Matemáticas II
2º Bachillerato
Capítulo 6: Geometría métrica en el espacio

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por: AITANA, AITOR, AMALIA, ANDREA, CARMEN, CELIA S, FERNANDO, IRENE, ISMAEL F, LAURA, NATALIA, OLIVIA, ROSA, PABLO G, ESPERANZA, LIDIA, CELIA P, ISMAEL C, ENRIQUE, LUCÍA, NEREA, JULIA, JERÓNIMO

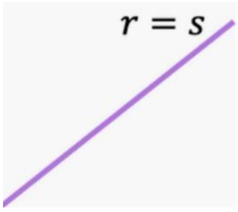
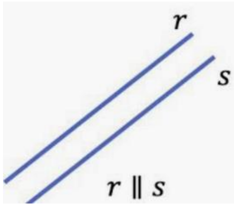
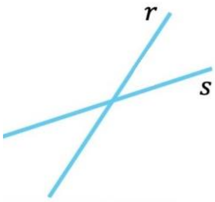
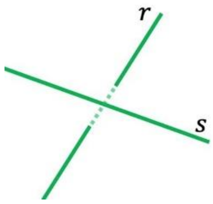
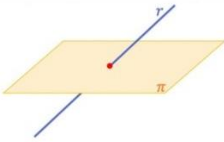
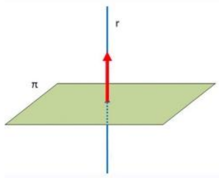
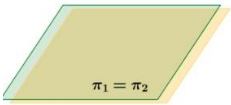
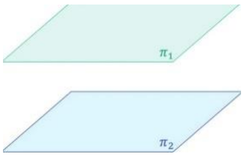
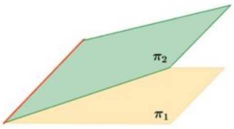
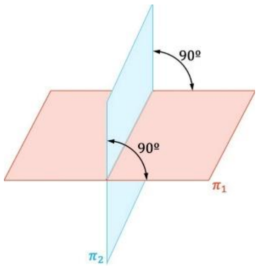
IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Realiza en tu cuaderno los doce dibujos y comprueba las relaciones descritas en la tabla anterior.

r y s coincidentes  	*r y s paralelas*  	*r y s secantes*  	*r y s se cruzan* 
r y π coincidentes 	*r y π paralelos* 	*r y π secantes* 	*r y π perpendiculares* 
π_1 y π_2 coincidentes  	*π_1 y π_2 paralelos* 	*π_1 y π_2 secantes* 	*π_1 y π_2 perpendiculares* 

2. Halla la proyección ortogonal del punto $P(0,3,1)$ sobre la recta $r: \frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+1}{2}$.

$$t = \frac{v_1\cdot(p_1-a_1)+v_2\cdot(p_2-a_2)+v_3\cdot(p_3-a_3)}{{v_1}^2+{v_2}^2+{v_3}^2}$$

$$r = \frac{x-a_1}{v_1} = \frac{y-a_2}{v_2} = \frac{z-a_3}{v_3} \quad ; \quad q_1 = a_1 + v_1 t \quad q_2 = a_2 + v_2 t \quad q_3 = a_3 + v_3 t$$

$$t = \frac{3\cdot(0+3)+4\cdot(3-2)+2\cdot(1-1)}{3^2+4^2+2^2} = \frac{13}{29}$$

$$q_1 = 3 + 3\cdot\frac{13}{29} = \frac{126}{29} \quad q_2 = -2 + 4\cdot\frac{13}{29} = \frac{-6}{29} \quad q_3 = -1 + 2\cdot\frac{13}{29} = \frac{-3}{29}$$

$$Q = \left(\frac{126}{29}, \frac{-6}{29}, \frac{-3}{29}\right)$$

3. Halla la proyección ortogonal del punto $P(4,0,3)$ sobre el plano $\pi: 3x-2y+z-2=0$.

$$t = \frac{D+A(p_1)+B(p_2)+C(p_3)}{A^2+B^2+C^2} \quad ; \quad q_1 = p_1 + At \quad q_2 = p_2 + Bt \quad q_3 = p_3 + Ct$$

$$t = \frac{-2+3\cdot(4)-2\cdot(0)+1\cdot(3)}{3^2+2^2+1^2} = \frac{13}{14}$$

$q_1 = 4 + 3 \cdot \frac{13}{14} = \frac{95}{14}$ $\quad q_2 = 0 - 2 \cdot \frac{13}{14} = \frac{-13}{7}$ $\quad q_3 = 3 + 1 \cdot \frac{13}{14} = \frac{55}{14}$

$Q(\frac{95}{14}, \frac{-13}{7}, \frac{55}{14})$

4. Halla la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π, siendo:

$$\boldsymbol{r: \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-11}{2}} \qquad \textbf{y} \qquad \boldsymbol{\pi: 2x + 3y - z + 1 = 0}$$

En primer lugar, obtenemos un vector director y un punto de la recta.

$\bar{v}(3,4,2)$ $\quad P(2, -2{,}11)$ y un vector normal al plano $\quad \bar{n} = (2, 3, -1)$

$$\pi' \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z-11 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$= [-4(x-2) + 9(z-11) + 4(y+2)] - [8(z-11) + 6(x-2) - 3(y+2)] =$

$= -4x + 8 + 9z - 99 + 4y + 8 - [8z - 88 + 6x - 12 - 3y - 6] =$

$= -4x + 4y + 9z - 91 - 6x + 3y - 8z + 106 = -10x + 7y + z + 15 = 0$

Proyección ortogonal $= \begin{cases} 2x + 3y - z + 1 = 0 \\ -10x + 7y + z + 15 = 0 \end{cases}$

5. Calcula la distancia del punto A $\boldsymbol{(0, 3, -4)}$ al punto $\boldsymbol{B(-2, 0, 5)}$.

$\overline{AB} = (B - A) = (-2{,}0{,}5) - (0{,}3,-4) = (-2,-3{,}9) = |\overline{AB}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 9^2} = \sqrt{94}\, u.$

6. Determina las coordenadas de los puntos que distan 4 del punto $\boldsymbol{C(2, -1, 1)}$.

$d(P, C) = 4$

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2} = 4 \rightarrow \left(\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2}\right)^2 = 4^2 \rightarrow$$

$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 16 \rightarrow$

$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 = 16 \rightarrow$

$x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2 - 2z - 10 = 0$ $\quad$ Es la ecuación de una esfera

7. Determina las coordenadas de los puntos que distan R del punto $\boldsymbol{C(0, 0, 0)}$.

$d(P, C) = R$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = R \rightarrow \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^2 = R^2 \rightarrow$$

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \rightarrow$ $\quad$ Es la ecuación de una esfera centrada en el origen de radio R

8. Determina las coordenadas de los puntos que equidistan de los puntos $A(0,0,0)$ y B(0, 0, 2).

d(P,A)=d(P,B) $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-2)^2}$

$x^2+y^2+z^2 = x^2+y^2+(z-2)^2 \quad z^2 = z^2-4z+4 \quad -4z+4=0\ ;\ z=1$ se trata de un plano.

9. Calcula la distancia del punto P (0, –1, 0) a la recta: $r\equiv\frac{x-2}{4}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{3}$

$$A(2,-3,1)\ \ \bar{v}(4,2,3)\ \ \overline{AP}=(-2,2,-1)\rightarrow$$

$$\bar{v}\times\overline{AP}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 4 & 2 & 3\\ -2 & 2 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}\cdot i+\begin{vmatrix}4 & 3\\ -2 & -1\end{vmatrix}\cdot j+\begin{vmatrix}4 & 2\\ -2 & 2\end{vmatrix}\cdot k\rightarrow -8i+2j+4k$$

$$\rightarrow d(P,r)=\frac{|\bar{v}\times\overline{AP}|}{|\bar{v}|}=\begin{cases}|(-8+2+4)|=\sqrt{(-8)^2+2^2+4^2}=\sqrt{94}\\ |\bar{v}|=|(4,2,3)|=\sqrt{4^2+2^2+3^2}=\sqrt{29}\end{cases}\rightarrow$$

$$d(P,r)=\frac{|\bar{v}\times\overline{AP}|}{|\bar{v}|}=\frac{\sqrt{94}}{\sqrt{29}}=1{,}80$$

10. Calcula la distancia del punto P (0, – 3, – 2) al plano π : 3x – 2 y – 4z +1 = 0 .

$$d(P,\pi)=\left|\frac{\mathrm{A}x_0+\mathrm{B}y_0+\mathrm{C}z_0+\mathrm{D}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|\rightarrow d(P,\pi)=\left|\frac{3\cdot0+(-2)\cdot(-3)+4\cdot(-2)+1}{\sqrt{3^2+(-2)^2+(-4)^2}}\right|\rightarrow\left|-\frac{47\sqrt{29}}{29}\right|=\frac{47\sqrt{29}}{29}$$

11. Calcula la distancia entre los planos: $\boldsymbol{\pi\equiv -x-y-3z=2}$ $\quad$ $\boldsymbol{\pi'\equiv -x+2y-z=1}$

en primer lugar, estudiamos su posición relativa:

$\frac{-1}{-1}\neq\frac{-1}{2}\neq\frac{-3}{-1}\neq\frac{2}{1}$, son secantes, por tanto, la distancia es 0.

12. Calcula la distancia entre los planos: $\boldsymbol{\pi = x-y-3z=2}$ $\quad$ $\boldsymbol{\pi' = x-y-3z=5}$

En primer lugar, estudiamos su posición relativa:

$\frac{1}{1}=\frac{-1}{-1}=\frac{-3}{-3}\neq\frac{2}{5}$, son paralelos, por tanto, vamos a calcular su distancia**,**

un punto de π , para y = 0, z = 0 es (2, 0, 0)

$$\mathrm{D}(\mathrm{P},\Pi)=\left|\frac{\mathrm{A}x_0+\mathrm{B}y_0+\mathrm{C}z_0+\mathrm{D}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|=\left|\frac{1\cdot2+(-1\cdot0)+(-3\cdot0)-5}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2+(-3)^2}}\right|=\left|\frac{-3}{\sqrt{11}}\right|=\frac{3\sqrt{11}}{11}\mathrm{U}$$

13. Calcula la distancia entre los planos. $\boldsymbol{\pi: x-y-3z=2 \quad \pi': 2x-2y-6z=4}$

Analizamos los dos vectores normales:

$\vec{n}=(1,-1,-3) \qquad \vec{n}'=(2,-2,-6) \qquad \frac{1}{2}=\frac{-1}{-2}=\frac{-3}{-6}=\frac{2}{4} \qquad \frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

Son proporcionales, por tanto, los planos son coincidentes y la distancia entre ellos es 0.

14. Calcula la distancia entre los planos. $\boldsymbol{\pi: -2x+4y-2z=7 \quad \pi': -x+2y-z=1}$

Analizamos los dos vectores normales:

$\vec{n}=(-2,4,-2) \qquad \vec{n}'=(-1,2,-1) \qquad \frac{-2}{-1}=\frac{4}{2}=\frac{-2}{-1}=\frac{7}{1} \qquad 2=2=2\neq 7$

No son proporcionales, de modo que los planos son paralelos. Hallamos un punto de uno cualquiera de los planos tomando valores:

Damos 1 a x

Damos 2 a y

$\pi': -x+2y-z=1 \qquad \pi': -1+2\cdot(2)-z=1 \qquad \pi': -1+4-z-1=0 \qquad z=2$

El punto es: $P(1,2,2)$

Y usamos la fórmula de la distancia del punto P al plano π:

$d(P,\pi)=\left|\frac{\mathrm{A}x_0+\mathrm{B}y_0+\mathrm{C}z_0+\mathrm{D}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right| \qquad d(P,\pi)=\left|\frac{-2\cdot(1)+4\cdot(2)-2\cdot(2)-7}{\sqrt{(-2)^2+4^2+2^2}}\right|=\left|\frac{-2+8-4-7}{\sqrt{4+16+4}}\right|=\left|\frac{-5}{\sqrt{24}}\right|=\frac{5}{\sqrt{24}}$

La distancia del punto P al plano π es de $\frac{5}{\sqrt{24}}u$

15. Calcula la distancia entre la recta r: $\boldsymbol{\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-1}{4}}$ **y el plano** $\boldsymbol{\pi: 2x+y+5=0}$**.**

$\overline{V_r}$: (1,-2,4) $\qquad \bar{n}=(2,1,5) \qquad \bar{n}\cdot\bar{v}=(2,1,5)\cdot(1,-2,4)=20$, la recta no es paralela al plano

Como se cortan la distancia es 0.

16. Halla la distancia entre las rectas r: $\boldsymbol{\begin{bmatrix} x+2y & -3z= & 1 \\ 2x-y & +z+4= & 0 \end{bmatrix}}$ **y s:** $\boldsymbol{\begin{bmatrix} x= & 2 & -3t \\ y= & 1+ & t \\ z= & -3 & -2t \end{bmatrix}}$.

$\overline{V_s}(-3,1,-2)$; para calcular el vector director de r: $\bar{n}_1$=(1,2,-3) $\qquad \overline{n_2}$=(2,-1,1)

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$\overline{n}_1 x \overline{n_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$=-i-6j-4k $\quad \overline{V_r}=(-1,-6-4) \quad P_s(2,1,-3)$

$P_r:\begin{bmatrix} x+ & 2y= & 1 \\ 2x- & y= & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y=\frac{6}{5} \\ x=-\frac{1}{5} \end{bmatrix}; P_r\left(-\frac{1}{5},\frac{6}{5},0\right)$

$\overline{P_rP_s}=(2,1,-3)-\left(-\frac{1}{5},\frac{6}{5},0\right)=(\frac{11}{5},-\frac{1}{5},-3)\sim(11,-1,-15)$

$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 11 \\ -6 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & -15 \end{pmatrix}$-$4F_1+F_3;-6F_1+F_2=\begin{pmatrix} -1 & -3 & 11 \\ 0 & 19 & -65 \\ 0 & 14 & -55 \end{pmatrix}14F_2-19F_3=\begin{pmatrix} -1 & -3 & 11 \\ 0 & 19 & -65 \\ 0 & 0 & 1045 \end{pmatrix}$

El rango es 3, las rectas se cruzan.

$\overline{V_r}x\overline{V_s}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -6 & -4 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=16i+10j-17k \quad \overline{V_r}x\overline{V_s}=(16,10,-17)$

Aplicamos la fórmula: d(r,s)=$\frac{|[(11,-1,-15)),(-1,-6,-4),(-3,1,-2)]|}{|(16,10,-17)|}$

$\begin{vmatrix} 11 & -1 & -15 \\ -1 & -6 & -4 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=451 \qquad |(16,10,-17)|=\sqrt{16^2+10^2+17^2}=25.4$

d(r,s)=$\frac{451}{25.4}=17,75$

17. Halla la distancia entre las rectas: $r\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-2}{-1} \qquad s\equiv\begin{cases} x=2-3t \\ y=1+t \\ z=-3-2t \end{cases}$

$d(r,s)=\frac{|[\overline{P_rP_s},\overline{V_r},\overline{V_s}]|}{|\overline{V_r}\times\overline{V_s}|}$

$P_r=(1,-3,2)$; $P_s=(2,1,-3)$; $\overline{V_r}=(2,1,-1)$; $\overline{V_s}=(-3,1,-2)$;

$\overline{P_rP_s}=(2-1,1-(-3),-3-2)=(1,4,-5)$

$|[\overline{P_rP_s},\overline{V_r},\overline{V_s}]|=\begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=(-2+(-10)+12)-\big(15+(-1)+(-16)\big)=0-(-2)=2$

$\overline{V_r}\times\overline{V_s}=\begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\bar{\imath}-\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}\bar{\jmath}+\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}\bar{k}=-1\bar{\imath}+7\bar{\jmath}+5\bar{k}$

$|\overline{V_r}\times\overline{V_s}|=\sqrt{(-1)^2+7^2+5^2}=\sqrt{1+49+25}=\sqrt{75}=5\sqrt{3}$

$d(r,s)=\frac{|[\overline{P_rP_s},\overline{V_r},\overline{V_s}]|}{|\overline{V_r}\times\overline{V_s}|}=\frac{2}{5\sqrt{3}}\ u.$

18. Halla la distancia entre las rectas: $r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{1} = \frac{Z-2}{-1}$ $\quad s \equiv \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = -3 - t \end{cases}$

$P_r = (1, -3,2)$; $P_s = (2,1,-3)$; $\overline{V_r} = (-1, 1, -1)$; $\overline{V_s} = (-1, 1, -1)$

$\overline{P_r P_s} = (2-1, 1-(-3), -3-2) = (1, 4, -5)$

$$\left|\left[\overline{P_r P_s}, \overline{V_r}, \overline{V_s}\right]\right| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Por las propiedades de los determinantes, al ser las dos últimas filas iguales, el resultado es cero.

$d(r,s) = \frac{\left|\left[\overline{P_r P_s}, \overline{V_r}, \overline{V_s}\right]\right|}{|\overline{V_r} \times \overline{V_s}|} = 0\ u.$ Las rectas se cortan.

19. Halla la distancia entre las rectas: $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{Z-2}{-1}$ $\quad s \equiv \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -3 - 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$

$d(r,s) = \frac{\left|\left[\overline{P_r P_s}, \overline{V_r}, \overline{V_s}\right]\right|}{|\overline{V_r} \times \overline{V_s}|}$

$P_r = (1, -3,2)$; $P_s = (1, -3,2)$; $\overline{V_r} = (2,1,-1)$; $\overline{V_s} = (-4, -2,2)$

$\overline{P_r P_s} = (1-1, -3+3, 2-2) = (0,0,0)$ Es el mismo punto, luego la distancia es 0.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Estudia la posición relativa de las rectas $r: \frac{x}{2} = y + 2 = \frac{z+2}{1}$ y $s: x = -y + 1 = -2z$ y calcula:

a) El punto de intersección.
b) La ecuación del plano que las contiene.
c) El ángulo que forman las rectas.

a) Primero: Para estudiar la posición relativa de las rectas, sacamos un punto y un vector de cada una:

Recta r: $P(0,-2,-2)$; $\vec{v}\,(2,1,1)$ Recta s: $Q(0,1,0)$; $\vec{w}(1,-1,-\frac{1}{2})$

Segundo: Se calcula el rango de la matriz M y M*:

$$M = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \text{ y } M^* = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ p_1 - q_1 & p_2 - q_2 & p_3 - q_3 \end{pmatrix}$$

Tercero: Calculamos el determinante M*:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{R(M)=2=R(M*)} \rightarrow \text{Las rectas son secantes.}$$

Cuarto: Para calcular el punto de intersección escribimos las rectas en paramétricas:

$$r: \begin{cases} x = 2t \\ y = -2 + t \\ z = -2 + t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = s \\ y = 1 - s \\ z = -\frac{s}{2} \end{cases}$$

Quinto: Igualamos las coordenadas y resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2t = s \\ -2 + t = 1 - s \\ -2 + t = -\frac{s}{2} \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{t = 1};\ 2t = s \rightarrow 2(3 - s) = s \rightarrow \boldsymbol{s = 2}$$

Sexto: Sustituimos en cualquiera de las rectas en paramétricas para sacar las coordenadas del punto de intersección:

El punto de intersección es (2, -1, -1)

b) Primero: Para calcular la ecuación del plano que contiene a dichas rectas necesitamos un punto de una de las rectas y dos vectores, uno de cada recta:

$P(0,-2,-2)$; $\vec{v}\,(2,1,1)$; $\vec{w}\left(1,-1,-\frac{1}{2}\right)$

Segundo: Calculamos la ecuación general del plano para este caso de la siguiente manera:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

Tercero: Sustituimos los valores dados:

$$\begin{vmatrix} x & y+2 & z+2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -\frac{x}{2} - 2(z+2) + (y+2) - [(z+2) - x - (y+2)] = 0 \rightarrow$$

$$\boldsymbol{\frac{x}{2} + 2y - 3z - 2 = 0}$$

c) Primero: El ángulo que forman las rectas es el ángulo que forman sus vectores directores: $\vec{v}\,(2,1,1);\ \vec{w}\left(1,-1,-\frac{1}{2}\right)$

Segundo: Se calcula con el producto escalar: $cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$

Tercero: Se calculan los módulos y se sustituyen los valores:

$$|\vec{u}\cdot\vec{v}| = \left|(2,1,1)\cdot\left(1,-1,-\frac{1}{2}\right)\right| = \left|2-1-\frac{1}{2}\right| = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{2^2+1^2+1^2} = \sqrt{\mathbf{6}} \qquad |\vec{v}| = \sqrt{1^2+(-1)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \mathbf{\frac{3}{2}}$$

$$cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{1/2}{\sqrt{6}\cdot 3/2} = \frac{\sqrt{6}}{18} \rightarrow \boldsymbol{\alpha = 82,18º}$$

2. Dados los planos $\pi_1: 3x+2y-z=6$ y $\pi_2: -2x+y+3z-6=0$, se pide:

a) Estudiar su posición relativa.

b) Hallar el ángulo que forman esos dos planos.

c) Hallar la ecuación de una recta s que pasando por el punto N (-2,1,3) es perpendicular a π_2

a) Primero: Se considera el sistema formado por las ecuaciones de los planos:

$$\begin{cases} 3x+2y-z-6=0 \\ -2x+y+3z-6=0 \end{cases}$$

Segundo: se calcula el rango de la matriz de los coeficientes, M y el rango de la matriz ampliada con los términos independientes, M*:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } M^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -6 \\ -2 & 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

Se observa que R(M)=2=R(M*), ya que las dos filas no son proporcionales, por tanto, los planos **se cortan definiendo una recta.**

b) Primero: El ángulo formado por dos planos es el ángulo agudo determinado por los vectores normales de dichos planos, $\vec{n} = (3,2,-1)\ y\ \vec{n}'(-2,1,3)$

$$cos\alpha = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{n}'|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{n}'|}$$

Segundo: Se calculan los módulos y se sustituye:

$$|\vec{n}\cdot\vec{n}'| = |(3,2,-1)\cdot(-2,1,3)| = |-6+2-3| = \mathbf{7}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{3^2+2^2+(-1)^2} = \sqrt{\mathbf{14}} \qquad |\vec{n}'| = \sqrt{(-2)^2+1^2+3^2} = \sqrt{\mathbf{14}}$$

$cos\alpha = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{n}'|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{n}'|} = \frac{7}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}} = \frac{1}{2} \rightarrow \boldsymbol{\alpha = 60^{o}}$

c) Primero: Para hallar la ecuación de la recta *s* necesitamos un punto y un vector director y la ecuación será:
$\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}$
Segundo: La recta debe pasar por el punto N (-2,1,3) y el vector director será el vector normal al plano π_2 para que la recta sea perpendicular: $\vec{v} = (-2,1,3)$
Tercero: Se sustituye en la ecuación:

$$\boldsymbol{\frac{x+2}{-2} = y - 1 = \frac{z-3}{3}}$$

3. Halla la proyección vertical del punto A (5, -2, -3) sobre el plano $\boldsymbol{\pi}$: $\boldsymbol{2x + y - 2z + 4 = 0}$.

- Hallamos la recta perpendicular al plano que contiene el punto A:

El vector normal del plano $\vec{n} = (2, 1, -2)$ es igual al vector director de la recta $\vec{v} = (2, 1, -2)$

Ecuación de la recta: $\left.\begin{array}{r} x = 5 + 2\lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = -3 - 2\lambda \end{array}\right\}$

- Sustituimos x, y, z en la ecuación del plano y resolvemos para obtener λ

$2(5 + 2\lambda) - 2 + \lambda - 2(-3 - 2\lambda) + 4 = 0$

$10 + 4\lambda - 2 + \lambda + 6 + 4\lambda + 4 = 0 \qquad 9\lambda = -18 \qquad \lambda = \frac{-18}{9} = -2$

- Sustituimos λ para obtener la proyección

$x = 5 + 2(-2) = 1$
$y = -2 - 2 = -4$
$z = -3 - 2(-2) = 1$

La proyección del punto A sobre el plano π es el punto Q (1, -4, 1)

4. Halla la proyección de la recta $\boldsymbol{r \equiv -x + 2 = \frac{y-3}{2} = 3z + 1}$ sobre el plano $\boldsymbol{\pi \equiv x + y + 2z - 2 = 0}$ así como el ángulo que forman la recta y el plano.

$$-x + 2 = \frac{y-3}{2} = 3z + 1 \rightarrow \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z + \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}$$

- Obtenemos el vector normal del plano, el vector director y un punto de la recta.

$\vec{v} = \left(-1, 2, \frac{1}{3}\right) \qquad P\left(2, 3, -\frac{1}{3}\right) \qquad \vec{n} = (1, 1, 2)$

Hallamos el plano π' que pasa por el punto $P\left(2, 3, -\frac{1}{3}\right)$ y tiene como vectores directores $\vec{v} = \left(-1, 2, \frac{1}{3}\right)$ y $\vec{n} = (1, 1, 2)$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+\frac{1}{3} \\ -1 & 2 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-2)\begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{3} \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (y-3)\begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \left(z+\frac{1}{3}\right)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-2)\cdot\frac{11}{3} + (-y+3)\cdot\left(-\frac{7}{3}\right) + \left(z+\frac{1}{3}\right)\cdot(-3) = 0$$

$$\frac{11}{3}x - \frac{22}{3} + \frac{7}{3}y - 7 - 3z - 1 = 0$$

$\pi' : \frac{11}{3}x + \frac{7}{3}y - 3z - \frac{46}{3} = 0$ contiene la recta r y es perpendicular a π

La proyección de la recta r es $\left.\begin{array}{r} x+y+2z-2=0 \\ \frac{11}{3}x+\frac{7}{3}y-3z-\frac{46}{3}=0 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} x+y+2z-2=0 \\ 11x+7y-9z-46=0 \end{array}\right\}$

Ángulo que forman la recta y el plano:

$$\alpha(r,\pi) = \text{arc sen}\frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{|\vec{v}|\cdot|\vec{n}|}$$

$$|\vec{v}\cdot\vec{n}| = \left(-1,2,\frac{1}{3}\right)\cdot(1,1,2) = -1+2+\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2+2^2+\frac{1}{3}^2} = \frac{\sqrt{46}}{3} \qquad |\vec{n}| = \sqrt{1^2+1^2+2^2} = \sqrt{6}$$

$$\alpha(r,\pi) = \text{arc sen}\frac{\frac{5}{3}}{\frac{\sqrt{46}}{3}\cdot\sqrt{6}} = 17{,}51°$$

5. Obtener las coordenadas del punto simétrico de $A(0,-2,2)$ respecto de la recta $r: 1-x = y+1 = z$

$r: \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = -1+\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ $\qquad \bar{V}_r\ (-1,1,1)$ $\qquad \bar{n}$ = Vector normal del plano = $\bar{V}_r$

Ecuación del plano → $\pi: Ax+By+Cz+D=0 \qquad -x+y+z+D=0$

$$-1(0)+1(-2)+1(2)+D=0 \quad D=0 \qquad \pi:\ -x+y+z=0$$

Intersección entre la recta y el plano (Sustituir por los valores de x, y, z)

$$-(1-\lambda)+(-1+\lambda)+\lambda=0 \to \lambda=0$$

$x=1-0\to x=1\ ;\ y=-1+0\to y=-1\ ;\ z=0 \qquad \textit{Punto corte}\ (1,-1,0)$

Con el punto de corte, que es el punto medio, se halla el punto simétrico a $A(0,-2,2)$

Para $x \to 1 = \frac{0+x}{2} \to x = 2$

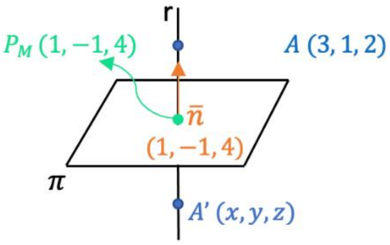
Para $y \to -1 = \frac{-2+4}{2} \to y = 0$ $\quad A'\ (\mathbf{2}, \mathbf{0}, -\mathbf{2})$

Para $z \to 0 = \frac{2+z}{2} \to z = -2$

6. Obtén las coordenadas del punto simétrico de $\boldsymbol{A\ (3,1,2)}$ respecto del plano $\boldsymbol{\pi: x + y - z + 4 = 0}$.

$\pi: x + y - z + 4 = 0 \to \bar{V}_r = \bar{n}\ (1,1,-1)$ $\to$ Vector director de la recta y vector normal del plano son el mismo.

Recta en paramétrica $\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$



$$\pi: x + y + z + 4 = 0$$
$$3 + \lambda + 1 + \lambda - (2 - \lambda) + 4 = 0$$
$$3 + \lambda + 1 + \lambda - 2 + \lambda + 4 = 0$$
$$3\lambda + 6 = 0$$

$\lambda = \frac{-6}{3} \to \lambda = -2$

<u>Punto de corte y medio</u>

Para $x = 3 + (-2) = 1$ $\quad$ Para $y = 1 + (-2) = -1$ $\quad$ Para $z = 2 - (-2) = 4$

<u>Punto simétrico</u>

$1 = \frac{3+x}{2} \to x = -1$; $-1 = \frac{1+y}{2} \to y = -3$; $4 = \frac{2+z}{2} \to z = 6$ $\quad \boldsymbol{A'(-1,-3,6)}$

7. Obtén las coordenadas del punto simétrico de A (0,2,-1) respecto de:

a) $\boldsymbol{r: 1 + x = y + 2 = 1 - z}$
b) $\boldsymbol{\pi: x - y + z + 1 = 0}$

a) $r: 1+x = y+2 = 1-z \quad ; \quad r: x+1 = y-2 = \frac{z-1}{-1}$

$$P_r(-1,2,1) \qquad V_r(1,1,-1)$$

A partir de la ecuación continua de la recta obtenemos:

$$r: x+1 = y-2 = \frac{z-1}{-1} \rightarrow \begin{cases} y = \lambda \\ z = -1-\lambda \\ x = 1+\lambda \end{cases}$$

De esta forma obtenemos un punto genérico de la recta $(1+\lambda,\ \lambda\ ,\ \text{-}\,1-\lambda)$

Para hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta sustituimos en:

$$\pi: x+y-z+D = 0$$

Como sabemos que pasa por el punto A (0,2,-1):

$$2+1+D = 0\ ; D = -3 \quad \rightarrow \ \pi: x+2y+z-3 = 0$$

Sustituimos el punto genérico de la recta en el plano para hallar λ y luego sustituyendo λ en la fórmula del punto genérico se obtiene la intersección (M). Al obtener M ya se puede hallar A' por $M = \frac{A+A\prime}{2}$

$(1+\lambda)+2\,(\lambda)+(\,\text{-}\,1-\lambda)-3 = 0 \qquad 2\lambda-3 = 0 \quad ; \ \lambda = \frac{3}{2}$

$M = \left(1+\frac{3}{2}\right)+2\,\left(\frac{3}{2}\right)+(\,\text{-}\,1-\frac{3}{2}) \quad \rightarrow M = \frac{A+A\prime}{2} \rightarrow A' = 2M-A$

$$A' = 2\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2},\frac{-5}{2}\right)-(0,2,-1) = (5,1,-4)$$

b) $\pi: x-y+z+1 = 0$

$$\vec{n}_\pi = (1,-1,1)$$

$$P(0,2,-1) \qquad Vr = \vec{n}_\pi = (1,-1,1)$$

Punto genérico de la recta $(-\lambda,\ 2-\lambda, 1+\lambda)$

Sustituimos el punto genérico de la recta en el plano para hallar λ y luego sustituyendo λ en la fórmula del punto genérico se obtiene la intersección (M). Al obtener M ya se puede hallar A' por $M = \frac{A+A\prime}{2}$

$(-\lambda)\ -(\,2-\lambda)+(1+\lambda)+1 = 0 \quad ; \quad \lambda = 0 \quad \rightarrow M = (0,2,1)$

$$M = \frac{A+A'}{2} \rightarrow A' = 2M-A$$

$$A' = 2(0,2,1)-(0,2,-1) = (0,2,2)$$

8. a)Halla la ecuación del plano que pasa por el punto A (1,-3,3) y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos B (3,0,-1) y C(1,-1,0).

b) Obtén las coordenadas del punto simétrico de C respecto del plano.

a)

$$\pi \perp r \quad \rightarrow \vec{n}_\pi = Vr$$

$$\overrightarrow{BC} = (-2,-2,1)$$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

Ecuación del plano; sustituir el punto A y el vector $\overrightarrow{BC}$ de la recta:

$$-2(x-1)-2(y+3)+(z-3)=0$$

$$\pi: -2x-2y+z-7=0$$

b)

$$\pi: -2x-2y+z-7=0$$

$$\vec{n}_\pi=\vec{V}_c \qquad \to \vec{V}_c=(-2,-2,1)$$

Recta $CC'\begin{cases} P_c(1,-1,0) \\ \vec{V}_c(-2,-2,1)\end{cases}$

$$x=1-2\lambda \qquad y=-1-2\lambda \qquad z=\lambda$$

A partir de la recta obtenemos el punto genérico de la recta= $(1-2\lambda,-1-2\lambda,\ \lambda)$

Sustituimos el punto genérico de la recta en el plano para hallar λ y luego sustituyendo λ en la fórmula del punto genérico se obtiene la intersección (M). Al obtener M ya se puede hallar C' por $M=\frac{C+C\prime}{2}$

$$x=1-2\lambda \qquad y=-1-2\lambda \qquad z=\lambda$$

$$-2(1-2\lambda)-2(-1-2\lambda)+\lambda-7=0 \qquad 9\lambda-7=0 \qquad \lambda=\frac{7}{9}$$

$$M=\left(1-2\cdot\frac{7}{9},-1-2\cdot\frac{7}{9},\ \frac{7}{9}\right)=(-\frac{5}{9},-\frac{23}{9},\frac{7}{9})$$

$$M=\frac{C+C\prime}{2}\to C'=2M-C \qquad C'=2\left(-\frac{5}{9},-\frac{23}{9},\frac{7}{9}\right)-(1,-1,0)=\left(-\frac{19}{9},-\frac{37}{9},\frac{7}{9}\right)$$

9. Calcula la distancia del punto P (0, –1, 0) a la recta $r\equiv\frac{x-2}{4}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{3}$

$$A(2,-3,1)\ ,\ \ \bar{v}(4,2,3)\ ,\ \ \overline{AP}=(-2,2,-1)$$

$$\bar{v}\times\overline{AP}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1\end{vmatrix}\cdot i+\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1\end{vmatrix}\cdot j+\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 2\end{vmatrix}\cdot k\to -8i+2j+4k$$

$$d(P,r)=\frac{|\bar{v}\times\overline{AP}|}{|\bar{v}|}=\begin{cases}|(-8+2+4)|=\sqrt{(-8)^2+2^2+4^2}=\sqrt{94} \\ |\bar{v}|=|(4,2,3)|=\sqrt{4^2+2^2+3^2}=\sqrt{29}\end{cases}$$

$$d(P,r)=\frac{|\bar{v}\times\overline{AP}|}{|\bar{v}|}=\frac{\sqrt{94}}{\sqrt{29}}=1,80$$

10. Calcula la distancia del punto P (0, – 3, – 2) al plano $\pi : 3x - 2y - 4z + 1 = 0$.

$$d(P,\pi) = \left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right| \to d(P,\pi) = \left|\frac{3\cdot 0+(-2)\cdot(-3)+4\cdot(-2)+1}{\sqrt{3^2+(-2)^2+(-4)^2}}\right| \to \left|-\frac{47\sqrt{29}}{29}\right| = \frac{47\sqrt{29}}{29}$$

11. Dados los planos $\pi_1: 3x - 2y + z = 4$ y $\pi_2: \begin{cases} x = 2 - \lambda + 3\mu \\ y = -\lambda + 4\mu \\ z = -1 + \lambda - \mu \end{cases}$ estudia su posición relativa y halla la distancia entre ellos.

Para calcular la posición relativa de ambos planos hay que conocer los vectores normales $\vec{n}$ y $\vec{n}'$. De la ecuación del plano π_1 podemos obtener el vector $\vec{n}(3,-2,1)$

Para sacar el vector $\vec{n}'$ transformamos la ecuación paramétrica del plano en implícita:

$$\pi_2 \begin{cases} x = 2 - \lambda + 3\mu \\ y = -\lambda + 4\mu \\ z = -1 + \lambda - \mu \end{cases} \to P(2,0,-1), \vec{u}(-1,-1,1), \vec{v}(3,4,-1)$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \to \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} z - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \to$$

$$(1-4)x - (1-3)y + (4+3)z - [(2+4)-(3+8)] = 0 \to$$

$$-3x + 2y + 7z - [6-11] = 0 \to -3x + 2y + 7z = -5 \quad \pi_2: -3x + 2 + 7z = -5$$

El vector $\vec{n}'$ es $(-3,2,7)$

Puesto que $\frac{3}{-3} = \frac{-2}{2} \neq \frac{1}{7} \neq \frac{4}{-5}$ sabemos que los planos se cortan. Para determinar si son perpendiculares o no hacemos el producto escalar $\vec{n} \cdot \vec{n}'$:

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = (3,-2,1)\cdot(-3,2,7) = 3(-3) + (-2)2 + 1\cdot 7 = -9 - 4 + 7 = -6 \neq 0$$

Dado que el producto escalar no es 0, son secantes, pero no perpendiculares.

Como se cortan, la distancia entre los dos planos es cero.

12. Hallar la posición relativa de las rectas $\begin{cases} r: -2x = y - 3 = 2z + 2 \\ s: \begin{cases} 2x - y + 4z = 0 \\ -x + y - 3z = 4 \end{cases} \end{cases}$ y calcular la distancia entre ellas.

Para calcular la posición relativa entre las rectas $\begin{cases} r: -2x = y - 3 = 2z + 2 \\ s: \begin{cases} 2x - y + 4z = 0 \\ -x + y - 3z = 4 \end{cases} \end{cases}$ obtenemos un punto y un vector de cada una.

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

Recta r: $-2x = y - 3 = 2z + 2 \rightarrow x = y - 3 = \frac{z+1}{2} \rightarrow A(0,3,-1), \vec{u}(1,1,2)$

Recta s: $\begin{cases} 2x - y + 4z = 0 \\ -x + y - 3z = 4 \end{cases}$

Para obtener un punto y un vector calculamos su ecuación paramétrica:

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & | \, 0 \\ -1 & 1 & -3 & | \, 4 \end{pmatrix} \rightarrow C_1 \leftrightarrow C_2 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & | \, 0 \\ 1 & -1 & -3 & | \, 4 \end{pmatrix} \rightarrow F_1 + F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & | \, 0 \\ 0 & 1 & 1 & | \, 4 \end{pmatrix}$; $\mathrm{Rg}\,(C) = \mathrm{Rg}\,(A) = 2;\ \text{Nº inc.} = 3$: Sistema Comp. Indet.

$\begin{cases} -y + 2x + 4z = 0 \\ x + z = 4 \end{cases} \rightarrow x = 4 - z; y = 2(4 - z) + 4z = 2z + 8$

$$\mathrm{z} = \lambda \qquad \mathrm{x} = 4 - \lambda \qquad \mathrm{y} = 2\lambda + 8$$

$\begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = 8 + 2\lambda \rightarrow B(4,8,0), \vec{v}(-1,2,1) \\ z = \lambda \end{cases}$

Ahora, calculamos el vector $\overrightarrow{AB}$ y con los otros dos vectores hacemos una matriz para estudiar la posición relativa de las rectas:

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (4,8,0) - (0,3,-1) = (4,5,1); \vec{u}(1,1,2); \vec{v}(-1,-2,1)$

$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow F_2 + F_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow F_1 - 4F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$

$F_2 + F_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$; $Rg\ M = 3$. Luego las rectas se cruzan sin cortarse.

Ahora calculamos la distancia entre ambas. Para ello utilizaremos los vectores $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \vec{\mathrm{u}}$ y $\vec{v}$:

$\mathrm{d(r,s)} = \frac{|[\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \vec{\mathrm{u}}, \vec{v}]|}{|\vec{\mathrm{u}} \times \vec{v}|} \qquad [\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \vec{\mathrm{u}}, \vec{v}] = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4$

$\vec{\mathrm{u}} \times \vec{\mathrm{v}} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \bar{\imath} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \bar{\jmath} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \bar{k} =$

$= (1 + 4)\bar{\imath} - (1 + 2)\bar{\jmath} + (-2 + 1)\bar{k} = (5, -3, -1)$

$$\mathrm{d(r,s)} = \frac{|4|}{\sqrt{5^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{35}}$$

13. Dados los pares de rectas, a) $\begin{cases} r: \begin{cases} 2x - z = 4 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \\ s: \frac{x}{3} = y + 1 = \frac{-z+1}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} r: x = 2y = z + 1 \\ s: \frac{x-3}{2} = y + 1 = \frac{z}{2} \end{cases}$

1. Estudia la posición relativa.

2. Calcula la distancia entre ellas.

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

1. a)

s: $\begin{cases} x-3y+(3\cdot(-1)-1\cdot 0)=0;\ x-3y-3=0 \\ -2x-3z+(3\cdot 1-(-2)\cdot 0)=0;\ -2x-3z+3=0 \end{cases}$;

$\begin{cases} \begin{cases} 2x-z=4 \\ y+2z=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-3y-3=0 \\ -2x-3z+3=0 \end{cases} \end{cases}$; M=$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}$=13 ≠0; r(M)=3

M'=$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ |M'| =-21≠0; r(M')=4 Las rectas r y s se cruzan.

1. b)

$\begin{cases} r: x=2y=z+1 \\ s: \dfrac{x-3}{2}=y+1=\dfrac{z}{2} \end{cases}$

Hallamos vector y módulo de ambas rectas:

$r=\begin{matrix} \vec{v}(1,2,1) \\ A(0,0,-1) \end{matrix}$

$s=\begin{matrix} \vec{u}(2,1,2) \\ B(3,-1,0) \end{matrix}$

Hallamos las ecuaciones implícitas:

$r\begin{cases} 2x-y+(1\cdot 0-2\cdot 0)=0; 2x-y=0 \\ x-z+(1(-1)-1\cdot 0)=0; x-z-1=0 \end{cases}$

$s\begin{cases} x-2y+(2(-1)-1\cdot 3)=0; x-2y-5=0 \\ 2x-2z+(2\cdot 0-2\cdot 3)=0; 2x-2z-5=0 \end{cases}$

M=$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=-3\neq 0$ r=3

M'=$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & -5 \\ 2 & 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & -5 \\ 2 & 0 & -2 & -5 \end{vmatrix}=9\neq 0$ r'=4

r=3, r'=4; Las rectas r y s se cruzan.

2. a)

$r: \begin{cases} 2x-z=4 \\ y+2z=0 \end{cases}$; Hallar punto y vector:

$$\vec{n} = (1,0,-1) \qquad \overrightarrow{n'} = (0,1,2) \qquad \vec{u} = \vec{n}\,x\,\overrightarrow{n'}$$

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{\imath} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}; \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k} = (1,2,1);$$

Damos un valor a una incógnita

$z = 0; \qquad r: \begin{cases} 2x - 0 = 4; x = 2 \\ y + 2 \cdot 0 = 0; y = 0 \end{cases}$ A(0, 2, 0)

$$r = \begin{matrix} \vec{u}(1,2,1) \\ A(0,2,0) \end{matrix}$$

$$s = \begin{matrix} \vec{v}(3,1,-2) \\ B(0,-1,1) \end{matrix}$$

Hallamos el vector $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} = (0,-3,1)$

Hallamos el producto vectorial $\vec{u}\ x\ \vec{v}$:

$$\vec{u}x\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -5\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} - 5\vec{k} = (-5,-5,-5)$$

Hallamos $[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}]$:

$$[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}] = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -20$$

Hallamos el módulo del producto vectorial $\vec{u}x\vec{v}$:

$$|\vec{u}x\vec{v}| = \sqrt{5^2 + 5^2 + 5^2} = 5\sqrt{3}$$

$$d(r,s) = \frac{|-20|}{5\sqrt{3}} = \frac{20}{5\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\ u.$$

2. b)

Hallamos vector y puntos de ambas rectas:

$$r = \begin{matrix} \vec{v}(1,2,1) \\ A(0,0,-1) \end{matrix}$$

$$s = \begin{matrix} \vec{u}(2,1,2) \\ B(3,-1,0) \end{matrix}$$

Hallamos el vector $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} = (3,-1,1)$

Hallamos el producto vectorial $\vec{u}x\vec{v}$:

$$\vec{u}x\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{\imath} + 3\vec{k} = (-3,0,3)$$

Hallamos el módulo del producto vectorial $\vec{u}x\vec{v}$: $|\vec{u}x\vec{v}| = \sqrt{3^2+0^2+3^2} = 3\sqrt{2}$

Hallamos $[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}]$: $[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}] = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6$

$d(r,s) = \frac{|6|}{3\sqrt{2}} = \frac{6}{3\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,u.$

14. Halla la proyección de la recta $r \equiv -x+2 = \frac{y-3}{2} = 3z+1$ y $\pi: -x+3y+3z-3=0$, así como la distancia que hay entre la recta y el plano.

$\vec{v} = (1,2,1)$; $P = (2,3,1)$; $\underline{n}_\pi = (-1,3,3)$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3x-4y+5z+1=0$$

$$Proyec_r\pi = \{-x+3y+3z-3=0\,;3x-4y+5z+1=0\}$$

¿Son $r\ y\ \pi$ paralelos?

$$\vec{n}\cdot\vec{v} = (-1,3,3)\cdot(1,2,1) = -1+6+3 = 8 \neq 0$$

Por lo que no son paralelos y por lo tanto $d(r,\pi)=0$

15. Dada la recta $r: \{y = x+2\ ;\ z = 1-3x$, se pide:

a) **Halla la ecuación de la recta s que pasando por el punto $A(-1,0,1)$ Es paralela a la recta r.**
b) **Calcula la distancia entre ellas.**
c) **Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $M(-2,0,1)$ y contiene la recta r.**

a) Obtenemos un vector director de r: $\begin{matrix} x-y+2=0 \\ 3x+z-1=0 \end{matrix}$; $\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow -\vec{\imath}-\vec{\jmath}+3\vec{k}$

$$s \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{3}$$

b) para P_r, hacemos x = 0 , obtenemos, y = 2 , z = 1 ; $P_r(0, 2, 1)$ $\overline{AP_r}$ (-1, -2, 0)

$$\bar{v}\times\overline{AP_r}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ -1 & -1 & 3\\ -1 & -2 & 0\end{vmatrix}=6\vec{\imath}+3\vec{\jmath}+1\vec{k} \quad ; \; (6,3,1) \qquad |\bar{v}\times\overline{AP_r}|=\sqrt{6^2+3^2+1^2}=\sqrt{46}$$

$$|\bar{v}|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+3^2}=\sqrt{11} \qquad d(A,r)=\frac{|\bar{v}\times\overline{AP_r}|}{|\bar{v}|}=\frac{\sqrt{46}}{\sqrt{11}}$$

c) Calculamos $\overline{MP_r}(-2,-2,0)$, $\bar{v}(-1,-1,\ 3)$, M(-2, 0, 1) y la ecuación del plano es

$$\begin{vmatrix}x+2 & y & z-1\\ -2 & -2 & 0\\ -1 & -1 & 3\end{vmatrix}=0\ ;\ x-y+1=0$$

16. **Halla la ecuación de un plano π que contiene a la recta $r:\begin{cases}x-4y+z+3=0\\2x-2y-z+9=0\end{cases}$ y dista 2 unidades del origen de coordenadas.**

Escribimos el haz de planos que contiene a la recta: $x-4y+z+3+\alpha(2x-2y-z+9)=0$

$(1+2\alpha)x+(-4-2\alpha)y+(1-\alpha)z+(3+9\alpha)=0$

$d(0,\pi)=\frac{|0+0+0+(3+9\alpha)|}{\sqrt{(1+2\alpha)^2+(-4-2\alpha)^2+(1-\alpha)^2}}=2\ ;\ |3+9\alpha|=4[(1+2\alpha)^2+(-4-2\alpha)^2+(1-\alpha)^2]$

$|3+9\alpha|=4(9\alpha^2+18\alpha+18)$ Que no tiene soluciones reales.

17. **Dados el plano y la recta:** $\pi:\begin{vmatrix}x+1 & -2 & 1\\ y-1 & 1 & 0\\ z & 2 & -2\end{vmatrix}=0 \qquad r:\begin{cases}x-y+2=0\\ 2y+z=0\end{cases}$

a) El punto de intersección de la recta r con el plano π.

1º) Calculamos la ecuación del plano.

$$\pi\equiv\begin{vmatrix}x+1 & y-1 & z\\ -2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -2\end{vmatrix}\rightarrow(-2x-2+2y-2)-(z+4y-4)\ \rightarrow\ \pi\equiv-2x-2y-z+0=0$$

- Obtendremos con 2 puntos con; Y cuando es 0 y X es 0. Y calculamos la recta con su vector y uno de ellos.

Y = 0; X = - 2, Z = 0 A (- 2, 0, 0) · X = 0; Y = 2, Z = - 4 B (0, 2, - 4)

$$\overrightarrow{AB}\,(2,2,-4) \qquad A\,(2,0,0)$$

$$r\equiv(x,y,z)=(-2,0,0)+\gamma(2,2,-4)\ \rightarrow r\begin{cases}x=-2+2\gamma\\ y=2\gamma\\ z=-4\gamma\end{cases}$$

- Sustituimos en la ecuación del plano y el resultado de γ se sustituye en la recta para calcular el punto:

$$\pi\equiv-2(-2+2\gamma)-2(2\gamma)+4\gamma+0=0\rightarrow\gamma=2$$

$$r\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \\ z = -8 \end{cases} \to P_{Intersección}(2,4,-8)$$

b) El ángulo que forman la recta r y el plano π.

1º. Tomamos el vector de la recta y el vector normal del plano.

$$\overrightarrow{Vr} = (2,2,-4) \qquad \overrightarrow{N\pi} = (-2,-2,-1)$$

2º. Aplicamos la fórmula del producto escalar con el vector de la recta y el vector normal, la modificamos obteniendo una fórmula que obtendrá el ángulo entre plano y recta y la aplicamos.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\alpha \to \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\right)$$

$$\cdot\ \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{|\overrightarrow{Vr}\cdot\overrightarrow{N\pi}|}{|\overrightarrow{Vr}|\cdot|\overrightarrow{N\pi}|}\right) \to$$

$$\to \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{|(2\cdot -2)+(2\cdot -2)+(-4\cdot -1)|}{\left|\sqrt{2^2+2^2+(-4)^2}\right|\cdot\left|\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+(-1)^2}\right|}\right) \to$$

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{6}}{9}\right) \to \alpha = 15,8^0$$

c) La ecuación de un plano π' perpendicular al plano π y que contenga a la recta r.

1º. Calculamos el productor vectorial entre el vector normal y el de la recta y con el punto de la recta obtendremos la ecuación.

$$\overrightarrow{Vr} = (2,2,-4) \qquad \overrightarrow{N\pi} = (-2,-2,-1) \qquad P_0(-2,0,0)$$

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} \to -6\vec{\imath}+6\vec{\jmath}+0\vec{k}$$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0) = 0 \to \quad \pi \equiv -6x+6y-12 = 0$$

18. Dados los planos $\pi_1: x-y=2$ y $\pi_2: x+y-2z-4=0$, se pide:

a) Ecuación de una recta que pase por el punto A (0,1,1) y sea paralela a los planos π_1 y π_2

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = (2,-2,2) \to perpendiculares\ a\ los\ vectores\ normales$$

$$r: (x,y,z) = \lambda\cdot(2,-2,2)+(0,1,1)$$

$$r = \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 2\lambda+1 \end{cases} \to Ecuación\ paramétrica\ recta\ paralela\ a\ los\ dos\ planos$$

b) Valor de m y n sabiendo que el punto $C(m,0,n)\in\pi_2$ y dista $\sqrt{2}$ unidades del plano de π_1

$$\left.\begin{array}{r} C \in \pi_2 \\ d(\pi_1, C) = \sqrt{2} \end{array}\right\} \qquad d(P,\pi_1) = \frac{m-0-2}{\sqrt{1^2+1^2}} \to \sqrt{2} = \frac{m-0-2}{\sqrt{1^2+1^2}} \to \sqrt{2} = \frac{m}{\sqrt{2}} \to m = 2$$

$$m + 0 - 2n - 4 = 0 \qquad 2 - 2n - 4 = 0 \qquad -2n = -2 + 4 \qquad n = -1$$

19.- Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos *A* (-1, 0, 1), *B* (0, 1, 1) y el tercer vértice es el punto de corte del plano *OYZ* con la recta r: $\frac{x+2}{2} = y - 2 = \frac{z+2}{-1}$

El plano *OYZ* $\to \ \pi \equiv x = 0$

Luego si $r \equiv \frac{x+2}{2} = y - 2 = \frac{z+2}{-1}$,

y su ecuación paramétrica es: $r \equiv \begin{cases} x = -2 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases}$,al igualarla con el plano:

$$\left.\begin{array}{l} -2 + 2\lambda = 0 \\ 2\lambda = 2 \\ \lambda = \frac{2}{2} = 1 \end{array}\right. \to \lambda = 1$$

Si sustituimos λ en la ecuación paramétrica, obtenemos el punto C que es el tercer vértice del triángulo, luego: $C(0, 3, -3)$

El área del triángulo es: $\frac{|\overline{AB} \times \overline{AC}|}{2}$

$$\begin{array}{l} \overline{AB}(1,1,0) \\ \overline{AC}(1,3,-4) \end{array}; \ \overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -4i + 4j + 2k$$

$$\text{área del triángulo } ABC: \frac{\sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 2^2}}{2} = 3u^2$$

20.- Halla la proyección de la recta r: $\frac{x+2}{2} = y - 2 = \frac{z+2}{-1}$ sobre el plano determinado por el origen de coordenadas y los puntos *A* (-1, 0, 1) y *B* (0, 1, 1)

Para hallar la ecuación del plano determinado por los puntos: *A* (-1, 0, 1), *B* (0, 1, 1) y O(0,0,0):

$$\begin{array}{l} \overline{OA}(-1,0,1) \\ \overline{OB}(0,1,1) \\ O(0,0,0) \end{array} \to \begin{vmatrix} -1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \to (-z + 0 + 0) - (x - y + 0) = 0 \to -z - x + y = 0$$

$\pi \equiv x - y + z = 0$ (ecuación implícita del plano)

el vector normal de esta ecuación es $\bar{n}(1, -1, 1)$

a partir de r: $\begin{cases} P(-2, 2, -2) \\ \bar{v}(2, 1, -1) \end{cases}$ y $\bar{n}(1, -1, 1)$ calculamos la proyección:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & x+2 \\ 1 & -1 & y-2 \\ -1 & 1 & z+2 \end{vmatrix} = 0 \to \big(-2(z+2) + x + 2 - 1(y-2)\big) - (x + 2 + 2(y-2) + z + 2) = 0$$

$$\to -2z - 4 + x + 2 - y + 2 - x - 2 - 2y + 4 - z - 2 = 0$$

$\rightarrow -3y - 3z = 0$

La proyección: $r' \begin{cases} x - y + z = 0 \\ -3y - 3z = 0 \end{cases}$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

AUTOEVALUACIÓN

1. El ángulo formado por las rectas $\mathbf{r}: \left.\begin{array}{c}\mathbf{x=4-t}\\ \mathbf{y=-3+t}\\ \mathbf{z=2}\end{array}\right\}$ **y** $\mathbf{s}: \frac{\mathbf{x-5}}{\mathbf{2}}=\frac{\mathbf{y-4}}{\mathbf{3}}=\frac{\mathbf{z+3}}{\mathbf{-1}}$ **es:**

De la recta $r \to A(4,-3,2)$ y $\vec{v}(-1,1,0)$ De la recta $s \to B(5,4,-3)$ y $\vec{w}(2,3-1)$

$$\alpha=\arccos\left(\frac{|\vec{v}\cdot\vec{w}|}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|}\right)\to\frac{|(-1\cdot 2)+(1\cdot 3)+(0\cdot -1)|}{\left(\sqrt{1^2+1^2+0^2}\right)\cdot\left(\sqrt{2^2+3^2+1^2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{28}}\to\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{28}}\right)=79{,}1°$$

La respuesta correcta es la c)

2. El ángulo formado por los planos $\boldsymbol{\pi}: \mathbf{3x-y+2x-1=0}$ **y** $\boldsymbol{\pi}': \mathbf{x+2y-z-5=0}$ **es:**

Del plano $\pi \to \vec{n}(3,-1,2)$ Del plano $\pi' \to \vec{n}'(1,2,-1)$

$$\alpha=\arccos\left(\frac{|\vec{n}\cdot\vec{n}'|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{n}'|}\right)\to\frac{|(3\cdot 1)+(-1\cdot 2)+(2\cdot -1)|}{\left(\sqrt{3^2+1^2+2^2}\right)\cdot\left(\sqrt{1^2+2^2+1^2}\right)}=\frac{|-1|}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}}\to$$

$$\alpha=\arccos\left(\frac{|-1|}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}}\right)=83{,}73°$$

La respuesta correcta es la a)

3. La proyección ortogonal del punto P (0, 0, -1) sobre la recta $\boldsymbol{r}: \frac{\boldsymbol{x+2}}{\mathbf{3}}=\frac{\boldsymbol{y-2}}{\mathbf{-1}}=\frac{\boldsymbol{z+1}}{\mathbf{2}}$ **es:**

$v_1(x-p_1)+v_2(y-p_2)+v_3(z-p_3)=0$ Plano perpendicular a la recta:

$3(x-0)+(-1)(y-0)+2(z+1)=0\to 3x-y+2z+2=0\to\ \pi$

Recta en paramétricas $\left\{\begin{array}{l}x=-2+3t\\ y=2-t\\ z=-1+2t\end{array}\right.$ Hallamos el punto de corte de la recta y el plano:

$3(-2+3t)-(2-t)+2(-1+2t)+2=0\ \to\ t=\frac{4}{7}$ P'$\left(-\frac{2}{7},\frac{10}{7},\frac{1}{7}\right)$

La respuesta correcta es la b)

4. La proyección ortogonal del punto P (0, 0, -1) sobre el plano $\boldsymbol{\pi}: \boldsymbol{x-2y+3z-1=0}$ **es:**

$v_n=(1,-2,3)$; $(x,y,z)=(0,0,-1)+\lambda(1,-2,3)$ recta perpendicular al plano.

Recta en paramétricas $\left\{\begin{array}{l}x=\lambda\\ y=-2\lambda\\ z=-1+3\lambda\end{array}\right.$ Hallamos el punto de corte de la recta y el plano:

$\lambda-2(-2\lambda)+3(-1+3\lambda)-1=0\ \to\ \lambda=\frac{2}{7}\ \to\left(\frac{2}{7},-\frac{4}{7},-\frac{1}{7}\right)$

La respuesta correcta es la b)

5. El Simétrico del punto P(1,-1,1) respecto del punto Q(0,-1,2) es:

$$\boldsymbol{P'}(P_1,P_2,P_3) \qquad \left(\frac{1+P_1}{2},\frac{-1+P_2}{2},\frac{1+P_3}{2}\right)=Q$$

$$\begin{cases}\frac{1+P_1}{2}=0\\ \frac{-1+P_2}{2}=-1\\ \frac{1+P_3}{2}=2\end{cases} \qquad \begin{cases}1+P_1=0\\ -1+P_2=-2\\ 1+P_3=4\end{cases} \qquad \begin{cases}P_1=-1\\ P_2=-1\\ P_3=3\end{cases} \quad \boldsymbol{P'}(-1,-1{,}3)$$

La respuesta correcta es la b)

6. El simétrico del punto P(1, -1, 1) respecto a la recta r: $\boldsymbol{\frac{x+2}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}}$

Expresamos la recta en forma paramétrica:

$$\begin{cases}x=-2+3t\\ y=2-t\\ z=-1+2t\end{cases} \qquad \bar{V}_r=\vec{n}(3,-1{,}2)$$

$\pi: 3(x-1)-1(y+1)+2(z-1)\rightarrow 3x-y+2z-6=0$

La proyección ortogonal es el punto de intersección de la recta y el plano π

$3(-2+3t)-(2-t)+2(-1+2t)-6=0$

$-6+9t-2+t-2+4t-6=0$

$14t-14=0\rightarrow t=1$

Sustituimos en la ecuación de recta:

$x=2+3t\rightarrow x=5 \quad ; \quad y=-2-t\rightarrow y=-3 \quad ; \quad z=1+2t\rightarrow z=3$

$Q(5,-3,3))\,;\ P(1,-1{,}1) \qquad \left(\frac{1+P_1}{2},\frac{-1+P_2}{2},\frac{1+P_3}{2}\right)$

$$\begin{cases}\frac{1+P_1}{2}=5\\ \frac{-1+P_2}{2}=-3\\ \frac{1+P_3}{2}=3\end{cases} \qquad P_1=9\,;\ P_2=-5\,;\ P_3=5\rightarrow P'(9,-5,5)$$

La respuesta correcta es la d)

7. La distancia del punto $\boldsymbol{A(0,1,0)}$ al punto $\boldsymbol{B(-1,0,2)}$ es:

1. Se calcula el vector determinado por los dos puntos:
   a. $\overrightarrow{AB}(-1,-1{,}2)$
2. Se calcula el módulo de este vector, y esa será la distancia
   a. $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{6}$

Por lo que la solución es b)

8. La distancia del punto $A(0,1,0)$ a la recta $r: \frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$ es:

1. Sabemos que la fórmula de la distancia es: $d(P,r) = \frac{|\overrightarrow{AP} x \vec{v}|}{|\vec{v}|}$
2. Como nos han dado la ecuación de la recta continua sabemos un punto y el vector director de la recta
   a. $\vec{v}(3,-1,2); P(-2,2,-1)$
   b. $\overrightarrow{AP}(-2,1,-1)$
3. Hallamos el determinante de ambos vectores y su módulo
   a. $\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1i + 1j - 1k \rightarrow \vec{u}(1,1,-1) \rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$
4. Hallamos el módulo del vector director de la recta
   a. $|\vec{v}| = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$
5. $d(P,r) = \frac{|\overrightarrow{AP} x \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{14}}$

La respuesta correcta es la d)

9. La distancia del punto $A(0,1,0)$ al plano $\pi \equiv x - 2y + 3z - 1 = 0$ es:

$d(A,\pi) = \left|\frac{\mathrm{A}x_0 + \mathrm{B}y_0 + \mathrm{C}z_0 + \mathrm{D}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right| \rightarrow d(P,\pi) = \left|\frac{1\cdot 0 + (-2)\cdot 1 + 3\cdot 0 - 1}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}}\right| \rightarrow \left|-\frac{3}{\sqrt{14}}\right| = \frac{3}{\sqrt{14}}$

La respuesta correcta es la c)

10. La distancia entre los planos: $\pi \equiv \mathbf{x} - 2\mathbf{y} + 3\mathbf{z} - 1 = 0$ $\quad \pi' = 5\mathbf{x} - \mathbf{y} + 2\mathbf{z} - 3 = 0$

En primer lugar, estudiamos su posición relativa:

$\frac{1}{5} \neq \frac{-2}{-1} \neq \frac{3}{3} \neq \frac{-1}{-3}$, se cortan, por tanto, su distancia es 0**,**

La respuesta correcta es la a)