la función $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x < 1 \\ 1/x & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

AUTOEVALUACIÓN

1. La recta $y = 4x + 2$ tiene de pendiente m y ordenada en el origen b :
 a) $m = 4, b = 0$ b) $m = 1/2, b = 6$ c) $m = 2, b = 4$ d) $m = 4, b = 2$
2. La recta que pasa por los puntos $(1, 6)$ y $(-2, 4)$ tiene de pendiente m y ordenada en el origen b :
 a) $m = 2, b = 4$ b) $m = 3/2, b = 6$ c) $m = 2/3, b = 16/3$ d) $m = 6, b = 2/3$
3. Indica cuál de las siguientes funciones lineales es simétrica respecto del origen de coordenadas:
 a) $y = (-10/17)x$ b) $y = 3x + 1$ c) $y = 4x + 2$ d) $y = -x + 3$
4. Indica cuál de las siguientes funciones cuadráticas es simétrica respecto del eje de ordenadas:
 a) $y = (-10/17)x^2 + 3x$ b) $y = 3x^2 + 2x + 1$ c) $y = 4x^2$ d) $y = -x^2 + 3x + 2$
5. Indica el vértice de la función cuadrática $y = 3x^2 + 1$:
 a) $(0, 1)$ b) $(1, 2)$ c) $(0, 2)$ d) $(0, 3)$
6. Señala cuál de las siguientes funciones cuadráticas es *más estrecha* que $y = x^2$:
 a) $y = (-10/17)x^2 + 3x$ b) $y = 3x^2 + 2x + 1$ c) $y = (-1/2)x^2 + 3x + 2$ d) $y = -x^2 + 3$
7. Indica cuál de las siguientes hipérbolas es simétrica respecto del origen de coordenadas:
 a) $y = -15/(21x)$ b) $y = 3/x + 1$ c) $y = 4/x + 2$ d) $y = -1/x + 3$
8. Señala cuál de las siguientes hipérbolas tiene como asíntotas a las rectas $x = 2$ e $y = 3$:
 a) $y = -15/(x - 3) - 2$ b) $y = 3/(x - 2) + 3$ c) $y = 4/(x + 2) - 3$ d) $y = -12/(x + 3) + 2$
9. Si traslado la hipérbola $y = 3/x$ mediante el vector de traslación $(1, 3)$ obtengo la hipérbola:
 a) $y = 3/(x - 1) + 3$ b) $y = 3/(x - 3) + 1$ c) $y = 3/(x + 3) - 1$ d) $y = -3/(x + 1) - 3$
10. Señala cuál de las siguientes funciones cuadráticas alcanza un mínimo absoluto:
 a) $y = (-10/17)x^2 + 3x$ b) $y = 3x^2 + 2x + 1$ c) $y = (-1/2)x^2 + 3x + 2$ d) $y = -x^2 + 3$

RESUMEN

<p>Función polinómica de primer grado: Rectas</p> $y = m \cdot x$ $y = m \cdot x + n$	<p>Su expresión son polinomios de grado uno. Se representan mediante rectas: Hay dos tipos:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Funciones lineales o de proporcionalidad directa: $y = m \cdot x$, pasan por el origen de coordenadas. - Funciones afines: $y = m \cdot x + n$, son traslaciones en el eje y, n unidades. Pasan por el punto $(0, n)$. 	
<p>Función polinómica de segundo grado: Parábolas</p> $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$	<p>Su expresión son polinomios de grado dos. Se representan mediante parábolas: Vértice: $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ Puntos de corte con el eje OX: $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$. Punto de corte con el eje OY: $x=0$, es el punto $(0, c)$. Eje de simetría: es la recta $x = \frac{-b}{2a}$.</p>	
<p>Función de proporcionalidad inversa: Hipérbolas</p> $y = \frac{k}{x}$	<ul style="list-style-type: none"> • k: aleja o acerca la curva al origen de coordenadas. • Dominio y recorrido: son todos los números reales menos el 0. • Continuidad: continua en todo su dominio, discontinua en $x=0$. • Simetría: impar, simétricas respecto al origen de coordenadas. • Asíntotas: las rectas $x=0$ e $y=0$. • Crecimiento: <ul style="list-style-type: none"> - Si $k > 0$: decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$. - Si $k < 0$: creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$. 	
<p>Hipérbolas</p> $y = \frac{k}{x-a} + b$	<p>Son el resultado de trasladar la hipérbola $y = \frac{k}{x}$ por el vector de traslación (a, b):</p> <ul style="list-style-type: none"> - Dominio: $\mathbb{R} - \{a\}$ Recorrido: $\mathbb{R} - \{b\}$ - Puntos: $(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$ - Asíntotas: $\{x = 0 \rightarrow x = a\}$; $\{y = 0 \rightarrow y = b\}$ 	

CAPÍTULO 12: FUNCIONES EXPONENCIALES, LOGARÍTMICAS Y TRIGONOMÉTRICAS

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. FUNCIONES EXPONENCIALES

- Prueba ahora a realizar en tu cuaderno una tabla de valores y la gráfica para un caso similar, suponiendo que el número de bacterias se multiplica cada hora por 3 en lugar de por 1.4.
Observarás que los valores de “y” aumentan mucho más deprisa y enseguida *se salen del papel*. Mientras que los valores de “x” aumentan de 1 en 1 los valores de y se van multiplicando por 3. Esto se llama crecimiento exponencial. Si en lugar de multiplicar se trata de dividir tenemos el caso de decrecimiento exponencial.
- En tu cuaderno, representa conjuntamente las gráficas de $y = x^2$ (función potencial) e $y = 2^x$ (función exponencial), con valores de “x” entre 0 y 6. Observa la diferencia cuantitativa entre el crecimiento potencial y el crecimiento exponencial.
- Utilizando la calculadora, en tu cuaderno haz una tabla de valores y representa en tu cuaderno las funciones $y = e^x$, $y = e^{-x}$.
- Una persona ha ingresado una cantidad de 5 000 euros a interés del 3 % en un banco, de modo que cada año su capital se multiplica por 1.03.
 - Escribe en tu cuaderno una tabla de valores con el dinero que tendrá esta persona al cabo de 1, 2, 3, 4, 5 y 10 años.
 - Indica la fórmula de la función que expresa el capital en función del número de años.
 - Representa en tu cuaderno gráficamente dicha función. Piensa bien qué unidades deberás utilizar en los ejes.
- Un determinado antibiótico hace que la cantidad de ciertas bacterias se multiplique por $\frac{2}{3}$ cada hora. Si la cantidad a las 7 de la mañana es de 50 millones de bacterias, (a) haz una tabla calculando el número de bacterias que hay cada hora, desde las 2 de la mañana a las 12 de mediodía (observa que tienes que calcular también “hacia atrás”), y (b) representa gráficamente estos datos.
- Representa en tu cuaderno las siguientes funciones y explica la relación entre sus gráficas:
 - $y = 2^x$
 - $y = 2^{x+1}$
 - $y = 2^{x-1}$.
- Conociendo la gráfica de la función $f(x) = 2^x$, que se ha visto más arriba, y sin calcular tabla de valores, dibuja en tu cuaderno las gráficas de las funciones $g(x) = 2^x - 3$ y $h(x) = 2^{x-3}$.

2. FUNCIONES LOGARÍTMICAS

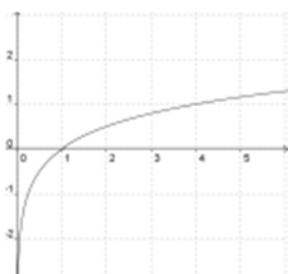
- Calcula los siguientes logaritmos utilizando la definición (sin calculadora):
 - $\log_3 81$
 - $\log_2 256$
 - $\log 10\,000$
 - $\log_5 125$
 - $\log_2 0.25$
 - $\log 0.001$
- Calcula los siguientes logaritmos utilizando la definición e igualando exponentes (sin calculadora):
 - $\log_4 2$
 - $\log_9 27$
 - $\log_{81} 27$
 - $\log_2 0.125$
 - $\log_3 1/9$
 - $\log_2 \frac{3}{12}$
 - $\log_{16} 2$
 - $\log_{64} 32$
 - $\log_4 \sqrt{2}$
 - $\log_3 \sqrt{27}$
 - $\log \sqrt[3]{100}$
- Halla el valor de x en las siguientes igualdades:
 - $\log_3 x = \frac{2}{3}$
 - $\log_x 81 = 4$
 - $\log_{\frac{1}{3}} 27 = x$
 - $\log_x 0.5 = -1$
 - $\log x = -4$.
- Calcula los siguientes logaritmos con la calculadora utilizando la fórmula del cambio de base, y compara los resultados con los obtenidos en la actividad:
 - $\log_4 2$
 - $\log_9 27$
 - $\log_{81} 27$
 - $\log_{16} 2$
 - $\log_2 0.125$
 - $\log_3 1/9$.

12. Sabiendo que $\log 2 = 0.301$ y que $\log 3 = 0.477$ calcula: a) $\log 5$ b) $\log 25$ c) $\log 24$ d) $\log 60$
13. Sabiendo que $\log 8 = 0.903$, y sin utilizar calculadora, halla los siguientes:
 a) $\log 80$ b) $\log 2$ c) $\log 64$ d) $\log 0.8$ e) $\log 1.25$ f) $\log \sqrt[3]{800}$
14. Toma logaritmos y desarrolla: a) $A = \frac{2x^3y^2}{3z}$ b) $B = \frac{\sqrt{x^3y^2}}{10z}$
15. Reduce a un único logaritmo cada expresión: a) $\log 2 - \log 12 + 1 + \log 3$ b) $2 \log 5 + \frac{1}{2} \log 5 - 2$ c) $2 \log 2a - \log a$
16. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:
 a) $\log(x+1)^2 = 6$ b) $\log x + \log 5 = \log 20$ c) $\log(7-3x) - \log(1-x) = \log 5$
17. Cuando nació un niño sus padres colocaron 1 000 euros en una libreta de ahorro al 2.5 % de interés compuesto anual. ¿Cuánto dinero tendrá la cuenta cuando el niño cumpla 15 años?
18. La población de ciertas bacterias se multiplica por 1.5 cada día. Si al comienzo hay 18 millones de bacterias, ¿cuántas habrá al cabo de una semana?
19. ¿A qué tanto por ciento de interés compuesto hay que invertir un capital de 20 000 euros para ganar 1 000 euros en tres años?
20. Si invertimos 7 000 euros al 1.35 % de interés compuesto anual, ¿cuántos años deben transcurrir para haber ganado al menos 790 euros?
21. Calcula en cuántos años se duplica una población que crece al ritmo del 10 % anual.
22. Si una población de 8 millones de habitantes se ha convertido en 15 millones en 7 años, ¿cuánto ha crecido cada año? (Ojo: ¡no se trata de dividir entre 7!).
23. Representa en tu cuaderno, mediante tablas de valores, las gráficas de las siguientes funciones:
 a) $f(x) = \log_2 x$ b) $f(x) = \log_{1/2} x$ c) $f(x) = \log_{1.5} x$

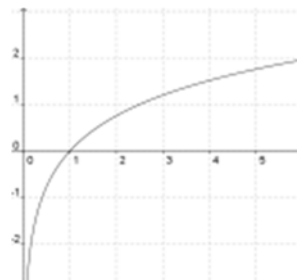
Comprueba que en todos los casos pasan por los puntos $(1, 0)$, $(b, 1)$ y $(1/b, -1)$.

24. Identifica las fórmulas de las siguientes funciones a partir de sus gráficas, sabiendo que son funciones logarítmicas:

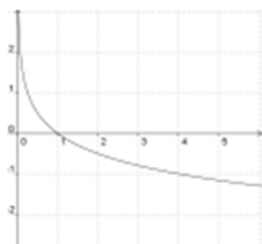
a)



b)



c)



d)



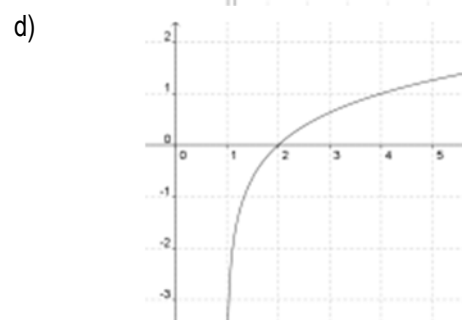
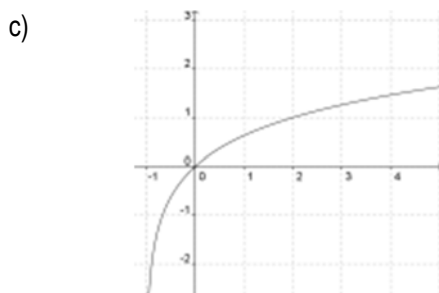
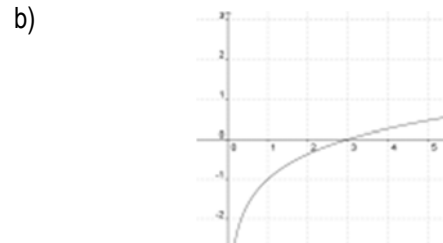
25. Repite en tu cuaderno el dibujo de la función $f(x) = \log_2 x$ representada en el ejercicio 23. Después piensa qué desplazamiento sufren respecto a ella las funciones siguientes y represéntalas en la misma gráfica sin hacer tablas de valores:

a) $g(x) = \log_2 x + 3$ b) $h(x) = \log_2 x - 3$ c) $i(x) = \log_2(x + 3)$ d) $j(x) = \log_2(x - 3)$

26. Haz el mismo proceso del ejercicio anterior con las funciones siguientes:

a) $g(x) = \log_2 x + 2$ b) $h(x) = \log_2 x - 2$ c) $i(x) = \log_2(x + 2)$ d) $j(x) = \log_2(x - 2)$

27. Identifica las fórmulas de las siguientes funciones a partir de sus gráficas, sabiendo que son funciones logarítmicas:



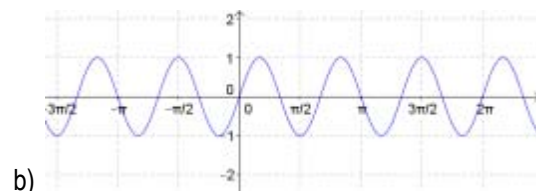
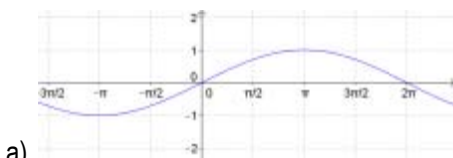
28. Representa en tu cuaderno la función $y = 3^x$ usando una tabla de valores. A continuación, a partir de ella y sin calcular valores, representa las funciones siguientes: $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = \log_3 x$, $y = \log_{1/3} x$.

3. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

29. Representa en tu cuaderno las gráficas de las funciones $y = \cos x$, $y = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ e $y = \frac{1}{2}\cos x$ comparándolas después con la gráfica de $y = \cos x$.

30. Partiendo de la gráfica de la función $y = \sin x$, representa en tu cuaderno, sin hacer tablas de valores, las gráficas de $y = 1 + \sin x$ y de $y = \sin(x + \pi/6)$.

31. Identifica las gráficas de las siguientes funciones trigonométricas:



Recuerda que:

Un radian se define como la medida del ángulo central cuyo arco de circunferencia tiene una longitud igual al radio. Por tanto:
 360° equivalen a 2π radianes
 De donde se deduce que:
 180° equivalen a π radianes
 90° equivalen a $\pi/2$ radianes ...

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Función exponencial

- Representa mediante una tabla de valores las siguientes funciones:
 a) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ b) $y = \left(\frac{4}{3}\right)^x$ c) $y = 2^{x/2}$ d) $y = 3^{-2x}$
- Representa mediante una tabla de valores la función $y = 3^x$ y a continuación, sin tabla de valores, representa estas otras sobre el mismo dibujo:
 a) $y = 3^x - 1$ b) $y = 3^x + 1$ c) $y = 3^{x+1}$ d) $y = 3^{x-1}$
- Encuentra una función exponencial $f(x) = b^x$ sabiendo que $f(2) = 9$.
- Encuentra una función $f(x) = k \cdot b^x$ sabiendo que $f(4) = 48$ y que $f(0) = 3$.
- Si un capital de 3 500 euros se multiplica cada año por 1.02 representa en un gráfico la evolución de ese capital en los 10 primeros años. Escoge unas proporciones adecuadas para los ejes.
- Cierto tipo de células se reproduce por bipartición, comprobándose que el número de ellas se duplica cada día. Si en un día determinado el número de células era de 4 millones:
 a) Expresa mediante una función el número de células en función del número de días.
 b) Halla el número de células que habrá dentro de 3 días y el que había hace 3 días.
 c) ¿En qué día piensas que el número de células era de 31 250?
- La descomposición de cierto isótopo radiactivo viene dada por la fórmula $y = y_0 \cdot 2.7^{-0.25t}$, donde y_0 representa la cantidad inicial y t el número de milenios transcurrido. Si la cantidad actual es de 50 gramos, ¿cuál será la cantidad que quede al cabo de 8 000 años? ¿Cuál era la cantidad que había hace 5 000 años?

Función logarítmica

- Calcula los siguientes logaritmos utilizando la definición y sin utilizar la calculadora:
 a) $\log_5 625$ b) $\log_2 128$ c) $\log 1000$ d) $\log_3 \frac{1}{27}$ e) $\log_5 0.2$ f) $\log 0.1$
- Calcula los siguientes logaritmos utilizando la definición e igualando exponentes, sin calculadora:
 a) $\log_9 3$ b) $\log_4 32$ c) $\log_2 0.125$ d) $\log_9 27$ e) $\log_2 \sqrt{8}$ f) $\log_8 2$
 g) $\log_3 0.333\dots$ h) $\log_8 \sqrt{2}$ i) $\log_3 \sqrt[4]{27}$ j) $\log \sqrt{1000}$
- Calcula los siguientes logaritmos con la calculadora utilizando la fórmula del cambio de base:
 a) $\log_5 7$ b) $\log_9 12$ c) $\log_{20} 0.1$ d) $\log_{13} \sqrt{8}$ e) $\log_{16} \sqrt{1000}$
- Utilizando los valores $\log 2 = 0.301$ y que $\log 3 = 0.477$ calcula, aplicando las propiedades de los logaritmos y sin calculadora:
 a) $\log 27$ b) $\log 12$ c) $\log 20$ d) $\log 50$ e) $\log \sqrt{6}$ f) $\log \sqrt[3]{25}$
- Llamando $\log 9 = x$ expresa en función de x los siguientes logaritmos:
 a) $\log 81$ b) $\log 900$ c) $\log 0, \hat{1}$ d) $\log 0.9$ e) $\log \sqrt[3]{900}$
- Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:
 a) $2 \log x = \log(10 - 3x)$ b) $\log 2 + \log(11 - x^2) = 2 \log(5 - x)$
 c) $\log(x^2 + 3x + 2) - \log(x^2 - 1) = \log 2$ d) $\log x + \log(x + 15) = 2$
- ¿Qué relación hay entre el logaritmo de un número x y el de su inverso $1/x$?
- Si se multiplica por 36 el número x , su logaritmo en cierta base aumenta en dos unidades. ¿Cuál es dicha base?
- La *escala Richter*, usada para medir la intensidad de los terremotos, es una escala logarítmica: un terremoto de magnitud 5 es 100 veces más intenso que uno de magnitud 3, porque $5 = \log 100\,000$ y $3 = \log 1\,000$. Teniendo esto en cuenta, si el famoso terremoto de San Francisco (en 1906) tuvo una magnitud de 8.2 y el de Haití (en 2010) fue de 7.2, ¿cuántas veces más fuerte fue uno que otro?

Funciones trigonométricas

17. Determina todos los ángulos que verifican que $\text{sen } x = 1/2$.
18. Determina todos los ángulos que verifican que $\text{sen } x = -1/2$.
19. Determina todos los ángulos que verifican que $\text{cos } x = 1/2$.
20. Determina todos los ángulos que verifican que $\text{cos } x = -1/2$.
21. Determina todos los ángulos que verifican que $\text{tg } x = -1$.
22. Calcula $\text{sen } x$ y $\text{cos } x$ si $\text{tg } x = -3$.
23. Calcula $\text{sen } x$ y $\text{tg } x$ si $\text{cos } x = 0.4$.
24. Calcula $\text{tg } x$ y $\text{cos } x$ si $\text{sen } x = -0.3$.
25. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos siguientes: a) $17\pi/3$, b) $-20\pi/3$, c) $13\pi/2$, d) $-9\pi/2$.
26. Dibuja en tu cuaderno sobre unos mismos ejes las gráficas de las funciones seno, coseno y tangente e indica lo siguiente: a) Si el seno vale cero, ¿cuánto vale el coseno, y la tangente? b) Si el coseno vale cero, ¿cuánto vale el seno y la tangente? c) Si la tangente vale cero, ¿cuánto vale el seno y el coseno? d) Cuando la tangente tiende a infinito, ¿cuánto vale el coseno?

27. Dibuja la gráfica de la función $y = \text{sen}(2x)$, completando previamente la tabla siguiente en tu cuaderno:

x					
$2x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\text{sen}(2x)$					
y					

a) La amplitud es la ordenada del máximo. ¿Cuál es la amplitud de esta función? b) ¿Cuál es su periodo? c) La frecuencia es la inversa del periodo, ¿cuál es su frecuencia?

28. Dibuja la gráfica de la función $y = 3\text{sen}(\pi x)$, completando previamente la tabla siguiente en tu cuaderno:

x					
πx	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\text{sen}(\pi x)$					
y					

a) ¿Cuál es la amplitud de esta función? b) ¿Cuál es su periodo? c) ¿Cuál es su frecuencia?

29. Dibuja la gráfica de la función $y = 2\text{sen}((\pi/3)x) + \pi/2$, completando previamente la tabla siguiente en tu cuaderno:

x					
$(\pi/3)x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\text{sen}((\pi/3)x)$					
y					

a) ¿Cuál es la amplitud de esta función? b) ¿Cuál es su periodo? c) ¿Cuál es su frecuencia?

30. Dibuja la gráfica de la función $y = 3\text{sen}(\pi x + 2)$, completando previamente la tabla siguiente en tu cuaderno:

x					
$\pi x + 2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\text{sen}(\pi x + 2)$					
y					

a) ¿Cuál es la amplitud de esta función? b) ¿Cuál es su periodo? c) ¿Cuál es su frecuencia?

31. Dibuja la gráfica de la función $y = \text{cos}(2x)$, completando previamente la tabla siguiente en tu cuaderno:

x					
$2x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\text{cos}(2x)$					
y					

a) ¿Cuál es la amplitud de esta función? b) ¿Cuál es su periodo? c) ¿Cuál es su frecuencia?

32. Dibuja la gráfica de la función $y = 3\cos(\pi x)$, completando previamente la tabla siguiente en tu cuaderno:

x					
πx	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\cos(\pi x)$					
y					

a) ¿Cuál es la amplitud de esta función? b) ¿Cuál es su periodo? c) ¿Cuál es su frecuencia?

33. Dibuja la gráfica de la función $y = 2\cos(\pi x + 2)$, completando previamente la tabla siguiente en tu cuaderno:

x					
$\pi x + 2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\cos(\pi x + 2)$					
y					

a) ¿Cuál es la amplitud de esta función? b) ¿Cuál es su periodo? c) ¿Cuál es su frecuencia?

34. Dibuja la gráfica de la función $y = \operatorname{tg}(2x)$, completando previamente la tabla siguiente en tu cuaderno. :

x					
$2x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\operatorname{tg}(2x)$					
y					

¿Cuál es su periodo?

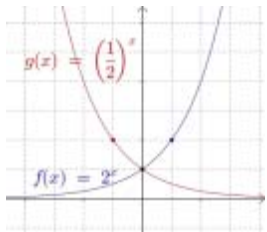
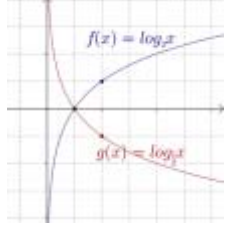
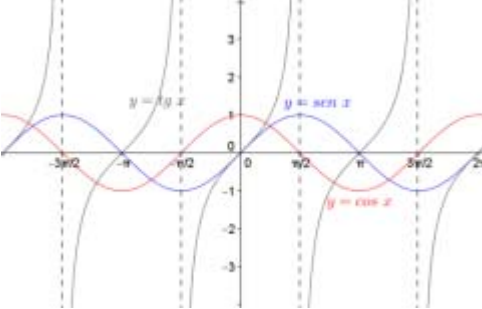
Problemas

35. Por efecto de un antibiótico el número de bacterias de una colonia se reduce en un 7 % cada hora. Si en el momento de administrarse el antibiótico había 40 millones de bacterias, ¿cuántas habrá al cabo de 10 horas?
36. Una persona ingiere a las 8 de la mañana una dosis de 10 mg de medicamento. Dicho medicamento se va eliminando a través de la orina, y la cantidad que queda en el cuerpo al cabo de t horas viene dada por la fórmula $M(t) = 10 \cdot 0.8^t$. Para que el medicamento haga efecto tiene que haber al menos una cantidad de 2 mg en el cuerpo. ¿Cuánto tiempo seguirá haciendo efecto después de su ingestión?
37. La medida de la presión atmosférica P (en milibares) a una altitud de x kilómetros sobre el nivel del mar está dada por la ecuación $P(x) = 1035 \cdot e^{-0.12x}$.
- a) Si la presión en la cima de una montaña es de 449 milibares, ¿cuál es la altura de la montaña?
- b) ¿Cuál será la presión en la cima del Everest (altitud 8 848 metros)?
38. ¿A qué tanto por ciento hay que invertir un capital para duplicarlo en 10 años?
39. ¿Cuántos años debe estar invertido un capital para que al 5 % de interés se convierta en 1.25 veces el capital inicial?
40. ¿Conoces esas muñecas rusas que llevan dentro otra muñeca igual pero de menor tamaño, y así sucesivamente? Supongamos que cada muñeca tiene dentro otra que ocupa $2/3$ de su volumen. Si la muñeca mayor tiene un volumen de 405 cm^3 y la más pequeña es de 80 cm^3 , ¿cuántas muñecas hay en total en la serie? ¿Podrías dar una fórmula general para este cálculo?
41. Indica, sin dibujar la gráfica, el periodo, la amplitud y la frecuencia de las funciones siguientes:
- a) $y = 2 \operatorname{sen}(x/2)$, b) $y = 0.4 \cos(\pi x/2)$, c) $y = 5 \operatorname{sen}(\pi x/3)$, d) $y = 3 \cos(\pi x)$.

AUTOEVALUACIÓN

1. El valor de x que verifica la ecuación exponencial $\frac{4^{x+3}}{2^{x-1}} = 64$ es: a) 1 b) 2 c) 3 d) -1
2. La función exponencial $y = e^x$ tiende a $***$ cuando x tiende a $-\infty$ y a $***$ cuando x tiende a $+\infty$. Indica con qué valores habría que rellenar los asteriscos: a) 0, $+\infty$ b) $+\infty$, 0 c) 0, $-\infty$ d) $-\infty$, 0
3. Indica cuál es la función exponencial $f(x) = b^x$ que verifica que $f(3) = 27$: a) $f(x) = 2^x$ b) $f(x) = 3^x$ c) $f(x) = 27^x$ d) $f(x) = 5^x$
4. El valor de x que verifica $x = \log_2 1024$ es: a) 0 b) 5 c) 10 d) Otro valor
5. La ecuación logarítmica $\log x + \log 6 = \log 30$ tiene como solución: a) 2 b) 3 c) 4 d) 5
6. Indica la afirmación verdadera:
 - a) La función exponencial de base mayor que 1 es decreciente
 - b) La función logarítmica de base mayor que 1 es decreciente
 - c) La función exponencial siempre es creciente
 - d) La función exponencial de base mayor que 1 es creciente
7. La expresión general de todos los ángulos cuya tangente vale 1, donde k es un número entero, es:
 - a) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
 - b) $\frac{\pi}{4} + k\pi$
 - c) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$
 - d) $\frac{\pi}{2} + k\pi$
8. La función $f(x) = 3 \operatorname{sen}(4x)$ tiene de amplitud, periodo y frecuencia, respectivamente:
 - a) 3, $\pi/2$, $2/\pi$
 - b) 4, $\pi/3$, $3/\pi$
 - c) 4, $3/\pi$, $\pi/3$
 - d) 3, $2/\pi$, $\pi/2$
9. El seno, el coseno y la tangente de $-7\pi/4$ valen respectivamente:
 - a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1
 - b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\sqrt{3}$
 - c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\sqrt{3}$
 - d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1
10. El seno, el coseno y la tangente de $13\pi/6$ valen respectivamente:
 - a) $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$
 - b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\sqrt{3}$
 - c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\sqrt{3}$
 - d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1

RESUMEN

<p>Función exponencial</p> $y = b^x$	<p>Dominio: Todos los números reales. Recorrido: Todos los números reales positivos. Continua en todo el dominio Asíntota horizontal: $y = 0$ $b > 1, \Leftrightarrow$ Creciente en todo el dominio. $0 < b < 1 \Leftrightarrow$ Decreciente en todo el dominio Puntos destacables: $(0, 1), (1, b), (-1, 1/b)$</p>	
<p>Definición de logaritmo</p>	$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a \quad (a > 0, b > 0, b \neq 1)$ <p>Consecuencias elementales: $\log_b b = 1 \quad \log_b 1 = 0$</p>	$\log_5 125 = 3$ $\log_4 8 = 3/2$
<p>Cambio de base</p>	$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$	$\log_4 7 = \frac{\log 7}{\log 4} = 1.40$
<p>Operaciones con logaritmos</p>	<p>Log. de un producto: $\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$ Log. de un cociente: $\log_b (x : y) = \log_b x - \log_b y$ Log. de una potencia: $\log_b x^y = y \cdot \log_b x$</p>	$\log \frac{\sqrt{b^3 c}}{x^2} =$ $\frac{1}{2}(3 \log b + \log c) - 2 \log x$
<p>Función logarítmica</p> $y = \log_b x$	<p>Dominio: Todos los números reales positivos. Recorrido: Todos los números reales. Continua en todo el dominio Asíntota vertical: $x = 0$ $b > 1 \Leftrightarrow$ Creciente en todo el dominio. $0 < b < 1 \Leftrightarrow$ Decreciente en todo el dominio Puntos destacables: $(1, 0), (b, 1), (1/b, -1)$</p>	
<p>Funciones trigonométricas</p> $y = \text{sen } x$ $y = \text{cos } x$ $y = \text{tg } x$	<p>Funciones seno y coseno: Dominio: Todos los números reales. Recorrido: $[-1, 1]$ Continuas en todo el dominio. Periódicas de período 2π</p> <p>Función tangente: Dominio y continuidad: Todo \mathbb{R} salvo $(2n + 1) \cdot \pi/2$ (En esos valores hay asíntotas verticales) Recorrido: Todos los números reales. Periódica de período π.</p> <p>Simetría: Funciones seno y tangente: simetría impar. Función coseno: simetría par.</p>	

CAPÍTULO 13: DERIVADAS

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. CONCEPTO DE DERIVADA.

1. Halla la tasa de variación media en los intervalos $[-3, 2]$, $[1, 5]$ y $[0, 3]$ de las funciones siguientes:

a) $y = 3x - 4$ b) $y = -2x - 3$ c) $y = 0.5x + 2$ d) $y = x - 1$

A la vista de lo que has obtenido, ¿crees que la tasa de variación media de las funciones polinómicas de primer grado es siempre constante e igual a la pendiente de la recta que la representa?

2. Halla la tasa de variación media de la función $y = x^2 - 1$ en los intervalos $[-3, 2]$, $[1, 5]$ y $[0, 3]$. ¿Es ahora constante?

1. Halla la tasa de variación media de la función $y = x^3 + 1$ en los intervalos $[-3, 2]$, $[1, 5]$ y $[0, 3]$.

Habrás comprobado que en los dos últimos ejercicios la tasa de variación media no es constante.

2. Al hacer un estudio sobre el aterrizaje de aviones se graba una película desde el momento en que el avión toca tierra hasta que se para, y se miden los tiempos y las distancias recorridas:

Tiempo (t) en segundos	0	2	4	6	8	10	12	14
Distancia (d) en metros	0	100	175	230	270	300	325	340

- a) Calcula la velocidad media del avión.
 b) Calcula la velocidad media en los intervalos: $[0, 6]$, $[2, 10]$ y $[6, 14]$.
 c) ¿Es constante?

3. Se estudia la posición de un coche respecto de la salida de un túnel y se obtienen los datos siguientes:

Tiempo (segundos)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
Distancia (metros)	0	100	200	290	370	430	510	610	720

- a) Calcula la velocidad media del coche en el intervalo $[0, 40]$.
 b) Calcula la velocidad media en los intervalos $[15, 25]$ y $[20, 30]$. ¿Es constante?
 c) Si la velocidad máxima permitida es de 120 km/h, ¿consideras que ha podido sobrepasarla en algún momento? ¿Y si la velocidad máxima fuese de 80 km/h?

4. El tren AVE sale de la estación y aumenta su velocidad hasta llegar a 250 km/h en 10 minutos, mantiene entonces esa velocidad constante durante hora y media, y comienza a disminuirla hasta pararse en otros 10 minutos.

- a) Representa en una gráfica la función tiempo - velocidad.
 b) Ya sabes que la aceleración nos indica la variación de velocidad. Indica la aceleración media en los primeros 10 minutos.
 c) Indica la aceleración media entre el minuto 10 y el minuto 90.
 d) Determina la aceleración en los últimos 10 minutos.

5. La función de beneficios de una cierta empresa viene dada por: $B(x) = x^2 + 7x + \sqrt{x}$, donde $B(x)$ indica el beneficio que obtiene la empresa cuando fabrica x unidades. Calcula la tasa de variación media de los beneficios entre 0 y 100 unidades, y la tasa de variación media de los beneficios entre 25 y 100 unidades.

6. Una empresa determina que los costes de producción por trabajador contratado son $C(x) = x + \sqrt{x}$, y que los ingresos por ventas también por trabajador contratado vienen dados por $I(x) = 2x + x^2$. Por tanto los beneficios $B(x)$ por trabajador contratado son ingresos menos costes. (Observa que estas funciones no son continuas, no se pueden contratar 3.7 trabajadores, es una función escalonada, pero vamos a trabajar con ellas como si fueran continuas). Determina la tasa de variación media si se contratan entre 100 y 2500 trabajadores.

7. Halla la derivada de las funciones siguientes en los puntos $x = 1$, $x = 3$ y $x = 5$:

a) $y = 3x - 4$ b) $y = -2x - 3$ c) $y = 0.5x + 2$ d) $y = x - 1$

A la vista de lo que has obtenido, ¿crees que la derivada de las funciones polinómicas de primer grado es siempre constante e igual a la pendiente de la recta que la representa?

8. Halla la derivada de la función $y = x^2 - 1$ en los puntos $x = 1$, $x = 3$ y $x = 5$. ¿Es ahora constante?

9. Halla la derivada de la función $y = x^3 + 1$ en los puntos $x = 1$, $x = 3$ y $x = 5$.

Habrás comprobado que en los dos últimos ejercicios la derivada no es constante.

10. En el viaje de la actividad de introducción el coche recorría entre la primera hora y la segunda una distancia y dada por la ecuación: $y = 0.2x^2 + 110x - 67.2$. Determina la velocidad que llevaba el coche para $x = 1.5$.

11. En dicho viaje la distancia recorrida para $2.5 \leq x \leq 3$ viene dada por la ecuación $y = 110x - 121.4$. Y para $3 \leq x \leq 5$ por $y = 0.1x^2 + 118x - 146.3$. Para $x = 3$ hay un cambio en la velocidad. Calcula la velocidad antes de $x = 3$, y la velocidad después de $x = 3$.

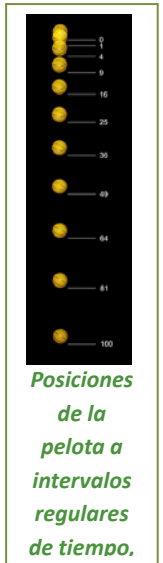
12. Un vehículo espacial despegue de un planeta con una trayectoria dada por: $y = 50x - 0.2x^2$ (x e y en km). La dirección del vehículo nos la proporciona la recta tangente en cada punto. Determina la dirección del vehículo cuando está a 2 km de distancia sobre el horizonte.
13. Desde un avión nodriza se suelta un avión experimental cuyo impulsor se enciende a la máxima potencia y permanece encendido 20 segundos. La distancia que separa al avión experimental del avión nodriza viene dada por $d = 0.3t^4$. Calcula la velocidad del avión experimental a los 3, 4, 7 y 10 segundos de haber sido soltado.
14. Representa gráficamente la función $y = 2$, y determina su derivada para $x = 1, 2, 3, \dots$ a. ¿Cuánto vale? ¿Es siempre la misma? ¿Ocurrirá lo mismo para cualquier recta horizontal $y = b$?
15. Dibuja una función cualquiera y dos puntos sobre ella, $f(x)$ y $f(a)$, correspondientes a las ordenadas x , a . Interpreta geoméricamente la definición de derivada a partir del dibujo.
16. Dibuja una función cualquiera y un punto cualquiera sobre la función $f(a)$. Dibuja también un segmento sobre el eje de abscisas con origen en a y longitud h . Interpreta de nuevo la definición de derivada en un punto basándote en dicha figura.
17. En un ejercicio anterior vimos que una empresa determina que los ingresos por ventas por trabajador contratado vienen dados por $I(x) = 2x + x^2$. (Observa que esta función no es continua, no se pueden contratar 3.7 trabajadores, es una función escalonada, pero vamos a trabajar como si lo fuera). Determina la derivada de la función ingresos respecto a las personas contratadas. ¿Qué significado crees que tiene?
18. Caída libre de una pelota. En la figura se muestran, mediante fotografía estroboscópica, las posiciones de la pelota a intervalos regulares de tiempo: para $t = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$, el espacio recorrido es proporcional a 1, 4, 9, 16, 25, ..., etc. Calcula la función de posición $y = f(t)$, y calcula la velocidad y la aceleración derivando la función de posición.
19. Calcula la derivada mediante el límite de la función $y = x^2 - x + 1$ en el punto $x = 1$. Calcula la derivada mediante el límite de la función $y = x^2 - x + 1$ en el punto $x = a$. Calcula mediante la expresión resultante $f'(1), f'(2), f'(12), f'(5.43)$ y $f'(-7)$.
20. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla con las derivadas:

Función	$f(x) = x^3$	$f(x) = 2$	$f(x) = x^2$	$f(x) = x$	$f(x) = k$	$f(x) = 2x + 3$	$f(x) = 2x^2 + 3x$
Derivada	$f'(x) = 3x^2$	$f'(x) =$	$f'(x) =$	$f'(x) =$	$f'(x) =$	$f'(x) =$	$f'(x) =$

21. Piensa en un ejemplo de función no derivable y que sí sea continua.
22. Piensa en un ejemplo de función con un mínimo en un punto en el que no es derivable.

2. REGLAS DE DERIVACIÓN

23. Escribe las funciones derivadas de las funciones siguientes:
 a) $f(x) = x^{24}$; b) $g(x) = 6x^{10}$; c) $h(x) = 6/7x^{13}$; d) $j(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7$; e) $p(x) = 5x^3 - x$
24. Calcula las derivadas de las siguientes funciones polinómicas:
 a) $y = 6 + x - 5x^2$; b) $y = 6x^2 - 7x + 3x^5$; c) $y = 2/3x^7 + 8/5x^5 - 9/4x^4$; d) $y = x^8 - x$
25. Ya hemos obtenido la derivada de $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Utilízala para obtener la derivada en $x = 1, 4, 5, \dots$ ¿Puedes obtener la derivada en $x = 0$? Razona la respuesta.
26. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
 a) $y = (x^2 + 3) \cdot (6x^6 - 5)$; b) $y = (7x^3 - 1) \cdot (5x^4 + 4)$; c) $y = \sqrt{x} \cdot (x^3 - 5x)$
27. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
 a) $y = \frac{x-1}{x+3}$; b) $y = x^2 + (5/3)x^3 - 2x + 7$; c) $y = \frac{2x^3 - 5x^2}{6x^4 - 2x^3}$; d) $y = \frac{\sqrt{x^3}}{x+2}$
28. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
 a) $y = \sqrt[5]{x^7}$; b) $y = \frac{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x}}{x^3 + 5}$; c) $y = \frac{(x^4 - 2) \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^5}}$; d) $y = \frac{\sqrt[6]{x^{11}}}{x+2}$.



Posiciones de la pelota a intervalos regulares de tiempo.

1 Una lámpara estroboscópica es un instrumento que ilumina una escena durante intervalos regulares de tiempo. Si utilizamos este tipo de luz sobre un movimiento repetitivo, como la rotación de una rueda, y el intervalo coincide con un periodo completo de movimiento, el objeto parecerá estático al observador.

29. En un ejercicio anterior vimos que una empresa determina que los costes de producción por trabajador contratado eran $C(x) = x + \sqrt{x}$, y que los ingresos por ventas también por trabajador contratado vienen dados por $I(x) = 2x + x^2$. Por tanto los beneficios $B(x)$ por trabajador contratado son ingresos menos costes. (Observa que estas funciones no son continuas, no se pueden contratar 3.7 trabajadores, es una función escalonada, pero vamos a trabajar con ellas como si fueran continuas). Determina la derivada de la función costes $C(x)$ y de la función beneficios $B(x)$ respecto del número de trabajadores contratados. ¿Qué significado tienen?

30. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$$\text{a) } y = (x^5 - 7x^3)^{12} \quad \text{b) } y = (3x^3 - 5x^2)^7 \quad \text{c) } y = \sqrt{(4x^5 - 8x^3)^5} \quad \text{d) } y = \sqrt[3]{(2x^2 + 4x^7)^4}$$

31. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$$\text{a) } y = \sqrt{\frac{3x^2 - 5x}{2x^3 + 7}} (x^4 - 6x^3)^2 \quad \text{b) } y = \sqrt{\frac{(x^2 + 3)(x^2 - 7)}{x^3 - 5}} \quad \text{c) } y = \sqrt{\left(\frac{5x^2 + 3x}{8x^3 - 2x^2}\right)^3} \quad \text{d) } y = \sqrt[3]{3 + \sqrt{x - \frac{2}{x^3}}}$$

3. APLICACIONES DE LA DERIVADA

32. Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = 7x^2 + 5x - 3$ en el punto $x = 2$

33. El perfil de una cierta montaña tiene la forma de una parábola: $y = 0.05x - 0.01x^2$, donde x e y se miden en km. Escribe la ecuación de la recta tangente para $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ km.

34. El departamento de "marketing" de una empresa estima que los ingresos mensuales que va a producir el lanzamiento de un nuevo producto vienen dados por: $y = 30 + 5t^2 - 0.4t^3$, donde t es el tiempo expresado en meses desde que el producto salga al mercado, e y son los ingresos en cientos de euros. a) Calcula si los ingresos están creciendo o decreciendo a los 3 meses de lanzamiento del producto. b) ¿Durante qué periodo de tiempo aumentan los ingresos? c) ¿Durante qué periodo de tiempo disminuyen?

Solución: a) $y' = 10t - 1.2t^2$, $y'(3) = 30 - 10.8 > 0$. Creciente. b) $10t - 1.2t^2 = 0 \rightarrow t(10 - 1.2t) = 0 \rightarrow t = 0, 10 = 1.2t \rightarrow t = 8.333$. Aproximadamente a poco más de los 8 meses empiezan a descender los ingresos.

35. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función: $y = x^3 + 3x$. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función: $y = x^3 - 3x$. ¿Cómo es en $x = 0$? ¿Y en $x = 2$? ¿Y en $x = -2$?

36. En un ejercicio anterior vimos que una empresa determina que los costes de producción por trabajador contratado eran $C(x) = x + \sqrt{x}$, y que los ingresos por ventas también por trabajador contratado vienen dados por $I(x) = 2x + x^2$. Por tanto los beneficios $B(x)$ por trabajador contratado son ingresos menos costes. La función beneficios $B(x)$ respecto del número de trabajadores contratados, ¿es creciente o decreciente?

37. Calcula los máximos y mínimos de las funciones siguientes:

$$\text{a) } y = 4x^2 + 3; \quad \text{b) } y = 5x^4 - 2; \quad \text{c) } y = 3x^3 + 1; \quad \text{d) } y = 4x^4 - 2x^2 + 5; \quad \text{e) } y = 7x^3 - 3x.$$

38. Se desea fabricar envases con forma de prisma recto cuadrangular de base cuadrada de forma que el volumen sea de un litro y la superficie empleada sea mínima.

39. Determina los máximos y mínimos de las funciones siguientes:

$$\text{a) } y = 6x^3 - 2x^2 + 5x + 7; \quad \text{b) } y = x^3 - 3x + 5; \quad \text{c) } y = |x - 4|; \quad \text{d) } y = |x + 1| + |x - 2|.$$

40. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 72x$, en el intervalo $[-4, 3]$ y en el intervalo $[0, 5]$.

41. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función $f(x) = |x + 2|$ en el intervalo $[-3, 5]$.

42. Determina las dimensiones de un cono de volumen mínimo inscrito en una esfera de radio $R = 5$ cm. (Ayuda: La altura del cono es igual a $R + x$, y el radio de la base $r^2 = R^2 - x^2$).

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Definición de derivada

- Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = x^3$ en el punto $x = 2$.
- Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = \sqrt{x}$ en $x = 1$.
- Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = 1/x^2$ en $x = 4$.
- Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = 3x^2 - 5x + 2$ en el punto de abscisa $x = 1$.
- Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = x - 3$ en $x = 2$.

Cálculo de derivadas

5. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = 4x^2 + 2x - 3$

b) $y = 2x^3 - 3x^2 + 7x + 5$

c) $y = x^2 - 5x + 2$

d) $y = 8x^7 - 9x^6 - 5x^3$

6. Calcula:

a) $D(5x^2 + 7x^4 - 3x)$

b) $D(6x^5 - 4x^2 + 7x + 5x^3)$

c) $D(x^5 - 7x^4 + 2x^3)$

d) $\frac{dy}{dx} (3x^3 - 9x^6 - 2x^8)$

7. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = 7x^2 + 3x - 1/x$

b) $y = 5x^3 - 2x^2 + \sqrt{x}$

c) $y = \frac{\sqrt{x}}{(x+3) \cdot (x^2 - 5x + 2)}$

d) $y = \frac{\sqrt{x} \cdot (x+5)}{(x^2 - 5)}$

8. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = 7x^2/3 + 3x/5 - 8/(3x)$

b) $y = 5x^3/2 - 2x^2/3 + 6\sqrt{x}/5$

c) $7y = 4x^3/3 - 5x^2/7 + 7/\sqrt{x}$

9. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{(x-1) \cdot (2x-3)}{x+2}$

b) $y = \frac{(3x^2+4) \cdot (4x-2)}{7x-1}$

c) $y = \frac{(8x+5x^2) \cdot (2x^5-7)}{4x+6}$

d) $y = \frac{(x+9) \cdot (2x-3)}{(x+3) \cdot (x+2)}$

10. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{x^3+5}$

b) $y = \sqrt[3]{2x^3+4x^2-1}$

c) $y = (5x^3+2)^5$

d) $y = (2x^2+5x)^9$

11. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{x^3+5} \cdot (x^7+3x^2)^6$

b) $y = \frac{\sqrt[3]{2x^3+4x^2-1}}{x+1}$

c) $y = (5x^3+2)^5 \cdot (x^5-6x^8)$

d) $y = \frac{(2x^3-5x^2)^9}{(7x^4-5x^3)^2}$

12. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = e^{x^5+4x^3}$

b) $y = (e^{2x^3-7x^2})^7$

c) $y = e^{(3x^5+5x^3)^5}$

d) $y = \sqrt[3]{e^{(6x^5-9x^8)^2}}$

13. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \cos(x^5 - 7x^3) \cdot \sin(x^5 - 7x^3)$ b) $y = \cos^7(3x^3 - 5x^2) \cdot \sin^5(3x^3 - 5x^2)$ c) $y = \cos(4x^5 - 8x^3)^5$ d) $y = \sqrt[3]{\cos(2x^2 + 4x^7)^4}$

Aplicaciones de la derivada

14. Calcula las rectas tangentes de la gráfica de la función $y = x^3 - 3x$ en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.

15. Calcula las rectas tangentes de las gráficas de las funciones siguientes en los puntos indicados:

a) $y = x^3$ en $x = 2$. b) $y = 2x^2 + 4x - 5$ en $x = 1$. c) $y = x^3 - 7x^2 + 3$ en $x = 0$.

16. Indica la pendiente de la recta tangente de:

a) $y = x^3 + 3x$ en $x = 3$.

b) $y + 2x - 5 = 0$.

c) $y = 4x^3 - 5x^2 + 2$ en $x = 1$.

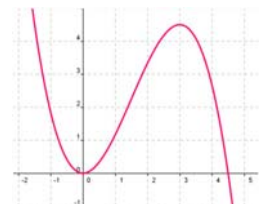
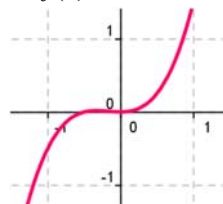
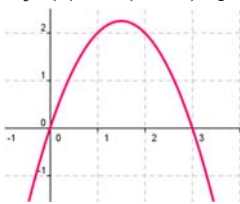
17. Determina las coordenadas de los puntos de la gráfica $y = x^3 - 3x + 2$ en los que su tangente sea paralela:

a) a la recta $y = 0$;

b) a la recta $y = 6x$.

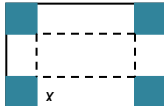
18. Determina la recta tangente de la gráfica de la función $y = \sqrt[2]{x^3}$ en $x = 0$.

19. Si $f'(x) = x(3-x)$, ¿cuál de las siguientes gráficas podría ser la de $f(x)$?



20. Determina las rectas tangentes a la función $f(x) = 4x^3 - 12x$ en los puntos en los que la pendiente es 12. ¿Cuál es el menor valor que puede tener la pendiente a esta curva? ¿En qué puntos se alcanza?
21. Determina la recta tangente a la función $f(x) = x^3 - 3x$ en el punto $A(-1, 2)$. ¿En qué otro punto corta la recta tangente a la función?
22. Determina los coeficientes a , b y c de la función $f(x) = ax^3 + bx + c$, que pasa por el punto $A(1, 2)$ y es tangente a la recta $y = x$ en el punto $O(0, 0)$.
23. Determina los coeficientes a , b y c para que las funciones $f(x) = x^3 + bx + c$ y $g(x) = cx - x^2$ tengan la misma recta tangente en el punto $A(1, 0)$.
24. Determina el coeficiente a , para que la función $f(x) = x^2 + a$, sea tangente a la recta $y = x$.
25. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 1/x^2$.
26. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 1/x$.
27. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. Calcula sus máximos y mínimos y haz un esbozo de su gráfica.
28. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 6$. Calcula sus máximos y mínimos. ¿En qué punto corta al eje de ordenadas? Haz un esbozo de su gráfica.
29. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3$. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.
30. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 9x$. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.
31. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 9x$. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.
32. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 72x$ en el intervalo $[-7, 2]$ y en el intervalo $[0, 8]$.
33. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función $f(x) = |x + 3|$ en el intervalo $[-3, 3]$.

Problemas

34. El espacio recorrido, en metros, por un vehículo a los t segundos de pasar por un control de radar, viene dado por: $y = 15t + 0.8t^2$. ¿Qué velocidad llevaba al pasar por el control? ¿Y a los 5 segundos? Si continúa así, ¿en qué momento pasará de los 120 km/h?
35. La temperatura, T , en grados, de una bola de hierro que se está calentando viene dada por $T = 200 - 500/t$, donde t es el tiempo en segundos. El radio, r , en mm, de la bola cuando la temperatura es de T grados viene dado por $r = 40 + 0.001T$. ¿A qué velocidad varía el radio cuando la temperatura es de 50° , 75° , 100° ? ¿A qué velocidad varía la temperatura a los 30 segundos? ¿Y para $t = 90$ segundos? ¿A qué velocidad varía el radio a los 10 segundos, a los 30 segundos y a los 90 segundos?
36. La distancia, d , en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la Tierra a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 5t^2$. Si se cae un tornillo desde la primera plataforma de la Torre Eiffel, (que está a 57 m de altura), ¿a qué velocidad llegaría al suelo? ¿Y si cayera desde la segunda plataforma (que está a 115m)? ¿Y desde la tercera plataforma (que está a 274 m)?
37. La función $e = f(t)$ indica el espacio recorrido, e , en metros, por un cuerpo en el tiempo t (en segundos). Determina en cada caso la función velocidad y la función aceleración:
 - a) $e = t^2 - 4t + 3$
 - b) $e = 2t^3 - 5t^2 + 4t - 3$
 - c) $e = -t^2 + 4t + 3$
 - d) $e = (3t - 4)^2$
38. Un depósito cilíndrico de 10 metros de diámetro se llena de agua a 0.3 m^3 por minuto. ¿A qué velocidad varía la altura de agua a los 2 minutos? ¿Y a los 5 minutos?
39. La distancia, d , en metros, recorrida por un trineo que se desliza por una pendiente helada, a los t segundos, viene dada por $d = 0.2t^2 + 0.01t^3$. Determina la velocidad del trineo a los 2, 4, 7 y 15 segundos. Se sabe que si la velocidad del trineo alcanza los 60 km/h le pueden fallar los frenos, ¿cuándo debería comenzar a aplicar los frenos para no perder el control?
40. Queremos construir cajas usando cartulinas rectangulares de 20 cm por 25 cm. Para ello se corta en cada esquina un cuadrado de lado x , y se dobla. ¿Qué valor debe tener el lado del cuadrado, x , recortado para que las cajas contengan un volumen máximo? Ayuda: Tendrás que escribir el volumen de las cajas en función de x .
 
41. Unos barriles para almacenar aceite son cilíndricos y tienen una capacidad de 150 litros. Si se desea construirlos de forma que su superficie lateral sea mínima, ¿cuánto debe medir su altura y el radio de su base?
42. Al hacer las pruebas de un nuevo medicamento se comprueba que según la dosis, x , en miligramos, que se administre, el porcentaje de curaciones, y , viene dado por: $y = 100 - 80/(x + 5)$. Sin embargo el medicamento tiene efectos secundarios ya que perjudica al riñón. El número de enfermos a los que el tratamiento produce efectos secundarios

aumenta un 2 % por cada miligramo que se aumenta la dosis. ¿Podrías ayudar a determinar la dosis de medicamento adecuada? Razona la respuesta.

43. En una industria la función $u = f(t)$ indica el número de personas que constituyen la fuerza del trabajo en el instante t , y la función $v = g(t)$ indica la producción media por persona incorporada a la fuerza de trabajo en el instante t . (Vamos a considerar que ambas funciones son derivables, aunque en realidad el número de personas es siempre un número natural, y por tanto son funciones escalonadas). La producción total es igual a $y = u \cdot v$. Si la fuerza de trabajo aumenta un 3 % anual, ($u' = 0.03u$) y la producción por trabajador aumenta un 2 % anual ($v' = 0.02v$) total, determina la tasa de crecimiento instantánea de la producción total.
44. En el ejercicio anterior considera que la función que indica el número de personas que constituyen la fuerza del trabajo en el instante t es $u = f(t) = 3t$ y que la función $v = g(t) = t^2 + 3t$, indica la producción media por persona incorporada a la fuerza de trabajo en el instante t . La producción total es igual a $y = u \cdot v$. Determina la tasa de crecimiento instantánea de la producción total.
45. Si en el ejercicio anterior consideras que la fuerza de trabajo ha disminuido un 5 % anual, y la producción por trabajador ha aumentado un 3 % anual total, determina entonces la tasa de crecimiento instantánea de la producción total. ¿Crece o decrece la producción total?

AUTOEVALUACIÓN

1. Indica cuál de las siguientes expresiones es la definición de derivada de una función en $x = a$:
- a) $\lim_{b \rightarrow x} \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ c) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ d) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$
2. La derivada de $y = \sqrt{x} \cdot (x - 1)$ en $x = 1$ es:
a) 0 b) 1/2 c) 1 d) 2
3. La derivada de $y = \frac{x^2 + 1}{x^3 + 3}$ en $x = 2$ es:
a) 15/11 b) -10/25 c) -16/121 d) 1/3
4. La derivada de $y = e^{x^2 + 3}$ es:
a) $y' = 2x \cdot e^{x^2 + 3}$ b) $y' = 2(e^x)^2 \cdot e^x$ c) $y' = 3 + e^{x^2} \cdot 2x$ d) $y' = 2e^{x^2}$
5. La derivada $y = \cos(x^3)$ es:
a) $y' = 3(\cos(x))^2 \cdot (-\sin(x^3))$ b) $y' = -\sin(x^3) \cdot 3x^2$ c) $y' = -\sin(x^3) \cdot \cos(3x^2)$ d) $y' = 3(\cos(x))^2 \cdot (-\sin(x))$
6. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = 5 + 2x + 3x^2 - 2x^3$ en $x = 1$ es:
a) $y = -2x - 6$ b) $y = x + 8$ c) $y = 2x + 6$ d) $y = 8 + 2x$
7. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = 3x^2 - 2x^3$ en $x = 0$ es:
a) $y = 2x + 3$ b) $y = x + 8$ c) $y = 6x$ d) $y = 0$
8. La función $y = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 1$ en $x = 1$ es:
a) creciente b) decreciente c) alcanza un mínimo d) alcanza un máximo
9. Si la derivada de una cierta función es: $y' = (x - 4)x$ entonces los intervalos de crecimiento y decrecimiento de dicha función son:
a) $x < 0$, decreciente; $0 < x < 4$, decreciente; $x > 4$, creciente
b) $x < 0$, decreciente; $0 < x < 4$, creciente; $x > 4$, decreciente
c) $x < 0$, creciente; $0 < x < 4$, creciente; $x > 4$, decreciente
d) $x < 0$, creciente; $0 < x < 4$, decreciente; $x > 4$, creciente
10. La función $y = 3x^2 - 2x^3$ alcanza los siguientes máximos y mínimos:
a) (0, 0) máximo y (1, 1) mínimo b) (-1, 5) máximo y (1, 1) mínimo
c) (6, -324) mínimo y (1, 1) máximo d) (0, 0) mínimo y (1, 1) máximo

RESUMEN

Definición de derivada	$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$	
Cálculo de derivadas	<p>Si $f(x) = k$ entonces $f'(x) = 0$.</p> <p>Si $f(x) = x^k$ entonces $f'(x) = kx^{k-1}$</p> <p>Si $f(x) = g(x) + h(x)$ entonces $f'(x) = g'(x) + h'(x)$</p> <p>Si $f(x) = kg(x)$ entonces $f'(x) = kg'(x)$</p> <p>Si $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ entonces $f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$</p> $\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$ <p>$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \Rightarrow h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$</p>	<p>$y = 7x^3 + 2/x^5 \rightarrow y' = 21x^2 - 10/x^6$</p> <p>$y = \sqrt{x} \cdot 2x \rightarrow y' = (1/2)\sqrt{x} \cdot 2x + \sqrt{x} \cdot 2$</p> <p>$y = \frac{3x}{x^2 - 1} \rightarrow y' = \frac{3(x^2 - 1) - 3x(2x)}{(x^2 - 1)^2}$</p> <p>$y = \sqrt{x^3 + 2} \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x^3 + 2}} \cdot 3x^2$</p>
Recta tangente	$y = f(a) + f'(a)(x - a)$	Tangente a $y = x^3 + 2x$ en el punto $(0, 0)$: $y = 0 + 2(x - 0) = 2x$.
Crecimiento y decrecimiento	<p>Si $f'(a) > 0$ entonces $y = f(x)$ es creciente en $x = a$.</p> <p>Si $f'(a) < 0$ entonces $y = f(x)$ es decreciente en $x = a$.</p>	<p>$y = x^3 - 3x \rightarrow y' = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = 1, x = -1$.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Para $x < -1, y' > 0 \rightarrow y$ creciente. • Para $-1 < x < 1, y' < 0 \rightarrow y$ decreciente • Para $x > 1, y' > 0 \rightarrow y$ creciente
Máximos y mínimos	<p>Si $(a, f(a))$ es un máximo o un mínimo de $y = f(x)$ y existe $f'(a)$ entonces $f'(a) = 0$.</p> <p>Si $f'(a) = 0$ entonces $(a, f(a))$ es un punto crítico.</p> <p>Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$ entonces $(a, f(a))$ es un mínimo.</p> <p>Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$ entonces $(a, f(a))$ es un máximo.</p>	<p>$y = x^3 - 3x \rightarrow y' = 3x^2 - 3 \rightarrow y'' = 6x$.</p> <p>$y'(-1) = 0, y''(-1) < 0$, luego $(-1, 2)$ es un máximo relativo.</p> <p>$y'(1) = 0, y''(1) > 0$, luego $(1, -2)$ es un mínimo relativo.</p>

CAPÍTULO 14: ESTADÍSTICA

ACTIVIDADES PROPUESTAS

2. POBLACIÓN Y MUESTRA. VARIABLES ESTADÍSTICAS

- Señalar en qué caso es más conveniente estudiar la población o una muestra:
 - El diámetro de los tornillos que fabrica una máquina diariamente.
 - La altura de un grupo de seis amigos.
- Se puede leer el siguiente titular en el periódico que publica tu instituto: "La nota media de los alumnos de 4º ESO de la Comunidad de Madrid es de 7.9". ¿Cómo se ha llegado a esta conclusión? ¿Se ha estudiado a toda la población? Si hubieran seleccionado para su cálculo solo a las mujeres, ¿sería representativo su valor?
- Indicar el tipo de variable estadística que estudiamos y razona, en cada caso, si sería mejor analizar una muestra o la población:
 - El sexo de los habitantes de un país.
 - El dinero gastado a la semana por tu hermano.
 - El color de pelo de tus compañeros de clase.
 - La temperatura de tu provincia.
 - La talla de pie de los alumnos del instituto.
- Para realizar un estudio hacemos una encuesta entre los jóvenes de un barrio y les preguntamos por el número de veces que van al cine al mes. Indica qué características debería tener la muestra elegida y si deberían ser todos los jóvenes de la muestra de la misma edad.

3. TABLAS DE FRECUENCIAS

- Obtener la tabla de frecuencias absolutas de las notas en inglés de 24 alumnos:

6 6 7 8 4 9 8 7 6 5 3 5
7 6 6 6 5 4 3 9 8 8 4 5

- Construir una tabla de frecuencias relativas con el color de pelo de 24 personas elegidas al azar:

M = moreno; R = rubio; P = pelirrojo

M R P R R R R P P M M M R R
R R R M M M M M P

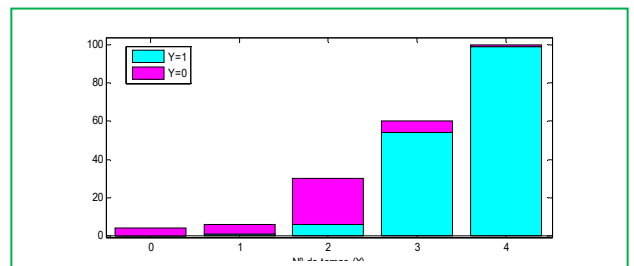
- El número de horas diarias de estudio de 14 alumnos es el siguiente:

3 4 2 5 3 4 3 2 3 4 5 4 3 2

- Efectúa un recuento y organiza los resultados obtenidos en una tabla de frecuencias absolutas acumuladas.
 - ¿Qué significan las frecuencias acumuladas que has calculado?
- En una evaluación, de los 30 alumnos de una clase, el 30 % aprobó todo, el 10 % suspendió una asignatura, el 40 % suspendió dos asignaturas y el resto más de dos asignaturas.
 - Realiza la tabla de frecuencias completa correspondiente (frecuencias absolutas, frecuencias relativas, frecuencias absolutas acumuladas y frecuencias relativas acumuladas).
 - ¿Hay algún tipo de frecuencia que corresponda a la pregunta de cuantos alumnos suspendieron menos de dos asignaturas? Razona la respuesta.

4. GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

- Si queremos representar conjuntamente valores de la variable correspondientes a diferentes periodos de tiempo, o a distintas cualidades, para comparar situaciones podemos construir un diagrama de barras apiladas. ¿Podrías interpretar este gráfico correspondiente al número de temas que los alumnos de una asignatura de 4º ESO llevan estudiados? Se toma información en dos clases de un instituto (azul y rosa).



- El sexo de 18 bebés nacidos en un hospital de Madrid ha sido:

H	M	H	H	M	H
H	M	M	H	M	H
M	M	H	H	M	H

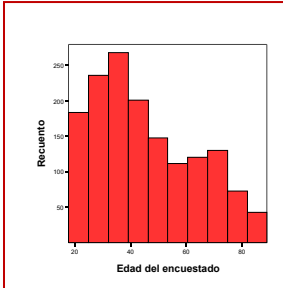
Construye la tabla asociada a estos datos y represéntalos.

11. Representa los valores de la variable de la tabla adjunta con el gráfico adecuado correspondientes a una encuesta realizada sobre el sector al que pertenecen un grupo de trabajadores madrileños.

SECTOR	INDUSTRIAL	AGRARIO	SERVICIOS	OTROS
% TRABAJADORES	20	16	45	19

12. Completa la tabla de frecuencias para poder representar la información mediante el histograma de frecuencias acumuladas:

EDAD	[15, 25)	[25, 35)	[35, 45)	[45, 55)
NÚMERO DE PERSONAS	25	45	55	65



13. ¿A qué representación gráficas corresponden el siguiente gráfico correspondiente a la información recogida sobre la edad de 100 personas? ¿Por qué crees que se ha utilizado este y no otro?

14. De los 100 asistentes a una boda, el 34 % comió ternera de segundo plato, 25 % pato, 24 % cordero y el resto pescado.

a) Organiza la información anterior en una tabla de frecuencias y representa los datos en un gráfico de sectores.

b) Realiza un diagrama de barras y explica cómo lo haces. ¿Cuál de los dos gráficos prefieres? ¿Por qué?

15. Se ha recogido información sobre el contenido de sales minerales de 24 botellas de agua de un grupo de escolares en una excursión tal que:

45	45	65	56	33	65	23	23
34	23	43	67	22	43	34	23
12	34	45	34	19	34	23	43

- a) Clasifica la variable estadística estudiada
 b) ¿Sería conveniente tomar o no intervalos al hacer una tabla de frecuencias?
 c) Realiza el gráfico que consideres más oportuno.

5. MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

16. Una persona ingresa 10.000 euros en un fondo de inversión el 1 de enero de 2009. Las rentabilidades anuales del fondo durante los años siguientes fueron las siguientes:

Año	2009	2010	2011	2012
Rentabilidades (%)	5	3	-1	4

Si no ha retirado el capital, ¿cuál ha sido la rentabilidad media de dicho fondo durante estos años?

17. Interpreta los valores de la variable de esta tabla que representa el peso de 100.000 bombonas de butano de una fábrica, en kilogramos. ¿Qué gráfico utilizarías? Calcula la media e interprétala.

Peso (kg)	$f_i\%$	n_i	N_i
14.5 - 15	0.3	300	300
15 - 15.5	1.6	1600	1 900
15.5 - 16	7.4	7 400	9 300
16 - 16.5	21.5	21 500	30 800
16.5 - 17	30.5	30 500	61 300
17 - 17.5	24.5	24 500	85 800
17.5 - 18	10.7	10 700	96 500
18 - 18.5	21.5	21 500	30 800

18. Obtener la media y la moda de los siguientes valores de la variable referidos al resultado de lanzar un dado 50 veces.

1	2	3	2	3	4	3	3	3	5
5	5	5	6	5	6	5	6	4	4
3	2	1	2	3	4	5	6	5	4
3	2	3	4	5	6	5	4	3	2
3	4	5	5	5	5	6	6	6	3

19. Realizar la actividad anterior pero agrupando en intervalos de amplitud 2, empezando en 0. ¿Obtienes los mismos resultados? ¿Por qué?

20. Dibujar un diagrama de caja conociendo los siguientes datos.
Mínimo valor = 2; cuartil 1 = 3; mediana = 6; cuartil 3 = 7; máximo valor = 12.
21. Un corredor de maratón entrena, de lunes a viernes recorriendo las siguientes distancias: 2, 3, 3, 6 y 4, respectivamente. Si el sábado también entrena:
- ¿Cuántos kilómetros debe recorrer para que la media sea la misma?
 - ¿Y para que la mediana no varíe?
 - ¿Y para que la moda no varíe?
22. EL salario mensual en euros de los 6 trabajadores de una empresa textil es el que se presenta. ¿Cuál de los tres tipos de medidas de tendencia central describe mejor los sueldos de la empresa?
- | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 700 | 1 400 | 1 700 | 1 155 | 1 340 | 4 565 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
23. ¿Qué valor o valores podríamos añadir a este conjunto de valores de la variable para que la mediana siga siendo la misma?
- | | | | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|----|----|----|----|
| 12 | 19 | 24 | 23 | 23 | 15 | 21 | 32 | 12 | 6 | 32 | 12 | 12 | 21 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|----|----|----|----|
24. Salen 25 plazas para un puesto de auxiliar de enfermería y se presentan 200 personas con las siguientes notas.
- | | | | | | | | | |
|-------|---|----|----|----|----|----|----|----|
| notas | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| n_i | 6 | 34 | 25 | 56 | 29 | 10 | 30 | 10 |
- ¿Con qué nota se obtiene una de las plazas mediante el examen?
 - ¿Qué percentil es la nota 5?

6. MEDIDAS DE DISPERSIÓN

25. Un grupo de perros pastor alemán tiene una media de 70 kg y desviación típica 2 kg. Un conjunto de perros caniche tiene una media de 15 kg y desviación típica 2 kg. Compara ambos grupos.
26. El tiempo, en minutos, que un conjunto de estudiantes de 4º ESO dedica a preparar un examen de Matemáticas es:
- | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 234 | 345 | 345 | 123 | 234 | 234 | 556 |
| 234 | 234 | 345 | 223 | 167 | 199 | 490 |
- Las calificaciones de ese conjunto de estudiantes son las siguientes:
- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 5 | 6 | 7 | 6 | 5 | 8 |
| 9 | 8 | 7 | 8 | 7 | 6 | 8 |
- ¿Qué tendremos que hacer para comparar su variabilidad? b) ¿En qué conjunto los valores de la variable están más dispersos? c) ¿Es la media siempre mayor que la desviación típica?
27. Se ha recogido una muestra de 20 recipientes cuyos diámetros son:
- | | | | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|-----|------|------|
| 0.91 | 1.04 | 1.01 | 1 | 0.77 | 0.78 | 1 | 1.3 | 1.02 | 1 |
| 1 | 0.88 | 1.26 | 0.92 | 0.98 | 0.78 | 0.82 | 1.2 | 1.16 | 1.14 |
- Calcula todas las medidas de dispersión que conozcas.
 - ¿A partir de qué valor de diámetro de los recipientes se consideran el 20 % con mayor diámetro?

7. CONSTRUCCIÓN E INTERPRETACIÓN DE DIAGRAMAS DE DISPERSIÓN. INTRODUCCIÓN A LA CORRELACIÓN

28. Se han medido los pesos y alturas de 6 personas, como muestra de las personas que están en una fila o cola de espera, obteniéndose los siguientes resultados:
- | | | | | | | |
|--------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Pesos (kg) | 65 | 60 | 65 | 63 | 68 | 68 |
| Alturas (cm) | 170 | 150 | 168 | 170 | 175 | 180 |
- Se pide:
- Calcular las medias y las varianzas de esos dos conjuntos de datos unidimensionales.
 - ¿Qué medidas están más dispersas, los pesos o las alturas?
 - Representar gráficamente ese conjunto de datos bidimensional. Calcular la covarianza e interpretar su valor.
 - Dar una medida de la correlación entre ambas variables. Interpretar su valor.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Población y muestra. Variables estadísticas. Tablas de frecuencias

- Se lanza una moneda 700 veces y se obtiene cara 355 veces. Expresa en una tabla las frecuencias absolutas, relativas y calcula también las frecuencias acumuladas absolutas y acumuladas relativas de caras y cruces en este experimento.
- Se lanzar un dado 500 veces y se obtienen los siguientes resultados:

Resultado	1	2	3	4	5	6
Número de veces	70	81	92	85		81

- ¿Cuántas veces ha salido el 5?
 - Construir tabla con las frecuencias absolutas y las frecuencias absolutas acumuladas
 - Construir una tabla con las frecuencias relativas y las frecuencias relativas acumuladas
- Una urna que contiene 10 bolas numeradas del 0 al 9, sacamos una bola, anotamos el número y devolvemos la bola a la urna. Repetimos el experimento 1 000 veces y se han obtenido los resultados indicados en la tabla:

Resultado	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Frecuencia absoluta	79	102			93	98	104	77		
Frecuencia relativa			0.12	0.13					0.1	
Frecuencia absoluta acumulada	79	181								
Frecuencia relativa acumulada										1

- ¿Cuál es la frecuencia absoluta de 9?
 - ¿Cuál es la frecuencia absoluta acumulada de 2?
 - ¿Cuál es la frecuencia relativa acumulada de 1?
 - Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.
- Pepa ha tirado un dado 25 veces y ha obtenido los siguientes resultados:

1, 2, 5, 6, 3, 1, 4, 5, 6, 1, 3, 1, 2, 2, 1, 6, 2, 2, 4, 3, 4, 6, 6, 1, 4

- Construir una tabla de frecuencias absolutas.
 - Construir una tabla de frecuencias relativas.
 - Dibuja un diagrama de barras.
 - Dibuja un polígono de frecuencias y una representación por sectores.
- En una clase se ha medido el tamaño de las manos de cada uno de los alumnos y alumnas, y el resultado en centímetros ha sido el siguiente:

19, 18, 20, 19, 18, 21, 19, 17, 16, 20,
16, 19, 20, 21, 18, 17, 20, 19, 22, 21,
23, 21, 17, 18, 17, 19, 21, 20, 16, 19

- ¿Qué tamaño ha sido el valor mínimo? ¿Y el máximo? ¿Cuál es el rango total de la variable?
 - Construir una tabla de frecuencias absolutas y otra de frecuencias relativas.
 - Construir una tabla de frecuencias absolutas acumuladas y otra de frecuencias relativas acumuladas.
- Calcula la frecuencia absoluta de los datos de una encuesta en la que se ha elegido entre ver la televisión, t, o leer un libro, l:

t, l, t, t, t, l, t, t, l, t, l, t, t, l, t, t, l, t, l, t, l, t.

- La duración en minutos de unas llamadas telefónicas ha sido:

7, 3, 6, 3, 7, 5, 4, 3, 5, 7, 10, 1, 9, 12, 2

Construir una tabla de frecuencias absolutas y una tabla de frecuencias relativas.

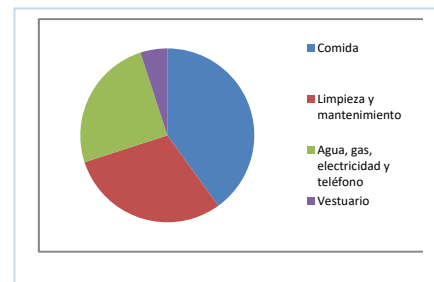
Gráficos estadísticos

- Se ha preguntado en un pueblo de la provincia de Madrid el número de hermanos que tenían y se ha obtenido la siguiente tabla de frecuencias absolutas sobre el número de hijos de cada familia:

Número de hijos	1	2	3	4	5	6	7	8 o más
Número de familias	46	249	205	106	46	21	15	6

- Escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias relativas.
 - Haz un diagrama de barras de frecuencias absolutas y otro de frecuencias relativas.
 - Haz un polígono de frecuencias absolutas y otro de frecuencias absolutas acumuladas.
- Haz una encuesta similar con tus compañeros y compañeras de curso preguntando el número de hermanos y confeccionando una tabla sobre el número de hijos y el número de familias.
- Construye una tabla de frecuencias relativas
 - Haz un diagrama de barras de frecuencias absolutas y relativas. Completa con un polígono de frecuencias
 - Compara la tabla de frecuencias relativas y el diagrama de barras de frecuencias relativas que obtengas con el obtenido en el ejercicio anterior.

10. Un batido de frutas contiene 25 % de naranja, 15 % de plátano; 50 % de manzana y, el resto de leche. Representa en un diagrama de sectores la composición del batido.
11. En un campamento de verano se han gastado diez mil euros. El gráfico muestra la distribución del gasto:
1. Comida: 40 %
 2. Limpieza y mantenimiento: 30 %
 3. Agua, gas, electricidad y teléfono: 25 %
 4. Vestuario:



- a) ¿Qué porcentaje se gastó en vestuario?
 - b) ¿Cuántos euros se gastaron en comida?
 - c) ¿Cuánto mide el ángulo del sector correspondiente a actividades?
12. Busca en revistas o periódicos dos gráficas estadísticas, recórtalas y pégalas en tu cuaderno. En muchas ocasiones estas gráficas tienen errores. Obsérvalas detenidamente y comenta las siguientes cuestiones:
- a) ¿Está clara la variable a la que se refiere? ¿Y las frecuencias?
 - b) ¿Son correctas las unidades? ¿Pueden mejorarse?
 - c) Comenta las gráficas.
13. Se hace una encuesta sobre el número de veces que van al cine unos jóvenes al mes. Los valores de la variable están en la tabla:

Veces que van al cine	0	1	2	3	4	5
Frecuencia absoluta	1	7	9	5	2	1

- a) Representa un diagrama de barras de frecuencias absolutas.
 - b) Representa un polígono de frecuencias relativas.
 - c) Representa los valores de la variable en un diagrama de sectores.
14. Se hace un estudio sobre lo que se recicla en una ciudad y se hace una tabla con el peso en porcentaje de los distintos tipos de residuos:

Tipo de residuo	Porcentaje
Orgánico	15
Papel y cartón	1
Vidrio	15
Plástico	1
Pilas	15

- a) Construye un diagrama de barras
 - b) Representa un polígono de frecuencias.
 - c) Representa los valores de la variable en un diagrama de sectores.
15. En un ejercicio anterior se ha tenido el resultado de medir en una clase el tamaño de las manos de cada uno de los alumnos y alumnas, y el resultado en centímetros ha sido el siguiente:
- 19, 18, 20, 19, 18, 21, 19, 17, 16, 20,
16, 19, 20, 21, 18, 17, 20, 19, 22, 21,
23, 21, 17, 18, 17, 19, 21, 20, 16, 19

Representa los valores de la variable en un diagrama de barras y en un polígono de frecuencias.

16. El 35 % de las cigüeñas no ha emigrado este año a África y el 6 % murió por el camino. Dibuja un diagrama por sector que describa esta situación.

17. En una clase se ha preguntado por las preferencias deportivas y se ha obtenido:

Fútbol	Baloncesto	Natación	Kárate	Ciclismo
8	9	7	6	10

- a) Copia la tabla en tu cuaderno y construye una tabla de frecuencias relativas.
- b) Representa estos valores de la variable en un diagrama de sectores.

Medidas de centralización y dispersión

18. Pepa ha tirado un dado 25 veces y ha obtenido los siguientes resultados:

1, 2, 5, 6, 3, 1, 4, 5, 6, 1, 3, 1, 2, 2, 1, 6, 2, 2, 4, 3, 4, 6, 6, 1, 4

- a) Calcula la media aritmética
- b) Calcula la mediana
- c) ¿Cuál es la moda? ¿Es única?
- d) Calcula la varianza y desviación típica interpretando su resultado

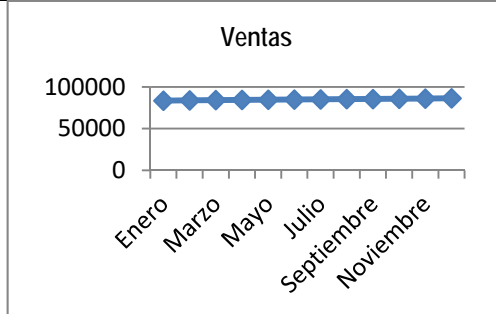
19. Sara ha tenido las siguientes notas en sus exámenes de Matemáticas: 9, 7, 8, 6, 9, 10, 9
- Calcula la media aritmética
 - Calcula la mediana
 - ¿Cuál es la moda? ¿Es única?
 - Calcula el percentil 45 interpretando su resultado
 - Calcula el percentil 75 interpretando su resultado. ¿qué otro nombre recibe?
 - Calcula la varianza y desviación típica interpretando su resultado
 - Calcula el coeficiente de variación interpretando su resultado
20. En un ejercicio anterior se ha tenido el resultado de medir en una clase el tamaño de las manos de cada uno de los alumnos y alumnas, y el resultado en centímetros ha sido el siguiente:
19, 18, 20, 19, 18, 21, 19, 17, 16, 20, 16, 19, 20, 21, 18, 17, 20, 19, 22, 21, 23, 21, 17, 18, 17, 19, 21, 20, 16, 19
- Calcula la media aritmética
 - Calcula la mediana
 - ¿Cuál es la moda? ¿Es única?
 - Calcula el percentil 45 interpretando su resultado
 - Calcula el percentil 75 interpretando su resultado. ¿qué otro nombre recibe?
 - Calcula la varianza y desviación típica interpretando su resultado
 - Calcula el coeficiente de variación interpretando su resultado
21. Nos interesa conocer la distribución de notas obtenidas por 40 estudiantes. Las notas son:
4, 1, 7, 10, 3, 2, 8, 9, 0, 0, 5, 8, 2, 7, 1, 2, 8, 10, 2, 10, 3, 4, 8, 9, 3, 6, 3, 7, 2, 4, 9, 4, 9, 5, 1, 3, 3, 9, 7, 8, 10
- Escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias absolutas.
 - Haz un polígono de frecuencias absolutas.
 - Calcula la media
 - Calcula la mediana
 - Calcula la moda
 - Calcula el percentil 45 interpretando su resultado
 - Calcula el percentil 75 interpretando su resultado. ¿qué otro nombre recibe?
 - Calcula la varianza y desviación típica interpretando su resultado
 - Calcula el coeficiente de variación interpretando su resultado
 - Si las notas de los mismos alumnos respecto a otra asignatura tienen una media de 5.3 y desviación típica de 2, ¿cuál de las dos asignaturas tiene una media más homogénea?
22. Los jugadores de un equipo de balonmano tiene las siguientes edades:
12, 14, 13, 12, 15, 11, 12, 12, 13, 14, 11, 12, 12.
- Calcula la media
 - Calcula la mediana
 - Calcula la moda
 - Calcula el percentil 45 interpretando su resultado
 - Calcula el percentil 75 interpretando su resultado. ¿qué otro nombre recibe?
 - Calcula la varianza y desviación típica interpretando su resultado
 - Calcula el coeficiente de variación interpretando su resultado

Problemas

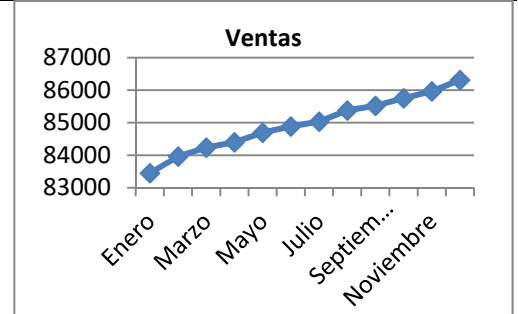
23. El Director Comercial de una empresa va a ser evaluado. Para ello debe dar cuenta de los resultados obtenidos. Quiere quedar bien, pues eso le puede suponer un aumento de sueldo. Se han vendido las siguientes cantidades:

Meses	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Ventas	83 451	83 962	84 238	84 401	84 693	84 889	85 032	85 378	85 524	85 751	85 996	86 316

El estadístico de la empresa le ha entregado la siguiente gráfica:



No le ha gustado nada, y para la presentación él se ha confeccionado el siguiente gráfico:



Ambos gráficos son correctos. Escribe un informe sobre cómo pueden los distintos gráficos dar impresiones tan diferentes.

24. Tira una moneda 15 veces y anota las veces que cae cara y las que no. Construye luego dos tablas: una de frecuencias absolutas y otra de frecuencias relativas. Representa el resultado en un diagrama de frecuencias y en un polígono de frecuencias.
25. La media de seis números es 5. Se añaden dos números más pero la media sigue siendo 5. ¿Cuánto sumas estos dos números?
26. La siguiente tabla expresa las estaturas, en metros, de 1 000 soldados:

Talla	1.50 - 1.56	1.56 - 1.62	1.62 - 1.68	1.68 - 1.74	1.74 - 1.80	1.80 - 1.92
Nº de soldados	20	150	200	330	200	100

Calcula:

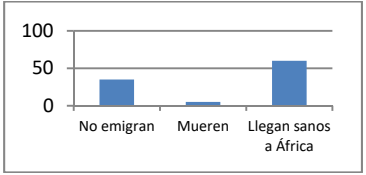
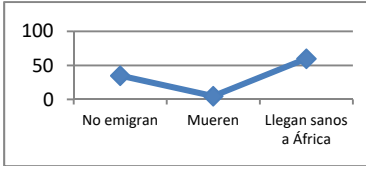
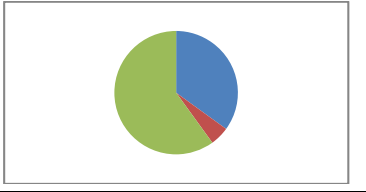
- a) La media y la desviación típica. b) Los intervalos donde se encuentran la mediana y los cuartiles.
 c) El intervalo $(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$ y el porcentaje de individuos en dicho intervalo. d) Representa los datos en un histograma.
27. Una compañía aérea sospecha que existe una relación entre las variables X, tiempo de un vuelo, en horas; e Y, consumo de combustible (gasóleo) para dicho vuelo, en litros. Por esta razón, se han obtenido los siguientes datos, dentro del rango de niveles de interés para X en esta compañía.

X_i	0.4	0.5	0.6	0.65	0.7	0.8	1	1.15	1.2	1.4	1.5	1.6	1.8	2.2	3
Y_i	1 350	2 220	2 900	3 150	3 350	3 550	3 900	4 330	4 500	5 050	5 320	5 650	6 400	7 500	10 250

Se pide:

- a) Mediante la representación del diagrama de dispersión razonar el interés de relacionar dichas variables.
 b) Obtener la covarianza y el coeficiente de correlación entre ambas variables. Interpretar los resultados.

RESUMEN

Población estadística, colectivo o universo	El conjunto de todos los individuos (personas, objetos, animales, etc.) que contengan información sobre el fenómeno que se estudia.	Número de personas en España entre 16 - 65 años
Muestra	Es un subconjunto representativo que se selecciona de la población y sobre el que se va a realizar el análisis descriptivo. El tamaño de la muestra es el número de sus elementos. Cuando la muestra comprende a todos los elementos de la población, se denomina censo.	Número de personas en un barrio de Madrid entre 16 - 65 años.
Variable observable o estadística X	En general, supondremos que se está analizando una determinada población, de la que nos interesa cierta característica que viene dada por la variable X.	Las variables que están bajo estudio se pueden clasificar en dos categorías: - Variables cualitativas o atributos (datos no métricos) - Variables cuantitativas, que tienen un valor numérico.
Frecuencia absoluta	Número de veces que se repite un valor de la variable	Si al tirar un dado hemos obtenido 2 veces el 3, 2 es la frecuencia absoluta de 3.
Frecuencia relativa	Frecuencia absoluta dividido por el número de experimentos	Si se realiza un experimento 500 veces y la frecuencia absoluta de un suceso es 107, la frecuencia relativa es 107/500.
Frecuencia acumulada	Se suman las frecuencias anteriores	
Diagrama de rectángulos o barras	Los valores de la variable se representan mediante rectángulos de igual base y de altura proporcional a la frecuencia. Se indica en el eje horizontal la variable y en el vertical las frecuencias.	
Polígono de frecuencias	De unen los puntos medios superiores de un una diagrama de barras	
Diagrama de sectores	En un círculo se dibujan sectores de ángulos proporcionales a las frecuencias	
Media aritmética	Es el cociente entre la suma de todos los valores de la variable y el número total de datos.	En los datos 3, 5, 5, 7, 8, la media es: $(3 + 5 + 5 + 7 + 8)/5 = 28/5 = 5.6$.
Mediana	Deja por debajo la mitad de los valores y por encima la otra mitad	La mediana es 5
Moda	El valor que más se repite.	La moda es 5.
Varianza	Medida de desviación que recoge las desviaciones de los valores de la variable respecto de la media aritmética.	$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^N [(x_i - \bar{x})^2]}{N}$

Desviación típica	La desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza	
Coefficiente de variación	Permite comparar la variabilidad de distintas muestras, independientemente de sus unidades de medida.	$g = \frac{s}{ \bar{x} }$
Rango total o recorrido	Diferencia entre los valores máximos y mínimos que toma la variable en la muestra	$R = x_{\{N\}} - x_{\{1\}}$
Recorrido intercuartílico	Diferencia entre el tercer y el primer cuartil	$R_I = Q_3 - Q_1$

AUTOEVALUACIÓN

- Un diagrama de caja informa sobre:
 - Los cuartiles y curtosis.
 - Asimetría y varianza.
 - Datos atípicos y simetría.
- Sea la variable aleatoria número de personas que es capaz de levantar un ascensor. Para calcular el nº de personas a partir del cual se recoge el 30 % de los valores de la variable necesitamos obtener
 - El percentil 30
 - El percentil 3
 - El percentil 70
- El 25 % de los madrileños gastan en la factura del móvil por encima de 100 euros, mientras que el 25 % gastan por debajo de 20 euros. Entonces conocemos:
 - 100 y 20 son valores que corresponden al cuartil 1 y 3, respectivamente.
 - 100 y 20 son valores que corresponden al cuartil 3 y 1, respectivamente.
 - 100 y 20 son valores que no corresponden a ningún cuartil.
- En un diagrama de barras de frecuencias absolutas, la suma de sus alturas es proporcional a:
 - 100
 - 1
 - Total de valores de la variable
 - Suma de sus bases
- La media de los siguientes valores de la variable 3, 4, 6, 7, 5, 8, es:
 - 6
 - 7
 - 4.8
 - 5.5
- La mediana de los siguientes valores de la variable 3, 4, 6, 7, 8, es:
 - 6
 - 7
 - 4
 - 5
- La moda de los siguientes valores de la variable 3, 4, 6, 7, 5, 8, 7, 7, es:
 - 6
 - 7
 - 4
 - 5
- La media de 7 números es 8. Se añaden dos números más pero la media sigue siendo 8. ¿Cuánto suman estos dos números?
 - 10
 - 16
 - 20
 - 14
- Dos revistas especializadas en empleo, A y B, han publicado una media de ofertas de trabajo, de $m_A = 10$ y $m_B = 20$ con varianzas, respectivamente de $s^2_A = 4$ y $s^2_B = 9$.
 - La revista B presenta mayor coeficiente de variación que la revista A.
 - La revista A presenta mayor coeficiente de variación que la revista B.
 - La revista B presenta igual coeficiente de variación que la A
- El 70 % de los madrileños gastan en regalos navideños por encima de 100 euros, mientras que el 5 % gastan por encima de 500 euros. Entonces conocemos:
 - El valor correspondiente al percentil 30.
 - El valor correspondiente al percentil 70.
 - Al percentil 5.

CAPÍTULO 15: COMBINATORIA

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. PERMUTACIONES

- Haz diagramas en árbol y calcula:
 - Cuántas palabras de 2 letras distintas (con significado o sin él) puedes escribir con las letras A, B o C.
 - Cuántas palabras de 3 letras distintas que empiecen por vocal y terminen por consonante. Recuerda hay 5 vocales y 22 consonantes.
- Ana tiene 5 camisetas, 3 pantalones y 4 pares de zapatillas. ¿Puede llevar un modelo diferente durante dos meses (61 días)? ¿Cuántos días deberá repetir modelo? *Ayuda:* Seguro que un diagrama en árbol te resuelve el problema
- En un tablero cuadrado con 25 casillas, ¿de cuántas formas diferentes podemos colocar 2 fichas idénticas de modo que estén en distinta fila y en distinta columna? *Sugerencia:* Confecciona un diagrama de árbol. ¿Cuántas casillas hay para colocar la primera ficha? Si eliminamos su fila y su columna ¿En cuántas casillas podemos colocar la segunda ficha?
- ¿De cuántas formas pueden repartirse 4 personas, 4 pasteles distintos comiendo cada persona un pastel?
- En una carrera de caballos participan 5 caballos con los números 1, 2, 3, 4 y 5. ¿Cuál de ellos puede llegar el primero? Si la carrera está amañada para que el número 4 llegue el primero, ¿cuál de ellos puede llegar el segundo? Si la carrera no está amañada, ¿de cuántas formas distintas pueden llegar a la meta? Haz un diagrama en árbol para responder.
- ¿De cuántas maneras puedes meter 4 objetos distintos en 4 cajas, si sólo puedes poner un objeto en cada caja?
- ¿Cuántos países forman actualmente la Unión Europea? Puedes ordenarlos siguiendo diferentes criterios, por ejemplo por su población, o con respecto a su producción de acero, o por la superficie que ocupan. ¿De cuántas maneras distintas es posible ordenarlos?
- En el año 1973 había 6 países en el Mercado Común Europeo. ¿De cuántas formas puedes ordenarlos?
- El desempleo aumenta y en una oficina de colocación hay 7 personas. ¿De cuántas formas distintas pueden haber llegado?
- Calcula: a) $\frac{6!}{4!}$; b) $\frac{7!}{3!}$; c) $\frac{8!}{5! \cdot 3!}$; d) $\frac{6!}{5!}$; e) $\frac{12!}{11!}$; f) $\frac{347!}{346!}$.
- Calcula: a) $\frac{(n+1)!}{n!}$; b) $\frac{(n+4)!}{(n+3)!}$; c) $\frac{(n+4)!}{(n+2)!}$; d) $\frac{n!}{(n-1)!}$.
- Expresa utilizando factoriales: a) 5·4·3; b) 10·11·12·13; c) 8·7·6; d) 10·9.
- Expresa utilizando factoriales: a) $(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1)$; b) $n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)$; c) $n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot (n+k)$.
- Escribe en forma de factorial las distintas formas que tienen de sentarse en una clase los 30 alumnos en los 30 puestos que hay. No lo calcules. Es un número muy grande.
- Nueve amigos van en bicicleta por una carretera en fila india. ¿De cuántas formas distintas pueden ir ordenados?

2. VARIACIONES

- Con los 10 dígitos, ¿cuántos números distintos pueden formarse de 6 cifras?
- Con los 10 dígitos y 27 letras del alfabeto, ¿cuántas matrículas de coche pueden formarse tomando 4 dígitos y 3 letras?
- Un byte u octeto es una secuencia de 0 y 1 tomados de 8 en 8. ¿Cuántos bytes distintos pueden formarse?
- Calcula: a) $VR_{4,2}$; b) $VR_{4,4}$; c) $VR_{11,2}$; d) $VR_{2,11}$.
- Expresa con una fórmula:
 - Las variaciones con repetición de 3 elementos tomadas de 5 en 5.
 - Las variaciones con repetición de 7 elementos tomadas de 2 en 2.
 - Las variaciones con repetición de 5 elementos tomadas de 4 en 4.
- Disparamos al plato 4 veces. En cada disparo puede que des en el blanco (B) o que no des en el blanco (NB). ¿Cuántos resultados distintos hay?
- Escribe cuantas palabras de tres letras (con significado o no) puedes formar que empiecen por consonante y terminen con la letra R.
- Tres personas van a una pastelería en la que sólo quedan 4 pasteles distintos. ¿De cuántas formas distintas pueden elegir su pastel si cada una compra uno?
- Con los 10 dígitos se desean escribir números de 4 cifras, todas ellas distintas. ¿Cuántas posibilidades hay para escribir la 1ª cifra? Una vez elegida la primera, ¿cuántas hay para elegir la 2ª? Una vez elegidas las dos primeras, ¿cuántas hay para la 3ª? ¿Cuántas posibilidades hay en total?

25. Si tienes 9 elementos diferentes y los tienes que ordenar de 5 en 5 de todas las formas posibles, ¿cuántas hay?
26. Con las letras A, B y C, ¿cuántas palabras de 2 letras no repetidas podrías escribir?
27. Con los dígitos 3, 5, 7, 8, 9, ¿cuántos números de 3 cifras distintas puedes formar?
28. Calcula: a) $V_{11,6}$; b) $V_{7,5}$; c) $V_{8,4}$.
29. Calcula: a) $\frac{7!}{3!}$; b) $\frac{6!}{4!}$; c) $\frac{10!}{8!}$.

3. COMBINACIONES

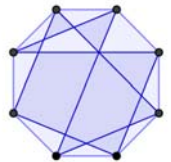
30. Tenemos 5 bombones (iguales) y hay 7 amigos, ¿de cuántas formas se pueden repartir los bombones si a ninguno le vamos a dar más de un bombón?
31. Juan quiere regalar 3 DVDs a Pedro de los 10 que tiene, ¿de cuántas formas distintas puede organizar el regalo?
32. En el juego del póker se dan 5 cartas a cada jugador de las 52 que tiene la baraja, ¿de cuántas maneras diferentes se pueden recibir?
33. Añade al triángulo de Tartaglia del margen 3 filas más.
34. Suma los números de cada fila y comprueba que la suma de la fila m da siempre 2^m .
35. Sin calcularlo, mirando al triángulo, ¿cuánto vale $C_{5,3}$; $C_{5,4}$; $C_{5,2}$; $C_{5,5}$.
36. Desarrolla $(a + b)^6$
37. Desarrolla a) $(a - b)^6$; b) $(x - 3)^4$; c) $(x + 2)^7$; d) $(-x + 3)^5$.

1	1	$2 = 2^1$		
1	2	1	$4 = 2^2$	
1	3	3	1	$8 = 2^3$

38. Calcula el coeficiente de x^7 del polinomio que se obtiene al desarrollar $\left(3x - \frac{x^2}{2}\right)^5$
39. Expresa con radicales simplificados el polinomio que se obtiene al desarrollar $\left(-\frac{x}{2} + \sqrt{2}\right)^5$

4. OTROS PROBLEMAS DE COMBINATORIA

40. Tres amigos A, B y C están jugando a las cartas. Cada uno pasa una carta al que está a su derecha. Uno es español, otro italiano y el otro portugués. A le pasa una carta al italiano. B se la ha pasado al amigo que se la ha pasado al español. ¿Cuál de los amigos es español, cuál italiano y cuál portugués? *Ayuda:* Haz un diagrama circular como el anterior.
41. Ana y Alejandro invitan a cenar a 3 amigos y 3 amigas, ¿cuántas formas tienen de colocarse en una mesa redonda? ¿En cuántas están juntos Ana y Alejandro? ¿En cuántas no hay dos chicos ni dos chicas juntos?
42. ¿Cuántas poligonales cerradas se pueden dibujar con los 8 vértices de un octógono?
43. Con los dígitos 1, 2, y 3 cuántos números distintos de 7 cifras puedes formar con tres veces la cifra 1, dos veces la cifra 2 y dos veces la cifra 3.
44. Con las letras de la palabra CARCAJADA, ¿cuántas palabras con estas 9 letras, con sentido o sin él, se pueden formar?
45. Tenemos dos bolas blancas, tres negras y cuatro rojas, ¿de cuántas formas distintas podemos ordenarlas? ¿Cuántas no tienen las dos blancas juntas?
46. El candado de mi maleta tiene 7 posiciones en las que podemos poner cualquiera de los 10 dígitos del 0 al 9. ¿Cuántas contraseñas diferentes podría poner?, ¿cuántas tienen todos sus números distintos? ¿Cuántas tienen algún número repetido? ¿Cuántas tienen un número repetido dos veces? *Ayuda:* Observa que para calcular las que tienen algún número repetido lo más fácil es restar del total las que tienen todos sus números distintos.
47. ¿De cuántas maneras se pueden introducir 7 bolas idénticas en 5 cajas diferentes colocándolas todas si ninguna caja puede quedar vacía? ¿Y si podemos dejar alguna caja vacía? *Ayuda:* Ordena las bolas en una fila separadas por 4 puntos así quedan divididas en 5 partes, que indican las que se colocan en cada caja.
48. ¿Cuántas pulseras diferentes podemos formar con 4 bolas blancas y 6 rojas? *Ayuda:* Este problema es equivalente a introducir 6 bolas iguales en 4 cajas idénticas pudiendo dejar cajas vacías.
49. ¿Cuántas formas hay de colocar al rey blanco y al rey negro en un tablero de ajedrez de forma que no se ataquen mutuamente. ¿Y dos alfiles? ¿Y dos reinas?



EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Permutaciones

- Tres nadadores echan una carrera. ¿De cuántas formas pueden llegar a la meta si no hay empates? ¿Y si son 8 nadadores?
- Loli, Paco, Ana y Jorge quieren fotografiarse juntos, ¿de cuántas maneras pueden hacerse la fotografía? Quieren situarse de manera que alternen chicos con chicas, ¿de cuántas maneras pueden ahora hacerse la fotografía?
- ¿De cuántas maneras se pueden introducir 6 objetos distintos en 6 cajas diferentes si sólo se puede poner un objeto en cada caja?
- En una parada de autobús hay 5 personas, ¿en cuántos órdenes distintos pueden haber llegado a la parada? Al llegar una nueva persona se apuesta con otra a que adivina el orden de llegada, ¿qué probabilidad tiene de ganar?
- Siete chicas participan en una carrera, ¿de cuántas formas pueden llegar a la meta? No hay empates. ¿Cuál es la probabilidad de acertar el orden de llegada a la meta?
- ¿Cuántos números distintos y de cinco cifras distintas pueden formarse con los dígitos 3, 4, 5, 6, y 7? ¿Cuántos pueden formarse si todos empiezan por 5? ¿Y si deben empezar por 5 y terminar en 7?

Variaciones

- ¿Cuántos números de 4 cifras distintas se pueden escribir con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6? ¿Cuántos de ellos son impares? ¿Cuántos son múltiplos de 4? Recuerda: Un número es múltiplo de 4 si el número formado por sus dos últimas cifras es múltiplo de 4.
- ¿Cuántos números de 4 cifras, distintas o no, se pueden escribir con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6? Calcula la suma de todos ellos. Sugerencia: Ordénalos de menor a mayor y suma el primero con el último, el segundo con el penúltimo, el tercero con el antepenúltimo y así sucesivamente
- ¿Cuántas banderas de 3 franjas horizontales de colores distintos se pueden formar con los colores rojo, amarillo y morado? ¿Y si se dispone de 5 colores? ¿Y si se dispone de 5 colores y no es preciso que las tres franjas tengan colores distintos?
- A Mario le encanta el cine y va a todos los estrenos. Esta semana hay 6, y decide ir cada día a uno. ¿De cuántas formas distintas puede ordenar las películas? Mala suerte. Le anuncian un examen y decide ir al cine solamente el martes, el jueves y el sábado. ¿Entre cuántas películas puede elegir el primer día? ¿Y el segundo? ¿Y el tercero?
- Con los dígitos {0, 1, 2, 3, 4, 5}, ¿cuántos números de cuatro cifras diferentes se pueden formar? (Observa: Si comienza por 0 no es un número de cuatro cifras). ¿Cuántos son menores de 3000?
- ¿Cuántos números de tres cifras, diferentes o no, se pueden formar? De éstos, ¿cuántos son mayores que 123?
- Con las letras de la palabra "arquetipo" ¿Cuántas palabras de 6 letras se pueden formar que no tengan dos vocales ni dos consonantes juntas? a) Si todas las letras son distintas. b) Si se pueden repetir letras.
- El lenguaje del ordenador está escrito en secuencias de ceros y unos. Un byte es una de estas secuencias y está formada, en general, por 8 dígitos. ¿Cuántos bytes diferentes se pueden formar? Si se fabricara un ordenador cuyos bytes tuvieran 16 dígitos, ¿cuántos bytes diferentes se podrían formar ahora? Si se fabricara un ordenador cuyos bytes tuvieran 4 dígitos, ¿se podría escribir con ellos las letras del alfabeto?

Combinaciones

- Escribe dos números combinatorios con elementos diferentes que sean iguales y otros dos que sean distintos.
- Tienes siete bolas de igual tamaño, cuatro blancas y tres negras, si las colocas en fila. ¿De cuántas formas puede ordenarlas?
- Con 5 latas de pintura de distintos colores, ¿cuántas mezclas de 3 colores podrás hacer?
- Calcula: a) $\binom{6}{3}$; b) $\binom{8}{5}$; c) $\binom{20}{1}$; d) $\binom{34}{0}$; e) $\binom{47}{47}$.
- Calcula: a) $C_{9,3}$; b) $C_{10,6}$; c) $C_{8,4}$; d) $C_{20,19}$; e) $C_{47,1}$.
- ¿De cuántas maneras se puede elegir una delegación de 4 estudiantes de un grupo de 30? ¿Y en tu propio grupo?
- ¿Cuántos productos diferentes se pueden formar con los números: 2, $\frac{1}{3}$, 7, 5 y π tomándolos de 3 en 3? ¿Cuántos de esos productos darán como resultado un número entero? ¿Cuántos un número racional no entero? ¿Cuántos un número irracional?
- ¿Cuántas aleaciones de 3 metales pueden hacerse con 7 tipos distintos de metales?
- Calcula: a) $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$ b) $\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}$
- ¿Podrías calcular $\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \binom{8}{5} + \binom{8}{6} + \binom{8}{7} + \binom{8}{8}$ sin calcular cada uno de los números combinatorios?

25. ¿De cuántas formas puedes separar un grupo de 10 estudiantes en dos grupos de 3 y 7 estudiantes respectivamente?
26. Vas a examinarte de una asignatura en la que hay 20 temas, y en el examen van a poner 2. ¿Cuántas posibilidades hay? Te sabes sólo 16 temas. ¿Cuántas posibilidades hay de que te toquen dos temas que no te sepas? ¿Cuál es la probabilidad de que te toquen dos temas que no te sepas? ¿Y la de que te toque sólo un tema que no te sepas?
27. Un grupo de 10 alumnos de 4º de ESO van a visitar un museo en el que pueden elegir entre dos actividades diferentes. ¿Cuántas formas distintas puede haber de formar los grupos de alumnos?

28. Desarrolla el binomio a) $(4 - x)^5$; b) $(3 - 2x)^4$; c) $(2ab - 3c)^6$; d) $\left(\frac{x}{2} - \sqrt{2x}\right)^3$

29. Calcula x en las siguientes expresiones:

a) $\binom{x+2}{x} = \binom{6}{4} + \binom{6}{x}$ b) $\binom{10}{x} = \binom{10}{x+2}$ c) $\binom{x+3}{x} = \binom{7}{4} + \binom{7}{x}$ d) $\binom{12}{x} = \binom{12}{x+2}$

30. Escribe el valor de x en las igualdades siguientes:

a) $\binom{4}{3} = \binom{4}{x}$, $x \neq 3$; b) $\binom{7}{3} = \binom{7}{x}$, $x \neq 3$; c) $\binom{4}{3} = \binom{3}{x} + \binom{3}{2}$;

d) $\binom{2x+1}{5} = \binom{8}{x} + \binom{8}{5}$; e) $\binom{7}{x-3} = \binom{6}{3} + \binom{x}{2}$; f) $\binom{7}{x} = \binom{7}{x+3}$

31. Calcula en función de n la suma de los siguientes números combinatorios:

a) $\binom{n}{3} + \binom{n}{4}$ b) $\binom{n}{2} + n$ c) $\binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3}$

$$\left(\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{2}}{x}\right)^{10}$$

32. Halla el término sexto en el desarrollo de:

33. Halla el coeficiente de x^2 en el desarrollo de: $(-1 - 5x)^9$.

34. ¿Cuántas opciones hay para elegir cuatro asignaturas entre siete optativas?

35. Se juega una partida de tiro al plato y se disparan sucesivamente 12 platos. ¿Cuál es el número de sucesos en los que se obtienen 4 éxitos, es decir se acierta 4 veces en el blanco? En el mismo caso anterior, ¿cuál es la probabilidad de tener éxito en el último tiro?

Problemas

36. Con 7 discos y 6 letras en cada disco, ¿cuántas combinaciones distintas se pueden hacer? Ayuda: En el primer disco podemos poner cualquiera de las 6 letras. Lo mismo en el segundo. ¿Y en el tercero? ¡Pero si es facilísimo! Si ya sabemos resolverlo.

37. En un restaurante hay 5 primeros platos, 4 segundos y 6 postres, ¿de cuántas formas diferentes se puede combinar el menú?

38. Lanzamos una moneda y luego un dado, ¿Cuántos resultados distintos puedes obtener? ¿Y si lanzamos dos monedas y un dado? ¿Y si fuesen 3 monedas y 2 dados?

39. Se están eligiendo los actores y actrices para hacer de protagonistas en una teleserie. Se han presentado 6 chicos y 8 chicas. ¿Cuántas parejas distintas podrían formar?

40. Una caja de un conocido juego educativo tiene figuras rojas, amarillas y azules, que pueden ser triángulos, círculo o cuadrados, y de dos tamaños, grandes y pequeñas. ¿De cuántas piezas consta la caja?

41. En un restaurante hay 8 primeros platos y 5 segundos, ¿cuántos tipos de postres debe elaborar el restaurante para poder asegurar un menú diferente los 365 días del año?

42. En una reunión todas las personas se estrechan la mano. Hubo 91 apretones. ¿Cuántas personas había? Y si hubo 45 apretones, ¿cuántas personas había?

43. ¿De cuántas maneras se pueden introducir 5 objetos distintos en 5 cajas diferentes si sólo se puede poner un objeto en cada caja? ¿Y si se pueden poner varios objetos en cada caja colocando todos? ¿Cuál es la probabilidad de que en la primera caja no haya ningún objeto?

44. La mayor parte de las contraseñas de las tarjetas de crédito son números de 4 cifras. ¿Cuántas posibles contraseñas podemos formar? ¿Cuántas tienen algún número repetido? ¿Cuántas tienen un número repetido dos veces?

45. Tenemos 10 rectas en el plano que se cortan 2 a 2, es decir, no hay rectas paralelas. ¿Cuántos son los puntos de intersección?, ¿y si tienes 15 rectas?, ¿y si tienes n rectas?

46. ¿Cuántas diagonales tiene un octógono regular?, ¿y un polígono regular de 20 lados?

47. Utiliza una hoja de cálculo (o una calculadora) para comprobar los resultados de:

a) $P_{10} = 10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$.

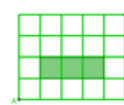
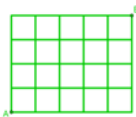
b) $VR_{2,4} = 2^4$

c) $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6!}{3!} = 120$

d) $C_{6,3} = 20$

48. ¿Cuántas diagonales tiene un icosaedro regular?, ¿y un dodecaedro regular? Ayuda: Recuerda que el icosaedro y el dodecaedro son poliedros duales, es decir, el número de caras de uno coincide con el número de vértices del otro. Para saber el número de aristas puedes utilizar la Relación de Euler: $C + V = A + 2$
49. ¿Cuántos números diferentes de 5 cifras distintas puedes formar con los dígitos 1, 2, 3, 5 y 7? ¿Cuántos que sean múltiplos de 5? ¿Cuántos que empiecen por 2? ¿Cuántos que además de empezar por 2 terminen en 7?
50. Con 5 bolas de 3 colores distintos, a) ¿Cuántas filas diferentes puedes formar de 5 bolas? b) ¿Cuántas pulseras distintas puedes formar de 5 bolas?
51. Con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, ¿cuántos números de cinco cifras distintas se pueden formar? Calcula la suma de todos estos números.
52. Calcula x en los siguientes casos: a) $V_{x,3} = C_{x,2}$ b) $V_{x,5} = 6 V_{x,3}$ c) $\frac{C_{x+1,14}}{C_{x,2}} = \frac{7}{3}$
53. Hace muchos años las placas de matrícula eran como esta: M 123456; luego fueron como ésta: M1234 A; y actualmente como ésta: 1234 ABC. Investiga qué ventajas tiene cada uno de estos cambios respecto al anterior.
54. Iker y María juegan al tenis y deciden que gana aquel que primero gane 3 sets. ¿Cuál es el número máximo de sets que tendrán que disputar? ¿Cuántos desarrollos posibles puede tener el encuentro?
55. Pedro conoció ayer a una chica. Lo pasaron muy bien y ella le dio su número de móvil, pero él no llevaba su móvil ni bolígrafo. Pensó que se acordaría, pero... sólo recuerda que empezaba por 656, que había otras cuatro que eran todas distintas entre sí y menores que 5. Calcula cuántas posibilidades tiene de acertar si marca un número. Demasiadas. Hace memoria y recuerda que las dos últimas son 77. ¿Cuántas posibilidades hay ahora de acertar haciendo una llamada?
56. Un club de alpinistas ha organizado una expedición al Kilimanjaro formada por 11 personas, 7 expertos y 4 que están en formación. En un determinado tramo sólo pueden ir 3 expertos y 2 que no lo sean, ¿de cuántas formas puede estar compuesto ese equipo de 5 personas? Tú eres un experto, y vas a ir en ese tramo, ¿cuántas formas hay ahora de componerlo?
57. En los billetes de una línea de autobuses va impreso la estación de partida y la de llegada. Hay en total 8 posibles estaciones. ¿Cuántos billetes diferentes tendría que imprimir la empresa de autobuses? Ahora quieren cambiar el formato y sólo imprimir el precio, que es proporcional a la distancia. Las distancias entre las estaciones son todas distintas. ¿Cuántos billetes diferentes tendría que imprimir en este caso?
58. Una pareja tiene un hijo de 3 años que entra en la guardería a las 9 de la mañana. El padre trabaja en una fábrica que tiene 3 turnos mensuales rotativos: de 0 a 8, de 8 a 16 y de 16 a 24 horas. La madre trabaja en un supermercado que tiene dos turnos rotativos mensuales, de 8 a 14 y de 14 a 20 horas. ¿Cuántos días al año, por término medio, no podrá ninguno de los dos llevar a su hijo a la guardería?
59. Un tiro al blanco tiene 10 caballitos numerados que giran. Si se acierta a uno de ellos se enciende una luz con el número del caballito. Tiras 3 veces, ¿de cuántas maneras se pueden encender las luces? ¿Y si el primer tiro no da a ningún caballito?
60. En una fiesta hay 7 chicas y 7 chicos. Juan baila siempre con Ana. Antonio es el más decidido y siempre sale a bailar el primero, ¿de cuántas formas puede elegir pareja en los próximos 4 bailes?
61. Con los dígitos $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
- ¿Cuántos números de cinco cifras se pueden formar?
 - ¿Cuántos hay con dos veces la cifra 1 y tres la cifra 2?
 - Calcula la suma de todos estos últimos números.
62. ¿Cuántas palabras, con o sin sentido, se pueden formar con las letras de la palabra "puerta" que no tengan dos vocales ni dos consonantes juntas?
63. En una compañía militar hay 10 soldados, ¿cuántas guardias de 3 soldados pueden hacerse? Uno de los soldados es Alejandro, ¿en cuántas de estas guardias estará? ¿Y en cuántas no estará?
64. ¿Cuántos números capicúas de dos cifras existen? ¿Y de tres cifras? ¿Y de cuatro cifras?
65. Con las letras de la palabra "argumento" ¿Cuántas palabras de 5 letras se pueden formar que no tengan dos vocales ni dos consonantes juntas? a) Si todas las letras son distintas. b) Se pueden repetir letras.
66. ¿Cuántos números hay entre el 6 000 y el 9 000 que tengan todas sus cifras distintas?
67. Una fábrica de juguetes tiene a la venta 8 modelos distintos. ¿Cuántos muestrarios distintos puede hacer de 4 juguetes cada uno? ¿Cuál es la probabilidad de que el último modelo de avión fabricado llegue a un determinado cliente? Si se quiere que en esos muestrarios siempre esté el último modelo de juguete fabricado, ¿cuántos muestrarios distintos puede hacer ahora?
68. La encargada de un guardarropa se ha distraído, y sabe que de los cinco últimos bolsos que ha recogido a tres bolsos les ha puesto el resguardo equivocado y a dos no. ¿De cuántas formas se puede haber producido el error? ¿Y si fuesen dos los equivocados?

69. La primera obra impresa con resultados de Combinatoria es "Summa" de Luca Pacioli, de 1494. En esta obra se propone el siguiente problema: ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse cuatro personas en una mesa circular?
70. ¿Cuántos números de cuatro cifras tienen al menos un 5?
71. Con las letras de la palabra "saber", ¿cuántas palabras, con o sin sentido, de letras diferentes, se pueden formar que no tengan dos vocales ni dos consonantes juntas. Lo mismo para las palabras "corte", "puerta" y "Alberto".
72. Considera la sucesión de números naturales 1, 3, 6, 10, 15, ... ¿cuál es el siguiente término de esta sucesión? ¿Qué ley de recurrencia permite calcular el siguiente término de la sucesión? ¿Cuál es su término general?
73. Con los dígitos 1, 3 y 5, ¿cuántos números menores de 6 000 se pueden formar? ¿Cuántos hay con 4 cifras que tengan dos veces la cifra 5?
74. Con las letras de la palabra GRUPO, ¿cuántas palabras de 5 letras con o sin sentido se pueden formar que tengan alguna letra repetida?
75. En una baraja española hacemos 5 extracciones con reemplazo, ¿cuál es la probabilidad de obtener más de 3 ases? ¿y la probabilidad de obtener menos de 4 ases?
76. Caminos en una cuadrícula: a) ¿Cuántos caminos hay para ir de A hasta B si sólo podemos ir hacia la derecha y hacia arriba?
 b) Si no podemos atravesar el cuadrado verde, ni caminar por sus lados, ¿cuántas formas tenemos ahora para ir desde A hacia B?
 c) Si no podemos atravesar el rectángulo verde, ni caminar por sus lados, ¿cuántas formas tenemos ahora para ir desde A hacia B?



- d) ¿Cuántos caminos hay en una cuadrícula cuadrada con n caminos en cada lado?
 e) ¿Cuántos caminos hay en una cuadrícula rectangular con m caminos verticales y n horizontales?

AUTOEVALUACIÓN

1. Tienes nueve monedas de euro que colocas en fila. Si cuatro muestran la cara y cinco la cruz ¿De cuántas formas distintas puedes ordenarlas?: a) $V_{9,4}$ b) P_9 c) $C_{9,5}$ d) $VR_{9,5}$
2. En una compañía aérea hay 10 azafatas, y un avión necesita a 4 en su tripulación, ¿de cuántas formas se puede elegir esa tripulación?: a) $V_{10,4}$ b) P_{10} c) $C_{10,4}$ d) $VR_{10,4}$
3. ¿Cuántos productos distintos pueden obtenerse con tres factores diferentes elegidos entre los dígitos: 2, 3, 5 y 7?
 a) $V_{4,3}$ b) P_4 c) $C_{4,3}$ d) $VR_{4,3}$
4. Tenemos 5 objetos y los queremos guardar en 5 cajas, un objeto en cada caja, ¿de cuántas formas podemos hacerlo?: a) $V_{5,1}$ b) P_5 c) $C_{5,5}$ d) $VR_{5,1}$
5. Permutaciones de $n+4$ elementos dividido por permutaciones de $n+1$ elementos es igual a:
 a) $(n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2) = \frac{(n+4)!}{(n+1)!}$ b) $V_{n+4, n+2}$ c) $\frac{(n+4)!}{n!}$ d) $V_{n+4, n+2} / C_{n+4, n+1}$
6. Las variaciones de 10 elementos tomados de 6 en 6 es igual a
 a) $VR_{6,10}$ b) $V_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \frac{10!}{6!}$ c) $V_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{10!}{4!}$ d) $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6!}{3!}$
7. Indica qué afirmación es falsa; a) $0! = 1$; b) $V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot (m-n)$; c) $VR_{m,n} = m^n$; d) $P_n = n!$
8. El valor de los siguientes números combinatorios $\binom{5}{0}$, $\binom{9}{9}$, $\binom{4}{1}$ es: a) 0, 1, y 1; b) 0, 9 y 4; c) 1, 1 y 4; d) 5, 9 y 4
9. El valor de x , distinto de 4, en $\binom{7}{4} = \binom{7}{x}$ es: a) 3 b) 7 c) 1 d) 0
10. El coeficiente del término cuarto del desarrollo del Binomio de Newton de $(a+b)^7$ es: a) $\binom{7}{3}$; b) 1; c) $\binom{7}{4}$; d) $V_{7,4}$

RESUMEN

Permutaciones	Influye sólo el orden. $P_n = n!$	$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$
Variaciones con repetición	Influye el orden y los elementos. Los elementos pueden repetirse. $VR_{m,n} = m^n.$	$VR_{2,4} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$
Variaciones sin repetición	Influye el orden y los elementos. Los elementos NO pueden repetirse. $V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$	$V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6!}{3!} = 120$
Combinaciones	Influyen sólo los elementos. $C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!} = \binom{m}{n}$	$C_{9,7} = \binom{9}{7} = \frac{9!}{2! \cdot 7!} = 36$
Propiedades de los números combinatorios	$\binom{m}{0} = 1; \binom{m}{m} = 1; \binom{m}{n} = \binom{m}{m-n};$ $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$	$\binom{5}{0} = \binom{5}{5} = 1; \binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10;$ $\binom{5}{3} = \binom{4}{3} + \binom{4}{2} = 6 + 4$
Binomio de Newton	$(a+b)^n =$ $\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$	$(a+b)^4 =$ $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
Triángulo de Tartaglia	$\begin{array}{c} \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\ \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\ \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\ \dots \end{array}$	$\begin{array}{cccc} & & 1 & 1 \\ & & 1 & 2 & 1 \\ & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ & & & & \dots & \end{array}$

CAPÍTULO 16: PROBABILIDAD

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. EXPERIENCIA Y PROBABILIDAD

- En una caja tenemos mezclados 25 clavos de 2 cm de largo, 15 clavos de 3 cm, 20 clavos de 2.5 cm y 40 clavos de 3.5 cm. Sacamos al azar un clavo de la caja (se asume que todos los clavos tienen la misma probabilidad de ser elegidos). ¿Qué probabilidad hay de que el clavo extraído tenga la menor longitud?
- La ruleta francesa consta de los números que van del 0 al 36. Si sale 0 gana la banca. Decidimos apostar a “par” (ganaremos si sale un número par no nulo). ¿Qué probabilidad tenemos de ganar la apuesta? b) La ruleta americana consta de un 0, un 00 y de los números que van del 1 al 36. Si sale 0 o 00 gana la banca. Decidimos apostar a “par” (ganaremos si sale un número par no nulo). ¿Qué probabilidad tenemos de ganar la apuesta?
- En un instituto de 800 alumnos hay 400 estudiantes que hablan inglés, 300 que hablan francés, 100 que hablan alemán, 100 que hablan inglés y francés, 80 que hablan inglés y alemán, 50 que hablan francés y alemán y 30 que hablan los tres idiomas. Se elige un estudiante al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que hable solamente una lengua extranjera?
- Vuelve a hacer todos los apartados del ejemplo anterior pero sustituyendo en cada caso “bola blanca” por “bola roja”. Es decir, la bolsa tiene ahora 6 bolas rojas y una bola negra:
 - Se extraen dos bolas al mismo tiempo. ¿Cuál es la probabilidad de que sean una roja y una negra?
 - Se extrae una bola de la bolsa. Después se saca una segunda bola, sin volver a meter en la bolsa la primera. ¿Cuál es la probabilidad de que tras la segunda extracción tengamos una bola roja y una bola negra?
 - Se extrae una bola de la bolsa. Después se saca una segunda bola, sin volver a meter en la bolsa la primera. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola sea roja y la segunda negra?
 - Se extrae una bola de la bolsa. Tras mirar de qué color se introduce en la bolsa de nuevo. Se saca una segunda bola. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola sea roja y la segunda negra?
 - Se extrae una bola de la bolsa. Tras mirar de qué color se introduce en la bolsa de nuevo. Se saca una segunda bola. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos veces haya salido la bola negra?
 - Se extrae una bola de la bolsa. Tras mirar de qué color se introduce en la bolsa de nuevo. Se saca una segunda bola. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos veces haya salido una bola roja?
- En la lotería primitiva una apuesta consiste en marcar 6 casillas de entre 49 posibles. El día del sorteo se extraen 6 bolas (de entre 49). ¿Cuál es la probabilidad de que tu apuesta coincida con la combinación ganadora? ¿Cuál es la probabilidad de que aciertes únicamente 5 números? ¿Y la de que aciertes únicamente 4 números?
- Se llama *trío* a la jugada que consiste en 3 cartas del mismo valor y otras dos de diferente valor al de esas 3 y además con diferentes valores entre sí. Calcula la probabilidad de obtener un *trío de ases* en una jugada de 5 cartas.
 - Calcula la probabilidad de obtener un *trío* cualquiera.
- Se llama *escalera de color* a una jugada compuesta por 5 cartas del mismo palo ordenadas consecutivamente. Calcula la probabilidad de obtener esta *escalera de color*:



b) Calcula la probabilidad de obtener una *escalera de color* cualquiera. La *escalera de color* puede ser As, 2, 3, 4, 5, que es la *escalera de color* mínima, o bien, 10, J, Q, K, As que es la *escalera de color* máxima o *escalera real*.

- Se llama *color* a una jugada compuesta por 5 cartas del mismo palo que no son consecutivas. Calcula la probabilidad de obtener *color* en una jugada.

2. PROFUNDIZANDO EN LA TEORÍA

9. Se consideran los siguientes experimentos aleatorios:

- 1) Se tienen 5 fichas de Scrabble formando la palabra CASAS. Se meten en una bolsa y se extraen 3 fichas.
- 2) Se mezcla una baraja de póker, se corta y se mira el valor de la carta superior.
- 3) Un monedero contiene 4 monedas de 5 céntimos, 2 monedas de 10 céntimos y 1 moneda de 20 cm. Se extraen al azar dos monedas de él.
- 4) De los 30 alumnos de una clase se elige uno al azar. Se le pregunta en qué mes ha nacido.
 - a) Describe los espacios muestrales de cada uno de los 4 experimentos aleatorios anteriores.
 - b) Indica los sucesos contrarios a
 1. {AAC}
 2. {A, 2, 3, 4, 5}
 3. Sacar una cantidad par de céntimos.
 4. Haber nacido en un mes en el que seguro que es verano.
 - c) ¿Son independientes estos pares de sucesos?
 1. {AAC} y {{ASA}, {CAS}}
 2. “Obtener un 6” y “obtener un número par”
 3. “Obtener una cantidad par de céntimos” y “sacar dos monedas de 5 céntimos”
 4. “Haber nacido en un mes que seguro es de verano” y “haber nacido en junio”

10. Elabora un árbol de probabilidades para calcular la probabilidad de obtener *doble pareja* en una jugada de 5 cartas de póker. (*Doble pareja* consiste en 2 pares de cartas del mismo valor, diferentes entre sí, y una carta indiferente, de valor distinto a los dos anteriores. Por ejemplo, AA 33 Q).

11. En el monedero tengo 3 monedas de un céntimo, 2 de 5 céntimos, 3 de 10 céntimos, 1 de 20 y 1 de 50 céntimos. Saco 3 monedas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga un número par de céntimos?

12. Un analista deportivo, que se equivoca el 20 % de las veces, ha dicho que nuestro equipo favorito va a ganar la liga. El analista de la competencia, que se equivoca el 25 % de las veces, ha dicho que nuestro equipo favorito no va a ganar la liga. A tenor de dichos análisis. ¿Qué probabilidad hay de que nuestro equipo gane la liga?

13. Una compañía de productos avícolas empaqueta docenas de huevos en tres lugares diferentes. El 40 % de la producción tiene lugar en la planta A, el 25 % en B y el resto en C. Un control de calidad nos dice que un 5 % de los paquetes elaborados en A, un 10 % de los de B y un 8 % de los de C contienen algún huevo roto. ¿Qué probabilidad hay de que nos toque una docena de huevos con algún huevo roto?

14. En un instituto con 300 alumnos se está estudiando si la calificación obtenida en *Lengua Española* tiene que ver con la calificación obtenida en *Matemáticas*. Tras hacer una encuesta, se obtienen los siguientes resultados:

		Matemáticas		
		Sobresaliente	Notable	Otro
Lengua	Sobresaliente	110	25	18
	Notable	420	70	40
	Otro	10	5	2

Se elige un alumno al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que haya tenido un sobresaliente en *Lengua*, si lo ha tenido en *Matemáticas*? ¿Cuál es la probabilidad de que haya tenido un sobresaliente en *Matemáticas*, si lo ha tenido en *Lengua*?

3. CÁLCULO DE PROBABILIDADES

- Una bolsa contiene 9 bolas rojas y 6 bolas negras. Se extrae al azar una de ellas y se sustituye por dos del otro color. Tras ello se extrae una segunda bola. ¿Qué probabilidad hay de que la segunda bola sea roja? ¿Qué probabilidad hay de que la segunda bola sea del mismo color que la primera?
- En el comedor escolar la probabilidad de que no haya pasta una semana es $1/3$; la probabilidad de que haya pollo es $3/5$ y la probabilidad de que haya pasta y pollo es $4/7$. Calcula la probabilidad de que no haya ni pasta ni pollo. Calcula la probabilidad de que no haya pollo sabiendo que ha habido pasta.
- Tenemos en el bolsillo monedas procedentes de 3 países: españolas (60 %), francesas (30 %) y alemanas (el resto). El 30 % de las monedas españolas y el 20 % de las francesas son de 50 céntimos. También sabemos que del total de monedas, el 30 % son de 50 céntimos. Se extrae una moneda al azar. ¿Qué probabilidad hay de que sea una moneda francesa de 50 céntimos? ¿Qué probabilidad hay de que sea una moneda de 50 céntimos, sabiendo que es alemana?
- En una clase hay 24 alumnos y 16 alumnas. Se forman equipos de trabajo de 5 personas. Calcula la probabilidad de formar un equipo en las siguientes condiciones:
 - todos los participantes son del mismo sexo.
 - en el equipo hay al menos 3 chicas.
 - en el equipo hay exactamente 3 chicas.
 - En el equipo hay 3 estudiantes de un sexo y 2 de otro.
- Supón que se sortea ser delegado de tu clase por el método descrito antes. ¿Quién tendría más probabilidad de salir? ¿Hay alguien que no tendría ninguna posibilidad? Hazlo con una lista de tu clase.
- Toma 2 cartulinas de colores, cada una de un color distinto (por ejemplo, roja y azul) y recorta en cada una de ellas 3 rectángulos del mismo tamaño. Pega esos rectángulos entre sí de modo que uno sea rojo-rojo, otro azul-azul y otro rojo-azul. Mete las 3 cartulinas así preparadas en un sobre y saca una al azar, con cuidado de no mostrar nada más que un lado. Pregunta a un compañero que “adivine” el color de la cara que está oculta. Repite el proceso con todos los compañeros. Escribe los resultados del experimento en una tabla como esta que copies en tu cuaderno:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Oculto																														
Apuesta																														
Sale																														
¿acierta?																														

¿Qué observas? ¿Es mejor decir que el color oculto es el mismo que el visible? ¿O es peor?

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

- En una clase hay 15 chicos y 18 chicas. Como no se presenta nadie para ser delegado se hace un sorteo. ¿Cuál es la probabilidad de que en la clase haya delegada?
- En el monedero tenemos 8 monedas de 1 céntimo, 3 monedas de 5 céntimos, 8 monedas de 10 céntimos y 5 monedas de 50 céntimos. Sacamos una moneda al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la cantidad obtenida sea un número par de céntimos?
- En una caja tenemos mezclados 50 clavos de 2 cm de largo, 30 clavos de 3 cm, 35 clavos de 2,5 cm y 60 clavos de 3,5 cm. Sacamos al azar un clavo de la caja (se asume que todos los clavos tienen la misma probabilidad de ser elegidos). ¿Qué probabilidad hay de que el clavo extraído tenga la menor longitud?
- En un instituto de mil estudiantes hay 700 que hablan inglés, 400 que hablan francés, 50 que hablan alemán, 200 que hablan inglés y francés, 30 que hablan inglés y alemán, 10 que hablan francés y alemán y 5 que hablan los tres idiomas. Se elige un estudiante al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que hable solamente una lengua extranjera?
- La ruleta francesa consta de los números que van del 0 al 36. Si sale 0 gana la banca. Decidimos apostar a “par” (ganaremos si sale un número par no nulo). ¿Qué probabilidad tenemos de ganar la apuesta? ¿Y si apostamos a 7? ¿Y si apostamos a un número impar?

6. Una bolsa contiene 7 bolas blancas, 5 bolas rojas y 3 bolas negras. Se extraen dos bolas al mismo tiempo. ¿Cuál es la probabilidad de que sean una blanca y una negra?
7. Una bolsa contiene 10 bolas blancas, 9 bolas rojas y una bola negra. Se extrae una bola de la bolsa. Después se saca una segunda bola, sin volver a meter en la bolsa la primera. ¿Cuál es la probabilidad de que tras la segunda extracción tengamos una bola blanca y una bola negra?
8. Una bolsa contiene 15 bolas blancas, 4 bolas rojas y una bola negra. Se extrae una bola de la bolsa. Después se saca una segunda bola, sin volver a meter en la bolsa la primera. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola sea blanca y la segunda negra?
9. Una bolsa contiene 15 bolas blancas, 4 bolas rojas y una bola negra. Se extrae una bola de la bolsa. Tras mirar de qué color se introduce en la bolsa de nuevo. Se saca una segunda bola. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola sea blanca y la segunda negra?
10. Una bolsa contiene 15 bolas blancas, 4 bolas rojas y una bola negra. Se extrae una bola de la bolsa. Tras mirar de qué color se introduce en la bolsa de nuevo. Se saca una segunda bola. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos veces haya salido la bola negra?
11. Una bolsa contiene 15 bolas blancas, 4 bolas rojas y una bola negra. Se extrae una bola de la bolsa. Tras mirar de qué color se introduce en la bolsa de nuevo. Se saca una segunda bola. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos veces haya salido una bola blanca?
12. En la lotería primitiva una apuesta consiste en marcar 6 casillas de entre 49 posibles. El día del sorteo se extraen 6 bolas (de entre 49). ¿Cuál es la probabilidad de que tu apuesta coincida con la combinación ganadora? ¿Cuál es la probabilidad de que aciertes un número? ¿Y la de que aciertes 2 números?
13. Se reparten al azar 5 cartas de una baraja española. ¿Cuál es la probabilidad de que tengas 4 cartas del mismo número?
14. En una jugada se reparten 5 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de conseguir tres ases y dos reyes? ¿Cuál es la probabilidad de tener tres cartas iguales? ¿Y una pareja? ¿Y de tener tres cartas iguales y las otras dos también iguales entre sí?
15. En una jugada se reparten 5 cartas. Se llama *escalera de color* a una jugada compuesta por 5 cartas del mismo palo ordenadas consecutivamente. Calcula la probabilidad de obtener una escalera de color de tréboles.
16. En una jugada se reparten 5 cartas. Se llama *color* a una jugada compuesta por 5 cartas del mismo palo que no son consecutivas. Calcula la probabilidad de obtener *color* de tréboles.
17. Considera el experimento aleatorio “mezclar una baraja, cortar y mirar el color de las dos cartas que han quedado arriba”. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas tengan el mismo color?
18. Tenemos una caja con 12 bolas rojas y 8 bolas blancas. Se saca una bola al azar. Si es blanca se vuelve a meter en la caja. Si es roja se deja fuera. En estas condiciones se saca otra bola de la caja. ¿Qué probabilidad hay de que esta bola sea roja?
19. En un cajón tenemos 10 calcetines: 6 negros y 4 blancos. Sacamos, sin mirar, dos calcetines del cajón. ¿Qué es más probable, que sean ambos del mismo color o que sean de colores distintos?
20. Elabora un árbol de probabilidades para calcular la probabilidad de obtener *doble pareja* de ases y treses en una jugada de 5 cartas de póker. (*Doble pareja* consiste en 2 pares de cartas del mismo valor, diferentes entre sí, y una carta indiferente, de valor distinto a los dos anteriores. Por ejemplo, AA 33 Q).
21. En el monedero tengo 7 monedas de un céntimo, 4 de 5 céntimos, 6 de 10 céntimos, 5 de 20 y 7 de 50 céntimos. Saco 3 monedas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga un número impar de céntimos?
22. El 60 % de una determinada población fuma, el 30 % es hipertenso, y el 12 % fuma y es hipertenso. Utiliza estas frecuencias para obtener probabilidades y determina si ser hipertenso es dependiente o independiente de fumar. ¿Cuál es la probabilidad condicionada de que una persona fumadora sea hipertensa?
23. Un analista deportivo, que se equivoca el 10 % de las veces, ha dicho que nuestro equipo favorito va a ganar la liga. El analista de la competencia, que se equivoca el 20 % de las veces, ha dicho que nuestro equipo favorito no va a ganar la liga. A tenor de dichos análisis. ¿Qué probabilidad hay de que nuestro equipo gane la liga?

24. Una compañía de productos avícolas empaqueta docenas de huevos en tres lugares diferentes. El 60 % de la producción tiene lugar en la planta A, el 30 % en B y el resto en C. Un control de calidad nos dice que un 5 % de los paquetes elaborados en A, un 7 % de los de B y un 10 % de los de C contienen algún huevo roto. ¿Qué probabilidad hay de que nos toque una docena de huevos con algún huevo roto?
25. En un cajón tengo un par de calcetines rojos, un par de calcetines negros y un par de calcetines blancos. Al hacer la maleta, con las prisas, cojo 3 calcetines sin mirar. ¿Qué probabilidad tengo de haber cogido 2 del mismo color?
26. Se hace un estudio de consumo en una población. Se descubre que al 70 % de las personas a las que les gusta la mermelada de naranja también les gusta la de grosella y que al 80 % de las personas a las que les gusta la mermelada de grosella también les gusta la de naranja. Al 40 % de esa población no le gustan ni la mermelada de naranja ni la de grosella. Se elige al azar una persona de esa población. ¿Cuál es la probabilidad de que le guste tanto ambas mermeladas?
27. En la lotería primitiva se apuestan 6 números de entre 49. Jugando a dos apuestas, ¿cuál es la probabilidad de que te toque un premio de 5 aciertos más complementario?
28. En un instituto hay Bachillerato y Formación Profesional. En Bachillerato estudian $\frac{1}{3}$ de los estudiantes y el resto lo hace en Formación Profesional. La cuarta parte de los estudiantes de Bachillerato y la sexta parte de los Formación Profesional utiliza un medio de transporte para ir al instituto. El resto llega caminando. Se elige al azar un estudiante de ese instituto. ¿Qué probabilidad hay de que vaya a clase utilizando un medio de transporte?
29. Un tahúr juega con una baraja trucada de 40 cartas. Saca una carta, la mira, la vuelve a meter en la baraja y mezcla. Repite este procedimiento otras 2 veces más. La baraja está preparada de tal modo que el hecho de una de las tres cartas vistas sea una figura tiene una probabilidad de $\frac{19}{27}$. ¿Cuántas figuras tiene su baraja?
30. Una bolsa contiene 10 bolas rojas y 5 bolas negras. Se extrae al azar una de ellas y se sustituye por dos del otro color. Tras ello se extrae una segunda bola. ¿Qué probabilidad hay de que la segunda bola sea negra? ¿Qué probabilidad hay de que la segunda bola sea del mismo color que la primera?
31. En el comedor escolar la probabilidad de que no haya patatas una semana es $\frac{2}{5}$; la probabilidad de que haya pescado es $\frac{2}{5}$ y la probabilidad de que haya patatas y pescado es $\frac{1}{10}$. Calcula la probabilidad de que no haya ni patatas ni pescado. Calcula la probabilidad de que no haya pescado sabiendo que ha habido patatas.
32. En una clase hay 20 alumnos y 10 alumnas. Se forman equipos de trabajo de 6 personas. Calcula la probabilidad de formar un equipo: a) con todas chicas, b) con 3 chicas, c) con todo chicos, d) con al menos 3 chicas.
33. Aunque parezca una casualidad, por tener el año 365 días, es muy probable que en una clase de 35 alumnos haya dos que celebren su cumpleaños el mismo día. Calcula dicha probabilidad. Lo mismo si la clase tiene 20 estudiantes.
34. Utiliza la tabla para obtener una tabla de contingencia sobre los accidentes de tráfico:

	En carretera (C)	En zona urbana (U)	Total
Con víctimas (V)	34 092	32 295	66 387
Sólo daños materiales (D)	11 712	20 791	32 503
Total	45 804	53 086	98 890

Calcula $P(V)$; $P(D)$; $P(C)$; $P(U)$; $P(V \cap C)$; $P(D \cap U)$; $P(U|V)$; $P(V|U)$; $P(V|C)$; $P(C|V)$; $P(C|D)$. Se sabe que ha habido un accidente en carretera, ¿cuál es la probabilidad de que haya tenido víctimas? ¿Son independientes los sucesos de accidente con víctimas y accidente en carretera?

35. Se realizan estudios sobre una determinada enfermedad y se conoce que la probabilidad de que una persona la tenga es de 0.04. Una determinada prueba detecta si una persona está enferma con una probabilidad de 0.97, pero también califica como enferma, en ocasiones, a una persona sana con una probabilidad de 0.01. Representa esta situación en un diagrama en árbol. Construye la tabla de contingencia asociada. Calcula la probabilidad de que una persona sana sea detectada como enferma.
36. En el control de calidad de un proceso de fabricación se sabe que la probabilidad de que un circuito sea defectuoso es 0.02. Un dispositivo para detectar los defectuosos tiene una probabilidad de detectarlos de 0.9, pero también califica como defectuosos a 0.03 de los correctos. Representa esta situación en un diagrama en árbol. Construye la tabla de contingencia asociada. Calcula la probabilidad de que un circuito defectuoso sea calificado como correcto.

37. En una clase hay 25 alumnas y 15 alumnos, y se sabe que el 80 % de las alumnas aprueban las matemáticas mientras que las aprueban el 60 % de los alumnos. Utiliza estos porcentajes para asignar probabilidades y calcula la probabilidad que hay al elegir una persona de la clase al azar de que:
- a) Sea alumna y apruebe las matemáticas; b) Sea alumna o apruebe las matemáticas;
c) Sea alumno y suspenda matemáticas; d) Haya aprobado las matemáticas.
38. Se estudian las familias de tres hijos. Para simplificar hacemos la hipótesis de que la probabilidad de chico sea igual a la de chica. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:
- a) $A =$ El primer hijo es chica. b) $B =$ Al menos hay un varón. c) $A \cup B$, d) $A \cap B$.
39. En una bolsa hay 3 bolas verdes, 4 bolas rojas y una bola blanca. Sacamos dos bolas de la bolsa. Calcula la probabilidad de los sucesos: $A =$ "alguna de las bolas es verde", $B =$ "ha salido la bola blanca". Calcula también: $P(A^c)$, $P(B^c)$, $P(A \cup B)$ y $P(A^c \cap B)$. ¿Son A y B sucesos incompatibles? ¿Son sucesos independientes?
40. Dados los sucesos A y B de probabilidades: $P(A^c) = 3/5$; $P(A \cap B) = 1/8$; $P(B \cup A) = 3/4$; calcula las siguientes probabilidades: $P(A)$; $P(B)$; $P(B^c)$; $P(B/A^c)$; $P(A^c \cap B^c)$; $P(A/B)$. ¿Son A y B sucesos independientes?
41. Determina si son compatibles o incompatibles los sucesos A y B tales que:
- a) $P(A) = 1/7$; $P(B) = 3/7$; $P(B \cup A) = 4/7$; b) $P(A) = 1/5$; $P(B) = 0$;
42. Dados los sucesos A y B de probabilidades: $P(A^c) = 2/5$; $P(B) = 3/5$; $P(A^c \cap B^c) = 1/5$; calcula las siguientes probabilidades: $P(A)$; $P(B^c)$; $P(B \cup A)$; $P(B/A^c)$; $P(A \cap B)$; $P(A/B)$. ¿Son A y B sucesos independientes?
43. Dos tiradores al plato tienen unas marcas ya conocidas. El primero acierta con una probabilidad de 0.8 y el segundo de 0.6. Se lanza un plato y ambos disparan. Expresa mediante un diagrama de árbol y la tabla de contingencia asociada las distintas posibilidades. Calcula: a) ¿Qué probabilidad hay de que al menos uno de los tiradores dé en el plato? b) ¿Probabilidad de que ninguno acierte? c) Sabemos que el disparo ha acertado en el blanco, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya hecho el primer tirador?
44. Se dispone de dos urnas A y B . La urna A tiene 7 bolas verdes y 3 amarillas. La urna B tiene 5 bolas verdes y 7 amarillas. Se saca una bola al azar de una de las dos urnas, también al azar, y resulta ser amarilla. Calcula la probabilidad de que sea de la urna B . (Ayuda: Representa las posibilidades mediante un diagrama en árbol, escribe la tabla de contingencia asociada y el otro diagrama en árbol).
45. Se sabe que en cierta población, la probabilidad de ser hombre y daltónico es un décimo y la probabilidad de ser mujer y daltónica es $1/20$. La proporción de personas de ambos sexos es la misma. Se elige una persona al azar.
- a) Hallar la probabilidad de que no sea daltónico.
b) Si la persona elegida es mujer, hallar la probabilidad de que sea daltónica.
c) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona elegida padezca daltonismo?
46. En cierto instituto se ofrece informática y teatro como asignaturas optativas. El grupo A consta de 35 estudiantes y el B tiene 30 estudiantes. El 60 % del grupo A ha elegido teatro, así como el 40 % del grupo B y el ha elegido informática.
- a) Si se pregunta a un estudiante elegido al azar, hallar la probabilidad de que haya elegido informática.
b) Si un estudiante ha elegido teatro, calcula la probabilidad de que pertenezca al grupo B .
47. En una baraja española de cuarenta cartas se han eliminado varias cartas. Se sabe que la probabilidad de extraer un as entre las que quedan es 0.1, la probabilidad de que salga una copa es 0.3 y la probabilidad de que no sea ni as ni copa es 0.6.
- a) Hallar la probabilidad de que la carta extraída sea as o copa.
b) Calcular la probabilidad de que la carta sea el as de copas. ¿Se puede afirmar que entre las cartas que no se han eliminado está el as de copas?
48. En una ciudad en la que hay doble número de hombres que de mujeres, hay una epidemia. El 10 % de los hombres y el 5 % de las mujeres están enfermos. Se elige al azar un individuo. Calcular la probabilidad de:
- A) que sea hombre. B) que esté enfermo. C) que sea hombre, sabiendo que está enfermo.

AUTOEVALUACIÓN

1. En una bolsa hay 6 bolas negras y 3 bolas blancas, la probabilidad de sacar una bola negra es:
a) $1/2$ b) $2/3$ c) $1/3$ d) $5/9$
2. Indica cuál de los siguientes experimentos no es un experimento aleatorio:
a) Tirar una tiza y anotar el número de trozos en que se rompe
b) Tirar un dado trucado y anotar el número de la cara superior
c) Cruzar una calle y estudiar si hay un atropello
d) Calcular el consumo de gasolina de un coche
3. El espacio muestral de tirar 3 monedas al aire y anotar si caen en cara (C) o en cruz (X) con sucesos elementales equiprobables es:
a) {CCC, CCX, CXX, XXX} b) {3C, 2C, 1C, 0C}
c) {CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX} d) {CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC}
4. El suceso contrario a sacar al menos una cara en el experimento anterior es:
a) {XXX} b) {CCC, CCX, CXX} c) {CXX, XCX, XXC} d) {CCC, CCX, CXC, XCC}
5. Indica cuál de los siguientes sucesos no son independientes:
a) Sacar un oro y sacar un rey con reemplazamiento
b) Tirar una moneda y sacar cara y volver a tirarla y volver a sacar cara
c) Tirar un dado y sacar 6 y volver a tirarlo y volver a sacar 6
d) Tirar un dado y sacar un múltiplo de 2, y sacar un 6
6. La probabilidad de no sacar un as en una baraja de póker es:
a) $4/52$ b) $48/52$ c) $36/40$ d) $1 - 36/40$
7. La probabilidad de que la suma de las caras superiores sea 7 del experimento tirar dos dados es:
a) $1/6$ b) $7/36$ c) $5/36$ d) $2/3$
8. En una bolsa hay 7 bolas rojas y 4 blancas. Se saca una bola al azar y si es blanca se vuelve a meter en la bolsa, mientras que si es roja se deja fuera. Se saca otra bola de la bolsa, la probabilidad de que sea roja es:
a) $42/110$ b) $28/121$ c) $371/605$ d) $411/605$
9. En una bolsa hay 4 bolas rojas y 3 blancas. Sacamos sin mirar dos bolas. La probabilidad de que sean del mismo color es: a) $1/7$ b) $2/7$ c) $3/7$ d) $4/7$
10. Al lanzar un dado ha salido un número par, La probabilidad de que sea un 6 es $P(\text{sacar } 6/ \text{ a par})$:
a) $1/3$ b) $1/6$ c) $2/5$ d) $3/6$

RESUMEN

Experimento aleatorio	El resultado depende del azar	Tirar una moneda, o un dado
Suceso elemental	Cada uno de los posibles resultados de un experimento aleatorio	Cara o cruz serían sucesos elementales en el experimento "tirar una moneda y observar el resultado"
Espacio muestral	Conjunto de casos posibles	{cara, cruz} {1, 2, 3, 4, 5, 6}
Suceso	Subconjunto del espacio muestral	{2, 4, 6}
Ley de Laplace	Si los sucesos elementales son equiprobables entonces $P(S) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso } S}{\text{número de casos posibles}}$	Al tirar un dado: $P(\text{sacar } 3) = 1/6$ $P(\text{sacar múltiplo } 2) = 3/6.$
Combinatoria	Utiliza la combinatoria (combinaciones, variaciones, variaciones con repetición...) para contar bien los casos favorables y los posibles	La probabilidad de tener póker en una baraja francesa es: $P(\text{po ker}) = \frac{13 \cdot 12}{C_{52,2}}$
Diagrama en árbol	Problemas muy difíciles puedes resolver representando un diagrama en árbol	
Suceso contrario	El suceso contrario de S (S^c) se verifica si no se verifica S. $P(S^c) = 1 - P(S)$	Suceso contrario de sacar par es {1, 3, 5} = $1 - 3/6 = 1/2.$
Sucesos independientes	Dos sucesos son independientes si la probabilidad de que se verifique uno no queda afectada por que se haya verificado el otro.	La probabilidad del sacar un 3, al tirar un dado y volver a tirarlo.
Intersección de sucesos	Si A y B son independientes $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$ En general $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$	En una baraja española la probabilidad de sacar dos ases es $(4/40) \cdot (3/39)$
Probabilidad condicionada	$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$	Probabilidad de sacar un as habiendo ya sacado otro as sin reemplazamiento es $3/39$
Unión de sucesos	Si A y B son incompatibles $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ En general $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	En una baraja española la probabilidad de sacar un as o bien un oro es: $(4/40) + (10/49) - (1/40) = 13/40$