Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II
2º Bachillerato
Capítulo 5: Derivadas

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Realizados por:

Cristina Vidal Brazales

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. CONCEPTO DE DERIVADA

1. C(x) = x^2 + 5x + 1 es la función de costes donde C(x) indica el coste de fabricación de x unidades. Calcula la tasa de variación media entre 0 y 500 unidades, y la tasa de variación media entre 200 y 800 unidades.

C(0) = 1; C(500) = 250 000 + 2 500 + 1 = 252 501; $TVM(0,500)=\frac{C(500)-C(0)}{500-0}=\frac{252\,501-1}{500-0}=505$

C(200) = 40 000 + 1000 + 1 = 41 001; C(800) = 640 000 + 4 000 + 1 = 644 001

$TVM(200,800)=\frac{C(800)-C(200)}{800-200}=\frac{644\,001-41\,001}{500-0}=1\,005$

2. La función de beneficios de una cierta empresa viene dada por: B(x) = x^2 + 3x + 2 , donde B(x) indica el beneficio que obtiene la empresa cuando fabrica x unidades. Calcula la tasa de variación media de los beneficios entre 10 y 50 unidades, y la tasa de variación media de los beneficios entre 100 y 400 unidades.

$TVM(10,50)=\frac{B(50)-B(10)}{50-10}=\frac{2652-132}{50-10}=63{,}2$

$TVM(100,400)=\frac{B(400)-B(100)}{400-100}=\frac{17002-10302}{400-100}=503{,}07$

3. Una empresa determina que los costes de producción por trabajador contratado son C(x) = 2x +$\sqrt{x}$, y que los ingresos por ventas también por trabajador contratado vienen dados por I(x) = 3x + x^2 . Por tanto, los beneficios B(x) por trabajador contratado son ingresos menos costes. (Observa que estas funciones no son continuas, no se pueden contratar 3.7 trabajadores, es una función escalonada, pero vamos a trabajar con ellas como si fueran continuas). Determina la tasa de variación media si se contratan entre 400 y 4 000 trabajadores.

B(x) = I(x) – C(x) = 3x + x^2 – (2x +$\sqrt{x}$) = x^2 – x – $\sqrt{x}$

$$TVM(400,4\,000)=\frac{B(4\,000)-B(400)}{4\,000-400}=\frac{15995936.75-159580}{3\,600}\cong 4\,400$$

4. Calcula la derivada de la función f(x) = $|x|$ en x = 0 teniendo en cuenta la definición de dicha función:

$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}x & si\ x\geq 0\\ -x & si\ x<0\end{cases}}$ **y comprueba que no es derivable.**

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|x|-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$

Como las derivadas laterales son distintas, la función no es derivable en x = 0.

5. Utilizando la definición de derivada comprueba que las derivadas de las siguientes funciones en los puntos indicados es el valor dado:

a) f(x) = x^3 en x = 2 ⇒ f’(2) = 12. **b) g(x) = x + 2 en x = a ⇒ g’(a) = 1.**

a) $f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x^2+2x+4)(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x+4)=12$

b) $g'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{x+2-(a+2)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{x-a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}1=1$

6. Estudia la derivabilidad en x = 0 de f(x) = $|x^3|$.

$$f(x) = |x^3| = \begin{cases} -x^3 \ si \ x < 0 \\ x^3 \ \ si \ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+} \frac{|x^3|-0}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{x^3}{x} = \lim_{x\to0^+} x^2 = 0$$

$$\lim_{x\to0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^-} \frac{|x^3|-0}{x} = \lim_{x\to0^-} \frac{-x^3}{x} = \lim_{x\to0^-} (x^2) = 0$$

Como las derivadas laterales son iguales, la función es derivable en x = 0.

7. Dada la función f(x) = $6x^2 - x^3$. Halla un valor a > 0 tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto (a, f(a)) sea paralela a la recta y = –15x.

La pendiente de la recta tangente viene dada por la derivada de f, f'(x) = $12x - 3x^2$, la pendiente de la recta y = -15x es -15, decir que sean para lelas es equivalente a tener la misma pendiente, luego buscamos a tal que

$12a - 3a^2 = -15$, resolvemos y obtenemos a = 5 y a = -1,

8. Se considera la función $f(x) = x^2 + m$, donde m > 0 es una constante.

a) Para cada valor de m halla el valor de a > 0 tal que la recta tangente a la gráfica f en el punto (a,f (a)) pase por el origen de coordenadas.

b) Halla el valor de m para que la recta y = x sea tangente a la gráfica de $f(x)$

a) $f(x) = x^2 + m \,;\, f(a) = a^2 + m;$ $\qquad f'(x) = 2x\,,\ f'(a) = 2a$

La ecuación de la recta tangente en (a, f(a)) es: $\mathrm{y = f(a) + f'(a)(x - a)}$

De donde, como pasa por (0, 0), $0 = a^2 + \mathrm{m} + 2\mathrm{a}(0 - \mathrm{a})$, $\quad a^2 + m - 2a^2 = 0$

$m - a^2 = 0,\ \ a = \pm\sqrt{m}\ \ , como\ a > 0,\ \ \boldsymbol{a = \sqrt{m}}$

b) Para que la recta sea tangente a la gráfica, $x = x^2 + m \quad x^2 - x + m = 0$ resolviendo

$x = \frac{1\pm\sqrt{1-4m}}{2}$, para que existan soluciones, 1- 4m > 0, dos soluciones, la recta y la gráfica son secantes;

1 – 4m = 0 , **m = ¼** , solución única, la recta es tangente.

9. Comprueba que la derivada n-ésima de las siguientes funciones es la indicada:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x+a} \to f^{n)}(x) = \frac{(-1)^n\, n!}{(x+a)^{n+1}}}$$

Hacemos la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{(x+a)\cdot 0 - 1\cdot 1}{(x+a)^2} = \frac{-1}{(x+a)^2}$$

Sustituimos n = 1 en la fórmula:

$$f^1(x) = \frac{(-1)^1\ 1!}{(x+a)^{1+1}} = \frac{-1}{(x+a)^2}$$

Como el resultado de la primera derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se cumple.

Ahora probamos con la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{(x+a)^2\cdot 0 - (-1)\cdot(2(x+a)\cdot 1)}{((x+a)^2)^2} = \frac{2(x+a)}{(x+a)^4} = \frac{2}{(x+a)^3}$$

Sustituimos n = 2 en la fórmula:

$$f^2(x) = \frac{(-1)^2\ 2!}{(x+a)^{2+1}} = \frac{2}{(x+a)^3}$$

Como el resultado de la segunda derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se sigue cumpliendo.

Finalmente, probamos con la tercera derivada:

$$f'''(x) = \frac{(x+a)^3 \cdot 0 - 2 \cdot (3(x+a)^2 \cdot 1)}{((x+a)^3)^2} = \frac{-6(x+a)^2}{(x+a)^6} = \frac{-6}{(x+a)^4}$$

Sustituimos n = 3 en la fórmula:

$$f^3(x) = \frac{(-1)^3\ 3!}{(x+a)^{3+1}} = \frac{-6}{(x+a)^4}$$

Como el resultado de la tercera derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se sigue cumpliendo.

La derivada n-ésima de la función es la indicada.

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1+x}{1-x} \to f^{n)}(x) = \frac{2 \cdot n!}{(1-x)^{n+1}}}$$

Hacemos la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{(1-x)\cdot 1 - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{(1-x)-(-1-x)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$$

Sustituimos n = 1 en la fórmula:

$$f^1(x) = \frac{2 \cdot 1!}{(1-x)^{1+1}} = \frac{2}{(1-x)^2}$$

Como el resultado de la primera derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se cumple.

Ahora probamos con la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{(1-x)^2 \cdot 0 - 2 \cdot (1-x) \cdot (-1) \cdot 2}{((1-x)^2)^2} = \frac{4(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{4}{(1-x)^3}$$

Sustituimos n = 2 en la fórmula:

$$f^2(x) = \frac{2 \cdot 2!}{(1-x)^{2+1}} = \frac{4}{(1-x)^3}$$

Como el resultado de la segunda derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se cumple.

Ahora probamos con la tercera derivada:

$$f'''(x) = \frac{(1-x)^3 \cdot 0 - 2 \cdot (1-x)^2 \cdot (-1) \cdot 3}{((1-x)^3)^2} = \frac{6(1-x)^2}{(1-x)^6} = \frac{6}{(1-x)^4}$$

Sustituimos n = 3 en la fórmula:

$$f^3(x) = \frac{2 \cdot 3!}{(1-x)^{3+1}} = \frac{6}{(1-x)^4}$$

Como el resultado de la tercera derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se cumple.

La derivada n-ésima de la función es la indicada.

2. CÁLCULO DE DERIVADAS

10. Si *f* y *g* son dos funciones derivables en todo punto, y se sabe que *f*(1) = 2, *f*(2) = 5, *g*(1) = 1, *g*(2) = 6, *f'*(1) = 3, *f'*(2) = 6, *f'*(6) = 4, *g'*(1) = 1, *g'*(2) = 3, *g'*(5) = 1. Determina el valor de:

a) $(f \circ g)'(2) = f'\big(g(2)\big) \cdot g'(2) = f'(6) \cdot g'(2) = 4 \cdot 3 = 12$

b) $(g \circ f)'(1) = g'\big(f(1)\big) \cdot f'(1) = g'(2) \cdot f'(1) = 3 \cdot 3 = 9$

c) $(g \circ f)'(2) = g'\big(f(2)\big) \cdot f'(2) = g'(5) \cdot f'(2) = 1 \cdot 6 = 6$

d) $(f \circ f)'(1) = f'\big(f(1)\big) \cdot f'(1) = f'(2) \cdot f'(1) = 6 \cdot 3 = 18$

11. Sean *u*(x) y *v*(x) dos funciones derivables en un punto x. Pruébese que su producto *u*(x)·*v*(x) es derivable obteniendo la expresión de su derivada: D[*u*(x)·*v*(x)]=*u'*(x)·*v*(x)+*u*(x)·*v'*(x)

Si *u*(x) es derivable y *v*(x) es derivable, entonces *h*(x)=*u*(x)·*v*(x) también es derivable:

Escribimos la definición de derivada:

$$\big(f(x)\cdot g(x)\big)' = \lim_{b\to x} \frac{f(b)\cdot g(b) - f(x)\cdot g(x)}{b-x} =$$

Sumamos y restamos *f*(*x*)·*g*(*b*):

$$\lim_{b\to x} \frac{f(b)\cdot g(b) - f(x)\cdot g(b) + f(x)\cdot g(b) - f(x)\cdot g(x)}{b-x} =$$

Sacamos factor común *f*(*x*) y *g*(*b*):

$$\lim_{b\to x} \frac{\big(f(b)-f(x)\big)\cdot g(b) + f(x)\cdot\big(g(b)-g(x)\big)}{b-x} =$$

Aplicamos propiedades de los límites, el límite de una suma y el límite de un producto:

$$\lim_{b\to x} \frac{\big(f(b)-f(x)\big)}{b-x}\cdot \lim_{b\to x} g(b) + \lim_{b\to x} f(x)\cdot \lim_{b\to x} \frac{\big(g(b)-g(x)\big)}{b-x} =$$

Calculamos los límites:

f '(*x*) · *g*(*x*) + *f*(*x*) · *g'*(*x*), c.q.d.

Otra forma:

$$D[u(x)\cdot v(x)] = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x+h) + u(x)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(u(x+h)-u(x))v(x+h) + u(x)(v(x+h)-v(x))}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(u(x+h)-u(x))}{h} \lim_{h\to 0} v(x+h) + \lim_{h\to 0} u(x) \lim_{h\to 0} \frac{(v(x+h)-v(x))}{h} = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

12. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $\mathbf{y = \log\big(x^5 - 7x^3\big)^{12}} = 12\log\,(x^5 - 7x^3)$

$$y' = 12 \cdot \frac{5x^4 - 21x^2}{x^5 - 7x^3} \cdot \log\,(e)$$

b) $\mathbf{y = \log_2 (3x^3 - 5x^2)^7} = 7\log_2\,(3x^3 - 5x^2)$

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$$y' = 7 \cdot \frac{9x^2-10x}{3x^3-5x^2} \cdot \log_2(e)$$

c) $\mathbf{y = \ln\sqrt{\frac{(4x^5-8x^3)^5}{3x-2}}} = \ln\left(\frac{(4x^5-8x^3)^5}{3x-2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln\frac{(4x^5-8x^3)^5}{3x-2} = \frac{1}{2}(\ln(4x^5-8x^3)^5 - \ln(3x-2)) =$

$$= \frac{1}{2}(5\ln(4x^5-8x^3) - \ln(3x-2))$$

$$y' = \frac{1}{2}\left(5 \cdot \frac{20x^4-24x^2}{4x^5-8x^3} - \frac{3}{3x-2}\right)$$

d) $\mathbf{y = \ln\sqrt[3]{(2x^2+4x^7)^4}} = \ln(2x^2+4x^7)^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3} \cdot \ln(2x^2+4x^7)$

$$y' = \frac{4}{3} \cdot \frac{4x+28x^6}{2x^2+4x^7}$$

13. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{y = \sqrt[6]{5x^{11}}} = (5x^{11})^{\frac{1}{6}};$

$$y' = \frac{1}{6}(5x^{11})^{-\frac{5}{6}} \cdot 55x^{10} = \frac{55x^{10}}{6(5x^{11})^{\frac{5}{6}}} = \frac{55x^{10}}{6\sqrt[6]{5^5 \cdot x^{55}}} = \frac{55x^{10}}{6x^9\sqrt[6]{5^5x}} = \frac{55x}{6\sqrt[6]{5^5x}}$$

b) $\boldsymbol{y = \frac{\sqrt[4]{3x^2}\cdot\sqrt{x}}{3x^3+7}} = \frac{(3x^2)^{\frac{1}{4}}\cdot x^{\frac{1}{2}}}{3x^3+7} = \frac{3^{\frac{1}{4}}\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}}}{3x^3+7} = \frac{3^{\frac{1}{4}}\cdot x}{3x^3+7};$

$$y' = \frac{3^{\frac{1}{4}}\cdot(3x^3+7) - 3^{\frac{1}{4}}x(9x^2)}{(3x^3+7)^2} = \frac{\sqrt[4]{3}(-6x^3+7)}{(3x^3+7)^2}$$

c) $\boldsymbol{y = \frac{(3x^4-4)\sqrt{x}}{\sqrt[3]{7x^5}}} = \frac{(3x^4-4)x^{\frac{1}{2}}}{(7x^5)^{\frac{1}{3}}} = \frac{3x^{\frac{9}{2}}-4x^{\frac{1}{2}}}{7^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{5}{3}}} = \frac{3}{7^{\frac{1}{3}}}\cdot x^{\frac{9}{2}-\frac{5}{3}} - \frac{4}{7^{\frac{1}{3}}}\cdot x^{\frac{1}{2}-\frac{5}{3}} = \frac{3}{7^{\frac{1}{3}}}\cdot x^{\frac{17}{6}} - \frac{4}{7^{\frac{1}{3}}}\cdot x^{-\frac{7}{6}};$

$$y' = \frac{3}{7^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{17}{6}x^{\frac{11}{6}} - \frac{4}{7^{\frac{1}{3}}}\left(-\frac{7}{6}\right)x^{-\frac{13}{6}}$$

d) $\boldsymbol{y = \frac{\sqrt[3]{x^7}}{2x+5}} = \frac{(x^7)^{\frac{1}{3}}}{2x+5} = \frac{x^{\frac{7}{3}}}{2x+5};$

$$y' = \frac{\left(\frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}\right)\cdot(2x+5) - \left(x^{\frac{7}{3}}\right)\cdot 2}{(2x+5)^2} = \frac{\frac{14}{3}x^{\frac{7}{3}}+35x^{\frac{4}{3}}-2x^{\frac{7}{3}}}{(2x+5)^2} = \frac{\frac{8}{3}\cdot\sqrt[3]{x^7}+35\cdot\sqrt[3]{x^4}}{(2x+5)^2}$$

14. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $\mathbf{y = \sqrt{\frac{2x^3-7x^9}{4x^5+6}(3x^7-5x^5)^3}} = \left(\frac{2x^3-7x^9}{4x^5+6}(3x^7-5x^5)^3\right)^{\frac{1}{2}}$

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{2x^3-7x^9}{4x^5+6}(3x^7-5x^5)^3\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot\left[\frac{(6x^2-63x^8)(4x^5+6)-(2x^3-7x^9)(20x^4)}{(4x^5+6)^2}(3x^7-5x^5)^3 + \frac{2x^3-7x^9}{4x^5+6}3(3x^7-5x^5)^2(21x^6-25x^4)\right] =$$

$$= \frac{\frac{(6x^2-63x^8)(4x^5+6)-(2x^3-7x^9)(20x^4)}{(4x^5+6)^2}\cdot(3x^7-5x^5)^3+\frac{2x^3-7x^9}{4x^5+6}3(3x^7-5x^5)^2(21x^6-25x^4)}{2\cdot\sqrt{\frac{2x^3-7x^9}{4x^5+6}(3x^7-5x^5)^3}}$$

b) $\boldsymbol{y = \sqrt{\frac{(x^3+5x)(4x^3-6x)}{2x^4-5x}}} = \left(\frac{(x^3+5x)(4x^3-6x)}{2x^4-5x}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$y' = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{(x^3+5x)(4x^3-6x)}{2x^4-5x}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{[(3x^2+5)(4x^3-6x)+(x^3+5x)(12x^2-6)](2x^4-5x)-(x^3+5x)(4x^3-6x)(8x^3-5)}{(2x^4-5x)^2}$$

c) $\boldsymbol{y = \sqrt{\left(\frac{3x^4+5x^2}{4x^2-6x^5}\right)^4}} = \left(\frac{3x^4+5x^2}{4x^2-6x^5}\right)^{\frac{4}{2}} = \left(\frac{3x^4+5x^2}{4x^2-6x^5}\right)^2$

$$y' = 2\cdot\frac{3x^4+5x^2}{4x^2-6x^5}\cdot\frac{(12x^3+10x)(4x^2-6x^5)-(3x^4+5x^2)(8x-30x^4)}{(4x^2-6x^5)^2}$$

d) $\mathbf{y = \sqrt[3]{5+\sqrt{5x-\frac{5}{x^5}}}} = \left(5+(5x-5x^{-5})^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$y' = \frac{1}{3}\cdot\left(5+(5x-5x^{-5})^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{2}\cdot(5x-5x^{-5})^{-\frac{1}{2}}\cdot(5+25x^{-6}) =$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5+\sqrt{5x-\frac{5}{x^5}}}}\right)^2\sqrt{\frac{x^5}{5x^6-5}}\left[\frac{5x^6+25}{x^6}\right]$$

15. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $\mathbf{f(x) = \log\frac{1+e^{3x}}{1-e^{3x}}} = log(1+e^{3x}) - log(1-e^{3x})$

$f'(x) = \frac{3e^{3x}}{1+e^{3x}}loge - \frac{-3e^{3x}}{1-e^{3x}}loge = \frac{6e^{3x}}{1-e^{6x}}\mathrm{loge}$

b) $\mathbf{f(x) = (2-3x)\log(2-3x)}$

$f'(x) = 2\cdot log(2-3x) + (2-3x)\cdot\frac{-3}{2-3x}loge$

c) $\mathbf{f(x) = \log\frac{\sqrt{4-9senx}}{3+2cosx}} = \frac{1}{2}\mathrm{log}(4-9\mathrm{senx}) - \mathrm{log}(3+2\mathrm{cosx})$

$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{-9cosx}{4-9senx} - \frac{-2senx}{3+2cosx}$

d) $\mathbf{f(x) = \frac{senx-xcosx}{cosx+xsenx}}$

$$f'(x) = \frac{(\cos(x)-1\cos(x)+x(\mathrm{sen}(x)))(\cos(x)+x\,\mathrm{sen}(x))-(\mathrm{sen}(x)-x\cos(x))(-\mathrm{sen}(x)+\mathrm{sen}(x)+x\cos(x))}{(\cos(x)+x\,\mathrm{sen}(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2}{(\cos(x)+x\,\mathrm{sen}(x))^2}$$

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

16. Utiliza derivación logarítmica para calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{y=(3x)^{x^5-9x^3}}$; $\ln(f(x))=\ln\left(3x^{(x^5-9x^3)}\right)\to\ln(f(x))=(x^5-9x^3)\cdot\ln(3x)$

$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=(5x^4-27x^2)\cdot\ln(3x)+(x^5-9x^3)\cdot\frac{3}{3x}$

$f'(x)=(3x)^{x^5-9x^3}\left[(5x^4-27x^2)\cdot\ln(3x)+(x^5-9x^3)\cdot\frac{3}{3x}\right]$

b) $\boldsymbol{y=\left((2x+7)^{5x^3-6x^2}\right)}\to\ln(f(x))=\ln\left(2x+7^{(5x^3-6x^2)}\right)\to$

$\ln(f(x))=(5x^3-6x^2)\cdot\ln(2x+7)\to\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=(15x^2-12x)\cdot\ln(2x+7)+(5x^3-6x^2)\cdot\frac{2}{2x+7}$

$\to f'(x)=(3x)^{x^5-9x^3}\left[(15x^2-12x)\cdot\ln(2x+7)+(5x^3-6x^2)\cdot\frac{2}{2x+7}\right]$

c) $\boldsymbol{y=(x+e)^{(4x^5-8x^3)^5}}\to\ln(f(x))=ln(x+e)^{(4x^5-8x^3)^5}=(4x^5-8x^3)^5\cdot\ln(x+e)$

$\frac{f'(x)}{f(x)}=5\cdot(4x^5-8x^3)^4\cdot(20x^4-24x^2)\cdot\ln(x+e)+(4x^5-8x^3)^5\cdot\frac{1}{x+e}$

$f'(x)=(x+e)^{(4x^5-8x^3)^5}\cdot\left[5\cdot(4x^5-8x^3)^4\cdot(20x^4-24x^2)\cdot\ln(x+e)+(4x^5-8x^3)^5\cdot\frac{1}{x+e}\right]$

d) $\boldsymbol{f(x)=(x^x)^x}=x^{x^2}\to\ln(f(x))=lnx^{x^2}=x^2\cdot lnx\to\frac{f'(x)}{f(x)}=(2x)\cdot\ln(x)+(x)^2\cdot\frac{1}{x}$

$f'(x)=(x^x)^x\cdot\left[(2x)\cdot\ln(x)+(x^2)\cdot\frac{1}{x}\right]$

17. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{y=\log_2\sqrt{\frac{4+senx}{4-senx}}}=\log_2\left(\frac{4+senx}{4-senx}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_2\frac{4+senx}{4-senx}=\frac{1}{2}(\log_2(4+\text{senx})-\log_2(4-senx))$

$y'=\frac{1}{2}\left(\frac{cosx}{4+senx}-\frac{-cosx}{4-senx}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{cosx(4-senx)+cosx(4+senx)}{(4+senx)(4-senx)}\right)=\frac{1}{2}\frac{8cosx}{16-sen^2x}=\frac{4cosx}{16-sen^2x}$

b) $\boldsymbol{y=e^{\sqrt{6x+8}}}$; $y'=e^{\sqrt{6x+8}}\cdot\frac{6}{2\sqrt{6x+8}}=\frac{3e^{\sqrt{6x+8}}}{\sqrt{6x+8}}$

c) $\boldsymbol{y=sen\left(ln\frac{7x}{\sqrt{1-2x^2}}\right)}=sen\left(\ln(7x)-\frac{1}{2}\ln(1-2x^2)\right)$;

$y'=cos\left(ln\frac{7x}{\sqrt{1-2x^2}}\right)\cdot\left(\frac{7}{7x}-\frac{1}{2}\frac{-4x}{1-2x^2}\right)=cos\left(ln\frac{7x}{\sqrt{1-2x^2}}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{2x}{1-2x^2}\right)=$

$=cos\left(ln\frac{7x}{\sqrt{1-2x^2}}\right)\cdot\left(\frac{1-2x^2+2x^2}{x(1-2x^2)}\right)=cos\left(ln\frac{7x}{\sqrt{1-2x^2}}\right)\cdot\left(\frac{1}{x(1-2x^2)}\right)$

d) $\boldsymbol{y=ln\frac{5x}{\sqrt{16-x^2}}}=\ln(5x)-\frac{1}{2}\ln(16-x^2)$

$$y' = \frac{5}{5x} - \frac{1}{2}\frac{-2x}{16-x^2} = \frac{1}{x} + \frac{x}{16-x^2} = \frac{16-x^2+x^2}{16-x^2} = \frac{16}{16-x^2}$$

3. APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

18. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función: $y = x^3 + 27x$. ¿Cómo es en x = 0? ¿Y en x = 3? ¿Y en x = -3?

$f(x) = x^3 + 27x$ $\quad f'(x) = 3x^2 + 27$; $3x^2 + 27 = 0$; $x = 3, x = -3$ $\quad f''(x) = 6x$;
$f''(-3) = -18 < 0$ Máximo. $\quad f''(3) = 18 > 0$ Mínimo.
Creciente en $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ $\quad$ Decreciente en $(-3, 3)$
En x = 0 creciente. $\quad$ En x = -3 hay un máx. relativo. $\quad$ En x = 3 hay un min relativo.

19. Una empresa determina que los costes de producción por trabajador contratado son C(x) = x +$\sqrt{x}$, y que los ingresos por ventas, también por trabajador contratado, vienen dados por I(x) = 3x + x^2 . Por tanto, los beneficios B(x) por trabajador contratado son ingresos menos costes. La función beneficios B(x) respecto del número de trabajadores contratados, ¿es creciente o decreciente?

B(x) = I(x) - C(x) = 3x + x^2 – (x +$\sqrt{x}$) = 2x + x^2 – $\sqrt{x}$
B’(x) = 2 + 2x – 1/2$\sqrt{x}$; 2 + 2x – 1/2$\sqrt{x}$ = 0 ; 2 + 2x = 1/2$\sqrt{x}$; $(2+2x)^2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2$
$4 + 8x + 4x^2 = \frac{1}{4x} \rightarrow 16x + 32x^2 + 16x^3 = 1 \rightarrow 16x^3 + 32x^2 + 16x - 1 = 0 \rightarrow x \approx 0{,}06$
Intervalos (0, 0,06) y (0,06, ∞) pues x no puede tomar valores negativos,
Para x < 0,06 B’ es negativa, luego B es decreciente
Para x > 0,06 B’ es positiva, luego B es creciente.

20. Calcula los máximos y mínimos de las funciones siguientes:
a) y = x^4 – 1; b) y = $3x^3$ + 9; c) y = $4x^4$ – $2x^2$ + 5; d) y = $9x^3$ – $3x^2$.

a) $f(x) = x^4 - 1$
$f'(x) = 4x^3$; $4x^3 = 0$; x=0 ; $f''(x) = 12x^2$; $\quad f''(0) = 12 \cdot 0 = 0$ $\quad f'''(x) = 24x$; $\quad f''''(x) = 24$; $\quad f''''(0) = 24 > 0$ Mínimo.

b) $f(x) = 3x^3 + 9$
$f'(x) = 9x^2$; $9x^2 = 0$; x=0 ; $f''(x) = 18x$; $\quad f''(0) = 0$; No tiene ni máximos ni mínimos.

c) $f(x) = 4x^4 - 2x^2 + 5$
$f'(x) = 16x^3 - 4x$; $16x^3 - 4x$ =0 ; $x = \frac{1}{2}$, $\quad x = -\frac{1}{2}$, $\quad x = 0$ $\quad f''(x) = 48x^2 - 4$;
$f''\left(\frac{1}{2}\right) = 8 > 0$ Mínimo. $\quad f''\left(\frac{1}{2}\right) = 8 > 0$ Mínimo. $\quad f''(0) = -4 < 0$ Máximo.

d) $f(x) = 9x^3 - 3x^2$
$f'(x) = 27x^2 - 6x$; $x = \frac{2}{9}, x = 0$
$f''(x) = 54x - 6$;
$f''\left(\frac{2}{9}\right) = 6 > 0$ Mínimo.
$f''(0) = -6 < 0$ Máximo

21. Demuestra que la suma de dos sumandos positivos, cuyo producto es constante, es mínima cuando estos son iguales.

Suma: x + y ; x·y = k ; $y = \frac{k}{x}$; $f(x) = x + \frac{k}{x}$;

$f'(x) = 1 - \frac{k}{x^2}$; $1 - \frac{k}{x^2} = 0$; $x^2 = k$; $x = \sqrt{k}$, pues ha de ser positivo.

$f''(x) = \frac{2k}{x^3}$ $f''(\sqrt{k}) = \frac{2k}{(\sqrt{k})^3} > 0$ luego es un mínimo.

$y = \frac{k}{\sqrt{k}} = \sqrt{k}$, Por tanto, han de ser iguales.

22. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 72x$, en el intervalo [-5,5] y en el intervalo [1,4].

f(x) es continua y derivable en todos los puntos por ser una función polinómica.

$f'(x) = 6x^2 - 6x + 72; f'(x) = 0 \to x = \frac{1 \pm i\sqrt{47}}{2}$, no real.

Luego f(x) no tiene ni máximos ni mínimos relativos.

Sabiendo que f(x) es creciente en todo su dominio:

Cuando f(x) definida en el intervalo [-5,5]

Mín. absoluto: $f(-5) = 2(-5)^3 - 3(-5)^2 + 72(-5) = -685 \to$ Punto (-5, -685)

Máx. absoluto: $f(5) = 2(5)^3 - 3(5)^2 + 72(5) = 535 \to$ Punto (5, 535)

Cuando f(x) definida en el intervalo [1,4]

Mín. absoluto: $f(1) = 2(1)^3 - 3(1)^2 + 72(1) = 71 \to$ Punto (1, 71)

Máx. absoluto: $f(4) = 2(4)^3 - 3(4)^2 + 72(4) = 368 \to$ Punto (4, 368)

23. Determina los máximos y mínimos de las funciones siguientes:

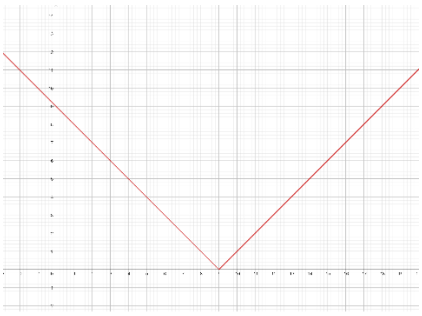
a) $y = |x - 9|$ **b)** $y = |x + 2| + |x - 3|$

a) $\mathbf{y = |x - 9|}$

$$f(x) = \begin{cases} -x + 9 & si \quad x < 9 \\ x - 9 & si \quad x > 9 \end{cases}$$

f(x) es continua en todos los puntos por ser una función polinómica, sin embargo, no es derivable en $x = 9$, puesto que sus derivadas laterales son distintas $f'_-(9) \neq f'_+(9); -1 \neq 1$

No obstante, en dicho punto tiene un mínimo a la vez relativo y absoluto. Sus coordenadas son P (9, 0)



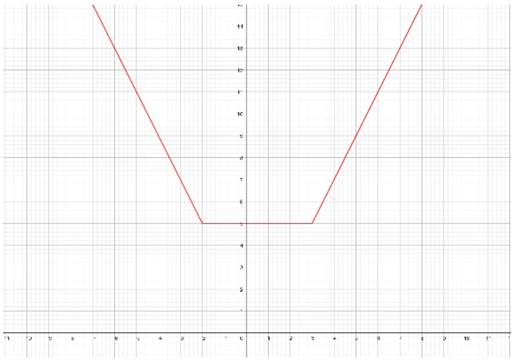
b) $\mathbf{y = |x + 2| + |x - 3|}$

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & si \quad x < -2 \\ 5 & si \quad -2 \le x \le 3 \\ 2x - 1 & si \quad x > 3 \end{cases}$$

f(x) es continua en todos los puntos por ser una función polinómica. Al ser una suma de funciones en valor absoluto, no es derivable ni en -2 ni en 3, no tiene máximos ni mínimos.

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra



24. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función $f(x) = |x + 2|$, en el intervalo [-4,4].

$$\mathrm{f(x)} = \begin{cases} -x - 2 & si \;\; x < -2 \\ x + 2 & si \;\; x > -2 \end{cases}$$

f(x) es continua en todos los puntos al ser una función polinómica, pero no es derivable en $x = -2$, puesto que las derivadas laterales no son iguales $\mathrm{f}'_-(-2) \neq \mathrm{f}'_+(-2); -1 \neq 1$

En dicho punto, cuenta con un mínimo que es a la vez relativo y absoluto cuyas coordenadas son P (-2, 0).

Teniendo en cuenta que f(x) es decreciente en $(-\infty, -2)$ y creciente en $(-2, \infty)$:

Para f(x) definida en el intervalo $[-4, 4]$:

Máx. Absoluto:

$\mathrm{f}(4) = |4 + 2| = 6 \rightarrow$ B (4, 6)

25. Se considera la función: $f(x) = \begin{cases} e^{-x} - 1 & si \;\; x \leq 0 \\ x^2 + x & si \;\; x > 0 \end{cases}$. Contesta razonadamente a las siguientes preguntas:

a) ¿Es continua en el punto x=0? b) ¿Es derivable en el punto x=0? c) ¿Alcanza algún extremo?

a) Continuidad en $x = 0$

$\mathrm{f}(0) = \mathrm{e}^0 - 1 = 0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (e^{-x} - 1) = e^0 - 1 = 0 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to +} (x^2 + x) = 0^2 + 0 = 0 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0^-} \mathrm{f(x)} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{f(x)}$; luego $\exists \lim_{x\to 0} \mathrm{f(x)}$. Como $\mathrm{f}(0) = \lim_{x\to o}$, f(x) es continua en $x = 0$

b) Derivabilidad en $x = 0$

f(x) es continua en todo su dominio. Calculamos $\mathrm{f}'(x)$:

$$\mathrm{f}'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & si \;\; x < 0 \\ 2x + 1 & si \;\; x > 0 \end{cases}$$

Para que f(x) sea derivable en $x = 0$, $\mathrm{f}'_-(0) = f'_+(0)$

$$\begin{cases} \mathrm{f}'_-(0) = -e^0 = -1 \\ \mathrm{f}'_+(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1 \end{cases}$$

Como $-1 \neq 1$; $\mathrm{f}'_-(0) \neq f'_+(0)$ y, por lo tanto, f(x) no es derivable en $x = 0$

c) Extremos

Sí, alcanza un mínimo en $x = 0$

26. Sabiendo que una función f(x) tiene como derivada $f'(x) = (x - 4)^2(x^2 - 8x + 7)$,

a) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f

b) Halla los máximos y mínimos relativos de f

c) ¿Es el punto x = 4 un punto de inflexión de f? Justifica razonadamente la respuesta.

a) $(x - 4)^2(x^2 - 8x + 7) = 0$; $x = 4$, solución doble; $x = 1$, $x = 7$,

Obtenemos los intervalos $(-\infty, 1)$ $(1, 4)$ $(4, 7)$ $(7, \infty)$ estudiamos el signo de la derivada en cada uno de los intervalos

$(-\infty, 1)$, $f'(0) > 0$ f es creciente

$(1, 4)$, $f'(3) < 0$ f es decreciente

$(4, 7)$, $f'(5) < 0$ f es decreciente

$(7, \infty)$, $f'(10) > 0$ f es creciente

b) En x = 1 hay máximo relativo

En x = 7 hay un mínimo relativo

c) $f'(4) = 0$, $f''(x) = 2(x-4)(x^2 - 8x + 7) + (x - 4)^2(2x-8)$; $f''(4) = 0$. $f''(x) = (x-4)(4x^2 - 32x + 46)$

$f'''(x) = 1\cdot(4x^2 - 32x + 46) + (x-4)(8x-32)$, $f'''(4) \neq 0$, en x = 4 hay un punto de inflexión.

27. Determina los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las funciones siguientes:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 11$; b) $y = x^3 - 7x + 8$; c) $y = x^5 + 2$; d) $y = x^4 - 3$.

a) $y' = 3x^2 - 6x + 6$

La derivada primera no se anula en ningún punto, luego no tiene máximos ni mínimos relativos.

$y'' = 6x - 6$, $6x - 6 = 0$, $x = 1$. $y''' = 6$ $y'''(1) \neq 0$, hay punto de inflexión en (1, 15)

b) $y' = 3x^2 - 7$, $3x^2 - 7 = 0$, $x = \sqrt{\frac{7}{3}}$, $x = -\sqrt{\frac{7}{3}}$

Obtenemos los intervalos $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$ $\left(-\sqrt{\frac{7}{3}}, \sqrt{\frac{7}{3}}\right)$ $\left(\sqrt{\frac{7}{3}}, \infty\right)$ estudiamos el signo de la derivada en cada uno de los intervalos

$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$, $y'(-10) > 0$ f es creciente

$\left(-\sqrt{\frac{7}{3}}, \sqrt{\frac{7}{3}}\right)$, $y'(0) < 0$ f es decreciente

$\left(\sqrt{\frac{7}{3}}, \infty\right)$, $y'(10) > 0$ f es creciente

En $x = -\sqrt{\frac{7}{3}}$ hay un máximo relativo,

En $x = \sqrt{\frac{7}{3}}$ hay un mínimo relativo

$y'' = 6x$, $6x = 0$, $x = 0$; $y''' = 6 \neq 0$, en x = 0 hay un punto de inflexión.

c) $y' = 5x^4$, $5x^4 = 0$, $x = 0$, como $5x^4$ es siempre positiva, la función es creciente siempre, no tiene ni máximos ni mínimos relativos.

$y'' = 20x^3$, $y''' = 60x^2$, $y^{iv} = 120x$, $y^{v} = 120 \neq 0$, en x = 0 hay un punto de inflexión.

d) **$y' = 4x^3$** , $4x^3 = 0$, $x = 0$

Obtenemos los intervalos $(-\infty, 0)$ $(0, \infty)$ estudiamos el signo de la derivada en cada uno de los intervalos

$(-\infty, 0)$ $y'(-10) < 0$ f es decreciente

$(0, \infty)$ $y'(10) > 0$ f es creciente

En x = 0 hay un mínimo relativo.

No hay puntos de inflexión, pues y'' se anula en x = 0 y también y'''.

28. Determina el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5$, b) f(x) = cotg x, c) $f(x) = \frac{x-3}{x^2-4}$,

d) $f(x) = \sqrt{x+5}$, e) $f(x) = 2^{\frac{x+2}{x-3}}$, f) f(x) = log(x+1).

a) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5$, es una función polinómica, por tanto, su dominio es $\mathcal{R}$

b) f(x) = cotgx = $\frac{cosx}{senx}$ no existe donde se anula el denominador, x = kπ, Dom = $\mathcal{R}$ - {x = kπ }

c) $x^2 - 4 = 0$, $x = -2$, $x = 2$ Dom = $\mathcal{R}$ - {-2, 2 }

d) $x + 5 \geq 0$, $x \geq -5$, Dom = {x ∈ $\mathcal{R}$, $x \geq -5$} = [-5, ∞)

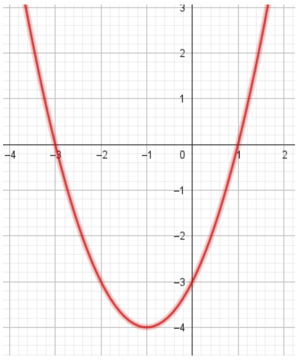
e) $x - 3 = 0$, $x = 3$, Dom = $\mathcal{R}$ - {3 }

f) $x + 1 > 0$, $x > -1$, Dom = {x ∈ $\mathcal{R}$, $x > -1$} = (-1, ∞)

29. Determina el conjunto imagen (o recorrido) de las siguientes funciones:

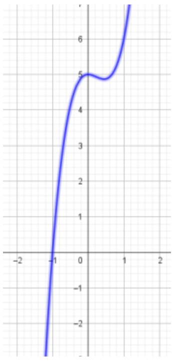
a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$, b) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5$, c) f(x) = $\sqrt{x-1}$

a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$



Img = [-4, ∞)

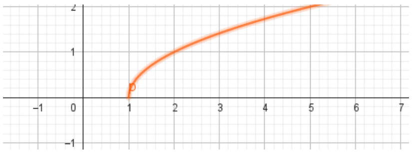
b) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5$



Img = $\mathcal{R}$

c) f(x) = $\sqrt{x-1}$

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra



Img = [0, ∞)

30. Analiza la simetría de las siguientes funciones:

a) f(x) = x^2 b) f(x) = x^3 c) f(x) = $x^2 - 6x + 5$

a) $f(x) = x^2$, $f(-x) = (-x)^2 = x^2$ como f(x) = f(-x) f es par

b) $f(x) = x^3$, $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$, $-f(-x) = -(-x^3) = x^3$ como f(x) = -f(-x) f es impar

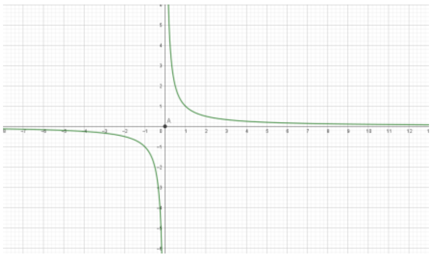
c) $f(x) = x^2 - 6x + 5$, $f(-x) = (-x)^2 - 6(-x) + 5 = x^2 + 6x + 5$, $-f(-x) = -(x^2 + 6x + 5) = -x^2 - 6x - 5$

como f(x) ≠ f(-x) y f(x) ≠ - f(-x) f no es par ni impar

31. Estudia las asíntotas y el comportamiento en el infinito de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \ si \ x \neq 0 \\ 0 \ si \ x = 0 \end{cases}$ Asíntota Vertical: Hacemos el denominador igual a 0, **x = 0** ;

Asíntota Horizontal: $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, **y = 0**



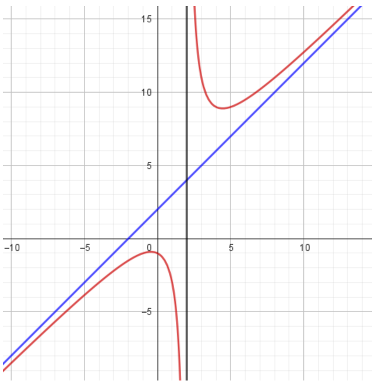
b) $f(x) = \frac{x^2+2}{x-2}$; Asíntota Vertical: Hacemos el denominador igual a 0, x – 2 = 0 , **x = 2.**

Asíntota Horizontal: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{x-2} = \infty$, no tiene.

Asíntota oblicua: y = mx + n , $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+2}{x-2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{x^2-2} = 1$, $m = 1$,

$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2}{x-2} - 1 \cdot x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2-x^2+2x}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+2}{x-2} = 2$, $n = 2$

y = x + 2

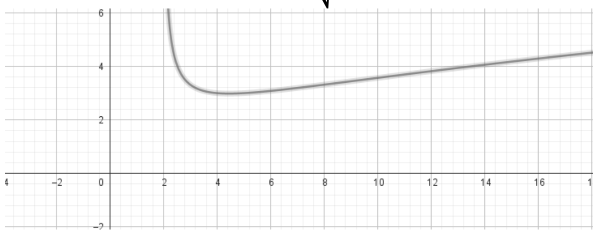


c) $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{\frac{x^2+2}{x-2}}}$ El dominio es $(2, \infty)$

Asíntota Vertical: Hacemos el denominador igual a 0, x – 2 = 0 , **x = 2.**

Asíntota Horizontal: $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2+2}{x-2}} = \infty$, no tiene.

Asíntota oblicua: y = mx + n , $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2+2}{x-2}}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{\frac{x^2+2}{x-2}}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2+2}{x^3-2x^2}} = 0$, no tiene.

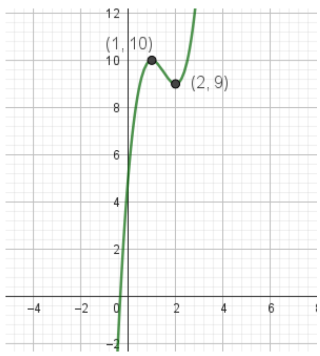


32. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos y la concavidad de:

a) $\boldsymbol{f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5}$

$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$, $6x^2 - 18x + 12 = 0$; $x = 1$, $x = 2$
obtenemos los intervalos: $(-\infty, 1)$ $(1, 2)$ $(2, \infty)$
estudiamos el signo de la primera derivada en cada uno de los intervalos:
$(-\infty, 1)$, f'(-10) > 0 f es creciente
(1, 2) , f'(1,5) < 0 f es decreciente
$(2, \infty)$, f'(10) > 0 f es creciente
En x = 1 hay un máximo relativo, (1, 10)
En x = 2 hay un mínimo relativo, (2, 9)

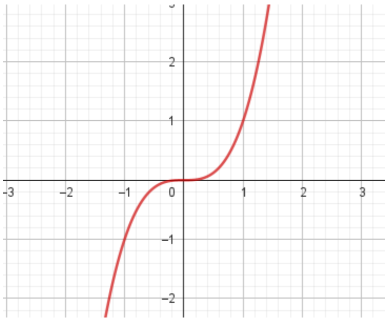
$f''(x) = 12x - 18$, $12x - 18 = 0$; $x = 1{,}5$ obtenemos los intervalos: (-∞, 1,5) (1,5, ∞)
Estudiamos el signo de la segunda derivada en cada uno de los intervalos:
(-∞, 1,5) , f''(0) < 0 Cóncava
(1,5, ∞) , f''(10) > 0 Convexa



b) $\boldsymbol{f(x) = x^3}$

$f'(x) = 3x^2$, como siempre es positiva, f es siempre creciente.

$f''(x) = 6x$, $6x = 0$; $x =$ obtenemos los intervalos: (-∞, 0) (0, ∞)
Estudiamos el signo de la segunda derivada en cada uno de los intervalos:
(-∞, 0) , f''(-10) < 0 Cóncava
(0, ∞) , f''(10) > 0 Convexa

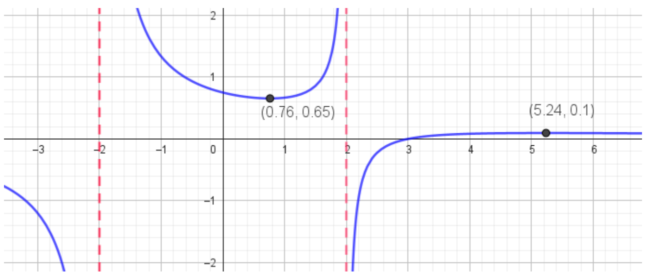


c) $\boldsymbol{f(x) = \frac{x-3}{x^2-4}}$

El dominio es todos los números reales menos el – 2 y el 2.

d) $f'(x) = \frac{1\cdot(x^2-4)-2x\cdot(x-3)}{(x^2-4)^2} = \frac{(-x^2+6x-4)}{(x^2-4)^2}$, $-x^2+6x-4=0$, $x = 0{,}76$, $x = 5{,}24$
estudiamos el signo de la primera derivada en cada uno de los intervalos:
$(-\infty, -2)$, f'(-10) < 0 f es decreciente
(-2, 0,76) , f'(0) < 0 f es decreciente
(0,76, 2) , f'(1) > 0 f es creciente
(2, 5,24) , f'(5) > 0 f es creciente
(5,24, ∞) , f'(10) < 0 f es decreciente
En x = 0,76 hay un mínimo relativo,
En x = 5,24 hay un máximo relativo.

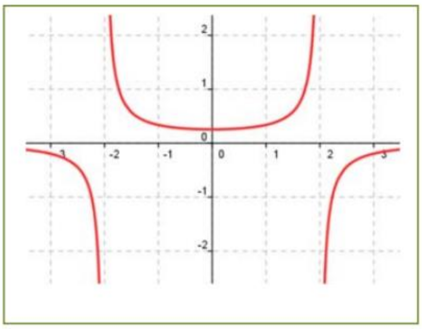
$f''(x) = \frac{(-2x+6)\cdot(x^2-4)^2-(-x^2+6x-4)\cdot 2x\cdot(x^2-4)}{(x^2-4)^4} = \frac{(-2x+6)\cdot(x^2-4)-(-x^2+6x-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^3} \neq 0$
Estudiamos el signo de la segunda derivada en cada uno de los intervalos: (-∞, -2) (-2, 2) (2, ∞)
(-∞, -2) , f''(-10) < 0 Cóncava
(-2, 2) , f''(0) > 0 Convexa
(2, ∞) , f''(10) > 0 Cóncava



33. Se considera la función f(x) = $\boldsymbol{\frac{1}{4-x^2}}$
a) Indicar el dominio de definición de la función f y sus asíntotas
b) Hallar los extremos relativos de la función f y sus intervalos de concavidad y convexidad.
c) Dibujar la gráfica de f y hallar su máximo y su mínimo absoluto en el intervalo [–1, 1].

a) $4-x^2=0$, $x=-2,\ x=2$; Dom f = R – {2, –2};
Asíntotas verticales: x = 2, x = –2;
Asíntota horizontal: $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{4-x^2}=0$, y = 0;
b) $f'(x)=\frac{2x}{(4-x^2)^2}$; $\frac{2x}{(4-x^2)^2}=0$; $2x=0$, $x=0$
Estudiamos el signo de la primera derivada en cada uno de los intervalos: (-∞, -2) (-2, 0) (0, 2) (2, ∞)
(-∞, -2) f'(-10) < 0 decreciente
(-2, 0) f'(-1) < 0 decreciente
(0, 2) f'(1) > 0 creciente
(2, ∞) f'(10) > 0 creciente
Mínimo relativo: (0, 1/4);
$$f''(x)=\frac{2\cdot(4-x^2)^2-2x\cdot2\cdot(-2x)\cdot(4-x^2)}{(4-x^2)^4}=\frac{2\cdot(4-x^2)+2x\cdot2\cdot2x\cdot}{(4-x^2)^3}=\frac{(8+6x^2)}{(4-x^2)^3}\neq0$$
Estudiamos el signo de la segunda derivada en cada uno de los intervalos: (-∞, -2) (-2, 2) (2, ∞)
(-∞, -2) f''(-10) > 0 Cóncava
(-2, 2) f''(0) < 0 Convexa
(2, ∞) f''(10) > 0 Cóncava
Cóncava: (–∞,–2) ∪ (2, +∞); Convexa: (–2, 2); No tiene puntos de inflexión;

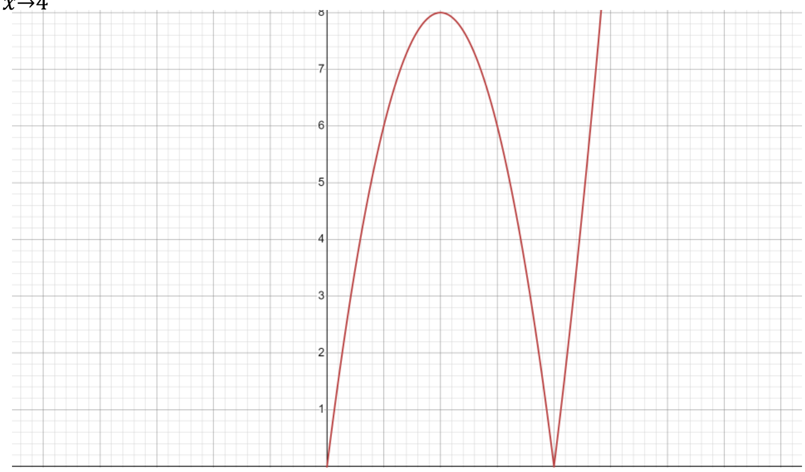
c) Mínimo absoluto: (0, 1/4) que en ese intervalo coincide con el mínimo relativo;
Máximos absolutos: (–1, 1/3), (1, 1/3), se alcanzan en los extremos del intervalo.



34. Sea la función $f(x)=2x|4-x|$ Estudia su continuidad y derivabilidad.
$$2x|4-x|=\begin{cases}-2x(4-x), & x>4\\ 2x(4-x), & x\le4\end{cases}$$
$$2x|4-x|=\begin{cases}2x^2-8x, & x>4\\ 8x-2x^2, & x\le4\end{cases}$$
Estudiar su continuidad en x = 4
$$f(4)=8\cdot4-2\cdot4^2=0$$
$$\lim_{x\to4}f(x)=\begin{cases}\lim_{x\to4^+}(2x^2-8x)=2\cdot4^2-8\cdot4=0\\ \lim_{x\to4^-}(8x-2x^2)=8\cdot4-2\cdot4^2=0\end{cases}$$
$Como\ f(4)=\lim_{x\to4^+}f(x)=\lim_{x\to4^-}f(x)\ \ entonces\ f(x) es\ continua\ en\ x=4$
Estudiar su derivabilidad en x = 4
$$\lim_{x\to4}f'(x)=\begin{cases}\lim_{x\to4^+}(4x-8)=4\cdot4-8=8\\ \lim_{x\to4^-}(8-4x)=8-4\cdot4=-8\end{cases}$$

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

Como $\lim_{x\to 4^+} f'(x) \neq \lim_{x\to 4^-} f'(x)$ *entonces* $f(x)$ *no es derivable en* $x = 4$



35. Se considera la función $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$. Calcula las asíntotas, el máximo y el mínimo absolutos de la función f(x).

Asíntotas:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2 - 4x + 1}{4x^2 + 1} = 1$$

Por tanto, tiene asíntota horizontal en y=1. No tiene asíntotas verticales ni oblicuas.

Máximos y mínimos:

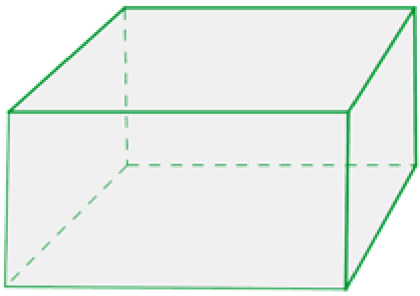
$$f'(x) = \frac{(8x-4)\cdot(4x^2+1)-(8x)\cdot(4x^2-4x+1)}{(4x^2+1)^2} = \frac{32x^3+8x-16x^2-4-(32x^3-32x^2+8x)}{(4x^2+1)^2} = \frac{16x^2-4}{(4x^2+1)^2}$$

$$\frac{16x^2-4}{(4x^2+1)^2} = 0 \to 16x^2 - 4 = 0; \quad x = \frac{1}{2}; \quad x = -\frac{1}{2}$$

$$f''(x) = \frac{32x\cdot(4x^2+1)^2-(16x^2-4)\cdot 2\cdot(4x^2+1)\cdot 8x}{(4x^2+1)^4} = \frac{32x\cdot(4x^2+1)-(16x^2-4)\cdot 16x}{(4x^2+1)^3}$$

$f''\left(\frac{1}{2}\right) > 0$, mínimo $\qquad f''\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$ máximo

36. Se desea fabricar envases con forma de ortoedro de base cuadrada de forma que el volumen sea de dos litros y la superficie empleada sea mínima.



x= largo = profundo / y= altura

V= 2 litros = $2dm^3$

Volumen:$2 = x^2 \cdot y \to y = \frac{2}{x^2}$

Superficie = $2(x^2 + 2yx) = 2\left(x^2 + \frac{2}{x^2}x\right)$

$f(x) = 2\left(x^2 + \frac{2}{x}\right) = 2x^2 + \frac{4}{x} = 2x^2 + \frac{4}{x}$

$f'(x) = 4x - \frac{4}{x^2} \qquad 4x - \frac{4}{x^2} = 0 \to \frac{4x^3-4}{x^2} = 0 \to 4x^3 - 4 = 0 \to x = 1$

$f''(x) = 4 + \frac{8}{x^3}$ $\quad f''(1) = 4 + \frac{8}{(1)^3} > 0 \rightarrow Por\ lo\ tanto\ tenemos\ un\ mínimo\ para\ x = 1$

$y = \frac{2}{(1)^2} = 2$ Lado de la base: 1 dm, altura: 2 dm

37. Determina las dimensiones de un cono de volumen mínimo inscrito en una esfera de radio R= 5cm.

V= $\frac{h \cdot \pi \cdot r^2}{3}$; $h = R + x \rightarrow h = 5 + x$; $r^2 = R^2 - x^2 \rightarrow r^2 = 25 - x^2$

$$V = \frac{(5+x) \cdot \pi \cdot r^2}{3} = \frac{(5+x) \cdot \pi \cdot (25 - x^2)}{3}$$

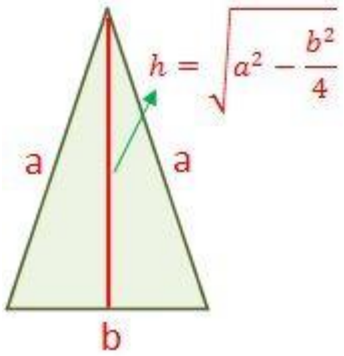
$$f'^{(x)} = \frac{-10\pi x + 25\pi}{3} - \pi x^2 = 0 \rightarrow x_1 = 0{,}66\,; \quad x_2 = -3{,}99$$

La opción negativa no es válida.

$f''(x) = -\frac{10\pi}{3} - 2\pi x$ $\quad f''(0{,}66) = -\frac{10\pi}{3} - 2\pi(0{,}66) < 0 \rightarrow Hay\ un\ máximo\ relativo\ para\ 0{,}66.$

$h = 5 + 0{,}66 = 5{,}66\ cm$ $\quad r^2 = 25 - (0{,}66)^2 = 24{,}564;$ $\quad r = 4{,}9cm$

38. Calcula la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.



perímetro= b+2a

8= b+2a→ $a = \frac{8-b}{2}$

A=$\frac{1}{2} b \cdot h = \frac{b \cdot \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}}{2} = \frac{b \cdot \sqrt{\left(\frac{8-b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4}}}{2}$

$$f(x) = \frac{b \cdot \sqrt{\frac{64-16b}{4}}}{2} = \frac{\frac{b}{2} \cdot \sqrt{64-16b}}{2} = \frac{\frac{b}{2} \cdot \sqrt{16(4-b)}}{2} = b \cdot \sqrt{4-b}$$

$$f'(x) = \sqrt{4-b} + b\left(\sqrt{4-b}\right) = \sqrt{4-b} + \frac{b \cdot (-1)}{\sqrt{4-b}} = \frac{4-b-b}{\sqrt{4-b}} \rightarrow \frac{4-2b}{\sqrt{4-b}} = 0$$

$$4 - 2b = 0 \rightarrow 4 = 2b \rightarrow b = 2$$

$$f''(x) = \frac{-6+b}{\sqrt{4-b} \cdot (4-b)}$$

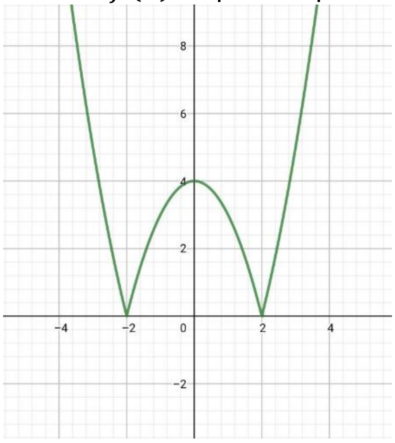
$f''(b) < 0 \ \rightarrow Por\ tanto\ tenemos\ un\ máximo\ para\ b = 2$

$a = \frac{8-b}{2} = \frac{8-2}{2} = 3$ $\quad ; \quad h = \sqrt{9 - \frac{4}{4}} = \sqrt{8}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1.- Piensa en un ejemplo de función no derivable y que sí sea continua.

Es el caso de las funciones en valor absoluto: $f(x) = |x^2 - 4|$



Esta función es continua en todo $\mathbb{R}$, pero no es derivable en $x = -2$ y en $x = 2$, ya que esos dos puntos no tienen una única recta tangente.

2.- Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = \sqrt{x}$ en $x = 1, 4, 5$ ... ¿Puedes obtener la derivada en $x = 0$? Razona la respuesta.

$f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$f'(1) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{0}{0} \to L'Hôpital \to \lim\limits_{x \to 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$

$f'(4) = \lim\limits_{x \to 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{0}{0} \to L'Hôpital \to \lim\limits_{x \to 4} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \lim\limits_{x \to 4} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$

$f'(5) = \lim\limits_{x \to 5} \frac{f(x)-f(5)}{x-5} = \lim\limits_{x \to 5} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5} = \frac{0}{0} \to L'Hôpital \to \lim\limits_{x \to 5} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \lim\limits_{x \to 5} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$

$f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}-0}{x-0} = \frac{0}{0} \to L'Hôpital \to \lim\limits_{x \to 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{0}} = \frac{1}{0} = +\infty;$

$$No\ se\ puede\ obtener\ la\ derivada\ en\ x = 0$$

3.- Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & si\ x \le 1 \\ 2 & si\ x > 1 \end{cases}$, indica cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas, razonando la respuesta.

a) f es derivable en x=1, pues las derivadas laterales se anulan en dicho punto.

b) f ni es continua en x=1 ni derivable en dicho punto.

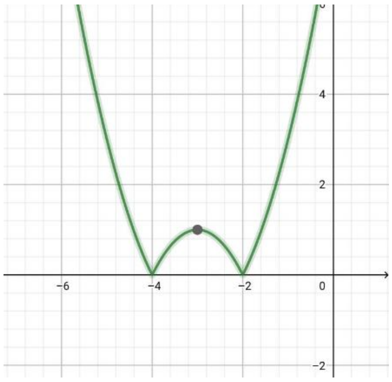
$f'(x) = \begin{cases} 2(x-1) & si\ x < 1 \\ 0 & si\ x > 1 \end{cases}$ $\qquad f_-'(1) = 2(1-1) = 0; \qquad f_+'(1) = 0$

$f_-^{\prime(1)} = f_+^{\prime(1)} = 0$; las derivadas laterales tienen el mismo valor.

Sin embargo, f no es continua en 1 y por tanto tampoco derivable, la respuesta correcta es la b.

4.- ¿Cuántos puntos hay en la función $f(x) = |x^2 + 6x + 8|$ que no tengan derivada? Justifica la respuesta.

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra



Como podemos observar, la función es continua en todo $\mathbb{R}$, pero no es derivable en los puntos $x = -4$ y $x = -2$, ya que esos dos puntos tienen dos rectas tangentes.

5.- Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = 5x^2 + 3x - 2$ en el punto $x = 5$

$$\boldsymbol{y = f(a) + f'(a)(x - a)}$$

$f(5) = 5 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 - 2 = 125$
$f'(x) = 10x + 3 \rightarrow f'(5) = 10 \cdot 5 + 3 = 53$
$y = 125 + 53(x - 5) = 125 + 53x - 265 = 53x - 140$
$y = 53x - 140$

6. Un vehículo espacial despega de un planeta con una trayectoria dada por: $y = 30x - 0'5x^2$ (x e y en km). La dirección del vehículo nos proporciona la recta tangente en cada punto. Determina la dirección del vehículo cuando está a 4 km de distancia sobre el horizonte.

Dada la función $f(x) = 30x - 0'5x^2$ hacemos la derivada $f(x)' = 30 - x$ y sustituimos x=4
$f'(4) = 30 - 4 = 26$ y hallamos la dirección del vehículo.

7. Calcula las rectas tangentes de las gráficas de las funciones siguientes en los puntos indicados:

Fórmula de la recta tangente: $y = f(a) + f'(a)(x - a)$

a) $y = x^3 + 5$ en x = 2

$y' = 3x^2$

$y(2) = 2^3 + 5 = 13$ $\qquad$ $y'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$

$y = 13 + 12(x - 2) \rightarrow y = 12x - 11$

b) $y = 3x^2 + 7x - 2$ en x = 1

$y(1) = 1^3 + 5 = 6$

$y' = 6x + 7$; $y'(1) = 6 + 7 = 13$

$$y = 6 + 13(x - 1) \rightarrow \quad y = 13x - 5$$

c) $y = 2x^3 - 5x^2 + 4$ en x = 0

$$y(0) = 2 \cdot 0^3 - 5 \cdot 0^2 + 4 = 4$$

$y' = 6x^2 - 5x$ $\qquad$ $y'(0) = 6 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 = 0$

$y = 4 + 0(x - 0) \rightarrow y = 4$

8. Determina las coordenadas de los puntos de la gráfica $y = x^3 - 3x + 2$ en los que su tangente sea paralela: a) a la recta y = 0 ; b) a la recta y = 2x.

$$y = x^3 - 3x + 2$$

a) Paralela y = 0 → $m = 0$ $\quad y' = 3x^2 - 3 \quad ; 3x^2 - 3 = 0 ; 3x = 3 ; \; x = 1 \;,\; x = -1$

Puntos: (-1, 4) y (1, 0)

b) y = 2x → $m = 2 \quad y' = 3x^2 - 3 \quad ; 3x^2 - 3 = 2 \;;\; 3x^2 = 5 \;;\; x = -\sqrt{\frac{5}{3}} \;,\; x = \sqrt{\frac{5}{3}}$

Puntos: $\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}, \; \frac{4}{3}\sqrt{\frac{5}{3}} + 2\right)$ y $\left(\sqrt{\frac{5}{3}}, -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{5}{3}} + 2\right)$

9. Determina la recta tangente de la gráfica de la función $y = \sqrt{4x^3}$ en x=0

La función no es derivable en x = 0 pero existe recta tangente

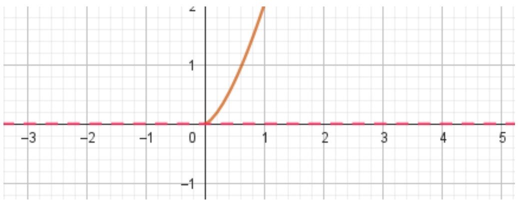
$$y(0) = \sqrt{0} = 0$$

$$y' = \frac{12x^2}{2\sqrt{4x^3}} = \frac{12x^2}{2 \cdot 2\sqrt{x^3}} = (x^2 \cdot x^{-\frac{3}{2}} = x^{1/2}) = 3\sqrt{x}$$

$$y'(0) = 3\sqrt{0} = 0$$

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

$$y = 0 + 0(x - 0) \rightarrow y = 0$$



10. Determina las rectas tangentes a la función $f(x) = 4x^3 - 12x$ en los puntos en los que la pendiente es 12. ¿Cuál es el menor valor que puede tener la pendiente a esta curva? ¿En qué puntos se alcanza?

$f(x) = 4x^3 - 12x$ m = 12

$f'(x) = 12x^2 - 12 \quad ; 12x^2 - 12 = 12; \quad 12x^2 = 24; \quad x = \pm\sqrt{2}$

Puntos: $(\sqrt{2}, -4\sqrt{2}) \; y \; (-\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$

Rectas tangentes: $y = 4\sqrt{2} + 12(x + \sqrt{2})$ y $y = -4\sqrt{2} + 12(x - \sqrt{2})$;

$f'(x) = 12x^2 - 12$ *el menor valor que puede tener la pendiente es en* $x = 0$ y vale -12

11. Determina los coeficientes a, b y c de la función $f(x) = ax^3 + bx + c$, que pasa por el punto A(1,2) y es tangente a la recta y = x en el punto O(0,0).

$$f'(x) = 3ax^2 + b$$

Punto O(0, 0) $\quad f(0) = 0 \quad \rightarrow c = 0$

Tangente y = x , m = 1 $\quad f'(0) = b \quad \rightarrow 1 = b$

$Punto\ A(1,2) \quad f(1) = 2 \quad \rightarrow a = 1$

12. Determina los coeficientes a, b y c para que las funciones $\boldsymbol{f(x) = x^3 + bx + a}$ y $\boldsymbol{g(x) = cx - x^2}$ tengan la misma recta tangente en el punto A(1, 0).

$f(x) = x^3 + bx + a\,; \quad f(1) = 0\,; \ \ 0 = 1^3 + b(1) + a\,; \quad 0 = a - 3 + 1\,; \quad a = 2$

$g(x) = cx - x^2 \ \ ; \ g(1) = 0\,; \quad c - 1 = 0\,; \quad c = 1$

$f(x) = x^3 + bx + a\,; \quad f'(x) = 3x^2 + b\,; \ f'(1) = 3 + b$

$g'(x) = c - 2x = 1 - 2x \qquad g'(1) = -1 \ ; \quad 3 + b = -1\,; \quad b = -4$

13. Determina el coeficiente a, para que la función $\boldsymbol{f(x) = x^2 + a}$, sea tangente a la recta y=x.

$y = x \rightarrow m = 1$

$f(x) = x^2 + a\,; f'(x) = 2x\,; 2x = 1\,; x = \frac{1}{2} \ \ ; \ \ f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + a = \frac{1}{4} + a$

En los puntos de la forma $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4} + a\right)$ la recta y = x es tangente a la función.

14. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{y = 3x^2 + 5x - 7}$

$y' = 6x + 5$

b) $\boldsymbol{y = 5x^3 - 4x^2 + 3x + 2}$

$y' = 15x^2 - 8x + 3$

c) $\boldsymbol{y = 6x^2 - 4x + 7}$

$y' = 12x - 4$

d) $\boldsymbol{y = 9x^7 - 4x^6 - 2x^3}$

$y' = 63x^7 - 24x^5 - 6x^2$

15. Calcula:

a) $\boldsymbol{D(3x^2 + 6x^4 - 9x)}$

$y' = 6x + 24x^3 - 9$

b) $\boldsymbol{D(7x^5 - 5x^2 + 3x + 2x^3)}$

$y' = 35x^4 - 10x + 3 + 6x^2$

c) $\boldsymbol{D(5x^5 - 4x^4 + 3x^3)}$

$y' = 25x^4 - 16x^3 + 9x^2$

c) $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}(7x^3 - 8x^6 - 9x^8)}$

$y' = 21x^2 - 48^5 - 72x^7$

16. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{y = 5x^2 + 4x - \frac{3}{x}}\,; y' = 10x + 4 + \frac{3}{x^2}$

b) $\boldsymbol{y = \frac{(2x^2+5)(7x-3)}{5x-8}}\,; y = \frac{14x^3-6x^2+35x-15}{5x-8}\,; y' = \frac{(42x^2-12x+35)(5x-8)-(14x^3-6x^2+35x-15)(5)}{(5x-8)^2}$

c) $\boldsymbol{y = \frac{6\sqrt{x}}{(x+2)(x^2-3x+1)}}\,; y = \frac{6x^{\frac{1}{2}}}{(x^3-3x^2+x+2x^2-6x+2)}\,; y' = \frac{\left(3x^{-\frac{1}{2}}\right)(x^3-x^2-5x+2)-\left(6x^{\frac{1}{2}}\right)(3x^2-2x-5)}{(x^3-x^2-5x+2)^2}$

d) $\boldsymbol{y = \frac{\sqrt{x}(x+3)}{(x^2-3)}}\,; y = \frac{x^{\frac{1}{2}}(x+3)}{(x^2-3)}\,; y = \frac{\left(x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}\right)}{(x^2-3)}\,; y' = \frac{\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)(x^2-3)-\left(x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}\right)(2x)}{(x^2-3)^2}$

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

17. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$\boldsymbol{a)\ y=\frac{(x-3)\cdot(2x-4)}{x+5}}$

$y'=\frac{(1\cdot(2x-4)+(x-3)\cdot 2)\cdot(x-5)-((x-3)\cdot(2x-4))\cdot 1}{(x+5)^2}$ $\quad y'=\frac{2x^2+20x-62}{(x+5)^2}$

$\boldsymbol{b)\ y=\frac{(2x^2+5)\cdot(7x-3)}{5x-8}}$

$y'=\frac{(4x\cdot(7x-3)+(2x^2+5)\cdot 7)\cdot(5x-8)-((2x^2+5)\cdot(7x-3))\cdot 5}{(5x-8)^2}$, $y'=\frac{140x^3-366x^2+96x-205}{(5x-8)^2}$

$\boldsymbol{c)\ y=\frac{(2x+3x^2)\cdot(4x^5-5)}{6x+7}}$

$y'=\frac{((2+6x)\cdot(4x^5-5)+(2x+3x^2)\cdot 20x^4)\cdot(6x+7)-((2x+3x^2)\cdot(4x^5-5))\cdot 6}{(6x+7)^2}$

$y'=\frac{432x^7+828x^6+366x^5-90x^2-210x-70}{(6x+7)^2}$

$\boldsymbol{d)\ y=\frac{5(x+2)\cdot(4x-6)}{2(x+5)\cdot(6x+3)}}$

$y'=\frac{5}{2}\cdot\frac{(1\cdot(4x-6)+(x+2)\cdot 4)\cdot((x+5)\cdot(6x+3))-((x+2)\cdot(4x-6))\cdot(1\cdot(6x+3)+(x+5)\cdot 6)}{((x+5)\cdot(6x+3))^2}$

$y'=\frac{5(20x^2+44x+71)}{3(x+5)^2\cdot(2x+1)^2}$

18. calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$\boldsymbol{a)\ y=(x^3+5)\cdot(8x^6-7)}$

$y'=(3x^2\cdot(8x^6-7)+(x^3+5)\cdot 48x^5)$ $\quad y'=72x^8+240x^5-21x^2$

$\boldsymbol{b)\ y=(9x^3-3)\cdot(7x^4+6)}$

$y'=(27x^2\cdot(7x^4+6)+(9x^3-3)\cdot 28x^3)$ $\quad y'=441x^6-84x^3+162x^2$

19. calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$\boldsymbol{a)\ y=\frac{x-2}{x+2}}$ $\quad y'=\frac{(1)\cdot(x+2)-(x-2)\cdot 1}{(x+2)^2}$ $\quad y'=\frac{4}{(x+2)^2}$

$\boldsymbol{b)\ y=\sqrt{x-2}\cdot(6x^3-3x)}$

$y'=\left(\frac{1}{2\sqrt{x-2}}\cdot(6x^3-3x)+(\sqrt{x-2})\cdot(18x^2-3)\right)$ $\quad y'=\frac{42x^3-72x^2-9x+12}{2\sqrt{x-2}}$

$\boldsymbol{c)\ y=\frac{(4x^3-7x^2)}{(8x^4-4x^3)}}$

$y'=\frac{(12x^2-14x)\cdot(8x^4-4x^3)-(4x^3-7x^2)\cdot(32x^3-12x^2)}{(8x^4-4x^3)^2}$ $\quad y'=\frac{8x^2-28x+7}{4x^2(2x-1)^2}$

$\boldsymbol{d)\ y=\frac{2\sqrt{x^3}}{3x+4}}$ $\quad y'=\frac{2\left(\frac{3\sqrt{x}}{2}\right)\cdot(3x+4)-(2\sqrt{x^3})\cdot 3}{(3x+4)^2}$ $\quad y'=\frac{3x\sqrt{x}+12\sqrt{x}}{(3x+4)^2}$

20. calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$\boldsymbol{a)\ y=(x^6-5x^2)^9}$ $\quad y'=(9\cdot(x^6-5x^2)^8\cdot(6x^5-10x))$

$\boldsymbol{b)\ y = (2x^4 - 7x^6)^5}$ $\quad y' = (5 \cdot (2x^4 - 7x^6)^4 \cdot (8x^3 - 42x^5))$

$\boldsymbol{c)\ y = \sqrt{(2x^7 - 6x^5)^3}}$ $\quad y' = \left(\frac{3}{2} \cdot (2x^7 - 6x^5)^{\frac{1}{2}} \cdot (14x^6 - 30x^4)\right)$

$\boldsymbol{d)\ y = \sqrt[5]{(3x^4 + 6x^9)^7}}$ $\quad y' = \left(\frac{7 \cdot (3x^4 + 6x^9)^{\frac{2}{5}} \cdot (12x^3 - 54x^8)}{5}\right)$

21. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{y = \sqrt{2x^3 + 3} \cdot (4x^7 + 6x^2)^6} \rightarrow (2x^3 + 3)^{\frac{1}{2}} \cdot (4x^7 + 6x^2)^6 \rightarrow$

$$y' = \frac{1}{2}(2x^3 + 3)^{-1/2} \cdot (6x^2) \cdot (4x^7 + 6x^2)^6 + (2x^3 + 3)^{\frac{1}{2}} \cdot 6(4x^7 + 6x^2)^5 \cdot (28x^6 + 12x)$$

b) $\boldsymbol{y = \frac{\sqrt[3]{5x^3 + 7x^2 - 2}}{3x + 4}} \rightarrow y' = \dfrac{\frac{15x^2 + 14x}{3\sqrt[3]{(5x^3 + 7x^2 - 2)^2}} \cdot (3x + 4) - 3 \cdot \sqrt[3]{5x^3 + 7x^2 - 2}}{(3x + 4)^2}$

c) $\boldsymbol{y = (7x^3 + 3)^5 \cdot (4x^5 - 8x^8)}$

$$y' = 5 \cdot (7x^3 + 3)^4 \cdot 21x^2 \cdot (4x^5 - 8x^8) + (7x^3 + 3)^5 \cdot (20x^4 - 64x^7)$$

d) $\boldsymbol{y = \frac{(5x^3 - 7x^2)^9}{(9x^4 - 3x^3)^2}} \rightarrow y' = \dfrac{9(5x^3 - 7x^2)^8 \cdot (15x^2 - 14x) \cdot (9x^4 - 3x^3)^2 - 2(9x^4 - 3x^3) \cdot (36x^3 - 9x^2) \cdot (5x^3 - 7x^2)^9}{(9x^4 - 3x^3)^4}$

$$y' = \frac{9(5x^3 - 7x^2)^8 \cdot (15x^2 - 14x) \cdot (9x^4 - 3x^3) - 2 \cdot (36x^3 - 9x^2) \cdot (5x^3 - 7x^2)^9}{(9x^4 - 3x^3)^3}$$

22. Utiliza derivación logarítmica para calcular las derivadas de las funciones siguientes:

a) $\boldsymbol{y = (5x)^{x^5 - 3x^3}} \rightarrow Ly = L(5x)^{x^5 - 3x} \rightarrow Ly = (x^5 - 3x^3) \cdot L(5x)$

$\frac{y'}{y} = (5x^4 - 9x^2) \cdot L(5x) + (x^5 - 3x^3) \cdot \frac{5}{5x} \rightarrow y' = y\left[(5x^4 - 9x^2) \cdot L5x + (x^5 - 3x^3) \cdot \frac{5}{5x}\right]$

$y' = \left((5x)^{x^5 - 3x^3}\right) \cdot \left[(5x^4 - 9x^2) \cdot L(5x) + (x^5 - 3x^3) \cdot \frac{1}{x}\right]$

b) $\boldsymbol{y = (3x + 6)^{4x^3 + 2x^2}} \rightarrow Ly = L(3x + 6)^{4x^3 + 2x^2} \rightarrow Ly = (4x^3 + 2x^2) \cdot L(3x + 6)$

$\frac{y'}{y} = (12x^2 + 4x) \cdot L(3x + 6) + (4x^3 + 2x^2) \cdot \frac{3}{3x + 6}$

$y' = y \cdot \left[(12x^2 + 4x) \cdot (3x + 6) + (4x^3 + 2x^2) \cdot \frac{3}{3x + 6}\right]$

$y' = \left[(12x^2 + 4x) \cdot (3x + 6) + (4x^3 + 2x^2) \cdot \frac{3}{3x + 6}\right] \cdot (3x + 6)^{4x^3 + 2x^2}$

c) $\boldsymbol{y = e^{(3x^5 - 6x^3)^5}} \rightarrow Ly = Ln\, e^{(3x^5 - 6x^3)^5} \rightarrow Ly = (3x^5 - 6x^3)^5 \rightarrow$

$\frac{y'}{y} = 5 \cdot (3x^5 - 6x^3)^4 (15x^4 - 18x^2) \rightarrow y' = y \cdot (3x^5 - 6x^3)^4 [75x^4 - 90x^2]$

$y' = \left(e^{(3x^5 - 6x^3)^5}\right) \cdot (3x^5 - 6x^3)^4 (75x^4 - 90x^2)$

d) $y = \sqrt[3]{(5x+1)^{(4x^7+6x^5)^3}} = (5x+1)^{\frac{(4x^7+6x^5)^3}{3}} \to Ly = L(5x+1)^{\frac{(4x^7+6x^5)^3}{3}} \to$

$Ly = \frac{(4x^7+6x^5)^3}{3} \cdot L(5x+1)$

$\frac{y'}{y} = \frac{3(4x^7+6x^5)^2}{3}(28x^3-30x^4) \cdot L(5x+1) + \frac{(4x^7+6x^5)^3}{3} \cdot \frac{5}{5x+1}$

$y' = y \cdot \left[\frac{3(4x^7+6x^5)^2}{3}(28x^3-30x^4) \cdot L(5x+1) + \frac{(4x^7+6x^5)^3}{3} \cdot \frac{5}{5x+1}\right]$

$y' = \left[(4x^7+6x^5)^2(28x^3-30x^4) \cdot L(5x+1) + \frac{(4x^7+6x^5)^3}{3} \cdot \frac{5}{5x+1}\right] \cdot \sqrt[3]{(5x+1)^{(4x^7+6x^5)^3}}$

23. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = e^{x^5+7x^3} \quad \to \quad y' = e^{x^5+7x^3} \cdot (5x^4+21x^2)$

b) $y = \left(e^{3x^3-5x^2}\right)^7 \quad \to y' = e^{(3x^3-5x^2)^7} \cdot (7(3x^3-5x^2)^6) \cdot (9x^2-10x)$

c) $y = \left(e^{4x^5+8x^3}\right)^5 \quad \to y' = e^{(4x^5+8x^3)^5} \cdot (5(4x^5+8x^5)^4) \cdot (20x^4+24x^2)$

d) $y = \sqrt[3]{e^{(5x^5-3x^8)^2}} \quad \to y' = \frac{2(5x^5-3x^8)\cdot(24x^4-24x^7)}{3\sqrt[3]{\left(e^{5x^5-3x^8}\right)^2}}$

24. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = ln((5x^5-3x^3)^{12}(3x+1))$ b) $y = \ln\sqrt{(2x^3+5x^2)^3}$

c) $y = \ln\sqrt{\frac{7x^5-5x}{2x-3}}$ d) $y = \ln\sqrt[3]{(3x^4-5x^5)^2}$

a) $y' = \frac{12(5x^5-3x^3)^{11}(25x^4-9x^2)(3x+1)+3(5x^5-3x^3)^{12}}{(5x^5-3x^3)^{12}(3x+1)} = \frac{12(25x^4-9x^2)(3x+1)+3(5x^5-3x^3)}{(5x^5-3x^3)(3x+1)}$

b) $y = \frac{3}{2}ln(2x^3+5x^2) \Rightarrow y' = \frac{3}{2}\frac{6x^2+10x}{2x^3+5x^2} = \frac{9x+15}{2x^2+5x}$

c) $y = \frac{1}{2}ln\left(\frac{7x^5-5x}{2x-3}\right) \Rightarrow y' = \frac{1}{2}\frac{\frac{(35x^4-5)(2x-3)-(7x^5-5x)2}{(2x-3)^2}}{\frac{7x^5-5x}{2x-3}} = \frac{70x^6-14x^5-105x^4+15}{2(2x-3)(7x^5-5x)}$

d) $y = \frac{2}{3}ln(3x^4-5x^5) \Rightarrow y' = \frac{2}{3}\frac{12x^3-25x^4}{3x^4-5x^5} = \frac{24-50x}{9x-15x^2}$

25. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

a) $f(x) = \ln \frac{5+3e^{3x}}{5-3e^{3x}}$ b) $f(x) = (2x - 3x^2)\ln(5x - 7x^2)$

c) $f(x) = \ln \frac{\sqrt{16-9senx}}{4+3x}$ d) $y = \sqrt{\ln(5x)}$

a) $f(x) = ln\frac{5+3e^{3x}}{5-3e^{3x}} = ln(5+3e^{3x}) - ln(5-3e^{3x})$; $f'(x) = \frac{9e^{3x}}{5+3e^{3x}} + \frac{9e^{3x}}{5-3e^{3x}}$

b) $f'(x) = (2-6x)\ln(5x-7x^2) + \frac{(5-14x)(2x-3x^2)}{5x-7x^2}$

c) $f(x) = ln\frac{\sqrt{16-9senx}}{4+3x} = \frac{1}{2}\ln(16-9senx) - \ln(4+3x)$; $f'(x) = \frac{-9cosx}{2(16-9senx)} - \frac{3}{4+3x}$

d) $y' = \frac{\frac{5}{5x}}{2\sqrt{ln(5x)}} = \frac{1}{2x\sqrt{ln(5x)}}$

26. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{\ln(\arccos 5x)}$ b) $y = \ln(7e^{2x-3})$ c) $f(x) = 5\ln\frac{3senx+5}{5-3senx}$ d) $y = \ln(\ln\sqrt[3]{4x-5})$

a) $y' = \frac{1}{2\sqrt{ln(arccos(5x))}} \cdot \frac{-\frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}}{arccos(5x)} = -\frac{5}{2\sqrt{ln(arccos(5x))}(1-25x^2)arccos(5x)}$

b) $y = ln(7e^{2x-3}) = ln7 + lne^{2x-3} = ln7 + 2x - 3$; $y' = 2$

c) $y = 5ln\frac{3senx+5}{5-3senx} = 5[\ln(3senx+5) - \ln(5-3senx)]$

$y' = 5\left(\frac{3cosx}{3senx+5} - \frac{-3cosx}{5-3senx}\right) = 5\left(\frac{3cosx(5-3senx)+3cosx(3senx+5)}{(3senx+5)(5-3senx)}\right) = 5\frac{30cosx}{25-9sen^2x}$

d) $y' = \frac{1}{ln(\sqrt[3]{4x-5})}\frac{4}{3(4x-5)}$

27. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $\mathbf{y = \log(x^3 - 5x^5)^8}$

$y' = \frac{8\cdot(x^3-5x^5)^7\cdot(3x^2-25x^4)}{(x^3-5x^5)^8} \cdot ln\,10 \rightarrow y' = \frac{8\cdot(3x^2-25x^4)}{x^3-5x^5} \cdot ln10$

b) $\mathbf{y = \log_2(8x^2 - 3x^3)^2}$

$y' = \frac{2(8x^2-3x^3)\cdot(16x-9x^2)}{(8x^2-3x^3)^2} \cdot ln(2) = \frac{2\cdot(16x-9x^2)}{8x^2-3x^3} \cdot ln(2)$

c) $\mathbf{y = ln\sqrt{\frac{(3x^6-7x^2)^4}{2x-1}}} = \frac{1}{2}\ln\frac{(3x^6-7x^2)^4}{2x-1} = \frac{1}{2}(\ln(3x^6-7x^2)^4 - \ln(2x-1)) =$

$= \frac{1}{2}(4\ln(3x^6-7x^2) - \ln(2x-1))$

$y' = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{18x^5-14x}{3x^6-7x^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2x-1} = 2\cdot\frac{18x^4-14}{3x^5-7x} - \frac{1}{2x-1}$

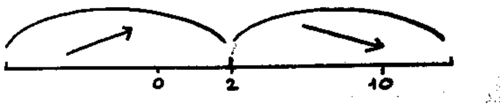
d) $\boldsymbol{y = ln\sqrt[4]{(3x^3+5x^9)^7}}$ $\qquad y = \frac{7}{4}ln(3x^3+5x^9)$

$$y' = \frac{7}{4}\cdot\frac{9x^2+45x^8}{3x^3+5x^9} = \frac{7}{4}\cdot\frac{9+45x^6}{3x+5x^7}$$

28. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x) = $\boldsymbol{\frac{1}{(x-2)^2}}$ **.**

$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$; $f'(x) = -\frac{2}{(x-2)^3}$; f'(x) no se anula, tomamos los ceros del denominador:

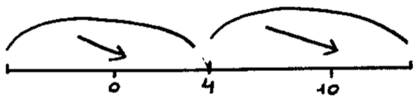
y'(0) > 0 Creciente : (-∞, 2)
y'(10) <0 Decreciente : (2, ∞)



29. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x) = $\boldsymbol{\frac{(x+3)}{(x-4)}}$**.**

$f(x) = \frac{(x+3)}{(x-4)}$; $f'(x) = -\frac{7}{(x-4)^2}$; f'(x) no se anula, tomamos los ceros del denominador
Como $(x-4)^2$ es siempre > 0, f'(x) es siempre < 0,

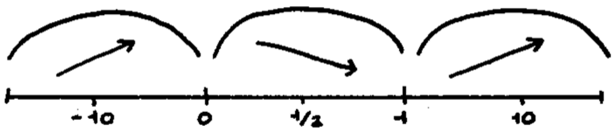
Decreciente : $(-\infty, 4) \cup (4, \infty)$



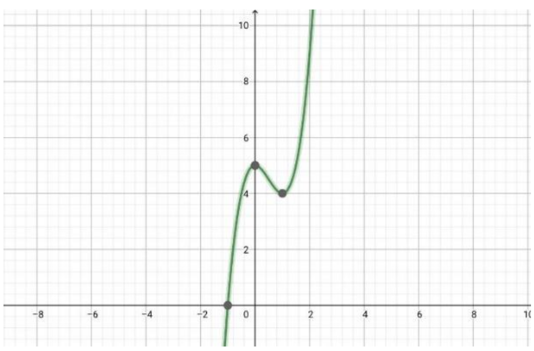
30.Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x) = 2x³– 3x² + 5. Calcula sus máximos y mínimos y haz un esbozo de su gráfica.

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$; $f'(x) = 6x^2 - 6x$; $6x^2 - 6x = 0$; x = 1 , x = 0

Creciente: $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$
Decreciente : (0,1)



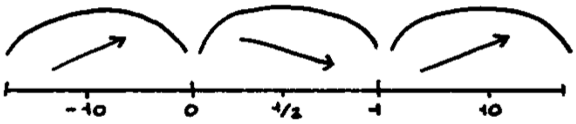
Máximo en x = 0 ; (0,5)
Mínimo en x = 1 ; (1,4)

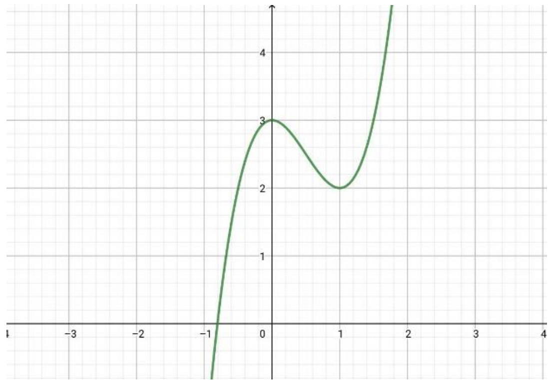


31.Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x) = 2x3– 3x2 + 3. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.

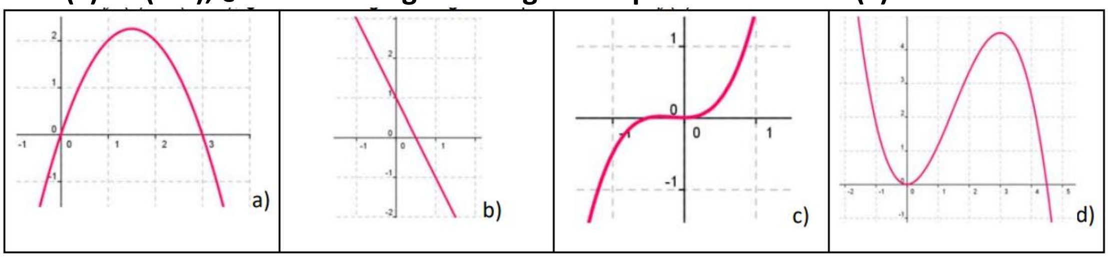
$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3 \qquad f'(x) = 6x^2 - 6x\,;\; 6x^2 - 6x = 0 \qquad x = 1 \quad x = 0$

Creciente : $(-\infty,0)$ U $(1,\infty)$
Decreciente : (0,1)
Máximo en x = 0 ; (0,3)
Mínimo en x = 1 ; (1,2)





32. Si f'(x) = x(3-x), ¿cuál de las siguientes gráficas podría ser la de f(x)?



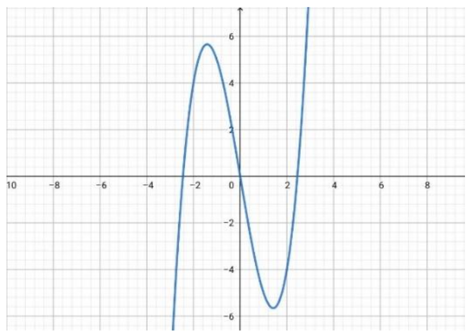
Como f'(x) se anula en x = 0 y en x = 3, ahí debe haber extremos relativos, por tanto, la respuesta es la gráfica d).

33. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 6x$. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.

$f(x) = x^3 - 6x$; $f'(x) = 3x^2 - 6$; $3x^2 - 6 = 0$; $x = \pm\sqrt{2}$

Creciente :$(-\infty, -\sqrt{2})$ ∪ $(\sqrt{2}, \infty)$ Decreciente : $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

Máximo en x = $-\sqrt{2}$; $(-\sqrt{2}, 5{,}66)$ Mínimo en x = $\sqrt{2}$; $(\sqrt{2}, -5{,}66)$

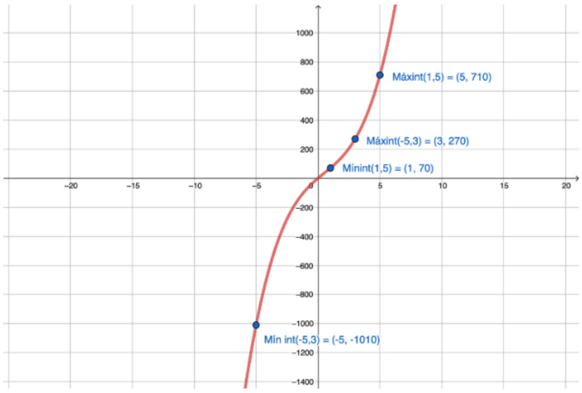


34. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $4x^3 - 6x^2 + 72x$ en el intervalo [-5, 3] y en el intervalo [1, 5]

f'(x) = $12x^2 - 12x + 72 = 12(x^2 - x + 6)$ que es siempre > 0 por tanto,

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

La función es creciente en todo R; No tiene ni máximos ni mínimos relativos.
El mínimo absoluto en [–5, 3] es (–5, f(–5)) = (–5, –1010);
El máximo absoluto en [–5, 3] es (3, f(3)) = (–5, 270)
El mínimo absoluto en [1, 5] es (1, f(1)) = (1, 70);
El mínimo absoluto en [1, 5] es (5, f(5)) = (5, 710).



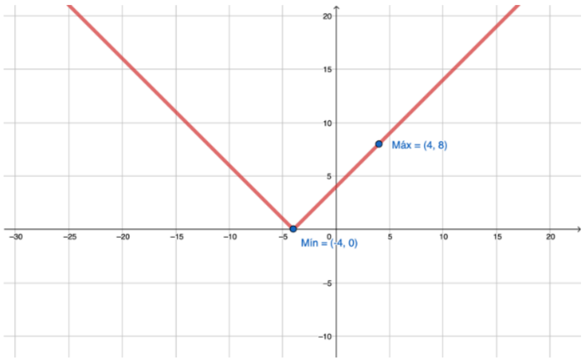
35. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función $f(x) = |x + 4|$ en el intervalo $[-4, 4]$.

- Se define la función a trozos: $f(x) = \begin{cases} x + 4, & x \geq -4 \\ -x - 4, & x < -4 \end{cases}$
- Se calcula la derivada de la función: $f'(x) = \begin{cases} 1, & x > -4 \\ -1, & x < -4 \end{cases}$

La derivada no se anula en ningún punto.

- Se estudian los extremos del intervalo, -4 y 4: $f(-4) = 0; f(4) = 8$
- **En el intervalo $[-4, 4]$:**

Mínimo absoluto: (-4,0) Máximo absoluto: (4,8)



36. El espacio recorrido, en metros, por un vehículo a los t segundos de pasar por un control de radar, viene dado por: y=8t+0,3t^2.¿Qué velocidad llevaba al pasar por el control? ¿Y a los 3 segundos? Si continúa así, ¿en qué momento pasará de los 120km?

- Función espacio: $y = 8t + 0{,}3\,t^2$
- La velocidad de un móvil viene dada por $\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dt}} \rightarrow v = \frac{dy}{dt} = 8 + 0{,}6\,t$
- Al pasar por el control, t=0; $v(0) = 8 + 0{,}6 \cdot 0 = 8\,m/s$
- A los tres segundos, t=3; $v(3) = 8 + 0{,}6 \cdot 3 = 9{,}8\,m/s$
- Cuando $v = 120\frac{km}{h} \rightarrow v = 120\frac{km}{h} \cdot \frac{1000\,m}{1\,km} \cdot \frac{1\,h}{3600\,s} = 33{,}33\,m/s$
- Sustituimos en la ecuación de la velocidad y calculamos el tiempo:

  $33{,}33 = 8 + 0{,}6\,t \rightarrow t = 42{,}22\,s$. A partir de este momento la velocidad pasará de 120 km/h

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

37. La distancia d, en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la Tierra a los t segundos, viene dada aproximadamente por d=$5t^2$.Si se cae un tornillo desde la primera plataforma de la Torre Eiffel, (que está a 57m de altura),¿a qué velocidad llegaría al suelo?¿Y si cayera desde la segunda plataforma(que está a 115m)?¿Y desde la tercera plataforma(que está a 274m)?

- Desde la primera plataforma (57 m):

$57 = 5t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{57}{5}} = 3{,}37\ s \qquad v = 10t \quad v = 10 \cdot 3{,}37 = 33{,}7\ m/s$

- Desde la segunda plataforma (115 m):

$115 = 5t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{115}{5}} = 4{,}79\ s \qquad v = 10t \quad v = 10 \cdot 4{,}79 = 47{,}9\ m/s$

- Desde la tercera plataforma (247 m):

$247 = 5t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{247}{5}} = 7{,}03\ s \qquad v = 10t \quad v = 10 \cdot 7{,}03 = 70{,}3\ m/s$

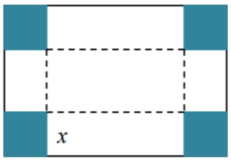
38. Un depósito cilíndrico de 10 metros de diámetro se llena de agua a 0,3 m^3 por minuto. ¿A que velocidad varia la altura de agua a los 2 minutos? ¿Y a los 5 minutos?

Vol: 0,3 m^3/min el volumen de un cilindro es Vol = $\pi r^2 h$ luego $h = \frac{Vol}{\pi r^2}$

$h = \frac{0{,}3 m^3/min}{25\pi m^2} = \frac{0{,}3}{25\pi}$ = m/min = $\frac{0{,}3}{78{,}5}$ = 0,0038 m/min

La velocidad es constante

39. Queremos construir cajas usando cartulinas rectangulares de 20 cm por 25 cm. Para ello se corta en cada esquina un cuadrado de lado x y se dobla. ¿Qué valor debe tener el lado del cuadrado, x, recortado para que las cajas contengan un volumen máximo?



$vol: (20-2x)\cdot(25-2x)\cdot x = 500x - 90x^2 + 4x^3$

$f'(x) = 500 - 180x + 12x^2 = 0;\ \ x = 11{,}38;\ \ x = 3{,}68$; $x = 11{,}38$ no válido.

$f''(x) = 24x - 180 = 0;$

$f''(3{,}68) = -91{,}68;\ es\ un\ máximo$

Para que contenga el vol. Max x = 3,68 cm

40. Unos barriles para almacenar aceite son cilíndricos y tienen una capacidad de 200 litros. Si se desea construirlos de forma que su superficie total sea mínima, ¿Cuánto debe medir su altura y el radio de su base?

V = 200l = 200$dm^3 = \pi^2 h$; h = $\frac{200}{\pi r^2}$

Superficie mínima = 2Sb + Sl = $2\pi r^2 + 2\pi r h$

S =$2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{200}{\pi r^2}$; S = $2\pi r^2 + \frac{400}{r}$

$S' = 4\pi r - \frac{400}{r^2} = 0$; $4\pi r = \frac{400}{r^2};\ \ r^3 = \frac{400}{4\pi}$; $r = \sqrt[3]{\frac{400}{4\pi}}$

r = $\frac{200}{\pi(3{,}17^2)}$, r = 3,17 dm ; $h = \frac{200}{\pi r^2} = \frac{200}{\pi(3{,}17)^2} = 6{,}37 dm$

AUTOEVALUACIÓN

1. La tasa de variación media de la función y = 3x³ + 3x² – x + 5 en el intervalo [0, 3] es:

a) 15 b) 70 c) 35 d) –35

$TVM(0,3) = \frac{f(3)-f(0)}{3-0} = \frac{110-5}{3} = 35$

Respuesta: c)

2. La derivada de la función $\frac{Lx}{x}$ en x = 1

a) no existe b) 0 c) –1 d) 1

$\left(\frac{Lx}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - 1\cdot Lx}{x^2} = \frac{1-Lx}{x^2}$; $\left(\frac{Lx}{x}\right)'(1) = \frac{1-L1}{1^2} = 1$

Respuesta: d)

3. La derivada de la función $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}}$ en x = 1 es

a) e/2 b) no existe c) – e/2 d) e

$f'(x) = \frac{e^x\sqrt{x} - e^x\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}$; $f'(1) = \frac{e^1\sqrt{1} - e^1\frac{1}{2\sqrt{1}}}{1} = \frac{e}{2}$

Respuesta: a)

4. La función $\begin{cases} -bx & x \le 1 \\ 3x^2 + d & x > 1 \end{cases}$ es continua y derivable en toda la recta real si:

a) b = –6, d = 3 b) b = 3, d = –1 c) b = 6, d = –3 d) b = –3, d = 2

$f(1) = -b$

$\lim_{x\to 1^-}(-bx) = -b$ $\lim_{x\to 1^+}(3x^2 + d) = 3 + d$

$f'(x) = \begin{cases} -b & x < 1 \\ 6x & x > 1 \end{cases}$

$\lim_{x\to 1^-}(-b) = -b$ $\lim_{x\to 1^+} 6x = 6$ b = - 6 para que sea derivable

3 + d = 6 para que sea continua $3 + d = 6 \to d = 3$

Respuesta: a) b = - 6, d = 3

5. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función y = x² – 2x³ en x = 0 es:

a) y = 2x b) y = x – 6 c) y = 0 d) y = 2 + 6x

y' = 2x – 6x² ; y(0) = 0 ; y'(0) = 0

Ecuación recta tangente: y = f(a) + f'(a)(x – a) ; y = 0 + 0(x – 0) ; y = 0

Respuesta: c)

6. La función y = – 7x³ + 3x² – x + 5 en x = 0 es:

a) cóncava b) tiene un punto de inflexión de tangente horizontal

c) convexa d) tiene un punto de inflexión de tangente oblicua

y' = –21x² + 6x – 1 ; y'' = -42x + 6 ; y''(0) = 6 > 0

Respuesta: a)

7. La función y = 3x³ + 3x² – x + 5 en x = 0 es:

a) creciente b) decreciente c) alcanza un mínimo d) alcanza un máximo

y’ = 6x^2 + 6x – 1 y’(1) = 6 + 6 – 1 = 11 > 0 Respuesta: a)

8. Si la derivada de una cierta función es: $y' = (x-4)(x+2)$ entonces los intervalos de crecimiento y decrecimiento de dicha función son:

a) x < –2, decreciente; –2 < x < 4, decreciente; x > 4, creciente

b) x < –2, decreciente; –2 < x < 4, creciente; x > 4, decreciente

c) x < –2, creciente; –2 < x < 4, creciente; x > 4, decreciente

d) x < –2, creciente; –2 < x < 4, decreciente; x > 4, creciente

$(x-4)(x+2) = 0 \to x = 4, \qquad x = -2$

intervalos→ $(-\infty,-2)(-2,4)(4,\infty)$

$y'(-3) = (-3-4)(-3+2) = (-7)(-1) = + \to$ creciente

$y'(2) = (2-4)(2+2) = (-2)(4) = - \to$ decreciente

$y'(5) = (5-4)(5+2) = (1)(7) = + \to$ creciente

Respuesta: d) Creciente, decreciente, creciente

9. La función $y = 3x^2 - 2x^3$ tiene un punto de inflexión en:

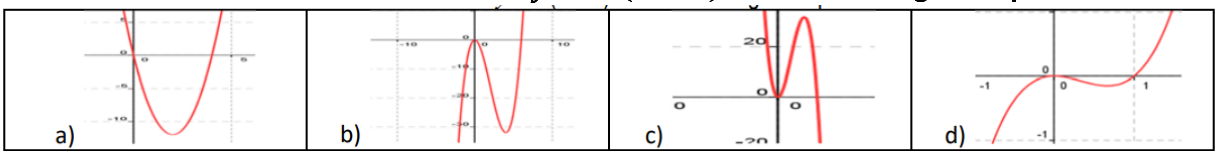
a) x = 1/2 b) x = –1/2 c) x = 1 d) x = 0

$y = 3x^2 - 2x^3 \qquad y' = 6x - 6x^2$

$y'' = 6 - 12x = 0 \to x = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \qquad y''' = -12 \neq 0$

Respuesta: a) x = $\frac{1}{2}$

10. Si la derivada de una cierta función es: $y' = 3(x-4)x$ entonces su gráfica puede ser:



$y' = 3(x-4)x = 0 \quad ; \quad x = 4, \qquad x = 0$

Intervalos $\to (-\infty,0)(0,4)(4,\infty)$

$y(-2) = 3(-2)^2 - 12(-2) = +$ Creciente

$y(2) = 3(2)^2 - 12(2) = -$ Decreciente

$y(5) = 3(5)^2 - 12(5) = +$ Creciente

Respuesta: b)