Matemáticas II
2º Bachillerato
Capítulo 4: Vectores

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por: AITANA, AITOR, AMALIA, ANDREA, CARMEN, CELIA S, FERNANDO, IRENE, ISMAEL F, LAURA, NATALIA, OLIVIA, ROSA, PABLO G, ESPERANZA, LIDIA, CELIA P, ISMAEL C, ENRIQUE, LUCÍA, NEREA, JULIA, JERÓNIMO

IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Calcula las componentes y el módulo de un vector de origen A(-1,1,2) y extremo B(3,1,-4).

$\overrightarrow{OB} = (3,1,-4) \qquad \overrightarrow{OA} = (-1,1,2) \qquad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (4,0,-6)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$

2. Dados los puntos P=(2, 2, 3), Q=(2, 0, 5) y R=(-2, 3, 4) y los vectores $\vec{v} = (1,-1,3)$, $\vec{w} = (0,-2,1)$ calcula, indicando si el resultado es punto o vector:

a) $\overrightarrow{QP}$ b) $3\vec{v} - 2\vec{w}$ c) $\vec{v} - \overrightarrow{RP}$ d) $P + \vec{v}$ e) $R + \overrightarrow{PQ} + \vec{w}$

$a)\ \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = (1,2,-2)$ Vector.

$b)\ 3\vec{v} - 2\vec{w} = (3,1,7)$ Vector. $\qquad 3\vec{v} = (3,-3,9) \qquad 2\vec{w} = (0,-4,2)$

$c)\ \vec{v} - \overrightarrow{RP} = (-3,0,4)$ Vector. $\qquad \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OR} = (4,-1,-1)$

$d)\ P + \vec{v} \rightarrow$ No se puede operar con un punto y un vector.

$e)\ R + \overrightarrow{PQ} + \vec{w} \rightarrow$ No se puede operar con un punto y un vector.

3. Dados tres puntos genéricos, P=(p_1, p_2, p_3), Q=(q_1, q_2, q_3) y R=(r_1, r_2, r_3), demuestra:

$\boldsymbol{a})\overrightarrow{\boldsymbol{PQ}} + \overrightarrow{\boldsymbol{QR}} = \overrightarrow{\boldsymbol{PR}} \quad \boldsymbol{b})\overrightarrow{\boldsymbol{PQ}} = (-1)\overrightarrow{\boldsymbol{QP}} \quad \boldsymbol{c})\overrightarrow{\boldsymbol{PP}} = \vec{\boldsymbol{0}}\ \boldsymbol{d})\overrightarrow{\boldsymbol{PQ}} + \overrightarrow{\boldsymbol{PQ}} = 2\overrightarrow{\boldsymbol{PQ}}$

$\boldsymbol{a})\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

$\overrightarrow{PQ}(Q-P) = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3) \qquad \overrightarrow{QR}(R-Q) = (r_1 - q_1, r_2 - q_2, r_3 - q_3)$

$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3) += (r_1 - q_1, r_2 - q_2, r_3 - q_3) = (r_1 - p_1, r_2 - p_2, r_3 - p_3)$

$\overrightarrow{PR}(R-P) = (r_1 - p_1, r_2 - p_2, r_3 - p_3)$

$\boldsymbol{b})\overrightarrow{PQ} = (-1)\overrightarrow{QP}$

$\overrightarrow{PQ}(Q-P) = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$

$(-1)\overrightarrow{QP}(P-Q) = (p_1 - q_1, p_2 - q_2, p_3 - q_3)(-1);$

$(-1)\overrightarrow{QP}(P-Q) = (-p_1 + q_1, -p_2 + q_2, -p_3 + q_3)$

$\boldsymbol{c})\overrightarrow{PP} = \vec{0}$

$\overrightarrow{PP} = (p_1 - p_1, p_2 - p_2, p_3 - p_3) = (0,0,0)$

$\boldsymbol{d})\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{PQ}$

$\overrightarrow{PQ}(Q-P) = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$

$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3) + (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3) = (2q_1 - 2p_1, 2\,q_2 - 2p_2, 2\,q_3 - 2p_3) = 2\overrightarrow{PQ}$

4. Dados los vectores $\vec{u}$(1, -3, 0) , $\vec{v}$ (-6, 3, 0), $\vec{w}$ (7, 2, 1).

a) $3\vec{u} - 2\vec{v} + 5\vec{w}$

$3\vec{u} = (3,-9,15) \quad ; \quad -2\vec{v} = (12,-6,0) \quad ; \quad 5\vec{w} = (35,10,-5)$

$3\vec{u} - 2\vec{v} + 5\vec{w} = (50,-5,10)$

b) $2\vec{u} - 2\vec{v} + 2\vec{w}$

$2\vec{u} = (2,-6,0) \quad ; \quad -2\vec{v} = (12,-6,0) \quad ; \quad 2\vec{w} = (14,\ 4\,,-2)$

$2\vec{u} - 2\vec{v} + 2\vec{w} = (28,-8,8)$

c) $\mathbf{3(\vec{u}-2\vec{v})+3\vec{w}}$

$3\vec{u}=(3,-9,15)$; $-6\vec{v}=(36,-18,0)$; $3\vec{w}=(21,6,-3)$

$3(\vec{u}-2\vec{v})+3\vec{w}=(60,-21,12)$

d)$\mathbf{3\vec{u}-2(\vec{v}+\vec{w})}$

$3\vec{u}=(3.-9,15)$; $-2\vec{v}=(12,-6,0)$; $2\vec{w}=(14,\ 4,-2)$

$3\vec{u}-2(\vec{v}+\vec{w})=(1,-19,17)$

5. Dados los puntos A(0, -2, 6) y B(4, 8, -4) determina el punto medio del segmento AB.

$M=\frac{A+B}{2}\quad M(x,y,z)=\left(\frac{0+4}{2},\frac{-2+8}{2},\frac{6-4}{2}\right)=M(2,3,5/2)$

6. Comprueba si los puntos A (3, 2, 1), B(4, 4, 2) y C (4, -1, 3) están alineados.

Si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son proporcionales estarán alineados

$\frac{b_1-a_1}{c_1-a_1}=\frac{b_2-a_2}{c_2-a_2}=\frac{b_3-a_3}{c_3-a_3}$; $\frac{4-3}{4-3}=\frac{4-2}{-1-2}=\frac{-2-1}{3-1}$; $1\neq\frac{2}{-3}\neq-\frac{3}{2}$

Al no ser proporcionales no están alineados.

7. Determina si son linealmente independientes o no los conjuntos de vectores siguientes:

$\boldsymbol{A=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}, con\ \vec{u}=(1,2,0),\vec{v}=(3,0,1)\ y\ \vec{w}=(4,2,-7).}$

$$\begin{pmatrix}1&2&0\\3&0&1\\4&2&-7\end{pmatrix}\ \text{-3F}_1\text{+F}_2\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-6&0\\4&2&-7\end{pmatrix}\ \text{-4F}_1\text{+F}_3\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-6&0\\0&-6&-7\end{pmatrix}\text{-F}_2\text{+F}_3\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-6&0\\0&0&-7\end{pmatrix}$$

Como el rango es 3 este conjunto de vectores es independiente.

$B=\{\vec{u},\vec{v}\}, con\ \vec{u}=(1,2,0)\ y\ \vec{v}=(2,4,0).$

$$\begin{pmatrix}1&2&0\\2&4&0\end{pmatrix}\ \text{-2F}_1\text{+F}_2\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Como el rango es 1 este conjunto de vectores es dependiente.

$\mathbf{C=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w},\vec{x}\}, con\ \vec{u}=(1,2,0),\vec{v}=(4,1,3)\ y\ \vec{w}=(4,2,-7)\ y\ \vec{x}=(0,0,1).}$

Al ser un conjunto de cuatro vectores en un espacio de tres dimensiones son linealmente dependientes.

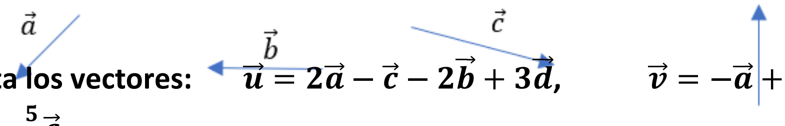
8. Calcula el producto escalar de los vectores $\boldsymbol{\vec{u}=(0,1,-3)\ y\ \vec{v}=(-3,4,6)}$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(0,1,-3)\cdot(-3,4,6)=0(-3)+1\cdot4+6(-3)=\ -14$

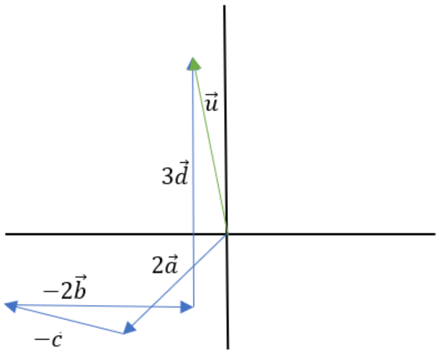
El producto escalar es -14.

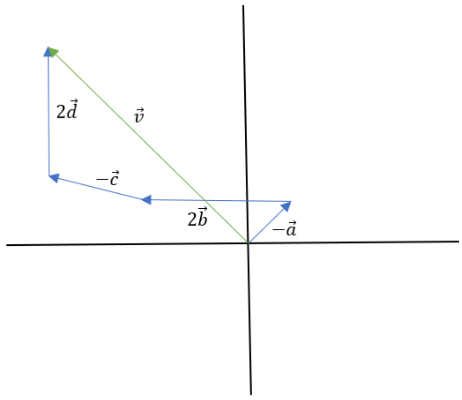
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

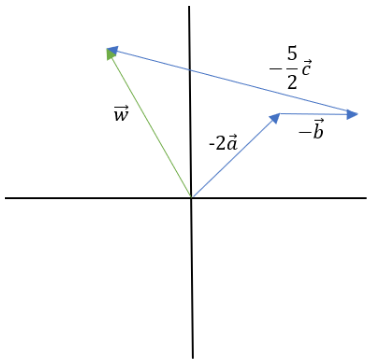
1. Dados los vectores libres:



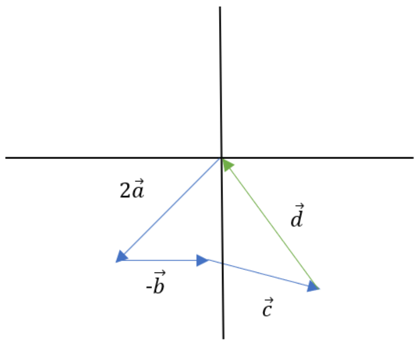
a) **Representa los vectores:** $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{c} - 2\vec{b} + 3\vec{d}$, $\vec{v} = -\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} + 2\vec{d}$, $\vec{w} = -2\vec{a} - \vec{b} - \frac{5}{2}\vec{c}$







b) **Halla un vector $\vec{d}$ tal que $2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = 0$**



2. Dados $\underline{a} = (2, -1)$ y $\underline{b} = (-3, m)$, halla el valor de m para que sean linealmente dependientes.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & m \end{vmatrix} = 0;\ 2m - (+3) = 2m - 3 = 0; \quad m = \frac{3}{2}$$

3. Comprueba si son o no linealmente independientes los siguientes vectores:

a) $\underline{□} = (-2{,}3)$ □ $\underline{□} = (6, -9)$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -9 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-9) - 3\cdot 6 = 18\cdot(-18) = 0$$

Son linealmente dependientes ya que su determinante es igual a 0.

b) $\underline{\square} = (-1,2,3), \underline{\square}(-2,0,1), \underline{\square} = (2,-4,5) \ \square\ \underline{\square} = (3,2,-4)$

Son linealmente dependientes, ya que son 4 vectores dados en un espacio de 3 dimensiones, por lo que al menos 1 será dependiente de otro.

c) $\underline{\square} = (2,1,0,\ -1), \underline{\square}(1,\ -3,\ -1,0), \underline{\square} = (3,-2,-1,1)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} F1-2F2 \\ F1+2F2 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} F2+7F3 \\ -2F2+7F3 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 21 \end{pmatrix}$$

Los vectores son linealmente independientes entre sí, pues el rango de la matriz es 3.

4. a) Dado los vectores $\vec{x} = (1,3,-2)$ e $\vec{y} = (3,m,-6)$, halla el valor de m para que los dos vectores sean linealmente independientes.

$$\cdot\ \begin{matrix} \vec{x} = (1,3,-2) \\ \vec{y} = (3,m,-6) \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & m & -6 \end{pmatrix} \to -3\cdot F_1 + F_2 \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3-3 & m-9 & -6+6 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & m-9 & 0 \end{pmatrix} \qquad * m-9=0 \to m=9$$

- **Si m ≠ 9 son independientes.** **Si m = 9 son dependientes.**

b) Si $m = -2$, ¿ Se puede expresar el vector $\vec{z} = (-1,8,1)$ como combinación lineal de $\vec{x}$ e $\vec{y}$?

$$\vec{z} = a\cdot\vec{v} + b\cdot\vec{w} \to (-1,8,1) = a\cdot(1,3,-2) + b\cdot(3,-2,-6)$$

$$\left.\begin{matrix} -1 = a\cdot 1 + 3b \\ 8 = 3a - 2b \\ 1 = -2a - 6b \end{matrix}\right\} \to \frac{\begin{matrix} -3\cdot(a+3b=1) \\ 1\cdot(3a-2b=8) \end{matrix}}{0-11b=11} \to \cdot\, b = -1$$

$1 = -2a + 6 \to a = 5/2 \qquad 8 = 3a + 2 \to a = 2 \qquad -1 = a - 3 \to a = 2$

- El vector $\vec{z}$ no se puede expresar como combinación lineal de $\vec{x}$ e $\vec{y}$ si m = -2.

5. Dados los vectores $\vec{u} = (-3,4,0)$, $\vec{v} = (1,-2,2)$ y $\vec{w} = (0,-m,1)$, calcula el valor de m para que el vector $\vec{u}$ se pueda expresar como combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

$$\vec{u} = a\cdot\vec{v} + b\cdot\vec{w} \to (-3,4,0) = a\cdot(1,-2,2) + b\cdot(0,-m,1)$$

1º. Realizamos un sistema de ecuaciones y lo resolvemos;

$$\left.\begin{matrix} -3 = a \\ 4 = -2a - mb \\ 0 = 2a + b \end{matrix}\right\} \to a = -3$$

$$b = -2\cdot -3 \to b = 6$$

$$\vec{u} = -3\cdot\vec{v} + 6\cdot\vec{w} \to (-3,6,-6)^{es\ \vec{v}\cdot -3} + (0,6\cdot m,6)^{es\ \vec{w}\cdot 6}$$

Para que $\vec{u}$ se pueda expresar como combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$, m debe de ser $-\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$.

6. Dados los vectores $\vec{x} = (1,-2,0)$, $\vec{y} = (3,-1,2)$ y $\vec{w} = (-m,-1,-2)$, halla el valor de m para que los tres vectores sean linealmente dependientes.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -m & -1 & -2 \end{pmatrix} \to F2 \leftrightarrow F3 \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -m & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to C1 \leftrightarrow C2 \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -m & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{matrix}-2\cdot F2+F1\\ -2\cdot F3+F1\end{matrix} \to \begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & 1+2m & 4\\ 0 & -5 & -4\end{pmatrix} \to F2+F3 \to \begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & 1+2m & 4\\ 0 & -4+2m & 0\end{pmatrix} \to C2 \leftrightarrow C3 \to$$

$$\to \begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 0 & 4 & 1+2m\\ 0 & 0 & -4+2m\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 0 & 4 & 1+2m\\ 0 & 0 & -4+2m\end{pmatrix} \to -4+2m=0 \to m=2$$

- Si m ≠ 2; Independientes. Si m = 2; Dependientes.

7. Dados los vectores $\bar{u}=(1,1,m), \bar{v}=(0,m,-1)$ y $\bar{w}=(1,2m,0)$, determina el valor de m para que:

a) Sean linealmente independientes

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & m\\ 0 & m & -1\\ 1 & 2m & 0\end{vmatrix} = (0+0-1)-(m^2-2m+0) = -1-m^2+2m$$

Luego:

$$-1-m^2+2m=0;\quad -m^2+2m-1=0;\quad m^2-2m+1=0 \to m=1\ doble$$

Si $m \neq 1$ son linealmente independientes

b) El vector $\bar{v}$ se pueda expresar como combinación lineal de $\bar{u}$ y $\bar{w}$, y halla dicha combinación.

$\bar{v}=a\bar{u}+b\bar{w}$

$(0,m,-1)=a(1,1,m)+b(1,2m,0)$

$(0,m,-1)=(a,a,am)+(b,2mb,0)$

$(0,m,-1)=(a+b,a+2mb,am)$

$$\begin{cases}a+b=0\\ a+2mb=m\\ am=-1\end{cases} \to \begin{cases}a=-b\\ -b+2mb=m\\ -bm=-1\end{cases} \to m=\frac{1}{b} \to -b+2=\frac{1}{b} \to -b^2+2b-1=0$$

$b=1; a=-1; m=1$

c) Sean coplanarios

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & m\\ 0 & m & -1\\ 1 & 2m & 0\end{vmatrix} = (0+0-1)-(m^2-2m+0) = -1-m^2+2m$$

Luego:

$$-1-m^2+2m=0;\quad -m^2+2m-1=0;\quad m^2-2m+1=0 \to m=1$$

8. Los vectores $\bar{x}=(1,0,0), \bar{y}=(-1,0,1)$ y $\bar{z}=(2,1,1)$, ¿forman una base V^3? En caso afirmativo:

a)Halla las componentes del vector $\bar{u}=(3,-2,5)$ respecto de dicha base.

b)Halla las componentes de la base canónica $\{\bar{\imath},\bar{\jmath},\bar{k}\}$ del vector $\bar{v}$, si sus coordenadas en la base $\{\bar{x},\bar{y},\bar{z}\}$ son 2, -3 y 2 respectivamente

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix} = (0+0+0)-(0+1+0) = -1 \neq 0$$

Como el determinante no es nulo, el rango es 3, son vectores linealmente independientes y por tanto sí forman una base V^3

A)

$\bar{u}=x(1,0,0)+y(-1,0,1)+z(2,1,1)$

$(3,-2,5)=(x,0,0)+(-y,0,y)+(2z,z,z)$

$(3,-2,5)=(x-y+2z,z,y+z)$

$$\begin{cases}x-y+2z=3\\ z=-2\\ y+z=5\end{cases} \to \begin{matrix}y=5-z\\ y=5-(-2)\\ y=7\end{matrix} \to \begin{matrix}x-7+2(-2)=3\\ x=3+7+4\\ x=14\end{matrix} \to \bar{\boldsymbol{u}}=(14,7,-2)$$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

B)

$\bar{v} = \overline{\boldsymbol{2x}} - \boldsymbol{3\bar{y}} + \boldsymbol{2\bar{z}} = 2(1,0,0) - 3(-1,0,1) + 2(2,1,1)$
$\bar{v} = (2,0,0) - (-3,0,3) + (4,2,2)$
$\bar{v} = (9, 2, -1)$

9. Halla un punto C que esté alineado con A y B, y otro punto D que no lo esté.
(respuesta libre)
Para que los tres puntos estén alineados se tiene que cumplir la siguiente condición:

$$\frac{b_1 - a_1}{c_1 - a_1} = \frac{b_2 - a_2}{c_2 - a_2} = \frac{b_3 - a_3}{c_3 - a_3}$$

Luego, por ejemplo, si tomamos como puntos $C\left(\frac{7}{2}, 3, -\frac{1}{2}\right), A(3,2,1)\ y\ B(4,4,-2)$

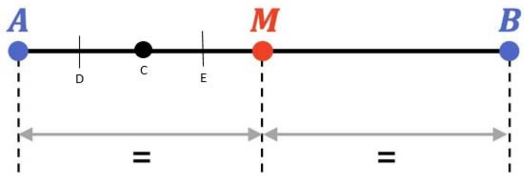
$$\frac{4-3}{\frac{7}{2}-3} = \frac{4-2}{3-2} = \frac{-2-1}{-\frac{1}{2}-1} \to 2 = 2 = 2 \to Están\ alineados$$

Si $D(4,-1,6)$

$$\frac{4-3}{4-3} = \frac{4-2}{-1-2} = \frac{-2-1}{6-1} \to 1 \neq -\frac{2}{3} \neq -\frac{3}{5} \to No\ están\ alineados$$

10. De un segmento $\overline{AB}$, el punto B tiene coordenadas (-2,0,6) y el punto medio del segmento tiene coordenadas M(-3,2,2). Halla las coordenadas del punto A y divide el segmento $\overline{AM}$ en cuatro partes iguales.

$$(-3,2,2) = \left(\frac{x_1+(-2)}{2}, \frac{y_1+0}{2}, \frac{z_1+6}{2}\right) \qquad \begin{cases} \frac{x_1+(-2)}{2} = -3; x_1 = -4 \\ \frac{y_1+0}{2} = 2; y_1 = 4 \\ \frac{z_1+6}{2} = 2; z_1 = -2 \end{cases} \to A(-4,4,-2)$$



$$C = \left(\frac{-4-3}{2}, \frac{4+2}{2}, \frac{-2+2}{2}\right) \to C(-3.5\,, 3{,}0)$$

$$D = \left(\frac{-4-3.5}{2}, \frac{4+3}{2}, \frac{-2+0}{2}\right) \to D(-3.75\,, 3.5\,, -1) \qquad E = \left(\frac{-3.5-3}{2}, \frac{3+2}{2}, \frac{0+2}{2}\right) \to E(-3.25\,, 2.5, 1)$$

11. De un segmento AB, se sabe que AB = (3,–4,–2) y que el punto medio del segmento tiene de coordenadas M (–1,0,3). Halla las coordenadas de A y B y divide el segmento AB en 3 partes iguales

$$A(x_1, y_1, z_1)\ ;\ \ B(x_2, y_2, z_2) \quad por\ AB{:} \begin{cases} x_2 - x_1 = 3 \\ y_2 - y_1 = -4 \\ z_2 - z_1 = -2 \end{cases} ;\ por\ M{:} \begin{cases} \frac{x_1+x_2}{2} = -1 \\ \frac{y_2+y_1}{2} = 0 \\ \frac{z_2+z_1}{2} = 3 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} x_2 - x_1 = 3 \\ x_1 + x_2 = -2 \end{cases} \to x_2 = 3 + x_1 \to x_1 + 3 + x_1 = -2 \to 2x_1 = -5 \to$$

$$x_1 = \frac{-5}{2} \quad \to \quad x_2 + \frac{5}{2} = 3 \quad \to \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} y_2 - y_1 = -4 \\ y_2 + y_1 = 0 \end{cases} \rightarrow y_2 = -4 + y_1 \rightarrow -4 + y_1 + y_1 = 0 \rightarrow$$
$$-4 + 2y_1 = 0 \rightarrow 2y_1 = 4 \rightarrow \quad y_1 = 2 \quad \rightarrow \quad y_2 - 2 = -4 \quad \rightarrow \quad y_2 = -2$$

$$\begin{cases} z_2 - z_1 = -2 \\ z_2 + z_1 = 6 \end{cases} \rightarrow z_2 = -2 + z_1 \rightarrow -2 + z_1 + z_1 = 6 \rightarrow -2 + 2z_1 = 6 \rightarrow$$
$$2z_1 = 8 \rightarrow z_1 = 4 \rightarrow z_2 - 4 = -2 \rightarrow z_2 = 2$$

$$A\left(-\frac{5}{2},\ 2,\ 4\right) \quad B\left(\frac{1}{2}, -2,\ 2\right) \qquad \overrightarrow{AB}(3, -4, -2)$$

Sean P y Q los puntos que dividen AB en 3 partes iguales,

$$3\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB}\ ;\ 3\left(x + \frac{5}{2},\ y - 2,\ z - 4\right) = (3, -4, -2) \rightarrow P = \left(-\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right)$$

$$3\overrightarrow{QB} = \overrightarrow{AB} \ \rightarrow 3\left(\frac{1}{2} - x, -2 - y,\ 2 - z\right) = (3, -4, -2) \rightarrow Q = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

12. - Dados los puntos A (2,0,1) y B (0,–2,3), halla dos puntos C y D que estén alineados con A y B, de manera que uno de ellos (C) esté situado entre ambos y el otro (D) esté situado a la izquierda de A.

$$M = \frac{A+B}{2} \rightarrow M = \frac{(2,0,1)+(0,-2,3)}{2} \rightarrow M\,\frac{(2,-2,4)}{2} \rightarrow M\left(1, -1, \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{D+C}{2} = A \rightarrow D = (A - C)\cdot 2 \rightarrow D = \left((2,0,1) - \left(1, -1, \frac{1}{2}\right)\right)\cdot 2 \rightarrow D = (2,2,-1)$$

13. De los vectores u ρ y v ρ se sabe que u = 3 ρ , u · v = –12 ρ ρ y los dos vectores forman un ángulo de 120°. Halla v ρ , proy u v ρ ρ y proy 2 u ρ ρ v .

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\overline{u}|\cdot|\overline{v}|\cdot cos\alpha \rightarrow -12 = 3\cdot|\overline{v}|\cdot\cos 120 \rightarrow \frac{-12}{3\cdot\cos 120} = |\overline{v}| \rightarrow |\overline{v}| = 8$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\overline{v}|\cdot proy_{\overline{v}}\overline{u} = -12 = 8\cdot proy_{\overline{v}}\overline{u} \rightarrow proy_{\overline{v}}\overline{u} = -\frac{3}{2}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\overline{u}|\cdot proy_{\overline{u}}\overline{v} \rightarrow -12 = 3\cdot proy_{\overline{u}}\overline{v} \rightarrow proy_{\overline{u}}\overline{v} = -4$$

14. ¿Puede haber dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $\vec{u}\cdot\vec{v}$ = 8 siendo $|\vec{u}\,| = 3\ y\ |\vec{v}\,| = 2$?

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 8 \qquad \vec{u}\cdot\vec{v} \ = \ |\vec{u}\,|\cdot|\vec{v}\,|\cdot\cos\alpha\ ; \qquad 8 = 3\cdot 2\cdot\cos\alpha \quad \rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{3}$

El coseno de un ángulo no puede ser > 1 , luego no puede haber dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $\vec{u}\cdot\vec{v}$ = 8 siendo $|\vec{u}\,| = 3\ y\ |\vec{v}\,| = 2$.

15. Dados los vectores $\vec{u} = (2, -3, 6)\ \ y\ \ \vec{v} = (3, -6, 2)$, calcula:

a) El producto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$

b) El módulo de $\vec{u}$ y el módulo de $\vec{v}$

c) El ángulo formado por ellos

d) El ángulo formado por $\vec{u}$ y $\vec{u} - \vec{v}$

e) Un vector perpendicular a $\vec{v}$ que tenga módulo 3. ¿Cuántas soluciones hay?

a) producto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$ $\qquad \vec{u}\cdot\vec{v} = 2\cdot 3 + (-3)(-6) + 6\cdot 2 = 36$

b) $|\vec{u}\,| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = 7 \qquad |\vec{v}\,| = \sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2} = 7$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

c) $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha$; $\alpha = \arccos(\frac{\vec{u}\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|})$; ; $\alpha = \arccos(\frac{36}{7\cdot 7}) = 42{,}71°$

d) $\vec{u}-\vec{v} = (-1,3,3)$ $|\vec{u}-\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2+3^2+3^2} = \sqrt{10}$

$\vec{u}\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = 10$ $\alpha = \arccos(\frac{10}{7\cdot\sqrt{10}}) = 63{,}14°$

e) $\vec{w}(a,b,c)$ $\vec{v}\cdot\vec{w} = 0$

$\begin{cases} 3a-6b+2c=0 \\ \sqrt{a^2+b^2+c^2}=3 \end{cases}$; $\begin{matrix} 3a-6b+2c=0 \\ a^2+b^2+c^2=9 \end{matrix}$

Al ser la representación de un plano (primera ecuación) que corta a una esfera (segunda ecuación), vemos que hay infinitas soluciones donde el vector perpendicular a $\vec{v}$ tenga módulo 3. Obtenemos una circunferencia.

16. Dados los vectores $\vec{u} = (1,-2,2)$ y $\vec{v} = (4,-4,-2)$, calcula:

a) El producto escalar $2\vec{u}\cdot 3\vec{v}$

b) El módulo de $\vec{u}$ y el módulo de $\vec{v}-\vec{u}$

c) El ángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{u}+\vec{v}$

d) Los cosenos directores de $\vec{v}$

e) Un vector perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$ que tenga módulo 6.

a) $\overrightarrow{2u}\cdot 3\vec{v}$ $\overrightarrow{2u} = (2,-4,4)$ $\overrightarrow{3v} = (12,-12,-6)$ $\overrightarrow{2u}\cdot 3\vec{v} = 48$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = 3$ $\vec{v}-\vec{u} = (3,-2,-4)$; $|\vec{v}-\vec{u}| = \sqrt{3^2+(-2)^2+(-4)^2} = \sqrt{29}$

c) $\alpha = \arccos(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{u}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}-\vec{u}|}$; $\arccos(\frac{-1}{3\cdot\sqrt{29}} = 86{,}6°$

d) $\cos\alpha = \frac{V_1}{|\vec{V}|}$; $\cos\beta = \frac{V_2}{|\vec{V}|}$; $\cos\gamma = \frac{V_3}{|\vec{V}|}$ $|\vec{V}| = \sqrt{4^2+(-4)^2+(-2)^2} = 6$

$\cos\alpha = \frac{4}{6}$; $\cos\beta = \frac{-4}{6}$; $\cos\gamma = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$

e) $\vec{u}\,x\,\vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 12i+10j+4k \to (12,10,4)$; $(12k,10k,4k)$

$\sqrt{(12k)^2+(10k)^2+(4k)^2} = 6$; $144k^2+100k^2+16k^2 = 36$; $280k^2 = 36$

$k = \sqrt{\frac{36}{280}} = \frac{3\sqrt{70}}{70}$ $\vec{w} = (12\cdot\frac{3\sqrt{70}}{70}, 10\cdot\frac{3\sqrt{70}}{70}, 4\cdot\frac{3\sqrt{70}}{70})$

17. Calcula las componentes de un vector $\vec{v}$ que tenga la misma dirección que el vector $\vec{u} = (4,-2,1)$ y su módulo sea 3 y las de otro vector $\vec{w}$ que sea unitario, pero con sentido opuesto al vector $\vec{u}$. ¿Cuáles son los cosenos directores de $\vec{u}$?

a) Primero: Para que dos vectores tengan la misma dirección, deben ser proporcionales, es decir, $\vec{v} = k\,\vec{u}$. Por lo tanto, $\vec{v} = k(4,-2,1) \to \vec{v} = (4k,-2k,k)$

Segundo: Si queremos que su módulo sea 3, se debe cumplir que:

$$\sqrt{(4k)^2+(-2k)^2+k^2} = 3 \to \sqrt{21}k = 3 \to k = \frac{3}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

Tercero: Sustituir: $\vec{v} = \left(\frac{4\sqrt{21}}{7}, -\frac{2\sqrt{21}}{7}, \frac{\sqrt{21}}{7}\right)$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

b) Primero: Para que sea unitario y con sentido contrario a $\vec{u}$, se debe cumplir que:

$\vec{w} = -\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$

Segundo: Se calcula $|\vec{u}| \to |\vec{u}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{21}$

Tercero: Se sustituye y calcula: $\boldsymbol{\vec{w}} = \left(-\frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}, -\frac{1}{\sqrt{21}}\right)$

c) Primero: Los cosenos directores de un vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ son:

$cos\alpha = \frac{v_1}{\sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2}}$; $cos\beta = \frac{v_2}{\sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2}}$; $cos\gamma = \frac{v_3}{\sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2}}$;

Segundo: Sustituyendo los valores del vector $\vec{u}$:

$$\boldsymbol{cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{21}}; \; cos\beta = -\frac{2}{\sqrt{21}}; \; cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{21}}}$$

18. Los cosenos directores del vector $\vec{u}$ son: $cos\alpha = 0,2$; $cos\beta = 0,3$ y $cos\gamma = 0,87$. Si $|\vec{u}| = 6$, ¿cuáles son sus componentes?

Primero: Los cosenos directores de un vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ son:

$cos\alpha = \frac{v_1}{\sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2}}$; $cos\beta = \frac{v_2}{\sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2}}$; $cos\gamma = \frac{v_3}{\sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2}}$;

Segundo: Sustituimos los valores del vector $\boldsymbol{\vec{u}}$: $0,2 = \frac{u_1}{6}$; $0,3 = \frac{u_2}{6}$; $0,87 = \frac{u_3}{6}$

Tercero: Despejamos las componentes: $u_1 = 1,2$; $u_2 = 1,8$; $u_3 = 5,22 \to$

$\vec{u}$ =(1,2 , 1,8 , 5,22)

19. Un vector $\vec{u}$ forma con los vectores $\vec{u}_2$ y $\vec{u_3}$ de la base ortonormal ángulos de 45º y 60º, y con el vector $\vec{u}_1$ un ángulo agudo. Si $|\vec{u}| = 4$, determina las componentes del vector $\vec{u}$.

Primero: Los ángulos dados corresponden a los de los cosenos directores, de modo que:

$cos\alpha = \frac{u_1}{|\vec{u}|}$; $cos\beta = \frac{u_2}{|\vec{u}|}$; $cos\gamma = \frac{u_3}{|\vec{u}|}$;

Segundo: Se sustituyen los valores y se despejan las coordenadas:

$cos\beta = \frac{u_2}{|\vec{u}|} \to cos45º = \frac{u_2}{4} \to \boldsymbol{u_2 = 2\sqrt{2}}$

$cos\gamma = \frac{u_3}{|\vec{u}|} \to cos60º = \frac{u_3}{4} \to \boldsymbol{u_3 = 2}$

Tercero: u_1 se calcula con el módulo del vector:

$|\vec{u}| = \sqrt{{u_1}^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 + 2^2} = 4 \to 16 = {u_1}^2 + 8 + 4 \to \boldsymbol{u_1 = 2}$

$\boldsymbol{\vec{u}} = (2, \quad 2\sqrt{2}, \quad 2)$

20. Determina, si es posible, el valor de *m* de modo que $\vec{u} = (m, -2, 3)$ y $\vec{v} = (-1, m, 1)$ sean:

a) Paralelos.

b) Perpendiculares.

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

a) <u>Primero:</u> Para que dos vectores sean paralelos deben ser proporcionales: $\vec{u} = k\,\vec{v}$.
<u>Segundo:</u> Aplicamos lo anterior a los vectores dados:
$(m,-2,3) = k(-1,m,1) \rightarrow m = -k; -2 = km; 3 = k.$
Si k=3, m debería tener dos valores distintos, $m = -3 \; y \; m = -2/3$ lo cual no es posible, por tanto, no pueden ser paralelos.

b) <u>Primero</u>: Para que dos vectores sean perpendiculares, su producto escalar debe ser cero: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
<u>Segundo</u>: Aplicamos lo anterior a los vectores dados:
$(m,-2,3)\cdot(-1,m,1) = 0 \rightarrow -m-2m+3 = 0 \rightarrow \boldsymbol{m = 1}$

21. a) Calcula el valor de m para que los vectores $\bar{u} = (-1, m, 4)$ y $\bar{v}(m,-3,2)$ sean perpendiculares.

$\bar{u}\cdot\bar{v} = 0 \qquad -m-3m+8 = 0 \qquad -4m = -8 \qquad m = 2$

b) ¿Qué ángulo formarán para m = 0 los vectores $(\bar{u}+2\bar{v})\; y\; (\bar{u}-\bar{v})$?

$\bar{u} = (-1,0,4)\;;\; \bar{v} = (0,-3,2)$

$(\bar{u}+2\bar{v}) = (-1+0, 0-6, 4+4) = (-1,-6,8) = \bar{a}$

$(\bar{u}-\bar{v}) = (-1-0, 0+3, 4-2) = (-1,3,2) = \bar{b}$

$$\cos(\bar{a},\bar{b}) = \frac{|\bar{a}\cdot\bar{b}|}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} = \frac{|(-1\cdot(-1)) + (-6\cdot 3) + (8\cdot 2)|}{\sqrt{1+6^2+8^2}\cdot\sqrt{1+3^2+2^2}} = \frac{|1-18+16|}{\sqrt{1+36+64}\cdot\sqrt{1+9+4}} = \frac{1}{\sqrt{101}\cdot\sqrt{14}};$$

$$ángulo = 1{,}54419\; radianes = 88{,}476\; grados$$

22. De dos vectores ortogonales se sabe que $(\bar{u}+\bar{v})\cdot(\bar{u}-\bar{v}) = 7 \; y \; |\bar{u}+\bar{v}| = 5.$ Halla $|\bar{u}| \; y \; |\bar{v}|$

$\bar{u}\cdot\bar{v} = 0$

$(\bar{u}+\bar{v})\cdot(\bar{u}-\bar{v}) = \bar{u}\cdot\bar{u} - \bar{u}\cdot\bar{v} + \bar{v}\cdot\bar{u} - \bar{v}\cdot\bar{v} = 7 \rightarrow |\bar{u}|^2 - |\bar{v}|^2 = 7$

$|\bar{u}+\bar{v}| = 5\;;\; \sqrt{((\bar{u}+\bar{v})\cdot(\bar{u}-\bar{v}))} = \sqrt{\bar{u}\cdot\bar{v} - \bar{u}\cdot\bar{v} + \bar{v}\cdot\bar{u} - \bar{v}\cdot\bar{v}} = 5$

$|\bar{u}|^2 + 2\bar{u}\cdot\bar{v} + |\bar{v}|^2 = 25 \rightarrow |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 = 25$

$$\left.\begin{array}{r} |\bar{u}|^2 - |\bar{v}|^2 = 7 \\ |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 = 25 \end{array}\right\} +$$

$2|\bar{u}|^2 = 32\;;\; |\bar{u}|^2 = 16;\; |\bar{u}| = 4$

$|\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 = 25;\;\; 16 + |\bar{v}|^2 = 25\;;\; |\bar{v}|^2 = 9;\; |\bar{v}| = 3$

23. Dados dos vectores $\bar{u} \; y \; \bar{v}$, tales que $|\bar{u}| = 16$ y $(\bar{u}+\bar{v})\cdot(\bar{u}-\bar{v}) = 24$, Calcula el módulo de $\bar{v}$

$|\bar{u}| = \sqrt{\bar{u}\cdot\bar{u}}\;; \quad \bar{u}\cdot\bar{u} = |\bar{u}|^2 \quad ; \quad |\bar{u}| = \bar{u}\cdot\bar{v}\;; \quad 16^2 = \bar{u}\cdot\bar{u}$

$\bar{u}\cdot\bar{u} - \bar{u}\cdot\bar{v} + \bar{v}\cdot\bar{u} - \bar{v}\cdot\bar{v} = 24$

$16^2 - |\bar{v}|^2 = 24\;; \qquad |\bar{v}|^2 = 16^2 - 24 \qquad |\bar{v}|^2 = 232\;; \qquad |\bar{v}| = \sqrt{232}$

24. Dados los vectores $\vec{u} = (2,3,8)$ y $\vec{v} = (-1,2,0)$ calcula:

a) Las componentes de un vector unitario de la misma dirección que $\vec{v}$.

$|\vec{v}| = \sqrt{1^2+2^2+0^2} = \sqrt{5} \rightarrow \quad \vec{v}\,' = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$

b) Un vector de la misma dirección que $\vec{v}$ y cuyo módulo sea igual a la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

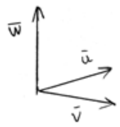
$$|\vec{v}\,'| = Proy_{\bar{u}}\vec{v} = |\vec{v}|\cdot\cos\alpha$$

$|\vec{u}| = \sqrt{2^2+3^2+8^2} = \sqrt{77}$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{2(-1)+3\cdot 2+8\cdot 0}{\sqrt{77}\cdot\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{385}}$$
$$|\vec{v}'| = |\vec{v}|\cdot\cos\alpha = \sqrt{5}\cdot\frac{4}{\sqrt{385}} = 0{,}456$$
$$\vec{v}' = \left(-\frac{0{,}456}{\sqrt{5}}, \frac{2\cdot 0{,}456}{\sqrt{5}}, 0\right) \to \vec{v}' = \left(-\frac{0{,}456}{\sqrt{5}}, \frac{0{,}912}{\sqrt{5}}, 0\right)$$

c) Un vector perpendicular a ambos y de módulo 2.



$|\vec{v}'| = 2$

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 8 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-16, 8, 7)$$

$\vec{w} = \left(\frac{-16}{3\sqrt{41}}, \frac{8}{3\sqrt{41}}, \frac{7}{3\sqrt{41}}\right)$ sería unitario

$$\vec{v}' = \left(\frac{2(-16)}{3\sqrt{41}}, \frac{2\cdot 8}{3\sqrt{41}}, \frac{2\cdot 7}{3\sqrt{41}}\right) \to \vec{v}' = \left(\frac{-32}{3\sqrt{41}}, \frac{16}{3\sqrt{41}}, \frac{14}{3\sqrt{41}}\right)$$

25. Sea $\boldsymbol{B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}}$una base de vectores tal que $\boldsymbol{|\vec{u}| = 2, |\vec{v}| = 3, |\vec{w}| = 1}$ y además verifica que $\boldsymbol{\vec{u}\cdot\vec{v} = 4, \vec{u}\cdot\vec{w} = 3, \vec{v}\cdot\vec{w} = 12}$. Calcula el valor de $\boldsymbol{m}$ para que los vectores $\boldsymbol{\vec{a} = 11\vec{u} + m\vec{v} + 3\vec{w}}$ y $\boldsymbol{\vec{b} = \vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w}}$ sean ortogonales.

$B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$; $\quad |\vec{u}| = 2, |\vec{v}| = 3, |\vec{w}| = 1 \qquad m?$

$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} \to |\vec{u}|^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} = 2^2 = 4$

$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} \to |\vec{v}|^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = 3^2 = 9$

$|\vec{w}| = \sqrt{\vec{w}\cdot\vec{w}} \to |\vec{w}|^2 = \vec{w}\cdot\vec{w} = 1^2 = 1$

$$\left.\begin{array}{r} \vec{a} = 11\vec{u} + m\vec{v} + 3\vec{w} \\ \vec{b} = \vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w} \end{array}\right\} \text{ortogonales}$$

$11\vec{u}\cdot\vec{u} + 22\vec{u}\cdot\vec{v} + 11\vec{u}\cdot\vec{w} + m\vec{v}\cdot\vec{u} + 2m\vec{v}\cdot\vec{v} + m\vec{v}\cdot\vec{w} + 3\vec{w}\cdot\vec{u} + 6\vec{w}\cdot\vec{v} + 3\vec{w}\cdot\vec{w} = 0$

$11\cdot 4 + 22\cdot 4 + 11\cdot 3 + 4m + 2m\cdot 9 + 12m + 3\cdot 3 + 6\cdot 12 + 3 = 0$

$44 + 88 + 33 + 4m + 18m + 12m + 9 + 72 + 3 = 0$

$249 + 34m = 0 \to 34m = -249 \to m = -\frac{249}{34}$

26. Dados los vectores $\boldsymbol{\vec{a} = (1, 0, 1), \vec{b} = (2, -1, 2)}$, $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{\vec{c} = (1, -3, 2)}$, determina un vector unitario que siendo coplanario con $\boldsymbol{\vec{a}}$ y $\boldsymbol{\vec{b}}$, sea ortogonal a $\boldsymbol{\vec{c}}$.

$\vec{a} = (1, 0, 1); \quad \vec{b} = (2, -1, 2); \quad \vec{c} = (1, -3, 2)$

$\vec{a} + k\vec{b} = \vec{d};$

$(1, 0, 1) + k(2, -1, 2) = (2k + 1, -k, 2k + 1)$

$\vec{d}\cdot\vec{c} = 0$

$(2k + 1)\cdot 1 - k\cdot 3 + (2k + 1)\cdot 2 = 0; \quad (2k + 1 + 3k + 4k + 2) = 0; \quad 9k + 3 = 0$

$9k = -3; \quad k = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{2}$

$\vec{d} = (2k + 1, -k, 2k + 1) = \left(2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1, -\left(-\frac{1}{2}\right), 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1\right); \quad \vec{d} = \left(-1, \frac{1}{2}, -1\right)$

Tiene que ser un vector unitario:

$|\vec{d}| = \sqrt{1^2 + \frac{1}{2}^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$; $\vec{d}' = \left(-\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{2}}}, -\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\right)$

27.- Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son tales que $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 5$ y $|\vec{u}+\vec{v}| = 7$. ¿Qué ángulo forman?

$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$

$|\vec{u}+\vec{v}| = \sqrt{(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})} = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{|\vec{u}|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+|\vec{v}|^2} =$

$= \sqrt{16+2\vec{u}\cdot\vec{v}+25} = 7$; $16+2\vec{u}\cdot\vec{v}+25 = 49$; $2\vec{u}\cdot\vec{v} = 8$; $\vec{u}\cdot\vec{v} = 4$

$\cos\alpha = \frac{4}{4\cdot 5} = 0{,}2$ $\alpha = \arccos 0{,}2 = 1{,}37°$

28.Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores tales que $|\vec{u}| = \sqrt{3}$ y $|\vec{v}| = 4$.
Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman un ángulo de 30°, halla:

a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \cos(30)\cdot\sqrt{3}\cdot 4 = 6$

$(\vec{u}-\vec{v})\cdot(2\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot 2\vec{u} - \vec{u}\cdot\vec{v} - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{v}$

$\vec{u}\cdot 2\vec{u} = |\vec{u}|\cdot|2\vec{u}|\cdot\cos 0 = \sqrt{3}\cdot 2\cdot\sqrt{3} = 6$

$\vec{v}\cdot\vec{v} = |\vec{v}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos 0 = 4\cdot 4\cdot 1 = 16$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 6$; $\vec{v}\cdot 2\vec{u} = 12$

$(\vec{u}-\vec{v})\cdot(2\vec{u}-\vec{v}) = 6 - 18 + 16 = 4$

$|\vec{u}-\vec{v}| = \sqrt{(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})} = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{3-6-6+16} = \sqrt{7}$

$|2\vec{u}-\vec{v}| = \sqrt{(\overrightarrow{2u}-\vec{v})\cdot(\overrightarrow{2u}-\vec{v})} = \sqrt{4\vec{u}\cdot\vec{u}-2\vec{u}\cdot\vec{v}-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{12-24+16} = \sqrt{4} = 2$

29.- Determina, si es posible, el valor de α de modo que los vectores $\vec{u} = (1, \alpha, 2)$ y $\vec{v}(1, -2, -\alpha)$:

a) Sean paralelos: $\frac{1}{1} = \frac{\alpha}{-2} = \frac{2}{-\alpha}$; $\alpha = -2$

b) Sean perpendiculares: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{u_x}\cdot\overrightarrow{v_x} + \overrightarrow{u_y}\cdot\overrightarrow{v_y} + \overrightarrow{u_z}\cdot\overrightarrow{v_z} = 0$;

$1\cdot 1 + (-2\alpha) + (-2\alpha) = 0$; $1 - 4\alpha = 0$; $\alpha = \frac{1}{4}$

c) Formen un ángulo de 60°: $\cos 60° = \frac{(1\cdot 1)+(-2\alpha)+(-2\alpha)}{\left(\sqrt{1^2+\alpha^2+2^2}\right)\left(\sqrt{1^2+(-2)^2+(-\alpha)^2}\right)} = \frac{1-4\alpha}{5+\alpha^2}$;

$\frac{1}{2} = \frac{1-4\alpha}{5+\alpha^2}$; $2 - 8\alpha = 5 + \alpha^2$; $\alpha^2 + 8\alpha + 3 = 0$; $\alpha = -4 \pm \sqrt{13}$

30. Halla todos los vectores de módulo 3 que formen un ángulo de 30° con $\vec{u} = (1, -1, 1)$ y de 135° con $\vec{v} = (-1, 1, 0)$

vectores de módulo 3 $\rightarrow \sqrt{a^2+b^2+c^2} = 3 \rightarrow a^2+b^2+c^2 = 9$

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{w}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{w}|}$$

vectores que formen un ángulo de 30° con $\vec{u} = (1,-1,1) \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a-b+c}{3\sqrt{3}} \rightarrow 2a - 2b + 2c = 9$

vectores que formen un ángulo de 135° con $\vec{v} = (-1,1,0) \rightarrow \frac{-\sqrt{2}}{2} = \frac{-a+c}{3\sqrt{2}} \rightarrow -2a + 2b = -6$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} a^2+b^2+c^2 = 9 \\ 2a-2b+2c = 9 \\ a-b \qquad\quad = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{ll} a = 2{,}56066 & a = 0{,}43934 \\ b = -0{,}43934 & b = -2{,}56066 \\ c = 1{,}5 & c = 1{,}5 \end{array}$$

por lo tanto $\vec{w} = (2{,}56066, -0{,}43934, 1{,}5)$ y $\overrightarrow{w_1} = (0{,}43934, -2{,}56066, 1{,}5)$

31. Halla todos los vectores de módulo 6 que formen un ángulo de 90° con $\vec{u} = (1, -1, 0)$ y de 45° con $\vec{v} = (-1, 0, 1)$.

vectores de módulo 6 $\rightarrow \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 3 \rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 36$

vectores que formen un ángulo de 90° con $\vec{u} = (1, -1, 0) \rightarrow 0 = \dfrac{a - b}{6\sqrt{2}} \rightarrow a - b = 0$

vectores que formen un ángulo de 45° con $\vec{v} = (-1, 0, 1) \rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{-a + c}{6\sqrt{2}} \rightarrow -2a + 2c = 12$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + b^2 + c^2 = 36 \\ a - b \qquad\quad = 0 \\ a \qquad - c = -6 \end{array}\right\} \begin{array}{ll} a = 0 & a = -4 \\ b = 0 & b = -4 \\ c = 6 & c = 2 \end{array}$$

por lo tanto $\vec{w} = (0, 0, 6)$ y $\vec{w_1} = (-4, -4, 2)$

32. - Dados los vectores $\vec{u} = (1, 2, -2)$, $\vec{v} = (-1, 0, 3)$ y $\vec{w} = (2, -1, -2)$, calcula:

a) $|\vec{u}|$, $|\vec{w}x\vec{v}|$ y $|(\vec{u}x\vec{v})x\vec{w}|$

b) $\vec{v} \cdot (\vec{u}x\vec{w})$ y $|(\vec{u}x\vec{v}) \cdot (\vec{v}x\vec{w})|$

a) $|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$

$$(\vec{w}x\vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k} = (-3, -4, -1)$$

$|\vec{w}x\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9 + 16 + 1} = \sqrt{26}$

$$(\vec{u}x\vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} = (6, -1, 2)$$

$$(\vec{u}x\vec{v})x\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 16\vec{j} - 4\vec{k} = (4, 16, -4)$$

$|(\vec{u}x\vec{v})x\vec{w}| = \sqrt{4^2 + 16^2 + (-4)^2} = \sqrt{16 + 256 + 16} = \sqrt{288}$

b) $$(\vec{u}x\vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -6\vec{i} - 2\vec{j} - 5\vec{k} = (6, -1, 2)$$

$\vec{v} \cdot (\vec{u}x\vec{w}) = (-1, 0, 3) \cdot (6, -1, 2) = -6 + 0 + 6 = 0$

$$(\vec{u}x\vec{v}) = (6, -1, 2) \qquad (\vec{v}x\vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k} = (3, 4, 1)$$

$(\vec{u}x\vec{v}) \cdot (\vec{v}x\vec{w}) = (6, -1, 2) \cdot (3, 4, 1) = 18 - 4 + 2 = 16$

33. Dados los vectores $\vec{u} = (1, 4, -8)$, $\vec{v} = (1, -1, 0)$ y $\vec{w} = (2, 1, -1)$ halla:

a) $|\vec{v}|$ y $(\vec{u}x\vec{v}) \cdot (\vec{v}x\vec{w})$

$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{1 + 1 + 0} = \sqrt{2}$

$$(\vec{u}x\vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -8 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-\vec{k} - 8\vec{\jmath}) - (4\vec{k} + 8\vec{\imath}) = -8\vec{\imath} - 8\vec{\jmath} - 5\vec{k} = (-8,-8,-5)$$

$$(\vec{v}x\vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (\vec{\imath} + \vec{k}) - (-2\vec{k} - \vec{\jmath}) = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + 3\vec{k} = (1,1,3)$$

$(\vec{u}x\vec{v}) \cdot (\vec{v}x\vec{w}) = (-8,-8,-5) \cdot (1,1,3) = -8 - 8 - 15 = -31$

b) $|\vec{u}|, |\vec{v}x\vec{w}|$ ***y*** $|(\vec{u}x\vec{w})x\vec{v}|$

$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-8)^2} = \sqrt{1+16+64} = \sqrt{81} = 9$

$$(\vec{v}x\vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (\vec{\imath} + \vec{k}) - (-2\vec{k} - \vec{\jmath}) = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + 3\vec{k} = (1,1,3)$$

$|\vec{v}x\vec{w}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{1+1+3} = \sqrt{11}$

$$(\vec{u}x\vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -8 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-4\vec{\imath} + \vec{k} - 16\vec{\jmath}) - (8\vec{k} - 8\vec{\imath} - \vec{\jmath}) = 4\vec{\imath} - 15\vec{\jmath} - 7\vec{k} = (4,-15,-7)$$

$$(\vec{u}x\vec{w})x\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 4 & -15 & -7 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-4\vec{k} - 7\vec{\jmath}) - (-15\vec{k} + 7\vec{\imath}) = -7\vec{\imath} - 7\vec{\jmath} + 11\vec{k} = (-7,-7,11)$$

$|(\vec{u}x\vec{w})x\vec{v}| = \sqrt{(-7)^2 + (-7)^2 + 11^2} = \sqrt{49+49+121} = \sqrt{219}$

34. Dados los vectores $\vec{\mathbf{u}} = (\mathbf{1},-\mathbf{3},\mathbf{3})$, $\vec{\mathbf{v}} = (\mathbf{4},\mathbf{0},-\mathbf{3})$ **y** $\vec{\mathbf{w}} = -\mathbf{2}\vec{\mathbf{u}} + \mathbf{3}\vec{\mathbf{v}}$

a) $|\vec{\mathbf{w}}|, |\vec{\mathbf{w}}\mathbf{x}\vec{\mathbf{v}}|$ **y** $|\vec{\mathbf{w}}\mathbf{x}(\vec{\mathbf{u}}\mathbf{x}\vec{\mathbf{v}})|$

$\vec{w} = (-2,6,-6) + (12,0,-9) = (10,6,-15)$

$|\vec{w}| = \sqrt{10^2 + 6^2 + (-15)^2} = \sqrt{100+36+225} = \sqrt{361} = 19$

$\vec{w} = -2\vec{u} + 3\vec{v}$; $-2\vec{u} = (-2)\cdot(1,-3,3) = (-2,6,-6)$; $3\vec{v} = 3\cdot(4,0,-3) = (12,0,-9)$

$\vec{w} = (-2,6,-6) + (12,0,-9) = (10,6,-15)$

$$(\vec{w}x\vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 10 & 6 & -15 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (-18\vec{\imath} - 60\vec{\jmath}) - (24\vec{k} - 30\vec{\jmath}) = -18\vec{\imath} - 30\vec{\jmath} - 24\vec{k} = (-18,-30,-24)$$

$|\vec{w}x\vec{v}| = \sqrt{(-18)^2 + (-30)^2 + (-24)^2} = \sqrt{324+900+576} = \sqrt{1800} = 30\sqrt{2}$

$$(\vec{u}x\vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 3 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (9\vec{\imath} + 12\vec{\jmath}) - (-12\vec{k} - 3\vec{\jmath}) = 9\vec{\imath} + 15\vec{\jmath} + 12\vec{k} = (9,15,12)$$

$$\vec{w}x(\vec{u}x\vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 10 & 6 & -15 \\ 9 & 15 & 12 \end{vmatrix} = (72\vec{\imath} + 150\vec{k} - 135\vec{\jmath}) - (54\vec{k} - 225\vec{\imath} + 120\vec{\jmath}) = 297\vec{\imath} - 255\vec{\jmath} +$$

$96\vec{k} = (297, -255, 96)$
$|\vec{w}x(\vec{u}x\vec{v})| = \sqrt{297^2 + (-255)^2 + 96^2} = \sqrt{88209 + 65025 + 9216} = \sqrt{162450}$

b) $\vec{v} \cdot (\vec{u}x\vec{w}), \vec{v}x(\vec{u} - \vec{w})$ **y** $|(\vec{u}x\vec{v}) \cdot (\vec{v}x\vec{w})|$

$$(\vec{u}x\vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 3 \\ 10 & 6 & -15 \end{vmatrix} = (45\vec{i} + 6\vec{k} + 30\vec{j}) - (-30\vec{k} + 18\vec{i} - 15\vec{j}) = 27\vec{i} + 45\vec{j} + 36\vec{k} =$$
$(27, 45, 36)$
$\vec{v} \cdot (\vec{u}x\vec{w}) = (4, 0, -3) \cdot (27, 45, 36) = 108 + 0 - 108 = 0$

$$\vec{v}x(\vec{u} - \vec{w})$$
$$(\vec{u} - \vec{w}) = (1, -3, 3) - (10, 6, -15) = (-9, -9, 18)$$
$$\vec{v}x(\vec{u} - \vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 0 & -3 \\ -9 & -9 & 18 \end{vmatrix} = (-36\vec{k} + 27\vec{j}) - (27\vec{i} + 72\vec{j}) = -27\vec{i} - 45\vec{j} - 36\vec{k}$$
$$= (-27, -45, -36)$$

$$|(\vec{u}x\vec{v}) \cdot (\vec{v}x\vec{w})|$$
$$(\vec{u}x\vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 3 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (9\vec{i} + 12\vec{j}) - (-12\vec{k} - 3\vec{j}) = 9\vec{i} + 15\vec{j} + 12\vec{k} = (9, 15, 12)$$
$$\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$$
$$-2\vec{u} = (-2) \cdot (1, -3,3) = (-2, 6, -6)$$
$$3\vec{v} = 3 \cdot (4,0, -3) = (12, 0, -9)$$
$$\vec{w} = (-2, 6, -6) + (12, 0, -9) = (10, 6, -15)$$
$$(\vec{v}x\vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 0 & -3 \\ 10 & 6 & -15 \end{vmatrix} = (24\vec{k} - 30\vec{j}) - (-18\vec{i} - 60\vec{j}) = 18\vec{i} + 30\vec{j} + 24\vec{k} = (18, 30, 24)$$
$$(\vec{u}x\vec{v}) \cdot (\vec{v}x\vec{w}) = (9, 15, 12) \cdot (18, 30, 24) = 162 + 450 + 288 = 900$$
$$|(\vec{u}x\vec{v}) \cdot (\vec{v}x\vec{w})| = \sqrt{900^2} = 900$$

35. Dados los vectores $\vec{u} = (1, -1, 1)$ y $\vec{v} = (2, 3, 4)$ calcula:
a) El módulo de $\vec{u}$ y de $\vec{v}$ y el ángulo que forman.
Calculamos los módulos:
$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}\ |\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 9 + 16} = \sqrt{29}$
Ahora calculamos el ángulo que forman con la fórmula:
$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$; $\cos\alpha = \frac{(1,-1,1)\cdot(2,3,4)}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{29}}$; $\cos\alpha = \frac{2-3+4}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{29}}$; $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{87}}$
$$\arccos\frac{3}{\sqrt{87}} = 71{,}24°$$
b) El producto vectorial de $\vec{u}$ y de $\vec{v}$.
$$(\vec{u}x\vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-4\vec{i} + 3\vec{k} + 2\vec{j}) - (-2\vec{k} + 3\vec{i} + 4\vec{j}) = -7\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k} = (-7, -2, 5)$$
c) Un vector unitario que sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Para hallar el vector unitario necesitamos el producto vectorial y su módulo:

$|\vec{u}x\vec{v}| = \sqrt{(-7)^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{49+4+25} = \sqrt{78}$

El vector es : $\left(\frac{-7}{\sqrt{78}}, \frac{-2}{\sqrt{78}}, \frac{5}{\sqrt{78}}\right)$

d) El área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

El área de un paralelogramo es $|\vec{u}x\vec{v}|$, resolvemos:

$$(\vec{u}x\vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \left(-4\vec{\imath} + 3\vec{k} + 2\vec{\jmath}\right) - \left(-2\vec{k} + 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}\right) = -7\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 5\vec{k} = (-7, -2, 5)$$

$|\vec{u}x\vec{v}| = \sqrt{(-7)^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{49+4+25} = \sqrt{78}$

Solución: El área del paralelogramo es de $\sqrt{78}\,u^2$

36. Dados los vectores $\vec{u} = (-1, m, 2)$, $\vec{v} = (2, -1, -4)$ y $\vec{w} = (3, -1, -5)$, se pide:

a) El valor de m para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tengan distinta dirección.

Para que la dirección sea distinta $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no pueden ser proporcionales.

$$\frac{-1}{2} = \frac{m}{-1} = \frac{2}{-4} \to 1 = 2m \to m = 0{,}5$$

$\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen distinta dirección si $m \neq 0{,}5$.

b) El valor de m para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-1, m, 2)(2, -1, -4) \to -2 - m - 8 = 0 \to m = -10$

c) Un vector que tenga módulo $3\sqrt{6}$ y que sea perpendicular a los vectores $\vec{v}$ y $2\vec{v} - \vec{w}$.

$2\vec{v} - \vec{w} \to 2(2, -1, -4) - (3, -1, -5) \to (4, -2, -8) - (3, -1, -5) \to (1, -1, -3)$

$$\vec{v}x(2\vec{v} - \vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & -3 \\ \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = \left(3\vec{\imath} - 2\vec{k} - 4\vec{\jmath}\right) - \left(-\vec{k} + 4\vec{\imath} - 6\vec{\jmath}\right) = 3\vec{\imath} - 2\vec{k} - 4\vec{\jmath} + \vec{k} - 4\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} =$$

$= -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 7\vec{\jmath} = (-1, 2, 7)$

$|(-1, 2, 7)| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 7^2} = \sqrt{1+4+49} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$, luego este es el vector pedido.

37. Dados los vectores $\vec{u} = (1, 1, m)$, $\vec{v} = (0, m, -1)$ y $\vec{w} = (1, 2m, 0)$, determina el valor de m para que:

a) Sean linealmente independientes.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & m & 2m \\ m & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & m & 2m \\ m & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & m & 2m \end{vmatrix} = -1 - (m^2 - 2m) = -m^2 + 2m - 1 = 0 \to m = 1$$

Para que sean linealmente independientes $m \neq 1$

b) El vector $\vec{v}$ se pueda expresar como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{w}$. Halla dicha combinación.

$\vec{v} = a\vec{u} + b\vec{w}$

$(0, m, -1) = a(1,1,m) + b(1,2m,0) \to (0, m, -1) = (a, a, am) + (b, 2mb, 0) \to$

$(0, m, -1) = (a + b, a + 2mb, am)$

$\rightarrow$

$\rightarrow m = -\frac{1}{m} + 2m\left(\frac{1}{m}\right) \rightarrow m = -\frac{1}{m} + \frac{2m}{m} \rightarrow\rightarrow a = \pm 1 \quad ; \quad b = \frac{1}{m} \rightarrow b = \pm 1$

$$\begin{cases} 0 = a + b \\ m = a + 2mb \\ -1 = am \rightarrow a = -\frac{1}{m} \end{cases} \quad b = -a\,;\; b = \frac{1}{m} \qquad m = a + 2mb \;;\; m = -\frac{1}{m} + 2m\left(\frac{1}{m}\right)$$

$$m^2 = -1 + 2m \rightarrow m = 1 \;;\; b = 1; \quad a = -1$$

c) Sean coplanarios.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m & -1 \\ 1 & 2m & 0 \\ 1 & 1 & m \\ 0 & m & -1 \end{vmatrix} = -1 - (m^2 - 2m) = -m^2 + 2m - 1 = 0 \rightarrow m = 1$$

d) El área del paralelogramo determinado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{w}$ valga $125u^2$.

$|\vec{u} \times \vec{w}| = 125$

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & m \\ 1 & 2m & 0 \\ \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = \left(2m\vec{k} + m\vec{\jmath}\right) - \left(\vec{k} + 2m^2\vec{\imath}\right) = (-2m^2, m, 2m - 1)$$

$$\sqrt{(-2m^2)^2 + (m)^2 + (2m-1)^2} = 125 \rightarrow \left(\sqrt{(-2m^2)^2 + (m)^2 + (2m-1)^2}\right)^2 = 125^2 \rightarrow$$
$$(-2m^2)^2 + (m)^2 + (2m-1)^2 = 15625 \rightarrow 4m^4 + m^2 + 4m^2 - 4m + 1 = 15625 \rightarrow$$
$$m = 9{,}4; m = -9{,}4$$

38. En un sistema de referencia ortogonal $R = \{O, \overrightarrow{u_1}, \vec{u}_2, \overrightarrow{u_3}\}$, donde $|\overrightarrow{u_1}| = 1$, $|\overrightarrow{u_2}| = 2$ y $|\overrightarrow{u_3}| = 2$, tenemos los vectores $\vec{a} = \overrightarrow{u_1} + \vec{u}_2 - 2\vec{u}_3$ y $\vec{b} = 2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2} + \vec{u}_3$. Con estos datos se pide:

a) $\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3} \cdot \overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3} \cdot \overrightarrow{u_3}$.

b) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ y ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

c) $\overrightarrow{u_2} \times \vec{u}_3$, $\overrightarrow{u_2} \times \vec{u}_3$, $\overrightarrow{u_2} \times \vec{u}_3$, $\overrightarrow{u_2} \times \vec{u}_3$ y área del triángulo determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

d) Repite los apartados anteriores en el caso de ser un sistema de referencia ortonormal.

a)

$\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2}$ $\rightarrow$Ambos vectores son perpendiculares, luego $\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2} = 0$

$\overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{u_3}$ $\rightarrow$Ambos vectores son perpendiculares, luego $\overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{u_3} = 0$

$\overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{u_2} = |\overrightarrow{u_2}| \cdot |\overrightarrow{u_2}| \cdot \cos 0° = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$

$\overrightarrow{u_3} \cdot \overrightarrow{u_3} = |\overrightarrow{u_3}| \cdot |\overrightarrow{u_3}| \cdot \cos 0° = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$

b)

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\overrightarrow{u_1} + \vec{u}_2 - 2\vec{u}_3) \cdot (2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_3}) = 2 \cdot \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{u_2} - 2 \cdot \overrightarrow{u_3} \cdot \vec{u}_3 = 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \ = 2 - 4 - 8 = -10$

$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{(\overrightarrow{u_1})^2 + (\vec{u}_2)^2 + (2\overrightarrow{u_3})^2} = \sqrt{1 + 4 + 16} = \sqrt{21}$

$|\vec{b}| = \sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}} = \sqrt{(2\overrightarrow{u_1})^2 + (\vec{u}_2)^2 + (\overrightarrow{u_3})^2} = \sqrt{4 + 4 + 4} = \sqrt{12}$

$\cos \alpha = \frac{-10}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{12}} = -\frac{5\sqrt{7}}{21} \rightarrow \alpha = \cos^{-1} - \frac{5\sqrt{7}}{21} = 129{,}046^{\circ}$

c) Puesto que los vectores $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$ son perpendiculares dos a dos, se tiene que el producto vectorial de dos de ellos da el tercero:

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$$\vec{u}_2 \times \vec{u}_3 = \vec{u}_1 \qquad \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \vec{u}_3 \qquad \vec{u}_3 \times \vec{u}_1 = -\vec{u_1} \times \vec{u}_3 = -\vec{u_2}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1-2)\vec{u_1} - (1+2)\vec{u}_2 + (-1-2)\vec{u}_3 = -\vec{u_1} - 3\vec{u}_2 - 3\vec{u_3}$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b} = \vec{u}_1, +3\vec{u}_2 + 3\vec{u_3}$$

$$a_{triang} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{u_1^2 + (3u_2)^2 + (3u_3)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1^2 + 9 \cdot 4 + 9 \cdot 4} = \frac{\sqrt{73}}{2}$$

d) Al ser un sistema de referencia ortonormal, $|\vec{u_1}| = 1$, $|\vec{u_2}| = 1$ y $|\vec{u_3}| = 1$, teniendo esto en cuenta repetimos el ejercicio:

$\vec{u_1} \cdot \vec{u_2}$ →Ambos vectores son perpendiculares, luego $\vec{u_1} \cdot \vec{u_2} = 0$

$\vec{u_2} \cdot \vec{u_3}$ →Ambos vectores son perpendiculares, luego $\vec{u_2} \cdot \vec{u_3} = 0$

$\vec{u_2} \cdot \vec{u_2} = |\vec{u_2}| \cdot |\vec{u_2}| \cdot \cos 0° = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

$\vec{u_3} \cdot \vec{u_3} = |\vec{u_3}| \cdot |\vec{u_3}| \cdot \cos 0° = -1 \cdot -1 \cdot -1 = -1$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{u_1} + \vec{u}_2 - 2\vec{u}_3) \cdot (2\vec{u_1} - \vec{u_2} + \vec{u_3}) = 2 \cdot \vec{u_1} \cdot \vec{u_1} - \vec{u_2} \cdot \vec{u_2} - 2 \cdot \vec{u_3} \cdot \vec{u}_3$$
$$= 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 2 \cdot -1 \cdot -1 = 2 - 1 - 2 = -1$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{(\vec{u_1})^2 + (\vec{u}_2)^2 + (2\vec{u_3})^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}} = \sqrt{(2\vec{u_1})^2 + (\vec{u}_2)^2 + (\vec{u_3})^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

$$\cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = -\frac{1}{6} \to \alpha = \cos^{-1} -\frac{1}{6} = 99{,}59^{\circ}$$

$$\vec{u}_2 \times \vec{u}_3 = \vec{u}_1 \qquad \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \vec{u}_3 \qquad \vec{u}_3 \times \vec{u}_1 = -\vec{u_1} \times \vec{u}_3 = -\vec{u_2}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1-2)\vec{u_1} - (1+2)\vec{u}_2 + (-1-2)\vec{u}_3 = -\vec{u_1} - 3\vec{u}_2 - 3\vec{u_3}$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b} = \vec{u}_1, +3\vec{u}_2 + 3\vec{u_3}$$

$$a_{triang} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{u_1^2 + (3u_2)^2 + (3u_3)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1^2 + 9 \cdot 1 + 9 \cdot 1} = \frac{\sqrt{19}}{2}$$

39. Encuentra un vector $\vec{x}$ que tenga de módulo 3, y tal que si $\vec{y} = (3, -3, 0)$ verifique $\vec{x} \times \vec{y} = (6, 6, 3)$

Sea $\vec{x} = (a, b, c)$:

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ a & b & c \\ 3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = (6{,}6{,}3) \qquad \begin{vmatrix} b & c \\ -3 & 0 \end{vmatrix}\bar{\imath} - \begin{vmatrix} a & c \\ 3 & 0 \end{vmatrix}\bar{\jmath} + \begin{vmatrix} a & b \\ 3 & -3 \end{vmatrix}\bar{k} = (6{,}6{,}3) = -(-3c)\bar{\imath} - (-3c)\bar{\jmath} +$$
$$(-3a)(-3b)\,\bar{k} = (6{,}6{,}3)$$

Del determinante obtenemos:

$\bar{\imath} \to 3c = 6 \to c = 2 \qquad \bar{\jmath} \to 3c = 6 \qquad \bar{k} \to -3a - 3b = 3 \to -3a = 3b + 3 \to a = -b - 1$

Calculamos el módulo:

$|\vec{x}| = \sqrt{a^2 + b^2 + 4} = 3 \to a^2 + b^2 + 4 = 3^2 \to a^2 + b^2 = 5 \to (-b-1)^2 + b^2 = 5 \to 2b^2 + 2b + 1 = 5 \to 2b^2 + 2b - 4 = 0$

$$2b^2 + 2b - 4 = 0,\ b_1 = 1, b_2 = -2$$

Sustituimos los valores de b en $a = -b - 1$:

$$a_1 = -1 - 1 = -2\ ;\ a_2 = -(-2) - 1 = 1$$

El vector será $\vec{x}_1 = (-2{,}1{,}2)$ y $\vec{x}_2 = (1, -2{,}2)$

40. Sean A(m-2, m, -5), B(m, 1, -5) y C(-1, 3, m) los vértices de un triángulo ABC. ¿Cuánto vale m para que el triángulo sea rectángulo en B?

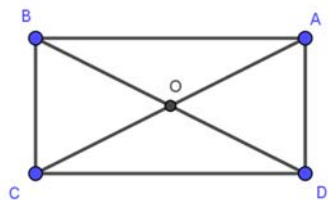
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0\,;\ \ (2,\ 1-m,\ 0)\cdot(-1-m,\ 2,\ m+5) = -2-2m+2-2m+0 = 0$

$-4m = 0\,;\ \ m = 0$

41. Los vértices de un triángulo ABC son A(λ , 2, -1), B(5, 3, -4) y C(7, λ, -2). ¿Cuánto vale λ para que el triángulo sea rectángulo en B?

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0\,; (5-\lambda, 1, -3)\cdot(2, \lambda-3, 2) = 10-2\lambda+\lambda-3-6 = 0$ **λ = 1**

42. Dos vértices consecutivos de un paralelogramo son A(1, 1, 1) y B(0, 2, 0). Si O(0,0,1) es el centro de dicho paralelogramo, halla las coordenadas de los otros dos vértices y el área del paralelogramo.



O es el punto medio de AC y BD, luego

C(-1, -1, 1) y D(0, -2, 2)

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{3}$

$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(-1)^2+(-3)^2+1^2} = \sqrt{11}$

Luego el área es: $\sqrt{3}\cdot\sqrt{11}$

43. Dados los puntos A(-4, 2, 1), B(-1, 1, 1) y C(2, m, 3), se pide el valor de m para que los tres puntos:

a) estén alineados.

b) formen un triángulo rectángulo en B.

c) formen un triángulo isósceles, siendo A el ángulo desigual.

d) formen un triángulo de área $\sqrt{52}\ u^2$.

a) Sabemos que $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AC}$ para que los puntos estén alineados, $\overrightarrow{AB} = (3,-1,0), \overrightarrow{AC} = (6, m-2, 2)$

obtenemos: $\frac{3}{6} = \frac{-1}{m-2} = \frac{0}{2}$ no existe el valor de m.

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0\,;\ \ (3,-1,0)\cdot(3, m-1, 2) = 9-m+1+0 = 0\,;\ \ m = 10$

c) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|\,;\ |(3,-1,0)| = |(6, m-2, 2)|\ ;\ \sqrt{3^2+(-1)^2+0^2} = \sqrt{6^2+(m-2)^2+2^2}$

$m^2-4m+34 = 0$, no existe el valor de m

d) Fórmula de Herón, $\text{área} = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}\ \ donde\ S = \frac{a+b+c}{2}$

$a = |\overrightarrow{BC}|;\ b = |\overrightarrow{AC}|; c = |\overrightarrow{AB}|$

$a = |\overrightarrow{BC}| = |(3, m-1, 2)| = \sqrt{3^2+(m-1)^2+2^2} = \sqrt{m^2-2m+14}$

$b = |\overrightarrow{AC}| = |(6, m-2, 2)| = \sqrt{6^2+(m-2)^2+2^2} = \sqrt{m^2-4m+44}$

$c = |\overrightarrow{AB}| = |(3,-1,0)| = \sqrt{3^2+(-1)^2+0^2} = \sqrt{10}$

$\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)} = \sqrt{52}\ ;\ \ S(S-a)(S-b)(S-c) = 52$

44. Dados los puntos A(1,1,-1),B(-1,-1,0) y C(3,m,-2)

a) Hallar para qué valores del parámetro m están alineados.

Sabemos que $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AC}$ para que los puntos estén alineados, obtenemos: $-\frac{2}{2}=\frac{-2}{m-1}=\frac{1}{-1}$

i. Escogemos 2 fracciones de las 3 obtenidas y operamos: $-\frac{2}{2}=\frac{-2}{m-1};\frac{-2(m-1)}{2}=-2;-2m=-6;m=3$

b) Hallar si existen valores de m para los cuales A,B y C son tres vértices de un paralelogramo de área $2\sqrt{5}u^2$ y, en caso afirmativo calcularlos

El área de un paralelogramo es: $|\overrightarrow{AB}x\overrightarrow{AC}|$ por lo que: $\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & m-1 & -1 \end{vmatrix}$

i. Calculamos el determinante y obtenemos un nuevo vector: $\bar{u}(1-m,0,-2m+6)$

ii. Calculamos el módulo del vector y lo igualamos al valor del área: $\sqrt{(1-m)^2+(-2m+6)^2}=2\sqrt{5}$

Operamos y obtenemos la siguiente ecuación: $5m^2-26m+17=0 \rightarrow m=\frac{13\pm2\sqrt{21}}{5}$

45. Dados los puntos A(0,0,-1),B(1,1,0),C(-1,1,0) y D(1,-2,2), calcula:

a) El área y el perímetro del triángulo de vértices A,B y C.

a. Sabemos que el área es: $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}x\overrightarrow{AC}|$

i. Calculamos los vectores y obtenemos $\overrightarrow{AB}(1,0,-1);\overrightarrow{AC}(0,1,1)$

ii. Calculamos el determinante: $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ y obtenemos: $\vec{v}(1,-1,1)$

iii. Calculamos su módulo $\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}$ y tenemos como resultado: $\sqrt{3}$

iv. Por lo que el área será: $\frac{\sqrt{3}}{2}u^2$

b. Sabemos que el perímetro es la suma de todos sus lados: $|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{BC}|$

i. Calculamos $\overrightarrow{BC}(-1,1,0)$

ii. Calculamos sus módulos $\left(\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}+\sqrt{0^2+1^2+1^2}+\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}\right)$ y obtenemos que el perímetro es: $3\sqrt{2}u$

b) El volumen del tetraedro cuyos vértices son A,B,C y D.

a. Sabemos que el volumen de un tetraedro es: $\frac{1}{6}|[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}]|$

i. Calculamos $\overline{AD}(1,1,2)$

ii. Hallamos el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=2$

iii. Por lo que el volumen es: $\frac{2}{6}\rightarrow\frac{1}{3}u^3$

c) El volumen del paralelepípedo determinado por esos cuatro puntos.

a. El volumen del paralelepípedo es $|[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}]|$

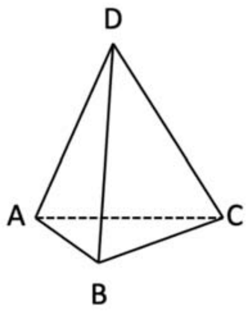
i. Como ya lo hemos calculado en el apartado anterior sabemos que: $|[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}]|=2u^3$

d) El área de una de las caras laterales.

a. El área es: $|\overrightarrow{AB}x\overrightarrow{AC}|$

b. Como ya lo hemos calculado anteriormente en el apartado a) sabemos que $|\overrightarrow{AB}x\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3}u^2$

46. Sea la pirámide de vértices $A(0,1,-1), B(1,1,0), C(-1,1,0) y\ D(1,-2,2)$; calcula:
a) El área del paralelogramo determinado por los puntos $A, B\ y\ C$.
b) El área de cada cara.
c) Su volumen.



a) Área paralelogramo= $|\overline{AB} \times \overline{AC}|$

$\overline{AB} = (1,1,0) - (0,1,-1) = (1,0,1)$ $\qquad$ $\overline{AC} = (-1,1,0) - (0,1,-1) = (-1,0,1)$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0+0-j) - (0+0+j) = -2j = (0,-2,0)$$

$$|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 0^2} = \boldsymbol{2u^2}$$

b) Área de cada cara

- Área base $\widehat{BAC}$

$\overline{BA} = (0,1,-1) - (1,1,0) = (-1,0,-1)$ $\qquad$ $\overline{BC} = (-1,1,0) - (1,1,0) = (-2,0,0)$

$$\bar{w} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0+0+2j) - (0+0+0) = 2j = (0,2,0)$$

$$|\bar{w}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 0^2} = 2 \rightarrow Área\ base = \frac{1}{2} \cdot 2 = \boldsymbol{1u^2}$$

- Área lado $\widehat{BAD}$

$\overline{BA} = (0,1,-1) - (1,1,0) = (-1,0,-1)$ $\quad$ $\overline{BD} = (1,-2,2) - (1,1,0) = (0,-3,2)$

$$\overline{w'} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (0+3k+0) - (0+3i-2j) = 3k - 3i + 2j = (-3,2,3)$$

$$|\overline{w'}| = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2 + (3)^2} = \sqrt{22} \rightarrow Área\ \widehat{BAD} = \sqrt{22} \cdot \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{22}}{2}\ u^2}$$

- Área lado $\widehat{CBD}$

$\overline{CB} = (1,1,0) - (-1,1,0) = (2,0,0)$ $\qquad$ $\overline{CD} = (1,-2,2) - (-1,1,0) = (2,-3,2)$

$$\overline{w''} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (0-6k+0) - (0+0+4j) = -6k - 4j = (0,-4,-6)$$

$$|\bar{w}''| = \sqrt{(0)^2 + (-4)^2 + (-6)^2} = 2\sqrt{13} \rightarrow Área\ \widehat{CBD} = 2\sqrt{13} \cdot \frac{1}{2} = \boldsymbol{\sqrt{13}\ u^2}$$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

- Área lado $\widehat{ACD}$

$\overline{AC} = (-1,1,0) - (0,1,-1) = (-1,0,1)$ $\overline{AD} = (1,-2,2) - (-1,1,0) = (1,-3,3)$

$$\overline{w}''' = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = (0 + 3k + j) - (0 - 3i - 3j) = 3k + 4j + 3i = (3,4,3)$$

$$|\overline{w}'''| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2 + (3)^2} = \sqrt{34} \to Área\ \widehat{ACD} = \sqrt{34} \cdot \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{34}}{2}\ u^2}$$

c) Volumen

Volumen$= \frac{1}{6}[\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}]$

$\overline{AB} = (1,1,0) - (0,1,-1) = (1,0,1)$ $\overline{AC} = (-1,1,0) - (0,1,-1) = (-1,0,1)$

$\overline{AD} = (1,-2,2) - (-1,1,0) = (1,-3,3)$

Volumen$= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}|(0 + 3 + 0) - (0 - 3 + 0)| = \frac{1}{6}|3 + 3| = \frac{1}{6} \cdot 6 = \boldsymbol{1\ u^3}$

AUTOEVALUACIÓN

1. Dados los vectores de componentes (1,3,-2) y (3,x,-6), indica el valor de x para que los dos vectores sean linealmente independientes.

Los vectores son linealmente dependientes cuando cualquiera de ellos puede expresarse como combinación lineal del resto. Entonces observamos que la respuesta b)9 encaja con esta definición ya que:

3·(1,3,-2)= (3,9,-6) **b)9**

2. El módulo del vector de origen A(-2,3,-2) y extremo B(2,0,-2) es:

$\overline{AB} = B - A = (2,0,-2) - (-2,3,-2) = (4,-3,0)$

$\overline{|AB|} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$

d)5

3. Dados los vectores $\overline{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{1}, -\mathbf{3}, \mathbf{5}), \overline{\boldsymbol{v}} = (-\mathbf{6}, \mathbf{3}, \mathbf{0})$ $\boldsymbol{el\ vector}$ $\overline{\boldsymbol{w}} = \mathbf{3}\overline{\boldsymbol{u}} - \mathbf{2}\overline{\boldsymbol{v}}$ tiene de componentes:

$\overline{w} = 3\overline{u} - 2\overline{v} = 3(1,-3,5) - 2(-6,3,0) = (3,-9,15) - (-12,6,0) = (15,-15,15)$

a) $(\mathbf{15}, -\mathbf{15}, \mathbf{15})$

4. Dados los puntos A (4, -1, 5) y B (2, 7, -5), las coordenadas del punto medio del segmento AB son:

a) (3, 3, 0) b) (6, -6, 10) c) (3, 4, 0) d) (6, -4, 10)

$\frac{\vec{A}+\vec{B}}{2} = \frac{(4,-1,5)+(2,7,-5)}{2} = \frac{(6,6,0)}{2} = (3,3,0)$ *Opción a) (3, 3, 0)*

5. Dados los vectores $\vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{1}, -\mathbf{3}, \mathbf{5})$, $\vec{\boldsymbol{v}} = (-\mathbf{6}, \mathbf{3}, \mathbf{0})$, su producto escalar es:

a) 15 b) -15 c) -3 d) -6

$u^{\rightarrow} \cdot v^{\rightarrow} = (1,-3,5) \cdot (-6,3,0) = -6 - 9 + 0 = -15$ *Opción b) -15*

6. Dado el vector $\vec{\boldsymbol{v}} = (-\mathbf{6}, \mathbf{3}, \mathbf{0})$ indica cuál de los vectores $\vec{\boldsymbol{u}}$ es ortogonal a él :

a) $\vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{1}, -\mathbf{3}, \mathbf{5})$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1 \cdot -6) + (-3 \cdot 3) + (0 \cdot 5) = -15$

Para que dos vectores sean ortogonales se tiene que cumplir que el producto escalar sea 0.Por lo tanto no es ortogonal a $\vec{v}$.

b) $\vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{1}, -\mathbf{2}, \mathbf{5})$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1 \cdot -6) + (-2 \cdot 3) + (5 \cdot 0) = -12$

Ídem a

c) $\vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{7})$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1 \cdot -6) + (2 \cdot 3) + (7 \cdot 0) = 0$ Por lo tanto si es ortogonal a $\vec{v}$.

d) $\vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{2}, \mathbf{5}, \mathbf{5})$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2 \cdot -6) + (5 \cdot 3) + (5 \cdot 0) = 3$

Ídem a

c) $\vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{7})$

7. Dados los puntos $\boldsymbol{A}(\mathbf{4}, -\mathbf{1}, \mathbf{5}), \boldsymbol{B}(\mathbf{2}, \mathbf{7}, -\mathbf{5})$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{C}(\mathbf{6}, -\mathbf{7}, \mathbf{16})$ el área del triángulo constituido sobre ellos es:

a)150 b)201 c)30 d)$\sqrt{201}$

$\overrightarrow{AB} = (4,-1,5) - (2,7,-5) = (2,-8,10)$ $\overrightarrow{AC} = (4,-1,5) - (6,-7,16) = (-2,6,-11)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -8 & 10 \\ -2 & 6 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & 10 \\ 6 & -11 \end{vmatrix} \vec{\imath} + \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ -2 & -11 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 2 & -8 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

IES ATENEA Ciudad Real

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$28\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - 4\vec{k} = (28,-2,-4)$ $\quad |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |(28,-2,-4)| = \sqrt{28^2+2^2+4^2} = 2\sqrt{201}$

$$Área = \frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{2\sqrt{201}}{2} = \sqrt{201}\,u^2$$

d) $\boldsymbol{\sqrt{201}}$

8. Dados los vectores $\vec{u} = (1,-3,5), \vec{v} = (-6,3,0)$, su producto vectorial es:

a) $\vec{u} \times \vec{v} = (-15,-30,-15)$ b) $\vec{u} \times \vec{v} = (15,15,15)$ c) $\vec{u} \times \vec{v} = (-15,30,-15)$
d) $\vec{u} \times \vec{v} = (15,-30,15)$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 5 \\ -6 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 10 \\ 6 & -11 \end{vmatrix}\vec{\imath} + \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -6 & 0 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -6 & 3 \end{vmatrix}\vec{k} =$$

$$= -15\vec{\imath} + (-30)\vec{\jmath} + (-15)\vec{k} = (-15,-30,-15)$$

d) $\boldsymbol{\vec{u} \times \vec{v} = (15,-30,15)}$

9. Dados los vectores $\bar{u} = (1,-3,5)$, $\bar{v} = (-6,3,0)$, $\bar{w} = (1,1,1)$, su producto mixto es:

$[\bar{u},\bar{v},\bar{w}] = \bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w})$; Realizamos el producto vectorial de $\bar{v}$ y $\bar{w}$.

$$\bar{v} \times \bar{w} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ -6 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\bar{\imath} + \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\bar{\jmath} + \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\bar{k} = 3\bar{\imath} + 6\bar{\jmath} - 9\bar{k};$$

Ahora realizamos el producto escalar con el resultado y $\bar{u}$.

$$\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = (1,-3,5) \cdot (3,6,-9) = 1 \cdot 3 + (-3) \cdot 6 + 5 \cdot (-9) = 3 - 18 - 45 = -60$$

$\mathbf{a)} - \mathbf{60}$

10. Dados los vectores $\bar{u} = (1,-3,5)$, $\bar{v} = (-6,3,0)$, $\bar{w} = (1,1,1)$, el volumen del paralelepípedo construido sobre ellos es:

Calculamos el determinante en valor absoluto

$$\left|\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -6 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right| = |(1\cdot3\cdot1 - 3\cdot0\cdot1 - 6\cdot1\cdot5) - (5\cdot3\cdot1 - 3\cdot(-6)\cdot1 + 0\cdot1\cdot1)| =$$

$$= |(3-0-30) - (15+0+18)| = |-27-33| = |-60| = 60$$

$\mathbf{a)\ 60}$