Matemáticas II
2º Bachillerato
Capítulo 5: Rectas y Planos

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por: AITANA, AITOR, AMALIA, ANDREA, CARMEN, CELIA S, FERNANDO, IRENE, ISMAEL F, LAURA, NATALIA, OLIVIA, ROSA, ESPERANZA, LIDIA, CELIA P, ISMAEL C, ENRIQUE, LUCÍA, NEREA, JULIA, JERÓNIMO

IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Escribe la ecuación vectorial, paramétrica, continua e implícita de la recta que pasa por el punto A (-1,-4,2) y tiene por vector director v = (-3,-1,5).

Ecuación vectorial: $OP = OP_0 + v(x, y, z) = (-1, -4,2) + \lambda(-3, -1,5)$
Ecuaciones paramétricas: $(x, y, z) = (-1, -4,2)(-3, -1,5)$;

$$x = -1 - 3\lambda$$
$$y = -4 - \lambda$$
$$z = 2 + \lambda$$

Ecuación continua: Despejamos λ
$\lambda = \frac{x-1}{-3}$; $\lambda = \frac{y+4}{-1}$; $\lambda = \frac{z-2}{1} \Rightarrow \frac{x-1}{-3} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-2}{1}$

Ecuaciones implícitas:
$\frac{x-1}{-3} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-2}{1} \Rightarrow$ $\quad x - 3y - 11 = 0$; $\quad y + z + 2 = 0$

2. Escribe la ecuación vectorial, paramétrica, continua e implícita de la recta que pasa por el punto A (4,-3,-2) y tiene por vector director v = (-1,0,6).

Ecuación vectorial: $OP = OP_0 + v(x, y, z) = (4, -3, -2) + \lambda(-1,0,6)$
Ecuaciones paramétricas: $(x, y, z) = (4, -3, -2) + \lambda(-1,0,6) \Rightarrow$

$$x = 4 - \lambda$$
$$y = -3$$
$$z = -2 + 6\lambda$$

Ecuación continua: Despejamos λ
$\lambda = \frac{x-4}{-1} = \frac{z+2}{6}, y = -3$

Ecuaciones implícitas: $\Rightarrow \frac{x-4}{-1} = \frac{z+2}{6} \Rightarrow 6x - 24 = -z - 2 \Rightarrow 6x + z - 22 = 0$; $\frac{y+3}{0} = \frac{z+2}{6}$

$$6x + z - 22 = 0$$
$$y - 3 = 0$$

3. Escribe la ecuación vectorial, paramétrica, continua e implícita de la recta que pasa por el punto A (0,1,0) y tiene por vector director v = (-2,0,0).

Ecuación vectorial: $OP = OP_0 + v \Rightarrow (x, y, z) = (0,1,0) + \lambda(-2,0,0)$
Ecuaciones paramétricas: $(x, y, z) = (0,1,0) + \lambda(-2,0,0) \Rightarrow$

$$x = -2\lambda$$
$$y = 1$$
$$z = 0$$

Ecuación continua:

$$\frac{x}{-2} = \lambda;\ y = 1;\ \ z = 0$$

Ecuaciones implícitas:

$$y = 1$$
$$z = 0$$

4. Escribe las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(0,0,0)$ y $B(3,-4,1)$.

$\overrightarrow{AB} = (3-0,-4-0,1-0) = (3,-4,1)$

Vectorial: $(x,y,z) = (0,0,0) + \lambda(3,-4,1)$

Paramétricas:

$$\left.\begin{array}{r} x = 3\lambda \\ y = -4\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\}$$

Continua:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{x}{3} \\ \lambda = \dfrac{y}{-4} \\ \lambda = z \end{array}\right\} \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{-4} = z$$

Implícitas:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{-4} \\ \dfrac{x}{3} = z \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} -4x = 3y \\ x = 3z \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 4x + 3y = 0 \\ x - 3z = 0 \end{array}\right\}$$

5. Escribe las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(3,-2,6)$ y $B(1,-5,7)$.

$\overrightarrow{AB} = (1-3,-5+2,7-6) = (-2,-3,1)$

Vectorial: $(x,y,z) = (3,-2,6) + \lambda(-2,-3,1)$

Paramétricas:

$$\left.\begin{array}{r} x = 3 - 2\lambda \\ y = -2 - 3\lambda \\ z = 6 + 1\lambda \end{array}\right\}$$

Continua:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{x-3}{-2} \\ \lambda = \dfrac{y+2}{-3} \\ \lambda = z - 6 \end{array}\right\} \dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y+2}{-3} = z - 6$$

Implícitas:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y+2}{-3} \\ \dfrac{x-3}{-2} = z - 6 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} -3x + 9 = -2y - 4 \\ x - 3 = -2z + 12 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} -3x + 2y = 13 \\ x + 2z = 15 \end{array}\right\}$$

6. Escribe las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(2,-1,6)$ y $B(7,-2,-1)$.

$\overrightarrow{AB} = (7-2,-2+1,-1-6) = (5,-1,-7)$

Vectorial: $(x,y,z) = (2,-1,6) + \lambda(5,-1,-7)$

Paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 + 5\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 6 - 7\lambda \end{array}\right\}$$

Continua:

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$$\left.\begin{array}{l}\lambda=\dfrac{x-2}{5}\\ \lambda=\dfrac{y+1}{-1}\\ \lambda=\dfrac{z-6}{-7}\end{array}\right\}\ \frac{x-2}{5}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-6}{-7}$$

Implícitas:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y+1}{-1}\\ \dfrac{x-2}{5}=\dfrac{z-6}{-7}\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{c}-x+2=5y+5\\ -7x+14=5z-30\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{c}-x-5y=3\\ -7x-5z=-44\end{array}\right\}$$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Escribe la ecuación vectorial, paramétrica, continua e implícita de la recta que pasa por el punto A(-1, -4, 2) y tiene por vector director $\vec{v}$= (-3, -1, 5)

Ecuación vectorial:

$(x, y, z) = (-1, -4, 2) + t(-3, -1, 5)$

Ecuación paramétrica:

$$\begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = -4 - t \\ z = 2 + 5t \end{cases}$$

Ecuación continua:

$$\frac{x+1}{-3} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-2}{5}$$

Ecuaciones implícitas:

$$\begin{cases} -x + 3y + 11 = 0 \\ 5x + \quad 3z - 1 = 0 \end{cases}$$

2. Escribe la ecuación vectorial, paramétrica, continua e implícita de la recta que pasa por el punto A(4, -3, 2) y tiene por vector director $\vec{v}$ = (-1, 0, 6)

Ecuación vectorial:

$(x, y, z) = (4, -3, 2) + t(-1, 0, 6)$

Ecuación paramétrica:

$$\begin{cases} x = 4 - t \\ y = \quad -3 \\ z = 2 + 6t \end{cases}$$

Ecuación continua:

$\frac{x-4}{-1} = \frac{z-2}{6}; y = -3$

Ecuaciones implícitas:

$$\begin{cases} 6x \quad + z - 26 = 0 \\ \quad y \quad + 3 \quad = 0 \end{cases}$$

3. Dados los puntos A(2, 0, 1) y B(0, -2, 3), se pide:

a) Expresa de todas las formas posibles la recta que pasa por ambos puntos.

$\overline{AB} = \vec{v} = (0, -2, 3) - (2, 0, 1) = (-2, -2, 2)$

Ecuación vectorial:

$(x, y, z) = (2, 0, 1) + t(-2, -2, 2)$

Ecuación paramétrica:

$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Ecuación continua:

$$\frac{x-2}{-2} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{2}$$

Ecuaciones implícitas:

$$\begin{cases} -2x + 2y + 4 = 0 \\ 2x + 2z - 6 = 0 \end{cases}$$

b) Halla dos puntos C y D que estén alineados con A y B, de manera que uno de ellos (C) esté situado entre ambos y el otro esté situado a la izquierda de A.

Para que C esté situado entre ambos puntos A y B calculamos el punto medio:

$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right) \rightarrow \left(\frac{2+0}{2},\frac{0-2}{2},\frac{1+3}{2}\right) \rightarrow C(1,-1,2)$

Para que D esté a la izquierda de A proponemos que A sea el punto medio de C y D

$\left(\frac{x_1+1}{2},\frac{y_1-1}{2},\frac{z_1+2}{2}\right) = (2,0,1);\ \ x_1 = 3\ ;\ \ y_1 = 1\ ;\ z_1 = 0\ ;\quad D(3,1,0)$

4. expresa de todas las formas posibles las siguientes rectas:

a) r:$\begin{cases} x-2z=2 \\ y+z=-1 \end{cases}$ b)s:$\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=3+2\lambda \\ z=2-\lambda \end{cases}$ $c)r$:$\begin{cases} x=3-\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases}$ d)s:$\begin{cases} x=3-\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases}$

a) IMPLÍCITAS r:$\begin{cases} x-2z=2 \\ y+z=-1 \end{cases} \rightarrow \lambda = z$ PARAMÉTRICA $\begin{cases} x=2+2\lambda \\ y=-1-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$

$CONTINUA\ \ \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-0}{1} \qquad \rightarrow VECTORIAL\ \ (x,y,z)=(2,-1,0)+\lambda(2,-1,1)$

b) PARAMÉTRICA $\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=3+2\lambda \\ z=2-\lambda \end{cases}$ $CONTINUA\ \ \frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{-1}\rightarrow$

$IMPLíCITAS\ \ \ (x+1)\cdot 2=(y-3)\cdot 1 \rightarrow 2x+2=y-3 \rightarrow 2x-y=-5$

$(x+1)\cdot(-1)=(z-2)\cdot 1 \rightarrow -x-1=z-2 \rightarrow -x-z=-1 \rightarrow \begin{cases} 2x-y=-5 \\ -x-z=-1 \end{cases}$

$VECTORIAL\ \ \ (x,y,z)=(-1,3,2)+\lambda(1,2,-1)$

c) PARAMÉTRICA $\begin{cases} x=3-\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases}$ $CONTINUA\ \frac{x-3}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$

$IMPLíCITAS\ \ \ (x-3)\cdot 1=(y-1)\cdot(-1) \rightarrow x-3=-y+1 \rightarrow x+y=4 \rightarrow$

$(x-3)\cdot 2=(z-1)\cdot 8-1) \rightarrow 2x-6=-z+1 \rightarrow 2x+z=7$ $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+z=7 \end{cases}$

$VECTORIAL\ (x,y,z)=(3,1,1)+\lambda(-1,1,2)$

d) $IMPLíCITAS\ s$:$\begin{cases} x+2y=-2 \\ y-2z=1 \end{cases} \rightarrow y=\lambda \quad \rightarrow PARAMéTRICA \begin{cases} x=-2-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda \end{cases}$

$CONTINUA\ \frac{x+2}{-2}=\frac{y-0}{1}=\frac{z+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \quad VECTORIAL\ (x,y,z)=(-2,0,1)+\lambda(-2,1,\frac{1}{2})$

5) Expresa de todas las formas posibles la recta $r = \frac{x+1}{-2} = \frac{y+1}{3} = z-2$ y además halla:

Ecuación vectorial:

$\overrightarrow{OP} = (-1,-1,2)+t(-2,3,1)$

Ecuación paramétrica:

$\begin{cases} x=-1-2t \\ y=-1+3t \\ z=2+t \end{cases}$

Ecuaciones implícitas:

$$\begin{cases} x + 2z = 3 \\ y - 3z + 7 = 0 \end{cases}$$

a) Un punto de dicha recta tal que su segunda coordenada sea -4.

$y = -1 + 3t = -4 \to t = -1$

$t = -1;\ -1(-2,3,1) = (2,-3,-1); (-1,-1,2) + (2,-3,-1)$

$P(1,-4,1)$

b) Un punto de dicha recta tal que la suma de sus coordenadas valga 2.

Calculamos el punto genérico:

$P(-1-2t,-1+3t,2+t) \quad -1-2t-1+3t,+2+t = 2\,; 2t-2 = 0\,, t = 1$

$P(-3,2,3)$

6.- Expresa de todas las formas posibles la recta de ecuación $r \equiv \frac{2x-1}{5} = \frac{3-y}{2} = \frac{3z}{1}$ y halla un punto de ésta, cuya primera coordenada sea -4.

$$r \equiv \frac{2x-1}{5} = \frac{3-y}{2} = \frac{3z}{1} \to \quad r \equiv \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{\frac{1}{3}}$$

$$P = \left(\frac{1}{2},3,0\right); \quad \vec{v} = \left(\frac{5}{2},-2,\frac{1}{3}\right)$$

ecuación vectorial de la recta:

$$r = \left(\frac{1}{2},3,0\right) + \lambda\left(\frac{5}{2},-2,\frac{1}{3}\right)$$

ecuaciones paramétricas de la recta:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\lambda \\ y &= 3 - 2\lambda \\ z &= \frac{1}{3}\lambda \end{aligned}\right\}$$

ecuación continua de la recta:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} \\ \lambda &= \frac{y-3}{-2} \\ \lambda &= \frac{z}{\frac{1}{3}} \end{aligned}\right\} \qquad r \equiv \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{\frac{1}{3}}$$

ecuaciones implícitas de la recta:

$$\left.\begin{aligned} -2x + 1 &= \frac{5}{2}y - \frac{15}{2} \\ \frac{1}{3}y - 1 &= -2z \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} 2x + \frac{5}{2}y &= \frac{17}{2} \\ \frac{1}{3}y + 2z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

$\text{primera coordenada sea } -4\text{:}$

$x = -4 \to P = (-4,y,z)$

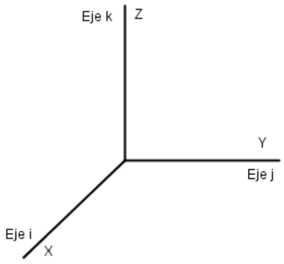
$$2(-4) + \frac{5}{2}y = \frac{17}{2} \to \quad \frac{5}{2}y = \frac{17}{2} + 8 \to \quad y = \frac{33}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{33}{5}$$

$$\frac{1}{3}y + 2z = 1 \to \quad 2z = 1 - \frac{1}{3}y \to \quad 2z = 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{33}{5}\right) = -\frac{6}{5} \to z = \ -\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{3}{5}$$

$$P = \left(-4,\frac{33}{5},-\frac{3}{5}\right)$$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

7. Halla las ecuaciones de los OX, OY y OZ y exprésala en todas las formas posibles.



Eje x; tomamos el punto (3, 0 ,0)

- **Ecuación vectorial**

$(x, y, z) = (3,0,0) + ג(1,0,0)$

- **Ecuación paramétrica**

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 + ג \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

- **Ecuación continua**

$r \equiv \frac{x-3}{1} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-0}{0}$

- **Ecuación general**

$0(x-3) = 1(y-0); \quad 0 = y - 0; \quad y = 0$
$0(x-3) = 1(z-0); \quad 0 = z - 0; \quad z = 0$

$$r \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Eje y; supongamos el punto (0, 1, 0)

- **Ecuación vectorial**

$(x, y, z) = (0,1,0) + ג(0,1,0)$

- **Ecuación paramétrica**

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + ג \\ z = 0 \end{cases}$$

- **Ecuación general**

$1(x-0) = 0(y-1); x - 0 = 0; x = 0$
$0(y-1) = 1(z-0); 0 = z - 0, z = 0$

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Eje z; supongamos el punto (0, 0, 5)

- **Ecuación vectorial**

$(x, y, z) = (0, 0, 5) + ג(0,0,1)$

- **Ecuación paramétrica**

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 5 + ג \end{cases}$$

- **Ecuación general**

$0(x-0) = 0(y-0); 0 = 0$
$1(y-0) = 0(z-5); y - 0 = 0; y = 0$
$r \equiv \{y = 0$

8. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto A (2, 1, -1) y es paralela:

a) Al eje OY

Que dos rectas sean paralelas significa que tienen el mismo vector director, como el vector director del eje OY es $\vec{v}(0,1,0)$, el vector de la recta será $\vec{u}(0,1,0)$.

Luego sus ecuaciones serán:

- **Ecuación vectorial:**

$(x,y,z)=(2,1,-1)+\lambda(0,1,0)$

- **Ecuación paramétrica:**

$$r\equiv\begin{cases}x=2\\y=1+\lambda\\z=-1\end{cases}$$

- **Ecuación general:**

$1(x-2)=0(y-1); x-2=0$

$0(y-1)=1(z+1); 0=z+1$

$$r\equiv\begin{cases}x-2=0\\z+1=0\end{cases}$$

b) A la recta de ecuación r: $\begin{cases}\boldsymbol{x+2z=0}\\\boldsymbol{y-3z=0}\end{cases}$

Primero calculamos el vector director de la recta r,

$$\begin{cases}3(x+2z)=0\\2(y-3z)=0\end{cases}; 3x+2y=0; y=\lambda; x=\frac{-2\lambda}{3}; z=\frac{\lambda}{3}\begin{cases}x=\frac{-2}{3}\lambda\\y=\lambda\\z=\frac{\lambda}{3}\end{cases}$$

El vector de la recta r es $\vec{v}=(\frac{-2}{3},1,\frac{1}{3})$

Luego pasa por el punto A (2, 1, -1) y tiene el vector $\vec{v}=(\frac{-2}{3},1,\frac{1}{3})$

- **Ecuación vectorial:**

$(x,y,z)=(2,1,-1)+\lambda(\frac{-2}{3},1,\frac{1}{3})$

- **Ecuación paramétrica:**

$$r\equiv\begin{cases}x=2\frac{-2}{3}\lambda\\y=1+\lambda\\z=-1+\frac{\lambda}{3}\end{cases}$$

- **Ecuación continua:**

$$r\equiv\frac{x-2}{\frac{-2}{3}}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{\frac{1}{3}}$$

- **Ecuación general:**

$1(x-2)=\frac{-2}{3}(y-1); x-2=\frac{-2}{3}y+\frac{2}{3}=x\frac{+2}{3}y+\frac{8}{3}$

$\frac{1}{3}(y-1)=1(z+1); \frac{1}{3}y-\frac{1}{3}=z+1=\frac{1}{3}y-z-\frac{2}{3}$

$$r\equiv\begin{cases}x+\frac{2}{3}y+\frac{8}{3}=0\\\frac{1}{3}y-z-\frac{2}{3}=0\end{cases}$$

9.- Dada la recta $\boldsymbol{r}$: $\frac{\boldsymbol{x-1}}{\boldsymbol{3}}=\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{-1}}=\frac{\boldsymbol{z+2}}{\boldsymbol{-1}}$ **se pide:**

a) Expresa dicha recta de todas las formas posibles.

a. Vectorial

i. Obtenemos el punto y el vector director de la recta

1. $P(1,0,-2)$; $\vec{v}(3,-1,-1)$

ii. $(x,y,z):(1,0,-2)+t(3,-1,-1)$

b. Paramétrica

i. $\begin{cases} x=1+3t \\ y=-t \\ z=-2-t \end{cases}$

c. Implícitas

i. $\begin{cases} -1(x-1)=3y \rightarrow x+3y=1 \\ -y=-1(z+2) \rightarrow y-z=-2 \end{cases}$

b) Halla un punto de dicha recta cuya suma de sus coordenadas valga 4.

a. Sabemos que $P(1+3t,-t,-2-t)$

i. Sumamos los valores del punto e igualamos a 4

1. $1+3t-t-2-t=4 \rightarrow t=5$

ii. Sustituimos t=5 en la ecuación paramétrica

1. $\begin{cases} x=1+3\cdot 5 \\ y=-5 \\ z=-2-5 \end{cases}$

2. Obtenemos $P(16,-5,-7)$

c) Halla la ecuación de una recta paralela y que pase por el punto $B(1,-2,0)$.

a. Tomamos el mismo vector director $\vec{v}(3,-1,-1)$

b. Ecuación vectorial: $(x,y,z):(1,-2,0)+t(3,-1,-1)$

10.- Expresa de todas las formas posibles la recta $r:\begin{cases} x+y-2z=2 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$ y halla la ecuación de una recta s que pasando por el punto $B(1,-2,-1)$ tenga como vector director el de la recta r.

a) Hallamos el vector director con el determinante

a. $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4i-3j-3k \rightarrow \vec{v}(4,-3,-3)$

b) Hallamos un punto perteneciente a la recta, debemos dar un valor a x, y o z.

a. z=0

i. $\begin{cases} x+y=2 \rightarrow x+y-2=0 \\ x-2y=0 \end{cases}$

ii. Resolvemos el sistema y obtenemos $x=\frac{4}{3}; y=\frac{2}{3}$

b. $P\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},0\right)$

c) Vectorial

a. $(x,y,z):\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},0\right)+t(4,-3,-3)$

d) Paramétrica

a. $\begin{cases} x=\frac{4}{3}+4t \\ y=\frac{2}{3}-3t \\ z=-3t \end{cases}$

e) Continua

a. $\frac{x-\frac{4}{3}}{4}=\frac{y-\frac{2}{3}}{-3}=\frac{z}{-3}$

f) Implícita

a. $\begin{cases} 4\left(y-\frac{2}{3}\right)=-3\left(x-\frac{4}{3}\right)\rightarrow 4y-\frac{8}{3}=-3x+4\rightarrow y=\frac{2}{3}-\frac{3}{4}x+1 \\ -3\left(y-\frac{2}{3}\right)=-3z\rightarrow -3y+\frac{2}{3}=-3z\rightarrow z=y-\frac{2}{9} \end{cases}$

g) Ecuación de una recta s que pasando por el punto $B(1,-2,-1)$ tenga como vector director el de la recta r.

a. La ecuación vectorial de la recta es:

i. $(x,y,z):(1,-2,-1)+t(4,-3,-3)$

11.Expresa de todas las formas posibles la ecuación del plano $\pi: 2x-y+3z-6=0$ y halla 3 puntos de ese plano que estén alineados.

$2x-y+3z-6=0;$

$y=2x+3z-6;$

$x=t;$

$z=s;$

$y=2t+3s-6;$

Ecuaciones paramétricas

$\begin{cases} x= t \\ y=2t+3s-6; \\ z= s \end{cases}$

$P=(0,-6,0)$ $\vec{u}=(1,2,0)$ $\vec{v}=(0,3,1)$

Ecuación vectorial

$(x,y,z)=(0,-6,0)+t(1,2,0)+s(0,2,1)$

3 puntos alineados: t = 0 y s = 0, P(0, -6, 0); t = 1 y s = 0, Q(1, -4, 0) M(1/2, -5, 0) (punto medio)

12. Halla la ecuación del plano (expresarlo de todas las formas posibles) en los siguientes casos:
a) Pasa por el punto A(3, 2, -1) y tiene como vectores directores $\vec{u}=(-1,1,0)$ y $\vec{v}=(2,0,-1)$.
b) Pasa por los puntos A(1, 2, 0) y B(-1, 1, 2) y uno de sus vectores directores es $\vec{u}=(1,-2,-1)$
c) Pasa por los puntos A(0, -2, 1), B(-2, 0, -1) y C(1, -2, 0).

a) Vectorial

$(x,y,z)=(3,2,-1)+t(-1,1,0)+s(2,0,-1)$

Paramétrica

$\begin{cases} x=-t+2s+3 \\ y=t+2 \\ z=-s-1 \end{cases}$

Implícita

$\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z+1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0$

$-x+3-\left((2(z+1)+y-2)\right)=0;\ -x+3-2z-2-y+2=0;\ x+y+2z-3=0$

b) Hacemos el vector $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AB}=(-2,-1,2)$

Vectorial

$(x, y, z) = (1, 2, 0) + t(1, -2, -1) + s(-2, -1, 2)$

Paramétrica

$$\begin{cases} x = t - 2s + 1 \\ y = -2t - s + 2 \\ z = -t + 2s \end{cases}$$

Implícita

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$(-4x - z + 4 + 2y - 4 - (4z + x - 1 + 2y - 4) = 0;$

$(-4x - z + 4 + 2y - 4 - 4z - x + 1 - 2y + 4) = 0;$

$4x + z - 4 - 2y + 4 + 4z + x - 1 + 2y - 4 = 0;$

$4x + x - 2y + 2y + 4z + z - 4 + 4 - 1 - 4 = 0;$

$5x + 5z - 5 = 0; \quad x + z - 1 = 0$

c) Hacemos los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. $\quad \overrightarrow{AB} = (-2, 2, -2) \quad \overrightarrow{AC} = (1, 0, -1)$

Vectorial

$(x, y, z) = (0, -2, 1) + t(-2, 2, -2) + s(1, 0, -1)$

Paramétrica

$$\begin{cases} x = -2t + s \\ y = 2t - 2 \\ z = -2t - s + 1 \end{cases}$$

Implícita

$$\begin{vmatrix} x-0 & y+2 & z-1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$\big(-2x - 2y - 4 - (2z - 2 + 2y + 4)\big) = 0; \quad (-2x - 2y - 4 - 2z + 2 - 2y - 4) = 0;$

$2x + 2y + 4 + 2z - 2 + 2y + 4 = 0;$

$2x + 2y + 2y + 2z + 4 + 4 = 0; \quad x + 2y + z + 4 = 0$

13. Halla las ecuaciones de los planos OXY, OXZ, OYZ y exprésalos de todas las formas posibles.

PLANO OXY

Ecuación vectorial: $(X, Y, Z) = (0,0,0) + \lambda(1,0,0) + \mu(0,1,0)$

Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 0 \end{cases}$

Ecuación implícita: $z = 0$

PLANO OXZ

Ecuación vectorial: $(X, Y, Z) = (0,0,0) + \lambda(1,0,0) + \mu(0,0,1)$

Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \mu \end{cases}$

Ecuación implícita: $y = 0$

PLANO OYZ

Ecuación vectorial: $(X, Y, Z) = (0,0,0) + \lambda(0,1,0) + \mu(0,0,1)$

Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$

Ecuación implícita: $x = 0$

14. Encuentra las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el punto *P* (8,9,1) y es paralelo a las rectas:

$$r: \frac{x}{-2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2} \qquad y \qquad s: \begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -1-3\lambda \end{cases}$$

Vector director de la recta *r* : $\bar{d}_r(-2,-1,2)$

Vector director de la recta *s* : $\bar{d}_s(-1,3,-3)$ *P* (8,9,1)

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 8-2\lambda-\mu \\ y = 9-\lambda+3\mu \\ z = 1+2\lambda-3\mu \end{cases}$

15. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $A(-2,0,1)$ y contiene a la recta r de la ecuación $r: \frac{x}{2} = y-1 = 2-z$

$\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3} \to \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$

$\left.\mathrm{B}(0,1,2)\ \vec{\mathrm{v}}(2,1,-1)\right\}\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}(-2,-1,-1)\ \ \vec{\mathrm{v}}(2,1,-1) \to r: \begin{vmatrix} 2 & -2 & x+2 \\ 1 & -1 & y \\ -1 & -1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \to$

$-2x+4y-4=0 \qquad x-2y+2=0$

16. Expresa todas las formas posibles de la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y contiene la recta $r \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+1}{1}$

Ecuación vectorial del plano: $(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + (v_x,v_y,v_z)t + (u_x,u_y,u_z)s$

$$\left.\begin{matrix} A(3,-2,-1) \\ \vec{v}(3,-2,1) \\ O(0,0,0) \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} A(3,-2,-1) \\ \vec{v}(3,-2,1) \\ \overrightarrow{OA}(3,-2-1) \end{matrix}\right\} (x,y,z) = (3,-2,-1) + (3,-2,1)t + (3,-2,-1)s$$

Ecuación paramétrica:

$$\left.\begin{matrix} x = x_0+v_xt+u_xs \\ y = y_0+v_yt+u_ys \\ z = z_0+v_zt+u_zs \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x = 3+3t+3s \\ y = -2-2t-2s \\ z = -1+t-s \end{matrix}\right\}$$

Ecuación general:

$$\left.\begin{matrix} 3t+3s = x-3 \\ -2t-2s = y+2 \\ t-s = z+1 \end{matrix}\right\} \to \begin{vmatrix} 3 & 3 & x-3 \\ -2 & -2 & y+2 \\ 1 & -1 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \qquad 4x+3y+3=0$$

17. Expresa de todas las formas posibles la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y contiene a la recta r: $-x+2=3y=1-z$

$$-x+2 = 3y = 1-z \to \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{z-1}{-1}$$

$$P(-2,0,-1) \qquad \bar{V}\left(-1,\frac{1}{3},-1\right) \qquad O(0,0,0)$$

$$\bar{u} = \overline{PO} \to \bar{u} = (0-(-2),0-0,0-(-1)) = (2,0,1)$$

$$\bar{v}x\bar{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{3} & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}i + j - \frac{2}{3}k \to i+3j-2k$$

$$1\cdot(x-0)+3(y-0)-2(z-0) \to x-3y-2z=0$$

18. Halla la ecuación del plano que contiene al punto $M(-1,2,1)$ y a la recta $r: \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 2-\lambda \\ z = 1-3\lambda \end{cases}$

$$r: \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 2-\lambda \\ z = 1-3\lambda \end{cases} \rightarrow \frac{x}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-3}$$

$$P(0,2,1) \quad \bar{V}(-2,1,-3) \quad M(-1,2,1)$$

$$\bar{u} = \overline{PM} \rightarrow \bar{u} = (-1-0, 2-2, 1-1) = (-1,0,0)$$

$$\bar{v}x\bar{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0i + 3j + 1k$$

$$0(x-(-1)) + 3(y-2) + 1(z-1) \rightarrow 3y + z - 7 = 0$$

19. Calcula para qué valor de m los puntos A (1, m, 2), B(2, 3, m) y C(-1, -9, 8) están alineados. En el caso de que m=0, halla la ecuación del plano que contiene a dichos puntos. ¿Pertenece el punto M (2, 1, -2) a dicho plano?

$$\overline{AB}(1,3-M, M-2);\ \overline{AC}(-2,-9-M,6)$$

$$\frac{1}{-2} = \frac{3-M}{-9-M} = \frac{M-2}{6}$$

$$\frac{1}{m-2} = \frac{-8}{9}; \qquad 9 = -8m + 16; \qquad m = \frac{-16+9}{-8} = \frac{7}{8}; \qquad m = \frac{7}{8}$$

- Para m=0:

A(1,0,2) B (2,3,0) C(-1,-9,8)

$$\overline{AB} = (1,3,-2)$$

$$\overline{AC} = (-2,-9,6)$$

- Cogemos el punto A y hacemos la ecuación paramétrica del plano:

x= 1+$\lambda - 2\mu$
y= $3\lambda - 9\mu$
z= 2-2$\lambda + 6\mu$

20. Halla el plano que contiene a la recta r:$\left[\begin{array}{l} y = 1 + x \\ z = -1 - 2x \end{array}\right.$ y es paralelo a s:$\frac{x+1}{3} = 1 - y = \frac{z}{3}$.

- Ecuación paramétrica recta r:

$$r: \left[\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 - 2\lambda \end{array}\right.$$

- Sacamos un punto de r; $\lambda = 0$; $P(0,1,-1)$
- Cogemos el vector de la recta r: $\bar{V}_1(1,1,-2)$
- Cogemos el vector de la recta s: $\bar{V}_2(3,1,3)$
- Ecuación vectorial del plano: (x, y, z)=$(0,1,-1) + (3,1,3)t + (1,1,-2)s$

21. Calcula m y n para que la recta r:$\frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+3}{1}$ esté contenida en el plano π, cuya ecuación es $\pi: mx + 2y - 4z - 2n = 0$.

- Cogemos el vector y hallamos un punto de la recta r: $\bar{V}_1(4,-4,1)$ P(3,1,-3)

$$\bar{V}_1 \cdot \bar{n} = 0 \qquad (4,-4,1)\cdot(m,2,-4) = 0; 4m + 8 - 16 - 4m - 8 + 16 + m + 2 - 4 = 0;$$

$$m - 2 = 0; m = 2$$

- En la ecuación del plano sustituimos con el valor de m y el punto: 2(3)+2·1-4·(-3)-2n=0
6+2+12-2n=0 20-2n=0 n=10

22. Estudia la posición relativa de las rectas $r:\begin{cases} x+2y-3=0 \\ y+z+4=0 \end{cases}$ y $s: x+2=-2y=z-1$, y halla la ecuación del plano que las contiene.

$r:\begin{cases} x+2y-3=0 \\ y+z+4=0 \end{cases}$ $\qquad s: x+2=-2y=z-1$

$$\vec{V_r}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(2,-1,1)$$

$$s: x+2=-2y=z-1 \quad \to \quad s: \frac{x+2}{1}=\frac{y}{-\frac{1}{2}}=\frac{z-1}{1} \quad \to \quad \vec{V_s}=\left(1,-\frac{1}{2},1\right)$$

$$Q_{(s)}=(-2,0,1)$$

$$r:\begin{cases} x+2y-3=0 \\ y+z+4=0 \end{cases} \to \begin{cases} y=0 \\ x=3 \\ z=-4 \end{cases} \qquad P_{(r)}=(3,0,-4)$$

$$\overrightarrow{PQ}=(q_1-p_1,q_2-p_2,q_3-p_3)=(-5,0,5)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -5 & 0 & 5 \end{vmatrix}=\frac{5}{2}\neq 0$$

Los vectores $\vec{V_r}\ \vec{V_s}\ y\ \overrightarrow{PQ}$ son linealmente independientes, luego las dos rectas se cruzan.
No existe un plano que contenga a las dos rectas

23.-Halla la posición relativa, según los valores de m y n, de las rectas:

$r: \frac{x+m}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{n}$ $\qquad s:\begin{cases} -x+y-z+2=0 \\ 2x+4y-3z-5=0 \end{cases}$

$r:\quad 2x+2m=2y\ \ ,\ yn=2z$ $\qquad r:\begin{cases} 2x-2y+2m=0 \\ yn-2z=0 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & -5 \\ 2 & -2 & 0 & 2m \\ 0 & n & -2 & 0 \end{array}\right) 2F1+F2\,,2F1+F3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & -5 \\ 2 & -2 & 0 & 2m \\ 0 & n & -2 & 0 \end{array}\right) C2\leftrightarrow C3\ \ y-F3+F4$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 2m+4 \\ 0 & 0 & n & 0 \end{array}\right) -2F2+5F3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & 10m+22 \\ 0 & 0 & n & 0 \end{array}\right) \quad nF3+12F4$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & 10m+22 \\ 0 & 0 & 0 & 10mn+22n \end{array}\right) \qquad n(10m+22)=0 \qquad ;m=\frac{22}{10}=\frac{11}{5} \quad \text{n = 0}$$

a) Para n≠ 0

1)$m\neq\frac{11}{5} \quad r(C)=3\neq r(A)=4 \quad S.I\ (\,se\ cruzan)$

$2) m=\frac{11}{5} \quad r(C)=3=r(A) \quad S.C.D$ (se cortan)

$b)\ Para\ n=0 \quad r(C)=3=r(A) \quad S.C.D$ (se cortan)

24. Estudia la posición relativa de las siguientes rectas y planos:

$\boldsymbol{a)\ \pi: x+4y+z+2=0}$

$\boldsymbol{r:\begin{cases}-x+2y=5\\ -2y-z=4\end{cases}}$

$$\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & -2 & -1\end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix}1 & 4 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & -2 & -1\end{vmatrix}=-4,\ Al\ ser\ distinto\ de\ 0\ el\ rag(A)=3$$

Se trata de un S.C.D entonces la posición de la recta y el plano es **secantes,** el punto es:

$$\begin{cases}-x & +2y & 0 & =5\\ 0 & -2y & -z & =4\\ +x & +4y & +z & =-2\end{cases} ;x=\frac{-7}{2}, y=\frac{3}{4}, z=\frac{5}{2} \quad ;\quad P\left(\frac{-7}{2},\frac{-3}{4},\frac{-5}{2}\right)$$

$\boldsymbol{b)\ \pi: 2x+y-z-2=0}$

$\boldsymbol{r:\begin{cases}-x+3y-z+2=0\\ x+y+2z-4=0\end{cases}}$

$$\begin{vmatrix}-1 & 3 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=17;$$

Se trata de un S.C.D entonces recta y plano son **secantes,** el punto es:

$$b)\begin{cases}-x & +3y & -z & =-2\\ x & +y & +2z & =4\\ 2x & +y & -z & =2\end{cases} ;x=\frac{32}{17}, y=-\frac{8}{17}, z=\frac{22}{17} \qquad P\left(\frac{32}{17},-\frac{8}{17},\frac{22}{17}\right)$$

$\boldsymbol{c)\ \pi=2x+y+z-2=0}$

$\boldsymbol{r:\begin{cases}-x+2y+z-4=0\\ x-y+2z+2=0\end{cases}}$

$$\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix}-1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=12;$$

Se trata de un S.C.D entonces recta y plano son **secantes,** el punto es:

$$\begin{cases}-x & +2y & +z & =4\\ x & -y & +2z & =-2\\ +2x & +y & +z & =2\end{cases} \rightarrow x=0, y=2, z=0\ \ P(0,2,0)$$

$\boldsymbol{d)\ \pi: x-4y-3z=5}$

$\boldsymbol{r:\begin{cases}x-2y=3\\ -2y-z=2\end{cases}}$

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & -2 & -1\\ 1 & -4 & -3\end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & -2 & -1\\ 1 & -4 & -3\end{bmatrix}=4;$$

Se trata de un S.C.D entonces recta y plano son **secantes,** el punto es:

$$\begin{cases} 1x & -4y & -3x & =5 \\ 1x & -2y & +0 & =3 \\ 0 & -2y & +1z & =2 \end{cases} \qquad x=1\ ,y=-1\ \ ,z=0\ ;\ P(1,-1,0)$$

25. Estudia la posición relativa de los siguientes planos:

a) $\begin{cases} \pi_1: -2x+4y-6z=-4 \\ \pi_2: \quad x-2y+3z=2 \end{cases}$ $\quad \frac{-2}{1}=\frac{4}{-2}=\frac{-6}{3}=\frac{-4}{2}$ Ambos planos son coincidentes

b) $\begin{cases} \pi_1: \quad 2x-y+z=1 \\ \pi_2: -6x+3y-3z=3 \end{cases}$ $\quad \frac{2}{-6}=\frac{-1}{3}=\frac{1}{-3}\neq\frac{1}{3}$ Ambos planos son paralelos

c) $\begin{cases} \pi_1: \quad x-y+3z=4 \\ \pi_2: -2x+3y-z=3 \\ \pi_3: 3x-4y+4z=-1 \end{cases}$ $\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & -4 & 4 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} 2F_1+F_2 \\ -3F_1+F_3 \end{array}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 11 \\ 0 & -1 & -5 & -13 \end{array}\right) F_2+F_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$Rg\ (C)=2\neq Rg(A)=3$ Por ello, el sistema es incompatible y los planos se cortarían 2 a 2 en tres rectas paralelas formando un prisma puesto que los coeficientes de sus variables no son proporcionales.

d) $\begin{cases} \pi_1: 3x-y+z=-1 \\ \pi_2: \ x+y-5z=1 \\ \pi_3: 2x-3y-z=-1 \end{cases}$ $\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_1-3F_2 \\ -2F_1+3F_3 \end{array}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 16 & -4 \\ 0 & -7 & -5 & -1 \end{array}\right) -7F_2+4F_3 \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 16 & -4 \\ 0 & 0 & -132 & 24 \end{array}\right)$$

$Rg\ (C)=Rg(A)=3$ Luego el sistema sería compatible determinado y los tres planos se cortarían en un punto.

26. Estudia, según los valores de λ, la posición relativa de los siguientes planos:

a) $\begin{cases} \pi_1: -2x+2\lambda y-4z=2 \\ \pi_2: \quad x-2y+\lambda z=-1 \end{cases}$

$$-\frac{2}{1}=\frac{2\lambda}{-2}=\frac{-4}{\lambda}=\frac{-2}{1} \to \frac{-4}{\lambda}=\frac{-4}{2}=\frac{-2}{1} \to -4\lambda=-8\,;\lambda=2$$

Para $\lambda=2$: Ambos planos son coincidentes, puesto que los coeficientes de sus variables son proporcionales

Para $\lambda\neq2$: Los planos se cortan en una recta, ya que los coeficientes de las variables no son proporcionales

b) $\begin{cases} \pi_1: -x+2y+z=2 \\ \pi_2: \quad x+\lambda_y-2z=1 \\ \pi_3: \lambda x-y-4z=-3 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & -2 & 1 \\ \lambda & -1 & -4 & -3 \end{array}\right) \to F_1+F_2 \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \lambda+2 & -1 & 3 \\ \lambda & -1 & -4 & -3 \end{array}\right) \to \lambda F_1+F_3 \to$$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & | & 2 \\ 0 & \lambda+2 & -1 & | & 3 \\ 0 & 2\lambda-1 & \lambda-4 & | & 2\lambda-3 \end{pmatrix} \to F_3 - F_2 \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & | & 2 \\ 0 & \lambda+2 & -1 & | & 3 \\ 0 & \lambda-3 & \lambda-3 & | & 2\lambda-6 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & | & 2 \\ 0 & \lambda+2 & -1 & | & 3 \\ 0 & \lambda-3 & \lambda-3 & | & 2(\lambda-3) \end{pmatrix} \quad \lambda-3=0 \to \lambda=3$$

Para λ = 3 : $Rg(C) = 2 = Rg(A)$ Entonces, el sistema sería compatible indeterminado y los planos se cortarían en una recta puesto que los coeficientes de sus variables no son proporcionales.
Para λ ≠ 3 : $Rg\ (C) = Rg(A) = 3$ Luego el sistema sería compatible determinado y los tres planos se cortarían en un punto.

c) $\begin{cases} \boldsymbol{\pi_1}: & \boldsymbol{x - y + 2z =} & \boldsymbol{4} \\ \boldsymbol{\pi_2}: & \boldsymbol{2x + y + z =} & \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{\pi_3}: & \boldsymbol{3x + \lambda y + 6z =} & \boldsymbol{-8} \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 4 \\ 2 & 1 & 1 & | & 3 \\ 3 & \lambda & 6 & | & -8 \end{pmatrix} -2F_1+F_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 3 & -3 & | & -5 \\ 3 & \lambda & 6 & | & -8 \end{pmatrix} -3F_1+F_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 3 & -3 & | & -5 \\ 0 & \lambda+3 & 0 & | & -14 \end{pmatrix}$$

$$\lambda+3=0 \to \lambda=-3$$

Para $\lambda = -3$:$Rg\ (C) = 2 \neq Rg(A) = 3$ Por ello, el sistema es incompatible y el plano π_2 cortaría a los otros dos en rectas paralelas, puesto que los coeficientes de las variables de los planos π_1, π_3 son proporcionales a excepción de sus términos independientes, planos paralelos.
Para $\lambda \neq -3$: $Rg\ (C) = Rg(A) = 3$ Luego, el sistema sería compatible determinado y los tres planos se cortarían en un punto.

d) $\begin{cases} \boldsymbol{\pi_1}: & \boldsymbol{x + \lambda y - z = 2} \\ \boldsymbol{\pi_2}: & \boldsymbol{2x - y + \lambda z = 5} \\ \boldsymbol{\pi_3}: & \boldsymbol{x + 10y - 6z = 1} \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & | & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & | & 5 \\ 1 & 10 & -6 & | & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2F_1+F_2 \\ -F_1+F_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & | & 2 \\ 0 & -2\lambda-1 & \lambda+2 & | & 1 \\ 0 & 10-\lambda & -5 & | & -1 \end{pmatrix} \to (10-\lambda)F_2 + (2\lambda+1)F_3 \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & | & 2 \\ 0 & -2\lambda-1 & \lambda+2 & | & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2-2x+15 & | & -3\lambda+9 \end{pmatrix}$$

$$-\lambda^2 - 2\lambda + 15 = 0 \to \lambda_1 = -5, \lambda_2 = 3\ ; \qquad -3\lambda + 9 = 0 \to \lambda = 3$$

Para $\lambda \neq 3, \lambda \neq -5$: $Rg\ (C) = Rg(A) = 3$ Luego, el sistema sería compatible determinado y los tres planos se cortarían en un punto.
Para $\lambda = 3$: $Rg(C) = Rg(A) = 2$ Entonces, el sistema sería compatible indeterminado, y los planos serían distintos y se cortarían en una recta puesto que los coeficientes de las variables no son proporcionales.
Para $\lambda = -5$: $Rg\ (C) = 2 \neq Rg(A) = 3$ Por ello, el sistema es incompatible y los planos se cortarían 2 a 2 en tres rectas paralelas formando un prisma puesto que los coeficientes de sus variables no son proporcionales.

27. -Estudia, según los valores de λ, la posición relativa de las siguientes rectas y planos, calculando (cuando sea posible), el punto de intersección.

a) $\begin{cases} \boldsymbol{r: x+1=-y-2=\frac{z}{2}} \\ \boldsymbol{\pi: x-3+\lambda z+2=0} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \boldsymbol{r: \begin{cases} 2x+y-2z+4=0 \\ x-y+z-4=0 \end{cases}} \\ \boldsymbol{\pi: x+4y+\lambda z-2=0} \end{cases}$

a) Recta: $\begin{cases} x+1=\ -y-2\ \rightarrow\ x+y+3=0 \\ -y-2=\frac{z}{2}\ \rightarrow\ -2y-4=z\ \rightarrow 2y+z+4=0 \end{cases}$

Plano: π = $x-3y+\lambda z+2=0$

Matriz (A) | Matriz Ampliada (A*)

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & \lambda \end{pmatrix}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & \lambda & 2 \end{array}\right)$

Rango A

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & \lambda \end{vmatrix}$ = $2\lambda+0+1\ -\ (0+0\ -\ 3)=2\lambda+1+3=2\lambda+4\rightarrow 2\lambda+4=0\rightarrow\lambda=-2$

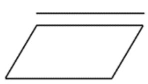
- Si $\lambda=-2$, el Rg (A) $\neq$ 3, y podemos comprobar que la matriz es de Rg = 2
- Para que Rg (A) = 3, λ tiene que ser $\neq$ - 2

Conclusión:

1) Cuando $\lambda\neq-2$ el $Rg\ (A)\ =3=Rg\ (A*)\rightarrow\ la\ recta\ y\ el\ plano\ son\ secantes$ (S.C.D.)

Resolvemos el sistema $\begin{cases} x+y\qquad=-3 \\ 2y+z=-4 \\ x-3y+\ \lambda z=-2 \end{cases}$ $x=\frac{-2\lambda-7}{2(\lambda+2)}\ ;y=\frac{-4\lambda-1}{2(\lambda+2)}\ ;\ \ z=\frac{-7}{2(\lambda+2)}$

2) Cuando $\lambda=-2$ Rg (A) = 2 y Rg (A*) = 3, por lo que Rg (A) $\neq$ Rg (A*) y la recta y el plano son paralelos (S.I.)



b) Recta: $\begin{cases} 2x+y\ -\ 2z+4=0 \\ x-y+z\ -\ 4=0 \end{cases}$ Plano: π = $x+4y\ -\ \lambda z\ -\ 2=0$

Matriz (A)

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -\lambda \end{pmatrix}$ Dependiendo de λ, esta matriz será de Rango 2 o 3.

Determinante $|A|$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -\lambda \end{vmatrix}\rightarrow|A|=(2\lambda+1-8)-(2+8-\lambda)=2\lambda-7-2-8+\ \lambda=\ 3\lambda-17$

$3\lambda-17=0\ ;\quad\lambda=\frac{17}{3}$

- La matriz A no es de Rg = 3 para ese valor de λ;

en el resto de los casos, es decir, cuando $\lambda\ \neq\frac{17}{3}$, sí es de Rg = 3.

Matriz (A*)

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 4 & \lambda & 2 \end{array}\right)$

IES ATENEA Ciudad Real

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

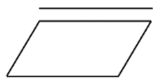
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -4 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (-4+16-4)-(-4\;-\;32+2) = 16\;-\;8+36\;-\;2 = 42$$

<u>Conclusión</u>:

1) Si $\lambda \neq \frac{17}{3}$, ambas matrices son Rg = 3, por tanto, el plano y la recta son secantes (S.C.D.)

Resolvemos el sistema $\begin{cases} 2x+y-2z=-4 \\ x-y+z\;=4 \\ x+4y-\;\lambda z=2 \end{cases}$ $x=\frac{18}{-3\lambda+17}$; $y=\frac{12\lambda+4}{-3\lambda+17}$; $z=\frac{54}{-3\lambda+17}$

2) Si $\lambda = \frac{-17}{3}$, Rg (A) = 2 $\neq$ Rg (A*) = 3, por tanto, el plano y la recta son paralelos (S.I.)



28. Dadas las rectas r: $\frac{x}{2}=y-3=\frac{z+3}{-1}$ y s: $x+1=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$ se pide:

a) Posición relativa de ambas rectas.

b) Ecuación del plano que contiene a dichas rectas.

a) <u>Primero</u>: Sacamos un punto y un vector de cada recta:

Recta r: $P(0,3,-3)$; $\vec{v}\,(2,1,-1)$

Recta s: $Q(-1,1,0)$; $\vec{w}(1,-1,2)$

<u>Segundo:</u> Se calcula el rango de la matriz M y M*:

$M=\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$ y $M^*=\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ p_1-q_1 & p_2-q_2 & p_3-q_3 \end{pmatrix}$

<u>Tercero</u>: Calculamos el determinante M*:

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ R(M)=2=R(M*)→ Las rectas son **secantes**.

b) <u>Primero</u>: Para calcular la ecuación del plano que contiene a dichas rectas necesitamos un punto de una de las rectas y dos vectores, uno de cada recta:

$P(0,3,-3)$; $\vec{v}\,(2,1,-1)$; $\vec{w}(1,-1,2)$

<u>Segundo</u>: Calculamos la ecuación general del plano para este caso de la siguiente manera:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

<u>Tercero</u>: Sustituimos los valores dados:

$$\begin{vmatrix} x & y-3 & z+3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2x-2(z+3)-(y-3)-[(z+3)+x+4(y-3)] = 0 \rightarrow$$

$\boldsymbol{x-5y-3z+6=0}$

29. Dadas las rectas r y s de ecuaciones r: $x=y=z$ y s: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{2}$

a) Estudia su posición relativa.

b) Halla la recta que corta a r y s y es paralela a la recta t: $(x,y,z)=(1,2,3)+\lambda(1,2,-1)$

a) Primero: Sacamos un punto y un vector de cada recta:

Recta r: $P(0,0,0)$; $\vec{v}\,(1,1,1)$

Recta s: $Q(1,2,0)$; $\vec{w}(1,2,2)$

Segundo: Se calcula el rango de la matriz M y M*:

$M=\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$ y $M^*=\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ p_1-q_1 & p_2-q_2 & p_3-q_3 \end{pmatrix}$

Tercero: Calculamos el determinante M*:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=2\rightarrow$ R(M)=2≠R(M*)=3→ **Las rectas se cruzan**

b) Primero: Pasamos a paramétricas las rectas r y s para ver las coordenadas de un punto de cada recta:

Recta r: $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$ cualquier punto de la recta r será: P (t, t, t)

Recta s: $\begin{cases} x-1=s \\ y-2=2s \\ z=2s \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x=1+s \\ y=2+2s \\ z=2s \end{cases}$ cualquier punto de la recta s será Q(1+s, 2+2s, 2s)

Segundo: El vector $\overrightarrow{PQ}$ debe ser paralelo al vector director de la recta t: (1, 2, -1):

$\overrightarrow{PQ}=(1+s-t,\quad 2+2s-t,\quad 2s-t)$

$\frac{1+s-t}{1}=\frac{2+2s-t}{2}=\frac{2s-t}{-1}$

Tercero: se resuelve el sistema ecuaciones:

$2+2s-2t=2+2s-t\rightarrow \boldsymbol{t=0}$

$-2-2s+t=4s-2t\rightarrow \boldsymbol{s=-\frac{1}{3}}$

Cuarto: Se sustituye y se toma el punto P(0,0,0) y el vector (1,2,-1) y la recta será:

30. Dados los planos $\pi_1=3x+2y-z=6$ y $\pi_2=-2x+y+3z-6=0$, halla la ecuación de una recta r que pasando por el punto M(1, 0, -1) es paralela a los dos planos.

$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\rightarrow(7,-7,7);\, vector\ perpendicular\ a\ los\ vectores\ normales$ y por tanto paralelo a los dos planos, la recta tendrá de ecuación

$r:(x,y,z)=\lambda\cdot(7,-7,7)+(1,0,-1)$ ecuación vectorial

$r=\begin{cases} x=7\lambda+1 \\ y=-7\lambda \\ z=7\lambda-1 \end{cases}\rightarrow Ecuaciones\ paramétricas$

31. Dadas las rectas r y s de ecuaciones $r:\frac{x}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{m}$ y $s: x+1=-y=z-2$, hallar:

a) El valor de m para que ambas rectas se corten:

$r=\begin{cases} x=4\lambda \\ y=1-2\lambda \\ z=m\lambda \end{cases}$; $s=\begin{cases} x=\beta-1 \\ y=-\beta \\ z=\beta+2 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{r}4\lambda=\beta-1\\ 1-2\lambda=-\beta\\ m\lambda=\beta+2\end{array}\right\}\begin{array}{r}4\lambda-\beta=-1\\ -2\lambda+\beta=-1\\ m\lambda-\beta=2\end{array}$$

$2\lambda=-2;\ \lambda=-1$

$-2\cdot(-1)+\beta=-1\rightarrow 2+\beta=-1;\beta=-3$

$m\cdot(-1)+3=2;\ -m=-1;m=1$

b) Para ese valor de m, el plano π que contiene a s y r

$$\pi\begin{cases}Pr=(0,1,0)\\ \vec{d}r=(4,-2,1)\\ \vec{d}s=(1,-1,1)\end{cases}$$

$$\begin{vmatrix}4 & 1 & x\\ -2 & -1 & y-1\\ 1 & 1 & z\end{vmatrix}=0\rightarrow -4z-2x+y-1+x-4y+4+2z=0$$

$-2z-x-3y+3=0$

c) La ecuación de la recta que pasa por el punto M (1,1,1) y es perpendicular al plano π

$\pi=\ -x-3y-2z+3=0\rightarrow(-1,-3,-2);\textit{vector perpendicular al plano}$

$r:(x,y,z)=(1,1,1)+\lambda(-1,-3,-2),\lambda\in R$

32. Dada la recta r: $\begin{cases}\boldsymbol{x-y+3z+4=0}\\ \boldsymbol{-2x+y-z+2=0}\end{cases}$ **y el plano** : $\pi: 4x-my+5z-n=0$ calcula:

a) Valores de m y n para que la recta y el plano sean:

i) paralelos ii) perpendiculares iii) la recta esté contenida en el plano.

b) Para m = -1 y n = 2, el punto de intersección de la recta y el plano.

c) Punto de intersección de la recta r, con el plano OYZ.

$$\overrightarrow{v_r}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 1 & -1 & 3\\ -2 & 1 & -1\end{vmatrix}=-2i-5j-k\rightarrow(-2,-5,-1)\rightarrow(2,5,1)\qquad \overrightarrow{n_\pi}=(4,-m,5)$$

a) i) $\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{n_\pi}=0\quad(2,5,1)\cdot(4,-m,5)=8-5m+5=0\qquad m=\frac{13}{5}$

ii) $\frac{2}{4}=\frac{5}{-m}=\frac{1}{5}$ no tiene solución.

iii) El sistema formado por las 3 ecuaciones ha de ser compatible indeterminado.

$$\begin{vmatrix}4 & -m & 5\\ 1 & -1 & 3\\ -2 & 1 & -1\end{vmatrix}=-8+5m-5=0\,;\quad m=\frac{13}{5}$$

$$\begin{vmatrix}4 & 5 & -n\\ 1 & 3 & 4\\ -2 & -1 & 2\end{vmatrix}=24+n-40-6n+16-10=0\,;\ n=-2$$

b) Resolvemos el sistema $\begin{cases}4x+y+5z=2\\ x-y+3z=-4\\ -2x+y-z=-2\end{cases}$ $x=\frac{86}{9}\,;y=\frac{170}{9}\,;z=\frac{16}{9}$

c) **c** Resolvemos el sistema $\begin{cases}x\qquad\quad=0\\ x-y+3z=-4\\ -2x+y-z=-2\end{cases}$ $x=0\,;y=-5\,;z=-3$

33. Dadas las rectas r: $\frac{x}{2}=y-3=\frac{z+3}{-1}$, y s: $x+1=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$, calcula la ecuación de la recta que

pasa por el punto M(-1, 1, 1) y es perpendicular a ambas rectas.

$\overrightarrow{dr} = (2,1,-1)$ $\quad \overrightarrow{ds} = (1,-1,2)$ $\quad \overrightarrow{dr}x\overrightarrow{ds}$ es un vector perpendicular a ambos

$$\overrightarrow{dr}x\overrightarrow{ds} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3i - 5j - 3k \to (3,-5,-3)$$

De donde las ecuaciones paramétricas de la recta pedida son: $\begin{Bmatrix} x = -1 + 3\lambda \\ y = 1 - 5\lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{Bmatrix}$

34.- Dadas las rectas r: $\begin{cases} y = -1 + x \\ z = 2 - 3x \end{cases}$ y s: $\frac{x-2}{2} = y - 1 = \frac{z+1}{2}$, se pide:

a) Posición relativa de ambas rectas.

r: $\begin{cases} y = -1 + x \\ z = 2 - 3x \end{cases}$ $\qquad s$: $\frac{x-2}{2} = y - 1 = \frac{z+1}{2}$

$\vec{u} = (1,1,-3)$; $\qquad \vec{v} = (2,1,2)$; $\qquad \overrightarrow{AB} = (2,0,-2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2' = F_2 - F_1 \\ F_3' = F_3 + 3F_1 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix} F_3' = F_3 - 8F_2 \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

Es de rango tres, lo que indica que las rectas se cruzan.

b) Ecuación de la recta que pasa por $M = (-1,-1,0)$ y es perpendicular a ambas rectas.

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5i - 8j - k \to \qquad \vec{w} = (5,-8,-1)\ y\ M = (-1,-1,0)$$

Ecuación de la recta: $(x,y,z) = (-1,-1,0) + \lambda(5,-8,-1)$

35. Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos A (1,0,-1), B (1,1,0) y el tercer vértice es el punto de corte con el plano 0XZ con la recta r: $x = 2y - 2 = z - 1$.

$$\begin{matrix} x = \gamma \\ y = 0 \\ z = \mu \end{matrix} \to \begin{matrix} x = 2y + 2 \to x = 2 \\ x = z - 1 \to z = x + 1 \to z = 2 + 1 = 3 \end{matrix} \qquad \text{C (2,0,3)}$$

$\overline{AB} \to B - A \to (1,1,0) - (1,0,-1) = (0,1,1)$ $\quad \overline{BC} \to C - B \to (2,0,3) - (1,1,0) = (1,-1,3)$

$$\begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\bar{\imath} + \bar{\jmath} - (\bar{k} - \bar{\imath}) = 4\bar{\imath} + \bar{\jmath} - \bar{k} \qquad A = \frac{1}{2}|\bar{u}\ x\ \bar{v}| \to \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + 1^2 + (-1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{18}$$

36. Dados los puntos A (-1,2,0), B (-3,3,-1) y C (1, a,1), se pide:

a) Calcula el valor de a para que los tres puntos estén alineados.

$\overline{AB} \to B - A \to (-3,3,-1) - (-1,2,0) = (-2,1,-1)$

$\overline{BC} \to C - B \to (1,a,1) - (-3,3,-3) = (4,a-3,2)$

$$\frac{-2}{4} = \frac{1}{a-3} = \frac{-1}{2} \to \frac{-2}{4} = \frac{1}{a-3} \to -2(a-3) = 4 \to -2a + 6 = 4 \to 2a = 2 \to a = 1$$

b) Para $a = -1$, calcula el perímetro del triángulo que tenga de vértices dichos puntos, así como su área y el valor de la altura correspondiente al vértice A.

$d_{\overline{AB}} = \sqrt{(-3+1)^2 + (3-2)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{6}$

$d_{\overline{BC}} = \sqrt{(1+3)^2 + (-1-3)^2 + (1+1)^2} = 6$

$d_{\overline{AC}} = \sqrt{(-1-1)^2 + (2+1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$

Perímetro: $\sqrt{6} + 6 + \sqrt{14} = 12{,}19$

$\bar{u} = B - A \to (-3{,}3,-1) - (-1{,}2{,}0) = (-2{,}1,-1)$

$\bar{v} = C - B \to (1,-1{,}1) - (-3{,}3,-1) = (4,-4,2)$

$$|\bar{u}\ x\ \bar{v}| = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & 2 \\ \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \left(2\bar{\imath} + 8\bar{k} - 4\bar{\jmath}\right) - \left(4\bar{k} + 4\bar{\imath} - 4\bar{\jmath}\right) = -2\bar{\imath} + 0\bar{\jmath} + 0\bar{k} = -2$$

Área: $A = \frac{1}{2}|\bar{u}\ x\ \bar{v}| \to \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4}\ = 1$

Valor de la altura correspondiente al vértice A;

$\overline{BC} = \bar{v} = (4,-4,2)\quad ;\quad A(-1{,}2{,}0)$ El valor de la altura es la distancia del punto A al punto de corte de la recta determinada por BC y el plano perpendicular a ésta que pasa por A.

Plano perpendicular:

$4(x+1) - 4(y-2) + 2(z) = 0 \to 4x + 4 - 4y + 8 + 2z = 0 \to 4x - 4y + 2z + 12 = 0$

Recta determinada por BC, considerando el punto C $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-1}{2}$

Resolvemos el sistema $\begin{cases} 4x - 4y + 2z = -12 \\ -4x - 4y = 0 \\ 2y + 4z = 2 \end{cases}$

c) Halla la ecuación de una mediana.

Punto medio de A y C→ $D\left(\frac{-1+1}{2},\frac{2-1}{2},\frac{0+1}{2}\right) = \left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

$\overline{BD} \to D - B \to \left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) - (-3{,}3,-1) = (3,-\frac{5}{2},\frac{3}{2})$

Ecuación de la mediana: $(x,y,z) = \left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) + \lambda(3,-\frac{5}{2},\frac{3}{2})$

37.- Los puntos $P\,(0,1,0)$ y $Q\,(-1,1,1)$ son dos vértices de un triángulo, y el tercer vértice S pertenece a la recta r: $\{x = 4, z = 1\}$. Además, la recta que contiene a los puntos P y S es perpendicular a la recta r.

a) Determina las coordenadas de S.

Usamos la ecuación paramétrica para obtener el vector director:

$r: \begin{Bmatrix} x = 4 \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{Bmatrix} = r: \begin{Bmatrix} x = 4 + 0 \cdot \lambda \\ y = 0 + \lambda \\ z = 1 + 0 \cdot \lambda \end{Bmatrix} \qquad \overrightarrow{dr} = (0,1,0)$

Sabemos que x = 4 y que z = 1 por lo que $S\,(4,a,1)$

Como $\overrightarrow{dr}$ y $\overrightarrow{PS}$ son perpendiculares hacemos el producto escalar e igualamos a 0 para obtener el valor de a:

$\overrightarrow{dr} \cdot \overrightarrow{PS} = 0 \qquad \overrightarrow{dr} = (0,1,0) \qquad \overrightarrow{PS} = (4,a,1\,) - (0,1,0) = (\,4,a-1,1)$

$\overrightarrow{dr} \cdot \overrightarrow{PS} = 0 \cdot 4 + (a-1) \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0 \qquad \overrightarrow{dr} \cdot \overrightarrow{PS} = a - 1 = 0 \qquad a = 1$

Sustituimos en $S\,(4,a,1)$: $\qquad S\,(4,1,1)$

b) Calcula el área del triángulo PQS.

Usamos la fórmula del área del triángulo = $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{SQ}x\overrightarrow{SP}\right|$

Resolvemos: $\overrightarrow{SQ}$ = $(\,-1,1,1) - (4,1,1) = (-5,0,0) \qquad \overrightarrow{SP} = (0,1,0) - \ (4,1,1) = (-4,0,-1)$

IES ATENEA Ciudad Real

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$(\overrightarrow{SQ}x\overrightarrow{SP}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 5\vec{j} = (0,5,0) \qquad |\overrightarrow{SQ}x\overrightarrow{SP}| = \sqrt{5^2} = 5$

Área del triángulo = $\frac{1}{2}|\overrightarrow{SQ}x\overrightarrow{SP}| = \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{5}{2}u^2$

38.- Los puntos $A\ (0,-2,0)$ y $B\ (-1,0\ ,1)$ son dos vértices de un triángulo isósceles.
a) Obtén las coordenadas del otro vértice C, sabiendo que pertenece a la recta r: $\{y = -5, z = 0\}$.

Usamos la ecuación paramétrica para obtener el vector director:

$r: \begin{Bmatrix} x = \lambda \\ y = -5 \\ z = 0 \end{Bmatrix} = r: \begin{Bmatrix} x = 0 + \lambda \\ y = -5 + 0 \cdot \lambda \\ z = 0 + 0 \cdot \lambda \end{Bmatrix} \qquad \overrightarrow{dr} = (1,0,0)$

Hallamos el punto medio entre A y B:

$M = \left(\frac{0-1}{2}, \frac{-2+0}{2}, \frac{0+1}{2}\right) \qquad M = \left(\frac{-1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)$ (suponemos A y B son los vértices del lado desigual)

Sabemos que y = -5 y que z = 0 por lo que $C\ (a,-5,0)$

Como $\overrightarrow{AB}$y $\overrightarrow{MC}$ son perpendiculares hacemos el producto escalar e igualamos a 0 para obtener el valor de a:

$\overrightarrow{AB} = (-1,0\ ,1) - (0,-2,0) = (-1,2,1)$

$\overrightarrow{MC} = (a,-5,0) - \left(\frac{-1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right) = \left(a + \frac{1}{2}, -4, -\frac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MC} = (-1,2,1) \cdot \left(a + \frac{1}{2}, -4, -\frac{1}{2}\right) = \left(-a - \frac{1}{2} - 8 - \frac{1}{2}\right) \qquad -a = 8 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \qquad a = -9$

Sustituimos en $C\ (a,-5,0)$: $\quad C\ (-9,-5,0) \quad$ Solución: $C\ (-9,-5,0)$

b) Halla el valor del ángulo desigual.

El ángulo desigual es el del punto C.

Hallamos el ángulo usando la fórmula: $\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}|}$

Resolvemos:

$\overrightarrow{CA} = (0,-2,0) - (-8,-5,0) = (8,3,0) \qquad |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{8^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{64+9} = \sqrt{73}$

$\overrightarrow{CB} = (-1,0\ ,1) - (-8,-5,0) = (7,5,1) \qquad |\overrightarrow{CB}| = \sqrt{7^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{49+25+1} = \sqrt{75}$

$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}|} \qquad \cos\alpha = \frac{(8,3,0)\cdot(7,5,1)}{\sqrt{73}\cdot\sqrt{75}} \qquad \cos\alpha = \frac{56+15+0}{\sqrt{73}\cdot\sqrt{75}} \qquad \cos\alpha = \frac{71}{\sqrt{73}\cdot\sqrt{75}}$

$$\alpha = \arccos\frac{71}{\sqrt{73}\cdot\sqrt{75}} = 16{,}35°$$

El ángulo desigual es de 16,35°.

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

AUTOEVALUACIÓN

1. Una ecuación de la recta que pasa por el punto $A(0,1,2)$ y tiene por vector $\overline{v}=(1,1,1)$ es:

(Hacemos las ecuaciones de la recta hasta encontrar una que coincida con una de las opciones)

$(x,y,z)=(0,1,2)+\lambda(1,1,1)$

$\begin{cases} x=0+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases} \begin{cases} \lambda=x \\ \lambda=y-1 \\ \lambda=z-2 \end{cases}$

$x=y-1=z-2$

$\begin{cases} x=y-1 \\ x=z-2 \end{cases} \begin{cases} x-y+1=0 \\ x-z+2=0 \end{cases}$

$$\mathbf{b)} \begin{cases} \mathbf{x-y+1=0} \\ \mathbf{x-z+2=0} \end{cases}$$

2. Una ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(3,1,2)$ y $B(2,4,7)$ es:

(Primero hallamos un vector director con los dos puntos y luego hacemos las ecuaciones de la recta con el punto A (izquierda) y el B (derecha) hasta encontrar una que coincida con una de las opciones)

$AB=(2-3,4-1,7-2)=(-1,3,5)$

$(x,y,z)=(3,1,2)+\lambda(-1,3,5)$; $(x,y,z)=(2,4,7)+\lambda(-1,3,5)$

$\begin{cases} x=3+(-1)\lambda \\ y=1+3\lambda \\ z=2+5\lambda \end{cases} \begin{cases} \lambda=\frac{x-3}{-1} \\ \lambda=\frac{y-1}{3} \\ \lambda=\frac{z-2}{5} \end{cases}$; $\begin{cases} x=2+(-1)\lambda \\ y=4+3\lambda \\ z=7+5\lambda \end{cases} \begin{cases} \lambda=\frac{x-2}{-1} \\ \lambda=\frac{y-4}{3} \\ \lambda=\frac{z-7}{5} \end{cases}$

$\frac{x-3}{-1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{5}$; $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-7}{5}$

$$\boldsymbol{c)}\ \frac{\boldsymbol{x-2}}{\boldsymbol{-1}}=\frac{\boldsymbol{y-4}}{\boldsymbol{3}}=\frac{\boldsymbol{z-7}}{\boldsymbol{5}}$$

3. El vector director de la recta $\begin{cases} \boldsymbol{x-y-2=0} \\ \boldsymbol{x-z-1=0} \end{cases}$ es:

$\begin{cases} x=y+2 \\ x=z+1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\lambda \\ y=-2+\lambda \\ z=-1+\lambda \end{cases}$

$$\mathbf{d)(1,1,1)}$$

4. Una ecuación del plano que pasa por el punto $A(3,1,-2)$ y tiene como vectores directores $\overline{\boldsymbol{u}}=(\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3})$ y $\overline{\boldsymbol{v}}=(\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{0})$ es:

$Ya\ que\ las\ opciones\ a\ y\ c\ son\ incorrectas\ por\ presentar\ valores\ que\ no\ coinciden\ con\ el\ punto\ y\ los\ vectores\ directores, la\ solución\ es:$

$$\mathbf{b)\ 3x-z=11}$$

5. Una ecuación del plano que pasa por el punto $A(3,1,2)$ y contiene a la recta $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1})+\boldsymbol{t}(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{1})$ es:

(Hacemos las ecuaciones de la recta con el punto A y el vector director de la recta hasta encontrar una que coincida con una de las opciones).

$(x,y,z)=(3,1,2)+t(0,0,1)$

$\begin{cases} x=3 \\ y=1 \\ z=2+t \end{cases}$

$$\mathbf{b)\ x = 3}$$

6. Una ecuación del plano que pasa por el punto A (3,1,2) y el vector normal $\vec{n} = (0, 0, 1)$ es:
- Utilizamos la fórmula;

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow 0(x - 3) + 0(y - 1) + 1(z - 2) = 0 \rightarrow z - 2 = 0 \rightarrow z = 2$$

- **La respuesta es la opción b) z = 2**

7. Una ecuación del plano que pasa por los puntos $A(3, 0, 0), B(0, 5, 0), C(0, 0, 7)$ es:
-Calculamos dos vectores y elegimos un punto
$\overrightarrow{A0}(x - 3, y, z)$; $\overrightarrow{AB} \rightarrow (0,5,0) - (3,0,0) \rightarrow (-3,5,0)$ $\overrightarrow{AC} \rightarrow (0,0,7) - (3,0,0) \rightarrow (-3,0,7)$

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -3 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 7 \end{vmatrix} \rightarrow \vec{\imath} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} - \vec{\jmath} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow (x - 3) \cdot 35 - (-21y) + 15z$$

$$35x + 21y + 15z - 105 = 0$$

- Como paso final hacemos su m.c.m y dividimos la ecuación entre el mismo y obtendremos la solución;

m.c.m = (105)

$$\boldsymbol{a)\ \frac{x}{3} + \frac{y}{5} + \frac{z}{7} = 1}$$

8. Los planos $x - z = 3$ y $x + z = 7$ son:
Dividimos los coeficientes;

$$\frac{1}{1} \neq \frac{0}{0} \neq -\frac{1}{1}$$

- Se cumple el caso de la secante por tanto es la c).

9. Las rectas $\frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{5}$ y $\left.\begin{matrix} x = 3 + 4t \\ y = 1 + 6t \\ z = 2 + 10t \end{matrix}\right\}$ son:

$r: \frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{5}$ $s: \frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-2}{10}$

1º) Tomamos puntos y los vectores de ambas rectas y también tomaremos el vector de ambos puntos:
$P_r(4,1,-2)$ $P_s(3,1,2)$ $\overrightarrow{Vr}\ (2,3,5)$ $\overrightarrow{Vs}\ (4,6,10)$ $\overrightarrow{PrPs}\ (3 - 4\ , 1 - 1\ , 2 + 2) \rightarrow (-1,0,4)$

2º) Calculamos la matriz de coeficientes y obtendremos el rango;

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 10 \end{pmatrix}^A \rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 20 - 20 = 0 \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0 \ \rightarrow R(A) = 1 \\ \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = 30 - 30 = 0 \end{cases}$$

3º) Calculamos el rango de la matriz ampliada;

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 10 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{A^{\#}} \rightarrow \big(48+0+(-30)\big)-(-30+48)=0 \rightarrow R(A^{\#})=2$$

Tras tener ambos rangos obtenemos que las rectas son paralelas. b)

10. El plano $x - z = 3$ y la recta $\frac{x-4}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{5}$ son:

1º) Escribimos las ecuaciones implícitas de la recta.

$$r\begin{cases} \frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{2} \rightarrow 2y-2=3z+6 \rightarrow 2y-3z-8=0 \\ \frac{x-4}{2}=\frac{y-1}{3} \rightarrow 2y-2=3x-12 \rightarrow 3x-2y+10=0 \end{cases}$$

2º) Calculamos la matriz de coeficientes:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow (0+0+0)—6+(-6)=12 \rightarrow R(A)=3$$

·Como R (A) = 3 esto quiere decir que el rango de la matriz ampliada también será R ($A^{\#}$)= 3 y por tanto la recta será secante al plano.

R (A) = R($A^{\#}$) = 3 → Recta secante al plano.