MATEMÁTICAS aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2015

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS DE TODAS LAS COMUNIDADES AUTÓNOMAS

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

Textos Marea Verde

Antes Selectividad, ahora tiene distintos nombres:

ABAU (Galicia),

EAU (País Vasco),

EBAU (Asturias, Cantabria, Castilla y León, Extremadura, Islas Canarias, La Rioja y Murcia),

EvAU (Aragón, Castilla-La Mancha y Navarra),

EVAU (Madrid),

PAU (Cataluña y Valencia) ,

PBAU (Islas Baleares) o

PevAU (Andalucía): Prueba de acceso y admisión a la Universidad

TEXTOS MAREA VERDE

I.S.B.N. - 13: 978-84-608-8980-9

I.S.B.N. - 10: 84-608-8980-9

Textos Marea Verde

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA

JUNIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones propuestas y conteste los ejercicios de la opción elegida. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin su ayuda. Justifique las respuestas.

OPCIÓN A

1º) Con motivo de su inauguración, una heladería quiere repartir dos tipos de tarrinas de helados. El primer tipo de tarrina está compuesto por 100 g de helado de chocolate, 200 g de helado de straciatella y un barquillo. El segundo tipo llevará 150 g de helado de chocolate, 150 g de helado de straciatella y 2 barquillos. Solo se dispone de 8 kg de helado de chocolate, 10 kg de helado de straciatella y 100 barquillos. ¿Cuántas tarrinas de cada tipo se deben preparar para repartir el máximo número posible de tarrinas?

Sean x e y el número tarrinas de los tipos 1º y 2º repartidos, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes:
$100x + 150y \le 8.000$ $200x + 150y \le 10.000$ $x + 2y \le 100$ $x \ge 0; y$
, que puede expresar simplificada de la forma:
$2x + 3y \le 160$ $4x + 3y \le 200$ $x + 2y \le 100$ $x \ge 0; y \ge 0$ },

La función de objetivos (nº tarrinas) es la siguiente: $f(x, y) = x + y$.

La región factible se indica en la figura:

x	20	80
y	40	0

①$\Rightarrow 2x + 3y \le 160 \Rightarrow y \le \frac{160-2x}{3} \Rightarrow O(0, 0) \to Si$.

x	50	20
y	0	40

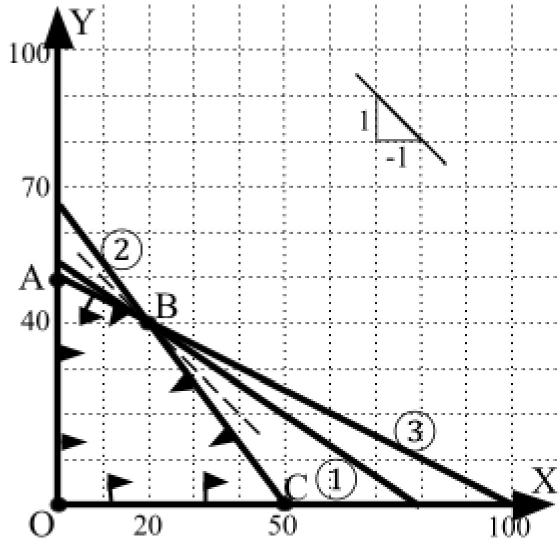
②$\Rightarrow 4x + 3y \le 200 \Rightarrow y \le \frac{200-4x}{3} \Rightarrow O(0, 0) \to Si$.

x	100	0
y	0	50

③$\Rightarrow x + 2y \le 100 \Rightarrow y \le \frac{100-x}{2} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ x + 2y = 100 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{A(0,\ 50)}.$



$B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 160 \\ x + 2y = 100 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{B(20,\ 40)}.$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x + 3y = 200 \\ x = 50 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{C(50,\ 0)}.$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 50) = 0 \cdot 1 + 50 \cdot 1 = 0 + 50 = \underline{50}.$

$B \Rightarrow f(20,\ 40) = 20 \cdot 1 + 40 \cdot 1 = 20 + 40 = \underline{60}.$

$C \Rightarrow f(50,\ 0) = 50 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 50 + 0 = \underline{50}.$

El máximo se produce en el punto B.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = x + y = 0 \Rightarrow y = -x \Rightarrow m = -\frac{1}{1}.$

$\underline{El\ máximo\ número\ de\ tarrinas\ repartidas\ es\ de\ 20\ del\ tipo\ 1^{\underline{o}}\ y\ 40\ del\ 2^{\underline{o}}}.$

****

2º) a) Calcule la derivada de cada una de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{3Lx}{x^3}. \qquad g(x) = \left(1 - x^2\right)\cdot\left(x^3 - 1\right)^2.$$

$$h(x) = 3x^2 - 7x + \frac{1}{e^{2x}}.$$

b) Halle las asíntotas de la función $p(x) = \frac{7x}{3x-12}$.

----

a)

$$f(x) = \frac{3Lx}{x^3}.$$

$$f'(x) = \frac{3\cdot\frac{1}{x}\cdot x^3 - 3Lx\cdot 3x^2}{x^6} = \frac{3-9Lx}{x^4} \Rightarrow \underline{f'(x) = \frac{3(1-3Lx)}{x^4}}.$$

$$g(x) = \left(1 - x^2\right)\cdot\left(x^3 - 1\right)^2.$$

$$g'(x) = -2x\cdot\left(x^3 - 1\right)^2 + \left(1 - x^2\right)\cdot\left[2\cdot\left(x^3 - 1\right)\cdot 3x^2\right] =$$

$$= 2x\left(x^3 - 1\right)\left[-\left(x^3 - 1\right) + 3x\left(1 - x^2\right)\right] = 2x\left(x^3 - 1\right)\left(-x^3 + 1 + 3x - 3x^3\right).$$

$$\underline{g'(x) = 2x\left(x^3 - 1\right)\left(-4x^3 + 3x + 1\right)}.$$

$$h(x) = 3x^2 - 7x + \frac{1}{e^{2x}}.$$

$$h'(x) = 6x - 7 + \frac{-2\cdot e^{2x}}{e^{4x}} \Rightarrow \underline{h'(x) = 6x - 7 - \frac{2}{e^{2x}}}.$$

b)

$$p(x) = \frac{7x}{3x-12}.$$

$$Horizontales: \quad y = f(x) = \frac{7x}{3x-12} \Rightarrow \underline{y = \frac{7}{3}}.$$

$$Verticales: \quad 3x - 12 = 0; \ x - 4 = 0 \Rightarrow \underline{x = 4}.$$

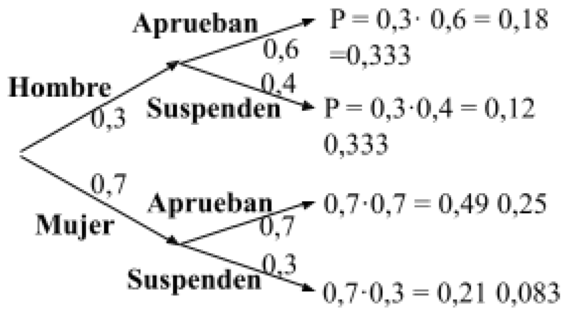
****

3º) De los 700 alumnos matriculados en una asignatura, 210 son hombres y 490 mujeres. Se sabe que el 60 % de los hombres y el 70 % de las mujeres aprueban dicha asignatura. Se elige una persona al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe la asignatura?

b) Sabiendo que ha aprobado la asignatura, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

$P(H) = \frac{210}{700} = \frac{3}{10} = 0,3.$ $\qquad$ $P(M) = \frac{490}{700} = \frac{7}{10} = 0,7.$



a)

$P(A) = 0,18 + 0,49 = \underline{0,67}.$

Nótese que se ha aplicado el teorema de la probabilidad total:

$P(A) = P(H) \cdot P(A/H) + P(M) \cdot P(A/M) = 0,3 \cdot 0,6 + 0,7 \cdot 0,7 =$

$= 0,18 + 0,49 = \underline{0,67}.$

b)

$P(M/A) = \frac{0,49}{0,18+0,49} = \frac{0,49}{0,67} = \underline{0,73}.$

En la resolución de este apartado se ha empleado el teorema de Bayes:

$P(M/A) = \frac{P(M) \cdot P(A/M)}{P(H) \cdot P(A/H) + P(M) \cdot P(A/M)} = \frac{0,7 \cdot 0,7}{0,3 \cdot 0,6 + 0,7 \cdot 0,7} = \frac{0,49}{0,18+0,49} = \underline{\frac{49}{67} = 0,73}$

.

****

4º) La calificación en Matemáticas de los alumnos de un centro docente es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal de desviación típica 1,2. Una muestra de 10 alumnos ha dado las siguientes calificaciones:

3 8 6 3 9 1 7 7 5 6.

$a)$ Se tiene la creencia de que la calificación media de los alumnos del centro en Matemáticas es a lo sumo 5 puntos. Con un nivel de significación del 5 %, plantee el contraste unilateral correspondiente $\left(H_0: \mu \leq 5\right)$, determine la región crítica y razone si la creencia es fundada o no.

$b)$ ¿Obtendría la misma respuesta si el nivel de significación fuese del 15 %?

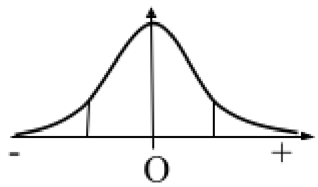
$$\overline{x} = \frac{1+3\cdot2+5+6\cdot2+7\cdot2+8+9}{10} = \frac{1+6+5+12+14+8+9}{10} = \frac{55}{10} = 5,5.$$

$a)$

$Hipótesis\ nula \rightarrow H_0: \mu \leq 5$ $\quad$ $Hipótesis\ alternativa \rightarrow H_1: \mu > 5\}$.

Zona de contraste *unilateral;* en este caso es $\left(-\infty,\ \mu_0 + z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Conocemos $\overline{x} = 5'5,\ n = 10\ y\ \sigma = 1,2$ y nos piden el intervalo de confianza del 95 %.



α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	∞	2,576	2,326	2,170	2,054	**1,960**	1,881	1,812	1,761	1,695
0,1	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405	1,372	1,341	1,311
0,2	1,202	1,254	1,227	1,200	1,175	1,150	1,126	1,103	1,080	1,098
0,3	1,036	1,015	0,994	0,924	0,954	0,935	0,915	0,896	0,878	0,860
0,4	0,842	0,824	0,806	0,780	0,772	0,755	0,739	0,722	0,706	0,690

Mirando en la tabla dada:

$1 - \alpha = 1 - 0,5 = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_\alpha = 1,96.$

Mirando en la tabla N(0, 1):

$1 - \alpha = 1 - 0,5 = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96$

.

$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$

$$I.C._{95\%} = \left(-\infty,\ 5 + 1,960 \cdot \frac{1,2}{\sqrt{10}}\right) = (-\infty,\ 5 + 0,744).$$

$$\underline{I.\ C.\ del\ 95\ \% = (-\infty,\ 5'744)}.$$

El valor indicado de la media ($\overline{x} = 5,5$) está dentro del intervalo de confianza:

$$\underline{Se\ admite\ la\ hipótesis\ de\ que\ la\ media\ es\ a\ lo\ sumo\ de\ 5\ puntos}.$$

$b)$

Para un nivel de confianza del 85 % es:

Mirando en la tabla N(0, 1):

$1 - \alpha = 0,85 \rightarrow \alpha = 1 - 0,85 = 0,15 \rightarrow z_{\alpha} = 1,04.$

$(1 - 0,15 = 0,8500 \rightarrow z = 1,04).$

$$I.C._{85\%} = \left(-\infty,\ 5 + 1,04 \cdot \frac{1,2}{\sqrt{10}}\right) = (-\infty,\ 5 + 1,04 \cdot 0'3795) =$$

$= (-\infty,\ 5 + 0,3947).$

$$\underline{I.\ C.\ del\ 85\ \% = (-\infty,\ 5'3947)}.$$

El valor indicado de la media ($\overline{x} = 5,5$) no está en el intervalo de confianza:

$$\underline{No\ se\ admite\ la\ hipótesis\ de\ que\ la\ media\ es\ a\ lo\ sumo\ de\ 5\ puntos}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Sean las matrices $A = (2\ 3\ \ -\ 1\ 1\ )$, $B = (2\ \ -\ 3\ 5\ 1\ )$ y $C = (2\ 0\ 0\ 2\ 3\ 0\ )$.

a) Calcule las matrices X e Y si $X + Y = 2A$ y $X + B = 2Y$.

b) Analice cuáles de las siguientes operaciones con matrices se pueden realizar, indicando en los casos afirmativos las dimensiones de la matriz D:

$$A + D = C \qquad A \cdot D = C^t \qquad D \cdot A = C \qquad D \cdot A = C^t$$

----

a)

$$X + Y = 2A\, X + B = 2Y \} \quad X + Y = 2A\, X - 2Y =- B \} \quad X + Y = 2A\ - X$$

$\Rightarrow Y = \frac{1}{3} \cdot (2A + B)$. (*)

$2A + B = 2 \cdot (2\ 3\ \ -\ 1\ 1\ ) + (2\ \ -\ 3\ 5\ 1\ ) = (4\ 6\ \ -\ 2\ 2\ ) + (2\ \ -\ 3\ 5\ 1\ ) = (6\ 3\ 3\ 3\ )$
.

Sustituyendo el valor de $2A + B$ en (*): $\underline{Y = (2\ 1\ 1\ 1\ )}$.

$X + B = 2Y;\ \ X = 2Y - B = (4\ 2\ 2\ 2\ ) - (2\ \ -\ 3\ 5\ 1\ ) \Rightarrow \underline{X = (2\ 5\ \ -\ 3\ 1\ )}$.

b)

$A + D = C$.

$A + D = C \Rightarrow D = C - A \Rightarrow \underline{No\ es\ realizable}$.

$\underline{Las\ matrices\ A\ y\ C\ no\ tienen\ la\ misma\ dimensión}$.

$A \cdot D = C^t$.

$A^{-1} \cdot A \cdot D = A^{-1} \cdot C^t;\ \ I \cdot D = A^{-1} \cdot C^t \Rightarrow \underline{D = A^{-1} \cdot C^t}$.

El producto de dos matrices es realizable cuando el número de columnas de la primera es igual al número de filas de la segunda.

La matriz A^{-1} tiene la misma dimensión que A, por lo cual existe la matriz D por ser posible el producto $A^{-1}\cdot C^{t}$.

Por ser la matriz $C_{(3,\,2)}$, la dimensión de su traspuesta es $C^{t}_{(2,\,3)}$, por lo que el número de columnas de A^{-1} es igual que el número de filas de C^{t} y, en consecuencia:

$$\underline{A\cdot D\;=\;C^{t}\;es\;realizable}.$$

Teniendo en cuanta que el producto de matrices $M_{(a,\,b)}\cdot N_{(b,\,m)}\;=\;P_{(a,\,m)}$; la matriz producto tiene el número de filas de la primera matriz y el número de columnas de la segunda. En este caso: $D\;=\;A^{-1}\cdot C^{t}\Rightarrow\;A^{-1}_{(2,\,2)}\cdot C^{t}_{(2,\,3)}\;=\;D_{(2,\,3)}$

$$\underline{La\;matriz\;D\;tiene\;por\;dimensión\;2\times 3}.$$

$D\cdot A\;=\;C.$

$$D\cdot A\;=\;C\Rightarrow D\cdot A\cdot A^{-1}\;=\;C\cdot A^{-1};\;\;D\cdot I\;=\;C\cdot A^{-1}\;\Rightarrow\underline{D\;=\;C\cdot A^{-1}}.$$

$$D\;=\;C\cdot A^{-1}\;\Rightarrow\;C_{(3,\,2)}\cdot A^{-1}_{(2,\,2)}\;=\;D_{(3,\,2)}.$$

$$\underline{D\cdot A\;=\;C\;es\;realizable}.$$

$$\underline{La\;matriz\;D\;tiene\;por\;dimensión\;3\times 2}.$$

$D\cdot A\;=\;C^{t}.$

$$D\cdot A\;=\;C^{t}\Rightarrow D\cdot A\cdot A^{-1}\;=\;C^{t}\cdot A^{-1};\;\;D\cdot I\;=\;C^{t}\cdot A^{-1}\;\Rightarrow\underline{D\;=\;C^{t}\cdot A^{-1}}.$$

Teniendo en cuanta que el producto de matrices $M_{(a,\,b)}\cdot N_{(b,\,m)}\;=\;P_{(a,\,m)}$; la matriz producto tiene el número de filas de la primera matriz y el número de columnas de la segunda.

$$D\;=\;C^{t}\cdot A^{-1}\Rightarrow\;C^{t}_{(2,\,3)}\cdot A^{-1}_{(2,\,2)}\;=\;D_{(2,\,2)}.$$

El número de columnas de C^{t} no el igual que el número de filas de A^{-1}.

$\underline{D \cdot A = C^t \text{ no es realizable}}.$

****

2º) Se considera la función $f(x) = \{x^2 + 2 \ si \ 0 \leq x \leq 2 \ \frac{8x+a}{x-1} \ si \ x > 2$.

a) Determine el valor de ɑ para que la función sea continua.

b) ¿Para ɑ = -10, es creciente la función en x = 3?

c) Halle sus asíntotas para ɑ = -10.

----

a)

La función $f(x)$ es continua en su dominio, excepto para x = 2, cuya continuidad se va a forzar calculando el valor adecuado de la constante ɑ.

Una función es continua en un punto cuando sus límites laterales en ese punto existen, son iguales e igual al valor de la función en ese punto:

$f(x) = (x^2 + 2) = 4 + 2 = 6 = f(2) \ f(x) = \frac{8x+a}{x-1} = \frac{8 \cdot 2+a}{2-1} = 16 + a \quad \} \Rightarrow 6$

.

b)

La función resulta $f(x) = \{x^2 + 2 \ si \ 0 \leq x \leq 2 \ \frac{8x-10}{x-1} \ si \ x > 2$.

Una función es creciente en un punto cuando su primera derivada es positiva en ese punto:

$f'(x) = \{2x \ si \ 0 \leq x \leq 2 \ \frac{2}{(x-1)^2} \ si \ x > 2 \ (*)$.

(*) $g(x) = \frac{8x-10}{x-1} \Rightarrow g'(x) = \frac{8(x-1)-(8x-10) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{8x-8-8x+10}{(x-1)^2} = \frac{2}{(x-1)^2}$.

Para x = 3 es $f'(x) = \frac{2}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(3) = \frac{2}{(3-1)^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} > 0.$

$\underline{La \ función \ f(x) \ es \ creciente \ para \ x = 3}.$

c)

Asíntotas horizontales:

Son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a infinito:

$y = k = f(x) = \frac{8x-10}{x-1} = 8$.

$\underline{Asíntota \ horizontal: y = 8}.$

Asíntotas verticales:

Son los valores finitos de x pertenecientes al dominio de la función que hacen que la función valga infinito; de otra manera: son los valores que anulan el denominador. La función únicamente puede tener asíntotas verticales en el intervalo $(2,\ +\infty)$.

$$\frac{8x-10}{x-1} \to \infty \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \notin (2,\ +\infty).$$

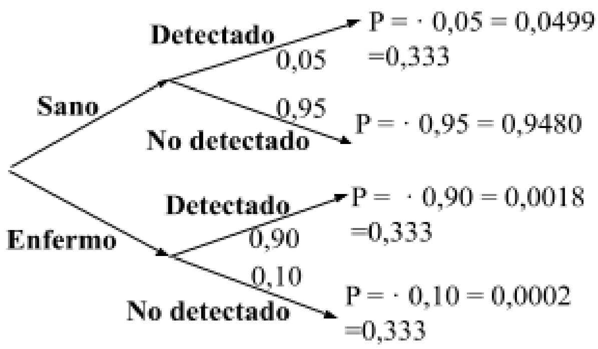
$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ verticales}.$

****

3º) La proporción de personas de una población que tiene una determinada enfermedad es de 1 por cada 500 personas. Se dispone de una prueba para detectar dicha enfermedad. La prueba detecta la enfermedad en el 90 % de los casos en que la persona está enferma, pero también da como enfermas al 5 % de personas sanas.

a) Se elige al azar una persona y se le hace la prueba. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido diagnosticada correctamente?

b) Si la prueba ha diagnosticado que la persona está enferma, ¿cuál es la probabilidad de que realmente lo esté? ¿Y de que esté sana?



a)

La probabilidad pedida es la suma de la probabilidad de que esté sano y no sea detectado más la probabilidad de que esté enfermo y sea detectado:

$$P(Correcto) = 0,9480 + 0,0018 = \underline{0,9498}.$$

Nótese que se ha aplicado el teorema de la probabilidad total:

$$P(C) = P(S) \cdot P(NoD/S) + P(E) \cdot P(D/E) = \frac{499}{500} \cdot 0,95 + \frac{1}{500} \cdot 0,90 =$$

$$= 0,9480 + 0,0018 = \underline{0,9498}.$$

b)

Diagnostico de enfermo:

Probabilidad de que esté enferma: $P(E) = \frac{P(E) \cdot P(D/E)}{P(S) \cdot P(D/S) + P(E) \cdot P(D/E)} =$

$$= \frac{\frac{1}{500} \cdot 0,90}{\frac{499}{500} \cdot 0,05 + \frac{1}{500} \cdot 0,90} = \frac{0,0018}{0,0499 + 0,0018} = \frac{0,0018}{0,0517} = \underline{0,0348}.$$

Diagnostico de no enfermo:

$$P(S) = \frac{P(S) \cdot P(NoD/S)}{P(S) \cdot P(NoD/S) + P(E) \cdot P(/E)} = \frac{0,7 \cdot 0,7}{0,3 \cdot 0,6 + 0,7 \cdot 0,7} = \frac{0,0499}{0,0499 + 0,0018} = \underline{\frac{499}{517} = 0,965}.$$

****

4º) Un fabricante de tuberías de PVC sabe que la distribución de los diámetros interiores de los tubos de conducción de agua que produce sigue una ley Normal con varianza $\sigma^2 = 0,25\ mm^2$. Para estimar el diámetro medio de esas tuberías, toma una muestra aleatoria de 64 tubos y comprueba que el diámetro medio de esa muestra es de 20 mm.

a) Calcule un intervalo de confianza, con un nivel del 98 %, para la media de los diámetros de los tubos que fabrica.

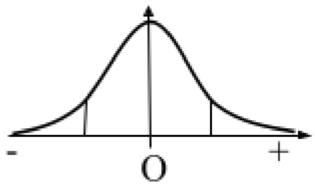
b) Halle el tamaño mínimo que debe tener una muestra de esa distribución para que la amplitud de un intervalo de confianza, con ese mismo nivel de confianza, sea inferior a 2 mm.

----

a)

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0,25} = 0,5. \qquad N = 64. \qquad \overline{x} = 20$$

Conocemos $\overline{x} = 20,\ n = 64\ y\ \sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$ y nos piden el intervalo de confianza del 98 %, que se obtiene de la fórmula $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.



α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	∞	2,576	2,326	2,170	2,054	1,960	1,881	1,812	1,761	1,695
0,1	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405	1,372	1,341	1,311
0,2	1,202	1,254	1,227	1,200	1,175	1,150	1,126	1,103	1,080	1,098
0,3	1,036	1,015	0,994	0,924	0,954	0,935	0,915	0,896	0,878	0,860
0,4	0,842	0,824	0,806	0,780	0,772	0,755	0,739	0,722	0,706	0,690

$98\ \% = 0,98 \Rightarrow \alpha = 0,02 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,326.$

$$I.C._{\ 98\%} = \left(20 - 2,326 \cdot \frac{0,5}{\sqrt{64}},\ 20 - 2,326 \cdot \frac{0,5}{\sqrt{64}}\right) = (20 - 0,145,\ 20 + 0,145)$$

.

$$\underline{I.\ C.\ del\ 98\ \% = (19'855,\ 20,145)}.$$

b)

Por ser 2 mm el valor del intervalo de confianza, el error máximo es de 1 mm.

Conocemos $\sigma = 0,05,\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,326\ y\ E = 1$ y nos piden el tamaño de la muestra, que puede obtenerse $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$:

$$\sqrt{n} = \frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{E} \Rightarrow n = \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{E} \right)^2 = \left(\frac{2{,}326 \cdot 0.5}{1} \right)^2 = 1,163^2 \cong 1,353 \Rightarrow \underline{n = 2}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA

SEPTIEMBRE – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones propuestas y conteste los ejercicios de la opción elegida. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin su ayuda. Justifique las respuestas.

OPCIÓN A

1º) Sean las matrices $A = (1\ 2\ \ -\ 1\ 2\,)$, $B = (1\ 2\ 2\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ 2\,)$, $C = (8\ \ -\ 4\ 12\ 8\ \ -\ 8\ 4\,)$.

$a)$ Calcule A^2.

$b)$ Resuelva la ecuación matricial: $A \cdot X + 4B = C^t$.

$a)$

$$A^2 = A \cdot A = (1\ 2\ \ -\ 1\ 2\,) \cdot (1\ 2\ \ -\ 1\ 2\,) = \underline{(-\ 1\ 6\ \ -\ 3\ 2\,)}.$$

$b)$

$$A \cdot X + 4B = C^t;\ \ A \cdot X = C^t - 4B = M.$$

Multiplicando los dos términos, por la izquierda, por A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot M;\ \ I \cdot X = A^{-1} \cdot M \Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot M}.\ (*)$$

$$M = C^t - 4B = (8\ 12\ \ -\ 8\ \ -\ 4\ 8\ 4\,) - (4\ 8\ 8\ \ -\ 4\ \ -\ 4\ 8\,) = (4\ 4\ \ -\ 16\ 0\ 12\ \ -\ 4\,)$$
.

La inversa de la matriz $A = (1\ 2\ \ -\ 1\ 2\,)$ es la siguiente:

$$(I) = (1\ 0\ 0\ 1\,) \Rightarrow \left\{F_2 \to F_2 + F_1\right\} \Rightarrow (1\ 0\ 1\ 1\,) \Rightarrow \left\{F_1 \to \frac{1}{4}F_2\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1\ 0\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\right) \Rightarrow \left\{F_1 \to F_1 - 2F_2\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\right) \Rightarrow A^{-1} = \left(\frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\right)$$

.

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de $M\ y\ A^{-1}$:

$$X = A^{-1} \cdot M = \left(\frac{1}{2} \quad - \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4} \right) \cdot (4\ 4 \ - \ 16\ 0\ 12 \ - \ 4\,) = (2 \ - \ 4 \ - \ 6\ 1\ 4 \ - \ 5\,)$$

.

$$\underline{X = (2 \ - \ 4 \ - \ 6\ 1\ 4 \ - \ 5\,)}.$$

****

2º) a) Determine el valor de a para que sea continua en $x =- 1$ la siguiente función:
$f(x) = \{\frac{ax}{x-1} \quad si \ x \leq - 1 \ x^3 - 3x^2 + 6x - 2 \ si \ x >- 1$

b) Calcule los coeficientes b y c de la función $g(x) = x^3 + bx^2 + cx - 2$ para que $P(1,\ 2)$ sea un punto de inflexión de g.

----

a)

Para que la función $f(x)$ sea continua en $x =- 1$ es necesario que sus límites laterales sean iguales e igual al valor de la función en ese punto.

$f(x) \ = \frac{ax}{x-1} \ = \frac{-a}{-1-1} = \frac{a}{2} = f(- 1)$ $\qquad f(x) \ = \left(x^3 - 3x^2 + 6x -\right.$

.

$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ x\ =-\ 1\ para\ a\ =-\ 24}.$

b)

Por contener $g(x)$ al punto $P(1,\ 2)$ es $g(1) = 2$:

$g(1) = 1^3 + b\cdot 1^2 + c\cdot 1 - 2 = 1;\ \ 1 + b + c - 2 = 2;\ \ b + c = 3.$

(1)

Una función polinómica tiene un punto de inflexión para los valores de x que anulan su segunda derivada.

$g'(x) = 3x^2 + 2bx + c.$ $\qquad g''(x) = 6x + 2b.$

$g''(1) = 0 \Rightarrow 6\cdot 1 + 2b = 0;\ \ 3 + b = 0 \Rightarrow \underline{b =- 3}.$

Sustituyendo en (1) el valor obtenido de b: $- 3 + c = 3 \Rightarrow \underline{c = 6}.$

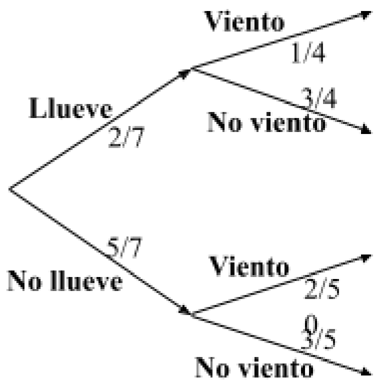
****

3º) Lucía quiere ir de vacaciones a la costa. En su guía de viajes lee que en esa época del año llueve dos días a la semana y que hace viento el 25 % de los días que llueve y el 40 % de los días que no llueve. Elegido un día de esa época:

$a)$ ¿Cuál es la probabilidad de que haga viento?

$b)$ Si hace viento, ¿cuál es la probabilidad de que esté lloviendo?

$c)$ ¿Cuál es la probabilidad de que no llueva y no haga viento?



$a)$

$$P = \frac{1}{14} + \frac{2}{7} = \frac{1+4}{14} = \underline{\frac{5}{14}}.$$

$b)$

$$P = \frac{\frac{1}{14}}{\frac{1}{14}+\frac{2}{7}} = \frac{\frac{1}{14}}{\frac{1+4}{14}} = \underline{\frac{1}{5}}.$$

$c)$

$$P = \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{5} = \underline{\frac{3}{7}}.$$

****

4º) a) En una muestra aleatoria de 100 botellas de agua mineral se encontró un contenido medio de 48 cl. Sabiendo que la variable "contenido de agua en una botella" sigue una ley Normal con desviación típica 5 cl, determine un intervalo de confianza para la media poblacional, con un nivel de confianza del 95 %.

b) ¿Qué tamaño muestral mínimo debería considerarse para estimar esta media con el mismo nivel de confianza y un error inferior a 0,5 cl?

----

a)

$$1 - \alpha = 1 - 0,5 = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96$$

.

$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96)$.

Datos: $\overline{x} = 48;\ n = 100;\ \sigma = 4;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(48 - 1'96 \cdot \frac{5}{\sqrt{100}},\ 48 + 1'96 \cdot \frac{5}{\sqrt{100}}\right);\ \left(48 - 1'96 \cdot 0'5,\ 48 + 1'96 \cdot 0'5\right);$$

$(48 - 0'98,\ 48 + 0'98)$.

$$\underline{I.\ C._{95\ \%}\left(47'02,\ 48'98\right)}.$$

b)

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{E} \Rightarrow n = \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1,96 \cdot 5}{0,5}\right)^2 = 19,6^2 = 384,16.$$

$$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 385\ botellas.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Se dispone de 160 m de tejido de pana y 240 m de tejido de lana para hacer trajes y abrigos. Se una un metro de pana y 2 m de lana para cada traje, y 2 m de pana y 2 m de lana para cada abrigo. Cada traje se vende a 250 euros y cada abrigo a 350 euros.

a) ¿Cuántos trajes y abrigos se deben confeccionar para obtener el máximo beneficio? ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

b) ¿Pueden hacerse 60 trajes y 50 abrigos con esas cantidades de tejido? En caso afirmativo, ¿obtendría el máximo beneficio al venderlo todo?

----

a)

Sean x e y el número de trajes y abrigos que se confeccionan, respectivamente.

Las condiciones del ejercicio se establecen en el siguiente sistema de inecuaciones:

$x + 2y \leq 160\ 2x + 2y \leq 240 \quad x \geq 0;\ y \geq 0\ \}$
$x + 2y \leq 160 \quad x + y \leq 120 \quad x \geq 0;\ y \geq 0\ \}$.

La función de rendimiento es $F(x,\ y) = 250x + 350y$.

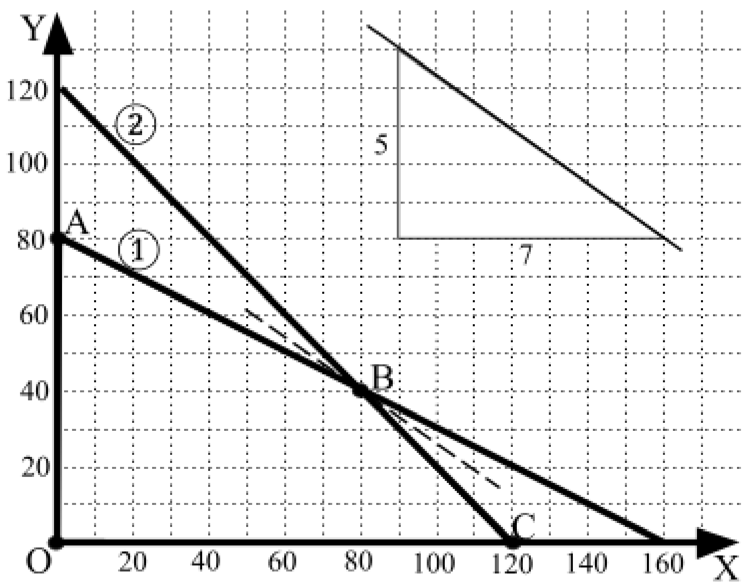
x	160	0
y	0	120

①$\Rightarrow x + 2y \leq 160 \Rightarrow y \leq \frac{160-x}{2} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	120	0
y	0	120

②$\Rightarrow x + y \leq 120 \Rightarrow y \leq 120 - x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

La región factible es la zona sombreada de la figura adjunta.



Los vértices de la sección factible, además de $O(0,\ 0)$, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y = 160 \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A(0,\ 80).$

$B \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y = 160 \\ x + y = 120 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x + 2y = 160 \\ -x - y = -120 \end{array} \right\} \Rightarrow B(80,$
.

$C \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 120 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow C(120,\ 0).$

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 80) = 250 \cdot 0 + 350 \cdot 80 = 0 + 28.000 = 28.000.$

$B \Rightarrow f(80,\ 40) = 250 \cdot 80 + 350 \cdot 40 = 20.000 + 14.000 = 34.000.$

$C \Rightarrow f(120,\ 0) = 250 \cdot 120 + 350 \cdot 0 = 30.000 + 0 = 30.000.$

El máximo se produce en el punto B.

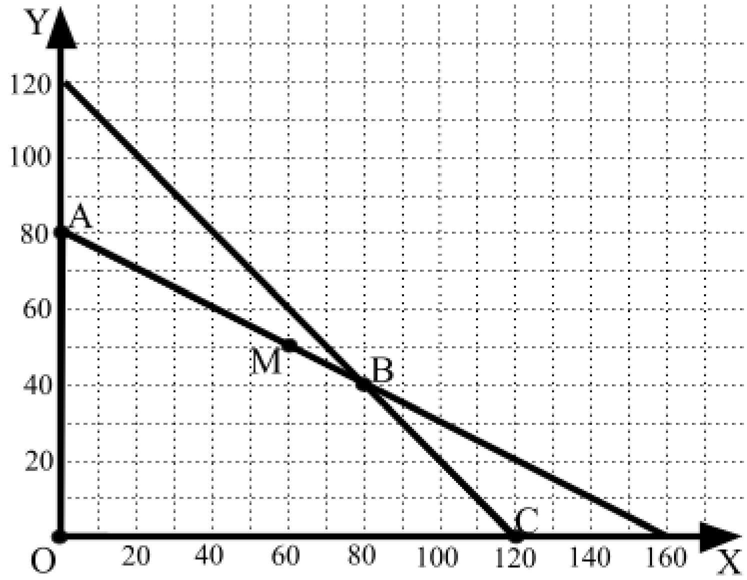
También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = 250x + 350y = 0 \Rightarrow y = -\frac{250}{350}x \Rightarrow m = -\frac{5}{7}.$

$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ confeccionando\ 80\ trajes\ y\ 40\ abrigos.}$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 34.000\ euros.}$

b)



Como se aprecia en el gráfico, el punto M, que corresponde a la confección de 60 trajes y 50 abrigos, pertenece a la zona factible, por lo tanto la respuesta es afirmativa.

Sin embargo, el beneficio que se obtiene vendiéndolo todo no es máximo:

$$f(60,\ 50) = 250 \cdot 60\ +\ 350 \cdot 50\ =\ 15.000\ +\ 17.500\ =\ 32.500\ <\ 34.000.$$

****

2º) Sea la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 8$.

a) Halle las coordenadas de sus extremos relativos y de su punto de inflexión, si existen.

b) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

----

a)

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo en un punto es que se anule su primera derivada en ese punto:

$$f'(x) = 3x^2 - 18x.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 18x = 0;\ \ 3x(x - 6) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 6.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para el valor que anula la primera derivada, se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo relativo.

$$f''(x) = 6x - 18 \Rightarrow \{f''(0) = -18 < 0 \rightarrow Máximo\ para\ x = 0 \qquad f''(6) = 36 - 18$$
.

$$f(0) = 8 \Rightarrow Máximo\ relativo:\ \underline{A(0,\ 8)}.$$

$$f(6) = 6^3 - 9 \cdot 6^2 + 8 = 6^2(6 - 9) + 8 = 36 \cdot (-3) + 8 = -108 + 8 =$$

$$= -100 \Rightarrow Mínimo\ relativo:\ \underline{B(6,\ -100)}.$$

Una función polinómica tiene un punto de inflexión para los valores que anulan la segunda derivada y hacen distinto de cero la tercera derivada:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 18 = 0;\ \ x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow P.\ I.\ para\ x = 3.$$

$$f(3) = 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 8 = 27 - 81 + 8 = 35 - 81 = -46 \Rightarrow P.\ I.:\ \underline{C(3,\ -46)}.$$

b)

La pendiente a una función en un punto es igual que el valor de la derivada en ese punto.

$$m = f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 18 \cdot 1 = 3 - 18 = -15.$$

El punto P de tangencia es el siguiente:

$f(1) = 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 8 = 1 - 9 + 8 = 0 \Rightarrow P(1,\ 0).$
$y - y_0 = m \cdot \left(x - x_0\right) \Rightarrow y - 0 = -15 \cdot (x - 1) = -15x + 15.$

$$\underline{Recta\ tangente: t \equiv 15x + y - 15 = 0}.$$

****

3º) En una urna hay 8 bolas verdes y 6 rojas. En otra urna B hay 4 bolas verdes, 5 rojas y una negra. Se lanza un dado, si sale un número menor que 3 se saca una bola de la urna A, y si sale mayor o igual que 3 se saca una bola de la urna B.

a) Calcule la probabilidad de que la bola sea verde si ha salido un 4.

b) Calcule la probabilidad de que la bola elegida sea roja.

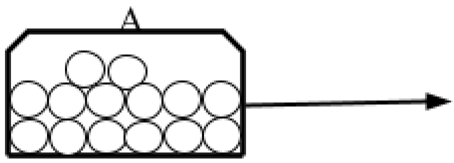
c) Sabiendo que ha salido una bola verde, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la urna A?

La probabilidad de que al lanzar un dado salga menor de 3 es la siguiente:

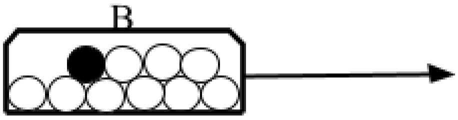
$P(<\ 3) = \frac{\{1,2\}}{\{1,2,3,4,5,6\}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

La probabilidad de que al lanzar un dado salga mayor o igual a 3 es la siguiente:

$P(\geq 3) = \frac{\{3,4,5,6\}}{\{1,2,3,4,5,6\}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Por suceso contrario: $P(\geq 3) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.



$\{P(V) = \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{14} = \frac{4}{21} \quad P(R) = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{14} = \frac{1}{7}$



$\{P(V) = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{10} = \frac{4}{15} \quad P(R) = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{10} = \frac{1}{3} \quad P(N) = \frac{1}{10}$

a)

Lo que se pide es la probabilidad de sacar verde en la urna B: $P(V) = \frac{4}{10} = \underline{\frac{2}{5}}$.

b)

$P(R) = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{14} + \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{10} = \frac{1}{7} + \frac{1}{3} = \underline{\frac{10}{21}}$.

c)

$$P(A/V) = \frac{P(A \cap V)}{P(V)} = \frac{\frac{4}{21}}{\frac{4}{21} + \frac{4}{15}} = \frac{\frac{4}{21}}{\frac{20+28}{105}} = \frac{4 \cdot 105}{21 \cdot 48} = \frac{1 \cdot 5}{1 \cdot 12} = \underline{\frac{5}{12}}.$$

****

4º) La concentración de arsénico en los moluscos de una zona costera sigue una ley Normal con desviación típica 6 mg/kg. Para verificar la cantidad de estos moluscos se toma una muestra aleatoria de tamaño 36 para contrastar si la media poblacional no supera el límite máximo de 80 mg/kg permitido por la normativa sanitaria $\left(H_0:\ \mu\leq 80\right)$.

a) Determine la región crítica de este contraste a un nivel de significación del 5 %.

b) ¿Debe rechazarse esta hipótesis nula, al nivel del 5 %, si en esa muestra de 36 moluscos se encuentra una concentración media de arsénico de 82 mg/Kg?

----

a)

$Hipótesis\ nula \rightarrow H_0: \mu\leq 80$ $\quad$ $Hipótesis\ alternativa \rightarrow H_1:\ \mu > 80\ \}$.

Zona de contraste *unilateral;* en este caso es $\left(-\ \infty,\ \mu_0 + z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Conocemos $\overline{x} = 82,\ n = 36,\ \mu_0 = 80\ y\ \sigma = 6$ y nos piden el intervalo de confianza del 95 %.

Mirando en la tabla N(0, 1) se obtiene el valor crítico, que es el siguiente:

$1 - \alpha = 1 - 0,5 = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_\alpha = 1,645.$

$(1 - 0,05 = 0,9500 \rightarrow z = 1,645).$

La zona de aceptación es $(-\ \infty,\ 1,645)$ y en consecuencia:

$\underline{La\ zona\ crítica\ es\ \left(1'645,\ \ +\ \infty\right)}.$

b)

Determinamos ahora el estadístico: $Z = \frac{\overline{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{82-80}{\frac{6}{\sqrt{36}}} = 2$, que pertenece a la zona crítica, por lo cual:

$\underline{Se\ rechaza\ la\ hipótesis\ nula.\ \ La\ media\ es\ superior\ a\ 80\ mg/kg}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

JUNIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B.

OPCIÓN A

1º) Una empresa agroalimentaria produce dos tipos de bebida: A y B. Cada litro de bebida A lleva 0,2 litros de zumo de naranja y 0,4 litros de zumo de mandarina, además de otros componentes. Cada litro de bebida B lleva 0,6 litros de zumo de naranja y 0,2 litros de zumo de mandarina, además de otros componentes. La empresa puede utilizar como máximo 1.200 litros de zumo de naranja y 1.500 litros de zumo de mandarina. Se quiere que la cantidad producida de tipo A sea mayor o igual que la de tipo B. Sabiendo que el beneficio por litro de bebida de tipo A es de 0,8 euros y por litro de bebida de tipo B es de un euros, determinar la cantidad de bebida de cada tipo que tiene que producir para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál será el máximo beneficio?

Sean x e y el número de litros producidos de los tipos A y B, respectivamente.

Las condiciones del ejercicio se establecen en el siguiente sistema de inecuaciones:

$0,2x + 0,6y \leq 1.200 \quad 0,4x + 0,2y \leq 1.500 \quad x \geq y \quad x \geq 0,\ y \geq 0 \}$
$2x + 6y \leq 12.000 \quad 4x + 2y \leq 15.000 \quad x - y \geq 0 \quad x \geq 0,\ y \geq 0 \}$
$x + 3y \leq 6.000 \quad 2x + y \leq 7.500 \quad x - y \geq 0 \quad x \geq 0,\ y \geq 0 \}$

La función de rendimiento es $F(x, y) = 0,8x + y$.

x	6.000	0
y	0	2.000

①$\Rightarrow x + 3y \leq 6.000 \Rightarrow y \leq \frac{6.000 - x}{3} \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si.$

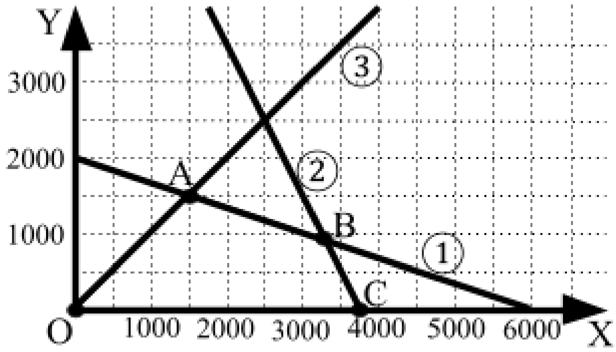
x	2.000	3.000
y	3.500	1.500

②$\Rightarrow 2x + y \leq 7.500 \Rightarrow y \leq 7.500 - 2x \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si.$

x	1.000	5.000
y	1.000	5.000

③$\Rightarrow x - y \geq 0 \Rightarrow y \leq x \Rightarrow A(1,\ 0) \rightarrow Si.$

La región factible es la zona sombreada de la figura adjunta.
Los vértices de la sección factible, además de O(0, 0), son los siguientes:



$A \Rightarrow x + 3y = 6.000 \qquad x - y = 0 \} \Rightarrow A(1.500,\ 1.500).$

$B \Rightarrow x + 3y = 6.000\ 2x + y = 7.500\ \} \quad 2x + 6y = 12.000\ - 2x - y = - 7.500\ \}=$

$x = 6.000 - 3y = 6.000 - 2.700 = 3.300 \Rightarrow B(3.300,\ 900).$

$C \Rightarrow 2x + y = 7.500 \qquad y = 0\ \} \Rightarrow A(3.750,\ 0).$

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(1.500,\ 1.500) = 0,8 \cdot 1.500 + 1 \cdot 1.500 = 1.200 + 1.500 = 2.700.$

$B \Rightarrow f(3.300,\ 900) = 0,8 \cdot 3.300 + 1 \cdot 900 = 2.640 + 900 = 3.540.$

$C \Rightarrow f(3.750,\ 0) = 0,8 \cdot 3.750 + 1 \cdot 0 = 3.000 + 0 = 3.000.$

El máximo se produce en el punto C.

$\underline{La\ beneficio\ es\ máxim\ produciendo\ 3.300\ litros\ de\ A\ y\ 900\ litros\ de\ B}.$

$\underline{La\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 3.540\ euros}.$

****

2º) $a)$ Dada la función $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + ax + 3$, calcular, si existe, el valor de a de forma que tenga un mínimo relativo para $x = 2$.

$b)$ Calcular: $L = \frac{\sqrt{9x^2+3}}{2x+5}$. $c)$ Calcular: $I = \int_1^2 \left(x^2 + 3x + \frac{6}{x} - \frac{2}{x^2}\right) \cdot dx$.

$a)$

Para que una función tenga un mínimo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto:

$$f'(x) = 9x^2 + 4x + a.$$

$$f'(2) = 0 \Rightarrow 9 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + a = 0;\ \ 36 + 8 + a = 0;\ \ 44 + a = 0.$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ tiene\ un\ mínimo\ relativo\ en\ x = 2\ para\ a = -44.}$$

$b)$

$$L = \frac{\sqrt{9x^2+3}}{2x+5} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{9x^2+3}}{x}}{\frac{2x+5}{x}} = \frac{\sqrt{\frac{9x^2+3}{x^2}}}{2+\frac{5}{x}} = \frac{\sqrt{9+\frac{3}{x^2}}}{2+\frac{5}{x}} =$$

$$= \frac{\sqrt{9+\frac{3}{\infty}}}{2+\frac{5}{\infty}} = \frac{\sqrt{9+0}}{2+0} = \underline{\frac{3}{2}}.$$

$c)$

$$I = \int_1^2 \left(x^2 + 3x + \frac{6}{x} - \frac{2}{x^2}\right) \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 6Lx - \frac{2x^{-1}}{-1}\right]_1^2 =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 6Lx + \frac{2}{x}\right]_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} + \frac{3 \cdot 2^2}{2} + 6L2 + \frac{2}{2}\right) - \left(\frac{1^3}{3} + \frac{3 \cdot 1^2}{2} + 6L1 + \frac{2}{1}\right) =$$

$$= \frac{8}{3} + 6 + 6L2 + 1 - \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 0 - 2 = 5 + 6L2 + \frac{8}{3} - \frac{3}{2} = \frac{30+36L2+16-9}{6} =$$

$$= \frac{35+36L2}{6} = \underline{\frac{35}{6} + 6L2}.$$

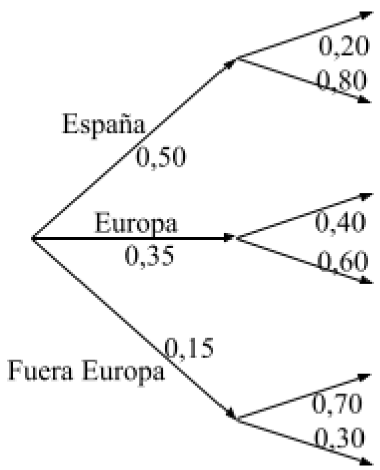
****

3º) Un 50 % de los clientes de un hotel son de España, un 35 % son del resto de Europa y un 15 % son de fuera de Europa. Se sabe que de los clientes de España, un 20 % tiene más de 65 años; de los clientes del resto de Europa, un 40 % tiene más de 65 años y de los clientes de fuera de Europa, un 70 % tiene más de 65 años.

a) Si elegimos un cliente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea de España y tenga más de 65 años?

b) Si elegimos un cliente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga más de 65 años?

c) Si elegimos un cliente al azar de entre los que tienen más de 65 años, ¿cuál es la probabilidad de que sea de fuera de Europa?



a)

$$P = 0,50 \cdot 0,20 = \underline{0,100}.$$

b)

$$P = 0,100 + 0,140 + 0,105 = \underline{0,345}.$$

c)

$$P = \frac{0,105}{0,100+0,140+0,105} = \frac{0,105}{0,345} = \underline{0,3044}.$$

****

OPCIÓN B

1º) a) Un padre decidió repartir su fortuna de 360 monedas de oro entre sus tres hijas, Isabel, Catalina y Juana, de forma que se cumplieran las siguientes condiciones. La cantidad que recibiera Isabel debía ser igual al doble de la suma de las cantidades que recibieran Catalina y Juana. Además, la suma de las cantidades que recibieran Isabel y Juana debía ser igual al triple de la cantidad que recibiera Catalina. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones para determinar cuántas monedas debía recibir cada hija.

b) Calcular, si existe, la matriz inversa de $M = (1\ 4\ \ -\ 2\ 2\ )$.

----

a)

Sean x, y, z el número de monedas que corresponden a Isabel Catalina y Juana, respectivamente.

$x + y + z = 360 \quad x = 2\cdot(y + z) \qquad x + z = 3y\,\} \quad x + y + z = 360 \qquad x = 2y$

.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$x = \frac{|360\ 1\ 1\ 0\ -2\ -2\ 0\ -3\ 1\ |}{|1\ 1\ 1\ 1\ -2\ -2\ 1\ -3\ 1\ |} = \frac{360\cdot|2\ 2\ 3\ -1\ |}{-2-3-2+2-6-1} = \frac{360\cdot(-2-6)}{-12} =-\ 30\cdot(-\ 8) = 240$

.

$y = \frac{|1\ 360\ 1\ 1\ 0\ -2\ 1\ 0\ 1\ |}{-12} = \frac{-360\cdot|1\ -2\ 1\ 1\ |}{-12} = 30\cdot(1\ +\ 2) = 30\cdot 3\ =\ 90.$

$z = \frac{|1\ 1\ 360\ 1\ -2\ 0\ 1\ -3\ 0\ |}{-12} = \frac{360\cdot|1\ -2\ 1\ -3\ |}{-12} =-\ 30\cdot(-\ 3\ +\ 2) =-\ 30\cdot(-\ 1) = 30$

.

$\underline{A\ Isabel\ le\ corresponden\ 240\ medallas,\ a\ Catalina,\ 90\ y\ a\ Juana,\ 30}.$

b)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$|M| = |1\ 4\ \ -\ 2\ 2\ | = 4\ +\ 8\ =\ 12\neq 0 \Rightarrow \underline{La\ matriz\ M\ es\ invertible}.$

La inversa de M se obtiene por el método de Gauss-Jordan.
$(M/I) = (1\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2\ +\ 2F_1\} \Rightarrow (1\ 0\ 2\ 1\ ) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{F_2 \to \frac{1}{10}F_2\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{F_1 \to F_1 - 4F_2\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

$$\underline{M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.}$$

****

2º) a) Dada la función $f(x) = \{2x + 1 \;\; si \;\; x \in (-\infty, 0) \; \frac{x+3}{2x+3} \;\; si \;\; x \in [0, 2) \; \frac{2x+1}{x^2+12} \;\; si \;\; x \in [2, +\infty)$:

a_1) Estudiar la continuidad de f.

a_2) Calcular el máximo valor que toma f para $x \in [4, 6]$.

b) Calcular: $L = \left(\sqrt{9x^2 + 4x + 1} - 3x\right)$.

----

a)

a_1)

La función $f(x)$ es continua en $\forall x \in R$, excepto para los valores $x = 0$ y $x = 2$ cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Para que la función sea continua en $x = 0$ es necesario que sus límites laterales sean iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$f(x) = (2x + 1) = 1 \qquad f(x) = \frac{x+3}{2x+3} = \frac{3}{3} = 1 = f(1) \; \} \Rightarrow f(x) = f(x) = f(1$

.

<u>$La\ función\ f(x)\ es\ continua\ para\ x = 0$</u>.

$f(x) = \frac{x+3}{2x+3} = \frac{2+3}{4+3} = \frac{5}{7} \qquad f(x) = \frac{2x+1}{x^2+12} = \frac{4+1}{4+12} = \frac{5}{16} = f(2) \; \} \Rightarrow f(x) \neq f($

.

<u>$La\ función\ f(x)\ no\ es\ continua\ para\ x = 2$</u>.

a_2)

Para $x \in [4, 6]$ la función es $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+12}$.

Los valores de la función para los extremos del intervalo son los siguientes:

$f(4) = \frac{2 \cdot 4+1}{4^2+12} = \frac{8+1}{16+12} = \frac{9}{28}. \qquad f(6) = \frac{2 \cdot 6+1}{6^2+12} = \frac{12+1}{36+12} = \frac{13}{48}.$

Los posibles máximos y mínimos relativos de la función en el intervalo dado son los siguientes:

$$f'(x)=\frac{2\cdot\left(x^2+12\right)-(2x+1)\cdot 2x}{\left(x^2+12\right)^2}=\frac{2x^2+24-4x^2-2x}{\left(x^2+12\right)^2}=\frac{-2x^2-2x+24}{\left(x^2+12\right)^2}=\frac{-2\cdot\left(x^2+x-12\right)}{\left(x^2+12\right)^2}.$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-2\cdot\left(x^2+x-12\right)}{\left(x^2+12\right)^2}=0;\ \ x^2+x-12=0;\ \ x=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{2}=$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{-1\pm 7}{2}\Rightarrow x_1=-4\notin[4,\ 6],\ x_2=3\notin[4,\ 6].$$

$$\frac{9}{28}=0,32;\ \frac{13}{48}=0,27\Rightarrow\frac{9}{28}>\frac{13}{48}.$$

$$\underline{El\ máximo\ de\ f(x)\ en\ el\ intervalo\ [4,\ 6]\ es\ \frac{9}{28}.}$$

$b)$

$$\left(\sqrt{9x^2+4x+1}-3x\right)=\left(\sqrt{\infty+\infty}-\infty\right)=\infty-\infty\Rightarrow Ind.\Rightarrow$$

$$\frac{\left(\sqrt{9x^2+4x+1}-3x\right)\cdot\left(\sqrt{9x^2+4x+1}+3x\right)}{\left(\sqrt{9x^2+4x+1}+3x\right)}=\frac{\left(\sqrt{9x^2+4x+1}\right)-9x^2}{\sqrt{9x^2+4x+1}+3x}=$$

$$=\frac{9x^2+4x+1-9x^2}{\sqrt{9x^2+4x+1}+3x}=\frac{4x+1}{\sqrt{9x^2+4x+1}+3x}=\frac{\frac{4x+1}{x}}{\frac{\sqrt{9x^2+4x+1}+3x}{x}}=$$

$$\frac{4+\frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{9x^2+4x+1}}{x}+\frac{3x}{x}}\frac{4+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{9x^2+4x+1}{x^2}}+3}\frac{4+\frac{1}{x}}{\sqrt{9+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+3}=\frac{4+\frac{1}{\infty}}{\sqrt{9+\frac{4}{\infty}+\frac{1}{\infty}}+3}=$$

$$=\frac{4+0}{\sqrt{9+0+0}+3}=\frac{4}{\sqrt{9}+3}=\frac{4}{3+3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

$$\underline{\left(\sqrt{9x^2+4x+1}-3x\right)=\frac{2}{3}.}$$

****

3º) a) Dados dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0'3$, $P(b) = 0'6$ y $P(A \cap B) = 0'2$, calcular $P(A \cup B)$ y $P(A/B)$.

b) Para estimar la proporción de personas con sobrepeso en una población se ha tomado una muestra aleatoria simple de tamaño 100 personas, de las cuales 21 tienen sobrepeso. Calcular el intervalo de confianza al 96 % para la proporción de personas con sobrepeso en la población. [Utilizar la tabla N(0, 1)].

----

a)

Datos: $P(A) = 0'3$, $P(b) = 0'6$ y $P(A \cap B) = 0'2$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,3 + 0,6 - 0,2 = 0,9 - 0,2 = 0,7$

.

$$\underline{P(A \cup B) = 0,7}.$$

$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,2}{0,6} = \frac{1}{3}$.

$$\underline{P(B) = \frac{1}{3}}.$$

.

b)

Datos: $n = 100$; $p = \frac{21}{100} = 0,21$; $q = 0,79$.

$1 - \alpha = 0,96 \rightarrow \alpha = 1 - 0,96 = 0,04 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,02} = 2,055$.

$(1 - 0,02 = 0,9800 \rightarrow z = 2,055)$.

El intervalo de confianza es, en este caso: $\left(p_0 - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot q_0}{n}},\ p_0 + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot q_0}{n}}\right)$:

$\left(0'21 - 2'055 \cdot \sqrt{\frac{0,21 \cdot 0,79}{100}},\ 0'21 + 2'055 \cdot \sqrt{\frac{0,21 \cdot 0,79}{100}}\right)$;

$\left(0'21 - 2'055 \cdot 0'0407,\ 0'21 + 2'055 \cdot 0'0407\right)$;

$\left(0'21 - 0'0837,\ 0'21 + 0'0837\right)$; $(0'1263,\ 0'2937)$.

$$\underline{I.\ C._{96\ \%} = (0'1263,\ 0'2937)}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

SEPTIEMBRE – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B.

OPCIÓN A

1º) Dadas las matrices $A = (4\ 3\ \ -\ 2\ 1\ )$ y $B = (5\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ 2\ )$:

a) Calcular, si existe, la matriz inversa de A.

b) Encontrar una matriz X, si existe, tal que $2X + B^2 = 3A$.

c) Sea $C = A + B$. Calcular el rango de C.

----

a)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$|A| = |4\ 3\ \ -\ 2\ 1\ | = 4 + 6 = 10 \neq 0 \Rightarrow \underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible}.$

$A^t = (4\ \ -\ 2\ 3\ 1\ ).$ $\quad Adj.\ de\ A^t = (1\ \ -\ 3\ 2\ 4\ ).$

$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{(1\ -3\ 2\ 4\ )}{10}.$

$$\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\cdot(1\ \ -\ 3\ 2\ 4\ ).}$$

b)

$2X + B^2 = 3A;\ \ 2X = 3A - B^2 \Rightarrow X = \frac{1}{2}\cdot\left(3A - B^2\right).$

$3A = 3\cdot(4\ 3\ \ -\ 2\ 1\ ) = (12\ 9\ \ -\ 6\ 3\ ).$

$B^2 = B\cdot B = (5\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ 2\ )\cdot(5\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ 2\ ) = (26\ \ -\ 7\ \ -\ 7\ 5\ ).$

$X = \frac{1}{2}\cdot\left(3A - B^2\right) = \frac{1}{2}\cdot[(12\ 9\ \ -\ 6\ 3\ ) - (26\ \ -\ 7\ \ -\ 7\ 5\ )] = \frac{1}{2}\cdot(-\ 14\ 16\ 1\ \ -\ 2\ )$

.

$$\underline{X = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -14 & 16 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}}.$$

$c)$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 9 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 27 + 6 = 33 \neq 0.$$

$$\underline{Rang\ C = 2}.$$

****

2º) Dada la función $f(x)=\{\frac{bx+3}{1-x}\ \ si\ \ x\in(-\infty,0]\ x+3\ \ \ si\ \ x\in(0,3]\ \frac{ax+3}{x^2+1}\ \ si\ \ x\in(3,\ +\infty)$:

a) Calcular a para que la función sea continua en $x=3$.

b) Calcular b para que la función sea derivable en $x=0$.

c) Calcular: $I=\int_1^2\left(\frac{3}{x}+e^{5x}+8x\right)\cdot dx.$

----

a)

Para que la función sea continua en $x=3$ es necesario que sus límites laterales sean iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$f(x)\ =(x+3)=3+3=6=f(3) \qquad\qquad f(x)\ =(x+3)=3$$

$$\Rightarrow f(x)\ =f(x)\ =f(3)\Rightarrow 6=\frac{3a+3}{10};\ \ 60=3a+3;\ \ 3a=57;\ \ a=19.$$

$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ x=3\ para\ a=19}.$

b)

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

Para que la función sea continua en $x=0$ es necesario que sus límites laterales sean iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$f(x)\ =\frac{bx+3}{1-x}=\frac{3}{1}=3=f(0) \qquad\qquad f(x)\ =(x+3)=3 \qquad\qquad \}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)\ =f(x)\ =f(3),\forall b\in R.$$

$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ x=0,\ \forall b\in R}.$

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x=0$ cuya derivabilidad se va a estudiar a continuación.

Un función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales.

$$f'(x) = \{\frac{b+3}{(1-x)^2} \ \ si \ \ x\in(-\infty, 0] \ \ (*) \ 1 \quad si \quad x\in(0, 3] \qquad \Rightarrow$$

$$f'(0) = \{b + 3 \ \ si \ \ x\in(-\infty, 0] \quad 1 \quad si \quad x\in(0, 3] \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b + 3 = 1 \Rightarrow b = -2.$$

$$(*) \ \ g(x) = \frac{bx+3}{1-x} \Rightarrow g'(x) = \frac{b(1-x)-(-1)(bx+3)}{(1-x)^2} = \frac{b-bx+bx+3}{(1-x)^2} = \frac{b+3}{(1-x)^2}.$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ derivable\ en\ x = 0\ para\ b = -2.}$$

$c)$

$$I = \int_1^2 \left(\frac{3}{x} + e^{5x} + 8x\right)\cdot dx = \left[3Lx + \frac{e^{5x}}{5} + \frac{8x^2}{2}\right]_1^2 = \left[3Lx + \frac{e^{5x}}{5} + 4x^2\right]_1^2 =$$

$$= \left(3L2 + \frac{e^{10}}{5} + 4\cdot 2^2\right) - \left(3L1 + \frac{e^5}{5} + 4\cdot 1^2\right) = 3L2 + \frac{e^{10}}{5} + 16 - 0 - \frac{e^5}{5} - 4 =$$

$$= 3L2 + 12 + \frac{e^5(e^5-1)}{5}.$$

$$\underline{I = \int_1^2 \left(\frac{3}{x} + e^{5x} + 8x\right)\cdot dx = 3L2 + 12 + \frac{e^5(e^5-1)}{5}.}$$

****

3º) Disponemos de los siguientes datos sobre el uso de nuevas tecnologías por parte de los estudiantes de una universidad: un 70 % de los estudiantes de esa universidad tiene teléfono inteligente, un 50 % de los estudiantes se esa universidad tiene ordenador portátil y un 40 % de los estudiantes de esa universidad tiene ambos dispositivos (teléfono inteligente y ordenador portátil).

a) Si elegimos al azar un estudiante de esa universidad, ¿cuál es la probabilidad de que tenga al menos uno de los dos dispositivos?

b) Si elegimos un estudiante de entre los que tienen teléfono inteligente, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga ordenador portátil?

c) Sea A el suceso "el estudiante tiene teléfono inteligente" y B el suceso "el estudiante tiene ordenador portátil", ¿son los sucesos A y B independientes?

$$P(T) = 0,7;\ \ P(O) = 0,5;\ \ P(T \cap O) = 0,4.$$

a)

$$P(T \cup O) = P(T) + P(O) - P(T \cap O) = 0,7 + 0,5 - 0,4 = 1,2 - 0,4 = \underline{0,8}.$$

b)

$$P(T) = \frac{P(O \cap T)}{P(T)} = \frac{0,4}{0,7} = \underline{\frac{4}{7}}.$$

c)

Dos sucesos T y O son independientes cuando $P(T \cap O) = P(T) \cdot P(O)$.

$$P(T) \cdot P(O) = 0,7 \cdot 0,5 = 0,35 \neq P(T \cap O) = 0,4.$$

$$\underline{Tener\ teléfono\ y\ ordenador\ no\ son\ sucesos\ independientes.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Un agricultor tiene 40 hectáreas de terreno en las que puede plantar cebada o maíz (o no plantar nada). Cada hectárea de cebade necesitará 5 hectómetros cúbicos de agua mientras que cada hectárea de maíz necesitará 10 hectómetros cúbicos de agua. El agricultor podrá disponer de hasta 225 hectómetros cúbicos de agua. El beneficio que obtendrá por cada hectárea de cebada es de 100 euros mientras que por cada hectárea de maíz obtendrá un beneficio de 160 euros; además, las hectáreas en las que no plante nada las arrendará y obtendrá un beneficio de 50 euros por hectárea. La normativo no le permite plantar más hectáreas de maíz que de cebada. ¿Cuántas hectáreas de cebada y cuántas de maíz tiene que plantar para maximizar su beneficio? ¿Cuál será el beneficio máximo?

Sean x e y el número de hectáreas que planta el agricultor de cebad y maíz, respectivamente.

Del enunciado del problema se deduce el siguiente sistema de inecuaciones:

$5x + 10y \leq 225 \quad x \geq y \quad x \geq 0,\ y \geq 0 \} \quad x + 2y \leq 45 \quad x - y \geq 0 \ x \geq 0,\ y \geq 0 \}$

.

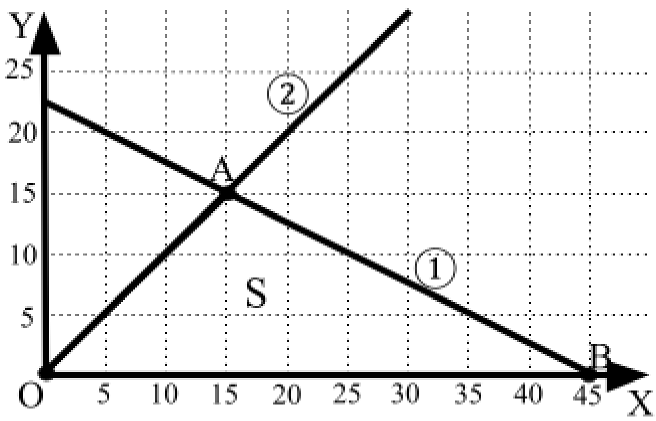
x	15	45
y	15	0

①$\Rightarrow x + 2y \leq 45 \Rightarrow y \leq \frac{45-x}{2} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	0	25
y	0	25

②$\Rightarrow x - y \geq 0 \Rightarrow y \leq x \Rightarrow A(1,\ 0) \rightarrow Si.$

Los vértices de la sección factible son los siguientes:



$A \Rightarrow x + 2y = 45 \quad x - y = 0 \} \Rightarrow \underline{A(15,\ 15)}.$

$B \Rightarrow \ x + 2y = 45 \quad y = 0 \} \Rightarrow \underline{B(45,\ 0)}.$

La función de objetivos es la siguiente:

$$f(x,\ y) = 100x + 160y + 50 \cdot (40 - x - y) =$$

$$= 100x + 160y + 2.000 - 50x - 50y = 50x + 110y + 2.000.$$

Los valores de la función de objetivos, $f(x,\ y) = 50x + 110y + 2.000$, en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(15,\ 15) = 50 \cdot 15 + 110 \cdot 15 + 2.000 = 7.500 + 1.650 + 2.000 = 11.150$
.

$B \Rightarrow f(45,\ 0) = 50 \cdot 45 + 110 \cdot 0 + 2.000 = 2.250 + 0 + 2.000 = 4.250.$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ lo\ obtiene\ sembrando\ 15\ ha\ de\ cebada\ y\ 15\ ha\ de\ maíz}.$$

$$\underline{(El\ agricultor\ arrienda\ 10\ hectáreas)}.$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 11.150\ euros}.$$

****

2º) Sea la función: $f(x) = \frac{2x+5}{x^2-4}$. Calcular:

$a)$ Su dominio.

$b)$ ¿Para qué valores de x es $f(x)$ mayor que 0?

$c)$ Sus máximos y mínimos relativos, si existen.

$d)$ Sus asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, si existen.

$a)$

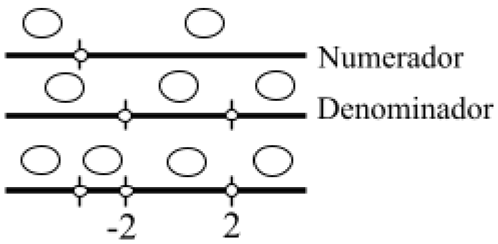
El dominio de una función racional es R, excepto los valores que anulan el denominador.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 =- 2,\ x_2 = 2.$$

$$\underline{D(f) \Rightarrow R - \{-2,\ 2\}}.$$

$b)$

Para determinar los intervalos donde $f(x)$ es mayor que 0 se utiliza el gráfico siguiente:



Numerador: $2x + 5 = 0 \Rightarrow x =- \frac{2}{5}$.

Denominador: $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 =- 2,\ x_2 = 2$.

De la observación de la figura se deducen los intervalos pedidos:

$$\underline{f(x) > 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{5}{2},\ -2\right) \cup (2,\ +\infty)}.$$

$c)$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto. Esta condición necesaria no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

$$f'(x) = \frac{2\cdot(x^2-4)-(2x+5)\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^2-8-4x^2-10x}{(x^2-4)^2} = \frac{-2x^2-10x-8}{(x^2-4)^2} = \frac{-2(x^2+5x+4)}{(x^2-4)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2(x^2+5x+4)}{(x^2-4)^2} = 0;\ \ -2(x^2 + 5x + 4) = 0;\ \ x^2 + 5x + 4 = 0;$$

$x = \frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{2} = \frac{-5\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{-5\pm3}{2} \Rightarrow x_1 = -4,\ x_2 = -1.$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{(-4x-10)\cdot(x^2-4)^2-2(x^2+5x+4)\cdot[2\cdot(x^2-4)\cdot 2x]}{(x^2-4)^4} =$$

$$= \frac{-2(2x+5)\cdot(x^2-4)-8x\cdot(x^2+5x+4)}{(x^2-4)^3} = \frac{-2(2x^3-8x+5x^2-20)-8x^3-40x^2-32x}{(x^2-4)^3} =$$

$$= \frac{-4x^3+16x-10x^2+40-8x^3-40x^2-32x}{(x^2-4)^3} = \frac{-12x^3-50x^2-16x+40}{(x^2-4)^3} = \frac{-2(6x^3+25x^2+8x-20)}{(x^2-4)^3}.$$

$$f''(-4) = \frac{-2(-6\cdot64+25\cdot16-8\cdot4-20)}{(16-4)^3} = \frac{-2(-384+400-52)}{12^3} = \frac{72}{12^3} > 0 \Rightarrow Mín.$$

$$f''(-1) = \frac{-2(-6+25-8-20)}{(1-4)^3} = \frac{-2(-9)}{(-3)^3} = \frac{18}{-27} < 0 \Rightarrow Máx.$$

$$f(-4) = \frac{-8+5}{16-4} = \frac{-3}{12} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \underline{Mínimo\ relativo: A\left(-4,\ -\frac{1}{4}\right)}.$$

$$f(-1) = \frac{-2+5}{1-4} = \frac{3}{-3} = -1 \Rightarrow \underline{Máximo\ relativo: B(-1,\ -1)}.$$

$d)$

Asíntotas verticales: Son de la forma x = k; son los valores finitos de x que anulan el denominador.

$$\underline{Asíntotas\ verticales: x = -2\ y\ x = 2}.$$

Asíntotas horizontales: Son de la forma y = k; son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a $\pm\infty$:

$$k = f(x) = \frac{2x+5}{x^2-4} = 0\ .$$

$$\underline{La\ recta\ y = 0\ (eje\ X)\ es\ asíntota\ horizontal\ de\ la\ función}.$$

Asíntotas oblicuas: Son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \frac{f(x)}{x}\ \ y\ n = [f(x) - mx]\ .$$

$$m = \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{2x+5}{x^2-4}}{x} = \frac{2x+5}{x(x^2-4)} = 0 \, .$$

$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ oblicuas.}$

****

3º) La producción en kilos de los naranjos de una variedad es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 5 kilos.

a) Queremos construir un intervalo de confianza al 96 % para la media de la producción de los naranjos de esta variedad de forma que su amplitud no sea mayor que 3 kilos. ¿Qué tamaño de la muestra debemos tomar?

b) Decidimos tomar un tamaño de la muestra igual a 10. Elegimos 10 naranjos de esta variedad y medimos su producción en kilos, con los siguientes resultados:

82, 90, 87, 75, 78, 83, 92, 77, 85, 86.

Calcular el intervalo de confianza al 96 % para la media de la producción de los naranjos de esta variedad.

----

a)

Datos: $\sigma = 5;\ E = \frac{3}{2} = 1,5.$

$$1 - \alpha = 0,96 \rightarrow \alpha = 1 - 0,96 = 0,04 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,02} = 2,055.$$

$(1 - 0,02 = 0,9800 \rightarrow z = 2,055)$.

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2,055 \cdot 5}{1,5}\right)^2 = 6,85^2 = 46,9255.$$

$\underline{El\ tamaño\ de\ la\ muestra\ debe\ ser\ de\ al\ menos\ de\ 47\ naranjos.}$

b)

$$\overline{x} = \frac{82+90+87+75+78+83+92+77+85+86}{10} = \frac{835}{10} = 83,5.$$

Datos: $\overline{x} = 83,5;\ n = 10;\ \sigma = 5;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,055.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(83'5 - 2'055 \cdot \frac{5}{\sqrt{10}},\ 83'5 + 2'055 \cdot \frac{5}{\sqrt{10}}\right);$$

$$\left(83'5 - 2'055 \cdot 1'5811,\ 83'5 + 2'055 \cdot 1'5811\right);$$

$$\left(83'5 - 3'2492,\ 83'5 + 3'2492\right);$$

$$\underline{I.\ C._{97\ \%}\left(80'2508,\ 86'7492\right)}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE ASTURIAS

JUNIO – 2015 (ESPECÍFICA)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El examen presenta dos opciones: A y B. El alumno deberá elegir una de ellas y responder razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN A

1º) Sean las matrices:

$$A = (m\ 3\ 0\ 1\ ),\ B = (1\ 0\ 0\ m\ ),\ C = (0\ 3m - 1\ \ - 1\ 0\ ),\ D = (x\ y\ )\ y\ E = (1\ 1\ )$$
.

$a)$ Si $(A{\cdot}B - C){\cdot}D = 2E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por $x\ e\ y$) en función del parámetro m.

$b)$ ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = 2$.

$a)$

$$(A{\cdot}B - C){\cdot}D = 2E \Rightarrow (m\ 3\ 0\ 1\ ){\cdot}(1\ 0\ 0\ m\ ) - (0\ 3m - 1\ \ - 1\ 0\ ){\cdot}D = 2E;$$

$(m\ 3m\ 0\ m\ ) - (0\ 3m - 1\ \ - 1\ 0\ ){\cdot}D = 2E;\ \ (m\ 1\ 1\ m\ ){\cdot}(x\ y\ ) = (1\ 1\ ) \Rightarrow \underline{mx + y = 1}$
.

$b)$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A = (m\ 1\ 1\ m\ )\ y\ A' = (m\ 1\ 1\ m\ \ \ 1\ 1\ ).$

El rango de la matriz de coeficientes, en función de m es el siguiente:

$$|A| = |m\ 1\ 1\ m\ | = m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m_1 = -1,\ m_2 = 1.$$

$$\underline{Para\ \{m \neq -1\ m \neq 1\ \} \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$$

$$Para\ m = -1\ es\ A' = (-1\ 1\ 1\ -1\ \ \ 1\ 1\ ) \Rightarrow Rang\ A' = 2.$$

$$\underline{Para\; m = -1 \Rightarrow Rang\; A = 1;\; Rang\; A' = 2 \Rightarrow Sistema\; incompatible.}$$

$$Para\; m = 1\; es\; A' = (1\;1\;1\;1 \quad 1\;1\;) \Rightarrow Rang\; A' = 1.$$

$$\underline{Para\; m = 1 \Rightarrow Rang\; A = Rang\; A' = 1 < nº\; incóg. \Rightarrow S.\; C.\; I.}$$

Para $m = 2$ el sistema resulta $2x + y = 1\; x + 2y = 1\;\}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|1\;1\;1\;2\;|}{|2\;1\;1\;2\;|} = \frac{2-1}{4-1} = \frac{1}{3}. \qquad\qquad y = \frac{|2\;1\;1\;1\;|}{3} = \frac{2-1}{4-1} = \frac{1}{3}.$$

$$\underline{Solución: x = y = \frac{1}{3}.}$$

****

2º) Una empresa, que abastece los lotes de perfumería de un supermercado, dispone en el almacén de 240 frascos de gel, 95 de champú y 270 de crema de manos. Los lotes son de dos tipos: A y B, de forma que el lote A está compuesto por 2 frascos de gel, 1 de champú y 3 de crema de manos, mientras que el lote B está formado por 3 frascos de gel, 1 de champú y 2 de crema de manos.

a) ¿Cuántos lotes de cada tipo pueden prepararse con la mercancía que tiene en el almacén? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) Si cada lote de tipo A le produce unos beneficios de 25 euros y cada lote de tipo B de 22 euros, ¿cuántos lotes de cada tipo debe preparar para maximizar el beneficio? ¿cuál es el valor del beneficio máximo que puede obtener?

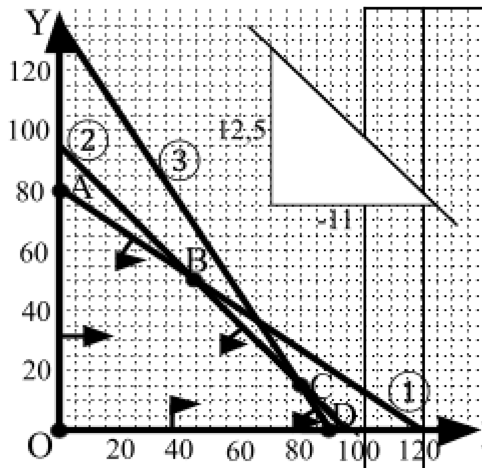
----

a)

Sean x e y el número de lotes A y B que se preparan, respectivamente.

Las condiciones del ejercicio se establecen en el siguiente sistema de inecuaciones:

$$2x + 3y \leq 240 \quad x + y \leq 95 \; 3x + 2y \leq 270 \quad x \geq 0, \; y \geq 0 \}.$$



x	120	0
y	0	80

①$\Rightarrow 2x + 3y \leq 240 \Rightarrow$

$\Rightarrow y \leq \frac{240-2x}{3} \Rightarrow O(0, \; 0) \rightarrow Si.$

x	95	0
y	0	90

②$\Rightarrow x + y \leq 95 \Rightarrow$

$\Rightarrow y \leq 95 - x \Rightarrow O(0, \; 0) \rightarrow Si.$

x	0	90
y	135	0

③$\Rightarrow 3x + 2y \leq 270 \Rightarrow$

$\Rightarrow y \leq \frac{270-3x}{2} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

La región factible es la zona sombreada de la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible, además de O(0, 0), son los siguientes:

$A \Rightarrow \quad x = 0\ 2x + 3y = 240 \} \Rightarrow A(0,\ 80).$

$B \Rightarrow 2x + 3y = 240 \quad x + y = 95 \} \quad 2x + 3y = 240\ \ -2x - 2y = -190 \} \Rightarrow y =$
.

$C \Rightarrow \quad x + y = 95\ 3x + 2y = 270 \} \ -2x - 2y = -190 \quad 3x + 2y = 270 \} \Rightarrow x =$
.

$D \Rightarrow 3x + 2y = 270 \quad y = 0 \} \Rightarrow D(90,\ 0).$

$\underline{Pueden\ preparse\ los\ números\ de\ lotes\ correspondientes\ a\ todos\ los\ valores}$

$\underline{enteros\ de\ la\ zona\ factible,\ incluídas\ las\ líneas\ que\ lo\ delimitan}.$

$b)$

La función de rendimiento es $f(x,\ y) = 25x + 22y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 80) = 25 \cdot 0 + 22 \cdot 80 = 0 + 1.760 = 1.760.$

$B \Rightarrow f(45,\ 50) = 25 \cdot 45 + 22 \cdot 50 = 1.125 + 1.100 = 2.225.$

$C \Rightarrow f(80,\ 15) = 25 \cdot 80 + 22 \cdot 15 = 2.000 + 330 = 2.330.$

$D \Rightarrow f(90,\ 0) = 25 \cdot 90 + 22 \cdot 0 = 2.250 + 0 = 2.250.$

El máximo se produce en el punto C.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = 25x + 22y = 0 \Rightarrow y = -\frac{25}{22}x \Rightarrow m = -\frac{12'5}{11}.$

$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ preparando\ 80\ lotes\ A\ y\ 15\ lotes\ B}.$

$\underline{La\ ganancia\ máxima\ es\ de\ 2.330\ euros}.$

****

3º) El salario de un trabajador se relaciona con el tiempo que ha realizado cursos de formación tal como sigue: $f(x) = \{1.000 \ si \ 0 \leq x < 1 \qquad 900 + 100x \ si \ 1 \leq x < 3 \ 890 + \frac{691x+5}{x+2} \ si \ 3 \leq x$, donde x representa el tiempo, en meses, que ha realizado dichos cursos y $f(x)$ el sueldo mensual que cobra.

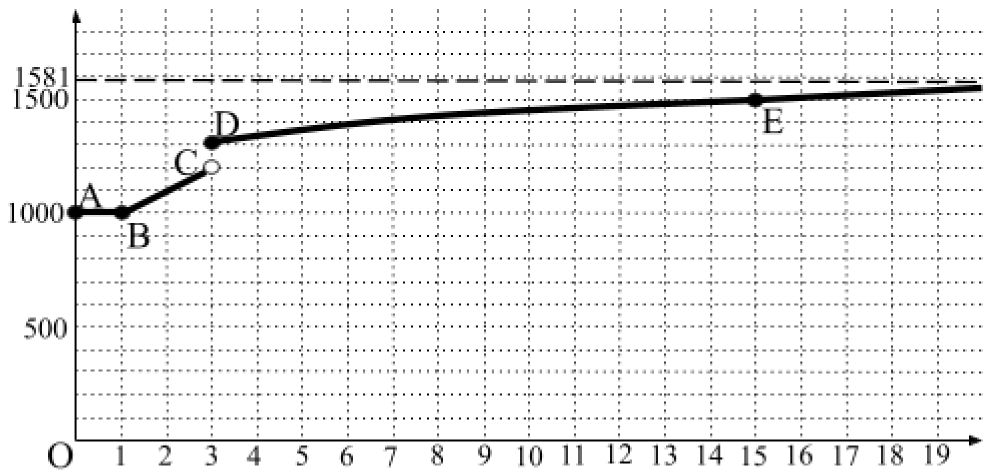
a) Estudia y representa gráficamente la función f. Comenta dicha gráfica indicando cuál es el sueldo mínimo que cobra y cómo va evolucionando (aumentando o disminuyendo) el sueldo con los meses de formación.

b) Un trabajador, ¿puede llegar alguna vez a cobrar 1.500 euros? ¿y 1.600 euros? En caso de que alcance alguno de estos dos sueldos, indica cuántos meses de formación habría recibido.

----

a)

La función $f(x)$ en el intervalo [0, 1) la función es la recta horizontal de ecuación $y = 1.000$; en el intervalo [1, 3) es la recta $y = 100x + 900$, cuya pendiente $m = 100$ se evidencia teniendo en cuentas las escalas diferentes en los ejes coordenados y, en el intervalo restante, $[3, +\infty)$, es una rama hiperbólica cuya asíntota horizontal es la recta $y = 1.581$.



Nótese que la función no es continua para $x = 3$ por lo siguiente:

$lím \ x{\to}3^{-} \ f(x) = lím \ x{\to}3 \ (900 + 100x) = 900 + 300 = 1.200 \qquad lím \ x{\to}3^{+} \ f(x) =$

$\Rightarrow lím \ x{\to}3^{-} \ f(x) \neq lím \ x{\to}3^{+} \ f(x).$

Por otra parte, la asíntota horizontal resulta del siguiente límite:

$$lím \ x{\to}+\infty \ f(x) = lím \ x{\to}+\infty \left(890 + \frac{691x+5}{x+2}\right) = 890 + \frac{691}{1} = 1.581$$

.

$b)$

$$f(x > 3) = 1.500 \Rightarrow 890 + \frac{691x+5}{x+2} = 1.500; \quad \frac{691x+5}{x+2} = 610;$$

$$691x + 5 = 610x + 1.220; \quad 81x = 1.215 \Rightarrow x = \frac{1.215}{81} = 15.$$

$$\underline{Un\ trabajador\ llega\ a\ ganar\ 1.500\ euros\ a\ los\ 15\ meses\ de\ formación}.$$

De la observación de la figura se deduce que:

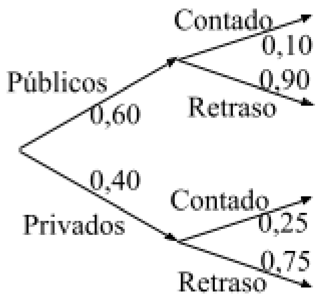
$$\underline{Un\ trabajador\ no\ llega\ a\ ganar\ nunca\ 1.600\ euros}.$$

****

4º) El 60 % de los pedidos de una empresa son realizados por organismos públicos y el resto por organismos privados. En los organismos públicos, el 10 % de los pedidos son pagados al contado, mientras que en los organismos privados este porcentaje es del 25 %.

a) De entre los pedidos de esa empresa, ¿qué porcentaje se paga al contado?

b) De entre los pedidos que se pagan al contado, ¿qué porcentaje son de organismos privados?



a)

$$P = P(Pu \cap C) + P(Pr \cap C) = 0,06 + 0,10 = 0,16.$$

$\underline{Se\ pagan\ al\ contado\ el\ 16\ \%\ de\ los\ pedidos}.$

b)

$$P = P(Pr) = \frac{P(C \cap Pr)}{P(C)} = \frac{0,40 \cdot 0,25}{0,60 \cdot 0,10 + 0,40 \cdot 0,25} = \frac{0,10}{0,06 + 0,10} = \frac{0,10}{0,16} = 0,625.$$

$\underline{De\ los\ pedidos\ pagados\ al\ contado\ el\ 62,5\ \%\ \ son\ de\ organismos\ privados}.$

****

OPCIÓN B

1º) Una empresa de refrescos produce dos tipos de bebidas: normal y ligera. Cada una de ellas necesita pasar por tres procesos productivos de la fábrica, designados por P_1, P_2 y P_3. El número de horas empleado en cada uno de ellos por lote de refresco producido, así como los beneficios unitarios por lote de refresco vendido, pueden verse en la siguiente tabla:

REFRESCOS	Nº DE HORAS EMPLEADAS			BENEFICIOS
	Proceso P_1	Proceso P_2	Proceso P_3	
Normal	6	1	4	650 euros
Ligera	8	2	4	800 euros

Además se sabe que los tiempos de reproducción disponibles son de 360 horas para P_1, 80 horas para P_2 y 200 horas para P_3.

a) ¿Cuántos lotes de cada tipo puede producir? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) ¿Cuántos lotes de cada tipo tendría que producir para maximizar el beneficio? ¿a cuánto ascendería dicho beneficio?

----

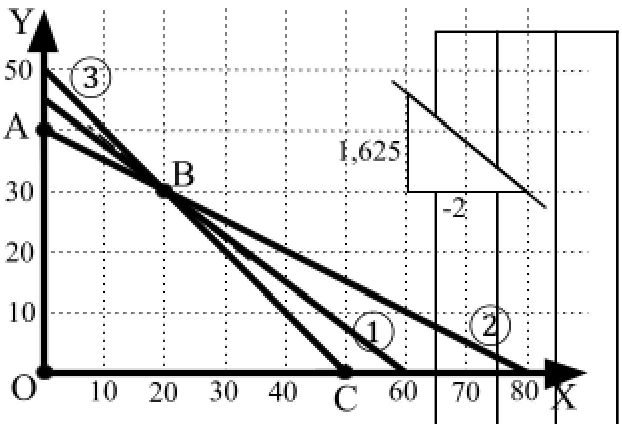
a)

Sean x e y el número de lotes normal y ligero que se producen, respectivamente.

Las condiciones del problema se establecen en el siguiente sistema de inecuaciones:

$6x + 8y \le 360 \quad x + 2y \le 80 \; 4x + 4y \le 200 \quad x \ge 0; y \ge 0 \} \quad 3x + 4y \le 180 \quad x + 2y \le 8$

.



x	0	60
y	45	0

①⇒$3x + 4y \le 180$⇒

$y \leq \frac{180-3x}{4} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	0	80
y	40	0

②$\Rightarrow x + 2y \leq 80 \Rightarrow$

$y \leq \frac{80-x}{2} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	0	50
y	50	0

③$\Rightarrow x + y \leq 50 \Rightarrow\ y \leq 50 - x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

La región factible es la zona sombreada de la figura, cuyos vértices son, además del origen de coordenadas, los siguientes:

$A \Rightarrow\ x = 0\ x + 2y = 80\ \} \Rightarrow A(0,\ 40).$

$B \Rightarrow 3x + 4y = 180 \quad x + 2y = 80\ \} \qquad 3x + 4y = 180\ \ - 2x - 4y = -\ 160\ \} \Rightarrow x =$
.

$C \Rightarrow \qquad y = 0\ x + y = 50\ \} \Rightarrow C(50,\ 0).$

$\underline{Pueden\ preparse\ los\ números\ de\ lotes\ correspondientes\ a\ todos\ los\ valores}$
$\underline{enteros\ de\ la\ zona\ factible,\ incluídas\ las\ líneas\ que\ lo\ delimitan.}$

$b)$

Los valores de la función de objetivos, $f(x,\ y) = 650x + 800y$, en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 40) = 650 \cdot 0 + 800 \cdot 40 = 0 + 32.000 = 32.000.$

$B \Rightarrow f(20,\ 30) = 650 \cdot 20 + 800 \cdot 30 = 13.000 + 24.000 = 37.000.$

$C \Rightarrow f(50,\ 0) = 650 \cdot 50 + 800 \cdot 0 = 32.500 + 0 = 32.500.$

El máximo se produce en el punto B.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,\ y) = 650x + 80y = 0 \Rightarrow y = -\ \frac{650}{800}x \Rightarrow m = -\ \frac{13}{16} = -\ \frac{1,625}{2}.$$

$\underline{El\ máximo\ beneficio\ se\ obtiene\ produciendo\ 20\ lotes\ normales\ y\ 30\ ligeros.}$

$\underline{El\ máximo\ beneficio\ es\ de\ 37.000\ euros.}$

****

2º) La función de costes marginales de una empresa es $f(x) = \frac{10}{(x+1)^2}$, se pide:

a) Encontrar la función primitiva $F\ de\ f$ verificando que $F(4) = 0$.

b) Estudiar y representar gráficamente la función f. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 0$ y $x = 1$.

----

a)

$F(x) = \int f(x)dx = \int \frac{10}{(x+1)^2} dx \Rightarrow \{x + 1 = t\ dx = dt\} \Rightarrow \int \frac{10}{t^2} \cdot dt = 10 \int t^{-2} \cdot dt =$

$= 10 \cdot \frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{10}{t} + C = -\frac{10}{x+1} + C.$

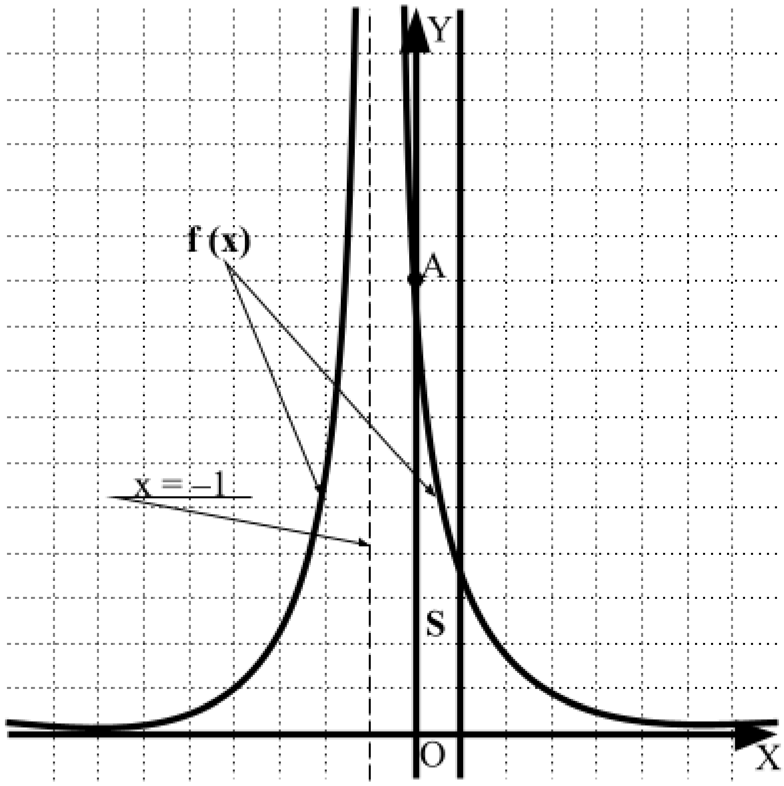
$F(4) = 0 \Rightarrow -\frac{10}{4+1} + C = 0;\ -\frac{10}{5} + C = 0 \Rightarrow C = 2.$

$F(x) = -\frac{10}{x+1} + 2 = \frac{-10+2x+2}{x+1} = \frac{2x-8}{x+1} = \frac{2(x-4)}{x+1}.$

$$\underline{F(x) = \frac{2(x-4)}{x+1}}.$$

b)

La función $f(x) = \frac{10}{(x+1)^2}$ tiene por dominio R y por recorrido $[0, +\infty)$, por ser $f(x) > 0,\ \forall x \in R$.



Tiene como asíntota vertical a la recta $x = -1$ y corta al eje Y en $A(0,\ 10)$.

Por ser $lím\, x{\to}\pm\infty\; f(x) = 0$, el eje de abscisas es asíntota horizontal de la función.

Teniendo en cuenta lo anterior y que $lím\, x{\to}-1^{-}\; f(x) = lím\, x{\to}-1^{+}\; f(x) = +\infty$, la representación gráfica de la función es la que aparece en la figura anterior.

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_0^1 f(x)\cdot dx = \int_0^1 f(x)dx = \left[-\frac{10}{x+1}\right]_0^1 = -\frac{10}{1+1} - \left(\frac{10}{0+1}\right) = -5 + 10 = 5.$$

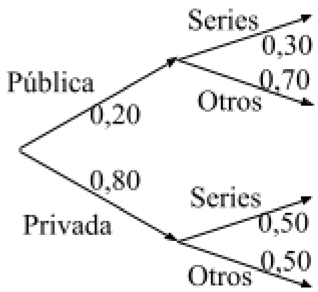
$$\underline{S = 5\,u^2}.$$

****

3º) Según un estudio de audiencia, en el último mes se sintonizaron cadenas públicas el 20 % del tiempo y el resto cadenas privadas. Dentro de las públicas, el 30 % del tiempo se dedica a emisión de películas o series, mientras que dentro de las privadas el porcentaje de emisión de películas o series es del 50 %. Según estos datos, si se hubiese seleccionado una televisión al azar entre las encendidas:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que estuviese sintonizando un canal público en el que se estuviese emitiendo una película o serie?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que estuviese sintonizando una película o serie?



a)

$$P = P(Pu \cap S) = 0,20 \cdot 0,30 = \underline{0,06 = 6\ \%}.$$

b)

$$P = P(Pu \cap S) + P(Pr \cap S) = 0,06 + 0,40 = \underline{0,46 = 46\ \%}.$$

****

4º) Una asociación asegura que al menos el 45 % de las familias tiene problemas para llegar a fin de mes. Para contrastar dicha afirmación un periódico realiza un estudio con 1.000 familias de las cuales 410 aseguran tener problemas para llegar a fin de mes.

a) Plantea un test para contrastar la hipótesis de que la afirmación de la asociación es correcta, frente a la alternativa de que el porcentaje de familias con problemas para llegar a fin de mes es menor del 45 %?

b) ¿A qué conclusión se llega en el contraste anterior para un nivel de significación del 5 %?
Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1: $F(0'05) = 0'52$, $F(0'95) = 0'83$, $F(1'64) = 0'95$, $F(1'96) = 0'975$, $F(2,54) = 0,994$.

----

a)

$\underline{Hipótesis\ nula \rightarrow H_0: p \geq 0,45 \qquad Hipótesis\ alternativa \rightarrow H_1: p < 0,45\ \}}$.

Contraste unilateral.

b)

Conocemos: $n = 1.000;\ p_0 = 0,45;\ q_0 = 1 - 0,45 = 0,55.$

$\alpha = 0,05 \rightarrow z_\alpha = 1,645. \qquad (1 - 0,05 = 0,9500 \rightarrow z = 1,645).$

La zona de aceptación es $\left(p_0 - z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot q_0}{n}};\ +\infty\right)$:

$\left(0,45 - 1,645 \cdot \sqrt{\frac{0,45 \cdot 0,55}{1.000}};\ +\infty\right);\ (0,45 - 1,645 \cdot 0,0156;\ +\infty);$

$(0,45 - 0,0256;\ +\infty);\ (0,4244;\ +\infty).$

$\underline{p = 0,41 \notin (0,4244,\ +\infty) \Rightarrow No\ se\ acepta\ la\ hipótesis\ nula.}$

$\underline{Con\ significación\ del\ 5\ \%\ tienen\ problemas\ menos\ del\ 45\ \%\ de\ las\ familias.}$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE ASTURIAS

JUNIO – 2015 (GENERAL)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El examen presenta dos opciones: A y B. El alumno deberá elegir una de ellas y responder razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN A

1º) Una persona adquiere en el mercado cierta cantidad de manzanas y naranjas a un precio de m y 1,5 euros el kilogramo, respectivamente. El importe total de la compra fue de 9 euros y el peso total de la misma de 7 kg.

a) Planea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean la cantidad, en kg, de manzanas y de naranjas adquiridas en el mercado. ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única?

b) ¿Qué cantidad de naranjas habría comprado si el kilogramo de manzanas costase un euro?

----

a)

$\underline{mx + 1,5y = 9 \qquad x + y = 7\}}.$

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = (m\ 1,5\ 1\ 1\ )$ y $A' = (m\ 1,5\ 1\ 1\ |9\ 7\ )$.

$Rang\ A = 2,\ \forall m \in R - \{1'5\}.$

$\underline{Para\ m \neq 1'5 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

$\underline{Para\ m = 1'5 \Rightarrow Rang\ A = 1;\ Rang\ A' = 2 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

$\underline{Cuando\ el\ sistema\ tiene\ solución\ es\ única.}$

b)

Para $m = 1$ el sistema es $x + 1,5y = 9 \qquad x + y = 7\ \}$, cuya solución es la siguiente:

$$x + 1,5y = 9 \quad -x - y = -7 \Big\} \Rightarrow 0,5y = 2 \Rightarrow y = 4;\ x = 3.$$

$\underline{Si\ el\ kg\ de\ manzanas\ cuesta\ un\ euro\ se\ compran\ 4\ kg\ de\ naranjas}.$

****

2º) Unos grandes almacenes lanzan una campaña publicitaria con una oferta especial en dos de sus productos, ofreciendo el producto A a un precio de 100 euros y el producto B a 200 euros. La oferta está limitada por las existencias, que son 20 unidades del producto A y de 10 unidades del producto B, queriendo vender al menos tantas unidades del producto A como del B. Por otra parte, para cubrir los gastos de esta campaña, los ingresos obtenidos con ella para estos dos productos deben ser, al menos, de 600 euros.

$a)$ ¿Cuántas unidades de cada producto se podrán vender? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían vender 15 unidades de cada producto?

$b)$ ¿Cuántas unidades de cada producto deben vender para maximizar sus ingresos?

$a)$

Sean x e y el número de productos de A y B que se venden, respectivamente.

Las condiciones del ejercicio se establecen en el siguiente sistema de inecuaciones:

$x \leq 20,\ y \leq 10$ $\quad x \geq y\ 100x + 200y \geq 600 \}$ $\quad x \leq 20,\ y \leq 10$ $\quad x - y \geq 0$

.

La función de rendimiento es $f(x,\ y) = 100x + 200y$.

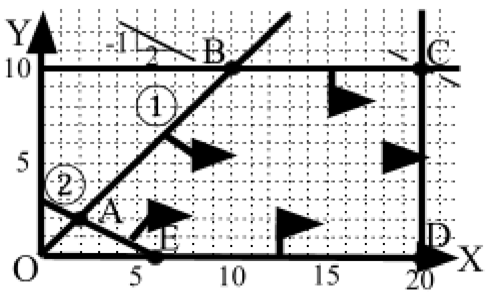
x	0	10
y	0	10

①$\Rightarrow x - y \geq 0 \Rightarrow y \leq x \Rightarrow A(1,\ 0) \rightarrow Si.$

x	6	0
y	0	3

②$\Rightarrow x + 2y \geq 6 \Rightarrow y \leq \frac{6-x}{2} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow No.$

La región factible es la zona sombreada de la figura siguiente.



Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow\ x - y = 0\ x + 2y = 6 \} \Rightarrow A(2,\ 2).$

$B \Rightarrow\ \ y = 10\ x - y = 0 \} \Rightarrow B(10,\ 10).$
$C \Rightarrow x = 20\ y = 10 \} \Rightarrow C(20,\ 10).$

$D \Rightarrow x = 20\ \ y = 0 \} \Rightarrow D(20,\ 0).$
$E \Rightarrow\ \ x = 6\ y + 2y = 6 \} \Rightarrow E(6,\ 0).$

$\underline{Lo\ máximo\ que\ se\ pueden\ vender\ son\ 10\ productos\ A\ y\ 20\ B.}$

$\underline{¿Cómo\ se\ van\ a\ vender\ 15\ productos\ de\ cada\ clase\ si\ hay\ sólo\ 10\ de\ B?}$

$b)$

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(2,\ 2) = 100 \cdot 2 + 200 \cdot 2 = 200 + 400 = 600.$

$B \Rightarrow f(10,\ 10) = 100 \cdot 10 + 200 \cdot 10 = 1.000 + 2.000 = 3.000.$

$C \Rightarrow f(20,\ 10) = 100 \cdot 20 + 200 \cdot 10 = 2.000 + 2.000 = 4.000.$

$D \Rightarrow f(20,\ 0) = 100 \cdot 20 + 200 \cdot 0 = 2.000 + 0 = 2.000.$

$E \Rightarrow f(6,\ 0) = 100 \cdot 6 + 200 \cdot 0 = 600 + 0 = 600.$

El máximo se produce en el punto C.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = 100x + 200y = 0 \Rightarrow y = -\frac{100}{200}x \Rightarrow m = -\frac{1}{2}.$

$\underline{Los\ ingresos\ son\ máximos\ vendiendo\ 20\ productos\ A\ y\ 10\ B.}$

****

3º) El banco Ahorrando ha hecho un estudio sobre el tiempo (en minutos) que dedican sus empleados a los clientes en función de la edad y ha obtenido la siguiente función para clientes entre 18 y 70 años: $f(x) = \{\frac{x^2}{10} - 2x + 300 \; si \; 18 \leq x \leq 50 \qquad - x^2 + 134x - 3.750 \; si \; 50 < x \leq 70$

.

a) Estudia y representa gráficamente la función f. ¿Es continua para $x = 50$?

b) ¿A qué edad los clientes requieren más tiempo de atención? ¿A qué edad requieren el menor tiempo?

----

a)

En el intervalo $[18, 50]$ la función es $f(x) = \frac{x^2}{10} - 2x + 300$, que es una parábola convexa (∪) cuyo vértice es el siguiente:

$$f'(x) = \frac{1}{5}x - 2.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{5}x - 2 = 0; \; x - 10 = 0 \rightarrow x = 10 \notin [18, 50].$$

En el intervalo $[18, 50]$ la función es un trozo convexo de la parábola.

$$f(18) = \frac{18^2}{10} - 2 \cdot 18 + 300 = 32,4 - 36 + 300 = 296,4.$$

$$f\left(50^-\right) = \frac{50^2}{10} - 2 \cdot 50 + 300 = 250 - 100 + 300 = 450.$$

Para que la función sea continua en $x = 50$ es necesario que sus límites laterales sean iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$f(x) \; = \left(\frac{x^2}{10} - 2x + 300\right) = 450 = f(50) \;\; f(x) \; = \left(- x^2 + 134x - 3.750\right) = 4$$

$f(x) = \; f(x)$.

$$f\left(50^+\right) = - 50^2 + 134 \cdot 50 - 3.750 = - 2.500 + 6.700 - 3.750 = 450.$$

$\underline{La \; función \; f(x) \; es \; continua \; para \; x = 50}.$

En el intervalo $(50, 70]$ la función es $f(x) = - x^2 + 134x - 3.750$, que es una parábola cóncava (∩) cuyo vértice es el siguiente:

$$f'(x) = - 2x + 134.$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 134 = 0; \quad -x + 67 = 0 \rightarrow x = 67 \in (50,\ 70].$

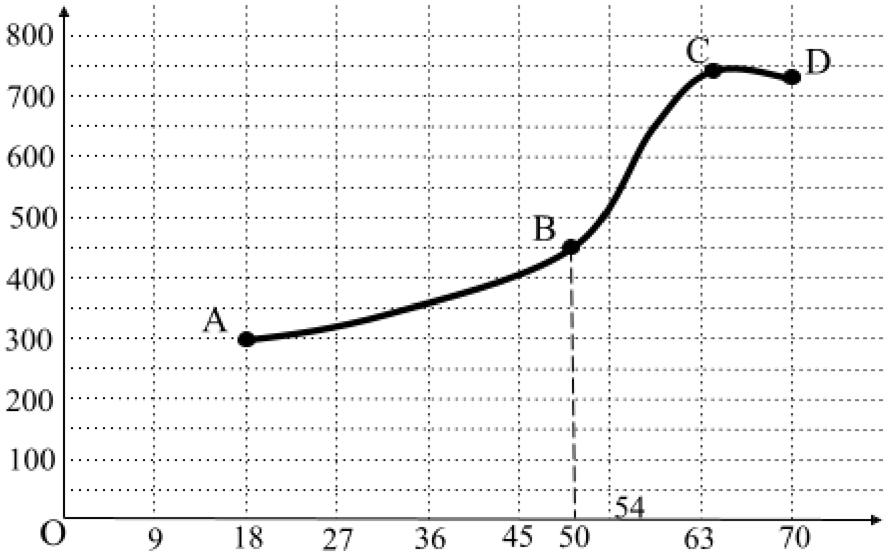
$f(67) = -67^2 + 134 \cdot 67 - 3.750 = -4.489 + 8.978 - 3.750 =$

$= 8.978 - 8.239 = 739.$ El vértice-máximo es $A(67,\ 739)$.

$f(70) = -70^2 + 134 \cdot 70 - 3.750 = -4.900 + 9.380 - 3.750 =$

$= 9.380 - 8.650 = 730.$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



$b)$

$\underline{Requieren\ mayor\ atención\ a\ los\ 67\ años.}$

$\underline{Requieren\ menor\ atención\ a\ los\ 18\ años.}$

****

4º) El candidato A se presenta a unas elecciones. En un sondeo previo se preguntó a 500 personas seleccionadas al azar de la población de votantes y 265 de ellas manifestaron su intención de votar a dicho candidato A.

a) Plantea un test para contrastar la hipótesis de que el candidato A no va a sacar más del 50 % de los votos, frente a la alternativa de que sí lo va a hacer.

b) ¿A qué conclusión se llega en el contraste anterior para un nivel de significación del 3 %?

[Algunos valores de la función de distribución Normal de media 0 y desviación típica 1:
$F(0,03) = 0,512;\ F(0,97) = 0,834;\ F(1,34) = 0,91;\ F(1,88) = 0,97; F(2,17) = 0,9$

----

a)

$Hipótesis\ nula \rightarrow H_0: p \leq 0,5$ $\qquad$ $Hipótesis\ alternativa \rightarrow H_1:\ p > 0,5$ }.

Contraste unilateral.

b)

Zona de contraste *unilateral;* en este caso es $\left(-\infty;\ p_0 + z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot q_0}{n}}\right)$.

Conocemos:

$$n = 500,\ \ p_0 = 0,50. \quad q_0 = 1 - p_0 = 1 - 0,50 = 0,50$$

$$\alpha = 0,03 \rightarrow z_\alpha = 1,88.\ (1 - 0,03 = 0,9700 \rightarrow z = 1,88).$$

$$\left(-\infty;\ 0,5 + 1,88 \cdot \sqrt{\frac{0,50 \cdot 0,50}{500}}\right);\ \ (-\infty;\ 0,5 + 1,88 \cdot 0,0224);$$

$(-\infty;\ 0,5 + 0,0420);\ \ (-\infty;\ 0,5420)$.

Por encontrarse la proporción muestral $p = \frac{265}{500} = 0,53$ en la zona de contraste:

$\underline{Se\ acepta\ la\ afirmación\ de\ que\ el\ candidato\ no\ sacará\ el\ 50\ \%\ de\ los\ votos.}$

$\underline{Es\ decir: se\ afirma\ que\ el\ candidato\ no\ sacará\ más\ del\ 50\ \%\ de\ los\ votos.}$

****

OPCIÓN B

1º) Sean las matrices $A = (m \ -2 \ m \ m-1)$, $B = (x \ y)$ y $C = (4 \ 4)$.

a) Si $A \cdot B = C$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

b) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = 2$.

----

a)

$A \cdot B = C \Rightarrow (m \ -2 \ m \ m-1) \cdot (x \ y) = (4 \ 4) \Rightarrow \underline{mx - 2y = 4 \ mx - (m -}$

.

b)

El rango de la matriz de coeficientes, en función del parámetro m, es el siguiente:

$[A] = |m \ -2 \ m \ m-1| = m(m-1) + 2m = m^2 - m + 2m = 0; \ m^2 + m = 0;$

$m(m+1) = 0 \Rightarrow m_1 = 0, \ m_2 = -1.$

$\underline{Para \ \{m \neq 0 \ m \neq -1\} \Rightarrow Rang \ A = Rang \ A' = 2 = nº \ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$

$Para \ m = 0 \Rightarrow A' = (0 \ -2 \ 4 \ 0 \ -1 \ 4) \Rightarrow Rang \ A' = 2.$

$\underline{Para \ m = 0 \Rightarrow Rang \ A = 1; \ Rang \ A' = 2 \Rightarrow Sistema \ incompatible.}$

$Para \ m = -1 \Rightarrow A' = (-1 \ -2 \ 4 \ -1 \ -2 \ 4) \Rightarrow Rang \ A' = 1.$

$\underline{Para \ m = -1 \Rightarrow Rang \ A = Rang \ A' = 1 < nº \ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$

Para $m = 2$ el sistema es $2x - 2y = 4 \ 2x - y = 4\}$, equivalente a $x - y = 2 \ 2x - y = 4\}$, que es compatible determinado.

$x - y = 2 \ 2x - y = 4\} \quad -x + y = -2 \ 2x - y = 4\} \Rightarrow \underline{x = 2}; \ 2 - y = 2 \Rightarrow \underline{y =}$

.

****

2º) Si x representa el volumen de producción de una fábrica, el coste marginal de la misma viene dado por la función $f(x) = 3 + 8x + 15x^2$, se pide:

a) Encontrar la función del coste total F, si se sabe que dicha función viene dada por la primitiva $F\ de\ f$ que verifica que $F(0) = 100$.

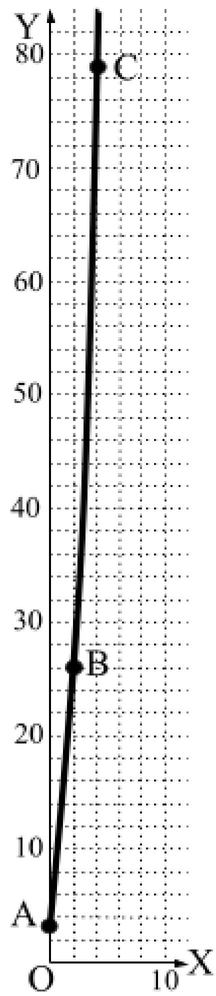
b) Estudiar y representar gráficamente la función f en el intervalo $[0,\ \infty)$. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 0$ y $x = 1$.

----

a)

$$F(x) = \int f(x) \cdot dx = \int \left(3 + 8x + 15x^2\right) \cdot dx = 3x + \frac{8x^2}{2} + \frac{15x^3}{3} + C =$$

$= 5x^3 + 4x^2 + 3x + C.$



$F(0) = 100 \Rightarrow 5 \cdot 0^3 + 4 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + C = 100 \Rightarrow C = 100.$

$$\underline{Función\ coste:\ F(x) = 5x^3 + 4x^2 + 3x + 100}.$$

b)

La función $f(x) = 3 + 8x + 15x^2$ corta al eje Y en el punto $A(0,\ 3)$.

Los puntos de corte con el eje X son los siguientes:

$f(x) = 0 \Rightarrow 15x^2 + 8x + 3 = 0;\ \ x = \frac{-8 \pm \sqrt{64-180}}{2a} \Rightarrow x \notin R.$
No tiene puntos de corte con el eje X.

El mínimo de la curva (parábola convexa) es el siguiente:

$f'(x) = 30x + 8. \qquad f'(x) = 0 \Rightarrow 30x + 8 = 0;$

$15x + 4 = 0 \Rightarrow x = -\frac{4}{15}.$

El mínimo no se encuentra en el intervalo a representar: $x \notin [0,\ \infty)$.

Otros puntos de la curca son B$(1,\ 26)$ y $C = (2,\ 79)$.

La representación gráfica es la que se indica en la figura adjunta.

En el intervalo $[0,\ \infty)$, todas las ordenadas de la función

$5x^3 + 4x^2 + 3x + 100$ son positivas, por lo cual el área a calcular es la siguiente:

$$S = \int_0^1 \left(5x^3 + 4x^2 + 3x + 100\right) \cdot dx = \left[\frac{5x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 100x\right]_0^1 =$$

$$= \left(\frac{5}{4} + \frac{4}{3} + \frac{3}{2} + 100\right) - 0 = \frac{15+16+18+1.200}{12} = \underline{\frac{1.249}{12}\ u^2}.$$

****

3º) Se sabe que en una ciudad el 50 % de la población son hombres, el 30 % de la población consume aceite de girasol y el 20 % son hombres que consumen aceite de girasol. Se elige una persona al azar de dicha ciudad.

a) Si es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que consuma aceite de girasol?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer y consuma aceite de girasol?

Hombre → (H). Mujer → (M). Consume girasol → (G). No consume girasol → $(\overline{G})$.

Conocemos: $P(H) = 0,50$; $P(G) = 0,30$; $P(H \cap G) = 0,20$.

Se pide:

a)

$$P(H) = \frac{P(G \cap H)}{P(H)} = \frac{0,20}{0,50} = \frac{2}{5} = \underline{0,40}.$$

b)

$P(M \cap G)$. Sabiendo que $P(G) = P(H \cap G) + P(M \cap G)$:

$$P(M \cap G) = P(G) - P(H \cap G) = 0,30 - 0,20 = \underline{0,10}.$$

****

4º) Una empresa de suministros electrónicos ha publicitado ampliamente su negocio. El gerente de la misma espera que como resultado de dicha campaña publicitaria las ventas medias semanales pasen a ser mayores de los 7.880 euros que la empresa ingresó en el pasado. Para comprobar si esto es así, el gerente considera una muestra aleatoria de 36 semanas para las que la media de ventas ha sido de 8.023 euros. Se supone además que las ventas semanales de esta empresa siguen una distribución normal con una desviación típica de 286 euros.

a) Plantea un test para contrastar la hipótesis de que la publicidad no ha surtido efecto, frente a la alternativa de que si ha sí lo ha hecho.

b) ¿A qué conclusión se llega en el contraste anterior para un nivel de significación del 1 %?
Nota: Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1: $F(0'01) = 0'504$, $F(0'99) = 0'839$, $F(2'33) = 0'99$, $F(2'58) = 0'995$, $F(3) = 0,999$.

----

a)

$Hipótesis\ nula \rightarrow H_0: \mu \geq 7.880$ $Hipótesis\ alternativa \rightarrow H_1: \mu < 7.880$ }.

Contraste unilateral.

b)

Conocemos: $n = 36;\ \mu = 8.023;\ \sigma = 286.$

$\alpha = 0,01 \rightarrow z_\alpha = 2,33.\ (1 - 0,01 = 0,9900 \rightarrow z = 2,33).$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido es $\left(-\infty;\ \mu_0 + z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$:

$\left(-\infty;\ 7.880 + 2,33 \cdot \frac{286}{\sqrt{36}}\right);\ (-\infty;\ 7.880 + 2,33 \cdot 47,6667);$

$(-\infty;\ 7.880 + 111,0633);\ (-\infty;\ 7.991,0633).$

Por no estar contenida la media muestral $\mu = 8.023$ en el intervalo de confianza se rechaza la hipótesis nula y en consecuencia:

$\underline{Se\ acepta,\ con\ el\ 1\ \%\ de\ significación,\ que\ la\ publicidad\ ha\ tenido\ éxito.}$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE BALEARES

JUNIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contesta de manera clara y razonada a una de las dos opciones propuestas. Se valorará la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) utilizado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autorizarán las que traigan información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1º) a) Tres ciclistas, C_1, C_2 y C_3, salen a entrenarse. Por cada km que recorre C_1, C_2 recorre 2 km y C_3 recorre las tres cuartas partes de lo que recorre C_2. Al final, la suma de las distancias recorridas por los tres ciclistas es de 180 km. ¿Cuántos km recorre cada uno de los ciclistas?

b) Determine las matrices de la forma $A = (2\ b\ a\ 4)$ tal que $A + A^t = (4\ 0\ 0\ 8)$; A^tes la traspuesta de A.

----

a)

Siendo x los kilómetros que recorre C_1, el ciclista C_2 recorre $2x$ y el ciclista C_3 recorre $\frac{3}{4} \cdot 2x = \frac{3}{2}x$.

$$x + 2x + \frac{3x}{2} = 180;\ \ 6x + 3x = 360;\ \ 9x = 360 \Rightarrow x = 40.$$

$\frac{3}{2} \cdot 40 = 60.$

<u>*Los ciclistas C_1, C_2 y C_3 recorren 40, 80 y 60 kilómetros, respectivamente.*</u>

b)

$$A + A^t = (4\ 0\ 0\ 8) \Rightarrow (2\ b\ a\ 4) + (2\ a\ b\ 4) = (4\ 0\ 0\ 8);$$

$$(4\ \ a + b\ \ a + b\ \ 8) = (4\ 0\ 0\ 8) \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow b = -a.$$

<u>*Las matrices son de la forma $(2\ \ -a\ \ a\ 4)$.*</u>

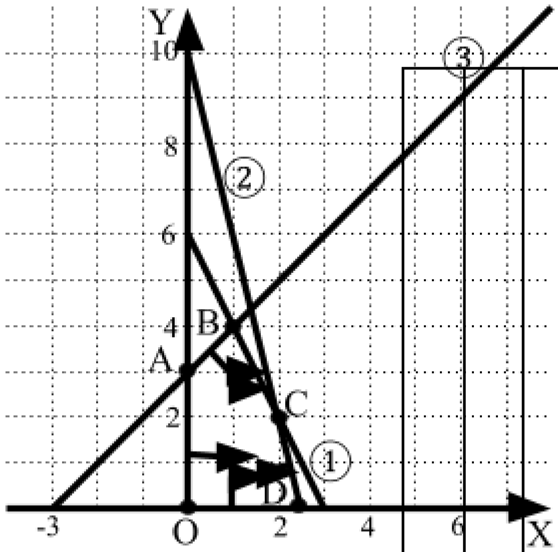
****

2º) a) Representa gráficamente el conjunto de puntos que satisfacen las inecuaciones lineales siguientes: $2x + y \leq 6 \rightarrow (1)$; $4x + y \leq 10 \rightarrow (2)$; $-x + y \leq 3 \rightarrow (3)$; $x \geq 0 \rightarrow (4)$; $y \geq 0 \rightarrow (5)$. Indica si es o no una región acotada del plano. Indicar los puntos extremos de la región factible, así como las ecuaciones de las rectas que la delimitan.

b) Calcula el valor máximo de la función $f(x,\ y) = 4x + 2y - 3$ en el recinto anterior indicando en el punto que se consigue.

----

a)



x	0	3
y	6	0

①$\Rightarrow 2x + y \leq 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow y \leq 6 - 2x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	0	2
y	10	2

②$\Rightarrow 4x + y \leq 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow y \leq 10 - 4x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	0	-3
y	3	0

③$\Rightarrow -x + y \leq 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow y \leq 3 - x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

$\underline{Como\ se\ observa\ por\ el\ gráfico,\ la\ zona\ factible\ está\ acotada}.$

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 0 \\ -x + y = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{A(0,\ 3)}.$

$B \Rightarrow 2x + y = 6 \quad -x + y = 3 \} \; 2x + y = 6 \; x - y = -3 \} \Rightarrow 3x = 3, \; x = 1, \; y = 4 \Rightarrow$

.

$C \Rightarrow \; 2x + y = 6 \; 4x + y = 10 \} \quad -2x - y = -6 \quad 4x + y = 10 \} \Rightarrow 2x = 4, \; x = 2,$

.

$D \Rightarrow \qquad y = 0 \; 4x + y = 10 \} \Rightarrow \underline{D(2'5, \; 0)}.$

Las rectas que delimitan la zona factible son, además de los ejes de coordenadas, las siguientes:

$\underline{1 \Rightarrow y = -2x + 6}. \qquad \underline{2 \Rightarrow y = -4x + 10}. \qquad \underline{3 \Rightarrow y = -x + 3}.$

$b)$

Los valores de la función $f(x, \; y) = 4x + 2y - 3$ en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0, \; 3) = 4 \cdot 0 + 2 \cdot 3 - 3 = 0 + 6 - 3 = \underline{3}.$

$B \Rightarrow f(1, \; 4) = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 4 - 3 = 4 + 8 - 3 = \underline{9}.$

$C \Rightarrow f(2, \; 2) = 4 \cdot 2 + 2 \cdot 2 - 3 = 8 + 4 - 3 = \underline{9}.$

$D \Rightarrow f(2'5, \; 0) = 4 \cdot 2,5 + 2 \cdot 0 - 3 = 10 + 0 - 3 = \underline{7}.$

$\underline{\textit{El máximo se obtiene en cada uno del los puntos del segmento } \overline{BC}}.$

****

3º) El precio de un artículo, que ha estado los últimos 6 años en el mercado, en función del tiempo t (años) ha seguido la siguiente función: $f(t) = \{3t^2 + 4 \; si \; 0 \leq t \leq 2 \;\; -2t + 20 \; si \; 2 < t \leq 6$.

a) Representa la función para los 6 últimos años. ¿Es continua esta función? ¿Es derivable?

b) Estudiar el crecimiento y decrecimiento del precio del artículo.

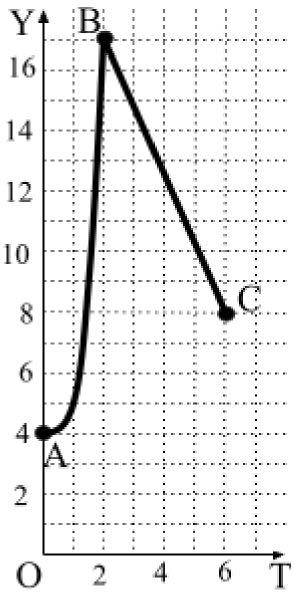
c) ¿Cuál fue el precio máximo del artículo? ¿Cuál es su precio actual?

d) Representa la función derivada.

----

a)

Una función es continua en un punto cuando existen sus límites laterales, son iguales e igual al valor de la función en ese punto.



La función $f(t) = \{3t^2 + 4 \; si \; 0 \leq t \leq 2 \;\; -2t + 20 \; si \; 2 < t \leq 6$ es continua en su dominio, excepto para $t = 2$, cuya continuidad es dudosa y se estudia a continuación.

$f(t) = \left(3t^2 + 4\right) = 3 \cdot 4 + 2 = 16 = f(2) \;\; f(t) = (-2t + 20) = -4 + 20 = 16$

$\Rightarrow f(t) = f(t) = f(2).$

<u>$La\ función\ f(t)\ es\ continua\ en\ su\ dominio$</u>.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas laterales existen y son iguales.

La función $f(t)$ es derivable en su dominio, excepto para $t = 2$, cuya derivada es dudosa y se estudia a continuación.

$f'(t) = \{6t \; si \; 0 \leq t \leq 2 \;\; -2 \;\; si \; 2 < t \leq 6 \Rightarrow f'\left(2^-\right) = 6 \cdot 2 = 12 \; f'\left(2^+\right) = -2 \;\;\; \} \Rightarrow f'($

.

<u>$La\ función\ f(t)\ no\ es\ derivable\ para\ t = 2$</u>.

Tanto la continuidad como la derivabilidad de $f(t)$ es evidente con la observación de su representación gráfica.

$b)$

Una función es creciente o decreciente cuando su derivada es positiva o negativa, respectivamente.

Siendo $f'(t) = \begin{cases} 6t & si\ 0 \le t \le 2 \\ -2 & si\ 2 < t \le 6 \end{cases}$:

$\underline{El\ precio\ del\ artículo\ crece\ los\ dos\ primeros\ años\ y\ decrece\ el\ resto}.$

$c)$

Desde un punto de vista teórico, para que una función tenga un máximo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto:

$f'(t) = 0 \Rightarrow 6t = 0 \Rightarrow t = 0.$

Como se observa, este razonamiento lleva a una solución sin sentido, por lo cual debe razonarse de modo diferente en cuanto al concepto de máximo o mínimo relativo.

Una función tiene un máximo relativo cuando pasa de ser creciente a decreciente, como ocurre en el caso que nos ocupa para $t = 2$ y se observa con claridad en la representación gráfica de la función.

$f(2) = 3 \cdot 2^2 + 4 = 3 \cdot 4 + 4 = 12 + 4 = 16.$

$\underline{El\ precio\ máximo\ del\ producto\ es\ de\ 16\ euros}.$

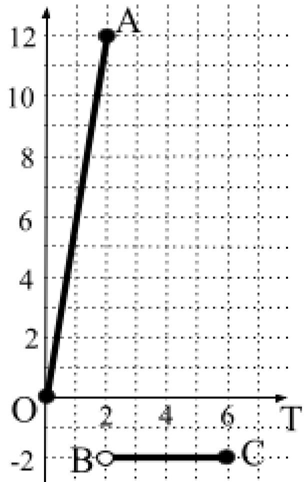
El precio actual se obtiene para $t = 6$:

$f(6) = -2 \cdot 6 + 20 = -12 + 20 = 8.$

$\underline{El\ precio\ actual\ del\ producto\ es\ de\ 8\ euros}.$

$d)$

La representación gráfica de la función derivada $f'(t) = \begin{cases} 6t & si\ 0 \le t \le 2 \\ -2 & si\ 2 < t \le 6 \end{cases}$ es la que aparece en la figura adjunta.



****

4º) En una caja hay guardados 20 relojes, de los cuales hay 15 que funcionan correctamente.

a) Representar mediante el diagrama del árbol la situación cuando se extraen dos relojes sin reemplazamiento.

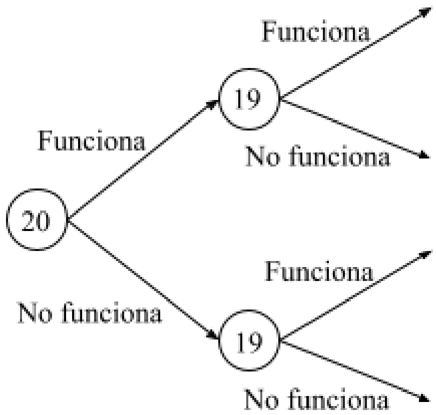
b) Si se extrae un reloj al azar, ¿cuál es la probabilidad de que funcione?

c) Si se extraen dos relojes al azar, sin reemplazamiento, ¿cuál es la probabilidad de que los dos funcionen?

d) Se extraen dos relojes al azar sucesivamente, sin reemplazamiento, y el primero no funciona correctamente, ¿cuál es la probabilidad de que el segundo tampoco funcione?

----

a)



b)

$$P = \frac{Casos\ favorables}{Casos\ posibles} \Rightarrow \underline{P = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} = 0,75.}$$

c)

$$P = \frac{15}{20} \cdot \frac{14}{19} = \frac{3}{4} \cdot \frac{14}{19} = \underline{\frac{21}{38} = 0,5526.}$$

d)

$$P\left(\overline{F_2}/\overline{F_1}\right) = \frac{P\left(\overline{F_2} \cap \overline{F_1}\right)}{P\left(\overline{F_1}\right)} = \frac{No\ funciona\ 1º\ y\ 2º}{No\ funciona} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{19}}{\frac{15}{76} + \frac{1}{19}} = \frac{\frac{1}{19}}{\frac{1}{4}} = \underline{\frac{4}{19} = 0,2105.}$$

****

OPCIÓN B

1º) a) Determine tres números A, B y C, tales que su suma sea 210, la mitad de la suma del primero y del último y la cuarta parte del otro sea 95 y la media de los dos últimos sea 80.

b) Determinar las matrices de la forma $A = (-\ a\, b\ \ -\ b\, a\,)$ que no admiten inversa. Escribir algún ejemplo particular de estas matrices.

----

a)

$A + B + C = 210 \qquad \frac{A+C}{2} + \frac{B}{4} = 95 \qquad \frac{B+C}{2} = 80\,\} \qquad A + B + C = 210\ 2A$

.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$A = \frac{|210\ 1\ 1\ 380\ 1\ 2\ 160\ 1\ 1\,|}{|1\ 1\ 1\ 2\ 1\ 2\ 0\ 1\ 1\,|} = \frac{210+380+320-160-420-380}{1+2-2-2} = \frac{530-580}{-1} = \frac{-50}{-1} = 50.$$

$$B = \frac{|1\ 210\ 1\ 2\ 380\ 2\ 0\ 160\ 1\,|}{-1} = \frac{380+320-320-420}{-1} = \frac{380-420}{-1} = \frac{-40}{-1} = 40.$$

$$C = \frac{|1\ 1\ 210\ 2\ 1\ 380\ 0\ 1\ 160\,|}{-1} = \frac{160+420-380-320}{-1} = \frac{580-700}{-1} = \frac{-120}{-1} = 120.$$

$\underline{Los\ números\ pedidos\ son\ A = 50,\ B = 40\ y\ C = 120}.$

b)

Una matriz no admite inversa cuando su determinante es cero.

$|A| = |-\ a\, b\ \ -\ b\, a\,| = 0;\ \ -a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow \underline{a^2 = b^2\ \ o\ \ a = \pm b}.$

Ejemplos:

$A_1 \Rightarrow \{a = 1\ b = 1\,\} \Rightarrow (-\ 1\ 1\ \ -\ 1\ 1\,);\ \ A_2 \Rightarrow \{a = 1\ b = -\ 1\,\} \Rightarrow (-\ 1\ \ -\ 1\ 1\ 1\,);$

$A_3 \Rightarrow \{a = 3\ b = -\ 3\,\} \Rightarrow (-\ 3\ \ -\ 3\ 3\ 3\,).$

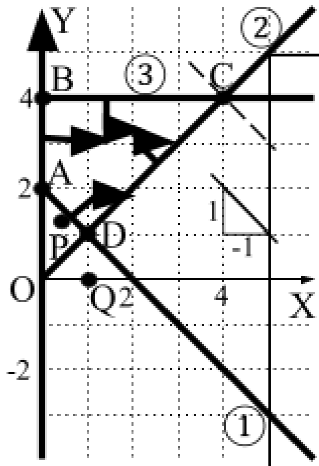
****

2º) a) Representa gráficamente el conjunto de puntos que satisfacen las inecuaciones lineales siguientes: $x + y \geq 2 \rightarrow (1);\ x - y \leq 0 \rightarrow (2);\ y \leq 4 \rightarrow (3);\ x \geq 0 \rightarrow (4).$
Indica si es o no una región acotada del plano. Indicar los puntos extremos de la región factible, así como las ecuaciones de las rectas que la delimitan.

$b)$ Calcula el máximo y el mínimo de la función $f(x,\ y) = x + y$, en el recinto anterior indicando en los puntos que se consiguen.

$c)$ ¿Pertenece el punto $P\left(\frac{1}{3},\ \frac{4}{3}\right)$ al recinto anterior? Justificar la respuesta.

$a)$



x	0	2
y	2	0

①$\Rightarrow x + y \geq 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y \geq 2 - x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow No.$

x	0	2
y	0	2

②$\Rightarrow x - y \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow\ y \geq x \Rightarrow Q(1,\ 0) \rightarrow No.$

$\underline{La\ zona\ factible\ está\ acotada\ en\ el\ plano}.$

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \quad x = 0\ x + y = 2\,\} \Rightarrow \underline{A(0,\ 2)}.$ $\qquad B \Rightarrow x = 0\ y = 4\,\} \Rightarrow \underline{B(0,\ 4)}.$

$C \Rightarrow \quad y = 4\ x - y = 0\,\} \Rightarrow \underline{C(4,\ 4)}.$

$D \Rightarrow x + y = 2\ x - y = 0\,\} \Rightarrow \underline{D(1,\ 1)}.$

Las rectas que delimitan la zona factible son, además del eje de coordenadas, (que no participa en la zona), las siguientes:

$\underline{①\Rightarrow y = x - 2}.$ $\qquad \underline{②\Rightarrow y = x}.$ $\underline{③\Rightarrow y = 5}.$

$b)$

Los valores de la función $f(x,\ y) = x + y$ en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 2) = 0 + 2 = \underline{2}.$ $\qquad$ $B \Rightarrow f(0,\ 4) = 0 + 4 = \underline{4}.$

$C \Rightarrow f(4,\ 4) = 4 + 4 = \underline{8}.$ $\qquad$ $D \Rightarrow f(1,\ 1) = 1 + 1 = \underline{2}.$

$$\underline{El\ valor\ mínimo\ se\ consigue\ en\ el\ punto\ C(4,\ 4\ )\ y\ su\ valor\ es\ 8.}$$

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función, como se observa en la figura.

$$f(x,\ y) = x + y = 0 \Rightarrow y = -x \Rightarrow m = -1.$$

Por ser la pendiente de la función igual que la de la inecuación 1 $\Rightarrow x + y \geq 2$:

$$\underline{El\ mínimo\ se\ produce\ en\ todos\ los\ puntos\ del\ segmento\ \overline{AD}\ y\ su\ valor\ es\ 2.}$$

$c)$

Un punto pertenece a una zona cuando satisface todas las condiciones o inecuaciones que la definen:

$$P\left(\frac{1}{3},\ \frac{4}{3}\right) \Rightarrow \left\{ 1 \Rightarrow x + y \geq 2 \rightarrow \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3} \ngeq 2 \Rightarrow No \qquad 2 \Rightarrow x - y \leq 0 \rightarrow \frac{1}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{3}{3} \right.$$

$$\underline{El\ punto\ P\left(\frac{1}{3},\ \frac{4}{3}\right) no\ pertenece\ a\ la\ zona\ factible.}$$

****

3º) Los beneficios (en miles de euros) por la venta de un producto en función de la inversión realizada en promoción (en miles de euros) viene dado por la siguiente expresión: $B(x) = \{5x + 15 \quad si \quad 0 \le x \le 3 \qquad -(x-3)^2 + 30 \; si \; 3 < x \le 8$.

$a)$ ¿Es continua esta función? ¿Es derivable? Representa gráficamente la función.

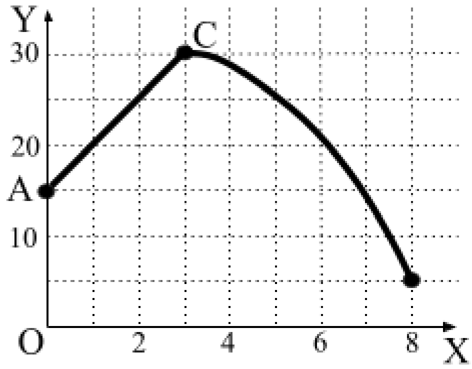
$b)$ ¿Cuándo crece y cuándo decrece la función del beneficio?

$c)$ ¿Cuándo se obtienen los beneficios máximo y mínimo?

$d)$ Representa la función derivada.

$a)$

Una función es continua en un punto cuando existen sus límites laterales, son iguales e igual al valor de la función en ese punto.



$B(x) = \{5x + 15 \quad si \quad 0 \le x \le 3 \qquad -(x-3)^2 + 30 \; si \; 3 < x \le 8$ es continua en su dominio, excepto para $x = 3$, cuya continuidad es dudosa y se estudia a continuación.

$$B(x) \; = (5x + 15) = 5 \cdot 3 + 15 = 30 = f(3) \;\; B(x) \; = \left[-(x-3)^2 + 30\right] \; = 30$$

$\Rightarrow B(x) \; = B(x) \; = B(3).$

<u>$La\ función\ B(x)\ es\ continua\ en\ su\ dominio$</u>.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas laterales existen y son iguales.

La función $B(x)$ es derivable en su dominio, excepto para $x = 3$, cuya derivada es dudosa y se estudia a continuación.

$$B'(x) = \{5 \quad si \quad 0 \le x \le 3 \;\; -2x + 6 \;\; si \; 3 < x \le 8 \Rightarrow B'(3^-) = 5 \; B'(3^+) = 0 \,\} \Rightarrow B'(3^-) \ne B$$

.

<u>$La\ función\ B(x)\ no\ es\ derivable\ para\ x = 3$</u>.

Tanto la continuidad como la derivabilidad de B(x) se evidencia de la observación de su representación gráfica.

$b)$

Una función es creciente o decreciente cuando su derivada es positiva o negativa, respectivamente.

Siendo $B'(x) = \{5 \quad si \quad 0 \leq x \leq 3 \quad - 2x + 6 \;\; si \; 3 < x \leq 6 \;\; \Rightarrow B'(x) > 0 \Rightarrow x > 3$

$\underline{El\ beneficio\ crece\ los\ tres\ primeros\ años\ y\ decrece\ el\ resto}.$

$c)$

Para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto:

$B'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 5 = 0 \Rightarrow x = 3.$

$B(3) = 5 \cdot 3 + 15 = 15 + 15 = 30.$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ se\ produce\ a\ los\ tres\ años\ y\ es\ de\ 30.000\ euros}.$

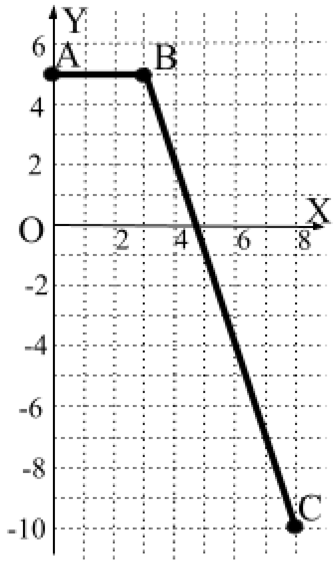
Del estudio del crecimiento y decrecimiento de la función se deduce que los valores mínimos de la función son para $x = 0$ y para $x = 8$.

$B(2) = 5 \cdot 2 + 15 = 10 + 15 = 25.$

$B(8) = -(8 - 3)^2 + 30 = -5^2 + 30 = -25 + 30 = 5.$

$\underline{El\ beneficio\ mínimo\ se\ produce\ actualmente\ (8\ años)\ y\ es\ de\ 8.000\ euros}.$

$d)$



La representación gráfica de la función derivada $B'(x) = \{5 \quad si \quad 0 \leq x \leq 3 \quad - 2x + 6 \;\; si \; 3 < x \leq 6$ es la que aparece en la figura adjunta.

****

4º) a) La antigüedad de los aviones comerciales sigue una distribución normal con una desviación típica de 8,28 años. Se coge una muestra de 40 aviones y la antigüedad media es de 13,41 años. Obtened un intervalo de confianza 90 % para la antigüedad media.

b) ¿Qué tamaño mínimo tiene que tener la muestra para obtener un intervalo de confianza del 95 % con la misma amplitud que el anterior?

----

a)

$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 1 - 0,90 = 0,10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,05} = 1,645.$

$(1 - 0,05 = 0,9500 \rightarrow z = 1,645).$

Datos: $\overline{x} = 13,41;\ n = 40;\ \sigma = 8,28;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,645.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(13,41 - 1'645 \cdot \frac{8,28}{\sqrt{40}};\ 13,41 + 1'645 \cdot \frac{8,28}{\sqrt{40}}\right);$

$(13,41 - 1'645 \cdot 1,309;\ 13,41 + 1'645 \cdot 1,309);$

$(13,41 - 2'1536;\ 13,41 + 2'1536);$

$$\underline{I.\ C._{90\ \%}\ (11'2564;\ 15'5636).}$$

b)

Nivel de confianza del 95 %.

$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$

$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$

$E = \frac{15,5636 - 112564}{2} = \frac{4.3072}{2} = 2,1536.$

Datos: $\sigma = 8,28;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96;\ E = \frac{10}{2} = 2,1536.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1,96 \cdot \frac{8,28}{2,1536}\right)^2 =$

$= (1,96 \cdot 3,8447)^2 = 7,5357^2 = 56,79.$

$\underline{El\ tamaño\ de\ la\ muestra\ debe\ ser\ al\ menos\ de\ 57\ aviones}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE BALEARES

SEPTIEMBRE – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contesta de manera clara y razonada a una de las dos opciones propuestas. Se valorará la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) utilizado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autorizarán las que traigan información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1º) a) Compruebe si la inversa de la matriz $A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ \frac{\sqrt{2}}{2}\ \ -\frac{\sqrt{2}}{2}\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ coincide con su traspuesta.

b) Determine, en los casos que sea posible, las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones lineales: $(1\ 1\ 0\ 1\ k\ 1\ 0\ 1\ k/2\ )\cdot(x\ y\ z\ ) = (0\ 0\ 0\ )$.

----

a)

$$A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ \frac{\sqrt{2}}{2}\ \ -\frac{\sqrt{2}}{2}\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(1\ 1\ \ -\ 1\ 1\ ) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot B.$$

La matriz inversa de B, aplicando el método de Gauss-Jordan, es la siguiente:

$$(B/I) = (1\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow F_2 + F_1\right\} \Rightarrow (1\ 0\ 1\ 1\ ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow \frac{1}{2}F_2\right\} \Rightarrow \left(1\ 0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \right) \Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow F_1 - F_2\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \left(\frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \right).$$

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot B \Rightarrow A^{-1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot B\right)^{-1} = \frac{2}{\sqrt{2}}\cdot B^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \right).$$

$$A^t = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ \ -\frac{\sqrt{2}}{2}\ \frac{\sqrt{2}}{2}\ \frac{\sqrt{2}}{2}\ \right) = \sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \right) = A^{-1}.$$

$\underline{Queda\ comprobado\ que\ A^{-1} = A^t}.$

$b)$

$(1\ 1\ 0\ 1\ k\ 1\ 0\ 1\ k/2\ )\cdot(x\ y\ z\ ) = (0\ 0\ 0\ ).$

$Rang\ M\ = (1\ 1\ 0\ 1\ k\ 1\ 0\ 1\ k/2\ ) \Rightarrow \left\{F_2 \to F_2 - F_1\right\} \Rightarrow (1\ 1\ 0\ 0\ k\ -\ 1\ 1\ 0\ 1\ k/2\ ) \Rightarrow \left\{F_2 \right.$

$\left\{F_2 \leftrightarrow F_3\right\} \Rightarrow (1\ 1\ 0\ 0\ 1\ k/2\ 0\ k\ -\ 1\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_1 \to F_1 - F_2 F_3 \to F_3 - (k\ -\ 1)F_2\right\} \Rightarrow \left(1\ 0\right.$

.

$\frac{-k^2-k+2}{2} = 0;\ \ k^2 + k - 2 = 0;\ \ x = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm3}{2} \Rightarrow k_1 =-2,\ k_2 = 1.$

$Para\ \{k \neq -\ 2\ k \neq 1\ \} \Rightarrow Rang\ M\ = 3\ = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.$

$\underline{Para\ \{k \neq -\ 2\ k \neq 1\ \} \Rightarrow Solución\ trivial: x\ = y\ = x\ = 0}.$

$Para\ \{k\ =-\ 2\ k\ = 1\ \} \Rightarrow Rang\ M\ = 2\ < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.$

$k\ =-\ 2 \Rightarrow \quad x + y = 0\ x + y + z = 0\ \} \Rightarrow y = \lambda,\ x =-\ \lambda,\ z =-\ x + 2y = \lambda +$

.

$\underline{Solución: x\ =-\ \lambda,\ y\ = \lambda,\ z\ = 3\lambda,\ \forall\lambda\in R}.$

$k\ = 1 \Rightarrow \quad x + y = 0\ x - 2y + z = 0\ \} \Rightarrow y = \lambda,\ x =-\ \lambda,\ z = 0.$

$\underline{Solución: x\ =-\ \lambda,\ y\ = \lambda,\ z\ = 0,\ \forall\lambda\in R}.$

****

2º) $a)$ Representa gráficamente el conjunto de puntos que satisfacen las inecuaciones lineales siguientes: $2x + 5y \leq 50 \to (1)$; $3x + 5y \leq 55 \to (2)$; $5x + 2y \leq 60 \to (3)$; $x + y \leq 18 \to (4)$; $x \geq 0,\ y \geq 0 \to (5)$. Indica si es o no una región acotada del plano. Indicar los puntos extremos de la región factible, así como las ecuaciones de las rectas que la delimitan.

$b)$ Indique la posición de los puntos $P(5,\ 5)$ y $Q(12,\ 12)$ con relación a la región determinada en el apartado anterior. En caso de que el punto sea exterior, indique, comprobándolo algebraicamente, cuál o cuáles de las inecuaciones no cumple.

$c)$ Para la región del apartado $a)$ calcule en que puntos alcanza el valor máximo la función $h(x,\ y) = 400x + 500y + 1.000$.

----

x	0	25
y	10	0

$①\Rightarrow 2x+5y\le 50\Rightarrow y\le \frac{50-2x}{5}\Rightarrow O(0,\ 0)\to Si.$

x	0	10
y	11	5

$②\Rightarrow 3x+5y\le 55\Rightarrow y\le \frac{55-3x}{5}\Rightarrow O(0,\ 0)\to Si.$

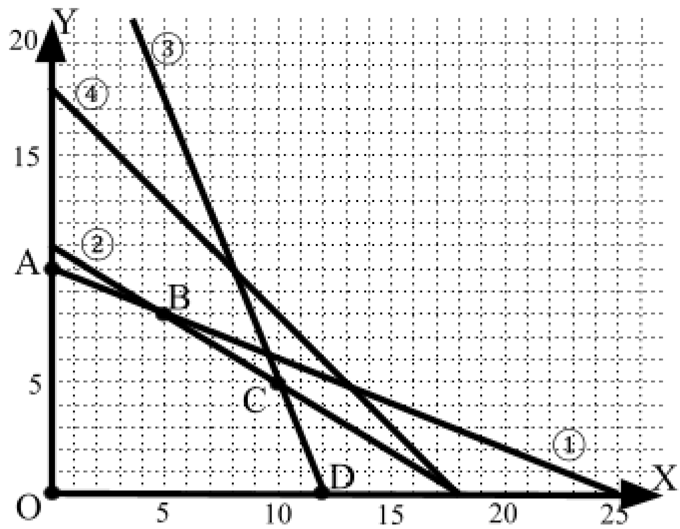
x	4	12
y	20	0

$③\Rightarrow 5x+2y\le 60\Rightarrow y\le \frac{60-5x}{2}\Rightarrow O(0,\ 0)\to Si.$

x	0	18
y	18	0

$④\Rightarrow x+y\le 18\Rightarrow y\le 18-x\Rightarrow O(0,\ 0)\to Si.$

La región factible se indica en la figura, cuyos vértices son los siguientes:



$A\Rightarrow \left.\begin{matrix}2x+5y=50\\ x=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow \underline{A(0,\ 10)}.$

$B\Rightarrow \left.\begin{matrix}2x+5y=50\\ 3x+5y=55\end{matrix}\right\}\Rightarrow \underline{B(5,\ 8)}.$

$C\Rightarrow \left.\begin{matrix}3x+5y=55\\ 5x+2y=60\end{matrix}\right\}\Rightarrow \underline{C(10,\ 5)}.$

$D\Rightarrow \left.\begin{matrix}5x+2y=60\\ y=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow \underline{D(12,\ 0)}.$

Las rectas que delimitan la zona factible son, además de los ejes de coordenadas, las siguientes:

$\underline{①\Rightarrow y=\frac{50-2x}{5}}.\quad \underline{②\Rightarrow y=\frac{55-3x}{5}}.\quad \underline{③\Rightarrow y=\frac{60-5x}{2}}.\quad \underline{④\Rightarrow y=-x+18}.$

$b)$

Se estudia la posición de los puntos $P(5,\ 5)$ y $Q(12,\ 12)$ con respecto a la zona factible:

$P(5,\ 5)\Rightarrow ①\Rightarrow 2x+5y\le 50\to 2\cdot 5+5\cdot 5\le 50\Rightarrow Si\ ②\Rightarrow 3x+5y\le 55\to 3\cdot 5+5\cdot 5\le 55\Rightarrow Si$

.

$\underline{El\, punto\; P(5,\ 5)\; pertenece\; a\; la\; zona\; factible}.$

$Q(12,\ 12) \Rightarrow 1 \Rightarrow 2x + 5y \leq 50 \rightarrow 2 \cdot 12 + 5 \cdot 12 \leq 50 \Rightarrow No\; 2 \Rightarrow 3x + 5y \leq 55 \rightarrow 3 \cdot 12 + 5 \cdot 12$
.

$\underline{El\, punto\; Q(12,\ 12)\; no\; pertenece\; a\; la\; zona\; factible}.$

$\underline{El\, punto\; Q(12,\ 12)\; sólamente\; satisface\; las\; inecuaciones\; x \geq 0\; e\; y \geq 0}.$

$c)$

Los valores de la función $h(x,\ y) = 400x + 500y + 1.000$ en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow h(0,\ 10) = 400 \cdot 0 + 500 \cdot 10 + 1.000 = 0 + 5.000 + 1.000 = \underline{6.000}.$

$B \Rightarrow h(5,\ 8) = 400 \cdot 5 + 500 \cdot 8 + 1.000 = 2.000 + 4.000 + 1.000 = \underline{7.000}.$

$C \Rightarrow h(10,\ 5) = 400 \cdot 10 + 500 \cdot 5 + 1.000 = 4.000 + 2.5000 + 1.000 = \underline{7.500}$
.

$D \Rightarrow h(12,\ 0) = 400 \cdot 12 + 500 \cdot 0 + 1.000 = 4.800 + 0 + 1.000 = \underline{5.800}.$

$\underline{El\; máximo\; se\; alcanza\; en\; el\; punto\; C(10,\ 5)}.$

****

3º) El número de individuos, en millones, de una población, viene dado por la función $P(t) = \frac{15+t^2}{(t+1)^2}$, donde t indica los años transcurridos desde $t = 0$. Calcule:

a) La población inicial y la población al cabo de 3 años.

b) El año en que se consigue la mínima población. ¿Cuál será esta población?

c) ¿Cuál será la población a lo largo del tiempo?

----

a)

$$P(0) = \frac{15+t^2}{(t+1)^2} = \frac{15}{1} = 15 \quad .$$

$$P(3) = \frac{15+3^2}{(3+1)^2} = \frac{15+9}{4^2} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

$\underline{La\ población\ inicial\ era\ de\ 15\ millones\ y\ a\ los\ 3\ años\ de\ 1,5\ millones}.$

b)

Es condición necesaria para que una función tenga un mínimo relativo es que se anule su primera derivada en ese punto:

$$P'(t) = \frac{2t\cdot(t+1)^2-\left(15+t^2\right)\cdot 2\cdot(t+1)\cdot 1}{(t+1)^4} = \frac{2t\cdot(t+1)-2\cdot\left(15+t^2\right)}{(t+1)^3} = \frac{2t^2+2t-30-2t^2}{(t+1)^3} = \frac{2t-30}{(t+1)^3}.$$

$$P'(t) = 0 \Rightarrow \frac{2t-30}{(t+1)^3} = 0 \Rightarrow 2t - 30 = 0 \Rightarrow t = 15.$$

$$P(15) = \frac{15+15^2}{(15+1)^2} = \frac{15+225}{16^2} = \frac{240}{256} = \frac{30}{32} = \frac{15}{16} = 0,9375.$$

$\underline{La\ población\ es\ mínima\ a\ los\ 15\ años\ y\ es\ de\ 937.500\ individuos}.$

c)

$$lím\ t\to\infty\ P(t) = lím\ t\to\infty\ \frac{15+t^2}{(t+1)^2} = lím\ t\to\infty\ \frac{t^2+15}{t^2+2t+1} = 1.$$

$\underline{La\ población\ tiende\ a\ estabilizarzse\ en\ un\ millón\ de\ individuos}.$

****

4º) La altura media de los jóvenes de 20 años de una población sigue una distribución normal de media 174 cm y desviación típica 10. Se extrae una muestra aleatoria simple de 144 jóvenes. Sea $\overline{x}$ la media muestral de la muestra observada.

a) ¿Cuáles son la media y la varianza de la variable aleatoria x?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la media de la muestral esté comprendida entre 173 y 175 cm?

----

a)

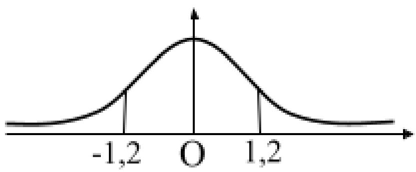
$\underline{La\ media\ es\ \mu\ =\ 174\ cm\ y\ la\ varianza\ es\ \sigma\ =\ 10^2\ =\ 100}.$

b)

$$\overline{X} = N\left(\mu,\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(174,\ \frac{10}{\sqrt{144}}\right) = N\left(174,\ \frac{10}{12}\right) \Rightarrow \overline{X} = N(174,\ 0'833).$$

Tipificando la variable: $Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\rho} \to N(0,\ 1) \Rightarrow Z = \frac{\overline{X}-174}{0{,}833}$.

$$P(173 < \overline{X} < 175) = P\left(\frac{173-174}{0{,}833} < \frac{\overline{X}-174}{0{,}833} < \frac{175-174}{0{,}833}\right) =$$



$$= P\left(\frac{-1}{0{,}833} < Z < \frac{1}{0{,}833}\right) = P(-\ 1{,}2 < Z < 1{,}2) =$$

$$= P(Z < 1{,}2) - [1 - P(Z < 1{,}2)] =$$

$$= P(Z < 1{,}2) - 1 + P(Z < 1{,}2) = 2 \cdot P(Z < 1{,}2) - 1 = 2 \cdot 0{,}8849 - 1 =$$

$$= 1{,}7698 - 1 = \underline{0{,}7698}.$$

****

OPCIÓN B

1º) a) En una ebanistería producen sillas, mesas y armarios con un total de 350 piezas por mes. Las horas de mano de obra invertidas son de 2 horas por silla, 3 horas por mesa y 5 horas por armario, y se utilizan una plancha de madera por silla, 2 planchas por mesa y tres planchas por armario. Si se dispone de un total de 1.050 horas y de 625 planchas de madera al mes, ¿cuántas unidades de cada mueble pueden fabricarse en ese tiempo?
b) Determinar el valor de a para que la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & a \end{pmatrix}$ no tenga inversa.

----

a)

Siendo x, y, z las sillas, mesas y armarios que se producen, respectivamente; del enunciado del ejercicio se deduce el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 350 \\ 2x + 3y + 5z = 1.050 \\ x + 2y + 3z = 625 \end{array} \right\}.$$

Resolviendo por el método de Gauss:

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 350 \\ 2 & 3 & 5 & 1.050 \\ 1 & 2 & 3 & 625 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \end{array} \right\} \Rightarrow (1$$

$$\Rightarrow \{F_3 \to F_3 - F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 350 \\ 0 & 1 & 3 & 350 \\ 0 & 0 & -1 & -75 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow z = 75.$ $\quad y + 2 \cdot 75 = 350;\ y + 150 = 350 \Rightarrow y = 350 - 150 = 200.$

$x + 200 + 75 = 350;\ x + 275 = 350 \Rightarrow x = 350 - 275 = 75.$

$\underline{Al\ mes\ se\ pueden\ fabricar\ 75\ silla,\ 200\ mesas\ y\ 75\ armarios}.$

b)

Una matriz no es invertible cuando su determinante es cero.

$|M| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & a \end{vmatrix} = 0;\ 2a + 15 + 18 - 12 - 15 - 3a;\ -a + 6 =$

$\Rightarrow a = 6.$

$\underline{La\ matriz\ A\ no\ es\ invertible\ para\ a = 6}.$

****

2º) a) Representa gráficamente el conjunto de puntos que satisfacen las inecuaciones lineales siguientes: $x + y \leq 14 \rightarrow (1)$; $2x + 3y \leq 36 \rightarrow (2)$; $4x + y \geq 16 \rightarrow (3)$; $x - 3y \leq 0 \rightarrow (4)$. Indique si es o no una región acotada del plano. Indicar los puntos extremos de la región factible, así como las ecuaciones de las rectas que la delimitan.

b) ¿Cuáles de las restricciones satisfacen a los puntos $P(0,\ 5)$, $Q(5,\ 15)$, $R(0,\ 15)$?

----

a)

x	0	14
y	14	0

①$\Rightarrow x + y \leq 14 \Rightarrow y \leq 14 - x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	18	0
y	0	12

②$\Rightarrow 2x + 3y \leq 36 \Rightarrow y \leq \frac{36-2x}{3} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

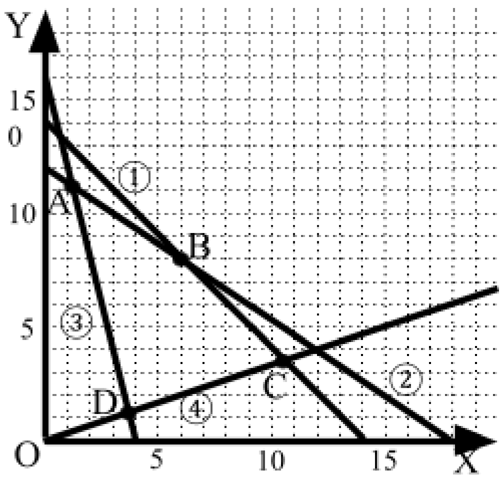
x	0	4
y	16	0

③$\Rightarrow 4x + y \geq 16 \Rightarrow y \leq 16 - 4x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow No.$

x	0	15
y	0	5

④$\Rightarrow x - 3y \leq 0 \Rightarrow y \leq -\frac{1}{3}x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

La región factible se indica en la figura, cuyos vértices son los siguientes:



$A \Rightarrow 2x + 3y = 36\ \ 4x + y = 16\} \quad 4x + 6y = 72\ \ -4x - y = -16\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5y = 56;\ \ y = \frac{56}{5} = 10,2.$

$4x + 10,2 = 16; x = \frac{16-10,2}{4} = \frac{5,8}{4} = 1,45 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{A(1'45,\ 10'2)}.$

$B \Rightarrow \quad x + y = 14\ 2x + 3y = 36\} \quad -2x - 2y = -28 \quad 2x + 3y = 36\} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 8. \quad x + 8 = 14; \quad x = 6 \Rightarrow \underline{B(6,\ 8)}.$

$C \Rightarrow x + y = 14\ x - 3y = 0\} \quad x + y = 14 \ - x + 3y = 0\} \Rightarrow 4y = 14; \ \ 2y = 7 \Rightarrow y$

.

$x + 3,5 = 14; \ \ x = 14 - 3,5 = 10,5 \Rightarrow \underline{C(10'5,\ 3'5)}.$

$D \Rightarrow 4x + y = 16 \ \ x - 3y = 0\} \ 12x + 3y = 48 \quad x - 3y = 0\} \Rightarrow 13x = 48; \ \ x =$

.

$4 \cdot 3,69 + y = 16; \ \ 14,77 + y = 16; \ \ y = 16 - 14,77 = 1,23 \Rightarrow \underline{D(3'69,\ 1'23)}$

.

$\underline{Como\ se\ observa\ en\ la\ figura,\ es\ una\ región\ acotada\ del\ plano}.$

Las rectas que determinan la zona factible son las siguientes:

$1 \Rightarrow x + y = 14 \Rightarrow \underline{y = 14 - x}.$

$2 \Rightarrow 2x + 3y = 36 \Rightarrow y = \underline{\frac{36-2x}{3}}.$

$3 \Rightarrow 4x + y = 16 \Rightarrow \underline{y = 16 - 4x}.$

$4 \Rightarrow x - 3y = 0 \Rightarrow \underline{y = \frac{1}{3}x}.$

$b)$

Un punto pertenece a una zona cuando satisface todas las condiciones o inecuaciones que la definen:

$P(0,\ 5) \Rightarrow \{ 1 \Rightarrow x + y \le 14 \to 0 + 5 = 5 \le 14 \Rightarrow \underline{Si}. \quad 2 \Rightarrow 2x + 3y \le 36 \to 0 + 25 = 2$

.

$Q(5,\ 15) \Rightarrow \{ 1 \Rightarrow x + y \le 14 \to 5 + 15 = 20 \le 14 \Rightarrow \underline{No}. \quad 2 \Rightarrow 2x + 3y \le 36 \to 10$

.

$R(0,\ 15) \Rightarrow \{ 1 \Rightarrow x + y \le 14 \to 0 + 15 = 15 \le 14 \Rightarrow \underline{No}. \quad 2 \Rightarrow 2x + 3y \le 36 \to 0 +$

.

****

3º) Considere la función $f(x) = \frac{-4x}{1+x^2}$. Se pide:

a) Calcule la derivada de $f(x)$.

b) Resuelva la ecuación $f'(x) = 0$.

c) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$.

d) Determine los máximos y mínimos de la función $f(x)$.

e) Calcule $f''(x)$ y resuelva la ecuación $f''(x) = 0$. Conteste si pueden existir o no puntos de inflexión.

----

a)

$$f'(x) = \frac{-4\cdot(1+x^2)-(-4x)\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-4-4x^2+8x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4x^2-4}{(1+x^2)^2} = \underline{\frac{4(x^2-1)}{(1+x^2)^2}}.$$

b)

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{4(x^2-1)}{(1+x^2)^2} = 0;\ \ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \underline{x_1 = -1},\ \underline{x_2 = 1}.$$

c)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

Teniendo en cuanta que $f(x)$ es continua en su dominio, que es R, y que el denominador de la derivada es $\left(1 + x^2\right)^2 > 0,\ \forall x \in R$, las raíces $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$ dividen al domino de la función en tres intervalos que son, alternativamente, crecientes y decrecientes.

Considerando, por ejemplo, que $f'(0) = \frac{-4}{1} = -4 < 0$, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon (-1, 1)}.$$

d)

Una función tiene un máximo relativo en un punto cuando se anula la primera derivada y es negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera y, tiene un mínimo relativo para los valores reales que anulan la primera derivada y hacen positiva la segunda derivada.

También pueden deducirse el máximo y el mínimo que tiene la función $f(x)$ considerando su continuidad y los periodos de crecimiento y decrecimiento: el máximo se produce para $x=-1$ y el mínimo para $x=1$.

$$f(-1)=\frac{-4\cdot(-1)}{1+(-1)^2}=\frac{4}{1+1}=2\Rightarrow \underline{Máximo: A(-1,\ 2)}.$$

$$f(1)=\frac{-4\cdot 1}{1+1^2}=\frac{-4}{1+1}=-2\Rightarrow \underline{Mínimo: B(1,\ -2)}.$$

Se justifica la condición de máximo y de mínimo mediante la segunda derivada:

$$f''(x)=\frac{8x\cdot\left(1+x^2\right)^2-4\left(x^2-1\right)\cdot\left[2\cdot\left(1+x^2\right)\cdot 2x\right]}{\left(1+x^2\right)^4}=\frac{8x\cdot\left(1+x^2\right)-4\left(x^2-1\right)\cdot 4x}{\left(1+x^2\right)^3}=$$

$$=\frac{8x+8x^3-16x^3+16x}{\left(1+x^2\right)^3}=\frac{-8x^3+24x}{\left(1+x^2\right)^3}=\frac{-8x\left(x^2-3\right)}{\left(1+x^2\right)^3}.$$

$$f''(-1)=\frac{-8\cdot(-1)\left[(-1)^2-3\right]}{\left[1+(-1)^2\right]^3}=\frac{8\cdot(1-3)}{(1+1)^3}=\frac{-16}{8}<0\Rightarrow \underline{Máximo\ para\ x=-1}.$$

$$f''(1)=\frac{-8\cdot 1\cdot\left(1^2-3\right)}{\left(1+1^2\right)^3}=\frac{-8\cdot(1-3)}{(1+1)^3}=\frac{16}{8}>0\Rightarrow \underline{Mínimo\ para\ x=1}.$$

$e)$

$$\underline{f''(x)=\frac{-8x\left(x^2-3\right)}{\left(1+x^2\right)^3}}.$$

$$f''(x)=0\Rightarrow\frac{-8x\left(x^2-3\right)}{\left(1+x^2\right)^3}=0;\quad -8x\left(x^2-3\right)=0\Rightarrow \underline{x_1=0},\ \underline{x_2=\sqrt{3}},\ \underline{x_3=-\sqrt{3}}.$$

Teniendo en cuenta que para que una función tenga un punto de inflexión es condición necesaria que se anule su segunda derivada y considerando la continuidad de la función, existen los tres siguientes puntos de inflexión:

$$f(0)=\frac{-4\cdot 0}{1+0^2}=0\Rightarrow \underline{I_1(0,\ 0)}.$$

$$f\left(\sqrt{3}\right)=\frac{-4\cdot\sqrt{3}}{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}=-\frac{4\sqrt{3}}{4}=-\sqrt{3}\Rightarrow \underline{I_2\left(\sqrt{3},\ -\sqrt{3}\right)}.$$

$$f\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{-4\cdot\left(-\sqrt{3}\right)}{1+\left(-\sqrt{3}\right)^{2}}=\frac{4\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}\Rightarrow \underline{I_{3}\left(-\sqrt{3},\ \sqrt{3}\right)}.$$

Nótese la simetría de la función con respecto al origen por ser $f(-x)=-f(x)$ que se observa en el máximo y el mínimo y los puntos de inflexión.

****

4º) Un fabricante garantiza que la duración media de su producto A es de 1.200 horas con una desviación típica de 55 horas. Para comprobar lo que dice el fabricante respecto a la duración, se ha realizado una prueba con 81 unidades del producto y se ha obtenido una duración media de 1.191 horas. ¿Podemos aceptar que la duración media del producto A es exactamente la que dice el fabricante con un nivel de significación del 8 %?

$Hipótesis\ nula \rightarrow H_0: \mu = 1.200$ $\qquad$ $Hipótesis\ alternativa \rightarrow H_1: \mu \neq 1.200$ }.

Contraste bilateral.

Conocemos: $n = 81;\ \mu_0 = 1.200;\ \sigma = 55.$

La zona de contraste *bilateral* en este caso es $\left(\mu_0 - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \mu_0 + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\alpha = 0,08.\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,04} = 1,75.$ $\qquad$ $(1 - 0,04 = 0,96 \rightarrow z = 1,75)$

.

$$\left(1.200 - 1,75 \cdot \frac{55}{\sqrt{81}};\ 1.200 + 1,75 \cdot \frac{55}{\sqrt{81}}\right);$$

$(1.200 - 1,75 \cdot 6,111;\ 1.200 + 1,75 \cdot 6,111);$

$(1.200 - 10,6944;\ 1.200 + 10,6944) \Rightarrow \left(1.189,3056;\ 1.210'6944\right).$

Por estar contenida la media muestral $\overline{x} = 1.191$ en la zona de contraste:

$\underline{Con\ significación\ del\ 8\ \%\ se\ acepta\ como\ cierto\ lo\ que\ dice\ el\ fabricante.}$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CANARIAS

JUNIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Cada alumno debe elegir sólo una de las pruebas, A o B.

PRUEBA A

1º) A principios de 2014, una noticia en el periódico afirmaba que un 49,6 % de los escolares de una región tenían sobrepeso. Por ello se decidió cambiar la dieta escolar en esa región y, después de un año, se tomó una muestra del 800 de dichos escolares resultando que 350 tenían sobrepeso.

a) Con una significación del 3 %, ¿este estudio muestral permite aceptar la afirmación de que la dieta ha sido efectiva y que el porcentaje de niños con sobrepeso se ha reducido?

b) Con un nivel de confianza igual a 0,97, ¿de qué tamaño debe ser la muestra para, con un error máximo del 3 %, hacer una estimación de la proporción poblacional de niños con sobrepeso? Suponer que no tenemos datos poblacionales ni muestrales.

----

a)

$Hipótesis\ nula \rightarrow H_0: p = 0,496 \qquad Hipótesis\ alternativa \rightarrow H_1: p < 0,496 \}$

. Contraste unilateral.

Conocemos: $n = 800;\ \ p_0 = 0,496;\ \ q_0 = 1 - 0,496 = 0,504.$

$\alpha = 0,03 \rightarrow z_\alpha = 1,88.\ (1 - 0,03 = 0,9700 \rightarrow z = 1,88).$

Se aplica la fórmula adecuada que nos da el intervalo de confianza pedido, que es la siguiente: $\left(p - z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot q_0}{n}},\ \ +\infty\right).$

$$\left(0'496 - 1'88 \cdot \sqrt{\frac{0,496 \cdot 0,504}{800}},\ \ +\infty\right);\ \left(0'496 - 1'88 \cdot \sqrt{\frac{0,25}{800}},\ \ +\infty\right);$$

$\left(0'496 - 1'88 \cdot 0'0177, \;\; +\infty\right)$; $\left(0'496 - 0'033, \;\; +\infty\right)$; $\left(0'463, \;\; +\infty\right)$.

La proporción muestral $p = \frac{350}{800} = 0,4375$ No se encuentra en la región crítica, por lo cual:

$\underline{Se\ rechaza\ la\ hipótesis\ nula:\ la\ dieta\ ha\ sido\ efectiva.}$

$b)$

$1 - \alpha = 0,97 \rightarrow \alpha = 1 - 0,97 = 0,03 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,015} = 2,17.$

$(1 - 0,015 = 0,9850 \rightarrow z = 2,17).$

$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}$. Se despeja la n:

$$E^2 = \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot \frac{p \cdot q}{n} \Rightarrow n = \frac{\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot p \cdot q}{E^2} = \frac{2,17^2 \cdot 0,25}{0,03^2} = \frac{1,177}{0,0009} = 1308,03.$$

$\underline{El\ tamaño\ de\ la\ muestra\ debe\ ser\ de\ al\ menos\ de\ 1.309\ escolares.}$

****

2º) En una empresa se quiere racionalizar el gasto en teléfono móvil de sus agentes comerciales. Para ello se hace un estudio sobre una muestra de dichos agentes que permite hacer la siguiente afirmación: "con una confianza del 95 %, la media del gasto mensual en teléfono móvil está entre 199,71 y 220,29 euros". Suponiendo que el gasto en teléfono móvil es una variable normal:

a) Calcular el dato muestral y el error cometido en la estimación.

b) Si la desviación típica muestral es de 42 euros, ¿de qué tamaño es la muestra?

----

a)

$$\overline{x} = \frac{220{,}29+199{,}71}{2} = \frac{420}{2} = 210.$$

$$E = \frac{220{,}29-199{,}71}{2} = \frac{20{,}58}{2} = 10,29.$$

$\underline{La\ media\ muestral\ es\ 210\ euros\ y\ el\ error\ máximo\ 10,29\ euros.}$

b)

$$1 - \alpha = 1 - 0,5 = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1,96$$

.

$$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$$

Datos: $\overline{x} = 210;\ \sigma = 42;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96;\ E = 10,29.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1,96 \cdot \frac{42}{10{,}29}\right)^2 =$

$= (1,96 \cdot 4,0816)^2 = 8^2 = 64.$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 64\ agentes\ comerciales.}$

****

3º) El número de enfermos (en cientos) que padecen cierta enfermedad, viene dado por la función: $N(t) = \{-3t + 16 \;\; si\, 0 \le x \le 5 \;\; \frac{4t-17}{2t-7} \;\; si\, t > 5$, siendo t el tiempo (en meses) desde que se detectó y empezó a tratarse.

a) Decir razonadamente si la función es creciente o decreciente.

b) ¿En qué momento se dan el máximo y el mínimo? ¿Cuántos enfermos hay en ese momento?

c) ¿En algún momento llega a extinguirse la enfermedad? Razona la respuesta.

----

a)

Una función es creciente o decreciente en un punto cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente, en ese punto.

$$N'(t) = \{ \quad -3 \quad si\, 0 \le x \le 5 \qquad \frac{6}{(2t-7)^2} \;\; si\, t > 5 \;\; (*) .$$

(*) $\quad g(t) = \frac{4t-17}{2t-7} \Rightarrow g'(t) = \frac{4\cdot(2t-7)-(4t-17)\cdot 2}{(2t-7)^2} = \frac{8t-28-8t+34}{(2t-7)^2} = \frac{6}{(2t-7)^2}.$

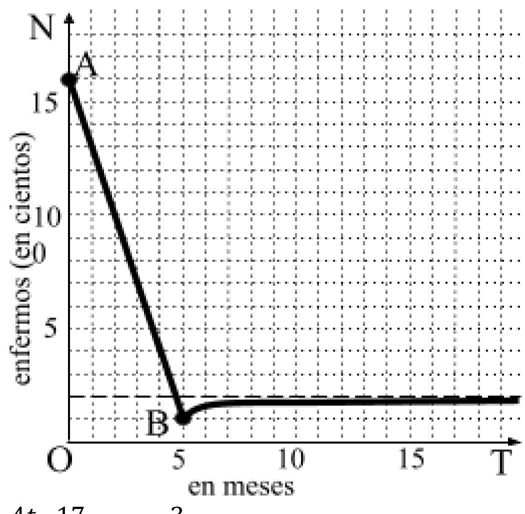
$$\underline{Crecimiento: N'(t) > 0 \Rightarrow t\epsilon(5, +\infty)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: N'(t) < 0 \Rightarrow t\epsilon(0, 5)}.$$

b)

Teniendo en cuenta que:

1.-- La función es continua en su dominio $[0, \; +\infty)$, por ser:



$N(t) \;= (-3t + 16) \;= 1 = N(5) \; N(t) \;= \frac{4t-17}{2t-7} \;= \frac{3}{3} = 1 \qquad \} \Rightarrow$

$\Rightarrow N(t) \;=N(t)\; = N(5).$

2.-- $N(0) = 16; N(5) = 1.$

3.-- $(t) \;= \frac{4t-17}{2t-7} \;= 2.$

La representación gráfica de la función es la que se indica en la figura, donde se deduce que los máximos y mínimos son los siguientes:

$$\underline{Máximo: A(0,\ 16)\ y\ Mínimo: B(5,\ 1)}.$$

$$\underline{El\ máximo\ se\ produce\ al\ principio\ con\ 1.600\ enfermos}.$$

$$\underline{El\ mínimo\ se\ produce\ al\ quinto\ mes\ con\ 100\ enfermos.}$$

$c)$

Por ser $(t) \;= \frac{4t-17}{2t-7} \;= 2$:

$$\underline{La\ enfermedad\ no\ se\ extingue;\ con\ el\ tiempo\ se\ estabiliza\ en\ 200\ enfermos}.$$

****

4º) En un cine de Suiza se proyectan las películas en tres lenguas: alemán, italiano y francés. El número total de proyecciones es 2.000 y, debido a la composición de la población suiza, se hacen siguiendo las siguientes normas:

- El 60 % de las películas en italiano más el 50 % de las películas en francés hacen las dos terceras partes de las proyecciones en alemán.
- Por cada dos proyecciones en francés se hacen 3 proyecciones en alemán.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) Calcular cuántas proyecciones se hacen en cada una de las lenguas.

----

a)

Sean x, y, z el número de películas en alemán, italiano y francés que se proyectan, respectivamente.

$x + y + z = 2.000\ 0,6y + 0,5z = \frac{2}{3}x\ 2x = 3z\}\quad x + y + z = 2.000\ \ 1,8y + 1,5$

.

b)

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|2000\ 1\ 1\ 0\ -18\ -15\ 0\ 0\ -3\ |}{|1\ 1\ 1\ 20\ -18\ -15\ 2\ 0\ -3\ |} = \frac{2.000\cdot 54}{54-30+36+60} = \frac{2.000\cdot 54}{120} = \frac{200\cdot 54}{12} = 100\cdot 9 = 900$$

.

$$y = \frac{|1\ 2000\ 1\ 20\ 0\ -15\ 2\ 0\ -3\ |}{120} = \frac{-2.000\cdot|20\ -15\ 2\ -3\ |}{120} = \frac{-50\cdot(-60+30)}{3} = 50\cdot 10 = 500$$

.

$$z = \frac{|1\ 1\ 2000\ 20\ -18\ 0\ 2\ 0\ 0\ |}{120} = \frac{2\cdot 18\cdot 2.000}{120} = 36\cdot\frac{50}{3} = 12\cdot 50 = 600.$$

$\underline{Se\ proyectan\ 900,\ 500\ y\ 600\ películas\ en\ aleman,\ italiano\ y\ francés,\ resp.}$

****

PRUEBA B

1º) En un periódico se lee la siguiente información: "La encuesta sobre equipamiento y uso de las tecnologías de información y comunicación en los hogares muestra los cambios en los hábitos de los últimos años. En dicha encuesta han participado 20.738 hogares españoles, de los cuales 8.980 han afirmado que disponen de un ordenador en casa". Fuente: Instituto Nacional de Estadística (INE).

a) A partir de la información recogida, ¿cuál sería la estimación puntual para la proporción de familias españolas que disponen de ordenador en casa?

b) A partir de la información recogida, construir un intervalo de confianza del 95 % para la proporción de familias españolas que disponen de ordenador en casa.

c) Si se mantiene la proporción muestral, ¿cuál es el número mínimo de hogares que habría que seleccionar para conseguir, con una confianza del 95 %, que el error máximo en la estimación de dicha proporción sea inferior a 0,005?

----

a)

$$p = \frac{8.980}{20.738} = 0,4330.$$

$$\underline{La\ proporción\ de\ familias\ con\ ordenador\ es\ del\ 43,30\ \%}.$$

b)

$$1 - \alpha = 1 - 0,5 = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96$$

.

$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96)$.

Datos: $p = 0,4330;\ \ q = 0,5670;\ \ n = 20.738;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$.

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q , $\sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}},\ p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$.

$$\left(0'4330 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,4330 \cdot 0,5670}{20.738}},\ 0'4330 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,4330 \cdot 0,5670}{20.738}}\right);$$

$$\left(0'4330 - 1,96 \cdot 0'0034,\ 0'4330 + 1,96 \cdot 0'0034\right);$$

$$\left(0'4330 - 0'0067,\ 0'4330 + 0'0067\right).$$

$$\underline{I.\ C._{95\ \%} = \left(0'4263,\ 0'4397\right)}.$$

$c)$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow E^2 = \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot \frac{p \cdot q}{n} \Rightarrow n = \frac{\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot p \cdot q}{E^2} = \frac{1{,}96^2 \cdot 0{,}2455}{0{,}005^2} =$$

$$= 1{,}96^2 \cdot 9.820{,}44 = 37.726'20.$$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 37.727\ hogares}.$

****

2º) En un periódico se lee la siguiente información: "Las familias canarias destinaron una media de 600 euros anuales a pagar la factura de la electricidad". Si el gasto anual en electricidad por familia en Canarias sigue una distribución normal con desviación típica igual a 50 euros:

a) Elegida una familia canaria al azar, ¿cuál es la probabilidad de que su gasto anual en electricidad sea superior a 630 euros?

b) Elegidas 100 familias canarias al azar, ¿cuál es la probabilidad de que su gasto medio anual en electricidad sea como mucho 590 euros?

----

a)

$$p(\overline{X} > 630) = p\left(\frac{\overline{X}-600}{50} > \frac{630-600}{50}\right) = p(Z > 0,6) = 1 - p(Z \le 0,6) =$$

$$= 1 - 0,7257 = \underline{0,2743}.$$

b)

$$Variable\ X \to N(600,\ 50) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Para\ n = 100 \to \overline{X} = N\left(600,\ \frac{50}{\sqrt{100}}\right) = N(600,\ 5).$$

$$P(X \le 590) = P\left(\frac{\overline{X}-600}{5} \le \frac{590-600}{5}\right) = P\left(Z \le \frac{-10}{5}\right) = P(Z \le -2) =$$

$$= P(Z \ge 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - 0,9772 = \underline{0,0228}.$$

****

3º) El peso que una plancha de cierto material es capaz de soportar depende de la edad de la misma según la función $P(t) = \{50 - t^2 \ si \ 0 \leq t \leq 3 \ 56 - \frac{20t}{t+1} \ si \ t > 3$, donde P indica el peso en toneladas y t la edad en años de la plancha. Responde a las siguientes preguntas, justificando las respuestas:

$a)$ ¿Es el peso una función continua con la edad?

$b)$ Según vaya pasando el tiempo, ¿la plancha cada vez aguantará más o menos peso?

$c)$ Dicen que por mucho tiempo que transcurra, la plancha siempre aguantará más de 40 toneladas, ¿estás de acuerdo?

$a)$

Una función es continua en un punto cuando sus límites laterales son iguales e igual al valor de la función en ese punto. La función $P(t)$ es continua en su dominio, excepto para t = 3, cuya continuidad se estudia a continuación.

$$P(t) = \left(50 - t^2\right) = 50 - 9 = 41 = P(3) \ P(t) = \left(56 - \frac{20t}{t+1}\right) = 56 - 15 = 41$$

$$\Rightarrow P(t) = P(t) = P(3).$$

$$\underline{La\ función\ P(t)\ es\ continua\ en\ su\ dominio}.$$

$b)$

$$P'(t) = \{-2t \ si \ 0 \leq t \leq 3 \ -\frac{20}{(t+1)^2} \ si \ t > 3.$$

(*) $$g(t) = -\frac{20t}{t+1} \Rightarrow g'(t) = -\frac{20\cdot(t+1) - 20t\cdot 1}{(t+1)^2} = -\frac{20t + 20 - 20t}{(t+1)^2} = \frac{-20}{(t+1)^2}.$$

De la derivada se deduce que $P'(t) < 0, \ \forall t \in D(P)$.

$$\underline{Con\ el\ paso\ del\ tiempo\ disminuye\ la\ resistencia\ de\ la\ plancha}.$$

$c)$

$$P(t) = \left(56 - \frac{20t}{t+1}\right) = 56 - 20 = 36.$$

$$\underline{Con\ el\ paso\ del\ tiempo\ la\ resistencia\ de\ la\ plancha\ se\ estabiliza\ en\ 36\ t}.$$

$$\underline{No\ estoy\ de\ acuerto.\ La\ resistencia\ con\ el\ tiempo\ es\ de\ 36\ toneladas}.$$

****

4º) Un distribuidor de software informático, que realiza también funciones de servicio técnico, tiene en su cartera de clientes tanto a empresas como a particulares. En base a los objetivos marcados por el fabricante, al finalizar este año ha de conseguir al menos 25 empresas como clientes en su cartera, y el número de clientes particulares que consiga deberá ser como mínimo el doble que el de empresas. Además, por razones de eficiencia del servicio postventa, tiene estipulado un límite global de 120 clientes anuales. Finalmente, cada empresa le produce 386 euros de ingresos anuales, mientras que cada particular 229 euros.

a) ¿Cuáles pueden ser las distintas opciones de composición de su cartera? Plantear el problema y representar gráficamente el conjunto de soluciones.

b) ¿Cuál de esas combinaciones le proporcionaría los mayores ingresos al finalizar el año? ¿A cuánto ascenderían dichos ingresos?

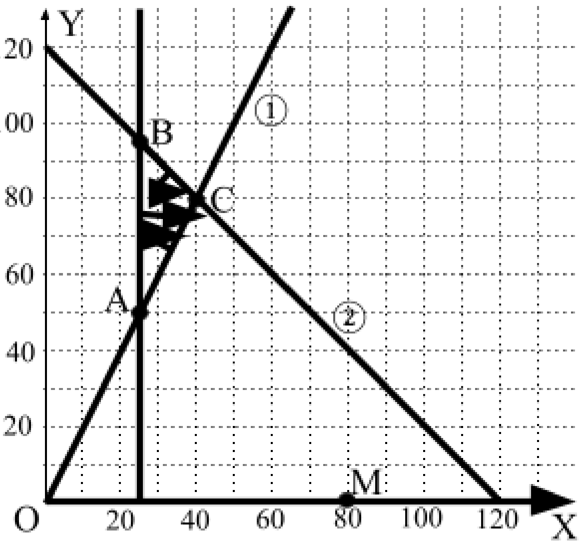
----

a)

Sean x e y el número de empresas y particulares que tiene la empresa como clientes, respectivamente.

Las restricciones del ejercicio se establecen en el sistema de inecuaciones:

$x \geq 25 \quad y \geq 2x \quad x + y \leq 120 \quad y \geq 0 \}$ o mejor: $2x - y \leq 0 \quad x + y \geq 120 \; x \geq 25, \; y \geq 0 \}$.



La región factible se indica en la figura:

x	0	40
y	0	80

①$\Rightarrow 2x - y \leq 0 \Rightarrow y \geq 2x \Rightarrow M(80,\ 0) \rightarrow No.$

x	120	0
y	0	120

②$\Rightarrow x + y \leq 120 \Rightarrow y = 120 - x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \quad x = 25 \; 2x - y = 0 \} \Rightarrow A(25,\ 50).$

$B \Rightarrow \quad x = 25\ x + y = 120 \} \Rightarrow B(25,\ 95)$.

$C \Rightarrow\ 2x - y = 0\ x + y = 120 \} \Rightarrow C(40,\ 80)$.

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,\ y) = 386x + 229y$.

$b)$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(25,\ 50) = 386 \cdot 25 + 229 \cdot 50 = 9.650 + 11.450 = 21.100$.

$B \Rightarrow f(80,\ 40) = 386 \cdot 25 + 229 \cdot 95 = 9.650 + 21.755 = 31.405$.

$C \Rightarrow f(40,\ 80) = 386 \cdot 40 + 229 \cdot 80 = 15.440 + 18.320 = 33.760$.

$\underline{Los\ mayores\ ingresos\ se\ obtienen\ con\ 40\ empresas\ y\ 80\ particulares}$.

$\underline{El\ mayor\ ingreso\ posible\ es\ de\ 33.760\ euros}$.

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CANARIAS

SEPTIEMBRE – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Cada alumno debe elegir sólo una de las pruebas, A o B.

PRUEBA A

1º) Una cadena española de supermercados afirma que cada una de sus tiendas tiene un beneficio medio de al menos 0,6 millones de euros anuales, con una desviación típica de 0,04 millones de euros. Para contrastarlo, se hizo un estudio de 64 de sus tiendas distribuidas por toda España en el que se obtuvo una media de 0,59 millones de euros de beneficios. Suponiendo que la variable que se maneja es normal:

a) Con una significación del 10 %, ¿se puede aceptar la afirmación de la cadena?

b) ¿Qué ocurre si el nivel de significación es igual a 0,005?

----

a)

$Hipótesis\ nula \rightarrow H_0: \mu \geq 0,6$ $\qquad$ $Hipótesis\ alternativa \rightarrow H_1: \mu < 0,6\}$.

Contraste unilateral.

Conocemos: $n = 64;\ \mu = 0,6;\ \sigma = 0,04.$

$\alpha = 0,10 \rightarrow z_\alpha = 1,28.$ $\qquad$ $(1 - 0,10 = 0,9000 \rightarrow z = 1,28).$

Se aplica la fórmula adecuada que nos da el intervalo de confianza pedido, que es la siguiente: $\left(\mu - z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ +\infty\right)$.

$\left(0'6 - 1'28 \cdot \frac{0,04}{\sqrt{64}},\ +\infty\right);$

$\left(0'6 - 1'28 \cdot 0,005,\ +\infty\right);\ \left(0'6 - 0'0064,\ +\infty\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(0'5936,\ +\infty\right).$

$$\underline{\overline{x} = 0'59 \notin \left(0'5936,\ +\infty\right) \Rightarrow Se\ rechaza\ la\ hipótesis\ nula.}$$

$\underline{Con\ una\ confianza\ del\ 10\ \%\ el\ beneficio\ es\ menor\ de\ 0'6\ millones}.$

$b)$

$Para\ \alpha = 0,005 \rightarrow z_{\alpha} = 2,575. \qquad (1 - 0,005 = 0,9950 \rightarrow z = 2,575).$

$\left(0'6 - 2'575 \cdot 0,005,\ \ +\infty\right);\ \left(0'6 - 0'0129\ +\infty\right) \Rightarrow \left(0'5871,\ \ +\infty\right).$

$\underline{\overline{x} = 0'59 \in \left(0'5871,\ \ +\infty\right) \Rightarrow En\ este\ caso\ se\ acepta\ la\ hipótesis\ nula}.$

$\underline{Con\ nivel\ de\ significación\ 0,005\ el\ beneficio\ es\ mayor\ de\ 0'6\ millones}.$

****

2º) Un estudio sobre la media de ingesta diaria de kilocalorías, realizado sobre una muestra de 100 varones de entre 15 y 18 años, ha dado el intervalo de confianza siguiente: $[2.941'2,\ 3.058'8]$. Si la desviación típica es de 300 kilocalorías, suponiendo que la ingesta diaria de kilocalorías sigue una distribución normal:

a) ¿Cuál es la media muestral?

b) ¿Cuál es el nivel de confianza utilizado?

c) Con un nivel de confianza igual a 0,9 y con la misma información muestral, ¿cuál sería el correspondiente intervalo?

----

a)

$$\overline{x} = \frac{3.058{,}8+2.941{,}2}{2} = \frac{6.000}{2} = 3.000.$$

$\underline{La\ media\ muestral\ es\ de\ 3.000\ kilocalorías\ diarias.}$

b)

$$E = \frac{3.058{,}8-2.941{,}2}{2} = \frac{117{,}6}{2} = 58{,}8.$$

Conocemos, además: $n = 100;\ \ \sigma = 300.$

De la fórmula del error máximo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$:

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E\cdot\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{58'8\cdot\sqrt{100}}{300} = \frac{588}{300} = 1{,}96.$$

Mirando en la tabla $N(0,\ 1)$: A 1,96 le corresponde en la tabla 0’9750.

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0'9750;\ \ 2 - \alpha = 1'9500;\ \ \alpha = 2 - 1'9500 = 0'0500.$$

$\underline{El\ nivel\ de\ confianza\ es\ 0{,}05.}$

c)

Para un nivel de confianza de $0{,}9 = 90\ \%$:

$$1 - \alpha = 0{,}90 \rightarrow \alpha = 1 - 0{,}90 = 0{,}10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}05} = 1{,}645.$$

$$(1 - 0{,}05 = 0{,}9500 \rightarrow z = 1{,}645).$$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(3.000 - 1,645\cdot\frac{300}{\sqrt{100}},\ 3.000 + 1,645\cdot\frac{300}{\sqrt{100}}\right);$$

$$(3.000 - 1,645\cdot 30,\ 3.000 + 1,645\cdot 30);$$

$$(3.000 - 49'35,\ 3.000 + 49'35);$$

$$\underline{I.\ C._{90\,\%} = \left(2.950'65,\ 3.049'35\right)}.$$

****

3º) Los gastos financieros de una determinada organización, en cientos de miles de euros, sigue la función: $G(t) = \{4 - \frac{t}{3}\ \ si\ 0 \leq t \leq 3\ \frac{5t-3}{t+1}\quad si\ t > 3$, siendo t el tiempo en años transcurridos.

$a)$ ¿Cuándo los gastos son iguales a 400.000 euros? ¿Es $G(t)$ continua? Razona la respuesta.

$b)$ ¿Cuándo crece $G(t)$? ¿Cuándo decrece $G(t)$? ¿Cuándo su valor es mínimo. Razonar la respuesta.

$c)$ ¿Qué ocurre cuando el número de años crece indefinidamente? ¿Cuándo alcanza $G(t)$ su máximo?

$a)$

Se debe tener en cuenta que 400.000 euros son 4 centenares de miles de euros.

$$G(t) = 4 \Rightarrow \{4 - \frac{t}{3}\ \ si\ 0 \leq t \leq 3\ \frac{5t-3}{t+1}\quad si\ t > 3\ \Rightarrow \{4 - \frac{t}{3} = 4 \rightarrow t_1 = 0$$

.

$\underline{Los\ gastos\ son\ de\ 400.000\ euros\ al\ principio\ y\ a\ los\ 7\ años}$.

Una función es continua en un punto cuando sus límites laterales son iguales e igual al valor de la función en ese punto. La función $G(t)$ es continua en su dominio, excepto para t = 3, cuya continuidad se estudia a continuación.

$$G(t) = \left(4 - \frac{t}{3}\right) = 4 - 1 = 3 = G(3)\ G(t) = \frac{5t-3}{t+1} = \frac{12}{4} = 3 \qquad \} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(t) = G(t) = G(3).$$

$\underline{La\ función\ G(t)\ es\ continua\ en\ su\ dominio}$.

$b)$

Una función es creciente o decreciente en un punto cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente, en ese punto.

$$G'(t) = \{\ -\frac{1}{3}\quad si\ 0 \leq x \leq 3\ \frac{8}{(t+1)^2}\ \ si\ t > 3\ \ (*)\ .$$

(*) $\quad h(t) = \frac{5t-3}{t+1} \Rightarrow h'(t) = \frac{5\cdot(t+1)-(5t-3)\cdot 1}{(t+1)^2} = \frac{5t+5-5t+3}{(t+1)^2} = \frac{8}{(t+1)^2}$.

$\underline{Crecimiento: G'(t) > 0 \Rightarrow t \epsilon (3, +\infty)}$.

$$\underline{Decrecimiento: G'(t) < 0 \Rightarrow t \epsilon (0, 3).}$$

Para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada. Como quiera que $G'(t) \neq 0, \forall t \in D(G)$, la función $G(t)$ no tiene máximos ni mínimos relativos.

De lo anterior se deduce que los máximos y mínimos de la función, teniendo en cuanta su continuidad, estarán situados en los extremos de sus intervalos.

$G(0) = 4.$ $\qquad$ $G(3) = 4 - \frac{5}{4} = \frac{15-3}{4} = 3.$

$G(t) = \frac{5t-3}{t+1} = 5.$

$$\underline{El\ valor\ mínimo\ de\ la\ función\ es\ 300.000\ euros.}$$

$c)$

De los apartados anteriores se deduce que:

$$\underline{Cuando\ t\ crece\ indefinidamente\ la\ función\ se\ estabiliza\ en\ 5.000\ euros.}$$

$$\underline{La\ función\ alcanza\ con\ el\ tiempo\ su\ valor\ máximo\ de\ 5.000\ euros.}$$

****

4º) Una inmobiliaria alquila, por meses, apartamentos de 1, 2 y 3 dormitorios a 300, 425 y 550 euros, respectivamente. En un mes, después de descontar el 54 % de gastos por mantenimiento, limpieza y gestión de impuestos, la cantidad total que ingresa por alquileres, es igual a 16.629 euros. El número de apartamentos de 1 dormitorio es el 150 % de los de 2 dormitorios. El número de apartamentos de 2 dormitorios más el número de apartamentos de 3 dormitorios supera en 3 al número de los apartamentos de 1 dormitorio.

a) Plantear el sistema de ecuaciones correspondiente.

b) ¿Cuántos apartamentos de cada tipo alquila la empresa?

----

a)

Sean x, y, z el número de apartamentos de 1, 2 y 3 dormitorios que se alquilan mensualmente, respectivamente.

Si se descuenta el 54 % se ingresa el 46 % de precio del alquiler:

El 46 % de 300, 425 y 550 es 138, 195,5 y 253, respectivamente.

$138x + 195,5y + 253z = 16.629 \qquad x = 1,5y \qquad y + z$

$276x + 391y + 506z = 33.258 \qquad 2x - 3y = 0 \qquad x -$

.

b)

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|33.258\ 391\ 506\ 0\ -3\ 0\ -3\ -1\ -1\ |}{|276\ 391\ 506\ 2\ -3\ 0\ 1\ -1\ -1\ |} = \frac{99.774-4.554}{828-1.012+1.518+782} = \frac{95.220}{3.128-1.012} = \frac{95.220}{2.116} = 45$$

.

$$y = \frac{|276\ 33.258\ 506\ 2\ 0\ 0\ 1\ -3\ -1\ |}{2.116} = \frac{-3.036+66.516}{2.116} = \frac{63.480}{2.116} = 30.$$

$$z = \frac{|276\ 391\ 33.258\ 2\ -3\ 0\ 1\ -1\ -3\ |}{2.116} = \frac{2.484-66.516+99.774+2.346}{2.116} = \frac{104.604-66.516}{2.116} = \frac{38.088}{2.116} = 18$$

.

$\underline{Se\ alquilan\ 45,\ 30\ y\ 10\ apartamentos\ de\ 1,\ 2\ y\ 3\ dormitorios,\ respec.}$

****

PRUEBA B

1º) Se publica la noticia de que, como máximo, la media del nivel de colesterol de los habitantes de una ciudad es de 190 mg/dl, con una desviación típica de 24 mg/dl. Para contrastarlo, se toma una muestra de 121 habitantes de esta ciudad para los que se obtiene una media de colesterol del 195 mg/dl. Si la variable *nivel de colesterol* es normal:

a) Plantear el contraste adecuado. Indicar cuál es la región crítica.

b) Con un nivel de significación del 4 %, ¿se puede aceptar lo que se afirma en la noticia?

c) Y si el nivel de significación es del 0’5 %, ¿qué se puede decir?

----

a)

$\left.\begin{array}{l} Hipótesis\ nula \rightarrow H_0: \mu \leq 190 \qquad Hipótesis\ alternativa \rightarrow H_1: \mu > 190 \end{array}\right\}$. Contraste unilateral.

Conocemos: $n = 121;\ \mu_0 = 190;\ \sigma = 24.$

La región de aceptación es $\left(-\infty,\ \mu_0 + z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, por lo tanto la región crítica es:

$$\overline{x} > \mu_0 + z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \overline{x} > 190 + z_\alpha \cdot \frac{24}{\sqrt{121}} = 190 + z_\alpha \cdot 2'182.$$

$$\underline{Región\ crítica: \overline{x} > 190 + z_\alpha \cdot 2'182}.$$

b)

$\alpha = 0,04 \rightarrow z_\alpha = 1,75.\ (1 - 0,04 = 0,9600 \rightarrow z = 1,75).$

Región crítica: $190 + z_\alpha \cdot 2'182 = 190 + 1'75 \cdot 2'182 = 190 + 3'8185 =$

$= 193'8185 < 195.$

$$\underline{\overline{x} = 195 \notin (-\infty,\ 193'8188) \Rightarrow Se\ rechaza\ la\ hipótesis\ nula.}$$

$$\underline{Con\ significación\ del\ 4\ \%\ el\ nivel\ de\ colesterol\ es \geq 190\ mg/dl.}$$

c)

$Para\ \alpha = 0,005 \rightarrow z_\alpha = 2,575. \qquad (1 - 0,005 = 0,9950 \rightarrow z = 2,575).$

Región crítica: $190 + z_\alpha \cdot 2'182 = 190 + 2'575 \cdot 2'182 = 190 + 5'6187 =$

$= 195'6187 > 195.$

$\underline{\overline{x} = 195 \in \left(-\infty,\ 195'6187\right) \Rightarrow Ahora\ si\ se\ acepta\ la\ hipótesis\ nula.}$

$\underline{Con\ significación\ del\ 0,5\ \%\ el\ nivel\ de\ colesterol\ es \leq 190\ mg/dl.}$

****

2º) Los atletas que preparan el triatlón mejoran sus marcas después del primer año de competición. El 60 % mejora en bicicleta, el 30 % mejora en natación y sólo un 10 % mejora en atletismo. De los que mejoran en bicicleta, el 50 % son mujeres, de los que mejoran en natación el 60 % son hombres y de los que mejoran en atletismo el 70 % son mujeres.

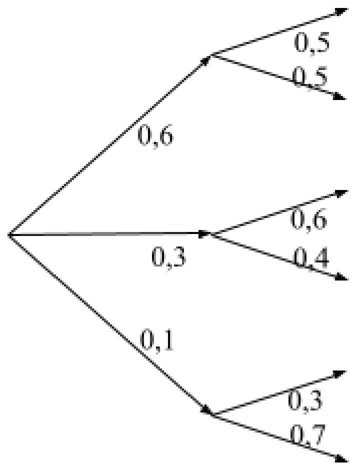
a) Hacer el diagrama del árbol.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que mejoren las mujeres en el triatlón?

c) Elegido un atleta (hombre) al azar, ¿cuál es la probabilidad de que mejore en natación?

----

a)



b)

$$P = 0,30 + 0,12 + 0,07 = \underline{0,490}.$$

c)

$$P = \frac{0,18}{0,30+0,18+0,03} = \frac{0,18}{0,51} = \underline{0,353}.$$

****

3º) El coste total de producción de $x > 0$ unidades de un producto viene dado por la función $C(x) = \frac{1}{3}x^2 + 6x + 192$. Se define la función coste medio por unidad de la forma: $U(x) = \frac{C(x)}{x}$.

a) Razonar cuándo crece y cuándo decrece $U(x)$.

b) Utilizar el cálculo anterior para deducir cuántas unidades hay que producir para que el coste medio por unidad sea mínimo. ¿Cuál es este coste?

----

a)

$$U(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{\frac{1}{3}x^2+6x+192}{x} = \frac{1}{3}x + 6 + \frac{192}{x}.$$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$U'(x) = \frac{1}{3} - \frac{192}{x^2}.$$

$$U'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} - \frac{192}{x^2} = 0; \quad \frac{x^2-576}{3x^2} = 0; \quad x^2 - 576 = 0; \quad x = \pm\sqrt{576} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -24, \ x_2 = 24.$$

Teniendo en cuenta que el dominio de la función es $D(U) \Rightarrow (0, +\infty)$, la única raíz de la derivada es $x = 24$, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Decrecimiento: U'(x) < 0 \Rightarrow t \epsilon (0, 24)}.$$

$$\underline{Crecimiento: U'(x) > 0 \Rightarrow t \epsilon (24, +\infty)}.$$

b)

La condición necesaria para que una función tenga un mínimo relativo es que se anule su primera derivada en ese punto y, para los valores que anulan la primera derivada, la segunda derivada sea positiva.

$$U'(x) = 0 \Rightarrow x = 24.$$

$$U''(x) = -\frac{-192 \cdot 2x}{x^4} = \frac{384}{x^3} \Rightarrow U''(24) = \frac{384}{24^3} > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ x = 24.$$

$$\underline{El\ coste\ de\ fabricación\ es\ mínimo\ cuando\ se\ producen\ 24\ unidades}.$$

$U(x) = \frac{1}{3} \cdot 24 + 6 + \frac{192}{24} = 8 + 6 + 8 = 22.$

.

$$\underline{El\ coste\ mínimo\ de\ producción\ por\ unidad\ es\ de\ 22.}$$

****

4º) En una fábrica se ensamblan dos tipos de motores: para motos y para coches. Para ensamblar un motor de moto se emplean 60 minutos de trabajo manual y 20 minutos de trabajo de máquina. Para ensamblar un motor de coche se emplean 45 minutos de trabajo manual y 40 minutos de trabajo de máquina. En un mes, la fábrica dispone de 120 horas de trabajo manual y 90 horas de trabajo de máquina. Sabiendo que el beneficio obtenido de cada motor de moto es de 1.500 euros y el de cada motor de coche es de 2.000 euros:

a) Plantear el problema que permite determinar cuántos motores de cada tipo hay que ensamblar mensualmente para maximizar los beneficios globales.

b) Representar la región factible, hallar las cantidades mensuales que se deben ensamblar para maximizar beneficios y determinar cuál es el beneficio máximo.

----

a)

Sean x e y el número de motores que se ensamblan de motos y coches, respectivamente.

$120\,horas = 120 \cdot 60 = 7.200 y\ 90\,horas = 90 \cdot 60 = 5.400\,min.$

Las condiciones del ejercicio se establecen en el siguiente sistema de inecuaciones:

$60x + 45y \leq 7.200\ 20x + 40y \leq 5.400 \qquad x \geq 0,\ y \geq 0\,\}\ \ \underline{4x + 3y \leq 480\ \ x + 2y \leq 27}$

.

b)

x	120	0
y	0	160

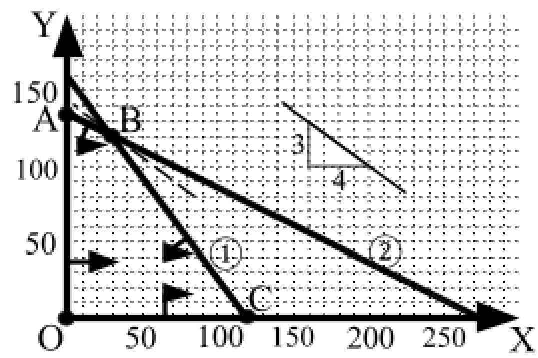
①$\Rightarrow 4x + 3y \leq 480 \Rightarrow y \leq \frac{480-4x}{3} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	270	0
y	0	135

②$\Rightarrow x + 2y \leq 270 \Rightarrow y \leq \frac{270-x}{2} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

La región factible es la zona sombreada de la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible, además de O(0, 0), son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ x + 2y = 270 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,\ 135).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x + 3y = 480 \\ x + 2y = 270 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} -4x - 3y = -480 \\ 4x + 8y = 1.080 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5y = 600;\ \ y = 120;\ \ x = 270 - 2 \cdot 120 = 270 - 240 = 30 \Rightarrow B(30,\ 120).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x + 3y = 480 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow C(120,\ 0).$

La función de rendimiento es $F(x,\ y) = 1.500x + 2.000y$.

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 135) = 0 \cdot 1.500 + 135 \cdot 2.000 = 0 + 270.000 = 270.000.$

$B \Rightarrow f(30,\ 120) = 30 \cdot 1.500 + 120 \cdot 2.000 = 45.000 + 240.000 = 285.000.$

$C \Rightarrow f(120,\ 0) = 120 \cdot 1.500 + 0 \cdot 2.000 = 180.000 + 0 = 180.000.$

El máximo se produce en el punto B.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = 1.050x + 2.000y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1.500}{2.000}x \Rightarrow m = -\frac{3}{4}.$

$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ ensamblando\ 30 motores\ de\ motos\ y\ 1200\ de\ coches}.$

$\underline{El\ benefico\ máximo\ es\ de\ 285.000\ euros.}$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

SEPTIEMBRE – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones. No se admitirá ningún resultado si no está debidamente razonado. No se permite calculadoras gráficas, ni programables. Está prohibido el uso de teléfonos móviles.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

1º) $a)$ Determinar, según los valores del parámetro a, los casos en los que el siguiente sistema tiene o no solución: $\{-\ x + 3y = a\ \ x + 2y = -\ 2\ \ 4x + 3y = 3a$.

$b)$ Resolver los casos compatibles.

$a)$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A = (-\ 1\ 3\ 1\ 2\ 4\ 3\ )$ y $A' = (-\ 1\ 3\ a\ 1\ 2\ \ -\ 2\ 4\ 3\ 3a\ )$.

El rango de la matriz ampliada en función del parámetro a es el siguiente:

$\left|A^{'}\right| = |-\ 1\ 3\ a\ 1\ 2\ \ -\ 2\ 4\ 3\ 3a\ | = -\ 6a + 3a - 24 - 8a - 6 - 9a = -\ 20a\ -$

$2a + 3 = 0 \Rightarrow a = -\ \frac{3}{2} = -\ 1,5.$

$\underline{Para\ a \neq -\ 1,5 \Rightarrow Rang\ A^{'} = 3 \neq Rang\ A = 2 \Rightarrow Sistema\ incompatible}.$

$\underline{Para\ a = -\ 1,5 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A^{'} = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D}.$

$b)$

Para $a = -\ 1,5$ el sistema resulta de tres ecuaciones con dos incógnitas, que es compatible determinado: $\{-\ x + 3y = -\ 1,5\ \ x + 2y = -\ 2\ \ \ 4x + 3y = -\ 4,5$.

Para su resolución descartamos una de las ecuaciones (tercera).

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|-1{,}5\ 3\ -2\ 2\ |}{|-1\ 3\ 1\ 2\ |} = \frac{-3+6}{-2-3} = -\ \frac{3}{5}.$$

$$y = \frac{|-1\ -1{,}5\ 1\ -2\ |}{-5} = \frac{2+1{,}5}{-5} = \frac{3{,}5}{-5} = -\ \frac{35}{50} = -\ \frac{7}{10}.$$

$$\underline{Solución: x = -\ \frac{3}{5},\ y = -\ \frac{7}{10}}.$$

****

2º) Dada la función $f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x}$, determinar:

$a)$ El dominio de definición y los puntos de corte con los ejes.

$b)$ Las asíntotas.

$c)$ Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos, si existen.

$d)$ Finalmente, con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar su gráfica.

$a)$

Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$x^2 - 3x = 0;\ x(x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 3.$$

$$\underline{D(f) \Rightarrow R - \{0, 3\}}.$$

$b)$

Asíntotas horizontales: son de la forma y = k y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x} = 0 \Rightarrow \underline{Asíntota\ horizontal: y = 0\ (Eje)}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{Asíntotas\ verticales: x = 0\ (Eje\ Y),\ x = 3}.$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

$c)$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2-3x)-(x+1)\cdot(2x-3)}{(x^2-3x)^2} = \frac{x^2-3x-(2x^2-3x+2x-3)}{(x^2-3x)^2} = \frac{x^2-3x-2x^2+x+3}{(x^2-3x)^2} =$$

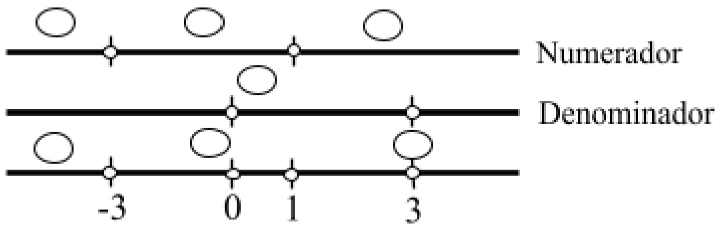
$$= \frac{-x^2-2x+3}{(x^2-3x)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x^2-2x+3}{\left(x^2-3x\right)^2} = 0; \quad -x^2 - 2x + 3 = 0; \quad x^2 + 2x - 3 = 0;$$

$$x = \frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{16}}{2} = \frac{-2\pm 4}{2} = -1\pm 2 \Rightarrow x_1 = -3, \; x_2 = 1.$$

Como quiera que el denominador es positivo para todos los valores reales pertenecientes al dominio de la función, es signo de la derivada es igual que el del numerador de la función.

Teniendo en cuenta el dominio de la función y del dibujo adjunto se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:



De la observación de la figura se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento\text{: } (-3, 0) \cup (0, 1)}.$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento\text{: } (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto. Esta condición necesaria no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; se es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{(-2x-2)\cdot\left(x^2-3x\right)^2 - \left(-x^2-2x+3\right)\cdot\left[2\cdot\left(x^2-3x\right)\cdot 2x\right]}{\left(x^2-3x\right)^4} =$$

$$= \frac{(-2x-2)\cdot\left(x^2-3x\right) - 4x\cdot\left(-x^2-2x+3\right)}{\left(x^2-3x\right)^3} = \frac{-2x^3+6x^2-2x^2+6x+4x^3+8x^2-12x}{\left(x^2-3x\right)^3} = \frac{2x^3+12x^2-6x}{\left(x^2-3x\right)^3} =$$

$$= \frac{2x\cdot\left(x^2+6x-3\right)}{x^3(x-3)^3} = \frac{2\cdot\left(x^2+6x-3\right)}{x^2(x-3)^3}.$$

$$f''(-3) = \frac{2\cdot(9-18-3)}{9\cdot(-6)^3} = \frac{2\cdot(-12)}{9\cdot(-216)} > 0 \Rightarrow Mínimo\; para\; x = -3.$$

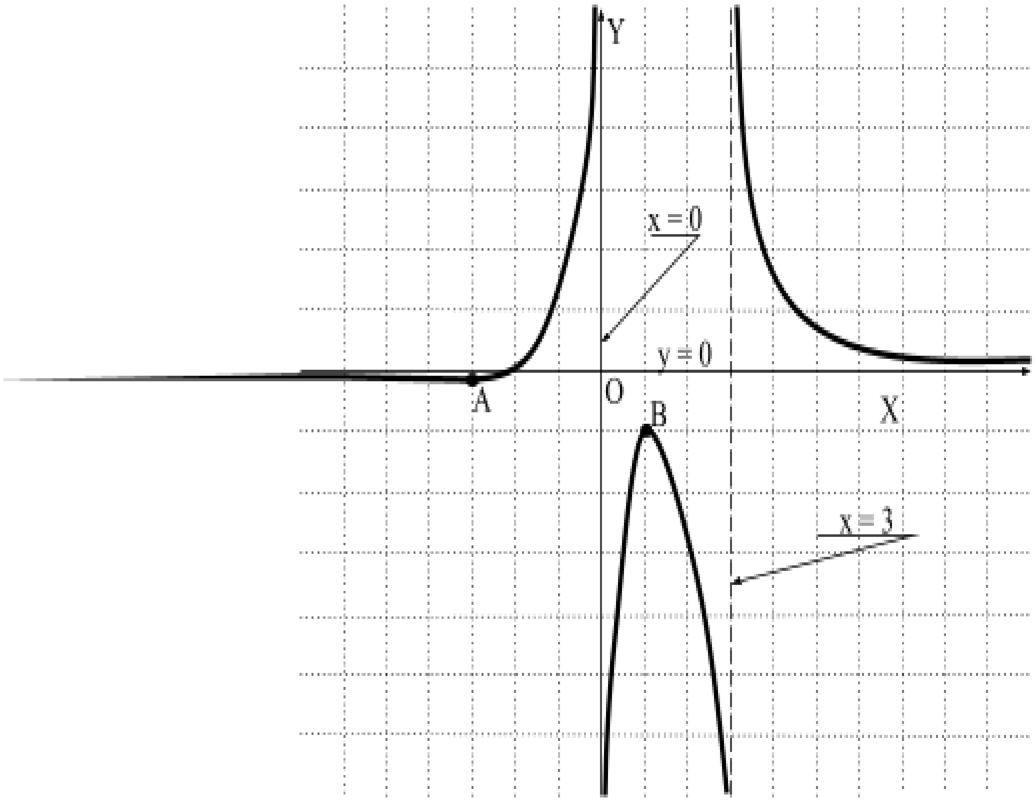
$f(-\ 3) = \frac{-3+1}{9+9} = \frac{-2}{18} =- \frac{1}{9} \Rightarrow \underline{Mínimo: A\left(-\ 3,\ \ -\frac{1}{9}\right)}.$

$f''(1) = \frac{2\cdot(1+6-3)}{1\cdot(-2)^3} = \frac{2\cdot 4}{-8} =- \ 1\ >\ 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x\ =\ 1.$

$f(1) = \frac{1+1}{1-3} = \frac{2}{-2} =- \ 1 \Rightarrow \underline{Máximo: B(1,\ \ -\ 1)}.$

$d)$

Con los datos obtenidos en los apartados anteriores se obtiene, aproximadamente, la gráfica de la figura, que se la siguiente:



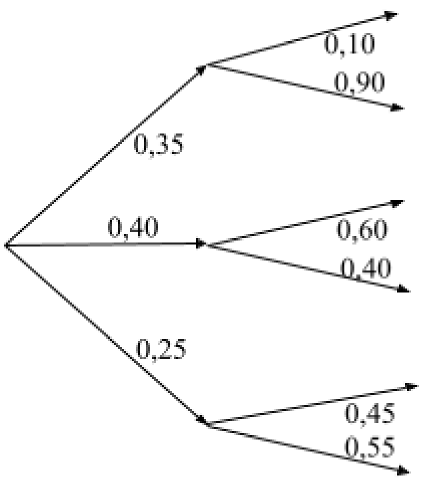
****

3º) En una determinada población se han organizado tres asociaciones de vecinos, correspondientes a los tres principales barrios del pueblo. De todos los vecinos pertenecientes a alguna de ellas, el 35 % pertenece a la asociación A, el 40 % a la B y el 25 % a la C. Entre los socios de la A, sólo el 10 % está satisfecho con la labor realizada por su asociación en el último año. En el caso de la B, el porcentaje de socios satisfechos es del 60 % y en la C es del 45 %.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un ciudadano elegido al azar del entre todos los pertenecientes a alguna de las tres asociaciones, sea socio de la A y esté satisfecho con la labor realizada el último año?

b) Si uno de los vecinos pertenecientes a alguna agrupación está insatisfecho con ella, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca a la B?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un ciudadano elegido al azar de entre todos los pertenecientes a alguna de las tres asociaciones, esté insatisfecho con la labor realizada el último año?



a)

$$P = P(A/S) = P(A \cap S) = P(A) \cdot P(S/A) = 0,35 \cdot 0.10 = \underline{0,0350}.$$

b)

$$P = P(\overline{S}/B) = \frac{P(B \cap \overline{S})}{P(\overline{S})} = \frac{P(B) \cdot P(\overline{S}/B)}{P(A) \cdot P(\overline{S}/A) + P(B) \cdot P(\overline{S}/B) + P(C) \cdot P(\overline{S}/C)} =$$

$$= \frac{0,40 \cdot 0,40}{0,35 \cdot 0,90 + 0,40 \cdot 0,40 + 0,25 \cdot 0,55} = \frac{0,1600}{0,3150 + 0,1600 + 0,1375} = \frac{0,1600}{0,6125} = \underline{0,2612}.$$

c)

$$P = P(\overline{S}) = P(A/\overline{S}) + P(B/\overline{S}) + P(C/\overline{S}) =$$

$$= P(A) \cdot P(\overline{S}/A) + P(B) \cdot P(\overline{S}/B) + P(C) \cdot P(\overline{S}/C) =$$

$$= 0,35 \cdot 0,90 + 0,40 \cdot 0,40 + 0,25 \cdot 0,55 = 0,3150 + 0,1600 + 0,1375 = \underline{0,6125}$$

****

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

1º) a) Dada la matriz $A = (2\ 3\ \ -\ 1\ 4\ 0\ \ -\ k\ 2\ \ -\ 1\ 3\ )$, analizar su rango según los valores del parámetro k.

b) Para $k\ =\ 5$, ¿la matriz A del apartado a) tiene inversa? Justificar la respuesta, utilizando los resultados obtenidos en el apartado anterior.

c) Consideremos las matrices $B\ =\ (1\ 2\ 3\ 0\ \ -\ 1\ 2\ 1\ 0\ 1\ )$, $C\ =\ (2\ 1\ 0\ 1\ 0\ 2\ )$ y la matriz A del apartado a) para $k\ =\ 0$. Resolver la ecuación matricial $AX\ +\ C\ =\ BX$.

----

a)

Por ser el menor de A: $|1\ 2\ 0\ \ -\ 1\ |\neq 0 \Rightarrow Rang\ A \geq 2$.

$|A| = |2\ 3\ \ -\ 1\ 4\ 0\ \ -\ k\ 2\ \ -\ 1\ 3\ | =\ 4\ -\ 6k\ -\ 2k\ -\ 36\ =\ 0;\ \ -\ 8k\ -\ 32\ =\ 0$

.

$\underline{Para\ k\ =-\ 4 \Rightarrow Rang\ A\ =\ 2}$.

$\underline{Para\ k \neq\ -\ 4 \Rightarrow Rang\ A\ =\ 3}$.

b)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

Para $k\ =\ 5\ es\ |A| \neq 0$, por lo cual:

$\underline{Para\ k\ =\ 5\ la\ matriz\ A\ es\ invertible}$.

c)

Para $k\ =\ 0$ es $A\ =\ (2\ 3\ \ -\ 1\ 4\ 0\ 0\ 2\ \ -\ 1\ 3\ )$.

$AX\ +\ C\ =\ BX;\ \ AX\ -\ BX\ =-\ C;\ \ (A\ -\ B)\cdot X\ =-\ C.$

Multiplicando por la izquierda los dos términos por $(A\ -\ B)^{-1}$:

$(A\ -\ B)^{-1}\cdot(A\ -\ B)\cdot X\ =-\ (A\ -\ B)^{-1}\cdot C;\ \ I\cdot X\ =-\ (A\ -\ B)^{-1}\cdot C \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{X\ =-\ (A\ -\ B)^{-1}\cdot C}.$

$A - B\ = (2\ 3\ \ -\ 1\ 4\ 0\ 0\ 2\ \ -\ 1\ 3\ ) - (1\ 2\ 3\ 0\ \ -\ 1\ 2\ 1\ 0\ 1\ ) = (1\ 1\ \ -\ 4\ 4\ 1\ \ -\ 2\ 1\ \ -$

.

$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 -\ 4F_1\ F_3 \rightarrow F_3 - F_1\} \Rightarrow$

$= (1\ 0\ 0\ \ -4\ 1\ 0\ \ -1\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_2 \to F_2 - 2F_3\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (1\ 0\ 0\ \ -2\ 1\ \ -2\ \ -1\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_1 \to F_1 - F_2\, F_3 \to F_3 + 2F_2\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (3\ \ -1\ 2\ \ -2\ 1\ \ -2\ \ -5\ 2\ \ -3\ ) \Rightarrow \left\{F_3 \to \frac{1}{10}F_3\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(3\ \ -1\ 2\ \ -2\ 1\ \ -2\ \ -\frac{1}{2}\ \frac{1}{5}\ \ -\frac{3}{10}\ \right) \Rightarrow \left\{F_1 \to F_1 + 6F_3\, F_2 \to F_2 - 2F_3\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(0\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{5}\ \ -1\ \frac{3}{5}\ \ -\frac{7}{5}\ \ -\frac{1}{2}\ \frac{1}{5}\ \ -\frac{3}{10}\ \right) \Rightarrow$

$\Rightarrow (A - B)^{-1} = \left(0\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{5}\ \ -1\ \frac{3}{5}\ \ -\frac{7}{5}\ \ -\frac{1}{2}\ \frac{1}{5}\ \ -\frac{3}{10}\ \right) = \frac{1}{10}\cdot(0\ 2\ 2\ \ -10\ 6\ \ -14\ \ -$

.

Sustituyendo los valores obtenidos en la expresión de X:

$X =- (A + B)^{-1}\cdot C = \frac{1}{10}\cdot(0\ 2\ 2\ \ -10\ 6\ \ -14\ \ -5\ 2\ \ -3\ )\cdot(2\ 1\ 0\ 1\ 0\ 2\ ) = \frac{1}{10}\cdot(0\ 6$

.

$\underline{X = \frac{1}{10}\cdot(0\ 6\ \ -20\ \ -32\ \ -10\ \ -9\ ).}$

****

2º) Dada la función $f(x) = \{ax + 2 \ \ si \ \ x <- 1 \quad \frac{x-2}{(x+3)^2} \ \ si \ \ - 1 \leq x < 3 \ x^2 - 2x + b \ \ si \ \ x \geq 3 :$

a) Determinar los valores de los parámetros a y b para los cuales la función es continua en todo su dominio.

b) Calcular la integral indefinida: $I = \int_0^2 f(x) \cdot dx$.

----

a)

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para los valores $x =- 1$ y $x = 3$, para cuya continuidad se van de determinar los valores de a y b para que lo sea.

Para que la función sea continua en los puntos críticos es necesario que sus límites laterales en esos puntos sean iguales e iguales a los correspondientes valores de la función en esos puntos.

$$f(x) \ = (ax + 2) =- a + 2 \quad f(x) \ = \frac{x-2}{(x+3)^2} \ = \frac{-3}{4} = f(- 1) \} \Rightarrow - a + 2 =-$$

$4a = 11 \Rightarrow \underline{a = \frac{11}{4}}$.

$$f(x) \ = \frac{x-2}{(x+3)^2} \ = \frac{1}{36} \qquad\qquad f(x) \ = \left(x^2 - 2x + b\right) \ =$$

$\Rightarrow \frac{1}{36} = 3 + b; \ 1 = 108 + 36b; \ \ 36b =- 107 \Rightarrow \underline{b =- \frac{107}{36}}$.

b)

$$I = \int_0^2 f(x) \cdot dx = \int_0^2 \frac{x-2}{(x+3)^2} \cdot dx \Rightarrow \{x = 2 \rightarrow t = 5 \ x = 0 \rightarrow t = 3 \} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_3^5 \frac{t+5}{t^2} \cdot dt = \int_3^5 \left(\frac{1}{t} + \frac{5}{t^2}\right) dt = \left[Lt + \frac{5t^{-1}}{-1}\right]_3^5 = \left[Lt - \frac{5}{t}\right]_3^5 = \left(L5 - \frac{5}{5}\right) - \left(L3 - \frac{5}{3}\right) =$$

$$= L5 - 1 - L3 + \frac{5}{3} = L\frac{5}{3} + \frac{2}{3}.$$

$$\underline{I = \int_0^2 f(x) \cdot dx = L\frac{5}{3} + \frac{2}{3}.}$$

****

3º) a) Los gastos diarios de una familia española de clase media en una ciudad A siguen una distribución normal de media desconocida y desviación típica 10 euros. Para estimar el gasto medio se elige una muestra de 350 familias. ¿Con qué nivel de confianza debe realizarse la estimación si el error cometido es de 1,45 euros?

b) Se realiza la misma encuesta en otra ciudad, B. En este caso, los gastos diarios de una familia de clase media siguen una distribución normal con desviación típica 4,5 euros. Con una muestra aleatoria de 300 familias se ha obtenido un gasto medio de 53 euros. Obtener el intervalo de confianza del 94 % para el gasto medio diario.

----

a)

Datos: $n = 350,\ \ \sigma = 10\ y\ E = 1,45.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{1,45 \cdot \sqrt{350}}{10} = \frac{27,1270}{10} = 2,71.$

De la tabla de distribución normal N(0, 1): $F(2,71) \Rightarrow 0,9966.$

$\frac{\alpha}{2} = 1 - 0,9966 = 0,0034 \Rightarrow \alpha = 2 \cdot 0,0034 = 0,0068.$

$1 - \alpha = 0,0068 \Rightarrow a = 1 - 0,0068 = 0,9932.$

$\underline{El\ nivel\ de\ confianza\ es\ del\ 99,32\ \%.}$

b)

Datos: $n = 300,\ \ \sigma = 4,5\ y\ \overline{x} = 53.$

Para un nivel de confianza del 94 %:

$1 - \alpha = 0,94 \rightarrow \alpha = 1 - 0,94 = 0,06 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,03} = 1,88.$

$(1 - 0,03 = 0,9700 \rightarrow z = 1,88).$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(53 - 1,88 \cdot \frac{4,5}{\sqrt{300}},\ 53 + 1,88 \cdot \frac{4,5}{\sqrt{300}}\right);$

$(53 - 1,88 \cdot 0'2598,\ 53 + 1,88 \cdot 0'2598);\ \ (53 - 0'4884,\ 53 + 0'4884)$

$\underline{I.\ C._{94\,\%} = (52'5116,\ 53'4884).}$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

SEPTIEMBRE – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones. No se admitirá ningún resultado si no está debidamente razonado. No se permite calculadoras gráficas, ni programables. Está prohibido el uso de teléfonos móviles.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

1º) $a)$ Determinar, según los valores del parámetro a, los casos en los que el siguiente sistema tiene o no solución: $\{-\ x\ +\ 3y\ =\ a\ \ x\ +\ 2y\ =-\ 2\ \ 4x\ +\ 3y\ =\ 3a$.

$b)$ Resolver los casos compatibles.

$a)$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A\ =(-\ 1\ 3\ 1\ 2\ 4\ 3\ )$ y $A'\ =(-\ 1\ 3\ a\ 1\ 2\ \ -\ 2\ 4\ 3\ 3a\ )$.

El rango de la matriz ampliada en función del parámetro a es el siguiente:

$\left|A^{'}\right| = |-\ 1\ 3\ a\ 1\ 2\ \ -\ 2\ 4\ 3\ 3a\ | =-\ 6a\ +\ 3a\ -\ 24\ -\ 8a\ -\ 6\ -\ 9a\ =-\ 20a\ -$

$2a\ +\ 3\ =\ 0 \Rightarrow a\ =-\ \frac{3}{2}\ =-\ 1,5$.

$\underline{Para\ a \neq\ -\ 1,5 \Rightarrow Rang\ A^{'}\ =\ 3 \neq Rang\ A\ =\ 2 \Rightarrow Sistema\ incompatible}.$

$\underline{Para\ a\ =-\ 1,5 \Rightarrow Rang\ A\ =\ Rang\ A^{'}\ =\ nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D}.$

$b)$

Para $a\ =-\ 1,5$ el sistema resulta de tres ecuaciones con dos incógnitas, que es compatible determinado: $\{-\ x\ +\ 3y\ =-\ 1,5\ \ x\ +\ 2y\ =-\ 2\ \ \ \ 4x\ +\ 3y\ =-\ 4,5$.

Para su resolución descartamos una de las ecuaciones (tercera).

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|-1{,}5\ 3\ -2\ 2\ |}{|-1\ 3\ 1\ 2\ |} = \frac{-3+6}{-2-3} = -\ \frac{3}{5}.$$

$$y = \frac{|-1\ -1{,}5\ 1\ -2\ |}{-5} = \frac{2+1{,}5}{-5} = \frac{3{,}5}{-5} = -\ \frac{35}{50} = -\ \frac{7}{10}.$$

$$\underline{Solución: x = -\ \frac{3}{5},\ y = -\ \frac{7}{10}.}$$

****

2º) Dada la función $f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x}$, determinar:

$a)$ El dominio de definición y los puntos de corte con los ejes.

$b)$ Las asíntotas.

$c)$ Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos, si existen.

$d)$ Finalmente, con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar su gráfica.

$a)$

Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$x^2 - 3x = 0;\ x(x - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 3.$$

$$\underline{D(f) \Rightarrow R - \{0,\ 3\}}.$$

$b)$

Asíntotas horizontales: son de la forma y = k y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x} = 0 \Rightarrow \underline{Asíntota\ horizontal: y = 0\ (Eje)}\ .$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{Asíntotas\ verticales: x = 0\ (Eje\ Y),\ x = 3}.$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

$c)$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{1\cdot\left(x^2-3x\right)-(x+1)\cdot(2x-3)}{\left(x^2-3x\right)^2} = \frac{x^2-3x-\left(2x^2-3x+2x-3\right)}{\left(x^2-3x\right)^2} = \frac{x^2-3x-2x^2+x+3}{\left(x^2-3x\right)^2} =$$

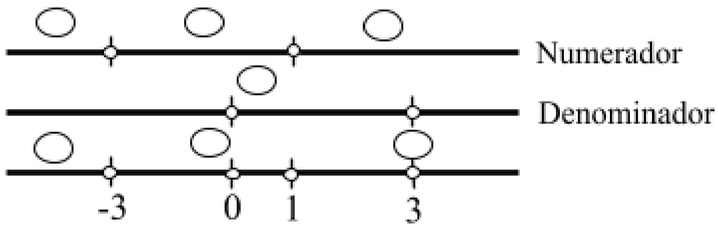
$$= \frac{-x^2-2x+3}{\left(x^2-3x\right)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x^2-2x+3}{\left(x^2-3x\right)^2} = 0; \quad -x^2 - 2x + 3 = 0; \quad x^2 + 2x - 3 = 0;$$

$$x = \frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{16}}{2} = \frac{-2\pm 4}{2} =- 1\pm 2 \Rightarrow x_1 =- 3, \ x_2 = 1.$$

Como quiera que el denominador es positivo para todos los valores reales pertenecientes al dominio de la función, es signo de la derivada es igual que el del numerador de la función.

Teniendo en cuenta el dominio de la función y del dibujo adjunto se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:



De la observación de la figura se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento\colon (-3, \ 0) \cup (0, \ 1)}.$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento\colon (-\infty, \ -3) \cup (1, \ +\infty)}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto. Esta condición necesaria no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; se es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{(-2x-2)\cdot\left(x^2-3x\right)^2 - \left(-x^2-2x+3\right)\cdot\left[2\cdot\left(x^2-3x\right)\cdot 2x\right]}{\left(x^2-3x\right)^4} =$$

$$= \frac{(-2x-2)\cdot\left(x^2-3x\right) - 4x\cdot\left(-x^2-2x+3\right)}{\left(x^2-3x\right)^3} = \frac{-2x^3+6x^2-2x^2+6x+4x^3+8x^2-12x}{\left(x^2-3x\right)^3} = \frac{2x^3+12x^2-6x}{\left(x^2-3x\right)^3} =$$

$$= \frac{2x\cdot\left(x^2+6x-3\right)}{x^3(x-3)^3} = \frac{2\cdot\left(x^2+6x-3\right)}{x^2(x-3)^3}.$$

$$f''(-3) = \frac{2\cdot(9-18-3)}{9\cdot(-6)^3} = \frac{2\cdot(-12)}{9\cdot(-216)} > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ x =- 3.$$

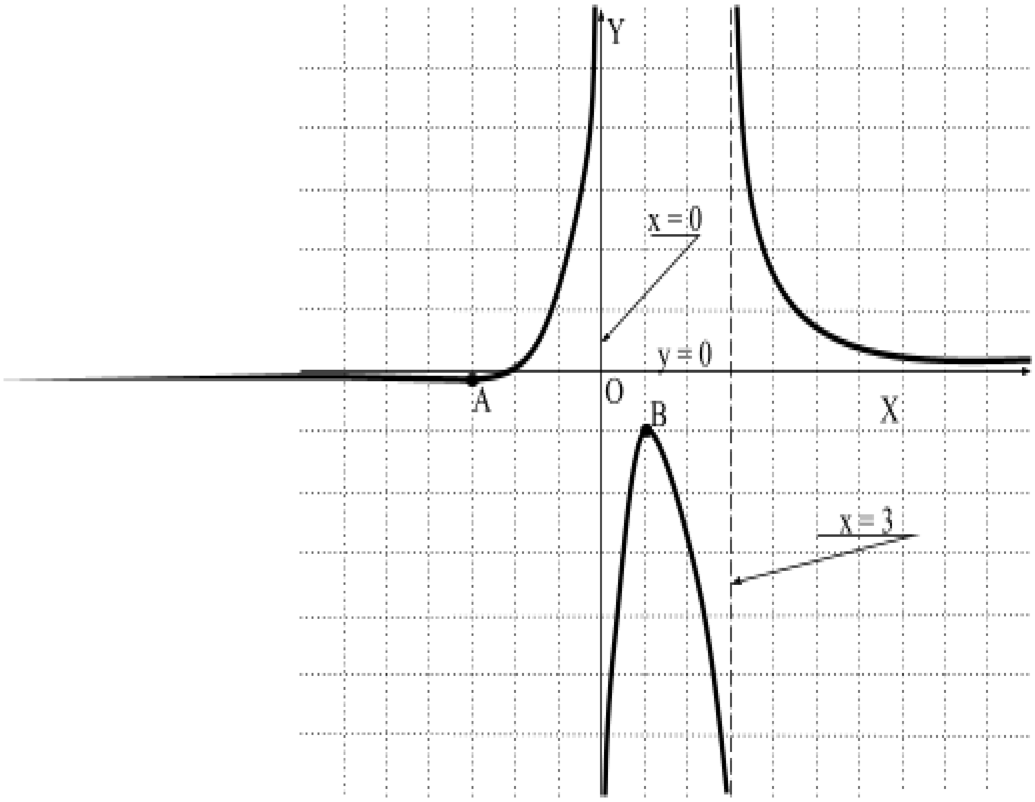
$f(-\ 3) = \frac{-3+1}{9+9} = \frac{-2}{18} =- \frac{1}{9} \Rightarrow \underline{Mínimo: A\left(-\ 3,\ \ -\frac{1}{9}\right)}.$

$f^{''}(1) = \frac{2\cdot(1+6-3)}{1\cdot(-2)^3} = \frac{2\cdot4}{-8} =-\ 1\ >\ 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x\ =\ 1.$

$f(1) = \frac{1+1}{1-3} = \frac{2}{-2} =-\ 1 \Rightarrow \underline{Máximo: B(1,\ \ -\ 1)}.$

d)

Con los datos obtenidos en los apartados anteriores se obtiene, aproximadamente, la gráfica de la figura, que se la siguiente:



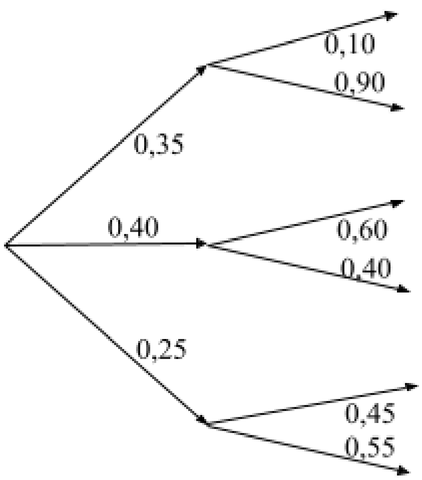
****

3º) En una determinada población se han organizado tres asociaciones de vecinos, correspondientes a los tres principales barrios del pueblo. De todos los vecinos pertenecientes a alguna de ellas, el 35 % pertenece a la asociación A, el 40 % a la B y el 25 % a la C. Entre los socios de la A, sólo el 10 % está satisfecho con la labor realizada por su asociación en el último año. En el caso de la B, el porcentaje de socios satisfechos es del 60 % y en la C es del 45 %.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un ciudadano elegido al azar del entre todos los pertenecientes a alguna de las tres asociaciones, sea socio de la A y esté satisfecho con la labor realizada el último año?

b) Si uno de los vecinos pertenecientes a alguna agrupación está insatisfecho con ella, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca a la B?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un ciudadano elegido al azar de entre todos los pertenecientes a alguna de las tres asociaciones, esté insatisfecho con la labor realizada el último año?



a)

$$P = P(A/S) = P(A \cap S) = P(A) \cdot P(S/A) = 0,35 \cdot 0.10 = \underline{0,0350}.$$

b)

$$P = P(\overline{S}/B) = \frac{P(B \cap \overline{S})}{P(\overline{S})} = \frac{P(B) \cdot P(\overline{S}/B)}{P(A) \cdot P(\overline{S}/A) + P(B) \cdot P(\overline{S}/B) + P(C) \cdot P(\overline{S}/C)} =$$

$$= \frac{0,40 \cdot 0,40}{0,35 \cdot 0,90 + 0,40 \cdot 0,40 + 0,25 \cdot 0,55} = \frac{0,1600}{0,3150 + 0,1600 + 0,1375} = \frac{0,1600}{0,6125} = \underline{0,2612}.$$

c)

$$P = P(\overline{S}) = P(A/\overline{S}) + P(B/\overline{S}) + P(C/\overline{S}) =$$

$$= P(A) \cdot P(\overline{S}/A) + P(B) \cdot P(\overline{S}/B) + P(C) \cdot P(\overline{S}/C) =$$

$$= 0,35 \cdot 0,90 + 0,40 \cdot 0,40 + 0,25 \cdot 0,55 = 0,3150 + 0,1600 + 0,1375 = \underline{0,6125}$$

****

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

1º) a) Dada la matriz $A = (2\ 3\ \ -1\ 4\ 0\ \ -k\ 2\ \ -1\ 3\ )$, analizar su rango según los valores del parámetro k.

b) Para $k = 5$, ¿la matriz A del apartado a) tiene inversa? Justificar la respuesta, utilizando los resultados obtenidos en el apartado anterior.

c) Consideremos las matrices $B = (1\ 2\ 3\ 0\ \ -1\ 2\ 1\ 0\ 1\ )$, $C = (2\ 1\ 0\ 1\ 0\ 2\ )$ y la matriz A del apartado a) para $k = 0$. Resolver la ecuación matricial $AX + C = BX$.

----

a)

Por ser el menor de A: $|1\ 2\ 0\ \ -1\ |\neq 0 \Rightarrow Rang\ A \geq 2$.

$|A| = |2\ 3\ \ -1\ 4\ 0\ \ -k\ 2\ \ -1\ 3\ | = 4 - 6k - 2k - 36 = 0;\ \ -8k - 32 = 0$

.

$\underline{Para\ k = -4 \Rightarrow Rang\ A = 2}$.

$\underline{Para\ k \neq -4 \Rightarrow Rang\ A = 3}$.

b)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

Para $k = 5\ es\ |A| \neq 0$, por lo cual:

$\underline{Para\ k = 5\ la\ matriz\ A\ es\ invertible}$.

c)

Para $k = 0$ es $A = (2\ 3\ \ -1\ 4\ 0\ 0\ 2\ \ -1\ 3\ )$.

$AX + C = BX;\ \ AX - BX = -C;\ \ (A - B) \cdot X = -C$.

Multiplicando por la izquierda los dos términos por $(A - B)^{-1}$:

$(A - B)^{-1} \cdot (A - B) \cdot X = -(A - B)^{-1} \cdot C;\ \ I \cdot X = -(A - B)^{-1} \cdot C \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{X = -(A - B)^{-1} \cdot C}$.

$A - B = (2\ 3\ \ -1\ 4\ 0\ 0\ 2\ \ -1\ 3\ ) - (1\ 2\ 3\ 0\ \ -1\ 2\ 1\ 0\ 1\ ) = (1\ 1\ \ -4\ 4\ 1\ \ -2\ 1\ \ -$

.

$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{ F_2 \rightarrow F_2 - 4F_1\ F_3 \rightarrow F_3 - F_1 \right\} \Rightarrow$

$= (1\ 0\ 0\ \ -4\ 1\ 0\ \ -1\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow F_2 - 2F_3\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (1\ 0\ 0\ \ -2\ 1\ \ -2\ \ -1\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow F_1 - F_2\ F_3 \rightarrow F_3 + 2F_2\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (3\ \ -1\ 2\ \ -2\ 1\ \ -2\ \ -5\ 2\ \ -3\ ) \Rightarrow \left\{F_3 \rightarrow \frac{1}{10}F_3\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(3\ \ -1\ 2\ \ -2\ 1\ \ -2\ \ -\frac{1}{2}\ \frac{1}{5}\ \ -\frac{3}{10}\ \right) \Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow F_1 + 6F_3\ F_2 \rightarrow F_2 - 2F_3\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(0\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{5}\ \ -1\ \frac{3}{5}\ \ -\frac{7}{5}\ \ -\frac{1}{2}\ \frac{1}{5}\ \ -\frac{3}{10}\ \right) \Rightarrow$

$\Rightarrow (A - B)^{-1} = \left(0\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{5}\ \ -1\ \frac{3}{5}\ \ -\frac{7}{5}\ \ -\frac{1}{2}\ \frac{1}{5}\ \ -\frac{3}{10}\ \right) = \frac{1}{10}\cdot(0\ 2\ 2\ \ -10\ 6\ \ -14\ \ -$

.

Sustituyendo los valores obtenidos en la expresión de X:

$X = -(A + B)^{-1}\cdot C = \frac{1}{10}\cdot(0\ 2\ 2\ \ -10\ 6\ \ -14\ \ -5\ 2\ \ -3\ )\cdot(2\ 1\ 0\ 1\ 0\ 2\ ) = \frac{1}{10}\cdot(0\ 6$

.

$$\underline{X = \frac{1}{10}\cdot(0\ 6\ \ -20\ \ -32\ \ -10\ \ -9\ ).}$$

****

2º) Dada la función $f(x) = \{ax + 2 \ \ si \ \ x < -1 \quad \frac{x-2}{(x+3)^2} \ \ si \ \ -1 \leq x < 3 \ x^2 - 2x + b \ \ si \ \ x \geq 3 :$

a) Determinar los valores de los parámetros a y b para los cuales la función es continua en todo su dominio.

b) Calcular la integral indefinida: $I = \int_0^2 f(x) \cdot dx$.

----

a)

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para los valores $x = -1$ y $x = 3$, para cuya continuidad se van de determinar los valores de a y b para que lo sea.

Para que la función sea continua en los puntos críticos es necesario que sus límites laterales en esos puntos sean iguales e iguales a los correspondientes valores de la función en esos puntos.

$$f(x) = (ax + 2) = -a + 2 \quad f(x) = \frac{x-2}{(x+3)^2} = \frac{-3}{4} = f(-1) \} \Rightarrow -a + 2 = -$$

$$4a = 11 \Rightarrow \underline{a = \frac{11}{4}}.$$

$$f(x) = \frac{x-2}{(x+3)^2} = \frac{1}{36} \qquad f(x) = \left(x^2 - 2x + b\right) =$$

$$\Rightarrow \frac{1}{36} = 3 + b; \ 1 = 108 + 36b; \ 36b = -107 \Rightarrow \underline{b = -\frac{107}{36}}.$$

b)

$$I = \int_0^2 f(x) \cdot dx = \int_0^2 \frac{x-2}{(x+3)^2} \cdot dx \Rightarrow \{x = 2 \rightarrow t = 5 \ x = 0 \rightarrow t = 3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_3^5 \frac{t+5}{t^2} \cdot dt = \int_3^5 \left(\frac{1}{t} + \frac{5}{t^2}\right) dt = \left[Lt + \frac{5t^{-1}}{-1}\right]_3^5 = \left[Lt - \frac{5}{t}\right]_3^5 = \left(L5 - \frac{5}{5}\right) - \left(L3 - \frac{5}{3}\right) =$$

$$= L5 - 1 - L3 + \frac{5}{3} = L\frac{5}{3} + \frac{2}{3}.$$

$$\underline{I = \int_0^2 f(x) \cdot dx = L\frac{5}{3} + \frac{2}{3}.}$$

****

3º) a) Los gastos diarios de una familia española de clase media en una ciudad A siguen una distribución normal de media desconocida y desviación típica 10 euros. Para estimar el gasto medio se elige una muestra de 350 familias. ¿Con qué nivel de confianza debe realizarse la estimación si el error cometido es de 1,45 euros?

b) Se realiza la misma encuesta en otra ciudad, B. En este caso, los gastos diarios de una familia de clase media siguen una distribución normal con desviación típica 4,5 euros. Con una muestra aleatoria de 300 familias se ha obtenido un gasto medio de 53 euros. Obtener el intervalo de confianza del 94 % para el gasto medio diario.

----

a)

Datos: $n = 350, \ \sigma = 10 \ y \ E = 1,45.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{1,45 \cdot \sqrt{350}}{10} = \frac{27,1270}{10} = 2,71.$

De la tabla de distribución normal N(0, 1): $F(2,71) \Rightarrow 0,9966.$

$\frac{\alpha}{2} = 1 - 0,9966 = 0,0034 \Rightarrow \alpha = 2 \cdot 0,0034 = 0,0068.$

$1 - \alpha = 0,0068 \Rightarrow a = 1 - 0,0068 = 0,9932.$

<u>*El nivel de confianza es del* 99,32 %.</u>

b)

Datos: $n = 300, \ \sigma = 4,5 \ y \ \overline{x} = 53.$

Para un nivel de confianza del 94 %:

$1 - \alpha = 0,94 \rightarrow \alpha = 1 - 0,94 = 0,06 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,03} = 1,88.$

$(1 - 0,03 = 0,9700 \rightarrow z = 1,88).$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}$, σ y n, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \ \overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(53 - 1,88 \cdot \frac{4,5}{\sqrt{300}}, \ 53 + 1,88 \cdot \frac{4,5}{\sqrt{300}}\right);$

$(53 - 1,88 \cdot 0'2598, \ 53 + 1,88 \cdot 0'2598); \ (53 - 0'4884, \ 53 + 0'4884)$

$$\underline{I. \ C._{94\,\%} = (52'5116, \ 53'4884).}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE CASTILLA Y LEÓN

JUNIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá escoger una de las dos opciones y desarrollar las preguntas de la misma.

OPCIÓN A

1º) Se considera el sistema lineal de ecuaciones: $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 3 \\ 2x + 2y + az = 8 \end{cases}$.

a) Clasifica el sistema según sus posibles soluciones, para los distintos valores de α.

b) Resuelve el sistema para α = 4.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & a & 8 \end{pmatrix}$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro α es el siguiente:

$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & a \end{vmatrix} = 2a + 6 + 8 - 4 + 4 + 6a = 0,\ 8a + 14 =$

$4a + 7 = 0 \Rightarrow a = -\frac{7}{4}$.

$\underline{Para\ a \neq -\frac{7}{4} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

$Para\ a = -\frac{7}{4}\ es\ M' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -\frac{7}{4} & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 12 - 6 + 48 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3$.

$\underline{Para\ a = -\frac{7}{4} \Rightarrow Rang\ M = 2,\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

b)

Para $a = 4$ el sistema resulta: $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 3 \\ 2x + 2y + 4z = 8 \end{cases}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|0\ -2\ 1\ 3\ 2\ -2\ 8\ 2\ 4\ |}{8 \cdot 4+14} = \frac{6+32-16+24}{32+14} = \frac{46}{46} = 1.$$

$$y = \frac{|1\ 0\ 1\ 3\ 3\ -2\ 2\ 8\ 4\ |}{46} = \frac{12+24-6+16}{46} = \frac{46}{46} = 1.$$

$$z = \frac{|1\ -2\ 0\ 3\ 2\ 3\ 2\ 2\ 8\ |}{46} = \frac{16-12-6+48}{46} = \frac{46}{46} = 1.$$

$\underline{Solución: x = y = z = 1}.$

****

2º) Un estudio realizado por una agencia especializada revela que el número de votantes censados en una comunidad autónoma española viene determinado, en millones de personas, por la función $f(t)=\frac{(t+10)^2+15}{(t+11)^2}$, donde t es el tiempo en años transcurridos desde el inicio del estudio, el 1 de enero de 1.990.

a) Calcula el número mínimo de votantes censados. ¿En qué año se alcanza el mínimo?

b) Calcula el número de votantes censados que tendrá dicha comunidad a muy largo plazo.

----

a)

El número mínimo de votantes censados se produce para un valor de t que anula la primera derivada de la función que los determina:

$$f'(t)=\frac{2\cdot(t+10)\cdot(t+11)^2-\left[(t+10)^2+15\right]\cdot 2\cdot(t+11)}{(t+11)^4}=\frac{2\cdot(t+10)\cdot(t+11)-2\left[(t+10)^2+15\right]}{(t+11)^3}=$$

$$=\frac{2\cdot\left(t^2+21t+110\right)-2\left(t^2+20t+100+15\right)}{(t+11)^3}=\frac{2t^2+42t+220-2t^2-40t-230}{(t+11)^3}=\frac{2t-10}{(t+11)^3}.$$

$$f'(t)=0\Rightarrow\frac{2t-10}{(t+11)^3}=0;\ \ 2t-10=0;\ \ t-5=0\Rightarrow t=5.$$

Para la justificación de que se trata de un mínimo, la segunda derivada para el valor t = 5 tiene que ser positiva:

$$f''(t)=\frac{2(t+11)^3-(2t-10)\cdot 3(t+11)^2}{(t+11)^6}=\frac{2(t+11)-3(2t-10)}{(t+11)^4}=\frac{2t+22-6t+30}{(t+11)^4}=\frac{-4t+52}{(t+11)^4}.$$

$$f''(5)=\frac{-20+52}{(5+11)^4}=\frac{32}{+}>0\Rightarrow Minimo,\ como\ queríamos\ justificar.$$

$$\underline{El\ mínimo\ de\ votantes\ censados\ se\ produce\ el\ año\ 1.995.}$$

$$f(5)=\frac{(5+10)^2+15}{(5+11)^2}=\frac{225+15}{256}=\frac{240}{256}=\frac{15}{16}=0,9375.$$

$$\underline{El\ mínimo\ de\ votantes\ censados\ es\ de\ 937.500\ personas.}$$

b)

$$f(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{(t+10)^2+15}{(t+11)^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2+20t+115}{t^2+22t+121}=1.$$

$$\underline{A\ muy\ largo\ plazo\ el\ nº\ de\ votantes\ censados\ será\ de\ 1.000.000\ personas.}$$

****

3º) Una panadería elabora madalenas caseras cuyos pesos siguen una distribución normal con media 40 gramos y desviación típica 5 gramos.

a) Calcula el porcentaje de madalenas que pesan más de 43 gramos.

b) Las madalenas se empaquetan en bolsas de 20 madalenas para su venta. El panadero considera aceptable una bolsa cuando su peso no supera los 820 gramos. ¿Cuál es la probabilidad de que una bolsa no sea aceptable?

----

a)

Sea X el peso en gramos de una madalena $\Rightarrow X \to N(40,\ \rho)$.

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-40}{\rho} \to N(0,\ 1)$.

Si $p(X > 43) \Rightarrow\ Z = \frac{43-40}{5} = \frac{3}{5} = 0,6$.

$p(X > 40) = p(Z > 0,6) = 1 - p(Z \leq 0,6) = 1 - 0,7257 = 0,2743$.

$\underline{Las\ madalenas\ que\ superan\ los\ 43\ gramos\ suponen\ el\ 27,43\ \%}$.

b)

Sea Y el peso en gramos de una bolsa de 20 madalenas.

$Y \to N\left(n \cdot \mu,\ \rho \cdot \sqrt{n}\right) = \left(40 \cdot 20,\ 5 \cdot \sqrt{20}\right) = (800,\ 22'36)$.

Tipificando la variable: $Z = \frac{Y-800}{22'36} \to N(0,\ 1)$.

Si $p(Y > 820) \Rightarrow\ Z = \frac{820-800}{22,36} = \frac{20}{22,36} = 0,89$.

$p(Y > 820) = p(Z > 0,89) = 1 - p(Z \leq 0,89) = 1 - 0,8133 = 0,1867$

.

$\underline{La\ probabilidad\ de\ que\ una\ bolsa\ no\ sea\ aceptable\ es\ del\ 18,67\ \%}$.

****

4º) En una localidad llueve en 73 de los 365 días del año. ¿Cuál es la probabilidad de que llueva más de 2 días en una semana cualquiera?

La probabilidad de que llueva un día es $p = \frac{73}{365} = 0,2$.

La probabilidad de que no llueva un día es $q = 1 - p = 1 - 0,2 = 0,8$.

Se trata de una distribución binomial con n = 7, p = 0,2 y q = 0,8.

Sabiendo que la probabilidad de que un suceso se produzca $r \leq n$ veces viene dada por: $p_r = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}$, la probabilidad de que llueva en más de dos días a la semana es equivalente a la unidad menos la probabilidad de que no llueva ningún día, que llueva un día o que lluevan dos días:

$$p_{r>2} = 1 - \left[\binom{7}{0} \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^7 + \binom{7}{1} \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^6 + \binom{7}{2} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^5\right] =$$

$$= 1 - (1 \cdot 1 \cdot 0,210 + 7 \cdot 0,2 \cdot 0,262 + 21 \cdot 0,04 \cdot 0,328) =$$

$$= 1 - (0,210 + 0,367 + 0,275) = 1 - 0,852 = 0,148.$$

$\underline{La\ probabilidad\ de\ que\ lluevan\ más\ de\ dos\ días\ a\ la\ semana\ es\ del\ 14,80\ \%.}$

****

OPCIÓN B

1º) Un comercio dispone de 60 unidades de un producto A por el que obtiene un beneficio por cada unidad que vende de 250 euros. También dispone de 70 unidades de otro producto B por el que obtiene un beneficio por unidad vendida de 300 euros. El comercio puede vender como máximo 100 unidades de sus productos. Utilizando técnicas de programación lineal, determina las unidades de los productos A y B que el comercio debe vender para que su beneficio sea máximo y calcula dicho beneficio.

Sean x e y el número de unidades vendidas de A y B, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{array}{l} x\le 60 \\ y\le 70 \\ x+y\le 100 \end{array}\right\}$.

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,\ y) = 250x + 300y$.

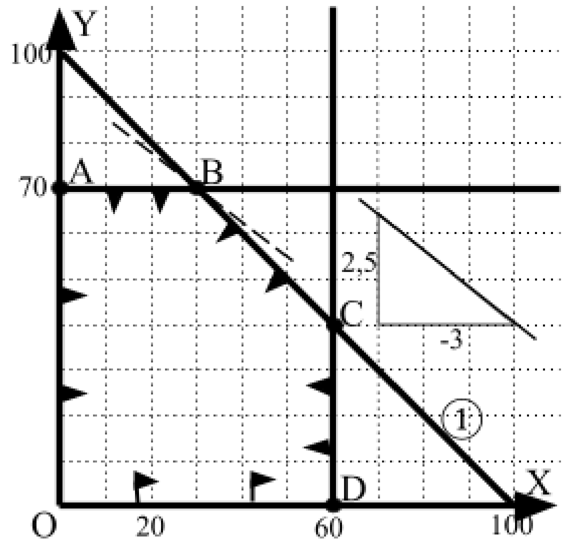
La región factible se indica en la figura:

x	0	100
y	100	0

$①\Rightarrow x + y\le 100 \Rightarrow y\le 100 - x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

Los vértices de la sección factible, además de $O(0,\ 0)$, son los siguientes:

$A\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 70 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{A(0,\ 70)}$.



$B\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 100 \\ y = 70 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{B(30,\ 70)}$.

$C\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 100 \\ x = 60 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{C(60,\ 40)}$.

$D\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 60 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{D(60,\ 0)}$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 70) = 250 \cdot 0\ +\ 300 \cdot 70\ =\ 0\ +\ 21.000\ =\ \underline{21.000}.$

$B \Rightarrow f(30,\ 70) = 250 \cdot 30\ +\ 300 \cdot 70\ =\ 7.500\ +\ 21.000\ =\ \underline{28.500}.$

$C \Rightarrow f(60,\ 40) = 250 \cdot 60\ +\ 300 \cdot 40\ =\ 15.000\ +\ 12.000\ =\ \underline{27.000}.$

$D \Rightarrow f(60,\ 0) = 250 \cdot 60\ +\ 300 \cdot 0\ =\ 15.000\ +\ 0\ =\ \underline{15.000}.$

El máximo se produce en el punto B.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,\ y) = 250x\ +\ 300y\ =\ 0 \Rightarrow y\ = -\ \frac{250}{300}x \Rightarrow m\ = -\ \frac{2{,}5}{3}.$$

$$\underline{El\ máximo\ beneficio\ se\ obtiene\ vendiendo\ 30\ articulos\ A\ y\ 70\ B}.$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 28.500\ euros}.$$

****

2º) Se considera la función $f(x) = x^2 + ax + b$.

a) Determina los valores de a y b sabiendo que la función $f(x)$ tiene un mínimo para x = 2 y que su gráfica pasa por el punto P(2, -2).

b) Para a = -4 y b = 6 calcula el valor de la función $f(x)$ en el punto x = -1 y represéntala gráficamente.

----

a)

Por pasar por P: $f(2) = -2 \Rightarrow 2^2 + 2a + b = -2;\ \ 2a + b = -6.$ (1)

Por tener un mínimo para x = 2: $f'(2) = 0$.

$f'(x) = 2x + a \Rightarrow f'(2) = 0 \Rightarrow 4 + a = 0 \Rightarrow \underline{a = -4}$.

Sustituyendo en (1) el valor de a obtenido:

$2\cdot(-4) + b = -6;\ \ -8 + b = -6 \Rightarrow \underline{b = 2}$.

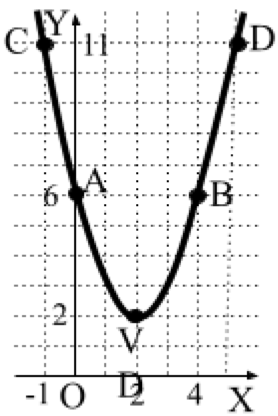
b)

La función resulta $f(x) = x^2 - 4x + 6$.

$f(-1) = (-1)^2 - 4\cdot(-1) + 6 = 1 + 4 + 6 = 11.$

$$\underline{f(-1) = 11}.$$

La función es una parábola convexa (∪), cuyo vértice es el siguiente:



$f'(x) = 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2.$

$f(2) = 2^2 - 4\cdot 2 + 6 = 2 \Rightarrow V(2,\ 2).$

Teniendo en cuanta la simetría con respecto a su eje, que es la recta x = 2, son otros puntos de la parábola los siguientes:

$f(0) = f(4) = 6 \Rightarrow A(0,\ 6)\ y\ B(4,\ 6).$

$f(-1) = f(5) = 5^2 - 4\cdot 5 + 6 = 11 \Rightarrow C(-1,\ 11)\ y\ D(5,\ 11).$

La representación gráfica, aproximada, es la indicada en el gráfico adjunto.

****

3º) El número de vuelos que llegan a un aeropuerto por la mañana es 120, por la tarde 150 y por la noche 30. El porcentaje de vuelos que se retrasan por la mañana es del 2 %, por la tarde del 4 % y por la noche de un 6 %.

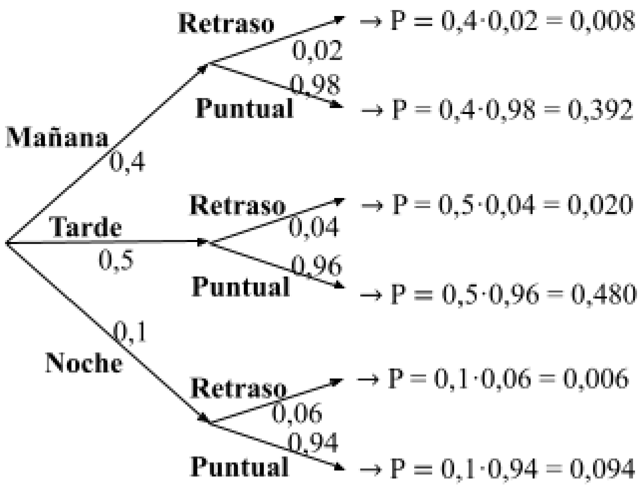
a) Calcula la probabilidad de que se retrase un vuelo con destino a este aeropuerto.

b) Si un vuelo llegó con retraso a este aeropuerto, ¿cuál es la probabilidad de que fuera un vuelo nocturno?

$$120 + 150 + 30 = 300.$$

$P(Mañana) = \frac{120}{300} = \frac{4}{10} = 0,4.$ $P(Tarde) = \frac{150}{300} = 0,5.$

$P(Noche) = \frac{30}{300} = 0,1.$



a)

$$P(retraso) = 0,008 + 0,020 + 0,006 = \underline{0,034}.$$

Nótese que se ha aplicado el teorema de la probabilidad total:

$$P(R) = P(M) \cdot P(R/M) + P(T) \cdot P(R/T) + P(N) \cdot P(R/N) =$$

$$= 0,4 \cdot 0,02 + 0,5 \cdot 0,04 + 0,1 \cdot 0,06 = 0,08 + 0,020 + 0,006 = \underline{0,034}.$$

b)

$$P = \frac{0,006}{0,008+0,020+0,006} = \frac{0,006}{0,034} = \frac{6}{34} = \underline{0,176}.$$

En la resolución de este apartado se ha empleado el teorema de Bayes:

$$P(N/R) = \frac{P(N) \cdot P(R/N)}{P(M) \cdot P(R/M) + P(T) \cdot P(R/T) + P(N) \cdot P(R/N)} = \frac{0,006}{0,008+0,020+0,006} = \frac{0,006}{0,034} =$$

$= \frac{6}{34} = 0,176.$

****

4º) La duración de una batería de móvil sigue una distribución normal de media 3 años y desviación típica 0,5 años. Calcula la probabilidad de que una batería dure entre 2 y 4 años.

Siendo X la variable que indica la duración de la batería en años: $X \rightarrow N(3,\ 0,5)$.

$$P(2 < X < 4) = P\left(\frac{2-3}{0,5} < Z < \frac{4-3}{0,5}\right) = P\left(\frac{-1}{0,5} < Z < \frac{1}{0,5}\right) = P(-2 < Z < 2) =$$

$$= P(Z < 2) - P(Z < -2) = 2 \cdot P(Z < 2) - 1 = 2 \cdot 0,9772 - 1 = 1,9544 - 1 =$$

$$= 0,9544.$$

$$\underline{P_{(2<X<4)} = 0,9544.}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE CASTILLA Y LEÓN

SEPTIEMBRE – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá escoger una de las dos opciones y desarrollar las preguntas de la misma.

OPCIÓN A

1º) Calcula todos los valores, si existen, de los parámetros reales ɑ y b que hacen que $A \cdot X - X \cdot A = O$, siendo $A = (-1 \ \ -2\ 3\ 7)$ y $X = (a\ 2 \ \ -3\ b)$ y O la matriz nula cuadrada de orden dos.

$$A \cdot X - X \cdot A = O \Rightarrow (-1 \ \ -2\ 3\ 7) \cdot (a\ 2 \ \ -3\ b) - (a\ 2 \ \ -3\ b)(-1 \ \ -2\ 3\ 7) =$$

$$= (-a + 6 \ \ -2 - 2b\ 3a - 21\ 6 + 7b) - (-a + 6 \ \ -2a + 14\ 3 + 3b\ 6 + 7b) =$$

$$= (0\ 2a - 2b - 16\ 3a - 3b - 24\ 0) = (0\ 0\ 0\ 0) \Rightarrow 3a - 3b - 24 = 0\ 2a - 2b - 1$$

;

$a - b = 8\ a - b = 8 \} \Rightarrow \underline{a - b = 8}$.

$$\underline{A \cdot X - X \cdot A = O\ \forall a, b \in R,\ a - b = 8}.$$

****

2º) El propietario de un cine llena ordinariamente las 100 butacas de la sala, cobrando 4 euros por cada entrada. El dueño tiene la experiencia de que por cada euro que aumente el precio de la entrada acuden 10 espectadores menos.

a) Halla la expresión de la función de los ingresos diarios del cine dependiendo del aumento del precio de la entrada.

b) Determina el precio de la entrada para que los ingresos diarios del propietario sean máximos. ¿Cuántos espectadores acudirán al cine en ese momento? ¿Cuáles serán los ingresos diarios que obtendrá el propietario con ese precio?

----

a)

Sea x el número de euros que aumenta el precio de la entrada.

El número de espectadores que sacan la entrada, según sea el precio de la entrada es el siguiente: $N = 100 - 10x$.

Los ingresos se obtienen multiplicando el precio de la entrada por el número de espectadores que asisten:

$$Ingresos = I(x) = (4 + x)\cdot(100 - 10x) = 400 - 40x + 100x - 10x^2.$$

$$\underline{I(x) = -10x^2 + 60x + 400}.$$

b)

Los ingresos serán máximos cuando se anule la primera derivada de la función de los ingresos:

$$I'(x) = -20x + 60 = 0; \quad -x + 3 = 0 \Rightarrow x = 3.$$

Para justificar que se trata de un máximo, la segunda derivada tiene que ser negativa para el valor de x encontrado:

$$I''(x) = -20 < 0 \Rightarrow Máximo,\ como\ se\ quería\ justificar.$$

$$N(3) = 100 - 10\cdot3 = 100 - 30 = 70.$$

$$\underline{En\ el\ momento\ de\ máximo\ beneficio\ asisten\ 70\ espectadores}.$$

$$I(3) = -10\cdot3^2 + 60\cdot3 + 400 = -90 + 180 + 400 = 490.$$

$$\underline{El\ máximo\ beneficio\ es\ de\ 490\ euros}.$$

****

3º) La temperatura corporal es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media 36,7°C y desviación típica 3,8°C. Se elige aleatoriamente una muestra de 100 personas.

a) Calcula la probabilidad de que la temperatura corporal media de la muestra sea menor que 36,9°C.

b) Calcula la probabilidad de que la temperatura corporal media de la muestra esté comprendida entre 36,5°C y 37,3°C.

----

a)

$$Para\, n = 100 \rightarrow \overline{X} = N\left(36'7,\ \frac{3{,}8}{\sqrt{100}}\right) = N\left(36'7,\ \frac{3{,}8}{10}\right) = N(36'7,\ 0'38).$$

Tipificando la variable: $Z = \frac{\overline{X}-36{,}7}{0{,}38}$.

$$P(\overline{X} < 36,9) = P\left(\frac{\overline{X}-36{,}7}{0{,}38} < \frac{36{,}9-36{,}7}{038}\right) = P\left(Z < \frac{0{,}2}{0{,}38}\right) = P(Z < 0,526).$$

$$\underline{P(\overline{X} < 36,9) = 0,7020}.$$

b)

$$P(36,5 \leq \overline{X} \leq 37,3) = P\left(\frac{36{,}5-36{,}7}{0{,}38} \leq Z \leq \frac{37{,}3-36{,}7}{038}\right) = P\left(\frac{-0{,}2}{0{,}38} \leq Z \leq \frac{0{,}6}{0{,}38}\right) =$$

$$= P(-\ 0,526 \leq Z \leq 1,580) = P(Z \leq 1,580) - P(Z \leq -\ 0,526) =$$

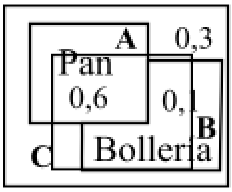
$$= P(Z \leq 1,580) - [1 - P(Z \leq 0,526)] = 0,9429 - (1 - 0,7020) =$$

$$= 0,9429 - 1 + 0,7020 = 1,6449 - 1 = 0,6449.$$

$$\underline{P(36,5 \leq \overline{X} \leq 37,3) = 0,6449}.$$

****

4º) El 60 % de los clientes de una panadería compran pan y el 30 % no compran ni pan ni bollería. ¿Qué porcentaje de clientes compran bollería y no compran pan?

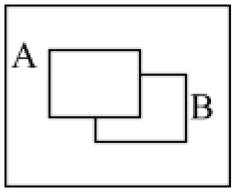


Sean A los clientes que compran pan, B los que compran bollería y C los que no compran pan ni bollería.

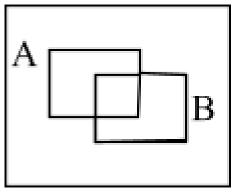
Los datos son: $P(A) = 0,6$. $P(\overline{A \cup B}) = 0,3$.

Se pide $P(\overline{A} \cap B)$.

De la observación de los gráficos se deduce que:



$\overline{A}$



$\overline{A} \cap B$

$\overline{A} \cap B = (A \cup B) - A.$

$P(\overline{A} \cap B) = P(A \cup B) - P(A) = 0,7 - 0,6 = \underline{0,1}.$

$\underline{\textit{Compran bollería y no compran pan el } 10\ \% \textit{ de los clientes}}.$

****

OPCIÓN B

1º) Un heladero artesano elabora dos tipos de helados A y B que vende cada día. Los helados tipo A llevan un gramo de nata y los helados tipo B llevan 2 gramos de chocolate. Se dispone de 200 gramos de nata, 400 gramos de chocolate y le da tiempo a elaborar como máximo 350 helados diariamente. Por cada helado tipo A obtiene un beneficio de 1,5 euros y por cada helado tipo B el beneficio es de 1 euros. Utilizando técnicas de programación lineal, determina las unidades de cada tipo de helado que debe elaborar diariamente para que su beneficio sea máximo y calcula dicho beneficio.

Sean x e y el número de helados de los tipos A y B, respectivamente, que vende cada día.

Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{array}{l} 0 \le x \le 200 \\ 0 \le 2y \le 400 \\ x + y \le 350 \end{array}\right\}$.

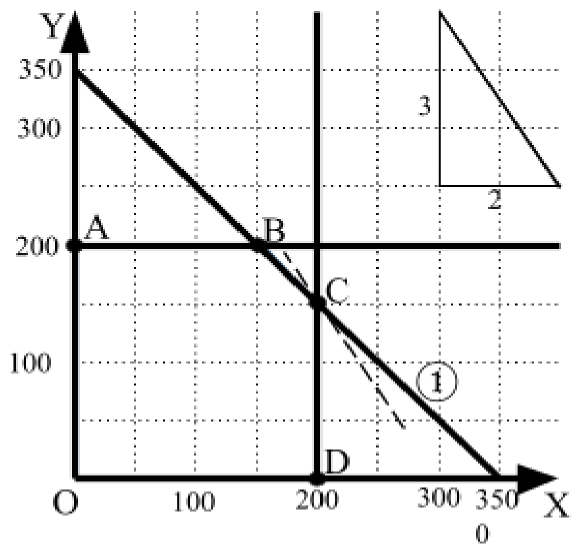
La función de objetivos es: $f(x,\ y) = 1,5x + y$.

La región factible se indica en la figura:

x	350	0
y	0	350

$(1) \Rightarrow x + y \le 350 \Rightarrow y = 350 - x \Rightarrow O \to Si.$

Los vértices de la sección factible, además de O(0, 0), son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 200 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{A(0,\ 200)}.$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 150 \\ y = 200 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{B(150,\ 200)}.$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 200 \\ y = 150 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{C(200,\ 150)}.$

$D \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 200 \quad y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{D(200,\ 0)}.$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 200) = 1,5 \cdot 0 + 1 \cdot 200 = 0 + 200 = 200.$

$B \Rightarrow f(150,\ 200) = 1,5 \cdot 150 + 1 \cdot 200 = 225 + 200 = 425.$

$C \Rightarrow f(200,\ 150) = 1,5 \cdot 200 + 1 \cdot 150 = 300 + 150 = \underline{450}.$
$D \Rightarrow f(200,\ 0) = 1,5 \cdot 200 + 1 \cdot 0 = 300 + 0 = 300.$

El máximo se produce en el punto C.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = 1,5x + y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1,5}{1}x \Rightarrow m = -\frac{3}{2}.$

$$\underline{El\ máximo\ beneficio\ lo\ obtiene\ vendiendo\ cada\ día\ 200\ helados\ A\ y\ 150\ B}.$$

$$\underline{El\ máximo\ beneficio\ asciende\ a\ 450\ euros}.$$

****

2º) Dada la función $f(x) = -x^3 + 1$.

a) Estudia su crecimiento y decrecimiento, y calcula sus puntos de inflexión.

b) Determina la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en x = 1.

c) Representa gráficamente la función $f(x)$.

----

a)

La función está definida para cualquier valor real de x.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = -3x^2 < 0,\ \forall x \in R.$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ monótona\ decreciente\ en\ R.}$$

Es condición necesaria para que una función tenga un punto de inflexión en un punto que se anule su segunda derivada en dicho punto. Esta condición necesaria no es suficiente; para que exista punto de inflexión es necesario que no se anule la tercera derivada para los valores que anulan la segunda.

$$f''(x) = -6x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

$$f'''(x) = -6 \neq 0 \Rightarrow Punto\ de\ inflexión\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = -0 + 1 = 1 \Rightarrow P.\ I. \Rightarrow \underline{A(0,\ 1)}.$$

b)

La pendiente de la tangente a una función en un punto es el valor de su derivada en ese punto. La pendiente de la recta tangente $y = 2x + 1$ es $m = 2$.

$$f'(x) = -3x^2 \Rightarrow f'(1) = -3 \cdot 1^2 = m = -3.$$

El punto de tangencia es el siguiente: $f(1) = -1^3 + 1 = 0 \Rightarrow B(1,\ 0)$.

La expresión de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente es la siguiente: $y - y_0 = m(x - x_0)$.

$$y - 0 = -3(x - 1);\ \ y = -3x + 3.$$

La ecuación de la recta tangente pedida es la siguiente:

$\underline{Recta\ tangente\colon\ t \equiv 3x + y - 3 = 0}.$

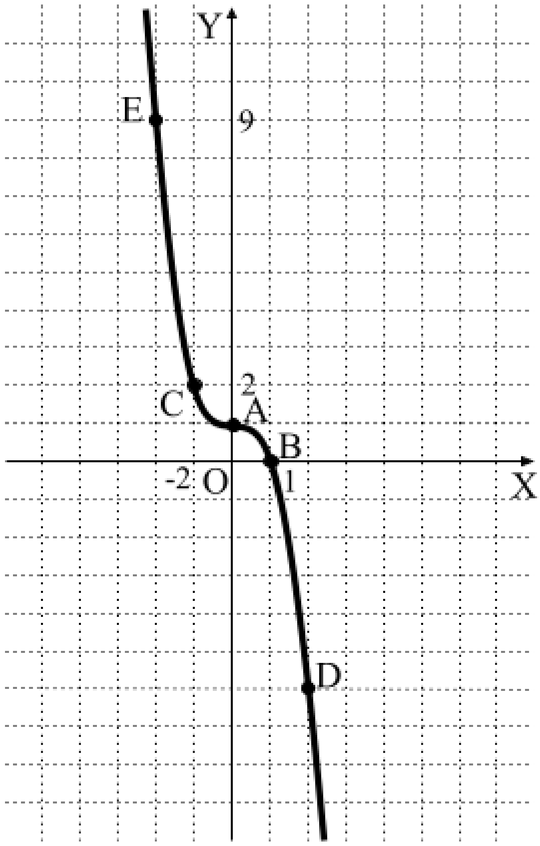
$c)$

Para la representación gráfica de la función $f(x) = -x^3 + 1$, además de tener en cuenta lo calculado anteriormente, consideramos que por ser polinómica, $f(x)$ no tiene ningún tipo de asíntotas.

Por no ser ni par ni impar tampoco tiene simetrías, ni con respecto al eje de ordenadas ni con respecto al origen. (obsérvese que es simétrica con respecto al punto de inflexión).

Son puntos de la función: $C(-1,\ 2)$, $D(2,\ -7)$, $E(-2,\ 9)$.

La representación gráfica, aproximada, es la que indica la figura siguiente.

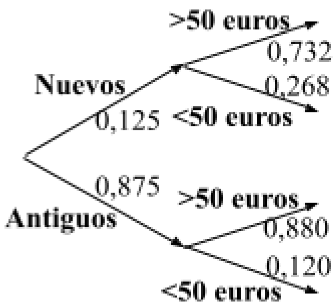


****

3º) En el año 2.014, el estudio *B2C-2.014 sobre Comercio Electrónico* aseguraba que el 12,5 % de los compradores on-line fueron nuevos compradores. El importe gastado on-line variaba según el tipo de comprador: el 26,8 % de los nuevos compradores gastaban menos de 50 euros, mientras que sólo el 12 % de los antiguos compradores gastaban menos de esa cantidad. Se elige un comprador on-line al azar:

a) Calcula la probabilidad de que gastara menos de 50 euros en las compras on-line.

b) Si el comprador on-line gastó menos de 50 euros, ¿cuál es la probabilidad de que fuera nuevo comprador?



a)

$$P(<\ 50) = P(N\cap <\ 50) + P(A\cap <\ 50) = 0,0335\ +\ 0,1050\ = \underline{0,1385}.$$

b)

$$P(<\ 50) = \frac{P(N\cap<50)}{P(<50)} = \frac{0,0350}{0,0335+0,1050} = \frac{0,0350}{0,1385} = \underline{0,2527}.$$

****

4º) Calcula el valor de $P(B)$ sabiendo que los sucesos A y B son independientes y que $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$ y $P(A) = \frac{1}{4}$.

Por ser A y B independientes: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5}{8} = \frac{1}{4} + P(B) - \frac{1}{4} \cdot P(B); \;\; 5 = 2 + 8P(B) - 2P(B); \;\; 6P(B) = 3.$$

$$\underline{P(B) = \frac{1}{2}}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE CASTILLA-LA MANCHA

JUNIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

OPCIÓN A

1º) a) Despeja la matriz X en la ecuación matricial: $3X + X\cdot A + B = I^4$, suponiendo que todas las matrices son cuadradas del mismo orden (I es la matriz identidad).

b) Dada la ecuación matricial: $X\cdot(3\ 1\ 0\ \ -\ 1\ ) = (1\ 1\ 0\ 4\ )$, despeja y calcula la matriz X.

----

a)

$$3X + X\cdot A + B = I^4;\ \ X\cdot 3I + X\cdot A = I^4 - B;\ \ X(3I + A) = I^4 - B.$$

Multiplicando los dos términos por la derecha por $(3I + A)^{-1}$:

$$X(3I + A)\cdot(3I + A)^{-1} = \left(I^4 - B\right)\cdot(3I + A)^{-1};$$

$$X\cdot I = \left(I^4 - B\right)\cdot(3I + A)^{-1}.$$

$$\underline{X = \left(I^4 - B\right)\cdot(3I + A)^{-1}}.$$

b)

$$X\cdot(3\ 1\ 0\ \ -\ 1\ ) = (1\ 1\ 0\ 4\ ).$$

La inversa de la matriz $M = (3\ 1\ 0\ \ -\ 1\ )$ es la siguiente:

$$(I) = (1\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow \frac{1}{3}F_1\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\ 0\ 0\ 1\right) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow -F_2\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\ 0\ 0\ \ -\ 1\right) \Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow F_1 - \frac{1}{3}F_2\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ 0\ \ -\ 1\right) \Rightarrow M^{-1} = \left(\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ 0\ \ -\ 1\right)$$

.

Multiplicando por la derecha por M^{-1} en $X\cdot(3\ 1\ 0\ \ -\ 1\ ) = (1\ 1\ 0\ 4\ )$:

$$X\cdot(3\ 1\ 0\ \ -\ 1\ )\cdot\left(\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ 0\ \ -\ 1\ \right) = (1\ 1\ 0\ 4\ )\cdot\left(\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ 0\ \ -\ 1\ \right);\ \ X\cdot I\ = \underline{X\ = \left(\frac{1}{3}\ \ -\frac{2}{3}\ 0\ \ -\ \right.}$$

.

****

2º) En un coro, la suma de sopranos, mezzosopranos y contraltos es igual a 15. Un día que tuvieron que cantar faltaron 2 mezzosopranos y 1 contralto debido a la gripe, de tal forma que ese día el número de sopranos era igual a la media aritmética de mezzosopranos y contraltos. Y además ese día el número de mezzosopranos y el número de contraltos coincidían.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar el número total de sopranos, mezzosopranos y contraltos que tiene el coro asiduamente.

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior.

----

a)

Sean x, y, z el número de sopranos, mezzosopranos y contraltos al comenzar.

$x + y + z = 15\ x = \frac{(y-2)+(z-1)}{2}\ \ y - 2 = z - 1 \}\ \ x + y + z = 15\ 2x = y + z -$

.

b)

De la tercera ecuación: $y = z + 1$. Sustituyendo en las otras dos ecuaciones:

$x + (z + 1) + z = 15\ 2x - (z + 1) - z =- 3 \}\ \ \ x + 2z = 14\ 2x - 2z =-$

.

$4 + 2z = 14;\ \ 2z = 10 \Rightarrow z = 5;\ \ y = 6.$

$\underline{El\ coro\ tiene\ asiduamente\ 4\ sopranos,\ 6\ mezzosopranos\ y\ 5\ contraltos.}$

****

3º) Se considera la función $f(x) = \{x^2 + 4x \ si \ x < -1 \quad t \ \ si \ -1 \leq x \leq 1 \ x^2 - 4x \ si \ x > 1$.
a) Hallar el valor de t para que f sea continua en $x = 1$.

b) Para $t = 0$, representa gráficamente la función f.

----

a)

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para los valores $x = -1$ y $x = 1$, que para forzar su continuidad se va a determinar el valor de t.

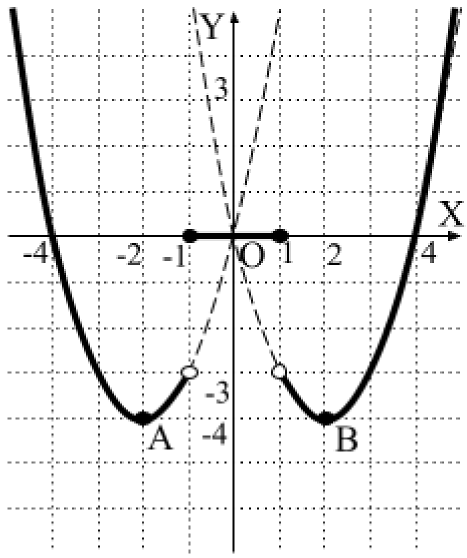
Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales al valor de la función en ese punto.

$Para\, x = 1 \Rightarrow \{f(x) \ = t = t \ = f(1) \qquad f(x) \ = f\left(x^2 - 4x\right) = 1 - 4 =$
.

<u>$La\, función\, f(x)\, es\, continua\, en\, x = 1\, para\, t = -3$.</u>

b)

Para $t = 0$ la función es $f(x) = \{x^2 + 4x \ si \ x < -1 \quad 0 \ \ si \ -1 \leq x \leq 1 \ x^2 - 4x \ si \ x > 1$.



En el intervalo $(-\infty, \ -1)$ la función es la parábola convexa (∪) $f(x) = x^2 + 4x$, cuyo vértice es el siguiente:

$f'(x) = 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$.

$f(-2) = -4 \Rightarrow Vértice: A(-2, \ -4)$.

En el intervalo $[-1, 1]$ la función es la recta horizontal $f(x) = -3$.

En el intervalo $(1, \ +\infty)$ la función es la parábola convexa (∪) $f(x) = x^2 - 4x$, cuyo vértice es el siguiente:

$f'(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$. $\qquad f(2) = -4 \Rightarrow Vértice: B(2, \ -4)$.

La representación gráfica, aproximada, es la que aparece en el gráfico adjunto.

****

4º) La evolución del precio de un determinado producto, en miles de euros, durante 6 meses, viene dada por la función $f(t) = t^3 - 9t^2 + 15t + 50,\ 0 \leq t \leq 6$, siendo t el tiempo medido en meses.

$a)$ ¿Cuál fue el valor que alcanzó dicho producto el segundo mes $(t = 2)$?

$b)$ ¿Cuándo alcanzó su precio máximo ese producto? ¿Y a cuánto ascendió?

$c)$ ¿Cuándo alcanzó su precio mínimo? ¿Y cuál es dicho valor?

$a)$

$$f(2) = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 15 \cdot 2 + 50 = 8 - 36 + 30 + 50 = 88 - 36 = 52.$$

$$\underline{El\ segundo\ mes\ el\ producto\ alcanzó\ un\ precio\ de\ 52.000\ euros.}$$

$b)$

Una función tiene un máximo relativo cuando se anula su primera derivada y, para los valores que anulan la primera derivada, la segunda derivada es negativa.

$$f'(t) = 3t^2 - 18t + 15 = 0;\quad t^2 - 6t + 5 = 0;\quad t = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} =$$

$$= \frac{6 \pm 4}{2} = 3 \pm 2 \Rightarrow t_1 = 1,\ t_2 = 5.$$

$$f''(t) = 6t - 18 \Rightarrow \{ f''(1) = 6 - 18 < 0 \rightarrow Máximo\ para\ t = 1\ f''(5) = 30 - 18 > 0 \rightarrow$$
.

$$f(1) = 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 15 \cdot 1 + 50 = 1 - 9 + 15 + 50 = 66 - 9 = 57.$$

$$\underline{El\ precio\ máximo\ lo\ alcanzó\ el\ primer\ mes\ y\ fue\ de\ 57.000\ euros.}$$

$c)$

$$f(5) = 5^3 - 9 \cdot 5^2 + 15 \cdot 5 + 50 = 125 - 225 + 75 + 50 = 25.$$

$$\underline{El\ precio\ mínimo\ lo\ alcanzó\ el\ quinto\ mes\ y\ fue\ de\ 25.000\ euros.}$$

****

5º) De un estudio sobre accidentes de tráfico se obtuvieron los siguientes datos: en el 15 % de los casos no se llevaba el cinturón de seguridad, en el 60 % no se respetaron los límites de velocidad permitidos y en el 5 % de los casos no se cumplían ambas normas, es decir, no llevaban puesto el cinturón y no respetaban los límites de velocidad.

a) Calcula la probabilidad de que, en un accidente de tráfico, no se haya cumplido alguna de las dos normas.

b) Razone si son independientes los sucesos "tener accidente no llevando el cinturón" y "tener un accidente no respetando los límites de velocidad".

Sean $P(\overline{c})$ y $P(c)$ las probabilidades de no llevar y llevar cinturón, respectivamente y sean $P(\overline{v})$ y $P(v)$ las probabilidades de no respetar y respetar los límites de velocidad, respectivamente.

$P(c) = 0,85;\ \ P(\overline{c}) = 0,15;\ \ P(v) = 0,40;\ \ P(\overline{v}) = 0,60;\ \ P(\overline{c} \cap \overline{v}) = 0,05.$

a)

$$P(\overline{c} \cup \overline{v}) = P(\overline{c}) + P(\overline{v}) - P(\overline{c} \cap \overline{v}) = 0,15 + 0,60 - 0,05 = \underline{0,70}.$$

b)

Dos sucesos $\overline{c}$ y $\overline{v}$ son independientes cuando $P(\overline{c} \cap \overline{v}) = P(\overline{c}) \cdot P(\overline{v})$.

$$P(\overline{c}) \cdot P(\overline{v}) = 0,15 \cdot 0,60 = 0,09 \neq P(\overline{c} \cap \overline{v}) = 0,15.$$

$$\underline{(no\ llevar\ cinturón)\ y\ (no\ respetar\ límites)\ no\ son\ independientes.}$$

****

6º) Se sabe que el número de pulsaciones después de realizar una serie de ejercicios sigue una distribución normal de desviación típica $\sigma = 5$. Los siguientes datos representan las pulsaciones de 20 personas elegidas al azar después de realizar dichos ejercicios: 123, 125, 122, 134, 128, 129, 124, 130, 125, 126, 122, 127, 116, 128,
121, 125, 129, 123, 126 y 128.

a) Determina el intervalo de confianza para la media poblacional del número de pulsaciones después de la realización de los ejercicios con un nivel de confianza del 97 %.

b) ¿Sería razonable pensar que este ejemplo proviene de una población normal con media $\mu = 113,4$ con un nivel de confianza del 97 %? ¿Y con un nivel de significación igual a 0,08? Razona tus respuestas.

$$\overline{x} = \frac{116+121+122\cdot2+123\cdot2+124+125\cdot3+126\cdot2+127+128\cdot3+129\cdot2+130+134}{20} =$$

$$= \frac{116+121+244+246+124+375+252+127+384+258+130+134}{20} = \frac{2.511}{20} = 125,55.$$

a)

$1 - \alpha = 0,97 \rightarrow \alpha = 1 - 0,97 = 0,03 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,015} = 2,17.$

$(1 - 0,015 = 0,9850 \rightarrow z = 2,17).$

Conocemos: $\overline{x} = 125,55,\ \sigma = 5;\ n = 20;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,015} = 2,17.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(125'55 - 2'17\cdot\frac{5}{\sqrt{20}},\ 125'55 + 2'17\cdot\frac{5}{\sqrt{20}}\right);$

$\left(125'55 - 2'17\cdot1'118,\ 125'55 + 2'17\cdot1'118\right);$

$\left(125'55 - 2'4267,\ 125'55 + 2'426\right);$

$$\underline{I.\ C._{97\ \%}\left(123'124,\ 127'976\right).}$$

b)

Por no estar contenida la media muestral $\mu = 113,4$ en el intervalo de confianza obtenido:

$\underline{No\ sería\ razonable\ pensar\ que\ procede\ de\ una\ población\ de\ media\ 113,4.}$

Para un nivel de significación 0,08 es:

$\alpha = 0,08 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,04} = 1,75.\ (1 - 0,04 = 0,9600 \rightarrow z = 1,75).$

$\left(125'55 - 1'75 \cdot 1'118,\ 125'55 + 1'75 \cdot 1'118\right);$

$\left(125'55 - 1'9565,\ 125'55 + 1'9565\right) \Rightarrow I.\ C._{92\ \%}\left(123'5935,\ 127'5065\right).$

Tampoco, en este caso, la media muestral $\mu = 113,4$ se encuentra en el intervalo de confianza obtenido, por lo cual:

$\underline{No\ sería\ razonable\ pensar\ que\ procede\ de\ una\ población\ de\ media\ 113,4.}$

****

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857

OPCIÓN B

1º) Una empresa tiene 1.100 latas de perdiz en escabeche y 1.000 latas de lomo de orza. Desea elaborar dos tipos de lotes para regalo con dichas latas: lotes de tipo A formados por una lata de perdiz en escabeche y dos de lomo de orza, que venderá a 70 euros; lotes del tipo B formados por dos latas de perdiz es escabeche y una de lomo de orza que venderá a 60 euros.

a) Expresa la función objetivo.

b) Describe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido.

c) Halla el número de lotes de cada tipo que debe preparar para obtener la mayor cantidad de dinero.

Sean x e y el número de lotes elaborados de tipos A y B, respectivamente.

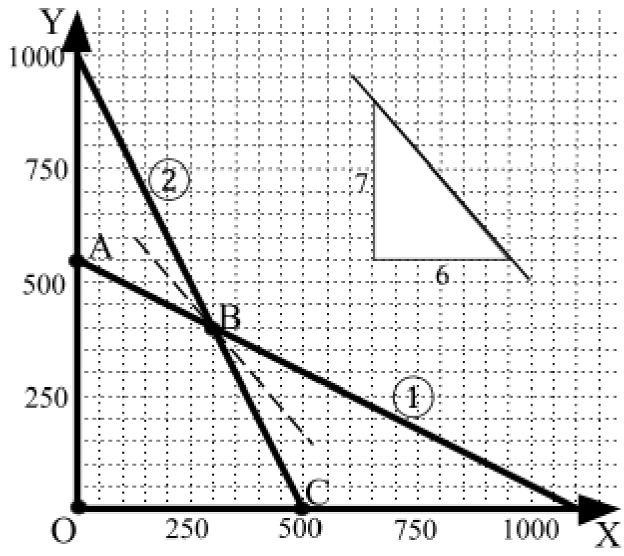
a)

$$\underline{La\ función\ de\ objetivos\ es\ f(x,\ y) = 70x + 60y}.$$

b)

Las condiciones del problema se establecen en el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\underline{\left.\begin{array}{l} x + 2y \le 1.100 \\ 2x + y \le 1.000 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{array}\right\}}.$$



x	0	1.100
y	550	0

①$\Rightarrow x + 2y \le 1.100 \Rightarrow y \le \frac{1.100 - x}{2} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	0	500
y	1.000	0

②$\Rightarrow 2x + y \leq 1.000 \Rightarrow y \leq 1.000 - 2x \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si.$

$c)$

La región factible se indica en la figura, cuyos vértices, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ x + 2y = 1.100 \end{array} \right\} \Rightarrow A(0, 550).$

$B \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y = 1.100 \\ 2x + y = 1.000 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2x + 4y = 2.200 \\ -2x - y = -1.0 \end{array}$

.

$C \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y = 1.000 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow C(500, 0).$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0, 550) = 70 \cdot 0 + 60 \cdot 550 = 0 + 33.000 = 33.000.$

$B \Rightarrow f(300, 400) = 70 \cdot 300 + 60 \cdot 400 = 21.000 + 24.000 = 45.000.$

$C \Rightarrow f(500, 0) = 70 \cdot 500 + 60 \cdot 0 = 35.000 + 0 = 35.000.$

El máximo se produce en el punto B.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = 70x + 60y = 0 \Rightarrow y = -\frac{70}{60}x \Rightarrow m = -\frac{7}{6}.$

$\underline{Deben\ prepararse\ 300\ lotes\ tipo\ A\ y\ 400\ lotes\ tipo\ B.}$

$\underline{La\ cantidad\ de\ dinero\ máximo\ que\ se\ obtiene\ es\ de\ 45.000\ euros.}$

****

2º) En una pequeña empresa de procesado de alimentos para su conservación, se tratan tres tipos de productos alimenticios: A, B y C. Estos alimentos pasan por tres procesos para su conservación: lavado, escaldado y congelación. En la tabla siguiente se muestra el tiempo que necesita un lote de cada tipo para su procesado:

	A	B	C
Lavado	5 minutos	3 minutos	2 minutos
Escaldado	10 segundos	20 segundos	30 segundos
Congelación	2 horas	3 horas	1 hora

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos lotes de cada producto alimenticio se pueden procesar con una disponibilidad de 825 minutos para lavado, 4.000 segundos para el escaldado y 475 horas para congelado.

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior.

----

a)

Sean x, y, z el número de productos procesados de los tipos A, B y C, respectivamente.

$Lavado\to \quad 5x + 3y + 2z = 825\, Escaldado\to 10x + 20y + 30z = 4.000\, Cong$

.

b)

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|825\ 3\ 2\ 400\ 2\ 3\ 475\ 3\ 1\ |}{|5\ 3\ 2\ 1\ 2\ 3\ 2\ 3\ 1\ |} = \frac{25\cdot|33\ 3\ 2\ 16\ 2\ 3\ 19\ 3\ 1\ |}{10+6+18-8-45-3} = \frac{25\cdot(66+96+171-76-297-48)}{34-56} =$$

$$= \frac{25\cdot(333-421)}{-22} = \frac{25\cdot(-88)}{-22} = 25\cdot 4 = 100.$$

$$y = \frac{|5\ 825\ 2\ 1\ 400\ 3\ 2\ 475\ 1\ |}{-22} = \frac{25\cdot|5\ 33\ 2\ 1\ 16\ 3\ 2\ 19\ 1\ |}{-22} = \frac{25\cdot(80+38+198-64-285-33)}{-22} = \frac{25\cdot(31\ldots}{-\ldots}$$

$$= \frac{25\cdot(-66)}{-22} = 25\cdot 3 = 75.$$

$$z = \frac{|5\ 3\ 825\ 1\ 2\ 400\ 2\ 3\ 475\ |}{-22} = \frac{25\cdot|5\ 3\ 33\ 1\ 2\ 16\ 2\ 3\ 19\ |}{-22} = \frac{25\cdot(190+99+96-132-240-57)}{-22} = \frac{25\cdot(3\ldots}{\ldots}$$

$$= \frac{25\cdot(-44)}{-22} = 25\cdot 2 = 50.$$

$\underline{Se\ pueden\ procesar\ 100,\ 75\ y\ 50\ lotes\ de\ los\ tipos\ A,\ B\ y\ C,\ respectivamente.}$

****

3º) Se considera la función $f(x) = \{x^2 + 6x + 9 \ si \ x < -1 \quad 1 \quad si \ -1 \le x \le 1 \ x^2 - 6x + 9 \ si \ x > 1$
.

a) Estudia su continuidad para $x = -1$.

b) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(1, 4)$.

c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en el intervalo $(1, +\infty)$.

----

a)

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para los valores $x = -1$ y $x = 1$, cuya continuidad es dudosa. Se estudia su continuidad para $x = -1$.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\, x = -1 \Rightarrow \{ f(x) = \left(x^2 + 6x + 9\right) = 1 - 6 + 9 = 4 \; f(x) = 1 = 1 = f(-$$

$$\Rightarrow f(x) \neq f(x).$$

$\underline{La\, función\, f(x)\, no\, es\, continua\, en\, x = -1}$.

b)

La función $f(x)$ en el intervalo $(1, 4)$ tiene por expresión $g(x) = x^2 - 6x + 9$, que es una parábola convexa $(\cup)$ cuyo vértice es el siguiente:

$$g'(x) = 2x - 6 = 0 \Rightarrow x - 3 = 0 \rightarrow x = 3.$$

$$g''(x) = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo\, relativo\, para\, x = 3.$$

$$g(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 9 = 9 - 18 + 9 = 0 \Rightarrow Mínimo: \underline{V(3, 0)}.$$

c)

Del estudio realizado en el apartado b) se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en el intervalo $(1, +\infty)$ que son los siguientes:

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon (1, 3)}.$$

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon (3, +\infty)}.$$

****

4º) Determina una función polinómica de segundo grado sabiendo que tiene un mínimo relativo en el punto $A(3,\ 2)$ y que la recta tangente a dicha función en el punto de abscisa $x = 4$ es paralela a la recta $y = 2x + 7$.

Sea la función $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Por contener al punto $A(3,\ 2) \Rightarrow f(3) = 2$:

$f(3) = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 2;\ \ 9a + 3b + c = 2.$ (1)

Por tener un mínimo relativo en $A(3,\ 2) \Rightarrow f'(3) = 0$.

$f'(x) = 2ax + b \Rightarrow f'(3) = 2a \cdot 3 + b = 0;\ \ 6a + b = 0.$ (2)

La recta $y = 2x + 7$ tiene de pendiente $m = 2$ y es tangente a la función en el punto de abscisa $x = 4$.

La derivada de una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto: $f'(4) = 2a \cdot 4 + b = m = 2;\ \ 8a + b = 2.$ (3)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1), (2) y (3):

$\left.\begin{array}{l} 9a + 3b + c = 2 \\ 6a + b = 0 \\ 8a + b = 2 \end{array}\right\}$. Restando la segunda ecuación a la tercera:

$2a = 2 \Rightarrow a = 1;\ \ 6 + b = 0 \Rightarrow b = -6;\ \ 9 - 18 + c = 2 \Rightarrow c = 11.$

La función resulta ser:

$$\underline{f(x) = x^2 - 6x + 11}.$$

****

5º) Una persona que corre habitualmente tiene una probabilidad 0,01 de lesionarse. Suponiendo que el hecho de que una persona se lesione es independiente de que otra se lesione o no.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se lesionen dos personas que corren habitualmente?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que se lesionen al menos una de cuatro personas que corren habitualmente?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que se lesione exactamente una persona de dos que corren habitualmente?

----

a)

$$P = 0,01 \cdot 0,01 = 0,0001.$$

$$\underline{La\ probabilidad\ de\ que\ se\ lesiones\ las\ dos\ personas\ es\ 0,0001}.$$

b)

El suceso de lesionarse al menos una persona de cuatro es el contrario de que no se lesione ninguna de las cuatro personas:

$$P = 1 - 0,99^4 = 1 - 0,9606 = 0,0394.$$

$$\underline{La\ probabilidad\ de\ que\ se\ lesione\ al\ menos\ una\ persona\ de\ 4\ es\ 0,0394}.$$

c)

$$P = 0,01 \cdot 0,99 + 0,01 \cdot 0,99 = 2 \cdot 0,0099 = 0,0198.$$

$$\underline{La\ probabilidad\ de\ que\ se\ lesione\ una\ de\ dos\ personas\ es\ 0,0198}.$$

****

6º) Un fabricante de lámparas LEDs sube que la vida útil de una lámpara LED sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 1.000 horas. Tomando una muestra aleatoria de lámparas producidas por dicho fabricante, se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza para la media poblacional $(49.804,\ 50.196)$ con un nivel de confianza del 95 %.

a) Calcula el tamaño de la muestra utilizada y calcula el valor que se obtuvo para la media muestral.

b) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 50 y un nivel de confianza del 92,98 %?

----

a)

Se conoce: $\sigma = 1.000;\ \ E = \frac{50.196-49.804}{2} = \frac{392}{2} = 196.$

$$1 - \alpha = 1 - 0,5 = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96$$

.

$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1,96 \cdot 1.000}{196}\right)^2 = 10^2 = 100.$$

$\underline{El\ tamaño\ de\ la\ muestra\ debe\ ser\ de\ al\ menos\ de\ 100\ lámparas}.$

b)

Se conoce: $\sigma = 1.000;\ \ ,\ \ n = 50.$

$$\alpha = 1 - 0,9298 = 0,0702 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,0351} = 1,81.$$

$(1 - 0,0351 = 0,9649 \rightarrow z = 1,81).$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,81 \cdot \frac{1.000}{\sqrt{50}} = 1,81 \cdot 141,42 = 255,97.$$

$\underline{El\ error\ máximo\ admisible\ es\ E = 255,97}.$

****

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE CASTILLA-LA MANCHA

SEPTIEMBRE – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

OPCIÓN A

1º) a) Despeja la matriz X en la ecuación matricial: $X \cdot A + 3X = B$, suponiendo que todas las matrices son cuadradas del mismo orden (I es la matriz identidad).

b) Dada la ecuación matricial: $(3\ 1\ 2\ 1) \cdot X = (-\ 2\ 0\ 2\ 2)$, despeja y calcula la matriz X.

----

a)

$$X \cdot A + 3X = B;\ \ X \cdot A + X \cdot (3I) = B;\ \ X \cdot (A + 3I) = B.$$

Multiplicando por la derecha los dos términos por $(A + 3I)^{-1}$:

$$X \cdot (A + 3I) \cdot (A + 3I)^{-1} = B \cdot (A + 3I)^{-1};\ \ X \cdot I = B \cdot (A + 3I)^{-1}.$$

$$\underline{X = B \cdot (A + 3I)^{-1}}.$$

b)

$(3\ 1\ 2\ 1) \cdot X = (-\ 2\ 0\ 2\ 2)$. Multiplicando los dos términos por la izquierda por la inversa de la matriz $(3\ 1\ 2\ 1)$:

$$(3\ 1\ 2\ 1)^{-1} \cdot (3\ 1\ 2\ 1) \cdot X = (3\ 1\ 2\ 1)^{-1} \cdot (-\ 2\ 0\ 2\ 2);\ \ I \cdot X = (3\ 1\ 2\ 1)^{-1} \cdot (-\ 2\ 0\ 2\ 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = (3\ 1\ 2\ 1)^{-1} \cdot (-\ 2\ 0\ 2\ 2). \quad (*)$$

$$(I) = (1\ 0\ 0\ 1) \Rightarrow \{F_1 \rightarrow F_1 - F_2\} \Rightarrow (1\ -\ 1\ 0\ 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1\} \Rightarrow (1\ -\ 1\ -\ 2\ 3) \Rightarrow (3\ 1\ 2\ 1)^{-1} = (1\ -\ 1\ -\ 2\ 3).$$

Sustituyendo en (*) el valor obtenido de $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$:

$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}.$

$$\underline{X = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}}.$$

****

2º) En un obrador de mazapán de Toledo se venden, en cajas de medio kilo, delicias de mazapán a 15 euros, pastas de piñón a 20 euros y pastas de almendras a 10 euros. En un día que se vendieron 75 cajas de dichos dulces, se recaudaron en total 1.075 euros. Sabiendo que el número de cajas vendidas de delicias de mazapán fue la semisuma de las cajas de pastas de piñón y pastas de almendras:

a) Plantea el correspondiente sistema de ecuaciones que permite obtener el número de cajas vendidas de cada clase de dulce.

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior.

----

a)

Sean x, y, z el número de cajas de delicias de mazapán, pastas de piñón y pastas de almendras que se venden, respectivamente.

$15x + 20y + 10z = 1.075 \qquad x + y + z = 75 \qquad x = \frac{y+z}{2} \}$

.

b)

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|215\ 4\ 2\ 75\ 1\ 1\ 0\ -1\ -1\ |}{|3\ 4\ 2\ 1\ 1\ 1\ 2\ -1\ -1\ |} = \frac{-215-150+215+300}{-3-2+8-4+3+4} = \frac{150}{6} = 25.$$

$$y = \frac{|3\ 215\ 2\ 1\ 75\ 1\ 2\ 0\ -1\ |}{6} = \frac{-225+430-300+215}{6} = \frac{645-525}{6} = \frac{120}{6} = 20.$$

$$z = \frac{|3\ 4\ 215\ 1\ 1\ 75\ 2\ -1\ 0\ |}{6} = \frac{-215+600-430+225}{6} = \frac{825-645}{6} = \frac{180}{6} = 30.$$

$\underline{Venden\ 25,\ 20\ y\ 30\ cajas\ de\ mazapán,\ piñón\ y\ almendra,\ respectivamente.}$

****

3º) Se considera la función $f(x) = \{(x + t)^2 \ si \ x < 0 \quad 1 \quad si \ x = 0 \ (x - t)^2 \ si \ x > 0$.

$a)$ ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 0$?

$b)$ Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-\infty, 0)$ con el valor de $t = 4$.

$c)$ Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en el intervalo $(-\infty, 0)$ con $t = 4$.

$a)$

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para el valor $x = 0$, cuya continuidad se va forzar determinando los valores de t convenientes.

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$ es necesario que sus límites laterales en ese punto sean iguales e igual al valor de la función:

$$f(x) = (x + t)^2 = t^2 \qquad f(x) = (x - t)^2 = t^2 = f(0) = 1 \} \Rightarrow t^2 = 1$$

.

$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ x = 0\ para\ t = -1\ y\ para\ t = 1}$.

$b)$

Para $t = 4$ la función es $f(x) = \{(x + 4)^2 \ si \ x < 0 \quad 1 \quad si \ x = 0 \ (x - 4)^2 \ si \ x > 0$.

La función $f(x)$ en el intervalo $(-\infty, 0)$ tiene por expresión $g(x) = (x + 4)^2$, que es una parábola convexa (∪) cuyo vértice es el siguiente:

$$g'(x) = 2(x + 4) = 0 \Rightarrow x + 4 = 0 \rightarrow x = -4.$$

$$g''(x) = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = -4.$$

$$g(-4) = (-4 + 4)^2 = 0 \Rightarrow Mínimo: \underline{V(-4, 0)}.$$

$c)$

Del estudio realizado en el apartado $b)$ se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en el intervalo $(1, +\infty)$ que son los siguientes:

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon (-\infty, -4)}.$$

$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-4, 0)}.$

****

4º) Dada la función polinómica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 3$, calcula los valores de los parámetros a, b y c, sabiendo que la pendiente de la recta tangente a la curva en $x = 0$ es -24, que dicha función tiene un mínimo relativo en el punto de abscisa $x = 2$ y un punto de inflexión en $x = -1$.

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$

La derivada de una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto:

$f'(0) = 24 \Rightarrow c = -24.$

Por tener un mínimo relativo para $x = 2 \Rightarrow f'(2) = 0$:

$3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 - 24 = 0;\ \ 12a + 4b - 24 = 0;\ \ 3a + b = 6.$ (1)

$f''(x) = 6ax + 2b.$

Por tener un punto de inflexión para $x = -1$:

$f''(-1) = 0 \Rightarrow 6a \cdot (-1) + 2b = 0;\ \ -6a + 2b = 0;\ \ 3a - b = 0.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$\left.\begin{array}{l} 3a + b = 6 \\ 3a - b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 6a = 6 \Rightarrow a = 1;\ 3 + b = 6 \Rightarrow b = 3.$

La función resulta ser:

$$\underline{f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 3}.$$

****

5º) Una caja contiene ocho tornillos, de los que dos son defectuosos.

a) Si extraemos dos tornillos sin reemplazamiento, y el primero ha resultado ser defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que el segundo también lo sea?

b) Si vamos extrayendo tornillos sin reemplazamiento, uno tras otro, hasta localizar los dos defectuosos, ¿cuál es la probabilidad de necesitar exactamente tres extracciones para localizarlos?

----

a)

$$P(1ºD) = \frac{P(1ºD \cap 2ºD)}{P(1ºD)} = \frac{\frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7}}{\frac{2}{8}} = \underline{\frac{1}{7}}.$$

b)

Solamente pueden suceder estos casos: $(\overline{D},\ D,\ D)\ y\ (D,\ \overline{D},\ D)$.

Aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$P(\overline{D},\ D,\ D) + P(D,\ \overline{D},\ D) = \frac{6}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{28} + \frac{1}{28} = \frac{2}{28} = \underline{\frac{1}{14}}.$$

****

6º) El contenido de nicotina en los cigarros de una marca determinada, sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 2\,mg$. Se toma una muestra de 150 cigarros y se observa que la media del contenido en nicotina de la muestra es 9 mg.

a) Calcula con un nivel de confianza del 95 % el intervalo de confianza para la media poblacional del contenido de nicotina de los cigarros de esa marca.

b) El fabricante afirma que el contenido en nicotina de estos cigarros es de sólo 8,4 mg. ¿Se puede aceptar la afirmación del fabricante con un nivel de confianza del 95 %? ¿y con un nivel de significación igual a 0,02? Razona tus respuestas.

----

a)

$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$

$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$

Conocemos: $\overline{x} = 9,\ \sigma = 2;\ n = 150;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,02} = 1,96.$

Se aplica la fórmula adecuada que nos da el intervalo de confianza pedido, que es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(9 - 1'96 \cdot \frac{2}{\sqrt{150}},\ 9 + 1'96 \cdot \frac{2}{\sqrt{150}}\right);\ \left(9 - 1'96 \cdot 0'1633,\ 9 + 1'96 \cdot 0'1633\right);$

$(9 - 0'320,\ 9 + 0'320);\ \ (8'680,\ 9'320).$

$\underline{Intervalo\ de\ confianza\text{: } \left(8'680,\ 9'320\right).}$

b)

La afirmación del fabricante de que el contenido en nicotina de estos cigarros tiene una media de 8,4 mg, que no está contenido en el intervalo de confianza 95 %, por lo cual:

$\underline{No\ se\ admite\ que\ la\ media\ sea\ 8,4\ mg\ con\ un\ nivel\ de\ confianza\ del\ 95\ \%.}$

Con un nivel de significación $\alpha = 0,02$:

$\alpha = 0,02 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,01} = 2,31.\ (1 - 0,01 = 0,9900 \rightarrow z = 2,31).$

$\left(9 - 2'31 \cdot 0'1633,\ 9 + 2'31 \cdot 0'1633\right);\ \left(9 - 0'377,\ 9 + 0'377\right);$

$(8'623,\ 9'377)$.

Con un nivel de significación del 0,02 se obtiene un intervalo de confianza que contiene a la media indicada por el fabricante, por lo cual:

$$\underline{Se\ admite\ la\ media\ de\ 8,4\ mg\ con\ un\ nivel\ de\ significación\ del\ 2\ \%}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Considera el siguiente problema de programación lineal: Minimizar la función $f(x,\ y) = -\ x\ -\ 10y$, sujeta a las siguientes restricciones: $\left.\begin{array}{l} x \leq 4 \\ x\ +\ 3y \leq 6 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{array}\right\}$.

$a)$ Dibuja la región factible.

$b)$ Determina los vértices de la región factible.

$c)$ Indica la solución óptima del problema dado y su valor.

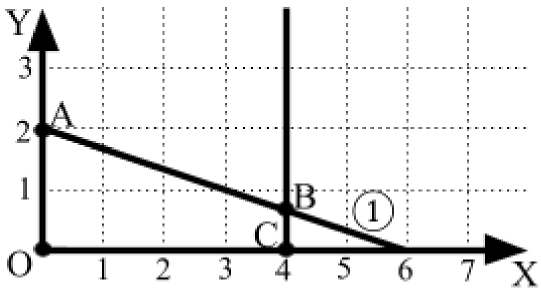
$a)$

La región factible se indica en la figura:

x	6	0
y	0	2

$①\Rightarrow x\ +\ 3y \leq 6 \Rightarrow y\ =\ \frac{6-x}{3} \Rightarrow O \rightarrow Si.$

La zona factible es la sombreada de la figura.



$b)$

Los vértices de la sección factible, además de $O(0,\ 0)$, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x\ =\ 0 \\ y\ =\ 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{A(0,\ 2)}.$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x\ +\ 3y\ =\ 6 \\ x\ =\ 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{B\left(4,\ \frac{2}{3}\right)}.$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x\ =\ 4 \\ y\ =\ 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{C(4,\ 0)}.$

$c)$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$O \Rightarrow f(0,\ 0) = -\ 1 \cdot 0\ -\ 10 \cdot 0 = -\ 0\ -\ 0\ =\ 0.$

$A \Rightarrow f(0,\ 2) = -\ 1 \cdot 0\ -\ 10 \cdot 2 = -\ 0\ -\ 20 = -\ 20.$

$B \Rightarrow f\left(4,\ \frac{2}{3}\right) = -\ 1 \cdot 4\ -\ 10 \cdot \frac{2}{3} = -\ 4\ -\ \frac{20}{3} = -\ \frac{32}{3} = -\ 10,67.$

$C \Rightarrow f(4,\ 0) = -\ 1 \cdot 4\ -\ 10 \cdot 0\ = -\ 4\ -\ 0\ = -\ 4.$

$\underline{El\ mínimo\ se\ produce\ en\ el\ punto\ A\ y\ su\ valor\ es\ -\ 20}.$

****

2º) Una fábrica de dulces elabora cajas de tres tipos de bombones: bombón crocante, bombón mazapán y bombón gianduja; para su elaboración se utiliza azúcar, almendra y chocolate. La siguiente tabla muestra la cantidad de estas materias primas que se utilizan para fabricar una caja de cada tipo de bombón.

	Crocante	Mazapán	Gianduja
Azúcar	200 gramos	100 gramos	200 gramos
Almendra	100 gramos	200 gramos	200 gramos
Chocolate	200 gramos	200 gramos	100 gramos

Si se dispone de 12.500 gramos de azúcar, 13.000 gramos de almendras y 12.000 gramos de chocolate.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar el número de cajas de bombones de cada tipo que se pueden fabricar utilizando el total de la materia prima disponible.

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior.

----

a)

Sean x, y, z el número de cajas que se fabrican de crocante, mazapán y gianduja, respectivamente.

$200x + 100y + 200z = 12.500\ 100x + 200y + 200z = 13.000\ 200x + 200y + 1($

.

b)

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|125\ 1\ 2\ 130\ 2\ 2\ 120\ 2\ 1\ |}{|2\ 1\ 2\ 1\ 2\ 2\ 2\ 2\ 1\ |} = \frac{250+520+240-480-500-130}{4+4+4-8-8-1} = \frac{1.010-1.110}{12-17} = \frac{-100}{-5} = 20$$

.

$$y = \frac{|2\ 125\ 2\ 1\ 130\ 2\ 2\ 120\ 1\ |}{-5} = \frac{260+240+500-520-480-125}{-5} = \frac{1.000-1.125}{-5} = \frac{-125}{-5} = 25$$

.

$$z = \frac{|2\ 1\ 125\ 1\ 2\ 130\ 2\ 2\ 120\ |}{-5} = \frac{480+250+260-500-520-120}{-5} = \frac{990-1.140}{-5} = \frac{-150}{-5} = 30$$

.

$\underline{20,\ 25\ y\ 30\ cajas\ de\ crocante,\ mazapán\ y\ gianduja,\ respectivamente}.$

****

3º) Se considera la función $f(x) = \{\ |x| - t \quad si\ x \le 2\ x^2 - 8x + 13\ \ si\ x > 2$.

a) Hallar el valor de t para que f sea continua en $x = 2$.

b) Para $t = 1$, representa gráficamente la función f.

----

a)

Teniendo en cuenta que $|x| = \{- x \ si \ x < 0 \ \ x \ \ si \ x > 0$, la función $f(x)$ puede redefinirse de la forma siguiente: $f(x) = \{ \ - x - t \quad si \ x < 0 \quad x - t \ \ si \ 0 \leq x \leq 2 \ x^2 - 8x + 13 \ \ si \, x > 2$.

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$ es necesario que sus límites laterales en ese punto sean iguales e iguales al valor de la función:

$$f(x) = (x - t) = 2 - t = f(2) \qquad\qquad f(x) = \left(x^2 - 8x + 13\right) = 4 - 16$$

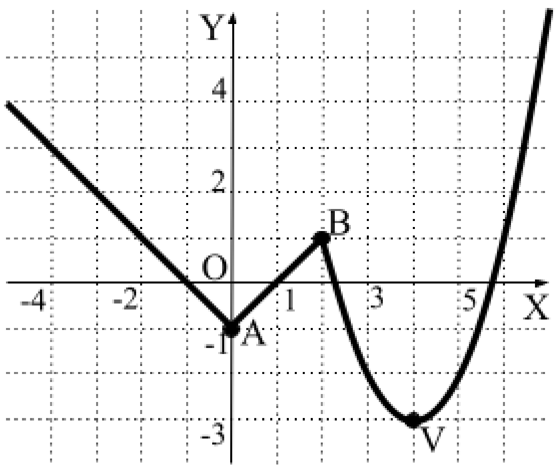
.

<u>$La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ x = 2\ para\ t = 1$</u>.

b)

Para $t = 1$ la función es $f(x) = \{ \ - x - 1 \quad si \ x < 0 \quad x - 1 \ \ si \ 0 \leq x \leq 2 \ x^2 - 8x + 13 \ \ si \, x > 2$.

En el intervalo $(- \infty, 0)$ la función es la recta $f(x) =- x - 1$, cuya pendiente es $m =- 1$ y corta a Y en $A(0, \ - 1)$.



En el intervalo $(0, \ 2)$ la función es la recta $f(x) = x - 1$, de pendiente es $m = 1$ y extremos $A(0, \ - 1)$ y $B(1, \ 1)$.

En el intervalo $(2, \ + \infty)$ la función es la parábola convexa $f(x) = x^2 - 8x + 13$, cuyo vértice es el siguiente:

$$f'(x) = 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = 4.$$

$$f(4) = 4^2 - 8 \cdot 4 + 13 = 16 - 32 + 13 =- 3 \Rightarrow Vértice: V(4, \ - 3).$$

La representación gráfica, aproximada, es la que aparece en el gráfico adjunto.

****

4º) La función que representa el costo por kilómetro, en miles de euros, de la

construcción de una canalización de agua es $C(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$, con $0 \leq x \leq 4,5$
.

$a)$ ¿Cuál fue el coste de la construcción del primer kilómetro $(x = 1)$?

$b)$ Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento del costo de la obra.

$c)$ ¿En qué kilómetro el coste de la construcción fue máximo y a cuánto ascendió?

$a)$

$$C(1) = 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 24 \cdot 1 = 1 - 9 + 24 = 16.$$

$$\underline{El\ primer\ kilómetro\ costó\ 16.000\ euros}.$$

$b)$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$C'(x) = 3x^2 - 18x + 24.$$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 18x + 24 = 0;\ \ x^2 - 6x + 8 = 0;\ \ x = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} =$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = 3 \pm 1 \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = 4.$$

Teniendo en cuenta que $f(x)$ es continua en su dominio por ser una función polinómica, los valores que anulan la primera derivada dividen el dominio de la función en tres intervalos crecientes o decrecientes de forma alternativa.

Teniendo en cuenta que, por ejemplo, $f'(0) = 24 > 0$, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon (0, 2) \cup (4, 4'5)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon (2, 4)}.$$

$c)$

Una función tiene un máximo relativo para los valores que anulan su primera derivada y hacen negativa la segunda derivada.

$$C''(x) = 6x - 18 \Rightarrow \{C''(2) = 6 \cdot 2 - 18 = 12 - 18 = -6 < 0 \rightarrow Máximo\ C''(4) = 6 \cdot 4 -$$

.

La función alcanza un máximo para x = 2.

$C(2) = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 = 8 - 36 + 48 = 56 - 36 = 20.$

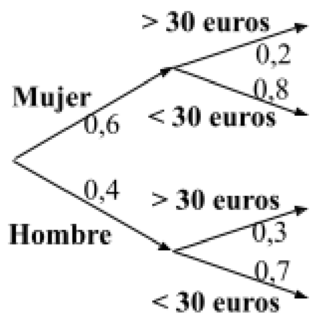
$\underline{El\ coste\ es\ máximo\ en\ el\ segundo\ kilómetro\ y\ es\ de\ 20.000\ euros}.$

****

5º) El 60 % de las compras de un supermercado las realizan mujeres. El 20 % de las compras realizadas por estas supera los 30 euros, mientras que el 30 % de las realizadas por hombres supera esa cantidad.

a) Elegido un ticket de compra al azar, ¿cuál es la probabilidad de que supere los 30 euros?

b) Si se sabe que un ticket de compra no supera los 30 euros, ¿Cuál es la probabilidad de que la compra la hiciera un hombre?



a)

$$P = 0,12 + 0,12 = \underline{0,24}.$$

b)

$$P = \frac{0,28}{0,28+0,48} = \frac{0,28}{0,76} = \underline{0,3684}.$$

****

6º) Un fabricante de ordenadores sebe que el tiempo de duración, en meses, de un componente del ordenador que fabrica sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 6 meses. Con una muestra de su producción, elegida al azar, y un nivel de confianza del 95 % se ha obtenido para la media poblacional el intervalo de confianza $(23'0398,\ 24'9602)$.

a) Calcula el valor que se obtuvo para la media de la muestra y el tamaño de la muestra utilizado.

b) ¿Cuál hubiera sido el error máximo admisible de su estimación si hubiera tomado una muestra del tamaño 250?

Conocemos:

$$\sigma = 6;\ \overline{x} = \frac{24'9602+23'0398}{2} = \frac{48}{2} = 24;\ E = \frac{24'9602-23'0398}{2} = \frac{1'9204}{2} = 0,9602.$$

$$1 - \alpha = 1 - 0,5 = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96$$

.

$$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$$

a)

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1,96 \cdot 6}{0,9602}\right)^2 = 12,2474^2 = 144,9999.$$

$\underline{La\ media\ muestral\ es\ 24.}$

$\underline{El\ tamaño\ de\ la\ muestra\ debe\ ser\ de\ al\ menos\ de\ 150\ componentes.}$

b)

Para $n = 250$ el error máximo que se comete es:

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1'96 \cdot \frac{6}{\sqrt{250}} = 1,96 \cdot 0,3795 = \underline{0,7438}.$$

****

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE CATALUÑA

JUNIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1º) Un árbol tiene un volumen de 30 m^3 y, por la calidad de su madera, se vende a 50 euros por metro cúbico. Cada año el árbol aumenta su volumen en 5 m^3. A su vez, la calidad de la madera del árbol disminuye, así como su precio, que cada año es un euro por metro cúbico más barato. ¿Dentro de cuántos años se conseguirá el máximo de ingresos por la venta de la madera del árbol? ¿Cuáles serán estos ingresos?

Siendo x el número de años que transcurren, el volumen de madera del árbol sería: $V(x) = 5\cdot(30 + x) = 150 + 5x$.

Transcurridos x años el precio por metro cúbico será $P(x) = 50 - x$.

La función ingresos es: $I(x) = V(x)\cdot P(x) = (150 + 5x)\cdot(50 - x) =$

$= 7.500 - 150x + 250x - 5x^2 =- 5x^2 + 100x + 7.500.$

Los ingresos serán máximos cuando se anule su primera derivada:

$I'(x) =- 10x + 100.$ $I'(x) = 0 \Rightarrow - 10x + 100 = 0 \Rightarrow x = 10.$

$\underline{Los\ máximos\ ingresos\ se\ producen\ vendiendo\ la\ madera\ dentro\ de\ 10\ años.}$

$b)$

$I(10) =- 5\cdot10^2 + 100\cdot10 + 7.500 =- 5\cdot100 + 1.000 + 7.500 =$

$= 8.500 - 500 = 8.000.$

$\underline{Los\ ingresos\ máximos\ serán\ 8.000\ euros.}$

****

2º) Al resolver un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas, $x,\ y,\ z$, se ha encontrado que las soluciones cumplen las siguientes condiciones:

--- La suma de las soluciones es 6.

--- La segunda es la media aritmética de las otras dos.

--- El valor de la tercera es la suma de los valores de las otras dos.

Escriba el sistema de ecuaciones que satisface las condiciones anteriores, resuélvalo e indique si es compatible determinado o indeterminado.

$x + y + z = 6 \quad y = \frac{x+z}{2} \quad z = x + y\} \quad x + y + z = 6 \quad 2y = x + z x + y$

.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A = (1\,1\,1\,1\ -2\,1\,1\,1\ -1)$ y $A' = (1\,1\,1\,1\ -2\,1\,1\,1\ -1\quad 6\,0\,0)$.

$Rang\ A' \Rightarrow (1\,1\,1\,1\ -2\,1\,1\,1\ -1\quad 6\,0\,0) \Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 - F_1\, F_3 \rightarrow F_3 - F_1\} \Rightarrow (1\,1\,1\,0$

$\Rightarrow \underline{Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow Sistema\ compatibla\ determinado}.$

Del estudio del rango se deduce que:

$-2z = -6 \Rightarrow z = 3;\ -3y = -6 \Rightarrow y = 2;\ x + 2 + 3 = 6 \Rightarrow x = 1.$

$\underline{Solución: x = 1,\ y = 2,\ z = 3}.$

****

3º) Considere la función $f(x) = \frac{2x+2}{x^2-x+2}$.

a) Escriba la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de corte con el eje de ordenadas.

b) Determine los puntos de la curva en que la recta tangente es horizontal.

----

a)

El punto P de corte con el eje de ordenadas se obtiene para $x = 0$:

$$f(0) = \frac{0+2}{0-0+2} = 1 \Rightarrow P(0,\ 1).$$

El valor de la pendiente de la tangente de una función en un punto es el valor de la primera derivada de la función en ese punto:

$$f'(x) = \frac{2\cdot\left(x^2-x+2\right)-(2x+2)\cdot(2x-1)}{\left(x^2-x+2\right)^2} = \frac{2x^2-2x+4-4x^2+2x-4x+2}{\left(x^2-x+2\right)^2} = \frac{-2x^2-4x+6}{\left(x^2-x+2\right)^2}.$$

$$m = f'(0) = \frac{-0-0+6}{(0-0+2)^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Sabiendo que la fórmula de la recta punto-pendiente es $y - y_0 = m\left(x - x_0\right)$:

$$y - 1 = \frac{3}{2}\cdot(x - 0) = \frac{3}{2}x;\ \ 2y = 3x \Rightarrow \underline{Recta\ tangente: t \equiv 3x - 2y = 0}.$$

b)

La recta tangente es horizontal cuando la pendiente es cero, o sea, son los puntos cuyas abscisas son los valores de x que anulan la primera derivada:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x^2-4x+6}{\left(x^2-x+2\right)^2} = 0;\ \ -2x^2 - 4x + 6 = 0;\ \ x^2 + 2x - 3 = 0;$$

$$x = \frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{16}}{2} = \frac{-2\pm4}{2} = -1\pm2 \Rightarrow x_1 = -3,\ x_2 = 1.$$

Los puntos de la curva cuya tangente es horizontal son los siguientes:

$$f(-3) = \frac{2\cdot(-3)+2}{(-3)^2-(-3)+2} = \frac{-6+2}{9+3+2} = \frac{-4}{14} = -\frac{2}{7} \Rightarrow \underline{A\left(-3,\ -\frac{2}{7}\right)}.$$

$f(1) = \frac{2\cdot 1+2}{1^2-1+2} = \frac{2+2}{1-1+2} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow \underline{B(1,\ 2)}$.

****

4º) Sean las matrices $A = (1\ a\ 2\ \ -\ a\ )$ y $B = (b\ c\ 1\ 1\ )$.

a) Calcule las matrices $A + B$ y $A\cdot B$.

b) Determine los valores de $a,\ b\ y\ c$ que cumplen que $A + B = A\cdot B$.

----

a)

$$A + B = (1\ a\ 2\ \ -\ a\ ) + (b\ c\ 1\ 1\ ) = \underline{(1 + b\ a + c\ 3\ 1 - a\ )}.$$

$$A\cdot B = (1\ a\ 2\ \ -\ a\ )\cdot(b\ c\ 1\ 1\ ) = \underline{(a + b\ a + c\ \ -\ a + 2b\ \ -\ a + 2c\ )}.$$

b)

$$A + B = A\cdot B \Rightarrow (1 + b\ a + c\ 3\ 1 - a\ ) = (a + b\ a + c\ \ -\ a + 2b\ \ -\ a + 2c\ ) =$$

$$\Rightarrow \{1 + b = a + b\ \ -\ a + 2b = 3\ 1 - a = -\ a + 2c\ \} \Rightarrow \underline{a = 1,\ b = 2,\ c = \frac{1}{2}}$$

.

****

5º) La función derivada de una función f es $f'(x) = e^{-2x} \cdot \left(x - x^2\right)$.

a) Estudie el crecimiento y el decrecimiento de la función f.

b) Si la función f tiene extremos relativos, indique sus abscisas y clasifíquelos.

----

a)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

Por ser $e^{-2x} > 0,\ \forall x \in R,\ f'(x)$ es positiva o negativa cuando lo sea la expresión $\left(x - x^2\right) = x(1 - x)$.

Considerando la ecuación $x(1 - x)$, cuyas raíces son:

$x(1 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1.$

Las raíces de la ecuación $f'(x) = 0$ dividen a su dominio, que es R, en los tres siguientes intervalos que son, alternativamente positivos o negativos: $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ 1)$ y $(1,\ +\infty)$.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 2 \in (1,\ +\infty)$:

$f'(2) = e^{-4} \cdot \left(2 - 2^2\right) = -\frac{2}{e^4} < 0.$

Los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento \to f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (0,\ 1)}.$$

$$\underline{Decrecimiento \to f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty,\ 0) \cup (1,\ +\infty)}.$$

b)

Es condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo que se anule su primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera, se trata de un mínimo y, si es negativo, de un máximo.

$$f''(x) = -\ 2e^{-2x}\left(x - x^2\right) + e^{-2x}(1 - 2x) = e^{-2x}\left(-\ 2x + 2x^2 + 1 - 2x\right) =$$

$$= e^{-2x}\left(2x^2 - 4x + 1\right).$$

$$f''(0) = e^0(0 - 0 + 1) = 1 \cdot 1 = 1 > 0 \Rightarrow \underline{Mínimo\ relativo\ para\ x = 0}.$$

$$f''(1) = e^{-2}(2 - 4 + 1) = \frac{-1}{e^2} < 0 \Rightarrow \underline{Máximo\ relativo\ para\ x = 1}.$$

****

6º) Una refinería de petróleo produce gasolina y gasóleo. En el proceso de refinado llevado a cabo se obtiene más gasolina que gasóleo. Además, para cubrir la demanda hay que producir como mínimo 3 millones de litros de gasóleo al día, mientras que la demanda de gasolina es de 6,4 millones de litros al día, como máximo. La gasolina tiene un precio de 1,9 euros/litro, y el gasóleo vale 1,5 euros/litro. Teniendo en cuenta que se vende la totalidad de la producción, determine cuántos litros de gasolina y de gasóleo hay que producir al día para obtener el máximo de ingresos.

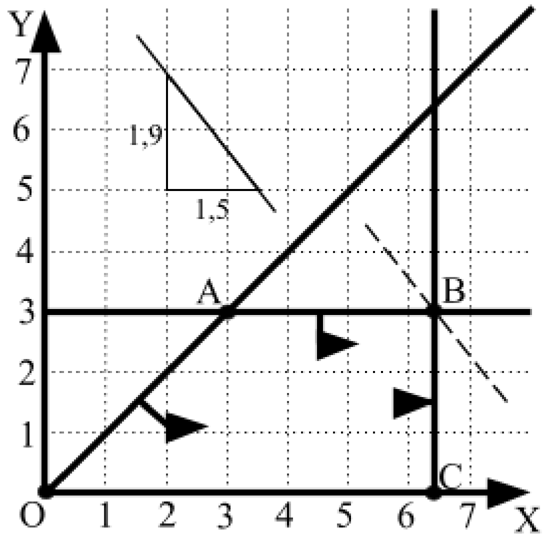
Sean x e y el número de millones de litros de gasolina y gasoil que se producen, respectivamente, cada día.

Las restricciones son las siguientes:

$x > y \quad y \geq 3 \quad x \leq 6,5 \; x \geq 0, \; y \geq 0 \}$.

La función de objetivos es: $f(x,\ y) = 1,9 \cdot 10^6 x + 1,5 \cdot 10^6 y$.

La región factible se indica en la figura.



Los vértices de la sección factible, además del origen, son los siguientes:

$A \Rightarrow x = 3 \; y = 3 \} \Rightarrow A(3,\ 3)$.

$B \Rightarrow x = 6,4 \quad y = 3 \} \Rightarrow B(6'4,\ 3)$.

$C \Rightarrow x = 6,4 \quad y = 0 \} \Rightarrow C(6'4,\ 0)$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(3,\ 3) = 1,9 \cdot 10^6 \cdot 3 + 1,5 \cdot 10^6 \cdot 3 = (5,7 + 4,5) \cdot 10^6 = 10.200.000$.

$B \Rightarrow f(6'4,\ 3) = 1,9 \cdot 10^6 \cdot 6,4 + 1,5 \cdot 10^6 \cdot 3 = (12,16 + 4,5) \cdot 10^6 =$

$= 16,66 \cdot 10^6 = 16.660.000$.

$C \Rightarrow f(6'4,\ 0) = 1,9 \cdot 10^6 \cdot 6,4 + 1,5 \cdot 10^6 \cdot 0 = 12,16 \cdot 10^6 = 12.160.000$.

El máximo se produce en el punto B.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,\ y) = 1,9\cdot 10^{6}x + 1,5\cdot 10^{6}y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1,9}{1,5}x \Rightarrow m = -\frac{1,9}{1,5}.$$

$\underline{El\ máximo\ beneficio\ lo\ obtiene\ produciendo\ cada\ día\ 6,4\ millones\ de}$

$\underline{litros\ de\ gasolina\ y\ 3\ millones\ de\ litros\ de\ gasoil.}$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE CATALUÑA

SEPTIEMBRE – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1º) Una persona decide invertir un total de 60.000 euros, repartidos entre tres entidades de ahorro distintas: A, B y C. Esta persona decide que la cantidad invertida en la entidad A sea la mitad de la cantidad total invertida en las entidades B y C. Además, se sabe que la entidad A le ha asegurado una rentabilidad del 5 %; la entidad B, una rentabilidad del 10 %, y la entidad C, una rentabilidad del 2 %. Calcule las cantidades invertidas en cada entidad de ahorro si se sabe que este inversor obtendrá unos beneficios totales de 4.200 euros.

Sean x, y, z las cantidades invertidas en las entidades A, B y C, respectivamente.

$x + y + z = 60.000.$ $x = \frac{y+z}{2} \rightarrow y + z = 2x \Rightarrow x + 2x = 60.000;$

$3x = 60.000 \Rightarrow \underline{x = 20.000}.$ $y + z = 40.000.$ (1)

Se considera que el tiempo es de un año.

$i_A = \frac{x \cdot 5 \cdot 1}{100} = \frac{20.000 \cdot 5}{100} = 1.000\ euros.$

$i_B = \frac{y \cdot 10 \cdot 1}{100} = \frac{10y}{100} = \frac{y}{10}\ euros.$

$i_C = \frac{z \cdot 2 \cdot 1}{100} = \frac{2z}{100} = \frac{z}{50}\ euros.$

$I = i_A + i_B + i_C = 4.200;$ $1.000 + \frac{y}{10} + \frac{z}{50} = 4.200;$ $\frac{y}{10} + \frac{z}{50} = 3.200;$

$5y + z = 160.000.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$y + z = 40.000 \; 5y + z = 160.000 \} \quad - y - z =- 40.000 \;\; 5y + z = 160$$

.

$y + z = 40.000; \;\; 30.000 + z = 40.000 \Rightarrow \underline{z = 10.000}$.

$\underline{Invierte\ en\ A,\ B\ y\ C,\ 20.000,\ 30.000\ y\ 10.000\ euros,\ respectivamente}$.

****

2º) Un hotel cobra 45 euros por habitación y noche. Por este precio, tiene ocupadas 165 habitaciones cada noche. Se ha hecho un estudio a partir del cual se ha deducido que, por cada euro que se suba el precio de la habitación, se ocupará una menos cada noche.

a) Si x es la cantidad que se sube el precio de la habitación por encima de los 45 euros iniciales, determine la función que dé los ingresos diarios del hotel según el valor de x. Indique también los ingresos máximos que puede obtener el hotel.

b) Indique entre qué precios obtendrá ingresos el hotel.

----

a)

El precio de la habitación después de la subida es: $(45 + x)\ euros$.

El número de habitaciones ocupadas es: $(165 - x)$.

Los ingresos son el producto del número de habitaciones ocupadas por el precio de cada habitación:

$$I(x) = (45 + x)\cdot(165 - x) = 7.425 - 45x + 165x - x^2 =$$

$$= -x^2 + 120x + 7.425.$$

$$\underline{Ingresos:\ \ I(x) = -x^2 + 120x + 7.425.}$$

Los ingresos serán máximos cuando se anule su primera derivada:

$$I'(x) = -2x + 120. \qquad I'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 120 = 0 \Rightarrow x = 60.$$

$$I(60) = -60^2 + 120\cdot 60 + 7.425 = -3.600 + 7.200 + 7.425 = 11.025.$$

$$\underline{Los\ máximos\ ingresos\ del\ hotel\ son\ de\ 11.025\ euros.}$$

b)

$$I(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 120x + 7.425 = 0;\ \Rightarrow x^2 - 120x - 7.425 = 0;$$

$$x = \frac{120 \pm \sqrt{14.400 + 29.700}}{2} = \frac{120 \pm \sqrt{44.100}}{2} = \frac{120 \pm 210}{2} \Rightarrow x_1 = -45,\ x_2 = 165.$$

$$\underline{El\ hotel\ tendría\ ingresos\ aumentando\ el\ precio\ x \in (-45,\ 165)\ euros.}$$

Nota: Debe entenderse el valor -45 como un abaratamiento del precio de la habitación.

****

3º) Determine los valores de $a,\ b\ y\ c$ que hacen que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ pase por el punto $A(0,\ 4)$ y tenga extremos relativos en los puntos de abscisas $x = 1$ y $x = 3$. Clasifique estos extremos.

Por contener $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ al punto $A(0,\ 4) \Rightarrow f(0) = 4$:

$f(0) = \underline{c = 4}$.

Por tener $f(x)$ un extremo relativo para $x = 1 \Rightarrow f'(1) = 0$:

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f'(1) = 3\cdot 1^2 + 2a\cdot 1 + b \Rightarrow 2a + b = -3.$ (1)

Por tener $f(x)$ un extremo relativo para $x = 3 \Rightarrow f'(3) = 0$:

$f'(3) = 3\cdot 3^2 + 2a\cdot 3 + b \Rightarrow 6a + b = -27.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$\left.\begin{array}{l} 2a + b = -3 \\ 6a + b = -27 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -2a - b = 3 \\ 6a + b = -27 \end{array}\right\} \Rightarrow 4a = -24 =$

.

La función resulta: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$.

Para diferenciar los máximos de los mínimos relativos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera derivada, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9;\ \ f''(x) = 6x - 12.$

$f''(1) = 6\cdot 1 - 12 = 6 - 12 = -6 < 0 \Rightarrow \underline{Máximo\ relativo\ para\ x = 1}.$

$f''(3) = 6\cdot 3 - 12 = 18 - 12 = 6 > 0 \Rightarrow \underline{Mínimo\ relativo\ para\ x = 3}.$

****

4º) Se ha observado que el número de entradas que se venden en el cine de un pueblo está ligado al sueldo medio x de la población, expresado en miles de euros, según la función $N(x) = \frac{50x}{x^2+1}$.

a) Determine que sueldo medio de la población corresponde a la máxima venta de entradas y justifique la respuesta.

b) Si se supone que los sueldos de la población crecen indefinidamente, ¿cómo incidiría este hecho en la venta de entradas del cine?

----

a)

La función $N(x) = \frac{50x}{x^2+1}$ tiene un máximo relativo para los valores de x que anulan su primera derivada:

$$N'(x) = \frac{50\cdot(x^2+1)-50x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-50x^2+50}{(x^2+1)^2} = -\frac{50\cdot(x^2-1)}{(x^2+1)^2}.$$

$$N'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{50\cdot(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = 0;\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1.$$

El valor negativo carece de sentido lógico.

$\underline{El\ sueldo\ medio\ de\ la\ población\ es\ de\ 1.000\ euros.}$

$$N(1) = \frac{50\cdot 1}{1^2+1} = \frac{50}{2} = 25.$$

$\underline{La\ venta\ máxima\ de\ entradas\ es\ de\ 25.}$

b)

$$lím\ x\to\infty\ N(x) = lím\ x\to\infty\ \frac{50x}{x^2+1} = 0.$$

$\underline{Si\ el\ sueldo\ crece\ indefinidamente\ las\ gentes\ dejan\ de\ ir\ al\ cine.}$

****

5º) Halle las matrices $A\, y\, B$ sabiendo que $A - 2B = (0 \ -3 \ -3\ 4)$ y que $2A + 3B = (7\ 15\ 8 \ -6)$.

$A - 2B = (0 \ -3 \ -3\ 4)\ 2A + 3B = (7\ 15\ 8 \ -6)\}\quad -2A + 4B = (0\ 6\ 6 \ -8)$

$\Rightarrow \underline{B = (1\ 3\ 2 \ -2)}$.

$A - 2B = (0 \ -3 \ -3\ 4)\ 2A + 3B = (7\ 15\ 8 \ -6)\}\quad 3A - 6B = (0 \ -9 \ -$

$\Rightarrow \underline{A = (2\ 3\ 1\ 0)}$.

****

6º) Considere la región del plano limitada por las rectas $y = 2x + 2,\ y = -2x + 2, y = 2x - 2, y = -2x - 2$.

$a)$ Dibuja y calcula sus vértices.

$b)$ Considere ahora la familia de rectas $y = x + k$. Calcule en qué punto de la región se obtiene el máximo valor de k y determine dicho valor.

$a)$

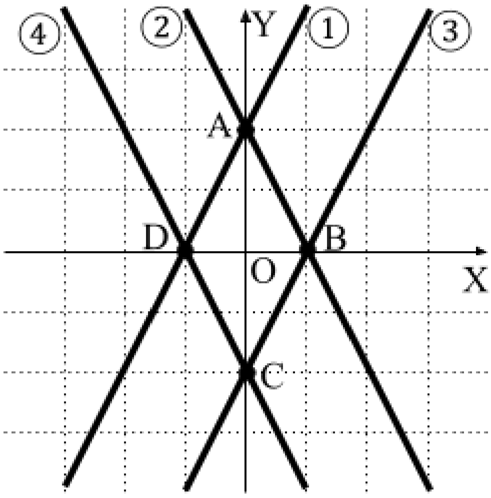
① $\Rightarrow y = 2x + 2.$

② $\Rightarrow y = -2x + 2.$

③ $\Rightarrow y = 2x - 2.$

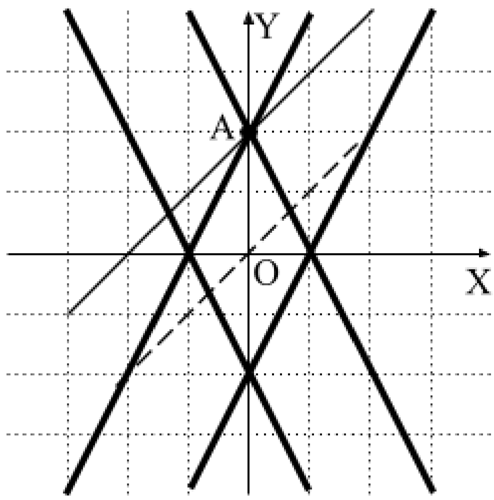
④ $\Rightarrow y = -2x - 2.$

Los vértices son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} ① \Rightarrow y = 2x + 2 \\ ② \Rightarrow y = -2x + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y = 4;\ \ y = 2;\ x = 0 \Rightarrow \underline{A(0,\ 2)}.$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} ② \Rightarrow y = -2x + 2 \\ ③ \Rightarrow y = 2x - 2 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 1;\ \ y = 0 \Rightarrow \underline{B(1,\ 0)}.$



$C \Rightarrow \left.\begin{array}{l} ③ \Rightarrow y = 2x - 2 \\ ④ \Rightarrow y = -2x - 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2y = -4;\ \ y = -2;\ x = 0 \Rightarrow \underline{C(0,\ -2)}.$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{l} ① \Rightarrow y = 2x + 2 \\ ④ \Rightarrow y = -2x - 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2y = 0;\ \ y = 0;\ x = -1 \Rightarrow \underline{D(-1,\ 0)}.$

$b)$

El haz de rectas paralelas a $y = x + k$ tienen de pendiente uno, o sea, son paralelas a la bisectriz del primer-tercer cuadrante.

Como se aprecia en la figura, la recta que cumple la condición pedida es $y = x + 2$, por lo tanto, el punto es $\underline{A(0,\ 2)}$ y $\underline{k = 2}$.

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

JULIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elegir una opción entre las dos que se proponen a continuación.

OPCIÓN A

1º) En una fábrica se dispone de 1.000 horas de montaje y de 500 horas de tapicería para la fabricación de sillas y sillones. Cada silla requiere 5 horas de montaje y 5 horas de tapicería y cada sillón 15 horas de montaje y 5 horas de tapicería. Si no se pueden fabricar menos de 20 sillas y el beneficio obtenido es de 60 euros por cada silla y 100 euros por cada sillón:

a) ¿Cuántas sillas y sillones deben fabricarse para obtener el máximo beneficio?

b) Hallar el valor de dicho beneficio máximo.

Justificar las respuestas.

----

a)

Sean x e y el número de sillas y de sillones fabricados, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes:

$5x + 5y \leq 500 \; 15x + 5y \leq 1.000 \quad x \geq 20; y \geq 0 \} \quad x + y \leq 100 \; 3x + y \leq 200 \; x \geq 20$

.

La función de objetivos es la siguiente: $f(x, y) = 60x + 100y$.

La región factible se indica en la figura:

x	0	100
y	100	0

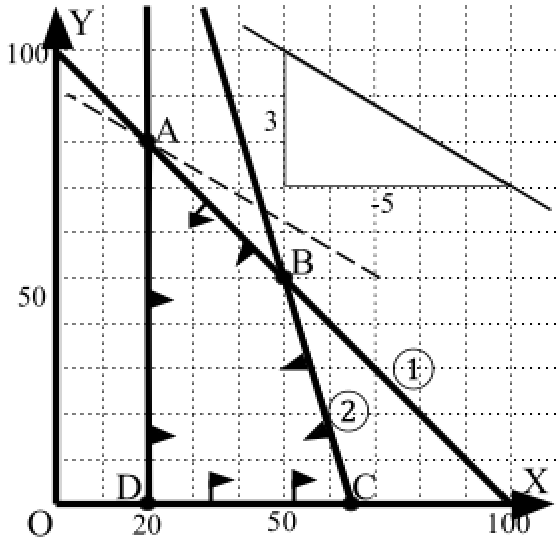
①$\Rightarrow x + y \leq 100 \Rightarrow y \leq 100 - x \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si$.

x	60	50
y	20	50

②$\Rightarrow 3x + y \leq 200 \Rightarrow y \leq 200 - 3x \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si$.

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left. \begin{matrix} x = 20 \\ x + y = 100 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \underline{A(20,\ 80)}.$



$B \Rightarrow \left. \begin{matrix} x + y = 100 \\ 3x + y = 200 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \underline{B(50,\ 50)}.$

$C \Rightarrow \left. \begin{matrix} 3x + y = 200 \\ y = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \underline{C(66'67,\ 0)}.$

$D \Rightarrow \left. \begin{matrix} x = 20 \\ y = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \underline{D(20,\ 0)}.$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(20,\ 80) = 60 \cdot 20 + 100 \cdot 80 = 1.200 + 8.000 = \underline{9.200}.$

$B \Rightarrow f(50,\ 50) = 60 \cdot 50 + 100 \cdot 50 = 3.000 + 5.000 = \underline{8.000}.$

$C \Rightarrow f(66'67,\ 0) = 60 \cdot 66'67 + 100 \cdot 0 = 4.000 + 0 = \underline{4.000}.$

$D \Rightarrow f(20,\ 0) = 60 \cdot 20 + 100 \cdot 0 = 1.200 + 0 = \underline{1.200}.$

El máximo se produce en el punto A.

También se hubiera obtenido el punto A por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = 60x + 100y = 0 \Rightarrow y = -\frac{60}{100}x \Rightarrow m = -\frac{3}{5}.$

$\underline{El\ máximo\ beneficio\ se\ obtiene\ fabricando\ 20\ sillas\ y\ 80\ sillones}.$

$b)$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 9.200\ euros}.$

****

2º) En una plantación de frutales se ha determinado que la producción de fruta (en miles de kg), en los últimos 10 años, cumple la función $P(t) = -t^3 + 18t^2 - 81t + 200,\ 1 \leq t \leq 10$, donde P es la producción (en miles de kg) y t es el año objeto de estudio. Se pide justificando las respuestas:

a) Determinar los periodos de crecimiento y decrecimiento de la producción durante los 10 últimos años.

b) ¿Cuáles son las producciones máxima y mínima en dicho periodo?

c) Hallar el beneficio total obtenido en los tres primeros años, sabiendo que por cada kg de fruta se obtiene un beneficio de 0,30 euros.

----

a)

$$P'(t) = -3t^2 + 36t - 81 \Rightarrow P'(t) = 0 \Rightarrow -3t^2 + 36t - 81 = 0;$$

$$t^2 - 12t + 27 = 0;\ t = \frac{12 \pm \sqrt{144-108}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{12 \pm 6}{2} = 6 \pm 3 \Rightarrow t_1 = 3,\ t_2 = 9.$$

Una función es creciente o decreciente cuando el valor de su primera derivada es positivo o negativo, respectivamente.

Las raíces de la primera derivada dividen al dominio de la función, $[1, 10]$, en los tres siguientes intervalos: $(1, 3), (3, 9)\ y\ (9, 10)$, que son, alternativamente, crecientes y decrecientes. Considerando un valor de uno de los intervalos, por ejemplo $t = 2$, resulta:

$$P'(2) = -3 \cdot 2^2 + 36 \cdot 2 - 81 = -12 + 72 - 81 < 0 \Rightarrow Decreciente.$$

Los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$Decrecimiento: P'(t) < 0 \Rightarrow t \in (1, 3) \cup (9, 10).$$

$$Crecimiento: P'(t) > 0 \Rightarrow t \in (3, 9).$$

$$\underline{La\ producción\ creció\ entre\ los\ años\ 3º\ y\ 9º\ y\ decreció\ el\ resto\ del\ tiempo.}$$

b)

Teniendo en cuenta que la función es polinómica y, por lo tanto, es continua en su dominio y considerando los periodos de crecimiento y decrecimiento, es fácil deducir que la producción mínima se produjo en el tercer año y la máxima el noveno año.

También puede obtenerse la producción máxima y mínima teniendo en cuanta que una función tiene un máximo o un mínimo relativos cuando se anula su primera derivada y, para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a su segunda deriva: si es positiva para los valores que anulan la primera derivada se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo relativo.

$P''(t) = -6t + 36 \Rightarrow \{P''(3) = -6 \cdot 3 + 36 > 0 \rightarrow Mínimo\ para\ t = 3\ P''(9) = -6 \cdot 9 + 36$
.

$$P(3) = -3^3 + 18 \cdot 3^2 - 81 \cdot 3 + 200 = -27 + 162 - 243 + 200 = 92.$$

$$\underline{La\ producción\ mínima\ (tercer\ año)\ fue\ de\ 92.000\ kg.}$$

$$P(9) = -9^3 + 18 \cdot 9^2 - 81 \cdot 9 + 200 = -729 + 1.458 - 729 + 200 = 200.$$

$$\underline{La\ producción\ máxima\ (noveno\ año)\ fue\ de\ 200.000\ kg.}$$

$c)$

$$P(1) = -1^3 + 18 \cdot 1^2 - 81 \cdot 1 + 200 = -1 + 18 - 81 + 200 = 136.$$

$$P(2) = -2^3 + 18 \cdot 2^2 - 81 \cdot 2 + 200 = -8 + 72 - 162 + 200 = 102.$$

$$P(3) = -3^3 + 18 \cdot 3^2 - 81 \cdot 3 + 200 = -27 + 162 - 243 + 200 = 92.$$

$$P(1) + P(2) + P(3) = 136 + 102 + 92 = 330.$$

La producción total de los tres primeros años fue de 330.000 kg.

$$330.000 \cdot 0,30 = 99.000.$$

$$\underline{El\ beneficio\ total\ obtenido\ durante\ los\ 3\ primeros\ años\ fue\ de\ 99.000\ euros}$$

****

3º) El 80 % de las familias españolas es propietaria de la casa que habitan. De ellas, el 70 % tiene una hipoteca sobre la misma. Se está realizando un estudio sobre la satisfacción de las familias respecto a la vivienda en la que residen. Se han obtenido los siguientes datos:

-. Las familias con vivienda en propiedad y sin hipoteca están satisfechas en un 80 %.

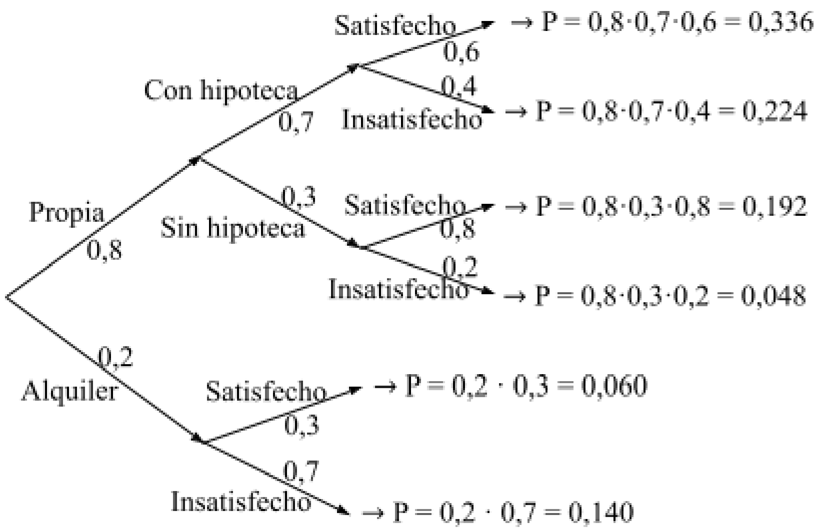
-. Las familias con vivienda en propiedad y con hipoteca están satisfechas en un 60 %.

-. Las familias sin vivienda en propiedad están satisfechas en un 30 %.

a) Si se elige al azar una familia, ¿cuál es la probabilidad de que esté satisfecha con la vivienda en que reside?

b) Si se elige al azar una familia, ¿cuál es la probabilidad de que esté satisfecha con la vivienda en que reside y que ésta sea en propiedad?

c) Sabiendo que una familia está satisfecha, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga vivienda propia? Justificar las respuestas.



a)

$$P = 0,336 + 0,192 + 0,060 = \underline{0,588}.$$

b)

$$P = 0,336 + 0,192 = \underline{0,528}.$$

c)

$$P = \frac{0,060}{0,336+0,192+0,060} = \frac{0,060}{0,558} = \underline{0,102}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Halla la matriz X que sea solución de la ecuación matricial $A\cdot X\cdot B = A + B$, donde $A = (1\ -1\ 0\ 1)$ y $B = (1\ 0\ 3\ -1)$. Justificar la respuesta.

$$A\cdot X\cdot B = A + B;\ A^{-1}\cdot A\cdot X\cdot B\cdot B^{-1} = A^{-1}\cdot (A + B)\cdot B^{-1};$$

$$I\cdot X\cdot I = A^{-1}\cdot (A + B)\cdot B^{-1} \Rightarrow \underline{X = A^{-1}\cdot (A + B)\cdot B^{-1}}. \qquad (*)$$

La inversa de A se obtiene por el método de Gauss-Jordan.

$$(A/I) = (1\ 0\ 0\ 1) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 + F_2\} \Rightarrow (1\ 1\ 0\ 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = (1\ 1\ 0\ 1).$$

$$A + B = (1\ -1\ 0\ 1) + (1\ 0\ 3\ -1) = (2\ -1\ 3\ 0).$$

La inversa de B se obtiene por la adjunta de la traspuesta: $B^{-1} = \frac{Adj.\ de\ B^t}{|B|}$.

$|B| = |1\ 0\ 3\ -1| = -1.$ $\qquad B^t = (1\ 3\ 0\ -1).$
$Adj.\ de\ B^t = (-1\ 0\ -3\ 1).$

$$B^{-1} = \frac{Adj.\ de\ B^t}{|B|} = \frac{(-1\ 0\ -3\ 1)}{-1} = (1\ 0\ 3\ -1).$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de A^{-1}, $(A + B)\ y\ B^{-1}$:

$$X = A^{-1}\cdot (A + B)\cdot B^{-1} = (1\ 1\ 0\ 1)\cdot (2\ -1\ 3\ 0)\cdot (1\ 0\ 3\ -1) =$$

$$= (5\ -1\ 3\ 0)\cdot (1\ 0\ 3\ -1) = (2\ 1\ 3\ 0).$$

$$\underline{X = (2\ 1\ 3\ 0)}.$$

****

2º) Una empresa se dedica a la compra y venta de petróleo. El precio de compra por barril depende del número de barriles comprados según la función:

$$P(x) = \begin{cases} Ax^2 - 10x + 150 & si\ 0 \le x \le 10 \\ B & si\ \ x > 10 \end{cases},$$

donde $P(x)$ representa el precio por barril y x es el número de barriles comprados (en miles de unidades). Sabiendo que la función es continua y que el mínimo se alcanza para x = 10, se pide:

a) Determinar las constantes A y B. Justificar la respuesta.

b) Representar gráficamente el precio del barril en función de x.

----

a)

Por ser $P(x)$ continua se cumple que: $P(x) = P(x) = P(10)$.

$$P(x) = \left(Ax^2 - 10x + 150\right) = 100A - 100 + 150 = 100A + 50\,.$$

$$P(x) = B = P(10) = B\,.$$

$$100A + 50 = B;\ \ 100A - B = -50. \qquad (1)$$

Por tener un mínimo para x = 10 tiene que cumplirse que $P'(10) = 0$.

$$P'(x) = \begin{cases} 2Ax - 10 & si\ 0 \le x \le 10 \\ 0 & si\ \ x > 10 \end{cases}.$$

$$P'(10) = 0 \Rightarrow 2A \cdot 10 - 10 = 0;\ \ 2A - 1 = 0;\ \ 2A = 1 \Rightarrow \underline{A = \tfrac{1}{2}}.$$

Sustituyendo el valor de A en (1): $100 \cdot \frac{1}{2} - B = -50 \Rightarrow \underline{B = 100}$.

b)

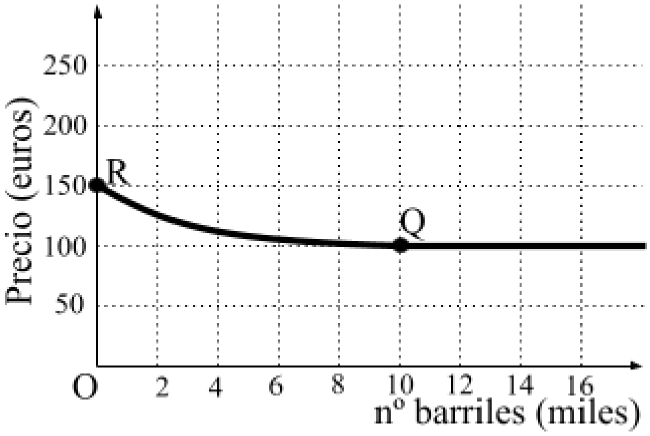
La función resulta ser:

$$P(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 10x + 150 & si\ 0 \le x \le 10 \\ 100 & si\ \ x > 10 \end{cases}.$$

El punto mínimo es $Q(10,\ 100)$.

Teniendo en cuenta que $P(0) = 150 \Rightarrow R(0,\ 150)$.

La representación gráfica de la función P(x) que representa el valor del barril en función de x es la que se indica a continuación:


250
200
150
100
50
Precio (euros)
R
Q
O
2
4
6
8
10
12
14
16
nº barriles (miles)

****

3º) Se realizó un estudio para determinar la resistencia a la rotura de dos tipos de vigas. Para una muestra aleatoria formada por 30 vigas de hormigón la resistencia media muestral fue de 29,8 unidades. También se obtuvo una muestra aleatoria de 30 vigas de acero obteniendo una resistencia media de 32,7 unidades. Se supone que las distribuciones de la resistencia a la rotura de los dos tipos de viga son normales con varianza 10. Con un nivel de confianza del 95 %, ¿se puede rechazar la hipótesis de que los dos tipos de viga tienen la misma resistencia a la rotura? Justificar la respuesta.

$Hipótesis\ nula \rightarrow H_0: \mu_2 - \mu_1 = 0$ $\qquad$ $Hipótesis\ alternativa \rightarrow H_1: \mu_2 - \mu_1 \neq 0$ }
. Contraste bilateral.

Tenemos: $n_1 = n_2 = 30;\ \bar{x}_1 = 29'8, \bar{x}_2 = 32'7;\ \sigma_1 = \sigma_2 = 10.$

$\alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$
$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$

La fórmula de la zona de aceptación es: $\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}},\ z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right).$

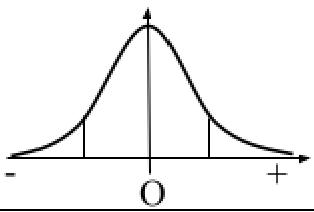
$$\left(-1'96 \cdot \sqrt{\frac{10^2}{30} + \frac{10^2}{30}},\ 1'96 \cdot \sqrt{\frac{10^2}{30} + \frac{10^2}{30}}\right);\ \left(-1'96 \cdot \sqrt{\frac{200}{30}},\ 1'96 \cdot \sqrt{\frac{200}{30}}\right);$$

$(-1'96 \cdot 2'582,\ 1'96 \cdot 2'582);\ (-5,061,\ 5,061).$

$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 29,8 - 32,7 = -2,9 \notin (-5,061,\ 5,061).$

$\underline{Se\ rechaza\ la\ hipótesis\ nula: la\ resistencia\ a\ la\ rotura\ no\ es\ la\ misma.}$

****



α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	∞	2,576	2,326	2,170	2,054	1,960	1,881	1,812	1,761	1,695
0,1	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405	1,372	1,341	1,311
0,2	1,202	1,254	1,227	1,200	1,175	1,150	1,126	1,103	1,080	1,098
0,3	1,036	1,015	0,994	0,924	0,954	0,935	0,915	0,896	0,878	0,860
0,4	0,842	0,824	0,806	0,780	0,772	0,755	0,739	0,722	0,706	0,690

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

JUNIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elegir una opción entre las dos que se proponen a continuación.

OPCIÓN A

1º) Con el fin de sufragar los gastos del viaje de estudios de segundo de Bachillerato, los alumnos de un instituto organizan la venta de bombones y mantecados. Disponen de 600 cajas de bombones y 1.000 cajas de mantecados que van a distribuir en dos tipos de lotes, A y B. Cada lote A consta de dos cajas de bombones y 1 caja de mantecados. Cada lote B contiene una caja de bombones y 3 cajas de mantecados. Si el beneficio obtenido por un lote A es de 10 euros y por un lote B de 12 euros, se pide:

a) El número de lotes de cada tipo para obtener el máximo beneficio.

b) El valor de dicho beneficio máximo.

Justificar las respuestas.

----

a)

Sean x e y la cantidad de cajas de bombones y mantecados, respectivamente, que contienen los lotes.

Las restricciones son las siguientes:

$2x + y \leq 600 \quad x + 3y \leq 1.000 \quad x \geq 0;\ y \geq 0\ \}$.

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,\ y) = 10x + 12y$.

La región factible se indica en la figura:

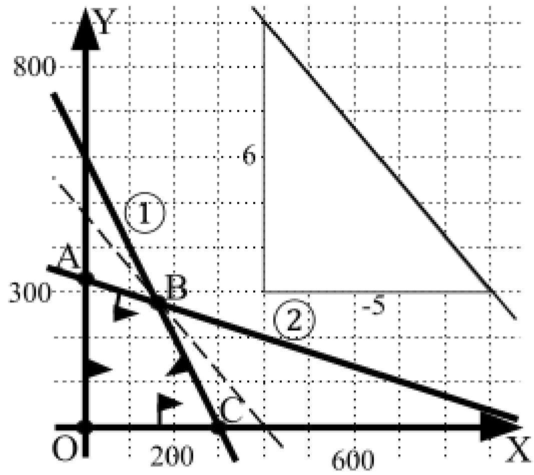
x	0	300
y	600	0

①$\Rightarrow 2x + y \leq 600 \Rightarrow y \leq 600 - 2x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	400	100
y	200	300

②$\Rightarrow x + 3y \leq 1.000 \Rightarrow y \leq \frac{1.000 - x}{3} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

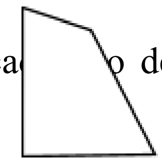
Los vértices de la sección factible son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ x + 3y = 1.000 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{A(0,\ 333'3)}.$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x + y = 600 \\ x + 3y = 1.000 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{B(160,\ 280)}.$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x + y = 600 \\ x = 300 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{C(300,\ 0)}.$

Los valores de la función de objetivos en ca  o de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 333,3) = 10 \cdot 0 + 12 \cdot 333'3 = \underline{4.000}.$

$B \Rightarrow f(160,\ 280) = 10 \cdot 160 + 12 \cdot 280 = 1.600 + 3.360 = \underline{4.960}.$

$C \Rightarrow f(300,\ 0) = 10 \cdot 300 + 12 \cdot 0 = 3.0000 + 0 = \underline{3.000}.$

El máximo se produce en el punto B.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = 10x + 12y = 0 \Rightarrow y = -\frac{10}{12}x \Rightarrow m = -\frac{5}{6}.$

$\underline{El\ máximo\ beneficio\ se\ obtiene\ vendiendo\ 160\ lotes\ A\ y\ 280\ lotes\ B}.$

$b)$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 4.960\ euros}.$

****

2º) El proceso de contagio de cierta enfermedad viene dado por la siguiente función: $P(t) = -t^2 + Bt + C \; si \; 5 \le t \le 40$, donde $P(t)$ es el número de personas contagiadas transcurridos t días. Si se sabe que el día 20 es el de mayor contagio y que el día 10 se produjeron 500 contagios:

a) Determinar las constantes B y C. Justificar la respuesta.

b) Representar gráficamente el número de personas contagiadas en función de t.

----

a)

$P(10) = 500 \Rightarrow -10^2 + 10B + C = 500; \;\; 10B + C = 600.$ (*)

$P'(t) = -2t + B \Rightarrow P'(20) = 0 \Rightarrow -2 \cdot 20 + B = 0 \Rightarrow \underline{B = 40}.$

Sustituyendo el valor de B en la expresión (*):

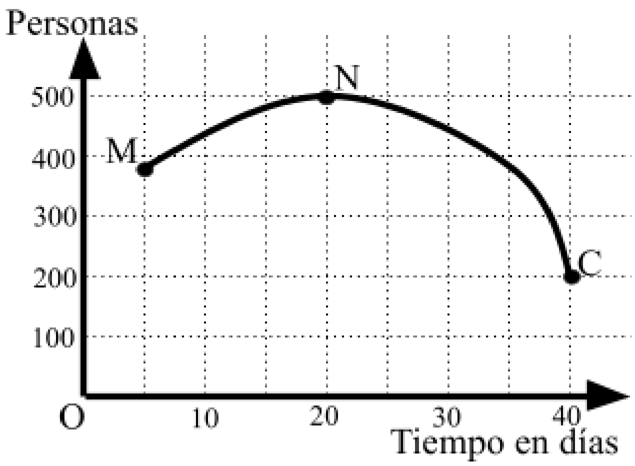
$10 \cdot 40 + C = 600; \;\; 400 + C = 600 \Rightarrow \underline{C = 200}.$

La función resulta: $\underline{P(t) = -t^2 + 40t + 200 \; si \; 5 \le t \le 40}.$

b)

Siendo:

$P(5) = -25 + 200 + 200 = 375.$

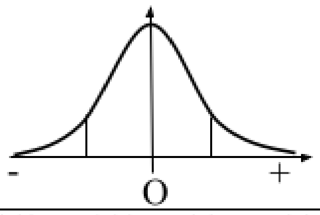


$P(40) = -1600 + 1600 + 200 = 200.$

La representación gráfica de la función es, aproximadamente, la que se indica en la figura.

****

3º) Una compañía produce bolsas de golosinas y en el envase indica que pesan 454 g. Una clase de alumnos desea comprobar si es cierto. Seleccionan al azar 50 bolsas y obtienen una media de 451,22 g. Se sabe que el peso de las bolsas se distribuye según una distribución normal con varianza 70 g^2. Con un nivel de confianza del 99 %, ¿se puede rechazar la hipótesis de que las bolsas pesan 454 g? Justificar la respuesta.



α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	∞	2,576	2,326	2,170	2,054	1,960	1,881	1,812	1,761	1,695
0,1	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405	1,372	1,341	1,311
0,2	1,202	1,254	1,227	1,200	1,175	1,150	1,126	1,103	1,080	1,098
0,3	1,036	1,015	0,994	0,924	0,954	0,935	0,915	0,896	0,878	0,860
0,4	0,842	0,824	0,806	0,780	0,772	0,755	0,739	0,722	0,706	0,690

$Hipótesis\ nula \to H_0: \mu = 454$ $\qquad$ $Hipótesis\ alternativa \to H_1:\ \mu \neq 454\ \}$

.

Zona de contraste *bilateral;* en este caso es $\left(\mu_0 - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \mu_0 + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Para $\mu_0 = 454,\ \sigma = \sqrt{70},\ \alpha = 0,01\ y\ n = 50$:

$\alpha = 0,01\ \to z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,576.$

$\left(454 - 2,576 \cdot \frac{\sqrt{70}}{\sqrt{100}},\ 454 - 2,576 \cdot \frac{\sqrt{70}}{\sqrt{100}}\right);$

$(454 - 2,576 \cdot 0,84,\ \ 454 - 2,576 \cdot 0,84);\ \ (454 - 2'16,\ \ 454 + 2'16) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(451'84;\ 456'16\right).$

La media muestral es $\overline{x} = 451,22$, que pertenece a la zona de contraste, por lo cual se debe admitir la hipótesis nula, o sea que:

$\underline{Se\ admite\ que\ el\ peso\ medio\ de\ los\ paquetes\ sea\ de\ 454\ g.}$

****

OPCIÓN B

1º) Sea la matriz $A = (1\,0\ -1\,0\ -2\,1\,1\ -1\,0\,)$. Halla la matriz X que verifica $X \cdot A = A^2 - 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 3. Justificar la respuesta.

Haciendo $M = A^2 - 2I$:

$X \cdot A = A^2 - 2I \Rightarrow X \cdot A = M;\ \ X \cdot A \cdot A^{-1} = M \cdot A^{-1};\ \ X \cdot I = M \cdot A^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{X = M \cdot A^{-1}}$. (*)

$M = A^2 - 2I = (1\,0\ -1\,0\ -2\,1\,1\ -1\,0\,) \cdot (1\,0\ -1\,0\ -2\,1\,1\ -1\,0\,) - 2I =$

$= (0\,1\ -1\,1\,3\ -2\,1\,2\ -2\,) - (2\,0\,0\,0\,2\,0\,0\,0\,2\,) = (-\,2\,1\ -1\,1\,1\ -2\,1\,2\ -4\,)$

.

La inversa de A se obtiene por la adjunta de la traspuesta: $A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|}$.

$|A| = |1\,0\ -1\,0\ -2\,1\,1\ -1\,0\,| = -\,2 + 1 = -\,1.$ $A^t = (1\,0\,1\,0\ -2\ -1\ -$

.

$Adj.\ de\ A^t = (|-\,2\ -1\,1\,0\,|\ -|0\ -1\ -1\,0\,|\ |0\ -2\ -1\,1\,|\ -|0\,1\,1\,0\,|\ |1$

.

$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{(1\,1\,-2\,1\,1\,-1\,2\,1\,-2\,)}{-1} = (-\,1\ -1\,2\ -1\ -1\,1\ -2\ -1\,2\,)$

.

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos y operando:

$X = M \cdot A^{-1} = (-\,2\,1\ -1\,1\,1\ -2\,1\,2\ -4\,) \cdot (-\,1\ -1\,2\ -1\ -1\,1\ -2\ -$

.

****

2º) Durante su proceso de fabricación una pieza adquiere una temperatura de acuerdo con la función $f(t) = -\,5(t + 1)(t - 7),\ t \geq 0$, donde f es la temperatura (en grados centígrados) y t el tiempo transcurrido, desde que se inicia su fabricación, en horas. Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar el tiempo que debe transcurrir para que la pieza alcance la temperatura máxima.

b) ¿Cuál será el valor de dicha temperatura máxima?

c) Determinar la hora, desde que se inicia su fabricación, a la que la temperatura de la pieza será de 60 grados centígrados.

----

a)

La pieza alcanza la temperatura máxima cuando se anule la primera derivada de la función que la determina.

$$f'(t) = -5\cdot[1\cdot(t-7)+(t+1)\cdot 1] = -5(2t-6).$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow -5(2t-6) = 0;\ 2t-6=0;\ t-3=0 \Rightarrow t=3.$$

$\underline{Alcanza\ la\ máxima\ temperatura\ a\ las\ 3\ horas\ de\ comenzar\ su\ fabricación.}$

b)

$$f(3) = -5(3+1)(3-7) = -5\cdot 4\cdot(-4) = 80.$$

$\underline{La\ temperatura\ máxima\ que\ alcanza\ es\ de\ 80\ grados\ centígrados.}$

c)

$$f(t) = 60 \Rightarrow -5(t+1)(t-7) = 60;\ t^2-6t-7=-12;\ t^2-6t+5=0;$$

$$t = \frac{6\pm\sqrt{36-20}}{2} = \frac{6\pm\sqrt{16}}{2} = \frac{6\pm4}{2} = 3\pm2 \Rightarrow t_1 = 1,\ t_2 = 5.$$

$\underline{La\ pieza\ alcanza\ 60\ grados\ transcurridas\ una\ hora\ y\ cinco\ horas\ .}$

****

3º) Un fabricante de móviles compra baterías a tres proveedores distintos, A, B y C. De los pedidos anteriores sabe que una proporción de las baterías son defectuosos: el 3 % de las baterías de A, el 5 % de las baterías de B y el 4 % de las baterías de C. Actualmente tiene 50.000 unidades de A, 35.000 unidades de B y 20.000 unidades de C.

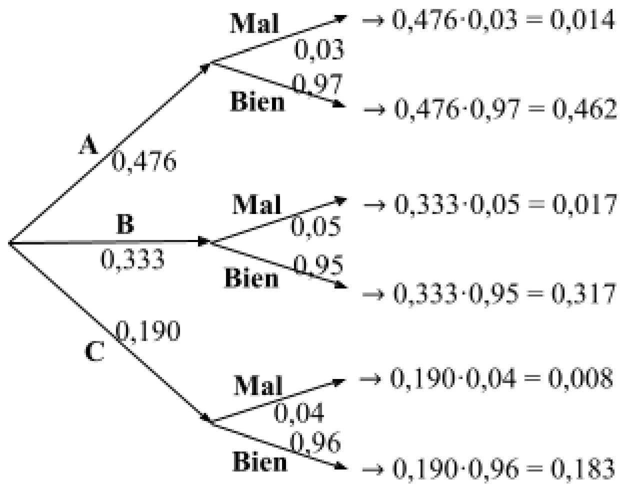
a) Si se coge una batería al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuosa?

b) Si se ha cogido al azar una batería y es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea del fabricante A? Justificar las respuestas.

$$50.000 + 35.000 + 20.000 = 105.000.$$

$P(A) = \frac{50.000}{105.000} = \frac{10}{21} = 0,476.$ $\qquad$ $P(B) = \frac{35.000}{105.000} = \frac{1}{3} = 0,333.$

$P(C) = \frac{20.000}{105.000} = \frac{4}{21} = 0,190.$



a)

$$P = 0,014 + 0,017 + 0,008 = \underline{0,039}.$$

Nótese que se ha aplicado el teorema de la probabilidad total:

$$P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C) =$$

$$= 0,473 \cdot 0,03 + 0,333 \cdot 0,05 + 0,190 \cdot 0,008 = 0,014 + 0,017 + 0,008 = \underline{0,039}.$$

b)

$$P = \frac{0,014}{0,014+0,017+0,008} = \frac{0,014}{0,039} = \frac{14}{39} = \underline{0,359}.$$

En la resolución de este apartado se ha empleado el teorema de Bayes:

$$P(A/D) = \frac{P(A)\cdot P(D/A)}{P(A)\cdot P(D/A)+P(B)\cdot P(D/B)+P(C)\cdot P(D/C)} = \frac{0{,}014}{0{,}014+0{,}017+0{,}008} = \frac{0{,}014}{0{,}039} =$$

$$= \underline{\frac{14}{39} = 0{,}359}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE GALICIA

JUNIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno debe responder solamente a los ejercicios de una de las opciones.

OPCIÓN A

1º) Dadas las matrices $A = (a\ 2\ 0\ \ -1)$, $B = (-\ 1\ 1\ 0\ b)$, $C = (c + 2\ 2\ 0\ c)$. Calcula las matrices $A \cdot B$ y $B - C$. Calcula los valores $a,\ b\ y\ c$ que cumplen $A \cdot B = B - C$.

$$A \cdot B = (a\ 2\ 0\ \ -1) \cdot (-\ 1\ 1\ 0\ b) = \underline{(-\ a\ a + 2b\ 0\ \ -b)}.$$

$$B - C = (-\ 1\ 1\ 0\ b) - (c + 2\ 2\ 0\ c) = \underline{(-\ c - 3\ \ -1\ 0\ b - c)}.$$

$A \cdot B = B - C \Rightarrow (-\ a\ a + 2b\ 0\ \ -b) = (-\ c - 3\ \ -1\ 0\ b - c) \Rightarrow \quad a = c + 3\ a +$

$a = c + 3\ a + 2b = -1 \qquad c = 2b\} \Rightarrow c + 3 + c = -1;\ \ 2c = -4 \Rightarrow c = -2$

.

$$\underline{a = 1,\ b = -1,\ c = -2}.$$

****

2º) Un restaurante ha sido abierto al público a principios de 2.006 y la siguiente función $B(t)=\begin{cases}10\left(4t-t^2\right), & 0\le t\le 3\\ 60-10t, & 3<t\le 7\end{cases}$, indica cómo han evolucionado sus beneficios (en miles de euros) en función del tiempo t (en años) transcurrido desde su apertura, correspondiendo t = 0 a principios de 2.006.

a) Estudia en qué periodos se ha producido un aumento y en los que se ha producido una disminución de sus beneficios. ¿A cuánto han ascendido sus beneficios máximos? ¿En qué año los han obtenido?

b) Representar la gráfica de la función $B(t)$. ¿En algún año después de su apertura no obtuvieron beneficios? ¿A partir de algún año ha dejado de ser rentable el restaurante?

----

a)

En el intervalo $[0,\ 3]$ la función es $B(t)=\ 10\left(4t\ -\ t^2\right)$, que es una parábola cóncava (∩) de las siguientes características:

$B(0)=\ 0\Rightarrow O(0,\ 0)$. $\quad B(3)=\ 10\cdot\left(4\cdot 3\ -\ 3^2\right)=\ 10\cdot 3\ =\ 30\Rightarrow A(3,\ 30)$.

$B'(t)=\ 10\cdot(4\ -\ 2t)=\ 20\cdot(2\ -\ t)=\ 0\Rightarrow t\ =\ 2$.

$B(2)=\ 10\cdot\left(4\cdot 2\ -\ 2^2\right)=\ 10\cdot(8\ -\ 4)=\ 40\Rightarrow Vértice: V(2,\ 40)$.

En el intervalo $(3,\ 7]$ la función es $B(t)=\ 60\ -\ 10t$, que es una recta de pendiente negativa (decreciente) cuyos puntos extremos del intervalo son los siguientes:

$B(3)=\ 60\ -\ 10\cdot 3\ =\ 30\Rightarrow A(3,\ 30)$. (Lógico para función continua).

$B(7)=\ 60\ -\ 10\cdot 7\ =-\ 10\Rightarrow C(7,\ -\ 10)$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$B'(t)=\begin{cases}20(2\ -\ t), & 0\le t\le 3\\ -\ 10, & 3\ <\ t\le 7\end{cases}$.

$$Crecimiento: B'(t)>\ 0\Rightarrow t\epsilon(0,\ 2).$$

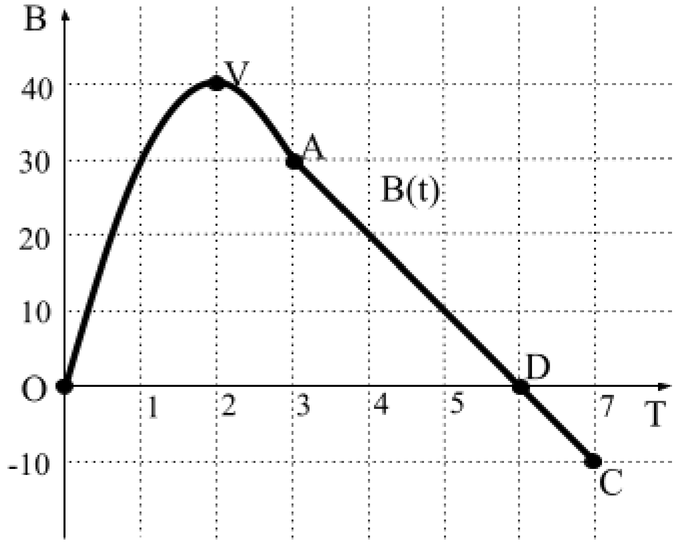
$$Decrecimiento: B'(t)<\ 0\Rightarrow t\epsilon(2,\ 7).$$

$\underline{El\ beneficio\ aumenta\ los\ dos\ primeros\ años\ y\ disminuye\ el\ resto.}$

$$\underline{El\ benefico\ máximo\ es\ de\ 40.000\ euros\ y\ se\ alcanza\ al\ final\ del\ 2º\ año.}$$

$b)$

La representación gráfica de la función es la indicada en la figura.



De la observación de la gráfica se deduce que:

$$\underline{No\ se\ obtuvo\ beneficio\ el\ 6º\ año.}$$

$$\underline{El\ restaurante\ no\ fue\ rentable\ el\ último\ año\ de\ funcionamiento.}$$

****

3º) Según una encuesta de opinión se sabe que el 80 % de la población adolescente de una determinada ciudad sigue una serie de TV. Se elige una muestra aleatoria de 225 adolescentes de esa ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que sigan la serie de TV entre 170 y 190 (incluidos) adolescentes?

Por ser la variable discreta se trata de una distribución binomial; si es posible, se aproxima a una distribución normal.

Una distribución binomial se puede aproximar a una distribución normal cuando se cumple que: $n \cdot p \geq 5 \;\; y \;\; n \cdot q \geq 5$.

$n = 225,\ p = 0,8,\ q = 0,2 \Rightarrow \{ n \cdot p = 225 \cdot 0,8 = 180 > 5 \; n \cdot q = 225 \cdot 0,2 = 45$

.

Es posible la aproximación a una distribución normal.

Distribución normal: $X = (225,\ 0'8)$.

Distribución binomial: $X'\left(n \cdot p,\ \sqrt{n \cdot p \cdot q}\right)$.

$X'\left(225 \cdot 0'8,\ \sqrt{225 \cdot 0'8 \cdot 0'2}\right) = X'\left(180,\ \sqrt{36}\right) = X'(180,\ 6)$.

Tipificando: $Z = \frac{X' - 180}{6}$.

Se debe aplicar la corrección por continuidad o corrección de Yates que consiste en añadir y sustraer 0,5 al valor de la variable. Esto se hace porque estamos convirtiendo una variable X discreta (toma un número natural de valores) en un variable continua X' continua (toma valores reales en un intervalo).

$$P\left(\frac{169,5-180}{6} \leq \frac{X'-180}{6} \leq \frac{190,5-180}{6}\right) = P\left(\frac{-10,5}{6} \leq Z \leq \frac{10,5}{6}\right) =$$

$$= P(-1,75 \leq Z \leq 1,75) = P(Z \leq 1,75) - P(Z \leq -1,75) =$$

$$= P(Z \leq 1,75) - [1 - P(Z \leq 1,75)] = P(Z \leq 1,75) - 1 + P(Z \leq 1,75) =$$

$$= 2 \cdot P(Z \leq 1,75) - 1 = 2 \cdot 0,9599 - 1 = 1,9198 - 1 = \underline{0,9198}.$$

****

4º) La puntuación del coeficiente intelectual CI, en un estudio sobre cierta población de niños, sigue una distribución normal de media 100 puntos y desviación típica 16 puntos.

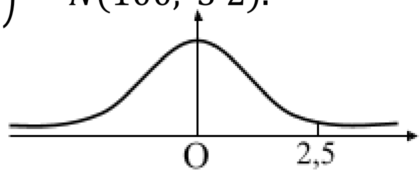
a) Se escoge una muestra aleatoria de 25 niños de esa población. Calcular la probabilidad de la puntuación media del CI en esa muestra sea superior a 108 puntos.

b) Con objeto de contrastar la puntuación media del CI en esa población con la de los niños de cierta Comunidad Autónoma (CA), se selecciona una muestra aleatoria de 400 niños de la CA y se obtiene una puntuación media de 101 puntos de CI. Suponiendo que sigue manteniendo la desviación típica, formula un test para contrastar que la puntuación media no supera los 100 puntos frente a que es superior en dicha CA. ¿A qué conclusión se llega con un 5 % de nivel de significación?

$Variable\ X \rightarrow N(100,\ 16).$

a)

$Para\ n = 25 \rightarrow \overline{X} = N\left(100,\ \frac{16}{\sqrt{25}}\right) = N\left(100,\ \frac{16}{5}\right) = N(100,\ 3'2).$



Tipificando: $Z = \frac{\overline{X}-108}{3,2}$.

$P(\overline{X} > 108) = P\left(\frac{\overline{X}-108}{3,2} > \frac{108-100}{3,2}\right) = P(Z > 2,5) = 1 - P(Z \leq 2,5) =$

$= 1 - 0,9938 = \underline{0,0062}.$

b)

$\underline{Hipótesis\ nula \rightarrow H_0:\ \mu \leq 100}$ $\qquad$ $\underline{Hipótesis\ alternativa \rightarrow H_1:\ \mu > 100}\ \}$

.

$\alpha = 0,05.\ \ z_\alpha = 1,645.$ $\qquad$ $(1 - 0,05 = 0,9500 \rightarrow z = 1,645).$

Zona de contraste *unilateral;* en el caso que nos ocupa es $\left(-\infty,\ \mu_0 + z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Para $\mu_0 = 100,\ \sigma = 16\ y\ n = 400$:

$\left(-\infty,\ 100 + 1,645 \cdot \frac{16}{\sqrt{400}}\right);\ (-\infty,\ 100 + 1,645 \cdot 0,8);\ (-\infty,\ 100 + 1'316) \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{(-\infty,\ 101'316)}.$

La media muestral pertenece a la zona de contraste, por lo cual no se debe admitir la hipótesis alternativa, por lo cual: con un riesgo de error inferior al 5 % se puede asegurar que:

$$\underline{No\ se\ admite\ que\ el\ CI\ sea\ superior\ en\ esa\ Comunidad}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Sea R la región del plano determinada por el siguiente sistema de inecuaciones: $2x + 3y \leq 12, \ -2 \leq 2x - y \leq 4, \ y \geq 0.$

$a)$ Representa la región R y calcula sus vértices. Justifica si el punto $P\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ pertenece o no a la región R.

$b)$ Calcula el punto o puntos de R donde la función $f(x, y) = -2x + 5y$ alcanza sus valores máximo y mínimo.

$a)$

Las restricciones son las siguientes:

$2x + 3y \leq 12 \quad -2 \leq 2x - y \leq 4 \ y \geq 0 \}$

$2x + 3y \leq 12 \ \ 2x - y \geq -2 \quad 2x - y \leq 4 \qquad y \geq 0 \}.$

x	0	6
y	4	0

①$\Rightarrow 2x + 3y \leq 12 \Rightarrow y = \frac{12-2x}{3} \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si.$

x	0	-1
y	2	0

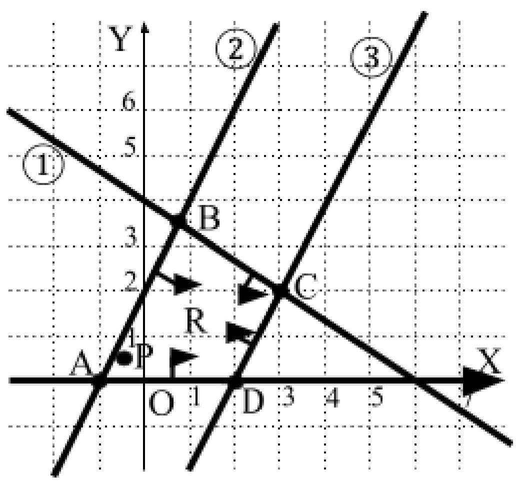
②$\Rightarrow 2x - y \geq -2; \ -2x + y \leq 2 \Rightarrow y = 2x + 2 \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si.$

x	2	4
y	0	4

③$\Rightarrow 2x - y \leq 4; \ -2x + y \geq -4 \Rightarrow y = 2x - 4 \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si.$

La región factible es la zona sombreada de la figura siguiente:

Los vértices de la sección factible son los siguientes:



$A \Rightarrow \quad y = 0 \ 2x - y = -2 \} \Rightarrow \underline{A(-1, 0)}.$

$B \Rightarrow 2x + 3y = 12 \ 2x - y = -2 \} \ \ 2x + 3y = 12 \ \ -2x + y = 2 \ \} \Rightarrow$

$4y = 14;\ \ 2y = 7;\ \ y = \frac{7}{2};\quad -2x + \frac{7}{2} = 2;$

$2x = \frac{7}{2} - 2 = \frac{3}{2};\ \ x = \frac{3}{4} \Rightarrow \underline{B\left(\frac{3}{4},\ \frac{7}{2}\right)}.$

$C \Rightarrow 2x + 3y = 12\ \ 2x - y = 4\ \}\quad 2x + 3y = 12\ \ -2x + y = -4\ \} \Rightarrow 4y = 8; y$

.

$D \Rightarrow \qquad y = 0\ 2x - y = 4\ \} \Rightarrow \underline{D(2,\ 0)}.$

Para que un punto pertenezca a la zona factible tiene que satisfacer todas las condiciones (inecuaciones) del ejercicio:

$P\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right) \Rightarrow 2x + 3y \leq 12\ \ 2x - y \geq -2\quad 2x - y \leq 4\qquad y \geq 0\ \} \Rightarrow\ -1 + \frac{3}{2} \leq 1$

.

$\underline{El\ punto\ P\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)\ pertenece\ a\ la\ zona\ factible}.$

$b)$

Los valores de la función $f(x,\ y) = -2x + 5y$ para los vértices de la zona R son los siguientes:

$A \Rightarrow f(-1,\ 0) = -2 \cdot (-1) + 5 \cdot 0 = 2 + 0 = 2.$

$B \Rightarrow f\left(\frac{3}{4},\ \frac{7}{2}\right) = -2 \cdot \frac{3}{4} + 5 \cdot \frac{7}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{35}{2} = 16.$

$C \Rightarrow f(3,\ 2) = -2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = -6 + 10 = 4.$

$D \Rightarrow f(2,\ 0) = -2 \cdot 2 + 5 \cdot 0 = -4 + 0 = -4.$

$\underline{El\ valor\ máximo\ se\ alcanza\ en\ B\ y\ es\ 16}.$

$\underline{El\ valor\ mínimo\ se\ alcanza\ en\ D\ y\ es\ -4}.$

****

2º) Consideremos la función $f(x) = 1 + \frac{a}{x} + bx,\ x \neq 0$.

a) Calcula el valor de a y de b sabiendo que la función $f(x)$ tiene un extremo relativo en el punto $P(3, \ -1)$.

b) Suponiendo que $a =- 3$ y $b =- \frac{1}{3}$, determina, clasificándolos, los extremos relativos de $f(x)$.

----

a)

Por contener al punto $P(3, \ -1)$ es $f(3) =- 1$:

$f(3) = 1 + \frac{a}{3} + 3b =- 1;\ 3 + a + 9b =- 3;\ a + 9b =- 6.$ (1)

Por tener un extremo relativo en $P(3, \ -1)$ es $f'(3) = 0$:

$f'(x) = 1 - \frac{a}{x^2} + b.$

$f'(3) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{a}{3^2} + b = 0;\ 9 - a + 9b = 0;\ a - 9b = 9.$ (5)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$\left.\begin{array}{l} a + 9b =- 6 \\ a - 9b = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow 2a = 3;\ \underline{a = \frac{3}{2}}.$

$\frac{3}{2} + 9b =- 6;\ 6 + 18b =- 12;\ 18b =- 18;\ \underline{b =- 1}.$

b)

Para $a =- 3$ y $b =- \frac{1}{3}$ la función es $f(x) = 1 + \frac{-3}{x} - \frac{1}{3}x = 1 - \frac{3}{x} - \frac{1}{3}x.$

$f'(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{1}{3} = 0;\ 9 - x^2 = 0 \Rightarrow x_1 =- 3,\ x_2 = 3.$

$f''(x) = \frac{-3 \cdot 2x}{x^4} =- \frac{6}{x^3}.$ $f''(-3) =- \frac{6}{-27} > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ x =- 3.$

$f(-3) = 1 - \frac{3}{-3} - \frac{1}{3} \cdot (-3) = 1 + 1 + 1 = 3 \Rightarrow \underline{Mín.\ Q(-3,\ 3)}.$

$f''(3) =- \frac{6}{27} > 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = 3.$

$$f(3) = 1 - \frac{3}{3} - \frac{1}{3} \cdot 3 = 1 - 1 - 1 =- 1 \Rightarrow \underline{Máx.\ \ P(3,\ \ -1)}.$$

****

3º) Un estudio sociológico sobre alcohólicos informa de que el 40 % de ellos tiene padre alcohólico, el 6 % tiene madre alcohólica y de los que tienen padre alcohólico el 10 % tiene también madre alcohólica.

a) Calcula la probabilidad de que un alcohólico, seleccionado al azar, tenga padre y madre alcohólicos.

b) Calcula el porcentaje de alcohólicos que tiene por lo menos uno de los padres alcohólicos.

Probabilidad de padre alcohólico: $P(P) = 0,40$.

Probabilidad de madre alcohólica: $P(M) = 0,04$.

Probabilidad de tener padre y madre alcohólicos: $P(P \cap M)$.

a)

$$P(P \cap M) = 10\% \; de \; P(P) = 0,1 \cdot 0,40 = \underline{0,04}.$$

b)

$$P(P \cup M) = P(P) + P(M) - P(P \cap M) = 0,4 + 0,06 - 0,04 = \underline{0,42}.$$

****

4º) Una compañía de seguros afirma que por lo menos el 90 % de sus demandas se resuelven en menos de 30 días. Para comprobar dicha afirmación, una asociación de consumidores eligió una muestra aleatoria de 120 demandas contra la compañía y encontró que 102 de ellas se habían resuelto en menos de treinta días.

a) Formula un test para contrastar la información de la compañía de seguros frente a que el porcentaje de demandas que se resuelven en menos de treinta días no supere el 90 %.

b) ¿A qué conclusión se llega con un 5 % de nivel de significación? ¿Se llega a la misma conclusión si el nivel de significación es del 1 %?

----

a)

$p_0 = 0,9;\ q_0 = 0,1.$

$Hipótesis\ nula \rightarrow H_0: p \geq 0,9$ $\qquad$ $Hipótesis\ alternativa \rightarrow H_1:\ p < 0,9\}.$

b)

Zona de contraste *unilateral;* en este caso es $\left(p_0 - z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot q_0}{n}},\ +\infty\right).$

$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_\alpha = 1,645.$

$(1 - 0,05 = 0,9500 \rightarrow z = 1,645).$

$\left(0'9 - 1,645 \cdot \sqrt{\frac{0,9 \cdot 0,1}{120}},\ +\infty\right); \left(0'9 - 1,645 \cdot 0'027,\ +\infty\right);$

$\left(0'9 - 0'044,\ +\infty\right) \Rightarrow \left(0'856,\ +\infty\right).$

La proporción de la muestra es $p = \frac{102}{120} = 0,85.$

Por no encontrarse la proporción muestral en la zona de contraste:

$\underline{Se\ rechaza\ la\ afirmación\ de\ la\ compañía\ de\ seguros.}$

Para una significación del 1 % es:

$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 1 - 0,99 = 0,01 \rightarrow z_\alpha = 2,33.$

$(1 - 0,01 = 0,9900 \rightarrow z = 2,33).$

$\left(0'9 - 2,33 \cdot 0'027,\ +\infty\right);\ \left(0'9 - 0'063,\ +\infty\right) \Rightarrow \left(0'837,\ +\infty\right).$

En este caso la proporción muestral se encuentra en la zona de contraste:
$\underline{Se\ admite\ lo\ que\ indica\ la\ compañía\ de\ seguros.}$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE GALICIA

SEPTIEMBRE – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno debe responder solamente a los ejercicios de una de las opciones.

OPCIÓN A

1º) Tres socios reúnen 6.000 euros para invertir en un producto financiero. Se sabe que el primero aporta el doble que el segundo y que el tercero aporta tanto como el primero y el segundo juntos.

a) Formula el sistema de ecuaciones lineales asociado al enunciado y exprésalo de forma matricial.

b) Resuelve el sistema anterior. ¿Cuánto dinero aporta cada uno de los socios para realizar la inversión?

----

a)

Siendo $x,\ y,\ z$ los euros que invierten los socios 1º, 2º y 3º, respectivamente.

Del enunciado del ejercicio se deduce el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$x + y + z = 6.000 \qquad x = 2y \qquad z = x + y\}$,

$\underline{x + y + z = 6.000 \qquad x - 2y = 0 \qquad x + y - z = 0\}}$.

$$\underline{(1\ 1\ 1\ 1\ \ -\ 2\ 0\ 1\ 1\ \ -\ 1\ )\cdot(x\ y\ z\ ) = (6.000\ 0\ 0\ )}.$$

b)

Expresando el sistema matricial anterior de la forma: $M\cdot X = N$.

Despejando X de la última expresión:

$M^{-1}\cdot M\cdot X = M^{-1}\cdot N;\ \ I\cdot X = M^{-1}\cdot N \Rightarrow X = M^{-1}\cdot N.$ (*)

Se calcula ahora la inversa de M:

$|M| = |1\ 1\ 1\ 1\ \ -\ 2\ 0\ 1\ 1\ \ -\ 1\,| = 2 + 1 + 2 + 1 = 6.$

$M^t = (1\ 1\ 1\ 1\ \ -\ 2\ 1\ 1\ 0\ \ -\ 1\ ).$

$Adj.\ de\ M^t = (|- \ 2\ 1\ 0 \ \ -\ 1\ | \ \ - |1\ 1\ 1 \ \ -\ 1\ | \ |1 \ \ -\ 2\ 1\ 0\ | \ \ - |1\ 1\ 0 \ \ -\ 1\ | \ |1\ 1\ 1$

.

$M^{-1} = \frac{Adj.\ de\ M^t}{|M|} = \frac{(2\ 2\ 2\ 1\ -2\ 1\ 3\ 0\ -3\ )}{6} = \frac{1}{6} \cdot (2\ 2\ 2\ 1 \ \ -\ 2\ 1\ 3\ 0 \ \ -\ 3\ ).$

Sustituyendo en la expresión (*):

$X\ =\ M^{-1} \cdot N \Rightarrow (x\ y\ z\ ) = \frac{1}{6} \cdot (2\ 2\ 2\ 1 \ \ -\ 2\ 1\ 3\ 0 \ \ -\ 3\ ) \cdot (6.000\ 0\ 0\ ) =$

$= (2\ 2\ 2\ 1 \ \ -\ 2\ 1\ 3\ 0 \ \ -\ 3\ ) \cdot (1.000\ 0\ 0\ ) = (2.000\ 1.000\ 3.000\ ).$

$\underline{El\ socio\ 1º\ invirtió\ 2.00\ euros,\ el\ 2º,\ 1.00\ euros\ y\ el\ 3º,\ 3.000\ euros.}$

****

2º) Antes de la salida a Bolsa de una empresa, un analista elabora el modelo teórico del valor de la acción de esa empresa a lo largo del tiempo mediante la siguiente ecuación: $V(x) = \{8x - x^2 \;\; si \;\; 0 \leq x \leq 6 \;\; 8 + \frac{20}{x-1} \quad si \quad x > 6$, donde $V(x)$ es el valor de la acción en euros y x es el tiempo transcurrido en meses.

a) Determina los intervalos en los que se espera que sube o baje el valor de la acción, el valor máximo esperado y el mes en el que se produciría.

b) De mantenerse la validez del modelo, ¿qué ocurriría con el valor de la acción a largo plazo? Utilizando los resultados anteriores representa la función $V(x)$.

----

a)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$V'(x) = \{8 - 2x \;\; si \;\; 0 \leq x \leq 6 \;\; \frac{-20}{(x-1)^2} \quad si \quad x > 6 .$$

$$Decrecimiento: V'(x) < 0 \Rightarrow x \in (4,\ 6) \cup (6,\ +\infty).$$

$$Crecimiento: V'(x) > 0 \Rightarrow x \in (0,\ 4).$$

$\underline{Las\ acciones\ suben\ los\ cuatro\ primeros\ meses\ y\ bajan\ el\ resto\ del\ tiempo.}$

Teniendo en cuenta que en el intervalo $[0,\ 6]$ la función es una parábola cóncava (∩) y que en el intervalo $(6,\ +\infty)$ es una rama hiperbólica decreciente, el máximo valor de la función se produce para $x = 4$ y su valor es el siguiente:

$$V(4) = 8 \cdot 4 - 4^2 = 32 - 16 = 16.$$

$\underline{El\ valor\ máximo\ de\ la\ acción\ es\ 16\ euros\ y\ se\ produce\ al\ final\ del\ 4º\ mes.}$

b)

Con el paso del tiempo el valor de la acción es el límite cuando $x \to \infty$ del valor de la expresión que determina el valor de la acción:

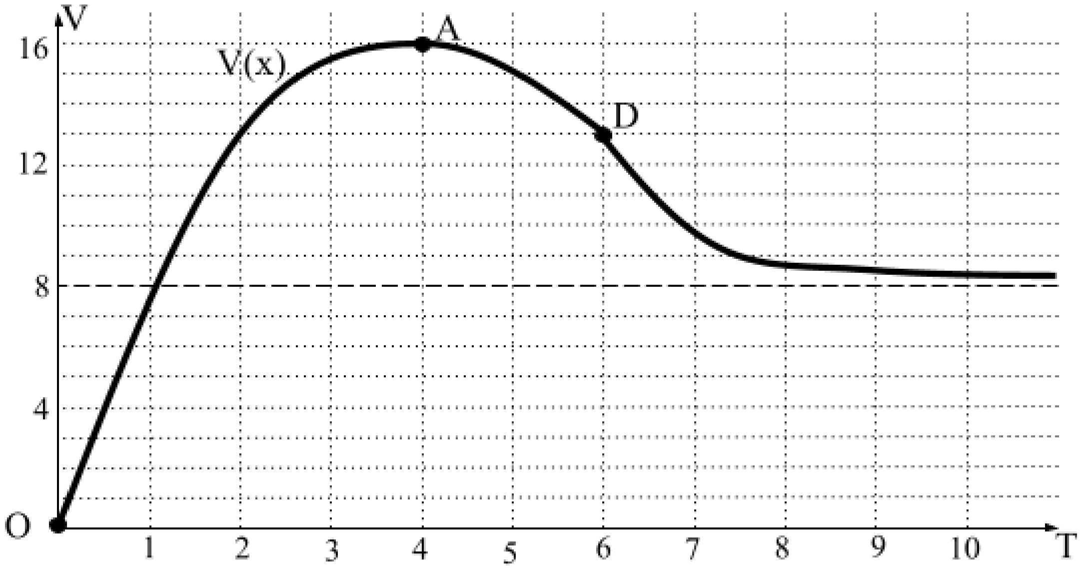
$$V(x) = \left(8 + \frac{20}{x-1}\right) = 8 + \frac{20}{\infty - 1} = 8 + \frac{20}{\infty} = 8 + 0 = 8.$$

$\underline{Con\ el\ paso\ del\ tiempo\ el\ valor\ de\ la\ acción\ se\ estabiliza\ en\ 8\ euros.}$

Teniendo en cuanta el dominio de la función, $D(V) \Rightarrow (0,\ +\infty)$, en particular para el valor $x = 6$, por ser:

$V(x) = \left(8x - x^2\right) = 8{\cdot}6 - 6^2 = 48 - 36 = 12 = V(6)\; V(x) = \left(8 + \frac{20}{x-1}\right) = 8 +$

$\Rightarrow V(x) = V(x) = V(6)$, la representación gráfica, aproximada, de la función es la que se indica a continuación.



****

3º) Se sabe que en una ciudad, el 40 % de los hogares tienen contratada alguna plataforma de televisión de pago. Si se seleccionan aleatoriamente 150 hogares de esa ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que el número de hogares que tienen contratada alguna plataforma de TV de pago esté comprendido entre 50 y 64 (ambos incluidos).

Por ser la variable discreta se trata de una distribución binomial; si es posible, se aproxima a una distribución normal.

Una distribución binomial se puede aproximar a una distribución normal cuando se cumple que: $n\cdot p \geq 5\ \ y\ \ n\cdot q \geq 5$.

$n = 150,\ p = 0,4,\ q = 0,6 \Rightarrow \{ n\cdot p = 150\cdot 0,4 = 60 > 5\ n\cdot q = 150\cdot 0,6 = 90 >$

.

Es posible la aproximación a una distribución normal.

Distribución normal: $X = (150,\ 0'4)$.

Distribución binomial: $X^{'}\left(n\cdot p,\ \sqrt{n\cdot p\cdot q}\right)$.

$X^{'}\left(150\cdot 0'4,\ \sqrt{150\cdot 0'4\cdot 0'6}\right) = X^{'}\left(60,\ \sqrt{36}\right) = X^{'}(60,\ 6)$.

Tipificando: $Z = \frac{X^{'}-60}{6}$.

Se debe aplicar la corrección por continuidad o corrección de Yates que consiste en añadir y sustraer 0,5 al valor de la variable. Esto se hace porque estamos convirtiendo una variable X discreta (toma un número natural de valores) en un variable continua $X^{'}$ continua (toma valores reales en un intervalo).

$$P\left(\frac{49,5-60}{6} \leq \frac{X^{'}-60}{6} \leq \frac{64,5-60}{6}\right) = P\left(\frac{-10,5}{6} \leq Z \leq \frac{4,5}{6}\right) =$$

$$= P(-\ 1,75 \leq Z \leq 0,75) = P(Z \leq 0,75) - P(Z \leq -\ 1,75) =$$

$$= P(Z \leq 0,75) - [1 - P(Z \leq 1,75)] = P(Z \leq 0,75) - 1 + P(Z \leq 1,75) =$$

$$= 0,7734 - 1 + 0,9599 = 1,7333 - 1 = \underline{0,7333}.$$

****

4º) El tiempo de conexión a Internet de los clientes de un cibercafé sigue una distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 20$ minutos. Una muestra aleatoria de 64 clientes ha dado como resultado el intervalo de confianza (84’4, 95’6) para el tiempo medio de conexión a Internet de los clientes del cibercafé.

a) Calcula el valor observado de la media muestral.

b) Calcula el nivel de confianza con el que se ha construido dicho intervalo.

----

a)

$$\overline{X} = \frac{95{,}6+84{,}4}{2} = \frac{180}{2} = \underline{90}.$$

$$\underline{La\ media\ muestral\ es\ de\ 90\ minutos\ de\ conexión\ a\ internet.}$$

b)

Datos: $n = 64,\ \ \sigma = 20\ y\ E = \frac{95{,}6-84{,}4}{2} = \frac{11{,}2}{2} = 5,6.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E\cdot\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{5{,}6\cdot\sqrt{64}}{20} = \frac{5{,}6\cdot 8}{20} = 2,24.$

De la tabla de distribución normal N(0, 1): $F(2,24) \Rightarrow 0,9875.$

$\frac{\alpha}{2} = 1 - 0,9875 = 0,0125 \Rightarrow \alpha = 2\cdot 0,0125 = 0,0250.$

$1 - \alpha = 0,0250 \Rightarrow a = 1 - 0,0250 = 0,9750 = 97,50\ \%.$

$$\underline{El\ nivel\ de\ confianza\ es\ del\ 97,50\ \%.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Sea la función lineal $f(x,\ y) = x - 3y$, sujeta al siguiente conjunto de restricciones: $x + 2y \leq 12,\ 2x + y \leq 18,\ x \geq y,\ x \geq 0,\ y \geq -2$.

a) Representa la región R del plano determinado por el conjunto de restricciones y calcula sus vértices.

b) Determina (si existen) los puntos de R donde la función alcanza sus valores máximo y mínimo.

Las restricciones del ejercicio se establecen en el sistema de inecuaciones:

$x + 2y \leq 12 \quad 2x + y \leq 18 \quad x \geq y \quad x \geq 0;\ y \geq -2 \}$ o mejor: $x + 2y \leq 12 \quad 2x + y \leq 18 \quad x - y \geq 0 \quad x \geq 0;\ y \geq -2 \}$.

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,\ y) = x - 3y$.

x	0	8
y	6	2

① $\Rightarrow x + 2y \leq 12 \Rightarrow y = \frac{12-x}{2} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	9	6
y	0	6

② $\Rightarrow 2x + y \leq 18 \Rightarrow y = 18 - 2x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	0	6
y	0	6

③ $\Rightarrow x - y \geq 0 \Rightarrow y = x \Rightarrow A(1,\ 0) \rightarrow Si.$

La zona factible R es la sombreada de la figura.

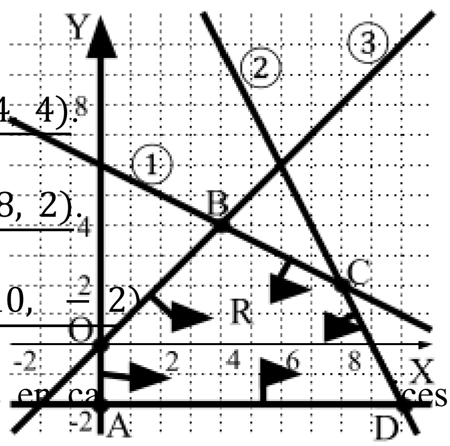
Los vértices de la zona factible, además del origen, son los siguientes:

$A \Rightarrow y = -2 \quad x = 0 \} \Rightarrow \underline{A(0,\ -2)}.$

$B \Rightarrow x + 2y = 12 \quad x - y = 0 \} \Rightarrow \underline{B(4,\ 4)}.$

$C \Rightarrow x + 2y = 12 \quad 2x + y = 18 \} \Rightarrow \underline{C(8,\ 2)}.$

$D \Rightarrow 2x + y = 18 \quad y = -2 \} \Rightarrow \underline{D(10,\ -2)}.$



Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ -2) = 0 - 3 \cdot (-2) = 0 + 6 = 6.$

$B \Rightarrow f(4,\ 4) = 4 - 3 \cdot 4 = 4 - 12 = -8.$

$C \Rightarrow f(8,\ 2) = 8 - 3 \cdot 2 = 8 - 6 = 2.$

$D \Rightarrow f(10,\ -2) = 10 - 3 \cdot (-2) = 10 + 6 = 16.$

$b)$

$\underline{La\ función\ alcanza\ el\ valor\ máximo\ en\ el\ punto\ D\ y\ su\ valor\ es\ 16}.$

$\underline{La\ función\ alcanza\ el\ valor\ mínimo\ en\ el\ punto\ B\ y\ su\ valor\ es\ -8}.$

****

2º) Una firma de confección determina que, con el fin de vender x prendas, el precio por cada una de ellas debe ser $p(x) = 150 - \frac{1}{2}x$ euros, y que el coste total de producir x prendas está dado por $C(x) = 4.000 + \frac{1}{4}x^2$ euros.

a) Calcula los ingresos totales y el beneficio total.

b) ¿Cuántas prendas debe producir y vender con el fin de maximizar los beneficios totales? ¿A cuánto asciende el beneficio total máximo?

c) ¿Qué precio debe cobrar por prenda con el fin de producir este beneficio total máximo?

----

a)

El ingreso $I(x)$ es el producto del valor de una prenda por el número de ellas que se venden:

$$I(x) = x \cdot p(x) = x \cdot \left(150 - \frac{1}{2}x\right) = 150x - \frac{1}{2}x^2.$$

$$\underline{I(x) = 150x - \frac{1}{2}x^2.}$$

El beneficio $B(x)$ producido es la diferencia entre los ingresos y los gastos:

$$B(x) = I(x) - C(x) = 150x - \frac{1}{2}x^2 - \left(4.000 + \frac{1}{4}x^2\right) =$$

$$= 150x - \frac{1}{2}x^2 - 4.000 - \frac{1}{4}x^2 = - \frac{3}{4}x^2 + 150x - 4.000.$$

$$\underline{B(x) = - \frac{3}{4}x^2 + 150x - 4.000.}$$

b)

Por ser la expresión del beneficio una parábola cóncava (∩), su punto máximo se obtiene para el valor de x que anula su primera derivada:

$$B'(x) = - \frac{3}{2}x + 150 = 0 \Rightarrow -3x + 300 = 0, \quad -x + 100 = 0 \Rightarrow x = 100.$$

$$B(100) = - \frac{3}{4}100^2 + 150 \cdot 100 - 4.000 = - 7.500 + 15.000 - 4.000 =$$

$$= 15.000 - 11.500 = 3.500.$$

$\underline{Los\ beneficios\ son\ máximos\ cuando\ se\ producen\ 100\ prendas.}$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ asciende\ a\ 3.500\ euros.}$

$c)$

El precio de cada prenda viene dado por la función $p(x) = 150 - \frac{1}{2}x$; como el máximo beneficio se produce cuando se venden 100 prendas, el precio de máximo beneficio se obtiene para x = 100:

$$p(100) = 150 - \frac{1}{2} \cdot 100 = 150 - 50 = 100.$$

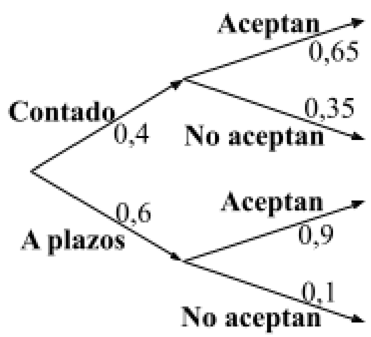
$\underline{Para\ que\ el\ beneficio\ sea\ máximo\ debe\ venderse\ cada\ prenda\ a\ 100\ euros.}$

****

3º) El departamento comercial de una empresa estudia la posible acogida de un producto entre sus clientes. Para ello, efectúa un primer lanzamiento del producto ofertándoselo a 250 clientes escogidos al azar de los que 150 siempre efectúan sus pagos a plazos y el resto lo hacen al contado. El departamento estima que el 90 % de los clientes que pagan a plazos aceptará el producto y de los de pago al contado lo aceptará el 65 %.

a) Calcula la probabilidad de que un cliente de esa empresa no acepte el producto.

b) Si un cliente acepta el producto, calcula la probabilidad de que pague al contado.



a)

$$P = 0,14 + 0,06 = \underline{0,20}.$$

b)

$$P = \frac{0,26}{0,26+0,54} = \frac{0,26}{0,80} = \underline{0,325}.$$

****

4º) Cierta enfermedad parece afectar más a los hombres. Un estudio realizado en un hospital establece un intervalo del 95'44 % de confianza, (0'58, 0'62), para la proporción de hombres con esa enfermedad.

a) ¿Cuál es la proporción muestral observada de hombres con esa enfermedad, según dicho estudio?

b) ¿Cuál es el tamaño de muestra que se ha utilizado en ese estudio?

----

a)

$$p = \frac{0{,}58+0{,}62}{2} = \frac{1{,}20}{2} = 0,60. \qquad q = 1 - p = 1 - 0,6 = 0,4.$$

$$\underline{La\ proporción\ de\ hombres\ enfermos\ es\ 0,60.}$$

b)

El error es: $E = \frac{0{,}62-0{,}58}{2} = \frac{0{,}04}{2} = 0,02.$

Para un nivel de confianza del 95,44 % es:

$$1 - \alpha = 0,9544 \rightarrow \alpha = 1 - 0,9544 = 0,0456 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}0228} = 2.$$

$$(1 - 0,0228 = 0,9772 \rightarrow z = 2).$$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sqrt{p \cdot q}}{E} \Rightarrow n = p \cdot q \cdot \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{E} \right)^2 =$

$$= 0,6 \cdot 0,4 \cdot \left(\frac{2}{0{,}02} \right)^2 = 0,24 \cdot 100^2 = 24 \cdot 100 = 2.400.$$

$$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 2.400\ personas.}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JULIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contesta sólo una de las dos opciones propuestas (OCIÓN A/OPCIÓN B).

OPCIÓN A

Parte A1. Responde a cuatro de las cinco preguntas que se plantean a continuación.

1º) Consideramos el sistema de ecuaciones $\{(a+1)x+(a+2)y=1\ (a-1)x+(a+1)y=2$, donde a es un parámetro real. Determinar la solución del sistema en los casos en que sea compatible.

Las matrices de coeficientes y ampliada del sistema son las siguientes:

$M=(a+1\ a+2\ a-1\ a+1)$ y $M'=(a+1\ a+2\ 1\ a-1\ a+1\ 2)$.

El rango de la matriz de coeficientes es el siguiente:

$|M|=|a+1\ a+2\ a-1\ a+1|=a^2+2a+1-(a+2)(a-1)=$

$=a^2+2a+1-a^2+a-2a+2=a+3=0\Rightarrow a=-3.$

$\underline{Para\ a\neq-3\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2=nº\ incóg.\Rightarrow S.C.D.}$

Para $a=-3\Rightarrow M'=(-2\ -1\ 1\ -4\ -2\ 2)\Rightarrow\{F_2=-2F_1\}\Rightarrow Rang\ M'=1.$

$\underline{Para\ a=-3\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=1<nº\ incóg.\Rightarrow S.C.I.}$

Resolviendo por la regla de Cramer para $a\neq-3$:

$$x = \frac{|1\ a+2\ 2\ a+1\ |}{a+3} = \frac{a+1-2a-4}{a+3} = \frac{-a-3}{a+3} =-\ 1.$$
$$y = \frac{|a+1\ 1\ a-1\ 2\ |}{a+3} = \frac{2a+2-a+1}{a+3} = \frac{a+3}{a+3} = 1.$$

$$\underline{Solución\ para\ a \neq\ -\ 3 \Rightarrow x\ =-\ 1,\ y\ =\ 1.}$$

Para $a =-\ 3$ el sistema resulta $\{-\ 2x\ -\ y\ =\ 1\ \ -\ 4x\ -\ 2y\ =\ 2$, cuya solución es equivalente a la de la ecuación $2x\ +\ y\ =-\ 1$.

$$\underline{Solución\ para\ a\ =-\ 3 \Rightarrow x\ =\ \lambda,\ y\ =-\ 1\ -\ 2\lambda,\ \forall \lambda \in R.}$$

****

2º) Determinar, si existen, las asíntotas verticales y horizontales de la siguiente función:

$f(x) = 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-1}$.

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-1} = \frac{x^2(x-1)+(x-1)+x^2}{x^2(x-1)} = \frac{x^3-x^2+x-1+x^2}{x^2(x-1)} = \frac{x^3+x-1}{x^2(x-1)}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma y = k y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = f(x) = \frac{x^3+x-1}{x^2(x-1)} = 1 \Rightarrow \underline{Asíntota\ horizontal: y = 1}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$x^2(x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1.$$

$$\underline{Asíntotas\ verticales: x = 0,\ x = 1}.$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

****

3º) Sean x e y dos números reales positivos tal que $x \cdot y = 10$. ¿Cuál es el mínimo valor de $2x + 5y$?

$x > 0,\ y > 0.$

Sea el valor pedido: $f(x,\ y) = 2x + 5y$.

$x \cdot y = 10 \Rightarrow y = \frac{10}{x}$. Sustituyendo este valor en la expresión de f:

$f(x) = 2x + 5 \cdot \frac{10}{x} = \frac{2x^2+50}{x}.$

Para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada.

$f'(x) = \frac{4x \cdot x - (2x^2+50) \cdot 1}{x^2} = \frac{4x^2 - 2x^2 - 50}{x^2} = \frac{2x^2-50}{x^2}.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^2-50}{x^2} = 0;\ \ 2x^2 - 50 = 0;\ \ x^2 - 25 = 0 \Rightarrow x = 5.$

La condición anterior es necesaria pero no suficiente; para que exista un mínimo es necesario que el valor de la segunda derivada tiene que ser positivo para el valor que anula la primera derivada.

$f''(x) = \frac{4x \cdot x^2 - (2x^2-50) \cdot 2x}{x^4} = \frac{4x^2 - 2(2x^2-50)}{x^3} = \frac{4x^2 - 4x^2 + 50}{x^3} = \frac{50}{x^3}.$

$f''(5) = \frac{50}{5^3} > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ x = 5.$

$y = \frac{10}{x} \Rightarrow y = \frac{10}{5} = 2.$

$\underline{El\ valor\ de\ la\ expresión\ 2x + 5y\ para\ x = 5\ e\ y = 2.}$

****

4º) Sean las matrices $A = (-\ 2\ 1\ \ -\ 3\ 2\ )$ e $I = (1\ 0\ 0\ 1\ )$. Calcular, el determinante de la matriz $A^{-1} - I$. (Nota: A^{-1} indica la matriz inversa de la matriz A).

La inversa de A se obtiene por el método de Gauss-Jordan.

$$(A/I) = (1\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow F_1 - F_2\right\} \Rightarrow (1\ \ -\ 1\ 0\ 1\ ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow F_2 +\ 3F_1\right\} \Rightarrow (1\ \ -\ 1\ 3\ \ -\ 2\ ) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow -\ F_2\right\} \Rightarrow (1\ \ -\ 1\ \ -\ 3\ 2\ ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow F_1 + F_2\right\} \Rightarrow (-\ 2\ 1\ \ -\ 3\ 2\ ) \Rightarrow A^{-1} = (-\ 2\ 1\ \ -\ 3\ 2\ ).$$

Como curiosidad: nótese que la matriz A es igual que su inversa.

$$A^{-1} - I = (-\ 2\ 1\ \ -\ 3\ 2\ ) - (1\ 0\ 0\ 1\ ) = (-\ 3\ 1\ \ -\ 3\ 1\ ).$$

$$\left|A^{-1} - I\right| = |-\ 3\ 1\ \ -\ 3\ 1\ | = 0\ (filas\ iguales).$$

$$\underline{\left|A^{-1} - I\right| = 0}.$$

****

5º) De un total de 80 obras de un conocido pintor, tres cuartas partes son oleos y el resto acuarelas. Si elegimos dos de sus cuadros al azar, calcular:

a) La probabilidad de que al menos uno de ellos sea una acuarela.

b) La probabilidad de que haya una única acuarela.

----

a)

Número de óleos: $\frac{3}{4} \cdot 80 = 60$. Número de acuarelas: $\frac{1}{4} \cdot 80 = 20$.

El suceso contrario a que "*al menos uno de los elegidos sea una acuarela*" es "*que los dos cuadros elegidos sean oleos*".

$$P = 1 - \frac{C_{60,\,2}}{C_{80,\,2}} = 1 - \frac{\frac{60!}{(60-2)! \cdot 2!}}{\frac{80!}{(80-2)! \cdot 2!}} = 1 - \frac{60! \cdot 78!}{58! \cdot 80!} = 1 - \frac{60 \cdot 59 \cdot 58! \cdot 78!}{58! \cdot 80 \cdot 79 \cdot 78!} = 1 - \frac{60 \cdot 59}{80 \cdot 79} =$$

$$= 1 - \frac{3 \cdot 59}{4 \cdot 79} = 1 - \frac{157}{316} = \frac{316 - 157}{316} = \frac{159}{316}.$$

$$\underline{P = \frac{159}{316} = 0,5032.}$$

b)

$$P = P(O) \cdot P(A) + P(A) \cdot P(O) = \frac{60}{80} \cdot \frac{20}{79} + \frac{20}{80} \cdot \frac{60}{79} = \frac{2 \cdot 60 \cdot 20}{80 \cdot 79} =$$
$$\frac{60}{2 \cdot 79} = \frac{30}{79}.$$

$$\underline{P = \frac{30}{79} = 0,3797.}$$

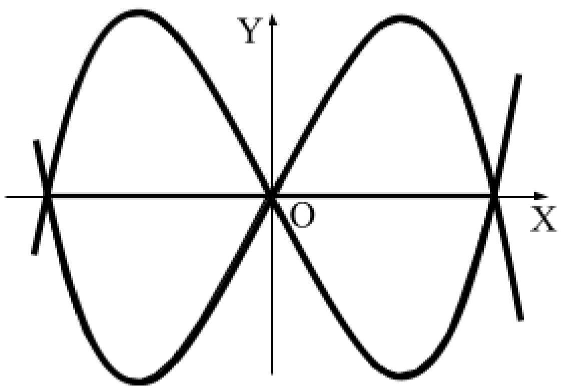
****

Parte A2.- Resuelve los dos problemas que se proponen a continuación.

6º) Sea la función $f(x) = x\left(x^2 - 3a^2\right) + b$, donde a es un parámetro real positivo.

a) Determinar el valor de los parámetros a y b para que la recta tangente a $f(x)$ en el punto $P(5, -75)$ sea paralela a la recta $y = 27x + 2.015$.

b) Tomando $a = \sqrt{3}$ y $b = 0$, determinar el área encerrada por las curvas $y = f(x)$ e $y = -f(x)$. El área solicitada aparece sombreada en la figura siguiente.



c) Tomando $a = 2$ y $b = 1$, determinar y clasificar los extremos relativos de la función $f(x)$.

----

a)

Por contener la función al punto $P(5, -75)$ es $f(5) = -75$.

$f(5) = 5\cdot\left(5^2 - 3a^2\right) + b = 5\cdot\left(25 - 3a^2\right) + b = 125 - 15a^2 + b = -75;$

$15a^2 - b = 200.$ (1)

La derivada de una función en un punto es igual que el valor de la pendiente de la tangente a la función en ese punto.

La pendiente de la recta $y = 27x + 2.015$ es $m = 27$.

$f'(x) = 1\cdot\left(x^2 - 3a^2\right) + x\cdot 2x = x^2 - 3a^2 + 2x^2 = 3x^2 - 3a^2.$

$f'(5) = 27 \Rightarrow 3\cdot 5^2 - 3a^2 = 3\cdot 25 - 3a^2 = 75 - 3a^2 = 27;\ \ 3a^2 = 48;$

$a^2 = 16 \Rightarrow a_1 = -4,\ a_2 = 4.$

Sustituyendo estos valores de a en la expresión (1):

$$15\cdot a^2 - b = 200 \Rightarrow 15\cdot 16 - b = 200;\ \ b = 240 - 200 = 40.$$

$$\underline{Soluciones: a = -4,\ b = 40\ y\ también\ a = 4,\ b = 40}$$

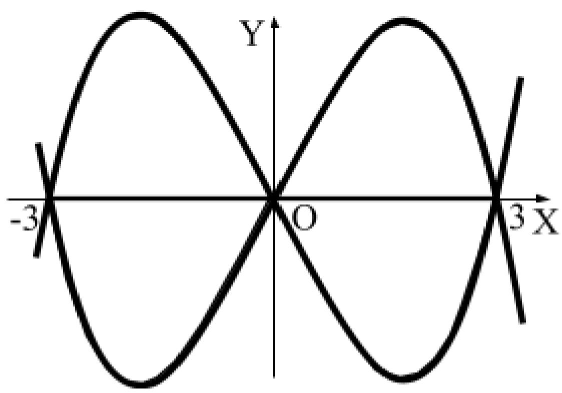
$b)$

Para los valores de $a = \sqrt{3}$ y $b = 0$ las funciones $y = f(x)$ e $y = -f(x)$ son las siguientes: $y = f(x) = x\left(x^2 - 9\right)$ e $y = -f(x) = -x\left(x^2 - 9\right)$.

Las abscisas de los puntos de corte de las funciones son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$x\left(x^2 - 9\right) = -x\left(x^2 - 9\right);\ \ x\left(x^2 - 9\right) + x\left(x^2 - 9\right) = 0;\ \ 2x\left(x^2 - 9\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -3,\ x_2 = 0,\ x_3 = 3.$$



Las funciones son simétricas con respecto al origen por ser:

$$f(-x) = -x\cdot\left[(-x)^2 - 9\right] = -x\cdot\left(x^2 - 9\right) = -f(x).$$

Teniendo en cuenta la simetría de las funciones, el área solicitada es la siguiente:

$$S = 4\cdot\int_0^3 -f(x)\cdot dx = -4\cdot\int_0^3 x\left(x^2 - 9\right)\cdot dx = 4\cdot\int_3^0 \left(x^3 - 9x\right)\cdot dx =$$

$$= 4\cdot\left[\frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2}\right]_3^0 = 4\cdot\left[0 - \left(\frac{3^4}{4} - \frac{9\cdot 3^2}{2}\right)\right] = 4\cdot\left(-\frac{81}{4} + \frac{81}{2}\right) = 4\cdot\frac{162-81}{4} = 81.$$

$$\underline{S = 81\,u^2}.$$

$c)$

Para $a = 2$ y $b = 1$ la función es $f(x) = x\left(x^2 - 12\right) + 1 = x^3 - 12x + 1$.

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo en un punto es que se anule su primera derivada:

$f'(x) = 3x^2 - 12$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12 = 0;\ x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 2$.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para el valor que anula la primera derivada, se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo relativo.

$f''(x) = 6x$.

$f''(-2) = 6 \cdot (-2) = -12 < 0 \Rightarrow$ Máximo relativo para x = -2.

$f(-2) = (-2)^3 - 12 \cdot (-2) + 1 = 17 \Rightarrow Máximo\ relativo:\ \underline{A(-2,\ 17)}$.

$f''(2) = 6 \cdot 2 = 12 > 0 \Rightarrow$ Mínimo relativo para x = 2.

$f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 + 1 = -15 \Rightarrow Mínimo\ relativo:\ \underline{B(2,\ -15)}$.

****

2º) En la granja de Los Tomatitos crían conejos y gallinas. La granja tiene una capacidad máxima de 600 animales, pero para que sea rentable el número mínimo de animales debe ser mayor o igual que 400. El número de conejos no puede superar los 400 y la diferencia entre gallinas y conejos no debe exceder las 400 unidades.

a) Plantea el conjunto de restricciones y determina la región factible.

b) Los conejos se venden a 3 euros la unidad y las gallinas a 4 euros, ¿cuál es la distribución de conejos y gallinas que maximiza los ingresos?

----

a)

Las restricciones del ejercicio se establecen en el sistema de inecuaciones siguientes: $x + y \leq 600 \; x + y \leq 400 \quad x \leq 400 \; y - x \leq 400 \}$.

x	0	600
y	600	0

①$\Rightarrow x + y \leq 600 \Rightarrow y \leq 600 - x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	0	400
y	400	0

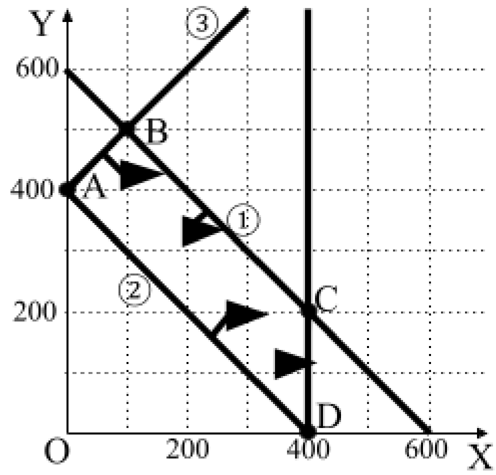
②$\Rightarrow x + y \geq 400 \Rightarrow y \geq 400 - x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow No.$

x	0	200
y	400	600

③$\Rightarrow y - x \leq 400 \Rightarrow y \leq x + 400 \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

La zona factible R es la sombreada de la figura.

Los vértices de la zona factible, además del origen, son los siguientes:



$A \Rightarrow x + y = 400 \; y - x = 400 \} \Rightarrow A(0,\ 400).$
$B \Rightarrow x + y = 600 \; y - x = 400 \} \Rightarrow B(100,\ 500).$

$C \Rightarrow \quad x = 400 \; x + y = 600 \} \Rightarrow C(400,\ 200).$
$D \Rightarrow \quad x = 400 \; x + y = 400 \} \Rightarrow D(400,\ 0).$

$b)$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,\ y) = 3x + 4y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 400) = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 400 = 0 + 1.600 = 1.600.$

$B \Rightarrow f(100,\ 500) = 3 \cdot 100 + 4 \cdot 500 = 300 + 2.000 = 2.300.$

$C \Rightarrow f(400,\ 200) = 3 \cdot 400 + 4 \cdot 200 = 1.200 + 800 = 2.000.$

$D \Rightarrow f(400,\ 0) = 3 \cdot 400 + 4 \cdot 0 = 1.200 + 0 = 1.200.$

$\underline{La\ granja\ alcanza\ su\ máximo\ beneficio\ con\ 100\ conejos\ y\ 500\ gallinas}$.

$\underline{El\ benefico\ máximo\ es\ de\ 2.300\ euros}$.

****

OPCIÓN B

Parte B1. Responde a cuatro de las cinco preguntas que se plantean a continuación.

1º) Consideramos el sistema de ecuaciones $\begin{cases} (a+1)x+(a+2)y=1 \\ (a-1)x+(a+1)y=2 \end{cases}$, donde a es un parámetro real. Determinar la solución del sistema en los casos en que sea compatible.

2º) Determinar, si existen, las asíntotas verticales y horizontales de la siguiente función:
$f(x) = 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-1}$.

3º) Sean x e y dos números reales positivos tal que $x \cdot y = 10$. ¿Cuál es el mínimo valor de $2x + 5y$?

4º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular, el determinante de la matriz $A^{-1} - I$. (Nota: A^{-1} indica la matriz inversa de la matriz A).

5º) De un total de 80 obras de un conocido pintor, tres cuartas partes son oleos y el resto acuarelas. Si elegimos dos de sus cuadros al azar, calcular:

a) La probabilidad de que al menos uno de ellos sea una acuarela.

b) La probabilidad de que haya una única acuarela.

(Resueltos en la Opción A)

Parte B2.- Resuelve los dos problemas que se proponen a continuación.

6º) La empresa de dulces navideños La Soteña comercializa en sus tres tiendas tres únicos productos: polvorones, mazapanes y mazapanes con chocolate. La tabla que aparece a continuación muestra la cantidad (en kilogramos) de cada uno de los productos vendidos durante un día de la pasada campaña de Navidad y los ingresos de ese día en cada una de las tiendas.

	Tienda 1	Tienda 2	Tienda 3
Polvorones	10	20	20
Mazapanes	30	20	30
Mazapanes/chocolate	20	10	30
Ingresos	240 euros	170 euros	310 euros

a) Determinar un sistema de ecuaciones que permita conocer el precio del kilo de cada uno de los productos que comercializa la empresa.

b) Determinar el precio de cada uno de los productos.

c) Si el coste de elaboración y venta de un kilo de polvorones es 1 euros, el de un kilo de mazapanes es de 2 euros y el de un kilo de mazapanes con chocolate es de 3 euros, determinar los beneficios de la empresa del día reflejado en la tabla.
(Nota: Para calcular los beneficios debes aplicar que Beneficios = Ingresos – Costes).

----

a)

Sean x, y, z el precio en euros del kilogramo de polvorones, mazapanes y mazapanes con chocolate, respectivamente.

$$10x + 30y + 20z = 240\ 20x + 20y + 10z = 170\ 20x + 30y + 30z = 310 \} \Rightarrow \underline{x}$$

.

b)

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|24\ 3\ 2\ 17\ 2\ 1\ 31\ 3\ 3\ |}{|1\ 3\ 2\ 2\ 2\ 1\ 2\ 3\ 3\ |} = \frac{144+102+93-124-72-153}{6+12+6-8-3-18} = \frac{339-349}{24-29} = \frac{-10}{-5} = 2.$$

$$y = \frac{|1\ 24\ 2\ 2\ 17\ 1\ 2\ 31\ 3\ |}{-5} = \frac{51+124+48-68-31-144}{-5} = \frac{223-243}{-5} = \frac{-20}{-5} = 4.$$

$$z = \frac{|1\ 3\ 24\ 2\ 2\ 17\ 2\ 3\ 31\ |}{-5} = \frac{62+144+102-96-51-186}{-5} = \frac{308-333}{-5} = \frac{-25}{-5} = 5.$$

$$\underline{El\ precio\ del\ kilo\ de\ polvorones,\ mazapán,\ y\ mazapán\ con\ chocolate}$$

$$\underline{es\ de\ 2,\ 4\ y\ 5\ euros,\ respectivamente}.$$

c) Si el coste de elaboración y venta de un kilo de polvorones es 1 euros, el de un kilo de mazapanes es de 2 euros y el de un kilo de mazapanes con chocolate es de 3 euros, determinar los beneficios de la empresa del día reflejado en la tabla.

$$Ingresos = 240 + 170 + 310 = 720\, euros.$$

$Costes$: $(10 + 20 + 30)\cdot 1 + (30 + 20 + 30)\cdot 2 + (20 + 10 + 30)\cdot 3 =$

$= 60\cdot 1 + 80\cdot 2 + 60\cdot 3 = 60 + 160 + 180 = 400\, euros.$

$$Beneficios = Ingresos - Costes = 720 - 400 = 320.$$

$$\underline{Los\ beneficios\ del\ día\ indicado\ son\ de\ 320\ euros}.$$

****

7º) Se sabe que el número de pacientes diarios atendidos en el servicio de urgencias de un cierto hospital sigue una distribución normal de media 380 y desviación típica 35. Con una muestra de datos elegida al azar y un nivel de confianza al 90 % se ha obtenido para la media el intervalo de confianza $(371'75,\ 388'25)$.

a) Calcula el tamaño de la muestra utilizada.

b) Tomando una muestra de 25 días, calcula la probabilidad de que el número medio de pacientes atendidos esté entre 375 y 387.

----

a)

$$\alpha = 1 - 0,90 = 0,10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,05} = 1,645.$$

$$(1 - 0,05 = 0,9500 \rightarrow z = 1,645).$$

Datos: $\overline{x} = 380;\ \ \sigma = 35;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,645.$

$$E = \frac{388,25-371,75}{2} = \frac{16,5}{2} = 8,25.$$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1,645\cdot\frac{35}{8,25}\right)^2 =$

$$= (1,645\cdot 4,2424)^2 = 6,9788^2 = 48,70.$$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 49\ pacientes.}$

b)

$Datos$: $\overline{x} = 380,\ \ \sigma = 35,\ \ n = 25.$

$$Para\ n = 25 \rightarrow \overline{X} = N\left(380,\ \frac{35}{\sqrt{25}}\right) = N\left(380,\ \frac{35}{5}\right) = N(380,\ 7).$$

Tipificando la variable: $Z = \frac{\overline{X}-380}{7}$.

$$P(375 < \overline{X} < 387) = P\left(\frac{375-380}{7} < Z < \frac{387-380}{7}\right) = P\left(\frac{-5}{7} < Z < \frac{7}{7}\right) =$$

$$= P(-0,714 < Z < 1) = P(Z < 1) - P(Z \leq -0,714) =$$

$$= P(Z < 1) - [1 - P(Z < 1,714)] = P(Z < 1) - 1 + P(Z < 1,714) =$$

$$= 0,8413 - 1 + 0,9568 = 1,7981 - 1 = 0,7981.$$

$\underline{P(375 \leq \overline{X} \leq 387) = 0,7981.}$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JUNIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

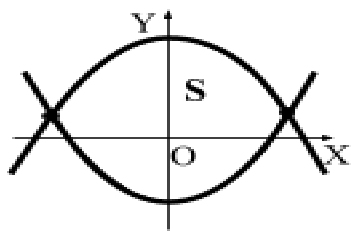
MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contesta sólo una de las dos opciones propuestas (OCIÓN A/OPCIÓN B).

OPCIÓN A

Parte A1. Responde a cuatro de las cinco preguntas que se plantean a continuación.

1º) Calcular el área limitada por las parábolas $y = x^2 - 18$ e $y = -x^2 + 32$. En la imagen siguiente aparece sombreada el área solicitada.



Las abscisas de los puntos de corte de las dos parábolas son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$-x^2 + 32 = x^2 - 18;\ \ 2x^2 - 50 = 0;\ \ x^2 - 25 = 0 \Rightarrow x_1 = -5,\ x_2 = 5.$$

Con los datos obtenidos, considerando la simetría de la función y de la observación de la figura se deduce el área a calcular, que es la siguiente:

$$S = 2\cdot\int_0^5 \left[\left(-x^2 + 32\right) - \left(x^2 - 18\right)\right]\cdot dx = 2\cdot\int_0^5 \left(-2x^2 + 50\right)\cdot dx =$$

$$= 2\cdot\left[-2\cdot\frac{x^3}{3} + 50x\right]_0^5 = 2\cdot\left[\left(-2\cdot\frac{5^3}{3} + 50\cdot 5\right) - 0\right] = -4\cdot\frac{125}{3} + 2\cdot 250 =$$

$= -\frac{500}{3} + 500 = 500 \cdot \left(-\frac{1}{3} + 1\right) = 500 \cdot \frac{2}{3} = \underline{\frac{1.000}{3} u^2 \cong 333,33\, u^2}.$

****

2º) Consideramos la función $f(x) = \{ax^2 + 2bx - 11\ si\ x < 1\ bx^2 - ax - 1\ si\ 1 \leq x \leq 2\ x^3 + 1\ \ si\ \ 2 \leq x$. Calcular los valores de $a\ y\ b$ para que la función sea continua.

La función $f(x)$ es continua en R, $\forall a,\ b \in R$; se trata de determinar los valores de a y b para que lo sea en los puntos dudosos de $x = 1$ y $x = 2$.

Para que la función sea continua en los puntos críticos es necesario que sus límites laterales sean iguales e iguales a los correspondientes valores de la función en esos puntos.

$f(x) = \left(ax^2 + 2bx - 11\right) = a + 2b - 11 \qquad f(x) = \left(bx^2 - ax - 1\right) = b - a$

$\Rightarrow a + 2b - 11 = b - a - 1;\ \ 2a + b = 10.$ (1)

$f(x) = \left(bx^2 - ax - 1\right) = 4b - 2a - 1 = f(2)\ f(x) = \left(x^3 + 1\right) = 8 + 1 = 9$

$\Rightarrow 4b - 2a - 1 = 9;\ \ 4b - 2a = 10;\ \ -a + 2b = 5.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$2a + b = 10\ \ -a + 2b = 5\,\} \qquad 2a + b = 10\ \ -2a + 4b = 10\,\} \Rightarrow 5b = 20;\ \ b =$
.

$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ R\ para\ a = 3\ y\ b = 4}.$

****

3º) Consideramos el conjunto de restricciones $\begin{cases} y+2x\leq 6 \\ 3\leq y-x \\ x\geq 0 \end{cases}$. Dibujar la región factible y encontrar en ella el máximo de la función $f(x,\ y)=\ 2(3x\ +\ y)$.

$$\begin{cases} y+2x\leq 6 \\ 3\leq y-x \\ x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y\leq 6 \\ x-y\leq -3 \\ x\geq 0 \end{cases}.$$

La región factible se indica en la figura:

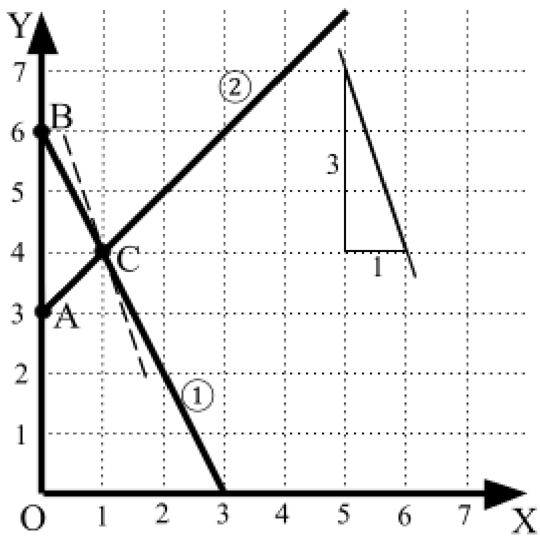
x	0	3
y	6	0

$① \Rightarrow 2x+y\leq 6 \Rightarrow y\leq 6-2x \Rightarrow O\rightarrow Si.$

x	0	3
y	3	6

$② \Rightarrow x-y\leq -3 \Rightarrow y\geq x+3 \Rightarrow O\rightarrow No.$

Los vértices de la sección factible son los siguientes:



$A\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-y=-3 \end{cases} \Rightarrow A(0,\ 3).$

$B\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2x+y=6 \end{cases} \Rightarrow B(0,\ 6).$

$C\Rightarrow \begin{cases} x-y=-3 \\ 2x+y=6 \end{cases} \Rightarrow C(1,\ 4).$

La función de objetivos a considerar es la siguiente: $f(x,\ y)=\ 2(3x\ +\ y)=\ 6x\ +\ 2y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A\Rightarrow f(0,\ 3)=\ 6\cdot 0\ +\ 2\cdot 3\ =\ 0\ +\ 6\ =\ 6.$

$B\Rightarrow f(0,\ 6)=\ 6\cdot 0\ +\ 2\cdot 6\ =\ 0\ +\ 12\ =\ 12.$

$C \Rightarrow f(1,\ 4) = 6 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 6 + 8 = 14.$

El máximo se produce en el punto C.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = 6x + 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{6}{3}x \Rightarrow m = -\frac{3}{1}.$

$\underline{El\ máximo\ de\ la\ función\ se\ produce\ para\ x = 1\ e\ y = 4\ y\ su\ valor\ es\ 14}.$

****

4º) Sea la matriz $A = (-\ 2\ \ -\ 1\ 3\ 1\ )$. Calcular A^3 y A^{2015}.

$A^3 = A\cdot A\cdot A = (-\ 2\ \ -\ 1\ 3\ 1\ )\cdot(-\ 2\ \ -\ 1\ 3\ 1\ )\cdot A = (1\ 1\ \ -\ 3\ \ -\ 2\ )\cdot(-\ 2\ \ -\ 1\ 3\ 1\ ) =$

$= (1\ 0\ 0\ 1\ ) = I.$

$$\underline{A^3 = I}.$$

$$A^{2015} = A^{3\cdot 671+2} = A^{3\cdot 671}\cdot A^2 = \left(A^3\right)^{671}\cdot A^2 =$$

$$\begin{array}{l|l} 2015 & 3 \\ \hline 21 & 671 \\ \ \ 05 & \\ \ \ \ \ 2 & \end{array}$$

$= I^{671}\cdot A^2 = I\cdot A^2 = A^2 = (1\ 1\ \ -\ 3\ \ -\ 2\ ).$

$$\underline{A^{2015} = (1\ 1\ \ -\ 3\ \ -\ 2\ )}.$$

****

5º) Supongamos que has quedado a comer con unos amigos en un restaurante y que el llegar ellos ya han pedido tres platos distintos para compartir pero no recuerdan exactamente cuáles son. Has leído la carta y has comprobado que hay 12 platos y cinco de ellos no te gustan. ¿Cuál es la probabilidad de que entre los tres platos que han pedido tus amigos haya alguno que no te guste?

El suceso contrario a que "entre los platos elegidos por tus amigos haya alguno que no te guste" es el suceso "que te gusten todos los platos elegidos por tus amigos".

De los 12 platos te gustan 7 y no te gustan 5.

La probabilidad de que tus amigos hayan elegido tres platos que te gusten a ti es la siguiente:

$$P = \frac{Casos\ favorables}{Casos\ posibles} = \frac{C_{7,\,3}}{C_{12,\,3}} = \frac{\frac{7!}{(7-3)!\cdot 3!}}{\frac{12!}{(12-3)!\cdot 3!}} = \frac{\frac{7!}{4!}}{\frac{12!}{9!}} = \frac{7!\cdot 9!}{4!\cdot 12!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!\cdot 9!}{4!\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{12\cdot 11\cdot 10} =$$

$$= \frac{7\cdot 1\cdot 1}{2\cdot 11\cdot 2} = \frac{7}{44}.$$

La probabilidad pedida es:

$$\underline{P = 1 - \frac{7}{44} = \frac{44-7}{44} = \frac{37}{44} \cong 0,841.}$$

****

Parte A2.- Resuelve <u>los dos problemas</u> que se proponen a continuación.

6º) Consideramos el sistema $\{x + y + z = a \quad 3ax + 2ay + az = 1 \; ay - 2z = 2$:

a) Determinar los valores del parámetro a para los que el sistema es compatible y determinado.

b) ¿Existe algún valor para el que el sistema es compatible e indeterminado, ¿e incompatible?

c) Resolver el sistema para $a =- 1$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A = (1\ 1\ 1\ 3a\ 2a\ a\ 0\ a\ -2\ )$ y $A' = (1\ 1\ 1\ 3a\ 2a\ a\ 0\ a\ -2 \quad a\ 1\ 2\ )$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$|A| = |1\ 1\ 1\ 3a\ 2a\ a\ 0\ a\ -2\ | =- 4a + 3a^2 - a^2 + 6a = 2a^2 + 2a =$

$= 2a(a + 1) = 0 \Rightarrow a_1 = 0,\ a_2 =- 1.$

$\underline{Para\ \{a\neq 0\ a\neq -1\ \} \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

b)

Para

$a = 0 \Rightarrow A' = (1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ -2 \quad 0\ 1\ 2\ ) \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \left(C_1,\ C_3,\ C_4\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow |1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ -2\ 2\ | = 2\neq 0 \Rightarrow Rang\ A' = 3.$

$\underline{Para\ a = 0 \Rightarrow Rang\ A = 2;\ Rang\ A' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible}.$

Para

$a =- 1 \Rightarrow A' = (1\ 1\ 1\ -3\ -2\ -1\ 0\ -1\ -2 \quad -1\ 1\ 2\ ) \Rightarrow \left(C_3 =- C_4\right) \Rightarrow Rang\ A'$

.

$\underline{Para\ a =- 1 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

b)

Para $a =- 1$ el sistema resulta:

$\{x + y + z = -1 \quad -3x - 2y - z = 1 \quad -y - 2z = 2$, que es compatible indeterminado. Despreciando la segunda ecuación y haciendo $z = \lambda$, resulta:

$x + y = -1 - \lambda \quad -y = 2 + 2\lambda\} \Rightarrow y = -2 - 2\lambda$. $x = -1 - \lambda + 2 + 2\lambda = 1 +$
.

$\underline{Solución: x = 1 + \lambda,\ y = -2 - 2\lambda,\ z = \lambda,\ \forall\lambda \in R.}$

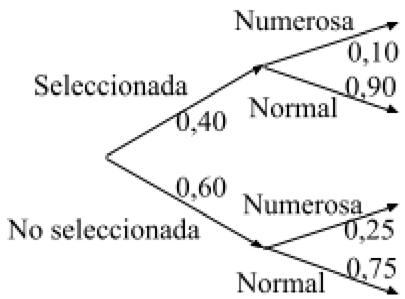
****

2º) Para un campamento de verano se ha seleccionado un 40 % de las solicitudes presentadas. Un 10 % de las solicitudes seleccionadas corresponden a familias numerosas y un 25 % de las no seleccionadas también son familias numerosas.

a) Calcula el porcentaje de familias numerosas que han presentado solicitud para el campamento.

b) Se sabe que una determinada solicitud no corresponde a una familia numerosa, determinar la probabilidad de que haya sido seleccionada para participar en el campamento.

c) Se sabe que un 20 % de las solicitudes presentadas corresponde a familias monoparentales y, entre ellas, hay un 20 % de familias numerosas. Usando el apartado a), calcula el porcentaje de familias no monoparentales y numerosas que han solicitado el campamento.



a)

$$P = P(S/Num) + P(NS/Num) = 0,40 \cdot 0,10 + 0,60 \cdot 0,25 =$$

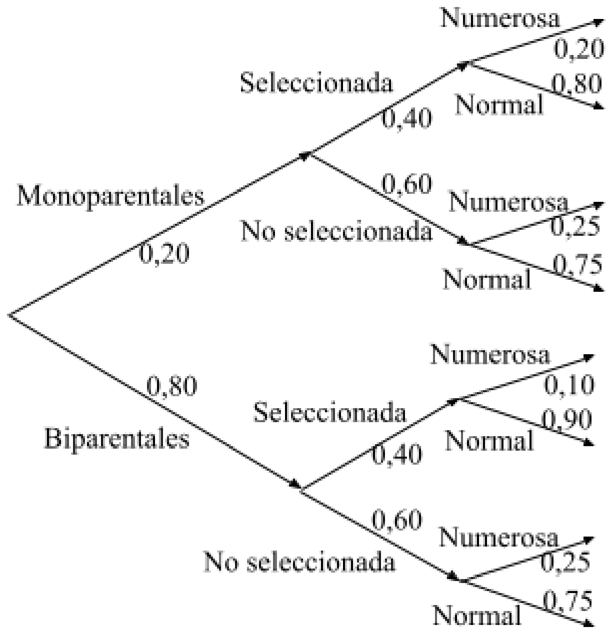
$$= 0,04 + 0,15 = \underline{0,19}.$$

b)

$$P = \frac{P(S/Nor)}{P(Nor)} = \frac{P(S) \cap P(Nor)}{P(S/Nor) + P(NS/Nor)} = \frac{0,40 \cdot 0,90}{0,40 \cdot 0,90 + 0,60 \cdot 0,75} = \frac{0,36}{0,36 + 0,45} =$$

$$= \frac{0,36}{0,81} = \underline{0,444}.$$

$c)$

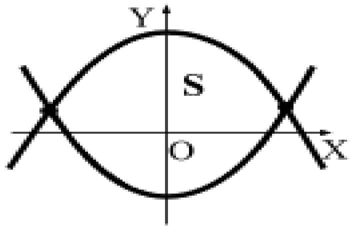

Monoparentales
0,20
Biparentales
0,80
Seleccionada
0,40
No seleccionada
0,60
Numerosa
0,20
Normal
0,80
Numerosa
0,25
Normal
0,75
Seleccionada
0,40
No seleccionada
0,60
Numerosa
0,10
Normal
0,90
Numerosa
0,25
Normal
0,75

****

OPCIÓN B

Parte B1. Responde a cuatro de las cinco preguntas que se plantean a continuación.

1º) Calcular el área limitada por las parábolas $y = x^2 - 18$ e $y = -x^2 + 32$. En la imagen siguiente aparece sombreada el área solicitada.



2º) Consideramos la función definida a trozos:

$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2bx - 11 & si\ x < 1 \\ bx^2 - ax - 1 & si\ 1 \leq x \leq 2 \\ x^3 + 1 & si\ 2 \leq x \end{cases}$. Calcular los valores de a y b para que la función sea continua.

3º) Consideramos el conjunto de restricciones $\begin{cases} y + 2x \leq 6 \\ 3 \leq y - x \\ x \geq 0 \end{cases}$. Dibujar la región factible y encontrar en ella el máximo de la función $f(x, y) = 2(3x + y)$.

4º) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular A^3 y A^{2015}.

5º) Supongamos que has quedado a comer con unos amigos en un restaurante y que el llegar ellos ya han pedido tres platos distintos para compartir pero no recuerdan exactamente cuáles son. Has leído la carta y has comprobado que hay 12 platos y cinco de ellos no te gustan. ¿Cuál es la probabilidad de que entre los tres platos que han pedido tus amigos haya alguno que no te guste?

Parte A2.- Resuelve los dos problemas que se proponen a continuación.

6º) Sea la función $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{(x+2)^2}$.

$a)$ Determinar los cortes con los ejes de la función y, en caso de haberlas, sus asíntotas.

$b)$ Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función y determinar sus extremos relativos.

$c)$ Usando la información de los apartados anteriores, hacer un dibujo aproximado de la gráfica de la función.

$a)$

Cortes con los ejes:

$$Eje\ X \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2-5x+4}{(x+2)^2} = 0;\ \ x^2 - 5x + 4 = 0;\ \ x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} =$$

$$= \frac{5\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{5\pm 3}{2} \Rightarrow \{x_1 = 1 \rightarrow \underline{A(1,\ 0)}\ x_2 = 4 \rightarrow \underline{B(4,\ 0)}\,.$$

$$Eje\ Y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{0-0+4}{(0+2)^2} = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow \underline{C(0,\ 1)}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma y = k y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = f(x) = \frac{x^2-5x+4}{(x+2)^2} = 1 \Rightarrow \underline{Asíntota\ horizontal: y = 1}\,.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$(x + 2)^2 = 0 \Rightarrow x =- 2.$$

$$\underline{Asíntota\ vertical: x =- 2}.$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

$b)$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{(2x-5)\cdot(x+2)^2 - \left(x^2-5x+4\right)\cdot[2(x+2)\cdot 1]}{(x+2)^4} = \frac{(2x-5)\cdot(x+2) - 2\cdot\left(x^2-5x+4\right)}{(x+2)^3} =$$

$$= \frac{2x^2+4x-5x-10-2x^2+10x-8}{(x+2)^3} = \frac{9x-18}{(x+2)^3} = \frac{9(x-2)}{(x+2)^3} = f'(x).$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento:\ (-\infty,\ -2) \cup (2,\ +\infty)}.$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento:\ (-2,\ 2)}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto. Esta condición necesaria no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{9(x-2)}{(x+2)^3} = 0;\ \ 9(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 2.$$

$$f''(x) = \frac{9\cdot(x+2)^3 - 9(x-2)\cdot\left[3\cdot(x+2)^2\cdot 1\right]}{(x+2)^6} = \frac{9\cdot(x+2) - 27(x-2)}{(x+2)^4} = \frac{9x+18-27x+54}{(x+2)^4} =$$

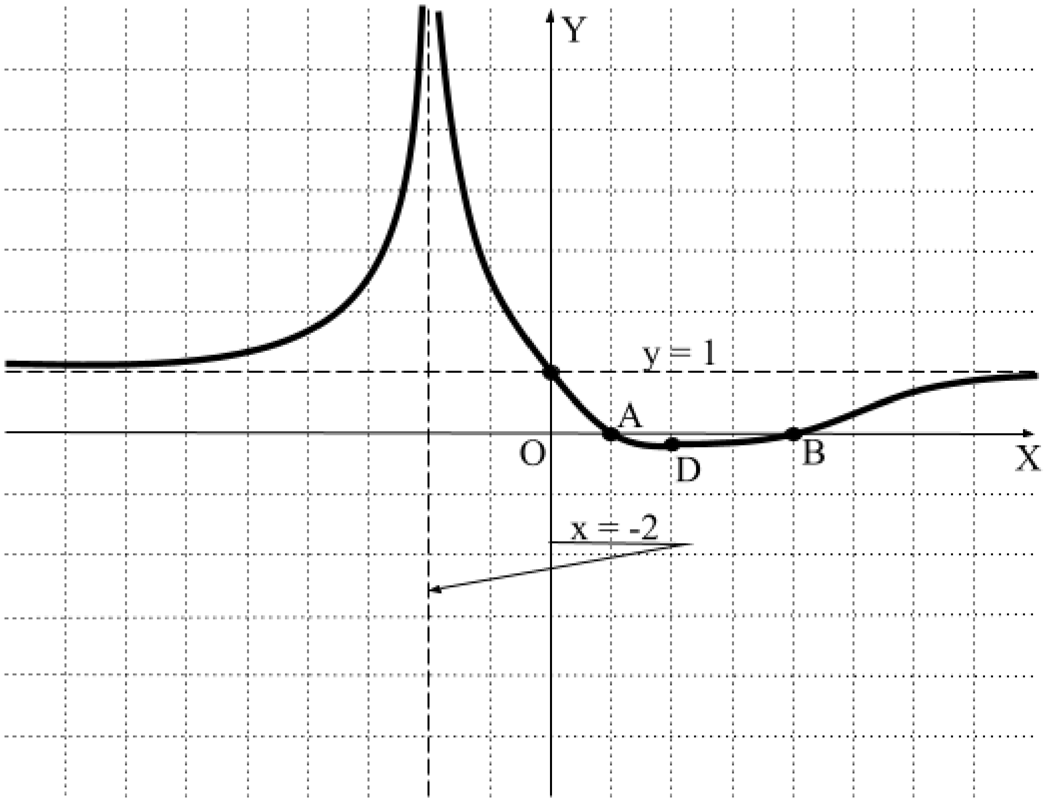
$$= \frac{-18x+72}{(x+2)^4} = \frac{-18(x-4)}{(x+2)^4}.$$

$$f''(2) = \frac{-18(2-4)}{(2+2)^4} = \frac{36}{256} > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 2.$$

$$f(2) = \frac{2^2-5\cdot 2+4}{(2+2)^2} = \frac{4-10+4}{16} = \frac{-2}{16} = -\frac{1}{8} \Rightarrow \underline{Mínimo: D\left(2,\ \ -\frac{1}{8}\right)}.$$

$c)$

Con los datos obtenidos en los apartados anteriores se obtiene, aproximadamente, la gráfica de la figura, que se la siguiente:



****

7º) Se sabe que a lo largo de una campaña la producción de alcachofas en la zona de Calahorra y sus inmediaciones sigue una distribución normal de media 18 toneladas por hectárea con una desviación típica de 6 toneladas.

a) Si se toma una muestra de 25 hectáreas, ¿cuál es la probabilidad de que la media de producción esté comprendida entre 16 y 20 toneladas?

b) Tomando una muestra de 16 hectáreas, calcula el intervalo de confianza al 90 % para la media de producción.

----

a)

$Datos$: $\overline{x} = 18,\ \sigma = 6,\ n = 25.$

$Para\, n = 25 \rightarrow \overline{X} = N\left(18,\ \frac{6}{\sqrt{25}}\right) = N\left(18,\ \frac{6}{5}\right) = N(18,\ 1'2).$

Tipificando la variable: $Z = \frac{\overline{X}-18}{1,2}$.

$P(16 \leq \overline{X} \leq 20) = P\left(\frac{16-18}{1,2} \leq Z \leq \frac{20-18}{1,2}\right) = P\left(\frac{-2}{1,2} \leq Z \leq \frac{2}{1,2}\right) =$

$= P(-\ 1,667 \leq Z \leq 1,667) = P(Z \leq 1,667) - P(Z \leq\ -\ 1,667) =$

$= P(Z \leq 1,667) - [1\ -\ P(Z \leq 1,667)] = 2 \cdot P(Z\ <\ 1,667) -\ 1\ =$

$= 2 \cdot 0,9521\ -\ 1\ =\ 1,9042\ -\ 1\ =\ 0,9042.$

$$\underline{P(16 \leq \overline{X} \leq 20) =\ 0,9042}.$$

c)

Para un nivel de confianza del 90 %:

$1\ -\ \alpha\ =\ 0,90 \rightarrow \alpha\ =\ 1\ -\ 0,90\ =\ 0,10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,05}\ =\ 1,645.$

$(1\ -\ 0,05\ =\ 0,9500 \rightarrow z\ =\ 1,645).$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}\ -\ z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x}\ -\ z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(18\ -\ 1,645 \cdot \frac{6}{\sqrt{16}},\ 18\ +\ 1,645 \cdot \frac{6}{\sqrt{16}}\right);\ \ (18\ -\ 1,645 \cdot 1,5,\ 18\ +\ 1,645 \cdot 1,5);$

$(18\ -\ 2,4675,\ 18\ +\ 2,4675).$

$$\underline{I.\ C._{90\ \%} = (15,5325;\ 20,4675)}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MADRID

JUNIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger una de las dos opciones propuestas y responder a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.

OPCIÓN A

1º) Se consideras el sistema de ecuaciones lineales $\left\{\begin{array}{l} 3x + y - z = 8 \\ 2x + az = 3 \\ x + y + z = 2 \end{array}\right.$, donde a es un parámetro real.

a) Discútase en función de los valores del parámetro a.

b) Resuélvase para $a = 1$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & a & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + a - 3a - 2 = 0; -2a - 4 = 0; 2a + 4 = 0;$

$a + 2 = 0 \Rightarrow a = -1.$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\underline{Para\ a \neq -1 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$$

$Para\ a = -1\ es\ A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 16 + 3 - 9 - 4 = 6 \neq 0 \Rightarrow Rang\ A' = 3.$

$\underline{Para\ a\ =-\ 1 \Rightarrow Rang\ A\ =\ 2;\ Rang\ A'\ =\ 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible}.$

$b)$

Para $a\ =\ 1$ el sistema resulta $\{3x\ +\ y\ -\ z\ =\ 8\ 2x\ +\ z\ =\ 3\quad x\ +\ y\ +\ z\ =\ 2$, que es compatible determinado.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x\ =\ \frac{|8\ 1\ -1\ 3\ 0\ 1\ 2\ 1\ 1\ |}{-2-4}\ =\ \frac{-3+2-8-3}{-6}\ =\ \frac{-12}{-6}\ =\ 2.$$

$$y\ =\ \frac{|3\ 8\ -1\ 2\ 3\ 1\ 1\ 2\ 1\ |}{-6}\ =\ \frac{9-4+8+3-6-16}{-6}\ =\ \frac{-6}{-6}\ =\ 1.$$

$$z\ =\ \frac{|3\ 1\ 8\ 2\ 0\ 3\ 1\ 1\ 2\ |}{-6}\ =\ \frac{16+3-9-4}{-6}\ =\ \frac{6}{-6}\ =-\ 1.$$

$\underline{Para\ a\ =\ 1\ las\ soluciones\ del\ sistema\ son: x\ =\ 2,\ y\ =\ 1,\ z\ =-\ 1}.$

****

2º) Sabiendo que la derivada de una función real de variable real es $f'(x) = 3x^2 + 2x$:

a) Calcúlese la expresión de $f(x)$ sabiendo que su gráfica pasa por el punto $A(1, 4)$.

b) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto A.

----

a)

$$f(x) = \int f'(x) \cdot dx = \int \left(3x^2 + 2x\right) \cdot dx = \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + C = x^3 + x^2 + C.$$

Por pasar $f(x)$ por $A(1, 4)$ es $f(1) = 4$:

$f(1) = 1^3 + 1^2 + C = 4; \; 2 + C = 4 \Rightarrow C = 2.$

$$\underline{f(x) = x^3 + x^2 + 2}.$$

b)

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$f'(1) = m \Rightarrow 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = m; \; 3 + 2 = m \Rightarrow m = 5.$

El punto de tangencia es $A(1, 4)$.

Ecuación de la recta punto-pendiente: $y - y_0 = m\left(x - x_0\right)$; la tangente es:

$y - 4 = 5 \cdot (x - 1) = 5x - 5 \Rightarrow \underline{t \equiv 5x - y - 1 = 0}.$

****

3º) Sean las funciones reales de variable real $f(x) = x^2 - 6x$ y $g(x) = x - 10$.

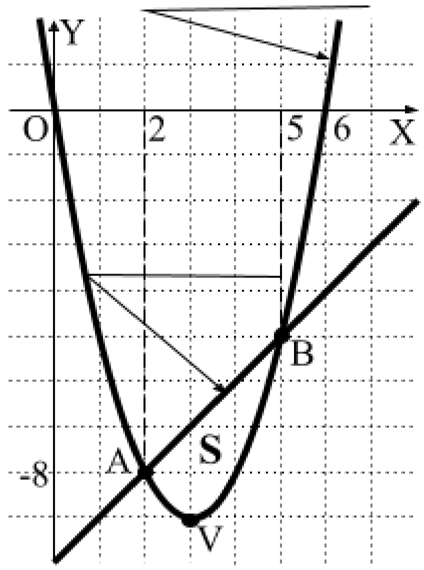
a) Represéntense gráficamente las funciones f y g.

b) Calcúlese el área del recinto plano acotado por las gráficas de las funciones f y g.

----

a)

Las abscisas de los puntos de corte de la curva y la recta son las soluciones de la ecuación que determina la igualación de sus expresiones:



$$x^2 - 6x = x - 10;\ x^2 - 7x + 10 = 0;$$

$$x = \frac{7\pm\sqrt{49-40}}{2} = \frac{7\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{7\pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = 5.$$

Los puntos de corte son los siguientes:

$g(2) = -8 \Rightarrow A(2,\ -8)$.

$g(5) = -5 \Rightarrow B(5,\ -5)$.

El vértice de la parábola $f(x) = x^2 - 6x$ es el siguiente:

$$f'(x) = 2x - 6 = 0;\ x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \Rightarrow V(3,\ -9).$$

La representación gráfica, aproximada, de la situación es la que indica la figura.

b)

De la observación de la figura se deduce que en el intervalo correspondiente a la superficie a calcular, (2, 5), las ordenadas de la recta son mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola, por lo cual, la superficie S a calcular es:

$$S = \int_2^5 [g(x) - f(x)]dx = \int_2^5 \left[(x - 10) - \left(x^2 - 6x\right)\right]dx =$$

$$= \int_2^5 \left(-x^2 + 7x - 10\right)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 10x\right]_2^5 = \left(-\frac{5^3}{3} + \frac{7\cdot 5^2}{2} - 10\cdot 5\right) -$$

$$-\left(-\frac{2^3}{3} + \frac{7\cdot 2^2}{2} - 10\cdot 2\right) = -\frac{125}{3} + \frac{175}{2} - 50 + \frac{8}{3} - 14 + 20 = \frac{175}{2} - \frac{117}{3} - 44 =$$

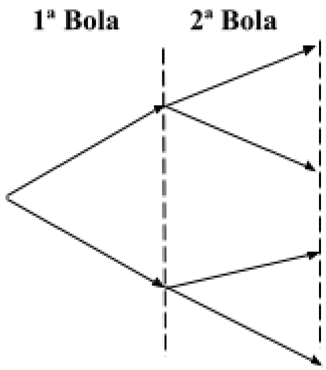
$$= \frac{525-234-264}{6} = \frac{525-498}{6} = \frac{27}{6} = \underline{\frac{9}{2}\, u^2 = 4,5\, u^2 = S.}$$

****

4º) En una bolsa hay cuatro bolas rojas y una verde. Se extraen de forma consecutiva y sin reemplazamiento dos bolas. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Las dos bolas sean del mismo color.

b) La primera bola haya sido verde y la segunda bola extraída es roja.



a)

$$P = P(R) \cdot P(R) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \underline{\frac{3}{5} = 0,6}.$$

b)

(Teorema de Bayes)

$$P = P(V/R) = \frac{P(V \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4}}{\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4} + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5} + \frac{3}{5}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}} = \underline{\frac{1}{4} = 0,25}.$$

****

5º) El tiempo de reacción ante un obstáculo imprevisto de los conductores de automóviles de un país, en milisegundos (ms), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 250\, ms$.

a) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene el siguiente intervalo de confianza $(701; 799)$, expresado en ms, para μ con un nivel de del 95 %. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.

b) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 25. Calcúlese el error máximo cometido en la estimación de μ mediante la media muestral con un nivel de confianza del 80 %.

----

a)

Conocemos: El intervalo de confianza del cual obtenemos el error:

$E = \frac{799-701}{2} = \frac{98}{2} = 49.$ Desviación típica: $\sigma = 250.$

Para un nivel de confianza del 95 % es $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96.$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{E} \right)^2 = \left(\frac{1,96 \cdot 250}{49} \right)^2 = 10^2 = 100.$$

<u>*El tamaño de la muestra debe ser de al menos* 100 *individuos*.</u>

$$\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ;\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \Rightarrow (701; 799) \Rightarrow 701 = \overline{x} - 49 \Rightarrow \overline{x} = 750.$$

<u>*La media muestral es* $\overline{x} = 750$.</u>

b)

Conocemos: $n = 25;\ \sigma = 250.$

Para un nivel de confianza del 80 % es $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,28.$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,28 \cdot \frac{250}{\sqrt{25}} = 1,28 \cdot 50 = 64$$

<u>*El error máximo que se comete es de* 64 *milisegundos*.</u>

****

OPCIÓN B

1º) Una fábrica de piensos para animales produce diariamente como mucho seis toneladas de pienso del tipo A y como máximo cuatro toneladas de pienso del tipo B. Además, la producción diaria de pienso del tipo B no puede superar el doble de la del tipo A y, por último, el doble de la fabricación de pienso del tipo A sumada con la del tipo B debe ser como poco cuatro toneladas diarias. Teniendo en cuenta que el coste de fabricación de una tonelada de pienso del tipo A es de 1.000 euros y el de una tonelada del tipo B de 2.000 euros, ¿cuál es la producción diaria para que la fábrica cumpla con sus obligaciones con un coste mínimo? Calcúlese dicho coste diario mínimo.

Sean x e y el número de toneladas diarias de piensos que se producen de los tipos A y B, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes:

$y \leq 2x \quad 2x + y \geq 4 \; x \leq 6; \; y \leq 4 \, \}$ $\quad 2x - y \geq 0 \quad 2x + y \geq 4 \; x \leq 6; \; y \leq 4 \, \}$.

La función de objetivos es: $f(x, y) = 1.000x + 2.000y$.

La región factible se indica en la figura:

x	0	2
y	0	4

①$\Rightarrow 2x - y \geq 0 \Rightarrow y = 2x \Rightarrow P(1, 0) \rightarrow Si$.

x	2	0
y	0	4

②$\Rightarrow 2x + y \geq 4 \Rightarrow y = 4 - 2x \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow No$.

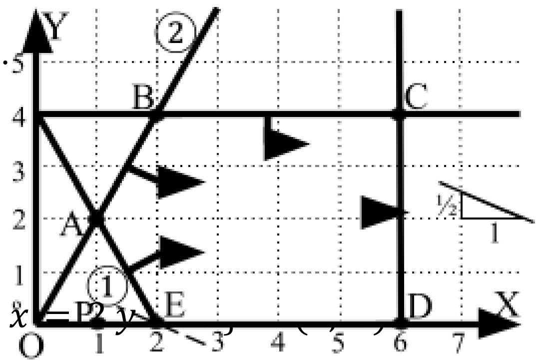
Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow 2x - y = 0 \; 2x + y = 4 \, \} \Rightarrow A(1, 2)$.

$B \Rightarrow 2x - y = 0 \qquad y = 4 \, \} \Rightarrow B(2, 4)$.

$C \Rightarrow x = 6 \; y = 4 \, \} \Rightarrow C(6, 4)$.

$D \Rightarrow x = 6 \; y = 0 \, \} \Rightarrow D(6, 0)$. $\qquad E \Rightarrow x$



Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(1, 2) = 1.000 \cdot 1 + 2.000 \cdot 2 = 1.000 + 2.000 = 3.000$.

$B \Rightarrow f(2, 4) = 1.000 \cdot 2 + 2.000 \cdot 4 = 2.000 + 8.000 = 10.000$.

$C \Rightarrow f(6,\ 4) = 1.000 \cdot 6 + 2.000 \cdot 4 = 6.000 + 8.000 = 14.000.$

$D \Rightarrow f(6,\ 0) = 1.000 \cdot 6 + 2.000 \cdot 0 = 6.000 + 0 = 6.000.$

$E \Rightarrow f(2,\ 0) = 1.000 \cdot 2 + 2.000 \cdot 0 = 2.000 + 0 = 2.000.$

El mínimo se produce en el punto E.

También se hubiera obtenido el punto E por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,\ y) = 1.000x + 2.000y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1.000}{2.000}x \Rightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

$\underline{El\ mínimo\ coste\ se\ consigue\ produciendo\ 6\ t\ de\ pienso\ A\ y\ 4\ t\ de\ B}.$

$\underline{El\ coste\ mínimo\ asciende\ a\ 2.000\ euros}.$

****

2º) Sea la matriz $A = (2\ 2\ 0\ 0\ 3\ 2\ -1\ k\ 2\ )$:

$a)$ Estúdiese el rango de A según los valores del parámetro k.

$b)$ Calcúlese, si existe, la matriz inversa de A para k = 3.

$a)$

$|A| = |2\ 2\ 0\ 0\ 3\ 2\ -1\ k\ 2\ | = 12 - 4 - 4k = 8 - 4k = 0;\ 2 - k = 0 \Rightarrow k = 2$
.

$$\underline{Rango\ A = 3,\ \forall k \in R - \{2\}}.$$

Para $k = 2$ es $A = (2\ 2\ 0\ 0\ 3\ 2\ -1\ 2\ 2\ ) \Rightarrow |2\ 2\ 0\ 3\ | = 6 \neq 0$.

$$\underline{Para\ k = 2 \Rightarrow Rango\ A = 2}.$$

$b)$

Por ser $|A| \neq 0$ para k = 3 la matriz A es invertible.

Para $k = 3$ es $A = (2\ 2\ 0\ 0\ 3\ 2\ -1\ 3\ 2\ )$. La inversa de A se obtiene por la adjunta de la traspuesta: $A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^{t}}{|A|}$.

$|A| = |2\ 2\ 0\ 0\ 3\ 2\ -1\ 3\ 2\ | = 12 - 4 - 12 = - 4$. $\qquad A^{t} = (2\ 0\ -1\ 2\ 3\ 3\ 0\ 2\ 2\ )$
.

$Adj.\ de\ A^{t} = (|3\ 3\ 2\ 2\ |\ - |2\ 3\ 0\ 2\ |\ |2\ 3\ 0\ 2\ |\ - |0\ -1\ 2\ 2\ |\ |2\ -1\ 0\ 2\ |\ - |2\ 0$
.

$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^{t}}{|A|} = \frac{(0\ -4\ 4\ -2\ 4\ -4\ 3\ -8\ 6\ )}{-4} = \underline{\left(0\ 1\ -1\ \frac{1}{2}\ -1\ 1\ -\frac{3}{4}\ 2\ -\frac{3}{2}\right)}$
.

****

3º) Se considera la función real de variable real $f(x) = \{\frac{x^{2}-4}{x^{2}-5x+6}\ si\ x < 2\ 3x + m\ si\ x \geq 2$:

$a)$ Calcúlese el valor del parámetro real m para que la función f sea continua en x = 2.

$b)$ Calcúlense: $f(x)$ y $f(x)$.

$a)$

Teniendo en cuenta que: $x^2 - 5x + 6 = 0;\ x = \frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2} = \frac{5\pm1}{2} \Rightarrow \{x_1 = 2\ x_2 = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{x+2}{x-3}$, la función $f(x)$ puede redefinirse de la forma siguiente: $f(x) = \{\frac{x+2}{x-3}\ \ si\ x < 2\ 3x + m\ \ si\ x\geq2$.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 2$, que para forzar su continuidad se va a determinar el valor del parámetro real m.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen, sean iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$\{f(x) == \frac{4}{-1} =- 4 \qquad f(x) = f(3x + m) = 6 + m = f(2) \Rightarrow - 4 = 6 +$

.

<u>$La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ R\ para\ m =- 10$</u>.

$b)$

$f(x) = \frac{x+2}{x-3} = \underline{1}$.

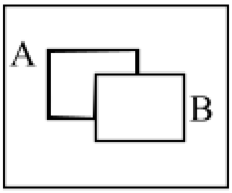
$f(x) = \lim_{x\to+\infty} (3x - 10) = \underline{+\ \infty}$.

****

4º) Sean A y B sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A \cap B) = 0,3$, $P(A \cap \overline{B}) = 0,2$ y $P(B) = 0,7$. Calcúlese:

$a)$ $P(A \cup B)$. $b)$ $P(\overline{A})$.

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario de S.



$a)$

$$P = P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,2.$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,2 + P(B) = 0,2 + 0,7 = 0,9.$$

$$\underline{P(A \cup B) = 0,9.}$$

$b)$

$$P(\overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(B) - P(B \cap A)}{P(\overline{A})}. \qquad (*)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0,9 = P(A) + 0,7 - 0,3;$$

$$P(A) = 0,9 - 0,4 = 0,5 \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,5 = 0,5.$$

Sustituyendo en (*):

$$P(\overline{A}) = \frac{P(B) - P(B \cap A)}{P(\overline{A})} = \frac{0,7 - 0,3}{0,5} = \frac{0,4}{0,5} = \frac{4}{5}.$$

$$\underline{P(\overline{A}) = \frac{4}{5} = 0,8.}$$

****

5º) La duración de cierto componente electrónico, en horas (h), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 1.000 h.

a) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de esos componentes electrónicos de tamaño 81 y la media muestral de su duración ha sido $\overline{x} = 8.000\, h$. Calcúlese un intervalo de confianza al 99 % para μ.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 7.904 y 8.296 horas para una muestra aleatoria simple de tamaño 100 si sabemos que $\mu = 8.100\, h$?

----

a)

Conocemos: $\sigma = 1.000;\, n = 81;\, \overline{x} = 8.000.$

Para un nivel de confianza del 99 % es $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,575.$

$$I_{99\%} = \left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \left(8.000 - 2,575 \cdot \frac{1.000}{\sqrt{81}};\ 8.000 - 2,575 \cdot \frac{1.000}{\sqrt{81}}\right) =$$

$$= (8.000 - 286,11;\ 8.000 - 286,11) = (7.713'88; 8.286'11)$$

$$\underline{I_{99\%} = (7.713'88; 8.286'11).}$$

b)

$$Para\, n = 100 \rightarrow \overline{X} = N\left(8.100,\ \frac{1.000}{\sqrt{100}}\right) = N(8.100,\ 100).$$

Tipificando: $Z = \frac{\overline{X} - 8.100}{100}.$

$$P(7.904 < \overline{X} < 8.296) = P\left(\frac{7.904 - 8.100}{100} < \frac{\overline{X} - 8.100}{100} < \frac{8.296 - 8.100}{100}\right) =$$

$$= P\left(\frac{-196}{100} < \frac{\overline{X} - 8.100}{100} < \frac{196}{100}\right) = P(-1,96 < Z < 1,96) = 2 \cdot P(Z < 1,96) - 1 =$$

$$= 2 \cdot 0,9750 - 1 = 1,95 - 1 = \underline{0,95}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MADRID

SEPTIEMBRE – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger una de las dos opciones propuestas y responder a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.

OPCIÓN A

1º) Se consideran las matrices $A = (3\ 1\ \ -6\ \ -2)$ y $B = (1\ \ -3\ \ -1\ 2)$.

$a)$ Calcúlese A^{15} e indíquese si la matriz A tiene inversa.

$b)$ Calcúlese el determinante de la matriz $\left(B \cdot A^t \cdot B^{-1} - 2I\right)^3$.
Nota: A^t denota la matriz traspuesta de A. I es la matriz identidad de orden 2.

$a)$

$$|A| = |3\ 1\ \ -6\ \ -2| = -6 + 6 = 0 \Rightarrow \underline{La\ matriz\ A\ no\ es\ inversible}.$$

$$A^2 = A \cdot A = (3\ 1\ \ -6\ \ -2) \cdot (3\ 1\ \ -6\ \ -2) = (3\ 1\ \ -6\ \ -2) = A.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A = A^2 = A \Rightarrow A^n = A.$$

$$\underline{A^{15} = A = (3\ 1\ \ -6\ \ -2)}.$$

$b)$

La inversa de B se obtiene por el método de Gauss-Jordan.

$$(B/I) = (1\ 0\ 0\ 1) \Rightarrow \left\{F_2 \to F_2 + F_1\right\} \Rightarrow (1\ 0\ 1\ 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_2 \to -F_2\right\} \Rightarrow (1\ 0\ \ -1\ \ -1) \Rightarrow \left\{F_1 \to F_1 + 3F_2\right\} \Rightarrow (-2\ \ -3\ \ -1\ \ -1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B^{-1} = (-2\ \ -3\ \ -1\ \ -1).$$

$B\cdot A^{t}\cdot B^{-1} - 2I = (1\ \ -3\ \ -1\ 2)\cdot(3\ \ -6\ 1\ \ -2)\cdot(-2\ \ -3\ \ -1\ \ -1) - 2I =$

$= (0\ 0\ \ -1\ 2)\cdot(-2\ \ -3\ \ -1\ \ -1) - 2I = (0\ 0\ 0\ 1) - (2\ 0\ 0\ 2) = (-2\ 0\ 0\ \ -1)$
.

$$\left(B\cdot A^{t}\cdot B^{-1} - 2I\right)^{3} = (-2\ 0\ 0\ \ -1)\cdot(-2\ 0\ 0\ \ -1)\cdot(-2\ 0\ 0\ \ -1) =$$

$= (4\ 0\ 0\ 1)\cdot(-2\ 0\ 0\ \ -1) = (-8\ 0\ 0\ \ -1).$

$$\left|\left(B\cdot A^{t}\cdot B^{-1} - 2I\right)^{3}\right| = |-8\ 0\ 0\ \ -1| = 8.$$

$$\underline{\left|\left(B\cdot A^{t}\cdot B^{-1} - 2I\right)^{3}\right| = 8.}$$

****

2º) Un distribuidor de aceite acude a una almazara para comprar dos tipos de aceite, A y B. La cantidad máxima que puede comprar es de 12.000 litros en total. El aceite de tipo A cuesta 3 euros/litro y el de tipo B cuesta 2 euros/litro. Necesita adquirir al menos 2.000 litros de cada tipo de aceite. Por otra parte, el coste total por compra de aceite no debe ser superior a 30.000 euros. El beneficio que se conseguirá con la venta del aceite será de un 25 % sobre el precio que ha pagado por el aceite de tipo A y de un 30 % sobre el precio que ha pagado por el aceite de tipo B. ¿Cuántos litros de cada tipo de aceite se deberían adquirir para maximizar el beneficio? Obténgase el valor del beneficio máximo.

Sean x e y el número litros de aceite que se compran de los tipos A y B, respectivamente.

Las condiciones del problema se establecen en el siguiente sistema de inecuaciones: $x + y \leq 12.000 \quad 3x + 2y \leq 30.000 \; x \geq 2.000, \; y \geq 2.000 \}$.

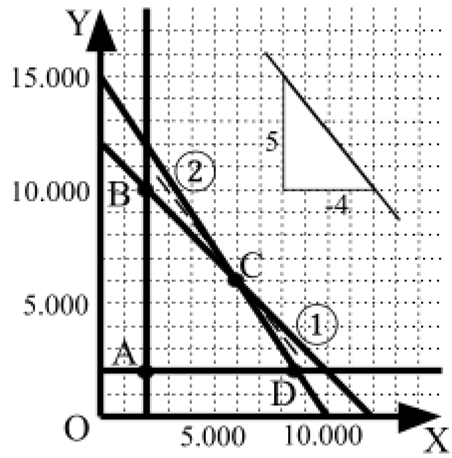
x	0	12.000
y	12.000	0

① $\Rightarrow x + y \leq 12.000 \Rightarrow y \leq 12.000 - x \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si.$

x	10.000	0
y	0	15.000

② $\Rightarrow 3x + 2y \leq 30.000 \Rightarrow y \leq \frac{30.000-3x}{2} \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si.$

La región factible se indica en la figura, cuyos vértices, son los siguientes:



$A \Rightarrow x = 2000 \; y = 2.000 \} \Rightarrow A(2.000, \; 2.000).$

$B \Rightarrow \quad x = 2.000 \; x + y = 12.000 \} \Rightarrow B(2.000, \; 10.000).$

$C \Rightarrow \quad x + y = 12.000 \; 3x + 2y = 30.000 \} \quad - 2x - 2y =- 24.000 \; 3x + 2y = 30.$

$\Rightarrow C(6.000, \; 6.000).$

$D \Rightarrow 3x + 2y = 30.000 \qquad y = 2.000 \} \Rightarrow 3x = 26.000 \Rightarrow D\left(\frac{26.000}{3}, \; 2.000\right).$

La función de objetivos es $f(x,\ y)=\ 0,25\cdot 3x\ +\ 0,30\cdot 2y\ =\ 0,75x\ +\ 0,60y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(2.000,\ 2.000)=\ 0,75\cdot 2.000\ +\ 0,6\cdot 2.000\ =\ 1.500\ +\ 1.200\ =\ 2.700.$

$B \Rightarrow f(2.000,\ 10.000)=\ 0,75\cdot 2.000\ +\ 0,6\cdot 10.000\ =\ 1.500\ +\ 6.000\ =\ 7.500$
.

$C \Rightarrow f(6.000,\ 6.000)=\ 0,75\cdot 6.000\ +\ 0,6\cdot 6.000\ =\ 4.500\ +\ 3.600\ =\ 8.100.$

$D \Rightarrow f\left(\frac{26.000}{3},\ 2.000\right)=\ 0,75\cdot \frac{26.000}{3}\ +\ 0,6\cdot 2.000\ =\ 6.500\ +\ 1.200\ =\ 7.700.$

El máximo se produce en el punto C.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,\ y)=\ 0,75x\ +\ 0,6y\ =\ 0 \Rightarrow y\ =-\ \frac{0,75}{0,6}x\ =-\ \frac{75}{60}x\ =-\ \frac{5}{4}x \Rightarrow m\ =-\ \frac{5}{4}.$$

$\underline{Maximiza\ beneficios\ adquiriendo\ 6.000\ litros\ de\ cada\ tipo}.$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 8.100\ euros}.$

****

3º) Se considera la función real de variable real $f(x) = 4x^3 - ax^2 - ax + 2,\ a \in R$.

a) Determínese el valor del parámetro real a para que la función alcance un extremo relativo en $x = ½$. Compruébese que se trata de un mínimo.

b) Para $a = 2$, calcúlese el valor de $\int_{-1}^{1} f(x) \cdot dx$.

----

a)

Es condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo en un punto que se anule su primera derivada en ese punto:

$$f'(x) = 12x^2 - 2ax - a \Rightarrow f'(½) = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2a \cdot \frac{1}{2} - a = 0;$$

$$12 \cdot \frac{1}{4} - a - a = 0;\ \ 3 - 2a = 0 \Rightarrow \underline{a = \frac{3}{2}}.$$

La función resulta: $f(x) = 4x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 2$.

Para que el un extremo relativo sea un mínimo es condición necesaria que sea positiva la segunda derivada para el valor que anula la primera derivada:

$$f'(x) = 12x^2 - x - \frac{1}{2}. \qquad f''(x) = 24x - 1.$$

$$f''(½) = 24 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 12 - 1 = 11 > 0 \Rightarrow \underline{Mínimo,\ c.q.c.}$$

b)

Para $a = 2$ la función resulta: $f(x) = 4x^3 - 2x^2 - 2x + 2$.

$$\int_{-1}^{1} f(x) \cdot dx = \int_{-1}^{1} \left(4x^3 - 2x^2 - 2x + 2\right) \cdot dx = \left[\frac{4x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \left[x^4 - \frac{2x^3}{3} - x^2 + 2x\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \left(1^4 - \frac{2 \cdot 1^3}{3} - 1^2 + 2 \cdot 1\right) - \left[(-1)^4 - \frac{2 \cdot (-1)^3}{3} - (-1)^2 + 2 \cdot (-1)\right] =$$

$$= 1 - \frac{2}{3} - 1 + 2 - 1 - \frac{2}{3} + 1 + 2 = 4 - \frac{4}{3} = \frac{12-4}{3} = \underline{\frac{8}{3}}.$$

****

4º) Se consideran los sucesos A, B y C de un experimento aleatorio tales que: $P(A) = 0,09$; $P(B) = 0,07$ y $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,97$. Además los sucesos A y C son incompatibles.

a) Estúdiese si los sucesos A y B son independientes.

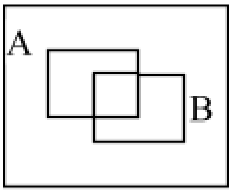
b) Calcúlese $P(C)$.

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario de S.

----

a)

$P(A) = 0,09$; $P(B) = 0,07$ y $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,97$.



$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - 0,97 = 0,03.$

Dos sucesos A y B son independientes cuando se cumple lo siguiente: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow 0,03 \neq 0,09 \cdot 0,07 = 0,0063.$

$\underline{Los\ sucesos\ A\ y\ B\ no\ son\ independientes}.$

b)

Si los sucesos A y C son incompatibles si se cumple que:

$P(A \cup C) = P(A) + P(C)$ y $P(A \cap C) = 0.$

Conviene recordar que $P[(A \cap B) \cap C] = P[(A \cap C) \cap B]$

Aplicando el teorema de Bayes: $P(C) = \frac{P[(A \cap B) \cap C]}{P(C)} = \frac{P[(A \cap C) \cap B]}{P(C)} =$

$= \frac{P(A \cap C) \cdot P(B)}{P(C)} = \frac{0 \cdot P(B)}{P(C)} = \underline{0}.$

****

5º) La cantidad de fruta, medida en gramos, que contienen los botes de mermelada de una cooperativa con producción artesanal se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 10$ gramos.

a) Se seleccionó una muestra aleatoria simple de 100 botes de mermelada, y la cantidad total de fruta que contenían fue de 16.000 gramos. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para la media μ.

b) A partir de una muestra aleatoria simple de 64 botes de mermelada se ha obtenido un intervalo de confianza para la media μ con un error de estimación de 2,35 gramos. Determínese el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.

----

a)

Conocemos: $\sigma = 10; n = 100;\ \overline{x} = \frac{16.000}{100} = 160\ gramos.$

Para un nivel de confianza del 95 % es $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96.$

$$I_{95\%} = \left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(160 - 1,96\cdot\frac{10}{\sqrt{100}};\ 160 + 1,96\cdot\frac{10}{\sqrt{100}}\right) =$$

$$= (160 - 1,96;\ 160 + 1,96) = \left(158'04; 161'96\right)$$

$$\underline{I_{95\%} = \left(158'04; 161'96\right).}$$

b)

Conocemos: $\sigma = 10; n = 64;\ \overline{x} = 160; E = 2,35$ y se pide el nivel de confianza.

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E\cdot\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{2,35\cdot\sqrt{64}}{10} = 0,235\cdot 8 = 1,88 \Rightarrow Tabla: 0,9699.$$

$$P(Z\leq 1,88) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow 0,9699 = 1 - \frac{\alpha}{2};\ \ \frac{\alpha}{2} = 0,0301;\ \ \alpha = 0,0602 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \alpha = 1 - 0,0602 = 0,9398.$$

$$\underline{El\ nivel\ de\ confianza\ es\ del\ 93,98\ \%.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Considérese el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y + az = a + 1 \\ ax + y + z = 1 \\ x + ay + az = a \end{cases}$, siendo a un parámetro real.

a) Discútase el sistema en función de los valores de a.

b) Resuélvase el sistema para $a = 2$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \end{pmatrix}$ y $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a+1 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a & a \end{pmatrix}$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix} = a + a^3 + 1 - a - a - a^2 = a^3 - a^2 - a + 1 = 0$
.

Resolviendo por Ruffini:

	1	-1	-1	1
1		1	0	-1
	1	0	-1	$\boxed{0}$
1		1	1	
2	1	1	$\boxed{0}$	
-1		-1		
	1	$\boxed{0}$		

$a_1 = a_2 = 1,\ a_3 = -1$.

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$\underline{Para \begin{cases} a \neq 1 \\ a \neq -1 \end{cases} \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

$Para\ a = 1\ es\ A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 = F_3\} \Rightarrow Rang\ A' = 2$
.

$Para\ a = -1\ es\ A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 = -F_3\} \Rightarrow Rang$
.

$\underline{Para \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases} \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

b)

Para $a = 2$ el sistema resulta $\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 2 \end{cases}$, que es compatible determinado.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|3\ 1\ 2\ 1\ 1\ 1\ 2\ 2\ 2\,|}{|1\ 1\ 2\ 2\ 1\ 1\ 1\ 2\ 2\,|} = \frac{6+4+2-4-6-2}{2+8+1-2-2-4} = \frac{0}{3} = 0.$$

$$y = \frac{|1\ 3\ 2\ 2\ 1\ 1\ 1\ 2\ 2\,|}{3} = \frac{2+8+3-2-2-12}{3} = \frac{-3}{3} =- 1.$$

$$z = \frac{|1\ 1\ 3\ 2\ 1\ 1\ 1\ 2\ 2\,|}{3} = \frac{2+12+1-3-2-4}{3} = \frac{-6}{3} =- 2.$$

$\underline{Para\ a = 2\ las\ soluciones\ del\ sistema\ son: x = 0,\ y =- 1,\ z =- 2}$

****

2º) Se considera la función real de variable real $f(x) = -8x^2 + 24x - 10$.

a) Calcúlense los máximos y mínimos locales de f y represéntese gráficamente la función.

b) Determínese el área del recinto cerrado comprendido entre la gráfica de la función f y las rectas $x = 1$, $x = 2$ e $y = 4$.

----

a)

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo en un punto es que se anule su primera derivada:

$$f'(x) = -16x + 24.$$

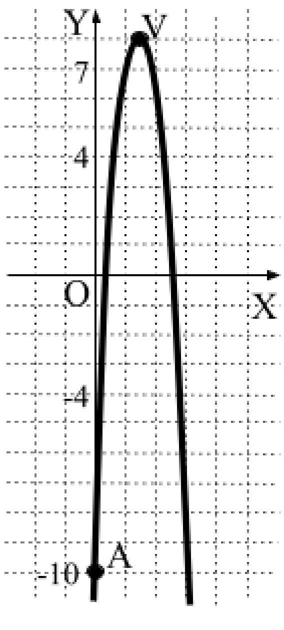
$$f'(x) = 0 \Rightarrow -16x + 24 = 0; \quad -8(2x - 3) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para el valor que anula la primera derivada, se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo relativo.

$f''(x) = -16 < 0 \Rightarrow$ **Máximo relativo para x =** $\frac{3}{2}$.

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -8 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 24 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) - 10 = -\frac{72}{4} + 36 - 10 = -18 + 26 = 8.$$

$$\underline{\textit{Máximo relativo}: V\left(\frac{3}{2},\ 8\right).}$$



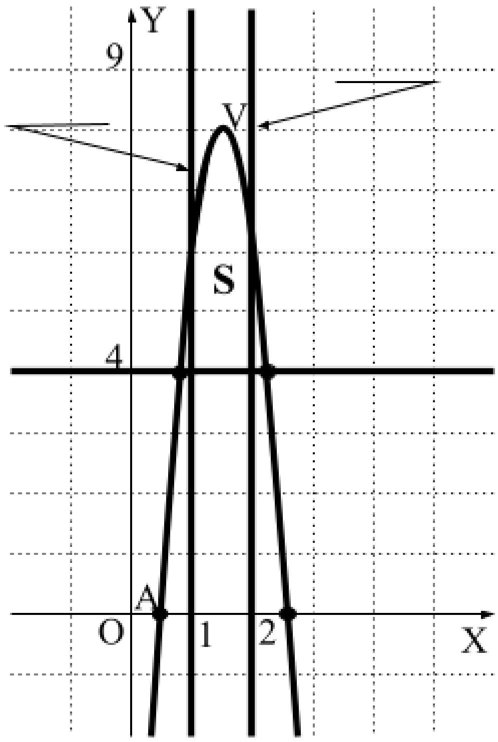
La función $f(x) = -8x^2 + 24x - 10$ es una parábola cóncava ($\cap$) cuyo máximo es el punto hallado $V\left(\frac{3}{2},\ 8\right)$.

Corta el eje de ordenadas en el punto $A(0,\ -10)$.

La representación gráfica de la función $f(x)$ es, aproximadamente, la que se indica en la figura anterior.

b)

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:



$$S = \int_1^2 [f(x) - 4]\cdot dx =$$

$$= \int_1^2 \left(-8x^2 + 24x - 10 - 4\right)\cdot dx =$$

$$= \int_1^2 \left(-8x^2 + 24x - 14\right)\cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{8x^3}{3} + \frac{24x^2}{2} - 14x\right]_1^2 =$$

$$= \left(-\frac{8\cdot 2^3}{3} + 12\cdot 2^2 - 14\cdot 2\right) -$$

$$- \left(-\frac{8\cdot 1^3}{3} + 12\cdot 1^2 - 14\cdot 1\right) = -\frac{64}{3} + 48 - 28 + \frac{8}{3} - 12 + 14 = 22 - \frac{56}{3} =$$

$$= \frac{66-56}{3} = \frac{10}{3}.$$

$$\underline{S = \frac{10}{3}\ u^2.}$$

****

3º) Considérese la función real de variable real $f(x) = \{ \quad e^{x} \quad si\ x < 0 \quad \frac{x^{3}}{(x-2)^{2}} + 1\, si\ x \geq 0$:

a) Estúdiese la continuidad de esta función.

b) Determínense las asíntotas de esta función.

----

a)

La función no existe para $x = 2$, por lo cual su dominio es $D(f) \Rightarrow R - \{2\}$.

La función $f(x)$ es continua en su dominio, excepto para $x = 0$ cuya continuidad es dudosa y se va a determinar.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen, son iguales e igual al valor de la función en ese punto.

$\{f(x) \;==\; e^{0} = 1 \qquad f(x) \;= \left[\frac{x^{3}}{(x-2)^{2}} + 1\right] = 1 \;= f(0) \;\Rightarrow f(x) \;= f(x) \;= f($

.

$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ para\ x\ =\ 0}.$

b)

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$, siendo k el valor de la función cuando x tiende a $+\ \infty$ o a $-\ \infty$.

$$f(x) \;= e^{x} \;= e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = \;0.$$

$$f(x) \;= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^{3}}{(x-2)^{2}} + 1\right] = \infty.$$

$\underline{La\ rectas\ y\ =\ 0\ (eje\ X)\ \ es\ asíntota\ horizontal\ de\ la\ función}.$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que anulan el denominador de las expresiones racionales.

$\underline{La\ recta\ x\ =\ 2\ es\ asíntota\ vertical\ de\ la\ función}.$

Asíntotas oblicuas: Son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$m = \frac{f(x)}{x}$ y $n = [f(x) - mx]$, con m finito y $m \neq 0$.

$$m = \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{x^3}{(x-2)^2}+1}{x} = \left(\frac{x^2}{x^2-4x+4} + \frac{1}{x}\right) = 1.$$

$$n = [f(x) - mx] = \left(\frac{x^3}{x^2-4x+4} + 1 - 1 \cdot x\right) =$$

$$\frac{x^3+x^2-4x+4-x^3+4x^2-4x}{x^2-4x+4} \; \frac{5x^2-8x+4}{x^2-4x+4} = 5.$$

$\underline{La\ recta\ y = x + 5\ es\ asíntota\ vertical\ de\ la\ función.}$

****

4º) La probabilidad de que un trabajador llegue puntual a su puesto de trabajo es ¾. Entre los trabajadores que llegan tarde, la mitad va en transporte público. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Un trabajador elegido al azar llegue tarde al trabajo y vaya en transporte público.

b) Si se eligen tres trabajadores al azar, al menos uno de ellos llegue puntual. Supóngase que la puntualidad de cada uno de ellos es independiente de la del resto.

----

a)

Probabilidad de que llegue puntual: $P(P) = \frac{3}{4}$.

Probabilidad de que llegue tarde: $P(T) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

Probabilidad de llegar tarde y en transporte público: $P(T|TP) = \frac{1}{2}$.

Por el teorema de Bayes sabemos que:

$$P(T|TP) = \frac{P(T \cap TP)}{P(TP)} \Rightarrow P(T \cap TP) = P(T|TP) \cdot P(TP) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

$$\underline{P(T \cap TP) = \frac{1}{8}}.$$

b)

La probabilidad de que al menos uno de ellos llegue puntual es equivalente a la probabilidad del suceso seguro menos la probabilidad de que los tres lleguen tarde:

$$P = 1 - P(T) \cdot P(T) \cdot P(T) = 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{64} = \frac{64-1}{64} = \underline{\frac{63}{64}}.$$

****

5º) En cierta región, el gasto familiar realizado en gas natural, medio en euros, durante un mes determinado se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica 75 euros.

a) Determínese el mínimo tamaño muestral necesario para que al estimar la media del gasto familiar en gas natural, μ, mediante un intervalo de confianza al 95 %, el error máximo cometido sea inferior a 15 euros.

b) Si la media del gasto familiar en gas natural, μ, es de 250 euros y se toma una muestra aleatoria simple de 81 familias, ¿cuál es la probabilidad de que la media muestral, $\overline{X}$, sea superior a 230 euros?

----

a)

Se conoce: $\sigma = 75, n = 81, E = 15$.

Para un nivel de confianza del 95 % es $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$.

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1,96 \cdot 75}{15}\right)^2 = (1,96 \cdot 5)^2 = 9,8^2 = 96,04.$$

$$\underline{El\ mínimo\ tamaño\ de\ la\ muestra\ debe\ ser\ de\ 97\ familias.}$$

b)

Se conoce: $\sigma = 75, n = 81, \overline{X} = 250$.

Normalizando los datos: $\overline{X} \rightarrow \left(N, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \overline{X} \rightarrow \left(250, \frac{75}{\sqrt{81}}\right) = (250, 8,33)$.

$$P(\overline{X} > 230) = P\left(\frac{\overline{X}-250}{8,33} > \frac{230-250}{8,33}\right) = P(Z > -2,4) = P(Z < 2,4) = 0,9918.$$

$$\underline{La\ probabilidad\ de\ que\ \overline{X} > 230\ es\ del\ 99,18\ \%.}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

SEPTIEMBRE – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá elegir una opción A o B y responder a todas las cuestiones de esa opción. Nunca podrá mezclar cuestiones de la opción A con cuestiones de la opción B. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

OPCIÓN A

1º) Hallar x, y, z para que se cumpla $\left(1\ y\ -1\ -\frac{y}{2}\ 2\ \frac{y}{2}\right)\cdot(x\ -2\ )+z\cdot(1\ -2\ 1\ )=(-\ 4\ 0\ -8\ )$.

$$\left(1\ y\ -1\ -\frac{y}{2}\ 2\ \frac{y}{2}\right)\cdot(x\ -2\ )+z\cdot(1\ -2\ 1\ )=(x-2y\ -x+y\ 2x-y\ )+$$

.

$$(x-2y+z\ -x+y-2z\ 2x-y+z\ )=(-\ 4\ 0\ -8\ )\Rightarrow x-2y+z=-\ 4\ -x$$

.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{|-4\ -2\ 1\ 0\ 1\ -2\ -8\ -1\ 1\ |}{|1\ -2\ 1\ -1\ 1\ -2\ 2\ -1\ 1\ |}=\frac{-4-32+8+8}{1+1+8-2-2-2}=\frac{-20}{4}=-\ 5.$$

$$y=\frac{|1\ -4\ 1\ -1\ 0\ -2\ 2\ -8\ 1\ |}{4}=\frac{8+16-16-4}{4}=\frac{4}{4}=1.$$

$$z=\frac{|1\ -2\ -4\ -1\ 1\ 0\ 2\ -1\ -8\ |}{4}=\frac{-8-4+8+16}{4}=\frac{12}{4}=3.$$

$$\underline{Solución\text{: } x=-\ 5,\ y=1,\ z=3}.$$

****

2º) Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

$a)\ \ f(x)=\frac{x^2}{x+2}$. $b)\ g(x)=(x-1)\cdot Lx$. $c)\ h(x)=e^{2x^5-1}$.

----

a)

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(x+2)-x^2\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+4x-x^2}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x}{(x+2)^2} = \frac{x(x+4)}{(x+2)^2}.$$

$$\underline{f'(x) = \frac{x(x+4)}{(x+2)^2}}.$$

b)

$$g'(x) = 1\cdot Lx + (x-1)\cdot\frac{1}{x} = Lx + \frac{x-1}{x} = \frac{xLx+x-1}{x}.$$

$$\underline{g'(x) = \frac{xLx+x-1}{x}}.$$

c)

$$h'(x) = e^{2x^5-1}\cdot 10x^4.$$

$$\underline{h'(x) = 10x^4\cdot e^{2x^5-1}}.$$

****

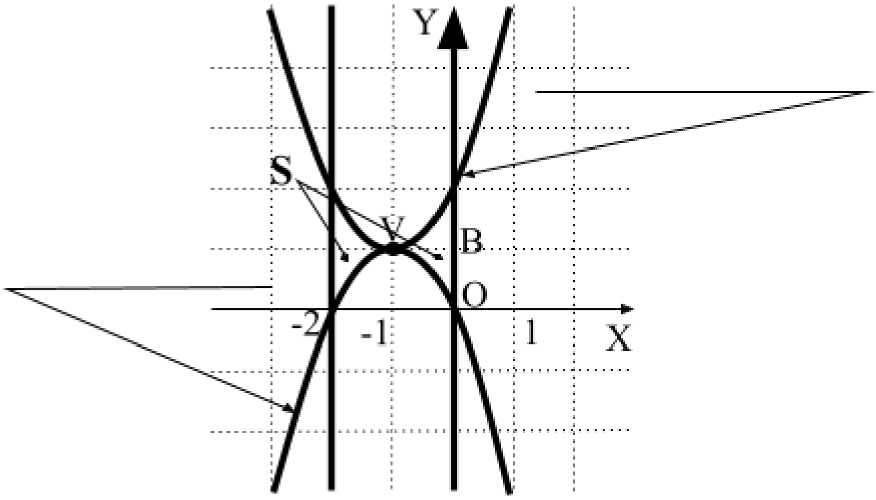
3º) Hallar el área del recinto acotado limitado por las curvas $f(x) = x^2 + 2x + 2$, $g(x) = - x^2 - 2x$ y las rectas $x = - 2$ y $x = 0$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

El vértice de la parábola convexa (∪) → $f(x) = x^2 + 2x + 2$ es el siguiente:

$f'(x) = 2x + 2 = 0 \rightarrow x = - 1 \Rightarrow V(- 1,\ 1)$.

El vértice de la parábola cóncava (∩) → $g(x) = - x^2 - 2x$ es el siguiente:

$g'(x) = - 2x - 2 = 0 \rightarrow x = - 1 \Rightarrow V(- 1,\ 1)$.



La representación gráfica de la situación se expresa en la figura adjunta.

Por ser las ordenadas de la parábola $f(x) = x^2 + 2x + 2$ iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola $g(x) = - x^2 - 2x$ en el intervalo del área a calcular y de la observación de la figura se deduce que:

$$S = \int_{-2}^{0} \left[\left(x^2 + 2x + 2\right) - \left(- x^2 - 2x\right)\right] dx = \int_{-2}^{0} \left(2x^2 + 4x + 2\right) \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{0} = \left[\frac{2x^3}{3} + 2x^2 + 2x\right]_{-2}^{0} =$$

$$= 0 - \left[\frac{2\cdot(-2)^3}{3} + 2\cdot(- 2)^2 + 2\cdot(- 2)\right] = \frac{16}{3} - 8 + 4 = \frac{16}{3} - 4 = \frac{16-12}{3} = \underline{\frac{4}{3}\, u^2 = S}$$

.

****

4º) En un grupo de estudiantes, un 10 % sabe inglés y alemán, un 50 % sabe inglés pero no alemán y, entre los que saben alemán, un 40 % sabe inglés.

a) ¿Qué porcentaje de estudiantes sabe inglés?

b) ¿Qué porcentaje sabe alemán?

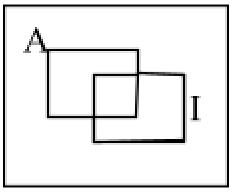
c) ¿Qué porcentaje sabe alguno de los dos idiomas?

Siendo: $P(I) \rightarrow Hablar\ inglés\ y\ P(A) \rightarrow Hablar\ alemán.$

$Datos: P(I \cap A) = 0,1; \ \ P(I \cap \overline{A}) = 0,5; \ \ P(I/A) = 0,4.$

a)

$$P(I \cap \overline{A}) = P(I) - P(I \cap A) \Rightarrow$$



$$\Rightarrow P(I) = P(I \cap \overline{A}) + P(I \cap A) = 0,5 + 0,1 = \underline{0,6}.$$

b)

$$P(I/A) = \frac{P(I \cap A)}{P(A)} \Rightarrow P(A) = \frac{P(I \cap A)}{P(I/A)} = \frac{0,1}{0,4} = \underline{\frac{1}{4} = 0,25}.$$

c)

$$P(I \cup A) = P(I) + P(A) - P(I \cap A) = 0,6 + 0,25 - 0,1 = \underline{0,75}.$$

****

5º) De una muestra aleatoria de 600 alumnos de una universidad, 121 tienen beca. Calcular un intervalo de confianza al 90 % para la proporción de alumnos de la universidad que tiene beca.

$$p = \frac{121}{600} = 0,202; \;\; q = 1 - p = 1 - 0,202 = 0,798; \;\; n = 600.$$

El intervalo de confianza es: $I.C. = \left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}},\ p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right).$

Para un nivel de confianza del 90 % es:

$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 1 - 0,90 = 0,10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,05} = 1,645.$$

$$(1 - 0,05 = 0,9500 \rightarrow z = 1,645).$$

$$I.C. = \left(0'202 - 1'645 \cdot \sqrt{\frac{0,202 \cdot 0,798}{600}},\ 0'202 + 1'645 \cdot \sqrt{\frac{0,202 \cdot 0,798}{600}}\right);$$

$$\left(0'202 - 1'645 \cdot 0'0164,\ 0'202 + 1'645 \cdot 0'0164\right);$$

$$\left(0'202 - 0'0270,\ 0'202 + 0'0270\right).$$

$$\underline{I.\ C. = \left(0'175,\ 0'229\right)}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Se quiere elaborar una diete con dos preparados alimenticios, A y B. Una porción de A contiene 30 mg de calcio, 10 mg de fósforo y 40 mg de magnesio, y cuesta 5 euros. Una porción de B contiene 40 mg de calcio, 30 mg de fósforo y 20 mg de magnesio, y cuesta 3 euros. La diete debe aportar, al menos, 350 mg de calcio, 150 mg de fósforo y 300 mg de magnesio. Hallar cuántas porciones de cada preparado deben utilizarse para satisfacer estos requisitos con el mínimo coste.

Sean x e y el número de porciones de preparados A y B, respectivamente.

El conjunto de restricciones son las siguientes:

$30x + 40y \geq 350$ $10x + 30y \geq 150$ $40x + 20y \geq 300$ $x \geq 0;\ y \geq 0 \}$ $3x + 4y \geq 3$

.

x	5	9
y	5	2

①$\Rightarrow 3x + 4y \geq 35 \Rightarrow y \geq \frac{35-3x}{4} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow No.$

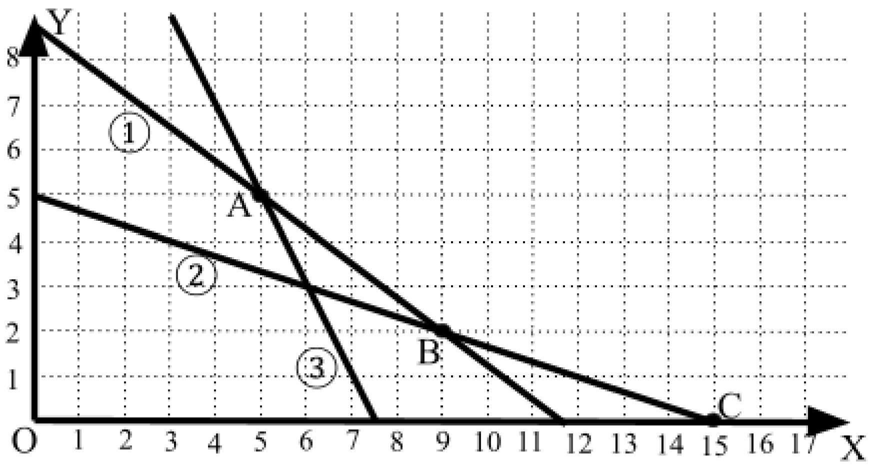
x	0	6
y	5	3

②$\Rightarrow x + 3y \geq 15 \Rightarrow y \geq \frac{15-x}{3} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow No.$

x	4	6
y	7	3

③$\Rightarrow 2x + y \geq 15 \Rightarrow y \geq 15 - 2x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow No.$

La región factible, que es abierta, se indica en la figura.



La función de objetivos es $f(x,\ y) = 5x + 3y$.

Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 4y = 35 \\ 2x + y = 15 \end{array} \right\} \Rightarrow A(5,\ 5).$

$B \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 4y = 35 \\ x + 3y = 15 \end{array} \right\} \Rightarrow B(9,\ 2).$

$C \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3y = 15 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow C(15,\ 0).$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(5,\ 5) = 5 \cdot 5 + 3 \cdot 5 = 25 + 15 = 40.$

$B \Rightarrow f(9,\ 2) = 5 \cdot 9 + 3 \cdot 2 = 45 + 6 = 51.$

$C \Rightarrow f(15,\ 0) = 5 \cdot 15 + 3 \cdot 0 = 75 + 0 = 75.$

$\underline{El\ mínimo\ coste\ se\ produce\ en\ el\ punto\ A\ y\ su\ valor\ es\ 40\ euros}.$

$\underline{Para\ la\ dieta\ deben\ utilizarse\ 5\ porciones\ de\ A\ y\ 5\ porciones\ de\ B}.$

****

2º) En las cuatro primeras horas de un concierto, el número de miles de asistentes después de t horas, una vez comenzado, varía según la función $f(t) = 2t^3 - 27t^2 + 84t$, con $0 \leq t \leq 4$. Hallar el número máximo de asistentes al concierto en ese intervalo de tiempo.

La condición necesaria para que una función tenga un máximo relativo es que se anule su primera derivada y su segunda derivada sea negativa para los valores que anulan la primera.

$$f'(t) = 6t^2 - 54t + 84.$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow 6t^2 - 54t + 84 = 0;\ \ t^2 - 9t + 14 = 0;\ \ t = \frac{9 \pm \sqrt{81-56}}{2} =$$

$= \frac{9 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{9 \pm 5}{2} \Rightarrow t_1 = 7,\ t_2 = 2.$ (t_1 no pertenece al dominio de f).

$$f''(t) = 12t - 54.$$

$$f''(2) = 12 \cdot 2 - 54 = 24 - 54 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ t = 2.$$

$$f(2) = 2 \cdot 2^3 - 27 \cdot 2^2 + 84 \cdot 2 = 16 - 108 + 168 = 76.$$

$\underline{El\ máximo\ nº\ de\ asistentes\ se\ produce\ a\ la\ 2ª\ hora\ y\ es\ de\ 76.000}$.

****

3º) Hallar las siguientes integrales:

$a)\ I_1 = \int_0^2 \left(x^3 + 2x - 1\right)\cdot dx.$ $\qquad b)\ I_2 = \int \left(5e^x + 3\right)\cdot dx.$

$a)$

$$I_1 = \int_0^2 \left(x^3 + 2x - 1\right)\cdot dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^2}{2} - x\right]_0^2 = \left[\frac{x^4}{4} + x^2 - x\right]_0^2 =$$

$$= \left(\frac{2^4}{4} + 2^2 - 2\right) - 0 = \frac{16}{4} + 4 - 2 = 4 + 2 = 6.$$

$$\underline{I_1 = \int_0^2 \left(x^3 + 2x - 1\right)\cdot dx = 6.}$$

$b)$

$$I_2 = \int \left(5e^x + 3\right)\cdot dx = 5e^x + 3x.$$

$$\underline{I_2 = \int \left(5e^x + 3\right)\cdot dx = 5e^x + 3x.}$$

****

4º) Dados los sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio, se saben las siguientes probabilidades: $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,3$ y $P(A \cup B) = 0,6$. ¿Son A y B independientes?

Dos sucesos A y B son independientes cuando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,5 + 0,3 - 0,6 = 0,8 - 0,6 = 0,2.$

$P(A) \cdot P(B) = 0,5 \cdot 0,3 = 0,15 \neq P(A \cap B).$

$\underline{Los\ sucesos\ A\ y\ B\ no\ son\ independientes}.$

****

5º) Antes del lanzamiento de una campaña de publicidad, el ingreso diario por las ventas en unos grandes almacenes seguía una normal de media 7.500 euros y desviación típica de 1.000 euros. Pasados unos meses de la introducción de la campaña, para una muestra de 40 días se obtuvo una media de ingreso diario de 8.000 euros. Si el ingreso diario sigue siendo normal con la misma desviación típica, plantear un contraste para contrastar la hipótesis de que con dicha media la situación sigue igual, frente a que ha mejorado, como parecen indicar los datos. ¿A qué conclusión se llega para un nivel de significación del 5 %?

$Hipótesis\ nula \rightarrow H_0: \mu = 7.500$ $\qquad$ $Hipótesis\ alternativa \rightarrow H_1: \mu > 7.500 \}$

.

$1 - \alpha = 1 - 0,5 = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96$

.

$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96)$.

Conocemos: $\overline{x} = 7.500,\ \sigma = 1.000;\ n = 40;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,02} = 1,96.$

Se aplica la fórmula adecuada que nos da el intervalo de confianza pedido, que es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(7.500 - 1'96 \cdot \frac{1.000}{\sqrt{40}}, 7.500 + 1'96 \cdot \frac{1.000}{\sqrt{40}}\right)$;

$\left(7.500 - 1'96 \cdot 158'114,\ 7.500 + 1'96 \cdot 158'114\right)$;

$\left(7.500 - 309'903,\ 7.500 + 309'903\right) \Rightarrow \left(7.190'097,\ 7.809'097\right)$.

La media muestral es $\mu = 8.000$.

Por NO encontrarse la media muestral en la zona de contraste:

$\underline{Se\ admite\ que\ han\ mejorado\ los\ ingreso\ después\ de\ la\ campaña.}$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

JUNIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B).

PRUEBA A

1º) Una compañía produce dos modelos de un determinado artículo A y B, para los que se requieren tres recursos. La cantidad de cada recurso necesaria para producir una unidad de los productos, la disponibilidad de cada recurso y los beneficios unitarios, se recogen en la siguiente tabla:

	A	B	$Disponibilidad\ (diaria)$
Recurso 1	4	5	64
Recurso 2	1	3	30
Recurso 3	4	1	48
Beneficio unitario	7	12	

Formule el modelo que permita encontrar una política de producción diaria que maximice el beneficio.

$i)$ Plantee el problema. $ii)$ Resolución gráfica.

$iii)$ Analice gráficamente qué ocurre si el beneficio unitario de A se reduce a 4.

$i)$

Sean x e y el número de artículos que se producen de los tipos A y B, respectivamente.

Las condiciones del problema se establecen en el siguiente sistema de inecuaciones: $4x + 5y \leq 64 \quad x + 3y \leq 30 \quad 4x + y \leq 48 \;\; x \geq 0; \;\; y \geq 0 \,\}$.

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,\, y) = 7x + 12y$.

$ii)$

La representación gráfica de la situación es la siguiente:

x	11	6
y	4	8

①$\Rightarrow 4x + 5y \leq 64 \Rightarrow y \leq \frac{64-4x}{5} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	0	15
y	10	5

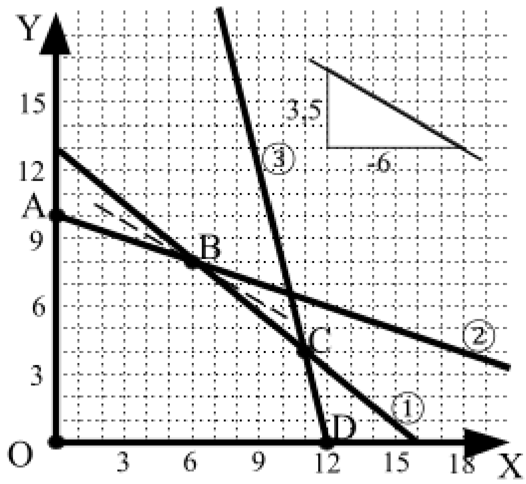
②$\Rightarrow x + 3y \leq 30 \Rightarrow y \leq \frac{30-x}{3} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	12	10
y	0	8

③$\Rightarrow 4x + y \leq 48 \Rightarrow y \leq 48 - 4x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

La región factible se indica en la figura, cuyos vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ x + 3y = 30 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,\ 10).$



$B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x + 5y = 64 \\ x + 3y = 30 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} -4x - 5y = -64 \\ 4x + 12y = 120 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 7y = 56 \rightarrow y = 8 \Rightarrow B(6,\ 8).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x + 5y = 64 \\ 4x + y = 48 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 4x + 5y = 64 \\ -4x - y = -48 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4y = 16 \rightarrow y = 4 \Rightarrow C(11,\ 4).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x + y = 48 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow D(12,\ 0).$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 10) = 7 \cdot 0 + 12 \cdot 10 = 0 + 120 = 120.$

$B \Rightarrow f(6,\ 8) = 7 \cdot 6 + 12 \cdot 8 = 42 + 96 = 138.$

$C \Rightarrow f(11,\ 4) = 7 \cdot 11 + 12 \cdot 4 = 77 + 48 = 125.$

$D \Rightarrow f(12,\ 0) = 7 \cdot 12 + 12 \cdot 0 = 84 + 0 = 84.$

El máximo se produce en el punto B.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,\ y) = 7x + 12y = 0 \Rightarrow y = -\frac{7}{12}x = -\frac{3,5}{6}x \Rightarrow m = -\frac{3,5}{6}.$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ se\ obtiene\ produciendo\ 6\ modelos\ A\ y\ 8\ modelos\ B.}$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ diario\ es\ de\ 138\ euros.}$$

$iii)$

Si el beneficio unitario de A se reduce a 4, la función de beneficios pasa a ser la siguiente: $f(x,\ y) = 4x + 12y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son ahora los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 10) = 4 \cdot 0 + 12 \cdot 10 = 0 + 120 = 120.$

$B \Rightarrow f(6,\ 8) = 4 \cdot 6 + 12 \cdot 8 = 24 + 96 = 120.$

$C \Rightarrow f(11,\ 4) = 4 \cdot 11 + 12 \cdot 4 = 44 + 48 = 92.$

$D \Rightarrow f(12,\ 0) = 4 \cdot 12 + 12 \cdot 0 = 48 + 0 = 48.$

El máximo beneficio se obtiene en todos los puntos enteros del segmento AB, que son $A(0,\ 10)$, $B(6,\ 8) y\ N(3,\ 9)$.

$$\underline{Beneficio\ máximo\ produciendo:\ \{0\ modelos\ A\ y\ 10\ modelos\ B\ 6\ modelos\ A\ y\ 8\ model}$$

.

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ diario\ es\ de\ 120\ euros.}$$

****

2º) Si la variación de la temperatura T $(en\ °C)$ en una noche de invierno se pudo representar por la función $T = \frac{1}{5}\left(t^2 - 14t + 24\right)$, $0 \leq t \leq 12$, t es el tiempo en horas.

$i)$ ¿A qué hora hubo una temperatura de cero grados?

$ii)$ ¿Cuál fue la temperatura mínima? ¿A qué hora se produjo?

$iii)$ ¿A qué hora fue la temperatura máxima?

$iv)$ ¿En qué horas hubo temperaturas bajo cero?

$i)$

$$T = 0 \Rightarrow \frac{1}{5}\left(t^2 - 14t + 24\right) = 0;\ \ t^2 - 14t + 24 = 0;\ \ t = \frac{14 \pm \sqrt{196-96}}{2} =$$

$$= \frac{14 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{14 \pm 10}{2} = 7 \pm 5 \Rightarrow t_1 = 2,\ t_2 = 12.$$

$\underline{Hubo\ una\ temperatura\ de\ 0°C\ a\ las\ 2\ hora\ y\ a\ las\ 12\ horas}.$

$ii)$

La condición necesaria para que una función tenga un mínimo relativo es que se anule su primera derivada:

$$T'(t) = \frac{1}{5}(2t - 14) = 0;\ \ 2t - 14 = 0;\ \ t - 7 = 0 \Rightarrow t = 7.$$

$\underline{La\ temperatura\ mínima\ se\ produce\ a\ las\ 7\ horas}.$

$$T(7) = \frac{1}{5}\left(7^2 - 14 \cdot 7 + 24\right) = \frac{1}{5}(49 - 98 + 24) = \frac{1}{5}(73 - 98) = \frac{1}{5}(-25) =$$

$$= -5.$$

$\underline{La\ temperatura\ mínima\ fue\ de\ 5°C\ bajo\ cero}.$

$iii)$

Por ser la función $T = \frac{1}{5}\left(t^2 - 14t + 24\right)$ una parábola convexa (∪) tiene un mínimo absoluto (que es el hallado en el apartado anterior). El valor máximo tiene que alcanzarse en uno de los extremos del intervalo:

$$T(0) = \frac{1}{5} \cdot 24 = \frac{24}{5} = 4,8.$$

$$T(12) = \frac{1}{5}\left(12^2 - 14\cdot 12 + 24\right) = \frac{1}{5}(144 - 168 + 24) = 0.$$

$$\underline{La\ temperatura\ máxima\ fue\ a\ las\ 0\ horas.}$$

$iv)$

Los puntos de corte de la función con el eje X son los puntos $A(2,\ 0)$ y $B(7,\ 0)$, que se deducen del apartado i).

Teniendo en cuenta la convexidad de la función:

$$\underline{Hubo\ temperaturas\ bajo\ cero\ entre\ las\ 2\ y\ las\ 12\ horas.}$$

****

3º) Se está estudiando el número de personas que pasan por un puente peatonal al día. Se sabe que se distribuye como una normal con desviación típica de 11. Se toma una muestra aleatoria de 81 días y se obtiene que el número medio de personas que pasan es 114,8. ¿Es admisible, con un 10 % de significación, la hipótesis de que pasan al menos 116 personas al día? Escriba las fórmulas necesarias y justifique la respuesta.

$a)$

$Hipótesis\ nula \to H_0: \mu \geq 116$ $\quad$ $Hipótesis\ alternativa \to H_1: \mu < 116$ }

. Contraste unilateral.

Conocemos: $n = 81;\ \mu_0 = 116;\ \sigma = 11.$

$\alpha = 0,10 \to z_\alpha = 1,28.$ $\quad$ $(1 - 0,10 = 0,9000 \to z = 1,28).$

Se aplica la fórmula adecuada que nos da el intervalo de confianza pedido, que es la siguiente: $\left(\mu_0 - z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ +\infty\right).$

$\left(116 - 1'28 \cdot \frac{11}{\sqrt{81}},\ +\infty\right);$

$\left(116 - 1'28 \cdot 1,222,\ +\infty\right);$ $\left(116 - 1'564,\ +\infty\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(114'436,\ +\infty\right).$

$\underline{\overline{x} = 114'8 \in \left(114'436,\ +\infty\right) \Rightarrow Se\ acepta\ la\ hipótesis\ nula}.$

$\underline{Con\ significación\ 10\ \%\ se\ admite\ que\ pasan\ al\ menos\ 116\ personas\ al\ día.}$

****

OPCIÓN B

1º) Determine las matrices A y B que verifican:

$A + B = (3 \ - 2\ 3\ 5\ 3\ 2 \quad - 1\ 1\ )$ y $2A - 3B = (1\ 1\ 6\ 0 \ - 4 \ - 1 \quad 3\ 2\ )$.

¿Es regular la matriz $A \cdot A^t$?

$A + B = (3 \ - 2\ 3\ 5\ 3\ 2 \quad - 1\ 1\ )\ 2A - 3B = (1\ 1\ 6\ 0 \ - 4 \ - 1 \quad 3\ 2\ )\ \}\ 3A + 3B =$

$\Rightarrow 5A = (10 \ - 5\ 15\ 15\ 5\ 5 \quad 0\ 5\ ) \Rightarrow \underline{A = (2 \ - 1\ 3\ 3\ 1\ 1 \quad 0\ 1\ )}$.

$- 2A - 2B = (- 6\ 4 \ - 6 \ - 10 \ - 6 \ - 4 \quad 2 \ - 2\ )\ 2A - 3B = (1\ 1\ 6\ 0 \ - 4$

$\Rightarrow \underline{B = (1 \ - 1\ 0\ 2\ 2\ 1 \quad - 1\ 0\ )}$.

$A \cdot A^t = (2 \ - 1\ 3\ 3\ 1\ 1 \quad 0\ 1\ ) \cdot (2\ 3 \ - 1\ 1\ 3\ 0\ 1\ 1\ ) = (14\ 8\ 8\ 12\ )$.

Una matriz es regular o invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$\left| A \cdot A^t \right| = |14\ 8\ 8\ 12\ | = 14 \cdot 12 - 8 \cdot 8 \neq 0$.

$\underline{La\ matriz\ A \cdot A^t\ es\ regular\ o\ invertible}$.

****

2º) Halle una función polinómica de grado 3, $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, sabiendo que pasa por el punto $A(1,\ 2)$ y tiene un extremo relativo en el punto $B(0,\ 4)$. Halle los máximos y mínimos relativos de dicha función. ¿Tiene máximo o mínimo absoluto?

Por contener $f(x)$ al punto $A(1,\ 2) \Rightarrow f(1) = 2$:

$f(1) = 2 \Rightarrow 1^3 + a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c = 2;\ \ a + b + c = 1$ (1)

Por tener $f(x)$ un máximo relativo en $B(0,\ 4) \Rightarrow f'(0) = 0$:

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b.$ $f'(0) = 0 \Rightarrow \underline{b = 0}$.

Por contener $f(x)$ al punto $B(0,\ 4) \Rightarrow f(0) = 4 \Rightarrow \underline{c = 4}$.

$f(1) = 2 \Rightarrow 1^3 + a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c = 2;\ \ a + b + c = 1$ (1)

Sustituyendo en (1) los valores obtenidos de b y c:

$a + 0 + 4 = 1 \Rightarrow \underline{a = -3}$.

La función resulta: $\underline{f(x) = x^3 - 3x^2 + 4}$.

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0;\ \ 3x(x - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 3.$

$f''(x) = 6x - 6 \Rightarrow \{ f''(0) = -6 < 0 \rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 0\ f''(3) = 12 > 0 \rightarrow Mí$
.

$\underline{Máximo\ relativo: B(0,\ 4)}$.

$f(3) = 3^3 - 3\cdot 3^2 + 4 = 27 - 27 + 4 = 4 \Rightarrow \underline{Mínimo\ relativo: C(3,\ 4)}$.

Teniendo en cuenta que $f(x) = -\infty$ y $f(x) = +\infty$:

$\underline{La\ función\ f(x)\ no\ tiene\ máximos\ ni\ mínimos\ absolutos}$.

****

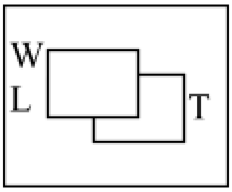
3º) Según un estudio realizado en la Upna, el 80 % de los alumnos usa whatsapp para comunicarse con sus amigos, el 40 % usa las llamadas de teléfono tradicionales y el 25 % ambos métodos. Calcule:

i) La probabilidad de que un alumno elegido al azar no utilice ninguna de esas vías de comunicación.

ii) La probabilidad de que un alumno elegido al azar utilice únicamente una de esas vías de comunicación.

iii) Si un alumno usa whatsapp, ¿cuál es la probabilidad de que use las llamadas tradicionales?

$$P(W) = 0,8; \;\; P(T) = 0,4; \;\; P(W \cap T) = 0,25.$$

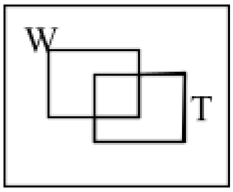


i)

$$P = P(\overline{W} \cap \overline{T}) = 1 - P(W \cup T) =$$

$$= 1 - [P(W) + P(T) - P(W \cap T)] = 1 - (0,8 + 0,4 - 0,25) = 1 - 0,95 = \underline{0,05}$$

.



ii)

$$P = P(W \cup T) - P(W \cap T) = 0,95 - 0,25 = \underline{0,7}.$$

iii)

$$P(T/W) = \frac{P(T \cap W)}{P(W)} = \frac{0,25}{0,8} = \underline{0,3125}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

SEPTIEMBRE – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B).

OPCIÓN A

1º) Una empresa fabrica dos tipos de relojes: el reloj de pedestal y el de pared. La empresa tiene tres secciones, en la primera ensamblan las partes del reloj, en la segunda se producen las cajas de madera labradas a mano y en la tercera se embalan y envían los relojes. El tiempo requerido para cada tarea viene dado en la siguiente tabla:

	Reloj pedestal	*Reloj de pared*
Ensamblar mecanismo	2 horas	6 horas
Labrar caja de madera	4 horas	3 horas
Embalar y enviar	2 horas	3 horas

La primera sección pueden trabajar hasta un máximo de 52 horas por semana, la segunda hasta 44 horas y la tercera sólo puede trabajar 28 horas por semana. Cada reloj de pedestal deja una ganancia de 300 euros, mientras que cada reloj de pared proporciona una ganancia de 200 euros. La empresa puede vender todos los relojes que produzca y desea maximizar los beneficios.

i) Plantee el problema. ii) Resolución gráfica.

iii) Analice gráficamente qué ocurriría si cada reloj proporciona una ganancia de 300 euros.

----

i)

Sean x e y el número de relojes de pedestal y de pared que se fabrican, respectivamente.

El conjunto de restricciones son las siguientes:

$2x + 6y \leq 52 \; 4x + 3y \leq 44 \; 2x + 3y \leq 28 \;\; x \geq 0; \; y \geq 0 \}$ $\quad x + 3y \leq 26 \; 4x + 3y \leq 44$

.

x	26	5

y	0	7

①$\Rightarrow x+3y\leq 26\Rightarrow y\leq \frac{26-x}{3}\Rightarrow O(0,\ 0)\to Si.$

x	11	8
y	0	4

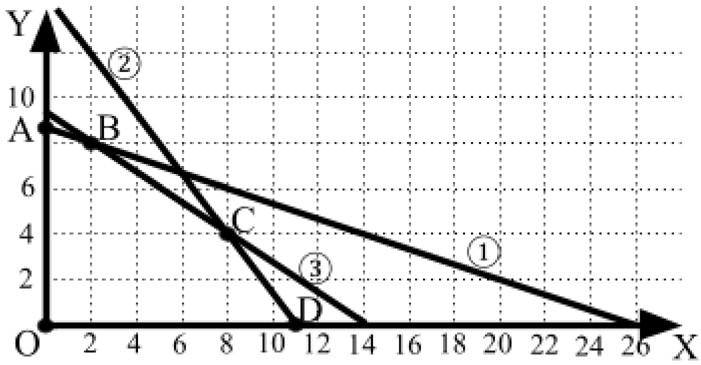
②$\Rightarrow 4x+3y\leq 44\Rightarrow y\leq \frac{44-4x}{3}\Rightarrow O(0,\ 0)\to Si.$

x	14	5
y	0	6

③$\Rightarrow 2x+3y\leq 28\Rightarrow y\leq \frac{28-2x}{3}\Rightarrow O(0,\ 0)\to Si.$

$ii)$

La región factible es la zona sombreada de la figura.



La función de objetivos es $f(x,\ y)=300x+200y$.

Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+3y=26 \\ x=0 \end{array}\right\}\Rightarrow A\left(0,\ \frac{26}{3}\right).$

$B\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+3y=26 \\ 2x+3y=28 \end{array}\right\}\Rightarrow B(2,\ 8).$

$C\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x+3y=44 \\ 2x+3y=28 \end{array}\right\}\Rightarrow C(8,\ 4).$

$D\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x+3y=44 \\ y=0 \end{array}\right\}\Rightarrow D(11,\ 0).$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A\Rightarrow f\left(0,\ \frac{26}{3}\right)=300\cdot 0+200\cdot \frac{26}{3}=0+1.733,33=1.733,33.$

$B\Rightarrow f(2,\ 8)=300\cdot 2+200\cdot 8=600+1.600=2.200.$

$C\Rightarrow f(8,\ 4)=300\cdot 8+200\cdot 4=2.400+800=3.200.$

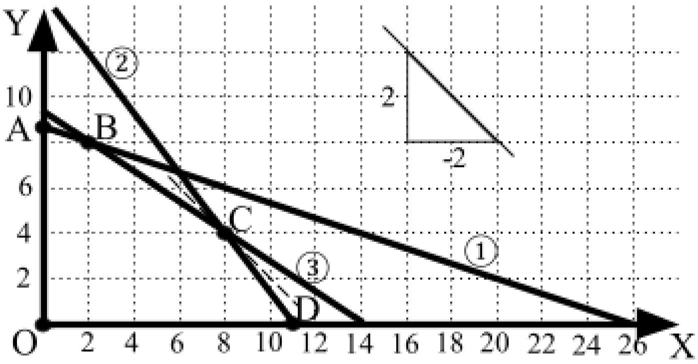
$D\Rightarrow f(11,\ 0)=300\cdot 11+200\cdot 0=3.300+0=3.300.$

$\underline{Los\ beneficios\ son\ máximos\ produciendo\ 11\ relojes\ de\ padestal}.$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 3.300\ euros.}$

$iii)$

Si cada reloj proporciona una ganancia de 300 euros, la función de beneficios es la siguiente: $f(x,\ y) = 300x + 300y$.



El punto de máximo rendimiento puede obtenerse por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,\ y) = 300x + 300y = 0 \Rightarrow y = -\frac{300}{300}x \Rightarrow m = -1.$$

Como se observa en el gráfico, el punto de máximo rendimiento es el C, como se justifica por los valores de los vértices de la zona factible:

$$A \Rightarrow f\left(0,\ \frac{26}{3}\right) = 300 \cdot 0 + 300 \cdot \frac{26}{3} = 0 + 2.600 = 2.600.$$

$$B \Rightarrow f(2,\ 8) = 300 \cdot 2 + 300 \cdot 8 = 600 + 2.400 = 3.000.$$

$$C \Rightarrow f(8,\ 4) = 300 \cdot 8 + 300 \cdot 4 = 2.400 + 1.200 = 3.600.$$

$$D \Rightarrow f(11,\ 0) = 300 \cdot 11 + 300 \cdot 0 = 3.300 + 0 = 3.300.$$

$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ produciendo\ 8\ relojes\ de\ padestal\ y\ 4\ de\ pared}$.

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 3.600\ euros.}$

****

2º) Dada la función $f(x) = \{3x^2 + 1 \ si \ x \leq 1 \ \ 2x + 1 \ si \ 1 < x < 4 \ x^2 - 7 \ \ si \ \ x \geq 4$.

i) Estudie su continuidad y derivabilidad en todo R.

ii) Represéntela gráficamente.

iii) Aplicando la definición de derivada, calcule la derivada de $f(x)$ en $x = 5$.

----

i)

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto.

La función f(x) es continua en $\forall x \in R$, excepto para los valores de la abscisa $x = 1$ y $x = 4$, cuya continuidad es dudosa.

Para que la función sea continua en un punto es necesario que sus límites laterales sean iguales e igual al valor de la función en ese punto.

$$x = 1 \Rightarrow f(x) \ = \left(3x^2 + 1\right) = 4 = f(1) \ \ f(x) \ = (2x + 1) = 2 + 1 = 3 \ \} \Rightarrow f(x)$$

.

$\underline{La\ función\ f(x)\ no\ es\ continua\ para\ x = 1}$.

Para que la función sea continua en $x = 4$ es necesario que sus límites laterales sean iguales e igual al valor de la función en ese punto.

$$x = 4 \Rightarrow f(x) \ = (2x + 1) = 9 \qquad f(x) \ = \left(x^2 - 7\right) = 9 = f(4) \ \} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) \ = f(x) \ = f(4).$$

$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ para\ x = 4}$.

Una función es derivable en un punto cuando existen las derivadas laterales en ese punto y además son iguales:

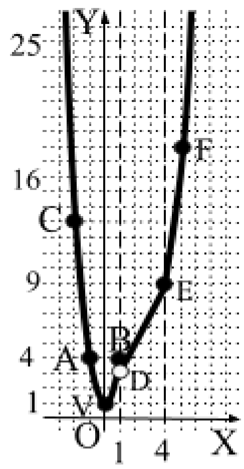
$$f'(x) = \{ \ 6x \ \ si \ \ x \leq 1 \ \ 2 \ si \ 1 < x < 4 \ \ 2x \ \ si \ \ x \geq 4 \qquad \Rightarrow \qquad f'\left(4^-\right) = 2.$$

$f'\left(4^+\right) = 8.$

$$f'\left(4^-\right) \neq f'\left(4^+\right) \Rightarrow \underline{La\ función\ f(x)\ no\ es\ derivable\ para\ x = 4}.$$

ii)

En el intervalo $(-\infty, 1]$ la función es $f(x) = 3x^2 + 1$, que es una parábola convexa (∪) simétrica respecto al eje Y cuyo vértice es el punto $V(0,\ 1)$. Otros puntos de este intervalo son $A(-\ 1,\ 4)$, $B(1,\ 4)$ y $C(-\ 2,\ 13)$.



En el intervalo $[1,\ 4)$ la función es la recta $f(x) = 2x + 1$, cuyos extremos son los puntos $D(1,\ 3)$ y $E(4,\ 9)$.

En el intervalo $[4,\ +\ \infty)$ la función es $f(x) = x^2 - 7$, que es una parábola convexa (∪) simétrica respecto al eje Y cuyo vértice es el punto $M(0,\ -\ 7)$, que no pertenece al intervalo. Son puntos de este intervalo $F(5,\ 18)$ y $G(6,\ 29)$.

La representación gráfica, aproximada, se expresa en la figura adjunta.

iii)

Para $x = 5$ la función es $f(x) = x^2 - 7$.

$$f'(5) = \frac{f(5+h)-f(5)}{h} = \frac{\left[(5+h)^2-7\right]-\left(5^2-7\right)}{h} = \frac{25+10h+h^2-7-25+7}{h} =$$

$$= \frac{10h+h^2}{h} = \frac{h(10+h)}{h} = (10 + h) = 10\ .$$

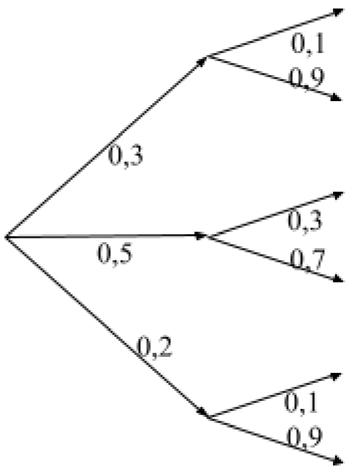
$$\underline{f'(5) = 10}.$$

****

3º) En un taller de reparación de automóviles trabajan tres mecánicos. El mecánico A repara el 30 % de los coches, el mecánico B el 50 % y el C el 20 %. La probabilidad de que un coche tenga algún defecto en la reparación y se lleve de nuevo al taller para que vuelva a ser reparado gratis es de 0,1 si dicho coche la han reparado A o C y de 0,3 si ha sido reparado por B.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un coche reparado en el taller vuelva para ser reparado gratis?

b) Si se sabe que un coche ha tenido un defecto de reparación, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido el mecánico A quien lo reparara inicialmente?



a)

$$P = P(M/A) + P(M/B) + P(M/C) = 0,3 \cdot 0,1 + 0,5 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,1 =$$

$$= 0,03 + 0,15 + 0,02 = \underline{0,20}.$$

b)

$$P = P(A/M) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)} = \frac{0,3 \cdot 0,1}{0,03+0,15+0,02} = \frac{0,03}{0,20} = \underline{0,15}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Dadas las matrices $A = (0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ ); B = (1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ )$. Halle la matriz X que cumpla la ecuación matricial: $A^2 + BX = 3I$, siendo I la matriz identidad.

$$A^2 + BX = 3I;\ \ BX = 3I - A^2;\ \ B^{-1}\cdot B\cdot X = B^{-1}\cdot\left(3I - A^2\right);$$

$I\cdot X = B^{-1}\cdot\left(3I - A^2\right) \Rightarrow \underline{X = B^{-1}\cdot\left(3I - A^2\right)}.$

$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_2 \to F_2 - F_1\ F_3 \to F_3 - F_2\right\} \Rightarrow (1\ 0\ 0\ \ -\ 1\ 1\ 0\ 0\ \ -\ 1\ 1\ ) \Rightarrow$

$\Rightarrow B^{-1} = (1\ 0\ 0\ \ -\ 1\ 1\ 0\ 0\ \ -\ 1\ 1\ ).$

$$3I - A^2 = 3I - A\cdot A = 3I - (0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ )\cdot(0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) =$$

$= (3\ 0\ 0\ 0\ 3\ 0\ 0\ 0\ 3\ ) - (1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ ) = (2\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 2\ \ -\ 1\ 0\ 0\ 2\ ) = 3I - A^2$

.

Sustituyendo en la expresión de X los valores obtenidos:

$X = B^{-1}\cdot\left(3I - A^2\right) = (1\ 0\ 0\ \ -\ 1\ 1\ 0\ 0\ \ -\ 1\ 1\ )\cdot(2\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 2\ \ -\ 1\ 0\ 0\ 2\ ) = (2\ 0$

.

$$\underline{X = (2\ 0\ \ -\ 1\ \ -\ 2\ 2\ 0\ 0\ \ -\ 2\ 3\ )}.$$

****

2º) Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

$i)\ f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$. $\quad ii)\ g(x) = x \cdot L(3x + 5)$. $\quad iii)\ h(x) = 4sen\, x^2 + e^{x^2+1}$.

$i)\ f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1\cdot(x+1)-x\cdot 1}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{x}{x+1}}} = \frac{\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}{\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}} = \frac{\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}\cdot(x+1)^2} = \underline{\frac{\sqrt{x(x+1)}}{2x\cdot(x+1)^2}}.$$

Otra forma mejor:

$$L[f(x)] = \frac{1}{2}Lx - \frac{1}{2}L(x + 1) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2(x+1)} = \frac{x+1-x}{2x\cdot(x+1)} = \frac{1}{2x\cdot(x+1)}.$$

$$f'(x) = \frac{1}{2x\cdot(x+1)} \cdot \sqrt{\frac{x}{x+1}} = \underline{\frac{\sqrt{x(x+1)}}{2x\cdot(x+1)^2}}.$$

$ii)\ g(x) = x \cdot L(3x + 5)$.

$$g'(x) = 1\cdot L(3x + 5) + x\cdot\frac{3}{3x+5} = \underline{\frac{(3x+5)\cdot L(3x+5)+3x}{3x+5}}.$$

$iii)\ h(x) = 4sen\, x^2 + e^{x^2+1}$.

$$h'(x) = 4\cdot 2x\cdot cos\, x^2 + 2x\cdot e^{x^2+1} = \underline{2x\cdot\left(4 \cos cos\, x^2 + e^{x^2+1}\right)}$$

****

3º) La antigüedad de los aviones comerciales sigue una distribución normal con una desviación típica de 11 años. Se toma una muestra de 49 aviones y la antigüedad media de estos es de 13,6 años.

i) ¿Se puede aceptar, con un nivel de significación 0'10, que la vida media de los aviones comerciales es superior o igual a 14 años?

ii) ¿Y si el nivel de significación es 0'01?

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas).

----

i)

$Hipótesis\ nula \rightarrow H_0: \mu \geq 14$ $\qquad$ $Hipótesis\ alternativa \rightarrow H_1: \mu < 14\}.$

Contraste unilateral.

Conocemos: $n = 49;\ \mu_0 = 14;\ \sigma = 11.$

$\alpha = 0,10 \rightarrow z_\alpha = 1,28.$ $\qquad$ $(1 - 0,10 = 0,9000 \rightarrow z = 1,28).$

Se aplica la fórmula adecuada que nos da el intervalo de confianza pedido, que es la siguiente: $\left(\mu_0 - z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ +\infty\right).$

$$\left(14 - 1'28 \cdot \frac{11}{\sqrt{49}},\ +\infty\right);$$

$$\left(14 - 1'28 \cdot 1,571,\ +\infty\right);\ \left(14 - 2'011,\ +\infty\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(11'989,\ +\infty\right).$$

$$\underline{\overline{x} = 13,6 \in \left(11'588,\ +\infty\right) \Rightarrow Se\ acepta\ la\ hipótesis\ nula.}$$

$$\underline{Con\ una\ significacion\ de\ 0,10\ la\ vida\ media\ es\ mayor\ o\ igual\ de\ 14\ años.}$$

b)

$Para\ \alpha = 0,01 \rightarrow z_\alpha = 2,33.$ $\qquad$ $(1 - 0,01 = 0,9900 \rightarrow z = 2,33).$

$$\left(14 - 2'33 \cdot 1,571,\ +\infty\right);\ \left(14 - 3'661,\ +\infty\right) \Rightarrow \left(10'339,\ +\infty\right).$$

$$\underline{\overline{x} = 13,6 \in \left(9'939,\ +\infty\right) \Rightarrow Se\ acepta\ la\ hipótesis\ nula.}$$

$$\underline{Con\ significación\ 0,01\ también\ la\ vida\ media\ es\ mayor\ o\ igual\ de\ 14\ años.}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

JULIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas. Está permitido el uso de calculadoras científicas que no sean programables.

OPCIÓN A

1º) $a)$ Representar gráficamente la región del plano definida por las siguientes inecuaciones: $0 \leq x,\ 0 \leq y,\ 3x + y \leq 60,\ x + 2y \leq 40$.

$b)$ Hallar el valor máximo de las funciones $F(x, y) = 6x + 5y$; $G(x, y) = 2x + 4y$ en dicha región y los puntos en los que se alcanza.

$a)$

Inecuaciones: $\left.\begin{array}{l} 3x + y \leq 60 \\ x + 2y \leq 40 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{array}\right\}$.

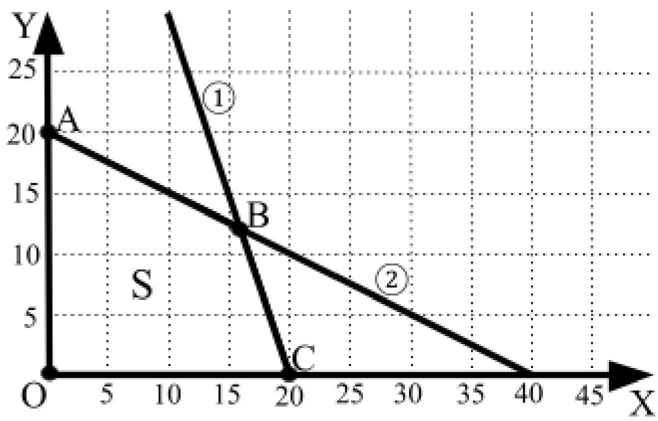
x	20	10
y	0	30

①$\Rightarrow 3x + y \leq 60 \Rightarrow y \leq 60 - 3x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	0	40
y	20	0

②$\Rightarrow x + 2y \leq 40 \Rightarrow y \leq \frac{40 - x}{2} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

Los vértices de la sección factible S son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + 2y = 40 \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,\ 20).$

$B \Rightarrow 3x + y = 60 \;\; x + 2y = 40 \} \; 6x + 2y = 120 \;\; -x - 2y = -40 \}$

$5x = 80 \;\; x = 16 \} \Rightarrow B(16,\ 12).$

$C \Rightarrow 3x + y = 60 \qquad y = 0 \} \Rightarrow C(20,\ 0).$

$b)$

Para la función de objetivos $F(x,\ y) = 6x + 5y$ los valores de los vértices son:

$A \Rightarrow F(0,\ 20) = 6 \cdot 0 + 5 \cdot 20 = 100.$

$B \Rightarrow F(16,\ 12) = 6 \cdot 16 + 5 \cdot 12 = 96 + 60 = 156.$

$C \Rightarrow F(20,\ 0) = 6 \cdot 20 + 5 \cdot 0 = 120 + 0 = 120.$

$\underline{El\ máximo\ se\ obtiene\ en\ el\ punto\ B(16,\ 12)}.$

Para la función de objetivos $G(x,\ y) = 2x + 4y$ los valores de los vértices son:

$A \Rightarrow F(0,\ 20) = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 20 = 0 + 80 = 80.$

$B \Rightarrow F(16,\ 12) = 2 \cdot 16 + 4 \cdot 12 = 32 + 48 = 80.$

$C \Rightarrow F(20,\ 0) = 2 \cdot 20 + 4 \cdot 0 = 40 + 0 = 40.$

$\underline{El\ máximo\ se\ obtiene\ en\ todos\ los\ puntos\ del\ segmento\ A(0,\ 20) - B(16,\ 12)}$

.

****

2º) El precio de la entrada en una sala de cine puede aumentar o disminuir de 50 en 50 céntimos con arreglo a la fórmula $p = 6 + 0,5x$ $(x = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ ....)$. El número de espectadores correspondiente a ese precio se calcula mediante la siguiente formula: $e = 320 - 20x$ $(x = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ ....)$.

a) Calcular el número de espectadores correspondiente a un precio de 5'5, 6 y 6'5 euros. ¿Cómo puedes interpretar el aumento o disminución del número de espectadores en función del precio?

b) Calcular la función que expresa los ingresos obtenidos en la sala en función de la variable x, desarrollando su expresión.

c) ¿Cuál es el precio de la entrada que hace que los ingresos sean máximos? ¿Cuál es el número de espectadores correspondientes a ese precio? ¿A cuánto ascienden esos ingresos máximos?

----

a)

Precio de la entrada 5,5 euros: $5,5 = 6 + 0,5x;\ \ -0,5 = 0,5x \Rightarrow x = -1$

Nº espectadores: $e(-1) = 320 - 20\cdot(-1) = 320 + 200 = \underline{340}$.

Precio de la entrada 6 euros: $6 = 6 + 0,5x;\ 0 = 0,5x \Rightarrow x = 0$

Nº espectadores: $e(0) = 320 - 20\cdot0 = 320 - 0 = \underline{320}$.

Precio de la entrada 6,5 euros: $6,5 = 6 + 0,5x;\ 0,5 = 0,5x \Rightarrow x = 1$

Nº espectadores: $e(1) = 320 - 20\cdot1 = 320 - 20 = \underline{300}$.

$$\underline{Al\ aumentar\ el\ precio\ disminuye\ el\ número\ de\ espectadores.}$$

b)

Los ingresos se obtienen multiplicando el precio de la entrada por el número de espectadores que asisten:

$$I(x) = p(x)\cdot e(x) = (6 + 0,5x)\cdot(320 - 20x) =$$

$$= 1.920 - 120x + 160x - 10x^2 = -10x^2 + 40x + 1.920.$$

$$\underline{I(x) = -10x^2 + 40x + 1.920}.$$

c)

La condición necesaria para que una función tenga un máximo relativo es que se anule su primera derivada y sea negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$I'(x) = -20x + 40 \Rightarrow I'(x) = 0 \Rightarrow -20x + 40 = 0 \Rightarrow x = 2.$$

$$I''(x) = -20 < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = 2.$$

$$p(2) = 6 + 0,5 \cdot 2 = 6 + 1 = 7.$$

$$\underline{Los\ ingresos\ son\ máximos\ cuando\ el\ precio\ de\ la\ entrada\ son\ 7\ euros}.$$

$$e(2) = 320 - 20 \cdot 2 = 320 - 40 = 280.$$

$$\underline{Con\ los\ ingresos\ máximos\ asisten\ 280\ espectadores}.$$

$$I(7) = -10 \cdot 7^2 + 40 \cdot 7 + 1.920 = -10 \cdot 49 + 280 + 1.920 =$$

$$= -490 + 2.200 = 1.710.$$

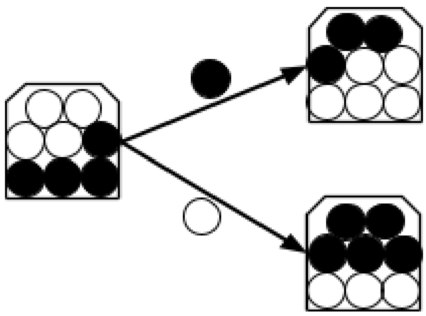
$$\underline{Los\ ingresos\ máximos\ ascienden\ a\ 1.710\ euros}.$$

****

3º) En una urna se tienen 4 bolas blancas y 4 negras. Se extrae una bola, se apunta su color y se reemplaza por otra bola del otro color. A continuación, se extrae una segunda bola. Calcular:

$a)$ La probabilidad de que las dos bolas sean del mismo color.

$b)$ La probabilidad de que la segunda bola sea blanca.



$\Rightarrow \{P(B) = \frac{5}{8}\ P(N) = \frac{3}{8}$

$\Rightarrow \{P(B) = \frac{3}{8}\ P(N) = \frac{5}{8}$

$a)$

$$P = P(B) \cdot P(B) + P(N) \cdot P(N) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{64} + \frac{15}{64} = \frac{30}{64} = \frac{15}{32} = \underline{0,46875}$$

.

$b)$

$$P = P(N) \cdot P(B) + P(B) \cdot P(N) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{5}{16} + \frac{3}{16} = \frac{8}{16} = \underline{0,5}.$$

****

4º) El número de horas de funcionamiento de una determinada marca de tablet sigue una distribución normal de media 1.800 horas y desviación típica 250 horas. Se pide calcular:

a) La probabilidad de que la tablet dure más de 2.200 horas.

b) Probabilidad de que la duración de la tablet este entre 1.800 y 2.000 horas.

c) Probabilidad de que la tablet dure menos de 1.500 horas.

d) ¿Cuál es, con una probabilidad del 95 %, el número máximo de horas que se puede esperar para el funcionamiento de una de estas tablet?

Datos: $\mu = 1.800;\ \ \sigma = 250.$

a)

$P(X \geq 2.200).$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-1.800}{250}.$

$$P(X \geq 2.200) = P\left(\frac{X-1.800}{250} \geq \frac{2.200-1.800}{250}\right) = P\left(Z \geq \frac{400}{250}\right) = P(Z \geq 1,6) =$$

$$= 1 - P(Z < 1,6) = 1 - 0,9452 = \underline{0,0548 = 5,48\ \%}.$$

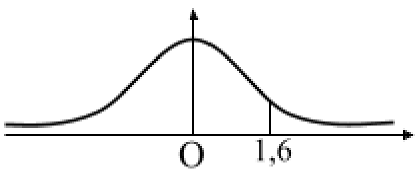
b)

$P(1.800 < X < 2.000).$

$$P(1.800 < X < 2.200) = P\left(\frac{1.800-1.800}{250} < \frac{X-1.800}{250} < \frac{2.000-1.800}{250}\right) =$$

$$= P\left(0 < Z < \frac{200}{250}\right) = P(0 < Z < 0,8) =$$

$$= 0,7881 - 0,5 = \underline{0,2881 = 28,81\ \%}.$$



c)

$P(X < 1.500).$

$$P(X \leq 1.500) = P\left(\frac{X-1.800}{250} \leq \frac{1.500-1.800}{250}\right) = P\left(Z \leq \frac{-300}{250}\right) = P(Z \leq -1,2) =$$

$$= 1 - P(Z > 1,2) = 1 - 0,8849 = \underline{0,1151 = 11,51\ \%}.$$

$d)$

$$\alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\alpha} = z_{0,05} = 1,645.$$

$(1 - 0,05 = 0,9500 \rightarrow z = 1,645).$

$$P(X \leq n) = P\left(\frac{X-1.800}{250} \leq \frac{n-1.800}{250}\right) = P\left(Z \leq \frac{n-1.800}{250}\right) = 1,645;$$

$n \geq 1,645 \cdot 250 + 1.800 \geq 411,25 + 1.800 \geq 2.211,25.$

$$\underline{n = 2.212}.$$

****

OPCIÓN B

1º) a) Calcular los valores de a, b, c, d, que verifican la siguiente ecuación matricial:

$(2a - 2\ 2b\ c + 1\ d + 2\ ) + (4\ d - 2\ 2c\ 2a\ ) = (a\ b\ 4\ 0\ )$.

b) Dada la matriz $A = (1\ 0\ \ -\ 1\ 1\ )$, calcular A^{20}. Razona la respuesta.

----

a)

$$(2a - 2\ 2b\ c + 1\ d + 2\ ) + (4\ d - 2\ 2c\ 2a\ ) = (a\ b\ 4\ 0\ );$$

$(2a + 2\ 2b + d - 2\ 3c + 1\ 2a + d + 2\ ) = (a\ b\ 4\ 0\ ) \Rightarrow \quad 2a + 2 = a \quad 3c + 1$

$$\underline{a = -\ 2,\ b = 0,\ c = 1,\ d = 2}.$$

b)

$$A^{2} = A \cdot A = (1\ 0\ \ -\ 1\ 1\ ) \cdot (1\ 0\ \ -\ 1\ 1\ ) = (1\ 0\ \ -\ 2\ 1\ ).$$

$$A^{3} = A^{2} \cdot A = (1\ 0\ \ -\ 2\ 1\ ) \cdot (1\ 0\ \ -\ 1\ 1\ ) = (1\ 0\ \ -\ 3\ 1\ ).$$

$$A^{4} = A^{3} \cdot A = (1\ 0\ \ -\ 3\ 1\ ) \cdot (1\ 0\ \ -\ 1\ 1\ ) = (1\ 0\ \ -\ 4\ 1\ ).$$

....

$$\underline{A^{20} = (1\ 0\ \ -\ 20\ 1\ )}.$$

****

2º) Sea la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 4$.

a) Calcular el valor de los parámetros a y b para que $f(x)$ tenga extremos relativos para los puntos de abscisa $x = -1$ y $x = 3$. ¿Qué tipo de extremos son?

b) Calcular para $a = 1 = b$ la integral definida: $I = \int_0^3 f(x) \cdot dx$.

----

a)

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto. Esta condición necesaria no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b.$$

Por tener un extremo relativo para $x = -1 \Rightarrow f'(-1) = 0$:

$f'(-1) = 0 \Rightarrow 3 \cdot (-1)^2 + 2a \cdot (-1) + b = 3 - 2a + b = 0;\ \ 2a - b = 3.$ (1)

Por tener un extremo relativo para $x = 3 \Rightarrow f'(3) = 0$:

$f'(3) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 3^2 + 2a \cdot 3 + b = 27 + 6a + b = 0;\ \ 6a + b = -27.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{l} 2a - b = 3 \\ 6a + b = -27 \end{array}\right\} \Rightarrow 8a = -24 \Rightarrow \underline{a = -3}.$$

$-6 - b = 3 \Rightarrow \underline{b = -9}.$

La función resulta ser $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$.

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9.$ $\qquad f''(x) = 6x - 6$

$f''(-1) = 6 \cdot (-1) - 6 = -6 - 6 = -12 > 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = -1.$

$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) + 4 = -1 - 3 + 9 + 4 = 13 - 4 =$

$= 9 \Rightarrow \underline{Máximo\ relativo: A(-1, 9)}.$

$$f''(3) = 6\cdot 3 - 6 = 18 - 6 = 12 > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ x = 3.$$

$$f(3) = 3^3 - 3\cdot 3^2 - 9\cdot 3 + 4 = 27 - 27 - 27 + 4 = 4 - 27 = -23 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{Mínimo\ relativo: B(3, -23)}.$

$b)$

Para $a = 1 = b$ la función es $f(x) = x^3 + x^2 + x + 4$.

$$I = \int_0^3 f(x)\cdot dx = \int_0^3 \left(x^3 + x^2 + x + 4\right)\cdot dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x\right]_0^3 =$$

$$= \left(\frac{3^4}{4} + \frac{3^3}{3} + \frac{3^2}{2} + 4\cdot 3\right) - 0 = \frac{81}{4} + 9 + \frac{9}{2} + 12 = \frac{81+18+84}{4} = \frac{183}{4}.$$

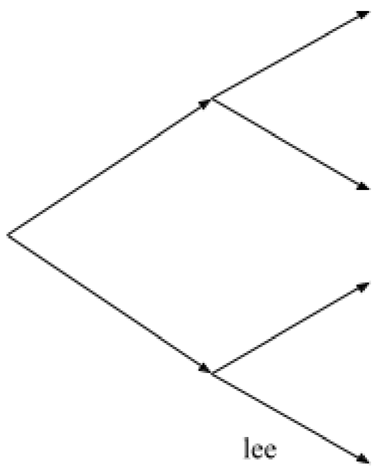
$$\underline{I = \int_0^3 f(x)\cdot dx = \frac{183}{4}.}$$

****

3º) En una reunión en la que hay 150 personas 35 son alaveses y el resto guipuzcoanos. De entre los alaveses el 30 % es aficionado a la lectura, mientras que entre los guipuzcoanos lo son el 55 %. Se elige una persona al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea aficionada a la lectura?

b) Si la persona elegida ha resultado ser aficionada a la lectura, ¿cuál es la probabilidad de que sea alavés?



a)

$$P = P(A) \cdot P(L/A) + P(G) \cdot P(L/G) = \frac{7}{30} \cdot \frac{3}{10} + \frac{23}{30} \cdot \frac{11}{20} = \frac{7}{100} + \frac{253}{600} =$$

$$= 0,0700 + 0,4217 = \underline{0,4917}.$$

b)

$$P(A/L) = \frac{P(A \cap L)}{P(L)} = \frac{P(A) \cdot P(L/A)}{P(A) \cdot P(L/A) + P(G) \cdot P(L/G)} = \frac{0,07}{0,4917} = \underline{0,1424}.$$

****

4º) Un baserritarra quiere estimar el peso medio μ de las vacas de su ganado. Sabe, por investigaciones anteriores, que la desviación típica del peso de las vacas es $\sigma = 32$ kg. Elige una muestra aleatoria de 30 vacas, resultando que la media de sus pesos es la siguiente: $\overline{x} = 408$ kg. Calcular los intervalos de confianza del 95 % y del 99 % para la media de la población.

Nivel de confianza del 95 %.

$\alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$

$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$

Conocemos: $n = 30;\ \ \sigma = 32;\ \ \overline{x} = 408.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(408 - 1,96 \cdot \frac{32}{\sqrt{30}},\ 408 + 1,96 \cdot \frac{32}{\sqrt{30}}\right);$

$\left(408 - 1'96 \cdot 5'8424,\ 408 + 1'96 \cdot 5'8424\right);$

$\left(408 - 11'4511,\ 408 + 11'4511\right) \Rightarrow \underline{(396'5489,\ 419'4511)}.$

Nivel de confianza del 99 %.

$\alpha = 1 - 0,99 = 0,01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,005} = 2,578.$

$(1 - 0,0050 = 0,9950 \rightarrow z = 2,578).$

$\left(408 - 2'578 \cdot 5'8424,\ 408 + 2'578 \cdot 5'8424\right);$

$\left(408 - 15'0616,\ 408 + 15'0616\right) \Rightarrow \underline{(392'2938,\ 423'0616)}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

JUNIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas. Está permitido el uso de calculadoras científicas que no sean programables.

OPCIÓN A

1º) a) Sean las matrices $A = (2\ 1\ 0\ \ -\ 1\ ),\ B = (1\ \ -\ 1\ 2\ 0\ )\ y\ C = (-\ 2\ 4\ 1\ \ -\ 1\ )$. Calcular la matriz X para la que se verifica la ecuación matricial $AX = B - C$.

b) Halla la matriz Y para la que se verifica la ecuación matricial $YA = B^2$.

----

a)

$$AX = B - C;\ \ A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot(B - C);\ \ I\cdot X = A^{-1}\cdot(B - C).$$

$$\underline{X = A^{-1}\cdot(B - C)}.$$

$$A = (2\ 1\ 0\ \ -\ 1\ );\ \ |A| = |2\ 1\ 0\ \ -\ 1\ | = -\ 2;\ \ A^t = (2\ 0\ 1\ \ -\ 1\ );$$

$$Adj\ de\ A^t = (-\ 1\ \ -\ 1\ 0\ 2\ ) \Rightarrow A^{-1} = -\ \tfrac{1}{2}\cdot(-\ 1\ \ -\ 1\ 0\ 2\ ).$$

$$B - C = (1\ \ -\ 1\ 2\ 0\ ) - (-\ 2\ 4\ 1\ \ -\ 1\ ) = (3\ \ -\ 5\ 1\ 1\ ).$$

Sustituyendo los valores obtenidos en la expresión de X:

$$X = A^{-1}\cdot(B - C) = -\ \tfrac{1}{2}\cdot(-\ 1\ \ -\ 1\ 0\ 2\ )\cdot(3\ \ -\ 5\ 1\ 1\ ) = -\ \tfrac{1}{2}\cdot(-\ 4\ 4\ 2\ 2\ ).$$

$$\underline{X = (2\ \ -\ 2\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ )}.$$

b)

$$YA = B^2;\ \ YA\cdot A^{-1} = B^2\cdot A^{-1};\ \ Y\cdot I = B^2\cdot A^{-1} \Rightarrow \underline{Y = B^2\cdot A^{-1}}.$$

$$I = B^2 \cdot A^{-1} = (1 \ \ -1 \ 2 \ 0) \cdot (1 \ \ -1 \ 2 \ 0) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-1 \ \ -1 \ 0 \ 2) =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot (-1 \ \ -1 \ 2 \ \ -2) \cdot (-1 \ \ -1 \ 0 \ 2) = -\frac{1}{2} \cdot (1 \ \ -1 \ \ -2 \ \ -6) = \frac{1}{2} \cdot (-1 \ 1 \ 2 \ 6)$$

.

$$\underline{Y = \frac{1}{2} \cdot (-1 \ 1 \ 2 \ 6)}.$$

****

2º) El beneficio diario $B(x)$ obtenido por una empresa al vender x unidades de un artículo viene dado por la función $B(x) = -x^2 + 360x - 18.000$ con $50 \leq x \leq 350$.

$a)$ ¿Cuál es el beneficio obtenido al vender 100 unidades? ¿Cuántas unidades se han vendido si el beneficio diario ha sido de 13.500 euros?

$b)$ ¿Cuál es el número de unidades que hay que vender para que el beneficio sea máximo? ¿A cuánto asciende ese beneficio?

$c)$ ¿Cuántas unidades hay que vender para no tener pérdidas?

$a)$

$$B(100) = -100^2 + 360 \cdot 100 - 18.000 = -10.000 + 36.000 - 18.000 =$$

$$= 36.000 - 28.000 = 8.000.$$

$$\underline{Al\ vender\ 100\ unidades\ se\ obtiene\ de\ beneficio\ 8.000\ euros.}$$

$$B(x) = 13.500 \Rightarrow -x^2 + 360x - 18.000 = 13.500;$$

$$x^2 - 360x + 31.500 = 0;\ \ x = \frac{360 \pm \sqrt{360^2 - 4 \cdot 1 \cdot 31.500}}{2} = \frac{360 \pm \sqrt{129.600 - 126.000}}{2} =$$

$$= \frac{360 \pm \sqrt{3.600}}{2} = \frac{360 \pm 60}{2} = 180 \pm 30 \Rightarrow x_1 = 150,\ x_2 = 210.$$

$$\underline{Se\ obtiene\ un\ beneficio\ de\ 13.500\ euros\ vendiendo\ 150\ o\ 210\ unidades}.$$

$b)$

Para que una función tenga un máximo es condición necesaria que se anule su primera derivada y sea negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$B'(x) = -2x + 360. \quad B'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 360 = 0 \Rightarrow x = 180.$$

$$B''(x) = -2 < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = 180.$$

$$\underline{Se\ obtiene\ el\ máximo\ beneficio\ vendiendo\ 180\ unidades.}$$

$$B(180) = -180^2 + 360 \cdot 180 - 18.000 =$$

$$= -32.400 + 64.800 - 18.000 = 64.800 - 50.400 = 14.400.$$

$$\underline{El\ máximo\ beneficio\ posible\ es\ de\ 14.400\ euros}.$$

$c)$

Teniendo en cuenta que la función $B(x) = -x^2 + 360x - 18.000$ es una parábola cóncava ($\cap$), cuyos puntos de corte con el eje X son los siguientes:

$$B(x) = -x^2 + 360x - 18.000 = 0;\ \ x^2 - 360x + 18.000 = 0;$$

$$x = \frac{360\pm\sqrt{360^2-4\cdot 18.000}}{2} = \frac{360\pm\sqrt{129.600-72.000}}{2} = \frac{360\pm\sqrt{57.600}}{2} = \frac{360\pm 240}{2} =$$

$$= 180\pm 120 \Rightarrow x_1 = 60,\ x_2 = 300.$$

Teniendo en cuenta el dominio de la función ($50\leq x\leq 350$):

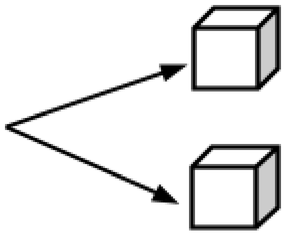
$$\underline{Para\ no\ tener\ pérdidas\ hay\ que\ vender\ entre\ 60\ y\ 300\ unidades}.$$

****

3º) Se dispone de dos dados, uno normal y el otro trucado, pero iguales en apariencia. La probabilidad de sacar 2 con el dado trucado es 0,25 siendo los otros resultados equiprobables. Se elige uno de los dos dados al azar y se realiza un lanzamiento. Calcular las siguientes probabilidades:

a) Probabilidad de obtener un 2.

b) Dado que ha salido un 2, ¿probabilidad de haber elegido el dado trucado?



a)

$$P = \frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{2+3}{24} = \underline{\frac{5}{24}}.$$

b)

$$P(T/2) = \frac{P(T\cap 2)}{P(2)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{12}+\frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{2+3}{24}} = \frac{1\cdot 24}{8\cdot 5} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5} = \underline{0,6}.$$

****

4º) Se quiere estimar la proporción de estudiantes de una universidad que tienen carnet de conducir. Para ello se ha obtenido una muestra aleatoria de 400 estudiantes, de los cuáles 240 tienen carnet de conducir. Calcular los intervalos de confianza del 95 % y 99 % para la proporción de estudiantes de la universidad con carnet de conducir.

Nivel de confianza del 95 %.

$\alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$

$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$

Datos: $n \geq 30;\ \ p = \frac{240}{400} = 0,6;\ \ q = 0,4;\ \ n = 400;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q , σ y n, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}},\ p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right).$

$\left(0'75 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,6 \cdot 0,4}{400}},\ 0'75 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,6 \cdot 0,4}{400}}\right);$

$\left(0'6 - 1,96 \cdot 0'0245,\ 0'6 + 1,96 \cdot 0'0245\right);\ \ \left(0'6 - 0'0480,\ 0'6 + 0'0480\right).$

$$\underline{I.\ C._{95\ \%} = \left(0'552,\ 0'648\right).}$$

Nivel de confianza del 99 %.

$\alpha = 1 - 0,99 = 0,01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,005} = 2,578.$

$(1 - 0,0050 = 0,9950 \rightarrow z = 2,578).$

$\left(0'6 - 2,578 \cdot 0'0245,\ 0'6 + 2,578 \cdot 0'0245\right);$

$\left(0'6 - 0'0631,\ 0'6 + 0'0631\right).$

$$\underline{I.\ C._{99\ \%} = \left(0'5369,\ 0'6631\right).}$$

****

OPCIÓN B

1º) Representar gráficamente la región del plano definida por las siguientes inecuaciones: $0 \leq x,\ \ 0 \leq y,\ \ x \leq 6,\ \ y \leq 8,\ \ x \leq y,\ \ y \leq 2x$.

b) Hallar el valor máximo de la función $F(x,\ y) = x + 2y$ en dicha región y los puntos en los que se alcanza.

----

a)

Las restricciones son las siguientes: $\{0 \leq x \leq 6\ \ 0 \leq y \leq 8\ \ x - y \leq 0\ \ 2x - y \geq 0$
.

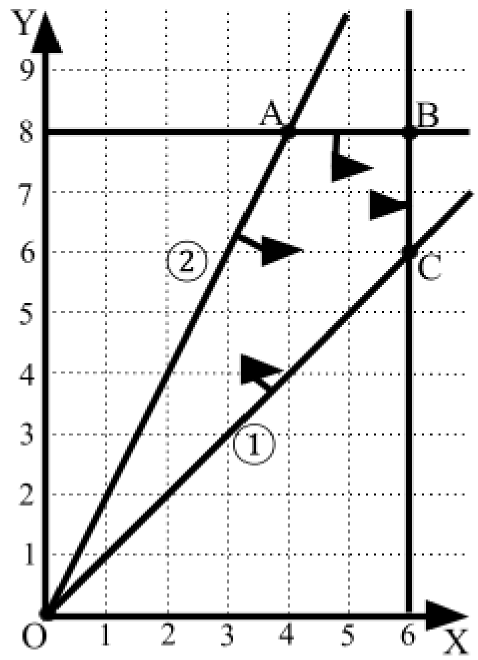
x	0	6
y	0	6

①$\Rightarrow x - y \leq 0 \Rightarrow y \geq x \Rightarrow A(1,\ 0) \rightarrow No$.

x	10	4
y	3	7

②$\Rightarrow 2x - y \geq 0 \Rightarrow y \leq 2x \Rightarrow A(1,\ 0) \rightarrow Si$.

La región factible es la zona sombreada de la figura.



Los vértices de la zona factible, además del origen, son los siguientes:

$A \Rightarrow 2x - y = 0 \qquad y = 8\} \Rightarrow A(4,\ 8)$.

$B \Rightarrow x = 6\ y = 8\} \Rightarrow B(6,\ 8)$.

$C \Rightarrow \qquad x = 6\ x - y = 0\} \Rightarrow C(6,\ 6)$.

b)

La función de objetivos es la siguiente:

$F(x,\ y) = x + 2y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow F(4,\ 8) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 8 = 4 + 16 = 20$.

$B \Rightarrow F(6,\ 8) = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 = 6 + 16 = 22$.

$C \Rightarrow F(6,\ 6) = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 6 = 6 + 12 = 18$.

$\underline{El\ máximo\ se\ alcanza\ en\ el\ punto\ B\ y\ su\ valor\ es\ 22}$.

****

2º) a) Calcular los valores de los parámetros a y b para que la curva que tiene la siguiente ecuación: $f(x) = x^3 + ax^2 + b$, presente un extremo relativo en el punto $P(2, 6)$. ¿Qué tipo de extremo es?

b) Calcular la integral definida: $I = \int_1^2 f(x) \cdot dx$.

----

a)

Por contener la función $f(x)$ al punto $P(2, 6) \Rightarrow f(2) = 6$:

$f(2) = 2^3 + a \cdot 2^2 + b = 6;\ 8 + 4a + b = 6;\ 4a + b = -2.$ (1)

Por presentar un extremo relativo en $P(2, 6) \Rightarrow f'(2) = 0$:

$f'(x) = 3x^2 + 2ax.$

$f'(2) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 2^2 + 2a \cdot 2 = 0;\ 12 + 4a = 0;\ 3 + a = 0 \Rightarrow \underline{a = -3}.$

Sustituyendo el valor de a en la expresión (1):

$4 \cdot (-3) + b = -2;\ \ -12 + b = -2 \Rightarrow \underline{b = 10}.$

La función resulta ser $f(x) = x^3 - 3x^2 + 10.$

$f'(x) = 3x^2 - 6x. f''(x) = 6x - 6.$

$f''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 12 - 6 = 6 > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ x = 2.$

$\underline{La\ función\ f(x)\ tiene\ un\ minimo\ relativo\ en\ P(2, 6)}.$

b)

$$I = \int_1^2 f(x) \cdot dx = \int_1^2 \left(x^3 - 3x^2 + 10\right) \cdot dx = \left[\frac{x^4}{4} - 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 10x\right]_1^2 =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 10x\right]_1^2 = \left(\frac{2^4}{4} - 2^3 + 10 \cdot 2\right) - \left(\frac{1^4}{4} - 1^3 + 10 \cdot 1\right) =$$

$$= 4 - 8 + 20 - \frac{1}{4} + 1 - 10 = 7 - \frac{1}{4} = \frac{27}{4}.$$

$$I = \int_{1}^{2} f(x) \cdot dx = \frac{27}{4}.$$

****

3º) Tenemos seis tarjetas numeradas del 1 al 6. Se toman, a la vez, dos tarjetas al azar. Se pide:

a) Probabilidad de que la suma de sus números sea 7.

b) Probabilidad de que la suma de sus números sea un número par.

El espacio muestral es el siguiente:
$E = \{xx,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 61\ 21,\ xx,\ 23,\ 24,\ 25,\ 26\ 31,\ 32,\ xx,\ 34,\ 35,\ 36\ 41,\ 42,\ 43,$
.

a)

En negrita los casos favorables:
$E = \{xx,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 61\ 21,\ xx,\ 23,\ 24,\ 25,\ 26\ 31,\ 32,\ xx,\ 34,\ 35,\ 36\ 41,\ 42,\ 43,$
.

$$P = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{6}{30} = \underline{\frac{1}{5}}.$$

b)

En negrita los casos favorables:
$E = \{xx,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 61\ 21,\ xx,\ 23,\ 24,\ 25,\ 26\ 31,\ 32,\ xx,\ 34,\ 35,\ 36\ 41,\ 42,\ 43,$
.

$$P = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{12}{30} = \underline{\frac{2}{5}}.$$

****

4º) El número de páginas que se pueden escribir con los bolígrafos de una determinada marca sigue una distribución normal de media 80 páginas y desviación típica 12 páginas. Se pide calcular:

a) La probabilidad de que el número de páginas escritas sea superior a 100.

b) La probabilidad de que el número de páginas escritas sea inferior a 50.

c) La probabilidad de que el número de páginas escritas esté comprendido entre 75 y 85.

d) ¿Cuál es, con una probabilidad del 95 %, el número máximo de páginas que se pueden esperar escribir con uno de estos bolígrafos?

Datos: $\mu = 80; \ \sigma = 12.$

a)

$P(X > 100).$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-80}{12}.$

$$P(X > 100) = P\left(\frac{X-80}{12} > \frac{100-80}{12}\right) = P\left(Z > \frac{20}{12}\right) = P(Z > 1,67) =$$

$$= 1 - P(Z < 1,67) = 1 - 0,9525 = \underline{0,0475}.$$

b)

$P(X < 50).$

$$P(X < 50) = P\left(\frac{X-80}{12} < \frac{50-80}{12}\right) = P\left(Z < \frac{-30}{12}\right) = P(Z <- 2,5) =$$

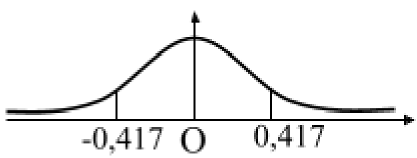
$$= 1 - P(Z\geq 2,5 <) = 1 - 0,9938 = \underline{0,0062}.$$

c)

$P(75 < X < 85).$

$$P(75 < X < 85) = P\left(\frac{75-80}{12} < \frac{X-80}{12} < \frac{85-80}{12}\right) = P\left(-\frac{5}{12} < Z < \frac{5}{12}\right) =$$

$$= P(- 0,417 < Z < 0,417) =$$



$$= P(Z < 0,417) - [1 - P(Z < 0,417)] =$$

$$= 2\cdot P(Z < 0,417) - 1 = 2\cdot 0,6621 - 1 = 1,3242 - 1 = \underline{0,3242}.$$

$d)$

$$\alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\alpha} = z_{0,05} = 1,645.$$

$(1 - 0,05 = 0,9500 \rightarrow z = 1,645)$.

$$P(X \leq n) = P\left(\frac{X-80}{12} \leq \frac{n-80}{12}\right) = P\left(Z \leq \frac{n-80}{12}\right) = 1,645;$$

$n \geq 1,645 \cdot 12 + 80 = 19,74 + 80 = 99,74.$

$$\underline{n = 100}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

JULIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se elegirá UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberían estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

1º) Una empresa fabrica dos productos diferentes, P1 y P2, que vende a 300 y 350 euros por tonelada (t), respectivamente. Para ello utiliza dos tipos de materias primas (A y B) y mano de obra. Las disponibilidades semanales de las materias primas son 30 t de A y 36 t de B, y las horas de mano de obra disponibles a la semana son 160. En la tabla siguiente se resumen los requerimientos (en t) de las materias primas y las horas de trabajo necesarias para la producción de una tonelada de cada producto:

	Materia prima (t)		
Producto	A	B	Mano de obra (h)
P1	2	3	4
P2	3	1	20

Determina la producción semanal que maximiza los ingresos de la empresa sabiendo que un estudio de mercado indica que la demanda del producto P2 nunca supera a la del producto P1. ¿A cuánto ascienden los ingresos máximos?

Sean x e y el nº de productos P1y P2 que se venden a la semana, respectivamente.

Las condiciones del ejercicio se establecen en el siguiente sistema de inecuaciones:

$2x + 3y \leq 30 \quad 3x + y \leq 36 \; 4x + 20y \leq 160 \quad x \geq y \geq 0 \}$

$2x + 3y \leq 30 \quad 3x + y \leq 36 \quad x + 5y \leq 40 \quad x \geq y \geq 0 \}$.

La función de rendimiento es $f(x, y) = 300x + 350y$.

x	15	0
y	0	10

①$\Rightarrow 2x + 3y \le 30 \Rightarrow y \le \frac{30-2x}{3} \Rightarrow O(0,\ 0) \to Si.$

x	12	8
y	0	12

②$\Rightarrow 3x + y \le 36 \Rightarrow y \le 36 - 3x \Rightarrow O(0,\ 0) \to Si.$

x	15	0
y	7	8

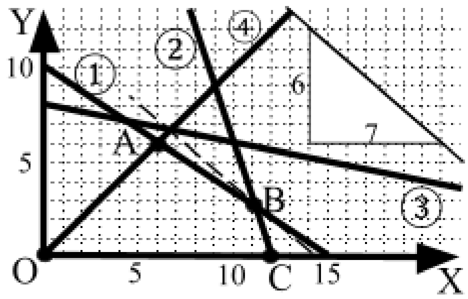
③$\Rightarrow x + 5y \le 40 \Rightarrow y \le \frac{40-x}{5} \Rightarrow O(0,\ 0) \to Si.$

x	0	10
y	0	10

④$\Rightarrow x - y \ge 0 \Rightarrow y \le x \Rightarrow P(5,\ 0) \to Si.$

La región factible es la zona sombreada de la figura siguiente.

Los vértices de la sección factible, además de O(0, 0), son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 30 \\ x - y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A(6,\ 6).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 30 \\ 3x + y = 36 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -2x - 3y = -30 \\ 9x + 3y = 108 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$7x = 78;\ x = \frac{78}{7} = 11,14. \quad y = 36 - 3 \cdot 11,14 = 36 - 33,43 = 2,57 \Rightarrow$

$\Rightarrow B(11'14,\ 2'57).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 12 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow C(12,\ 0).$

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(6,\ 6) = 300 \cdot 6 + 350 \cdot 6 = 1.800 + 2.100 = \underline{3.900}.$

$B \Rightarrow f(11'14,\ 2'57) = 300 \cdot 11,14 + 350 \cdot 2,57 = 3.342'86 + 900 = \underline{4.242'86}.$

$C \Rightarrow f(12,\ 0) = 300 \cdot 12 + 350 \cdot 0 = 3.600 + 0 = \underline{3.600}.$

El máximo se produce en el punto B.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,\ y) = 300x + 350y = 0 \Rightarrow y = -\frac{300}{350}x \Rightarrow m = -\frac{6}{7}.$$

$$\underline{La\ ganancia\ máxima\ se\ produce\ fabricando\ 11,14\ t\ de\ P1\ y\ 2,57\ t\ de\ P2}.$$

$$\underline{La\ ganancia\ máxima\ es\ de\ 4.242'86\ euros}.$$

****

2º) Sea la función $f(x) = \{x^2 + 2 \quad x \leq 1 \ \frac{6}{x^2+1} \quad x > 1$.

a) Estudia la continuidad de $f(x)$ en el intervalo $]-\infty, \ +\infty[$.

b) Calcula los máximos y mínimos locales de $f(x)$.

c) Calcula el área de la región limitada por $f(x)$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

----

a)

La función f(x) es continua $\forall x \in R$, excepto para $x = 1$, cuya continuidad es dudosa y se estudia a continuación.

Para que la función sea continua en $x = 1$ es necesario que sus límites laterales en ese punto sean iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$f(x) = \left(x^2 + 2\right) = 3 = f(1) \ f(x) = \frac{6}{x^2+1} = \frac{6}{2} = 3 \qquad \} \Rightarrow f(x) = f(1) =$$

.

$\underline{f(x) \ es \ continua \ en \ R}.$

b)

En el intervalo $(-\infty, 1]$ la función es $f(x) = x^2 + 2$, que es una parábola convexa (∪), simétrica con respecto al eje de ordenadas por ser una función par al cumplir que $f(x) = f(-x)$ y cuyo vértice (mínimo local) es el siguiente:

$$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 2x = 0; x = 0.$$

$$f(0) = 0^2 + 2 = 2 \Rightarrow \underline{Vértice: V(0, \ 2)}.$$

En el intervalo $[1, \ +\infty)$ la función es $f(x) = \frac{6}{x^2+1}$.

Es condición necesaria para que una función tenga un máximo o mínimo relativo que se anule su primera derivada:

$$f'(x) = \frac{-6 \cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{-12x}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-12x}{\left(x^2+1\right)^2} = 0; \quad -12x = 0; x = 0 \Rightarrow x \notin [1, \ +\infty).$$

$\underline{La \ función \ f(x) \ no \ tiene \ extremos \ locales \ en \ [1, \ +\infty)}.$

Es importante considerar el punto de dudosa continuidad estudiado para x = 1 donde el comportamiento de la función es el siguiente, con respecto al crecimiento y decrecimiento de la función:

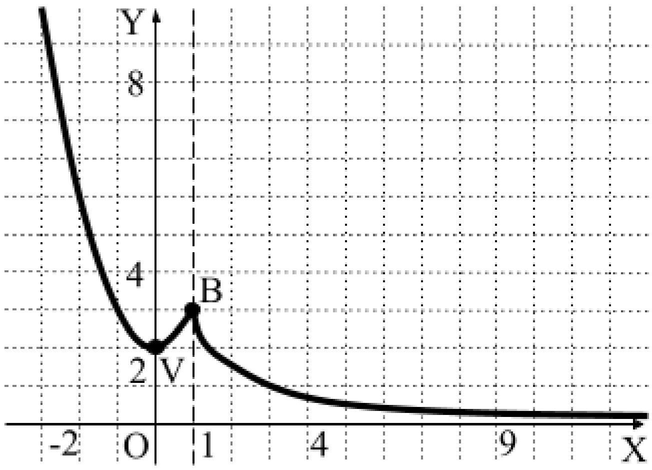
La derivada por la izquierda de 1 es $f'\left(1^{-}\right) = 2 > 0 \Rightarrow Creciente.$

La derivada por la derecha de 1 es $f'\left(1^{+}\right) = \frac{-12\cdot 1}{\left(1^2+1\right)^2} < 0 \Rightarrow Decreciente.$

La anterior implica necesariamente que:

$$\underline{La\ función\ f(x)\ tiene\ un\ máximo\ relativo\ en\ el\ punto\ B(1,\ 3).}$$

Para una mejor comprensión de lo estudiado se hace un esquema aproximado de la situación, teniendo en cuenta además que: $f(x) = 0$, lo que indica que el eje de abscisas es una asíntota horizontal de la función.



$c)$

Se supone que se pide el área encerrada por $f(x)$, las rectas $x = -1$ y $x = 1$ y también el eje de abscisas.

En el intervalo $(-1,\ 1)$ la función es $f(x) = x^2 + 2$, cuyas ordenadas son todas positivas, por lo cual, la superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_{-1}^{1}\left(x^2 + 2\right)\cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2x\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1^3}{3} + 2\cdot 1\right) - \left[\frac{(-1)^3}{3} + 2\cdot(-1)\right] =$$

$$= \frac{1}{3} + 2 + \frac{1}{3} + 2 = 4 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3}.$$

$$\underline{S = \frac{14}{3}\ u^2.}$$

****

3º) El 25 % de los estudiantes de un instituto no realizan ninguna actividad extraescolar, mientras que el 55 % realizan una actividad extraescolar deportiva. Sabemos además que uno de cada cuatro estudiantes que practican una actividad extraescolar no deportiva también practica una deportiva. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que un estudiante elegido al azar practique una actividad extraescolar deportiva y otra no deportiva.

b) Calcular la probabilidad de que un estudiante practique una actividad extraescolar deportiva.

c) ¿Son independientes los sucesos "Practicar una actividad extraescolar deportiva" y "Practicar una actividad extraescolar no deportiva"? Razona tu respuesta.

$P(D) \Rightarrow$ Probabilidad de que un estudiante practique una actividad extraescolar deportiva.

$P(N) \Rightarrow$ Probabilidad de que un estudiante practique una actividad extraescolar no deportiva.

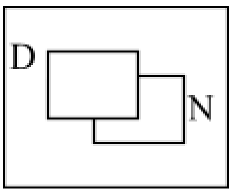
Se conoce: $P(\overline{D} \cap \overline{N}) = 0,25.$ $P(D) = 0,55.$ $P(N) = \frac{1}{4}.$

a)

Se pide: $P(D \cap N)$.

Sabiendo que $P(D \cup N) = P(D) + P(N) - P(D \cap N) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(D \cap N) = P(D) + P(N) - P(D \cup N).$ (*)



$\Rightarrow P(\overline{D} \cap \overline{N}) = 1 - P(D \cup N) \Rightarrow \frac{1}{4} = 1 - P(D \cup N) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(D \cup N) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$

$P(N) = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{P(D \cap N)}{P(N)} = \frac{1}{4} \Rightarrow P(N) = 4 \cdot P(D \cap N).$

Sustituyendo el valor de $P(N)$ en la expresión (*):

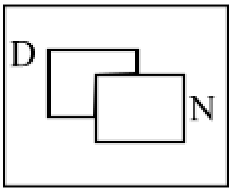
$P(D \cap N) = P(D) + 4 \cdot P(D \cap N) - P(D \cup N);$

$3 \cdot P(D \cap N) = P(D \cup N) - P(D) = \frac{3}{4} - 0,55 = 0,75 - 0,55 = 0,20.$

$$\underline{P(D\cap N) = \frac{0{,}20}{3} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}}.$$

b)

Se pide $P(D\cap\overline{N})$.



$$P(D\cap\overline{N}) = P(D) - P(D\cap N) = 0,55 - \frac{1}{15} = \frac{55}{100} - \frac{1}{15} =$$

$$= \frac{11}{20} - \frac{1}{15} = \frac{33-4}{60} = \frac{29}{60}.$$

$$\underline{P(D\cap\overline{N}) = \frac{29}{60}}.$$

c)

Dos sucesos D y N son independientes cuando $P(D\cap N) = P(D)\cdot P(N)$:

$P(D\cap N) = \frac{1}{15}$. $P(D) = 0,55$. $P(N) = 4\cdot P(D\cap N) = \frac{4}{15}$

$$P(D)\cdot P(N) = 0,55\cdot\frac{4}{15} = \frac{55}{100}\cdot\frac{4}{15} = \frac{11}{25}\cdot\frac{1}{3} = \frac{11}{75}.$$

$P(D\cap N) = \frac{1}{15}$

.

$P(D)\cdot P(N) = 0,55\cdot\frac{4}{15} = \frac{55}{100}\cdot\frac{4}{15} = \frac{11}{25}\cdot\frac{1}{3}$

<u>*Por lo expuesto anteriormente los sucesos D y N no son independientes*</u>.

****

OPCIÓN B

1º) Se dan las matrices $A = (1\ 2\ \ -\ 1\ 4\,)$, $B = (2\ 2\ 1\ \ -\ 1\,)$ y $C = (1\ \ -\ 1\ 1\ \ -\ 3\,)$.

$a)$ Halla la matriz X que satisface la ecuación: $AX - BCX = 3C$.

$b)$ Calcula la matriz inversa de $A^t + B$, donde A^t representa la matriz traspuesta de A.

$a)$

$AX - BCX = 3C;\ \ (A - BC)\cdot X = 3C.$

Haciendo $M = A - BC$:

$M\cdot X = 3C$. Multiplicando los dos términos por la izquierda por M^{-1}:

$M^{-1}\cdot M\cdot X = M^{-1}\cdot(3C);\ \ I\cdot X = 3M^{-1}C \Rightarrow X = 3M^{-1}C.$

$M = A - BC = (1\ 2\ \ -\ 1\ 4\,) - (2\ 2\ 1\ \ -\ 1\,)\cdot(1\ \ -\ 1\ 1\ \ -\ 3\,) = (1\ 2\ \ -\ 1\ 4\,) - ($

$= (-\ 3\ 10\ \ -\ 1\ 2\,).$ Se calcula ahora la matriz inversa de M:

$|M| = |-\ 3\ 10\ \ -\ 1\ 2\,| = -\ 6 + 10 = 4.\ \ M^t = (-\ 3\ \ -\ 1\ 10\ 2\,).$

$Adj.\ de\ M^t = (2\ \ -\ 10\ 1\ \ -\ 3\,) \Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{4}\cdot(2\ \ -\ 10\ 1\ \ -\ 3\,).$

Sustituyendo el valor hallado de M^{-1} en la expresión de X:

$X = 3M^{-1}C = 3\cdot\frac{1}{4}\cdot(2\ \ -\ 10\ 1\ \ -\ 3\,)\cdot(1\ \ -\ 1\ 1\ \ -\ 3\,) = \frac{3}{4}\cdot(-\ 8\ 28\ \ -\ 2\ 8\,).$

$$\underline{X = \frac{3}{2}\cdot(-\ 4\ 14\ \ -\ 1\ 4\,).}$$

$b)$

$N = A^t + B = (1\ \ -\ 1\ 2\ 4\,) + (2\ 2\ 1\ \ -\ 1\,) = (3\ 1\ 3\ 3\,).$

Se obtiene la inversa de N por el método de Gauss-Jordan.

$$(I) = (1\ 0\ 0\ 1) \Rightarrow \left\{F_1 \to \frac{1}{3}F_1\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\ 0\ 0\ 1\right) \Rightarrow \left\{F_2 \to F_2 - 3F_1\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\ 0\ -1\ 1\right) \Rightarrow \left\{F_2 \to \frac{1}{2}F_2\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\ 0\ -\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \left\{F_1 \to F_1 - \frac{1}{3}F_2\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\ -\frac{1}{6}\ -\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right) \Rightarrow N^{-1} = \left(\frac{1}{2}\ -\frac{1}{6}\ -\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right).$$

$$\underline{\left(A^t + B\right)^{-1} = \frac{1}{6}\cdot(3\ -1\ -3\ 3).}$$

****

2º) Cierta empresa de material fotográfico oferta una máquina que es capaz de revelar 15,5 fotografías por minuto. Sin embargo, sus cualidades se van deteriorando con el tiempo de forma que el número de fotografías reveladas por minuto viene dado por la función $f(x) = \{15,5 - 1,1x \quad 0 \leq x \leq 5 \quad \frac{5x+45}{x+2} \qquad x > 5$, donde x es la antigüedad de la máquina en años.

a) Estudia la continuidad de $f(x)$ en el intervalo $[0, \ +\infty[$.

b) Comprueba que el número de fotografías reveladas por minuto decrece con la antigüedad de la máquina. Justifica que si la máquina tiene más de 5 años revelará menos de 10 fotografías por minuto.

c) ¿Es cierto que la máquina nunca revelará menos de 5 fotografías por minuto? ¿Por qué?

----

a)

La función $f(x)$ es continua en su dominio, que es R, excepto para x = 5 cuya continuidad se estudia a continuación.

Para que $f(x)$ sea continua en x = 5 es necesario que sus límites laterales sean iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$f(x) \ = (15,5 - 1,1x) \ = 15,5 - 5,5 = 10 = f(5) \ f(x) \ = \frac{5x+45}{x+2} \ = \frac{70}{7} = 10$$

$\Rightarrow f(x) \ = f(x) \ = f(5) \Rightarrow f(x) \ es \ continua \ en \ x = 5.$

$\underline{f(x) \ es \ continua \ en \ R}.$

b)

$$f'(x) = \{- 1,1 \quad 0 \leq x \leq 5 \quad \frac{-35}{(x+2)^2} \ (*) \quad x > 5 \ \Rightarrow f'(x) < 0, \ \forall x \in R.$$

$$(*) \ f'(x) = \frac{5(x+2)-(5x+45)\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{5x+10-5x-45}{(x+2)^2} = \frac{-35}{(x+2)^2}.$$

$\underline{Queda \ probado \ que \ el \ número \ de \ revelados \ disminuye \ con \ el \ tiempo}.$

$$f(x) \ = \frac{5x+45}{x+2} = 5 < 10 \ .$$

$\underline{Queda \ justificado \ que \ si \ t > 5 \ las \ fotos \ reveladas \ son \ menos \ de \ 10/m}.$

c)

Como se observa en el apartado anterior, cuando el tiempo se prolonga indefinidamente el número de fotografías reveladas por minuto es 5 constantemente, por lo cual:

$$\underline{La\ máquina\ nunca\ releva\ menos\ de\ 5\ fotografías\ por\ minuto}.$$

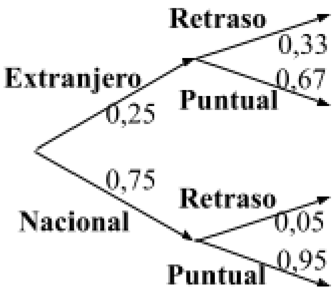
****

3º) En un aeropuerto, $\frac{1}{3}$ de los aviones que vienen del extranjero lo hacen con retraso, mientras que si proceden del propio país lo hacen con retraso el 5 %. Si del extranjero vienen el 25 % de los vuelos, se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un vuelo seleccionado al azar llegue con retraso?

b) Si un avión seleccionado al azar ha llegado sin retraso, ¿cuál es la probabilidad de que venga del extranjero?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un vuelo seleccionado al azar llegue a su hora o provenga del extranjero?



a)

$$P = 0,0833 + 0,0375 = \underline{0,1208}.$$

b)

$$P = \frac{0,1667}{0,1667+0,7125} = \frac{0,1667}{0,8792} = \underline{0,1896}.$$

c)

$$P = 0,7125 + 0,25 = \underline{0,9625}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

JUNIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se elegirá UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberían estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

1º) Se dispone de 200 hectáreas de terreno en las que se desea cultivar patatas y zanahorias. Cada hectárea dedicada al cultivo de patatas necesita 12,5 litros de agua de riego al mes, mientras que cada una de zanahorias necesita 40 litros, disponiéndose mensualmente de un total de 5.000 litros de agua para el riego. Por otra parte, las necesidades por hectárea de abono nitrogenado son de 20 kg para las patatas y de 30 kg para las zanahorias, disponiéndose de un total de 4.500 kg de abono nitrogenado. Si la ganancia por hectárea sembrada de patatas es de 300 euros y de 400 euros la ganancia por cada hectárea de zanahorias, ¿qué cantidad de hectáreas conviene dedicar a cada cultivo para maximizar la ganancia? ¿Cuál sería esta?

Sean x e y el número de hectáreas de patatas y zanahorias, respectivamente.

Las condiciones del ejercicio se establecen en el siguiente sistema de inecuaciones:

$$x + y\leq 200\ 12,5x + 40y\leq 5.000\quad 20x + 30y\leq 4.500\qquad x\geq 0,\ y\geq 0\,\}$$

$$x + y\leq 200\ 125x + 400y\leq 50.000\qquad 2x + 3y\leq 450\qquad x\geq 0,\ y\geq$$

$$x + y\leq 200\ 5x + 16y\leq 2.000\qquad 2x + 3y\leq 450\qquad x\geq 0,\ y\geq 0\,\}$$

La función de rendimiento es $F(x,\ y) = 300x + 400y$.

x	200	0
y	0	200

①$\Rightarrow x + y \leq 200 \Rightarrow y \leq 200 - x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

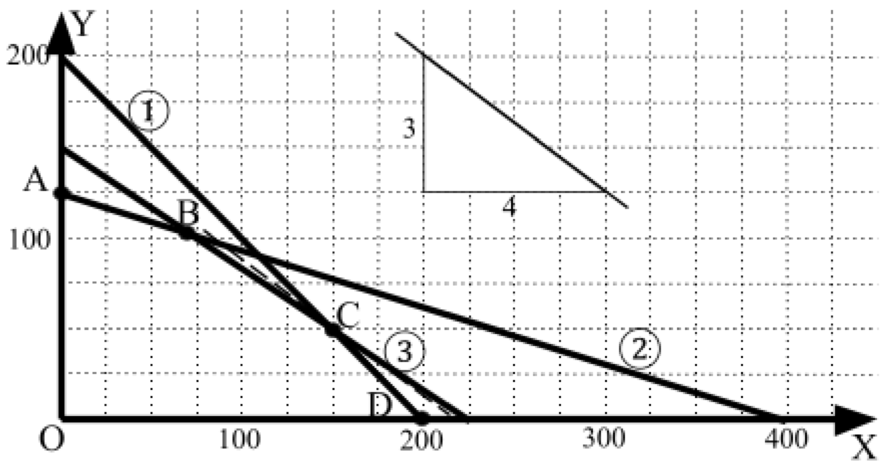
x	400	0
y	0	125

②$\Rightarrow 5x + 16y \leq 2.000 \Rightarrow y \leq \frac{2.000-5x}{16} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	225	0
y	0	150

③$\Rightarrow 2x + 3y \leq 450 \Rightarrow y \leq \frac{450-2x}{3} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

La región factible es la zona sombreada de la figura siguiente.



Los vértices de la sección factible, además de O(0, 0), son los siguientes:

$A \Rightarrow \quad x = 0\ y = 125\ \} \Rightarrow A(0,\ 125).$

$B \Rightarrow 5x + 16y = 2.000\ 2x + 3y = 450\ \}\ 10x + 32y = 4.000\ - 10x - 15y = - 2.2$

$y = \frac{1.750}{17} = 102,94. \quad x = \frac{450-3y}{2} = 225 - 1,5 \cdot 102,94 = 70,59 \Rightarrow$

$\Rightarrow B(70'59,\ 102'94).$

$C \Rightarrow \quad x + y = 200\ 2x + 3y = 450\ \}\ - 2x - 2y = - 400\ \ 2x + 3y = 450\ \} \Rightarrow$

.

$D \Rightarrow\ x = 200\ y = 0 \quad \} \Rightarrow D(200,\ 0).$

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 125) = 300 \cdot 0 + 400 \cdot 125 = 0 + 50.000 = \underline{50.000}.$

$B \Rightarrow f(70'59,\ 102'94) = 300 \cdot 70,59 + 400 \cdot 102,94 = 21.176'47 + 41.176'47 =$

$= \underline{62.352'94}$.

$C \Rightarrow f(150,\ 50) = 300 \cdot 150 + 400 \cdot 50 = 45.000 + 20.000 = \underline{65.000}$.
$D \Rightarrow f(200,\ 0) = 300 \cdot 200 + 400 \cdot 0 = 60.000 + 0 = \underline{60.000}$.

El máximo se produce en el punto C.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,\ y) = 300x + 400y = 0 \Rightarrow y = -\frac{300}{400}x \Rightarrow m = -\frac{3}{4}.$$

$$\underline{La\ ganancia\ es\ máxima\ cultivando\ 150\ ha\ de\ patatas\ y\ 50\ de\ zanahorias}.$$

$$\underline{La\ ganancia\ máxima\ es\ de\ 65.000\ euros}.$$

****

2º) Calcula: a) Las asíntotas verticales y horizontales de la función $f(x) = \frac{2x^3+2x-1}{x^3-9x}$.

b) Siendo $g(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 8$. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $g(x)$.

c) Los máximos y mínimos de la función $g(x)$ del apartado anterior.

----

a)

Verticales: Son de la forma x = k; son los valores que anulan el denominador.

$x^3 - 9x = 0;\ x\left(x^2 - 9\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -3,\ x_3 = 3.$

$$\underline{Asíntotas\ verticales: x = -3,\ x = 0,\ x = 3}.$$

Horizontales: Son de la forma y = k; son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a $\pm\infty$: $y = k = f(x) = \frac{2x^3+2x-1}{x^3-9x} = 2$.

$$\underline{Asíntota\ horizontal: y = 2}.$$

b)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$g'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 8x.$

$g'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 + 12x^2 + 8x = 0;\ 4x\left(x^2 + 3x + 2\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;$

$x = \frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3\pm\sqrt{1}}{2} = \frac{-3\pm1}{2} \Rightarrow x_2 = -2,\ x_3 = -1.$

Siendo $g(x)$ una función polinómica, las tres raíces de su primera derivada dividen el dominio de la función, que es R, en los cuatro intervalos siguientes, que son, alternativamente crecientes o decrecientes: $(-\infty, -2)$, $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, +\infty)$,

Para conocer como es cada uno de los intervalos consideramos un valor sencillo de uno de ellos, por ejemplo, para $x = 1 \in (0, +\infty)$:

$g'(1) = 4\cdot1^3 + 12\cdot1^2 + 8\cdot1 > 0 \Rightarrow Creciente.$

$$\underline{Crecimiento\text{: } (-2,\ -1) \cup (0,\ +\infty)}.$$

$$\underline{Decrecimiento\text{: } (-\infty,\ -2) \cup (-1,\ 0)}.$$

$c)$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto. Esta condición necesaria no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; se es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$g''(x) = 12x^2 + 24x + 8.$$

$$g''(-2) = 12\cdot(-2)^2 + 24\cdot(-2) + 8 = 48 - 48 + 8 = 8 > 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = -2.$

$$g(-2) = (-2)^4 + 4\cdot(-2)^3 + 4\cdot(-2)^2 - 8 = 16 - 32 + 16 - 8 = -8 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\underline{Mínimo\text{: } A(-2,\ -8)}.$

$$g''(-1) = 12\cdot(-1)^2 + 24\cdot(-1) + 8 - 4 = 12 - 24 + 8 = -4 < 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -1.$

$$g(-1) = (-1)^4 + 4\cdot(-1)^3 + 4\cdot(-1)^2 - 8 = 1 - 4 + 4 - 8 = -7 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\underline{Máximo\text{: } B(-1,\ -7)}.$

$$g''(0) = 12\cdot 0 + 24\cdot 0 + 8 = 8 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$g(0) = -8 \Rightarrow \underline{Mínimo\text{: } B(0,\ -8)}.$$

****

3º) El 25 % de los estudiantes de un instituto ha leído algún libro sobre Harry Potter y el 65 % ha visto alguna película de este protagonista. Se sabe también que el 10 % ha leído algún libro y ha visto alguna de las películas de este personaje. Si se elige al azar un estudiante:

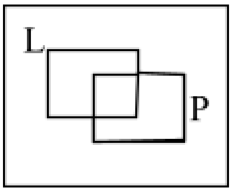
a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya visto alguna película de este personaje y no haya leído ningún libro sobre Harry Potter?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya leído ningún libro sobre Harry Potter y no haya visto ninguna película sobre este personaje?

c) Si se sabe que ha leído algún libro de Harry Potter, ¿cuál es la probabilidad de que haya visto alguna película de este personaje?

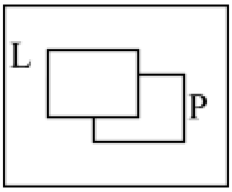
----

a)



$$P = P(p\cap\bar{l}) = P(p) - P(p\cap l) = 0,65 - 0,10 = \underline{0,45}.$$

b)



$$P = P(\bar{p} \cap \bar{l}) = 1 - P(p\cup l) = 1 - [P(p) + P(l) - P(p\cap l)] =$$

$$= 1 - (0,65 + 0,25 - 0,10) = 1 - 0,8 = \underline{0,2}.$$

c)

$$P(l) = \frac{P(p\cap l)}{P(l)} = \frac{0,10}{0,25} = \underline{0,40}.$$

****

OPCIÓN B

1º) En una sucursal de una agencia de viajes se vende un total de 60 billetes de avión con destino a Londres, París y Roma. Sabiendo que el número de billetes para París es el doble de los vendidos para los otros dos destinos conjuntamente y que para Roma se emiten dos billetes más que la mitad de los vendidos para Londres, ¿cuántos billetes se han vendido para cada uno de los destinos?

Sean x, y, z los billetes vendidos para Londres, París y Roma, respectivamente.

$x + y + z = 60 \quad y = 2(x + z) \quad z = 2 + x/2\} \; x + y + z = 60 \quad y = 2x + 2z$
.

$(-4 + 2z) + y + z = 60 \; 2(-4 + 2z) - y + 2z = 0\} \quad y + 3z = 64 \; -y + 6z$
.

$y + 3z = 64; \; y = 64 - 24; \; y = 40.$
$x = -4 + 2z = -4 + 16 = 12.$

$\underline{Se\ han\ vendido: Londres,\ 12\ billetres;\ París,\ 40\ billetes\ y\ Roma,\ 8\ billetes.}$

****

2º) El rendimiento de un estudiante durante las primeras 6 horas de estudio viene dado (en una escala de 0 a 100) por la función $R(t) = \frac{700t}{4t^2+9}$, donde t es el número de horas trascurrido.

a) Calcula el rendimiento a las 3 horas de estudio.

b) Determina la evolución del rendimiento durante las primeras 6 horas de estudio (cuándo aumenta y cuando disminuye). ¿Cuál es el rendimiento máximo?

c) Una vez alcanzado el rendimiento máximo, ¿en qué momento el rendimiento es 35?

----

a)

$$R(3) = \frac{700\cdot 3}{4\cdot 3^2+9} = \frac{2.100}{36+9} = \frac{2.100}{45} = 46,67.$$

$$\underline{El\ rendimiento\ a\ las\ 3\ horas\ es\ del\ 46,67\ \%}.$$

b)

$$R'(t) = \frac{700\cdot(4t^2+9)-700t\cdot 8t}{(4t^2+9)^2} = \frac{700\cdot(4t^2+9-8t^2)}{(4t^2+9)^2} = \frac{700\cdot(-4t^2+9)}{(4t^2+9)^2}.$$

$$R'(t) = 0 \Rightarrow \frac{700\cdot(-4t^2+9)}{(4t^2+9)^2} = 0; \quad -4t^2+9=0;\ t^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow t_1 = \frac{3}{2},\ t_2 = -\frac{3}{2}$$

.

Es evidente que la solución de t negativa carece de sentido lógico.

$$Crecimiento:\ R'(t) > 0 \Rightarrow t \in (1'5,\ 6).$$

$$Decrecimiento:\ R'(t) < 0 \Rightarrow t \in (0,\ 1'5).$$

$$\underline{El\ rendimiento\ disminuye\ las\ primeras\ 1,5\ horas\ y\ aumenta\ después}.$$

$$R\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{700\cdot\frac{3}{2}}{4\left(\frac{3}{2}\right)^2+9} = \frac{1.050}{18} = 58,33.$$

$$\underline{El\ rendimiento\ máximo\ es\ del\ 58,33\ \%}.$$

c)

$$R\left(t > \frac{3}{2}\right) = 35;\ \frac{700t}{4t^2+9} = 35;\ \frac{20t}{4t^2+9} = 1;\ 20t = 4t^2+9;\ 4t^2-20t+9=0;$$

$$t = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 144}}{2 \cdot 4} = \frac{20 \pm \sqrt{256}}{8} = \frac{20 \pm 16}{8} = \frac{5 \pm 4}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2},\ t_2 = \frac{9}{2}.$$

La solución $t = \frac{1}{2}$ no es válida por ser menor de $\frac{3}{2}$.

$\underline{El\ rendimiento\ es\ del\ 35\ \%\ a\ las\ 4\ horas\ y\ media.}$

****

3º) La probabilidad de que tenga lugar el suceso A es $\frac{2}{3}$, la probabilidad de que no ocurra el suceso B es $\frac{1}{4}$ y la probabilidad de que ocurra el suceso A o el suceso B es $\frac{19}{24}$. Calcula:

a) La probabilidad de que ocurran a la vez el suceso A y el suceso B.

b) La probabilidad de que no ocurra A y no ocurra B.

c) La probabilidad de que ocurra A sabiendo que ha ocurrido B.

d) ¿Son independientes los sucesos A y B? ¿Por qué?

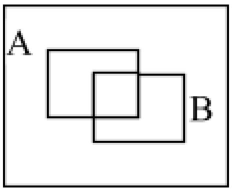
$$P(A) = \frac{2}{3}. \qquad P(B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \qquad P(A \cup B) = \frac{19}{24}.$$

a)

$$P = P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{19}{24} = \frac{16+18-19}{24} = \frac{15}{24} = \underline{\frac{5}{8}}.$$

b)



$$P = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cap B) =$$

$$= 1 - \frac{19}{24} = \frac{24-19}{24} = \underline{\frac{5}{24}}.$$

c)

$$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{5 \cdot 4}{8 \cdot 3} = \underline{\frac{5}{6}}.$$

d)

Dos sucesos A y B son independientes cuando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$:

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \neq \frac{5}{8}.$$

<u>*Por lo expuesto anteriormente los sucesos A y B no son independientes.*</u>

****