Matemáticas II
2º Bachillerato
Capítulo 7: Límites
Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por: **AITANA, AITOR, AMALIA, ANDREA, CARMEN, CELIA S, FERNANDO, IRENE, ISMAEL F, LAURA, NATALIA, OLIVIA, ROSA, PABLO G, ESPERANZA, LIDIA, CELIA P, ISMAEL C, ENRIQUE, LUCÍA, NEREA, JULIA, ALEJANDRA, JERÓNIMO**

IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0} 2 = 2$

b) $\lim_{x\to +\infty} x^{-5} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^5} = 0$

c) $\lim_{x\to -3} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$

d) $\lim_{x\to -\infty} x^5 = (-\infty)^5 = -\infty$

e) $\lim_{x\to -\infty} (-7) = -7$

f) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{10}} = \frac{1}{0} = +\infty$

g) $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^{10}} = \frac{1}{-\infty 10} = 0$

h) $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^{13}} = -\infty$

i) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^{13}} = 0$

j) $\lim_{x\to -1} x^6 = (-1)^6 = 1$

k) $\lim_{x\to 0^-} x^3 = 0$

l) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^6} = \frac{1}{0^6} = +\infty$

2.- Halla los siguientes limites:

a) $\lim_{x\to +\infty} x^7 = +\infty$

b) $\lim_{x\to -\infty} x^7 = -\infty$

c) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt[7]{x} = +\infty$

d) $\lim_{x\to -\infty} \sqrt[7]{x} = -\infty$

e) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^7} = 0$

f) $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^7} = 0$

g) $\lim_{x\to +\infty} 7^x = +\infty$

h) $\lim_{x\to -\infty} 7^x = 0$

i) $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{7}\right)^x = +\infty$

j) $\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{7}\right)^x = 0$

k) $\lim_{x\to +\infty} 7^{\frac{1}{x}} = 1$

l) $\lim_{x\to -\infty} 7^{\frac{1}{x}} = 1$

m) $\lim_{x\to +\infty} x^5 = +\infty$

n) $\lim_{x\to -\infty} x^5 = -\infty$

ñ) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt[3]{x^2} = +\infty$

o) $\lim_{x\to -\infty} \sqrt[3]{x^2} = +\infty$

p) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^4} = 0$

q) $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^4} = 0$

r) $\lim_{x\to +\infty} 5^x = +\infty$

s) $\lim_{x\to -\infty} 5^x = 0$

t) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0$

u) $\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = +\infty$

v) $\lim_{x\to +\infty} 4^{x^2} = +\infty$

w) $\lim_{x\to -\infty} 4^{x^2} = +\infty$

3. Halla los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x-3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x-3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$

c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{3x^2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{3x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

d) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{3x^2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{3x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

e) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^6}{3x^2+2x-1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^6}{3x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^4}{3} = -\infty$

f) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1-x^6}{3x^2+2x-1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^6}{3x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^4}{3} = -\infty$

g) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^4}{-x^4+2x^2-5} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^4}{-x^4} = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$

h) $\lim_{x\to+\infty} \frac{16}{x-2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{16}{x} = 0$

i) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x+3}{x^3-3x^2-5} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

j) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x+3}{x^3-3x^2-5} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

k) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^4}{-x^4+2x^2-5} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^4}{-x^4} = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$

l) $\lim_{x\to-\infty} \frac{16}{x-2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to-\infty} \frac{16}{x} = 0$

4. Determina el límite de estas funciones:

a) $\lim_{x\to+\infty} (3x+1) = \infty + 1 = \infty$

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{5}{x+1} = \frac{5}{-\infty} = 0$

c) $\lim_{x\to+\infty} (x^2-5x+6) = \lim_{x\to+\infty} (x^2) = +\infty$

d) $\lim_{x\to-\infty} (3-x+x^2-x^3) = \lim_{x\to-\infty} (-x^3) = -(-\infty) = \infty$

e) $\lim_{x\to+\infty} \left(3-\frac{x-4}{2}\right) = \left(3-\frac{\infty-4}{2}\right) = -\infty$

f) $\lim_{x\to+\infty} 2^{x-1} = 2^{\infty} = \infty$

g) $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{x^2} = \left(\frac{3}{5}\right)^{(-\infty)^2} = 0$

h) $\lim_{x\to+\infty} 3^{\frac{2}{3x-1}} = 3^{\frac{2}{\infty}} = 3^0 = 1$

i) $\lim_{x\to-\infty} (x+3)(2x-3) = \lim_{x\to-\infty} (-\infty)(-\infty) = +\infty$

j) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x-2}{x} = \frac{\infty}{\infty}$ = Indeterminación.

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x-2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

k) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{2x^3+1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{2x^3+1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{2x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$

l) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3+8x^2-x+8) = -\infty$

m) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x-2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

n) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{6x-2}{3x^3-7x+1} = \frac{\infty}{\infty}$= Indeterminación.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{6x-2}{3x^3-7x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{6x}{3x^3} = =0$

ñ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2-8x+16}{35} = +\infty$

o) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5-2x+3x^2-x^3}{2x^2-5x-4} = \frac{\infty}{\infty}$ = Indeterminación.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5-2x+3x^2-x^3}{2x^2-5x-4} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^3}{2x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{2} = -(+\infty) = -\infty$

5.- Determina los límites de estas funciones:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}}{2x+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2}}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+3}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{\sqrt{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{1} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+3}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{\sqrt{x^2}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{1} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-12x+9}{\sqrt[3]{x^5+5x-2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{\sqrt[3]{x^5}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^{\frac{5}{3}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{0} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x} = \frac{1}{1} = 1$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{7x+\sqrt{3x-2}}{2x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{7x}{2x} = \frac{7}{2}$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-\sqrt{6+x}}{2x+4} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{2x} = \frac{2}{2} = 1$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+2x}{6x-3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}+2x}{6x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+2x}{6x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x}{6x} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

6. Calcula los siguientes límites:

$a)\ \lim\limits_{x\to 0} x^{-4} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^4} = \infty$

$b)\ \lim\limits_{x\to\infty} 4x^4 = +\infty$

$c)\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{x^3} = \frac{3}{0} = +\infty$

$d)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{-2}}{5} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{5x^2} = \infty$

$e)\lim_{x\to 0}\frac{x^5}{3}=\frac{0}{3}=0$

$f)\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4-3x-1}{x^3+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4}{x^3}=\infty$

$g)\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x^5}=0$

$j)\lim_{x\to\infty}3^{-x}=0$

$i)\lim_{x\to-\infty}3^{-x}=3^{\infty}=\infty$

$k)\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{\sqrt{x^2-2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2}=\infty$

$l)\lim_{x\to\infty}(\frac{2}{x^2+1}+\frac{3}{x+2})=\frac{2}{\infty}+\frac{3}{\infty}=0$

7. Resuelve los siguientes límites.

$a)\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-1}{5x}\cdot\frac{6x}{x^3+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{24x^3-6x}{5x^4+5x}=\lim_{x\to\infty}\frac{24}{5x}=0$

b) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5}{1-2x}:\frac{5x^3}{x^2+12}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+17x^2+60}{-10x^4+5x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{-10x^4}=-\frac{1}{10}$

$c)\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2+3}{5x}+\frac{6x-x^2}{3x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+30x^2+9x}{15x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{15}=\infty$

8. Halla los siguientes límites de funciones:

a) $\lim_{x\to\infty}(x^3-12x)=\infty$
b) $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}=\infty$
c) $\lim_{x\to\infty}(x^2-4x)=\infty$
d) $\lim_{x\to\infty}\left(x^3-\frac{3}{x^2}\right)=(\infty-0)=\infty$
e) $\lim_{x\to\infty}(x-x^2)=-\infty$
f) $\lim_{x\to\infty}(2x-3)^x=(\infty)^{\infty}=\infty$
g) $\lim_{x\to\infty}(x^3+5x^2-3)=\infty$
h) $\lim_{x\to\infty}[(x^2+1)^2+4x]=\infty+\infty=\infty$

9.- Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to+\infty}[2x^3-7x+3]\to\lim_{x\to+\infty}2x^3=\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{3x^2-5x+2}\to\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{3x^2}=\frac{2}{\infty}=0$

c) $\lim_{x\to-\infty}[4x^4-7x+5]\to\lim_{x\to-\infty}4x^4=\infty$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

d) $\lim_{x\to-\infty}[-3x^5+2x-4] \to \lim_{x\to-\infty}(-3x^5)=\infty$

e) $\lim_{x\to+\infty}[-x^2+3x-2] \to \lim_{x\to+\infty}(-x^2)=-\infty$

f) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-7x+5}{-2x^2+4x-3}=\frac{\infty}{\infty}\ Indet. \to \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{-2x^2}=-1$

g) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+7}}{2x}=\frac{\infty}{\infty}\ Indet. \to \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2}}{2x} \to \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$

h) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x^4-3x^2+2}}{\sqrt[3]{4x^2+5}}=\frac{\infty}{\infty}\ Indet. \to \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{4x^2}}=\sqrt[3]{\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4}{4x^2}}=\sqrt[3]{\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{4}}=\sqrt[3]{\infty}=\infty$

i) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{2x}-5}=\frac{\infty}{\infty}\ Indet. \to \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x}}=\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2x}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$

j) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^5-2x+1}{7x^4-2x^2}=\frac{\infty}{\infty}\ Indet. \to \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^5}{7x^4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{7}=-\infty$

k) $\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2-5x+1}{2x^3-3}=\frac{\infty}{\infty}\ Indet. \to \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{2x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{2x}=\frac{-1}{2\cdot\infty}=0$

j) $\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{1-x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{-x^3}=\frac{2}{-\infty}=0$

10. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x}-\frac{1+2x^2}{2x-1}\right)=\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x}-\frac{1+2x^2}{2x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{[(x^2-1)(2x-1)]-[(1+2x^2)(x)]}{(x)(2x-1)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3-x^2-2x+1-x-2x^3}{2x^2-x}\right)==\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2-3x+1}{2x^2-x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2}{2x^2}\right)=\frac{-1}{2}$$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)=\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(\sqrt{x^2-2x}-x)(\sqrt{x^2-2x}+x)}{(\sqrt{x^2-2x}+x)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(\sqrt{x^2-2x})^2-(x)^2}{(\sqrt{x^2-2x}+x)}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-2x-x^2}{(\sqrt{x^2-2x}+x)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2x}{(\sqrt{x^2-2x}+x)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{-2x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x}+\frac{x}{x}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2}{\sqrt{\frac{x^2-2x}{x^2}}+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}}+1}\right)==\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}\right)=\frac{-2}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{-2}{2}=-1$$

c) $\lim_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{1+4x}\right)=\infty$ El orden de 2x es mayor que $\sqrt{4x}$

d) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+3x}-3x\right)=\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+3x}-3x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(\sqrt{9x^2+3x}-3x)(\sqrt{9x^2+3x}+3x)}{(\sqrt{9x^2+3x}+3x)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{9x^2+3x-9x^2}{(\sqrt{9x^2+3x}+3x)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x}{(\sqrt{9x^2+3x}+3x)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{3x}{x}}{\frac{\sqrt{9x^2+3x}}{x}+\frac{3x}{x}}\right)$$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{\sqrt{\frac{9x^2+3x}{x^2}}+3}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{\sqrt{\frac{9x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}}+3}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{\sqrt{9+\frac{3}{x}}+3}\right) = = \frac{3}{\sqrt{9+0}+3} = \frac{3}{3+3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right) = -\infty-\infty = -\infty$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right) = -\infty+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(-x+\sqrt{(-x)^2-4(-x)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(\sqrt{x^2+4x}-x)(\sqrt{x^2+4x}+x)}{(\sqrt{x^2+4x}+x)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+4x}\right)^2-(x)^2}{(\sqrt{x^2+4x}+x)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x^2+4x)-x^2}{(\sqrt{x^2+4x}+x)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x}{(\sqrt{x^2+4x}+x)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x}{(\sqrt{x^2}+x)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x}{x+x}\right) = \frac{4}{1+1} = \frac{4}{2} = 2$$

11. Calcula los siguientes límites:

$a)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x-1} = 1^\infty$ calculamos $e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}-1\right)\cdot(2x-1)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{x}\right)} = e^2$

$b)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{6x+2} = 1^\infty;$ $e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3}{x}-1\right)\cdot(6x+2)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-18x+6}{x}\right)} = e^{-18}$

$c)$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\frac{4x-1}{4x}\right)^{3x+2} = 1^\infty;$ $e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{4x-1}{4x}-1\right)\cdot(3x+2)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+2}{4x}\right)} = e^{\frac{3}{4}}$

$d)$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x+3}\right)^{3x+1} = 1^\infty;$ $e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x+3}-1\right)\cdot(3x+1)} = e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-9x+3}{x+3}\right)} = e^{-9}$

$e)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x-1} = 1^\infty;$ $e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}-1\right)\cdot(x-1)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x^2}\right)} = e^0 = 1$

$f)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x+2}{x^2+1}\right)^{x+6} = 1^\infty;$ $e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x+2}{x^2+1}-1\right)\cdot(x+6)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2-5x+6}{x^2+1}\right)} = e^{-1}$

$g)$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{1}{2x}} = 1^\infty;$ $e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{2x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{2}{2(x^3+x)}\right)} = e^0 = 1$

$h)$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{1-x} = 1^\infty;$ $e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2}{x}-1\right)\cdot(1-x)} = e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-2}{x}\right)} = e^2$

12. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+2x}-x\right] = \infty-\infty$ Indeterminación

$$\lim_{x\to\infty}\left[(\sqrt{x^2+2x}-x)\cdot\frac{\sqrt{x^2+2x}+x}{\sqrt{x^2+2x}+x}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{(\sqrt{x^2+2x}-x)\cdot(\sqrt{x^2+2x}+x)}{\sqrt{x^2+2x}+x}\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)}\right) = \frac{2}{(\sqrt{1}+1)} = 1$$

b) $\lim\limits_{x\to-3}\left[\frac{x^3+27}{x^2-9}\right] = \frac{-3^3+27}{-3^2-9} = \frac{0}{0}$ Indeterminación

$$\lim_{x\to-3}\left[\frac{x^3+27}{x^2-9}\right] = \lim_{x\to-3}\left[\frac{(x+3)(x^2-3x+3^2)}{(x-3)(x+3)}\right] = \lim_{x\to-3}\left[\frac{x^2-3x+3^2}{x-3}\right] = \frac{-3^2-3\cdot(-3)+3^2}{-3-3} = \frac{27}{-6} = \frac{-9}{2}$$

c) $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2}{x^2+1}-\frac{3}{x+2}\right]=\frac{2}{\infty}-\frac{3}{\infty}=0-0=0$

d) $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x^4-3x-1}{x^3+3}\right]=\infty$ ya que grado del numerador > grado del denominador

13. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to\infty}(x+4^x)=\infty+4^\infty=\infty+\infty=\infty$

b) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-5}{3x^2+x}\right)^{x^2-1}=1^\infty\to$ Indeterminación

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)]^{g(x)}=e^{\lim_{x\to\infty}g(x)\cdot[f(x)-1]}$$

Calculamos $f(x)-1\to\left(\frac{3x^2-5}{3x^2+x}\right)-1=\frac{-x-5}{3x^2+x}$

Calculamos $g(x)\cdot[f(x)-1]\to(x^2-1)\cdot\left(\frac{-x-5}{3x^2+x}\right)=\frac{-5x^2-x^3+5+x}{3x^2+x}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-5}{3x^2+x}\right)^{x^2-1}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-5x^2-x^3+5+x}{3x^2+x}}=e^{-\infty}=0$$

c) $\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{1-x}=(1)^\infty\to$ Indeterminación

$$e^{\lim_{x\to-\infty}(1-x)\cdot\left(1+\frac{2}{x}-1\right)}=e^{\lim_{x\to-\infty}\frac{(1-x)\cdot 2}{x}}=e^{\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{x}}=e^{-2}$$

d) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-2x+2}{2x^2+3x-2}\right)^{x^2-3x}=\left(\frac{1}{2}\right)^\infty=0$

e) $\lim_{x\to-\infty}(x+3^{-x})=-\infty+\infty\to$ Indeterminación

Cambiamos x por $-x$; $x\to-\infty, -x\to\infty$

$\lim_{x\to\infty}\left(-x+3^{-(-x)}\right)=\lim_{x\to\infty}(3^x-x)=\lim_{x\to\infty}3^x=\infty$

f) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1}=\frac{\infty}{\infty}\to$ Indeterminación $\quad\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1$

g) $\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{4x^2-5}-(2x-3)\right]}=\infty-\infty=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-5}-(2x-3)\right)\cdot\sqrt{4x^2-5}+(2x-3)}{\sqrt{4x^2-5}+(2x-3)}=$

$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-5}\right)^2-(2x-3)^2}{\sqrt{4x^2-5}+(2x-3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-5-4x^2+12x-9}{\sqrt{4x^2-5}+(2x-3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{12x-14}{\sqrt{4x^2-5}+(2x-3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\left(-\frac{14}{x}+12\right)}{x\cdot\left(\sqrt{4-\frac{5}{x^2}}+2-\frac{3}{x}\right)}=$

$\frac{\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{14}{x}+12\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4-\frac{5}{x^2}}+2-\frac{3}{x}\right)}=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{14}{x}\right)+\lim_{x\to\infty}(12)}{\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4-\frac{5}{x^2}}\right)+2-\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x}\right)}=\frac{-14\cdot0+12}{\sqrt{4-5\cdot0}+2-3\cdot0}=3$

14- Calcula los siguientes límites

a) $\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x+1}\cdot\sqrt{x^2+1}}=\frac{2}{\infty+1}\cdot\sqrt{\infty^2+1}=0\cdot\infty$ Indeterminación

-Multiplicamos los términos $\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}$ Indeterminación

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2\sqrt{x^2}}{x}\right)^2=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2}{x^2}=4$, luego el límite es 2.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{9x^2+2x-3}-3x=\infty-\infty$ Indeterminación

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{9x^2+2x-3}-3x)(\sqrt{9x^2+2x-3}+3x)}{\sqrt{9x^2+2x-3}+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2+2x-3-9x^2}{\sqrt{9x^2+2x-3}+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{\sqrt{9x^2+2x-3}+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{3x+3x}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x+3}-\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x})=\infty-\infty$ Indeterminación

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{x+1}-\frac{x^2+1}{x}=\infty-\infty$ Indeterminación

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+2)x-(x^2+1)(x+1)}{(x+1)x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x-x^3-x^2-x-1}{(x+1)x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2+x-1}{(x+1)x}=-1$$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{2x^2-6x}{2x^2-x-5}\right]^{\frac{x^2}{2}}=1^\infty$ Indeterminación

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2}\cdot\left(\frac{2x^2-6x}{2x^2-x-5}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2}\cdot\frac{2x^2-6x-2x^2+x+5}{2x^2-x-5}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-5x^3+5x^2}{2(2x^2-x-5)}}=e^{\frac{-5}{4}}$$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{4-3x}{5-3x}\right]^{x-3}=1^\infty$ Indeterminación

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}(x-3)\cdot(\frac{4-3x}{5-3x}-1)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(x-3)\cdot(\frac{4-3x-5+3x}{5-3x})}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x+3}{5-3x}}=e^{\frac{-1}{-3}}=e^{\frac{1}{3}}$$

15. Determina los límites de estas funciones:

a) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x+1}{3x+3}=\frac{0}{0}$ Indeterminación; $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x+1}{3x+3}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{1}{3}\left(\frac{x+1}{x+1}\right)=\frac{1}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x^2+2x}{x^2-3x}=\frac{0}{0}$ Indeterminación ; $\lim\limits_{x\to0}\frac{2(x+1)x}{(x-3)x}=-\frac{2}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{25-x^2}}{x-5}=\frac{0}{0}$ Indeterminación ; $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{5-x}\cdot\sqrt{5+x}}{-(5-x)}=\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{5+x}}{-\sqrt{5-x}}=\frac{\sqrt{10}}{0}=\infty$

d) $\lim\limits_{x\to3}\frac{2x^2-18}{\sqrt{x^2-9}}=\frac{0}{0}$ Indeterminación ; $\lim\limits_{x\to3}2\left(\frac{x^2-9}{(x^2-9)^{\frac{1}{2}}}\right)=\lim\limits_{x\to3}2(x^2-9)^{\frac{1}{2}}=0$

16. Determina los límites de estas funciones:

a) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{2x^2-3x-2}=\frac{0}{0}$ *Indeterminación* ; $\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)(x+1)}{2(x-2)(x+\frac{1}{2})}=\frac{3}{2\cdot\frac{5}{2}}=\frac{3}{5}$

b) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-x-2}{2x^2-3x-2}=\frac{0}{-3}=0$

c) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+5x^2+6x}{x^3+x^2-8x-12}=\frac{0}{0}$ *Indeterminación* ; $\lim\limits_{x\to-2}\frac{(x-2)(x+3)x}{(x-2)\cdot(x+2)^2}=\frac{-2}{0}$;

$\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)=\frac{-2}{0^-}=\infty$ $\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=\frac{-2}{0^+}=-\infty$; No existe el límite

d) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^3+5x^2+6x}{x^3+x^2-8x-12}=\frac{0}{-6}=0$

17.- Calcula estos límites:

a) $\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-2x+1}{x-3} \to \frac{(2^-)^2-(2\cdot 2^-)+1}{2^--3} \to \frac{1}{-1} \to -1$

b) $\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-2x+1}{x-3} \to \frac{(2^+)^2-(2\cdot 2^+)+1}{2^+-3} \to \frac{1}{-1} \to -1$

c) $\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-2x+1}{x-3} \to \frac{(3^-)^2-(2\cdot 3^-)+1}{3^--3} \to \frac{4}{0^-} \to -\infty$

d) $\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-2x+1}{x-3} \to \frac{(3^+)^2-(2\cdot 3^+)+1}{3^+-3} \to \frac{4}{0^+} \to +\infty$

e) $\lim_{x\to -1^-}\frac{x-3}{(x-1)^2} \to \frac{-1^--3}{(-1^--1)^2} \to \frac{-4}{4} \to -1$

f) $\lim_{x\to -1^+}\frac{x-3}{(x-1)^2} \to \frac{-1^+-3}{(-1^+-1)^2} \to \frac{-4}{4} \to -1$

g) $\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2+x-6}{x^3-x^2-8x+12} \to \frac{0}{0}\ Indeterminación$

h) $\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+x-6}{x^3-x^2-8x+12} \to \frac{0}{0}\ Indeterminación$

Descomponemos factorialmente

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^3-x^2-8x+12} = \lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x+3)(x-2)}}{\cancel{(x+3)(x-2)}(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2} \to \frac{1}{2-2} \to \frac{1}{0} \to \pm\infty$$

g) $\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2} \to \frac{1}{2^--2} \to \frac{1}{0^-} = -\infty$

h) $\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2} \to \frac{1}{2^+-2} \to \frac{1}{0^+} = +\infty$

18.- Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3}{x+2} \to \frac{3^2-3}{3+2} \to \frac{6}{5}$

b) $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-3}{x+2} \to \frac{1}{0} \to \pm\infty$

$\lim_{x\to -2^-}\frac{x^2-3}{x+2} \to \frac{(-2^-)^2-3}{-2^-+2} \to \frac{1}{0^-} \to -\infty$

$\lim_{x\to -2^+}\frac{x^2-3}{x+2} \to \frac{(-2^+)^2-3}{-2^++2} \to \frac{1}{0^+} \to +\infty$

c) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x} \to \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}} \to 1$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x} \to \frac{1}{\sin 0} \to \frac{1}{0} \to \pm\infty$

$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sin x} \to \frac{1}{\sin 0^-} \to \frac{1}{0^-} \to -\infty$

$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sin x} \to \frac{1}{\sin 0^+} \to \frac{1}{0^+} \to +\infty$

19. Calcula los siguientes límites:

$\boldsymbol{a})\ \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^3+2x^2-3x} = \frac{1-1}{1+2-3} = \frac{0}{0} \to Indet.$

- Hacemos descomposición factorial:

$x^3-1 \to (x-1)(x^2+x+1)$

$x^3+2x^2-3x \to x(x-1)(x+3)$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x(x-1)(x+3)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x+1)}{x(x+3)} = \frac{1+1+1}{1\cdot 4} = \frac{3}{4}$$

$\boldsymbol{b})\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x^3-2x^2-x} = \frac{0}{0} = Indet.$

- Hacemos descomposición factorial:

$x^2+x \to x(x+1)$

$$x^3-2x^2-x \to x(x-1)(x-1)$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)}{x(x-1)(x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)}{(x-1)(x-1)}=\frac{1}{1}=1$$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{5x^2-13x-6}=\frac{9-9}{45-39-6}=\frac{0}{0}=Indet.$

- Hacemos descomposición factorial:

$x^2-9\to(x+3)(x-3)$

$5x^2-13x-6\to(5x+2)(x-3)$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)(x-3)}{(5x+2)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)}{(5x+2)}=\frac{6}{17}$$

d) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^4-1}{x^3+1}=\frac{1-1}{-1+1}=\frac{0}{0}=Indet.$

- Hacemos descomposición factorial:

$x^4-1\to(x^2+1)(x+1)(x-1)$

$x^3+1\to(x+1)(x^2-x+1)$

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x^2+1)(x+1)(x-1)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x^2+1)(x-1)}{(x^2-x+1)}=\frac{(1+1)(-1-1)}{(1+1+1)}=\frac{2\cdot(-2)}{3}=\frac{-4}{3}$$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4-3x^2}{x^2+x}=\frac{0}{0}=Indet.$

- Hacemos descomposición factorial:

$x^4-3x^2\to\ x^2(x^2-3)$

$x^2+x\ \to x(x+1)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2(x^2-3)}{x(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x^2-3)}{(x+1)}=\frac{0}{1}=0$$

f) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}=\frac{4-10+6}{4-8+4}=\frac{0}{0}=Indet.$

- Hacemos descomposición factorial:

$x^2-5x+6\to(x-2)(x-3)$

$x^2-4x+4\to(x-2)(x-2)$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-3)}{(x-2)}=\frac{-1}{0}=\pm\infty$$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}}{2x}=\frac{\sqrt{1}}{0}=\frac{1}{0}=\pm\infty$

h) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{1-1}{\sqrt{1}-1}=\frac{0}{1-1}=\frac{0}{0}=Indet.$

- Hacemos descomposición factorial:

$x^2-1\to(x+1)(x-1)$

- Como $\sqrt{x}-1$ no se puede descomponer multiplicamos por su expresión conjugada:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}(x+1)(\sqrt{x}+1)=2\cdot 2=4$$

i) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-9}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}}{9-9}=\frac{0}{0}=Indet.$

- Hacemos descomposición factorial:

$x^2-9\to(x+3)(x-3)$

- Como $\sqrt{x}-\sqrt{3}$ no se puede descomponer multiplicamos por su expresión conjugada:

$$\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})\,(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(x+3)(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)}{(x+3)(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x+3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}=\frac{1}{6(\sqrt{3}+\sqrt{3})}=\frac{1}{6\cdot 2\sqrt{3}}=\frac{1}{12\sqrt{3}}$$

j) $\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{2-\sqrt{8-x}}=\frac{3-\sqrt{9}}{2-\sqrt{4}}=\frac{3-3}{2-2}=\frac{0}{0}=Indet.$

$$\lim_{x\to 4}\frac{(3-\sqrt{5+x})(3+\sqrt{5+x})}{(2-\sqrt{8-x})(3+\sqrt{5+x})}=\lim_{x\to 4}\frac{9-5-x}{(2-\sqrt{8-x})(3+\sqrt{5+x})}=\lim_{x\to 4}\frac{4-x}{(2-\sqrt{8-x})(3+\sqrt{5+x})}=\frac{0}{0}=Indet.$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)(2+\sqrt{8-x})}{(2-\sqrt{8-x})(2+\sqrt{8-x})(3+\sqrt{5+x})}=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)(2+\sqrt{8-x})}{(4-8+x)(3+\sqrt{5+x})}=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)(2+\sqrt{8-x})}{(-4+x)(3+\sqrt{5+x})}=$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)(2+\sqrt{8-x})}{-(4-x)(3+\sqrt{5+x})}=\lim_{x\to 4}\frac{(2+\sqrt{8-x})}{-(3+\sqrt{5+x})}=\frac{4}{-6}=-\frac{2}{3}$$

k) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{x^2+x}=\frac{0}{0}\ Ind$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x})}{(x^2+x)(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x})}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{2-x})^2-(\sqrt{2+x})^2}{(x^2+x)(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x})}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{x(x+1)(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x})}=\lim_{x\to 0}\frac{-2}{(x+1)(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x})}$$

$$=\frac{-2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=-\frac{2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

l) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x}-2}=\frac{0}{0}Ind$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{2x}-2)(\sqrt{x+2}+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+2})^2-4}{(\sqrt{2x}-2)(\sqrt{x+2}+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(\sqrt{2x}-2)(\sqrt{x+2}+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{2x}+2)}{(\sqrt{2x}-2)(\sqrt{x+2}+2)(\sqrt{2x}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{2x}+2)}{(\sqrt{x+2}+2)\left(\sqrt{2x}^2-4\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{2x}+2)}{(\sqrt{x+2}+2)(2x-4)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{2x}+2)}{(\sqrt{x+2}+2)2(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{2x}+2)}{2(\sqrt{x+2}+2)}=\frac{2\sqrt{2}+2}{8}=\frac{\sqrt{2}+1}{4}$$

m) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4}=\frac{0}{0}Ind$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)(\sqrt{x+16}+4)}{(\sqrt{x+16}-4)(\sqrt{x+16}+4)(\sqrt{x+9}+3)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+9}^2-9\right)(\sqrt{x+16}+4)}{\left(\sqrt{x+16}^2-16\right)(\sqrt{x+9}+3)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+16}+4)}{x(\sqrt{x+9}+3)}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+16}+4)}{(\sqrt{x+9}+3)}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

n) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$

o) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+7}-3}=\frac{0}{0}Ind$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)(\sqrt{x+7}+3)}{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x^2+5}^2-9\right)(\sqrt{x+7}+3)}{\left(\sqrt{x+7}^2-9\right)(\sqrt{x^2+5}+3)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(\sqrt{x+7}+3)}{(\sqrt{x^2+5}+3)}=\frac{24}{6}=4$$

20. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to -3}\frac{x^3+27}{x^2-9}=\frac{0}{0}Ind$ $\quad\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x^2-3X+9)}{(x+3)(x-3)}=\lim_{x\to -3}\frac{(x^2-3X+9)}{x-3}=-\frac{27}{6}$

b) $\lim_{x\to 1^-}\frac{2x^2-2}{x^2-2x+1}=\frac{0}{0}Ind$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{2x^2-2}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-1)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2(x+1)}{x-1}=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x+1}\cdot\frac{x^2+4}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)(x^2+4)}{(x+1)(x-2)x}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+2)(x^2+4)}{(x+1)x}=\frac{4\cdot 8}{6}=\frac{32}{6}=\frac{16}{3}$

d) $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2x^2-2}{x^2-2x+1}=\frac{0}{0}\ Ind$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2x^2-2}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2(x+1)}{x-1}=\frac{4}{0^+}=+\infty$

21.- Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x-1}=\frac{2}{0}\to\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2+1}{x-1}=-\infty;\ \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2+1}{x-1}=+\infty\to\nexists\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2+x}{x^2}=\frac{2}{0}\to\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{2+x}{x^2}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2+x}{x^2}=+\infty\to\lim\limits_{x\to 0}\frac{2+x}{x^2}=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+5}{|x-3|}=\frac{8}{0}\to\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{x+5}{|x-3|}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to 3^-}\frac{x+5}{|x-3|}=+\infty\to\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+5}{|x-3|}=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to 2}[x-1]^{\frac{3}{x-2}}=1^\infty\to e^{\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{3}{x-2}\right)((x-1)-1)}=e^{\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{3x-6}{x-2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{3(x-2)}{x-2}\right)}=e^3$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{x^2+4}{x+4}\right]^{\frac{x}{x-1}}\to 1^\infty\to e^{\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}\right)\left(\frac{x^2+4}{x+4}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x(x^2-x)}{(x-1)(x+4)}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^2}{x+4}\right)}=e^{\frac{1}{5}}$

f) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{x+2}{x-1}-\frac{x-2}{x^2-1}\right]=\infty-\infty\to\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{(x+2)(x+1)-(x-2)}{(x-1)(x+1)}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{(x^2+2x+4)}{(x-1)(x+1)}\right]=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{(x^2+2x+4)}{(x^2-1)}\right]=\frac{7}{0}\to\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\frac{(x^2+2x+4)}{(x^2-1)}\right]=+\infty;\quad\lim\limits_{x\to 1^-}\left[\frac{(x^2+2x+4)}{(x^2-1)}\right]=-\infty\to\nexists\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{x+2}{x-1}-\frac{x-2}{x^2-1}\right]$

g) $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{2x-4}}{x-2}=\frac{0}{0}\to\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{2x-4}}{x-2}\cdot\frac{\sqrt{2x-4}}{\sqrt{2x-4}}=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{2(x-2)}{(x-2)\sqrt{2x-4}}=\frac{2}{0^+}=+\infty$

h) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2}=\frac{0}{0}\to\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2}\cdot\frac{(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}+2)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)=8$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{2}{x^3}\cdot\frac{x^2+2x}{3}\right]=\frac{0}{0}\to\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{x(2x+4)}{3x^2\cdot x}\right]=\frac{4}{0}\to\lim\limits_{x\to 0^-}\left[\frac{2x+4}{3x^2}\right]=+\infty;\quad\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{2x+4}{3x^2}\right]=+\infty;$

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{2}{x^3}\cdot\frac{x^2+2x}{3}\right]=\infty\cdot 0$

j) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{5x-2}{5x+3}\right]^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{5x}{5x}\right]^{3x}=1^\infty\to e^{\lim\limits_{x\to\infty}(3x)\left(\frac{5x-2}{5x+3}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{15x}{5x+3}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{15x}{5x}\right)}=e^{-3}$

k) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x^2+2}\right)\right]=\infty\cdot 0;$

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x^2+2}\right)\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2+2-x-2}{(x+2)(x^2+2)}\right)\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(x-1)}{x^2(x+2)(x^2+2)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x-1)}{x(x+2)(x^2+2)}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(x-1)}{x(x+2)(x^2+2)}=-\infty;\quad\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{(x-1)}{x(x+2)(x^2+2)}=\infty\to\nexists\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x^2+2}\right)\right]$

22.- Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{1-x^3}}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{0}{0}\to\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\frac{-(1-x)(x^2+x+1)}{(1-x)(x+1)}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$

b) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{2+\ln x}{3+\ln x^2}\right)^{\frac{-3}{x-1}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-\infty}=\left(\frac{3}{2}\right)^{\infty}=+\infty$

23.- Calcula los límites laterales y el límite, cuando exista, de las siguientes funciones en los puntos que se indican

a) $\mathbf{f(x)=\begin{cases}2x-2, & x<3\\ 2x, & x\geq 3\end{cases}}$ **en x = 3** $\to\lim\limits_{x\to 3}f(x)\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(2x-2)=4\\ \lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}2x=6\end{cases}$

Como $\lim_{x\to 3^-} f(x) \neq \lim_{x\to 3^+} f(x)$, no existe $\lim_{x\to 3} f(x)$ en x=3

b) $\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{x^2+3x-1,\ x<1} \\ \mathbf{x+2,\ x\geq 1} \end{cases}$ **en x = 1** $\rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x^2+3x-1) = 3 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x+2) = 3 \end{cases}$

Como $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$, existe $\lim_{x\to 3} f(x) = 3$ en x=1

24. – Halla el valor de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3^{\frac{3}{x}}-2}{2^{\frac{1}{x}}+2} = \frac{3^0-2}{3^0+2} = \frac{-1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3^{\frac{1}{x}}-4x}{4^{\frac{1}{x}}+3x-2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3^{\frac{1}{x}}}{4^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{4^{\frac{2}{x}}+3x^2+1}{5^{\frac{3}{x}}-3+2x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{4^{\frac{2}{x}}}{5^{\frac{3}{x}}} = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{4^2}{5^3}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{8}{125}\right)^{-\infty} = \left(\frac{125}{8}\right)^{\infty} = \infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^{\frac{4}{x}}-2x^2+3}{3^{\frac{1}{x}}-3-2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2}{-2x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

25. – Calcula el valor de los siguientes límites:

$$A)\ \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2+7}-4}{2-x+1} \rightarrow \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{3^2+7}-4}{2-3+1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x^2+7}-4)(\sqrt{x^2+7}+4)}{(-x+3)(\sqrt{x^2+7}+4)} \rightarrow \lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x^2+7})^2-4^2}{(-x+3)(\sqrt{x^2+7}+4)} \rightarrow \lim_{x\to 3} \frac{x^2+7-16}{(-x+3)(\sqrt{x^2+7}+4)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{(-x+3)(\sqrt{x^2+7}+4)} \rightarrow \lim_{x\to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{(-x+3)(\sqrt{x^2+7}+4)} \rightarrow \lim_{x\to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{-(x-3)(\sqrt{x^2+7}+4)} \rightarrow \frac{3+3}{-(\sqrt{3^2+7}+4)} = \frac{9}{-8}$$

$$B)\ \lim_{x\to 2} \frac{2^x-4}{2^{2x}-5\cdot 2^2+4} = \frac{0}{0} \qquad \lim_{x\to 2} \frac{2^x-4}{(2^x-4)(2^x-1)} \rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{1}{2^x-1} = \frac{1}{3}$$

26.–Dada la función f(x)=$\begin{cases} \mathbf{3x-1\ \ si\ x<0} \\ \mathbf{0\ \ si\ x=0} \\ \mathbf{2x+5\ \ si\ x>0} \end{cases}$

Para x< 0 f es continua al ser una función polinómica

Para x> 0 f es continua al ser una función polinómica

En x=2

$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}(2x+5) = 9$

En x=0^-

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(3x-1) = -1$

En x=0^+

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(2x+5) = 5$

En x=-3

$\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3}(3x-1) = -1$

x=0

f(0)=0

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(2x+5) = 5 \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(3x-1) = -1 \end{cases}$$

Para que exista $\lim_{x\to 0} f(x)$, los limites laterales han de ser iguales por tanto al no ser iguales no existe el limite cuando x=0

La función tiene una discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto finito

27. – Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

A) $\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si\ x\le 2 \\ x+2 & si\ x>2 \end{cases}}$

Para x<2 f es continua al ser una función polinómica
Para x>2 f es continua al ser una función polinómica
Estudiamos continuidad en x=2 y x=-2
En x=2
f(2)=$2^2-1=3$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-1)=3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x+2)=4 \end{cases}$$

Para que exista $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, los limites laterales han de ser iguales por tanto al no ser iguales no existe el límite cuando x=2
La función tiene una discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto finito.

B) $\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si\ x<2 \\ 2x-1 & si\ 2\le x<4 \\ 5 & si\ x\ge 4 \end{cases}}$

Para x< 2 f es continua al ser una función polinómica
Para 2< $x<4$ f es continua al ser una función polinómica
Para x> 4 f es continua al ser una función constante.
Estudiamos continuidad en x=2 y en x=4

En x=2
f(2)=2·2-1=3

$$\lim_{x\to 2}(f)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2+1)=5 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(2x-1)=3 \end{cases}$$

Para que exista, los límites laterales han de ser iguales, por lo tanto, al no ser iguales no existe el límite x→2
La función tiene una discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto finito

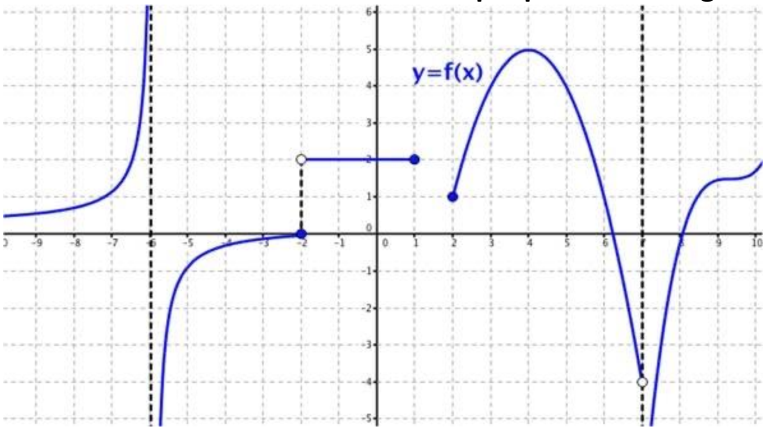
En x=4
f(4)=5

$$\lim_{x\to 4} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}(2x-1)=7 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+} 5=5 \end{cases}$$

Para que exista $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ los limites laterales han de ser iguales por tanto al no ser iguales no existe el límite cuando x=4

La función tiene una discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto finito

28. – Clasifica las discontinuidades que presenta la siguiente función:



En x= -6 tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
En x= -2 tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto finito.
En x= 7 tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.

29. Estudia la continuidad de las siguientes funciones.

a) *f(x)=*$\begin{cases} \boldsymbol{x^2-4 \quad si \quad x<2} \\ \boldsymbol{x-2 \quad si \quad 2\le x\le 4} \\ \boldsymbol{5 \quad si \quad x>4} \end{cases}$ b) *g(x)*$\begin{cases} \boldsymbol{\frac{5}{x-5} \quad si \quad x\le 0} \\ \boldsymbol{\sqrt{x+1} \quad si \quad 0<x\le 3} \\ \boldsymbol{\frac{10}{x+2} \quad si \quad x>3} \end{cases}$

a)

Continuidad en x=2

1º. $f(2)=2-2=0$

2º. $\lim\limits_{x\to 2}\text{f(x)} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-4)=0 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x^+}(x-2)=0 \end{cases}$

Como $\lim\limits_{x\to 2^-}\text{f(x)} = \lim\limits_{x\to 2^+}\text{f(x)} = 0,\ \lim\limits_{x\to 2}\text{f(x)} = 0$

3º. Como $\text{f}(2)=0=\lim\limits_{x\to 2}\text{f(x)},\ \text{ f es continua en } x=2$

Continuidad en x=4

1º. $f(4)=4-2=2$

2º. $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-}(x-2)=2 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+}(5)=5 \end{cases}$

3º. Como $\lim\limits_{x\to 4^-}\text{f(x)} \neq \lim\limits_{x\to 4^+}\text{f(x)};\ \nexists \lim\limits_{x\to 4}\text{f(x)}, \text{la función no es continua en } x=4$

Presenta una discontinuidad inevitable de la 1ª especie de salto finito.

b)

Continuidad en x=0

1º. $g(0)=\frac{5}{0-5}=-1$

2º. $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(\frac{5}{x-5}\right) = -1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x-5}{\sqrt{x+1}} = -5 \end{cases}$

Como $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$, no existe $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$, , por lo que g(x) presenta una discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto finito en x = 0.

Continuidad en x=3

1º. $g(3) = \frac{3-5}{\sqrt{3+1}} = -1$

2º. $\lim\limits_{x\to 3} \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \frac{x-5}{\sqrt{3+1}} = -1 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} \frac{10}{x+2} = 2 \end{cases}$

Como $\lim\limits_{x\to 3^-} g(x) \neq \lim\limits_{x\to 3^+} g(x)$, no existe $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$, por lo que g(x) no es continua y tiene discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto finito en x=3.

30. Estudia la continuidad de las funciones.

a) $\boldsymbol{f(x) = \frac{x+1}{x^2+x}}$

Dominio, $x^2 + x \neq 0$

$x^2 + x = 0 \to x(x+1) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

$\mathrm{Dom} = \mathbb{R} - \{0, -1\}$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x+1}{x^2+x} = \frac{0+1}{0^2+0} = \frac{1}{0} = \infty$, por lo que f no es continua en x = 0.

Discontinuidad no evitable de 1ª especie de salto infinito.

$\lim\limits_{x\to -1} \frac{x+1}{x^2+x} = \frac{-1+1}{(-1)^2-1} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (hay que factorizar)}$

$\lim\limits_{x\to -1} \frac{x+1}{x(x+1)} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{1}{x} = \frac{1}{-1} = -1$

Como no existe f(-1) pero sí el límite, discontinuidad evitable

b) $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in \mathbb{Z} \\ 0 & si \quad x \notin \mathbb{Z} \end{cases}}$

$\lim\limits_{x\to z} f(x) = 1 \qquad \lim\limits_{x\to x\notin z} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to z} f(x) = 1 \neq \lim\limits_{x\to x\notin z} f(x) = 0$, f no es continua. Presenta una discontinuidad evitable de salto finito.

c) $\boldsymbol{f(x) = |x-3|}$

$f(x) = \begin{cases} x-3 & si \quad x > 3 \\ -x+3 & si \quad x \leq 3 \end{cases}$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

1º. Continuidad en x=3

$f(3) = 3 - 3 = 0$

2º. $\lim_{x\to 3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (-x+3) = 0 \\ \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (x-3) = 0 \end{cases}$

Como $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = 0,\ \lim_{x\to 3} f(x) = 0$

3º. Como $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = 0$, la función es continua en $x = 3$

d) $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 3^{\frac{1}{x}} & si \quad x \in \mathbb{R} \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}}$

1º. $f(0) = 0$

2º. $\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(3^{\frac{1}{x}}\right) = 3^{\frac{1}{0}} = 3^{\infty} = -\infty \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(3^{\frac{1}{x}}\right) = 3^{\frac{1}{0}} = 3^{\infty} = \infty \end{cases}$

Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) \neq f(0)$, la función presenta una discontinuidad no evitable de 1ª especie de salto infinito.

e) $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si \quad x \le 2 \\ x + 1 & si \quad x > 2 \end{cases}}$

1º. $f(2) = 2^2 - 1 = 3$

2º. $\lim_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^2 - 1) = 2^2 - 1 = 3 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x+1) = 2 + 1 = 3 \end{cases}$

3º. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 3$, existe $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$, por lo que la función es continua en $x = 3$

31. Estudia la continuidad de la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x}}$ en el intervalo (2, 5).

$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x}}$

Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$, como 0 no pertenece al intervalo , $f(x)$ es continua en $(2, 5)$.

32. – Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} x + 1 \ si \ x \le -1 \\ x^2 - 3 \ si \ x > -1 \end{cases}$

Continuidad en x=-1

1.- $f(-1) = 0$

2.- $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (x+1) = 0 \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (x^2 + 3x) = -2$

Como $\lim_{x\to -1^-} f(x) \neq \lim_{x\to -1^+} f(x)$, f no es continua en x=-1. Presenta una discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito.

b) $f(x)=\begin{cases}3x-2\ si\ x<-1\\ x^2+4x-1\ si\ -1\le x\le 2\\ x+11\ si\ x>2\end{cases}$

Continuidad en x=-1

1.- $f(-1)=-4$

2.- $\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}(3x-2)=-5 \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}(x^2+4x-1)=-4$

Como $\lim_{x\to -1^-} f(x)\ne \lim_{x\to -1^+} f(x)$ f no es continua en x=-1. Presenta una discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito.

Continuidad en x=2

1.- $f(2)=11$

2.- $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x^2+4x-1)=11 \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x+11)=13$

Como $\lim_{x\to 2^-} f(x)\ne \lim_{x\to 2^+} f(x)$, f no es continua en x=2. Presenta una discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito.

c) $f(x)=\begin{cases}\frac{4}{x-4}\ si\ x<0\\ x-1\ si\ 0<x\le 3\\ \frac{1}{x-3}\ si\ x>3\end{cases}$

Continuidad en x=0

1.- f(0) no está definido.

2.- $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x-1)=-1 \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{4}{x-4}=-1$ Por tanto $\lim_{x\to 0} f(x)=-1$

No es continua, presenta una discontinuidad evitable.

Continuidad en x=3

1.- $f(3)=2$

2.- $\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-} x-1=2 \qquad \lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{x-3}=\infty$

3.-

Como uno de los límites laterales es infinito, f no es continua en x=3. Presenta una discontinuidad no evitable de primera especie de salto infinito.

d) $\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}-2\ si\ x<-2\\ -x^2+4\ si\ -2\le x\le 2\\ 2\ si\ x>2\end{cases}}$

Continuidad en x=-2

1.- $f(-2)=0$

2.- $\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}(-2)=-2 \qquad \lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}(-x^2+4)=0$

Como $\lim_{x\to -2^-} f(x)\ne \lim_{x\to -2^+} f(x)$, f no es continua en x=2. Presenta una discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito.

Continuidad en x=2

1.- $f(2)=0$

2.- $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(-x^2+4)=0 \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} 2=2$

Como $\lim_{x\to 2^-} f(x)\ne \lim_{x\to 2^+} f(x)$, f no es continua en x=2. Presenta una discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito.

e) $\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-9}{x-3} & si\ x\neq 3\\ 6 & si\ x=3\end{cases}}$

1.- $f(3)=6$

2.- $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{0}{0};\ \lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)}=6$

3.- Como f(3) = 6 = $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, f es continua en x=3.

f) $\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}-5-\frac{|x|}{x} & si\ x\neq 0\\ 5 & si\ x=0\end{cases};\ f(x)=\begin{cases}5-\frac{-x}{x} & si\ x<0\\ 5 & si\ x=0\\ 5-\frac{x}{x} & si\ x>0\end{cases}=\begin{cases}6 & si\ x<0\\ 5 & si\ x=0\\ 4 & si\ x>0\end{cases}}$

Continuidad en x=0

1.- $f(0)=5$

2.- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=6 \qquad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=4$

Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, f no es continua en x=0. Presenta una discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito.

g)$f(x)=|x^2-6x+5|$

Se trata del valor absoluto de una función polinómica, f es continua.

h) $f(x)=\begin{cases}|3-x| & si\ x\leq 5\\ \ln e^2 & si\ x>5\end{cases}$

Continuidad en x=5

1.- $f(5)=|3-5|=2$

2.- $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^-}|3-x|=|3-5|=|-2|=2 \qquad \lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^+}\ln e^2=2\ln e=2(1)=2$

3.-

Como $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$, el límite existe. Como $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=f(5)$, por tanto, f es continua en x=5.

33.- Determina el valor de *a* para que esta función sea continua en todo $\mathbb{R}$:

***f*(x)=**$\boldsymbol{\begin{cases}\frac{x+1}{x} & \text{si } x\leq -2\\ -x^2+a & \text{si } x>-2\end{cases}}$

Para x < -2 f es continua por ser una función racional y no anularse el denominador

Para x > -2 f es continua por ser una función polinómica

Para que f sea continua en $\mathbb{R}$ debe ser continua en x = -2, para ello $f(-2)=\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\left(\frac{x+1}{x}\right)=\frac{-2+1}{-2}=\frac{1}{2}\\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}(-x^2+a)=-4+a\end{cases}$$

$\frac{1}{2}=-4+a;\quad a=\frac{9}{2}$ Luego f es continua en todo $\mathbb{R}$ cuando $a=\frac{9}{2}$

34.- Determina el valor del parámetro *b* para que la función $\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}2x-3 & si\ x\leq 3\\ x+b & si\ x>3\end{cases}}$ **sea continua en todo su dominio.**

f es continua en todo su dominio, salvo en x = 3, por ser una función definida a trozos de funciones polinómicas que son continuas, hallamos b para que sea continua en 3

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^-}(2x-3)=3\\ \lim\limits_{x\to 3^+}(x+b)=3+b\end{cases}$$
Para que exista el límite, los límites laterales deben ser iguales, luego:

3 = 3 + *b*; *b* = 0

35.- Halla el valor de *k* para que la función $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4}{x+2} & si\ x\neq -2\\ k & si\ x=-2\end{cases}$ sea continua en x=-2.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-2)}{x+2}=\lim_{x\to -2}(x-2)=-4$$
Como f(-2) = k, k = - 4.

36.- Calcula *m, n y p* para que la siguiente función sea continua en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{x} & si\ x<-8\\ -2m+3 & si\ -8\le x<-4\\ x-\frac{1}{n} & si\ -4\le x<2\\ px & si\ 2\le x\end{cases}$$
f es continua en todo su dominio, salvo en x = -8, x = -4 y x = 2, por ser una función definida a trozos de funciones polinómicas que son continuas.

Continuidad en x=-8

$$\lim_{x\to -8} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to -8^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -8^-}\frac{3}{x}=-\frac{3}{8}\\ \lim\limits_{x\to -8^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -8^+}(-2m+3)=-2m+3\end{cases}$$
$$-2m+3=-\frac{3}{8};\quad m=\frac{27}{16}$$
Continuidad en x=-4

$$\lim_{x\to -4} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to -4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -4^-}(-2m+3)=-2\cdot\frac{27}{16}+3=-\frac{54}{16}+3=-\frac{3}{8}\\ \lim\limits_{x\to -4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -4^+}\left(x-\frac{1}{n}\right)=-4-\frac{1}{n}\end{cases}$$
$$-\frac{3}{8}=-4-\frac{1}{n};\quad n=-\frac{8}{29}$$
Continuidad en x=2

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x-\frac{1}{n}\right)=2+\frac{29}{8}=\frac{45}{8}\\ \lim\limits_{x\to 2^+} px=2p\end{cases}$$
$$2p=\frac{45}{8};\quad p=\frac{45}{16}$$
Luego f es continua en todo $\mathbb{R}$ cuando $m=\frac{27}{16};\ n=-\frac{8}{29};\ p=\frac{45}{16}$

37. Calcula k, en cada caso, de modo que las siguientes funciones sean continuas en todo $\mathbb{R}$.

a) $f(x)=\begin{cases}kx-3 & si\ x<4\\ -x^2+10x-13 & si\ x\ge 4\end{cases}$

f es continua en $x<4$ por ser una función polinómica.

f es continua en x>4 por ser una función polinómica.

Continuidad en x=4

1. $f(4)=-(4)^2+10(4)-13=11$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

2. $\lim_{x\to 4} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 4^-} f(x); & \lim_{x\to 4^-}(kx-3) = 4k-3 \\ \lim_{x\to 4^+} f(x); & \lim_{x\to 4^+}(-x^2+10x-13) = (-(4)^2+10(4)-13) = 11 \end{cases}$

Para que $\exists \lim_{x\to 4} f(x)$ los límites laterales han de ser iguales luego, $4k-3=11$, $k=\frac{7}{2}$

3. f**(4) =**$\lim_{x\to 4} f(x) = 11$ **, luego** $f(x)$ **es continua en x=4 cuando k=**$\frac{7}{2}$**.**

b) $f(x) = \begin{cases} 1+|x| & si\ x<0 \\ k & si\ x=0 \\ \frac{3}{2}x+1 & si\ x>0 \end{cases}$

f **es continua en** $x<0$ **por ser una función polinómica.**
f **es continua en x**>0 **por ser una función polinómica.**
Continuidad en x=0

1. $f(0)=k$
2. $\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x); \lim_{x\to 0^-}(1+|x|) = (1+|0|) = 1 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x); \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{3}{2}x+1\right) = \left(\frac{3}{2}(0)+1\right) = 1 \end{cases}$

Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$; $\exists \lim_{x\to 0} f(x) = 1$

3. Para que f sea continua $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 1$, luego k =1.

38. El espacio recorrido por un móvil en función del tiempo viene dado por la siguiente función:

$$e(t) = \begin{cases} 3t^2 & si\ 0\le t<2 \\ 3t+a & si\ 2\le t\le 5 \\ -t^2+13t+b & si\ 5<t \end{cases}$$

Determina los valores de a y b, para que la función sea continua en t=2 y t=5.

f **es continua en** $0<t<2$ **por ser una función polinómica.**
f **es continua en** $2<t<5$ **por ser una función polinómica.**
f **es continua en** $5<t$ **por ser una función polinómica.**
Continuidad en t =2

1. $e(2) = 3(2)+a = 6+a$
2. $\lim_{t\to 2} e(t) = \begin{cases} \lim_{t\to 2^-} e(t); & \lim_{t\to 2^-}(3t^2) = 12 \\ \lim_{t\to 2^+} e(t); & \lim_{t\to 2^+}(3t+a) = 6+a \end{cases}$

Para que $\exists \lim_{t\to 2} e(t)$ los límites laterales han de ser iguales luego, $6+a=12, a=6$

3. **Para que** e **sea continua** e**(2) =**$\lim_{t\to 2} e(t)$**= 12, luego** $e(a) = 6+a = 12; a = 6$**, entonces** $e(t)$ **es continua cuando** $a=6$

Continuidad en t =5

1. $e(5) = 3t+a = 3(5)+6 = 21$
2. $\lim_{t\to 5} e(t) = \begin{cases} \lim_{t\to 5^-} e(t); \lim_{t\to 5^-}(3t+a) = 21 \\ \lim_{t\to 5^+} e(t); \lim_{t\to 5^+}(-t^2+13t+b) = (-(5)^2+13(5)+b) = 40+b \end{cases}$

Para que $\exists \lim_{t\to 5} e(t)$ los límites laterales han de ser iguales luego, $40+b=21, b=-19$

4. **Para que** e **sea continua** e**(5) =**$\lim_{t\to 5} e(t)$**= 21, luego f es continua cuando b =-19.**

39. Un comerciante quiere vender un determinado producto, y para ello cobra 6€ por cada unidad. No obstante, si se le encargan más de 10 unidades, disminuye el precio por unidad, y por cada x unidades cobra:

$$C(x) = \begin{cases} 6x \;\; si\; 0 < x \le 10 \\ \sqrt{600 + ax^2} \;\; si\; x > 10 \end{cases}$$

a) Halla el valor de a de forma que el precio varíe de forma continua al variar el número de unidades que se compran.

C **es continua en** $0 < x < 10$ **por ser una función polinómica.**

C $es\ continua$ **en** $x > 10$ **por ser una función irracional con el radicando positivo, si a > 0.**

1. $C(10) = 6(10)$**= 60**
2. $\lim_{x\to 10} C(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 10^-} C(x); & \lim_{x\to 10^-}(6x) = 60 \\ \lim_{x\to 10^+} C(x); & \lim_{x\to 10^+}\left(\sqrt{600+ax^2}\right) = \sqrt{600+100a} \end{cases}$

Para que $\exists \lim_{x\to 5} C(x)$ los límites laterales han de ser iguales luego,

$\sqrt{600+100a} = 60$; $\left(\sqrt{600+100a}\right)^2 = (60)^2$ **;** $600 + 100a = 3600$; $\quad a = 30$

3. **Para que** C **sea continua** C**(10) =** $\lim_{x\to 10} C(x)$**= 60, luego C es continua cuando** $a = 30$**. Entonces el precio varía de forma continua al variar el número de unidades que se compran cuando a =30.**

b) ¿A cuánto tiende el precio de una unidad cuando se compran ´´muchísimas´´ unidades?

$\lim_{x\to\infty} C(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{600+ax^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{600+30a}\right) = \infty$

Cuando se compran muchísimas unidades el precio tiende a ∞**.**

40. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3a + 3^{\frac{2}{x}} \;\; si\; x < 0 \\ \frac{4}{2+2^x} \;\; si\; 0 \le x \le 1 \\ \frac{3}{b-2^{-x}} \;\; si\; x > 1 \end{cases}$$

a) Halla a y b para que la función sea continua.

f **es continua en** $x < 0$ **por ser composición de funciones continuas.**
f **es continua en** $0 < x < 1$ **por ser composición de funciones continuas.**
f **es continua en** $x > 1$ **por ser composición de funciones continuas.**

Continuidad en x=0

1. $f(0) = \frac{4}{2+2^{(0)}} = \frac{4}{3}$
2. $\lim_{x\to 0} f(x) \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x); \;\; \lim_{x\to 0^-}\left(3a + 3^{\frac{2}{x}}\right) = 3a + 3^{\frac{2}{0}} = 3a + 3^{\frac{2}{0^-}} = 3a + 0 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x); \;\; \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{4}{2+2^x}\right) = \frac{4}{3} \end{cases}$

Para que $\exists \lim_{x\to 0} f(x)$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$, **entonces** $3a = \frac{4}{3}$**, luego** $a = \frac{4}{9}$

3. **Como** $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{4}{3}$; f **es continua cuando** $a = \frac{4}{9}$

Continuidad en x=1

1. $f(a) = f(1) = \frac{4}{2+2^1} = 1$

2. $\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{4}{2+2^x}\right) = \frac{4}{2+2^1} = 1 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{3}{b-2^{-x}}\right) = \frac{3}{b-2^{-1}} = \frac{3}{b-\frac{1}{2}} = \frac{3}{\frac{2b-1}{2}} = \frac{6}{2b-1} \end{cases}$

Para que $\exists \lim_{x\to 1} f(x),\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x), luego\ 1 = \frac{6}{2b-1}, b = \frac{7}{2}$

3. **Como** f**(1)=** $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$; f **es continua, cuando b=$\frac{7}{2}$**

b) Calcula: $\lim_{x\to -\infty} f(x),\ \lim_{x\to +\infty} f(x)\ y\ \lim_{x\to 0,5} f(x).$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}\left(3a + 3^{\frac{2}{x}}\right) = 3\left(\frac{4}{9}\right) + 3^{\frac{-2}{\infty}} = \frac{12}{9} + 1$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3}{b-2^{-x}}\right) = \frac{3}{\frac{7}{2}-2^{-\infty}} = \frac{6}{7}$

$\lim_{x\to 0,5} f(x) = \lim_{x\to 0,5}\left(\frac{4}{2+2^x}\right) = \frac{4}{2+2^{0,5}} = 1,17$

c) Si a=0 y b=$\frac{1}{8}$, estudia las discontinuidades.

$f(x) = \begin{cases} 3a + 3^{\frac{2}{x}}\ si\ x < 0 \\ \frac{4}{2+2^x}\ si\ 0 \le x \le 1 \\ \frac{3}{b-2^{-x}}\ si\ x > 1 \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} 3^{\frac{2}{x}} & si\ x < 0 \\ \frac{4}{2+2^x} & si\ 0 \le x \le 1 \\ \frac{24}{1-16^{-x}} & x > 1 \end{cases}$

Continuidad en x=0

1. $f(0) = \frac{4}{2+2^0} = \frac{4}{3}$

2. $\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(3^{\frac{2}{x}}\right) = \infty \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{4}{2+2^x}\right) = \frac{4}{3} \end{cases}$

$Por\ tanto\ f\ presenta\ una\ discontinuidad\ \boldsymbol{no\ evitable}\ de\ primera\ especie\ de\ salto\ infinito$

Continuidad en x=1

1. $f(1) = \frac{4}{2+2^1} = 1$

2. $\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{4}{2+2^x}\right) = 1 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{24}{1-16^{-x}}\right) = \frac{128}{5} \end{cases}$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) \ne \lim_{x\to 1^+} f(x)$; $\nexists \lim_{x\to 1} \boldsymbol{f(x)}$

$Por\ tanto\ f\ presenta\ una\ discontinuidad\ \boldsymbol{no\ evitable}\ de\ primera\ especie\ de\ salto\ \boldsymbol{finito}$

41. La función $f(x) = \begin{cases} 2x + 3\ si\ x \le 0 \\ -x^2 - 1\ si\ x > 0 \end{cases}$ **toma valores de signo contrario en los extremos del intervalo** $[-1, 2]$ **y, sin embargo, no tiene ninguna raíz en dicho intervalo, ¿contradice esto el teorema de Bolzano?**

El teorema de Bolzano dice que si una función es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y en los extremos del mismo toma valores de signo contrario, entonces existe un punto en el interior de dicho intervalo en el cual la función se anula.

f **se encuentra en un intervalo cerrado** $[-1, 2]$.

Comprobamos si los extremos toman valores de signo contrario:

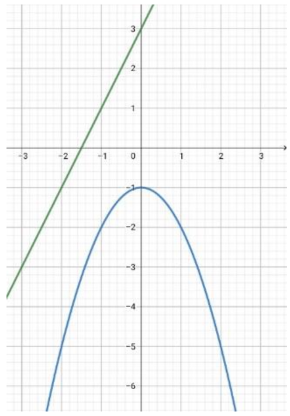
$f(-1) = 2(-1) + 3 = 1$

$f(2) = -(2)^2 - 1 = -5$

Comprobamos si es continua:

f **es continua en** $x < 0$ **por ser una función polinómica.**

f **es continua en** $x > 0$ **por ser una función polinómica.**



Continuidad en x=0;

1. $f(0) = 2(0) + 3 = 3$
2. $\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (2x+3) = 3 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (-x^2 - 1) = -1 \end{cases}$

Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) \nexists \lim_{x\to 0} f(x)$

3. $como \nexists \lim_{x\to 0} f(x), f$ **presenta una discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito.**

Luego, esto no contradice el teorema de Bolzano pues la función no es continua en x=0 y por tanto en el intervalo $[-1, 2]$.

42.- Comprueba que la función $f(x) = -x^3 + x^2 + 2$ tiene al menos una raíz en el intervalo $[1, 2]$.

f es continua en $[1,2]$ ya que es una función polinómica, que siempre son continuas.

$f(1) = -1^3 + 1^2 + 2 = -1 + 1 + 2 = 2 \to f(1) > 0$

$f(2) = -2^3 + 2^2 + 2 = -8 + 4 + 2 = -2 \to f(2) < 0$

Según el teorema de Bolzano, existe un punto c perteneciente a (1,2), tal que $f(c) = 0$, es decir, $-c^3 + c^2 + 2 = 0 \to \exists c \in (1,2)$

Por lo tanto, existe al menos una raíz en (1,2).

43.- Demuestra que la función $f(x) = -2x^3 + 3x - 8$ corta al eje de abscisas en el intervalo $[-2, 2]$. ¿Se podría decir lo mismo de la función $g(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 4}{x+1}$?

f es continua en $[-2,2]$ ya que es una función polinómica, que siempre son continuas.

$f(-2) = -2(-2)^3 + 3(-2) - 8 = 16 - 6 - 8 = 2 \to f(-2) > 0$

$f(2) = -2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2 - 8 = -16 + 6 - 8 = -18 \to f(2) < 0$

Según el teorema de Bolzano, existe un punto c perteneciente a (-2,2), tal que $f(c) = 0$, es decir, $-2c^3 + 3c - 8 = 0 \to \exists c \in (-2,2)$

Por tanto, f corta al eje de abscisas por lo menos en una ocasión en el intervalo (-2,2)

Hallamos el dominio de g:

$x + 1 = 0; \;\; x = -1 \to Dom: \mathbb{R} - \{-1\}$

Como g no es continua en el intervalo $[-2,2]$, no podemos asegurar que corte el eje de abscisas en (-2,2).

44.- Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[-3, 2]$, donde $f(-3) < 0$ y $f(2) = 5$. ¿Se puede asegurar que la función $g(x) = f(x) - 2$ tiene al menos un cero en el intervalo $[-3, 2]$?

La función g es continua en el intervalo $[-3,2]$, debido a que se trata de una función continua menos una función constante.

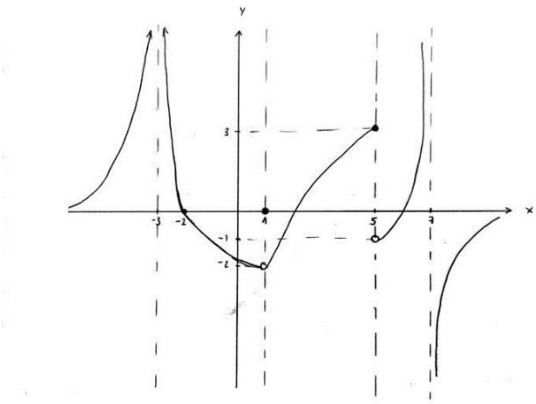
$g(-3) = f(-3) - 2 = < 0 - 2 = < 0 \rightarrow g(-3) < 0$

$g(2) = f(2) - 2 = 5 - 2 = 3 \rightarrow g(2) > 0$

Según el teorema de Bolzano, existe un punto c perteneciente a (-3,2), tal que $g(c) = 0$, es decir, $\exists c \in (-3,2)$ donde g tiene un cero.

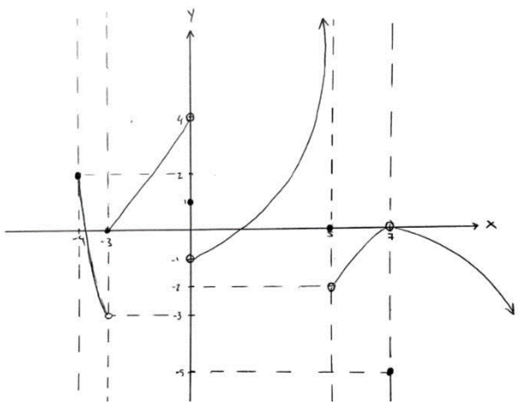
45.- Dibuja la gráfica de una función que se ajuste a las siguientes condiciones:

- **Continua en $\mathbb{R} - \{-3, 1, 5, 7\}$**
- $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x\to -1} f(x) = -2,\ f(1) = 0$
- **Discontinuidad de salto finito en $x = 5$ y de salto infinito en $x = 7$**
- $f(-2) = 0$



46.- Dibuja la gráfica de una función $f(x)$ tal que:

- **Dom $f(x) = \{x \in \mathbf{R} / x \geq 4\}$**
- $f(-4) = 2,\ f(0) = 1,\ f(5) = 0,\ f(7) = -5$
- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = -3 & \lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = 0 & \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 4 & \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -1 \\ \lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = +\infty & \lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = -2 & \lim\limits_{x\to 7} f(x) = 0 & \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$



AUTOEVALUACIÓN

1. Los límites de la función $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2 & si\ x<0 \\ x^3-7x^2+3 & si\ x>0 \end{cases}$ a la izquierda de cero y a la derecha de cero valen:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x^2-3x+2)=2$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x^3-7x^2+3)=3$$

c) 2 y 3

2. El límite $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3^x-3^2}{3^{x+1}}\right)$ vale:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3^x-3^2}{3^{x+1}}\right)=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\to\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3^x}{3^{x+1}}-\frac{3^2}{3^{x+1}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{3^2}{3^{x+1}}\right)=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$$

b) $\frac{1}{3}$

3. El límite $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+x-5}{x-x^2+2}\right)$ vale:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+x-5}{x-x^2+2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2}{-x^2}\right)\to -3$$

a) -3

4. El límite $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4}}{x}$ vale:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4}}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\to\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{4-x}-\sqrt{4})(\sqrt{4-x}+\sqrt{4})}{x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4})}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4-x}^2-\sqrt{4}^2}{x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4})}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4})}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{(\sqrt{4-x}+\sqrt{4})}=0$$

a) 0

5. El límite $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4}}{x}$ vale:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4}}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)\to\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{4-x}-\sqrt{4})(\sqrt{4-x}+\sqrt{4})}{x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4})}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}^2-\sqrt{4}^2}{x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4})}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4})}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{(\sqrt{4-x}+\sqrt{4})}=$$
$$\frac{-1}{2\sqrt{4}}\to-\frac{1}{4}$$

d) $-\frac{1}{4}$

6. Para que la función $f(x)=\begin{cases} x^3-3x^2+a & si\ x<3 \\ 2x^2-1 & si\ x\geq 3 \end{cases}$ sea continua "a " debe valer:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}(x^3-3x^2+a)=3^2-3(3)+a=0+a$$
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}(2x^2-1)=2(3)^2-1=17$$

a debe valor 17 porque para ser continua tiene que existir el límite en 3 y para ello ser los dos límites iguales.

c) 17

7. Indica cuál de las siguientes funciones tiene una asíntota vertical en x = 2.

a) $\lim\limits_{x\to 2}\log(x-2)=\log(0)=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\frac{2x}{1}=4$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x-2}=0$

d) $\lim\limits_{x\to 2}\sin(\cos(x-2))=0$

a) $\mathbf{f(x)=\log(x-2)}$

8. Indica cuál de las siguientes funciones tiene una asíntota horizontal en y = 2.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\log(x-2)=\infty$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-4}{x^2-2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=2$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x-2}=\infty$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\tan(\cos(x-2))=es\ divergente$

b) $\mathbf{\frac{2x^2-4}{x^2-2}}$

9. Indica cuál de los siguientes límites NO vale 0.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{27}+5}{e^x}=0$ Como la exponencial es de orden mayor que el polinomio el límite es 0.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x+2}}=\frac{5}{\infty+\infty}=0$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+3}}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\to\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+3})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3})}{x(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3})}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4}{x(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3})}=0$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x+5}{e^x-5}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$

d)

10. Los puntos de discontinuidad de la función $g(x)=|x^2-9|$ son:

g(x) es el valor absoluto de una función polinómica y por tanto siempre continua

c) ninguno, es una función continua.