Matemáticas II

2º Bachillerato

Capítulo 12: Distribuciones de Probabilidad

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por: CARMEN, JULIA, LAURA, ESPERANZA, ISMAEL F, AMALIA, ISMAEL C, OLIVIA, NATALIA, AITOR, ROSA, AITANA, NEREA, IRENE, CELIA P, LUCÍA, ALEJANDRA, CELIA S, ANDREA.

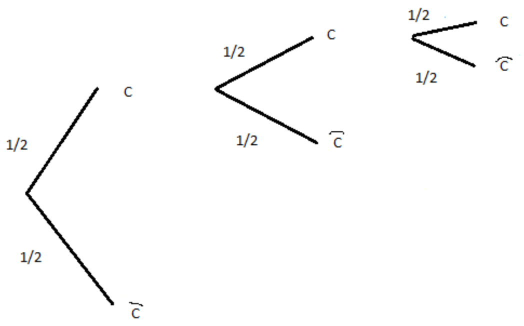
IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

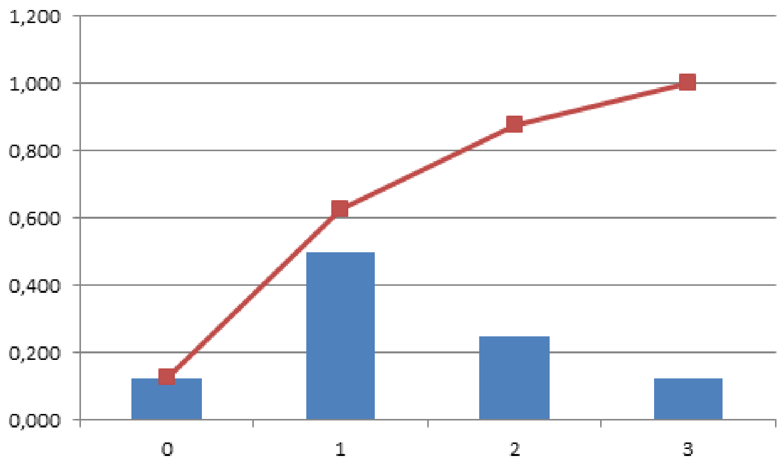
Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

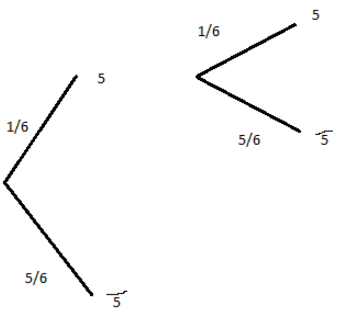
1. Se lanzan 3 monedas y contamos el número de caras que salen. Haz un diagrama un árbol. Escribe en una tabla la función de cuantía y la función de distribución. Representa la función de cuantía en un histograma y con una línea la función de distribución.



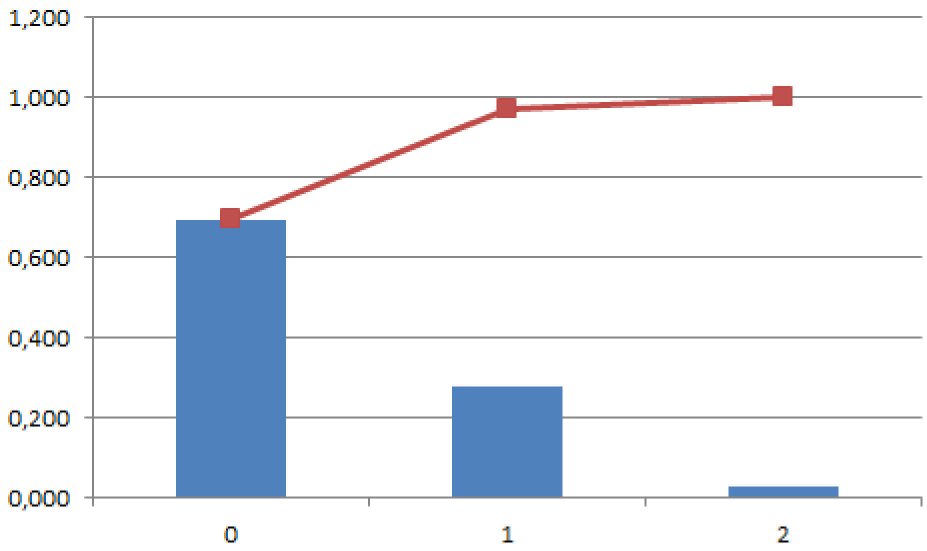
Caras	P_i	F
0	1/8	1/8
1	1/2	5/8
2	1/4	7/8
3	1/8	1



2. Se lanzan 2 dados y contamos el número de 5 que aparecen. Haz un diagrama en árbol, escribe en una tabla la función de cuantía y la función de distribución, y represéntalas gráficamente.



Número 5	**p_i**	**F**
0	**25/36**	**25/36**
1	**10/36**	**35/36**
2	**1/36**	**1**



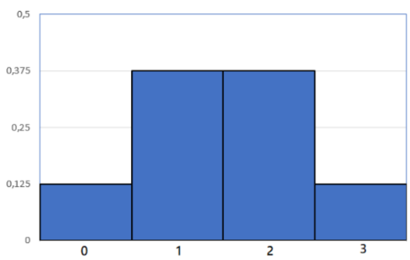
3. Se lanzan 3 monedas. Por jugar nos cobran 1 euro, y por cada cara que aparezca ganamos 1 euro. Escribe una distribución de probabilidad y representa el histograma. ¿Cuánto esperas ganar o perder en 100 lanzamientos?

caras	0	1	2	3
probabilidad	1/8	3/8	3/8	1/8
Ganancia	-1	0	1	3

$$E(x) = (-1)\left(\frac{1}{8}\right) + 0\left(\frac{3}{8}\right) + 1\left(\frac{3}{8}\right) + 2\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2}$$

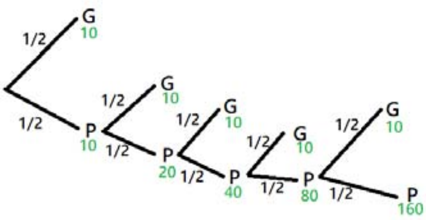
$$100 \cdot \frac{1}{2} = 50€$$

Esperamos ganar 50€



4. Una persona apuesta 10 euros a un juego de tirar una moneda y que salga cruz o cara (o similar). Si gana se retira y deja de jugar. Si pierde, apuesta el doble, 20 euros. Si gana se retira. Si pierde apuesta el doble, 40 euros. Y así sucesivamente. Con esta estrategia siempre acaba ganando 10 euros, pero tiene un defecto, que no lleve suficiente dinero para seguir jugando hasta ganar. Imagina que lleva 500 €. A) Haz un diagrama de árbol y calcula todas las posibilidades. B) La distribución de probabilidad: $Ganancia(x) \rightarrow Probabilidad(x)$. C) ¿Es un juego ventajoso? ¿Y para nuestro jugador? D) Calcula la probabilidad de ganar 10 euros y la de perder 500 euros.

A)



B)

Apuesta	10	20	40	80	160	320, No puede apostar
Pierde	-10	-30	-70	-150	-310	
Gana Tiene	10	10	10	10	10	
Probabilidad	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	

C) Es un juego ventajoso para los creadores de ese juego ya que tendrán muchas ganancias. No es un juego ventajoso para nuestro jugador ya que en caso de que gane solo ganaría 10 euros y recupere el dinero que ya tenía él desde el principio.

D) $P(ganar\ 10€) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots.$

Se trata de la suma de una progresión geométrica de razón ½, $S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$

No puede perder los 500€ pues en la 5ª jugada ya ha perdido 310€ y no puede apostar más.

***5.* Lanzamos dos dados. Si apostamos al 7 y sale, recuperamos tres veces lo apostado. Si apostamos que sale menor que 7 y sale, recuperamos lo apostado, y lo mismo si apostamos que sale mayor que 7. ¿Cuál es la mejor estrategia?**

1º. Se hace una tabla:

	Sale 7	< 7	> 7
Ganancia	*3x*	*x*	*x*
P_i	$\frac{6}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{15}{36}$

2º. Multiplicamos las ganancias por las probabilidades y el resultado que salga mayor es el más favorable. Sea x la cantidad apostada.

- 3·x €·6/36 = 0.5€
- x €·15/36 = 0.42€

La mejor estrategia es apostar por el 7 ya que su porcentaje de que salgas beneficiado es superior a las otras posibilidades.

***6.* Se ha comprobado que la distribución de probabilidad del sexo de un recién nacido es:**

Sexo bebé	**chica**	**chico**
Probabilidad	**0,485**	**0,515**

En un hospital van a nacer hoy 10 bebés. Escribe la expresión de probabilidad de que nazcan 7 chicas.

1º. Lo más importante es decir a que llamas x.

X: nacer chicas, X sigue una B(10, 0,485)

2º. Luego aplicamos la fórmula de distribución binomial y obtenemos el resultado.

$$P(x = 7) = \binom{10}{7} \cdot (0{,}485)^7 \cdot (0{,}515)^3 = 0{,}1034$$

La probabilidad de que nazcan 7 niñas de los 10 bebés que van a nacer es un 0,1034.

7. Se estima que el porcentaje de hogares que utiliza una determinada marca de tomate frito es del 12 %. En una muestra de 20 hogares, ¿qué probabilidad hay de encontrar entre 6 y 15 que lo utilicen? (No calcules, soló plantea como lo calcularías).

1º. Lo más importante es decir a que llamas X.

X: `*Hogar que utiliza la marca de tomate frito*´ $\rightarrow$ B(20, 0,12)

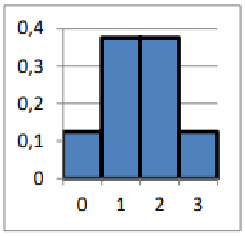
$$P(6 < x < 15) = P(x=7) + P(x=8) + P(x=9) + P(x=10) +$$
$$+P(x=11) + P(x=12) + P(x=13) + P(x=14) =$$
$$= \binom{20}{7} \cdot 0{,}12^7 \cdot 0{,}88^{13} + \binom{20}{8} \cdot 0{,}12^8 \cdot 0{,}88^{12} \binom{20}{9} \cdot 0{,}12^9 \cdot 0{,}88^{11} + \binom{20}{10} \cdot 0{,}12^{10} \cdot 0{,}88^{10} +$$
$$+ \binom{20}{11} \cdot 0{,}12^{11} \cdot 0{,}88^9 + \binom{20}{12} \cdot 0{,}12^{12} \cdot 0{,}88^8 + \binom{20}{13} \cdot 0{,}12^{13} \cdot 0{,}88^7 + \binom{20}{14} \cdot 0{,}12^{14} \cdot 0{,}88^6$$

8. Lanzamos dos monedas y contamos el número de caras. Calcula la media y la desviación típica de dicho experimento.

- Definimos la variable: $x \rightarrow sacar\ cara$
- Calculamos que: $P(x) = \frac{1}{2} = p$
- Tenemos que: $X \sim B\left(2, \frac{1}{2}\right)$
- Calculamos q: $q = 1 - p \rightarrow q = 1 - \frac{1}{2} \rightarrow q = \frac{1}{2}$
- Calculamos la **media:** $\mu = np \rightarrow \mu = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$
- Calculamos la desviación típica: $\sigma = \sqrt{npq} \rightarrow \sigma = \sqrt{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \rightarrow \sigma = \frac{\sqrt{2}}{2}$

9. Observa el histograma del experimento de lanzar una moneda 3 veces. Indica las siguientes probabilidades. A) Probabilidad de que el número de caras sea menor que 1. B) Probabilidad de que el número de caras sea menor o igual a 1.

- Definimos la variable: $x \rightarrow salir\ cara$
- Calculamos que: $P(x) = \frac{1}{2} = p$
- Tenemos que: $X \sim B\left(3, \frac{1}{2}\right)$
- Calculamos q: $q = 1 - p \rightarrow q = 1 - \frac{1}{2} \rightarrow q = \frac{1}{2}$



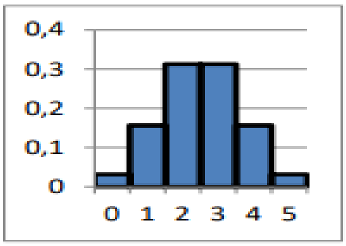
n = 3. B(3, 1/2).

a) $P(x < 1) = p(x = 0) = \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

b) $P(x \leq 1) = P(x = 0) + P(x = 1) = \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \binom{3}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

10. Observa el histograma del experimento de lanzar una moneda 5 veces. Indica las siguientes probabilidades. A) Probabilidad de que el número de caras sea menor que 3. B) Probabilidad de que el número de caras sea menor o igual a 3.

- Definimos la variable: $x \rightarrow sacar\ cara$
- Calculamos que: $P(x) = \frac{1}{2} = p$
- Tenemos que: $X \sim B\left(5, \frac{1}{2}\right)$
- Calculamos q: $q = 1 - p \rightarrow q = 1 - \frac{1}{2} \rightarrow q = \frac{1}{2}$



$n = 5$. $B(5,\ 1/2)$.

a) $P(x < 3) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) = \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}$

b) $P(x \leq 3) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3) = \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{16}$

11. Escribe la expresión (no lo calcules) de la probabilidad de que al lanzar una moneda 15 veces el número de caras sea menor que 5.

<u>DATOS</u>

n=15 k=nº de caras

p(éxito) = $\frac{1}{2}$ = p q= P(fracaso)= 1 – p = $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

<u>FÓRMULA</u>

$P(x = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$

<u>**SOLUCIÓN:**</u>

$$P(x < 5) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3) + P(x = 4) =$$
$$= \binom{15}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{15} + \binom{15}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{14} + \binom{15}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{13} +$$
$$+ \binom{15}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12} + \binom{15}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{11}$$

12. Escribe la expresión (no lo calcules) de la probabilidad de que al lanzar un dado 15 veces el número de cincos sea mayor que 10.

<u>DATOS</u>

n=15 k= número de 5s > 10 p= $\frac{1}{6}$ q = 1 – p = $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

<u>FÓRMULA</u>

$P(x = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$

SOLUCIÓN:

$$P(x > 10) = P(x = 11) + P(x = 12) + P(x = 13) + P(x = 14) + P(x = 15) =$$

$$= \binom{15}{11}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{11}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{4} + \binom{15}{12}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{12}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{3} + \binom{15}{13}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{13}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{2} +$$

$$+\binom{15}{14}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{14}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{1} + \binom{15}{15}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{15}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{0}$$

13. En el control de calidad de bombillas de bajo consumo de una fábrica se ha comprobado que el 90% son buenas. Se toma una muestra de 500 bombillas. Por término medio, ¿cuántas serán de buena calidad? Calcula la media, la varianza y la desviación típica.

DATOS

n=500 p = 0,9 q = 1 − p = 1 – 0,9 = 0,1 B(n , p) = B(500 , 0,9)

FÓRMULAS

Media: $\mu = n \cdot p$ Varianza: $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q$ Desviación típica: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{\sigma^2}$

SOLUCIÓN:

$\mu = 500 \cdot 0{,}9 = 450$ $\sigma^2 = 500 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 45$ $\sigma = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \approx 6{,}7$

14. En el estudio sobre una nueva medicina para la hepatitis C se ha comprobado que produce curaciones completas en el 80% de los casos tratados. Se administra a mil nuevos enfermos, ¿cuántas curaciones esperaremos que se produzcan?

DATOS

n= 1000 p = 0,8 B(n , p); B(1000 , 0’8)

FÓRMULA

$E(x) = \mu = n \cdot p$

SOLUCIÓN:

$\mu = 1000 \cdot 0{,}8 = 800$ Esperamos que se produzcan 800 curaciones.

15. Utiliza la desigualdad de *Chebycheff* para indicar los intervalos de probabilidad para el juego de apostar a obtener más de 7 al tirar dos dados.

(Ayuda: $\mu = -\frac{1}{6}$ y $\sigma \approx 0{,}986$)

De acuerdo con la desigualdad de *Chebycheff,* que dice: $P(|x-\mu| \le k\sigma) \ge 1 - \frac{1}{k^2}$ *y teniendo en cuenta los valores de* $\mu = -\frac{1}{6}$ *y* $\sigma \approx 0{,}986$, los intervalos de probabilidad para 2 y 3 desviaciones típicas son:

$$P\left(\left|x+\frac{1}{6}\right| \le 2\cdot 0{,}986\right) \ge 1 - \frac{1}{2^2} \to P(\mu - 2\cdot\sigma \le x \le \mu + 2\cdot\sigma)$$

$\to P(-2{,}139 \le x \le 1{,}805) \ge 0{,}75$ el intervalo sería $(-2{,}139,\ 1{,}805)$

$$P\left(\left|x+\frac{1}{6}\right| \le 3\cdot 0{,}986\right) \ge 1 - \frac{1}{3^2} \to P(\mu - 3\cdot\sigma \le x \le \mu + 3\cdot\sigma)$$

$\to P(-3{,}125 \le x \le 2{,}791) \ge 0{,}89$ el intervalo sería $(-3{,}125,\ 2{,}791)$

16. En la fábrica de bombillas de bajo consumo con B (500, 0.9) utiliza la desigualdad de *Chebycheff* para determinar los intervalos tales que $P(a \leq x \leq b) \geq 0,75$, y que $P(c \leq x \leq d) \geq 0,89$.

Se trata de una distribución binomial B(500, 0,9) cuyos parámetros son :

Media: μ= np; $\mu = 500 \cdot 0,9 = 450$ Varianza: V=npq; V= 500 · 0,9 · 0,1 = 45
Desviación típica: $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{45} = 6,708$

Teniendo en cuenta la desigualdad de Chebycheff, $P(|x-\mu| \leq k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$, para k=2 y k=3:

$\mathrm{P}(\mu - 2\cdot\sigma \leq x \leq \mu + 2\cdot\sigma) \geq 0,75 \rightarrow \mathrm{P}(450 - 2\cdot 6,708 \leq x \leq 450 + 2\cdot 6,708) \geq 0,75$

$\mathrm{P}(436,584 \leq x \leq 463,416) \geq 0,75$ el intervalo sería $(437, \ 464)$

$P(\mu - 3\cdot\sigma \leq x \leq \mu + 3\cdot\sigma) \geq 0,89 \rightarrow P(450 - 3\cdot 6,708 \leq x \leq 450 + 3\cdot 6,708) \geq 0,89$

$\mathrm{P}(429,876 \leq x \leq 470,124) \geq 0,89$ el intervalo sería $(430, 471)$

17. En la medicina para la hepatitis C con B(1000, 0,8) utiliza la desigualdad de Chebycheff para determinar los intervalos tales que la probabilidad de curación sea $P(a \leq x \leq b) \geq 0,75$, y que $P(c \leq x \leq d) \geq 0,89$.

Se trata de una distribución binomial B(1000, 0,8) cuyos parámetros son :

Media: μ= np; $\mu = 1000 \cdot 0,8 = 800$ Varianza: V=npq; V= 1000 · 0,8 · 0,2 = 160
Desviación típica: $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{160} = 12,649$

Teniendo en cuenta la desigualdad de Chebycheff, $P(|x-\mu| \leq k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$, para k=2 y k=3:

$P(\mu - 2\cdot\sigma \leq x \leq \mu + 2\cdot\sigma) \geq 0,75 \rightarrow P(800 - 2\cdot 12,649 \leq x \leq 800 + 2\cdot 12,649) \geq 0,75$

$\mathrm{P}(774,702 \leq x \leq 825,298) \geq 0,75$ el intervalo sería $(775, 826)$

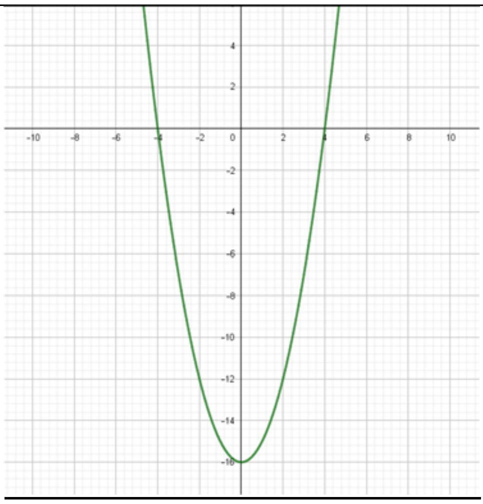
$P(\mu - 3\cdot\sigma \leq x \leq \mu + 3\cdot\sigma) \geq 0,75 \rightarrow P(800 - 3\cdot 12,649 \leq x \leq 800 + 3\cdot 12,649) \geq 0,75$

$\mathrm{P}(762,053 \leq x \leq 837,947) \geq 0,89$ el intervalo sería $(763, \ 838)$

18. Calcula A para que $f(x) = A(x^2 - 16)$ sea una función de densidad. Determina el dominio. Calcula la media y la varianza.

a)

	Para que f(x) sea una función de densidad se debe cumplir que:

	$\int_a^b f(x)\,dx = 1$ y $f(x) \geq 0$ $f(x)$ es negativa en $-4 \leq x \leq 4$ y positiva en el resto, por tanto, para que sea función de densidad A ha de ser negativa Los límites serán – 4 y 4

$$\int_{-4}^{4} A\,(x^2-16)dx = A\int_{-4}^{4}(x^2-16)\,dx = A\left[\frac{x^3}{3}-16x\right]_{-4}^{4} =$$

$$= A\left[\left(\frac{4^3}{3}-16\cdot 4\right)-\left(\frac{(-4)^3}{3}-16\cdot(-4)\right)\right] = A\cdot\left(\frac{-256}{3}\right)$$

$$\frac{-256}{3}A = 1 \rightarrow A = \frac{-3}{256}$$

b) $Dom\ f(x) = \{-4 \leq x \leq 4\}$

c)

$$\mu = \int_a^b x\cdot f(x)\,dx = \int_{-4}^{4} x\cdot\frac{-3}{256}(x^2-16)\,dx = \frac{-3}{256}\int_{-4}^{4} x\cdot(x^2-16)\,dx =$$

$$= \frac{-3}{256}\int_{-4}^{4}(x^3-16x)\,dx = -\frac{3}{256}\left[\frac{x^4}{4}-\frac{16x^2}{2}\right]_{-4}^{4} =$$

$$= \frac{-3}{256}\left[\left(\frac{4^4}{4}-\frac{16\cdot 4^2}{2}\right)-\left(\frac{(-4)^4}{4}-\frac{16\cdot(-4)^2}{2}\right)\right] = 0$$

d)

$$\sigma^2 = \int_a^b (x-\mu)^2\cdot f(x)\,dx = \int_{-4}^{4} x^2\cdot\frac{-3}{256}(x^2-16)\,dx = \frac{-3}{256}\int_{-4}^{4} x^2(x^2-16)\,dx =$$

$$= \frac{-3}{236}\int_{-4}^{4}(x^4-16x^2)\,dx = \frac{-3}{236}\left[\frac{x^5}{5}-\frac{16x^3}{3}\right]_{-4}^{4} =$$

$$= \frac{-3}{256}\left[\left(\frac{4^5}{5}-\frac{16\cdot(4)^3}{3}\right)-\left(\frac{(-4)^5}{5}-\frac{16\cdot(-4)^3}{3}\right)\right] = \frac{16}{5}$$

19. Utiliza la tabla de la normal tipificada para calcular:

a) *P*(*z* ≤ 0,37); Buscamos en la primera columna el 0,3, y el 0,07 lo buscamos en la primera fila.

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

Obtenemos que $P(z \leq 0{,}37)$=**0,6443**

b) $P(z < 1{,}51)$; Buscamos en la primera columna el 1,5, y el 0,01 lo buscamos en la primera fila. Obtenemos que $P(z < 1{,}51)$ = **0,9345**

c) $P(z \geq 0{,}87)$; como el área total es de 1, y la curva simétrica,

$P(z \geq 0{,}87) = 1 - P(z \leq 0{,}87) = 1 - 0{,}8078 = \mathbf{0{,}1922}$

d) $P(z \leq -0{,}87)$; como el área total es de 1, y la curva simétrica,

$P(z \geq -0{,}87) = 1 - P(z \leq 0{,}87) = 1 - 0{,}8078 = \mathbf{0{,}1922}$

e) $P(0{,}32 < z < 1{,}24)$; calculamos $P(0{,}32 < z < 1{,}24) = P(z < 1{,}24) - P(z < 0{,}32)$.
Buscamos en la tabla y obtenemos 0,8907 - 0,6217 = **0,269**

20. Se trata a pacientes con trastorno de sueño con un tratamiento que modela el número de días con una distribución normal de media 290 días y desviación típica 30. Calcula la probabilidad de que al tomar una persona al azar su tratamiento dure más de 300 días.

X: tener cáncer, X→N (290, 30)

$$P(X > 300) = P\left(Z > \frac{300 - 290}{30}\right) = P(Z > 0{,}33) = 1 - P(Z \leq 0{,}33) = 1 - 0{,}6293 = 0{,}3707$$

$$\underline{0{,}3707 \cdot 100 = \mathbf{37{,}07\%}}$$

21. En una estación meteorológica que las precipitaciones anuales de lluvia tienen una media de 450 mm/m² con una desviación típica de 80mm/m². Suponemos que la variable aleatoria sigue una distribución normal. Calcula la probabilidad de que: a) Este próximo año la precipitación exceda los 500 mm/m². b) La precipitación este entre 400 y 510 mm/m². c) La precipitación sea menor de 300 mm/m².

Solución:

$$\mu = 450 \text{ mm} / \text{m}^2; \quad \sigma = 80 \text{ mm} / \text{m}^2 \quad X \sim N(450{,}80)$$

a) $P(X \geq 500) \rightarrow Z \sim N(0{,}1)$

$$P\left(Z \geq \frac{x-\mu}{6}\right) \rightarrow P\left(Z \geq \frac{500-450}{80}\right) = P(Z \geq 0{,}625) = 1 - P(Z \leq 0{,}625) =$$
$$= 1 - 0{,}7324 = 0{,}2676$$

b) $P(400 \leq X \leq 510) \rightarrow Z \sim N(0{,}1)$

$$P\left(\frac{x_1-\mu}{6} \leq Z \leq \frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{400-450}{80} \leq Z \leq \frac{510-450}{80}\right) = P(-0{,}635 \leq Z \leq 0{,}75) =$$
$$= P(Z \leq 0{,}75) - P(Z \leq -0{,}625) = P(Z \leq 0{,}75) - \left(1 - P(Z \geq 0{,}625)\right) =$$
$$= 0{,}7734 - 0{,}2676 = 0{,}5058$$

c) $P(x < 300) \rightarrow Z \sim N(0{,}1)$

$$P(Z < 300) = P\left(Z < \frac{300-450}{80}\right) = P(Z < -1{,}875) = 1 - P(Z < 1{,}875) =$$
$$= 1 - 0{,}9693 = 0{,}0307$$

22. En el caso del problema anterior de una N(450, 80) determina la probabilidad de que la variable esté en los intervalos (μ – σ, μ + σ), (μ – 2σ, μ + 2σ), (μ – 3σ, μ + 3σ).

A) (μ – σ, μ + σ)

(450-80, 450+80) ; $P(370 \leq Z \leq 530) =$

$= P\left(\frac{370-450}{80} \leq Z \leq \frac{530-450}{80}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1) = P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1)$

$P(Z \leq 1) = 0{,}8413$; $P(Z \leq -1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$

Luego P(μ – σ < x < μ + σ) =0,8413 – 0,1587 = 0.6826

B) (μ – 2σ, μ + 2σ)

(450-2·80, 450+2·80) ; $P(290 \leq Z \leq 610) =$

$$= P\left(\frac{290-450}{80} \leq Z \leq \frac{610-450}{80}\right) = P(-2 \leq Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq -2)$$

$P(Z \leq 2) = 0{,}9772$ $P(Z \leq -2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$

Luego P(μ – 2σ < x < μ + 2σ) =0,9772 – 0,0228 = 0.9544

C) (μ – 3σ, μ + 3σ)

(450-3·80, 450+3·80) ; $P(210 \leq Z \leq 690) =$

$$= P\left(\frac{210-450}{80} \leq Z \leq \frac{690-450}{80}\right) = P(-3 \leq Z \leq 3) = P(Z \leq 3) - P(Z \leq -3)$$

$P(Z \leq -3) = 1 - P(Z \leq 3) = 1 - 0{,}9987 = 0{,}0013$ $P(Z \leq 3) = 0{,}9987$

Luego P(μ – 3σ < x < μ + 3σ) =0,9987 – 0,0013 = 0.9974

23.- En una fábrica de coches se hacen pruebas para conocer el tiempo que tardan sus vehículos en alcanzar la velocidad punta. Se considera que esa variable aleatoria tiempo se distribuye según una distribución normal de media 20 s y desviación típica 2 s. Calcula las probabilidades siguientes: a) Que un vehículo alance su velocidad punta a los 25 s. b) Alcance su velocidad punta en menos de 25 s. c) La alcance entre 18 s y 22 s. d) ¿Qué velocidad punta consideras que tendrán los vehículos rápidos? e) ¿Y los lentos?

X: segundos necesarios para alcanzar la velocidad punta. $\mu = 20$ $\sigma = 2$

a) $P(x = 25) \to P(24{,}5 \leq x' \leq 25{,}5) \to \ tipificamos \to P\left(\frac{24{,}5-20}{2} \leq z \leq \frac{25{,}5-20}{2}\right) = P(2{,}25 \leq z \leq 2{,}75) = P(z \leq 2{,}75) - P(z \leq 2{,}25) = 0{,}9970 - 0{,}9878 = 0{,}0092$

b) $P(x \leq 25) \to tipificamos \to P\left(z \leq \frac{25-20}{2}\right) = P(z \leq 2{,}5) = 0{,}9938$

c) $P(18 \leq x \leq 22) \to tipificamos \to P\left(\frac{18-20}{2} \leq z \leq \frac{22-20}{2}\right) = P(-1 \leq z \leq 1) = P(z \leq 1) - P(z \leq -1) = P(z \leq 1) - [1 - P(z \leq 1)] = 0{,}8413 - (1 - 0{,}8413) = 0{,}8413 - 0{,}1587 = 0{,}6826$

d) $P(x \geq 20) = 1 - P(x \leq 20) \to \text{tipificamos} \to 1 - P\left(z \leq \frac{20-20}{2}\right) = 1 - P(z \leq 0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

e) $P(x \leq 20) \to tipificamos \to P\left(z \leq \frac{20-20}{2}\right) = P(z \leq 0) = \frac{1}{2}$

24. Se lanza una moneda mil veces, ¿cuál es la probabilidad de que el número de caras obtenidas esté entre 400 y 600? ¿y de que sea mayor de 800?

a) $x \to salir\ cara \qquad n = 1000 \qquad p = \frac{1}{2}$

$$\mu = np = 1000 \cdot \frac{1}{2} = 500$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{1000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)} = 5\sqrt{10}$$

$$x \rightsquigarrow B\left(1000, \frac{1}{2}\right) \qquad z \rightsquigarrow N\left(500, 5\sqrt{10}\right)$$

$P(\mathbf{400} < \mathbf{x} < \mathbf{600}) \to P(400{,}5 \leq x' \leq 599{,}5) \to \text{tipificamos}$

$$\to P\left(\frac{400{,}5 - 500}{5\sqrt{10}} \leq z \leq \frac{599{,}5 - 500}{5\sqrt{10}}\right) = P(-6{,}29 \leq z \leq 6{,}29) = P(z \leq 6{,}29) - P(z \leq -6{,}29)$$
$$= P(z \leq 6{,}29) - P(z \geq 6{,}29) = P(z \leq 6{,}29) - [1 - P(z \leq 6{,}29)] = 1 - 0 = 1$$

$$P(x > 800) = P(x' \geq 800{,}5) \to tipificamos \to P\left(z \geq \frac{800{,}5 - 500}{5\sqrt{10}}\right) = P(z \geq 19) =$$

$$= 1 - P(z \leq 19) = 1 - 1 = 0$$

25. En una fábrica de bombillas de bajo consumo se sabe que el 70% de ellas tienen una vida media superior a 1000 horas. Se toma una muestra de 50 bombillas, ¿cuál es la probabilidad de que haya entre 20 y 30 cuya vida media sea superior a mil horas?, ¿y la probabilidad de que haya más de 45 cuya vida sea superior a 1000 horas?

X: bombilla cuya vida media es superior a 1000 horas. $X \rightsquigarrow B(50,\ 0{,}7)$

$n = 50 \qquad p = \frac{70}{100}$

$$\mu = np = 50 \cdot \frac{70}{100} = 35$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{50 \cdot \frac{70}{100}\left(1 - \frac{70}{100}\right)} = \frac{\sqrt{42}}{2}$$

a) $P(20 < X < 30) \to P(20{,}5 \leq X' \leq 29{,}5) \to tipificamos \to P\left(\frac{20{,}5-35}{\frac{\sqrt{42}}{2}} \leq Z \leq \frac{29{,}5-35}{\frac{\sqrt{42}}{2}}\right) =$

$P(-4{,}47 \leq z \leq -1{,}69) = P(z \leq -1{,}69) - (z \leq -4{,}47) = P(z \geq 1{,}69) - (z \geq 4{,}47) =$
$[1 - P(z \leq 1{,}69)] - [1 - P(z \leq 4{,}47)] = P(1 - 0{,}9545) - (1 - 1) = 0{,}0455 - 0 = 0{,}0455$

b) $P(x > 45) \to P(x' \geq 45{,}5) \to tipificamos \to P\left(x \geq \frac{45{,}5-35}{\frac{\sqrt{42}}{2}}\right) = P(x \geq 3{,}24) = \quad 1 -$
$P(x \leq 3{,}24) = 1 - 0{,}9994 = 0{,}0006$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

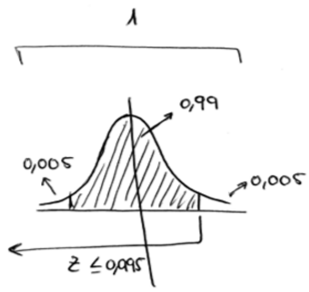
26.- Se investigan a pie de urna las preferencias de votos en la Comunidad de Madrid. De 2000 encuestas 700 votan al partido X. Cuantos tendrían que votar al partido estudiado para que ganara con un 99% de confianza.

$n = 2000 \qquad p = \frac{700}{2000} \qquad k = nº\ de\ votos \qquad P(x = k) = 0{,}99 \qquad X \rightsquigarrow B\left(2000, \frac{7}{20}\right)$

$$\binom{2000}{k} \cdot \left(\frac{7}{20}\right)^k \cdot \left(\frac{13}{20}\right)^{2000-k} = 0{,}99$$

$\mu = np = 2000 \cdot \frac{7}{20} = 700; \quad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{2000 \cdot \frac{7}{20} \cdot \frac{13}{20}} = \sqrt{455}; \quad Z \rightsquigarrow N(700, \sqrt{455})$

$P(X = k) \to P(k - 0{,}5 \leq X' \leq k + 0{,}5) \to tipificamos \to P\left(\frac{k - 0{,}5 - 700}{\sqrt{455}} \leq Z \leq \frac{k + 0{,}5 - 700}{\sqrt{455}}\right)$
$= 0{,}99$



$$0{,}995 = P(z \leq 2{,}575) = P\left(z \leq \frac{k + 0{,}5 - 700}{\sqrt{455}}\right);$$

$$\frac{k + 0{,}5 - 700}{\sqrt{455}} = 2{,}575;$$

$$k = \left(2{,}575 \cdot \sqrt{455}\right) + 700 - 0{,}5 = 754{,}43$$

$k =$

$754{,}43$

Deben votar al partido 755 personas o más.

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Se lanza un dado tres veces y se cuenta el número de treses que aparecen. Dibuja el histograma, la función de cuantía y la función de distribución. Calcula la media y la desviación típica.

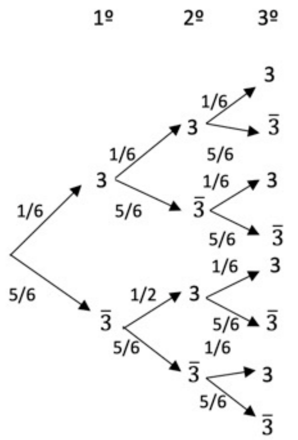
Con un diagrama de árbol podemos calcular las siguientes probabilidades:
X = número de treses que se obtiene.

X_0 (ningún tres) = $\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{125}{216}$

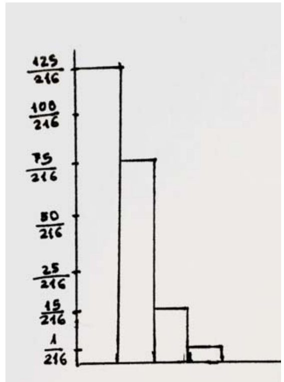
X_1(un tres) = $\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{75}{216}=\frac{25}{72}$

X_2 (dos treses) = $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{15}{216}=\frac{5}{72}$

X_3 (tres treses) = $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$



Xi	Pi	F
0	$\frac{125}{216}$	$\frac{125}{216}$
1	$\frac{25}{72}$	$\frac{25}{27}$
2	$\frac{5}{72}$	$\frac{215}{216}$
3	$\frac{1}{216}$	$\frac{216}{216}=1$
	1	



$$\bar{x}=\sum Xi\cdot Pi \qquad \Longrightarrow \bar{X}=0\cdot\frac{125}{216}+1\cdot\frac{25}{72}+2\cdot\frac{5}{72}+3\cdot\frac{1}{216}=0{,}5$$

$$\sigma=\sqrt{\sum Pi\cdot Xi^2-\bar{x}^2}=\sqrt{\left(0^2\cdot\frac{125}{216}+1^2\cdot\frac{25}{72}+2^2\cdot\frac{5}{72}+3^2\cdot\frac{1}{216}\right)-0{,}5^2}=0{,}6455$$

2. Lanzamos 4 monedas. Por cada cara que salga sacamos 5 euros, pero debemos pagar 3 euros por jugar. ¿Cuánto esperas ganar en una jugada? ¿En 20 jugadas? ¿Y en 100 jugadas?

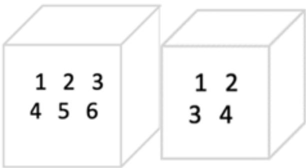
Caras	Pi	Ganancia
0	$\frac{1}{16}$	-3
1	$\frac{4}{16}$	2
2	$\frac{6}{16}$	7
3	$\frac{1}{216}$	12
4	$\frac{1}{16}$	17
	1	

- Una jugada = $-3\cdot\frac{1}{16}+2\cdot\frac{4}{16}+7\cdot\frac{6}{16}+12\cdot\frac{4}{16}+17\cdot\frac{1}{16}=7{,}3€$

- 20 jugadas = $7{,}3€\cdot 20=146€$

- 100 jugadas = $7{,}3€\cdot 100=730€$

3. Disponemos de dos urnas, la primera con 6 bolas idénticas numeradas del 1 al 6; la segunda con 4 bolas idénticas numeradas del 1 al 4. Sacamos a la vez una bola de cada urna, y consideramos la variable aleatoria, “suma de puntos”. A) Calcula la distribución de probabilidad y dibuja el histograma correspondiente. B) Si sacamos más de 5 puntos ganamos 10 euros, y en caso contrario perdemos la misma cantidad. ¿Es un juego equitativo?



	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10

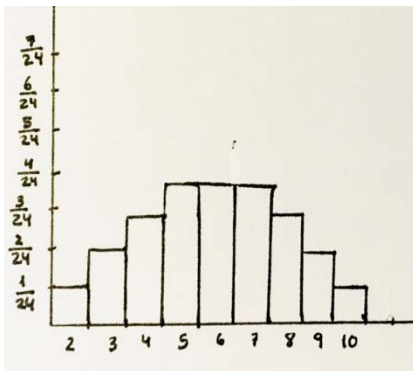
nº≤5

nº>5

Xi	Pi
2	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}(1)$
3	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}(2)$
4	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}(3)$
5	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}(4)$
6	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}(4)$
7	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}(4)$
8	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}(3)$
9	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}(2)$
10	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}(1)$
	1

Xi	Pi	Ganar
nº>5	$\frac{14}{24}$	10 €
nº<5	$\frac{10}{24}$	-10 €

$$E(x) = 10\cdot\frac{14}{24} + (-10)\cdot\frac{10}{24} = 1{,}66$$



No es un juego equitativo ya que la esperanza es un número distinto de cero (en este caso positivo), por lo que se espera que gane más el jugador que la banca.

4. La población activa de un cierto país se puede dividir en los que tienen estudios superiores y los que no los tienen, siendo el primero de un 20 %. Elegimos 10 personas de la población activa al azar. Escribe la expresión de todas las posibilidades y sus probabilidades. Calcula la probabilidad de que haya 9 o 10 que tengan estudios superiores.

Distribución binomial: B~(10, $\frac{1}{5}$);   n= 10,   p= $\frac{1}{5} = 0{,}2$,   q= $\frac{4}{5} = 0{,}8$

Expresión para todas las posibilidades: $P(X = x) = \binom{10}{x}\cdot 0{,}2^x \cdot 0{,}8^{10-x}$

Probabilidad de que haya 9 o 10 con estudios superiores:

$P(X=9)+P(X=10)=\binom{10}{9}\cdot 0{,}2^{9}\cdot 0{,}8^{1}+\binom{10}{10}\cdot 0{,}2^{10}\cdot 0{,}8^{0}=0{,}0000042$

Existe un 0,0000042 de probabilidad de al coger 10 ciudadanos, 9 o 10 de ellos tengan estudios superiores.

5. Si p(x) es la probabilidad de obtener x éxitos en una distribución binomial B(n, p), y p(x+1) es la de obtener x+1 éxitos, comprueba que se verifica la siguiente relación recurrente:

$\mathbf{P(x+1)=\frac{p(x)(n-x)p}{(x+1)q}}$

$\mathrm{p(x+1)}=\binom{n}{x+1}\cdot \mathrm{p^{x+1}\cdot q^{n-x-1}}=\frac{n!}{(x+1)!(n-x-1)!}\cdot \mathrm{p^{x+1}\cdot q^{n-x-1}}=$

$=\frac{n!}{(x+1)!(n-x-1)!}\cdot p^{x}\cdot p\cdot \frac{q^{n-x}}{q}=\frac{n!(n-x)}{x!(x+1)(n-x)\cdot(n-x-1)!}\cdot p^{x}\cdot p\cdot \frac{q^{n-x}}{q}=$

$\frac{n!(n-x)}{x!(x+1)(n-x)!}\cdot p^{x}\cdot p\cdot \frac{q^{n-x}}{q}=\frac{n!}{x!(n-x)!}\cdot p^{x}\cdot q^{n-x}\cdot p\cdot \frac{1}{q}\cdot\frac{(n-x)}{(x+1)}=p(x)\cdot\frac{(n-x)p}{(x+1)q};$

Por tanto: $p(x+1)=\frac{p(x)(n-x)p}{(x+1)q}$

6. En una ruleta hay 37 números numerados del 0 al 36, de los cuales 18 son pares y 18 impares. Si sale el 0 gana la banca. Jugamos al 2 por uno a impar, apostamos 10 euros a impar, y la banca nos paga 20 euros si sale impar, y se queda con nuestros 10 euros si no sale. ¿Te parece un juego equitativo?

$p(ganar\ 10)=\frac{18}{37}\qquad p(perder\ 10)=\frac{19}{37}$

$E(x)=10\cdot\frac{18}{37}-10\cdot\frac{19}{37}=-\frac{10}{37}$

No es equitativo ya que al ser negativa la esperanza es favorable para la banca.

7. Juego de San Petersburgo: Se lanza una moneda no trucada hasta que aparezca cara. Si sale en el primer lanzamiento, se ganan 10 euros, si sale en el segundo, 20, si en el tercero, 40…y en el n-ésimo , $\boldsymbol{10\cdot 2^{n+1}}$. Calcula la ganancia media si sólo se puede lanzar 5 veces la moneda. ¿Y si se puede lanzar 10 veces?

$p(10)=\frac{1}{2}\quad p(20)=\frac{1}{4}\quad p(40)=\frac{1}{8}\quad p(80)=\frac{1}{16}\quad p(160)=\frac{1}{32}$

$E(x)=10\cdot\frac{1}{2}+20\cdot\frac{1}{4}+40\cdot\frac{1}{8}+80\cdot\frac{1}{16}+160\cdot\frac{1}{32}=5+5+5+5+5=25$

Por tanto, si al lanzar una moneda 5 veces la ganancia media es de 25 euros, cuando se lance 10 veces será 5·10=50 euros

8. Lanzamos un dado no trucado mil veces y contamos el número de 5, ¿qué número de éxitos esperamos con una probabilidad no inferior al 0,95, es decir, en el intervalo media menos dos veces la desviación típica y media más dos veces la desviación típica?

Se trata de una distribución binomial B $\left(1000,\ \frac{1}{6}\right)$ cuyos parámetros son:

Media: $\mu=n\cdot p;\ \mu=1000\cdot\frac{1}{6}=166{,}6$ Varianza: $V=n\cdot p\cdot q=1000\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=138{,}88$

Desviacion tipica: $\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot q}=\sqrt{138{,}88}=11{,}78$

Teniendo en cuenta la desigualdad de Chebycheff, $P(|x-\mu| \le k\sigma) \ge 1-\frac{1}{k^2}$, para k=2 :

$$P(\mu - 2\cdot\sigma \le x \le \mu + 2\cdot\sigma) \ge 0{,}95 \to P(166{,}6 - 2\cdot 11{,}78 \le x \le 166{,}6 + 2\cdot 11{,}78) \ge 0{,}95$$

$P(143{,}04 \le x \le 190{,}16) \ge 0{,}95$ El intervalo sería $(144,\ \ 191)$
Esperamos entre 144 y 191 veces salga 5 con una probabilidad superior al 0,95

9. Calcula A para que la función siguiente sea una función de densidad de probabilidad.

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{0} & \mathbf{si\ x < 0} \\ \mathbf{Ax} & \mathbf{si\ 0 \le x < 8} \\ \mathbf{A(16-x)} & \mathbf{si\ 8 \le x < 16} \\ \mathbf{0} & \mathbf{si\ x > 16} \end{cases}$$

Debe darse que $f(x) \ge 0$, si x es mayor que 0 y menor que 8, f(x) es una recta por encima del eje X e igualmente entre 8 y 16, siempre que A > 0

$$y \quad \int_0^{16} f(x)dx = 1$$

$$\int_0^{16} f(x)dx = \int_0^8 Ax\,dx + \int_8^{16} A(16-x)dx = 1 \to A\cdot\left[\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^8 - \left[\frac{(16-x)^2}{2}\right]_8^{16}\right] = 1$$

$$A\cdot[(32-0)-(0-32)] = 1 \to A\cdot 64 = 1 \to A = \frac{1}{64}$$

10. Calcula A en cada uno de los casos siguientes para que la función f(x) sea una función de densidad de probabilidad.

a) $\boldsymbol{f(x) = Ax^2(x-3)}$ **siendo nula para para x < 0 y x > 3.**

$$\int_0^3 Ax^2(x-3)dx = 1$$

$$A\int_0^3 (x^3-3x^2)dx = A\left(\frac{x^4}{4}-\frac{3x^3}{3}\right)_0^3 = A\left(\frac{81}{4}-27\right) = 1 \to A = -\frac{4}{27}$$

b) $\boldsymbol{f(x) = Ax(x-3)^2}$ **siendo nula para x < 0 y x > 3.**

$$\int_0^3 Ax(x-3)^2dx = 1$$

$$A\int x(x^2+6x+9) = A\int (x^3+6x^2+9x)dx = A\left(\frac{x^4}{4}+\frac{6x^3}{3}+\frac{9x^2}{2}\right)_0^3 = A\left(\frac{3^4}{4}+2(3)^3+\frac{9(3)^2}{2}\right) =$$
$$A\left(\frac{81}{4}+54+\frac{81}{2}\right) = A\cdot\frac{459}{4} = 1 \to A = \frac{4}{459}$$

c) $\boldsymbol{f(x) = Ax^3(x-3)}$ **siendo nula para para x < 0 y x > 3.**

$$\int_0^3 Ax^3(x-3)dx = 1$$

$$A\int_0^3 x^4-3x^3dx = A\left(\frac{x^5}{5}-\frac{3x^4}{4}\right)_0^3 = A\frac{3^5}{5}-\frac{3(3)^4}{4} = A\left(-\frac{243}{20}\right) = 1 \to A = -\frac{20}{243}$$

d) $\boldsymbol{f(x) = Ax^2(x-3)^2}$ **siendo nula para para x < 0 y x > 3.**

$$\int_0^3 Ax^2(x-3)^2 = 1$$

$$A\int_0^3 x^2(x^2+6x+9)dx == A\int_0^3 x^4+6x^3+9x^2dx = A\left(\frac{x^5}{5}+\frac{6x^4}{4}+\frac{9x^3}{3}\right)_0^3 = A\left(\frac{x^5}{5}+\frac{3x^4}{2}+3x^3\right)_0^3 = A\left(\frac{3^5}{5}+\frac{3(3)^4}{2}+3(3)^2\right) = A\cdot\frac{1971}{10} = 1 \to A = \frac{10}{1971}$$

Calcula en cada caso $\boldsymbol{P\ (x<1)\ y\ P(x>2)}$

a) $\boldsymbol{f(x) = -\frac{4}{27}x^2(x-3)}$ **siendo nula para para x < 0 y x > 3.**

$$P(\ x<1) = \int_0^1\left(-\frac{4}{27}x^2(x-3)\right)dx =$$

$$= -\frac{4}{27}\int_0^1 x^3-3x^2dx = -\frac{4}{27}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{3x^3}{3}\right)_0^1 = -\frac{4}{27}\left[\left(\frac{1^4}{4}-\frac{3(1)^3}{3}\right)-\left(\frac{0^4}{4}-\frac{3(0)^3}{3}\right)\right] = -\frac{4}{27}\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{65}{108}.$$

$$P(x>2) = \int_2^3\left(-\frac{4}{27}x^2(x-3)\right)dx = -\frac{4}{27}\int_2^3 x^3-3x^2dx = -\frac{4}{27}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{3x^3}{3}\right)_2^3 = -\frac{4}{27}\left[\left(\frac{3^4}{4}-\frac{\cancel{3}(3)^3}{\cancel{3}}\right)-\left(\frac{2^4}{4}-\frac{\cancel{3}(2)^3}{\cancel{3}}\right)\right] = -\frac{4}{27}\left[-4+\frac{27}{4}\right] = -\frac{11}{27}.$$

b) $\boldsymbol{f(x) = \frac{4}{459}x(x-3)^2}$ **siendo nula para x < 0 y x > 3..**

$$P(x<1) = \int_0^1\frac{4}{459}x(x-3)^2dx = \frac{4}{459}\int_0^1(x^3+6x^2+9x)dx = \frac{4}{459}\left(\frac{x^4}{4}+\frac{6x^3}{3}+\frac{9x^2}{2}\right)_0^1 = \frac{4}{459}\left(\frac{1^4}{4}+2(1)^3+\frac{9(1)^2}{2}\right) = \frac{4}{459}\left(\frac{27}{4}\right) = \frac{1}{17}$$

$$P(x>2) = \int_2^3\frac{4}{459}x(x-3)^2dx = \frac{4}{459}\int_2^3(x^3+6x^2+9x)dx = \frac{4}{459}\left(\frac{x^4}{4}+\frac{6x^3}{3}+\frac{9x^2}{2}\right)_2^3 = \frac{4}{459}\left[\left(\frac{3^4}{4}+\frac{6(3)^3}{3}+\frac{9(3)^2}{2}\right)-\left(\frac{2^4}{4}+\frac{6(2)^3}{3}+\frac{9(2)^2}{2}\right)\right] = \frac{4}{459}\left[\left(\frac{459}{4}\right)\right] = \frac{4}{459}\left(\frac{307}{4}-38\right) = \frac{307}{459}$$

c) $\boldsymbol{f(x) = -\frac{20}{243}x^3(x-3)}$ **siendo nula para para x < 0 y x > 3.**

$$P(x<1) = \int_0^1\left(-\frac{20}{243}x^3(x-3)\right)dx = -\frac{20}{243}\int_0^1 x^3(x-3)dx = -\frac{20}{243}\int_0^1 x^4-3x^3dx = -\frac{20}{243}\left(\frac{x^5}{5}-\frac{3x^4}{4}\right)_0^1 = -\frac{20}{243}\left(\frac{1^5}{5}-\frac{3(1)^4}{4}\right) = -\frac{20}{243}\left(-\frac{11}{20}\right) = \frac{11}{243}$$

$$P(x>2) = \int_2^3\left(-\frac{20}{243}x^3(x-3)\right)dx = -\frac{20}{243}\int_2^3 x^3(x-3)dx = -\frac{20}{243}\int_2^3 x^4-3x^3dx = -\frac{20}{243}\left(\frac{x^5}{5}-\frac{3x^4}{4}\right)_2^3 = -\frac{20}{243}\left[\left(\frac{3^5}{5}-\frac{3(3)^4}{4}\right)-\left(\frac{2^5}{5}-\frac{3(2)^4}{4}\right)\right] = -\frac{20}{243}\left[\left(-\frac{243}{20}\right)-\left(-\frac{28}{5}\right)\right] = -\frac{20}{243}\left(-\frac{131}{20}\right) = \frac{131}{243}$$

d) $\boldsymbol{f(x) = \frac{10}{1971}x^2(x-3)^2}$ **siendo nula para para x < 0 y x > 3.**

$$P(x<1) = \frac{10}{1971}\int_0^1 x^2(x-3)^2dx = \frac{10}{1971}\int_0^1 x^4+6x^3+9x^2dx = \frac{10}{1971}\left(\frac{x^5}{5}+\frac{6x^4}{4}+\frac{9x^3}{3}\right)_0^1 = \frac{10}{1971}\left(\frac{1^5}{5}+\frac{6(1)^4}{4}+\frac{9(1)^3}{3}\right) = \frac{10}{1971}\left(\frac{47}{10}\right) = \frac{47}{1971}$$

$P(x>2)=\frac{10}{1971}\int_2^3 x^2(x-3)^2dx=\frac{10}{1971}\int_2^3 x^4+6x^3+9x^2dx=\frac{10}{1971}\left(\frac{x^5}{5}+\frac{6x^4}{4}+\frac{9x^3}{3}\right)_2^3=\frac{10}{1971}\left[\left(\frac{3^5}{5}+\frac{6(3)^4}{4}+\frac{9(3)^3}{3}\right)-\left(\frac{2^5}{5}+\frac{6(2)^4}{4}+\frac{9(2)^3}{3}\right)\right]=\frac{10}{1971}\left(\frac{2511}{10}-\frac{272}{5}\right)=\frac{10}{1971}\left(\frac{1967}{10}\right)=\frac{1967}{1971}$

Determina la media y la varianza. Analiza las diferencias.

Media: $\mu=\int_a^b x\cdot f(x)\cdot dx$

Varianza: $\sigma^2=\int_a^b (x-\mu)^2\cdot f(x)\cdot dx$

a) $\boldsymbol{f(x)=-\frac{4}{27}x^2(x-3)}$ **siendo nula para para x < 0 y x > 3.**

Media $\rightarrow$ $\mu=-\frac{4}{27}\int_0^3 x\cdot x^2(x-3)dx=-\frac{4}{27}\int_0^3 x(x^3-3x^2)dx=-\frac{4}{27}\int_0^3 x^4-3x^3dx=-\frac{4}{27}\left(\frac{x^5}{5}-\frac{3x^4}{4}\right)_0^3=-\frac{4}{27}\left(\frac{3^5}{5}-\frac{3(3)^4}{4}\right)=\frac{9}{5}$

Varianza $\rightarrow\sigma^2=-\frac{24}{7}\int_0^3\left(x-\frac{9}{5}\right)^2\cdot x^2(x-3)dx=-\frac{24}{7}\int_0^3\left(x^2-2\cdot\frac{9}{5}x+\frac{81}{25}\right)(x^3-3x^2)dx=-\frac{24}{7}\int_0^3 x^5-\frac{18}{5}x^4+\frac{81}{25}x^3-3x^4-\frac{54}{5}x^3-\frac{243}{25}x^2dx=-\frac{24}{7}\int_0^3 x^5-\frac{33}{5}x^4-\frac{189}{25}x^3-\frac{243}{25}x^2dx=-\frac{24}{7}\left(x^5-\frac{33}{5}x^4-\frac{189}{25}x^3-\frac{243}{25}x^2\right)_0^3=-\frac{24}{7}\left(3^5-\frac{33}{5}(3)^4-\frac{189}{25}(3)^3-\frac{243}{25}(3)^2\right)=-\frac{24}{7}\left(-\frac{2916}{5}\right)=\frac{69984}{35}$

b) $\boldsymbol{f(x)=\frac{4}{459}x(x-3)^2}$ **siendo nula para x < 0 y x > 3.**

Media $\rightarrow\mu=\frac{4}{459}\int_0^3 x\cdot x(x-3)^2dx=\frac{4}{459}\int_0^3 x^3-6x^2+9x\,dx=\frac{4}{459}\left(\frac{x^4}{4}-2x^2+\frac{9x^2}{2}\right)_0^3=\frac{4}{459}\left(\frac{3^4}{4}-2(3)^2+\frac{9(3)^2}{2}\right)=\frac{4}{459}\left(\frac{171}{4}\right)=\frac{19}{51}$

Varianza $\rightarrow\sigma^2=\frac{4}{459}\int_0^3\left(x-\frac{19}{51}\right)^2\cdot x(x-3)^2dx=\frac{4}{459}\int_3^0\left(x^2-\frac{38}{51}x+\frac{361}{2601}\right)\cdot(x^3+6x^2+9x)dx=\frac{4}{459}\int_3^0\left(x^5-\frac{76}{17}x^4+\frac{361}{2601}x^3+6x^4-\frac{76}{17}x^3+\frac{722}{867}x^2+9x^3-\frac{114}{17}x^2+\frac{361}{289}x\right)dx=\frac{4}{459}\int_3^0 x^5+\frac{26}{17}x^4+\frac{23770}{2601}x^3-\frac{5092}{867}x^2+\frac{361}{289}x\cdot dx=\frac{4}{459}\left(x^5+\frac{26}{17}x^4+\frac{23770}{2601}x^3-\frac{5092}{867}x^2+\frac{361}{289}x\right)_0^3=\frac{4}{459}\left(3^5+\frac{26}{17}\cdot 3^4+\frac{23770}{2601}\cdot 3^3-\frac{5092}{867}\cdot 3^2+\frac{361}{289}\cdot 3\right)=\frac{4}{459}(564{,}4)=4{,}92$

c) $\boldsymbol{f(x)=-\frac{20}{243}x^3(x-3)}$ **siendo nula para para x < 0 y x > 3.**

Media $\rightarrow\mu=-\frac{20}{243}\int_0^3 x\cdot x^3(x-3)dx=-\frac{20}{243}\int_0^3 x^5-3x^4dx=-\frac{20}{243}\left(\frac{x^6}{6}-\frac{3x^5}{5}\right)_0^3=-\frac{20}{243}\left(\frac{3^6}{6}-\frac{3(3)^5}{5}\right)=-\frac{20}{243}\left(-\frac{243}{10}\right)=2$

Varianza $\rightarrow\sigma^2=-\frac{20}{243}\int_0^3(x-2)^2\cdot x^3(x-3)dx=\frac{20}{243}\int_0^3(x^2-4x-4)\cdot(x^4-3x^3)dx=\frac{20}{243}\int_0^3 x^6-4x^5-4x^4-3x^5-12x^4-12x^3dx=\frac{20}{243}(x^6-16x^5-15x^4-12x^3)_0^3=\frac{20}{243}(3^6-16(3)^5-15(3)^4-12(3)^3)=\frac{20}{243}(-4698)=-\frac{1160}{3}$

d) $\boldsymbol{f(x)=\frac{10}{1971}x^2(x-3)^2}$ **siendo nula para para x < 0 y x > 3.**

Media $\rightarrow \mu = \frac{10}{1971}\int_0^3 x\cdot x^2(x-3)^2dx = \frac{10}{1971}\int_0^3 x^5-6x^4+9x^3dx = \frac{10}{1971}\left(\frac{x^6}{6}-\frac{6x^5}{5}+\frac{9x^4}{4}\right)_0^3 =$
$\frac{10}{1971}\left(\frac{3^6}{6}-\frac{6(3)^5}{5}+\frac{9(3)^4}{4}\right) = \frac{10}{1971}\left(\frac{243}{20}\right) = \frac{9}{146}$

Varianza $\rightarrow \sigma^2 = \frac{10}{1971}\int_0^3 \left(x-\frac{9}{146}\right)^2 x^2(x-3)^2dx = \frac{10}{1971}\int_0^3 (x^2-\frac{9}{73}x+\frac{81}{21316})(x^4+6x^3+9x^2)dx =$
$= \frac{10}{1971}\int_0^3 x^6+6x^5+9x^4-\frac{9}{73}x^5-\frac{54}{73}x^4-\frac{81}{73}x^3+\frac{81}{21316}x^4+\frac{243}{106558}x^3+\frac{729}{21316}x^2dx =$
$= \frac{10}{1971}\int_0^3 \left(x^6+\frac{429}{73}x^5+8{,}26x^4-1{,}08x^3+\frac{729}{21316}x^2\right)dx =$
$= \frac{10}{1971}\left(\frac{1}{7}x^7+\frac{429}{73\cdot 6}x^6+8{,}26x^5\cdot\frac{1}{5}-0{,}27x^4+\frac{729}{21316\cdot 3}x^3\right)\Big|_0^3 = 7{,}135$

11. En una distribución binomial $B(10,\ 0,3)$ calcula $P(x=0)$, $P(x\neq 0)$, $P(x=10)$, $P(x=7)$. Determina también la media y la desviación típica.

$$B(10,\ 0{,}3) \qquad p=0{,}3 \qquad n=10$$
$$Probabilidad\ de\ éxito = p \qquad Probabilidad\ de\ fracaso = q = 1-p = 1-0{,}3 = 0{,}7$$
$$P(X=x) = \binom{n}{x}\cdot p^x\cdot q^{n-x}$$
$P(x=0) = \binom{10}{0}\cdot 0{,}3^0\cdot 0{,}7^{10} = 0{,}02824$
$P(x\neq 0) = 1-P(x=0) = 1-0{,}02824 = 0{,}97176$
$P(x=10) = \binom{10}{10}\cdot 0{,}3^{10}\cdot 0{,}7^0 = 0{,}0000059$
$P(x=7) = \binom{10}{7}\cdot 0{,}3^7\cdot 0{,}7^3 = 0{,}009$
$$\mu = n\cdot p = 10\cdot 0{,}3 = 3 \qquad \sigma = \sqrt{n\cdot p\cdot q} = \sqrt{10\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7} = 1{,}449$$

12. Lanzamos 5 monedas, calcula las probabilidades de obtener:
a) $\mathbf{P(x=0)}$, b) $\mathbf{P(x=1)}$, c) $\mathbf{P(x=2)}$, d) $\mathbf{P(x=2)}$

X: salir cara $\qquad B\left(5,\frac{1}{2}\right) \qquad p=\frac{1}{2} \qquad n=5$

$a)\ P(x=0) = \binom{5}{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$
$b)\ P(x=1) = \binom{5}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{32}$
$c)\ P(x=2) = \binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$
$d)\ P(x=2) = \binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{16}$

13. Calcula en una distribución normal estándar las probabilidades siguientes:

$$N(0{,}1)$$
$\boldsymbol{a)P(z=0)} = 0$
$\boldsymbol{b)P(z<0)} = 0{,}5$
$\boldsymbol{c)P(z=1{,}82)} = 0$
$\boldsymbol{d)P(z>1{,}82)} = 1-P(z\leq 1{,}82) = 1-0{,}7939 = 0{,}2061$

14. Calcula en una distribución normal estándar las probabilidades siguientes:

a) $P(z > 4) = 1 - P(z < 4) = 1 - 1 = 0$

b) $P(z < 4) = 1$

c) $P(z > 1) = 1 - P(z < 1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$

d) $P(z < 1) = 0{,}8413$

15. Calcula en una distribución normal estándar las probabilidades siguientes:

a) $P(1 < z < 2) = P(z < 2) - P(z < 1) = 0{,}9772 - 0{,}8413 = 0{,}1359$

b) $P(-1{,}3 < z < 4) = P(z < 4) - \big(1 - P(z < 1{,}3)\big) = 1 - (1 - 0{,}9032) = 0{,}9032$

c) $P(-0{,}2 < z < 2{,}34) = P(z < 2{,}34) - \big(1 - P(z < 0{,}2)\big) = 0{,}9904 - (1 - 0{,}5793) = 0{,}5697$

d) $P(-1 < z < 1) = P(z < 1) - \big(1 - P(z < 1)\big) = 0{,}08413 - (1 - 0{,}8413) = 0{,}6826$

16. Calcula en una distribución normal $N(1, 2)$ las probabilidades siguientes:

a) $P(x > 4) \to Tipific. \to P\left(z > \frac{4-1}{2}\right) = P(z > 1{,}5) = 1 - P(z < 1{,}5) = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668$

b) $P(x < 4) \to Tipificamos \to P\left(z < \frac{4-1}{2}\right) = P(z < 1{,}5) = 0{,}9332$

c) $P(x > 1) \to Tipificamos \to P\left(z > \frac{1-1}{2}\right) = P(z > 0) = 1 - P(z < 0) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

d) $P(x < 1) \to Tipificamos \to P\left(z < \frac{1-1}{2}\right) = P(z < 0) = 0{,}5$

17. Calcula en una distribución normal N(0,5, 0,2) las probabilidades siguientes:

a) $P(x > 4)$

$$P\left(z > \frac{4-0.5}{0.2}\right) = P(z > 17.5) = 1 - [P(z < 17.5)] = 1 - 1 = 0$$

b) $P(x < 4)$

por el apartado a) $P\left(x < \frac{4-0.5}{0.2}\right) = 1$

c) $P(x > 1)$

$$P\left(z > \frac{1-0.5}{0.2}\right) = P(z > 2.5) = 1 - P(z < 2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062$$

d) $P(x < 1)$

$$P\left(z < \frac{1-0.5}{0.2}\right) = P(z < 2.5) = 0.9938$$

18. Calcula en una distribución normal $N(1, \frac{1}{2})$ las probabilidades siguientes:

a) $P(1 < x < 2)$

$$P(1 < x < 2) = P\left(\frac{1-1}{\frac{1}{2}} < z < \frac{2-1}{\frac{1}{2}}\right) = P(0 < z < 2) = P(z < 2) - P(z < 0) =$$
$$= 0.9772 - 0.5 = 0.4772$$

b)) $P(-1.3 < x < 4)$

$$P(-1.3 < x < 4) = P\left(\frac{-1.3-1}{\frac{1}{2}} < z < \frac{4-1}{\frac{1}{2}}\right) = P(-4.6 < z < 6) = P(z < 6) - P(z < -4.6) =$$
$$= 1 - [1 - P(z < 4.6)] = 1 - (1 - 1) = 1 - 0 = 1$$

c) $P(-0.2 < x < 2.34)$

$P(-0.2 < x < 2.34) = P\left(\frac{-0.2-1}{\frac{1}{2}} < z < \frac{2.34-1}{\frac{1}{2}}\right) = P(-2.4 < z < 2.68) =$

$= P(z < 2.68) - P(z < -2.4) = 0.9963 - [1 - P(z < 2.4)] = 0.9963 - 0.0082 = 0.9881$

d)) $\boldsymbol{P(-1 < x < 3)}$

$P(-1 < x < 3) = P\left(\frac{-1-1}{\frac{1}{2}} < z < \frac{3-1}{\frac{1}{2}}\right) = P(-4 < z < 4) = P(z < 4) - P(z < -4)$

$= 1 - [1 - P(z < 4)] = 1 - (1 - 1) = 1 - 0 = 1$

19. En una distribución binomial $\boldsymbol{B(10,\ 0,3)}$ calcula la media, la desviación típica, y mediante aproximación a la normal determina $\boldsymbol{P(x=0), P(x\neq 0), P(x=10), P(x=7)}$.

$B(10\,, 0.3) \qquad E = n \cdot P \rightarrow E = 10 \cdot 0.3 = 3 \qquad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} \rightarrow \sigma = \sqrt{10 \cdot 0.3 \cdot 0.7} = 1.45$

$B(10\,, 0.3) \rightarrow\rightarrow N(3, 1.45)$

a) $\mathbf{P(x=0)}$

$P(x=0) = P(-0.5 \leq x \leq 0.5) = P\left(\frac{-0.5-3}{1.45} \leq z \leq \frac{0.5-3}{1.45}\right) = P(-2.14 \leq z \leq -1.72) =$

$= P(z \leq -1.72) - P(z \leq -2.41) = \big[1 - [P(z \leq 1.72]\big] - \big[1 - [P(z \leq 2.41)]\big] =$

$= [1 - 0.9573] - [1 - 0.9920] = 0.0347$

b) $\mathbf{P(x \neq 0)}$

$P(x \neq 0) = 1 - P(x=0) = 1 - 0.0347 = 0.9653$

c) $\mathbf{P(x=10)}$

$P(x=10) = P(9.5 \leq x \leq 10.5) = P\left(\frac{9.5-3}{1.45} \leq z \leq \frac{10.5-3}{1.45}\right) = P(4.48 \leq z \leq 5.17) =$

$= P(z \leq 5.17) - P(z \leq 4.48) = 0 - 0 = 0$

d) $\mathbf{P(x=7)}$

$P(x=7) = P(6.5 \leq x \leq 7.5) = P\left(\frac{6.5-3}{1.45} \leq z \leq \frac{7.5-3}{1.45}\right) = P(2.41 \leq z \leq 3.10) =$

$= P(z \leq 3.10) - P(z \leq 2.41) = 0.9990 - 0.9920 = 0.007$

21. En una distribución binomial B(1000, 0,5) calcula la media y la desviación típica, y mediante la aproximación a la normal determina $\mathbf{P(x<200), P(x=150), P(X<150)} y\ \boldsymbol{P(50 \leq X \leq 150)}$

Pasamos de distribución binomial a distribución normal:

B(1000, 0.5) → N(μ, σ) $\qquad \boldsymbol{\mu} = \mathrm{n} \cdot \mathrm{p} = 1000 \cdot 0{,}5 = 500 \qquad \mathbf{q} = 1 - \mathrm{p} = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

$\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\mu \cdot \mathrm{q}} = \sqrt{1000 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = 15{,}81 \quad ; \qquad \mathbf{N(500,\ 15,81)}$

- $\mathbf{P(x < 200)}$ = $P(x' \leq 199{,}5) = \mathrm{P}\left(z \leq \frac{199{,}5-500}{15{,}81}\right) = P(z \leq -19{,}01) = P(z \geq 19{,}01) = 1 - P(z \leq 19{,}01) = 1 - 1 = 0$

- $\mathbf{P(x=150)} = P(149{,}5 \le x' \le 150{,}5) = \mathrm{P}\left(z \le \frac{150{,}5-500}{15{,}81}\right) - \mathrm{P}\left(z \le \frac{149{,}5-500}{15{,}81}\right) =$
  $P(z \le -22{,}1) - P(z \le -22{,}17) = P(z \ge 22{,}1) - P(z \ge 22{,}17) = [1 - P(z \le 22{,}1)] -$
  $[1 - P(z \le 22{,}17)] = (1-1) - (1-1) = 0$

- $\mathbf{P(x<150)} = P(x' \le 149{,}5) = \mathrm{P}\left(z \le \frac{149{,}5-500}{15{,}81}\right) = P(z \le -22{,}17) = P(z \ge 22{,}17) = 1 -$
  $P(z \le 22{,}17) = 1 - 1 = 0$

- $\mathbf{P(50 \le x \le 150)} = P(49{,}5 \le x' \le 150{,}5) = \mathrm{P}\left(z \le \frac{150{,}5-500}{15{,}81}\right) - \mathrm{P}\left(z \le \frac{49{,}5-500}{15{,}81}\right) =$
  $P(z \le -22{,}1) - P(z \le -28{,}49) = P(z \ge 22{,}1) - P(z \ge 28{,}49) = [1 - P(z \le 22{,}1)] -$
  $[1 - P(z \le 28{,}49)] = (1-1) - (1-1) = 0$

22. En una distribución binomial *B(1000, 0,05)* calcula la media y la desviación típica, y mediante la aproximación a la normal determina *P(x>200), P(x=200), P(x<200)* y *P(50≤x≤200).*

B(1000, 0,05) → $\mathrm{N}(\mu,\sigma)$; $\mu = np = 1000 \cdot 0{,}05 = 50$; $q = 1 - p = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$

$\sigma = \sqrt{\mu \cdot q} = \sqrt{50 \cdot 0{,}95} = 6{,}89$; $\mathrm{N}(50,\ 6{,}89)$

- $\mathrm{P}(x > 200)$

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{200{,}5-50}{6{,}89} = 21{,}84$$

$\mathrm{P}(x > 200) = 1 - \mathrm{P}(X < 200) = 1 - \mathrm{P}(Z \le 21{,}84) = 1 - 1 = 0$

- $\mathrm{P}(x = 200)$

$\mathrm{P}(X = 200) = \mathrm{P}(199{,}5 \le X' \le 200{,}5)$

$z = \frac{x\prime-\mu}{\sigma} = \frac{199{,}5-50}{6{,}89} = 21{,}69$; $z = \frac{x\prime-\mu}{\sigma} = \frac{200{,}5-50}{6{,}89} = 21{,}84$

$\mathrm{P}(199{,}5 \le X' \le 200{,}5) = \mathrm{P}(21{,}69 \le Z \le 21{,}84) = \mathrm{P}(Z \le 21{,}84) - \mathrm{P}(Z \le 21{,}69) = 1 - 1 = 0$

- $\mathrm{P}(X < 200)$
  $\mathrm{P}(X < 200) = \mathrm{P}(X' \le 199{,}5) = \mathrm{P}(Z \le 21{,}69) = 1$

$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{199{,}5-50}{6{,}89} = 21{,}69$

- $P(50 \le X \le 200)$
  $P(50 \le X \le 200) = P(X \le 200) - P(X \le 50) = \mathrm{P}\left(Z \le \frac{200{,}5-50}{6{,}89}\right) - P\left(Z \le \frac{50{,}5-50}{6{,}89}\right) =$
  $= (Z \le 21{,}69) - P(Z \le 0{,}07) = 1 - 0{,}5279 = 0{,}4721$

23. Una fábrica de móviles ha comprobado que el 1 % de los que fabrica son defectuosos. En un control de calidad se toman 10 móviles al azar. Calcula la media y la desviación típica. Calcula la probabilidad de que haya más de 2 móviles defectuosos.

X: móvil defectuoso. $n = 10$; P(móvil defectuoso) = $p = 0{,}01$; X→$B(10,\ 0{,}01)$

$\mu = n \cdot p = 10 \cdot 0{,}01 = 0{,}1$; $q = 1 - p = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$; $\sigma = \sqrt{\mu \cdot q} = \sqrt{0{,}1 \cdot 0{,}99} = 0{,}3146$

$P(X > 2) = 1 - P(X \le 2)$

$P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} 0{,}01^0 (1 - 0{,}01)^{10} = 0{,}9044$$

$$P(X = 1) = \binom{10}{1} 0{,}01^1 (1 - 0{,}01)^9 = 0{,}09135$$

$P(X=2)=\binom{10}{2}0{,}01^2(1-0{,}01)^8=0{,}00415$
$P(X\le 2)=0{,}9044+0{,}09135+0{,}00415=0{,}9999$
$P(X>2)=1-P(X\le 2)=1-0{,}9999=0{,}0001$: Probabilidad de que haya más de 2 móviles defectuosos.

24. La probabilidad de que María gane a Raquel en una partida es de 0,4. Juegan 6 partidas. Calcula la probabilidad de que:
a) María gane alguna vez.
b) Raquel gane al menos una vez.
c) Raquel gane más de la mitad de las partidas.
d) María gane 2 partidas.

a) X: ganar María. $n=6$; P(ganar María) = $p=0{,}4$; X→$B(6,\ 0{,}4)$; $q=1-p=1-0{,}4=0{,}6$
$P(X\ge 1)=1-P(X=0)=1-0{,}046656=0{,}9533$: Probabilidad de que María gane alguna vez.
$P(X=0)=\binom{6}{0}0{,}4^0(1-0{,}4)^{6-0}=0{,}046656$
b) X: ganar Raquel. $n=6$; P(ganar Raquel) = $p=0{,}6$; X→B(6, 0,6)
$q=1-p=1-0{,}6=0{,}4$
$P(X\ge 1)=1-P(X=0)=1-0{,}004096=0{,}995904$: Probabilidad de que Raquel gane alguna vez.
$P(X=0)=\binom{6}{0}0{,}6^0(1-0{,}6)^{6-0}=0{,}004096$

c) X: ganar María. (Datos apartado a)
$P(X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$
$P(X=0)=\binom{6}{0}0{,}4^0(1-0{,}4)^{6-0}=0{,}046656$
$P(X=1)=\binom{6}{1}0{,}4^1(1-0{,}4)^{6-1}=0{,}1866$
$P(X=2)=\binom{6}{2}0{,}4^2(1-0{,}4)^{6-2}=0{,}31104$
$P(X<3)=0{,}54424$: Probabilidad de que Raquel gane más de la mitad de las partidas.

d) X: ganar María. (Datos apartado a)
$P(X=2)$
$P(X=2)=\binom{6}{2}0{,}4^2(1-0{,}4)^{6-2}=0{,}31104$: Probabilidad de que María gane 2 partidas.

25. Las estaturas de las personas de una cierta población se distribuyen según una normal de media 180 cm y desviación típica 15 cm. Determina la probabilidad de que:
a) Una persona tenga una estatura superior a 190 cm.
P (x > 190) = P (z > $\frac{190-180}{15}$) = P (z > $\frac{10}{15}$) = P (z > $0{,}\hat{6}$) = 1 – P (z ≤ $0{,}\hat{6}$) = 1 – 0,7354 = 0,2646
Solución: La probabilidad de que una persona tenga una estatura superior a 190 cm es de 0,2646.

b) Una persona tenga una estatura menor a 160 cm.

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

P (x < 160) = P (z < $\frac{160-180}{15}$) = P (z < $\frac{-20}{15}$) = P (z < -1,$\hat{3}$) = P (z > 1,$\hat{3}$) = 1 – P (z ≤ 1,$\hat{3}$) = 1 – 0,982 = 0,0918

Solución: La probabilidad de que una persona tenga una estatura menor a 160 cm es de 0,0918.

c) ¿Qué proporción de personas tienen una estatura comprendida entre 160 cm y 190 cm?

P (160 ≤ x ≤ 190) = P (x ≤ 190) – P (x ≤ 160) = P (z ≤ $\frac{190-180}{15}$) – P (z ≤ $\frac{160-180}{15}$) =

=P (z ≤ 0, $\hat{6}$) – P (z ≤ -1,$\hat{3}$) = P (z ≤ 0, $\hat{6}$) – P (z ≥ 1,$\hat{3}$) = P (z ≤ 0, $\hat{6}$) – [1 - P (z ≤ 1,$\hat{3}$)] =

= 0,7357 – 0,0918 = 0,6439

Solución: La proporción de personas que tienen una estatura media comprendida entre 160 cm y 190 cm es del 64,39 %.

26. En un examen para entrar en un cuerpo del Estado se sabe que los puntos obtenidos se distribuyen según una normal de media 100 y desviación típica 10 puntos. Determina la probabilidad de que:

a) Un opositor obtenga 120 puntos.

P (119,5 ≤ x ≤ 120,5) = P (x ≤ 120,5) – P (x ≤ 119,5) = P (z ≤ $\frac{120,5-100}{10}$) – P (z ≤ $\frac{119,5-100}{10}$) = P (z ≤ $\frac{20,5}{10}$) – P (z ≤ $\frac{19,5}{10}$) = P (z ≤ 2,05) – P (z ≤ 1,95) = 0,9798 – 0,9744 = 0,0054

Solución: la probabilidad de que un opositor obtenga 120 puntos es de 0,0054.

b) Si para aprobar es necesario tener más de 120 puntos, ¿Qué porcentaje de opositores aprueban?

P (x > 120) = P (z > $\frac{120-100}{10}$) = P (z > $\frac{20}{10}$) = P (z > 2) = 1 – P (z ≤ 2) = 1 – 0,9772 = 0,0228

Hallamos el porcentaje de 0,0228:

0,0228 · 100 = 2,28%

Solución: Aprueban el 2% de opositores.

c) Si aprueban únicamente los que están entre el 20% de los mejores, ¿cuántos puntos debe obtener un opositor para aprobar?

Si aprueban solo el 20%, entonces el porcentaje de no aprobados es 1 – 0,2 = 0,8

Calculamos P (x ≤ k) = 0,8

Buscamos dentro de la tabla 0,8 → 0,85

Para hallar k: $\frac{k-\mu}{\sigma} = 0,85$ $\frac{k-100}{10}$ = 0,85 k – 100 = 8,5 k = 108,5

Solución: Un opositor debe obtener 108,5 puntos para aprobar.

AUTOEVALUACIÓN

1. **Se lanza un dado tres veces y se anota el número de cuatros que aparecen. La distribución de probabilidad que tenemos es:**

a) $\boldsymbol{B(4,1/6)}$ **b)**$\boldsymbol{B(4,1/4)}$ **c)**$\boldsymbol{B(3,1/6)}$ **d)**$\boldsymbol{B(3,5/6)}$

$$P(A) = \frac{n^{\circ}\,casos\ favorables}{n^{\circ}casos\ posibles} \rightarrow P(A) = \frac{1}{6}$$

La respuesta es la opción **c)** $\boldsymbol{B(3;1/6)}$

2. **En la distribución anterior, la media es:**

a) $\boldsymbol{\mu = 4/6}$ **b)**$\boldsymbol{\mu = 1/2}$ **c)**$\boldsymbol{\mu = 15/6}$ **d)**$\boldsymbol{\mu = 1}$

$$\mu = n \cdot p \rightarrow \mu = 3 \cdot 1/6 = 1/2 \rightarrow \boldsymbol{\mu = 1/2}$$

La respuesta es la opción **b)** $\boldsymbol{\mu = 1/2}$

3. **Y la varianza es:**

a) $\boldsymbol{\sigma^2 = 15/12}$ **b)**$\boldsymbol{\sigma^2 = 5/6}$ **c)**$\boldsymbol{\sigma^2 = 1/36}$ **d)**$\boldsymbol{\sigma^2 = 5/12}$

$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot q \rightarrow \sigma^2 = 3 \cdot 1/6 \cdot 5/6 = 5/12 \rightarrow \boldsymbol{\sigma^2 = 5/12}$$

La respuesta es la opción **d)** $\boldsymbol{5/12}$

4. **Utiliza la tabla de la distribución normal estándar para calcular la probabilidad** $\boldsymbol{P(z \leq 2,02)}$ **que vale:**

a) $\boldsymbol{P(z \leq 2,02) = 0,0217}$ **b)**$\boldsymbol{P(z \leq 2,02) = 0,9772}$ **c)**$\boldsymbol{P(z \leq 2,02) = 0,0228}$ **d)**$\boldsymbol{P(z \leq 2,02) = 0,9783}$

$$\boldsymbol{P(z \leq 2,02) = 0.9783}$$

Se busca el número dos en las columnas y el 0,02 en las filas y encontramos el valor para la probabilidad.

La respuesta es la opción **d)**$\boldsymbol{P(z \leq 2,02) = 0.9783}$

5. **Utiliza la tabla de la distribución normal estándar para calcular la probabilidad de** $\boldsymbol{P(0,5 < z < 1,5)}$ **es:**

a) $\boldsymbol{0,2417}$ **b)**$\boldsymbol{0,9332}$ **c)**$\boldsymbol{0,9332}$ **d)**$\boldsymbol{0,2742}$

$$\boldsymbol{P(0,5 < z < 1,5)} \rightarrow P(z < 1{,}5) - P(z < 0{,}5) = buscamos\ en\ la\ tabla\ de\ distribución\ y$$

$$P(z < 1{,}5) - P(z < 0{,}5) = 0{,}9332 - 0{,}6915 = 0{,}2417$$

$$\boldsymbol{P(0,5 < z < 1,5) = 0,2417}$$

La respuesta es la opción $\mathbf{a)}$ $\boldsymbol{0,2417}$

6. Sin mirar la tabla, ni tipificar la variable, la probabilidad de P(x< $\boldsymbol{\mu}$**) es:**

a) -0,4 **b) 0,5** **c) 0,6** **d) no puede saberse**

Como la función es simétrica y su área es 1, al estar $\boldsymbol{\mu}$ en el centro, la P(x< $\boldsymbol{\mu}$) = 0,5

La respuesta es la opción $\mathbf{b)}$ $\boldsymbol{0,5}$

7) En una distribución binomial B(10, 0,3) el valor de P(x=0) es:

a) 0,11 **b) 0,028** **c) 0,00001024** **d) 0,8**

B(10, 0,3) ; P(x=0) = $\binom{10}{0} 0{,}3^0 (1 - 0{,}3)^{10-0} = 0{,}028$

La respuesta es la opción $\mathbf{b)}$ $\boldsymbol{0,028}$

8) El 2% de las pastillas de freno fabricadas se sabe que son defectuosas. En una caja con 2000 pastillas, la probabilidad de que haya menos de 50 defectuosas es:

a) 0,6011 **b) 0,7635** **c) 0,9357** **d) 0,8655**

X: ser defectuosa X→B(2000, 0,02) μ = n·p = 2000·0,02 = 40

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{2000 \cdot 0{,}02 \cdot (1-0{,}02)} = 6{,}26$

X se aproxima a una N(μ, σ) → N(40, 6,26)

P(X<50) = P(X´≤49,5) = P(Z≤ $\frac{49{,}5-40}{6{,}26}$) = P(z≤1,52) = 0,9357

La respuesta es la opción **c) 0,9357**

9) Una fábrica de ordenadores ha comprobado que el 5% de los que fabrica son defectuosos. En un control de calidad se toman 10 ordenadores al azar. Determina si la probabilidad de que no haya ninguno defectuoso es:

a) 0,5987 **b) 0,4027** **c) 0,9357** **d) 0,8074**

X: ser defectuoso X→B(10, 0,05)

P(x=0) = $\binom{10}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot (1-0{,}05)^{10-0} = 0{,}5987$

La respuesta es la opción **a) 0,5987**

10) La probabilidad de que María gane a Raquel en una partida es 2/3. Jugadas 4 partidas. Determina si la probabilidad de que María gane alguna vez es:

a) 0,0123 **b) 0,5** **c) 0,8972** **d) 0,9877**

X: ganar María X→B(4, 0,66)

P(x=0) = $\binom{4}{0} \cdot 0{,}66^0 \cdot (1-0{,}66)^{4-0}$ =0,013

P(x≥1) = 1 – P(X<1) = 1 – P(X=0) = (1-0,013) = 0,9877

La respuesta es la opción **d) 0,9877**

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra