MATEMÁTICAS

CURIOSIDADES Y REVISTA

3º de ESO

www.apuntesmareaverde.org.es

ÍNDICE

Textos Marea Verde

I.S.B.N. - 13: 978-84-697-0275-8

I.S.B.N. - 10: 84-697-0275-0

BY NC SA

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-052237

Fecha y hora de registro: 2014-09-07 17:19:11.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

BY NC SA

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

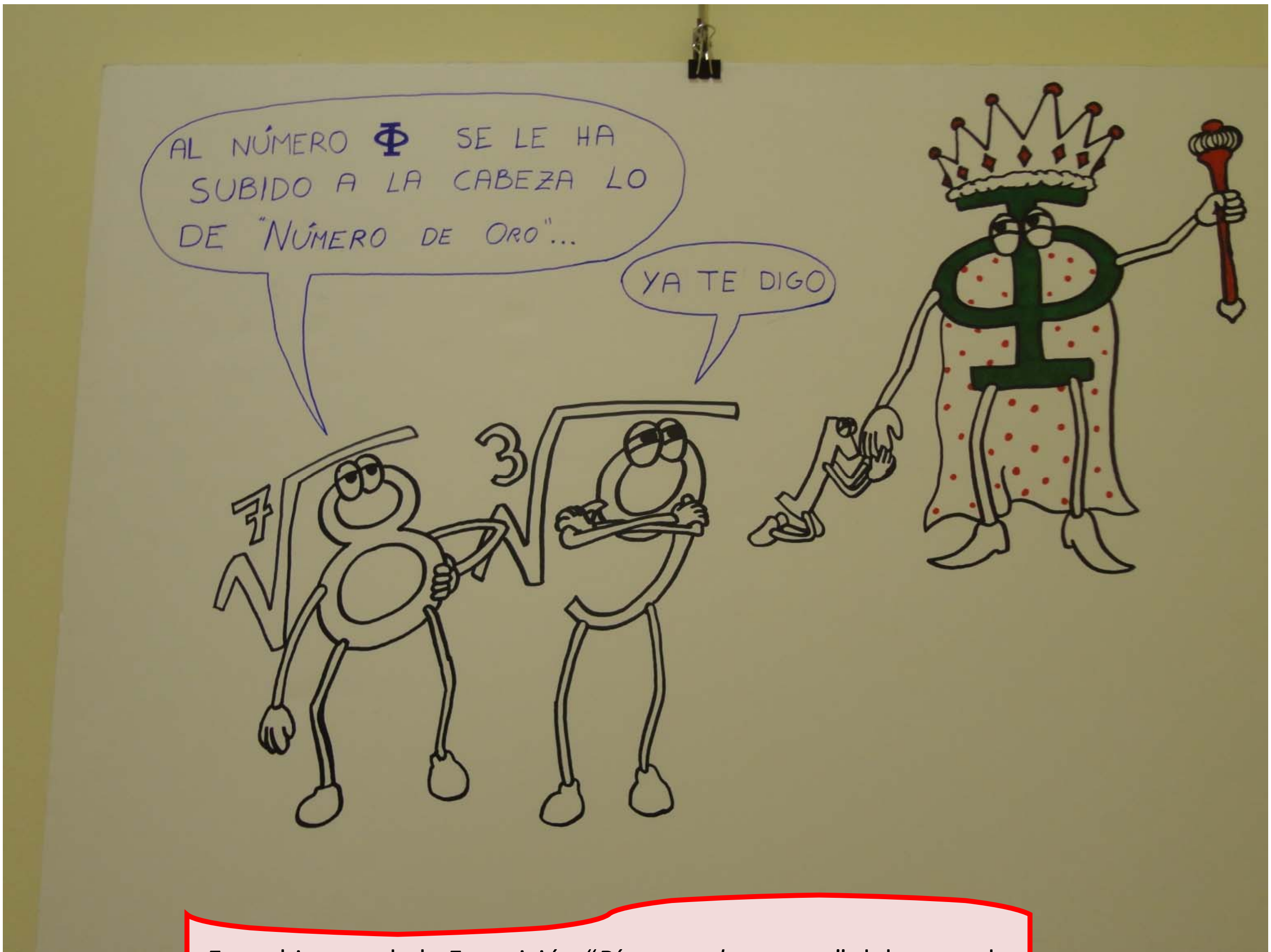
Vallecas

Capítulo 1: Números racionales

CURIOSIDADES Y REVISTA.

Resumen

En este capítulo vamos a recordar muchas de las cosas que ya sabes de cursos anteriores, como las operaciones con números naturales y enteros, las operaciones con fracciones y expresiones decimales. Estudiaremos los números racionales



Este chiste es de la Exposición "*Ríete con las mates*" del grupo de innovación educativa de la Universidad Politécnica de Madrid, Pensamiento Matemático.

Suma de infinitas fracciones.

El sentido común te dice que si sumamos infinitos números positivos la suma tiene que ser infinita. Pues, ¡no necesariamente!

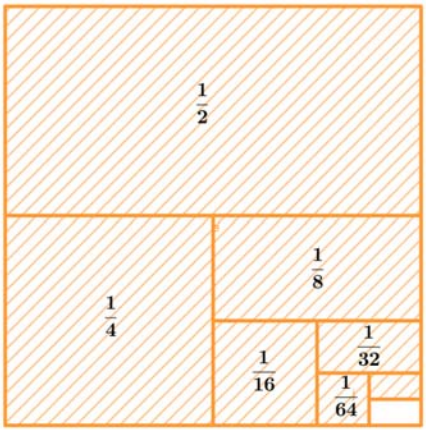
Te proponemos un reto, vamos a sumar $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+...$ donde cada fracción es la mitad de la anterior. Los puntos suspensivos indican que esto no acaba nunca, en teoría deberíamos sumar y sumar y seguir sumando de forma indefinida. En la práctica no puede hacerse, pero para eso están las matemáticas.

Coge la calculadora y empieza: 1:2 + 1:4 + 1:8 + 1:16 +1:32 + 1:64

Te da 0,984375 o si tienes suerte 63/64, ¡sólo falta 1/64 para llegar a 1!

Suma ahora al resultado anterior 1/128, obtenemos 0,9921875 o lo que es lo mismo 127/128, sólo falta 1/128 para llegar a 1. Debes seguir, los siguientes números a sumar son 1/256, 1/512, 1/1024, …

Si te has fijado nos acercamos cada vez más a 1. Vale, no vamos a llegar nunca, pero si quisiéramos darle un valor a la suma infinita de arriba, ¿tú cuál le darías?



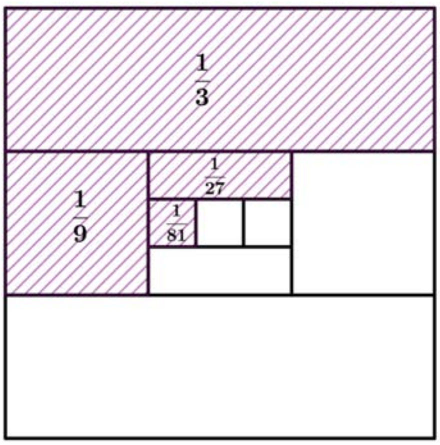
Los matemáticos le dan el valor 1.

Observa. Tienes una hoja de papel cuadrada de área 1. La cortas por la mitad, y dejas el trozo cortado encima de la mesa y el sin cortar en tu mando. Vuelves a cortar por la mitad el trozo que tienes en tu mano, y vuelves a dejar encima de la mesa el trozo cortado. Y sigues, y sigues… Sumas los trozos de papel que tienes en la mesa. ¿Podría alguna vez sumar más de 1? No, evidentemente, son trozos de un papel de área 1. ¿Alguna vez tendrías todo el papel encima de la mesa? Cada vez tienes menos papel en la mano, y más en la mesa, pero al cortar por la mita, nunca lo tendrías todo. Sin embargo, los matemáticos dicen que en el infinito esa suma vale 1.

Ahora tenemos una pizza y nos vamos a comer la pizza de “tercios en tercios”, es decir, primero 1/3, después 1/3 de 1/3, luego 1/3 de 1/3 de 1/3, y así sucesivamente…

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+...=$$

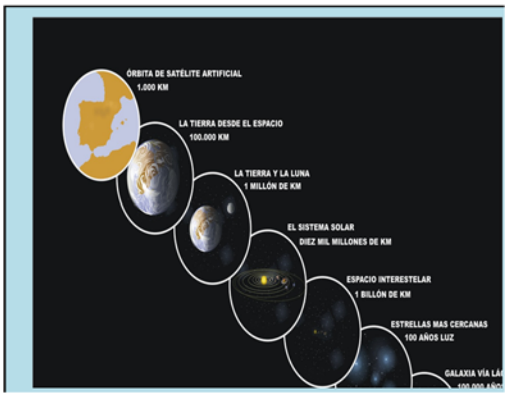
¿Cuánto crees que vale esta suma?



Capítulo 2: Potencias y raíces

CURIOSIDADES Y REVISTA.

Resumen



En este capítulo utilizamos los grandes números, las potencias, que nos permiten describir de manera más fácil la inmensidad del Universo, expresar sus distancias, la masa de los cuerpos celestes, el número de galaxias, estrellas y planetas.

También nos fijaremos en los pequeños números, el mundo microscópico expresado en forma de potencia de exponente negativo.

Utilizaremos la notación científica para grandes y pequeños números.

Repasaremos las operaciones con potencias de exponente un número natural, introduciendo las potencias con exponentes negativos y racionales. Ya conocemos las potencias de base un número natural, ahora usaremos las mismas ideas utilizando bases de números negativos y racionales. Ya conoces los radicales, ahora veremos que un radical es una potencia de exponente un número fraccionario y que podemos utilizar las propiedades de las potencias con ellos.

Este chiste es de la Exposición "*Ríete con las mates*" del grupo de innovación educativa de la Universidad Politécnica de Madrid, Pensamiento Matemático.

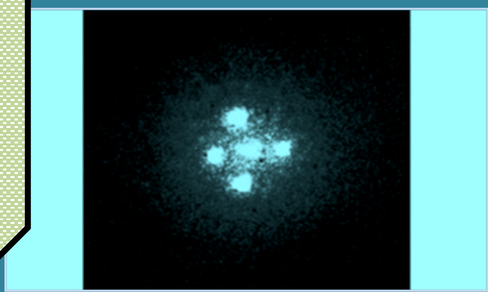
Células solares de silicio de tamaño microscópico

El programa de Tecnología Solar del Departamento de Energía de Estados Unidos, en su objetivo de conseguir mayor eficiencia en la producción de energía solar, ha creado células microscópicas de silicio. Estas células utilizan 100 veces menos material de silicio policristalino de 20 micrómetros de grosor con un significativo coste menor de fabricación. Estas células convierten casi un 15 % de la luz solar en energía eléctrica.

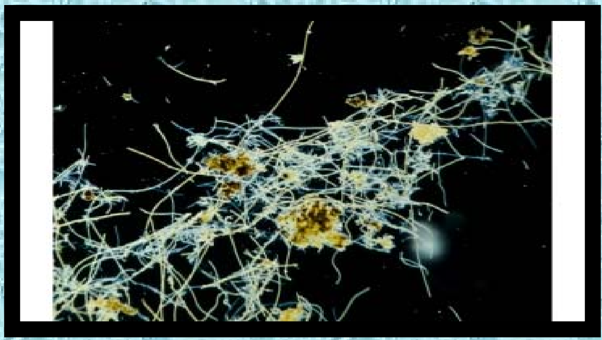
¿Sabías que…

a las operaciones en notación exponencial también se las llama de "**coma flotante**" porque el exponente equivale a la posición del decimal? En los ordenadores, la potencia de cálculo se mide en *mflops*, o miles de operaciones en coma flotante por segundo, en ingles *floating point operations per secound*, abreviado "flops". Tu ordenador igual puede hacer un millón de estas operaciones por segundo, un "*giga flops*"!

La cruz de Einstein



Albert Einstein había anunciado, a partir de su teoría de la relativiadad general, el llamado "espejismo cósmico" o "lente gravitacional". Este efecto puede explicar la formación de cuatro o más imágenes a partir de una sola fuente muy distante. La cruz de la imagen resultó ser un solo quásar situado a unos 10.000 millones de años-luz al que se llamó Cruz de Einstein, cuya luz queda curvada en su trayectoria por una galaxia-lente situada diez veces más cerca.



La presencia de las bacterias

Se estima que existen 100 millones de bacterias, de 600 especies diferentes, por cada milímetro cúbico de saliva y 40 millones de bacterias en un gramo de tierra. Algunos científicos calculan que en el interior de la Tierra podría haber hasta 100.000 billones de toneladas de bacterias, de manera que si todas estuvieran sobre la superficie, cubrirían nuestro planeta hasta una altura de 15 metros. Hay mucha más vida en el interior que en el exterior.

En el Papiro de Ajmeed (1650 a.C.) se muestra cómo los egipcios extraían raíces cuadradas. En la antigua India, en los manuscritos del Baudhayana Sulba Sutra Aryabhata (800-500 a.C.) se anota un método para calcular raíces cuadradas.

En Europa, no se han encontrado referencias antes de Cataneo (1546). El símbolo de la raíz cuadrada fue introducido en 1525 por el matemático Christoph Rudolff, y es una forma estilizada de la r minúscula.

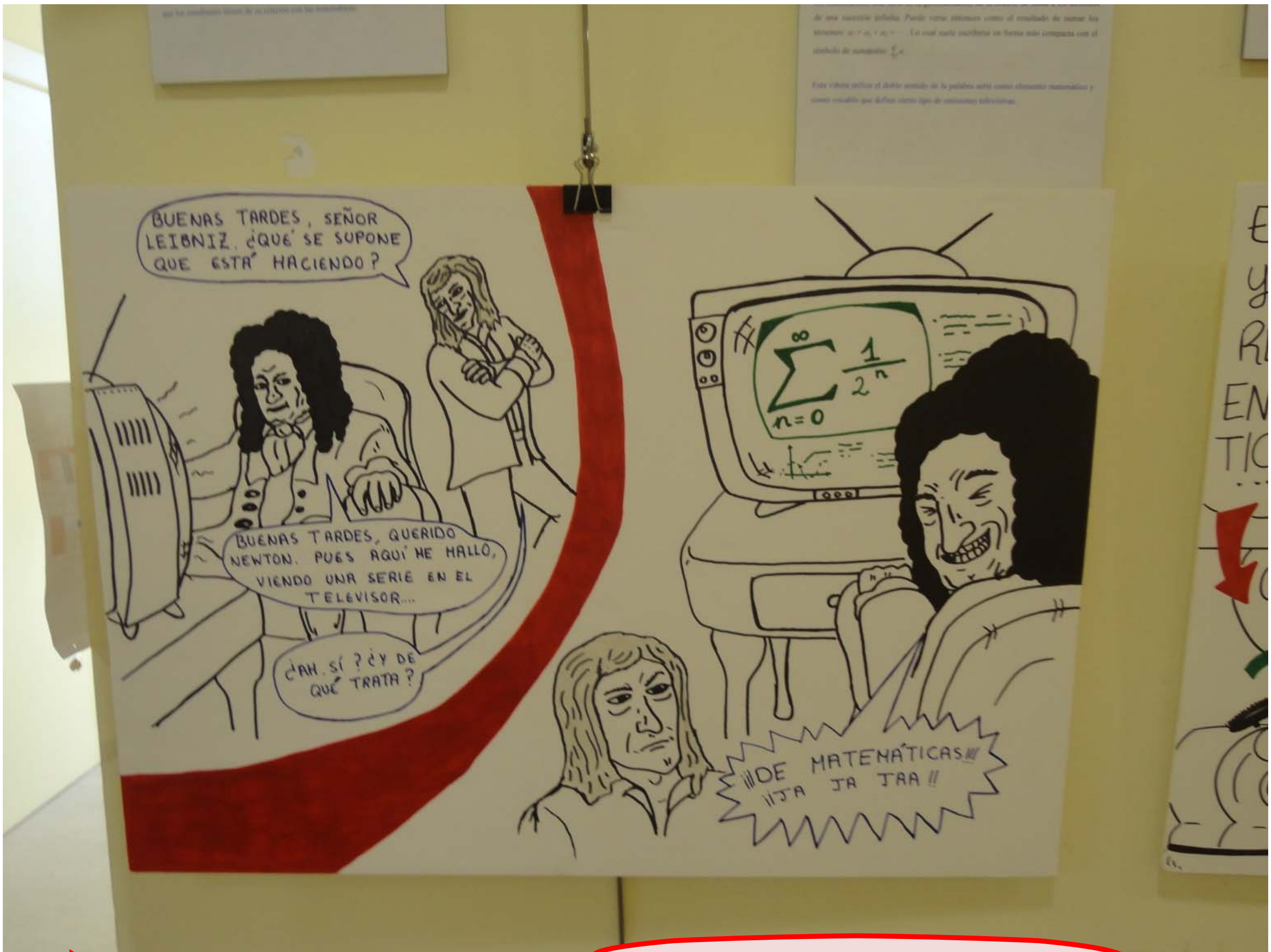
Capítulo 3: Sucesiones

CURIOSIDADES Y REVISTA.

Resumen

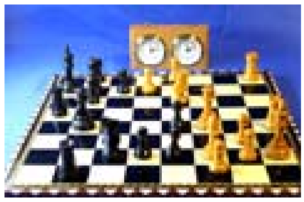
¿Qué tienen en común conceptos tan dispares como el número de conejos hijos engendrados por una pareja de conejos, la estructura de un copo de nieve o el interés que obtenemos al depositar determinada cantidad de dinero en una entidad financiera?

Detrás de estos casos nos encontramos con el concepto de sucesión. Las sucesiones numéricas tienen gran importancia y utilidad en muchísimos aspectos de la vida real, alguno de los cuales irás descubriendo a lo largo de este tema.



Este chiste es de la Exposición "*Ríete con las mates*" del grupo de innovación educativa de la Universidad Politécnica de Madrid, Pensamiento Matemático.

A) El inventor del ajedrez



Ya vimos en el capítulo sobre potencias la leyenda sobre el ajedrez. Ahora puedes utilizar tus conocimientos sobre progresiones para hacer los cálculos:

Cuenta la leyenda como el inventor del ajedrez presentó su invento a un príncipe de la India. El príncipe quedó tan impresionado que quiso premiarle generosamente, para lo cual le dijo: "Pídeme lo que quieras, que te lo daré".

El inventor del ajedrez formuló su petición del modo siguiente:

"Deseo que me entregues un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta, dieciséis por la quinta, y así sucesivamente hasta la casilla 64".

La sorpresa fue cuando el secretario del príncipe calculó la cantidad de trigo que representaba la petición del inventor, porque toda la Tierra sembrada de trigo era insuficiente para obtener el trigo que pedía el inventor.

¿Qué tipo de progresión se utiliza? ¿Aritmética o geométrica? ¿Cuál es la razón?

¿Cuántos trillones de granos de trigo pedía aproximadamente?

¿Podrías hallar el total de granos de trigo utilizando fórmulas y usando la calculadora?

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{62} + 2^{63}$$

Potencias de 2 en el tenis

Las potencias de 2 también aparecen en los torneos de tenis. En muchos torneos se enfrentan los jugadores de la siguiente forma: En la final juegan dos jugadores; en la semifinal hay cuatro; en los cuartos de final hay ocho jugadores. Así, en cada ronda adicional la cantidad de jugadores se duplica, tal como ocurría con los granos de trigo en el tablero de ajedrez. Si el torneo tuviera 25 rondas, ¿te imaginas cuántos habría? Pues,¡¡ podrían participar casi todos los habitantes de España!! y con 33 rondas ¡¡ podrían participar todos los habitantes del planeta!!

Sucesión de *Fibonacci*

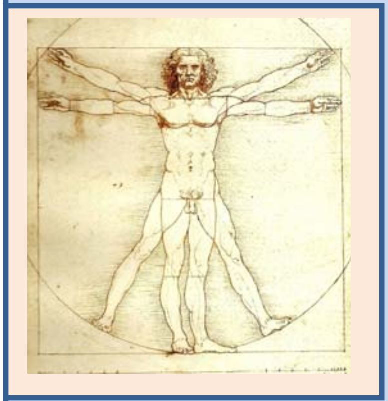
Para los que pensáis que es imposible ver Matemáticas fuera del aula y mucho menos en la naturaleza, os presentamos uno de los más bellos conceptos matemáticos estrechamente relacionado con la naturaleza y el arte.

Se trata de una sucesión muy simple, en la que cada término es la suma de los dos anteriores.

- La sucesión comienza por el número 1,
- Y sigue con 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584..., ya que 1 = 0 + 1; 2 = 1 + 1; 3 = 1 + 2; 5 = 2 + 3; 8 = 3 + 5; 13 = 5 + 8; 21 = 8 + 13... etc.

Una de las propiedades más curiosas, es que el cociente de dos números consecutivos de la serie se aproxima a la llamada **"sección áurea" o "divina proporción".**

Este número, descubierto por los renacentistas, es $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ = 1,61803..., y se lo nombra con la letra griega ϕ. La sucesión formada por los cocientes de números consecutivos de la sucesión de *Fibonacci* se acerca rápidamente, hacia el número áureo. Los griegos y renacentistas estaban fascinados con este número y lo consideraban el ideal de la belleza.



De hecho, *Leonardo da Vinci* en su obra "*El hombre de Vitrubio*" utiliza este número para conseguir las perfectas proporciones de su obra.

¿Cómo puede ser que el cociente de dos números de una secuencia inventada por el hombre se relacione con la belleza? Pues porque la sucesión de Fibonacci está estrechamente relacionada con la naturaleza. Se cree que Leonardo encontró estos números cuando estudiaba el crecimiento de las poblaciones de conejos. Supongamos que una pareja de conejos tarda un mes en alcanzar la edad fértil, y a partir de ese momento cada vez engendra otra pareja de conejos, que a su vez engendrarán cada mes una pareja de conejos.

¿Cuántos conejos habrá al cabo de un determinado número de meses?

Pues sí, cada mes habrá un número de conejos que coincide con cada uno de los términos de la sucesión de *Fibonacci*. Parece magia, ¿verdad?

Pues muchas plantas, como las piñas o las margaritas siguen una disposición relacionada también con la sucesión de *Fibonacci*, lo que ilustra la famosa frase de Galileo

"La naturaleza está escrita en lenguaje matemático".

Capítulo 4: Expresiones algebraicas. Polinomios

CURIOSIDADES Y REVISTA. Matemáticas 3º de ESO

Resumen

Según avanzamos en nuestros estudios se van ampliando nuestros conocimientos, en particular los de Matemáticas. Esto no se debe a ningún tipo de capricho, todo lo contrario: a lo largo de la historia las Matemáticas se desarrollan empujadas por las necesidades de las personas. Es indudable la conveniencia de que una persona tenga soltura con los números y sus operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división. Por soltura no debe entenderse que se sepa de memoria "todas" las tablas de multiplicar, sino que sea consciente de lo que significa realizar una operación concreta, que sea capaz de dar respuesta a preguntas cotidianas que se solventan *operando* adecuadamente los datos disponibles. Para ese propósito es útil fomentar nuestra capacidad de abstracción; ella nos permite reconocer como equivalentes situaciones en apariencia muy alejadas. En este capítulo se va a dar un paso en ese sentido al manipular, manejar, datos numéricos no concretados, no conocidos, a través de indeterminadas o variables. De esa manera aparecerán las expresiones algebraicas y, dentro de ellas, unas expresiones particulares de abundante uso y simplicidad de exposición, los polinomios.

Para ver geométricamente el cuadrado de un trinomio:

http://recursostic.educacion.es/bancoimagenes/web/172241_am:1.swf

Para ver geométricamente suma por diferencia:

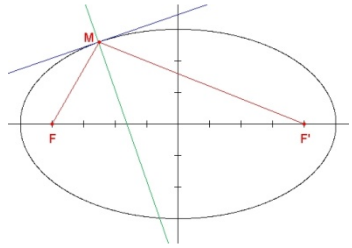
http://recursostic.educacion.es/bancoimagenes/web/172242_am:1.swf

Para ver geométricamente el cuadrado de una diferencia:

http://recursostic.educacion.es/bancoimagenes/web/172456_am:1.swf

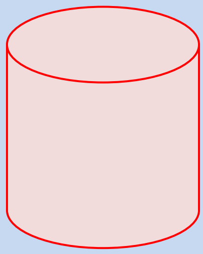
GEOMETRÍA

Tal y como podrás comprobar durante este curso y los siguientes, gracias a los polinomios será posible y sencillo describir numerosos objetos geométricos como rectas, circunferencias, elipses, parábolas, planos, esferas, cilindros, conos, etc.



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$



$$x^2 + y^2 = r^2$$

OTRAS CIENCIAS

Hemos visto en este capítulo que las fórmulas que nos proporcionan el área o el volumen de diferentes figuras vienen dadas por polinomios. Éstos también aparecen en numerosos **principios** o **leyes de la Física** y **de la Química** como, por ejemplo, en diferentes *Leyes de Conservación*, la *Ley General de los Gases*, etc.

Asimismo, son de frecuente uso a la hora de obtener distintos **índices** o **indicadores** propios de la **Economía** como, por ejemplo, el *IPC* (índice de precios al consumo), el *euríbor*, etc.

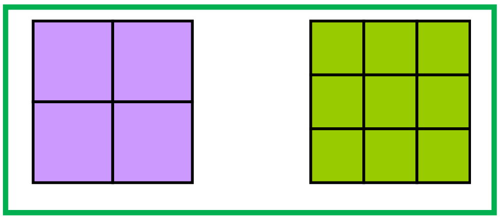
Capítulo 5: Ecuaciones de segundo grado y sistemas lineales

CURIOSIDADES Y REVISTA.

Resumen

Ya sabes resolver algunas ecuaciones de segundo grado. Si el área de un cuadrado es 4 conoces que su lado es 2, y si el área es 9, conoces que el lado mide 3.

Sabes resolver $x^2 = 4$, cuyas soluciones son 2 y –2, porque $(2)^2 = 4$, y $(-2)^2 = 4$.



Recuerda

Si el producto de dos factores es cero, uno de los factores debe ser cero.
Por tanto en la ecuación:

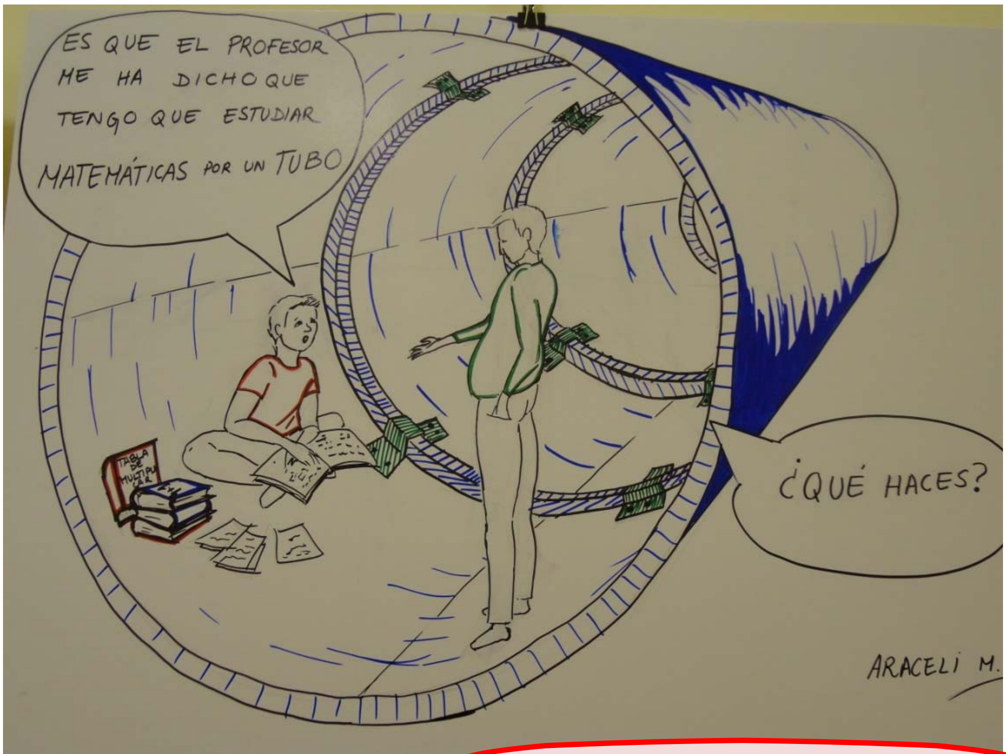
$$(x + 4) \cdot (x - 3) = 0$$

o bien $x + 4 = 0$ o bien $x - 3 = 0$, por lo que $x = -4$ y $x = 3$.

Para resolver $(x - 3) \cdot (x + 4) = 0$, observas que las soluciones son 3 y –4 pues $(3 - 3)\cdot(3 + 4) = 0$, y $((-4) - 3)\cdot((-4) + 4) = 0$.

En este capítulo aprenderemos a resolver las ecuaciones de segundo grado, ya sean completas o incompletas, y a utilizar lo aprendido para resolver problemas de la vida cotidiana por medio de las ecuaciones.

Veremos además qué son los sistemas de ecuaciones lineales, cómo se resuelven por diferentes métodos y su aplicación para resolver problemas que nos rodean.



Este chiste es de la Exposición “*Ríete con las mates*” del grupo de innovación educativa de la Universidad Politécnica de Madrid, Pensamiento Matemático.

Obtención de la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado.

$$ax^2 + bx + c = 0,\ \text{con } a \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$ax^2 + bx = -c$$

$$\Downarrow \text{ Multiplicamos por } 4a$$

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

$$\Downarrow \text{ Sumamos } b^2$$

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$$

$$\Downarrow \text{ Completamos cuadrados}$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

$$\Downarrow \text{ Hallamos la raíz cuadrada}$$

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\Downarrow \text{Despejamos la } x$$

$$2ax = -b \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

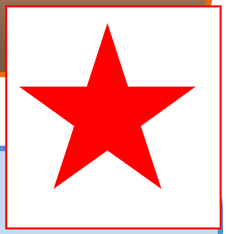
$$\Downarrow$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Tres ecuaciones de segundo grado interesantes

$x^2 = 2$

Esta ecuación nos aparece al aplicar el Teorema de Pitágoras a un triángulo rectángulo isósceles de lados iguales a 1, o al calcular la diagonal de un cuadrado de lado 1. Su solución es la longitud de la hipotenusa o de la diagonal. Tiene de interesante que se demuestra que dicha solución NO es un número racional, un número que pueda escribirse como cociente de dos números enteros.



$x + 1 = x^2$

También se puede escribir como: $\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$ que es una proporción, donde x toma el valor $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx$ 1,618… que es el número de oro, otro número irracional

$x^2 = -1$

La tercera ecuación no tiene solución real, ningún número real al elevarlo al cuadrado puede dar un número negativo, pero si ampliamos el campo real con su raíz, $\sqrt{-1}$ = i, resulta que ya todas las ecuaciones de segundo grado tienen solución, y a los números a + b·i se les llama **números complejos**.

Emmy Noether fue una matemática alemana de origen judío cuyos trabajos en Álgebra permitieron resolver el problema de la conservación de la energía.

Capítulo 6: Proporcionalidad

CURIOSIDADES Y REVISTA.

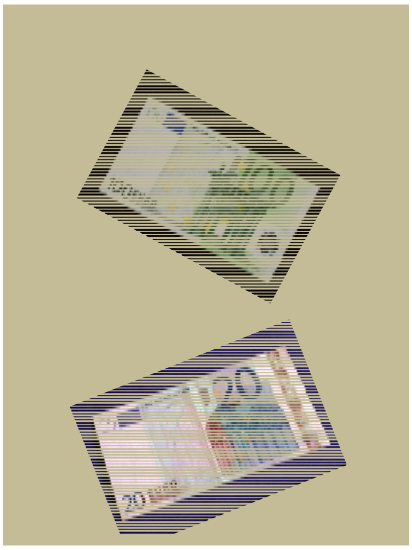
Resumen

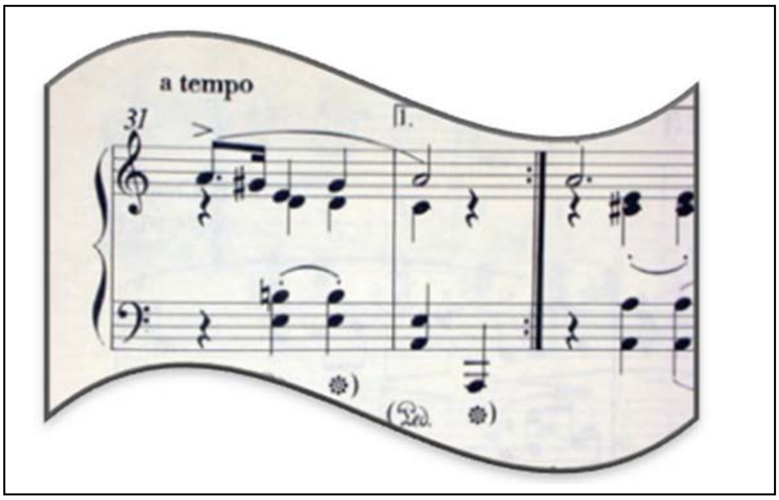
La proporcionalidad es una realidad con la que convivimos a nuestro alrededor. Para comprenderla y utilizarla correctamente, necesitamos conocer sus reglas.

Reconoceremos la proporcionalidad directa o inversa, simple y compuesta, y realizaremos ejercicios y problemas de aplicación.

En multitud de ocasiones debemos efectuar repartos proporcionales, directos o inversos: premios de lotería, herencias, mezclas, aleaciones…

El tanto por ciento y el interés es un concepto que aparece constantemente en los medios de comunicación y en nuestra propia economía. En este capítulo haremos una primera aproximación a la denominada *“economía financiera”*

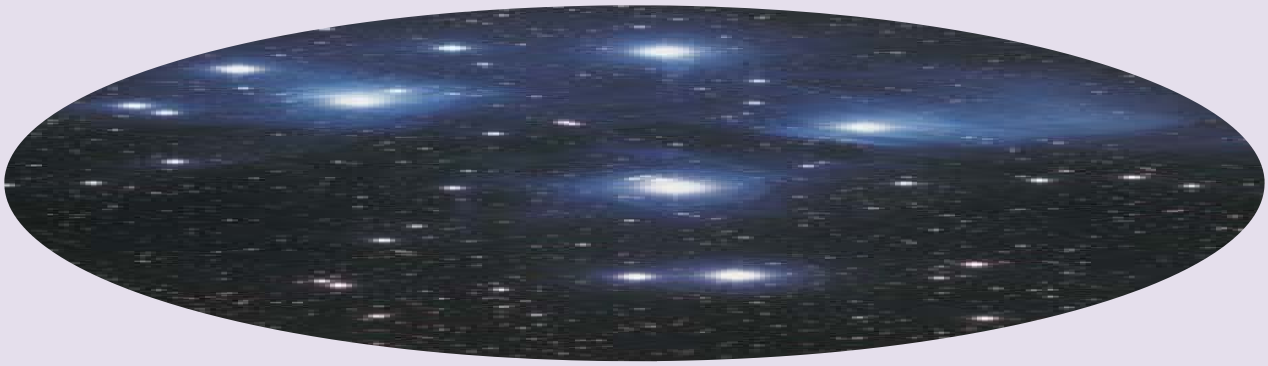




La escala musical es un conjunto de sonidos ordenados de forma ascendente o descendente.

Las escalas pentatónicas son las más utilizadas en el blues, el heavy metal y el rock

El término ***quilate*** viene de la palabra griega “*keration” (algarroba)****.*** Esta planta, de semillas muy uniformes, se utilizaba para pesar joyas y gemas en la antigüedad.



Durante siglos, hombres y mujeres han observado el cielo utilizando instrumentos que les permitían dibujar a escala la bóveda celeste.

Mujeres como Hipatia de Alejandría, Carolina Herschel, María Michell, María Kirch, estudiaron las constelaciones, catalogaron estrellas y galaxias, descubrieron cometas y dejaron un enorme legado a pesar de trabajar en el anonimato, sin reconocimiento, o con serias dificultades por razón de ser mujeres.

En 2009, Año Internacional de la Astronomía, la Unión Astronómica Internacional y la UNESCO, impulsaron el proyecto “Ella es una astrónoma” con el fin de promover la igualdad entre géneros en este campo de la Ciencia.

La UNED, TVE la 2 y TVE internacional han elaborado una serie titulada “***Mujeres en las estrellas***” que aporta una perspectiva histórica y actual de las científicas españolas y su contribución a la astronomía.

LA PROPORCIÓN CORDOBESA EN LA MEZQUITA DE CÓRDOBA

Buscando edificios y monumentos situados en España sobre los que se aplique la proporción cordobesa, analizamos la **Mezquita de Córdoba**:

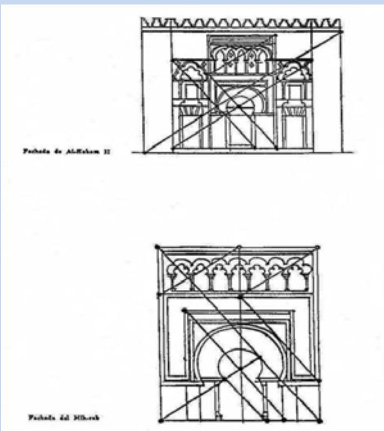
Se encontró por vez primera en la Mezquita de Córdoba. Pero a geometría de la **puerta de AL-Hakam II**, la **fachada del Mihrab**, la **planta** de la Mezquita y la **arcada** interior, se someten en su estructura a la proporción cordobesa.

Algunas muestras de la arquitectura de la Mezquita, crecedera, modular y prefabricada, basada en la composición con rectángulos cordobeses.

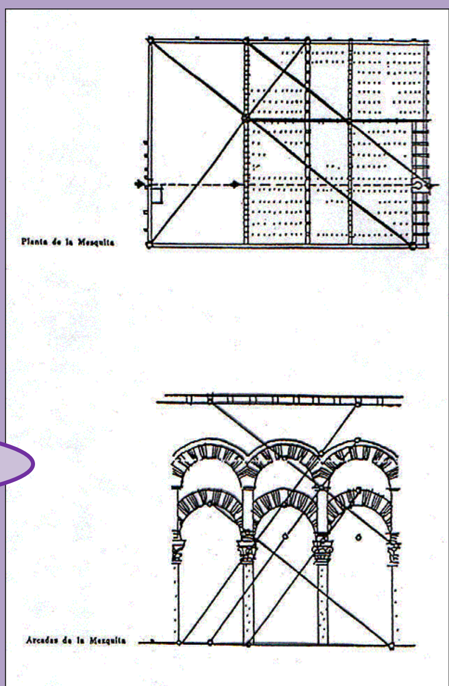
Ver más en "Proporción cordobesa"

Bóveda cordobesa en el ante-Mihrab

Puerta de Alhaken II

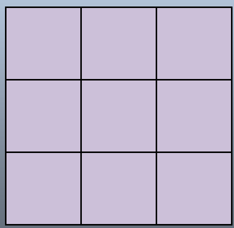


Planta y arcada interior

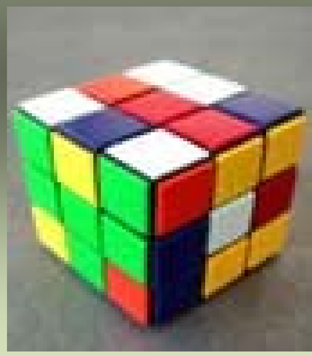


Proporcionalidad en áreas y volúmenes

Al aumentar el lado de un cuadrado al doble, su superficie queda multiplicada por 4. Al multiplicar por 3 el lado, el área se multiplica por 9.



Al aumentar el lado de un cubo al doble, su volumen queda multiplicado por 8. Al multiplicar por 3 el lado, el volumen se multiplica por 27.



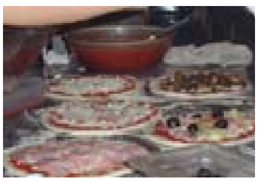
En general, si hacemos un cambio de escala de factor de proporcionalidad k, el área tiene un factor de proporcionalidad k^2, y el volumen k^3.

Utiliza esta observación para resolver los siguientes problemas:

La torre Eiffel de París mide 300 metros de altura y pesa unos 8 millones de kilos. Está construida de hierro. Si encargamos un modelo a escala de dicha torre, también de hierro, que pese sólo un kilo, ¿qué altura tendrá? ¿Será mayor o menor que un lápiz?

Antes de empezar a calcular, da tu opinión.

Ayuda: k^3 = 8 000 000/1 luego k = 200. Si la Torre Eiffel mide 300 metros de altura, nuestra torre medirá 300/200 = 1,5 m. ¡Metro y medio! ¡Mucho más que un lápiz!



- En una pizzería la pizza de 20 cm de diámetro vale 3 euros y la de 40 cm vale 6 euros. ¿Cuál tiene mejor precio?
- Vemos en el mercado una merluza de 40 cm que pesa un kilo. Nos parece un poco pequeña y pedimos otra un poco mayor, que resulta pesar 2 kilos. ¿Cuánto medirá?
- En un día frio un padre y un hijo pequeño van exactamente igual abrigados, ¿Cuál de los dos tendrá más frio?

Capítulo 7: Geometría del plano

CURIOSIDADES Y REVISTA.

Resumen

Tales, Pitágoras y muy posteriormente Euclides son matemáticos griegos a los que debemos el estudio de la Geometría deductiva. Anteriormente egipcios y babilonios utilizaron la Geometría para resolver problemas concretos, como volver a poner lindes a las tierras después de las inundaciones del Nilo. Pero en Grecia se utilizó el razonamiento lógico para deducir las propiedades. Euclides intentó recoger el conocimiento que existía y escribió *Los Elementos* que consta de 13 libros o capítulos, de los que los seis primeros tratan de Geometría Plana, y el último de Geometría en el espacio. En este libro define conceptos, tan difíciles de definir como punto o recta, y enuncia los cinco axiomas (de Euclides) de los que parte como verdades no demostrables, y a partir de ellos demuestra el resto de las propiedades o teoremas. Estos axiomas son:

Euclides

1. Dados dos puntos se pueden trazar una recta que los une.
2. Cualquier segmento puede ser prolongado de forma continua en una recta ilimitada.
3. Se puede trazar una circunferencia de centro en cualquier punto y radio cualquiera.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Dada una recta y un punto, se puede trazar una única recta paralela a la recta por dicho punto.

En este capítulo vamos a recordar cuestiones que ya conoces de Geometría en el plano, profundizando en algunas de ellas, como en los criterios de semejanza de los triángulos. De este modo vas a ser capaz de resolver un buen número de problemas.

Algo de historia de la Geometría

Se conjetura que el inicio de la Geometría puede ser anterior a **egipcios y babilonios**, pero como no existe información escrita, es imposible afirmarlo.

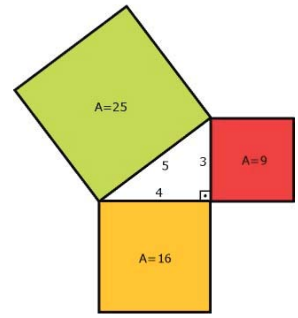
Herodoto opinaba que se había originado en Egipto por la necesidad de rehacer los lindes de las tierras después de las inundaciones del Nilo.

En el *papiro de Moscú* aparece el volumen de una pirámide cuadrada

En Mesopotamia se conocía mucha Geometría. En la tablilla Plimpton, que no se conserva entera, se pueden identificar con dificultad *ternas pitagóricas* (muy anteriores a *Pitágoras*).

Ternas Pitagóricas

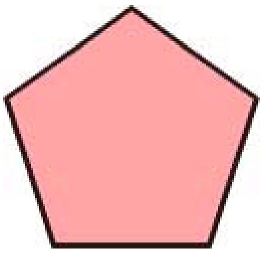
La **terna pitagórica** más conocida es 3, 4 y 5. Se hacían nudos a esas distancias y así se construían triángulos rectángulos.



En otras tablillas babilónicas, las de Susa, aparecen las áreas de los polígonos y las relaciones entre ellas.

Aunque podemos conocer muy poco de **Tales** y de **Pitágoras**, pues no ha quedado ninguna obra escrita por ellos, se acepta que fueron grandes matemáticos y geómetras.

Ambos viajaron a los centros del saber, Egipto y Babilonia. Ya hemos visto que ya se conocía lo llamamos teorema de Teles o de Pitágoras. Su importancia está en la forma de pensar, en utilizar el razonamiento deductivo para obtener los resultados matemáticos.



El pentágono, y la estrella pitagórica, que obtienes trazando las diagonales del pentágono, tienen grandes propiedades relacionadas con el número de oro, ¿lo recuerdas? La escuela tomó a la estrella como emblema.

Teano, la mujer de Pitágoras, dirigió la Escuela Pitagórica a la muerte de éste.

Euclides de Alejandría es el autor de los *Elementos*, donde destaca la forma de exponer el fundamento de la Matemática con un orden lógico

Consta de 13 libros siendo los seis primeros de Geometría plana, y el último sobre cuerpos. Con definiciones y postulados construye el saber.

Capítulo 8: Movimientos en el plano y el espacio

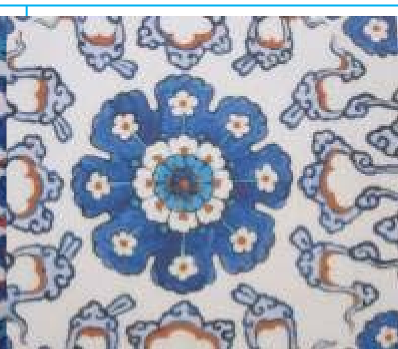
CURIOSIDADES Y REVISTA.

Resumen

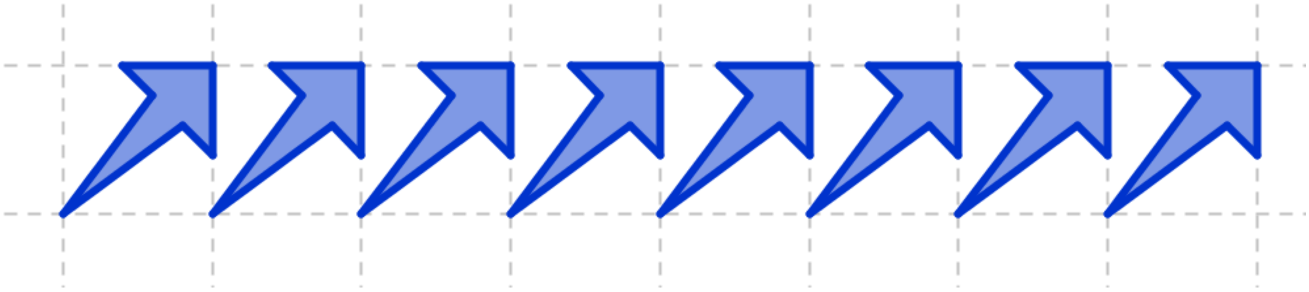
Todo se mueve en el Universo, la Tierra gira alrededor de su eje y se desplaza alrededor del Sol. El Sol se mueve dentro de nuestra galaxia, y la galaxia también se mueve. ¡Mareo me da el pensar a qué velocidad me estoy moviendo! Observa que ni el tamaño ni la forma de los objetos varían con estos movimientos. Estas transformaciones que mantienen la forma y el tamaño son los movimientos o isometrías que estudiaremos en este capítulo.

Analizar lo que nos rodea con ojos matemáticos nos ayuda a comprender más y más cosas. Aprender a mirar las torres, ese reflejo sobre el agua de un palacio de la Alhambra, los mosaicos… o los tapacubos de los coches, los animales y los objetos cotidianos. Todos ellos encierran muchas matemáticas: muchas transformaciones geométricas. Estudiaremos las simetrías, los giros y las traslaciones y las analizaremos en nuestro entorno.

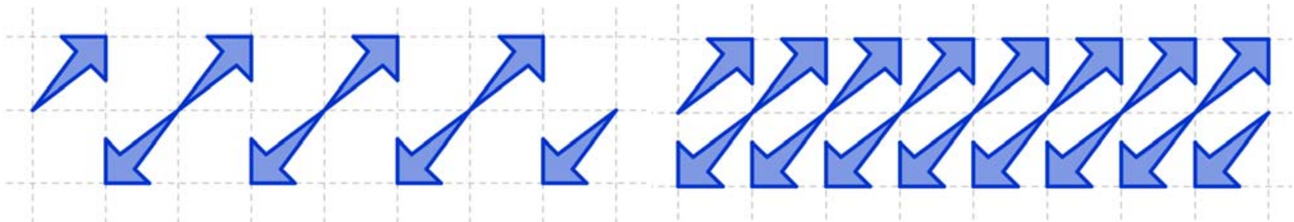
MOSAICOS



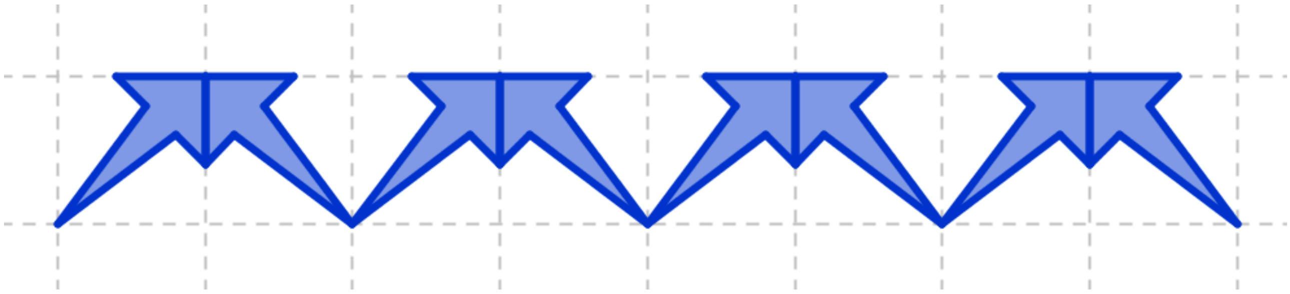
FRISOS



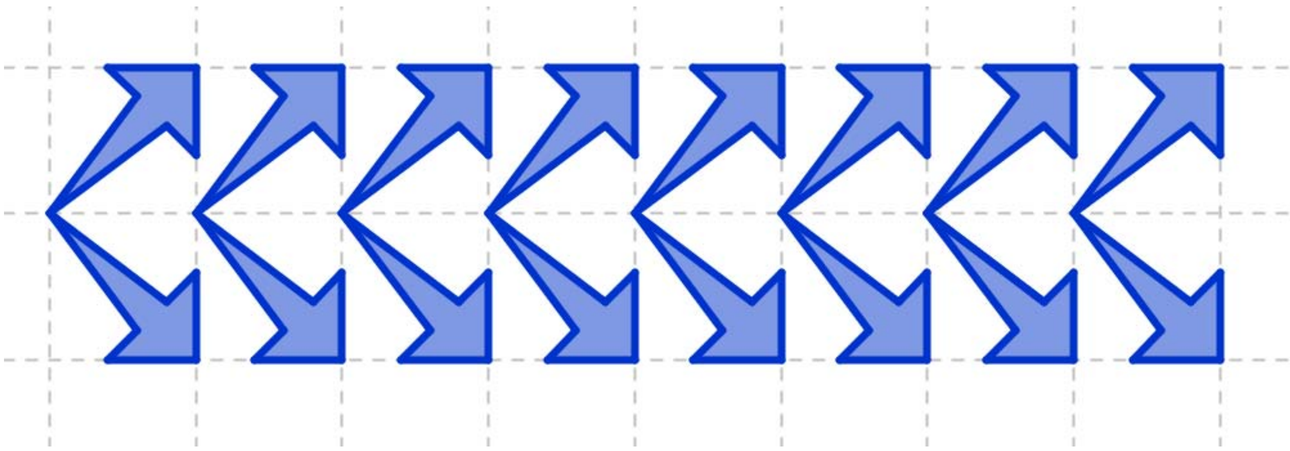
Friso L1: Sólo traslación



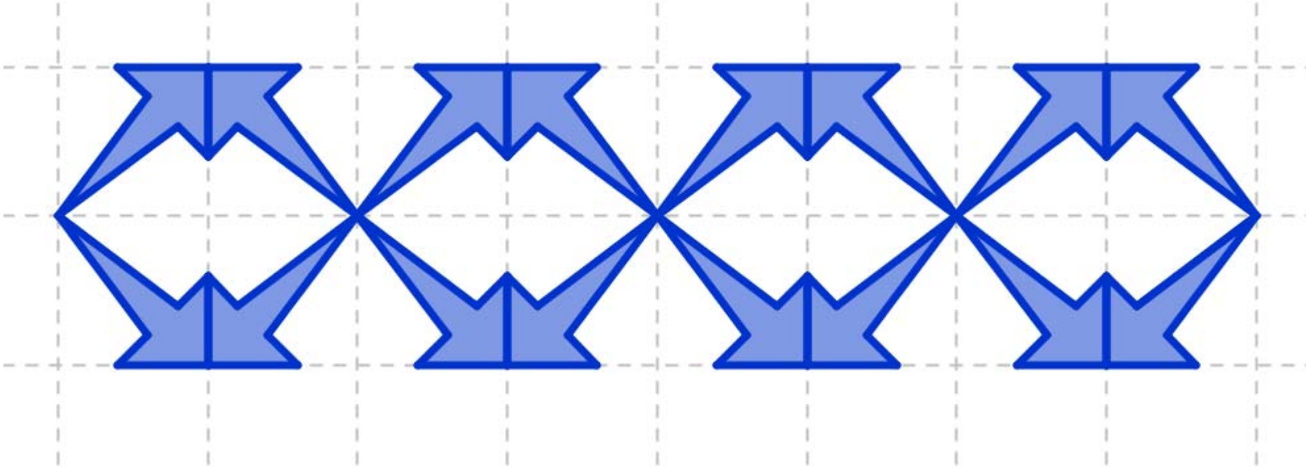
Frisos L2: Giros de 180º



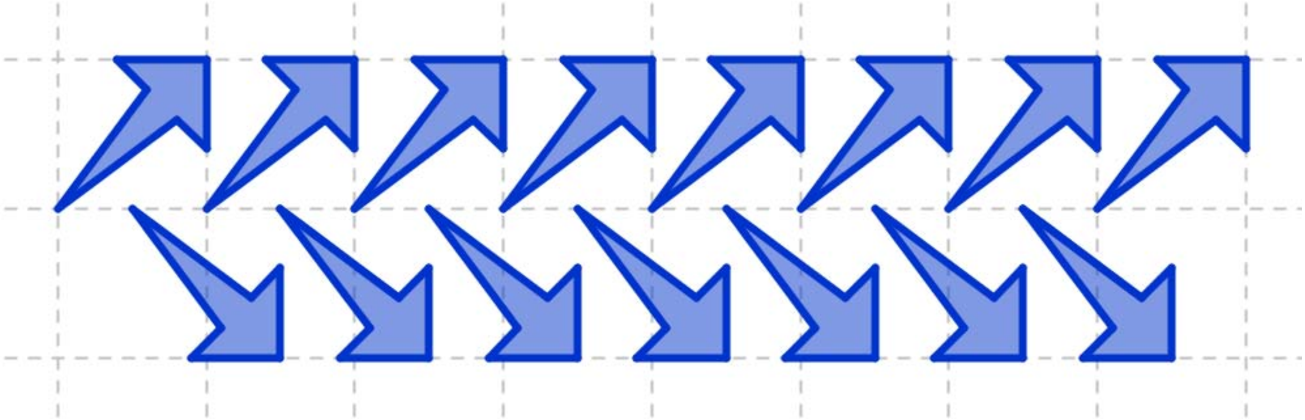
Friso L3: Simetría vertical



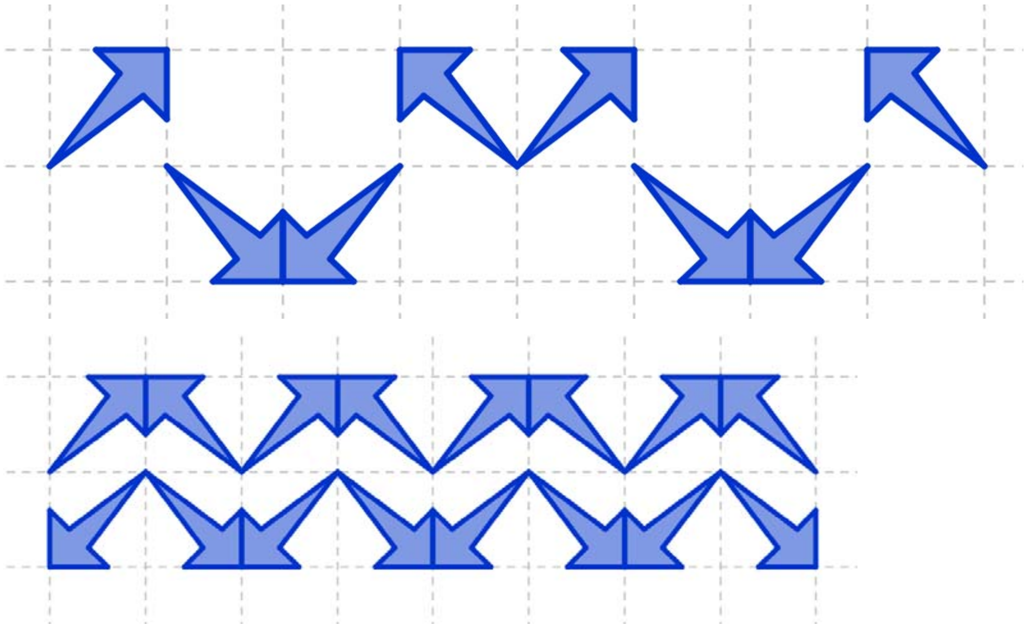
Friso L4: Simetría horizontal



Friso L5: Giros, simetrías verticales y simetrías horizontales



Friso L6: Simetría con deslizamiento



Frisos L7: Simetría con deslizamiento y simetría vertical.

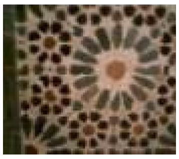
ROSETONES

Los rosetones de las catedrales son espectaculares, pero también se pueden ver en situaciones más cotidianas, como los tapacubos de los coches.

Análisis de tapacubos:

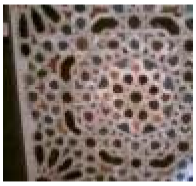
 1	 2	 3	 4
 5	 6	 7	 8
 9	 10	 11	 12

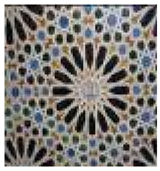
CURIOSIDADES. REVISTA

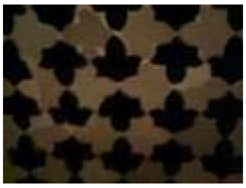


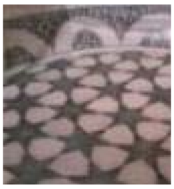
Mosaicos de la Alhambra

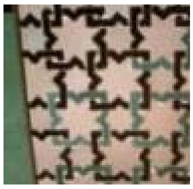
Como sabes los árabes de España eran grandes matemáticos y en los mosaicos de la Alhambra demuestran, además de su sentido artístico, sus conocimientos de Matemáticas. Se ha demostrado que, partiendo de un motivo mínimo, y aplicándole giros, simetrías, traslaciones... sólo hay 17 formas distintas de completar el plano haciendo un mosaico. Es sorprendente que esas 17 formas ya se encuentren en los mosaicos de la Alhambra.











Puedes ver la generación de uno de estos mosaicos de la Alhambra mediante simetrías.

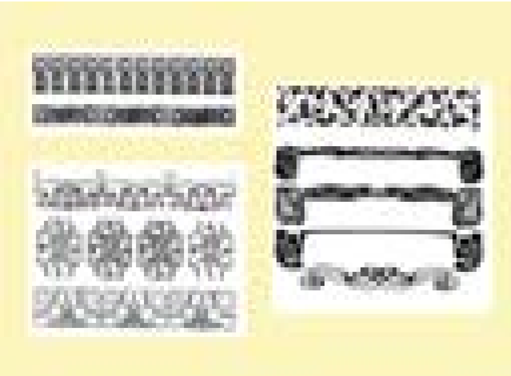
Busca “mosaicos” en Internet, y sabrás más sobre la generación de mosaicos.

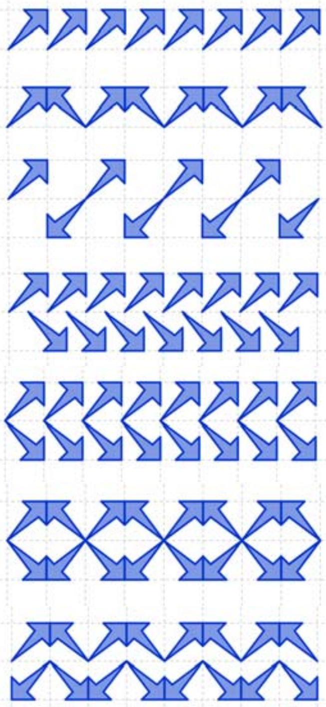
Cristales

Igual que en el plano sólo existen 17 posibles diseños de mosaicos, en el espacio existen 230 posibles tipos de diseños cristalográficos que compacten el espacio.

Frisos

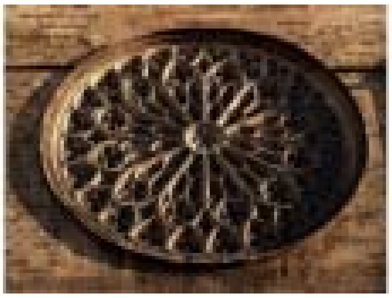
Las cenefas, puntillas…, en las rejas, en… podemos ver diseños que se repiten a lo largo de una línea por traslación. Se ha demostrado que sólo hay 7 formas distintas de hacer esos diseños utilizando, además de las traslaciones, giros y simetrías.



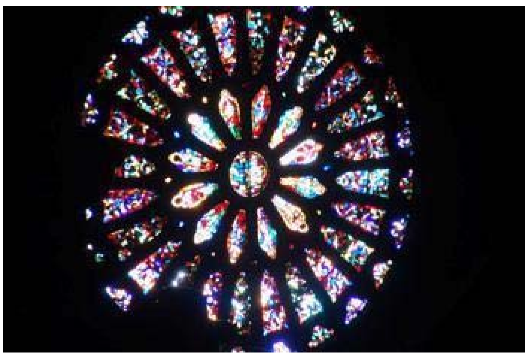


Para ser matemático hay que ser poeta. *Sonya Kovalevkaya.*

Rosetones



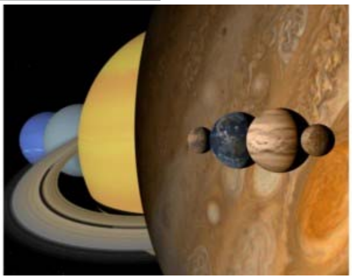
Giros y simetrías pasando todos por un centro. Así se diseñan los rosetones. Si sólo hay giros se llaman C_n, siendo C_2 si sólo tiene un giro de 180º, C_3 si lo tiene de 120º… El tapacubos de abaj es, por tanto, un C_5. Y si tiene simetrías, se llaman D_n como los rosetones que vemos que son D_{12} o D_{16}. Busca en Internet "grupos de Leonardo" y verás más cosas sobre ellos



Todo se mueve.

Te mueves no sólo cuando andas o vas en coche. Cuando estás quieto también te mueves. Todo se mueve en el Universo. La Tierra gira alrededor de su eje. El radio de la Tierra es de 6.400 km, por lo que la longitud del Ecuador terrestre es de $2\pi r$ = 40.192 km. Tarda 24 horas en dar una vuelta, luego 40192/24 = 1674,67, por lo que si estuvieras en el Ecuador estarías moviéndote a una velocidad aproximada de 1.675 km/h.

La Tierra gira alrededor del Sol. Tarda aproximadamente 365 días en dar una vuelta completa. Ahora viajamos a 107.000 km/h girando alrededor del Sol.



Planetas del Sistema Solar

Imagen en infrarrojos del centro de la Vía Láctea

El Sol se mueve dentro de nuestra galaxia, donde también gira a una velocidad de 810.000 km/h alrededor el centro de la galaxia. El Sol está a 27.000 años luz del centro de nuestra galaxia y tarda 200 millones de años en dar una vuelta.

Galaxia Andrómeda

Nuestra galaxia, la Vía Láctea, también se mueve. Se aproxima a la Galaxia Andrómeda a una velocidad de 230.000 km/h.

¡Mareo me da el pensar a qué velocidad me estoy moviendo!

Capítulo 9: Geometría en el espacio. Globo terráqueo

CURIOSIDADES Y REVISTA.

Resumen

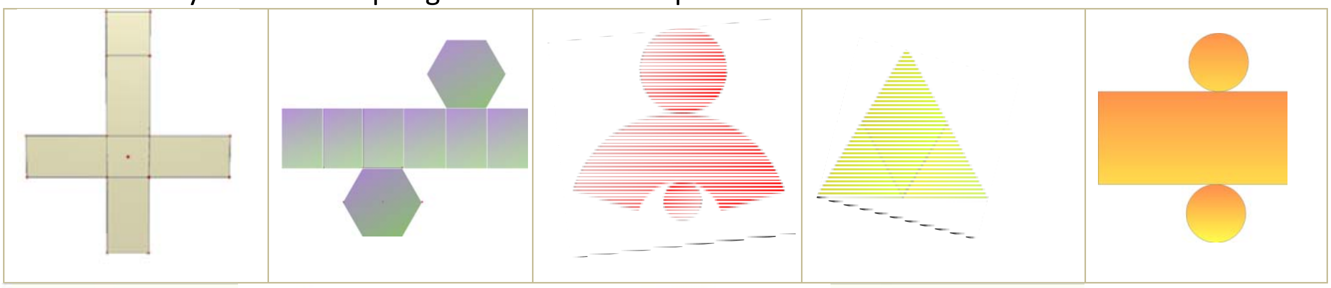
Muchas plantas distribuyen sus flores en forma esférica buscando un aprovechamiento óptimo del espacio. El átomo de hierro dispone sus electrones en forma de cubo, los sistemas de cristalización de los minerales adoptan formas poliédricas, los panales de las abejas son prismas hexagonales. Éstos son algunos ejemplos de la presencia de cuerpos geométricos en la naturaleza.

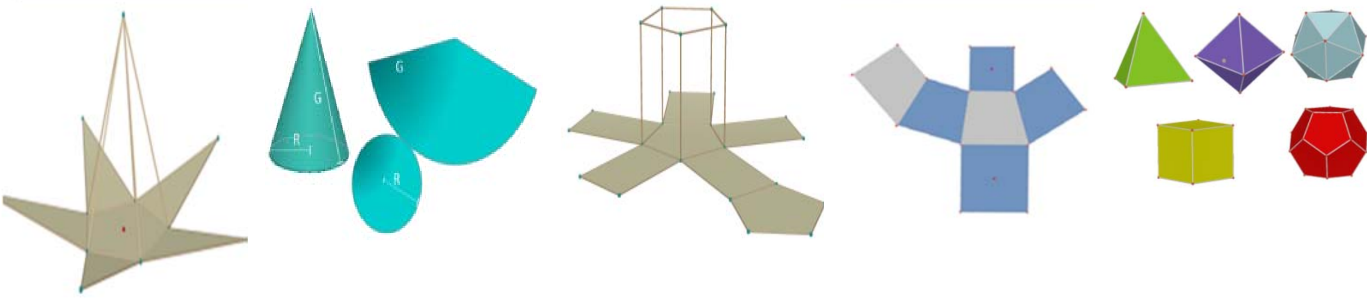
Nos movemos en el espacio, caminamos sobre un plano, observamos la línea del horizonte, habitamos y nos movemos habitualmente en poliedros. La información que percibimos por medio de nuestros sentidos la interpretamos en términos geométricos. Precisamos de las fórmulas de áreas y volúmenes de los cuerpos geométricos para calcular las medidas de los muebles que caben en nuestro salón, o para hacer un presupuesto de la reforma de nuestra vivienda.

La Geometría es una de las ramas más antiguas de las Matemáticas y su estudio nos ayuda a interpretar mejor la realidad que percibimos. En este tema recordarás las fórmulas que estudiaste ya el año pasado y profundizarás sobre sus aplicaciones en la vida real.

ORIGEN DE LA IMAGEN: WIKIPEDIA

- Construye tantos cuerpos geométricos como puedas:





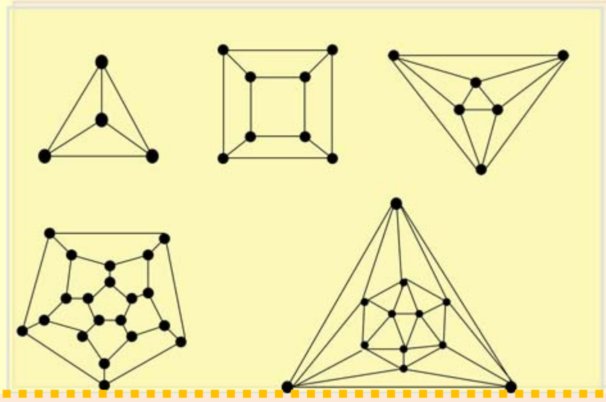

Arquímedes pensativo y ***Cicerón y los magistrados descubriendo la tumba de Arquímedes en Siracusa***
ORIGEN DE LAS IMÁGENES: WIKIPEDIA

Arquímedes (287 a.C.- 212 a.C.) Matemático, ingeniero, físico, realizó múltiples aportaciones a la ciencia. Entre otras y como has estudiado en este tema, la demostración de las fórmulas del área y volumen de una esfera. Se dice que resultaron sus descubrimientos favoritos. En su tumba se grabaron un cilindro con una esfera inscrita como homenaje.

Alicia Boole Stott
ORIGEN DE LA IMAGEN: WIKIPEDIA

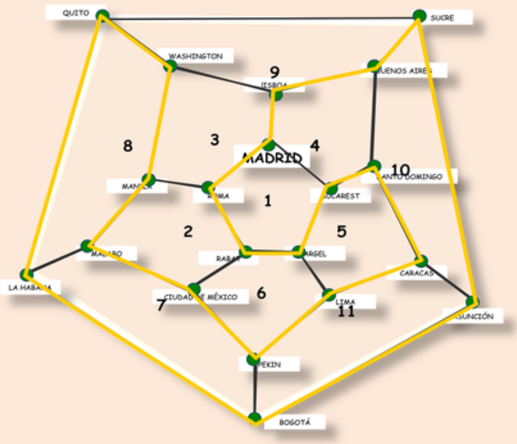
Alicia Boole Stott, (1860 - 1940) hija del matemático George Boole, destacó por su maravillosa capacidad para visualizar la cuarta dimensión. Calculó y representó las secciones de los llamados ***politopos regulares de dimensión 4***, objetos geométricos equivalentes, en un espacio de cuatro dimensiones, a los polígonos regulares en el plano o a los poliedros regulares en el espacio.

Los poliedros regulares pueden ser "aplastados" sobre un plano, eligiendo una cara y proyectando los lados del poliedro desde un punto por encima del centro de esta cara. La figura que se obtiene se llama diagrama de Schlegel. Estos diagramas son ejemplos de grafos. Gran parte de las propiedades de los poliedros se conservan en ellos y ayudan a que muchos problemas se resuelvan con facilidad.

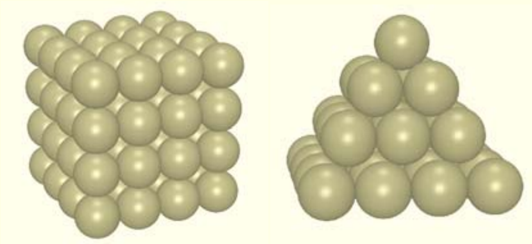


En 1859 Hamilton ideó el siguiente juego: Dado un dodecaedro, si en cada uno de sus vértices se pone el nombre de una ciudad, ¿es posible encontrar un circuito cerrado a través de las aristas del dodecaedro que pase una sola vez por cada ciudad?

Gracias al grafo del dodecaedro, es muy sencillo resolver el problema



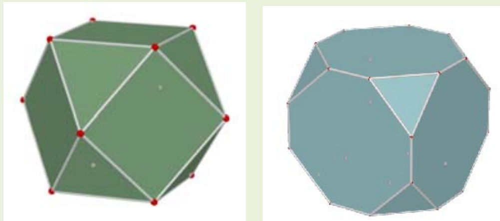
El matemático inglés **Thomas Harriot** (1560-1621), planteó el problema del ***empaquetamiento de esferas*** que estriba en encontrar la forma de apilar esferas del mismo radio de modo que el espacio comprendido entre ellas sea mínimo. El astrónomo alemán **Johannes Kepler** (1571-1630) lo resolvió, llegando a la conclusión de que la mejor colocación era la que entonces se hacía espontáneamente en los barcos para apilar las balas de cañón o la que utilizan los tenderos para apilar las naranjas en los puestos del mercado.



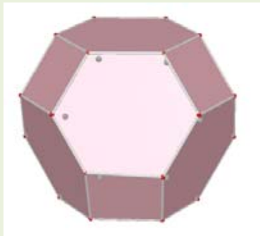
Un anillo de tetraedros o caleidociclo es un anillo tridimensional compuesto por tetraedros unidos por sus aristas. Pueden girar sobre sí mismos en torno a su centro infinitas veces sin romperse ni deformarse.

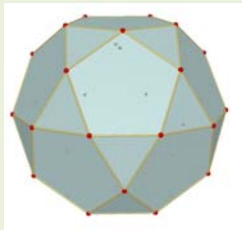
Entre los materiales encontrarás un a plantilla para construir uno con las imágenes de algunas mujeres matemáticas celébres.

Los ***sólidos arquimedianos*** o **sólidos de Arquímedes** son un grupo de poliedros convexos cuyas caras son polígonos regulares de dos o más tipos. En todos los sólidos de Arquímedes concurren el mismo número de caras en cada vértice y con las mismas formas. Algunos de ellos se obtienen truncando los sólidos platónicos (poliedros regulares).



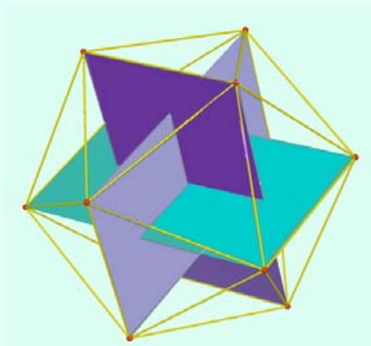
Cubos truncados





Octaedro truncado *Dodecaedro truncado*

Los vértices del icosaedro determinan 3 rectángulos áureos perpendiculares dos a dos. En el icosaedro podemos encontrar un total de 15 rectángulos áureos. Cada uno de ellos tiene dos lados paralelos que son aristas opuestas del poliedro.

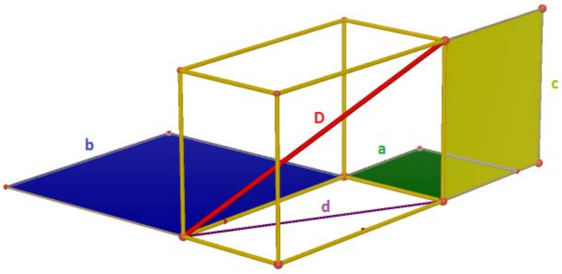


TEOREMA DE PITÁGORAS EN EL ESPACIO

Si un ortoedro tiene aristas de longitudes *a*, *b*, *c*, según el teorema de Pitágoras, en el espacio, la suma de los cuadrados de las aristas, coincide con el cuadrado de la diagonal, *D*, del ortoedro:

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

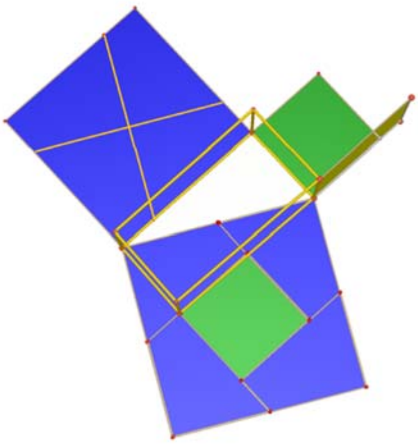
Como consecuencia, la suma de las áreas de los cuadrados de lados iguales a las aristas, coincide con el área del cuadrado que tiene como lado la diagonal del ortoedro.



Construiremos un rompecabezas, basado en la demostración que *Perigal* ideó para demostrar el teorema de Pitágoras en el plano. Hay que aplicar dos veces su método y encontraremos las piezas clave que demuestran el teorema en el espacio.

Al trazar la diagonal *d* de la base, queda dividida en dos triángulos rectángulos de catetos *a* y *b*.

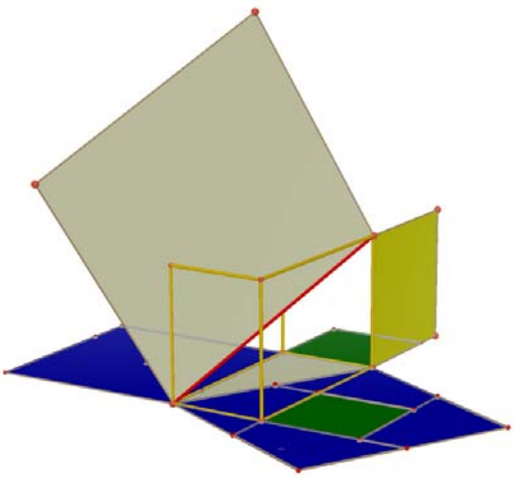
Construimos el cuadrado sobre su hipotenusa y las piezas de *Perigal* que demuestran el teorema de Pitágoras en uno de estos triángulos.

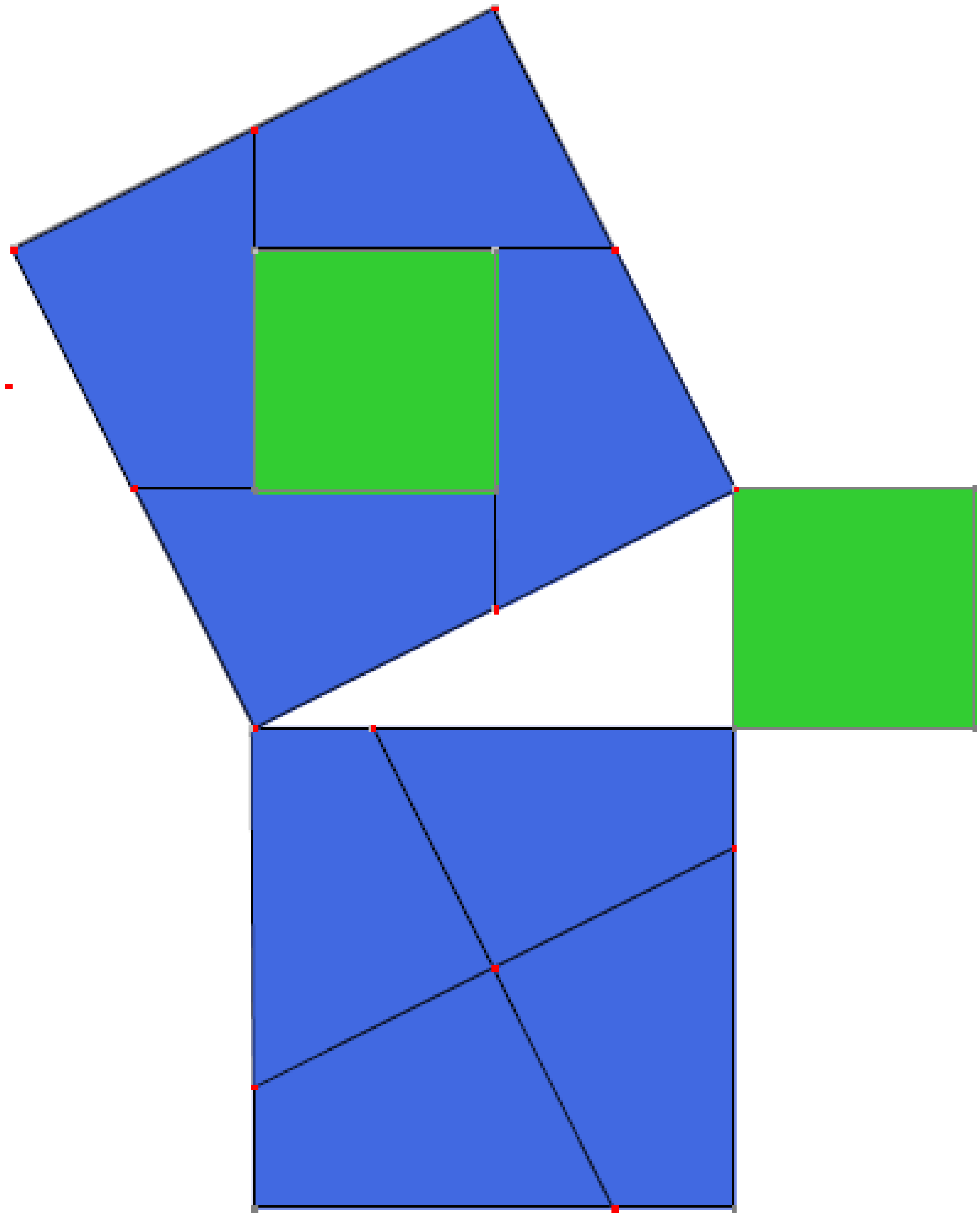


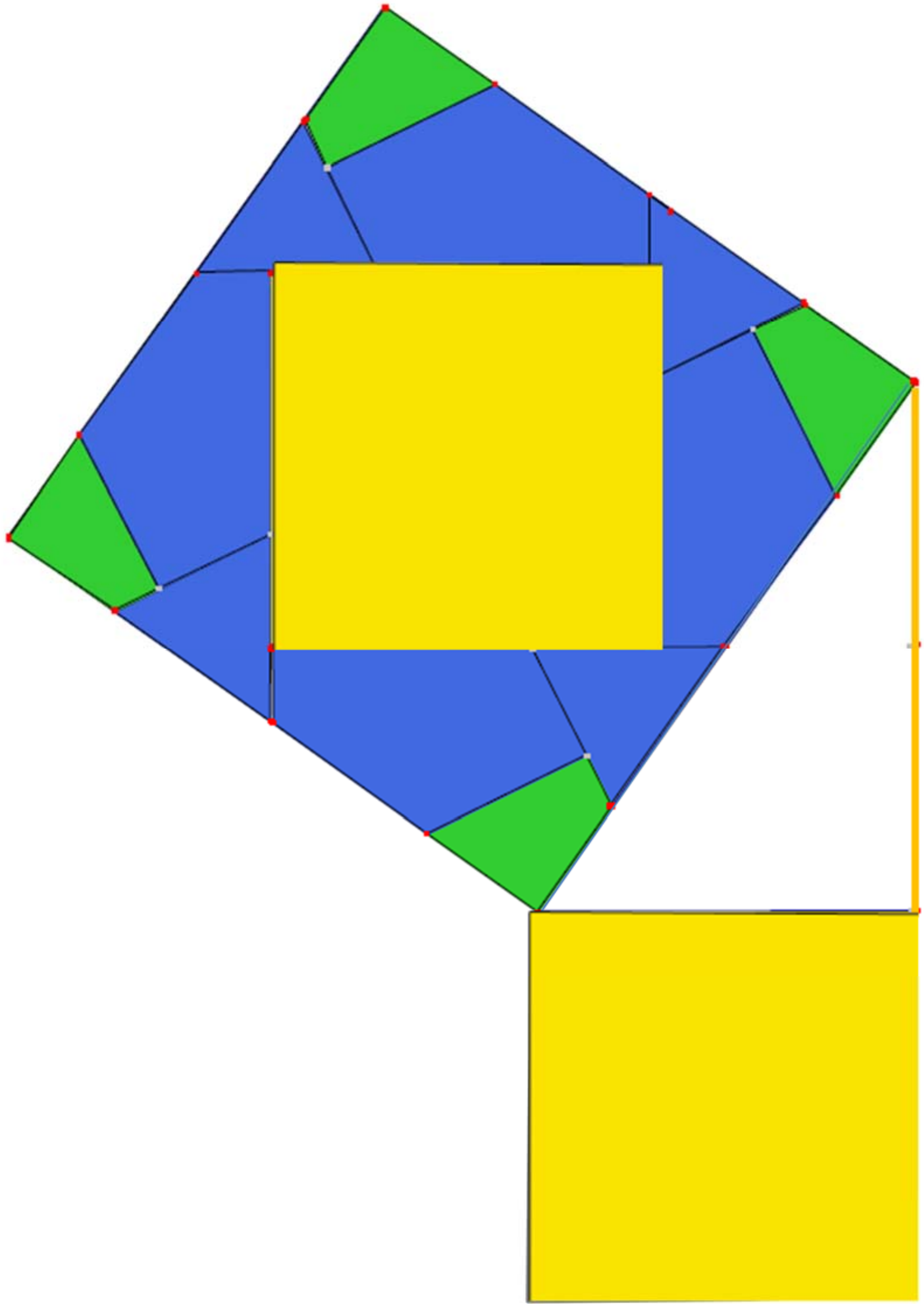
Para ello en el cuadrado construido sobre el cateto mayor (en nuestra figura, *b* de color azul) y, por su centro, trazamos dos segmentos uno paralelo y otro perpendicular a la hipotenusa, de modo que ambos corten a los dos lados del cuadrado. El cuadrado queda dividido en cuatro piezas exactamente iguales que junto con el cuadrado de lado *a*, recubren el cuadrado de lado *d*.

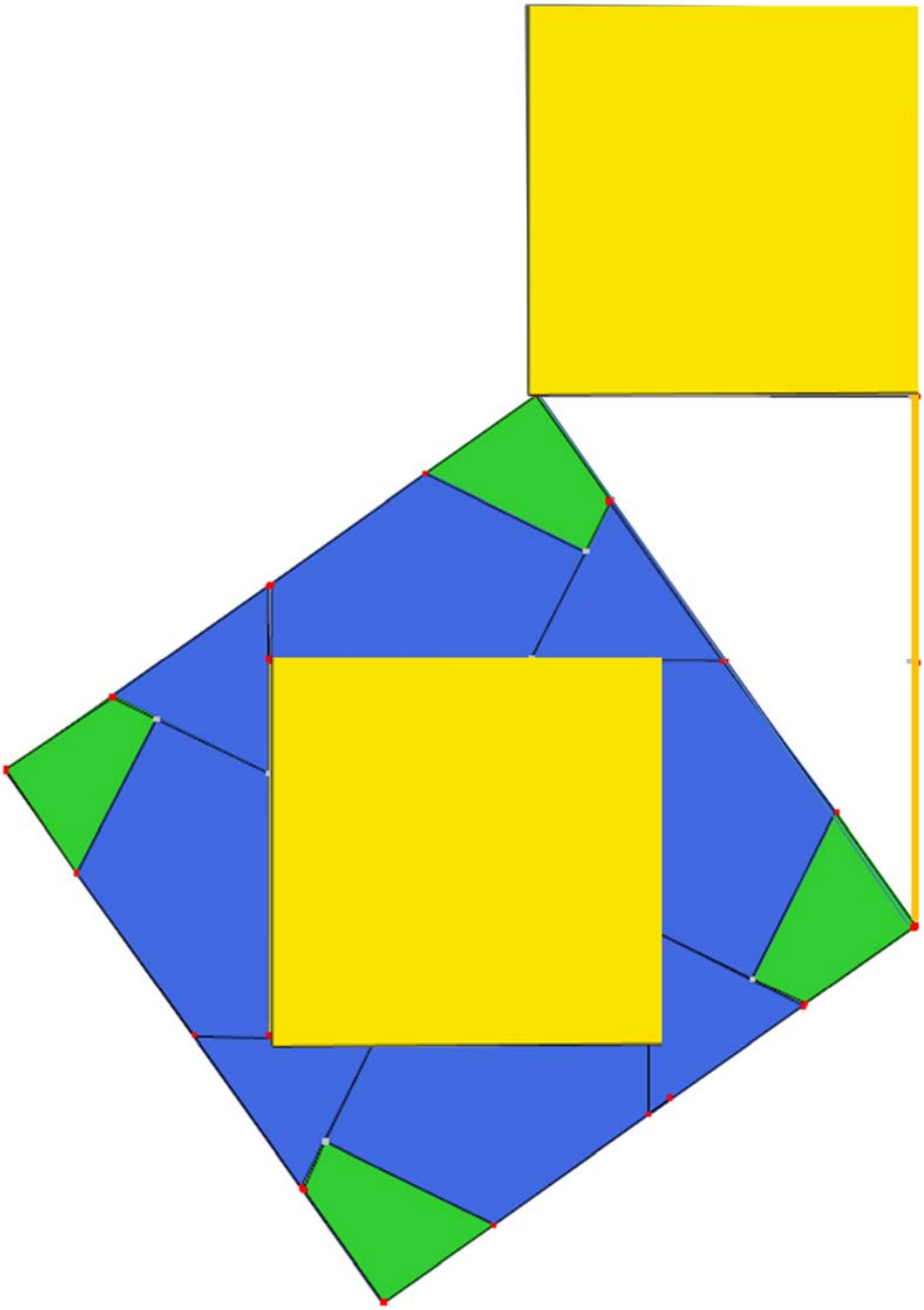
Ahora hay que fijarse en el triángulo rectángulo de catetos *c, d* y cuya hipotenusa es *D* y repetir el proceso anterior, eso sí utilizando el cuadrado de lado *d* recubierto con las piezas azules y el cuadrado verde.

En las páginas siguientes encontrarás las láminas que te permiten construir tu propia demostración. Únicamente tienes que recortar las dos últimas, pegarlas una contra otra y construir un ortoedro con alambre que tenga como dimensiones las longitudes de los lados de los cuadrados verde, azul y amarillo.









Globo terráqueo y esfera celeste en el siglo XVII

Durante la Revolución Científica avanzó la cosmografía y se utilizaron nuevos instrumentos para medir y conocer mejor la naturaleza. Conocer mejor nuestro mundo, después de los descubrimientos portugueses y españoles del siglo XV, era una necesidad para gobernar los amplios nuevos territorios.

En el Museo Arqueológico Nacional de Madrid, en la sala 29, hay un globo terrestre y una esfera celeste.

En los siglos XVII y XVIII, la información contenida en una pareja de globos como éstos representaba una síntesis de los conocimientos geográficos y astronómicos de la época, útil para navegantes, cartógrafos, historiadores, matemáticos, exploradores...

El globo celeste es un catálogo de estrellas fijas agrupadas bajo el signo de la constelación a la que pertenecen. Esta esfera recoge las estrellas observadas por el gran astrónomo **Ticho Brahe**.

El globo terráqueo es un mapa redondo en el que se muestra la distribución de los mares y continentes. Una representación tridimensional de la Tierra

El periodo de mayor auge de fabricación de estos globos fue el comprendido entre 1500 y 1850. En aquélla época, eran el principal medio de cultura geográfica existente al menos durante unos 300 años e iban acompañados de un libro de instrucciones.

La historia de los globos celestes está unida a la de la Astronomía pues facilitaban la explicación de los movimientos de las estrellas.
Los globos celestes se podía utilizar también para demostrar, la igualdad entre el día o la noche en cualquier latitud cuando el sol se encuentra en uno de los equinoccios; el día más largo y más corto del año en un determinado punto geográfico; la posición del sol respecto a distintas latitudes, etc.

El globo terráqueo de 68 cm de diámetro conservado en el MAN está formado por una esfera en la que se muestra la distribución de los mares y continentes, con una escala métrica vertical de metal en torno a él.
Recoge los descubrimientos holandeses en el Pacífico en el momento de su construcción. Acompaña la información del globo algunas representaciones de elementos reales (navíos, rosas de los vientos, etc.) y de personajes fantásticos y legendarios.

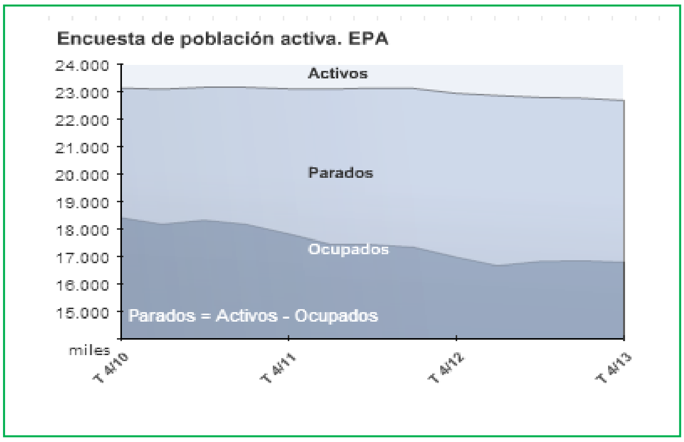
Se construyeron hacia 1645 – 48.

Capítulo 10: Funciones y gráficas

CURIOSIDADES Y REVISTA.

Resumen

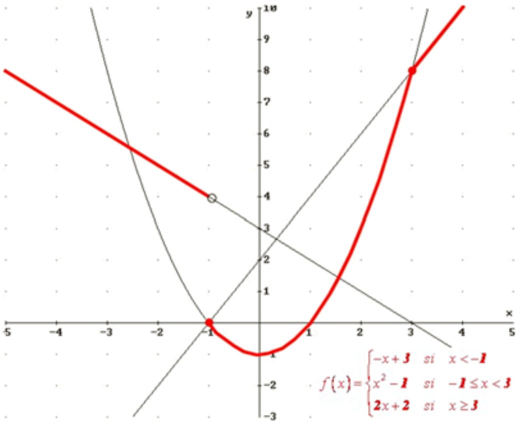
El concepto de función es bastante abstracto, lo que hace complicada su definición y comprensión. Sin embargo, sus aplicaciones son múltiples y muy útiles, lo que las hace muy importantes.

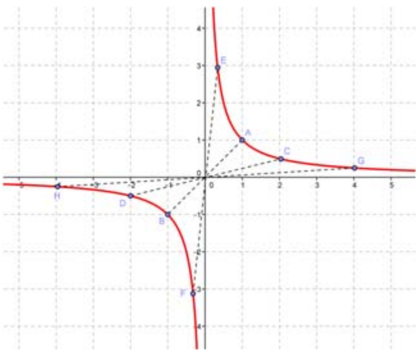


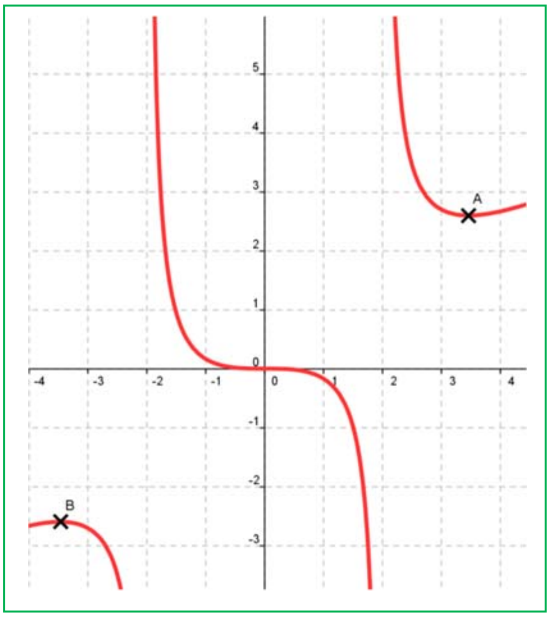
Por ejemplo, las funciones sirven para poder explicar muchos fenómenos que ocurren en campos tan diversos como la Física, la Economía o la Sociología.

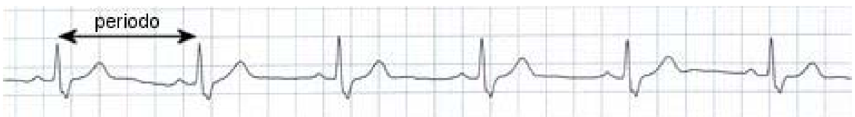
A pesar de las dificultades, algunas características que poseen las funciones se entienden fácilmente cuando se representan gráficamente, por resultar entonces muy intuitivas, y eso es suficiente para poder analizar y resolver muchas cuestiones. Por ejemplo, si observamos la gráfica anterior no es difícil interpretar si el paro ha subido o si ha bajado en el cuarto trimestre entre dos años consecutivos, o globalmente a lo largo del periodo completo estudiado, o calcular dicho incremento/disminución o estudiar en qué año hubo más personas ocupadas o menos personas activas...

- Algunas funciones que vamos a estudiar:

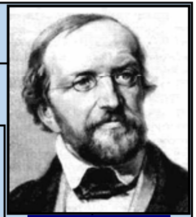








Dirichlet



Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (13/02/1805–5/5/1859) fue un matemático alemán al que se le atribuye la definición "formal" moderna de *función*.
Dirichlet nació en Düren, donde su padre era el jefe de la oficina de correos. Fue educado en Alemania y, después, en Francia, donde aprendió de algunos de los más renombrados matemáticos de su época, relacionándose con algunos como Fourier.
Fueron estudiantes suyos Leopold Kronecker y Rudolf Lipschitz. Tras su muerte, su amigo y colega matemático Richard Dedekind recopiló, editó y publicó sus lecciones y otros resultados en teoría de números.

Una versión simple de la ***función de Dirichlet*** se define como:

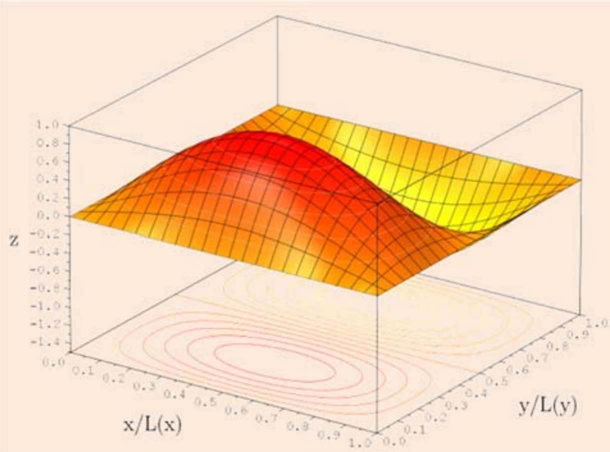
$$D(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in\mathbb{Q} \quad \text{(x es racional)}\\ 0 & \text{si } x\in I \quad \text{(x es irracional)}\end{cases}$$

Esta función tiene la “curiosa” propiedad de que es discontinua para cualquier valor que le demos a la variable independiente.

Nikki Grazziano: “Funciones y fotografía”

Nikki ha encontrado una forma de reunir sus dos intereses, matemáticas y fotografías de la naturaleza, en una serie de imágenes llamada **Found Functions** en las que superpone gráficas generadas mediante fórmulas matemáticas a fotografías tomadas por ella.
Pero lo original es que no busca imágenes que puedan adaptarse a ciertas fórmulas, sino que cuando tiene una fotografía que le gusta es cuando busca y ajusta la fórmula necesaria para generar que la representación gráfica se adapte.
Una curiosa forma de aprender matemáticas y ver que todo se puede representar con ellas.
Si quieres consultar más y ver las fotografías (que tienen copyright), visita la página:
http://www.nikkigraziano.com/index.php/project/found-functions/

FUNCIONES 3D



Cuando la relación funcional se establece entre tres variables, la gráfica se tiene que hacer en tres dimensiones, lo que la hace más compleja de representar pero más llamativa. Los ordenadores son de gran ayuda para hacerlas y verlas desde distintos puntos de vista. Sirven para realizar modelos muy reales de multitud de situaciones tridimensionales.

Capítulo 11: Estadística y probabilidad

CURIOSIDADES Y REVISTA.

Resumen

La Estadística es una ciencia que surgió para llevar la contabilidad del Estado. De ahí viene su nombre. En el s XX se desarrollaron sus técnicas y se separó de las Matemáticas, pasando a ser una ciencia con entidad propia. En los medios de comunicación encontramos frecuentes estadísticas. En medicina se necesitan métodos estadísticos para probar nuevos medicamentos. En todo experimento científico, tras la recogida de datos, se necesita utilizar pruebas estadísticas que permitan sacar información de esos datos.

El que es capaz de calcular probabilidades rápidamente tiene ventaja en algunos juegos en los que se mezcla azar con estrategia. Por ejemplo, juegos de cartas o de dominó. Si sabemos qué cartas o fichas se han jugado podemos estimar la probabilidad de que otro jugador tenga una determinada jugada. Obviamente en esos casos no *cuantificamos* (no hacemos los cálculos exactos) pero sí que *estimamos* si tenemos la probabilidad a nuestro favor o en nuestra contra.

Para aprender más…

Jerónimo Cardano (1501-1576) fue un personaje inquieto y prolífico. Además de dedicarse a las matemáticas era médico, pero también era un jugador. De hecho él fue quien escribió el primer trabajo que se conoce sobre juegos de azar. Un siglo después el Caballero de Meré, un conocido jugador, planteó a Blas Pascal diversos problemas que le aparecían en sus partidas. Uno de los problemas que le planteó es el del reparto de las ganancias cuando una partida se tiene que interrumpir. Este problema ya había sido tratado con anterioridad por Luca Pacioli (el matemático que inventó la tabla de doble entrada para ayudar a los Medici a llevar la contabilidad de su Banca).

Un problema resuelto: Las tres ruletas

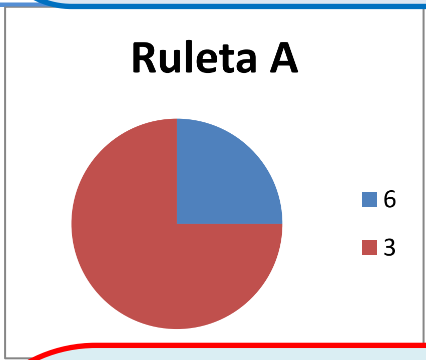
Disponemos de tres ruletas A, B y C cada una de ellas dividida en 32 sectores iguales con distintos puntos:

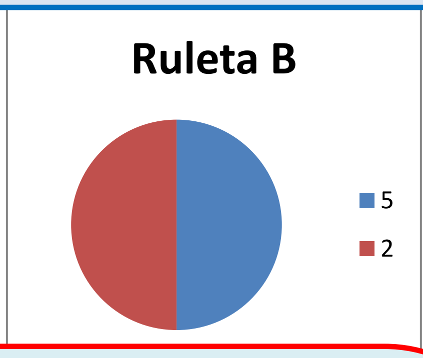
A: 8 sectores con la cifra 6 y 24 sectores con la cifra 3.

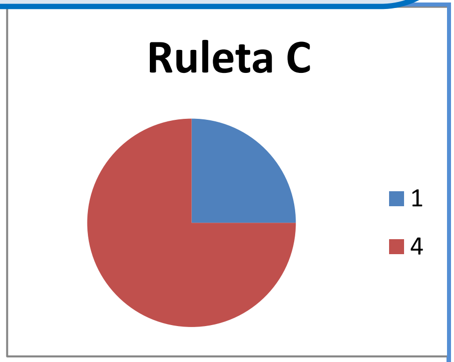
B: 16 sectores con la cifra 5 y 16 sectores con la cifra 2.

C: 8 sectores con la cifra 1 y 24 sectores con la cifra 4.

Dos jugadores seleccionan una ruleta cada uno. Gana quien obtenga mayor puntuación con la ruleta. **¿Quién tiene ventaja al elegir ruleta, la persona que elige primero o la que elige en segundo lugar?**







Solución: "Las tres ruletas"

Haz un **diagrama de árbol** y comprueba que:

Jugando con la Ruleta A y la Ruleta B.

$$P(\text{ganar A}) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{8} \qquad P(\text{ganar B}) = \frac{25}{32}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

Gana el que juega con la Ruleta A.

Jugando con la Ruleta A y la Ruleta C.

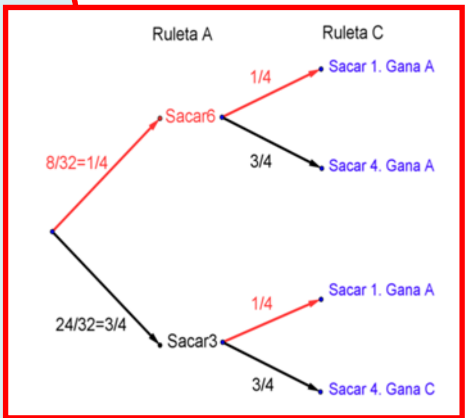
$$P(\text{ganar A}) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{7}{16} \qquad P(\text{ganar C}) = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

Gana el que juega con la Ruleta C.

Jugando con la Ruleta B y la Ruleta C

$$P(\text{ganar B}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{5}{8} \qquad P(\text{ganar C}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

Gana el que juega con la Ruleta B.



Gana el jugador que elige en segundo lugar:

Si el primero elige la Ruleta A → El segundo elige la Ruleta C y gana.

Si el primero elige la Ruleta B → El segundo elige la Ruleta A y gana

Si el primero elige la Ruleta C → El segundo elige la Ruleta B y gana

Breve historia de la Probabilidad

Jerónimo Cardano (1501-1576) fue un personaje inquieto y prolífico. Además de dedicarse a las matemáticas era médico, pero también era un jugador. De hecho él fue quien escribió el primer trabajo que se conoce sobre juegos de azar.

Un siglo después el Caballero de Mérè le planteó a Blaise Pascal algunos problemas sobre **juegos** como el siguiente:

- Un jugador intenta obtener un 1 en 8 lanzamiento sucesivos de un dado, pero el juego se interrumpe después de 3 lanzamientos fallidos. ¿En qué proporción ha de ser compensado el jugador?

Pascal escribió a Fermat sobre este problema y la correspondencia intercambiada se puede considerar como el inicio de la Teoría de Probabilidades, pero no publicaron por escrito sus conclusiones. Este problema ya había sido tratado con anterioridad por Luca Pacioli (el matemático que inventó la tabla de doble entrada para ayudar a los Medici a llevar la contabilidad de su Banca).

Huygens en 1657 publicó un breve escrito "*Los juegos de azar*" donde narra dicha correspondencia.

Pero el primer libro sobre Probabilidad es de 1713 de Jacques Bernoulli, "*El arte de la conjetura*".

En él se enuncia la **ley de los grandes números** que viene a decir que *la probabilidad de un suceso se acerca a las frecuencias relativas cuando el número de experimentos es grande*. Conocer esto llevó a grandes jugadores a ganar en el Casino de Montecarlo, como se narra más abajo.

La Estadística y La Probabilidad se usaron en problemas sociales como defender la **vacunación de la viruela**, la educación pública… en la Ilustración Francesa.

Hasta aquí, ya sabes resolver todos los problemas históricos. Pero hay otros más difíciles, que requieren más conocimientos de Matemáticas, como el de la **aguja de Buffon**, que se ha utilizado para calcular cifras de π:

La ruleta

William Jaggers llegó a Montecarlo con unos pocos francos e el bolsillo y, durante un mes anotó los números que salían e cada ruleta, y en cuatro días ganó dos millones cuatrociento mil francos. *Jaggers* consiguió quebrar a la banca en *Monte carlo* analizando las frecuencias relativas de cada número de l ruleta y observando que se había desgastado algo del meca nismo de una de ellas, con lo que todos los valores no tenía igual probabilidad. Apostó a los números más probables y ganó.

Luca Pacioli

Luca Pacioli (1445 – 1517), de nombre completo **Fray Luca Bartolomeo de Pacioli** o **Luca di Borgo San Sepolcro**, cuyo apellido también aparece escrito como ***Paccioli*** y ***Paciolo*** fue un fraile franciscano y matemático italiano, precursor del cálculo de probabilidades. Ya hemos hablado de él en estas revistas por sus trabajos sobre la proporción áurea o divina proporción como él la llamó.

Escribió un libro con 36 capítulos sobre **contabilidad** donde utiliza la partida doble o tabla de doble entrada para ayudar a los Medici a llevar la contabilidad de su Banca, define sus reglas, tales como no hay deudor sin acreedor, o que la suma de lo que se adeuda debe ser igual a lo que se abona. No fue su inventor, pero sí su divulgador.

Ducado

El problema enunciado y resuelto por Pacioli es éste:

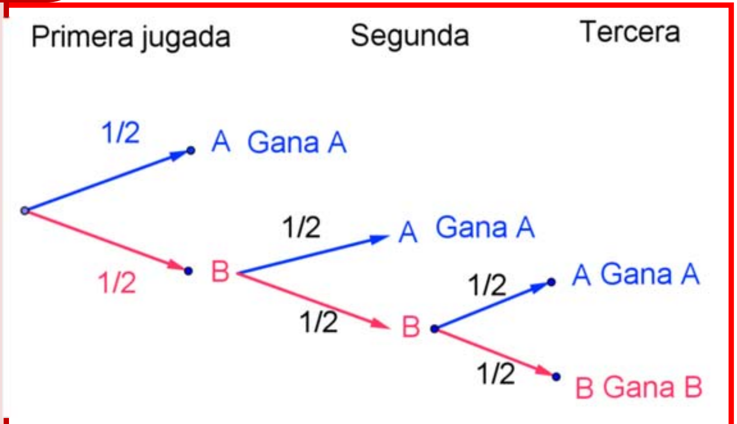
- Dos equipos juegan a la pelota de modo que gana el juego el primer equipo que gana 6 partidos. La apuesta es de 22 ducados, que se los llevará el ganador. Por algún motivo hay que interrumpir el juego cuando un equipo ha ganado 5 partidos y el otro 3. Se quiere saber cómo repartir los 22 ducados de la apuesta, de un modo justo.

Luca sabía de proporciones, y la solución que dio hoy no se considera válida. ¡No sabía probabilidades! Pero tú, sí.

Partimos de la hipótesis de que cada uno de los jugadores tiene la misma probabilidad de ganar: 1/2. Llamamos A al jugador que ya he ganado 5 partidas y B al que lleva ganadas 3.

Si hicieran una nueva partida podría ganar A con probabilidad 1/2 o B con igual probabilidad. Si gana A ya se lleva la bolsa. Si gana B entonces B llevaría 4 jugadas ganadas y A 5. Se continúa el juego. Puede ganar A o B. Observa el diagrama de árbol.

La probabilidad de que gane B es (1/2)·(1/2)·(1/2) = 1/8, y la de que gane A es 7/8.



¿Cómo repartirías los 22 ducados?