MATEMÁTICAS II

Selectividad 2015

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
PROBLEMAS RESUELTOS DE TODAS LAS COMUNIDADES AUTÓNOMAS

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

Textos Marea Verde

Antes Selectividad, ahora tiene distintos nombres:

ABAU (Galicia),

EAU (País Vasco),

EBAU (Asturias, Cantabria, Castilla y León, Extremadura, Islas Canarias, La Rioja y Murcia),

EvAU (Aragón, Castilla-La Mancha y Navarra),

EVAU (Madrid),

PAU (Cataluña y Valencia) ,

PBAU (Islas Baleares) o

PevAU (Andalucía): Prueba de acceso y admisión a la Universidad

TEXTOS MAREA VERDE

I.S.B.N. - 13: 978-84-608-8980-9

I.S.B.N. - 10: 84-608-8980-9

Textos Marea Verde

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA

JUNIO – 2015

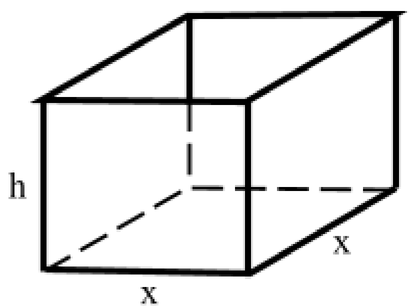
(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Instrucciones: Tienes que elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**. Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

OPCIÓN A

1º) Se quiere construir un depósito abierto de base cuadrada y paredes verticales con capacidad de 13,5 m^3. Para ello se dispone de una chapa de acero de grosor uniforme. Calcula las dimensiones del depósito para que el gasto de chapa sea el mínimo posible.



$V = x^2 \cdot h = 13,5 \Rightarrow h = \frac{13,5}{x^2}.$ (*)

$S = x^2 + 4 \cdot x \cdot h.$

Sustituyendo el valor de h obtenido en (*):

$$S(x) = x^2 + 4 \cdot x \cdot \frac{13,5}{x^2} = x^2 + \frac{54}{x} = \frac{x^3+54}{x}.$$

Para que la superficie sea mínima es condición necesaria que su primera derivada sea cero:

$$S'(x) = \frac{3x^2 \cdot x - \left(x^3+54\right) \cdot 1}{x^2} = \frac{3x^3 - x^3 - 54}{x^2} = \frac{2x^3-54}{x^2}.$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^3-54}{x^2} = 0;\ 2x^3 - 54 = 0;\ x^3 = 27 = 3^3 \Rightarrow x = 3.$$

$h = \frac{13,5}{3^2} = \frac{13,5}{9} \Rightarrow h = 1,5.$

$\underline{El\ gasto\ de\ chapa\ es\ mínimo\ para\ 3\ m\ de\ lado\ de\ la\ base\ y\ 1,5\ m\ de\ altura}.$

Justificación de que se trata de un mínimo:

Una función tiene un mínimo relativo cuando su segunda derivada es positiva para los valores que anulan su primera derivada:

$$S''(x) = \frac{6x^2 \cdot x^2 - \left(2x^3 - 54\right) \cdot 2x}{x^4} = \frac{6x^3 - 2\left(2x^3 - 54\right)}{x^3} = \frac{6x^3 - 4x^3 + 108}{x^3} = \frac{2x^3 + 108}{x^3}.$$

$$S''(3) = \frac{2 \cdot 3^3 + 108}{3^3} > 0 \Rightarrow \underline{Mínimo,\ como\ se\ quería\ justificar}.$$

****

2º) Calcula $\int \frac{-x^2}{x^2+x-2} \cdot dx$.

$$I = \int \frac{-x^2}{x^2+x-2} \cdot dx = -\int \frac{x^2}{x^2+x-2} \cdot dx = -\int \frac{x^2+x-2+(-x+2)}{x^2+x-2} \cdot dx =$$

$$= -\int \frac{x^2+x-2}{x^2+x-2} \cdot dx - \int \frac{-x+2}{x^2+x-2} \cdot dx = -\int dx + \int \frac{x-2}{x^2+x-2} \cdot dx = -x + A. \qquad (*)$$

$$A = \int \frac{x-2}{x^2+x-2} \cdot dx.$$

$$x^2 + x - 2 = 0; \ \ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = -2, \ x_2 = 1.$$

$$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1).$$

$$\frac{x-2}{x^2+x-2} = \frac{M}{x+2} + \frac{N}{x-1} = \frac{Mx-M+Nx+2N}{(x+2)(x-1)} = \frac{(M+N)x+(-M+2N)}{x^2+x-2} \Rightarrow \ M + N = 1 \ \ -M + 2N =$$

$$\Rightarrow 3N = -1; \ \ N = -\frac{1}{3}; \ \ M - \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow M = \frac{4}{3}.$$

$$A = \int \frac{x-2}{x^2+x-2} \cdot dx = \int \left(\frac{\frac{4}{3}}{x+2} + \frac{-\frac{1}{3}}{x-1} \right) \cdot dx = \frac{4}{3} \cdot L|x + 2| - \frac{1}{3} \cdot L|x - 1| + C =$$

$$= L\sqrt[3]{\frac{(x+2)^4}{|x-1|}} + C.$$

Sustituyendo en (*) el valor de A obtenido:

$$\underline{\int \frac{-x^2}{x^2+x-2} \cdot dx = -x + L\sqrt[3]{\frac{(x+2)^4}{|x-1|}} + C.}$$

****

3º) Considera el sistema de ecuaciones $\lambda x + y - z =- 1 \quad \lambda x + \lambda z = \lambda \quad x + y - \lambda z = 0 \}$.

a) Discute el sistema según los valores de λ.

b) Resuelve el sistema para λ = 0.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A = (\lambda\, 1 \ -\ 1\, \lambda\, 0\, \lambda\, 1\, 1 \ -\ \lambda\,)$ y $A' = (\lambda\, 1 \ -\ 1\, \lambda\, 0\, \lambda\, 1\, 1 \ -\ \lambda \quad -\ 1\, \lambda\, 0\,)$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro λ es el siguiente:

$|A| = |\lambda\, 1 \ -\ 1\, \lambda\, 0\, \lambda\, 1\, 1 \ -\ \lambda\,| = \lambda - \lambda - \lambda^2 + \lambda^2 = 0,\ \forall\lambda\in R \Rightarrow Rang\ A < 3$

.

Considerando los menores de A $|1 \ -\ 1\ 0\, \lambda\,|$ y $|1 \ -\ 1\, 1 \ -\ \lambda\,|$, el primero es distinto de 0 para $\lambda\neq 0$ y el segundo es distinto de 0 para $\lambda = 0$, lo que implica que $Rang\ A = 2$.

El rango de A' en función de $\lambda\neq 0$ o $\lambda = 0$ es el siguiente:

Para

$\lambda\neq 0 \Rightarrow A' = (\lambda\, 1 \ -\ 1\, \lambda\, 0\, \lambda\, 1\, 1 \ -\ \lambda \quad -\ 1\, \lambda\, 0\,) \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \left(C_1,\ C_2,\ C_4\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow |\lambda\, 1 \ -\ 1\, \lambda\, 0\, \lambda\, 1\, 1\, 0\,| = \lambda - \lambda - \lambda^2 =- \lambda^2 \neq 0 \Rightarrow Rang\ A' = 3.$

$\underline{Para\ \lambda\neq 0 \Rightarrow Rang\ A = 2;\ Rang\ A' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible}.$

Para $\lambda = 0 \Rightarrow A' = (0\, 1 \ -\ 1\, 0\, 0\, 0\, 1\, 1\, 0 \quad -\ 1\, 0\, 0\,) \Rightarrow Rang\ A' = 2.$

$\underline{Para\ \lambda = 0 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

b)

Para $\lambda = 0$ el sistema resulta: $y - z =- 1 \quad 0 + 0 = 0 \quad x + y = 0 \}$, equivalente a $y - z =- 1 \quad x + y = 0 \}$, que es compatible indeterminado. Haciendo $y = \lambda$, resulta:

$\underline{Solución: x =- \lambda,\ y = \lambda,\ z = 1 + \lambda,\ \forall\lambda\in R}.$

****

4º) Sean los puntos $A(0,\ 1,\ 1)$, $B(2,\ 1,\ 3)$, $C(-\ 1,\ 2,\ 0)$ y $D(2,\ 1,\ m)$.

a) Calcula m para que A, B, C y D estén en el mismo plano.

b) Determina la ecuación del plano respecto del cual A y B son simétricos.

c) Calcula el área del triángulo de vértices A, B y C.

----

a)

Los puntos A, B, C y D determinan los siguientes vectores:

$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(2,\ 1,\ 3) - (0,\ 1,\ 1)] = (2,\ 0,\ 2).$

$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(-\ 1,\ 2,\ 0) - (0,\ 1,\ 1)] = (-\ 1,\ 1,\ -\ 1).$

$\overrightarrow{AD} = [D - A] = [(2,\ 1,\ m) - (0,\ 1,\ 1)] = (2,\ 0,\ m - 1).$

Para que los puntos A, B, C y D sean coplanarios, los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ tienen que ser coplanarios, o sea, que su rango tiene que ser menor de tres; el determinante que forman tiene que valer cero:

$Rang\left\{\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}\right\} < 3 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & m-1 \end{vmatrix} = 0;\ 2(m - 1) - 4 = 0;$

$2m - 2 - 4 = 0;\ \ 2m = 6 \Rightarrow m = 3.$

<u>$Los\ puntos\ A,\ B,\ C\ y\ D\ están\ en\ un\ mismo\ plano\ para\ m = 3$</u>.

b)

El vector normal del haz de planos perpendiculares al segmento $\overline{AB}$ es el siguiente: $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} = (1,\ 0,\ 1).$

La expresión general del haz de planos es: $\beta \equiv x + z + D = 0.$

El punto medio de $A(0,\ 1,\ 1)$ y $B(2,\ 1,\ 3)$ es $M(1,\ 1,\ 2)$.

El plano pedido $\pi \in \beta$ contiene al punto M por lo cual tiene que satisfacer su ecuación:

$\left.\begin{array}{l} \beta \equiv x + z + D = 0 \\ M(1,\ 1,\ 2) \end{array}\right\} \Rightarrow 1 + 2 + D = 0;\ \ 3 + D = 0 \rightarrow D = -$

.

$$\underline{\pi \equiv x + z - 3 = 0}.$$

$c)$

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan los puntos:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right| = \frac{1}{2} \cdot \| i \; j \; k \; 2 \; 0 \; 2 \; - 1 \; 1 \; - 1 \| = \| i \; j \; k \; 1 \; 0 \; 1 \; - 1 \; 1 \; - 1 \| =$$

$$= |- j + k - i + j| = |- i + k| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1} = \underline{\sqrt{2} \, u^2}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Sabiendo que $\frac{ax^2+bx+1-\cos\cos x}{x\cdot sen\, x}$ es finito e igual a uno, calcula los valores de a y b.

$$\frac{ax^2+bx+1-\cos\cos x}{x\cdot sen\, x} = \frac{0+0+1-1}{0\cdot 0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{2ax+b+sen\, x}{1\cdot sen\, x+x\cdot\cos\cos x} = \frac{0+b+0}{0+0} \Rightarrow$ Para que el límite sea finito tiene que ser $\underline{b = 0}$.

Para b = 0 $\Rightarrow \frac{2ax+sen\, x}{sen\, x+x\cdot\cos\cos x} = \frac{0+0}{0+0\cdot 0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2a+\cos x}{\cos x+1\cdot\cos\cos x - x\cdot sen\, x} = \frac{2a+1}{1+1-0} = \frac{2a+1}{2} = 1 \Rightarrow 2a + 1 = 2;\ \ 2a = 1 \Rightarrow \underline{a = \frac{1}{2}}$

.

****

2º) Determina la función $f\colon (0,\ \infty)\to R$ sabiendo que $f''(x) = Lx$ y que su gráfica tiene tangente horizontal en el punto $P(1,\ 2)$. (L denota logaritmo neperiano).

$f'(x) = \int Lx\cdot dx \Rightarrow \left\{ u = Lx \to du = \frac{1}{x}\cdot dx \ \ dx = dv \to v = x \right\} \Rightarrow Lx\cdot x - \int x\cdot\frac{1}{x}\cdot dx =$

$= x\cdot Lx - \int dx = x\cdot Lx - x + C_1 = x(Lx - 1) + C_1 = f'(x).$

Por tener tangente horizontal en $P(1,\ 2) \Rightarrow f'(1) = 0$:

$1\cdot(L1 - 1) + C_1 = 0;\ \ -1 + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 1.$

La función derivada resulta ser $f'(x) = x(Lx - 1) + 1 = x\cdot Lx - x + 1.$

$f(x) = \int f'(x)dx = \int(xLx - x + 1)dx = \int x\cdot Lx\cdot dx - \int x\cdot dx + \int dx =$

$= A - \frac{x^2}{2} + x = f(x).$ (*)

$A = \int x\cdot Lx\cdot dx \Rightarrow \left\{ u = Lx \to du = \frac{1}{x}\cdot dx \ \ x\cdot dx = dv \to v = \frac{x^2}{2} \right\} \Rightarrow Lx\cdot\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\cdot dx =$

$= \frac{x^2}{2}\cdot Lx - \frac{1}{2}\cdot\int x\cdot dx = \frac{x^2}{2}\cdot Lx - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + C_2 = \frac{x^2}{4}\cdot(2Lx - 1) + C_2 = A.$

Sustituyendo el valor de A en la expresión (*):

$f(x) = \frac{x^2}{4}\cdot(2Lx - 1) - \frac{x^2}{2} + x + C_2 = \frac{x^2}{4}\cdot(2Lx - 3) + x + C_2.$

Teniendo en cuenta que $P(1,\ 2)$ es un punto de $f(x) \Rightarrow f(1) = 2$:

$\frac{1^2}{4}\cdot(2L1 - 3) + 1 + C_2 = 2;\ \ -\frac{3}{4} + C_2 = 1;\ \ -3 + 4C_2 = 4 \Rightarrow C_2 = \frac{7}{4}.$

$$f(x) = \frac{x^2}{4} \cdot (2Lx - 3) + x + \frac{7}{4}.$$

$$\underline{f(x) = \frac{1}{4} \cdot \left[x^2 (2Lx - 3) + 4x + 7 \right]}.$$

****

3º) Considera las matrices $A = (-\ 1\ 2\ 2\ m\ )$ y $B = (1\ 2\ 0\ \ -\ 2\ m\ 0\ 3\ 2\ m\ )$.

a) Encuentra el valor, o los valores, de m para los que A y B tienen el mismo rango.

b) Determina, si existen, los valores de m para los A y B tienen el mismo determinante.

----

a)

Necesariamente el rango común es 2 por ser $Rang\ A \leq 2$ y $Rang\ B \geq 2$ por contener al menor $|1\ 2\ 3\ 2\ | \neq 0$.

$$Rang\ A = 2 \Rightarrow |-\ 1\ 2\ 2\ m\ | \neq 0;\ \ -m - 4 \neq 0 \Rightarrow m \neq -4.$$

$$Rang\ B = 2 \Rightarrow |1\ 2\ 0\ \ -\ 2\ m\ 0\ 3\ 2\ m\ | = 0;\ m^2 + 4m = 0; m(m + 4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 = 0,\ m_2 = -4.$$

<u>$Las\ matrices\ A\ y\ B\ tienen\ el\ mismo\ rango$ únicamente $para\ m = 0$.</u>

b)

$$|-\ 1\ 2\ 2\ m\ | = |1\ 2\ 0\ \ -\ 2\ m\ 0\ 3\ 2\ m\ |;\ \ -m - 4 = m^2 + 4m;\ \ m^2 + 5m + 4 = 0;$$

$$m = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} \Rightarrow m_1 = -4,\ m_2 = -1.$$

<u>$Los\ rangos\ de\ las\ matrices\ A\ y\ B\ son\ iguales\ para\ m = -4\ y\ m = -1$.</u>

****

4º) Sea el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 8 = 0$.

a) Calcula el punto $P^{'}$, simétrico del punto $P(2, \ -1, 5)$ respecto del plano π.

b) Calcula la recta $r^{'}$, simétrica de la recta $r \equiv \frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-5}{1}$ respecto del plano π.

----

a)

El vector normal del plano $\pi \equiv 2x + y - z + 8 = 0$ es $\overrightarrow{n} = (2, 1, \ -1)$.

La recta s perpendicular al plano π que contiene al punto $P(2, \ -1, 5)$ tiene la siguiente expresión dada por unas ecuaciones paramétricas: $s \equiv \{x = 2 + 2\lambda \ y = -1 + \lambda \ z = 5 - \lambda$.

El punto de corte de la recta s y el plano π es la solución del sistema que forman:

$\pi \equiv 2x + y - z + 8 = 0 \qquad s \equiv \{x = 2 + 2\lambda \ y = -1 + \lambda \ z = 5 - \lambda \ \} \Rightarrow 2(2 + 2$

$4 + 4\lambda - 1 + \lambda - 5 + \lambda + 8 = 0; \ 6\lambda + 6 = 0; \ \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$.

El punto intersección es: $\{x = 2 + 2\lambda \ y = -1 + \lambda \ z = 5 - \lambda \ \} \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow Q(0, \ -2, 6)$.

El punto $P^{'}(x, y, z)$ es simétrico de $P(2, \ -1, 5)$ cuando sea $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP^{'}}$:

$[Q - P] = \left[P^{'} - Q\right]; \ [(0, \ -2, 6) - (2, \ -1, 5)] = [(x, y, z) - (0, \ -2, 6)]$;

$(-2, \ -1, 1) = (x, y + 2, z - 6) \Rightarrow \{x = -2 \qquad y + 2 = -1 \rightarrow y = -3 \ z$

.

b)

Nótese que el punto $P(2, \ -1, 5)$ está contenido en la recta $r \equiv \frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-5}{1}$, lo cual facilita la resolución de este apartado, puesto que ya conocemos el simétrico de P, que es $P^{'}(-2, \ -3, 7)$.

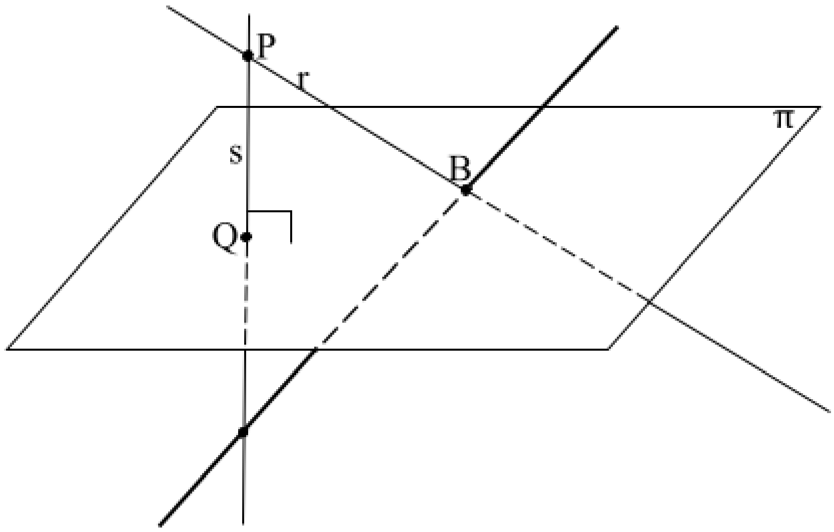
El punto B de corte de r y π es la solución del sistema que forman:

$\pi \equiv 2x + y - z + 8 = 0 \qquad r \equiv \frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-5}{1} \}; \ \pi \equiv 2x + y - z + 8 = 0$
$\Rightarrow 2(2 - 2\lambda) + (-1 + 3\lambda) - (5 + \lambda) + 8 = 0$;

$4-4\lambda-1+3\lambda-5-\lambda+8=0;\ \ -2\lambda+6=0;\ \ -\lambda+3=0 \Rightarrow \lambda=3.$

El punto intersección es: $\begin{cases} x=2-2\lambda \\ y=-1+3\lambda \\ z=5+\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda=3 \Rightarrow B(-4,\ 8,\ 8).$

La representación gráfica de la situación es la indicada en la figura.



La recta r' pedida es la que pasa por los puntos B y P'.

Un vector director de r' es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{BP'}$:

$\overrightarrow{BP'}=\left[P'-B\right]=[(-2,\ -3,\ 7)-(-4,\ 8,\ 8)]=(2,\ -11,\ -1).$

La recta r' dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$\underline{r' \equiv \begin{cases} x=-2+2\lambda \\ y=-3-11\lambda \\ z=7-\lambda \end{cases}}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA

SEPTIEMBRE – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Instrucciones: Tienes que elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**. Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

OPCIÓN A

1º) Halla los valores de ɑ, b y c sabiendo que la gráfica de la función $f(x) = \frac{ax^2+b}{x+c}$. Tiene una asíntota vertical en x = 1, una asíntota oblicua de pendiente 2, y un extremo local de abscisa x = 3.

Las asíntotas verticales de una función racional son los valores reales de x que anulan el denominador:

$$1 + c = 0 \Rightarrow \underline{c = -1}.$$

Una función racional tiene asíntotas oblicuas cuando el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador, como es el caso que nos ocupa. Las funciones oblicuas son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \frac{f(x)}{x} = 2 \Rightarrow \frac{\frac{ax^2+b}{x-1}}{x} = \frac{ax^2+b}{x^2-x} = 2 \Rightarrow \underline{a = 2}.$$

Una función tiene un extremo relativo (máximo o mínimo) cuando se anula su primera derivada:

$$f(x) = \frac{2x^2+b}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{4x\cdot(x-1)-\left(2x^2+b\right)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{4x^2-4x-2x^2-b}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-4x-b}{(x-1)^2}.$$

$$f'(3) = 0 \Rightarrow \frac{2\cdot 3^2-4\cdot 3-b}{(3-1)^2} = 0\,;\, 18 - 12 - b = 0\,;\, 6 - b = 0 \Rightarrow \underline{b = 6}.$$

****

2º) Calcula $I = \int_0^{\pi} x^2 \cdot sen\, x \cdot dx.$

En primer lugar determinamos la integral indefinida:

$$A = \int x^2 \cdot sen\, x \cdot dx \Rightarrow \left\{ u = x^2 \rightarrow du = 2x \cdot dx \; sen\, x \cdot dx = dv \rightarrow v = -\cos cos\, x \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = x^2 \cdot (-\cos cos\, x) - \int -\, cos\, x \cdot 2x \cdot dx = -x^2 \cdot \cos cos\, x + 2 \int x \cdot \cos cos\, x \cdot dx =$$

$$= -x^2 \cdot \cos cos\, x + 2B = A. \quad (*)$$

$$B = \int x \cdot cos\, x \cdot dx \Rightarrow \{ u = x \rightarrow du = dx \; cos\, x \cdot dx = dv \rightarrow v = sen\, x \} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = x \cdot sen\, x - \int sen\, x \cdot dx = x \cdot x + \cos cos\, x \; .$$

Sustituyendo en (*) el valor de B:

$$A = -x^2 \cos cos\, x + 2\,(x \cdot senx + \cos cos\, x) = -x^2 \cos cos\, x + 2\, x \cdot sen\, x + 2 \cos cos$$

$$= \left(2 - x^2\right) \cdot \cos cos\, x + 2x \cdot sen\, x \, .$$

$$I = \int_0^{\pi} x^2 \cdot sen\, x \cdot dx = \left[\left(2 - x^2\right) \cdot \cos cos\, x + 2x \cdot sen\, x \right]_0^{\pi} =$$

$$= \left[\left(2 - \pi^2\right) \cdot \cos cos\, \pi + 2\pi \cdot sen\, \pi \right] - \left[\left(2 - 0^2\right) \cdot \cos cos\, 0 + 2 \cdot 0 \cdot sen\, 0 \right] =$$

$$= -\left(2 - \pi^2\right) + 2\pi \cdot 0 - 2 \cdot 1 - 0 = -2 + \pi^2 - 2 = \pi^2 - 4.$$

$$\underline{I = \int_0^{\pi} x^2 \cdot sen\, x \cdot dx = \pi^2 - 4.}$$

****

3º) Considera las matrices $A = (-\ 1\ 2\ 2\ \ -\ 1\ )$, $B = (1\ 0\ 0\ \ -\ 2\ 1\ 0\ 3\ 2\ 1\ )$ y $C = (1\ 0\ 0\ \ -\ 1\ 5\ 0\ )$.

a) Determina la matriz X para la que $A^t \cdot X \cdot B^{-1} = C$, ($A^t$ es la traspuesta de A).

b) Calcula el determinante de $B^{-1} \cdot \left(C^t \cdot C\right) \cdot B$, ($C^t$ es la traspuesta de C).

----

a)

$A^t \cdot X \cdot B^{-1} = C \rightarrow$ Multiplicando los dos términos por $\left(A^t\right)^{-1}$ y por B, por la izquierda y por la derecha, respectivamente:

$$\left(A^t\right)^{-1} \cdot A^t \cdot X \cdot B^{-1} \cdot B = \left(A^t\right)^{-1} \cdot C \cdot B;\ \ I \cdot X \cdot I = \left(A^t\right)^{-1} \cdot C \cdot B \Rightarrow$$

$$\underline{X = \left(A^t\right)^{-1} \cdot C \cdot B}.$$

$A^t = A = (-\ 1\ 2\ 2\ \ -\ 1\ )$. La inversa de A^t se obtiene por el método de Gauss-Jordan.

$$\left(A^t / I\right) = (1\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow -\ F_1\right\} \Rightarrow (-\ 1\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow F_2 -\ 2F_1\right\} \Rightarrow (-\ 1\ 0\ 2\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow \tfrac{1}{3}F_2\right\} \Rightarrow \left(-\ 1\ 0\ \tfrac{2}{3}\ \tfrac{1}{3}\ \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow F_1 +\ 2F_2\right\} \Rightarrow \left(\tfrac{1}{3}\ \tfrac{2}{3}\ \tfrac{2}{3}\ \tfrac{1}{3}\ \right) \Rightarrow \left(A^t\right)^{-1} = \left(\tfrac{1}{3}\ \tfrac{2}{3}\ \tfrac{2}{3}\ \tfrac{1}{3}\ \right).$$

$$X = \left(A^t\right)^{-1} \cdot C \cdot B = \left(\tfrac{1}{3}\ \tfrac{2}{3}\ \tfrac{2}{3}\ \tfrac{1}{3}\ \right) \cdot (1\ 0\ 0\ \ -\ 1\ 5\ 0\ ) \cdot (1\ 0\ 0\ \ -\ 2\ 1\ 0\ 3\ 2\ 1\ ) =$$

$$= \left(-\ \tfrac{1}{3}\ \tfrac{10}{3}\ 0\ \tfrac{1}{3}\ \tfrac{5}{3}\ 0\right) \cdot (1\ 0\ 0\ \ -\ 2\ 1\ 0\ 3\ 2\ 1\ ) = \underline{\left(-\ 7\ \tfrac{10}{3}\ 0\ \ -\ 3\ \tfrac{5}{3}\ 0\right) = X}.$$

b)

La inversa de B se obtiene por la adjunta de la traspuesta: $B^{-1} = \frac{Adj.\ de\ B^t}{|B|}$.

$|B| = |1\ 0\ 0\ \ -\ 2\ 1\ 0\ 3\ 2\ 1\ | = 1.\quad B^t = (1\ \ -\ 2\ 3\ 0\ 1\ 2\ 0\ 0\ 1\ )$.

$Adj.\ de\ B^t = (|1\ 2\ 0\ 1\ |\ \ -\ |0\ 2\ 0\ 1\ |\ |0\ 1\ 0\ 0\ |\ \ -\ |-\ 2\ 3\ 0\ 1\ |\ |1\ 3\ 0\ 1\ |\ \ -\ |1\ \ -\ 2$

.

$$B^{-1} = \frac{Adj.\ de\ B^{t}}{|B|} = \frac{(1\ 0\ 0\ 2\ 1\ 0\ -7\ -2\ 1\ )}{1} = (1\ 0\ 0\ 2\ 1\ 0\ \ -\ 7\ \ -\ 2\ 1\ ).$$

$$C\ = (1\ 0\ 0\ \ -\ 1\ 5\ 0\ ) \Rightarrow C^{t} = (1\ \ -\ 1\ 0\ 5\ 0\ 0\ ).$$

$$B^{-1}\cdot\left(C^{t}\cdot C\right) = (1\ 0\ 0\ 2\ 1\ 0\ \ -\ 7\ \ -\ 2\ 1\ )\cdot[(1\ \ -\ 1\ 0\ 5\ 0\ 0\ )\cdot(1\ 0\ 0\ \ -\ 1\ 5\ 0\ )] =$$

$$= (1\ 0\ 0\ 2\ 1\ 0\ \ -\ 7\ \ -\ 2\ 1\ )\cdot(2\ \ -\ 5\ 0\ \ -\ 5\ 25\ 0\ 0\ 0\ 0\ ) = (2\ \ -\ 5\ 0\ \ -\ 1\ 15\ 0\ \ -\ 4\ \ -$$

.

$$\underline{\left|B^{-1}\cdot\left(C^{t}\cdot C\right)\right| = |2\ \ -\ 5\ 0\ \ -\ 1\ 15\ 0\ \ -\ 4\ \ -\ 15\ 0\ | =\ 0}.$$

****

4º) Sean las rectas $r\equiv\{x = 1 \quad y = 1 \quad z = \lambda - 2$ y $s\equiv\{x - y = 1\ z =- 1$
.

a) Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a las rectas r y s.

b) Calcula la distancia entre r y s.

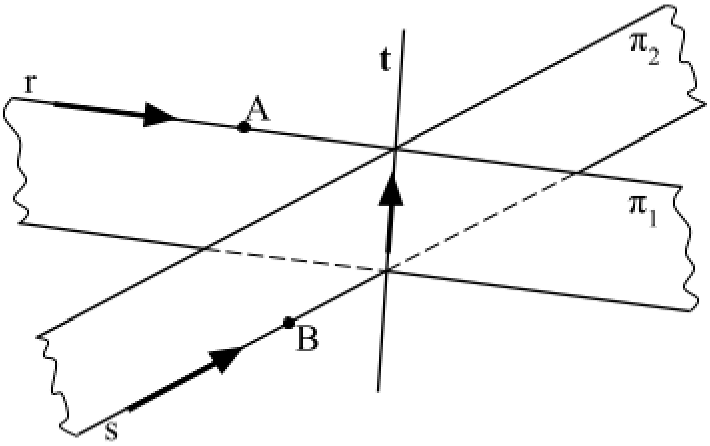
----

a)

La expresión de s por unas ecuaciones paramétricas es $s\equiv\{x = 1 + \lambda\ y = \lambda \quad z =- 1$.

Un punto y un vector director de r son A (1, 1, -2) y $\vec{v_r} = (0,\ 0,\ 1)$.

Un punto y un vector director de s son B (1, 0, -1) y $\vec{v_s} = (1,\ 1,\ 0)$.



Un vector $\vec{w}$ perpendicular a los vectores $\vec{v_r}$ y $\vec{v_s}$ es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de estos vectores:

$$\vec{w}' = \vec{v_r} \wedge \vec{v_s} = |i\ j\ k\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\,| = j - i \Rightarrow \vec{w} = (1,\ -1,\ 0).$$

Determinamos dos planos π_1 y π_2 de las siguientes características:

$$\pi_1\left(A;\ \vec{v_r},\ \vec{w}\right) \equiv |x - 1\ y - 1\ z + 2\ 0\ 0\ 1\ 1\ - 1\ 0\,| = y - 1 + x - 1 = 0 \Rightarrow \pi_1 \equiv$$
.

$$\pi_2\left(B;\ \vec{v_s},\ \vec{w}\right) \equiv |x - 1\ y\ z + 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ - 1\ 0\,| =- z - 1 - z - 1 =- 2z - 2 =$$
.

La recta t pedida es la intersección de los planos π_1 y π_2: $\underline{t\equiv\{x + y - 2 = 0\ z + 1 = 0}$.

b)

Para hallar la distancia entre las rectas r y s hacemos lo siguiente:

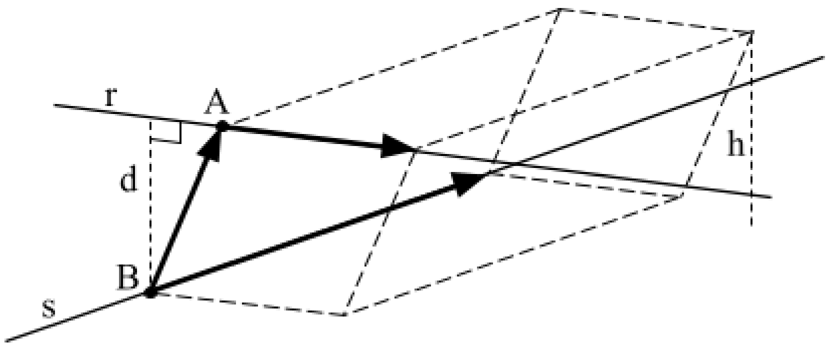
Los vectores directores de las rectas r y s son linealmente independientes por no ser sus componentes proporcionales, lo cual implica que las rectas se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso consideramos el vector $\overrightarrow{m}$ que tiene como origen un punto de r y como extremo un punto de s:

$$\overrightarrow{m} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1,\ 0,\ -1) - (1,\ 1,\ -2) = (0,\ -1,\ 1).$$

Según que los vectores $\left\{\overrightarrow{v}_r,\ \overrightarrow{v}_s, \overrightarrow{m}\right\}$ sean coplanarios o no, las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\left\{\overrightarrow{v}_r,\ \overrightarrow{v}_s, \overrightarrow{m}\right\}$ son coplanarios cuando su rango es menor que tres, es decir, cuando el determinante que determinan es cero:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow Rango\left\{\overrightarrow{v}_r,\ \overrightarrow{v}_s, \overrightarrow{m}\right\} = 3 \Rightarrow$$ <u>Las rectas r y s se cruzan</u>.



Para una mejor comprensión se hace el esquema adjunto.

Se determina un paralelepípedo cuyas dimensiones son los vectores directores de las rectas $\overrightarrow{v}_r$ y $\overrightarrow{v}_s$ y el vector $\overrightarrow{m}$.

El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observar que la altura h es igual a la distancia d pedida entre las rectas.

Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$V = \overrightarrow{v}_r \cdot \left(\overrightarrow{v}_s \times \overrightarrow{m}\right) = \left|\overrightarrow{v}_r \times \overrightarrow{v}_s\right| \cdot h = \left|\overrightarrow{v}_r \times \overrightarrow{v}_s\right| \cdot d \Rightarrow d = \frac{\left|\overrightarrow{v}_r \cdot \left(\overrightarrow{v}_s \times \overrightarrow{m}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{v}_r \times \overrightarrow{v}_s\right|}.$$

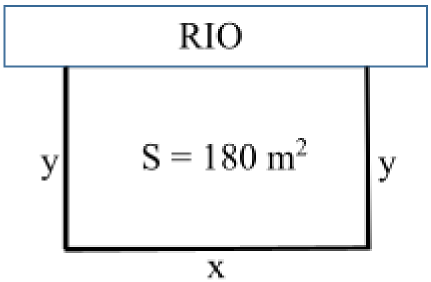
$$d = \frac{\left|\vec{v}_r \cdot \left(\vec{v}_s \times \vec{m}\right)\right|}{\left|\vec{v}_r \times \vec{v}_s\right|} = \frac{\|0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ -1\ 1\ \|}{|(1, -1, 0)|} = \frac{|-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\frac{\sqrt{2}}{2}\ unidades = d(r, s)}$$

.

****

<u>OPCIÓN B</u>

1º) Un granjero desea vallar un terreno rectangular de pasto adyacente a un río. El terreno debe tener 180 m^2 para producir suficiente pasto para su ganado. ¿Qué dimensiones tendrá el terreno rectangular de modo que utilice la mínima cantidad de valla, si el lado que da al río no necesita vallado?



$$S = x \cdot y = 180 \rightarrow y = \frac{180}{x}.$$

$$Perímetro = P = x + 2y = x + \frac{360}{x} = \frac{x^2+360}{x}.$$

Para que el perímetro sea mínimo es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$P'(x) = \frac{2x \cdot x - \left(x^2+360\right)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 360}{x^2} = \frac{x^2-360}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 360 = 0;$$

$$x = \pm\sqrt{360} = \pm 6\sqrt{10}.$$

Por ser x una longitud, la solución $x = -6\sqrt{10}$ carece de sentido lógico, por lo cual, la solución es $x = 6\sqrt{10}\ m$.

$$y = \frac{180}{x} = \frac{180}{6\sqrt{10}} = \frac{30}{\sqrt{10}} = \frac{30\sqrt{10}}{10} = 3\sqrt{10}\ m.$$

$$\underline{El\ lado\ paralelo\ al\ rio\ mide\ 6\sqrt{10}\ m\ y\ los\ otro\ lados\ miden\ 3\sqrt{10}\ m.}$$

****

2º) Sea $f: R\rightarrow R$ definida por $f(x) = \left|x^2 - 4\right|$.

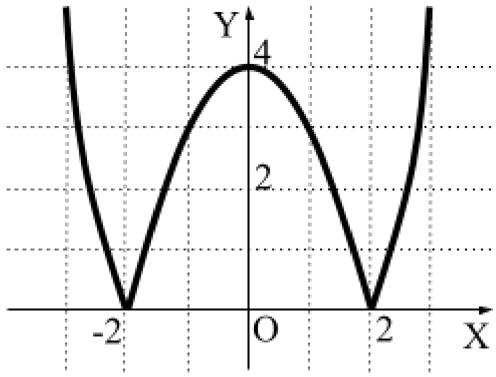
a) Haz un esbozo de la gráfica de f.

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y la recta y = 5.

----

a)

La función f puede redefinirse de la siguiente forma:



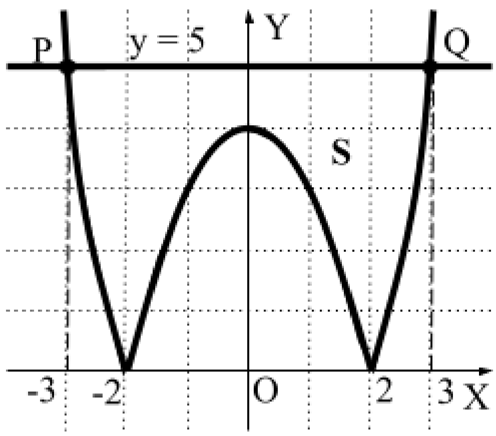
$$x^2 - 4 = 0\rightarrow x_1 = - 2,\ x_2 = 2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \{x^2 - 4\ si\ x\epsilon(-\infty, -2)\cup(2, +\infty)\ \ -x^2 + 4\ si\ x\epsilon[-2, 2]$$
.

Teniendo en cuenta que f(x) es simétrica con respecto al eje de ordenadas y que el vértice (máximo relativo) se obtiene para x = 0 y $f(0) = 4$, la representación gráfica de f(x), aproximada, es la que se expresa en la figura adjunta.

b)

Los puntos de corte de la recta y la función son los siguientes:



$$f(x) = \left|x^2 - 4\right|\ y = 5\ \}\Rightarrow \left|x^2 - 4\right| = 5\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{x^2 - 4 = 5\rightarrow\{x_1 = - 3\rightarrow P(-3, 5)\ x_2 = 3\rightarrow Q(3, 5)\qquad -x^2 + 4 = 5;\ x^2 = - 9\rightarrow$$
.

Con los datos obtenidos, considerando la simetría de la función y de la observación de la figura se deduce el área a calcular, que es la siguiente:

$$S = 2\cdot\int_0^2\left[5 - \left(-x^2 + 4\right)\right]\cdot dx + 2\cdot\int_2^3\left[5 - \left(x^2 - 4\right)\right]\cdot dx =$$

$= 2\cdot\int_0^2 \left(x^2 + 1\right)\cdot dx + 2\cdot\int_2^3 \left(9 - x^2\right)\cdot dx = 2\cdot\left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^2 + 2\cdot\left[9x - \frac{x^3}{3}\right]_2^3 =$

$= 2\cdot\left[\left(\frac{2^3}{3} + 2\right) - 0\right] + 2\cdot\left[\left(9\cdot 3 - \frac{3^3}{3}\right) - \left(9\cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right)\right] =$

$= 2\left(\frac{8}{3} + 2\right) + 2\left(27 - 9 - 18 + \frac{8}{3}\right) = \frac{16}{3} + 4 + \frac{16}{3} = \frac{32}{3} + 4 = \underline{\frac{44}{3}\, u^2 = S}$

.

****

3º) Considera el sistema de ecuaciones $\{2x + y + (a - 1)z = a - 1\ x - ay - 3z = 1\qquad x + y + 2z = 2a - 2$

.

a) Resuelve el sistema para ɑ = 1.

b) Determina, si existe, el valor de ɑ para el que (x, y, z) = (1, -3, ɑ) es la única solución del sistema dado.

----

a)

Para ɑ = 1 el sistema es $\{2x + y = 0 \quad x - y - 3z = 1\ x + y + 2z = 0$.

La matriz de coeficientes es $M = (2\ 1\ 0\ 1\ - 1\ - 3\ 1\ 1\ 2\ )$, cuyo determinante es:

$|M| = |2\ 1\ 0\ 1\ - 1\ - 3\ 1\ 1\ 2\ | =- 4 - 3 + 6 - 2 =- 3 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M = 3 \Rightarrow \underline{S.\ C.\ D.}$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$x = \frac{|0\ 1\ 0\ 1\ -1\ -3\ 0\ 1\ 2\ |}{-3} = \frac{-2}{-3} = \underline{\frac{2}{3}};\ y = \frac{|2\ 0\ 0\ 1\ 1\ -3\ 1\ 0\ 2\ |}{-3} = \frac{4}{-3} = \underline{-\frac{4}{3}};\ z = \frac{|2\ 1\ 0\ 1\ -1\ 1\ 1\ 1}{-3}$

.

b)

Para la solución (x, y, z) = (1, -3, ɑ) resulta: $\{2 - 3 + a(a - 1) = a - 1\ 1 + 3a - 3a = 1 \qquad 1 - 3 + 2a = 2a - 2$, equivalente a $\{a(a - 1) = a\ 0 = 0 \qquad 0 = 0$. Como se observa, las dos últimas ecuaciones se satisfacen para cualquier valor real de ɑ, por lo cual, los valores de ɑ pedidos son los que satisfacen la primera ecuación:

$$a(a-1)=a;\ a^2-a=a;\ a^2-2a=a;\ a(a-2)=0\Rightarrow a_1=0,\ a_2=2$$

.

<u>La solución (x, y, z) = (1, -3, ɑ) es única para ɑ = 0 y para ɑ = 2.</u>

****

4º) Considera el plano $\pi \equiv mx + 5y + 2z = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x+1}{3} = \frac{y}{n} = \frac{z-1}{2}$.

a) Calcula m y n en el caso en el que la recta r es perpendicular al plano π.

b) Calcula m y n en el caso en el que la recta r está contenida en el plano π.

----

a)

Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (m, 5, 2)$ y un vector director de la recta r es $\vec{v_r} = (3, n, 2)$.

Para que el plano π y la recta r sean perpendiculares es necesario que el vector normal del plano y el vector director de la recta sean linealmente dependientes (paralelos), por lo cual, sus componentes tienen que ser proporcionales:

$$\frac{m}{3} = \frac{5}{n} = \frac{2}{2} \Rightarrow m = 3,\ n = 5.$$

<u>La recta r y el plano π son perpendiculares para m = 3 y n = 5</u>.

b)

Para que la recta r esté contenida en el plano π es condición necesaria que el vector normal del plano y el vector director de la recta sean perpendiculares.

Dos vectores son perpendicular cuando su producto escalar es cero:

$$\vec{n} \cdot \vec{m} = 0 \Rightarrow (m, 5, 2) \cdot (3, n, 2) = 0;\ \ 3m + 5n + 4 = 0.\ (1)$$

Un punto de r es P (-1, 0, 1). Por estar contenida r en π tiene que contener a todos los puntos de r, ($P \in \pi$):

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv mx + 5y + 2z = 0 \\ P(-1, 0, 1) \end{array}\right\} \Rightarrow -m + 0 + 2 = 0 \Rightarrow m = 2.$$

Sustituyendo en (1) el valor obtenido de m:

$$3 \cdot 2 + 5n + 4 = 0;\ \ 6 + 5n + 4 = 0;\ \ 5n = -10 \Rightarrow n = -2.$$

<u>La recta r está contenida en el plano π para m = 2 y n = -2</u>.

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

JUNIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B.

OPCIÓN A

1º) Sea λ un parámetro real. Considere la matriz $A = (\lambda + 1 \ \ - 1 \lambda + 1 \ 0 \lambda \ 0 \ 1 \ \ - 2 \lambda)$.
a) Determine el rango de A según los valores de λ.

b) Determine para que valores de λ existe la inversa de A y determine su inversa, si existe, cuando $\lambda = - 2$.

----

a)

$$|A| = |\lambda + 1 \ \ - 1 \lambda + 1 \ 0 \lambda \ 0 \ 1 \ \ - 2 \lambda| = \lambda^2(\lambda + 1) - \lambda(\lambda + 1) = \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 1) =$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = - 1, \ \lambda_3 = 1.$$

$$\underline{Para \{\lambda \neq 0 \ \lambda \neq - 1 \ \lambda \neq 1\} \Rightarrow Rang \ A = 3}.$$

$$Para \ \lambda = 0 \Rightarrow A = (1 \ \ - 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ \ - 2 \ 0) \Rightarrow \underline{Rang \ A = 2}.$$

$$Para \ \lambda = - 1 \Rightarrow A = (0 \ \ - 1 \ 0 \ 0 \ \ - 1 \ 0 \ 1 \ \ - 2 \ \ - 1) \Rightarrow \underline{Rang \ A = 2}.$$

$$Para \ \lambda = 1 \Rightarrow A = (2 \ \ - 1 \ 2 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ \ - 2 \ 1) \Rightarrow \underline{Rang \ A = 2}.$$

b)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$\underline{La \ matriz \ A \ es \ invertible \ \forall \lambda \in R - \{- 1, \ 0, \ 1\}}.$$

Para $\lambda = - 2$ es $A = (- 1 \ \ - 1 \ \ - 1 \ 0 \ \ - 2 \ 0 \ 1 \ \ - 2 \ \ - 2)$. Se obtiene la inversa por el método de Gauss-Jordan.

$$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow -F_1\right\} \Rightarrow$$

$$= (-\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow -\frac{1}{2}F_2\ F_3 \rightarrow F_3 - F_1\right\} \Rightarrow \left(-\ 1\ 0\ 0\ 0\ \ -\frac{1}{2}\ 0\ 1\ 0\ 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow F_1 - F_2\ F_3 \rightarrow F_3 +\ 3F_2\right\} \Rightarrow \left(-\ 1\ \frac{1}{2}\ 0\ 0\ \ -\frac{1}{2}\ 0\ 1\ \ -\frac{3}{2}\ 1\right) \Rightarrow \left\{F_3 \rightarrow -\frac{1}{3}F_3\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(-\ 1\ \frac{1}{2}\ 0\ 0\ \ -\frac{1}{2}\ 0\ \ -\frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{3}\ \right) \Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow F_1 - F_3\right\} \Rightarrow \left(-\frac{2}{3}\ 0\ \frac{1}{3}\ 0\ \ -\frac{1}{2}\ 0\ \ -\frac{1}{3}\right.$$

$$\Rightarrow \underline{A^{-1} = \left(-\frac{2}{3}\ 0\ \frac{1}{3}\ 0\ \ -\frac{1}{2}\ 0\ \ -\frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{3}\ \right) = \frac{1}{6}\cdot(-\ 4\ 0\ 2\ 0\ \ -\ 3\ 0\ \ -\ 2\ 3\ \ -\ 2\ )}$$

.

****

2º) a) Determine la posición relativa de las rectas siguientes: $r \equiv \begin{cases} -x - 2y + 12 = 0 \\ 3y - z - 15 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x-2}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{3}$.

b) Calcule la distancia entre esas rectas.

----

a)

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

Haciendo $y = \lambda \Rightarrow x = 12 - 2\lambda;\ z = -15 + 3\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 12 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -15 + 3 \end{cases}$

.

Un punto y un vector de cada una de las rectas son los siguientes:

Recta r: $A(12,\ 0,\ -15)\ y\ \overrightarrow{v_r} = (-2,\ 1,\ 3)$. Recta s: $B(2,\ -3,\ 0)\ y\ \overrightarrow{v_r} = (5,\ 2,\ 3)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independiente por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\overrightarrow{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = [B - A] = [(2,\ -3,\ 0) - (12,\ 0,\ -15)] = (-10,\ -3,\ 15)$.

Según que los vectores $\left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\right\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\right\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \\ -10 & -3 & 15 \end{vmatrix} = -60 - 45 - 30 + 60 - 18 - 7$$

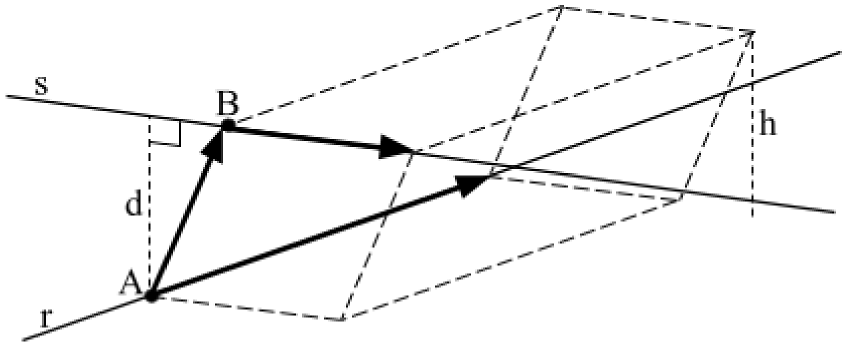
$$= -168 \neq 0 \Rightarrow Rang\left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\right\} = 3 \Rightarrow \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\ no\ son\ coplanarios.$$

$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan.}$

$c)$

Para calcular la distancia entre las rectas r y s vamos a determinar un paralelepípedo cuyas dimensiones son los vectores directores de las rectas, $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$, y un tercer vector $\vec{w}$ que tiene como origen al punto A de r y extremo el punto B de s.

Para una mejor comprensión se hace el esquema que se observa.



El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observando que la altura h es igual a la distancia d pedida entre las rectas.

Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$V = \vec{v}_r \cdot \left(\vec{v}_s \times \vec{w}\right) = \left|\vec{v}_r \times \vec{v}_s\right| \cdot h = \left|\vec{v}_r \times \vec{v}_s\right| \cdot d \Rightarrow d = \frac{\left|\vec{v}_r \cdot \left(\vec{v}_s \times \vec{w}\right)\right|}{\left|\vec{v}_r \times \vec{v}_s\right|}.$$

$$d = \frac{\left|\vec{v}_r \cdot \left(\vec{v}_s \times \vec{w}\right)\right|}{\left|\vec{v}_r \times \vec{v}_s\right|} = \frac{\|-2\ 1\ 3\ 5\ 2\ 3\ -10\ -3\ 15\ \|}{|i\ j\ k\ -2\ 1\ 3\ 5\ 2\ 3\ |} = \frac{|-168|}{|3i+15j-4k-5k-6i+6j|} = \frac{|-168|}{|-3i+21j-9k|} =$$

$$= \frac{56}{|-i+7j-3k|} = \frac{56}{\sqrt{(-1)^2+7^2+(-3)^2}} = \frac{56}{\sqrt{1+49+9}} = \frac{56}{\sqrt{59}} = \underline{\frac{56\sqrt{59}}{59}\ unidades = d(r, s\ ).}$$

****

3º) a) Considere la función $f(x) = \frac{x^2-3}{e^x}$. Determine los máximos relativos, los mínimos relativos y los puntos de inflexión, si existen, de la función $f(x)$.

b) Usando el cambio de variable $t = \cos cos\, x$, calcule: $I = \int \frac{cos^2 x}{sen\, x} \cdot dx$.

c) 1) Calcule los valores ɑ y b para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2$ tenga un extremo relativo en el punto $P(1,\ 2)$.

2) Calcule el área encerrada por la curva $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ y la parte positiva del eje OX.

----

a)

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo en un punto es que se anule su primera derivada:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot e^x - (x^2-3) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{2x-(x^2-3)}{e^x} = \frac{-x^2+2x+3}{e^x}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x^2+2x+3}{e^x} = 0; \quad -x^2 + 2x + 3 = 0; \quad x^2 - 2x - 3 = 0;$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 3.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para el valor que anula la primera derivada, se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo relativo.

$$f''(x) = \frac{(-2x+2) \cdot e^x - (-x^2+2x+3) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{-2x+2+x^2-2x-3}{e^x} = \frac{x^2-4x-1}{e^x}.$$

$f''(-1) = \frac{(-1)^2-4 \cdot (-1)-1}{e^{-1}} = \frac{1+4-1}{e^{-1}} = 4e > 0 \Rightarrow$ **Mínimo relativo para x = -1**.

$$f(-1) = \frac{(-1)^2-3}{e^{-1}} = \frac{1-3}{e^{-1}} = -2e \Rightarrow Mínimo\ relativo:\ \underline{A(-1,\ -2e)}.$$

$f''(3) = \frac{3^2-4 \cdot 3-1}{e^3} = \frac{9-12-1}{e^3} = \frac{-4}{e^3} > 0 \Rightarrow$ **Máximo relativo para x = 3**.

$$f(3) = \frac{3^2-3}{e^3} = \frac{9-3}{e^3} = \frac{6}{e^3} \Rightarrow Máximo\ relativo:\ \underline{B\left(3,\ \frac{6}{e^3}\right)}.$$

Para que una función tenga un punto de inflexión es condición necesaria que se anule su segunda derivada:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2-4x-1}{e^x} = 0;\ x^2 - 4x - 1 = 0;\ x = \frac{4\pm\sqrt{16+4}}{2} = \frac{4\pm\sqrt{20}}{2} = \frac{4\pm2\sqrt{5}}{2} =$$
$$= 2\pm\sqrt{5} \Rightarrow x_1 = 2 - \sqrt{5},\ x_2 = 2 + \sqrt{5}.$$

$$f\left(2 - \sqrt{5}\right) = \frac{\left(2-\sqrt{5}\right)^2-3}{e^{2-\sqrt{5}}} \cong \frac{-2,94}{e^{-0,236}} = \frac{-2,94}{0,79} =- 3,72 \Rightarrow P.I.:\ \underline{C(-0,24,\ -3,72)}$$

.

$$f\left(2 + \sqrt{5}\right) = \frac{\left(2+\sqrt{5}\right)^2-3}{e^{2+\sqrt{5}}} \cong \frac{14,94}{e^{4,24}} = \frac{14,94}{69,14} = 0,22 \Rightarrow P.I.:\ \underline{D(4,24,\ 0,2)}.$$

$b)$

$$I = \int \frac{cos^2 x}{sen\, x}\cdot dx = \int \frac{cos^2 x}{\sqrt{1-cos^2 x}}\cdot dx \Rightarrow \left\{ t = \cos cos\, x\ \ dt =- sen\, x\cdot dx\ dx =- \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \right.$$

$$\Rightarrow - \int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\cdot\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =- \int \frac{t^2}{1-t^2}\cdot dt = \int \frac{t^2}{t^2-1}\cdot dt = \int \frac{t^2-1+1}{t^2-1}\cdot dt = \int dt + \int \frac{dt}{t^2-1} =$$

$$= t + \int \frac{dt}{(t+1)(t-1)} = t + \int\left(\frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-1}\right)\cdot dt = t + \int \frac{At-A+Bt+B}{(t+1)(t-1)}\cdot dt =$$

$$= t + \int \frac{(A+B)t+(-A+B)}{(t+1)(t-1)}\cdot dt \Rightarrow \left\{A + B = 0\ A - B = 1\,\right\} \rightarrow A = \frac{1}{2},\ B =- \frac{1}{2}\right\} \Rightarrow$$

$$= t + \int \frac{\frac{1}{2}}{t+1}\cdot dt - \int \frac{\frac{1}{2}}{t-1}dt = t + \frac{1}{2}L|t + 1| - \frac{1}{2}L|t - 1| + C = t + L\sqrt{\left|\frac{t+1}{t-1}\right|} + C =$$

$$= \cos cos\, x + L\sqrt{\left|\frac{\text{coscos}\, x+1}{\text{coscos}\, x-1}\right|} + C = \cos cos\, x + L\sqrt{\left|\frac{(\text{coscos}\, x+1)^2}{(\text{coscos}\, x-1)(\text{coscos}\, x+1)}\right|} + C =$$

$$= \cos cos\, x + L\sqrt{\left|\frac{(\text{coscos}\, x+1)^2}{1-cos^2 x}\right|} + C = \cos cos\, x + L\sqrt{\left|\frac{(\text{coscos}\, x+1)^2}{sen^2 x}\right|} + C = \cos cos\, x$$

.

$$\underline{I = \int \frac{cos^2 x}{sen\, x}\cdot dx = \cos cos\, x + L\left|\frac{\text{coscos}\, x+1}{sen\, x}\right| + C.}$$

$c)$

1)

Por contener $f(x) = ax^3 + bx^2$ a $P(1,\ 2) \Rightarrow f(1) = 2$:

$f(1) = a\cdot 1^3 + b\cdot 1^2 = a + b = 2.$ (1)

Por tener $f(x) = ax^3 + bx^2$ un extremo relativo en $P(1,\ 2) \Rightarrow f'(1) = 0$:

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx \Rightarrow f'(1) = 3a\cdot 1^2 + 2b\cdot 1 = 3a + 2b = 0.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$\left.\begin{array}{l} a + b = 2 \\ 3a + 2b = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -2a - 2b = -4 \\ 3a + b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{a = -4},\ \underline{b = 6}$

.

2)

Los puntos de corte de $f(x)$ con el eje OX son los siguientes:

$f(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 - 3x^2 = 0;\ x^2(2x - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \frac{3}{2}.$

Teniendo en cuenta que $0 < 1 < \frac{3}{2}$ y que $f(1) = 2 - 3 = -1 < 0$, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_{\frac{3}{2}}^{0} \left(2x^3 - 3x^2\right)\cdot dx = \left[\frac{2x^4}{4} - \frac{3x^3}{3}\right]_{\frac{3}{2}}^{0} = 0 - \left[\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^3\right] = -\frac{81}{32} + \frac{27}{8} =$$

$$= \frac{-81+108}{32} = \underline{\frac{27}{32}\, u^2}.$$

****

OPCIÓN B

1º) a) Considere la matriz $M = (x\ y\ z\ y\ z\ x\ z\ x\ y\ )$ y los vectores $A = (a\ b\ c\ )\ y\ B = (1\ 0\ 1\ )$, donde x, y, z son números reales. Determine x, y, z para que el vector $A = (1\ 2\ 3\ )$ sea solución del sistema $M\cdot A = B$.

b) Sea ahora la matriz y vectores siguientes: $N = (a\ b\ c\ b\ c\ a\ c\ a\ b\ ),\ A = (x\ y\ z\ ),\ B = (1\ 0\ 1\ )$, donde ɑ, b y c son números reales que verifican que $a\neq 0,\ a + b = 0,\ c = a$. Determine si el sistema $N\cdot X = B$ es compatible determinado.

----

a)

$M\cdot A = B \Rightarrow (x\ y\ z\ y\ z\ x\ z\ x\ y\ )\cdot(1\ 2\ 3\ ) = (1\ 0\ 1\ ) \Rightarrow x + 2y + 3z = 1\ y + 2z + 3x =$
;

$x + 2(-\ 3x - 2z) + 3z = 1\ z + 2x + 3(-\ 3x - 2z) = 1\ \}\ \ x - 6x - 4z + 3z = 1$

$25x + 5z =-\ 5\ \ -\ 7x - 5y = 1\ \ \ \}\Rightarrow 18x =-\ 4;\ x =-\ \frac{2}{9};\ \ z =-\ 5x - 1 = \frac{10}{9} - 1$
.

$y =-\ 3\cdot\left(-\ \frac{2}{9}\right) - 2\cdot\frac{1}{9} = \frac{6}{9} - \frac{2}{9} = \frac{4}{9}.$

$$\underline{Solución: x =-\ \frac{2}{9},\ y = \frac{4}{9},\ z = \frac{1}{9}}.$$

b)

$N\cdot A = B \Rightarrow (a\ b\ c\ b\ c\ a\ c\ a\ b\ )\cdot(x\ y\ z\ ) = (1\ 0\ 1\ );\ \ ax + by + cz = 1\ bx + cy + az = 0$
.

Teniendo en cuenta que $a\neq 0,\ b =-\ a,\ c = a$: $ax - ay + az = 1\ \ -\ ax + ay + az = 0\ ax + ay - az = 1\ \}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$P = (a\ \ -\ a\ a\ \ -\ a\ a\ a\ a\ a\ \ -\ a\ )\ y\ P^{'} = (a\ \ -\ a\ a\ \ -\ a\ a\ a\ a\ a\ \ -\ a\ \ \ \ 1\ 0\ 1\ )$
.

$Rang\ P \Rightarrow |a\ \ -\ a\ a\ \ -\ a\ a\ a\ a\ a\ \ -\ a\ | = a^{3}|1\ \ -\ 1\ 1\ \ -\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \ -\ 1\ | =$

$= a^{3}(-\ 1 - 1 - 1 - 1 - 1 + 1) =-\ 4a^{3}\neq 0,\ por\ ser\ a\neq 0.$

$$Rang\ P = Rang\ Q = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.$$

$\underline{Queda\ determinado\ que\ el\ sistema\ N{\cdot}A\ =\ B\ es\ compatible\ determinado}.$

****

2º) a) Determine, *como intersección de dos planos*, la ecuación de la recta paralela a la recta $r \equiv \begin{cases} 5x - 3y + 2z = 1 \\ x + 3y - 2z = -4 \end{cases}$ que pasa por el punto $Q(0,\ 2,\ -4)$.

b) Determine la distancia del punto $P(1,\ 1,\ 0)$ a la recta r anterior.

----

a)

Una forma de resolver este apartado es la siguiente:

Una recta define al haz de planos que la contiene, por lo tanto, una recta puede venir expresada por infinitos pares de planos.

La recta r viene dada por los siguientes planos $\pi_1 \equiv 5x - 3y + 2z - 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv x + 3y - 2z + 4 = 0$. La recta s, por ser paralela a r, puede definirse por dos planos paralelos a los que determinan a r.

Sean los planos $\pi'_1 \equiv 5x - 3y + 2z + D_1 = 0$ y $\pi'_2 \equiv x + 3y - 2z + D_2 = 0$ los que definen a s. Para determinar D_1 y D_2 basta con tener en cuenta que s contiene al punto $Q(0,\ 2,\ -4)$:

$\left.\begin{array}{l} \pi'_1 \equiv 5x - 3y + 2z + D_1 = 0 \\ Q(0,\ 2,\ -4) \end{array}\right\} \Rightarrow 5 \cdot 0 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-4)$

$0 - 6 - 8 + D_1 = 0 \Rightarrow D_1 = 14 \Rightarrow \pi'_1 \equiv 5x - 3y + 2z + 14 = 0.$

$\left.\begin{array}{l} \pi'_2 \equiv x + 3y - 2z + D_2 = 0 \\ Q(0,\ 2,\ -4) \end{array}\right\} \Rightarrow 5 \cdot 0 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot (-4) +$

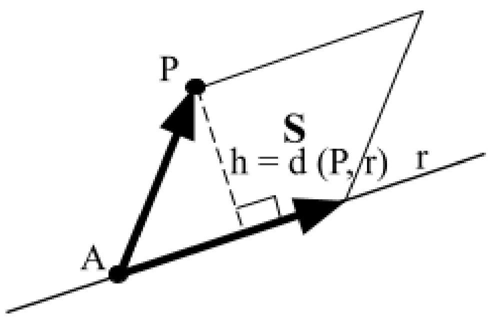
$0 + 6 + 8 + D_2 = 0 \Rightarrow D_2 = -14 \Rightarrow \pi'_2 \equiv x + 3y - 2z - 14 = 0.$

$$\underline{s \equiv \begin{cases} 5x - 3y + 2z + 14 = 0 \\ x + 3y - 2z - 14 = 0 \end{cases}}.$$

b)

La distancia de un punto a una recta puede determinarse teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que forman dos vectores es el módulo de su producto vectorial y, de forma geométrica, es el producto de la base por la altura.

Para una mejor comprensión del proceso se hace un dibujo de la situación.



$$\left.\begin{array}{l} S = \left|\vec{v}_r \wedge \vec{AP}\right| \\ S = \left|\vec{v}_r\right|\cdot h \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\vec{v}_r \wedge \vec{AP}\right| = \left|\vec{v}_r\right|\cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{h = d(P, r) = \frac{\left|\vec{v}_r \wedge \vec{AP}\right|}{\left|\vec{v}_r\right|}}.$$

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \left\{\begin{array}{l} 5x - 3y + 2z = 1 \\ x + 3y - 2z = -4 \end{array}\right. \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow \begin{array}{l} 5x - 3y = 1 - 2\lambda \\ x + 3 \end{array}$$

$$x = -\frac{1}{2};\ \ y = \frac{1}{3}(-4 + 2\lambda - x) = \frac{1}{3}\left(-4 + \frac{1}{2} + 2\lambda\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{7}{2} + 2\lambda\right) = -\frac{7}{6} + \frac{2}{3}\lambda =$$

$$\Rightarrow r \equiv \left\{\begin{array}{l} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{7}{6} + \frac{2}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right. .$$

Un punto y un vector director de r son $A\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{7}{6},\ 0\right)$ y $\vec{v}_r = (0,\ 2,\ 3)$.

$$\vec{AP} = [P - A] = \left[(1,\ 1,\ 0) - \left(-\frac{1}{2},\ -\frac{7}{6},\ 0\right)\right] = \left(\frac{3}{2},\ \frac{13}{6},\ 0\right).$$

Aplicando la fórmula al punto P y a la recta r:

$$d(P, r) = \frac{\left|\vec{v}_r \wedge \vec{AP}\right|}{\left|\vec{v}_r\right|} = \frac{\left\|\begin{array}{ccc} i & j & k \\ 0 & 2 & 3 \\ \frac{3}{2} & \frac{13}{6} & 0 \end{array}\right\|}{\sqrt{0^2+2^2+3^2}} = \frac{\frac{1}{6}\cdot\left\|\begin{array}{ccc} i & j & k \\ 0 & 2 & 3 \\ 9 & 13 & 0 \end{array}\right\|}{\sqrt{4+9}} = \frac{|27j - 18k - 39i|}{6\sqrt{13}} = \frac{3|-13i + 9j - 6k|}{6\sqrt{13}} =$$

$$= \frac{\sqrt{(-13)^2 + 9^2 + (-6)^2}}{2\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{169+81+36}}{2\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{286}}{2\sqrt{13}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{286}{13}} = \underline{\frac{\sqrt{22}}{2}\ u = d(P, r)}.$$

Otra forma de resolver este ejercicio es la siguiente:

El haz de planos perpendiculares a r tiene por ecuación: $\alpha \equiv 2y + 3z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz α, el plano π que contiene al punto $P(1,\ 1,\ 0)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv 2y + 3z + D = 0 \\ P(1,\ 1,\ 0) \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot 1 + 3\cdot 0 + D = 0 \Rightarrow D = -2 \Rightarrow$$

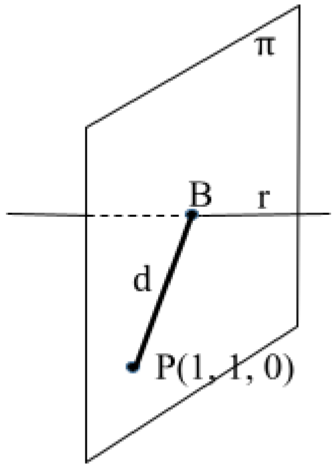
$$\Rightarrow \pi \equiv 2y + 3z - 2 = 0.$$

El punto B, intersección de la recta r con el plano π es la solución del sistema que forman:

$\pi \equiv 2y + 3z - 2 = 0\ r \equiv \{5x - 3y + 2z = 1\ x + 3y - 2z = -4\ \} \qquad 2y + 3z$

$2y + 3z = 2\ 6y - 4z = -7\ \} \qquad 6y + 9z = 6\ \ -6y + 4z = 7\ \} \Rightarrow 13z = 13;\ z =$

$\Rightarrow B\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 1\right).$



La distancia pedida del punto P a la recta r es equivalente a la distancia entre los puntos B y P, o sea el módulo de $\left|\overrightarrow{BP}\right|$:

$$d(P,\ r) = \left|\overrightarrow{BP}\right| = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4} + 1} = \sqrt{\frac{18+4}{4}} = \frac{\sqrt{22}}{2}.$$

$$\underline{d(P,\ r) = \frac{\sqrt{22}}{2}\ unidades.}$$

****

3º) $a)$ Calcule las dimensiones de tres campos cuadrados que no tienen ningún lado común y que satisfacen que el perímetro de uno de ellos es triple que el de otro y, además, se necesitan 1.248 metros de valla para vallar completamente los tres campos, de manera que la suma de las áreas es la mínima posible.

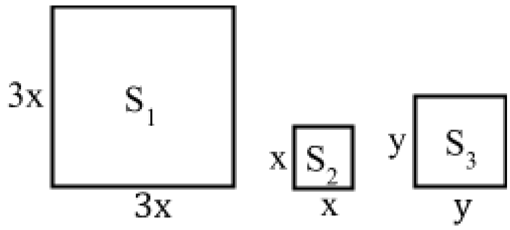
$b)$ Usando el cambio de variable $t = e^{x}$, calcule: $I = \int \frac{2e^{2x}}{e^{x}-2e^{-x}} \cdot dx.$

$c)$ Calcule: $\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{Lx}\right)$.

$a)$

Del enunciado del problema y de la observación de la figura se deduce que:

$P_t = P_1 + P_2 + P_3 =$



$= 4 \cdot (3x) + 4x + 4y = 16x + 4y = 1.248;$

$4x + y = 312 \Rightarrow y = 312 - 4x.$

$S_t = S_1 + S_2 + S_3 = (3x)^2 + x^2 + y^2 = 10x^2 + y^2.$

Sustituyendo el valor de **y** en la expresión de la superficie:

$S(x) = 10x^2 + (312 - 4x)^2.$

La superficie es mínima cuando se anula su primera derivada:

$S'(x) = 20x + 2 \cdot (312 - 4x) \cdot (-4) = 20x - 8(312 - 4x) =$

$= 20x - 2496 + 32x = 52x - 2.496.$

$S'(x) = 0 \Rightarrow 52x - 2.496 = 0;\ x = \frac{2.496}{52};\ x = 48.$

Para justificar que se trata de un mínimo, la segunda derivada tiene que ser positiva para el valor encontrado de x que anula la primera derivada:

$S''(48) = 52 > 0 \Rightarrow Mínimo,\ como\ se\ quería\ justificar.$

$y = 312 - 4x = 312 - 4 \cdot 48 = 312 - 192 = 120.$

$\underline{Los\ lados\ de\ los\ campos\ son\ 144,\ \ 48\ y\ 120\ metros.}$

$b)$

$$I = \int \frac{2e^{2x}}{e^x - 2e^{-x}} \cdot dx \Rightarrow \left\{ e^x = t \rightarrow dt = e^x \cdot dx \; dx = dt/t \right\} \Rightarrow \int \frac{2 \cdot t^2}{t - 2 \cdot t^{-1}} \cdot \frac{1}{t} \cdot dt =$$

$$= \int \frac{2 \cdot t}{t - \frac{2}{t}} \cdot dt = \int \frac{2 \cdot t}{\frac{t^2 - 2}{t}} \cdot dt = 2 \int \frac{t^2}{t^2 - 2} \cdot dt = 2 \int \frac{t^2 - 2 + 2}{t^2 - 2} \cdot dt = 2 \int \left(1 + \frac{2}{t^2 - 2} \right) \cdot dt =$$

$$= 2 \int dt + \int \frac{4}{t^2 - 2} \cdot dt = 2t + I_1 = I. \qquad (*)$$

$$I_1 = \int \frac{4}{t^2 - 2} \cdot dt \Rightarrow \frac{4}{t^2 - 2} = \frac{4}{\left(t + \sqrt{2}\right)\left(t - \sqrt{2}\right)} = \frac{A}{t + \sqrt{2}} + \frac{B}{t - \sqrt{2}} = \frac{At - \sqrt{2}A + Bt + \sqrt{2}B}{\left(t + \sqrt{2}\right)\left(t - \sqrt{2}\right)} =$$

$$= \frac{(A + B)t + \left(-\sqrt{2}A + \sqrt{2}B\right)}{t^2 - 2} \Rightarrow \qquad A + B = 0 \;\; - \sqrt{2}A + \sqrt{2}B = 4 \} \;\; A + B = 0 \;\; - A + B$$

.

$$I_1 = \int \left(\frac{-\sqrt{2}}{t + \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{t - \sqrt{2}} \right) \cdot dt = - \sqrt{2} \cdot L\left|t + \sqrt{2}\right| + \sqrt{2} \cdot L\left|t - \sqrt{2}\right| + C =$$

$$= \sqrt{2} \cdot L\left| \frac{t - \sqrt{2}}{t + \sqrt{2}} \right| + C.$$

Sustituyendo en (*) el valor obtenido de I_1:

$I = 2t + \sqrt{2} \cdot L\left| \frac{t - \sqrt{2}}{t + \sqrt{2}} \right| + C.$ Deshaciendo el cambio de variable:

$$\underline{I = 2e^x + \sqrt{2} \cdot L\left| \frac{e^x - \sqrt{2}}{e^x + \sqrt{2}} \right| + C.}$$

$c)$

$$\left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{Lx} \right) = \frac{1}{1 - 1} - \frac{1}{L1} = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$= \frac{Lx - x + 1}{(x - 1) \cdot Lx} = \frac{0 - 1 + 1}{0 \cdot 0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \frac{\frac{1}{x} - 1 + 0}{1 \cdot Lx + (x - 1) \cdot \frac{1}{x}} =$$

$$= \frac{\frac{1 - x}{x}}{Lx + 1 - \frac{1}{x}} = \frac{1 - x}{x \cdot Lx + x - 1} = \frac{1 - 1}{1 \cdot 0 + 1 - 1} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$= \frac{-1}{1 \cdot Lx + x \cdot \frac{1}{x} + 1} = \frac{-1}{Lx+2} = \frac{-1}{0+2} = \underline{-\frac{1}{2}}\ .$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

SEPTIEMBRE – 2015 (ESPECÍCIFA)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B.

OPCIÓN A

1º) a) Sea λ un parámetro real cualquiera. Determine para qué valores de λ el sistema de ecuaciones $\{2\lambda x - 2y - \lambda z = 2 \quad \lambda x - y + z = 5 \quad 3\lambda x + 4y + (\lambda - 1)z =$ es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

b) Determine la inversa de la matriz $M = (1\ 2\ 3\ 1\ 1\ 0\ 1\ 2\ 0\ )$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A = (2\lambda\ \ -2\ \ -\lambda\,\lambda\ \ -1\ 1\ 3\lambda\ 4\ \lambda - 1\ )$ y $A' = (2\lambda\ \ -2\ \ -\lambda\,\lambda\ \ -1\ 1\ 3\lambda\ 4\ \lambda - 1\ \ 2\ 5\ \lambda - 5\ )$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro λ es el siguiente:

$|A| = |2\lambda\ \ -2\ \ -\lambda\,\lambda\ \ -1\ 1\ 3\lambda\ 4\ \lambda - 1\ | = 2\lambda(1-\lambda) - 4\lambda^2 - 6\lambda - 3\lambda^2 - 8\lambda + 2\lambda($

$= 2\lambda - 2\lambda^2 - 7\lambda^2 - 14\lambda + 2\lambda^2 - 2\lambda = -7\lambda^2 - 14\lambda = 0; \quad -7\lambda(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0; \ \ \lambda + 2 = 0; \ \ \lambda_2 = -2.$

$\underline{Para\ \lambda \neq 0\ y\ \lambda \neq -2 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

Para λ = 0 es $A' = (0\ \ -2\ 0\ 0\ \ -1\ 1\ 0\ 4\ \ -1\ \ 2\ 5\ \ -5\ ) \Rightarrow Rang.\ A' \Rightarrow (C_2,\ C_3,\ C_4) \Rightarrow$

$\Rightarrow |- \ 2\ 0\ 2 \ \ - \ 1\ 1\ 5\ 4 \ \ - \ 1 \ \ - \ 5\,| = \ 10 \ + \ 2 \ - \ 8 \ - \ 10 \ =- \ 6 \neq 0 \Rightarrow Rang. \ A^{'} \ = \ 3$
.

Para λ = -2 es $A^{'} = (- \ 4 \ \ - \ 2\ 2 \ \ - \ 2 \ \ - \ 1\ 1 \ \ - \ 6\ 4 \ \ - \ 3 \ \ \ 2\ 5 \ \ - \ 7\,) \Rightarrow Rang. \ A' \Rightarrow \left(C_2, \ C_3, \ C_4\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow |- \ 2\ 2\ 2 \ \ - \ 1\ 1\ 5\ 4 \ \ - \ 3 \ \ - \ 7\,| = \ 14 \ + \ 6 \ + \ 40 \ - \ 8 \ - \ 30 \ - \ 14 \ = \ 8 \neq 0 \Rightarrow Rang. \ A^{'}$
.

$\underline{Para\, \lambda \ = \ 0 \ y \, para \, \lambda \ =- \ 2 \Rightarrow Rang \ A \ = \ 2; \ Rang \ A^{'} \ = \ 3 \Rightarrow S. \ I.}$

$b)$

Para determinar la inversa de la matriz M se utiliza el método de Gauss-Jordan.

$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\,) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \, F_3 \rightarrow F_3 - F_1 \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (1\ 0\ 0 \ \ - \ 1\ 1\ 0 \ \ - \ 1\ 0\ 1\,) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow - \ F_2\right\} \Rightarrow (1\ 0\ 0\ 1 \ \ - \ 1\ 0 \ \ - \ 1\ 0\ 1\,) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow F_1 - \ 2F_2\right\} \Rightarrow (- \ 1\ 2\ 0\ 1 \ \ - \ 1\ 0 \ \ - \ 1\ 0\ 1\,) \Rightarrow \left\{F_3 \rightarrow - \tfrac{1}{3} F_3\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(- \ 1\ 2\ 0\ 1 \ \ - \ 1\ 0\, \tfrac{1}{3} \ 0 \ \ - \tfrac{1}{3} \ \right) \Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow F_1 + \ 3F_3 \, F_2 \rightarrow F_2 - \ 3F_3 \right\} \Rightarrow \left(0\ 2 \ \ - \ 1\ 0 \ \ -\right.$

$\Rightarrow \underline{M^{-1} = \left(0\ 2 \ \ - \ 1\ 0 \ \ - \ 1\ 1\, \tfrac{1}{3} \ 0 \ \ - \tfrac{1}{3} \right)}\,.$

****

2º) a) Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores que satisfacen que $|\vec{u}| = 5$, $|\vec{v}| = 2$ y $u\cdot v = 10$. Determine $\vec{u} \times \vec{v}$.

b) Considere las rectas $r \equiv \{2x - y = 0\ ax - z = 0$ y $s \equiv \{x + by = 3\ y + z = 3$.

1) Determine los valores α ≠ 0 y b ≠ 0 para que las rectas sean paralelas.

2) ¿Existen valores α ≠ 0 y b ≠ 0 para que las rectas sean coincidentes?

----

a)

Por la definición de producto escalar de dos vectores:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot \cos cos\ \alpha \Rightarrow \cos cos\ \alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{10}{5\cdot 2} = \frac{10}{10} = 1 \Rightarrow \alpha = 0°.$$

Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos, por consiguiente su producto vectorial es el vector nulo, como se detalla a continuación.

Por definición, el módulo del producto vectorial de dos vectores es igual al producto de los módulos de los dos vectores por es seno del ángulo que forman; como es $sen\ 0° = 0$, se deduce la solución siguiente:

$$\underline{\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}}.$$

b)

Un vector director de una recta dada por la intersección de dos planos es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan

$$r \equiv \{2x - y = 0\ ax - z = 0 \Rightarrow \left\{\vec{n}_1 = (2, -1, 0)\ \vec{n}_2 = (a, 0, -1)\right\} \Rightarrow \vec{v}_r = |i\ j\ k\ 2$$

$$\Rightarrow \vec{v}_r = (1, 2, a).$$

$$s \equiv \{x + by = 3\ y + z = 3 \Rightarrow \left\{\vec{n}_1 = (1, b, 0)\ \vec{n}_2 = (0, 1, 1)\right\} \Rightarrow \vec{v}_s = |i\ j\ k\ 1\ b\ 0\ 0\ 1\ 1\ |$$

$$\Rightarrow \vec{v}_s = (b, -1, 1).$$

1) Dos vectores son paralelos cuando sus componentes son proporcionales.

$\frac{1}{b} = \frac{2}{-1} = \frac{a}{1} \Rightarrow a = -2,\ b = -\frac{1}{2}$.

$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ son\ paralelas\ para\ a = -2\ y\ b = -\frac{1}{2}}$.

2) Para que las rectas sean coincidentes es condición necesaria, aunque no suficiente (pueden ser paralelas), que sus vectores directores sean linealmente dependientes.

Las expresiones dadas por ecuaciones paramétricas de las rectas r y s son las siguientes: $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = a\lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 3 - b\mu \\ y = \mu \\ z = 3 - \mu \end{cases}$ y sus respectivos vectores directores son $\overrightarrow{v_r} = (1,\ 2,\ a)$ y $\overrightarrow{v_s} = (-b,\ 1,\ -1)$.

Para que los vectores directores sean linealmente dependientes tienen que ser proporcionales sus respectivas componentes: $\frac{1}{-b} = \frac{2}{1} = \frac{a}{-1} \Rightarrow a = -2,\ b = -\frac{1}{2}$.

Las rectas resultan ser: $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 3 + \frac{1}{2}\mu \\ y = \mu \\ z = 3 - \mu \end{cases}$.

Para que r y s sean coincidentes tienen que tener todos sus puntos en común.

Un punto de r es $P\ (\lambda,\ 2\lambda,\ -2\lambda)$ y un punto de s es $Q\left(3 + \frac{1}{2}\mu,\ \mu,\ 3 - \mu\right)$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 3 + \frac{1}{2}\mu \\ 2\lambda = \mu \\ -2\lambda = 3 - \mu \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda = 3 + \frac{1}{2} \cdot 2\lambda \\ -2\lambda = 3 - 2\lambda \end{array} \right\} \ \lambda = 3$$

$\underline{No\ existen\ \mathrm{a} \neq 0\ y\ b \neq 0\ para\ que\ las\ rectas\ r\ y\ s\ sean\ coincidentes}$.

****

3º) a) Usando el cambio de variable $t = e^{x}$, calcule $I = \int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+3e^{x}+2} \cdot dx.$

b) Determine el límite siguiente: $\left(\frac{1}{1-sen\,x}\right)^{\frac{coscos\,x}{sen\,x}}$.

c) Determine la ecuación de la curva f(x) sabiendo que la recta tangente en x = 3 es $y = 9x - 13$ y la derivada segunda es $f''(x) = 4$, para cualquier valor de x.

----

a)

$$I = \int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+3e^{x}+2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ e^{x} = t \rightarrow e^{x} \cdot dx = dt\ dx = \frac{dt}{t} \right\} \Rightarrow \int \frac{t^{3}}{t^{2}+3t+2} \cdot \frac{dt}{t} =$$

$$= \int \frac{t^{2}}{t^{2}+3t+2} \cdot dt = \int \frac{t^{2}+3t+2-3t-2}{t^{2}+3t+2} \cdot dt = \int \left(1 - \frac{3t+2}{t^{2}+3t+2}\right) \cdot dt =$$

$$= \int dt - \int \frac{3t+2}{t^{2}+3t+2} \cdot dt = t - A = I. \quad (1)$$

$$t^{2} + 3t + 2 = 0; \ \ t = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \Rightarrow \{ t_{1} =- 2\ t_{2} =- 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^{2} + 3t + 2 = (t + 2)(t + 1).$$

$$\frac{3t+2}{t^{2}+3t+2} = \frac{3t+2}{(t+2)(t+1)} = \frac{M}{t+2} + \frac{N}{t+1} = \frac{Mt+M+Nt+2N}{(t+2)(t+1)} = \frac{(M+N)t+(M+2N)}{(t+2)(t+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ M + N = 3\ M + 2N = 2 \} \quad - M - N =- 3\ M + 2N = 2 \} \Rightarrow N =- 1,\ M = 4$$

.

$$A = \int \frac{3t+2}{t^{2}+3t+2} \cdot dt = \int \left(\frac{4}{x+2} - \frac{1}{x+1}\right) \cdot dx = 4L|t + 2| - L|t + 1| = \frac{L(t+2)^{4}}{L|t+1|}.$$

Sustituyendo en (1) el valor obtenido de A: $I = t - \frac{L(t+2)^{4}}{L|t+1|} + C.$

Deshaciendo el cambio de variable:

$$\underline{I = e^{x} - \frac{L\left(e^{x}+2\right)^{4}}{L\left(e^{x}+1\right)} + C.}$$

$b)$

$$\left(\frac{1}{1-sen\,x}\right)^{\frac{coscos\,x}{sen\,x}} = \left(\frac{1}{1-sen\,\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{coscos\,\frac{\pi}{2}}{sen\,\frac{\pi}{2}}} = \left(\frac{1}{1-1}\right)^{\frac{0}{1}} = \left(\frac{1}{0}\right)^{0} = \infty^{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{1-sen\,x}\right)^{\frac{coscos\,x}{sen\,x}} = A \Rightarrow LA = L\left(\frac{1}{1-sen\,x}\right)^{\frac{coscos\,x}{sen\,x}} = \frac{coscos\,x}{sen\,x} \cdot L\left(\frac{1}{1-sen\,x}\right) =$$

$$= \frac{coscos\,x}{sen\,x} \cdot [L1 - L(1 - sen\,x)] = -\frac{coscos\,x \cdot L(1-sen\,x)}{sen\,x} = -\frac{L(1-sen\,x)}{\frac{sen\,x}{coscos\,x}} = -\frac{L(1-sen\,x)}{tag\,x}$$

.

$$LA = L[A] = -\frac{L(1-sen\,x)}{tag\,x} = -\frac{L0}{\infty} = -\frac{-\infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow -\frac{-\frac{coscos\,x}{1-sen\,x}}{\frac{1}{cos^2\,x}} = \frac{cos^3\,x}{1-sen\,x} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3 \cdot cos^2\,x \cdot (-sen\,x)}{-cos\,x} = 3 \cdot (\cos cos\,x \cdot sen\,x) = \frac{3}{2} \cdot (2 \cdot \cos cos\,x \cdot sen\,x) =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot [sen\,(2x)] = \frac{3}{2} \cdot sen\,\pi = \frac{3}{2} \cdot 0 = 0.$$

$$LA = 0 \Rightarrow A = e^0 = 1 \Rightarrow \underline{\left(\frac{1}{1-sen\,x}\right)^{\frac{coscos\,x}{sen\,x}} = 1.}$$

$c)$

$$f'(x) = \int f''(x) \cdot dx = \int 4 \cdot dx = 4x + C_1.$$

La pendiente de la tangente $y = 9x - 13$ es m = 9. Sabiendo que la derivada de una función en un punto es el valor de la pendiente de la tangente a la función en ese punto: $f'(3) = 9 \Rightarrow 4 \cdot 3 + C_1 = 9;\ 12 + C_1 = 9 \Rightarrow C_1 = -3 \Rightarrow f'(x) = 4x - 3.$

$$f(x) = \int f'(x) \cdot dx = \int (4x - 3) \cdot dx = \frac{4x^2}{2} - 3x + C_2 = 2x^2 - 3x + C_2.$$

Para x = 3 el valor de la función es igual que el de la tangente:

$$f(3) = y_{(3)} = 9 \cdot 3 - 13 = 27 - 13 = 14.$$

$$f(3) = 14 \Rightarrow 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + C_2 = 14;\ 18 - 9 + C_2 = 14 \Rightarrow C_2 = 5.$$

$$\underline{f(x) = 2x^2 - 3x + 5}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Sea λ un parámetro real cualquiera y considere la matriz $A = (3\ 0\ \lambda\ -5\ -\lambda\ -5\ \lambda\ 0\ 3\ )$ y el vector $X = (x\ y\ z\ )$.

$a)$ ¿Para qué valores de λ existe la matriz $N = (A - 2I)^{-1}$, siendo I la matriz identidad de orden 3?

$b)$ Si λ = 0, encuentre los valores de x, y, z que satisfacen la ecuación $AX = 2X + b$, donde $b = (1\ y\ 1\ )$.

$c)$ Sean F_1, F_2 y F_3 la primera, segunda y tercera filas, respectivamente, de una matriz M de orden 3 x 3 cuyo determinante es -2. Calcule el determinante de una matriz cuyas filas primera, segunda y tercera son, respectivamente, $5F_1 - F_3$, $3F_3$ y F_2.

$a)$

$$N = A - 2I = (3\ 0\ \lambda\ -5\ -\lambda\ -5\ \lambda\ 0\ 3\ ) - (2\ 0\ 0\ 0\ 2\ 0\ 0\ 0\ 2\ ) = (1\ 0\ \lambda\ -5\ -$$

.

Una matriz es invertible cuando du determinante es distinto de cero:

$$|N| = |1\ 0\ \lambda\ -5\ -\lambda - 2\ -5\ \lambda\ 0\ 1\ | = -\lambda - 2 - \lambda^2(-\lambda - 2) = (-\lambda - 2)\left(1 - \lambda^2\right.$$

.

$$|N| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2;\ \lambda_2 = -1;\ \lambda_3 = 1.$$

$$\underline{N\ es\ invertible\ \forall\lambda\in R - \{-2,\ -1,\ 1\}}.$$

$b)$

$$AX = 2X + b;\ AX - 2X = b;\ (A - 2I)\cdot X = b;$$

$$(A - 2I)^{-1}(A - 2I)\cdot X = (A - 2I)^{-1}\cdot b \Rightarrow X = (A - 2I)^{-1}\cdot b.$$

Para λ = 0 es $A - 2I = (1\ 0\ 0\ -5\ -2\ -5\ 0\ 0\ 1\ )$. Se halla $(A - 2I)^{-1}$ por el método de Gauss:

$$(1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 + 5F_1\} \Rightarrow (1\ 0\ 0\ 5\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1\ 0\ 0\ 5\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_2 \to -\tfrac{1}{2}F_2\right\} \Rightarrow \left(1\ 0\ 0\ -\tfrac{5}{2}\ -\tfrac{1}{2}\ 0\ 0\ 0\ 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_2 \to F_2 - \tfrac{5}{2}F_3\right\} \Rightarrow \left(1\ 0\ 0\ -\tfrac{5}{2}\ -\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{5}{2}\ 0\ 0\ 1\right) \Rightarrow$$

$(A - 2I)^{-1} = \left(1\ 0\ 0\ -\frac{5}{2}\ -\frac{1}{2}\ -\frac{5}{2}\ 0\ 0\ 1\right).$

$X = (A - 2I)^{-1} \cdot b \Rightarrow (x\ y\ z) = \left(1\ 0\ 0\ -\frac{5}{2}\ -\frac{1}{2}\ -\frac{5}{2}\ 0\ 0\ 1\right) \cdot (1\ y\ 1) = \left(1\ -\frac{5}{2}\right.$

$\Rightarrow x = z = 1;\ y = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}y - \frac{5}{2};\ \left(1 + \frac{1}{2}\right)y = -5;\ \frac{3}{2}y = -5;\ y = -\frac{10}{3}.$

$\underline{Solución: x = 1; y = -\frac{10}{3}; z = 1.}$

$c)$

$[M] = \left[F_1\ F_2\ F_3\right] \Rightarrow N = \left[5F_1 - F_3\ 3F_3\ F_2\right] = \left[5F_1\ 3F_3\ F_2\right] + \left[-F_3\ 3F_3\ F_2\right]$

.

Si todos los elementos de una fila o columna de una matriz cuadrada se descomponen en dos sumandos, entonces su determinante es igual a la suma de los determinantes que tienen dicha fila o columna el primero y es segundo sumando respectivamente, siendo los restantes elementos iguales a los del determinante inicial.

El valor del determinante de la segunda matriz es cero por tener dos líneas proporcionales.

$N = \left[5F_1\ 3F_3\ F_2\right] = -\left[5F_1\ F_2\ 3F_3\right].$

Si se intercambian dos filas o dos columnas de un determinante su valor cambia de signo.

$N = -5 \cdot 3 \cdot \left[F_1\ F_2\ F_3\right] = -15 \cdot (-2) = \underline{30}.$

Si los elementos de una fila o columna de un determinante se multiplican por un número, el valor del determinante queda multiplicado por dicho número.

****

2º) $a)$ Sea α un parámetro real cualquiera. Dados los planos $\pi \equiv 3x + ay + 2z - 10 = 0$ y $\pi' \equiv x - y + az - 5 = 0$. ¿Existen valores de α para los que los planos son paralelos?

$b)$ Encuentre la ecuación de la recta paralela a la recta intersección de los siguientes planos: $\pi \equiv 3x + 2y + z = 10$ y $\pi' \equiv 4x - 2y - 8z = 10$ que pasa por el punto de expresión P (1, 1, 0).

$a)$

Para que los planos $\pi\ y\ \pi'$ sean paralelos tiene que cumplirse que: $\frac{1}{3} = \frac{-1}{a} = \frac{a}{2} \Rightarrow$

$\frac{1}{3} = \frac{-1}{a}\ \frac{1}{3} = \frac{a}{2}\ \}a =- 3\ a = \frac{2}{3}\ \Rightarrow \underline{\forall a \in R,\ \ \pi\ y\ \pi'\ no\ son\ paralelos}.$

$b)$

La recta intersección de los planos $\pi\ y\ \pi'$ es la expresión que se obtiene de la igualación de sus ecuaciones:

Los vectores normales de los planos son $\vec{v} = (3,\ 2,\ 1)\ y\ \vec{v'} = (2,\ \ -1,\ \ -4)$.

El vector director de la recta intersección es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos:

$\vec{v'}_r = |i\ j\ k\ 3\ 2\ 1\ 2\ \ -1\ \ -4\ | =- 8i + 2j - 3k - 4k + i + 12j =- 7i + 14j - 7k$

$\Rightarrow \vec{v}_r = (1,\ \ -2,\ 1).$

La expresión de r expresada, por ejemplo, por unas ecuaciones continuas es:

$$\underline{r \equiv x - 1 = \frac{y-1}{-2} = z.}$$

****

3º) $a)$ Sea $f(x) = x^2 \cdot e^{1/x^2}$:

1) Determine el dominio de f(x).

2) Determine, si existen, las asíntotas de f(x).
3) Determine, si existen, los máximos y mínimos relativos de f(x).

$b)$ Calcule: $I = \int \left[\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} + \frac{Lx}{x^2} \right] \cdot dx.$

$a_1)$

La función está definida para cualquier valor real de x, excepto para x = 0 cuyo valor es indeterminado.

$$f(x) = \left(x^2 \cdot e^{\frac{1}{x^2}} \right) = 0 \cdot e^{\frac{1}{0}} = 0 \cdot \infty \Rightarrow Indeterminado \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \frac{-\frac{2}{x^3} \cdot e^{\frac{1}{x^2}}}{-\frac{2}{x^3}} = e^{\frac{1}{x^2}} = \underline{\infty} \ .$$

$$\underline{D(f) \Rightarrow R - \{0\}}.$$

$a_2)$

$$\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}} = +\infty \Rightarrow \underline{Asíntota\ vertical: x = 0}.$$

$$f(x) = f(x) = +\infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntota\ horizontal}.$$

$$m = \frac{f(x)}{x} = \frac{x^2 \cdot e^{\frac{1}{x^2}}}{x} = \left(x \cdot e^{\frac{1}{x^2}} \right) = +\infty .$$

$$m = \frac{f(x)}{x} = \frac{x^2 \cdot e^{\frac{1}{x^2}}}{x} = \left(x \cdot e^{\frac{1}{x^2}} \right) = -\infty .$$

$$\underline{No\ tiene\ asíntota\ oblicua.}$$

$a_3)$

$$f'(x) = 2x \cdot e^{\frac{1}{x^2}} - x^2 \cdot \frac{2}{x^3} \cdot e^{\frac{1}{x^2}} = 2e^{\frac{1}{x^2}} \left(x - \frac{1}{x} \right) = 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \left(x^2 - 1 \right) \cdot e^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \left(x^2 - 1\right) \cdot e^{\frac{1}{x^2}} = 0;\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1.$$

$$f''(x) = 2 \cdot \frac{-1}{x^2} \cdot \left(x^2 - 1\right) \cdot e^{\frac{1}{x^2}} + 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot 2x \cdot e^{\frac{1}{x^2}} - 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \left(x^2 - 1\right) \cdot \frac{2}{x^3} \cdot e^{\frac{1}{x^2}} =$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \cdot e^{\frac{1}{x^2}} + 4e^{\frac{1}{x^2}} + \left(1 - x^2\right) \cdot \frac{4}{x^4} \cdot e^{\frac{1}{x^2}} = 2e^{\frac{1}{x^2}}\left[1 - \frac{1}{x^2} + 2 + \frac{2}{x^4}\left(1 - x^2\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{x^4} e^{\frac{1}{x^2}}\left(3x^4 - x^2 + 2 - 2x^2\right) = \frac{2}{x^4} e^{\frac{1}{x^2}}\left(3x^4 - 3x^2 + 2\right) = f''(x).$$

$f''(-1) = f''(1) > 0 \Rightarrow$ Mínimos para x = -1 y para x = 1.

$f(-1) = f(1) = 1 \cdot e = e.$

$$\underline{Mínimo: A(-1,\ e);\ Mínimo: B(1,\ e)}$$

$b)$

$$I = \int\left[\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} + \frac{Lx}{x^2}\right] \cdot dx = \int\left[\frac{x^2-2x+1}{\sqrt{x}} + \frac{Lx}{x^2}\right] \cdot dx = \int x^{\frac{3}{2}} \cdot dx - 2\int x^{\frac{1}{2}} \cdot dx +$$

$$+ \int x^{-\frac{1}{2}} \cdot dx + \int \frac{Lx}{x^2} \cdot dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 2 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \int \frac{Lx}{x^2} \cdot dx =$$

$= \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - \frac{4}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + \int \frac{Lx}{x^2} \cdot dx.$ (Esta última integral se resuelve por partes)

$$\int \frac{Lx}{x^2} \cdot dx \Rightarrow \left\{u = Lx \rightarrow du = \frac{1}{x} \cdot dx\ \ \frac{1}{x^2} \cdot dx = dv \rightarrow v = -\frac{1}{x}\right\} \Rightarrow Lx \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) - \int -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot$$

$$= -\frac{Lx}{x} + \int \frac{1}{x^2} \cdot dx = -\frac{Lx}{x} - \frac{1}{x} = -\frac{1+Lx}{x}.$$

$$\underline{I = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - \frac{4}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} - \frac{1+Lx}{x} + C.}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE ASTURIAS

JULIO – 2015 (GENERAL)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Tiene que elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la Opción A o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la Opción B. Conteste de forma razonada y escriba ordenadamente y con letra clara. Todos los procesos que conducen a resultados deben estar suficientemente justificados y completamente explicados.

OPCIÓN A

1º) Considere el sistema $x + (a - 1)y + z = 1$ $ax + (2a - 2)y + 2z = 0$ $(a + 1)$
:

a) Estudie el carácter del sistema según los valores del número real α.

b) Resuelva el sistema, si es posible, cuando α = 1.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$M = (1\ a - 1\ 1\ a\ 2a - 2\ 2\ a + 1\ 3a - 3\ a + 3\ )$ y $M' = (1\ a\ a + 1\ \ a - 1\ 2a - 2\ 3a - 3\ \ 1\ 2\ a + 3\ \ 1\ 0\ 0\ \ )$.

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$|M| = |1\ a - 1\ 1\ a\ 2a - 2\ 2\ a + 1\ 3a - 3\ a + 3\ | = 2(a - 1)(a + 3) + 3a(a - 1) +$

$+ 2(a - 1)(a + 1) - 2(a - 1)(a + 1) - 2\cdot 3\cdot (a - 1) - a(a - 1)(a + 3) =$

$= 2\left(a^2 + 3a - a - 3\right) + 3a^2 - 3a - 6a + 6 - a\left(a^2 + 2a - 3\right) =$

$= 2a^2 + 4a - 6 + 3a^2 - 9a + 6 - a^3 - 2a^2 + 3a =$

$=- a^3 + 3a^2 - 2a =- a\left(a^2 - 3a + 2\right) = 0 \Rightarrow \underline{a_1 = 0}. \;\; a^2 - 3a + 2 = 0$;;

$a = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \underline{a_2 = 1}, \; \underline{a_3 = 2}.$

$\underline{Para \{a \neq 0 \; a \neq 1 \; a \neq 2 \} \Rightarrow Ran\, M = Ran\, M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

Para α = 0 es $M' = (1\ 0\ 1 \quad -1 \quad -2 \quad -3 \quad 1\ 2\ 3 \quad 1\ 0\ 0 \quad) \Rightarrow \left\{F_1 + F_2 = F_3\right\} \Rightarrow Rang\, M' = 2.$

Para α = 1 es $M' = (1\ 1\ 2 \quad 0\ 0\ 0 \quad 1\ 2\ 4 \quad 1\ 0\ 0 \quad)$, equivalente a efectos de rango a la matriz $(1\ 1\ 1\ 1\ 2\ 0\ 2\ 4\ 0\ ) \Rightarrow |1\ 1\ 1\ 1\ 2\ 0\ 2\ 4\ 0\ | = 4 - 4 = 0 \Rightarrow Rang\, M' = 2.$

Para α = 2 es $M' = (1\ 2\ 3 \quad 1\ 2\ 3 \quad 1\ 2\ 5 \quad 1\ 0\ 0 \quad)$, cuyo rango es el siguiente (teniendo en cuenta que son iguales las dos primeras columnas: $|1\ 1\ 1\ 2\ 2\ 0\ 3\ 5\ 0\ | = 10 - 6 = 4 \neq 0 \Rightarrow Rang\, M' = 3.$

$\underline{Para \{a = 0 \; a = 1 \} \Rightarrow Ran\, M = Ran\, M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

$\underline{Para\ a = 2 \Rightarrow Ran\, M = 2;\ Ran\, M' = 3 \Rightarrow S.\ I.}$

$b)$

Para α = 1 el sistema es $x + z = 1 \;\; x + 2z = 0 \; 2x + 4z = 0 \}$, que es compatible indeterminado, según al apartado anterior; el sistema es equivalente a $x + z = 1 \; x + 2z = 0 \}$, cuya solución es:

$- x - z =- 1 \; x + 2z = 0 \quad \} \Rightarrow z =- 1,\ x = 2.$

$\underline{Solución: \{x = 2 \;\; y = \lambda \;\; z =- 1, \forall \lambda \in R.}$

****

2º) Considere el plano $\pi \equiv x + y - z = 0$ y el punto P (1, 1, -1). Obtenga:

a) Un punto Q en el plano π tal que la recta r determinada por P y Q sea perpendicular al plano π.

b) Los puntos P' en la recta r tales que la distancia de P' a π sea el doble de la distancia de P a π.

----

a)

Un vector normal del plano π es $\overrightarrow{v} = (1, 1, -1)$.

La recta r que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π tiene la siguiente expresión dada por unas ecuaciones paramétricas: $r \equiv \{x = 1 + \lambda \;\; y = 1 + \lambda \;\; z = -1 - \lambda$.

El punto Q buscado es la intersección de la recta r con el plano π:

$$r \equiv \{x = 1 + \lambda \;\; y = 1 + \lambda \;\; z = -1 - \lambda \;\; \pi \equiv x + y - z = 0 \} \Rightarrow (1 + \lambda) + (1$$

$1 + \lambda + 1 + \lambda + 1 + \lambda = 0$;; $3 + 3\lambda = 0$;; $1 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1$.

$$Q \Rightarrow \{x = 1 - 1 = 0 \;\; y = 1 - 1 = 0 \;\; z = -1 + 1 = 0 \;\; \Rightarrow \underline{Q(0, 0, 0)}.$$

b)

La distancia de un punto $P_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d\left(P_0, \pi\right) = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

$$d(P, \pi) = \frac{|1\cdot1 + 1\cdot1 - 1\cdot(-1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|1+1+1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \underline{\sqrt{3}}.$$

El punto P' por pertenecer a r es de la forma: $P(1 + \lambda,\ 1 + \lambda. - 1 - \lambda)$.

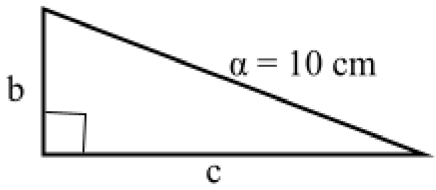
$$d(P', \pi) = 2\sqrt{3} \Longrightarrow \frac{|1\cdot(1+\lambda) + 1\cdot(1+\lambda) - 1\cdot(-1-\lambda)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|1+\lambda+1+\lambda+1+\lambda|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|3+3\lambda|}{\sqrt{3}} \;;;\; 6 = |3 + 3\lambda| \;;;$$

$$2 = |1 + \lambda| \Longrightarrow \{2 = 1 + \lambda \longrightarrow \lambda_1 = 1 \Rightarrow \underline{P'_1(2, 2, -2)} \qquad 2 = -1 - \lambda \longrightarrow \lambda_2 = -3 \Rightarrow \underline{P'_2(-}$$

.

****

3º) De todos los triángulos rectángulos de hipotenusa 10 cm, encuentre la longitud de los catetos del triángulo que tiene el perímetro máximo.



Perímetro: $p = 10 + b + c \Rightarrow Mínimo.$

Por el teorema de Pitágoras: $10^2 = b^2 + c^2$.

$c = \sqrt{100 - b^2}$. Sustituyendo en el perímetro:

$$p = 10 + b + \sqrt{100 - b^2}.$$

El perímetro será mínimo cuando se anule su primera derivada:

$$p'_{(b)} = 0 + 1 + \frac{-2b}{2\sqrt{100-b^2}} = 1 - \frac{b}{\sqrt{100-b^2}} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{b}{\sqrt{100-b^2}};;$$

$$b = \sqrt{100 - b^2} \;;;\; b^2 = 100 - b^2 \;;;\; 2b^2 = 100 \;;;\; b^2 = 50 \Rightarrow b = \pm\sqrt{50}.$$

El valor negativo carece de sentido lógico, por lo cual: $b = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

$$c = \sqrt{100 - b^2} = \sqrt{100 - 50} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

$\underline{Es\ un\ triángulo\ rectángulo\ isósceles\ de\ lados\ α = 10\ cm\ y\ b = c = 5\sqrt{2}\ cm.}$

****

4º) Considere las curvas $y = 4x - x^2$ e $y = x^2 - 6$.

a) Encuentre los puntos de intersección.

b) Represente razonadamente las dos curvas en una misma gráfica, donde se vea claramente el recinto que limitan entre ellas.

c) Encuentre el área del recinto limitado por las dos curvas.

----

a)

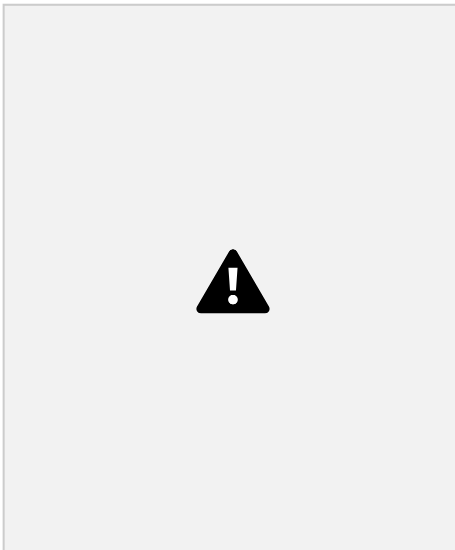
Los puntos de intersección de las curvas son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$4x - x^2 = x^2 - 6 \;;\; 2x^2 - 4x - 6 = 0 \;;\; x^2 - 2x - 3 = 0 \;;$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2 \Rightarrow \{ x_1 = -1 \rightarrow \underline{A(-1, -5)} \; x_2 = 3 \rightarrow \underline{B(3, 3)}$$

.

b)



La parábola $y = 4x - x^2$ corta al eje OX en los puntos siguientes:

$$y = 4x - x^2 = 0 \Rightarrow \{ x_1 = 0 \rightarrow \underline{O(0, 0)} \; x_2 = 4 \rightarrow \underline{C(4, 0)} \; .$$

La parábola $y = x^2 - 6$, por ser simétrica con respecto al eje OY pasa por el punto D, simétrico de B (3, 3), D (-3, 3), y tiene su vértice en el punto E (0, -6).

El vértice de $y = 4x - x^2$ es E (2, 4).

La representación gráfica de la situación se expresa en la figura adjunta.

c)

Por ser las ordenadas de la parábola $y = 4x - x^2$ iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de $y = x^2 - 6$ en el intervalo del área a calcular y de la observación de la figura se deduce que:

$$S = \int_{-1}^{3}\left[\left(4x - x^2\right) - \left(x^2 - 6\right)\right]\cdot dx = \int_{-2}^{3}\left(4x - x^2 - x^2 + 6\right)\cdot dx =$$

$$= \int_{-2}^{3}\left(-2x^2 + 4x + 6\right)\cdot dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + 6x\right]_{-2}^{3} = \left[-\frac{2x^3}{3} + 2x^2 + 6x\right]_{-2}^{3} =$$

$$= \left(-\frac{2\cdot 3^3}{3} + 2\cdot 3^2 + 6\cdot 3\right) - \left[-\frac{2\cdot(-1)^3}{3} + 2\cdot(-1)^2 + 6\cdot(-1)\right] =$$

$$= -18 + 18 + 18 - \frac{2}{3} - 2 + 6 = 22 - \frac{2}{3} = \frac{66-2}{3} = \underline{\frac{64}{3}\,u^2 = S}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Dado el número real α considere la matriz $A = (1 \ -1 \ -a\, a\, 3\, 1 \ -2\, a\, 2a)$.

a) Obtenga los valores del número real α para los que la matriz A tiene inversa.

b) Calcule, si es posible, la inversa de A cuando α = 0.

----

a)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = |1 \ -1 \ -a\, a\, 3\, 1 \ -2\, a\, 2a| = 6a - a^3 + 2 - 6a - a + 2a^2 =$$

$- a^3 + 2a^2 - a + 2 = 0$;; $a^3 - 2a^2 + a - 2 = 0$. Resolviendo por Ruffini:

La única raíz real es α = 2.

	1	-2	1	-2
2		2	0	2
	1	0	1	0

$\underline{A\ es\ invertible\ para\ cualquier\ valor\ real\ de\ \alpha,\ excepto\ para\ \alpha = 2.}$

b)

Para α = 0 es $A = (1 \ -1\, 0\, 0\, 3\, 1 \ -2\, 0\, 0)$. Para obtener su inversa se procede por el método de Gauss-Jordan.

$(A/I) = (1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1) \Rightarrow \{F_3 \to F_3 + 2F_1\} \Rightarrow (1\,0\,0\,0\,1\,0\,2\,0\,1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{F_3 \to \frac{1}{3}F_3\right\} \Rightarrow \left(1\,0\,0\,0\,\frac{1}{3}\,0\,2\,0\,1\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 + F_2\, F_3 \to F_3 + 2F_2\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(1\,\frac{1}{3}\,0\,0\,\frac{1}{3}\,0\,2\,\frac{2}{3}\,1\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 - F_3\, F_2 \to F_2 - F_3\}$

$\Rightarrow \left(0\,0\, -\frac{1}{2}\, -1\,0\, -\frac{1}{2}\,1\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{F_3 \to \frac{1}{2}F_3\right\} \Rightarrow \left(1\,\frac{1}{3}\,0\,0\,\frac{1}{3}\,0\,1\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \{F_3 \to 3F_3\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(0\,0\, -\frac{1}{2}\, -1\,0\, -\frac{1}{2}\,3\,1\,\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \underline{A^{-1} = \left(0\,0\, -\frac{1}{2}\, -1\,0\, -\frac{1}{2}\,3\,1\,\frac{3}{2}\right)}.$

****

2º) Los puntos A (1, 0, 0) y B (0, 2, 1) son vértices que forman el lado desigual de un triángulo isósceles. Se sabe que el tercer vértice pertenece a la recta $r \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 10 \end{cases}$.

a) Halle las coordenadas del tercer vértice.

b) Encuentre el área del triángulo.

----

a)

Los puntos A y B determinan el vector $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = B - A = (-1, 2, 1)$.

El haz de planos β perpendicular al segmento $\overline{AB}$ tiene la siguiente expresión general: $\beta \equiv -x + 2y + z + D = 0$.

El punto medio del segmento $\overline{AB}$ es $M\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$.

De los infinitos planos del haz β, el plano segmento α que contiene al punto M es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \beta \equiv -x + 2y + z + D = 0 \\ M\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{2} + D = 0 \Rightarrow D = -2$$
.

El plano α tiene por expresión general $\alpha \equiv -x + 2y + z - 2 = 0$.

El vértice pedido C es la intersección del plano α y la recta r:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 10 \end{cases} \\ \alpha \equiv -x + 2y + z - 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -x + 0 + 10 - 2 =$$
.

b)

Una forma de hallar el área del triángulo es como la mitad del área del paralelogramo que determinan dos de sus lados.

Los puntos A y C determinan el vector $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = C - A = (7, 0, 10)$.

El área del paralelogramo es el módulo del producto vectorial de los vectores que lo determinan, por lo cual, el área del triángulo pedido es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$:

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \| i\ j\ k\ \ -\ 1\ 2\ 1\ 7\ 0\ 10 \|\ = \frac{1}{2} \cdot |20i\ +\ 7j\ -\ 14k\ +\ 10j| = \frac{1}{2} \cdot |20i\ +\ 17j\ -\ 14$

$= \frac{1}{2}\sqrt{20^2\ +\ 17^2\ +\ (14)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{400\ +\ 289\ +\ 196} = \underline{\frac{1}{2}\sqrt{885} \cong 14,87\ u^2 = S_{ABC}}.$

Otra forma de resolver el apartado sería la siguiente:

La altura del triángulo es la distancia entre los puntos $M\left(\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}\right)$ y C (8, 0, 10):

$$h\ = \overline{MC} = \sqrt{\left(8\ -\frac{1}{2}\right)^2 +\ (1\ -\ 0)^2 +\ \left(10\ -\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 +\ 1\ +\left(\frac{19}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{225}{4} +\ 1\ +\ \frac{361}{4}} = \sqrt{\frac{586}{4} +\ 1} = \sqrt{\frac{590}{4}} = \frac{\sqrt{590}}{2} = \overline{MC}.$$

La base del triángulo es la distancia entre los puntos A (1, 0, 0) y B (0, 2, 1):

$$\overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-\ 1)^2 +\ 2^2 +\ 1^2} = \sqrt{1\ +\ 4\ +\ 1} = \sqrt{6}.$$

$$S_{ABC} = \frac{\overline{AB} \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{590}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3540}}{4} = \frac{\sqrt{885 \cdot 4}}{4} = \underline{\frac{\sqrt{885}}{2}\ u^2}.$$

****

3º) Calcule $\frac{L(1+x)-sen\, x}{x\cdot sen\, x}$.

$$\frac{L(1+x)-sen\, x}{x\cdot sen\, x} = \frac{L1-0}{0\cdot 0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \left\{L^{'}Hopital\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{1+x}-cos\, x}{1\cdot sen\, x+x\cdot \text{coscos}\, x} = \frac{1-1}{0+0\cdot 1} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-\frac{1}{(1+x)^2}+sen\, x}{cos\, x+1\cdot \text{coscos}\, x - x\cdot sen\, x} == \frac{-1+0}{1+1\pm 0\cdot 0} =- \frac{1}{2}.$$

$$\underline{\frac{L(1+x)-sen\, x}{x\cdot sen\, x} =- \frac{1}{2}.}$$

****

4º) Se sabe que la derivada de una función $f(x)$ es $f'(x) = (x+1)(x^2-4)$.

a) Determine la función f sabiendo que $f(0) = \frac{1}{7}$.

b) Halle los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos de $f(x)$.

----

a)

$$f'(x) = (x+1)(x^2-4) = x^3 - 4x + x^2 - 4 = x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

$$f(x) = \int (x^3 + x^2 - 4x - 4) \cdot dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} - 4x + C.$$

$$f(0) = C = \frac{1}{7} \Rightarrow \underline{f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 4x + \frac{1}{7}}.$$

b)

Una función es creciente o decreciente en un punto cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente, en ese punto.

$$f'(x) = (x+1)(x^2-4) = 0 \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2.$$

Teniendo en cuenta que f(x) es continua en R por ser una función polinómica, los valores que anulan la primera derivada dividen el dominio de la función en cuatro intervalos crecientes o decrecientes de forma alternativa.

Teniendo en cuenta que, por ejemplo, $f'(0) = -4 < 0$, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 2).}$$

$$\underline{Crecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-2, -1) \cup (2, +\infty).}$$

Una función tiene un máximo relativo en un punto cuando se anula la primera derivada y es negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera y, tiene un mínimo relativo para los valores reales que anulan la primera derivada y hacen positiva la segunda derivada.

$$f'(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

$f''(x) = 3x^2 + 2x - 4 \Rightarrow \{ f''(-2) = 12 - 4 - 4 = 4 > 0 \rightarrow mín.\ f''(-1) = 3 - 2 -$
.

Siendo $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 4x + \frac{1}{7}$:

$f(-2) = \frac{16}{4} - \frac{8}{3} - 8 + 8 + \frac{1}{7} = \frac{336-224+12}{84} = \frac{124}{84} = \frac{31}{21} \Rightarrow Mín. \Rightarrow \underline{N\left(-2, \frac{31}{21}\right)}$
.

$f(-1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - 2 + 4 + \frac{1}{7} = \frac{21-28+168+12}{84} = \frac{173}{84} \Rightarrow Máx. \Rightarrow \underline{P\left(-1, \frac{173}{84}\right)}.$

$f(2) = 4 + \frac{8}{3} - 8 - 8 + \frac{1}{7} = \frac{-252+56+3}{21} = -\frac{193}{21} \Rightarrow Mín. \Rightarrow \underline{Q\left(2, -\frac{193}{21}\right)}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE ASTURIAS

JUNIO – 2015 (ESPECÍCIFA)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Tiene que elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la Opción A o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la Opción B. Conteste de forma razonada y escriba ordenadamente y con letra clara. Todos los procesos que conducen a resultados deben estar suficientemente justificados y completamente explicados.

OPCIÓN A

1º) Sea A una matriz cuadrada de orden 3 con elementos reales tal que $A^2 = I_3$, donde I_3 la matriz identidad de orden 3.

a) Pruebe que la matriz A tiene inversa y dé dicha inversa.

b) Obtenga A^n para cualquier números natural n.

c) Si $A = (1\ 1\ 1\ 0\ a\ 0\ 0\ 0\ a)$, calcular el valor del número real a para que $A^2 = I_3$.

----

a)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

De $A^2 = I;\ A \cdot A = I \Rightarrow |A| \cdot |A| = |I| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \underline{A\ es\ invertible}$.

Por definición de matriz inversa de una matriz: $A \cdot A^{-1} = I$.

Sabemos que $A^2 = I$, por lo cual: $A \cdot A^{-1} = A^2 = A \cdot A \Rightarrow \underline{A^{-1} = A}$.

b)

$A^3 = A^2 \cdot A = I \cdot A = A$. $A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = A^2 = I$.   ……

$\underline{A^{n} = A,\ si\, n\, es\, impar\ y\ A^{n} = I,\ si\, n\, es\, par.}$

$c)$

$A^{2} = A \cdot A = (1\ 1\ 1\ 0\ a\ 0\ 0\ 0\ a) \cdot (1\ 1\ 1\ 0\ a\ 0\ 0\ 0\ a) = \left(1\ 1 + a\ 1 + a\ 0\ a^{2}\ 0\ 0\ 0\ a^{2}\right)$

.

$$A^{2} = I \Rightarrow \left(1\ 1 + a\ 1 + a\ 0\ a^{2}\ 0\ 0\ 0\ a^{2}\right) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1) \Rightarrow a^{2} = 1\ 1 + a = 0$$

.

****

2º) Sean los planos siguientes: $\pi_1 \equiv 2x + 2y + az = 1$, $\pi_2 \equiv 2x + ay + 2z = -2$, $\pi_3 \equiv ax + 2y + 2z = 1$, donde a es un número real. Calcule:

a) El valor de a para que los planos contengan una recta en común.

b) Halle el vector director de dicha recta.

c) Escriba unas ecuaciones paramétricas de la recta común a los tres planos dados.

----

a)

Para que tres planos distintos se corten en una línea es necesario que los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada sean iguales e iguales a dos.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = (2\ 2\ a\ 2\ a\ 2\ a\ 2\ 2)\ y\ M' = (2\ 2\ a\ 2\ a\ 2\ a\ 2\ 2 \quad 1\ -2\ 1)$.

El rango de M en función de a es el siguiente:

$|M| = |2\ 2\ a\ 2\ a\ 2\ a\ 2\ 2| = 4a + 4a + 4a - a^3 - 8 - 8 = -a^3 + 12a - 16 =$

$a^3 - 12a + 16 = 0$.

Resolviendo por Ruffini se obtienen las raíces: $a_1 = a_2 = 2,\ a_3 = -4$.

$Para\ a = 2 \Rightarrow M' = (2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2 \quad 1\ -2\ 1) \Rightarrow Rang\ M' = 2.$

$Para\ a = 2 \Rightarrow Rang\ M = 1,\ Rang\ M' = 2 \Rightarrow Sistema\ incompatible.$

Dos planos son coincidentes y el otro es paralelo.

$Para\ a = -4 \Rightarrow M' = (2\ 2\ -4\ 2\ -4\ 2\ -4\ 2\ 2 \quad 1\ -2\ 1) \Rightarrow \{F_1 + F_2 = -F_4\} \Rightarrow$

$\Rightarrow Rang\ M' = 2.$

$\underline{Los\ planos\ \pi_1,\ \pi_2\ y\ \pi_3\ se\ cortan\ en\ una\ recta\ para\ a = -4.}$

b)

La expresión de la recta que determinan los planos dados por unas ecuaciones implícitas puede ser las que forman dos cualesquiera de los planos dados, por ejemplo:

$r \equiv \begin{cases} 2x + 2y - 4z = 1 \\ 2x - 4y + 2z = -2 \end{cases}$ o mejor: $r \equiv \begin{cases} 2x + 2y - 4z = 1 \\ x - 2y + z = -1 \end{cases}$.

Un vector director de una recta dada por la intersección de dos planos es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan:

$$r \equiv \begin{cases} 2x + 2y - 4z = 1 \\ x - 2y + z = -1 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{n}_1 = (1,\ 1,\ -2) \\ \vec{n}_2 = (1,\ -2,\ 1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$= i - 2j - 2k - k - 4i - j = -3i - 3j - 3k \Rightarrow \underline{\vec{v}_r = (1,\ 1,\ 1)}.$$

$c)$

$$r \equiv \begin{cases} 2x + 2y - 4z = 1 \\ x - 2y + z = -1 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow 3x = 3\lambda \Rightarrow x = \lambda;\ \ \lambda - 2y + \lambda =$$

$$2y = 1 + 2\lambda \Rightarrow y = \frac{1}{2} + \lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{1}{2} + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}.$$

$$\underline{Un\ punto\ de\ r\ es\ P\left(1,\ \frac{3}{2},\ 1\right)}.$$

****

3º) Calcule a y b, números reales, de forma que la curva $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ pase por el punto $P(-1, 6)$ y su recta tangente en $x = 1$ forme un ángulo de 45° con el eje OX.

Por pasar por $P(-1, 6)$: $f(-1) = 6 \Rightarrow (-1)^3 + a\cdot(-1)^2 - b + 2 = 6;$

$-1 + a - b + 2 = 6;\ \ a - b = 5.$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b.$

Por formar su recta tangente en $x = 1$ un ángulo de 45° con el eje OX es:

$f'(1) = 1 \Rightarrow 3\cdot1^2 + 2a\cdot1 + b = 1;\ \ 3 + 2a + b = 1;\ \ 2a + b = -2.$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones obtenidas:

$\left.\begin{matrix} a - b = 5 \\ 2a + b = -2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3a = 3 \Rightarrow \underline{a = 1}.$

$1 - b = 5;\ \ -b = 4 \Rightarrow \underline{b = -4}.$

****

4º) Calcule una primitiva de la función $f(x) = \frac{Lx}{\sqrt{x}}$.

$$F(x) = \int \frac{Lx}{\sqrt{x}} \cdot dx \Rightarrow \left\{ u = Lx \rightarrow du = \frac{1}{x} \cdot dx \quad \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot dx = dv \rightarrow v = 2\sqrt{x} \cdot dx \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Lx \cdot 2\sqrt{x} - \int 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = 2\sqrt{x} \cdot Lx - 2\int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2\sqrt{x} \cdot Lx - 2 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$$

$2\sqrt{x} \cdot Lx - 4\sqrt{x} + C = 2\sqrt{x} \cdot (Lx - 2) + C.$

$$\underline{F(x) = 2\sqrt{x} \cdot (Lx - 2) + C}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Dado el sistema $x + y + z = 2 \quad ax + 2y + 3z = 0 \; a^2x + 4y + 9z =- 12 \}$:

a) Estudie su compatibilidad según los valores del número real a.

b) Resuelva el sistema, si es posible, cuando $a = 3$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A = \left(1\ 1\ 1\ a\ 2\ 3\ a^2\ 4\ 9\right) \text{ y } A' = \left(1\ 1\ 1\ a\ 2\ 3\ a^2\ 4\ 9 \quad 2\ 0\ -\ 12\right).$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|A| = \left|1\ 1\ 1\ a\ 2\ 3\ a^2\ 4\ 9\right| = 18 + 4a + 3a^2 - 2a^2 - 12 - 9a = 0,\ a^2 - 5a + 6$$

$a = \frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2} = \frac{5\pm\sqrt{1}}{2} = \frac{5\pm1}{2} \Rightarrow a_1 = 2,\ a_2 = 3.$

$\underline{Para\,\{a\neq2\ a\neq3\,\} \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

Para $a = 2 \Rightarrow A' = (1\ 1\ 1\ 2\ 2\ 3\ 4\ 4\ 9 \quad 2\ 0\ -\ 12\,) \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \left(C_1,\ C_3,\ C_4\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow |1\ 1\ 2\ 2\ 3\ 0\ 4\ 9\ -\ 12\,| =- 36 + 36 - 24 + 24 = 0 \Rightarrow Rang\ A' = 2.$

Para $a = 3 \Rightarrow A' = (1\ 1\ 1\ 3\ 2\ 3\ 9\ 4\ 9 \quad 2\ 0\ -\ 12\,) \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \left(C_1,\ C_3,\ C_4\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow |1\ 1\ 2\ 3\ 2\ 0\ 9\ 4\ -\ 12\,| =- 24 + 24 - 36 + 36 = 0 \Rightarrow Rang\ A' = 2.$

$\underline{Para\,\{a = 2\ a = 3\,\} \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < nº\ incog. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

b)

Para $a = 3$ el sistema resulta: $x + y + z = 2 \quad 3x + 2y + 3z = 0\ 9x + 4y + 9z =- 12\,\}$, que es compatible indeterminado. Despreciando una ecuación (tercera) y haciendo $z = \lambda$, resulta:

$x + y = 2 - \lambda\, 3x + 2y = -3\lambda \quad \} \quad -2x - 2y = -4 + 2\lambda\, 3x + 2y = -3\lambda \quad \} \Rightarrow$
.

$-4 - \lambda + y = 2 - \lambda \Rightarrow y = 6.$

$\underline{Solución: x = -4 - \lambda,\ y = 6,\ z = \lambda,\ \forall\lambda \in R}.$

****

2º) Considere las rectas $r \equiv \{x - y + z = 2 \quad 2x - 2y + z = 2$, $s \equiv \{x + y = 0\ z = 1$:

a) Encuentre la posición relativa de las rectas r y s.

b) Halle, si es posible, la ecuación implícita de un plano paralelo a r que contenga a s.

c) Obtenga la mínima distancia entre r y s.

----

a)

Las rectas r y s determinan el sistema $\{x - y + z = 2 \quad 2x - 2y + z = 2\ x + y = 0 \quad z = 1$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$M = (1\,2\,1\,0 \quad -1 \; -2\,1\,0 \;\; 1\,1\,0\,1 \;)$ y $M' = (1 \; -1\,1\,2 \;\, 2 \; -2\,1\,2 \;\, 1\,0 \;\, 1\,0 \;\, 0\,1 \;\, 0\,1 \;)$.

Según sean los rangos de M y M' pueden presentarse los siguientes casos:

1. -- Rango 3 = Rango M' = 4 ⇛ Se cruzan.

2. -- Rango M = 3, Rango M' = 3 ⇛ Se cortan.

3. -- Rango M = 2, Rango M' = 3 ⇛ Paralelas.

4. -- Rango M = 2, Rango M' = 2 ⇛ Coincidentes.

$Rango\ de M \Rightarrow \left\{F_2, F_3, F_4\right\} \Rightarrow |2 \; -2\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,1\,| = 2 + 2 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M = 3.$

$Rang\ M' \Rightarrow |1 \; -1\,1\,2 \;\, 2 \; -2\,1\,2 \;\, 1\,0 \;\, 1\,0 \;\, 0\,1 \;\, 0\,1 \;| \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1 \;\, F_3 \rightarrow F_3 - F_1\right.$

$= |0 \; -1 \; -2\,2 \; -1 \; -2\,0\,1\,1\,| = -4 + 2 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 4.$

$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan.}$

b)

Un vector director de la recta $r \equiv \{x - y + z = 2 \quad 2x - 2y + z = 2$ es cualquier vector que sea linealmente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son $\vec{v_1} = (1, -1, 1)$ y $\vec{v_2} = (2, -2, 1)$:

$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -i + 2j - 2k + 2k + 2i - j = i + j = (1, 1, 0)$.

La expresión de $s \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$ por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente: $s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 \end{cases}$.

Un punto y un vector director de s son $B(0,\ 0,\ 1)$ y $\vec{v}_s = (1,\ -1,\ 0)$.

El plano π pedido, por ser paralelo a r y contener a s, tiene como vectores directores a los vectores directores de las rectas y, por contener a s, contiene al punto $B(0,\ 0,\ 1)$; su expresión general o implícita es la siguiente:

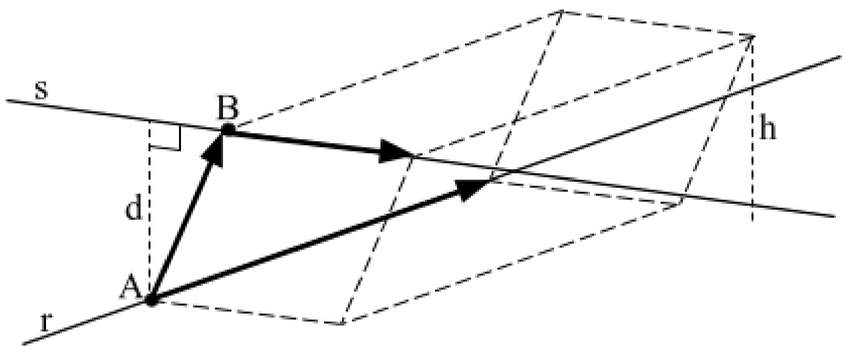
$$\pi\left(B;\ \vec{v}_r,\ \vec{v}_s\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0;\ \ -(z-1) - (z-1) = 0;\ \ -3(z-1$$

$$\underline{\pi \equiv z - 1 = 0.}$$

c)

Para calcular la distancia entre las rectas r y s vamos a determinar un paralelepípedo cuyas dimensiones son los vectores directores de las rectas, $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$, y un tercer vector $\vec{w}$ que tiene como origen un punto A de r y extremo el punto P de s.

Para una mejor comprensión se hace el esquema que se observa.



El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observando que la altura h es igual a la distancia d pedida entre las rectas.

Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$V = \vec{v}_r \cdot \left(\vec{v}_s \times \vec{w}\right) = \left|\vec{v}_r \times \vec{v}_s\right| \cdot h = \left|\vec{v}_r \times \vec{v}_s\right| \cdot d \Rightarrow d = \frac{\left|\vec{v}_r \cdot \left(\vec{v}_s \times \vec{w}\right)\right|}{\left|\vec{v}_r \times \vec{v}_s\right|}.$$

Para encontrar un punto A de r la expresamos por unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \{x - y + z = 2 \quad 2x - 2y + z = 2 \Rightarrow y = \lambda \Rightarrow x + z = 2 + \lambda \; 2x + z = 2 + 2\lambda$$

$$\Rightarrow z = 2; \; x = 2 + \lambda - 2 = \lambda \Rightarrow r \equiv \{x = \lambda \; y = \lambda \; z = 2 \; \Rightarrow A(0, \; 0. \; 2).$$

$$\vec{AB} = [B - A] = [(0, 0, \; 1) - (0, \; 0, \; 2)] = (0, \; 0 \; , \; - \; 1).$$

$$d = \frac{\left|\vec{v}_r \cdot \left(\vec{v}_s \times \vec{w}\right)\right|}{\left|\vec{v}_r \times \vec{v}_s\right|} = \frac{\|1\;1\;0\;1\;-1\;0\;0\;0\;-1\;\|}{|i\;j\;k\;1\;1\;0\;1\;-1\;0\;|} = \frac{|1+1|}{|-k-k|} = \frac{2}{|-2k|} = \frac{2}{2} = \underline{1\;unidad = d(r, s\;)}$$

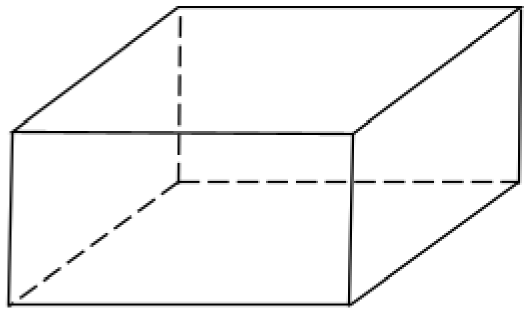
.

****

3º) Se desea construir un comedor con forma de paralelepípedo rectangular de 100 m^3 de volumen de manera que el largo de su base sea 4/3 de la anchura x de su base. Se sabe que los precios de un metro cuadrado de suelo, de techo y de pared lateral son, respectivamente, 225 €/m^2, 300 €/m^2 y 256 €/m^2. Determine razonadamente:

a) El valor de x de la anchura de la base que minimiza el coste.

b) Dicho coste mínimo.



a)

De la observación de la figura podemos deducir la expresión del volumen, de la cual se expresa la altura en función de x con objeto de expresar el coste como una función de x.

$$V = x \cdot \frac{4}{3} x \cdot h = 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{100 \cdot 3}{4x^2} \Rightarrow h = \frac{75}{x^2}.$$

$$Coste = C(x, y) = \overbrace{x \cdot \frac{4}{3} x \cdot 225}^{Suelo} + \overbrace{x \cdot \frac{4}{3} x \cdot 300}^{Techo} + \overbrace{2 \cdot \left(\frac{4}{3} x + x\right) \cdot h \cdot 256}^{Pared\ lateral}$$

$$= \frac{4}{3} x^2 \cdot (225 + 300) + 2 \cdot \frac{7}{3} \cdot 256 \cdot xh = \frac{4 \cdot 525}{3} x^2 + \frac{3.584}{3} \cdot xh = 700x^2 + \frac{3.584}{3} \cdot xh$$

.

$$C(x) = 700x^2 + \frac{3.584}{3} \cdot x \cdot \frac{75}{x^2} = 700x^2 + \frac{89.600}{x} = \frac{700x^3 + 89.600}{x} = 700 \cdot \frac{x^3 + 128}{x}.$$

Es condición necesaria para que el coste sea mínimo que se anule su primera derivada:

$$C'(x) = 700 \cdot \frac{3x^2 \cdot x - \left(x^3 + 128\right) \cdot 1}{x^2} = 0 \Rightarrow 3x^3 = x^3 + 128; \ \ 2x^3 = 128;$$

$$x^3 = 64 = 4^3 \Rightarrow x = 4.$$

$\underline{El\ coste\ es\ mínimo\ cuando\ el\ ancho\ de\ la\ base\ es\ de\ 4\ metros.}$

b)

El coste mínimo es: $C(4) = 700 \cdot \frac{4^3 + 128}{4} = 175 \cdot (64 + 128) = 33.600.$

$$\underline{El\ coste\ mínimo\ es\ de\ 33.600\ euros.}$$

****

4º) Calcule el número real m para que $\frac{L(1+mx)}{sen\ (2x)} = 3$.

Por ser $sen\ (2x) = 0$, el límite $\frac{L(1+mx)}{sen\ (2x)}$ tiene que ser una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$; en cualquier otro caso no es posible que su valor sea 3.

$$\frac{L(1+mx)}{sen\ (2x)} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \frac{\frac{m}{1+mx}}{2 \cdot cos\ (2x)} = \frac{\frac{m}{1+m \cdot 0}}{2 \cdot cos\ 0} = \frac{m}{2} = 3.$$

$$\underline{m = 6}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE ASTURIAS

JUNIO – 2015 (GENERAL)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Tiene que elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la Opción A o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la Opción B. Conteste de forma razonada y escriba ordenadamente y con letra clara. Todos los procesos que conducen a resultados deben estar suficientemente justificados y completamente explicados.

OPCIÓN A

1º) Dado el sistema $ax - ay + 3z = a \quad -2x + 3y - 2z = -1 \quad 2x - y + z = a\}$:

a) Estudie su compatibilidad según los distintos valores del número real α.

b) Resuélvalo, si es posible, en el caso de α = 1.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A = (a \ -a\, 3 \ -2\, 3 \ -2\, 2 \ -1\, 1)$ y $A' = (a \ -a\, 3 \ -2\, 3 \ -2\, 2 \ -1\, 1 \ \ a \ -1\, a)$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$|A| = |a \ -a\, 3 \ -2\, 3 \ -2\, 2 \ -1\, 1| = 3a + 6 + 4a - 18 - 2a - 2a = 3a - 12 =$

$a - 4 = 0 \Rightarrow a = 4$.

$\underline{Para\ a \neq 4 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

Para $a = 3 \Rightarrow A' = (4 \ -4\, 3 \ -2\, 3 \ -2\, 2 \ -1\, 1 \ \ 4 \ -1\, 4) \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \left(C_1, C_2, C_4\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow |4 \ -4\, 4 \ -2\, 3 \ -1\, 2 \ -1\, 4| = 48 + 8 + 8 - 24 - 4 - 32 = 64 - 62 \neq 0 \Rightarrow Ra$

.

$\underline{Para\ a = 4 \Rightarrow Rang\ A = 2;\ Rang\ A' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

$b)$

Para $a = 1$ el sistema resulta: $x - y + 3z = 1 \ -2x + 3y - 2z = -1 \quad 2x - y + z = 1\}$, que es compatible determinado. Resolviendo por Cramer:

$$x = \frac{|1 \ -1\, 3 \ -1\, 3 \ -2\, 1 \ -1\, 1|}{3-12} = \frac{3+3+2-9-2-1}{-9} = \frac{-4}{-9} = \frac{4}{9}.$$

$$y = \frac{|1\, 1\, 3 \ -2 \ -1 \ -2\, 2\, 1\, 1|}{-9} = \frac{-1-6-4+6+2+2}{-9} = \frac{-1}{-9} = \frac{1}{9}.$$

$$z = \frac{|1 \ -1\, 1 \ -2\, 3 \ -1\, 2 \ -1\, 1|}{-9} = \frac{3+2+2-6-1-2}{-9} = \frac{-2}{-9} = \frac{2}{9}.$$

$$\underline{Solución: x = \frac{4}{9},\ y = \frac{1}{9},\ z = \frac{2}{9}.}$$

****

2º) Considere las rectas $r_1 \equiv \{2x - y = 1\ x - z = 2$ y $r_2 \equiv \{2x - y = 2\ \ y - 2z =- 2$:

a) Estudie la posición relativa de r_1 y r_2.

b) Encuentre, si es posible, la ecuación implícita de un plano perpendicular a ambas rectas pasando por el punto $A(0,\ -2,\ 0)$.

c) Encuentre la distancia entre r_1 y r_2.

----

a)

Las rectas r y s determinan el sistema $\{2x - y = 1\ \ x - z = 2\ \ 2x - y = 2\ \ y - 2z =- 2$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$M = (2\,1\,2\,0\ \ -1\,0\ -1\,1\ \ 0\ -1\,0\ -2\ )$ y $M' = (2\ \ -1\,0\ \ 1\ 1\,0\ \ -1\,2\ 2\,0\ \ -1\,1\ \ \ 0\ -2\ 2\ -2\ )$.

Según sean los rangos de M y M' pueden presentarse los siguientes casos:

1. -- Rango 3 = Rango M' = 4 ⇛ Se cruzan.

2. -- Rango M = 3, Rango M' = 3 ⇛ Se cortan.

3. -- Rango M = 2, Rango M' = 3 ⇛ Paralelas.

4. -- Rango M = 2, Rango M' = 2 ⇛ Coincidentes.

Para determinar el rango de M tenemos en cuenta que las filas primera y tercera son iguales.

$Rango\ de\ M \Rightarrow \left\{F_1, F_2, F_4\right\} \Rightarrow |2\ \ -1\,0\,1\,0\ \ -1\,0\,1\ \ -2\,| = 2 - 2 = 0 \Rightarrow Rang\ M = 2$.

$Rang\ M' \Rightarrow |2\ \ -1\,0\ \ 1\ 1\,0\ \ -1\,2\ 2\,0\ \ -1\,1\ \ \ 0\ -2\ 2\ -2\ \ | \Rightarrow \left\{F_1 \leftrightarrow F_2\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{F_2 \to F_2 - 2F_1\ F_3 \to F_3 - 2F_1\right\} \Rightarrow |1\,0\ \ -1\,2\ 0\ \ -1\ \ \ 2\ -3\ 0\,0\ \ -1\,1\ \ \ 2\ -2$

$\Rightarrow |1\,0\ \ -1\,2\ 0\ \ -1\ \ \ 2\ -3\ 0\,0\,0\,0\ \ \ 0\,0\,1\,1\ \ | \Rightarrow Rang\ M' = 3.$

$\underline{Las\ rectas\ r_1\ y\ r_2\ son\ paralelas.}$

b)

La expresión de r_1 por unas ecuaciones paramétricas es $r_1 \equiv \{x = \lambda \quad y = -1 + 2\lambda \quad z = -2 + \lambda$.

Por ser las rectas paralelas tienen el mismo vector director, que es $\vec{v}_r = (1, 2, 1)$.

El haz de planos perpendiculares a las rectas es $\beta \equiv x + 2y + z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz β, el plano π que contiene al punto $A(0, -2, 0)$ es el que satisface su ecuación:

$\beta \equiv x + 2y + z + D = 0 \quad A(0, -2, 0) \} \Rightarrow 2 \cdot (-2) + D = 0; \ -4$
.

<u>$El\, plano\, pedido\, es\, \pi \equiv x + 2y + z + 4 = 0$</u>.

$c)$

La distancia entre r_1 y r_2, por ser paralelas, es igual que la distancia de un punto de una de ellas a la otra.

Un punto de r_1 es $P(0, -1, -2)$.

La expresión de y r_2 dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$r_2 \equiv \{2x - y = 2 \quad y - 2z = -2 \Rightarrow x = \mu \Rightarrow y = -2 + 2\mu; \ -2 + 2\mu - 2z = -2 \Rightarrow z$

$\Rightarrow r_2 \equiv \{x = \mu \quad y = -2 + 2\mu \quad z = \mu$. Un punto de r_2 es $A(0, -2, 0)$. (curiosamente el punto dado)

La distancia de un punto a una recta puede determinarse teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que forman dos vectores es el módulo de su producto vectorial y, de forma geométrica, es el producto de la base por la altura.

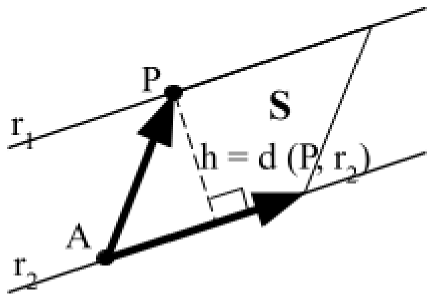
$$S = \left|\vec{v}_{r_2} \wedge \vec{AP}\right| \quad S = \left|\vec{v}_{r_2}\right| \cdot h \} \Rightarrow \left|\vec{v}_{r_2} \wedge \vec{AP}\right| = \left|\vec{v}_{r_2}\right| \cdot h \Rightarrow h = d(P, r_2) = \frac{\left|\vec{v}_{r_2} \wedge \vec{AP}\right|}{\left|\vec{v}_{r_2}\right|}$$
.

Los puntos A y P determinan el vector:
$\vec{AP} = [P - A] = [(0, -1, -2) - (0, -2, 0)] = (0, 1, -2)$.

Para una mejor comprensión del proceso se hace un dibujo de la situación.

Aplicando la fórmula al punto P y a la recta r_2:

$$d(r_1, r_2) = d(P, r_2) = \frac{\left|\vec{v}_{r_2} \wedge \vec{AP}\right|}{\left|\vec{v}_{r_2}\right|} =$$



$$= \frac{\left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{matrix} \right\|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \frac{|-4i+k-i+2j|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{|-5i+2j+k|}{\sqrt{6}} =$$

$$= \frac{\sqrt{(-5)^2+2^2+1^2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{25+4+1}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = \underline{\sqrt{5}\, u = d(r_1, r_2)}.$$

Otra forma de resolver este apartado es la siguiente:

El punto de intersección de la recta r_1 con el plano π, es la solución del sistema que forman:

$$\pi \equiv x + 2y + z + 4 = 0 \qquad r_1 \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = -2 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda +$$

$\lambda - 2 + 4\lambda - 2 + \lambda + 4 = 0;\ 6\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow P(0, -1, -2).$ (otra curiosidad)

La distancia entre las rectas es igual que la distancia entre los puntos A y P:

$$d(r_1, r_2) = \overline{AP} = \left|\vec{AP}\right| = |(0, 1, -2)| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}\, u.$$

Como se esperaba, se obtiene la misma solución.

****

3º) Obtenga $\left(\cot cot\, x\ -\frac{1}{x}\right)$.

$$\left(\cot cot\, x\ -\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{\cos\cos x}{sen\, x}-\frac{1}{x}\right)=\frac{x\cdot\cos\cos x-sen\, x}{x\cdot sen\, x}=\frac{0-0}{0\cdot 0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Indet.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow\frac{1\cdot\cos\cos x-x\cdot sen\, x-cos\, x}{1\cdot sen\, x+x\cdot\cos\cos x}=\frac{-x\cdot sen\, x}{sen\, x+x\cdot\cos\cos x}=\frac{-0\cdot 0}{0+0\cdot 1}=\frac{0}{0}\Rightarrow Indet.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow-\frac{1\cdot x+x\cdot cos\, x}{cos\, x+1\cdot\cos\cos x-x\cdot sen\, x}=-\frac{0+0\cdot 1}{1+1-0}=-\frac{0}{2}=0.$$

$$\left(\cot cot\, x\ -\frac{1}{x}\right)=\underline{0}.$$

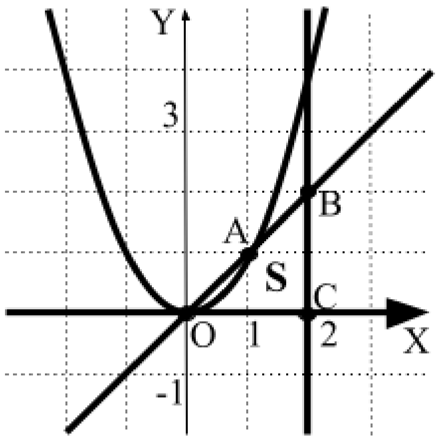
****

4º) $a)$ Dibuje el recinto limitado por la curva $y = x^2$, la bisectriz del primer cuadrante, el eje de abscisas y la recta x = 2.

$b)$ Halle el área del recinto dibujado en $a)$.

$a)$

Son puntos de corte de la curva y la bisectriz son los siguientes:



$$x^2 = x;\ \ x^2 - x = 0;\ \ x(x - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow O(0,\ 0) \\ x_2 = 1 \rightarrow A(1,\ 1) \end{cases}.$$

La recta $x = 2$ corta a la bisectriz en el punto $B(2,\ 2)$ y al eje X en el punto $C(2,\ 0)$.

La representación gráfica, aproximada, de la situación es la que indica la figura.

$b)$

De la observación de la figura se deduce la superficie S a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_0^1 x^2 \cdot dx + \int_1^2 x \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \left(\frac{1}{3} - 0\right) + \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} + 2 - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{2+12-3}{6} = \underline{\frac{11}{6}\, u^2}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Dados los números reales α, b, c, x, se considera la matriz $A = (a\ b\ c\ a\ x\ c\ a\ b\ x)$
.

$a)$ Halle los valores de x para los cuales el determinante de A es nulo para cualquiera valores de α, b, c.

$b)$ Si x = 1 y b = c = 2, halle los valores de α para los cuales A tiene inversa.

$c)$ Halle, si es posible, la inversa de A cuando x = 0 y b = c = α = 1.

$a)$

$$|A| = |a\ b\ c\ a\ x\ c\ a\ b\ x\ | = ax^2 + abc + abc - acx - abc - abx =$$

$$= ax^2 + abc - acx - abx = ax(x - c) - ab(x - c) = a(x - c)(x - b).$$

$$\underline{|A| = 0, \forall a, b, c \in R,\ expecto\ para\ x = b\ y\ x = c}.$$

$b)$

Para x = 1 y b = c = 2 es $A = (a\ 2\ 2\ a\ 1\ 2\ a\ 2\ 1\ )$.

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero:

$|A| = |a\ 2\ 2\ a\ 1\ 2\ a\ 2\ 1\ | = a \cdot |1\ 2\ 2\ 1\ 1\ 2\ 1\ 2\ 1\ | = a(1 + 4 + 4 - 2 - 4 - 2) =$
.

$$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall a \in R - \{0\}}.$$

$c)$

Para x = 0 y b = c = α = 1 la matriz es $A = (1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ )$, que es invertible, por ser $|A| = |1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ | = 1 + 1 - 1 = 1 \neq 0$.

Se obtiene la inversa por el método de Gauss-Jordan:

$$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 - F_1\ F_3 \rightarrow F_3 - F_1\} \Rightarrow (1\ 0\ 0\ \ -1\ 1\ 0\ \ -1\ 0\ 1\ ) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \{F_2 \rightarrow -F_2\ F_3 \rightarrow -F_3\} \Rightarrow (1\ 0\ 0\ 1\ \ -1\ 0\ 1\ 0\ \ -1\ ) \Rightarrow \{F_1 \rightarrow F_1 - (F_2 + F_2)\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-1\ 1\ 1\ 1\ \ -1\ 0\ 1\ 0\ \ -1\ ) \Rightarrow \underline{A^{-1} = (-1\ 1\ 1\ 1\ \ -1\ 0\ 1\ 0\ \ -1\ )}.$$

****

2º) Considere la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$.

a) Obtenga el punto P' simétrico de $P(1,\ 2,\ 1)$ respecto de r.

b) Halle la distancia de P a r. c) Halle la distancia de P a P'.

----

a)

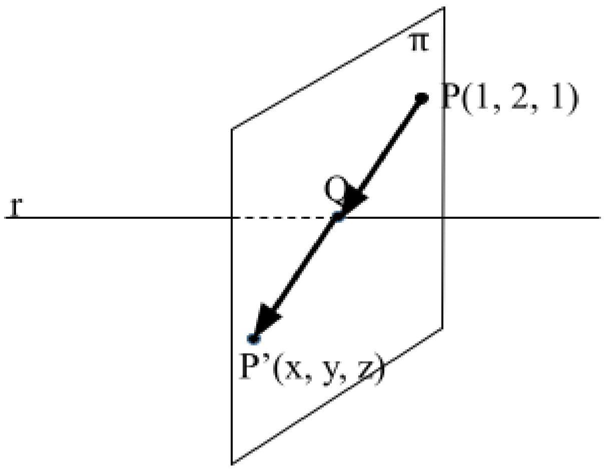
El vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (1,\ 2,\ 1)$.

El haz de planos perpendiculares a r es $\beta \equiv x + 2y + z + D = 0$.

El plano $\alpha \in \beta$ que contiene al punto P es el siguiente:

$\beta \equiv x + 2y + z + D = 0$ $P(1,\ 2,\ 1)\} \Rightarrow 1 + 2 \cdot 2 + 1 + D = 0;\ 6 + D =$

$\Rightarrow \pi \equiv x + 2y + z - 6 = 0$.



La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es
$r \equiv \{x = 1 + \lambda \quad y = 1 + 2\lambda \, z = -1 + \lambda$.
El punto Q intersección de r y π es el siguiente:

$\pi \equiv x + 2y + z - 6 = 0$ $r \equiv \{x = 1 + \lambda \quad y = 1 + 2\lambda \, z = -1 + \lambda\} \Rightarrow (1 + \lambda)$

$1 + \lambda + 2 + 4\lambda - 1 + \lambda - 6 = 0;\ 6\lambda - 4 = 0;\ 3\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}$.

$x = 1 + \lambda \rightarrow x = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ $y = 1 + 2\lambda \rightarrow y = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$ $z = -1 + \lambda \rightarrow z =$
.

Para que P' sea el opuesto de P con respecto a la recta r tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP'} \Rightarrow [Q - P] = \left[P' - Q\right];$$

$$\left[\left(\frac{5}{3},\ \frac{7}{3},\ \ -\frac{1}{3}\right) - (1,\ 2,\ 1)\right] = \left[(x,\ y,\ z) - \left(\frac{5}{3},\ \frac{7}{3},\ \ -\frac{1}{3}\right)\right];$$

$$\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ \ -\frac{4}{3}\right) = \left(x - \frac{5}{3},\ y - \frac{7}{3},\ z + \frac{1}{3}\right) \Rightarrow \left\{x - \frac{5}{3} = \frac{2}{3} \rightarrow x = \frac{7}{3} \qquad y - \frac{7}{3} = \frac{1}{3} \rightarrow y\right.$$

$$\underline{\Rightarrow P'\left(\frac{7}{3},\ \frac{8}{3},\ \ -\frac{5}{3}\right).}$$

$b)$

La distancia de P a r es la misma que la distancia entre P y Q:

$$d(P,\ r) = \overline{PQ} = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\left(\frac{5}{3},\ \ -\frac{7}{3},\ \ -\frac{1}{3}\right)\right| = \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(-\frac{7}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{49}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{75}{9}} = \sqrt{\frac{25}{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3} \qquad .$$

$$\underline{d(P,\ r) = \frac{5\sqrt{3}}{3}\ unidades.}$$

$c)$

La distancia de P a P’ es el doble que la distancia de P a r:

$$\underline{d(P,\ P') = \frac{10\sqrt{3}}{3}\ unidades.}$$

****

3º) El propietario de la empresa "Asturfabril" ha estimado que si compra x máquinas y contrata y empleados, el número de unidades de producto que podía fabricar vendría dado por la función $f(x,\ y) = 9x \cdot y^2$. Sabiendo que tiene un presupuesto de 22.500 euros, que cada máquina supone una inversión de 2.500 euros y cada contrato de un nuevo empleado 1.500 euros, determine el número de obreros que debe contratar y el número de máquinas que debe comprar para optimizar la producción.

Del enunciado del problema se deduce que:

$$22.500 = 2.500x + 1.500y;\ \ 225 = 25x + 15y;\ \ 45 = 5x + 3y \Rightarrow x = \frac{45-3y}{5}.$$

Sustituyendo el valor de x en la función $f(x,\ y) = 9x \cdot y^2$, resulta:

$$f(y) = 9 \cdot \frac{45-3y}{5} \cdot y^2 = \frac{9}{5} \cdot \left(45y^2 - 3y^3\right) = \frac{27}{5} \cdot \left(15y^2 - y^3\right).$$

Para optimizar la función (mínimo gasto) tiene que ser $f'(y) = 0$:

$$f'(y) = \frac{27}{5} \cdot \left(30y - 3y^2\right) = \frac{81}{5} \cdot y(10 - y) = 0 \Rightarrow y_1 = 0,\ y_2 = 10.$$

La solución $y = 0$ carece de sentido lógico, pues no habría empleados; la solución ex $y = 10$.

Sustituyendo el valor de y en la expresión de x:

$$x = \frac{45-3y}{5} = \frac{45-3 \cdot 10}{5} = \frac{45-30}{5} = \frac{15}{5} = 3.$$

$\underline{La\ producción\ se\ optimiza\ con\ 3\ máquinas\ y\ 10\ empleados.}$

****

4º) Obtenga: $I = \int e^{2x+1} \cdot \cos cos\, x \cdot dx$.

$I = \int e^{2x+1} \cdot \cos cos\, x \cdot dx \Rightarrow \{u = e^{2x+1} \rightarrow du = 2e^{2x+1} \cdot dx\ dv = \cos cos\, x \cdot dx \rightarrow v = sen$

$\Rightarrow e^{2x+1} \cdot sen\, x - \int sen\, x \cdot 2e^{2x+1} dx = e^{2x+1} \cdot sen\, x - 2\int e^{2x+1} \cdot sen\, x \cdot dx =$

$= e^{2x+1} \cdot sen\, x - 2A = I.$ (*)

$A = \int e^{2x+1} \cdot x \cdot dx \Rightarrow \{u = e^{2x+1} \rightarrow du = 2e^{2x+1} \cdot dx\ dv = sen\, x \cdot dx \rightarrow v = - cos\, x\} \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{2x+1}(- \cos cos\, x) - \int - cos\, x \cdot 2e^{2x+1} dx = - e^{2x+1} \cdot \cos cos\, x + 2$

$\int e^{2x+1} \cdot \cos cos\, x\, dx =$

$= - e^{2x+1} \cdot \cos cos\, x + 2I = A.$

Sustituyendo en (*) el valor de A obtenido:

$I = e^{2x+1} \cdot sen\, x - 2 \cdot \left(- e^{2x+1} \cdot \cos cos\, x + 2I\right) =$

$= e^{2x+1} \cdot sen\, x + 2e^{2x+1} \cdot cos\, x - 4I;\ \ 5I = e^{2x+1} \cdot (sen\, x + 2 \cos cos\, x).$

$$I = \int e^{2x+1} \cdot \cos cos\, x \cdot dx = \frac{e^{2x+1}}{5} \cdot (sen\, x + 2 \cos cos\, x) + C.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE BALEARES

JUNIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contesta de manera clara y razonada a una de las dos opciones propuestas. Se valorará la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) utilizado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autorizarán las que traigan información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1º) a) Discuta para que valores de a el sistema $ax + y + z = a^2 \quad x - y + z = 1 \quad 3x - y - z = 1 \, 6x - y + z = 3a \}$ es compatible.

b) Resuélvalo en el caso (o casos) en que sea compatible.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = (a\,1\,1\,1\,3\,6\ \ -1\ -1\ -1\ 1\ -1\,1\ )\, y\, M' = \big(a\,1\,1\ a^2\,1\,3\ \ -1\,1\ -1\ -1\ 1\,1$

.

Considerando que

$|1\ -1\,1\,3\ -1\ -1\,6\ -1\,1\,| = -1 - 3 + 6 + 6 - 1 + 3 = 10 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow Rang\ M = 3.$

$Rang\ M' \Rightarrow \big|a\,1\,1\ a^2\,1\,3\ \ -1\,1\ -1\ -1\,1\,1\,6\ -1\,1\ 3a\,\big| \Rightarrow Sumando\ C_2\ a\ todas\ las$

$\Rightarrow \left| a + 1\ 1\ 2\ a^2 + 1\ 0\ 2 \ \ - 1\ 0 \ \ - 1 \ \ - 2\ \ 0\ 0\ 5 \ \ - 1\ 0\ \ 3a - 1 \right| =- 1\cdot\left| a + 1\ 2\ a^2 +\right.$

$=- \left| a + 1\ 2\ a^2 + 1\ a + 3\ 0\ a^2 + 1\ 5\ 0\ 3a - 1 \right| = 2\left| a + 3\ a^2 + 1\ 5\ 3a - 1 \right| = 2\left[(a\right.$

$= 2\left(3a^2 - a + 9a - 3 - 5a^2 - 5\right) = 2\left(- 2a^2 + 8a - 8\right) =- 4\left(a^2 - 4a + 4\right) =$

$=- 4(a - 2)^2 = 0 \Rightarrow a = 2.$

$\underline{Para\ a \neq 2 \Rightarrow Rang\ M = 3,\ Rang\ M' = 4 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

$\underline{Para\ a = 2 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

$b)$

Para $a = 2$ el sistema es $2x + y + z = 4 \ \ x - y + z = 1\ 3x - y - z = 1\ 6x - y + z = 6 \}$. Despreciando la última ecuación (que es combinación de las demás: su suma) y resolviendo por Cramer:

$$x = \frac{|4\ 1\ 1\ 1\ -1\ 1\ 1\ -1\ -1\ |}{|2\ 1\ 1\ 1\ -1\ 1\ 3\ -1\ -1\ |} = \frac{4-1+1+1+4+1}{2-1+3+3+2+1} = \frac{10}{10} = 1.$$

$$y = \frac{|2\ 4\ 1\ 1\ 1\ 1\ 3\ 1\ -1\ |}{10} = \frac{-2+1+12-3-2+4}{10} = \frac{10}{10} = 1.$$

$$z = \frac{|2\ 1\ 4\ 1\ -1\ 1\ 3\ -1\ 1\ |}{10} = \frac{-2-4+3+12+2-1}{10} = \frac{10}{10} = 1.$$

$\underline{Solución: x = 1,\ y = 1,\ z = 1.}$

****

2º) Estudia la posición relativa de las rectas $r \equiv \frac{x-2}{-3} = \frac{y-3}{5} = z$ y $s \equiv \{x = 1 - t \; y = 2t \quad z = 5$ y, en caso de que se corten, calcular el punto de corte.

Un punto y un vector de cada una de las rectas son los siguientes:

Recta r: $A(2,\ 3,\ 0)\ y\ \overrightarrow{v_r} = (-\ 3,\ 5,\ 1)$. Recta s: $B(1,\ 0,\ 5)\ y\ \overrightarrow{v_s} = (-\ 1,\ 2,\ 0)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}\ y\ \overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto supone que las rectas se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso se determina un vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto A de r y como extremo el punto B de s; es el siguiente:

$\vec{w} = \overrightarrow{AB} = [A - B] = [(2,\ 3,\ 0) - (1,\ 0,\ 5)] = (1,\ 3,\ -\ 5)$.

Según que los vectores $\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s}\ y\ \vec{w}$ sean coplanarios o no, las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \vec{w}\right\}$ son coplanarios cuando su rango es menor que tres, es decir, cuando es cero el determinante de la matriz que forman:

$$Rang\left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \vec{w}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 30 - 3 - 2 - 25 = 0.$$

$Rang\left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \vec{w}\right\} < 3 \Rightarrow \underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cortan\ en\ un\ punto}.$

$b)$

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es:

$r \equiv \{x = 2 - 3\mu \; y = 3 + 5\mu \; z = \mu$.

El punto P de corte es el siguiente:

$2 - 3\mu = 1 - t \; 3 + 5\mu = 2t \quad \mu = 5 \} \Rightarrow \{x = 2 - 3 \cdot 5 = -\ 13 \;\; y = 3 + 5 \cdot 5 = 2$

.

****

3º) Determinar los valores de a, b y c para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ pase por el punto $P(1,\ 0)$, tenga un máximo relativo en x = -1 y un mínimo relativo para x = 0.

Por contener $f(x)$ al punto P: $f(1) = 0$:

$f(1) = 0 \Rightarrow 1^3 + a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c = 0 \Rightarrow a + b + c = -1.$ (1)

Por tener $f(x)$ un máximo relativo para x = -1: $f'(-1) = 0$:

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b.$

$f'(-1) = 0 \Rightarrow f'(-1) = 3\cdot(-1)^2 + 2a\cdot(-1) + b = 3 - 2a + b = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2a + b = -3.$ (2)

Por tener $f(x)$ un mínimo relativo para x = 0: $f'(0) = 0$:

$f'(0) = 0 \Rightarrow f'(0) = 3\cdot 0^2 + 2a\cdot 0 + b = 0 \Rightarrow \underline{b = 0}.$

Sustituyendo en (2) el valor de b obtenido: $-2a = -3 \Rightarrow \underline{a = \frac{3}{2}}.$

Sustituyendo en (1) los valores obtenidos de a y b:

$\frac{3}{2} + 0 + c = -1;\ c = -1 - \frac{3}{2} \Rightarrow \underline{c = -\frac{5}{2}}.$

****

4º) Calcula la siguiente integral indefinida: $I = \int \frac{2x+5}{(x+3)^3} \cdot dx$.

$$I = \int \frac{2x+5}{(x+3)^3} dx \Rightarrow \{x + 3 = t \rightarrow x = t - 3\ dx = dt\} \Rightarrow \int \frac{2(t-3)+5}{t^3} dt = \int \frac{2t-6+5}{t^3} \cdot dt =$$

$$= \int \frac{2t-1}{t^3} \cdot dt = 2 \cdot \int t^{-2} \cdot dt - \int t^{-3} \cdot dt = 2 \cdot \frac{t^{-1}}{-1} - \frac{t^{-2}}{-2} + C = -\frac{2}{t} + \frac{1}{2t^2} + C =$$

$$= -\frac{2}{x+3} + \frac{1}{2 \cdot (x+3)^2} + C = \frac{-4 \cdot (x+3)+1}{2 \cdot (x+3)^2} + C = \frac{-4x-12+1}{2 \cdot (x+3)^2} + C.$$

$$\underline{I = \int \frac{2x+5}{(x+3)^3} \cdot dx = -\frac{4x+11}{2 \cdot (x+3)^2} + C.}$$

****

OPCIÓN B

1º) a) Demostrar que la ecuación matricial $A\cdot B - A = C$ no tiene solución, en donde $B = \left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right)$, $C = (1\ 2\ 3\ 4\ )$. (Indicación: tomad determinantes).
b) Resolver la ecuación matricial anterior pero con $B = \left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \ -\frac{1}{2}\ \frac{2}{3}\right)$, $C = (1\ 2\ 3\ 4\ )$.

----

a)

$$A\cdot B - A = C;\ \ A\cdot(B - I) = C \Rightarrow M = B - I \Rightarrow A\cdot M = C.$$

Multiplicando por la derecha los dos términos por M^{-1}:

$$A\cdot M\cdot M^{-1} = C\cdot M^{-1};\ \ A\cdot I = C\cdot M^{-1} \Rightarrow A = C\cdot M^{-1}.$$

$$M = B - I = \left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right) - (1\ 0\ 0\ 1\ ) = \left(-\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\right).$$

$$|M| = \left|-\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow\ M\ no\ es\ invertible.$$

$\underline{Queda\ demostrado\ que\ la\ ecuación\ A\cdot B - A = C\ no\ tiene\ solución}.$

b)

$$M = B - I = \left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \ -\frac{1}{2}\ \frac{2}{3}\right) - (1\ 0\ 0\ 1\ ) = \left(-\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \ -\frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{3}\right).$$

$M^t = \left(-\frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \ -\frac{1}{3}\right)$.

$|M| = \left|-\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \ -\frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

$Adj.\ \ de\ M^t = \left(-\frac{1}{3}\ \ -\frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\right)$.

$M^{-1} = \frac{Adj.\ de\ M^t}{|M|} = \frac{1}{\frac{1}{3}}\cdot\left(-\frac{1}{3}\ \ -\frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\right) = 3\cdot\left(-\frac{1}{3}\ \ -\frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\right) = (-\ 1\ \ -\ 1$
.

$A = C\cdot M^{-1} = (1\ 2\ 3\ 4\ )\cdot\left(-\ 1\ \ -\ 1\ \frac{3}{2}\ \ -\frac{3}{2}\right) = (-\ 1 + 3\ \ -1 - 3\ \ -3 + 6\ \ -3\ -$
.

$$\underline{A = (2\ \ -\ 4\ 3\ \ -\ 9\ )}.$$

****

2º) Encontrar la recta r que pasa por el punto $A(1,\ 0,\ 2)$ y es paralela a los planos siguientes: $\pi_1 \equiv x - 2y + 3z + 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x - 3y + z + 6 = 0$.

Los vectores normales de los planos son $\vec{n_1} = (1,\ -2,\ 3)$ y $\vec{n_2} = (2,\ -3,\ 1)$, respectivamente.

Los planos dados son secantes por ser linealmente independientes sus vectores normales, por lo que determinan la recta $s \equiv \begin{cases} x - 2y + 3z + 1 = 0 \\ 2x - 3y + z + 6 = 0 \end{cases}$, cuyo vector director es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores $\vec{n_1} = (1,\ -2,\ 3)$ y $\vec{n_2} = (2,\ -3,\ 1)$:

$$\vec{v_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -2i + 6j - 3k + 4k + 9i - j = 7i + 5j + k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{v_r} = (7,\ 5,\ 1).$$

La expresión de la recta r dada, por ejemplo, por unas ecuaciones continuas es:

$$\underline{r \equiv \frac{x-1}{7} = \frac{y}{5} = \frac{z-2}{1}}.$$

****

3º) a) Demostrar que x = 0 es la única raíz de la ecuación $5x^9 + 3x^5 + 7x = 0$.

b) Demostrar que x = 0 es la única raíz de la ecuación $e^x = 1 + x$.

----

a)

Considerando la función $f(x) = 5x^9 + 3x^5 + 7x$ que, por ser polinómica, es continua y derivable en R, por lo cual le es aplicable el teorema de Rolle a cualquier intervalo finito que se considere.

El teorema de Rolle dice que "si una función $f(x)$ en continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), con $a, b \in R$ y $a < b$, y se cumple que $f(a) = f(b)$, existe al menos un valor c, $a < c < b$ tal que $f'(c) = 0$".

Demostrar que la ecuación $5x^9 + 3x^5 + 7x = 0$ tiene como raíz única x = 0 es equivalente a demostrar que la función $f(x) = 5x^9 + 3x^5 + 7x$ tiene como única raíz x = 0. Si tuviera otra raíz $x = \beta$, tal que $f(\beta) = 0$, se podría aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x)$ en el intervalo $[0, \beta]$:

$$f'(x) = 45x^4 + 15x^4 + 7 \Rightarrow f'(c) = 45c^4 + 15c^4 + 7 > 0, \ \forall c \in R.$$

Lo anterior demuestra que $x = 0$ es la raíz única de $5x^9 + 3x^5 + 7x = 0$.

Otra forma de demostrar que la ecuación tiene una raíz única es teniendo en cuenta el dominio y la continuidad de $f(x)$ y que es monótona creciente en R por ser $f'(x) = 45x^4 + 15x^4 + 7 > 0, \ \forall x \in R$.

b)

Se sigue un proceso similar al apartado anterior.

Considerando la función $g(x) = e^x - x - 1$ que es continua y derivable en R, por lo cual le es aplicable el teorema de Rolle a cualquier intervalo finito que se considere.

Demostrar que la ecuación $e^x = x + 1$ tiene como raíz única x = 0 es equivalente a demostrar que la función $g(x) = e^x - x - 1$ tiene como única raíz x = 0. Si tuviera otra raíz $x = \beta$, tal que $g(\beta) = 0$, se podría aplicar el teorema de Rolle a la función $g(x)$ en el intervalo $[0, \beta]$, con $\beta > 0$:

$$g'(x) = e^x - 1 \Rightarrow g'(c) = e^c - 1 = 0; \ e^c = 1 \Rightarrow c = 0.$$

$\underline{Lo\ anterior\ demuestra\ que\ x\ =\ 0\ es\ la\ raíz\ única\ de\ e^{x}\ =\ x\ +\ 1}$.

Otra forma de resolver el apartado es el siguiente:
$g''(x) = e^{x} > 0,\ \forall x \in R \Rightarrow g(x)\ es\ convexa\ (\cup)\ en\ R.$

Como es $g'(x) = e^{x} - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$ y $g(0) = 0$, la función tiene un mínimo absoluto en el punto $O(0,\ 0)$, lo que justifica que:

$\underline{La\ ecuación\ e^{x}\ =\ x\ +\ 1\ tiene\ una\ raíz\ única\ para\ x\ =\ 0}$.

****

4º) Haga un dibujo aproximado de las curvas $y = 6x - x^2$ e $y = x^2 - 2x$ e indique los puntos de corte. Calcular el área del recinto limitado por las dos curvas anteriores.

Los puntos de corte de las dos parábolas son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$6x - x^2 = x^2 - 2x;\ \ 2x^2 - 8x = 0;\ \ 2x(x - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 4.$$

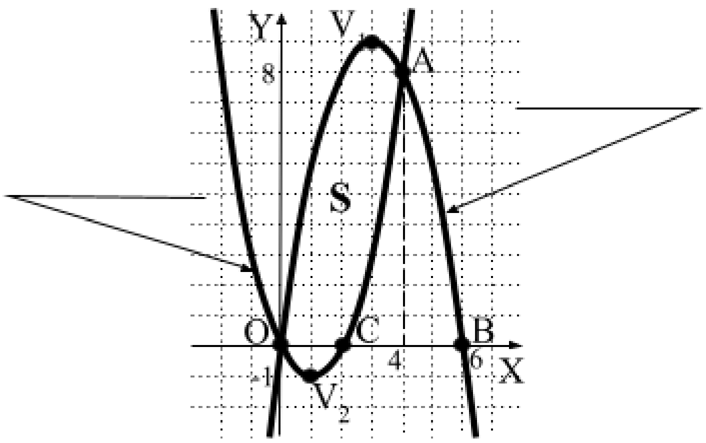
Los puntos de corte son $O(0,\ 0)$ y $A(4,\ 8)$.

La parábola $y = 6x - x^2$ corta al eje OX, además del origen, en $B(6,\ 0)$. Su vértice es el siguiente:

$$y' = 6 - 2x = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow V_1(3,\ 9).$$

La parábola $y = x^2 - 2x$ corta al eje OX, además del origen, en $C(2,\ 0)$. Su vértice es el siguiente:

$$y' = 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow V_2(1,\ -1).$$



En el intervalo correspondiente al área a calcular, todas las ordenadas de la parábola $y = 6x - x^2$ son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola $y = x^2 - 2x$, por lo cual el área a calcular es la siguiente:

$$S = \int_0^4 \left[\left(6x - x^2\right) - \left(x^2 - 2x\right)\right] \cdot dx = \int_0^4 \left(-2x^2 + 8x\right) \cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} \right]_0^4 = -\frac{2 \cdot 4^3}{3} + 4 \cdot 16 = -\frac{128}{3} + 64 = \frac{-128+192}{3} = \underline{\frac{64}{3}\, u^2}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE BALEARES

SEPTIEMBRE – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contesta de manera clara y razonada a una de las dos opciones propuestas. Se valorará la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) utilizado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autorizarán las que traigan información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1º) a) Discuta para qué valores de m el sistema $mx + 2y + z = 0 \quad 4x + 2my + mz = 0\ 2x + (2m - 2)y + z = 0 \}$ tiene soluciones distintas de la trivial.

b) Resuélvalo en el caso (o casos) en que sea compatible indeterminado.

----

a)

Se trata de un sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes es la siguiente:

$A = (m\ 2\ 1\ 4\ 2m\ m\ 2\ 2m - 2\ 1\ )$.

$|A| = |m\ 2\ 1\ 4\ 2m\ m\ 2\ 2m - 2\ 1\ | = 2m^2 + 4m + 4(2m - 2) - 4m - 8 - m^2(2m -$

$= 2m^2 + 8m - 8 - 8 - 2m^3 + 2m^2 =- 2m^3 + 4m^2 + 8m - 16 =$

$=- 2\left(m^3 - 2m^2 - 4m + 8\right) = 0 \Rightarrow m^3 - 2m^2 - 4m + 8 = 0.$

Resolviendo por Ruffini se obtienen las soluciones $m_1 = m_2 = 2,\ m_3 =- 2$.

$\underline{El\ sistema\ es\ compatible\ indeterminado\ para\ m = 2\ y\ para\ m =- 2}$.

b)

Para m = 2 el sistema resulta:

$2x + 2y + z = 0\ 4x + 4y + 2z = 0\ \ 2x + 2y + z = 0\,\}$, equivalente a la ecuación:

$2x + 2y + z = 0$, cuyo rango es 1, por lo cual el sistema tiene 3 – 1 = 2 grados de libertad, o sea, que depende de dos parámetros. Las infinitas soluciones son:

$$\underline{(a,\ \beta,\ \ -2a - 2\beta)}.$$

Para m = -2 el sistema resulta: $-2x + 2y + z = 0\ \ 4x - 4y - 2z = 0\ \ \ 2x - 6y + z = 0\,\}$, equivalente al sistema:

$2x - 2y - z = 0\ 2x - 6y + z = 0\,\}$, cuyo rango es 2, por lo cual el sistema tiene 3 – 2 = 1 grado de libertad, o sea, que depende de un parámetro. Las infinitas soluciones son:

$$4x - 8y = 0;\ x - 2y = 0;\ x = 2y. \qquad z = 4y - 2y = 2y.$$

$$\underline{(2\lambda,\ \lambda,\ 2\lambda)}.$$

****

2º) Determine el valor de m para que los puntos A (1, 2, 0), B (0, 3, -1), C (1, 0, 1) y D (-1, 2, m) sean coplanarios y calcula la ecuación general del plano que los contiene.

Los puntos A, B, C y D son coplanarios cuando los vectores $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\ y\ \overrightarrow{AD}$ sean linealmente dependientes.

$$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(0,\ 3,\ -1) - (1,\ 2,\ 0)] = (-1,\ 1,\ -1).$$

$$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(1,\ 0,\ 1) - (1,\ 2,\ 0)] = (0,\ -2,\ 1).$$

$$\overrightarrow{AD} = [D - A] = [(-1,\ 2,\ m) - (1,\ 2,\ 0)] = (-2,\ 0,\ m).$$

Tres vectores son linealmente dependiente cuando el rango de la matriz que determinan es menor de 3, o sea: cuando su determinante es cero.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & m \end{vmatrix} = 0;\ 2m - 2 + 4 = 0;\ 2m + 2 = 0;\ m + 1 = 0.$$

$$\underline{Los\ puntos\ A,\ B,\ C\ y\ D\ son\ coplanarios\ para\ m = -1}.$$

Considerando los vectores $\overrightarrow{AB} = (-1,\ 1,\ -1)$, $\overrightarrow{AC} = (0,\ -2,\ 1)$ y el punto $A(1,\ 2,\ 0)$:

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right) \equiv \begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x - 1) + 2z - 2(x - 1) + (y - 2) = 0;\ -x + 1 + 2z + y - 2 = 0.$$

$$\underline{\pi \equiv x - y - 2z + 1 = 0}.$$

****

3º) Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$, determine el valor de c que verifica que la pendiente de la recta tangente de f(x) en x = c es mínima y calcula la correspondiente recta tangente de f(x) en x = c.

La tangente a una función en un punto es el valor de su derivada en ese punto:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2.$$

La condición para que la pendiente sea mínima es que se anule su derivada, o sea, que se anule la segunda derivada:

$$f''(x) = 6x - 6 = 0;\ x - 1 = 0 \Rightarrow \underline{x = 1}.$$

$$\underline{La\ tangente\ es\ mínima\ en\ el\ puntu\ de\ abscisa\ c = 1}.$$

El punto de tangencia es:

$$f(1) = 1^3 - 3\cdot1^2 + 2\cdot1 + 1 = 1 - 3 + 2 + 1 = 1 \Rightarrow P(1,\ 1).$$

El valor de la pendiente es: $m = f'(1) = 3\cdot1^2 - 6\cdot1 + 2 = 3 - 6 + 2 = -1.$

$$y - y_0 = m\left(x - x_0\right) \Rightarrow y - 1 = -1(x - 1) = -x + 1)$$

$$\underline{La\ recta\ tangente\ pedida\ es\ t \equiv x + y - 2 = 0}.$$

****

4º) Haga un dibujo aproximado de las curvas $y = 3x - x^2$ e $y = x - 3$ e indique los puntos en que se cortan. Calcule el área del recinto limitado por las curvas dadas.

Los puntos de intersección de las curvas son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

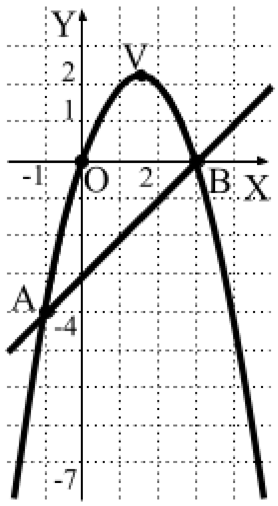
$3x - x^2 = x - 3$;;

$x^2 - 2x - 3 = 0$;; $x = \frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \frac{2\pm\sqrt{16}}{2} = \frac{2\pm 4}{2} =$

$= 1\pm 2 \Rightarrow \{x_1 = -1 \rightarrow \underline{A(-1, -4)}\ x_2 = 3 \rightarrow \underline{B(3, 0)}$.

El vértice de la parábola $y = 3x - x^2$ es: $y' = 3 - 2x = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}$.

$y_{\left(\frac{3}{2}\right)} = 3\cdot\frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{2} - \frac{9}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow V(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$.



La representación gráfica del conjunto es el indicado en la figura adjunta.

Para el cálculo del área limitada por la parábola y la curva, que es la parte sombreada de la figura, se tiene en cuenta que, en el intervalo $(-1, 3)$, todas las ordenadas de la parábola son mayores que las correspondientes ordenadas de la recta.

$$S = \int_{-1}^{3}\left[\left(3x - x^2\right) - (x - 3)\right]\cdot dx = \int_{-1}^{3}\left(-x^2 + 2x + 3\right)\cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 3x\right]_{-1}^{3} = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_{-1}^{3} =$$

$$= \left(-\frac{3^3}{3} + 3^2 + 3\cdot 3\right) - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 + 3\cdot(-1)\right] =$$

$$= -9 + 9 + 9 - \frac{1}{3} - 1 + 3 = 11 - \frac{1}{3} = \underline{\frac{32}{3}\,u^2}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Calcula la matriz X tal que $B \cdot X - B^2 = A \cdot B$, siendo $A = (1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 2)$ y $B = (1\ 0\ -\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1)$.

$B \cdot X - B^2 = A \cdot B;\ \ B \cdot X = A \cdot B + B^2 = (A + B) \cdot B = M.$

Multiplicando los dos términos por la izquierda por B^{-1}:

$B^{-1} \cdot B \cdot X = B^{-1} \cdot M;\ \ I \cdot X = B^{-1} \cdot M \Rightarrow \underline{X = B^{-1} \cdot M}.$

$M = (A + B) \cdot B = [(1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 2) + (1\ 0\ -\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1)] \cdot (1\ 0\ -\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1) =$

$= (2\ 0\ 0\ 2\ 2\ 1\ 0\ 0\ 3) \cdot (1\ 0\ -\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1) = (2\ 0\ -\ 2\ 4\ 2\ 1\ 0\ 0\ 3).$

$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 - F_1\} \Rightarrow (1\ 0\ 0\ -\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{F_1 \to F_1 + F_3 F_2 \to F_2 - 2F_3\} \Rightarrow (1\ 0\ 1\ -\ 1\ 1\ -\ 2\ 0\ 0\ 1) \Rightarrow B^{-1} = (1\ 0\ 1\ -\ 1\ 1$

.

$X = B^{-1} \cdot M = (1\ 0\ 1\ -\ 1\ 1\ -\ 2\ 0\ 0\ 1) \cdot (2\ 0\ -\ 2\ 4\ 2\ 1\ 0\ 0\ 3) = \underline{(2\ 0\ 1\ 2\ 2\ -\ 3\ 0\ 0\ 3)}$

.

****

2º) Calcule el punto simétrico del punto A (-3, 1, -7) respecto a la recta r de ecuación $r \equiv x + 1 = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{2}$.

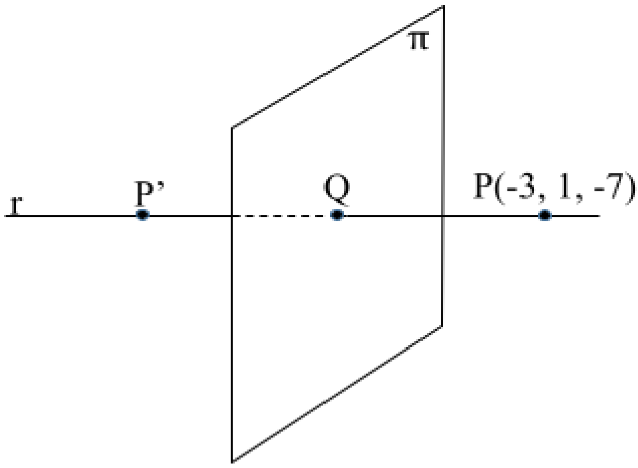
El vector director de r es $\vec{v_r} = (1,\ 2,\ 2)$.

El haz de planos perpendiculares a r es $\beta \equiv x + 2y + 2z + D = 0$.

El plano α∈β que contiene al punto A es el siguiente:

$\left. \begin{array}{l} \beta \equiv x + 2y + 2z + D = 0 \\ A(-3,\ 1,\ -7) \end{array} \right\} \Rightarrow -3 + 2\cdot 1 + 2\cdot(-7) + D = 0;$

$-3 + 2 - 14 + D = 0;\ \ -15 + D = 0 \Rightarrow D = 15 \Rightarrow \pi \equiv x + 2y + 2z + 15 = 0$
.



La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$.

El punto Q intersección de r y π es el siguiente:

$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x + 2y + 2z + 15 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow ($

$-1 + \lambda + 6 + 4\lambda - 2 + 4\lambda + 15 = 0;\ \ 9\lambda + 18 = 0;\ \ \lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2$
.

$x = -1 + \lambda \rightarrow x = -1 - 2 = -3 \quad y = 3 + 2\lambda \rightarrow y = 3 - 4 = -1 \quad z = -1 + 2\lambda \rightarrow -$
.

Para que P' sea el opuesto de P con respecto al plano π tiene que cumplirse que:

$$\vec{PQ} = \vec{QP'} \Rightarrow [Q - P] = \left[P' - Q\right];$$

$$[(-3, -1, -5) - (-3, 1, -7)] = [(x, y, z) - (-3, -1, -5)];$$

$$(0, -2, 2) = (x + 3, y + 1, z + 5) \Rightarrow \{x + 3 = 0 \rightarrow x = -3 \quad y + 1 = -2 \rightarrow y = -3$$

$$\underline{\Rightarrow P'(-3, -3, -3)}.$$

****

3º) Demuestre que existe un único valor x > 0 solución de la ecuación $x^2 - e^{-x} = 0$.

Demostrar lo pedido es equivalente a demostrar que la función $f(x) = x^2 - e^{-x}$ tiene una solución única y positiva.

La función $f(x) = g(x) + h(x) = x^2 - e^{-x} = x^2 - \frac{1}{e^x}$, que es continua y derivable en su dominio, que es R, por serlo $g(x) = x^2$ y $h(x) = e^{-x}$ y si dos funciones son continuas y derivables en R también lo es su función suma algebraica.

A la función f(x) le es aplicable el teorema de Bolzano en cualquier intervalo cerrado que se considere, por ejemplo, $[0, 2]$:

$f(0) = 0^2 - \frac{1}{e^0} = 0 - \frac{1}{1} =- 1 < 0\ f(2) = 2^2 - \frac{1}{e^2} = \frac{4e^2-1}{e^2} > 0 \qquad \} \Rightarrow \exists c \in [0, 2] \Rightarrow$

.

Ya se ha probado que la función tiene una raíz x > 0; ahora se debe demostrar que este valor es único.

Teniendo en cuenta la continuidad y derivabilidad de f(x) y que:

$f'(x) = 2x - \frac{-e^x}{\left(e^x\right)^2} = 2x + \frac{1}{e^x} > 0,\ \forall x \in R$, lo cual significa que la función es monótona creciente lo que implica que tenga más de una solución.

$\underline{Queda\ demostrado\ lo\ pedido}.$

****

4º) Calcule la integral indefinida siguiente: $I = \int \frac{x-2}{x^2+x} \cdot dx$.

$$\frac{x-2}{x^2+x} = \frac{x-2}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{Ax+A+Bx}{x(x+1)} = \frac{(A+B)x+A}{x^2+x} \Rightarrow A + B = 1 \; A = -2 \} \Rightarrow B = 3$$

.

$$I = \int \frac{x-2}{x^2+x} \cdot dx = \int \left(\frac{-2}{x} + \frac{3}{x+1} \right) \cdot dx = -2L|x| + 3L|x + 1| + C.$$

$$\underline{I = \int \frac{x-2}{x^2+x} \cdot dx = \frac{3}{2} \cdot L\left|1 + \frac{1}{x}\right| + C.}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CANARIAS

JULIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones, A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones, el tribunal podrá anular su examen.

En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.

OPCIÓN A

1º) Se considera la función $f(x) = \{\sqrt{x^2 + b} - 2 \ \ si \ \ x \leq -\sqrt{2} \ 2 - x^2 \ \ si \ \ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \ x^2 L(x^2 - a) \ \ si \ \ \sqrt{2} \leq$, donde L denota el logaritmo neperiano. Determinar si existen valores de los parámetros α y b para los que f(x) sea derivable en todo R. Justificar la respuesta.

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto.

La función f(x) es continua en $R \forall a < 2 \ y \ b > -2$. Se trata de determinar los valores de α y b para que sea derivable en los puntos críticos $x = -\sqrt{2}$ y $x = \sqrt{2}$.

Para que la función sea continua en los puntos críticos es necesario que sus límites laterales en esos puntos sean iguales e iguales a los correspondientes valores de la función en esos puntos.

$f(x) = (\sqrt{x^2 + b} - 2) = \sqrt{2 + b} - 2 \ f(x) = (2 - x^2) = f(-\sqrt{2}) = 0 \quad \} \Rightarrow \sqrt{2}$

$\sqrt{2 + b} = 2 ; \ 2 + b = 4 \Rightarrow \underline{b = 2}$.

$f(x) = (2 - x^2) = 0 \qquad f(x) = [x^2 L(x^2 - a)] = f(\sqrt{2}) = 2L(2$

$(2 - a)^2 = 1 \Rightarrow 2 - a = \pm 1 \Rightarrow a_1 = 1,\ a_2 = 3.$ La única solución válida es $\underline{a = 1}$.

La función resulta $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2} - 2 & si \quad x \leq -\sqrt{2} \\ 2 - x^2 & si \quad -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \\ x^2\, L\left(x^2 - 1\right) & si \quad \sqrt{2} \leq \end{cases}$, que es derivable en R, excepto para los valores críticos $x = -\sqrt{2}$ y $x = \sqrt{2}$, cuya derivabilidad vamos a comprobar.

$f'(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} & si \quad x \leq -\sqrt{2} \\ -2x & si \quad -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \\ 2x\, L\left(x^2 - 1\right) + \frac{2x^3}{x^2-1} \end{cases}$.

$f'\left(-\sqrt{2}\right)^- = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$ $f'\left(-\sqrt{2}\right)^+ = 2\sqrt{2}.$ $f'\left(-\sqrt{2}\right)^- \neq f'\left(-\sqrt{2}\right)^+.$

$f'\left(\sqrt{2}\right)^- = -2\sqrt{2}.$ $f'\left(\sqrt{2}\right)^+ = 2\sqrt{2}\cdot L(2 - 1) + \frac{4\sqrt{2}}{2-1} = 6\sqrt{2}.$ $f'\left(\sqrt{2}\right)^- \neq f'\left(\sqrt{2}\right)^+.$

$\underline{La\ función\ no\ es\ derivable\ para\ x = -\sqrt{2}\ ni\ para\ x = \sqrt{2}}.$

<u>No existen valores de los parámetros α y b para los que f(x) sea derivable en todo R</u>.

****

2º) a) Dibujar las gráficas aproximadas de $f(x) = x^2 + 2x + 1$ y $g(x) = 3x + 3$, señalando los puntos de corte.

b) Calcular el área encerrada entre las gráficas de las dos funciones del apartado a).

----

a)

Los puntos de corte de las funciones $f(x) = x^2 + 2x + 1$ y $g(x) = 3x + 3$ se obtienen de la igualación de sus expresiones:

$f(x) = x^2 + 2x + 1\ g(x) = 3x + 3 \quad \} \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 3x + 3\ ;\ x^2 - x -$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \{x_1 = -1 \rightarrow A(-1, 0)\ x_2 = 2 \rightarrow B(2, 9)$.

La parábola $f(x) = x^2 + 2x + 1$ se puede expresarse de la forma $f(x) = (x + 1)^2$, donde se deduce que su vértice es el punto B obtenido en el corte de ambas funciones y que se observa en la gráfica de la situación que se expresa en la figura adjunta.

b)

Las ordenadas de la recta $g(x) = 3x + 3$ son mayores o iguales que las correspondientes ordenadas da la parábola $f(x) = x^2 + 2x + 1$ en el intervalo del área a calcular; de la observación de la figura se deduce el área a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_{-1}^{2}\left[(3x + 3) - \left(x^2 + 2x + 1\right)\right]dx = \int_{-1}^{2}\left(-x^2 + x + 2\right)\cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} = \left(-\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + 2\cdot 2\right) - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 2\cdot(-1)\right] =$$

$$= -\frac{8}{3} + 2 + 4 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}.$$

$$\underline{S = \frac{9}{2}\, u^2 = 4,5\, u^2.}$$

****

3º) Sean las matrices $I = (1\ 0\ 0\ 1\ )$ y $A = (1\ 0\ \ -\ 1\ 2\ )$. Hallar dos números reales n y m para que se verifique que $(I + A)^2 = nI + mA$.

$$(I + A)^2 = [(1\ 0\ 0\ 1\ ) + (1\ 0\ \ -\ 1\ 2\ )]^2 = (2\ 0\ \ -\ 1\ 3\ )^2 = (2\ 0\ \ -\ 1\ 3\ )\cdot(2\ 0\ \ -\ 1$$

$= (4\ 0\ \ -\ 5\ 9\ )$.

$$(I + A)^2 = nI + mA \Rightarrow (4\ 0\ \ -\ 5\ 9\ ) = n\cdot(1\ 0\ 0\ 1\ ) + m\cdot(1\ 0\ \ -\ 1\ 2\ ) =$$

$= (n\ 0\ 0\ n\ ) + (m\ 0\ \ -\ m\ 2m\ ) = (n + m\ 0\ \ -\ m\ n + 2m\ ) \Rightarrow \{n + m = 4\ \ -\ m =-$

$\Rightarrow \underline{m = 5},\ \ \underline{n =- 1}$.

****

4º) Dadas las rectas $r \equiv \{x + y + z - 3 = 0\ 2x - y + z - 2 = 0$ y $s \equiv \frac{x-1}{2} = y - 1 = \frac{z-1}{3}$, se pide:

a) Determinar su posición relativa.

b) Calcular el ángulo que forman ambas rectas.

----

a)

La expresión de s por unas ecuaciones implícitas es la siguiente:

$s \equiv \{x - 1 = 2y - 2\ 3y - 3 = z - 1$;; $s \equiv \{x - 2y + 1 = 0\ 3y - z - 2 = 0$.

Las rectas r y s determinan el sistema $\{x + y + z - 3 = 0\ \ 2x - y + z - 2 = 0\ x - 2y + 1 = 0\ \ \ 3y - z - 2 = 0$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$M = (1\,2\,1\,0\ \ 1\ -1\ -2\,3\ \ 1\,1\,0\ -1\ )$ y $M' = (1\,1\,1\,3\ 2\ -1\,1\,2\ 1\,0\ \ -2\ 3\ 0\ -1\ \ -1\,2\ )$.

Según sean los rangos de M y M' pueden presentarse los siguientes casos:

1. -- Rango 3 = Rango M' = 4 $\Rightarrow$ Se cruzan.

2. -- Rango M = 3, Rango M' = 3 $\Rightarrow$ Se cortan.

3. -- Rango M = 2, Rango M' = 3 $\Rightarrow$ Paralelas.

4. -- Rango M = 2, Rango M' = 2 $\Rightarrow$ Coincidentes.

Para determinar el rango de M tenemos en cuenta que la segunda fila es la suma de las filas primera y tercera.

$Rango\ de M \Rightarrow \left\{F_1, F_2, F_4\right\} \Rightarrow |1\,1\,1\,2\ -1\,1\,0\,3\ -1\,| = 1 + 6 - 3 + 2 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow Rang\ M = 3.$

$Rang\ M' \Rightarrow |1\,1\,1\,3\ 2\ -1\,1\,2\ 1\,0\ \ -2\,3\ 0\ -1\ \ -1\,2\ \ | \Rightarrow \left\{F_1 \to F_1 + F_4\ F_2 \to F_2 + F_4\right\}' \Rightarrow |1\,4$

$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 20 + 16 - 10 + 8 + 8 = 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3$.

<u>Las rectas r y s se cortan</u>.

$b)$

El ángulo que forman dos rectas es al menor ángulo que forman sus vectores directores.

Un vector director de $s \equiv \frac{x-1}{2} = y - 1 = \frac{z-1}{3}$ es $\overrightarrow{v_s} = (2, 1, 3)$.

Un vector director de la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$ es cualquier vector que sea linealmente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son $\overrightarrow{v_1} = (1, 1, 1)$ y $\overrightarrow{v_2} = (2, -1, 1)$:

$\overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = i + 2j - k - 2k + i - j = 2i + j - 3k = (2, 1, -3)$.

Por el concepto de producto escalar:

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s} = \left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_s}\right| \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s}}{\left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_s}\right|} =$$

$$= \frac{(2,1,-3)\cdot(2,1,3)}{\sqrt{2^2+1^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+3^2}} = \frac{4+1-9}{\sqrt{4+1+9}\cdot\sqrt{4+1+9}} = \frac{-4}{14} = -0,2857 \Rightarrow \alpha = 106^\circ\, 36'\, 06''.$$

$$180^\circ - 106^\circ\, 36'\, 06'' = 73^\circ\, 23'\, 54''.$$

<u>Las rectas r y s forman un ángulo de 73º 23’ 54”</u>.

****

OPCIÓN B

1º) Calcular los siguientes límites:

$a)\ \lim_{x\to 1} \frac{2(x^2-x)}{xLx}$. $b)\ \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$. $c)\ \lim_{x\to 2}\left(\frac{x+2}{2x}\right)^{\frac{3}{x-2}}$.

$a)$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2(x^2-x)}{xLx}=\frac{2\cdot(1-1)}{1\cdot L1}=\frac{2\cdot 0}{1\cdot 0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Indeterminado\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{2(2x-1)}{1Lx+x\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{2(2x-1)}{Lx+1}=\frac{2\cdot(2-1)}{L1+1}=\frac{2\cdot 1}{0+1}=\frac{2}{1}=\underline{2}\ .$$

b)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\left(\sqrt{\infty+\infty}-\infty\right)=\infty-\infty\Rightarrow Indeterminado\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}\right)-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{x}}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}+\frac{x}{x}}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}}+1}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\infty}}+1}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\underline{\frac{1}{2}}\ .$$

$c)$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+2}{2x}\right)^{\frac{3}{x-2}}=\left(\frac{2+2}{4}\right)^{\frac{3}{2-2}}=1^{\frac{3}{0}}=1^{\infty}\Rightarrow Indet.\ \ nº\ e\Rightarrow\lim_{x\to 2}\left(\frac{2x+2-x}{2x}\right)^{\frac{3}{x-2}}=$$

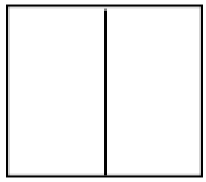
$$=\lim_{x\to 2}\left(1+\frac{2-x}{2x}\right)^{\frac{3}{x-2}}=\lim_{x\to 2}\left(1+\frac{1}{\frac{2x}{2-x}}\right)^{\frac{3}{x-2}}=\lim_{x\to 2}\left(1+\frac{1}{\frac{2x}{2-x}}\right)^{\frac{2x}{2-x}\cdot\frac{2-x}{2x}\cdot\frac{3}{x-2}}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2x}{2-x}}\right)^{\frac{2x}{2-x}}\right]^{\frac{2-x}{2x}\cdot\frac{-3}{2-x}}=\left[\lim_{x\to 2}\left(1+\frac{1}{\frac{2x}{2-x}}\right)^{\frac{2x}{2-x}}\right]^{\lim_{x\to 2}\frac{-3}{2x}}=e^{\lim_{x\to 2}\frac{-3}{2x}}=e^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{e^{\frac{3}{2}}}=$$

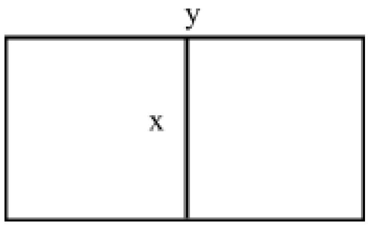
$$=\frac{1}{e\sqrt{e}}=\underline{\frac{\sqrt{e}}{2e}}.$$

****

2º) Un granjero dispone de 200 metros de valla para delimitar dos corrales adyacentes rectangulares de igual tamaño según se muestra en la figura. ¿Qué dimensiones debe elegir para que el área encerrada en los corrales sea máxima?



De la observación de la figura se deduce que el perímetro de la valla es:



$P = 3x + 2y = 200 \rightarrow y = \frac{200-3x}{2}$.

El área vallada es: $S = x \cdot y \Rightarrow S(x) = x \cdot \frac{200-3x}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(200x - 3x^2\right)$.

Para que la el área sea máxima es necesario que se anule su primera derivada:

$S'(x) = \frac{1}{2} \cdot (200 - 6x) = 100 - 3x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{100}{3}$. $y = \frac{200-3x}{2} = \frac{200-100}{2} = \frac{100}{2} = 50$.

$S = x \cdot y = \frac{100}{3} \cdot 50 = \frac{5.000}{3} \cong 1.666,7$.

<u>El área máxima que puede cercar el granjero con 200 m de valla son 1.666,7 m</u>^{2}.

****

3º) Estudiar, para los distintos valores del parámetro α, el sistema $\{ax - y + 3z = a\, x - ay + z =- a\, ax + y - 3z = a$. Resolverlo cuando α = 1.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$M = (a \;\; - 1\, 3\, 1 \;\; - a\, 1\, a\, 1 \;\; - 3\,)$ y $M' = (a\, 1\, a \;\; - 1 \;\; - a\, 1 \;\; 3\, 1 \;\; - 3 \;\; a \;\; - a\, a \;\;)$.

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$|M| = |a \;\; - 1\, 3\, 1 \;\; - a\, 1\, a\, 1 \;\; - 3\,| = 3a^2 + 3 - a + 3a^2 - a - 3 = 6a^2 - 2a =$

$= 2a(3a - 1) = 0 \Rightarrow a_1 = 0;\; a_2 = \frac{1}{3}$.

$\underline{Para \left\{a \neq 0\; a \neq \frac{1}{3}\right\} \Rightarrow Ran\, M = Ran\, M' = 3 = nº\, incóg. \Rightarrow S.\, C.\, D.}$

Para α = 0 es $M' = (0\, 1\, 0 \;\; - 1\, 0\, 1 \;\; 3\, 1 \;\; - 3 \;\; 0\, 0\, 0 \;\;) \Rightarrow Rang\, M' = 2$.

$\underline{Para\, a = 0 \Rightarrow Ran\, M = Ran\, M' = 2 < nº\, incóg. \Rightarrow S.\, C.\, I.}$

$Para\, a = \frac{1}{3}\; es\, M' = \left(\frac{1}{3}\, 1\, \frac{1}{3} \;\; - 1 \;\; - \frac{1}{3}\, 1 \;\; 3\, 1 \;\; - 3 \;\; \frac{1}{3} \;\; - \frac{1}{3}\, \frac{1}{3} \;\; \right) \Rightarrow \left\{C_1, C_2, C_4\right\} \Rightarrow |$

$= 27 \cdot |1 \;\; - 3\, 1\, 3 \;\; - 1 \;\; - 1\, 1\, 3\, 1\,| = 27 \cdot (- 1 + 9 + 3 + 1 + 3 + 9) \neq 0 \Rightarrow Rang\, M' =$
.

$\underline{Para\, a = \frac{1}{3} \Rightarrow Ran\, M = 2;\; Ran\, M' = 3 \Rightarrow S.\, I.}$

Para α = 1 el sistema es $\{x - y + 3z = 1\, x - y + z =- 1\, x + y - 3z = 1$ que es compatible determinado; se resuelva por la regla de Cramer:

$x = \frac{|1\, -1\, 3\, -1\, -1\, 1\, 1\, 1\, -3\,|}{|1\, -1\, 3\, 1\, -1\, 1\, 1\, 1\, -3\,|} = \frac{3-3-1+3-1+3}{3+3-1+3-1-3} = \frac{4}{4} = \underline{1}.$

$y = \frac{|1\, 1\, 3\, 1\, -1\, 1\, 1\, 1\, -3\,|}{4} = \frac{3+3+1+3-1+3}{4} = \frac{12}{4} = \underline{3}.$

$z = \frac{|1\, -1\, 1\, 1\, -1\, -1\, 1\, 1\, 1\,|}{4} = \frac{-1+1+1+1+1+1}{4} = \frac{4}{4} = \underline{1}.$

****

4º) Dados los planos $\pi_1 \equiv x + y + z = 3$ y $\pi_2 \equiv x + y - mz = 0$, se pide:

a) Calcular el valor del parámetro m para que ambos planos sean paralelos.

b) Calcular el valor de m para que ambos planos sean perpendiculares.

c) Para m = 2, obtener las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de ambos planos.

----

a)

Dos planos son paralelos (sin ser coincidentes) cuando sus correspondientes son proporcionales y no los son sus términos independientes:

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{1}{-m} \neq \frac{3}{0} \Rightarrow \underline{m = -1}.$$

b)

Dos planos son perpendiculares cuando lo son sus vectores normales.

Los vectores normales de los planos $\pi_1 \equiv x + y + z = 3$ y $\pi_2 \equiv x + y - mz = 0$ son los planos $\vec{n_1} = (1, 1, 1)$ y $\vec{n_2} = (1, 1, -m)$.

Dos vectores son perpendiculares cuando es cero su producto escalar:

$$\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0 \Rightarrow (1, 1, 1) \cdot (1, 1, -m) = 1 + 1 - m = 0 \Rightarrow \underline{m = 2}.$$

c)

Para m = 2 los planos $\pi_1 \equiv x + y + z = 3$ y $\pi_2 \equiv x + y - mz = 0$ determinan en su intersección a la recta $r \equiv \{x + y + z = 3 \;\; x + y - 2z = 0$, cuya expresión dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$r \equiv \{x + y + z = 3 \;\; x + y - 2z = 0 \Rightarrow y = \lambda \Rightarrow x + z = 3 - \lambda \;\; x - 2z = -\lambda\} \;\; x +$

$\Rightarrow 3z = 3 \longrightarrow z = 1.$

$$\underline{r \equiv \{x = 2 - \lambda \;\; y = \lambda \qquad z = 1 \qquad , \;\; \forall \lambda \in R}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CANARIAS

JUNIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones, A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones, el tribunal podrá anular su examen.

En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.

OPCIÓN A

1º) Consideramos la función $f(x) = L(x - 1)$ definida en el intervalo $[2,\ e + 1]$. Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = L(x - 1)$ que sea paralela a la recta que pasa por los puntos $P(2,\ 0)\ y\ Q(e + 1,\ 1)$.

La recta que pasa por los puntos P y Q tiene por vector director a cualquiera que sea linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{PQ}$, que es:

$$\overrightarrow{PQ} = [Q - P] = [(e + 1,\ 1) - (2,\ 0)] = (e - 1,\ 1) \Rightarrow m = \frac{1}{e-1}.$$

La pendiente de la tangente a una función en un punto es el valor de su primera derivada en ese punto:

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} \Rightarrow \frac{1}{x-1} = \frac{1}{e-1} \Rightarrow x = e.$$

El punto de tangencia es: $y_{(e)} = L(e - 1) \Rightarrow T[e,\ L(e - 1)]$.

La expresión de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente es la siguiente: $y - y_0 = m\left(x - x_0\right)$.

$$y - L(e - 1) = \frac{1}{e-1}(x - e);\ \ (e - 1)y - (e - 1)\cdot L(e - 1) = x - e.$$

La ecuación de la recta tangente pedida es la siguiente:

$\underline{Recta\ tangente\colon\ t \equiv x - (e-1)y + [(e-1) \cdot L(e-1) - e] = 0}$.

****

2º) Calcular las integrales siguientes: $a)$ $I = \int \frac{dx}{(2x+1)^2+4}$. $b)$

$I = \int x^2\left(x^3 + 1\right)^{-7} dx$.

$a)$

$$I = \int \frac{dx}{(2x+1)^2+4} = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{dx}{\frac{(2x+1)^2+4}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{dx}{\left(\frac{2x+1}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{x + \frac{1}{2} = t \rightarrow dx = dt\right\} \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{4} \cdot arc\, tg\, t + C.$$

$$\underline{I = \int \frac{dx}{(2x+1)^2+4} = \frac{1}{4} \cdot arc\, tg \left(x + \frac{1}{2}\right) + C.}$$

$b)$

$$I = \int x^2\left(x^3 + 1\right)^{-7} dx \Rightarrow \left\{x^3 + 1 = t \rightarrow 3x^2 \cdot dx = dt\; x^2 \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot dt\right\} \Rightarrow \int t^{-7} \cdot \frac{1}{3} dt$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \int t^{-7} \cdot dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{-6}}{-6} + C = - \frac{1}{18 \cdot t^6} + C.$$

$$\underline{I = \int x^2\left(x^3 + 1\right)^{-7} dx = - \frac{1}{18 \cdot \left(x^3+1\right)^6} + C.}$$

****

3º) Dado el sistema de ecuaciones $\{3x - ay =- 3 \quad 2x + ay - 5z = 13\ x + 3y - 2z = 5$:
a) Estudiar su compatibilidad para los distintos valores del parámetro a.

b) Resolverlo para $a = 3$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = (3 \ - a\ 0\ 2\ a \ - 5\ 1\ 3 \ - 2\ )$ y $M' = (3 \ - a\ 0\ 2\ a \ - 5\ 1\ 3 \ - 2 \quad - 3\ 13\ 5\ )$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$|M| = |3 \ - a\ 0\ 2\ a \ - 5\ 1\ 3 \ - 2\ | =- 6a + 5a + 45 - 4a =- 5a + 45 = 0 \Rightarrow a =$
.

$\underline{Para\ a \neq 9 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M^{'} = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

$Para\ a = 9 \Rightarrow M^{'} = (3 \ - 9\ 0\ 2\ 9 \ - 5\ 1\ 3 \ - 2 \quad - 3\ 13\ 5\ ) \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \left\{F_1 \leftrightarrow F_3\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (1\ 3 \ - 2\ 2\ 9 \ - 5\ 3 \ - 9\ 0 \quad 5\ 13 \ - 3\ ) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1\ F_3 \rightarrow F_3 - 3F_1\right\} \Rightarrow (1\ 3$

$\Rightarrow \left\{F_3 \rightarrow - 6F_2\right\} \Rightarrow Rang\ M^{'} = 2.$

$\underline{Para\ a = 9 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M^{'} = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

b)

Para $a = 3$ es sistema es $\{3x - 3y =- 3 \quad 2x + 3y - 5z = 13\ x + 3y - 2z = 5$, que es compatible determinado. Resolviendo por Cramer:

$x = \frac{|-3\ -3\ 0\ 13\ 3\ -5\ 5\ 3\ -2\ |}{-5 \cdot 3+45} = \frac{18+75-45-78}{-15+45} = \frac{93-123}{30} =- \frac{30}{30} =- 1.$

$y = \frac{|3\ -3\ 0\ 2\ 13\ -5\ 1\ 5\ -2\ |}{30} = \frac{-78+15+75-12}{30} = \frac{90-90}{30} = \frac{0}{30} = 0.$

$z = \frac{|3\ -3\ -3\ 2\ 3\ 13\ 1\ 3\ 5\ |}{30} = \frac{45-18-39+9-117+30}{30} = \frac{84-174}{30} =- \frac{90}{30} =- 3.$

$\underline{Solución: x =- 1,\ y = 0,\ z =- 3}.$

****

4º) Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 3y - z + (2 + m) = 0 \end{cases}$, se pide:

a) Determinar si r y s son rectas paralelas.

b) Hallar el valor del parámetro m para que las rectas r y s estén en un mismo plano.

----

a)

La expresión de s dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$s \equiv \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 3y - z + (2 + m) = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \lambda \Rightarrow s \equiv \{x = 1 - 2\lambda \quad y$

.

Los vectores directores de r y s son $\vec{v}_r = (1, 2, 1)$ y $\vec{v}_s = (-2, 1, 3)$, que son linealmente independientes por no tener proporcionales sus componentes; esto implica que:

$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ no\ son\ paralelas}.$

b)

Un punto de r es $A(3, -1, 2)$ y un punto de s es $B(1, 0, 2 + m)$.

Los puntos A y B determinan el vector:

$\vec{w} = \vec{AB} = [B - A] = [(1, 0, 2 + m) - (3, -1, 2)] = (-2, 1, m).$

Las rectas r y s son coplanarias cuando lo sean los vectores $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y $\vec{w}$.

Los vectores $\left\{\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{w}\right\}$ son coplanarios cuando su rango es menor que tres, es decir, cuando es cero el determinante de la matriz que forman:

$Rang\left\{\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{w}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & m \end{vmatrix} = m - 2 - 12 + 2 - 3 + 4m = 0;$

$5m - 15 = 0;\ m - 3 = 0 \Rightarrow m = 3.$

$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ son\ coplanarias\ para\ m = 3}.$

****

OPCIÓN B

1º) Se considera la función $f(x) = \{2^{x} + a \;\; si \;\; x \leq -1 \; ax + b \;\; si \;\; -1 < x \leq 0 \; 3x^{2} + 2 \;\; si \;\; x > 0$. Determinar si existen valores de los parámetros a y b para los que $f(x)$ sea derivable en R. Justificar la respuesta.

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para los valores $x = -1$ y $x = 0$, lque para forzar su continuidad se van a determinar los valores de a y b.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$Para\, x = -1 \Rightarrow \{f(x) \; = f\left(2^{x} + a\right) = \; 2^{-1} + a = f(-1) \; f(x) \; = f(ax + b) = -a +$

$\Rightarrow \frac{1}{2} + a = -a + b; \;\; 1 + 2a = -2a + 2b; \;\; 4a - 2b = -1.$ (1)

$Para\, x = 0 \Rightarrow \{f(x) \; = f(ax + b) = \; b \qquad f(x) \; = f\left(3x^{2} + 2\right) = 2 = f(0) \; \Rightarrow \underline{b =}$

.

Sustituyendo en (1) el valor obtenido para b:

$4a - 4 = -1; \;\; 4a = 3 \Rightarrow \underline{a = \frac{3}{4}}.$

La función resulta $f(x) = \{2^{x} + \frac{1}{4} \;\; si \;\; x \leq -1 \; \frac{3}{4}x + 2 \;\; si \;\; -1 < x \leq 0 \; 3x^{2} + 2 \;\; si \;\; x > 0$.

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para los valores $x = -1$ y $x = 0$ cuya derivabilidad se va a estudiar a continuación.

Un función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales.

$f'(x) = \{2^{x} \cdot L2 \;\; si \;\; x \leq -1 \;\; \frac{3}{4} \;\; si \;\; -1 < x \leq 0 \; 6x \;\; si \;\; x > 0$.

$f'\left(-1^{-}\right) = 2^{-1} \cdot L2 = \frac{L2}{2}. \qquad f'\left(-1^{+}\right) = \frac{3}{4}. \qquad f'\left(-1^{-}\right) \neq f'\left(-1^{+}\right).$

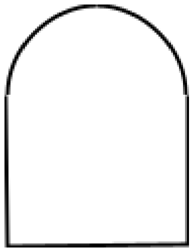
$f'(0^-) = \frac{3}{4}$. $\quad f'(0^+) = 0$. $\quad f'(0^-) \neq f'(0^+)$.

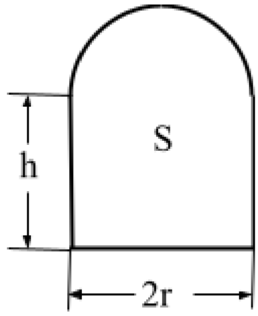
$\underline{La\ función\ f(x)\ no\ es\ derivable\ para\ x = -1\ ni\ para\ x = 0.}$

$\underline{No\ existen\ valores\ reales\ de\ a\ y\ b\ para\ que\ f(x)\ sea\ derivable\ en\ R.}$

****

2º) La boca de un túnel tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo como se muestra en la figura. Encontrar las medidas del túnel que deje pasar más luz si el perímetro de la figura mide 5 metros.





De la figura acotada se deduce el valor de la superficie en función de los valores de r e h:

$$S(r, h) = 2r \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2.$$

El perímetro es el siguiente:

$$p = 2h + 2r + \pi r = 5 \Rightarrow h = \frac{5 - 2r - \pi r}{2}.$$

Sustituyendo en la superficie el valor de h obtenido, resulta:

$$S(r) = 2r \cdot \frac{5 - 2r - \pi r}{2} + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(10r - 4r^2 - 2\pi r^2 + \pi r^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(10r - 4r^2 - \pi r^2\right).$$

Para que la superficie sea máxima es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$S'(x) = \frac{1}{2} \cdot (10 - 8r - 2\pi r) = 5 - 4r - \pi r.$$

$$S''(x) = - 4 - \pi < 0 \Rightarrow Máximo.$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow 5 - 4r - \pi r = 0; \ 5 = (4 + \pi) \Rightarrow r = \frac{5}{4+\pi} \cong 0,70.$$

$$h = \frac{5 - 2r - \pi r}{2} = \frac{5 - 2 \cdot \frac{5}{4+\pi} - \pi \cdot \frac{5}{4+\pi}}{2} = \frac{20 + 5\pi - 10 - 5\pi}{2(4+\pi)} = \frac{10}{2(4+\pi)} \Rightarrow h = \frac{5}{4+\pi} \cong 0,70.$$

$\underline{Deja\ pasar\ más\ luz\ el\ tunel\ que\ tiene\ de\ radio\ y\ de\ altura\ 0,70\ metros.}$

****

1.

3º) Dada la matriz $A = (2 \;\; - \;\; k\,4\,1\,1\,7\,1 \;\; - \;\; 1\,12\,)$:

$a)$ ¿Para qué valores del parámetro k la matriz A tiene inversa?

$b)$ Hallar la matriz A^{-1} cuando k toma el valor k = 1.

$a)$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$|A| = |2 \;\; - \;\; k\,4\,1\,1\,7\,1 \;\; - \;\; 1\,12\,| = 24 - 7k - 4 - 4 + 14 + 12k = 5k + 30 = 0;$

$k + 6 = 0 \Rightarrow k = - 6.$

$\underline{La\ matriz\ k\ es\ invertible\ \forall k \in R - \{- 6\}}.$

$b)$

Para k = 1 es $A = (2 \;\; - \;\; 1\,4\,1\,1\,7\,1 \;\; - \;\; 1\,12\,)$.

$A^t = (2\,1\,1 \;\; - \;\; 1\,1 \;\; - \;\; 1\,4\,7\,12\,)$.

$|A| = |2 \;\; - \;\; 1\,4\,1\,1\,7\,1 \;\; - \;\; 1\,12\,| = 5 \cdot 1 + 30 = 5 + 30 = 35.$

$Adj.\ de\ A^t = (|1 \;\; - \;\; 1\,7\,12\,| \;\; - |- \;1 \;\; - \;\; 1\,4\,12\,|\,|- \;1\,1\,4\,7\,| \;\; - |1\,1\,7\,12\,|\,|2\,1\,4\,12\,| \;\; -$

.

$$\underline{A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{1}{35} \cdot (19\,8 \;\; - \;\; 11 \;\; - \;\; 5\,20 \;\; - \;\; 10 \;\; - \;\; 2\,1\,3\,)}.$$

****

4º) Sean r y s las rectas $r\equiv\begin{cases} x=\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=3 \end{cases}$ y $s\equiv x-1=y=z-3$. Calcular:

a) La ecuación del plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto $P(0,\ 1,\ 3)$.

b) Las coordenadas del punto de intersección de ambas rectas.

c) La ecuación del plano π que contiene a las rectas r y s.

----

a)

La recta r tiene como vector director a $\overrightarrow{v_r}=(1,\ -1,\ 0)$.

Un vector normal del plano β pedido es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector normal de la recta: $\overrightarrow{n}=(1,\ -1,\ 0)$.

La expresión general del plano es: $\beta\equiv x-y+D=0$.

Como el plano β contiene al punto $P(0,\ 1,\ 3)$ tiene que satisfacer su ecuación:

$\left.\begin{array}{l}\beta\equiv x-y+D=0 \\ P(0,\ 1,\ 3)\end{array}\right\}\Rightarrow 0-1+D=0\Rightarrow D=1.$

$$\underline{\beta\equiv x-y+1=0}.$$

b)

La expresión de s por unas ecuaciones paramétricas es: $s\equiv\begin{cases} x=1+\mu \\ y=\mu \\ z=3+\mu \end{cases}$.

$\left.\begin{array}{l}\begin{cases} x=\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1+\mu \\ y=\mu \\ z=3+\mu \end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\mu=0 \\ \lambda=1\end{array}\right\}\Rightarrow$

.

c)

Considerando el punto Q y los vectores $\overrightarrow{v_r}=(1,\ -1,\ 0)$ y $\overrightarrow{v_s}=(1,\ 1,\ 1)$, el plano π pedido tiene la siguiente expresión general:

$$\pi\left(Q;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s}\right)\equiv\begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0;$$

$-(x-1)+(z-3)+(z-3)-y=0;\ \ -x+1+2z-6-y=0.$

$$\underline{\pi\equiv x+y-2z+5=0}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

JUNIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

1.- Debe escogerse una sola de las opciones
2.- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
3.- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

1º) Considere el sistema $\begin{cases} tx + y + tz = t \\ x + ty + z = -t \\ y + tz = 0 \end{cases}$.

$a)$ Analice la existencia de soluciones dependiendo del valor del parámetro t.

$b)$ Calcule todas las soluciones en el caso de t = 2.

$a)$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = \begin{pmatrix} t & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} t & 1 & t & t \\ 1 & t & 1 & -t \\ 0 & 1 & t & 0 \end{pmatrix}$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro t es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} t & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & t \end{vmatrix} = t^3 + t - t - t = 0;\ \ t^3 - t = 0;\ \ t\left(t^2 - 1\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_1 = 0,\ t_2 = -1,\ t_3 = 1.$$

$$\underline{Para \begin{cases} t \neq 0 \\ t \neq -1 \\ t \neq 1 \end{cases} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$$

$$Para\ t = 0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$Para\ t = -1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{F_2 = -F_1\right\} \Rightarrow Rang\ M$$

.

$\underline{Para \{t = 0\ t = -1\} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

$Para\ t = 1 \Rightarrow M' = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\quad 1\ -\ 1\ 0) \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |1\ 1\ 1\ 1\ 1\ -\ 1\ 0\ 1\ 0| = 1 + 1 = 2 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$

$\underline{Para\ t = 1 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible}.$

$b)$

Para $t = 2$ es sistema es $\{2x + y + 2z = 2\ x + 2y + z = -2\ y + 2z = 0$., que es compatible determinado. Resolviendo por Cramer:

$$x = \frac{|2\ 1\ 2\ -2\ 2\ 1\ 0\ 1\ 2|}{2^3-2} = \frac{8-4-2+4}{8-2} = \frac{6}{6} = 1.$$

$$y = \frac{|2\ 2\ 2\ 1\ -2\ 1\ 0\ 0\ 2|}{6} = \frac{-8-4}{6} = \frac{-12}{6} = -2.$$

$$z = \frac{|2\ 1\ 2\ 1\ 2\ -2\ 0\ 1\ 0|}{6} = \frac{2+4}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

$\underline{Solución: x = 1,\ y = -2,\ z = 1}.$

****

2º) Considere la función $f(x) = \left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{x}}$.

a) Calcule $f(x)$. b) Calcule la derivada de $f(x)$.

----

a)

$$f(x) = \left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{x}} = \infty^0 \Rightarrow Indet.$$

Haciendo $A = \left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow LA = L\left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \cdot L\left(1 + x^2\right)$.

Tomando límites:

$$LA = \left[\frac{1}{x} L\left(1 + x^2\right)\right] = \frac{L\left(1+x^2\right)}{x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1} = \frac{2x}{1+x^2} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{2x} = \frac{2}{\infty} = 0 \Rightarrow A = e^0 = 1.$$

$$\underline{f(x) = \left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{x}} = 1}.$$

b)

$$f(x) = \left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow L[f(x)] = L\left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \cdot L\left(1 + x^2\right).$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{x^2} \cdot L\left(1 + x^2\right) + \frac{1}{x} \cdot \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2} - \frac{L\left(1+x^2\right)}{x^2}.$$

$$f'(x) = f(x) \cdot \left[\frac{2}{1+x^2} - \frac{L\left(1+x^2\right)}{x^2}\right].$$

$$\underline{f'(x) = \left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{x}} \cdot \left[\frac{2}{1+x^2} - \frac{L\left(1+x^2\right)}{x^2}\right]}.$$

****

3º) Considere el punto $P(1,\ 1,\ 1)$ y el plano $\pi \equiv (2,\ 1,\ 0) + t(-\ 1,\ 1,\ 1) + s(1,\ -\ 1,\ 1)$.

a) Calcule la recta r que pasa por P y es ortogonal al plano π.

b) Calcule la distancia entre P y π.

c) Calcule la ecuación implícita (general) del plano π.

----

a)

Un vector normal del plano π es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los dos vectores que lo determinan:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = i + j + k - k + i + j = 2i + 2j \Rightarrow \vec{n} = (1,\ 1,\ 0).$$

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es: $\underline{r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 \end{cases}}$.

b)

La expresión general del plano π es la siguiente: $\pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$

$(x - 2) + (y - 1) + z - z + (x - 2) + (y - 1) = 0;\ \ 2(x - 2) + 2(y - 1) = 0;$

$(x - 2) + (y - 1) = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + y - 3 = 0.$

La distancia de un punto a un plano es $d(P,\ \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Aplicada al punto $P(1,\ 1,\ 1)$ y plano $\pi \equiv x + y - 3 = 0$:

$$d(P,\ \pi) = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{|1 + 1 - 3|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\underline{d(P,\ \pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}\ unidades.}$$

c)

(Se obtuvo en el apartado a))

$$\underline{\pi \equiv x + y - 3 = 0.}$$

****

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

1º) Considere la matriz $A = (-\ 1\,3\,1\ \ -\ 4\,6\,3\,6\ \ -\ 7\ \ -\ 4\,)$.

$a)$ Calcule todos los vectores $\vec{v} = (x\,y\,z\,)$ tales que $A\cdot\vec{v} = \vec{v}$.

$b)$ Calcule la matriz inversa de A.

$a)$

$A\cdot\vec{v} = \vec{v} \Rightarrow (-\ 1\,3\,1\ \ -\ 4\,6\,3\,6\ \ -\ 7\ \ -\ 4\,)\cdot(x\,y\,z\,) = (x\,y\,z\,);\qquad -\ x + 3y + z$

$-\ 2x + 3y + z = 0\ \ -\ 4x + 5y + 3z = 0\ \ \ 6x - 7y - 5z = 0\,\}$.

Es un sistema homogéneo de matriz de coeficientes $M = (-\ 2\,3\,1\ \ -\ 4\,5\,3\,6\ \ -\ 7\ \ -\ 5\,)$.

$Rang\ M \Rightarrow |-\ 2\,3\,1\ \ -\ 4\,5\,3\,6\ \ -\ 7\ \ -\ 5\,| = 50 + 28 + 54 - 30 - 42 - 60 = 132\ -$

$= 0 \Rightarrow Rang\ M = 2 \Rightarrow Sistema\ compatible\ indeterminado.$

El sistema admite infinitas soluciones. Resolviendo el sistema, despreciando una ecuación (por ejemplo la tercera) y haciendo $z = \lambda$:

$-\ 2x + 3y = -\ \lambda\ \ \ -\ 4x + 5y = -\ 3\lambda\,\}\ \ \ -\ 4x + 6y = -\ 2\lambda\,4x - 5y = 3\lambda\,\} \Rightarrow y = \lambda$

.

$\underline{Solución:\ \vec{v} = (2\lambda\,\lambda\,\lambda\,),\ \forall\lambda\in R}$.

$b)$

$A^{t} = (-\ 1\ \ -\ 4\,6\,3\,6\ \ -\ 7\,1\,3\ \ -\ 4\,)$.

$|A| = |-\ 1\,3\,1\ \ -\ 4\,6\,3\,6\ \ -\ 7\ \ -\ 4\,| = 24 + 28 + 54 - 36 - 21 - 48 = 106 - 10$

.

$Adj.\ de\ A^{t} = (|6\ \ -\ 7\,3\ \ -\ 4\,|\ \ -|3\ \ -\ 7\,1\ \ -\ 4\,|\,|3\,6\,1\,3\,|\ \ -|-\ 4\,6\,3\ \ -\ 4\,|\,|-\ 1\,6\,1$

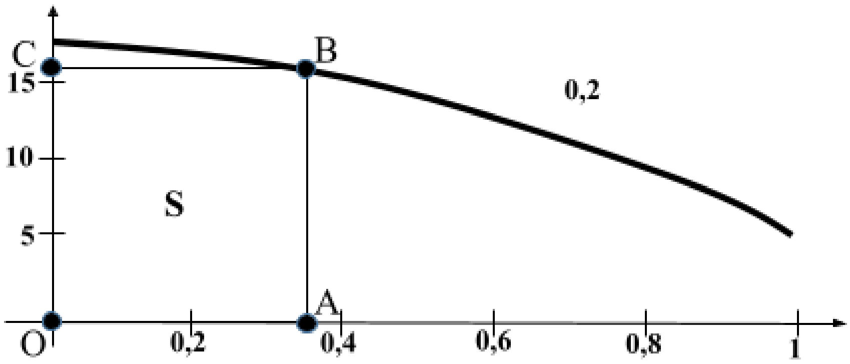
$= (-\ 3\,5\,3\,2\ \ -\ 2\ \ -\ 1\ \ -\ 8\,11\,6\,)$.

$A^{-1} = \frac{Adj.\,de\,A^{t}}{|A|} = \frac{1}{1}\cdot(-\ 3\,5\,3\,2\ \ -\ 2\ \ -\ 1\ \ -\ 8\,11\,6\,)$.

$\underline{A^{-1} = (-\ 3\,5\,3\,2\ \ -\ 2\ \ -\ 1\ \ -\ 8\,11\,6\,)}$.

****

2º) Los puntos $O(0,\ 0)$, $A\left(x_0,\ 0\right)$, $B\left[x_0,\ f\left(x_0\right)\right]$, $C\left[0,\ f\left(x_0\right)\right]$, que son los vértices de un rectángulo, tal como indica la figura, donde $0 \leq x_0 \leq 1$ y $f(x) = 18 - 3x - 8x^2$.



$a)$ Calcule el valor de x_0 para que el área del rectángulo sea máxima. Calcule el área de dicho rectángulo.

$b)$ Calcule el área del recinto encerrado bajo la gráfica de $f(x)$ entre los siguientes valores: $0 \leq x \leq 1$.

$a)$

El área del rectángulo es $S = x_0 \cdot f\left(x_0\right)$. Para que el área sea máxima tiene que anularse su primera derivada.

Siendo: $S(x) = x \cdot f(x) = x \cdot \left(18 - 3x - 8x^2\right) = - 8x^3 - 3x^2 + 18x$:

$S'(x) = - 24x^2 - 6x + 18 = 0;\ \ 4x^2 + x - 3 = 0;\ \ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2 \cdot 4} = \frac{-1 \pm 7}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = - 1,\ x_2 = \frac{3}{4}$. La solución $x_1 = - 1 \notin 0 \leq x_0 \leq 1$.

$$\underline{La\ superficie\ es\ máxima\ para\ x = \frac{3}{4}.}$$

$S\left(\frac{3}{4}\right) = - 8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 18 = - 8 \cdot \frac{27}{64} - 3 \cdot \frac{9}{16} + 18 = - \frac{27}{8} - \frac{27}{16} + 18 =$

$= \frac{-54-27+288}{16} = \frac{-81+288}{16} = \frac{207}{16}$.

$$\underline{La\ superficie\ máxima\ es = \frac{207}{16}\ u^2.}$$

$b)$

$$S = \int_0^1 f(x) \cdot dx = \int_0^1 \left(18 - 3x - 8x^2\right) \cdot dx = \left[18x - \frac{3x^2}{2} - \frac{8x^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$= \left(18 \cdot 1 - \frac{3 \cdot 1^2}{2} - \frac{8 \cdot 1^3}{3}\right) - 0 = 18 - \frac{3}{2} - \frac{8}{3} = \frac{108-9-16}{6} = \underline{\frac{83}{6}\, u^2}.$$

****

3º) Sean A, B y C los puntos de coordenadas $A(2, -1, 2)$, $B(1, 0, 0)$, $C(2, 4, -3)$ y sea r la recta $r \equiv \begin{cases} 2y - z = 0 \\ x + z = 2 \end{cases}$.

a) Calcule las ecuaciones de la recta s que pasa por A y por el punto medio del segmento BC.

b) Calcule el área del triángulo ABC.

c) Calcule la distancia del punto C a la recta r.

----

a)

Los puntos $B(1, 0, 0)$ y $C(2, 4, -3)$ determinan un segmento cuyo punto medio es $M\left(\frac{3}{2}, 2, -\frac{3}{2}\right)$.

Los puntos B y C determinan el vector $\overrightarrow{BC} = [C - B] = (1, 4, -3)$.

La expresión de s dada por unas ecuaciones paramétricas es: $\underline{s \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 + 4\lambda \\ z = 2 - 3\lambda \end{cases}}$.

b)

Los puntos A, B, C determinan los siguientes vectores:

$\overrightarrow{BA} = [A - B] = [(2, -1, 2) - (1, 0, 0)] = (1, -1, 2)$.
$\overrightarrow{BC} = (1, 4, -3)$.

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan los puntos:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}\right| = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}(3i + 2j + 4k + k - 8i + 3j)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot |-5i + 5j + 5k| = \frac{5}{2} \cdot |-i + j + k| = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} = \underline{\frac{5\sqrt{3}}{2}\, u^2}.$$

c)

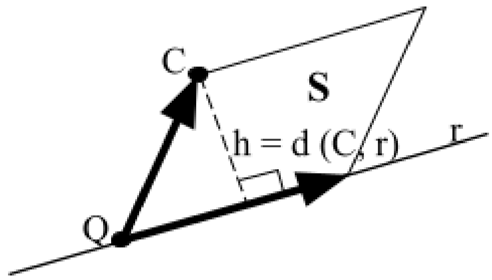
La distancia de un punto a una recta puede determinarse teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que forman dos vectores es el módulo de su producto vectorial y, de forma geométrica, es el producto de la base por la altura.

La expresión de $r\equiv\{2y - z = 0\ x + z = 2$ dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente: $r\equiv\{2y - z = 0\ x + z = 2\ \Rightarrow y = \lambda;\ z = 2\lambda;\ \ x = 2 - 2\lambda\ \Rightarrow\ r\equiv\{x = 2 - 2\lambda\ y = \lambda$
.

Un punto y un vector de r son $Q(2,\ 0,\ 0)\ y\ \overrightarrow{v}_r = (-\ 2,\ 1,\ 2)$.

$\overrightarrow{QC} = [C\ -\ Q] = [(2,\ 4,\ \ -\ 3) - (2,\ 0,\ 0)] = (0,\ 4,\ \ -\ 3)$.

Para una mejor comprensión del proceso se hace un dibujo de la situación.



$$S\ =\left|\overrightarrow{v}_r\wedge\overrightarrow{QC}\right|\ S\ =\left|\overrightarrow{v}_r\right|\cdot h\ \}\Rightarrow\left|\overrightarrow{v}_r\wedge\overrightarrow{QC}\right| = \left|\overrightarrow{v}_r\right|\cdot h\Rightarrow$$

$$\underline{\Rightarrow h\ =\ d(C,r)\ =\frac{\left|\overrightarrow{v}_r\wedge\overrightarrow{QC}\right|}{\left|\overrightarrow{v}_r\right|}}.$$

Aplicando la fórmula al punto C y a la recta r:

$$d(C,r) = \frac{\left|\overrightarrow{v}_r\wedge\overrightarrow{QC}\right|}{\left|\overrightarrow{v}_r\right|} = \frac{\|i\ j\ k\ -2\ 1\ 2\ 0\ 4\ -3\ \|}{\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}} = \frac{|-3i-8k-8i-6j|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{|-11i-6j-8k|}{\sqrt{9}} =$$

$$= \frac{\sqrt{11^2+6^2+8^2}}{3} = \frac{\sqrt{121+36+64}}{3} = \frac{\sqrt{221}}{3} = \underline{\frac{\sqrt{221}}{3}\ u\ =\ d(C,r)}.$$

Otra forma de resolver este ejercicio es la siguiente:

El haz de planos ⊥ a r tiene por ecuación: $\alpha\equiv 2x\ -\ y\ -\ 2z\ +\ D\ =\ 0$.

De los infinitos planos del haz α, el plano π que contiene al punto $C(2,\ 4,\ \ -\ 3)$ es el que satisface su ecuación:

$\alpha\equiv 2x\ -\ y\ -\ 2z\ +\ D\ =\ 0\qquad C(2,\ 4,\ \ -\ 3)\ \}\Rightarrow 2\cdot 2\ -\ 4\ -\ 2\cdot(-\ 3) + D\ =\ 0$

$4\ -\ 4\ +\ 6\ +\ D\ =\ 0;\ \ 6\ +\ D\ =\ 0\Rightarrow D\ =-\ 6\Rightarrow \pi\equiv 2x\ -\ y\ -\ 2z\ -\ 6\ =\ 0.$

El punto T, intersección de la recta r con el plano π es la solución del sistema que forman:

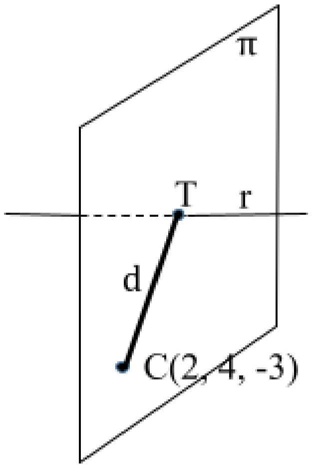
$\pi \equiv 2x - y - 2z - 6 = 0$ $\qquad$ $r \equiv \{2y - z = 0 \; x + z = 2 \;\; \} \; 2x - y - 2z = 6$

$2x - 5y = 6 \;\; x + 2y = 2 \} \;\; - 2x + 5y = - 6 \; 2x + 4y = 4 \} \Rightarrow 9y = - 2; \; y = - \frac{2}{9};$

.

El punto de corte es $T\left(\frac{22}{9}, \;\; - \frac{2}{9}, \;\; - \frac{4}{9}\right)$.

La distancia pedida del punto C a la recta r es equivalente a la distancia entre los puntos C y T, o sea el módulo de $\left|\overrightarrow{BP}\right|$:



$$d(C, \; r) = \left|\overrightarrow{TC}\right| = \sqrt{\left(2 - \frac{22}{9}\right)^2 + \left(4 + \frac{2}{9}\right)^2 + \left(- 3 + \frac{4}{9}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(- \frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{38}{9}\right)^2 + \left(- \frac{23}{9}\right)^2} = \frac{\sqrt{16+1444+529}}{9} = \frac{\sqrt{1989}}{9} =$$

$$= \frac{3\sqrt{221}}{9} = \frac{\sqrt{221}}{3}.$$

$$\underline{d(C, \; r) = \frac{\sqrt{221}}{3} \; unidades.}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

SEPTIEMBRE – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

1.- Debe escogerse una sola de las opciones

2.- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.

3.- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

1º) Considere el siguiente sistema de ecuaciones $\{ax + 2ay + az = a + 1 \quad x + (a + 1)y + (2 - a)z = 2a$, dependiendo del parámetro α:

$a)$ Calcule los valores de α para que el sistema tenga solución.

$b)$ Calcule todas las soluciones cuando α = 1 y cuando α = -1.

$a)$

Las matrices de coeficientes y ampliada del sistema son las siguientes:

$M = (a\ 2a\ a\ 1\ a + 1\ 2 - a)$ y $M' = (a\ 2a\ a\ 1\ a + 1\ 2 - a \quad a + 1\ 2a)$.

El rango de la matriz de coeficientes, que a efectos de rango, es equivalente a la matriz que se indica, es:

$(1\ 2\ 1\ 1\ a + 1\ 2 - a) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 - F_1\} \Rightarrow (1\ 2\ 1\ 0\ a - 1\ 1 - a)$.

$Para\ a = 1 \Rightarrow \{M = (1\ 2\ 1\ 1\ 2\ 1) \quad M' = (1\ 2\ 1\ 1\ 2\ 1 \quad 2\ 2)\} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' =$

.

$Para\, a = -1 \Rightarrow \{ M = (-1\ \ -2\ \ -1\ 1\ 0\ 3) \quad M' = (-1\ \ -2\ \ -1\ 1\ 0\ 3\ \ \ 0\ \ -2)\}$

.

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema es compatible cuando son iguales los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada.

$\underline{El\ sistema\ tiene\ solución\ para\ a = 1\ y\ para\ a = \ -1}.$

$b)$

Para $a = 1$ el sistema resulta $\{x + 2y + z = 2\ x + 2y + z = 2$, equivalente a la expresión de rango uno: $x + 2y + z = 2$.

Por tener el sistema rango uno y ser tres el número de incógnitas, el grado de libertad es dos, o sea que depende de dos parámetros; las soluciones son:

$$\underline{(\lambda,\ \mu,\ 2 - \lambda - 2\mu),\ \forall\lambda,\ \mu \in R}.$$

Para $a = -1$ el sistema resulta $\{-x - 2y - z = 0\ \ -x + 3z = -2$, que tiene rango dos.

Por tener el sistema rango dos y ser tres el número de incógnitas, el grado de libertad es uno, o sea que depende de un parámetro; las soluciones se obtienen haciendo, por ejemplo, $z = \lambda$:

$$x = 3\lambda + 2.\ (3\lambda + 2) + 2y + \lambda = 0;\ 5\lambda + 2 + 2y = 0;\ y = -\frac{5}{2}\lambda - 1$$

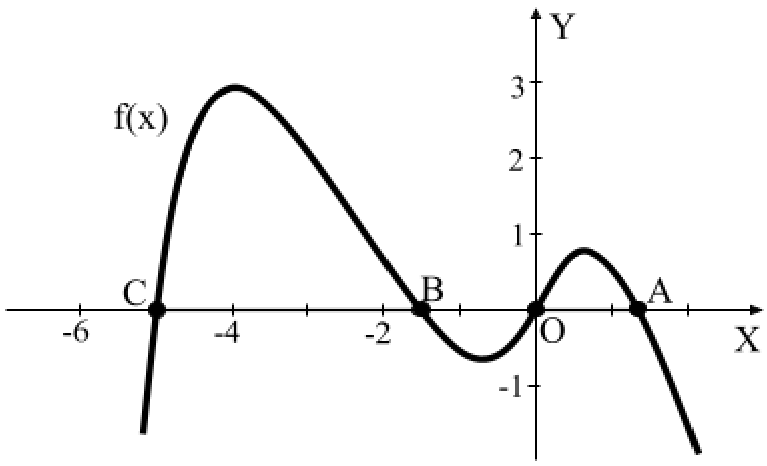
.

$$\underline{\left(3\lambda + 2,\ -\frac{5}{2}\lambda - 1,\ \lambda\right),\ \forall\lambda \in R}.$$

****

2º) Considera la función $f(x) = x\cdot \cos cos\, x$:

a) Calcule una primitiva de f(x) y el área encerrada bajo la gráfica de f(x) que se muestra sombreada en la figura. (Indicación: calcule los puntos de corte de la gráfica de f(x) con los ejes).



b) Calcule la recta tangente a f(x) en x = 0.

----

a)

Por ser $f(0) = 0$, el punto de corte con el eje Y es el origen de coordenadas.

Por ser $f(-x) = -x\cdot \cos cos\,(-x) = -x\cdot(-\cos cos\, x) = x\cdot \cos cos\, x = f(x)$, es simétrica con respecto al origen y por ser función periódica tiene infinitos puntos de corte con el eje X, que son todos aquellos que tienen $\cos cos\, x = 0$. Únicamente calculamos los puntos de corte que atañen a la resolución del apartado.

Los puntos de corte con X comentados son los siguientes:

$$x_1 = \frac{\pi}{2} \rightarrow A\left(\frac{\pi}{2},\, 0\right);\ \ x_2 = -\frac{\pi}{2} \rightarrow B\left(-\frac{\pi}{2},\, 0\right)\, y\ \ x_3 = -\frac{3\pi}{2} \rightarrow C\left(-\frac{3\pi}{2},\, 0\right).$$

$$\int x\cdot \cos cos\, x\cdot dx \Rightarrow \{u = x \rightarrow du = dx\ \ \cos cos\, x\cdot dx = dv \rightarrow v = sen\, x\ \} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\cdot sen\, x - \int sen\, x\cdot dx = x\cdot sen\, x + \cos cos\, x\ .$$

Teniendo en cuenta el valor de la integral indefinida que se acaba de obtener:

$$S = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(x)\cdot dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cdot dx =$$

$$= [x\cdot sen\, x + \cos cos\, x\,]_{-\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} + [x\cdot sen\, x + \cos cos\, x\,]_{0}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left[- \frac{\pi}{2} \cdot sen \left(- \frac{\pi}{2} \right) + \ cos \left(- \frac{\pi}{2} \right) \right] - \left[- \frac{3\pi}{2} \cdot sen \left(- \frac{3\pi}{2} \right) + \ cos \left(- \frac{3\pi}{2} \right) \right] +$$

$$+ \left(\frac{\pi}{2} \cdot sen \ \frac{\pi}{2} + \ \cos cos \ \frac{\pi}{2} \ \right) - (0 \cdot sen \ 0 \ + \ \cos cos \ 0 \ ) =$$

$$= \left[- \frac{\pi}{2} \cdot (- \ 1) + \ 0 \right] - \left[- \frac{3\pi}{2} \cdot 1 \ + \ 0 \right] + \left(\frac{\pi}{2} \cdot 1 \ + \ 0 \right) - (0 \ + \ 1) = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \ 1 \ =$$

$$= \frac{5\pi}{2} - \ 1 \ = \underline{\frac{5\pi-2}{2} \ u^2 \cong 6,85 \ u^2}.$$

$b)$

La pendiente de la tangente de una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = \ 1 \cdot \ \cos cos \ x \ - \ x \cdot sen \ x \ .$$

$$m \ = \ f'(0) = \ \cos cos \ 0 \ - \ 0 \cdot sen \ 0 \ = \ 1 \ - \ 1 \ = \ 1 \ .$$

$$y \ - y_0 = \ m\left(x \ - x_0\right) \Rightarrow y \ - \ 0 \ = \ 1 \cdot (x \ - \ 0).$$

$$\underline{Recta \ tangente: t \equiv y \ = \ x.}$$

****

3º) Considere los puntos A (1, 1, 0), B (2, 1, 1) y C (-1, 1, 2):

a) Calcule la ecuación implícita (general) del plano que pasa por A, B y C.

b) Calcule el ángulo que forman las rectas AB y AC.

c) Calcule el área del triángulo ABC.

----

a)

$$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(2,\ 1,\ 1) - (1,\ 1,\ 0)] = (1,\ 0,\ 1).$$

$$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(-1,\ 1,\ 2) - (1,\ 1,\ 0)] = (-2,\ 0,\ 2).$$

$\pi\left(A;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right) \equiv |x - 1\ y - 1\ z\ 1\ 0\ 1\ -2\ 0\ 2| = 0;\ -2(y - 1) - 2(y - 1) = 0;$

$-4(y - 1) = 0;\ y - 1 = 0 \Rightarrow \underline{\pi \equiv y - 1 = 0}.$

b)

El ángulo que forman las rectas AB y AC es el mismo que forman sus vectores directores $\overrightarrow{AB} = (1,\ 0,\ 1)$ y $\overrightarrow{AC} = (-2,\ 0,\ 2)$.

Por el concepto de producto escalar de dos vectores:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos cos\ \alpha \Rightarrow \cos cos\ \alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{(1,\ 0,\ 1) \cdot (-2,\ 0,\ 2)}{\sqrt{1^2+1^2} \cdot \sqrt{(-2)^2+2^2}} =$$

$$= \frac{-2+0+2}{\sqrt{1+1} \cdot \sqrt{4+4}} = \frac{0}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90°.$$

$\underline{Las\ rectas\ AB\ y\ AC\ son\ perpendiculares}.$

c)

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan los puntos:

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot \|i\ j\ k\ 1\ 0\ 1\ 2\ 0\ -2\| = \|i\ j\ k\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ -1\| = |j + j| = \underline{2}$

.

****

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

1º) El precio de un kilo de manzanas, 2 de peras y una docena de huevos es de 5 euros. El precio de 2 kilos de manzanas, 4 kilos de peras y 3 docenas de huevos es de 12 euros. El precio de 5 docenas de huevos y 2 kilos de peras es de 11 euros y 50 céntimos.

a) Calcule el precio del kilo de peras, el kilo de manzanas y la docena de huevos.

b) Pedro ha comprado dos kilos de manzanas y tres kilos de peras. Carmen ha comprado un kilo de manzanas, una docena de huevos y dos kilos de peras. ¿Quién ha gastado más dinero?

----

a)

Siendo x, y, z los valores de un kilo de manzana, un kilo de peras y de una docena de huevos, respectivamente, del enunciado del ejercicio se deduce el sistema:

$$x + 2y + z = 5\ 2x + 4y + 3z = 12 \qquad 5z + 2y = 11,5\ \}.$$

Resolviendo por el método de Gauss:

$$M' = (1\ 2\ 1\ 2\ 4\ 3\ 0\ 2\ 5 \quad 5\ 12\ 11,5\ ) \Rightarrow \left\{F_2 \to F_2 - 2F_1\right\} \Rightarrow (1\ 2\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 2\ 5 \quad 5\ 2$$

$$\Rightarrow \left\{F_2 \leftrightarrow F_3\right\} \Rightarrow (1\ 2\ 1\ 0\ 2\ 5\ 0\ 0\ 1 \quad 5\ 11,5\ 2\ ) \Rightarrow z = 2.$$

$$2y + 5 \cdot 2 = 11,5;\ \ 2y = 1,5 \Rightarrow y = 0,75.$$

$$x + 2 \cdot 0,75 + 2 = 5;\ \ x = 5 - 1,5 - 2 = 5 - 3,5 \Rightarrow x = 1,5.$$

$\underline{Mananas\text{: } 1,5\ euros/kilo;\ Peras\text{: } 0,75\ euros/kilo;\ Huevos\text{: } 2\ euros/docena.}$

b)

Gasto de Pedro: $2 \cdot 1,5 + 3 \cdot 0,75 = 3 + 2,25 = 5,25\ euros.$

Gasto de Carmen: $1,5 + 2 \cdot 0,75 + 2 = 3,5 + 1,5 = 5\ euros.$

$\underline{Pedro\ ha\ gastado\ más\ dinero\ que\ Carmen.}$

****

2º) Considere la función $f(x)=\frac{x^2+2}{x^2-1}$.

$a)$ Calcule su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$b)$ Calcule sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas.

$c)$ Haga un esbozo de la gráfica de la función.

$a)$

Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$\underline{D(f)\Rightarrow R-\{-1,\ 1\}}.$$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x)=\frac{2x\cdot\left(x^2-1\right)-\left(x^2+2\right)\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{2x\cdot\left(x^2-1-x^2-2\right)}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{-6x}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

$$Para\ x<0\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow \underline{Crecimiento:\ (-\infty,\ -1)\cup(-1,\ 0)}.$$

$$Para\ x>0\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow \underline{Decrecimiento:\ (0,\ 1)\cup(1,\ +\infty)}.$$

$b)$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto cuando es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto. Esta condición necesaria no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; se es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x)=\frac{-6\cdot\left(x^2-1\right)^2-6x\cdot\left[2\cdot\left(x^2-1\right)\cdot 2x\right]}{\left(x^2-1\right)^4}=\frac{-6\cdot\left(x^2-1\right)-24x^2}{\left(x^2-1\right)^3}=\frac{-6x^2+6-24x^2}{\left(x^2-1\right)^3}=\frac{6-30x^2}{\left(x^2-1\right)^3}=$$

$$=\frac{6\left(1-5x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^3}.$$

$f''(0) = \frac{6}{-1} = -6 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 0.$

$f(0) = \frac{0+2}{0-1} = -2 \Rightarrow \underline{Máximo: A(0, -2)}.$

Asíntotas horizontales: son de la forma y = k y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$k = f(x) = \frac{x^2+2}{x^2-1} = 1 \Rightarrow \underline{Asíntota\ horizontal: y = 1}.$

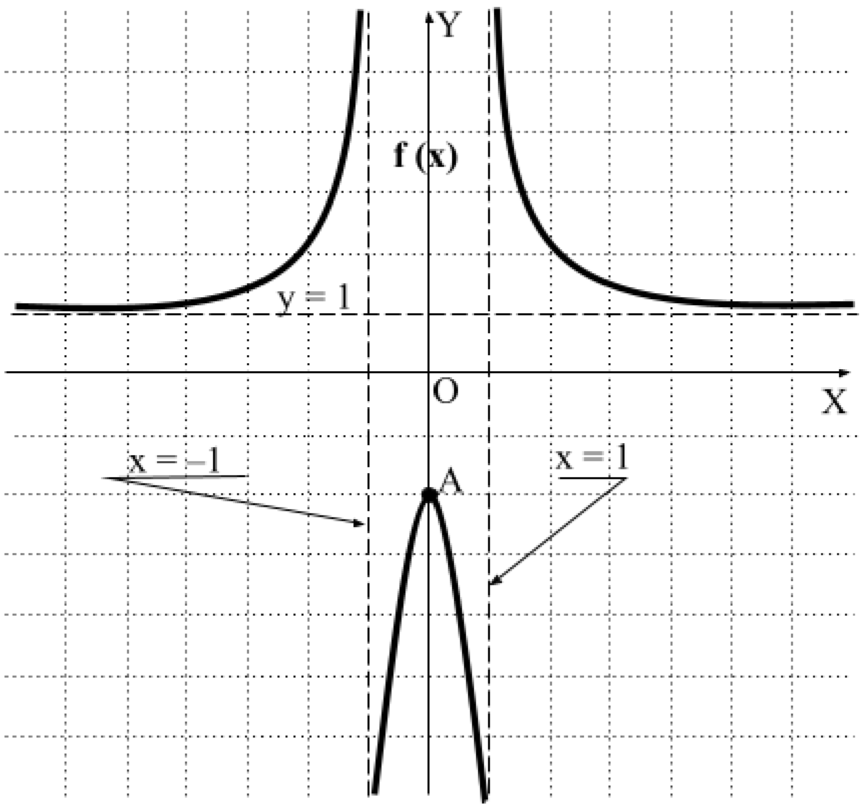
Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{Asíntotas\ verticales: x = -1,\ x = 1}.$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

$c)$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



****

3º) Considere la recta $r\equiv\{x + y + z = -2 \quad x - 2y = 4$.

a) Determine unas ecuaciones paramétricas de r.

b) Calcule el plano ortogonal a r que pasa por el punto P (2, 4, 0).

c) Calcule la distancia entre P y r.

----

a)

$r\equiv\{x + y + z = -2 \quad x - 2y = 4 \quad \Rightarrow y = \lambda;\ x = 4 + 2\lambda;\ z = -2 - 4 - 2\lambda - \lambda =$
.

$$\underline{r\equiv\{x = 4 + 2\lambda \quad y = \lambda \quad z = -6 - 3\lambda}.$$

b)

El vector director de r es $\vec{v_r} = (2,\ 1,\ -3)$.

El haz de planos normales a r tiene por ecuación $\beta\equiv 2x + y - 3z + D = 0$.

El plano π pedido pertenece al haz β y contiene al punto P(2, 4, 0):

$\beta\equiv 2x + y - 3z + D = 0 \quad P(2,\ 4,\ 0)\ \}\Rightarrow 2\cdot 2 + 4 - 3\cdot 0 + D = 0;\ \ 8 +$
.

$$\underline{\pi\equiv 2x + y - 3z - 8 = 0}.$$

c)

El punto Q de intersección de la recta r con el plano π es la solución del sistema que forman:

$\pi\equiv 2x + y - 3z - 8 = 0 \ r\equiv\{x = 4 + 2\lambda \quad y = \lambda \quad z = -6 - 3\lambda \quad \}\Rightarrow 2(4$

$8 + 8\lambda + \lambda + 18 + 9\lambda - 8 = 0;\ 18\lambda + 18 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow Q(2,\ -1,\ -3)$.

Por ser $r\perp\pi$, la distancia entre P(2, 4, 0) y r es equivalente a $\overline{PQ}$:

$$d(P,\ r) = \overline{PQ} = \sqrt{(2-2)^2 + (-1-4)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{25 + 9} = \underline{\sqrt{34}\,u}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN

JUNIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cuatro ejercicios de la misma en el orden que desee.
2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de calculadoras no programables (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).
CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

1º) Dada la matriz $A = (m + 2\ 0\ 0\ \ -3\ m + 1\ 1\ 1\ 0\ m - 1\ )$, se pide:

a) Hallar los valores de m para que la matriz A^{10} tenga inversa.

b) Para m = 0, calcular, si es posible, la matriz inversa de A.

----

a)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero, por lo cual, para que A^{10} tenga inversa es necesario que $\left|A^{10}\right| = 0$.

$$\left(A^{10}\right)^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^{10}}{\left|A^{10}\right|} = \frac{Adj.\ de\ A^{10}}{(|A|)^{2}} \Rightarrow (|A|)^{2} \neq 0 \Rightarrow \underline{|A| \neq 0}.$$

$|A| = |m + 2\ 0\ 0\ \ -3\ m + 1\ 1\ 1\ 0\ m - 1\ | = (m + 2)(m + 1)(m - 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow m_1 = -2,\ m_2 = -1,\ m_3 = 1.$

$\underline{A\ es\ invertible\ \forall m \in R - \{-2, -1, 1\}}.$

$b)$

Para m = 0 es $A = (2\ 0\ 0\ -3\ 1\ 1\ 1\ 0\ -1) \Rightarrow |A| = -2 \neq 0 \Rightarrow \underline{A\ es\ invertible}.$

$$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1) \Rightarrow \left\{F_1 \leftrightarrow F_3\right\} \Rightarrow (0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow F_2 + 3F_1\ F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1\right\} \Rightarrow (0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 3\ 1\ 0\ -2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_3 \rightarrow \frac{1}{2}F_3\right\}\left(0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 3\ \frac{1}{2}\ 0\ -1\right) \Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow F_1 + F_3\ F_2 \rightarrow F_2 + 2F_3\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ \frac{1}{2}\ 0\ -1\right) \Rightarrow \underline{A^{-1} = \left(\frac{1}{2}\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ \frac{1}{2}\ 0\ -1\right)}.$$

****

2º) $a)$ Calcular la recta s que corta perpendicularmente al eje OZ y que pasa por el punto $P(1,\ 2,\ 3)$.

$b)$ Estudiar, en función del parámetro real a, la posición relativa de la recta $r\equiv\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi\equiv x + y + az = 1$.

$a)$

El haz de planos α perpendiculares al eje OZ tiene a $\vec{n} = (0,\ 0,\ 1)$ como vector normal. La expresión general del haz es $\alpha\equiv z + D = 0$.

El plano β∈α que contiene al punto $P(1,\ 2,\ 3)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\equiv z + D = 0 \\ P(1,\ 2,\ 3) \end{array}\right\} \Rightarrow 3 + D = 0 \Rightarrow D = -3 \Rightarrow \beta\equiv z - 3 = 0.$$

La recta OZ tiene por expresión: $OZ\equiv\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

El punto de corte de la recta OZ y el plano β es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{l} \beta\equiv z - 3 = 0 \\ OZ\equiv\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow Q(0,\ 0,\ 3).$$

Los puntos Q y P determinan el vector $\overrightarrow{QP} = [P - Q] = (1,\ 2,\ 0)$.

La recta pedida s es la que pasa por los puntos P y Q, cuya expresión por unas ecuaciones paramétricas es $\underline{s\equiv\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3 \end{cases}}$.

$b)$

La recta r y el plano π determinan el sistema $\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, cuyas matrices de coeficientes y ampliada son $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Según los rangos de M y M' pueden presentarse los tres siguientes casos:

$Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow S.C.D. \Rightarrow$ La recta y el plano se cortan en un punto.

$Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow S.\ Incomp. \Rightarrow$ La recta y el plano son paralelos.

$Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow S.C.\ Ind. \Rightarrow$ La recta está contenida en el plano.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a.$$

$$Para\ a\neq 0 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow S.C.D.$$

$\underline{Para\ a \neq 0\ la\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ secantes\ (se\ cortan\ en\ un\ punto)}.$

$$Para\ a = 0 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow S.C.I.$$

$$\underline{Para\ a = 0\ la\ recta\ r\ está\ contenida\ en\ el\ plano\ \pi}.$$

****

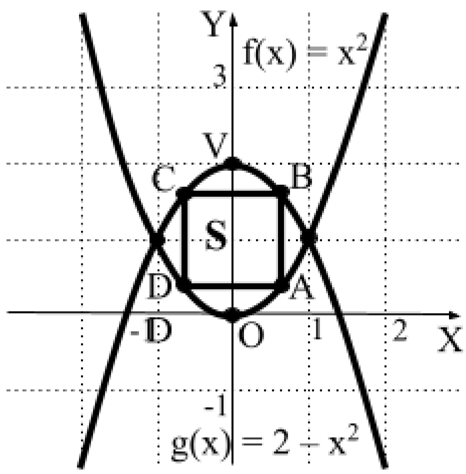
3º) Determinar los vértices del rectángulo de área máxima que tiene lados paralelos a los ejes de coordenadas y vértices en el borde del recinto delimitado por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2 - x^2$.

Los puntos de intersección de las curvas son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$x^2 = 2 - x^2;\ 2x^2 = 2;\ x^2 = 1 \Rightarrow \{x_1 = -1 \rightarrow A(-1,\ 1)\ x_2 = 1 \rightarrow B(1,\ 1)$$

.

El vértice de la parábola $f(x) = x^2$ es $O(0,\ 0)$ y es convexa $(\cup)$ y el vértice de la otra parábola $g(x) = 2 - x^2$ es $V(0,\ 2)$ y es cóncava $(\cap)$.



La representación gráfica de la situación se expresa en la figura adjunta.

Las coordenadas de los vértices del rectángulo son las siguientes: $A\left(x,\ x^2\right)$, $B\left(x,\ 2 - x^2\right)$, $C\left(-x,\ 2 - x^2\right)$ y $D\left(-x,\ x^2\right)$.

La superficie S del rectángulo es la siguiente:

$$S = \overline{DA} \cdot \overline{AB} = [x - (-x)] \cdot \left[2 - x^2 - x^2\right] = 2x \cdot \left(2 - 2x^2\right) = 4x - 4x^3.$$

La superficie es máxima cuando se anula su primera derivada:

$$S'(x) = 4 - 12x^2 \Rightarrow S'(x) = 0 \Rightarrow 4 - 12x^2 = 0;\ 1 - 3x^2 = 0;\ x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3},\ x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Los vértices del rectángulo pedidos son:

$$\underline{A\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{1}{3}\right),\ B\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{5}{3}\right),\ C\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{5}{3}\right)\ y\ D\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{1}{3}\right)}.$$

****

4º) a) Sea $g(x)$ una función continua y derivable en toda la recta real tal que $g(0) = 0$ y $g(2) = 2$. Probar que existe algún punto c del intervalo $(0, 2)$ tal que $g'(c) = 1$.

b) Hallar la función $f(x)$ que cumple que $f'(x) = xL\left(x^2 + 1\right)$ y $f(0) = 1$.

----

a)

El teorema del valor medio o de Lagrange dice que "si una función es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$".

Aplicado el teorema a la función $g(x)$ en el intervalo $(0, 2)$ con $g'(c) = 1$:

$$g'(c) = \frac{g(2)-g(0)}{2-0} = \frac{2-0}{2} = 1.$$

$\underline{Queda\ probado\ que\ \exists c \in (2, 0)\ tal\ que\ g'(c) = 1}$.

b)

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int \left[xL\left(x^2 + 1\right)\right]dx \Rightarrow \left\{u = L\left(x^2 + 1\right) \rightarrow du = \frac{2x \cdot dx}{x^2+1} \quad x \cdot dx = dv \rightarrow v =\right.$$

$$\Rightarrow L\left(x^2 + 1\right) \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{2x \cdot dx}{x^2+1} = \frac{x^2}{2} \cdot L\left(x^2 + 1\right) - \int \frac{x^3}{x^2+1} \cdot dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot L\left(x^2 + 1\right) - \int \left(x - \frac{x}{x^2+1}\right) \cdot dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot L\left(x^2 + 1\right) - \int x \cdot dx + \int \frac{x}{x^2+1} \cdot dx = \frac{x^2}{2} \cdot L\left(x^2 + 1\right) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x}{x^2+1} \cdot dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot L\left(x^2 + 1\right) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot L\left(x^2 + 1\right) + C = \frac{x^2+1}{2} \cdot L\left(x^2 + 1\right) - \frac{x^2}{2} + C.$$

$$f(0) = 1 \Rightarrow \frac{0+1}{2} \cdot L(0 + 1) - \frac{0}{2} + C = 1 \Rightarrow C = 1.$$

$$\underline{f(x) = \frac{x^2+1}{2} \cdot L\left(x^2 + 1\right) - \frac{x^2}{2} + 1}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + my = -1 \\ (1-2m)x - y = m \end{cases}$, se pide:

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro m.

b) Resolver el sistema en los casos en que la solución no sea única.

c) Calcular los valores de m para que x = -3, y = 2 sea solución.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 1-2m & -1 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 1 & m & -1 \\ 1-2m & -1 & m \end{pmatrix}$.

$|M| = \begin{vmatrix} 1 & m \\ 1-2m & -1 \end{vmatrix} = -1 - m(1-2m) = -1 - m + 2m^2 = 0;$

$2m^2 - m - 1 = 0;\ m = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow m_1 = 1,\ m_2 = -\frac{1}{2}.$

$\underline{Para \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$

$Para\ m = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 = -F_1\} \Rightarrow Rang\ M' = 1$

.

$\underline{Para\ m = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 1 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$

$Para\ m = -\frac{1}{2} \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow Ran$

.

$\underline{Para\ m = -\frac{1}{2} \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 1 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

b)

La solución no es única (compatible indeterminado) para m = 1.

El sistema resulta $\begin{cases} x + y = -1 \\ -x - y = 1 \end{cases}$, equivalente a $x + y = -1$.

$\underline{Solución: x = \lambda,\ y = -1 - \lambda,\ \forall \lambda \in R.}$

c)

$\{x + my = -1 \qquad (1 - 2m)x - y = m \Rightarrow \{x = -3 \; y = 2\} \Rightarrow -3 + 2m = -1$

$2m = 2 \quad -3 + 6m - 2 = m\} \; m = 1 \; 5m = 5\} \Rightarrow \underline{m = 1}.$

****

2º) a) ¿Puede haber dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de R^3 tales que $\vec{u}\cdot\vec{v} = -3$, $|\vec{u}| = 1$ y $|\vec{v}| = 2$?

b) Hallar a para que existan una recta t que pasa por el punto $P(1 + a,\ 1 - a,\ a)$, corte a la recta $r \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$ y sea paralela a la recta $s \equiv \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

----

a)

Por definición de producto escalar de dos vectores:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{-3}{1\cdot 2} = -3 \Rightarrow \alpha \notin R.$$

<u>*No hay dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de R^3 tales que $\vec{u}\cdot\vec{v} = -3$, $|\vec{u}| = 1$ y $|\vec{v}| = 2$.*</u>

b)

Un vector director de una recta dada por la intersección de dos planos es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan.

$$s \equiv \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \vec{n}_1 = (1,\ 0,\ 1) \\ \vec{n}_2 = (0,\ 1,\ 0) \end{Bmatrix} \Rightarrow \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

.

La recta t pedida, por ser paralela a s, tiene su mismo vector director.

La expresión de t por unas ecuaciones paramétricas es $t \equiv \begin{cases} x = 1 + a + \lambda \\ y = 1 - a \\ z = a - \lambda \end{cases}$.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 2 - \mu \\ y = \mu \\ z = 1 \end{cases}$.

Como las rectas r y t se cortan en un punto tiene que ser:

$$\left.\begin{matrix} 1 + a + \lambda = 2 - \mu \\ 1 - a = \mu \\ a - \lambda = 1 \end{matrix}\right\} \rightarrow \lambda = a - 1 \Rightarrow 1 + a + (a - 1) = 2 -$$

;

$1 + a + a - 1 = 2 - 1 + a;\ \ 2a = 1 + a \Rightarrow \underline{a = 1}.$

****

3º) Dada la función $f(x) = \frac{x}{Lx}$, determinar su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos. Esbozar su gráfica.

Teniendo en cuanta que la función logarítmica tiene como dominio $(0, \ +\infty)$ y que $L1 = 0$, el dominio de la función dada es: $\underline{D(f) \Rightarrow (0,\ 1) \cup (1,\ \ +\infty)}$.

Las asíntotas pueden ser horizontales, verticales y oblicuas.

Horizontales: Son los valores finitos de x para los cuales la función toma valores finitos, es decir, es el límite cuando $x \to \infty$ de la función.

$$k = f(x) \ = \frac{x}{Lx} \ = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{x}} \ = x \ = \infty.$$

La función dada no tiene asíntotas horizontales.

Verticales: Son los valores finitos de x que anulan el denominador.

$$\underline{Asíntota\ vertical: x = 1}.$$

Asíntotas oblicuas: Son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$m = \frac{f(x)}{x}$ y $n = [f(x) - mx]$, con m finito y $m \neq 0$.

$m = \frac{f(x)}{x} \ = \frac{x}{xLx} \ = \frac{1}{Lx} \ = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow$ **No tiene asíntotas oblicuas**.

Una función es creciente o decreciente en su dominio para los valores de x que haces que su primera derivada sea positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{1 \cdot Lx - x \cdot \frac{1}{x}}{L^2x} = \frac{Lx-1}{L^2x}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{Lx-1}{L^2x} = 0;\ \ Lx - 1 = 0;\ \ Lx = 1 \Rightarrow x = e.$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow x > e;\ \ f'(x) < 0 \Rightarrow x < e.$$

$$\underline{Decrecimiento:\ (0,\ 1) \cup (1,\ e)}.$$

$$\underline{Crecimiento:\ (e,\ \ +\infty)}.$$

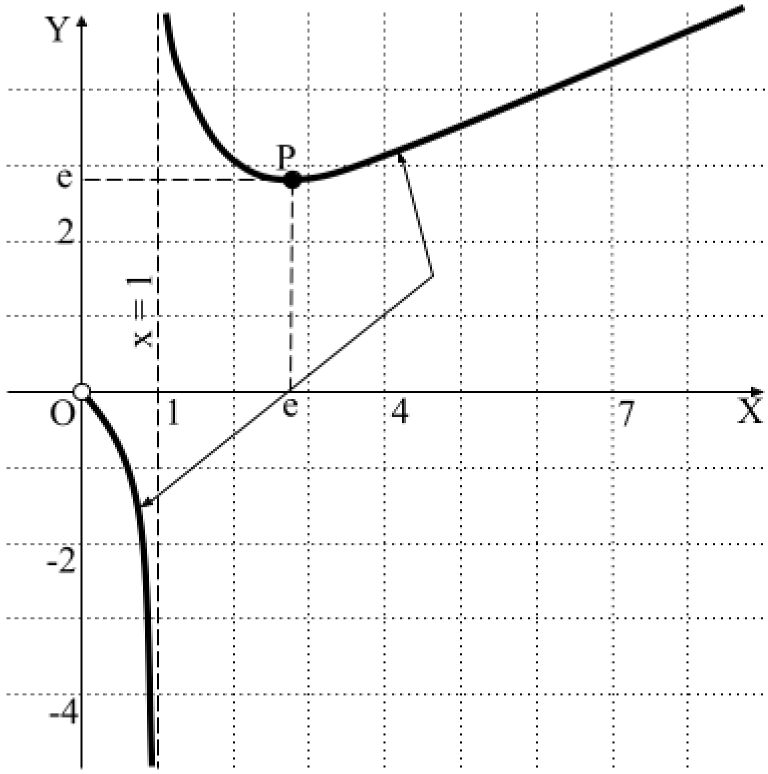
Para que una función tenga un extremo relativo (máximo o mínimo) es condición necesaria que se anule la primera derivada. Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera se trate de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot L^2 x - (Lx-1) \cdot \left(2 \cdot Lx \cdot \frac{1}{x}\right)}{L^4 x} = \frac{\frac{Lx}{x} - \frac{2}{x}(Lx-1)}{L^3 x} = \frac{Lx - 2Lx + 2}{x \cdot L^3 x} = \frac{2 - Lx}{x \cdot L^3 x}.$$

$$f''(e) = \frac{2-Le}{e \cdot L^3 e} = \frac{2-1}{e} = \frac{1}{e} > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = e.$$

$$f(e) = \frac{e}{Le} = \frac{e}{1} = e \Rightarrow \underline{Mínimo: P(e,\ e)}.$$

Con los datos obtenidos anteriormente puede hacerse la representación gráfica, aproximada, de la función, que es la siguiente:



****

4º) $a)$ Calcular $\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{L(1+x)}\right]$.

b) Calcular el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$ y la recta $x = e$.

$a)$

$$\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{L(1+x)}\right] = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty \Rightarrow Indet. \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{L(1+x)-x}{x\cdot L(1+x)} = \frac{0-0}{0\cdot 0} = \frac{0}{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}-1}{1\cdot L(1+x)+x\cdot\frac{1}{1+x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-1-x}{1+x}}{\frac{(1+x)L(1+x)+x}{1+x}} =$$

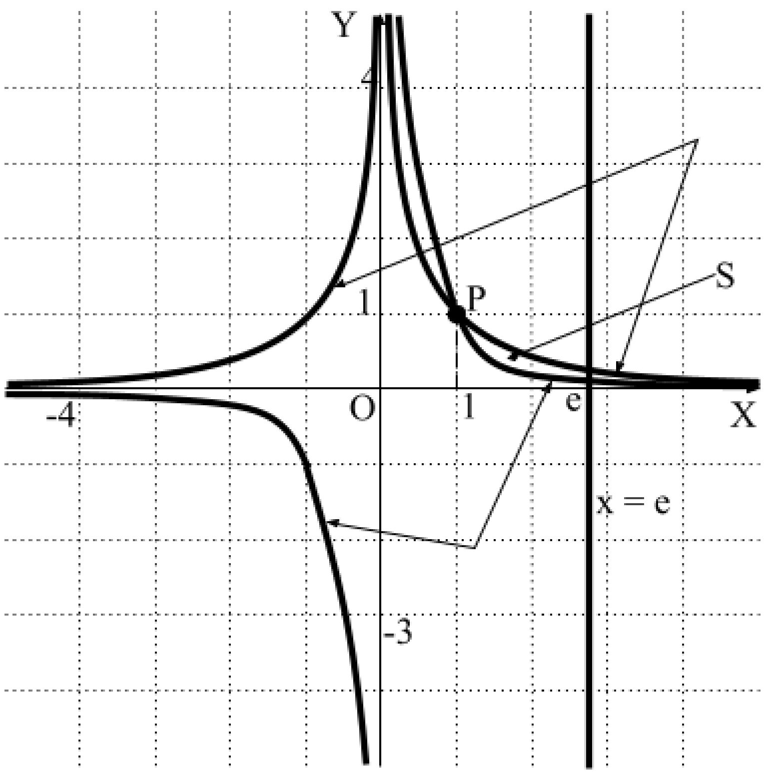
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x}{(1+x)L(1+x)+x} = \frac{0-0}{0\cdot 0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{-1}{1\cdot L(1+x)+(1+x)\cdot\frac{1}{1+x}+1} = \frac{-1}{0+1+1} = \underline{-\frac{1}{2}}.$$

b)

El punto de corte de las funciones se obtiene de la igualación de sus expresiones:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow P(1,\ 1).$$



De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = + \int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) \cdot dx = \left[Lx - \frac{x^{-2+1}}{-2+1} \right]_1^e = \left[Lx - \frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^e = \left[Lx + \frac{1}{x} \right]_1^e =$$

$$= \left(Le + \frac{1}{e} \right) - \left(L1 + \frac{1}{1} \right) = 1 + \frac{1}{e} - 0 - 1 = \underline{\frac{1}{e} \cong 0,37\ u^2}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN

SEPTIEMBRE – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cuatro ejercicios de la misma en el orden que desee.
2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de calculadoras no programables (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).
CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

1º) Considere el sistema $\{x + 2y + 3z = 4\ (a + 3)y = 0 \quad (a + 2)z = 1$.

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro α.

b) Resolverlo cuando sea posible.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = (1\ 2\ 3\ 0\ a + 3\ 0\ 0\ 0\ a + 2\ )\ y\ M^{'} = (1\ 2\ 3\ 0\ a + 3\ 0\ 0\ 0\ a + 2 \quad 4\ 0\ 1\ ).$

$Rang\ M \Rightarrow |1\ 2\ 3\ 0\ a + 3\ 0\ 0\ 0\ a + 2\ | = 0;\ \ (a + 3)(a + 2) = 0 \Rightarrow a_1 = - 3,\ a_2 = - 2$.

$\underline{Para\ \{a \neq - 3\ a \neq - 2\ \} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M^{'} = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

Para $a = - 3 \Rightarrow M^{'} = (1\ 2\ 3\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ - 1 \quad 4\ 0\ 1\ ) \Rightarrow Rang\ M^{'} = 2.$

$$\underline{Para\ a =- 3 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$$

Para $a =- 2 \Rightarrow M' = (1\ 2\ 3\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \quad 4\ 0\ 1) \Rightarrow Rang\ M' = 3.$

$$\underline{Para\ a =- 2 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow S.\ I.}$$

$b)$

Resolvemos en primer lugar para $a \neq -3$ y $a \neq -2$.

$x + 2y + 3z = 4\ (a + 3)y = 0 \quad (a + 2)z = 1 \quad \} \Rightarrow y = 0;\ z = \frac{1}{a+2};\ x =$

.

$$\underline{Solución:\ x = \frac{4a+5}{a+2},\ y = 0,\ z = \frac{1}{a+2}.}$$

$Para\ a = \ -3 \Rightarrow \{x + 2y + 3z = 4\ \ -z = 1 \Rightarrow y = \lambda \Rightarrow x = 4 - 2\lambda + 3 = 7$

.

$$\underline{Solución:\ x = 7 - 2\lambda,\ y = \lambda,\ z =- 1.}$$

****

2º) Sean las rectas $r\equiv x = y = z$ y $s\equiv\{x - y = 1 \;\; x - 3z = 1$.

a) Comprobar que las rectas r y s se cruzan.

b) Calcular la recta que corta perpendicularmente a las rectas r y s.

----

a)

Un punto y un vector director de la recta r son A(0, 0, 0) y $\vec{v_r} = (1,\ 1,\ 1)$.

La expresión de s por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$s\equiv\{x - y = 1 \;\; x - 3z = 1 \Rightarrow z = \lambda;\ x = 1 + 3\lambda;\ \ y = x - 1 = 3\lambda \Rightarrow r\equiv\{x = 1 + 3\lambda$
.

Un punto y un vector de s son B(1, 0, 0) y $\vec{v_s} = (3,\ 3,\ 1)$.

Los vectores $\vec{v_r} = (1,\ 1,\ 1)$ y $\vec{v_s} = (3,\ 3,\ 1)$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes, lo cual significa que las rectas r y s se cortan o se cruzan.

Se considera el vector $\vec{\varphi}$ que tiene como origen el punto A(0, 0, 0) de r y como extremo el punto B(1, 0, 0) de s: $\vec{\varphi} = (1,\ 0,\ 0)$.

Si el conjunto de vectores $\left\{\vec{v_r},\ \vec{v_s},\ \vec{\varphi}\right\}$ son coplanarios las rectas r y s se cortan y si no son coplanarios, se cruzan.

Según que el rango del conjunto de vectores $\left\{\vec{v_r},\ \vec{v_s},\ \vec{\varphi}\right\}$ sea menor o igual que tres los vectores que lo componen son linealmente dependientes o no, respectivamente.

$Rang\left\{\vec{v_r},\ \vec{v_s},\ \vec{\varphi}\right\} \Rightarrow |1\ 1\ 1\ 3\ 3\ 1\ 1\ 0\ 0\,| = |1\ 1\ 3\ 1\ | \neq 0 \Rightarrow \left\{\vec{v_r},\ \vec{v_s},\ \vec{\varphi}\right\} = 3.$

$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan,\ como\ teníamos\ que\ combrobar}.$

b)

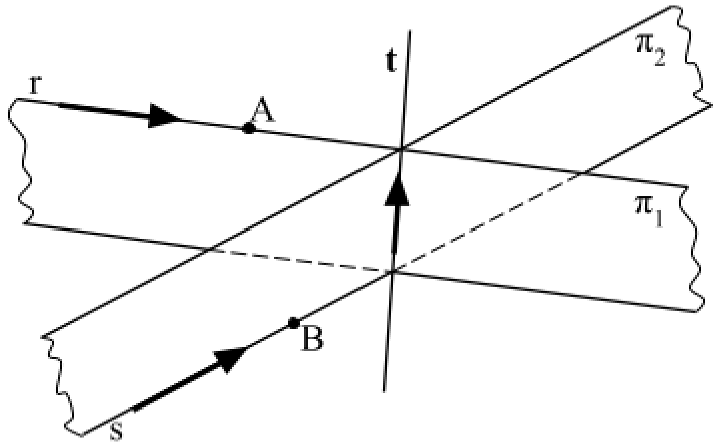
Para determinar la recta t, perpendicular común a las rectas r y s vamos a proceder del modo siguiente.

En primer lugar determinamos un vector $\vec{w}$ que sea perpendicular común a las dos rectas.

Un vector $\vec{w}$ perpendicular a los vectores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de estos vectores:

$\vec{w}' = \vec{v}_r \wedge \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = i + 3j + 3k - 3k - 3i - j = -2i + 2j \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{w} = (1,\ -1,\ 0)$.



Determinamos dos planos π_1 y π_2 de la forma siguiente:

$\pi_1\left(A;\ \vec{v}_r,\ \vec{w}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = y - z - z + x = 0 \Rightarrow \vec{\pi}_1 \equiv x + y - 2z =$

.

$\pi_2\left(B;\ \vec{v}_s,\ \vec{w}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = y - 3z - 3z + x - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{\pi}_2 \equiv x + y - 6z - 1 = 0$.

La recta t pedida es la intersección de los planos π_1 y π_2:

$$\underline{t \equiv \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x + y - 6z - 1 = 0 \end{cases}}.$$

****

3º) Considere la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$. Calcular dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos y puntos de inflexión.

El dominio de una función racional es el conjunto de los números reales, excepto aquellos valores reales de x que anulan el denominador. Como quiera que $x^2 + 1 \notin 0$ para cualquier valor real de x: $\underline{D(f) \Rightarrow R}$.

Asíntotas horizontales: son de la forma y = k y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1 \Rightarrow \underline{Asíntota\ horizontal: y = 1}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ verticales}.$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2+1) - (x^2-1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x \cdot (x^2+1-x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}.$$

$$Para\ x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: (-\infty, 0)}.$$

$$Para\ x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: (0, +\infty)}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto cuando es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto. Esta condición necesaria no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{4x}{(x^2+1)^2} = 0;\ \ 4x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; se es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x)=\frac{4\cdot(x^2+1)^2-4x\cdot[2\cdot(x^2+1)\cdot 2x]}{(x^2+1)^4}=\frac{4\cdot(x^2+1)-16x^2}{(x^2+1)^3}=\frac{4x^2+4-16x^2}{(x^2+1)^3}=\frac{4-12x^2}{(x^2+1)^3}=$$

$$=\frac{4(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}.$$

$$f''(0)=\frac{4}{1}=4>0\Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x=0.$$

$$f(0)=\frac{0-1}{0+1}=-1\Rightarrow \underline{Mínimo: A(0,\ -1)}.$$

Una función tiene un punto de inflexión para los valores que anulan la segunda derivada, siendo distinto de cero el valor de la tercera derivada para los valores que anulan la segunda.

$$f''(x)=0\Rightarrow\frac{4(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}=0;\ \ 1-3x^2=0;\ \ x^2=\frac{1}{3}\Rightarrow x_1=-\frac{\sqrt{3}}{3};\ \ x_2=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Siendo $x^2=\frac{1}{3}$ es $f_{\left(\mp\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}=\frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}+1}=\frac{1-3}{1+3}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}.$

Teniendo en cuenta la simetría de la función con respecto al eje Y:

$$\underline{Puntos\ de\ inflexión: B\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ -\frac{1}{2}\right)\ y\ C\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\ \frac{1}{2}\right)}.$$

****

4º) a) Enunciar e interpretar geométricamente el teorema de Rolle.

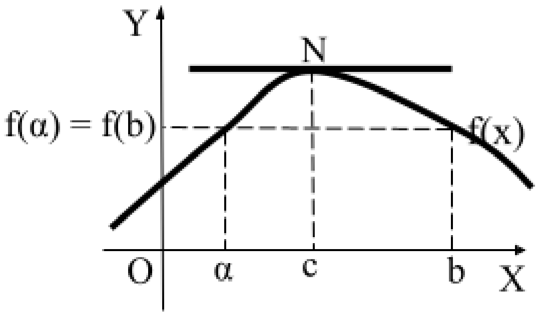
b) Hallar la primitiva de la función $f(x) = x^2 \cdot Lx$ cuya gráfica pasa por P (1, 0).

----

a)

El teorema de Rolle se puede enunciar del siguiente modo:

"Si f(x) es una función continua en el intervalo [α, b] y derivable en (α, b) y si se cumple que $f(a) = f(b)$, entonces, existe al menos un punto $c \in (\alpha, b)$ que cumple que $f'(c) = 0$".



La interpretación geométrica puede apreciarse fácilmente en la figura adjunta.

Considerando la función f(x), continua en [α, b] y derivable en (α, b) existe, por lo menos un punto N perteneciente al intervalo (α, b) en el que la recta tangente a la gráfica de f es horizontal.

b)

La primitiva $F(x)$ de $f(x) = x^2 \cdot Lx$ cuya gráfica pasa por P (1, 0) es:

$$F(x) = \int x^2 \cdot Lx \cdot dx \Rightarrow \left\{ Lx = u \rightarrow du = \frac{1}{x} \cdot dx \quad x^2 \cdot dx = dv \rightarrow v = \frac{x^3}{3} \right\} \Rightarrow Lx \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3}$$

$$= \frac{x^3}{3} \cdot Lx - \frac{1}{3} \cdot \int x^2 \cdot dx = \frac{x^3}{3} \cdot Lx - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + C = \frac{x^3}{9}(3Lx - 1) + C.$$

$$F(1) = 0 \Rightarrow \frac{1^3}{9}(3L1 - 1) + C = 0; \quad -\frac{1}{9} + C = 0 \Rightarrow \underline{C = \frac{1}{9}}.$$

$$\underline{F(x) = \frac{x^3}{9}(3Lx - 1) + \frac{1}{9}}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Consideremos la matriz $M = [a(a - 4)\ a - 4\ a - 4\ a(a - 4)\ ]$.

a) Calcular el rango de M en función del parámetro ɑ.

b) Para ɑ = 1, resolver la ecuación $M \cdot (x\ y\ ) = - 6 \cdot (x\ y\ )$.

----

a)

$|M| = |a(a - 4)\ a - 4\ a - 4\ a(a - 4)\ | = (a - 4)^2 |a\ 1\ 1\ a\ | = (a - 4)^2 \left(a^2 - 1\right) = 0$

$\Rightarrow a_1 = - 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 4.$

$\underline{Para\ a \in R - \{- 1,\ 1,\ 4\} \Rightarrow Rang\ M = 3}.$

Para $a = - 1 \Rightarrow M = (5\ - 5\ - 5\ 5\ )$. Para $a = 1 \Rightarrow M = (- 3\ - 3\ - 3\ - 3\ )$.

$\underline{Para\ a = - 1\ y\ a = 1 \Rightarrow Rang\ M = 1}.$

$Para\ a = 4 \Rightarrow M = (0\ 0\ 0\ 0\ ) \Rightarrow \underline{Para\ a = 4 \Rightarrow Rang\ M = 0}.$

b)

$(- 3\ - 3\ - 3\ - 3\ ) \cdot (x\ y\ ) = - 6 \cdot (x\ y\ );\ \ (1\ 1\ 1\ 1\ ) \cdot (x\ y\ ) = 2 \cdot (x\ y\ );\ \ (x + y\ x + y\ ) =$

$\Rightarrow x + y = 2x\ x + y = 2y\}\ x - y = 0\ x - y = 0\ \} \Rightarrow \underline{x = y}.$

****

2º) a) Determinar la ecuación del plano que es perpendicular al segmento de extremos A (0, -1, 3) y B (2, -1, 1) y que pasa por el punto medio de dicho segmento.

b) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los cortes de los ejes coordenados con el plano $\pi \equiv 2x + y + 2z - 2 = 0$.

----

a)

Los puntos A y B determinan el vector $\overrightarrow{AB} = [B - A] = (-2, 0, 2)$.

Un vector normal al plano α pedido es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{AB} = (-2, 0, 2)$, por ejemplo: $\overrightarrow{n} = (1, 0, -1)$.

El punto medio del segmento de extremos A y B es M(1, -1, 2).

La expresión general del plano pedido es $\alpha \equiv x - z + D = 0$. Como el plano α contiene al punto M, debe satisfacer su ecuación:

$$\alpha \equiv x - z + D = 0 \; M(1, -1, 2) \; \} \Rightarrow 1 - 2 + D = 0; \; D = 1.$$

$$\underline{\alpha \equiv x - z + 1 = 0}.$$

b)

Los puntos de corte del plano $\pi \equiv 2x + y + 2z - 2 = 0$ con los ejes coordenados son los siguientes:

$$\pi \equiv 2x + y + 2z - 2 = 0 \; Eje\ X \to \{y = 0, z = 0\} \; \} \to 2x - 2 = 0; x = 1 \Rightarrow A(1, 0$$

.

$$\pi \equiv 2x + y + 2z - 2 = 0 \; Eje\ Y \to \{x = 0, z = 0\} \; \} \to y - 2 = 0; y = 2 \Rightarrow B(0, 2,$$

.

$$\pi \equiv 2x + y + 2z - 2 = 0 \; Eje\ Z \to \{x = 0, y = 0\} \; \} \to 2z - 2 = 0; z = 1 \Rightarrow C(0, 0$$

.

Los puntos A, B y C determinan los vectores:

$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(0, 2, 0) - (1, 0, 0)] = (-1, 2, 0)$.

$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(0, 0, 1) - (1, 0, 0)] = (-1, 0, 1)$.

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan los puntos:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\cdot\|i\, j\, k \;\; - 1\; 2\; 0 \;\; - 1\; 0\; 1\;\| = \frac{1}{2}\cdot|2i + 2k + j| =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{4 + 4 + 1} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{9} = \underline{\frac{3}{2}\, u^2}.$$

****

3º) Consideremos la función definida a trozos $f(x) = \{ax^2 + bx + c, \;\; si\, x \leq 2\; L(x - 1), \;\; si\, x > 2$. Hallar los valores de α, b y c para que f(x) sea continua en toda la recta real y tenga un extremo relativo en el punto P (1, -1).

Por pasar por P(1, -1) es $f(1) = -1$:

$a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = -1; a + b + c = -1.$ (1)

Por tener un extremo relativo en P(1, -1) es $f'(1) = 0$:

$f'(x) = \{2ax + b, \;\; si\, x \leq 2 \;\; \frac{1}{x-1}, \;\; si\, x > 2 \;\; \Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow 2a + b = 0.$
(2)

Para que la función f(x) sea continua en toda la recta real tiene que cumplirse que, en el punto crítico para x = 2, los límites laterales tienen que ser iguales e igual al valor de la función en ese punto:

$f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right) = 4a + 2b + c = f(2)\; f(x) = [L(x - 1)] = L1 = 0$

$\Rightarrow f(x) = f(2) = f(x) \Rightarrow 4a + 2b + c = 0.$ (3)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1), (2) y (3):

$a + b + c = -1 \;\; 2a + b = 0 \;\; 4a + 2b + c = 0\, \} \rightarrow b = -2a \rightarrow a - 2a + c$

$a - c = 1 \;\; 8a + c = 0\, \}; 9a = 1; \underline{a = \frac{1}{9}};\; b = -2a \Rightarrow \underline{b = -\frac{2}{9}};\; c = a - 1 = \frac{1}{9} - 1 =$
.

****

4º) $a)$ Calcular $(\cos cos\, x)^{\frac{1}{x^2}}$.

$b)$ Calcular el área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones sen x y cos x y las rectas x = 0 y $x = \frac{\pi}{2}$.

$a)$

$$(\cos cos\, x)^{\frac{1}{x^2}} = 1^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty} \Rightarrow Indet.$$

$A = (\cos cos\, x)^{\frac{1}{x^2}}$. Tomando logaritmo neperiano en los dos términos:

$LA = L(\cos cos\, x)^{\frac{1}{x^2}}$. Teniendo en cuenta que el logaritmo de un límite es igual al límite del logaritmo:

$$LA = \left[L(\cos cos\, x)^{\frac{1}{x^2}}\right] = \left(\frac{1}{x^2} \cdot L \cos cos\, x\right) = \frac{L\cos cos\, x}{x^2} = \frac{L1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \frac{\frac{-sen\, x}{\cos cos\, x}}{2x} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{sen\, x}{x \cdot \cos cos\, x} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

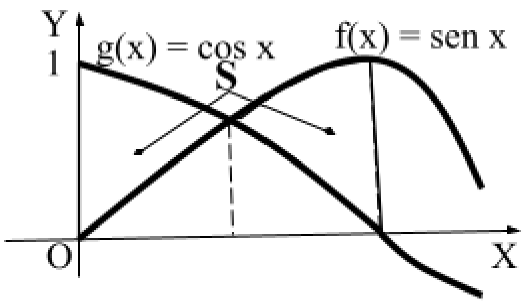
$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot \frac{cos\, x}{1 \cdot \cos cos\, x - x \cdot sen\, x} = -\frac{1}{2} \cdot = -\frac{1}{2}.$$

$$LA = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

$$\underline{(\cos cos\, x)^{\frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{e}}{e}.}$$

$b)$

El punto de corte de las funciones en el intervalo considerado se obtiene de la igualación de sus expresiones:



$$sen\, x = \cos cos\, x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}.$$

De la observación de la figura se deduce el área a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\cos cos\, x - sen\, x] \cdot dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} [x - cos\, x] \cdot dx =$$

$$= [sen\, x\, +\, \cos cos\, x\,]_0^{\frac{\pi}{4}} + [-\, cos\, x\, -\, sen\, x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = [sen\, x\, +\, \cos cos\, x\,]_0^{\frac{\pi}{4}} + [cos\, x\, +\, sen$$

$$= \left(sen\, \frac{\pi}{4} + \cos cos\, \frac{\pi}{4}\right) - (sen\, 0\, +\, \cos cos\, 0\,) + \left(sen\, \frac{\pi}{4} + \cos cos\, \frac{\pi}{4}\right) - \left(cos\, \frac{\pi}{2} + \right.$$

$$= 2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 0 - 1 - 0 - 1 = 2\sqrt{2} - 2 = \underline{2\left(\sqrt{2} - 1\right) u^2} \cong \underline{0,83\, u^2}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE CASTILLA-LA MANCHA

JUNIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puede utilizar cualquier tipo de calculadora.

OPCIÓN A

1º) Dada la función $f(x) = e^{sen\, x} + x^2 + ax + b,\ a,\ b \in R$:

a) Determina los parámetros $a,\ b \in R$ sabiendo que la gráfica de $f(x)$ pasa por el punto $P(0,\ 2)$ y que en dicho punto tiene un extremo relativo.

b) Para los valores de los parámetros encontrados, estudia si dicho extremo relativo es un máximo o un mínimo.

----

a)

Por pasar por $P(0,\ 2)$: $f(0) = 2 \Rightarrow e^0 + 0 + 0 + b = 2;\ 1 + b = 2 \Rightarrow \underline{b = 1}$.

$f'(x) = \cos cos\, x \cdot e^{sen\, x} + 2x + a$.

Por tener un extremo relativo en $P(0,\ 2)$: $f'(0) = 0$.

$f'(0) = 0 \Rightarrow \cos cos\, 0 \cdot e^{sen\, 0} + 0 + a = 0;\ 1 \cdot 1 + a = 0 \Rightarrow \underline{a = -1}$.

b)

La función resulta: $f(x) = e^{sen\, x} + x^2 - x + 1$.

$f'(x) = \cos cos\, x \cdot e^{sen\, x} + 2x - 1$.

$f''(x) = -\ sen\, x \cdot e^{sen\, x} +\ \cos cos\, x \cdot \cos cos\, x \cdot e^{sen\, x} +\ 2.$

$f''(0) = -\ sen\, 0 \cdot e^{sen\, 0} +\ 0 \cdot e^{sen\, 0} +\ 2\ =\ 0\ +\ 1\ +\ 2\ =\ 3\ >\ 0.$

$\underline{La\ función\ f(x)\ tiene\ un\ mínimo\ relativo\ en\ el\ punto\ P(0,\ 2)}.$

****

2º) Dada la función $g(x) = \begin{cases} 2x + 4 & si \ -2 \leq x < 0 \\ (2x - 2)^2 & si \ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$:

$a)$ Esboza la región encerrada entra la gráfica de $g(x)$ y el eje de abscisas.

$b)$ Calcula el área de la región anterior.

$a)$

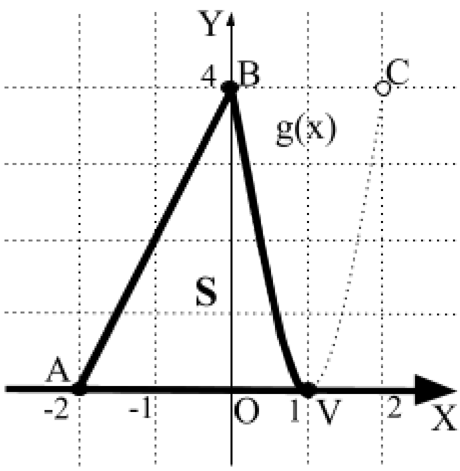
Siendo la recta $r \equiv y = 2x + 4$, dos de sus puntos son $A(-2,\ 0)$ y $B(0,\ 4)$.

Considerando la función $g(x) = (2x - 2)^2 = 4x^2 - 8x + 4$, que es una parábola convexa (∪) cuyo vértice es el siguiente:

$$g'(x) = 8x - 8 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow V(1,\ 0).$$

Dos puntos de $g(x)$ son $B(0,\ 4)$ y $C(2,\ 4)$.

La representación gráfica de la función es, aproximadamente, la indicada en la figura adjunta.



$b)$

$$S = \int_{-2}^{0} (2x + 4) \cdot dx + \int_{0}^{1} (2x - 2)^2 \cdot dx = M + M. \quad (*)$$

$$M = \int_{-2}^{0} (2x + 4) \cdot dx = \left[\frac{2x^2}{2} + 4x\right]_{-2}^{0} = \left[x^2 + 4x\right]_{-2}^{0} =$$

$$= 0 - \left[(-2)^2 + 4 \cdot (-2)\right] = -(4 - 8) = -(-4) = 4\,u^2.$$

$$N = \int_{0}^{1} (2x - 2)^2 \cdot dx \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \rightarrow t = 0 \\ x = 0 \rightarrow t = -2 \end{cases} \Rightarrow \int_{-2}^{0} t^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-2}^{0} = \frac{1}{2} \cdot \left[0 - \frac{(-2)^3}{3} \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} = \frac{4}{3} \, u^2.$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de M y N:

$S = 4 + \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$.

$$\underline{S = \frac{16}{3} \, u^2.}$$

****

3º) a) Despeja X en la ecuación matricial $X \cdot A + B = X$, donde A, B y X son matrices cuadradas de orden 3.

b) Calcula X, siendo $A = (0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 2\ 1\ 0\ )$ y $B = (0\ 3\ \ -\ 2\ \ -\ 1\ 4\ 0\ 1\ 2\ 1\ )$.

----

a)

$$X \cdot A + B = X;\ \ B = X - X \cdot A = X \cdot I - X \cdot A = X \cdot (I - A) = X \cdot M.$$

Multiplicando los dos términos por la izquierda por la inversa de $M = I - A$:

$$B \cdot M^{-1} = X \cdot M \cdot M^{-1} = X \cdot I \Rightarrow \underline{X = B \cdot (I - A)^{-1}}.$$

b)

$M = I - A = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) - (0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 2\ 1\ 0\ ) = (1\ 0\ 0\ \ -\ 1\ 1\ 0\ \ -\ 2\ \ -\ 1\ 1\ )$
.

$$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow F_2 + F_1\ F_3 \rightarrow F_3 + 2F_1\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 2\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_3 \rightarrow F_3 + F_2\right\} \Rightarrow (1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 3\ 1\ 1\ ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M^{-1} = (1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 3\ 1\ 1\ ).$$

$X = B \cdot M^{-1} = (0\ 3\ \ -\ 2\ \ -\ 1\ 4\ 0\ 1\ 2\ 1\ ) \cdot (1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 3\ 1\ 1\ ) = (-\ 3\ 1\ \ -\ 2\ 3\ 4\ 0\ 6$
.

$$\underline{X = (-\ 3\ 1\ \ -\ 2\ 3\ 4\ 0\ 6\ 3\ 1\ )}.$$

****

4º) $a)$ Calcula la distancia del punto $P(-\ 1,\ 2,\ 0)$ a la recta $r \equiv \{-\ x\ +\ y\ +\ 2z\ =\ 0\ y\ +\ z\ =\ 1$.

$b)$ Calcula el punto simétrico de P respecto de r.

$a)$

La distancia de un punto a una recta puede determinarse teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que forman dos vectores es el módulo de su producto vectorial y, de forma geométrica, es el producto de la base por la altura.

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

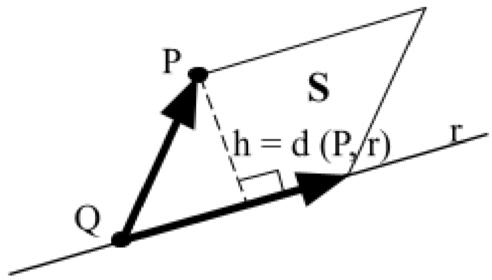
$r \equiv \{-\ x\ +\ y\ +\ 2z\ =\ 0\ y\ +\ z\ =\ 1 \quad \Rightarrow z\ =\ \lambda;\ y\ =\ 1\ -\ \lambda;\ \ x\ =\ y\ +\ 2z\ =\ 1\ -\ \lambda\ +$

$=\ 1\ +\ \lambda\ =\ x \Rightarrow r \equiv \{x\ =\ 1\ +\ \lambda\ y\ =\ 1\ -\ \lambda\ z\ =\ \lambda$.

Un punto y un vector de r son $Q(1,\ 1,\ 0)\ y\ \vec{v}_r\ =\ (1,\ \ -\ 1,\ 1)$.

$\vec{QP}\ =\ [P\ -\ Q] = [(-\ 1,\ 2,\ 0) - (1,\ 1,\ 0)] = (-\ 2,\ 1,\ 0)$.

Para una mejor comprensión del proceso se hace un dibujo de la situación.



$$S\ =\ \left|\vec{v}_r \wedge \vec{QP}\right|\ S\ =\ \left|\vec{v}_r\right| \cdot h\ \} \Rightarrow \left|\vec{v}_r \wedge \vec{QP}\right| = \left|\vec{v}_r\right| \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h\ =\ d(P, r)\ =\frac{\left|\vec{v}_r \wedge \vec{QP}\right|}{\left|\vec{v}_r\right|}.$$

Aplicando la fórmula al punto P y a la recta r:

$$d(P, r) = \frac{\left|\vec{v}_r \wedge \vec{QP}\right|}{\left|\vec{v}_r\right|} = \frac{\|i\ j\ k\ -2\ 1\ 0\ 1\ -1\ 1\ \|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{|i+2k-k+2j|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|i+2j+k|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+4+1}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \underline{\sqrt{2}\ u\ =\ d(P, r)}.$$

Otra forma de resolver este ejercicio es la siguiente:

El haz de planos ⊥ a r tiene por ecuación: $\alpha \equiv x - y + z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz α, el plano π que contiene al punto $P(-1, 2, 0)$ es el que satisface su ecuación:

$\alpha \equiv x - y + z + D = 0$ $\quad P(-1, 2, 0) \} \Rightarrow -1 - 2 + 0 + D = 0; \ -3 +$
$\Rightarrow$

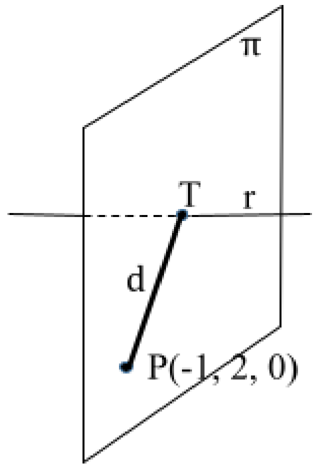
$\Rightarrow \ \pi \equiv x - y + z + 3 = 0.$

El punto T, intersección de la recta r con el plano π es la solución del sistema que forman:

$\pi \equiv x - y + z + 3 = 0 \ \ r \equiv \{ -x + y + 2z = 0 \ y + z = 1 \quad \} \quad x - y + z$

$y = 1 - z = 1 + 1; \ y = 2; \ x - y + z = -3; \ \ x - 2 - 1 = -3 \Rightarrow x = 0.$

El punto de corte es $T(0, 2, -1)$.



La distancia pedida del punto P a la recta r es equivalente a la distancia entre los puntos P y T, o sea el módulo de $\left|\overrightarrow{TP}\right|$:

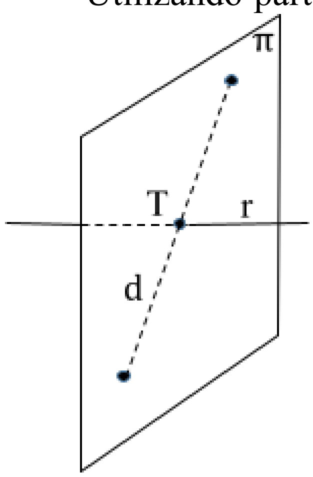
$$d(P, r) = \left|\overrightarrow{TP}\right| = \sqrt{(-1-0)^2 + (2-2)^2 + (0+1)^2} =$$

$$= \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

$$\underline{d(P, r) = \sqrt{2}\, unidades}.$$

$b)$

Utilizando parte del apartado anterior se puede obtener el punto P' simétrico de P con respecto a r de la forma siguiente:



Tiene que cumplirse que $\overrightarrow{PT} = \overrightarrow{TP'}$: $[T - P] = \left[P' - T\right]$;

$[(0, 2, -1) - (-1, 2, 0)] = [(x, y, z) - (0, 2, -1)];$

$(1,\ 0,\ \ -\ 1) = (x,\ y\ -\ 2,\ z\ +\ 1) \Rightarrow \{x\ =\ 1$ $\qquad y\ -\ 2\ =\ 0 \rightarrow y\ =\ 2 \quad z\ +$

$\Rightarrow \underline{P'(1,\ 2,\ \ -\ 2)}.$

****

OPCIÓN B

1º) Calcula el dominio y las asíntotas de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x}-x}{x-2},\ g(x) = \frac{x^3}{x^2-4x+4}.$$

Para el dominio de $f(x) = \frac{\sqrt{2x}-x}{x-2}$ debe tenerse en cuenta que no existe la raíz cuadrada de números negativos y que la función no existe para los valores de x que anulan el denominador, siendo distinto de cero el numerador.

Como quiera que para x = 2 la función resulta indeterminada, se debe redefinir la función para x = 2 con objeto de resolver la indeterminación.

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x}-x}{x-2} = \frac{\sqrt{4}-2}{2-2} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \frac{(\sqrt{2x}-x)(\sqrt{2x}+x)}{(x-2)(\sqrt{2x}+x)} =$$

$$\frac{2x-x^2}{(x-2)(\sqrt{2x}+x)}\ \frac{-x(x-2)}{(x-2)(\sqrt{2x}+x)}\frac{-x}{\sqrt{2x}+x} = \frac{-2}{2+2} =- \frac{1}{2}.$$

La función $f(x)$ puede redefinirse como: $f(x) = \{\frac{\sqrt{2x}-x}{x-2}\ si\ \ x \neq 2\ \ -\frac{1}{2}\ \ si\ \ x = 2$.

El dominio de $f(x)$ es el siguiente: $\underline{D(f) \Rightarrow [0,\ + \infty)}$.

Las asíntotas pueden ser horizontales, verticales y oblicuas.

Horizontales: Son los valores finitos de x para los cuales la función toma valores finitos, es decir, es el límite cuando $x \to \infty$ de la función.

$$y = k = f(x) = \frac{\sqrt{2x}-x}{x-2} =- 1 \Rightarrow \underline{Asíntota\ horizontal: y =- 1}.$$

Verticales: Son los valores finitos de x que anulan el denominador.

$$\underline{La\ función\ no\ tiene\ asíntotas\ verticales}.$$

Oblicuas: Son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$m = \frac{f(x)}{x}$ y $n = [f(x) - mx]$, con m finito y $m \neq 0$.

$$m = \frac{f(x)}{x} = \frac{x}{xLx} = \frac{1}{Lx} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$\underline{La\ función\ no\ tiene\ asíntotas\ oblicuas}.$$

(Además, las asíntotas oblicuas son incompatibles con las horizontales)

El dominio de una función racional es R, excepto los valores reales que anulan el denominador. El dominio de $g(x) = \frac{x^3}{x^2-4x+4}$ es el siguiente:

$x^2 - 4x + 4 = 0;\ (x - 2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2.$

$$\underline{D(g) \Rightarrow R - \{2\}}.$$

Las asíntotas de $g(x)$ son las siguientes:

Horizontales:

$$y = k = g(x) = \frac{x^3}{x^2-4x+4} = \infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ síntotas\ horizontales}.$$

Verticales: Son los valores finitos de x que anulan el denominador.

$$\underline{Asíntota\ vertical:\ x = 2}.$$

Oblicuas: Son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$m = \frac{g(x)}{x}$ y $n = [f(x) - mx]$, con m finito y $m \neq 0$.

$$m = \frac{g(x)}{x} = \frac{x^3}{x(x^2-4x+4)} = \frac{x^3}{x^3-4x^2+4x} = 1.$$

$$n = [g(x) - mx] = \left(\frac{x^3}{x^2-4x+4} - 1 \cdot x\right) = \frac{x^3-x^3+4x^2-4x}{x^2-4x+4} = 4.$$

$$\underline{Asíntota\ oblicua:\ y = x + 4}.$$

****

2º) Dada la función $f(x) = (x + 1)\cdot e^{2x}$, se pide:

a) Calcula los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de f(x).

b) Encuentra una primitiva de la función f(x) que pase por el origen de coordenadas.

----

a)

Una función es cóncava (∩) o convexa (∪) cuando su segunda derivada es negativa o positiva, respectivamente.

$$f'(x) = 1\cdot e^{2x} + (x + 1)\cdot 2\cdot e^{2x} = e^{2x}(1 + 2x + 2) = e^{2x}(2x + 3).$$

$$f''(x) = 2\cdot e^{2x}\cdot(2x + 3) + e^{2x}\cdot 2 = 2e^{2x}(2x + 3 + 1) = 4e^{2x}(x + 2).$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 4e^{2x}(x + 2) = 0 \Rightarrow x = -2.$$

Teniendo en cuenta que el dominio de la función es R, los periodos de concavidad y convexidad son los siguientes:

$$\underline{Concavidad\ (\cap) \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2)}.$$

$$\underline{Convexidad\ (\cup) \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow x \in (-2, +\infty)}.$$

Una función tiene un punto de inflexión para los valores de x que anulan la 2ª derivada, siendo distinto de cero la 3ª derivada para los valores que anulan la segunda.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow f'''(-2) \neq 0 \Rightarrow P.\ I.\ para\ x = -2.$$

$$f(-2) = (-2 + 1)\cdot e^{-4} = \frac{-1}{e^4} \Rightarrow \underline{P.\ I. \Rightarrow A\left(-2, -\frac{1}{e^4}\right)}.$$

b)

$$F(x) = \int (x + 1)\cdot e^{2x}\cdot dx \Rightarrow \left\{x + 1 = u \rightarrow du = dx\ e^{2x}\cdot dx = dv \rightarrow v = \frac{1}{2}\cdot e^{2x}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x + 1)\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2x} - \int \frac{1}{2}\cdot e^{2x}\cdot dx = \frac{1}{2}(x + 1)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} = \frac{1}{4}e^{2x}(2x + 2 - 1) \Rightarrow$$

$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{4}e^{2x}(2x + 1).$

$$F(0) = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}e^{0}(0 + 1) = \frac{1}{4} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{4}e^{2x}(2x + 1) - \frac{1}{4}.$$

$$\underline{F(x) = \frac{1}{4}\left[e^{2x}(2x + 1) - 1\right]}.$$

****

3º) He pensado un número de tres cifras tal que la cifra de las decenas es la media aritmética de las otras dos. Además, si dicho número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, la diferencia es 198. Por último, las tres cifras de mi número suman 12.

a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales que recoja la información anterior y clasifícalo. Para ello, puede ser útil observar que el número cuya cifra de las centenas es x, la de las decenas y, y la de las unidades z, puede expresarse $100x + 10y + z$.

b) Determina, si el problema tiene solución, el número de tres cifras que he pensado.

----

a)

Sea el número (xyz) (no como producto).

Del enunciado del ejercicio se deduce el siguiente sistema de ecuaciones:

$y = \frac{x+z}{2} \quad (xyz) - (zyx) = 198 \, x + y + z = 12 \quad \} \; 2y = x + z$

$x - 2y + z = 0 \quad 100x + 10y + z - 100z - 10y - x = 19$

Finalmente, el sistema resultante es: $\underline{x - 2y + z = 0 \quad x - z = 2 \, x + y + z = 12 \, \}}$.

b)

$x - 2y + z = 0 \quad x - z = 2 \, x + y + z = 12 \, \} \rightarrow z = x - 2 \Rightarrow x - 2y + (x - 2) =$

$x - y = 1 \; 2x + y = 14 \, \} \Rightarrow 3x = 15; \;\; x = 5; \;\; z = 5 - 2; \;\; z = 3; \;\; 5 + y + 3 = 12;$

.

$\underline{El \; número \; pensado \; es \; el \; 543}.$

****

4º) Dados los puntos $A(1,\ \lambda+1,\ -1)$, $B(2,\ \lambda,\ 0)$ y $C(\lambda+2,\ 0,\ 1)$, se pide:

a) Estudia si existe algún valor del parámetro $\lambda \in R$ para que A, B y C estén alineados.

b) Para $\lambda=-1$, da la ecuación implícita del plano π que contiene a los puntos A, B y C.

----

a)

Los puntos $A(1,\ \lambda+1,\ -1)$, $B(2,\ \lambda,\ 0)$ y $C(\lambda+2,\ 0,\ 1)$ determinan los vectores:

$$\overrightarrow{AB}=[B-A]=[(2,\ \lambda,\ 0)-(1,\ \lambda+1,\ -1)]=(1,\ -1,\ 1).$$

$$\overrightarrow{AC}=[C-A]=[(\lambda+2,\ 0,\ 1)-(1,\ \lambda+1,\ -1)]=(\lambda+1,\ -\lambda-1,\ 2).$$

Los puntos A, B y C estarán alineados cuando los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ sean linealmente dependientes, o sea, cuando sus componentes sean proporcionales:

$$\frac{\lambda+1}{1}=\frac{-\lambda-1}{-1}=\frac{2}{1} \Rightarrow \lambda+1=2 \Rightarrow \lambda=1.$$

$\underline{Los\ puntos\ A,\ B\ y\ C\ están\ alineados\ para\ \lambda=1}.$

b)

Para $\lambda=-1$ los puntos son $A(1,\ 0,\ -1)$, $B(2,\ -1,\ 0)$ y $C(1,\ 0,\ 1)$, que determinan los vectores $\overrightarrow{AB}=(1,\ -1,\ 1)$ y $\overrightarrow{AC}=(0,\ 0,\ 2)$.

La ecuación implícita del plano π que contiene a los puntos A, B y C es:

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=0;\quad -2(x-1)-2y=0;$$

$(x-1)+y=0.$

$$\underline{\pi \equiv x+y-1=0}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE CASTILLA-LA MANCHA

SEPTIEMBRE – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puede utilizar cualquier tipo de calculadora.

OPCIÓN A

1º) Calcula los siguientes límites: $\frac{L(1+2x)}{x\cdot e^{sen\,x}}$. $(1+tg\,x)^{\frac{1}{x+sen\,x}}$.

Nota: tg x denota la tangente de x.

$$\frac{L(1+2x)}{x\cdot e^{sen\,x}} = \frac{L1}{0\cdot e^{0}} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \frac{\frac{2}{1+2x}}{1\cdot e^{sen\,x} + x\cdot \cos\cos x\cdot e^{sen\,x}} = \underline{2}\ .$$

$$(1+tg\,x)^{\frac{1}{x+sen\,x}} = 1^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty} \Rightarrow Indet.$$

$A = (1+tg\,x)^{\frac{1}{x+sen\,x}}$. Tomando logaritmo neperiano en los dos términos:

$LA = L(1+tg\,x)^{\frac{1}{x+sen\,x}}$. Teniendo en cuenta que el logaritmo de un límite es igual al límite del logaritmo:

$$LA = \left[L(1+tg\,x)^{\frac{1}{x+sen\,x}}\right] = \left[\frac{1}{x+sen\,x}\cdot L(1+tg\,x)\right] = \frac{L(1+tg\,x)}{x+sen\,x} =$$

$$= \frac{L1}{0+0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \frac{\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1+tg\,x}}{1+\cos\cos x} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x\cdot(1+tg\,x)}}{1+\cos\cos x} = \frac{\frac{1}{1\cdot(1+0)}}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

$$LA = \frac{1}{2} \Rightarrow A = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

$$\underline{(1+tg\,x)^{\frac{1}{x+sen\,x}} = \sqrt{e}.}$$

****

2º) a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa x = 2.

b) Esboza la región encerrada entre las gráficas de f(x), la recta calculada en el apartado anterior y el eje de ordenadas.

c) Calcula el área de la región anterior.

----

a)

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = 2x \Rightarrow m = f'(2) = 2 \cdot 2 = 4.$$

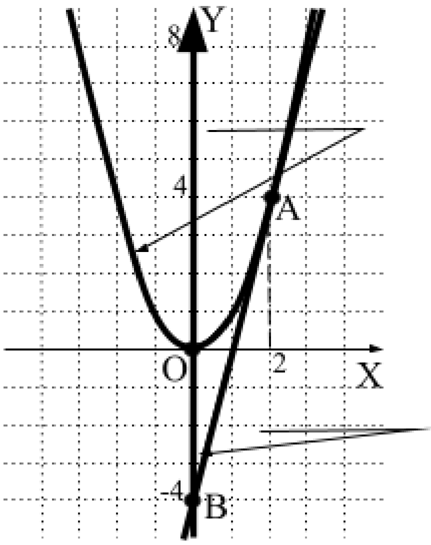
El punto de tangencia es el siguiente: $f(2) = 2^2 = 4 \Rightarrow P(2,\ 4)$.

La recta que pasa por un punto conocida la pendiente es $y - y_0 = m\left(x - x_0\right)$:

$$y - 4 = 4 \cdot (x - 2) = 4x - 8 \Rightarrow \underline{Recta\ tangente:\ t \equiv 4x - y - 4 = 0}.$$

b)

La representación gráfica de la situación, con bastante aproximación, es la figura adjunta.



c)

En el intervalo correspondiente al área a calcular, todas las ordenadas de la parábola son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la recta tangente.

El área a calcular es la siguiente:

$$S = \int_0^2 \left[x^2 - (4x - 4)\right] \cdot dx =$$

$$= \int_0^2 \left(x^2 - 4x + 4\right) \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 4x\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 8 + 8 - 0 = \underline{\frac{8}{3}\ u^2}.$$

****

3º) a) Enuncia el teorema de Rouché-Fröbenius.

b) Razona que el sistema de ecuaciones lineales $\{x + 3y - 3z = 4 \;\; 2x - y + z = 1 \;\; 3x + 2y - az = 5$, α ε R, no es incompatible para ningún valor real de α.

c) Resuelve el sistema en el caso en que sea compatible indeterminado.

----

a)

El enunciado del teorema de Rouché-Fröbenius, puede enunciarse del modo siguiente: "Sea un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas y sean C y A las matrices de coeficientes y ampliada, respectivamente. Según los rangos de C y A se presentan los siguientes casos:

Rang C = Rang A = nº incógnitas ⇒ Sistema compatible determinado.

Rang C ≠ Rang A ⇒ Sistema incompatible.

Rang C = Rang A < nº incógnitas ⇒ Sistema compatible indeterminado."

b)

Las matrices de coeficientes y ampliada son, respectivamente, las siguientes:

$M = (1\,3 \;\; -3\,2 \;\; -1\,1\,3\,2 \;\; -a)$ y $M' = (1\,3 \;\; -3\,2 \;\; -1\,1\,3\,2 \;\; -a \;\;\; 4\,1\,5)$.

El rango de M en función del parámetro a es el siguiente:

$|M| = |1\,3 \;\; -3\,2 \;\; -1\,1\,3\,2 \;\; -a| = a - 12 + 9 - 9 - 2 + 6a = 7a - 14 = 0 \Rightarrow a$

.

$\underline{Para\ a \neq 2 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

$Para\ a = 2\ es\ M' = (1\,3 \;\; -3\,2 \;\; -1\,1\,3\,2 \;\; -2 \;\;\; 4\,1\,5)$. Para determinar el rango de M' debemos tener en cuenta que las columnas segunda y tercera son proporcionales.

$Rang\ M' \Rightarrow \left(C_1,\ C_2,\ C_4\right) \Rightarrow |1\,3\,4\,2 \;\; -1\,1\,3\,2\,5| = -5 + 16 + 9 + 12 - 2 - 30 =$

$= 37 - 37 = 0 \Rightarrow Rang\ M' = 2.$

$\underline{Para\ a = 2 \Rightarrow Rang\ M = 2 = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

$\underline{Queda\ comprobado\ que\ el\ sistema\ no\ es\ incompatibla\ \forall\alpha\in R.}$

$c)$

Se resuelve es sistema para α = 2, que es compatible indeterminado, como se nos pide.

El sistema resulta $\{x + 3y - 3z = 4 \ \ 2x - y + z = 1 \ \ \ 3x + 2y - 2z = 5$. Despreciando una ecuación, por ejemplo la tercera y, haciendo $z = \lambda$:

$$x + 3y = 4 + 3\lambda \, 2x - y = 1 - \lambda \ \} \quad x + 3y = 4 + 3\lambda \, 6x - 3y = 3 - 3\lambda \, \}\Rightarrow$$

$2\lambda - y = 1 - \lambda; \ \ y =- 1 + 3\lambda.$

$\underline{Solución: x = 1, \ y =- 1 + 3\lambda, \ z = \lambda, \ \ \forall\lambda\in R.}$

****

4º) Dada la recta $r \equiv \{2x - y + z = 3\ x - z = 1$:

a) Da la ecuación implícita del plano π perpendicular a r que pasa por P (2, 1, 1).

b) Halla el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen de coordenadas y los tres puntos que resultan al hacer la intersección de π con los ejes de coordenadas.

----

a)

Un vector director de r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son los siguientes: $\vec{n_1} = (2,\ -1,\ 1)$ y : $\vec{n_2} = (1,\ 0,\ -1)$.

$$\vec{v_r} = \vec{n_1} \wedge \vec{n_2} = |i\ j\ k\ 2\ \ -1\ 1\ 1\ 0\ \ -1\,| = i + j + k + 2j = i + 3j + k = (1,\ 3$$

.

La expresión general del plano pedido es $\pi \equiv x + 3y + z + D = 0$. Como el plano π contiene al punto P(2, 1, 1), debe satisfacer su ecuación:

$$\pi \equiv x + 3y + z + D = 0\ P(2,\ 1,\ 1)\qquad \} \Rightarrow 2 + 3 \cdot 1 + 1 + D = 0; 6 + D = 0 \Rightarrow D$$

.

$$\underline{\alpha \equiv x + 3y + z - 6 = 0}.$$

b)

Los puntos de corte del plano $\pi \equiv x + 3y + z - 6 = 0$ con los ejes coordenados son los siguientes:

$$\pi \equiv x + 3y + z - 6 = 0\ Eje\ X \rightarrow \{y = 0,\ z = 0\}\ \} \rightarrow x - 6 = 0; x = 6 \Rightarrow A(6,\ 0,\ 0$$

.

$$\pi \equiv x + 3y + z - 6 = 0\ Eje\ Y \rightarrow \{x = 0,\ z = 0\}\ \} \rightarrow 3y - 6 = 0; y = 2 \Rightarrow B(0,\ 2,$$

.

$$\pi \equiv x + 3y + z - 6 = 0\ Eje\ Z \rightarrow \{x = 0,\ y = 0\}\ \} \rightarrow z - 6 = 0; z = 6 \Rightarrow C(0,\ 0,\ 6$$

.

Los puntos A, B y C determinan con el origen los vectores que determinan el tetraedro.

$\vec{OA} = (6,\ 0,\ 0)$. $\vec{OB} = (0,\ 2,\ 0)$. $\vec{OC} = (0,\ 0,\ 6)$.

El volumen de un tetraedro es un sexto del producto mixto de los tres vectores que los determinan:

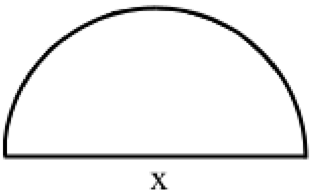
$$V_{OABC}=\frac{1}{6}\cdot\left|\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC}\right|=\frac{1}{6}\cdot|6\ 0\ 0\ 0\ 2\ 0\ 0\ 0\ 6\ |=\frac{1}{6}\cdot6\cdot2\cdot6\ =\underline{12\ u^{3}}.$$

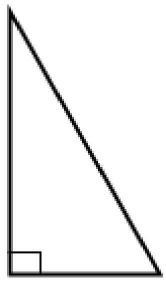
****

OPCIÓN B

1º) Determina cómo dividir un segmento de 90 cm en dos trozos, de forma que la suma del área del semicírculo cuyo diámetro es uno de ellos y el área de un triángulo rectángulo que tiene como base el otro trozo y cuya altura es π veces su base, sea mínima. Nota: Recuerda que el área de un círculo de radio r es A = π · r^2.

Sean los segmentos x y $(90 - x)$.





$$S = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{(90-x)\cdot\pi\cdot(90-x)}{2} = \frac{\pi}{8}\cdot x^2 + \frac{\pi}{2}\cdot(90 - x)^2.$$

La superficie es mínima cuando se anule su derivada:

$$S'(x) = \frac{\pi}{4}\cdot x + \pi\cdot(90 - x)\cdot(-1) = \frac{\pi}{4}\cdot[x - 4\cdot(90 - x)].$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4}\cdot[x - 4\cdot(90 - x)] = 0 \Rightarrow x = 4\cdot(90 - x);$$

$x = 360 - 4x;\ \ 5x = 360 \Rightarrow x = 72.$

$\underline{Los\ trozos\ son\ 72\ cm\ y\ 18\ cm,\ respectivamente.}$

La justificación de que se trata de área mínima es la siguiente:

$$S''(x) = \frac{\pi}{4}\cdot[1 - 4\cdot(-1)] = \frac{\pi}{4}\cdot 5 > 0 \Rightarrow Mínimo,\ c.q.j.$$

****

2º) Calcula las integrales $I_1 = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\left(4x^3 - \sqrt[4]{x}\right)\cdot dx$ e $I_2 = \int x\cdot Lx\cdot dx$.

$$I_1 = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\left(4x^3 - \sqrt[4]{x}\right)\cdot dx = 4\cdot\int \frac{x^3}{\sqrt{x}}\cdot dx - \int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\cdot dx =$$

$$= 4\cdot\int x^{\frac{5}{2}}\cdot dx - \int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x^2}}\cdot dx = 4\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} - \int \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\cdot dx = 4\cdot\frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} - \int x^{-\frac{1}{4}}\cdot dx =$$

$$= \frac{8}{7}\cdot x^3\sqrt{x} - \frac{x^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1} + C = \frac{8}{7}\cdot x^3\sqrt{x} - \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} + C = \frac{8}{7}\cdot x^3\sqrt{x} - \frac{4}{3}\cdot\sqrt[4]{x^3} + C.$$

$$\underline{I_1 = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\left(4x^3 - \sqrt[4]{x}\right)\cdot dx = \frac{4}{21}\cdot\left(6x^3\sqrt{x} - 7\sqrt[4]{x^3}\right) + C.}$$

$$I_2 = \int x\cdot Lx\cdot dx \Rightarrow \left\{ u = Lx \to du = \frac{1}{x}\cdot dx \quad x\cdot dx = dv \to v = \frac{x^2}{2} \right\} \Rightarrow Lx\cdot\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\cdot$$

$$= \frac{x^2}{2}\cdot Lx - \frac{1}{2}\cdot\int x\cdot dx = \frac{x^2}{2}\cdot Lx - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{4}\cdot(2Lx - 1) + C.$$

$$\underline{I_2 = \int x\cdot Lx\cdot dx = \frac{x^2}{4}\cdot(2Lx - 1) + C.}$$

****

3º) a) Despeja X en la ecuación $A\cdot X - A = 2A^2$, donde A y X son matrices cuadradas de orden tres.

b) Calcula X, siendo $A = (1\ 0\ 2\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ -\ 1\ )$.

c) Calcula los determinantes de las matrices A^{101} y A^{1000}.

----

a)

$$A\cdot X - A = 2A^2;\ \ A\cdot X = 2A^2 + A = A\cdot(2A + I) \Rightarrow \underline{X = 2A + I}.$$

b)

$X = 2A + I = 2(1\ 0\ 2\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ -\ 1\ ) + (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) = (2\ 0\ 4\ 2\ 2\ 0\ 0\ 0\ -\ 2\ ) +$

$\Rightarrow \underline{X = (3\ 0\ 4\ 2\ 3\ 0\ 0\ 0\ -\ 1\ )}$.

c)

$$|A| = |1\ 0\ 2\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ -\ 1\ | = |1\ 2\ 0\ -\ 1\ | =-\ 1.$$

Sabiendo que $\left|A^n\right| = |A|^n$:

$\left|A^{101}\right| = |A|^{101} = (-\ 1)^{101} = \underline{-\ 1}$. $\left|A^{1.000}\right| = |A|^{1.000} = (-\ 1)^{1.000} = \underline{1}$.

****

4º) Dados el plano $\pi \equiv x + ay + 3z = 2,\ a \epsilon R,$ y la recta $r \equiv \{ x - 2y + z = -1\ 2x - y = 0$:

$a)$ Halla α para que π y r se corten perpendicularmente.

$b)$ Halla α para que π y r sean paralelos.

$a)$

Una recta y un plano se cortan perpendicularmente cuando el vector director de la recta y el vector normal del plano son linealmente dependientes (paralelos).

El vector normal del plano π es $\vec{n} = (1,\ a,\ 3)$.

Un vector director de r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son los siguientes: $\vec{n_1} = (1,\ -2,\ 1)$ y : $\vec{n_2} = (2,\ -1,\ 0)$.

$\vec{v_r} = \vec{n_1} \wedge \vec{n_2} = | i\ j\ k\ 1\ \ -2\ 1\ 2\ \ -1\ 0 | = 2j - k + 4k + i = i + 2j + 3k = (1$

.

Tiene que cumplirse que: $\frac{1}{1} = \frac{a}{2} = \frac{3}{3} \Rightarrow a = 2.$

$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ perpendiculares\ para\ a = 2}.$

$b)$

Una recta y un plano son paralelos cuando el vector normal del plano y el vector director de la recta son perpendiculares.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$\vec{n} \cdot \vec{v_r} = 0 \Rightarrow (1,\ a,\ 3) \cdot (1,\ 2,\ 3) = 0;\ 1 + 2a + 9 = 0;\ 2a + 10 = 0 \Rightarrow a = -5.$

$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ paralelos\ para\ a = -5}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE CATALUÑA

JUNIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Puede utilizar calculadoras, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1º) Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\{- 3x + 2y + 3z = 0 \quad (a - 2)y - 3z = 0 \quad - x - y + (- a - 3)z = 0$:

a) Calcule para qué valores del parámetro α el sistema tiene más de una solución.

b) Resuelva el sistema para el caso de α = -3.

----

a)

Se trata de un sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes es la siguiente:

$M = (- 3\ 2\ 3\ 0\ a - 2\ - 3\ 1\ 1\ a + 3\ ).$

El rango de M en función del parámetro a es:

$|M| = |- 3\ 2\ 3\ 0\ a - 2\ - 3\ - 1\ - 1\ a - 3\ | =- 3(a - 2)(a + 3) - 6 - 3(a - 2)$

$=- 3(a - 2)(a + 3 + 1) - 15 =- 3(a - 2)(a + 4) - 15 =$

$=- 3\left(a^2 + 2a - 8\right) - 15 =- 3\left(a^2 + 2a - 3\right) = 0;\ a^2 + 2a - 3 = 0;$

$a = \frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2\pm4}{2} =- 1\pm2 \Rightarrow x_1 =- 3,\ x_2 = 1.$

$\underline{Para\ a\neq - 3\ y\ a\neq1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

$Para\ a = 1 \Rightarrow M = (- 3\ 2\ 3\ 0\ - 1\ - 3\ 1\ 1\ 4\ ) \Rightarrow Rang\ M = 2.$

$Para\ a = -3 \Rightarrow M = (-\ 3\ 2\ 3\ 0\ \ -5\ \ -3\ 1\ 1\ 0\ ) \Rightarrow Rang\ M = 2.$

$\underline{Para\ a = -3,\ a = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

$\underline{El\ sistema\ tiene\ más\ de\ una\ solución\ para\ a = -3\ y\ para\ a = 1.}$

$b)$

$Para\ a = -3\ el\ sistema\ resulta: \{-3x + 2y + 3z = 0\ \ -5y - 3z = 0\ \ \ \ -x\ -$
. Despreciando una de las ecuaciones, por ejemplo la primera y, haciendo $x = \lambda$:

$-\lambda - y = 0;\ \ y = -\lambda;\ \ 5\lambda - 3z = 0;\ \ z = \frac{5}{3}\lambda.$

$\underline{Solución:\ \{x = \lambda\ y = -\lambda\ z = \frac{5}{3}\lambda\ ,\ \forall\lambda \in R}$

****

2º) Sea r la recta del espacio que tiene por ecuación $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = z$ y sea P el punto de coordenadas P≡(6, 0, -1).

a) Encuentre la ecuación cartesiana (es decir, que tiene la forma Ax + By + Cz = D) del plano que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta r.

b) Encuentre la ecuación paramétrica del plano que pasa por el punto P y contiene a la recta r.

----

a)

Una recta y un plano se cortan perpendicularmente cuando el vector director de la recta y el vector normal del plano son linealmente dependientes (paralelos).

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (2, \; -1, \; 1)$.

La expresión general del plano π buscado es $\pi \equiv 2x - y + z + D = 0$. Como este plano contiene al punto P(6, 0, -1) tiene que satisfacer su ecuación:

$\pi \equiv 2x - y + z + D = 0 \; P(6, \; 0, \; -1) \qquad \} \Rightarrow 2 \cdot 6 - 0 - 1 + D = 0; \;\; 11$

.

$$\underline{\pi \equiv 2x - y + z - 11 = 0}.$$

b)

El plano β pedido, paralelo a π, que contiene a r debe contener a todos sus puntos, uno de los cuales es Q(1, -3, 0).

$\beta \equiv 2x - y + z + D = 0 \; Q(1, \; -3, \; 0) \qquad \} \Rightarrow 2 \cdot 1 + 3 + D = 0; \;\; 5 +$

.

$$\underline{\beta \equiv 2x - y + z - 5 = 0}.$$

****

3º) Responda a las siguientes cuestiones:

a) Determine la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3$ en el punto de abscisa x = 2.

b) Calcule el área de la región plana finita limitada por la curva $y = x^3$ y la recta de ecuación $y = 3x - 2$.

----

a)

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow m = f'(2) = 3\cdot 2^2 = 3\cdot 4 = 12.$$

El punto de tangencia es el siguiente: $f(2) = 2^3 = 8 \Rightarrow P(2, 8)$.

La recta que pasa por un punto conocida la pendiente es $y - y_0 = m\left(x - x_0\right)$:

$$y - 8 = 12\cdot(x - 2) = 12x - 24 \Rightarrow \underline{Tangente:\ t \equiv 12x - y - 16 = 0}.$$

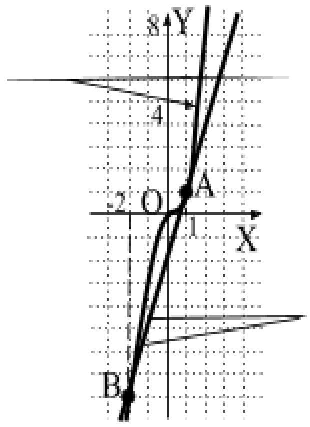
b)

Las abscisas de los puntos de corte de la curva y la recta son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	$\boxed{0}$
1		1	2	
	1	2	$\boxed{0}$	
-2		-2		
	1	$\boxed{0}$		

$$x^3 = 3x - 2;\ x^3 - 3x + 2 = 0.$$

Los puntos de corte son A(1, 1) y B(-2, -8).



En el intervalo correspondiente al área a calcular, todas las ordenadas de la curva son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la recta.

El área a calcular es la siguiente:

$$S = \int_{-2}^{1} \left[x^3 - (3x - 2)\right]\cdot dx = \int_{-2}^{1} \left(x^3 - 3x + 2\right)\cdot dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} = \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2\right) - [4 - 6 - 4] =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 + 6 = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 8 = \frac{1-6+32}{4} = \underline{\frac{27}{4}\, u^2}.$$

****

4º) Considere en R^3 la recta que tiene por ecuación $r: (x, y, z) = (-4 + 2k, -2, 1 - k)$ y los planos $\pi_1 \equiv x + 2y + 2z = -1$ y $\pi_2 \equiv x - 2y + 2z = -3$, respectivamente.

a) Determine la posición relativa de los planos π_1 y π_2.

b) Compruebe que todos los puntos de la recta r están situados a la misma distancia de los planos π_1 y π_2.
Nota: puede calcularse la distancia de un punto de coordenadas $\left(x_0, y_0, z_0\right)$ al plano de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ con la expresión $\frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

----

a)

Los vectores normales de los planos π_1 y π_2 son $\overrightarrow{n_1} = (1, 2, 2)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1, -2, 2)$ respectivamente, que son linealmente independientes por no tener proporcionales sus componentes y no son perpendiculares por ser distinto de cero su producto escalar, por lo cual:

$$\underline{\textit{Los planos } \pi_1 \textit{ y } \pi_2 \textit{ se cortan en una recta.}}$$

b)

Aplicando la fórmula dada, se determina la distancia de r a cada uno de los dos planos:

$$d\left(\pi_1, r\right) = \frac{|-4+2k+2\cdot(-2)+2\cdot(1-k)+1|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{|-4+2k-4+2-2k+1|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{|-5|}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3}.$$

$$d\left(\pi_2, r\right) = \frac{|-4+2k-2\cdot(-2)+2\cdot(1-k)+3|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{|-4+2k+4+2-2k+3|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{|+5|}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3}.$$

$$\underline{\textit{Queda demostrado que la recta r equidista de los planos } \pi_1 \textit{ y } \pi_2.}$$

****

5º) Responda a las siguientes cuestiones:

a) Calcule la matriz de la forma $A = (1\ a\ 1\ 0\ )$ que satisface $A^2 - A = I$, donde I es la matriz identidad, $I = (1\ 0\ 0\ 1\ )$.

b) Calcule A^{-1} y compruebe que el resultado se corresponde con el que se obtiene de deducir la matriz A^{-1} a partir de la igualdad $A^2 - A = I$.

----

a)

$$A^2 - A = (1\ a\ 1\ 0\ )\cdot(1\ a\ 1\ 0\ ) - (1\ a\ 1\ 0\ ) = (1 + a\ a\ 1\ a\ ) - (1\ a\ 1\ 0\ ) = (a\ 0\ 0\ a$$

.

$$A^2 - A = I \Rightarrow (a\ 0\ 0\ a\ ) = (1\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow a = 1.$$

$$\underline{La\ matriz\ pedida\ es\ A = (1\ 1\ 1\ 0\ )}.$$

b)

La matriz A^{-1} se obtiene por el método de Gauss-Jordan:

$$(1\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \{F_1 - F_2\} \Rightarrow (0\ 1\ 1\ 0\ ) \Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 - F_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (0\ 1\ 1\ \ -1\ ) \Rightarrow \underline{A^{-1} = (0\ 1\ 1\ \ -1\ )}.$$

$A^2 - A = I;\ \ A(A - I) = I$. Multiplicando por la izquierda por A^{-1}:

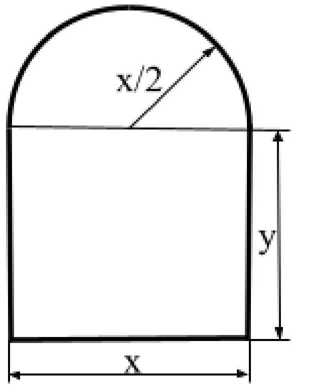
$$A^{-1}\cdot A(A - I) = A^{-1}\cdot I;\ \ I\cdot(A - I) = A^{-1};\ A^{-1} = A - I = (1\ 1\ 1\ 0\ ) - (1\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{A^{-1} = (0\ 1\ 1\ \ -1\ )}.$$

$$\underline{Se\ obtiene\ el\ mismo\ resultado,\ como\ cabía\ esperar}.$$

****

6º) La portalada de una catedral está formada, en su parte superior, por un arco de media circunferencia que descansa sobre dos columnas, tal como ilustra la figura adjunta, donde x es el diámetro de la circunferencia, es decir, la distancia entre columnas, e y es la altura de cada columna.



a) Compruebe que la función $f(x,\ y) = \frac{\pi x^2}{8} + xy$ determina el área de esta portada.

b) Si el perímetro de la portalada es de 20 m, determine las medidas de x e y de la portalada que maximizan su área.

----

a)

$$S = x\cdot y + \frac{\pi\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} = x\cdot y + \frac{\pi x^2}{8} \Rightarrow \underline{S = f(x,\ y) = \frac{\pi x^2}{8} + xy}, \text{ como q. c.}$$

b)

$$Perímetro = p = x + 2y + \pi\cdot\frac{x}{2} = 20;\ \ 2x + 4y + \pi x = 40;$$

$$4y = 40 - 2x - \pi x = 40 \Rightarrow y = \frac{40-2x-\pi x}{4} = 10 - \frac{2+\pi}{4}x.$$

Sustituyendo el valor obtenido de y en la expresión de la superficie:

$$S(x) = x\cdot\frac{40-2x-\pi x}{4} + \frac{\pi x^2}{8} = \frac{80x-4x^2-2\pi x^2+\pi x^2}{8} = \frac{80x-4x^2-\pi x^2}{8}.$$

Para que la superficie sea mínima es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$S'(x) = \frac{80-8x-2\pi x}{8} \Rightarrow S'(x) = 0 \Rightarrow 80 - 8x - 2\pi x = 0;\ 40 - 4x - \pi x = 0;$$

$$40 = 4x + \pi x = (4 + \pi)x \Rightarrow x = \frac{40}{4+\pi} \cong 5,60.$$

Justificación de que se trata de un máximo:

$$S''(x) = \frac{1}{8}\cdot(-\ 8 - 2\pi) < 0 \Rightarrow Máximo,\ c.q.j.$$

$$y = 10 - \frac{2+\pi}{4}\cdot\frac{40}{4+\pi} = 10 - 10\cdot\frac{2+\pi}{4+\pi} = 10 - 10\cdot\frac{5,14}{7,14} \cong 10 - 7,20 = 2,8.$$

$\underline{Los\ valores\ que\ maximizan\ la\ superficie\ son\ x\ =\ 5,60\ m\ e\ y\ =\ 2,8\ m}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE CATALUÑA

SEPTIEMBRE – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Puede utilizar calculadoras, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1º) Sea la matriz $A = (0\ a\ 1\ 1\ 0\ -2\ 1\ 1\ -a)$.

a) Determine para qué valores de α existe A^{-1}.

b) Calcule A^{-1} para α = 0.

----

a)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$|A| = |0\ a\ 1\ 1\ 0\ -2\ 1\ 1\ -a| = 1 - 2a + a^2 = (a - 1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1.$

$\underline{A\ es\ invertible\ \forall a \in R - \{1\}}$.

b)

Para $a = 0$ es $A = (0\ 0\ 1\ 1\ 0\ -2\ 1\ 1\ 0)$, $|A| = 1$ y $A^t = (0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ -2\ 0)$.

$Adj.\ de\ A^t = (|0\ 1\ -2\ 0|\ -|0\ 1\ 1\ 0|\ |0\ 0\ 1\ -2|\ -|1\ 1\ -2\ 0|\ |0\ 1\ 1\ 0|\ -|0\ 1\ 1$

.

$\underline{A^{-1} = (2\ 1\ 0\ -2\ -1\ 1\ 1\ 0\ 0)}$.

****

2º) En el espacio tridimensional considere la recta $r: (x, y, z) = (3 + 2a, -a, 3 - a)$ y los planos $\pi_1 \equiv x + y + z = -1$ y $\pi_2 \equiv (x, y, z) = (2 + \lambda, 1 - \lambda + \mu, \mu)$.

a) Calcule la ecuación cartesiana (es decir, que tiene la forma Ax + By + Cz = D) del plano π_2.

$b)$ Encuentre los dos puntos de la recta r que equidistan de los planos π_1 y π_2.
Nota: puede calcularse la distancia de un punto de coordenadas $\left(x_0,\ y_0,\ z_0\right)$ al plano de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ con la expresión $\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

$a)$

Dos vectores directores de π_2 son $\vec{u} = (1,\ 1,\ 0)$ y $\vec{v} = (0,\ 1,\ 1)$ y un punto de este plano es $P(2,\ 1,\ 0)$.

$\pi_2\left(P;\ \vec{u},\ \vec{v}\right) \equiv |x\ -\ 2\ y\ -\ 1\ z\ 1\ \ -\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ | = 0;\ \ -(x\ -\ 2) + z - (y\ -\ 1) = 0;$

$-\ x\ +\ 2\ +\ z\ -\ y\ +\ 1\ =\ 0 \Rightarrow \underline{\pi_2 \equiv x\ +\ y\ -\ z\ -\ 3\ =\ 0.}$

$b)$

Un punto genérico de r es $Q(3\ +\ 2a,\ \ -\ a,\ 3\ -\ a)$.

$d\left(Q,\ \pi_1\right) = \frac{|3+2a-a+3-a+1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{|7|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{7}{\sqrt{3}}.$

$d\left(Q,\ \pi_2\right) = \frac{|3+2a-a-3+a-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{|2a-3|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|2a-3|}{\sqrt{3}}.$

$d\left(Q,\ \pi_1\right) = d\left(Q,\ \pi_2\right) \Rightarrow \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{|2a-3|}{\sqrt{3}} \Rightarrow |2a\ -\ 3| = 7 \Rightarrow 2a\ -\ 3\ =\ 7\ \ -\ 2a\ +\ 3\ =\ 7\ \} \Rightarrow$

$2a\ =\ 10 \rightarrow a_1\ =\ 5;\ \ -\ 2a\ +\ 3\ =\ 7;\ 2a\ =-\ 4 \rightarrow a_2\ =-\ 2.$

Los puntos pedidos son: $\underline{Q_1(13,\ \ -\ 5,\ \ -\ 2)}$ y $\underline{Q_2(-\ 1,\ 2,\ 5)}$.

****

3º) Sea la función $f(x) = e^x - x - 2$:

a) Demuestre que la función f tiene una raíz (un cero) en el intervalo [0, 2].

b) Compruebe que la función es monótona en el intervalo [0, 2] y calcule las coordenadas de los puntos mínimo absoluto y máximo absoluto de la función en dicho intervalo.

----

a)

La función $f(x) = e^x - x - 2$ es continua en su dominio, por lo cual, le es aplicable el teorema de Bolzano a cualquier intervalo cerrado que se considere, por ejemplo, al intervalo [0, 2]:

$$f(0) = e^0 - 0 - 2 = 1 - 2 = -1 < 0.$$

$$f(2) = e^2 - 2 - 2 = e^2 - 4 = 7,39 - 4 = 3,39 > 0.$$

$\underline{Lo\ anterior\ demuestra\ que\ la\ función\ f(x)\ tiene\ una\ raíz\ en\ [0,\ 2],\ c.q.d.}$

b)

$$f'(x) = e^x - 1 \geq 0,\ \forall x \in [0,\ 2].$$

$\underline{Lo\ anterior\ prueba\ que\ f(x)\ es\ mononota\ creciente\ en\ [0,\ 2]}.$

$Máximo\ absoluto\ de\ f(x)\ en\ [0,\ 2] \Rightarrow f(2) = 3,39 \Rightarrow \underline{A(2,\ 3'39)}.$

$Mínimo\ absoluto\ de\ f(x)\ en\ [0,\ 2] \Rightarrow f(0) = -1 \Rightarrow \underline{B(0,\ -1)}.$

****

4º) Sean los planos de R^3 $\pi_1 \equiv -y+z=2$, $\pi_2 \equiv -2x+y+z=1$ y $\pi_3 \equiv 2x-2z=-1$.

a) Calcule la posición relativa de los tres planos.

b) Compruebe que el plano π_3 es paralelo a la recta definida por la intersección de los planos π_1 y π_2.

----

a)

Los tres planos determinan las siguientes matrices de coeficientes y ampliada:

$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Según que los rangos de estas matrices, la posición relativa de los planos son las siguientes:

1º. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow Los\ planos\ se\ cortan\ en\ un\ punto.$

2º. -- $Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Los\ planos\ son\ secantes\ dos\ a\ dos.$

3º. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow Los\ planos\ se\ cortan\ en\ una\ recta.$

4º. -- $Rang\ M = 1;\ Rang\ M' = 2 \Rightarrow Los\ planos\ son\ paralelos.$

5º. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 1 \Rightarrow Los\ planos\ son\ coincidentes.$

$Rang\ M \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 2 + 4 = 0 \Rightarrow Rang\ M = 2.$

$Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 4 + 2 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' =$

.

<u>$Los\ planos\ son\ secantes\ dos\ a\ dos\ (no\ hay\ planos\ paralelos)$</u>.

b)

Los planos $\pi_1\ y\ \pi_2$ determinan la recta $r \equiv \begin{cases} y - z + 2 = 0 \\ 2x - y - z + 1 = 0 \end{cases}$.

Un vector director es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son los siguientes: $\vec{n}_1 = (0,\ 1,\ -1)$ y $\vec{n}_2 = (2,\ -1,\ -1)$.

$\vec{v}_r = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = |i\ j\ k\ 0\ 1\ -1\ 2\ -1\ -1| = -i - 2j - 2k - i = -2i - 2j - 2k \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{v}_r = (1,\ 1,\ 1)$.

El vector normal del plano π_3 es $\vec{n}_3 = (2,\ 0,\ -2)$.

La recta r es paralela al plano π_3 cuando el vector director de la recta y el vector normal del plano son perpendiculares, o sea, que su producto escalar es nulo:

$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_3 = (1,\ 1,\ 1)\cdot(2,\ 0,\ -2) = 2 + 0 - 2 = 0$.

$\underline{Queda\ comprobado\ que\ la\ recta\ r\ es\ paralela\ al\ plano\ \pi_3.}$

****

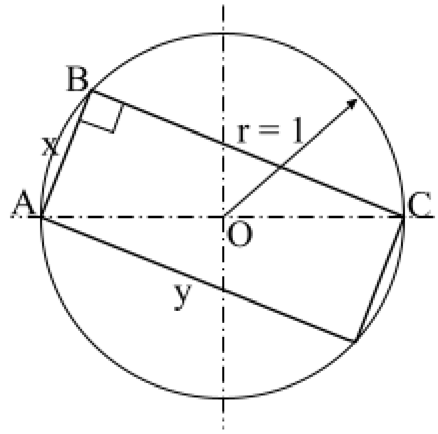
5º) Sean x e y las medidas de los lados de un rectángulo inscrito en una circunferencia de diámetro 2.

a) Compruebe que la superficie del rectángulo, en función de x, viene dada por la expresión $S(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$.

b) Calcule los valores de las medidas de x e y para los cuales la superficie del rectángulo es máxima y calcule el valor de esta superficie máxima.

----

a)



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo ABC:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Rightarrow 2^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{4 - x^2}.$$

La superficie del rectángulo es: $S = x \cdot y$.

Sustituyendo en la fórmula de la superficie el valor de y obtenido:

$S = x \cdot y \Rightarrow S(x) = x \cdot \sqrt{4 - x^2} = \underline{\sqrt{4x^2 - x^4}}$, como se quería comprobar.

b)

Para que la superficie sea máxima es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$S'(x) = \frac{8x-4x^3}{2\sqrt{4x^2-x^4}} = \frac{4x-2x^3}{x\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} \Rightarrow S'(x) = 0 \Rightarrow \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} = 0;\ 4 - 2x^2 = 0;$$

$2 - x^2 = 0; x = \pm\sqrt{2}$ (*La solución negativa no tiene sentido lógico*).

$x = \sqrt{2}$. El valor de y es el siguiente: $y = \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2} = x$.

$\underline{\textit{El rectángulo de área máxima es un cuadrado de lado } \sqrt{2} \textit{ unidades.}}$

$\underline{\textit{El valor de la superficie del rectángulo es de } 2\ u^2.}$

****

6º) Encuentre todas las matrices de la forma $A = (a\ 0\ b\ 1\ )$ que sean inversas de ellas mismas, es decir, que $A^2 = (1\ 0\ 0\ 1\ )$.

$A^2 = I \Rightarrow A \cdot A = (a\ 0\ b\ 1\ ) \cdot (a\ 0\ b\ 1\ ) = \left(a^2\ 0\ ab + b\ 1\right) = (1\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \{a^2 = 1 \quad ab +$
.

$a = \pm 1;\ \ ab + b = 0;\ \ b(a + 1) = 0 \Rightarrow \{a = 1 \rightarrow b = 0 \quad a = -1 \rightarrow b \in R$.

$\underline{Soluciones:\ A_1 = (1\ 0\ 0\ 1\ );\ \ A_2 = (-\ 1\ 0\ b\ 1\ ),\ \forall b \in R.}$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

JULIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno elegirá una de las dos opciones propuestas. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1º) $a)$ Enuncie el teorema del valor medio de Lagrange.

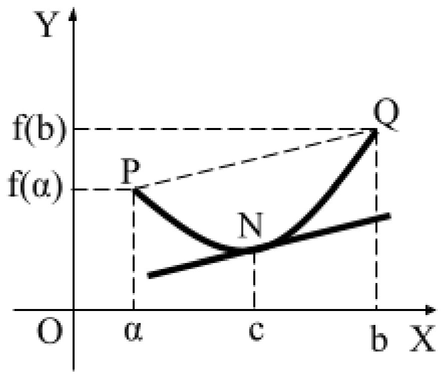
$b)$ Aplicando a la función $f(x) = x^3 + 2x$ el anterior teorema, pruebe que cualquiera que sean los números α < b se cumple la desigualdad α – b < $b^3 - a^3$.

$a)$

El teorema del valor medio del cálculo diferencial, también conocido como teorema de Lagrange, se puede enunciar del siguiente modo:

"Si f(x) es una función continua en el intervalo [α, b] y derivable en (α, b), entonces, existe al menos un punto $c \in (\alpha, b)$ que cumple $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$".

La interpretación geométrica puede apreciarse fácilmente en la figura adjunta.



Considerando la función f(x), continua en [α, b] y derivable en (α, b) existe, por lo menos un punto N perteneciente al intervalo (α, b) en el que la recta tangente a la gráfica de f es paralela a la cuerda que une los puntos P y Q de coordenadas P [α, f (α)] y Q [b, f (b)].

$b)$

La función $f(x) = x^3 + 2x$ es continua y derivable en R, por lo cual, se le puede aplicar el teorema de Lagrange en cualquier intervalo finito que se considere, por ejemplo, al intervalo (α, b) con α < b:

$$f'(x) = 3x^2 + 2 \Rightarrow f'(c) = 3c^2 + 2 .$$

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow 3c^2 + 2 = \frac{\left(b^3+2b\right)-\left(a^3+2a\right)}{b-a} = \frac{b^3+2b-a^3-2a}{b-a} =$$

$$= \frac{b^3-a^3+2b-2a}{b-a} = \frac{b^3-a^3}{b-a} + \frac{2(b-a)}{b-a} = \frac{b^3-a^3}{b-a} + 2 \Rightarrow 3c^2 = \frac{b^3-a^3}{b-a}.$$

Como quiera que $3c^2 > 0,\ \forall c \in R \Rightarrow \frac{b^3-a^3}{b-a} >$ cualquier valor negativo.

Considerando $\frac{b^3-a^3}{b-a} > -1 = -\frac{a-b}{a-b} = \frac{a-b}{b-a} \Rightarrow b^3 - a^3 > a - b$, o sea:

$$\underline{a - b < b^3 - a^3,\ como\ teníamos\ que\ comprobar.}$$

****

2º) a) Diga cuándo una función F(x) es una primitiva de otra función f(x).

b) Diga cómo puede comprobarse, sin necesidad de hacer derivadas, si dos funciones F(x) y G(x) son primitivas de una misma función.

c) Diga si las funciones $F(x) = \frac{x + \mathrm{coscos}\, x}{x}$ y $G(x) = \frac{1 - sen^2 x}{\mathrm{coscos}\, x \cdot x}$, razonando la respuesta, si son primitivas de una misma función.

----

a)

Se dice que una función F(x) es una primitiva de f(x) si se cumple que F'(x) = f(x); como quiera que la derivada de F(x) + C es la misma que la de F(x), existen infinitas funciones primitivas de una función dada, que son todas aquellas que se diferencian en una constante (C).

Lo anterior se expresa de la forma: $\int f(x) \cdot dx = F(x) + C$.

b)

Dos funciones $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son primitivas de una función f(x) siempre que la diferencia de las dos primeras sea constante: $F_1(x) - F_2(x) = C$.

c)

$$F(x) = \frac{x + \mathrm{coscos}\, x}{x} = 1 + \frac{\mathrm{coscos}\, x}{sen\, x} = cotg\, x + 1.$$

$$G(x) = \frac{1 - sen^2 x}{\mathrm{coscos}\, x \cdot x} = \frac{cos^2 x}{\mathrm{coscos}\, x \cdot x} = \frac{\mathrm{coscos}\, x}{sen\, x} = cotg\, x.$$

Las funciones F(x) y G(x) son primitivas de una misma función por diferenciarse en una constante (1).

****

3º) Siendo $A = (2\ 1\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ )$, $B = (4\ 1\ \ -\ 1\ 3\ )$ y $C = (9\ 4\ 2\ 6\ )$, resuelva la ecuación matricial AX + 2B = C.

$A \cdot X + 2B = C$;; $A \cdot X = C - 2B$. Multiplicando por la izquierda por A^{-1}:

$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (C - 2B)$;; $I \cdot X = A^{-1} \cdot (C - 2B) \Rightarrow X = A^{-1} \cdot (C - 2B)$.

$C - 2B = (9\ 4\ 2\ 6\ ) - 2 \cdot (4\ 1\ \ -\ 1\ 3\ ) = (9\ 4\ 2\ 6\ ) - (8\ 2\ \ -\ 2\ 6\ ) = (1\ 2\ 4\ 0\ )$.

$(A/I) = (1\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 + F_2\} \Rightarrow (1\ 1\ 0\ 1\ ) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{F_2 \to F_2 + F_1\} \Rightarrow (1\ 1\ 1\ 2\ ) \Rightarrow \{F_2 \to -F_2\} \Rightarrow (1\ 1\ \ -\ 1\ \ -\ 2\ ) \Rightarrow$

$\Rightarrow A^{-1} = (1\ 1\ \ -\ 1\ \ -\ 2\ )$.

Sustituyendo los valores obtenidos en la expresión de X:

$X = A^{-1} \cdot (C - 2B) = (1\ 1\ \ -\ 1\ \ -\ 2\ ) \cdot (1\ 2\ 4\ 0\ ) = (1 + 4\ 2 + 0\ \ -1 - 8\ \ -2$

.

$\underline{X = (5\ 2\ \ -\ 9\ \ -\ 2\ )}$.

****

4º) a) Calcule las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos $A(0,\ \ 1,\ \ 1)$ y B (1, 1, -1).

b) Calcule todos los puntos de la recta r que equidistan de los planos $\pi_1 \equiv x + y = -\ 2$ y $\pi_2 \equiv x - z = 1$.

----

a)

Los puntos A y B determinan el vector $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = B - A = (1,\ 0, -\ 2)$.

Considerando el punto A, la recta r pedida es $\underline{r \equiv \{x = \lambda \quad y = 1 \quad z = 1 - 2\lambda}$.

b)

Los planos π_1 y π_2 tienen los siguientes planos bisectores:

$$\frac{x+y+2}{\pm\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{x-z-1}{\pm\sqrt{1^2+(-1)^2}} \Rightarrow$$

$x + y + 2 = x - z - 1\ x + y + 2 = -\ x + z + 1 \} \Rightarrow\ \ \alpha_1 \equiv y + z + 3 = 0$ y $\alpha_2 \equiv 2x + y - z + 1 = 0$.

Los puntos pedidos son los puntos de corte de la recta r con los planos π_1 y π_2:

$r \equiv \{x = \lambda \quad y = 1 \quad z = 1 - 2\lambda\ \ \alpha_1 \equiv y + z + 3 = 0\ \} \Rightarrow 1 + (1 - 2\lambda) + 3 = 0\ ;$

.

$P_1 \Rightarrow \left\{x = \frac{5}{2} \quad y = 1 \quad z = 1 - 5 = -\ 4\right\} \Rightarrow \underline{P_1\left(\frac{5}{2}, 1, -\ 4\right)}$.

$r \equiv \{x = \lambda \quad y = 1 \quad z = 1 - 2\lambda\ \ \alpha_2 \equiv 2x + y - z + 1 = 0\ \} \Rightarrow 2\lambda + 1 - (1 - 2$

$2\lambda + 2 - 1 + 2\lambda = 0$;; $4\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -\ \frac{1}{4}$.

$P_2 \Rightarrow \left\{x = -\ \frac{1}{4} \quad y = 1 \quad z = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\right\} \Rightarrow \underline{P_2\left(-\ \frac{1}{4}, 1, \frac{3}{2}\right)}$.

****

OPCIÓN B

1º) a) Estudie el dominio de definición y las asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x-2}$.

b) Estudie si la gráfica de la función f(x) corta a alguna asíntota oblicua suya.

c) Represente, aproximadamente, la gráfica de f(x) utilizando los valores f (1) y f (3), y los datos obtenidos en los apartados a) y b).

----

a)

Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto los valores de x que anulan el denominador: $\underline{D(f) \Rightarrow R - \{2\}}$.

Asíntotas horizontales: son de la forma y = k y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$k = f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x-1} = \infty \Rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$x - 2 = 0 \Rightarrow$ La recta x = 2 es asíntota vertical de la función.

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$m = \frac{f(x)}{x}$ y $n = \left[\frac{f(x)}{x} - mx\right]$.

$$m = \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{x^2-4x+3}{x-2}}{x} = \frac{x^2-3x+3}{x^2-2x} = 1.$$

$$n = \left[\frac{f(x)}{x} - mx\right] = \left(\frac{x^2-4x+3}{x-2} - x\right) =$$

$$\frac{x^2-4x+3-x^2+2x}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x+3}{x-2} =- 2 = n.$$

La recta y = x – 2 es asíntota oblicua de la función.

b)

Los puntos de corte de la función con la asíntota oblicua son las soluciones del sistema que forman sus expresiones:

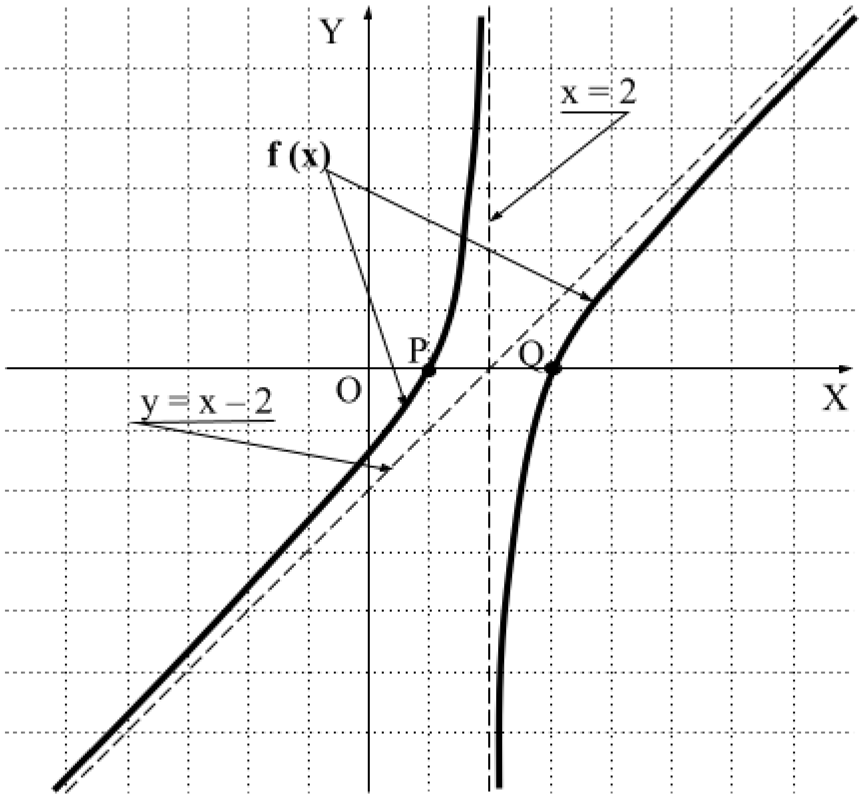
$$\left.\begin{array}{l} y = f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x-2} \\ y = x - 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2-4x+3}{x-2} = x - 2 ;;\ x^2 - 4x + 3 = x^2 -$$

$\Rightarrow 3 = 4? \Rightarrow$ Incompatible $\Rightarrow$ La asíntota oblicua no corta a la función.

$c)$

$f(1) = \frac{1-4+3}{1-2} = 0 \Rightarrow \underline{P(1, 0)}$. $\qquad f(3) = \frac{9-12+3}{3-2} = 0 \Rightarrow \underline{Q(3, 0)}$.

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



****

2º) Calcule la integral definida de una función racional: $I = \int_{1+\sqrt{2}}^{1+\sqrt{5}} \frac{x-1}{x^2-2x} \cdot dx$.

Se resuelve en primer lugar la integral indefinida $A = \int \frac{x-1}{x^2-2x} \cdot dx$:

$$A = \int \frac{x-1}{x^2-2x} \cdot dx \Rightarrow \frac{x-1}{x^2-2x} = \frac{x-1}{x(x-2)} = \frac{M}{x} + \frac{N}{x-2} = \frac{Mx-2M+Nx}{x(x-2)} = \frac{(M+N)x-2M}{x(x-2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} M + N = 1 \\ -2M = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow M = N = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x-2} \right) \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} \right) \cdot dx = \frac{1}{2} [L|x| + L|x - 2|] + C.$$

Resolvemos ahora la integral definida:

$$I = \int_{1+\sqrt{2}}^{1+\sqrt{5}} \frac{x-1}{x^2-2x} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot [L|x| + L|x - 2|]_{1+\sqrt{2}}^{1+\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left[L\left(1 + \sqrt{5}\right) + L\left(1 + \sqrt{5} - 2\right) \right] - \left[L\left(1 + \sqrt{2}\right) + L\left(1 + \sqrt{2} - 2\right) \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left[L\left(\sqrt{5} + 1\right) + L\left(\sqrt{5} - 1\right) \right] - \left[L\left(\sqrt{2} + 1\right) + L\left(\sqrt{2} - 1\right) \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left\{ L\left[\left(\sqrt{5} + 1\right)\left(\sqrt{5} - 1\right) \right] - L\left[\left(\sqrt{2} + 1\right)\left(\sqrt{2} - 1\right) \right] \right\} = \frac{1}{2} \cdot [L(5 - 1) - L(2 - 1)] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (L4 - L1) = \frac{1}{2} L\frac{4}{1} = \frac{1}{2} L4 = \frac{1}{2} L2^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot L2 = L2.$$

$$\underline{I = \int_{1+\sqrt{2}}^{1+\sqrt{5}} \frac{x-1}{x^2-2x} \cdot dx = L2.}$$

****

3º) Determine el rango de la matriz A = $(1\ b + 2\ 1\ 2\ 1\ 1\ b + 1\ 1\ b)$, según los valores de b.

$|A| = |1\ b + 2\ 1\ 2\ 1\ 1\ b + 1\ 1\ b| = b + 2 + (b + 2)(b + 1) - (b + 1) - 1 - 2b(b$

$= b + 1 + b^2 + b + 2b + 2 - b - 1 - 2b^2 - 4b = - b^2 - b + 2 = 0.$

$b^2 + b - 2 = 0$;; $b = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow b_1 = - 2,\ b_2 = 1.$

$$\underline{Rango\ de\ A = 3,\ \forall b \in R - \{-2, 1\}}.$$

Para b = -2 es A = $(1\ 0\ 1\ 2\ 1\ 1\ -1\ 1\ -2)$ y para b = 1 es A = $(1\ 3\ 1\ 2\ 1\ 1\ 2\ 1\ 1)$. Como en ambos casos existen menores de orden dos distintos de cero, como por ejemplo son: $|1\ 0\ 2\ 1|$ y $|1\ 3\ 2\ 1|$, respectivamente:

$$\underline{Para\ b = \ - 1\ y\ b = 1 \Rightarrow Rango\ de\ A = 2}.$$

****

4º) Sean $\vec{e}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores de R^3 tales que $\vec{e} \times \vec{u} = (1, 0, -1)$, $\vec{v} \times \vec{e} = (0, 1, 1)$.

$a)$ Calcule el vector $\left(\vec{e} \times \vec{u}\right) \times \left(\vec{v} \times \vec{e}\right)$.

$b)$ Calcule el vector $\vec{w} = \vec{e} \times \left(2\vec{u} - \vec{e} + 3\vec{v}\right)$.

$a)$

$$\left(\vec{e} \times \vec{u}\right) \times \left(\vec{v} \times \vec{e}\right) = |i\, j\, k\, 1\, 0\ -1\, 0\, 1\, 1| = k + i - j = i - j + k.$$

$$\underline{\left(\vec{e} \times \vec{u}\right) \times \left(\vec{v} \times \vec{e}\right) = (1, -1, 1)}.$$

$b)$

Para la resolución de este apartado deben tenerse en cuenta las siguientes propiedades del producto vectorial:

1ª.- Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma por la izquierda y por la derecha.

2ª.- Los escalares pueden extraerse del producto vectorial.

3ª.- El producto vectorial de un vector por sí mismo es el vector nulo.

4ª.- El producto vectorial es anticonmutativo: $\vec{m} \times \vec{n} = -\left(\vec{n} \times \vec{m}\right)$.

$$\vec{w} = \vec{e} \times \left(2\vec{u} - \vec{e} + 3\vec{v}\right) = 2 \cdot \vec{e} \times \vec{u} - \vec{e} \times \vec{e} + 3 \cdot \vec{e} \times \vec{v} =$$

$$= 2 \cdot (1, 0, -1) - (0, 0, 0) - 3 \cdot \vec{v} \times \vec{e} = (2, 0, -2) - 3 \cdot (0, 1, 1) =$$

$$= (2, 0, -2) + (0, -3, -3) = (2, -3 -5).$$

$$\underline{\vec{w} = (2, -3, -5)}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

JUNIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno elegirá una de las dos opciones propuestas. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1º) Discutir, en función del parámetro b, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:
$x + y = b \;\; -2x - y + (b-1)z = -2 \;\;\;\; bx + y - z = 2 \}$
. (no es necesario resolverlo en ningún caso)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = (1\ 1\ 0\ \ -2\ \ -1\ b-1\ b\ 1\ \ -1\ )$ y $M' = (1\ 1\ 0\ \ -2\ \ -1\ b-1\ b\ 1\ \ -1\ \ \ b\ \ -2\ 2\ ).$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro b es el siguiente:

$|M| = |1\ 1\ 0\ \ -2\ \ -1\ b-1\ b\ 1\ \ -1\ | = 1 + b(b-1) - (b-1) - 2 =$

$= -1 + b^2 - b - b + 1 = b^2 - 2b = 0;\ \ b(b-2) = 0 \Rightarrow b_1 = 0,\ b_2 = 2.$

$\underline{Para\ \{b \neq 0\ b \neq 2\ \} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M^{'} = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

$Para\ b = 0 \Rightarrow M^{'} = (1\ 1\ 0\ \ -2\ \ -1\ \ -1\ 0\ 1\ \ -1\ \ \ 0\ \ -2\ 2\ ) \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\}$

$\Rightarrow |1\ 1\ 0\ \ -2\ \ -1\ \ -2\ 0\ 1\ 2\ | = -2 + 2 + 4 = 4 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M^{'} = 3.$

$\underline{Para\ b = 0 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M^{'} = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible}.$

$Para\ b = 2 \Rightarrow M' = (1\ 1\ 0\ \ -2\ \ -1\ 1\ 2\ 1\ \ -1\ \ \ 2\ \ -2\ 2\ ) \Rightarrow \{F_2 = -F_3\} \Rightarrow Rang\ M' =$
.

$$\underline{Para\ b = 2 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$$

****

2º) En R^3, considere el plano $\pi \equiv ax + by + cz = d$, la recta $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ y el punto $P(1, 0, 1)$.

a) Obtenga cómo deben ser los números a, b, c, d para que el plano π contenga a la recta r.

b) Supuesto que el plano π contiene a la recta r, pruebe que la distancia de P a π es menor o igual a 1: $d(P, \pi) \leq 1$.

----

a)

Una recta está contenida en un plano cuando el sistema que forman tiene infinitas soluciones, es decir, es compatible indeterminado.

El sistema que forman el plano π y la recta r es $\pi \equiv ax + by + cz = d$ $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, cuyas matrices de coeficientes y ampliada son $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$Rang\ M = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0;\ c = 0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} a & b & 0 & d \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La matriz M' resultante es equivalente, a efectos de rango, a la matriz M'', siendo $M'' = \begin{pmatrix} a & b & d \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Para que el sistema sea compatible indeterminado tiene que ser $Rang\ M'' = 2$:

$Rang\ M'' = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & d \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0;\ d = 0$.

$\underline{El\ plano\ \pi\ contiene\ a\ r\ \forall a, b \in R,\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ siendo\ c = d = 0}$.

b)

La distancia de un punto a un plano es $d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Aplicada al punto $P(1, 0, 1)$ y plano $\pi \equiv ax + by = 0$:

$$d(P, \pi) = \frac{|a \cdot 1 + b \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0|}{\sqrt{a^2 + b^2 + 0^2}} = \frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\frac{|a|}{a}}{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}} = \frac{1}{\geq 1} \leq 1.$$

$\underline{Queda\ probado\ que\ d(P, \pi) \leq 1}$.

****

3º) $a)$ Estudie los extremos relativos y los puntos de inflexión de la siguiente función: $f(x) = L\left(1 + x^2\right)$.

$b)$ Estudie si la recta r de ecuación $y = -x - 1 + L2$ es tangente a la gráfica de la función $f(x) = L\left(1 + x^2\right)$ en algún punto de inflexión de $f(x)$.

$a)$

Una función tiene un extremo relativo (máximo o mínimo) para los valores de x que anulan la primera derivada.

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}. \qquad f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x}{1+x^2} = 0;\ \ 2x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan la primera derivada se trate de un máximo relativo y, si es positiva, de un mínimo relativo.

$$f''(x) = \frac{2\cdot\left(1+x^2\right)-2x\cdot(2x)}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{2+2x^2-4x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

$$f''(0) = \frac{2(1-0)}{(1+0)^2} = \frac{2}{1} = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = L(1 + 0) = L1 = 0 \Rightarrow \underline{Mínimo\ relativo: O(0,\ 0)}.$$

Una función tiene un punto de inflexión para los valores de x que anulan la 2ª derivada, siendo distinto de cero la 3ª derivada para los valores que anulan la segunda.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2} = 0;\ \ 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1.$$

$$f'''(x) = \frac{-4x\cdot\left(1+x^2\right)^2-2\left(1-x^2\right)\cdot\left[2\cdot\left(1+x^2\right)\cdot 2x\right]}{\left(1+x^2\right)^4} = \frac{-4x\cdot\left(1+x^2\right)-8x\cdot\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^3} =$$

$$= \frac{-4x-4x^3-8x+8x^3}{\left(1+x^2\right)^3} = \frac{4x^3-12x}{\left(1+x^2\right)^3} = \frac{4x\left(x^2-3\right)}{\left(1+x^2\right)^3}.$$

$$f'''(-1) = \frac{-4(1-3)}{(1+1)^3} = \frac{8}{8} = 1 \neq 0 \Rightarrow P.\ I.\ para\ x = -1.$$

$$f(-1) = L(1 + 1) = L2 \Rightarrow \underline{P.\ I. \Rightarrow A(-1,\ L2)}.$$

Teniendo en cuenta que $f(x)$ es par, por ser $f(-x) = f(x) \Rightarrow \underline{P.\ I.\ \Rightarrow B(1,\ L2)}$.

$b)$

La recta $y = -x - 1 + L2$ tiene de pendiente $m = -1$. La pendiente de una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto:

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow -1 = \frac{2x}{1+x^2};\quad -1 - x^2 = 2x;\quad x^2 + 2x + 1 = 0;$$

$(x + 1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1.$ $\qquad f(-1) = L(1 + 1) = L2 \Rightarrow A(-1,\ L2).$

$$\underline{La\ recta\ y = -x - 1 + L2\ es\ tangente\ a\ f(x) = L\left(1 + x^2\right)\ en\ A(-1,\ L2)}.$$

Otra forma de hacer el ejercicio es verificando si los puntos de inflexión satisfacen la ecuación de la recta tangente:

$Punto\ de\ inflexión\ A(-1,\ L2)$:

$y = -x - 1 + L2 \qquad A(-1,\ L2)\ \} \Rightarrow L2 = -(-1) - 1 + L2 = 1 - 1 + L2 = L2$

.

$$\underline{La\ recta\ y = -x - 1 + L2\ es\ tangente\ a\ f(x) = L\left(1 + x^2\right)\ en\ A(-1,\ L2)}.$$

$Punto\ de\ inflexión\ B(1,\ L2)$:

$y = -x - 1 + L2 \qquad B(1,\ L2)\ \} \Rightarrow L2 = -1 - 1 + L2 = -2 + L2 = L2 \Rightarrow No\ se\ s$

.

$$\underline{La\ recta\ y = -x - 1 + L2\ no\ es\ tangente\ a\ f(x) = L\left(1 + x^2\right)\ en\ B(1,\ L2)}.$$

****

4º) Calcule la suma de integrales definidas: $\int_0^{e-1} \frac{1}{x+1} \cdot dx + \int_0^{\pi} \cos cos\, x \cdot e^{sen\, x} \cdot dx$.

$$I_1 = \int_0^{e-1} \frac{1}{x+1} \cdot dx \Rightarrow \{x = e - 1 \rightarrow t = e \; x = 0 \rightarrow t = 1\} \Rightarrow \int_1^{e} \frac{1}{t} \cdot dt = [Lt]_1^e =$$

$$= Le - L1 = 1 - 0 = 1.$$

$$I_2 = \int_0^{\pi} \cos cos\, x \cdot e^{sen\, x} \cdot dx \Rightarrow \{x = \pi \rightarrow t = 0 \; x = 0 \rightarrow t = 0\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^0 e^t \cdot dt = \left[e^t\right]_0^0 = e^0 - e^0 = 1 - 1 = 0.$$

$$\underline{\int_0^{e-1} \frac{1}{x+1} \cdot dx + \int_0^{\pi} \cos cos\, x \cdot e^{sen\, x} \cdot dx = 1 + 0 = 1.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Determine la relación que debe existir entre los parámetros x e y para que las matrices $A = (x\ 1\ 1\ y\ )$ y $B = (1\ x\ y\ 1\ )$ conmuten, es decir, para que $A \cdot B = B \cdot A$.

$$A \cdot B = (x\ 1\ 1\ y\ ) \cdot (1\ x\ y\ 1\ ) = \left(x + y\ x^2 + 1\ 1 + y^2\ x + y\ \right).$$

$$B \cdot A = (1\ x\ y\ 1\ ) \cdot (x\ 1\ 1\ y\ ) = (x + x\ 1 + xy\ xy + 1\ y + y\ ).$$

$$A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow \left(x + y\ x^2 + 1\ 1 + y^2\ x + y\ \right) = (x + x\ 1 + xy\ xy + 1\ y + y\ ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{x + y = 2x\ x^2 + 1 = 1 + xy\ 1 + y^2 = xy + 1\ x + y = 2y \right\} \Rightarrow x = y.$$

<u>*El producto de las matrices A y B es conmutativo para $x = y$.*</u>

****

2º) Dados en R^3 los planos $\pi_1 \equiv x + y - z = 1$ y $\pi_2 \equiv x - y + z = 1$, obtenga el conjunto H de los puntos de R^3 que distan igual de dichos planos.

La distancia de un punto a un plano es $d(P,\ \pi) = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Aplicada al punto genérico $P(x,\ y,\ z)$ y a los planos $\pi_1 \equiv x + y - z = 1$ y $\pi_2 \equiv x - y + z = 1$:

$d\left(P,\ \pi_1\right) = \frac{|x+y-z-1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}$. $\qquad$ $d\left(P,\ \pi_2\right) = \frac{|x-y+z-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}$.

$d\left(P,\ \pi_1\right) = d\left(P,\ \pi_2\right) \Rightarrow \frac{|x+y-z-1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{|x-y+z-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}$; $\frac{|x+y-z-1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|x-y+z-1|}{\sqrt{1+1+1}}$;

$\frac{|x+y-z-1|}{\sqrt{3}} = \frac{|x-y+z-1|}{\sqrt{3}} \Rightarrow |x + y - z - 1| = |x - y + z - 1| \Rightarrow$

$\Rightarrow x + y - z - 1 = x - y + z - 1\ x + y - z - 1 =- x + y - z + 1 \}\ y - z =-$
.

$\underline{El\ conjunto\ H\ pedido\ es\ la\ recta\ r \equiv \{y - z = 0\ x - 1 = 0}$.

****

3º) a) Enuncie el teorema de Bolzano.

b) Utilizando el teorema de Bolzano, encuentre un intervalo de la recta real en el que la función polinómica $p(x) = 3x^3 - x + 1$ tenga alguna raíz.

c) Utilizando el teorema de Bolzano, demuestre que las gráficas de las siguientes funciones: $f(x) = e^x + L(1 + x^2)$ y $g(x) = e^x + 1$ se cortan en algún punto.

----

a)

El teorema de Bolzano dice que "si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$".

b)

La función $p(x) = 3x^3 - x + 1$, por ser polinómica, es continua en R, por lo cual le es aplicable el teorema de Bolzano a cualquier intervalo finito que se considere.

Considerando el intervalo $[-1, 0]$ y aplicando el teorema de Bolzano a $p(x)$:

$$p(-1) = 3\cdot(-1)^3 - (-1) + 1 = -3 + 1 + 1 = -1 < 0.$$

$$p(0) = 3\cdot 0^3 - 0 + 1 = 1 > 0.$$

$\underline{La\ función\ p(x) = 3x^3 - x + 1\ tiene\ alguna\ raíz\ en\ el\ intervalo\ (-1, 0).}$

c)

Demostrare que las gráficas de las funciones: $f(x) = e^x + L(1 + x^2)$ y $g(x) = e^x + 1$ se cortan en algún punto es equivalente a demostrar que la función $h(x)$, que resulta de la igualación de $f(x)$ y $g(x)$ tiene una raíz en un intervalo finito considerado.

$$h(x) \Rightarrow f(x) = g(x) \Rightarrow e^x + L(1 + x^2) = e^x + 1 \Rightarrow h(x) = L(1 + x^2) - 1.$$

La función $h(x) = L(1 + x^2) - 1$ es continua en R, por lo cual le es aplicable el teorema de Bolzano a cualquier intervalo finito que se considere.

Considerando el intervalo $[0, 2]$ y aplicando el teorema de Bolzano a la función $h(x) = L(1 + x^2) - 1$:

$$h(0) = L(1 + 0) - 1 = L1 - 1 = 0 - 1 = -1 < 0.$$

$h(2) = L\left(1 + 2^2\right) - 1 = L5 - 1 \cong 1,61 - 1 > 0.$

$\underline{Las\ funciones\ f(x)\ y\ g(x)\ se\ cortan\ en\ alg\acute{u}n\ punto\ del\ intervalo\ (0,\ 2).}$

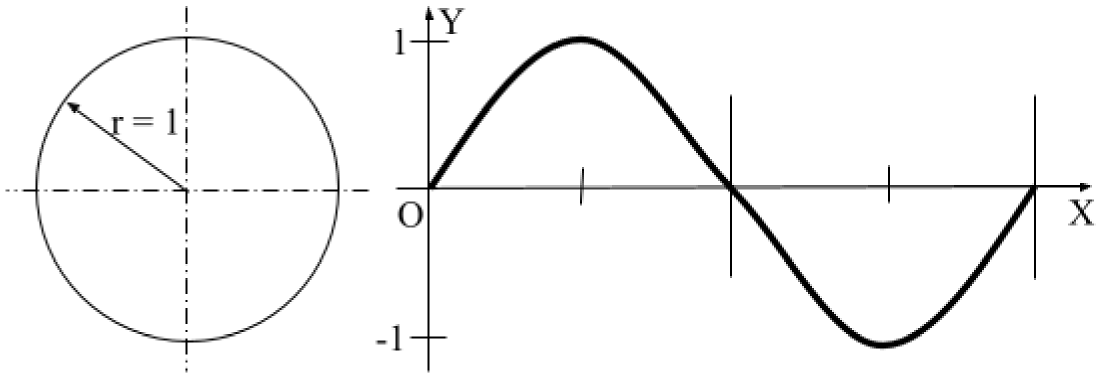
****

4º) a) Represente, aproximadamente, la gráfica de la función $g(x) = sen\,(2x)$ definida en el intervalo $[0,\ \pi]$.

b) Calcule el área de la región limitada por la gráfica de la función $g(x) = sen\,(2x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$.

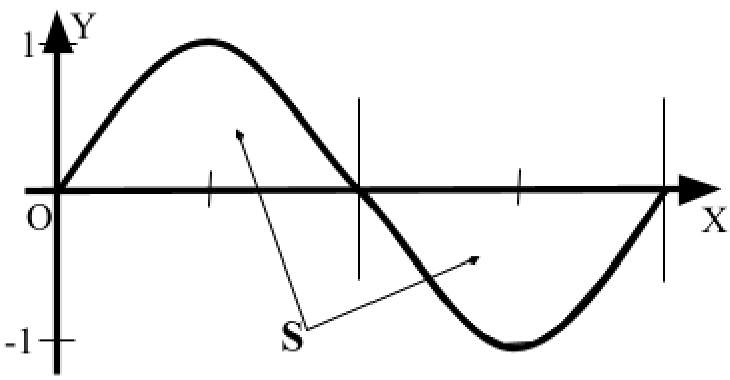
----

a)



b)

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente, teniendo en cuenta el valor de la integral indefinida $\int sen\,(2x)\cdot dx$:



$\int sen\,(2x)\cdot dx \Rightarrow \left\{2x = t\ dx = \frac{1}{2}\cdot dt\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\int sen\ t\cdot dt = -\frac{1}{2}\cdot \cos cos\ t = -\ \frac{1}{2}\cdot \cos cos$

.

$$S = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sen\,(2x)\cdot dx + \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} sen\,(2x)\cdot dx = -\frac{1}{2}\cdot[\cos cos\,(2x)\,]_{0}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\cdot[\cos cos\,(2x)\,]_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot[\cos cos\,(2x)\,]_{\frac{\pi}{2}}^{0} + \frac{1}{2}\cdot[\cos cos\,(2x)\,]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{1}{2}\cdot(\cos cos\,0\ -\ \cos cos\,\pi\,) + \frac{1}{2}\cdot(\cos cos$$

$$= \frac{1}{2}\cdot[1 - (-\ 1)] + \frac{1}{2}\cdot[1 - (-\ 1)] = \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 2 = 1 + 1 = 2.$$

$$\underline{S = 2\,u^{2}}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE GALICIA

JUNIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá responder solo a los ejercicios de una de las opciones.

OPCIÓN A

1º) a) Calcula los posibles valores de a, b, c para que la matriz $A = (a\ b\ 0\ c\ )$ verifique la relación $(A - 2I)^2 = O$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y O la matriz nula de orden 2.

b) ¿Cuál es la solución de un sistema homogéneo de dos ecuaciones con dos incógnitas, si la matriz de coeficientes es $A = (a\ b\ 0\ c\ )$ verificando la relación $(A - 2I)^2 = O$?

c) Para $a = b = c = 2$, calcula la matriz X que verifica $A \cdot X = A^{-1} \cdot B$, siendo la matriz $B = (4\ 1\ 0\ 0\ 1\ 4\ )$.

----

a)

$$A - 2I = (a\ b\ 0\ c\ ) - (2\ 0\ 0\ 2\ ) = (a - 2\ b\ 0\ c - 2\ ).$$

$$(A - 2I)^2 = (a - 2\ b\ 0\ c - 2\ ) \cdot (a - 2\ b\ 0\ c - 2\ ) =$$

$$= \left[(a - 2)^2\ ab - 2b + bc - 2b\ 0\ (c - 2)^2\right] = (0\ 0\ 0\ 0\ ) \Rightarrow \{(a - 2)^2 \quad b(a + c -$$

$\Rightarrow \underline{a = 2,\ b = \lambda,\ c = 2,\ \forall\lambda \in R}$.

b)

La matriz de coeficientes es $A = (2\ 0\ 0\ 2\ )$ y el sistema: $2x = 0\ 2y = 0\ \}$, equivalente al sistema $x = 0\ y = 0\ \}$.

$\underline{Solución: x = y = \lambda,\ \forall\lambda \in R}$.

c)

La matriz resulta $A = (2\ 2\ 0\ 2\ )$.

$A \cdot X = A^{-1} \cdot B$. Multiplicando por la izquierda los dos términos por A^{-1}:

$$A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot A^{-1}\cdot B;\ \ I\cdot X = \left(A^{-1}\right)^{2}\cdot B \Rightarrow \underline{X = \left(A^{-1}\right)^{2}\cdot B}. \quad (1)$$

$$(I) = (1\ 0\ 0\ 1) \Rightarrow \left\{F_1 \to \frac{1}{2}F_1\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\ 0\ 0\ 1\right) \Rightarrow \left\{F_2 \to \frac{1}{2}F_2\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\ 0\ 0\ \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \left\{F_1 \to F_1 - F_2\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{2}\right)\ A^{-1} = \frac{1}{2}(1\ \ -\ 1\ 0\ 1).$$

$$\left(A^{-1}\right)^{2} = \frac{1}{2}(1\ \ -\ 1\ 0\ 1)\cdot\frac{1}{2}(1\ \ -\ 1\ 0\ 1) = \frac{1}{4}\cdot(1\ \ -\ 2\ 0\ 1).$$

Sustituyendo el valor de $\left(A^{-1}\right)^{2}$ obtenido en (1) y operando:

$$X = \left(A^{-1}\right)^{2}\cdot B = \frac{1}{4}\cdot(1\ \ -\ 2\ 0\ 1)\cdot(4\ 1\ 0\ 0\ 1\ 4) = \frac{1}{4}(4\ \ -\ 1\ \ -\ 8\ 0\ 1\ 4).$$

$$\underline{X = \frac{1}{4}\cdot(4\ \ -\ 1\ \ -\ 8\ 0\ 1\ 4).}$$

****

2º) Dada la recta : $r \equiv \{x = 3 - 2\lambda \; y = 1 - \lambda \;\; z = 4 + \lambda$:

a) Determina la ecuación implícita del plano π que pasa por el punto $P(2, 1, 2)$ y es perpendicular a r. Calcula el punto de intersección de r y π.

b) Calcula la distancia del punto $P(2, 1, 2)$ a la recta r.

c) Calcula el punto simétrico del punto $P(2, 1, 2)$ respecto a la recta r.

----

a)

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (2, 1, - 1)$.

El haz β de planos perpendiculares a r es $\beta \equiv 2x + y - z + D = 0$.

El plano $\pi \in \beta$ pedido es el que contiene al punto $P(2, 1, 2)$:

$\beta \equiv 2x + y - z + D = 0 \; P(2, 1, 2) \} \Rightarrow 2 \cdot 2 + 1 - 2 + D = 0; \;\; 3 + D = 0 \rightarrow D =- 3$.

$$\underline{\pi \equiv 2x + y - z - 3 = 0}.$$

El punto Q de intersección de r con π es el siguiente:

$\pi \equiv 2x + y - z - 3 = 0 \qquad r \equiv \{x = 3 - 2\lambda \; y = 1 - \lambda \;\; z = 4 + \lambda \;\; \} \Rightarrow 2 \cdot (3 - 2\lambda$

$6 - 4\lambda + 1 - \lambda - 4 - \lambda - 3 = 0; \;\; - 6\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0 \; \Rightarrow \; \underline{Q(3, 1, 4)}$.

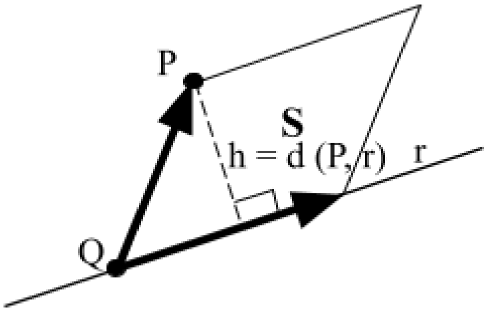
b)

Un punto de r es $Q(3, 1, 4)$.

Los puntos $Q(3, 1, 4)$ y $P(2, 1, 2)$ determinan el vector $\overrightarrow{QP} = (- 1, 0, - 2)$.

La distancia de un punto a una recta puede determinarse teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que forman dos vectores es el módulo de su producto vectorial y, de forma geométrica, es el producto de la base por la altura.

Para una mejor comprensión del proceso se hace un dibujo de la situación.



$$\left.\begin{array}{l} S = \left|\vec{v}_r \wedge \vec{QP}\right| \\ S = \left|\vec{v}_r\right| \cdot h \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\vec{v}_r \wedge \vec{QP}\right| = \left|\vec{v}_r\right| \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{h = d(P, r) = \frac{\left|\vec{v}_r \wedge \vec{QP}\right|}{\left|\vec{v}_r\right|}}.$$

Aplicando la fórmula al punto P y a la recta r:

$$d(P, r) = \frac{\left|\vec{v}_r \wedge \vec{QP}\right|}{\left|\vec{v}_r\right|} = \frac{\left\|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}\right\|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{|-2i+j+k+4j|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{|-2i+5j+k|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{(-2)^2+5+1^2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{4+25}}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{30}{6}} = \sqrt{5}.$$

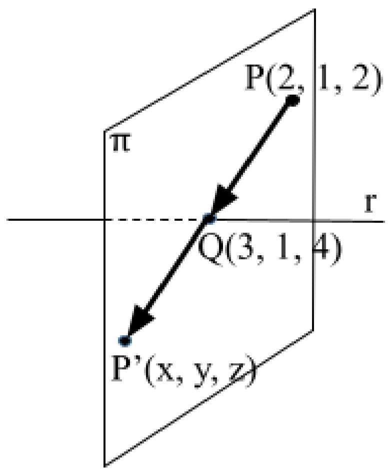
$$\underline{d(P,\ r) = \sqrt{5}\ unidades}.$$

$c)$

El plano perpendiculares a r que contiene a P es $\pi \equiv x + 2y + z - 3 = 0$ y el punto de corte de r y π es $Q(3,\ 1,\ 4)$.

Para que P’ sea el simétrico de P con respecto a r tiene que cumplirse que:

$$\vec{PQ} = \vec{QP'} \Rightarrow [Q - P] = \left[P' - Q\right];$$



$[(3,\ 1,\ 4) - (2,\ 1,\ 2)] = [(x,\ y,\ z) - (3,\ 1,\ 4)];$

$(1,\ 0,\ 2) = (x - 3,\ y - 1,\ z - 4) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} x - 3 = 1 \rightarrow x = 4 \\ y - 1 = 0 \rightarrow y = 1 \\ z - 4 = 2 \rightarrow z = 6 \end{cases}\right\} \Rightarrow \underline{P'(4,\ 1,\ 6)}.$$

****

3º) Dibuja la gráfica de $f(x) = \frac{2x^2}{x-1}$ estudiando: dominio, simetrías, puntos de corte con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, puntos de inflexión e intervalos de concavidad y convexidad.

Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto los valores de x que anulan el denominador: $\underline{D(f) \Rightarrow R - \{1\}}$.

La función $f(x) = \frac{2x^2}{x-1}$ no es par ni impar, por lo cual:

$$\underline{La\ función\ f(x)\ no\ tiene\ ninguna\ simetría}.$$

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

Eje Y$\Rightarrow x = 0 \rightarrow O(0,\ 0)$. Eje X $\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^2}{x-1} = 0 \Rightarrow x = 0 \rightarrow O(0,\ 0)$.

$$\underline{El\ único\ punto\ de\ corte\ con\ los\ ejes\ de\ f(x)\ es\ el\ origen\ de\ coordenadas}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma y = k y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$k = f(x) = \frac{2x^2}{x-1} = \infty \Rightarrow$ $\underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}$.

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow$ $\underline{La\ recta\ x = 1\ es\ asíntota\ vertical}$.

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{2x^2}{x-1}}{x} = \frac{2x^2}{x^2-x} = 2.$$

$$n = \left[\frac{f(x)}{x} - mx\right] = \left(\frac{2x^2}{x-1} - 2x\right) = \frac{2x^2-2x^2+2x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x-1} = 2.$$

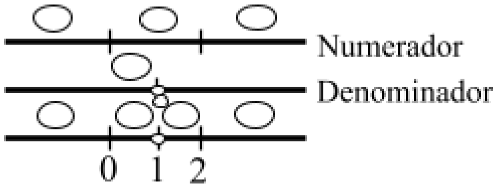
$$\underline{La\ recta\ y = 2x + 2\ es\ asíntota\ oblicua}.$$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{4x\cdot(x-1)-2x^2\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{4x^2-4x-2x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-4x}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x(x-2)}{(x-1)^2} = 0;\ 2x(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2.$$

De la observación de la figura se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:



$$\underline{Crecimiento\colon (-\infty,\ 0) \cup (2,\ +\infty)}.$$

$$\underline{Decrecimiento\colon (0,\ 1) \cup (1,\ 2)}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto. Esta condición necesaria no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; se es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{(4x-4)\cdot(x-1)^2-2x(x-2)\cdot[2\cdot(x-1)\cdot 1]}{(x-1)^4} = \frac{4(x-1)\cdot(x-1)-4x(x-2)}{(x-1)^3} =$$

$$= \frac{4(x-1)^2-4x^2+8x}{(x-1)^3} = \frac{4\left(x^2-2x+1\right)-4x^2+8x}{(x-1)^3} = \frac{4x^2-8x+4-4x^2+8x}{(x-1)^3} = \frac{4}{(x-1)^3}.$$

$$f''(0) = \frac{4}{-1} = -4 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = \frac{0}{0-1} = 0 \Rightarrow \underline{Máximo\colon O(0,\ 0)}.$$

$$f''(2) = \frac{4}{1} = 4 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 2.$$

$$f(2) = \frac{2\cdot 2^2}{2-1} = 8 \Rightarrow \underline{Mínimo\colon A(2,\ 8)}.$$

Para que una función tenga un punto de inflexión es condición necesaria que se anule su segunda derivada:

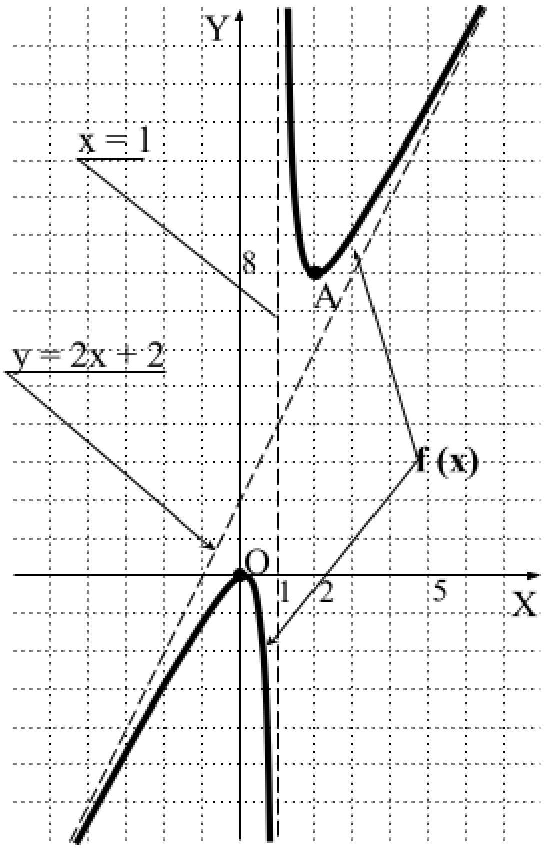
$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{4}{(x-1)^3} = 0 \Rightarrow x \notin R\ \Rightarrow \underline{No\ tiene\ puntos\ de\ inflexión}.$$

Una función es cóncava ($\cap$) o convexa ($\cup$) cuando su segunda derivada es negativa o positiva, respectivamente.

$$\underline{Concavidad\ (\cap):\ f''(x) < 0 \Rightarrow x < 1 \Rightarrow \in (-\infty,\ 1)}.$$

$$\underline{Convexidad\ (\cup):\ f''(x) > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow \in (1,\ +\infty)}.$$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



****

4º) a) Define primitiva de una función y enuncia la regla de Barrow.

b) Dada la función $f(x) = ax^3 + bx + c$, determina a, b y c sabiendo que $y = 2x + 1$ es la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto correspondiente a la abscisa $x = 0$ y que $\int_0^1 f(x) \cdot dx = 1$.

----

a)

La función $F(x)$ es función primitiva de la función $f(x)$ en el intervalo cerrado $[a, b]$ cuando $F'(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$.

Si $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$ y C es constante, la función $F(x) + C$ también es una primitiva de $f(x)$, lo que significa que una función tiene infinitas funciones primitivas, todas aquellas que se diferencian de $f(x)$ en una constate.

Al conjunto de las infinitas funciones primitivas de la función $f(x)$ se denomina integral indefinida de $f(x)$ y se expresa de la forma: $\int f(x) \cdot dx = F(x) + C$.

El enunciado de la regla de Barrow es el siguiente:

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$ en dicho intervalo, entonces se verifica la siguiente igualdad:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = F(b) - F(a).$$

b)

La pendiente de la tangente a una función en un punto es el valor de su derivada en ese punto. La pendiente de la recta tangente $y = 2x + 1$ es $m = 2$.

$f'(x) = 3ax^2 + b$.

$f'(0) = 2 \Rightarrow 3a \cdot 0 + b = 2 \Rightarrow \underline{b = 2}$.

El punto de tangencia es común a la función y a su recta tangente, por lo cual:

$y = 2x + 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 1$. El punto de tangencia es $P(0, 1)$.

$f(0) = 1 \Rightarrow a \cdot 0^3 + 2 \cdot 0 + c = 1 \Rightarrow \underline{c = 1}$.

La función resulta $f(x) = ax^3 + 2x + 1$.

$$\int f(x)\cdot dx = \int f\left(ax^3 + 2x + 1\right)\cdot dx = \frac{ax^4}{4} + x^2 + x + K.$$

$$\int_0^1 f(x)\cdot dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 (ax^3 + 2x + 1)\cdot dx \left[\frac{ax^4}{4} + x^2 + x\right]_0^1 = 1;$$

$$\left(\frac{a}{4} + 1^2 + 1\right) - 0 = 1; \ \frac{a}{4} + 2 = 1; \ \frac{a}{4} = -1 \Rightarrow \underline{a = -4}.$$

La función resulta, finalmente: $\underline{f(x) = -4x^3 + 2x + 1}$.

****

OPCIÓN B

1º) $a)$ Discute, según los valores de m, el sistema: $\{x + y - z = 1 \quad x + my + 3z = m \; 2x + 3y + mz = 3$.

$b)$ Resuelve, si es posible, para m = 2.

$a)$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A = (1 \; 1 \; -1 \; 1 \; m \; 3 \; 2 \; 3 \; m)$ y $A' = (1 \; 1 \; -1 \; 1 \; m \; 3 \; 2 \; 3 \; m \quad 1 \; m \; 3)$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro m es el siguiente:

$|A| = |1 \; 1 \; -1 \; 1 \; m \; 3 \; 2 \; 3 \; m| = m^2 - 3 + 6 + 2m - 9 - m = m^2 + m - 6 =$

$m = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow m_1 = -3, \; m_2 = 2.$

$\underline{Para \{m \neq -3 \; m \neq 2\} \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

Por ser en $A' \rightarrow F_2 = F_4$ es $Rang\ A' = Rang\ A, \; \forall m \in R.$

$\underline{Para \{m = -3 \; m = 2\} \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

$b)$

Para $m = 2$ el sistema resulta: $x + y - z = 1 \;\; x + 2y + 3z = 2 \; 2x + 3y + 2z = 3\}$. Despreciando una de las ecuaciones (tercera) y haciendo $z = \lambda$, resulta:

$x + y = 1 + \lambda \; x + 2y = 2 - 3\lambda\} \quad -x - y = -1 - \lambda \; x + 2y = 2 - 3\lambda\} \Rightarrow y = 1$

.

$x = 1 + \lambda - (1 - 4\lambda) = 1 + \lambda - 1 + 4\lambda = 5\lambda.$

$\underline{Solución: x = 5\lambda, \; y = 1 - 4\lambda, \; z = \lambda, \; \forall \lambda \in R.}$

****

2º) Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 4 + 2\lambda \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x-4}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-5}{4}$:

$a)$ Estudia su posición relativa. Calcula la ecuación implícita o general del plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo a r y a s.

$b)$ Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta que corta perpendicularmente a las rectas r y s.

$a)$

Un punto y un vector director de r son $A(3, -1, 4)$ y $\overrightarrow{v_r} = (1, 0, 2)$.

Un punto y un vector director de s son $B(4, 3, 5)$ y $\overrightarrow{v_s} = (3, -1, 4)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independiente por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\overrightarrow{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = [B - A] = [(4, 3, 5) - (1, 0, 2)] = (3, 3, 3)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 18 + 6 - 12 = 24 - 15 = 9 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rang\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\} = 3 \Rightarrow \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w} \text{ no son coplanarios.}$$

$$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan}.$$

El plano β pedido tiene la siguiente ecuación general o implícita:

$$\beta(O; \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad 6y - z + 2x - 4y = 0.$$

$\underline{\beta \equiv 2x + 2y - z = 0}.$

b)

Para determinar la perpendicular común a las rectas r y s se hace lo siguiente:

En primer lugar determinamos un vector $\vec{p}$, perpendicular a los vectores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$, que es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de estos vectores:

$$\vec{p} = \vec{v}_r \wedge \vec{v}_s = | i\ j\ k\ 1\ 0\ 2\ 3\ \ -1\ 4 | = 6j - k + 2i - 4j \Rightarrow \vec{p} = (2,\ 2,\ -1).$$

Determinamos dos planos π_1 y π_2 de las siguientes características:

$$\pi_1\left(A;\ \vec{v}_r,\ \vec{p}\right) \equiv | x - 3\ y + 1\ z - 4\ 1\ 0\ 2\ 2\ 2\ \ -1 | = 0;$$

$$4(y + 1) + 2(z - 4) - 4(x - 3) + (y + 1) = 0;\ 4(x - 3) - 5(y + 1) - 2(z - 4);$$

$$4x - 12 - 5y - 5 - 2z + 8 = 0 \Rightarrow \vec{\pi}_1 \equiv 4x - 5y - 2z - 9 = 0.$$

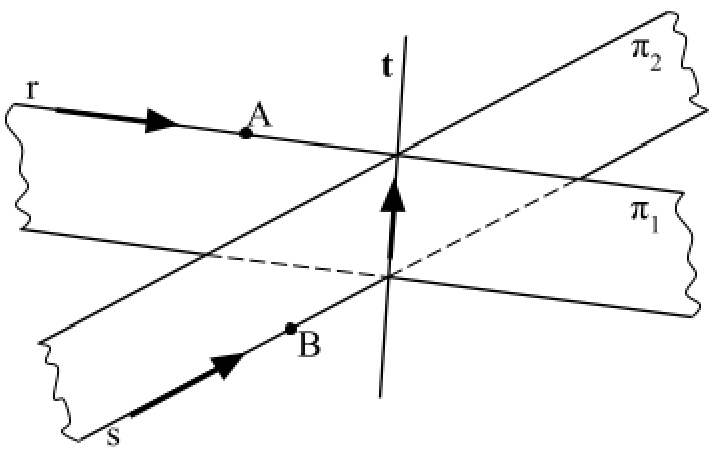
$$\pi_2\left(B;\ \vec{v}_s,\ \vec{p}\right) \equiv | x - 4\ y - 3\ z - 5\ 3\ \ -1\ 4\ 2\ 2\ \ -1 | = 0;$$

$$(x - 4) + 8(y - 3) + 6(z - 5) + 2(z - 5) - 8(x - 4) + 3(y - 3) =$$

$$-7(x - 4) + 11(y - 3) + 8(z - 5) = -7x + 28 + 11y - 33 + 8z - 40 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\pi}_2 \equiv 7x - 11y - 8z + 45 = 0.$$

El esquema siguiente aclara lo que se acaba de hacer.



La recta t es la intersección de los planos π_1 y π_2: $t \equiv \{ 4x - 5y - 2z - 9 = 0 \quad 7x - 11y - 8z + 45 = 0$.

Para expresar t por unas ecuaciones paramétricas hacemos $y = \lambda$:

$4x - 2z = 9 + 5\lambda \quad 7x - 8z = - 45 + 11\lambda \} \quad 16x - 8z = 36 + 20\lambda \ - 7x + 8z$

$\Rightarrow x = 9 + \lambda;\ 2z = 4x - 9 - 5\lambda = 36 + 4\lambda - 9 - 5\lambda = 27 - \lambda \Rightarrow z = \frac{27}{2} - \frac{1}{2}\lambda$

.

$\underline{t \equiv \{ x = 9 + \lambda \quad y = \lambda \quad z = 13,5 - 0,5\lambda}$.

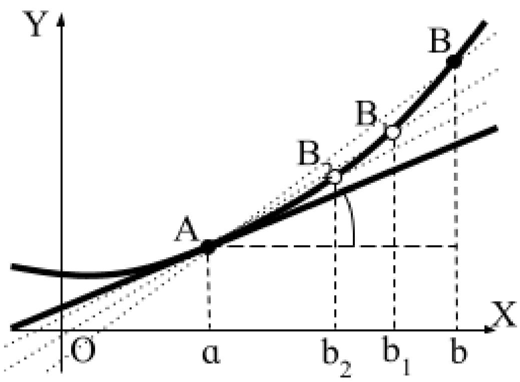
****

3º) a) Definición e interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto.

b) Calcula los valores de $b\ y\ c$ para que la función $f(x) = \{L\left(e + x^2\right)\ si\ x < 0\ x^2 + bx + c\ si\ x \geq 0$ sea derivable en x = 0. (Nota: L = logaritmo neperiano)

----

a)



Considerando la función $f(x)$ de la figura, continua en el punto A, de abscisa ɑ, se denomina tasa de variación media de un intervalo cerrado $[a,\ b]$ a la expresión:

$TVM[a,\ b] = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. (1)

La $TVM[a,\ b]$ es la tangente o pendiente de la secante a la función $f(x)$ que pasa por los puntos A y B.

La derivada de una función en un punto es la tasa de variación instantánea de la función en ese punto, o sea, es el límite cuando $b \to a$ de la fracción (1). Si hacemos el cambio de variable $h = b - a$, queda finalmente la expresión de la derivada, que se expresa de este modo: $f'(a) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

La interpretación gráfica de la derivada de una función en un punto puede deducirse de la observación de la figura: cuando b tiende a ɑ (h tiende a cero), el punto B tiende a aproximarse infinitamente al punto A, con lo cual la secante tiende a confundirse con la tangente; es decir:

$\underline{La\ derivada\ de\ una\ función\ en\ un\ punto\ es\ la\ recta\ tangente\ en\ ese\ punto}.$

b)

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto.

La función f(x) es continua en $\forall a, b \in R$. Se trata de determinar los valores de b y c para que sea derivable en el punto crítico $x = 0$.

Para que la función sea continua en x = 0 es necesario que sus límites laterales sean iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$f(x) = L\left(e + x^2\right) = 1 \qquad f(x) = \left(x^2 + bx + c\right) = c = f(0) \} \Rightarrow \underline{c = 1}$

.

Una función es derivable en un punto cuando existen las derivadas laterales en ese punto y además son iguales:

$f'(x) = \{ \frac{2x}{e+x^2} \ si\, x < 0 \ 2x + b \ si\, x \geq 0$. $f'(0^-) = 0$. $f'(0^+) = b$.

$f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow \underline{b = 0}$.

****

4º) La gráfica de una función $f(x)$ pasa por el origen de coordenadas y su derivada es $f'(x) = (2-x)\cdot e^{3x}$. Determina la función $f(x)$ y calcula los intervalos de concavidad y convexidad de $f(x)$.

$$f(x)=\int f'(x)\cdot dx=\int (2-x)\cdot e^{3x}dx \Rightarrow \begin{cases} 2-x=u \rightarrow du=-dx \\ e^{3x}\cdot dx=dv \rightarrow v=\frac{1}{3}e^{3x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2-x)\cdot\frac{1}{3}e^{3x}-\int\frac{1}{3}e^{3x}\cdot(-dx)=\frac{1}{3}e^{3x}(2-x)+\frac{1}{3}\cdot\int e^{3x}\cdot dx=$$

$$=\frac{1}{3}e^{3x}(2-x)+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}e^{3x}+C=\frac{1}{9}e^{3x}\cdot[3(2-x)+1]+C=\frac{1}{9}e^{3x}(7-3x)+C.$$

$$f(0)=0 \Rightarrow \frac{1}{9}e^{0}\cdot 7+C=0;\ \ \frac{7}{9}+C=0 \Rightarrow C=-\frac{7}{9}.$$

$$f(x)=\frac{1}{9}e^{3x}(7-3x)-\frac{7}{9}.$$

$$\underline{f(x)=\frac{1}{9}\left[e^{3x}(7-3x)-7\right]}.$$

Una función es cóncava ($\cap$) o convexa ($\cup$) cuando su derivada es negativa o positiva, respectivamente.

Sabiendo que $f'(x)=(2-x)\cdot e^{3x}$:

$$f''(x)=-e^{3x}+(2-x)\cdot 3\cdot e^{3x}=e^{3x}(-1+6-3x)=e^{3x}(5-3x).$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow e^{3x}(5-3x)=0;\ \ 5-3x=0 \rightarrow x=\frac{5}{3}.$$

Teniendo en cuenta que $f(x)$ es continua en R, los periodos de concavidad y convexidad son los siguientes:

$$\underline{Concavidad\ (\cap) \Rightarrow f''(x)<0 \Rightarrow \left(-\infty,\ \frac{5}{3}\right)}.$$

$$\underline{Convexidad\ (\cup) \Rightarrow f''(x)>0 \Rightarrow \left(\frac{5}{3},\ +\infty\right)}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE GALICIA

SEPTIEMBRE – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá responder solo a los ejercicios de una de las opciones.

OPCIÓN A

1º) $a)$ Definir menor complementario y menor adjunto de un elemento de una matriz cuadrada.
b) Dada la matriz $A = (1 \ - \ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ )$:
$i)$ Calcula el rango, de acuerdo con los valores de λ de $A - \lambda I$, siendo I la matriz unitaria de orden 3.

$ii)$ Calcular la matriz X que verifica $X \cdot A - 2A = 3X$.

$a)$

Se denomina menor complementario de un elemento de un determinante de una matriz cuadrada al determinante que resulta de eliminar la fila y la columna del elemento considerado.

Ejemplos:

$|3 \ - \ 2\ 4\ 5$ ❹ $- \ 1\ 2\ 5\ 5\ | \Rightarrow Menor\ complementario\ de$ ❹ $\Rightarrow |3\ 4\ 2\ 5\ |$.

$|1 \ - \ 2\ 4\ 3\ 0 \ - \ 1$ ❷ $2 \ - \ 3\ | \Rightarrow Menor\ complementario\ de$ ❷ $\Rightarrow | - \ 2\ 4\ 0 \ - \ 1\ |$
.

Se denomina menor adjunto de un elemento de un determinante de una matriz cuadrada al menor complementario correspondiente del elemento precedido del signo más o menos según que la suma de los subíndices del elemento sea par o impar, respectivamente.

Siendo el elemento
$a_{ij} \Rightarrow \{ i + j \rightarrow par \rightarrow signo + \quad i + j \rightarrow impar \rightarrow signo - \ .$

Ejemplos:

$|3 \ -\ 2\ 4\ 5$ ❹ $-\ 1\ 2\ 5\ 5\ | \Rightarrow Menor\ adjunto\ de$ ❹ $\Rightarrow\ +\ |3\ 4\ 2\ 5\ |.$

$|1$ ❷ $4\ 3\ 2\ \ -\ 1\ 5\ 2\ 4\ | \Rightarrow Menor\ adjunto\ de$ ❷ $\Rightarrow\ -\ |3\ \ -\ 1\ 5\ 4\ |.$

b)
i)
$A - \lambda I = (1\ \ -\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ ) - (\lambda\ 0\ 0\ 0\ \lambda\ 0\ 0\ 0\ \lambda\ ) = (1 - \lambda\ \ -\ 1\ 1\ 1\ 1 - \lambda\ 1\ 1\ 1\ 1\ -$
.

$|A - \lambda I| = |1 - \lambda\ \ -\ 1\ 1\ 1\ 1 - \lambda\ 1\ 1\ 1\ 1 - \lambda\ | =$

$= (1 - \lambda)^3 - (1 - \lambda) = (1 - \lambda)\left[(1 - \lambda)^2 - 1\right] = (1 - \lambda)\left(1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1\right) =$

$= (1 - \lambda)\left(-\ 2\lambda + \lambda^2\right) = \lambda(1 - \lambda)(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_2 = 2.$

$\underline{Para\ \{\lambda \neq 0\ \lambda \neq 1\ \lambda \neq 2\ \} \Rightarrow Ran\ (A\ -\ 2I) = 3.}$

$Para\ \lambda\ =\ 0 \Rightarrow A\ -\ 2I\ = (1\ \ -\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ ) \Rightarrow |1\ \ -\ 1\ 1\ 1\ | \neq 0.$

$Para\ \lambda\ =\ 1 \Rightarrow A\ -\ 2I\ = (0\ \ -\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ ) \Rightarrow |0\ \ -\ 1\ 1\ 0\ | \neq 0.$

$Para\ \lambda\ =\ 2 \Rightarrow A\ -\ 2I\ = (-\ 1\ \ -\ 1\ 1\ 1\ \ -\ 1\ 1\ 1\ 1\ \ -\ 1\ ) \Rightarrow |-\ 1\ \ -\ 1\ 1\ \ -\ 1\ | \neq 0.$

$\underline{Para\ \{\lambda\ =\ 0\ \lambda\ =\ 1\ \lambda\ =\ 2\ \} \Rightarrow Ran\ (A\ -\ 2I) = 2.}$

ii)
$X \cdot A\ -\ 2A\ =\ 3X;\ \ X \cdot A\ -\ X \cdot 3I\ =\ 2A;\ \ X \cdot (A\ -\ 3I) = 2A \rightarrow A\ -\ 3I\ =\ M \Rightarrow$

$\Rightarrow X \cdot M\ =\ 2A;\ \ X \cdot M \cdot M^{-1}\ =\ 2A \cdot M^{-1};\ \ X \cdot I\ =\ 2A \cdot M^{-1} \Rightarrow \underline{X\ =\ 2A \cdot M^{-1}}.\quad (*)$

$2A\ =\ 2 \cdot (1\ \ -\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ ) = (2\ \ -\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ ).$

$M\ =\ A\ -\ 3I\ = (1\ \ -\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ ) - (3\ 0\ 0\ 0\ 3\ 0\ 0\ 0\ 3\ ) = (-\ 2\ \ -\ 1\ 1\ 1\ \ -\ 2\ 1\ 1\ 1$
.

Se obtiene la inversa de M por el método de Gauss-Jordan.

$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow F_3\right\} \Rightarrow$

$= (0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ ) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow F_2 - F_1\ F_3 \rightarrow F_3 +\ 2F_1\right\} \Rightarrow (0\ 0\ 1\ 0\ 1\ \ -\ 1\ 1\ 0\ 2\ ) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{ F_2 \to -\frac{1}{3}F_2 \right\} \Rightarrow \left(0\ 0\ 1\ 0\ \ -\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ 1\ 0\ 2 \right) \Rightarrow \left\{ F_1 \to F_1 - F_2\, F_3 \to F_3 - F_2 \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(0\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{3}\ 0\ \ -\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ 1\ \frac{1}{3}\ \frac{5}{3} \right) \Rightarrow \left\{ F_3 \to -\frac{1}{2}F_3 \right\} \Rightarrow \left(0\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{3}\ 0\ \ -\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \ -\frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{6}\ \ -$

$\Rightarrow \left\{ F_1 \to F_1 + F_3\, F_2 \to F_2 + F_3 \right\} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\ \frac{1}{6}\ \ -\frac{1}{6}\ \ -\frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{6}\ \ -\frac{5}{6}\right.$

.

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de $2A$ y M^{-1} y operando:

$X = 2A \cdot M^{-1} = (2\ \ -\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2) \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot (3\ \ -\ 1\ 1\ 3\ 3\ 3\ 3\ 1\ 5) =$

$= -\frac{1}{6}(2\ \ -\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2) \cdot (3\ \ -\ 1\ 1\ 3\ 3\ 3\ 3\ 1\ 5) = -\frac{1}{6}(6\ \ -\ 6\ 6\ 18\ 6\ 18\ 18\ 6\ 18) \Rightarrow$

.

****

2º) Dada la recta : $r \equiv \{ 3x - y - z = 0\ \ 2x + y - 4z = 0$:

a) Calcular la ecuación implícita o general del plano que es paralelo a r y que pasa por los puntos $A(0,\ 1,\ 2)$ y $B(5,\ 3,\ 1)$.

b) Calcular el punto de corte de r con el plano perpendicular a dicha recta y que pase por el punto $B(5,\ 3,\ 1)$.

c) Calcular la ecuación implícita o general del plano que es paralelo al plano de ecuación $\pi \equiv 2x - 3y + 4z - 5 = 0$ y dista $\sqrt{29}$ unidades de la recta r.

----

a)

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$r \equiv \{ 3x - y - z = 0\ \ 2x + y - 4z = 0\ \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow 3x - y = \lambda\ 2x + y = 4\lambda \} \Rightarrow 5x =$

$3\lambda - y = \lambda \Rightarrow y = 2\lambda \Rightarrow r \equiv \{ x = \lambda\ \ y = 2\lambda\ z = \lambda$. Un vector director de r es $\vec{v}_r = (1,\ 2,\ 1)$.

Los puntos $A(0,\ 1,\ 2)$ y $B(5,\ 3,\ 1)$ determinan el vector $\vec{AB} = (5,\ 2,\ -1)$.

La ecuación general o implícita del plano γ pedido es la siguiente:

$\gamma\left(A;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{AB}\right) \equiv |x\ y - 1\ z - 2\ 1\ 2\ 1\ 5\ 2\ \ -1\ | = 0;$

$-2x + 5(y-1) + 2(z-2) - 10(z-2) - 2x + (y-1) = 0;$

$-4x + 6(y-1) - 8(z-2) = 0;\ \ -4x + 6y - 6 - 8z + 16 = 0.$

$$\underline{\gamma \equiv 2x - 3y + 4z - 5 = 0}.$$

b)

El haz de planos perpendiculares a r tiene la siguiente expresión implícita o general: $\beta \equiv x + 2y + z + D = 0$.

El plano $\alpha \in \beta$ que contiene al punto $B(5,\ 3,\ 1)$ es el que satisface su ecuación:

$\beta \equiv x + 2y + z + D = 0\ B(5,\ 3,\ 1)\ \} \Rightarrow 5 + 2 \cdot 3 + 1 + D = 0;\ 12 + D = 0 \rightarrow D = -1$
.

El plano α es el siguiente: $\alpha \equiv x + 2y + z - 12 = 0$.
El punto P buscado es la intersección de la recta r con el plano α:

$\alpha \equiv x + 2y + z - 12 = 0 \qquad r \equiv \{x = \lambda\ \ y = 2\lambda\ z = \lambda\ \ \} \Rightarrow \lambda + 2 \cdot 2\lambda + \lambda -$
.

$$\underline{P(2,\ 4,\ 2)}.$$

$c)$

Un vector normal del plano π es $\overrightarrow{n} = (2,\ -3,\ 4)$, que es perpendicular al vector director de la recta r, $\overrightarrow{v_r} = (1,\ 2,\ 1)$ por ser su producto escalar cero:

$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{n} = (2,\ -3,\ 4) \cdot (1,\ 2,\ 1) = 2 - 6 + 4 = 0.$

Lo anterior significa que la recta r y el plano π son paralelos.

Un punto de r es $O(0,\ 0,\ 0)$.

El haz de planos paralelos a π tiene por expresión $\omega \equiv 2x - 3y + 4z + D = 0$.

Se trata de que la distancia del punto O al plano ω sea $\sqrt{29}$.

La distancia del origen al plano $\Delta = Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(O, \Delta) = \frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Aplicando la fórmula al caso que nos ocupa:

$$d(O, \omega) = \sqrt{29} \Rightarrow \frac{|D|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}} = \frac{|D|}{\sqrt{4+9+16}} = \frac{|D|}{\sqrt{29}} = \sqrt{29} \Rightarrow D = \pm 29.$$

Cumplen la condición pedida los planos siguientes:

$$\underline{\omega_1 \equiv 2x - 3y + 4z + 29 = 0 \; y \; \omega_2 \equiv 2x - 3y + 4z - 29 = 0.}$$

****

3º) a) Calcule los valores de ɑ y b para que la función $f(x) = \{ax^2 + bx \; si \; x \leq 1 \;\; \frac{2Lx+2}{x^2} \; si \; x > 1$ sea derivable.

b) Para los valores $a = -4$ y $b = 6$ determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

----

a)

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto.

La función f(x) es continua en $\forall a, b \in R$. Se trata de determinar los valores de ɑ y b para que sea derivable en el punto crítico $x = 1$.

Para que la función sea continua en x = 1 es necesario que sus límites laterales sean iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$f(x) = \left(ax^2 + bx\right) = ɑ + b = f(1) \; f(x) = \frac{2Lx+2}{x^2} = \frac{0+2}{1} = 2 \quad \} \Rightarrow$$

$a + b = 2$ (1)

Una función es derivable en un punto cuando existen las derivadas laterales en ese punto y además son iguales:

$$f'(x) = \{2ax + b \; si \; x \leq 1 \quad -\frac{2(1+2Lx)}{x^3} \; si \; x > 1 \quad (*)$$

(*) $g(x) = \frac{2Lx+2}{x^2} \Rightarrow g'(x) = \frac{\frac{2}{x} \cdot x^2 - (2Lx+2) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2x - 4xLx - 4x}{x^4} = \frac{-2x - 4xLx}{x^4} = \frac{-2-4Lx}{x^3} =$

$= -\frac{2(1+2Lx)}{x^3}.$

$f'\left(1^-\right) = 2ɑ + b.$

$f'\left(1^+\right) = -\frac{2(1+2L1)}{1^3} = -2(1 + 2L1) = -2(1 + 0) = -2.$

$f'\left(1^-\right) = f'\left(1^+\right) \Rightarrow 2a + b = -2.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$a + b = 2 \; 2a + b = -2 \} \quad -a - b = -2 \; 2a + b = -2 \} \Rightarrow \underline{a = -4}, \; \underline{b = 6}$

.

b)

Para $a =- 4$ y $b = 6$ la función es $f(x) = \{- 4x^2 + 6x \; si \; x \leq 1 \; \frac{2Lx+2}{x^2} \quad si \; x > 1$.

$h(x) =- 4x^2 + 6x \Rightarrow h'(x) =- 8x + 6.$ $\qquad h''(x) =- 8$

$h'(x) = 0 \Rightarrow - 8x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4}.$

$h''(x) =- 8 < 0 \Rightarrow Máx. \; par \; x = \frac{3}{4}.$

$g(x) = \frac{2Lx+2}{x^2} \Rightarrow g'(x) =- \frac{2(1+2Lx)}{x^3}.$

$g'(x) = 0 \Rightarrow - \frac{2(1+2Lx)}{x^3} = 0; \; 1 + 2Lx = 0; \; Lx =- \frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{e}}{e} < 1$

.

$e^{-\frac{1}{2}} \notin D(g) \Rightarrow g' < 0, \; \forall x \in D(g).$

Los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$\underline{Crecimiento: \left(- \infty, \frac{3}{4}\right).}$

$\underline{Decrecimiento: \left(\frac{3}{4}, 1\right) \cup (1, + \infty).}$

****

4º) Dibuja y calcula el área de la región limitada por la gráfica de la parábola de ecuación $f(x) = 4x - x^2$ y la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en los puntos correspondientes a x = 0 y x = 2. (Nota: para dibujar la gráfica de la parábola, indicar los puntos de corte con los ejes de coordenadas, su vértice y la concavidad o convexidad).

La pendiente de la tangente de una función en un punto es el valor de la derivada de la función en ese punto.

$f'(x) = 4 - 2x \Rightarrow \{m_1 = f'(0) = 4 \qquad m_2 = f'(2) = 4 - 4 = 0$.

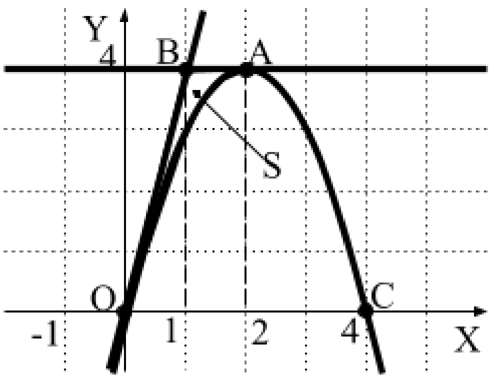
Los puntos de tangencia son los siguientes:

$f(x) = 4x - x^2 \Rightarrow \{f(0) = 0 \rightarrow T_1 \Rightarrow O(0, 0) \qquad f(2) = 8 - 4 = 4 \rightarrow T_2 \Rightarrow A(2, 4)$.

Las rectas tangentes son las siguientes:

$t_1 \Rightarrow y - 0 = 4\cdot(x - 0) \Rightarrow t_1 \equiv y = 4x.$

$t_2 \Rightarrow y - 4 = 0\cdot(x - 2) \Rightarrow t_2 \equiv y = 4.$



El vértice de la parábola es el siguiente:

$f'(x) = 0 \Rightarrow 4 - 2x = 0 \rightarrow x = 2.$

$f(2) = 8 - 4 = 4 \Rightarrow A(2, 4).$

Los puntos de corte de la parábola con los ejes son los siguientes:

Eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow 4x - x^2 = 0;$

$x(4 - x) = 0 \Rightarrow \{x_1 = 0 \Rightarrow O(0, 0) \; x_2 = 4 \Rightarrow C(4, 0)$.

Eje Y: $O(0, 0).$

Por ser $f''(x) = - 2 < 0 \Rightarrow La\ parábola\ f(x)\ es\ cóncava\ (\cap)\ en\ R.$

Todo lo anterior queda expresado en la gráfica adjunta, de la cual se deduce el área a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_0^1 \left[4x - \left(4x - x^2\right)\right] \cdot dx + \int_1^2 \left[4 - \left(4x - x^2\right)\right] \cdot dx =$$

$$= \int_0^1 \left(4x - 4x + x^2\right) dx + \int_1^2 \left(4 - 4x + x^2\right) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 \left(4 - 4x + x^2\right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[4x - \frac{4x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{3} - 0 + \left(4 \cdot 2 - 2 \cdot 2^2 + \frac{2^3}{3}\right) - \left(4 - 2 + \frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{3} + 8 - 8 + \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3} - 2 = \underline{\frac{2}{3}\, u^2 = S}.$$

****

OPCIÓN B

1º) a) Discutir, según los valores de m, el sistema de ecuaciones: $\{x + y + z = m \quad x - y = 0 \qquad 3x + y + 2z = 0$.

b) Resuelve, si es posible, el sistema para m = 0.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A = (1\,1\,1\,1 \ - \ 1\,0\,3\,1\,2\,)$ y $A' = (1\,1\,1\,1 \ - \ 1\,0\,3\,1\,2 \quad m\,0\,0\,)$.

$|A| = |1\,1\,1\,1 \ - \ 1\,0\,3\,1\,2\,| =- 2 + 1 + 3 - 2 = 0 \Rightarrow |1\,1\,1 \ - \ 1\,| \neq 0 \Rightarrow Rang\ A =$

.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro m es el siguiente:

$Rng\ M' = (1\,1\,1\,1 \ - \ 1\,0\,3\,1\,2 \quad m\,0\,0\,) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow F_2 - F_1\ F_3 \rightarrow F_3 - 3F_1\right\} \Rightarrow (1\,1$

$\Rightarrow \left\{F_3 \rightarrow F_3 - F_2\right\} \Rightarrow (1\,1\,1\,0 \ - \ 2 \ - \ 1\,0\,0\,0 \quad m \ - \ m \ - \ 2m\,)$.

$\underline{Para\ m \neq 0 \Rightarrow Rang\ A = 2;\ Rang\ A' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible}$.

b)

Para $m = 0$ el sistema resulta: $\{x + y + z = 0 \quad x - y = 0 \qquad 3x + y + 2z = 0$, que es compatible indeterminado (homogéneo).

Haciendo $x = y = \lambda$, y despreciando la tercera ecuación: $z =- 2\lambda$.

$\underline{Solución: x = \lambda,\ y = \lambda,\ z =- 2\lambda,\ \forall\lambda \in R}$.

Nótese que para $\lambda = 0$ se obtiene la solución trivial de todos los sistemas lineales homogéneos: $x = y = z = 0$.

****

2º) Dadas las rectas $r \equiv \{x = 0 \qquad y = 1 + 3\lambda\ z = 1 + 3\lambda$ y $s \equiv \{x + y - z + 2 = 0\ y - z - 2 = 0$:

a) Estudia la posición relativa de r y s. Calcule la distancia entre r y s.

b) Si dos lados de un rectángulo están sobre las rectas r y s y dos vértices consecutivos del rectángulo son los puntos $A(0,\ 1,\ 1)\ y\ B(0,\ 4,\ 4)$, calcula las coordenadas de los otros dos vértices y el área del rectángulo.

$a)$

La expresión de r por unas ecuaciones implícitas es la siguiente:

$r\equiv\{x\ =\ 0\qquad y\ =\ 1\ +\ 3\lambda\ z\ =\ 1\ +\ 3\lambda\ \Rightarrow r\equiv\frac{x}{0}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{3}\ \Rightarrow r\equiv\{x\ =\ 0\qquad y\ -$

.

Las rectas r y s determinan el sistema $\{x\ =\ 0\qquad y\ -\ z\ =\ 0\qquad x\ +\ y\ -\ z\ =-\ 2\ y\ -\ z\ =\ 2$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$M\ =(1\,0\,1\,0\ \ 0\,1\,1\,1\ \ 0\ -\ 1\ -\ 1\ -\ 1\ )$ y $M^{'}\ =(1\,0\,0\ \ 0\ \ 0\,1\ -\ 1\,0\ \ 1\,0\ \ 1\,1\ \ -\ 1\ -\ 1\ \ -\ 2\,2\ )$.

Según sean los rangos de M y M' pueden presentarse los siguientes casos:

1. -- Rango 3 = Rango M' = 4 ⇛ Se cruzan.

2. -- Rango M = 3, Rango M' = 3 ⇛ Se cortan.

3. -- Rango M = 2, Rango M' = 3 ⇛ Paralelas.

4. -- Rango M = 2, Rango M' = 2 ⇛ Coincidentes.

$Rango\ de\ M\Rightarrow\left\{C_2=-\ C_3\right\}\Rightarrow|1\ 0\ 0\ 1\ |\neq0\Rightarrow Rang\ M\ =\ 2.$

$Rang\ M^{'}\ \Rightarrow\left\{C_2=-\ C_3\right\}\Rightarrow|1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ \ 1\ 1\ \ -\ 2\ \ -\ 2\ |\Rightarrow\left\{F_2,\ F_3,\ F_4\right\}\Rightarrow|0\ 1\ 0\ 1\ 1$

$=\ 2\neq0\Rightarrow Rang\ M^{'}\ =\ 3.$

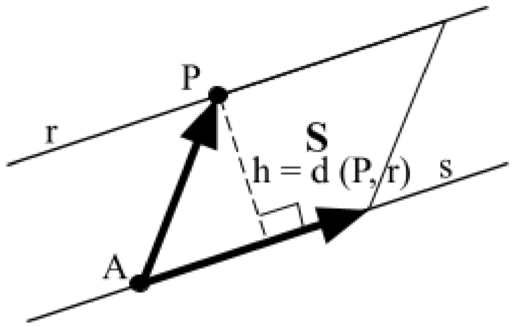
$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ son\ paralelas}.$

La distancia entre las dos rectas es la misma que la de un punto de una de ellas a la otra.

Un punto de r es $P(0,\ 1,\ 1)$.

La distancia de un punto a una recta puede determinarse teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que forman dos vectores es el módulo de su producto vectorial y, de forma geométrica, es el producto de la base por la altura.

Para una mejor comprensión del proceso se hace un dibujo de la situación.



$$\left.\begin{array}{l} S = \left|\vec{v}_s \wedge \vec{AP}\right| \\ S = \left|\vec{v}_s\right|\cdot h \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\vec{v}_s \wedge \vec{AP}\right| = \left|\vec{v}_s\right|\cdot h \Rightarrow$$

$$\underline{\Rightarrow h = d(P, r) = \frac{\left|\vec{v}_s \wedge \vec{AP}\right|}{\left|\vec{v}_s\right|}}.$$

La expresión de s por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$s \equiv \left\{\begin{array}{l} x + y - z + 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow y = 2 + \lambda;\ x = -2 + \lambda$$

$\Rightarrow s \equiv \left\{\begin{array}{l} x = -4 \\ y = 2 + \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$. Un punto y un vector director de s son $A(-4,\ 2,\ 0)$ y $\vec{v}_s = (0,\ 1,\ 1)$.

Los puntos $A(-4,\ 2,\ 0)$ y $P(0,\ 1,\ 1)$ determinan el vector $\vec{AP} = (4,\ -1,\ 1)$.

Aplicando la fórmula al punto P y a la recta s:

$$d(P, s) = \frac{\left|\vec{v}_s \wedge \vec{AP}\right|}{\left|\vec{v}_s\right|} = \frac{\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}} = \frac{|i+4j-4k+i|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|2i+4j-4k|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2^2+4^2+(-4)^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{4+16+16}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}.$$

$$\underline{d(r,\ s) = 3\sqrt{2}\ unidades}.$$

$b)$

Siendo $r \equiv \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{array}\right.$, se deduce que los puntos $A(0,\ 1,\ 1)\ y\ B(0,\ 4,\ 4)$ pertenecen a esta recta, exactamente para $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$, respectivamente.

Una forma de obtener los otros dos vértices del rectángulo es la siguiente:

El haz de plano β perpendiculares a las rectas r y s es $\beta \equiv y + z + D = 0$.

Los planos π_1 y π_2, pertenecientes al haz β, que contienen a los puntos A y B, respectivamente, son los siguientes:

$\pi_1 \Rightarrow \{\beta \equiv y + z + D = 0\ A(0, 1, 1)\} \Rightarrow 1 + 1 + D = 0; D = -2 \Rightarrow \pi_1 \equiv y + z - 2 = 0$

.

$\pi_2 \Rightarrow \{\beta \equiv y + z + D = 0\ B(0, 4, 4)\} \Rightarrow 4 + 4 + D = 0; D = -8 \Rightarrow \pi_2 \equiv y + z - 8 = 0$

.

Los vértices pedidos, C y D, son las intersecciones de la recta s con los planos π_1 y π_2, respectivamente:

$C \Rightarrow \{\pi_1 \equiv y + z - 2 = 0 \quad s \equiv \{x + y - z + 2 = 0\ y - z - 2 = 0 \quad \} \Rightarrow \quad y +$

.

$D \Rightarrow \{\pi_2 \equiv y + z - 8 = 0 \quad s \equiv \{x + y - z + 2 = 0\ y - z - 2 = 0 \quad \} \Rightarrow \quad y +$

.

$\underline{C(-4, 2, 0)\ y\ D(-4, 5, 3)}$.

La altura del rectángulo es la distancia entre las rectas: $h = 3\sqrt{2}\,u$.

La base es, por ejemplo, la distancia entre C y D:

$b = \overline{CD} = \sqrt{(-4 + 4)^2 + (5 - 2)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{0 + 9 + 9} = \sqrt{18}\,u.$

$S = b \cdot h = \sqrt{18} \cdot 3 \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot \sqrt{36} = 3 \cdot 6 = 18.$

$\underline{La\ superficie\ del\ rectángulo\ es\ de\ 18\,u^2}$.

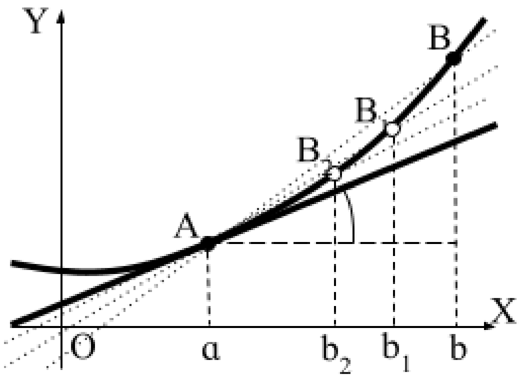
****

3º) a) Define la derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica.

b) Dada la función $f(x) = 2e^{-x}(x + 1)$, calcula el crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos de $f(x)$.

----

a)



Considerando la función $f(x)$ de la figura, continua en el punto A, de abscisa α, se denomina tasa de variación media de un intervalo cerrado $[a, b]$ a la expresión:

$TVM[a, b] = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.   (1)

La $TVM[a, b]$ es la tangente o pendiente de la secante a la función $f(x)$ que pasa por los puntos A y B.

La derivada de una función en un punto es la tasa de variación instantánea de la función en ese punto, o sea, es el límite cuando $b \to a$ de la fracción (1). Si hacemos el cambio de variable $h = b - a$, queda finalmente la expresión de la derivada, que se expresa de este modo: $f'(a) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

La interpretación gráfica de la derivada de una función en un punto puede deducirse de la observación de la figura: cuando b tiende a α (h tiende a cero), el punto B tiende a aproximarse infinitamente al punto A, con lo cual la secante tiende a confundirse con la tangente; es decir:

$\underline{La\ derivada\ de\ una\ función\ en\ un\ punto\ es\ la\ recta\ tangente\ en\ ese\ punto.}$

b)

Una función es creciente o decreciente en un punto cuando el valor de su primera derivada en ese punto es positiva o negativa, respectivamente.

$$f(x) = 2e^{-x}(x + 1) \Rightarrow f'(x) =- 2e^{-x} \cdot (x + 1) + 2e^{-x} \cdot 1 =$$

$$= 2e^{-x} \cdot [1 - (x + 1)] =- 2x \cdot e^{-x}.$$

Como quiera que $e^{-x} > 0, \forall x \in R$, la derivada es positiva o negativa según que x sea negativa o positiva, respectivamente.

Teniendo en cuenta que el dominio de $f(x)$ es R:

$\underline{Crecimiento: (-\infty, 0)}$. $\underline{Decrecimiento: (0, +\infty)}$.

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo en un punto es que se anule su primera derivada:

$f'(x) = -2x \cdot e^{-x}$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow -2x \cdot e^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0$.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para el valor que anula la primera derivada, se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo relativo.

$f''(x) = -2 \cdot \left(1 \cdot e^{-x} - x \cdot e^{-x}\right) = -2 \cdot e^{-x} \cdot (1 - x) = 2e^{-x} \cdot (x - 1)$.

$f''(0) = 2e^{-0} \cdot (0 - 1) = -2 < 0 \Rightarrow$ **Máximo relativo para x = 0**.

$f(0) = 2e^{-0}(0 + 1) = 2 \Rightarrow Máximo\ relativo: \underline{A(0, 2)}$.

****

4º) a) Calcular: $\frac{\sqrt{4+x}-2-\frac{x}{4}}{x^2}$.

b) Calcule una primitiva de la función $f(x) = x \cdot sen\, x$, que pasa por el punto $P(\pi,\ 0)$.

----

a)

$$\frac{\sqrt{4+x}-2-\frac{x}{4}}{x^2} = \frac{\sqrt{4+0}-2-\frac{0}{4}}{0^2} = \frac{2-2-0}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2\sqrt{4+x}}-0-\frac{1}{4}}{2x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{4+x}}-\frac{1}{2}}{4x} = \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-\frac{\frac{1}{2\sqrt{4+x}}}{4+x}-0}{4} = \frac{\frac{-1}{2(4+x)\sqrt{4+x}}}{4} = \frac{-1}{8(4+x)\sqrt{4+x}} =- \frac{1}{8 \cdot 4 \cdot 2} = \underline{-\frac{1}{64}} \ .$$

b)

$$f(x) = x \cdot sen\, x \Rightarrow F(x) = \int x \cdot sen\, x \cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{u = x \rightarrow du = dx\ sen\, x \cdot dx = dv \rightarrow v =- \cos x\} \Rightarrow x \cdot (- \cos \cos x) - \int - \cos \cos x \cdot d$$

$$=- x \cdot \cos x + \int \cos x \cdot dx =- x \cdot \cos \cos x + x + C = F(x).$$

$$F(\pi) = 0 \Rightarrow - \pi \cdot \cos \cos \pi + sen\, \pi + C = \pi + 0 + C = 0 \Rightarrow C =- \pi \ .$$

$$\underline{F(x) = sen\, x - x \cdot \cos \cos x - \pi}\ .$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JULIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

PROPUESTA A

1º) Dadas las rectas $r\equiv\{x = 3 + 5\lambda\ y = 1 + 2\lambda,\ \ \lambda\in R, s\equiv 10x + ay + 10 = 0$, calcula el valor de α para que sean: a) Paralelas. b) Perpendiculares.

Un vector director de r es $\vec{v}_r = (5,\ 2)$.

Un vector director de $s\equiv y = \frac{-10x-10}{a} =- \frac{10}{a}x - \frac{10}{a}$ es $\vec{v}_s = (a,\ -10)$.

Dos rectas son paralelas o perpendiculares cuando lo son, respectivamente, sus vectores directores.

a)

Dos vectores son paralelos cuando sus componentes son proporcionales:

$$\vec{v}_r = (5,\ 2)\ \vec{v}_s = (a,\ -10)\ \} \Rightarrow \frac{5}{a} = \frac{2}{-10} \Rightarrow -50 = 2a \Rightarrow \underline{a =- 25}.$$

$$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ son\ paralelas\ para\ a =- 25}.$$

$b)$

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_r = (5,\ 2)\\ \vec{v}_s = (a,\ -10)\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 0 \Rightarrow (5, 2)\cdot(a, -10) = 0;\ \ 5a - 20 = 0 \Rightarrow \underline{a = 4}$.

$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ son\ perpendiculares\ para\ a = 4}$.

****

2º) a) Determina todas las soluciones del sistema de ecuaciones: $\{sen\, x - \cos cos\, y = 1\ \ sen\, x + \cos cos\, y = 0$.

b) Halla: $\int \frac{x}{e^x} \cdot dx$.

----

a)

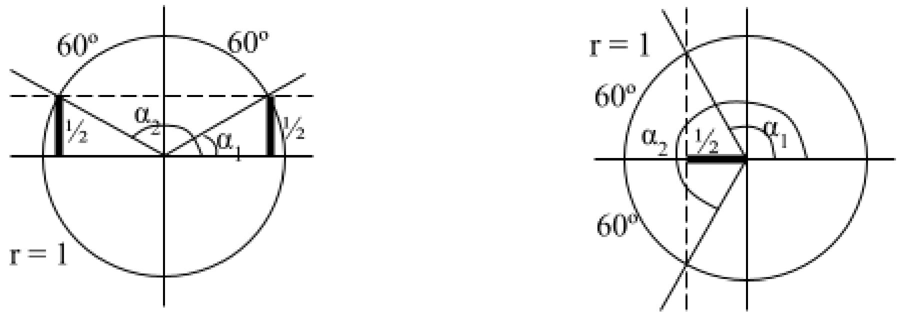
$sen\, x - \cos cos\, y = 1\ \ sen\, x + \cos cos\, y = 0\ \} \Rightarrow 2\, sen\, x = 1;\ sen\, x = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{x = 2k\pi}$

.

$- sen\, x + \cos cos\, y = - 1\ \ sen\, x + \cos cos\, y = 0\ \} \Rightarrow 2\, cos\, x = - 1$;; $cos\, x = - \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{x = (2k + 1)\pi \pm 60°,\ \ k \in N}$.



b)

$$\int \frac{x}{e^x} dx = \int x \cdot e^{-x} dx \Rightarrow \left\{ u = x \rightarrow du = dx\ dv = e^{-x} \cdot dx \rightarrow v = - e^{-x} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot \left(- e^{-x} \right) - \int - e^{-x} dx = - x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} dx = - x \cdot e^{-x} - e^{-x} + C =$$

$$= - e^{-x}(x + 1) + C.$$

$$\underline{\int \frac{x}{e^x} \cdot dx = - \frac{x+1}{e^x} + C.}$$

****

3º) Sea $g(x) = x - 2L(1 + x)$:

a) Determina el dominio de g. b) Halla sus asíntotas.

c) Determina los extremos relativos y estudia la monotonía de g.

d) Dibuja la gráfica de g destacando los elementos hallados anteriormente.

----

a)

Teniendo en cuenta que los números negativos no tienen logaritmo:

$$\underline{D(g) \Rightarrow (-1, +\infty)}.$$

b)

Asíntotas horizontales: son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a más o menos infinito; son de la forma y = k.

$$y = k = g(x) = \lim_{x \to +\infty} [x - 2L(1 + x)] = \infty - \infty \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} [x - 2L(1 + x)] = \infty - \infty \Rightarrow Indet. \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \left[x \cdot \frac{x-2L(1+x)}{x}\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x \cdot \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{2L(1+x)}{x}\right). \quad (*)$$

Siendo $\lim_{x \to +\infty} \frac{2L(1+x)}{x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{x+1}}{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x+1} =$

$= \frac{2}{\infty} = 0$, la expresión (*) resulta:

$y = k = \lim_{x \to +\infty} x \cdot \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{2L(1+x)}{x}\right) = \infty \cdot (1 - 0) = \infty \Rightarrow$ **No tiene asíntotas horizontales.**

Asíntotas verticales: son de la forma x = k; son los valores finitos de x para los cuales la función es más infinito o menos infinito. Para x = -1 es f(x) = -∞.

$$\underline{La\ recta\ x = -1\ es\ asíntota\ vertical\ de\ la\ función.}$$

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, siendo los valores de m y n los siguientes: $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x}$ y $n = \lim_{x \to +\infty} [g(x) - mx]$.

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x - 2L(x+1)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[1 - \frac{2L(x+1)}{x}\right] = 1.$$

$$n = \lim_{x \to +\infty} [g(x) - mx] = \lim_{x \to +\infty} [x - 2L(x+1) - x] = -2 \lim_{x \to +\infty} (x+1) = -\infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ **No tiene asíntotas oblicuas**.

$c)$ Determina los extremos relativos y estudia la monotonía de g.

$$g'(x) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{1+x} = \frac{1+x-2}{1+x} = \frac{x-1}{1+x} = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \;;\; x = 1.$$

$$g''(x) = \frac{1 \cdot (1+x) - (x-1) \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{1+x-x+1}{(1+x)^2} = \frac{2}{(1+x)^2}.$$

$g''(2) = \frac{2}{(1+2)^2} > 0 \Rightarrow$ Mínimo relativo para x = 1.

$$g(1) = 1 - 2L(1+1) = 1 - 2L2 = 1 - L4 \cong 1 - 1,39 = -0,39.$$

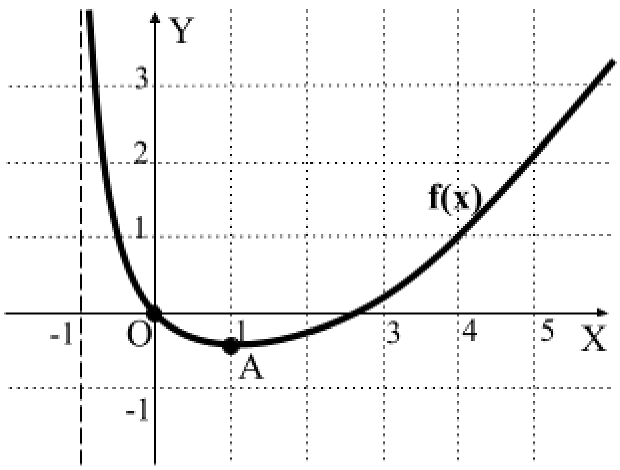
Teniendo en cuenta que la función es continua en su dominio, tiene un mínimo absoluto en A (1, -0,39).

Para x > 1 la primera derivada es positiva y para x < 1 es negativa; teniendo en cuenta el dominio de la función, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Decrecimiento: (-1, 1)}. \quad \underline{Crecimiento: (1, +\infty)}.$$

$d)$

Con los elementos hallados anteriormente y teniendo en cuenta que la función pasa por el origen de coordenadas, puede hacerse un gráfico, aproximado de la función, que es el siguiente:



****

4º) Para el triángulo de vértices A (0, 0, 0), B (1, 7, 1) y C (5, 3, 1):

a) Halla la longitud de la mediana que parte del vértice A.

b) Calcula el área del triángulo ABC.

c) Determina la longitud de la altura que parte del vértice A.

----

a)

El punto medio del lado $\overline{AB}$ es $M_{\overline{AB}}(3, 5, 1)$.

La longitud de la mediana que parte de A es la distancia entre los puntos $M_{\overline{AB}}$ y A, que es la siguiente:

$$m = \overline{AM_{\overline{AB}}} = \sqrt{(3 - 0)^2 + (5 - 0)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{9 + 25 + 1} = \underline{\sqrt{35}\, u}.$$

b)

El área del triángulo ABC es igual que la mitad del módulo del producto vectorial, en valor absoluto, de dos de los vectores que determinan sus lados.

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (1, 7, 1) - (0, 0, 0) = (1, 7, 1).$$

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = (5, 3, 1) - (0, 0, 0) = (5, 3, 1).$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = \frac{1}{2} \cdot \| i\ j\ k\ 1\ 7\ 1\ 5\ 3\ 1 \| = \frac{1}{2} |7i + 5j + 3k - 35k - 3i -$$

$$= \frac{1}{2} \cdot |4i + 4j - 32k| = 2 \cdot |i + j - 8k| = 2 \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + (-8)^2} =$$

$$= 2 \cdot \sqrt{1 + 1 + 64} = 2\sqrt{66}\,.$$

$$\underline{S_{ABC} = 2\sqrt{66}\, u^2.}$$

c)

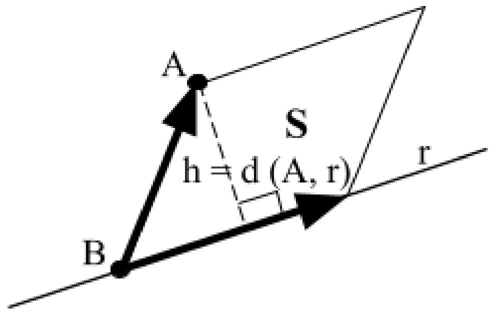
Los puntos B y C determinan el vector:

$$\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = (5, 3, 1) - (1, 7, 1) = (4, -4, 0).$$

La recta r que pasa por B y C tiene como vector director $\vec{v}_r = (1, -1, 0)$; su expresión dada por unas ecuaciones paramétricas es: $r \equiv \{x = 1 + \lambda\, y = 7 - \lambda\, z = \lambda$.

La distancia de un punto a una recta puede determinarse teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que forman dos vectores es el módulo de su producto vectorial y, de forma geométrica, es el producto de la base por la altura.

Para una mejor comprensión del proceso se hace un dibujo de la situación.



$$S = \left|\vec{v}_r \wedge \vec{BA}\right|\ S = \left|\vec{v}_r\right| \cdot h \,\} \Rightarrow \left|\vec{v}_r \wedge \vec{BA}\right| = \left|\vec{v}_r\right| \cdot h \Rightarrow$$

$$\underline{\Rightarrow h = d(A, r) = \frac{\left|\vec{v}_r \wedge \vec{BA}\right|}{\left|\vec{v}_r\right|}}.$$

Aplicando la fórmula al punto A y a la recta r:

$$d(A, r) = \frac{\left|\vec{v}_r \wedge \vec{BA}\right|}{\left|\vec{v}_r\right|} = \frac{\|i\ j\ k\ 1\ -1\ 0\ -1\ -7\ -1\ \|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0}} = \frac{|i - 7k - k + j|}{\sqrt{1 + 1 + 0}} = \frac{|i + j - 8k|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-8)^2}}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1 + 1 + 64}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{66}}{\sqrt{2}} = \underline{\sqrt{33}\, u = d(A, r)}.$$

El área del triángulo ABC también puede hallarse de la forma:

$$S_{ABC} = \frac{\overline{BC} \cdot d(A,r)}{2} = \frac{\left|\vec{BC}\right| \cdot \sqrt{33}}{2} = \frac{\sqrt{4^2 + (-4)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{33}}{2} = \frac{\sqrt{16 + 16} \cdot \sqrt{33}}{2} = \frac{\sqrt{32} \cdot \sqrt{33}}{2} = \frac{4 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{33}}{2}.$$

$$\underline{S_{ABC} = 2\sqrt{66}\, u^2}.$$

Solución igual a la obtenida en el apartado *b*), como cabía esperar.

****

PROPUESTA B

1º) Dadas las rectas $r\equiv\{x = 3 + 5\lambda\ y = 1 + 2\lambda,\ \ \lambda\in R, s\equiv 10x + ay + 10 = 0$, calcula el valor de α para que sean: a) paralelas. b) perpendiculares.

2º) $a)$ Determina todas las soluciones del sistema de ecuaciones: $\{sen\,x - \cos cos\,y = 1\ \ sen\,x + \cos cos\,y = 0$.

$b)$ Halla: $\int \frac{x}{e^x}\cdot dx$.

(Resueltos en la propuesta A)

3º) Sea $g(x) = \{\ \ x\ \ \ si - \frac{\pi}{2}\leq x\leq 0\ \frac{a-\cos cos\,x}{sen\,x}\ \ \ si\ 0 < x\leq\frac{\pi}{2}$:

$a)$ Halla el valor de α para el cual g es continua en x = 0.

$b)$ Enuncia el teorema del valor medio de Lagrange.

$c)$ Consideremos α igual al valor hallado en el apartado $a)$ y g la correspondiente función para ese valor de α. Utiliza el teorema del valor medio de Lagrange para justificar que existe c que cumple $0 < c < \frac{\pi}{2}$ y $g^{'}(c) = \frac{2}{\pi}$.

$a)$

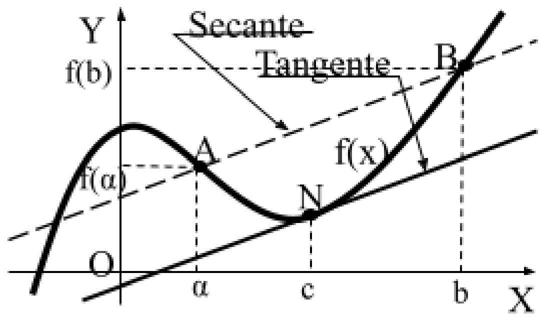
Una función es continua en un punto cuando la función está definida en ese punto, existen sus límites laterales en ese punto y, además, son iguales e igual al valor de la función en ese punto.

$$g(x)\ = x\ = g(0) = 0\ g(x)\ = \frac{a-\cos cos\,x}{sen\,x}\ \ = \frac{a-1}{0}\ \}.$$

Para que los límites laterales sean iguales tiene que ser, necesariamente, la expresión $\frac{a-1}{0}$ una indeterminación, por lo cual $a - 1 = 0 \Rightarrow \underline{a = 1}$.

$b)$

El teorema del valor medio o de Lagrange, dice: “Si una función f(x) es continua en [α, b] y derivable en (α, b), entonces existe al menos un punto c del intervalo (α, b) tal que la tangente a f(x) en c es paralela a la recta secante que une los puntos [α, f(α)] y [b, f(b)], o sea: $f^{'}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.”



$c)$

Si consideramos la función $g(x) = \frac{a - coscos\, x}{sen\, x}$ para el valor obtenido $a = 1$, resulta: $g(x) = \frac{1 - coscos\, x}{sen\, x}$, que es continua en $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ y derivable en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, por lo cual le es aplicable el teorema del valor medio de Lagrange.

$$g(0) = \frac{1 - coscos\, 0}{sen\, 0} = \frac{1-1}{1} = \frac{0}{0} = 0 \ \ (*)\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1 - coscos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{sen\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1-0}{1} = 1 \qquad \}.$$

$$(*) \ \ g(x) \ = \frac{1 - coscos\, x}{sen\, x} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \frac{(1 - coscos\, x)(1 + coscos\, x)}{sen\, x\, (1 + coscos\, x)} =$$

$$= \frac{1 - cos^2 x}{sen\, x\, (1 + coscos\, x)} = \quad = \frac{sen^2 x}{sen\, x\, (1 + coscos\, x)} = \frac{sen\, x}{1 + coscos\, x} = \frac{0}{1+1} = \frac{0}{2} = 0 \ .$$

$$g^{'}(c) = \frac{g\left(\frac{\pi}{2}\right) - g(0)}{\frac{\pi}{2} - 0} = \frac{1-0}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\ .$$

$\underline{Queda\ demostrado\ que\ existe\ c\ tal\ que\ 0 < c < \frac{\pi}{2}\ siendo\ g^{'}(x) = \frac{2}{\pi}}.$

****

4º) Sean $A = (1\ \beta\ 0\ 2\ 1\ 2\ 3\ 3\ \beta\ )$ y $B = (-\ 2\ 3\ \ -\ \beta/2\ )$:

a) Determina los valores de β para los cuales la matriz A tiene inversa.

b) Discute, según los valores de β, el sistema de ecuaciones lineales $A\cdot(x\ y\ z\ ) =\ B$.

c) Resuelve el sistema anterior para β = -2.

----

a)

Una matriz en invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$|A| = |1\ \beta\ 0\ 2\ 1\ 2\ 3\ 3\ \beta\ | = \beta\ +\ 6\beta\ -\ 6\ -\ 2\beta^2\ =\ 0;\ \ -\ 2\beta^2\ +\ 7\beta\ -\ 6\ =\ 0;$

$2\beta^2\ -\ 7\beta\ +\ 6\ =\ 0;\ \beta\ = \frac{7\pm\sqrt{49-48}}{2\cdot2} = \frac{7\pm1}{4} \Rightarrow \beta_1\ =\ 2,\ \beta_2\ =\ \frac{3}{2}.$

$$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall\beta\in R\ -\left\{2,\ \frac{3}{2}\right\}}.$$

b)

Para la resolución de este apartado aplicamos el teorema de Rouché-Fröbenius.

La matriz ampliada del sistema $(1\ \beta\ 0\ 2\ 1\ 2\ 3\ 3\ \beta\ )\cdot(x\ y\ z\ ) = (-\ 2\ 3\ \ -\ \beta/2\ )$ es la siguiente:

$A' = (1\ 2\ 0\ 2\ 1\ 2\ 3\ 3\ 2\ \ \ \ -\ 2\ 3\ \ -\ 1\ ).$

Para $\beta\ =\ 2$ es:
$A' = (1\ 2\ 0\ 2\ 1\ 2\ 3\ 3\ 2\ \ \ \ -\ 2\ 3\ \ -\ 1\ ) \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \left\{C_1, C_2, C_4\right\} \Rightarrow |1\ 2\ \ -\ 2\ 2\ 1\ 3\ 3\ 3\ \ -\ 1$

$=-\ 1\ -\ 12\ +\ 18\ +\ 6\ -\ 9\ +\ 4\ =\ 28\ -\ 22\ =\ 6\neq0 \Rightarrow Rang\ A'\ =\ 3.$

$$\underline{Para\ \beta\ =\ 2 \Rightarrow Rang\ A\ =\ 2,\ Rang\ A'\ =\ 2 \Rightarrow S.\ I.}$$

Para $\beta\ =\ \frac{3}{2}$ es:
$A' = \left(1\ \frac{3}{2}\ 0\ 2\ 1\ 2\ 3\ 3\ \frac{3}{2}\ \ \ \ -\ 2\ 3\ \ -\ \frac{3}{4}\ \right) \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \{Método\ de\ Gauss\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(1\ \frac{3}{2}\ 0\ 2\ 1\ 2\ 3\ 3\ \frac{3}{2}\ \ \ \ -\ 2\ 3\ \ -\ \frac{3}{4}\ \right) \Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow 2F_1\ F_3 \rightarrow \frac{4}{3}F_3\right\} \Rightarrow (2\ 3\ 0\ 2\ 1\ 2\ 4\ 4\ 2\ \ \ \ -$

$\Rightarrow \left(1\ \frac{3}{2}\ 0\ 2\ 1\ 2\ 4\ 4\ 2\ \ \ \ -\ 2\ 3\ \ -\ 1\right) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow F_2 -\ 2F_1\ F_3 \rightarrow F_3 -\ 4F_1\right\} \Rightarrow \left(1\ \frac{3}{2}\ 0\ 0\ \ -\right.$

$\Rightarrow \left\{F_2 = F_3\right\} \Rightarrow Rang\ A' = 2.$

$$\underline{Para\ \beta = \frac{3}{2} \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$$

$c)$

Para β = -2 el sistema resulta $x - 2y = -2\ \ 2x + y + 2z = 3\ 3x + 3y - 2z = 1\,\}$, que es compatible determinado; se resuelve aplicando la regla de Cramer.

$$x = \frac{|-2\ -2\ 0\ 3\ 1\ 2\ 1\ 3\ -2\,|}{-2\cdot(-2)^2+7\cdot(-2)-6} = \frac{4-4+12-12}{-8-14-6} = \frac{0}{-28} = 0.$$

$$y = \frac{|1\ -2\ 0\ 2\ 3\ 2\ 3\ 1\ -2\,|}{-28} = \frac{-6-12-2-8}{-28} = \frac{-28}{-28} = 1.$$

$$z = \frac{|1\ -2\ -2\ 2\ 1\ 3\ 3\ 3\ 1\,|}{-28} = \frac{1-12-18+6-9+4}{-28} = \frac{11-39}{-28} = \frac{-28}{-28} = 1.$$

<u>Solución: x = 0, y = z = 1</u>.

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JUNIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

PROPUESTA A

1º) Para cada número real a, la matriz $A = (a\ 1\ 1\ a\ \ 1\ 1\ 1\ 1\ \ 1\ 1\ 1\ 1\ \ a\ 1\ 1\ 1\ )$ tiene por determinante $|A| = (a - 1)^3$. A partir de este hecho, halla el determinante de las siguientes matrices:

$B = (0\ 1\ 1\ 0\ \ 1\ 1\ 1\ 1\ \ 1\ 1\ 1\ 1\ \ 0\ 1\ 1\ 1\ )$,
$C = (a + 1\ 1\ 1\ 2\ a\ 1\ 2\ 2\ \ 1\ 1\ \ a\ 1\ \ \ \ 1\ 1\ 1\ 1\ )$,
$D = (2a\ 2\ 1\ a\ \ 2\ 2\ 1\ 1\ \ 1\ 1\ 1\ 1\ \ a\ 1\ 1\ 1\ )$.

$|B| = |0\ 1\ 1\ 0\ \ 1\ 1\ 1\ 1\ \ 1\ 1\ 1\ 1\ \ 0\ 1\ 1\ 1\ | = (0 - 1)^3 = \underline{-1}$.

$|C| = |a + 1\ 1\ 1\ 2\ a\ 1\ 2\ 2\ \ 1\ 1\ \ a\ 1\ \ \ \ 1\ 1\ 1\ 1\ | = |a\ 1\ 1\ 1\ a\ 1\ 1\ 1\ \ 1\ 1\ \ a\ 1\ \ \ \ 1\ 1\ 1\ 1$

$= (a - 1)^3 + 0 = \underline{(a - 1)^3}$.

Se han tenido en cuenta las siguientes propiedades de los determinantes:

1.- “Si todos los elementos de una línea de una matriz cuadrada se descomponen en dos sumandos, el valor del determinante es igual a la suma de los determinantes que tienen en dicha línea el primero y el segundo sumando, respectivamente, siendo los restantes elementos iguales a los del determinante inicial”.

2.- “Si una matriz cuadrada tiene dos filas iguales su determinante es cero”.

$|D| = |2a\ 2\ 1\ a\ \ 2\ 2\ 1\ 1\ \ 1\ 1\ 1\ 1\ \ a\ 1\ 1\ 1\ \ | =\ 2\cdot|a\ 1\ 1\ a\ \ 1\ 1\ 1\ 1\ \ 1\ 1\ 1\ 1\ \ a\ 1\ 1\ 1\ \ | = \underline{2}$

.

Se ha tenido en cuenta la propiedad de los determinantes que dice que “si se multiplica o divide una línea de un determinante por un número distinto de cero, el valor del determinante queda multiplicado o dividido por dicho número”.

****

2º) Sea g la función tal que $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ y su derivada es $g'(x) = \frac{sen\, x}{x},\ x > 0.$

i) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de g en el punto $P\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$.

ii) Sea $h(x) = \frac{g(x)}{x}$. Calcula $h'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

iii) Determina $\int x^2 \cdot g'(x) \cdot dx$.

----

i)

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

$$m = g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{sen\, \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow m = \frac{2}{\pi}.$$

La expresión de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente viene dada por $y - y_0 = m\left(x - x_0\right)$:

$$y - 0 = \frac{2}{\pi} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right);\ \ \pi y = 2x - \pi.$$

$$\underline{Recta\ tangente: t \equiv 2x - \pi y - \pi = 0}.$$

ii)

$$h(x) = \frac{g(x)}{x} \Rightarrow h'(x) = \frac{g'(x) \cdot x - g(x) \cdot 1}{x^2}.$$

$$h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot g'\left(\frac{\pi}{2}\right) - g\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{\pi} - 0}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{\pi^2}{4}} = \underline{\frac{4}{\pi^2}}.$$

iii)

$$\int x^2 \cdot g'(x) \cdot dx = \int x^2 \cdot \frac{sen\, x}{x} \cdot dx = \int x \cdot sen\, x \cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{u = x \rightarrow du = dx\ dv = sen\, x \cdot dx \rightarrow v = -\cos cos\, x\ \} \Rightarrow x \cdot (-\cos cos\, x) - \int -\cos cos$$

$$= -x \cdot \cos cos\, x + \int \cos cos\, x \cdot dx = -x \cdot \cos cos\, x + sen\, x + C.$$

$$\int x^2 \cdot g^{'}(x) \cdot dx = sen\, x - x \cdot \cos cos\, x + C.$$

****

3º) Sea $f(x)=\sqrt{x^2 - x + 1}$.

$i)$ Determina el dominio de f. $ii)$ Halla sus asíntotas.

$iii)$ Determina los extremos relativos y estudia la monotonía de f.

$iv)$ Dibuja la gráfica de f destacando los elementos hallados anteriormente.

$i)$

El dominio de f es el conjunto de valores reales de x que hacen igual o mayor que cero el valor del radicando: $x^2 - x + 1 \geq 0$.

$$x^2 - x + 1 = 0;\ x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \Rightarrow x \notin R \Rightarrow x^2 - x + 1 \geq 0,\ \forall x \in R.$$

$$\underline{D(f) \Rightarrow R.}$$

$ii)$

Asíntotas horizontales: son de la forma y = k y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} = \infty\ .$$

$$\underline{No\ tiene\ asíntotsa\ horizontales.}$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ verticales.}$$

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, siendo los valores de m y n los siguientes: $m = \frac{f(x)}{x}$ y $n = [f(x) - mx]$.

$$m = \frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x} = \sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{1} = \pm 1.$$

$$m_1 = -1 \Rightarrow n_1 = \left(\sqrt{x^2 - x + 1} + x\right) = \infty - \infty \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)}{\sqrt{x^2-x+1}-x} = \frac{x^2-x+1-x^2}{\sqrt{x^2-x+1}-x} = \frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}-x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Indet. \Rightarrow \frac{\frac{-x+1}{-x}}{\frac{\sqrt{x^2-x+1}-x}{-x}} = \frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1} \Rightarrow n_1 = \frac{1}{2}.$$

$$\underline{Asíntota\ oblicua:\ t_1 \equiv y = -x + \frac{1}{2}.}$$

$$m_2 = 1 \Rightarrow n_2 = \left(\sqrt{x^2 - x + 1} - x\right) = \infty - \infty \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}+x\right)}{\sqrt{x^2-x+1}+x} = \frac{x^2-x+1-x^2}{\sqrt{x^2-x+1}+x} = \frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x} = \frac{-\infty}{\infty} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Indet. \Rightarrow \frac{\frac{-x+1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-x+1}-x}{x}} = \frac{-1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{-1-0}{\sqrt{1-0+0}+1} \Rightarrow n_2 = -\frac{1}{2}.$$

$$\underline{Asíntota\ oblicua:\ t_2 \equiv y = x - \frac{1}{2}.}$$

iii)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}} = 0;\ \ 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

$$\underline{Crecimiento:\ f'(x) > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2} \Rightarrow x \in \left(\frac{1}{2},\ +\infty\right).}$$

$$\underline{Decrecimiento:\ f'(x) < 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2} \Rightarrow x \in \left(-\infty,\ \frac{1}{2}\right).}$$

Para que una función tenga un extremo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada. Para diferenciar los máximos de los mínimos relativos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera derivada, se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo relativo.

$$f''(x) = \frac{2\cdot\left(2\sqrt{x^2-x+1}\right)-(2x-1)\cdot\left(2\cdot\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}\right)}{4\cdot\left(x^2-x+1\right)} = \frac{2\sqrt{x^2-x+1}-\frac{(2x-1)^2}{2\sqrt{x^2-x+1}}}{2\cdot\left(x^2-x+1\right)} =$$

$$= \frac{4\cdot\left(x^2-x+1\right)-(2x-1)^2}{4\cdot\left(x^2-x+1\right)\cdot\sqrt{x^2-x+1}} = \frac{4x^2-4x+4-\left(4x^2-4x+1\right)}{4\cdot\left(x^2-x+1\right)\cdot\sqrt{x^2-x+1}} = \frac{4x^2-4x+4-4x^2+4x-1}{4\cdot\left(x^2-x+1\right)\cdot\sqrt{x^2-x+1}} =$$

$$= \frac{3}{4\cdot\left(x^2-x+1\right)\cdot\sqrt{x^2-x+1}}.$$

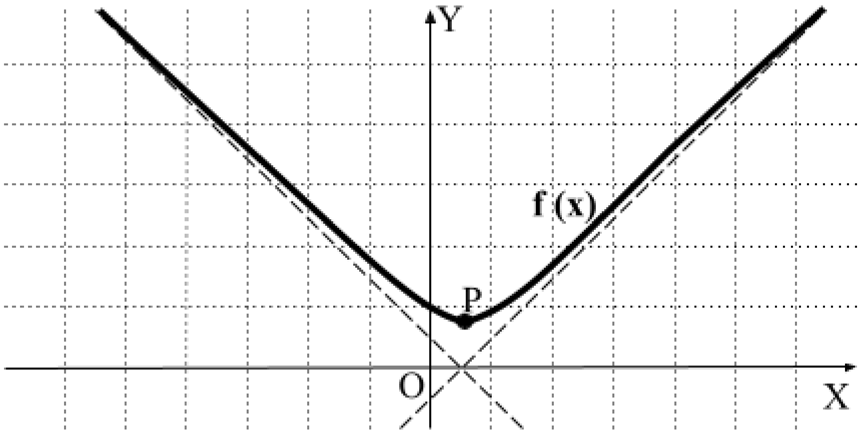
$$f''\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1\right)\cdot\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1}}=\frac{3}{(1-2+4)\cdot\sqrt{1-2+4}}=\frac{3}{3\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}>0\Rightarrow Mínimo.$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1}=\sqrt{\frac{1-2+4}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\underline{Mínimo\ absoluto: P\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right).}$$

$iv)$

Con la información obtenida y los elementos hallados en los apartados anteriores puede hacerse una representación gráfica, aproximada, de la función, que es la que se indica a continuación:



****

4º) Consideremos el punto $P(6, -1, 5)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 5 + t \\ y = -t \\ z = 1 - 2t \end{cases}, t \in R$.

i) Halla la ecuación del plano π, perpendicular a r que contiene a P.

ii) Determina el punto Q donde la recta r corta al plano π.

iii) Determina el punto S simétrico de P respecto a la recta r.

----

i)

Un vector director de la recta r es $\vec{v}_r = (1, -1, -2)$.

Por ser r perpendicular a π, el vector director de r es un vector normal al plano π por lo cual, la expresión implícita del plano π es $\pi \equiv x - y - 2z + D = 0$.

Por contener el plano π al punto $P(6, -1, 5)$ tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x - y - 2z + D = 0 \\ P(6, -1, 5) \end{array}\right\} \Rightarrow 6 - (-1) - 2 \cdot 5 + D =$$

$-3 + D = 0 \Rightarrow D = 3$.

$\underline{\pi \equiv x - y - 2z + 3 = 0}$.

ii)

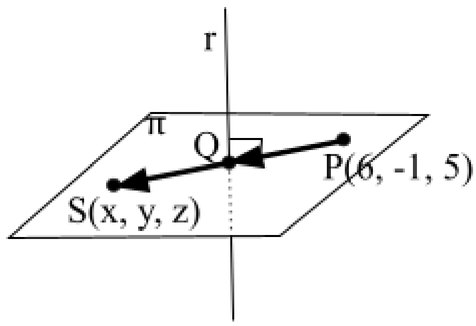
El punto Q donde la recta r corta al plano π es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x - y - 2z + 3 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 5 + t \\ y = -t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow (5$$

$5 + t + t - 2 + 4t + 3 = 0;\ \ 6t + 6 = 0;\ \ t + 1 = 0 \Rightarrow t = -1$.

$r \equiv \begin{cases} x = 5 + t \\ y = -t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \Rightarrow t = -1 \Rightarrow \underline{Q(4, 1, 3)}$.

iii)



El punto pedido S que, lógicamente pertenece al plano π determina con los puntos P y Q los vectores $\vec{PQ}$ y $\vec{QR}$.

Para que el punto $S(x, y, z)$ sea el simétrico de P con respecto a r, los vectores $\vec{PQ}$ y $\vec{QR}$ tienen que ser iguales:

$\vec{PQ} = \vec{QS} \Rightarrow [Q - P] = [S - Q]$;

$(4,\ 1,\ 3) - (6,\ \ -\ 1,\ 5) = [(x,\ y,\ z) - (4,\ 1,\ 3)];\ (-\ 2,\ 2,\ \ -\ 2) = (x\ -\ 4,\ y\ -\ 1,\ z\ -$

$\Rightarrow \{x\ -\ 4\ =-\ 2 \rightarrow x\ =\ 2\ y\ -\ 1\ =\ 2 \rightarrow y\ =\ 3\ \ z\ -\ 3\ =-\ 2 \rightarrow z\ =\ 1\} \Rightarrow \underline{S(2,\ 3,\ 1)}$

.

****

PROPUESTA B

1º) Para cada número real a, la matriz $A = (a\ 1\ 1\ a\ \ 1\ 1\ 1\ 1\ \ 1\ 1\ 1\ 1\ \ a\ 1\ 1\ 1\ )$ tiene por determinante $|A| = (a - 1)^3$. A partir de este hecho, halla el determinante de las siguientes matrices:

$B = (0\ 1\ 1\ 0\ \ 1\ 1\ 1\ 1\ \ 1\ 1\ 1\ 1\ \ 0\ 1\ 1\ 1\ )$,
$C = (a + 1\ 1\ 1\ 2\ a\ 1\ 2\ 2\ \ 1\ 1\ \ a\ 1\ \ \ \ 1\ 1\ 1\ 1\ )$,
$D = (2a\ 2\ 1\ a\ \ 2\ 2\ 1\ 1\ \ 1\ 1\ 1\ 1\ \ a\ 1\ 1\ 1\ )$.

2º) Sea g la función tal que $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ y su derivada es $g'(x) = \frac{sen\, x}{x}$, $x > 0$.

i) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de g en el punto $P\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$.

ii) Sea $h(x) = \frac{g(x)}{x}$. Calcula $h'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

iii) Determina $\int x^2 \cdot g'(x) \cdot dx$.

(Resueltos en la propuesta A)

3º) Consideramos la función $f(x) = \{a \cdot sen\, x + b \cdot \cos cos\, x,\quad si\ x < \frac{\pi}{2}\ \ sen^2 x - a \cdot \cos cos\, x,\quad si\ x \geq \frac{\pi}{2}\ \ ,$ siendo a y b números reales arbitrarios:

i) Estudia, según los valores de a y b, la derivabilidad de la función f.

ii) Calcula la función derivada $f'(x)$ en los casos en que $f(x)$ sea derivable en todo su dominio.

----

i)

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto.

La función f(x) es continua $\forall a,\ b \in R$. Se trata de determinar los valores de α y b para que sea derivable en el punto crítico $x = \frac{\pi}{2}$.

Para que la función sea continua en $x = \frac{\pi}{2}$ es necesario que sus límites laterales en ese punto sean iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$f(x) \ = (a\cdot sen\, x \ + \ b\cdot \cos cos\, x\,) = \ a\cdot 1 \ + \ b\cdot 0 \ = \ a \ \ f(x) \ \ = \Big(sen^2 x \ - \ a\cdot \cos cos\, x$

.

La función resulta $f(x) = \{sen\, x \ + \ b\cdot \cos cos\, x, \ \ \ si\, x < \frac{\pi}{2} \ \ sen^2 x \ - \ \cos cos\, x, \ \ \ si\, x \geq \frac{\pi}{2}$, que es derivable para cualquier valor real de b, excepto para el valor críticos $x \ = \ \frac{\pi}{2}$, cuya derivabilidad vamos a forzar determinando el correspondiente valor de b.

Una función es derivable en un punto cuando es continua en ese punto y, además, sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales.

$f'(x) = \{cos\, x \ - \ b\cdot sen\, x, \ \ si\, x \ < \frac{\pi}{2} \ 2sen\, x\cdot \cos cos\, x \ \ + \ x, \ \ \ si\, x \geq \frac{\pi}{2} \ \ \ \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-} \ = f'\Big($

$\Rightarrow cos\, \frac{\pi}{2} - \ b\cdot sen\, \frac{\pi}{2} = \ 2sen\, \frac{\pi}{2}\cdot \cos cos\, \frac{\pi}{2} \ \ + \frac{\pi}{2}\,; \ \ 0 \ - \ b\cdot 1 \ = \ sen\, \pi \ + \ 1;$

$- \ b \ = \ 0 \ + \ 1 \Rightarrow \ \underline{b \ =- \ 1}.$

$\underline{La\, función\, es\, derivable\, en\, R\, para\, a \ = \ 1\, y\, b \ =- \ 1}\,.$

La función es $f(x) = \{sen\, x \ - \ \cos cos\, x, \ \ \ si\, x \ < \frac{\pi}{2} \ \ sen^2 x \ - \ \cos cos\, x, \ \ \ si\, x \geq \frac{\pi}{2}$.

La función derivada es $f'(x) = \{\cos cos\, x \ + \ \ sen\, x, \ \ si\, x \ < \frac{\pi}{2}\, sen\, (2x) + \ sen\, x, \ \ si\, x \geq \frac{\pi}{2}$.

La derivada de $f'(x)$, que es la segunda derivada, es la siguiente:

$\underline{f''(x) = \{- \ sen\, x \ + \ cos\, x, \ \ si\, x \ < \frac{\pi}{2}\, 2\cos cos\, (2x) + \ \cos cos\, x\,, \ \ si\, x \geq \frac{\pi}{2}}\,.$

****

4º) Discute el sistema de ecuaciones $\{x + y + z = 2a - 1\ 2x + y + az = a \quad x + ay + z = 1 \quad$, según el valor de a, y resuélvelo cuando sea compatible determinado.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = (1\ 1\ 1\ 2\ 1\ a\ 1\ a\ 1)$ y $M' = (1\ 1\ 1\ 2\ 1\ a\ 1\ a\ 1 \quad 2a - 1\ a\ 1)$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$|M| = |1\ 1\ 1\ 2\ 1\ a\ 1\ a\ 1| = 1 + 2a + a - 1 - a^2 - 2 =- a^2 + 3a - 2 = 0;$

$a^2 - 3a + 2 = 0;\ a = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \frac{3\pm1}{2} \Rightarrow a_1 = 1,\ a_2 = 2.$

$\underline{Para\ \{a\neq1\ a\neq2\ \}\Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

$Para\ a = 1 \Rightarrow M' = (1\ 1\ 1\ 2\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \quad 1\ 1\ 1) \Rightarrow Rang\ M' = 2.$

$\underline{Para\ a = 1\Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

$Para\ a = 2\Rightarrow M' = (1\ 1\ 1\ 2\ 1\ 2\ 1\ 2\ 1 \quad 3\ 2\ 1) \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1 = C_2\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow |1\ 1\ 3\ 2\ 1\ 2\ 1\ 2\ 1| = 1 + 12 + 2 - 3 - 4 - 2 = 6\neq0\Rightarrow Rang\ M' =$
.

$\underline{Para\ a = 2\Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3\Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

Resolvemos por Gauss para $a\neq1$ y $a\neq2$, que es compatible determinado.

$(1\ 1\ 1\ 2\ 1\ a\ 1\ a\ 1 \quad 2a - 1\ a\ 1) \Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1\ F_3 \rightarrow F_3 - F_1\} \Rightarrow (1\ 1\ 1\ 0\ - 1\ a -$

$\Rightarrow y = \frac{2-2a}{a-1} = \frac{-2(a-1)}{a-1} \Rightarrow y =- 2.$

$-(- 2) + (a - 2)z = 2 - 3a\Rightarrow z = \frac{-3a}{a-2}.$

$x - 2 + \frac{-3a}{a-2} = 2a - 1;\ x = 2a + 1 + \frac{3a}{a-2} = \frac{(2a+1)(a-2)+3a}{a-2} = \frac{2a^2-4a+a-2+3a}{a-2} =$

$= \frac{2a^2-2}{a-2} = \frac{2\left(a^2-1\right)}{a-2} = x.$

$\underline{Solución: x = \frac{2\left(a^2-1\right)}{a-2},\ y =- 2,\ z = \frac{-3a}{a-2},\ \forall a \in R - \{1,\ 2\}.}$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MADRID

JUNIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger una de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

OPCIÓN A

1º) Dada la función $f(x)=\frac{x}{x^2-4}+\frac{L(x+1)}{x+1}$, donde L denota el logaritmo neperiano, se pide:

a) Determinar el dominio de f y sus asíntotas.

b) Calcular la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 0$.

c) Calcular $\int f(x)\cdot dx$.

----

a)

La función puede expresarse de la forma $f(x)=\frac{x^2+x+L(x+1)}{(x^2-4)(x+1)}$.

$$(x^2-4)(x+1)=0 \Rightarrow x_1=-2,\ x_2=-1,\ x_3=2.$$

Teniendo en cuenta que no existe el logaritmo de cero ni de números negativos y que las funciones racionales no están definidas para los valores que anulan su denominador, el domino de la función es el siguiente:

$$\underline{D(f) \Rightarrow (-1,\ 2) \cup (2,\ +\infty)}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x perteneciente al dominio de la función que anulan su denominador:

$$\underline{Asíntota\, vertical: x = 2.}$$

Asíntotas horizontales: son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a infinito; son de la forma y = k.

$$y = k = f(x) = \frac{x^2+x+L(x+1)}{(x^2-4)(x+1)} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x+1+2x\cdot L(x+1)+\frac{x^2-4}{x+1}}{2x(x+1)+x^2-4} = \frac{(2x+1)(x+1)+2x(x+1)\cdot L(x+1)+x^2-4}{(2x^2+2x+x^2-4)(x+1)} =$$

$$= \frac{2x^2+2x+x+1+(2x^2+2x)\cdot L(x+1)+x^2-4}{(3x^2+2x-4)(x+1)} = \frac{3x^2+3x-3+(2x^2+2x)\cdot L(x+1)}{3x^3+3x^2+2x^2+2x-4x-4} =$$

$$= \frac{3x^2+3x-3+(2x^2+2x)\cdot L(x+1)}{3x^3+5x^2-2x-4} = \frac{3x^2+3x-3}{3x^3+5x^2-2x-4} + \frac{(2x^2+2x)\cdot L(x+1)}{3x^3+5x^2-2x-4} =$$

$$= 0 + \frac{(2x^2+2x)\cdot L(x+1)}{3x^3+5x^2-2x-4} = \frac{\left(2+\frac{2}{x}\right)\cdot\frac{L(x+1)}{x}}{3+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{4}{x^3}}. \quad (*)$$

Teniendo en cuenta que $\frac{L(x+1)}{x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = \frac{1}{\infty} = 0$, sustituyendo en (*):

$$\frac{\left(2+\frac{2}{x}\right)\cdot\frac{L(x+1)}{x}}{3+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{4}{x^3}} = \frac{0\cdot 0}{3+0-0-0} = \frac{0}{3} = 0.$$

$$\underline{Asíntota\, horizontal: y = 0.}$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

$b)$

La pendiente de la recta tangente a una curva en un punto es el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2-4)-x\cdot 2x}{(x^2-4)^2} + \frac{\frac{1}{x+1}\cdot(x+1)-L(x+1)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2-4+2x^2}{(x^2-4)^2} + \frac{1-L(x+1)}{(x+1)^2}.$$

$$m = f'(0) = \frac{0-4+0}{(0-4)^2} + \frac{1-L(0+1)}{(0+1)^2} = \frac{-4}{16} + \frac{1-0}{1} = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow m = \frac{3}{4}.$$

El punto de tangencia es:

$f(0) = \frac{0}{0-4} + \frac{L(0+1)}{0+1} = 0 + \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow O(0,\ 0).$

La ecuación de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la expresión $y - y_0 = m(x - x_0)$; aplicándola al punto y pendiente que nos ocupa:

$y - 0 = \frac{3}{4} \cdot (x - 0);\ \ 4y = 3x \Rightarrow \underline{Recta\ tangente: t \equiv 3x - 4y = 0}.$

$c)$

$I = \int f(x)dx = \int \left[\frac{x}{x^2-4} + \frac{L(x+1)}{x+1}\right] \cdot dx = \int \frac{x}{x^2-4} dx + \int \frac{L(x+1)}{x+1} \cdot dx = A + B$

.

$A = \int \frac{x}{x^2-4} dx \Rightarrow \left\{x^2 - 4 = t \to 2x \cdot dx = dt\ x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot dt\right\} \Rightarrow \int \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{2} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot Lt =$

$= \frac{1}{2} \cdot L\left|x^2 - 4\right|.$

$B = \int \frac{L(x+1)}{x+1} \cdot dx \Rightarrow \left\{L(x + 1) = t\ \frac{1}{x+1} \cdot dx = dt\right\} \Rightarrow \int t \cdot dt = \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot L^2|x + 1|$

.

Sustituyendo los valores obtenidos de A y B en la expresión de I:

$I = A + B = \frac{1}{2} \cdot L\left|x^2 - 4\right| + \frac{1}{2} \cdot L^2|x + 1| + C.$

$$\underline{\int f(x) \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \left[L\left|x^2 - 4\right| + L^2|x + 1|\right] + C.}$$

****

2º) a) Discutir, según los valores de m, el sistema $\{4x + 3y + (m - 1)z = 0\ x - 2y + mz = 1 \quad 5x + my + z = 1$
:
b) Resolver el sistema para el caso de $m = 1$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = (4\ 3\ m - 1\ 1\ - 2\ m\ 5\ m\ 1)$ y $M' = (4\ 3\ m - 1\ 1\ - 2\ m\ 5\ m\ 1 \quad 0\ 1\ 1)$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro m es el siguiente:

$|M| = |4\ 3\ m - 1\ 1\ - 2\ m\ 5\ m\ 1| = - 8 + m(m - 1) + 15m + 10(m - 1) - 4m^2 -$

$= - 11 + m^2 - m + 15m + 10m - 10 - 4m^2 = - 3m^2 + 24m - 21 = 0;$

$- 3\left(m^2 - 8m + 7\right) = 0;\ m^2 - 8m + 7 = 0;\ m = \frac{8\pm\sqrt{64-28}}{2} = \frac{8\pm\sqrt{36}}{2} = \frac{8\pm6}{2} =$

$= 4\pm3 \Rightarrow m_1 = 1,\ m_2 = 7.$

$\underline{Para\ \{m\neq1\ m\neq7\ \}\Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg.\Rightarrow S.\ C.\ D.}$

$Para\ m = 1\Rightarrow M' = (4\ 3\ 0\ 1\ - 2\ 1\ 5\ 1\ 1 \quad 0\ 1\ 1) \Rightarrow \left\{C_3 = C_4\right\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$

$\underline{Para\ m = 1\Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg.\Rightarrow S.\ C.\ I.}$

$Para\ m = 7\Rightarrow M' = (4\ 3\ 6\ 1\ - 2\ 7\ 5\ 7\ 1 \quad 0\ 1\ 1)\Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \left\{C_1,\ C_2,\ C_4\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |4\ 3\ 0\ 1\ - 2\ 1\ 5\ 7\ 1| = - 8 + 15 - 28 - 3 = - 24\neq0\Rightarrow Rang\ M' = 3.$

$\underline{Para\ m = 7\Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3\Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

b)

Resolvemos el sistema para $m = 1$, que es compatible indeterminado.

El sistema resulta: $\{4x + 3y = 0 \quad x - 2y + z = 1\ 5x + y + z = 1$.

Despreciando la primera ecuación y haciendo $x = \lambda$:

$- 2y + z = 1 - \lambda \quad y + z = 1 - 5\lambda \} \quad 2y - z = - 1 + \lambda \quad y + z = 1 - 5\lambda \} \Rightarrow 3y =$

$z = 1 - 5\lambda - y = 1 - 5\lambda + \frac{4}{3}\lambda = 1 - \frac{11}{3}\lambda.$

$\underline{Solución: x = \lambda,\ y = - \frac{4}{3}\lambda,\ z = 1 - \frac{11}{3}\lambda,\ \forall \lambda \in R.}$

o mejor,

$\underline{Solución: x = 3\lambda,\ y = - 4\lambda,\ z = 1 - 11\lambda,\ \forall \lambda \in R.}$

****

3º) $a)$ Dados los vectores $\vec{u} = (2,\ 3,\ 4)$, $\vec{v} = (-\ 1,\ -\ 1,\ -\ 1)$ y $\vec{w} = (-\ 1,\ \lambda,\ -\ 5)$, encontrar los valores de λ que hacen que el paralelepípedo P generado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tenga volumen 6.

$b)$ Obtener la ecuación de la recta incluida en el plano $z = 0$, con dirección perpendicular a $\vec{a} = (2,\ -\ 1,\ 4)$ y que pasa por el punto $Q(1,\ 1,\ 0)$.

$a)$

El volumen de un paralelepípedo es, en valor absoluto, el producto mixto de los tres vectores que lo determinan:

$$V_P = \|\vec{u}\cdot\left(\vec{v}\wedge\vec{w}\right)\| = 6 \Rightarrow \|2\ 3\ 4\ \ -1\ \ -1\ \ -1\ \ -1\ \lambda\ \ -5\ \| = \|2\ 3\ 4\ 1\ 1\ 1\ \ -\lambda\ 5$$

$$|10 - 4\lambda + 3 - 4 + 2\lambda - 15| = 6;\ \ |-6 - 2\lambda| = 6;\ \ |-3 - \lambda| = 3 \Rightarrow \{-3 - \lambda = 3$$

.

$$-3 - 3 = \lambda \Rightarrow \underline{\lambda_1 = -6};\ \ \underline{\lambda_2 = 0}.$$

$b)$

El plano $z = 0$ tiene como vector normal a $\vec{n} = (0,\ 0,\ 1)$.

Si un vector es normal a un plano es perpendicular a todos los vectores directores de las infinitas rectas contenidas en ese plano, por lo cual, el vector $\vec{n}$ es perpendicular al vector director de la recta r pedida.

Como los vectores $\vec{a} = (2,\ -\ 1,\ 4)$ y $\vec{n} = (0,\ 0,\ 1)$ son perpendiculares a r, un vector director de r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de estos vectores:

$$\vec{v'_r} = |i\ j\ k\ 2\ \ -1\ 4\ 0\ 0\ 1\ | = -\ i - 2j \Rightarrow \vec{v_r} = (1,\ 2,\ 0).$$

La expresión de r dada, por ejemplo, en forma vectorial es la siguiente:

$$\underline{r \equiv (x,\ y,\ z) = (1,\ 1,\ 0) + \lambda(1,\ 2,\ 0)}.$$

****

4º) Dados el plano $\pi \equiv x - 2y + 2z + 1 = 0$ y la superficie esférica que tiene por ecuación $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 9$, hallar los planos tangentes a la esfera que son paralelos al plano π.

La ecuación de una esfera de centro $O'\left(c_1, c_2, c_3\right)$ y radio r tiene por expresión:

$\left(x - c_1\right)^2 + \left(y - c_2\right)^2 + \left(z - c_3\right)^2 = r^2$, por lo que la esfera dada tiene su centro en el punto $O'(1, 1, 2)$ y su radio es 3.

El haz de planos β paralelos a π tiene por expresión $\beta \equiv x - 2y + 2z + D = 0$.

La distancia del punto $P_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ al plano $\alpha \equiv Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D_0 = 0$ viene dada por la fórmula $d\left(P_0, \alpha\right) = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D_0\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Los planos pedidos, π_1 y π_2, paralelos a π y pertenecientes al haz β, distan tres unidades del centro de la esfera.

Aplicando la fórmula de la distancia del punto $O'(1, 1, 2)$ al haz β, sabiendo que es de 3 unidades:

$$d\left(O', \pi\right) = 3 \Rightarrow \frac{|1\cdot1 - 2\cdot1 + 2\cdot2 + D|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 3; \quad \frac{|1 - 2 + 4 + D|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = 3; \quad \frac{|3 + D|}{\sqrt{9}} = 3; \quad |D + 3| = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} D + 3 = 9 \\ -D - 3 = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow D_1 = 6,\ D_2 = -12.$$

Los planos pedidos son los siguientes:

$$\underline{\pi_1 \equiv x - 2y + 2z + 6 = 0,\ \pi_2 \equiv x - 2y + 2z - 12 = 0.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Dados el punto $P(-4, 6, 6)$, el origen O, y la recta $r\equiv\{x=-4+4\lambda\ y=8+3\lambda\ \ z=-2\lambda$, se pide:

a) Determinar un punto Q de la recta r, de modo que su proyección Q' sobre $\overline{OP}$ sea el punto medio de este segmento.

b) Determinar la distancia de P a r.

c) ¿Existe algún punto R de la recta r, de modo que los puntos O, P y R estén alineados? En caso afirmativo, encontrar el punto (o los puntos) con esa propiedad o, en caso negativo, justificar la no existencia.

----

a)

El punto medio Q' del segmento de extremos O y P es $Q'(-2, 3, 3)$.

Los puntos O y P determinan el vector $\overrightarrow{OP}=(-4, 6, 6)$.

Un punto genérico de la recta r es $R(-4+4\lambda, 8+3\lambda, -2\lambda)$, que con el punto medio $Q'(-2, 3, 3)$ determinan el vector $\overrightarrow{Q'R}=(-2+4\lambda, 5+3\lambda, -3-2\lambda)$.

Para que la proyección de Q sea el punto Q' es necesario que los vectores $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{Q'R}$ sean perpendiculares, para lo cual, su producto escalar tiene que ser cero:

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{Q'R}=0\Rightarrow(-4, 6, 6)\cdot(-2+4\lambda, 5+3\lambda, -3-2\lambda)=0;$$

$$8-16\lambda+30+18\lambda-18-12\lambda=0;\ 20-10\lambda=0;\ 2-\lambda=0\Rightarrow\lambda=2.$$

$$\{x=-4+4\lambda\ y=8+3\lambda\ \ z=-2\lambda\ \}\Rightarrow\lambda=2\Rightarrow\underline{Q(4, 14, -4)}.$$

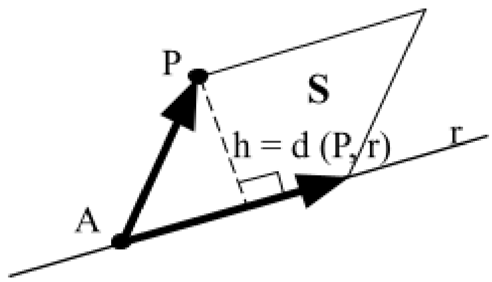
b)

La distancia de un punto a una recta puede determinarse teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que forman dos vectores es el módulo de su producto vectorial y, de forma geométrica, es el producto de la base por la altura.

Un punto y un vector de r son $A(-4, 8, 0)$ y $\overrightarrow{v_r}=(4, 3, -2)$.

$$\overrightarrow{AP}=[P-A]=[(-4, 6, 6)-(-4, 8, 0)]=(0, -2, 6).$$

Para una mejor comprensión del proceso se hace un dibujo de la situación.



$S = \left|\vec{v}_r \wedge \vec{AP}\right| \; S = \left|\vec{v}_r\right| \cdot h \} \Rightarrow \left|\vec{v}_r \wedge \vec{AP}\right| = \left|\vec{v}_r\right| \cdot h \Rightarrow$

$\Rightarrow h = d(P, r) = \frac{\left|\vec{v}_r \wedge \vec{AP}\right|}{\left|\vec{v}_r\right|}.$

Aplicando la fórmula al punto P y a la recta r:

$d(P, r) = \frac{\left|\vec{v}_r \wedge \vec{AP}\right|}{\left|\vec{v}_r\right|} = \frac{\|i\ j\ k\ 4\ 3\ -2\ 0\ -2\ 6\ \|}{\sqrt{4^2+3^2+(-2)^2}} = \frac{|18i-8k-4i-24j|}{\sqrt{16+9+4}} = \frac{|14i-24j-8k|}{\sqrt{29}} =$

$= \frac{2\cdot|7i-12j-4k|}{\sqrt{29}} = \frac{2\cdot\sqrt{7^2+(-12)^2+(-4)^2}}{\sqrt{29}} = \frac{2\cdot\sqrt{49+144+16}}{\sqrt{29}} = \underline{2\cdot\sqrt{\frac{209}{29}}\, u = d(P, r)}.$

$c)$

Los puntos O, P y R están alineados cuando los vectores $\vec{OP}$ y $\vec{PR}$ sean linealmente dependientes, es decir, que sus componentes sean proporcionales.

$\vec{OP} = (-4, 6, 6).$

$\vec{PR} = [R - P] = [(-4 + 4\lambda, 8 + 3\lambda, -2\lambda) - (-4, 6, 6)] = (4\lambda, 2 + 3\lambda, -6 - 2$

.

$\frac{4\lambda}{-4} = \frac{2+3\lambda}{6} = \frac{-6-2\lambda}{6} \Rightarrow \{\frac{4\lambda}{-4} = \frac{2+3\lambda}{6} \rightarrow -6\lambda = 2 + 3\lambda \rightarrow -9\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{9}\ \frac{4\lambda}{-4} = -$

.

$\underline{No\ existe\ ningún\ punto\ R \in r\ tal\ que\ O,\ P\ y\ R\ estén\ alineados}.$

****

2º) Dada la función $f(x) = \{\frac{sen\, x}{x}, \quad si\; x < 0\; xe^{x} + 1, \; six \geq 0$, se pide:

$a)$ Estudiar la continuidad de f.

$b)$ Estudiar la derivabilidad de f y calcular f' donde sea posible.

$c)$ Calcular $\int_{1}^{3} f(x) \cdot dx$.

$a)$

La función f(x) es continua $\forall x \in R$, excepto para $x = 0$, cuya continuidad se estudia a continuación.

Para que la función sea continua en $x = 0$ es necesario que sus límites laterales en ese punto sean iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

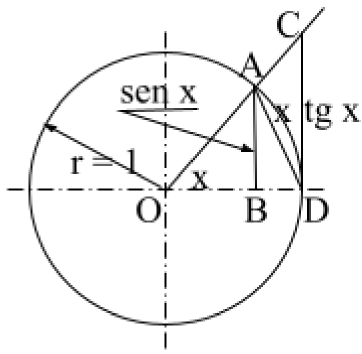
$$f(x) = \frac{sen\, x}{x} = 1 \quad (*) \qquad f(x) = \left(xe^{x} + 1\right) = 1 = f(0) \;\} \Rightarrow \underline{f(x)\; es\; continu}$$

.

Aclaración del límite (*).

$$\frac{sen\, x}{x} = \frac{sen\, 0}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \frac{cos\, x}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Una forma geométrica de obtener este límite es la siguiente.



Considerando los triángulos OAD, OCD y el sector circular OADO, de la observación de la figura se deduce la desigualdad de sus superficies, tal que:

$S_{OAD} \leq S_{OADO} \leq S_{OCD}$, o de otra forma:

$$\frac{\overline{OD} \cdot \overline{BA}}{2} \leq \frac{x \cdot \pi \cdot r^{2}}{2 \cdot \pi \cdot r} \leq \frac{\overline{OD} \cdot \overline{DC}}{2} \Rightarrow r = 1 \Rightarrow \frac{1 \cdot \overline{BA}}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1 \cdot \overline{DC}}{2}; \quad \frac{sen\, x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{tg\, x}{2}.$$

$sen\, x \leq x \leq tg\, x$. Dividiendo por sen x:

$\frac{sen\, x}{sen\, x} \leq \frac{x}{sen\, x} \leq \frac{tg\, x}{sen\, x}; \quad 1 \leq \frac{x}{sen\, x} \leq \cos cos\, x$.

Sabiendo que si se invierte el valor de los elementos de una desigualdad se obtiene otra desigualdad de sentido contrario: $1 \geq \frac{sen\, x}{x} \geq \frac{1}{coscos\, x}$.

Tomando límites cuando $x \to 0$: $1 \leq \frac{sen\, x}{x} \leq \frac{1}{cos\, x}; \quad 1 \leq \frac{sen\, x}{x} \leq 1$.

Lo anterior demuestra que $\frac{sen\, x}{x} = 1.$

$b)$

La función $f(x) = \{\frac{sen\, x}{x}, \;\; si\, x < 0\; xe^{x} + 1, \;\; six\geq 0$, es derivable para cualquier valor real de x, excepto para el valor críticos $x = 0$, cuya derivabilidad vamos a estudiar.

Una función es derivable en un punto cuando es continua en ese punto y, además, sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales.

$$f^{'}(x) = \{\frac{coscos\, x\cdot x - sen\, x\cdot 1}{x^{2}}, \;\; si\, x < 0\; 1\cdot e^{x} + x\cdot e^{x}, \;\; si\, x > 0 \;\Rightarrow$$

$$f^{'}(x) = \{\frac{x - sen\, x}{x^{2}}, \;\; si\, x < 0\; e^{x}(x + 1), \;\; si\, x > 0\, .$$

$$f^{'}\left(0^{-}\right) \Rightarrow f(x) \;\; = \frac{x - sen\, x}{x^{2}} \;\; = \frac{0\cdot 1 - 0}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\frac{x - x\cdot sen\, x - cos\, x}{2x} \;\; = -\frac{1}{2}\cdot\frac{x\cdot sen\, x}{x} \;\; = -\frac{1}{2}\cdot sen\, x \;\; = -\frac{1}{2}\cdot 0 = 0.$$

$$f^{'}\left(0^{+}\right) \Rightarrow f(x) \;\; = \left[e^{x}(x + 1)\right] \;\; = e^{0}(0 + 1) = 1\cdot 1 = 1.$$

$$\underline{f^{'}\left(0^{-}\right) \neq f^{'}\left(0^{+}\right) \Rightarrow f(x)\; no\; es\; derivable\; en\; x = 0}\, .$$

$$\underline{f(x)\; es\; derivable\; en\; R - \{0\}}\, .$$

$$\underline{f^{'}(x) = \{\frac{x - sen\, x}{x^{2}}, \;\; si\, x < 0\; e^{x}(x + 1), \;\; si\, x > 0\, .}$$

$c)$

$$\int_{1}^{3} f(x)\cdot dx = \int_{1}^{3}\left(xe^{x} + 1\right)\cdot dx = \int_{1}^{3} x\cdot e^{x}\cdot dx + \int_{1}^{3} dx = A + B.$$

$$A = \int_{1}^{3} x\cdot e^{x}\cdot dx \Rightarrow \left\{u = x \rightarrow du = dx\; e^{x}\cdot dx = dv \rightarrow v = e^{x}\right\} \Rightarrow \left[x\cdot e^{x} - \int e^{x}\cdot dx\right]_{1}^{3} =$$

$$= \left[x\cdot e^{x} - e^{x}\right]_{1}^{3} = \left[e^{x}(x - 1)\right]_{1}^{3} = \left[e^{3}(3 - 1)\right] - \left[e^{1}(1 - 1)\right] = 2e^{3}.$$

$$B = \int_{1}^{3} dx = [x]_{1}^{3} = 3 - 1 = 2.$$

Sustituyendo en la integral los valores de A y B obtenidos:

$$\underline{\int_1^3 f(x) \cdot dx = 2e^3 + 2 = 2\left(e^3 + 1\right).}$$

****

3º) Dadas las matrices $A = (0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ )$, $B = (3\ 0\ 0\ 0\ 3\ 0\ 0\ 0\ 3\ )$, se pide:

$a)$ Calcular A^{15} y A^{20}.

$b)$ Resolver la ecuación matricial $6X = B - 3AX$, donde X es una matriz cuadrada de orden 3.

$a)$

$$A^2 = A\cdot A = (0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ )\cdot(0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ ) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) = I$$

.

$$A^3 = A^2\cdot A = I\cdot A = A.$$

En general: $A^n = I$ si n es par y $A^n = A$ si n es impar.

$$\underline{A^{15} = I;\ A^{20} = A}.$$

$b)$

$$6X = B - 3AX;\ \ 6X + 3AX = B;\ \ (6I + 3A)\cdot X = B.$$

Haciendo $6I + 3A = M$:

$$M\cdot X = B;\ \ M^{-1}\cdot M\cdot X = M^{-1}\cdot B;\ \ I\cdot X = M^{-1}\cdot B \Rightarrow \underline{X = M^{-1}\cdot B}.$$

$$M = 6I + 3A = 6\cdot(1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) + 3\cdot(0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ ) =$$

$$= (6\ 0\ 0\ 0\ 6\ 0\ 0\ 0\ 6\ ) + (0\ 0\ 3\ 0\ 3\ 0\ 3\ 0\ 0\ ) = (6\ 0\ 3\ 0\ 9\ 0\ 3\ 0\ 6\ ).$$

Se obtiene la inversa por la adjunta de la matriz traspuesta:

$$|M| = |6\ 0\ 3\ 0\ 9\ 0\ 3\ 0\ 6\ | = 324 - 81 = 243.$$

$$M^t = (6\ 0\ 3\ 0\ 9\ 0\ 3\ 0\ 6\ ) = M.$$

$$Adj.\ de\ M^T = (|9\ 0\ 0\ 6\ |\ \ - |0\ 0\ 3\ 6\ |\ |0\ 9\ 3\ 0\ |\ \ - |0\ 3\ 0\ 6\ |\ |6\ 3\ 3\ 6\ |\ \ - |6\ 0\ 3\ 0\ |\ |$$

.

$$M^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|M|} = \frac{1}{243}\cdot(54\ 0\ \ - 27\ 0\ 27\ 0\ \ - 27\ 0\ 54\ ) = \frac{1}{9}\cdot(2\ 0\ \ - 1\ 0\ 1\ 0\ \ - 1\ 0\ 2\ )$$

.

Sustituyendo en la expresión de X:

$X = M^{-1} \cdot B = \frac{1}{9} \cdot (2\,0\ \ -1\,0\,1\,0\ \ -1\,0\,2\,) \cdot (3\,0\,0\,0\,3\,0\,0\,0\,3\,) = \frac{1}{9} \cdot (6\,0\ \ -3\,0\,3\,0\ \ -3$

.

$$\underline{X = \frac{1}{3} \cdot (2\,0\ \ -1\,0\,1\,0\ \ -1\,0\,2\,).}$$

****

4º) Dadas las matrices $A = (1\ 2\ 3\ 0\ t\ 2\ 3\ \ -\ 1\ t\ )\ e\ I = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ )$, se pide:

$a)$ Hallar el rango de A en función de t.

$b)$ Calcular t para que $det(A - tI) = 0$.

$a)$

$$|A| = |1\ 2\ 3\ 0\ t\ 2\ 3\ \ -\ 1\ t\ | = t^2 + 12 - 9t + 2 = t^2 - 9t + 14 = 0;$$

$t = \frac{9\pm\sqrt{81-56}}{2} = \frac{9\pm\sqrt{25}}{2} = \frac{9\pm5}{2} \Rightarrow t_1 = 2,\ t_2 = 7.$

$$\underline{Rang\ A = 3,\ \forall t \in R - \{2,\ 7\}}.$$

$$Para\ t = 2 \Rightarrow A = (1\ 2\ 3\ 0\ 2\ 2\ 3\ \ -\ 1\ 2\ ) \Rightarrow |1\ 2\ 0\ 2\ | \neq 0 \Rightarrow Rang\ A = 2.$$

$$Para\ t = 7 \Rightarrow A = (1\ 2\ 3\ 0\ 7\ 2\ 3\ \ -\ 1\ 7\ ) \Rightarrow |1\ 2\ 0\ 7\ | \neq 0 \Rightarrow Rang\ A = 2.$$

$$\underline{Para\ \{t = 2\ t = 7\ \} \Rightarrow Rang\ A = 2}.$$

$b)$ Calcular t para que $det(A - tI) = 0$.

$A - tI = (1\ 2\ 3\ 0\ t\ 2\ 3\ \ -\ 1\ t\ ) - (t\ 0\ 0\ 0\ t\ 0\ 0\ 0\ t\ ) = (1 - t\ 2\ 3\ 0\ 0\ 2\ 3\ \ -\ 1\ 0\ )$
.

$|A - tI| = |1 - t\ 2\ 3\ 0\ 0\ 2\ 3\ \ -\ 1\ 0\ | = 0;\ \ 12 + 2(1 - t) = 0;\ \ 12 + 2 - 2t = 0;$

$14 - 2t = 0;\ \ 7 - t = 0 \Rightarrow t = 7.$

$$\underline{det(A - tI) = 0\ para\ t = 7}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MADRID

SEPTIEMBRE – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger una de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

OPCIÓN A

1º) Dado el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} -mx+my+z=0 \\ x-my+3z=4 \\ 2x-2y-z=0 \end{cases}$, se pide:

a) Discutirlo según los valores del parámetro m.

b) Resolverlo en el caso m = 0.

c) Resolverlo en el caso m = 2.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$M=\begin{pmatrix} -m & m & 1 \\ 1 & -m & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $M'=\begin{pmatrix} -m & m & 1 & 0 \\ 1 & -m & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

El rango de M en función del parámetro m es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} -m & m & 1 \\ 1 & -m & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}=-m^2-2+6m+2m-6m+m=$$

$$=-m^2+3m-2=0;\ m^2-3m+2=0;\ m=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm1}{2}\Rightarrow m_1=1;\ m_2=2.$$

$$\underline{Para\ \begin{cases} m\neq1 \\ m\neq2 \end{cases}\Rightarrow Ran\ M=Ran\ M'=3=n^o\ incóg.\Rightarrow S.\ C.\ D.}$$

Para m = 1 es $M' = (-\ 1\,1\,1\,1\ \ -\ 1\,3\,2\ \ -\ 2\ \ -\ 1\quad 0\,4\,0\,) \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |-\ 1\,1\,0\,1\,3\,4\,2\ \ -\ 1\,0\,| = 8\ -\ 4\ =\ 4 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M'\ =\ 3.$

$$\underline{Para\ m\ =\ 1 \Rightarrow Ran\ M\ =\ 2;\ \ Ran\ M'\ =\ 3 \Rightarrow Incompatible.}$$

Para m = 2 es $M' = (-\ 2\,2\,1\,1\ \ -\ 2\,3\,2\ \ -\ 2\ \ -\ 1\quad 0\,4\,0\,) \Rightarrow \{F_1 =-\ F_3\} \Rightarrow Rang\ M'\ =\ 2.$

$$\underline{Para\ m\ =\ 2 \Rightarrow Ran\ M\ =\ Ran\ M'\ =\ 2\ <\ n^{o}\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$$

b)

Para m = 0 el sistema es $\{z\ =\ 0\qquad x\ +\ 3z\ =\ 4\qquad 2x\ -\ 2y\ -\ z\ =\ 0$, que es compatible determinado y cuya solución es:

$$\underline{Solución: x\ =\ 4,\ y\ =\ 4,\ z\ =\ 0}.$$

c)

Para m = 2 el sistema es $\{-\ 2x\ +\ 2y\ +\ z\ =\ 0\ x\ -\ 2y\ +\ 3z\ =\ 4\quad 2x\ -\ 2y\ -\ z\ =\ 0$, que es compatible indeterminado, según el apartado anterior y es equivalente al sistema: $x\ -\ 2y\ +\ 3z\ =\ 4\ 2x\ -\ 2y\ -\ z\ =\ 0\,\}$.

Haciendo z = λ: $x\ -\ 2y\ =\ 4\ -\ 3\lambda\ 2x\ -\ 2y\ =\ \lambda\qquad \}\quad -\ x\ +\ 2y\ =-\ 4\ +\ 3\lambda\ 2x\ -\ 2y\ =\ \lambda\qquad \}$

$$2x\ -\ 2y\ =\ \lambda\,;-\ 8\ +\ 8\lambda\ -\ 2y\ =\ \lambda;\ \ 2y\ =-\ 8\ +\ 7\lambda \Rightarrow y\ =-\ 4\ +\ \frac{7}{2}\lambda.$$

$$\underline{Solución: \{x\ =-\ 4\ +\ 4\lambda\ \ y\ =-\ 4\ +\ \frac{7}{2}\lambda\ \ z\ =\ \lambda\qquad ,\forall\lambda\in R.}$$

****

2º) La recta r pasa por P (2, -1, 0) y tiene vector director $\overrightarrow{v_r} = (1,\ \lambda,\ -2)$; la recta s pasa por Q (1, 0, -1) y tiene vector director $\overrightarrow{v_s} = (2,\ 4,\ 2)$.

$a)$ Calcular λ > 0 para que la distancia entre r y s sea $\frac{9}{\sqrt{59}}$.

$b)$ Calcular λ para que r sea perpendicular a la recta que pasa por P y Q.

$a)$

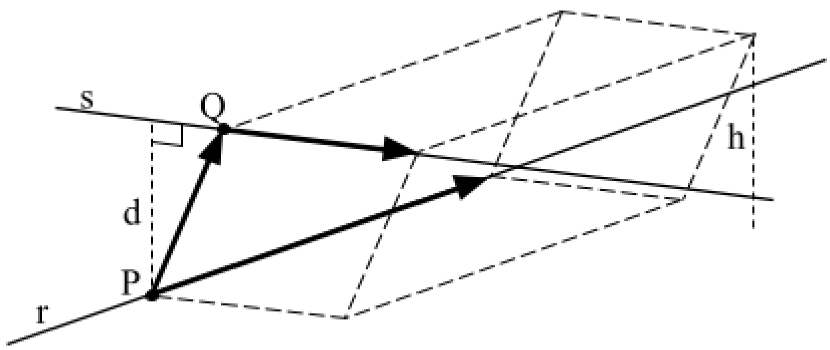
Por ser los vectores directores de las rectas linealmente independientes, $\forall\lambda\in R$, las rectas r y s se cruzan (en el caso de que se cortaran, la distancia entre ellas sería cero, y no es el caso).

Para hallar la distancia entre las rectas r y s hacemos lo siguiente:

En primer lugar determinamos el vector $\vec{m}$ que tiene como origen un punto P de r y como extremo el punto Q de s:

$$\vec{m} = \overrightarrow{PQ} = [Q - P] = [(1,\ 0,\ -1) - (2,\ -1,\ 0)] = (-1,\ 1,\ -1).$$

Se determina un paralelepípedo cuyas dimensiones son los vectores directores de las rectas $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ y el vector $\vec{m}$.



Para una mejor comprensión se hace el esquema adjunto.

El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observar que la altura h es igual a la distancia d pedida entre las rectas.

Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$V = \overrightarrow{v_r} \cdot \left(\overrightarrow{v_s} \times \overrightarrow{m}\right) = \left|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}\right| \cdot h = \left|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}\right| \cdot d \Rightarrow d = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \cdot \left(\overrightarrow{v_s} \times \overrightarrow{m}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}\right|}.$$

$\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s} = |i\ j\ k\ 1\ \lambda\ -2\ 2\ 4\ 2\ | = 2\lambda i - 4j + 4k - 2\lambda k + 8i - 2j =$
$= (2\lambda + 8)i - 6j + (4 - 2\lambda)k.$

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \cdot \left(\overrightarrow{v_s} \times \overrightarrow{m}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}\right|} = \frac{\|1\ \lambda\ -2\ 2\ 4\ 2\ -1\ 1\ -1\ \|}{\sqrt{(2\lambda+8)^2+(-6)^2+(4-2\lambda)^2}} = \frac{|-4-4-2\lambda-8-2+2\lambda|}{\sqrt{4\lambda^2+32\lambda+64+36+16-16\lambda+4\lambda^2}} =$$

$$= \frac{|-18|}{\sqrt{8\lambda^2+16\lambda+116}} = \frac{|-18|}{2\sqrt{2\lambda^2+4\lambda+29}} = \frac{9}{\sqrt{2\lambda^2+4\lambda+29}} = \frac{9}{\sqrt{59}} \Rightarrow \sqrt{2\lambda^2 + 4\lambda + 29} = \sqrt{59};$$

$2\lambda^2 + 4\lambda + 29 = 59;\ 2\lambda^2 + 4\lambda - 30 = 0;\ \lambda^2 + 2\lambda - 15 = 0;\ \lambda = \frac{-2\pm\sqrt{4+60}}{2} =$

$= \frac{-2\pm8}{2} = -1\pm4 \Rightarrow \lambda_1 = -5,\ \lambda_2 = 3.$ Como es $\lambda > 0$:

$\underline{Solución:\ \lambda = 3.}$

$b)$

La recta que pasa por P y Q tiene como vector director $\overrightarrow{v_{PQ}} = \overrightarrow{PQ} = (-1,\ 1,\ -1)$.

Dos rectas son perpendiculares cuando lo son sus vectores directores, o sea, cuando el producto escalar de sus vectores directores es cero:

$$\overrightarrow{v_{PQ}} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0 \Rightarrow (-1,\ 1,\ -1)\cdot(1,\ \lambda,\ -2) = 0;\ -1 + \lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1.$$

$\underline{La\ recta\ que\ pasa\ por\ P\ y\ Q\ es\ perpendicular\ a\ r\ para\ \lambda = -1.}$

****

3º) a) Estudiar el crecimiento de la función $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$.

b) Demostrar que la ecuación $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = 0$ tiene una única solución real y localizar un intervalo de longitud 1 que la contenga.

----

a)

Una función es creciente o decreciente en un punto cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x) = 2 + 6x + 12x^2$. $f'(x) = 0 \Rightarrow 2 + 6x + 12x^2 = 0$; $6x^2 + x + 1 = 0$;

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-24}}{2} \Rightarrow x \notin R \Rightarrow 6x^2 + x + 1 > 0,\ \forall x \in R.$

$\underline{La\ función\ es\ monótona\ creciente\ es\ su\ dominio,\ que\ es\ R.}$

b)

La condición de monotonía de la función indica, necesariamente, que la función $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$ no puede tener más de una raíz real.

Aplicando el teorema de Bolzano al intervalo $[-2, 2]$:

$f(-2) = 1 + 2\cdot(-2) + 3\cdot(-2)^2 + 4\cdot(-2)^3 = 1 - 4 + 12 - 32 < 0$

.

$f(2) = 1 + 2\cdot2 + 3\cdot2^2 + 4\cdot2^3 = 1 + 4 + 12 + 32 > 0.$

De lo anterior se deduce que el valor de la raíz es $-2 < x < 2$.

Para solucionar el ejercicio basta con reducir el intervalo hasta que sea de longitud menor que 1.

$f(0) = 1 > 0 \Rightarrow -2 < x < 0.$

$f(-1) = 1 + 2\cdot(-1) + 3\cdot(-1)^2 + 4\cdot(-1)^3 = 1 - 2 + 3 - 4 < 0.$

$\underline{La\ raíz\ de\ la\ función\ f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3\ es\ -1 < x < 0}$.

****

4º) $a)$ Calcular la integral definida $\int_{1}^{4}(1 - x)\cdot e^{-x}\cdot dx$.

$b)$ Calcular $\left[(1 - x)\cdot e^{-x}\right]$ y $\left[(1 - x)\cdot e^{-x}\right]$.

$a)$

En primer lugar hacemos la integral indefinida $I = \int(1 - x)\cdot e^{-x}\cdot dx$:

$$I = \int(1 - x)\cdot e^{-x}\cdot dx \Rightarrow \left\{1 - x = u \rightarrow du = - dx \quad e^{-x}\cdot dx = dv \rightarrow v = - e^{-x}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 - x)\cdot\left(- e^{-x}\right) - \int - e^{-x}\cdot(- dx) = (x - 1)\cdot e^{-x} - \int e^{-x}\cdot dx =$$

$$= (x - 1)\cdot e^{-x} + e^{-x} + C = x\cdot e^{-x} + C.$$

$$\int_{1}^{4}(1 - x)\cdot e^{-x}\cdot dx = \left[x\cdot e^{-x}\right]_{1}^{4} = \left(4\cdot e^{-4}\right) - \left(e^{-1}\right) = \frac{4}{e^{4}} - \frac{1}{e} = \frac{4-e^{3}}{e^{4}}.$$

$$\underline{\int_{1}^{4}(1 - x)\cdot e^{-x}\cdot dx = \frac{4-e^{3}}{e^{4}}}.$$

$b)$

$$\left[(1 - x)\cdot e^{-x}\right] = \frac{1-x}{e^{x}} = \frac{-\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{e^{x}} = \frac{-1}{\infty} = \underline{0}.$$

$$\left[(1 - x)\cdot e^{-x}\right] = \frac{1+\infty}{e^{-\infty}} = \infty\cdot e^{\infty} = \infty\cdot\infty = \underline{\infty}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Dada la función $f(x) = \{a + x \cdot Lx, \; si\, x > 0 \; x^2 \cdot e^x, \; si\, x \leq 0$, (donde L denota logaritmo neperiano y α es un número real) se pide:

$a)$ Calcular el valor de α para que f(x) sea continua en todo R.

$b)$ Calcular f'(x) donde sea posible.

$c)$ Calcular $\int_{-1}^{0} f(x) \cdot dx$.

$a)$

La función $f(x) = \{a + x \cdot Lx, \; si\, x > 0 \; x^2 \cdot e^x, \; si\, x \leq 0$ es continua en su dominio, que es R, excepto para x = 0 cuya continuidad vamos a forzar calculando el valor adecuado del parámetro α.

$$f(x) = (a + x \cdot Lx) = a + (x \cdot Lx) = a + [0 \cdot (-\infty)] \Rightarrow Ind. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{Lx}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{-\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \to 0^-} x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = a.$$

$$f(x) = \left(x^2 \cdot e^x\right) = 0 \cdot e^0 = 0 \cdot 1 = 0 = f(0) .$$

$$f(x) = f(0) = f(x) \Rightarrow \underline{a = 0}.$$

$$\underline{La\, función\, f(x)\, es\, continua\, en\, R\, para\, a = 0}.$$

$b)$

La función resulta: $f(x) = \{x \cdot Lx, \; si\, x > 0 \quad x^2 \cdot e^x, \; si\, x \leq 0$.

Siendo $g(x) = x \cdot Lx$ es $g'(x) = 1 \cdot Lx + x \cdot \frac{1}{x} = 1 + Lx$.

Siendo $h(x) = x^2 \cdot e^x$ es $h'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = xe^x(2 + x)$.

Teniendo en cuenta lo anterior: $\underline{f'(x) = \{ \quad 1 + Lx \quad si\, x > 0 \; xe^x(2 + x) \; si\, x \leq 0}$.

$c)$

$$\int_{-1}^{0} f(x)\cdot dx = \int_{-1}^{0} x^2\cdot e^x\cdot dx.$$

Para el cálculo de la integral definida, calculamos en primer lugar la integral indefinida.

$$A = \int x^2 e^x\cdot dx \Rightarrow \left\{u = x^2 \rightarrow du = 2x\cdot dx\ e^x\cdot dx = dv \rightarrow v = e^x\right\} \Rightarrow x^2\cdot e^x - \int e^x\cdot 2x\cdot d$$

$$= x^2\cdot e^x - 2\cdot\int e^x\cdot x\cdot dx = x^2\cdot e^x - 2\cdot B.$$

$$B = \int e^x\cdot x\cdot dx \Rightarrow \left\{u = x \rightarrow du = dx\ e^x\cdot dx = dv \rightarrow v = e^x\right\} \Rightarrow x\cdot e^x - \int e^x\cdot dx =$$

$$= x\cdot e^x - e^x + C = e^x(x - 1) + C.$$

Sustituyendo el valor obtenido de B en la expresión de A:

$$A = x^2\cdot e^x - 2\cdot e^x(x - 1) + C = e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + C.$$

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx = \left[e^x\left(x^2 - 2x + 2\right)\right]_{-1}^{0} = \left[e^0(0 - 0 + 2)\right] - \left[e^{-1}(1 + 2 + 2)\right] =$$

$$= 2 - \frac{5}{e} = \frac{2e-5}{e}.$$

$$\underline{\int_{-1}^{0} f(x)dx = \frac{2e-5}{e}.}$$

****

2º) Dados los puntos P (-1, -1, 1) y Q (1, 0, 2) y los planos $\pi_1 \equiv x - z = 0$, $\pi_2 \equiv my - 6z = 0$, $\pi_3 \equiv x + y - mz = 0$, se pide:

a) Calcular los valores de m para los que los tres planos se cortan en una recta.

b) Para m = 3, hallar la ecuación del plano que contiene al punto P y es perpendicular a la recta de intersección de los planos π_1 y π_2.

c) Hallar la distancia entre los puntos Q y P', siendo P' el punto simétrico de P respecto al plano π_1.

----

a)

Para el caso general de tres planos que determinan las matrices de coeficientes y ampliada M y M', respectivamente, se presentan los siguientes casos:

1º. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow Los\ planos\ se\ cortan\ en\ un\ punto.$

2º. -- $Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Los\ planos\ son\ secantes\ dos\ a\ dos.$

3º. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow Los\ planos\ se\ cortan\ en\ una\ recta.$

4º. -- $Rang\ M = 1;\ Rang\ M' = 2 \Rightarrow Los\ planos\ son\ paralelos.$

5º. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 1 \Rightarrow Los\ planos\ son\ coincidentes.$

En el caso que nos ocupa, los tres planos carecen de término independiente por lo cual las matrices de coeficientes y ampliada son iguales a efectos de rango; la matriz de coeficientes es $M = (1\ 0\ \ -1\ 0\ m\ \ -6\ 1\ 1\ \ -m)$.

Para que los tres planos se corten en una recta es necesario que se anule el determinante de la matriz, teniendo en cuenta que $|1\ 0\ 1\ 1| \neq 0$ es un menor complementario de la matriz de coeficientes.

$|M| = |1\ 0\ \ -1\ 0\ m\ \ -6\ 1\ 1\ \ -m| = 0;\ \ -m^2 + m - 6 = 0;\ \ m^2 - m + 6 = 0$
.

$m = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow m_1 = -2,\ m_2 = 3.$

$\underline{Los\ tres\ planos\ se\ cortan\ en\ una\ recta\ para\ m = -2\ y\ para\ m = 3}.$

b)

Para m = 3 los planos $\pi_1 \equiv x - z = 0$ y $\pi_2 \equiv my - 6z = 0$ determinan la recta r de ecuación $r \equiv \begin{cases} x - z = 0 \\ 3y - 6z = 0 \end{cases}$, equivalente a $r \equiv \begin{cases} x - z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$.

Un vector director de r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son los siguientes: $\overrightarrow{n_1} = (1,\ 0,\ -1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (0,\ 1,\ -2)$.

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = k + i + 2j \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (1,\ 2,\ 1).$$

El haz de planos perpendiculares a r es $\beta \equiv x + 2y + z + D = 0$; de estos infinitos planos, el plano π pedido es el que contiene al punto P (-1, -1, 1):

$$\left.\begin{array}{l} \beta \equiv x + 2y + z + D = 0 \\ P(-1,\ -1,\ 1) \end{array}\right\} \Rightarrow -1 - 2 + 1 + D = 0;$$
.

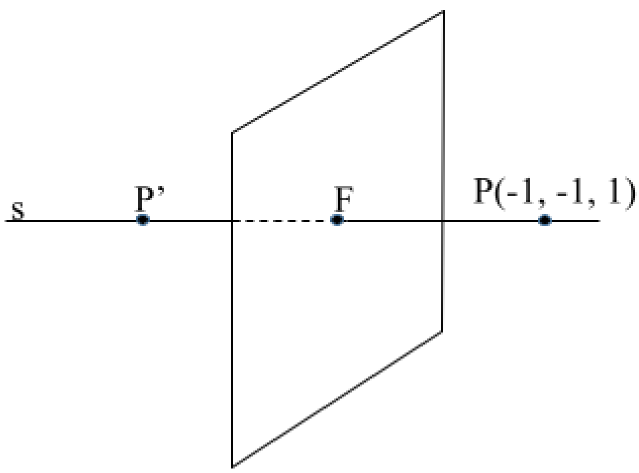
$$\underline{\pi \equiv x + 2y + z + 2 = 0}.$$

$c)$

La recta s perpendicular al plano π_1 y que contiene a P(-1, -1, 1) tiene la siguiente expresión dada por unas ecuaciones paramétricas: $s \equiv \begin{cases} x = -1 + \mu \\ y = -1 \\ z = 1 - \mu \end{cases}$.

El punto F, intersección de la recta s con el plano π_1 es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \equiv x - z = 0 \\ s \equiv \begin{cases} x = -1 + \mu \\ y = -1 \\ z = 1 - \mu \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow -1 + \mu - 1 + \mu = 0; 2$$
.



$$\overrightarrow{PF} = \overrightarrow{FP'} \Rightarrow [F - P] = \left[P' - F\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [(0, \ -1, 0) - (-1, \ -1, 1)] = [(x, y, z) - (0, \ -1, 0)];$$

$$(1, 0, \ -1) = (x, y + 1, z) \Rightarrow \{x = 1 \ y = -1 \ z = -1\} \Rightarrow P'(1, \ -1, \ -1).$$

Siendo $Q(1, 0, 2)$ es:

$$\overline{P'Q} = \sqrt{(1 - 1)^2 + (0 + 1)^2 + (2 + 1)^2} = \sqrt{0 + 1 + 9} = \underline{\sqrt{10}\ unidades}$$
.

****

3º) Sabiendo que $|a\ b\ c\ d\ e\ f\ 1\ 2\ 3\ | = 3$ y usando las propiedades de los determinantes, calcular el valor de los siguientes determinantes:

$a)$ $|2a\ -\ 2b\ c\ 5b\ 2d\ -\ 2e\ f\ 5e\ \ -\ 2\ 3\ 10\ |$. $b)$
$|a\ -\ 1\ b\ -\ 2\ 2c\ -\ 6\ 2\ 4\ 12\ d\ e\ 2f\ |$.

$a)$

$|2a\ -\ 2b\ c\ 5b\ 2d\ -\ 2e\ f\ 5e\ \ -\ 2\ 3\ 10\ | = |2a\ c\ 5b\ 2d\ f\ 5e\ 2\ 3\ 10\ | + |-\ 2b\ c\ 5b$
.

$A\ = |2a\ c\ 5b\ 2d\ f\ 5e\ 2\ 3\ 10\ | =\ 2{\cdot}5{\cdot}|a\ c\ b\ d\ f\ e\ 1\ 3\ 2\ | =-\ 10{\cdot}|a\ b\ c\ d\ e\ f\ 1\ 2\ 3\ | =-\ 10{\cdot}3$
.

$B\ = |-\ 2b\ c\ 5b\ \ -\ 2e\ f\ 5e\ \ -\ 4\ 3\ 10\ | =-\ 2{\cdot}5{\cdot}|b\ c\ b\ e\ f\ e\ 2\ 3\ 2\ | =\ 10{\cdot}0\ =\ 0$
.

$\underline{|2a\ -\ 2b\ c\ 5b\ 2d\ -\ 2e\ f\ 5e\ \ -\ 2\ 3\ 10\ | =-\ 30}.$

$b)$

$|a\ -\ 1\ b\ -\ 2\ 2c\ -\ 6\ 2\ 4\ 12\ d\ e\ 2f\ | = |a\ b\ 2c\ 2\ 4\ 12\ d\ e\ 2f\ | + |-\ 1\ \ -\ 2\ \ -\ 6\ 2\ 4\ 12\ d$
.

$M\ = |a\ b\ 2c\ 2\ 4\ 12\ d\ e\ 2f\ | =\ 2{\cdot}|a\ b\ c\ 2\ 4\ 6\ d\ e\ f\ | =\ 4{\cdot}|a\ b\ c\ 1\ 2\ 3\ d\ e\ f\ | =-\ 4{\cdot}|a\ b$

$=-\ 4{\cdot}3\ =-\ 12.$

$N\ = |-\ 1\ \ -\ 2\ \ -\ 6\ 2\ 4\ 12\ d\ e\ 2f\ | =-\ |1\ 2\ 6\ 2\ 4\ 12\ d\ e\ 2f\ | =-\ 2{\cdot}|1\ 2\ 3\ 2\ 4\ 6\ d\ e$
.

$\underline{|a\ -\ 1\ b\ -\ 2\ 2c\ -\ 6\ 2\ 4\ 12\ d\ e\ 2f\ | =-\ 12}.$

En la realización de los dos apartados del ejercicios se han utilizado las siguientes propiedades de los determinantes:

1ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se descomponen en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en dicha línea el primero y el segundo sumandos, respectivamente, siendo los restantes elementos iguales a los del determinante inicial.

2ª.- Si un determinante tiene dos líneas paralelas iguales o proporcionales su valor es cero.

3ª.- Si se intercambian dos líneas de un determinante su valor cambia de signo.

4ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se multiplican o dividen por un número su valor queda multiplicado o dividido por dicho número.

****

4º) Dada la matriz $A = (3\ 1\ 1\ 0\ )$, hallar todas las matrices $B = (a\ b\ c\ d\ )$ que conmutan con A, es decir, que cumplan A · B = B · A.

$$A{\cdot}B\ =\ B{\cdot}A \Rightarrow (3\ 1\ 1\ 0\ ){\cdot}(a\ b\ c\ d\ ) = (a\ b\ c\ d\ ){\cdot}(3\ 1\ 1\ 0\ );$$

$(3a\ +\ c\ 3b\ +\ d\ a\ b\ ) = (3a\ +\ b\ a\ 3c\ +\ d\ c\ ) \Rightarrow$ $\quad b\ =\ c\ 3b\ +\ d\ =\ a\ 3c\ +\ d\ =\ b\ \}$

$a\ =\ b\ =\ c; d\ =-\ 2c.$

$\underline{Las\ matrices\ pedidas\ son\ de\ la\ forma\ B\ =(a\ a\ a\ \ -\ 2a\ )}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

JUNIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas. No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

OPCIÓN A

1º) a) Discuta el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} x+y+az=1 \\ x+ay+z=a \\ ax+y+z=1 \end{array}\right\}$ en función del parámetro a.

b) Si es posible, resuélvalo para el valor de $a=-2$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}\ y\ M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro a es:

$$Rang\ M\Rightarrow\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}=a+a+a-a^3-1-1=-a^3+3a-2=0;$$

$a^3-3a+2=0.$ Resolviendo por Ruffini: $a_1=a_2=1,\ a_3=-2.$

$$\underline{Para\ \left\{\begin{array}{l} a\neq 1 \\ a\neq -2 \end{array}\right\}\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=n^{\underline{o}}\ incóg.\Rightarrow S.\ C.\ D.}$$

$$Para\ a=1\ es\ M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ M'=1.$$

$$\underline{Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 1 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$$

(con dos grados de libertad)

$Para\ a = -2\ es\ M' = (1\ 1\ -2\ 1\ -2\ 1\ -2\ 1\ 1\ \ 1\ -2\ 1) \Rightarrow \{C_2 = C_4\} \Rightarrow Rang\ M'$

.

$$\underline{Para\ a = -2 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$$

$b)$

Para $a = -2$ el sistema resulta $x + y - 2z = 1\ x - 2y + z = -2\ -2x + y + z = 1\}$, que es compatible indeterminado. Despreciando una ecuación (tercera) y haciendo $z = \lambda$:

$x + y = 1 + 2\lambda\ x - 2y = -2 - \lambda\} \quad x + y = 1 + 2\lambda\ -x + 2y = 2 + \lambda\} \Rightarrow 3y =$

.

$x + y = 1 + 2\lambda;\ \ x + 1 + \lambda = 1 + 2\lambda;\ \ x = \lambda.$

$$\underline{Solución: x = \lambda,\ y = 1 + \lambda,\ z = \lambda,\ \forall\lambda \in R.}$$

****

2º) Tres de los cuatro vértices de un tetraedro son los puntos $A(2,\ 1,\ 0)$, $B(3,\ 4,\ 0)$ y $C(5,\ 1,\ 0)$. El cuarto vértice D está en la recta r que pasa por el punto $P(1,\ 2,\ 3)$ y tiene como vector director el vector $\overrightarrow{v_r} = (-\ 1,\ 1,\ 1)$.

a) Determina las ecuaciones paramétricas de r.

b) Calcule las coordenadas del vértice D para que el volumen del tetraedro sea 9.
Observación: Hay dos soluciones distintas; basta con calcular una de ellas.

----

a)

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es: $\underline{r \equiv \{x = 1 - \lambda\, y = 2 + \lambda\, z = 3 + \lambda}$.

b)

Los puntos A, B y C, por tener los tres la tercera componente nula, son coplanarios; el plano que los contiene es $\pi \equiv z = 0$.

$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(3,\ 4,\ 0) - (2,\ 1,\ 0)] = (1,\ 3,\ 0)$.

$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(5,\ 1,\ 0) - (2,\ 1,\ 0)] = (3,\ 0,\ 0)$.

Un punto genérico de r es $Q(1 + \lambda,\ 2 + \lambda,\ 3 + \lambda)$.

Sabiendo que el volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto de los vectores que lo determinan:

$\overrightarrow{AD} = [D - A] = [(1 - \lambda,\ 2 + \lambda,\ 3 + \lambda) - (2,\ 1,\ 0)] = (-\ 1 - \lambda,\ 1 + \lambda,\ 3 + \lambda)$
.

$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot ||1\ 3\ 0\ 3\ 0\ 0\ \ -1 - \lambda\, 1 + \lambda\, 3 + \lambda\, || = 9;\ \ ||1\ 3\ 0\ 3\ 0\ 0\ \ -1 - \lambda\, 1 + \lambda\, 3 +$

$|(3 + \lambda) \cdot |1\ 3\ 3\ 0\, || = 54;\ \ |-\ 9 \cdot (3 + \lambda)| = 54;\ \ |3 + \lambda| = 6.$

$3 + \lambda = 6\ \ - 3 - \lambda = 6\, \} \rightarrow \lambda_1 = 3 \quad \rightarrow \lambda_2 =-\ 9\, .$

$Q(1 - \lambda,\ 2 + \lambda,\ 3 + \lambda)$.

$\underline{\lambda_1 = 3 \Rightarrow Q_1(-\ 2,\ 5,\ 6).}$ $\underline{\lambda_2 =-\ 9 \Rightarrow Q_2(10,\ \ -\ 7,\ \ -\ 6).}$

****

3º) $a)$ Calcule $\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}$. $b)$ $\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}$.

$c)$ ¿Es continua la función $\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}$ en $x = 0$? Justifique la respuesta.

$a)$

$$\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}} = \frac{2+e^{\frac{1}{0^-}}}{1+e^{\frac{2}{0^-}}} = \frac{2+e^{-\infty}}{1+e^{-\infty}} = \frac{2+\frac{1}{e^{\infty}}}{1+\frac{1}{e^{\infty}}} = \frac{2+\frac{1}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}} = \frac{2+0}{1+0} = \underline{2}.$$

$b)$

$$\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}} = \frac{2+e^{\frac{1}{0^+}}}{1+e^{\frac{2}{0^+}}} = \frac{2+e^{+\infty}}{1+e^{+\infty}} = \frac{2+\infty}{1+\infty} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-\frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{2}{x^2}\cdot e^{\frac{2}{x}}} = \frac{-\frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{2}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2\cdot e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2\cdot e^{\frac{1}{0}}} = \frac{1}{2\cdot e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = \underline{0}.$$

$c)$

Una función es continua en un punto cuando sus límites laterales en ese punto son iguales e igual al valor de la función en ese punto. Como quiera que los límites laterales de la función $\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}$ en $x = 0$ son distintos, como se puede observar en los apartados $a)$ y $b)$:

$$\underline{La\ función\ f(x)\ no\ es\ continua\ en\ x = 0}.$$

****

4º) a) Calcule la integral indefinida $I = \int 2x \cdot arc\ tg\ x \cdot dx$.

b) De todas las primitivas de la función $f(x) = 2x \cdot arc\ tg\ x$, encuentre la que pasa por el punto $P(0, \ -2)$.

----

a)

$$I = \int 2x \cdot arc\ tg\ x \cdot dx \Rightarrow \left\{ u = arc\ tg\ x \to du = \frac{dx}{x^2+1} \quad 2x \cdot dx = dv \to v = x^2 \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (arc\ tg\ x) \cdot x^2 - \int x^2 \cdot \frac{dx}{x^2+1} = x^2 \cdot arc\ tg\ x - \int \frac{x^2}{x^2+1} \cdot dx =$$

$$= x^2 \cdot arc\ tg\ x - \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} \cdot dx = x^2 \cdot arc\ tg\ x - \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) \cdot dx =$$

$$= x^2 \cdot arc\ tg\ x - \int dx + \int \frac{1}{x^2+1} \cdot dx = x^2 \cdot arc\ tg\ x - x + arc\ tg\ x + C.$$

$$\underline{I = \int 2x \cdot arc\ tg\ x \cdot dx = \left(x^2 + 1\right) \cdot arc\ tg\ x - x + C.}$$

b)

$$F(x) = \int f(x) \cdot dx = \left(x^2 + 1\right) \cdot arc\ tg\ x - x + C.$$

Por pasar $F(x)$ por $P(0, \ -2)$ es $F(0) = -2$:

$F(0) = -2 \Rightarrow (0 + 1) \cdot arc\ tg\ 0 - 0 + C = -2 \Rightarrow C = -2.$

$$\underline{F(x) = \left(x^2 + 1\right) \cdot arc\ tg\ x - x - 2.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Observación: Los apartados a) y b) de este ejercicio son absolutamente independientes y se pueden resolver en el orden que se quiera.

Se dice que una matriz cuadrada A es involutiva si cumple $A^2 = I$, donde I denota la matriz identidad.

a) Justifique razonadamente que toda matriz involutiva es regular (o invertible).

b) Determine para qué valores de los parámetros α y b la siguiente matriz es involutiva: $A = (a\ a\ 0\ a\ -\ a\ 0\ 0\ 0\ b\ )$.

----

a)

Una matriz A es involutiva si $A^2 = I$, o sea, cuando $A \cdot A = I$. Por otra parte, por definición de matriz inversa se cumple que $A \cdot A^{-1} = I$, de donde se deduce que toda matriz involutiva es la inversa de si misma.

$\underline{Toda\ matriz\ A\ involutiva\ es\ la\ inversa\ de\ si\ misma,\ por\ tanto\ es\ invertible}.$

b)

$A^2 = I \Rightarrow (a\ a\ 0\ a\ -\ a\ 0\ 0\ 0\ b\ ) \cdot (a\ a\ 0\ a\ -\ a\ 0\ 0\ 0\ b\ ) = \left(a^2 + a^2\ a^2 - a^2\ 0\ a^2 - a\right.$

$= \left(2a^2\ 0\ 0\ 0\ 2a^2\ 0\ 0\ 0\ b^2\right) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow 2a^2 = 1\ b^2 = 1\ \} \Rightarrow \underline{a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}};\ \underline{b =}$

.

****

2º) Observación: Los apartados a) y b) de este ejercicio son absolutamente independientes y se pueden resolver en el orden que se quiera.

Considere la recta $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y + z = -7$:

a) Compruebe que la recta r corta al plano π y calcule el ángulo que forman.

b) Determine el plano β que pasa por el punto $P(2, -3, 3)$, es paralelo a la recta r y es perpendicular al plano π.

----

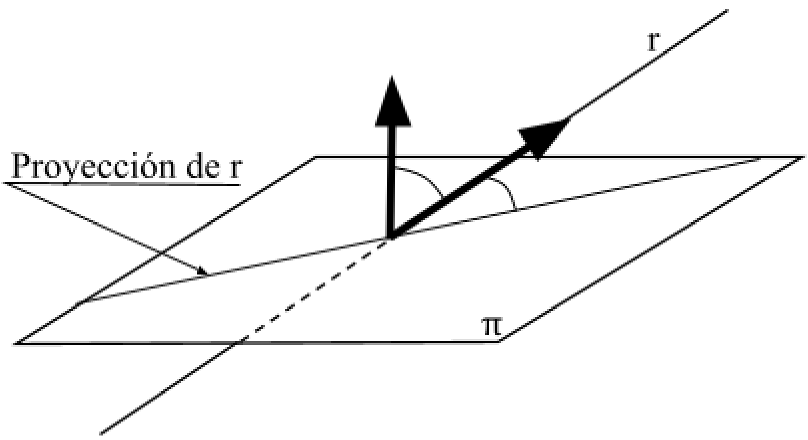
a)

Un vector director de r es $\vec{v}_r = (1, -1, 2)$.

Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (2, 1, 1)$.

El vector director de r y el vector normal de π son linealmente independientes por no tener proporcionales sus componentes, por lo cual:

<u>$La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ secantes.$</u>



Por definición de producto escalar: $\vec{n} \cdot \vec{v}_r = |\vec{n}| \cdot |\vec{v}_r| \cdot \cos cos\ \beta$.

$\cos cos\ \beta = \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}_r}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}_r|}$. Por ser α y β complementarios: $sen\ \alpha = \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}_r}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}_r|}$.

$$sen\ \alpha = \frac{(2, 1, 1) \cdot (1, -1, 2)}{\sqrt{2^2+1^2+1^2} \cdot \sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}} = \frac{2-1+2}{\sqrt{4+1+1} \cdot \sqrt{1+1+4}} = \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30°.$$

<u>$La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ forman\ un\ ángulo\ de\ 30°.$</u>

b)

El plano β, por ser paralelo a la recta r y perpendicular al plano π, tiene como vectores directores al vector director de la recta y al vector normal del plano; teniendo en cuenta que contiene al punto $P(2,\ -3,\ 3)$, su ecuación general o implícita es la siguiente:

$$\beta\left(P;\ \vec{v}_r,\ \vec{n}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z-3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-(x-2)+4(y+3)+(z-3)+2(z-3)-2(x-2)-(y+3)=0;$$

$$-3(x-2)+3(y+3)+3(z-3)=0;\ \ (x-2)-(y+3)-(z-3)=0;$$

$$x-2-y-3-z+3=0 \Rightarrow \underline{\beta \equiv x-y-z-2=0}.$$

****

3º) Considere la función dada por $f(x) = \{x^2 + ax - 3 \ si \ x \leq 1 \ L(x^2) + b \ si \ x > 1$. Determine los valores de los parámetros a y b para los cuales la función $f(x)$ es continua y derivable en todo R.

La función f(x) es continua $\forall a, \ b \in R$, excepto para $x = 1$, cuya continuidad se estudia a continuación.

Para que la función sea continua en $x = 1$ es necesario que sus límites laterales en ese punto sean iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$f(x) \ = \left(x^2 + ax - 3\right) \ = a - 2 = f(1) \ f(x) \ = \left[L\left(x^2\right) + b\right] \ = b$$

.

La función $f(x) = \{x^2 + ax - 3 \ si \ x \leq 1 \ L(x^2) + b \ si \ x > 1$, es derivable $\forall a, \ b \in R$, excepto para el valor $x = 1$, cuya derivabilidad vamos a estudiar.

Una función es derivable en un punto cuando es continua en ese punto y, además, sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales.

$$f'(x) = \{2x + a \ si \ x \leq 1 \ \frac{2}{x} \ si \ x > 1 \ \Rightarrow f'(1) = \{2 + a \ si \ x \leq 1 \quad 2 \quad si \ x > 1 \Rightarrow 2 + a$$

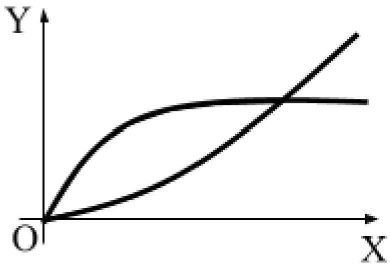
.

Sustituyendo en la ecuación $a - b = 2 \Rightarrow b = -2$.

<u>*La función $f(x)$ es continua y derivable en R para $a = 0$ y $b = -2$*</u>.

****

4º) Considere el recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = 2sen\, x$ y $g(x) = tg\, x$ en el primer cuadrante del plano XY, que está representado en la figura adjunta.



a) Determine los puntos de corte de dichas funciones.

b) Calcule el área de dicho recinto.

----

a)

Los puntos de corte se obtienen de la resolución de la ecuación que resulta de la igualación de las expresiones de las dos funciones.

$f(x) = g(x) \Rightarrow 2sen\, x = tg\, x;\ \ 2sen\, x = \frac{sen\, x}{\cos cos\, x};\ \ 2sen\, x \cdot \cos cos\, x = sen\, x;$

$2sen\, x \cdot \cos cos\, x - sen\, x = 0;\ \ sen\, x \cdot (2 \cdot cos\, x - 1) = 0 \Rightarrow \{sen\, x = 0 \rightarrow x_1 = 0\ cos\, x =$

.

<u>$Las\ funciones\ f(x)\ y\ g(x)\ se\ cortan\ en\ los\ punto\ O(0,\ 0)\ y\ A\left(\frac{\pi}{3},\ \sqrt{3}\right).$</u>

b)

Considerando un punto del intervalo $\left(0,\ \frac{\pi}{3}\right)$, por ejemplo $x = \frac{\pi}{6}$, resulta que en el intervalo dado las ordenadas de las funciones son:

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2sen\, \frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \text{ y } g\left(\frac{\pi}{6}\right) = tg\, \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} < 1 \Rightarrow f(x) > g(x).$$

Teniendo en cuenta lo anterior, el área pedida es la siguiente:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{3}} [f(x) - g(x)] \cdot dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2sen\, x - tg\, x) \cdot dx =$$

$$= 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{3}} sen\, x \cdot dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} tg\, x \cdot dx = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{3}} sen\, x \cdot dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{0} tg\, x \cdot dx = 2A + B.$$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} sen\, x \cdot dx = [x\,]_0^{\frac{\pi}{3}} = [\cos cos\, x\,]_{\frac{\pi}{3}}^{0} = \cos cos\, 0 - \cos cos\, \frac{\pi}{3} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

.

$$B = \int_{\frac{\pi}{3}}^{0} tg\, x \cdot dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{0} \frac{sen\, x}{\cos cos\, x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ x = 0 \rightarrow t = 1 \;\; x = \frac{\pi}{3} \rightarrow t = \frac{1}{2} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{-dt}{t} = - \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dt}{t} = \int_{1}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} = [Lt]_{1}^{\frac{1}{2}} = L\frac{1}{2} - L1 = L1 - L2 - 0 = - L2.$$

Sustituyendo los valores obtenidos de A y B:

$$S = 2A + B = 2 \cdot \frac{1}{1} - L2 = 1 - L2.$$

$\underline{El\ área\ pedida\ es,\ aproximadamente,\ (1 - L2) \cong 0,31\ u^2}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

SEPTIEMBRE – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No esté permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas. No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

OPCIÓN A

1º) Considere las matrices $A = (1\ 1\ -1\ -1)$ y $B = (0\ 1)$.

a) Calcule $C = A^t \cdot A - B \cdot B^t$, donde A^t y B^t denotan, respectivamente, las matrices traspuestas de A y B.
b) Halle una matriz X tal que $X \cdot C = D$, siendo $D = (2\ -2\ -2\ 2\ 4\ 4)$.

----

a)

Las traspuestas son $A^t = (1\ -1\ 1\ -1)$ y $B^t = (0\ 1)$.

$$C = A^t \cdot A - B \cdot B^t = (1\ -1\ 1\ -1) \cdot (1\ 1\ -1\ -1) - (0\ 1) \cdot (0\ 1) =$$

$$= (2\ 2\ 2\ 2) - (0\ 0\ 0\ 1) = \underline{(2\ 2\ 2\ 1)}.$$

b)

$$X \cdot C = D;\ X \cdot C \cdot C^{-1} = D \cdot C^{-1};\ X \cdot I = D \cdot C^{-1} \Rightarrow \underline{X = D \cdot C^{-1}}. \quad (*)$$

$$(I) = (1\ 0\ 0\ 1) \Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow ½F_1\right\} \Rightarrow \left(\tfrac{1}{2}\ 0\ 0\ 1\right) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\tfrac{1}{2}\ 0\ -1\ 1\right) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow -F_2\right\} \Rightarrow \left(\tfrac{1}{2}\ 0\ 1\ -1\right) \Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow F_1 - F_2\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(-\tfrac{1}{2}\ 1\ 1\ -1\right) \Rightarrow C^{-1} = \left(-\tfrac{1}{2}\ 1\ 1\ -1\right).$$

Sustituyendo en (*) el valor obtenido:

$X = D \cdot C^{-1} = (2 \quad -2 \quad -2\ 2\ 4\ 4) \cdot \left(-\frac{1}{2}\ 1\ 1 \quad -1\right) = \underline{(-\ 3\ 4\ 3 \quad -4\ 2\ 0)}.$

****

2º) Se llama mediana de un triángulo a cada una de las rectas que pasan por el vértice de un triángulo y por el punto medio del lado opuesto a dicho vértice.

a) Los vértices de un triángulo son A (5, 3, 6), B (-1. -1, 2) y C (5, 7, 4). Calcule los puntos medios de sus lados.

b) Calcule las ecuaciones de las tres medianas de dicho triángulo.

c) Compruebe que las tres medianas se cortan en un punto y calcule las coordenadas de dicho punto.

----

a)

$$M_{\overline{AB}} \equiv \left(\frac{5-1}{2},\ \frac{3-1}{2},\ \frac{6+2}{2}\right) \equiv \underline{(2,\ 1,\ 4)}.$$

$$M_{\overline{AC}} \equiv \left(\frac{5+5}{2},\ \frac{3+7}{2},\ \frac{6+4}{2}\right) \equiv \underline{(5,\ 5,\ 5)}.$$

$$M_{\overline{BC}} \equiv \left(\frac{-1+5}{2},\ \frac{-1+7}{2},\ \frac{2+4}{2}\right) \equiv \underline{(2,\ 3,\ 3)}.$$

b)

El vector director de la mediana que pasa por A (5, 3, 6) y $M_{\overline{BC}} \equiv (2,\ 3,\ 3)$ es el siguiente: $\overrightarrow{M_{\overline{BC}}A} = (3,\ 0,\ 3)$.

La mediana que pasa por A y $M_{\overline{BC}}$ es: $\underline{m_1 \equiv \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = 3 \\ z = 6 + \lambda \end{cases}}.$

El vector director de la mediana que pasa por B (-1, -1, 2) y $M_{\overline{AC}} \equiv (5,\ 5,\ 5)$ es el siguiente: $\overrightarrow{M_{\overline{AC}}B} = (-\ 6,\ -\ 6,\ -\ 3)$.

La mediana que pasa por B y $M_{\overline{AC}}$ es: $\underline{m_2 \equiv \begin{cases} x = 5 + 2\mu \\ y = 5 + 2\mu \\ z = 5 + \mu \end{cases}}.$

El vector director de la mediana que pasa por C (5, 7, 4) y $M_{\overline{AB}} \equiv (2,\ 1,\ 4)$ es el siguiente: $\overrightarrow{M_{\overline{AB}}C} = (3,\ 6,\ 0)$.

La mediana que pasa por C y $M_{\overline{AB}}$ es: $\underline{m_3 \equiv \begin{cases} x = 5 + \gamma \\ y = 7 + 2\gamma \\ z = 4 \end{cases}}.$

c)

El punto de corte de m_1 y m_2: $\{x = 5 + \lambda\ y = 3\ \ z = 6 + \lambda \Rightarrow \{x = 5 + 2\mu\ y = 5 + 2\mu\ z = 5 + \mu$.
$5 + \lambda = 5 + 2\mu\ \ 3 = 5 + 2\mu\}\Rightarrow 5 + \lambda = 3;\ \lambda = -2;\ \mu = -1 \Rightarrow B(3, 3, 4)$
.

El punto de corte de m_1 y m_3: $\{x = 5 + \lambda\ y = 3\ \ z = 6 + \lambda \Rightarrow \{x = 5 + \gamma\ \ y = 7 + 2\gamma\ z = 4$.

$5 + \lambda = 5 + \gamma\ \ 3 = 7 + 2\gamma\}\Rightarrow \gamma = \lambda = -2 \Rightarrow B(3, 3, 4)$.

Se compreba que las medianas se cortan en un punto llamado baricentro.

El baricentro es el punto $B(3, 3, 4)$.

****

3º) Observación: Los apartados a) y b) de este ejercicio son absolutamente independientes y se pueden resolver en el orden que se quiera.

Calcule los siguientes límites: $a)\ \left(\frac{x-6}{x+1}\right)^{\frac{x^2+5}{x+3}}$. $b)\ \left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)$.

$a)$

$$\left(\frac{x-6}{x+1}\right)^{\frac{x^2+5}{x+3}} = 1^{\infty} \Rightarrow Indet.\ tipo\ nº\ e \Rightarrow \left(\frac{x+1-7}{x+1}\right)^{\frac{x^2+5}{x+3}} =$$

$$= \left(1+\frac{-7}{x+1}\right)^{\frac{x^2+5}{x+3}} = \left(1+\frac{1}{\frac{x+1}{-7}}\right)^{\frac{x^2+5}{x+3}} = \left(1+\frac{1}{\frac{x+1}{-7}}\right)^{\frac{x+1}{-7}\cdot\frac{-7}{x+1}\cdot\frac{x^2+5}{x+3}} =$$

$$= \left[\left(1+\frac{1}{\frac{x+1}{-7}}\right)^{\frac{x+1}{-7}}\right]^{\frac{-7}{x+1}\cdot\frac{x^2+5}{x+3}} = \left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x+1}{-7}}\right)^{\frac{x+1}{-7}}\right]^{\frac{-7x^2-35}{x^2+4x+3}} = \underline{e^{-7} = \frac{1}{e^7}}.$$

$$b)\ \left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{0}-\frac{1}{0} = \infty - \infty \Rightarrow Indet. \Rightarrow \frac{1-x}{x^2} = \frac{1}{0^+} = \underline{+\infty}.$$

****

4º) a) Calcule la integral indefinida $\int tg^2 x \cdot dx$.

b) De todas las primitivas de la función $f(x) = tg^2 x$, encuentre la que pasa por el punto $P\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$.

----

a)

Teniendo en cuenta que $\int\left(1 + tg^2 x\right) \cdot dx = tg\, x$, puede hacerse lo siguiente:

$$\int tg^2 x \cdot dx = \int\left(1 + tg^2 x - 1\right) \cdot dx = \int\left(1 + tg^2 x\right) \cdot dx - \int dx =$$

$$= tg\, x - x + C.$$

$$\underline{\int tg^2 x \cdot dx = tg\, x - x + C.}$$

b)

Siendo $F(x) = tg\, x - x + C$, tiene que cumplirse que $F_{\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 1$:

$$tg\, \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + C = 1;\ \ 1 - \frac{\pi}{4} + C = 1 \Rightarrow C = \frac{\pi}{4}.$$

$$\underline{F(x) = tg\, x - x + \frac{\pi}{4}.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Observación: Los apartados a) y b) de este ejercicio son absolutamente independientes y se pueden resolver en el orden que se quiera.

Se dice que una matriz cuadrada A es idempotente si cumple $A^2 = A$.

a) Si A es una matriz idempotente, calcule razonadamente A^{2015}.

b) Determine para qué valores de los parámetros ɑ y b la siguiente matriz es idempotente: $A = (a \ - \ a\, 0 \ - \ a\, a\, 0\, 0\, 0\, b\,)$.

----

a)

$$A^{2015} = A^{2014} \cdot A = \left(A^{2}\right)^{1007} \cdot A = A^{1007} \cdot A = A^{1008} = \underline{A}.$$

b)

$$A^{2} = A \cdot A = (a \ - \ a\, 0 \ - \ a\, a\, 0\, 0\, 0\, b\,)(a \ - \ a\, 0 \ - \ a\, a\, 0\, 0\, 0\, b\,) = \left(2a^{2} \ - \ 2a^{2}\, 0\right.$$

.

$$A^{2} = A \Rightarrow 2a^{2} = a\, b = b^{2} \} \ \ 2a^{2} - a = 0 \ \ b^{2} - b = 0 \} \ \ a(2a - 1) = 0 \ \ b(b -$$

.

$\underline{La\ matriz\ A\ es\ idempotente\ para\ los\ pares\ de\ valores\ (a,\ b)\ siguienrtes}$:

$\underline{(0,\ 0),\ (0,\ 1),\ (½,\ 0),\ (½,\ 1)}$

****

2º) Observación: Los apartados a) y b) de este ejercicio son absolutamente independientes y se pueden resolver en el orden que se quiera.

Considere la recta $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-2}{5}$ y el plano $\pi \equiv x - 2y + z = -3$:

a) Compruebe que la recta r es paralela al plano π y calcule la distancia entre ellos.

b) Determine la recta s que pasa por el punto P (1, 0, 2) y es perpendicular al plano π. Calcule la intersección de dicha recta con el plano π.

----

a)

Una recta y un plano son paralelos cuando el vector director de la recta y es vector normal del plano son perpendiculares, es decir, cuando su producto escalar es 0.

Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{v_r} = (3,\ 4,\ 5)$ y un vector normal del plano π es $\overrightarrow{n} = (1,\ -2,\ 1)$.

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{n} = (3,\ 4,\ 5) \cdot (1,\ -2,\ 1) = 3 - 8 + 5 = 0.$$

$\underline{\textit{Queda comprobado que la rect r y el plano } \pi \textit{ son paralelos}}.$

La distancia de la recta r al plano π es la misma que la distancia de un punto de la recta al plano. Un punto de r es $A(1,\ 0,\ 2)$.

La distancia de un punto a un plano es: $d(P;\ \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$:

$$d(r;\ \pi) = d(A;\ \pi) = \frac{|1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|1 - 0 + 2 + 3|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{|+6|}{\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \underline{\sqrt{6}\ unidades}.$$

b)

La recta s tiene como vector director al vector director del plano; su expresión dada por unas ecuaciones paramétricas es:

$$\underline{s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}}.$$

El punto de intersección de la recta s con el plano π es la solución del sistema que forman:

$\pi \equiv x - 2y + z = -3$ $\qquad s \equiv \{x = 1 + \lambda\ y = -2\lambda\ \ z = 2 + \lambda\ \} \Rightarrow (1 + \lambda) - 2(-2$
$1 + \lambda + 4\lambda + 2 + \lambda = -3;\ \ 6\lambda = -6 \Rightarrow \lambda = -1.$

El punto de intersección del plano π *con la recta* r *es* $Q(0,\ 2,\ 1)$.

****

3º) Observación: Los apartados $a)$ y $b)$ de este ejercicio son absolutamente independientes y se pueden resolver en el orden que se quiera.

Calcule los máximos y mínimos de las siguientes funciones:

$a)\ f(x) = x \cdot Lx,\ \ con\ x > 0.$ $\qquad$ $b)\ g(x) = \frac{x^2}{e^x},\ con\ x \in R.$

Una función tiene un extremo relativo (máximo o mínimo) cuando se anula su primera derivada. Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera, se trate de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo relativo.

$a)$

$$f'(x) = 1 \cdot Lx + x \cdot \frac{1}{x} = 1 + Lx.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 + Lx = 0;\ \ Lx = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{e}.$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f''\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{\frac{1}{e}} = e > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = \frac{1}{e}.$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \cdot L\frac{1}{e} = \frac{1}{e} \cdot (L1 - Le) = \frac{1}{e} \cdot (0 - 1) = -\frac{1}{e} \Rightarrow \underline{Mín. \Rightarrow P\left(\frac{1}{e},\ -\frac{1}{e}\right)}.$$

$b)$

$$g'(x) = \frac{2x \cdot e^x - x^2 \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{x \cdot e^x \cdot (2-x)}{e^{2x}} = \frac{x \cdot (2-x)}{e^x} = \frac{2x - x^2}{e^x}.$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x \cdot (2-x)}{e^x} = 0;\ \ x(2 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2.$$

$$g''(x) = \frac{(2-2x) \cdot e^x - x \cdot (2-x) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x \cdot \left(2 - 2x - 2x + x^2\right)}{e^{2x}} = \frac{x^2 - 4x + 2}{e^x}.$$

$$g''(0) = \frac{2}{e^0} = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$g(0) = \frac{0}{e^0} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \underline{Mín. \Rightarrow O(0,\ 0)}.$$

$$g''(2) = \frac{4-8+2}{e^2} = \frac{-2}{e^2} < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 2.$$

$$g(2) = \frac{2^2}{e^2} = \frac{4}{e^2} \Rightarrow \underline{Máx. \Rightarrow Q\left(2,\ \frac{4}{e^2}\right)}.$$

****

4º) a) Calcule la integral indefinida $\int L\left(1 + x^2\right) \cdot dx$.

b) De todas las primitivas de la función $f(x) = L\left(1 + x^2\right)$, encuentre la que pasa por el punto P (0, -2).

----

a)

$$\int L\left(1 + x^2\right) \cdot dx \Rightarrow \left\{ u = L\left(1 + x^2\right) \rightarrow du = \frac{2x \cdot dx}{1+x^2}\ dx = dv \rightarrow v = x \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot L\left(1 + x^2\right) - \int x \cdot \frac{2x \cdot dx}{1+x^2} = x \cdot L\left(1 + x^2\right) - 2\int \frac{x^2}{1+x^2} \cdot dx =$$

$$= x \cdot L\left(1 + x^2\right) - 2\int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} \cdot dx = x \cdot L\left(1 + x^2\right) - 2\int \frac{1+x^2}{1+x^2} \cdot dx + 2\int \frac{1}{1+x^2} dx =$$

$$= \underline{x \cdot L\left(1 + x^2\right) - 2x + 2 \cdot arc\, tg\, x + C}.$$

b)

Siendo la función primitiva $F(x) = x \cdot L\left(1 + x^2\right) - 2x + 2 \cdot arc\, tg\, x + C$, tiene que cumplirse que $F(0) = -2$:

$$F(0) = 0 \cdot L(1 + 0) - 0 + 2 \cdot arc\, tg\, 0 + C = C = -2.$$

$$\underline{F(x) = x \cdot L\left(1 + x^2\right) - 2x + 2 \cdot arc\, tg\, x - 2}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE NAVARRA

JULIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B).

OPCIÓN A

1º) Estudia el sistema de ecuaciones $\{ax + y - z = 2 \quad 2ax + \left(a^2 + 1\right)y + (a - 1)z = a + 5\ ax + a$ dependiente del parámetro α y resuélvelo en los casos en que sea compatible.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$M = \left(a\,1\ -1\,2a\,a^2 + 1\,a - 1\,a\,a^2\,a - 2\right)$ y $M' = \left(a\,1\ -1\,2a\,a^2 + 1\,a - 1\,a\,a^2\,a - 2\quad 2\,a + 5\,a + 5\right)$.

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$|M| = \left|a\,1\ -1\,2a\,a^2 + 1\,a - 1\,a\,a^2\,a - 2\right| = a\left(a^2 + 1\right)(a - 2) - 2a^3 + a(a - 1) +$

$+ a\left(a^2 + 1\right) - a^3(a - 1) - 2a(a - 2) = 0;$

$a\left(a^3 - 2a^2 + a - 2\right) - 2a^3 + a^2 - a + a^3 + a - a^4 + a^3 - 2a^2 + 4a = 0;$

$a^4 - 2a^3 + a^2 - 2a - a^4 - a^2 + 4a = 0; \quad -2a^3 + 2a = 0; \quad -2a\left(a^2 - 1\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 = 0,\ a_2 = -1,\ a_3 = 1.$

$\underline{Para\ \{a \neq -1\ a \neq 0\ a \neq +1\} \Rightarrow Ran\ M = Ran\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

Para α = 0 es $M' = (0\,1\ -1\,0\,1\ -1\,0\,0\ -2\quad 2\,5\,5) \Rightarrow \left\{C_2,\ C_3,\ C_4\right\} \Rightarrow |1\ -1\,2\,1\ -1\,5\,0\ -2\,5|$

$= -5 - 4 + 10 + 5 = 15 - 9 = 6 \neq 0 \Rightarrow Rang\, M' = 3.$

$Para\, a = 1 \Rightarrow M' = (1\ 1\ -1\ 2\ 2\ 0\ 1\ 1\ -1\quad 2\ 6\ 6) \Rightarrow \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow |1\ -1\ 2\ 2$

$= -4 - 6 + 6 + 12 = 8 \neq 0 \Rightarrow Rang\, M' = 3.$

$\underline{Para\, \{a = 0\ a = 1\} \Rightarrow Ran\, M = 2;\ Ran\, M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible}.$

$Para\, a = -1 \Rightarrow M' = (-1\ 1\ -1\ -2\ 2\ -2\ -1\ 1\ -3\quad 2\ 4\ 4) \Rightarrow \{C_2 - C_3 = C_4\} =$
.

$\underline{Para\, a = -1 \Rightarrow Ran\, M = Ran\, M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

Resolvemos en el caso de compatible determinado:

$\left(a\ 1\ -1\ 2a\ a^2 + 1\ a - 1\ a\ a^2\ a - 2\quad 2\ a + 5\ a + 5\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 - 2F_1\ F_3 \to$

$\Rightarrow \left(a\ 1\ -1\ 0\ a^2 - 1\ a + 1\ 0\ a^2 - 1\ a - 1\quad 2\ a + 1\ a + 3\right) \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - F_2\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(a\ 1\ -1\ 0\ a^2 - 1\ a + 1\ 0\ 0\ -2\quad 2\ a + 1\ 2\right) \Rightarrow z = -1 \Rightarrow (a\ 1\ -1\ 0\ a - 1\ 1\ 0$

$\Rightarrow (a - 1)y - 1 = 1 \Rightarrow y = \frac{2}{a-1};\ ax + \frac{2}{a-1} + 1 = 2;\ ax = 1 - \frac{2}{a-1} = \frac{a-1-2}{a-1} =$

$= \frac{a-3}{a-1} \Rightarrow x = \frac{a-3}{a(a-1)}.$

$\underline{Solución:\ x = \frac{a-3}{a^2-a},\ y = \frac{2}{a-1},\ z = -1.}$

Para a = -1 el sistema resulta $\{-x + y - z = 2\quad -2x + 2y - 2z = 4\ -x + y - 3z = 4$, que es compatible indeterminado y cuyas dos primeras ecuaciones son equivalentes. Considerando las ecuaciones primera y tercera:

$-x + y - z = 2\ -x + y - 3z = 4\}\quad x - y + z = -2\ -x + y - 3z =$
.

Haciendo $x = \lambda$: $-\lambda + y + 1 = 2 \Rightarrow y = 1 + \lambda.$

$\underline{Solución: x = \lambda,\ y = 1 + \lambda,\ z = -1,\ \forall \lambda \in R}.$

****

2º) Halla los dos puntos de la recta $r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z-3}{1}$ que están a distancia $\sqrt{17}$ del punto P (1, -1, 4).

La ecuación de la esfera de centro P(1, -1, 4) y radio $\sqrt{17}$ es la siguiente:

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 4)^2 = \left(\sqrt{17}\right)^2;$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 8z + 16 = 17;$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 8z + 1 = 0.$$

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es: $r \equiv \{x = 2 + 3\lambda\ y = -2\lambda\ \ z = 3 + \lambda$.

Los puntos de corte de la esfera y la recta son los siguientes:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 8z + 1 = 0\ r \equiv \{x = 2 + 3\lambda\ y = -2\lambda\ \ z = 3 + \lambda$$

$$(2 + 3\lambda)^2 + (-2\lambda)^2 + (3 + \lambda)^2 - 2(2 + 3\lambda) + 2(-2\lambda) - 8(3 + \lambda) + 1 = 0;$$

$$4 + 12\lambda + 9\lambda^2 + 4\lambda^2 + 9 + 6\lambda + \lambda^2 - 4 - 6\lambda - 4\lambda - 24 - 8\lambda + 1 = 0;$$

$$14\lambda^2 - 14 = 0;\ \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1.$$

$r \equiv \{x = 2 + 3\lambda\ y = -2\lambda\ \ z = 3 + \lambda$ ⇒ Los puntos pedidos son: $\underline{P_1(-1,\ 2,\ 2)\ y\ P_2(5,\ -2,\ 4).}$

Otra forma de hacer este ejercicio es la siguiente:

Un punto genérico de r es $A(2 + 3\lambda,\ -2\lambda,\ 3 + \lambda)$.

$$\overrightarrow{AP} = [P - A] = [(1,\ -1,\ 4) - (2 + 3\lambda,\ -2\lambda,\ 3 + \lambda)] = (-1 - 3\lambda,\ -1 + 2\lambda,\ 1$$

.

$$\left|\overrightarrow{AP}\right| = \sqrt{17} \Rightarrow \sqrt{(-1 - 3\lambda)^2 + (-1 + 2\lambda)^2 + (1 - \lambda)^2} = \sqrt{17} \Rightarrow$$

$$(-1 - 3\lambda)^2 + (-1 + 2\lambda)^2 + (1 - \lambda)^2 = 17;$$

$1 + 6\lambda + 9\lambda^2 + 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 + 1 - 2\lambda + \lambda^2 = 17;\ \ 14\lambda^2 = 14;\ \ \lambda^2 = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow r \equiv \{x = 2 + 3\lambda\ y = -\ 2\lambda \quad z = 3 + \lambda$ $\Rightarrow$ Los puntos pedidos son:
$\underline{P_1(-\ 1,\ 2,\ 2)\ y\ P_2(5,\ -\ 2,\ 4)}$.

****

3º) Dada la función $f(x) = x\cdot\left(\sqrt{2x^2 + 3x + 2}\right)^{\frac{\pi x}{2}}$, demuestra que existe un valor $\alpha\epsilon(0,\ 2)$ tal que $f'(a) = \frac{1}{4}$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

$$2x^2 + 3x + 2 = 0;\ \ x = \frac{-3\pm\sqrt{9-16}}{4} \Rightarrow x\notin R \Rightarrow 2x^2 + 3x + 2 > 0,\ \forall x\in R.$$

La función f(x) es continua y derivable en su dominio, que es R, por cual le es aplicable el teorema del valor medio o de Lagrange, que dice que: "Si una función es continua en $[m,\ n]$ y derivable en $(m,\ n)$, entonces existe al menos un valor $a\in(m,\ n)$ que cumple lo siguiente: $f'(a) = \frac{f(m)-f(n)}{m-n}$."

Aplicando el teorema de Lagrange a la función f(x) en el intervalo (0, 2):

$$f(0) = 0\cdot\left(\sqrt{2}\right)^0 = 0.$$

$$f(2) = 2\cdot\left(\sqrt{8 + 6 + 2}\right)^{\pi} = 2\cdot 4^{-1} = \frac{1}{2}.$$

$$f'(a) = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{\frac{1}{2}-0}{2} = \underline{\frac{1}{4}}.$$

$$\underline{Lo\ anterior\ demuestra\ que\ \exists a\in(0,\ 2)\ tal\ que\ f'(a) = \frac{1}{4}.}$$

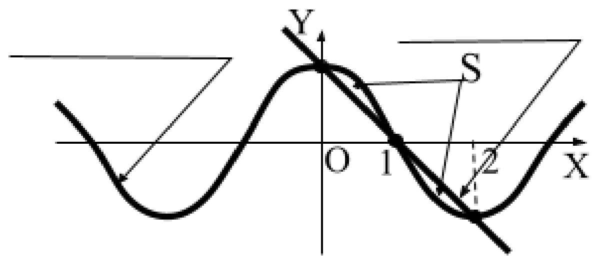
****

4º) Dadas las funciones $f(x) = cos\,\frac{\pi x}{2}$ y $g(x) = 1 - x$, encuentra los tres puntos en que se cortan. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas curvas.

Las abscisas de los tres puntos de corte de las funciones dadas son las soluciones reales de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow cos\,\frac{\pi x}{2} = 1 - x \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2.$$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la indicada en la figura, de la cual se deduce el área a calcular, que es la siguiente:



$$S = \int_0^1 [f(x) - g(x)] \cdot dx +$$

$$+ \int_1^2 [g(x) - f(x)] \cdot dx =$$

$$= \int_0^1 \left[cos\,\frac{\pi x}{2} - (1 - x)\right] \cdot dx + \int_1^2 \left(1 - x - cos\,\frac{\pi x}{2}\right) \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{2}{\pi} \cdot sen\,\frac{\pi x}{2} - x + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[x - \frac{x^2}{2} - \frac{2}{\pi} \cdot sen\,\frac{\pi x}{2}\right]_1^2 =$$

$$= \left(\frac{2}{\pi} \cdot sen\,\frac{\pi}{2} - 1 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{2}{\pi} \cdot sen\,0\right) + \left(2 - 2 - \frac{2}{\pi} \cdot sen\,\pi\right) - \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \cdot sen\,\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} - 0 - 0 - \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi} - 1 = \underline{\frac{4-\pi}{\pi} \cong 0,27\ u^2}.$$

Aclaración:

$$\int \cos cos\,\frac{\pi x}{2} \cdot dx \Rightarrow \left\{\frac{\pi x}{2} = t \rightarrow dx = \frac{2}{\pi} \cdot dt\right\} \Rightarrow \int \cos cos\,t \cdot \frac{2}{\pi} \cdot dt = \frac{2}{\pi} \cdot sen\,t = \frac{2}{\pi} \cdot sen\,\frac{\pi x}{2}$$

.

****

OPCIÓN B

1º) Dadas las matrices $A = (1\ 0\ \ -1\ 1\ )$ y $B = (2\ 1\ 0\ 0\ 1\ 2\ )$, halla la matriz X que cumple A · X = B.

$A \cdot X = B;\ \ A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B;\ \ I \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot B}.$ (*)

La matriz inversa de A es la siguiente:

$(I) = (1\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 + F_1\} \Rightarrow (1\ 0\ 1\ 1\ ) \Rightarrow A^{-1} = (1\ 0\ 1\ 1\ ).$

Sustituyendo la matriz obtenida en (*):

$X = A^{-1} \cdot B = (1\ 0\ 1\ 1\ ) \cdot (2\ 1\ 0\ 0\ 1\ 2\ ) = \underline{(2\ 1\ 0\ 2\ 2\ 2\ )}.$

****

2º) Encuentra la ecuación continua de la recta r que pasa por el punto P (-1, 1, 2) y corta a las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x - y - z + 2 = 0 \\ 2x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$ y $r_2 \equiv \frac{x-4}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-4}{1}$.

La expresión de r_1 por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x - y - z + 2 = 0 \\ 2x + y - z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow \begin{matrix} x - y = -2 + \lambda \\ 2x + \end{matrix}$$

$x = -1 + \frac{2}{3}\lambda;\ y = x + 2 - \lambda = -1 + \frac{2}{3}\lambda + 2 - \lambda = 1 - \frac{1}{3}\lambda = y.$

$r_1 \equiv \begin{cases} x = -1 + \frac{2}{3}\lambda \\ y = 1 - \frac{1}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$. Un punto y un vector director de r_1 son: $\begin{cases} Q(-1,\ 1,\ 0) \\ \vec{v_1} = (2,\ -1,\ 3) \end{cases}$.

Los puntos P y Q determinan el vector:

$\vec{PQ} = [Q - P] = [(-1,\ 1,\ 0) - (-1,\ 1,\ 2)] = (0,\ 0,\ -2).$

El plano π_1 que contiene a la recta r_1 y al punto P tiene la siguiente expresión general:

$$\pi_1\left(P;\ \vec{v_1},\ \vec{PQ}\right) \equiv \begin{vmatrix} x + 1 & y - 1 & z - 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0;\ 2(x + 1) + 4(y - 1) =$$

$(x + 1) + 2(y - 1) = 0;\ x + 1 + 2y - 2 = 0 \Rightarrow \pi_1 \equiv x + 2y - 1 = 0.$

Un punto y un vector director de r_2 son: $R(4,\ 0,\ 4)\ y\ \vec{v_2} = (1,\ -2,\ 1)$

Los puntos P y R determinan el vector:

$\vec{PR} = [R - P] = [(4,\ 0,\ 4) - (-1,\ 1,\ 2)] = (5,\ -1,\ 2).$

El plano π_2 que contiene a la recta r_2 y al punto P tiene la siguiente expresión general:

$$\pi_2\left(P;\ \vec{v_2},\ \vec{PR}\right) \equiv \begin{vmatrix} x + 1 & y - 1 & z - 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-4(x+1)+5(y-1)-(z-2)+10(z-2)+(x+1)-2(y-1)=0;$$

$$-3(x+1)+3(y-1)+9(z-2)=0;\ \ (x+1)-(y-1)-3(z-2)=0;$$
$$x+1-y+1-3z+6=0 \Rightarrow \pi_2 \equiv x-y-3z+8=0.$$

La recta r pedida es la intersección de los planos π_1 y π_2:

$$\underline{r \equiv \begin{cases} x+2y-1=0 \\ x-y-3z+8=0 \end{cases}}.$$

****

3º) Calcula los siguientes límites: $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{sen\, x}$. $\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{x+1}$.

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{sen\, x} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{cos\, x} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1-x}}}{cos\, x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{1}}}{1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+1}{1} = \underline{1}.$$

$$\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{x+1} = 1^{\infty} \Rightarrow Indet.\ tipo\ nº\ e \Rightarrow \left(\frac{x+3-2}{x+3}\right)^{x+1} =$$

$$= \left(1+\frac{-2}{x+3}\right)^{x+1} = \left(1+\frac{1}{\frac{x+3}{-2}}\right)^{x+1} = \; =$$

$$= \left[\left(1+\frac{1}{\frac{x+3}{-2}}\right)^{\frac{x+3}{-2}}\right]^{(x+1)\cdot\frac{-2}{x+3}} = \left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x+3}{-2}}\right)^{\frac{x+3}{-2}}\right]^{\frac{-2x-6}{x+3}} = e^{-2} = \underline{\frac{1}{e^2}}.$$

****

4º) Comprueba que la función $f(x) = \{x^2 - 2x + 2 \;\; si \;\; x \leq 2 \quad 6 - 2x \qquad si \;\; x > 2$ está definida y es continua en R. Encuentra sus extremos relativos y absolutos en el intervalo [-1, 3].

La función f(x) es continua en R, excepto para x = 2, cuya continuidad es dudosa.

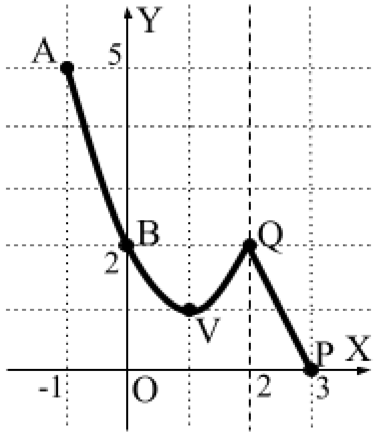
Para que una función sea continua en un punto es necesario que sus límites laterales en ese punto sean iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$f(x) \;=\; (x^2 - 2x + 2) \;=\; 2 = f(2) \, f(x) \;=\; (6 - 2x) \;=\; 6 - 4 = 2 \qquad \} \Rightarrow \underline{f(x) \;=}$

.

$\underline{Queda\ comprobado\ que\ la\ función\ está\ definida\ y\ es\ continua\ en\ R.}$

Considerando la función $g(x) = x^2 - 2x + 2$, con $x \in (-\infty, 2]$, que es convexa (∪) en su dominio, tiene su máximo absoluto en el siguiente punto:



$g'(x) = 2x - 2 \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0;$

$x = 1 \Rightarrow g(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 2 = 1 \Rightarrow V(1, 1).$

Teniendo en cuanta que $f(3) = 6 - 2 \cdot 3 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow P(3, 0)$; que $f(2) = 2 \;\Rightarrow\; Q(2, 2)$. También son puntos de la función $A(-1, 5)$ y $B(0, 2)$.

Con los datos anteriores podemos deducir que la representación gráfica de la función es la indicada en el gráfico adjunto, de donde se deducen los extremos pedidos, que son los siguientes:

$\underline{Máximo\ absoluto: A(-1, 5).\ Mínimo\ absoluto: P(3, 0)}.$

$\underline{Mínimo\ relativo: V(1, 1).\ Máximo\ relativo: Q(2, 2)}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE NAVARRA

JUNIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B).

OPCIÓN A

1º) Estudia el sistema de ecuaciones $\{ax - y = 0 \quad - 2ax + a^2y + az =- 2a \quad -$ dependiente del parámetro ɑ y resuélvelo en los casos en que sea compatible.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$M = \left(a \ - 1 \ 0 \ - 2a \ a^2 \ a \ - a \ a^2 - 1 \ a + 1\right)$ y $M' = \left(a \ - 1 \ 0 \ - 2a \ a^2 \ a \ - a \ a^2 - 1 \ a + 1 \quad 0 \ - 2a \ - a - 2\right)$.

El rango de M en función del parámetro ɑ es el siguiente:

$|M| = \left|a \ - 1 \ 0 \ - 2a \ a^2 \ a \ - a \ a^2 - 1 \ a + 1\right| = a^3(a + 1) + a^2 - a^2\left(a^2 - 1\right) - 2a($

$= a^4 + a^3 + a^2 - a^4 + a^2 - 2a^2 - 2a = a^3 - 2a = a\left(a^2 - 2\right) = 0 \Rightarrow a_1 = 0,$

$a_2 =- \sqrt{2},\ a_3 = \sqrt{2}.$

$\underline{Para \left\{a \neq - \sqrt{2} \ a \neq 0 \ a \neq + \sqrt{2}\right\} \Rightarrow Ran\ M = Ran\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

Para ɑ = 0 es $M' = (0 \ - 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ - 1 \ 1 \quad 0 \ 0 \ - 2) \Rightarrow Rang\ M' = 2.$

$\underline{Para\ a = 0 \Rightarrow Ran\ M = Ran\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

$Para\ a =- \sqrt{2} \Rightarrow M' = \left(- \sqrt{2} \ - 1 \ 0 \ 2\sqrt{2} \ 2 \ - \sqrt{2} \ \sqrt{2} \ 1 \ - \sqrt{2} + 1 \quad 0 \ 2\sqrt{2} \ \sqrt{2} -\right.$

$\Rightarrow \left|- \sqrt{2} \ - 1\ 0\ 2\sqrt{2}\ 2\ 2\sqrt{2}\ \sqrt{2}\ 1\ \sqrt{2} - 2 \right| = \sqrt{2}\cdot\left|- 1 \ - 1\ 0\ 2\ 2\ 2\sqrt{2}\ 1\ 1\ \sqrt{2} - 2 \right| =$

$= \sqrt{2}\cdot\left(- 2\sqrt{2} + 4 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 4\right)\neq 0 \Rightarrow Rang\ M^{'} = 3.$

$Para\ a = \sqrt{2} \Rightarrow M^{'} = \left(\sqrt{2} \ - 1\ 0 \ - 2\sqrt{2}\ 2\ \sqrt{2} \ - \sqrt{2}\ 1\ \sqrt{2} + 1 \quad 0 \ - 2\sqrt{2} \ - \sqrt{2}\right.$

$\Rightarrow \left|- 1\ 0\ 0\ 2\ \sqrt{2} \ - 2\sqrt{2}\ 1\ \sqrt{2} + 1 \ - \sqrt{2} - 2 \right| = - \left|\sqrt{2} \ - 2\sqrt{2}\ \sqrt{2} + 1 \ - \sqrt{2} - 2 \right| = \sqrt{}$

$= \sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{2} + 2 - 2\sqrt{2} - 2\right)\neq 0 \Rightarrow Rang\ M^{'} = 3.$

$\underline{Para\ a = - \sqrt{2}\ y\ a = \sqrt{2} \Rightarrow Ran\ M = 2;\ Ran\ M^{'} = 3 \Rightarrow Incompatible.}$

Resolvemos en el caso de compatible determinado:

$ax - y = 0 \qquad - 2ax + a^{2}y + az = - 2a \qquad - a$

$ax - y = 0 \qquad - 2x + ay + z = - 2 \qquad - a$

$\Rightarrow$

$- 2x + a^{2}x + z = - 2 \qquad - ax + a\left(a^{2} - 1\right)x + (a + 1)z = - a - 2$

$- a\left(a^{2} - 2\right)x - az = 2a \qquad a\left(a^{2} - 2\right)x + (a + 1)z = - a - 2 \} \Rightarrow - az + (a +$

.

$\left(a^{2} - 2\right)x + a - 2 = - 2 \Rightarrow x = \frac{a}{2-a^{2}}. \qquad y = \frac{a^{2}}{2-a^{2}}.$

$\underline{Solución:\ x = \frac{a}{2-a^{2}},\ y = \frac{a^{2}}{2-a^{2}},\ z = a - 2.}$

Para α = 0 es $M^{'} = (0 \ - 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \ - 1\ 1 \quad 0\ 0 \ - 2\ ).$

$\underline{Solución: x = \lambda,\ y = 0,\ z = - 2,\ \forall\lambda\in R.}$

****

2º) Encuentra la ecuación continua de la recta s que pasa por el punto P (1, -2, 3) y corta perpendicularmente a la recta $r \equiv \{ x + y + z - 4 = 0 \quad 3x + y - 3z - 2 = 0$.

Un vector director de r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son los siguientes: $\vec{n}_1 = (1,\ 1,\ 1)$ y : $\vec{n}_2 = (3,\ 1,\ -3)$.

$$\vec{v}_r = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = | i\ j\ k\ 1\ 1\ 1\ 3\ 1\ -3 | = -3i + 3j + k - 3k - i + 3j =$$

$$= -4i + 6j - 2k \Rightarrow \vec{v}_r = (2,\ -3,\ 1).$$

El haz de planos perpendiculares a r es $\beta \equiv 2x - 3y + z + D = 0$.

El plano $\pi \in \beta$ que contiene al punto P (1, -2, 3) es el que satisface su ecuación:

$$\beta \equiv 2x - 3y + z + D = 0\ P(1,\ -2,\ 3) \quad \} \Rightarrow 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) + 3 + D = 0$$

$$\Rightarrow 11 + D = 0 \rightarrow D = -11 \Rightarrow \pi \equiv 2x - 3y + z - 11 = 0.$$

El punto de intersección de la recta r y el plano π es la solución del sistema que forman:

$$r \equiv \{ x + y + z - 4 = 0 \quad 3x + y - 3z - 2 = 0\ \pi \equiv 2x - 3y + z - 11 = 0 \}$$

$$\Rightarrow \ -2y - 6z = -10 \quad -5y - z = 3 \} \quad y + 3z = 5\ -15y - 3z = 9 \} \Rightarrow -$$

.

$$-1 + 3z = 5;\ 3z = 6;\ z = 2. \quad x - 1 + 2 = 4;\ x = 3.$$

El punto de corte es **Q (3, -1, 2)**.

La recta pedida s es la que pasa por P y Q.

$$\vec{PQ} = [Q - P] = [(3,\ -1,\ 2) - (1,\ -2,\ 3)] = (2,\ 1,\ -1).$$

La expresión de s dada por unas ecuaciones paramétricas es: $\underline{s \equiv \{ x = 1 + 2\lambda \quad y = -2 + \lambda\ z = 3 - \lambda}$.

****

3º) Halla las asíntotas de la función $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x - 2}$.

Verticales: Son de la forma x = k; son los valores que anulan el denominador.

$\underline{Asíntota\ vertical: x\ =\ 2.}$

Horizontales: Son de la forma y = k; son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a $\pm\ \infty$:

$$k\ =\ f(x)\ \ =\frac{2x^2-1}{x-2} = \infty\ .$$

$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales.}$

Asíntotas oblicuas: Son de la forma $y\ =\ mx\ +\ n$, siendo:

$$m\ =\frac{f(x)}{x}\ \ y\, n\ =\ [f(x) -\ mx]\ .$$

$$m\ =\frac{f(x)}{x}\ \ =\frac{\frac{2x^2-1}{x-2}}{x}\ \ =\frac{2x^2-1}{x^2-2x} =\ 2\ .$$

$$n\ = [f(x) -\ mx]\ \ = \left(\frac{2x^2-1}{x-2}\ -\ 2x\right)\ \ = \frac{2x^2-1-2x^2+4x}{x-2} =\ 4\ .$$

$\underline{Asíntota\ oblicua: y\ =\ 2x\ +\ 4.}$

****

4º) Dadas las funciones $f(x) = sen\, \frac{\pi x}{2} \cdot \cos cos\, \frac{\pi x}{2}$ y $g(x) = 4 - 4x^2$, encuentra los dos puntos en que se cortan. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas curvas.

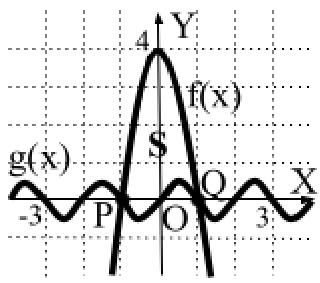
La función $f(x) = sen\, \frac{\pi x}{2} \cdot \cos cos\, \frac{\pi x}{2}$ puede expresarse de forma más sencilla de la forma: $f(x) = \frac{1}{2} \cdot sen\, (\pi x)$.

Las abscisas de los puntos de corte de las funciones son las soluciones reales de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot (\pi x) = 4 - 4x^2; \quad (\pi x) = 8 - 8x^2.$$

Las únicas raíces reales de la ecuación obtenida son $x_1 = -1\ y\ x_2 = 1$.

Los puntos de corte son $\underline{P(-1,\ 0)}$ y $\underline{Q(1,\ 0)}$.



La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la indicada en la figura adjunta.

En el intervalo correspondiente a la superficie a calcular, $(-1,\ 1)$, todas las ordenadas de la parábola son mayores que las correspondientes ordenadas de la función seno, por lo cual, la superficie S a calcular es la siguiente:

$$S = \int_{-1}^{1} [f(x) - g(x)] \cdot dx = \int_{-1}^{1} \left[\left(4 - 4x^2\right) - \frac{1}{2} \cdot sen\, (\pi x) \right] \cdot dx =$$

$$= \left[4x - \frac{4x^3}{3} + \frac{1}{2\pi} \cdot \cos cos\, (\pi x) \right]_{-1}^{1} = \left(4 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2\pi} \cdot \cos cos\, \pi \right) - \left[-4 + \frac{4}{3} + \frac{1}{2\pi} \cdot \text{cc} \right.$$

$$= 4 - \frac{4}{3} - \frac{1}{2\pi} + 4 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2\pi} = 8 - \frac{8}{3} = \underline{\frac{16}{3}\, u^2}.$$

Aclaración:

$$\int sen\, (\pi x) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \pi x = t\ dx = \frac{dt}{\pi} \right\} \Rightarrow \int sen\, t \cdot \frac{dt}{\pi} = -\frac{1}{\pi} \cdot \cos cos\, t = - \frac{1}{\pi} \cdot \cos cos\, (\pi x$$

.

****

OPCIÓN B

1º) Encuentra los valores de t ε R para los que el determinante de la matriz A · B vale 0, siendo $A = (2\ \ -1\ 3\ 0\ t\ 2\ 0\ 1 + t\ 3\ )$ y $B = (2 + t\ \ -1\ 0\ 1\ t\ 0\ 4\ 7\ t\ )$.

$$|A\cdot B| = |A|\cdot|B| = |2\ \ -1\ 3\ 0\ t\ 2\ 0\ 1 + t\ 3\ |\cdot|2 + t\ \ -1\ 0\ 1\ t\ 0\ 4\ 7\ t\ | =$$

$$= 2\cdot|t\ 2\ 1 + t\ 3\ |\cdot t\cdot|2 + t\ \ -1\ 1\ t\ | = 2t\cdot[3t - 2\cdot(1 + t)]\cdot\left(2t + t^2 + 1\right) =$$

$$= 2t\cdot(3t - 2 - 2t)\cdot(t + 1)^2 = 2t\cdot(t - 2)\cdot(t + 1)^2 = 0 \Rightarrow \{t_1 = 0\ t_2 = 2\ t_3 = -1$$

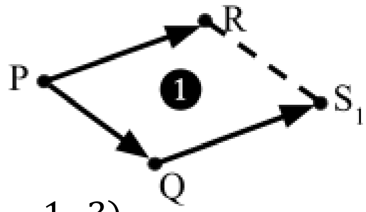
.

$$\underline{|A\cdot B| = 0\ para\ t = 0,\ t = 2\ y\ t = -1}.$$

****

2º) Dados los puntos P (1, 2, -1), Q (2, -1, 1) y R (3, 1, 2), encuentra todos los posibles puntos S tales que P, Q, R y S son los vértices de un paralelogramo.

Los casos posibles son los siguientes: $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS_1} \Rightarrow$



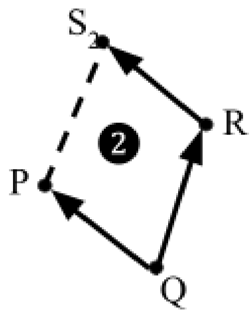
$\overrightarrow{PR} = [R - P] = [(3, 1, 2) - (1, 2, -1)] = (2, -1, 3).$

$\overrightarrow{QS_1} = \left[S_1 - Q\right] = [(x, y, z) - (2, -1, 1)] = (x - 2, y + 1, z - 1).$

$x - 2 = 2 \rightarrow x = 4 \quad y + 1 = -1 \rightarrow y = -2 \quad z - 1 = 3 \rightarrow z = 4 \quad \} \Rightarrow \underline{S_1(4, -2, 4}$

.

$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{RS_2} \Rightarrow$

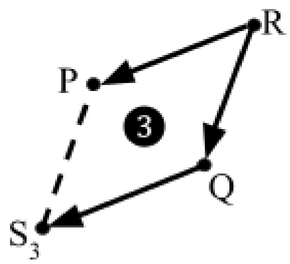


$\overrightarrow{QR} = [R - Q] = [(3, 1, 2) - (2, -1, 1)] = (1, 2, 1).$

$\overrightarrow{PS_2} = \left[S_2 - P\right] = [(x, y, z) - (1, 2, -1)] = (x - 1, y - 2, z + 1).$

$x - 1 = 1 \rightarrow x = 2 \quad y - 2 = 2 \rightarrow y = 4 \quad z + 1 = 1 \rightarrow z = 0 \} \Rightarrow \underline{S_2(2, 4, 0)}.$

$\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{QS_3} \Rightarrow$



$\overrightarrow{RP} = [P - R] = [(1, 2, -1) - (3, 1, 2)] = (-2, 1, -3).$

$\overrightarrow{QS_3} = \left[S_3 - Q\right] = [(x, y, z) - (2, -1, 1)] = (x - 2, y + 1, z - 1).$

$x - 2 = -2 \rightarrow x = 0 \quad y + 1 = 1 \rightarrow y = 0 \quad z - 1 = -3 \rightarrow z = -2 \} \Rightarrow \underline{S_3(0, 0, -2)}$

.

****

3º) Calcula los siguientes límites:

$$\left(\sqrt{5x^2+4x-1}-\sqrt{5x^2-6x}\right). \qquad \left(\frac{x^2+2x+1}{x^2+3}\right)^{3x-1}.$$

$$\left(\sqrt{5x^2+4x-1}-\sqrt{5x^2-6x}\right)=\infty-\infty\Rightarrow Indet.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{5x^2+4x-1}-\sqrt{5x^2-6x}\right)\cdot\left(\sqrt{5x^2+4x-1}+\sqrt{5x^2-6x}\right)}{\sqrt{5x^2+4x-1}+\sqrt{5x^2-6x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{5x^2+4x-1}\right)^2-\left(\sqrt{5x^2-6x}\right)^2}{\sqrt{5x^2+4x-1}+\sqrt{5x^2-6x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2+4x-1-\left(5x^2-6x\right)}{\sqrt{5x^2+4x-1}+\sqrt{5x^2-6x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2+4x-1-5x^2+6x}{\sqrt{5x^2+4x-1}+\sqrt{5x^2-6x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{10x-1}{\sqrt{5x^2+4x-1}+\sqrt{5x^2-6x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{10x-1}{x}}{\frac{\sqrt{5x^2+4x-1}}{x}+\frac{\sqrt{5x^2-6x}}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{10x-1}{x}}{\sqrt{\frac{5x^2+4x-1}{x^2}}+\sqrt{\frac{5x^2-6x}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{10-\frac{1}{x}}{\sqrt{5+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{5-\frac{6}{x}}}=\frac{10-\frac{1}{\infty}}{\sqrt{5+\frac{4}{\infty}-\frac{1}{\infty}}+\sqrt{5-\frac{6}{\infty}}}=\frac{10-0}{\sqrt{5+0-0}+\sqrt{5-0}}$$

$$=\frac{10}{\sqrt{5}+\sqrt{5}}=\frac{10}{2\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\underline{\sqrt{5}}.$$

$$\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2+3}\right)^{3x-1}=1^{\infty}\Rightarrow Indet.\ tipo\ nº\ e\Rightarrow\left(\frac{x^2+3+2x-2}{x^2+3}\right)^{3x-1}=$$

$$=\left(1+\frac{2x-2}{x^2+3}\right)^{3x-1}=\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+3}{2x-2}}\right)^{3x-1}=$$

$$==\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+3}{2x-2}}\right)^{\frac{x^2+3}{2x-2}}\right]^{(3x-1)\cdot\frac{2x-2}{x^2+3}}=$$

$$==\left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+3}{2x-2}}\right)^{\frac{x^2+3}{2x-2}}\right]^{\frac{6x^2-8x+2}{x^2+3}}=\underline{e}^6.$$

****

4º) Demuestra que existen $a\epsilon(-\ 1,\ 1)\ y$ β$\epsilon(-\ 1,\ 1)$, α≠β, tales que f'(α) = f'(β) = 0, siendo $f(x) = \left(x^3 +\ 1\right)\cdot e^{\sqrt[3]{3x+2}}\cdot\sqrt[3]{(x\ -\ 1)\cdot sen\frac{\pi x}{2}}$.

La función f(x) es continua y derivable en su dominio, que es R, por ser producto de tres funciones continuas y derivables en R, por cual le es aplicable el teorema del valor medio o de Lagrange, que dice que: "Si una función es continua en $[m,\ n]$ y derivable en $(m,\ n)$, entonces existe al menos un valor $c\in(m,\ n)$ que cumple lo siguiente: $f'(c) = \frac{f(m)-f(n)}{m-n}$."

Aplicando el teorema de Lagrange a la función f(x) en el intervalo (-1, 0):

$$f(-\ 1) =\ 0\cdot e^{\sqrt[3]{-1}}\cdot\sqrt[3]{-\ 2\cdot sen\frac{-\pi}{2}} =\ 0.$$

$$f(0) = (0\ +\ 1)\cdot e^{\sqrt[3]{0+2}}\cdot\sqrt[3]{(0\ -\ 1)\cdot sen\ 0} =\ 0.$$

$$f'(a) = \frac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)} = \frac{0-0}{1} = \frac{0}{1} =\ 0.$$

$$\underline{Lo\ anterior\ prueba\ que\ \exists a\in(-\ 1,\ 0)\ tal\ que\ f'(a) =\ 0}.$$

Aplicando el teorema de Lagrange a la función f(x) en el intervalo (0, 1):

$$f(1) = (1\ +\ 1)\cdot e^{\sqrt[3]{3+2}}\cdot\sqrt[3]{0\cdot sen\frac{\pi}{2}} =\ 0.$$

$$f'(b) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{0-0}{1} = \frac{0}{1} =\ 0.$$

$$\underline{Lo\ anterior\ prueba\ que\ \exists b\in(0,\ 1)\ tal\ que\ f'(b) =\ 0}.$$

$$\underline{Existen\ a\epsilon(-\ 1,\ 1)\ y\ \beta\epsilon(-\ 1,\ 1),\ \alpha\neq\beta,\ tales\ que\ f'(a) = f'(b) =\ 0,\ c.q.d.}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

JULIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se valorará el planteamiento correcto, tango global como de cada una de las partes, si las hubiere. No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc., siempre que no sean de tipo conceptual. Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc., que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución se valorarán positivamente. Se valorará la buena presentación del examen.

OPCIÓN A

1º) Dada la matriz $A = (x\ \ -2\ 5\ \ -x\ )$ calcular qué valor debe tener x para que la matriz inversa de A coincida con la opuesta de A (esto es, $A^{-1} = -A$).

Por el concepto de matriz inversa: $A \cdot A^{-1} = I$; como es $A^{-1} = -A \Rightarrow A \cdot (-A) = I$:

$(x\ \ -2\ 5\ \ -x\ )\cdot(-\ x\ 2\ \ -5\ x\ ) = (1\ 0\ 0\ 1\ )\ ;\ \left(10 - x^2\ 0\ 0\ 10 - x^2\right) = (1\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow 10\ -$

$x^2 = 9 \Rightarrow \underline{x = \pm 3}$.

****

2º) Considera los puntos A (2, 1, 2), B (0, 4, 1) y la recta $r \equiv x = y - 2 = \frac{z-3}{2}$.

a) Calcula un punto P de la recta que equidiste de los puntos A y B.

b) Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto A.

----

a)

Los puntos A (2, 1, 2), B (0, 4, 1) determinan el vector $\overrightarrow{BA} = (2, \ -3, \ 1)$.

El punto medio del segmento $\overline{AB}$ es $M\left(1, \ \frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

El haz de planos perpendiculares al segmento $\overline{AB}$, es $\beta \equiv 2x - 3y + z + D = 0$ y el plano α, perteneciente al haz β, que contiene al punto M es el que satisface su ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \beta \equiv 2x - 3y + z + D = 0 \\ M\left(1, \ \frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 1 - 3 \cdot \frac{5}{2} + \frac{3}{2} + D = 0 \ ;;$$

$$2 - \frac{15}{2} + \frac{3}{2} + D = 0 \ ;; \ 2 - 6 + D = 0 \Rightarrow D = 4.$$

$$\underline{a \equiv 2x - 3y + z + 4 = 0}$$

b)

Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{v_r} = (1, \ 1, 2)$, que también es vector normal del haz de planos χ perpendiculares a la recta r, cuya expresión general es de la forma $\chi \equiv x + y + 2z + N = 0$.

El plano μ, perteneciente al haz χ, que contiene al punto A (2, 1, 2) es el que satisface su ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \chi \equiv x + y + 2z + N = 0 \\ A(2, 1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow 2 + 1 + 2 \cdot 2 + N = 0 \Rightarrow N = -7.$$

$$\underline{\mu \equiv x + y + 2z - 7 = 0}$$

****

3º) Para adornar un mural queremos construir un marco de madera rectangular que encierre una superficie de cinco metros cuadrados. Sabemos que el coste de cada centímetro de marco en los lados horizontales es de 1,5 €, mientras que en los lados verticales es de 2,7 €. Determinar las dimensiones que hemos de elegir para que el marco nos resulte lo más barato posible.

Siendo x la longitud de los lados horizontales e y la longitud de los lados verticales, el coste del marco es: Coste = C = 2 · 150 · x + 2 · 270 · y, teniendo en cuenta que un metro de marco horizontal cuesta 150 € y un metro de marco vertical cuesta 270 €.

Como la superficie es de 5 metros cuadrados es $x \cdot y = 5 \Rightarrow y = \frac{5}{x}$.

El coste en función de x es el siguiente:

$$C(x) = 300x + 540 \cdot y = 300x + 540 \cdot \frac{5}{x} = \frac{300x^2 + 2.700}{x}.$$

Para que el coste sea mínimo tiene que anularse su primera derivada:

$$C'(x) = \frac{600x \cdot x - (300x^2 + 2.700) \cdot 1}{x^2} = \frac{600x^2 - 300x^2 - 2.700}{x^2} =$$

$$= \frac{300x^2 - 2.700}{x^2} = 0 \Rightarrow 300x^2 = 2.700 ;; x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3.$$

Por carecer de sentido lógico la solución negativa, es x = 3 m e $y = \frac{5}{3} \cong 1,67\ m$.

$\underline{El\ marco\ más\ barato\ tiene\ 3\ metros\ de\ base\ y\ 1,67\ metros\ de\ altura.}$

****

4º) Calcula la siguiente integral indefinida: $I = \int \frac{2x^3+x-1}{x^2-5x} \cdot dx$.

$$\begin{array}{rrrr|l} 2x^3 & & +x & -1 & x^2-5x \\ \cline{5-5} -2x^3 & +10x^2 & & & 2x+10 \\ \cline{1-4} 0 & +10x^2 & +x & -1 & \\ & -10x^2 & +50x & & \\ \cline{1-4} & 0 & +51x & -1 & \end{array}$$

$$I = \int \frac{2x^3+x-1}{x^2-5x} \cdot dx = \int \left(2x + 10 + \frac{51x-1}{x^2-5x} \right) \cdot dx =$$

$$= 2\int x \cdot dx + 10\int dx + \int \frac{51x-1}{x^2-5x} \cdot dx = \frac{2x^2}{2} + 10x + I_1 = I.$$

$$I_1 = \int \frac{51x-1}{x^2-5x} \cdot dx \Rightarrow \frac{51x-1}{x^2-5x} = \frac{51x-1}{x(x-5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-5} = \frac{Ax-5A+Bx}{x(x-5)} = \frac{(A+B)x+(-5A)}{x^2-5x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{matrix} A + B = 51 \\ -5A = -1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow A = \frac{1}{5} \Rightarrow B = 51 - \frac{1}{5} = \frac{255-1}{5} = \frac{254}{5} = B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_1 = \int \left(\frac{\frac{1}{5}}{x} + \frac{\frac{254}{5}}{x-5} \right) = \frac{1}{5} Lx + \frac{254}{5} L(x-5).$$

$$\underline{I = \int \frac{2x^3+x-1}{x^2-5x} \cdot dx = x^2 + 10x + \frac{1}{5} Lx + \frac{254}{5} L(x-5) + C.}$$

****

5º) Una caja contiene monedas de 10 céntimos, 20 céntimos y 50 céntimos. En total hay 350 monedas. El número de monedas de 50 céntimos es el doble que el de monedas de 10 céntimos. Si en total hay 90 euros, ¿cuántas monedas hay de cada clase?

Sean x, y, z el número de monedas que contiene la caja de 10 céntimos, 20 céntimos y 50 céntimos, respectivamente.

$x + y + z = 300 \; z = 2x \; 0,1x + 0,2y + 0,5z = 90 \} \quad x + y + z = 300 \; z = 2x \; x +$

$3x + y = 300 \; 11x + 2y = 900 \} \quad -6x - 2y =- 600 \; 11x + 2y = 900 \} \Rightarrow 5x = 3$

.

$z = 120$;; $60 + y + 120 = 300$;; $y = 300 - 180 = 120.$

$\underline{Hay\ 60\ monedas\ de\ 10\ céntimos,\ 120\ de\ 20\ céntimos\ y\ 120\ de\ 50\ céntimos}.$

****

OPCIÓN B

1º) Discute en función del parámetro m el sistema de ecuaciones $\begin{cases} mx + my = 1 \\ 3x + mz = m - 2 \\ -y + z = m - 3 \end{cases}$. ¿Existen casos de indeterminación? Si la respuesta es afirmativa resolver el sistema en esos casos. Si es negativa explicar por qué.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = \begin{pmatrix} m & m & 0 \\ 3 & 0 & m \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} m & m & 0 & 1 \\ 3 & 0 & m & m-2 \\ 0 & -1 & 1 & m-3 \end{pmatrix}$.

El rango de M en función del parámetro m es:

$$Rang\ M = \begin{vmatrix} m & m & 0 \\ 3 & 0 & m \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -m^2 + 3m = m(3-m) = 0 \Rightarrow m_1 = 0, m_2 = 3.$$

<u>Para m ≠ 0 y m ≠ 3, Rang M = Rang M’ = 3 = nº incóg. ⇒ Compatible determinado</u>.

Para m = 0 es $M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. El rango de M’ para m = 0 es 3 por ser el determinante $\{C_1, C_3, C_4\} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$.

<u>Para m = 0, Rang M =2, Rang M’ = 3 ⇒ Incompatible</u>.

Para m = 3 es $M' = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, cuyo rango es 2 por ser la primera columna igual a tres veces la cuarta.

$$\underline{Para\ m = 3 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$$

Existe indeterminación para m = 3, como acabamos de probar; las soluciones son las siguientes:

Para m = 3 el sistema resulta: $\begin{cases} 3x + 3y = 1 \\ 3x + 3z = 1 \\ -y + z = 0 \end{cases}$. Haciendo y = z = λ:

$$\underline{Solución: \begin{cases} x = \frac{1}{3} - \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \quad \forall \lambda \in R.}$$

****

2º) a) Determinar el valor del parámetro α para que la recta $r \equiv \begin{cases} 3x + y - z = 2 \\ 2x + y + 4z = 1 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x + (a + 1)(y - 3) + a(z - 1) = 0$ sean paralelos.

b) ¿Pertenece el punto P (1, 0, -3) al plano obtenido en el apartado anterior?

----

a)

Para que la recta r y el plano π sean paralelos, el vector director de la recta tiene que ser perpendicular al vector normal del plano.

Un vector director de la recta es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son $\overrightarrow{v_1} = (3,\ 1,\ -1)$ y $\overrightarrow{v_2} = (2,\ 1,\ 4)$.

Un vector normal del plano es $\vec{n} = (2,\ a + 1,\ a)$ y un vector director de la recta es $\overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4i - 2j + 3k - 2k + i - 12j = 5i - 14j + k = (5,\ -$

.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (5,\ -14,\ 1) \cdot (2,\ a + 1,\ a) = 0$;; $10 - 14a - 14 + a = 0$;;

$-4 - 13a = 0 \Rightarrow \underline{a = -\frac{4}{13}}$.

b)

El plano π resulta ser: $\pi \equiv 2x + \left(-\frac{4}{13} + 1\right)(y - 3) - \frac{4}{13}(z - 1) = 0$;;

$26x + 9(y - 3) - 4(z - 1) = 0$;; $26x + 9y - 27 - 4z + 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \pi \equiv 26x + 9y - 4z - 23 = 0$.

Un punto pertenece a un plano cuando satisface su ecuación:

$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 26x + 9y - 4z - 23 = 0 \\ P(1,\ 0, -3) \end{array}\right\} \Rightarrow 26 + 0 - 4 \cdot (-3) - 23 = 0,\ 26 + 12$

.

$\underline{\textit{El punto P no pertenece al plano } \pi}$.

****

3º) Dada la función $f(x) = \{ax^2 + 3x \;\; si \;\; x \leq 2 \; x^2 - bx - 4 \;\; si \;\; x > 2$:

a) Hallar los valores de α y b sabiendo que f es derivable en toda la recta real.

b) Calcular la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa x = 1.

----

a)

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto.

La función, por ser polinómica, es continua en R, excepto para x = 2 cuya continuidad vamos a forzar determinando los adecuados valores de los parámetros α y b.

Una función es continua en un punto cuando se cumple que sus límites por la izquierda y por la derecha son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$\{\left(ax^2 + 3x\right) = 4a + 6 = f(2) \qquad \left(x^2 - bx - 4\right) = 4 - 2b - 4 = -2b \;\; \} \Rightarrow 4a +$
. (1)

Para que la función sea derivable para x = 2, sus derivadas laterales en ese punto tienen que ser iguales:

$f'(x) = \{2ax + 3 \;\; si \;\; x \leq 2 \; 2x - b \;\; si \;\; x > 2 \qquad \Rightarrow$
$f'(2^-) = 4a + 3 \; f'\left(2^+\right) = 4 - b \} \Rightarrow f'\left(2^-\right) = f'\left(2^+\right) \Rightarrow$

$4a + 3 = 4 - b, \;\; 4a + b = 1. \quad (2)$

Las ecuaciones (1) y (2) determinan el sistema cuyas soluciones son los valores pedidos:

$2a + b = -3 \; 4a + b = 1 \} \;\; -2a - b = 3 \; 4a + b = 1 \} \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow \underline{a = 2}.$
$4 + b = -3 \Rightarrow \underline{b = -7}.$

b)

Para x = 1 la función es $f(x) = 2x^2 + 3x$.

La pendiente de una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto:

$f'(x) = 4x + 3 \Rightarrow m = f'(1) = 4 + 3 = 7.$

El punto de tangencia es: $f(1) = 2\cdot1^2 + 3\cdot1 = 4 + 3 = 7 \Rightarrow P(1,\ 7)$.

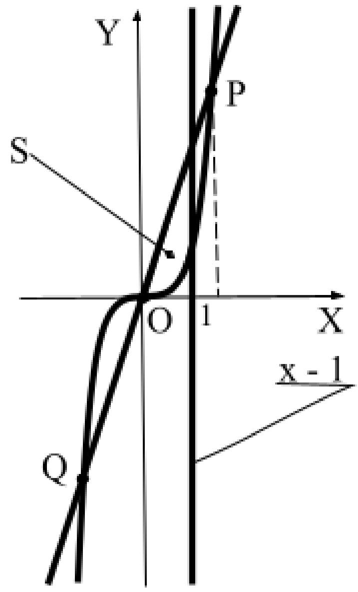
La recta que pasa por un punto conocida la pendiente es $y - y_0 = m\left(x - x_0\right)$; aplicada al caso de este ejercicio:

$$y - 7 = 7(x - 1) = 7x - 7 \Rightarrow \underline{Tangente:\ \ t \equiv 7x - y = 0}.$$

****

4º) Representar gráficamente la región del plano limitado por la curva $y = 2x^3$, la recta tangente a la gráfica de dicha función en el origen de coordenadas y la recta x = 1. Calcular el área de dicha región.

El valor de la pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que la primera derivada de la función en ese punto.



$y' = 3x^2 \Rightarrow y'(1) = m = 3.$

La recta tangente es $y = 3x$.

Los puntos de corte de la función y la tangente se obtienen de la igualación de sus expresiones:

$\left.\begin{array}{l} y = 2x^3 \\ y = 3x \end{array}\right\} \Rightarrow 2x^3 = 3x \;;\; 2x^3 - 3x = 0 \;;$

$x\left(2x^2 - 3\right) = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 0 \rightarrow O(0,\ 0) \\ x_2 = \frac{\sqrt{6}}{2} \rightarrow P\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\ \frac{3\sqrt{6}}{2}\right) \\ x_3 = -\frac{\sqrt{6}}{2} \rightarrow Q\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\right. \end{array}\right.$

.

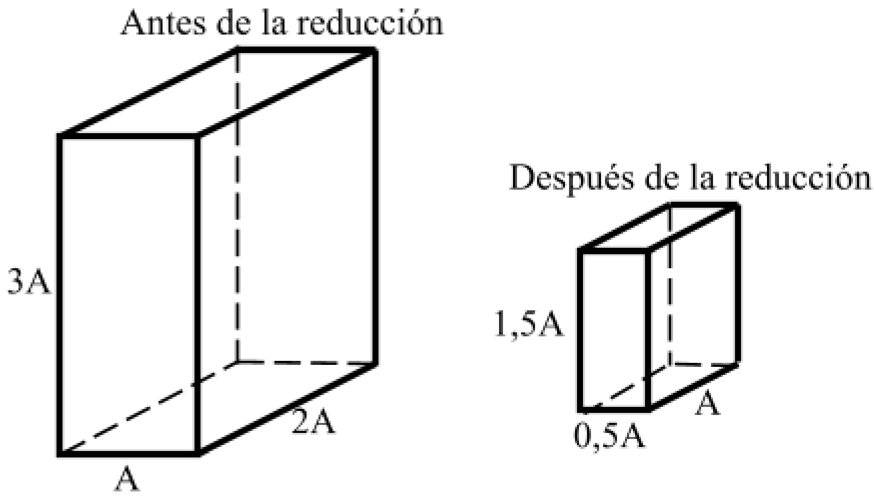
El valor de la superficie a calcular es la siguiente:

$S = \int_0^1 \left(3x - 2x^3\right) \cdot dx = \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{2x^4}{4}\right]_0^1 = \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{4}\right) - 0 = \frac{1}{2}.$

$$\underline{S = \frac{1}{2}\ u^2}$$

****

5º) Una caja (prisma rectangular) tiene por dimensiones A, 2A y 3A. Si disminuimos cada una de sus dimensiones en un 50 %, ¿el volumen habrá disminuido en un 50 %? ¿Y el área total habrá disminuido en un 50 %? Razona las respuestas.



El volumen antes de la reducción es: $V_1 = A \cdot 2A \cdot 3A = 6A^3$.

El volumen después de la reducción es: $V_2 = 0,5A \cdot A \cdot 1,5A = 0,75A^3$.

$\frac{V_2}{V_1} = \frac{0,75A^3}{6A^3} = 0,125 = \frac{1}{8} \Rightarrow$ <u>El volumen se ha reducido a un octavo (12,5 %)</u>.

La superficie antes de la reducción es:

$S_1 = 2 \cdot [(A \cdot 2A) + (A \cdot 3A) + (2A \cdot 3A)] = 2 \cdot \left(2A^2 + 3A^2 + 6A^2\right) = 22A^2$.

La superficie después de la reducción es:

$S_2 = 2 \cdot [(0,5A \cdot A) + (0,5A \cdot 1,5A) + (A \cdot 1,5A)] =$

$= 2 \cdot \left(0,5A^2 + 0,75A^2 + 1,5A^2\right) = 2 \cdot 2,75A^2 = 5,5A^2$.

$\frac{S_2}{S_1} = \frac{5,5A^2}{22A^2} = 0,25 = \frac{1}{4}$.

$\underline{La\ superficie\ se\ ha\ reducido\ a\ un\ cuarto\ (25\ \%)}$.

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

JUNIO – 2000

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Nota: Deberán contestarse la cuestión o el problema de cada uno de los bloques A, B, C, D y E.

BLOQUE A

Cuestión A.- ¿Cuándo se dice que dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes? Se consideran los sistemas $S \equiv \begin{cases} 2x+2y-3z=1 \\ 5x-3y-2z=0 \\ x+2y+3z=5+a \end{cases}$ y $T \equiv \begin{cases} 2x+2y-2z=2 \\ 7x-4y-3z=0 \\ x+4y+3z=8 \end{cases}$. ¿Existe algún valor de a para el cual S sea equivalente a T? Contestar razonadamente.

Dos sistemas de ecuaciones se dice que son equivalentes cuando tienen los mismos grupos de soluciones.

Se resuelve por Cramer el sistema T:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & -3 \\ 8 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 7 & -4 & -3 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}}=\frac{-24-48-64+24}{-24-56-6-8+24-42}=\frac{-112}{-112}=1.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 7 & 0 & -3 \\ 1 & 8 & 3 \end{vmatrix}}{-112}=\frac{-112-6+48-42}{-112}=\frac{-112}{-112}=1.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 7 & -4 & 0 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix}}{-112}=\frac{-64+56+8-112}{-112}=\frac{-112}{-112}=1.$$

$\{1,\ 1,\ 1\} \Rightarrow S \equiv \begin{cases} 2x+2y-3z=1 \\ 5x-3y-2z=0 \\ x+2y+3z=5+a \end{cases} \Rightarrow$
.

$\underline{\textit{Los sistemas S y T son equivalentes únicamente para } a=1}.$

****

Problema A.- Analizar la compatibilidad del sistema $S \equiv \{x + y + az = 1 \;\; 2x - y + z = 1 \;\; 3x + ay + z = 2$ en función del valor de a. Resolver en los casos en que sea compatible determinado.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = (1\ 1\ a\ 2\ \ -\ 1\ 1\ 3\ a\ 1\,)$ y $M' = (1\ 1\ a\ 2\ \ -\ 1\ 1\ 3\ a\ 1\quad 1\ 1\ 2\,)$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$|M| = |1\ 1\ a\ 2\ \ -\ 1\ 1\ 3\ a\ 1\,| = -\ 1 + 2a^2 + 3 + 3a - a - 2 = 2a^2 + 2a = 0;$

$2a(a + 1) = 0 \Rightarrow a_1 = 0,\ a_2 = -\ 1.$

$\underline{Para\ \{a \neq 0\ a \neq -\ 1\,\} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

Para $a = 0 \Rightarrow M' = (1\ 1\ 0\ 2\ \ -\ 1\ 1\ 3\ 0\ 1\quad 1\ 1\ 2\,) \Rightarrow \left\{F_1 + F_2 = F_3\right\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$

$\underline{Para\ a = 0 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

Para $a = -\ 1 \Rightarrow M' = (1\ 1\ -\ 1\ 2\ \ -\ 1\ 1\ 3\ \ -\ 1\ 1\quad 1\ 1\ 2\,) \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \left\{C_1, C_3,\ C_4\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |1\ \ -\ 1\ 1\ 2\ 1\ 1\ 3\ 1\ 2\,| = 2 + 2 - 3 - 3 - 1 + 4 = 1 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$

$\underline{Para\ a = -\ 1 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

Se resuelve por Cramer $\forall a \in R - \{0,\ -\ 1\}$:

$$x = \frac{|1\ 1\ a\ 1\ -1\ 1\ 2\ a\ 1\,|}{2a(a+1)} = \frac{-1+a^2+2+2a-a-1}{2a(a+1)} = \frac{a^2+a}{2a(a+1)} = \frac{a(a+1)}{2a(a+1)} = \frac{1}{2}.$$

$$y = \frac{|1\ 1\ a\ 2\ 1\ 1\ 3\ 2\ 1\,|}{2a(a+1)} = \frac{1+4a+3-3a-2-2}{2a(a+1)} = \frac{a}{2a(a+1)} = \frac{1}{2(a+1)}.$$

$$z = \frac{|1\ 1\ 1\ 2\ -1\ 1\ 3\ a\ 2\,|}{2a(a+1)} = \frac{-2+2a+3+3-a-4}{2a(a+1)} = \frac{a}{2a(a+1)} = \frac{1}{2(a+1)}.$$

$$\underline{Solución: x = \frac{1}{2},\ y = z = \frac{1}{2(a+1)}\ \forall a \in R - \{0,\ -\ 2\}.}$$

****

BLOQUE B

Cuestión B.- Se considera la recta $r \equiv \{x = 2t\ y = t\ \ z = 0$ y el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$. Determinar las coordenadas de un punto P perteneciente a la recta y cuya distancia al plano π sea igual que su distancia al origen de coordenadas. ¿Es único dicho punto? Contestar razonadamente.

Por condición del problema: $d(P,\ O) = d(P, \pi)$.

Un punto genérico de la recta r es $P(2t,\ t,\ 0)$.

$$d(P,\ O) = \sqrt{(2t)^2 + t^2 + 0^2} = \sqrt{5t^2} = t\sqrt{5}.$$

La distancia de un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

$$d(P, \pi) = t\sqrt{5} \Rightarrow \frac{|2t+t+0-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{|3t-1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|3t-1|}{\sqrt{3}} \Rightarrow |3t - 1| = t\sqrt{15} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3t - 1 = t\sqrt{15} \\ -3t + 1 = t\sqrt{15} \end{array}\right\} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{3-\sqrt{15}} \Rightarrow \underline{P_1\left(\frac{2}{3-\sqrt{15}},\ \frac{1}{3-\sqrt{15}},\ 0\right)} \Rightarrow t_2 =$$

.

Como se observa, existen dos puntos que cumplen la condición pedida.

****

Problema B.- Se consideran las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - 3y + z = 1 \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$. Encontrar la ecuación del plano que contiene a la recta r_1 y al punto de intersección de r_2 con el plano $\pi \equiv x - 3y - 2z + 7 = 0$.

La expresión de r_1 por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - 3y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow \begin{cases} x + y = 2\lambda \\ 2x - 3y = 1 - \lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5x = 1 + 5\lambda \rightarrow x = \frac{1}{5} + \lambda;\ \ y = 2\lambda - x = 2\lambda - \frac{1}{5} - \lambda = -\frac{1}{5} + \lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{5} + \lambda \\ y = -\frac{1}{5} + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de r son $P\left(\frac{1}{5},\ -\frac{1}{5},\ 0\right)$ y $\vec{v_r} = (1,\ 1,\ 1)$.

El punto Q intersección de r_2 con el plano $\pi \equiv x - 3y - 2z + 7 = 0$ es:

$$\pi \equiv x - 3y - 2z + 7 = 0 \qquad r_2 \equiv \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases} \Rightarrow$$

$$3t - 3 + 6t - 4 - 2t + 7 = 0;\ \ 7t = 0 \rightarrow t = 0 \Rightarrow Q(0,\ 1,\ 2).$$

Los puntos P y Q determinan el vector $\vec{PQ} = \left(-\frac{1}{5},\ \frac{6}{5},\ 2\right)$.

El plano β pedido contiene al punto P y tiene como vectores directores al vector director de la recta r, $\vec{v_r} = (1,\ 1,\ 1)$, y a cualquier vector que sea linealmente dependiente del vector $\vec{PQ} = \left(-\frac{1}{5},\ \frac{6}{5},\ 2\right)$, por ejemplo $\vec{w} = (-1,\ 6,\ 10)$:

$$\beta\left(P;\ \vec{v_r},\ \vec{w}\right) \equiv \begin{vmatrix} x - \frac{1}{5} & y + \frac{1}{5} & z \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 0;\ \ \begin{vmatrix} 5x - 1 & 5y + 1 & 5z \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 6 & \end{vmatrix}$$

$$10(5x - 1) - (5y + 1) + 30z + 5z - 6(5x - 1) - 10(5y + 1) = 0;$$

$$4(5x - 1) - 11(5y + 1) + 35z = 0;\ \ 20x - 4 - 55y - 11 + 35z = 0;$$

$$20x - 55y + 35z - 15 = 0 \Rightarrow \underline{\beta \equiv 4x - 11y + 7z - 3 = 0}.$$

****

BLOQUE C

Cuestión C. Sea g(x) la función definida mediante:

$g(x) = \{ax(x + 1)\ si\ x\in[-1,\ 0]\ x(x - 1)^2\ si\ x\in(0,\ 1]$.
¿Para qué valores de a puede aplicarse el teorema de Rolle a la función g en el intervalo [-1, 1]? Contestar razonadamente.

El teorema de Rolle dice que "si una función $f(x)$ en continua en $[a,\ b]$ y derivable en $(a,\ b)$, con $a,\ b\in R$ y $a < b$, y se cumple que $f(a) = f(b)$, existe al menos un valor c, $a < c < b$ tal que $f'(c) = 0$".

La función g tiene que ser continua en [-1, 1] y derivable en (-1, 1).

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto.

La función g(x) es continua en R para cualquier valor real de a, excepto para el valor x = 0, para el cual se va a determinar el valor de a para que lo sea.

Para que la función g sea continua en x = 0 es necesario que sus límites laterales sean iguales e igual al valor de la función en ese punto.

$g(x) = [ax(x + 1)] = 0 = g(0)\ g(x) = \left[x(x - 1)^2\right] = 0 \quad \} \Rightarrow g\ es\ continua$
.

La función $g(x)$ es derivable en R, excepto para el valor $x = 0$ cuya derivabilidad se va a estudiar a continuación.

Un función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales.

$g'(x) = \{a(2x + 1)\ si\ x\in[-1,\ 0]\ 3x^2 - 4x + 1\ si\ x\in(0,\ 1]$. (*)

(*) $m(x) = ax(x + 1) = ax^2 + ax \Rightarrow m'(x) = 2ax + a = a(2x + 1)$.

$n(x) = x(x - 1)^2 \Rightarrow n'(x) = 1\cdot(x - 1)^2 + x\cdot2(x - 1) =$

$= (x - 1)[(x - 1) + 2x] = (x - 1)(3x - 1) = 3x^2 - x - 3x + 1 = 3x^2 - 4x + 1$
.

$g'\left(0^-\right) = g'\left(0^+\right) \Rightarrow a(2\cdot0 + 1) = 1 \Rightarrow a = 1.$

$\underline{A\ la\ función\ g\ le\ es\ aplicable\ el\ teorema\ de\ Rolle\ para\ a = 1}$.

****

Problema C. Determinar los coeficientes de la curva $y = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ para que sea tangente a la recta y = 3x – 2 en el punto P(1, 1) y para que tenga un extremo local en el punto x = 4.

El punto de tangencia P(1, 1) pertenece a la curva, por lo cual: $y(1) = 1$:

$y(1) = 1 + A + B + C = 1 \Rightarrow A + B + C = 0.$ (1)

La pendiente de la recta $y = 3x - 2$ es $m = 3$.

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto:

$y'(x) = 3x^2 + 2Ax + B \Rightarrow y'(1) = 3 \Rightarrow 3 \cdot 1^2 + 2A \cdot 1 + B = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2A + B = 0.$ (2)

Por tener un extremo relativo para x = 4 es $y'(4) = 0$:

$y'(4) = 3 \cdot 4^2 + 2A \cdot 4 + B = 0;\ 48 + 8A + B = 0 \Rightarrow 8A + B = -48.$
(3)

De las ecuaciones (2) y (3):

$\left. \begin{array}{l} 2A + B = 0 \\ 8A + B = -48 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} -2A - B = 0 \\ 8A + B = -48 \end{array} \right\} \Rightarrow 6A = -48 \Rightarrow$
.

Sustituyendo los valores obtenidos de A y B en (1):

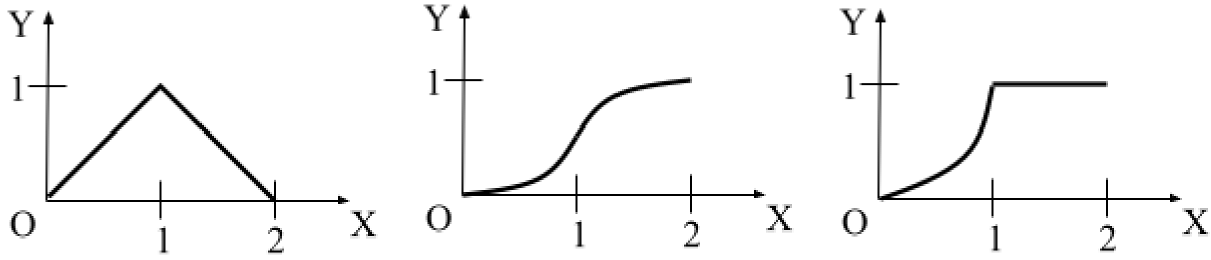
$-8 + 16 + C = 0 \Rightarrow \underline{C = -8}.$

$$\underline{La\ función\ resulta: y = x^3 - 8x^2 + 16x - 8}.$$

****

BLOQUE D

Cuestión D. Sea h(t) la función $h(t) = \begin{cases} 1 & si\ t\in[0,\ 1] \\ 2 - t & si\ t\in(1,\ 2] \end{cases}$. Para $t\in[0,\ 2]$ se considera la función $F(x) = \int_0^x h(t)\cdot dt$. Entre las gráficas que siguen se encuentra la de la función F. Contestar razonadamente a la siguiente pregunta: ¿cuál es la gráfica de F?



$$F(x) = \int_0^1 1\cdot dt + \int_1^x (2 - t)\cdot dt = [t]_0^1 + \left[2t - \frac{t^2}{2}\right]_1^x =$$

$$= (1 - 0) + \left(2x - \frac{x^2}{2}\right) - \left(2\cdot 1 - \frac{1^2}{2}\right) = 1 + 2x - \frac{x^2}{2} - 2 + \frac{1}{2} = -\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2}.$$

$$\underline{F(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2}.}$$

$$\underline{La\ gráfica\ de\ F(x)\ no\ se\ encuentra\ entre\ las\ gráficas\ dadas.}$$

$$\underline{F(x)\ es\ una\ parábola\ convexa\ (\cup).}$$

Otra forma de contestar a la pregunta es la siguiente:

La derivada de la función es $F'(x) = \begin{cases} 1 & si\ \ x\in(0,\ 1] \\ 2 - x & si\ x\in(1,\ 2] \end{cases}$, lo cual indica que la función en el intervalo (0, 1] es una recta de pendiente 1, es decir, que es creciente; la única gráfica de las dadas que cumple esta condición es la primera, pero en el intervalo (1, 2) también es creciente, por ser $2 - x > 0$, por lo que se llega a la conclusión anterior.

****

Problema D. Trazar un esquema del recinto finito del plano limitado por $y = \frac{1}{x^2+4}$, $y = \frac{x}{16}$ y el eje OY. Calcular el área de dicho recinto.

La función $y = \frac{1}{x^2+4}$ es par, por lo tanto, es simétrica con respecto al eje de ordenadas; su dominio es R y su recorrido es $R(x) \Rightarrow [0, \ +\infty)$.

$y = \frac{1}{x^2+4} = 0$, el eje de abscisas es asíntota horizontal de la función.

Los periodos de crecimiento y decrecimiento de $y = \frac{1}{x^2+4}$ son los siguientes:

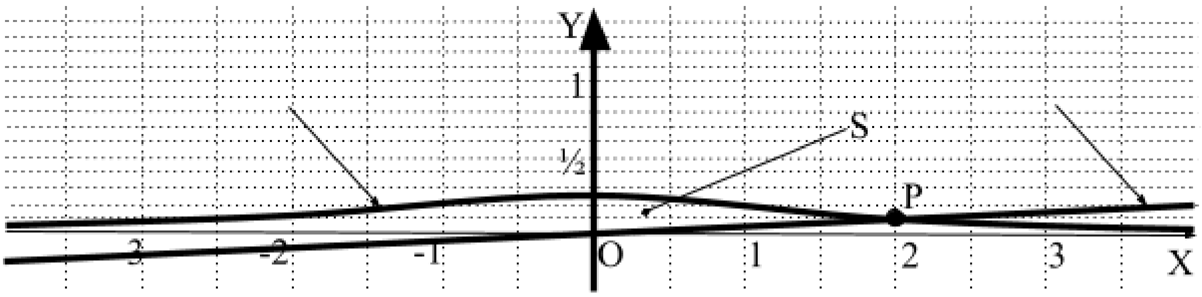
$y'_{(x)} = -\frac{2x}{\left(x^2+4\right)^2} \Rightarrow \{x < 0 \rightarrow y'_{(x)} > 0 \Rightarrow Crecimiento\colon (-\infty, 0) \ x > 0 \rightarrow y'_{(x)} < 0 \Rightarrow Decrec$

.

Los puntos de corte de la función $y = \frac{1}{x^2+4}$ con la recta $y = \frac{x}{16}$ son los siguientes:

$\frac{1}{x^2+4} = \frac{x}{16}$; $x^3 + 4x - 16 = 0$. Resolviendo por Ruffini se obtiene su única solución, que es x = 2. El único punto de corte es $P\left(2, \frac{1}{8}\right)$.

La representación gráfica, aproximada, es la que figura a continuación.



De la observación de la figura se deduce el área a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_0^2 \left(\frac{1}{x^2+4} - \frac{x}{16}\right) \cdot dx = \int_0^2 \frac{1}{x^2+4} \cdot dx + \frac{1}{16}\int_2^0 x \cdot dx = A + B. \quad (*)$$

$$A = \int_0^2 \frac{1}{x^2+4}\cdot dx = \int_0^2 \frac{1}{4\left(\frac{x^2}{4}+1\right)}\cdot dx = \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{1}{\frac{x^2}{4}+1}\cdot dx = \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{x = 2 \to t = 1\ x = 0 \to t = 0\} \Rightarrow \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\cdot 2dx = \frac{1}{2}\cdot[arc\ tg\ t]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(arc\ tg\ 1 - arc\ tg\ 0) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{8}\ u^2 = A.$$

$$B = \frac{1}{16}\cdot\int_2^0 x\cdot dx = \frac{1}{16}\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^0 = 0 - \frac{1}{16}\cdot\frac{2^2}{2} = -\frac{1}{8}\ u^2 = B.$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de A y B: $S = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{8} = \frac{\pi-1}{8}\ u^2$.

$$\underline{S = \frac{\pi-1}{8}\ u^2 \cong 0,27\ u^2.}$$

****

BLOQUE E

Cuestión E.- Estudiar el rango de la matriz $M = (b\ a\ a\ a\ b\ a\ a\ a\ b\ )$, mediante transformaciones de filas y columnas, indicando en cada caso las transformaciones realizadas.

$|M| = |b\ a\ a\ a\ b\ a\ a\ a\ b\ | \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow F_2 - F_1\ F_3 \rightarrow F_3 - F_1\right\} \Rightarrow |b\ a\ a\ a\ -\ b\ b\ -\ a\ 0\ a\ -\ b$

.

Dividiendo las dos últimas filas por $(a - b)$: $(a - b)^2 |b\ a\ a\ 1\ \ -\ 1\ 0\ 1\ 0\ \ -\ 1\ |$.

Sumando a la primera columna las otras dos: $(a - b)^2 |b + 2a\ a\ a\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 0\ 0\ \ -\ 1\ |$.

Desarrollando por los menores adjuntos de la primera columna:

$$|M| = (a - b)^2 \cdot (b + 2a) \cdot |-\ 1\ 0\ 0\ \ -\ 1\ | = (a - b)^2 \cdot (b + 2a) \cdot 1.$$

De lo anterior se deduce lo siguiente:

$$\underline{Para\ a = b = 0 \Rightarrow M = (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ ) \Rightarrow Rang\ M = 0}.$$

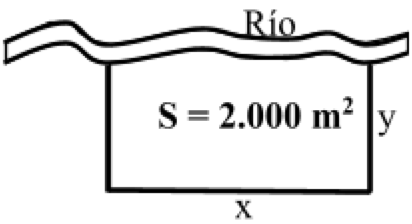
$$\underline{Para\ a = b \neq 0 \Rightarrow M = (a\ a\ a\ a\ a\ a\ a\ a\ a\ ) \Rightarrow Rang\ M = 1}.$$

$$\underline{Para\ a \neq b \Rightarrow M = (b\ a\ a\ a\ b\ a\ a\ a\ b\ ) \Rightarrow |b\ a\ a\ b\ | \neq 0 \Rightarrow Rang\ M \geq 2}.$$

$$\underline{Para\ b \neq -\ 2a \Rightarrow Rang\ M = 3}.$$

****

Problema E. Un agricultor tiene una finca de forma rectangular, uno de cuyos lados limita con un río. Se quiere vallar los tres lados restantes, ¿cuál será el coste mínimo si se sabe que cada metro de valla vale 8 euros y la superficie de la finca es de 2.000 metros cuadrados?



Sean x e y los lados del rectángulo, siendo x la longitud del lado paralelo al río.

$L = x + 2y \Rightarrow Mínima.$

$S = x \cdot y = 2.000 \Rightarrow y = \frac{2.000}{x}.$ Sustituyendo este valor en la longitud:

$L(x) = x + 2 \cdot \frac{2.000}{x} = x + \frac{4.000}{x}.$ $L'(x) = 1 - \frac{4.000}{x^2}.$

Para que el coste sea mínimo tiene que ser mínima la longitud de longitud de la valla tiene que ser mínima y, en consecuencia, su primera derivada tiene que anularse:

$L'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{4.000}{x^2} = 0;\ 1 = \frac{4.000}{x^2};\ x^2 = 4.000 \Rightarrow x = \pm 20\sqrt{10}.$

La solución negativa carece de sentido lógico (para máximo): $x = 20\sqrt{10}.$

$y = \frac{2.000}{x} = \frac{2.000}{20\sqrt{10}} = \frac{100}{\sqrt{10}} = \frac{100\sqrt{10}}{10} \Rightarrow y = 10\sqrt{10}.$

$Coste = 8 \cdot (x + 2y) = 8 \cdot \left(20\sqrt{10} + 2 \cdot 10\sqrt{10}\right) = 320\sqrt{10} \cong 1.011,93.$

$\underline{El\ coste\ mínimo\ es\ de\ 1.011,93\ euros.}$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

JULIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se elegirá solamente UNA de los dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de la opción. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberían estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

1º) Se da el sistema de ecuaciones $\{x + 3y + z = a\ x + y - az = 1\ 2x + ay - z = 2a + 3$, donde α es un parámetro real. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La solución del sistema cuando α = -1.

b) Todas las soluciones del sistema cuando α = 0.

c) El valor de α para el que el sistema es incompatible.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$M = (1\ 3\ 1\ 1\ 1\ -a\ 2\ a\ -1)$ y $M' = (1\ 1\ 2\ 3\ 1\ a\ 1\ -a\ -1\ a\ 1\ 2a + 3\ )$.

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$|M| = |1\ 3\ 1\ 1\ 1\ -a\ 2\ a\ -1| = -1 + a - 6a - 2 + a^2 + 3 = a^2 - 5a = 0$;;

$a(a - 5) = 0 \Rightarrow a_1 = 0,\ a_2 = \mathbf{5}$.

Para α = 0 es

$M' = (1\ 3\ 1\ 0\ \ 1\ 2\ \ 1\ 0\ 1\ 0\ \ -\ 1\ 3\ ) \Rightarrow \{C_1 = C_3 + \ C_4\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$

Para α = -1 el sistema es $\{x + 3y + z = -\ 1\ x + y + z = 1\ 2x - y - z = 1\ .$

De la suma de las dos últimas ecuaciones se deduce que 3x = 2 ⇒ $\underline{x = \frac{2}{3}}$.

Restando a la primera ecuación la segunda se deduce que 2y = -2 ⇒ $\underline{y = -\ 1}$.

$x + y + z = 1\ ;;\ \frac{2}{3} - 1 + z = 1\ ;;\ z = 2 - \frac{2}{3} \Rightarrow \underline{z = \frac{4}{3}}.$

$b)$

$$\underline{Para\ a = 0 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$$

Para α = 0 el sistema es $\{x + 3y + z = 0\ x + y = 1\ 2x - z = 3\ ;$ despreciando la primera ecuación y haciendo x = λ, resulta:

$$\underline{Solución:\ \{x = \lambda\ y = 1 - \lambda\ z = -\ 3 + 2\lambda\},\ \forall\lambda\in R.}$$

$c)$

$Para\ \alpha = 5 \Rightarrow M' = (1\ 1\ 2\ \ 3\ 1\ 5\ \ 1\ \ -\ 5\ \ -\ 1\ \ 5\ 1\ 13\ \ ) \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$ $|1\ 3\ 5\ 1\ 1\ 1\ 2\ 5\ 13\ | =$

$= 13 + 25 + 6 - 10 - 5 - 39 = 44 - 54 = 10 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\underline{Para\ a = 5 \Rightarrow Rang\ M = 2,\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$\underline{El\ sistema\ es\ incompatible\ \text{únicamente}\ para\ a = 5.}$$

****

2º) Se dan las rectas $r \equiv \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$, $s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 0 \end{cases}$ y el punto P(0, 3, -2). Obtener <u>razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado</u>:

a) Las ecuaciones de la recta t que pasa por el punto P y es paralela a la recta r.

b) La ecuación del plano π que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s.

c) La distancia entre las rectas r y s.

----

a)

Un vector director de r es $\vec{v_r} = (3, \ -1, \ 2)$.

La recta t, dada por unas ecuaciones paramétricas, es
$\underline{t \equiv \begin{cases} x = 3\mu \\ y = 3 - \mu \\ z = -2 + 2\mu \end{cases}}$.

b)

Un punto de r es A(-1, 1, 0) y un vector director de s es $\vec{v_s} = (1, \ -1, \ 0)$.

La ecuación general del plano π es:
$\pi\left(A; \vec{v_r}, \vec{v_s}\right) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$;;

$2(y-1) - 3z + z + 2(x+1) = 0$;; $2x + 2 + 2y - 2 - 2z = 0$.

$$\underline{\pi \equiv x + y - z = 0}.$$

c)

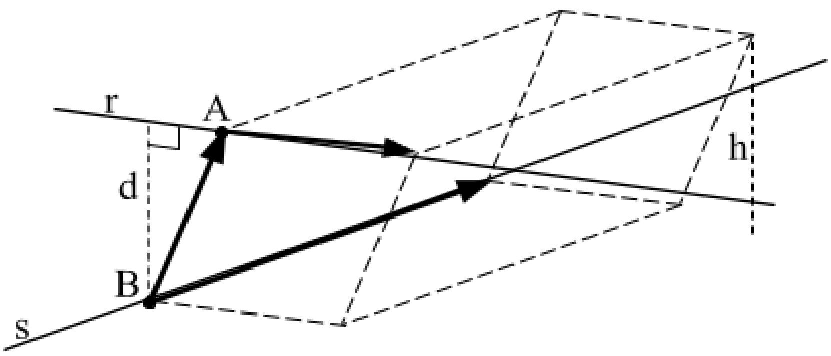
Un punto de s es B(1, 0, 0).

Los vectores directores de las rectas r y s son linealmente independientes por no ser sus componentes proporcionales, lo cual implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso consideramos el vector $\vec{w}$ que tiene como origen un punto de r y como extremo un punto de s:

$$\vec{w} = \vec{AB} = B - A = (1, \ 0, \ 0) - (-1, \ 1, \ 0) = (2, \ -1, \ 0).$$

Según que los vectores $\left\{\vec{v_r}, \vec{v_s}, \vec{w}\right\}$ sean coplanarios o no, las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\left\{\vec{v}_r,\ \vec{v}_s, \vec{w}\right\}$ son coplanarios cuando su rango es menor que tres, es decir, cuando el determinante que determinan es cero: $|3\ -1\ 2\ 1\ -1\ 0\ 2\ -1\ 0| = -\ 2\ |1\ -1\ 2\ -1| =$
$= -\ 2\cdot(-\ 1\ +\ 2) = -\ 2 \neq 0 \Rightarrow\ Rango\left\{\vec{v}_r,\ \vec{v}_s, \vec{w}\right\} =\ 3 \Rightarrow$ <u>Las rectas r y s se cruzan</u>.



Para una mejor comprensión se hace el esquema que se observa.

Para calcular la distancia entre las rectas r y s vamos a determinar un paralelepípedo cuyas dimensiones son los vectores directores de las rectas, $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$, y un tercer vector $\vec{w}$ que tiene como origen al punto A de r y extremo el punto B de s.

El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observando que la altura h es igual a la distancia d pedida entre las rectas.

Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$V\ = \vec{v}_r\cdot\left(\vec{v}_s \times \vec{w}\right) = \left|\vec{v}_r \times \vec{v}_s\right|\cdot h\ = \left|\vec{v}_r \times \vec{v}_s\right|\cdot d \Rightarrow d\ = \frac{\left|\vec{v}_r\cdot\left(\vec{v}_s \times \vec{w}\right)\right|}{\left|\vec{v}_r \times \vec{v}_s\right|}.$$

$$d\ = \frac{\left|\vec{v}_r\cdot\left(\vec{v}_s \times \vec{w}\right)\right|}{\left|\vec{v}_r \times \vec{v}_s\right|} = \frac{\|3\ -1\ 2\ 1\ -1\ 0\ 2\ -1\ 0\ \|}{|\,i\ j\ k\ 3\ -1\ 2\ 1\ -1\ 0\ |} = \frac{|-2|}{|2j-3k+k+2i|} = \frac{2}{|2i+2j-2k|} =$$

$$= \frac{1}{|i+j-k|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \underline{\frac{\sqrt{3}}{3}\ unidades\ =\ d(r, s\,)}.$$

****

3º) Se da la función f definida por $f(x)=\frac{x}{(x+1)^2}$. Obtener <u>razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado</u>:

a) El dominio y las asíntotas de la función f.

b) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f.

c) La integral $\int \frac{x}{(x+1)^2} \cdot dx$.

----

a)

El dominio de una función racional es R, excepto los valores que anulan el denominador.

$$\underline{D(f) \Rightarrow R - \{-1\}}.$$

Asíntotas verticales: Son de la forma x = k; son los valores finitos de x que anulan el denominador.

$$\underline{Asíntota\ vertical: x = -1}.$$

Asíntotas horizontales: Son de la forma y = k; son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a $\pm\infty$:

$$k = f(x) = \frac{x}{(x+1)^2} = 0 .$$

$$\underline{La\ recta\ y = 0\ (eje\ X)\ es\ asíntota\ horizontal\ de\ la\ función}.$$

Asíntotas oblicuas: Son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \frac{f(x)}{x}\ y\ n = [f(x) - mx] .$$

$$m = \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{x}{(x+1)^2}}{x} = \frac{x}{(x+1)^2} = 0 .$$

$$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ oblicuas}.$$

b)

Una función es creciente o decreciente en un punto cuando el valor de su primera derivada en ese punto es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x+1)^2 - x\cdot 2\cdot(x+1)\cdot 1}{(x+1)^4} = \frac{x+1-2x}{(x+1)^3} = \frac{1-x}{(x+1)^3}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1-x}{(x+1)^3} = 0 \;;;\; 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1.$$

$$\underline{f'(x) > 0 \Rightarrow Crecimiento:\ x \in (-1,\ 1)}.$$

$$\underline{f'(x) < 0 \Rightarrow Decrecimiento:\ x \in (-\infty,\ 1) \cup (1,\ +\infty)}.$$

$c)$

$$\int \frac{x}{(x+1)^2} \cdot dx \Rightarrow \{x + 1 = t \;;;\; x = t - 1\ dx = dt\} \Rightarrow \int \frac{t-1}{t^2} \cdot dt = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \right) \cdot dt =$$

$$= \int \frac{1}{t} \cdot dt - \int t^{-2} \cdot dt = Lt - \frac{t^{-1}}{-1} + C = Lt + \frac{1}{t} + C = \underline{L|x + 1| + \frac{1}{x+1} + C}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Se dan las matrices $A = (x\,1\ \ -\ 1\,y\,2\,3\,z\,1\,0\,)$ y $B = (x\,1\ \ -\ 1\,1\,2\,3\,0\,1\,0\,)$. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de x para los cuales la matriz B tiene inversa.

b) El valor del determinante de las matrices A^3 y $(2x\,5\ \ -\ 1\,2y\,10\,3\,2z\,5\,0\,)$, sabiendo que el valor del determinante de A es 8.

c) Los valores de x, y, z para los cuales $A^2 = (0\,0\,4\,3\,7\,6\ \ -\ 1\,3\,2\,)$.

----

a)

Una matriz tiene inversa (es invertible) cuando su determinante es distinto de cero.

$$|B| = |x\,1\ \ -\ 1\,1\,2\,3\,0\,1\,0\,| =-\ 1\ -\ 3x\ =\ 0\ ;;\ 3x\ =-\ 1 \Rightarrow x\ =-\frac{1}{3}\ .$$

$$\underline{La\ matriz\ B\ es\ invertible\ \forall x \in R\ -\left\{-\ \frac{1}{3}\right\}}.$$

b)

$$A^3\ =\ A \cdot A \cdot A \Rightarrow \left|A^3\right| = |A \cdot A \cdot A\,| = |A| \cdot |A| \cdot |A| = |A|^3\ =\ 8^3\ =\ 512.$$

$$\underline{A^3\ =\ 512}.$$

$$|2x\,5\ \ -\ 1\,2y\,10\,3\,2z\,5\,0\,| =\ 2 \cdot 5 \cdot\ |x\,1\ \ -\ 1\,y\,2\,3\,z\,1\,0\,| =\ 10 \cdot\ |A| =\ 10 \cdot 8\ = \underline{80}.$$

c)

$$A^2 = (x\,1\ \ -\ 1\,y\,2\,3\,z\,1\,0\,) \cdot (x\,1\ \ -\ 1\,y\,2\,3\,z\,1\,0\,) =$$

$$= \left(x^2\ +\ y\ -\ z\,x\ +\ 2\ -\ 1\ \ -\ x\ +\ 3\,xy\ +\ 2y\ +\ 3z\,y\ +\ 4\ +\ 3\ \ -\ y\ +\ 6\,xz\ +\ y\,z\ +\ 2\right.$$

$$\Rightarrow \underline{x\ =-\ 1,\ y\ =\ 0,\ z\ =\ 1}.$$

****

2º) Sean las rectas $r\equiv\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 6x - z + 8 = 0 \end{cases}$, $s\equiv\begin{cases} x = 1 - 2a \\ y = 2 + a \\ z = 3 - a \end{cases}$ y el plano $\pi\equiv 2x + mz + 1 = 0$, siendo m un parámetro real. Obtener <u>razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado</u>:

a) La posición relativa de las rectas r y s y el punto (o puntos) comunes de r y s.

b) El valor del parámetro m para que la recta s sea paralela al plano π.

c) La ecuación del plano β que contiene a la recta s y al punto P (1, 2, 4).

----

a)

La expresión de $r\equiv\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 6x - z + 8 = 0 \end{cases}$ por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r\equiv\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 6x - z + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \lambda \Rightarrow y = 5 + 2\lambda,\quad z = 8 + 6\lambda \Rightarrow r\equiv\{x =$$

.

Un punto y un vector director de r son A (0, 5, 8) y $\overrightarrow{v_r} = (1,\ 2,\ 6)$.

Un punto y un vector director de s son B (1, 2, 3) y $\overrightarrow{v_s} = (2,\ -1,\ 1)$.

Los vectores directores de las rectas r y s son linealmente independientes por no ser sus componentes proporcionales, lo cual implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso consideramos el vector $\overrightarrow{w}$ que tiene como origen el punto A de r y como extremo el punto B de s:

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1,\ 2,\ 3) - (0,\ 5,\ 8) = (1,\ -3,\ -5).$$

Según que los vectores $\left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\right\}$ sean coplanarios o no, las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\right\}$ son coplanarios cuando su rango es menor que tres, es decir, cuando el determinante que determinan es cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 5 - 36 + 2 + 6 + 3 + 20 = 0 \Rightarrow Rango\left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\right\} = 2 \Rightarrow$$

$$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cortan.}$$

Un punto genérico de r es de la forma (λ, 5 + 2λ, 8 + 6λ) y un punto de s es de la forma (1 - 2α, 2 + α, 3 – α); el punto común es el que satisface ambas expresiones:

$\begin{cases} \lambda = 1 - 2a \\ 5 + 2\lambda = 2 + a \\ 8 + 6\lambda = 3 - a \end{cases} \Rightarrow 5 + 2(1 - 2a) = 2 + a ;; 5 + 2 -$

$7 - 4a = 2 + a ;; \; 5a = 5 \rightarrow a = 1.$

$\underline{El\ punto\ de\ corte\ es\ Q(-\ 1,\ 3,\ 2)}.$

$b)$

La recta s es paralela al plano π cuando el vector director de la recta s es perpendicular al vector normal del plano π.

Un vector director de s es $\vec{v_s} = (2,\ -1,\ 1)$ y un vector normal a π es $\vec{n} = (2, 0, m)$.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$\vec{v_s} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (2,\ -1,\ 1) \cdot (2,\ 0,\ m) = 4 + m = 0 \Rightarrow m = -\ 4.$

$\underline{La\ recta\ s\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ paralelos\ cuando\ m = -\ 4}.$

$c)$

Un punto de s es B (1, 2, 3).

Los puntos B y P determinan el vector $\vec{BP} = P - B = (0,\ 0,\ 1).$

La ecuación general del plano pedido β es la siguiente:

$\pi\left(P; \vec{v_s}, \vec{BP}\right) \equiv \begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z - 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 ;; \; -(x - 1) - 2(y - 2) = 0 ;$

$-\ x + 1 - 2y + 4 = 0 \Rightarrow \underline{\beta \equiv x + 2y - 5 = 0}.$

****

3º) Se va a construir un depósito de 1500 m^3 de capacidad, con forma de caja abierta por la parte superior. Su base es pues un cuadrado y las paredes laterales son cuatro rectángulos iguales perpendiculares a la base. El precio de cada m^2 de la base es de 15 € y el precio de cada m^2 de la pared lateral es de 5 €. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

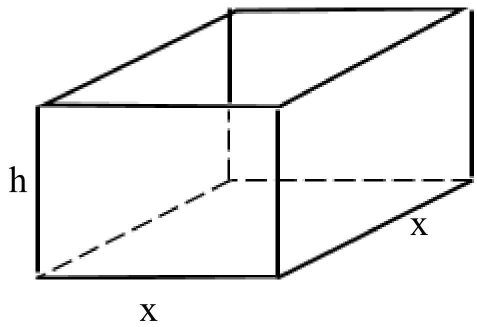
a) El coste total del depósito en función de la longitud x de un lado de la base.

b) Las longitudes del lado de la base y de la altura del depósito para que dicho coste total sea mínimo.

c) El valor del mínimo coste total del depósito.

----

a)



$$V = x^2 \cdot h = 1.500 \Rightarrow h = \frac{1.500}{x^2}.$$

$$Coste = C(x) = 15 \cdot x^2 + 4 \cdot 5 \cdot (x \cdot h) = 15x^2 + 20x \cdot \frac{1.500}{x^2} =$$

$$= 15x^2 + \frac{30.000}{x} = \frac{15x^3 + 30.000}{x} = C(x).$$

b)

Para que el coste sea mínimo es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$C'(x) = \frac{45x^2 \cdot x - (15x^3 + 30.000) \cdot 1}{x^2} = 0 \Rightarrow 45x^3 = 15x^3 + 30.000 \ ;$$

$$30x^3 = 30.000 \ ; \ x^3 = 1.000 = 10^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{1.000} = 10 \ metros.$$

c)

$$Coste\ mínimo = \frac{15 \cdot 1.000 + 30.000}{10} = \frac{15.000 + 30.000}{10} = 1.500 + 3.000 = 4.500.$$

$$\underline{El\ coste\ mínimo\ es\ 4.500\ euros.}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

JUNIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se elegirá solamente UNA de los dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de la opción. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberían estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

1º) Se dan las matrices $A = (1\ -\ 3\ 2\ 2)$ y $B = (1\ 3\ 2\ -\ 2)$. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) La matriz inversa de la matriz A.

b) Las matrices X e Y de orden 2×2 tales que $X \cdot A = B$ y $A \cdot Y = B$.

c) *Justificar razonadamente* que si M es una matriz cuadrada tal que $M^2 = I$, donde I es la matriz identidad del mismo orden que M, entonces se verifica que $M^3 = M^7$.

----

a)

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan:

$$(I) = (1\ 0\ 0\ 1) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 - 2F_1\} \Rightarrow (1\ 0\ -\ 2\ 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_2 \to \tfrac{1}{8}F_2\right\} \Rightarrow \left(1\ 0\ -\ \tfrac{1}{4}\ \tfrac{1}{8}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 + 3F_2\} \Rightarrow \left(\tfrac{1}{4}\ \tfrac{3}{8}\ -\ \tfrac{1}{4}\ \tfrac{1}{8}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{A^{-1} = \left(\tfrac{1}{4}\ \tfrac{3}{8}\ -\ \tfrac{1}{4}\ \tfrac{1}{8}\right)}.$$

b)

$$X \cdot A = B;\ X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1};\ X \cdot I = B \cdot A^{-1} \Rightarrow X = B \cdot A^{-1}.$$

$$X = B \cdot A^{-1} = (1\ 3\ 2\ -\ 2) \cdot \left(\tfrac{1}{4}\ \tfrac{3}{8}\ -\ \tfrac{1}{4}\ \tfrac{1}{8}\right) = \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{4}\ \tfrac{3}{8} + \tfrac{3}{8}\ \tfrac{2}{4} + \tfrac{2}{4}\ \tfrac{6}{8} - \tfrac{2}{8}\right)$$

.

$$\underline{X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}.$$

$A \cdot Y = B;\ \ A \cdot A^{-1} \cdot Y = A^{-1} \cdot B;\ \ I \cdot Y = A^{-1} \cdot B \Rightarrow Y = A^{-1} \cdot B.$

$Y = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{6}{8} & \frac{3}{4} - \frac{6}{8} & -\frac{1}{4} + \frac{2}{8} & -\frac{3}{4}$

.

$$\underline{Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}.$$

$c)$

Una forma de justificación:

$M^3 = M^2 \cdot M = I \cdot M = M$ $\qquad$ $M^7 = \left(M^2\right)^3 \cdot M = I^3 \cdot M = I \cdot M = M \} \Rightarrow \underline{M^3 = M^7}$
, **c.q.j.**

Otra forma:

$M^7 = M^3 \cdot M^3 \cdot M = \left(M \cdot M^2\right)^2 \cdot M = (M \cdot I)^2 \cdot M = M^2 \cdot M = \underline{M^3}$, **c.q.j.**

****

2º) Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) La ecuación del plano π que pasa por el punto $P(2,\ 0,\ 1)$ y es perpendicular a la recta $r\equiv\{x\ +\ 2y\ =\ 0\ z\ =\ 0$.

b) Las coordenadas del punto Q situado en la intersección de la recta r y del plano π.

c) La distancia del punto P a la recta r, y *justificar razonadamente* que la distancia del punto P a un punto cualquiera de la recta r es mayor o igual que $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

----

a)

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r\equiv\{x\ =-\ 2\lambda\ y\ =\ \lambda\quad z\ =\ 0$.

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r}\ =\ (2,\ -\ 1,\ 0)$.

El plano π, por ser perpendicular a r, tiene como vector normal a cualquiera que sea linealmente dependiente del vector director de la recta: $\overrightarrow{n}\ =\ (2,\ -\ 1,\ 0)$.

La expresión general de π es de la forma: $\pi\equiv 2x\ -\ y\ +\ D\ =\ 0$.

Como el plano π contiene al punto $P(2,\ 0,\ 1)$ tiene que satisfacer su ecuación:

$\pi\equiv 2x\ -\ y\ +\ D\ =\ 0\qquad P(2,\ 0,\ 1)\ \}\Rightarrow 2\cdot 2\ -\ 0\ +\ D\ =\ 0;\ \ 4\ +\ D\ =\ 0\Rightarrow D\ =-\ 4$

.

$\underline{\pi\equiv 2x\ -\ y\ -\ 4\ =\ 0}$.

b)

El punto Q situado en la intersección de la recta r y del plano π, tiene por componentes la solución del sistema que forman la recta y el plano:

$\pi\equiv 2x\ -\ y\ -\ 4\ =\ 0\qquad r\equiv\{x\ =-\ 2\lambda\ y\ =\ \lambda\quad z\ =\ 0\quad\}\Rightarrow 2\cdot(-\ 2\lambda)\ -\ \lambda\ -\ 4$

$5\lambda\ +\ 4\ =\ 0\Rightarrow\lambda\ =-\ \frac{4}{5}\ \Rightarrow\ \underline{Q\left(-\ \frac{8}{5},\ \ -\ \frac{4}{5},\ 0\right)}$.

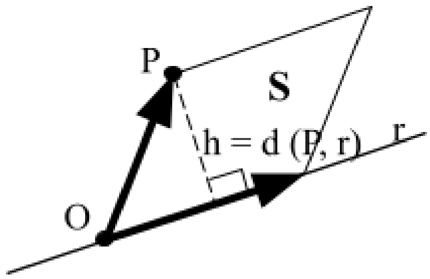
c)

La distancia de un punto a una recta puede determinarse teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que forman dos vectores es el módulo de su producto vectorial y, de forma geométrica, es el producto de la base por la altura.

Un punto y un vector de r son $O(0,\ 0,\ 0)\ y\ \overrightarrow{v}_r = (2,\ -1,\ 0)$.

$\overrightarrow{OP} = [P\ -\ O] = (2,\ 0,\ 1)$.

Para una mejor comprensión del proceso se hace un dibujo de la situación.



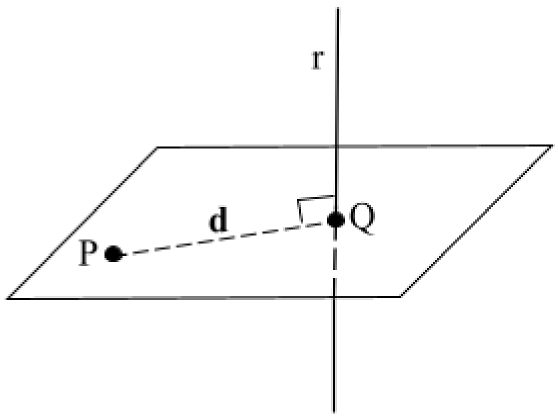
$S\ = \left|\overrightarrow{v}_r \wedge \overrightarrow{OP}\right|\ S\ = \left|\overrightarrow{v}_r\right|\cdot h\ \} \Rightarrow \left|\overrightarrow{v}_r \wedge \overrightarrow{OP}\right| = \left|\overrightarrow{v}_r\right|\cdot h \Rightarrow$

$\Rightarrow h\ =\ d(P, r)\ = \frac{\left|\overrightarrow{v}_r \wedge \overrightarrow{AP}\right|}{\left|\overrightarrow{v}_r\right|}.$

Aplicando la fórmula al punto P y a la recta r:

$$d(P, r) = \frac{\left|\overrightarrow{v}_r \wedge \overrightarrow{OP}\right|}{\left|\overrightarrow{v}_r\right|} = \frac{\|i\ j\ k\ 2\ -1\ 0\ 2\ 0\ 1\ \|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+0^2}} = \frac{|-i+2k-2j|}{\sqrt{4+1+0}} = \frac{|-i-2j+2k|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+2^2}}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+4+4}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \underline{\frac{3\sqrt{5}}{5}\ u\ =\ d(P, r).}$$



La recta r, por ser perpendicular al plano π, es perpendicular a todos los segmentos situados en el plano π, por lo cual, la distancia de P a r es la menor posible; cualquier otro punto de r que no sea Q, está a mayor distancia del punto P, lo cual demuestra lo pedido.

****

3º) Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función real f definido por la expresión $f(x) = (x - 1)(x - 3)$, siendo x un número real.

b) El área del recinto limitado entre las curvas $y = (x - 1)(x - 3)$ e $y =- (x - 1)(x - 3)$.

c) El valor positivo a para el cual el área limitada entre la curva $y = a(x - 1)(x - 3)$, el eje Y y el segmento que une los puntos $O(0, 0)$ y $P(1, 0)$ es 4/3.

----

a)

La expresión de la función en forma polinómica es: $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Una función es creciente o decreciente en un punto cuando su primera derivada es positiva o negativa en ese punto, respectivamente.

$f'(x) = 2x - 4.$ $\qquad f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0;\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2.$

Como quiera que $f(x)$ es una parábola convexa (∪), para $x = 2$ tiene su punto mínimo absoluto y los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Decrecimiento:\ f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 2)}.$$

$$\underline{Crecimiento:\ f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (2, +\infty)}.$$

b)

La parábolas $y = (x - 1)(x - 3)$ e $y =- (x - 1)(x - 3)$ puede expresarse de las formas siguientes: $y = f(x) = x^2 - 4x + 3$ e $y = g(x) =- x^2 + 4x - 3$, respectivamente.

Los puntos de intersección de las parábolas son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$x^2 - 4x + 3 =- x^2 + 4x - 3\ ;\ 2x^2 - 8x + 6 = 0\ ;\ x^2 - 4x + 3 = 0;$$

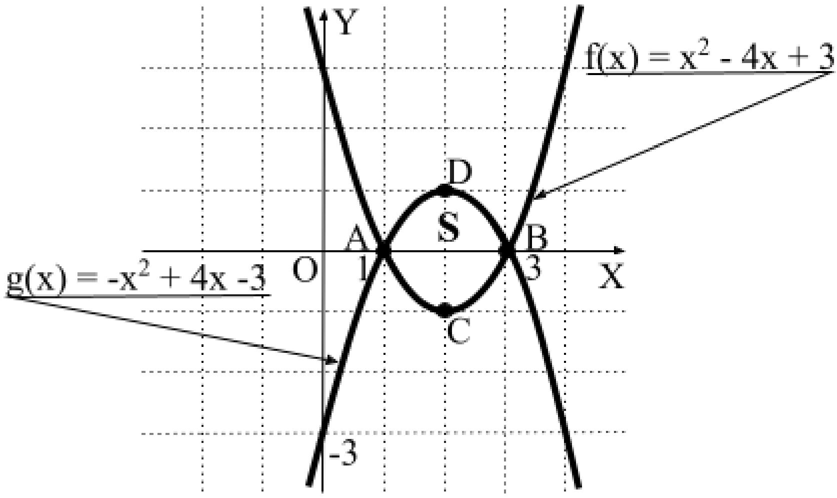
$$x = \frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2} = \frac{4\pm\sqrt{4}}{2} = \frac{4\pm2}{2} = 2\pm1 \Rightarrow \{x_1 = 1 \to \underline{A(1, 0)}\ x_2 = 3 \to \underline{B(3, 0)}\ .$$

El vértice de la parábola convexa (∪) → $f(x) = x^2 - 4x + 3$ es el siguiente:

$f'(x) = 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2 \Rightarrow C(2, -1)$.

El vértice de la parábola cóncava $(\cap) \rightarrow g(x) = -x^2 + 4x - 3$ es el siguiente:

$g'(x) = -2x + 4 = 0 \rightarrow x = 2 \Rightarrow D(2, 1)$.



La representación gráfica de la situación se expresa en la figura adjunta.

Por ser las ordenadas de la parábola $g(x) = -x^2 + 4x - 3$ iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola $f(x) = x^2 - 4x + 3$ en el intervalo del área a calcular y de la observación de la figura se deduce que:

$$S = \int_1^3 \left[\left(-x^2 + 4x - 3\right) - \left(x^2 - 4x + 3\right)\right] dx = \int_1^3 \left(-2x^2 + 8x - 6\right) \cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} - 6x\right]_1^3 = \left[-\frac{2x^3}{3} + 4x^2 - 6x\right]_1^3 =$$

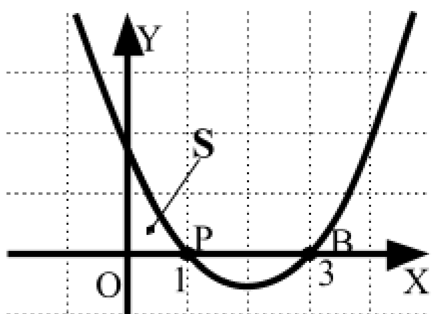
$$= \left(-\frac{54}{3} + 36 - 18\right) - \left(-\frac{2}{3} + 4 - 6\right) = -18 + 18 + \frac{2}{3} + 2 = \underline{\frac{8}{3} u^2 = S}.$$

c)

La curva $y = a(x - 1)(x - 3)$ con $a > 0$ es una parábola convexa $(\cup)$ que corta al eje X en los puntos $A(1, 0)$ y $B(3, 0)$.

La curva se puede expresar de la forma $y = ax^2 - 4ax + 3$.

De la observación de la figura se deduce que:



$$\int_0^1 \left(ax^2 - 4ax + 3\right)\cdot dx = \frac{4}{3};$$

$$\left[\frac{ax^3}{3} - \frac{4ax^2}{2} + 3x\right]_0^1 = \frac{4}{3};\ \left(\frac{a}{3} - 2a + 3\right) - 0 = \frac{4}{3};$$

$$a - 6a + 9 = 4;\ \ 5 = 5a \Rightarrow \underline{a = 1}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Se da el sistema de ecuaciones $\{(1 - a)x + (2a + 1)y + (2a + 2)z = a \quad ax + ay = 2a + 2$
, donde a es un parámetro real. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) Todas las soluciones del sistema cuando $a = 1$.

b) *La justificación razonada* de si el sistema es compatible o incompatible para el valor de $a = 2$.

c) Los valores de a para los que el sistema es compatible determinado.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = (1 - a\ 2a + 1\ 2a + 2\ a\ a\ 0\ 2\ a + 1\ a - 1\ )\ y\ M' = \big(1 - a\ 2a + 1\ 2a + 2\ a\ a\ 0$
.

El rango de M en función del parámetro a es:

$Rang\ M = |1 - a\ 2a + 1\ 2a + 2\ a\ a\ 0\ 2\ a + 1\ a - 1\ | =$

$= - a(a - 1)^2 + 2a(a + 1)^2 - 4a(a + 1) - a(a - 1)(2a + 1) =$

$= - a\left(a^2 - 2a + 1\right) + 2a\left(a^2 + 2a + 1\right) - 4a^2 - 4a - a\left(2a^2 + a - 2a - 1\right) =$

$= - a^3 + 2a^2 - a + 2a^3 + 4a^2 + 2a - 4a^2 - 4a - 2a^3 + a^2 + a =$

$= - a^3 + 3a^2 - 2a = - a\left(a^2 - 3a + 2\right) = 0 \Rightarrow a_1 = 0;\ a^2 - 3a + 2 = 0;$

$a = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow a_2 = 1,\ a_3 = 2.$

$\underline{Para\ \{a \neq 0\ a \neq 1\ a \neq 2\ \} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

$Para\ a = 1\ es\ M' = (0\ 3\ 4\ 1\ 1\ 0\ 2\ 2\ 0 \quad 1\ 4\ 8\ ) \Rightarrow \left\{F_3 = 2F_2\right\} \Rightarrow Rang\ M' = 2$
.

$\underline{Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

El sistema resulta $\{3y + 4z = 1\ x + y = 4 \quad 2x + 2y = 8$, equivalente a $3x + 4z = 1 \quad x + y = 4\}$.

$Haciendo\ y = \lambda \Rightarrow x = 4 - \lambda;\ \ 3\lambda + 4z = 1;\ \ 4z = 1 - 3\lambda \Rightarrow z = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\lambda.$

$\underline{Solución: x = 4 - \lambda,\ y = \lambda,\ z = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\lambda,\ \forall\lambda\in R.}$

$b)$

$Para\ a = 2\ es\ M' = (-\ 1\ 5\ 6\ 2\ 2\ 0\ 2\ 3\ 1 \quad 2\ 6\ 9\ ) \Rightarrow Rang\ M' = 2 \Rightarrow \left\{C_1, C_2,\ C_4\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |-\ 1\ 5\ 2\ 2\ 2\ 6\ 2\ 3\ 9\ | = -\ 18 + 12 + 60 - 8 + 18 - 90 = -\ 26 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3$
.

$\underline{Para\ a = 2 \Rightarrow Rang\ M = 2,\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible}.$

$c)$

Como se ha demostrado en el apartado a):

$\underline{El\ sistema\ es\ compatible\ determinado\ \forall a\in R - \{0,\ 1,\ 2\}}.$

****

2º) Sean las rectas $r \equiv \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 2 = 0 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} 3y + 1 = 0 \\ x - 2z - 3 = 0 \end{cases}$. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) El plano paralelo a la recta s que contiene a la recta r.

b) La recta t que pasa por el punto $O(0,\ 0,\ 0)$, sabiendo que un vector director de t es perpendicular a un vector director de r y también es perpendicular a un vector director de s.

c) *Averiguar razonadamente* si existe o no un plano perpendicular a s que contenga a la recta r.

----

a)

Para determinar un punto y un vector de r la expresamos por unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \lambda,\ y = 3 + \lambda,\ z = 2 + 2\lambda \Rightarrow r \equiv \{x = \lambda$$

.

Un punto y un vector director de r son $P(0,\ 3,\ 2)$ y $\vec{v_r} = (1,\ 1,\ 2)$.

El vector director de una recta determinada por dos planos es linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos.

$$s \equiv \begin{cases} 3y + 1 = 0 \\ x - 2z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{n_1} = (0,\ 3,\ 0),\ \vec{n_2} = (1,\ 0,\ -2)$$

.

$$\vec{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -6i - 3k \Rightarrow \vec{v_s} = (2,\ 0,\ 1).$$

La ecuación general del plano π pedido es la siguiente:

$$\pi\left(P;\ \vec{v_r},\ \vec{v_s}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y - 3 & z - 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$x + 4(y - 3) - 2(z - 2) - (y - 3) = 0;\ \ x + 3(y - 3) - 2(z - 2) = 0;$$

$$x + 3y - 9 - 2z + 4 = 0 \Rightarrow \underline{\pi \equiv x + 3y - 2z - 5 = 0}.$$

b)

El vector director de la recta t, por ser perpendicular a un vector director de r y también es perpendicular a un vector director de s, es linealmente dependiente del producto vectorial de estos dos vectores:

$\vec{v}_t = |i\ j\ k\ 1\ 1\ 2\ 2\ 0\ 1\ | = i + 4j - 2k - j = i + 3j - 2k \Rightarrow \vec{v}_t = (1,\ 3,\ -2).$

La expresión de t dada por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$\underline{t \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-2}}.$$

$c)$

El haz planos perpendiculares a s tienen como vector normal al vector director de la recta; su expresión general es de la forma $\beta \equiv 2x + z + D = 0$.

Si contiene a la recta r debe contener a todos sus puntos, para lo cual, basta que contenga a dos de ellos. Dos puntos de r son $P(0,\ 3,\ 2)$ y $Q(1,\ 4,\ 4)$.

El plano $\alpha \in \beta$ que contiene a P es:

$\beta \equiv 2x + z + D = 0$ $\quad P(0,\ 3,\ 2)\ \} \Rightarrow 0 + 2 + D = 0 \rightarrow D = -2 \Rightarrow \alpha \equiv 2x + z -$
.

El plano α contiene a la recta r si contiene al punto Q:

$\alpha \equiv 2x + z - 2 = 0$ $\quad Q(1,\ 4,\ 4)\ \} \Rightarrow 2 \cdot 1 + 4 - 2 \neq 0 \Rightarrow Q \notin \alpha$.

$\underline{No\ existe\ ningún\ plano\ perpendicular\ a\ s\ que\ contenga\ a\ r}$.

****

3º) Un pueblo está situado en el punto $A(0,\ 4)$ de un sistema de referencia cartesiano. El tramo de un río situado en el término municipal del pueblo describe la curva $y = \frac{x^2}{4}$, siendo $-6 \leq x \leq 6$. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

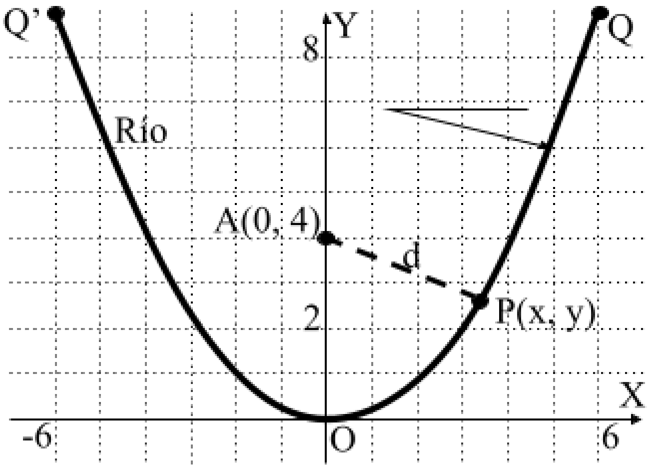
$a)$ La distancia entre el punto $P(x,\ y)$ del río y el pueblo en función de la abscisa x del punto P.

$b)$ El punto o puntos del tramo del río situados a distancia mínima del pueblo.

$c)$ El punto o puntos del tramo del río situados a distancia máxima del pueblo.

$a)$

La distancia pedida es $d = \overline{AP}$.



$$d = \sqrt{(x-0)^2 + \left(\frac{x^2}{4} - 4\right)^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 + \frac{x^4}{16} - 2x^2 + 16} =$$

$$= \sqrt{\frac{x^4 - 16x^2 + 256}{16}} = \frac{\sqrt{x^4 - 16x^2 + 256}}{4}.$$

$$\underline{d(x) = \frac{1}{4}\sqrt{x^4 - 16x^2 + 256}.}$$

$b), c)$

Para que la distancia sea mínima es necesario que se anule su primera derivada y que sea positiva la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$d'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4x^3 - 32x}{2 \cdot \sqrt{x^4 - 16x^2 + 256}} = \frac{x^3 - 8x}{2 \cdot \sqrt{x^4 - 16x^2 + 256}}.$$

$$d'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^3 - 8x}{2 \cdot \sqrt{x^4 - 16x^2 + 256}} = 0;\ x^3 - 8x = 0;\ x\left(x^2 - 8\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0.$$

$$x^2 - 8 = 0;\ x = \pm\sqrt{8} \Rightarrow x_2 = +2\sqrt{2},\ x_3 = -2\sqrt{2}.$$

$$d''(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(3x^2 - 8\right) \cdot \sqrt{x^4 - 16x^2 + 256} - \left(x^3 - 8x\right) \cdot \frac{4x^3 - 32x}{2 \cdot \sqrt{x^4 - 16x^2 + 256}}}{x^4 - 16x^2 + 256} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(3x^2-8\right)\cdot\sqrt{x^4-16x^2+256}-\frac{2x\left(x^2-8\right)\left(x^3-8x\right)}{\sqrt{x^4-16x^2+256}}}{x^4-16x^2+256} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(3x^2-8\right)\cdot\left(x^4-16x^2+256\right)-2x\left(x^2-8\right)\left(x^3-8x\right)}{\left(x^4-16x^2+256\right)\cdot\sqrt{x^4-16x^2+256}}.$$

$$d''(0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(-8)\cdot 256-0}{256\cdot\sqrt{256}} < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$d''\left(\sqrt{8}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{16\cdot 192-0}{192\cdot\sqrt{192}} > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 2\sqrt{2}.$$

Por ser la curva par, simétrica con respecto al eje de ordenadas, también tiene un mínimo relativo para $x =- 2\sqrt{2}$.

Observaciones:

1ª.- Debe observarse que el máximo relativo no es la máxima distancia del río al pueblo en el tramo urbano; la máxima distancia del río al pueblo se produce en los puntos Q y Q'.

2ª.- Los mínimos relativos si son mínimos absolutos teniendo en cuenta la índole de la curva, que es una parábola y la máxima distancia sería infinito de no estar acotada a valores de $x \leq 6$.

$P(x,\ y) \Rightarrow \left\{ x = 2\sqrt{2}\ y = 2 \right\} \Rightarrow P\left(2\sqrt{2},\ 2\right)$.
$Q(x,\ y) \Rightarrow \{ x = 6\ y = 9 \} \Rightarrow Q(6,\ 9)$.

Por simetría: $P'\left(-\ 2\sqrt{2},\ 2\right)$ y $Q'(-\ 6,\ 9)$.

La distancia máxima relativa es $d(0) = \frac{1}{4}\sqrt{256} = 4\ unidades$.

La distancia máxima absoluta es:

$$d = \overline{AQ} = \sqrt{(6 - 0)^2 + (9 - 4)^2} = \sqrt{36 + 25} = \sqrt{61} \cong 7,81\ unidades.$$

La distancia mínima es:

$$d\left(2\sqrt{2}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{64 - 128 + 256} = \frac{\sqrt{192}}{4} \cong 3,46\ unidades.$$

$\underline{Los\ puntos\ de\ mínima\ distancia\ son\ P\left(2\sqrt{2},\ 2\right)\ y\ P'\left(-\ 2\sqrt{2},\ 2\right)}$.

$\underline{Los\ puntos\ de\ máxima\ distancia\ son\ Q(6,\ 9)\ y\ Q'(-\ 6,\ 9)}$.

****