

Matemàtiques orientades als ensenyaments acadèmics

4t B d'ESO

Exercicis i Problemes

ÍNDEX:

1. Nombres reals	2
2. Potències i arrels	7
3. Expressions algebraiques. Polinomis	11
4. Equacions i sistemes	18
5. Inequacions	26
6. Proporcionalitat	31
7. Semblança	37
8. Trigonometria	43
9. Geometria	49
10. Funcions i gràfiques	57
11. Funcions polinòmiques, definides a trossos i de proporcionalitat inversa	63
12. Funcions exponencials, logarítmiques i trigonomètriques	70
13. Estadística	78
14. Combinatòria	88
15. Atzar i probabilitat	95

www.apuntesmareaverde.org.es

Autors de Llibres Marea Verde.

Traducció: IES Juniper Serra (Balears)

Il·lustracions: Banc d'imatges de INTEF i VVAA (anteriors)



Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-044030

Fecha y hora de registro: 2014-05-28 17:53:18.0

Licencia de distribución: CC BY-NC-SA



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighi.com>

CAPÍTOL 1: NOMBRES REALS

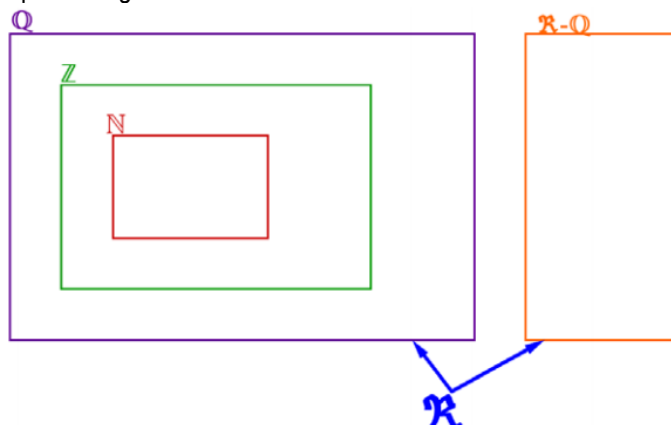
ACTIVITATS PROPOSADES

1. NOMBRES RACIONALS I IRRACIONALS

- Mentalment decideix quines de les següents fraccions tenen una expressió decimal exacta i quines la tenen periòdica
a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{7}{30}$ d) $\frac{6}{25}$ e) $\frac{7}{8}$ f) $\frac{9}{11}$
- Calcula l'expressió decimal de les fraccions de l'exercici anterior i comprova si la teva deducció era correcta
- Calcula l'expressió decimal de les fraccions següents:
a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{9}$ c) $\frac{7}{80}$ d) $\frac{2}{125}$ e) $\frac{49}{400}$ f) $\frac{36}{11}$
- Escriu en forma de fracció les següents expressions decimals exactes i redueix-les, comprova amb la calculadora que estan bé:
a) 7,92835; b) 291,291835; c) 0,23
- Escriu en forma de fracció les següents expressions decimals periòdiques, redueix-les i comprova que estan bé:
a) 2,353535... b) 87,2365656565.... c) 0,9999..... d) 26,5735735735.....
- Còpia en el teu quadern la taula adjunta i assenjala amb una X a quins conjunts pertanyen els següents nombres:

Nombre	N	Z	Q	I	\mathcal{R}
-2,01					
$\sqrt[3]{-4}$					
0,121212...					
$\sqrt[3]{-1000}$					
1,223334...					
$\sqrt{-4}$					
$\frac{1}{2}$					

- Còpia en el teu quadern l'esquema següent i fica els nombres de l'exercici anterior en el seu lloc:



- Pots demostrar que $4,99999... = 5$?, quant val $2,5999...?$
- Demostra que $\sqrt[3]{7}$ és irracional.
- Quantes xifres pot tenir com a màxim el període de $\frac{1}{47}$?
- Quants decimals té $\frac{1}{2^7 \cdot 5^4}$?, t'atreveixes a donar la raó?
- Fes la divisió $999\,999:7$ i després fes $1:7$. Serà casualitat?
- Ara divideix 999 entre 37 i després $1:37$, és casualitat?

2. APROXIMACIONS I ERRORS.

- Arrodoneix $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ fins a les centenes i troba els errors absolut i relatiu comesos.
- Troba una cota de l'error absolut en les següents aproximacions:
a) 2,1 b) 123 c) 123,00 d) 4000 amb arrodoniment en les desenes.

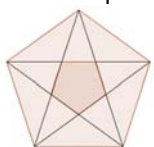
16. Una balança té un error inferior o igual a 50 g en les seves mesures. Usem aquesta balança per elaborar 10 paquets de sucre d'1 Kg cadascun que són un lot. Determina el pes mínim i màxim del lot. Quin és la cota de l'error absolut per al lot?
17. Els nombres $A = 5,5$ i $B = 12$ han estat arrodonits. Troba una cota de l'error absolut i de l'error relatiu para:
- a) $A+B$ b) $A \cdot B$ c) B/A d) A^B

Nota: Determina el valors màxim i mínim d'A i B. Després els valors màxims i mínims de cada apartat (recorda que la resta i la divisió funcionen diferent)

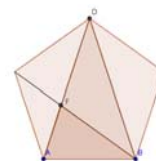
18. Com mesurar el grossor d'un foli amb un error inferior a 0,0001 cm amb l'ajuda d'una regla mil·limetrada i la de l'ordenança de l'institut?, fes-ho.

3. REPRESENTACIÓ EN LA RECTA REAL DELS NOMBRES REALS:

19. Calcula 3 nombres reals que estiguin entre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i 1.
20. Troba 5 nombres racionals que estiguin entre $\sqrt{2}$ y 1,5
21. Troba 5 nombres irracionals que estiguin entre 3,14 i π
22. Representa en la recta numèrica de forma exacta els següents nombres: $\frac{7}{6}$; $\frac{-17}{4}$; 2,375; $-3,\widehat{6}$
23. Representa en la recta numèrica de forma exacta: $\sqrt{20}$; $-\sqrt{8}$; $\sqrt{14}$; $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
24. Cerca rectangle auri i espiral Àuria en Internet.
25. Ja de pas cerca la relació entre el Nombre d'or i la Successió de Fibonacci.
26. Cerca en *Youtube* "algo pasa con phi" i explica què has trobat.
27. Comprova que la longitud del costat del pentàgon regular i la de la seva diagonal estan en proporció àuria.



28. Calcula amb *Geogebra* una aproximació de la raó de semblança entre un pentàgon regular i el que es forma en el seu interior en dibuixar les seves diagonals. Determina sense utilitzar *Geogebra* el valor real de la raó de semblança entre aquests dos pentàgons.



29. Comprova que els triangles ABD i ABF de la figura són semblants i calcula aproximadament amb *Geogebra* la seva raó de semblança.



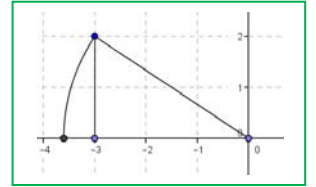
30. Calcula amb *Geogebra* el valor aproximat de la raó de semblança entre un decàgon regular i el decàgon que es forma en traçar les diagonals de la figura. Determina sense utilitzar *Geogebra* el valor real de la raó de semblança entre aquests dos polígons

4. INTERVALS, SEMIRECTES I ENTORNS:

31. Expressa com a interval o semirecta, en forma de conjunt (usant desigualtats) i representa gràficament:
- a) Percentatge superior al 26 %.
- b) Edat inferior o igual a 18 anys.
- c) Nombres el cub dels quals sigui superior a 8.
- d) Nombres positius la part sencera dels quals té 3 xifres.
- e) Temperatura inferior a 25°C.
- f) Nombres pels quals existeix la seva arrel quadrada (és un nombre real).
- g) Nombres que estiguin de 5 a una distància inferior a 4.
32. Expressa en forma d'interval els següents entorns: a) $E(1, 5)$; b) $E(-2, \frac{8}{3})$; c) $E(-10, 0,001)$
33. Expressa en forma d'entorn els següents intervals: a) $(4, 7)$; b) $(-7, -4)$; c) $(-3, 2)$
34. Els sous superiors a 500 € però inferiors a 1000 € es poden posar com a interval de nombres reals?
*Pista: 600,222333€ pot ser un sou?

EXERCICIS I PROBLEMES.

- La imatge de la dreta és la representació d'un nombre irracional, quin?
- Representa en la recta numèrica: $-3,375$; $3,666\dots$



- Representa en la recta numèrica: $-\sqrt{8}$; $2\sqrt{5}$; $\frac{\sqrt{10}}{2}$

- Troba el valor exacte de $\frac{0,4}{0,4}$ sense calculadora.

- Vaig donar quines d'aquestes fraccions tenen expressió decimal exacta i quines periòdica: $\frac{9}{40}$; $\frac{30}{21}$; $\frac{37}{250}$; $\frac{21}{15}$

- Troba 3 fraccions a, b, c tal que $\frac{3}{4} < a < b < c < \frac{19}{25}$

- Fes en el teu quadern una taula i digues a quins conjunts pertanyen els següents nombres:

$$2,73535\dots; \pi - 2; \sqrt[5]{-32}; \frac{2}{0}; 10^{100}; \frac{102}{34}; -2,5; 0,1223334444\dots$$

- Contesta vertader o fals, justificant la resposta.

a) $\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \{0\}$

b) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

c) L'arrel quadrada d'un nombre natural és irracional.

d) $\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$

e) $1/47$ té expressió decimal periòdica.

- Posa exemples que justifiquin:

a) La suma i la resta de nombres irracionals pot ser racional.

b) El producte o divisió de nombres irracionals pot ser racional.

- Què serà la suma d'un nombre racional amb un altre irracional? (Pensa en la seva expressió decimal)

- La suma de 2 nombres amb expressió decimal periòdica pot ser un enter?

- Expressa amb paraules els següents intervals o semirectes:

a. $(-7, 7]$

b. $\{x \in \mathbb{R} / -3 \leq x < 5\}$



c.
d. $(-2, +\infty)$

- Quants metres hi ha de diferència en calcular el perímetre de la Terra posant $\pi \approx 3,14$ en lloc del seu valor real?, és molt o poc? Bàsicament has de trobar l'error absolut i el relatiu.

*Radi aproximadament 6370 km

- Els antics van fer bones aproximacions de Pi, entre elles citem a Arquímedes (segle III a.C) amb $211875/67441$ i a Ptolomeu (segle II d.C.) amb $377/120$. Qui va cometre menor error relatiu?

- El següent és un **Pi-text**: "Ell i ella, l'única esperança de tindre fills que tenen, romandrà soterrada aquesta primavera."

Compta i apunta el nombre de lletres de cada paraula i veuràs d'on ve el seu nom. Inventa una frase amb la mateixa propietat, no és necessari que sigui tan llarg (almenys 10 paraules)

- Troba: a) $(3, 5] \cup (4, 6]$; b) $(3, 5] \cap (4, 6]$; c) $(-\infty, 2] \cap (-2, +\infty)$

- Pot expressar-se com a entorn una semirecta?

- Expressa com a entorns oberts els següents intervals: a) $(0, 7)$; b) $(-8, -2)$; c) $(2, +\infty)$

- Expressa com a intervals oberts els següents entorns: a) $E(2, 2/3)$; b) $E(-7, 1/2)$

- Un numero irracional tan important com Pi és el nombre "e". $e \approx 2,718281828\dots$ que sembla periòdic, però no, no

ho és. Es defineix com el nombre al que s'acosta $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ quan n es fa molt, però que molt gran. Agafa la

calculadora i dóna-li a n valors cada vegada majors, per exemple: 10, 100, 1000, ...

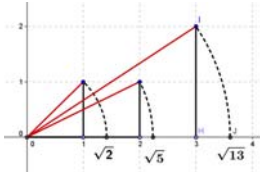



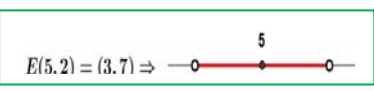
Apunta els resultats en una taula.

21. Troba l'àrea i el perímetre d'un rectangle de costats $\sqrt{2}$ i $\sqrt{8}$ m.
22. Troba l'àrea i el perímetre d'un quadrat que la seva diagonal mesura 2 m.
23. Troba l'àrea i el perímetre d'un hexàgon regular de costat $\sqrt{3}$ m.
24. Troba l'àrea i el perímetre d'un cercle de radi $\sqrt{10}$ m.
25. Troba l'àrea total i el volum d'una cub de costat $\sqrt[3]{7}$ m.
26. Per quin nombre hem de multiplicar els costats d'un rectangle perquè la seva àrea es faci el triple?
27. Quant ha de valer el radi d'un cercle perquè la seva àrea sigui 1 m^2 ?
28. Tenim una circumferència i un hexàgon inscrit en ella. Quin és la raó entre els seus perímetres? (Raó és divisió o quocient)
29. Quins nombres al quadrat donen 7?
30. Quins nombres reals al quadrat donen menys de 7?
31. Quins nombres reals al quadrat donen més de 7?
32. Mesurar la grandària de les pantalles en polzades (") ja no sembla molt bona idea. La mesura es refereix a la longitud de la diagonal del rectangle, així, un televisor de 32" es refereix al fet que la diagonal mesura 32". Això no dona molta informació si no sabem la proporció entre els costats. Les més usuals en les pantalles de televisió i ordinador són 4:3 i 16:9.
Si una polzada són 2,54cm, quines seran les dimensions d'una pantalla de 32" amb proporció 4:3?, i si la proporció és 16/9? Quin té major superfície?

AUTOAVALUACIÓ

- 1) *Saps a quins conjunts pertanyen els diferents nombres.*
Indica en una taula o un diagrama a quins conjunts numèrics pertanyen els següents nombres: 0; -2; 3/4, 7,3; 6,252525..., $\pi - 2$; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[4]{-16}$; 1,123124125...; 2,999...
- 2) *Saps arrodonir amb un nombre adequat de xifres i calcules l'error relatiu per comparar aproximacions. Saps trobar una cota per a l'error absolut i el relatiu.*
 - a) Els següents nombres s'han arrodonit, troba una cota de l'error absolut i de l'error relatiu:
a_1) 3,14; a_2) 45600 amb arrodoniment en les centenes.
 - b) Si prenem $\sqrt{10} \approx 3,16$ y $\frac{2}{3} \approx 0,67$ en quina de les aproximacions cometem proporcionalment menor error?
- 3) *Saps quan una fracció té expressió decimal exacta o periòdica sense fer la divisió.*
Prova-ho amb aquestes: 30/150; 30/21
- 4) *Saps passar de decimal a fracció per treballar amb valors exactes:*
Troba: 0,72525...+0,27474...
- 5) *Saps representar nombres racionals i irracionals de forma exacta*
Representa de forma exacta $\frac{-21}{9}$; $\frac{30}{7}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt{7}$
- 6) *Domines les diferents formes i notacions d'un interval o semirecta (interval, conjunt amb desigualtats i gràfica).*
Expressa en forma d'interval (o semirecta), en forma de desigualtat i representa gràficament:
 - a) Nombres reals inferiors o iguals que -1.
 - b) Nombres reals compresos entre -4 i 2, inclòs el 1r però no el 2n.
- 7) *Saps passar d'un entorn a un interval i viceversa.*
 - a) Escriu com a interval: E(-2, 2/3).
 - b) Escriu com a entorn l'interval (-5/2, 7/3)
- 8) *Saps resoldre problemes treballant amb quantitats exactes.*
Troba l'àrea, el volum i la diagonal principal d'un ortoedre de costats $\sqrt{5}$; $2\sqrt{5}$ i $3\sqrt{5}$ m.

RESUM

		Exemples
Conjunts de nombres	Naturals $\rightarrow N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$; Enters $\rightarrow Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ Racionals $\rightarrow Q = \left\{\frac{a}{b}; a \in Z, b \in Z, b \neq 0\right\}$; Irracionals $\rightarrow I = \mathfrak{R} - Q$; $\mathfrak{R} = Q \cup I$	
Fraccions i expressió decimal	Totes les fraccions tenen expressió decimal exacta o periòdica. Tota expressió decimal exacta o periòdica es pot posar com a fracció.	$0,175 = \frac{175}{1000} = \frac{7}{40}$ $X = 1,7252525\dots = 854/495$
$\sqrt{2}$ irracional	$\sqrt{2}$ no pot posar-se com a fracció.	
Error Absolut	Error Absolut (EA) =	$\sqrt{3} \approx 1,73$; EA $\approx 0,0021$.
Cota de l'error	Calculem la cota calculant un valor major	EA $\leq 0,003$
Error Relatiu	$ER = \frac{EA}{ Valor\ real }$	$ER = \frac{0,0021}{\sqrt{3}} \approx 0,00121$
Control de l'error	En cada suma o resta l'error absolut és la suma dels errors absoluts. Els errors relatius se sumen en multiplicar dos nombres.	
Densitat	Els nombres reals i els nombres racionals són densos. Entre cada dos nombres, sempre podem trobar a un altre.	
Representació en la recta real	Fixat un origen i una unitat, existeix una bijecció entre els nombres reals i els punts de la recta	
Interval obert	Interval obert en el qual els extrems NO pertanyen a l'interval	$(2, 7) = \{x \in \mathfrak{R} / 2 < x < 7\}$. $(2, 7) \Rightarrow$ 
Interval tancat	Els extrems SI pertanyen a l'interval	$[-2, 2] = \{x \in \mathfrak{R}; -2 \leq x \leq 2\}$ $[-2, 2] \Rightarrow$ 
Intervals Semioberts (o semitancats)	Interval amb un extrem obert i un altre tancat	$[-8, 0) = \{x \in \mathfrak{R} / -8 \leq x < 0\}$ $[-8, 0) \Rightarrow$ 
Entorns	Forma especial d'expressar un interval obert: $E(a, r) = (a - r, a + r)$	$E(5, 2) = (3, 7) \Rightarrow$ 

CAPÍTOL 2: POTÈNCIES I ARRELS

ACTIVITATS PROPOSADES

1. POTÈNCIES D'EXPONENT SENCER. PROPIETATS.

1. Calcula les següents potències: a) $-x^3$ b) $(x+1)^3$ c) $-(-2x)^2$

2. PROPIETATS DE LES POTÈNCIES. EXEMPLES.

2. Realitza les següents operacions amb potències:

a) $(x+1) \cdot (x+1)^3$ b) $(x+2)^3 : (x+2)^4$ c) $[(x-1)^3]^4$ d) $(x+2) \cdot (x+1)^{-3}$

3. POTÈNCIES D'EXPONENT RACIONAL. RADICALS.

3. Calcula: a) $(\sqrt[3]{a^6 \cdot b^9})^2$ b) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ c) $(\sqrt[12]{(x+1)^3})^2$

4. Trobar: a) $\sqrt[2]{\sqrt[4]{\frac{x}{5y}}} : \sqrt[4]{\sqrt[3]{\frac{3x}{y^2}}}$ b) $\sqrt{\frac{5}{3}} : \sqrt{\frac{2}{3}}$

5. Realitza les següents operacions amb radicals. a) $\sqrt[4]{\frac{x}{5y}} : \sqrt[4]{\frac{3x}{y^2}}$ b) $(\sqrt[5]{(x+3)^2})^3$

4. OPERACIONS AMB RADICALS: RACIONALITZACIÓ.

6. Escribeu sota un sol radical i simplifiqueu: $\sqrt[2]{2 \cdot \sqrt[2]{3 \cdot \sqrt[2]{4 \cdot \sqrt[2]{5 \cdot \sqrt[2]{6 \cdot \sqrt[2]{8}}}}}$

7. Calcula i simplifica: $\frac{\sqrt[4]{x^3 \cdot y^3} \cdot \sqrt[3]{x^4 \cdot y^5}}{\sqrt[6]{x^5 \cdot y^4}}$

8. Realitza la següent operació: $\sqrt{x^3} + \sqrt{16x^7} + \sqrt{x}$

9. Calcula i simplifica: $\sqrt[2]{\frac{3}{x}} \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2}{8}} \cdot \sqrt[4]{\frac{9}{5}}$

10. Racionalitza l'expressió: $\frac{x+3y}{\sqrt{x}-\sqrt{2y}}$

11. Racionalitza: $\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

12. Racionalitza: $\frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{\sqrt{5}-2}$

5. NOTACIÓ CIENTÍFICA.

13. Calcula: a) $(7,83 \cdot 10^{-5}) \cdot (1,84 \cdot 10^{13})$ b) $(5,2 \cdot 10^{-4}) : (3,2 \cdot 10^{-6})$

14. Efectua i expressa el resultat en notació científica: a) $\frac{3 \cdot 10^{-5} + 7 \cdot 10^{-4}}{10^6 - 5 \cdot 10^5}$ b) $\frac{7,35 \cdot 10^4}{5 \cdot 10^{-3}} + 3,2 \cdot 10^7$

15. Realitza les següents operacions i efectua el resultat en notació científica: a) $(4,3 \cdot 10^3 - 7,2 \cdot 10^5)^2$ b) $(7,8 \cdot 10^{-7})^3$

6. LOGARITMES:

16. Copia la taula adjunta en el teu quadern i aparella cada logaritme amb la seva potència:

$2^5 = 32$	$\log_5 1 = 0$	$2^0 = 1$	$5^2 = 25$
$5^1 = 5$	$\log_2 2 = 1$	$5^0 = 1$	$\log_2 32 = 5$
$2^1 = 2$	$\log_2 1 = 0$	$\log_5 5 = 1$	$\log_5 25 = 2$
$2^4 = 16$	$\log_3 81 = 4$	$\log_2 16 = 4$	$3^4 = 81$

17. Calcula utilitzant la definició de logaritme: a) $\log_2 2^5$ b) $\log_5 25$ c) $\log_2 2^{41}$ d) $\log_5 5^{30}$

18. Calcula utilitzant la definició de logaritme: a) $\log_3 27$ b) $\log_{10} 100$ c) $\log_{1/2}(1/4)$ d) $\log_{10} 0,0001$

19. Calcula x utilitzant la definició de logaritme: a) $\log_2 64 = x$ b) $\log_{1/2} x = 4$ c) $\log_x 25 = 2$

20. Calcula utilitzant la definició de logaritme: a) $\log_2 64 + \log_2 1/4 - \log_3 9 - \log_2 \sqrt{2}$ b) $\log_2 1/32 + \log_3 1/27 - \log_2 1$

21. Desenvolupa les expressions que s'indiquen: a) $\ln \sqrt[5]{\frac{4x^2}{e^3}}$ b) $\log \left(\frac{a^3 \cdot b^2}{c^4 \cdot d} \right)$

22. Expressa els logaritmes dels nombres següents en funció de $\log 3 = 0,4771212$

a) 81 b) 27 c) 59049

23. Simplifica la següent expressió: $\frac{1}{2}\log m - 2\log t - \log p + \frac{5}{2}\log h$

EXERCICIS I PROBLEMES:

Potències:

1. Expressa en forma exponencial: a) $\frac{1}{64}$ b) $\frac{t}{t^5}$ c) $\left(\frac{1}{z+1}\right)^2$ d) $\frac{27^{-2}}{81^{-5}}$ e) $\frac{x^{-2}\cdot y^{-7}}{x^8\cdot y^{-4}}$

2. Calcula: a) $4^{\frac{1}{2}}$ b) $125^{\frac{1}{3}}$ c) $625^{\frac{5}{6}}$ d) $(64^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{6}}$ e) $(8^{\frac{-4}{3}})^{\frac{2}{5}}$

Radicals:

3. Expressar en forma de radical: a) $x^{\frac{7}{9}}$ b) $(m^5\cdot n^3)^{\frac{1}{3}}$ c) $[(x^2)^{\frac{1}{3}}]^{\frac{1}{5}}$ d) $a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{3}}$

4. Expressar en forma exponencial:

a) $(\sqrt[3]{x^2})^5$ b) $\sqrt{\frac{a^{13}}{a^6}}$ c) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^k}}$ d) $\sqrt[3]{x^{(5x+1)}}$ e) $\sqrt[4]{(x^2)^{(3x+2)}}$ f) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[2]{(x^2)^{\frac{1}{5}}}}}$

5. Expressa com a potència única:

a) $\frac{\sqrt[3]{a^8}}{a^2}$ b) $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt[3]{25}}$ c) $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a\cdot\sqrt{a}}$ d) $2\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ e) $a\cdot\sqrt{\frac{1}{a}}$ f) $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}$ g) $\frac{\sqrt[3]{a^2}\cdot a^3}{a^3\cdot\sqrt{a}}$

Propietats dels radicals:

6. Simplifica:

a) $\sqrt[9]{64}$ b) $\frac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt[4]{a^3\cdot b^5\cdot c}}{\sqrt{a\cdot b^3\cdot c^3}}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^5\cdot x^7}}$ e) $(\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}})^8$ f) $\frac{\sqrt[4]{x^3\cdot y^3\cdot\sqrt[3]{x^4\cdot y^5}}}{\sqrt[6]{x^5\cdot y^4}}$ g) $\sqrt[5]{x^2\cdot 3\cdot\sqrt[10]{x^2\cdot\sqrt{x^3}}}$

7. Extreu factors del radical:

a) $\sqrt[3]{32x^4}$ b) $\sqrt[3]{81a^3b^5c}$ c) $(\sqrt{\sqrt{2}})^{10}$ d) $\sqrt[4]{\frac{25a^2b}{c^6}}$ e) $\sqrt{\frac{8a^5}{b^4}}$ f) $\sqrt{\frac{28x^5}{75y^3}}$ g) $\sqrt[3]{\frac{32a^3}{45b^4}}$

8. Introdueix factors en el radical:

a) $2\sqrt{\frac{3}{2}}$ b) $3\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ c) $2\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ d) $2\sqrt[4]{\frac{5}{12}}$ e) $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{12}$ f) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$

Operacions amb radicals:

9. a) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{b^4}\cdot\sqrt[3]{b^2}$ b) $\sqrt{5a}\cdot\sqrt{10ab}\cdot\sqrt{8a^3b}\cdot\sqrt{a}$ c) $\frac{\sqrt[6]{20}}{\sqrt[4]{10}}$ d) $\sqrt[4]{\frac{5}{12}}\cdot\sqrt[4]{\frac{20}{3}}$ e) $\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}$ f) $\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$

10. Efectua:

a) $\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{2}-\sqrt{8}$ b) $\sqrt{50a}-\sqrt{18a}$ c) $\sqrt{320}+\sqrt{80}-\sqrt{500}$ d) $\sqrt{\frac{7}{64}}+\sqrt{\frac{7}{4}}$
e) $5\sqrt{96}-\sqrt[5]{\frac{3}{32}}$ f) $\sqrt[3]{\frac{135}{8}}-\sqrt[3]{\frac{5}{8}}$ g) $\sqrt{150}+\sqrt{54}-\sqrt{24}$

Racionalitzar

11. Racionalitza els denominadors: a) $\frac{5}{\sqrt[3]{2}}$ b) $\frac{3}{2-\sqrt{3}}$ c) $\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ d) $\frac{6}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ f) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

12. Racionalitza i simplifica: a) $\frac{11}{2\cdot\sqrt{5}+3}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{2}+3}$ c) $\frac{\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$
d) $\frac{\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2\cdot\sqrt{2}}$ e) $\frac{4\cdot\sqrt{15}-2\cdot\sqrt{21}}{2\cdot\sqrt{5}-\sqrt{7}}$ f) $\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$

13. Efectua i simplifica: a) $(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}})\cdot(3+2\sqrt{2})$ b) $(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1})^2-3\sqrt{5}$ c) $(1-\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}):(1+\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}})$

Notació científica:

14. La massa del Sol és 330 000 vegades la de la Terra, aproximadament, i aquesta és $5,98\cdot 10^{21}$ t. Expressa en notació científica la massa del Sol, en quilograms.

15. L'èsser viu més petit és un virus que pesa de l'ordre de 10^{-18} g i el més gran és la balena blava, que pesa, aproximadament, 138 t. Quants virus serien necessaris per aconseguir el pes de la balena?
16. Els cinc països més contaminants del món (Estats Units, Xina, Rússia, Japó i Alemanya) van emetre 12 bilions de tones de CO_2 l'any 1995, quantitat que representa el 53,5% de les emissions de tot el món. Què de CO_2 es va emetre l'any 1995 a tot el món?
17. Expressa en notació científica:
- a) Recaptació de les travesses en una jornada de la lliga de futbol: 1628000 €
 b) Tones de CO_2 que es van emetre a l'atmosfera en 1995 a Estats Units 5228,5 milers de milions.
 c) Radi de l'àtom d'oxigen: 0,000000000066 m
18. Efectua i expressa el resultat en notació científica:
- a) $(3 \cdot 10^{-7}) \cdot (8 \cdot 10^{18})$ b) $(4 \cdot 10^{-12}) \cdot (5 \cdot 10^{-3})$ c) $(5 \cdot 10^{12}) : (2 \cdot 10^{-3})$ d) $3,1 \cdot 10^{12} + 2 \cdot 10^{10}$ e) $(4 \cdot 10^5)^{-2}$
19. Expressa en notació científica i calcula:
- a) $(75800)^4 : (12000)^4$ b) $\frac{0,00054110318000}{1520000-0,00302}$ c) $(0,0073)^2 \cdot (0,0003)^2$ d) $\frac{2700000 - 1300000}{0,00003 - 0,00015}$
20. Efectua i expressa el resultat en notació científica: a) $\frac{3 \cdot 10^{-5} + 7 \cdot 10^{-4}}{10^6 - 5 \cdot 10^5}$ b) $\frac{7,35 \cdot 10^4}{5 \cdot 10^{-3}} + 3,2 \cdot 10^7$ c) $(4,3 \cdot 10^3 \cdot 7,2 \cdot 10^5)$
21. Que resultat és correcte de la següent operació expressada en notació científica: $(5,24 \cdot 10^6) \cdot (8,32 \cdot 10^5)$:
- a) $4,35968 \cdot 10^{12}$ b) $43,5968 \cdot 10^{13}$ c) $4,35968 \cdot 10^{11}$ d) $4,35968 \cdot 10^{13}$

AUTOEVALUACIÓ

1. El número $8^{-3/4}$ val:
- a) Un setzè b) Dues c) Un quart d) Un mig.
2. Expressa com a potència de base 2 cadascun dels nombres que van entre parèntesis i efectua després l'operació: $(16^{1/4}) \cdot (\sqrt[6]{4}) \cdot (\frac{1}{8})$. El resultat és:
- a) $2^{-1/3}$ b) $2^{-5/4}$ c) $2^{-5/3}$ d) 2^{-5}
3. El nombre: $\sqrt[3]{4^3 \sqrt[6]{8}}$ és igual a :
- a) $6^{1/4}$ b) $2^{1/3}$ c) $2^{5/6} \cdot 6^{1/9}$ d) 2
4. Quin és el resultat de la següent expressió si l'expresssem com a potència única?: $\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{16}}$
- a) $\frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{2}}$ b) $\frac{2}{2 \cdot \sqrt[3]{2}}$ c) $\frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{2}}$ d) $\sqrt[3]{2}$
5. Simplificant i extraient factors la següent expressió té un valor: $\sqrt[2]{\sqrt{625 \cdot a^6 \cdot b^7 \cdot c^6}}$
- a) $5^3 \cdot a b c^2 \cdot \sqrt[4]{a b^2 \cdot c}$ b) $5 \cdot a^2 \cdot b \cdot c \cdot \sqrt[4]{a^2 \cdot b^3 \cdot c^2}$ c) $5 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \sqrt[4]{a^3 \cdot b^2 \cdot c^3}$ d) $5 \cdot a b c \cdot \sqrt[4]{a^2 \cdot b^3 \cdot c^2}$
6. Quin dels següents valors és igual a $a^{3/2}$?
- a) $a^{1/2} \cdot a^2$ b) $a^{5/2} \cdot a^{-1}$ c) $(a^2)^2$ d) $a^3 \cdot a^{-2}$
7. Quin és el resultat d'aquesta operació amb radicals?: $\sqrt{63} - \frac{5}{2} \cdot \sqrt{28} + \frac{\sqrt{112}}{3}$
- a) $2 \cdot \sqrt{7}$ b) $\frac{11}{8} \cdot \sqrt{7}$ c) $-\frac{2}{3} \cdot \sqrt{7}$ d) $\frac{-2}{5} \cdot \sqrt{7}$
8. Una expressió amb un únic radical de: $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{(x+2)^3} \cdot \sqrt{(x+1)}$ està donada per:
- a) $\sqrt[6]{x^2 \cdot (x+2) \cdot (x+1)}$ b) $\sqrt[8]{x^2 \cdot (x+2)^3 \cdot (x+1)}$ c) $\sqrt[12]{x^8 \cdot (x+2)^9 \cdot (x+1)^6}$ d) $\sqrt[12]{x^2 \cdot (x+2)^3 \cdot (x+1)}$
9. Per racionalitzar l'expressió: $\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ cal multiplicar numerador i denominador per:
- a) $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ b) $2 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{5}$ c) $2 + \sqrt{5}$ d) $\sqrt{5} + \sqrt{3}$
10. Quin és el resultat en notació científica de la següent operació?: $5,83 \cdot 10^9 + 6,932 \cdot 10^{12} - 7,5 \cdot 10^{10}$
- a) $6,86283 \cdot 10^{12}$ b) $6,86283 \cdot 10^{13}$ c) $6,8623 \cdot 10^{11}$ d) $6,8628 \cdot 10^{12}$
11. Quin és el resultat de la següent operació expressat en notació científica?: $\frac{5,24 \cdot 10^{10}}{6,3 \cdot 10^{-7}}$
- a) $0,8317 \cdot 10^{17}$ b) $8,317 \cdot 10^{16}$ c) $8,317 \cdot 10^{15}$ d) $83,17 \cdot 10^{16}$

RESUM:

		Exemples
Potències d'exponent natural i enter	$a^{-n} = 1/a^n$	$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$. $(-\frac{1}{2})^{-2} = (-2)^2 = 4$
Propietats de les potències	$a^n \cdot a^m = a^{m+n}$ $a^n : a^m = a^{n-m}$ $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ $a^n / b^n = (a/b)^n$	$(-3)^3 \cdot (-3)^3 = (-3)^{3+3} = (-3)^6$ $5^3 : 5^2 = 5^{2-1} = 5^1$; $(-3^5)^2 = (-3)^{5 \cdot 2} = (-3)^{10}$ $(-2)^3 \cdot (-5)^3 = ((-2) \cdot (-5))^3$ $3^4 / 2^4 = (3/2)^4$
Potències d'exponent racional. Radicals	$a^{r/s} = \sqrt[s]{a^r}$	$(16)^{3/4} = \sqrt[4]{16^3}$
Propietats dels radicals	$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^p}$ $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$	$\sqrt[3]{2} \sqrt[2]{5} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 5^2}$ $\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2 \cdot 3} = \sqrt[3]{6}$ $\sqrt[3]{a^7} = \sqrt[3]{\frac{a^7}{a^4}} = \sqrt[3]{a^{7-4}} = \sqrt[3]{a^3} = a$ $\sqrt[5]{2}^3 = \sqrt[5]{2^3}$ $\sqrt[3]{2} \sqrt[2]{5} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 5^2} = \sqrt[6]{50}$
Racionalització de radicals	Se suprimeixen les arrels del denominador. Es multiplica numerador i denominador per l'expressió adequada (conjugat del denominador, radical del numerador, etc.)	$\frac{1}{\sqrt[3]{25}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^2} \cdot \sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{5}$ $\frac{1}{5 - \sqrt{3}} = \frac{5 + \sqrt{3}}{(5 - \sqrt{3}) \cdot (5 + \sqrt{3})} = \frac{5 + \sqrt{3}}{5^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{5 + \sqrt{3}}{22}$
Notació científica	$5,83 \cdot 10^9 + 6,932 \cdot 10^{12} - 7,5 \cdot 10^{10} = 5,83 \cdot 10^9 + 6932 \cdot 10^9 - 75 \cdot 10^9 = (5,83 + 6932 - 75) \cdot 10^9 = 6862,83 \cdot 10^9 = 6,86283 \cdot 10^{12}$ $(5,24 \cdot 10^6) \cdot (6,3 \cdot 10^8) = 33,012 \cdot 10^{14} = 3,32012 \cdot 10^{15}$ $\frac{5,24 \cdot 10^6}{6,3 \cdot 10^{-8}} = (5,24 : 6,3) \cdot 10^{6 - (-8)} = 0,8317 \cdot 10^{14} = 8,317 \cdot 10^{13}$	
Logaritmes	Si $a > 0$, $\log_a m = z \Leftrightarrow m = a^z$ $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ $\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$ $\log_a x^y = y \cdot \log_a x$	$\log_a (75/25) = \log_a 75 - \log_a 25$ $\log_a 2^5 = 5 \cdot \log_a 2$ $\log_a \sqrt[3]{27} = \left(\frac{\log_a 27}{3} \right)$

CAPÍTOL 3: EXPRESSIONS ALGEBRAIQUES. POLINOMIS

ACTIVITATS PROPOSADES

1. INTRODUCCIÓ. EXPRESSIONS ALGEBRAIQUES

- A la fi de cada mes l'empresa de telefonia mòbil ens proporciona la factura mensual. En ella apareix molta informació, en particular, el nombre total de trucades realitzades (N) així com la quantitat total de minuts de conversa (M). Si l'empresa cobra 5 cèntims per establiment de trucada i 12 cèntims per minut, justifica que l'import de les trucades efectuades durant aquest mes és: $(0'05 \cdot M) + (0'12 \cdot N) = 0'05 \cdot M + 0'12 \cdot N$ €
- Recorda l'expressió algebraica que ens proporciona la longitud d'una circumferència.
- Escriu en llenguatge algebraic els següents enunciats, referits a dos nombres qualssevol x i y :
 - La meitat de l'oposat de la seva suma.
 - La suma dels seus cubs.
 - El cub de la seva suma
 - L'invers de la seva suma.
 - La suma dels seus inversos
- Una tenda de roba anuncia en els seus aparadors que està de rebaixes i que tots els seus articles estan rebaixats un 20% sobre el preu imprès en cada etiqueta. Escriu el que pagarem per una peça en funció del que apareix en la seva etiqueta.
- L'anterior comerç, en els últims dies del període de rebaixes, desitja desfer-se de les seves existències i per a això ha decidit augmentar el descompte. Manté el 20 % per a la compra d'una única peça i, a partir de la segona, el descompte total augmenta un 5 % per cada nova peça de roba, fins a un màxim de 10 articles. Analitza quant pagarem en realitzar una compra en funció de la suma total de les quantitats que figuren en les etiquetes i del nombre d'articles que s'adquireixin.
- Calcula el valor numèric de les següents expressions algebraiques per al valor o valors que s'indiquen:
 - $x^2 + 7x - 12$ per a $x = 0$.
 - $(a + b)^2 - (a^2 + b^2)$ para $a = -3$ i $b = 4$.
 - $a - 25a + 2$ para $a = -1$.
- Indica, en cada cas, el valor numèric de la següent expressió: $10x + 20y + 30z$
 - $x = 1, y = 2, z = 1$
 - $x = 2, y = 0, z = 5$
 - $x = 0, y = 1, z = 0$.

2. POLINOMIS. SUMA I PRODUCTE

- Realitza les següents summes de polinomis:
 - $(x^2 - x) + (-2x^2 - 3x + 1) + (2x^3 - 2x^2 + x - 2)$
 - $-x^4 + (x^3 + 2x - 3) + (-3x^2 - 5x + 4) + (2x^3 - x + 5)$
- Escriu el polinomi oposat de cadascun dels següents polinomis:
 - $3x^4 + 5x^3 + x^2 + 4x - 1$
 - $7x$
 - $-x^4 + 3x^2$
- Considera els polinomis $p \equiv -x^3 - 5x + 2$, $q \equiv 3x^2 + 3x + 1$, així com el polinomi suma $s \equiv p + q$. Troba els valors que adopta cadascun d'ells para $x = -2$, és a dir, calcula $p(-2)$, $q(-2)$ i $s(-2)$. Estudia si existeix alguna relació entre aquests tres valors.
- Obté el valor del polinomi $p \equiv -x^3 - 5x + 2$ en $x = 3$. Quin valor pren el polinomi oposat de p en $x = 3$?
- Efectua els següents productes de polinomis:
 - $(-4x^3 + 2x) \cdot (-3x^2)$
 - $(2x^4 + x) \cdot (-3x - 4)$
 - $(2x^3 + x^2 - x) \cdot (3x^2 - x)$
 - $(-1) \cdot (7x^3 - 4x^2 - 3x + 1)$
- Realitza les següents diferències de polinomis:
 - $(-4x^3 + 2x) - (-3x^2)$
 - $(2x^4 + x) - (-3x - 4)$
 - $(3x^2 - x) - (2x^3 + x^2 - x)$
- Multiplica cadascun dels següents polinomis per un nombre de tal forma que sorgeixin polinomis mòncics:
 - $4x^3 - 3x^2 + 2x$
 - $-2x^4 + x - 1$
 - $-x^2 + x - 7$
- Calcula i simplifica els següents productes:
 - $3x \cdot (2x^2 + 4x - 6)$
 - $(3x - 4) \cdot (4x + 6)$
 - $(2a^2 - 5b) \cdot (4b - 3a^3)$
 - $(3a - 6) \cdot (8 - 2a) \cdot (9a - 2)$
- Realitza els següents productes de polinomis:
 - $x^2 \cdot (-2x^2 - 3x + 1) \cdot 2x^3$
 - $(2x - 3) \cdot (-3x^2 - 5x + 4) \cdot (-x)$
- De cadascun dels següents polinomis extreu algun factor que sigui comú als seus monomis:
 - $-15x^3 - 20x^2 + 10x$;
 - $24x^4 - 30x^2$

3. DIVISIÓ DE POLINOMIS

18. Comprova que els càlculs que tens a continuació reflecteixen el que es va fer en l'exemple anterior per dividir el polinomi

$$p(x) = 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 \text{ entre el polinomi } q(x) = 2x^2 - x + 3.$$

1. Primera etapa:

$$\begin{array}{r} 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 \\ \underline{-6x^4 + 3x^3 - 9x^2} \\ 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} 2x^2 - x + 3 \\ 3x^2 \end{array} \right.$$

2. Primera i segona etapes:

$$\begin{array}{r} 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 \\ \underline{-6x^4 + 3x^3 - 9x^2} \\ 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 \\ \underline{-8x^3 + 4x^2 - 12x} \\ -4x^2 - 9x - 2 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} 2x^2 - x + 3 \\ 3x^2 + 4x \end{array} \right.$$

3. Les tres etapes:

$$\begin{array}{r} 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 \\ \underline{-6x^4 + 3x^3 - 9x^2} \\ 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 \\ \underline{-8x^3 + 4x^2 - 12x} \\ -4x^2 - 9x - 2 \\ \underline{4x^2 - 2x + 6} \\ -11x + 4 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} 2x^2 - x + 3 \\ 3x^2 + 4x - 2 \end{array} \right.$$

19. Divideix els següents polinomis:

a) $2x^3 - x^2 - x + 7$ entre $x^2 - 2x + 4$

b) $-10x^3 - 2x^2 + 3x + 4$ entre $5x^3 - x^2 - x + 3$

c) $4x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 3x - 7$ entre $-2x^2 + x + 3$

d) $-8x^5 - 2x^4 + 10x^3 + 2x^2 + 3x + 5$ entre $4x^3 + x^2 + x - 1$

e) $-6x^5 + x^2 + 1$ entre $x^2 + 1$

20. Troba dos polinomis tals que en dividir-los aparegui $q(x) = x^2 + x - 3$ com a polinomi quocient i $r(x) = -3x^2 + 1$ com a residu.

21. Efectua els següents càlculs: a) $\frac{2x+1}{x^2+1} + \frac{3}{x}$ b) $\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+1}$ c) $\frac{-x}{x^2+3x} \cdot \frac{1}{x-1}$ d) $\frac{x-2}{x^2+3x} : \frac{x-2}{x+3}$

22. Realitza les següents operacions alterant, en cada apartat, únicament un dels denominadors, i el seu respectiu numerador:

a) $\frac{-x^2+x-1}{x^3} + \frac{3x-2}{x^2}$ b) $\frac{x-2}{x^2+3x} - \frac{4}{x+3}$

23. Comprova les següents identitats simplificant l'expressió del costat esquerre de cada igualtat:

a) $\frac{8a^4b^2}{2a^2b} = 4a^2b$

b) $\frac{4x^3y^2 - 3xy^2}{2xy} = 2x^2y - \frac{3}{2}y$

c) $\frac{3x^2 - 9x}{6x + 12} = \frac{x^2 - 3x}{x + 4}$

d) $\frac{6y^3 + 4y^2}{2y^2 - 8y} = \frac{3y^2 + 2y}{y - 4}$

e) $\frac{6a^2b^3 + 2a^3b - 4ab}{2ab^2 + 8a^2b} = \frac{3ab^2 + a^2 - 2}{b + 4a}$

24. Calcula els següents quocients:

a) $(3x^3 - 9x^2 - 6x) : 3x$

b) $(7a^3 - 70a^2 - 21) : 7$

c) $(25x^4 - 10x^2) : 5x^2$

d) $(3x^2y^3 - 8xy^2) : xy^2$

25. Simplifica les següents fraccions algebraiques: a) $\frac{3x^2 - 6x}{9x^2 + 15}$ b) $\frac{a^3 - 5a^2}{7a^3 + 4a^2}$ c) $\frac{x^2y + 3xy^2}{4xy}$ d) $\frac{2a^2b^2 + 3ab}{a^3b - ab}$

4. DESCOMPOSICIÓ FACTORIAL D'UN POLINOMI

26. Completa, quan sigui possible, les següents factoritzacions:

a) $-2x^3 + 2x = -2x \cdot (\quad)$

b) $-6x^2 + 5x + 6 = (2x - 3) \cdot (\quad)$

c) $-6x^4 + 3x^3 - 3x + 6 = (2x^2 - x + 1) \cdot (\quad)$

d) $-6x^4 + 3x^3 - 3x + 6 = (2x^2 - x + 2) \cdot (\quad)$

27. Determina un polinomi de grau 4 que admeti una descomposició factorial en la qual participi el polinomi $6x^3 - x^2 + 3x - 1$.

28. Estudia si els següents nombres són o no arrel dels polinomis indicats:

a) $x=3$ de $x^3 - 3x^2 + 1$

b) $x=-2$ de $x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

c) $x=1$ de $x^3 - 3x^2 + x + 1$

d) $x=0$ de $x^3 - 3x^2 + 1$

e) $x=-1$ de $x^3 - 3x^2 - x + 3$

29. Suposem que tenim dos polinomis, $p_1(x)$ i $p_2(x)$, i un nombre real α .

- Si α és una arrel de $p_1(x)$, també és arrel del polinomi suma $p_1(x) + p_2(x)$?
- Si α és una arrel de $p_1(x)$, també és arrel del polinomi producte $p_1(x) \cdot p_2(x)$?
- Hi ha alguna relació entre les arrels del polinomi $p_1(x)$ i les del polinomi $4 \cdot p_1(x)$?

30. Construeix un polinomi de grau 3 tal que posseeixi tres arrels diferents.

31. Determina un polinomi de grau 3 tal que tingui, almenys, una arrel repetida.

32. Construeix un polinomi de grau 3 de manera que tingui una única arrel.

33. Conjectura, i després demostra, una llei que ens permeti saber quan un polinomi qualsevol $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ admet al número 0 com a arrel.

34. Demostra una norma que assenyali quan un polinomi qualsevol $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ admet al número 1 com a arrel.

35. Obté totes les arrels de cadascun dels següents polinomis:

a) $x+7$

b) $-x+5$

c) $2x-3$

d) $-4x-9$

e) $-2x$

f) $x^2 - 3x$

g) $4x^2 - x - 3$

h) $x^3 - x$

i) $x^3 + x$

36. Usa la regla de Ruffini per realitzar les següents divisions de polinomis:

a) $-2x^2 + x + 1$ entre $x+1$

b) $x^3 + 2x^2 - 2x + 1$ entre $x+2$

c) $4x^3 - 3x^2 - 1$ entre $x-1$

d) $x^3 - 9x + 1$ entre $x-3$

37. Empra la regla de Ruffini per dictaminar si els següents nombres són o no arrels dels polinomis citats:

a) $\alpha=3$ de $x^3 - 4x^2 + 5$

b) $\beta=-2$ de $-x^3 - 2x^2 + x + 2$

c) $\gamma=1$ de $-2x^4 + x + 1$

d) $\sigma=-1$ de $2x^3 + 2x^2$

38. Utilitza la regla de Ruffini per conèixer el valor del polinomi $-x^3 + 2x^2 + x + 2$ en $x=3$.

39. Estudia si és possible usar la regla de Ruffini, d'alguna forma, per dividir $x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ entre $2x+6$.

40. Per a cadascun dels següents polinomis assenyala, en primer lloc, quins nombres enters són candidats a ser arrels seves i, després, determina quins el són:

a) $x^3 - x^2 + 2x - 2$

b) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 3$

c) $2x^3 + x^2 - 18x - 9$

d) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 6x$

41. Completa l'exemple precedent comprovant que, en efecte, $\frac{-1}{2}$ és arrel del polinomi $2x^3 + x^2 - 18x - 9$.

42. Per a cadascun dels següents polinomis indica què nombres racionals són candidats a ser arrels seves i, després, determina quins ho són:

a) $3x^2 + 4x + 1$

b) $2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$

43. Simplifica, si és possible, les següents expressions: a) $\frac{x^2 + 4x}{x^3 + 3x^2 - 6x - 8}$ b) $\frac{x^2 - 1}{x^3 + 3x^2 - 6x - 8}$ c) $\frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 - 6x}$

44. Realitza les següents operacions tenint en compte les factoritzacions dels denominadors:

a) $\frac{5}{-3x+12} + \frac{x+2}{x^2-4x}$

b) $\frac{-x}{x^2-2x+1} - \frac{3x-1}{x^2-1}$

45. Realitza els càlculs: a) $(1+3a)^2$ b) $(-x+3)^2$ c) $(-3x-2)^2$ d) $(x^2-1)^3$ e) $(4x+2)^3$

46. Obté les fórmules dels quadrats dels següents trinomis: a) $(a+b+c)^2$; b) $(a+b-c)^2$
47. Desenvolupa les següents potències: a) $(2x+3y)^2$; b) $(3x+y/3)^2$; c) $(5x-5/x)^2$; d) $(3a-5)^2$; e) $(a-2b)^2$; f) $(3/5y-2/y)^2$
48. Expressa com quadrat d'una suma o d'una diferència les següents expressions algebraiques:
 a) a^2+6a+9 b) $4x^2-4x+1$ c) $b^2-10b+25$ d) $4y^2+12y+9$ e) a^4-2a^2+1 f) y^4+6y^2+9
49. Efectua aquests productes: a) $(4x+3y) \cdot (4x-3y)$; b) $(2x^2+4) \cdot (2x^2-4)$; c) $(-x^2+3x) \cdot (x^2+3x)$
50. Factoriza els següents polinomis: a) x^2-2x+1 ; b) $3x^2+18x+27$; c) $4x^5-16x^3$
51. Calcula els següents productes:
 a) $(3x+1) \cdot (3x-1)$ b) $(2a-3b) \cdot (2a+3b)$ c) $(x^2-5) \cdot (x^2+5)$ d) $(3a^2+5) \cdot (3a^2-5)$
52. Expressa com a suma per diferència les següents expressions: a) $9x^2-25$; b) $4a^4-81b^2$; c) $49-25x^2$; d) $100a^2-64$
53. Simplifica les següents fraccions algebraiques: a) $\frac{x^2-1}{3x+3}$; b) $\frac{2x^2+12x+18}{x^2-9}$; c) $\frac{6-3a}{a^2-4}$

EXERCICIS I PROBLEMES.

1. En aquest exercici es va a presentar un *truc* mitjançant amb el qual anem a endevinar el nombre que resulta després de manipular repetidament un nombre desconegut. Converteix en una expressió algebraica les successives alteracions del nombre desconegut i justifica el que ocorre.
- Demana a un company que escrigui en un paper un nombre natural i que no ho mostri
 - Que ho multipliqui per 10
 - Que al resultat anterior li sumi 100
 - Que multipliqui per 1000 el nombre obtingut
 - Que divideixi entre 10000 la darrera quantitat
 - Que al resultat li resti el nombre que va escriure
 - Independentment del nombre desconegut original quin nombre ha donat?
2. En aquest altre exercici anem a *endevinar* dos nombres que ha pensat un company. Construeix una expressió algebraica que reculli tots els passos i, finalment, descobreix el truc.
- Sol·licita a un company que escrigui en un paper, i no els mostri, dos nombres naturals: un d'una xifra (entre 1 i 9) i un altre de dues xifres (entre 10 i 99).
 - Que multipliqui per 4 el nombre escollit d'una xifra.
 - Que al resultat anterior li sumi 3.
 - Que multipliqui per 5 el nombre obtingut.
 - Que a l'última quantitat li resti 15.
 - Que multipliqui el resultat per 5.
 - Que li sumi a l'anterior el nombre de dues xifres que va triar.
 - Demana al company que desvetlli quin és el resultat de tots aquests canvis.
 - Què hem de fer per descobrir els dos nombres que va escollir el company?
3. Estudia si hi ha nombres reals per als quals les següents expressions no poden ser avaluades:
- $$\frac{3x-6}{(x+2) \cdot (2x-14)} \quad \frac{-x}{x^2-4x+4} \quad \frac{3x^3-x}{-2x^4-3x^2-4} \quad \frac{5x-y+1}{x^2+y^2}$$
4. Una persona té estalviats 1000 euros i decideix dipositar-los en un producte bancari amb un tipus d'interès anual del 3%. Si decideix recuperar els seus estalvis al cap de dos anys, quina serà la quantitat total de la qual disposarà?
5. Generalitzem l'exercici anterior: Si ingresem x euros en un dipòsit bancari el tipus d'interès del qual és de el i % anual, quina serà la quantitat que recuperarem al cap d' n anys?
6. Construeix un polinomi de grau 2, $p(x)$, tal que $p(3) = -7$.
7. Considerem els polinomis $p(x) = -5x^3 + x^2 - 3x - 2$, $q(x) = 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 7$ i $r(x) = 4x^2 + 5x - 1$. Realitza les següents operacions: a) $p+q+r$; b) $p-q$; c) $p \cdot r$; d) $p \cdot r - q$
8. Calcula els productes: a) $\left(\frac{ax}{3} - \frac{by}{2}\right) \cdot \left(\frac{-xy}{6}\right)$ b) $(0,3x - 0,2y + 0,1z) \cdot (0,1x + 0,2y - 0,3z)$ c) $(x-1)(x-a)(x-b)$
9. Efectua les divisions de polinomis: a) $2x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 9x - 1$ entre $2x^2 + 3x - 3$;
 b) $4x^5 - 5x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 10x - 6$ entre $x^3 + 2x + 3$
10. Calcula els quocients: a) $(5x^4):(x^2)$ b) $(3x^2y^4z^6) : ((1/2)xy^3z^5)$ c) $(x^4 + 2x^2y + y^2) : (x^2 + y)$
11. Realitza les operacions entre fraccions algebraiques:
- $$\frac{x-1}{x^2-3x} + \frac{2x}{x^2-6x+9} \quad \frac{x-1}{x^2-3x} - \frac{2x}{x^2-6x+9} \quad \frac{x-1}{x^2-3x} \cdot \frac{2x}{x^2-6x+9} \quad \frac{x-1}{x^2-3x} : \frac{2x}{x^2-6x+9}$$

12. Construeix un polinomi de grau 2 tal que el nombre -5 sigui arrel seva.
13. Determina un polinomi de grau 3 tal que les seves arrels siguin 6 , -3 i 0 .
14. Construeix un polinomi de grau 4 tal que tingui únicament dues arrels reals.
15. Troba un polinomi $q(x)$ tal que en dividir $p(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$ entre $q(x)$ s'obtingui com a polinomi residu $r(x)=5x^2+5x+1$.
16. Troba les arrels enteres dels següents polinomis:
 $3x^3+11x^2+5x-3$ $3x^3+2x^2+8x-3$ $3x^3+5x^2+x-1$ $2x^3+x^2-6x-3$
17. Obté les arrels racionals dels polinomis de l'exercici anterior.
18. Descompon els següents polinomis com a producte de polinomis irreductibles:
 $3x^3+11x^2+5x-3$ $3x^3+5x^2+x-1$ $2x^3+x^2-6x-3$ $3x^3-6x^2+x-2$
19. Calcula les potències: a) $(x-2y+z)^2$ b) $(3x-y)^3$ c) $((1/2)a+b)^2$ d) $(x^3-y^2)^2$
20. Analitza si els següents polinomis han sorgit del desenvolupament de potències de binomis, o trinomis, o d'un producte suma per diferència. En cas afirmatiu expressa la seva procedència.
- x^2+6x+9 x^4-8x^2+16 $x^2+\sqrt{20}xy+5y^2$
 - $x^4+2x^3+x^2+2x+1$ $x^4-2x^3+x^2+2x+1$ x^2-36
 - $5x^2+1$ $5x^2-11$ x^2-3y^2
21. Descompon en factors: a) x^4-1 b) x^2-y^2 c) $x^2y^2-z^2$ d) $x^4-2x^2y+y^2$
22. Amb aquest exercici es pretén mostrar la conveniència a l'hora de no operar una expressió polinòmica que tenim factoritzada total o parcialment. a) Comprova la igualtat $x^4-5x^2+6=(x^2-2)\cdot(x^2-3)$. b) Determina totes les arrels del polinomi x^4-5x^2+6 .
23. Factoritza numerador i denominador i simplifica: a) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$ b) $\frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{x^2+y^2}$ c) $\frac{x^3-x}{x^4-1}$
24. Efectua les següents operacions i simplifica tot el possible:
a) $\frac{2}{x(5-x)} - \frac{3}{2(5-x)}$ b) $\frac{x-y}{x+y} \cdot \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ c) $\frac{2x+1}{4x^2-1}$
25. Efectua les següents operacions i simplifica tot el possible:
a) $\frac{x^4-1}{x^7} : \frac{x^2+1}{x^8}$ b) $\frac{2x+3y}{a-b} - \frac{3x+4y}{2a-2b}$ c) $-4x+(1-x^4)\left(\frac{x+1}{1-x} - \frac{1-x}{1+x}\right)$
26. Efectua les següents operacions i simplifica tot el possible:
a) $\left(x^4 - \frac{1}{x^2}\right) : \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)$ b) $\frac{x^3-3ax^2+3a^2x-a^3}{x+a} : \frac{x-a}{x+a}$ c) $\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}\right) : \frac{ab}{a+b}$
27. Efectua les següents operacions i simplifica tot el possible:
a) $\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{x+y}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{x+y}} : \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a+y}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{a+y}}$ b) $\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) : \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)$ c) $\frac{\frac{3}{x} + \frac{2}{y}}{\frac{1}{x} - \frac{3}{y}} : \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{y}}{\frac{3}{x} + \frac{5}{y}}$

AUTOAVALUACIÓ

1. Assenyal·la els coeficients que apareixen en les següents expressions algebraiques:
 - a) $\frac{3x-7}{2-3y^2} + 5xy^3 - \frac{6}{z}$
 - b) $-2x^5 + x^4 - x^3 + 5x - 1$
 - c) $5 \cdot \sqrt{2} \cdot x \cdot y^2 \cdot z$
2. El valor numèric de l'expressió $\frac{3x-7}{2-3y^2} + 5xy^3 - \frac{6}{z}$ en $x=2, y=-1, z=-1$ és:
 - a) 17
 - b) 15
 - c) -3
 - d) -5
3. Completa adequadament les següents frases:
 - a) La suma de dos polinomis de grau dos és sempre un altre polinomi de grau
 - b) La suma de tres polinomis de grau dos és sempre un altre polinomi de grau
 - c) El producte de dos polinomis de grau dos és sempre un altre polinomi de grau
 - d) La diferència de dos polinomis de grau dos és sempre un altre polinomi de grau
4. En dividir el polinomi $p(x) = x^5 + x^4 + x^3 + 1$ entre $q(x) = x^2 + x + 1$ el polinomi resto resultant:
 - a) ha de ser de grau 2.
 - b) pot ser de grau 2.
 - c) ha de ser de grau menor que 2.
 - d) cap de les opcions precedents.
5. Considera el polinomi $2x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 7x + 3$. Quins dels següents nombres enters són *raonables candidats* per ser una arrel seva?
 - a) 3
 - b) 2
 - c) -5
 - d) -7
6. Considera el polinomi $2x^4 + 7x^3 + x^2 - 7x - 3$. Quins dels següents nombres racionals són *raonables candidats* per ser una de les seves arrels?
 - a) -3
 - b) $2i - \frac{1}{2}$
 - c) $-3i + \frac{1}{3}$
 - d) $-3i + \frac{3}{2}$
7. Tot polinomi amb coeficients sencers de grau tres
 - a) té tres arrels reals.
 - b) té, com a màxim, tres arrels reals.
 - c) té, almenys, tres arrels.
8. És possible que un polinomi, amb coeficients enters, de grau quatre tingui exactament tres arrels, ja siguin diferents o amb alguna múltiple?
9. Justifica la veracitat o falsedat de cadascuna de les següents frases:
 - a) La regla de Ruffini serveix per dividir dos polinomis qualssevol.
 - b) La regla de Ruffini permet dictaminar si un nombre és arrel o no d'un polinomi.
 - c) La regla de Ruffini solament és vàlida per a polinomis amb coeficients enters.
 - d) La regla de Ruffini és un algorisme que ens proporciona totes les arrels d'un polinomi.
10. Analitza si pot haver-hi algun polinomi de grau vuit que no tingui cap arrel.

RESUM

Noció	Descripció	Exemples
Expressió algebraica	Expressió matemàtica que es construeix amb nombres reals i les operacions matemàtiques bàsiques de suma, resta, multiplicació i/o divisió	$\frac{-3x}{2x+y^3} - x \cdot y^2 \cdot z$
Variable, indeterminada	El valor no concretat en una expressió algebraica	Les variables, o indeterminades, de l'exemple anterior són x, y, z .
Valor numèric d'una expressió algebraica	En fixar un valor concret per a cada indeterminada, o variable, d'una expressió algebraica apareix un nombre real: el valor numèric d'aquesta expressió algebraica per a tals valors de les indeterminades	Si, en l'expressió precedent, fem $x=3, y=-2, z=1/2$ obtenim $\frac{-3 \cdot 3}{2 \cdot 3 + (-2)^3} - 3 \cdot (-2)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{-3}{2}$
Monomi	Expressió donada pel producte de nombres reals i indeterminades	$-5 \cdot x \cdot y^3 \cdot z^2, 7 \cdot x^2$
Coefficient d'un monomi	El nombre real que multiplica a la indeterminada, o indeterminades, del monomi	Els coeficients dels anteriors monomis són, respectivament, -5 i 7
Part literal d'un monomi	La indeterminada, o producte d'indeterminades, que multiplica al coeficient del monomi	La part literal de $-5 \cdot x \cdot y^3 \cdot z^2$ és $x \cdot y^3 \cdot z^2$
Grau d'un monomi	Quan hi ha una única indeterminada és l'exponent d'aquesta indeterminada. Si apareixen diverses, el grau del monomi serà la suma dels exponents d'aquestes indeterminades	Els graus dels monomis precedents són 6 i 2 , respectivament
Polinomi	Expressió construïda a partir de la suma de monomis	$-x^3 + 4x^2 + 8x + 6$
Grau d'un polinomi	El major grau dels seus monomis	L'anterior polinomi és de grau 3
Suma, resta i producte de polinomis	El resultat sempre és un altre polinomi	$p = -3x + 6; q = x^2 + 4.$ $p + q = x^2 - 3x + 10; p - q = -x^2 - 3x + 2;$ $p \cdot q = -3x^3 + 6x^2 - 12x + 24.$
Divisió de dos polinomis	S'obtenen altres dos polinomis, els polinomis quocient ($c(x)$) i residu ($r(x)$), lligats als polinomis inicials, els polinomis dividend ($p(x)$) i divisor ($q(x)$)	$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$
Factorització d'un polinomi	Consisteix a expressar-ho com a producte d'altres polinomis de menor grau	$x^5 - 3x^3 - x^2 + 3 = (x^2 - 3) \cdot (x^3 - 1)$
Polinomi irreductible	És aquell que no pot ser expressat com a producte d'altres polinomis de grau inferior	$-3x + 6, x^2 + 4$
Arrel d'un polinomi	Un nombre real concret α és una arrel, o un zero, del polinomi p , si en avaluar p en $x = \alpha$ obtenim el número 0 , és a dir, si $p(\alpha) = 0$	2 és arrel de $-3x + 6$ 1 i -3 són arrels de $x^2 + 2x - 3$
Arrels i factorització	El que un nombre real concret α sigui una arrel del polinomi $p(x)$ és equivalent al fet que el polinomi $p(x)$ admeti una descomposició factorial de la forma $p(x) = (x - \alpha) \cdot c(x)$ per a cert polinomi $c(x)$	-2 és una arrel de $x^3 + 2x^2 - x - 2$ $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x + 2) \cdot (x^2 - 1)$
Nombre d'arrels i grau	Tot polinomi de grau n té com a màxim n arrels reals, alguna de les quals pot aparèixer repetida entre aquests no més de n nombres reals	$x^2 + 2x - 3$ té dues arrels, 1 i -3 $3x^2 + 7$ no té arrels
Regla de Ruffini	Ens pot ajudar a l'hora de factoritzar un polinomi i conèixer les seves arrels	

CAPÍTOL 4: EQUACIONS I SISTEMES

ACTIVITATS PROPOSADES

1. EQUACIONS DE SEGON GRAU

1. Indica si són equacions de segon grau les següents equacions:

a) $3x^2 - \sqrt{7}x + 5 = 0$ b) $4,7x^2 + 6,25 = 0$ c) $7x^2 - \frac{2}{x} + 5x = 0$ d) $2xy^2 - 5 = 0$ e) $33 - 2,35x = 0$ f) $9x^2 - 52\sqrt{x} + 3'2 = 0$

2. En les següents equacions de segon grau, indica qui són a, b i c.

a) $3 - 8x^2 + 10x = 0$ b) $-3,4x^2 + 7,8x = 0$ c) $6x^2 - 1 = 0$ d) $1,25x^2 - 3,47x + 2,75 = 0$.

3. Resol les següents equacions de 2n grau completes:

a) $x^2 - 8x + 7 = 0$ b) $2x^2 + 3x - 12 = 0$ c) $10x^2 - 9x + 50 = 0$ d) $x^2 - 13x + 22 = 0$

4. Resol les següents equacions:

a) $2x - 3 \cdot \frac{x-1}{5} = 6x^2 - \frac{8x-3}{5}$; b) $2 \cdot \frac{x-7}{5} - \frac{3-2x}{x} = 10$; c) $5x(x-3) + 4(x^2-5) + 10 = -10$;

d) $5(x^2-1) + 3(x^2-5) + 4 = 16$; e) $\frac{2-5x^2}{3x} - \frac{4}{3} = \frac{4x-7}{6}$; f) $\frac{2-3x^2}{5x} - \frac{4}{3} = \frac{2x-1}{15}$.

5. Esbrina quantes solucions tenen les següents equacions de 2n grau:

a) $9x^2 + 4x + 7 = 0$ b) $3x^2 - 5x + 2 = 0$ c) $x^2 - 9x - 12 = 0$ d) $2x^2 - 7x + 9 = 0$.

6. Resol les següents equacions de 2n grau incompletes:

a) $5x^2 + 75x = 0$ b) $4x^2 - 160 = 0$ c) $x^2 - 64 = 0$ d) $3x^2 + 2x = 0$ e) $9x^2 - 49 = 0$ f) $3x^2 - 33x = 0$.

7. Resol les següents equacions de 2º grau incompletes:

a) $3x^2 + 18x = 0$ b) $5x^2 - 180 = 0$ c) $x^2 - 49 = 0$ d) $2x^2 + x = 0$ e) $4x^2 - 25 = 0$ f) $5x^2 - 10x = 0$.

8. Resol mentalment les següents equacions de 2º grau:

a) $2x^2 + 8x = 0$ b) $x^2 + 6x - 27 = 0$ c) $x^2 - 81 = 0$ d) $x^2 - 13x + 22 = 0$ e) $x^2 - 3x - 4 = 0$ f) $x^2 - 5x - 24 = 0$

9. Escriu una equació de segon grau les solucions del qual siguin 5 i 9.

10. El perímetre d'un rectangle mesura 20 cm i la seva àrea 24 cm². Calcula mentalment les seves dimensions.

11. Si 3 és una solució de $x^2 - 7x + a = 0$, quant val a?

2. ALTRES TIPUS D'EQUACIONS

12. Resol les equacions següents:

a) $(x-7) \cdot (x-2) \cdot (x+5) \cdot (x-3) \cdot (x-11) = 0$ b) $3(x-5) \cdot (x-7) \cdot (x+2) \cdot (x-3) \cdot (x-4) = 0$

13. Resol les següents equacions biquadrades:

a) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ b) $x^4 + 12x^2 + 35 = 0$ c) $x^4 - 4x^2 - 12 = 0$.

14. Resol les equacions biquadrades següents:

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ b) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$ c) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ d) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$.

15. Resol les següents equacions racionals:

a) $\frac{1}{x^2-x} - \frac{1}{x-1} = 0$ b) $\frac{1}{x-6} + \frac{x}{x-2} = \frac{4}{x^2-8x+12}$ c) $\frac{3}{x} = 1 + \frac{x-13}{6}$.

16. Resol les següents equacions irracionals:

a) $\sqrt{5x+4} - 1 = 2x$ b) $\sqrt{x+19} + 1 = \sqrt{2x+4}$ c) $3\sqrt{x-1} + 11 = 2x$.

17. Resol les equacions següents:

a) $(x-9) \cdot (x-1) \cdot (x+24) \cdot (x-5) \cdot (x-3) = 0$ b) $3(x-5) \cdot (x-9) \cdot (x+2) \cdot (x-1) \cdot (x-4) = 0$

18. Resol les equacions biquadrades següents:

a) $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$ b) $x^4 - 21x^2 + 12100 = 0$ c) $x^4 - 45x^2 + 234 = 0$ d) $x^4 - 37x^2 + 36 = 0$

19. Resol les equacions racionals següents:

a) $\frac{2x-1+7x}{3x} = \frac{3}{x} - 2$ b) $\frac{1}{x} + 1 - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{4}{3}$ d) $\frac{2x-3}{x} + \frac{1}{x} = 1$

20. Resol les equacions irracionals següents:

a) $5 + \sqrt{x-1} = x+2$ b) $\sqrt{x-2} + 3\sqrt{x-2} = x+1$ c) $\sqrt{x-4} = x-1$ d) $7 + \sqrt{x+4} = x+9$

21. Resol les equacions exponencials següents:

a) $5^{3x} = \frac{1}{625}$ b) $2^{2x} \cdot 4^x = \frac{1}{16}$ c) $2^{-x+5} \cdot 2^{x+4} \cdot 2^{x+3} = 8$

3. SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS

22. Raona si són o no sistemes d'equacions lineals els següents sistemes:

$$a) \begin{cases} 7xy + 5y = 2 \\ 3x - 5y = 8 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2y - 4x = 3 \\ 3x - 5y = -6 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3x - 4 = 2y \\ 6x + 8y = 9 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 2x^2 + 3y = 5 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

23. Representa els següents sistemes i classifica'ls:

$$a) \begin{cases} 2x + y = 4 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x - y = 4 \\ -y + 3x = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3x - 9y = 9 \\ 2x - 6y = 6 \end{cases}$$

24. Resol gràficament els següents sistemes i classifica'ls:

$$a) \begin{cases} 2x + y = 6 \\ -3x + y = -1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - y = 3 \\ -2y + 2x = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 4x - 6y = 6 \end{cases}$$

25. Resol gràficament els següents sistemes i classifica'ls:

$$a) \begin{cases} x + y = 5 \\ -3x + y = -3 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - y = 3 \\ -2y + x = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x - 4y = 4 \end{cases}$$

26. Resol els següents sistemes pel mètode de substitució:

$$a) \begin{cases} 2x + 5y = -6 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 4x + y = 8 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 5x - 2y = 3 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$$

27. Resol els següents sistemes pel mètode de substitució:

$$a) \begin{cases} 3x + 4y = 26 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x + 4y = 26 \\ 3x + y = 24 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ 2x + 3y = 14 \end{cases}$$

28. Resol els següents sistemes pel mètode d'igualació:

$$a) \begin{cases} x + y = 11 \\ -x + 3y = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x - 5y = 4 \\ 2x + 7y = -11 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 7x - 3y = 5 \\ 3x + 4y = 11 \end{cases}$$

29. Resol els següents sistemes pel mètode d'igualació:

$$a) \begin{cases} 3x + y = 2 \\ -2x + y = -5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ 4x + 5y = 12 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 9x - 2y = 7 \\ x + 3y = 8 \end{cases}$$

30. Resol els següents sistemes pel mètode de reducció:

$$a) \begin{cases} x + 2y = 3 \\ -2x - 5y = 4 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x - 4y = 5 \end{cases}$$

31. Resol els següents sistemes pel mètode de reducció:

$$a) \begin{cases} 3x + y = 8 \\ x - 5y = -9 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + 3y = 9 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - 2y = 7 \end{cases}$$

5. SISTEMES D'EQUACIONS NO LINEALS

32. Raona si són o no sistemes d'equacions lineals els següents sistemes:

$$a) \begin{cases} x \cdot y + 2y = 6 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 5y - x = 4 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 4x - 2 = y \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x^2 + y = 2 \\ 3x + y^2 = 4 \end{cases}$$

33. Resol els següents sistemes no lineals:

$$a) \begin{cases} x \cdot y + 2 = 4x \\ y - x = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} y^2 - x^2 = 5 \\ 5x - 3y = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + y = 7 \\ x \cdot y = 12 \end{cases}$$

34. Resol els següents sistemes i comprova gràficament les solucions:

$$a) \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - y = 1 \\ xy = 2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ xy = 4 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} x^2 + y^2 = 18 \\ y = x \end{cases}$$

35. La trajectòria d'un projectil és una paràbola d'equació: $y = -x^2 + 5x$, i la trajectòria d'un avió és una recta d'equació: $y = 3x$. En quins punts coincideixen ambdues trajectòries? Representa gràficament la recta i la paràbola per comprovar el resultat.

36. Resol els següents sistemes:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = -2 \\ 2x^2 - 3y^2 = -1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 3x^2 + y^2 = 3 \\ 5x^2 - 2y^2 = 5 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} xy = \frac{1}{2} \\ x + y = \frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} x^2 - 4y = -3 \\ xy = 1 \end{cases} \quad \text{e) } \begin{cases} x + y - \frac{y}{x} = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \end{array}$$

37. Resol els següents sistemes:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{cases} 2x + y - 3z = -2 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x + y + 2z = 6 \\ x + 2y + 2z = 4 \\ 3x - 2y - 3z = 3 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 3x + 2y - 2z = 5 \\ x - 2y + 2z = -1 \\ x - 2y - 3z = -6 \end{cases} \end{array}$$

3. RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

38. Quin nombre multiplicat per 4 és 5 unitats menor que el seu quadrat?
39. En una classe decideixen que tots van a enviar una carta a la resta de companys. Un diu: Anem a escriure 380 cartes! Calcula el nombre d'alumnes que hi ha en la classe.
40. Calcula tres nombres consecutius tals que la suma dels seus quadrats sigui 365.
41. Una fotografia rectangular mesura 14 cm de base i 10 cm d'altura. Al voltant de la foto hi ha un marge d'igual amplària per a la base que per a l'altura. Troba l'ample del marge, sabent que l'àrea total de la foto i el marge és de 252 cm².
42. El triple del quadrat d'un nombre augmentat en el seu doble és 85. Quin és el nombre?
43. Un triangle isòsceles té un perímetre de 20 cm i la base mesura 4 cm, calcula els costats del triangle i la seva àrea.
44. Una fulla de paper quadrada es doblega per la meitat. El rectangle resultant té un àrea de 8 cm². Quin és perímetre d'aquest rectangle?
45. Un pare diu: "El producte de l'edat del meu fill fa 5 anys pel de la seva edat fa 3 anys és la meua edat actual, que són 35 anys". Calcula l'edat del fill.
46. Troba les dimensions de rectangle l'àrea del qual és 21 m², sabent que els seus costats es diferencien en 4 metres.
47. En un triangle rectangle el catet major mesura 4 cm menys que la hipotenusa i 4 cm més que l'altre catet. Quant mesuren els costats del triangle?
48. Troba dos nombres parells consecutius el producte dels quals sigui 224.
49. Troba tres nombres imparells consecutius tals que si al quadrat del major se li resten els quadrats dels altres dos s'obté com a resultat 15.
50. La suma de les edats de Maria i Alfons són 65 anys. L'edat d'Alfons menys la meitat de l'edat de Maria és igual a 35. Quina edat té cadascú?
51. La suma de les edats de Mariló i Xavier és 32 anys. Dins de 7 anys, l'edat de Xavier serà igual a l'edat de Mariló més 20 anys. Quina edat té cadascun en l'actualitat?
52. Troba dos nombres la diferència dels quals sigui 24 i la seva suma sigui 104.
53. Un hotel té 42 habitacions (individuals i dobles) i 62 llits, quantes habitacions té de cada tipus?
54. En un triangle rectangle la hipotenusa mesura 10 cm i les longituds dels seus dos catets sumen 14 cm. Calcula l'àrea del triangle.
55. Neus li pregunta a Míriam per les seves qualificacions en Matemàtiques i en Llengua. Míriam li diu "La suma de les meves qualificacions és 19 i el producte 90". Neus li dona l'enhorabona. Quines qualificacions va obtenir?
56. D'un nombre de tres xifres se sap que sumen 12, que la suma dels seus quadrats és 61, i que la xifra de les desenes és igual a la de les centenes més 1. Quin nombre és?
57. Es tenen tres suc's composts de la següent manera: El primer de 40 dl de taronja, 50 dl de llimona i 90 dl d'aranja . El segon de 30 dl de taronja, 30 dl de llimona i 50 dl d'aranja . El tercer de 20 dl de taronja, 40 dl de llimona i 40 dl d'aranja . Es demana què volum haurà de prendre's de cadascun dels suc's anteriors per formar un nou suc de 34 dl de taronja, 46 dl de llimona i 67 dl d'aranja .
58. Es venen tres espècies de cereals: blat, ordi i mill. Cada kg de blat es ven per 2 €, el de l'ordi per 1 € i el de mill per 0,5 €. Si es ven 200 kg en total i s'obté per la venda 300 €, quines quantitats de cada cereal s'han venut?
59. Es desitja barrejar farina de 2 €/kg amb farina d'1 €/kg per obtenir una barreja d'1,2 €/kg. Quants kg haurem de posar de cada preu per obtenir 300 kg de barreja?
60. En una tenda hi ha dos tipus de joguines, els de tipus A que utilitzen 2 piles i els de tipus B que utilitzen 5 piles. Si en total en la tenda hi ha 30 joguines i 120 piles, quantes joguines hi ha de cada tipus?
61. Un vianant surt d'una ciutat A i es dirigeix a una ciutat B que està a 15 km de distància a una velocitat de 4 km/h, i en el mateix moment surt un ciclista de la ciutat B a una velocitat de 16 km/h i es dirigeix cap a A, quant temps porta el vianant caminant en el moment de la trobada? A quina distància de B es creuen?

EXERCICIS I PROBLEMES.

Equacions de segon grau

1. Resol les següents equacions de 2n grau

a) $-x^2 - 7x - 12 = 0$

b) $x(-5 + x) = 3$

c) $3x^2 = 30x$

d) $3(x+1) - x(5x+2) = 7$

e) $3(7x-2) + 3x(x-4) = 1$

f) $4(x^2-4) - 5(3+2x) = -7$

g) $(3x+2) \cdot (4x-2) = -6x-2$

h) $x \cdot (x+13) = 168$

i) $2(3x^2-5x+2) - 5x(6x-3) = -2$

2. Resol les següents equacions de 2n grau amb denominadors:

a) $\frac{x^2-3}{2} - \frac{x+2}{4} = 5$

b) $\frac{x^2-5}{2} + \frac{2x^2-3x+7}{2} = 5$

c) $\frac{2x^2+1}{5} + \frac{x+3}{10} = 1$

d) $\frac{2-2x^2}{3} + \frac{4x-3}{2} = \frac{5}{6}$

e) $\frac{x^2-1}{3} - \frac{5x-9}{6} = 4x-3$

f) $\frac{2x+3x^2}{7} - \frac{3x-8}{14} = 1$

3. Resol mentalment les següents equacions de 2n grau:

a) $x^2 - 3x - 10 = 0$

b) $x^2 + 3x - 10 = 0$

c) $x^2 + 7x + 10 = 0$

d) $x^2 - 7x + 10 = 0$

e) $x(-1+x) = 0$

f) $2x^2 = 50$

g) $x^2 - 5x + 6 = 0$

h) $x^2 - x - 6 = 0$

i) $x^2 + x - 6 = 0$

4. Factoritza les equacions del problema anterior. Així, si les solucions són 2 i 3, escriu: $5x^2 - 25x + 30 = 0 \Leftrightarrow 5(x-2) \cdot (x-3) = 0$. Observa que si el coeficient de x^2 és diferent d'1 els factors s'han de multiplicar per aquest coeficient.5. Quan el coeficient b és parell ($b = 2B$), pots simplificar la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2B \pm \sqrt{4B^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2B \pm 2\sqrt{B^2 - ac}}{2a} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - ac}}{a}$$

Així per resoldre $x^2 - 8x + 12 = 0$ es pot dir $x = 4 \pm \sqrt{16-12} = 4 \pm 2$, i així les seves solucions són 6 i 2.Utilitza aquesta expressió per resoldre: a) $x^2 - 2x - 8 = 0$ b) $x^2 - 6x - 7 = 0$ c) $x^2 + 4x - 5 = 0$

6. Resol mentalment les equacions següents, després desenvolupa les expressions i utilitza la fórmula general per tornar a resoldre-les.

a) $(x-2) \cdot (x-5) = 0$

b) $(x+1) \cdot (x-6) = 0$

c) $(x-3) \cdot (x-5) = 0$

d) $(x-4) \cdot (x+7) = 0$

e) $(x+8) \cdot (x-9) = 0$

f) $(x-2) \cdot (x+3) = 0$

7. Determina el nombre de solucions reals que tenen les següents equacions de segon grau calculant el seu discriminant, després resol-les.

a) $x^2 + 7x - 3 = 0$

b) $5x^2 + 7x - 8 = 0$

c) $2x^2 + 3x + 9 = 0$

d) $2x^2 - 2x + 7 = 0$

e) $3x^2 - 2x - 7 = 0$

f) $4x^2 + x - 5 = 0$

8. Escriu tres equacions de segon grau que no tinguin cap solució real. *Ajuda:* Utilitza el discriminant.

9. Escriu tres equacions de segon grau que tinguin una solució doble.

10. Escriu tres equacions de segon grau que tinguin dues solucions reals i diferents.

11. Resol les següents equacions polinòmiques:

a) $x^5 - 37x^3 + 36x = 0$

b) $x^3 - 2x^2 - 8x = 0$

c) $2x^3 + 2x^2 - 12x = 0$

d) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

e) $2x^4 = 32x^2 - 96$

f) $x(x-3)(2x+3)(3x-5) = 0$

12. Resol les següents equacions aplicant un canvi de variable:

a) $x^8 + 81 = 82x^4$ b) $x^4 - 24x^2 + 144 = 0$

c) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ d) $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$

13. Resol les següents equacions racionals:

a) $3x + \frac{2}{x} = 1$

b) $\frac{2}{3x} + \frac{5}{6x} = x$

c) $\frac{2}{x-5} + 3 = \frac{1}{x-2}$

d) $\frac{3x}{2-x} - 4x = 2$

e) $\frac{3}{x+2} = \frac{2(3x+1)}{x-2} + 1$

f) $\frac{3x-1}{x+2} - \frac{5+2x}{2x} = 4$

g) $\frac{5x-3}{x+1} - \frac{5+3x}{x-1} = 2$

h) $\frac{4}{1-x} = \frac{3}{x} + \frac{1}{x-x^2}$

i) $\frac{5x}{x-2} - \frac{2x}{x^2-4} = \frac{x}{3}$

j) $\frac{1}{3} = \frac{x-4}{6-x}$

14. Resol les següents equacions irracionals:

a) $x = -2 + \sqrt{5+4x^2}$;

b) $\sqrt{16-x} = x-4$;

c) $5 + \sqrt{x^2-3x+2} = 2x$;

d) $\sqrt{x} - \sqrt{x-2} = 5$; e) $\sqrt{1-x} - \sqrt{x+1} + 2 = 0$;

f) $\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} = 3$;

g) $5\sqrt{x-2} + 1 = \frac{2}{\sqrt{x+1}}$;

h) $\sqrt{x-2} - \frac{1}{\sqrt{x-2}} = 2$;

i) $\sqrt{x+1} + \frac{1}{\sqrt{x-2}} = 3$

15. Resol les equacions següents: a) $3^{2x} = \frac{1}{81}$

b) $2^{2x} = \frac{1}{1024}$

Sistemes lineals d'equacions

16. Resol els següents sistemes pel mètode de substitució:

$$a) \begin{cases} 4x - 3y = 1 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + 4y = 5 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

17. Resol els següents sistemes pel mètode d'igualació:

$$a) \begin{cases} -3x + 2y = -1 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 5x - 2y = 1 \\ 4x - y = 2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 7x - 4y = 10 \\ -8x + 3y = -13 \end{cases}$$

18. Resol els següents sistemes pel mètode de reducció:

$$a) \begin{cases} 7x - 2y = 5 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x + 5y = 20 \\ -x - 6y = -14 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3x - 6y = 0 \\ -5x + 2y = -9 \end{cases}$$

19. Resol de forma gràfica els següents sistemes

$$a) \begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 5x + 3y = 5 \\ x - 7y = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3x - y = 1 \\ -7x + 5y = 3 \end{cases}$$

20. Resol els següents sistemes:

$$a) \begin{cases} \frac{x-2}{5} - \frac{3y-1}{2} = -1 \\ \frac{3x+1}{2} + \frac{3y-1}{4} = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{x-1}{3} - \frac{5y+7}{6} = -2 \\ 4x+y=5 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \frac{5x+1}{2} + \frac{2y-5}{3} = 4 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$$

21. Còpia en el teu quadern i completa els següents sistemes incomplets de manera que es compleixi el que es demana en cadascun:

Compatible indeterminat

Incompatible

La seva solució sigui $x = 2$ i $y = 1$

$$a) \begin{cases} ()x + 2y = () \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} -3x + y = 1 \\ ()x + y = 6 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x - 3y = () \\ ()x + 2y = 8 \end{cases}$$

Incompatible

La seva solució sigui $x = -1$ i $y = 1$

Compatible indeterminat

$$d) \begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 6x + ()y = () \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} 4x + ()y = -1 \\ ()x + y = 5 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} ()x + 8y = () \\ x + 2y = -3 \end{cases}$$

22. Resol els següents sistemes pel mètode d'igualació i comprova la solució gràficament. De quin tipus és cada sistema?

$$a) \begin{cases} -2x + 6y = 4 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - y = -3 \\ 3x - 3y = -9 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x - y = 4 \\ -x + 3y = -5 \end{cases}$$

Problemes

23. En una tenda lloguen bicicletes i tricicles. Si tenen 30 vehicles amb un total de 80 rodes, quantes bicicletes i quants tricicles tenen?

24. Quina és l'edat d'una persona si en multiplicar-la per 12 li falten 64 unitats per completar el seu quadrat?

25. Descompon 12 en dos factors tals que la seva suma sigui 7.

26. El triple del quadrat d'un nombre augmentat en el seu doble és 616. Quin nombre és?

27. La suma dels quadrats de dos nombres imparells consecutius és 130. Determina aquests nombres.

28. Van carregats un ase i una somera. L'ase es queixava del pes que portava damunt. La somera li va contestar: "Si jo portés un dels teus sacs, portaria el doble de càrrega que tu, però si tu prens un dels meus, els dos portarem la mateixa càrrega". Quants sacs porta cada animal?

29. Quin nombre multiplicat per 3 és 28 unitats menor que el seu quadrat?

30. Calcula tres nombres consecutius que la seva suma de quadrats és 110.

31. Dins de 2 anys, l'edat de Raquel serà la meitat del quadrat de l'edat que tenia fa 10 anys. Quina edat té Raquel?

32. Dos nombres es diferencien en 3 unitats i la suma dels seus quadrats és 185. Quins són aquests nombres?

33. La suma de dos nombres és 2 i el seu producte és -80 , de quins nombres es tracta?

34. Maria vol formar safates d'un quilogram amb caramels i bombons. Si els caramels li costen a 3 euros el quilo i els bombons a 7 euros el quilo, i vol que el preu de cada safata sigui de 5 euros, quina quantitat haurà de posar de cada producte? Si vol formar 100 safates, quina quantitat de caramels i de bombons va a necessitar?

35. Determina els catets d'un triangle rectangle que la seva suma és 17 cm i la hipotenusa d'aquest triangle mesura 13 cm.

36. El producte de dos nombres és 6 i la suma dels seus quadrats 13. Calcula aquests nombres

37. La suma de dos nombres és 12. El doble del primer més el triple del segon és 31. De quins nombres es tracta?

38. En un garatge hi ha 30 vehicles entre cotxes i motos. Si en total hi ha 80 rodes, quants cotxes i motos hi ha en el garatge?

39. L'edat actual de Lluís és el doble de la de Míriam. Dins de 10 anys, les seves edats sumaran 50. Quants anys tenen actualment Lluís i Míriam?

40. En la meua classe hi ha 25 persones. Ens han regalat a cada noia 3 adhesius i a cada noi 2 xapes. Si en total hi havia 65 regals. Quants nois i noies som en classe?

41. Entre el meu avi i el meu germà tenen 80 anys. Si el meu avi té 50 anys més que el meu germà, quina edat té cadascun?

42. Tres entrepans i un refresc costen 8 €. Quatre entrepans i dos refrescs costen 12 €. Quin és el preu de l'entrepà i el refresc?

43. En una granja hi ha gallines i ovelles. Si es conten els caps, són 40. Si es conten les potes, són 100. Quants gallines i ovelles hi ha en

la granja?

44. Un rectangle té un perímetre de 180 metres. Si la llargària és 10 metres major que l'amplària, quines són les dimensions del rectangle?
45. En un moneder hi ha bitllets de 5 € i 10 €. Si en total hi ha 10 bitllets i 75 €, quantes bitllets de cada valor hi ha en el moneder?
46. En una baralla entre aranyes i vespes, hi ha 13 caps i 90 potes. Sabent que una aranya té 8 potes i una vespa 6, quantes vespes i aranyes hi ha en la baralla?
47. Una classe té 30 estudiants, i el nombre d'al·lots és doble al d'al·lotes, quants al·lots i al·lotes hi ha?
48. Neus té 8 anys més que el seu germà Daniel, i la seva mare té 50 anys. Dins de 2 anys l'edat de la mare serà doble de la suma de les edats dels seus fills, quines edats tenen?
49. Es barregen 18 kg d'arròs d'1,3 € el quilogram amb 24 kg d'arròs de preu desconegut, resultant el preu de la barreja d'1,7 € el kg. Quin preu tenia el segon arròs?
50. L'altura d'un trapezi isòsceles és de 3 cm, el perímetre, 28 cm, i els costats inclinats són iguals a la base menor. Calcula l'àrea del trapezi.
51. Dos autobusos surten, un des de Madrid i l'altre des de Càceres a les 9 del matí. Un va a 80 km/h i l'altre a 100 km/h. A quina hora es creuen? A quants km de Madrid estaran?
52. En un concurs es guanyen 40 euros per cada resposta encertada i es perden 80 per cada fallada. Després de 10 preguntes, Carme porta guanyats 280 euros. Quantes preguntes ha encertat?
53. Paco ha comprat 5 suc i 4 batuts per 5,7 €, després ha comprat 7 suc i 5 batuts i li han costat 7,8 €. Calcula els preus d'ambdues coses.
54. Quina fracció és igual a 1 quan se suma 1 al numerador i és igual a $1/2$ quan se suma 2 al denominador?
55. El quocient d'una divisió és 2 i la resta és 1. Si el divisor disminueix en 1 unitat, el quocient augmenta en 1 i la resta nova és 1. Trobar el dividend i el divisor.
56. Dues amigues van ser a pescar. Al final del dia una va dir: "Si tu em dones un dels teus peixos, llavors jo tindrè el doble que tu". L'altra li va respondre: "Si tu em dones un dels teus peixos, jo tindrè el mateix nombre de peixos que tu". Quants peixos tenia cadascuna?
57. Calcula les dimensions d'un rectangle sabent que la seva àrea és 35 cm^2 , i el seu perímetre mesura 24 cm.
58. Un vianant surt d'una ciutat "A" a una velocitat de 4 km/h, i es dirigeix a una ciutat "B" que està a 20 km de la ciutat "A", 30 minuts després surt un ciclista de la ciutat "B" a una velocitat de 20 km/h i es dirigeix cap a "A", quant temps porta el vianant caminant en el moment de la trobada? A quina distància de "B" es creuen?
59. Es desitja barrejar oli de 2,7 €/l amb un altre oli de 3,6 €/l de manera que la barreja resulti a 3 €/l. Quants litres de cada classe han de barrejar-se per obtenir 100 litres de la barreja?
60. En intercanviar les xifres d'un nombre de dues xifres s'obté un altre que és 45 unitats major. Troba el nombre inicial.
61. La diagonal d'un rectangle mesura 25 cm i el perímetre 70 cm. Troba els costats del rectangle.
62. Una tanca envolta un terreny rectangular de 300 m^2 . Si la tanca mesura 70 metres, calcula les dimensions del terreny.
63. Diversos amics van a fer un regal de noces que costa 800 euros, que pagaran a parts iguals. A última hora s'apunten sis amics més, amb el que cadascun toca a 30 euros menys. Quants amics eren inicialment? Quant pagarà al final cadascun?
64. Les diagonals d'un rombe es diferencien en 2 cm i la seva àrea és de 24 cm^2 . Calcula el seu perímetre.
65. Un tren surt de Barcelona cap a Madrid a una velocitat de 200 km/h. Una hora més tard surt un altre tren de Madrid cap a Barcelona a 220 km/h; la distància entre les dues ciutats és de 618 km. Al cap de quant temps es creuen els dos trens? A quina distància de Barcelona?
66. Un cotxe surt d'una ciutat "A" a una velocitat de 100 km/h i 30 minuts més tard un altre cotxe surt de "A" en la mateixa direcció i sentit a una velocitat de 120 km/h, quant temps trigarà el segon a agafar al primer i a quina distància de "A" es produeix la trobada?

AUTOAVALUACIÓ

1. La solució de l'equació $2(x-3) - 3(x^2-4) = 1$ és:

a) $x = 10/3 \wedge x = -2$	b) $x = 5/3 \wedge x = -1$	c) $x = 1 \wedge x = -2/3$	d) $x = 3/2 \wedge x = -7/6$
-----------------------------	----------------------------	----------------------------	------------------------------
2. Les solucions de l'equació $80 = x(x-2)$ són:

a) $x = 8 \wedge x = -10$	b) $x = 40 \wedge x = 2$	c) $x = 10 \wedge x = -8$	d) $x = 10 \wedge x = 8$
---------------------------	--------------------------	---------------------------	--------------------------
3. Les solucions de l'equació $\frac{3x-1}{2} - \frac{x+5}{6} = \frac{x^2}{3}$ són:

a) $x = 4 \wedge x = -2$	b) $x = 3 \wedge x = -2$	c) $x = 1/5 \wedge x = 2$	d) $x = 2 \wedge x = 2$
--------------------------	--------------------------	---------------------------	-------------------------
4. Les solucions de l'equació $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$ són:

a) 2, -2, 5, -5	b) 3, -3, 2, -2	c) 1, -1, 4, -4	d) 3, -3, 5, -5
-----------------	-----------------	-----------------	-----------------
5. Les rectes que formen el sistema $\begin{cases} 7x + 21y = 14 \\ 2x + 6y = 4 \end{cases}$ són:

a) Secants	b) Paral·leles	c) Coincidents	d) Es creuen
------------	----------------	----------------	--------------
6. La solució del sistema $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ -2x + 3y = 2 \end{cases}$ és:

a) $x = 2$ i $y = 1$	b) $x = 2$ i $y = 2$	c) $x = 3$ i $y = 2$	d) No té solució
----------------------	----------------------	----------------------	------------------
7. La solució del sistema $\begin{cases} 3 + 2x = x - 1 + y \\ 2x - 9y = -43 \end{cases}$ és:

a) $x = 1$ i $y = 5$	b) $x = -2$ i $y = -5$	c) $x = -43/2$ i $y = 0$	d) $x = 3$ i $y = 4$
----------------------	------------------------	--------------------------	----------------------
8. La solució del sistema $\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ -2x + 3y + z = 7 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \end{cases}$ és:

a) $x = 3, y = 2, z = 1$	b) $x = 2, y = 1, z = 3$	c) $x = -1, y = -2, z = -3$	d) $x = 1, y = 2, z = 3$
--------------------------	--------------------------	-----------------------------	--------------------------
9. En una granja, entre gallines i vaques hi ha 120 animals i 280 potes. Quants gallines i vaques hi ha en la granja?

a) 90 gallines i 30 vaques	b) 100 gallines i 20 vaques	c) 80 gallines i 40 vaques
----------------------------	-----------------------------	----------------------------
10. Quin és l'edat d'una persona si en multiplicar-la per 5, li falten 234 unitats per arribar al seu quadrat?

a) 18 anys	b) 20 anys	c) 25 anys	d) 28 anys
------------	------------	------------	------------

RESUM

		Exemples
Equació de segon grau	És una equació algebraica en la qual la major potència de la incògnita és 2. Té la forma: $ax^2 + bx + c = 0$, on a , b i c són nombres reals, amb $a \neq 0$.	$-4x^2 + 5x - 8/3 = 0$
Resolució d'equacions de segon grau completes	S'usa la fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 - 7x + 10 = 0$: $x_1 = 5, x_2 = 2$
Nombre de solucions d'una equació de segon grau	Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, té dues solucions reals i diferents Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, té una solució doble. Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, l'equació no té solució real	$x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 25 > 0$, té dues solucions 4 i -1 $x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 0$, té una arrel doble: $x = 2$ $x^2 + 3x + 8 = 0 \Rightarrow \Delta = -23$. No té solució real
Resolució d'equacions de segon grau incompletes	Si $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, buidem la incògnita: $x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$. Si $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$: $x = 0$ i $x = \frac{-b}{a}$	$2x^2 - 50 = 0$: $x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$ $3x^2 - 18x = 0 \Rightarrow 3x(x - 9) = 0 \Rightarrow$ $x_1 = 0; x_2 = 9$.
Sistema d'equacions lineals	$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$	$\begin{cases} 6x + 5y = 8 \\ 4x - 2y = -3 \end{cases}$
Classificació	Compatible determinat: Una única solució, el punt d'intersecció. Les rectes són secants: Compatible indeterminat: Infinites solucions, per la qual cosa les rectes són coincidents: Incompatible: No té solució, les rectes són paral·leles:	$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ -2x - y = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x - 4y = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x - 4y = 9 \end{cases}$
Mètodes de resolució	Substitució: aïllar una incògnita i substituir en l'altra equació. Igualació: aïllar la mateixa incògnita de les dues equacions. Reducció: sumar les dues equacions, multiplicant-les per nombres adequats.	

CAPÍTOL 5: INEQUACIONS

ACTIVITATS PROPOSADES

1. INTERVALS

1. ESCRIU els següents intervals mitjançant conjunts i representa'ls en la recta real:
 a) $[1, 7)$ b) $(-3, 5)$ c) $(2, 8]$ d) $(-\infty, 6)$
2. Representa en la recta real i escriu en forma d'interval:
 a) $2 < x < 5$ b) $4 < x$ c) $3 \leq x < 6$ d) $x \geq 7$

2. INEQUACIONS

3. Donada la següent inequació $2 + 3x < x + 1$, determina quins dels següents valors són solució de la mateixa:
 $0, 1, -1, 2, -2, 3, -4, 6, -7, 12, -15$
4. Realitza les transformacions indicades de manera que s'obtinguin equacions equivalents:
 a) Sumar 3: $x - 1 > 4$
 b) Restar 5: $x - 3 > 7$
 c) Multiplicar per 5: $-8x \geq 9$
 d) Multiplicar per -5: $-3x \geq 7$
 e) Dividir entre 2: $4x < 10$
 f) Dividir entre -2: $4x \geq 10$
5. ESCRIU una inequació que sigui certa per a $x = 3$ i falsa per a $x = 3,5$.

3. INEQUACIONS AMB UNA INCÒGNITA

6. Resol les següents inequacions i representa la solució en la recta real:
 a) $2 + 3x < x + 1$ b) $5 + 2x \leq 7x + 4$ c) $6 + 5x > 6x + 4$ d) $4 + 8x \geq 2x + 9$
7. Resol les següents inequacions i representa la solució en la recta real:
 a) $3(2 + 3x) < -(x + 1)$ b) $5(1 + 2x) \leq 2(7x + 4)$ c) $2(6 + 5x) + 3(x - 1) > 2(6x + 4)$
8. Resol les següents inequacions i representa la solució en la recta real:
 a) $3 + 4x < x/2 + 2$ b) $4 + 4x/3 \leq 7x/2 + 5$ c) $(5 + 7x)/3 > 8x + 2$ d) $(4 + 8x)5 + 3 \geq (2x + 9)/7$
9. ESCRIU una inequació la solució de la qual sigui el següent interval:
 a) $[1, \infty)$ b) $(-\infty, 5)$ c) $(2, \infty]$ d) $(-\infty, 6)$
10. Calcula els valors de x perquè sigui possible calcular les següents arrels:
 a) $\sqrt{3x - 5}$ b) $\sqrt{-x - 12}$ c) $\sqrt{3 - 5x}$ d) $\sqrt{-3x + 12}$
11. Resol les següents inequacions de segon grau:
 a) $x^2 - 1 \geq 0$ b) $x^2 - 4 \leq 0$ c) $x^2 - 9 > 0$ d) $x^2 + 4 \geq 0$
 e) $2x^2 - 50 < 0$ f) $3x^2 + 12 \leq 0$ g) $5x^2 - 45 > 0$ h) $x^2 + 1 \geq 0$
12. Resol les següents inequacions de segon grau:
 a) $x^2 + x \leq 0$ b) $x^2 - 5x > 0$ c) $x^2 \leq 8x$
 d) $x^2 \leq 3x$ e) $2x^2 - 3x > 0$ f) $5x^2 - 10x < 0$
13. Resol les següents inequacions de segon grau:
 a) $3x^2 - 5x \geq 0$ b) $3x^2 - 27 > 0$ c) $x^2 \leq 0$ d) $2x^2 > 4x$
 e) $2x^2 - 8 > 0$ f) $5x^2 + 5x \geq 0$ g) $5x^2 - 5 \leq 0$ h) $x^2 - x > 0$
14. Resol les següents inequacions de segon grau:
 a) $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ b) $-x^2 - 2x + 8 \geq 0$ c) $x^2 + 9x + 14 > 0$ d) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$
 e) $-x^2 - 4x - 5 < 0$ f) $x^2 + 8x + 16 > 0$ g) $x^2 + x + 3 \geq 0$ h) $2x^2 - 3x - 5 \leq 0$
15. Resol les següents inequacions de segon grau:
 a) $x^2 + x - 6 > 0$ b) $x^2 - x - 12 \leq 0$ c) $x^2 - x - 20 < 0$ d) $x^2 + 5x - 14 \geq 0$
 e) $-2x^2 + 3x + 2 > 0$ f) $3x^2 + 2x - 1 \leq 0$ g) $5x^2 - 7x - 6 \geq 0$ h) $2x^2 + x - 15 < 0$
16. Calcula els valors de x perquè sigui possible obtenir les següents arrels:
 a) $\sqrt{x^2 - 1}$ b) $\sqrt{-x^2 + 4}$ c) $\sqrt{x^2 + 5x + 6}$ d) $\sqrt{x^2 - 5x + 6}$
17. Resol les següents inequacions de segon grau:
 a) $(2x + 5)(2x - 5) \leq 11$ b) $(2x - 5)(4x - 3) - (x - 10)(x - 2) \geq 50$ c) $\frac{3x - 2}{x} \leq \frac{5 - 2x}{x + 3}$

18. Resol els següents sistemes d'inequacions amb una incògnita:

$$a) \begin{cases} 4x - 3 < 1 \\ x + 6 > 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x - 6 \leq 0 \\ x - 4 > -5 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3x + 1 \geq x + 9 \\ x + 5 \leq 2 - 3x \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 2x - 3 \leq 3x + 7 \\ \frac{2x}{5} - \frac{x}{4} \geq \frac{2}{3} \end{cases}$$

19. Indica un nombre positiu que en sumar-li 5 sigui menor que 7.

20. Expressa mitjançant una inequació l'àrea d'un quadrat sabent que el seu perímetre és major que el d'un rectangle de costats 3 i 7 cm.

21. Determina les possibles edats de Pepita i de la seva filla Charo sabent que difereixen en més de 20 anys i que dins de 2 anys, la quarta part de l'edat de la mare serà menor que l'edat de la filla.

22. Resol les següents inequacions:

$$a) |x + 3| < 2$$

$$b) |2x + 5| > 1$$

$$c) |x - 6| \leq 2$$

$$d) |x - 2| \geq 2$$

4. INEQUACIONS AMB DUES INCÒGNITES

23. Representa els següents semiplans :

$$a) x + y < 5$$

$$b) 3x + 2y > 0$$

$$c) 2x + y \leq 7$$

$$d) x - 3y \geq 5$$

24. Representa la regió factible de cadascun dels següents sistemes d'inequacions:

$$a) \begin{cases} x - y < 1 \\ x + y \leq 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x - y \geq 0 \\ y \leq 2 \end{cases}$$

EXERCICIS I PROBLEMES.

- Representa en la recta real i escriu en forma d'interval:
 - $-\infty \leq x \leq \frac{3}{2}$
 - $-11 < x < 11$
 - $-2 < x \leq \frac{1}{3}$
- Escriu els següents intervals mitjançant conjunts i representa'ls en la recta real:
 - $[2, 6)$
 - $(-7, 1)$
 - $(0, 9]$
- Donada la següent inequació $5+3x > 2x+1$, determina si els següents valors són solució de la mateixa:

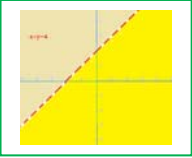
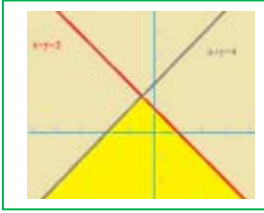
0, 1, -1, 2, -2, 3, -4, 6, -7, 12, -15
- Realitza les transformacions indicades de manera que s'obtinguin equacions equivalents:
 - Sumar 4: $x - 2 > 5$
 - Restar 6: $x - 4 > 8$
 - Multiplicar per 6: $5x \geq 10$
 - Multiplicar per -4: $-2x \geq 8$
 - Dividir entre 2: $6x < 12$
 - Dividir entre -2: $20x \geq 60$
- Resol les següents inequacions i representa la solució en la recta real:
 - $2x - 3 \leq -5$
 - $x - 2 \leq 3x - 5$
 - $12 - x \leq -6$
 - $-5x - 3 \leq -2x + 9$
 - $2(3x - 3) > 6$
 - $-3(3 - 2x) < -2(3 + x)$
 - $2(x + 3) + 3(x - 1) \leq 2(x + 2)$
- Resol:
 - $\frac{x}{2} - 6 < 4$
 - $\frac{2x}{3} - 3 \leq -x$
 - $2(3x - 2) > 3 - x$
 - $\frac{2(x + 2)}{3} < 2x$
 - $\frac{x - 4}{4} + 2 > \frac{x + 4}{8}$
 - $\frac{x}{2} - 4 < x - \frac{x + 1}{7}$
- Escriu una inequació la solució de la qual sigui el següent interval:
 - $(-\infty, -3]$
 - $[4, +\infty)$
 - $(-\infty, 5)$
 - $(-2, +\infty)$
- Calcula els valors de x perquè sigui possible calcular les següents arrels:
 - $\sqrt{2x - 6}$
 - $\sqrt{-x + 5}$
 - $\sqrt{10 - 5x}$
 - $\sqrt{-6x - 30}$
- Resol les següents inequacions de segon grau:
 - $3x^2 - 75 < 0$
 - $-x^2 + 16 \leq 0$
 - $-x^2 + 25 \geq 0$
 - $5x^2 - 80 \geq 0$
 - $4x^2 - 1 > 0$
 - $25x^2 - 4 < 0$
 - $9x^2 - 16 < 0$
 - $36x^2 + 16 \leq 0$
- Resol les següents inequacions de segon grau:
 - $-4x^2 + 5x \leq 0$
 - $3x^2 + 7x \geq 0$
 - $2x^2 < 8x$
 - $-3x^2 - 6x \geq 0$
 - $-x^2 + 3x < 0$
 - $-5x^2 - 10x \geq 0$
- Resol les següents inequacions de segon grau:
 - $3x^2 \leq 0$
 - $8x^2 > 0$
 - $-5x^2 < 0$
 - $9x^2 \geq 0$
- Resol les següents inequacions de segon grau:
 - $x^2 - 1 \leq 0$
 - $-x^2 - 4x \leq 0$
 - $x^2 + 1 \geq 0$
 - $-3x^2 > 30$
 - $-x^2 - 4 \leq 0$
 - $-3x^2 - 12x \geq 0$
 - $-5x^2 < 0$
 - $x^2 + 9 \geq 0$
- Resol les següents inequacions de segon grau:
 - $x^2 - 2x > 0$
 - $3x^2 - 3 \leq 0$
 - $5x^2 - 20 \geq 0$
 - $x^2 + 4x > 0$
 - $2x(x - 3) + 1 \geq x - 2$
 - $(x - 2)(x + 3) - x + 5 \leq 2x - 1$
 - $x^2 + 5x + 2 < 2x + 12$
 - $2 - x(x + 3) + 2x \geq 2(x + 1)$
- Calcula els valors de x perquè sigui possible obtenir les següents arrels:
 - $\sqrt{2x^2 + x - 3}$
 - $\sqrt{x^2 + 2x + 1}$
 - $\sqrt{-1 + 2x - x^2}$
 - $\sqrt{x^2 + 3x + 5}$
 - $\sqrt{-x^2 + 12x + 36}$
 - $\sqrt{x^2 + 6x - 27}$
 - $\sqrt{1 - 4x^2}$
- Resol les següents inequacions:
 - $2(x - 1)^2 > 2$
 - $3(x + 1)^2 \leq -12$
 - $-x^2 < 2$
 - $4(x - 2)^2 > 1$
 - $-5(x + 4)^2 \leq 0$
 - $9(x + 1)^2 \leq 81$
- Resol les següents inequacions:
 - $x(2x - 3) - 3(5 - x) > 83$
 - $(2x + 5)(2x - 5) \leq 11$
 - $(7 + x)^2 + (7 - x)^2 > 130$
 - $(2x - 3)(3x - 4) - (x - 13)(x - 4) \geq 40$
 - $(3x - 4)(4x - 3) - (2x - 7)(3x - 2) < 214$
 - $8(2 - x)^2 > 2(8 - x)^2$
 - $\frac{x^2 - 6}{2} - \frac{x^2 + 4}{4} \geq 5$
 - $\frac{5x - 3}{x} \leq \frac{7 - x}{x + 2}$
- Resol els següents sistemes d'inequacions amb una incògnita:
 - $\begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ 5x + 1 \leq 0 \end{cases}$
 - $\begin{cases} 3x - 4 < 4x + 1 \\ -2x + 3 < 4x - 5 \end{cases}$
 - $\begin{cases} 2x - 3 > x - 2 \\ 3x - 7 < x - 1 \end{cases}$
 - $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{x}{5} < 8 \\ \frac{x}{2} - \frac{4x}{9} < 5 \end{cases}$
 - $\begin{cases} \frac{x - 1}{3} - \frac{x + 3}{2} \leq x \\ \frac{4x - 2}{4} - \frac{x - 1}{3} \geq x \end{cases}$
- Resol les següents inequacions:
 - $|2x + 1| \leq 5$
 - $|-x + 1| \geq 2$
 - $|-x + 9| \leq 10$
 - $|2x - 1| > 4$
 - $|-4x + 12| < -6$
 - $\left| \frac{x + 1}{2} \right| \leq 10$
 - $|-4x + 8| < 3$

19. Representa gràficament la paràbola $y = x^2 - 5x + 6$ i indica a quins intervals és $x^2 - 5x + 6 > 0$, a quins $x^2 - 5x + 6 < 0$, a quins $x^2 - 5x + 6 \geq 0$, i a quins $x^2 - 5x + 6 \leq 0$.
20. Representa els següents semiplans:
 a) $x < 0$ b) $y \geq 0$ c) $x + y < 0$ d) $x - y \leq 1$
 e) $2x - y < 3$ f) $-x + y \geq -2$ g) $3x - y > 4$
21. Representa la regió factible de cadascun dels següents sistemes d'inequacions:
 a) $\begin{cases} 2x - y \geq 3 \\ 5x + y \leq 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - y \geq -3 \\ 5x + y \leq 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ 2x + y > 2 \end{cases}$
22. Quins són els nombres que el seu triple és major o igual que el seu doble més 30?
23. Esbrina com és el menor nombre enter múltiple de 3 que verifica la inequació: $x + 2 < -3x + 10$.
24. Un cotxe es desplaça per una carretera a una velocitat compresa entre 70 Km/h i 110 Km/h. Entre quins valors oscil·la la distància del cotxe al punt de partida al cap de 4 hores?
25. La tarifa de telefonía de l'empresa A és 25 € fixos mensuals més 10 cèntims d'euro per minut de conversa, la de l'empresa B és 20 € fixos més 20 cèntims per minut de conversa. A partir de quants minuts comença a ser més rendible la tarifa de l'empresa A?
26. Una fàbrica paga als seus comercials 20 € per article venut més una quantitat fixa de 600 €. Una altra fàbrica de la competència paga 40 € per article i 400 € fixos. Quants articles ha de vendre un comercial de la competència per guanyar més diners que el primer?
27. A un venedor d'aspiradores li ofereixen 1000 € de sou fix més 20 € per aspiradora venuda. A un altre li ofereixen 800 € de sou fix més 25 € per aspiradora venuda. Explica raonadament quin sou és millor a partir de quina quantitat d'aspiradores venudes.
28. L'àrea d'un quadrat és menor o igual que 64 cm². Determina entre quins valors es troba la mesura del costat.
29. El perímetre d'un quadrat és menor que 60 metres. Determina entre quins valors es troba la mesura del costat.
30. Un forner fabrica barres i pans de pagès. La barra de pa porta 200 grams de farina i 5 grams de sal, mentre que el pa de pagès porta 500 grams de farina i 10 grams de sal. Si disposa de 200 kg de farina i 2 kg de sal, determina quants pans de cada tipus poden fer-se.

AUTOAVALUACIÓ

1. La desigualtat $2 < x < 7$ es verifica per als valors:
 a) 2, 3 i 6 b) 3, 4 i 6 c) 3, 5 i 7 d) 4, 5 i 8
2. Té com a solució $x = 2$ la inequació següent:
 a) $x < 2$ b) $x > 2$ c) $x \leq 2$ d) $x + 3 < 5$
3. La solució de la inequació $3,4 + 5,2x - 8,1x < 9,4 + 7,3x$ és:
 a) $x < -10/17$ b) $x > +6/10,2$ c) $x > -10/1,7$ d) $x < +6/10,2$
4. L'equació $x^2 \leq 4$ té de solucions:
 a) $x \in (-2, 2)$ b) $x \in [-2, 2]$ c) $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ d) $x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
5. La suma de les edats de dues persones és major de 40 anys i la seva diferència menor o igual que 8 anys. Quin dels següents sistemes d'inequacions ens permet calcular les seves edats?
 a) $\begin{cases} x + y > 40 \\ y - x \leq 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y \geq 40 \\ y - x < 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y > 40 \\ x - y < 8 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y < 40 \\ x - y \leq 8 \end{cases}$
6. El perímetre d'un rectangle és menor que 14 cm. Si la base és major que el doble de l'altura menys 3 cm, algun valor que verifica és sistema és:
 a) base = 4 cm, altura = 1 cm b) base = 2 cm, altura = 3 cm c) base = 6, altura = 4 cm d) base = 9 cm, altura = 2 cm
7. La solució de la inequació $|-x + 7| \leq 8$ és:
 a) $[-1, 1]$ b) $(-\infty, -1]$ c) $(-1, 1)$ d) $[1, \infty)$
8. Les solucions possibles de $\sqrt{5x - 9}$ so:
 a) $x < 9/5$ b) $x > 9/5$ c) $x \leq 9/5$ d) $x \geq 9/5$
9. La solució de la inequació $\frac{2x-3}{x-2} < 1$ és:
 a) (1, 2) b) $(-\infty, 1)$ c) $x < 1 \cup x > 2$ d) $(-1, 2)$
10. Una inequació la solució de la qual sigui l'interval $(-\infty, 5)$ és:
 a) $5x - 3x + 2 < 9x + 2$ b) $8x - 3x + 7 < 9x + 2$ c) $5x - 3x + 2 < 7x + 27$ d) $5x - 3x + 2 > 7x + 27$

RESUM

Inequació	Desigualtat algebraica en la qual apareixen una o més incògnites	$4 \geq x + 2$
Inequacions equivalents	Si tenen la mateixa solució	$4 \geq x + 2 \Leftrightarrow 2 \geq x$
Propietats de les desigualtats	<ul style="list-style-type: none"> • Sumar o restar la mateixa expressió als dos membres de la desigualtat: $a < b, \forall c \Rightarrow a + c < b + c$ • Multiplicar o dividir tots dos membres per un nombre positiu: $a < b, \forall c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$ • Multiplicar o dividir tots dos membres per un nombre negatiu i canviar l'orientació del signe de la desigualtat: $a < b, \forall c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $3x + 2 < 5 \Leftrightarrow 3x + 2 - 2 < 5 - 2 \Leftrightarrow 3x < 3$ • $3x < 3 \Leftrightarrow 3x : 3 < 3 : 3 \Leftrightarrow x < 1$ • $-x < 2 \Leftrightarrow (-x) \cdot (-1) > 2 \cdot (-1) \Leftrightarrow x > -2$ • $3 - x < 2 \Leftrightarrow -x < -1 \Leftrightarrow x > 1$
Inequació de primer grau amb una incògnita	$ax > b, ax \geq b, ax < b, ax \leq b$	$x < 1$
Inequació de segon grau amb una incògnita	$ax^2 + bx + c > 0$	$x^2 - 1 \geq 0$ $\mathbb{R} = (-\infty, -1] \cup [-1, 1] \cup [1, \infty)$ Solució: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
Sistema d'inequacions de primer grau amb una incògnita	$\begin{cases} a_1x < b_1 \\ a_2x < b_2 \end{cases}; \begin{cases} x > 4 \\ x - 3 \geq 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x \leq -3 \end{cases}$. No hi ha solució	
Inequació en valor absolut	$ ax + b \leq c$ per definició $\begin{cases} ax + b \leq c \\ -ax - b \leq c \end{cases}$	$ x - 3 \leq 2 \Leftrightarrow$ $x - 3 \leq 2 \text{ i } -(x - 3) \leq 2 \Leftrightarrow$ $x \leq 5 \text{ i } x \geq 1 \Leftrightarrow [1, 5]$
Inequacions de primer grau amb dues incògnites	$ax + by > c$ Representem gràficament dos semiplans que separa la recta i decidim.	$-x + y < 4$ 
Sistemes d'inequacions de primer grau amb dues incògnites	Representem les regions angulars separades per les dues rectes i decidim quin o quins són solució. $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x - y \geq -4 \end{cases}$	

CAPÍTOL 6: PROPORCIONALITAT

ACTIVITATS PROPOSADES

1. PROPORCIONALITAT DIRECTA

1. Còpia en el teu quadern i completa la taula de proporció directa. Calcula la raó de proporcionalitat. Representa gràficament els punts. Determina l'equació de la recta.

Litres	12	7,82		1		50
Euros	36		9,27		10	

2. Calcula els termes que falten per completar les proporcions:

$$a) \frac{24}{100} = \frac{30}{x} \quad b) \frac{x}{80} = \frac{46}{12} \quad c) \frac{3'6}{12'8} = \frac{x}{60}$$

3. Si l'AVE triga una hora i trenta-cinc minuts a arribar des de Madrid a València, que disten 350 quilòmetres, quant trigarà en recórrer 420 km?
4. En una recepta ens diuen que per fer una mermelada de fruites del bosc necessitem un quilogram de sucre per cada dos quilograms de fruita. Volem fer 7 quilograms de mermelada, quants quilograms de sucre i quants de fruita hem de posar?
5. L'altura d'una torre és proporcional a la seva ombra (a una mateixa hora). Una torre que mesura 12 m té una ombra de 25 m. Quina altura tindrà una altra torre l'ombra de la qual mesuri 43 m?
6. Una font omple una garrafa de 12 litres en 8 minuts. Quant temps trigarà a omplir un bidó de 135 litres?
7. Hem gastat 12 litres de gasolina per recórrer 100 km. Quants litres necessitarem per a una distància de 1374 km?
8. El meu cotxe ha gasta 67 litres de gasolina a recórrer 1250 km, quants litres gastarà en un viatge de 5823 km?
9. Un llibre de 300 pàgines pesa 127 g. Quant pesarà un llibre de la mateixa col·lecció de 420 pàgines?
10. Dos pantalons ens van costar 28 €, quant pagarem per 7 pantalons?
11. Expressa en tant per cent o les següents proporcions:
- a) $\frac{27}{100}$ b) "1 de cada 2" c) $\frac{52}{90}$
12. Si sabem que els alumnes rossos d'una classe són el 16 % i hi ha 4 alumnes rossos, quants alumnes hi ha en total?
13. Un dipòsit de 2 000 litres de capacitat conté en aquest moment 1036 litres. Què tant per cent representa?
14. La proporció dels alumnes d'una classe de 4t d'ESO que han aprovat Matemàtiques va ser del 70%. Sabent que en la classe hi ha 30 alumnes, quants han suspès?
15. Una fàbrica ha passat de tenir 130 obrers a tenir 90. Expressa la disminució en percentatge.
16. Calcula el preu final d'un rentavaixel·la que costava 520 € més un 21 % d'IVA, al que se li ha aplicat un descompte sobre el cost total del 18 %.
17. Còpia en el teu quadern i completa:
- a) D'una factura de 1340 € he pagat 1200 €. M'han aplicat un % de descompte
- b) M'han descomptat el 9 % d'una factura de € i he pagat 280 €.
- c) Per pagar al comptat un moble m'han descomptat el 20 % i m'he estalviat 100 €. Quin era el preu del moble sense descompte?
18. El preu inicial d'un electrodomèstic era 500 euros. Primer va pujar un 10 % i després va baixar un 30 %. Quin és el seu preu actual? Quin és el percentatge d'increment o descompte?
19. Una persona ha comprat accions de borsa en el mes de gener per un valor de 10 000 €. De gener a febrer aquestes accions han augmentat un 8 %, però en el mes de febrer han disminuït un 16 % Quin és el seu valor a finals de febrer? En quin percentatge han augmentat o disminuït?
20. El preu inicial d'una enciclopèdia era de 300 € i al llarg del temps ha sofert variacions. Va pujar un 10 %, després un 25 % i després va baixar un 30 %. Quin és el seu preu actual? Calcula la variació percentual.
21. En una tenda de venda per Internet s'anuncien rebaixes del 25 %, però després carreguen en la factura un 20 % de despeses d'enviament. Quin és el percentatge d'increment o descompte? Quant haurem de pagar per un article que costava 30 euros? Quant costava un article pel qual hem pagat 36 euros?
22. La distància real entre dos pobles és 28,6 km. Si en el mapa estan a 7 cm de distància. A quina escala està dibuixat?
23. Quina altura té un edifici si la seva maqueta construïda a escala 1:200 presenta una altura de 8 cm?
24. Dibuixa l'escala gràfica corresponent a l'escala 1:60000.
25. Les dimensions d'una superfície rectangular en el plànol són 7 cm i 23 cm. Si està dibuixat a escala 1:50, calcula les seves mesures reals.

PROPORCIONALITAT INVERSA

26. Per enrajolar un recinte, 7 obrers han dedicat 80 hores de treball. Completa en el teu quadern la següent taula i determina la constant de proporcionalitat. Escriu l'equació de la hipèrbola.

Nombre d'obrers	1	5	7	12			60
Hores de treball			80		28	10	

27. En tallar una quantitat de fusta hem aconseguit 5 panells d'1,25 m de llarg. Quants panells aconseguirem si ara tenen 3 m de llarg?
28. En un hort ecològic s'utilitzen 5000 kg d'un tipus d'adob d'origen animal que se sap que té un 12 % de nitrats. Es canvia el tipus d'adob, que ara té un 15 % de nitrats, quants quilograms es necessitaran del nou adob perquè les plantes rebin la mateixa quantitat de nitrats?
29. Aquest mateix hort necessita 200 caixes per envasar les seves albergínies en caixes d'un quilogram. Quantes caixes necessitaria per envasar-les en caixes d'1,7 quilograms? I per envasar-les en caixes de 2,3 quilograms?
30. Per envasar certa quantitat de llet es necessiten 8 recipients d'100 litres de capacitat cadascun. Volem envasar la mateixa quantitat de llet emprant 20 recipients. Quina haurà de ser la capacitat d'aquests recipients?
31. Còpia en el teu quadern la taula següent, calcula la raó de proporcionalitat i completa la taula de proporcionalitat inversa. Escriu l'equació de la hipèrbola.

Magnitud A	40	0,07		8	
Magnitud B	0,25		5		6,4

32. Sis persones realitzen un viatge de 12 dies i paguen en total 40800 €. Quant pagaran 15 persones si el seu viatge dura 4 dies?
33. Si 16 bombetes originen una despesa de 4500 €, estant enceses durant 30 dies, 5 hores diàries, quina despesa originarien 38 bombetes en 45 dies, enceses durant 8 hores diàries?
34. Per alimentar 6 vaques durant 17 dies es necessiten 240 quilos d'aliment. Quants quilos d'aliment es necessiten per mantenir 29 vaques durant 53 dies?
35. Si 12 homes construeixen 40 m de tàpia en 4 dies treballant 8 hores diàries, quantes hores diàries han de treballar 20 homes per construir 180 m en 15 dies?
36. Amb una quantitat de pinso podem donar de menjar a 24 animals durant 50 dies amb una ració d'1 kg per a cadascun. Quants dies podem alimentar a 100 animals si la ració és de 800 g?
37. Per omplir un dipòsit s'obren 5 aixetes que donen 8 litres per minut i triguen 10 hores. Quant temps trigaran 7 aixetes similars que donen 10 litres per minut?
38. Si 4 màquines fabriquen 2400 peces funcionant 8 hores diàries. Quantes màquines s'han de posar a funcionar per aconseguir 7000 peces durant 10 hores diàries?

3. REPARTIMENTS PROPORCIONALS

39. Cinc persones comparteixen loteria, amb 10, 6, 12, 7 i 5 participacions respectivament. Si han obtingut un premi de 18000 € Quant correspon a cadascun?
40. Tres socis han invertit 20000 €, 34000 € i 51000 € aquest any en la seva empresa. Si els beneficis a repartir a final d'any ascendeixen a 31500€, quant correspon a cadascun?
41. La Unió Europea ha concedit una subvenció de 48.000.000 € per a tres països de 60, 46 i 10 milions d'habitants, com ha de repartir-se els diners, sabent que és directament proporcional al nombre d'habitants?
42. Es reparteix una quantitat de diners, entre tres persones, directament proporcional a 2, 5 i 8. Sabent que a la segona li correspon 675 €. Trobar el que li correspon a la primera i tercera.
43. Una àvia reparteix 100 € entre les seves tres netes de 12, 14 i 16 anys d'edat; proporcionalment a les seves edats. Quant correspon a cadascun?
44. En un concurs s'acumula puntuació de forma inversament proporcional al nombre d'errors. Els quatre finalistes, amb 10, 5, 2 i 1 error, han de repartir-se els 2500 punts. Quants punts rebrà cadascun?
45. En el testament, l'avi estableix que vol repartir entre els seus néts 4500 €, de manera proporcional a les seves edats, 12, 15 i 18 anys, cuidant que la major quantitat sigui per als néts menors, quant rebrà cadascun?
46. Es reparteix una quantitat de doblers inversament proporcional a 5, 10 i 15; al menor li corresponen 3000 €. Quant correspon als altres dos?
47. Tres germans ajuden al manteniment familiar lliurant anualment 6000 €. Si les seves edats són de 18, 20 i 25 anys i les aportacions són inversament proporcionals a l'edat, quant aporta cadascun?
48. Un pare va amb els seus dos fills a una fira i en la tómbola guanya 50 € que els reparteix de forma inversament proporcional a les seves edats, que són 15 i 10 anys. Quants euros ha de donar a cadascun?
49. Calcula el preu del quilo de barreja de dos tipus de cafè: 3,5 kg a 4,8 €/kg i 5,20 kg a 6 €/kg.

50. Quants litres de suc d'aranja de 2,40 €/l han de barrejar-se amb 4 litres de suc de taronja a 1,80 €/l per obtenir una barreja a 2,13 €/l?
51. Calcula la llei d'una joia sabent que pesa 87 g i conté 69 g d'or pur.
52. Quants quirats té, aproximadament, la joia anterior?

4. INTERÈS

53. Calcula l'interès simple que produeixen 10.000 € al 3 % durant 750 dies.
54. Quin capital cal dipositar a l'1,80 % durant 6 anys per obtenir un interès simple de 777,60 €?
55. Al 5 % d'interès compost durant 12 anys, quin serà el capital final que obtindrem en dipositar 39500 €?

CURIOSITATS. REVISTA

- La torre Eiffel de París mesura 300 metres d'altura i pesa uns 8 milions de quilos. Està construïda de ferro. Si encarreguem un model a escala d'aquesta torre, també de ferro, que pesi només un quilo, quina altura tindrà? Serà major o menor que un llapis? Abans de començar a calcular, dóna la teva opinió.
1. En una pizzeria la pizza de 20 cm de diàmetre val 3 euros i la de 40 cm val 6 euros. Quina té millor preu?
 2. Veiem al mercat un lluç de 40 cm que pesa un quilo. Ens sembla una mica petit i demanem un altre una mica major, que resulta pesar 2 quilos. Quant mesurarà?
 3. En un dia fred un pare i un fill petit van exactament igual abrigats, Qui dels dos tindrà més fred?

EXERCICIS I PROBLEMES.

1. Còpia en el teu quadern, calcula la raó de proporcionalitat i completa la taula de proporcionalitat directa:

litres	8,35		0,75	1,5	
euros		14	2,25		8

2. Estima quantes persones caben dempeus en un metre quadrat. Hi ha hagut una festa i s'ha omplert completament un local de 400 m², quantes persones estimes que han anat a aquesta festa?
 3. Cada setmana paguem 48 € en transport. Quant gastarem durant el mes de febrer?
 4. Amb 85 € hem pagat 15 m de tela, quant ens costaran 23 m de la mateixa tela?
 5. Per tapissar cinc cadires he utilitzat 0,6 m de tela, quantes cadires podré tapissar amb la peça completa de 10 m?
 6. Un camió ha transportat en 2 viatges 300 sacs de patates de 25 kg cadascun. Quants viatges seran necessaris per transportar 950 sacs de 30 kg cadascun?
 7. Una edició de 400 llibres de 300 pàgines cadascun té un pes total de 100 kg. Quants kg pesarà una altra edició de 700 llibres de 140 pàgines cadascun?
 8. Sabent que la raó de proporcionalitat directa és $k = 1,8$, còpia en el teu quadern i completa la següent taula:
- | | | | | |
|------------|------|---|------|----|
| Magnitud A | 15,9 | | 0,01 | |
| Magnitud B | | 6 | 0,1 | 10 |
9. El model de telèfon mòbil que costava 285 € + IVA està ara amb un 15 % de descompte. Quin és el seu preu rebaixat? (IVA 21 %)
 10. Per retardar-se en el pagament d'un deute de 1500 €, una persona ha de pagar un recàrrec del 12 %. Quant ha de retornar en total?
 11. Si un litre de llet de 0,85 € augmenta el seu preu en un 12 %, quant val ara?
 12. Què tant per cent de descompte s'ha aplicat en una factura de 1900 € si finalment es van pagar 1200 €?
 13. Si unes sabatilles de 60 € es rebaixen un 15 %, quin és el valor final?
 14. En comprar un televisor he obtingut un 22 % de descompte, per la qual cosa al final he pagat 483,60 €, quin era el preu del televisor sense descompte?
 15. Lluís va comprar una samarreta que estava rebaixada un 20 % i va pagar per ella 20 €. Quin era el seu preu original?
 16. Per liquidar un deute de 35000 € abans del previst, una persona paga finalment 30800 €, quin percentatge del seu deute s'ha estalviat?
 17. El preu d'un viatge s'anuncia a 500 € IVA inclòs. Quin era el preu sense IVA? (IVA 21 %)
 18. Quin increment percentual s'ha efectuat sobre un article que abans valia 25 € i ara es paga a 29 €?
 19. Un balneari va rebre 10 mil clients en el mes de juliol i 12 mil a l'agost. Quin és l'increment percentual de clients de juliol a agost?
 20. Un mapa està dibuixat a escala 1:800000. La distància real entre dues ciutats és 200 km. Quina és la seva distància en el mapa?
 21. La distància entre Oviedo i Corunya és de 340 km. Si en el mapa estan a 12 cm, a quina escala està dibuixat?

22. Interpreta la següent escala gràfica i calcula la distància en la realitat per 21 cm.



23. Còpia en el teu quadern i completa la següent taula:

Grandària en el dibuix	Grandària real	Escala
20 cm llarg i 5 cm d'ample		1:25000
10 cm	15 km	
	450 m	1:30000

24. Còpia en el teu quadern, calcula la raó de proporcionalitat inversa i completa la taula:

Magnitud A	8	7,5		3,5	
Magnitud B		12	0,15		10

25. Determina si les següents magnituds es troben en proporció directa, inversa o en cap d'elles:

- Velocitat a la qual circula un cotxe i espai que recorre
- Diners que tens per gastar i borses d'ametlles que pots comprar
- Talla de sabates i preu dels mateixos
- Nombre de membres d'una família i litres de llet que consumeixen
- Nombre d'entrades venudes per a un concert i diners recaptats
- Nombres d'aixetes que omplen una piscina i temps que aquesta triga a omplir-se
- Edat d'una persona i alçada que té
- Nombre de treballadors i temps que trigen a fer una tanca
- Edat d'una persona i nombre d'amics que té

26. Quina velocitat hauria de portar un automòbil per recórrer en 4 hores certa distància, si a 80 km/h ha trigat 5 hores i 15 minuts?

27. La raó de proporcionalitat inversa entre A i B és 5. Còpia en el teu quadern i completa la taula següent:

A	20		7		10,8
B		0,05		0,3	

28. En la granja es fa la comanda de farratge per alimentar a 240 porcs durant 9 setmanes. Si ven 60 porcs, quantes setmanes li durarà el farratge? I si en lloc de vendre, compra trenta porcs? I si decideix rebaixar la ració una quarta part amb els 240 porcs?

29. Un granger amb 65 gallines té blat de moro per alimentar-les 25 dies. Si ven 20 gallines, quants dies podrà alimentar a les restants?

30. Amb 15 paquets de 4 kg cadascun poden menjar 150 gallines diàriament. Si els paquets són de 2,7 kg, quants necessitariem per donar de menjar a les mateixes gallines?

31. Determina si les dues magnituds són directa o inversament proporcionals i completa la taula en el teu quadern:

A	24	8	0,4	6		50
B	3	9	180		20	

32. Si la jornada laboral és de 8 hores necessitem a 20 operaris per realitzar un treball. Si rebaixem la jornada en mitja hora diària, quants operaris seran necessaris per realitzar el mateix treball?

33. En un magatzem es guarden reserves de menjar per 100 persones durant 20 dies amb 3 racions diàries, quants dies duraria el mateix menjar per 75 persones amb 2 racions diàries?

34. Si 15 operaris instal·len 2500 m de tanca en 7 dies. Quants dies trigaran 12 operaris a instal·lar 5250 m de tanca?

35. En un concurs el premi de 168000 € es reparteix de forma directament proporcional als punts aconseguits. Els tres finalistes van aconseguir 120, 78 i 42 punts. Quants euros rebran cadascun?

36. Repartir 336 en parts directament proporcionals a 160, 140, 120.

37. Un treball es paga a 3120 €. Tres operaris ho realitzen aportant el primer 22 jornades, el segon 16 jornades i el tercer 14 jornades. Quant rebrà cadascun?

38. Repartir 4350 en parts inversament proporcionals a 18, 30, 45.

39. Barregem 3 kg d'ametlles a 14 €/kg, 1,5 kg de nous a 6 €/kg, 1,75 kg de castanyes 8 €/kg. Calcula el preu final del paquet de 250 g de barreja de fruita seca.

40. Calcula el preu del litre de suc que s'aconsegueix barrejant 8 litres de suc de pinya a 2,5 €/l, 15 litres de suc de taronja a 1,6 €/l i 5 litres de suc de raïm a 1,2 €/l. A quant ha de vendre's una ampolla de litre i mig si se li aplica un augment del 40 % sobre el preu de cost?

41. Per aconseguir un tipus de pintura es barregen tres productes 5 kg del producte X a 18 €/kg, 19 kg del producte Y a 4,2 €/kg i 12 kg del producte Z a 8 €/kg. Calcula el preu del kg de barreja.

42. Cinc persones comparteixen un microbús per realitzar diferents trajectes. El cost total és de 157,5 € més 20 € de

suplement per servei nocturn. Els quilòmetres recorreguts per cada passatger van ser 3, 5, 7, 8 i 12 respectivament. Quant ha d'abonar cadascun?

43. S'ha decidit penalitzar a les empreses que més contaminen. Per a això es reparteixen 2350000 € per subvencionar a tres empreses que presenten un 12 %, 9 % i 15 % de grau de contaminació. Quant rebrà cadascuna?
44. Un lingot d'or pesa 340 g i conté 280,5 g d'or pur. Quin és la seva llei?
45. Quants grams d'or conté una joia de 0,900 de llei, que s'ha format amb un aliatge de 60 g de 0,950 de llei i 20 g de 0,750 de llei?
46. Quin capital cal dipositar al 3,5 % de rèdit en 5 anys per obtenir un interès simple de 810 €?
47. Quin és el capital final que es rebrà per dipositar 25400 € a l'1,4 % en 10 anys?
48. Quants mesos ha de dipositar-se un capital de 74500 € al 3 % per obtenir un interès de 2980 €?
49. Al 3 % d'interès compost, un capital s'ha convertit en 63338,50 €. De quina capital es tracta?
50. En la construcció d'un pont de 850 m s'han utilitzat 150 bigues, però l'enginyer no està molt segur i decideix reforçar l'obra afegint 50 bigues més. Si les bigues es col·loquen uniformement al llarg de tot el pont, a quina distància es col·locaran les bigues?
51. En un col·legi de primària es convoca un concurs d'ortografia en el qual es donen diversos premis. El total que es reparteix entre els premiats és 500 €. Els alumnes que no han comès cap falta reben 150 €, i la resta es distribueix de manera inversament proporcional al nombre de faltes. Hi ha dos alumnes que no han tingut cap falta, un ha tingut una falta, un altre dues faltes i l'últim ha tingut quatre faltes, quant rebrà cadascun?

AUTOAVALUACIÓ

1. Els valors que completen la taula de proporcionalitat directa són:

A	10	0,25		0,1	100
B		50	5		

- a) 612,5; 1000; 0,0005; 0,5 b) 1,25; 2,5; 125; 0,125 c) 62; 500; 0,005; 0,05
2. Amb 500 € paguem les despeses de gas durant 10 mesos. En 36 mesos pagarem:
 - a) 2000 € b) 1900 € c) 1800 € d) 1500 €.
3. Un article que costava 2000 € s'ha rebaixat a 1750 €. El percentatge de rebaixa aplicat és:
 - a) 10 % b) 12,5 % c) 15,625 % d) 11,75 %
4. Per envasar 510 litres d'aigua utilitzem ampolles de litre i mitjà. Quantes ampolles necessitarem si volem utilitzar envasos de tres cambres de litre?
 - a) 590 ampolles b) 700 ampolles c) 650 ampolles d) 680 ampolles
5. Els valors que completen la taula de proporcionalitat inversa són:

A	5,5	10		11	
B	20		0,5		0,1

- a) 40; 200; 11,5; 1000 b) 11; 200; 20; 300 c) 11; 220; 10; 1100 d) 40; 220; 10; 500
6. Tres agricultors es reparteixen els quilograms de la collita de forma proporcional a la grandària de les seves parcel·les. La major, que mesura 15 ha rebut 30 tones, la segona és de 12 ha i la tercera de 10 ha rebran:
 - a) 24 t i 20 t b) 20 t i 24 t c) 24 t i 18 t d) 25 t i 20 t
7. L'escala a la qual s'ha dibuixat un mapa en el qual 2,7 cm equivalen a 0,81 km és:
 - a) 1 : 34000 b) 1 : 3000 c) 1 : 30000 d) 1 : 300
8. Amb 4 rotllos de paper de 5 m de llarg, puc folrar 32 llibres. Quants rotllos necessitarem per folrar 16 llibres si ara els rotllos de paper són de 2 m de llarg?
 - a) 3 rotllos b) 5 rotllos c) 4 rotllos d) 2 rotllos
9. El preu final del kg de barreja de 5kg de farina classe A, a 1,2 €/kg, 2,8kg classe B a 0,85 €/kg i 4kg classe C a 1 €/kg és:
 - a) 1,12€ b) 0,98 € c) 1,03€ d) 1,049€
10. La llei d'un aliatge és 0,855. Si el pes de la joia és 304 g, la quantitat de metall preciós és:
 - a) 259,92 g b) 255,4 g c) 248,9 g d) 306 g

RESUM

		Exemples
Proporcionalitat directa	Dues magnituds són directament proporcionals quan en multiplicar o dividir a la primera per un nombre, la segona queda multiplicada o dividida pel mateix nombre. La funció de proporcionalitat directa és una recta que passa per l'origen: $y = kx$. El pendent de la recta, k , és la raó de proporcionalitat directa.	Per empaperar 300 m ² hem utilitzat 24 rotllos de paper, si ara la superfície és de 104 m ² , necessitarem 8,32 rotllos, ja que $k = 300/24 = 12,5$, $y = 12,5x$, per tant $x = 104/12,5 = 8,32$ rotllos.
Proporcionalitat inversa	Dues magnituds són inversament proporcionals quan en multiplicar o dividir a la primera per un nombre, la segona queda dividida o multiplicada pel mateix nombre. La funció de proporcionalitat inversa és la hipèrbola $y = k'/x$. Per tant la raó de proporcionalitat inversa k' és el producte de cada parell de magnituds: $k' = a \cdot b = a' \cdot b'$.	Dues persones pinten un habitatge en 4 dies. Per pintar el mateix habitatge, 4 persones trigaràn: $k' = 8$, $y = 8/x$, per la qual cosa trigaràn 2 dies.
Percentatges	Raó amb denominador 100.	El 87 % de 2400 és $\frac{87 \cdot 2400}{100} = 2088$
Eskales	L'eskala és la proporció entre les mesures del dibuix i les mesures en la realitat.	A eskala 1:50000, 35 cm són 17,5 km en la realitat.
Repartiment proporcional directe Repartir directament a 6, 10 i 14, 105000 € $6 + 10 + 14 = 30$ $105000 : 30 = 3500$ $6 \cdot 3500 = 21000$ € $10 \cdot 3500 = 35000$ € $14 \cdot 3500 = 49000$ €		Repartiment proporcional invers Repartir 5670 inversament a 3,5 i 6 $1/3 + 1/5 + 1/6 = \frac{10+6+5}{30} = \frac{21}{30}$ $5670 : 21 = 270$ $270 \cdot 10 = 2700$ $270 \cdot 6 = 1620$ $270 \cdot 5 = 1350$
Barreges i aliatges	Barrejar diferents quantitats de productes, de diferents preus. La llei d'un aliatge és la relació entre el pes del metall més valuós i el pes total.	Una joia que pesa 245 g i conté 195 g de plata, la seva llei és: $\frac{195}{245} = 0,795$
Interès simple i compost	L'interès és el benefici que s'obté en dipositar un capital en una entitat financera a un determinat tant per cent durant un temps	$C = 3600$; $r = 4,3\%$; $t = 8$ anys $I = \frac{3600 \cdot 4,3 \cdot 8}{100} = 1238,4$ €

CAPÍTOL 7: SEMBLANÇA

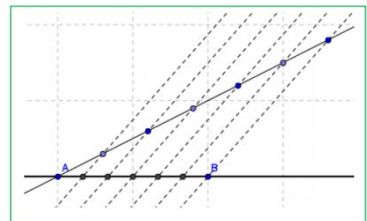
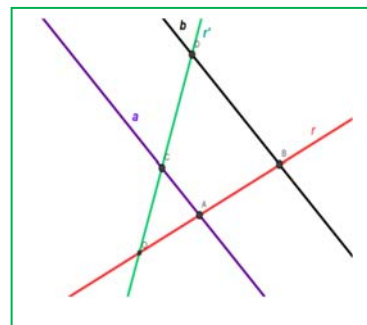
ACTIVITATS PROPOSADES

1. FIGURES SEMBLANTS

- Mesura la teva altura en una foto i calcula el factor de semblança.
- El diàmetre d'un préssec és tres vegades major que el del seu os, i mesura 8 cm. Calcula el volum del préssec, suposant que és esfèric, i el del seu os, també esfèric. Quina és la raó de proporcionalitat entre el volum del préssec i el de l'os?
- En la pizzeria tenen pizzes de diversos preus: 3 €, 6 € i 9 €. Els diàmetres d'aquestes pizzes són: 15 cm, 20 cm i 30 cm, quina resulta més econòmica? Calcula la relació entre les àrees i compara-la amb la relació entre els preus.
- Una maqueta d'un dipòsit cilíndric de 1000 litres de capacitat i 5 metres d'altura, volem que tingui una capacitat d'1 litre. Quina altura ha de tenir la maqueta?

2. EL TEOREMA DE TALES

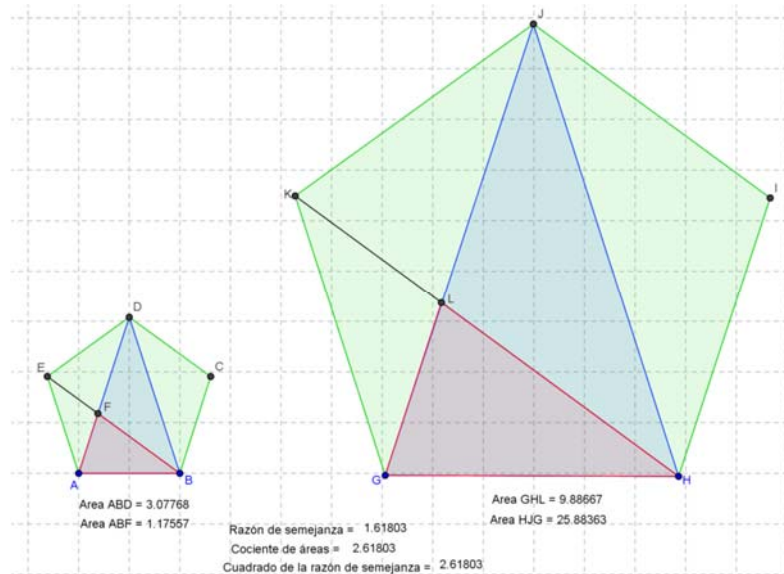
- En una foto hi ha un nin, que sabem que mesura 1,5 m, i un edifici. Mesurem l'altura del nin i de l'edifici a la foto, i resulten ser: 2 cm i 10 cm. Quina altura té l'edifici? *Comprovació:* El resultat et sembla real? És possible que un edifici tingui aquesta altura?
- Es dibuixa un hexàgon regular. Es tracen les seves diagonals i s'obté un altre hexàgon regular. Indica la raó de semblança entre els costats de tots dos hexàgons.
- En un triangle regular ABC de costat 1 cm, tracem els punts mitjans, M i N, de dos dels seus costats. Tracem les rectes BN i CM que es tallen en un punt O. Són semblants els triangles MON i COB? Quina és la raó de semblança? Quant mesura el costat MN?
- Una piràmide regular hexagonal, de costat de la base 3 cm i altura 10 cm, es talla per un plànol a una distància de 4 cm del vèrtex, amb el que s'obté una nova piràmide. Quant mesuren les seves dimensions?
- Siguin ABC i AED dos triangles en posició Tales. Se sap que AB = 7 m, BC = 5 m, AC = 4 m i AD = 14 m. Calcula les dimensions de AED i el seu perímetre.
- Repte:* Utilitza una fulla en blanc per demostrar el teorema de Tales sense ajuda. No fa falta que utilitzis el mateix procediment que el llibre. Hi ha moltes maneres de demostrar el teorema.
- Siguin O, A i B tres punts alineats i siguin O, C, D altres tres punts alineats en una recta diferent a l'anterior. Es verifica que $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$. Podem assegurar que el segment AC és paral·lel al segment BD? Raona la resposta.
- Sean O, A i B tres punts alineats i siguin O, C, D altres tres punts alineats en una recta diferent a l'anterior. Es verifica que $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD}$. Podem assegurar que el segment AC és paral·lel al segment BD? Raona la resposta.
- Busca altres relacions de semblança entre els triangles de la dreta. Per exemple el sisè triangle és el doble que el tercer.
- Dibuixa en el teu quadern un segment i divideix-ho en 5 parts iguals utilitzant regla i compàs. Demuestra que, utilitzant el teorema de Tales els segments obtinguts són, en efecte, iguals.
- Dibuixa en el teu quadern un segment de 7 cm de longitud, i divideix-ho en dos segments que estiguin en una proporció de 3/5.
- Dibuixa en el teu quadern una recta numèrica i representa en ella els següents fraccions:
 - 1/2
 - 5/7
 - 3/8
 - 5/3



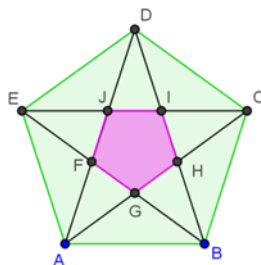
3. SEMBLANÇA DE TRIANGLES

- Indica si són semblants els següents parells de triangles:
 - Un angle de 60° i un altre de 40°. Un angle de 80° i un altre de 60°.
 - Triangle isòsceles amb angle desigual de 80°. Triangle isòsceles amb angle igual de 50°.
 - $A = 30^\circ$, $b = 8$ cm, $c = 10$ cm. $A' = 30^\circ$, $b' = 4$ cm, $c' = 5$ cm
 - $a = 7$ cm, $b = 8$ cm, $c = 12$ cm. $a' = 14$ cm, $b' = 16$ cm, $c' = 25$ cm
- Calcula el valor desconegut perquè els triangles siguin semblants:
 - $a = 12$ cm, $b = 15$ cm, $c = 10$ cm. $a' = 5$ cm, b' , c' ?
 - $A = 37^\circ$, $b = 10$ cm, $c = 12$ cm. $A' = 37^\circ$, $b' = 10$ cm, c' ?
- Un triangle té costats de 12 cm, 14 cm i 8 cm. Un triangle semblant a ell té un perímetre de 80 cm. Quant mesuren els seus costats?

20. Els catets d'un triangle rectangle mesuren 3 i 4 cm, quant mesura l'altura sobre la hipotenusa?
21. Els catets d'un triangle rectangle mesuren 3 i 4 cm, quant mesura la projecció sobre la hipotenusa de cadascun d'aquests catets?
22. Dibuixa els tres triangles semblants per al triangle rectangle de catets 3 i 4 en posició de Tales. Comprova aquests resultats en un altre pentàgon
23. Dibuixa un pentàgon $GHIJK$ de la mateixa manera que has construït el $ABCDE$ amb la condició que la longitud dels seus costats sigui el triple del que ja està construït. Per facilitar la tasca pots activar la quadrícula i moure els punts inicials.
- a) Calcula les àrees dels triangles HJG i GHL , la seva raó de semblança, el quocient entre les seves àrees i el quadrat de la raó de semblança.



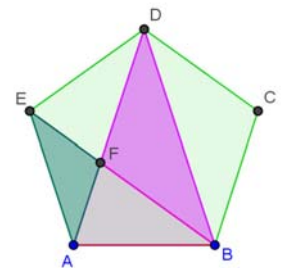
- b) Comprova que la raó de semblança, el quocient entre les àrees i el quadrat de la raó de semblança dels triangles GHI i GHL del pentàgon $GHIJK$ coincideixen amb les dels triangles ABD i ABF del pentàgon $ABCDE$.



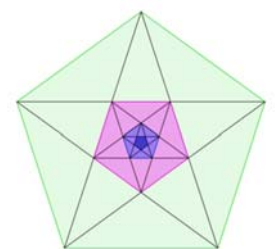
24. Calcula les àrees dels dos pentàgons i relaciona el seu quocient amb el quadrat de la raó de semblança.

25. *Altres triangles del pentàgon.* Investiga si els triangles AFE i BDF són semblants i si ho són calcula la seva raó de semblança, el quocient entre les seves àrees i compara aquest resultat amb el quadrat de la raó de semblança.

26. *Pentàgon dins d'un pentàgon.* Dibuixa el pentàgon $FGHIJ$ que es forma en el pentàgon $ABCDE$ en traçar les seves diagonals tots dos són semblants perquè són polígons regulars. Calcula la raó de semblança i el quocient entre les seves àrees. Observa els triangles AGF i ABD són semblants?



27. Observa els pentàgons regulars de la figura:
- a) Són tots semblants?
- b) Et sembla que el procés de dibuixar pentàgons dins de pentàgons és infinit? Per què?
- c) Quina és la successió de les raons de semblança entre el pentàgon major i cadascun dels següents?



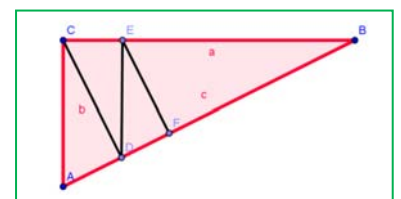
EXERCICIS I PROBLEMES

Figures semblants

1. Busca fotografies, plànols, fotocòpies, figures a escala, etc. pren mesures i determina les raons de semblança. Calcula les mesures reals i comprova que la raó de semblança obtinguda és correcta.
2. En un mapa de carretera d'escala 1:3000 la distància entre dues ciutats és de 2,7 cm. Calcula la distància real entre aquestes ciutats.
3. Un microscopi té un augment de 500X, quina grandària té la imatge que es veu per l'objectiu si observem un parameci de 0,034 mm de diàmetre?
4. Pericles va morir de pesta l'any 429 a.C. Consultat l'oracle d'Apol·lo havien de construir un altar en forma de cub el volum del qual dupliqués exactament el que ja existia. Quina havia de ser la raó de proporcionalitat dels costats? És possible construir exactament un cub amb aquesta raó?
5. En una fotografia una persona que sap que fa 1,75 m té una altura de 2,3 cm. Apareix un arbre que en la fotografia fa 5,7 cm, quant mesura en la realitat?
6. Quant mesura el costat d'un icosaèdre la superfície del qual és el triple del d'un altre icosaèdre de costat 4 cm?
7. Suposem que un préssec és una esfera, i que el seu os té un diàmetre que és un terç del diàmetre del préssec. Quant és major la polpa del préssec que el seu os?
8. Són semblants tots els quadrats? I tots els rombes? I tots els rectangles? Quan són semblants dos rombes? I dos rectangles?
9. L'àrea d'un rectangle és 10 cm², i un dels seus costats fa 2 cm, quina àrea té un rectangle semblant a l'anterior en el qual el costat corresponent fa 1 cm? Quin perímetre té?
10. Són semblants totes les esferes? I els icosaèdres? I els cubs? I els dodecaedres? Quan són semblants dos cilindres?
11. L'aresta d'un octaèdre fa 7,3 cm, i la d'un altre 2,8 cm, Quina relació de proporcionalitat hi ha entre les seves superfícies? I entre els seus volums?
12. La mesura normalitzada A\$ té la propietat que si partim el rectangle per la meitat de la seva part més llarga, el rectangle que s'obté és semblant al primer. Duplicant, o dividint s'obtenen les dimensions dels rectangles A1, A2, A3, A4, A5.... El rectangle A4 mesura 29,7 cm x 21 cm. Determina les mesures de A3 i de A5.
13. Dibuixa un pentàgon regular i traça les seves diagonals. Tens un nou pentàgon regular. Quin és la raó de semblança?
14. Dibuixa en el teu quadern un pentàgon regular i traça les seves diagonals. Quant mesuren els angles del triangle format d'una banda del pentàgon i les dues diagonals del vèrtex oposat? Aquest triangle es denomina *triangle auri*, ja que en dividir el costat major entre el menor s'obté el nombre d'or. En la figura que has traçat hi ha altres triangles semblants al auri, quina relació de proporcionalitat hi ha entre ells?
15. El mapa a escala 1:1500000 d'una regió té un àrea de 1600 cm², quant mesura la superfície real d'aquesta regió?
16. Eratòstenes d'Alexandria (276 – 196 a. C.) va observar que en Siena la direcció dels rajos solars era perpendicular a la superfície de la Terra en el solstici d'estiu. Va viatjar seguint el curs del Nil una distància de 790 km (5 mil estadis) i va mesurar la inclinació dels rajos del sol en el solstici d'estiu a Alexandria que era α de = 7° 12'. Va utilitzar la proporcionalitat: $2\pi R/790 = 360^\circ/\alpha$ per determinar el radi de la Terra. Què va obtenir?
17. Tenim un conjunt de rectangles de costats: A: 4 i 7, B: 2 i 5, C: 8 i 14, D: 4 i 10, E: 3 i 7, F: 9 i 21. Indica quins són semblants. Dibuixa i retalla el rectangle A, i dibuixa la resta de rectangles. Superposa el rectangle A amb els altres rectangles i explica que observes amb el qual és semblant. Quina longitud té l'altre costat d'un rectangle semblant a A el costat menor del qual mesuri 10 cm?

El teorema de Tales

18. Divideix un segment qualsevol en 5 parts iguals utilitzant el teorema de Tales. Sabries fer-ho per un altre procediment exacte?
19. Divideix un segment qualsevol en 3 parts proporcionals a 2, 3, 5 utilitzant el teorema de Tales.
20. Si algú mesura 1'75 m i la seva ombra mesura 1 m, calcula l'altura de l'edifici l'ombra del qual mesura 25 m a la mateixa hora.
21. Un rectangle té una diagonal de 75 m. Calcula les seves dimensions sabent que és semblant a un altre rectangle de costats 36 m i 48 m.
22. Siguin OAC i OBD dos triangles en posició Tales. El perímetre de OBD és 200 cm, i OA fa 2 cm, AC fa 8 cm i OC fa 10 cm. Determina les longituds dels costats de OBD.
23. En el museu de Bagdad es conserva una tauleta en la qual apareix dibuixat un triangle rectangle ABC, de costats $a = 60$, $b = 45$ i $c = 75$, subdividit en 4 triangles rectangles menors ACD, CDE, DEF i EFB, i l'escriba ha calculat la longitud del costat AD. Utilitza el teorema de Tales per determinar les longituds dels segments AD, CD, DE, DF, EB, BF i EF. Calcula l'àrea del triangle ABC i dels triangles ACD, CDE, DEF i EFB.

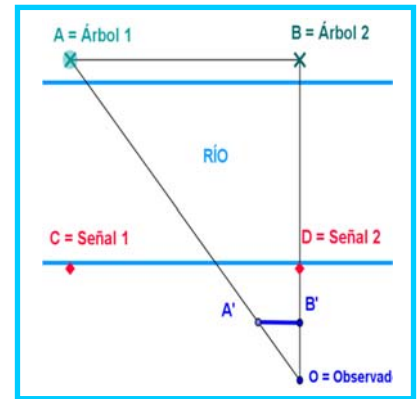


Semblança de triangles

24. El triangle rectangle ABC té un angle de 54° i un altre triangle rectangle té un angle de 36° . Podem assegurar que són semblants? Raona la resposta.
25. La hipotenusa d'un triangle rectangle fa 25 cm i l'altura sobre la hipotenusa fa 10 cm, quant fan els catets?
26. Indica si són semblants els següents parells de triangles:
 - a) Un angle de 50° i un altre de 40° . Un angle de 90° i un altre de 40° .
 - b) Triangle isòsceles amb angle desigual de 40° . Triangle isòsceles amb un angle igual de 70° .
 - c) $A = 72^\circ$, $b = 10$ cm, $c = 12$ cm. $A' = 72^\circ$, $b' = 5$ cm, $c' = 6$ cm.
 - d) $a = 7$ cm, $b = 5$ cm, $c = 8$ cm. $a' = 21$ cm, $b' = 15$ cm, $c' = 24$ cm.
27. Calcula el valor desconegut perquè els triangles siguin semblants:
 - a) $a = 12$ cm, $b = 9$ cm, $c = 15$ cm. $a' = 8$ cm, b' , c' ?
 - b) $A = 45^\circ$, $b = 6$ cm, $c = 4$ cm. $A' = 45^\circ$, $b' = 24$ cm, a' ?
28. Les longituds dels costats d'un triangle són 7 cm, 9 cm i 10 cm. Un triangle semblant a ell té un perímetre de 65 cm. Quant mesuren els seus costats?
29. L'ombra d'un edifici fa 23 m, i la del primer pis 3 m. Sabem que l'altura d'aquest primer pis és de 2,7 m, quina és l'altura l'edifici?
30. Demuestra que en dos triangles semblants les bisectrius són proporcionals.
31. Un triangle rectangle isòsceles té la hipotenusa de longitud 9 cm, igual a un catet d'un altre triangle semblant al primer. Quant valen les àrees de tots dos triangles?
32. Unint els punts mitjans dels costats d'un triangle s'obté un altre triangle. Són semblants? Quina relació hi ha entre els seus perímetres? I entre les seves àrees?
33. L'altura i la base d'un triangle isòsceles mesuren respectivament 7 i 5 cm; i és semblant a un altre de base 12 cm. Calcula l'altura del nou triangle i les àrees de tots dos.
34. Els triangles següents són semblants. Esbrina la mesura dels angles que falten sabent que:
 - a) Són rectangles i un angle del primer triangle mesura 52° .
 - b) Dos angles del primer triangle mesuren 30° i 84° .
35. Els triangles següents són semblants. Esbrina les mesures que falten sabent que:
 - a) Els costats del primer triangle mesuren 10 m, 15 m i z m. Els de el segon: x m, 9 m i 8 m.
 - b) Els costats del primer triangle mesuren 4 m, 6 m i 8 m. Els de el segon: 6 m, x m i z m.
 - c) Un costat del primer triangle mesura 12 cm i l'altura sobre aquest costat 6 cm. El costat corresponent del segon mesura 9 cm, i l'altura x cm
 - d) Un triangle isòsceles té l'angle desigual de 35° i el costat igual de 20 cm i el desigual de 7 cm; l'altre té el costat igual de 5 cm. Quant mesuren els seus altres costats i angles?
36. Enuncia el primer criteri de semblança de triangles per a triangles rectangles.
37. Els egipcis usaven una corda amb nusos, tots a la mateixa distància, per obtenir angles rectes. Formaven triangles de longitud 3, 4 i 5. Per què? Els indis i els xinesos usaven un procediment similar encara que utilitzant cordes amb els nusos separats en 5, 12 i 13, i també 8, 15 i 17. Per què? Escriu les longituds dels costats de triangles semblants als indicats.
38. Es vol calcular l'altura d'un arbre per a la qual cosa es mesura la seva ombra: 13 m, i l'ombra d'un pal de 1'2 m de longitud, 0,9 m. Quina altura té l'arbre?
39. Ara no podem usar el procediment de l'ombra perquè l'arbre és inaccessible (hi ha un riu al mig) però sabem que està a 30 m de nosaltres. Com ho faries? En Pep ha agafat un llapis de 10 cm i l'ha col·locat a 50 cm de distància. D'aquesta manera ha aconseguit veure alineat la base de l'arbre amb un extrem del llapis, i la punta de l'arbre amb l'altre. Quant mesura aquest arbre?
40. Arquímedes calculava la distància a la qual estava un vaixell de la costa. Amb una esquadra ABC alineava els vèrtexs BC amb el vaixell, C' , i coneixia l'altura del penya-segat fins al vèrtex B . Dibuixa la situació, determina quins triangles són semblants. Calcula la distància del vaixell si $BB' = 50$ m, $BA = 10$ cm, $AC = 7$ cm.

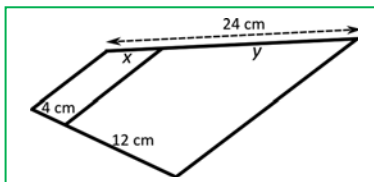
CURIOSITATS. REVISTA

- Calcula l'altura de la Piràmide de Kheops sabent que la seva ombra mesura 175,93 metres i que al mateix temps l'ombra d'un bastó d'altura un metre, mesura 1,2 metres.
- Calcula l'altura d'un arbre sabent que la seva ombra mesura 15 metres i que al mateix temps l'ombra d'un pal d'altura un metre, mesura 1,5 metres.
- Uns exploradors troben un riu i volen construir una passarel·la per creuar-ho, però, com conèixer l'amplària del riu, si no podem anar a l'altra riba? Pensa! Pensa! Segur que se t'ocorren moltes bones idees, millors que la que t'anem a comentar a continuació.
- Cerques en la riba oposada dos arbres, (o dues roques, o ...), A i B . Col·locant-te en la teva riba perpendicular a ells, marques dos senyals, (Senyal 1 i Senyal 2), i mesures així la distància entre aquests dos arbres. Ara mesurant angles dibuixes dos triangles semblants. Un, en la teva riba, ho pots mesurar, i per semblança de triangles calcules els costats de l'altre.
- Imagina que la distància CD és de 10 metres, que $A'B'$ mesura 2 metres i que $OB' = 2,5$ m. Quant mesura OB ? Si OD mesura 5 metres, quant mesura l'amplària del riu?
- Com podries conèixer a quina distància de la costa està un vaixell?

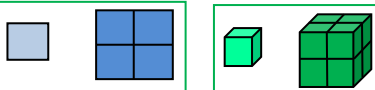
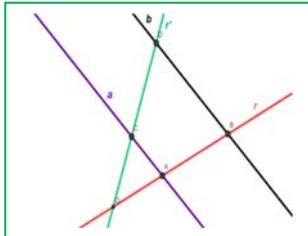

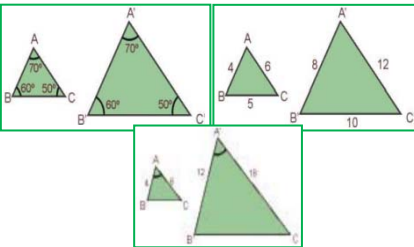
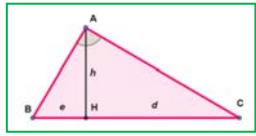
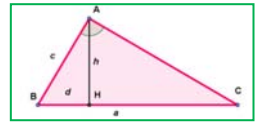


AUTOAVALUACIÓ

1. En un mapa de carretera d'escala 1:1200 la distància entre dos pobles és de 5 cm. La distància real entre aquests pobles és de:
 - a) 60 m
 - b) 60 km
 - c) 240 km
 - d) 240 cm
2. Si un microscopi té un augment de 1000X, quina grandària (aparent) penses que tindrà la imatge que es vegi per l'objectiu si observem una cèl·lula de 0,01 mm de diàmetre
 - a) 1 cm
 - b) 1 mm
 - c) 0,1 cm
 - d) 100 mm
3. Volem construir un quadrat d'àrea doble d'un d'un metre de costat. El costat del nou quadrat ha de mesurar:
 - a) 2 metres
 - b) $\sqrt{2}$ metres
 - c) $\sqrt[3]{2}$ metres
 - d) 1,7 metres
4. Sean OAC i OBD dos triangles en posició *Tales*. El perímetre de OBD és 50 cm, i OA mesura 1 cm, AC mesura 1,5 cm i OC mesura 2,5 cm. Les longituds dels costats de OBD són:
 - a) $OB = 10$ cm, $OD = 20$ cm, $BD = 30$ cm
 - b) $OB = 25$ cm, $OD = 10$ cm, $BD = 15$ cm
 - c) $OB = 10$ cm, $OD = 15$ cm, $BD = 25$ cm
 - d) $OB = 15$ cm, $OD = 25$ cm, $BD = 30$ cm.
5. En la figura adjunta els valors de x i y són:
 - a) 6 i 12 cm
 - b) 5 i 19 cm
 - c) 6 i 18 cm
 - d) 5 i 20 cm
6. Els triangles ABC i DEF són semblants. Els costats d' ABC mesuren 3, 5 i 7 cm, i el perímetre de DEF mesura 60 m. Els costats de DEF mesuren:
 - a) 6, 10 i 14 cm
 - b) 12, 20 i 28 cm
 - c) 9, 15 i 21 m
 - d) 12, 20 i 28 m
7. Dos triangles rectangles són proporcionals si:
 - a) Tenen els catets proporcionals
 - b) Tenen un angle igual
 - c) Tenen un angle diferent del recte igual
 - d) Les seves àrees són proporcionals
8. Els triangles ABC i DEF són semblants. L'angle A mesura 30° , i B , 72° . Quant mesuren els angles D , E i F ?
 - a) $D = 72^\circ$, $E = 78^\circ$ i $F = 30^\circ$
 - b) $D = 30^\circ$, $E = 88^\circ$ i $F = 72^\circ$
 - c) $D = 30^\circ$, $E = 72^\circ$ i $F = 68^\circ$
9. L'altura d'un triangle rectangle divideix a la hipotenusa en dos segments de longitud 5 i 4 cm, quant mesura l'altura?
 - a) 5,67 cm
 - b) 4 cm
 - c) 6 cm
 - d) 5 cm
10. La projecció d'un catet sobre la hipotenusa d'un triangle rectangle mesura 4 cm, i la hipotenusa 9 cm, quant mesura el catet?
 - a) 7 cm
 - b) 5 cm
 - c) 5,67 cm
 - d) 6 cm.



RESUM

Figures semblants	Si les longituds d'elements corresponents són proporcionals.	
Raó de semblança	Coefficient de proporcionalitat	
Semblança en longituds, àrees i volums	Si la raó de semblança entre les longituds d'una figura és k , llavors la raó entre les seves àrees és k^2 i entre els seus volums és k^3 .	
Teorema de Tales	Donades dues rectes, r i r' , que es tallen en el punt O , i dues rectes paral·leles entre si, a i b . La recta a curta a les rectes r i r' en els punts A i C , i la recta b curta a les rectes r i r' en els punts B i D . Llavors:	
Recíproc del teorema de Tales	$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD}$ Si $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD}$ llavors a i b són paral·leles.	
Semblança de triangles	Dos triangles són semblants si tenen tots els angles iguals i els costats proporcionals.	
Criteris de semblança de triangles	Dos triangles són semblants si: Primer: Tenen dos angles iguals. Segon: Tenen els tres costats proporcionals. Tercer: Tenen dos costats proporcionals i l'angle que formen és igual.	
Teorema de l'altura	En un triangle rectangle l'altura és mitjana proporcional dels segments en els quals divideix a la hipotenusa: $\frac{h}{e} = \frac{d}{h}$.	
Teorema del catet	En un triangle rectangle un catet és mitjana proporcional entre la hipotenusa i la seva projecció sobre ella: $\frac{a}{c} = \frac{c}{d}$.	

CAPÍTOL 8: TRIGONOMETRIA.

ACTIVITATS PROPOSADES

1. SISTEMES DE MESURA D'ANGLES

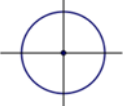
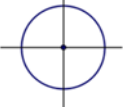
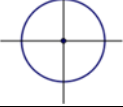
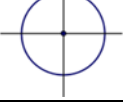
- Expressa en radians les següents mesures: 45° , 150° , 210° , 315° .
- Expressa en graus sexagesimals: $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{5}$ i $\frac{3\pi}{8}$ radians.
- Dos angles d'un triangle mesuren respectivament 40° i $\frac{\pi}{3}$ radians. Calcula en radians el que mesura el tercer angle.
- Un angle d'un triangle isòsceles mesura $\frac{5\pi}{6}$ radians. Calcula en radians la mesura dels altres dos.
- Dibuixa un triangle rectangle isòsceles i expressa en radians la mesura de cadascun dels seus angles.

2. RAONS TRIGONOMÈTRIQUES D'UN ANGLE AGUT

- Sabent que $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, calcula les raons trigonòmriques secant, cosecant i cotangent de α .
- Si $\cotan \alpha = 2$, calcula les cinc raons trigonòmriques de l'angle α .
- Demuestra que $\operatorname{cosec}^2 \alpha = 1 + \cotan^2 \alpha$

3. RAONS TRIGONOMÈTRIQUES D'UN ANGLE QUALSEVOL

- Situa en el quadrant que correspongui i expressa en funció d'un angle agut, el sinus, cosinus i tangent dels següents angles:

Angle	quadrant	sinus	cosinus	tangent
165°				
-230°				
315°				
3625°				

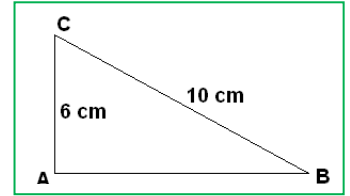
- Utilitza la calculadora per trobar tots els angles positius menors que 360° el sinus dels quals és de 0,4.
- Utilitza la calculadora per trobar tots els angles negatius menors en valor absolut que 360° la tangent del qual val 2.
- Utilitza la calculadora per trobar tots els angles compresos entre 360° i 720° el cosinus dels quals val 0,5.

4. RESOLUCIÓ DE TRIANGLES QUALSEVOL

- Calcula la longitud del costat a de un triangle, sabent que $C = 25^\circ$, $b = 7$ cm i $c = 4$ cm.
- Calcula els angles del triangle de costats: $a = 6$, $b = 8$ i $c = 5$.

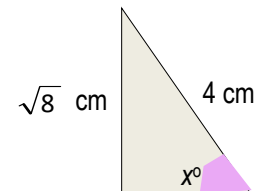
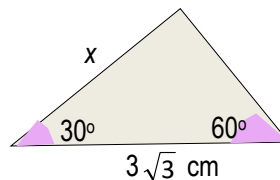
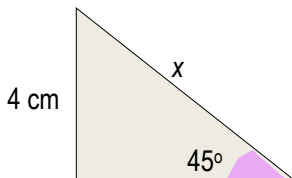
EXERCICIS I PROBLEMES

- Expressa les següents mesures d'angles en radians:
 - 30°
 - 60°
 - 100°
 - 330°
- Quant mesura en graus sexagesimals un angle d'1 rad? Aproxima el resultat amb graus, minuts i segons.
- Troba la mesura en graus dels següents angles expressats en radians: a) π ; b) $\frac{\pi}{3}$; c) $\frac{5\pi}{6}$; d) 2π .
- Usant la calculadora troba el sinus, el cosinus i la tangent de : a) 28° , b) 62° . Trobes alguna relació entre les raons trigonomètriques de tots dos angles?
- Troba el sinus i el cosinus dels angles B i C del dibuix. Quina relació trobes?
- En un triangle rectangle ABC amb angle recte en A, si $\tan B = 1,2$ i $b = 3$ cm, quant mesura c?
- Treballant amb angles aguts, és cert que a major angle li correspon major sinus? I per al cosinus?
- Usant la calculadora troba el sinus, el cosinus i la tangent de 9° i 81° . Trobes alguna relació entre les raons trigonomètriques de tots dos angles?
- Si a és un angle agut i $\cos a = 0,1$, quant valen les altres dues raons trigonomètriques?
- Comprovar les relacions trigonomètriques fonamentals amb 30° , 45° i 60° sense utilitzar decimals ni calculadora.
- Si a és un angle agut i $\tan a = 0,4$, quant valen les altres dues raons trigonomètriques?
- Completa en el teu quadern el següent quadre sabent que α és un angle agut.

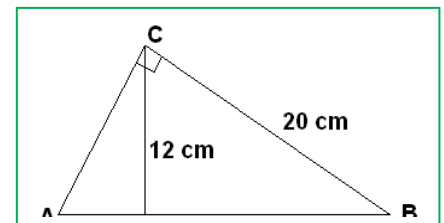




$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
	0,7	
1/3		
		2

- És rectangle un triangle els costats del qual mesuren 12, 13 i 5 cm? En cas afirmatiu determina el sinus, cosinus i tangent dels dos angles aguts.
- Els catets d'un triangle rectangle mesuren 5 i 12 cm. Calcula les raons trigonomètriques dels seus angles aguts. Quina amplitud tenen?
- Si α és un angle agut tal que $\sin \alpha = 1/3$, calcula:
 - Les restants raons trigonomètriques de α
 - Les raons trigonomètriques de $180^\circ - \alpha$
 - Les raons trigonomètriques de $180^\circ + \alpha$
 - Les raons trigonomètriques de $360^\circ - \alpha$
- Sense utilitzar calculadora, calcula el valor de x en els següents triangles rectangles:



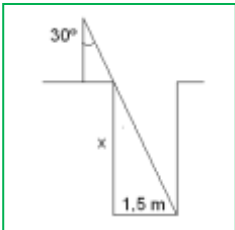
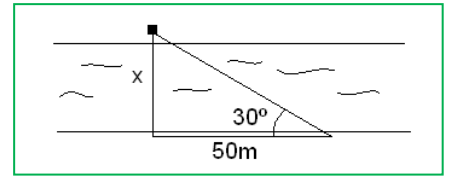
- Beatriz subjecta un estel amb una corda de 42 m. A quina altura es troba aquesta en el moment en què el cable tibant forma un angle de $52^\circ 17'$ amb el terra?
- Calcula el sinus, cosinus i tangent de l'angle A en el següent dibuix:
- Si a és un angle del segon quadrant i $\cos a = -0,05$, quant valen les altres dues raons trigonomètriques?
- Si a és un angle obtús i $\sin a = 0,4$, quant valen les altres dues raons trigonomètriques?
- Dibuixa en el teu quadern la taula següent i situa en el quadrant que correspongui i expressa en funció d'un angle agut, el sinus, cosinus i tangent dels següents angles:



Angle	quadrant	sinus	cosinus	tangent	secant	cosecant	cotangent
-225°							
150°							

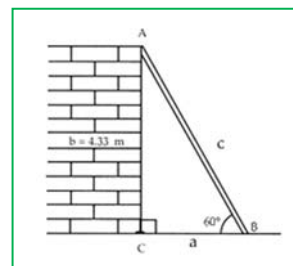
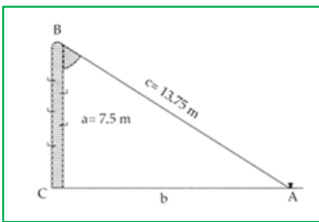
-60°							
3645°							

22. Calcula l'amplària del riu representat en la figura del marge:
 23. Esbrina l'altura de la torre d'una església si a una distància de 80 m, i mesurat amb un teodolit d'altura 1,60 m, l'angle d'elevació del paral·lamps que està a la part alta de la torre és de 23°.



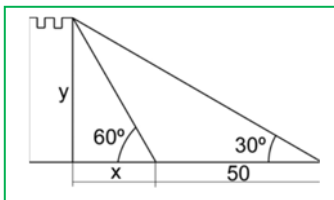
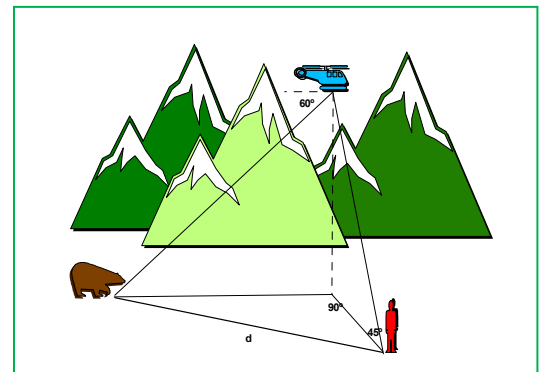
24. Troba l'àrea d'un hexàgon regular de costat 10 cm.
 25. Calcula la profunditat d'un pou d'1,5 m de diàmetre sabent l'angle indicat en la figura del marge:
 26. Calcula l'altura d'una muntanya sabent que si ens situem a una distància de 3000 m del peu de la seva vertical i mesurem el cim amb un teodolit d'altura 1,50 m, presenta un angle d'inclinació de 49°.
 27. Quin és l'angle d'inclinació dels rajos solars en el moment en què un bloc de pisos de 25 m d'altura projecta una ombra de 10 m de longitud?

28. Troba l'altura i l'àrea d'un triangle isòsceles la base del qual mesura desigual del qual val 26°.
 29. Troba l'àrea d'un dodecàgon regular de costat 16 cm.
 30. Obtenir la longitud d'una escala recolzada en una paret de 4,33 m angle de 60° amb el terra.
 31. El fil d'un estel totalment estès mesura 150 m, i forma un angle amb el subjecte a 1,5 m del sòl. A quina l'estel?



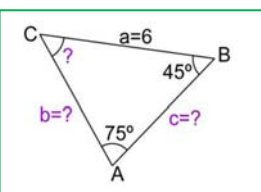
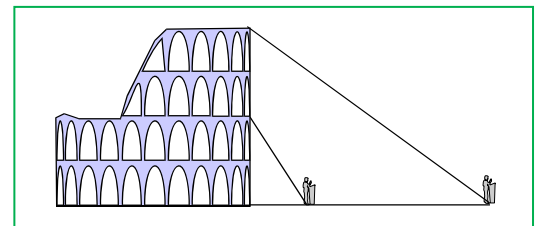
20 cm i l'angle d'altura que forma un el sòl de 40° mentre altura del sòl està

32. Per mesurar l'altura d'un campanar podem accedir, tendim una corda de 30 m de llarg des de l'alt de la torre fins a tibar-la en el sòl, formant amb aquest un angle de 60°. Quina és l'altura del campanar?
 33. Obtenir l'angle que forma un pal de 7.5 m d'alt amb un cable tirant que va, des de la punta del primer fins al terra, i que fa 13,75 m de llarg.
 34. Dos amics observen des de la seva casa un globus que està situat en la vertical de la línia que uneix les seves cases. La distància entre les seves cases és de 3 km. Els angles d'elevació mesurats pels amics són de 45° i 60°. Troba l'altura del globus i la distància d'ells al globus.
 35. Un biòleg es troba en el port de Somiedo fent un seguiment dels óssos bruns. Compta amb l'ajuda d'un càmera i un pilot que volen en un helicòpter, mantenint-se a una altura constant de $40\sqrt{3}$ m. En el moment que descriu la figura, el càmera veu des de l'helicòpter a l'ós amb un angle de depressió (angle que forma la seva visual amb l'horitzontal marcat en el dibuix) de 60°. El biòleg dirigeix una visual a l'helicòpter que forma amb el sòl un angle de 45°. Calcular la distància d entre el biòleg i l'ós.



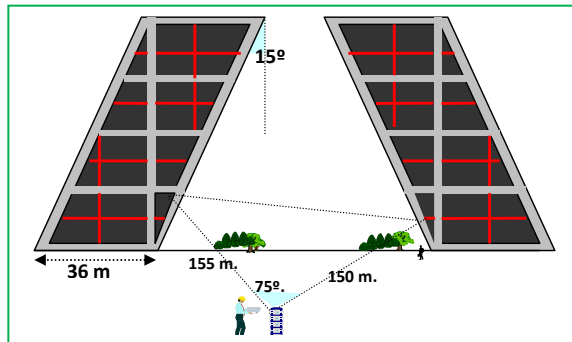
36. Des de cert lloc del terra es veu el punt més alt d'una torre, formant la visual un angle de 30° amb l'horitzontal. Si ens apropem 50 m a la torre, aquest angle es fa de 60°. Calcula l'altura de la torre.

37. Amb un teodolit d'1 metre d'altura, dues persones pretenen mesurar l'altura del Coliseu de Roma. Una d'elles s'apropa a l'amfiteatre, separant-se 40 m. de l'altra. Aquesta última obté que l'angle d'elevació del punt més alt és de 30°. L'altra no veu el Coliseu complet per la qual cosa mesura l'angle d'elevació al punt que marca la base del tercer pis, obtenint 60° com a resultat. Calcular l'altura del Coliseu i la distància dels dos observadors a la base del mateix.
 38. Resol el triangle: $a = 6$; $B = 45^\circ$; $A = 75^\circ$.
 39. Els pares de Pere tenen una parcel·la en el camp de forma triangular els costats de la qual

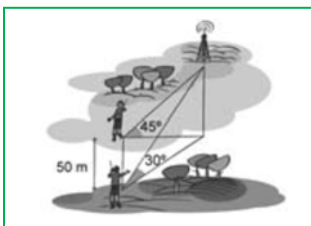
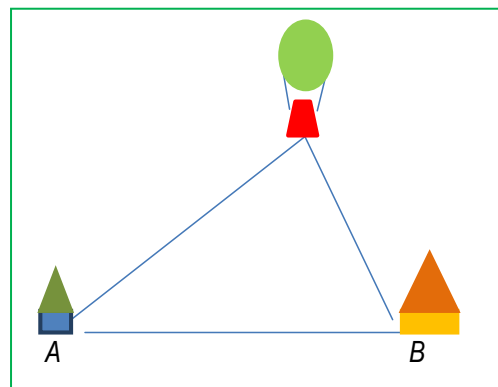


mesuren 20, 22 i 30 m. Pere vol calcular els angles. Quins són aquests angles?

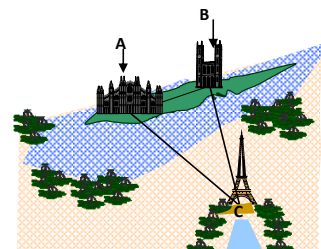
40. Estant situat a 100 m d'un arbre, veig la seva copa sota un angle de 30° . El meu amic veu el mateix arbre sota un angle de 60° . A quina distància està el meu amic de l'arbre?
41. Les conegudes *torres Kio* de Madrid són dues torres bessones que estan en el Passeig de la Castellana, al costat de la Plaça de Castella. Es caracteritzen per la seva inclinació i representen una porta cap a Europa.



- a. Amb les dades que apareixen en la figura, determina la seva altura.
- b. Des de dues oficines situades en torres diferents s'han estès dos cables fins a un mateix punt que mesuren 155 i 150 m i que formen un angle de 75° al punt de trobada. Quina distància en línia recta hi ha entre ambdues?
42. Tres pobles estan units per carreteres: $AB = 10$ km, $BC = 12$ km i l'angle format per AB i BC és de 120° . Quina és la distància entre A i C .
43. Van a construir un túnel del punt A al punt B . Es pren com a referència una antena de telefonia (C) visible des de tots dos punts. Es mesura llavors la distància $AC = 250$ m. Sabent que l'angle en A és de 53° i l'angle en B és de 45° calcula quina serà la longitud del túnel.
44. Calcular el costat d'un pentàgon regular inscrit en una circumferència de radi 6 m.
45. El punt més alt d'un repetidor de televisió, situat en el cim d'una muntanya, es veu des d'un punt del terra P sota un angle de 67° . Si ens acostem a la muntanya 30 m ho veiem sota un angle de 70° i des d'aquest mateix punt veiem el cim de la muntanya sota un angle de 66° . Calcular l'altura del repetidor.
46. Des de dalt d'un globus s'observa un poble A amb un angle de 50° . Un altre poble, B situat al costat i en línia recta s'observa des d'un angle de 60° . El globus es troba a 6 km del poble A i a 4 km de B . Calcula la distància entre A i B .
47. Resol els triangles: a) $a = 20$ m; $B = 45^\circ$; $C = 65^\circ$; b) $c = 6$ m, $A = 105^\circ$, $B = 35^\circ$; c) $b = 40$ m; $c = 30$ m, $A = 60^\circ$.
48. Donat el triangle de vèrtexs A, B, C , i sabent que $A = 60^\circ$, $B = 45^\circ$ i $b = 20$ m, resol el triangle i calcula la seva àrea.
49. Calcula la longitud dels costats d'un paral·lelogram que les seves diagonals són de 20 i 16 m. i les diagonals formen entre si un angle de 37° .
50. Un triangle isòsceles amb base 30 m té dos angles iguals de 80° . Quant mesuren els altres dos costats?
51. Tres amics se situen en un camp de futbol. Entre Àlvar i Tomeu hi ha 25 m i entre Tomeu i Cèsar, 12 metres. L'angle format en la cantonada de Cèsar és de 20° . Calcula la distància entre Àlvar i Cèsar.



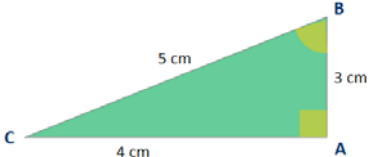
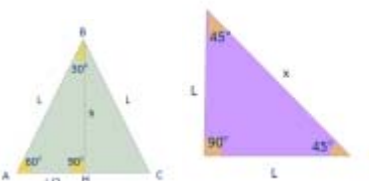
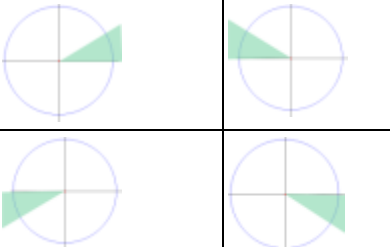
52. Un home que està situat a l'oest d'una emissora de radi observa que el seu angle d'elevació és de 45° . Camina 50 m cap al sud i observa que l'angle d'elevació és ara de 30° . Troba l'altura de l'antena.
53. Els braços d'un compàs mesuren 12 cm i formen un angle de 60° . Quin és el radi de la circumferència que pot traçar-se amb aquesta obertura?
54. Escribe quatre angles amb el mateix sinus que 135° .
55. Troba dos angles que tinguin la tangent oposada a la de 340° .
56. Busca dos angles amb el mateix sinus que 36° i cosinus oposat.
57. Quins angles negatius, compresos entre -360° i 0° tenen el mateix sinus que 60° ?
58. A París i en l'Île de la Cité es troben *Nôtre Dame* i la *Sainte Chapelle* a una distància de 200 metres. Imaginem que un observador situat en A veu B i C amb un angle de 56° i que un altre, situat en B veu A i C amb un angle de 117° . Calcula les distàncies entre la Torre Eiffel (C) i *Nôtre Dame* (B), així com entre la Torre Eiffel (C) i la *Sainte Chapelle* (A).



AUTOAVALUACIÓ

1. L'expressió en radians de 65° és:
 - a) 1,134 rad
 - b) $1,134\pi$ rad
 - c) 2,268 rad
 - d) $2,268\pi$ rad
2. El valor de la hipotenusa en un triangle rectangle amb un angle de 25° i amb un dels catets de 3 cm és:
 - a) 3,3 cm
 - b) 7,1 cm
 - c) 6,4 cm
 - d) 2,2 cm
3. Si α és un angle agut i $\sin \alpha = 0,8$, la tangent d' α és:
 - a) 0,6
 - b) -0,6
 - c) -1,33
 - d) 1,33
4. Selecciona l'opció correcta:
 - a) $\tan A = 2/3$ significa que $\sin A = 2$ i $\cos A = 3$.
 - b) La secant d'un angle sempre està compresa entre -1 i 1
 - c) En el segon i quart quadrants la tangent i cotangent d'un angle tenen signe negatiu
 - d) El sinus d'un angle és sempre menor que la seva tangent.
5. Si el sinus d'un angle del segon quadrant és $4/5$, llavors la seva tangent i secant són respectivament:
 - a) $-\frac{3}{5}$ i $-\frac{5}{3}$
 - b) $\frac{3}{5}$ i $\frac{5}{3}$
 - c) $-\frac{4}{3}$ i $-\frac{3}{4}$
 - d) $\frac{4}{3}$ i $\frac{3}{4}$
6. L'altura d'un edifici és de 50 m, la mesura de la seva ombra quan els rajos del sol tenen una inclinació de 30° amb l'horitzontal és de
 - a) 25 m
 - b) 100 m
 - c) $50\sqrt{3}$ m
 - d) $\frac{100\sqrt{3}}{3}$ m
7. L'angle de -420° és un angle que se situa en
 - a) El primer quadrant
 - b) El segon quadrant
 - c) El tercer quadrant
 - d) El quart quadrant
8. Si α és un angle agut i β és el seu suplementari, es compleix:
 - a) $\sin \alpha = -\sin \beta$ i $\cos \alpha = \cos \beta$
 - b) $\sin \alpha = \sin \beta$ i $\cos \alpha = -\cos \beta$
 - c) $\sin \alpha = \sin \beta$ i $\cos \alpha = \cos \beta$
 - d) $\sin \alpha = -\sin \beta$ i $\cos \alpha = -\cos \beta$
9. Per calcular l'altura d'una muntanya es mesura amb un teodolit des de A l'angle que forma la visual al cim amb l'horitzontal, que és $A = 30^\circ$. Avançant 200 m, es torna a mesurar i l'angle resulta ser $B = 35,2^\circ$. L'altura de la muntanya és de:
 - a) 825 m
 - b) 773 m
 - c) 595 m
 - d) 636 m
10. Si el radi d'un pentàgon regular és 8 cm, la seva àrea mesura
 - a) 305,86 cm²
 - b) 340,10 cm²
 - c) 275,97 cm²
 - d) 152,05 cm²

RESUM

					Exemples
Radiant	És un angle tal que qualsevol arc que se li associï mesura exactament el mateix que el radi utilitzat per traçar-ho. Es denota per rad. Nº de radianys d'un angle complet = $2\pi \cdot \text{rad}$				90° són $\pi/2$ rad
Raons trigonomètriques d'un angle agut	$\sin \alpha = \frac{\text{catet oposat}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$ $\cos \alpha = \frac{\text{catet contigu}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$ $\tan \alpha = \frac{\text{catet oposat}}{\text{catet contigu}} = \frac{b}{c}$				 $\sin C = \frac{3}{5}$, $\cos C = \frac{4}{5}$, $\tan C = \frac{3}{4}$
Relacions fonamentals	<ul style="list-style-type: none"> $(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$ $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ 				$(\sin 30^\circ)^2 + (\cos 30^\circ)^2 =$ $= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$
Altres raons trigonomètriques	$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$ $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$ $\cotan \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$				$\operatorname{cosec} 90^\circ = 1$ $\sec 90^\circ$ No existeix $\cotan 45^\circ = 1$
Raons trigonomètriques de $30^\circ, 45^\circ$ i 60°		sinus	cosinus	tangent	
	30°	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	
	45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	
	60°	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	
Reducció al primer quadrant	Les raons trigonomètriques de qualsevol angle α poden expressar-se en funció de les d'un angle agut β . $\sin 135^\circ = \sin 45^\circ$ $\sin 200^\circ = -\sin 20^\circ$ $\cos (-60^\circ) = \cos 60^\circ$				
Resolució de triangles	Resoldre un triangle és calcular les mesures dels seus angles i els seus costats.				
Teorema dels sinus	En un triangle $\triangle ABC$ qualsevol: $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$				

CAPÍTOL 9: GEOMETRIA

ACTIVITATS PROPOSADES

1. TEOREMA DE PITÀGORES I TEOREMA DE TALES

1. És possible trobar un triangle rectangle els catets del qual mesurin 12 i 16 *cm* i la seva hipotenusa 30 *cm*? Si la teva resposta és negativa, troba la mesura de la hipotenusa d'un triangle rectangle els catets del qual mesuren 12 i 16 *cm*.
2. Calcula la longitud de la hipotenusa dels següents triangles rectangles de catets:

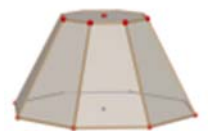
a) 4 <i>cm</i> i 3 <i>cm</i>	b) 1 <i>m</i> i 7 <i>m</i>
c) 2 <i>dm</i> i 5 <i>dm</i>	d) 23,5 <i>km</i> i 47,2 <i>km</i> .

 Utilitza la calculadora si et resulta necessària.
3. Calcula la longitud del catet que falta en els següents triangles rectangles d'hipotenusa i catet:

a) 8 <i>cm</i> i 3 <i>cm</i>	b) 15 <i>m</i> i 9 <i>m</i>
c) 35 <i>dm</i> i 10 <i>dm</i>	d) 21,2 <i>km</i> i 11,9 <i>km</i>
4. Calcula l'àrea d'un triangle equilàter de costat 5 *m*.
5. Calcula l'àrea d'un hexàgon regular de costat 7 *cm*.
6. Una caixa té forma cúbica de 3 *cm* d'aresta. Quant mesura la seva diagonal?
7. Calcula la mida de la diagonal d'una sala que té 8 metres de llarg, 5 metres d'ample i 3 metres d'altura.
8. En una foto hi ha un nin, que sabem que mesura 1,5 *m*, i un edifici. Mesurem l'altura del nen i de l'edifici a la foto, i resulten ser: 0,2 *cm* i 10 *cm*. Quina altura té l'edifici?
9. Es dibuixa un hexàgon regular. Es tracen les seves diagonals i s'obté un altre hexàgon regular. Indica la raó de semblança entre els costats de tots dos hexàgons.
10. En un triangle regular *ABC* de costat, 1 *cm*, tracem els punts mitjans, *M* i *N*, de dues dels seus costats. Tracem les rectes *BN* i *CM* que es tallen en un punt *O*. Són semblants els triangles *MON* i *COB*? Quina és la raó de semblança? Quant mesura el costat *MN*?
11. Una piràmide regular hexagonal de costat de la base 3 *cm* i altura 10 *cm*, es talla per un plànol a una distància de 4 *cm* del vèrtex, amb el que s'obté una nova piràmide. Quant mesuren les seves dimensions?
12. El diàmetre d'un préssec és tres vegades major que el del seu os, i mesura 8 *cm*. Calcula el volum del préssec, suposant que és esfèric, i el del seu os, també esfèric. Quin és la raó de proporcionalitat entre el volum del préssec i el de l'os?
13. En la pizzeria tenen pizzes de diversos preus: 1 €, 2 € i 3 €. Els diàmetres d'aquestes pizzes són: 15 *cm*, 20 *cm* i 30 *cm*, quin resulta més econòmic? Calcula la relació entre les àrees i compara-la amb la relació entre els preus.
14. Una maqueta d'un dipòsit cilíndric de 1000 litres de capacitat i 5 metres d'altura, volem que tingui una capacitat d'1 litre. Quina altura ha de tenir la maqueta?

2. LONGITUDS, ÀREES I VOLUMS

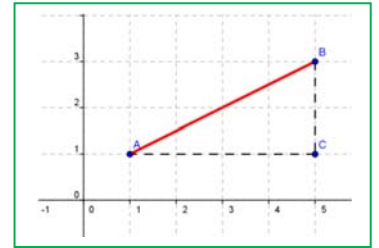
15. Calcula el volum d'un prisma recte de 20 *dm* d'altura la base del qual és un hexàgon de 6 *dm* de costat.
16. Calcula la quantitat d'aigua que hi ha en un recipient amb forma de cilindre sabent que la seva base té 10 *cm* de diàmetre i que l'aigua aconsegueix 12 *dm* d'altura.
17. Calcula les àrees lateral i total d'un prisma hexagonal regular sabent que les arestes de les bases mesuren 3 *cm* i cada aresta lateral 2 *dm*.
18. L'àrea lateral d'un prisma regular de base quadrada és 16 *m*² i té 10 *m* d'altura. Calcula el perímetre de la base.
19. El costat de la base d'una piràmide triangular regular és de 7 *cm* i l'altura de la piràmide 15 *cm*. Calcula l'apotema de la piràmide i la seva àrea total.
20. Calcula l'àrea lateral d'un tronc de piràmide regular, sabent que les seves bases són dos octògons regulars de costats 3 i 8 *dm* i que l'altura de cada cara lateral és de 9 *dm*.
21. Si l'àrea lateral d'una piràmide quadrangular regular és 104 *cm*², calcula l'apotema de la piràmide i la seva altura.
22. Una columna cilíndrica té 35 *cm* de diàmetre i 5 *m* d'altura. Quin és la seva àrea lateral?
23. El radi de la base d'un cilindre és de 7 *cm* i l'altura és el triple del diàmetre. Calcula la seva àrea total.
24. Calcula l'àrea lateral d'un con recte sabent que la seva generatriu mesura 25 *dm* i el radi de la base 6 *dm*.
25. La circumferència de la base d'un con mesura 6,25 *m* i la seva generatriu 12 *m*. Calcula l'àrea total.
26. Una esfera té 4 *m* de radi. Calcula:
 - a) La longitud de la circumferència màxima;
 - b) L'àrea de l'esfera.
27. El dipòsit de gasoil de la casa d'Irene és un cilindre d'1 *m* d'altura i 2 *m* de diàmetre. Irene ha cridat al subministrador de gasoil perquè en el dipòsit solament queden 140 litres.



- a) Quin és, en dm^3 , el volum del dipòsit? (Utilitza 3,14 com a valor de π).
 b) Si el preu del gasoil és de 0,80 € cada litre, quant haurà de pagar la mare d'Irene per omplir el dipòsit?
28. Comprova que el volum de l'esfera de radi 4 dm sumat amb el volum d'un con del mateix radi de la base i 8 dm d'altura, coincideix amb el volum d'un cilindre que té 8 dm d'altura i 4 dm de radi de la base.

3. INICIACIÓ A LA GEOMETRIA ANALÍTICA

29. Representa en un sistema de referència en l'espai de dimensió tres els punts: $O(0, 0, 0)$, $A(1, 2, 3)$, $B(3, 1, 7)$, $D(3, 2, 1)$ i $E(4, 4, 4)$ i vectors: DE i OA .
30. El vector de components $u = (2, 3)$ i origen $A = (1, 1)$, quin extrem té?
31. Calcula la distància entre els punts $A(6, 2)$ i $B(3, 9)$.
32. Calcula la distància entre els punts $A(6, 2, 5)$ i $B(3, 9, 7)$.
33. Calcula la longitud del vector de components $u = (3, 4)$.
34. Calcula la longitud del vector de components $u = (3, 4, 1)$.
35. Dibuixa un quadrat de diagonal el punt $O(0, 0)$ i $A(3, 3)$. Quines coordenades tenen els altres vèrtexs del quadrat? Calcula la longitud del costat i de la diagonal del quadrat.
36. Dibuixa un cub de diagonal $O(0, 0, 0)$ i $A(3, 3, 3)$. Quines coordenades tenen els altres vèrtexs del cub? Ja saps, són 8 vèrtexs. Calcula la longitud de l'aresta, de la diagonal d'una cara i de la diagonal del cub.
37. Sigui $X(x, y)$ un punt genèric del plànel, i $O(0, 0)$ l'origen de coordenades, escriu l'expressió de tots els punts X que disten de O una distància D .
38. Sigui $X(x, y, z)$ un punt genèric de l'espai, i $O(0, 0, 0)$ l'origen de coordenades, escriu l'expressió de tots els punts X que disten de O una distància D .
39. Escriu l'equació de la recta que passa pels punts $A(6, 2)$ i $B(3, 9)$, de forma explícita, implícita i paramètrica. Representa-la gràficament.
40. Escriu l'equació de la recta que passa pels punts $A(6, 2, 5)$ i $B(3, 9, 7)$, de forma explícita, i com a intersecció de dos plànols.
41. Escriu les equacions dels tres plànols coordenats.
42. Escriu les equacions dels tres eixos de coordenades en l'espai.
43. En el cub de diagonal $O(0, 0, 0)$ i $A(6, 6, 6)$ escriu les equacions dels plànols que formen les seves cares. Escriu les equacions de totes les seves arestes, i les coordenades dels seus vèrtexs.
44. Escriu l'equació del cilindre d'eix l'eix OZ i radi 2.
45. Escriu l'equació de l'esfera de centre l'origen de coordenades i radi 2.
46. Escriu l'equació del cilindre d'eix, la recta $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$ i radi 1.
47. Escriu l'equació de la circumferència en el plànel de centre $A(2, 5)$ i radi 2.
48. En tallar a un cert cilindre per un plànel horitzontal es té la circumferència de l'exercici anterior. Escriu l'equació del cilindre



EXERCICIS I PROBLEMES.

Teorema de *Pitàgores* i teorema de *Tales*

1. Calcula el volum d'un tetraedre regular de costat 7 cm .
2. Calcula la longitud de la diagonal d'un quadrat de costat 1 m .
3. Calcula la longitud de la diagonal d'un rectangle de base 15 cm i altura 6 cm .
4. Dibuixa un paral·lelepipede les arestes del qual mesurin 4 cm , 5 cm i 6 cm que no sigui un ortoedre. Dibuixa també el seu desenvolupament.
5. Si el paral·lelepipede anterior fos un ortoedre, quant mesuraria la seva diagonal?
6. Un tassó d' 11 cm d'altura té forma de tronc de con en el qual els radis de les bases són de 5 i 3 cm . Quant ha de mesurar com a mínim una cullereta perquè sobresurti del tassó almenys 2 cm ?
7. És possible guardar en una caixa amb forma d'ortoedre d'arestes 4 cm , 3 cm i 12 cm un bolígraf de 13 cm de longitud?
8. Calcula la diagonal d'un prisma recte de base quadrada sabent que el costat de la base mesura 6 cm i l'altura del prisma 8 cm .
9. Si un ascensor mesura $1,2\text{ m}$ d'ample, $1,6\text{ m}$ de llarg i $2,3\text{ m}$ d'altura, és possible introduir en ell una escala de 3 m d'altura?
10. Quina és la major distància que es pot mesurar en línia recta en una habitació que té 6 m d'ample, 8 m de llarg i 4 m d'altura?
11. Calcula la longitud de l'aresta d'un cub sabent que la seva diagonal mesura $3,46\text{ cm}$.
12. Calcula la distància màxima entre dos punts d'un tronc de con les bases del qual tenen radis 5 cm i 2 cm , i altura 10 cm .
13. En una pizzeria la pizza de 15 cm de diàmetre val 2 € i la de 40 cm val 5 € . Quina té millor preu?
14. Hem vist al mercat un lluç de 30 cm que pesa un quilo. Ens sembla una mica petita i demanem una altra una mica major, que resulta pesar 2 quilos. Quant mesurarà?
15. En un dia fred un pare i un fill petit van exactament igual abrigats, Quin dels dos tindrà més fred?

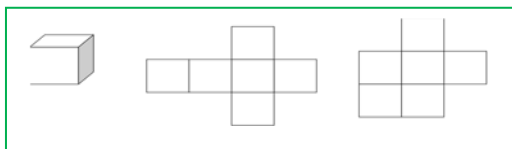


Longituds, àrees i volums

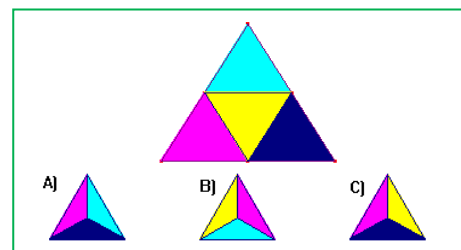
16. Identifica a quin cos geomètric pertanyen els següents desenvolupaments:



17. Podrà existir un poliedre regular que les seves cares siguin hexagonals? Raona la resposta.
18. Pots trobar dues arestes paral·leles en un tetraedre? I en cadascun dels restants poliedres regulars?



19. Utilitza una trama de quadrats o paper quadriculat, i cerca tots els dissenys de sis quadrats que se t'ocorren. Decideix quins poden servir per construir un cub.
20. Quantes diagonals pots traçar



- en un cub? I en un octàedre?
21. El triangle de la figura s'ha plegat per obtenir un tetraedre. Tenint en compte que el triangle no està pintat per darrere, quines de les següents vistes en perspectiva del tetraedre és falsa?
 22. Un prisma de 8 dm d'altura té com a base un triangle rectangle de catets 3 dm i 4 dm . Calcula les àrees lateral i total del prisma.
 23. Dibuixa un prisma hexagonal regular que tingui 3 cm d'aresta basal i $0,9\text{ dm}$ d'altura. Calcula les àrees de la base i total.
 24. Un prisma pentagonal regular de 15 cm d'altura té una base de 30 cm^2 d'àrea. Calcula el seu volum.
 25. Calcula l'àrea total d'un ortoedre de dimensions $2,7\text{ dm}$, $6,2\text{ dm}$ i 80 cm .
 26. Calcula la superfície total i el volum d'un cilindre que té 7 m d'altura i 3 cm de radi de la base.
 27. Calcula l'àrea total d'una esfera de 7 cm de radi.
 28. Calcula l'apotema d'una piràmide regular sabent que la seva àrea lateral és de 150 cm^2 i la seva base és un hexàgon de 4 cm de costat.
 29. Calcula l'apotema d'una piràmide hexagonal regular sabent que el perímetre de la base és de 36 dm i l'altura de la piràmide és de 6 dm . Calcula també l'àrea total i el volum d'aquesta piràmide.
 30. Un triangle rectangle de catets 12 cm i 16 cm gira al voltant del seu catet menor generant un con. Calcula l'àrea lateral, l'àrea total i el volum.
 31. Tres boles de metall de radis 15 dm , $0,4\text{ m}$ i 2 m es fonen en una sola bola, Quin serà el diàmetre de l'esfera resultant?



32. Quina és la capacitat d'un pou cilíndric d'1,50 m de diàmetre i 30 m de profunditat?
33. Quant cartró necessitem per construir una piràmide quadrangular regular si volem que el costat de la base mesuri 12 cm i que la seva altura sigui de 15 cm?
34. Calcula el volum d'un cilindre que té 2 cm de radi de la base i la mateixa altura que un prisma la base del qual és un quadrat de 4 cm de costat i 800 cm³ de volum.
35. Quina és l'àrea de la base d'un cilindre d'1,50 m d'alt i 135 dm³ de volum?
36. L'aigua d'un brollador es condueix fins a uns dipòsits cilíndrics que mesuren 10 m de radi de la base i 20 m d'altura. Després s'embotella en botelles de 2,5 litres. Quants envasos s'omplen amb cada dipòsit?

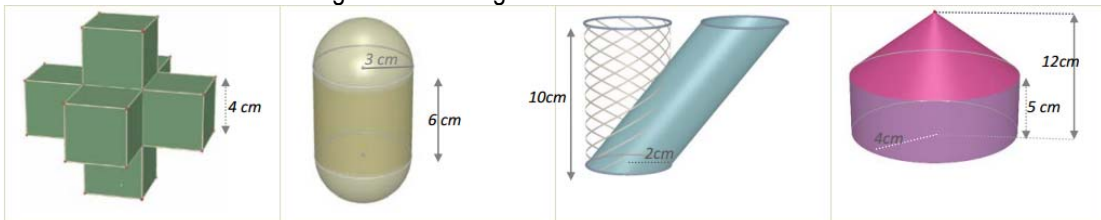


37. Calcula la quantitat de cartolina necessària per construir un anell d'10 tetraedres cadascun dels quals té un centímetre d'aresta.
38. En fer el desenvolupament d'un prisma triangular regular de 5 dm d'altura, va resultar un rectangle d'un metre de diagonal com a superfície lateral. Calcula l'àrea total.
39. Determina la superfície mínima de paper necessària per embolicar un prisma hexagonal regular de 2 cm de costat de la base i 5 cm d'altura.

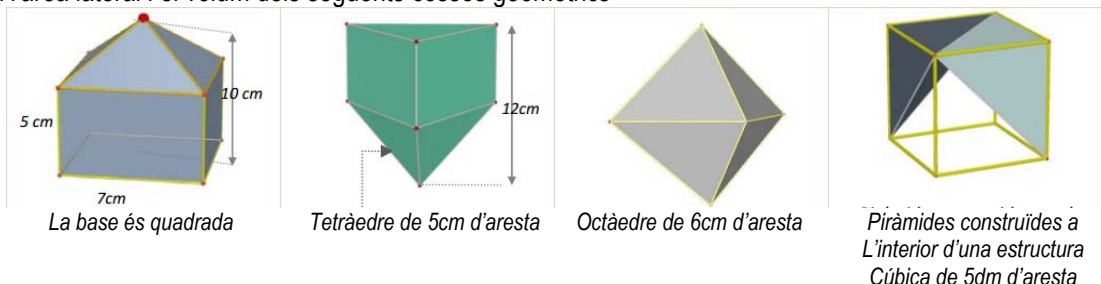
40. L'ajuntament de Palma ha col·locat unes jardineres de pedra als seus carrers que tenen forma de prisma hexagonal regular. La cavitat interior, on es disposa la terra, té 80 cm de profunditat i el costat de l'hexàgon interior és de 60 cm. Calcula el volum de terra que ompliria una jardinera per complet.



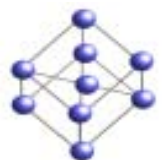
41. Una habitació té forma d'ortoeidre i les seves dimensions són directament proporcionals als nombres 2, 4 i 8. Calcula l'àrea total i el volum si a més se sap que la diagonal mesura 17,3 m.
42. Un ortoeidre té 0,7 dm d'altura i 8 dm² d'àrea total. La seva longitud és el doble de la seva amplària, quin és el seu volum?
43. Si el volum d'un cilindre de 15 cm d'altura és de 424 cm³, calcula el radi de la base del cilindre.
44. Han instal·lat a casa de Joan un dipòsit d'aigua de forma cilíndrica. El diàmetre de la base mesura 2 metres i l'altura és de 3 metres. a) Calcula el volum del dipòsit en m³. b) Quants litres d'aigua caben en el dipòsit?
45. Un envàs d'un litre de llet té forma de prisma, la base és un quadrat que té 10 cm de costat. a) Quin és, en cm³, el volum de l'envàs? b) Calcula l'altura de l'envàs en cm.
46. Una circumferència de longitud 18,84 cm gira al voltant d'un dels seus diàmetres generant una esfera. Calcula el seu volum.
47. Una porta mesura 1,8 m d'alt, 70 cm d'ample i 3 cm d'espessor. El preu d'instal·lació és d'100 € i es cobra 5 € per m² en concepte de vernissat, a més del cost de la fusta, que és de 280 € cada m³. Calcula el cost de la porta si només es realitza el vernissat de les dues cares principals.
48. Quin és el volum d'una esfera en la qual la longitud d'una circumferència màxima és 251,2 m?
49. Calcula l'àrea lateral i el volum dels següents cossos geomètrics



50. Calcula l'àrea lateral i el volum dels següents cossos geomètrics

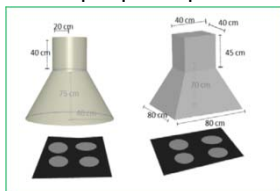


51. L'aigua continguda en un recipient cònic de 21 cm d'altura i 15 cm de diàmetre de la base s'aboca en un tassó cilíndric de 15 cm de diàmetre de la base. Fins a quina altura arribarà l'aigua?
52. Segons Arquímedes, quines dimensions té el cilindre circumscribit a una esfera de 7 cm de radi que té la seva mateixa àrea? Calcula aquesta àrea.
53. En la construcció d'un globus aerostàtic esfèric d'un metre de radi s'empra lona que té un cost de 300 €/m². Calcula l'import de la lona necessària per a la seva construcció.
54. Calcula el radi d'una esfera que té 33,51 dm³ de volum.
55. El Atomium és un monument de Brussel·les que reproduïx una molècula de ferro. Consta de 9 esferes d'acer de 18 m de diàmetre que ocupen els vèrtexs i el centre d'una estructura cúbica de 103 m de



diagonal, realitzada amb cilindres de 2 metres de diàmetre. Si utilitzem una escala 1:100 i tant les esferes com els cilindres són massissos, quina quantitat de material necessitarem?

56. Una piscina mesura 20 m de llarg, 5 m d'ample i 2 m d'alt.
- Quants litres d'aigua són necessaris per omplir-la?
 - Quant costarà recobrir el sòl i les parets amb PVC si el preu és de 20 €/m²?
57. S'ha pintat per dins i per fora un dipòsit sense tapadora de 8 dm d'alt i 3 dm de radi. Tenint en compte que la base només es pot pintar per dins, i que s'ha utilitzat pintura de 2€/dm², quants diners ha costat en total?



58. Quina de les dues campanes extractores de la figura esquerra té un cost d'acer inoxidable menor?

59. En un atuell cilíndric de 3 m de diàmetre i que conté aigua, s'introdueix una bola. Quin és el seu volum si després de la immersió puja 0,5 m el nivell de l'aigua?

60. El preu de les teules és de 12,6 €/m². Quant costarà reteular un habitatge la teulada del qual té forma de piràmide quadrangular regular d'1,5 m d'altura i 15 m de costat de la base?

61. S'enrotlla una cartolina rectangular de costats 40 cm i 26 cm formant cilindres de les dues formes possibles, fent coincidir costats oposats. Quin dels dos cilindres resultants té major volum?

62. Cadascun dels cubs de la figura té 2 cm d'aresta. Quants cal afegir per formar una cub de 216 cm³ de volum?



63. Un tub d'assaig té forma de cilindre obert en la part superior i rematat per una semiesfera en la inferior. Si el radi de la base és d'1 cm i l'altura total és de 12 cm, calcula quants centilitres de líquid caben en ell.

64. El costat de la base de la piràmide de Kheops mesura 230 m, i la seva altura 146 m. Quin volum tanca?

65. La densitat d'un tap de suro és de 0,24, quant pesen mil taps si els diàmetres de les seves base mesuren 2,5 cm i 1,2 cm, i la seva altura 3 cm?

66. Comprova que el volum d'una esfera és igual al del seu cilindre circumscrit menys el del con d'igual base i altura.

67. Calcula el volum d'un octàedre regular d'aresta 2 cm.

68. Construeix en cartolina un prisma quadrangular regular de volum 240 cm³, i d'àrea lateral 240 cm².

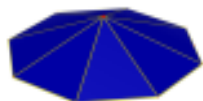
69. El cristall d'un fanal té forma de tronc de con de 40 cm d'altura i bases de radi 20 i 10 cm. Calcula la seva superfície.

70. Un pot cilíndric de 15 cm de radi i 30 cm d'altura té en el seu interior quatre pilotes de radi 3,5 cm. Calcula l'espai lliure que hi ha en el seu interior.



71. Un embut cònic de 15 cm de diàmetre té un litre de capacitat, quin és la seva altura?

72. En un dipòsit amb forma de cilindre de 30 dm de radi, una aixeta aboca 15 litres d'aigua cada minut. Quant augmentarà l'altura de l'aigua després de mitja hora?



73. La lona d'una ombrell oberta té forma de piràmide octogonal regular de 0,5 m d'altura i 40 cm de costat de la base. Es fixa un masteler en el sòl en el qual s'encaixa i el vèrtex de la piràmide queda a una distància del sòl d'1,80 m. En el moment en què els rajos de sol són verticals, quina àrea té l'espai d'ombra que determina?

74. Una peixera amb forma de prisma recte i base rectangular s'omple amb 65 litres d'aigua. Si té 65 cm de llarg i 20 cm d'ample, quin és la seva profunditat?

75. En un gelat de cucurutxo la galeta té 12 cm d'altura i 4 cm diàmetre. Quin és la seva superfície? Si el cucurutxo està completament ple de gelat i sobresurt una semiesfera perfecta, quants cm³ de gelat conté?

Iniciació a la Geometria Analítica

76. Calcula la distància entre els punts A(7, 3) i B(2, 5).

77. Calcula la distància entre els punts A(7, 3, 4) i B(2, 5, 8).

78. Calcula la longitud del vector de components $u = (4, 5)$.

79. Calcula la longitud del vector de components $u = (4, 5, 0)$.

80. El vector $u = (4, 5)$ té l'origen en el punt A(3, 7). Quins són les coordenades del seu punt extrem?

81. El vector $u = (4, 5, 2)$ té l'origen en el punt A(3, 7, 5). Quins són les coordenades del seu punt extrem?

82. Dibuixa un quadrat de diagonal el punt A(2, 3) i C(5, 6). Quines coordenades tenen els altres vèrtexs del quadrat? Calcula la longitud del costat i de la diagonal de dita quadrada.

83. Dibuixa un cub de diagonal A(1, 1, 1) i B(4, 4, 4). Quines coordenades tenen els altres vèrtexs del cub? Ja saps, són 8 vèrtexs. Calcula la longitud de l'aresta, de la diagonal d'una cara i de la diagonal del cub.

84. Sigui X(x, y) un punt del plànel, i A(2, 4), escriu l'expressió de tots els punts X que disten de A una distància 3.

85. Sigui X(x, y, z) un punt de l'espai, i A(2, 4, 3), escriu l'expressió dels punts X que disten de A una distància 3.

86. Escriu l'equació paramètrica de la recta que passa pel punt A(2, 7) i té com a vector director $u = (4, 5)$. Representa-la gràficament.

87. Escriu l'equació de la recta que passa pels punts A(2, 7) i B(4, 6), de forma explícita, implícita i paramètrica. Representa-

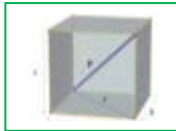



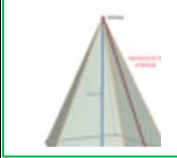





la gràficament.

88. Escriu l'equació de la recta que passa pels punts $A(2, 4, 6)$ i $B(5, 2, 8)$, de forma explícita, i com a intersecció de dos plànols.
89. En la cub de diagonal $A(1, 1, 1)$ i $B(5, 5, 5)$ escriu les equacions dels plànols que formen les seves cares. Escriu també les equacions de totes les seves arestes, i les coordenades dels seus vèrtexs.
90. Escriu l'equació del cilindre d'eix $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ i radi 3.
91. Escriu l'equació de l'esfera de centre $A(2, 7, 3)$ i radi 4.
92. Escriu l'equació del cilindre d'eix, la recta $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$ i radi 2.
93. Escriu l'equació de la circumferència en el plànol de centre $A(3, 7)$ i radi 3.
94. En tallar un cert cilindre per un plànol horitzontal es té la circumferència de l'exercici anterior. Escriu l'equació del cilindre.

AUTOAVALUACIÓ

1. Les longituds dels costats del triangle de vèrtexs $A(2, 2)$, $B(1, 4)$ i $C(0, 3)$ són:
 - a) 2, 5, 5
 - b) $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$
 - c) $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$
 - d) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$
2. En el triangle rectangle de catets 3 i 4 cm es multipliquen per 10 totes les seves longituds. L'àrea del nou triangle és:
 - a) 6 m^2
 - b) 6 dm^2
 - c) 60 cm^2
 - d) $0,6 \text{ m}^2$
3. La altura d'un prisma de base quadrada és 20 cm i el costat de la base és 5 cm, la seva àrea total és:
 - a) 450 cm^2
 - b) 45 dm^2
 - c) 425 cm^2
 - d) $0,45 \text{ m}^2$
4. Un dipòsit d'aigua té forma de prisma hexagonal regular de 5 m d'altura i costat de la base 1 m. El volum d'aigua que hi ha en ell és:
 - a) $60\sqrt{2} \text{ m}^3$
 - b) $45\sqrt{2} \text{ m}^3$
 - c) $30000\sqrt{2} \text{ dm}^3$
 - d) $90\sqrt{2} \text{ m}^3$
5. La teulada d'una caseta té forma de piràmide quadrangular regular de 0,5 m d'altura i 1000 cm de costat de la base. Si es necessiten 15 teules per metre quadrat per recobrir la teulada, s'utilitzen on total de:
 - a) 1051 teules.
 - b) 150 teules.
 - c) 245 teules.
 - d) 105 teules.
6. Una caixa de dimensions 30, 20 i 15 cm, està plena de cubs d'1 cm d'aresta. Si s'utilitzen tots per construir un prisma recte de base quadrada de 10 cm de costat, l'altura mesurarà:
 - a) 55 cm
 - b) 65 cm
 - c) 75 cm
 - d) 90 cm
7. El radi d'una esfera que té el mateix volum que un con de 5 dm de radi de la base i 120 cm d'altura és:
 - a) $5\sqrt{3} \text{ dm}$
 - b) $\sqrt[3]{75} \text{ dm}$
 - c) 150 cm
 - d) $\sqrt[3]{2250} \text{ cm}$
8. Es distribueixen 42,39 litres de dissolvent en llaunes cilíndriques de 15 cm d'altura i 3 cm de radi de la base. El nombre d'envasos necessari és:
 - a) 100
 - b) 10
 - c) 42
 - d) 45
9. L'equació d'una recta en el plànol que passa pels punts $A(2, 5)$ i $B(1, 3)$ és:
 - a) $y = -2x + 1$
 - b) $3y - 2x = 1$
 - c) $y = 2x + 1$
 - d) $y = -2x + 9$.
10. L'equació de l'esfera de centre $A(2, 3, 5)$ i radi 3 és:
 - a) $x^2 - 2x + y^2 - 3y + z^2 - 5z + 29 = 0$
 - b) $x^2 - 4x + 3y^2 - 6y + 5z^2 - 10z + 29 = 0$
 - c) $x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 - 10z + 38 = 0$
 - d) $x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 - 10z + 29 = 0$

RESUM

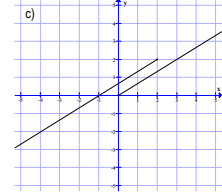
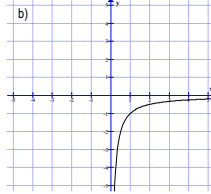
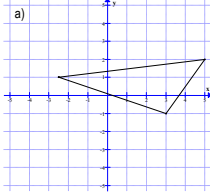
		Exemples	
Teorema de Pitàgores en l'espai	$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$		$a = 2, b = 3, c = 4$, llavors $D^2 = 4 + 9 + 16 = 29$ $D = \sqrt{29} = 5,4$.
Teorema de Tales:	Donades dues rectes, r i r' , que es tallen en el punt O , i dues rectes paral·leles entre si, a i b . Si la recta a talla les rectes r i r' en els punts A i C , i la recta b talla les rectes r i r' en els punts B i D , llavors els segments corresponents són proporcionals		
Poliedres regulars	Un poliedre regular és un poliedre en el qual totes les seves cares són polígons regulars iguals i en el qual els seus angles poliedres són iguals. Hi ha cinc poliedres regulars: tetraedre, octaèdre, icosaèdre, cub i dodecaedre		
Prismes		$A_{Lateral} = Perímetre_{Base} \cdot Altura$; $A_{total} = Àrea_{Lateral} + 2Àrea_{Base}$; $Volum = Àrea_{base} \cdot Altura$	
Piràmides		$A_{Lateral} = \frac{Perímetre_{Base} \cdot Apotema_{piràmide}}{2}$; $A_{total} = Àrea_{Lateral} + Àrea_{Base}$ $Volum = \frac{Àrea_{base} \cdot Altura}{3}$	
Cilindre		$A_{Lateral} = 2\pi R H$; $A_{total} = 2\pi R H + 2\pi R^2$ $Volum = Àrea_{base} \cdot Altura$	
Con	$A_{Lateral} = \pi R G$; $A_{total} = \pi R G + \pi R^2$ $Volum = \frac{Àrea_{base} \cdot Altura}{3}$		
Esfera	$A_{total} = 4\pi R^2$; $Volum = \frac{4}{3}\pi R^3$		
Equacions de la recta en el plànel	Equació explícita: $y = mx + n$ Equació implícita: $ax + by + c = 0$ Equació paramètrica: $\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \end{cases}$		
Equacions de la recta i el plànel en l'espai.	Equació implícita d'un plànel: $ax + by + cz + d = 0$ Equació paramètrica d'una recta: $\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \\ z = a_3 + tv_3 \end{cases}$		

CAPÍTOL 10: FUNCIONS I GRÀFIQUES

ACTIVITATS PROPOSADES

1. FUNCIONS REALS

1. De les següents gràfiques indica quines d'elles corresponen a funcions.



2. Un ciclista beu 1/2 litre d'aigua cada 10 km de recorregut. Si en el cotxe d'equip porten un bidó de 40 litres, fes una taula que indiqui la seva variació i escriu la funció que la representa.
3. Un ciclista participa en una carrera recorrent 3 km cada minut. Tenint en compte que no va partir de l'origen sinó 2 km per darrere representa en una taula el recorregut durant els tres primers minuts. Escriu la funció que expressa els quilòmetres en funció del temps en minuts i dibuixa-la.
4. Representa les següents funcions a trossos. S'indiquen els punts que has de calcular.

$$a. f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{si } x < -3 \\ -x+1, & \text{si } -3 \leq x < 0 \\ 3, & \text{si } 0 \leq x < \infty \end{cases} \quad \text{Punts: } -5; -3,1; -3; -1; -0,1; 0; 1.$$

$$b. g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{si } x < -2 \\ 3, & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ \sqrt{x}, & \text{si } 1 \leq x \end{cases} \quad \text{Punts: } -3; -2,1; -2; 0; 0,9; 1; 4; 9.$$

5. Indica el domini de les següents funcions:

a) $\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ b) $\sqrt{x+\frac{1}{x+2}}$

6. Indica el domini i el recorregut de les següents funcions:

a) $y = 14x + 2$ b) $y = \frac{1}{x-1}$ c) $y = \sqrt{2+x}$

7. Representa les següents funcions i indica el seu domini i recorregut:

a) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in [-3,0) \\ 2, & \text{si } x \in [0,2] \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x \in [-2,1] \\ x, & \text{si } x \in (1,2] \end{cases}$

2. CARACTERÍSTIQUES D'UNA FUNCIO

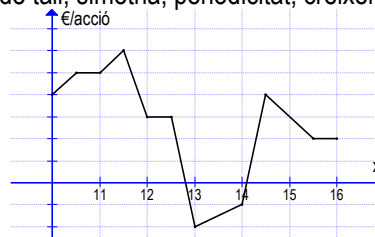
8. Indica el domini i recorregut de les següents funcions i dibuixa-les:

a. $\frac{1}{2x+6}$ b. $x + \frac{1}{3x-6}$ c. $x^3 - 3x$

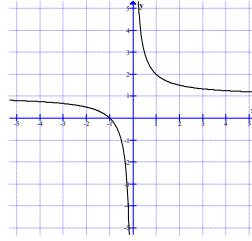
9. Dibuixa les següents funcions i indica els seus intervals de creixement i decreixement.

a) $y = x^3$ b) $y = x^5$ c) $y = \frac{1}{x^2}$

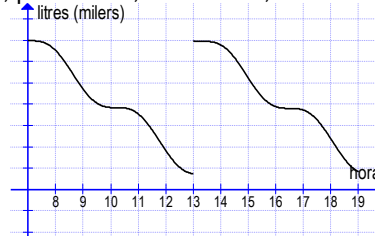
10. La gràfica següent indica l'evolució d'un valor de la borsa (en l'eix vertical en milers d'euros per acció) durant una jornada. Estudia el seu domini, recorregut, punts de tall, simetria, periodicitat, creixement, continuïtat, màxims i mínims.



11. Estudia la gràfica indicant: domini, recorregut, punts de tall amb els eixos, simetria, periodicitat, creixement, continuïtat, màxims i mínims.



12. La gràfica de l'esquerra representa el volum de combustible en el dipòsit d'una gasolinera al cap d'un dia. Estudia el seu domini, recorregut, punts de tall, simetria, periodicitat, creixement, continuïtat, màxims i mínims.



13. Representa la funció $y = 10 + \frac{1}{2}9 \cdot 8x^2$ que posàvem com a exemple i interpreta el seu sentit físic.

14. Representa gràficament les següents funcions:

a) $y = x^2 + 2$

b) $y = 2 - x^2$

c) $y = 2x^2$

d) $y = -2x^2$

15. Representa gràficament les següents funcions:

a) $y = \frac{1}{x} + 5$

b) $y = \frac{5}{x}$

c) $y = \frac{1}{x} - 2$

d) $y = \frac{2}{x} + 3$

16. Representa la funció $f(x) = 4 - x^2$ i, a partir d'ella, dibuixa les gràfiques de les funcions:

a) $y = f(x) - 3$

b) $y = f(x) + 3$

c) $y = f(x - 3)$

d) $y = f(x + 3)$

3. VALORS ASSOCIATS A les FUNCIONS

17. Donada la funció $f(x) = (x-1)^3$, calcula la taxa de variació mitjana en l'interval $[0, 1]$. És creixent o decreixent la funció en aquest interval?

18. Donada la funció $f(x) = \frac{3}{x}$, calcula la taxa de variació mitjana en l'interval $[-3, -1]$. És creixent o decreixent la funció en aquest interval?

19. Calcula la TVM d'aquesta funció $f(x)$ en els següents intervals: a) $[-1, 0]$ i b) $[1, 2]$.

20. Considerem la funció $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2}$. Troba la taxa de variació mitjana en l'interval $[0, 2]$ i indica si és creixent o decreixent en aquest interval.

21. Troba la taxa de variació mitjana de la funció $f(x) = 2x^2 - 3x$ en l'interval $[1, 2]$ i indica si $f(x)$ creix o decreix en aquest interval.

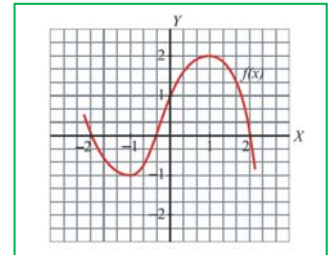
22. Donada la funció $f(x) = (x+1)^3$, calcula la taxa de creixement en l'interval $[0, 1]$.

23. La funció $f(x) = 1000(1'03)^x$ representa el resultat d'ingressar 1000 € al banc ($x = 0$ és l'estat inicial i, naturalment, val 1000 €). Calcula la seva taxa de creixement entre 0 i 1, entre 1 i 2 i entre 2 i 3. Quina relació hi ha entre elles? Pots donar una explicació de per què?

24. La següent taula representa la població mundial (estimada) en milions de persones. Calcula la taxa de creixement per a cada interval de 5 anys. Què observes?

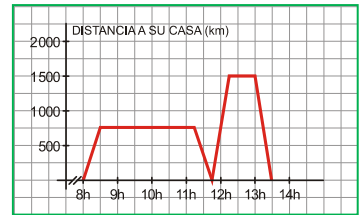
Any	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
Població	3692	4068	4435	4831	5264	5674	6071	6456	6916

25. Podries donar un exemple d'una funció la taxa de la qual de creixement sigui constantment 2?

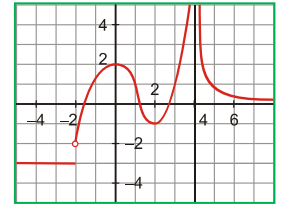


EXERCICIS I PROBLEMES

1. Pablo va sortir de la seva casa a les 8 del matí per anar a l'institut. A l'hora del pati, va haver de tornar a la seva casa per anar amb el seu pare al metge. La següent gràfica reflecteix la situació:



- A quina hora comencen les classes i a quina hora comença el pati?
 - A quina distància de la seva casa està l'institut? Quina velocitat porta quan va a classe?
 - A quina distància de la seva casa està el consultori mèdic? Quina velocitat porten quan es dirigeixen allí?
 - Quant temps ha estat en classe? I en el consultori mèdic?
2. Donada la funció a través de la següent gràfica:
- Indica quin és el seu domini de definició.
 - És contínua? Si no ho és, indica els punts de discontinuïtat.
 - Quins són els intervals de creixement i quins els de decreixement de la funció? Què ocorre en l'interval $(-\infty, -2]$?



3. Dibuixa les gràfiques d'aquestes hipèrboles i determina els seus dominis, calcula les seves asímptotes i els punts de tall amb els eixos de coordenades:

a. $y = \frac{2x}{x-2}$

b. $y = \frac{2x-3}{x-2}$

c. $y = \frac{4x}{2x+1}$

4. Dibuixa la gràfica de $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 4x & \text{si } 1 < x \end{cases}$ i explica si és contínua en $x = 1$.

5. Tres quilos de peres ens han costat 4,5 €; i, per set quilos, hauríem pagat 10,5 €. Troba l'equació de la recta que ens dona el preu total, "y", en funció dels quilos que comprem, "x". Representa-la gràficament.

6. Descriu les següents funcions quadràtiques i fes un esbós de la seva gràfica:

a. $y = 4x^2 + 8x - 5$

b. $y = x^2 + 3x - 4$

c. $y = 8 - 2x - x^2$

7. Calcula els punts de tall amb els eixos i el vèrtex de les següents paràboles i utilitza aquestes dades per representar-les gràficament

a. $y = x^2 + 5x + 6$

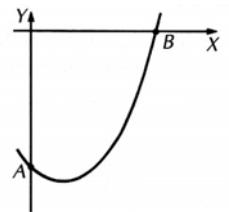
b. $y = -x^2 + 4x + 5$

8. L'altura sobre el sòl d'un projectil llançat des de l'alt d'una muralla ve donada, en funció del temps, per $h(t) = -5t^2 + 15t + 20$, on t s'expressa en segons, i h, en metres. Dibuixa la gràfica d'aquesta funció i calcula:

- L'altura de la muralla.
- L'altura màxima aconseguida pel projectil i el temps que triga a aconseguir-la.
- El temps que triga a impactar contra el sòl.

9. La gràfica de la dreia mostra el dibuix aproximat de la corba $y = x^2 - 2x - 8$. Calcula:

- Les coordenades dels punts A i B.
- L'equació d'una recta que passi pels punts A i B.



10. Representa les següents funcions:

a. $y = 3/x$

b. $y = 4/x - 5$

c. $y = \sqrt{x+4}$

d. $y = \sqrt{x-2}$

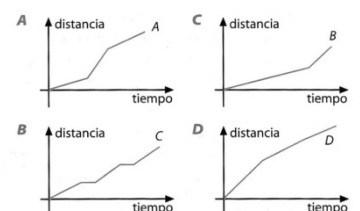
e. $y = \begin{cases} x+3 & \text{si } x < -1 \\ 2 & \text{si } -1 \leq x < 4 \\ x^2 - 10 & \text{si } 4 \leq x \end{cases}$

11. El cost diari de fabricació, en euros, de x articles s'expressa amb la igualtat $C = 40x + 250$, i l'ingrés diari de la seva venda, mitjançant $V = -2x^2 + 100x$. Quina quantitat d'articles s'han de fabricar al dia perquè la seva venda reporti un benefici màxim? Nota: el benefici és la diferència entre l'ingrés i el cost.

12. La base i l'altura d'un triangle sumen 4 centímetres. Quina longitud han de tenir ambdues perquè l'àrea del triangle sigui màxima?

13. Assigna les gràfiques al recorregut efectuat pels següents estudiants en el seu camí diari a l'Institut:

- Emili és el que viu més lluny de l'Institut.
- Aina ha de recollir a dues amigues pel camí i sempre li toca esperar.
- Felip és el que menys temps triga.
- Isabel és dormilega; sempre li toca córrer en l'últim tram, encara que és la que viu més prop de l'Institut.



14. Un rectangle té un perímetre de 14 cm. Suposant que la base del mateix té una longitud de x cm,
- Probar que l'àrea del mateix A està donada per la funció $A(x) = x(7 - x)$.
 - Dibuixa la gràfica corresponent a aquesta funció, prenent per a això valors de x de 0 a 7. Utilitzant la gràfica, calcula els següents apartats.
 - L'àrea del rectangle quan $x = 2,25$ cm.
 - Les dimensions del rectangle quan la seva àrea és 9 cm^2 .
 - L'àrea màxima del rectangle.
 - Les dimensions del rectangle corresponents a aquesta àrea màxima.
15. La velocitat v en m/s d'un míssil t segons després del seu llançament ve donada per l'equació $v = 54t - 2t^3$. Utilitzant la gràfica d'aquesta funció, calcula:
- La màxima velocitat que aconsegueix el míssil.
 - El temps que necessita per accelerar fins a aconseguir una velocitat de 52 m/s.
 - L'interval (aproximat, resol gràficament) de temps en el qual el míssil vola a més de 100 m/s.
16. El preu del viatge de fi de curs d'un grup d'alumnes és de 200 € per persona si van 30 alumnes o menys. En canvi, si viatgen més de 30 i menys de 40, rebaixen un 5 % per cada alumne que sobrepassi el nombre de 30, i si viatgen 40 o més, el preu per persona és de 100 €. Troba l'expressió i dibuixa la gràfica de la funció que fa correspondre al nombre de viatgers el preu del viatge.
17. Troba el domini de les següents funcions:

$$a. \quad y = \frac{5x-3}{4x-1}$$

$$c. \quad y = \sqrt{3x+6}$$

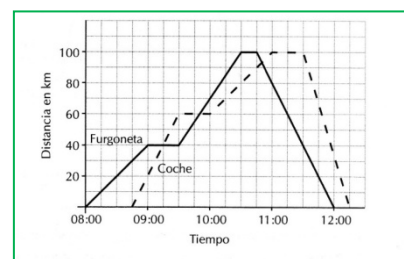
$$e. \quad y = \frac{4x^2 - 3x}{1 + 5x - 6x^2}$$

$$b. \quad y = 2x^4 - 3x^2 + 1$$

$$d. \quad y = 2 - \frac{3}{x^2 - 3x}$$

$$f. \quad y = \sqrt[3]{x^2 + 2x}$$

18. La següent gràfica mostra els viatges fets per una furgoneta i un cotxe sortint des de Terol cap a la població d'Alcanyís, anada i tornada.
- Quant temps es va detenir la camioneta durant el trajecte?
 - A quina hora va avançar el cotxe a la furgoneta?
 - Quina velocitat portava la camioneta entre les 9:30 i les 10:00?
 - Quin va ser la major velocitat aconseguida per el cotxe durant el viatge?
 - Quin va ser la velocitat mitjana del cotxe en el viatge complet?



19. Representa gràficament la següent funció: $f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{si } x < -2 \\ -\frac{1}{2}x^2 & \text{si } -2 \leq x \end{cases}$. Una vegada representada estudia les zones de creixement-decreixement, els extrems (màxims-mínims) i la seva continuïtat.
20. Representa gràficament una funció, f , que compleixi les següents condicions:
- Dom (f) = $[-5, 6]$
 - Creix en els intervals $(-5, -3)$ i $(0, 6)$; decreix en l'interval $(-3, 0)$.
 - És contínua en el seu domini.
 - Talla a l'eix X en els punts $(-5, 0)$, $(-1, 0)$ i $(4, 0)$.
 - Té un mínim en $(0, -2)$ i màxims en $(-3, 3)$ i $(6, 3)$.
21. Construeix una gràfica que representi l'audiència d'una determinada cadena de televisió durant un dia, sabent que
- A les 0 hores hi havia, aproximadament, 0'5 milions d'espectadors.
 - Aquest nombre es va mantenir pràcticament igual fins a les 6 del matí.
 - A les 7 del matí va aconseguir la xifra de 1'5 milions d'espectadors.
 - L'audiència va descendir de nou fins que, a les 13 hores, hi havia 1 milió d'espectadors.
 - Va ser augmentant fins a les 21 hores, moment en el qual va aconseguir el màxim: 6'5 milions d'espectadors.
 - A partir d'aquest moment, l'audiència va ser descendent fins a les 0 hores, que torna a haver-hi, aproximadament, 0'5 milions d'espectadors.

AUTOAVALUACIÓ

1. Indica quina de les següents expressions algebraiques és una funció real:

a) $x^2 + y^2 = 1$ b) $y = -2x^5 + x^4 - x^3 + 5x - 1$ c) $y = 5 \cdot \sqrt{2} \cdot x \cdot y^2 \cdot z$ d) $y^2 = x + 1$
2. Estem confeccionant una taula de valors de la funció $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$. Indica quin punt (o punts) no hauria d'estar:

a) (0, 1) b) (1/2, 2) c) (2, 1/5) d) (1, 0)
3. El domini de la funció $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ és:

a) La recta real b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$ c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
4. Indica que tipus de discontinuïtat o continuïtat presenta la funció $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x \in [-2, 1] \\ x, & \text{si } x \in (1, 2] \end{cases}$ en el punt $x = 1$:

a) És contínua b) Té una discontinuïtat evitable c) Té un salt finit d) Té un salt infinit
5. Assenyala la funció que té simetria parell:

a) $y = x$ b) $y = x^2 + 3$ c) $f(x) = \frac{1}{x + 1}$ d) $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x \in [-2, 1] \\ x, & \text{si } x \in (1, 2] \end{cases}$
6. Assenyala la funció que té com a asymptota horitzontal a la recta $y = 0$:

a) $y = x$ b) $y = x^2 + 3$ c) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ d) $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x \in [-2, 1] \\ x, & \text{si } x \in (1, 2] \end{cases}$
7. La taxa de variació de la funció $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x \in [-2, 1] \\ x, & \text{si } x \in (1, 2] \end{cases}$ entre -1 i 2 és igual a:

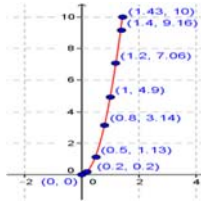
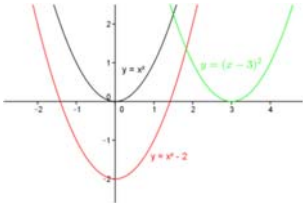
a) $TV[-1, 2] = 1$ b) $TV[-1, 2] = 2$ c) $TV[-1, 2] = 3$ d) $TV[-1, 2] = 0$
8. La taxa de variació mitjana de la funció $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x \in [-2, 1] \\ x, & \text{si } x \in (1, 2] \end{cases}$ entre -1 i 2 és igual a:

a) $TV[-1, 2] = 1/3$ b) $TV[-1, 2] = 2/3$ c) $TV[-1, 2] = 1$ d) $TV[-1, 2] = 3$
9. La taxa de creixement de la funció $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x \in [-2, 1] \\ x, & \text{si } x \in (1, 2] \end{cases}$ entre -1 i 2 és igual a:

a) $T_{\text{crec}}[-1, 2] = 3$ b) $T_{\text{crec}}[-1, 2] = 2$ c) $T_{\text{crec}}[-1, 2] = 0$ d) $T_{\text{crec}}[-1, 2] = 1$
10. La funció $y = x^2 + 3$ té un mínim absolut en el punt:

a) (1, 4) b) (0, 0) c) (0, 3) d) (3, 0)

RESUM

		Exemples								
Funció	Una relació o correspondència entre dues magnituds, tals que a cada valor de la variable independent, x , li correspon <i>un sol</i> valor de la dependent, y .	$y = 2x + 3$, $y = \frac{1}{x^2 + 1}$								
Gràfica d'una funció	Són els (normalment infinits) punts pels quals passa. És a dir, tots els valors $(x, f(x))$ posat que $y = f(x)$.									
Maneres de descriure una funció.	<ul style="list-style-type: none"> - Donant una taula de valors. Com en la columna del costat - Donant una expressió. $y = 2^x$ - A trossos: Diverses expressions. $y = \begin{cases} x + 1, & x > 2 \\ x, & x \leq 2 \end{cases}$ 	<table border="1"> <thead> <tr> <th>X</th> <th>I</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>-3</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>-2</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>3</td> </tr> </tbody> </table>	X	I	-3	2	-2	0	2	3
X	I									
-3	2									
-2	0									
2	3									
Domini i recorregut.	<ul style="list-style-type: none"> - Domini. Són els valors de "x" on la funció tingui sentit. - Recorregut. Són els valors de "y" que s'aconsegueixen. 	El domini de la funció $\sqrt{2-x}$ és $(-\infty, 2)$ i el seu recorregut $[0, +\infty)$								
Característiques d'una funció	Hem d'estudiar la seva continuïtat, creixement, màxims i mínims, curvatura, simetries i comportament en l'infinít.	$y = x^2 + 2$ és contínua, creixent en $(-\infty, 0)$, decreixent en $(0, \infty)$, té un mínim absolut en 0 i és sempre convexa								
Translacions	<ul style="list-style-type: none"> - Vertical. $y = f(x) + K$. En sentit de K: Si K és positiu cap amunt, si no cap avall. - Horitzontal. $y = f(x + K)$. En sentit contrari de K: Si K és positiu cap a l'esquerra, si no cap a la dreta. 									
Valors associats	Taxa de variació (TV): $f(b) - f(a)$ Taxa de variació mitjana (TVM): $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ Taxa de creixement T_{rec} : $\frac{f(b) - f(a)}{f(a)}$	$y = x + 2$; $TV [3,5] = 2$ $TVM [3,5] = \frac{2}{5-3} = 1$. $T_{\text{rec}} [3,5] = \frac{2}{5} = 40\%$								

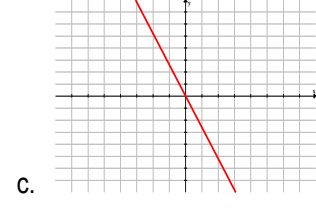
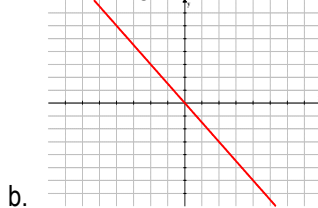
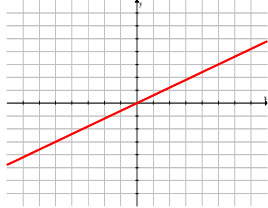
CAPÍTOL 11: FUNCIONS POLINÒMIQUES, DEFINIDES A TROSSOS I DE PROPORCIONALITAT INVERSA

ACTIVITATS PROPOSADES

1. FUNCIONS POLINOMIQUES DE PRIMER GRAU

- El consum mitjà d'aigua al dia per habitant (en 2011) és de 142 litres. Representa gràficament el consum d'una persona en una setmana.
- L'aigua virtual és l'aigua necessària per crear un producte. Representa gràficament les següents relacions:
 - 71 litres per produir una poma.
 - 10.850 litres per produir uns vaquers.
 - 4.000 litres per produir una samarreta.
- Troba el domini, màxims i mínims i la simetria de les següents rectes:
 - $y = 4 \cdot x$
 - $y = \frac{x}{3}$
 - $y = 2,65 \cdot x$

- Troba el pendent i l'expressió algebraica de les següents rectes:



- Representa les següents funcions lineals:

a. $y = 3 \cdot x + 4$

b. $y = -\frac{3}{7} \cdot x - 2$

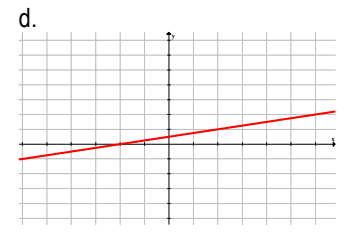
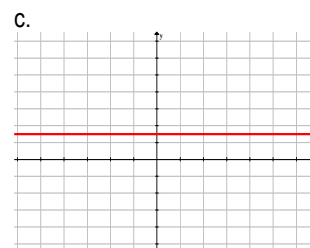
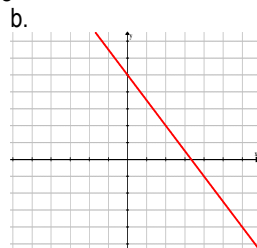
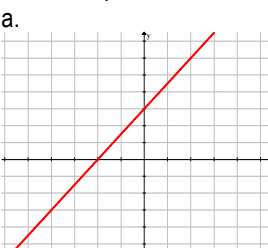
c. $2x + 4y = 5$

d. $y = 5$

e. $y = 0$

f. $x = 3$

- Troba l'expressió de les següents rectes:



2. FUNCIONS POLINÒMIQUES DE SEGON GRAU

- A partir de la paràbola $y = x^2$, dibuixa la gràfica de les següents paràboles:

a. $y = \frac{5}{3}x^2$

b. $y = -3x^2$

c. $y = -\frac{15}{3}x^2$

d. $y = 4,12x^2$

e. $y = -\frac{6}{10}x^2$

f. $y = \frac{7}{8}x^2$

- Representa la gràfica de les següents paràboles i localitza el vèrtex:

a. $y = (x+4)^2 - 5$

b. $y = -(x - \frac{4}{5})^2 + 6$

c. $y = x^2 - 5$

d. $y = x^2 - 6x + 16$

e. $y = x^2 + 4x + \frac{5}{2}$

f. $y = -x^2 + 12x - 26$

g. $y = x^2 - 10x + 17$

h. $y = -x^2 + 2x - 4$

i. $y = -x^2 + \frac{4}{3}x - 1$

9. Troba els elements característics i representa les següents paràboles:

a. $y = 2x^2 + 4x - 6$

b. $y = 6x^2 - 24x$

c. $y = -2x^2 + 4x - 2$

d. $y = 2x^2 + 5x - 12$

e. $y = 3x^2 + 6x - 9$

f. $y = -2x^2 + 7x + 3$

g. $y = 7x^2 + 21x - 28$

h. $y = 5x^2 - 9x + 4$

i. $y = -4x^2 - 4x - 1$

3. FUNCIONS DE PROPORCIONALITAT INVERSA

10. Representa les següents funcions de proporcionalitat inversa en el mateix sistema de coordenades:

a. $y = \frac{-1}{x}$

b. $y = \frac{5}{x}$

c. $y = \frac{1}{2x}$

d. $y = \frac{3}{8x}$

e. $y = \frac{-5}{3x}$

f. $y = \frac{-12}{5x}$

11. Descric el que succeeix quan varia el valor de k . Ajuda't de les gràfiques de l'exercici anterior.

12. Troba l'expressió analítica i representa la gràfica de les hipèrboles que passa per cadascun d'aquests punts. Escriu els intervals on la funció és creixent o decreixent.

a. $(4, 2)$

b. $(3, -1)$

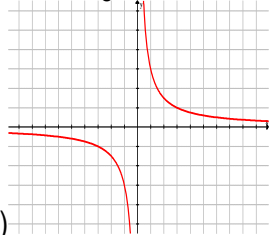
c. $(1/3, 5)$

d. $(12, 3)$

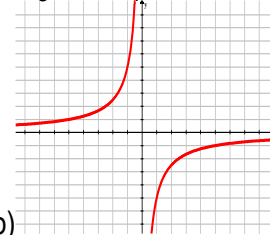
e. $(a, 1)$

f. $(1, b)$

13. Troba el domini, recorregut, continuïtat, màxims i mínims i el creixement de les següents hipèrboles:



a)



b)

14. Troba el domini, recorregut, continuïtat, màxims i mínims i el creixement de les següents hipèrboles:

a. $y = \frac{9}{2x}$

b. $y = \frac{-5}{3x}$

c. $y = \frac{-0,3}{x}$

d. $(-5, 2)$

e. $(4, -9)$

f. $(1, 1/2)$

15. Representa en els mateixos eixos de coordenades, les següents hipèrboles:

a. $y = \frac{5}{x}$

$y = \frac{5}{x} + 3$

$y = \frac{5}{x} - 3$

b. $y = \frac{-12}{x}$

$y = \frac{-12}{x-3}$

$y = \frac{-12}{x+3}$

c. $y = \frac{3}{x}$

$y = \frac{3}{x-1} + 5$

$y = \frac{5x-2}{x-1}$

16. Descric el que succeeix quan varien els paràmetres a i b en les hipèrboles de l'exercici anterior.

17. Representa les següents funcions de proporcionalitat inversa a partir de la hipèrbole $y = \frac{5}{x}$:

a. $y = \frac{10}{x-5} + 3$

b. $y = \frac{1}{x+4} + 8$

c. $y = \frac{100}{x+10} + 1$

d. $y = \frac{10}{2x-4} - 7$

e. $y = 6 - \frac{4}{x}$

f. $y = \frac{20}{5-x} - 2$

18. Estudia el domini, recorregut, continuïtat, simetria, asíptotes i creixement de les funcions de proporcionalitat inversa de l'exercici anterior.

19. Escriu una regla per expressar com es traslladen les asíptotes segons els paràmetres a i b .

20. Representa les següents hipèrboles:

a. $y = \frac{2x-4}{x+5}$

b. $y = \frac{3-5x}{x+2}$

c. $y = \frac{4x-12}{x-3}$

d. $y = \frac{6x+8}{1-x}$

e. $y = \frac{7x+5}{x-4}$

f. $y = \frac{6x+10}{2x-1}$

4. FUNCIONS DEFINIDES A TROSSOS

21. Representa gràficament la funció $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x < 0 \\ x-1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

22. Representa gràficament la funció $f(x) = \begin{cases} x^2+2 & \text{si } x < 0 \\ 2x+2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

23. Representa gràficament la funció $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < 1 \\ x+3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

EXERCICIS I PROBLEMES.

Funció lineal

1. Representa gràficament la següent relació de proporcionalitat donada en la següent taula i escriu la seva equació. Descriu quin tipus de relació és.

Magnitud A (a)	-5	-2	0	1	3
Magnitud B (b)	-15	-6	0	3	9

2. Representa les rectes a) $y = 5x$, b) $y = -5x$, c) $y = (1/2)x$, d) $y = 2'3x$.
3. Estudia el domini, màxims i mínims i simetries de les funcions lineals a) $y = 1'5x$, b) $y = -0'5x$.
4. Estudia la funció $y = 0,7x$ en l'interval $[-2, 5]$.
5. Calcula el pendent de la recta que passa pels punts $(1, 4)$ i $(0, 0)$ i determina la seva expressió algebraica.
6. Representa les següents funcions lineals:
 a) $y = 2x + 3$ b) $y = -x + 5$ c) $y = 3x - 2$ d) $y = -2x - 3$.
7. Calcula el pendent de la recta que passa pels punts $(1, 4)$ i $(2, 1)$ i determina la seva expressió algebraica.
8. Calcula el pendent de les rectes que passa pels punts que s'indiquen i determina la seva expressió algebraica.
 a) $(5, 1)$, $(3, -2)$ b) $(-3, 4)$, $(4, -1)$ c) $(1, 4)$, $(0, 6)$ d) $(-2, -4)$, $(-1, 0)$
9. Dues empreses de telefonia mòbil llancen les seves ofertes: l'empresa StarTel ofereix per cada anomenada pagar 50 cèntims més 2 cèntims per minut parlat; Tel-Hello ofereix 75 cèntims per trucada i minuts il·limitats. Quina oferta és més econòmica? Per donar la resposta, realitza els següents passos, expressant els resultats analíticament i gràficament:
 a. Hi ha algun moment en què les dues ofertes siguin iguals?
 b. Si parlo una mitjana de 15 minuts al dia, quina oferta em convé?
 c. Si parlo una mitjana de 35 minuts al dia, quina oferta em convé?
 d. Si faig una mitjana de 10 trucades al dia de 3 minuts de durada, quina oferta em convé?
 e. Si faig una mitjana de 2 trucades al dia de 30 minuts de durada, quina oferta és la millor?
 f. Quina oferta és més econòmica?
10. L'escriptor Jaime Joyce té diferents ofertes editorials per publicar la seva última novel·la. L'editorial Dole li ofereix 100 €, a més del 20 % de cada llibre que vengui; l'editorial Letrarte li ofereix 350 €; i l'editorial Paco li ofereix segons la venda de llibres: 50 € si ven fins a 250 llibres, 100 € si ven fins a 500 llibres, 300 € si ven fins a 1000 llibres i 500 € si ven més de 1000 llibres. Entre totes les editorials, quina creus que és millor oferta per a Jaime?

Funcions quadràtiques

11. A partir de la paràbola $y = x^2$, dibuixa la gràfica de les següents paràboles:
 a) $y = x^2 + 3$ b) $y = -x^2 + 5$ c) $y = (x - 2)^2$ d) $y = (-x - 3)^2$.
12. A partir de la paràbola $y = x^2$, dibuixa la gràfica de les següents paràboles:
 a) $y = 2,5x^2$ b) $y = -1,2x^2$ c) $y = (1/2)x^2$ d) $y = -0,7x^2$.
13. Representa la gràfica de les funcions parabòliques següents i indica el vèrtex:
 a) $y = x^2 + 3x + 2$ b) $y = -x^2 + 5x - 4$ c) $y = (x - 2)^2 + 4$ d) $y = -x^2 + x - 3$.
14. Determina els elements de les paràboles següents
 a) $y = 3x^2 + 2x + 5$ b) $y = -2x^2 + 4x - 1$ c) $y = 4(x - 2)^2 + 9$ d) $y = -5x^2 + 2x - 6$.

Funcions de proporcionalitat inversa

15. Troba l'expressió analítica i representa la gràfica de les hipèrboles $y = k/x$ que passen pels punts que s'indiquen. Escriu els intervals on la funció és creixent o decreixent.
 a) $(5, 1)$ b) $(4, -1)$ c) $(1, 4)$ d) $(-2, -4)$
16. Representa les següents funcions de proporcionalitat inversa:
 a) $y = 2/x$ b) $y = -1/x$ c) $y = 3/x$ d) $y = -2/x$
17. Determina el domini, recorregut, continuïtat, màxims i mínims i el creixement de les següents hipèrboles:
 a) $y = 2,3/x$ b) $y = -1,7/x$ c) $y = 3,2/x$ d) $y = -2,1/x$
18. Representa les següents hipèrboles:
 a) $y = 2/x + 3$ b) $y = -1/x + 5$ c) $y = 3/x - 2$ d) $y = -2/x - 3$
19. Representa les següents hipèrboles:
 a) $y = 2/(x + 3)$ b) $y = -1/(x + 5)$ c) $y = 3/(x - 2)$ d) $y = -2/(x - 3)$
20. Representa les següents hipèrboles:
 a) $y = \frac{2x - 3}{x + 4}$ b) $y = \frac{-x - 3}{2x + 1}$ c) $y = \frac{2x - 3}{3x - 2}$ d) $y = \frac{x + 2}{-x - 3}$

Funcions definides a trossos

21. Representa gràficament la funció $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < -1 \\ x^2-1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$.

22. Determina els punts d'intersecció amb els eixos de coordenades de la funció $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 2 \\ 2x+1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

23. Indica els intervals on la funció $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x < 2 \\ -x^2+4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ és creixent.

24. Representa gràficament la funció $f(x) = \begin{cases} 3x-2 & \text{si } x < 1 \\ 1/x & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

AUTOAVALUACIÓ

1. La recta $y = 4x + 2$ té de pendent m i ordenada en l'origen b :
 a) $m = 4, b = 0$ b) $m = 1/2, b = 6$ c) $m = 2, b = 4$ d) $m = 4, b = 2$
2. La recta que passa pels punts $(1, 6)$ i $(-2, 4)$ té de pendent m i ordenada en l'origen b :
 a) $m = 2, b = 4$ b) $m = 3/2, b = 6$ c) $m = 2/3, b = 16/3$ d) $m = 6, b = 2/3$
3. Indica quin de les següents funcions lineals és simètrica respecte de l'origen de coordenades:
 a) $y = (-10/17)x$ b) $y = 3x + 1$ c) $y = 4x + 2$ d) $y = -x + 3$
4. Indica quin de les següents funcions quadràtiques és simètrica respecte de l'eix d'ordenades:
 a) $y = (-10/17)x^2 + 3x$ b) $y = 3x^2 + 2x + 1$ c) $y = 4x^2$ d) $y = -x^2 + 3x + 2$
5. Indica el vèrtex de la funció quadràtica $y = 3x^2 + 1$:
 a) $(0, 1)$ b) $(1, 2)$ c) $(0, 2)$ d) $(0, 3)$
6. Assenyala quin de les següents funcions quadràtiques és *més estreta* que $y = x^2$:
 a) $y = (-10/17)x^2 + 3x$ b) $y = 3x^2 + 2x + 1$ c) $y = (-1/2)x^2 + 3x + 2$ d) $y = -x^2 + 3$
7. Indica quin de les següents hipèrboles és simètrica respecte de l'origen de coordenades:
 a) $y = -15/(21x)$ b) $y = 3/x + 1$ c) $y = 4/x + 2$ d) $y = -1/x + 3$
8. Assenyala quin de les següents hipèrboles té com a asimptotes a les rectes $x = 2$ i $y = 3$:
 a) $y = -15/(x - 3) - 2$ b) $y = 3/(x - 2) + 3$ c) $y = 4/(x + 2) - 3$ d) $y = -12/(x + 3) + 2$
9. Si trasllado la hipèrbola $y = 3/x$ mitjançant el vector de translació $(1, 3)$ obtinc la hipèrbola:
 a) $y = 3/(x - 1) + 3$ b) $y = 3/(x - 3) + 1$ c) $y = 3/(x + 3) - 1$ d) $y = -3/(x + 1) - 3$
10. Assenyala quin de les següents funcions quadràtiques aconseguix un mínim absolut:
 a) $y = (-10/17)x^2 + 3x$ b) $y = 3x^2 + 2x + 1$ c) $y = (-1/2)x^2 + 3x + 2$ d) $y = -x^2 + 3$

RESUM

		Exemples
Funció polinòmica de primer grau: Rectes $y = m \cdot x$ $y = m \cdot x + n$	La seva expressió són polinomis de grau un. Es representen mitjançant rectes: Hi ha dos tipus: - Funcions lineals o de proporcionalitat directa: $y = m \cdot x$, passen per l'origen de coordenades. - Funcions afins: $y = m \cdot x + n$, són translacions en l'eix y , n unitats. Passen pel punt $(0, n)$.	
Funció polinòmica de segon grau: Paràboles $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$	La seva expressió són polinomis de grau dos. Es representen mitjançant paràboles: Vèrtex: $(\frac{-b}{2a}, \frac{b^2 - 4ac}{4a})$ Punts de tall amb l'eix OX: $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$. Punt de tall amb l'eix OY: $x=0$, és el punt $(0, c)$. Eix de simetria: és la recta $x = \frac{-b}{2a}$.	
Funció de proporcionalitat inversa: Hipèrboles $y = \frac{k}{x}$	<ul style="list-style-type: none"> • k: allunya o apropa la corba a l'origen de coordenades. • Domini i recorregut: són tots els nombres reals menys el 0. • Continuitat: continua en tot el seu domini, discontinua en $x=0$. • Simetria: imparell, simètriques respecte a l'origen de coordenades. • Asímptotes: les rectes $x=0$ i $y=0$. • Creixement: <ul style="list-style-type: none"> - Si $k > 0$: decreixent en $(-\infty, 0)$ i creixent en $(0, +\infty)$. - Si $k < 0$: creixent en $(-\infty, 0)$ i decreixent en $(0, +\infty)$. 	
Hipèrboles $y = \frac{k}{x-a} + b$	Són el resultat de traslladar la hipèrbola $y = \frac{k}{x}$ pel vector de translació (a, b) : <ul style="list-style-type: none"> - Domini: $\mathbb{R} - \{a\}$ Recorregut: $\mathbb{R} - \{b\}$ - Punts: $(x, y) \rightarrow (x+a, y+b)$ - Asímptotes: $\{x=0 \rightarrow x=a\}; \{y=0 \rightarrow y=b\}$ 	

CAPÍTOL 12: FUNCIONS EXPONENCIALS, LOGARÍTMQUES I TRIGONOMÈTRIQUES

ACTIVITATS PROPOSADES

1. FUNCIONS EXPONENCIALS

- Prova ara a realitzar en el teu quadern una taula de valors i la gràfica per a un cas similar, suposant que el nombre de bacteris es multiplica cada hora per 3 en lloc de per 1,4.
Observaràs que els valors de “y” augmenten molt més de pressa i de seguida *se surten del paper*. Mentre que els valors de “x” augmenten d’1 en 1 els valors d’i es van multiplicant per 3. Això es diu creixement exponencial. Si en lloc de multiplicar es tracta de dividir tenim el cas de decreixement exponencial.
- En el teu quadern, representa conjuntament les gràfiques de $y = x^2$ (funció potencial) i $y = 2^x$ (funció exponencial), amb valors de “x” entre 0 i 6. Observa la diferència quantitativa entre el creixement potencial i el creixement exponencial.
- Utilitzant la calculadora, en el teu quadern fes una taula de valors i representa en el teu quadern les funcions $y = e^x$, $y = e^{-x}$.
- Una persona ha ingressat una quantitat de 5.000 euros a interès del 3 % en un banc, de manera que cada any el seu capital es multiplica per 1,03.
 - Escriu en el teu quadern una taula de valors amb els diners que tindrà aquesta persona al cap d’1, 2, 3, 4, 5 i 10 anys.
 - Indica la fórmula de la funció que expressa el capital en funció del nombre d’anys.
 - Representa en el teu quadern gràficament aquesta funció. Pensa bé quines unitats hauràs d'utilitzar en els eixos.
- Un determinat antibiòtic fa que la quantitat de certs bacteris es multipliqui per $\frac{2}{3}$ cada hora. Si la quantitat a les 7 del matí és de 50 milions de bacteris
 - fes una taula calculant el nombre de bacteris que hi ha cada hora, des de les 2 del matí a les 12 de migdia (observa que has de calcular també “cap a enrere”)
 - representa gràficament aquestes dades.
- Representa en el teu quadern les següents funcions i explica la relació entre les seves gràfiques:
 - $y = 2^x$
 - $y = 2^{x+1}$
 - $y = 2^{x-1}$.
- Coneixent la gràfica de la funció $f(x) = 2^x$, que s’ha vist més amunt, i sense calcular taula de valors, dibuixa en el teu quadern les gràfiques de les funcions $g(x) = 2^x - 3$ i $h(x) = 2^{x-3}$.

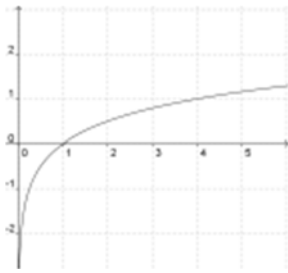
2. FUNCIONS LOGARÍTMQUES

- Calcula els següents logaritmes utilitzant la definició (sense calculadora):
 - $\log_3 81$
 - $\log_2 256$
 - $\log 10\,000$
 - $\log_5 125$
 - $\log_2 0,25$
 - $\log 0,001$
- Calcula els següents logaritmes utilitzant la definició i igualant exponents (sense calculadora):
 - $\log_4 2$
 - $\log_9 27$
 - $\log_{81} 27$
 - $\log_2 0,125$
 - $\log_3 1/9$
 - $\log_2 \frac{3}{12}$
 - $\log_{16} 2$
 - $\log_{64} 32$
 - $\log_4 \sqrt{2}$
 - $\log_3 \sqrt{27}$
 - $\log \sqrt[3]{100}$
- Troba el valor de x en les següents igualtats:
 - $\log_8 x = \frac{2}{3}$
 - $\log_x 81 = 4$
 - $\log_{\frac{1}{3}} 27 = x$
 - $\log_x 0,5 = -1$
 - $\log x = -4$.
- Calcula els següents logaritmes amb la calculadora utilitzant la fórmula del canvi de base, i compara els resultats amb els obtinguts en l’activitat:
 - $\log_4 2$
 - $\log_9 27$
 - $\log_{81} 27$
 - $\log_{16} 2$
 - $\log_2 0,125$
 - $\log_3 1/9$.
- Sabent que $\log 2 = 0,301$ i que $\log 3 = 0,477$ calcula:
 - $\log 5$
 - $\log 25$
 - $\log 24$
 - $\log 60$
- Sabent que $\log 8 = 0,903$, i sense utilitzar calculadora, troba els següents:
 - $\log 80$
 - $\log 2$
 - $\log 64$
 - $\log 0,8$
 - $\log 1,25$
 - $\log \sqrt[3]{800}$
- Pren logaritmes i desenvolupa:
 - $A = \frac{2x^3y^2}{3z}$
 - $B = \frac{\sqrt{x^3y^2}}{10z}$
- Redueix a un únic logaritme cada expressió:
 - $\log 2 - \log 12 + 1 + \log 3$
 - $2 \log 5 + \frac{1}{2} \log 5 - 2$
 - $2 \log 2a - \log a$

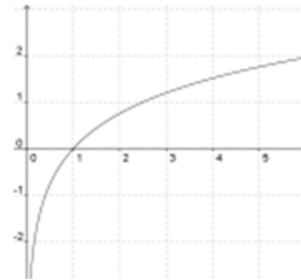
16. Resol les següents equacions logarítmiques:
 a) $\log(x+1)^2 = 6$ b) $\log x + \log 5 = \log 20$ c) $\log(7-3x) - \log(1-x) = \log 5$
17. Quan va néixer un nen els seus pares van col·locar 1.000 € en una llibreta d'estalvi al 2,5 % d'interès compost anual. Quants diners tindrà el compte quan el nen compleixi 15 anys?
18. La població de certs bacteris es multiplica per 1,5 cada dia. Si al començament hi ha 18 milions de bacteris, quantes hi haurà al cap d'una setmana?
19. A què tant per cent d'interès compost cal invertir un capital de 20.000 euros per guanyar 1.000 € en tres anys?
20. Si invertim 7.000 € a l'1,35 % d'interès compost anual, quants anys han de transcórrer per haver guanyat almenys 790 €?
21. Calcula en quants anys es duplica una població que creix al ritme del 10 % anual.
22. Si una població de 8 milions d'habitants s'ha convertit en 15 milions en 7 anys, quant ha crescut cada any? (*Alerta!* no es tracta de dividir entre 7!).
23. Representa en el teu quadern, mitjançant taules de valors, les gràfiques de les següents funcions:
 a) $f(x) = \log_2 x$ b) $f(x) = \log_{1/2} x$ c) $f(x) = \log_{1,5} x$
- Comprova que en tots els casos passen pels punts $(1, 0)$, $(b, 1)$ i $(1/b, -1)$.

24. Identifica les fórmules de les següents funcions a partir de les seves gràfiques, sabent que són funcions logarítmiques:

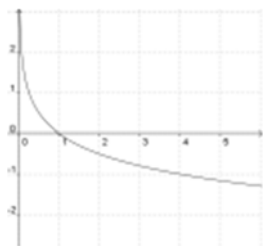
a)



b)



c)



d)



25. Repeteix en el teu quadern el dibuix de la funció $f(x) = \log_2 x$ representada en l'exercici 23. Després pensa quin desplaçament sofreixen respecte a ella les funcions següents i representa-les en la mateixa gràfica sense fer taules de valors:

a) $g(x) = \log_2 x + 3$

b) $h(x) = \log_2 x - 3$

c) $i(x) = \log_2(x+3)$

d) $j(x) = \log_2(x-3)$

26. Fes el mateix procés de l'exercici anterior amb les funcions següents:

a) $g(x) = \log_2 x + 2$

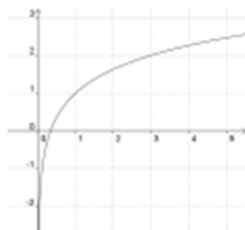
b) $h(x) = \log_2 x - 2$

c) $i(x) = \log_2(x+2)$

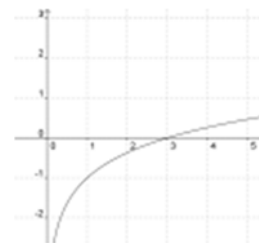
d) $j(x) = \log_2(x-2)$

27. Identifica les fórmules de les següents funcions a partir de les seves gràfiques, sabent que són funcions logarítmiques:

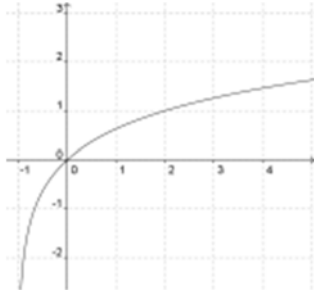
a)



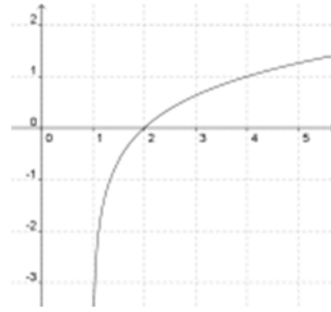
b)



c)



d)



28. Representa en el teu quadern la funció $y = 3^x$ usant una taula de valors. A continuació, a partir d'ella i sense calcular

valors, representa les funcions següents: $y = \left(\frac{1}{3}\right)^2$, $y = \log_3 x$,

$$y = \log_{1/3} x.$$

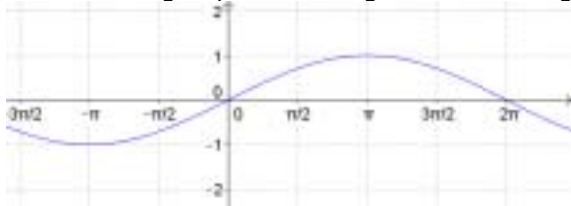
3. FUNCIONS TRIGONOMÈTRIQUES

29. Representa en el teu quadern les gràfiques de les funcions $y = \cos x$,

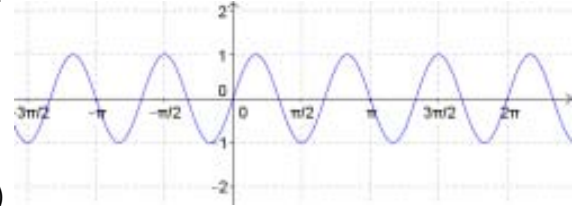
$y = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ i $y = \frac{1}{2}\cos x$ comparant-les després amb la gràfica de $y = \cos x$.

30. Partint de la gràfica de la funció $y = \sin x$, representa en el teu quadern, sense fer taules de valors, les gràfiques de $y = 1 + \sin x$ i de $y = \sin(x + \pi/6)$.

31. Identifica les gràfiques de les següents funcions trigonomètriques:



a)



b)

Recorda que:

Un radiànt es defineix com la mesura de l'angle central l'arc de circumferència del qual té una longitud igual al radi.

Per tant: 360° equivalen a 2π radiants

D'on es dedueix que:

180° equivalen a π radiants

90° equivalen a $\pi/2$ radiants ...

EXERCICIS I PROBLEMES

Funció exponencial

1. Representa mitjançant una taula de valors les següents funcions:

a) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

b) $y = \left(\frac{4}{3}\right)^x$

c) $y = 2^{x/2}$

d) $y = 3^{-2x}$

2. Representa mitjançant una taula de valors la funció $y = 3^x$ i a continuació, sense taula de valors, representa aquestes altres sobre el mateix dibuix:

a) $y = 3^x - 1$

b) $y = 3^x + 1$

c) $y = 3^{x+1}$

d) $y = 3^{x-1}$

3. Troba una funció exponencial $f(x) = b^x$ sabent que $f(2) = 9$.

4. Troba una funció $f(x) = k \cdot b^x$ sabent que $f(4) = 48$ i que $f(0) = 3$.

5. Si un capital de 3.500 euros es multiplica cada any per 1,02 representa en un gràfic l'evolució d'aquest capital en els 10 primers anys. Escull unes proporcions adequades per als eixos.

6. Cert tipus de cèl·lules es reproduïx per bipartició, comprovant-se que el nombre d'elles es duplica cada dia. Si en un dia determinat el nombre de cèl·lules era de 4 milions:

a) Expressa mitjançant una funció el nombre de cèl·lules en funció del nombre de dies.

b) Troba el nombre de cèl·lules que hi haurà dins de 3 dies i el que hi havia fa 3 dies.

c) En quin dia penses que el nombre de cèl·lules era de 31.250?

7. La descomposició de cert isòtop radioactiu ve donada per la fórmula $i = i_0 \cdot 2,7^{-0,25t}$, on i_0 representa la quantitat inicial i t el nombre de mil·lennis transcorregut. Si la quantitat actual és de 50 grams, quin serà la quantitat que quedi al cap de 8.000 anys? Quin era la quantitat que hi havia fa 5.000 anys?

Funció logarítmica

8. Calcula els següents logaritmes utilitzant la definició i sense utilitzar la calculadora:

a) $\log_5 625$

b) $\log_2 128$

c) $\log 1000$

d) $\log_3 \frac{1}{27}$

e) $\log_5 0,2$

f) $\log 0,1$

9. Calcula els següents logaritmes utilitzant la definició i igualant exponents, sense calculadora:

a) $\log_9 3$

b) $\log_4 32$

c) $\log_2 0,125$

d) $\log_9 27$

e) $\log_2 \sqrt{8}$

f) $\log_8 2$

g) $\log_3 0,333\dots$

h) $\log_8 \sqrt{2}$

i) $\log_3 \sqrt[4]{27}$

j) $\log \sqrt{1000}$

10. Calcula els següents logaritmes amb la calculadora utilitzant la fórmula del canvi de base:

a) $\log_5 7$

b) $\log_9 12$

c) $\log_{20} 0,1$

d) $\log_{13} \sqrt{8}$

e) $\log_{16} \sqrt{1000}$

11. Utilitzant els valors $\log 2 = 0,301$ i que $\log 3 = 0,477$ calcula, aplicant les propietats dels logaritmes i sense calculadora: a)

log 27

b) log 12

c) log 20

d) log 50

e) $\log \sqrt{6}$

f) $\log \sqrt[3]{25}$

12. Cridant $\log 9 = x$ expressa en funció de x els següents logaritmes:

a) log 81

b) log 900

c) $\log 0,1$

d) log 0,9

e) $\log \sqrt[3]{900}$

13. Resol les següents equacions logarítmiques:

a) $2 \log x = \log(10 - 3x)$

b) $\log 2 + \log(11 - x^2) = 2 \log(5 - x)$

c) $\log(x^2 + 3x + 2) - \log(x^2 - 1) = \log 2$

d) $\log x + \log(x + 15) = 2$

14. Quina relació hi ha entre el logaritme d'un nombre x i el del seu invers $1/x$?

15. Si es multiplica per 36 el nombre x , el seu logaritme a certa base augmenta en dues unitats. Quin és aquesta base?

16. L'escala *Richter*, usada per mesurar la intensitat dels terratrèmols, és una escala logarítmica: un terratrèmol de magnitud 5 és 100 vegades més intens que un de magnitud 3, perquè $5 = \log 100.000$ i $3 = \log 1.000$. Tenint això en compte, si el famós terratrèmol de Sant Francisco (en 1906) va tenir una magnitud de 8,2 i el d'Haití (en 2010) va ser de 7,2 quantes vegades més forta va ser un que un altre?

Funcions trigonomètriques

17. Determina tots els angles que verifiquen que $\sin x = 1/2$.

18. Determina tots els angles que verifiquen que $\sin x = -1/2$.

19. Determina tots els angles que verifiquen que $\cos x = 1/2$.

20. Determina tots els angles que verifiquen que $\cos x = -1/2$.

21. Determina tots els angles que verifiquen que $\tan x = -1$.

22. Calcula $\sin x$ i $\cos x$ si $\tan x = -3$.

23. Calcula $\sin x$ i $\operatorname{tg} x$ si $\cos x = 0,4$.
24. Calcula $\tan x$ i $\cos x$ si $\sin x = -0,3$.
25. Calcula les raons trigonomètriques dels angles següents: a) $17\pi/3$, b) $-20\pi/3$, c) $13\pi/2$, d) $-9\pi/2$.
26. Dibuixa en el teu quadern sobre uns mateixos eixos les gràfiques de les funcions sinus, cosinus i tangent i indica el següent: a) Si el sinus val zero, quant val el cosinus, i la tangent? b) Si el cosinus val zero, quant val el sinus i la tangent? c) Si la tangent val zero, quant val el sinus i el cosinus? d) Quan la tangent tendeix a infinit, quant val el cosinus?
27. Dibuixa la gràfica de la funció $y = \sin(2x)$, completant prèviament la taula següent en el teu quadern:

x					
$2x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin(2x)$					
y					

a) L'amplitud és l'ordenada del màxim. Quin és l'amplitud d'aquesta funció? b) Quin és el seu període? c) La freqüència és la inversa del període, quin és la seva freqüència?

28. Dibuixa la gràfica de la funció $y = 3\sin(\pi x)$, completant prèviament la taula següent en el teu quadern:

x					
πx	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin(\pi x)$					
y					

a) Quin és l'amplitud d'aquesta funció? b) Quin és el seu període? c) Quin és la seva freqüència?

29. Dibuixa la gràfica de la funció $y = 2\sin((\pi/3)x) + \pi/2$, completant prèviament la taula següent en el teu quadern:

x					
$(\pi/3)x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin((\pi/3)x)$					
y					

a) Quin és l'amplitud d'aquesta funció? b) Quin és el seu període? c) Quin és la seva freqüència?

30. Dibuixa la gràfica de la funció $y = 3\sin(\pi x + 2)$, completant prèviament la taula següent en el teu quadern:

x					
$\pi x + 2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin(\pi x + 2)$					
y					

a) Quin és l'amplitud d'aquesta funció? b) Quin és el seu període? c) Quin és la seva freqüència?

31. Dibuixa la gràfica de la funció $y = \cos(2x)$, completant prèviament la taula següent en el teu quadern:

x					
$2x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\cos(2x)$					
y					

a) Quin és l'amplitud d'aquesta funció? b) Quin és el seu període? c) Quin és la seva freqüència?

32. Dibuixa la gràfica de la funció $y = 3\cos(\pi x)$, completant prèviament la taula següent en el teu quadern:

x					
πx	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\cos(\pi x)$					
y					

a) Quin és l'amplitud d'aquesta funció? b) Quin és el seu període? c) Quin és la seva freqüència?

33. Dibuixa la gràfica de la funció $y = 2\cos(\pi x + 2)$, completant prèviament la taula següent en el teu quadern:

x					
$\pi x + 2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\cos(\pi x + 2)$					
y					

a) Quin és l'amplitud d'aquesta funció? b) Quin és el seu període? c) Quin és la seva freqüència?

34. Dibuixa la gràfica de la funció $y = \tan(2x)$, completant prèviament la taula següent en el teu quadern. :

x					
$2x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\tan(2x)$					
y					

Quin és el seu període?

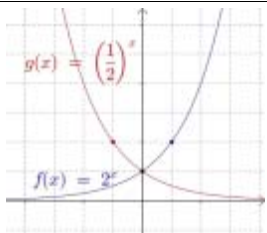
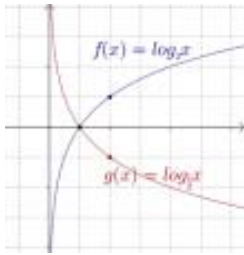
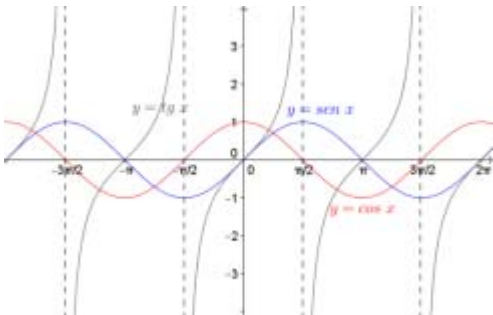
Problemes

35. Per efecte d'un antibiòtic el nombre de bacteris d'una colònia es redueix en un 7% cada hora. Si en el moment d'administrar-se l'antibiòtic hi havia 40 milions de bacteris, quantes hi haurà al cap de 10 hores?
36. Una persona ingereix a les 8 del matí una dosi de 10 mg de medicament. Aquest medicament es va eliminant a través de l'orina, i la quantitat que queda en el cos al cap de t hores ve donada per la fórmula $M(t) = 10 \cdot 0,8^t$. Perquè el medicament faci efecte ha d'haver-hi almenys una quantitat de 2 mg en el cos. Quant temps seguirà fent efecte després de la seva ingestió?
37. La mesura de la pressió atmosfèrica P (en mil·libars) a una altitud de x quilòmetres sobre el nivell del mar està donada per l'equació $P(x) = 1035 \cdot e^{-0,12x}$.
 - a) Si la pressió en el cim d'una muntanya és de 449 mil·libars, quin és l'altura de la muntanya?
 - b) Quin serà la pressió en el cim de l'Everest (altitud 8.848 metres)?
38. A què tant per cent cal invertir un capital per duplicar-ho en 10 anys?
39. Quants anys ha d'estar invertit un capital perquè al 5% d'interès es converteixi en 1,25 vegades el capital inicial?
40. Coneixes aquestes nines russes que porten dins una altra nina igual però de menor grandària, i així successivament? Suposem que cada nina té dins una altra que ocupa $2/3$ del seu volum. Si la nina major té un volum de 405 cm^3 i la més petita és de 80 cm^3 , quantes nines hi ha en total en la sèrie? Podries donar una fórmula general per a aquest càlcul?
41. Indica, sense dibuixar la gràfica, el període, l'amplitud i la freqüència de les funcions següents:
 - a) $y = 2 \sin (x/2)$, b) $y = 0,4 \cos (\pi x/2)$, c) $y = 5 \sin (\pi x/3)$, d) $y = 3 \cos (\pi x)$.

AUTOAVALUACIÓ

1. El valor de x que verifica l'equació exponencial $\frac{4^{x+3}}{2^{x-1}} = 64$ és:
 - a) 1
 - b) 2
 - c) 3
 - d) -1
2. La funció exponencial $y = e^x$ tendeix a $***$ quan x tendeix a $-\infty$ i a $***$ quan x tendeix a $+\infty$. Indica amb quins valors hem que emplenar els asteriscos:
 - a) 0, $+\infty$
 - b) $+\infty$, 0
 - c) 0, $-\infty$
 - d) $-\infty$, 0
3. Indica quin és la funció exponencial $f(x) = b^x$ que verifica que $f(3) = 27$:
 - a) $f(x) = 2^x$
 - b) $f(x) = 3^x$
 - c) $f(x) = 27^x$
 - d) $f(x) = 5^x$
4. El valor de x que verifica $x = \log_2 1024$ és:
 - a) 0
 - b) 5
 - c) 10
 - d) Un altre valor
5. L'equació logarítmica $\log x + \log 6 = \log 30$ té com a solució:
 - a) 2
 - b) 3
 - c) 4
 - d) 5
6. Indica l'afirmació veritable:
 - a) La funció exponencial de base major que 1 és decreixent
 - b) La funció logarítmica de base major que 1 és decreixent
 - c) La funció exponencial sempre és creixent
 - d) La funció exponencial de base major que 1 és creixent
7. L'expressió general de tots els angles el tangent val dels quals 1, on k és un nombre enter, és:
 - a) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
 - b) $\frac{\pi}{4} + k\pi$
 - c) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$
 - d) $\frac{\pi}{2} + k\pi$
8. La funció $f(x) = 3 \sin(4x)$ té d'amplitud, període i freqüència, respectivament:
 - a) 3, $\pi/2$, $2/\pi$
 - b) 4, $\pi/3$, $3/\pi$
 - c) 4, $3/\pi$, $\pi/3$
 - d) 3, $2/\pi$, $\pi/2$
9. El si, el cosinus i la tangent de $-7\pi/4$ valen respectivament:
 - a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1
 - b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\sqrt{3}$
 - c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\sqrt{3}$
 - d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1
10. El si, el cosinus i la tangent de $13\pi/6$ valen respectivament:
 - a) $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$
 - b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\sqrt{3}$
 - c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\sqrt{3}$
 - d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1

RESUM

		Exemples
Funció exponencial $y = b^x$	Domini: Tots els nombres reals. Recorregut: Tots els nombres reals positius. Contínua en tot el domini Asímtota horitzontal: $y = 0$ $b > 1, \Leftrightarrow$ Creixent en tot el domini. $0 < b < 1 \Leftrightarrow$ Decreixent en tot el domini Punts destacables: $(0, 1), (1, b), (-1, 1/b)$	
Definició de logaritme	$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a \quad (a > 0, b > 0, b \neq 1)$ Conseqüències elementals: $\log_b b = 1 \quad \log_b 1 = 0$	$\log_5 125 = 3$ $\log_4 8 = 3/2$
Canvi de base	$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$	$\log_4 7 = \frac{\log 7}{\log 4} = 1,40$
Operacions amb logaritmes	Logaritme d'un producte: $\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$ Logaritme d'un quocient: $\log_b (x : y) = \log_b x - \log_b y$ Logaritme d'una potència: $\log_b x^y = y \cdot \log_b x$	$\log \frac{\sqrt{b^3 c}}{x^2} =$ $\frac{1}{2}(3 \log b + \log c) - 2 \log x$
Funció logarítmica $y = \log_b x$	<i>Domini:</i> Tots els nombres reals positius. <i>Recorregut:</i> Tots els nombres reals. Contínua en tot el domini Asímtota vertical: $x=0$ $b > 1 \Leftrightarrow$ Creixent en tot el domini. $0 < b < 1 \Leftrightarrow$ Decreixent en tot el domini Punts destacables: $(1, 0), (b, 1), (1/b, -1)$	
Funcions trigonomètriques $y = \sin x$ $y = \cos x$ $y = \tan x$	Funcions sinus i cosinus: <i>Domini:</i> Tots els nombres reals. <i>Recorregut:</i> $[-1, 1]$ Contínues en tot el domini. Periòdiques de període 2π Funció tangent: <i>Domini i continuïtat:</i> Tot \mathbb{R} excepte $(2n + 1) \cdot \pi/2$ (En aquests valors hi ha asímtotes verticals) <i>Recorregut:</i> Tots els nombres reals. Periòdica de període π . Simetria: Funcions sinus i tangent: simetria imparell. Funció cosinus: simetria parell.	

CAPÍTOL 13: ESTADÍSTICA

ACTIVITATS PROPOSADES

2. POBLACIÓ I MOSTRA. VARIABLES ESTADÍSTIQUES

- Assenyalar en quin cas és més convenient estudiar la població o una mostra:
 - El diàmetre dels cargols que fabrica una màquina diàriament.
 - L'altura d'un grup de sis amics.
- Es pot llegir el següent titular en el periòdic que publica el teu institut: "La nota mitjana dels alumnes de 4t ESO de les Illes Balears és de 7,9". Com s'ha arribat a aquesta conclusió? S'ha estudiat a tota la població? Si haguessin seleccionat per al seu càlcul sol a les dones, seria representatiu el seu valor?
- Indicar el tipus de variable estadística que estudiem i raona, en cada cas, si seria millor analitzar una mostra o la població:
 - El sexe dels habitants d'un país.
 - Els diners gastats a la setmana pel teu germà.
 - El color de pèl dels teus companys de classe.
 - La temperatura de la teva província.
 - La talla dempeus dels alumnes de l'institut.
- Per realitzar un estudi fem una enquesta entre els joves d'un barri i els preguntem pel nombre de vegades que van al cinema al mes. Indica què característiques hauria de tenir la mostra triada i si haurien de ser tots els joves de la mostra de la mateixa edat.

3. TAULES DE FREQUÈNCIES

- Obtenir la taula de freqüències absolutes de les notes en anglès de 24 alumnes:

6 6 7 8 4 9 8 7 6 5 3 5
7 6 6 6 5 4 3 9 8 8 4 5

- Construir una taula de freqüències relatives amb el color de pèl de 24 persones triades a l'atzar:

M=bru; R=ros; P=pèl-roig

M R P R R R R P P M M M
M R R R R R M M M M M P

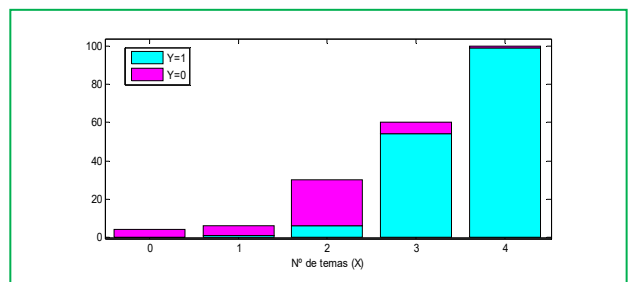
- El nombre d'hores diàries d'estudi de 14 alumnes és el següent:

3 4 2 5 3 4 3 2 3 4 5 4 3 2

- Efectua un recompte i organitza els resultats obtinguts en una taula de freqüències absolutes acumulades.
 - Què signifiquen les freqüències acumulades que has calculat?
- En una avaluació, dels 30 alumnes d'una classe, el 30 % va aprovar tot, el 10 % va suspendre una assignatura, el 40 % va suspendre dues assignatures i la resta més de dues assignatures.
 - Realitza la taula de freqüències completa corresponent (freqüències absolutes, freqüències relatives, freqüències absolutes acumulades i freqüències relatives acumulades).
 - Hi ha algun tipus de freqüència que correspongui a la pregunta de quants alumnes van suspendre menys de dues assignatures? Raona la resposta.

4. GRÀFICS ESTADÍSTICS

- Si volem representar conjuntament valors de la variable corresponents a diferents períodes de temps, o a diferents qualitats, per comparar situacions podem construir un diagrama de barres apilades. Podries interpretar aquest gràfic corresponent al nombre de temes que els alumnes d'una assignatura de 4t ESO porten estudiats? Es pren informació en dues classes d'un institut (blau i rosa).
- El sexe de 18 bebès nascuts en un hospital de Palma ha estat:



H	M	H	H	M	H
H	M	M	H	M	H
M	M	H	H	M	H

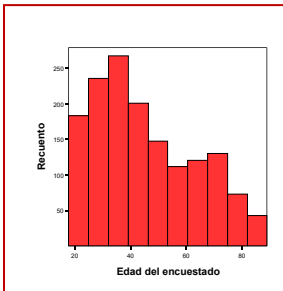
Construeix la taula associada a aquestes dades i representa'ls.

- Representa els valors de la variable de la taula adjunta amb el gràfic adequat corresponents a una enquesta realitzada sobre el sector al que pertanyen un grup de treballadors madrilenys.

SECTOR	INDUSTRIAL	AGRARI	SERVEIS	ALTRES
% TREBALLADORS	20	16	45	19

12. Completa la taula de freqüències per poder representar la informació mitjançant l'histograma de freqüències acumulades:

EDAT	[15, 25)	[25, 35)	[35, 45)	[45, 55)
NOMBRE DE PERSONES	25	45	55	65



13. A quina representació gràfica corresponen el següent gràfic corresponent a la informació recollida sobre l'edat de 100 persones? Per què creïs que s'ha utilitzat aquest i no un altre?

14. Dels 100 assistents a unes noces, el 34 % va menjar vedella de segon plat, 25 % ànec, 24 % be i la resta pescada.

a) Organitza la informació anterior en una taula de freqüències i representa les dades en un gràfic de sectors.

b) Realitza un diagrama de barres i explica com ho fas. Quin dels dos gràfics prefereixes? Per què?

15. S'ha recollit informació sobre el contingut de sals minerals de 24 ampolles d'aigua d'un grup d'escolars en una excursió obtenint:

45	45	65	56	33	65	23	23
34	23	43	67	22	43	34	23
12	34	45	34	19	34	23	43

a) Classifica la variable estadística estudiada

b) Seria convenient prendre o no intervals en fer una taula de freqüències?

c) Realitza el gràfic que consideris més oportú.

5. MESURES DE TENDÈNCIA CENTRAL

16. Una persona ingressa 10.000 € en un fons d'inversió l'1 de gener de 2009. Les rendibilitats anuals del fons durant els anys següents van ser las següents:

Any	2009	2010	2011	2012
Rendibilitats (%)	5	3	-1	4

Si no ha retirat el capital, quin ha estat la rendibilitat mitjana d'aquest fons durant aquests anys?

17. Interpreta els valors de la variable d'aquesta taula que representa el pes de 100.000 bombones de butà d'una fàbrica, en quilograms. Quin tipus de gràfic utilitzaries? Calcula la mitjana i interpreta-la.

Pes [)	fi %	n _i	N _i
14,5-15	0,3	300	300
15-15,5	1,6	1600	1900
15,5-16	7,4	7400	9300
16-16,5	21,5	21500	30800
16,5-17	30,5	30500	61300
17-17,5	24,5	24500	85800
17,5-18	10,7	10700	96500
18-18,5	21,5	21500	30800

18. Obtenir la mitjana i la moda dels següents valors de la variable referits al resultat de llançar un dau 50 vegades.

1	2	3	2	3	4	3	3	3	5
5	5	5	6	5	6	5	6	4	4
3	2	1	2	3	4	5	6	5	4
3	2	3	4	5	6	5	4	3	2
3	4	5	5	5	5	6	6	6	3

19. Realitzar l'activitat anterior però agrupant en intervals d'amplitud 2, començant en 0. Obtens els mateixos resultats? Per què?

20. Dibuixar un diagrama de caixa coneixent les següents dades.

Mínim valor = 2; quartil 1 = 3; mediana = 6; quartil 3 = 7; màxim valor = 12.

21. Un corredor de marató entrena, de dilluns a divendres recorrent les següents distàncies: 2, 3, 3, 6 i 4, respectivament. Si el dissabte també entrena:

a) Quants quilòmetres ha de recórrer perquè la mitjana sigui la mateixa?

b) I perquè la mediana no variï?

c) I perquè la moda no variï?

22. EL salari mensual en euros dels 6 treballadors d'una empresa tèxtil és el que es presenta. Quin dels tres tipus de mesures

de tendència central descriu millor els sous de l'empresa?

1700	1400	1700	1155	1340	4565
------	------	------	------	------	------

23. Quin valor o valors podríem afegir a aquest conjunt de valors de la variable perquè la mediana segueixi sent la mateixa?

12	19	24	23	23	15	21	32	12	6	32	12	12	21
----	----	----	----	----	----	----	----	----	---	----	----	----	----

24. Surten 25 places per a un lloc d'auxiliar d'infermeria i es presenten 200 persones amb les següents notes.

notes	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i	6	34	25	56	29	10	30	10

a) Amb quina nota s'obté una de les places mitjançant l'examen?

b) Quin percentil és la nota 5?

6. MESURES DE DISPERSIÓ

25. Un grup de cans pastor alemany té una mitjana de 70 kg i desviació típica 2 kg. Un conjunt de cans canitx té una mitjana de 15 kg i desviació típica 2 kg. Compara tots dos grups.

26. El temps, en minuts, que un conjunt d'estudiants de 4t ESO dedica a preparar un examen de Matemàtiques és:

234	345	345	123	234	234	556
234	234	345	223	167	199	490

Les qualificacions d'aquest conjunt d'estudiants són les següents:

4	5	6	7	6	5	8
9	8	7	8	7	6	8

a) Què haurem de fer per comparar la seva variabilitat?

b) En quin conjunt els valors de la variable estan més dispersos?

c) És la mitjana sempre major que la desviació típica?

27. S'ha recollit una mostra de 20 recipients els diàmetres dels quals són:

0'91	1'04	1'01	1	0'77	0'78	1	1'3	1'02	1
1	0'88	1'26	0'92	0'98	0'78	0'82	1'2	1'16	1'14

a) Calcula totes les mesures de dispersió que coneguis.

b) A partir de quin valor de diàmetre dels recipients es consideren el 20 % amb major diàmetre?

7. CONSTRUCCIÓ I INTERPRETACIÓ DE DIAGRAMES DE DISPERSIÓ. INTRODUCCIÓ A LA CORRELACIÓ

28. S'han mesurat els pesos i altures de 6 persones, com a mostra de les persones que estan en una fila o cua d'espera, obtenint-se els següents resultats:

Pesos (kg)	65	60	65	63	68	68
Altures (cm)	170	150	168	170	175	180

Es demana:

a) Calcular les mitjanes i les variàncies d'aquests dos conjunts de dades unidimensionals.

b) Quines mesures estan més disperses, els pesos o les altures?

c) Representar gràficament aquest conjunt de dades bidimensional. Calcular la covariància i interpretar el seu valor.

d) Donar una mesura de la correlació entre ambdues variables. Interpretar el seu valor.

EXERCICIS I PROBLEMES.

Població i mostra. Variables estadístiques. Taules de freqüències

- Es llança una moneda 700 vegades i s'obté cara 355 vegades. Expressa en una taula les freqüències absolutes, relatives i calcula també les freqüències acumulades absolutes i acumulades relatives de cares i creus en aquest experiment.
- Es llançar un dau 500 vegades i s'obtenen els següents resultats:

Resultat	1	2	3	4	5	6
Nombre de vegades	70	81	92	85		81

- Quantes vegades ha sortit el 5?
 - Construir taula amb les freqüències absolutes i les freqüències absolutes acumulades
 - Construir una taula amb les freqüències relatives i les freqüències relatives acumulades
- Una urna que conté 10 boles numerades del 0 al 9, traiem una bola, anotem el nombre i retornem la bola a la urna. Repetim l'experiment 1000 vegades i s'han obtingut els resultats indicats en la taula:

Resultat	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Freqüència absoluta	79	102			93	98	104	77		
Freqüència relativa			0,12	0,13					0,1	
Freqüència absoluta acumulada	79	181								
Freqüència relativa acumulada										1

- Quina és la freqüència absoluta de 9?
 - Quina és la freqüència absoluta acumulada de 2?
 - Quina és la freqüència relativa acumulada d'1?
 - Copia la taula en el teu quadern i completa-la.
- Pepa ha tirat un dau 25 vegades i ha obtingut els següents resultats:
1, 2, 5, 6, 3, 1, 4, 5, 6, 1, 3, 1, 2, 2, 1, 6, 2, 2, 4, 3, 4, 6, 6, 1, 4
- Construir una taula de freqüències absolutes.
 - Construir una taula de freqüències relatives.
 - Dibuixa un diagrama de barres.
 - Dibuixa un polígon de freqüències i una representació per sectors.
- En una classe s'ha mesurat la grandària de les mans de cadascun dels alumnes i alumnes, i el resultat en centímetres ha estat el següent:

19, 18, 20, 19, 18, 21, 19, 17, 16, 20,
16, 19, 20, 21, 18, 17, 20, 19, 22, 21,
23, 21, 17, 18, 17, 19, 21, 20, 16, 19

- Quina grandària ha estat el valor mínim? I el màxim? Quin és el rang total de la variable?
 - Construir una taula de freqüències absolutes i una altra de freqüències relatives.
 - Construir una taula de freqüències absolutes acumulades i una altra de freqüències relatives acumulades.
- Calcula la freqüència absoluta de les dades d'una enquesta en la qual s'ha triat entre veure la televisió, t, o llegir un llibre, l:
t, l, t, t, l, t, l, t, l, t, l, t, t, l, l, t, l, t, l, t, l, t.
- La durada en minuts d'unes trucades telefòniques ha estat:

7, 3, 6, 3, 7, 5, 4, 3, 5, 7, 10, 1, 9, 12, 2

Construir una taula de freqüències absolutes i una taula de freqüències relatives.

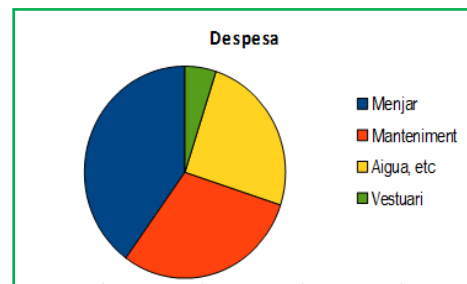
Gràfics estadístics

- S'ha demanat en un poble de Menorca el nombre de germans que tenien i s'ha obtingut la següent taula de freqüències absolutes sobre el nombre de fills de cada família:

Nombre de fills	1	2	3	4	5	6	7	8 o més
Nombre de famílies	46	249	205	106	46	21	15	6

- Escriu en el teu quadern una taula de freqüències relatives.
 - Fes un diagrama de barres de freqüències absolutes i un altre de freqüències relatives.
 - Fes un polígon de freqüències absolutes i un altre de freqüències absolutes acumulades.
- Fes una enquesta similar amb els teus companys i companyes de curs preguntant el nombre de germans i confeccionant una taula sobre el nombre de fills i el nombre de famílies.
- Construeix una taula de freqüències relatives
 - Fes un diagrama de barres de freqüències absolutes i relatives. Completa amb un polígon de freqüències
 - Compara la taula de freqüències relatives i el diagrama de barres de freqüències relatives que obtinguis amb l'obtingut en l'exercici anterior.

10. Un batut de fruites conté 25 % de taronja, 15 % de plàtan; 50 % de poma i, la resta de llet. Representa en un diagrama de sectors la composició del batut.
11. En un campament d'estiu s'han gastat deu mil euros. El gràfic mostra la distribució de la despesa:



- Menjar: 40 %
 - Neteja i manteniment: 30 %
 - Aigua, gas, electricitat i telèfon: 25 %
 - Vestuari:
- a) Quin percentatge es va gastar en vestuari?
b) Quants euros es van gastar en menjar?
c) Quant mesura l'angle del sector corresponent a activitats?
12. Cerca en revistes o diaris dues gràfiques estadístiques, retalla-les i pega-les en el teu quadern. En moltes ocasions aquestes gràfiques tenen errors. Observa-les detingudament i comenta les següents qüestions:
- Està clara la variable a la qual es refereix? I les freqüències?
 - Són correctes les unitats? Poden millorar-se?
 - Comenta les gràfiques.
13. Es fa una enquesta sobre el nombre de vegades que van al cinema uns joves al mes. Els valors de la variable estan en la taula:

Vegades que van al cinema	0	1	2	3	4	5
Freqüència absoluta	1	7	9	5	2	1

- Representa un diagrama de barres de freqüències absolutes.
 - Representa un polígon de freqüències relatives.
 - Representa els valors de la variable en un diagrama de sectors.
14. Es fa un estudi sobre el que es recicla en una ciutat i es fa una taula amb el pes en percentatge dels diferents tipus de residus:

Tipus de residu	Percentatge
Metalls	15
Paper i cartró	40
Vidre	15
Plàstic	25
Piles	5

- Construeix un diagrama de barres
 - Representa un polígon de freqüències.
 - Representa els valors de la variable en un diagrama de sectors.
15. En un exercici anterior s'ha tingut el resultat de mesurar en una classe la grandària de les mans de cadascun dels alumnes i alumnes, i el resultat en centímetres ha estat el següent:

19, 18, 20, 19, 18, 21, 19, 17, 16, 20,
16, 19, 20, 21, 18, 17, 20, 19, 22, 21,
23, 21, 17, 18, 17, 19, 21, 20, 16, 19

Representa els valors de la variable en un diagrama de barres i en un polígon de freqüències.

16. El 35 % de les cigonyes no ha emigrat aquest any a Àfrica i el 6 % va morir pel camí. Dibuixa un diagrama per sector que descriu aquesta situació.
17. En una classe s'ha demanat per les preferències esportives i s'ha obtingut:

Futbol	Bàsquet	Natació	Karate	Ciclisme
8	9	7	6	10

- Copia la taula en el teu quadern i construeix una taula de freqüències relatives.
- Representa aquests valors de la variable en un diagrama de sectors.

Mesures de centralització i dispersió

18. Na Pepa ha tirat un dau 25 vegades i ha obtingut els següents resultats:

1, 2, 5, 6, 3, 1, 4, 5, 6, 1, 3, 1, 2, 2, 1, 6, 2, 2, 4, 3, 4, 6, 6, 1, 4

- Calcula la mitjana aritmètica
- Calcula la mediana
- Quina és la moda? És única?
- Calcula la variància i la desviació típica interpretant el seu resultat

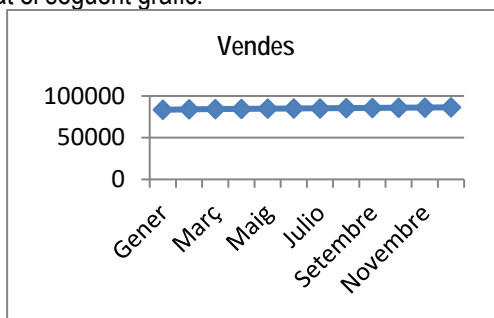
19. Sara ha tingut les següents notes en els seus exàmens de Matemàtiques: 9, 7, 8, 6, 9, 10, 9
- Calcula la mitjana aritmètica
 - Calcula la mediana
 - Quina és la moda? És única?
 - Calcula el percentil 45 interpretant el seu resultat
 - Calcula el percentil 75 interpretant el seu resultat. què un altre nom rep?
 - Calcula la variància i desviació típica interpretant el seu resultat
 - Calcula el coeficient de variació interpretant el seu resultat
20. En un exercici anterior s'ha mesurat en una classe la grandària de les mans de l'alumnat, i el resultat en centímetres ha estat el següent:
19, 18, 20, 19, 18, 21, 19, 17, 16, 20, 16, 19, 20, 21, 18, 17, 20, 19, 22, 21, 23, 21, 17, 18, 17, 19, 21, 20, 16, 19
- Calcula la mitjana aritmètica
 - Calcula la mediana
 - Quina és la moda? És única?
 - Calcula el percentil 45 interpretant el seu resultat
 - Calcula el percentil 75 interpretant el seu resultat. què un altre nom rep?
 - Calcula la variància i desviació típica interpretant el seu resultat
 - Calcula el coeficient de variació interpretant el seu resultat
21. Ens interessa conèixer la distribució de notes obtingudes per 40 estudiants. Les notes són:
4, 1, 7, 10, 3, 2, 8, 9, 0, 0, 5, 8, 2, 7, 1, 2, 8, 10, 2, 10, 3, 4, 8, 9, 3, 6, 3, 7, 2, 4, 9, 4, 9, 5, 1, 3, 3, 9, 7, 8, 10
- Escriu en el teu quadern una taula de freqüències absolutes.
 - Fes un polígon de freqüències absolutes.
 - Calcula la mitjana
 - Calcula la mediana
 - Calcula la moda
 - Calcula el percentil 45 interpretant el seu resultat
 - Calcula el percentil 75 interpretant el seu resultat. Quin altre nom rep?
 - Calcula la variància i desviació típica interpretant el seu resultat
 - Calcula el coeficient de variació interpretant el seu resultat
 - Si les notes dels mateixos alumnes respecte a una altra assignatura tenen una mitjana de 5,3 i desviació típica de 2, quina de les dues assignatures té una mitjana més homogènia?
22. Els jugadors d'un equip d'handbol té les següents edats:
12, 14, 13, 12, 15, 11, 12, 12, 13, 14, 11, 12, 12.
- Calcula la mitjana
 - Calcula la mediana
 - Calcula la moda
 - Calcula el percentil 45 interpretant el seu resultat
 - Calcula el percentil 75 interpretant el seu resultat. què un altre nom rep?
 - Calcula la variància i desviació típica interpretant el seu resultat
 - Calcula el coeficient de variació interpretant el seu resultat

Problemes

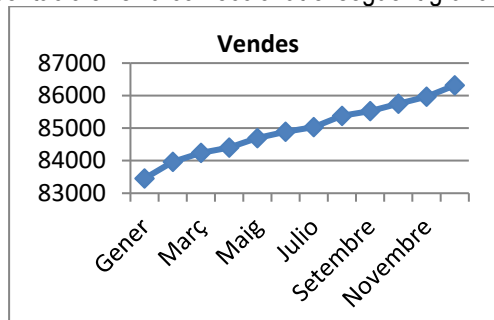
23. El Director Comercial d'una empresa va a ser avaluat. Per a això ha de donar comptes dels resultats obtinguts. Vol quedar bé, ja que això li pot suposar un augment de sou. S'han venut les següents quantitats:

Mesos	Gener	Febrer	Març	Abril	Maig	Juny	Juliol	Agost	Setembre	Octubre	Novembre	Desembre
Vendes	83451	83962	84238	84401	84693	84889	85032	85378	85524	85751	859967	86316

L'estadístic de l'empresa li ha lliurat el següent gràfic:



No li ha agradat gens, i per la presentació ell s'ha confeccionat el següent gràfic:



Tots dos gràfics són correctes. Escriu un informe sobre com poden els diferents gràfics donar impressions tan diferents.

24. Tira una moneda 15 vegades i anota les vegades que cau cara i les que no. Construeix després dues taules: una de freqüències absolutes i una altra de freqüències relatives. Representa el resultat en un diagrama de freqüències i en un polígon de freqüències.
25. La mitjana de sis nombres és 5. S'afegeixen dos nombres més però la mitjana segueix sent 5. Quant sumen aquests dos nombres?
26. La següent taula expressa les alçades, en metres, de 1000 soldats:

Talla	1,50 - 156	1,56 - 1,62	1,62 - 168	1,68 - 1,74	1,74 - 1,80	1,80-1,92
Nº de soldats	20	150	200	330	200	100

Calcula:

- La mitjana i la desviació típica.
 - Els intervals on es troben la mediana i els quartils.
 - L'interval $(\bar{X} - \sigma, \bar{X} + \sigma)$ i el percentatge d'individus en aquest interval.
 - Representa les dades en un histograma.
27. Una companyia aèria sospita que existeix una relació entre les variables X, temps d'un vol, en hores; i Y, consum de combustible (gasoil) para aquest vol, en litres. Per aquesta raó, s'han obtingut les següents dades, dins del rang de nivells d'interès per a X en aquesta companyia.

X_i	0'4	0'5	0'6	0'65	0'7	0'8	1	1'15	1'2	1'4	1'5	1'6	1'8	2'2	3
Y_i	1.350	2.220	2.900	3.150	3.350	3.550	3.900	4.330	4.500	5.050	5.320	5.650	6.400	7.500	10.250

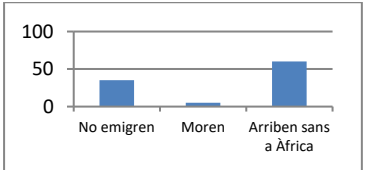
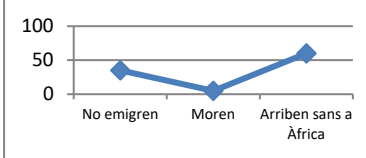
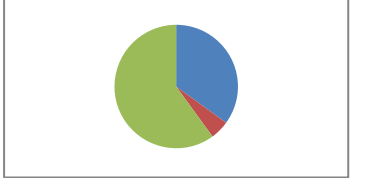
Es demana:

- Mitjançant la representació del diagrama de dispersió raonar l'interès de relacionar aquestes variables.
- Obtenir la covariància i el coeficient de correlació entre ambdues variables. Interpretar els resultats.

AUTOAVALUACIÓ

1. Un diagrama de caixa informa sobre:
 - a) Els quartils i curtosis.
 - b) Asimetria i variància.
 - c) Dades atípiques i simetria.
2. Donada la variable aleatòria nombre de persones que és capaç d'aixecar un ascensor. Per calcular el nombre de persones a partir del com es recull el 30 % dels valors de la variable necessitem obtenir
 - a) El percentil 30
 - b) El percentil 3
 - c) El percentil 70
3. El 25 % dels mallorquins gasten en la factura del mòbil per sobre de 100 euros, mentre que el 25 % gasten per sota de 20 euros. Llavors coneixem:
 - a) 100 i 20 són valors que corresponen al quartil 1 i 3, respectivament.
 - b) 100 i 20 són valors que corresponen al quartil 3 i 1, respectivament.
 - c) 100 i 20 són valors que no corresponen a cap quartil.
4. En un diagrama de barres de freqüències absolutes, la suma de les seves altures és proporcional a:
 - a) 100
 - b) 1
 - c) Total de valors de la variable
 - d) Suma de les seves bases
5. La mitjana dels següents valors de la variable 3, 4, 6, 7, 5, 8, és:
 - a) 6
 - b) 7
 - c) 4,8
 - d) 5,5
6. La mediana dels següents valors de la variable 3, 4, 6, 7, 8, és:
 - a) 6
 - b) 7
 - c) 4
 - d) 5
7. La moda dels següents valors de la variable 3, 4, 6, 7, 5, 8, 7, 7, és:
 - a) 6
 - b) 7
 - c) 4
 - d) 5
8. La mitjana de 7 nombres és 8. S'afegeixen dos nombres més però la mitjana segueix sent 8. Quant sumen aquests dos nombres?
 - a) 10
 - b) 16
 - c) 20
 - d) 14
9. Dues revistes especialitzades en ocupació, A i B, han publicat una mitjana d'ofertes de treball, de $\bar{x}_A = 10$ i $\bar{x}_B = 20$ amb variàncies, respectivament de $\sigma^2_A = 4$ i $\sigma^2_B = 9$.
 - a) La revista B presenta major coeficient de variació que la revista A.
 - b) La revista A presenta major coeficient de variació que la revesteixi B.
 - c) La revesteixi B presenta igual coeficient de variació que l'A
10. El 70 % dels madrilenys gasten en regals nadalencs per sobre de 100 euros, mentre que el 5 % gasten per sobre de 500 euros. Llavors coneixem:
 - a) El valor corresponent al percentil 30
 - b) El valor corresponent al percentil 70
 - c) Al percentil 5

RESUM

		Exemples
Població estadística, col·lectiu o univers	El conjunt de tots els individus (persones, objectes, animals, etc.) que continguin informació sobre el fenomen que s'estudia.	Nombre de persones a Espanya entre 16-65 anys
Mostra	És un subconjunt representatiu que se selecciona de la població i sobre el qual es va a realitzar l'anàlisi descriptiva. La grandària de la mostra és el nombre dels seus elements. Quan la mostra comprèn a tots els elements de la població, es denomina cens.	Nombre de persones en un barri de Palma entre 16-65 anys.
Variable observable o estadística X	En general, suposarem que s'està analitzant una determinada població, de la qual ens interessa certa característica que ve donada per la variable X.	Les variables que estan sota estudi es poden classificar en dues categories: - Variables qualitatives o atributs (dades no mètriques) - Variables quantitatives, que tenen un valor numèric.
Freqüència absoluta	Nombre de vegades que es repeteix un valor de la variable	Si en llançar un dau hem obtingut 2 vegades el 3, 2 és la freqüència absoluta de 3.
Freqüència relativa	Freqüència absoluta dividit pel nombre de experiments	Si es realitza un experiment 500 vegades i la freqüència absoluta d'un esdeveniment és 107, la freqüència relativa és 107/500.
Freqüència acumulada	Se sumen les freqüències anteriors	
Diagrama de rectangles o barres	Els valors de la variable es representen mitjançant rectangles d'igual base i d'altura proporcional a la freqüència. S'indica en l'eix horitzontal la variable i en el vertical les freqüències.	
Polígon de freqüències	S'uneixen els punts mitjans superiors d'un una diagrama de barres	
Diagrama de sectors	En un cercle es dibuixen sectors d'angles proporcionals a les freqüències	
Mitjana aritmètica	És el quocient entre la suma de tots els valors de la variable i el nombre total de dades.	En les dades 3, 5, 5, 7, 8, la mitjana és: $(3 + 5 + 5 + 7 + 8)/5 = 28/5 = 5,6$
Mediana	Deixa per sota la meitat dels valors i per damunt l'altra meitat	La mediana és 5
Moda	El valor que més es repeteix.	La moda és 5
Variància	Mesura de desviació que recull les desviacions dels valors de la variable respecte de la mitjana aritmètica.	$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N}$
Desviació típica	La desviació típica és l'arrel quadrada de la variància	

Coeficient de variació	Permet comparar la variabilitat de diferents mostres, independentment de les seves unitats de mesura.	$\rho = \frac{\sigma}{ \bar{x} }$
Rang total o recorregut	Diferència entre els valors màxims i mínims que pren la variable en la mostra	$R = x_{\{N\}} - x_{\{1\}}$
Recorregut interquartilic	Diferència entre el tercer i el primer quartil	$R_I = Q_3 - Q_1$

CAPÍTOL 13: COMBINATÒRIA

ACTIVITATS PROPOSADES

1. PERMUTACIONS

1. Fes diagrames en arbre i calcula:
 - a) Quantes paraules de 2 lletres diferents (amb significat o sense ell) pots escriure amb les lletres A, B o C.
 - b) Quantes paraules de 3 lletres diferents que comencin per vocal i acabin per consonant. Recorda hi ha 5 vocals i 22 consonants.
2. Anna té 5 samarretes, 3 pantalons i 4 parells de sabatilles. Pot portar un model diferent durant dos mesos (61 dies)? Quants dies haurà de repetir model? *Ajuda:* Segur que un diagrama en arbre et resol el problema
3. En un tauler quadrat amb 25 caselles, de quantes formes diferents podem col·locar 2 fitxes idèntiques de manera que estiguin en diferent fila i en diferent columna? *Sugeriment:* Confecciona un diagrama d'arbre. Quantes caselles hi ha per col·locar la primera fitxa? Si eliminem la seva fila i la seva columna, en quantes caselles podem col·locar la segona fitxa?
4. De quantes formes poden repartir-se 4 persones, 4 pastissos diferents menjant cada persona un pastís?
5. En una carrera de cavalls participen 5 cavalls amb els nombres 1, 2, 3, 4 i 5. Quin d'ells pot arribar el primer? Si la carrera està arreglada perquè el número 4 arribi el primer, quin d'ells pot arribar el segon? Si la carrera no està arreglada, de quantes formes diferents poden arribar a la meta? Fes un diagrama en arbre per respondre.
6. De quantes maneres pots ficar 4 objectes diferents en 4 caixes, si només pots posar un objecte en cada caixa?
7. Quants països formen actualment la Unió Europea? Pots ordenar-los seguint diferents criteris, per exemple per la seva població, o pel que fa a la seva producció d'acer, o per la superfície que ocupen. De quantes maneres diferents és possible ordenar-los?
8. L'any 1973 hi havia 6 països al Mercat Comú Europeu. De quantes formes pots ordenar-los?
9. La desocupació augmenta i en una oficina de col·locació hi ha 7 persones. De quantes formes diferents poden haver arribat?
10. Calcula: a) $\frac{6!}{4!}$; b) $\frac{7!}{3!}$; c) $\frac{8!}{5! \cdot 3!}$; d) $\frac{6!}{5!}$; e) $\frac{12!}{11!}$; f) $\frac{347!}{346!}$.
11. Calcula: a) $\frac{(n+1)!}{n!}$; b) $\frac{(n+4)!}{(n+3)!}$; c) $\frac{(n+4)!}{(n+2)!}$; d) $\frac{n!}{(n-1)!}$.
12. Expressa utilitzant factorials: a) $5 \cdot 4 \cdot 3$; b) $10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13$; c) $8 \cdot 7 \cdot 6$; d) $10 \cdot 9$.
13. Expressa utilitzant factorials: a) $(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1)$; b) $n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)$; c) $n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot (n+k)$.
14. Escriu en forma de factorial les diferents formes que tenen d'asseure's en una classe els 30 alumnes en els 30 llocs que hi ha. No ho calculis. És un nombre molt gran.
15. Nou amics van el bicicleta per una carretera en fila índia. De quantes formes diferents poden anar ordenats?

2. VARIACIONS

16. Amb els 10 dígit, quants nombres diferents poden formar-se de 6 xifres?
17. Amb els 10 dígit i 27 lletres de l'alfabet, quantes matricules de cotxe poden formar-se prenent 4 dígit i 3 lletres?
18. Un byte o octet és una seqüència de 0 i 1 presos de 8 en 8. Quants bytes diferents poden formar-se?
19. Calcula: a) $VR_{4,2}$; b) $VR_{4,4}$; c) $VR_{11,2}$; d) $VR_{2,11}$.
20. Expressa amb una fórmula:
 - a) Les variacions amb repetició de 3 elements preses de 5 en 5.
 - b) Les variacions amb repetició de 7 elements preses de 2 en 2.
 - c) Les variacions amb repetició de 5 elements preses de 4 en 4.
21. Disparem al plat 4 vegades. En cada tret pot ser que donis en el blanc (B) o que no donis en el blanc (NB). Quants resultats diferents hi ha?
22. Escriu quantes paraules de tres lletres (amb significat o no) pots formar que comencin per consonant i acabin amb la lletra R.
23. Tres persones van a una pastisseria en la qual només queden 4 pastissos diferents. De quantes formes diferents poden triar el seu pastís si cadascuna compra un?
24. Amb els 10 dígit es volen escriure nombres de 4 xifres, tots ells diferents. Quantes possibilitats hi ha per escriure la 1a xifra? Una vegada triada la primera, quantes hi ha per triar la 2a? Una vegada triades les dues primeres, quantes hi ha per la 3a? Quantes possibilitats hi ha en total?
25. Si tens 9 elements diferents i els has d'ordenar de 5 en 5 de totes les formes possibles, quantes hi ha?
26. Amb les lletres A, B i C, quantes paraules de 2 lletres no repetides podries escriure?
27. Amb els dígit 3, 5, 7, 8, 9, quants nombres de 3 xifres diferents pots formar?

28. Calcula: a) $V_{11,6}$; b) $V_{7,5}$; c) $V_{8,4}$.
 29. Calcula: a) $\frac{7!}{3!}$; b) $\frac{6!}{4!}$; c) $\frac{10!}{8!}$.

3. COMBINACIONS

30. Tenim 5 bombons (iguals) i hi ha 7 amics, de quantes formes es poden repartir els bombons si a cap li anem a donar més d'un bombó?
 31. Juan vol regalar 3 DVDs a Pedro dels 10 que té, de quantes formes diferents pot organitzar el regal?
 32. En el joc del pòker es donen 5 cartes a cada jugador de les 52 que té la baralla, de quantes maneres diferents es poden rebre?
 33. Afegeix al triangle de Tartaglia del marge 3 files més.
 34. Suma els nombres de cada fila i comprova que la suma de la fila m dona sempre 2^m .
 35. Sense calcular-ho, mirant al triangle, quant val $C_{5,3}$; $C_{5,4}$; $C_{5,2}$; $C_{5,5}$.
 36. Desenvolupa $(a + b)^6$
 37. Desenvolupa a) $(a - b)^6$; b) $(x - 3)^4$; c) $(x + 2)^7$; d) $(-x + 3)^5$.

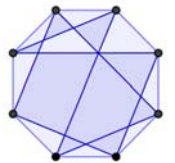
1 1	$2 = 2^1$
1 2 1	$4 = 2^2$
1 3 3 1	$8 = 2^3$

38. Calcula el coeficient de x^7 del polinomi que s'obté en desenvolupar $\left(3x - \frac{x^2}{2}\right)^5$

39. Expressa amb radicals simplificats el polinomi que s'obté en desenvolupar $\left(-\frac{x}{2} + \sqrt{2}\right)^5$

4. ALTRES PROBLEMES DE COMBINATÒRIA

40. Tres amics A, B i C estan jugant a les cartes. Cadascun passa una carta al que està a la seva dreta. Un és espanyol, un altre italià i l'altre portuguès. A li passa una carta a l'italià. B la hi ha passat a l'amic que la hi ha passat a l'espanyol. Quin dels amics és espanyol, quin italià i quin portuguès? *Ajuda:* Fes un diagrama circular com l'anterior.
 41. Anna i Alex conviden a sopar a 3 amics i 3 amigues, quantes formes tenen de col·locar-se en una taula rodona? En quantes estan junts Anna i Alex? En quantes no hi ha dos nois ni dues noies junts?
 42. Quantes poligonals tancades es poden dibuixar amb els 8 vèrtexs d'un octògon?
 43. Amb els dígit 1, 2, i 3 quants nombres diferents de 7 xifres pots formar amb tres vegades la xifra 1, dues vegades la xifra 2 i dues vegades la xifra 3.
 44. Amb les lletres de la paraula RIALLADA, quantes paraules amb aquestes 8 lletres, amb sentit o sense ell, es poden formar?
 45. Tenim dues boles blanques, tres negres i quatre vermelles, de quantes formes diferents podem ordenar-les? Quantes no tenen les dues blanques juntes?
 46. El cademat de la meua maleta té 7 posicions en les quals podem posar qualsevol dels 10 dígit del 0 al 9. Quantes contrasenyes diferents podria posar?, quantes tenen tots els seus nombres diferents? Quantes tenen algun nombre repetit? Quantes tenen un nombre repetit dues vegades? *Ajuda:* Observa que per calcular les que tenen algun nombre repetit el més fàcil és restar del total les que tenen tots els seus nombres diferents.
 47. De quantes maneres es poden introduir 7 boles idèntiques en 5 caixes diferents col·locant-les totes si cap caixa pot quedar buida? I si podem deixar alguna caixa buida? *Ajuda:* Ordena les boles en una fila separades per 4 punts així queden dividides en 5 parts, que indiquen les que es col·loquen en cada caixa.
 48. Quantes polseres diferents podem formar amb 4 boles blanques i 6 vermelles? *Ajuda:* Aquest problema és equivalent a introduir 6 boles iguals en 4 caixes idèntiques podent deixar caixes buides.
 49. Quantes formes hi ha de col·locar al rei blanc i al rei negre en un tauler d'escacs de manera que no s'ataquin mútuament. I dos alfils? I dues reines?



EXERCICIS I PROBLEMES.

Permutacions

1. Tres nedadors fan una carrera. De quantes formes poden arribar a la meta si no hi ha empats? I si són 8 nedadors?
2. Dolors, Paco, Anna i Jordi volen fotografiar-se junts, de quantes maneres poden fer-se la fotografia? Volen situar-se de manera que alternin nois amb noies, de quantes maneres poden ara fer-se la fotografia?
3. De quantes maneres es poden introduir 6 objectes diferents en 6 caixes diferents si només es pot posar un objecte en cada caixa?
4. En una parada d'autobús hi ha 5 persones, en quants ordres diferents poden haver arribat a la parada? En arribar una nova persona s'aposta amb una altra al fet que endevina l'ordre d'arribada, quina probabilitat té de guanyar?
5. Set noies participen en una carrera, de quantes formes poden arribar a la meta? No hi ha empats. Quin és la probabilitat d'encertar l'ordre d'arribada a la meta?
6. Quants nombres diferents i de cinc xifres diferents poden formar-se amb els dígit 3, 4, 5, 6, i 7? Quants poden formar-se si tots comencen per 5? I si han de començar per 5 i acabar en 7?

Variacions

7. Quants nombres de 4 xifres diferents es poden escriure amb els dígit 1, 2, 3, 4, 5 i 6? Quants d'ells són imparells? Quants són múltiples de 4? Recorda: Un nombre és múltiple de 4 si el nombre format pels seus dues últimes xifres és múltiple de 4.
8. Quants nombres de 4 xifres, diferents o no, es poden escriure amb els dígit 1, 2, 3, 4, 5 i 6? Calcula la suma de tots ells. Suggestió: Ordena'ls de menor a major i suma el primer amb l'últim, el segon amb el penúltim, el tercer amb el antepenúltim i així successivament
9. Quantes banderes de 3 franges horitzontals de colors diferents es poden formar amb els colors vermell, groc i morat? I si es disposa de 5 colors? I si es disposa de 5 colors i no cal que les tres franges tinguin colors diferents?
10. A Mario li encanta el cinema i va a totes les estrenes. Aquesta setmana hi ha 6, i decideix anar cada dia a una. De quantes formes diferents pot ordenar les pel·lícules? Mala sort. Li anuncien un examen i decideix anar al cinema solament el dimarts, el dijous i el dissabte. Entre quantes pel·lícules pot triar el primer dia? I el segon? I el tercer?
11. Amb els dígit {0, 1, 2, 3, 4, 5}, quants nombres de quatre xifres diferents es poden formar? (Observa: Si comença per 0 no és un nombre de quatre xifres). Quants són menors de 3000?
12. Quants nombres de tres xifres, diferents o no, es poden formar? D'aquests, quants són majors que 123?
13. Amb les lletres de la paraula "HIPOTENUSA" Quantes paraules de 6 lletres es poden formar que no tinguin dues vocals ni dues consonants juntes? a) Si totes les lletres són diferents. b) Si es poden repetir lletres.
14. El llenguatge de l'ordinador està escrit en seqüències de zeros i uns. Un byte és una d'aquestes seqüències i està formada, en general, per 8 dígit. Quants bytes diferents es poden formar? Si es fabrica un ordinador els bytes del qual tinguessin 16 dígit, quants bytes diferents es podrien formar ara? Si es fabrica un ordinador els bytes del qual tinguessin 4 dígit, es podria escriure amb ells les lletres de l'alfabet?

Combinacions

15. Escriu dos nombres combinatoris amb elements diferents que siguin iguals i altres dos que siguin diferents.
16. Tens set boles d'igual grandària, quatre blanques i tres negres, si las col·loques en fila. Di quantes formes pot ordenar-les?
17. Amb 5 llaunes de pintura de diferents colors, quantes barreges de 3 colors podràs fer?
18. Calcula: a) $\binom{6}{3}$; b) $\binom{8}{5}$; c) $\binom{20}{1}$; d) $\binom{34}{0}$; e) $\binom{47}{47}$.
19. Calcula: a) $C_{9,3}$; b) $C_{10,6}$; c) $C_{8,4}$; d) $C_{20,19}$; e) $C_{47,1}$.
20. De quantes maneres es pot triar una delegació de 4 estudiants d'un grup de 30? I en el teu propi grup?
21. Quants productes diferents es poden formar amb els nombres: 2, $\frac{1}{3}$, 7, 5 i π prenent-los de 3 en 3? Quants d'aquests productes donaran com resultat un nombre enter? Quants un nombre racional no sencer? Quants un nombre irracional?
22. Quants aliatges de 3 metalls poden fer-se amb 7 tipus diferents de metalls?
23. Calcula: a) $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$ b) $\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}$
24. Podries calcular $\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \binom{8}{5} + \binom{8}{6} + \binom{8}{7} + \binom{8}{8}$ sense calcular cadascun dels nombres combinatoris?
25. De quantes formes pots separar un grup de 10 estudiants en dos grups de 3 i 7 estudiants respectivament?
26. Vas a examinar-te d'una assignatura en la qual hi ha 20 temes, i en l'examen van a posar 2. Quantes possibilitats hi ha? Et saps només 16 temes. Quantes possibilitats hi ha que et toquin dos temes que no saps? Quina és la probabilitat que et toquin dos temes que no et sàpigués? I la que et toqui només un tema que no et sàpigués?

27. Un grup de 10 alumnes de 4t d'ESO van a visitar un museu en el qual poden triar entre dues activitats diferents. Quantes formes diferents pugues haver de formar els grups d'alumnes?
28. Desenvolupa el binomi a) $(4 - x)^5$; b) $(3 - 2x)^4$; c) $(2ab - 3c)^6$; d) $\left(\frac{x}{2} - \sqrt{2x}\right)^3$
29. Calcula x en les següents expressions:
- a) $\binom{x+2}{x} = \binom{6}{4} + \binom{6}{x}$ b) $\binom{10}{x} = \binom{10}{x+2}$ c) $\binom{x+3}{x} = \binom{7}{4} + \binom{7}{x}$ d) $\binom{12}{x} = \binom{12}{x+2}$
30. Escriu el valor de x en les igualtats següents:
- a) $\binom{4}{3} = \binom{4}{x}$, $x \neq 3$; b) $\binom{7}{3} = \binom{7}{x}$, $x \neq 3$; c) $\binom{4}{3} = \binom{3}{x} + \binom{3}{2}$;
- d) $\binom{2x+1}{5} = \binom{8}{x} + \binom{8}{5}$; e) $\binom{7}{x-3} = \binom{6}{3} + \binom{x}{2}$; f) $\binom{7}{x} = \binom{7}{x+3}$
31. Calcula en funció de n la suma dels següents nombres combinatoris:
- a) $\binom{n}{3} + \binom{n}{4}$ b) $\binom{n}{2} + n$ c) $\binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3}$

$$\left(\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{2}}{x}\right)^{10}$$

32. Troba el terme sisè en el desenvolupament de:
33. Troba el coeficient de x^2 en el desenvolupament de: $(-1 - 5x)^9$.
34. Quantes opcions hi ha per triar quatre assignatures entre set optatives?
35. Es juga una partida de tir al plat i es disparen successivament 12 plats. Quin és el nombre d'esdeveniments en els quals s'obtenen 4 èxits, és a dir s'encerta 4 vegades en el blanc? En el mateix cas anterior, quin és la probabilitat de tenir èxit en l'últim tir?

Problemes

36. Amb 7 discos i 6 lletres en cada disc, quantes combinacions diferents es poden fer? Ajuda: En el primer disc podem posar qualsevol de les 6 lletres. El mateix en el segon. I en el tercer? Però si és facilíssim! Si ja sabem resoldre-ho.
37. En un restaurant hi ha 5 primers plats, 4 segons i 6 postres, de quantes formes diferents es pot combinar el menú?
38. Llancem una moneda i després un dau, quants resultats diferents pots obtenir? I si llancem dues monedes i un dau? I si fossin 3 monedes i 2 daus?
39. S'estan triant els actors i actrius per fer de protagonistes en una telesèrie. S'han presentat 6 nois i 8 noies. Quantes parelles diferents podrien formar?
40. Una caixa d'un conegut joc educatiu té figures vermelles, grogues i blaves, que poden ser triangles, cercle o quadrats, i de dues grandàries, grans i petites. De quantes peces consta la caixa?
41. En un restaurant hi ha 8 primers plats i 5 segons, quants tipus de postres ha d'elaborar el restaurant per poder assegurar un menú diferent els 365 dies de l'any?
42. En una reunió totes les persones es donen la mà. Va haver-hi 91 estretes. Quantes persones hi havia? I si hi va haver 45 estretes, quantes persones hi havia?
43. De quantes maneres es poden introduir 5 objectes diferents en 5 caixes diferents si només es pot posar un objecte en cada caixa? I si es poden posar diversos objectes en cada caixa col·locant tots? Quin és la probabilitat que en la primera caixa no hi hagi cap objecte?
44. La major part de les contrasenyes de les targetes de crèdit són nombres de 4 xifres. Quantes possibles contrasenyes podem formar? Quantes tenen algun nombre repetit? Quantes tenen un nombre repetit dues vegades?
45. Tenim 10 rectes en el plànol que es tallen 2 a 2, és a dir, no hi ha rectes paral·leles. Quants són els punts d'intersecció?, i si tens 15 rectes?, i si tens n rectes?
46. Quantes diagonals té un octògon regular?, i un polígon regular de 20 costats?
47. Quantes diagonals té un icosaèdre regular?, i un dodecaèdre regular? Ajuda: Recorda que l'icosaèdre i el dodecaèdre són poliedres duals, és a dir, el nombre de cares d'un coincideix amb el nombre de vèrtexs de l'altre. Per saber el nombre d'arestes pots utilitzar la Relació de Euler: $C + V = A + 2$
48. Quants nombres diferents de 5 xifres diferents pots formar amb els díigits 1, 2, 3, 5 i 7? Quants que siguin múltiples de 5? Quants que comencin per 2? Quants que a més de començar per 2 acabin en 7?
49. Amb 5 boles de 3 colors diferents,
- a) Quantes files diferents pots formar de 5 boles?
- b) Quantes polseres diferents pots formar de 5 boles?
50. Amb els díigits 1, 2, 3, 4, 5, quants nombres de cinc xifres diferents es poden formar? Calcula la suma de tots aquests

nombres.

51. Calcula x en els següents casos:

a) $V_{x,3} = C_{x,2}$

b) $V_{x,5} = 6 V_{x,3}$

c) $\frac{C_{x+1,14}}{C_{x,2}} = \frac{7}{3}$

52. Fa molts anys les plaques de matrícula eren com aquesta: PM-123456; després van ser com aquesta: PM-1234-A; i actualment com aquesta: 1234 ABC. Investiga quins avantatges té cadascun d'aquests canvis respecte a l'anterior.
53. Iker i Maria juguen al tennis i decideixen que guanya aquell que primer guanyi 3 sets. Quin és el nombre màxim de sets que hauran de disputar? Quants desenvolupaments possibles pot tenir la trobada?
54. Pedro va conèixer ahir a una noia. Ho van passar molt bé i ella li va donar el seu número de mòbil, però ell no portava el seu mòbil ni bolígraf. Va pensar que s'acordaria, però... només recorda que començava per 656, que hi havia altres quatre que eren totes diferents entre si i menors que 5. Calcula quantes possibilitats té d'encertar si marca un número. Massa. Fa memòria i recorda que les dues últimes són 77. Quantes possibilitats hi ha ara d'encertar fent una trucada?
55. Un club d'alpinistes ha organitzat una expedició al Kilimanjaro formada per 11 persones, 7 experts i 4 que estan en formació. En un determinat tram només poden anar 3 experts i 2 que no ho siguin, de quantes formes pot estar compost aquest equip de 5 persones? Tu ets un expert, i aniràs en aquest tram, quantes formes hi ha ara de compondre-ho?
56. En els bitllets d'una línia d'autobusos va imprès l'estació de partida i la d'arribada. Hi ha en total 8 possibles estacions. Quants bitllets diferents hauria d'imprimir l'empresa d'autobusos? Ara volen canviar el format i només imprimir el preu, que és proporcional a la distància. Les distàncies entre les estacions són totes diferents. Quants bitllets diferents hauria d'imprimir en aquest cas?
57. Una parella té un fill de 3 anys que entra en la guarderia a les 9 del matí. El pare treballa en una fàbrica que té 3 torns mensuals rotatius: de 0 a 8, de 8 a 16 i de 16 a 24 hores. La mare treballa en un supermercat que té dos torns rotatius mensuals, de 8 a 14 i de 14 a 20 hores. Quants dies a l'any, de mitjana, no podrà cap dels dos portar al seu fill a la guarderia?
58. Un tir al blanc té 10 caballets numerats que giren. Si s'encerta a un d'ells s'encén una llum amb el nombre del caballet. Tires 3 vegades, de quantes maneres es poden encendre les llums? I si el primer tir no dona a cap caballet?
59. En una festa hi ha 7 noies i 7 nois. Joan balla sempre amb Anna. Antoni és el més decidit i sempre surt a ballar el primer, de quantes formes pot triar parella en els propers 4 balls?
60. Amb els dígit {0, 1, 2, 3, 4, 5}
- Quants nombres de cinc xifres es poden formar?
 - Quants hi ha amb dues vegades la xifra 1 i tres la xifra 2?
 - Calcula la suma de tots aquests últims nombres.
61. Quantes paraules, amb o sense sentit, es poden formar amb les lletres de la paraula "PELUIX" que no tinguin dues vocals ni dues consonants juntes?
62. En una companyia militar hi ha 10 soldats, quantes guàrdies de 3 soldats poden fer-se? Un dels soldats és Alex, en quantes d'aquestes guàrdies estarà? I en quantes no estarà?
63. Quants nombres capicues de dues xifres existeixen? I de tres xifres? I de quatre xifres?
64. Amb les lletres de la paraula "COMENTARI" Quantes paraules de 5 lletres es poden formar que no tinguin dues vocals ni dues consonants juntes?
- Si totes les lletres són diferents.
 - Es poden repetir lletres.
65. Quants nombres hi ha entre el 6 000 i el 9 000 que tinguin totes les seves xifres diferents?
66. Una fàbrica de joguines té a la venda 8 models diferents. Quants mostraris diferents pot fer de 4 joguines cadascun? Quina és la probabilitat que l'últim model d'avió fabricat arribi a un determinat client? Si es vol que en aquests mostraris sempre estigui l'últim model de joguina fabricada, quants mostraris diferents pot fer ara?
67. L'encarregada d'un guarda-roba s'ha distret, i sap que, de les cinc últimes bosses que ha recollit, a tres bosses els ha posat el resguard equivocat i a dos no. De quantes formes es pot haver produït l'error? I si fossin dos els equivocats?
68. La primera obra impresa amb resultats de Combinatòria és "Summa" de Lucca Pacioli, de 1494. En aquesta obra es proposa el següent problema: *De quantes formes diferents poden asseure's quatre persones en una taula circular?*
69. Quants nombres de quatre xifres tenen almenys un 5?
70. Amb les lletres de la paraula "SABER", quantes paraules, amb o sense sentit, de lletres diferents, es poden formar que no tinguin dues vocals ni dues consonants juntes. El mateix per a les paraules "CONTE", "PELUIX" i "NOTABLE".
71. Considera la successió de nombres naturals 1, 3, 6, 10, 15, ... quin és el següent terme d'aquesta successió? Quina llei de recurrència permet calcular el següent terme de la successió? Quin és el seu terme general?
72. Amb els dígit 1, 3 i 5, quants nombres menors de 6 000 es poden formar? Quants hi ha amb 4 xifres que tinguin dues vegades la xifra 5?
73. Amb les lletres de la paraula CALOR, quantes paraules de 5 lletres amb o sense sentit es poden formar que tinguin alguna

lletra repetida?

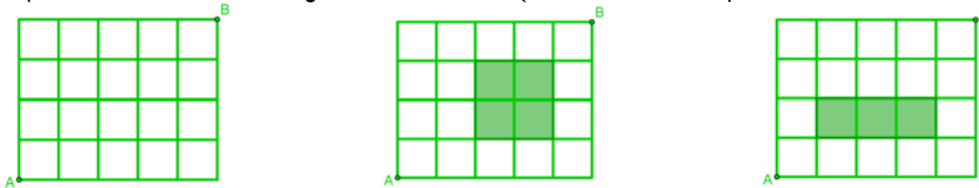
74. En una baralla espanyola fem 5 extraccions amb reemplaçament, quina és la probabilitat d'obtenir més de 3 asos? i la probabilitat d'obtenir menys de 4 asos?

75. Camins en una quadrícula:

a) Quants camins hi ha per anar d'A fins a B si només podem anar cap a la dreta i cap amunt?

b) Si no podem travessar el quadrat verd, ni caminar pels seus costats, quantes formes tenim ara per anar d'A cap a B?

c) Si no podem travessar el rectangle verd, ni caminar pels seus costats, quantes formes tenim ara per anar d'A cap a B?



d) Quants camins hi ha en una quadrícula quadrada amb n camins en cada costat?

e) Quants camins hi ha en una quadrícula rectangular amb m camins verticals i n horitzontals?

AUTOAVALUACIÓ

1. Tens nou monedes d'euro que col·loques en fila. Si quatre mostren la cara i cinc la creu De quantes formes diferents pots ordenar-les?:

a) $V_{9,4}$ b) P_9 c) $C_{9,5}$ d) $VR_{9,5}$

2. En una companyia aèria hi ha 10 hostesses, i un avió necessita a 4 en la seva tripulació, de quantes formes es pot triar aquesta tripulació?:

a) $V_{10,4}$ b) P_{10} c) $C_{10,4}$ d) $VR_{10,4}$

3. Quants productes diferents poden obtenir-se amb tres factors diferents triats entre els dígit: 2, 3, 5 i 7?

a) $V_{4,3}$ b) P_4 c) $C_{4,3}$ d) $VR_{4,3}$

4. Tenim 5 objectes i els volem guardar en 5 caixes, un objecte en cada caixa, de quantes formes podem fer-ho?:

a) $V_{5,1}$ b) P_5 c) $C_{5,5}$ d) $VR_{5,1}$

5. Permutacions de $n+4$ elements dividit per permutacions de $n+1$ elements és igual a:

a) $(n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2) = \frac{(n+4)!}{(n+1)!}$ b) $V_{n+4, n+2}$ c) $\frac{(n+4)!}{n!}$ d) $V_{n+4, n+2} / C_{n+4, n+1}$

6. Les variacions de 10 elements preses de 6 en 6 és igual a

a) $VR_{6,10}$ b) $V_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \frac{10!}{6!}$ c) $V_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{10!}{4!}$ d) $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6!}{3!}$

7. Indica quina afirmació és falsa:

a) $0! = 1$; b) $V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot (m-n)$; c) $VR_{m,n} = m^n$; d) $P_n = n!$

8. El valor dels següents nombres combinatoris $\binom{5}{0}$, $\binom{9}{9}$, $\binom{4}{1}$ és:

a) 0, 1, i 1; b) 0, 9 i 4; c) 1, 1 i 4; d) 5, 9 i 4

9. El valor de x , diferent de 4, en $\binom{7}{4} = \binom{7}{x}$ és:

a) 3 b) 7 c) 1 d) 0

10. El coeficient del terme quart del desenvolupament del Binomi de Newton de $(a+b)^7$ és:

a) $\binom{7}{3}$; b) 1; c) $\binom{7}{4}$; d) $V_{7,4}$

RESUM

		Exemples
Permutacions	Influeix només l'ordre . $P_n = n!$	$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$
Variacions amb repetició	Influeix l'ordre i els elements. Els elements poden repetir-se. $VR_{m,n} = m^n.$	$VR_{2,4} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$
Variacions sense repetició	Influeix l'ordre i els elements. Els elements NO poden repetir-se. $V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$	$V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6!}{3!} = 120$
Combinacions	Influeixen només els elements. $C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!} = \binom{m}{n}$	$C_{9,7} = \binom{9}{7} = \frac{9!}{2! \cdot 7!} = 36$
Propietats dels nombres combinatoris	$\binom{m}{0} = 1; \binom{m}{m} = 1; \binom{m}{n} = \binom{m}{m-n};$ $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$	$\binom{5}{0} = \binom{5}{5} = 1; \binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10;$ $\binom{5}{3} = \binom{4}{3} + \binom{4}{2} = 6 + 4$
Binomi de Newton	$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$	$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$
Triangle de Tartaglia	$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$ $\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$ $\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$	$\begin{array}{cccc} & & 1 & 1 & \\ & & 1 & 2 & 1 & \\ & 1 & 3 & 3 & 1 & \\ & & & & & \dots \end{array}$

CAPÍTOL 15: PROBABILITAT

ACTIVITATS PROPOSADES

1. EXPERIÈNCIA I PROBABILITAT

1. En una caixa tenim barrejats 25 claus de 2 cm de llarg, 15 claus de 3 cm, 20 claus de 2,5 cm i 40 claus de 3,5 cm. Traiem a l'atzar un clau de la caixa (s'assumeix que tots els claus tenen la mateixa probabilitat de ser triats). Quina probabilitat hi ha que el clau extret tingui la menor longitud?
2. a) La ruleta francesa consta dels nombres que van del 0 al 36. Si surt 0 gana la banca. Decidim apostar a "parell" (guanyarem si surt un nombre parell no nul). Quina probabilitat tenim de guanyar l'aposta?
b) La ruleta americana consta d'un 0, un 00 i dels nombres que van de l'1 al 36. Si surt 0 o 00 gana la banca. Decidim apostar a "parell" (guanyarem si surt un nombre parell no nul). Quina probabilitat tenim de guanyar l'aposta?
3. En un institut de 800 alumnes hi ha 400 estudiants que parlen anglès, 300 que parlen francès, 100 que parlen alemany, 100 que parlen anglès i francès, 80 que parlen anglès i alemany, 50 que parlen francès i alemany i 30 que parlen els tres idiomes. Es tria un estudiant a l'atzar. Quin és la probabilitat que parli només una llengua estrangera?
4. Torna a fer tots els apartats de l'exemple anterior però substituint en cada cas "bola blanca" per "bola vermella". És a dir, la borsa té ara 6 boles vermelles i una bola negra:
 - a) S'extreuen dues boles al mateix temps. Quin és la probabilitat que siguin una vermella i una negra?
 - b) S'extreu una bola de la borsa. Després es treu una segona bola, sense tornar a ficar en la borsa la primera. Quin és la probabilitat que després de la segona extracció tinguem una bola vermella i una bola negra?
 - c) S'extreu una bola de la borsa. Després es treu una segona bola, sense tornar a ficar en la borsa la primera. Quin és la probabilitat que la primera bola sigui vermella i la segona negra?
 - d) S'extreu una bola de la borsa. Després de mirar de quin color s'introdueix en la borsa de nou. Es treu una segona bola. Quin és la probabilitat que la primera bola sigui vermella i la segona negra?
 - e) S'extreu una bola de la borsa. Després de mirar de quin color s'introdueix en la borsa de nou. Es treu una segona bola. Quin és la probabilitat que les dues vegades hagi sortit la bola negra?
 - f) S'extreu una bola de la borsa. Després de mirar de quin color s'introdueix en la borsa de nou. Es treu una segona bola. Quin és la probabilitat que les dues vegades hagi sortit una bola vermella?
5. En la loteria primitiva una aposta consisteix a marcar 6 caselles d'entre 49 possibles. El dia del sorteig s'extreuen 6 boles (d'entre 49). Quin és la probabilitat que la teva aposta coincideixi amb la combinació guanyadora? Quin és la probabilitat que encertis únicament 5 nombres? I la que encertis únicament 4 nombres?
6. a) Es diu *trio* a la jugada que consisteix en 3 cartes del mateix valor i altres dos de diferent valor al d'aquestes 3 i a més amb diferents valors entre si. Calcula la probabilitat d'obtenir un *trio d'asos* en una jugada de 5 cartes.
b) Calcula la probabilitat d'obtenir un *trio* qualsevol.
7. a) Es diu *escala de color* a una jugada composta per 5 cartes del mateix pal ordenades consecutivament. Calcula la probabilitat d'obtenir aquesta *escala de color*.
b) Calcula la probabilitat d'obtenir una *escala de color* qualsevol. L'escala de color pot ser As, 2, 3, 4, 5, que és l'escala de color mínima, o, 10, J, Q, K, As que és l'escala de color màxima o escala real.
8. Es diu *color* a una jugada composta per 5 cartes del mateix pal que no són consecutives. Calcula la probabilitat d'obtenir *color* en una jugada.



2. APROFUNDINT EN LA TEORIA

9. Es consideren els següents experiments aleatoris:
 - 1) Es tenen 5 fitxes de Scrabble formant la paraula CASAS. Es fiquen en una borsa i s'extreuen 3 fitxes.
 - 2) Es barreja una baralla de pòker, es talla i es mira el valor de la carta superior.
 - 3) Un moneder conté 4 monedes de 5 cèntims, 2 monedes de 10 cèntims i 1 moneda de 20 cm. S'extreuen a l'atzar dues monedes d'ell.
 - 4) Dels 30 alumnes d'una classe es tria un a l'atzar. Se li pregunta en quin mes ha nascut.
 - a) Descric els espais mostrals de cadascun dels 4 experiments aleatoris anteriors.
 - b) Indica els successos contraris a
 1. {AAC}
 2. {A, 2, 3, 4, 5}
 3. Treure una quantitat parell de cèntims.
 4. Haver nascut en un mes en el qual segur que és estiu.
 - c) Són independents aquests parells de successos?
 1. {AAC} i {{ASA}, {CAS}}
 2. "Obtenir un 6" i "obtenir un nombre parell"

3. "Obtenir una quantitat parell de cèntims" i "treure dues monedes de 5 cèntims"
 4. "Haver nascut en un mes que segur és d'estiu" i "haver nascut al juny"
10. Elabora un arbre de probabilitats per calcular la probabilitat d'obtenir *doble parella* en una jugada de 5 cartes de pòker. (*Doble parella* consisteix en 2 parells de cartes del mateix valor, diferents entre si, i una carta indiferent, de valor diferent als dos anteriors. Per exemple, AA 33 Q).
11. En el moneder tinc 3 monedes d'un cèntim, 2 de 5 cèntims, 3 de 10 cèntims, 1 de 20 i 1 de 50 cèntims. Trec 3 monedes a l'atzar. Quina és la probabilitat que obtingui un nombre parell de cèntims?
12. Un analista esportiu, que s'equivoca el 20 % de les vegades, ha dit que el nostre equip favorit va a guanyar la lliga. L'analista de la competència, que s'equivoca el 25 % de les vegades, ha dit que el nostre equip favorit no va a guanyar la lliga. Segons aquests anàlisis. Quina probabilitat hi ha que el nostre equip guanyi la lliga?
13. Una companyia de productes avícoles empaqueta dotzenes d'ous en tres llocs diferents. El 40 % de la producció té lloc en la planta A, el 25 % en B i la resta en C. Un control de qualitat ens diu que un 5 % dels paquets elaborats en A, un 10 % dels de B i un 8 % dels de C contenen algun ou trencat. Quina probabilitat hi ha que ens toqui una dotzena d'ous amb qualque ou trencat?
14. En un institut amb 300 alumnes s'està estudiant si la qualificació obtinguda en *Llengua Espanyola* té a veure amb la qualificació obtinguda en *Matemàtiques*. Després de fer una enquesta, s'obtenen els següents resultats:

		Matemàtiques		
		Excel·lent	Notable	Un altre
Llengua	Excel·lent	110	25	18
	Notable	420	70	40
	Un altre	10	5	2

Es tria un alumne a l'atzar. Quina és la probabilitat que hagi tingut un excel·lent en *Llengua*, si ho ha tingut en *Matemàtiques*?
 Quin és la probabilitat que hagi tingut un excel·lent en *Matemàtiques*, si ho ha tingut en *Llengua*?

3. CÀLCUL DE PROBABILITATS

15. Una borsa conté 9 boles vermelles i 6 boles negres. S'extreu a l'atzar una d'elles i se substitueix per dues de l'altre color. Després d'això s'extreu una segona bola. Quina probabilitat hi ha que la segona bola sigui vermella? Quina probabilitat hi ha que la segona bola sigui del mateix color que la primera?
16. En el menjador escolar la probabilitat que no hi hagi pasta una setmana és $1/3$; la probabilitat que hi hagi pollastre és $3/5$ i la probabilitat que hi hagi pasta i pollastre és $4/7$. Calcula la probabilitat que no hi hagi ni pasta ni pollastre. Calcula la probabilitat que no hi hagi pollastre sabent que hi ha hagut pasta.
17. Tenim en la butxaca monedes procedents de 3 països: espanyoles (60 %), franceses (30 %) i alemanyes (la resta). El 30 % de les monedes espanyoles i el 20 % de les franceses són de 50 cèntims. També sabem que del total de monedes, el 30 % són de 50 cèntims. S'extreu una moneda a l'atzar. Quina probabilitat hi ha que sigui una moneda francesa de 50 cèntims? Quina probabilitat hi ha que sigui una moneda de 50 cèntims, sabent que és alemanya?
18. En una classe hi ha 24 nins i 16 nines. Es formen equips de treball de 5 persones. Calcula la probabilitat de formar un equip en les següents condicions:
 a) tots els participants són del mateix sexe.
 b) en l'equip hi ha almenys 3 noies.
 c) en l'equip hi ha exactament 3 nines.
 d) En l'equip hi ha 3 estudiants d'un sexe i 2 d'un altre.
19. Suposa que se sorteja ser delegat de la teva classe pel mètode descrit abans. Qui tindria més probabilitat de sortir? Hi ha algú que no tindria cap possibilitat? Fes-ho amb una llista de la teva classe.
20. Pren 2 cartolines de colors, cadascuna d'un color diferent (per exemple, vermella i blava) i retalla en cadascuna d'elles 3 rectangles de la mateixa grandària. Pega aquests rectangles entre si de manera que un sigui vermell-vermell, un altre blau-blau i un altre vermell-blau. Fica les 3 cartolines així preparades en un sobre i treu una a l'atzar, amb cura de no mostrar res més que un costat. Pregunta a un company que "endevini" el color de la cara que està oculta. Repeteix el procés amb tots els companys. Escriu els resultats de l'experiment en una taula com aquesta que copiïs en el teu quadern:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Ocult																														
Aposta																														
Surt																														
encerta?																														

Què observes? És millor dir que el color ocult és el mateix que el visible? O és pitjor?

EXERCICIS I PROBLEMES.

1. En una classe hi ha 15 nins i 18 nines. Com no es presenta ningú per ser delegat es fa un sorteig. Quin és la probabilitat que en la classe hagi delegada?
2. En el moneder tenim 8 monedes d'1 cèntim, 3 monedes de 5 cèntims, 8 monedes de 10 cèntims i 5 monedes de 50 cèntims. Traiem una moneda a l'atzar, quin és la probabilitat que la quantitat obtinguda sigui un nombre parell de cèntims?
3. En una caixa tenim barrejats 50 claus de 2 cm de llarg, 30 claus de 3 cm, 35 claus de 2,5 cm i 60 claus de 3,5 cm. Traiem a l'atzar un clau de la caixa (s'assumeix que tots els claus tenen la mateixa probabilitat de ser triats). Quina probabilitat hi ha que el clau extret tingui la menor longitud?
4. En un institut de mil estudiants hi ha 700 que parlen anglès, 400 que parlen francès, 50 que parlen alemany, 200 que parlen anglès i francès, 30 que parlen anglès i alemany, 10 que parlen francès i alemany i 5 que parlen els tres idiomes. Es tria un estudiant a l'atzar. Quin és la probabilitat que parli solament una llengua estrangera?
5. La ruleta francesa consta dels nombres que van del 0 al 36. Si surt 0 gana la banca. Decidim apostar a "parell" (guanyarem si surt un nombre parell no nul). Quina probabilitat tenim de guanyar l'aposta? I si apostem a 7? I si apostem a un nombre imparell?
6. Una borsa conté 7 boles blanques, 5 boles vermelles i 3 boles negres. S'extreuen dues boles al mateix temps. Quin és la probabilitat que siguin una blanca i una negra?
7. Una borsa conté 10 boles blanques, 9 boles vermelles i una bola negra. S'extreu una bola de la borsa. Després es treu una segona bola, sense tornar a ficar en la borsa la primera. Quin és la probabilitat que després de la segona extracció tinguem una bola blanca i una bola negra?
8. Una borsa conté 15 boles blanques, 4 boles vermelles i una bola negra. S'extreu una bola de la borsa. Després es treu una segona bola, sense tornar a ficar en la borsa la primera. Quin és la probabilitat que la primera bola sigui blanca i la segona negra?
9. Una borsa conté 15 boles blanques, 4 boles vermelles i una bola negra. S'extreu una bola de la borsa. Després de mirar de quin color s'introdueix en la borsa de nou. Es treu una segona bola. Quin és la probabilitat que la primera bola sigui blanca i la segona negra?
10. Una borsa conté 15 boles blanques, 4 boles vermelles i una bola negra. S'extreu una bola de la borsa. Després de mirar de quin color s'introdueix en la borsa de nou. Es treu una segona bola. Quin és la probabilitat que les dues vegades hagi sortit la bola negra?
11. Una borsa conté 15 boles blanques, 4 boles vermelles i una bola negra. S'extreu una bola de la borsa. Després de mirar de quin color s'introdueix en la borsa de nou. Es treu una segona bola. Quin és la probabilitat que les dues vegades hagi sortit una bola blanca?
12. En la loteria primitiva una aposta consisteix a marcar 6 caselles d'entre 49 possibles. El dia del sorteig s'extreuen 6 boles (d'entre 49). Quin és la probabilitat que la teva aposta coincideixi amb la combinació guanyadora? Quin és la probabilitat que encertis un nombre? I la que encertis 2 nombres?
13. Si reparteixen a l'atzar 5 cartes d'una baralla espanyola. Quin és la probabilitat que tinguis 4 cartes del mateix nombre?
14. En una jugada es reparteixen 5 cartes. Quin és la probabilitat d'aconseguir tres asos i dos reis? Quin és la probabilitat de tenir tres cartes iguals? I una parella? I de tenir tres cartes iguals i les altres dues també iguals entre si?
15. En una jugada es reparteixen 5 cartes. Es diu *escala de color* a una jugada composta per 5 cartes del mateix pal ordenades consecutivament. Calcula la probabilitat d'obtenir una escala de color de trèvols.
16. En una jugada es reparteixen 5 cartes. Es diu *color* a una jugada composta per 5 cartes del mateix pal que no són consecutives. Calcula la probabilitat d'obtenir *color* de trèvols.
17. Considera l'experiment aleatori "barrejar una baralla, tallar i mirar el color de les dues cartes que han quedat a dalt". Quin és la probabilitat que ambdues tinguin el mateix color?
18. Tenim una caixa amb 12 boles vermelles i 8 boles blanques. Es treu una bola a l'atzar. Si és blanca es torna a ficar en la caixa. Si és vermella es deixa fora. En aquestes condicions es treu una altra bola de la caixa. Quina probabilitat hi ha que aquesta bola sigui vermella?
19. En un calaix tenim 10 mitjons: 6 negres i 4 blancs. Traiem, sense mirar, dos mitjons del calaix. Què és més probable, que siguin tots dos del mateix color o que siguin de colors diferents?
20. Elabora un arbre de probabilitats per calcular la probabilitat d'obtenir *dobla parella* d'asos i tresos en una jugada de 5 cartes de pòker. (*Doble parella* consisteix en 2 parells de cartes del mateix valor, diferents entre si, i una carta indiferent, de valor diferent als dos anteriors. Per exemple, AA 33 Q).
21. En el moneder tinc 7 monedes d'un cèntim, 4 de 5 cèntims, 6 de 10 cèntims, 5 de 20 i 7 de 50 cèntims. Trec 3 monedes a l'atzar. Quina és la probabilitat que obtingui un nombre imparell de cèntims?
22. El 60 % d'una determinada població fuma, el 30 % és hipertens, i el 12 % fuma i és hipertens. Utilitza aquestes freqüències per obtenir probabilitats i determina si ser hipertens és dependent o independent de fumar. Quina és la

probabilitat condicionada que una persona fumadora sigui hipertensa?

23. Un analista esportiu, que s'equivoca el 10 % de les vegades, ha dit que el nostre equip favorit va a guanyar la lliga. L'analista de la competència, que s'equivoca el 20 % de les vegades, ha dit que el nostre equip favorit no va a guanyar la lliga. Segons d'aquestes anàlisis. Quina probabilitat hi ha que el nostre equip guanyi la lliga?
24. Una companyia de productes avícoles empaqueta dotzenes d'ous en tres llocs diferents. El 60 % de la producció té lloc en la planta A, el 30 % en B i la resta en C. Un control de qualitat ens diu que un 5 % dels paquets elaborats en A, un 7 % dels de B i un 10 % dels de C contenen algun ou trencat. Quina probabilitat hi ha que ens toqui una dotzena d'ous amb qualque ou trencat?
25. En un calaix tinc un parell de mitjons vermells, un parell de mitjons negres i un parell de mitjons blancs. En fer la maleta, amb les presses, coix 3 mitjons sense mirar. Quina probabilitat tinc d'haver agafat 2 del mateix color?
26. Es fa un estudi de consum en una població. Es descobreix que al 70 % de les persones a les quals els agrada la melmelada de taronja també els agrada la de grosella i que al 80 % de les persones a les quals els agrada la melmelada de grosella també els agrada la de taronja. Al 40 % d'aquesta població no li agraden ni la melmelada de taronja ni la de grosella. Es tria a l'atzar una persona d'aquesta població. Quin és la probabilitat que li agradi tant ambdues melmelades?
27. En la loteria primitiva s'aposten 6 nombres d'entre 49. Jugant a dues apostes, quina és la probabilitat que et toqui un premi de 5 encerts més complementari?
28. En un institut hi ha Batxillerat i Formació Professional. En Batxillerat estudien $\frac{1}{3}$ dels estudiants i la resta ho fa en Formació Professional. La quarta part dels estudiants de Batxillerat i la sisena part dels de Formació Professional utilitza un mitjà de transport per anar a l'institut. La resta arriba caminant. Es tria a l'atzar un estudiant d'aquest institut. Quina probabilitat hi ha que vagi a classe utilitzant un mitjà de transport?
29. Un tahir juga amb una baralla trucada de 40 cartes. Treu una carta, la mira, la torna a ficar en la baralla i barreja. Repeteix aquest procediment altres 2 vegades més. La baralla està preparada de tal manera que el fet d'una de les tres cartes vistes sigui una figura té una probabilitat de $\frac{19}{27}$. Quantes figures té la seva baralla?
30. Una borsa conté 10 boles vermelles i 5 boles negres. S'extreu a l'atzar una d'elles i se substitueix per dues de l'altre color. Després d'això s'extreu una segona bola. Quina probabilitat hi ha que la segona bola sigui negra? Quina probabilitat hi ha que la segona bola sigui del mateix color que la primera?
31. En el menjador escolar la probabilitat que no hi hagi patates una setmana és $\frac{2}{5}$; la probabilitat que hagi pescat és $\frac{2}{5}$ i la probabilitat que hi hagi patates i peix és $\frac{1}{10}$. Calcula la probabilitat que no hi hagi ni patates ni peix. Calcula la probabilitat que no hagi pescat sabent que hi ha hagut patates.
32. En una classe hi ha 20 nins i 10 nines. Es formen equips de treball de 6 persones. Calcula la probabilitat de formar un equip: a) amb tot nines, b) amb 3 nines, c) amb tot nins, d) amb almenys 3 nines.
33. Encara que sembli una casualitat, per tenir l'any 365 dies, és molt probable que en una classe de 35 alumnes hi hagi dues que celebrin el seu aniversari el mateix dia. Calcula aquesta probabilitat. El mateix si la classe té 20 estudiants.
34. Utilitza la taula per obtenir una taula de contingència sobre els accidents de trànsit:

	En carretera (C)	En zona urbana (O)	Total
Amb víctimes (V)	34092	32295	66387
Només danys materials (D)	11712	20791	32503
Total	45804	53086	98890

Calcula $P(V)$; $P(D)$; $P(C)$; $P(O)$; $P(V \cap C)$; $P(D \cap O)$; $P(O|V)$; $P(V|O)$; $P(V|C)$; $P(C|V)$; $P(C|D)$. Se sap que hi ha hagut un accident en carretera, quin és la probabilitat que hagi tingut víctimes? Són independents els successos d'accident amb víctimes i accident en carretera?

35. Es realitzen estudis sobre una determinada malaltia i es coneix que la probabilitat que una persona la tingui és de 0,04. Una determinada prova detecta si una persona està malalta amb una probabilitat de 0,97, però també qualifica com a malalta, en ocasions, a una persona sana amb una probabilitat de 0,01. Representa aquesta situació en un diagrama en arbre. Construeix la taula de contingència associada. Calcula la probabilitat que una persona sana sigui detectada com a malalta.
36. En el control de qualitat d'un procés de fabricació se sap que la probabilitat que un circuit sigui defectuós és 0,02. Un dispositiu per detectar els defectuosos té una probabilitat de detectar-los de 0,9, però també qualifica com a defectuosos a 0,03 dels correctes. Representa aquesta situació en un diagrama en arbre. Construeix la taula de contingència associada. Calcula la probabilitat que un circuit defectuós sigui qualificat com a correcte.
37. En una classe hi ha 25 alumnes i 15 alumnes, i se sap que el 80 % de les alumnes aproven les matemàtiques mentre que les aproven el 60 % dels alumnes. Utilitza aquests percentatges per assignar probabilitats i calcula la probabilitat que hi ha en triar una persona de la classe a l'atzar que:
 - a) Sigui alumna i aprovi les matemàtiques;
 - b) Sigui alumna o aprovi les matemàtiques;
 - c) Sigui alumne i suspengui matemàtiques;
 - d) Hagi aprovat les matemàtiques.
38. S'estudien les famílies de tres fills. Per simplificar fem la hipòtesi que la probabilitat de nin sigui igual a la de nina. Calcula

la probabilitat dels següents successos:

a) $A =$ El primer fill és nina. b) $B =$ Almenys hi ha un home. c) $A \cup B$, d) $A \cap B$.

39. En una borsa hi ha 3 boles verdes, 4 boles vermelles i una bola blanca. Traiem dues boles de la borsa. Calcula la probabilitat dels successos: $A =$ "alguna de les boles és verda", $B =$ "ha sortit la bola blanca". Calcula també: $P(A^c)$, $P(B^c)$, $P(A \cup B)$ i $P(A^c \cap B)$. Són A i B successos incompatibles? Són successos independents?
40. Donats els successos A i B de probabilitats: $P(A^c) = 3/5$; $P(A \cap B) = 1/8$; $P(B \cup A) = 3/4$; calcula les següents probabilitats: $P(A)$; $P(B)$; $P(B^c)$; $P(B/A^c)$; $P(A^c \cap B^c)$; $P(A/B)$. Són A i B successos independents?
41. Determina si són compatibles o incompatibles els successos A i B tals que:
a) $P(A) = 1/7$; $P(B) = 3/7$; $P(B \cup A) = 4/7$; b) $P(A) = 1/5$; $P(B) = 0$;
42. Donats els successos A i B de probabilitats: $P(A^c) = 2/5$; $P(B) = 3/5$; $P(A^c \cap B^c) = 1/5$; calcula les següents probabilitats: $P(A)$; $P(B^c)$; $P(B \cup A)$; $P(B/A^c)$; $P(A \cap B)$; $P(A/B)$. Són A i B successos independents?
43. Dos tiradors al plat tenen unes marques ja conegudes. El primer encerta amb una probabilitat de 0,8 i el segon de 0,6. Es llança un plat i tots dos desapareixen. Expressa mitjançant un diagrama d'arbre i la taula de contingència associada les diferents possibilitats. Calcula: a) Quina probabilitat hi ha que almenys un dels tiradors doni en el plat? b) Probabilitat que cap encerti? c) Sabem que el tret ha encertat en el blanc, quin és la probabilitat que l'hagi fet el primer tirador?
44. Es disposa de dues urnes A i B . L'urna A té 7 boles verdes i 3 grogues. L'urna B té 5 boles verdes i 7 grogues. Es treu una bola a l'atzar d'una de les dues urnes, també a l'atzar, i resulta ser groga. Calcula la probabilitat que sigui de la urna B . (*Ajuda:* Representa les possibilitats mitjançant un diagrama en arbre, escriu la taula de contingència associada i l'altre diagrama en arbre).
45. Se sap que en certa població, la probabilitat de ser home i daltònic és un dècim i la probabilitat de ser dona i daltònica és $1/20$. La proporció de persones de tots dos sexes és la mateixa. Es tria una persona a l'atzar.
a) Trobar la probabilitat que no sigui daltònic.
b) Si la persona triada és dona, trobar la probabilitat que sigui daltònica.
c) Quina és la probabilitat que la persona triada pateixi daltonisme?
46. En cert institut s'ofereix informàtica i teatre com a assignatures optatives. El grup A consta de 35 estudiants i el B té 30 estudiants. El 60 % del grup A ha triat teatre, així com el 40 % del grup B i l'ha triat informàtica.
a) Si es pregunta a un estudiant triat a l'atzar, trobar la probabilitat que hagi triat informàtica.
b) Si un estudiant ha triat teatre, calcula la probabilitat que pertanyi al grup B .
47. En una baralla espanyola de quaranta cartes s'han eliminat diverses cartes. Se sap que la probabilitat d'extreure un as entre les que queden és 0,1, la probabilitat que surti una copa és 0,3 i la probabilitat que no sigui ni as ni copa és 0,6.
a) Trobar la probabilitat que la carta extreta sigui as o copa.
b) Calcular la probabilitat que la carta sigui l'as de copes. Es pot afirmar que entre les cartes que no s'han eliminat està l'as de copes?
48. En una ciutat en la qual hi ha doble nombre d'homes que de dones, hi ha una epidèmia. El 10 % dels homes i el 5 % de les dones estan malalts. Es tria a l'atzar un individu. Calcular la probabilitat de:
A) que sigui home. B) que estigui malalt. C) que sigui home, sabent que està malalt.

AUTOAVALUACIÓ

1. En una borsa hi ha 6 boles negres i 3 boles blanques, la probabilitat de treure una bola negra és:
 - a) $1/2$
 - b) $2/3$
 - c) $1/3$
 - d) $5/9$
2. Indica quin dels següents experiments no és un experiment aleatori:
 - a) Tirar un guix i anotar el nombre de trossos en què es trenca
 - b) Tirar un dau trucat i anotar el nombre de la cara superior
 - c) Creuar un carrer i estudiar si hi ha un atropellament
 - d) Calcular el consum de gasolina d'un cotxe
3. L'espai mostral de tirar 3 monedes a l'aire i anotar si cauen en cara (C) o en creu (X) amb successos elementals equiprobables és:
 - a) {CCC, CCX, CXX, XXX}
 - b) {3C, 2C, 1C, 0C}
 - c) {CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX}
 - d) {CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC}
4. El succés contrari a treure almenys una cara en l'experiment anterior és:
 - a) {XXX}
 - b) {CCC, CCX, CXX}
 - c) {CXX, XCX, XXC}
 - d) {CCC, CCX, CXC, XCC}
5. Indica quin dels següents successos no són independents:
 - a) Treure un or i treure un rei amb reemplaçament
 - b) Tirar una moneda i treure cara i tornar a tirar-la i tornar a treure cara
 - c) Tirar un dau i treure 6 i tornar a tirar-ho i tornar a treure 6
 - d) Tirar un dau i treure un múltiple de 2, i treure un 6
6. La probabilitat de no treure un as en una baralla de pòker és:
 - a) $4/52$
 - b) $48/52$
 - c) $36/40$
 - d) $1 - 36/40$
7. La probabilitat que la suma de les cares superiors sigui 7 de l'experiment tirar dos daus és:
 - a) $1/6$
 - b) $7/36$
 - c) $5/36$
 - d) $2/3$
8. En una borsa hi ha 7 boles vermelles i 4 blanques. Es treu una bola a l'atzar i si és blanca es torna a ficar en la borsa, mentre que si és vermella es deixa fora. Es treu una altra bola de la borsa, la probabilitat que sigui vermella és:
 - a) $42/110$
 - b) $28/121$
 - c) $371/605$
 - d) $411/605$
9. En una borsa hi ha 4 boles vermelles i 3 blanques. Traiem sense mirar dues boles. La probabilitat que siguin del mateix color és:
 - a) $1/7$
 - b) $2/7$
 - c) $3/7$
 - d) $4/7$
10. En llançar un dau ha sortit un nombre parell, La probabilitat que sigui un 6 és $P(\text{treure } 6 / \text{parell})$:
 - a) $1/3$
 - b) $1/6$
 - c) $2/5$
 - d) $3/6$

RESUM

		<i>Exemples</i>
Experiment aleatori	El resultat depèn de l'atzar	Tirar una moneda, o un dau
Succés elemental	Cadascun dels possibles resultats d'un experiment aleatori	Cara o creu serien successos elementals en l'experiment "tirar una moneda i observar el resultat"
Espai mostral	Conjunt de casos possibles	{cara, creu} {1, 2, 3, 4, 5, 6}
Succés	Subconjunt de l'espai mostral	{2, 4, 6}
Llei de Laplace	Si els successos elementals són equiprobables llavors $P(S) = \frac{\text{nombre casos favorables}}{\text{nombre casos possibles}}$	En tirar un dau: $P(\text{treure } 3) = 1/6$ $P(\text{treure múltiple } 2) = 3/6$.
Combinatòria	Utilitza la combinatòria (combinacions, variacions, variacions amb repetició...) per explicar bé els casos favorables i els possibles	La probabilitat de tenir pòker en una baralla francesa és: $P(\text{pòker}) = \frac{13 \cdot 12}{C_{52,2}}$
Diagrama en arbre	Problemes molt difícils pots resoldre representant un diagrama en arbre	
Succés contrari	El succés contrari de S (S^c) es verifica si no es verifica S. $P(S^c) = 1 - P(S)$	Succés contrari de treure parell és: $\{1, 3, 5\} = 1 - 3/6 = 1/2$.
Successos independents	Dos successos són independents si la probabilitat que es verifiqui un no queda afectada per que s'hagi verificat l'altre.	La probabilitat del treure un 3, en tirar un dau i tornar a tirar-ho.
Intersecció de successos	Si A i B són independents $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. En general $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$	En una baralla espanyola la probabilitat de treure dos asos és $(4/40) \cdot (3/39)$
Probabilitat condicionada	$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$	Probabilitat de treure un as havent-hi ja tret un altre as sense reemplaçament és 3/39
Unió de successos	Si A i B són incompatibles $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ En general $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	En una baralla espanyola la probabilitat de treure un as o bé un or és: $(4/40) + (10/49) - (1/40) = 13/40$