Matemáticas Académicas
4ºB ESO
Capítulo 13: Derivadas
Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por:

Pilar Paramio Barrigas

Hugo Bastante Gómez-Limón

IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Halla la tasa de variación media en los intervalos [–3, 2], [1, 5] y [0, 3] de las funciones siguientes:

a) $\boldsymbol{y = 3x - 4}$

$TVM{:}\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{2+13}{2+3} = 3 \qquad [3{,}2]$

$TVM{:}\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{11+1}{5-1} = 3 \qquad [1{,}5]$

$TVM{:}\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{5+4}{3-0} = 3 \qquad [0{,}3]$

b) $\boldsymbol{y = -2x - 3}$

$TVM{:}\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{-7-3}{2+3} = -2 \qquad [3{,}2]$

$TVM{:}\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{-13+5}{5-1} = -2 \qquad [1{,}5]$

$TVM{:}\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{-13+3}{3-0} = -2 \qquad [0{,}3]$

c) $\mathbf{y = 0.5x + 2}$

$TVM{:}\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{3-0{,}5}{2+3} = 0{,}5 \qquad [3{,}2]$

$TVM{:}\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{4{,}5-2{,}5}{5-1} = 0{,}5 \qquad [1{,}5]$

$TVM{:}\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{3{,}5-2}{3-0} = 0{,}5 \qquad [0{,}3]$

d) $\boldsymbol{y = x - 1}$

$TVM{:}\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{1+4}{2+3} = 1 \qquad [3{,}2]$

$TVM{:}\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{4-0}{5-1} = 1 \qquad [1{,}5]$

$TVM{:}\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{2+1}{3-0} = 1 \qquad [0{,}3]$

2.Halla la tasa de variación media de la función y = x² – 1 en los intervalos [–3, 2], [1, 5] y [0, 3]. ¿Es ahora constante?

$[-3{,}2]$**=>**$TVM \rightarrow \frac{f(2)-f(-3)}{2-3} \rightarrow \frac{(2^2-1)-((-3)^2-1)}{2+3} \rightarrow \frac{-5}{5} \rightarrow -1$

$[1{,}5]$**=>**$TVM \rightarrow \frac{f(5)-f(1)}{5-1} \rightarrow \frac{(5^2-1)-(1^2-1)}{5-1} \rightarrow \frac{24}{4} \rightarrow 6$

$[0{,}3]$**=>**$TVM \rightarrow \frac{f(3)-f(0)}{3-0} \rightarrow \frac{(3^2-1)-(0^2-1)}{3-0} \rightarrow \frac{9}{3} \rightarrow 3$

Ahora no es cte.

3. Halla la tasa de variación media de la función y = x³ + 1 en los intervalos [–3, 2], [1, 5] y [0, 3].

$[-3{,}2]$ **=>**$TVM \rightarrow \frac{f(2)-f(-3)}{2-(-3)} \rightarrow \frac{(2^3+1)-((-3)^3+1)}{2+3} \rightarrow \frac{35}{5} \rightarrow 7$

$[1,5]$=>$TVM \rightarrow \frac{f(5)-f(-1)}{5-1} \rightarrow \frac{(5^3+1)-(1^3+1)}{5-1} \rightarrow \frac{124}{4} \rightarrow 31$

$[0,3]$=>$TVM \rightarrow \frac{f(3)-f(0)}{3-0} \rightarrow \frac{(3^3+1)-(0^3+1)}{3-0} \rightarrow \frac{27}{3} \rightarrow 9$

4. Al hacer un estudio sobre el aterrizaje de aviones se graba una película desde el momento en el avión toca tierra hasta que se para, y se miden los tiempos y las distancias recorridas

Tiempo (t) en segundos	0	2	4	6	8	10	12	14
Distancia (d) en metros	0	100	175	230	270	300	325	340

a) Calcula la velocidad media del avión.

$$Vmedia = \frac{340}{14} \rightarrow 24.26\ \frac{m}{s}$$

b) Calcula la velocidad media en los intervalos: [0, 6], [2, 10] y [6, 14].

$$Vmedia\ [0,6] \rightarrow \frac{230}{6} = 38.33\ \frac{m}{s}$$

$$Vmedia\ [2,10] \rightarrow \frac{200}{8} = 25\ \frac{m}{s}$$

$$Vmedia\ [6,14] \rightarrow \frac{40}{8} = 5\ \frac{m}{s}$$

c) ¿Es constante?

No es cte. La velocidad va disminuyendo.

5. Se estudia la posición de un coche respecto de la salida de un túnel y se obtienen los datos siguientes:

Tiempo (segundos)	0	5	10	15	20	25	30	35	35
Distancia (metros)	0	100	200	290	370	430	510	610	720

a) Calcula la velocidad media del coche en el intervalo [0, 40].

$TVM\ (a,b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \rightarrow TVM\ (0,40) = \frac{720-0}{40-0} = 18\ m/s$

b) Calcula la velocidad media en los intervalos [15, 25] y [20, 30]. ¿Es contante?

$$TVM\ (a,b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \rightarrow TVM\ (15,25) = \frac{430-290}{25-15} = 14\ m/s$$

$$TVM\ (a,b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \rightarrow TVM\ (0,40) = \frac{510-370}{30-20} = 14\ m/s$$

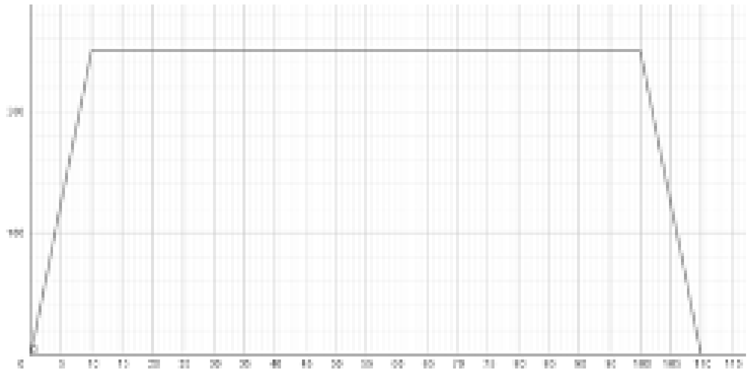
Cómo la velocidad no varía se puede decir que son constantes.

c) Si la velocidad máxima permitida es de 120 km/h, ¿consideras que ha podido sobrepasarla en algún momento? ¿Y si la velocidad máxima fuese de 80 km/h?

120 km/h = 33 m/s. Parece difícil que la haya sobrepasado. 80 K/h = 22.2 m/s. No es posible asegurar que no haya ido más deprisa pues en el primer intervalo su velocidad media es de 20 m/s.

6. El tren AVE sale de la estación y aumenta su velocidad hasta llegar a 250 km/h en 10 minutos, mantiene entonces esa velocidad constante durante hora y media, y comienza a disminuirla hasta pararse en otros 10 minutos.

a) Representa en una gráfica la función tiempo - velocidad.



b) Ya sabes que la aceleración nos indica la variación de velocidad. Indica la aceleración media en los primeros 10 minutos.

$$am\,[0,10] = \frac{250-0}{10-0} = 25\ km/h^2$$

c) Indica la aceleración media entre el minuto 10 y el minuto 90.

$am\,[10,90] = \frac{250-250}{90-10} = 0$**,** velocidad constante

d) Determina la aceleración en los últimos 10 minutos.

$$am\,[100,110] = \frac{0-250}{110-100} = -25\ km/h^2$$

7. La función de beneficios de una cierta empresa viene dada por: $B\,(x) = x^2 + 7x + \sqrt{x}$ **donde B(x) indica el beneficio que obtiene la empresa cuando fabrica x unidades. Calcula la tasa de variación media de los beneficios entre 0 y 100 unidades, y la tasa de variación media de los beneficios entre 25 y 100 unidades.**

$$TVM(0-100) = \frac{B(100)-B(0)}{100-0}$$

$$B(0) = (0)^2 + 7(0) + \sqrt{0} = 0$$

$$B(100) = (100)^2 + 7(100) + \sqrt{100} = 10710$$

$$TVM(0-100) = \frac{10710-0}{100-0} = 107.1$$

$$TVM(25-100) = \frac{B(100)-B(25)}{100-25}$$

IES ATENEA Ciudad Real

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$$B(25) = (25)^2 + 7(25) + \sqrt{25} = 805$$

$$TVM(25-100) = \frac{10710-805}{100-25} = 132.07$$

8. Una empresa determina que los costes de producción por trabajador contratado son $C(x) = x + \sqrt{x}$ y que los ingresos por ventas también contratado vienen dados por $l(x) = 2x + x^2$. Por tanto, los beneficios B (x) por trabajador contratado son ingresos menos costes (Observa que estas funciones no son continuas, no se pueden contar 3.7 trabajadores, es una función escalonada, pero vamos a trabajar con ellas como si fueran continuas). Determina las tasas de variación media si se contratan entre 100 y 2500 trabajadores.

$$B(x) = x^2 + x - \sqrt{x}$$

$$TVM = \frac{B(2500) - B(100)}{2500 - 100}$$

$$B(2500) = 2500^2 + 2500 - \sqrt{2}500 = 6252450$$

$$B(100) = 100^2 + 100 - \sqrt{1}00 = 10090$$

$$TVM = \frac{6252450 - 10090}{2500 - 100} = 2601.83$$

9. Halla la derivada de las funciones siguientes en los puntos x = 1, x = 3 y x = 5:

a) $y = 3x - 4$

$$y = 3x - 4 \;\rightarrow\; y' = 3$$

$$x = 1;\; y'(1) = 3$$

$$x = 3;\; y'(3) = 3$$

$$x = 5;\; y'(5) = 3$$

b) $y = -2x - 3$

$$y = -2x - 3 \rightarrow y' = -2$$

$$x = 1;\; y'(1) = -2$$

$$x = 3;\; y'(3) = -2$$

$$x = 5;\; y'(5) = -2$$

c) $y = 0.5x + 2$

$$y = 0.5x + 2 \;\rightarrow\; y' = 0.5$$

$$x = 1;\; y'(1) = 0.5$$

$$x = 3;\; y'(3) = 0.5$$

$$x = 5;\; y'(5) = 0.5$$

d) $y = x - 1$

$$y = x - 1 \rightarrow \; y' = 1$$
$$x = 1;\; y'(1) = 1$$
$$x = 3;\; y'(3) = 1$$
$$x = 5;\; y'(5) = 1$$

La derivada es constante.

10. Halla la derivada de la función y = x² – 1 en los puntos x = 1, x = 3 y x = 5. ¿Es ahora constante?

$$y = x^2 - 1 \rightarrow y' = 2x$$
$$x = 1;\; y'(1) = 2 \cdot 1 = 2$$
$$x = 3;\; y'(3) = 2 \cdot 3 = 6$$
$$x = 5;\; y'(5) = 2 \cdot 5 = 10$$

No, no es constante.

11. Halla la derivada de la función y = x³ + 1 en los puntos x = 1, x = 3 y x = 5.

$$y = x^3 - 1 \rightarrow \; y' = \; 3x^2$$
$$x = 1;\; y'(1) = 3 \cdot (1)^2 = 3$$
$$x = 3;\; y'(3) = 3 \cdot (3)^2 = 27$$
$$x = 5;\; y'(5) = 3 \cdot (5)^2 = 75$$

12. En el viaje de la actividad de introducción el coche recorría entre la primera hora y la segunda una distancia "y" dada por la ecuación: y = 0.2x + 110x – 67.2. Determina la velocidad que llevaba el coche para x = 1.5.

$$y = 0.2x^2 + 110x - 67.2 \rightarrow y' = \; 0.4x + 110$$
$$0.4 \cdot (1.5) + 110 \rightarrow 110.6\; \frac{m}{s}$$

13. En dicho viaje la distancia recorrida para $2.5 \le x \le 3$ **viene dada por la ecuación** $y = 110x - 121.4$ **. Y para** $3 \le x \le 5$ **por** $y = \; 0{,}1x^2 + 118x - 143.3$**. Para x = 3 hay un cambio en la velocidad. Calcula la velocidad antes de x = 3, y la velocidad después de x = 3.**

Para 2,5 ≤ x ≤ 3

$y = 110x - 121{,}4 \;\rightarrow\; y' = \; 110 = 110$

Para 3 ≤ x ≤ 5

$y = 0{,}1x^2 + 118x - 146{,}3 \;\rightarrow\; y' = 0{,}2x + 118 \;\rightarrow\; y'(3) = 0{,}2 \cdot 3 + 118 = 0{,}6 + 118 = 118{,}6$

Antes de x= 3 la velocidad es 110 m/s y después 118,6 m/s

14. Un vehículo espacial despega de un planeta con una trayectoria dada por: $y = 50x - 0.2x^2$ (x e y en km). La dirección del vehículo nos la proporciona la recta tangente en cada punto. Determina la dirección del vehículo cuando está a 2 km de distancia sobre el horizonte.

$$y = 50x - 0.2x^2 \rightarrow y' = 50 - 0.4x$$

$$x = 2 \rightarrow 50 - 0.4(2) \rightarrow 50 - 0.8 \rightarrow 49.2$$

Solución= 49.2m

15. Desde un avión nodriza se suelta un avión experimental cuyo impulsor se enciende a la máxima potencia y permanece encendido 20 segundos. La distancia que separa al avión experimental del avión nodriza viene dada por $d = 0.3t^4$. Calcula la velocidad del avión experimental a los 3, 4, 7 y 10 segundos de haber sido soltado.

$$d = 0.3t^4 \rightarrow d' = 1.2t^3$$

$$t = 4 \rightarrow v(4) = 1.2 \cdot (4)^3 = 76.8$$

$$t = 7 \rightarrow v(7) = 1.2 \cdot (7)^3 = 411.6$$

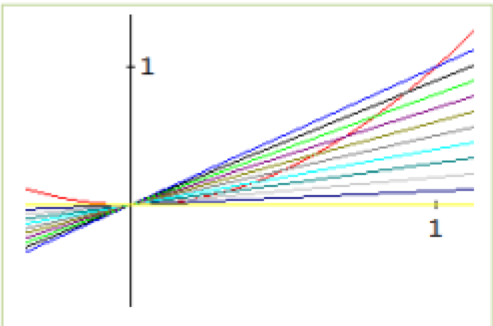
$$t = 10 \rightarrow v(10) = 1.2 \cdot (10)^3 = 1200$$

16. Representa gráficamente la función y = 2, y determina su derivada para x = 1, 2, 3.... a. ¿Cuánto vale? ¿Es siempre la misma? ¿Ocurrirá lo mismo para cualquier recta horizontal y=b?

y = 2 es una recta horizontal y su derivada siempre vale 0.

Ocurrirá lo mismo para cualquier recta horizontal.

17. Dibuja una función cualquiera y dos puntos sobre ella, f(x) y f(a), correspondientes a las ordenadas x, a. Interpreta geométricamente la definición de derivada a partir del dibujo.

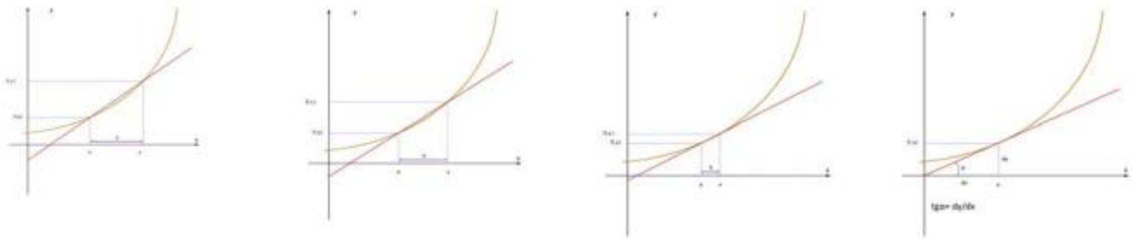


Es la pendiente de la recta tangente en el punto (a, f(a)).

18.Caída libre de una pelota. En la figura se muestran, mediante fotografía estroboscópica1, las posiciones de la pelota a intervalos regulares de tiempo: para t = 1, 2, 3, 4, 5, ..., el espacio recorrido es proporcional a 1, 4, 9, 16, 25, ..., etc. Calcula la función de posición y = f(t), y calcula la velocidad y la aceleración derivando la función de posición.

$$y = f(t) = t^2; \qquad y' = v = 2t; \qquad a = y'' = 2.$$

19. Dibuja una función cualquiera y un punto cualquiera sobre la función f(a). Dibuja también un segmento sobre el eje de abscisas con origen en a y longitud h. Interpreta de nuevo la definición de derivada en un punto basándote en dicha figura.



20. En un ejercicio anterior vimos que una empresa determina que los ingresos por ventas por trabajador contratado vienen dados por I(x) = 2x + x2. (Observa que esta función no es continua, no se pueden contratar 3.7 trabajadores, es una función escalonada, pero vamos a trabajar como si lo fuera). Determina la derivada de la función ingresos respecto a las personas contratadas. ¿Qué significado crees que tiene?

$$y = f(t) = t^2; y' = v = 2t; a = y'' = 2.$$

21. Calcula la derivada mediante el límite de la función $y = x^2 - x + 1$ en el punto x = 1. Calcula la derivada mediante el límite de la función $y = x^2 - x + 1$ en el punto x = a. Calcula mediante la expresión resultante f '(1), f' (2), f' (12), f' (5.43) y f' (-7).

$y = x^2 - x + 1 \ \rightarrow \mathrm{y}\,'(1). = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-(1+h)+1-1}{h} \rightarrow \lim\limits_{h\to 0}\frac{(1+h^2+2h)-(1+h)+1-1}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0}\frac{1+h^2+2h-1-h-1+1}{h} \rightarrow \lim\limits_{h\to 0}\frac{h^2+h}{h} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim\limits_{h\to 0}\frac{h(h+1)}{h} = 0 + 1 = 1$

$y = x^2 - x + 1 \rightarrow$

$\mathrm{y}\,'(\mathrm{a}). = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(a+h)^2-(a+h)+1-(a^2-a+1)}{+1)h} =$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{(a^2+h^2+2ah)-(a+h)+1-a^2+a-1}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{h^2+2ah-h}{h} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim\limits_{h\to 0}\frac{h(h+2a-1)}{h} = 2a - 1$

f '(1) = 2·1 – 1 = 1; f' (2) = 2·2 – 1 = 3; f' (12) = 2·12 – 1 = 23; f' (5.43) = 2·5.43 – 1 = 9.86; f' (-7) = 2·(-7) – 1 = -15

22. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla con las derivadas:

Función	$f(x) = x^3$	f(x) = 2	$f(x) = x^2$	f(x) = x	f(x) = k	f(x) = 2x + 3	$f(x) = 2x^2 + 3x$
Derivada	$f'(x) = 3x^2$	f'(x) =0	f'(x) =2x	f'(x) = 1	f'(x) =0	f'(x) = 2	f'(x) = 4x+3

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

23. Piensa en un ejemplo de función no derivable y que sí sea continua.

La función valor absoluto es continua en toda la recta real y no es derivable en el origen.

24.Piensa en un ejemplo de función con un mínimo en un punto en el que no es derivable.

La función valor absoluto es continua en toda la recta real y no es derivable en el origen, pero tiene un mínimo en dicho origen.

25. Escribe las funciones derivadas de las funciones siguientes:

a) $f(x) = x^{24} \rightarrow f'(x) = 24x^{23}$

b) $g(x) = 6x^{10} \rightarrow g'(x) = 60x^9$

c) $h(x) = \frac{6}{7x^{13}} \rightarrow h`(x) = \frac{78}{7x^{12}}$

d) $j(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7 \rightarrow j'(x) = 12x^3 - 10x$

e) $p(x) = 5x^3 - x \rightarrow p'(x) = 15x^2 - 1$

26. Calcula las derivadas de las siguientes funciones polinómicas:

a) $y = 6 + x - 5x^2 \rightarrow y' = -10x + 1$

b) $y = 6x^2 - 7x + 3x^5 \rightarrow y' = 15x^4 + 12x - 7$

c) $y = \frac{2}{3x^7} + \frac{8}{5x^5} - \frac{9}{4x^4} \rightarrow y' = \frac{14}{3x^6} + \frac{40}{5x^4} - \frac{36}{4x^3}$

d) $y = x^8 - x \rightarrow y' = 7x^7 - 1$

27. Ya hemos obtenido la derivada $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ de Utilízala para obtener la derivada en x = 1, 4, 5... ¿Puedes obtener la derivada en x = 0? Razona la respuesta.

$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

En $x = 1 \rightarrow y' = \frac{1}{2} \cdot 1^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

En $x = 4 \rightarrow y' = \frac{1}{2} \cdot 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$

En $x = 5 \rightarrow y' = \frac{1}{2} \cdot 5^{-\frac{1}{2}} = 0.2236$

En $x = 0 \rightarrow y' = \frac{1}{2} \cdot 0^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{0^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2 \cdot 0^{\frac{1}{2}}} \rightarrow$ No existe, puesto que cuando el 0 se encuentra en el denominador no es un valor real.

28. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = (x^2 + 3)(6x^6 - 5) \rightarrow y = 6x^8 - 5x^2 + 18x^2 \rightarrow y' = 48x^7 + 108x^5 - 10x$

b) $y = (7x^3 - 1)(5x^4 + 4) \rightarrow y = 35x^7 + 28x^3 - 5x^4 - 4 \rightarrow y' = 245x^6 + 84x^2 - 20x^3$

c) $y = \sqrt{x} \cdot (x^3 - 5x) \to y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^3 - 5x) + \sqrt{x} \cdot (3x^2 - 5)$

29. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{x-1}{x+3} \to y' = \frac{x(x-3)-x(x-1)}{(x+3)^2} = \frac{4}{(x+3)^2}$

b) $y = x^2 + \left(\frac{5}{3}\right)x^3 - 2x + 7 \to y' = 2x + 5x^2 - 2;\ y' = 2x + 5x^2 - 2$

c) $y = \frac{2x^3-5x^2}{6x^4-2x^3} \to y' = \frac{(6x^2-10x)(6x^4-2x^3)-(24x^3-6x^2)(2x^3-5x^2)}{(6x^4-2x^3)^2} = \frac{-6x^2+30x-5}{18x^4-12x^3+2x^2}$

d) $y = \frac{\sqrt{x^3}}{x+2} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x+2} \to y' = \frac{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(x+2)-x^{\frac{3}{2}}\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{x^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2}+3\right)}{(x+2)^2}$

30. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt[5]{x^7} = (x^7)^{\frac{1}{5}} \to y' = \frac{1}{5}(x^7)^{-\frac{4}{5}}(7x^6) = \frac{7}{5}x^{\frac{2}{5}}$

b) $y = \frac{\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt{x}}{x^3+5} = \frac{x^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^3+5} \to y' = \frac{\left(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)(x^3+5)-\left(\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt{x}\right)(3x^2)}{(x^3+5)^2} = \frac{-11x^4+35x}{(x^3+5)^2}$

c) $y = \frac{(x^4-2)\cdot\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^5}} \to y' = \frac{\left[4x^3\cdot\sqrt{x}+(x^4-2)\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right]\cdot\left(\sqrt[4]{x^5}\right)-\left((x^4-2)\cdot\sqrt{x}\right)\cdot\frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}}{\left(\sqrt[4]{x^5}\right)^2}$

d) $y = \frac{\sqrt[6]{x^{11}}}{x+2} = \frac{(x)^{\frac{11}{6}}}{x+2} \to y' = \frac{\frac{11}{6}(x)^{\frac{5}{6}}(x+2)-(x)^{\frac{11}{6}}}{(x+2)^2}$

31. En un ejercicio anterior vimos que una empresa determina que los costes de producción por trabajador contratado eran $C(x) = x + \sqrt{x}$, y que los ingresos por ventas también por trabajador contratado vienen dados por, $I(x) = 2x + x^2$ Por tanto, los beneficios B(x) por trabajador contratado son ingresos menos costes. (Observa que estas funciones no son continuas, no se pueden contratar 3.7 trabajadores, es una función escalonada, pero vamos a trabajar con ellas como si fueran continuas). Determina la derivada de la función costes C(x) y de la función beneficios B(x) respecto del número de trabajadores contratados. ¿Qué significado tienen?

$$C'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad ; B'(x) = 1 + 2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Estas derivadas nos dan información sobre cómo los costes y los beneficios cambian con respecto al número de trabajadores contratados, lo que puede ser útil para la toma de decisiones empresariales.

32. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = (x^5 - 7x^3)^{12} \to y' = 12(x^5 - 7x^3)^{11}(5x^4 - 21x^2)$

b) $y = (3x^3 - 5x^2)^7 \to y' = 7(3x^3 - 5x^2)^6(9x^2 - 10x)$

c) $y=\sqrt{(4x^5-8x^3)^5} \rightarrow y=\ (4x^5-8x^3)^{\frac{5}{2}}\ \rightarrow y'=\ \frac{5}{2}(4x^5-8x^3)^{\frac{3}{2}}(20x^4-24x^2)$

d) $y=\sqrt[3]{(2x^2+4x^7)^4} \rightarrow y=\ (2x^2+4x^7)^{\frac{4}{3}}\ \rightarrow y'=\frac{4}{3}(2x^2+4x^7)^{\frac{1}{3}}(4x-28x^6)$

33. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a)$y=\sqrt{\frac{3x^2-5x}{2x^3+7}\,(x^4-6x^3)^2}$ = y= $(\frac{3x^2-5x}{2x^3+7}(x^4-6x^3)^2)^{\frac{1}{2}}$

y'= $\frac{1}{2}(\frac{3x^2-5x}{2x^3+7}(x^4-6x^3)^2)^{\frac{-1}{2}}\cdot(\frac{(6x-5)(2x^3+7)-(3x^2-5x)(6x^2)}{(2x^3+7)^2})\cdot(x^4-6x^3)^2+(\frac{3x^2-5x}{2x^3+7})\cdot 2(x^4-6x^3)(4x^3-18x^2)$

b) $y=\sqrt{\frac{(x^2+3)(x^2-7)}{x^3-5}}=\sqrt{\frac{x^4-7x^2+3x^2-21}{x^3-5}}=\sqrt{\frac{x^4-4x^2-21}{x^3-5}}=\left(\frac{x^4-4x^2-21}{x^3-5}\right)^{\frac{1}{2}}$

$y'=\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^4-4x^2-21}{x^3-5}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{(4x^3-8x)(x^3-5)-3x^2(x^4-4x^2-21)}{(x^3-5)^2}\right)\right]$

c) $y=\sqrt{\left(\frac{5x^2+3x}{8x^3-2x^2}\right)^3}=\left(\frac{5x^2+3x}{8x^3-2x^2}\right)^{\frac{3}{2}}$

$y'=\left[\frac{3}{2}\left(\frac{5x^2+3x}{8x^3-2x^2}\right)^{\frac{1}{2}}(10x+3)(8x^3-2x^2)-(5x^2+3x)(24x^2-4x)\right]$

d) $y=\sqrt[3]{3+\sqrt{x-\frac{2}{x^3}}}\ y'=\left(3+\sqrt{x-\frac{2}{x^3}}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(3+\left(x-\frac{2}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$

y'= $\frac{1}{3}(3+(x-\frac{2}{x^3})^{\frac{1}{2}})^{\frac{-2}{3}}\cdot\frac{1}{2}(x-\frac{2}{x^3})^{\frac{-1}{2}}(1-6x^{-4})$

34. Determina la ecuación de la recta tangente a y = 7x² + 5x – 3 en el punto x = 2.

$$y=7x^2+5x-3\ \rightarrow\ y'=14x+5$$
$$y'(2)=14(2)+5=28+5=33$$
$$y(2)=7(2)^2+5(2)-3=29\ \rightarrow\ P(2{,}29)$$
$$y-y_1=m(x-x_1)\ \rightarrow\ y-29=33(x-2)\ \rightarrow\ y=33x-66+29\ \rightarrow\ y=33x-37$$

35. El perfil de una cierta montaña tiene la forma de una parábola: $y=0.05x-0.01x^2$**donde x e y se miden en km. Escribe la ecuación de la recta tangente para x = 0, x = 1, x = 2, x = 3 km.**

$y=\ f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$; $\quad f\,(0)=0.05\cdot 0-0.01\cdot 0^2=0 \quad f'(x)=\ 0.05-\frac{1}{50}x$

$f'(0)=\ 0.05-\frac{1}{50}\cdot 0=0.05$

$y=0+0.05\cdot(x-0)$, $\ y=0{,}05x$

PARA x=1 -> $x_0 = 1$

$f(1) = 0.05 \cdot 1 - 0.01 \cdot 1^2 = 0.04$ $f'(1) = 0.05 - \frac{1}{50} \cdot 1 = 0.03$; y = 0.03x + 0.01

PARA X=2-> $x_0 = 2$

$f(2) = 0.05 \cdot 2 - 0.01 \cdot 2^2 = 0.06$ $f'(2) = 0.05 - \frac{1}{50} \cdot 2 = 0.01$ $y = 0.06 + 0.01 \cdot (x - 2)$

$y = 0.06 + 0.01x - 0.02$; $y = 0.01x + 0.04$

PARA X=3-> $x_0 = 3$

$f(3) = 0.05 \cdot 3 - 0.01 \cdot 3^2 = -0.04$ $f'(3) = 0.05 - \frac{1}{50} \cdot 3 = -0.01, y = -0.04 + (-0.01) \cdot (x - 3); y = -0.04 - 0.01x + 0{,}03;$ $y =$ -0,01x - 0,01

36. El departamento de “marketing” de una empresa estima que los ingresos mensuales que va a producir el lanzamiento de un nuevo producto vienen dados por: $y = 30 + 5t^2 - 0.4t^3$ **donde t es el tiempo expresado en meses desde que el producto salga al mercado, e y son los ingresos en cientos de euros. a) Calcula si los ingresos están creciendo o decreciendo a los 3 meses de lanzamiento del producto. b) ¿Durante qué periodo de tiempo aumentan los ingresos? c) ¿Durante qué periodo de tiempo disminuyen?**

a)$\frac{dy}{dt} = 10 \cdot (3) - 1.2 \cdot (3)^2 = 19.2$. Creciente

b)$10t - 1.2t^2 > 0$

$t(10 - 1.2t) > 0$

$t > 0 \; y \; 10 - 1.2t > 0$

$t > 0 \; y \; t < \frac{10}{1.2}$

$$t > 0 \quad y \quad t < \frac{25}{3}$$

$$10t - 1.2t^2 = 0 \rightarrow t(10 - 1.2t) = 0 \rightarrow t = 0{,}10 = 1.2t \rightarrow t = 8.333.$$

Los ingresos están aumentando para $0 < t < \frac{25}{3}$

c)$10t - 1.2t^2 < 0$

$$t(10 - 1.2t) < 0$$

$$t < 0 \; o \; 10 - 1.2t < 0$$

$$t < 0 \; o \; t > \frac{10}{1.2}$$

$$t < 0 \; o \; t > \frac{25}{3}$$

37. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función: $y = x^3 + 3x$. **Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función: y = x³ - 3x. ¿Cómo es en x = 0? ¿Y en x = 2? ¿Y en x = -2?**

$y = x^3 + 3x$ -> $y' = 3x^2 + 3$, ahora igualo la derivada a 0 (y´=0)->

$3x^2 + 3 = 0$ -> $x = \sqrt{-1}$

$y = x^3 - 3x$ -> $y' = 3x^2 - 3$, (y´=0)-> $3x^2 - 3 = 0$-> $x = \sqrt{1}$-> $x = \pm 1$
$y'(0) = -3 < 0$ / Decreciente
$y'(2) = 1 > 0$ / Creciente
$y'(-2) = 1 > 0$ / Creciente
Creciente $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
Decreciente $(-1, 1)$

38. En un ejercicio anterior vimos que una empresa determina que los costes de producción por trabajador contratado eran $C(x) = x + \sqrt{x}$ y que los ingresos por ventas también por trabajador contratado vienen dados por $I(x) = 2x + x^2$. Por tanto, los beneficios B(x) por trabajador contratado son ingresos menos costes. La función beneficios B(x) respecto del número de trabajadores contratados, ¿es creciente o decreciente?

$$B(x) = I(x) - C(x) \rightarrow B(x) = (2x + x^2) - (x + x) \rightarrow x^2$$

$$B(x) = x^2 \;;\; B'(x) = 2x$$

Es creciente

39. Calcula los máximos y mínimos de las funciones siguientes:

a) $y = 4x^2 + 3; y' = 8x;$ $8x = 0 \quad x = 0;$ $y'' = 8 > 0$ En $x = 0$ hay un mínimo

b) $y = 5x^4 - 2\,;\; y' = 20x^3\;\;;\; 20x^3 = 0\,;\;\; x = 0\;\;;$

$(-\infty, 0)$ *decreciente*, $(0, \infty)$ *creciente*, en x = 0 hay un mínimo
c) $y = 3x^3 + 1;\; y' = 9x^2$ como siempre es positiva, no hay máximos ni mínimos

d) $y = 4x^4 - 2x^2 + 5\,;\; y' = 16x^3 - 4x \rightarrow y' = 4x \cdot (4x^2 - 1) \rightarrow x_1 = \frac{1}{2}\;,\;\; x_2 = -\frac{1}{2}\; y\; x = 0; y'' = 48$

$y''\left(\frac{1}{2}\right) = 8 > 0\; Es\; un\; mínimo\; relativo$
$y''\left(-\frac{1}{2}\right) = -16 < 0\; Es\; un\; máximo\; relativo$
y''(0) = -4 < 0 $Es\; un\; máximo\; relativo$

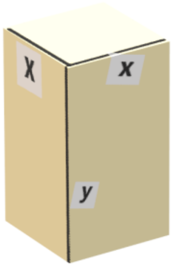
e) $y = 7x^3 - 3x\;;\; y' = 21x^2 - 3 \rightarrow y' = \pm\sqrt{\frac{3}{21}}; y'' = 42x$

$$y''\left(\sqrt{\frac{3}{21}}\right) = 42 \cdot \sqrt{\frac{3}{21}} = 6 \cdot \sqrt{7} > 0\; Es\; un\; mínimo\; relativo$$

$$y''\left(-\sqrt{\frac{3}{21}}\right) = 42x \rightarrow 42\left(-\sqrt{\frac{3}{21}}\right) = -6 \times \sqrt{7} < 0\; Es\; un\; máximo\; relativo$$

40. Se desea fabricar envases con forma de prisma recto cuadrangular de base cuadrada de forma que el volumen sea de un litro y la superficie empleada sea mínima.

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra



Función para optimizar, superficie: S(x, y) = 2·x·x + 4·x·y = $2x^2 + 4xy$
Condición: x·x·y = 1 , $x^2y = 1$
Despejamos y, $y = \frac{1}{x^2}$ sustituimos en la función, $S(x) = 2x^2 + 4x\frac{1}{x^2} = 2x^2 + \frac{4}{x}$
Derivamos $S'(x) = 4x - \frac{4}{x^2}$
Igualamos a 0 y resolvemos, $4x - \frac{4}{x^2} = 0$, $4x = \frac{4}{x^2}$, $x^3 = 1$, $x = 1$
Calculamos la segunda derivada, $S''(x) = 4 + \frac{8}{x^3}$ y $S''(1) = 4 + \frac{8}{1^3} = 12 > 0$
Luego en x = 1 hay un mínimo, $y = \frac{1}{1^2} = 1$
La mínima superficie se obtiene con un cubo de 1dm de arista.

41. Determina los máximos y mínimos de las funciones siguientes:

a) $y = 6x^3 - 2x^2 + 5x + 7 \;\rightarrow\; y' = 18x^2 - 4x + 5 \;\rightarrow\; 18x^2 - 4x + 5 = 0\,;\; sin\,raíces\,reales$

$y(0) = 5 > 0$ por tanto, siempre creciente, no hay máximos ni mínimos

b) $y = x^3 - 3x + 5 \;\rightarrow\; y' = 3x^2 - 3 = 0 \;\rightarrow\; x = 1;\;\; x = -1$

$$y'' = 6x \;\rightarrow\; y''(-1) = -6 < 0;\; máximo \;\rightarrow\; y''(1) = 6 > 0$$

c) $y = |x - 4| \rightarrow\; x - 4 = 0 \;\rightarrow\; x = 4,\; mínimo\; en\; x = 4$

d) $y = |x + 1| + |x - 2|$; $|x+1| = \begin{cases} -x-1 & x \le -1 \\ x+1 & x > -1 \end{cases}$; $|x-2| = \begin{cases} -x+2 & x < 2 \\ x-2 & x \ge 2 \end{cases}$

$$|x+1| + |x-2| = \begin{cases} -x-1-x+2 & x \le -1 \\ x+1-x+2 & -1 < x < 2 \\ x+1+x-2 & x \ge 2 \end{cases} = \begin{cases} -2x+1 & x \le -1 \\ 3 & -1 < x < 2 \\ 2x-1 & x \ge 2 \end{cases}$$

No tiene máximos ni mínimos

42. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 72x$, en el intervalo [–4, 3] y en el intervalo [0, 5].

$f'(x) = 6x^2 - 6x + 72 \;\rightarrow\; 6x^2 - 6x + 72 = 0\; no\; tiene\; solución\; real$ No hay máximos ni mínimos relativos

Intervalo [–4, 3]:

$$f(-4) = 2(-4)^3 - 3(-4)^2 + 72(-4) = -128 - 48 - 288 = -464$$

$$f(3) = 2(3)^3 - 3(3)^2 + 72(3) = 54 - 27 + 216 = 243$$

En x = - 4, hay un mínimo absoluto y en x = 3, hay un máximo absoluto.

Intervalo [0, 5]

$$f(0) = 2(0)^3 - 3(0)^2 + 72(0) = 0$$

$$f(5) = 2(5)^3 - 3(5)^2 + 72(5) = 250 - 75 + 360 = \ 535$$

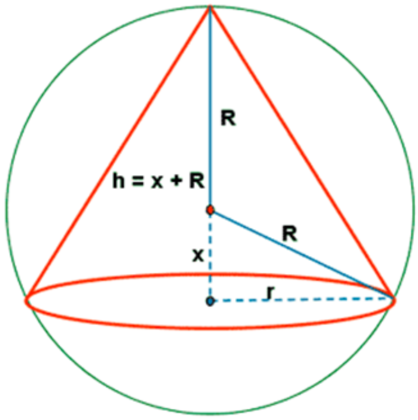
En x = 0, hay un mínimo absoluto y en x = 5, hay un máximo absoluto.

43. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función *f*(*x*) = $|\ x + 2|$ en el intervalo [–3, 5].

$$x + 2 = 0\ ;\ x = -2 \quad ;\ f(-3) = -3 + 2 = -1 \ \ ;\ f(-2) = -2 + 2 = 0 \ \ ;\ f(5) = 5 + 2 = 7$$

En x = -2 hay un mínimo absoluto   y   en x = 5 hay un máximo absoluto.

44. Determina las dimensiones de un cono de volumen mínimo inscrito en una esfera de R= 5 cm. (La altura del cono es igual a R+x, y el radio de la base r^2= R^2-x^2



$v = \frac{(\pi r^2 h)}{3} = \frac{\pi r^2(R+x)}{3} = \frac{\pi(R^2-x^2)(R+x)}{3} = \frac{\pi(25-x^2)(5+x)}{3} = \frac{\pi}{3}(125 + 25x - 5x^2 - x^3)$

$v´ = \frac{\pi}{3}(-3x^2 - 10x + 25) \ \rightarrow\ v´ = \frac{\pi}{3}(-3x^2 - 10x + 25)\ = 0 \ \rightarrow x = 1{,}66 \ \rightarrow\ v´´ = \frac{\pi}{3}(-6x - 10)$

$v´´(1{,}66) < 0$, por tanto, es un máximo.

$r^2 = R^2 - x^2 = 5^2 - 1{,}66^2;\ r = 4{,}83\ cm$

$h = R + x = 5 - 1{,}66;\ h = 6{,}66\ cm$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función y = x^3 en el punto x = 2.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)f(a)}{h}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-x^3}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2$$

$$f'(2)=3\cdot 2^2=12$$

2. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y=\sqrt{x}$ en x = 1.

$$y'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{1-1}{1-1}=\frac{0}{0}=\text{indeterminación}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x})^2-1^2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$

3. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función y= $\frac{1}{x^2}$ en x= 4

$$y'(4)=\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{16}}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\frac{16-x^2}{16x^2}}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{16-x^2}{16x^2(x-4)}=\lim_{x\to 4}\frac{16-x^2}{16x^3-64x^2}$$

$$=\frac{16-4^2}{16(4^3)-64(4^2)}=\frac{16-16}{1024-1024}=\frac{0}{0},\,indeterminación\ .=\lim_{x\to 4}\frac{-(x-4)(4+x)}{16x^2(x-4)}=$$

$$\lim_{x\to 4}-\frac{4+x}{16x^2}=-\frac{4+4}{16(4^2)}=-\frac{8}{256}=-\frac{1}{32}$$

4. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y=3x^2-5x+2$ en el punto de abscisa x = 1.

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{3(1+h)^2-5(1+h)+2-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3h^2+6h+3-5-5h+2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3h^2+h}{h}=\lim_{h\to 0}(3h+1)=1$$

5. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y=x-3$ en x = 2.

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{2+h-3-(-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$$

6. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=4x^2+2x-3\ \rightarrow\ y'=8x+2$

b) $y=2x^3-3x^2+7x+5\ \rightarrow\ y'=6x^2-6x+7$

c) $y=x^2-5x+2\ \rightarrow\ y'=2x-5$

d) $y=8x^7-9x^6-5x^3\ \rightarrow\ y'=(56x^6-54x^5-15x^2)$

7. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=(5x^2+7x^4+3x)\ \rightarrow\ y'=(10x+28x^3+3)$

b) $y=(6x^5+4x^2+7x+5x^3)\ \rightarrow\ y'=\ (30x^4+8x+7+15x^2)$

c) $y=(x^5+7x^4+2x^3)\ \rightarrow\ y'=(5x^4+28x^3+6x^2)$

d) $y=(3x^3+9x^6+2x^8)\ \rightarrow\ y'=(9x^2+54x^5+16x^7)$

8. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=\left(7x^2+3x+\frac{1}{x}\right)=(7x^2+3x+x^{-1})\quad\rightarrow y'=14x+3-x^{-2}=14x+3-\frac{1}{x^2}$

b) $y=\left(5x^3+2x^2+\sqrt{x}\right)=\left(5x^3+2x^2+x^{\frac{1}{2}}\right)\rightarrow y'=15x^2+4x+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=15x^2+4x+\frac{1}{2\sqrt{x}}$

c) $y=\frac{\sqrt{x}}{(x+3)(x^2-5x+2)}\quad\rightarrow\ y=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^3-5x^2+2x+3x^2-15x+6}=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^3-2x^2-13x+6}$

$y'=\frac{\frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}}(x^3-2x^2-13x+6)-(x)^{\frac{1}{2}}(3x^2-4x-13)}{(x^3-2x^2-13x+6)^2}=\frac{-5x^3+6x^2+13x+6}{\sqrt{x}(x+3)^2(x^2-5x+2)^2}$

d) $y=\frac{\sqrt{x}\cdot(x+5)}{(x^2-5)}=\frac{x^{\frac{1}{2}}\cdot(x+5)}{(x^2-5)}\rightarrow y'=\frac{\left[\frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}}(x+5)+\sqrt{x}\cdot 1\right](x^2-5)-2x\sqrt{x}\cdot(x+5)}{(x^2-5)^2}=\frac{-x^3-15x^2-15x-25}{2\sqrt{x}(x^2-5)^2}$

9. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=\frac{7x^2}{3}+\frac{3x}{5}+\frac{8}{3x}=\frac{7x^2}{3}+\frac{3x}{5}+\frac{8}{3}x^{-1}\rightarrow y'=\frac{14x}{3}+\frac{3}{5}-\frac{8}{3}x^{-2}=\frac{14x}{3}+\frac{3}{5}-\frac{8}{3x^2}$

b) $y=\frac{5x^3}{2}+\frac{2x^2}{3}+6\frac{\sqrt{x}}{5}=\frac{5x^3}{2}+\frac{2x^2}{3}+\frac{6}{5}x^{\frac{1}{2}}\rightarrow y'=\frac{15x^2}{2}+\frac{4x}{3}+\frac{6}{5}\frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}}=\frac{15x^2}{2}+\frac{4x}{3}+\frac{3}{5\sqrt{x}}$

c) $7y=\frac{4x^3}{3}+\frac{5x^2}{7}+\frac{7}{\sqrt{x}}\rightarrow y=\frac{1}{7}\left(\frac{4x^3}{3}+\frac{5x^2}{7}+7x^{-\frac{1}{2}}\right)$

$y'=\frac{1}{7}\left(\frac{12x^2}{3}+\frac{10x}{7}+7\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}\right)=\frac{1}{7}\left(\frac{12x^2}{3}+\frac{10x}{7}-\frac{7}{2\sqrt{x^3}}\right)$

10. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=\frac{(x-1)(2x-3)}{x+2}\quad\rightarrow\ y=\frac{2x^2-3x-2x+3}{x+2}\quad\rightarrow\ y=\frac{2x^2-5x+3}{x+2}$

$y'=\frac{(4x-5)(x+2)-(2x^2-5x+3)}{(x+2)^2}$

b) $y = \frac{(3x^2+4)(4x-2)}{7x-1} \rightarrow y = \frac{12x^3-6x^2+16x-8}{7x-1}$

$y' = \frac{(36x^2-12x+16)(7x-1)-7(12x^3-12x^2+16x-8)}{(7x-1)^2}$

c) $y = \frac{(8x+5x^2)(2x^5-7)}{4x+6} \rightarrow y = \frac{16x^6-56x^2+10x^7-35x^2}{4x+6} \rightarrow y = \frac{16x^6+10x^7-91x^2}{4x+6}$

$y' = \frac{(96x^5+70x^6-182x)(4x+6)-4(16x^6-91x^2+10x^7)}{(4x+6)^2}$

d) $y = \frac{(x+9)(2x-3)}{(x+3)(x+2)} \rightarrow y = \frac{2x^2-3x+18x-27}{x^2+5x+6} \rightarrow y = \frac{2x^2+15x-27}{x^2+5x+6}$

$y' = \frac{(4x+15)(x^2+5x+6)-(2x^2+15x-27)(2x+5)}{(x^2+5x+6)^2}$

11. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{x^3+5} \rightarrow y = (x^3+5)^{\frac{1}{2}} \rightarrow y' = \frac{1}{2}(x^3+5)^{-\frac{1}{2}}(3x^2)$

b) $y = \sqrt[3]{2x^3+4x^2-1} \rightarrow y = (2x^3+4x^2-1)^{\frac{1}{3}} \rightarrow y' = -\frac{1}{3}(2x^3+4x^2-1)^{\frac{2}{3}}(6x^2+8x)$

c) $y = (5x^3+2)^5 \rightarrow y' = 5(15x^2+2)^4(15x^2)$

d) $y = (2x^2+5x)^9 \rightarrow y' = 9(2x^2+5x)^8 4x$

12. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{x^3+5} \cdot (x^7+3x^2)^6 \rightarrow y = (x^3+5)^{\frac{1}{2}} \cdot (x^7+3x^2)^6$

$y' = \left[\frac{1}{2}(x^3+5)^{-\frac{1}{2}}(3x^2)(x^7+3x^2)^6 + (x^3+5)^{\frac{1}{2}} \cdot 6(x^7+3x^2)^5 \cdot (7x^6+6x)\right]$

b) $y = \frac{\sqrt[3]{2x^3+4x^2-1}}{x+1} \rightarrow y = \frac{(2x^3+4x^2-1)^{\frac{1}{3}}}{x+1}$

$y' = \frac{\frac{1}{3}(2x^3+4x^2-1)^{\mp\frac{2}{3}}(6x^2+8x)(x+1)-(2x^3+4x^2-1)^{\frac{1}{3}}}{(x+1)^2}$

c) $y = (5x^3+2)^5 \cdot (x^5+6x^8) \rightarrow y' = 5(5x^3+2)^4(15x^2)(x^5+6x^8) + (5x^3+2)^5(5x^4+48x^7)$

d) $y = \frac{(2x^3-5x^2)^9}{(7x^4-5x^3)^2}$

$y' = \frac{9(2x^3-5x^2)^8(6x^2-10x)(7x^4-5x^3)^2-(2x^3-5x^2)^9-2(7x^4-5x^3)(28x^3-15x^2)}{(7x^4-5x^3)^4} =$

$= \frac{9(2x^3-5x^2)^8(6x^2-10x)(7x^4-5x^3)-(2x^3-5x^2)^9-2(28x^3-15x^2)}{(7x^4-5x^3)^3}$

IES ATENEA Ciudad Real

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

13. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = e^{x^5+4x^3} \rightarrow y' = \left(e^{x^5+4x^3}\right)(5x^4 + 12x^2)$

b) $y = \left(e^{2x^3+7x^2}\right)^7 \rightarrow y' = 7\left(e^{2x^3+7x^2}\right)^6 \cdot \left(e^{2x^3+7x^2}\right) \cdot (6x^2 + 14x)$

c) $y = e^{(3x^5+5x^3)^5} \rightarrow y' = \left(e^{(3x^5+5x^3)^5}\right)(5(3x^5 + 5x^3)^4)(15x^4 + 15x^2)$

d) $y = \sqrt[3]{e^{(6x^5-9x^8)^2}} = e^{(6x^5-9x^8)^{\frac{2}{3}}}$

$$y' = \left[\left(e^{(6x^5-9x^8)^{\frac{2}{3}}}\right)\left(\frac{2}{3}(6x^5 - 9x^8)^{-\frac{1}{3}}\right)(30x^4 - 72x^7)\right]$$

14. La derivada de $y = cos(x)$ es $y' = -sen(x)$. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \cos(x^5 - 7x^3) \rightarrow y' = -\operatorname{sen}(x^5 - 7x^3)(5x^4 - 21x^2)$

b) $y = (\cos(3x^3 - 5x^2))^7 \rightarrow y' = 7\left(\cos(3x^3 - 5x^2)\right)^6 \cdot (-\operatorname{sen}(3x^3 - 5x^2))(9x^2 - 10x)$

c) $y = \cos^5(4x^5 - 8x^3) \rightarrow y' = 5(\cos(4x^5 - 8x^3))^4 \cdot \left(-\operatorname{sen}(4x^5 - 8x^3)\right) \cdot (20x^4 - 24x^2)$

d) $y = \sqrt[3]{\cos^4(2x^2 + 4x^7)} = \left(cos\,(2x^2 + 4x^7)\right)^{\frac{4}{3}}$

$$y' = \left[\frac{4}{3}\left(cos\,(2x^2 + 4x^7)\right)^{\frac{1}{3}} \cdot (-\operatorname{sen}(2x^2 + 4x^7))(4x + 28x^6)\right]$$

15. Calcula las rectas tangentes de la gráfica de la función $y = x^3 - 3x$ en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.

$y' = 3x^2 - 3$

Para x = 0 $\quad y'(0) = 3(0)^2 - 3 = -3$

Punto: (0,0) Pendiente: -3

Ecuación recta tangente: $y - 0 = -3(x - 0) \rightarrow y = -3x$

Para x = 1 $\quad y'(1) = 3(1)^2 - 3 = 0$

Punto: (1,-2) Pendiente: 0

Ecuación recta tangente: $y + 2 = 0 \rightarrow y = -2$

Para x = 2 $\quad y'(2) = 3(2)^2 - 3 = 6$

Punto: (2,2) Pendiente: 6

Ecuación recta tangente: $y - 2 = 6(x - 2) \rightarrow y = 6x - 12 + 2 \rightarrow y = 6x - 10$

16. Calcula las rectas tangentes de las gráficas de las funciones siguientes en los puntos indicados:

a) $y = x^3$ en x= 2

$$y' = 3x^2 \;\rightarrow\; y'(2) = 3(2)^2 = 12$$

Pendiente: 2

Ecuación recta tangente: $y - y(2) = 12(x - 2) \;\rightarrow\; y = 12x - 24 - 8 \;\rightarrow\; y = 12x - 16$

b) $y = 2x^2 + 4x - 5$ en x= 1

$$y' = 4x + 4 \;\rightarrow\; y'(1) = 4\,(1) + 4 = 8$$

Pendiente: 8

Ecuación recta tangente: $y - y(1) = 8(x - 1) \;\rightarrow\; y = 8x - 8 + (2 + 4 - 5) \;\rightarrow\; y = 8x - 7$

c) $y = x^3 - 7x^2 + 3x$ en x= 0

$$y' = 3x^2 - 14x \;\rightarrow\; y'(0) = \; 3\,(0)^2 - 14(0) = 0$$

Pendiente: 0

Ecuación recta tangente: $y - y(0) = 0(x - 0) \;\rightarrow\; y - 3 = 0 \;\rightarrow\; y = 3$

17. Indica la pendiente de la recta tangente de:

a) $y = x^3 + 3x$ en x = 3

$$y' = 3x^2 + 3 \;\rightarrow\; y'(3) = \; 3(3)^2 + 3 = 30$$

Pendiente: 30

b) $y + 2x - 5 = 0$

$$y = -2x + 5 \;\rightarrow\; y' = -2$$

Pendiente: -2

c) $y = 4x^3 - 5x^2 + 2$ en x= 1

$$y' = 12x^2 - 10x \;\rightarrow\; y'(1) = 12\,(1)^2 - 10\,(1) = \; 2$$

Pendiente: 2

18. Determina las coordenadas de los puntos de la gráfica $y = x^3 - 3x + 2$ en los que su tangente sea paralela:

a) a la recta $y = 0$;

$$y = x^3 - 3x + 2 \rightarrow y' = 3x^2 - 3$$

Para que la tangente sea paralela a la recta y = 0, su pendiente debe ser cero, es decir→ $y' = 0$

$$3x^2 - 3 = 0 \;\rightarrow x = \pm 1$$

$$y(-1) = (-1)3 - 3(-1) + 2 = -1 + 3 + 2 = 4$$

$$y(1) = (1)3 - 3(1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$$

Solución: (1, 0), (−1, 4);

b) a la recta $y = 6x$.

$$y = x^3 - 3x + 2 \rightarrow \; y' = 3x^2 - 3$$

$$3x^2 - 3 = 6 \; \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$y(-\sqrt{3}) = \left(-\sqrt{3}\right)^3 - 3\left(-\sqrt{3}\right) + 2 = 7 - 3\sqrt{3}$$

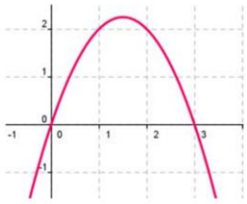
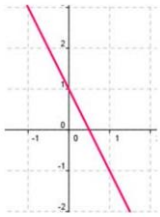
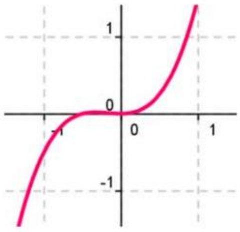
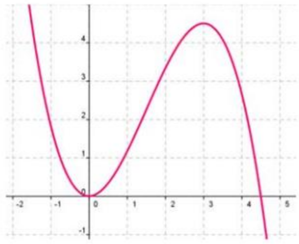
solución$\left(\sqrt{3}, 2\right), \left(-\sqrt{3}, 2\right)$

19. Determina la recta tangente de la gráfica de la función $\sqrt{x^3}$en x = 0.

$$y = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}} \; \rightarrow y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \quad y'(0) = \frac{3}{2}0^{\frac{1}{2}} = 0$$

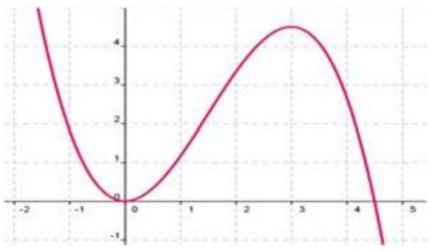
Solución: y = 0.

20. Si $f'(x) = x\,(3 - x)$, ¿cuál de las siguientes gráficas podría ser la de $f(x)$?

$$f'(x) = x(3 - x) = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\; x = 3$$

Tiene extremos relativos en los puntos x= 0 y x=3, por lo que la única gráfica que cumple los requisitos es la siguiente:



21. Determina las rectas tangentes a la función $f(x) = 4x^3 - 12x$ en los puntos en los que la pendiente es 12. ¿Cuál es el menor valor que puede tener la pendiente a esta curva? ¿En qué puntos se alcanza?

Para saber en qué puntos de x la pendiente es 12, igualamos f'(x) a 12

$$y' = 12x^2 - 12 \;\rightarrow\; 12x^2 - 12 = 12 \;\rightarrow\; 12x^2 = 24 \;\rightarrow\; x^2 = \frac{24}{12} \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{2}$$

Utilizamos la fórmula $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ para calcular las rectas. Después calculamos $f\left(\sqrt{2}\right)$

$$a = \pm\sqrt{2} \rightarrow \; y = f\left(\pm\sqrt{2}\right) + f'\left(\pm\sqrt{2}\right)\left(x - \pm\sqrt{2}\right) \;\rightarrow$$

$$f\left(\sqrt{2}\right) = 4\left(\sqrt{2}\right)^3 - 12\left(\sqrt{2}\right) = -4\sqrt{2}$$

Reemplazamos en la fórmula para calcular la recta tangente

$y = -4\sqrt{2} + 12(x - \sqrt{2}) \to\ y = -4\sqrt{2} + 12x - 12\sqrt{2} \to y = 12x - 16\sqrt{2}$

Y repetimos el proceso con $a = -\sqrt{2}$

$f(-\sqrt{2}) = 4(-\sqrt{2})^3 - 12(-\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$

Reemplazamos en la fórmula para calcular la recta tangente

$y = 4\sqrt{2} + 12(x + \sqrt{2}) \to\ y = 4\sqrt{2} + 12x + 12\sqrt{2} \to y = 12x + 16\sqrt{2}$

Calculamos el mínimo de $y' = 12x^2 - 12$; $y'' = 24x$; $24x = 0$, $x = 0$; $y''' = 24 > 0$, mínimo.

$y'(0) = 12 \cdot 0^2 - 12 = -12$; $f(0) = 4(0)^3 - 12(0) = 0$

El menor valor de la pendiente es -12 y se alcanza en (0, 0).

22. Determina la recta tangente a la función $f(x) = x^3 - 3x$ en el punto A (–1, 2). ¿En qué otro punto corta la recta tangente a la función?

$$f(x) = x^3 - 3x \to f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2$$
$$f'(x) = 3x^2 - 3 \to f'(-1) = 3(-1)^2 - 3 = 0$$
$$y = f(a) + f'(a)(x - a) \to y = 2 + 0(x - 0) \to y = 2$$
$$x^3 - 3x = 2 \to x^3 - 3x - 2 = 0 \to x = -1\ ,\ x = 2$$

Por ende, x= 2 es el otro punto por donde pasa la recta en la función. Llamaremos a este punto B (2,2)

23. Determina los coeficientes a, b y c de la función $f(x) = ax^3 + bx + c$, que pasa por el punto A (1, 2) y es tangente a la recta $y = x$ en el punto O (0, 0).

Tenemos que utilizar la información a nuestra disposición para calcular las tres incógnitas.

Primero, sabiendo que f(x) es tangente a la recta en (0,0), sabemos que cuando x=0; y=0

Por ende, sabemos que c=0

También sabemos que porque la pendiente de la recta y=x es 1

$$f'(x) = 3ax^2 + b \to f'(0) = 3a \cdot 0 + b = 1 \to f'(0) = b = 1$$

Luego, para encontrar el valor de a podemos utilizar más información: f(x) pasa por el punto A (1,2)

$$f(1) = 2 \to a \cdot 1^3 + 1 \cdot 1 + 0 = 2 \to \boldsymbol{a = 1},\ \boldsymbol{b = 1},\ \boldsymbol{c = 0}$$

24. Determina los coeficientes a, b y c para que las funciones $f(x) = x^3 + bx + c$ y $g(x) = ax - x^2$ tengan la misma recta tangente en el punto A (1, 0).

$f'(x) = 3x^2 + b \to f'(1) = 3 \cdot 1 + b = 3 + b$

$g'(x) = a - 2x \to g'(1) = a - 2 \cdot 1 = a - 2$

$3 + b = a - 2 \to a = b + 5$

$f(1) = 0 \to 1 + b + c = 0$

$g(1) = 0 \rightarrow a - 1 = 0 \rightarrow a = 1$

$1 = 5 + b \rightarrow b = -5 + 1 \rightarrow b = -4\,;\ 1 - 4 + c = 0 \rightarrow c = 3$

$\mathbf{a = 1}\ ,\ \ \mathbf{b = -4}\ ,\ \mathbf{c = 3}$

25. Determina el coeficiente a, para que la función f(x) = x^2 + a, sea tangente a la recta y = x

$y' = 2x \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$ sustituimos en la recta, $y = \frac{1}{2}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + a = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + a = 0 \rightarrow \frac{1}{4} - \frac{2}{4} + a = 0 \rightarrow a = \frac{1}{4}$

26. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*(*x*) = 1/*x*².

$Dom\ f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$

$y' = \frac{0 \cdot x^2 - 1 \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{-2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$

$y'(-10) = -\frac{2}{(-10)^3} > 0\ ,\qquad y'(10) = -\frac{2}{(10)^3} < 0$

Creciente: $(-\infty, 0)$ y Decreciente $(0, \infty)$

27. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*(*x*) = 1/*x*.

$Dom\ f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$

$y' = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot x}{(x^2)} = -\frac{1}{x^2}$

$y'(-10) = -\frac{2}{(-10)^2} < 0\ ,\qquad y'(10) = -\frac{2}{(10)^2} < 0$

Decreciente: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

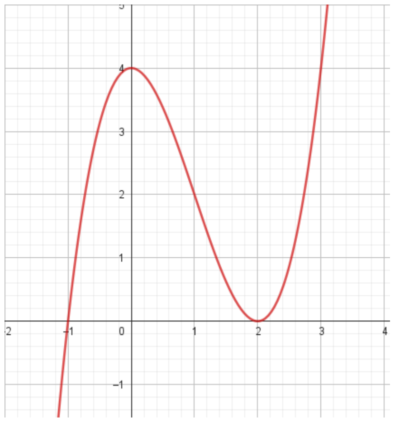
28. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*(*x*) = *x*³ – 3*x*² + 4. Calcula sus máximos y mínimos y haz un esbozo de su gráfica.

$y' = 3x^2 - 6x \rightarrow y' = 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow 3x(x - 2) = 0\,;\ x = 0\,,\ x = 2$

$y'(-10) = 3(-10)(-10 - 2) > 0\ ;\quad y'(1) = 3(1)(1 - 2) < 0\ ;\quad y'(10) = 3(10)(10 - 2) > 0$

Creciente: $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ **Decreciente:** $(0,2)$

$y(0) = 0^3 - 3(0)^2 + 4 = 4 \rightarrow Máximo: (0,4)\quad ;\quad y(2) = 2^3 - 3(2)^2 + 4 = 0 \rightarrow Mínimo: (2,0)$



29. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 6$. Calcula sus máximos y mínimos. ¿En qué punto corta al eje de ordenadas? Haz un esbozo de su gráfica.

$f(0) = 0^3 - 6(0)^2 + 9(0) + 6 = 0\,;\ \ Punto\ corte\ con\ el\ eje\ de\ ordenadas\ (0{,}6)$

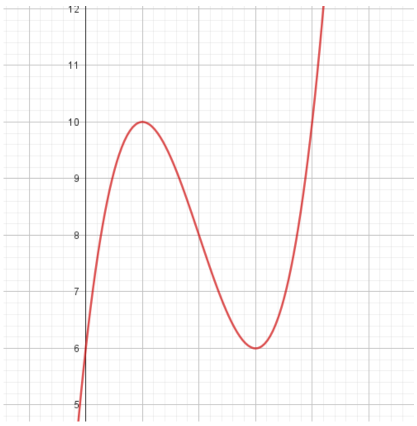
$y' = 3x^2 - 12x + 9 \ \rightarrow\ 3x^2 - 12x + 9 = 0\,;\ x = 1\ \ x = 3$

$f'(-10) = 3(-10)^2 - 12(-10) + 9 > 0 \qquad f'(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 9 < 0$

$f'(10) = 3(10)^2 - 12(10) + 9 > 0$

Creciente: $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ **Decreciente:** $(1{,}3)$

Existe un máximo relativo cuando x= 1 pues la función deja de crecer y comienza a decrecer y existe un mínimo cuando x= 3 pues la función deja de decrecer y comienza a crecer.



30. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3$. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.

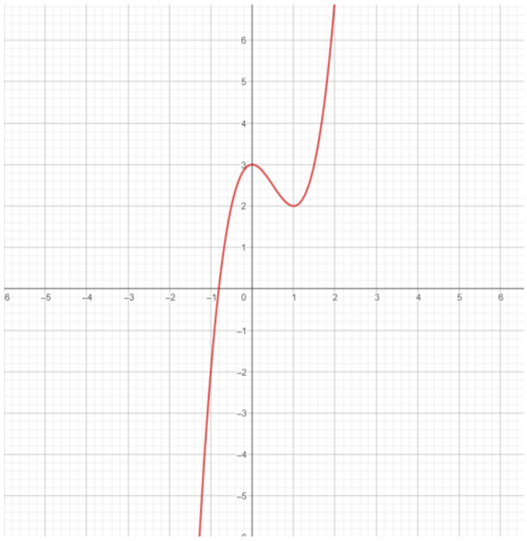
$y' = 6x^2 - 6x \ \rightarrow\ y' = 6x^2 - 6x = 0 \ \rightarrow\ x = 0\ \ x = 1$

$f'(-10) = 6(-10)^2 - 6(-10) > 0; f'(0{,}5) = 6(0{,}5)^2 - 6(0{,}5) < 0\,; f'(10) = 6(10)^2 - 6(10) > 0$

Creciente: $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ **Decreciente:** $(0{,}1)$

Existe un máximo relativo cuando x= 0 pues la función deja de crecer y comienza a decrecer y existe un mínimo cuando x= 1 pues la función deja de decrecer y comienza a crecer.

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra



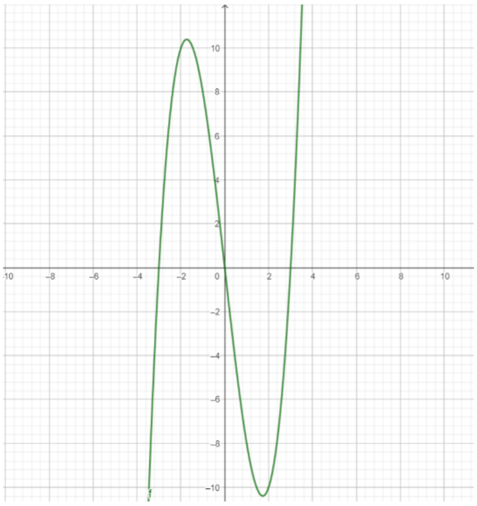
31. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 9x$. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.

$y' = 3x^2 - 9 \;\rightarrow\; y' = 3x^2 - 9 = 0 \;\rightarrow\; x = -3 \;\; x = 3$

$f'(-10) = 3(-10)^2 - 9 > 0 \quad ; \quad f'(0) = 3(0)^2 - 9 < 0 \quad ; \quad f'(10) = 3(10)^2 - 9 > 0$

Creciente: $(-\infty - 3) \cup (3, \infty)$ **Decreciente:** $(-3,3)$

Existe un máximo relativo cuando x= -3 pues la función deja de crecer y comienza a decrecer y existe un mínimo cuando x= 3 pues la función deja de decrecer y comienza a crecer.



32. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 72x$ en el intervalo [–7, 2] y en el intervalo [0, 8].

$y' = 12x^2 - 12x + 72 \;\rightarrow\; y' = 12(x^2 - x + 6)$

$No\ tiene\ soluciones\ reales,\ no\ existen\ máximos\ o\ mínimos\ relativos$

En [–7, 2] :

$f(-7) = 4(-7)^3 - 6(7)^2 + 72(-7) = -1372 - 294 - 504 = -2170\,;$
$Mínimo\ absoluto\ (-7, -2170)$

$f(2) = 4(2)^3 - 6(2)^2 + 72(2) = 32 - 24 + 144 = 152\ \ ;\ Máximo\ absoluto\ (2, 152)$

En [0, 8]:

$f(0) = 4(0)^3 - 6(0)^2 + 72(0) = 0\ \ Mínimo\ absoluto\ (0,\ 0)$

$f(8) = 4(8)^3 - 6(8)^2 + 72(8) = 2048 - 384 + 576 = 2240\,;\ Máximo\ absoluto\ (8,\ 2240)$

33. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función *f*(*x*) = $|x + 3|$ en el intervalo [–3, 3].

Máximos y mínimos absolutos:

$$f(3) = x + 3 = 6\ \rightarrow\ Máximo\ absoluto:\ (3{,}6)$$
$$f(-3) = -(-3 + 3) = 0\ \rightarrow\ Mínimo\ absoluto:\ (-3{,}0)$$

34. El espacio recorrido, en metros, por un vehículo a los *t* segundos de pasar por un control de radar, viene dado por: *y* = 15*t* + 0.8*t*². ¿Qué velocidad llevaba al pasar por el control? ¿Y a los 5 segundos? Si continúa así, ¿en qué momento pasará de los 120 km/h?

$y(t) = 15t + 0{,}8\,t^2\qquad ;\qquad v(t) = 15 + 1{,}6t$

Para t = 0

$v(0) = 15 + 1{,}6\ (0) = 15$ m/s

Para t = 5

$v(5) = 15 + 1{,}6\ (5) = 15 + 8 = 23$ m/s

$120\ \frac{km}{h}\ \cdot\ \frac{1000m}{1km}\cdot\ \frac{1h}{3600s} = \ \frac{100}{3}\ \frac{m}{s}$

$15 + 1{,}6t = \frac{100}{3}\ \ ;\ 45 + 4{,}8t = 100\ \ ;\ \ t = \frac{100-45}{4{,}8} = 11{,}46\ seg$

35. La temperatura, T, en grados, de una bola de hierro que se está calentando viene dada por T = 200 – 500/*t*, donde *t* es el tiempo en segundos. El radio, *r*, en mm, de la bola cuando la temperatura es de T grados viene dado por *r* = 40 + 0.001T. ¿A qué velocidad varía el radio cuando la temperatura es de 50°, 75°, 100°? ¿A qué velocidad varía la temperatura a los 30 segundos? ¿Y para *t* = 90 segundos? ¿A qué velocidad varía el radio a los 10 segundos, a los 30 segundos y a los 90 segundos?

$$r = 40 + 0.001T\ \rightarrow\ v(t) = \frac{dr}{dt} = 0{,}001$$

Por lo tanto, la velocidad a la que varía el radio cuando la temperatura es de 50°, 75° y 100° es constante y es de 0,001mm/°.

$T = 200 - \frac{500}{t} \;\rightarrow\; v(T) = \frac{500}{t^2}$

Para t=30 segundos:

$v(30) = \frac{500}{30^2} = \frac{500}{900} = 0{,}556\ °/\text{s}$

Para t=90 segundos:

$v(90) = \frac{500}{90^2} = \frac{500}{8100} = 0{,}061\ °/\text{s}$

$r = 40 + 0.001T \;\; ; \; T = 200 - \frac{500}{t}$

$r(t) = \frac{dr}{dT} \cdot \frac{dT}{dt} = 0{,}001 \cdot \frac{500}{t^2}$

Para t=10 segundos:

$r(10) = 0{,}001 \cdot \frac{500}{10^2} = 0{,}05\ \text{mm/s}$

Para t=30 segundos:

$r(10) = 0{,}001 \cdot \frac{500}{30^2} = 0{,}001\ \text{mm/s}$

Para t=90 segundos:

$r(10) = 0{,}001 \cdot \frac{500}{90^2} = 0\ \text{mm/s}$

36. La distancia, d, en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la Tierra a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 5t^2$. Si se cae un tornillo desde la primera plataforma de la Torre Eiffel, (que está a 57 m de altura), ¿a qué velocidad llegaría al suelo? ¿Y si cayera desde la segunda plataforma (que está a 115 m)? ¿Y desde la tercera plataforma (que está a 274 m)?

$d = \frac{1}{2} g t^2 \;\; ; \quad v = g \cdot t$

Para la primera plataforma (57 m):

$d = \frac{1}{2}\, 9.8t^2 \;\rightarrow\; 57 = 4{,}9t^2 \;\rightarrow\; t^2 = \frac{57}{4.9} \;\rightarrow\; t = \sqrt{11{,}63} = 3{,}41\ s$

$v = (9{,}8)(3{,}41) = 33{,}38\ \text{m/s}$

Para la segunda plataforma (115 m):

$d = \frac{1}{2}\, 9.8t^2 \;\rightarrow\; 115 = 4{,}9t^2 \;\rightarrow\; t^2 = \frac{115}{4.9} \;\rightarrow\; t = \sqrt{23{,}47} = 4{,}85\ s$

$v = (9{,}8)(4{,}85) = 47{,}63\ \text{m/s}$

Para la tercera plataforma (274 m):

$d = \frac{1}{2}\, 9.8t^2 \;\rightarrow\; 274 = 4{,}9t^2 \;\rightarrow\; t^2 = \frac{274}{4.9} \;\rightarrow\; t = \sqrt{55{,}92} = 7{,}48\ s$

$v = (9{,}8)(7{,}48) = 73.30\ \text{m/s}$

37. La función $e = f(t)$ indica el espacio recorrido, e, en metros, por un cuerpo en el tiempo t (en segundos). Determina en cada caso la función velocidad y la función aceleración:

a) $\boldsymbol{e = t^2 - 4t + 3}$

$v(t) = \frac{de}{dt} = \ v = 2t - 4$

$a(t) = \frac{dv}{dt} \ \rightarrow \ a = 2$

b) $\boldsymbol{e = 2t^3 - 5t^2 + 4t - 3}$

$v(t) = \frac{de}{dt} \ \rightarrow \ v = 6t^2 - 10t + 4$

$a(t) = \frac{dv}{dt} \ \rightarrow \ a = 36t - 10$

c) $\boldsymbol{e = -t^2 + 4t + 3}$

$v(t) = \frac{de}{dt} \ \rightarrow \ v = -2t + 4$

$a(t) = \frac{dv}{dt} \ \rightarrow \ a = -2$

d) $\boldsymbol{e = (3t - 4)^2}$

$v(t) = \frac{de}{dt} \ \rightarrow \ v = 9t^2 + 16 - 24t$

$a(t) = \frac{dv}{dt} \ \rightarrow \ a = 18t - 24$

38. Un depósito cilíndrico de 10 metros de diámetro se llena de agua a 0.3 m³ por minuto. ¿A qué velocidad varía la altura de agua a los 2 minutos? ¿Y a los 5 minutos?

$V = 0.3t\, m^3 \ \rightarrow \ V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ diámetro = 10 ; radio = 5

$\pi \cdot r^2 \cdot h = 0{,}3t \ \rightarrow \ h = \frac{0{,}3t}{\pi \cdot r^2} \ \rightarrow \ h' = v = \ \frac{0.3}{\pi \cdot r^2} = \frac{0{,}3}{25\pi}$

Para t=2

$v(2) = \ \frac{0{,}3}{25\pi} = \ 0{,}0038$ **m/s**

Para t=5

$v(5) = \ \frac{0{,}3}{25\pi} = \ 0{,}0038$ **m/s**

La velocidad es 0,0038 m/s

39. La distancia, d, en metros, recorrida por un trineo que se desliza por una pendiente helada, a los t segundos, viene dada por d = 0.2t^2 + 0.01t^3. Determina la velocidad del trineo a los 2, 4, 7 y 15 segundos. Se sabe que si la velocidad del trineo alcanza los 60 km/h le pueden fallar los frenos,

¿cuándo debería comenzar a aplicar los frenos para no perder el control?

$d(t) = 0.2t^2 + 0.01t^3 \rightarrow v(t) = \frac{d(d)}{dt} = 0.4t + 0.03t^2$

Para t= 2

$v(2) = 0.4(2) + 0.03(2)^2 = 0.8 + 0.12 =$ 0,92 m/s

Para t= 4

$v(4) = 0.4(4) + 0.03(4)^2 = 1.6 + 0.48 =$ 2,08 m/s

Para t= 7

$v(7) = 0.4(7) + 0.03(7)^2 = 2.8 + 1.47 =$ 4.27 m/s

Para t= 15

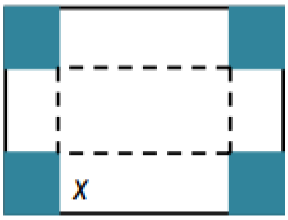
$v(15) = 0.4(15) + 0.03(15)^2 = 6 + 6.75 = 12{,}75$ m/s

$60\ \frac{km}{h} \cdot \frac{1000m}{1km} \cdot \frac{1h}{3600s} =$ 16,67 m/s

$0{,}4t + 0{,}03t^2 = 16{,}67 \rightarrow 0{,}4t + 0{,}03t^2 - 16{,}67 = 0 \rightarrow t = \frac{-0{,}4 \pm \sqrt{(0{,}4)^2 - 4(0{,}03)(-16{,}67)}}{2(0{,}03)} =$

$= \frac{-0{,}4 \pm \sqrt{2{,}1604}}{0{,}06} = \frac{0{,}4 + 1{,}469}{0{,}06} \rightarrow t = \frac{1{,}068}{0{,}06} = 17{,}8\ s$

40. Queremos construir cajas usando cartulinas rectangulares de 20 cm por 25 cm. Para ello se corta en cada esquina un cuadrado de lado x, y se dobla. ¿Qué valor debe tener el lado del cuadrado, x, recortado para que las cajas contengan un volumen máximo? Tendrás que escribir el volumen de las cajas en función de x.



$V(x) = x(25 - 2x)(20 - 2x) \rightarrow V'(x) = (25 - 2x)(20 - 2x) - 2x(20 - 2x) - 2x(25 - 2x) =$

$(25 - 2x)(20 - 2x) - 2x(20 - 2x) - 2x(25 - 2x) = 0$

$(500 - 90x + 4x^2) - (40 - 4x^2) - (50 - 4x^2) = 500 - 90x + 4x^2 - 40x + 4x^2 - 50x + 4x^2 = 0$
$500 - 180x + 12x^2 = 0 \rightarrow 12x^2 - 180x + 500 = 0 \rightarrow 3x^2 - 45x + 125 = 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{45 \pm \sqrt{(45)^2 - 4(3)(125)}}{2\ (3)} = \frac{45 \pm \sqrt{525}}{6} = \frac{45 \pm 5\sqrt{21}}{6}$

$x_1 = \frac{45 + 5\sqrt{21}}{6} = 11{,}31\ cm\ \ no\ válido\ ;\ x_2 = \frac{45 - 5\sqrt{21}}{6} \approx 3{,}7\ cm$

41. Unos barriles para almacenar aceite son cilíndricos y tienen una capacidad de 150 litros. Si se desea construirlos de forma que su superficie total sea mínima, ¿cuánto debe medir su altura y el radio de su base?

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 150 \to \pi \cdot r^2 \cdot h \to h = \frac{150}{\pi \cdot r^2}$

$A = 2\pi \cdot r \cdot h + 2\pi r^2 = 2\pi \cdot r \cdot \frac{150}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{300}{r} + 2\pi r^2$

$A' = -\frac{300}{r^2} + 4\pi r = 0 \to \frac{300}{r^2} = 4\pi r$

$300 = 4\pi r^3 \to \frac{300}{4\pi} = r^3 \to r = \sqrt[3]{\frac{300}{4\pi}} \to \boldsymbol{r} = \sqrt[3]{\frac{\boldsymbol{75}}{\boldsymbol{\pi}}}$

$A'' = \frac{600}{r^3} + 4\pi \quad ; \quad A''\left(\sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}\right) = \frac{600}{\left(\sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}\right)^3} + 4\pi > 0, \quad mínimo$

$\boldsymbol{h} = \frac{150}{\pi \cdot \sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}} = \frac{150}{\pi \cdot 2{,}879} = \boldsymbol{137{,}46\ m}$

42. Al hacer las pruebas de un nuevo medicamento se comprueba que, según la dosis, x, en miligramos, que se administre, el porcentaje de curaciones, y, viene dado por:
$y = 100 - 80/(x + 5)$. Sin embargo, el medicamento tiene efectos secundarios ya que perjudica al riñón. El número de enfermos a los que el tratamiento produce efectos secundarios aumenta un 2 % por cada miligramo que se aumenta la dosis. ¿Podrías ayudar a determinar la dosis de medicamento adecuada? Razona la respuesta.

$y = 100 - \frac{80}{(x+5)} - 2x \quad ; \quad y' = \frac{80}{(x+5)^2} - 2 \quad ; \frac{80}{(x+5)^2} - 2 = 0$

$2(x+5)^2 = 80 \; ; \quad 2x^2 + 20x - 30 = 0 \; ; \; x^2 + 10x - 15 = 0 \; , \; x = -5 \mp 2\sqrt{10}$

Solución válida, $x = -5 + 2\sqrt{10}$, la otra es negativa; $y'' = \frac{-160}{(x+5)^3}$ que es negativa para $x = -5 + 2\sqrt{10}$

Por tanto, es un máximo.

43. En una industria la función $u = f(t)$ indica el número de personas que constituyen la fuerza del trabajo en el instante t, y la función $v = g(t)$ indica la producción media por persona incorporada a la fuerza de trabajo en el instante t. (Vamos a considerar que ambas funciones son derivables, aunque en realidad el número de personas es siempre un número natural, y por tanto son funciones escalonadas). La producción total es igual a $y = u \cdot v$. Si la fuerza de trabajo aumenta un 3 % anual, ($u' = 0.03u$) y la producción por trabajador aumenta un 2 % anual ($v' = 0.02v$) total, determina la tasa de crecimiento instantánea de la producción total.

$f'(t) = 0{,}03 \cdot f(t) \quad ; \quad g'(t) = 0{,}02 \cdot g(t)$

$0{,}03 \cdot f(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot 0{,}02 \cdot g(t) \to 0{,}03\, u \cdot v + 0{,}02\, u \cdot v \to 0{,}05\, u \cdot v$

Aumenta un 5%

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

44. En el ejercicio anterior considera que la función que indica el número de personas que constituyen la fuerza del trabajo en el instante t es $u = f(t) = 3t$ y que la función $v = g(t) = t^2 + 3t$, indica la producción media por persona incorporada a la fuerza de trabajo en el instante t. La producción total es igual a $y = u\cdot v$. Determina la tasa de crecimiento instantánea de la producción total.

$$y = u \cdot v = (3t)\cdot(t^2+3t) \rightarrow y = 3t\,(t^2+3t) = 3t^3+9t^2 \rightarrow y' = 9t^2+18t$$

45. Si en el ejercicio anterior consideras que la fuerza de trabajo ha disminuido un 5 % anual, y la producción por trabajador ha aumentado un 3 % anual total, determina entonces la tasa de crecimiento instantánea de la producción total. ¿Crece o decrece la producción total?

$$\frac{dp}{dt} = P(x)\cdot 0{,}03 \quad ; \quad \frac{dT}{dt} = T(x)\cdot(-0{,}05)$$

$$\frac{d(PT)}{dt} = \frac{d(P\cdot T)}{dt} \rightarrow \frac{d\,(PT)}{dt} = P\cdot\frac{dT}{dt} + T\cdot\frac{dP}{dt}$$

$$\frac{d(PT)}{dt} = P(x)\cdot\big(T(x)\cdot(-0.05)\big) + T(x)\cdot(P(x)\cdot 0.03) \rightarrow \frac{d(PT)}{dt} =$$

$$= -0.05\cdot P(x)\cdot T(x) + 0.03\cdot P(x)\cdot T(x)$$

$$\frac{d(PT)}{dt} = -0.02\cdot P(x)\cdot T(x)$$

Disminuye un 2% anual.

IES ATENEA Ciudad Real

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

AUTOEVALUACIÓN

1. Indica cuál de las siguientes expresiones es la definición de derivada de una función en $x = a$**:**

a) $\lim_{b\to x}\frac{f(b)-f(x)}{b-x}$ **b)** $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ **c)** $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ **d)** $\lim_{h\to 0}\frac{f(b+h)-f(b)}{h}$

2. La derivada de $y = \sqrt{x}\,(x-1)$ **en x= 1 es:**

a) 0 **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** 1 **d)** 2

$$y'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+h}(1+h-1)-\left(\sqrt{1}(1-1)\right)\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+h}h}{h} = \sqrt{1+0} = 1$$

3. La derivada de $y = \frac{x^2+1}{x^3+3}$ **en x= es:**

a) $\frac{15}{11}$ **b)** $-\frac{10}{25}$ **c)** $-\frac{16}{121}$ **d)** $\frac{1}{3}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{(2+h)^2+1}{(2+h)^3+3}-\frac{2^2+1}{2^3+3}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{(4+4h+h^2+1)+1}{(8+12h+6h^2+h^3)+3}-\frac{4+1}{8+3}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{4h+h^2+5}{(11+12h+6h^2+h^3)}-\frac{5}{11}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{11(4h+h^2+5)-5(11+12h+6h^2+h^3)}{11(11+12h+6h^2+h^3)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{11h^2+44h+55-5h^3-30h^2-60h-55}{h\cdot 11(11+12h+6h^2+h^3)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-5h^3-19h^2 16h-}{h\cdot 11(11+12h+6h^2+h^3)} = \lim_{h\to 0}\frac{h(-5h^2-19h-16)}{h\cdot 11(11+12h+6h^2+h^3)} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(-5h^2-19h-16)}{11(11+12h+6h^2+h^3)} = -\frac{16}{11\cdot 11} = -\frac{16}{121}$$

4. La derivada de $y = e^{x^2+3}$ **es:**

a) $y' = 2x \cdot e^{x^2+3}$ **b)** $y' = 2(e^x)^2 \cdot e^x$ **c)** $y' = 3 + e^{x^2}\cdot 2x$ **d)** $y' = 2e^{x^2}$

$$y = e^{x^2+3} \rightarrow y' = \left(e^{x^2+3}\right)(2x)$$

5. La derivada $y = sen(x^3)$ **es:**

a) $y' = 3\left(sen\,(x)\right)^2 \cdot (\cos\,(x)^3)$ **b)** $y' = cos\,(x^3)\cdot 3x^2$

c) $y' = cos\,(x^3)\cdot \text{sen}(3x^2)$ **d)** $y' = 3(\text{sen}(x))^2 \cdot (\cos\,(x))$

$$y = sen\,x^3 \rightarrow y' = 3x^2 \cdot \cos x^3$$

6. La ecuación de la recta tangente de la gráfica de la función $y = 5 + 2x + 3x^2 - 2x^3$ **en** $x = 1$ **es:**

a) $y = -2x - 6$ **b)** $y = x + 8$ **c)** $y = 2x + 6$ **d)** $y = 2x + 8$

$y' = -6x^2 + 6x + 2 \rightarrow y'(1) = -6(1)^2 + 6\,(1) + 2 = 2$; $y(1) = 5 + 2\cdot 1 + 3\cdot 1^2 - 2\cdot 1^3 = 8$

$y = 8 + 2(x-1) \rightarrow y = 8 + 2x - 2 \rightarrow y = 2x + 6$

7. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = 3x^2 - 2x^3$ en $x = 0$ es:

a) $y = 2x + 3$ **b)** $y = x + 8$ **c)** $y = 6x$ **d)** $y = 0$

$y' = -6x^2 + 6x \rightarrow y'(0) = -6(0)^2 + 6(0) = 0$; $y(0) = 3\cdot0^2 - 2\cdot0^3 = 0$

$y = 0 + 0(x - 0) \rightarrow y = 0$

8. La función $y = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 1$ en $x = 1$ es:

a) creciente **b) decreciente** **c) alcanza un mínimo** **d) alcanza un máximo**

$y' = 12x^3 - 15x^2 + 4x - 1 \rightarrow y'(1) = 12\,(1)^3 - 15\,(1)^2 + 4\,(1) - 1 = 0$

$y'(0) = 12\,(0)^3 - 15\,(0)^2 + 4\,(0) - 1 < 0$; $y'(2) = 12\,(2)^3 - 12\,(2)^2 + 4\,(2) - 1 < 0$

Decrecimiento: $(-\infty, 1)$ Crecimiento: $(1, \infty)$

9. Si la derivada de una cierta función es: $y' = (x - 4)\,x$ entonces los intervalos de crecimiento y decrecimiento de dicha función son:

a) $\boldsymbol{x < 0,\ decreciente;\ 0 < x < 4,\ decreciente;\ x > 4,\ creciente}$

b)$\boldsymbol{x < 0,\ decreciente;\ 0 < x < 4,\ creciente;\ x > 4,\ decreciente}$

c) $\boldsymbol{x < 0,\ creciente;\ 0 < x < 4,\ creciente;\ x > 4,\ decreciente}$

d) $\boldsymbol{x < 0,\ creciente;\ 0 < x < 4,\ decreciente;\ x > 4,\ decreciente}$

$f'(x) = x(x - 4) \rightarrow x(x - 4) = 0 \rightarrow x = 0\ \ x = 4$

$f'(-10) = (-10)(-10 - 4) > 0$; $f'(1) = (1)(1 - 4) < 0$; $f'(10) = (10)(10 - 4) > 0$

La función es creciente en $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$ La función es decreciente en $(0,4)$

10. La función $y = 3x^2 - 2x^3$ alcanza los siguientes máximos y mínimos:

a)$\mathbf{(0, 0)\ máximo\ y\ (1, 1)\ mínimo}$ **b)** $\mathbf{(-1, 5)\ máximo\ y\ (1, 1)\ mínimo}$

c) $\mathbf{(6, -324)\ mínimo\ y\ (1, 1)\ máximo}$ **d)** $\mathbf{(0, 0)\ mínimo\ y\ (1, 1)\ máximo}$

$y = 3x^2 - 2x^3 \rightarrow y' = 6x - 6x^2 = 0\,;\ x = 1\ \ x = 0$

$y'(-10) = 6(-10) - 6(-10)^2 < 0$; $y'(0{,}5) = 6(0{,}5) - 6(0{,}5)^2 > 0$; $y'(10) = 6(10) - 6(10)^2 < 0$

Decreciente: $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ Creciente: $(0{,}1)$

x=0 mínimo f (0) =0 , (0,0) ; x=1 máximo f (1) = 1 , (1,1)

IES ATENEA Ciudad Real

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra