Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales

2º Bachillerato

Capítulo 4: Límites y Continuidad

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por: AITANA, AITOR, AMALIA, ANDREA, CARMEN, CELIA S, FERNANDO, IRENE, ISMAEL F, LAURA, NATALIA, OLIVIA, ROSA, PABLO G, ESPERANZA, LIDIA, CELIA P, ISMAEL C, ENRIQUE, LUCÍA, NEREA, JULIA, ALEJANDRA, JERÓNIMO, KASSANDRA, ÁLVARO, PATRICIA,

IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0} 2 = 2$

b) $\lim_{x\to +\infty} x^{-5} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^5} = 0$

c) $\lim_{x\to -3} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$

d) $\lim_{x\to -\infty} x^5 = (-\infty)^5 = -\infty$

e) $\lim_{x\to -\infty} (-7) = -7$

f) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{10}} = \frac{1}{0} = +\infty$

g) $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^{10}} = \frac{1}{-\infty 10} = 0$

h) $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^{13}} = -\infty$

i) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^{13}} = 0$

j) $\lim_{x\to -1} x^6 = (-1)^6 = 1$

k) $\lim_{x\to 0^-} x^3 = 0$

l) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^6} = \frac{1}{0^6} = +\infty$

2.- Halla los siguientes limites:

a) $\lim_{x\to +\infty} x^7 = +\infty$

b) $\lim_{x\to -\infty} x^7 = -\infty$

c) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt[7]{x} = +\infty$

d) $\lim_{x\to -\infty} \sqrt[7]{x} = -\infty$

e) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^7} = 0$

f) $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^7} = 0$

g) $\lim_{x\to +\infty} 7^x = +\infty$

h) $\lim_{x\to -\infty} 7^x = 0$

i) $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{7}\right)^x = +\infty$

j) $\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{7}\right)^x = 0$

k) $\lim_{x\to +\infty} 7^{\frac{1}{x}} = 1$

l) $\lim_{x\to -\infty} 7^{\frac{1}{x}} = 1$

m) $\lim_{x\to +\infty} x^5 = +\infty$

n) $\lim_{x\to -\infty} x^5 = -\infty$

ñ) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt[3]{x^2} = +\infty$

o) $\lim_{x\to -\infty} \sqrt[3]{x^2} = +\infty$

p) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^4} = 0$

q) $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^4} = 0$

r) $\lim_{x\to +\infty} 5^x = +\infty$

s) $\lim_{x\to -\infty} 5^x = 0$

t) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0$

u) $\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = +\infty$

v) $\lim_{x\to +\infty} 4^{x^2} = +\infty$

w) $\lim_{x\to -\infty} 4^{x^2} = +\infty$

3. Halla los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{x-3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to +\infty} x = +\infty$

b) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+1}{x-3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to -\infty} x = -\infty$

c) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{3x^2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{3x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{3x^2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{3x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-x^6}{3x^2+2x-1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x^6}{3x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x^4}{3} = -\infty$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1-x^6}{3x^2+2x-1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-x^6}{3x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-x^4}{3} = -\infty$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-x^4}{-x^4+2x^2-5} = \frac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x^4}{-x^4} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{16}{x-2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{16}{x} = 0$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x+3}{x^3-3x^2-5} = \frac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

j) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x+3}{x^3-3x^2-5} = \frac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-x^4}{-x^4+2x^2-5} = \frac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x^4}{-x^4} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$

l) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{16}{x-2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{16}{x} = 0$

4. Determina el límite de estas funciones:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (3x+1) = \infty + 1 = \infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5}{x+1} = \frac{5}{-\infty} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2-5x+6) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} (3-x+x^2-x^3) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-x^3) = -(-\infty) = \infty$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3-\frac{x-4}{2}\right) = \left(3-\frac{\infty-4}{2}\right) = -\infty$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{x-1} = 2^{\infty} = \infty$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{x^2} = \left(\frac{3}{5}\right)^{(-\infty)^2} = 0$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3^{\frac{2}{3x-1}} = 3^{\frac{2}{\infty}} = 3^0 = 1$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+3)(2x-3) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-\infty)(-\infty) = +\infty$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x-2}{x} = \frac{\infty}{\infty}$ = Indeterminación.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x-2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

k) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{2x^3+1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{2x^3+1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{2x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$

l) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3+8x^2-x+8) = -\infty$

m) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x-2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

n) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{6x-2}{3x^3-7x+1} = \frac{\infty}{\infty}$= Indeterminación.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{6x-2}{3x^3-7x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{6x}{3x^3} = =0$

ñ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2-8x+16}{35} = +\infty$

o) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5-2x+3x^2-x^3}{2x^2-5x-4} = \frac{\infty}{\infty}$ = Indeterminación.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5-2x+3x^2-x^3}{2x^2-5x-4} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^3}{2x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{2} = -(+\infty) = -\infty$

5.- Determina los límites de estas funciones:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}}{2x+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2}}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+3}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{\sqrt{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{1} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+3}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{\sqrt{x^2}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{1} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-12x+9}{\sqrt[3]{x^5+5x-2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{\sqrt[3]{x^5}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^{\frac{5}{3}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{0} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x} = \frac{1}{1} = 1$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{7x+\sqrt{3x-2}}{2x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{7x}{2x} = \frac{7}{2}$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-\sqrt{6+x}}{2x+4} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{2x} = \frac{2}{2} = 1$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+2x}{6x-3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}+2x}{6x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+2x}{6x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x}{6x} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

6. Calcula los siguientes límites:

$a)\ \lim\limits_{x\to0} x^{-4} = \lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^4} = \infty$

$b)\ \lim\limits_{x\to\infty} 4x^4 = +\infty$

$c)\lim\limits_{x\to0}\frac{3}{x^3} = \frac{3}{0} = +\infty$

$d)\ \lim\limits_{x\to0}\frac{x^{-2}}{5} = \lim\limits_{x\to0}\frac{1}{5x^2} = \infty$

$e) \lim_{x\to 0} \frac{x^5}{3} = \frac{0}{3} = 0$

$f) \lim_{x\to\infty} \frac{2x^4 - 3x - 1}{x^3 + 3} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^4}{x^3} = \infty$

$g) \lim_{x\to -\infty} \frac{2}{x^5} = 0$

$h) \lim_{x\to\infty} 3^{-x} = 0$

$i) \lim_{x\to -\infty} 3^{-x} = 3^{\infty} = \infty$

j) $\lim_{x\to\infty} \left[\frac{2}{3}\right]^x = 0$

$k) \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2} = \infty$

$l) \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2}{x^2 + 1} + \frac{3}{x + 2}\right) = \frac{2}{\infty} + \frac{3}{\infty} = 0$

7. Resuelve los siguientes límites.

$a) \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2-1}{5x} \cdot \frac{6x}{x^3+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{24x^3-6x}{5x^4+5x} = \lim_{x\to\infty} \frac{24}{5x} = 0$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+5}{1-2x} : \frac{5x^3}{x^2+12} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4+17x^2+60}{-10x^4+5x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{-10x^4} = -\frac{1}{10}$

$c) \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{2x^2+3}{5x} + \frac{6x-x^2}{3x}\right) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3+30x^2+9x}{15x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{15} = \infty$

8. Halla los siguientes límites de funciones:

a) $\lim_{x\to\infty} (x^3 - 12x) = \infty$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty$

c) $\lim_{x\to\infty} (x^2 - 4x) = \infty$

d) $\lim_{x\to\infty} \left(x^3 - \frac{3}{x^2}\right) = (\infty - 0) = \infty$

e) $\lim_{x\to\infty} (x - x^2) = -\infty$

f) $\lim_{x\to\infty} (2x - 3)^x = (\infty)^{\infty} = \infty$

g) $\lim_{x\to\infty} (x^3 + 5x^2 - 3) = \infty$

h) $\lim_{x\to\infty} [(x^2 + 1)^2 + 4x] = \infty + \infty = \infty$

9.- Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to +\infty} [2x^3 - 7x + 3] \to \lim_{x\to +\infty} 2x^3 = \infty$

b) $\lim_{x\to -\infty} \frac{2}{3x^2-5x+2} \to \lim_{x\to -\infty} \frac{2}{3x^2} = \frac{2}{\infty} = 0$

c) $\lim_{x\to-\infty}[4x^4-7x+5] \to \lim_{x\to-\infty} 4x^4 = \infty$

d) $\lim_{x\to-\infty}[-3x^5+2x-4] \to \lim_{x\to-\infty}(-3x^5) = \infty$

e) $\lim_{x\to+\infty}[-x^2+3x-2] \to \lim_{x\to+\infty}(-x^2) = -\infty$

f) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-7x+5}{-2x^2+4x-3} = \frac{\infty}{\infty}\ Indet. \to \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{-2x^2} = -1$

g) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+7}}{2x} = \frac{\infty}{\infty}\ Indet. \to \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2}}{2x} \to \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$

h) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x^4-3x^2+2}}{\sqrt[3]{4x^2+5}} = \frac{\infty}{\infty}\ Indet. \to \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{4x^2}} = \sqrt[3]{\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4}{4x^2}} = \sqrt[3]{\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{4}} = \sqrt[3]{\infty} = \infty$

i) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{2x}-5} = \frac{\infty}{\infty}\ Indet. \to \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x}} = \sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2x}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

j) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^5-2x+1}{7x^4-2x^2} = \frac{\infty}{\infty}\ Indet. \to \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^5}{7x^4} = \lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{7} = -\infty$

k) $\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2-5x+1}{2x^3-3} = \frac{\infty}{\infty}\ Indet. \to \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{2x^3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{2x} = \frac{-1}{2\cdot\infty} = 0$

l) $\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{1-x^3} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{-x^3} = \frac{2}{-\infty} = 0$

10. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x}-\frac{1+2x^2}{2x-1}\right) = \infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x}-\frac{1+2x^2}{2x-1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{[(x^2-1)(2x-1)]-[(1+2x^2)(x)]}{(x)(2x-1)}\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3-x^2-2x+1-x-2x^3}{2x^2-x}\right) = = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2-3x+1}{2x^2-x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2}{2x^2}\right) = \frac{-1}{2}$$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right) = \infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(\sqrt{x^2-2x}-x)(\sqrt{x^2-2x}+x)}{(\sqrt{x^2-2x}+x)}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(\sqrt{x^2-2x})^2-(x)^2}{(\sqrt{x^2-2x}+x)}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-2x-x^2}{(\sqrt{x^2-2x}+x)}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2x}{(\sqrt{x^2-2x}+x)}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{-2x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x}+\frac{x}{x}}\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2}{\sqrt{\frac{x^2-2x}{x^2}}+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}}+1}\right) = = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}\right) = \frac{-2}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{-2}{2} = -1$$

c) $\lim_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{1+4x}\right) = \infty$ El orden de 2x es mayor que el de $\sqrt{4x}$

d) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+3x}-3x\right) = \infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+3x}-3x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(\sqrt{9x^2+3x}-3x)(\sqrt{9x^2+3x}+3x)}{(\sqrt{9x^2+3x}+3x)}\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{9x^2+3x-9x^2}{(\sqrt{9x^2+3x}+3x)}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x}{(\sqrt{9x^2+3x}+3x)}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{3x}{x}}{\frac{\sqrt{9x^2+3x}}{x}+\frac{3x}{x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{\sqrt{\frac{9x^2+3x}{x^2}}+3}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{\sqrt{\frac{9x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}}+3}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{\sqrt{9+\frac{3}{x}}+3}\right) = = \frac{3}{\sqrt{9+0}+3} = \frac{3}{3+3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right) = -\infty-\infty = -\infty$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right) = -\infty+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(-x+\sqrt{(-x)^2-4(-x)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(\sqrt{x^2+4x}-x)(\sqrt{x^2+4x}+x)}{(\sqrt{x^2+4x}+x)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+4x}\right)^2-(x)^2}{(\sqrt{x^2+4x}+x)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x^2+4x)-x^2}{(\sqrt{x^2+4x}+x)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x}{(\sqrt{x^2+4x}+x)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x}{(\sqrt{x^2}+x)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x}{x+x}\right) = \frac{4}{1+1} = \frac{4}{2} = 2$$

11. Calcula los siguientes límites:

$a)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x-1} = 1^\infty$ calculamos $e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}-1\right)\cdot(2x-1)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{x}\right)} = e^2$

$b)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{6x+2} = 1^\infty$; $e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3}{x}-1\right)\cdot(6x+2)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-18x+6}{x}\right)} = e^{-18}$

$c)$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\frac{4x-1}{4x}\right)^{3x+2} = 1^\infty$; $e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{4x-1}{4x}-1\right)\cdot(3x+2)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+2}{4x}\right)} = e^{\frac{3}{4}}$

$d)$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x+3}\right)^{3x+1} = 1^\infty$; $e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x+3}-1\right)\cdot(3x+1)} = e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-9x+3}{x+3}\right)} = e^{-9}$

$e)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x-1} = 1^\infty$; $e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}-1\right)\cdot(x-1)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x^2}\right)} = e^0 = 1$

$f)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x+2}{x^2+1}\right)^{x+6} = 1^\infty$; $e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x+2}{x^2+1}-1\right)\cdot(x+6)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2-5x+6}{x^2+1}\right)} = e^{-1}$

$g)$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{1}{2x}} = 1^\infty$; $e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{2x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{2}{2(x^3+x)}\right)} = e^0 = 1$

$h)$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{1-x} = 1^\infty$; $e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2}{x}-1\right)\cdot(1-x)} = e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-2}{x}\right)} = e^2$

12. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+2x}-x\right] = \infty-\infty$ Indeterminación

$$\lim_{x\to\infty}\left[(\sqrt{x^2+2x}-x)\cdot\frac{\sqrt{x^2+2x}+x}{\sqrt{x^2+2x}+x}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{(\sqrt{x^2+2x}-x)\cdot(\sqrt{x^2+2x}+x)}{\sqrt{x^2+2x}+x}\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)}\right) = \frac{2}{(\sqrt{1}+1)} = 1$$

b) $\lim\limits_{x\to-3}\left[\frac{x^3+27}{x^2-9}\right] = \frac{-3^3+27}{-3^2-9} = \frac{0}{0}$ Indeterminación

$$\lim_{x\to-3}\left[\frac{x^3+27}{x^2-9}\right] = \lim_{x\to-3}\left[\frac{(x+3)(x^2-3x+3^2)}{(x-3)(x+3)}\right] = \lim_{x\to-3}\left[\frac{x^2-3x+3^2}{x-3}\right] = \frac{-3^2-3\cdot(-3)+3^2}{-3-3} = \frac{27}{-6} = \frac{-9}{2}$$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{2}{x^2+1}-\frac{3}{x+2}\right]=\frac{2}{\infty}-\frac{3}{\infty}=0-0=0$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{2x^4-3x-1}{x^3+3}\right]=\infty$ ya que grado del numerador > grado del denominador

13. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+4^x)=\infty+4^\infty=\infty+\infty=\infty$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-5}{3x^2+x}\right)^{x^2-1}=1^\infty\to$ Indeterminación

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)]^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}g(x)\cdot[f(x)-1]}$$

Calculamos $f(x)-1\to\left(\frac{3x^2-5}{3x^2+x}\right)-1=\frac{-x-5}{3x^2+x}$

Calculamos $g(x)\cdot[f(x)-1]\to(x^2-1)\cdot\left(\frac{-x-5}{3x^2+x}\right)=\frac{-5x^2-x^3+5+x}{3x^2+x}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-5}{3x^2+x}\right)^{x^2-1}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-5x^2-x^3+5+x}{3x^2+x}}=e^{-\infty}=0$$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{1-x}=(1)^\infty\to$ Indeterminación

$$e^{\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x)\cdot\left(1+\frac{2}{x}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(1-x)\cdot 2}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2x}{x}}=e^{-2}$$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-2x+2}{2x^2+3x-2}\right)^{x^2-3x}=\left(\frac{1}{2}\right)^\infty=0$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+3^{-x})=-\infty+\infty\to$ Indeterminación

Cambiamos x por $-x$; $x\to-\infty,-x\to\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(-x+3^{-(-x)}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}(3^x-x)=\lim\limits_{x\to\infty}3^x=\infty$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1}=\frac{\infty}{\infty}\to$ Indeterminación $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1$

g) $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{4x^2-5}-(2x-3)\right]}=\infty-\infty=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-5}-(2x-3)\right)\cdot\sqrt{4x^2-5}+(2x-3)}{\sqrt{4x^2-5}+(2x-3)}=$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-5}\right)^2-(2x-3)^2}{\sqrt{4x^2-5}+(2x-3)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2-5-4x^2+12x-9}{\sqrt{4x^2-5}+(2x-3)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x-14}{\sqrt{4x^2-5}+(2x-3)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\cdot\left(-\frac{14}{x}+12\right)}{x\cdot\left(\sqrt{4-\frac{5}{x^2}}+2-\frac{3}{x}\right)}=$

$\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{14}{x}+12\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4-\frac{5}{x^2}}+2-\frac{3}{x}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{14}{x}\right)+\lim\limits_{x\to\infty}(12)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4-\frac{5}{x^2}}\right)+2-\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x}\right)}=\frac{-14\cdot 0+12}{\sqrt{4-5\cdot 0}+2-3\cdot 0}=3$

14- Calcula los siguientes límites

a) $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x+1}}\cdot\boldsymbol{\sqrt{x^2+1}}=\frac{2}{\infty+1}\cdot\sqrt{\infty^2+1}=0\cdot\infty$ Indeterminación

-Multiplicamos los términos $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}$ Indeterminación

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2\sqrt{x^2}}{x}\right)^2 = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2}{x^2} = 4$, luego el límite es 2.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{9x^2+2x-3}-3x = \infty-\infty$ Indeterminación

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{9x^2+2x-3}-3x)(\sqrt{9x^2+2x-3}+3x)}{\sqrt{9x^2+2x-3}+3x} = \lim_{x\to\infty}\frac{9x^2+2x-3-9x^2}{\sqrt{9x^2+2x-3}+3x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{\sqrt{9x^2+2x-3}+3x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{3x+3x} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}) = \lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x}) = \infty-\infty$ Indeterminación

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{x+1}-\frac{x^2+1}{x} = \infty-\infty$ Indeterminación

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+2)x-(x^2+1)(x+1)}{(x+1)x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x-x^3-x^2-x-1}{(x+1)x} = \lim_{x\to\infty}\frac{-x^2+x-1}{(x+1)x} = -1$$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{2x^2-6x}{2x^2-x-5}\right]^{\frac{x^2}{2}} = 1^\infty$ Indeterminación

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2}\cdot\left(\frac{2x^2-6x}{2x^2-x-5}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2}\cdot\frac{2x^2-6x-2x^2+x+5}{2x^2-x-5}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-5x^3+5x^2}{2(2x^2-x-5)}} = e^{\frac{-5}{4}}$$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{4-3x}{5-3x}\right]^{x-3} = 1^\infty$ Indeterminación

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}(x-3)\cdot\left(\frac{4-3x}{5-3x}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}(x-3)\cdot\left(\frac{4-3x-5+3x}{5-3x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x+3}{5-3x}} = e^{\frac{-1}{-3}} = e^{\frac{1}{3}}$$

15. Determina los límites de estas funciones:

a) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x+1}{3x+3} = \frac{0}{0}$ Indeterminación; $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x+1}{3x+3} = \lim\limits_{x\to-1}\frac{1}{3}\left(\frac{x+1}{x+1}\right) = \frac{1}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x^2+2x}{x^2-3x} = \frac{0}{0}$ Indeterminación ; $\lim\limits_{x\to0}\frac{2(x+1)x}{(x-3)x} = -\frac{2}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{25-x^2}}{x-5} = \frac{0}{0}$ Indeterminación ; $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{5-x}\cdot\sqrt{5+x}}{-(5-x)} = \lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{5+x}}{-\sqrt{5-x}} = \frac{\sqrt{10}}{0} = \infty$

d) $\lim\limits_{x\to3}\frac{2x^2-18}{\sqrt{x^2-9}} = \frac{0}{0}$ Indeterminación ; $\lim\limits_{x\to3}2\left(\frac{x^2-9}{(x^2-9)^{\frac{1}{2}}}\right) = \lim\limits_{x\to3}2(x^2-9)^{\frac{1}{2}} = 0$

16. Determina los límites de estas funciones:

a) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{2x^2-3x-2} = \frac{0}{0}$ *Indeterminación* ; $\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)(x+1)}{2(x-2)(x+\frac{1}{2})} = \frac{3}{2\cdot\frac{5}{2}} = \frac{3}{5}$

b) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-x-2}{2x^2-3x-2} = \frac{0}{-3} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+5x^2+6x}{x^3+x^2-8x-12} = \frac{0}{0}$ *Indeterminación* ; $\lim\limits_{x\to-2}\frac{(x-2)(x+3)x}{(x-2)\cdot(x+2)^2} = \frac{-2}{0}$;

$\lim\limits_{x\to-2^-}f(x) = \frac{-2}{0^-} = \infty$ $\lim\limits_{x\to-2^+}f(x) = \frac{-2}{0^+} = -\infty$; No existe el límite

d) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^3+5x^2+6x}{x^3+x^2-8x-12} = \frac{0}{-6} = 0$

17.- Calcula estos límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x^2-2x+1}{x-3} \to \frac{(2^-)^2-(2\cdot 2^-)+1}{2^--3} \to \frac{1}{-1} \to -1$

b) $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x^2-2x+1}{x-3} \to \frac{(2^+)^2-(2\cdot 2^+)+1}{2^+-3} \to \frac{1}{-1} \to -1$

c) $\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{x^2-2x+1}{x-3} \to \frac{(3^-)^2-(2\cdot 3^-)+1}{3^--3} \to \frac{4}{0^-} \to -\infty$

d) $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{x^2-2x+1}{x-3} \to \frac{(3^+)^2-(2\cdot 3^+)+1}{3^+-3} \to \frac{4}{0^+} \to +\infty$

e) $\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{x-3}{(x-1)^2} \to \frac{-1^--3}{(-1^--1)^2} \to \frac{-4}{4} \to -1$

f) $\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{x-3}{(x-1)^2} \to \frac{-1^+-3}{(-1^+-1)^2} \to \frac{-4}{4} \to -1$

g) $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x^2+x-6}{x^3-x^2-8x+12} \to \frac{0}{0}\ Indeterminación$

h) $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x^2+x-6}{x^3-x^2-8x+12} \to \frac{0}{0}\ Indeterminación$

Descomponemos factorialmente

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^3-x^2-8x+12} = \lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x+3)(x-2)}}{\cancel{(x+3)(x-2)}(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2} \to \frac{1}{2-2} \to \frac{1}{0} \to \pm\infty$$

g) $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2} \to \frac{1}{2^--2} \to \frac{1}{0^-} = -\infty$

h) $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2} \to \frac{1}{2^+-2} \to \frac{1}{0^+} = +\infty$

18.- Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-3}{x+2} \to \frac{3^2-3}{3+2} \to \frac{6}{5}$

b) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-3}{x+2} \to \frac{1}{0} \to \pm\infty$

$\lim\limits_{x\to -2^-}\frac{x^2-3}{x+2} \to \frac{(-2^-)^2-3}{-2^-+2} \to \frac{1}{0^-} \to -\infty$

$\lim\limits_{x\to -2^+}\frac{x^2-3}{x+2} \to \frac{(-2^+)^2-3}{-2^++2} \to \frac{1}{0^+} \to +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x} \to \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}} \to 1$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sin x} \to \frac{1}{\sin 0} \to \frac{1}{0} \to \pm\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{\sin x} \to \frac{1}{\sin 0^-} \to \frac{1}{0^-} \to -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\sin x} \to \frac{1}{\sin 0^+} \to \frac{1}{0^+} \to +\infty$

19. Calcula los siguientes límites:

$\boldsymbol{a})\ \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^3+2x^2-3x} = \frac{1-1}{1+2-3} = \frac{0}{0} \to Indet.$

- Hacemos descomposición factorial:

$x^3-1 \to (x-1)(x^2+x+1)$

$x^3+2x^2-3x \to x(x-1)(x+3)$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x(x-1)(x+3)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x+1)}{x(x+3)} = \frac{1+1+1}{1\cdot 4} = \frac{3}{4}$$

$\boldsymbol{b})\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x^3-2x^2-x} = \frac{0}{0} = Indet.$

- Hacemos descomposición factorial:

$x^2+x \to x(x+1)$

$$x^3-2x^2-x \to x(x-1)(x-1)$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)}{x(x-1)(x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)}{(x-1)(x-1)}=\frac{1}{1}=1$$

c) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{5x^2-13x-6}=\frac{9-9}{45-39-6}=\frac{0}{0}=Indet.$

- Hacemos descomposición factorial:

$x^2-9 \to (x+3)(x-3)$

$5x^2-13x-6 \to (5x+2)(x-3)$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)(x-3)}{(5x+2)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)}{(5x+2)}=\frac{6}{17}$$

d) $\lim_{x\to -1}\frac{x^4-1}{x^3+1}=\frac{1-1}{-1+1}=\frac{0}{0}=Indet.$

- Hacemos descomposición factorial:

  $x^4-1 \to (x^2+1)(x+1)(x-1)$

  $x^3+1 \to (x+1)(x^2-x+1)$

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x^2+1)(x+1)(x-1)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x^2+1)(x-1)}{(x^2-x+1)}=\frac{(1+1)(-1-1)}{(1+1+1)}=\frac{2\cdot(-2)}{3}=\frac{-4}{3}$$

e) $\lim_{x\to 0}\frac{x^4-3x^2}{x^2+x}=\frac{0}{0}=Indet.$

- Hacemos descomposición factorial:

  $x^4-3x^2 \to x^2(x^2-3)$

  $x^2+x \to x(x+1)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2(x^2-3)}{x(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x^2-3)}{(x+1)}=\frac{0}{1}=0$$

f) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}=\frac{4-10+6}{4-8+4}=\frac{0}{0}=Indet.$

- Hacemos descomposición factorial:

$x^2-5x+6 \to (x-2)(x-3)$

$x^2-4x+4 \to (x-2)(x-2)$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-3)}{(x-2)}=\frac{-1}{0}=\pm\infty$$

g) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}}{2x}=\frac{\sqrt{1}}{0}=\frac{1}{0}=\pm\infty$

h) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{1-1}{\sqrt{1}-1}=\frac{0}{1-1}=\frac{0}{0}=Indet.$

- Hacemos descomposición factorial:

$x^2-1 \to (x+1)(x-1)$

- Como $\sqrt{x}-1$ no se puede descomponer multiplicamos por su expresión conjugada:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}(x+1)(\sqrt{x}+1)=2\cdot 2=4$$

i) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-9}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}}{9-9}=\frac{0}{0}=Indet.$

- Hacemos descomposición factorial:

$x^2-9 \to (x+3)(x-3)$

- Como $\sqrt{x}-\sqrt{3}$ no se puede descomponer multiplicamos por su expresión conjugada:

$$\lim_{x\to3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})\,(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(x+3)(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}=\lim_{x\to3}\frac{(x+3)}{(x+3)(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}=\lim_{x\to3}\frac{1}{(x+3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}=\frac{1}{6(\sqrt{3}+\sqrt{3})}=\frac{1}{6\cdot2\sqrt{3}}=\frac{1}{12\sqrt{3}}$$

j) $\lim_{x\to4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{2-\sqrt{8-x}}=\frac{3-\sqrt{9}}{2-\sqrt{4}}=\frac{3-3}{2-2}=\frac{0}{0}=Indet.$

$$\lim_{x\to4}\frac{(3-\sqrt{5+x})(3+\sqrt{5+x})}{(2-\sqrt{8-x})(3+\sqrt{5+x})}=\lim_{x\to4}\frac{9-5-x}{(2-\sqrt{8-x})(3+\sqrt{5+x})}=\lim_{x\to4}\frac{4-x}{(2-\sqrt{8-x})(3+\sqrt{5+x})}=\frac{0}{0}=Indet.$$

$$\lim_{x\to4}\frac{(4-x)(2+\sqrt{8-x})}{(2-\sqrt{8-x})(2+\sqrt{8-x})(3+\sqrt{5+x})}=\lim_{x\to4}\frac{(4-x)(2+\sqrt{8-x})}{(4-8+x)(3+\sqrt{5+x})}=\lim_{x\to4}\frac{(4-x)(2+\sqrt{8-x})}{(-4+x)(3+\sqrt{5+x})}=$$

$$\lim_{x\to4}\frac{(4-x)(2+\sqrt{8-x})}{-(4-x)(3+\sqrt{5+x})}=\lim_{x\to4}\frac{(2+\sqrt{8-x})}{-(3+\sqrt{5+x})}=\frac{4}{-6}=-\frac{2}{3}$$

k) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{x^2+x}=\frac{0}{0}\ Ind$

$$\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x})}{(x^2+x)(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x})}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{2-x})^2-(\sqrt{2+x})^2}{(x^2+x)(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x})}=\lim_{x\to0}\frac{-2x}{x(x+1)(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x})}=\lim_{x\to0}\frac{-2}{(x+1)(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x})}$$

$$=\frac{-2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=-\frac{2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

l) $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x}-2}=\frac{0}{0}Ind$

$$\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{2x}-2)(\sqrt{x+2}+2)}=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x+2})^2-4}{(\sqrt{2x}-2)(\sqrt{x+2}+2)}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(\sqrt{2x}-2)(\sqrt{x+2}+2)}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(\sqrt{2x}+2)}{(\sqrt{2x}-2)(\sqrt{x+2}+2)(\sqrt{2x}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(\sqrt{2x}+2)}{(\sqrt{x+2}+2)\left(\sqrt{2x}^2-4\right)}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(\sqrt{2x}+2)}{(\sqrt{x+2}+2)(2x-4)}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(\sqrt{2x}+2)}{(\sqrt{x+2}+2)2(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{2x}+2)}{2(\sqrt{x+2}+2)}=\frac{2\sqrt{2}+2}{8}=\frac{\sqrt{2}+1}{4}$$

m) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4}=\frac{0}{0}Ind$

$$\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)(\sqrt{x+16}+4)}{(\sqrt{x+16}-4)(\sqrt{x+16}+4)(\sqrt{x+9}+3)}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{x+9}^2-9\right)(\sqrt{x+16}+4)}{\left(\sqrt{x+16}^2-16\right)(\sqrt{x+9}+3)}=\lim_{x\to0}\frac{x(\sqrt{x+16}+4)}{x(\sqrt{x+9}+3)}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x+16}+4)}{(\sqrt{x+9}+3)}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

n) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$

o) $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+7}-3}=\frac{0}{0}Ind$

$$\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)(\sqrt{x+7}+3)}{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{x^2+5}^2-9\right)(\sqrt{x+7}+3)}{\left(\sqrt{x+7}^2-9\right)(\sqrt{x^2+5}+3)}=$$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)(\sqrt{x+7}+3)}{(\sqrt{x^2+5}+3)}=\frac{24}{6}=4$$

20. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to-3}\frac{x^3+27}{x^2-9}=\frac{0}{0}Ind\qquad \lim_{x\to-3}\frac{(x+3)(x^2-3X+9)}{(x+3)(x-3)}=\lim_{x\to-3}\frac{(x^2-3X+9)}{x-3}=-\frac{27}{6}$

b) $\lim_{x\to1^-}\frac{2x^2-2}{x^2-2x+1}=\frac{0}{0}Ind$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{2x^2-2}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to1^-}\frac{2(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-1)}=\lim_{x\to1^-}\frac{2(x+1)}{x-1}=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x+1}\cdot\frac{x^2+4}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)(x^2+4)}{(x+1)(x-2)x}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+2)(x^2+4)}{(x+1)x}=\frac{4\cdot 8}{6}=\frac{32}{6}=\frac{16}{3}$

d) $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2x^2-2}{x^2-2x+1}=\frac{0}{0}$ ***Ind***

$\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2x^2-2}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2(x+1)}{x-1}=\frac{4}{0^+}=+\infty$

21.- Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x-1}=\frac{2}{0}\to\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2+1}{x-1}=-\infty;\ \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2+1}{x-1}=+\infty\to\nexists\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2+x}{x^2}=\frac{2}{0}\to\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{2+x}{x^2}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2+x}{x^2}=+\infty\to\lim\limits_{x\to 0}\frac{2+x}{x^2}=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+5}{|x-3|}=\frac{8}{0}\to\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{x+5}{|x-3|}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to 3^-}\frac{x+5}{|x-3|}=+\infty\to\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+5}{|x-3|}=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to 2}[x-1]^{\frac{3}{x-2}}=1^\infty\to e^{\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{3}{x-2}\right)((x-1)-1)}=e^{\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{3x-6}{x-2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{3(x-2)}{x-2}\right)}=e^3$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{x^2+4}{x+4}\right]^{\frac{x}{x-1}}\to 1^\infty\to e^{\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}\right)\left(\frac{x^2+4}{x+4}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x(x^2-x)}{(x-1)(x+4)}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^2}{x+4}\right)}=e^{\frac{1}{5}}$

f) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{x+2}{x-1}-\frac{x-2}{x^2-1}\right]=\infty-\infty\to\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{(x+2)(x+1)-(x-2)}{(x-1)(x+1)}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{(x^2+2x+4)}{(x-1)(x+1)}\right]=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{(x^2+2x+4)}{(x^2-1)}\right]=\frac{7}{0}\to\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\frac{(x^2+2x+4)}{(x^2-1)}\right]=+\infty;\ \lim\limits_{x\to 1^-}\left[\frac{(x^2+2x+4)}{(x^2-1)}\right]=-\infty\to\nexists\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{x+2}{x-1}-\frac{x-2}{x^2-1}\right]$

g) $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{2x-4}}{x-2}=\frac{0}{0}\to\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{2x-4}}{x-2}\cdot\frac{\sqrt{2x-4}}{\sqrt{2x-4}}=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{2(x-2)}{(x-2)\sqrt{2x-4}}=\frac{2}{0^+}=+\infty$

h) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2}=\frac{0}{0}\to\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2}\cdot\frac{(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}+2)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)=8$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{2}{x^3}\cdot\frac{x^2+2x}{3}\right]=\frac{0}{0}\to\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{x(2x+4)}{3x^2\cdot x}\right]=\frac{4}{0}\to\lim\limits_{x\to 0^-}\left[\frac{2x+4}{3x^2}\right]=+\infty;\ \lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{2x+4}{3x^2}\right]=+\infty;$

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{2}{x^3}\cdot\frac{x^2+2x}{3}\right]=\infty\cdot 0$

j) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{5x-2}{5x+3}\right]^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{5x}{5x}\right]^{3x}=1^\infty\to e^{\lim\limits_{x\to\infty}(3x)\left(\frac{5x-2}{5x+3}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{15x}{5x+3}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{15x}{5x}\right)}=e^{-3}$

k) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x^2+2}\right)\right]=\infty\cdot 0;$

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x^2+2}\right)\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2+2-x-2}{(x+2)(x^2+2)}\right)\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(x-1)}{x^2(x+2)(x^2+2)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x-1)}{x(x+2)(x^2+2)}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(x-1)}{x(x+2)(x^2+2)}=-\infty;\quad\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{(x-1)}{x(x+2)(x^2+2)}=\infty\to\nexists\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x^2+2}\right)\right]$

22.- Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{1-x^3}}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{0}{0}\to\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\frac{-(1-x)(x^2+x+1)}{(1-x)(x+1)}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$

b) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{2+\ln x}{3+\ln x^2}\right)^{\frac{-3}{x-1}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-\infty}=\left(\frac{3}{2}\right)^{\infty}=+\infty$

23.- Calcula los límites laterales y el límite, cuando exista, de las siguientes funciones en los puntos que se indican

a) $\mathbf{f(x)=\begin{cases}2x-2, & x<3\\ 2x, & x\geq 3\end{cases}}$ **en $\mathbf{x=3}$** $\to\lim\limits_{x\to 3}f(x)\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(2x-2)=4\\ \lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}2x=6\end{cases}$

Como $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)$, no existe $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ en x=3

b) $\mathbf{f(x)=\begin{cases} x^2+3x-1, & x<1 \\ x+2, & x\geq 1\end{cases}}$ **en x = 1** $\rightarrow \lim_{x\to 1} f(x)\begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x^2+3x-1) = 3 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x+2) = 3\end{cases}$

Como $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$, existe $\lim_{x\to 3} f(x) = 3$ en x=1

24. – Halla el valor de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3^{\frac{3}{x}}-2}{2^{\frac{1}{x}}+2}=\frac{3^0-2}{3^0+2}=\frac{-1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{3^{\frac{1}{x}}-4x}{4^{\frac{1}{x}}+3x-2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{3^{\frac{1}{x}}}{4^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\frac{3}{4}\right)^{+\infty}=0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{4^{\frac{2}{x}}+3x^2+1}{5^{\frac{3}{x}}-3+2x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{4^{\frac{2}{x}}}{5^{\frac{3}{x}}}=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{4^2}{5^3}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\frac{8}{125}\right)^{-\infty}=\left(\frac{125}{8}\right)^{\infty}=\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{\frac{4}{x}}-2x^2+3}{3^{\frac{1}{x}}-3-2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2}{-2x}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

25. – Calcula el valor de los siguientes límites:

$$A)\ \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{2-x+1}\rightarrow\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{3^2+7}-4}{2-3+1}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x^2+7}-4)(\sqrt{x^2+7}+4)}{(-x+3)(\sqrt{x^2+7}+4)}\rightarrow\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x^2+7}\right)^2-4^2}{(-x+3)(\sqrt{x^2+7}+4)}\rightarrow\lim_{x\to 3}\frac{x^2+7-16}{(-x+3)(\sqrt{x^2+7}+4)}\rightarrow$$

$$\rightarrow\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{(-x+3)(\sqrt{x^2+7}+4)}\rightarrow\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)(x-3)}{(-x+3)(\sqrt{x^2+7}+4)}\rightarrow\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)(x-3)}{-(x-3)(\sqrt{x^2+7}+4)}\rightarrow\frac{3+3}{-(\sqrt{3^2+7}+4)}=\frac{9}{-8}$$

$$B)\ \lim_{x\to 2}\frac{2^x-4}{2^{2x}-5\cdot 2^2+4}=\frac{0}{0}\qquad\lim_{x\to 2}\frac{2^x-4}{(2^x-4)(2^x-1)}\rightarrow\lim_{x\to 2}\frac{1}{2^x-1}=\frac{1}{3}$$

26.–Dada la función f(x)=$\begin{cases} \mathbf{3x-1}\ \ \boldsymbol{si\ x<0} \\ \mathbf{0}\ \ \boldsymbol{si\ x=0} \\ \mathbf{2x+5}\ \ \boldsymbol{si\ x>0}\end{cases}$

Para x< 0 f es continua al ser una función polinómica

Para x> 0 f es continua al ser una función polinómica

En x=2

$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}(2x+5) = 9$

En x=0^-

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(3x-1) = -1$

En x=0^+

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(2x+5) = 5$

En x=-3

$\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3}(3x-1) = -1$

x=0

f(0)=0

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases}\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(2x+5) = 5 \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(3x-1) = -1\end{cases}$$

Para que exista $\lim_{x\to 0} f(x)$, los limites laterales han de ser iguales por tanto al no ser iguales no existe el limite cuando x=0

La función tiene una discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto finito

27. – Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

A) $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si\ x \le 2 \\ x + 2 & si\ x > 2 \end{cases}}$

Para x<2 f es continua al ser una función polinómica
Para x>2 f es continua al ser una función polinómica
Estudiamos continuidad en x=2 y x=-2
En x=2
f(2)=$2^2 - 1 = 3$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^2-1) = 3 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x+2) = 4 \end{cases}$$

Para que exista $\lim_{x\to 2} f(x)$, los limites laterales han de ser iguales por tanto al no ser iguales no existe el límite cuando x=2
La función tiene una discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto finito.

B) $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & si\ x < 2 \\ 2x - 1 & si\ 2 \le x < 4 \\ 5 & si\ x \ge 4 \end{cases}}$

Para x$<$ 2 f es continua al ser una función polinómica
Para 2$< x <$ 4 f es continua al ser una función polinómica
Para x$>$ 4 f es continua al ser una función constante.
Estudiamos continuidad en x=2 y en x=4

En x=2
f(2)=2·2-1=3

$$\lim_{x\to 2}(f) = \begin{cases} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^2+1) = 5 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (2x-1) = 3 \end{cases}$$

Para que exista, los límites laterales han de ser iguales, por lo tanto, al no ser iguales no existe el límite x→2
La función tiene una discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto finito

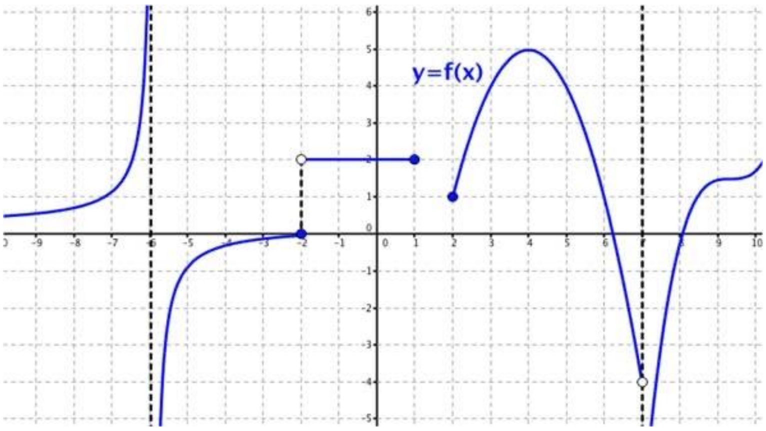
En x=4
f(4)=5

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} (2x-1) = 7 \\ \lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} 5 = 5 \end{cases}$$

Para que exista $\lim_{x\to 4} f(x)$ los limites laterales han de ser iguales por tanto al no ser iguales no existe el límite cuando x=4

La función tiene una discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto finito

28. – Clasifica las discontinuidades que presenta la siguiente función:



En x= -6 tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
En x= -2 tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto finito.
En x= 7 tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.

29. Estudia la continuidad de las siguientes funciones.

a) ***f(x)***= $\begin{cases} x^2-4 & si\ \ x<2 \\ x-2 & si\ \ 2\le x\le 4 \\ 5 & si\ \ x>4 \end{cases}$

b) g(x) $\begin{cases} \frac{5}{x-5} & si\ \ x\le 0 \\ \sqrt{x+1} & si\ \ 0<x\le 3 \\ \frac{10}{x+2} & si\ \ x>3 \end{cases}$

a)

Continuidad en x=2

1º. $f(2)=2-2=0$

2º. $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-4)=0 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x^+}(x-2)=0 \end{cases}$

Como $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to 2} f(x)=0$

3º. Como $f(2)=0=\lim\limits_{x\to 2} f(x),$ f es continua en $x=2$

Continuidad en x=4

1º. $f(4)=4-2=2$

2º. $\lim\limits_{x\to 4}f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}(x-2)=2 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+}(5)=5 \end{cases}$

3º. Como $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)\ne \lim\limits_{x\to 4^+} f(x);\ \nexists \lim\limits_{x\to 4} f(x),$ la función no es continua en $x=4$

Presenta una discontinuidad inevitable de la 1ª especie de salto finito.

b)

Continuidad en x=0

1º. $g(0)=\frac{5}{0-5}=-1$

2º. $\lim_{x\to 0} g(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{5}{x-5}\right) = -1 \\ \lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{x-5}{\sqrt{x+1}} = -5 \end{cases}$

Como $\lim_{x\to 0^-} g(x) \neq \lim_{x\to 0^+} g(x)$, no existe $\lim_{x\to 0} g(x)$, , por lo que g(x)presenta una discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto finito en $x = 0$.

Continuidad en x=3

1º. $g(3) = \frac{3-5}{\sqrt{3+1}} = -1$

2º. $\lim_{x\to 3} \begin{cases} \lim_{x\to 3^-} g(x) = \lim_{x\to 3^-}\frac{x-5}{\sqrt{3+1}} = -1 \\ \lim_{x\to 3^+} g(x) = \lim_{x\to 3^+}\frac{10}{x+2} = 2 \end{cases}$

Como $\lim_{x\to 3^-} g(x) \neq \lim_{x\to 3^+} g(x)$, no existe $\lim_{x\to 3} g(x)$, por lo que g(x) no es continua y tiene discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto finito en x=3.

30. Estudia la continuidad de las funciones.

a) $\boldsymbol{f(x) = \frac{x+1}{x^2+x}}$

Dominio, $\quad x^2 + x \neq 0$

$x^2 + x = 0 \to x(x+1) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

$\mathrm{Dom} = \mathbb{R} - \{0, -1\}$

$\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x^2+x} = \frac{0+1}{0^2+0} = \frac{1}{0} = \infty$, por lo que f no es continua en $x = 0$.

Discontinuidad no evitable de 1ª especie de salto infinito.

$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x^2+x} = \frac{-1+1}{(-1)^2-1} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (hay que factorizar)}$

$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x(x+1)} = \lim_{x\to -1}\frac{1}{x} = \frac{1}{-1} = -1$

Como no existe f(-1) pero sí el límite, discontinuidad evitable

b) $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in \mathbb{Z} \\ 0 & si \quad x \notin \mathbb{Z} \end{cases}}$

$\lim_{x\to z} f(x) = 1 \qquad \lim_{x\to x\notin z} f(x) = 0$

$\lim_{x\to z} f(x) = 1 \neq \lim_{x\to x\notin z} f(x) = 0$, f no es continua. Presenta una discontinuidad evitable de salto finito.

c) $\boldsymbol{f(x) = |x-3|}$

$f(x) = \begin{cases} x-3 & si \quad x > 3 \\ -x+3 & si \quad x \leq 3 \end{cases}$

1º. Continuidad en x=3

$f(3) = 3 - 3 = 0$

2º. $\lim_{x\to 3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (-x+3) = 0 \\ \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (x-3) = 0 \end{cases}$

Como $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = 0, \lim_{x\to 3} f(x) = 0$

3º. Como $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = 0,$ la función es continua en $x = 3$

d) $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 3^{\frac{1}{x}} & si \quad x \in \mathbb{R} \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}}$

1º. $f(0) = 0$

2º. $\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(3^{\frac{1}{x}}\right) = 3^{\frac{1}{0}} = 3^{\infty} = -\infty \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(3^{\frac{1}{x}}\right) = 3^{\frac{1}{0}} = 3^{\infty} = \infty \end{cases}$

Como $\lim_{x\to 0^-} f(x)$
$\neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$
$\neq$ f(0), la función presenta una discontinuidad no evitable de 1ª especie de salto infinito.

e) $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si \quad x \le 2 \\ x + 1 & si \quad x > 2 \end{cases}}$

1º. $f(2) = 2^2 - 1 = 3$

2º. $\lim_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^2 - 1) = 2^2 - 1 = 3 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x+1) = 2 + 1 = 3 \end{cases}$

3º. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 3$, existe $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$, por lo que la función es continua en $x = 3$

31. Estudia la continuidad de la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x}}$ en el intervalo (2, 5).

$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x}}$

Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$, como 0 no pertenece al intervalo, f(x) es continua en $(2, 5)$.

32. – Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} x + 1 \; si \; x \le -1 \\ x^2 - 3 \; si \; x > -1 \end{cases}$

Continuidad en x=-1

1.- $f(-1) = 0$

2.- $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (x+1) = 0 \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (x^2 + 3x) = -2$

Como $\lim_{x\to -1^-} f(x) \neq \lim_{x\to -1^+} f(x)$, f no es continua en x=-1. Presenta una discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito.

b) $f(x)=\begin{cases} 3x-2 \; si \; x<-1 \\ x^2+4x-1 \; si \; -1\le x\le 2 \\ x+11 \; si \; x>2\end{cases}$

Continuidad en x=-1

1.- $f(-1)=-4$

2.- $\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}(3x-2)=-5 \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}(x^2+4x-1)=-4$

Como $\lim_{x\to -1^-} f(x)\neq \lim_{x\to -1^+} f(x)$ f no es continua en x=-1. Presenta una discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito.

Continuidad en x=2

1.- $f(2)=11$

2.- $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x^2+4x-1)=11 \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x+11)=13$

Como $\lim_{x\to 2^-} f(x)\neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$, f no es continua en x=2. Presenta una discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito.

c) $f(x)=\begin{cases} \frac{4}{x-4} \; si \; x<0 \\ x-1 \; si \; 0<x\le 3 \\ \frac{1}{x-3} \; si \; x>3\end{cases}$

Continuidad en x=0

1.- f(0) no está definido.

2.- $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x-1)=-1 \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{4}{x-4}=-1$ Por tanto $\lim_{x\to 0} f(x)=-1$

No es continua, presenta una discontinuidad evitable.

Continuidad en x=3

1.- $f(3)=2$

2.- $\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-} x-1=2 \qquad \lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{x-3}=\infty$

3.-

Como uno de los límites laterales es infinito, f no es continua en x=3. Presenta una discontinuidad no evitable de primera especie de salto infinito.

d) $\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} -2 \; si \; x<-2 \\ -x^2+4 \; si -2\le x\le 2 \\ 2 \; si \; x>2\end{cases}}$

Continuidad en x=-2

1.- $f(-2)=0$

2.- $\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}(-2)=-2 \qquad \lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}(-x^2+4)=0$

Como $\lim_{x\to -2^-} f(x)\neq \lim_{x\to -2^+} f(x)$, f no es continua en x=2. Presenta una discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito.

Continuidad en x=2

1.- $f(2)=0$

2.- $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(-x^2+4)=0 \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} 2=2$

Como $\lim_{x\to 2^-} f(x)\neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$, f no es continua en x=2. Presenta una discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito.

e) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-9}{x-3} & si\ x\neq 3\\ 6 & si\ x=3\end{cases}$

1.- $f(3)=6$

2.- $\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{0}{0};\ \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)}=6$

3.- Como f(3) = 6 = $\lim_{x\to 3} f(x)$, f es continua en x=3.

f) $f(x)=\begin{cases}-5-\frac{|x|}{x} & si\ x\neq 0\\ 5 & si\ x=0\end{cases};\ f(x)=\begin{cases}5-\frac{-x}{x} & si\ x<0\\ 5 & si\ x=0\\ 5-\frac{x}{x} & si\ x>0\end{cases}=\begin{cases}6 & si\ x<0\\ 5 & si\ x=0\\ 4 & si\ x>0\end{cases}$

Continuidad en x=0

1.- $f(0)=5$

2.- $\lim_{x\to 0^-} f(x)=6 \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)=4$

Como $\lim_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$, f no es continua en x=0. Presenta una discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito.

g) $f(x)=|x^2-6x+5|$

Se trata del valor absoluto de una función polinómica, f es continua.

h) $f(x)=\begin{cases}|3-x| & si\ x\leq 5\\ \ln e^2 & si\ x>5\end{cases}$

Continuidad en x=5

1.- $f(5)=|3-5|=2$

2.- $\lim_{x\to 5^-} f(x)=\lim_{x\to 5^-}|3-x|=|3-5|=|-2|=2 \qquad \lim_{x\to 5^+} f(x)=\lim_{x\to 5^+}\ln e^2=2\ln e=2(1)=2$

3.-

Como $\lim_{x\to 5^-} f(x)=\lim_{x\to 5^+} f(x)$, el límite existe. Como $\lim_{x\to 5} f(x)=f(5)$, por tanto, f es continua en x=5.

33.- Determina el valor de *a* para que esta función sea continua en todo $\mathbb{R}$:

***f*(x)=**$\begin{cases}\frac{x+1}{x} & \text{si } x\leq -2\\ -x^2+a & \text{si } x>-2\end{cases}$

Para x < -2 f es continua por ser una función racional y no anularse el denominador

Para x > -2 f es continua por ser una función polinómica

Para que f sea continua en $\mathbb{R}$ debe ser continua en x = -2, para ello $f(-2)=\lim_{x\to -2} f(x)$

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\begin{cases}\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}\left(\frac{x+1}{x}\right)=\frac{-2+1}{-2}=\frac{1}{2}\\ \lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}(-x^2+a)=-4+a\end{cases}$$

$\frac{1}{2}=-4+a;\quad a=\frac{9}{2}$ Luego f es continua en todo $\mathbb{R}$ cuando $a=\frac{9}{2}$

34.- Determina el valor del parámetro *b* para que la función

$f(x)=\begin{cases}2x-3 & si\ x\leq 3\\ x+b & si\ x>3\end{cases}$ **sea continua en todo su dominio.**

f es continua en todo su dominio, salvo en x = 3, por ser una función definida a trozos de funciones polinómicas que son continuas, hallamos b para que sea continua en 3

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 3^-} (2x-3) = 3 \\ \lim_{x\to 3^+} (x+b) = 3+b \end{cases}$$

Para que exista el límite, los límites laterales deben ser iguales, luego:

3 = 3 + *b*; *b* = 0

35.- Halla el valor de *k* para que la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x+2} & si\ x \neq -2 \\ k & si\ x = -2 \end{cases}$ **sea continua en x=-2.**

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x+2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} = \lim_{x\to -2} (x-2) = -4$$

Como f(-2) = k, k = - 4.

36.- Calcula *m, n y p* para que la siguiente función sea continua en todo ℝ:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} & si\ x < -8 \\ -2m+3 & si\ -8 \le x < -4 \\ x - \frac{1}{n} & si\ -4 \le x < 2 \\ px & si\ 2 \le x \end{cases}$$

f es continua en todo su dominio, salvo en x = -8, x = -4 y x = 2, por ser una función definida a trozos de funciones polinómicas que son continuas.

Continuidad en x=-8

$$\lim_{x\to -8} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to -8^-} f(x) = \lim_{x\to -8^-} \frac{3}{x} = -\frac{3}{8} \\ \lim_{x\to -8^+} f(x) = \lim_{x\to -8^+} (-2m+3) = -2m+3 \end{cases}$$

$$-2m+3 = -\frac{3}{8}; \quad m = \frac{27}{16}$$

Continuidad en x=-4

$$\lim_{x\to -4} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to -4^-} f(x) = \lim_{x\to -4^-} (-2m+3) = -2\cdot\frac{27}{16} + 3 = -\frac{54}{16} + 3 = -\frac{3}{8} \\ \lim_{x\to -4^+} f(x) = \lim_{x\to -4^+} \left(x - \frac{1}{n}\right) = -4 - \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$-\frac{3}{8} = -4 - \frac{1}{n}; \quad n = -\frac{8}{29}$$

Continuidad en x=2

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 2^-} \left(x - \frac{1}{n}\right) = 2 + \frac{29}{8} = \frac{45}{8} \\ \lim_{x\to 2^+} px = 2p \end{cases}$$

$$2p = \frac{45}{8}; \quad p = \frac{45}{16}$$

Luego f es continua en todo ℝ cuando $m = \frac{27}{16}; \ n = -\frac{8}{29}; \quad p = \frac{45}{16}$

37. Calcula k, en cada caso, de modo que las siguientes funciones sean continuas en todo ℝ.

a) $f(x) = \begin{cases} kx-3 & si\ x < 4 \\ -x^2+10x-13 & si\ x \ge 4 \end{cases}$

f **es continua en** $x < 4$ **por ser una función polinómica.**

f **es continua en x** > 4 **por ser una función polinómica.**

Continuidad en x=4

1. $f(4)$= -$(4)^2 + 10(4) - 13 = 11$

2. $\lim_{x\to 4} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 4^-} f(x); & \lim_{x\to 4^-} (kx-3) = 4k-3 \\ \lim_{x\to 4^+} f(x)\,; & \lim_{x\to 4^+} (-x^2+10x-13) = (-(4)^2+10(4)-13) = 11 \end{cases}$

Para que $\exists \lim_{x\to 4} f(x)$ los límites laterales han de ser iguales luego, $4k-3=11$, $k=\frac{7}{2}$

3. f**(4) =**$\lim_{x\to 4} f(x) = 11$ **, luego** $f(x)$ **es continua en x=4 cuando k=**$\frac{7}{2}$**.**

b) $f(x) = \begin{cases} 1+|x| \ si\ x<0 \\ k \quad\quad si\ x=0 \\ \frac{3}{2}x+1\ si\ x>0 \end{cases}$

f **es continua en** $x<0$ **por ser una función polinómica.**

f **es continua en x**>0 **por ser una función polinómica.**

Continuidad en x=0

1. $f(0)=k$
2. $\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x); \lim_{x\to 0^-} (1+|x|) = (1+|0|) = 1 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x)\,; \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{3}{2}x+1\right) = \left(\frac{3}{2}(0)+1\right) = 1 \end{cases}$

Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)\,;\ \exists \lim_{x\to 0} f(x) = 1$

3. Para que f sea continua $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 1$, luego k =1.

38. El espacio recorrido por un móvil en función del tiempo viene dado por la siguiente función:

$$e(t) = \begin{cases} 3t^2 & si\ 0 \le t < 2 \\ 3t+a & si\ 2 \le t \le 5 \\ -t^2+13t+b & si\ 5 < t \end{cases}$$

Determina los valores de a y b, para que la función sea continua en t=2 y t=5.

f **es continua en** $0<t<2$ **por ser una función polinómica.**

f **es continua en** $2<t<5$ **por ser una función polinómica.**

f **es continua en** $5<t$ **por ser una función polinómica.**

Continuidad en t =2

1. $e(2) = 3(2)+a = 6+a$
2. $\lim_{t\to 2} e(t) = \begin{cases} \lim_{t\to 2^-} e(t); & \lim_{t\to 2^-} (3t^2) = 12 \\ \lim_{t\to 2^+} e(t); & \lim_{t\to 2^+} (3t+a) = 6+a \end{cases}$

Para que $\exists \lim_{t\to 2} e(t)$ los límites laterales han de ser iguales luego, $6+a=12, a=6$

3. **Para que** e **sea continua** e**(2) =**$\lim_{t\to 2} e(t)$**= 12, luego** $e(a) = 6+a = 12; a = 6$**, entonces** $e(t)$ **es continua cuando** $a=6$

Continuidad en t =5

1. $e(5) = 3t+a = 3(5)+6 = 21$
2. $\lim_{t\to 5} e(t) = \begin{cases} \lim_{t\to 5^-} e(t); \lim_{t\to 5^-} (3t+a) = 21 \\ \lim_{t\to 5^+} e(t)\,; \lim_{t\to 5^+} (-t^2+13t+b) = (-(5)^2+13(5)+b) = 40+b \end{cases}$

Para que $\exists \lim_{t\to 5} e(t)$ los límites laterales han de ser iguales luego, $40+b=21, b=-19$

4. **Para que** e **sea continua** e**(5) =**$\lim_{t\to 5} e(t)$**= 21, luego f es continua cuando b =-19.**

39. Un comerciante quiere vender un determinado producto, y para ello cobra 6€ por cada unidad. No obstante, si se le encargan más de 10 unidades, disminuye el precio por unidad, y por cada x unidades cobra:

$$C(x) = \begin{cases} 6x \ \ si\ 0 < x \le 10 \\ \sqrt{600 + ax^2}\ \ si\ x > 10 \end{cases}$$

a) **Halla el valor de a de forma que el precio varíe de forma continua al variar el número de unidades que se compran.**

C **es continua en** $0 < x < 10$ **por ser una función polinómica.**

$C\ es\ continua$ **en** $x > 10$ **por ser una función irracional con el radicando positivo, si a > 0.**

1. $C(10) = 6(10)$**= 60**
2. $\lim\limits_{x\to 10} C(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 10^-} C(x); & \lim\limits_{x\to 10^-}(6x) = 60 \\ \lim\limits_{x\to 10^+} C(x); & \lim\limits_{x\to 10^+}\left(\sqrt{600+ax^2}\right) = \sqrt{600+100a} \end{cases}$

Para que ∃ $\lim\limits_{x\to 5} C(x)$ los límites laterales han de ser iguales luego,

$\sqrt{600+100a} = 60;\ \left(\sqrt{600+100a}\right)^2 = (60)^2$ **;** $600 + 100a = 3600;\quad a = 30$

3. **Para que** C **sea continua** C**(10) =** $\lim\limits_{x\to 10} C(x)$**= 60, luego C es continua cuando** $a = 30$**. Entonces el precio varía de forma continua al variar el número de unidades que se compran cuando a =30.**

b) **¿A cuánto tiende el precio de una unidad cuando se compran ´´muchísimas´´ unidades?**

$\lim\limits_{x\to\infty} C(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{600+ax^2}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{600+30a}\right) = \infty$

Cuando se compran muchísimas unidades el precio tiende a ∞.

40. Calcula

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^n-8}{2^{n+1}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^n}{2^{n+1}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^4+1}-1}{x^4} = \frac{0}{0}$**, indeterminación,**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^4+1}-1}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^4+1}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+1}+1\right)}{x^4\cdot\left(\sqrt{x^4+1}+1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4+1-1}{x^4\cdot\left(\sqrt{x^4+1}+1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4\cdot\left(\sqrt{x^4+1}+1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{x^4+1}+1\right)} = 1$$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} = \frac{0}{0}$**, indeterminación,**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+1-1}{x^2\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = 1$$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{9x} = \frac{0}{0}$**, indeterminación,**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{9x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x})(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})}{9x\cdot(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{(9+x)-(9-x)}{9x\cdot(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{9x\cdot(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{9\cdot(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})}=\frac{2}{9\cdot 6}=\frac{1}{27}$$

41. Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases}3a+3^{\frac{2}{x}}\ si\ x<0\\ \frac{4}{2+2^x}\ si\ 0\le x\le 1\\ \frac{3}{b-2^{-x}}\ si\ x>1\end{cases}$$

a) Halla a y b para que la función sea continua.

f **es continua en** $x<0$ **por ser composición de funciones continuas.**
f **es continua en** $0<x<1$ **por ser composición de funciones continuas.**
f **es continua en** $x>1$ **por ser composición de funciones continuas.**
Continuidad en x=0

1. $f(0)=\frac{4}{2+2^{(0)}}=\frac{4}{3}$
2. $\lim_{x\to 0}f(x)\begin{cases}\lim_{x\to 0^-}f(x);\quad \lim_{x\to 0^-}\left(3a+3^{\frac{2}{x}}\right)=3a+3^{\frac{2}{0}}=3a+3^{\frac{2}{0^-}}=3a+0\\ \lim_{x\to 0^+}f(x);\quad \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{4}{2+2^x}\right)=\frac{4}{3}\end{cases}$

Para que $\exists\ \lim_{x\to 0}f(x)$, $\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)$, **entonces** $3a=\frac{4}{3}$**, luego** $a=\frac{4}{9}$

3. **Como** $f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\frac{4}{3}$; f **es continua cuando** $a=\frac{4}{9}$

Continuidad en x=1

1. $f(a)=f(1)=\frac{4}{2+2^1}=1$
2. $\lim_{x\to 1}f(x)=\begin{cases}\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{4}{2+2^x}\right)=\frac{4}{2+2^1}=1\\ \lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{3}{b-2^{-x}}\right)=\frac{3}{b-2^{-1}}=\frac{3}{b-\frac{1}{2}}=\frac{3}{\frac{2b-1}{2}}=\frac{6}{2b-1}\end{cases}$

Para que $\exists\lim_{x\to 1}f(x)$, $\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x), luego\ 1=\frac{6}{2b-1}, b=\frac{7}{2}$

3. **Como** f**(1)=** $\lim_{x\to 1}f(x)=1$; f **es continua, cuando b=**$\frac{7}{2}$

b) Calcula: $\lim_{x\to-\infty}f(x)$, $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ y $\lim_{x\to 0,5}f(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(3a+3^{\frac{2}{x}}\right)=3\left(\frac{4}{9}\right)+3^{\frac{-2}{\infty}}=\frac{12}{9}+1$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{b-2^{-x}}\right)=\frac{3}{\frac{7}{2}-2^{-\infty}}=\frac{6}{7}$$

$$\lim_{x\to 0,5}f(x)=\lim_{x\to 0,5}\left(\frac{4}{2+2^x}\right)=\frac{4}{2+2^{0,5}}=1,17$$

c) Si a=0 y b=$\frac{1}{8}$**, estudia las discontinuidades.**

$$f(x)=\begin{cases} 3a+3^{\frac{2}{x}} \; si\; x<0 \\ \frac{4}{2+2^x} \; si\; 0\le x\le 1 \\ \frac{3}{b-2^{-x}} \; si\; x>1 \end{cases} \quad f(x)=\begin{cases} 3^{\frac{2}{x}} & si\; x<0 \\ \frac{4}{2+2^x} & si\; 0\le x\le 1 \\ \frac{24}{1-16^{-x}} & x>1 \end{cases}$$

Continuidad en x=0

1. $f(0)=\frac{4}{2+2^0}=\frac{4}{3}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(3^{\frac{2}{x}}\right)=\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{4}{2+2^x}\right)=\frac{4}{3} \end{cases}$

   $\boldsymbol{P}or\ tanto\ f\ presenta\ una\ discontinuidad\ \boldsymbol{no\ evitable}\ de\ primera\ especie\ de\ salto\ infinito$

Continuidad en x=1

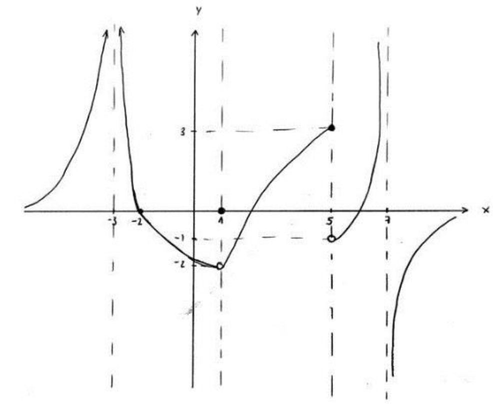
1. $f(1)=\frac{4}{2+2^1}=1$
2. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\frac{4}{2+2^x}\right)=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{24}{1-16^{-x}}\right)=\frac{128}{5} \end{cases}$

   $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\ ;\ \nexists \lim\limits_{x\to 1}\boldsymbol{f(x)}$

Por tanto f presenta una discontinuidad **no evitable** de primera especie de salto **finito**

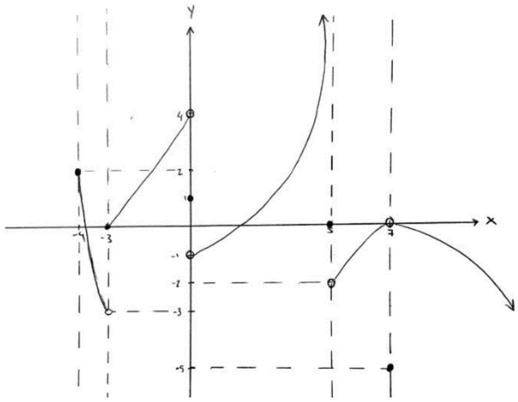
42.- Dibuja la gráfica de una función que se ajuste a las siguientes condiciones:

- **Continua en** $\mathbb{R}-\{-3,1,5,7\}$
- $\lim\limits_{x\to -3} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to -1} f(x)=-2,\ f(1)=0$
- **Discontinuidad de salto finito en** $x=5$ **y de salto infinito en** $x=7$
- $f(-2)=0$



43.- Dibuja la gráfica de una función $f(x)$ **tal que:**

- **Dom** $f(x)=\{x\in \mathbf{R}/x\geq 4\}$
- $f(-4)=2,\ f(0)=1,\ f(5)=0,\ f(7)=-5$
- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -3^-} f(x)=-3 \quad \lim\limits_{x\to -3^+} f(x)=0 \quad \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=4 \quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-1 \\ \lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=+\infty \quad \lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=-2 \quad \lim\limits_{x\to 7} f(x)=0 \quad \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty \end{cases}$



44. Dado $a \in \mathbb{R}$, se considera la función. $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-3ax-6}{x-3}, & x < 3 \\ x^2 - 1, & x \geq 3 \end{cases}$

Determina los valores de a para que la función sea continua.

Continuidad en x=3

$\lim_{x\to 3^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to 3^+} (x^2 - 1) \Rightarrow 3^2 - 1 = 8$

$\lim_{x\to 3^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to 3^-} \frac{2x^2 - 3ax - 6}{x - 3} \Rightarrow \frac{2(3)^2 - 3a(3) - 6}{3 - 3} \Rightarrow \frac{18 - 9a - 6}{3 - 3} \Rightarrow \frac{12 - 9a}{0}$

$\Rightarrow 12 - 9a = 0 \Rightarrow a = \frac{-12}{-9} \Rightarrow a = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{12 - 9\left(\frac{4}{3}\right)}{0} \Rightarrow \frac{12 - 12}{0} \Rightarrow \frac{0}{0}$ *INDETERMINACIÓN.*

En el caso de esta indeterminación $\frac{0}{0}$ podemos factorizar la función y así evitar la indeterminación:

$\lim_{x\to 3} \frac{2x^2-3\left(\frac{4}{3}\right)x-6}{x-3} \Rightarrow \lim_{x\to 3} \frac{2x^2-4x-6}{x-3} \Rightarrow \lim_{x\to 3} \frac{2(x^2-2x-3)}{x-3} \Rightarrow \lim_{x\to 3} \frac{2(x^2+x-3x-3)}{x-3}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 3} \frac{2(x(x+1)-(x+1))}{x-3} \Rightarrow \lim_{x\to 3} \frac{2(x+1)(x-3)}{x-3} \Rightarrow \lim_{x\to 3} 2(x+1) \Rightarrow \lim_{x\to 3} (2x + 2) \Rightarrow 2 \cdot 3 + 2 = 8$

Como los límites laterales $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x)$, entonces $\lim_{x\to 3} f(x) = 8$, por tanto la función es continua cuando $a = \frac{4}{3}$

45. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 1 \\ 3 - ax^2, & x > 1 \end{cases}$, responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

a) ¿Para qué valores de a la función f(x) es continua en x=1?

x=1

$\lim_{x\to 1^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} (x + 1) \Rightarrow 1 + 1 = 2$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} (3 - ax^2) \Rightarrow 3 - a$

Para que exista el $\lim_{x\to 1} f(x)$ los límites laterales han de ser iguales, por tanto, $3 - a = 2$, $a = 1$

(para que la función sea continua en x=1, el valor de a debe ser 1, $a = 1$)

b) Si f(x) es continua, cuando x→x_0 entonces no existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$, ¿es cierto?

Todo lo contrario, pues condición para que f(x) sea continua es que exista $\lim_{x\to x_0} f(x)$

46. Se ha investigado el tiempo (T, en minutos) que se tarda en realizar cierta prueba de atletismo en función del tiempo de entrenamiento de los deportistas (x, en días), obteniéndose que:

$$\boldsymbol{T(x)=\begin{cases}\dfrac{300}{x+30} & si\ 0\le x\le 30\\ \dfrac{1125}{(x-5)\cdot(x-15)}+2 & si\ x>30\end{cases}}$$

a) Justifica que la función T es continua en todo su dominio.

Para cualquier valor distinto de 30 la función es continua, es una función definida a trozos de funciones racionales cuyos denominadores no se anulan, donde están definidas.
Por lo que ahora vamos a calcular la continuidad en x=30.
¿T(x) continua en x=30?

1) $T(30)=\frac{300}{30+30}=5$

2) $\lim_{x\to 30} T(x)=\begin{cases}\lim_{x\to 30^-} T(x)=\lim_{x\to 30^-}\left(\frac{300}{x+30}\right)=\frac{300}{30+30}=5\\ \lim_{x\to 30^+} T(x)=\lim_{x\to 30^+}\left(\frac{1125}{(x-5)\cdot(x-15)}+2\right)=\frac{1125}{(30-5)\cdot(30-15)}+2=5\end{cases}$

Como $\lim_{x\to 30^-} T(x)=\lim_{x\to 30^+} T(x)$; luego $\lim_{x\to 30} T(x)=5$

3) Como T(30) = 5 = $\lim_{x\to 30} T(x)$, luego T es continua en x = 30

b) Por mucho que entrene un deportista, ¿será capaz de hacer la prueba en menos de 1 minuto? ¿Y en menos de 2?

$\lim_{x\to\infty} T(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1125}{(x-5)\cdot(x-15)}+2\right)=\frac{1125}{(\infty-5)\cdot(\infty-15)}+2=\frac{1125}{\infty}+2=0+2=2$

Por mucho que un deportista se entrene, lo mínimo sería 2 minutos.

47. El rendimiento de un estudiante en un examen de una hora de duración viene dado por la siguiente expresión ($f(x)$ representa el rendimiento, en tanto por ciento, en el instante (x), medido en horas):

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}300x(1-x) & si\ 0\le x\le 0,6\\ 180(1-x) & si\ 0,6<x<1\end{cases}}$$

a) ¿Es el rendimiento una función continua del tiempo?

1) $f(0{,}6)=300\cdot 0{,}6\,(1-0{,}6)=180\cdot 0{,}4=72$

2) $\lim\limits_{x\to 0,6} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0,6^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0,6^-} 300x(1-x) = 72 \\ \lim\limits_{x\to 0,6^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0,6^+} 180(1-x) = 72 \end{cases}$

El límite de f(x) en x = 0,6 existe porque el límite cuando x tiende a 0,6 por la izquierda es igual que cuando tiende por la derecha.

3) f(x) es continua porque $f(0{,}6) = \lim\limits_{x\to 0,6} f(x) = 72$

El rendimiento sí que es una función continua del tiempo.

b) ¿En qué momentos aumenta y en qué momentos disminuye el rendimiento?¿Cuándo obtiene el mayor rendimiento y cuál es ese rendimiento?

$\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \begin{cases} (-600\mathrm{x} + 300) & \mathrm{si}\ 0 < \mathrm{x} < 0{,}6 \\ -180 & \mathrm{si}\ 0{,}6 < \mathrm{x} < 1 \end{cases}$

f(x) (0,6 , 1) es siempre decreciente

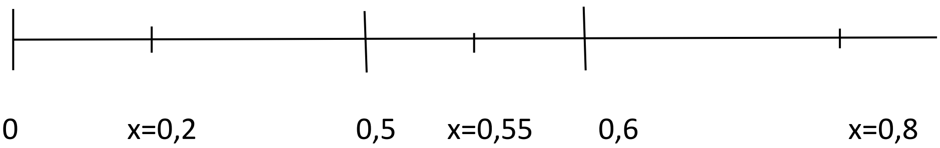
$-600\mathrm{x} + 300 = 0\,, \quad \mathrm{x} = 0{,}5$

Cogemos valores entre los puntos que tenemos en x (0, 0,5, y 0,6) y los sustituimos en la función derivada para sacar su crecimiento y decrecimiento.

Entre x= 0 y x=0,5: x=0,2; -600·0,2+300= 180>0; de 0 a 0,5 la función es creciente

Entre x=0,5 y x=0,6: x=0,55; -600·0,55+300= -30<0; de 0,5 a 0,6 la función es decreciente

De x=0,6 a cualquier valor superior: x=0,8; -600·0,8+300= -180<0; desde 0,6 la función es decreciente.



f''(x)= -600, la función tiene un máximo en x = 0,5

El rendimiento es mayor y tiene un aumento desde las 0 horas hasta la media hora, desde ese momento el rendimiento va decreciendo. Además, tiene un rendimiento máximo de f(0,5) = 75%.

48. la energía que produce una placa solar viene descrita por la siguiente curva en función del tiempo transcurrido desde que amanece (f(x) es la energía producida a las x horas de haber amanecido):

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 10x - x^2, & si \quad 0 \le x \le 8 \\ \frac{1024}{x^2}, & si \quad 8 < x \le 12 \end{cases}}$$

a) Estudia la continuidad de f en su dominio.

b) ¿En qué momento del día la placa produce más energía? ¿Cuánto produce en ese momento?

a) f es continua en 0 < x < 8 por ser una función polinómica y también en 8 < x < 12 por ser una función racional y no anularse el denominador.

Estudiamos la continuidad en x = 8

i) f(8) = $10 \cdot 8 - 8^2 = 16$

ii) $\lim\limits_{x\to 8} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 8^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 8^-}(10x - x^2) = 16 \\ \lim\limits_{x\to 8^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 8^+} \frac{1024}{x^2} = 16 \end{cases}$

iii) $\lim\limits_{x\to 8} f(x) = 16 = f(8)$ por tanto, f es continua también en x=8

b) Calculamos la derivada de f, $f'(x) = \begin{cases} 10 - 2x, \; si & 0 < x < 8 \\ \frac{-2048}{x^3}, \quad si & 8 < x < 12 \end{cases}$ igualamos a 0 los trozos

$10 - 2x = 0$, $x = 5$; $f''(x) = -2$, $f''(5) = -2 < 0$, hay un máximo relativo en x=5

$\frac{-2048}{x^3}$ no se anula, por tanto no puede haber extremos en $8 < x < 12$

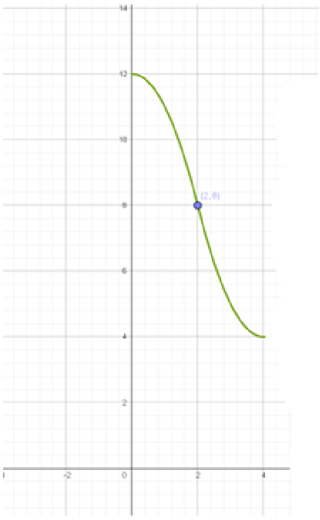
$f(5) = 10 \cdot 5 - 5^2 = 25$

La placa produce más energía a las 5 horas de haber amanecido con una producción de 25.

49. El tiempo que una persona tarda en realizar una tarea varía durante los cuatro primeros meses de contrato según su experiencia. Así, la función que relaciona el tiempo empleado en realizar la tarea con la experiencia de la persona es f (x), que representa el tiempo en horas, que tarda en realizar la tarea una persona que lleva contratada un tiempo x, medido en meses.

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 12 - x^2 & si\ 0 < x \le 2 \\ (x-4)^2 + 4 & si\ 2 < x \le 4 \end{cases}}$$

a) Representa gráficamente la función f. ¿Es el tiempo necesario para realizar la tarea una función continua del tiempo de la experiencia?



1. $f(2) \to$ 12 - $2^2 = 8$

2. $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(12 - x^2) = 8 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(x-4)^2 + 4 = 8 \end{cases}$

Como los límites laterales son iguales, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 8$

3. $f(2) = \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 8$

Por tanto, f es continua

b) ¿En qué momento el tiempo necesario para realizar la tarea es mínimo?

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & si \ \ 0 < x < 2 \\ 2x - 8 & si \ 2 < \ \ x < 4 \end{cases}$$

-2x = 0, x = 0 , no es válido.
2x – 8 = 0 , x = 4 , no es válido.
La derivada en los dos trozos es negativa, luego siempre es decreciente.
El tiempo mínimo para realizar se alcanza con 4 meses de experiencia.

c) ¿Cuánto tiempo le lleva finalizar la tarea ese instante?

f(4) = 4, tarda 4 horas.

d) ¿Consigue el empleado finalizar la tarea en menos de 3 horas en algún momento durante los cuatro primeros meses de contrato?

No, el mínimo es 4 horas y a los 4 meses.

50. Un proveedor cobra el aceite según el volumen del pedido. Así, la función que relaciona el importe del pedido con el volumen del mismo es f(x) (en euros), de un pedido de x litros de aceite:

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 3x, & si \quad 0 < x < 30 \\ 2x + 30, & si \quad\quad 30 \le x \end{cases}}$$

a) ¿Es el importe una función continua del volumen del pedido?
b) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y represéntala gráficamente.

a) En los 2 trozos es continua al ser funciones polinómicas, estudiamos en x = 30

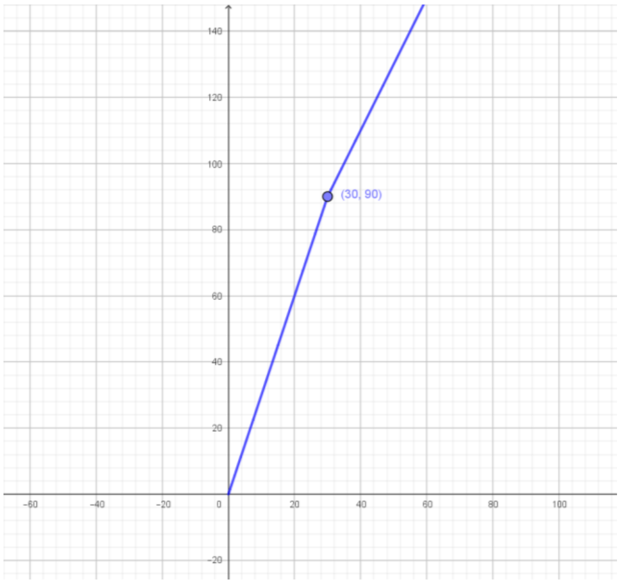
i. f(30) = $2 \cdot 30 + 30 = 90$

ii. $$\lim_{x \to 30} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 30^-} f(x) = \lim_{x \to 30^-} (3x) = 3 \cdot 30 = 90 \\ \lim_{x \to 30^+} f(x) = \lim_{x \to 30^+} (2x + 30) = 2 \cdot 30 + 30 = 90 \end{cases}$$

iii. $\lim_{x \to 30} f(x) = 90 = f(30)$ por tanto, f es continua también en x=30

b) Calculamos la derivada de f, $f'(x) = \begin{cases} 3, & si \quad 0 < x < 30 \\ 2, & si \quad\quad 30 < x \end{cases}$

La derivada es siempre positiva por tanto la función es siempre creciente.
Los 2 trozos son funciones lineales cuyas gráficas son una línea recta, dando 2 valores a x en cada trozo obtenemos su gráfica



51. La velocidad de un coche de carreras viene dada por la siguiente expresión:

$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{110 + 12x + 6x^2} & \boldsymbol{si\ 1 \le x \le 3} \\ \mathbf{350 - \frac{450}{x}} & \boldsymbol{si\ \ x > 3} \end{cases}$ **, donde x representa el tiempo, en segundos, y f(x) la velocidad del coche, en Km/h.**

a) ¿Es la velocidad una función continua del tiempo?

1. $f(3) = 110 + 12 \cdot 3 + 6 \cdot 3^2 = 200$

2. $\lim_{x\to 3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (110 + 12x + 6x^2) = 200 \\ \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \left(350 - \frac{450}{x}\right) = 200 \end{cases}$

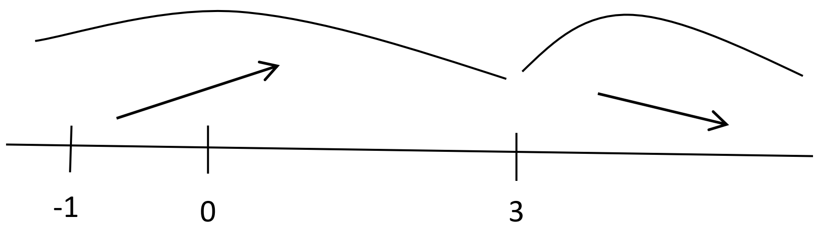
   Como $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x)$, existe $\lim_{x\to 3} f(x) = 200$.

3. Como $f(3) = \lim_{x\to 3} f(x) = 200$, f(x) es una función continua del tiempo.

b) ¿Disminuye la velocidad del coche en algún instante? ¿Se podrían alcanzar los 350 Km/h de velocidad con este coche?

$f(x) = \begin{cases} 110 + 12x + 6x^2 \\ 350 - \frac{450}{x} \end{cases}$ $\qquad f'(x) = \begin{cases} 12 + 12x & si\ 1 < x < 3 \\ -\frac{450}{x^2} & si\ x > 3 \end{cases}$

$12 + 12x = 0; x = \frac{-12}{12} = -1 \qquad -\frac{450}{x^2} = 0; 450 = 0 \to No\ tiene\ sol.$



$f'(2) = 12 + 12 \cdot 2 = 36 > 0 \rightarrow Creciente$

$f'(10) = -\frac{450}{10^2} = -4{,}5 < 0 \rightarrow Decreciente$

$\lim_{x\to\infty}(350 - \frac{450}{x}) = 350 - \frac{450}{\infty} = 350 - 0 = 350$

Resultado. El coche disminuye su velocidad a partir de x=3 y no podría alcanzar los 350 km/h., pues sería en el infinito.

AUTOEVALUACIÓN

1. Los límites de la función $f(x)=\begin{cases}x^2-3x+2 & si\ x<0\\ x^3-7x^2+3 & si\ x>0\end{cases}$ a la izquierda de cero y a la derecha de cero valen:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x^2-3x+2) = 2$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x^3-7x^2+3) = 3$$

c) 2 y 3

2. El límite $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3^x-3^2}{3^{x+1}}\right)$ vale:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3^x-3^2}{3^{x+1}}\right)=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\to\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3^x}{3^{x+1}}-\frac{3^2}{3^{x+1}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{3^2}{3^{x+1}}\right)=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$$

b) $\frac{1}{3}$

3. El límite $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+x-5}{x-x^2+2}\right)$ vale:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+x-5}{x-x^2+2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2}{-x^2}\right)\to -3$$

a) -3

4. El límite $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4}}{x}$ vale:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4}}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\to\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{4-x}-\sqrt{4})(\sqrt{4-x}+\sqrt{4})}{x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4})}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4-x}^2-\sqrt{4}^2}{x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4})}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4})}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{(\sqrt{4-x}+\sqrt{4})}=0$$

a) 0

5. El límite $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4}}{x}$ vale:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4}}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)\to\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{4-x}-\sqrt{4})(\sqrt{4-x}+\sqrt{4})}{x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4})}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}^2-\sqrt{4}^2}{x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4})}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4})}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{(\sqrt{4-x}+\sqrt{4})}=$$
$$\frac{-1}{2\sqrt{4}}\to-\frac{1}{4}$$

d) $-\frac{1}{4}$

6. Para que la función $f(x)=\begin{cases}x^3-3x^2+a & si\ x<3\\ 2x^2-1 & si\ x\geq 3\end{cases}$ sea continua "a " debe valer:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}(x^3-3x^2+a) = 3^2-3(3)+a = 0+a$$
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}(2x^2-1) = 2(3)^2-1 = 17$$

a debe valor 17 porque para ser continua tiene que existir el límite en 3 y para ello ser los dos límites iguales.

c) 17

7. Indica cuál de las siguientes funciones tiene una asíntota vertical en x = 2.

a) $\lim_{x\to 2}\log(x-2)=\log(0)=-\infty$

b) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\frac{2x}{1}=4$

c) $\lim_{x\to 2}\sqrt{x-2}=0$

d) $\lim_{x\to 2}\sin(\cos(x-2))=0$

a) $\mathbf{f(x)=\log(x-2)}$

8. Indica cuál de las siguientes funciones tiene una asíntota horizontal en y = 2.

a) $\lim_{x\to\infty}\log(x-2)=\infty$

b) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-4}{x^2-2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=2$

c) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x-2}=\infty$

d) $\lim_{x\to\infty}\tan(\cos(x-2))=es\ divergente$

b) $\mathbf{\frac{2x^2-4}{x^2-2}}$

9. Indica cuál de los siguientes límites NO vale 0.

a) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^{27}+5}{e^x}=0$ Como la exponencial es de orden mayor que el polinomio el límite es 0.

b) $\lim_{x\to\infty}\frac{5}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x+2}}=\frac{5}{\infty+\infty}=0$

c) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+3}}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\to\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+3})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3})}{x(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3})}=\lim_{x\to\infty}\frac{-4}{x(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3})}=0$

d) $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+5}{e^x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$

d)

10. Los puntos de discontinuidad de la función $g(x)=|x^2-9|$ son:

g(x) es el valor absoluto de una función polinómica y por tanto siempre continua

c) ninguno, es una función continua.