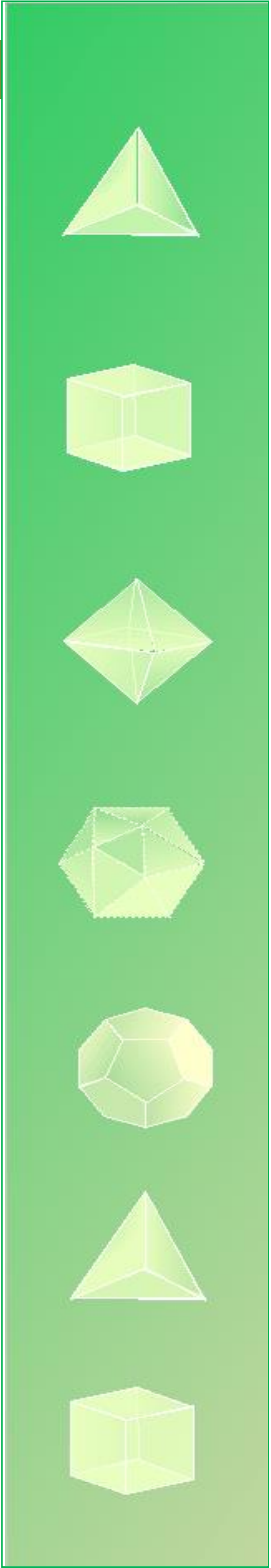

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II
2º Bachillerato
Capítulo 8: Estimación. Intervalos de confianza

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por: ADRIAN, ADRIANA, ALICIA, ÁLVARO, ARÍSTIDES, JAIME, KASSANDRA, LUCÍA, LUIS, PALOMA, PATRICIA, SARA, TERESA.

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1.- Señala en qué caso es más conveniente estudiar la población o una muestra:
a) El diámetro de los tornillos que fabrica una máquina diariamente.
Muestra, pues sería muy costoso medir todos los tornillos de la producción
b) La altura de un grupo de seis amigos.
Población, ya que solo hay 6 elementos

2.- Se puede leer el siguiente titular en el periódico que publica tu instituto: "La nota media de los alumnos de 2º de Bachillerato de la Comunidad de Madrid es de 7'9". ¿Cómo se ha llegado a esta conclusión? ¿Se ha estudiado a toda la población? Si hubieran seleccionado para su cálculo solo a las mujeres, ¿sería representativo su valor?
No podemos saber seguro que método han utilizado, pero probablemente hayan cogido las notas de todos los estudiantes ya que cada Comunidad tiene las calificaciones de toda la población y están abiertas para todo el público. Si solo se cogen a mujeres no sería una muestra representativa

3.- Para estudiar el número de accidentes de una población de mil conductores, de los cuales la mitad tiene carnet de conducir entre 5 y 20 años, la cuarta parte lo tiene más de 20 años y la otra cuarta parte lo tiene menos de 5 años. Se quiere elegir por muestreo aleatorio estratificado proporcional, 50 conductores, ¿cuántos seleccionarías de cada grupo?

Datos
1/2 tienen carnet entre 5 y 20 años $\frac{1}{2} \times 50 = 25\ personas$
1/4 tienen carnet más de 20 años $\frac{1}{4} \times 50 = 12{,}5\ personas$
1/4 tienen carnet menos de 5 años $\frac{1}{4} \times 50 = 12{,}5\ personas$
Se eligen 50 conductores

Solución: Seleccionamos 25 personas con carnet entre 5 y 20 años, 13 personas con carnet por mas de 20 años y 13 personas con carnet por menos de 20 años

4.-Los parámetros de una distribución son μ = 20 y desviación típica σ = 3. Se extrae una muestra de 400 individuos. Calcula P (19.9 < $\bar{x}$< 20.3).

Por el teorema Central del Límite sabemos que la media muestral de una población normal se distribuye según otra distribución normal $\mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathrm{N}\left(20, \frac{3}{\sqrt{400}}\right) = (20, 0{,}15)$
Para calcular la probabilidad pedida, tipificamos y buscamos en la tabla de la normal.

$$P\ (19.9\ <\ \bar{x} <\ 20.3) = \mathrm{P}\left(\frac{19{,}9-20}{0{,}15} <\ \mathrm{z}\ < \frac{20{,}3-20}{0{,}15}\right) = \mathrm{P}(-0{,}66 <\ \mathrm{z} <\ 2) =$$
$$= P(z < 2) - [1 - P(z < 0{,}6)] = 0{,}9772 - (1 - 0{,}7454) = 0{,}7312$$
$$P\ (19.9\ <\ \bar{x} <\ 20.3) = 0{,}7312$$

5. Los pesos de las ovejas de una cierta ganadería tienen una media de 50 kg con una desviación típica de 4. Elegimos al azar una muestra aleatoria simple de 100 ovejas. A) Determina la probabilidad de que su media sea superior a 51 kg. B) Sea inferior a 56 kg. C) Sea superior a 48 kg. D) Esté entre 48 kg y 52 kg.

Por el teorema Central del Límite sabemos que la media muestral de una población normal se distribuye según otra distribución normal $\mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathrm{N}\left(50, \frac{4}{\sqrt{100}}\right) = (50, 0{,}4)$

Para calcular la probabilidad pedida, tipificamos y buscamos en la tabla de la normal

a) $P(\bar{x} > 51) = P\left(z > \frac{51-50}{0{,}4}\right) = P(z > 2{,}5) = 1 - P(z < 2{,}5) = 1 - 0{,}9938 = 0{,}0062$; $\boldsymbol{P(\bar{x} > 51) = 0{,}0062}$

b) $P(\bar{x} < 56) = P\left(z < \frac{56-50}{0{,}4}\right) = 15; si\ z \geq 4\ la\ probailidad\ es\ 1; \boldsymbol{P(\bar{x} < 51) = 1}$

c) $P(\bar{x} > 48) = P\left(z > \frac{48-50}{0{,}4}\right) = P(z > -5) = 1 - (1 - P(z < 5) = 1 - (1 - 1) = 1$; $\boldsymbol{P(\bar{x} > 48) = 1}$

d) $P\,(48 < \bar{x} < 52) = \mathrm{P}\left(\frac{48-50}{0{,}4} < z < \frac{52-50}{0{,}4}\right) = \mathrm{P}(-5 < z < 5) = P(z < 5) - [1 - P(z < 5)] = 1 - (1 - 1) = 1$; $\boldsymbol{P\,(48 < \bar{x} < 52) = 1}$

6. Una población tiene una media $\mu = 400$ y una desviación típica $\sigma = 20$. Extraemos una muestra de 1000 individuos. Halla el intervalo característico, para una probabilidad de 0.95, de la media muestral. Lo mismo para una probabilidad del 0.99.

Respuesta:

Como $n > 30$, las medias muestrales se distribuyen según una normal de media $\mu = 400$ y de desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{20}{\sqrt{1000}} = \frac{20}{10\sqrt{10}} = 0{,}63$; es decir: $\bar{x}$ es $N(400; 0{,}63)$.

Para $\mathbf{1 - \alpha = 0{,}95} \to \frac{\alpha}{2} = \frac{1-0{,}95}{2} = 0{,}025\ ;\ 0{,}95 + 0{,}025 = 0{,}975 \ \to\ \mathrm{Z}_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$

$$\left(\mu - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma;\ \mu + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma\right) = (400 - 1{,}96 \cdot 0{,}63;\ 400 + 1{,}96 \cdot 0{,}63) =$$

$= (400 - 1{,}23\ ;\ 400 + 1{,}23) =$ $(398{,}77;\ 401{,}2)$

$Este\ es\ el\ intervalo\ característico\ de\ N(400; 0{,}63)\ con\ una\ probabilidad\ del\ 0.95$

Para $\mathbf{1 - \alpha = 0{,}99} \to \frac{\alpha}{2} = \frac{1-0{,}99}{2} = 0{,}005\ ;\ 0{,}99 + 0{,}005 = 0{,}995 \ \to\ \mathrm{Z}_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}58$

$\left(\mu - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma, \mu + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma\right) = (400 - 2{,}58 \cdot 0{,}63;\ 400 + 2{,}58 \cdot 0{,}63) =$

$= (400 - 1{,}62; 400 + 1{,}62) =$ $(398{,}4;\ 401{,}6)$

$Este\ es\ el\ intervalo\ característico\ de\ N(400; 0{,}63)\ con\ una\ probabilidad\ del\ 0.99$

7. El peso de una población tiene una media $\mu = 70\ kg$ y una desviación típica $\sigma = 10$. Se elige una muestra aleatoria simple de 100 individuos y se pesan todos juntos. Calcula la probabilidad de que dicho peso sea superior a 7010kg.

Respuesta:

$\sum x_i \to N\left(n \cdot \mu; n \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \to N(7000; 100)$

$P\left(z > \frac{7010-7000}{100}\right) = P\left(z > \frac{10}{100}\right) = 1 - P(z < 0{,}1) = 1 - 0{,}5398 =$ $0{,}4602$

$P(\sum x_i > 7010) = 0{,}4602$

8. En los exámenes de selectividad la proporción de aprobados es del 98%. Un centro escolar presenta a 78 estudiantes al examen.

a) ¿Qué distribución sigue la proporción de aprobados?

Respuesta:

La muestra es aleatoria y n =78 > 30, por tanto:

$$\hat{P} = N\left(p; \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = N\left(0{,}98; \sqrt{\frac{0{,}98(1-0{,}98)}{78}}\right) = N(0{,}98; 0{,}016)$$; para suspensos es $N(0{,}02; 0{,}016)$

b) Calcula la probabilidad de que la muestra elegida haya menos de 3 suspensos.

Respuesta:

$$P\left(\hat{p} < \frac{3}{78}\right) = P(z < 0{,}038) = P\left(z < \frac{0{,}038-0{,}02}{0{,}016}\right) = P(z < 1{,}125)$$

y buscamos 0, *en la tabla* $N(0,1)$ *y nos da un resultado de* 0,8697, *por tanto existe una probabilidad del* 86,97% *de que hayan menos de 3 suspensos en la muestra.*

c) Calcula la probabilidad de que la muestra elegida haya más de 10 suspensos.

Respuesta:

$$P\left(\hat{p} > \frac{10}{78}\right) = P(z > 0{,}128) = P\left(z > \frac{0{,}128-0{,}02}{0{,}016}\right) = P(z > 6{,}75) = 1 - P(z < 6{,}75) = 1 - 1 = 0$$

por tanto, existe una probabilidad del 0% *de que hayan más de 10 suspensos en la prueba.*

d) Calcula la probabilidad de que la muestra elegida no haya ningún suspenso.

Respuesta:

$$P\left(\hat{p} = \frac{0}{78}\right) = P(\hat{p} = 0) = P(-0{,}05 < \hat{p} < 0{,}05) = P\left(\frac{-0{,}05-0{,}02}{0{,}016} < z < \frac{0{,}05-0{,}02}{0{,}016}\right) =$$
$$P(-4{,}375 < z < 1{,}875) = 1 - 0{,}9696 = 0{,}1304$$

por tanto existe una probabilidad del 13,04% *de que no haya ningún suspenso en la muestra.*

9. En una fábrica de bombillas de bajo consumo hay que rechazar por defectos al 2% de la producción. Se toma una muestra aleatoria simple de 100 bombillas.

a) ¿Qué distribución sigue la proporción de bombillas defectuosas?

Respuesta:

$$\hat{P} = N\left(p; \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = N\left(0{,}02; \sqrt{\frac{0{,}02(1-0{,}02)}{100}}\right) = N(0{,}02; 0{,}014)$$

b) Calcula la probabilidad de que en la muestra elegida haya menos de 5 bombillas defectuosas?

Respuesta:

$$\mathrm{P}\left(\hat{\mathrm{p}} < \frac{5}{100}\right) = \mathrm{P}(\mathrm{z} < 0{,}05) = \mathrm{P}\left(\mathrm{z} < \frac{0{,}05-0{,}02}{0{,}014}\right) = \mathrm{P}(\mathrm{z} < 2{,}14)$$

y buscamos 2,14 en la tabla N(0,1)y nos da un resultado de 0,9838, por tanto existe

una probabilidad del 98,38% de que haya menos de 5 bombillas defectuosas en la muestra.

10 Determina la eficiencia de la media muestral si el tamaño de la muestra es 100 y la desviación típica poblacional es 2.

n=100 σ =2 Determinar la eficiencia: $100/2^2$=**25**

11 Determina la eficiencia de la proporción muestral si el tamaño de la muestra es 100 y la proporción poblacional es 50 %.

n = 100 p = 50% = 0,5 Determinar la eficiencia: 100/0,5(1 - 0,5) = **400**

12. Determina un intervalo de confianza con un nivel de confianza del 95 % de una N (5, 0,01). Determina el margen de error.

Nivel de confianza 95% N (5, 0,01) µ=5 σ =0,01

¿I.C.? ¿E?

Zd/2 = 1+95/100 /2 = 0,975 (mirar tabla) = 1,96

E= Zd/2 × σ /$\sqrt{n}$ = 1,96× 0,01= 0,0196

IC 95%= (µ ± E) = (5-0,0196; 5+0,0196) = (4,9804; 5,0196)

13. Determina un intervalo de confianza con un nivel de confianza del 99 % de una N (100, 4). Determina el margen de error.

N(100,4) µ=100 σ =4 IC 99%? ¿E?

$\frac{1+99/100}{2}$ = 0,995 Zd= $\frac{2,57+2,58}{2}$= 2,575

E= Zd/2 × σ /$\sqrt{n}$ = 2,575 × 4 = 10,3

IC= (µ ±E) = (100 – 10,3; 100 + 10,3) = (89,7; 110,3)

14. Determina un intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 95% de una población de desviación típica conocida, $\sigma = 2$, si hemos escogido una muestra aleatoria simple de tamaño 400 y calculado la media muestral que es 50,5.

$$\overline{x} = 50{,}5 \;;\; \sigma = 2 \;;\; n = 400 \;\;;\; 1-\alpha = 0.95 \;\;;\;\; \alpha = 0.05 \;\;;\;\; 1-\frac{\alpha}{2} = 0.975 \;\;;\;\;\; Z_{0.975} = 1{,}96$$

$$\mu \in \left(\overline{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \overline{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(50{,}5 - 1{,}96 \cdot \frac{2}{\sqrt{400}} ; \; 50{,}5 + 1{,}96 \cdot \frac{2}{\sqrt{400}}\right) = (50.304\,,\; 50.696)$$

Tenemos la confianza de que el 98% de los casos la media poblacional pertenecerá al intervalo:

$$(50.304\,,\; 50.696).$$

15. Determina un intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 98% de una población de desviación típica conocida, $\sigma = 2$, si hemos escogido una muestra aleatoria simple de tamaño 400 y calculado la media muestral que es 50,5. Compara con el anterior intervalo de confianza.

$$\overline{x} = 50{,}5 \;;\; \sigma = 2 \;;\; n = 400 \;\;;\; 1-\alpha = 0.98 \;\;;\;\; \alpha = 0.02 \;\;;\;\; 1-\frac{\alpha}{2} = 0.999 \;\;;\;\;\; Z_{0.999} = 3{,}09$$

$$\mu \in \left(\overline{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(50{,}5 - 3{,}09 \cdot \frac{2}{\sqrt{400}};\ 50{,}5 + 3{,}09 \cdot \frac{2}{\sqrt{400}}\right) = (50.191\ ,\ 50.809)$$

Tenemos la confianza de que el 98% de los casos la media poblacional pertenecerá al intervalo:

$$(50.191\ ,\ 50.809).$$

Al aumentar el nivel de confianza aumenta la amplitud del intervalo.

16. Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 16 pacientes y se ha anotado el número de días que han recibido tratamiento para los trastornos del sueño que sufren. Los resultados han sido:

280; 285; 295; 330; 290; 350; 360; 320; 295; 310; 300; 305; 295; 280; 315; 305.

Se sabe que la duración, en días, del tratamiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida y desviación típica 34,5 días. Determina un intervalo de confianza con un nivel del 95% para la media poblacional.

$$\overline{x} = \frac{280+285+295+330+290+350+360+320+295+310+300+305+295+280+315+305}{16} = 307{,}19$$

$$\overline{x} = 307{,}19\ ;\ \sigma = 34{,}5\ ;\ n = 16\ \ ;\ 1-\alpha = 0.95\ \ ;\ \ \alpha = 0.05\ \ ;\ \ 1-\frac{\alpha}{2} = 0.975\ \ ;\ \ Z_{0.976} = 1{,}96$$

$$\mu \in \left(\overline{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(307{,}19 - 1{,}96 \cdot \frac{34{,}5}{\sqrt{16}};\ 307{,}19 + 1{,}96 \cdot \frac{34{,}5}{\sqrt{16}}\right) = (290{,}53,\ 323{,}85)$$

17. ¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor de 0,1 unidades, con un nivel de confianza del 95 %, sabiendo que la desviación típica poblacional es conocida y vale 4?

n = ¿? ; $\sigma = 4$ E = 0,1 $1-\alpha = 0{,}95$; $\alpha = 0{,}05$; $1-\frac{\alpha}{2} = 0{,}975$; $Z_{0{,}95} = 1{,}96$

$$E = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad 0{,}1 = 1{,}96 \cdot \frac{4}{\sqrt{n}} \quad n = \left(\frac{1{,}96 \cdot 4}{0{,}1}\right)^2 = 6.146{,}56$$

Debemos tomar una muestra de tamaño 6147 o mayor

18. Determina el tamaño muestral mínimo necesario para que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media poblacional sea menor o igual a 0.02 con un nivel de confianza del 90 % sabiendo que la población se distribuye según una normal de desviación típica 0.4.

n = ¿? ; $\sigma = 0{,}4$ E = 0,02 $1-\alpha = 0{,}9$; $\alpha = 0{,}1$; $1-\frac{\alpha}{2} = 0{,}95$; $Z_{0{,}95} = 1{,}65$

$$E = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad 0{,}02 = 1{,}65 \cdot \frac{0{,}4}{\sqrt{n}} \quad n = \left(\frac{1{,}65 \cdot 0{,}4}{0{,}02}\right)^2 = 1089$$

Debemos tomar una muestra de tamaño 1089 o mayor

19. En el estudio anterior se toma una muestra de 49 individuos. Queremos que el error máximo admisible sea de 0.02. ¿Cuál será el nivel de confianza?

n = 49 ; $\sigma = 0{,}4$ $\qquad E = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\qquad$ E = 0,02

sustituyendo $\quad 0{,}02 = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{0{,}4}{\sqrt{49}} \qquad Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 0{,}35$ buscamos en la tabla

$$P(z < Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha \quad ; \quad P(z < 0{,}35) = 0{,}6368$$

El nivel de confianza es del 63,68%

20. Determina el intervalo de confianza para la proporción de árboles enfermos en Madrid con un nivel de confianza del 95 %, si se ha elegido una muestra aleatoria simple de 100 árboles de los que hay 20 enfermos.

$1 - \alpha = 95\% \qquad (0.95) \qquad \alpha = 5\% \qquad (0.05) \quad n = 100\, p = 20 \;\; q = 80$

$$1 - \alpha = 95\%(0.95) \rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + 0.95}{2} = 0.975 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

$$I.C.\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}},\ p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right) \rightarrow \left(20 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{20 \cdot 80}{100}}, 20 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{20 \cdot 80}{100}}\right)$$

$\rightarrow I.C.(12.16,\ \ 27.84)$

Por lo tanto, con un nivel de confianza del 95%, podemos decir que la proporción de árboles enfermos en Madrid se encuentra en el intervalo del 12.2% al 27.8% aproximadamente.

21. Se quiere estudiar la proporción de estudiantes que hacen actividades extraescolares. Para ello se ha seleccionado una muestra de 400 estudiantes de los cuales 100 hacen actividades extraescolares. Determina el intervalo de confianza para la proporción con un nivel de confianza del 95 %

$1 - \alpha = 95\%(0.95) \qquad \alpha = 5\%(0.05) \qquad n = 400 \quad p = 100 \quad q = 300$

$$1 - \alpha = 95\%(0.95) \rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + 0.95}{2} = 0.975 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

$$I.C.\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right) \rightarrow \left(100 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{100 \cdot 300}{400}}, 100 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{100 \cdot 300}{400}}\right)$$

$\rightarrow I.C.(83.02, \quad 116.97)$

Por lo tanto, con un nivel de confianza del 95%, podemos decir que la proporción de estudiantes que hacen actividades extraescolares se encuentra en el intervalo del 21.1% al 28.9% aproximadamente.

22. ¿Cuántas veces se debe lanzar una moneda para que la proporción de caras no se aparte de la teórica, 1/2, más de una centésima, con un grado de certeza no inferior al 95 %? ¿Cuántas, con el mismo margen de error y una certeza no inferior al 99 %? ¿Lo mismo con 99,9 % de certeza? (Soluciones: n ≥ 9 504, n ≥ 16 412, n ≥ 26 632)

$e(Error) = 0.01 \qquad p = \frac{1}{2}$

a) $1-\alpha = 95\%(0.95) \;\; 1-\alpha = 95\%(0.95) \rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{1+0.95}{2} = 0.975 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

$\frac{e\cdot n+0.5}{\sqrt{n\cdot p(1-p)}} \geq 1{,}96 \rightarrow \frac{0.01n+0.5}{\sqrt{n\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)}} \geq 1{,}96 \rightarrow 0.01n+0.5 \geq 1{,}96\cdot\sqrt{n\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)}$

$\rightarrow 0.01n+0.5 \geq 1.96\cdot\sqrt{\frac{n}{4}} \rightarrow 0.01n+0{,}5 \geq \frac{49}{25}\cdot\frac{\sqrt{n}}{2} \quad \rightarrow 0{,}01n+0{,}5 \geq \frac{49\cdot\sqrt{n}}{50} \rightarrow$

$100\cdot\left(0{,}01n+0{,}05 \geq \frac{49\cdot\sqrt{n}}{50}\right) \rightarrow \quad n+50 \geq 98\sqrt{n} \rightarrow \quad 98\sqrt{n} = n+50$

$\rightarrow 9604n = n^2 - 100n - 2500 = 0 \rightarrow n^2 - 9504n + 2500 = 0 \frac{\rightarrow}{2a} \rightarrow n = \frac{9504\pm\sqrt{9504^2-10000}}{2}$

$n = \frac{9504\pm\sqrt{4^2\cdot(2376^2-625)}}{2} \rightarrow n = \frac{9504\pm4\sqrt{2376^2-625}}{2} \rightarrow$

$n = 4752 + 2\sqrt{2376^2-625}; \;\; n = 4752 - 2\sqrt{2376^2-625}$

$n1 \geq 0{,}26; n2 \geq 9504$

b) $1-\alpha = 99\%(0.99) \;\; 1-\alpha = 99\%(0.99) \rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{1+0.99}{2} = 0.995 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.57$

$\frac{e\cdot n+0.5}{\sqrt{n\cdot p(1-p)}} \geq 2.57 \rightarrow \frac{0.01n+0.5}{\sqrt{n\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)}} \geq 2.57 \rightarrow 0.01n+0.5 \geq 2.57\cdot\sqrt{n\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)} \rightarrow$

$0.01n+0.5 \geq 2.57\cdot\sqrt{\frac{n}{4}} \rightarrow 0.01n+0{,}5 \geq \frac{257}{100}\cdot\frac{\sqrt{n}}{2} \rightarrow 0{,}01n+0{,}5 \geq \frac{257\cdot\sqrt{n}}{200} \rightarrow$

$200\cdot\left(0{,}01n+0.5 \geq \frac{129\cdot\sqrt{n}}{100}\right) \rightarrow 2n+100 \geq 257\sqrt{n} \rightarrow 257\sqrt{n} = 2n+100 \rightarrow$

$66049n = 4n^2 + 400n + 10000 \rightarrow 66049n - 4n^2 - 400n - 10000 = 0 \;\; \rightarrow$

$65649n - 4n^2 - 10000 = 0 \rightarrow 4n^2 - 65649n + 10000 = 0 \rightarrow$

$n = -(-65649) \pm \frac{\sqrt{(-65649)^2-4\cdot4\cdot10000}}{2\cdot4} \rightarrow n = 65649 \pm \frac{\sqrt{65649^2-160000}}{8} \rightarrow$

$n1 \geq 0{,}15; n2 \geq 16412$

c) $1-\alpha = 99\%(0.99)$ $1-\alpha = 99.9\%(0.999) \to \frac{\alpha}{2} = \frac{1+0.999}{2} = 0.9995 \to z_{\frac{\alpha}{2}} = 3.27$

$\frac{e \cdot n+0.5}{\sqrt{n \cdot p(1-p)}} \geq 3.27 \to \frac{0.01n+0.5}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)}} \geq 3.27 \to 0.01n + 0.5 \geq 3.27 \cdot \sqrt{n \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1-\frac{1}{2}\right)} \to$

$0.01n + 0.5 \geq 3.27 \cdot \sqrt{\frac{n}{4}} \to 0.01n + 0{,}5 \geq \frac{327}{100} \cdot \frac{\sqrt{n}}{2} \to$

$$0{,}01n \geq \frac{327 \cdot \sqrt{n}}{200} \to 200 \cdot (0{,}01n \geq \frac{327 \cdot \sqrt{n}}{200}) \to 2n + 100 \geq 327\sqrt{n} \to 327\sqrt{n} \geq 2n + 100$$

$$\to 327^2 n = 4n^2 + 400n + 10000 \to 327^2 n - 4n^2 + 400n + 10000 = 0$$
$$\to (327^2 - 400) \cdot n - 4^2 - 10000 = 0$$

$$\to (327^2 - 400)n - 4n^2 - 10000 = 0 \to -4n^2 + (327^2 - 400)n + 10000 = 0$$

$$\to n = \frac{-(-(327^2-400)) \pm \sqrt{(327^2-400)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 10000}}{2 \cdot 4} \to n = \frac{327^2 - 400 \pm \sqrt{(327^2-400)^2 - 160000}}{8}$$

$$\to n = \frac{327^2 - 400 + \sqrt{(3272^4 - 800 \cdot 327^2 + 400^2 - 160000)}}{8}; n = \frac{327^2 - 400 - \sqrt{(3272^4 - 800 \cdot 327^2 + 400^2 - 160000)}}{8}$$

$n1 \geq 0.09; n2 \geq 26632$

23. Rehaz los cálculos de la actividad anterior para un nivel de confianza del 99 %

$1-\alpha = 99\%(0.99)$ $\alpha = 1\%(0.01)$

$$p = \frac{700}{2000} \to p = 35(0.35); 0.35 \cdot 8000000 = 2800000 votos$$

$$q = \frac{1300}{2000} \to q = 65(0.65)$$

$$\mu = n \cdot p \to 2000 \cdot p; \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} \to \sqrt{2000 \cdot p \cdot q}$$

$$P(\mu - k \cdot \sigma - 0.5 \leq X \leq \mu + k \cdot \sigma + 0.5) \geq 0.99 \to P(\frac{-k \cdot \sigma - 0.5}{\sigma} \leq Z \leq \frac{+k \cdot \sigma + 0.5}{\sigma}) \geq 0.99$$

$$\to k \cdot \sigma + 0.5 \geq 2.58\sigma \to 0.2183 \leq p \leq 0.5503$$

24. Se investigan los hábitos de consumo de una población de dos millones de personas. Se pasa una encuesta a mil personas y se les pregunta si en su domicilio se cocina con gas, de los que 600 responden afirmativamente. Qué puedes afirmar sobre el número de personas en las que en su domicilio se usa gas con un nivel de confianza del 95 %

$$1-\alpha = 95\%\ (0.95) \quad \alpha = 5\%\ (0.05) \quad 1-\alpha = 95\%(0.95) \to \frac{\alpha}{2} = \frac{1+0.95}{2} = 0.975 \to z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

$$n = 1000 \qquad p = \frac{600}{1000} = 0,6 \qquad q = \frac{400}{1000} = 0,4$$

$$I.C. = \left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}},\ p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right) \to$$

$$\left(0,6 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0,6 \cdot 0,4}{1000}}, 0,6 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0,6 \cdot 0,4}{1000}}\right) \to I.C. = (0,569,\ 0,630)$$

Podemos afirmar, con un nivel de confianza del 95%, que entre el 56,9% y el 63% de los domicilios se cocina con gas.

25. Repite los cálculos de una actividad anterior para comprobar si una moneda no está trucada, con un nivel de significación del 5%. Para ello lanzamos la moneda al aire 100 veces y obtenemos 65 caras. ¿Se puede asegurar que sea una moneda de probabilidad ½?

$$\mathrm{H_0}: \mu = \frac{1}{2} \qquad \mu = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$$

$$H_1: \mu > o < 1/2 \qquad \sigma^2 = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 25 \to \sigma = \sqrt{25} = 5$$

$$Como\ hemos\ obtenido\ 65\ caras\ que\ supera\ en\ 15\ al\ valor\ medio (50) \to$$

$$P(x - 50 > 15) + P(x + 50 < -15)$$

$$P(x > 65) + P(x < -65) = P(x \geq 65,5) + P(x \leq -64,5) =$$

$$= P\left(z \geq \frac{65,5-50}{5}\right) + P\left(z \leq \frac{-64,5+50}{5}\right) = P(z \geq 3,1) + P(z \leq -3,1) = 2 \cdot P(z \geq 3,1) - 1 =$$

$$= 2 \cdot 0,99903 - 1 = 0,99806$$

$$1 - \alpha = 0,998;\ \alpha = 1 - 0,998 = 0,002 \to 0,2\%$$

<u>Resultado.</u> Como el nivel de significación de la hipótesis no supera el 5%, se rechaza esta hipótesis.

26. Se ha calculado que entre los deportistas que juegan al fútbol hay un porcentaje de accidentes del 22%. Se han estudiado el número de accidentes entre 400 personas que practican la natación y han resultado accidentadas 36 personas. ¿Es la natación igual de peligrosa que el fútbol?

$$H_0: \mu = 22 \qquad p = \frac{36}{400} = 0,09 \to 9\% \qquad q = 1 - p = 1 - 0,09 = 0,91$$

$$H_1: \mu \neq 22 \qquad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{400 \cdot 0,09 \cdot 0,91} = 5,72$$

$P\left(z \geq \frac{22-9}{5{,}72}\right) + P\left(z \leq \frac{-22+9}{5{,}72}\right) = P(z \geq 2{,}27) + P(z \leq -2{,}27) =$

$= 2 \cdot P(z \geq 2{,}27) - 1 = 2 \cdot (1 - 0{,}9884) = 0{,}0464$

La probabilidad es muy pequeña por lo que rechazamos la hipótesis de que la natación es igual de peligrosa que el futbol.

27. La tasa de natalidad de una región ha sido del 8,7 por mil habitantes durante un cierto año. Suponemos que la tasa de natalidad es la misma al año siguiente, ¿hasta qué número de nacimientos entre 3000 habitantes estarías dispuesto a confirmar dicha hipótesis?

$H_0: \mu = 3000 \qquad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{3000 \cdot 0{,}0087 \cdot 0{,}13} = 1{,}84$

$H_1: \mu < o > 3000 \qquad q = 1 - p = 1 - 0{,}87 = 0{,}13$

$P\left(z \geq \frac{3-8{,}7}{1{,}84}\right) + P\left(z \leq \frac{-3+8{,}7}{1{,}84}\right) = P(z \geq -3{,}09) + P(z \leq 3{,}09) =$

$= 2 \cdot \mathrm{P}(\mathrm{z} \geq 3{,}09) - 1 = 2 \cdot 0{,}999 - 1 = 0{,}998$

$$1 - \alpha = 0{,}998; \; \alpha = 1 - 0{,}998 = 0{,}002 \rightarrow 0{,}2\%$$

$$3000 \cdot 0{,}002 = 6$$

Resultado. Estaríamos dispuestos a confirmar dicha hipótesis entre los 2994 y los 3006 nacimientos.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Utiliza las tablas de la normal estándar y comprueba las probabilidades siguientes:

a) $P(z < 1) = 0.8413$; b) $P(z \le 0.7) = 0.7580$; c) $P(z > 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$; d) $P(z \ge 1.86) = 0.0314$;

e) $P(-1.83 < z < -1) = 0.1251$; f) $P(z > 1.38) = 0.0838$; g) $P(-1.83 \le z < 0.75) = 0.7398$.

a) ***P*(*z*<1)** = 0.8413

a	0,00	0,01
0,0	0,5000	0,5040
0,1	0,5398	0,5438
0,2	0,5793	0,5832
0,3	0,6179	0,6217
0,4	0,6554	0,6591
0,5	0,6915	0,6950
0,6	0,7257	0,7291
0,7	0,7580	0,7611
0,8	0,7881	0,7910
0,9	0,8159	0,8186
1,0	0,8413	0,8438
1,1	0,8643	0,8665

b) ***P*(*z*≤0.7)** = 0.7580

a	0,00	0,01
0,0	0,5000	0,5040
0,1	0,5398	0,5438
0,2	0,5793	0,5832
0,3	0,6179	0,6217
0,4	0,6554	0,6591
0,5	0,6915	0,6950
0,6	0,7257	0,7291
0,7	0,7580	0,7611
0,8	0,7881	0,7910

c) ***P*(*z*>1)** = 1 – P(z<1) = 1 - 0.8413 = 0.1587

a	0,00	0,01
0,0	0,5000	0,5040
0,1	0,5398	0,5438
0,2	0,5793	0,5832
0,3	0,6179	0,6217
0,4	0,6554	0,6591
0,5	0,6915	0,6950
0,6	0,7257	0,7291
0,7	0,7580	0,7611
0,8	0,7881	0,7910
0,9	0,8159	0,8186
1,0	0,8413	0,8438

d) ***P*(*z*≥*1.86*)** =1 – P(z<1) = 1-0.9686 = 0.0314

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803

e) ***P*(-1.83<*z*<-1)=** *P*(*z*<-1) - *P*(*z*<-1.83) = *P*(*z*>1) - *P*(*z*>1.83) = (1-*P*(*z*<1)) – (1- *P*(*z*<1.83)) =
= (1-0.8413) – (1- 0,9664) = 0,1587-0,0336 = 0.1251

a	0,00	0,01	0,02	0,03
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732

f) ***P*(*z*>1.38)** = 1- *P*(*z*<1.38) = 1-0.9162 = 0.0838

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306

g) ***P*(-1.83< *z*<-1)** $=P(z<-1) - P(z\leq-1.83) = P(z<-1) - P(z\geq1.83) = 1-P(z<1) - (1- P(z\leq1.83)) =$
$=1-0.8413 - (1-0.9664) = 0.1587 - 0.0336 = 0.1251$

a	0,00	0,01	0,02	0,03
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732

2. Utiliza las tablas de la normal estándar para calcular las probabilidades siguientes:

a) $P(z < 0.72)$; b) $P(z \leq 1.21)$; c) $P(z > 0.93)$; d) $P(z \geq -1.86)$;

e) $P(-1{,}02 < z < -0.85)$; f) $P(0.65 < z < 1.42)$; g) $P(1.76 > z > 0.72)$; h) $P(-0.9 > z > -0.51)$.

a) ***P*(*z*<0.72)** = 0.7642

a	0,00	0,01	0,02
0,0	0,5000	0,5040	0,5080
0,1	0,5398	0,5438	0,5478
0,2	0,5793	0,5832	0,5871
0,3	0,6179	0,6217	0,6255
0,4	0,6554	0,6591	0,6628
0,5	0,6915	0,6950	0,6985
0,6	0,7257	0,7291	0,7324
0,7	0,7580	0,7611	0,7642

b) ***P*(*z*≤1.21)** = 0.8869

a	0,00	0,01	0,02
0,0	0,5000	0,5040	0,5080
0,1	0,5398	0,5438	0,5478
0,2	0,5793	0,5832	0,5871
0,3	0,6179	0,6217	0,6255
0,4	0,6554	0,6591	0,6628
0,5	0,6915	0,6950	0,6985
0,6	0,7257	0,7291	0,7324
0,7	0,7580	0,7611	0,7642
0,8	0,7881	0,7910	0,7939
0,9	0,8159	0,8186	0,8212
1,0	0,8413	0,8438	0,8461
1,1	0,8643	[illegible]	0,8686
1,2	0,8849	$\boxed{0,8869}$	0,8888
1,3	0,9032	[illegible]	0,9066
1,4	0,9192	0,9207	0,9222

c) ***P*(*z*>0.93)** = 1 – *P*(*z*<0.93) = 1 – 0.8238 = 0.1762

a	0,00	0,01	0,02	0,03
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	[illegible]
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	$\boxed{0,8238}$

d) ***P*(*z*≥-1.86)** = 1 - *P*(z≤1.86) = 1 – 0.9686 = 0.0314

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	[illegible]
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	$\boxed{0,9686}$
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750

e) ***P*(-1.02<*z*< -0.85)** = P(z< -0,85) – P(z<-1,02) = 1 – P(z< 0,85) – (1 – *P*(*z*<1.02)) =
1 – 0.8023 – (1 – 0,8461) = 0,1977 – 0,1539 = 0,0436

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265

f) ***P*(0.64<*z*< 1.42)** $= P(z<1.42) - P(z<0.64) = 0.9222 - 0.7389 = 0.1833$

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251

g) ***P*(1.76>*z*>0.72)** $= P(0.72<z<1.76)$ $P(z<1.76) - P(z<0,72) = 0.9608 - 0.7642 = 0,1966$

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608

h) ***P*(-0.9 >*z*>-0.51)** $= P(-0,51< z < -0,9) = P(z<-0.51) - P(z<-0,9) = 1 - P(z<0,51) - [1 - P(z<0,9)]$ =

$= 1 - 0.695 - [1 - 0.8159] = 0,305 - 0,1841 = 0,1509$

a	0,00	0,01
0,0	0,5000	0,5040
0,1	0,5398	0,5438
0,2	0,5793	0,5832
0,3	0,6179	0,6217
0,4	0,6554	0,6591
0,5	0,6915	0,6950
0,6	0,7257	0,7291
0,7	0,7580	0,7611
0,8	0,7881	0,7910
0,9	0,8159	0,8186

3. Una variable aleatoria X sigue una distribución normal de media 5 y desviación típica 0.5. Calcula las siguientes probabilidades:

a) $P(X < 6)$; b) $P(X \le 4)$; c) $P(X > 3)$; d) $P(X \ge 5.5)$;

e) $P(-3 < X < -1)$; f) $P(X > 2)$; g) $P(3 \le X < 7)$; h) $P(6 > X > 2)$.

Datos: $\mu = 5$ $\sigma = 0,5$ $Fórmula\ empleada: Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

a) P (X < 6) = $P(z < \frac{6-5}{0,5}) = P(z < 2) = 0,9772$

b) P (X ≤ 4) = $P(z \le \frac{4-5}{0,5}) = P(z \le -2) = P(z \ge 2) = 1 - P(z \le 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$

c) P (X > 3) = $P\left(z > \frac{3-5}{0,5}\right) = P(z > -4) = P(z < 4) = 1$

d) P (X ≥ 5.5) =$P(z \ge \frac{5,5-5}{0,5}) = P(x \ge 1) = 1 - P(z \le 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587$

e) P (–3 < X < –1) = $P(x < -1) - P(x < -3) = P(x < 3) - P(x < 1) = P\left(z < \frac{3-5}{0,5}\right) - P\left(z < \frac{1-5}{0,5}\right)$

$= P(z < -4) - P(z < -8) = 0 - 0 = 0$

f) P (X > 2) = 1 – P(z<$\frac{2-5}{0,5}$) = P(z<-6) = 1 – 0 = 1

g) P (3 ≤ X < 7) = $P\left(\frac{3-5}{0,5} \le z \le \frac{7-5}{0,5}\right) = P(-4 \le z \le 4) = 1 - 0 = 1$

h) P (6 > X > 2) = $P(2 < x < 6) = P\left(\frac{2-5}{0,5} \le z \le \frac{6-5}{0,5}\right) = P(-6 \le z \le 2) =$

$= P(z \le 2) - P(z \le -6) = 0,9772 - 0 = 0,9772$

4. En un centro escolar hay 900 estudiantes, que son 600 de ESO y 300 de Bachillerato. Se quiere tomar una muestra aleatoria por muestreo estratificado proporcional de tamaño 50. ¿Cuántos estudiantes se deben escoger de forma aleatoria de ESO y cuántos de bachillerato?

	Alumnos	Muestreo
ESO	600	**33**
Bachillerato	300	**17**
Total	900	50

Se realiza una regla de 3 para averiguar el muestreo:

ESO **Bachillerato**

900---------50 x= $\frac{600 \cdot 50}{900}$ = 33,3 900---------50 x= $\frac{300 \cdot 50}{900}$ = 16,6

600---------x 300---------x

Los resultados se redondean, de tal forma que sean números enteros, (33,3 = 33) y (16,6 = 17)

Se deben escoger 33 alumnos de la ESO y 17 alumnos de Bachillerato.

5. El número de megabytes (Mb) descargados mensualmente por un grupo de clientes de una compañía de telefonía móvil se aproxima por una distribución normal con media 4 Mb y desviación típica igual a 1.5 Mb. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 64.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral sea inferior a 3,5 Mb?
b) ¿Sea superior a 4,5 Mb?
c) Se supone ahora que la media poblacional es desconocida y que la media muestral toma el valor 3,7 Mb. Obtén un intervalo de confianza al 95 % para la media de la población. Obtén también un intervalo de confianza al 99 % para la media de la población. ¿Es mayor o menor que el anterior? Explica este resultado.

Media poblacional: μ = 4Mb Desviación típica: σ = 1,5Mb Tamaño de la muestra: n= 64

a) P(x< 3,5)

$\boldsymbol{\bar{X}}$ **~ N** (μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$) ; $\boldsymbol{\bar{X}}$ **~ N** (4, $\frac{1{,}5}{\sqrt{64}}$) = N (4, 0'18)

p (X < 3'5) = Tipificamos = p(Z < $\frac{3'5-4}{0'18}$) = p(Z < -2'7)

; 1 – p(Z ≤ 2'7) = 1- 0'9965 = **0,0035**

b) P(x> 4'5)

$\boldsymbol{\bar{X}}$ **~ N** (μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$) ; $\boldsymbol{\bar{X}}$ **~ N** (4, $\frac{1{,}5}{\sqrt{64}}$) = N (4,0'18)

p(X > 4'5) = Tipificamos = p(Z> $\frac{4'5-4}{0'18}$) = p(Z > 2'7)

; 1 – 0'9965 = **0'0035**

c) Media muestral: $\bar{x}$ = 3'7Mb

Nivel de confianza: 1 – α = 0,95; α = 0,05

; $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0{,}05}{2}} = Z_{1-0'025} = Z_{0'975}$ = 1'96

El intervalo de confianza es el siguiente:

I.C = $\left(\boldsymbol{\bar{X}} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;,\; \boldsymbol{\bar{X}} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ = (3'7 – 1'96 · $\frac{1'5}{\sqrt{64}}$, 3'7 + 1'96 · $\frac{1'5}{\sqrt{64}}$)

I.C = **(3'3325, 4'0675)**

Ahora con nivel de confianza mayor (99%)

Nivel de confianza: 1 – α = 0,99; α = 0,01

; $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0{,}01}{2}} = Z_{1-0'005} = Z_{0'995}$ = 2'58

I.C = $\left(\boldsymbol{\bar{X}} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;,\; \boldsymbol{\bar{X}} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ = (3'7 – 2'58 · $\frac{1'5}{\sqrt{64}}$, 3'7 + 2'58 · $\frac{1'5}{\sqrt{64}}$)

I.C = **(3'21, 4'18)**

Este intervalo de confianza es mayor al anterior debido a que el nivel de confianza es superior.

6. La duración en horas de un cierto tipo de bombillas de bajo consumo se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica igual a 3600 horas. Se toma una muestra aleatoria simple.

a) ¿Qué tamaño muestral se necesitaría como mínimo para que, con un nivel de confianza del 95 %, el valor absoluto de la diferencia entre μ y la duración media observada X de esas bombillas sea inferior a 100 horas?

b) Si el tamaño de la muestra es 121 y la duración media observada X es de 4000 horas, obtén un intervalo de confianza al 95 % para la media poblacional μ.

a) **Variable aleatoria**: $\bar{X}$ ~ N(μ,3600)

Nivel de confianza: 1 – α = 0,95; α = 0,05

; $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0,05}{2}} = Z_{1-0'025} = Z_{0'975}$ = 1’96

Desviación típica: σ = 3600

E = $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}$ < 100 ; n > $\left(\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{E}\right)^2 = \left(\frac{1'96 \cdot \mathbf{3600}}{100}\right)^2$ = **4978’7 …… 4979**

b) **Tamaño de la muestra**: n = 121

Duración media observada: $\bar{x}$ = 4000

Desviación típica: σ = 3600

Nivel de confianza: 1 – α = 0,95; α = 0,05

; $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0,05}{2}} = Z_{1-0'025} = Z_{0'975}$ = 1’96

Se pide el intervalo de confianza:

I.C = **(** $\boldsymbol{\bar{X}} - \boldsymbol{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}$ **,** $\boldsymbol{\bar{X}} + \boldsymbol{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}$ **)** = (4000 – 1’96 · $\frac{3600}{\sqrt{121}}$, 4000 + 1’96 · $\frac{3600}{\sqrt{121}}$)

I.C = **(3358, 4641)**

7. La longitud, en milímetros (mm), de los individuos de una determinada plantación de mejillones se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica igual a 3 mm.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 64 mejillones y se obtiene una media muestral igual a 70 mm. Determina un intervalo de confianza para la media poblacional de la longitud de los mejillones con un nivel de confianza del 99 %. Determina también un intervalo de confianza para la media poblacional de la longitud de los mejillones con un nivel de confianza del 95 %.

b) Determina el tamaño muestral mínimo necesario para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor o igual que 5 mm con un nivel de confianza del 95 %.

a) **Tamaño de la muestra**: n = 64

Duración media observada: $\bar{x}$ = 70

Desviación típica: σ = 3

Nivel de confianza: 1 – α = 0,99; α = 0,01

; ; $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0,01}{2}} = Z_{1-0'005} = Z_{0'995}$ = 2’58

Se pide el intervalo de confianza:

I.C = ($\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $\bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$) = (70 – 2’58 · $\frac{3}{\sqrt{64}}$, 70 + 2’58 · $\frac{3}{\sqrt{64}}$)

I.C = **(69'03, 70'96)**

Ahora con nivel de confianza menor (95%)

; $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0,05}{2}} = Z_{1-0'025} = Z_{0'975}$ = 1'96

I.C = ($\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $\bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$) = (70 – 1'96 $\cdot \frac{3}{\sqrt{64}}$, 70 + 1'96 $\cdot \frac{3}{\sqrt{64}}$)

I.C = **(69'2, 70'7)**

b) Tamaño muestral mínimo:

E = $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}} \leq 5$; n ≥ $\left(\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{E}\right)^2 = \left(\frac{1'96 \cdot \mathbf{3}}{5}\right)^2$ = **1'38**

8. El consumo mensual de leche (en litros) de los alumnos de un determinado colegio se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica σ = 3 litros.

a) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene el intervalo de confianza (16; 20) para estimar μ, con un nivel de confianza del 95 %. Calcula la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.

b) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 81. Calcula el error máximo cometido en la estimación de μ mediante la media muestral con un nivel de confianza del 95 %.

Variable aleatoria: $\bar{X}$ ~ N(μ,3)

a) I.C = **(16, 20)**

Nivel de confianza: 1 – α = 0,95; α = 0,05

; $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0,05}{2}} = Z_{1-0'025} = Z_{0'975}$ = 1'96

I.C = ($\bar{X}$ – 1'96 $\cdot \frac{3}{\sqrt{n}}$, $\bar{X}$ + 1'96 $\cdot \frac{3}{\sqrt{n}}$) = (16, 20)

Debemos resolver un sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x} - 1'96 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} = 16 \\ \bar{x} + 1'96 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} = 20 \end{array}\right\} \quad (-)| \quad \begin{array}{l} -\bar{x} + 1'96 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} = -16 \\ \bar{x} + 1'96 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} = 20 \end{array}$$

$$3'92 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} = 4$$

$3'92 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} = 4$; $\frac{3}{\sqrt{n}} = \frac{4}{3'92}$; $\frac{3}{1'02} = \sqrt{n}$; $\left(\frac{3}{1'02}\right)^2$ = n ; n = **8,65**

$\bar{x} + 1'96 \cdot \frac{3}{\sqrt{8,65}} = 20$; $\bar{x}$ +2 = 20 ; $\bar{x}$ = **18**

La media muestral es de **18l** y el tamaño de la muestra elegida es de **8,65**

b) Tamaño de la muestra: n = 81

Nivel de confianza: 1 – α = 0,95; α = 0,05

; $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0,05}{2}} = Z_{1-0'025} = Z_{0'975}$ = 1'96

E **=** $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}$ = 1'96 $\cdot \frac{\mathbf{3}}{\sqrt{\mathbf{81}}}$ = **0'653**

El error máximo es 0’653

9. El consumo familiar diario de electricidad (en kW) en cierta ciudad se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ = 6.3 kW y desviación típica 0.9 kW. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 100. Calcula:
a) La probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 6 kW y 6.6 kW.
b) El nivel de confianza con el que se ha calculado el intervalo de confianza (6.1; 6.6) para la media del consumo familiar diario.

a) La media de la muestra se puede aproximar a una distribución normal con media μ = 6.3 kW y desviación típica σ/√n = 0.9/√100 = 0.09 kW, según el Teorema del Límite Central. Entonces, la probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 6 kW y 6.6 kW es:

$P(6 \le \bar{X} \le 6.6) = P[(6 - 6.3) / 0.09 \le (\bar{X} - 6.3) / 0.09 \le (6.6 - 6.3) / 0.09] = P[-3.33 \le Z \le 3.33] = 0.9981$

Donde $\bar{X}$ es la media de la muestra y Z es la variable aleatoria estándar normal correspondiente. Por lo tanto, la probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 6 kW y 6.6 kW es del 99.81%.

b) El intervalo de confianza (6.1; 6.6) indica que la media poblacional μ está comprendida en este intervalo con un nivel de confianza $1-\alpha$. Esto se puede expresar matemáticamente como:

$P(6.1 \le \mu \le 6.6) = 1-\alpha$ como el I.C. = $\left(\overline{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

El error cometido es 6,6 – 6,3 = 0,3 = $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ de donde, 0,3 = $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{0,9}{\sqrt{100}}$ $\quad Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 3,33$

Mirando en la tabla $1-\frac{\alpha}{2} = 0,9996$, $\frac{\alpha}{2} = 0,0004$, $\alpha = 0,0008$ $\quad 1-\alpha = 0,9992$

Se ha tomado un nivel de confianza del 99,92%

10. Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 9 pacientes y se ha anotado el número de días que han recibido tratamiento para trastornos digestivos que sufren. Los resultados han sido:
100, 98, 75, 103, 84, 95, 105, 82, 107.
Se sabe que la duración, en días, del tratamiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 9 días.
a) Determina un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para μ.
b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor de 5 días, con un nivel de confianza del 95 %?

a)

Media muestral ($\bar{x}$) = (100 + 98 + 75 + 103 + 84 + 95 + 105 + 82 + 107) / 9 = 92.9 días

$$\sigma = 9 \qquad 1 - \alpha = 0,95 \quad ; \quad Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0,05}{2}} = Z_{1-0,025} = Z_{0,975} = 1,96$$

I.C = $\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ,\ \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(92,9 - 1,96 \cdot \frac{9}{\sqrt{9}} ,\ 92,9 + 1,96 \cdot \frac{9}{\sqrt{9}}\right) = (87,02,\ 98,78)$

Por lo tanto, el intervalo de confianza con un nivel del 95% para μ es (87,02, 98,78).

b) Para determinar el tamaño mínimo de muestra necesario para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor de 5 días, con un nivel de confianza del 95%, utilizaremos la fórmula:

E = $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 5$; n $\geq$ $\left(\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1{,}96 \cdot 9}{5}\right)^2 = 12{,}44$

Por lo tanto, el tamaño mínimo de muestra necesario para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor de 5 días, con un nivel de confianza del 95%, es de 13 pacientes.

11. El tiempo de renovación de un teléfono móvil, expresado en años, se puede aproximar mediante una distribución normal con desviación típica 0.2 años
a) Se toma una muestra aleatoria simple de 81 usuarios y se obtiene una media muestral igual a 1.8 años. Determina un intervalo de confianza al 95 % para el tiempo medio de renovación de un teléfono móvil
b) Determina el tamaño muestral mínimo necesario para que el valor absoluto de la diferencia entre a media muestral y la media poblacional sea menor o igual a 0.03 años con un nivel de confianza del 95 %.

a) σ = 0,2 ; n = 81 ; $\bar{x} = 1{,}8$ 1 - α = 0,95 ; $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0{,}05}{2}} = Z_{1-0{,}025} = Z_{0{,}975} = 1{,}96$

Para calcular el intervalo de confianza al 95% para el tiempo medio de renovación de un teléfono móvil, utilizamos la fórmula:

I.C = $\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(1{,}8 - 1{,}96 \cdot \frac{0{,}2}{\sqrt{81}},\ 1{,}8 + 1{,}96 \cdot \frac{0{,}2}{\sqrt{81}}\right) = (1{,}756,\ 1{,}844)$

Por lo tanto, el intervalo de confianza al 95% para el tiempo medio de renovación de un teléfono móvil es (1,756, 1,844).

b) Para calcular el tamaño muestral mínimo necesario para que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media poblacional sea menor o igual a 0.03 años con un nivel de confianza del 95%, utilizamos la fórmula:

E = $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0{,}03$; n $\geq$ $\left(\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1{,}96 \cdot 0{,}2}{0{,}03}\right)^2 = 170,\ 73$

Por lo tanto, el tamaño muestral mínimo necesario para que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media poblacional sea menor o igual a 0.03 años con un nivel de confianza del 95% es 171.

12. Se considera una variable aleatoria con distribución normal μ y desviación típica igual a 1,2. Se toma una muestra aleatoria simple de 100 elementos.
a) Calcula la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y μ sea mayor o igual que 4.

$$x \sim N(\mu, 1.2) \qquad \overline{x} \sim N\left(\mu, \frac{1.2}{\sqrt{100}}\right) = N(\mu,\ 0.12\,)$$

$$P(|\overline{x} - \mu| \leq 4) = P(-4 \leq \overline{x} - \mu \leq 4) = P\left(\frac{-4}{0.12} \leq \frac{\overline{x} - \mu}{0.12} \leq \frac{4}{0{,}12}\right) = P\left(\frac{-4}{0.12} \leq Z \leq \frac{4}{0.12}\right) = 1$$

Luego $P(|\overline{x} - \mu| \geq 4) = 1 - P(|\overline{x} - \mu| \leq 4) = 1 - 1 = 0$

b) Determina un intervalo de confianza del 90% para μ; si la media muestral es igual a 50.

$\mu \in \left(\overline{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \quad \overline{x} = 50\,, \quad \sigma = 1.2\,, \quad n = 100$

$$1 - \alpha = 0.9 \ ; \ \alpha = 0.1 \ ; \ 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.95 \ ; \ Z_{0.95} = 1.65$$

$$I.C.: \left(50 - 1.65 \cdot \frac{1.2}{\sqrt{100}};\ 50 + 1.65 \cdot \frac{1.2}{\sqrt{100}}\right) = (50 - 1.65 \cdot 0.12\,;\ 50 + 1.65 \cdot 0.12) =$$
$$= (50 - 0.198\,;\ 50 + 0.198) = (49.802\,,\ 50.198)$$

Tenemos la confianza de que el 90% de los casos la media muestral pertenecerá al intervalo:

(49.802, 50.198).

13. La estatura en centímetros (cm) de los varones mayores de edad de una determinada población se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica σ = 15cm.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 100 individuos obteniéndose una media muestral de 174cm. Determina un intervalo de confianza al 95% para μ.

$\mu \in \left(\overline{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\ \overline{x} = 174\ ,\ \sigma = 15\ ,\ n = 100$

$$1 - \alpha = 0.95 \ ; \ \alpha = 0.05 \ ; \ 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \ ; \ Z_{0.975} = 1.96$$

$$\left(174 - 1.96 \cdot \frac{15}{\sqrt{100}};\ 174 + 1.96 \cdot \frac{15}{\sqrt{100}}\right) = (174 - 1.96 \cdot 1.5\,;\ 174 + 1.96 \cdot 1.5) =$$
$$= (174 - 2.94\,;\ 174 + 2.94) = (171.06\,,\ 176.94)$$

Tenemos la confianza de que el 95% de los casos la media poblacional pertenecerá al intervalo: (171.06, 176.94).

b) ¿Cuál es el mínimo tamaño muestral necesario para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor que 5 cm, con un nivel de confianza del 90%?

$E = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \to n = \left(Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 \quad \sigma = 15\ ,\ E = 5$

$$1 - \alpha = 0.9 \ ; \ \alpha = 0.1 \ ; \ 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.95 \ ; \ Z_{0.95} = 1.65$$

$$n \geq \left(1.65 \cdot \frac{15}{5}\right)^2 \ ; \ n \geq (1.65 \cdot 3)^2 \ ; \ n \geq 4.95^2 \ ; \ n \geq 24.5025$$

La muestra debe de tener al menos 25 varones mayores de edad.

14. El mínimo tamaño muestral necesario para estimar la media de una determinada característica de una población que puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica σ , con un error máximo de 2.27 y un nivel de confianza del 90%, supera en 1000 unidades al que se necesitaría si el nivel de confianza fuera del 95% y el error máximo fuera de 5,23. Expresa los tamaños muestrales en función de la desviación típica σ y calcula la desviación de la población y los tamaños muestrales respectivos.

a) Error = 2.27 $\quad 1 - \alpha = 0.9 \ ; \ \alpha = 0.1 \ ; \ 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.95 \ ; \ Z_{0.95} = 1.65$

n+1000

$E = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$; $2.27 = 1.65 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n+1000}}$

b) Error = 5.23

$1-\alpha = 0.95$; $\alpha = 0.05$; $1-\frac{\alpha}{2} = 0.975$; $Z_{0.975} = 1.96$

n

$E = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$; $5.23 = 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$\left.\begin{array}{l} 2.27=1.65\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n+1000}} \rightarrow \sigma=\frac{2.27\cdot\sqrt{n+1000}}{1.65} \\ 5.23=1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow \sigma=\frac{5.23\cdot\sqrt{n}}{1.96} \end{array}\right.$$

$\frac{2.27\cdot\sqrt{n+1000}}{1.65} = \frac{5.23\cdot\sqrt{n}}{1.96}$; $\left(1.375 \cdot \sqrt{n+1000}\right)^2 = \left(2.668 \cdot \sqrt{n}\right)^2$

$1.89 \cdot (n+1000) = 7.11n$; $1.89n + 1890 = 7.11n$; $1890 = 7.11n - 1.89n$ $1890 = 5.22n$; $\frac{1890}{5.22} = n$; $362.06 = n$

$$\sigma = \frac{2.27 \cdot \sqrt{362.06 + 1000}}{1.65} = \frac{2.27 \cdot 36.90}{1.65} = 50.76$$

Los tamaños muestrales serían de 1363 y 363 como mínimo respectivamente con una desviación típica $\sigma = 50.76$

AUTOEVALUACIÓN

1. **Indica cuál de los siguientes motivos no es por el que se recurre a una muestra:**
   a) El proceso de medición es destructivo
   b) La población es muy numerosa
   c) La población es imposible o difícil de controlar
   d) La población tiene mal carácter

   d) *El motivo por el cual no es por el que se recurre a una muestra es porque la población tiene mal carácter.*

2. **Una ganadería tiene diez mil ovejas de diferentes razas. Queremos extraer una muestra de 100 ovejas. Indica el tipo de muestreo más adecuado:**
   a) muestreo aleatorio sistemático
   b) muestreo aleatorio estratificado
   c) muestreo no aleatorio
   d) muestreo aleatorio por conglomerados

   b) *El tipo de muestreo más apropiado es el aleatorio estratificado.*

3. **Indica cuál de las siguientes afirmaciones es falsa en la distribución N(0,1):**
   a) $P(z < 0) = 1$
   b) $P(z < 0) = 0{,}5$
   c) $P(z = \sigma) = 0$
   d) $P(z > 0) = 0{,}5$

   a) *La afirmación falsa en la distribución N(0,1) es P(z<0)=1.*

4. **De una población de media 69 y desviación típica 8 se toma una muestra de tamaño 12. La probabilidad de que un individuo de la muestra tenga un valor mayor que 93 es:**
   a) $P(x > 93) = 0{,}9987$
   b) $P(x > 93) = 0{,}6501$
   c) $P(x > 93) = 0{,}1293$
   d) $P(x > 93) = 0{,}0013$

   d) *La probabilidad de que un individuo de la muestra tenga un valor mayor que 93 es* $P(x > 93) = 0{,}0013$

5. Los parámetros de una distribución son μ=10 y desviación típica σ =20. Se extrae una muestra de 100 individuos.
El valor de P (8≤ $\bar{x}$≤ 12) es:

μ=10 σ =20 n=100 $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$; $N\left(10, \frac{20}{\sqrt{100}}\right)$= (10, 2)

P (8≤ $\bar{x}$≤ 12)=$P\left(\frac{8-10}{2} \le z \le \frac{12-10}{2}\right)$ =P (-1$< z < 1$)= P (z< 1)- P (z< 1)=0,8413-$[1 - P\ (z < 1)]$=

0,8413-$[1 - 0{,}8413]$=0,8413-$[0{,}1587]$=0,6838

- *La solución de este ejercicio sería el apartado **b).***

6. En el control de calidad de una fábrica de chocolate se envasan tabletas de 100 gramos con una

desviación típica de 2 gramos. Se toma una muestra de 50 tabletas. Calcula probabilidad de que el peso medio de las tabletas sea menor de 99 gramos:

μ=100 σ =2 n=50 N $\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$; N $\left(100, \frac{2}{\sqrt{50}}\right)$= (100, 0,28)

P (x<99)= P$\left(z < \frac{99-100}{0,28}\right)$= P (z$< -3{,}57$) =1 – P (z$< -3{,}57$)= 1- 0,9998=0,0002

- *La solución de este ejercicio sería el apartado **a)**.*

7. En el control de calidad de una envasadora de estuches de jamón, se envasan en estuches de 100 gramos con una desviación típica de 2 gramos. La probabilidad de que un lote de 400 estuches pese más de 40100 gramos es de:

μ =100 σ =2 n=400 N $\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$; N$\left(100, \frac{2}{\sqrt{400}}\right)$=N (100, 0,1)

P (x>100,25)= P$\left(z > \frac{100{,}25-100}{0{,}1}\right)$= P (z $> 2{,}5$) =1 – P (z$< -2{,}5$)= 1- 0,9938=0,0062

El numero 100,25 sale del cálculo realizado para saber cuál es el precio medio de los estuches ya que antes nos dan el total de los estuches. X= $\frac{40100}{400} = 100{,}25$

- *La solución de este ejercicio sería el apartado **b)**.*

8 Determina un intervalo de confianza con un nivel de confianza del 0,95 de una N (2, 0,1)

1-α=0,95; N (2, 0,1)

<u>Intervalo de confianza</u>

N (μ, σ); $\left(\mu - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma < x < \mu - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma \right)$

p $\left(z < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$=$\frac{0{,}95+1}{2}$; p $\left(z < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$= 0,975 ; $Z_{\frac{\alpha}{2}}$= 1,96

2- $1{,}96 \cdot 0{,}1 < x < 2 + 1{,}96 \cdot\ 0{,}1$ (2-$1{,}96 \cdot 0{,}1 < x < 2 + 1{,}96 \cdot\ 0{,}1$)

- *La solución de este ejercicio sería el apartado **a)** (1,8$< x < 2{,}19$)= 0,95*

9. Se ha elegido una muestra aleatoria simple de 1000 componentes y en ella se ha obtenido que la proporción de defectuosos es del 3,7%. Determina el intervalo de confianza al 99% para la proporción de componentes defectuosos que se producen en una fábrica

n=1000 , 3,7% defectuosos , $\hat{p} = 0{,}037$,

1 – α = 0,99; α = 0,01 ; $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0{,}01}{2}} = Z_{1-0{,}005} = Z_{0{,}995}$ = 2,58

I.C = $\left(\hat{p} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$

$$I.C. = \left(0{,}037 - 2{,}58 \cdot \sqrt{\frac{0{,}037 \cdot 0{,}963}{1000}}, 0{,}037 + 2{,}58 \cdot \sqrt{\frac{0{,}037 \cdot 0{,}963}{1000}}\right) = (0.0216, 0.0524)$$

- *La solución de este ejercicio sería el apartado **c)*** $(0.0216, 0.0524)$

10. ¿Cuál debe ser el tamaño de la muestra en una población de 8 millones de votantes para conocer si tienen la intención de votar a un determinado partido político con una probabilidad de acierto del 0,95 y un margen de error inferior a 0,02?

1 – α = 0,95; α = 0,05 ; $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0,05}{2}} = Z_{1-0,025} = Z_{0,975} = 1,96$

Tomamos la desigualdad (1) de la página 277 de los apuntes

$$\frac{0.02n+0.5}{\sqrt{np(1-p)}} \geq 1.96 \Rightarrow 0.02n + 0.5 \geq 1.96\sqrt{np(1-p)}$$

Donde tenemos dos variables n y p. Vamos a acotar $p(1-p)$. Dibujamos la parábola $y = x(1-x)$ que alcanza su valor máximo, 1/4, para $x = 1/2$, por lo que $p(1-p) \leq 1/4$. Sustituimos este valor.

$$0.02n + 0.5 \geq 1.96\sqrt{np(1-p)} \geq 1.96\sqrt{\frac{n}{4}}$$

Eliminamos 0.5 (para simplificar cálculos), elevamos al cuadrado, y obtenemos que: $n \geq 2\,401$.

La encuesta debe de realizarse para más de 2 401 votantes.