MATEMÁTICAS II

Selectividad 2016

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS DE TODAS LAS COMUNIDADES AUTÓNOMAS

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Vallecas

Textos Marea Verde

Antes Selectividad, ahora tiene distintos nombres:

ABAU (Galicia),

EAU (País Vasco),

EBAU (Asturias, Cantabria, Castilla y León, Extremadura, Islas Canarias, La Rioja y Murcia),

EvAU (Aragón, Castilla-La Mancha y Navarra),

EVAU (Madrid),

PAU (Cataluña y Valencia) ,

PBAU (Islas Baleares) o

PevAU (Andalucía): Prueba de acceso y admisión a la Universidad

TEXTOS MAREA VERDE

www.apuntesmareaverde.org.es

I.S.B.N. - 13: 978-84-608-8980-9

I.S.B.N. - 10: 84-608-8980-9

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA

JUNIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Instrucciones: Tienes que elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**. Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

OPCIÓN A

1º) Sabiendo que $\frac{L(x+1)-a\cdot sen\, x+x\cdot \cos(3x)}{x^2}$ es finito, calcula el valor de a y el valor del límite (L denota logaritmo neperiano).

$$\frac{L(x+1)-a\cdot sen\, x+x\cdot \cos(3x)}{x^2} = \frac{L1-a\cdot sen\, 0+0\cdot \cos 0}{0} = \frac{0-0+0}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \frac{\frac{1}{x+1}-a\cdot \cos x+1\cdot \cos(3x)-3x\cdot sen\,(3x)}{2x} = \frac{1-a+1-0}{0} = \frac{2-a}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow a = 2$$

.

$\underline{Para\ que\ el\ valor\ del\ límite\ sea\ finito\ tiene\ que\ ser\ a = 2.}$

Para $a = 2$ el límite resulta:

$$\frac{\frac{1}{x+1}-2\cdot \cos x+1\cdot \cos(3x)-3x\cdot sen\,(3x)}{2x} \quad \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{-1}{(x+1)^2}+2\cdot x-3\cdot(3x)-[3\cdot sen\,(3x)+3x\cdot 3\cdot \cos(3x)]}{2} = \frac{-\frac{1}{1}+0-0-(0+0)}{2} = \underline{-\frac{1}{2}}.$$

****

2º) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en el punto de abscisa $x = 1$ sabiendo que $f(0) = 0$ y $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x+1}$ para $x > -1$.

$$\begin{array}{rrr|l} x^2 & -2x & +1 & x+1 \\ \cline{4-4} -x^2 & -x & & x-3 \\ \cline{1-3} 0 & -3x & +1 & \\ & +3x & +3 & \\ \cline{2-3} & 0 & +4 & \end{array}$$

$$f(x) = \int \frac{(x-1)^2}{x+1} \cdot dx = \int \frac{x^2-2x+1}{x+1} \cdot dx =$$

$$= \int \left(x - 3 + \frac{4}{x+1}\right) \cdot dx = \int (x - 3) dx + 4 \int \frac{dx}{x+1} =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 3x + 4 \cdot L(x + 1) + C.$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow \frac{0^2}{2} - 3 \cdot 0 + 4 \cdot L(0 + 1) + C = 0;\ \ 0 - 0 + 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0.$$

$$\underline{f(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + 4 \cdot L(x + 1).}$$

La pendiente de la recta tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto:

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x+1} \Rightarrow m = f'(1) = \frac{0^2}{1+1} = 0 \Rightarrow m = 0.$$

El punto de tangencia es el siguiente:

$$f(1) = \frac{1^2}{2} - 3 \cdot 1 + 4 \cdot L(1 + 1) = \frac{1-6+8L2}{2} = \frac{8L2-5}{2} \Rightarrow P\left(1,\ \frac{8L2-5}{2}\right).$$

La expresión de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente es la siguiente: $y - y_0 = m\left(x - x_0\right)$.

$$y - \frac{8L2-5}{2} = 0(x - 1) = 0;\ \ 2y - 8L2 + 5 = 0.$$

La ecuación de la recta tangente pedida es la siguiente:

$$\underline{Recta\ tangente\colon\ t \equiv 2y + (5 - 8L2) = 0}.$$

****

3º) Considera las matrices $A = (-\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ \ -\ 2\ 1\ 1\ )$ y $B = (-\ 3\ 3\ 2\ \ -\ 8\ 7\ 4\ 8\ \ -\ 6\ \ -\ 3\ )$.

a) Halla la matriz X que verifica $AX\ +\ B\ =\ 2A$.

b) Calcula B^2 y B^{2016}.

----

a)

$$AX\ +\ B\ =\ 2A;\ AX\ =\ 2A\ -\ B\ =\ M;\ A^{-1}\cdot A\cdot X\ =\ A^{-1}\cdot M;\ I\cdot X\ =\ A^{-1}\cdot M \Rightarrow$$

$\Rightarrow X\ =\ A^{-1}\cdot M.$ (*)

$M\ =\ 2A\ -\ B\ =\ 2\cdot(-\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ \ -\ 2\ 1\ 1\ ) - (-\ 3\ 3\ 2\ \ -\ 8\ 7\ 4\ 8\ \ -\ 6\ \ -\ 3\ ) =$

$= (-\ 2\ 2\ 2\ 0\ 2\ 0\ \ -\ 4\ 2\ 2\ ) - (-\ 3\ 3\ 2\ \ -\ 8\ 7\ 4\ 8\ \ -\ 6\ \ -\ 3\ ) = (1\ \ -\ 1\ 0\ 8\ \ -\ 5\ \ -\ 4$
.

Se obtiene la inversa de A por el procedimiento de Gauss-Jordan:

$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow -\ F_1\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (-\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) = \left\{F_3 \rightarrow F_3\ +\ 2F_2\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (-\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ \ -\ 2\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow F_1\ +\ F_2\, F_3 \rightarrow F_3\ +\ F_2\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (-\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ \ -\ 2\ 1\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_3 \rightarrow -\ F_3\right\} \Rightarrow (-\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 2\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ ) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow F_1\ +\ F_3\right\} \Rightarrow (1\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 1\ 0\ 2\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ ) \Rightarrow A^{-1} = (1\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 1\ 0\ 2\ \ -\ 1\ \ -\ 1$
.

Sustituyendo en (*) los valores obtenido de M y A^{-1}:

$X\ =\ A^{-1}\cdot M\ =\ (1\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 1\ 0\ 2\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ )\cdot(1\ \ -\ 1\ 0\ 8\ \ -\ 5\ \ -\ 4\ \ -\ 12\ 8\ 5\ ) = (13\ \ -$
.

$$\underline{X\ =\ (13\ \ -\ 9\ \ -\ 5\ 8\ \ -\ 5\ \ -\ 4\ 6\ \ -\ 5\ \ -\ 1\ )}.$$

b)

$B^{2} = B \cdot B = (-\ 3\ 3\ 2\ \ -\ 8\ 7\ 4\ 8\ \ -\ 6\ \ -\ 3) \cdot (-\ 3\ 3\ 2\ \ -\ 8\ 7\ 4\ 8\ \ -\ 6\ \ -\ 3) = (1\ 0\ 0\ 0$
.

$$\underline{B^{2} = I}.$$

$$B^{2016} = \left(B^{2}\right)^{1008} = I^{1008} = I.$$

$$\underline{B^{2016} = I}.$$

****

4º) Considera el punto $P(1,\ 0,\ 5)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} y + 2z = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

$a)$ Determina la ecuación del plano que pasa por P es perpendicular a r.

$b)$ Calcula la distancia de P a la recta r y el punto simétrico de P respecto a r.

$a)$

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es: $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (0,\ -2,\ 1)$.

El haz de planos β perpendiculares a r tiene la siguiente expresión dada en forma general o implícita: $\beta \equiv 2y - z + D = 0$.

De los infinitos planos de haz β, el plano π que contiene al punto $P(1,\ 0,\ 5)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \beta \equiv 2y - z + D = 0 \\ P(1,\ 0,\ 5) \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot 0 - 5 + D = 0 \Rightarrow D = 5.$$

$$\underline{\pi \equiv 2y - z + 5 = 0}.$$

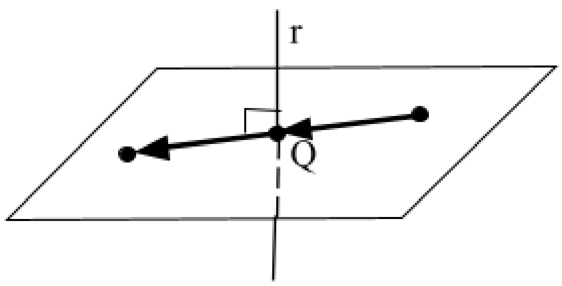
$b)$

El punto de intersección de la recta r y el plano π es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \\ \pi \equiv 2y - z - 5 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot (-2\lambda) - \lambda + 5 = 0;$$

$5\lambda - 5 = 0;\ \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow Q(1,\ -2,\ 1)$.

La distancia entre P y r es la misma que la distancia entre P y Q:



$$\overrightarrow{PQ} = [Q - P] = [(1,\ -2,\ 1) - (1,\ 0,\ 5)] =$$

$= (0,\ -2,\ -4)$.

$$d(P,\ r) = \overline{PQ} = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

.

$\underline{d(P,\ r) = 2\sqrt{5}\, unidades}.$

Se trata de encontrar el punto $P^{'}$, simétrico de P con respecto a la recta r.

Tiene que cumplirse que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP'}$:

$\overrightarrow{QP'} = [P' - Q] = [(x,\ y,\ z) - (1,\ -2,\ 1)] = (x - 1,\ y + 2,\ z - 1).$

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP'} \Rightarrow (0,\ -2,\ -4) = (x - 1,\ y + 2,\ z - 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \quad y + 2 = -2 \rightarrow y = -4\ z - 1 = -4 \rightarrow z = -3\} \Rightarrow \underline{P'(1,\ -4}$

.

****

OPCIÓN B

1º) Sea $f: R\rightarrow R$ la función definida por $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

$a)$ Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f. Calcula los puntos de corte de dichas asíntotas con la gráfica de f.

$b)$ Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).

$c)$ Esboza la gráfica de f.

$a)$

Asíntotas horizontales: son de la forma y = k y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = f(x) = \frac{x}{x^2+1} = 0 .$$

$\underline{El\ eje\ de\ abscisas\ es\ asíntota\ horizontal\ de\ la\ función}.$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x \notin R \Rightarrow \underline{La\ función\ f(x)\ no\ tiene\ asíntotas\ verticales}.$

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, con $m\neq 0,\ m\neq\infty$, siendo:

$$m = \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{x}{x^2+1}}{x} = \frac{x}{x^3+x} = 0.$$

$\underline{La\ función\ f(x)\ no\ tiene\ asíntotas\ oblicuas}.$

Los puntos de corte de la asíntota horizontal $y = 0$ con la función se obtienen de la igualación de sus expresiones:

$$\left. \begin{array}{l} y = 0 \\ f(x) = \frac{x}{x^2+1} \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = \frac{x}{x^2+1} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \underline{O(0,\ 0)}.$$

$b)$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{1\cdot\left(x^2+1\right)-x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = 0;\ 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1.$$

Como quiera que $\left(x^2 + 1\right)^2 > 0,\ \forall x \in R$, la derivada es positiva o negativa cuando lo sea la expresión $1 - x^2$.

Los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon (-1, 1)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto. Esta condición necesaria no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; se es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{-2x\cdot\left(x^2+1\right)^2-\left(1-x^2\right)\cdot\left[2\cdot\left(x^2+1\right)\cdot 2x\right]}{\left(x^2+1\right)^4} = \frac{-2x\cdot\left(x^2+1\right)-4x\cdot\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3} =$$

$$= \frac{-2x^3-2x-4x+4x^3}{\left(x^2+1\right)^3} = \frac{2x^3-6x}{\left(x^2+1\right)^3}.$$

$$f''(-1) = \frac{-2+6}{8} > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = -1.$$

$$f(-1) = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \underline{Mínimo: P\left(-1,\ -\frac{1}{2}\right)}.$$

$$f''(1) = \frac{2-6}{8} < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 1.$$

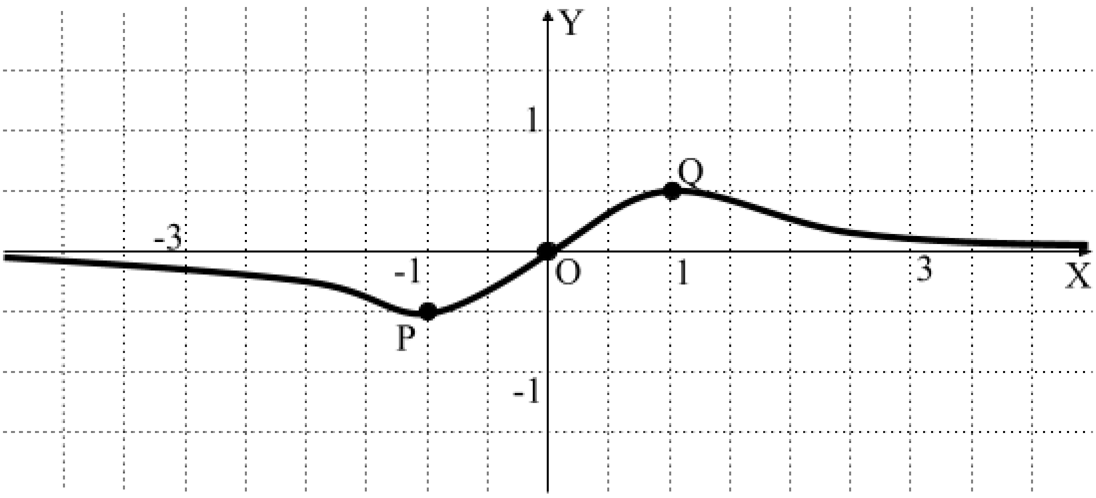
$$f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{Máximo: Q\left(1,\ \frac{1}{2}\right)}.$$

También se obtiene el máximo del podo siguiente:

Por ser $f(-x) = -f(x)$, la función $f(x)$ es simétrica con respecto al origen y, en consecuencia: $\underline{Máximo: Q\left(1,\ \frac{1}{2}\right)}$.

$c)$

Con los datos obtenidos puede hacerse un esbozo de la gráfica de $f(x)$, que es el siguiente:



****

2º) Sea $f:(0,\ +\infty)\to R$ la función dada por $f(x)=Lx$ (L representa logaritmo neperiano).

a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $x = 1$.

b) Esboza el recinto comprendido entre la gráfica de f, la recta $y = x - 1$ y la recta $x = 3$. Calcula su área.

----

a)

La pendiente de la tangente a una función en un punto es el valor de su primera derivada en ese punto:

$$f'(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow m = f'(1)=\frac{1}{1} = 1.$$

El punto de tangencia es: $f(1) = L1 = 0 \Rightarrow T(1,\ 0)$.

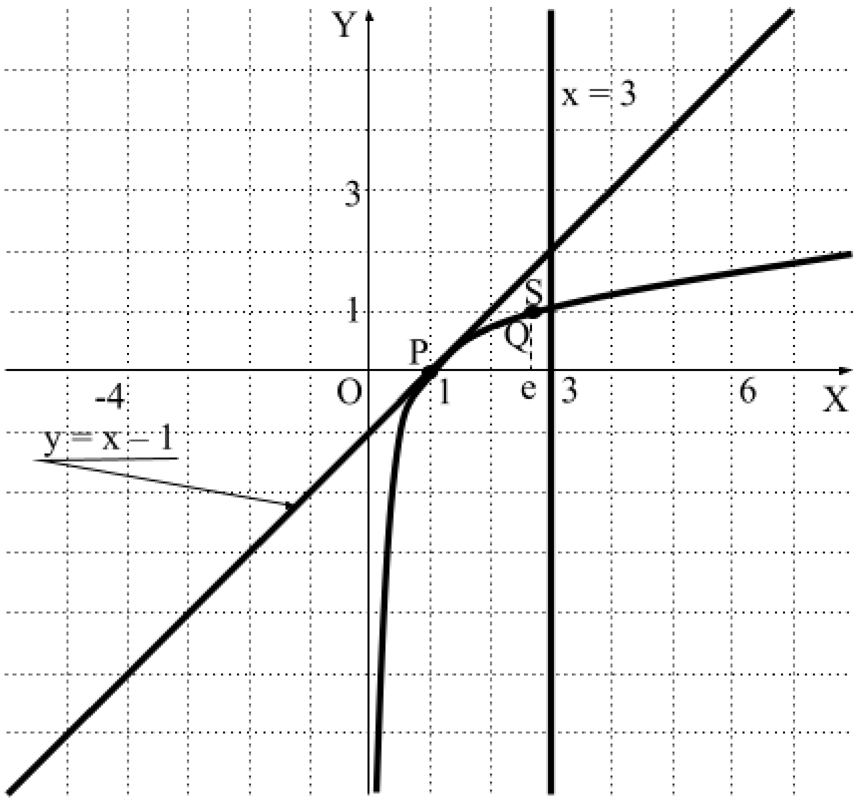
La expresión de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente es la siguiente: $y - y_0 = m\left(x - x_0\right)$.

$$y - 0 = 1\cdot(x - 1) = x - 1.$$

La ecuación de la recta tangente pedida es la siguiente:

$$\underline{Recta\ tangente:\ t\equiv x - y - 1 = 0}.$$

b)



De la observación de la figura se deduce el área a calcular, que es la siguiente:

$$\int_1^3 [(x-1)-Lx]\cdot dx = \int_1^3 (x-1)\cdot dx - \int_1^3 Lx\cdot dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^3 - \left[\left\{u = Lx \rightarrow du = \frac{1}{x}\cdot dx \; dv = dx \rightarrow v = x\right\} \Rightarrow Lx\cdot x - \int x\cdot\frac{1}{x}\cdot dx\right]_1^3 =$$

$$= \left(\frac{3^2}{2} - 3\right) - \left(\frac{1^2}{2} - 1\right) - \left[Lx\cdot x - \int dx\right]_1^3 = \frac{9}{2} - 3 - \frac{1}{2} + 1 - [Lx\cdot x - x]_1^3 =$$

$$= 2 - [(3\cdot L3 - 3) - (1\cdot L1 - 1)] = 2 - (3L3 - 3 - 0 + 1) = 2 - 3L3 + 2 =$$

$$= 4 - 3L3 = 4 - L27 \cong 0,70.$$

$$\underline{S = (4 - L27)\, u^2 \cong 0,70\, u^2}.$$

****

3º) Se considera el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} (3a-1)x+2y=5-a \\ ax+y=2 \\ 3ax+3y=a+5 \end{cases}$.

a) Discútelo según los valores del parámetro a.

b) Resuélvelo para $a = 1$ y determina en dicho caso, si existe alguna solución donde $x = 4$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A = \begin{pmatrix} 3a-1 & 2 \\ a & 1 \\ 3a & 3 \end{pmatrix}$ y $A' = \begin{pmatrix} 3a-1 & 2 & 5-a \\ a & 1 & 2 \\ 3a & 3 & a+5 \end{pmatrix}$.

El rango de la matriz ampliada en función del parámetro a es el siguiente:

$|A'| = \begin{vmatrix} 3a-1 & 2 & 5-a \\ a & 1 & 2 \\ 3a & 3 & a+5 \end{vmatrix} =$

$= (3a-1)(a+5) + 3a(5-a) + 12a - 3a(5-a) - 6(3a-1) - 2a(a+5) =$

$= (3a-1)(a+5-6) + 12a - 2a(a+5) =$

$= 3a^2 - 3a - a + 1 + 12a - 2a^2 - 10a = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1$.

$Para\ a \neq 1 \Rightarrow Rang\ A = 2;\ Rang\ A' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.$

$Para\ a = 1\ es\ A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A' \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow Ran\ A = Rang\ A' =$

$\underline{Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 1 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

b)

Para $a = 1$ el sistema es $\begin{cases} 2x+2y=4 \\ x+y=2 \\ 3x+3y=6 \end{cases}$, equivalente al "sistema" $\{x + y = 2$, que es compatible indeterminado.

Haciendo $x = \lambda$ es $y = 2 - \lambda$.

$\underline{Para\ a = 1\ las\ soluciones\ son: x = \lambda,\ y = 2 - \lambda,\ \forall\lambda \in R.}$

$\underline{Para\ \lambda = 4\ la\ solución\ del\ sistema\ es: x = 4,\ y = -2.}$

****

4º) Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + 2y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$.

a) Comprueba que ambas rectas son coplanarias y halla la ecuación del plano que las contiene.

b) Sabiendo que dos de los lados de un cuadrado están en las rectas r y s, calcula su área.

----

a)

La expresión de s por unas ecuaciones paramétricas es $s \equiv \begin{cases} x = -1 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{cases}$.

Un punto y un vector de cada una de las rectas son los siguientes:

Recta r: $A(1,\ 1,\ 1)\ y\ \overrightarrow{v_r} = (2,\ -1,\ 0)$. Recta s: $B(-1,\ 0,\ -1)\ y\ \overrightarrow{v_s} = (-2,\ 1,\ 0)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente dependientes por ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s son paralelas o coincidentes. Para diferenciar el caso comprobamos, por ejemplo, que el punto A perteneciente a r satisface (o no) la ecuación de s:

$$A(1,\ 1,\ 1) \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -1 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow A \notin s.$$

$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ son\ paraleas,\ por\ lo\ cual,\ están\ en\ un\ mismo\ plano}.$

Los puntos $A(1,\ 1,\ 1)\ y\ B(-1,\ 0,\ -1)$ determinan el vector $\overrightarrow{BA} = (2,\ 1,\ 2)$.

La expresión general del plano π que contiene a r y s es la siguiente:

$$\pi\left(B;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{BA}\right) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z+1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$-2(x+1) + 2(z+1) + 2(z+1) - 4y = 0;\ \ (x+1) - 2(z+1) + 2y = 0;$

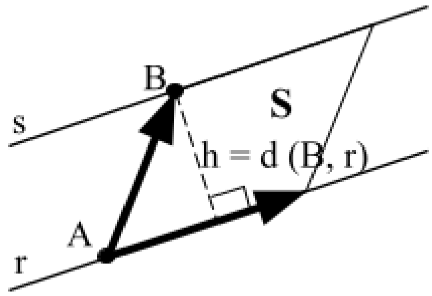
$x + 1 - 2z - 2 + 2y = 0.$

$$\underline{\pi \equiv x + 2y - 2z - 1 = 0}.$$

b)

La distancia entre r y s, por ser paralelas, es igual que la distancia de un punto de una de ellas a la otra.

La distancia de un punto a una recta puede determinarse teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que forman dos vectores es el módulo de su producto vectorial y, de forma geométrica, es el producto de la base por la altura.



$$S = \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AB}\right| \; S = \left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot h \,\} \Rightarrow \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = d(B, r) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}.$$

Los puntos A y B determinan el vector:

$$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(-1,\ 0,\ -1) - (1,\ 1,\ 1)] = (-2,\ -1,\ -2).$$

Para una mejor comprensión del proceso se hace un dibujo de la situación.

Aplicando la fórmula al punto B y a la recta r:

$$d(r, s) = d(B, r) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|} = \frac{\| i\ j\ k\ 2\ -1\ 0\ -2\ -1\ -2\ \|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+0^2}} = \frac{|2i-2k-2k+4j|}{\sqrt{4+1+0}} = \frac{|2i+4j-4k|}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{2\cdot|i+2j-2k|}{\sqrt{5}} = \frac{2\cdot\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}{\sqrt{5}} = \frac{2\cdot\sqrt{1+4+4}}{\sqrt{5}} = \frac{2\cdot 3}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

El área del cuadrado es el cuadrado de la distancia hallada:

$$S_{cuadrado} = \left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{36\cdot 5}{25} = \frac{36}{5} = 7,2.$$

$$\underline{S_c = 7,2\,u^2.}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA

SEPTIEMBRE – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Instrucciones: Tienes que elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**. Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

OPCIÓN A

1º) Sabiendo que $\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{m}{2x}\right)$ es finito, calcula m y el valor del límite.

$$\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{m}{2x}\right)=\frac{1}{e^0-1}-\frac{m}{0}=\frac{1}{1-1}-\frac{m}{0}=\frac{1}{0}-\frac{m}{0}=\infty\pm\infty\ (m\neq 0)\Rightarrow Indet.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{2x-m\left(e^x-1\right)}{2x\left(e^x-1\right)}=\frac{0}{0}\Rightarrow Indet.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow\frac{2-m\cdot e^x}{2\cdot\left(e^x-1\right)+2x\cdot e^x}=\frac{2-m\cdot 1}{0+0}=\frac{0}{0}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2-m=0\Rightarrow \underline{m=2}.$$

Para $m=2$ el valor del límite es el siguiente:

$$\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{m}{2x}\right)=\frac{2-2\cdot e^x}{2\cdot\left(e^x-1\right)+2x\cdot e^x}=\frac{1-e^x}{e^x-1+x\cdot e^x}=\frac{1-e^x}{e^x(1+x)-1}=$$

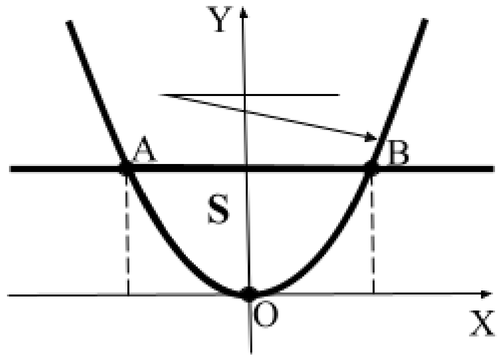
$$=\frac{1-1}{1\cdot(1+0)-1}=\frac{0}{0}\Rightarrow Indet.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow\frac{-e^x}{e^x(1+x)+e^x\cdot 1}=\frac{-1}{1+x+1}=$$

$$=\frac{-1}{1+0+1}=-\frac{1}{2}.$$

$$\underline{Para\, m=2\Rightarrow\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{m}{2x}\right)=-\frac{1}{2}.}$$

****

2º) Sea $f: R \rightarrow R$ la función definida por $f(x) = x^4$. Encuentra la recta horizontal que corta a la gráfica de f formando con ella un recinto con área $\frac{8}{5}$.



La expresión de una recta horizontal es $y = k$.

La representación gráfica, aproximada, de la situación es la que aparece en la figura adjunta.

Los puntos de corte de la curva y la recta horizontal son los que se obtienen de resolver la ecuación que determinan sus expresiones:

$$k = x^4 \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{k} \Rightarrow A\left(-\sqrt[4]{k},\ k\right),\ B\left(\sqrt[4]{k},\ k\right).$$

Teniendo en cuenta la simetría de la función con respecto a Y, $f(-x) = f(x)$, se deduce el valor de la superficie del bucle:

$$S = 2\cdot\left(\sqrt[4]{k}\cdot k - \int_0^{\sqrt[4]{k}} x^4\cdot dx\right) = \frac{8}{5};\ \ \sqrt[4]{k}\cdot k - \int_0^{\sqrt[4]{k}} x^4\cdot dx = \frac{4}{5};$$

$$\int_0^{\sqrt[4]{k}} x^4\cdot dx = \sqrt[4]{k}\cdot k - \frac{4}{5};\ \ \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^{\sqrt[4]{k}} = \sqrt[4]{k}\cdot k - \frac{4}{5};\ \ \frac{\left(\sqrt[4]{k}\right)^5}{5} = \sqrt[4]{k}\cdot k - \frac{4}{5};$$

$$k^{\frac{5}{4}} = 5\cdot k^{\frac{5}{4}} - 4;\ \ 4 = 4\cdot k^{\frac{5}{4}} \Rightarrow k^{\frac{5}{4}} = 1 \Rightarrow k = 1.$$

$\underline{\textit{La recta horizontal que con } f \textit{ forma un bucle de área } \frac{5}{8} \textit{ es } y = 1.}$

****

3º) Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\{2x - 4y + 2z = 1 \ \ 5x - 11y + 9z = \lambda \ x - 3y + 5z = 2$.

a) Discute el sistema según los valores del parámetro λ.

b) Resuélvelo, si es posible, para $\lambda = 4$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A = (2 \ - 4 \ 2 \ 5 \ - 11 \ 9 \ 1 \ - 3 \ 5)$ y $A' = (2 \ - 4 \ 2 \ 5 \ - 11 \ 9 \ 1 \ - 3 \ 5 \quad 1 \ \lambda \ 2)$.

$$A' = (2 \ - 4 \ 2 \ 5 \ - 11 \ 9 \ 1 \ - 3 \ 5 \quad 1 \ \lambda \ 2) \Rightarrow \left\{F_1 \leftrightarrow F_3\right\} \Rightarrow (1 \ - 3 \ 5 \ 5 \ - 11 \ 9 \ 2$$

$$\Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow F_2 - 5F_1 \ F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1\right\} \Rightarrow (1 \ - 3 \ 5 \ 0 \ 4 \ - 16 \ 0 \ 2 \ - 8 \quad 2 \ \lambda - 10 \ - 3)$$

$$\Rightarrow \left(1 \ - 3 \ 5 \ 0 \ 2 \ - 8 \ 0 \ 2 \ - 8 \quad 2 \ \frac{\lambda-10}{2} \ - 3\right) \Rightarrow \frac{\lambda-10}{2} = - 3; \ \lambda - 10 = - 6 \Rightarrow \lambda = 4$$

.

De lo anterior se deduce que:

$\underline{Para\, \lambda = 4 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I}.$

$\underline{Para\, \lambda \neq 4 \Rightarrow Rang\ A = 2;\ Rang\ A' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

b)

Para $\lambda = 4$ el sistema resulta: $\{2x - 4y + 2z = 1 \ \ 5x - 11y + 9z = 4 \ x - 3y + 5z = 2$, que es compatible indeterminado; despreciando una ecuación (segunda) y haciendo $z = \lambda$:

$$2x - 4y = 1 - 2\lambda \ \ x - 3y = 2 - 5\lambda \} \qquad 2x - 4y = 1 - 2\lambda \ - 2x + 6y = - 4 +$$

.

$$x = 3y + 2 - 5\lambda = - \frac{9}{2} + 12\lambda + 2 - 5\lambda = - \frac{5}{2} + 7\lambda.$$

$$\underline{Solución: \{x = - \frac{5}{2} + 7\lambda \ \ y = - \frac{3}{2} + 4\lambda \ \ z = \lambda \qquad , \forall \lambda \in R.}$$

****

4º) Considera el punto $A(1,\ -1,\ 1)$ y la recta $r\equiv\{x = 1 + 2\lambda\ y = 1 - \lambda\ \ z = 1$.

$a)$ Calcula las coordenadas del punto simétrico de A respecto a r.

$b)$ Determina la ecuación del plano π que contiene a r y pasa por A.

$a)$

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (2,\ -1,\ 0)$.

El haz de planos perpendiculares a r es $\beta\equiv 2x - y + D = 0$.

El plano $\alpha\in\beta$ que contiene al punto A es el siguiente:

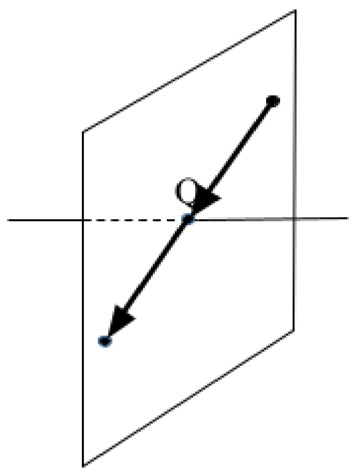
$\beta\equiv 2x - y + D = 0 \quad A(1,\ -1,\ 1)\}\Rightarrow 2\cdot 1 - (-1) + D = 0;\ 2 + 1 + D = ($

$\Rightarrow \alpha\equiv 2x - y - 3 = 0.$

El punto Q intersección de r y α es el siguiente:

$\alpha\equiv 2x - y - 3 = 0 \quad r\equiv\{x = 1 + 2\lambda\ y = 1 - \lambda\ \ z = 1 \quad \}\Rightarrow 2(1 + 2\lambda) - (1 -$

$2 + 4\lambda - 1 + \lambda - 3 = 0;\ 5\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{5}.$



$x = 1 + 2\lambda = 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5} \quad y = 1 - \lambda = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \quad z = 1\}\Rightarrow Q\Big($

.

Para que A' sea el simétrico de A con respecto a r tiene que cumplirse que:

$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{QA'} \Rightarrow [Q - A] = \left[A' - Q\right];$

$\left[\left(\frac{9}{5},\ \frac{3}{5},\ 1\right) - (1,\ -1,\ 1)\right] = \left[(x,\ y,\ z) - \left(\frac{9}{5},\ \frac{3}{5},\ 1\right)\right];$

$\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}, 0\right) = \left(x - \frac{9}{5}, y - \frac{3}{5}, z - 1\right) \Rightarrow \{x - \frac{9}{5} = \frac{4}{5} \rightarrow x = \frac{13}{5}\ y - \frac{3}{5} = \frac{8}{5} \rightarrow y = \frac{11}{5}\ z$

.

$b)$

Un punto de $r \equiv \{x = 1 + 2\lambda\ y = 1 - \lambda\ \ z = 1$ es $P(1, 1, 1)$.

Los puntos $A(1, -1, 1)$ y P determinan el vector $\overrightarrow{AP} = [P - A] = (0, 2, 0)$.

La ecuación general del plano π pedido es la siguiente:

$\pi\left(P; \overrightarrow{v}_r, \overrightarrow{AP}\right) \equiv |x - 1\ y - 1\ z - 1\ 2\ \ -1\ 0\ 0\ 2\ 0| = 0;\ \ 4(z - 1) = 0.$

$\underline{\pi \equiv z - 1 = 0}.$

****

OPCIÓN B

1º) Sea $f\colon R\to R$ la función definida por $f(x) = x^2 \cdot e^{-x^2}$.

a) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

b) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).

c) Esboza la gráfica de f.

----

a)

$$f(x) = x^2 \cdot e^{-x^2} = \frac{x^2}{e^{x^2}}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos que anulan el denominador.

Como quiera que $e^{x^2} \neq 0,\ \forall x \in R$, $\underline{f(x)\ no\ tiene\ asíntotas\ verticales}$.

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$, siendo k los valores finitos que toma la función cuando x tiende a más infinito o menos infinito:

$$k = f(x) = \frac{x^2}{e^{x^2}} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \frac{2x}{2x \cdot e^{x^2}} =$$

$$= \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$\underline{La\ recta\ y = 0\ es\ asíntota\ horizontal\ en\ \pm\infty\ de\ la\ función.}$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

b)

Una función es creciente o decreciente en un punto cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-x^2} + x^2 \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2} = 2x \cdot e^{-x^2}\left(1 - x^2\right).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x \cdot e^{-x^2}\left(1 - x^2\right) = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1.$$

Teniendo en cuenta que $f(x)$ es continua en su dominio, que es R, las raíces de la primera derivada dividen su dominio en cuatro intervalos alternativos de crecimiento y decrecimiento. Para determinar los que son crecientes y decrecientes se estudia un punto de uno de ellos, por ejemplo $x = 2$:

$f'(2) = 2 \cdot 2 \cdot e^{-4}(1 - 4) < 0 \rightarrow Decreciente.$

Los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1).}$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty).}$$

Una función tiene un máximo o un mínimo relativo para los valores de x que anulan la primera derivada; para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera derivada se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo relativo.

$$f''(x) = 2\left[1 \cdot e^{-x^2}\left(1 - x^2\right) + x \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2}\left(1 - x^2\right) + x \cdot e^{-x^2}(-2x)\right] =$$

$$= 2e^{-x^2} \cdot \left[1 - x^2 - 2x^2 \cdot \left(1 - x^2\right) - 2x^2\right] = 2e^{-x^2} \cdot \left(1 - 3x^2 - 2x^2 + 2x^4\right) =$$

$$= 2e^{-x^2} \cdot \left(2x^4 - 5x^2 + 1\right) = f''(x).$$

$$f''(-1) = 2e^{-1} \cdot (2 - 5 + 1) = -\frac{4}{e} < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -1.$$

Teniendo en cuenta la continuidad de la función, los máximos y mínimos de la función son absolutos.

$$f(-1) = \frac{(-1)^2}{e^{(-1)^2}} = \frac{1}{e} \Rightarrow \underline{Máximo\ obsoluto: A\left(-1, \frac{1}{e}\right)}.$$

Por ser $f(-1) = f(1)$ la función es simétrica con respecto al eje Y, por lo cual:

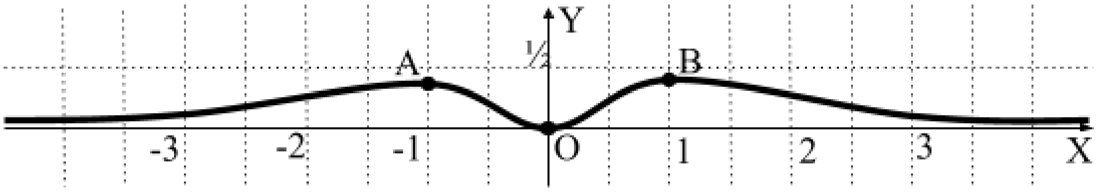
$$\underline{Máximo\ obsoluto: B\left(1, \frac{1}{e}\right)}.$$

$$f''(0) = 2e^{0} \cdot (0 - 0 + 1) = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo\ absoluto\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow \underline{Mínimo\ obsoluto: O(0, 0)}.$$

$c)$

Con los datos obtenidos en los apartados anteriores puede hacerse un esbozo de la gráfica de la función, que es el que aparece a continuación.



****

2º) Calcula $I = \int \frac{x}{1+\sqrt{x}} \cdot dx$. (Sugerencia $t = \sqrt{x}$).

$$\begin{array}{llll}
t^3 & & & \underline{\left| \; t+1 \right.} \\
\underline{-t^3-t^2} & & & t^2-t+1 \\
\quad -t^2 & & & \\
\quad \underline{+t^2+t} & & & \\
\qquad +t & & & \\
\qquad \underline{-t-1} & & & \\
\qquad\quad -1 & & &
\end{array}$$

$$I = \int \frac{x}{1+\sqrt{x}} \cdot dx \Rightarrow \left\{ t = \sqrt{x} \rightarrow x = t^2 \; dx = 2t \cdot dt \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{t^2}{1+t} \cdot 2t \cdot dt = 2 \int \frac{t^3}{1+t} \cdot dt =$$

$$= 2 \cdot \int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) \cdot dt =$$

$$= 2 \cdot \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - L|t+1| \right] + C = \frac{2}{3} x\sqrt{x} - x + 2\sqrt{x} - 2L\left|\sqrt{x} + 1\right| + C.$$

$$\underline{I = \int \frac{x}{1+\sqrt{x}} \cdot dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x} - x + 2\sqrt{x} - 2L\left|\sqrt{x} + 1\right| + C.}$$

****

3º) Considera las matrices $A = (1\ -\ 1\ 0\ ),\ B\ = (1\ 1\ 1\ )\ y\ C\ = (1\ 1\ 1\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ 0\ 0\ 0\ ).$

$a)$ Calcula el rango de $AB^t\ +\ \lambda I$, según los valores de λ (B^t es la matriz traspuesta de B e I es la matriz unidad de orden 3).

$b)$ Calcula la matriz X que verifica $CX\ -\ X\ =\ 2I.$

$a)$

$$AB^t\ +\ \lambda I\ = (1\ \ -\ 1\ 0\ )\cdot(1\ 1\ 1\ ) +\ \lambda\cdot I\ = (1\ 1\ 1\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ 0\ 0\ 0\ ) + (\lambda\ 0\ 0\ 0\ \lambda$$

$$=(\lambda\ +\ 1\ 1\ 1\ \ -\ 1\ \lambda\ -\ 1\ \ -\ 1\ 0\ 0\ \lambda\ ).$$

$$\left|AB^t\ +\ \lambda I\right| = |\lambda\ +\ 1\ 1\ 1\ \ -\ 1\ \lambda\ -\ 1\ \ -\ 1\ 0\ 0\ \lambda\ | = \lambda(\lambda\ +\ 1)(\lambda\ -\ 1) +\ \lambda\ =$$

$$= \lambda\left(\lambda^2\ -\ 1\ +\ 1\right) = \lambda^3\ =\ 0 \Rightarrow \lambda\ =\ 0.$$

$$\underline{Para\ \lambda\neq 0 \Rightarrow Rang\ \left(AB^t\ +\ \lambda I\right) =\ 3}.$$

$$Para\ \lambda\ =\ 0 \Rightarrow AB^t\ +\ \lambda I\ = (0\ +\ 1\ 1\ 1\ \ -\ 1\ 0\ -\ 1\ \ -\ 1\ 0\ 0\ 0\ ) = (1\ 1\ 1\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ \ -\ 1$$

$$\Rightarrow \left\{F_2 =-\ F_1\right\} \Rightarrow Rang\ =\ 1.$$

$$\underline{Para\ \lambda\ =\ 0 \Rightarrow Rang\ \left(AB^t\ +\ \lambda I\right) =\ 1}.$$

$b)$

$$CX\ -\ X\ =\ 2I;\ \ (C\ -\ I)\cdot X\ =\ 2I;\ \ (C\ -\ I)^{-1}\cdot(C\ -\ I)\cdot X\ = (C\ -\ I)^{-1}\cdot 2I;$$

$$I\cdot X\ = (C\ -\ I)^{-1}\cdot 2I \Rightarrow \underline{X\ = (C\ -\ I)^{-1}\cdot 2I}.\quad (*)$$

$$C\ -\ I\ = (1\ 1\ 1\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ 0\ 0\ 0\ ) - (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) = (0\ 1\ 1\ \ -\ 1\ \ -\ 2\ \ -$$

.

Se obtiene la inversa de $(C\ -\ I)$ por el método de Gauss-Jordan.

$$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow\ -\ F_2\right\} \Rightarrow$$

$$= (1\ 0\ 0\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_1 \leftrightarrow F_2\right\} \Rightarrow (0\ \ -\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \left\{ F_2 \rightarrow F_1 - 2F_2 \, F_3 \rightarrow -F_3 \right\} \Rightarrow (-\ 2\ \ -\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ \ -\ 1\ ) \Rightarrow \left\{ F_1 \rightarrow F_1 + F_3 \, F_2 \rightarrow F_2 \right.$

$\Rightarrow (-\ 2\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ \ -\ 1\ ) \Rightarrow (C\ -\ I)^{-1} = (-\ 2\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ \ -\ 1\ )$
.

Sustituyendo el valor obtenido en (*):

$X\ = (C\ -\ I)^{-1} \cdot 2I\ = (-\ 2\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ \ -\ 1\ ) \cdot (2\ 0\ 0\ 0\ 2\ 0\ 0\ 0\ 2\ ) = (-\ 4\ \ -\ 2\ \ -$
.

$\underline{X\ = (-\ 4\ \ -\ 2\ \ -\ 2\ 2\ 0\ 2\ 0\ 0\ \ -\ 2\ )}.$

****

4º) Calcula la distancia entre las rectas dadas por las ecuaciones siguientes:

$r \equiv x = y = z$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 3 + \mu \\ z = -\mu \end{cases}$.

Un punto y un vector director de r son $O(0,\ 0,\ 0)$ y $\overrightarrow{v_r} = (1,\ 1,\ 1)$.

Un punto y un vector director de s son $A(1,\ 3,\ 0)$ y $\overrightarrow{v_s} = (1,\ 1,\ -1)$.

Para hallar la distancia entre las rectas r y s hacemos lo siguiente:

Los vectores directores de las rectas r y s son linealmente independientes por no ser sus componentes proporcionales, lo cual implica que las rectas se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso consideramos el vector $\overrightarrow{m}$ que tiene como origen el punto O de r y como extremo un punto B de s: $\overrightarrow{m} = \overrightarrow{OA} = (1,\ 3,\ 0)$.

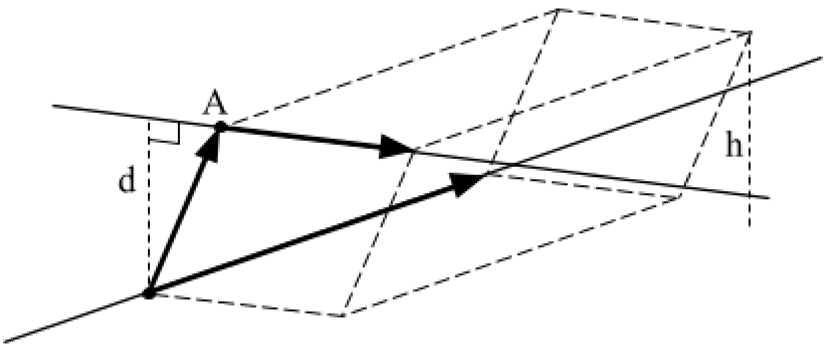
Según que los vectores $\left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{m}\right\}$ sean coplanarios o no, las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{m}\right\}$ son coplanarios cuando su rango es menor que tres, es decir, cuando el determinante que determinan es cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 - 1 - 1 + 3 = 4 \neq 0 \Rightarrow Rango\left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{m}\right\} = 3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan.$

Para una mejor comprensión se hace el esquema adjunto.



Se determina un paralelepípedo cuyas dimensiones son los vectores directores de las rectas $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ y el vector $\overrightarrow{m}$.

El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observar que la altura h es igual a la distancia d pedida entre las rectas.

Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$V = \vec{v}_r \cdot \left(\vec{v}_s \times \vec{m}\right) = \left|\vec{v}_r \times \vec{v}_s\right| \cdot h = \left|\vec{v}_r \times \vec{v}_s\right| \cdot d \Rightarrow d = \frac{\left|\vec{v}_r \cdot \left(\vec{v}_s \times \vec{m}\right)\right|}{\left|\vec{v}_r \times \vec{v}_s\right|}.$$

$$d(r,\ s) = \frac{\left|\vec{v}_r \cdot \left(\vec{v}_s \times \vec{m}\right)\right|}{\left|\vec{v}_r \times \vec{v}_s\right|} = \frac{\|1\ 1\ 1\ 1\ 1\ -1\ 1\ 3\ 0\ \|}{|i\ j\ k\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ -1\ |} = \frac{|4|}{|-i+j+k-k-i+j|} = \frac{4}{|-2i+2j|} = \frac{2}{|-i+j|} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(-1)^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

$$\underline{d(r,\ s) = \sqrt{2}\ unidades.}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

JUNIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B.

OPCIÓN A

1º) $a)$ Sea λ un parámetro real cualquiera, determine para qué valores de λ el sistema $\begin{cases} -x+\lambda y+\lambda z=4 \\ \lambda x+\lambda y+z=6 \\ -\lambda x+\lambda y+\lambda z=3+\lambda \end{cases}$ es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

b) Resuélvalo, si es posible para $\lambda = 2$.

$a)$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 \\ -\lambda & \lambda & \lambda \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} -1 & \lambda & \lambda & 4 \\ \lambda & \lambda & 1 & 6 \\ -\lambda & \lambda & \lambda & 3+\lambda \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro λ es el siguiente:

$$|A|=\begin{vmatrix} -1 & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 \\ -\lambda & \lambda & \lambda \end{vmatrix}=\lambda\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 \\ -\lambda & 1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda\cdot\left(-\lambda+\lambda^2-\lambda+\lambda^2\right.$$

$$=\lambda\cdot\left(\lambda^2-2\lambda+1\right)=\lambda\cdot(\lambda-1)^2=0 \Rightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=1.$$

$$\underline{Para\ \begin{cases} \lambda\neq 0 \\ \lambda\neq 1 \end{cases} \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = n^{\text{o}}\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$$

Para $\lambda\neq 0 \Rightarrow A'=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \left(C_1,\ C_3,\ C_4\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}=-3\neq 0 \Rightarrow Rang\ A' = 3.$

$$\underline{Para\ \lambda = 0 \Rightarrow Rang\ A = 2;\ Rang\ A' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

Para $\lambda = 1 \Rightarrow A'=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{F_1 = F_3\right\} \Rightarrow Rang\ A' = 2.$

$\underline{Para\,\lambda = 1 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

$b)$

Para $\lambda = 2$ el sistema resulta: $-x + 2y + 2z = 4 \quad 2x + 2y + z = 6 \quad -2x + 2y + 2z = 5\,\}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|4\ 2\ 2\ 6\ 2\ 1\ 5\ 2\ 2\,|}{2\cdot(2-1)^2} = \frac{2\cdot|4\ 1\ 2\ 6\ 1\ 1\ 5\ 1\ 2\,|}{2} = |4\ 1\ 2\ 6\ 1\ 1\ 5\ 1\ 2\,| = 8 + 12 + 5 - 10 - 4 -$$

.

$$y = \frac{|-1\ 4\ 2\ 2\ 6\ 1\ -2\ 5\ 2\,|}{2} = \frac{-12+20-8+24+5-16}{2} = \frac{13}{2}.$$

$$z = \frac{|-1\ 2\ 4\ 2\ 2\ 6\ -2\ 2\ 5\,|}{2} = |-\ 1\ 1\ 4\ 2\ 1\ 6\ \ -2\ 1\ 5\,| =- 5 + 8 - 12 + 8 + 6 - 10 =- 5$$

.

$\underline{Solución\!: x =- 1,\ y = \frac{13}{2},\ z =- 5.}$

****

2º) $a)$ $a_1)$ Si los vectores $\vec{w}$ y $\vec{s}$ verifican que $|\vec{w}| = |\vec{s}| = 2$, el ángulo que forman $\vec{w}$ y $\vec{s}$ es de 60º, determine $\vec{w}\cdot(\vec{w} - \vec{s})$.

$a_2)$ Si el producto escalar del vector $\vec{u} + \vec{v}$ por si mismo es 25 y el producto escalar de $\vec{u} - \vec{v}$ por si mismo es 9. ¿Cuánto vale el producto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$?

b) Dadas las rectas $r \equiv \frac{x+1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{2}$ y $s \equiv \{x - y - z = 1\ x - y + 2z = 3$, determine el ángulo que forman.

$a)$

$a_1)$

Sabiendo que: $\vec{w}\cdot\vec{s} = |\vec{w}|\cdot|\vec{s}|\cdot \cos cos\ \alpha$; $\cos cos\ 60° = \frac{1}{2}$; $\vec{w}\cdot\vec{w} = |\vec{w}|^2$ y que el producto escalar tiene la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma:

$$\vec{w}\cdot(\vec{w} - \vec{s}) = \vec{w}\cdot\vec{w} - \vec{w}\cdot\vec{s} = |\vec{w}|^2 - |\vec{w}|\cdot|\vec{s}|\cdot \cos cos\ 60° = 2^2 - 2\cdot 2\cdot\frac{1}{2} =$$

$= 4 - 2 = 2.$

$$\underline{\vec{w}\cdot(\vec{w} - \vec{s}) = 2.}$$

$a_2)$

$$(\vec{u} + \vec{v})\cdot(\vec{u} + \vec{v}) = |\vec{u}|^2 + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} + |\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\cdot\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2 = 25.$$

$$(\vec{u} - \vec{v})\cdot(\vec{u} - \vec{v}) = |\vec{u}|^2 - \vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{v}\cdot\vec{u} + |\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2\cdot\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2 = 9.$$

$$|\vec{u}|^2 + 2\cdot\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2 = 25\ - |\vec{u}|^2 + 2\cdot\vec{u}\cdot\vec{v} - |\vec{v}|^2 = -9\ \} \Rightarrow 4\cdot\vec{u}\cdot\vec{v} = 16.$$

$$\underline{\vec{u}\cdot\vec{v} = 4.}$$

b)

El ángulo que forman dos rectas es el que forman sus vectores directores.

Un vector director de r es $\vec{v_r} = (3,\ 2,\ 2)$.

Un vector director de una recta s es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan:

$s \equiv \{x - y - z = 1 \; x - y + 2z = 3 \; \Rightarrow \left\{ \vec{n}_1 = (1, \; -1, \; -1) \; \vec{n}_2 = (1, \; -1, \; 2) \right\} \Rightarrow$

$= -2i - j - k + k - i - 2j = -3i - 3j \Rightarrow \underline{\vec{v}_s = (1, \; 1, \; 0).}$

Del concepto de producto escalar de dos vectores:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos cos \; \alpha \; \Rightarrow \cos cos \; \alpha \; = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$. Aplicando a $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$:

$$\cos cos \; \alpha \; = \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_s|} = \frac{(3, 2, 2) \cdot (1, 1, 0)}{\sqrt{3^2+2^2+2^2} \cdot \sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{3+2+0}{\sqrt{9+4+4} \cdot \sqrt{1+1+0}} = \frac{5}{\sqrt{17 \cdot 2}} = \frac{5}{\sqrt{34}} =$$

$= 0,8575 \Rightarrow \alpha = 30° \; 57' \; 50''.$

$\underline{Las \; rectas \; r \; y \; s \; forman \; un \; ángulo \; de \; 30° \; 57' \; 50''}.$

****

3º) a) Considere la función $f(x) = \frac{1}{8x-x^2}$.

a_1) Determine las asíntotas, si existen, de la función $f(x)$.

a_2) Determine los extremos relativos, si existen, de la función $f(x)$.

b) Determine $\left(Lx^2 \cdot \frac{x+1}{x^2+3}\right)$.

c) Calcule el área de la región encerrada entre las siguientes curvas: $f(x) = x^3$ y $g(x) = 2x^2 - x$.

----

a)

a_1) Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que anulan el denominador:

$8x - x^2 = 0;\ \ x(8 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 8.$

$\underline{Las\ rectas\ x = 0\ (eje\ Y)\ y\ x = 8\ son\ asíntotas\ verticales\ de\ f(x)}.$

Asíntotas horizontales: son los valores finitos de la función cuando x tiende a infinito:

$y = f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{8x-x^2} = 0.$

$\underline{Las\ recta\ y = 0\ (eje\ X)\ es\ asíntota\ horizontal\ de\ f(x)}.$

La función $f(x)$ no tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

a_2)

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto. Esta condición necesaria no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

$f'(x) = \frac{8-2x}{\left(8x-x^2\right)^2} = 0 \Rightarrow 8 - 2x = 0;\ \ 4 - x = 0 \Rightarrow x = 4.$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; se es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x)=\frac{-2\cdot\left(8x-x^2\right)^2-(8-2x)\cdot\left[2\cdot\left(8x-x^2\right)\cdot(8-2x)\right]}{\left(8x-x^2\right)^4}=\frac{-2\cdot\left(8x-x^2\right)-2\cdot(8-2x)^2}{\left(8x-x^2\right)^3}=$$

$$=-\ 2\cdot\frac{8x-x^2+64-32x+x^4}{\left(8x-x^2\right)^3}=-\ 2\cdot\frac{x^4-x^2-24x+64}{\left(8x-x^2\right)^3}.$$

$$f''(4)=-\ 2\cdot\frac{4^4-4^2-24\cdot 4+64}{\left(8\cdot 4-4^2\right)^3}=-\ 2\cdot\frac{256-16-96+64}{16^3}<\ 0\Rightarrow Máximo\ par\ x\ =\ 4.$$

$$f(0)=\frac{1}{32-16}=\frac{1}{16}\ \Rightarrow\ \underline{Máximo: A\left(4,\ \frac{1}{16}\right)}.$$

$b)$

$$\left(Lx^2\cdot\frac{x+1}{x^2+3}\right)\ =\ \infty\cdot 0\Rightarrow Ind.\Rightarrow\ \lim_{x\to+\infty}\frac{Lx^2}{\frac{x+1}{x^2+3}}=\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2Lx\cdot\left(x^2+3\right)}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ind.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}\cdot\left(x^2+3\right)+2Lx\cdot 2x}{1}=\ 0\cdot\infty\ +\ \infty\cdot\infty\ =\ \infty.$$

$$\underline{\left(Lx^2\cdot\frac{x+1}{x^2+3}\right)\ =\ \infty.}$$

$c)$

Los puntos de intersección de las curvas son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$x^3\ =\ 2x^2\ -\ x\ ;\ x^3\ -\ 2x^2\ +\ x\ =\ 0;\ \ x\left(x^2\ -\ 2x\ +\ 1\right)=\ 0;\ \ x(x\ -\ 1)^2\ =\ 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x_1\ =\ 0,\ x_2\ =\ 1\Rightarrow O(0,\ 0)\ y\ A(1,\ 1).$$

El vértice de la parábola $y\ =\ 2x^2\ -\ x$ es el siguiente:

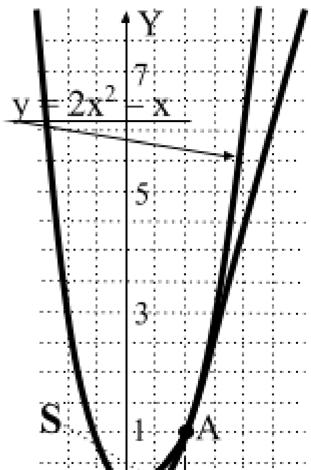
$$y'\ =\ 4x\ -\ 1\ =\ 0\to x\ =\frac{1}{4}.$$

$$y_{\left(\frac{1}{4}\right)}=\ 2\left(\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{4}=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}=-\ \frac{1}{8}\Rightarrow V\left(\frac{1}{4},-\ \frac{1}{8}\right).$$

La parábola corta el eje X en el origen y en el punto siguiente:

$$y\ =\ 2x^2\ -\ x\ =\ 0;\ \ x(2x\ -\ 1)=\ 0\Rightarrow x\ =\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow B\left(\frac{1}{2},\ 0\right).$$



$c)$

Como se aprecia en la figura, en el intervalo correspondiente a la superficie a calcular, $(0,\ 1)$, las ordenadas correspondientes a la curva $f(x) = x^3$ son iguales o mayores que las correspondientes de la curva $g(x) = 2x^2 - x$, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_0^1 \left[x^3 - \left(2x^2 - x\right)\right]dx = \int_0^1 \left(x^3 - 2x^2 + x\right)\cdot dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= \left(\frac{1^4}{4} - \frac{2\cdot 1^3}{3} + \frac{1^2}{2}\right) - 0 = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{3-8+6}{12} = \underline{\frac{1}{12}\ u^2 \cong 0,083\ u^2 = S.}$$

****

OPCIÓN B

1º) a) Sea "α" un parámetro real. Determine el rango de $A = (a + 1 \ -1 \ a + 1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 1 \ -2 \ a)$, según los valores del parámetro "α".

b) Se considera una matriz de orden 3×3 cuyas columnas son C_1, $C_2 \, y \, C_3$ y cuyo determinante es 2. Se define ahora la matriz B cuyas columnas son $-C_2$, $C_3 + C_2 \, y \, 3C_1$. Determine el determinante de la inversa de B, si existe.

----

a)

$|A| = |a + 1 \ -1 \ a + 1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 1 \ -2 \ a| = -a(a+1) + (a+1) = (a+1)(1 - a$

$\Rightarrow a_1 = -1, \ a_2 = 1.$

$$\underline{Para \, \{a \neq -1 \ a \neq 1 \} \Rightarrow Rang \ A = 3}.$$

$Para \, a = -1 \Rightarrow A = (0 \ -1 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 1 \ -2 \ -1) \Rightarrow |0 \ -1 \ 1 \ -2| \neq 0.$

$Para \, a = 1 \Rightarrow A = (2 \ -1 \ 2 \ 0 \ -1 \ 0 \ 1 \ -2 \ 1) \Rightarrow |2 \ -1 \ 0 \ -1| \neq 0.$

$$\underline{Para \, \{a = -1 \ a = 1 \} \Rightarrow Rang \ A = 2}.$$

b) Se considera una matriz de orden 3×3 cuyas columnas son C_1, $C_2 \, y \, C_3$ y cuyo determinante es 2. Se define ahora la matriz B cuyas columnas son $-C_2$, $C_3 + C_2 \, y \, 3C_1$. Determine el determinante de la inversa de B, si existe.

$$A = \left[C_1 \, C_2 \, C_3\right] \Rightarrow |A| = 2.$$

$$B = \left[-C_2 \, C_3 + C_2 \ 3C_1\right]. \qquad |B| = \left|-C_2 \, C_3 + C_2 \ 3C_1\right| =$$

$$= \left|-C_2 \, C_3 \, 3C_1\right| + \left|-C_2 \, C_2 \, 3C_1\right| = |M| + |N|.$$

Se ha utilizado la propiedad de los determinante que dice que si todos los elementos de una fila o columna de una matriz cuadrada se descomponen en dos sumandos, entonces su determinante es igual a la suma de los determinantes que tienen dicha fila o columna el primero y es segundo sumando respectivamente, siendo los restantes elementos iguales a los del determinante inicial.

$|N| = \left|-\ C_2\ C_2\ 3C_1\right| =\ 0$, por tener dos líneas proporcionales.

$|M| = \left|-\ C_2\ C_3\ 3C_1\right| = \left|3C_1 -\ C_2\ C_3\right|$. (se han rotado las columnas, o sea, que se han cambiado entre si dos columnas (dos veces), por eso continua con el mismo signo).

$|M| =\ 3\cdot(-\ 1)\cdot\left|C_1\ C_2\ C_3\right| =-\ 3\cdot 2\ =-\ 6.$

Se ha utilizado la propiedad de los determinantes siguientes: si los elementos de una línea se multiplican o dividen por un número real, distinto de cero, el valor del determinante queda multiplicado o dividido por dicho número. En este caso se ha sacado factor común 3 de la primera fila y (-1) de la segunda.

$|N| = |M| +\ 0\ =-\ 6.$

$$\underline{|B| =-\ 6 \Rightarrow \left|B^{-1}\right| =-\ \tfrac{1}{6}.}$$

****

2º) Considere el plano $\pi \equiv mx - 3y + 2z = 1$ y la recta $r \equiv \{3x + y = 1 \quad 2x - y + 2z = 1$.

a) Determine para qué valores del parámetro m la recta r y el plano π son secantes, es decir, se cortan.

b) Determine el ángulo que forman el plano π y la recta r cuando m = 1.

----

a)

Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (m, \ -3, \ 2)$.

Un vector director de la recta es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son $\vec{n}_1 = (3, \ 1, \ 0)$ y $\vec{n}_2 = (2, \ -1, \ 2)$.

$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2i - 3k - 2k - 6j = 2i - 6j - 5k = (2, \ -6, \ -$

.

Para que la recta r y el plano π sean secantes es condición necesaria que el vector director de la recta y el vector normal del plano no sean perpendiculares, es decir: que su producto escalar sea distinto de cero.

$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = (2, \ -6, \ -5) \cdot (m, \ -3, \ 2) = 2m + 18 - 10 = 2m + 8 \neq 0 \Rightarrow m \neq -4$

.

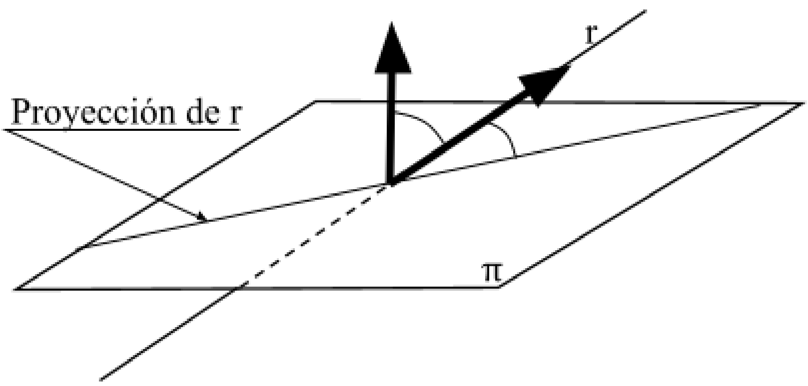
<u>$La\ recta\ r\ es\ secante\ al\ plano\ \pi\ \forall m \in R - \{-4\}$</u>.

b)

Para m = 1 el vector normal del plano es $(1, \ -3, \ 2)$.

Para una mejor comprensión del ejercicio se ilustra con el esquema adjunto.

Por definición de producto escalar: $\vec{n} \cdot \vec{v}_r = |\vec{n}| \cdot |\vec{v}_r| \cdot \cos cos\ \alpha$.



$$\cos cos\ \alpha = \frac{\vec{n}\cdot\vec{v_r}}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{v_r}\right|} = \frac{(1, -3, 2)\cdot(2, -6, -5)}{\sqrt{1^2+(-3)^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+(-6)^2+(-5)^2}} = \frac{2+18-10}{\sqrt{1+9+4}\cdot\sqrt{4+36+25}} =$$

$$= \frac{10}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{65}} = \frac{10}{\sqrt{910}} = 0,3315 \Rightarrow \alpha = 70° \, 38' \, 25''.$$

$$\beta = 90° - \alpha = 90° - 70° \, 38' \, 25'' = 19° \, 21' \, 35''$$

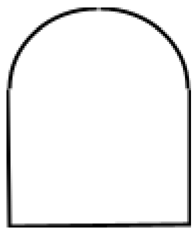
$$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ forman\ un\ ángulo\ de\ 19° \, 21' \, 35''}.$$

****

3º) a) Determine el límite: $\left(\frac{5x+1}{2x-1} - \frac{3}{2}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}}$.

b) Usando el cambio de variable $t = \cos cos\, x$, calcule: $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{sen\, x \cdot \cos cos\, x}{1 - \cos cos\, x} \cdot dx$.

c) Queremos construir una ventana con la forma de la figura que aparece en el dibujo, es decir, rectangular en la parte inferior y semicircular en la superior (la parte superior es un semicírculo completo. Sabiendo que el perímetro de la ventana son 5 metros, determine las dimensiones de la ventana para que la superficie de la misma sea máxima.



----

a)

$$\left(\frac{5x+1}{2x-1} - \frac{3}{2}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}} = \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\right)^{\infty} = 1^{\infty} \Rightarrow Ind.\ del\ tipo\ nº\ e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{10x+2-6x+3}{4x-2}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}} = \left(\frac{4x+5}{4x-2}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}} = \left(\frac{4x-2+7}{4x-2}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}} =$$

$$= \left(1 + \frac{7}{4x-2}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}} = \left(1 + \frac{1}{\frac{4x-2}{7}}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{\frac{4x-2}{7}}\right)^{\frac{4x-2}{7} \cdot \frac{7}{4x-2} \cdot \frac{2x^2+1}{x-1}} = \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{4x-2}{7}}\right)^{\frac{4x-2}{7}}\right]^{\frac{7}{4x-2} \cdot \frac{2x^2+1}{x-1}} =$$

$$= \left[\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{4x-2}{7}}\right)^{\frac{4x-2}{7}}\right]^{\frac{14x^2+7}{4x^2-4x-2x+2}} = e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{14x^2+7}{4x^2-6x+2}} = e^{\frac{14}{4}} = e^{\frac{7}{2}} = \underline{e^3 \cdot \sqrt{e}}.$$

b)

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{sen\, x \cdot \cos cos\, x}{1 - \cos cos\, x} \cdot dx \Rightarrow \left(x = \frac{\pi}{3} \to t = \frac{1}{2}\ x = \frac{\pi}{4} \to t = \frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{-t}{1-t} \cdot dt = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{t-1} \cdot dt = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{t-1+1}{t-1} \cdot dt = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right) \cdot dt = [t + L|t-1|]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} =$$

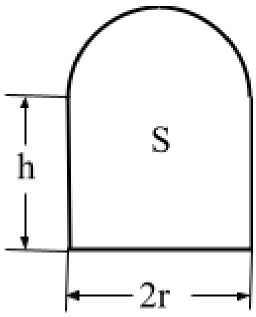
$$= \left(\frac{1}{2} + L\left|\frac{1}{2} - 1\right|\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + L\left|\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right|\right) = \frac{1}{2} + L\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - L\frac{2-\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{1-\sqrt{2}}{2} + L1 - L2 - L\left(2 - \sqrt{2}\right) + L2 = \frac{1-\sqrt{2}}{2} - L\left(2 - \sqrt{2}\right).$$

$$\underline{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{sen\, x \cdot \mathrm{coscos}\, x}{1-\mathrm{coscos}\, x} \cdot dx = \frac{1-\sqrt{2}}{2} - L\left(2 - \sqrt{2}\right).}$$

$c)$

De la figura acotada se deduce el valor de la superficie en función de los valores de r e h:



$$S(r, h) = 2r \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2.$$

El perímetro es el siguiente:

$$p = 2h + 2r + \pi r = 5 \Rightarrow h = \frac{5-2r-\pi r}{2}.$$

Sustituyendo en la superficie el valor de h obtenido, resulta:

$$S(r) = 2r \cdot \frac{5-2r-\pi r}{2} + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(10r - 4r^2 - 2\pi r^2 + \pi r^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(10r - 4r^2 - \pi r^2\right).$$

Para que la superficie sea máxima es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$S'(x) = \frac{1}{2} \cdot (10 - 8r - 2\pi r) = 5 - 4r - \pi r.$$

$$S''(x) = - 4 - \pi < 0 \Rightarrow Máximo.$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow 5 - 4r - \pi r = 0;\ \ 5 = (4 + \pi) \Rightarrow r = \frac{5}{4+\pi} \cong 0,70.$$

$$h = \frac{5-2r-\pi r}{2} = \frac{5-2\cdot\frac{5}{4+\pi}-\pi\cdot\frac{5}{4+\pi}}{2} = \frac{20+5\pi-10-5\pi}{2(4+\pi)} = \frac{10}{2(4+\pi)} \Rightarrow h = \frac{5}{4+\pi} \cong 0,70.$$

$\underline{La\ superficie\ es\ máxima\ cuando\ el\ radio\ y\ la\ altura\ miden\ 0,70\ metros.}$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

SEPTIEMBRE – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B.

OPCIÓN A

1º) $a)$ Determine para qué valores de k el sistema $x + y + kz = 6 \;\; x + ky + z = 0 \; kx - y + z =- 6 \}$ es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

b) Resuélvalo, si es posible para $k =- 1$.

$a)$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A = (1\ 1\ k\ 1\ k\ 1\ k\ -1\ 1)$ y $A' = (1\ 1\ k\ 1\ k\ 1\ k\ -1\ 1\ \ 6\ 0\ -6)$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro k es el siguiente:

$|A| = |1\ 1\ k\ 1\ k\ 1\ k\ -1\ 1| = k - k + k - k^3 + 1 - 1 = k - k^3 = k(1 - k^2) =$

$\Rightarrow k_1 = 0;\ \ k_2 =- 1;\ \ k_3 = 1.$

$\underline{Para\ \{k \neq 0\ k \neq -1\ k \neq 1\} \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

$Para\ k = 0 \Rightarrow A' = (1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ -1\ 1\ \ 6\ 0\ -6) \Rightarrow \{F_3 = F_2 - F_1\} \Rightarrow Rang\ A' =$

.

$Para\ k =- 1 \Rightarrow A' = (1\ 1\ -1\ 1\ -1\ 1\ -1\ -1\ 1\ \ 6\ 0\ -6) \Rightarrow \{F_1 =- F_3\} \Rightarrow$

.

$\underline{Para\ \{k = 0\ k =- 1\} \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

$Para\ k = 1 \Rightarrow A' = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ -1\ 1\ \ 6\ 0\ -6) \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow (C_2,\ C_3,\ C_4) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 6 - 6 + 1 = -12 \neq 0 \Rightarrow Rang\ A' = 3.$

$\underline{Para\ k = 1 \Rightarrow Rang\ A = 2;\ Rang\ A' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

$b)$

Para $k = -1$ el sistema resulta $\left.\begin{matrix} x + y - z = 6 \\ x - y + z = 0 \\ -x - y + z = -6 \end{matrix}\right\}$, equivalente al siguiente sistema: $\left.\begin{matrix} x + y - z = 6 \\ x - y + z = 0 \end{matrix}\right\}$, que es compatible indeterminado.

Haciendo $z = \lambda$: $\left.\begin{matrix} x + y = 6 + \lambda \\ x - y = -\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2x = 6;\ x = 3;\ y = 3 + \lambda.$

$\underline{Solución: \left\{\begin{matrix} x = 3 \\ y = 3 + \lambda \\ z = \lambda \end{matrix}\right.,\ \forall \lambda \in R.}$

****

2º) Determine la ecuación de la recta, *expresada como intersección de dos planos*, que pasa por el punto $P(1, -1, 2)$ y es perpendicular al plano π determinado por los puntos $A(1, 0, 1)$, $B(3, 2, 1)$ y $C(2, -1, 0)$.

Los puntos A, B y C determinan los vectores:

$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(3, 2, 1) - (1, 0, 1)] = (2, 2, 0)$.

$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(2, -1, 0) - (1, 0, 1)] = (1, -1, -1)$.

La expresión general del plano π es la siguiente:

$\pi\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0;$

$-2(x-1) - 2(z-1) - 2(z-1) + 2y = 0; \quad -2(x-1) - 4(z-1) + 2y = 0;$

$(x-1) + 2(z-1) - y = 0; \; x - 1 + 2z - 2 - y = 0 \Rightarrow \pi \equiv x - y + 2z - 3 = 0$.

Un vector normal del plano π es $\overrightarrow{n} = (1, -1, 2)$.

Las ecuaciones de dos planos β y γ que contienen al punto P y son perpendiculares al plano π son las siguientes:

$\beta\left(P; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0;$

$4(x-1) - 2(z-2) - 2(z-2) - 4(y+1) = 0;$

$4(x-1) - 4(z-2) - 4(y+1) = 0; \; (x-1) - (z-2) - (y+1) = 0;$

$x - 1 - z + 2 - y - 1 = 0 \Rightarrow \beta \equiv x - y - z = 0.$

$\gamma\left(P; \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{n}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0;$

$-2(x-1) - (y+1) - (z-2) + (z-2) - (x-1) - 2(y+1) = 0;$

$-3(x-1) - 3(y+1) = 0; \; (x-1) + (y+1) = 0 \Rightarrow \gamma \equiv x + y = 0.$

La recta r pedida es la que determinan los planos β y γ:

$$\underline{r \equiv \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}}.$$

****

3º) a) Determine, si existen, todos los valores de los parámetros $a\, y\, b$ para que la función $f(x) = \{a \cdot e^{x} \;\; si \;\; x < 0\; 1 - x^{2}\; si\; 0 \leq x < 1\; b\left(1 - e^{x-1}\right)\; si\; x \geq 1$ sea continua.

b) Considere ahora que $a = 1$. Usando la definición de derivada, estudie si la función es derivable en $x = 0$.

c) Determine: $(Lx)^{\frac{1}{e^{x}}}$.

d) Determine: $\int \frac{(Lx)^{2}}{\sqrt{x}} \cdot dx$.

----

a)

La función $f(x)$ es continua en $R \forall a, b \in R$. Se trata de determinar los valores de a y b para que sea derivable en los puntos críticos $x = 0$ y $x = 1$.

Para que la función sea continua en los puntos críticos es necesario que sus límites laterales en esos puntos sean iguales e iguales a los correspondientes valores de la función en esos puntos.

$$f(x) = \left(a \cdot e^{x}\right) = a \cdot e^{0} = a \cdot 1 = a\; f(x) = \left(1 - x^{2}\right) = 1 - 0 = f(0) = 1 \} \Rightarrow \underline{a}$$

.

<u>$La\; función\; f(x)\; es\; continua\; en\; x = 0\; para\; a = 1.$</u>

$$f(x) = \left(1 - x^{2}\right) = 1 - 1 = 1 \qquad f(x) = \left[b\left(1 - e^{x-1}\right)\right] = b(1 - 1)$$

$\Rightarrow$

<u>$La\; función\; f(x)\; no\; es\; continua\; en\; x = 1,\; \forall b \in R.$</u>

b)

Para el estudio de la derivabilidad de la función en $x = 0$ y para $a = 1$ la función es $f(x) = \{e^{x} \;\; si \;\; x < 0\; 1 - x^{2}\; si\; 0 \leq x < 1$.

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto; como se ha visto en el apartado anterior, la función es continua en $x = 0$ para $a = 1$.

Una función es derivable en un punto cuando es continua en ese punto y, además, existen sus derivadas laterales y son iguales.

$$f'(x) = \{e^{x} \;\; si \;\; x < 0\; - 2x\; si\; 0 \leq x < 1 \Rightarrow f'\left(0^{-}\right) = e^{0} = 1;\; f'\left(0^{+}\right) = - 2 \cdot 0 = 0$$

.

$$f'\left(0^-\right) \neq f'\left(0^+\right) \Rightarrow \underline{La\ función\ f(x)\ no\ es\ derivable\ en\ x\ =\ 0}.$$

$c)$

$$(Lx)^{\frac{1}{e^x}} = (L\infty)^{\frac{1}{e^\infty}} = \infty^{\frac{1}{\infty}} = \infty^0 \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (Lx)^{\frac{1}{e^x}} = \left(\frac{1}{e^x}\cdot Lx\right) = \frac{Lx}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{x}}{e^x} = \frac{1}{x\cdot e^x} = \frac{1}{\infty\cdot\infty} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$\underline{(Lx)^{\frac{1}{e^x}} = 0}.$$

$d)$

$$I = \int \frac{(Lx)^2}{\sqrt{x}}\cdot dx \Rightarrow \left\{ u = (Lx)^2 \rightarrow du = 2\cdot Lx\cdot\frac{1}{x}\cdot dx = \frac{2Lx}{x}\cdot dx \quad dv = \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot dx \rightarrow v = \int x^{-} \right.$$

$$\Rightarrow (Lx)^2\cdot 2\sqrt{x} - \int 2\sqrt{x}\cdot\frac{2Lx}{x}\cdot dx = (Lx)^2\cdot 2\sqrt{x} - 4\cdot\int \frac{Lx}{\sqrt{x}}\cdot dx =$$

$$= (Lx)^2\cdot 2\sqrt{x} - 4\cdot A. \quad (*)$$

$$A = \int \frac{Lx}{\sqrt{x}}\cdot dx \Rightarrow \left\{ u = Lx \rightarrow du = \frac{1}{x}\cdot dx \quad dv = \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot dx \rightarrow v = 2\sqrt{x} \right\} \Rightarrow Lx\cdot 2\sqrt{x} - \int 2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\cdot d$$

$$= Lx\cdot 2\sqrt{x} - 2\cdot\int \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot dx = 2\sqrt{x}\cdot Lx - 2\cdot\sqrt{x} + C = 2\sqrt{x}\cdot(Lx - 1) + C = A.$$

Sustituyendo el valor de A en la expresión (*):

$$I = (Lx)^2\cdot 2\sqrt{x} - 4\cdot\left[2\sqrt{x}\cdot(Lx - 1)\right] + C =$$

$$= 2\sqrt{x}\cdot(Lx)^2 - 8\sqrt{x}\cdot(Lx - 1) + C = 2\sqrt{x}\cdot\left[(Lx)^2 - 4(Lx - 1)\right] + C.$$

$$\underline{I = \int \frac{(Lx)^2}{\sqrt{x}}\cdot dx = 2\sqrt{x}\cdot\left[(Lx)^2 - 4(Lx - 1)\right] + C.}$$

****

OPCIÓN B

1º) a) Determine, si existe, la matriz inversa de $M = (2 \ -1 \ 2 \ 0 \ -1 \ 0 \ 2 \ -2 \ 1)$. En caso de que exista, compruebe que la matriz encontrada es efectivamente la inversa de la matriz M.

b) Determine la matriz $A^2 + B^2$ siendo A y B las matrices solución del siguiente sistema: $2A + B = (1 \ 4 \ 2 \ 0) \ A - B = (1 \ -1 \ 1 \ 0)\}$.

----

a)

Una matriz tiene inversa (es invertible) cuando su determinante es distinto de cero: $|M| = |2 \ -1 \ 2 \ 0 \ -1 \ 0 \ 2 \ -2 \ 1| = -2 + 4 = 2$.

La inversa de M se obtiene por la adjunta de la traspuesta: $M^{-1} = \frac{Adj.\ de\ M^t}{|M|}$.

$M^t = (2 \ 0 \ 2 \ -1 \ -1 \ -2 \ 2 \ 0 \ 1)$.

$Adj.\ de\ M^t = (|-1 \ -2 \ 0 \ 1| \ -|-1 \ -2 \ 2 \ 1| \ |-1 \ -1 \ 2 \ 0| \ -|0 \ 2 \ 0 \ 1| \ |2 \ 2$

.

$M^{-1} = \frac{Adj.\ de\ M^t}{|M|} = \frac{(-1 \ -3 \ 2 \ 0 \ -2 \ 0 \ 2 \ 2 \ -2)}{2} = \frac{1}{2} \cdot (-1 \ -3 \ 2 \ 0 \ -2 \ 0 \ 2 \ 2 \ -2)$.

b)

$2A + B = (1 \ 4 \ 2 \ 0) \ A - B = (1 \ -1 \ 1 \ 0)\} \Rightarrow 3A = (2 \ 3 \ 3 \ 0) \Rightarrow A = \left(\frac{2}{3} \ 1 \ 1 \ 0\right)$

.

$B = A - (1 \ -1 \ 1 \ 0) = \left(\frac{2}{3} \ 1 \ 1 \ 0\right) - (1 \ -1 \ 1 \ 0) = \left(-\frac{1}{3} \ 2 \ 0 \ 0\right) = B$.

$A^2 + B^2 = A \cdot A + B \cdot B = \left(\frac{2}{3} \ 1 \ 1 \ 0\right) \cdot \left(\frac{2}{3} \ 1 \ 1 \ 0\right) + \left(-\frac{1}{3} \ 2 \ 0 \ 0\right) \cdot \left(-\frac{1}{3} \ 2 \ 0 \ 0\right) =$

$= \left(\frac{4}{9} + 1 \ \frac{2}{3} + 0 \ \frac{2}{3} + 0 \ 1 + 0\right) + \left(\frac{1}{9} + 0 \ -\frac{2}{3} + 0 \ 0 + 0 \ 0 + 0\right) = \left(\frac{14}{9} \ 0 \ \frac{2}{3} \ 1\right)$

.

$A^2 + B^2 = \left(\frac{14}{9} \ 0 \ \frac{2}{3} \ 1\right) = \frac{1}{9} \cdot (14 \ 0 \ 6 \ 9)$.

****

2º) a) Determine el valor del parámetro a para que el plano $\pi \equiv x - 3y + az = -6$ sea paralelo a la recta: $r \equiv \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 3z = -7 \end{cases}$.

b) Determine el ángulo entre esa recta r y el plano $\pi \equiv 2x - 3y - z + 6 = 0$.

----

a)

Para que el plano π sea paralelo a la recta r es necesario que el vector normal del plano, $\vec{n} = (1, -3, a)$, sea perpendicular al vector director de la recta.

Un vector director de una recta dada por la intersección de dos planos es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan

$$r \equiv \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 3z = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = (2, -3, 0) \\ \vec{n}_2 = (1, 0, 3) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = |i\ j\ k\ 2$$

$$\Rightarrow \vec{v}_r = (3, -1, 2).$$

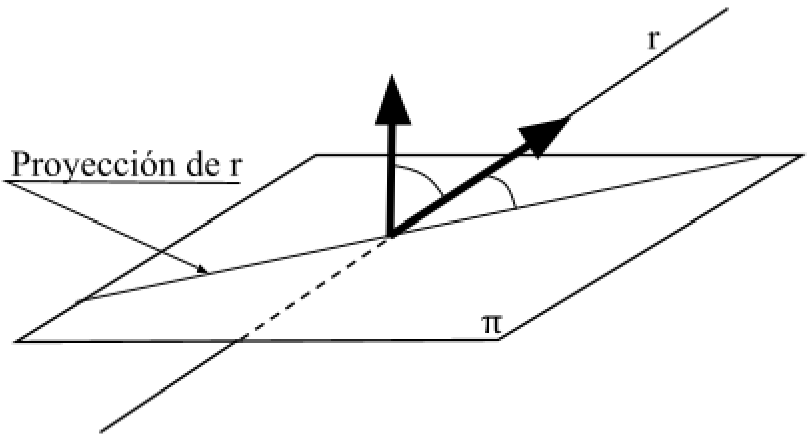
$$\vec{v}_r \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (3, -1, 2)\cdot(1, -3, a) = 0;\ 3 + 3 + 6a = 0;$$

$$6 + 6a = 0;\ 1 + a = 0 \Rightarrow a = -1.$$

<u>*La recta r es paralela al plano π para $a = -1$.*</u>

b)

Un vector normal del plano $\pi \equiv 2x - 3y - z + 6 = 0$ es $\vec{n} = (2, -3, -1)$.



Por definición de producto escalar: $\vec{n}\cdot\vec{v}_r = |\vec{n}|\cdot|\vec{v}_r|\cdot \cos \beta$.

$$\cos cos\,\beta = \frac{\vec{n}\cdot\vec{v}_r}{|\vec{n}|\cdot|\vec{v}_r|}.$$ Por ser α y β complementarios: $sen\,\alpha = \frac{\vec{n}\cdot\vec{v}_r}{|\vec{n}|\cdot|\vec{v}_r|}$.

$$sen\,\alpha = \frac{(2, -3, -1)\cdot(3, -1, 2)}{\sqrt{2^2+(-3)^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}} = \frac{6+3-2}{\sqrt{4+9+1}\cdot\sqrt{9+1+4}} = \frac{7}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30°$$
.

$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ forman\ un\ \text{á}ngulo\ de\ 30°}$.

****

3º) a) Considere la función $f(x) = x + \frac{4}{x}$:

a_1) Determine el dominio y las asíntotas, si existen, de la función $f(x)$.

a_2) Determine los extremos relativos y puntos de inflexión, si existen, de la función $f(x)$.

b) Determine el área limitada por la curva $f(x) = -2 \cdot sen\left(\frac{x}{2}\right)$, y las rectas $x = 0$, $x = \pi$ y el eje de abscisas $y = 0$.

----

a)

a_1)

$$f(x) = x + \frac{4}{x} = \frac{x^2+4}{x}.$$

El dominio de una función racional es el conjunto de números reales excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$\underline{D(f) \Rightarrow R - \{0\}}.$$

Asíntotas verticales: son los valores reales de x que anulan el denominador:

$$\underline{La\ recta\ x = 0\ (eje\ Y)\ es\ asíntota\ vertical\ de\ la\ función}.$$

Asíntotas horizontales: son los k valores finitos que alcanza la función cuando x tiende a más infinito o menos infinito:

$$k = f(x) = \frac{x^2+4}{x} = \infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Una función racional tiene asíntotas oblicuas cuando el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador, como es el caso que nos ocupa. Las funciones oblicuas son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{x^2+4}{x}}{x} = \frac{x^2+4}{x^2} = 1.$$

$$n = [f(x) - mx] = \left(\frac{x^2+4}{x} - x\right) = \frac{x^2+4-x^2}{x} = 0.$$

$$\underline{Asíntota\ oblicua: y = x}.$$

a_2)

Una función tiene un extremo relativo (máximo o mínimo) cuando se anula su primera derivada:

$$f(x) = \frac{x^2+4}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2+4) \cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 4}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2-4}{x^2} = 0;\ \ x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 2.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para el valor que anula la primera derivada, se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo relativo.

$$f''(x) = \frac{2x \cdot x^2 - (x^2-4) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2x^2 - 2x^2 + 8}{x^3} = \frac{8}{x^3}.$$

$$f''(-2) = \frac{8}{(-2)^3} = -1 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -2.$$

$$f(-2) = \frac{(-2)^2+4}{-2} = \frac{8}{-2} = -4 \Rightarrow Máximo\ relativo:\ \underline{A(-2,\ -4)}.$$

$$f''(2) = \frac{8}{2^3} = 1 > \ \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 2.$$

$$f(2) = \frac{2^2+4}{2} = \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow Mínimo\ relativo:\ \underline{B(2,\ 4)}.$$

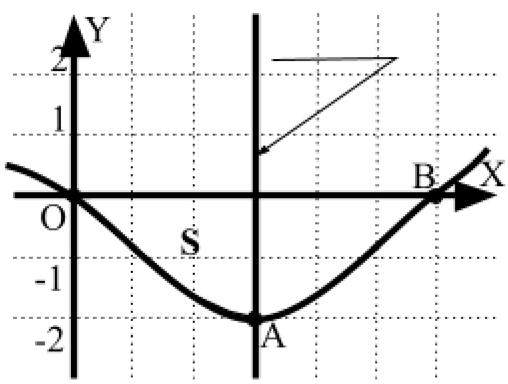
La condición necesaria para que una función tenga un punto de inflexión es que se anule su segunda derivada.

Como es $f''(x) = \frac{8}{x^3} \neq 0,\ \forall x \in R.$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ no\ tiene\ puntos\ de\ inflexión.}$$

$b)$

Son puntos de la curva $O(0,\ 0)$, $A(\pi,\ -2)$ y $B(2\pi,\ 0)$. La representación gráfica, aproximada, de la función se muestra en la figura adjunta.



Teniendo en cuenta que la zona de la superficie a calcular tiene sus ordenadas negativas, su valor es el siguiente:

$$S = \int_{\pi}^{0} f(x)dx = \int_{\pi}^{0} -\ 2sen\left(\frac{x}{2}\right)dx =$$

$$= -\ 2\cdot\int_{\pi}^{0} sen\left(\frac{x}{2}\right)\cdot dx \Rightarrow \left\{x = 0 \rightarrow t = 0\ x = \pi \rightarrow t = \frac{\pi}{2}\right\} = -\ 2\cdot\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} sen\ t\cdot 2dt =$$

$$= 4\cdot\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sen\ t\cdot dt = 4\cdot[-\ \cos cos\ t\ ]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 4\cdot\left[\left(-\ \cos cos\ \frac{\pi}{2}\right) - (-\ \cos cos\ 0\ )\right] =$$

$$= 4\cdot(-\ 0 + 1) = 4.$$

$$\underline{S = 4\,u^2}.$$

****

<u>PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)</u>

<u>UNIVERSIDAD DE ASTURIAS</u>

<u>JULIO – 2016 (GENERAL)</u>

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

<u>MATEMÁTICAS II</u> <u>Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos</u>

Tiene que elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la Opción A o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la Opción B. Conteste de forma razonada y escriba ordenadamente y con letra clara. Todos los procesos que conducen a resultados deben estar suficientemente justificados y completamente explicados.

<u>OPCIÓN A</u>

1º) Dado el sistema $x + y + z = 2 \quad ay + z = 1 \, x + 2y + 2z = 3 \}$:

a) Estudie su compatibilidad según los distintos valores del número real a.

b) Resuélvalo, si es posible, en el caso de $a = 1$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$M = (1\ 1\ 1\ 0\ a\ 1\ 1\ 2\ 2\ )$ y $M' = (1\ 1\ 1\ 0\ a\ 1\ 1\ 2\ 2 \quad 2\ 1\ 3\ )$.

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$|M| = |1\ 1\ 1\ 0\ a\ 1\ 1\ 2\ 2\ | = 2a + 1 - a - 2 = a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1.$

$$\underline{Para\ a \neq 1 \Rightarrow Ran\ M = Ran\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$$

Para $a = 1$ es $M' = (1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 2\ 2 \quad 2\ 1\ 3\ ) \Rightarrow \{F_1 + F_2 = F_4\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$

$$\underline{Para\ a = 1 \Rightarrow Ran\ M = Ran\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$$

b)

Para $a = 1$ el sistema es $x + y + z = 2 \quad y + z = 1 \, x + 2y + 2z = 3 \}$, que es compatible indeterminado.

Despreciando la tercera ecuación y haciendo $z = \lambda$:

$y = 1 - \lambda$; $x = 2 - \lambda - y = 2 - \lambda - 1 + \lambda = 1$.

$\underline{Solución: x = 1,\ y = 1 - \lambda,\ z = \lambda,\ \forall\lambda \in R}$.

****

2º) Considere los planos $\pi_1 \equiv x + z = 0$ y $\pi_2 \equiv z - 3 = 0$

a) Estudie la posición relativa de π_1 y π_2.

b) Encuentre, si es posible, las ecuaciones implícitas de una recta r paralela a π_1 y π_2.

----

a)

Los vectores normales de los planos π_1 y π_2 son $\vec{n_1} = (1, 0, 1)$ y $\vec{n_2} = (0, 0, 1)$ respectivamente, que son linealmente independientes por no tener proporcionales sus componentes y no son perpendiculares por ser distinto de cero su producto escalar, por lo cual:

$$\underline{Los\ planos\ \pi_1\ y\ \pi_2\ se\ cortan\ en\ una\ recta.}$$

b)

La recta s que determinan los planos π_1 y π_2 es $s \equiv \begin{cases} x + z = 0 \\ z - 3 = 0 \end{cases}$.

Un vector director de una recta dada por la intersección de dos planos es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan:

$$\left\{ \begin{matrix} \vec{n_1} = (1, 0, 1) \\ \vec{n_2} = (0, 0, 1) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \vec{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -j \Rightarrow \vec{v_s} = (0, 1, 0)$$

.

La expresión de s dada por unas ecuaciones paramétricas es: $s \equiv \begin{cases} x = -3 \\ y = \lambda \\ z = 3 \end{cases}$.

La recta s es paralela al eje Y, por consiguiente, puede considerarse esta recta como contestación al apartado, pero, en general, basta considerar un punto cualquiera y el vector director de s, por ejemplo, el punto $P(1, 2, 3)$:

$$\underline{r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 \end{cases}}.$$

****

3º) Sabiendo que el $\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{m}{2x}\right)$ es finito, calcule el valor del número real m y halle el valor del límite.

$$\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{m}{2x}\right)=\frac{1}{e^0-1}-\frac{m}{2\cdot 0}=\frac{1}{0}-\frac{m}{0}=\infty\pm\infty\Rightarrow Indet.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{2x-me^x+m}{2x\left(e^x-1\right)}=\frac{0-m+m}{0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Indet.\Rightarrow\left\{L'Hopital\right\}\Rightarrow\frac{2-me^x}{2\left(e^x-1\right)+2x\cdot e^x}=$$

$$=\frac{2-me^x}{2\left(e^x-1\right)+2x\cdot e^x}=\frac{2-m}{0+0}\Rightarrow 2-m=0\Rightarrow \underline{m=2}.$$

$$\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{m}{2x}\right)=\frac{2-2e^x}{2\left(e^x-1\right)+2x\cdot e^x}=\frac{1-e^x}{e^x-1+x\cdot e^x}=\frac{1-e^x}{e^x(1+x)-1}=$$

$$=\frac{1-e^0}{e^0(1+0)-1}=\frac{1-1}{1-1}=\frac{0}{0}\Rightarrow Indet.\Rightarrow\left\{L'Hopital\right\}\Rightarrow\frac{e^x}{e^x(1+x)+e^x}=$$

$$=\frac{1}{1+x+1}=\underline{\frac{1}{2}}.$$

****

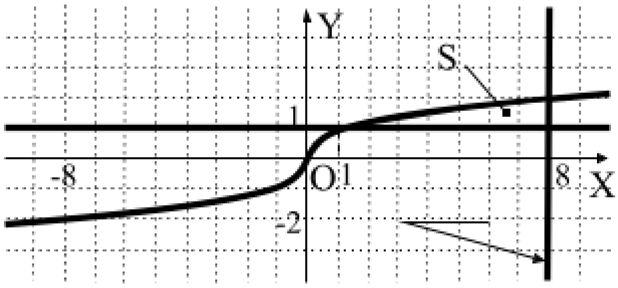
4º) La curva $y = \sqrt[3]{x}$ y las rectas $x = 8$ e $y = 1$ limitan un recinto cerrado finito en el plano.

a) Dibuje un esquema del recinto.

b) Calcule su área.

----

a)



La representación gráfica de la situación, aproximada, es la que se indica en la figura.

b)

La superficie S a calcular es la siguiente:

$$S = \int_1^8 \left(\sqrt[3]{x} - 1\right) \cdot dx = \left[\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} - x\right]_1^8 = \left[\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - x\right]_1^8 = \left[\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} - x\right]_1^8 =$$

$$= \left(\frac{3}{4} \cdot 8 \cdot \sqrt[3]{8} - 8\right) - \left(\frac{3}{4} \cdot 1 \cdot \sqrt[3]{1} - 1\right) = \frac{3}{4} \cdot 8 \cdot 2 - 8 - \frac{3}{4} + 1 = 5 - \frac{3}{4} = \frac{17}{4}.$$

$$\underline{S = \frac{17}{4}\, u^2.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Dados los números reales α, b, c, x, se considera la matriz $A = (x\ b\ c\ a\ x\ 1\ a\ c\ x\ )$.

a) Halle los valores de a, b, c, x, para los cuales A es simétrica (recuerde que la matriz A es simétrica si $A^t = A$)

b) Si $a = b = c = 1$, halle los valores de x para los cuales A tiene inversa.

Nota: A^t denota la matriz traspuesta de A.

----

a)

Por ser A simétrica: $A = A^t \Rightarrow (x\ b\ c\ a\ x\ 1\ a\ c\ x\ ) = (x\ a\ a\ b\ x\ c\ c\ 1\ x\ ) \Rightarrow \{a = b\ a = c\ c = 1$.

$\underline{La\ matriz\ A\ es\ simétrica\ \forall x \in R\ con\ a = b = c = 1}$.

b)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

Para $a = b = c = 1$ es $A = (x\ 1\ 1\ 1\ x\ 1\ 1\ 1\ x\ )$.

$|A| = |x\ 1\ 1\ 1\ x\ 1\ 1\ 1\ x\ | = x^3 + 1 + 1 - x - x - x = x^3 - 3x + 2 = 0$

.

Resolviendo por Ruffini:

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	$\boxed{0}$
1		1	2	
2	1	2	$\boxed{0}$	
-2		-2		
	1	$\boxed{0}$		

$a_1 = a_2 = 1,\ a_3 =- 2.$

$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall x \in R - \{1,\ -2\}}$.

****

2º) a) Obtenga la ecuación implícita del plano π que pasa por los puntos $A(0,\ 2,\ 1)$, $B(1,\ 2,\ 0)$ y $C(2,\ 0,\ -3)$.

b) Halle la distancia del origen de coordenadas al plano π.

----

a)

Los puntos A, B y C determinan los vectores:

$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(1,\ 2,\ 0) - (0,\ 2,\ 1)] = (1,\ 0,\ -1)$.

$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(2,\ 0,\ -3) - (0,\ 2,\ 1)] = (2,\ -2,\ -4)$.

Considerando el punto $A(0,\ 2,\ 1)$:

$\pi\left(A;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y-2 & z-1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0;$

$-2(y-2) - 2(z-1) - 2x + 4(y-2) = 0;\quad -2x + 2(y-2) - 2(z-1) = 0;$

$x - (y-2) + (z-1) = 0;\ \ x - y + 2 + z - 1 = 0.$

$$\underline{\pi \equiv x - y + z + 1 = 0}.$$

b)

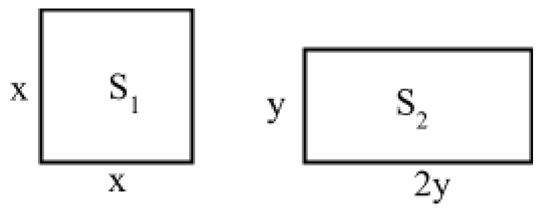
La distancia del plano $Ax + By + Cz + D = 0$ al origen de coordenadas viene dada por la fórmula $d(O, \pi) = \frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Aplicando la fórmula al plano $\pi \equiv x - y + z + 1 = 0$:

$d(O, \pi) = \frac{|1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \underline{\frac{\sqrt{3}}{3}\ unidades}.$

****

3º) Partiendo en dos trozos un alambre recto de 340 centímetros de longitud, se construyen un cuadrado y un rectángulo. Sabiendo que la base del rectángulo mide el doble que su altura, calcule las longitudes de cada uno de los trozos de alambre para que la suma de las áreas del cuadrado y del rectángulo sea mínima.



$4x + 2y + 4y = 340;\ \ 4x + 6y = 340;$
$2x + 3y = 170 \Rightarrow y = \frac{170-2x}{3}.$

$$S = S_1 + S_2 = x^2 + y \cdot 2y = x^2 + 2y^2 = x^2 + 2 \cdot \left(\frac{170-2x}{3}\right)^2 =$$

$$= x^2 + \frac{2}{9}(170 - 2x)^2.$$

Para que la superficie sea mínima es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$S'(x) = 2x + \frac{4}{9} \cdot (170 - 2x) \cdot (-2) = 2x - \frac{8}{9}(170 - 2x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{8}{9}(170 - 2x);\ \ 9x = 4 \cdot (170 - 2x);\ \ 9x = 680 - 8x;\ \ 17x = 680;$$

$$x = \frac{680}{17} = 60. \quad y = \frac{170-2x}{3} = \frac{170-2\cdot 60}{3} = \frac{170-120}{3} = \frac{50}{3}.\ \ 6y = \frac{50}{3} \cdot 6 = 100.$$

$$\underline{La\ superficie\ es\ mínima\ cuando\ los\ trozos\ son\ de\ 240\ cm\ y\ 100\ cm.}$$

****

4º) Obtenga $I = \int_1^2 \frac{4x^2+8x+1}{x^2+2x} \cdot dx$.

$$I = \int_1^2 \frac{4x^2+8x+1}{x^2+2x} \cdot dx = \int_1^2 \left(\frac{4x^2+8x}{x^2+2x} + \frac{1}{x^2+2x} \right) \cdot dx = \int_1^2 \left(4 + \frac{1}{x^2+2x} \right) \cdot dx =$$

$$= \int_1^2 4 \cdot dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2+2x} \cdot dx = (4x)_1^2 + A = 4 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + A = 4 + A = I. \quad (*)$$

$$A = \int_1^2 \frac{1}{x^2+2x} \cdot dx = \int_1^2 \frac{1}{x(x+2)} \cdot dx = \int_1^2 \left(\frac{M}{x} + \frac{N}{x+2} \right) dx = \int_1^2 \frac{Mx+2M+Nx}{x^2+2x} \cdot dx =$$

$$= \int_1^2 \frac{(M+N)x+2M}{x^2+2x} \cdot dx \Rightarrow M + N = 0 \quad 2M = 1 \} \Rightarrow M = \frac{1}{2},\ N = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = \int_1^2 \left(\frac{½}{x} - \frac{½}{x+2} \right) d.$$

$$= \left[\frac{1}{2} Lx - \frac{1}{2} L(x + 2) \right]_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \left[L \frac{x}{x+2} \right]_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(L \frac{2}{2+2} - L \frac{1}{1+2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(L \frac{1}{2} - L \frac{1}{3} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot L \left(\frac{1}{2} : \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \cdot L \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \cdot L1,5 = A.$$

Sustituyendo el valor obtenido de A en la expresión (*):

$$\underline{I = \int_1^2 \frac{4x^2+8x+1}{x^2+2x} \cdot dx = 4 + \frac{1}{2} \cdot L1,5.}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE ASTURIAS

JUNIO – 2016 (GENERAL)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Tiene que elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la Opción A o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la Opción B. Conteste de forma razonada y escriba ordenadamente y con letra clara. Todos los procesos que conducen a resultados deben estar suficientemente justificados y completamente explicados.

OPCIÓN A

1º) Considere un número de tres cifras cumpliendo que la suma de su número de decenas y su número de unidades es 5, y si al número original le restamos el número escrito con los dígitos en orden contrario, se obtiene 792.

a) Escriba el sistema de ecuaciones lineales.

b) Determine la matriz del sistema y la matriz ampliada.

c) Obtenga los posibles números en las condiciones dadas.

----

a)

Sea el número (xyz) (no como producto).

Del enunciado del ejercicio se deduce el siguiente sistema de ecuaciones:

$y + z = 5\ (xyz) - (zyx) = 792\}$ $y + z = 5\ 100x$ -

$y + z = 5\ 100x + 10y + z - 100z - 10y - x = 792\}$

.

Finalmente, el sistema resultante es: $\underline{y + z = 5\ x - z = 8\}}$.

b)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$\underline{M = (0\ 1\ 1\ 11\ 0\ -\ 11)}$ y $\underline{M^{'} = (0\ 1\ 1\ 1\ 0\ -\ 1\ \ 5\ 8)}$.

c)

Por ser $Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg$, según el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible indeterminado.

Para resolver el sistema se hace, por ejemplo: $z = \lambda,\ y = 5 - \lambda,\ x = 8 + \lambda$.

Los únicos números que cumplen la condición pedida son los siguientes:

$$\underline{\lambda = 0 \Rightarrow x = 8,\ y = 5,\ z = 0 \Rightarrow Número\ 850}.$$

$$\underline{\lambda = 1 \Rightarrow x = 9,\ y = 4,\ z = 1 \Rightarrow Número\ 941}.$$

****

2º) Considere la recta $r \equiv \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$:

a) Escriba la ecuación implícita de un plano π perpendicular a r pasando por el punto $A(-1, 2, 2)$.

b) Obtenga el punto proyección ortogonal de $P(-1, 3, 3)$ sobre el plano π.

----

a)

La expresión de la recta r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow y = z = \lambda \Rightarrow x = -1 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y = \lambda \end{cases}$$

.

Un vector director de r es $\vec{v_r} = (0, 1, 1)$.

Un vector normal del plano π pedido es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector director de la recta.

La expresión del haz de planos perpendiculares a r es $\beta \equiv y + z + D = 0$.

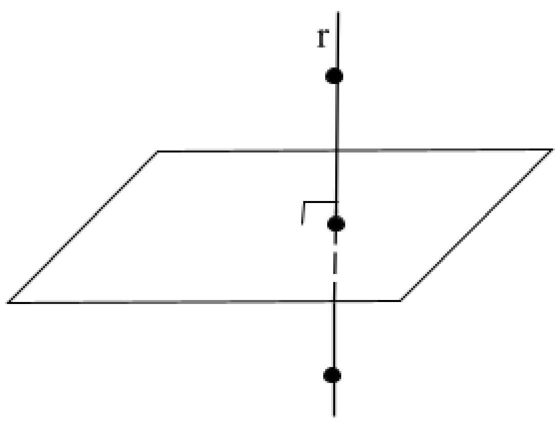
De los infinitos planos pertenecientes a β, el plano π es el que contiene al punto $A(-1, 2, 2)$:

$$\left. \begin{array}{l} \beta \equiv y + z + D = 0 \\ A(-1, 2, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow 2 + 2 + D = 0,\ 4 + D = 0 \Rightarrow D = -4$$

.

$$\underline{\pi \equiv y + z - 4 = 0}.$$

b)



Para la realización de este ejercicio se debe tener en cuenta que el punto $P(-1, 3, 3)$ pertenece a la recta r, por lo cual, la situación es la indicada en el gráfico adjunto.

Se trata de encontrar el punto P', simétrico de P con respecto al plano π.

Tiene que cumplirse que $\vec{PA} = \vec{AP'}$.

$$\vec{PA} = [A - P] = [(-1, 2, 2) - (-1, 3, 3)] = (0, -1, -1).$$

$$\vec{AP'} = [P' - A] = [(x, y, z) - (-1, 2, 2)] = (x + 1, y - 2, z - 2).$$

$$(0, -1, -1) = (x + 1, y - 2, z - 2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \{x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \; y - 2 = -1 \rightarrow y = 1 \; z - 2 = -1 \rightarrow z = 1\} \Rightarrow \underline{P'(-1, 1, 1)}$$
.

****

3º) a) Calcule los valores a y b para que la función $f(x) = \frac{bx}{x-a}$ tenga como asíntota vertical la recta $x = 2$, y como asíntota vertical la recta $y = 3$.

b) Dados a y b distintos de cero, razone si la función tiene algún extremo relativo.

----

a)

Las asíntotas verticales son los valores finitos que anulan el denominador:

$x - a = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \underline{a = 2}$.

Una asíntota horizontal es el valor finito de la función cuando x tiende a infinito:

$y = f(x) = \frac{bx}{x-a} = \frac{b}{1} = 3 \Rightarrow \underline{b = 3}$.

b)

Para que una función tenga un extremo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$f'(x) = \frac{b\cdot(x-a)-bx\cdot 1}{(x-a)^2} = \frac{bx-ab-bx}{(x-a)^2} = \frac{-ab}{(x-a)^2} = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ o } b = 0$, en contra de la condición dada de que a y b son distintos de cero.

$\underline{La\ función\ f(x)\ no\ tiene\ ningún\ extremo\ relativo}$.

****

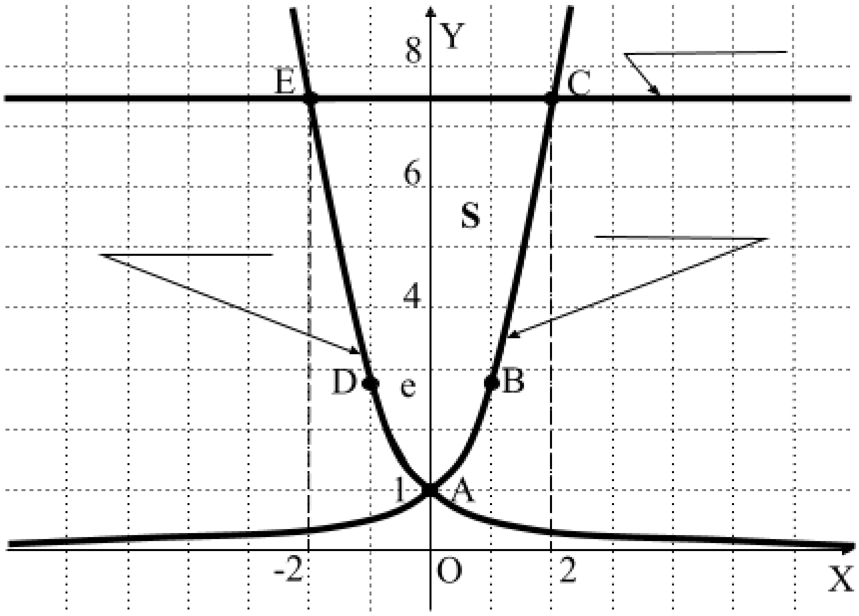
4º) a) Dibuje un esquema del recinto cerrado plano limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = e^{x}$, $g(x) = e^{-x}$ y $h(x) = e^{2}$.

b) Halle el área de dicho recinto.

----

a)

La funciones $f(x) = e^{x}$ y $g(x) = e^{-x}$ son simétricas con respecto al eje de ordenadas y se cortan en el punto $A(0,\ 1)$.



La función $f(x) = e^{x}$ es monótona creciente por ser $f'(x) = e^{x} > 0,\ \forall x \in R$; pasa por el punto $B(1,\ e)$ y corta a la función $h(x) = e^{2}$ en el punto $C\left(2,\ e^{2}\right)$.

Por ser $f(x)\ =\ 0$, el semieje –X es asíntota horizontal de $f(x) = e^{x}$.

Los puntos D y E son los simétricos de B y C, respectivamente.

La representación gráfica, aproximada, de la situación se expresa en la figura.

b)

Teniendo en cuenta la simetría de las funciones, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S\ =\ 2\cdot\int_{0}^{2}\left(e^{2} - e^{x}\right)\cdot dx\ =\ 2\cdot\left[e^{2}x\ -\ e^{x}\right]_{0}^{2} = 2\cdot\left[\left(2e^{2} - e^{2}\right) - \left(0\ -\ e^{0}\right)\right] =$$

$$= 2\cdot\left(e^{2} + 1\right).$$

$$\underline{S\ =\ 2\cdot\left(e^{2} + 1\right)u^{2} \cong 16,78\ u^{2}.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Dados los números reales α y b se tiene la matriz $A = (a + b\ a\ a\ a\ a + b\ a\ a\ a\ a + b\ )$.

a) Obtenga el determinante de A.

b) Estudie el rango de A dependiendo de los valores de a y b.

----

a)

$|A| = |a + b\ a\ a\ a\ a + b\ a\ a\ a\ a + b\ | \Rightarrow \left\{F_2 \to F_2 - F_1\ F_3 \to F_3 - F_1\right\} \Rightarrow |a + b\ a\ a\ -$

$= b^2 \cdot |a + b\ a\ a\ -1\ 1\ 0\ -1\ 0\ 1\ | \Rightarrow \left\{C_1 \to C_1 + C_2 + C_3\right\} = b^2 \cdot |3a + b\ a\ a\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1$

$= b^2 \cdot (3a + b) \cdot |1\ 0\ 0\ 1\ | = b^2 \cdot (3a + b) \cdot 1.$

$$\underline{|A| = b^2 \cdot (3a + b)}.$$

b)

Del apartado anterior se deduce lo siguiente:

$$\underline{Para\ a = b = 0 \Rightarrow A = (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ ) \Rightarrow Rang\ A = 0}.$$

$$\underline{Para\ a \neq 0\ y\ b = 0 \Rightarrow A = (a\ a\ a\ a\ a\ a\ a\ a\ a\ ) \Rightarrow Rang\ A = 1}.$$

$$\underline{Para\ a = 0\ y\ b \neq 0 \Rightarrow A = (b\ 0\ 0\ 0\ b\ 0\ 0\ 0\ b\ ) \neq 0 \Rightarrow Rang\ A = 3}.$$

$$\underline{Para\ b \neq -3a \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow Rang\ A = 3}.$$

****

2º) a) Encuentre m tal que los puntos $A(2,\ -5,\ 2)$, $B(4,\ m,\ 2)$ y $C(5,\ -2,\ 2)$ estén alineados.

b) Obtenga las ecuaciones implícitas de la recta determinada por los puntos anteriores.

c) Halle la distancia del origen de coordenadas a la recta encontrada en b).

----

a)

Los puntos $A(2,\ -5,\ 2)$, $B(4,\ m,\ 2)$ y $C(5,\ -2,\ 2)$ están alineados cuando los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son linealmente dependientes, o sea, que sus componentes son proporcionales.

$$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(4,\ m,\ 2) - (2,\ -5,\ 2)] = (2,\ m+5,\ 0).$$

$$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(5,\ -2,\ 2) - (2,\ -5,\ 2)] = (3,\ 3,\ 0).$$

$$\frac{2}{3} = \frac{m+5}{3} = \frac{0}{0} \Rightarrow 2 = m + 5;\ \ m = -3.$$

$$\underline{Los\ puntos\ A,\ B\ y\ C\ están\ alineados\ para\ m = -3}.$$

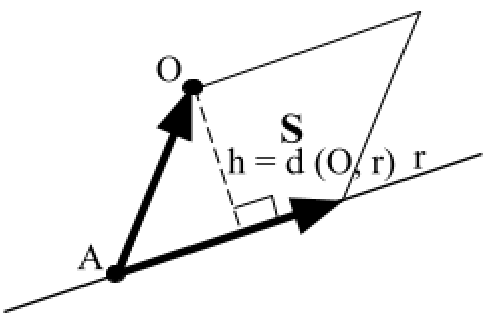
b)

Considerando el vector $\overrightarrow{AC} = (3,\ 3,\ 0)$ y el punto $A(2,\ -5,\ 2)$, la recta r tiene por expresión: $r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-2}{0}$.

La expresión de r mediante unas (no las, como indica el enunciado) ecuaciones implícitas es la siguiente: $r \equiv \begin{cases} x - 2 = y + 5 \\ z - 2 = 0 \end{cases}$.

$$\underline{r \equiv \begin{cases} x - y - 7 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases}}.$$

c)



La distancia de un punto a una recta puede determinarse teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que determinan dos vectores es el módulo de su producto vectorial y, de forma geométrica, es el producto de la base por la altura.

Para una mejor comprensión del proceso se hace un dibujo de la situación.

$$\left.\begin{array}{l} S = \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AO}\right| \\ S = \left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot h \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AO}\right| = \left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot h \Rightarrow \underline{h = d(O, r) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AO}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}}.$$

Aplicando la fórmula al punto O y a la recta r:

Siendo $\vec{v}_r = (1,\ 1,\ 0)$ un vector director de r y $\vec{AO} = (-\ 2,\ 5,\ \ -\ 2)$:

$$d(O, r) = \frac{\left|\vec{v}_r \wedge \vec{OA}\right|}{\left|\vec{v}_r\right|} = \frac{\| i\ j\ k\ 1\ 1\ 0\ -2\ 5\ -2\ \|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{|-2i+5k+2k+2j|}{\sqrt{1+1+0}} = \frac{|-2i+2j+7k|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(-2)^2+2^2+7^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{4}}{}$$

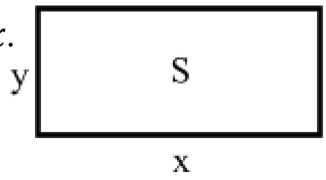
$$= \frac{\sqrt{57}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{114}}{2}.$$

$$\underline{d(O,\ r) = \frac{\sqrt{114}}{2}\ unidades.}$$

****

3º) En un concurso se da a cada participante un alambre de dos metros de longitud para que doblándolo convenientemente hagan con el mismo un cuadrilátero con los cuatro ángulos rectos. Aquellos que lo logren reciben como premio tantos euros como decímetros cuadrados tenga de superficie el cuadrilátero construido. Calcule razonadamente la cuantía del máximo premio que se puede obtener en este concurso.

$2x + 2y = 20\, dm;\ \ x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x.$



$S = x\cdot y \Rightarrow Máximo.$

Sustituyendo en la fórmula del área el valor de y:

$S = x\cdot(10 - x) = 10x - x^2.$

Para que la superficie sea máxima es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$S'(x) = 10 - 2x.\quad S'(x) = 0 \Rightarrow 10 - 2x = 0;\ \ 5 - x = 0 \Rightarrow x = 5.$

Nótese que $S''(x) = -2 < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = 5.$

Sustituyendo en el valor de la altura: $y = 10 - x = 10 - 5 = 5.$

$S = 5\cdot 5 = 25\, dm^2.$

$\underline{El\ máximo\ premio\ que\ puede\ obtenerse\ es\ de\ 25\ euros}.$

****

4º) Determine la función $f\colon (0, \ +\infty) \rightarrow R$ sabiendo que es dos veces derivable, que se cumple $f(1) = e + 2$, que $f'(1) = e + 2$ y que $f''(x) = e^x - \frac{1}{x^2}$.

$$f'(x) = \int f''(x) \cdot dx = \int \left(e^x - \frac{1}{x^2}\right) \cdot dx = \int \left(e^x - x^{-2}\right) \cdot dx =$$

$$= e^x - \frac{x^{-1}}{-1} + C = e^x + \frac{1}{x} + C = f'(x).$$

$$f'(1) = e + 2 \Rightarrow e^1 + \frac{1}{1} + C_1 = e + 2; \ \ 1 + C_1 = 2 \Rightarrow C_1 = 1.$$

La función derivada resulta ser $f'(x) = e^x + \frac{1}{x} + 1$.

$$f(x) = \int f'(x) \cdot dx = \int \left(e^x + \frac{1}{x} + 1\right) \cdot dx = e^x + Lx + x + C_2.$$

$$f(1) = e + 2 \Rightarrow e^1 + L1 + 1 + C_2 = e + 2; \ \ 0 + 1 + C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = 1.$$

La función resulta ser $\underline{f(x) = e^x + Lx + x + 1}$.

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE BALEARES

JUNIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contesta de manera clara y razonada a una de las dos opciones propuestas. Se valorará la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) utilizado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autorizarán las que traigan información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1º) a) Discuta para que valores de m el sistema $x + (m - 2)y + 2mz = 1 \quad 3x - y - 2z = 2 \quad x + z = 3\}$ es compatible.

b) Resuélvalo en el caso de m = 1.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A = (1\, m - 2\, 2m\, 3\ - 1\ - 2\, 1\, 0\, 1\,)$ y $A' = (1\, m - 2\, 2m\, 3\ - 1\ - 2\, 1\, 0\, 1\quad 1\, 2\, 3\,)$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro m es el siguiente:

$$|A| = |1\, m - 2\, 2m\, 3\ - 1\ - 2\, 1\, 0\, 1\,| = - 1 - 2(m - 2) + 2m - 3(m - 2) =$$

$$- 1 - 5(m - 2) + 2m = 0;\ - 1 - 5m + 10 + 2m = 0;\ 9 = 3m \Rightarrow m = 3.$$

$$\underline{Para\ m \neq 3 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$$

Para $m = 3 \Rightarrow A' = (1\, 1\, 6\, 3\ - 1\ - 2\, 1\, 0\, 1\quad 1\, 2\, 3\,) \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \left(C_1,\ C_2,\ C_4\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow |1\, 1\, 1\, 3\ - 1\, 2\, 1\, 0\, 3\,| = - 3 + 2 + 1 - 9 = - 9 \neq 0 \Rightarrow Rang\ A' = 3.$$

$\underline{Para\, m\, =\, 3 \Rightarrow Rang\ A\, =\, 2;\ Rang\ A'\, =\, 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

$b)$

Para $m\, =\, 1$ el sistema resulta: $x\, -\, y\, +\, 2z\, =\, 1\ 3x\, -\, y\, -\, 2z\, =\, 2\quad x\, +\, z\, =\, 3\,\}$, que es compatible determinado. Resolviendo por Cramer:

$x\, =\, \frac{|1\ -1\ 2\ 2\ -1\ -2\ 3\ 0\ 1\,|}{-3\cdot 1+9} = \frac{-1+6+6+2}{6} = \frac{13}{6}.$

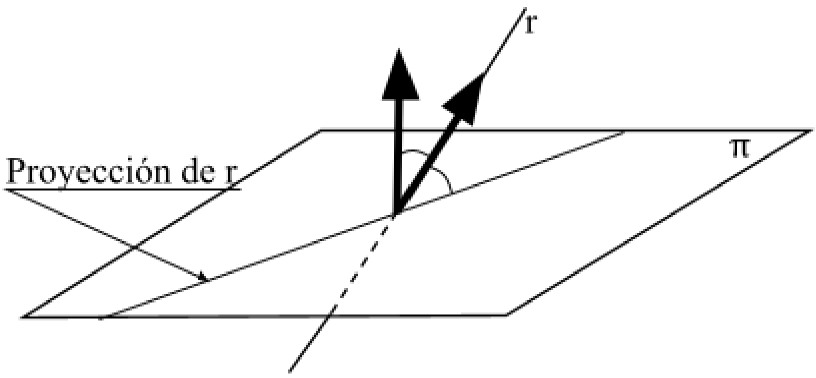
$y\, =\, \frac{|1\ 1\ 2\ 3\ 2\ -2\ 1\ 3\ 1\,|}{6} = \frac{2+18-2-4+6-3}{6} = \frac{17}{6}.$

$z\, =\, \frac{|1\ -1\ 1\ 3\ -1\ 2\ 1\ 0\ 3\,|}{6} = \frac{-3-2+1+9}{6} = \frac{5}{6}.$

$\underline{Solución: x\, =\, \frac{13}{6},\ y\, =\, \frac{17}{6},\ z\, =\, \frac{5}{6}.}$

****

2º) Determine m para que la recta $r \equiv \frac{x-1}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$ forme un ángulo de 60º con el plano $\pi \equiv x + 2y + mz = 6$ y calcule el punto de intersección entre ellos.



Para que la recta r forme un ángulo de 60º con el plano π es necesario que el vector director de la recta y el vector normal del plano formen un ángulo de 30º.

Un vector director de la recta r es $\vec{v}_r = (0,\ 1,\ 1)$ y un vector normal del plano π es $\vec{n} = (1,\ 2,\ m)$.

Por definición de producto escalar: $\vec{n} \cdot \vec{v}_r = |\vec{n}| \cdot |\vec{v}_r| \cdot$ cos $cos\ 30°$.

$$(1,\ 2,\ m) \cdot (0,\ 1,\ 1) = \sqrt{1^2 + 2^2 + m^2} \cdot \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$2 \cdot (0 + 2 + m) = \sqrt{5 + m^2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3};\ \ 4 + 2m = \sqrt{30 + 6m^2};$$

$$(4 + 2m)^2 = \left(\sqrt{30 + 6m^2}\right)^2;\ \ 16 + 16m + 4m^2 = 30 + 6m^2;$$

$$2m^2 - 16m + 14 = 0;\ \ m^2 - 8m + 7 = 0;\ \ m = \frac{8 \pm \sqrt{64-28}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2} =$$

$$= 4 \pm 3 \Rightarrow m_1 = 1,\ m_2 = 7.$$

$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ forman\ un\ \acute{a}ngulo\ de\ 60°\ para\ m = 1\ y\ para\ m = 7.}$

El punto P de intersección de la recta r y el plano π es el siguiente:

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es: $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$.

$Para\, m = 1 \Rightarrow \pi \equiv x + 2y + z = 6 \; r \equiv \{x = 1 \quad y = -1 + \lambda \; z = 3 + \lambda \quad \} \Rightarrow 1$
$1 - 2 + 2\lambda + 3 + \lambda = 6; \;\; 3\lambda = 4 \rightarrow \lambda = \frac{4}{3}.$

$$\left\{ x = 1 \quad y = -1 + \frac{4}{3} = -\frac{1}{3} \; z = 3 + \frac{4}{3} = \frac{13}{3} \right\} \Rightarrow \underline{P_1\left(1, \; \frac{1}{3}, \; \frac{13}{3}\right)}$$
.

$Para\, m = 7 \Rightarrow \pi \equiv x + 2y + 7z = 6 \; r \equiv \{x = 1 \quad y = -1 + \lambda \; z = 3 + \lambda \quad \} \Rightarrow$

$1 - 2 + 2\lambda + 21 + 7\lambda = 6; \;\; 9\lambda = -14 \rightarrow \lambda = -\frac{14}{9}.$

$$\left\{ x = 1 \quad y = -1 - \frac{14}{9} = -\frac{23}{9} \; z = 3 - \frac{14}{9} = \frac{13}{9} \right\} \Rightarrow \underline{P_2\left(1, \; -\frac{23}{9}, \; \frac{13}{9}\right)}$$
.

****

3º) Considere la función $f(x) = 2\cdot e^{-(x-1)} + 4x$. Calcule los máximos y mínimos relativos, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y demuestre que $f(x)$ es cóncava para todos los valores de x. Una función es cóncava cuando $f''(x) > 0$.

$f(x) = 2\cdot e^{1-x} + 4x.$

$f'(x) = -2\cdot e^{1-x} + 4 = 2\cdot\left(2 - e^{1-x}\right).$ $\qquad$ $f''(x) = 2\cdot e^{1-x}.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2\cdot\left(2 - e^{1-x}\right) = 0;\ 2 - e^{1-x} = 0;\ 2 = e^{1-x} \Rightarrow 1 - x = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -1.$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto. Esta condición necesaria no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; se es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$f''(-1) = 2e^{1-(-1)} = 2e^2 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = -1.$

$f(-1) = 2\cdot e^{-(-1-1)} + 4\cdot(-1) = 2e^2 - 4 \Rightarrow \underline{Mínimo: P\left(-1,\ 2e^2 - 4\right)}.$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

Teniendo en cuenta que el dominio de la función es R, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x < -1}.$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x > -1}.$$

$f''(x) = 2\cdot e^{1-x} > 0,\ \forall x \in R.$

$$\underline{f(x)\ es\ cóncava\ (\cup)\ \forall x \in R,\ como\ se\ pedía\ demostrar}.$$

****

4º) Calcule la siguiente integral indefinida: $I = \int \left(x^2 + 1\right) \cdot Lx \cdot dx$.

$$I = \int \left(x^2 + 1\right) \cdot Lx \cdot dx \Rightarrow \left\{ u = Lx \rightarrow du = \frac{1}{x} \cdot dx \quad dv = \left(x^2 + 1\right) \cdot dx \rightarrow v = \frac{x^3}{3} + x \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Lx \cdot \left(\frac{x^3}{3} + x\right) - \int \left(\frac{x^3}{3} + x\right) \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right) \cdot Lx - \int \left(\frac{x^2}{3} + 1\right) \cdot dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + x\right) \cdot Lx - \frac{x^3}{9} - x + C.$$

$$\underline{I = \left(\frac{x^3}{3} + x\right) \cdot Lx - \frac{x^3}{9} - x + C.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Sea la matriz $A = (a\ 0\ 0\ 1\ a\ 0\ 0\ 1\ a\ )$, con a real. Calcule $A^2,\ A^3\ y\ A^4$ y calcular una fórmula general para la expresión de A^n.

$A^2 = A \cdot A = (a\ 0\ 0\ 1\ a\ 0\ 0\ 1\ a\ ) \cdot (a\ 0\ 0\ 1\ a\ 0\ 0\ 1\ a\ ) = \underline{\left(a^2\ 0\ 0\ 2a\ a^2\ 0\ 1\ 2a\ a^2\right)}$.

$A^3 = A^2 \cdot A = \left(a^2\ 0\ 0\ 2a\ a^2\ 0\ 1\ 2a\ a^2\right) \cdot (a\ 0\ 0\ 1\ a\ 0\ 0\ 1\ a\ ) = \underline{\left(a^3\ 0\ 0\ 3a^2\ a^3\ 0\ 3a\ 3a^2\ a^3\right)}$
.

$A^4 = A^3 \cdot A = \left(a^3\ 0\ 0\ 3a^2\ a^3\ 0\ 3a\ 3a^2\ a^3\right) \cdot (a\ 0\ 0\ 1\ a\ 0\ 0\ 1\ a\ ) = \underline{\left(a^4\ 0\ 0\ 4a^3\ a^4\ 0\ 6a^2\ 4a^3\ a^4\right.}$
.

De lo anterior se deduce la potencia n-ésima de A, que es la siguiente:

$$\underline{A^n = \left(a^n\ 0\ 0\ na^{n-1}\ a^n\ 0\ \tfrac{n^2-n}{2} \cdot a^{n-2}\ na^{n-1}\ a^n\right)}.$$

Para obtener el coeficiente del elemento a_{31} se ha tenido en cuenta que:

La sucesión resulta: 0, 1, 3, 6, $\cdots\cdots$, que es una progresión aritmética superior:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & 1 & & 3 & & 6 \\ & 1 & & 2 & & 3 & \\ & & 1 & & 1 & & \end{array}$$

$a_n = 0 \cdot (n - 1\ 0\ ) + 1 \cdot (n - 1\ 1\ ) + 1 \cdot (n - 1\ 2\ ) =$

$= 0 \cdot 1 + 1 \cdot (n - 1) + 1 \cdot \frac{(n-1)!}{(n-1-2)! \cdot 2!} =$

$= 0 + n - 1 + \frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)!}{(n-3)! \cdot 2} = n - 1 + \frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2} = n - 1 + \frac{n^2-3n+2}{2} =$

$= \frac{2n-2+n^2-3n+2}{2} = \frac{n^2-n}{2}$.

****

2º) Determine m para que la recta $r \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{m} = \frac{z+3}{3}$ sea paralela al plano de ecuación $\pi \equiv x + y - z = 5$ y calcule la distancia entre ellos.

La recta r y el plano π son perpendiculares cuando el vector director de la recta y el vector normal del plano son perpendiculares, es decir, que su producto escalar sea cero.

Un vector director de la recta r es $\vec{v_r} = (-1, m, 3)$ y un vector normal del plano π es $\vec{n} = (1, 1, -1)$.

$$\vec{v_r} \cdot \vec{n} = (-1, m, 3) \cdot (1, 1, -1) = 0; \quad -1 + m - 3 = 0 \Rightarrow m = 4.$$

$\underline{\textit{La recta r y el plano } \pi \textit{ son paralelos para } m = 4}.$

La distancia de la recta $r \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+3}{3}$ al plano $\pi \equiv x + y - z = 5$ es equivalente a la distancia de un punto de r a π.

Un punto de r es $P(0, -1, -3)$.

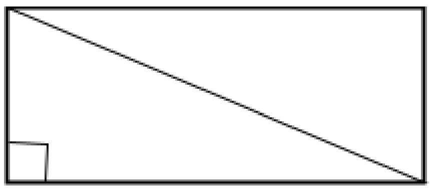
La distancia de un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

$$d(P, \pi) = d(r, \pi) = \frac{|1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-3) - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|0 - 1 + 3 - 5|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

$\underline{\textit{La distancia de la recta r al plano } \pi \textit{ es } \sqrt{3} \textit{ unidades}}.$

****

3º) De todos los rectángulos de diagonal $d = 6\sqrt{2}$ cm, determine el rectángulo de perímetro máximo.



Perímetro: $P = 2b + 2h \Rightarrow Máximo.$

Por Pitágoras: $d^2 = b^2 + h^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h = \sqrt{d^2 - b^2} = \sqrt{72 - b^2}.$

Sustituyendo en el perímetro: $P = 2b + 2\sqrt{72 - b^2}.$

El perímetro será máximo cuando se anule su primera derivada:

$$P'_{(b)} = 2 + 2\cdot\frac{-2b}{2\sqrt{72-b^2}} = 2 - \frac{2b}{\sqrt{72-b^2}} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{b}{\sqrt{72-b^2}};\ \ \sqrt{72 - b^2} = b;$$

$$b^2 = 72 - b^2\ ;;\ 2b^2 = 72\ ;;\ b^2 = 36 \Rightarrow b = \pm\sqrt{36} \Rightarrow b_1 = 6,\ b_2 = -6.$$

La solución negativa carece de sentido lógico, por lo cual: $b = 6.$

$$h = \sqrt{72 - b^2} = \sqrt{72 - 36} = \sqrt{36} = b = 6.$$

$\underline{El\ rectángulo\ de\ perímetro\ máximo\ es\ un\ cuadrado\ de\ lado\ 6\ cm.}$

****

4º) Considere las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = 3x^2 - 4$. Haga un dibujo aproximado de las funciones anteriores para $x \in [-3, 3]$. Calcule el área limitada por las gráficas de las funciones anteriores.

Los puntos de corte de las dos funciones son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

	1	-3	0	4
-1		-1	4	-4
	1	-4	4	$\boxed{0}$
2		2	-4	
2	1	-2	$\boxed{0}$	
2		2		
	1	$\boxed{0}$		

$$x^3 = 3x^2 - 4;\ x^3 - 3x^2 + 4 = 0.$$

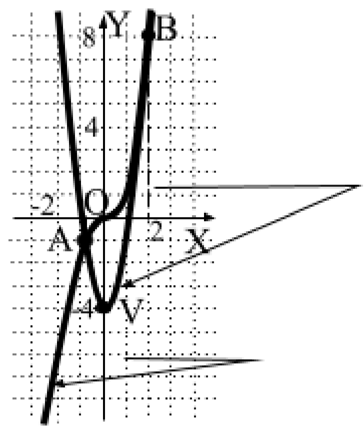
Resolviendo por Ruffini:

Los puntos de corte son $A(-1, -1)$ y $B(2, 8)$.

El vértice de la parábola es el siguiente:

$$g'(x) = 6x \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

$$g(0) = 3 \cdot 0^2 - 4 = -4 \Rightarrow V(0, -4).$$



La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la que indica la figura adjunta.

En el intervalo correspondiente al área a calcular, todas las ordenadas de la función $f(x) = x^3$ son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la función $g(x) = 3x^2 - 4$.

El área a calcular es la siguiente:

$$S = \int_{-1}^{2} \left[x^3 - \left(3x^2 - 4\right)\right] dx = \int_{-1}^{2} \left(x^3 - 3x^2 + 4\right) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + 4x\right]_{-1}^{2} =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 4x\right]_{-1}^{2} = \left(\frac{2^4}{4} - 2^3 + 4 \cdot 2\right) - \left[\frac{(-1)^4}{4} - (-1)^3 + 4 \cdot (-1)\right] =$$

$$= 4 - 8 + 8 - \frac{1}{16} - 1 + 4 = 7 - \frac{1}{16} = \frac{112-1}{16} = \underline{\frac{111}{16}\, u^2}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE BALEARES

SEPTIEMBRE – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Conteste de manera clara y razonada a una de las dos opciones propuestas. Se valorará la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autorizarán las que porten información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1º) a) Discuta para qué valores de a el sistema $x + (a - 1)y + 3z = 1 \quad 3x + 2y + z =- 1 \quad - ax - y + z = 1 \}$ tiene solución.

b) Resuélvalo en el caso (o casos) en que sea compatible indeterminado.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = (1\, a - 1\, 3\, 3\, 2\, 1 \; - a \; - 1\, 1\,)$ y $M' = (1\, a - 1\, 3\, 3\, 2\, 1 \; - a \; - 1\, 1 \quad 1 \; - 1\, 1\,).$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$|M| = |1\, a - 1\, 3\, 3\, 2\, 1 \; - a \; - 1\, 1\, | = 2 - 9 - a(a - 1) + 6a + 1 - 3(a - 1$

$=- 6 - a^2 + a + 6a - 3a + 3 =- a^2 + 4a - 3 = 0; \; a^2 - 4a + 3 = 0;$

$a = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 \Rightarrow a_1 = 1, \; a_2 = 3.$

$\underline{Para\, \{a \neq 1\; a \neq 3\, \} \Rightarrow Rang\, M = Rang\, M' = 3 = nº\, incóg. \Rightarrow S.\, C.\, D.}$

Para $a = 1 \Rightarrow M' = (1\, 0\, 3\, 3\, 2\, 1 \; - 1 \; - 1\, 1 \quad 1 \; - 1\, 1\,) \Rightarrow Rang\, M' \Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 - 3F_1\; F_3 \rightarrow F$

$\Rightarrow (1\,0\,3\,0\,2\; -8\,0\; -1\,4\quad 1\; -4\,2\,) \Rightarrow \{F_2 =-\, 2F_3\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$

$\underline{Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

Para $a = 3 \Rightarrow M' = (1\,2\,3\,3\,2\,1\; -3\; -1\,1\quad 1\; -1\,1\,) \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 - 3F_1\ F_3 \rightarrow F$

$\Rightarrow (1\,2\,3\,0\; -4\; -8\,0\,5\,10\quad 1\; -4\,4\,) \Rightarrow \{F_2 =- \frac{1}{4}F_2\} \Rightarrow (1\,2\,3\,0\,1\,2\,0\,5\,10\quad 1\,1\,4\,)$

$\Rightarrow (1\,0\; -1\,0\,1\,2\,0\,0\,0\quad -1\,1\; -1\,) \Rightarrow Rang\ M' = 3.$

$\underline{Para\ a = 3 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

$b)$

Para $a = 1$ el sistema resulta: $x + 3z = 1\ 3x + 2y + z =- 1\quad - x - y + z = 1\,\}$, que es compatible indeterminado. Despreciando la segunda ecuación, por ejemplo, y haciendo $z = \lambda$, resulta:

$$x + 3\lambda = 1\ \ - x - y + \lambda = 1\,\} \Rightarrow x = 1 - 3\lambda.$$

$$y =- x + \lambda - 1 =- 1 + 3\lambda + \lambda - 1 =- 2 + 4\lambda.$$

$\underline{Solución: x = 1 - 3\lambda,\ y =- 2 + 4\lambda,\ z = \lambda,\ \forall\lambda \in R.}$

****

2º) Dados los puntos $A(0,\ 0,\ 0)$ y $B(1,\ 1,\ 2)$, determina los puntos $C\ y\ D$ tales que el cuadrilátero $ABCD$ es un rectángulo en el plano $\pi \equiv x + y - z = 0$ y la coordenada x del punto C valga 1. Ved la figura adjunta.

Los puntos del plano π tienen la forma general $P(x,\ y,\ x + y)$; en particular, el punto C es $C(1,\ y,\ 1 + y)$ y el punto D es $D(x,\ y,\ x + y)$

$$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(1,\ 1,\ 2) - (0,\ 0,\ 0)] = (1,\ 1,\ 2).$$

$$\overrightarrow{BC} = [C - B] = [(1,\ y,\ 1 + y) - (1,\ 1,\ 2)] = (0,\ y - 1,\ y - 1).$$

$$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(1,\ y,\ 1 + y) - (0,\ 0,\ 0)] = (1,\ y,\ 1 + y).$$

Los puntos ABC determinan un triángulo rectángulo, por lo cual:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 = \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1^2 + 1^2 + 2^2\right) + \left[1^2 + y^2 + (1 + y)^2\right] = \left[0^2 + (y - 1)^2 + (y - 1)^2\right];$$

$$1 + 1 + 4 + 1 + y^2 + 1 + 2y + y^2 = 2\cdot\left(y^2 - 2y + 1\right) = 2y^2 - 4y + 2;$$

$$4 + 1 + 1 + 2y = -4y;\ \ 6 = -6y \Rightarrow y = -1 \Rightarrow \underline{C(1,\ -1,\ 0)}.$$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Siendo $D(x,\ y,\ z)$:

$$(1,\ 1,\ 2) = \overrightarrow{CD} = [D - C] = [(x,\ y,\ z) - (1,\ -1,\ 0)] = (x - 1,\ y + 1,\ z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x - 1 = 1 \rightarrow x = 2 \\ y + 1 = 1 \rightarrow y = 0 \\ z = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{D(2,\ 0,\ 2)}.$$

****

3º) Considere la función $f(x) = e^{x-3} - x - 2$, para $x \geq 0$. Calcule los extremos relativos, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y deducir que si $x \geq 4$, $f(x) \geq -4$.

Una función tiene un máximo o un mínimo relativo cuando se anula su primera derivada:

$$f'(x) = e^{x-3} - 1 = 0 \Rightarrow e^{x-3} = 1 \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = e^{x-3} \Rightarrow f''(3) = e^{3-3} = e^{0} = 1 > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ x = 3.$$

$$f(3) = e^{3-3} - 3 - 2 = 1 - 5 = -4 \Rightarrow \underline{Mínimo: A(3, -4)}.$$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

Teniendo en cuenta que $D(f) \Rightarrow R$, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 3)}.$$

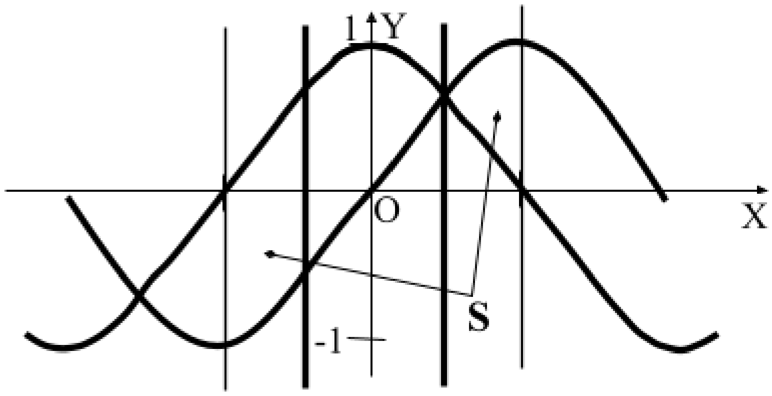
$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (3, +\infty)}.$$

Teniendo en cuenta el periodo de crecimiento de la función es $(3, +\infty)$ y que $f(3) = -4$, queda justificado que:

$$\underline{Si\ x \geq 4\ es\ f(x) \geq -4}.$$

****

4º) Haga un dibujo aproximado de las curvas $y = sen\, x$ e $y = \cos cos\, x$, con $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, indicando los puntos en que se cortan. Calcular el área del recinto limitado por las dos curvas anteriores y las rectas $x = -\frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{\pi}{4}$.



Los puntos de corte de dos funciones se obtienen de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$sen\, x = \cos cos\, x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$. Única solución en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

Nótese que en el intervalo correspondiente al área a calcular, todas las ordenadas de la función $y = \cos cos\, x$ son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la función $y = sen\, x$, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos cos\, x - sen\, x) \cdot dx = [sen\, x + cos\, x]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \left(sen\, \frac{\pi}{4} + \cos cos\, \frac{\pi}{4}\right) - \left(sen\, \frac{-\pi}{4} + \cos cos\, \frac{-\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{-\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\sqrt{2}\, u^2} \cong \underline{1,414\, u^2}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Calcule la matriz X tal que $A \cdot X \cdot A = B$, con $A = (2\ 0\ 1\ 2\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ )$ y $B = (0\ 3\ 3\ 2\ 2\ 0\ 3\ 0\ 2\ )$.

$A \cdot X \cdot A = B$, multiplicando por la izquierda y por la derecha por la inversa de la matriz A:

$A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1}$; $I \cdot X \cdot I = A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1}}$.

La inversa de A se obtiene por la adjunta de la traspuesta: $A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|}$.

$|A| = |2\ 0\ 1\ 2\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ | = -\ 1.$ $A^t = (2\ 2\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ )$.

$Adj.\ de\ A^t = (|1\ 0\ 1\ 0\ |\ -|0\ 0\ 1\ 0\ |\ |0\ 1\ 1\ 1\ |\ -|2\ 1\ 1\ 0\ |\ |2\ 1\ 1\ 0\ |\ -|2\ 2\ 1\ 1\ |\ |2$

$\Rightarrow A^{-1} = (0\ 0\ 1\ -\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ -\ 2\ )$.

$X = A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1} = (0\ 0\ 1\ -\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ -\ 2\ ) \cdot (0\ 3\ 3\ 2\ 2\ 0\ 3\ 0\ 2\ ) \cdot (0\ 0\ 1\ -\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0$

$= (3\ 0\ 2\ 2\ -\ 1\ -\ 3\ -\ 6\ 3\ -\ 1\ ) \cdot (0\ 0\ 1\ -\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ -\ 2\ ) = (2\ 0\ -\ 1\ -\ 2\ -\ 1\ 8$
.

$$\underline{X = (2\ 0\ -\ 1\ -\ 2\ -\ 1\ 8\ -\ 4\ 3\ -\ 4\ )}.$$

****

2º) Calcule el punto simétrico de $A(1,\ 1,\ 1)$ respecto del plano $\pi\equiv x + y + 3z = 6$.

Un vector normal del plano $\pi\equiv x + y + 3z - 6 = 0$ es $\overrightarrow{n} = (1,\ 1,\ 3)$.

La recta r perpendicular al plano π que contiene al punto $A(1,\ 1,\ 1)$ tiene la siguiente expresión dada por unas ecuaciones paramétricas: $r\equiv\{x = 1 + \lambda \ \ y = 1 + \lambda \ \ z = 1 + 3\lambda$.

El punto de corte de la recta r y el plano π es la solución del sistema que forman:

$\pi\equiv x + y + 3z - 6 = 0$ $\qquad r\equiv\{x = 1 + \lambda \ \ y = 1 + \lambda \ \ z = 1 + 3\lambda\ \} \Rightarrow (1 + \lambda)$

$1 + \lambda + 1 + \lambda + 3 + 9\lambda - 6 = 0;\ \ 11\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{11}$.

El punto intersección es: $\{x = 1 + \lambda = 1 + \frac{1}{11} = \frac{12}{11} \ \ y = 1 + \lambda = 1 + \frac{1}{11} = \frac{12}{11} \ \ z = 1 + 3\lambda = 1 + \frac{3}{11} =$
.

El punto $A^{'}(x,\ y,\ z)$ es simétrico de $A(1,\ 1,\ 1)$ cuando sea $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PA^{'}}$:

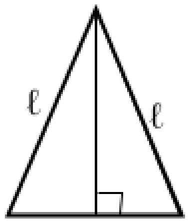
$[P - A] = \left[A^{'} - P\right];\ \left[\left(\frac{12}{11},\ \frac{12}{11},\ \frac{14}{11}\right) - (1,\ 1,\ 1)\right] = \left[(x,\ y,\ z) - \left(\frac{12}{11},\ \frac{12}{11},\ \frac{14}{11}\right)\right];$

$\left(\frac{1}{11},\ \frac{1}{11},\ \frac{3}{11}\right) = \left(\frac{11x-12}{11},\ \frac{11y-12}{11},\ \frac{11z-14}{11}\right) \Rightarrow \left\{11x - 12 = 1 \rightarrow x = \frac{13}{11}\ 11y - 12 = 1\right.$

$$\Rightarrow \underline{A'\left(\frac{13}{11},\ \frac{13}{11},\ \frac{17}{11}\right)}$$

****

3º) Determinar un triángulo isósceles de perímetro 9 cm que tenga área máxima.



$l + l + b = 9;\ \ b = 9 - 2l.$

$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{l^2 - \frac{b^2}{4}} = \sqrt{\frac{4l^2 - b^2}{4}} = \frac{\sqrt{4l^2-(9-2l)^2}}{2} =$

$= \frac{\sqrt{4l^2-\left(81-36l+4l^2\right)}}{2} = \frac{\sqrt{4l^2-81+36l-4l^2}}{2} = \frac{\sqrt{36l-81}}{2} = \frac{3}{2}\cdot\sqrt{4l - 9} = h.$

$S = \frac{b\cdot h}{2} = \frac{1}{2}\cdot b\cdot h = \frac{1}{2}\cdot(9 - 2l)\cdot\frac{3}{2}\cdot\sqrt{4l - 9} = \frac{3}{4}\cdot\sqrt{(4l - 9)\cdot(9 - 2l)^2} =$

$= \frac{3}{4}\cdot\sqrt{(4l - 9)\cdot\left(81 - 36l + 4l^2\right)} =$

$= \frac{3}{4}\cdot\sqrt{324l - 729 - 144l^2 + 324l + 16l^3 - 36l^2} =$

$= \frac{3}{4}\cdot\sqrt{16l^3 - 180l^2 + 648l - 729} = S.$

La superficie será mínima cuando se anule su primera derivada:

$S'(l) = \frac{3}{4}\cdot\frac{48l^2-360l+648}{2\cdot\sqrt{16l^3-180l^2+648l-729}} = 0 \Rightarrow 48l^2 - 360l + 648 = 0;$

$2l^2 - 15l + 27 = 0;\ \ l = \frac{15\pm\sqrt{225-216}}{2\cdot2} = \frac{15\pm\sqrt{9}}{4} = \frac{15\pm3}{4} \Rightarrow l_1 = \frac{9}{2},\ l_2 = 3.$

La solución $l_1 = \frac{9}{2}$ carece de sentido lógico, por lo cual: $l = 3\ cm.$

<u>*La solución es un triángulo equilátero (isósceles) de 3 cm de lado.*</u>

****

4º) Calcule la integral indefinida: $I = \int \frac{2x^2+x-2}{x^3-2x^2-x+2} \cdot dx$.

$$\frac{2x^2+x-2}{x^3-2x^2-x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2} =$$

	1	-2	-1	2
1		1	0	-2
	1	-1	-2	$\boxed{0}$
-1		-1	2	
	1	-2	$\boxed{0}$	
2		2		
	1	$\boxed{0}$		

$$= \frac{A\left(x^2-x-2\right)+B\left(x^2-3x+2\right)+C\left(x^2-1\right)}{(x-1)(x+1)(x-2)} =$$

$$= \frac{(A+B+C)x^2+(-A-3B)x+(-2A+2B-C)}{x^3-2x^2-x+2} \Rightarrow$$

$$A + B + C = 2 \qquad - A - 3B = 1 \quad - 2A + 2B - C =- 2 \}\Rightarrow 1 + 3 \Rightarrow - A$$

$$\Rightarrow A =- \frac{1}{2};\ \frac{1}{2} + 3B = 0;\ B =- \frac{1}{6} \Rightarrow - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + C = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{12+3+1}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}.$$

$$I = \int \frac{2x^2+x-2}{x^3-2x^2-x+2} \cdot dx = \int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{6}}{x+1} + \frac{\frac{8}{3}}{x-2} \right) \cdot dx =$$

$$=- \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{8}{3} \int \frac{dx}{x-2} =- \frac{1}{2} L|x - 1| - \frac{1}{6} L|x + 1| + \frac{8}{3} L|x - 2| + C$$

.

$$\underline{I = \int \frac{2x^2+x-2}{x^3-2x^2-x+2} \cdot dx = \frac{1}{6} \cdot [16L|x - 2| - 3L|x - 1| - L|x + 1|] + C.}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CANARIAS

JULIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones, A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo.

OPCIÓN A

1º) Hallar el valor de m para que la función $f(x) = \{6 - m(x+2)^2 \; si \, x \leq -1 \; 3 + \frac{2}{m(x+2)} \; si \; x > -1$ sea derivable en $x = -1$.

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para el valor x = -1 cuya continuidad se va a obtener, para lo cual, se van a de determinar los valores de m que la hagan continua en este punto.

Para que $f(x)$ sea continua en $x = -1$ es necesario que sus límites laterales en ese punto sean iguales e iguales al valor de la función:

$$f(x) = \left[6 - m(x+2)^2\right] = 6 - m = f(-1) \; f(x) = \left[3 + \frac{2}{m(x+2)}\right] = 3 + \frac{2}{m} =$$

;

$$6m - m^2 = 3m + 2; \; m^2 - 3m + 2 = 0; \; m = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \{m_1 = 1 \; m_2 = 2$$

.

Una función es derivable en un punto cuando es continua en ese punto y, además, sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales.

Se va a determinar ahora cuál o cuáles de los valores de m hacen derivable a la función para $x = -1$.

$$Para\ m = 1 \Rightarrow f(x) = \{6 - (x + 2)^2\ si\ x \leq -1\ 3 + \frac{2}{x+2}\ \ si\ \ x > -1\ .$$

$$m = 1 \Rightarrow f'(x) = \{-2x - 4\ \ si\ x \leq -1\ \ \frac{-2}{(x+2)^2}\ \ si\ \ x > -1 \Rightarrow f'(-1) = \{-2\ \ si\ x \leq -$$

.

$$\underline{f'\left(-1^-\right) = f'\left(-1^+\right) \Rightarrow f(x)\ es\ derivable\ en\ x = -1\ para\ m = 1.}$$

$$Para\ m = 2 \Rightarrow f(x) = \{6 - 2(x + 2)^2\ si\ x \leq -1\ 3 + \frac{1}{x+2}\ \ si\ \ x > -1\ .$$

$$m = 2 \Rightarrow f'(x) = \{-4x - 8\ \ si\ x \leq -1\ \ \frac{-1}{(x+2)^2}\ \ si\ \ x > -1 \Rightarrow f'(-1) = \{-4\ \ si\ x \leq -$$

.

$$\underline{f'\left(-1^-\right) \neq f'\left(-1^+\right) \Rightarrow f(x)\ no\ es\ derivable\ en\ x = -1\ para\ m = 2.}$$

****

2º) a) Dibujar las gráficas aproximadas de las funciones $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y $g(x) = 3 + 4x - x^2$, señalando los puntos de corte entre ambas.

b) Calcular el área encerrada entre las gráficas de las dos funciones del apartado a).

----

a)

Las abscisas de los puntos de intersección de las parábolas son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$x^2 - 4x + 3 = 3 + 4x - x^2;\ 2x^2 - 8x = 0\ ;\ 2x(x - 4) = 0 \Rightarrow$$

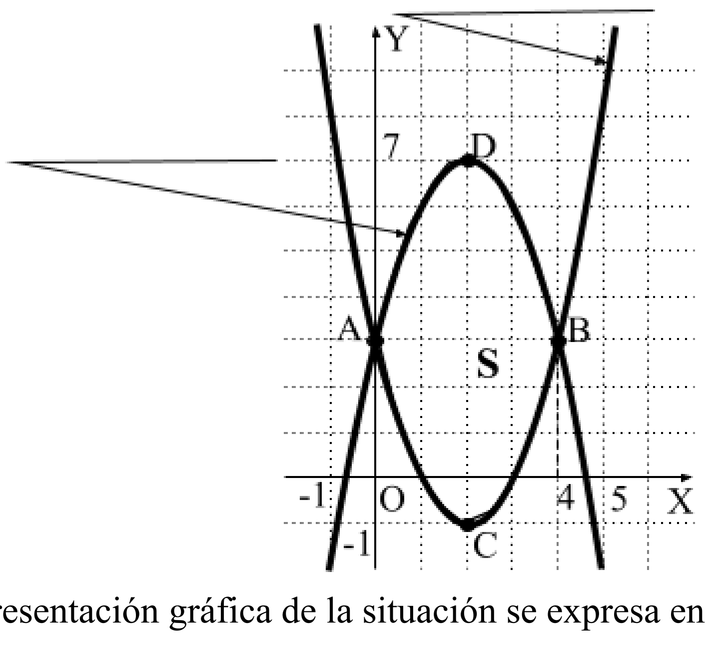
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow \underline{A(0,\ 3)} \\ x_2 = 4 \rightarrow \underline{B(4,\ 3)} \end{cases}.$$

El vértice de la parábola convexa (∪) → $f(x) = x^2 - 4x + 3$ es el siguiente:

$$f'(x) = 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2 \Rightarrow C(2,\ -1).$$

El vértice de la parábola cóncava (∩) → $g(x) = 3 + 4x - x^2$ es el siguiente:

$$g'(x) = 4 - 2x = 0 \rightarrow x = 2 \Rightarrow D(2,\ 7).$$



La representación gráfica de la situación se expresa en la figura adjunta.

b)

Por ser las ordenadas de la parábola $g(x) = 3 + 4x - x^2$ iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola $f(x) = x^2 - 4x + 3$ en el intervalo del área a calcular y de la observación de la figura se deduce que:

$$S = \int_0^4 \left[\left(3 + 4x - x^2\right) - \left(x^2 - 4x + 3\right)\right] dx = \int_0^4 \left(-2x^2 + 8x\right)\cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{8x^2}{2}\right]_0^4 = \left[-\frac{2x^3}{3} + 4x^2\right]_0^4 = \left(-\frac{2\cdot 4^3}{3} + 4\cdot 4^2\right) - 0 = -\frac{2\cdot 64}{3} + 4\cdot 16 =$$

$$= 64 - \frac{128}{3} = \frac{192-128}{3} = \underline{\frac{64}{3}\, u^2 = S}.$$

****

3º) Resolver el siguiente sistema matricial $AXB = C$, con $A = (-\ 1\ 0\ 0\ 1\ )$, $B = (2\ 5\ 1\ 3\ )$ y $C = (1\ 0\ 0\ 1\ )$.

$$A\cdot X\cdot B = C;\ \ A^{-1}\cdot A\cdot X\cdot B\cdot B^{-1} = A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1};\ \ I\cdot X\cdot I = A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}.$$

$$(I) = (1\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow -F_1\right\} \Rightarrow (-\ 1\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow A^{-1} = (-\ 1\ 0\ 0\ 1\ ).$$

$$|B| = |2\ 5\ 1\ 3\ | = 6 - 5 = 1.\ B^t = (2\ 1\ 5\ 3\ ).$$

$$Adj.\ de\ B^t = (3\ \ -5\ \ -1\ 2\ ) \Rightarrow B^{-1} = (3\ \ -5\ \ -1\ 2\ ).$$

Sustituyendo los valores obtenidos de $A^{-1}\ y\ B^{-1}$ en la expresión de X:

$$X = A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1} = (-\ 1\ 0\ 0\ 1\ )\cdot(1\ 0\ 0\ 1\ )\cdot(3\ \ -5\ \ -1\ 2\ ) =$$

$$= (-\ 1\ 0\ 0\ 1\ )\cdot(3\ \ -5\ \ -1\ 2\ ) = (-\ 3\ 5\ \ -1\ 2\ ).$$

$$\underline{X = (-\ 3\ 5\ \ -1\ 2\ )}.$$

****

4º) Sean los puntos $A(0,\ 1,\ 0)$ y $B(0,\ 3,\ -1)$:

a) Hallar la ecuación del plano π que es paralelo a la recta $r\equiv\begin{cases} x - y - 5 = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$ y pasa por los puntos A y B.

b) Hallar el punto del intersección del plano $z = 0$ y la recta s que pasa por B y con vector director $\vec{v}_s = (2,\ -1,\ 1)$.

----

a)

Los puntos A y B determinan el vector:

$$\vec{AB} = [B - A] = [(0,\ 3,\ -1) - (0,\ 1,\ 0)] = (0,\ 2,\ -1).$$

Un vector director de la recta r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son $\vec{n}_1 = (1,\ -1,\ 0)$ y $\vec{n}_2 = (2,\ 1,\ 1)$.

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -i + k + 2k - j = -i - j + 3k \Rightarrow \vec{v}_r = (1,\ 1,\ -3$$

.

La expresión general del plano π pedido es la siguiente:

$$\pi\left(A;\ \vec{v}_r,\ \vec{AB}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = x + 4z - 2x + 2(y - 1) = 0;$$

$$-x + 4z + 2y - 2 = 0 \Rightarrow \underline{\pi\equiv x - 2y - 4z + 2 = 0}.$$

b)

La expresión de s dada por unas ecuaciones paramétricas es $s\equiv\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$.

El punto del intersección del plano $z = 0$ y la recta s es la solución del sistema que forman:

$$\left.s\equiv\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \quad z = 0 \right\} \Rightarrow 0 = -1 + \lambda \Rightarrow \lambda =$$

.

****

OPCIÓN B

1º) Dada la función $f(x) = L\left(2x - x^2\right)$, se pide:

a) Determinar su dominio.

b) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

----

a)

El dominio de $f(x)$ es el conjunto de valores reales de x tal que $2x - x^2 > 0$.

$2x - x^2 = 0;\ \ x(2 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2.$

$2x - x^2 > 0,\ \forall x \in (0,\ 2)\ \Rightarrow\ \underline{D(f) \Rightarrow (0,\ 2)}.$

b)

Una función es creciente o decreciente en un punto cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente, en ese punto.

$f'(x) = \frac{2-2x}{2x-x^2} = \frac{2(1-x)}{x(2-x)}.$

Teniendo en cuenta que el dominio de la función es $(0,\ 2)$, el denominador de la primera derivada es $x(2 - x) > 0,\ \forall x \in D(f)$, por lo cual, la primera derivada será positiva y negativa cuando lo sea su numerador.

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon (0, 1)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon (1,\ 2)}.$$

****

2º) Se va a construir una caja sin tapa, a partir de una cartulina cuadrada de 60 cm de lado, recortando cuadrados iguales en las esquinas de la cartulina tal como se muestra en la figura 1, doblando después de la manera adecuada, tal como vemos en la figura 2. Calcular las medidas de la caja para que su volumen sea máximo.

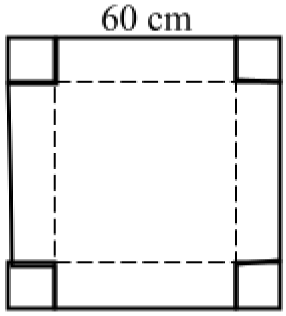


Figura 1

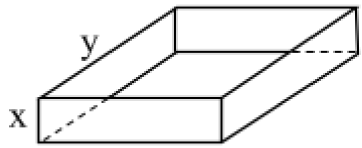


Figura 2

De la observación de la figura se deduce que: $y + 2x = 60 \rightarrow y = 60 - 2x$.

$V = y^2 \cdot x \Rightarrow V(x) = x \cdot [2(30 - x)]^2 = 4x \cdot (30 - x)^2$.

Para que el volumen sea máximo es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$V'(x) = 4 \cdot (30 - x)^2 + 4x \cdot [2 \cdot (30 - x)(-1)] =$

$= 4 \cdot (30 - x)[(30 - x - 2x)] = 4 \cdot (30 - x)(30 - 3x) = 12 \cdot (30 - x)(10 - x)$.

$V'(x) = 0 \Rightarrow 12 \cdot (30 - x)(10 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 30,\ x_2 = 10$.

La solución $x = 30$ carece de sentido por ser imposible la construcción; se trata de un mínimo. La solución lógica de máximo es para $x = 10$. Se comprueba a continuación:

$V''(x) = 12[-1 \cdot (10 - x) + (30 - x) \cdot (-1)] = -24(20 - x)$.

$V''(10) = -24(20 - 10) = -240 > 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = 10$.

$\underline{El\ volumen\ de\ la\ caja\ es\ máximo\ cortando\ 10\ cm\ de\ cada\ esquina.}$

****

3º) Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + my = 2 \\ -2x + (m+1)y + z = 0 \\ x + (2m-1)y + \end{cases}$:

a) Discutirlo en función del parámetro m.

b) Resolverlo para el caso de $m = -1$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$M = \begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ -2 & m+1 & 1 \\ 1 & 2m-1 & m+2 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 1 & m & 0 & 2 \\ -2 & m+1 & 1 & 0 \\ 1 & 2m-1 & m+2 & 6 \end{pmatrix}$.

El rango de M en función del parámetro m es el siguiente:

$|M| = \begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ -2 & m+1 & 1 \\ 1 & 2m-1 & m+2 \end{vmatrix} =$

$= (m+1)(m+2) + m - (2m-1) + 2m(m+2) =$

$= m^2 + 2m + m + 2 + m - 2m + 1 + 2m^2 + 4m = 3m^2 + 6m + 3 = 0;$

$m^2 + 2m + 1 = 0;\ (m+1)^2 = 0 \Rightarrow m = -1.$

$\underline{Para\ m \neq -1 \Rightarrow Ran\ M = Ran\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

Para $m = -1$ es $M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow Rang\ M' = 2.$

$\underline{Para\ m = -1 \Rightarrow Ran\ M = Ran\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

b)

Para $m = -1$ el sistema es $\begin{cases} x - y = 2 \\ -2x + z = 0 \\ x - 3y + z = 6 \end{cases}$: que es compatible indeterminado, según al apartado anterior; despreciando una de las ecuaciones (tercera) y parametrizando una de las variables (x), resulta:

$x = \lambda;\ y = -2 + \lambda;\ z = 2\lambda.$

$\underline{Solución: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}, \forall \lambda \in R.}$

****

4º) Sean los puntos $A(1,\ 0,\ 0)$, $B(0,\ 1,\ 0)$ y $C(0,\ 0,\ 1)$.

a) Hallar la ecuación del plano π que los contiene.

b) Determinar las coordenadas de un punto D, de forma que A, B, C y D sean los vértices de un paralelogramo.

----

a)

Los puntos A, B, y C determinan los vectores:

$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(0,\ 1,\ 0) - (1,\ 0,\ 0)] = (-1,\ 1,\ 0)$.

$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(0,\ 0,\ 1) - (1,\ 0,\ 0)] = (-1,\ 0,\ 1)$.

Considerando el punto $A(1,\ 0,\ 0)$:

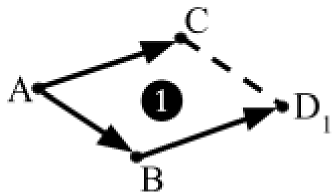
$\pi\left(A;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0;\ \ x - 1 + z + y = 0.$

$$\underline{\pi \equiv x + y + z - 1 = 0}.$$

b)

Los casos posibles son los siguientes:

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD_1} \Rightarrow$

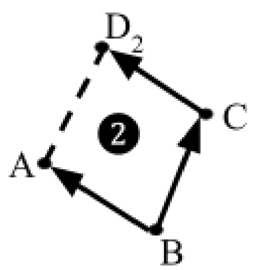


$\overrightarrow{AC} = (-1,\ 0,\ 1)$.

$\overrightarrow{BD_1} = \left[D_1 - B\right] = [(x,\ y,\ z) - (0,\ 1,\ 0)] = (x,\ y - 1,\ z)$.

$\left.\begin{array}{l} x = -1 \\ y - 1 = 0 \rightarrow y = 1 \\ z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{D_1(-1,\ 1,\ 1)}.$

$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD_2} \Rightarrow$

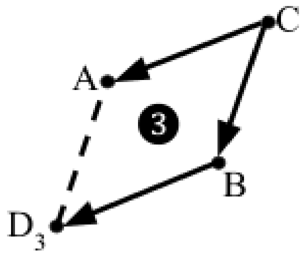


$\overrightarrow{BA} = (1,\ -1,\ 0)$.

$\overrightarrow{CD_2} = \left[D_2 - C\right] = [(x,\ y,\ z) - (0,\ 0,\ 1)] = (x,\ y,\ z - 1)$.

$x = 1 \qquad y = -1 \qquad z - 1 = 0 \rightarrow z = 1 \} \Rightarrow \underline{D_2(1, -1, 1)}.$

$\vec{CA} = \vec{BD_3} \Rightarrow$



$\vec{CA} = (1, 0, -1)$

$\vec{BD_3} = \left[D_3 - B\right] = [(x, y, z) - (0, 1, 0)] = (x, y - 1, z).$

$x = 1 \qquad y - 1 = 0 \rightarrow y = 1 \; z = -1 \qquad \} \Rightarrow \underline{D_3(1, 1, -1)}.$

****

+PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CANARIAS

JUNIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones, A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo.

OPCIÓN A

1º) Dada la función $f(x) = \{ \ x - x^2 \quad si \quad 0 \leq x \leq 1 \ (x - 1)L^2x \ si \ 1 < x \leq 2$.

a) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 1$.

b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la cura $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = \frac{3}{4}$.

----

a)

La función f(x) es continua en su dominio, [0, 2], excepto para x = 1 cuya continuidad vamos a estudiar.

Para que $f(x)$ sea continua en x = 1 es necesario que sus límites laterales sean iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$f(x) = \left(x - x^2\right) = 1 - 1 = 0 = f(1) \ f(x) = \left[(x - 1)L^2x\right] = 0 \qquad \}$$

$$\underline{f(x) = f(x) = f(0) \Rightarrow f(x) \ es \ continua \ en \ x = 1}.$$

b)

Para $x = \frac{3}{4}$ la función es $f(x) = x - x^2$.

El punto de tangencia es el siguiente:

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{9}{16} = \frac{12-9}{16} = \frac{3}{16} \Rightarrow T\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{16}\right).$$

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto:

$$f'(x) = 1 - 2x \Rightarrow m = f'\left(\frac{3}{4}\right) = 1 - 2\cdot\frac{3}{4} = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Ecuación de la recta punto-pendiente: $y - y_0 = m(x - x_0)$; la tangente es:

$$y - \frac{3}{16} = -\frac{1}{2}\cdot\left(x - \frac{3}{4}\right);;\ \ 16y - 3 = -8x + 6 \Rightarrow \underline{t \equiv 8x + 16y - 9 = 0}.$$

****

2º) Calcular las siguientes integrales: $a)\ I = \int \frac{5dx}{(6x+4)^2+2}$. $b)\ I = \int \frac{(2x-3)^2}{3\sqrt{x}}dx$.

$a)$

$$I = \int \frac{5dx}{(6x+4)^2+2} = \frac{5}{2}\cdot\int \frac{dx}{\frac{(6x+4)^2}{2}+1} = \frac{5}{2}\cdot\int \frac{dx}{\left(\frac{6x+4}{\sqrt{2}}\right)^2+1} \Rightarrow \left\{\frac{6x+4}{\sqrt{2}} = t \quad \frac{6}{\sqrt{2}}\cdot dx = dt\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2}\cdot\int \frac{\frac{\sqrt{2}}{6}dt}{t^2+1} = \frac{5\sqrt{2}}{12}\cdot\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{5\sqrt{2}}{12}\cdot arc\ tg\ t + C.$$

$$\underline{I = \int \frac{5dx}{(6x+4)^2+2} = \frac{5\sqrt{2}}{12}\cdot arc\ tg\ \frac{6x+4}{\sqrt{2}} + C.}$$

$b)$

$$I = \int \frac{(2x-3)^2}{3\sqrt{x}}dx = \int \frac{4x^2-12x+9}{3\sqrt{x}}dx = \frac{4}{3}\cdot\int \frac{x^2}{\sqrt{x}}\cdot dx - 4\cdot\int \frac{x}{\sqrt{x}}\cdot dx + 3\cdot\int \frac{dx}{\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\int x^{\frac{3}{2}}\cdot dx - 4\cdot\int x^{\frac{1}{2}}\cdot dx + 3\cdot\int x^{-\frac{1}{2}}\cdot dx =$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - 4\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 3\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{4}{3}\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 4\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 3\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= \frac{8}{15}\cdot x^2\sqrt{x} - \frac{8}{3}\cdot x\sqrt{x} + 6\sqrt{x} + C.$$

$$\underline{I = \int \frac{(2x-3)^2}{3\sqrt{x}}dx = \frac{2\sqrt{x}}{15}\cdot\left(4x^2 - 20x + 45\right) + C.}$$

****

3º) Resolver el siguiente sistema matricial: $\{2P + Q = (1\ 4\ -1\ 2\ 0\ 1\ 0\ 4\ -2\ )\ P - Q = (2\ -1\ -5\ 1\ 9\ 2\ 0\ -1\ -1\ )$
.

$2P + Q = (1\ 4\ -1\ 2\ 0\ 1\ 0\ 4\ -2\ )\ P - Q = (2\ -1\ -5\ 1\ 9\ 2\ 0\ -1\ -1\ )\}$
.

$2P + Q = (1\ 4\ -1\ 2\ 0\ 1\ 0\ 4\ -2\ )\ -2P + 2Q = (-\ 4\ 2\ 10\ -2\ -18\ -4\ 0\ 2\ 2\ )$

$\Rightarrow \underline{Q = (-\ 1\ 2\ 3\ 0\ -6\ -1\ 0\ 2\ 0\ )}$.

****

4º) Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y + mz - 3 = 0$, se pide:

a) Determinar el valor del parámetro m para que la recta y el plano sean secantes.

b) Determinar el valor del parámetro m para que la recta y el plano sean paralelos.

c) ¿Cuál es la posición relativa de la recta r del enunciado y un plano α de ecuación $\alpha \equiv 2x + y + z - \frac{5}{3} = 0$?

----

a)

Un vector director de la recta r dada por la intersección de dos planos es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan:

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2i + j - 2k - k + 2i + 2j = 3j - 3k = (0,\ 3,\ -3) \Rightarrow \vec{v}_r = (0,\ 1,\ -1)$$

.

Un vector normal del plano $\pi \equiv 2x + y + mz - 3 = 0$ es $\vec{n} = (2,\ 1,\ m)$.

Como quiera que el vector director de la recta y el vector normal del plano son linealmente independientes (no son paralelos), la única condición que deben reunir para que la recta y el plano sean secantes es que su producto escalar no sea cero (en cuyo caso serían perpendiculares y la recta y el plano serían paralelos).

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = (0,\ 1,\ -1) \cdot (2,\ 1,\ m) = 0 + 1 - m = 1 - m \neq 0.$$

$$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ secantes\ cuando\ m \neq 1}.$$

b)

La recta r y el plano π son paralelos cuando el vector director de la recta y el vector normal del plano son perpendiculares, o sea, cuando su producto escalar es cero:

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (0,\ 1,\ -1) \cdot (2,\ 1,\ m) = 0 + 1 - m = 1 - m = 0.$$

$$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ paralelos\ cuando\ m = 1}.$$

c)

La recta r y el plano π determinan el sistema $x + y + z = 1 \;\; x - 2y - 2z = 0 \; 6x + 3y + 3z = 5 \}$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$M = (1\,1\,1\,1 \;\; -\; 2 \;\; -\; 2\,6\,3\,3\,)$ y $M^{'} = (1\,1\,1\,1 \;\; -\; 2 \;\; -\; 2\,6\,3\,3 \quad 1\,0\,5\,)$.

Según sean los rangos de M y M’ pueden presentarse los siguientes casos:

1. -- Rango M = Rango M’ = 2 ⇛ La recta está contenida en el plano.

2. -- Rango M =2, Rango M’ = 3 ⇛ La recta es paralela al plano.

3. -- Rango M = Rango M’ = 3 ⇛ La recta es secante al plano.

Rango de M ⇒ $|1\,1\,1\,1 \;\; -\; 2 \;\; -\; 2\,6\,3\,3\,| \Rightarrow \left\{C_2 = C_3\right\} \Rightarrow Rango\ M = 2.$

$Rang\ M^{'} \Rightarrow \left\{C_1,\ C_2,\ C_4\right\} \Rightarrow |1\,1\,1\,1 \;\; -\; 2\,0\,6\,3\,5\,| = -\,10 + 3 + 12 - 5 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow Rang\ M' = 2.$

$\underline{La\ recta\ r\ está\ contenida\ en\ el\ plano}$ π.

****

OPCIÓN B

1º) Determinar el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los intervalos de concavidad y convexidad, las asíntotas, los puntos de corte con los ejes, los extremos y los puntos de inflexión de la función $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x}$.

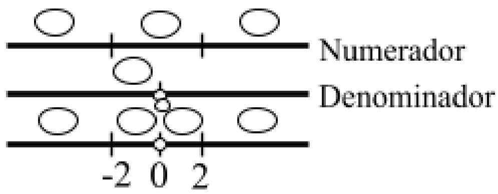
Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto los valores de x que anulan el denominador: $\underline{D(f) \Rightarrow R - \{0\}}$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{[2\cdot(x-2)\cdot 1]\cdot x-(x-2)^2\cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2-4x-(x^2-4x+4)}{x^2} = \frac{2x^2-4x-x^2+4x-4}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2-4}{x^2} = 0;\ x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 2.$$

De la observación de la figura se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:



$$\underline{Crecimiento:\ (-\infty,\ -2) \cup (2,\ +\infty)}.$$

$$\underline{Decrecimiento:\ (-2,\ 0) \cup (0,\ 2)}.$$

Una función es cóncava (∩) o convexa (∪) cuando su segunda derivada es negativa o positiva, respectivamente.

$$f''(x) = \frac{2x\cdot x^2-(x^2-4)\cdot 2x}{x^4} = \frac{2x^2-2x^2+4}{x^3} = \frac{4}{x^3}.$$

$$\underline{Concavidad\ (\cap):\ f''(x) < 0 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow (-\infty,\ 0)}.$$

$$\underline{Convexidad\ (\cup):\ f''(x) > 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow (0,\ +\infty)}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma y = k y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = f(x) = \frac{(x-2)^2}{x} = \infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$x = 0 \Rightarrow \underline{La\ recta\ x = 0\ (eje\ Y)\ es\ asíntota\ vertical}.$

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{(x-2)^2}{x}}{x} = \frac{x^2-4x+4}{x^2} = 1.$$

$$n = \left[\frac{f(x)}{x} - mx\right] = \left(\frac{(x-2)^2}{x} - x\right) = \frac{x^2-4x+4-x^2}{x} = -4.$$

$$\underline{La\ recta\ y = x - 4\ es\ asíntota\ oblicua}.$$

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

Eje Y$\Rightarrow x = 0 \rightarrow x \notin D(f)$. Eje X $\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{x} = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = 2 \Rightarrow A(2,\ 0)$.

$$\underline{El\ \text{único}\ punto\ de\ corte\ con\ los\ ejes\ de\ f(x)\ es\ A(2,\ 0)}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto. Esta condición necesaria no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; se es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2-4}{x^2} = 0 \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 2.$$

$$f''(-2) = \frac{4}{(-2)^3} < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -2.$$

$$f(-2) = \frac{(-2-2)^2}{-2} = -8 \Rightarrow \underline{Máximo: P(-2,\ -8)}.$$

$$f''(2) = \frac{4}{2^3} > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 2.$$

$$f(2) = \frac{(2-2)^2}{2} = 0 \Rightarrow \underline{Mínimo: Q(2,\ 0)}.$$

Para que una función tenga un punto de inflexión es condición necesaria que se anule su segunda derivada:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{4}{x^3} = 0 \Rightarrow x \notin R \ \Rightarrow \ \underline{No\ tiene\ puntos\ de\ inflexión}.$$

****

2º) a) Dibujar las gráficas aproximadas de $f(x) = x^2 + 4x + 5$ y $g(x) = 5$, señalando los puntos de corte entre ambas curvas.

b) Calcular el área encerrada entre las gráficas de las dos funciones del apartado a).

----

a)

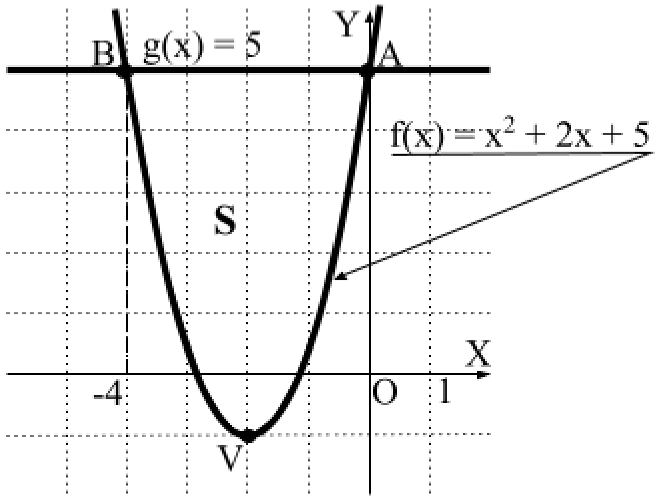
Los puntos de intersección de la parábola con la recta son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$x^2 + 4x + 5 = 5\,;\ x^2 + 4x = 0\,;\ x(x + 4) = 0 \Rightarrow \{x_1 = 0 \rightarrow \underline{A(0, 5)} \qquad x_2 = - 4-$

.

El vértice de la parábola convexa (∪) → $f(x) = x^2 + 4x + 5$ es el siguiente:

$f'(x) = 2x + 4 = 0 \rightarrow x = - 2 \Rightarrow V(- 2,\ - 1).$



La representación gráfica de la situación se expresa en la figura adjunta.

b)

Por ser las ordenadas de la recta $g(x) = 5$ iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola $f(x) = x^2 + 4x + 5$ en el intervalo del área a calcular y de la observación de la figura se deduce que:

$$S = \int_{-4}^{0} \left[5 - \left(x^2 + 4x + 5\right)\right] dx = \int_{-4}^{5} \left(- x^2 - 4x\right)\cdot dx = \left[- \frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2}\right]_{-1}^{2} =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + 2x^2\right]_{0}^{-4} = \frac{(-4)^3}{3} + 2\cdot(- 4)^2 - 0 = - \frac{64}{3} + 32 = \frac{-64+96}{3} = \frac{32}{3}.$$

$$\underline{S = \frac{32}{3} u^2.}$$

****

3º) Dada la matriz $A = \left(1\ 0\ 1\ 0\ m\ 0\ 2\ 1\ m^2 - 1\right)$:

$a)$ Estudiar el rango de la matriz A según los diferentes valores del parámetro m.

$b)$ Calcular la matriz inversa A^{-1} para m = 1.

$a)$

$|A| = \left|1\ 0\ 1\ 0\ m\ 0\ 2\ 1\ m^2 - 1\right| = m\left(x^2 - 1\right) - 2m = m\left(x^2 - 1 - 2\right) =$

$m\left(x^2 - 3\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_1 = -\sqrt{3},\ x_3 = \sqrt{3}.$

$$\underline{Rang\ A = 3,\ \forall m \in R - \left\{-\sqrt{3},\ 0,\ \sqrt{3}\right\}}.$$

$Para\ m = 0\ es\ A = (1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 2\ 1\ \ -1\ ) \Rightarrow Rang\ A = 2.$

$Para\ m = -\sqrt{3}\ es\ A = \left(1\ 0\ 1\ 0\ \ -\sqrt{3}\ 0\ 2\ 1\ 2\ \right) \Rightarrow Rang\ A = 2.$

$Para\ m = \sqrt{3}\ es\ A = \left(1\ 0\ 1\ 0\ \sqrt{3}\ 0\ 2\ 1\ 2\ \right) \Rightarrow Rang\ A = 2.$

$$\underline{Para\ m = -\sqrt{3},\ m = 0,\ m = \sqrt{3} \Rightarrow Rang\ A = 2}.$$

$b)$

Para m = e es $A = (1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 2\ 1\ 0\ ).$

Se obtiene la inversa de A por el procedimiento de Gauss-Jordan:

$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ \ -2\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_3 \rightarrow F_3 - F_2\right\} \Rightarrow (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ \ -2\ \ -1\ 1\ ) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{F_3 \rightarrow -\frac{1}{2}F_3\right\} \Rightarrow \left(1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ \frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\ \right) \Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow F_1 - F_3\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(0\ \ -\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 0\ 1\ 0\ 1\ \frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\ \right) \Rightarrow \underline{A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot (0\ \ -1\ 1\ 0\ 2\ 0\ 2\ 1\ \ -1\ )}.$

****

4º) Dadas las rectas $r_1 \equiv x - 1 = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{2}$ y $r_2 \equiv \frac{x+5}{4} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+4}{3}$, se pide:

a) Demostrar que se encuentran en un mismo plano.

b) Hallar la ecuación del plano que determinan.

----

a)

Un punto y un vector de cada una de las rectas son los siguientes:

Recta r: $A(1,\ 1,\ -2)\ y\ \vec{v_r} = (1,\ -1,\ 2)$. Recta s: $B(-5,\ 3,\ -4)\ y\ \vec{v_s} = (4,\ -2,\ 3)$.

Los vectores $\vec{v_r}$ y $\vec{v_s}$ son linealmente independiente por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\vec{w} = \vec{AB} = [B - A] = [(-5,\ 3,\ -4) - (1,\ 1,\ -2)] = (-6,\ 2,\ -2)$.

Según que los vectores $\{\vec{v_r},\ \vec{v_s},\ \vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\vec{v_r},\ \vec{v_s},\ \vec{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\{\vec{v_r},\ \vec{v_s},\ \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \\ -6 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 16 + 18 - 24 - 6 - 8 =$$

$$\Rightarrow Rang\{\vec{v_r},\ \vec{v_s},\ \vec{w}\} = 2 \Rightarrow \vec{v_r},\ \vec{v_s},\ \vec{w}\ son\ coplanarios.$$

$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ están\ en\ un\ mismo\ plano,\ como\ se\ debía\ demostrar}$.

b)

La expresión general del plano π que contiene a las rectas r y s es el siguiente:

$$\pi(A;\ \vec{v_r},\ \vec{v_s}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-3(x-1) + 8(y-1) - 2(z+2) + 4(z+2) + 4(x-1) - 3(y-1) = 0;$$

$$(x - 1) + 5(y - 1) + 2(z + 2) = 0; \;\; x - 1 + 5y - 5 + 2z + 4 = 0.$$

$$\underline{\pi \equiv x + 5y + 2z - 2 = 0}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

JUNIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

1.- Debe escogerse una sola de las opciones
2.- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
3.- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.
4.- Los dispositivos que puedan conectarse a internet, o que pueden recibir o emitir información, deben estar apagados durante la celebración del examen.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

1º) Sea A una matriz de la forma $A = (- x + 1 \ - 1 \, x \, x + 1)$, con $x \in R$. Sea $I = (1 \ 0 \ 0 \ 1)$ la matriz identidad.

a) Calcule los valores de x para los cuales se verifica la igualdad: $A \cdot (A - I) = A - I$.

b) Calcule los valores de x para los cuales A tiene inversa. Calcule la inversa de la matriz A cuando x = 2.

----

a)

$$A - I = (- x + 1 \ - 1 \, x \, x + 1) - (1 \ 0 \ 0 \ 1) = (- x \ - 1 \, x \, x).$$

$$A \cdot (A - I) = A - I \Rightarrow (- x + 1 \ - 1 \, x \, x + 1) \cdot (- x \ - 1 \, x \, x) = (- x \ - 1 \, x \, x);$$

$$\left(x^2 - x - x \, x - 1 - x \ - x^2 + x^2 + x \ - x + x^2 + x\right) = (- x \ - 1 \, x \, x); \ \left(x^2 - 2x\right.$$

$$\Rightarrow \left\{x^2 - 2x = - x \qquad x^2 = x\right\} \Rightarrow \underline{x_1 = 0, \ x_2 = 1}.$$

b)

Una función tiene inversa cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = |- x + 1 \ - 1 \, x \, x + 1 | = (- x + 1)(x + 1) + x = 1 - x^2 + x = 0;$$

$x^2 - x - 1 = 0;\ \ x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

$$\underline{A\ es\ invertible\ \forall x \in R - \left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}}.$$

Para x = 2 es $A = (-\ 1\ \ -\ 1\ 2\ 3\ )$.

Se obtiene la inversa de A mediante el método de Gauss-Jordan.

$(I) = (1\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{ F_1 \rightarrow -\ F_1 \right\} \Rightarrow (-\ 1\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{ F_2 \rightarrow F_2 -\ 2F_1 \right\} \Rightarrow (-\ 1\ 0\ 2\ 1\ ) \Rightarrow \left\{ F_1 \rightarrow F_1 - F_2 \right\} \Rightarrow (-\ 3\ \ -\ 1\ 2\ 1\ ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{A^{-1} = (-\ 3\ \ -\ 1\ 2\ 1\ )}.$$

****

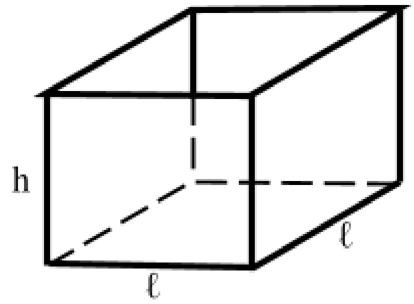
2º) Se quiere construir un depósito (sin techo) con forma de prisma recto de base cuadrada y los lados rectángulos. El depósito debe albergar un volumen de 2.000 m^3. Sabemos que el coste de materiales de la base es de 50 euros/m^2, el coste de materiales de las cuatro paredes es de 100 euros/m^2. Además, el coste de construcción es un coste fijo de 20.000 euros.

a) Escriba la función $C(l)$ de coste total en función del lado de la base ℓ.

b) ¿Para qué valor de ℓ es el coste total mínimo? ¿Cuánto es este coste?

c) ¿Qué ocurre con el coste cuando el lado ℓ de la base del depósito tiende a infinito? ¿Y cuándo tiende a cero?

d) Usando solo los datos obtenidos de los apartados anteriores, haga un esbozo de la gráfica de la curva $C(l)$ en el dominio $l \in (0,\ \infty)$.



a)

$$V = l^2 \cdot h = 2.000 \Rightarrow h = \frac{2.000}{l^2}. \qquad (*)$$

$$C = 50 \cdot l^2 + 100 \cdot 4 \cdot l \cdot h + 20.000 =$$

$$= 50l^2 + 400 \cdot l \cdot h + 20.000.$$

Sustituyendo el valor de h obtenido en (*):

$$C(l) = 50l^2 + 400 \cdot l \cdot \frac{13,5}{l^2} + 20.000 = 50l^2 + \frac{400 \cdot 2.000}{l} + 20.000 =$$

$$= \frac{50l^3 + 20.000l + 800.000}{l}.$$

$$\underline{C(l) = \frac{50l^3 + 20.000l + 800.000}{l}}.$$

b)

Para que el coste total sea mínimo es condición necesaria que su primera derivada sea cero:

$$C'(l) = \frac{(150l^2 + 20.000) \cdot l - (50l^3 + 20.000l + 800.000) \cdot 1}{l^2} =$$

$$= \frac{150l^3 + 20.000l - 50l^3 - 20.000l - 800.000}{l^2} = \frac{100l^3 - 800.000}{l^2}.$$

$$C'(l) = 0 \Rightarrow \frac{100l^3-800.000}{l^2} = 0;\ \ 100l^3 - 800.000 = 0;\ \ l^3 - 8.000 = 0;$$

$l^3 = 8.000 = 20^3 \Rightarrow l = 20.$

$$\underline{El\ coste\ total\ es\ mínimo\ para\ l = 20\ m}.$$

Justificación de que se trata de un mínimo:

Una función tiene un mínimo relativo cuando su segunda derivada es positiva para los valores que anulan su primera derivada:

$$C''(l) = \frac{300l^2 \cdot l^2-(100l^3-800.000)\cdot 2l}{l^4} = 100\cdot\frac{3l^3-2(l^3-8.000)}{l^3} = 100\cdot\frac{2l^3+16.000}{l^3}.$$

$$C''(20) = 100\cdot\frac{2\cdot 20^3+16.000}{20^3} > 0 \Rightarrow Mínimo,\ como\ se\ quería\ justicar.$$

$$C(20) = \frac{50\cdot 20^3+20.000\cdot 20+800.000}{20} = 50\cdot 400 + 40.000 + 20.000 = 80.000$$

.

$$\underline{El\ coste\ mínimo\ es\ de\ 80.000\ euros}.$$

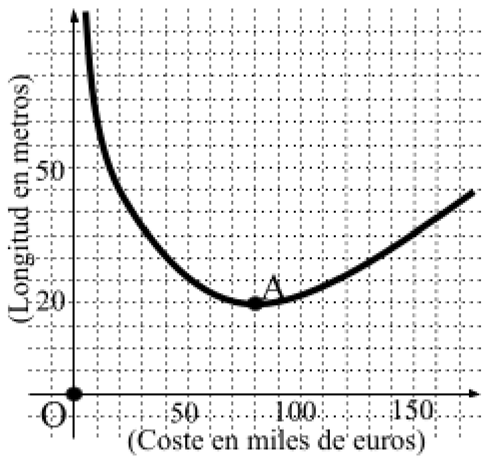
$c)$

$$C(l) = \lim_{l\to\infty} \frac{50l^3+20.000l+800.000}{l} = \underline{\infty}.$$

$$C(l) = \lim_{l\to 0} \frac{50l^3+20.000l+800.000}{l} = \underline{\infty}.$$

$d)$

Teniendo en cuenta que $C(20) = 80.000$ y los valores de los límites hallados en el apartado anterior, la representación aproximada del coste total es la que se indica en la siguiente figura.



****

3º) Sea el plano $\pi \equiv x - y + z = 0$. Sea la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2}$.

a) Describa la posición relativa de π y r.

b) Calcule el ángulo formado por π y r (si no posee calculadora, puede dejar indicado el resultado final).

c) De un ejemplo de una recta que corte a r, una recta que sea paralela y distinta de r y una recta que se cruce con r. Al menos una de esas rectas debe darse mediante unas ecuaciones implícitas (generales).

----

a)

La expresión de r por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} -x + 1 = 2y \\ 2y = -z - 1 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x + 2y = -1 \\ 2y + z = -1 \end{cases}.$$

La recta r y el plano π determinan el sistema $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 2y + z = -1 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de M y M' pueden presentarse los siguientes casos:

1. -- Rango M = Rango M' = 2 ⇒ La recta está contenida en el plano.

2. -- Rango M = 2, Rango M' = 3 ⇒ La recta es paralela al plano.

3. -- Rango M = Rango M' = 3 ⇒ La recta es secante al plano.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 2 + 1 = 5 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3.$$

$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ secantes.}$

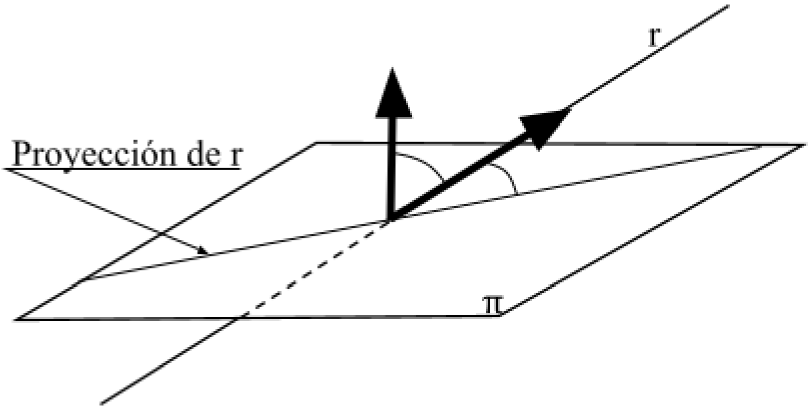
b)

Un vector director de r es $\vec{v_r} = (2, -1, 2)$.

Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (1, -1, 1)$.

Por definición de producto escalar: $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v_r} = \left|\overrightarrow{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v_r}\right|\cdot \cos cos\, \beta$.

$\cos cos\, \beta = \frac{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v_r}}{\left|\overrightarrow{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v_r}\right|}$. Por ser α y β complementarios: $sen\, \alpha = \frac{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v_r}}{\left|\overrightarrow{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v_r}\right|}$.



$$sen\, \alpha = \frac{(2, -1, 2)\cdot(1, -1, 1)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{2+1+2}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{1+1+1}} = \frac{5}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{27}} = 0,9623 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 74°\, 12'\, 25''.$$

$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ forman\ un\ ángulo\ de\ 74°\, 12'\, 25''}$.

$c)$

Ejemplo de recta t que corte a r:

Un punto y un vector director de r son $P(1,\ 0,\ -1)$ y $\overrightarrow{v_r} = (2,\ -1,\ 2)$.

Basta determinar una recta que pase por P con un vector director linealmente independiente del vector director de la recta, por ejemplo, $\overrightarrow{v_t} = (1,\ 2,\ 3)$.

$$t\equiv\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{3} \Rightarrow t\equiv\{2x - 2 = y\ \ 3y = 2z + 2 \ \ \Rightarrow\ \ \underline{t\equiv\{2x - y - 2 = 0\ \ 3y -}$$
.

Ejemplo de recta s paralela a r y distinta de r:

Basta determinar una recta que pase por un punto Q que no pertenezca a r con un vector director linealmente dependiente del vector director de la recta.

Un punto que no pertenece a r es $Q(1,\ 1,\ 1)$ y $\overrightarrow{v_s} = (2,\ -1,\ 2)$.

$s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2} \Rightarrow s \equiv \{ -x + 1 = 2y - 2\ x - 1 = z - 1 \quad \Rightarrow \underline{s \equiv \{ x + 2y - 3}$
.

Ejemplo de recta k que se cruce con r:

Una forma de obtener la recta k es que pase por un punto que no pertenezca a r y que su vector director sea normal al vector director de r, p. e.: $\vec{v}_k = (1,\ 0,\ -1)$.

$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_k = 0 \Rightarrow (2,\ -1,\ 2) \cdot (1,\ 0,\ -1) = 2 - 0 - 2 = 0.$

Un punto que no pertenece a r es $Q(1,\ 1,\ 1)$.

$k \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow k \equiv \{ 0 = y - 1 \quad -x + 1 = z - 1 \Rightarrow \underline{k \equiv \{ y - 1 = 0}$
.

****

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

1º) Considere el sistema de ecuaciones: $\left(2\ 0\ 1\ 0\ t\ 3\ 2\ t^2 - 3t + 2\ \ 0\ 0\ \ 2\ 2\ \right)\cdot\left(x\ y\ z\right) = \left(2\ 3\ 3\ 3\ \right)$, siendo $t \in R$. Estudie la compatibilidad del sistema, dependiendo del parámetro t, y calcule todas las soluciones en los casos en los que sea compatible.

El rango de la matriz ampliada en función de t es el siguiente:

$$|M'| = \left|2\ 0\ 1\ 0\ t\ 3\ 2\ t^2 - 3t + 2\ \ 0\ 0\ \ 2\ 2\ \ \ \ 2\ 3\ 3\ 3\ \right| = t\cdot\left|2\ 1\ 2\ 2\ 2\ 3\ t^2 - 3t + 2\ 2\ 3\right| =$$

$$= t\cdot\left[12 + 8 + 3\left(t^2 - 3t + 2\right) - 4\left(t^2 - 3t + 2\right) - 12 - 6\right] =$$

$$= t\cdot\left(2 - t^2 + 3t - 2\right) = t^2(3 - t) = 0 \Rightarrow t_1 = t_2 = 0,\ t_3 = 3.$$

$$\underline{Para\ \{t \neq 0\ t \neq 3\ \} \Rightarrow Rang\ M < 4;\ Rang\ M' = 4 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$Para\ t = 0\ es\ M' = \left(2\ 0\ 1\ 0\ 0\ 3\ 2\ 2\ \ 0\ 0\ \ 2\ 2\ \ \ \ 2\ 3\ 3\ 3\ \right)$, que a efector de rango es equivalente a $M'' = \left(2\ 1\ 2\ 0\ 3\ 3\ 2\ 2\ 3\ \right) \Rightarrow |M''| = |2\ 1\ 2\ 0\ 3\ 3\ 2\ 2\ 3\ | = 18 + 6 - 12 - 12 = 0$.

$$Para\ t = 0 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{Para\ t = 0 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$$

$Para\ t = 3\ es\ M' = \left(2\ 0\ 1\ 0\ 3\ 3\ 2\ 2\ \ 0\ 0\ \ 2\ 2\ \ \ \ 2\ 3\ 3\ 3\ \right)$, equivalente a efectos de rango a la matriz $M''' = \left(2\ 0\ 1\ 0\ 3\ 3\ 2\ 0\ 2\ \ \ \ 2\ 3\ 3\ \right) \Rightarrow \left\{C_1,\ C_2,\ C_3\right\} \Rightarrow |2\ 0\ 1\ 0\ 3\ 3\ 2\ 0\ 2\ | = 12 - 6 = 6 \neq 0$.

$$Para\ t = 3 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Para\ t = 3 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$$

Para t = 0 el sistema resulta: $\{2x + z = 2\ \ 3z = 3\ \ \ \ 2x + 2z = 3$, que es compatible indeterminado.

$\underline{Soluciones: x = \frac{1}{2},\ y = \lambda,\ z = 1,\ \forall\lambda \in R.}$

Para t = 3 el sistema resulta: $\{2x + z = 2\ \ 3y + 3z = 3\ 2x + 2z = 3$, equivalente a $\{2x + z = 2\ \ y + z = 1\ \ \ 2x + 2z = 3$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|2\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 3\ 0\ 2\ |}{|2\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 2\ 0\ 2\ |} = \frac{|2\ 1\ 3\ 2\ |}{|2\ 1\ 2\ 2\ |} = \frac{4-3}{4-2} = \frac{1}{2}.$$

$$y = \frac{|2\ 2\ 1\ 0\ 1\ 1\ 2\ 3\ 2\ |}{2} = \frac{4+4-2-6}{2} = \frac{8-8}{2} = 0.$$

$$z = \frac{|2\ 0\ 2\ 1\ 1\ 1\ 2\ 0\ 3\ |}{2} = \frac{|2\ 2\ 2\ 3\ |}{2} = \frac{6-4}{2} = 1.$$

$\underline{Para\ t = 3\ las\ soluciones\ del\ sistema\ son: x = \frac{1}{2},\ y = 0,\ z = 1.}$

****

2º) Sea $f(x) = L\left(x^2 + 3x + 2\right)$.

$a)$ Calcule el dominio de f, los cortes con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos y sus asíntotas.

$b)$ Haga un esbozo de la gráfica de f.

$a)$

El dominio de la función $f(x)$ es el conjunto de valores reales de x que hacen que $x^2 + 3x + 2 > 0$.

$$x^2 + 3x + 2 = 0;\ \ x = \frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3\pm1}{2} \Rightarrow x_1 =- 2,\ x_2 =- 1.$$

Los valores hallados dividen la recta real en los tres siguientes intervalos: $(-\infty,\ -2)$, $(-2,\ -1)$ y $(-1,\ +\infty)$, en los cuales la expresión $x^2 + 3x + 2$ toma valores, alternativamente, positivos y negativos.

Considerando que para $x = 0\in(-1,\ +\infty)$ el valor de $x^2 + 3x + 2$ es $2 > 0$, el dominio de la función $f(x)$ es el siguiente:

$$\underline{D(f) \Rightarrow (-\infty,\ -2) \cup (-1,\ +\infty)}.$$

Los cortes con los ejes son los siguientes:

Eje X: Tiene que ser $L1 = 0$: $x^2 + 3x + 2 = 1;\ \ x^2 + 3x + 1 = 0;\ \ x = \frac{-3\pm\sqrt{9-4}}{2} =$

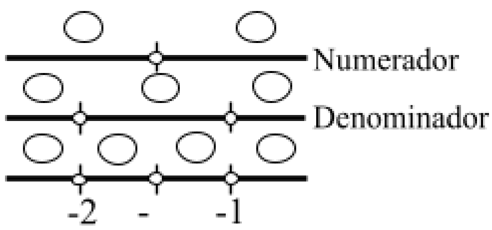
$= \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \underline{A\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2},\ 0\right) y\ B\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2},\ 0\right)}$, aproximando: $\underline{A(-2'62,\ 0)\ y\ B(-0'38,\ 0)}$.

Eje Y: $x = 0 \Rightarrow \underline{C(0,\ L2)}$, aproximando: $\underline{C(0,\ 0'69)}$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x+3}{x^2+3x+2} = 0;$$



$2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$.

Para deducir los periodos de crecimiento y decrecimiento se hace el gráfico adjunto.

Teniendo en cuenta el dominio de la función, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Decrecimiento\text{: } f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2)}.$$

$$\underline{Crecimiento\text{: } f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-1, +\infty)}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativos es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto.

La función $f(x) = L\left(x^2 + 3x + 2\right)$ no tiene máximos ni mínimos relativos por no pertenecer al dominio de la función el valor de x que anula su primera derivada.

Asíntotas horizontales: son de la forma y = k y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = f(x) = \left[L\left(x^2 + 3x + 2\right)\right] = L\left(x^2 + 3x + 2\right) = \quad +\infty.$$

$$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito.

Teniendo en cuenta que $L0 = -\infty$, son asíntotas verticales los valores que anulan la expresión $x^2 + 3x + 2$.

$$\underline{Las\ rectas\ x = -2\ y\ x = -1\ son\ asíntotas\ verticales}.$$

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, $\{m \neq 0,\ m \neq \infty\}$ siendo:

$$m = \frac{f(x)}{x} \text{ y } n = \left[\frac{f(x)}{x} - mx\right].$$

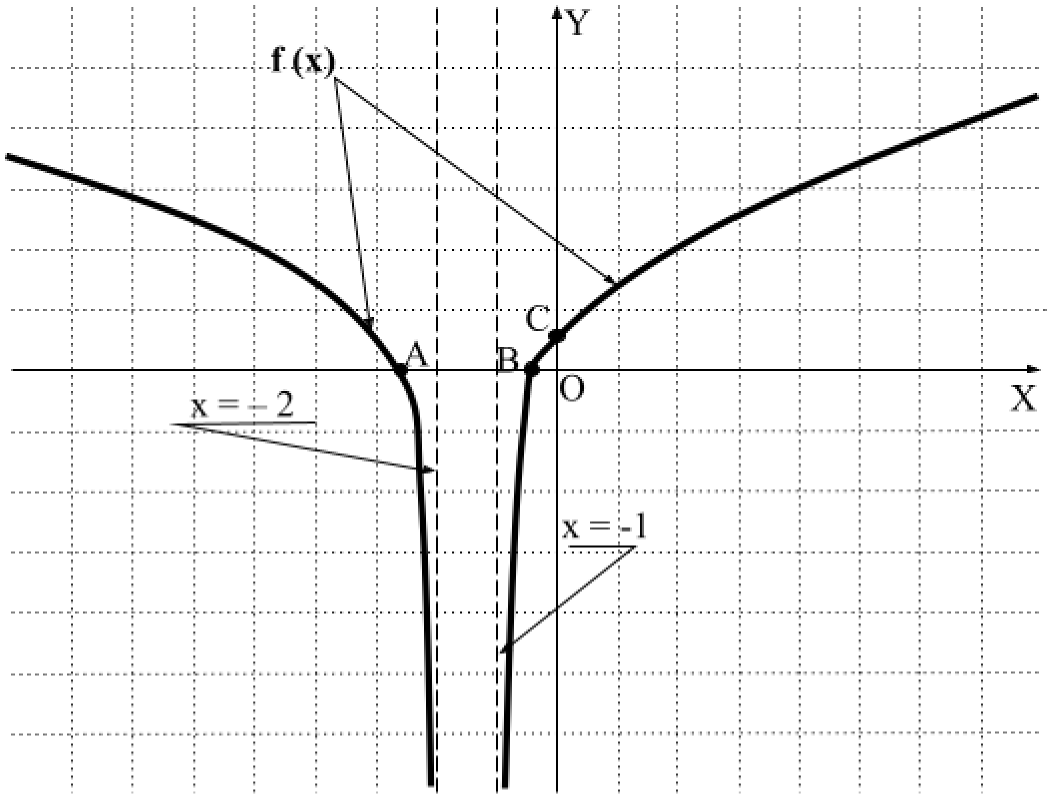
$$m = \frac{f(x)}{x} = \frac{L\left(x^2+3x+2\right)}{x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{2x+3}{x^2+3x+2}}{1} = \frac{2x+3}{x^2+3x+2} = 0 \; .$$

$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ oblicuas.}$

$b)$

Con los datos obtenidos puede esbozarse la gráfica de $f(x)$, que es la que se expresa en el gráfico siguiente.



****

3º) Sea el plano $\pi \equiv (0,\ 0,\ 1) + t(1,\ 2,\ 0) + s(0,\ 1,\ 1)$ y sea el punto $U(2,\ 0,\ 1)$.

a) Calcule el punto V del plano π más próximo a U.

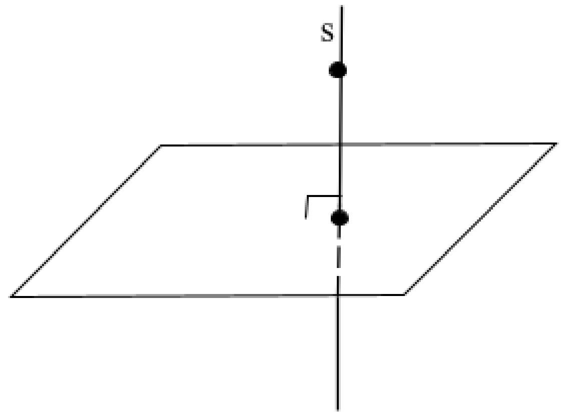
b) Calcule la distancia de U a π.

c) Calcule las ecuaciones implícitas (generales) de una recta r paralela al plano π que pase por el punto U.

----

a)

Un vector normal del plano π es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de sus dos vectores directores: $\overrightarrow{v_1} = (1,\ 2,\ 0)$ y $\overrightarrow{v_2} = (0,\ 1,\ 1)$.



$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2i + k - j \Rightarrow \overrightarrow{n} = (2,\ -1,\ 1).$$

Un vector director de la recta s, perpendicular al plano, y que pasa por el punto $U(2,\ 0,\ 1)$, es el propio vector normal del plano: $\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{n} = (2,\ -1,\ 1)$.

La expresión de s dada por unas ecuaciones paramétricas es: $s \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$.

La expresión del plano π dada por su ecuación implícita o general es la siguiente:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;\ \ 2x + (z-1) - y = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x - y + z - 1 = 0$$
.

El punto V es la intersección de la recta s con el plano π:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 2x - y + z - 1 = 0 \\ s \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 2(2$$

$$4 + 4\lambda + \lambda + 1 + \lambda - 1 = 0;\ \ 6\lambda + 4 = 0;\ \ 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{3}.$$

$$V \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \\ y = -\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \\ z = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{cases}$$
.

b)

La distancia del punto U al plano π es la misma que la distancia entre los puntos $U(2,\ 0,\ 1)$ y $V\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$:

$$d(U,\ \pi) = \overline{UV} = \sqrt{\left(2-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(0-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{24}}{3} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\underline{d(U,\ \pi) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\ unidades.}$$

$c)$

Existen infinitas rectas que pasando por el punto $U(2,\ 0,\ 1)$ son paralelas al plano $\pi \equiv 2x + y + z - 1 = 0$, que son todas las infinitas rectas que estuvieran contenidas en un plano paralelo a π que pasara por el punto U.

Se trata de buscar un vector director de la recta r, $\vec{v}_r$, perpendicular al vector normal del plano $\vec{n} = (2,\ -1,\ 1)$.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero, por lo tanto, tiene que cumplirse que $\vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0$.

Por ejemplo: $\vec{v}_r = (3,\ 4,\ -2)$. Una expresión de r es: $r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{-2}$.

Expresada por ecuaciones implícitas es:

$$r \equiv \begin{cases} 4x - 8 = 3y \\ -2x + 4 = 3z - 3 \end{cases} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} 4x - 3y - 8 = 0 \\ 2x + 3z - 7 = 0 \end{cases}}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

SEPTIEMBRE – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

1.- Debe escogerse una sola de las opciones
2.- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
3.- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

1º) Sean las matrices $A = (1\ a\ b\ c\ 1\ b\ \ -1\ c\ a)$, $B = (2\ 1\ 5\ )\ y\ C = (13\ 5\ 0\ )$, con $a,\ b\ y\ c$ números naturales.

$a)$ Calcule los valores de $a,\ b\ y\ c$ para que $AB = C$.

$b)$ Calcule la inversa de A cuando $a = 0,\ b = 1,\ c =- 1$.

$a)$

$A{\cdot}B = C \Rightarrow (1\ a\ b\ c\ 1\ b\ \ -1\ c\ a\ ){\cdot}(2\ 1\ 5\ ) = (13\ 5\ 0\ );\ \ (2 + a + 5b\ 2c + 1 + 5b$

$a + 5b = 11\ 5b + 2c = 4\ \ 5a + c = 2\ \}$. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$a = \frac{|11\ 5\ 0\ 4\ 5\ 2\ 2\ 0\ 1\ |}{|1\ 5\ 0\ 0\ 5\ 2\ 5\ 0\ 1\ |} = \frac{55+20-20}{5+50} = \frac{55}{55} = 1.$$

$$b = \frac{|1\ 11\ 0\ 0\ 4\ 2\ 5\ 2\ 1\ |}{55} = \frac{4+110-4}{55} = \frac{110}{55} = 2.$$

$$c = \frac{|1\ 5\ 11\ 0\ 5\ 4\ 5\ 0\ 2\ |}{55} = \frac{10+100-275}{55} = \frac{-165}{55} =- 3.$$

$$\underline{A{\cdot}B = C \Rightarrow a = 1,\ b = 2,\ c =- 3}.$$

$b)$

Para $a = 0,\ b = 1,\ c =- 1$ es $A = (1\ 0\ 1\ \ -1\ 1\ 1\ \ -1\ \ -1\ 0\ )$.

Se obtiene la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan.

$$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_2 \to F_2 + F_1\ F_3 \to F_3 + F_1\right\} \Rightarrow$$

$$= (1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_3 \to F_3 + F_2\right\} \Rightarrow (1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 2\ 1\ 1\ ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_3 \to \frac{1}{3}F_3\right\} \Rightarrow \left(1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \right) \Rightarrow \left\{F_1 \to F_1 - F_3\ F_2 \to F_2 -\ 2F_3\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\ \ -\frac{1}{3}\ \ -\frac{1}{3}\ \ -\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \ -\frac{2}{3}\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \right) \Rightarrow \underline{A^{-1} = \left(\frac{1}{3}\ \ -\frac{1}{3}\ \ -\frac{1}{3}\ \ -\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \ -\frac{2}{3}\ \frac{2}{3}\right.}$$

.

****

2º) Sea f la función dada por $f(x) = \{- 3x + 3 \ si \ x < 1 \ ax^2 + bx + 3 \ si \ 1 \leq x \leq 3 \ \sqrt{x^2 - 5} \ si \ 3 < x$.

a) Calcule $a \ y \ b$ para que la función f sea continua en todo R.

b) Si $a = 1 \ y \ b = 2$, calcule el área encerrada bajo la gráfica de $f(x)$ entre las rectas $y = 0, \ x = 0 \ y \ x = 3$.

----

a)

La función $f(x)$ es continua en la recta real $\forall a, \ b \in R$, excepto para los valores críticos $x = 1$ y $x = 3$, cuya continuidad se va a forzar determinando los correspondientes valores de los parámetros reales $a \ y \ b$.

Para que la función sea continua en los puntos críticos es necesario que sus límites laterales en esos puntos sean iguales e iguales a los correspondientes valores de la función en esos puntos.

$$f(x) = \lim_{x \to 1} (- 3x + 3) =- 3 + 3 = 0 \qquad f(x) = \left(ax^2 + bx + 3\right) = a$$

. (1)

$$f(x) = \lim_{x \to 3} \left(ax^2 + bx + 3\right) = 9a + 3b + 3 = f(3) \ f(x) = \sqrt{x^2 - 5} = \sqrt{4} = 2$$

$\Rightarrow 9a + 3b + 3 = 2; \ \ 9a + 3b =- 1.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$a + b =- 3 \ 9a + 3b =- 1 \} \quad - 3a - 3b = 9 \ 9a + 3b =- 1 \} \Rightarrow 6a = 8; \ \ 3a = 4$$

.

$$a + b =- 3; \ \ \frac{4}{3} + b =- 3; \ \ 4 + 3b =- 9; \ \ 3b =- 13 \Rightarrow b =- \frac{13}{3}.$$

$\underline{La \ función \ f(x) \ es \ continua \ en \ R \ para \ a = \frac{4}{3} \ y \ b =- \frac{13}{3}.}$

b)

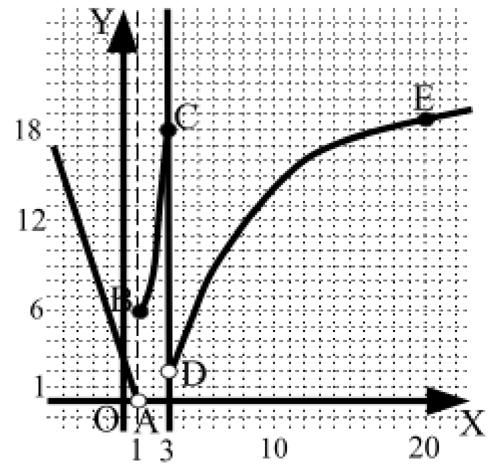
Para $a = 1 \ y \ b = 2$ la función es $f(x) = \{- 3x + 3 \ si \ x < 1 \ x^2 + 2x + 3 \ si \ 1 \leq x \leq 3 \ \sqrt{x^2 - 5} \ si \ 3 < x$.

Para una mejor comprensión del cálculo del área pedida se hace una representación gráfica, aproximada, de la función, tal como aparece en el gráfico que se observa a continuación.

En el intervalo $(-\infty,\ 0)$ la función es $f(x) = -3x + 3$, que es una recta de pendiente -3 y que termina en el punto $A(1,\ 0)$.

En el intervalo $[1,\ 3]$ la función es $f(x) = x^2 + 2x + 3$, que es una parábola convexa (∪), cuyo vértice es el punto $P(-1,\ 2)$, que no pertenece al intervalo. Los valores extremos de la función en el intervalo son $B(1,\ 6)\ y\ C(3,\ 18)$.

En el intervalo $(3,\ +\infty)$ la función es $f(x) = \sqrt{x^2 - 5}$, que es una rama parabólica cóncava que comienza en el punto $D(3,\ 2)$ y contiene, por ejemplo, a $E(20,\ \cong 19)$.



(Este apartado carece de sentido; el área que se pide no es un entorno cerrado, como se observa en el gráfico. No obstante, se resuelve).

$$S = \int_0^1 (-3x + 3)\cdot dx + \int_1^3 \left(x^2 + 2x + 3\right)\cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{3x^2}{2} + 3x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 3x\right]_1^3 = \left[-\frac{3x^2}{2} + 3x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_1^3 =$$

$$= \left(-\frac{3\cdot 1^2}{2} + 3\cdot 1\right) - 0 + \left(\frac{3^3}{3} + 3^2 + 3\cdot 3\right) - \left(\frac{1^3}{3} + 1^2 + 3\cdot 1\right) =$$

$$= -\frac{3}{2} + 3 + 9 + 9 + 9 - \frac{1}{3} - 1 - 3 = 26 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} = \frac{156-9-2}{6} = \underline{\frac{145}{6}\ u^2}.$$

****

3º) Considere los puntos $A(1,\ 1,\ 1)$, $B(0,\ \ -1,\ 1)$ y $C(2,\ \ -1,\ 2)$ de R^3.

$a)$ Calcule P, la proyección ortogonal del punto A sobre la recta $\overline{BC}$.

$b)$ Calcule la distancia de A a la recta $\overline{BC}$.

$c)$ Compruebe que $\left|\overrightarrow{CA}\right|^2 - \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left|\overrightarrow{CP}\right|^2 - \left|\overrightarrow{PB}\right|^2$.

$a)$

Los puntos B y C determinan el vector $\overrightarrow{BC} = [C - B] = (2,\ 0,\ 1)$.

La recta $\overline{BC}$ tiene por expresiones paramétricas: $\overline{BC} \equiv \{x = 2\lambda \quad y = -1 \quad z = 1 + \lambda$.

El haz de planos perpendiculares a $\overline{BC}$ es $\varphi \equiv 2x + z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz φ, el plano π que contiene al punto A es el que satisface su ecuación:

$\varphi \equiv 2x + z + D = 0 \qquad A(1,\ 1,\ 1)\ \} \Rightarrow 2 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = -3 \Rightarrow \pi \equiv 2x + z -$

.

El punto P pedido es la intersección del plano π y la recta $\overline{BC}$:

$\pi \equiv 2x + z - 3 = 0 \quad \overline{BC} \equiv \{x = 2\lambda \quad y = -1 \quad z = 1 + \lambda\ \} \Rightarrow 2\cdot 2\lambda + (1 + \lambda) - 3 =$

$5\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{5} \Rightarrow \left\{x = 2\cdot\frac{2}{5} = \frac{4}{5} \quad y = -1 \qquad z = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}\right\} \Rightarrow P\left(\frac{4}{5},\ -\right.$

.

$b)$

$\overrightarrow{AP} = [P - A] = \left[\left(\frac{4}{5},\ -1,\ \frac{7}{5}\right) - (1,\ 1,\ 1)\right] = \left(-\frac{1}{5},\ -2,\ \frac{2}{5}\right)$.

La distancia entre A y $\overline{BC}$ es la misma que la distancia entre los puntos A y P:

$d(A,\ \overline{BC}) = d(AP) = \overline{AP} = \left|\overrightarrow{AP}\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{5}\right)^2 + (-2)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} =$

$= \sqrt{\frac{1}{25} + 4 + \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{5}{25} + 4} = \sqrt{\frac{1}{5} + 4} = \sqrt{\frac{21}{5}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5}\cdot\sqrt{105}$.

$$\underline{d(A,\ \overline{BC}) = \frac{1}{5}\cdot\sqrt{105}\ unidades.}$$

$c)$

$$\overrightarrow{CA} = [A - C] = [(1,\ 1,\ 1) - (2,\ -1,\ 2)] = (-1,\ 2,\ -1).$$

$$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(0,\ -1,\ 1) - (1,\ 1,\ 1)] = (-1,\ -2,\ 0).$$

$$\overrightarrow{CP} = [P - C] = \left[\left(\frac{4}{5},\ -1,\ \frac{7}{5}\right) - (2,\ -1,\ 2)\right] = \left(-\frac{6}{5},\ 0,\ -\frac{3}{5}\right).$$

$$\overrightarrow{PB} = [B - P] = \left[(0,\ -1,\ 1) - \left(\frac{4}{5},\ -1,\ \frac{7}{5}\right)\right] = \left(-\frac{4}{5},\ 0,\ -\frac{2}{5}\right).$$

$$\left|\overrightarrow{CA}\right|^2 - \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left|\overrightarrow{CP}\right|^2 - \left|\overrightarrow{PB}\right|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 + 4 + 1) - (1 + 4 + 0) = \left(\frac{36}{25} + \frac{9}{25}\right) - \left(\frac{16}{25} + \frac{4}{25}\right);\ \ 6 - 5 = \frac{45}{25} - \frac{20}{25} \Rightarrow \underline{1\ =}$$

.

$$\underline{Queda\ comprobado\ que\ \left|\overrightarrow{CA}\right|^2 - \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left|\overrightarrow{CP}\right|^2 - \left|\overrightarrow{PB}\right|^2}.$$

****

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

1º) Considere el sistema de ecuaciones: $(a\ 0\ 3a\ 3\ 2\ 1\ \ -1\ 0\ \ -3a)\cdot(x\ y\ z) = (1\ 5\ \ -1)$, dependiente del parámetro a. Estudie el comportamiento del sistema dependiendo del valor del parámetro $a \in R$. Calcule todas las soluciones cuando el sistema sea compatible.

$(a\ 0\ 3a\ 3\ 2\ 1\ \ -1\ 0\ \ -3a)\cdot(x\ y\ z) = (1\ 5\ \ -1) \Rightarrow \quad ax + 3az = 1\ 3x + 2y +$

.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$M = (a\ 0\ 3a\ 3\ 2\ 1\ \ -1\ 0\ \ -3a)$ y $M' = (a\ 0\ 3a\ 3\ 2\ 1\ \ -1\ 0\ \ -3a\ \ \ 1\ 5\ \ -1)$.

El rango de M en función del parámetro a es el siguiente:

$|M| = |a\ 0\ 3a\ 3\ 2\ 1\ \ -1\ 0\ \ -3a| = -6a^2 + 6a = -6a(a-1) = 0 \Rightarrow a_1 = 0;\ a_2 = 1$

.

$\underline{Para\ \{a \neq 0\ a \neq 1\} \Rightarrow Ran\ M = Ran\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

$Para\ a = 0 \Rightarrow M' = (0\ 0\ 0\ 3\ 2\ 1\ \ -1\ 0\ 0\ \ \ 1\ 5\ \ -1) \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1,\ C_2, C_4\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |0\ 0\ 1\ 3\ 2\ 5\ \ -1\ 0\ \ -1| = 2 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$

$\underline{Para\ a = 0 \Rightarrow Ran\ M = 2;\ Ran\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

$Para\ a = 1 \Rightarrow M' = (1\ 0\ 3\ 3\ 2\ 1\ \ -1\ 0\ \ -3\ \ \ 1\ 5\ \ -1) \Rightarrow \{F_1 = -F_3\} \Rightarrow Rang\ M' =$

.

$\underline{Para\ a = 1 \Rightarrow Ran\ M = Ran\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

Se resuelve el sistema por la regla de Cramer para $a \neq 0\ y\ a \neq 1$.

$x = \frac{|1\ 0\ 3a\ 5\ 2\ 1\ -1\ 0\ -3a|}{-6a(a-1)} \Rightarrow \{F_1 = -F_3\} \Rightarrow x = 0.$

$$y = \frac{|a\ 1\ 3a\ 3\ 5\ 1\ -1\ -1\ -3a\ |}{-6a(a-1)} = \frac{-15a^{2}-9a-1+15a+a+9a}{-6a(a-1)} = \frac{-15a^{2}+16a-1}{-6a(a-1)} = \frac{15a^{2}-16a+1}{6a(a-1)} =$$

$$= \frac{(a-1)(15a-1)}{6a(a-1)} = \frac{15a-1}{6a}.$$

$$z = \frac{|a\ 0\ 1\ 3\ 2\ 5\ -1\ 0\ -1\ |}{-6a(a-1)} = \frac{-2a+2}{-6a(a-1)} = \frac{-2(a-1)}{-6a(a-1)} = \frac{1}{3a}.$$

$$\underline{Solución: x = 0, y = \frac{15a-1}{6a},\ \ z = \frac{1}{3a}\ \forall a \in R - \{0,\ 1\}.}$$

****

2º) Sea $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$.

a) Estudie el dominio de f, cortes con los ejes, simetrías respecto del eje OY y respecto del origen, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos locales y asíntotas de la función.

b) Dibuje un esbozo de la gráfica de f.

----

a)

Por ser $x^2 + 4 \neq 0,\ \forall x \in R \Rightarrow \underline{D(f) \Rightarrow R}$.

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$Eje\ Y \to x = 0 \to f(0) = 0 \Rightarrow \underline{O(0,\ 0)}$.

$Eje\ X \to f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{x^2+4} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \underline{O(0,\ 0)}$.

$\underline{El\ \text{único}\ punto\ de\ corte\ con\ los\ ejes\ de\ f(x)\ es\ O(0,\ 0)}$.

Una función es simétrica con respecto al eje Y cuando $f(-x) = f(x)$ y es simétrica con respecto al origen cuando $f(-x) = -f(x)$.

$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2+4} = -\frac{x}{x^2+4} = -f(x)$.

$\underline{La\ \text{función}\ f(x)\ es\ \text{simétrica}\ con\ respecto\ al\ origen}$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2+4)-x\cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2+4-2x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{4-x^2}{(x^2+1)^2} = 0;\ 4 - x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 2$.

Como quiera que $(x^2 + 4)^2 > 0,\ \forall x \in R$, la derivada es positiva o negativa cuando lo sea la expresión $4 - x^2$.

Los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon (-\ 2, 2).}$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon (-\ \infty, -\ 2) \cup (2, +\ \infty).}$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto. Esta condición necesaria no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; se es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{-2x\cdot\left(x^2+4\right)^2 - \left(4-x^2\right)\cdot\left[2\cdot\left(x^2+4\right)\cdot 2x\right]}{\left(x^2+4\right)^4} = \frac{-2x\cdot\left(x^2+4\right) - 4x\cdot\left(4-x^2\right)}{\left(x^2+4\right)^3} =$$

$$= \frac{-2x^3-8x-16x+4x^3}{\left(x^2+4\right)^3} = \frac{2x^3-24x}{\left(x^2+4\right)^3} = \frac{2x\left(x^2-12\right)}{\left(x^2+4\right)^3}.$$

$$f''(-\ 2) = \frac{-16+48}{8^3} > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = -\ 2.$$

$$f(-\ 2) = \frac{-2}{4+4} = -\ \frac{2}{8} = -\ \frac{1}{4} \Rightarrow \underline{Mínimo: P\left(-\ 2,\ \ -\ \frac{1}{4}\right).}$$

$$f''(2) = \frac{16-48}{8^3} < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 2.$$

$$f(2) = \frac{2}{4+4} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \Rightarrow \underline{Máximo: Q\left(2,\ \frac{1}{4}\right).}$$

También se obtiene el máximo teniendo en cuenta la simetría con respecto al origen de la función.

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$; son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = f(x) = \frac{x}{x^2+1} = 0\ .$$

$$\underline{El\ eje\ de\ abscisas\ es\ asíntota\ horizontal\ de\ la\ función.}$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito; son los valores que anulan el denominador.

$x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x \notin R \Rightarrow$ <u>*La función $f(x)$ no tiene asíntotas verticales.*</u>

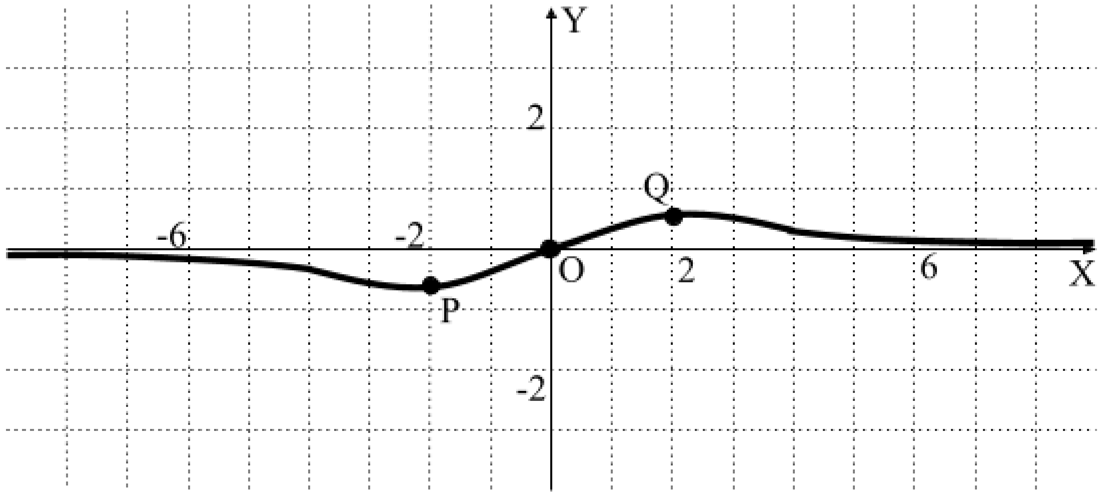
Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, con $m \neq 0,\ m \neq \infty$, siendo:

$$m = \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{x}{x^2+4}}{x} = \frac{x}{x^3+4x} = 0.$$

<u>*La función $f(x)$ no tiene asíntotas oblicuas.*</u>

b)

Con los datos obtenidos puede hacerse un esbozo de la gráfica de $f(x)$, que es el siguiente:



****

3º) Sean $P(1,\ -1,\ 1)$, $Q(0,\ 1,\ 3)$, $R(1,\ 2,\ 2)$ tres puntos de R^3.

a) Calcule el vector $\vec{v}$ con la misma dirección y sentido que $\vec{PQ}$ y con el mismo módulo que $\vec{QR}$.

b) ¿Están los puntos P, Q y R alineados? En caso negativo, calcule el área del triángulo PQR.

c) Calcule una recta perpendicular a $\overline{PQ}$ que pase por el punto R.

----

a)

$$\vec{PQ} = [Q - P] = [(0,\ 1,\ 3) - (1,\ -1,\ 1)] = (-1,\ 2,\ 2).$$

$$\left|\vec{PQ}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3.$$

$$\vec{QR} = [R - Q] = [(1,\ 2,\ 2) - (0,\ 1,\ 3)] = (1,\ 1,\ -1).$$

$$\left|\vec{QR}\right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (1)^2} = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}.$$

El versor de $\vec{PQ}$ (el versor de un vector es otro vector con la misma dirección y sentido y con módulo la unidad) es $\vec{u} = \left(-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$.

El vector $\vec{v}$ pedido de la misma dirección y sentido que $\vec{PQ}$ y con el mismo módulo que $\vec{QR}$ es: $\underline{\vec{v} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{2\sqrt{3}}{3},\ \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)}$.

b)

Los puntos P, Q y R estarán alineados si los vectores $\vec{PQ}$ y $\vec{QR}$ son linealmente dependientes.

Dos vectores son linealmente dependientes cuando sus componentes respectivas son proporcionales.

$$\vec{PQ} = (-1,\ 2,\ 2)\ y\ \vec{QR} = (1,\ 1,\ -1) \Rightarrow \frac{-1}{1} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{2}{-1}.$$

$$\underline{Los\ puntos\ P,\ Q\ y\ R\ no\ están\ alineados}.$$

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan sus vértices:

$$S_{PQR} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{QR}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \right\| =$$

$$= \frac{1}{2}|-2i + 2j - k - 2k - 2i - j| = \frac{1}{2}|-4i + j - 3k| = \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2 + 1^2 + (-3)}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{16 + 1 + 9} = \underline{\frac{\sqrt{26}}{2}\ u^2}.$$

$c)$

El haz de planos β perpendiculares a $\overline{PQ}$ es $\beta \equiv -x + 2y + 2z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz β, el plano π que contiene a $R(1,\ 2,\ 2)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \beta \equiv -x + 2y + 2z + D = 0 \\ R(1,\ 2,\ 2) \end{array}\right\} \Rightarrow -1 + 2\cdot2 + 2\cdot2 + D =$$

$\Rightarrow D = -7 \Rightarrow \pi \equiv -x + 2y + 2z - 7 = 0$, o mejor: $\pi \equiv x - 2y - 2z + 7 = 0$.

La recta s que pasa por P y Q es $s \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$.

El punto T, intersección de la recta s y el plano π es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x - 2y - 2z + 7 = 0 \\ s \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow (1$$

$$1 - \lambda + 2 - 4\lambda - 2 - 4\lambda + 7 = 0; \quad -9\lambda + 8 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{8}{9}.$$

$$T \Rightarrow \left.\begin{cases} x = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9} \\ y = -1 + \frac{16}{9} = \frac{7}{9} \\ z = 1 + \frac{16}{9} = \frac{25}{9} \end{cases}\right\} \Rightarrow T\left(\frac{1}{9},\ \frac{7}{9},\ \frac{25}{9}\right).$$

La recta r pedida es la que pasa por los puntos T y R.

$$\overrightarrow{TR} = [R - T] = \left[(1,\ 2,\ 2) - \left(\frac{1}{9},\ \frac{7}{9},\ \frac{25}{9}\right)\right] = \left(\frac{8}{9},\ \frac{11}{9},\ -\frac{7}{9}\right).$$

Un vector director de r es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{TR}$, por ejemplo: $\overrightarrow{v_r} = (8,\ 11,\ -7)$. La recta r es: $\underline{r \equiv \begin{cases} x = 1 + 8\mu \\ y = 2 + 11\mu \\ z = 2 - 7\mu \end{cases}}$.

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN

JUNIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cuatro ejercicios de la misma en el orden que desee.
2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de calculadoras no programables (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).
CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

1º) a) Discutir para qué valores de $a \in R$ la matriz $M = (-\ 5\ a\ 10\ \ -\ a\ -\ 1\ )$ tiene inversa. Calcular M^{-1} para $a = 0$.

b) Si B es una matriz cuadrada de orden 3 y $|B| = -\ 5$, calcular $\left|2B^t\right|$, donde B^t denota la matriz traspuesta de B.

----

a)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$|M| = |-\ 5\ a\ 10\ \ -\ a\ -\ 1\ | = 5a + 5 - 10a = 0;\ \ 5 - 5a = 0 \Rightarrow a = 1.$

$\underline{M\ es\ invertible\ \forall a \in R\ -\{1\}}.$

Para $a = 0$ es $M = (-\ 5\ 0\ 10\ \ -\ 1\ )$. $M^t = (-\ 5\ 10\ 0\ \ -\ 1\ )$.
$|M| = 5.$

$Adj.\ de\ M^t = (-\ 1\ 0\ \ -\ 10\ \ -\ 5\ ) \Rightarrow \underline{M^{-1} = -\frac{1}{5} \cdot (1\ 0\ 10\ 5\ )}.$

b)

Se deben tener en cuenta las siguientes propiedades de las matrices y los determinantes:

1.- El determinante de una matriz es igual que el determinante de su traspuesta.

2.- El producto de un número real por una matriz es otra matriz cuyos elementos quedan todos multiplicados por dicho número.

3.- Si los elementos de una fila de un determinante se multiplican por un número real el valor del determinante queda multiplicado por dicho número.

$$\left|2B^t\right| = 2^3 \cdot \left|B^t\right| = 8 \cdot (-5) = -40.$$

$$\underline{\left|2B^t\right| = -40}.$$

****

2º) $a)$ Calcular un vector de módulo 4 que tenga la misma dirección, pero de distinto sentido, que el vector $\vec{v} = (2,\ 1,\ \ -\ 2)$.

$b)$ Calcular un punto de la recta $r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-2}$ cuya distancia sea mínima al punto $A(-\ 1,\ 2,\ 0)$.

$a)$

El vector $\vec{u}$ pedido tiene las siguientes características:

$\vec{u} = (-\ 2a,\ \ -\ a,\ 2a)$, con $a > 0$ y $\left|\vec{u}\right| = 4$.

$\left|\vec{u}\right| = \sqrt{(-\ 2a)^2 + (-\ a)^2 + (2a)^2} = 4;\ \ \sqrt{4a^2 + a^2 + 4a^2} = 4;\ \ \sqrt{9a^2} = 4;$

$3a = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{3}$.

$$\underline{\vec{u} = \left(-\ \frac{8}{3},\ \ -\ \frac{4}{3},\ \frac{8}{3}\right)}.$$

$b)$

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es: $r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -\ 2 + \lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$.

Un vector director de r es $\vec{v_r} = (1,\ \ -\ 1,\ 2)$.

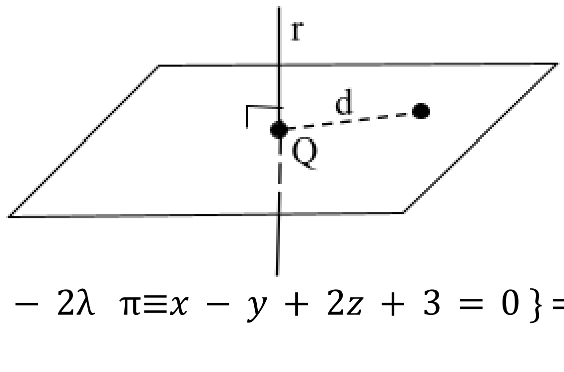
El haz de planos β perpendiculares a r tiene la siguiente expresión dada en forma general o implícita: $\beta \equiv x - y + 2z + D = 0$.

De los infinitos planos de haz β, el plano π que contiene al punto $A(-\ 1,\ 2,\ 0)$ es el que satisface su ecuación:

$\left.\begin{array}{l} \beta \equiv x - y + 2z + D = 0 \\ A(-\ 1,\ 2,\ 0) \end{array}\right\} \Rightarrow -\ 1 - 2 + D = 0 \Rightarrow D =$

$\Rightarrow \pi \equiv x - y + 2z + 3 = 0$.

El punto Q de intersección de la recta r y el plano π es la solución del sistema que forman:



$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -\ 2 + \lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases} \\ \pi \equiv x - y + 2z + 3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$1 - \lambda + 2 - \lambda + 6 - 4\lambda + 3 = 0;\ \ 12 - 6\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow \underline{Q(-\ 1,\ 0,\ \ -\ 1)}$

.

La distancia entre A y r es la misma que la distancia entre A y Q:

$$d(A,\ r) = \overline{AQ} = \sqrt{(-\ 1\ +\ 1)^2 + (0\ -\ 2)^2 + (-\ 1\ -\ 0)^2} = \sqrt{0\ +\ 4\ +\ 1} = \sqrt{5}.$$

$$\underline{d(A,\ r) = \sqrt{5}\ unidades}.$$

****

3º) a) Calcular a, b y c para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tenga pendiente nula en el punto $P(1,\ 1)$ de su gráfica y, sin embargo, no tenga extremo relativo en dicho punto.

b) Probar que la ecuación $x^5 + x - 1 = 0$ tiene una única solución positiva.

----

a)

Por pasar por $P(1,\ 1)$: $f(1) = 1 \Rightarrow 1^3 + a \cdot 1^2 + b + c = 1 \Rightarrow a + b + c = 0$.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$. Por tener pendiente nula en $P(1,\ 1)$:

$f'(1) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + b = 0;\ 3 + 2a + b = 0;\ 2a + b = -3$.

Por no tener extremo relativo en $P(1,\ 1)$ tiene que ser $f''(1) = 0$:

$f''(x) = 6x + 2a \Rightarrow f''(1) = 0 \Rightarrow 6 + 2a = 0;\ 3 + a = 0 \Rightarrow \underline{a = -3}$.

$2a + b = -3 \Rightarrow 2 \cdot (-3) + b = -3;\ -6 + b = -3 \Rightarrow \underline{b = 3}$.

$a + b + c = 0 \Rightarrow -3 + 3 + c = 0 \Rightarrow \underline{c = 0}$.

b)

Considerando la función $f(x) = x^5 + x - 1$, que por ser polinómica es continua y derivable en su dominio, que es R.

Teniendo en cuenta que $f(0) = -1$ y $f(1) = 1$, según el teorema de Bolzano, en el intervalo (0, 1) la función $f(x)$ tiene, al menos una raíz $x = a \in (0,\ 1)$, tal que $f(a) = 0$.

Vamos a demostrar ahora, como se pide, que la raíz es única.

Si la función $f(x)$ tuviera al menos otra raíz real positiva $x = b$, indicaría que $f(b) = 0$, con lo cual se podría aplicar el teorema de Rolle, teniendo en cuenta la continuidad y derivabilidad de $f(x)$.

Si $b > a$, tendría que existir un valor positivo c, tal que $a < c < b$, para el cual se anularía la primera derivada de la función, es decir: $f'(c) = 0$, y esto, como se demuestra a continuación, es imposible:

$f'(x) = 5x^4 + 1$ y siendo $c > 0$ es: $f'(c) \neq 0,\ \forall c \in R$, lo cual contradice el teorema de Rolle y, en consecuencia, demuestra que la ecuación $x^5 + x - 1 = 0$ tiene una sola raíz positiva, $\underline{como\ se\ tenía\ que\ probar}$.

****

4º) $a)$ Calcular $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$.

$b)$ Calcular el área de la región limitada por la función $f(x) = 1 - x^2$ y las rectas tangentes a dicha gráfica en los puntos de abscisas x = 1 y x = -1.

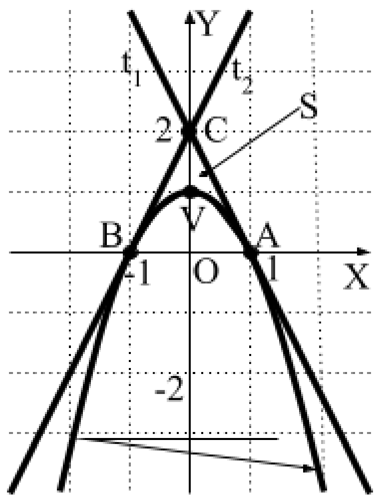
$a)$

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = \frac{1}{0^+} - \frac{1}{e^{0^+} - 1} = \infty - \infty \Rightarrow Indet. \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{x \cdot (e^x - 1)} = \frac{1 - 1 - 0}{0 \cdot 0} =$$

$$= \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{1 \cdot (e^x - 1) + x \cdot e^x} = \frac{1 - 1}{0 + 0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x}{e^x + 1 \cdot e^x + x \cdot e^x} = \frac{1}{1 + 1 + 0} = \underline{\frac{1}{2}}.$$

$b)$



Los puntos de tangencia son los siguientes:

$f(1) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow A(1,\ 0)$.

$f(-1) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow B(-1,\ 0)$.

La pendiente de la tangente a una función en un punto es el valor de su primera derivada en ese punto.

$f'(x) = -2x \Rightarrow f'(1) = m_1 = -2$.

$t_1 \Rightarrow y - 0 = -2 \cdot (x - 1) = -2x + 2 \Rightarrow t_1 \equiv y = -2x + 2$.

$f'(-1) = m_2 = 2$.

$t_2 \Rightarrow y - 0 = 2 \cdot (x + 1) = 2x + 2 \Rightarrow t_2 \equiv y = 2x + 2$.

Las dos tangentes pasan por el punto $C(0,\ 2)$.

El vértice de la parábola $f(x) = 1 - x^2$ es el siguiente:

$f'(x) = - 2x = 0 \rightarrow x = 0 \Rightarrow V(0, - 1).$

La representación gráfica de la situación, aproximada, es la indicada en la figura adjunta.

Conviene observar la simetría con respecto al eje Y del conjunto.

De la observación de la figura se deduce al área a calcular, que es la siguiente:

$$S = 2\cdot\int_0^2 \left[t_1 - f(x)\right]\cdot dx = 2\cdot\int_0^2 \left[(- 2x + 2) - \left(1 - x^2\right)\right]\cdot dx =$$

$$= 2\cdot\int_0^2 \left(x^2 - 2x + 1\right)\cdot dx = 2\cdot\left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_0^2 = 2\cdot\left[\left(\frac{2^3}{3} - 2^2 + 2\right) - 0\right] =$$

$$= \frac{16}{3} - 4 = \frac{16-12}{3} = \frac{4}{3}.$$

$$\underline{S = \frac{4}{3}\,u^2.}$$

****

OPCIÓN B

1º) a) Discutir, según el valor del parámetro m, el sistema $\{x + y + mz = 2 \quad x + my + z = 2m\, x + y - mz = 0$.
b) Resolverlo para m = 1.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A = (1\ 1\ m\ 1\ m\ 1\ 1\ 1\ \ -m\,)$ y $A' = (1\ 1\ m\ 1\ m\ 1\ 1\ 1\ \ -m \quad 2\ 2m\ 0\,)$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro m es el siguiente:

$|A| = |1\ 1\ m\ 1\ m\ 1\ 1\ 1\ \ -m\,| =- m^2 + m + 1 - m^2 - 1 + m =- 2m^2 + 2m =$

$=- 2m(m - 1) = 0 \Rightarrow m_1 = 0,\ m_2 = 1.$

$\underline{Para\ \{m \neq 0\ m \neq 1\ \} \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.\ D.}$

$Para\ m = 0\ es\ A' \Rightarrow (1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0 \quad 2\ 0\ 0\,) \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |1\ 1\ 2\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\,| = 2 \neq 0 \Rightarrow Rang\ A' = 3.$

$\underline{Para\ m = 0 \Rightarrow Rang\ A = 2;\ Rang\ A' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

$Para\ m = 1\ es\ A' \Rightarrow (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \ -1 \quad 2\ 2\ 0\,) \Rightarrow \{F_1 = F_2\} \Rightarrow Rang\ A' = 2$
.

$\underline{Para\ m = 1 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.\ I.}$

b)

Para $m = 1$ el sistema es $\{x + y + z = 2\, x + y + z = 2\, x + y - z = 0$, equivalente a $\{x + y + z = 2\, x + y - z = 0$, que es compatible indeterminado.

Haciendo $y = \lambda \Rightarrow x + z = 2 - \lambda\ x - z =- \lambda \quad \} \Rightarrow x = 1 - \lambda;\ x + z = 2 - \lambda\ \ - x + z = \lambda\, \}=$
.

$\underline{Para\ m = 1\ las\ soluciones\ son: x = 1 - \lambda,\ y = \lambda,\ z = 1,\ \forall \lambda \in R.}$

****

2º) Consideremos las rectas $r\equiv\frac{x}{2}=y=\frac{z-1}{2}$ y $s\equiv\frac{x}{2}=\frac{y-1}{3}=z.$

a) Comprobar que las rectas r y s se cruzan.

b) Hallar la ecuación de la recta t que pasa por el origen de coordenadas y corta a las rectas r y s.

----

a)

Un punto y un vector de cada una de las rectas son los siguientes:

Recta r: $A(0,\ 0,\ 1)\ y\ \overrightarrow{v_r}=(2,\ 1,\ 2)$. Recta s: $B(0,\ 1,\ 0)\ y\ \overrightarrow{v_s}=(2,\ 3,\ 1)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\overrightarrow{w}$ que tiene como origen el punto $A\in r$ y extremo el punto $B\in s$: $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{AB}=(0,\ 1,\ -1)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\}\Rightarrow\begin{vmatrix}2&1&2\\2&3&1\\0&1&-1\end{vmatrix}=-6+4-2+2=-2\neq0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rang\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\}=3\Rightarrow\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\ no\ son\ coplanarios.$$

$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan,\ como\ se\ quería\ comprobar}.$

b)

En primer lugar determinamos un plano α que contiene a la recta r y pase por el origen:

El punto $A(0,\ 0,\ 1)\in r$ con el origen determina el vector $\overrightarrow{OA}=(0,\ 0,\ 1)$.

$$\alpha\left(O;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{OA}\right)\equiv\begin{vmatrix}x&y&z\\2&1&2\\0&0&1\end{vmatrix}=0\Rightarrow\alpha\equiv x-2y=0.$$

Ahora determinamos otro plano β que contiene a s y pasa por el origen:

El punto $B(0,\ 1,\ 0) \in s$ con el origen determina el vector $\overrightarrow{OB} = (0,\ 1,\ 0)$.

$\beta\left(O;\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{OB}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \beta \equiv x - 2z = 0.$

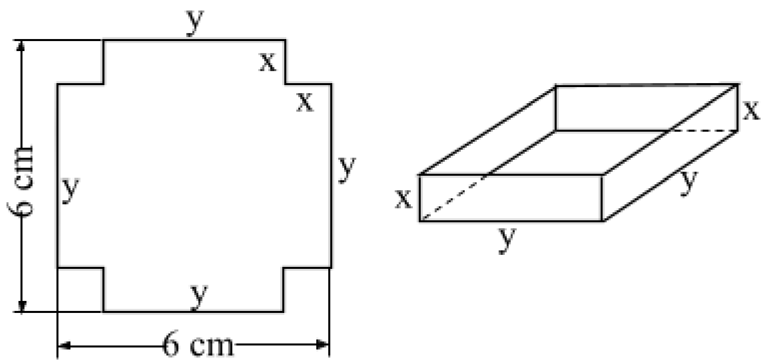
La recta t pedida, expresada por unas ecuaciones implícitas y también por unas ecuaciones paramétricas, es la que determinan los planos α y β:

$\underline{t \equiv \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}} \Rightarrow y = z = \lambda,\ x = 2\lambda \Rightarrow \underline{t \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases},\ \forall\lambda\in}$

.

****

3º) Tenemos un cartón cuadrado de 6 cm de lado y queremos construir con él una caja sin tapa. Para ello recortamos un cuadrado de x cm de lado en cada vértice del cartón. Calcular x para que el volumen de la caja sea máximo.



De la observación de la figura se deduce que: $y + 2x = 6 \rightarrow y = 6 - 2x$.

$V = y^2 \cdot x \Rightarrow V(x) = x \cdot (6 - 2x)^2$.

Para que el volumen sea máximo es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$V'(x) = 1 \cdot (6 - 2x)^2 + x \cdot [2 \cdot (6 - 2x)(-2)] = (6 - 2x)(6 - 2x - 4x) =$

$= 2(3 - x)(6 - 6x) = 12(3 - x)(1 - x) = 12\left(x^2 - 4x + 3\right)$.

$V'(x) = 0 \Rightarrow 12(3 - x)(1 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 3,\ x_2 = 1$.

La solución $x = 3$ carece de sentido por ser imposible la construcción; se trata de un mínimo. La solución lógica de máximo es para $x = 1$. Se comprueba a continuación:

$V''(x) = 12(2x - 4) = 24(x - 2)$.

$V''(3) = 24(3 - 2) = 24 > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ x = 3$.

$V''(1) = 24(1 - 2) = -24 < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = 1$.

<u>*El volumen de la caja es máximo cortando un cm de cada esquina.*</u>

****

4º) $a)$ Calcular $\left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{x}}$.

b) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x) = Lx$, el eje OX y la recta $x = 3$.

$a)$

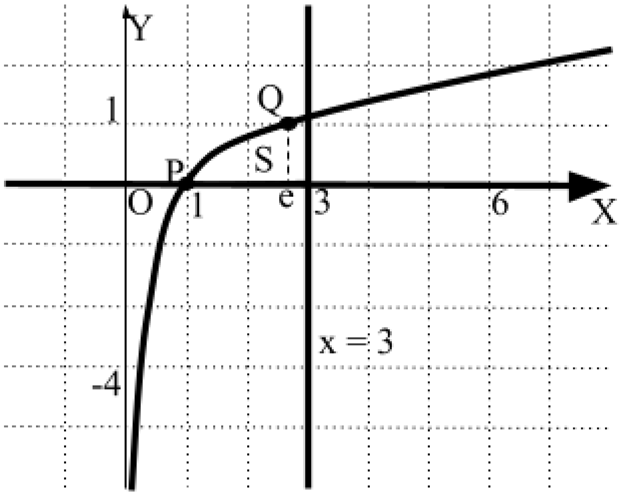
$$\left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{x}} = 1^{\infty} \Rightarrow Ind.\ del\ tipo\ nº\ e \Rightarrow \left\{x \to 0^+\ \alpha \to \infty\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right)^{\alpha} = \left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right)^{\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{\alpha}} = \lim_{\alpha \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right)^{\alpha^2}\right]^{\frac{1}{\alpha}} =$$

$$= \left[\lim_{\alpha \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right)^{\alpha^2}\right]^{\frac{1}{\alpha}} = e^{\lim_{\alpha \to \infty} \frac{1}{\alpha}} = e^0 = \underline{1}.$$

b)

La gráfica de la función $f(x) = Lx$ pasa por los puntos $P(1,\ 0)$ y $Q(e,\ 1)$.



La representación gráfica, aproxi-mada, de la situación es la que indica el gráfico adjunto.

De la observación de la gráfica se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_1^3 Lx \cdot dx \Rightarrow \left[\left\{u = Lx \to du = \frac{1}{x} \cdot dx\ dv = dx \to v = x\right\} \Rightarrow Lx \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx\right]_1^3 =$$

$$= \left[Lx \cdot x - \int dx\right]_1^3 = [x \cdot Lx - x]_1^3 = (3 \cdot L3 - 3) - (1 \cdot L1 - 1) = 3L3 - 3 + 1 =$$

$$= 3L3 - 2 \cong 3,30 - 2 = 1,30.$$

$$\underline{S = (L27 - 2)\ u^2 \cong 1,30\ u^2}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN

SEPTIEMBRE – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cuatro ejercicios de la misma en el orden que desee.
2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de calculadoras no programables (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).
CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

1º) a) Discutir, en función del valor de m, el sistema de ecuaciones $\{mx + y + z = 0\ mx + mz = 2$ y resolverlo para $m = -1$.

b) Para $m = 1$ añadir una ecuación al sistema del apartado a) para obtener: en un caso un sistema compatible determinado y en otro caso un sistema incompatible.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = (m\ 1\ 1\ m\ 0\ m)$ y $M' = (m\ 1\ 1\ m\ 0\ m\quad 0\ 2)$.

Por ser $|1\ 0\ 0\ 2| = 2 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 2$.

$Para\ m = 0\ es\ M = (0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0) \Rightarrow Rang\ M = 1$.

$Para\ m \neq 0\ es\ M = (m\ 1\ 1\ m\ 0\ m) \Rightarrow |1\ 1\ 0\ m| = m \neq 0 \Rightarrow Rang\ M = 2$.

$\underline{Para\ m \neq 0 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

$\underline{Para\, m = 0 \Rightarrow Rang\ M = 1;\ Rang\ M' = 2 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

Se resuelve para $m = -1$, en cuyo caso el sistema resulta $\{-x + y + z = 0 \quad -x - z = 2$, que es compatible indeterminado. Haciendo $z = \lambda$:

$x = -2 - \lambda;\ \ y = x - \lambda = -2 - \lambda - \lambda = -2 - 2\lambda.$

$\underline{Solución\colon \{x = -2 - \lambda \quad y = -2 - 2\lambda \quad z = \lambda \quad, \forall\lambda \in R.}$

$b)$

Para $m = 1$ el sistema es $\{x + y + z = 0 \quad x + z = 2$.

El sistema resulta compatible determinado añadiendo una ecuación que sea linealmente independiente de las ecuaciones del sistema, por ejemplo:

$\underline{S.\ C.\ D.\ \Rightarrow \{x + y + z = 0 \quad x + z = 2 \quad x + 2y + 3z = 1}.$

Para que el sistema sea incompatible basta añadir una ecuación que sea linealmente dependiente a cualquiera de las ecuaciones referente a los coeficientes y linealmente independiente con respecto a los términos independientes, por ejemplo:

$\underline{Sistema\ incompatible\ \Rightarrow \{x + y + z = 0 \quad x + z = 2 \quad x + y + z = 1}.$

****

2º) a) Determinar la posición relativa de la recta $r \equiv \{- x + 2y - z = 3\ 2x - 3y + z = 1$ y el plano de ecuación $\pi \equiv 5x - y + 2z = 4$.

b) Dadas las rectas $r_1 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{5}$ y $r_2 \equiv \{- x + 2y - z = 3\ 2x - 3y + z = 1$, calcular el plano que contiene a r_1 y es paralelo a r_2.

----

a)

La recta r y el plano π determinan el sistema $- x + 2y - z = 3\ 2x - 3y + z = 1\ 5x - y + 2z = 4\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$M = (- 1\,2\ \ - 1\,2\ \ - 3\,1\,5\ \ - 1\,2)$ y $M' = (- 1\,2\ \ - 1\,2\ \ - 3\,1\,5\ \ - 1\,2\ \ \ 3\,1\,4)$.

Según sean los rangos de M y M' pueden presentarse los siguientes casos:

1. -- Rango M = Rango M' = 2 ⇛ La recta está contenida en el plano.

2. -- Rango M =2, Rango M' = 3 ⇛ La recta es paralela al plano.

3. -- Rango M = Rango M' = 3 ⇛ La recta es secante al plano.

Rango de M $\Rightarrow |- 1\,2\ \ - 1\,2\ \ - 3\,1\,5\ \ - 1\,2| = 6 + 2 + 10 - 15 - 1 - 8 = 18 - 24 =$

$= - 6 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M = 3$.

<u>*La recta r y el plano* π *son secantes.*</u>

b)

Un punto y un vector director de r_1 son $A(1, 0, 0)$ y $\vec{v}_1 = (2, - 1, 5)$.

Un vector director de una recta dada por la intersección de dos planos es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan. Un vector director de r_2 es el siguiente:

$r_2 \equiv \{- x + 2y - z = 3\ 2x - 3y + z = 1 \Rightarrow \{\vec{n}_1 = (- 1, 2, - 1)\ \vec{n}_2 = (2, -$

$= 2i - 2j + 3k - 4k - 3i + j =- i - j - k \Rightarrow \vec{v}_2 = (1,\ 1,\ 1).$

La ecuación general del plano pedido π es la siguiente:

$\pi\left(A;\ \vec{v}_1,\ \vec{v}_2\right) \equiv |x - 1\ y\ z\ 2\ \ - 1\ 5\ 1\ 1\ 1\,| = 0;$

$- (x - 1) + 5y + 2z + z - 5(x - 1) - 2y = 0; \quad - 6(x - 1) + 3y + 3z = 0;$

$2(x - 1) - y - z = z; \ \ 2x - 2 - y - z = 0.$

$$\underline{\pi \equiv 2x - y - z - 2 = 0}.$$

****

3º) Dada la función $f(x) = 2e^{-2|x|}$, estudiar: derivabilidad, crecimiento y decreci-miento, extremos relativos y asíntotas.

Teniendo en cuenta que $|x| = \{- x \, si \, x < 0 \; x \, si \, x \geq 0$, la función $f(x) = 2e^{-2|x|}$ puede expresarse de la forma $f(x) = \{2e^{2x} \, si \, x < 0 \;\; 2e^{-2x} \, si \, x \geq 0$.

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto.

La función $f(x)$ es continua y derivable en R, excepto para $x = 0$ cuya continuidad y derivabilidad son dudosas; se estudian a continuación.

Para que la función sea continua en $x = 0$ es necesario que sus límites laterales sean iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$f(x) = \left(2e^{2x}\right) = 2 \cdot 1 = 2 \qquad f(x) = \left(2e^{-2x}\right) = 2 \cdot 1 = 2 = f(0) \; \} \Rightarrow f(x) = f(x$
.

La función $f(x) = 2e^{-2|x|}$ es continua para $x = 0$.

Una función es derivable en un punto cuando es continua en ese punto y, además, existen sus derivadas laterales y son iguales.

$f'(x) = \{4e^{2x} \;\; si \;\; x < 0 \;\; - 4e^{-2x} \, si \, 0 \geq 0 \; \Rightarrow f'\left(0^-\right) = 4e^0 = 4; \;\; f'\left(0^+\right) = - 4 \cdot e^0 = - 4$
.

$f'\left(0^-\right) \neq f'\left(0^+\right) \Rightarrow \underline{La\ función\ f(x)\ es\ derivable\ en\ R - \{0\}}$.

Una función es creciente o decreciente cuando su derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon (- \infty, 0)}$.

$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon (0, + \infty)}$.

Nótese que, aunque la función no es derivable para $x = 0$, tiene un mínimo para este valor; es lo que se denomina un "punto anguloso" que, en este caso, según el estudio del crecimiento y decrecimiento, se trata de un mínimo absoluto.

$$\underline{Mínimo\ absoluto\ en\ A(0,\ 2)}.$$

Por ser $f(-\ x) = f(x)$, la función es simétrica con respecto al eje Y.

Una función tiene una asíntota horizontal cuando su límite cuando x tiende a más o menos infinito es un número real.

$$f(x) = \left(2e^{2x}\right) = 2 \cdot e^{-\infty} = \frac{2}{e^{\infty}} = \frac{2}{\infty} = 0.$$

$$f(x) = \left(2e^{-2x}\right) = 2 \cdot e^{-\infty} = \frac{2}{e^{\infty}} = \frac{2}{\infty} = 0.$$

$$\underline{La\ recta\ y = 0\ (eje\ X)\ es\ asíntota\ horizontal\ de\ la\ función}.$$

Por ser una función exponencial carece de asíntotas verticales y oblicuas.

****

4º) a) Calcular $\left[x\left(e^{1/x} - 1\right)\right]$.

b) Consideremos la función $f(x) = x^3 + mx^2 + 1$ con $m \geq 0$. Calcular el valor de m para que el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$ sea 10.

----

a)

$$\left[x\left(e^{1/x} - 1\right)\right] = 0 \cdot \left(e^{1/0^+} - 1\right) = 0 \cdot \left(e^{\infty} - 1\right) = 0 \cdot \infty \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{1/x} - 1}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\frac{1}{0^+}} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2} \cdot e^{1/x} - 0}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} e^{1/x} =$$

$$= e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = + \infty.$$

$$\underline{\left[x\left(e^{1/x} - 1\right)\right] = + \infty}.$$

b)

Siendo $m \geq 0$, las ordenadas de la función $f(x) = x^3 + mx^2 + 1$ son positivas, por lo cual les:

$$\int_0^2 f(x) \cdot dx = 10 \Rightarrow \int_0^2 \left(x^3 + mx^2 + 1\right) \cdot dx = 10; \quad \left[\frac{x^4}{4} + \frac{mx^3}{3} + x\right]_0^2 = 10;$$

$$\left(\frac{2^4}{4} + \frac{m \cdot 2^3}{3} + 2\right) - 0 = 10; \quad 4 + \frac{8}{3}m + 2 = 10; \quad \frac{8}{3}m = 4; \quad \frac{2}{3}m = 1 \Rightarrow \underline{m = \frac{3}{2}}$$

.

****

OPCIÓN B

1º) a) Sea A una matriz cuadrada de orden 3 y tal que $|A| = 2$. ¿Tiene inversa la matriz A^4? Calcular $\left|5A^{-1}\right|$ y $\left|(5A)^{-1}\right|$.

b) ¿Para qué valores del parámetro a el rango de la matriz $M = (a + 1\ 6\ 2\ a)$ es 1?

----

a)

$$\left|A^4\right| = (|A|)^4 = 2^4 = 16 \neq 0.$$

$$\underline{La\ matriz\ A^4\ es\ invertible}.$$

$$\left|5A^{-1}\right| = 5\cdot\left|A^{-1}\right| = 5\cdot\left|\frac{1}{A}\right| = \frac{5}{|A|} = \underline{\frac{5}{2}}.$$

Teniendo en cuenta que:

1.- La matriz A es cuadrada de orden 3.

2.- El producto de un número real por una matriz es otra matriz cuyos elementos quedan todos multiplicados por dicho número.

3.- Si los elementos de una fila de un determinante se multiplican por un número real el valor del determinante queda multiplicado por dicho número.

$$\left|(5A)^{-1}\right| = \left|5^3\cdot A^{-1}\right| = 5^3\cdot\left|\frac{1}{A}\right| = \underline{\frac{125}{2}}.$$

b)

El rango de M es 1 cuando las filas o columnas son proporcionales:

$$\frac{a+1}{2} = \frac{6}{a};\ a^2 + a = 12;\ a^2 + a - 12 = 0;\ a = \frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{49}}{2} = \frac{-1\pm7}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = -4,\ a_2 = 3.$$

$$\underline{La\ matriz\ M\ tiene\ rango\ 1\ para\ a = -4\ y\ para\ a = 3}.$$

****

2º) a) Hallar la ecuación del plano perpendicular al plano $\pi \equiv 2x - 2y + 4z - 5 = 0$ y que contiene a los puntos $A(-2, 0, 0)$ y $B(0, 1, 0)$.

b) En los planos $\pi_1 \equiv 2x - 2y + z - 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x - 2y + z + 5 = 0$ están situadas dos caras de un cubo. Calcular el volumen de dicho cubo.

----

a)

Un vector normal del plano $\pi \equiv 2x - 2y + 4z - 5 = 0$ es $\vec{n} = (1, -1, 2)$.

Los puntos $A(-2, 0, 0)$ y $B(0, 1, 0)$ determinan el vector $\vec{AB} = (2, 1, 0)$.

La ecuación general del plano β pedido es la siguiente:

$\beta(A;\ \vec{n},\ \vec{AB}) \equiv \begin{vmatrix} x+2 & y & z \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0;\ \ 4y + z - 2(x + 2) = 0;$

$4y + z - 2x - 4 = 0.$

$\underline{\beta \equiv 2x - 4y - z + 4 = 0}.$

b)

El lado del cubo es igual que la distancia entre los planos paralelos π_1 y π_2.

La distancia entre los planos α_1 y α_2 paralelos dados por sus ecuaciones generales $\alpha_1 \equiv Ax + By + Cz + D_1 = 0$ y $\alpha_2 \equiv Ax + By + Cz + D_2 = 0$ viene dada por la fórmula $d = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$:

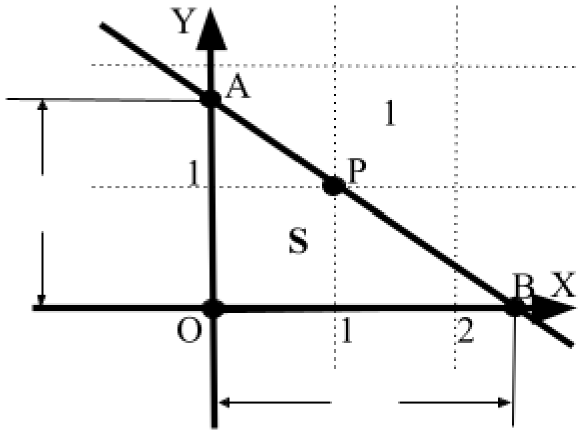
$$l = d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|5+1|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|6|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{6}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2.$$

$$V = l^3 = 2^3 = 8.$$

$\underline{El\ volumen\ del\ cubo\ es\ de\ 8\ unidades\ cúbicas}.$

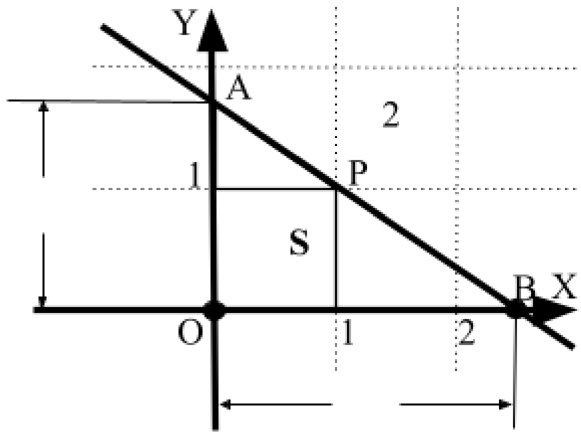
****

3º) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1,\ 1)$ y forma con los ejes coordenados un triángulo de área mínima en el primer cuadrante.



El área del triángulo es $S = \frac{a \cdot b}{2}$.

Con objeto de expresar la superficie en función de una sola incógnita se expresa b en función de a, para lo cual se consideran los triángulos sombreados de la figura 2, que son semejantes por lados paralelos.



$\frac{b-1}{1} = \frac{1}{a-1};\ b - 1 = \frac{1}{a-1};\ b = \frac{1}{a-1} + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow b = \frac{1+a-1}{a-1} = \frac{a}{a-1}$.

$$S = \frac{a \cdot b}{2} \Rightarrow S(a) = \frac{a \cdot \frac{a}{a-1}}{2} = \frac{a^2}{2(a-1)}.$$

La superficie es mínima cuando su primera derivada es cero:

$$S'(a) = \frac{2a \cdot (2a-2) - a^2 \cdot 2a}{4 \cdot (a-1)^2} = \frac{2a^2 - 2a - a^3}{2 \cdot (a-1)^2} = \frac{-a^3 + 2a^2 - 2a}{2 \cdot (a-1)^2} = \frac{-a\left(a^2 + 2a - 2\right)}{2 \cdot (a-1)^2}.$$

$$S'(a) = 0 \Rightarrow \frac{-a\left(a^2+2a-2\right)}{2 \cdot (a-1)^2} = 0; \quad -a\left(a^2 + 2a - 2\right) = 0 \Rightarrow a_1 = 0.$$

$a^2 + 2a - 2 = 0;\ a = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3} \Rightarrow a_2 = -1 - \sqrt{3},$

$a_3 = -1 + \sqrt{3}$.

Las raíces a_1 y a_2 carecen de sentido; la solución es $a = \sqrt{3} - 1$.

$b = \frac{a}{a-1} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1-1} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-2}$.

La pendiente de la recta es $m = -\frac{b}{a} = -\frac{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-2}}{\sqrt{3}-1} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2 + \sqrt{3}$.

La ecuación de la recta punto-pendiente es $y - y_0 = m\left(x - x_0\right)$:

$y - 1 = \left(2 + \sqrt{3}\right)(x - 1) = \left(2 + \sqrt{3}\right)x - 2 - \sqrt{3}$.

$$\underline{Recta: r \equiv y = \left(2 + \sqrt{3}\right)x + \left(-1 - \sqrt{3}\right)}.$$

****

4º) Se considera la parábola $y = -x^2 + 2x$.

a) Calcular las rectas tangentes a dicha parábola en sus puntos de intersección con el eje OX.

b) Calcular el área delimitada por la gráfica de dicha parábola y las rectas tangentes obtenidas en el apartado anterior.

----

a)

Los puntos de corte de la parábola $y = -x^2 + 2x$ son los siguientes:

$$y = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x = 0; \quad -x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow O(0,\ 0) \\ x_2 = 2 \rightarrow A(2,\ 0) \end{cases}.$$

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$y' = -2x + 2.$

$m_1 = y'(0) = -2 \cdot 0 + 2 = 2.$

$O(0,\ 0) \Rightarrow y - 0 = 2(x - 0) = 2x \Rightarrow \underline{t_1 \equiv y = 2x}.$

$m_2 = y'(2) = -2 \cdot 2 + 2 = -4 + 2 = -2.$

$A(2,\ 0) \Rightarrow y - 0 = -2(x - 2) = -2x + 4 \Rightarrow \underline{t_2 \equiv y = -2x + 4}.$

b)

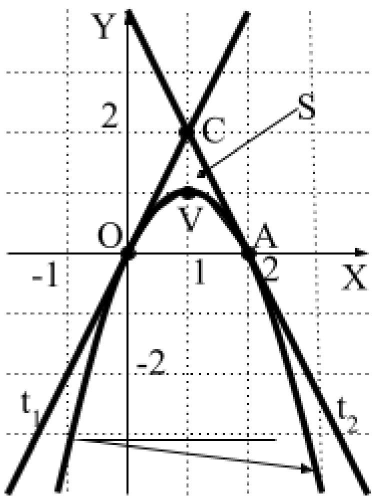
El vértice de la parábola $f(x) = -x^2 + 2x$ es el siguiente:

$f'(x) = -2x + 2 = 0 \rightarrow x = 1 \Rightarrow V(1,\ 1).$

El punto de corte de las tangentes es:

$2x = -2x + 4;\ \ 4x = 4;\ \ x = 1 \Rightarrow C(1,\ 2).$

La superficie a calcular es la siguiente:



$$S = \int_0^1 \left[t_1 - f(x)\right] \cdot dx + \int_1^2 \left[t_2 - f(x)\right] \cdot dx =$$

$$= \int_0^1 \left[2x - \left(-x^2 + 2x\right)\right] \cdot dx + \int_1^2 \left[(-2x + 4) - \left(-x^2 + 2x\right)\right] \cdot dx =$$

$$= \int_0^1 x^2 \cdot dx + \int_1^2 \left(x^2 - 4x + 4\right) \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 4x\right]_1^2 =$$

$$= \frac{1^3}{3} + \left(\frac{2^3}{3} - 2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1\right) = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - 8 + 8 - \frac{1}{3} + 2 - 4 =$$

$$= \frac{8}{3} - 2 = \frac{8-6}{3} = \frac{2}{3}.$$

$$\underline{S = \frac{2}{3}\, u^2}\,.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE CASTILLA-LA MANCHA

JUNIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puede utilizar cualquier tipo de calculadora.

OPCIÓN A

1º) Dada la función $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax - 6,\ a \in R$, se pide:

a) Determina el valor del parámetro $a \in R$ para que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en su punto de inflexión sea -3.

b) Para el valor del parámetro encontrado, calcular los extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

----

a)

Una función polinómica de tercer grado tiene un punto de inflexión para los valores de x que anulan su segunda derivada.

$f'(x) = 3x^2 + 6x + a.$ $f''(x) = 6x + 6.$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x + 6 = 0;\ 6(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -1.$

La función $f(x)$ tiene un punto de inflexión para $x = -1.$

La pendiente de una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

$f'(x) = m = -3 \Rightarrow 3 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) + a = -3;\ 3 - 6 + a = -3;$

$-3 + a = -3 \Rightarrow \underline{a = 0}.$

b)

Para $a = 0$ la función resulta: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6.$

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo en un punto es que se anule su primera derivada en ese punto:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0;\ \ 3x(x + 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -2.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para el valor que anula la primera derivada, se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo relativo.

$$f''(x) = 6x + 6 \Rightarrow \{f''(0) = 6 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ paa\ x = 0 \qquad f''(-2) = -6 <$$

.

$$f(0) = -6 \Rightarrow \underline{Mínimo: A(0,\ -6)}.$$

$$f(-2) = (-2)^3 + 3\cdot(-2)^2 - 6 = -8 + 12 - 6 = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{Máximo: B(-2,\ -2)}.$$

Teniendo en cuenta que $f(x)$ es continua en R y los puntos máximo y mínimo obtenidos, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty,\ -2) \cup (0,\ +\infty)}.$$

$$\underline{Decrecimiento \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-2,\ 0)}.$$

****

2º) Calcula la integral definida: $I = \int_{0}^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos\cos\sqrt{x}}{2} \cdot dx$. Nota: Puede ayudarte hacer el cambio de variable $t = \sqrt{x}$ y a continuación aplicar integración por partes.

$$I = \int_{0}^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos\cos\sqrt{x}}{2} \cdot dx \left\{ x = \frac{\pi^2}{4} \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \; x = 0 \rightarrow t = 0 \right\} \Rightarrow \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\cos t}{2} \cdot 2t \cdot dt =$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} t \cdot \cos\cos t \cdot dt \Rightarrow \{ u = t \rightarrow du = dt \; dv = \cos\cos t \cdot dt \rightarrow v = sen\, t \} \Rightarrow \Big[t \cdot sen\, t - \int se$$

$$= [t \cdot sen\, t + \cos\cos t]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{\pi}{2} \cdot sen\, \frac{\pi}{2} + \cos\cos \frac{\pi}{2} \right] - [0 \cdot sen\, 0 + \cos\cos 0] =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot 1 + 0 - 1 = \frac{\pi - 2}{2}.$$

$$\underline{I = \int_{0}^{\frac{\pi^2}{2}} \frac{\cos\cos\sqrt{x}}{2} \cdot dx = \frac{\pi - 2}{2}}.$$

****

3º) a) Discute el sistema de ecuaciones lineales $\{x - y + mz = 0 \quad 4x - 3y + 2z = m \quad - mx + y - z = 1 - m$ en función del parámetro $m \in R$.

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible indeterminado.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A = (1 \ - 1\, m\, 4 \ - 3\, 2 \ - m\, 1 \ - 1\,)$ y $A' = (1 \ - 1\, m\, 4 \ - 3\, 2 \ - m\, 1 \ - 1 \quad 0\, m\, 1 - m\,)$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro m es el siguiente:

$$|A| = |1 \ - 1\, m\, 4 \ - 3\, 2 \ - m\, 1 \ - 1\,| = 3 + 4m + 2m - 3m^2 - 2 - 4 =$$

$$= - 3m^2 + 6m - 3 = 0; \ m^2 - 2m + 1 = 0; \ (m - 1)^2 = 0 \Rightarrow m = 1.$$

$$\underline{Para\, m \neq 1 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$$

$$Para\, m = 1 \Rightarrow A' = (1 \ - 1\, 1\, 4 \ - 3\, 2 \ - 1\, 1 \ - 1 \quad 0\, 1\, 0\,) \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C$$

$$\Rightarrow |1 \ - 1\, 0\, 4 \ - 3\, 1 \ - 1\, 1\, 0\,| = - |1 \ - 1 \ - 1\, 1\,| = 0 \Rightarrow Rang\ A' = 2.$$

$$\underline{Para\, m = 1 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$$

b)

Para $m = 1$ el sistema resulta: $\{x - y + z = 0 \quad 4x - 3y + 2z = 1 \ - x + y - z = 0$, equivalente al siguiente sistema: $\{x - y + z = 0 \quad 4x - 3y + 2z = 1$, que es compatible indeterminado.

Haciendo $z = \lambda$: $x - y = - \lambda \ \ 4x - 3y = 1 - 2\lambda\,\} - 3x + 3y = 3\lambda \quad 4x - 3y = 1 - 2\lambda\,\} \Rightarrow x =$
.

$y = x + \lambda = 1 + \lambda + \lambda = 1 + 2\lambda.$

$$\underline{Solución: x = 1 + \lambda,\ y = 1 + 2\lambda,\ z = \lambda,\ \forall \lambda \in R.}$$

****

4º) Sea r la recta determinada por el punto $P(1,\ 0,\ 1)$ y el vector $\overrightarrow{v_r} = (1,\ -1,\ 0)$.

$a)$ Calcula el punto de r más cercano al punto $Q(0,\ 0,\ 1)$.

$b)$ Calcula el punto simétrico de Q respecto a r.

$a)$

El haz de planos perpendiculares a r es de la forma $\beta \equiv x - y + D = 0$.

De los infinitos planos pertenecientes al haz β, el plano π que contiene al punto $Q(0,\ 0,\ 1)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \beta \equiv x - y + D = 0 \\ Q(0,\ 0,\ 1) \end{array}\right\} \Rightarrow 0 - 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow \pi \equiv x - y =$$

.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 \end{cases}$.

El punto M, intersección de la recta r con el plano π es la solución del sistema que forman:

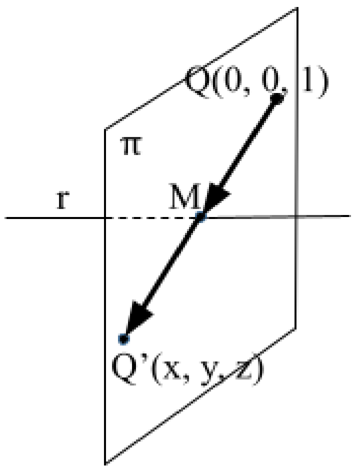
$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 \end{cases} \\ \pi \equiv x - y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (1 + \lambda) - (-\lambda) = 0;\ \ 1 + \lambda +$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow M\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\right).$$

$$\underline{El\ punto\ de\ r\ más\ próximo\ a\ Q(0,\ 0,\ 1)\ es\ M\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\right)}.$$

$b)$

Para que Q' sea el simétrico de Q con respecto a r tiene que cumplirse que:



$$\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{MQ'} \Rightarrow [M - Q] = \left[Q' - M\right];$$

$$\left[\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\right) - (0,\ 0,\ 1)\right] = \left[(x,\ y,\ z) - \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\right)\right];$$

$$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right) = \left(x - \frac{1}{2},\ y - \frac{1}{2},\ z - 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow x = 1 \\ y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow y = 1 \\ z - 1 = 0 \rightarrow z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{Q'(1,\ 1,\ 1)}$$

.

****

OPCIÓN B

1º) a) Enuncia los teoremas de Bolzano y Rolle.

b) Razona que la ecuación $2e^{x} + x^{5} = 0$ tiene al menos una solución real.

c) Razona que, de hecho, dicha solución es única.

----

a)

El teorema de Bolzano dice que "si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$".

El teorema de Rolle dice que "si una función $f(x)$ en continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), con $a, b \in R$ y $a < b$, y se cumple que $f(a) = f(b)$, existe al menos un valor c, $a < c < b$ tal que $f'(c) = 0$".

b)

Probar lo pedido es equivalente a demostrar que la función $f(x) = 2e^{x} + x^{5}$ tiene al menos una solución real.

La función $f(x)$ es continua y derivable en su dominio, que es R, por ser la suma de dos funciones continuas y derivables en R, por lo cual le es aplicable el teorema de Bolzano en cualquier intervalo cerrado que se considere, por ejemplo, $[-2, 0]$:

$$f(-2) = 2\cdot e^{-2} + (-2)^{5} = \frac{2}{e^{2}} - 32 < 0 \; f(0) = 2\cdot e^{0} + 0 = 2\cdot 1 = 2 > 0 \quad \}\Rightarrow \exists c$$

.

$\underline{Lo\ anterior\ prueba\ que\ 2e^{x} + x^{5} = 0\ tiene\ al\ menos\ una\ solución\ real}.$

c)

Ya se ha probado que la ecuación $2e^{x} + x^{5} = 0$ tiene al menos una solución real; ahora se debe demostrar que esa raíz es única.

Teniendo en cuenta la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ y que:

$f'(x) = 2e^{x} + 5x^{4} > 0,\ \forall x \in R$, lo cual significa que la función es monótona creciente lo que implica que tenga más de una solución.

$\underline{Queda\ demostrado\ lo\ pedido}.$

****

2º) a) Calcula el área de la región acotada por las gráficas de las siguientes parábolas: $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y $g(x) = -x^2 + 2x + 11$.

b) Calcula $c \in R$ para que las rectas tangentes a las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ en el punto de abscisas $x = e$ tengan la misma pendiente.

Los puntos de corte de las dos parábolas son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

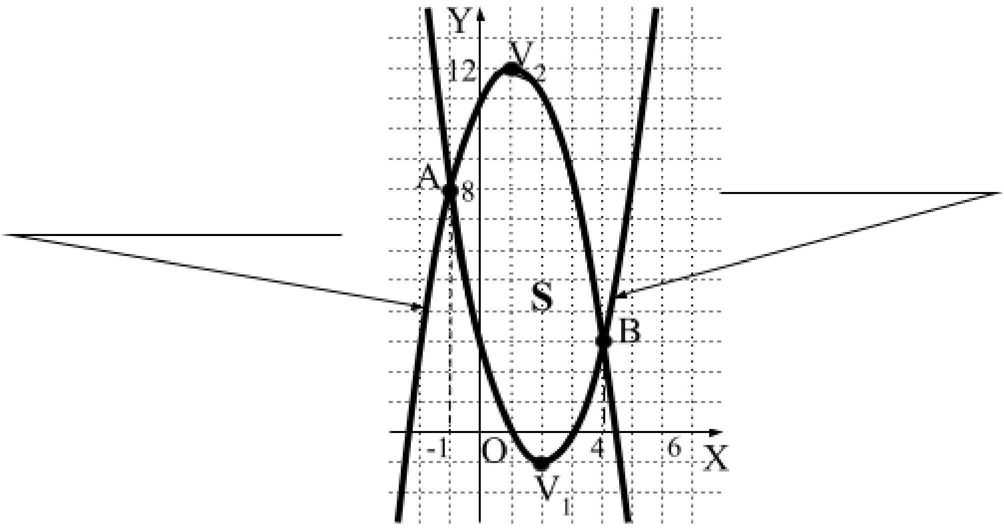
$$x^2 - 4x + 3 = -x^2 + 2x + 11;\;\; 2x^2 - 6x - 8 = 0;\;\; x^2 - 3x - 4 = 0;$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \rightarrow A(-1,\ 8) \\ x_2 = 4 \rightarrow B(4,\ 3) \end{cases}.$$

Los vértices de las parábolas son los siguientes:

$$f'(x) = 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow V_1(2,\ -1).$$

$$g'(x) = -2x + 2 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow V_2(1,\ 12).$$



La representación gráfica, aproximada, de la situación es la indicada en la figura.

En el intervalo correspondiente al área a calcular, todas las ordenadas de la parábola $g(x) = -x^2 + 2x + 11$ son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola $f(x) = x^2 - 4x + 3$, por lo cual el área a calcular es la siguiente:

$$S = \int_{-1}^{4}\left[\left(-x^2 + 2x + 11\right) - \left(x^2 - 4x + 3\right)\right]dx = \int_{-1}^{4}\left(-2x^2 + 6x + 8\right)dx =$$

$$= \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} + 8x\right]_{-1}^{4} = \left[-\frac{2x^3}{3} + 3x^2 + 8x\right]_{-1}^{4} =$$

$$= \left(-\frac{2\cdot 4^3}{3} + 3\cdot 4^2 + 8\cdot 4\right) - \left[-\frac{2\cdot(-1)^3}{3} + 3\cdot(-1)^2 + 8\cdot(-1)\right] =$$

$$= -\frac{128}{3} + 48 + 32 - \frac{2}{3} - 3 + 8 = 85 - \frac{130}{3} = \frac{255-130}{3} = \frac{125}{3}.$$

$$\underline{S = \frac{125}{3}\, u^2.}$$

$b)$

Por ser la pendiente a una recta en un punto igual que el valor de su derivada en ese punto, se trata de igualar los valores de las respectivas derivadas:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 2x - 4 \\ g'(x) = -2x + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x) = g'(x) \Rightarrow 2x - 4 = -2x + 2;\ 4x =$$

.

$$\underline{El\ valor\ pedido\ es\ x = \frac{3}{2}.}$$

****

3º) Sabiendo que $|D| = |2\ 2\ 3\ x\ y\ z\ a\ 2b\ 3c\ | = 10$, donde $x,\ y,\ z,\ a,\ b,\ c \in R$, calcula los siguientes determinantes: $|M| = \left|14\ 14\ 21\ x\ +\ 4\ y\ +\ 4\ z\ +\ 6\ \frac{a}{5}\ \frac{2b}{5}\ \frac{3c}{5}\ \right|$ y $|N| = |0\ 3x\ y\ z\ \ 0\ 3a\ 2b\ 3c\ \ 0\ 5\ \ 6\ 0\ \ 2\ 3\ \ 0\ 0\ \ |$, indicando las propiedades que usas en cada caso para justificar tu respuesta.

$$|M| = \left|14\ 14\ 21\ x\ +\ 4\ y\ +\ 4\ z\ +\ 6\ \frac{a}{5}\ \frac{2b}{5}\ \frac{3c}{5}\ \right| = \left|14\ 14\ 21\ x\ y\ z\ \frac{a}{5}\ \frac{2b}{5}\ \frac{3c}{5}\ \right| + \left|\right.$$

.

$$A\ =\ 7 \cdot \frac{1}{5} \cdot |2\ 2\ 3\ x\ y\ z\ a\ 2b\ 3c\ | = \frac{7}{5} \cdot 10\ =\ 14.$$

$$B\ =\ 7 \cdot 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot |2\ 2\ 3\ 2\ 2\ 3\ a\ 2b\ 3c\ | = \frac{14}{5} \cdot 0\ =\ 0.$$

Sustituyendo los valores obtenidos de A y B:

$$\underline{|M| = \left|14\ 14\ 21\ x\ +\ 4\ y\ +\ 4\ z\ +\ 6\ \frac{a}{5}\ \frac{2b}{5}\ \frac{3c}{5}\ \right| = 14.}$$

$$|N| = |0\ 3x\ y\ z\ \ 0\ 3a\ 2b\ 3c\ \ 0\ 5\ \ 6\ 0\ \ 2\ 3\ \ 0\ 0\ \ | = -\ 5 \cdot |3x\ y\ z\ 3a\ 2b\ 3c\ 6\ 2\ 3\ | = -\ 5 \cdot 3$$

$$= -\ 15 \cdot |2\ 2\ 3\ x\ y\ z\ a\ 2b\ 3c\ | = -\ 15 \cdot 10\ = -\ 150.$$

(Nótese que el valor no cambia de signo por haber intercambiado dos líneas entre si dos veces)

$$\underline{|N| = |0\ 3x\ y\ z\ \ 0\ 3a\ 2b\ 3c\ \ 0\ 5\ \ 6\ 0\ \ 2\ 3\ \ 0\ 0\ \ | = -\ 150.}$$

En la realización de los dos apartados del ejercicio se han utilizado las siguientes propiedades de los determinantes:

1ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se descomponen en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en dicha línea el primero y el segundo sumandos, respectivamente, siendo los restantes elementos iguales a los del determinante inicial.

2ª.- Si un determinante tiene dos líneas paralelas iguales o proporcionales su valor es cero.

3ª.- Si se intercambian dos líneas de un determinante su valor cambia de signo.

4ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se multiplican o dividen por un número su valor queda multiplicado o dividido por dicho número.

****

4º) Dados los planos $\pi_1 \equiv ax + y + 2z = 2$, $\pi_2 \equiv x + y + z = 0$ y $\pi_3 \equiv x + ay + z = a$, donde $a \in R$, se pide:

a) Estudiar la posición relativa de los planos anteriores en función del parámetro a.

b) Para $a = 1$, calcular la distancia entre π_2 y π_3.

----

a)

Los tres planos determinan las siguientes matrices de coeficientes y ampliada:

$M = (a\ 1\ 2\ 1\ 1\ 1\ 1\ a\ 1\ )\ y\ M' = (a\ 1\ 2\ 1\ 1\ 1\ 1\ a\ 1 \quad 2\ 0\ a\ ).$

Según que los rangos de estas matrices, la posición relativa de los planos son las siguientes:

1º. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow Los\ planos\ se\ cortan\ en\ un\ punto.$

2º. -- $Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Los\ planos\ son\ secantes\ dos\ a\ dos.$

3º. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow Los\ planos\ se\ cortan\ en\ una\ recta.$

4º. -- $Rang\ M = 1;\ Rang\ M' = 2 \Rightarrow Los\ planos\ son\ paralelos.$

5º. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 1 \Rightarrow Los\ planos\ son\ coincidentes.$

$Rang\ M \Rightarrow |a\ 1\ 2\ 1\ 1\ 1\ 1\ a\ 1\ | = a + 2a + 1 - 2 - a^2 - 1 = - a^2 + 3a - 2 = 0;$

$a^2 - 3a + 2 = 0;\ \ x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow a_1 = 1,\ a_2 = 2.$

$\underline{Para\ \{a \neq 1\ a \neq 2\ \} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow Los\ planos\ se\ cortan\ en\ un\ punto}$

.

$Para\ a = 1\ es\ M' = (1\ 1\ 2\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \quad 2\ 0\ 1\ ) \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \left\{C_2,\ C_3,\ C_4\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |1\ 2\ 2\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ | = 1 + 2 - 2 - 2 = - 1 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$

$\underline{Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow \pi_2\ y\ \pi_3\ paralelos\ y\ secantes\ a\ \pi_3.}$

$Para\ a = 2\ es\ M' = (2\ 1\ 2\ 1\ 1\ 1\ 1\ 2\ 1\quad 2\ 0\ 2\ ) \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |2\ 1\ 2\ 1\ 1\ 0\ 1\ 2\ 2\ | = 4 - 4 - 2 + 2 = 0 \Rightarrow Rang\ M' = 2.$

$\underline{Para\ a = 2 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow Los\ planos\ se\ cortan\ en\ una\ recta.}$

$b)$

Para $a = 1$ los planos π_2 y π_3 son paralelos:

$\pi_2 \equiv x + y + z = 0$ y $\pi_3 \equiv x + y + z = 1.$

La distancia entre dos planos paralelos es $d(\pi_2,\ \pi_3) = \frac{|D_2 - D_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$:

$$d(\pi_2,\ \pi_3) = \frac{|D_2 - D_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|0-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\underline{d(\pi_2,\ \pi_3) = \frac{\sqrt{3}}{3}\ unidades.}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE CASTILLA-LA MANCHA

SEPTIEMBRE – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puede utilizar cualquier tipo de calculadora.

OPCIÓN A

1º) Se quiere construir un depósito de chapa abierto superiormente con forma de prisma recto de base cuadrada, de 1.000 m^3 de capacidad, lo más económico posible. Sabiendo que:

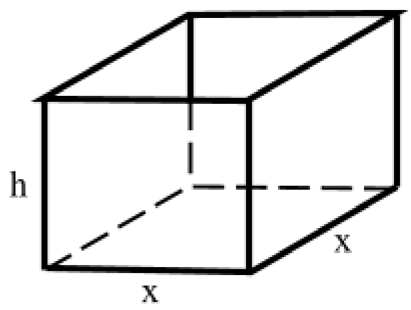
El coste de la chapa usada para los laterales es de 100 euros el metro cuadrado.

El coste de la chapa usada para la base es de 200 euros metro cuadrado.

¿Qué dimensiones debe tener el depósito? ¿Cuál es el precio de dicho depósito?

$a)$

De la observación de la figura podemos deducir la expresión del volumen, de la cual se expresa la altura en función de x con objeto de expresar el coste como una función de x.



$$V = x^2 \cdot h = 1.000 \Rightarrow h = \frac{1.000}{x^2}.$$

$$Coste = C(x,\ y) = \overbrace{x^2 \cdot 200}^{Suelo} + \overbrace{4 \cdot x \cdot h \cdot 100}^{Pared\ lateral} = 200x^2 + 400 \cdot x \cdot h =$$

$$= 200x \cdot (x + 2h).$$

$$C(x) = 200x \cdot \left(x + \frac{2.000}{x^2}\right) = 200x \cdot \frac{x^3 + 2.000}{x^2} = 200 \cdot \frac{x^3 + 2.000}{x}.$$

Es condición necesaria para que el coste sea mínimo que se anule su primera derivada:

$$C'(x) = 200 \cdot \frac{3x^2 \cdot x - (x^3 + 2.000) \cdot 1}{x^2} = 0 \Rightarrow 3x^3 = x^3 + 2.000;\;\; 2x^3 = 2.000;$$

$x^3 = 1.000 = 10^3 \Rightarrow x = 10.$ $\qquad h = \frac{1.000}{10^2} = 10.$

$\underline{El\ coste\ es\ mínimo\ cuando\ el\ depósito\ es\ un\ cubo\ de\ 10\ metros\ de\ arista.}$

El coste mínimo es: $C(10) = 200 \cdot \frac{10^3 + 200}{10} = 20 \cdot 1.200 = 24.000.$

$\underline{El\ coste\ mínimo\ es\ de\ 24.000\ euros.}$

****

2º) Dada la función $g(x) = (x + b) \cdot \cos cos\, x, \ \ x \in R$.

a) Calcula la primitiva $G(x)$ de $g(x)$ que verifica $G(0) = 1$.

b) Calcula el valor de $b \in R$ sabiendo que $\frac{G(x) - g'(x)}{x} = -2$.

----

a)

$G(x) = \int f(x)dx = \int [(x + b) \cos cos\, x\,] dx \Rightarrow \{x + b = u \rightarrow du = dx\ dv = \cos cos\, x\, dx$

$\Rightarrow (x + b) \cdot sen\, x - \int sen\, x \cdot dx = (x + b) \cdot sen\, x + \cos cos\, x + C = G(x).$

$$G(0) = 1 \Rightarrow (0 + b) \cdot sen\, 0 + \cos cos\, 0 + C = 1;\ \ 1 + C = 1 \Rightarrow C = 0.$$

$$\underline{G(x) = (x + b) \cdot sen\, x + \cos cos\, x}.$$

b)

$$g'(x) = 1 \cdot \cos cos\, x - (x + b) \cdot sen\, x = \cos cos\, x - (x + b) \cdot sen\, x .$$

$$\frac{G(x) - g'(x)}{x} = -2 \Rightarrow \frac{[(x+b) \cdot sen\, x + \cos cos\, x\,] - [\cos cos\, x - (x+b) \cdot sen\, x\,]}{x} = -2 ;$$

$\frac{(x+b) \cdot sen\, x + \cos cos\, x - \cos cos\, x + (x+b) \cdot sen\, x}{x} = \frac{2 \cdot (x+b) \cdot sen\, x}{x} = -2; \quad \frac{(x+b) \cdot sen\, x}{x} = -1;$

$\frac{x+b}{x} \cdot \frac{sen\, x}{x} = -1$. Sabiendo que $\frac{sen\, x}{x} = 1$:

$$(x + b) = -1 \Rightarrow \underline{b = -1}.$$

****

3º) Dadas las matrices:

$A = (1\,0 \ \ - 1\,1\,)$, $B = (1\,0\,0\,0\,1\,0\,0 \ \ - 1\,1\,)$, $C = (1\,2\,3 \ \ - 1\,2 \ \ - 3\,)$ y $D = (3\,1\,2\,0\,1\,0\,)$:

a) ¿Qué dimensión debe tener una matriz X para poder efectuar el producto matricial $A \cdot X \cdot B$?

b) Despeja X en la ecuación matricial $A \cdot X \cdot B + C = D$.

c) Calcula la matriz X.

----

a)

El producto de matrices cumple que: $A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = C_{m\times p}$.

En el caso que nos ocupa: $A_{2\times 2} \cdot X_{n\times p} = M_{2\times p} \Rightarrow n = 2$.

Por otra parte tiene que ser posible: $X_{2\times p} \cdot C_{3\times 3} = M_{2\times 3} \Rightarrow p = 3$.

$\underline{La\ matriz\ X\ tiene\ por\ dimensión\ 2\times 3}$.

Ejemplo: $A \cdot X \cdot B = (1\,0 \ \ - 1\,1\,) \cdot (1\,2\,3\,4\,5\,6\,) \cdot (1\,0\,0\,0\,1\,0\,0 \ \ - 1\,1\,) =$

$= (1\,2\,3\,3\,3\,3\,) \cdot (1\,0\,0\,0\,1\,0\,0 \ \ - 1\,1\,) = (1 \ \ - 1\,3\,3\,0\,3\,)$.

b)

$A \cdot X \cdot B + C = D;\ \ A \cdot X \cdot B = D - C;$

$A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot (D - C) \cdot B^{-1};\ \ I \cdot X \cdot I = A^{-1} \cdot (D - C) \cdot B^{-1}$.

$\underline{X = A^{-1} \cdot (D - C) \cdot B^{-1}}$.

c)

$A = (1\,0 \ \ - 1\,1\,);\ \ |A| = 1;\ \ A^{t} = (1 \ \ - 1\,0\,1\,);\ \ Adj.\ de\ A^{t} = (1\,0\,1\,1\,) = A^{-1}$.

$(I) = (1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,) \Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 + F_2\} \Rightarrow (1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,1\,) \Rightarrow$

$\Rightarrow B^{-1} = (1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,1\,)$.

$D - C = (3\,1\,2\,0\,1\,0\,) - (1\,2\,3 \ \ - 1\,2 \ \ - 3\,) = (2 \ \ - 1 \ \ - 1\,1 \ \ - 1\,3\,)$.

Sustituyendo los valores obtenidos en la expresión de X:

$$X = A^{-1}\cdot(D - C)\cdot B^{-1} = (1\ 0\ 1\ 1\,)\cdot(2\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ 1\ \ -\ 1\ 3\,)\cdot(1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\,) =$$

$$= (2\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ 3\ \ -\ 2\ 2\,)\cdot(1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\,) = (2\ \ -\ 2\ \ -\ 1\ 3\ 0\ 2\,).$$

$$\underline{X = (2\ \ -\ 2\ \ -\ 1\ 3\ 0\ 2\,)}.$$

****

4º) Dadas las rectas $r\equiv 2-x=y-2=\frac{z}{3}$ y $s\equiv\begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=c-3\lambda \end{cases}\ \lambda\in R$, donde $c\in R$, se pide:

a) Estudiar la posición relativa de r y s en función del parámetro $c\in R$.

b) Hallar el punto de intersección de r y s cuando dichas rectas sean secantes.

----

a)

Un punto y un vector de cada una de las rectas son los siguientes:

Recta r: $A(2,\ 2,\ 0)\ y\ \vec{v}_r=(-1,\ 1,\ 3)$. Recta s: $B(-1,\ -1,\ c)\ y\ \vec{v}_s=(2,\ 1,\ -3)$.

Los vectores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ son linealmente independiente por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A\in r$ y extremo el punto $B\in s$: $\vec{w}=\vec{AB}=[B-A]=[(-1,\ -1,\ c)-(2,\ 2,\ 0)]=(-3,\ -3,\ c)$.

Según que los vectores $\{\vec{v}_r,\ \vec{v}_s,\ \vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\vec{v}_r,\ \vec{v}_s,\ \vec{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\{\vec{v}_r,\ \vec{v}_s,\ \vec{w}\}\Rightarrow\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ -3 & -3 & c \end{vmatrix}=-c-18+9+9+9-2c=$$

$$=-3c+9=0;\ \ -c+3=0\Rightarrow c=3.$$

$$Para\ c=3\Rightarrow Rang\{\vec{v}_r,\ \vec{v}_s,\ \vec{w}\}=2\Rightarrow\vec{v}_r,\ \vec{v}_s,\ \vec{w}\ son\ coplanarios.$$

$\underline{Para\ c=3\ las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cortan\ en\ un\ punto}$.

$$Para\ c\neq 3\Rightarrow Rang\{\vec{v}_r,\ \vec{v}_s,\ \vec{w}\}=3\Rightarrow\vec{v}_r,\ \vec{v}_s,\ \vec{w}\ no\ son\ coplanarios.$$

$\underline{Para\ c{\neq}3\ las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan.}$

$b)$

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es: $r\equiv\{x = 2 - \mu\ y = 2 + \mu\ z = 3\mu$.

Para $c = 3$ es $s\equiv\{x =- 1 + 2\lambda\ y =- 1 + \lambda\ \ z = 3 - 3\lambda$.

$2 - \mu =- 1 + 2\lambda\ \ 2 + \mu =- 1 + \lambda\ \ \ \ 3\mu = 3 - 3\lambda\} \Rightarrow \mu =- 3 + \lambda\ \ \ \mu = 1 - \lambda\}$
.

$\underline{Para\ c = 3\ el\ punto\ de\ corte\ de\ las\ rectas\ r\ y\ s\ es\ P(3,\ 1,\ \ - 3)}$

****

OPCIÓN B

1º) Dada la función $f(x) = 2x \cdot e^{1-x}$, se pide:

a) Estudiar si tiene asíntotas horizontales.

b) Calcular sus puntos de inflexión.

----

a)

Las asíntotas horizontales de una función son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a más infinito o menos infinito.

$$f(x) = f\left(2x \cdot e^{1-x}\right) = -\infty \cdot e^{+\infty} = -\infty.$$

$$f(x) = f\left(2xe^{1-x}\right) = \frac{2x}{e^{x-1}} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{e^{x-1}} = \frac{2}{e^{\infty}} = \frac{2}{\infty} = 0.$$

$$\underline{La\ recta\ x = 0\ es\ asíntota\ horizontal\ en\ la\ parte\ positiva\ del\ eje\ X.}$$

b)

La condición necesaria para que una función tenga un punto de inflexión es que se anule su segunda derivada.

$$f(x) = \frac{2x}{e^{x-1}}.$$

$$f'(x) = \frac{2 \cdot e^{x-1} - 2x \cdot e^{x-1}}{\left(e^{x-1}\right)^2} = \frac{2-2x}{e^{x-1}} = \frac{2(1-x)}{e^{x-1}}.$$

$$f''(x) = \frac{-2 \cdot e^{x-1} - 2(1-x) \cdot e^{x-1}}{\left(e^{x-1}\right)^2} = \frac{-2-2(1-x)}{e^{x-1}} = \frac{-2-2+2x}{e^{x-1}} = \frac{2x-4}{e^{x-1}} = \frac{2(x-2)}{e^{x-1}}.$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{2(x-2)}{e^{x-1}} = 0;\ \ 2(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2.$$

$$f(2) = 2 \cdot 2 \cdot e^{1-2} = 4e^{-1} = \frac{4}{e}.$$

$$\underline{Punto\ de\ inflexión: P\left(2, \frac{4}{e}\right).}$$

****

2º) Dadas las funciones $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = 3 - x$, se pide:

a) Esbozar la región encerrada entre las gráficas de $f(x)\ y\ g(x)$.

b) Calcular el área de la región anterior.

----

a)

La función $f(x) = \frac{2}{x}$ es simétrica con respecto al eje Y por ser $f(-x) = -f(x)$ y pasa por los puntos $A(1, 2)$, $B(2, 1)$ y sus simétricos $M(-2, -1)$, $N(-1, -2)$.

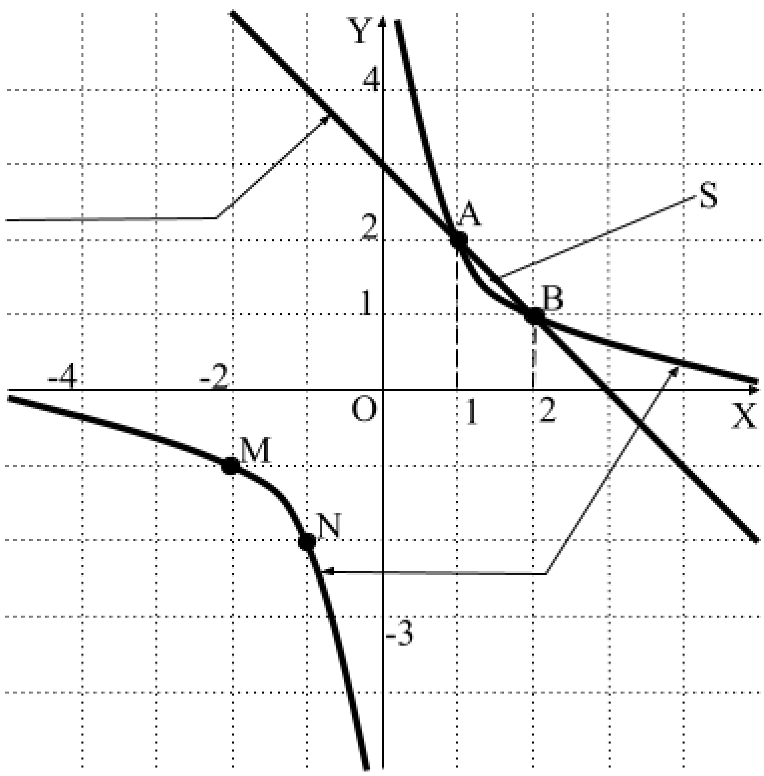
La función $g(x) = 3 - x$ es una recta de pendiente negativa que pasa por los puntos $C(0, 3)\ y\ D(3, 0)$.

Los puntos de corte de las dos funciones se obtienen resolviendo la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{2}{x} = 3 - x;\ \ 2 = 3x - x^2;\ \ x^2 - 3x + 2 = 0;\ \ x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} =$$

$$= \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \rightarrow A(1, 2) \\ x_2 = 2 \rightarrow B(2, 1) \end{cases}.$$

La representación gráfica de la situación se expresa en la figura adjunta.



$b)$

Como puede observarse en la figura, en el intervalo de la superficie a calcular, que es $(1,\ 2)$, las ordenadas correspondientes a la recta son iguales o mayores que las correspondientes coordenadas de la curva, por lo cual la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_1^2 [g(x) - f(x)] \cdot dx = \int_1^2 \left[(3 - x) - \frac{2}{x}\right] \cdot dx = \int_1^2 \left(3 - x - \frac{2}{x}\right) \cdot dx =$$

$$= \left[3x - \frac{x^2}{2} - 2Lx\right]_1^2 = \left(3 \cdot 2 - \frac{2^2}{2} - 2 \cdot L2\right) - \left(3 \cdot 1 - \frac{1^2}{2} - 2 \cdot L1\right) =$$

$$= 6 - 2 - 2L2 - 3 + \frac{1}{2} + 2 \cdot 0 = 1 + \frac{1}{2} - L4 = \frac{3}{2} - L4 = \underline{\frac{3 - L16}{2} \cong 0,1137\, u^2}$$

.

****

3º) $a)$ Enunciar el teorema de Rouché-Fröbenius.

$b)$ Razona que un sistema de tres ecuaciones lineales con cuatro incógnitas no puede ser compatible determinado.
$c)$ Determina para qué valores del parámetro $a \in R$ el sistema $\{2x + 3y - z + 2t = 2\ 5x + y + 2z = 1 \quad x + 8y - 5z + 6t = a$ es incompatible.

$a)$

El teorema de Rouché-Fröbenius puede enunciarse del modo siguiente:

La condición necesaria y suficiente para que un sistema de m ecuaciones con n incógnitas tenga solución es que coincida el rango de la matriz de los coeficientes con el rango de la matriz ampliada con los términos independientes.

Si el rango es igual al número de incógnitas el sistema es compatible determinado.

Si el rango es menor que el número de incógnitas el sistema es compatible indeterminado.

En el caso particular de un sistema homogéneo, la condición necesaria y suficiente para que un sistema sea compatible es que el rango de la matriz de los coeficientes sea menor que el número de incógnitas. La condición necesaria y suficiente para que un sistema de n ecuaciones homogéneas con n incógnitas sea compatible es que el determinante de la matriz de los coeficientes sea nulo.

$b)$

Según el teorema definido anteriormente, para que un sistema sea compatible determinado tiene que cumplirse que el rango de las matrices de coeficientes y ampliada tiene que ser igual e igual al número de incógnitas. Si el sistema tiene tres ecuaciones, los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada tienen, como máximo, rango 3, que es menor que el número de incógnitas, que es 4, por lo cual:

$$\underline{Un\ sistema\ con\ 3\ icuaciones\ y\ 4\ incógnitas\ no\ puede\ ser\ C.\ D.}$$

$c)$

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$M = (2\ 5\ 1\ 3\ 1\ 8\ \ -1\ 2\ -5\ 2\ 0\ 6\ )$ y $M' = (2\ 5\ 1\ 3\ 1\ 8\ \ -1\ 2\ -5\ 2\ 0\ 6\ \ 2\ 1\ a\ )$.

El sistema es incompatible cuando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada no son iguales; como quiera que el máximo rango de la matriz de coeficientes es 2, por ser $F_3 = 3F_1 - F_2$, para que el sistema sea incompatible es

necesario que el rango de la matriz ampliada M’ sea 3.
$Rang\ M' = 3, \forall a \in R - \{5\}.$

$$\underline{El\ sistema\ es\ incompatibla\ \forall a \in R\ - \{5\}}.$$

****

4º) Dados los planos $\pi \equiv 2x - 3y + z = 0$, $\pi' \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = 1 + 2\lambda + \mu \end{cases}$ $\lambda, \mu \in R$, y el punto $P(2, -3, 0)$, se pide:

a) Hallar la ecuación continua de la recta r que pasa por P y es paralela a la recta s determinada por la intersección de π y π'.

b) Calcular el ángulo entre los planos π y π'.

----

a)

Un punto de π' es $A(1, 0, 1)$ y tiene como vectores directores a $\overrightarrow{u} = (1, 1, 2)$ y $\overrightarrow{v} = (1, -1, 1)$.

La expresión de $\pi' \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = 1 + 2\lambda + \mu \end{cases}$ dado por su expresión general es:

$$\pi'\left(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x - 1 & y & z - 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x - 1) + 2y - (z - 1) - (z - 1) + 2(x - 1) - y = 0;$$

$$3(x - 1) + y - 2(z - 1) = 0;\ \ 3x - 3 + y - 2z + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi' \equiv 3x + y - 2z - 1 = 0.$$

Los planos π y π' determinan la recta $s \equiv \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x + y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$.

Un vector director de una recta dada por la intersección de dos planos es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan

$$s \equiv \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x + y - 2z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{n} = (2, -3, 1) \\ \overrightarrow{n'} = (3, \end{cases}$$

$$= 6i + 3j + 2k + 9k - i + 4j = 5i + 7j + 11k \Rightarrow \overrightarrow{v_s} = (5, 7, 11).$$

La expresión de la recta pedida r dada, por ejemplo, por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$\underline{r \equiv \begin{cases} x = 2 + 5\lambda \\ y = -3 + 7\lambda \\ z = 11\lambda \end{cases}}.$$

b)

El ángulo entre los planos π y π' es el menor ángulo que forman sus vectores normales, que son $\vec{n} = (2, \ -3, \ 1)$ y $\vec{n'} = (3, \ 1, \ -2)$.

Por el concepto de producto escalar:

$$\left|\vec{n}\cdot\vec{n'}\right| = \left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{n'}\right|\cdot \cos cos\ \alpha \Rightarrow \cos cos\ \alpha = \frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{n'}\right|}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{n'}\right|} = \frac{|(2,-3,1)\cdot(3,1,-2)|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}} =$$

$$= \frac{|6-3-2|}{\sqrt{4+9+1}\cdot\sqrt{9+1+4}} = \frac{|-1|}{14} = 0,0714 \Rightarrow \alpha = 85°\ 54'\ 14''.$$

$\underline{Los\ planos\ \pi\ y\ \pi'\ forman\ un\ ángulo\ de\ 85°\ 54'\ 14''}$.

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE CATALUÑA

JUNIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Puede utilizar calculadoras, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1º) Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\left\{\begin{array}{l} 2x+4y+4z=4k-7 \\ 2x-ky=-1 \\ -2x=k+1 \end{array}\right.$:

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro k.

b) Resuelva el sistema para el caso de k = 0.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & -k & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $A'=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 4k-7 \\ 2 & -k & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro k es el siguiente:

$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & -k & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-8k=0 \Rightarrow k=0.$

$$\underline{Para\ k\neq 0 \Rightarrow Rang\ A=Rang\ A'=3=n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

Para k = 0 es $A'=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & -7 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2=-F_3\} \Rightarrow Rang.\ A'=2.$

$$\underline{Para\ k\neq 0 \Rightarrow Rang\ A=Rang\ A'=2<n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

b)

Resolvemos el sistema para k = 0, que es compatible indeterminado.

El sistema resulta $\left\{\begin{array}{l} 2x+4y+4z=-7 \\ 2x=-1 \\ -2x=1 \end{array}\right.$, cuyas soluciones son:

$$x = -\frac{1}{2};\ \ z = \lambda;\ \ y = \frac{-7-2x-4z}{4} = \frac{-7+1-4z}{4} = -\frac{3}{2} - \lambda.$$

$\underline{Solución:\ \ x = -\frac{1}{2},\ y = -\frac{3}{2} - \lambda,\ z = \lambda,\ \forall\lambda \in R.}$

****

2º) En R^3, sea la recta $r\equiv(x,\ y,\ z) = (1+\lambda,\ \lambda,\ 1-\lambda)$ y el plano π cuya ecuación general es $\pi\equiv 2x - y + z = -2$.

$a)$ Determine la posición relativa del plano π y la recta r.

$b)$ Calcule la distancia entre la recta r y el plano π.

Nota: puede calcularse la distancia de un punto de coordenadas $\left(x_0,\ y_0,\ z_0\right)$ al plano de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ con la expresión $\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

$a)$

Un vector director de la recta r y un vector normal del plano π son, respectivamente: $\overrightarrow{v_r} = (1,\ 1,\ -1)$ y $\overrightarrow{n} = (2,\ -1,\ 1)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{n}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; teniendo en cuenta que:

$$\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{n} = (1,\ 1,\ -1)\cdot(2,\ -1,\ 1) = 2 - 1 - 1 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \perp \overrightarrow{n}.$$

$\underline{\textit{La recta r y el plano } \pi \textit{ son paralelos}}.$

$b)$

La distancia entre la recta r y el plano π es la misma que la de un punto de la recta r al plano; un punto de r es $P(1,\ 0,\ 1)$.

Aplicando la fórmula recomendada al plano $\pi\equiv 2x - y + z + 2 = 0$ y al punto $P(1,\ 0,\ 1)$:

$$d(\pi,\ r) = d(P,\ \pi) = \frac{|2\cdot1-1\cdot0+1\cdot1+2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{|2-0+1+2|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{5}{\sqrt{6}}.$$

$\underline{\textit{La distancia de la recta r al plano } \pi \textit{ es } \frac{5\sqrt{6}}{6} \textit{ unidades}}.$

****

3º) Considere al función $f(x) = x \cdot e^{x-1}$.

$a)$ Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa x = 1.

$b)$ Determine los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función f.

$a)$

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = 1 \cdot e^{x-1} + x \cdot e^{x-1} = e^{x-1} \cdot (1 + x).$$

$$f'(1) = m \Rightarrow e^{0} \cdot (1 + 1) = 1 \cdot 2 = 2 \Rightarrow m = 2.$$

El punto de tangencia es el siguiente:

$$f(1) = 1 \cdot e^{1-1} = e^{0} = 1 \Rightarrow P(1, 1).$$

Ecuación de la recta punto-pendiente: $y - y_0 = m\left(x - x_0\right)$; la tangente es:

$$y - 1 = 2 \cdot (x - 1) = 2x - 2 \Rightarrow \underline{t \equiv 2x - y - 1 = 0}.$$

$b)$

Una función es creciente o decreciente en un punto cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente, en ese punto.

$$f'(x) = e^{x-1} \cdot (1 + x) = 0 \Rightarrow x = -1.$$

Teniendo en cuenta que $e^{x-1} > 0,\ \forall x \in R$, y que el dominio de la función es R, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x > -1}.$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x < -1}.$$

****

4º) Responda a las cuestiones siguientes:

a) Calcule todas las matrices de la forma $A = (1\ 0\ m\ \ -\ 2\ )$ que satisfagan la igualdad $A^2 + A = 2I$, siendo I la matriz identidad, $I = (1\ 0\ 0\ 1\ )$.

b) Justifique que si A es una matriz cuadrada que cumple $A^2 + A = 2I$, A es invertible y calcule la expresión de A^{-1} en función de las matrices A e I.

----

a)

$$A^2 = A \cdot A = (1\ 0\ m\ \ -\ 2\ ) \cdot (1\ 0\ m\ \ -\ 2\ ) = (1\ 0\ \ -\ m\ 4\ ).$$

$$A^2 + A = 2I \Rightarrow (1\ 0\ m\ \ -\ 2\ ) + (1\ 0\ \ -\ m\ 4\ ) = (2\ 0\ 0\ 2\ ) = 2I.$$

$$\underline{A^2 + A = 2I,\ \forall m \in R}.$$

$$\underline{Satisfacen\ la\ igualdad\ todas\ las\ matrices\ de\ la\ forma\ A = (1\ 0\ m\ \ -\ 2\ )}.$$

b)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

Sabiendo que el determinante de la suma de dos matrices es la suma de los determinantes de las matrices y que, el determinante del producto de dos matrices es el producto de los determinantes de las matrices:

$$A^2 + A = 2I \Rightarrow \left|A^2 + A\right| = |2I|;\ \ \left|A^2\right| + |A| = 2^2 \cdot |I|;\ \ |A \cdot A| + |A| = 4;$$

$$|A| \cdot |A| + |A| = 4 \Rightarrow |A| \neq 0.$$

$$\underline{Queda\ justificado\ que\ la\ matriz\ A\ es\ invertible}.$$

$A^2 + A = 2I$. Multiplicando por la derecha por A^{-1}:

$$A \cdot A \cdot A^{-1} + A \cdot A^{-1} = 2I \cdot A^{-1};\ \ A \cdot I + I = 2 \cdot A^{-1} \Rightarrow \underline{A^{-1} = \tfrac{1}{2} \cdot (A + I)}.$$

****

5º) Considere el tetraedro de vértices $A(x,\ 0,\ 1)$, $B(0,\ x,\ 1)$, $C(3,\ 0,\ 0)$ y $D(0,\ x,\ 0)$ siendo $0 < x < 3$.

a) Compruebe que el volumen del tetraedro viene dado por $V(x) = \frac{1}{6}\left(-\ x^2 + 3x\right)$.

b) Determine el valor de x para que el volumen sea máximo y calcule ese volumen.

Nota: Puede calcular el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D viene dado por la expresión $\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}\right|$.

----

a)

$$\overrightarrow{AB} = [B\ -\ A] = [(0,\ x,\ 1) - (x,\ 0,\ 1)] = (-\ x,\ x,\ 0).$$

$$\overrightarrow{AC} = [C\ -\ A] = [(3,\ 0,\ 0) - (x,\ 0,\ 1)] = (3\ -\ x,\ 0,\ \ -\ 1).$$

$$\overrightarrow{AD} = [D\ -\ A] = [(0,\ x,\ 0) - (x,\ 0,\ 1)] = (-\ x,\ x,\ \ -\ 1).$$

Haciendo uso de la fórmula dada:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}|-\ x\ x\ 0\ 3\ -\ x\ 0\ \ -\ 1\ \ -\ x\ x\ \ -\ 1\ | = \frac{1}{6}\cdot\left[x^2 - x^2 +\right.$$

.

<u>*Queda comprobado que el volumen del tetraedro es* $V(x) = \frac{1}{6}\left(-\ x^2 + 3x\right)$.</u>

b)

El volumen es máximo cuando se anula su primera derivada y su segunda derivada es negativa para los valores que anulan la primera:

$$V'(x) = \frac{1}{6}(-\ 2x\ +\ 3) =\ 0 \Rightarrow\ -\ 2x\ +\ 3\ =\ 0 \rightarrow x\ = \frac{3}{2}.$$

$$V''(x) = \frac{1}{6}(-\ 2) = -\ \frac{1}{3} <\ 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x\ = \frac{3}{2}.$$

$$V\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{6}\left[-\ \left(\frac{3}{2}\right)^2 +\ 3\cdot\frac{3}{2}\right] = \frac{1}{6}\cdot\left(-\ \frac{9}{4} + \frac{9}{2}\right) = \frac{1}{6}\cdot\frac{9}{4} = \frac{3}{8}.$$

<u>*El volumen máximo es para* $x\ = \frac{3}{2}$ *y su valor es* $\frac{3}{8}\ u^3$.</u>

****

6º) Dadas las parábolas $f(x) = x^2 + k^2$ y $g(x) = -x^2 + 9k^2$.

a) Calcule las abscisas, en función de k, de los puntos de corte de las parábolas.

b) Calcule el valor del parámetro k para que el área comprendida entre las parábolas sea de 576 unidades cuadradas.

----

a)

Las abscisas de los puntos de intersección de las parábolas son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$x^2 + k^2 = -x^2 + 9k^2;\ 2x^2 - 8k^2 = 0\ ;\ 2\left(x^2 - 4k^2\right) = 0 \Rightarrow \{x_1 = -2k\ x_2 = 2k$$

.

b)

Las parábolas $f(x) = x^2 + k^2$ y $g(x) = -x^2 + 9k^2$ son simétricas con respecto al eje de ordenadas.

Por ser las ordenadas de la parábola cóncava (∩) $g(x) = -x^2 + 9k^2$ mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola convexa (∪) $f(x) = x^2 + k^2$ en el intervalo del área a calcular y teniendo en cuenta su simetría, se deduce que:

$$S = 2\cdot\int_0^{2k}\left[\left(-x^2 + 9k^2\right) - \left(x^2 + k^2\right)\right]dx = 2\cdot\int_0^{2k}\left(-2x^2 + 8k^2\right)\cdot dx =$$

$$= 2\cdot\left[-\frac{2x^3}{3} + 8k^2x\right]_0^{2k} = 2\cdot\left\{\left[-\frac{2(2k)^3}{3} + 8k^2\cdot 2k\right] - 0\right\} = 2\cdot\left(16k^3 - \frac{16k^3}{3}\right) =$$

$$= 32k^3 - \frac{32k^3}{3} = \frac{96k^3 - 32k^3}{3} = \frac{64k^3}{3}.$$

$$S = 576 = \frac{64k^3}{3};\ 1.728 = 64k^3 \Rightarrow k^3 = \frac{1.728}{54} = 27 = 3^3 \Rightarrow \underline{k = 3}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE CATALUÑA

SEPTIEMBRE – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Puede utilizar calculadoras, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1º) Sea la recta $r\equiv(x,\ y,\ z) = (5 + k,\ k,\ -2 - 2k)$ y los puntos $P(1,\ 0,\ -1)$ y $Q(2,\ 1,\ 1)$.

$a)$ Calcule la ecuación paramétrica de la recta s que pasa por el punto Q y es perpendicular al plano determinado por la recta r y el punto P.

$b)$ Calcule el punto H de la recta r que equidista de los puntos P y Q.

$a)$

Un vector director de la recta r es $\vec{v}_r = (1,\ 1,\ -2)$.

Un punto de r es $A(5,\ 0,\ -2)$.

Los puntos P y A determinan el vector $\vec{PA} = [A - P] = (4,\ 0,\ -1)$.

La expresión general del plano π que determinan la recta r y el punto P es:

$$\pi\left(P;\ \vec{v}_r,\ \vec{PA}\right) \equiv \begin{vmatrix} x - 1 & y & z + 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0;\quad -(x - 1) - 8y - 4(z + 1) -$$

$$-x + 1 - 8y - 4z - 4 + y = 0 \Rightarrow \pi\equiv x + 7y + 4z + 3 = 0.$$

Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (1,\ 7,\ 4)$.

La recta s dada por unas ecuaciones paramétricas es: $\underline{s\equiv\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + 7\lambda \\ z = 1 + 4\lambda \end{cases}}$.

$b)$

Los puntos P y Q determinan el vector $\overrightarrow{PQ} = [Q - P] = (1,\ 1,\ 2)$.

El punto medio M del segmento $\overline{PQ}$ es $M\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$.

El plano mediador β del segmento $\overline{PQ}$ tiene la siguiente expresión general:

$\beta \equiv x + y + 2z + D = 0$.

Como el plano β contiene al punto M tiene que satisfacer su ecuación:

$\left.\begin{array}{l} \beta \equiv x + y + 2z + D = 0 \\ M\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 2\cdot 0 + D = 0;\ 2 +$

.

El plano mediador es: $\beta \equiv x + y + 2z - 2 = 0$.

El punto H pedido es la intersección del plano β y la recta r:

$\left.\begin{array}{l} \beta \equiv x + y + 2z - 2 = 0 \\ r \equiv \{x = 5 + k \quad y = k \quad z = -2 - 2k \end{array}\right\} \Rightarrow (5 +$

$5 + k + k - 4 - 4k - 2 = 0;\ -1 - 2k = 0;\ 1 + 2k = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$.

$H \Rightarrow \left\{ x = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \quad y = -\frac{1}{2} \quad z = -2 - 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \right\}$

.

Otra forma de hacer este ejercicio:

Un punto genérico de la recta r es $C(5 + k,\ k,\ -2 - 2k)$.

Por definición del ejercicio: $\overline{CP} = \overline{CQ}$.

$\overline{CP} = \sqrt{(5 + k - 1)^2 + (k - 0)^2 + (-2 - 2k + 1)^2} =$

$= \sqrt{(4 + k)^2 + k^2 + (-1 - 2k)^2} = \sqrt{16 + 8k + k^2 + k^2 + 1 + 4k + 4k^2} =$

$= \sqrt{6k^2 + 12k + 17}$.

$$\overline{CQ} = \sqrt{(5 + k - 2)^2 + (k - 1)^2 + (-2 - 2k - 1)^2} =$$

$$= \sqrt{(3 + k)^2 + (k - 1)^2 + (-3 - 2k)^2} =$$

$$= \sqrt{9 + 6k + k^2 + k^2 - 2k + 1 + 9 + 12k + 4k^2} = \sqrt{6k^2 + 16k + 19}.$$

$$\overline{CP} = \overline{CQ} \Rightarrow \sqrt{6k^2 + 12k + 17} = \sqrt{6k^2 + 16k + 19};$$

$12k + 17 = 16k + 19;\ \ -4k = 2;\ \ 2k = -1 \Rightarrow k = -\frac{1}{2}.$

$H \Rightarrow \left\{ x = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \qquad y = -\frac{1}{2} \qquad z = -2 - 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \right\} =$

.

****

2º) Tres números $x,\ y,\ z$, cumplen dos condiciones: que el primero es la suma de los otros dos, y que el segundo es la suma de la mitad del primero y el doble del tercero.

a) Compruebe que el cálculo de los tres números $x,\ y,\ z$, tiene una infinidad de soluciones.

b) Encuentre una expresión general de las soluciones.

----

a)

$$\left.\begin{array}{l} x = y + z \\ y = \frac{x}{2} + 2z \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ 2y = x + 4z \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ x - 2y \ \cdots \end{array}$$

.

Por ser $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$, el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el número de incógnitas es 3.

Por tratarse de un sistema homogéneo de dos ecuaciones linealmente independientes con tres incógnitas, según el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible indeterminado.

$\underline{Queda\ probado\ que\ el\ sistema\ tiene\ infinitas\ soluciones}.$

b)

Parametrizando una de las incógnitas, por ejemplo $z = \lambda$:

$$\left.\begin{array}{l} x - y = \lambda \\ x - 2y = -4\lambda \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x - y = \lambda \\ -x + 2y = 4\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow y = 5\lambda. \qquad x = \lambda \ \cdots$$

.

$\underline{Solución: \left\{\begin{array}{l} x = 6\lambda \\ y = 5\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.,\ \forall\lambda \in R}.$

****

3º) Quiere diseñarse un envase de helado con forma de prisma regular de base cuadrada y con una capacidad de 80 cm^3. Para elaborar la tapa y la superficie lateral, se usará un determinado material que vale 1 euro/cm^2, pero para la base deberá utilizarse un material que es un 50 % más caro.

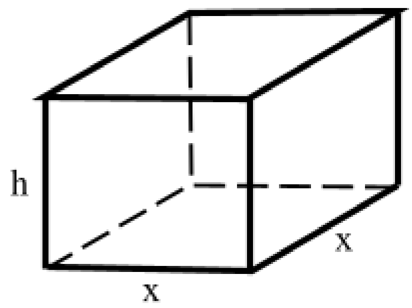
a) Si x es la medida, en cm, del lado de la base, compruebe que la función que determina el precio del envase es $P(x) = 2,5x^2 + \frac{320}{x}$.

b) Calcule las medidas que debe tener el envase para que el precio sea el mínimo posible.

----

a)

De la observación de la figura podemos deducir la expresión del volumen, de la cual se expresa la altura en función de x con objeto de expresar el coste como una función de x.



$$V = x \cdot x \cdot h = 80 \Rightarrow h = \frac{80}{x^2}.$$

$$Coste = C(x,\ h) = x^2 \cdot \overbrace{1,5}^{Base} + x^2 \cdot \overbrace{1}^{Techo} + 4 \cdot x \cdot h \cdot \overbrace{1}^{Pared\ lateral} = 1,5x^2 + x^2 + 4x \cdot h$$

$= 2,5x^2 + 4x \cdot h.$ Sustituyendo el valor de h obtenido en el volumen:

$$C(x) = 2,5x^2 + 4x \cdot \frac{80}{x^2} = \underline{2,5x^2 + \frac{320}{x}}.$$

b)

Es condición necesaria para que el coste sea mínimo que se anule su primera derivada:

$$C'(x) = 5x - \frac{320}{x^2} = \frac{5x^3 - 320}{x^2} = 0 \Rightarrow 5x^3 - 320 = 0;\ x^3 - 64 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 = 64 \Rightarrow x = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 4.$$

$\underline{El\ coste\ es\ mínimo\ cuando\ el\ ancho\ de\ la\ base\ es\ de\ 4\ centímetros.}$

El coste mínimo es: $C(4) = 2,5 \cdot 4^2 + \frac{320}{4} = 40 + 80 = 120.$

$\underline{El\ coste\ mínimo\ es\ de\ 120\ euros}.$

****

4º) Sea la función $f(x) = sen\, x$.

a) Calcule la ecuación de las rectas tangentes a la función f en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = \pi$, respectivamente. Encuentre las coordenadas del punto en el que se cortan las dos rectas.

b) Calcule el área de la región limitada por la gráfica de la función f y las rectas tangentes del apartado anterior (en el caso de no haber resuelto el apartado anterior, suponga que las rectas son $y = x$ e $y = -x + \pi$, respectivamente).

----

a)

Los puntos de tangencia son los siguientes:

$f(0) = sen\, 0 = 0 \Rightarrow O(0,\ 0)$. $\qquad f(\pi) = sen\, \pi = 0 \Rightarrow A(\pi,\ 0)$.

La pendiente de una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = cos\, x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow m_1 = \cos 0 = 1 \\ x = \pi \Rightarrow m_2 = \cos \pi = -1 \end{cases}.$$

La recta punto-pendiente tiene por expresión: $y - y_0 = m\left(x - x_0\right)$.

$t_1 \Rightarrow y - 0 = 1 \cdot (x - 0) \Rightarrow \underline{t_1 \equiv y = x}.$

$t_2 \Rightarrow y - 0 = -1 \cdot (x - \pi) \Rightarrow \underline{t_2 \equiv y = -x + \pi}.$

La abscisa del punto de corte de las dos tangentes es la solución de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$\left.\begin{array}{l} y = x \\ y = -x + \pi \end{array}\right\} \Rightarrow x = -x + \pi;\ \ 2x = \pi \rightarrow x = \frac{\pi}{2}.$$

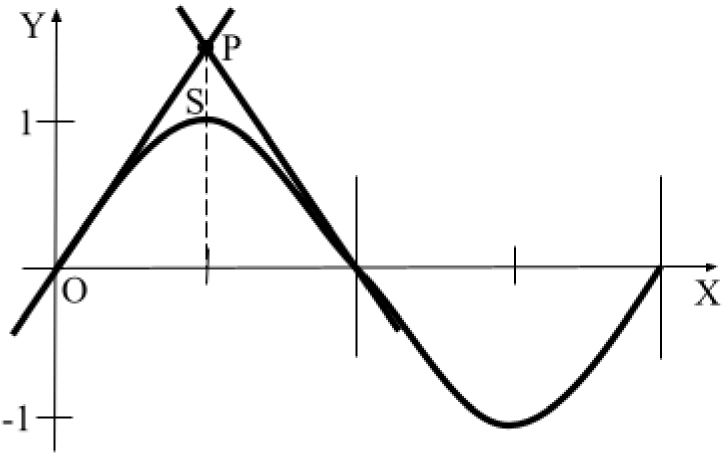
$\underline{Las\ rectas\ tangentes\ se\ cortan\ en\ el\ punto\ P\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)}.$

b)

De la observación de la figura adjunta se deduce que, en el intervalo de la superficie a calcular, las ordenadas correspondientes a las tangentes son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la función. La superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[t_1 - f(x)\right]\cdot dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left[t_2 - f(x)\right]\cdot dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - sen\, x)\cdot dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (- x + \pi - sen\, x)\cdot dx =$$



$$= \left[\frac{x^2}{2} + \cos cos\, x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[- \frac{x^2}{2} + \pi x + \cos cos\, x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$= \left[\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} + \cos cos\, \frac{\pi}{2}\right] - (0 + \cos cos\, 0) + \left(- \frac{\pi^2}{2} + \pi\pi + \cos cos\, \pi\right) - \left[- \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} + \pi\right.$$

$$= \frac{\pi^2}{8} + 0 - 1 - \frac{\pi^2}{2} + \pi^2 - 1 + \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{2} - 0 = \frac{\pi^2}{4} - 2 = \frac{\pi^2-8}{4}.$$

$$\underline{S = \frac{\pi^2-8}{4}\, u^2 \cong 0,467\, u^2.}$$

****

5º) Responda a las siguientes cuestiones:

a) Encuentre la única matriz de la forma $A = \left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ a\ \frac{1}{2}\right)$ que satisface $A^2 = A$, y compruebe que A y $A - I$ no son invertibles.

b) Justifique razonadamente que si A es una matriz cuadrada de orden n distinta de la matriz nula, O, y de la matriz identidad, I, y satisface la igualdad $A^2 = A$, entonces las matrices A y $A - I$ no son invertibles.

----

a)

$A^2 = A \cdot A = \left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ a\ \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ a\ \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{4} + \frac{a}{4}\ \ \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\ \ \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\ \ \frac{a}{4} + \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1+a}{4}\ \ \frac{1}{4}\right.$

.

$$A^2 = A \Rightarrow \left(\frac{1+a}{4}\ \frac{1}{4}\ a\ \frac{1+a}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ a\ \frac{1}{2}\right) \Rightarrow a = 1.$$

Para $a = 1$ es $A = \left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ 1\ \frac{1}{2}\right)$ y $A - I = \left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ 1\ \frac{1}{2}\right) - (1\ 0\ 0\ 1) = \left(-\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ 1\ \ -\frac{1}{2}\right)$.

$$|A| = \left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ 1\ \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \underline{A\ no\ es\ invertible,\ c.q.j.}$$

$$|A - I| = \left|-\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ 1\ \ -\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \underline{A - I\ no\ es\ invertible,\ c.q.j.}$$

b)

Si $A^2 = A$ entonces $A^2 - A = 0$, es decir: $A(A - I) = O$.

Ahora vamos a demostrar que ninguna de las dos matrices pueden ser invertibles.

Si A fuera invertible, se cumple que:

$$A^{-1} \cdot A \cdot (A - I) = A^{-1} \cdot O \Rightarrow A = I??.$$

Si $A - I$ fuera invertible, se cumple que:

$$A \cdot (A - I)(A - I)^{-1} = O \cdot (A - I)^{-1} \Rightarrow A = O??.$$

Como se observa, en ambos casos se llega a conclusiones absurdas.

****

6º) Responda a las siguientes cuestiones:

a) Calcule la ecuación cartesiana (es decir, que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) del plano que pasa por el punto $P(0,\ 0,\ 1)$ y es perpendicular a los planos de ecuaciones $\pi_1 \equiv 3x + y - z = 1$ y $\pi_2 \equiv x + y + 2z = 5$.

b) Suponga que un plano π_1 es perpendicular a un segundo plano π_2 y que el plano π_2 es a su vez perpendicular a un tercer plano π_3. Explique razonadamente si necesariamente los plano π_1 y π_3 deben ser perpendiculares entre ellos.

----

a)

Los vectores normales de los planos dados son $\vec{v}_1 = (3,\ 1,\ -1)$ y $\vec{v}_2 = (1,\ 1,\ 2)$.

El producto vectorial de dos vectores es perpendicular a cada uno de los vectores que se multiplican:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \left| i\ j\ k\ 3\ 1\ -1\ 1\ 1\ 2 \right| = 2i - j + 3k - k + i - 6j = 3i - 7j + 2k.$$

Un vector del plano φ es $\vec{n}_\varphi = (3,\ -7,\ 2)$.

La expresión general del plano φ es $\varphi \equiv 3x - 7y + 2z + D = 0$.

Como el plano φ contiene al punto $P(0,\ 0,\ 1)$ tiene que satisfacer su ecuación:

$\varphi \equiv x - 7y + 2z + D = 0$ $\quad P(0,\ 0,\ 1)\ \} \Rightarrow 0 - 0 + 2 + D = 0 \Rightarrow$

.

$$\underline{\varphi \equiv 3x - 7y + 2z - 2 = 0}.$$

b) Suponga que un plano π_1 es perpendicular a un segundo plano π_2 y que el plano π_2 es a su vez perpendicular a un tercer plano π_3. Explique razonadamente si necesariamente los plano π_1 y π_3 deben ser perpendiculares entre ellos.

Siendo $\vec{n}_1,\ \vec{n}_2,\ \vec{n}_3$ los vectores normales de los planos $\pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3$, respectivamente, y se cumple que $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0\ \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3 = 0\ \}$, se tiene que demostrar si, necesariamente, tiene que cumplirse que $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3 = 0$.

Utilizando los planos del apartado anterior y llamando: $\pi_1 \equiv 3x + y - z = 1$, $\pi_2 \equiv 3x - 7y + 2z - 2 = 0$ y $\pi_3 \equiv x + y + 2z = 5$, se cumple que:

$\pi_1 \perp \pi_2$ por ser $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = (3, 1, -1) \cdot (3, -7, 2) = 9 - 7 - 2 = 0$.
$\pi_2 \perp \pi_3$ por ser $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = (3, -7, 2) \cdot (1, 1, 2) = 3 - 7 + 4 = 0$.

Sin embargo los planos $\pi_1\ y\ \pi_3$ no son perpendiculares, por ser:

$\pi_1 \perp \pi_3$ por ser $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = (3, 1, -1) \cdot (1, 1, 2) = 3 + 1 - 2 \neq 0$.

Todo lo anterior demuestra que:

$\underline{La\ perpendicularidad\ de\ planos\ no\ cumple\ la\ propiedad\ transitiva.}$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

JULIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno elegirá una de las dos opciones propuestas. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1º) Determine los números reales a y b sabiendo que el sistema de ecuaciones lineales $ax + by + 3z = 2 \quad x + 2y - z = 0 \quad 3x - y + z = 1\}$ tiene al menos dos soluciones distintas.

Primera forma:

Si un sistema tiene al menos dos grupos de soluciones es que es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema es compatible indeterminado cuando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son iguales y menores que el número de incógnitas.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$M = (a\, b\, 3\, 1\, 2\ -1\, 3\ -1\, 1)$ y $M' = (a\, b\, 3\, 1\, 2\ -1\, 3\ -1\, 1\quad 2\, 0\, 1)$.

El rango de M en función de los parámetros a y b es el siguiente:

$|M| = |a\, b\, 3\, 1\, 2\ -1\, 3\ -1\, 1| = 2a - 3 - 3b - 18 - a - b = a - 4b - 21$. (1)

Por existir en la matriz M el menor $|1\ 2\ 3\ -1| \neq 0$ es $Rang\ M \geq 2$.

Por ser tres el número de incógnitas, para que el sistema sea compatible indeterminado tiene que ser $Rang\ M = Rang\ M' = 2$.

$Rang\ M' = 2 \Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow |a\ 3\ 2\ 1\ -1\ 0\ 3\ 1\ 1| = 0\, \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow |b\ 3\ 2\ 2$

$$\Rightarrow \underline{a = 5;\ \ b =- 4}.$$

Segunda forma:

Sabiendo de antemano que el sistema es compatible indeterminado, se trata de resolverlo.

Para resolver el sistema compatible indeterminado $ax + by + 3z = 2 \quad x + 2y - z = 0 \quad 3x - y + z = 1 \}$ se elimina una de las ecuaciones (primera) y se parametriza una de las incógnitas: $z = \lambda$.

$x + 2y = \lambda \quad 3x - y = 1 - \lambda \} \ x + 2y = \lambda \quad 6x - 2y = 2 - 2\lambda \} \Rightarrow 7x = 2 - \lambda$

.

$3x - y = 1 - \lambda;\ \ y = 3x - 1 + \lambda = \frac{6}{7} - \frac{3}{7}\lambda - 1 + \lambda \Rightarrow y =- \frac{1}{7} + \frac{4}{7}\lambda.$

Sustituyendo en la primera ecuación los valores obtenidos de x e y:

$\frac{2a}{7} - \frac{a}{7}\lambda - \frac{b}{7} + \frac{4b}{7}\lambda + 3\lambda = 2;\ \ \left(\frac{2a}{7} - \frac{b}{7}\right) + \left(- \frac{a}{7} + \frac{4b}{7} + 3\right)\lambda = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \qquad \frac{2a}{7} - \frac{b}{7} = 2 \quad - \frac{a}{7} + \frac{4b}{7} + 3 = 0 \} \qquad 2a - b = 14 \quad - a + 4b + 21 =$

$\Rightarrow 7b =- 28 \Rightarrow \underline{b =- 4}.$

$2a - (- 4) = 14;\ \ 2a + 4 = 14 \Rightarrow \underline{a = 5}.$

****

2º) En R^3, sea el plano $\pi \equiv x - z = 2$, y sea r la recta que pasa por los puntos $A(1,\ 0,\ 0)$ y $B(0,\ 0,\ b)$.

a) Calcule un vector director de la recta r.

b) Determine b para que r y π sean perpendiculares.

c) Determine b para que r y π sean paralelos.

d) ¿Está r contenida en π para algún valor de b? Razone la respuesta.

----

a)

Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{BA}$.

$$\overrightarrow{BA} = [A - B] = [(1,\ 0,\ 0) - (0,\ 0,\ b)] = (1,\ 0,\ -b).$$

$$\underline{\overrightarrow{v_r} = (1,\ 0,\ -b).}$$

b)

Un vector perpendicular (normal) del plano π es $\overrightarrow{n} = (1,\ 0,\ -1)$.

Para que la recta r y el plano π sean perpendiculares es necesario que el vector director de la recta y el vector normal del plano sean linealmente dependientes, es decir, que sean proporcionales sus componentes:

$$\frac{1}{1} = \frac{0}{0} = \frac{-b}{-1} \Rightarrow 1 = \frac{b}{1} \Rightarrow b = 1.$$

$$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ perpendiculares\ para\ b = 1.}$$

c)

Para que la recta r y el plano π sean paralelos es necesario que el vector director de la recta y el vector normal del plano sean perpendiculares.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \Rightarrow (1,\ 0,\ -b)\cdot(1,\ 0,\ -1) = 0;\ \ 1 + 0 + b = 0 \Rightarrow b = -1.$$

$$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ paralelos\ para\ b = -1.}$$

d)

Una forma de resolver el apartado es la siguiente:

Un plano contiene a una recta cuando contiene a dos puntos de la recta.

Los puntos $A(1,\ 0,\ 0)$ y $B(0,\ 0,\ b)$ pertenecen a la recta r por definición.

Un plano contiene a un punto cuando satisface su ecuación:

$\left.\begin{array}{l}\pi \equiv x - z = 2 \\ A(1,\ 0,\ 0)\end{array}\right\} \Rightarrow 1 - 0 \neq 2 \Rightarrow A \notin \pi.$

$\underline{La\ recta\ r\ no\ está\ contenida\ en\ el\ plano\ \pi\ para\ ningún\ valor\ real\ de\ b.}$

****

3º) a) Enuncie el teorema de Rolle.

b) Dado un número real λ, utilice el teorema de Rolle para probar que el polinomio $P(x) = x^3 + x + \lambda$ no tiene dos raíces distintas.

c) ¿Tiene el polinomio $P(x) = x^3 + x + \lambda$ alguna raíz? Justifique la respuesta.

----

a)

El teorema de Rolle dice que "si una función $f(x)$ en continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), con $a, b \in R$ y $a < b$, y se cumple que $f(a) = f(b)$, existe al menos un valor c, $a < c < b$ tal que $f'(c) = 0$".

b)

Considerando la función $f(x) = x^3 + x + \lambda$, que por ser polinómica, es continua y derivable en R, por lo cual, le es aplicable el teorema de Rolle a cualquier intervalo finito que se considere.

$P'(x) = 3x^2 + 1 > 0,\ \forall x \in R$, lo cual implica que $f(x) = x^3 + x + \lambda$ es monótona creciente en R, por lo cual:

$$\underline{El\ polinomio\ P(x)\ no\ puede\ tener\ dos\ raíces\ iguales}.$$

c)

Siendo la función $f(x) = x^3 + x + \lambda$ monótona creciente en R, implica, necesariamente, que corta al eje X en algún punto, lo que justifica que:

$$\underline{\exists \lambda \in R\ para\ el\ cual\ el\ polinomio\ P(x) = x^3 + x + \lambda\ tiene\ una\ raíz\ real.}$$

****

4º) Calcule el valor de la integral definida $I = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}+1} \cdot dx$, donde $a = (e - 1)^2$. [El cálculo de la integral indefinida puede hacerse con el cambio de variable $t = \sqrt{x}$ (es decir, $x = t^2$), o también con el cambio de variable $u = \sqrt{x}+1$].

Primero: con el cambio $t = \sqrt{x}$.

$$I = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}+1} \cdot dx \Rightarrow \left\{ x = a \to t = \sqrt{a} \quad x = 0 \to t = 0 \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{\sqrt{a}} \frac{1}{t+1} \cdot 2t \cdot dt = 2\int_0^{\sqrt{a}} \frac{t}{t+1} \cdot dt = 2\int_0^{\sqrt{a}} \frac{t+1-1}{t+1} \cdot dt = 2\int_0^{\sqrt{a}} \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) \cdot dt =$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{a}} dt - 2\int_0^{\sqrt{a}} \frac{1}{t+1} \cdot dt = 2A - 2B. \quad (*)$$

$$A = \int_0^{\sqrt{a}} dt = [t]_0^{\sqrt{a}} = \sqrt{a} = \sqrt{(e-1)^2} = e - 1.$$

$$B = \int_0^{\sqrt{a}} \frac{1}{t+1} \cdot dt \Rightarrow \left\{ t = \sqrt{a} \to h = \sqrt{a} + 1 \quad t = 0 \to h = 1 \right\} \Rightarrow \int_1^{\sqrt{a}+1} \frac{1}{h} \cdot dh =$$

$$= [Lh]_1^{\sqrt{a}+1} = \left[L\left(\sqrt{a} + 1\right) - L1\right] = L\left(\sqrt{a} + 1\right) = L\left[\sqrt{(e-1)^2} + 1\right] =$$

$$= L(e - 1 + 1) = Le = 1.$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos:

$$I = 2(A - B) = 2(e - 1 - 1) = 2(e - 2).$$

$$\underline{I = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}+1} \cdot dx = 2(e - 2).}$$

Segundo: con el cambio $u = \sqrt{x} + 1$.

$$I = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}+1} \cdot dx \Rightarrow \left\{ x = a \rightarrow u = \sqrt{a} + 1 \; x = 0 \rightarrow u = 1 \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^{\sqrt{a}+1} \frac{1}{u} \cdot 2(u - 1) \cdot du = 2 \cdot \int_1^{\sqrt{a}+1} \frac{u-1}{u} du = 2 \cdot \int_1^{\sqrt{a}+1} \left(1 - \frac{1}{u}\right) du =$$

$$= 2 \cdot \int_1^{\sqrt{a}+1} du - 2 \cdot \int_1^{\sqrt{a}+1} \frac{1}{u} du = 2 \cdot [u]_1^{\sqrt{a}+1} - 2 \cdot [Lu]_1^{\sqrt{a}+1} =$$

$$= 2 \cdot \left(\sqrt{a} + 1 - 1\right) - 2 \cdot \left[L\left(\sqrt{a} + 1\right) - L1\right] = 2\sqrt{a} - 2\left[L\left(\sqrt{a} + 1\right) - 0\right] =$$

$$= 2 \cdot \sqrt{(e - 1)^2} - 2 \cdot L\left(\sqrt{(e - 1)^2} + 1\right) = 2(e - 1) - 2 \cdot L(e - 1 + 1) =$$

$$= 2(e - 1) - 2 \cdot Le = 2e - 2 - 2 = 2e - 4 = 2(e - 2).$$

$$\underline{I = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}+1} \cdot dx = 2(e - 2).}$$

****

OPCIÓN B

1º) Dadas las matrices $A = (1 \; - 1 \; 0 \; 1)$ y $B = (2 \; 0 \; - 1 \; 2)$, obtenga las matrices X que cumplen la igualdad $AX + B^2 - 2A = 0$.

$$AX + B^2 - 2A = O; \;\; AX = 2A - B^2 = M; \;\; A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot M;$$

$I \cdot X = A^{-1} \cdot M \Rightarrow X = A^{-1} \cdot M.$

$M = 2A - B^2 = 2 \cdot (1 \; - 1 \; 0 \; 1) - (2 \; 0 \; - 1 \; 2) \cdot (2 \; 0 \; - 1 \; 2) = (2 \; - 2 \; 0 \; 2) - (4 \; 0 \; -$

$= (- 2 \; - 2 \; 4 \; - 2) = M.$

La matriz A^{-1} se obtiene por el método de Gauss-Jordan:

$(1 \; 0 \; 0 \; 1) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 + F_2\} \Rightarrow (1 \; 1 \; 0 \; 1) \Rightarrow A^{-1} = (1 \; 1 \; 0 \; 1).$

Sustituyendo los valores obtenidos en la expresión de X:

$X = A^{-1} \cdot M = (1 \; 1 \; 0 \; 1) \cdot (- 2 \; - 2 \; 4 \; - 2) = (2 \; - 4 \; 4 \; - 2).$

$$\underline{X = (2 \; - 4 \; 4 \; - 2)}.$$

****

2º) En R^3, considere el punto $P(1,\ 0,\ 1)$ y los planos $\pi_1 \equiv x + z = 0$, $\pi_2 \equiv y - z = 0$. Obtenga un plano π_3 que cumpla a la vez las siguientes condiciones: $i)$ $P \in \pi_3$; $ii)$ π_1 corta a π_3 en una recta; $iii)$ Los planos π_1, π_2 y π_3 no tienen puntos en común.

Sea el plano pedido $\pi_3 = Ax + By + Cz + D = 0$.

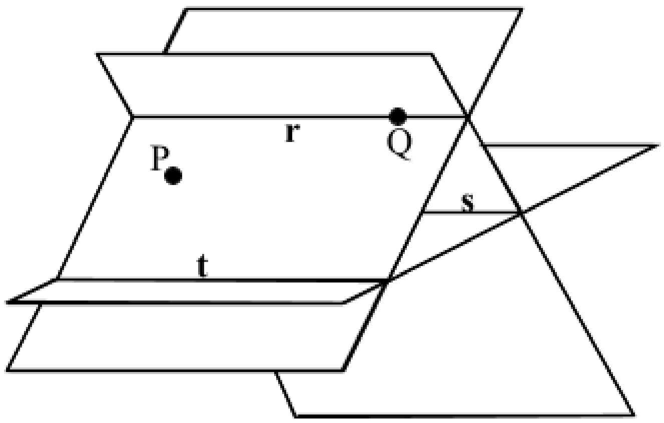
De $i)$ → Por contener a $P(1,\ 0,\ 1) \Rightarrow A + C + D = 0.$ (1)

De $ii)$ → Los planos π_1 y π_3 se cortan en la recta r.

$iii)$ Los planos π_1, π_2 y π_3 no tienen puntos en común, es decir, que se cortan dos a dos, como se observa en el dibujo que se adjunta.

La recta s en que se cortan π_1 y π_2 es $s \equiv \begin{cases} x + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$.

La expresión de s dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:



$z = \mu;\ x = -\mu;\ y = \mu \Rightarrow$

$\Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.

Las rectas r, s y t donde se cortan los planos dos a dos son paralelas.

Un vector director de s es $\vec{v_s} = (-1,\ 1,\ 1)$.

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$z = \lambda;\ x = -\lambda;\ -A\lambda + By + C\lambda = -D;\ y = \frac{A\lambda - C\lambda - D}{B} = -\frac{D}{B} + \frac{A-C}{B}\lambda \Rightarrow$

$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = -\frac{D}{B} + \frac{A-C}{B}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$. Un punto de r es $Q\left(0,\ -\frac{D}{B},\ 0\right)$.

$\vec{QP} = [P - Q] = \left[(1,\ 0,\ 1) - \left(0,\ -\frac{D}{B},\ 0\right)\right] = \left(1,\ \frac{D}{B},\ 1\right)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{QP}$ son directores del plano π_3, que contiene a $P(1,\ 0,\ 1)$.

La expresión general del plano π_3 es la siguiente:

$$\pi_3\left(P;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{QP}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ -1 & 1 & 1 \\ B & D & B \end{vmatrix} = 0;$$

$B(x - 1) + By - D(z - 1) - B(z - 1) - D(x - 1) - By = 0;$

$Bx - B - Dz + D - Bz + B - Dx + D = 0;\ Bx - Dz - Bz - Dx + 2D = 0;$

$(B - D)x + (- B - D)z + 2D = 0.$

Teniendo en cuenta que $\pi_3 = Ax + By + Cz + D = 0$, se deduce que $B = 0$, con lo que resulta:

$\pi_3 \equiv - Dx - Dz + 2D = 0 \Rightarrow \underline{\pi_3 \equiv x + z - 2 = 0}.$

****

3º) a) Estudie el dominio, el signo, las asíntotas verticales y las asíntotas horizontales de la función $f(x) = \frac{2x-1}{-x^2+x}$.

b) Utilizando los datos obtenidos en el apartado anterior, represente, aproximadamente, la gráfica de la función $f(x)$.

----

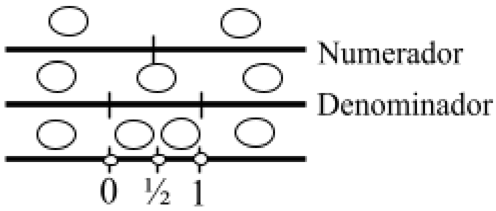
a)

El dominio de una función racional es el conjunto de los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$-x^2 + x = 0; \quad -x(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1.$$

$$\underline{D(f) \Rightarrow R - \{0,\ 1\}}.$$

Para estudiar el signo de la función tenemos en cuenta, además de las raíces halladas del denominador que la raíz del numerador es $x = ½$. Además, nos valemos del gráfico adjunto para determinar el signo de la función.



$$\underline{f(x) < 0 \Rightarrow x \in (0,\ ½) \cup (1,\ +\infty)}.$$

$$\underline{f(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty,\ 0) \cup (½,\ 1)}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma y = k y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

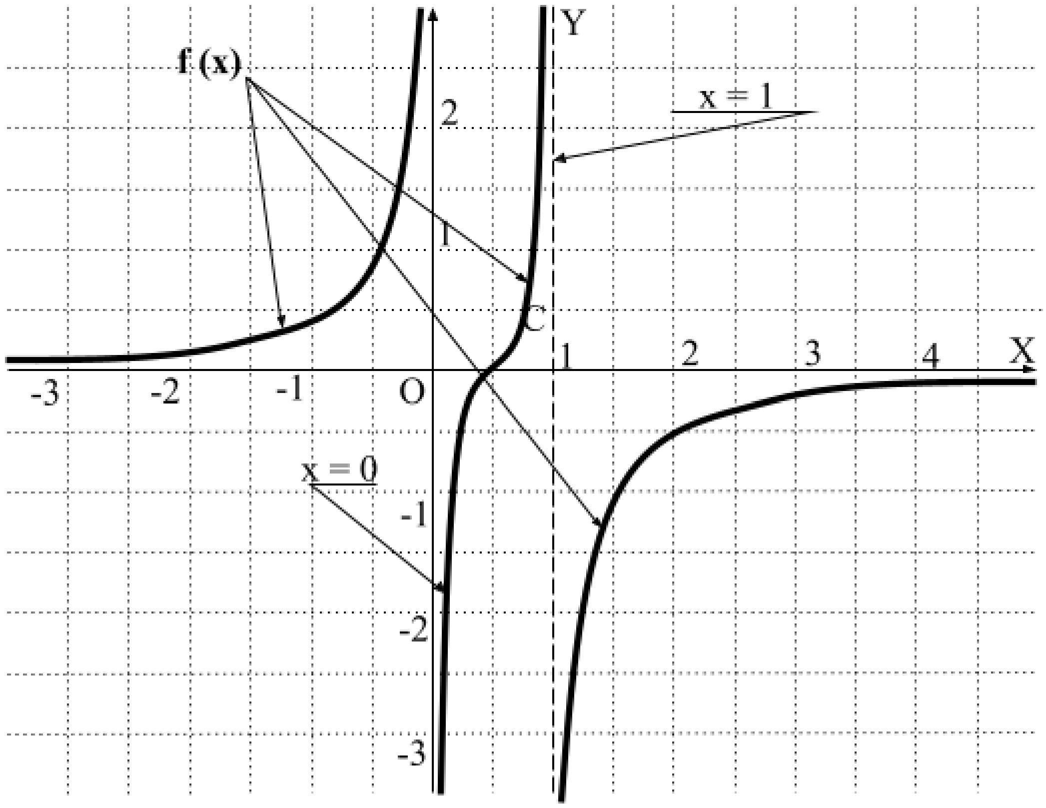
$$k = f(x) = \frac{2x-1}{-x^2+x} = 0 \Rightarrow \underline{La\ recta\ y = 0\ es\ asíntota\ horizontal}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{La\ rectas\ x = 0\ y\ x = 1\ son\ asíntotas\ verticales}.$$

b)

Utilizando todos los datos obtenidos en el apartado anterior puede hacerse un gráfico bastante aproximado de la función, que es el que sigue:



f (x)
x = 1
Y
2
1
C
X
-3
-2
-1
O
1
2
3
4
x = 0
-1
-2
-3

****

4º) a) Escriba la "regla de la cadena" para la derivación de funciones compuestas.

b) Calcule la derivada de la función $f(x) = L\left(cos^2 x\right), -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

c) Obtenga, utilizando el apartado b), una primitiva $G(x)$ de la función $g(x) = tg\, x$ que cumpla $G(0) = 1$.

----

a)

La regla de la cadena se utiliza para derivar funciones compuestas, es decir, funciones que son, a la vez, funciones de otras funciones. Si una función es a su vez composición de dos funciones, $(g \circ f)(x) = f[g(x)]$, su derivada es de la siguiente forma y se denomina "regla de la cadena":

$$\underline{(g \circ f)'(x) = f'[g(x)] = g'[f(x)] \cdot f'(x)}.$$

b)

$$f(x) = L\left(cos^2 x\right) = L[g(x)] \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{2 \cdot \text{coscos}\, x \cdot (-sen\, x)}{cos^2 x} = -\frac{2\, sen\, x}{\text{coscos}\, x}.$$

$$\underline{f(x) = L\left(cos^2 x\right) \Rightarrow f'(x) = -\, 2\, tg\, x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}}.$$

c)

$$f'(x) = -\, 2\, tg\, x = -\, 2g(x) \Rightarrow g(x) = -\frac{1}{2} \cdot f'(x)$$

$$G(x) = \int g(x) \cdot dx = -\frac{1}{2} \int f'(x) \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot L\left(cos^2 x\right) + C.$$

$$G(0) = 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot L\left(cos^2 0\right) + C = 1; \quad -\frac{1}{2} L1 + C = 1; \quad -0 + C = 1 \Rightarrow C = 1$$

.

$$\underline{G(x) = -\frac{1}{2} \cdot L\left(cos^2 x\right) + 1}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

JUNIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno elegirá una de las dos opciones propuestas. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1º) Considere la función $f(x) = sen^2 x$ (tenga en cuenta que el ángulo x se mide en radianes).

a) Estudie los extremos relativos de $f(x)$ en el intervalo $0 < x < \pi$.

b) Estudie los puntos de inflexión de $f(x)$ en el intervalo $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

----

a)

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo en un punto es que se anule su primera derivada:

$$f'(x) = 2 \cdot sen\, x \cdot \cos cos\, x \, .$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2 \cdot sen\, x \cdot \cos cos\, x = 0 \Rightarrow \{sen\, x = 0 \rightarrow x \notin (0, \pi) \ \cos cos\, x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para el valor que anula la primera derivada, se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo relativo.

$$f'(x) = 2 \cdot sen\, x \cdot \cos cos\, x = sen\,(2x) \Rightarrow f''(x) = 2 \cdot \cos cos\,(2x) \, .$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \cos cos\, \pi = 2 \cdot (-1) = -2 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = \frac{\pi}{2}.$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = sen^2 \frac{\pi}{2} = 1^2 = 1 \Rightarrow \underline{Máximo: A\left(\frac{\pi}{2},\ 1\right)}.$$

$b)$

Para que una función tenga un punto de inflexión es condición necesaria que se anule su segunda derivada en ese punto.

$f''(x) = 0 \Rightarrow 2 \cdot \cos cos\,(2x) \ = 0; \ \ \cos cos\,(2x) \ = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$.

La condición anterior es necesaria pero no es suficiente; para que exista el punto de inflexión es necesario que no se anule su tercera derivada para el valor que anula la segunda:

$f'''(x) = -\ 4 \cdot sen\,(2x).$

$f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\ 4 \cdot sen\,\frac{\pi}{2} = -\ 4 \cdot 1 \ = -\ 4 \neq 0 \Rightarrow P.\ I.\ para\, x = \frac{\pi}{4}.$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = sen^2\,\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \ \Rightarrow \ \underline{P.\ \ I.: B\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{1}{2}\right)}.$

****

2º) Calcule una primitiva de $F(x)$ de la función $f(x) = \frac{-2x}{e-x^{2}} - 2xe^{1-x^{2}} + 2x\cos x^{2}$ que cumpla $F(0) = 1$.

$$F(x) = \int f(x)\cdot dx = \int\left(\frac{-2x}{e-x^{2}} - 2xe^{1-x^{2}} + 2x\cos x^{2}\right)\cdot dx =$$

$$= -2\int \frac{x}{e-x^{2}}\cdot dx - 2\int xe^{1-x^{2}}\cdot dx + 2\int x\cos x^{2}\cdot dx = -2A - 2B + 2C = F(x).$$

$$A = \int \frac{x}{e-x^{2}}\cdot dx \Rightarrow \left\{e - x^{2} = t \quad xdx = -\frac{1}{2}dt\right\} \Rightarrow -\frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\cdot dt = -\frac{1}{2}\cdot Lt = -\frac{1}{2}L\left(e - x^{2}\right)$$

.

$$B = \int xe^{1-x^{2}}dx \Rightarrow \left\{1 - x^{2} = t \quad xdx = -\frac{1}{2}dt\right\} \Rightarrow -\frac{1}{2}\int e^{t}dt = -\frac{1}{2}\cdot e^{t} = -\frac{1}{2}e^{1-x^{2}}$$

.

$$C = \int x\cos x^{2}\cdot dx \Rightarrow \left\{x^{2} = t \quad xdx = \frac{1}{2}dt\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}\int \cos cos\, t\cdot dt = \frac{1}{2}sen\, t = \frac{1}{2}sen\, x^{2}$$

.

Sustituyendo en la expresión de F los valores obtenidos de A, B y C:

$$F(x) = -2\cdot\left[-\frac{1}{2}L\left(e - x^{2}\right)\right] - 2\cdot\left[-\frac{1}{2}e^{1-x^{2}}\right] + 2\cdot\frac{1}{2}sen\, x^{2} + C =$$

$$= L\left(e - x^{2}\right) + e^{1-x^{2}} + sen\, x^{2} + C.$$

$$F(0) = 1 \Rightarrow L(e - 0) + e^{1-0} + sen\, 0 + C = 1;\ 1 + e + C = 1 \Rightarrow C = -e.$$

La función resulta, finalmente:

$$\underline{F(x) = L\left(e - x^{2}\right) + e^{1-x^{2}} + sen\, x^{2} - e.}$$

****

3º) Discuta, en función del parámetro b, el sistema de ecuaciones $3y + bz = b - 2 \quad bx + by = 1 \quad -x + z = b - 3 \}$, (no es necesario resolverlo en ningún caso).

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A = (0\ 3\ b\ b\ b\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 1\ )$ y $A' = (0\ 3\ b\ b\ b\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 1\ \ \ b - 2\ 1\ b - 3\ )$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro b es el siguiente:

$|A| = |0\ 3\ b\ b\ b\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 1\ | = - b^2 - 3b = 0;\ \ - b(b + 3) = 0 \Rightarrow b_1 = 0,\ b_2 = -$

.

$\underline{Para\ \{b \neq 0\ b \neq -\ 3\ \} \Rightarrow Rang\ A\ = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

Para $b = 0 \Rightarrow A' = (0\ 3\ 0\ 0\ 0\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 1\ \ \ -\ 2\ 1\ \ -\ 3\ ) \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \left(C_1,\ C_2,\ C_4\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow |0\ 3\ \ -\ 2\ 0\ 0\ 1\ \ -\ 1\ 0\ \ -\ 3\ | = - 3 \neq 0 \Rightarrow Rang\ A' = 3.$

Para $b = - 3 \Rightarrow A' = (0\ 3\ \ -\ 3\ \ -\ 3\ \ -\ 3\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 1\ \ \ -\ 5\ 1\ \ -\ 6\ ) \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \left(C_1,\ C_2,\ C_4\right)$

$= |0\ 3\ \ -\ 5\ \ -\ 3\ \ -\ 3\ 1\ \ -\ 1\ 0\ \ -\ 6\ | = - 3 + 15 - 54 = - 42 \neq 0 \Rightarrow Rang\ A' = 3$

.

$\underline{Para\ \{b = 0\ b = -\ 3\ \} \Rightarrow Rang\ A\ = 2;\ Rang\ A' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

****

4º) Considere en R^3 los puntos $A(1,\ 1,\ -1)$ y $B(0,\ 1,\ 1)$ y los planos $\pi_1 \equiv x + y = 0$ y $\pi_2 \equiv x - z = 0$.

a) Calcule las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos A y B.

b) Obtenga un punto P de la recta r cuya distancia al plano π_1 sea el doble de su distancia al plano π_2, esto es, $d(P,\ \pi_1) = 2\cdot d(P,\ \pi_2)$.

----

a)

Los puntos A y B determinan el vector $\overrightarrow{AB} = [B - A] = (-1,\ 0,\ 2)$.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es: $\underline{r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}}$.

b)

Los puntos de la recta r tienen la expresión general: $P(1 - \lambda,\ 1,\ -1 + 2\lambda)$.

La distancia de un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

$$d(P, \pi_1) = \frac{|1\cdot(1-\lambda) + 1\cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{|1 - \lambda + 1|}{\sqrt{1 + 1 + 0}} = \frac{|2 - \lambda|}{\sqrt{2}}\ unidades.$$

$$d(P, \pi_2) = \frac{|1\cdot(1-\lambda) - 1\cdot(-1 + 2\lambda)|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{|1 - \lambda + 1 - 2\lambda|}{\sqrt{1 + 0 + 1}} = \frac{|2 - 3\lambda|}{\sqrt{2}}\ unidades.$$

$$d(P,\ \pi_1) = 2\cdot d(P,\ \pi_2) \Rightarrow \frac{|2-\lambda|}{\sqrt{2}} = 2\cdot\frac{|2 - 3\lambda|}{\sqrt{2}};\ \ |2 - \lambda| = 2\cdot|2 - 3\lambda| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 - \lambda = 4 - 6\lambda \\ 2 - \lambda = -4 + 6\lambda \end{cases} \begin{cases} 5\lambda = 2 \rightarrow \lambda_1 = \frac{2}{5} \\ 7\lambda = 6 \rightarrow \lambda_2 = \frac{6}{7} \end{cases}.$$

$$P_1 \equiv \begin{Bmatrix} x = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \\ y = 1 \\ z = -1 + \frac{4}{5} = \frac{-1}{5} \end{Bmatrix} \Rightarrow \underline{P_1\left(\frac{3}{5},\ 1,\ \frac{-1}{5}\right)}.$$

$$P_2 \equiv \begin{Bmatrix} x = 1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7} \\ y = 1 \\ z = -1 + \frac{12}{7} = \frac{5}{7} \end{Bmatrix} \Rightarrow \underline{P_1\left(\frac{1}{7},\ 1,\ \frac{5}{7}\right)}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Considere la función $f(x) = \{x^2 - 3x + \alpha \quad si \quad x < 0 \quad - x^2 + \beta x + \beta + 1 \; si \; x \geq 0$ definida a partir de los parámetros $\alpha, \; \beta \in R$.

a) Obtenga la relación que debe haber entre $\alpha \, y \, \beta$ para que f sea derivable en x = 0.

b) Para los valores de $\alpha \, y \, \beta$ obtenidos en el apartado b), ¿es f' derivable en x = 0? Razone la respuesta.

----

a)

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto.

La función f(x) es continua en la recta real $\forall a, \; b \in R$, excepto para x = 0, para el cual, se trata de determinar los valores de α y b para que lo sea.

Para que la función sea continua en x = 0 es necesario que sus límites laterales sean iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$f(x) \; = \left(x^2 - 3x + \alpha\right) = a$ $\qquad$ $f(x) \; = (-x^2 + \beta x + \beta + 1) \; = f$

. (*)

La función resulta $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x = 0$, para cuya derivabilidad vamos a determinar los valores de $\alpha \, y \, \beta$.

Una función es derivable en un punto cuando existen sus derivadas laterales en ese punto y además son iguales.

$f'(x) = \{ \; 2x - 3 \; si \; x < 0 \; - 2x + \beta \, si \, x \geq 0$.

$f'\left(0^-\right) = - 3. \quad f'\left(0^+\right) = \beta \Rightarrow f'\left(0^-\right) = f'\left(0^+\right) \Rightarrow \underline{\beta = - 3}$.

Sustituyendo en (*) el valor de β: $\alpha = - 3 + 1 \Rightarrow \underline{\alpha = - 2}$.

b)

La función resulta $f(x) = \{x^2 - 3x - 2 \quad si \quad x < 0 \quad - x^2 - 3x - 2 \; si \; x \geq 0$.

Por supuesto que es derivable para x = 0; en otro caso el apartado anterior no estaría correctamente hecho: $f'\left(0^-\right) = f'\left(0^+\right) = - 3$.

****

2º) a) Calcule los puntos en los la recta $y = x - 1$ y el eje OX cortan a la parábola de ecuación $y = - x^2 + 6x - 5$.

b) Dibuje, aproximadamente, el recinto plano limitado entre la parábola de ecuación $y = - x^2 + 6x - 5$ y la recta $y = x - 1$.

c) Calcule el área de dicho recinto plano.

----

a)

Las abscisas de los puntos de corte de dos funciones son las soluciones reales de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones.

$$\left.\begin{array}{l} y = - x^2 + 6x - 5 \\ y = x - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow - x^2 + 6x - 5 = x - 1;\ x^2 - 5x + 4 =$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 4.$$

Los puntos de corte se deducen fácilmente de la recta: $\underline{A(1,\ 0)}$ y $\underline{B(4,\ 3)}$.

b)

La parábola $y = - x^2 + 6x - 5$ es cóncava ($\cap$) y su vértice es el siguiente:

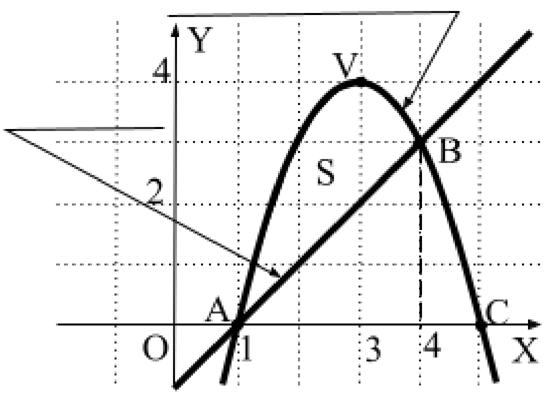
$$y'(x) = - 2x + 6. \qquad y'(x) = 0 \Rightarrow - 2x + 6 = 0 \rightarrow x = 3 \Rightarrow V(3,\ 4).$$

Los puntos de corte con el eje X de la parábola son los siguientes:

$$- x^2 + 6x - 5 = 0;\ x^2 - 6x + 5 = 0;\ x = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} =$$

$$= 3 \pm 2 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 5 \Rightarrow A(1,\ 0) \text{ y } C(5,\ 0).$$

La representación gráfica, aproximada, de la situación se indica en la figura adjunta.



$c)$

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_1^4 \left[\left(-x^2 + 6x - 5\right) - (x - 1)\right]dx = \int_1^4 \left(-x^2 + 5x - 4\right)\cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x\right]_1^4 = \left(-\frac{4^3}{3} + \frac{5\cdot 4^2}{2} - 4\cdot 4\right) - \left(-\frac{1^3}{3} + \frac{5\cdot 1^2}{2} - 4\cdot 1\right) =$$

$$= -\frac{64}{3} + 40 - 16 + \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4 = -\frac{63}{3} + 28 - \frac{5}{2} = -21 + 28 - \frac{5}{2} = 7 - \frac{5}{2} =$$

.

$$\underline{S = \frac{9}{2}\,u^2 = 4,5\,u^2.}$$

****

3º) Considere las matrices $A = (0\ 2\ \ -\ 2\ 2\ \ -\ 1\ 2\ 2\ 2\ 0\ )$ y $B\ = (1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 1\ )$.

a) Calcule la matriz $C\ =\ 2A\ -\ B^2$.

b) Halle la inversa A^{-1} de la matriz A.

----

a)

$$C\ =\ 2A\ -\ B^2\ =\ 2\cdot(0\ 2\ \ -\ 2\ 2\ \ -\ 1\ 2\ 2\ 2\ 0\ ) - (1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 1\ )\cdot(1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0$$

$$= (0\ 4\ \ -\ 4\ 4\ \ -\ 2\ 4\ 4\ 4\ 0\ ) - (0\ 0\ 2\ 0\ 1\ 0\ \ -\ 2\ 0\ 0\ ) \Rightarrow \underline{C\ = (0\ 4\ \ -\ 6\ 4\ \ -\ 3\ 4\ 6\ 4\ 0\ )}$$

.

b)

La inversa de A se obtiene por la adjunta de la traspuesta: $A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|}$.

$|A| = |0\ 2\ \ -\ 2\ 2\ \ -\ 1\ 2\ 2\ 2\ 0\ | =-\ 8\ +\ 8\ -\ 4\ =-\ 4.$ $\qquad A^t = (0\ 2\ 2\ 2\ \ -\ 1\ 2\ \ -\ 2$

.

$$Adj.\ de\ A^t = (|-\ 1\ 2\ 2\ 0\ |\ \ -|2\ 2\ \ -\ 2\ 0\ |\ |2\ \ -\ 1\ \ -\ 2\ 2\ |\ \ -|2\ 2\ 2\ 0\ |\ |0\ 2\ \ -\ 2$$

.

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{(-4\ -4\ 2\ 4\ 4\ -4\ 6\ 4\ -4\ )}{-4}\ \Rightarrow \underline{A^{-1} =-\ \frac{1}{2}\cdot(-\ 2\ \ -\ 2\ 1\ 2\ 2\ \ -\ 2\ 3\ 2\ \ -}$$

.

****

4º) Sean en R^3 los vectores $\vec{u} = (1,\ 1,\ 0)$ y $\vec{v} = (-\ 1,\ 0,\ 1)$.

a) Calcule el producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$.

b) Obtenga un vector $\vec{e}_1$ de R^3 que cumpla cos $cos \sphericalangle \left(\vec{e}_1,\ \vec{u}\right) =\ 0$.

c) Obtenga un vector $\vec{e}_2$ de R^3 que cumpla $\sphericalangle \left(\vec{e}_2,\ \vec{v}\right) =\ 0$.

----

a)

$$\vec{u} \times \vec{v} = |i\, j\, k\, 1\, 1\, 0\ \ -\ 1\, 0\, 1\,| = i\ +\ k\ -\ j\ \Rightarrow \underline{\vec{u} \times \vec{v} = (1,\ \ -\ 1,\ 1)}.$$

b)

Por la definición de producto escalar de dos vectores, siendo α el ángulo que forman:

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{u} = \left|\vec{e}_1\right| \cdot \left|\vec{u}\right| \cdot \cos cos\ \alpha \Rightarrow \cos cos\ \alpha\ = \frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{u}}{\left|\vec{e}_1\right| \cdot \left|\vec{u}\right|} =\ 0\ \Rightarrow\ \vec{e}_1 \cdot \vec{u} =\ 0\ \ .$$

Siendo $\vec{e}_1 = (\alpha,\ \beta,\ \gamma)\ con\ \alpha, \beta,\ \gamma \in R$:

$\vec{e}_1 \cdot \vec{u} =\ 0 \Rightarrow (\alpha,\ \beta,\ \gamma) \cdot (1,\ 1,\ 0) = \alpha\ +\ \beta\ =\ 0 \rightarrow \beta\ =-\ \alpha.$

El vector $\vec{e}_1$ es de la forma $\underline{\vec{e}_1 = (\alpha,\ \ -\ \alpha,\ \gamma),\ \forall \alpha,\ \gamma \in R}$.

A modo de ejemplos: $\underline{\vec{e}_{11} = (1,\ \ -\ 1,\ 0)}$, $\underline{\vec{e}_{12} = (3,\ \ -\ 3,\ 5)}$ y $\underline{\vec{e}_{13} = (-\ 2,\ 2,\ 0)}$

c)

Para que se cumpla que $\sphericalangle \left(\vec{e}_2,\ \vec{v}\right) =\ 0$ es necesario que los vectores $\vec{e}_2$ y $\vec{v}$ sean paralelos, es decir, que sea 0º el ángulo que forman, por lo cual, sus componentes son proporcionales.

Siendo $\vec{e}_2 = (\delta,\ \varphi,\ \mu)\ con\ \delta,\ \varphi,\ \mu \in R$: $\underline{\frac{-1}{\delta} = \frac{0}{\varphi} = \frac{1}{\mu}} \Rightarrow \underline{\delta\ =-\ \mu,\ \varphi\ =\ 0}$.

A modo de ejemplos: $\underline{\vec{e}_{21} = (1,\ 0,\ \ -\ 1)}$, $\underline{\vec{e}_{22} = (2,\ 0,\ \ -\ 2)}$ y

$\underline{\vec{e}_{23} = (-3,\ 0,\ 3).}$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE GALICIA

JUNIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá responder solo a los ejercicios de una de las opciones.

OPCIÓN A

1º) $a)$ Calcula todas las matrices de la forma $A = (0\ a\ a\ b\ )$ de rango 2 tales que su inversa sea $A^{-1} = A - 2I$, siendo I la matriz unidad de orden 2.

b) Dada la matriz $M = (m + 2\ \ - 1\, m + 1\, 0\, m + 1\, 0\ \ - 1\ \ - 2\, m + 1\ )$:

$i)$ Calcula según los valores de m, el rango de M.

$ii)$ Para el valor $m =- 1$, calcula todas las matrices $X = (x\, y\, z\ )$ tales que $M \cdot X = (0\ 0\ 0\ )$.

$a)$

$$|A| = |0\ a\ a\ b\ | =- a^2;\ \ A^t = A = (0\ a\ a\ b\ );\ \ Adj.\ de\ A^t = (b\ \ - a\ \ - a\ 0\ ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} =- \frac{1}{a^2} \cdot (b\ \ - a\ \ - a\ 0\ ) = \left(- \frac{b}{a^2}\ \ \frac{1}{a}\ \ \frac{1}{a}\ \ 0\right).$$

$$A^{-1} = A - 2I \Rightarrow \left(- \frac{b}{a^2}\ \ \frac{1}{a}\ \ \frac{1}{a}\ \ 0\right) = (0\ a\ a\ b\ ) - (2\ 0\ 0\ 2\ ) = (- 2\ a\ a\ b - 2\ ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow - \frac{b}{a^2} =- 2 \qquad \frac{1}{a} = a\ \ b - 2 = 0\ \} \Rightarrow b = 2;\ \ - \frac{2}{a^2} =- 2 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a_1 =- 1,\ a_2 =$$

.

$$\underline{Soluciones:\ A_1 = (0\ \ - 1\ \ - 1\ 2\ )\ \ y\ \ A_2 = (0\ 1\ 1\ 2\ ).}$$

b) $i)$

$$|M| = |m + 2\ \ - 1\, m + 1\, 0\, m + 1\, 0\ \ - 1\ \ - 2\, m + 1\ | = (m + 2)(m + 1)^2 + (m +$$

$$= (m + 1)^2[(m + 2) + 1] = (m + 1)^2(m + 3) = 0 \Rightarrow m_1 =- 1,\ m_2 =- 3.$$

$Para\, m = -1 \Rightarrow M = (1 \ -1\, 0\, 0\, 0\, 0 \ -1 \ -2\, 0) \Rightarrow Rang\, M = 2.$

$Para\, m = -3 \Rightarrow M = (-1 \ -1 \ -2\, 0 \ -2\, 0 \ -1 \ -2 \ -2) \Rightarrow \{F_1 = F_3\} \Rightarrow Ra$

.

$\underline{Rango\, M = 3,\ \forall m \in R - \{-1,\ -3\}.}$

$\underline{Para\, m = -1\, y\, m = -3 \Rightarrow Rango\, M = 2.}$

$ii)$

$m = -1 \Rightarrow M \cdot X = (0\, 0\, 0) \Rightarrow (1 \ -1\, 0\, 0\, 0\, 0 \ -1 \ -2\, 0) \cdot (x\, y\, z) = (0\, 0\, 0) \Rightarrow x$

$x - y = 0\, x + 2y = 0\} \Rightarrow x = y = 0,\ z = \lambda.$

$\underline{Solución: X = (0\, 0\, \lambda),\ \forall \lambda \in R.}$

****

2º) a) Calcula el valor de m para que los puntos $A(m, -1, m)$, $B(1, -5, -1)$, $C(3, 1, 0)$ y $D(2, -1, 0)$ estén en un mismo plano. Calcula la ecuación implícita o general de ese plano.

b) Calcula el ángulo que forma el plano $\pi \equiv 2x - y + 2z - 5 = 0$ y la recta r que pasa por los puntos $P(3, -4, -7)$ y $Q(1, -3, -9)$.

c) Calcula los puntos de r del apartado anterior que distan 9 unidades del plano π.

----

a)

Los puntos A, B, C y D determinan los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{DA} = [A - D] = [(m, -1, m) - (2, -1, 0)] = (m - 2, 0, m).$$

$$\overrightarrow{DB} = [B - D] = [(1, -5, -1) - (2, -1, 0)] = (-1, -4, -1).$$

$$\overrightarrow{DC} = [C - D] = [(3, 1, 0) - (2, -1, 0)] = (1, 2, 0).$$

Para que los puntos A, B, C y D sean coplanarios, los vectores $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ y $\overrightarrow{DC}$ tienen que ser coplanarios, o sea, que su rango tiene que ser menor de tres; el determinante que forman tiene que valer cero:

$$Rang\left\{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}\right\} < 3 \Rightarrow \begin{vmatrix} m-2 & 0 & m \\ -1 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-2m + 4m + 2(m - 2) = 0;\ 2m + 2m - 4 = 0;\ 4m - 4 = 0 \Rightarrow m = 1.$$

$$2m - 2 - 4 = 0;\ 2m = 6 \Rightarrow m = 3.$$

$\underline{Los\ puntos\ A,\ B,\ C\ y\ D\ están\ en\ un\ mismo\ plano\ para\ m = 1}.$

b)

Un vector director de la recta es:

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{QP} = [P - Q] = [(3, -4, -7) - (1, -3, -9)] = (2, -1, 2)$$

.

Un vector normal del plano $\pi \equiv 2x - y + 2z - 5 = 0$ es $\overrightarrow{n} = (2, -1, 2)$.

El vector director de r y el vector normal de π son linealmente dependientes (son iguales), por lo cual:

$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ perpendiculares;\ forman\ un\ ángulo\ de\ 90°}$.

$c)$

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es: $r \equiv \{x = 3 + 2\lambda \;\; y = -4 - \lambda \;\; z = -7 + 2\lambda$.

Un punto genérico de r es $S(3 + 2\lambda, \; -4 - \lambda, \; -7 + 2\lambda)$.

La distancia de un punto a un plano es: $d(P;\ \pi) = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$; aplicando la fórmula al punto S y al plano $\pi \equiv 2x - y + 2z - 5 = 0$:

$$d(r;\ \pi) = 9 \Rightarrow \frac{|2(3+2\lambda) - (-4-\lambda) + 2(-7+2\lambda) - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|6+4\lambda+4+\lambda-14+4\lambda-5|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{|9\lambda-9|}{\sqrt{9}};$$

$9 = \frac{|9\lambda - 9|}{3}; \;\; 3 = |\lambda - 1| \Rightarrow \{3 = \lambda - 1 \rightarrow \lambda_1 = 4 \quad 3 = -\lambda + 1 \rightarrow \lambda_2 = -2$.

$S(3 + 2\lambda, \; -4 - \lambda, \; -7 + 2\lambda) \Rightarrow \{\lambda_1 = 4 \rightarrow \underline{S_1(11, \; -8, \; 1)} \;\; \lambda_2 = -2 \rightarrow \underline{S_2(-1, \; -2,}$

.

****

3º) a) Definición e interpretación geométrica del teorema del valor medio del cálculo diferencial.

b) Calcula los siguientes límites: i) $\frac{x-1}{x-\sqrt{2-x}}$. ii) $\frac{x-L(1+x)}{x\cdot L(1+x)}$.

----

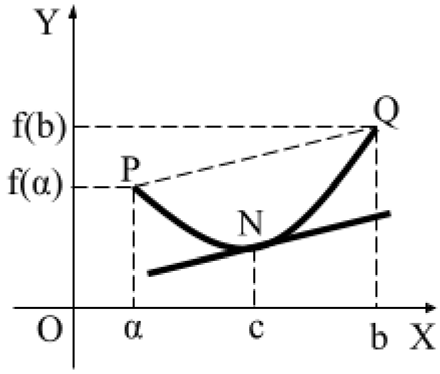
a)

El teorema del valor medio del cálculo diferencial, también conocido como teorema de Lagrange, se puede enunciar del siguiente modo:

"Si f(x) es una función continua en el intervalo [α, b] y derivable en (α, b), entonces, existe al menos un punto $c \in (\alpha, b)$ que cumple $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$".

La interpretación geométrica puede apreciarse fácilmente en la figura adjunta.

Considerando la función f(x), continua en [α, b] y derivable en (α, b) existe, por lo menos un punto N perteneciente al intervalo (α, b) en el que la recta tangente a la gráfica de f es paralela a la cuerda que une los puntos P y Q de coordenadas P [α, f (α)] y Q [b, f (b)].



b) i)

$$\frac{x-1}{x-\sqrt{2-x}} = \frac{1-1}{1-\sqrt{2-1}} = \frac{0}{1-\sqrt{1}} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \frac{(x-1)\left(x+\sqrt{2-x}\right)}{\left(x-\sqrt{2-x}\right)\left(x+\sqrt{2-x}\right)} =$$

$$= \frac{(x-1)\left(x+\sqrt{2-x}\right)}{x^2-\left(\sqrt{2-x}\right)^2} = \frac{(x-1)\left(x+\sqrt{2-x}\right)}{x^2-(2-x)} = \frac{(x-1)\left(x+\sqrt{2-x}\right)}{x^2+x-2}. \quad (*)$$

$$x^2 + x - 2 = 0;\ x = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{-1\pm3}{2} \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$. Sustituyendo este valor en (*):

$$\frac{x-1}{x-\sqrt{2-x}} = \frac{(x-1)\left(x+\sqrt{2-x}\right)}{(x+2)(x-1)} = \frac{x+\sqrt{2-x}}{x+2} = \frac{1+\sqrt{2-1}}{1+2} = \frac{1+1}{3} = \frac{2}{3}.$$

$$\underline{\frac{x-1}{x-\sqrt{2-x}} = \frac{2}{3}}.$$

ii)

$$\frac{x-L(1+x)}{x\cdot L(1+x)} = \frac{0-L1}{0\cdot L1} = \frac{0-0}{0\cdot 0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \frac{1-\frac{1}{1+x}}{1\cdot L(1+x)+\frac{x}{1+x}} =$$

$$= \frac{1-\frac{1}{1+x}}{1\cdot L(1+x)+\frac{x}{1+x}} = \frac{\frac{1+x-1}{1+x}}{\frac{(1+x)\cdot L(1+x)+x}{1+x}} = \frac{x}{(1+x)\cdot L(1+x)+x} = \frac{0}{1\cdot L1+0} = \frac{0}{1\cdot 0+0} = \frac{0}{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \frac{1}{1\cdot L(1+x)+(1+x)\cdot\frac{1}{1+x}+1} = \frac{1}{1\cdot L1+\frac{1}{1}+1} = \frac{1}{1\cdot 0+1+1} = \frac{1}{2}\ .$$

$$\underline{\frac{x-L(1+x)}{x\cdot L(1+x)} = \frac{1}{2}}\ .$$

****

4º) La derivada de una función $f(x)$, cuyo dominio es $(0,\ \infty)$, es $f^{'}(x) = \frac{1-Lx}{x^{2}}$.

$a)$ Determina la función $f(x)$ sabiendo que su gráfica pasa por el punto $P(1,\ 0)$.

$b)$ Determina los intervalos de concavidad y convexidad de $f(x)$.

$a)$

$$f(x) = \int f(x)\cdot dx = \int \frac{1-Lx}{x^{2}}\cdot dx = \int \frac{1}{x^{2}}\cdot dx - \int \frac{Lx}{x^{2}}\cdot dx = A - B. \quad (*)$$

$$A = \int \frac{1}{x^{2}}\cdot dx = \int x^{-2}\cdot dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \frac{x^{-1}}{-1} =- \frac{1}{x}.$$

$$B = \int \frac{Lx}{x^{2}}\cdot dx \Rightarrow \left\{ u = Lx \rightarrow du = \frac{1}{x}\cdot dx \; dv = \frac{1}{x^{2}}\cdot dx \rightarrow v =- \frac{1}{x} \right\} \Rightarrow Lx\cdot\left(- \frac{1}{x}\right) - \int - \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\cdot d$$

$$=- \frac{1}{x}\cdot Lx + \int \frac{1}{x^{2}}\cdot dx =- \frac{1}{x}\cdot Lx - \frac{1}{x} =- \frac{1}{x}\cdot(Lx + 1).$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de A y B:

$$f(x) =- \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\cdot(Lx + 1) + C =- \frac{1}{x} + \frac{1}{x}Lx + \frac{1}{x} + C = \frac{1}{x}Lx + C.$$

Por contener $f(x)$ al punto $P(1,\ 0)$ es $f(1) = 0$:

$$f(1) = \frac{1}{1}\cdot L1 + C = 0;\ 1\cdot 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0.$$

$$\underline{f(x) = \frac{1}{x}\cdot Lx.}$$

Una función es cóncava (∩) o convexa (∪) cuando su segunda derivada es negativa o positiva, respectivamente.

$$f^{''}(x) = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x^{2}-(1-Lx)\cdot 2x}{x^{4}} = \frac{-x-2x\cdot(1-Lx)}{x^{4}} = \frac{-1-2\cdot(1-Lx)}{x^{3}} = \frac{-1-2+2Lx}{x^{3}} = \frac{2Lx-3}{x^{3}}$$

.

Teniendo en cuenta el dominio de la función, que es: $D(f) \Rightarrow (0,\ +\infty)$, lo que supone que el denominador es siempre positivo, lo cual implica que la segunda derivada es positiva o negativa cuando lo sea la expresión $2Lx - 3$:

$$2 - Lx = 3; \; Lx = \frac{2}{3} \Rightarrow x = e^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{e^2}.$$

Los periodos de concavidad (∩) y convexidad (∪) son los siguientes:

$$\underline{Concavidad\ (\cap): f''(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon \left(0,\ \sqrt[3]{e^2}\right).}$$

$$\underline{Convexidad\ (\cup): f'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon \left(\sqrt[3]{e^2},\ +\infty\right).}$$

****

OPCIÓN B

1º) $a)$ Discute, según los valores de m, el sistema: $\{mx + 3y + 4z = m\, x - 4y - 5z = 0 \quad x - 3y - 4z = 0$.

$b)$ Resuelve cuando $m = 0$ y cuando $m = 1$.

$a)$

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$M = (m\, 3\, 4\, 1 \ - 4 \ - 5\, 1 \ - 3 \ - 4\,)$ y $M' = (m\, 3\, 4\, 1 \ - 4 \ - 5\, 1 \ - 3 \ - 4 \quad m\, 0\, 0\,)$.

El rango de M en función del parámetro m es el siguiente:

$|M| = |m\, 3\, 4\, 1 \ - 4 \ - 5\, 1 \ - 3 \ - 4\,| = 16m - 12 - 15 + 16 - 15m + 12 = m +$

$\Rightarrow m =- 1.$

$\underline{Para\, m \neq - 1 \Rightarrow Ran\, M = Ran\, M' = 3 = nº\, incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

Para $m =- 1$ es $M' = (- 1\, 3\, 4\, 1 \ - 4 \ - 5\, 1 \ - 3 \ - 4 \quad - 1\, 0\, 0\,) \Rightarrow Rang\, M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |- 1\, 3 \ - 1\, 1 \ - 4\, 0\, 1 \ - 3\, 0\,| =- 1 \cdot |1 \ - 4\, 1 \ - 3\,| =- (- 3 + 4) =- 1 \neq 0 \Rightarrow Ran$

.

$\underline{Para\, m =- 1 \Rightarrow Ran\, M = 2;\ Ran\, M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible}.$

$b)$

Para $m = 0$ el sistema es $\{3y + 4z = 0 \quad x - 4y - 5z = 0\, x - 3y - 4z = 0$, que es compatible determinado y, además, es homogéneo, por lo cual solamente admite la solución trivial.

$\underline{Solución: x = y = z = 0}.$

Para $m = 1$ el sistema es $\{x + 3y + 4z = 1\, x - 4y - 5z = 0\, x - 3y - 4z = 0$, que es compatible determinado.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$x = \frac{|1\, 3\, 4\, 0\, -4\, -5\, 0\, -3\, -4\,|}{1+1} = \frac{16-15}{2} = \frac{1}{2}.$

$$y = \frac{|1\ 1\ 4\ 1\ 0\ -5\ 1\ 0\ -4\ |}{2} = \frac{-5+4}{2} = -\frac{1}{2}.$$

$$z = \frac{|1\ 3\ 1\ 1\ -4\ 0\ 1\ -3\ 0\ |}{2} = \frac{-3+4}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\underline{Solución:\ x = \frac{1}{2},\ \ y = -\frac{1}{2},\ \ z = \frac{1}{2}}.$$

****

2º) Dada la recta $r \equiv \{x - y + 2 = 0 \quad x + y - z - 2 = 0$:

$a)$ Calcula la ecuación implícita o general del plano π que pasa por el punto $P(2, 5, -2)$ y es perpendicular a la recta r.

$b)$ Estudia la posición relativa de la recta r y la recta s que pasa por los puntos P y $Q(-1, 4, 2)$.

$c)$ Calcula el punto de la recta r que equidista de los puntos P y Q.

$a)$

La expresión de la recta r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$r \equiv \{x - y + 2 = 0 \quad x + y - z - 2 = 0 \Rightarrow y = \lambda;\ x = -2 + \lambda;\ z = x + y - 2$

$= -2 + \lambda + \lambda - 2 = 2\lambda - 4 \Rightarrow r \equiv \{x = -2 + \lambda\, y = \lambda \quad z = 2\lambda - 4$. Un punto de r es $M(-2, 0, 2)$.

Un vector director de r es $\vec{v_r} = (2, -1, -2)$.

El plano π, por ser perpendicular a r, tiene como vector normal a cualquier vector que sea linealmente dependiente del vector director de la recta: $\vec{n} = (2, -1, -2)$.

La expresión general de π es la siguiente: $\pi \equiv 2x - y - 2z + D = 0$.

Por contener el plano π al punto $P(2, 5, -2)$ tiene que satisfacer su ecuación:

$\pi \equiv 2x - y - 2z + D = 0\ P(2, 5, -2)\ \} \Rightarrow 2 \cdot 2 - 5 - 2 \cdot (-2) + D = 0;$

$4 - 5 + 4 + D = 0; 3 + D = 0 \Rightarrow D = -3.$

$$\underline{\pi \equiv 2x - y - 2z - 3 = 0}.$$

$b)$

Los puntos $P(2, 5, -2)$ y $Q(-1, 4, 2)$ determinan el vector:

$\vec{QP} = [P - Q] = [(2, 5, -2) - (-1, 4, 2)] = (3, 1, -4).$

Un vector director de s es $\vec{v}_s = \vec{QP} = (3,\ 1,\ -4)$.

Los vectores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ son linealmente independiente por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $M \in r$ y extremo el punto $P \in s$: $\vec{w} = \vec{MP} = [P - M] = [(2,\ 5,\ -2) - (-2,\ 0,\ 2)] = (4,\ 5,\ -4)$.

Según que los vectores $\left\{\vec{v}_r,\ \vec{v}_s,\ \vec{w}\right\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\left\{\vec{v}_r,\ \vec{v}_s,\ \vec{w}\right\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que determinan es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\left\{\vec{v}_r,\ \vec{v}_s,\ \vec{w}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 \\ 4 & 5 & -4 \end{vmatrix} = -8 - 30 + 16 + 8 + 40 - 12$$

$= 56 - 42 = 14 \neq 0.$

<u>*Las rectas r y s se cruzan.*</u>

$c)$

Un punto genérico de la recta $r \equiv \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda - 4 \end{cases}$ es $N(-2 + \lambda,\ \lambda,\ 2\lambda - 4)$.

$$\overline{PN} = \sqrt{(-2 + \lambda - 2)^2 + (\lambda - 5)^2 + (2\lambda - 4 + 2)^2} =$$

$$= \sqrt{(\lambda - 4)^2 + (\lambda - 5)^2 + (2\lambda - 2)^2} =$$

$$= \sqrt{\lambda^2 - 8\lambda + 16 + \lambda^2 - 10\lambda + 25 + 4\lambda^2 - 8\lambda + 4} = \sqrt{6\lambda^2 - 26\lambda + 45}.$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{(-2 + \lambda + 1)^2 + (\lambda - 4)^2 + (2\lambda - 4 - 2)^2} =$$

$$= \sqrt{(\lambda - 1)^2 + (\lambda - 4)^2 + (2\lambda - 6)^2} =$$

$$= \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 1 + \lambda^2 - 8\lambda + 16 + 4\lambda^2 - 24\lambda + 36} = \sqrt{6\lambda^2 - 34\lambda + 53}.$$

$$\overline{PN} = \overline{PQ} \Rightarrow \sqrt{6\lambda^2 - 26\lambda + 45} = \sqrt{6\lambda^2 - 34\lambda + 53};$$

$$-26\lambda + 45 = -34\lambda + 53; \quad 8\lambda = 8 \Rightarrow \lambda = 1.$$

$$N(-2 + \lambda, \lambda, 2\lambda - 4) \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \underline{N(-1, 1, -2)}.$$

****

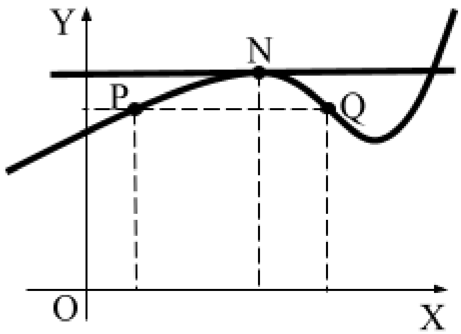
3º) a) Enunciado e interpretación geométrica del teorema de Rolle.

b) Sea la función $f(x) = 2x + \frac{5}{2}L\left(1 + x^2\right)$. Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto correspondiente a $x = 0$. Determina, si existen, los máximos y mínimos relativos de $f(x)$.

----

a)

El teorema de Rolle dice que "si una función $f(x)$ en continua en $[a,\ b]$ y derivable en $(a,\ b)$, con $a,\ b \in R$ y $a < b$, y se cumple que $f(a) = f(b)$, existe al menos un valor c, $a < c < b$ tal que $f'(c) = 0$".



La interpretación geométrica puede apreciarse fácilmente en la figura adjunta.

Considerando la función $f(x)$, continua en $[a,\ b]$ y derivable en $(a,\ b)$ existe, por lo menos un punto N perteneciente al intervalo $(a,\ b)$ en el que la recta tangente a la gráfica de f es paralela a la cuerda que une los puntos P y Q.

b)

La pendiente de la recta tangente a una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

$$f'(x) = 2 + \frac{5}{2} \cdot \frac{2x}{1+x^2} = 2 + \frac{5x}{1+x^2}. \quad m = f'(0) = 2.$$

$f(0) = 2 \cdot 0 + \frac{5}{2}L1 = 0$. El punto de tangencia es $O(0,\ 0)$.

$$\underline{La\ recta\ tangente\ pedida\ es\ y = 2x}.$$

Para que una función tenga un extremo relativo, máximo o mínimo, es condición necesaria que se anule la primera derivada de la función y sea distinta de cero el valor de la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2 + \frac{5x}{1+x^2} = 0;\ \ 2\left(1 + x^2\right) + 5x = 0;\ \ 2x^2 + 5x + 2 = 0;$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4} \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = -\frac{1}{2}.$$

$$f''(x) = \frac{5 \cdot \left(1+x^2\right) - 5x \cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{5+5x^2-10x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{5-5x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{5 \cdot \left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

$$f''(-\ 2) = \frac{5\cdot(1-4)}{(1+4)^2} = -\ \frac{15}{25} < \ 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x\ =\ \ -\ 2.$$

$$f(-\ 2) =\ 2\cdot(-\ 2) + \frac{5}{2}L(1\ +\ 5) = -\ 4\ + \frac{5}{2}L5 \cong 0,02.$$

$$\underline{Máximo\ relativo: P(-\ 2,\ 0,02)}.$$

$$f\left(-\ \frac{1}{2}\right) =\ 2\cdot\left(-\ \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2}L\left(1\ +\frac{1}{4}\right) = -\ 1\ + \frac{5}{2}L\frac{5}{4} \cong\ -\ 0,44.$$

$$\underline{Mínimo\ relativo: Q\left(-\ \frac{1}{2},\ \ -\ 0,44\right)}.$$

****

4º) Dada la función $f(x) = \{\ ax + 2 \ \ si \ \ x < 1\ 3(x - 2)^2 \ \ si \ \ x \geq 1$:

$a)$ ¿Es $f(x)$ derivable en $x = 1$, para algún valor real de a?

$b)$ Para $a = 1$, calcula el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$ y el eje OX.

$a)$

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto.

La función $f(x)$ es continua en la recta real $\forall a \in R$. Se trata de determinar el valor de α para que sea derivable en el punto crítico $x = 1$.

Para que la función sea continua en un punto es necesario que sus límites laterales sean iguales e igual al valor de la función en ese punto.

$$f(x) = (ax + 2) = a + 2 \qquad f(x) = \left[3(x - 2)^2\right] = 3 = f(1) \} \Rightarrow a + 2 =$$

.

La función resulta ser $f(x) = \{\ -x + 2 \ \ si \ \ x < 1\ 3(x - 2)^2 \ \ si \ \ x \geq 1$, que es derivable en R, excepto para $x = 1$, cuya derivabilidad vamos a comprobar.

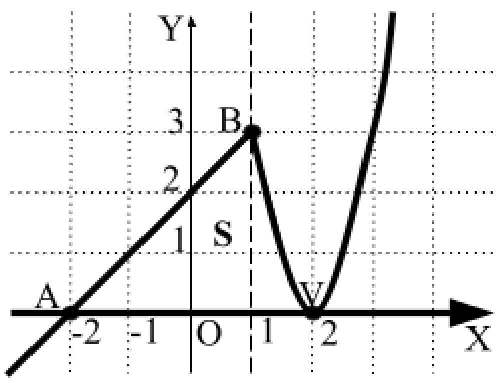
$$f'(x) = \{\ \ -1 \ \ \ si \ \ x < 1\ 6x - 12 \ \ si \ \ x \geq 1 \ \Rightarrow f'\left(1^-\right) = -1 \neq f'\left(1^+\right) = -6.$$

$$\underline{La\ función\ no\ es\ derivable\ para\ x = 1}.$$

$b)$

Para $a = 1$ la función es $f(x) = \{\ x + 2 \ \ si \ \ x < 1\ 3(x - 2)^2 \ \ si \ \ x \geq 1$.

Para una mejor comprensión del ejercicio se hace una representación gráfica aproximada de la situación.



Para la representación de la función tenemos en cuenta que en su intervalo $(-\infty, 1)$ se trata de la expresión $f(x) = x + 2$, que es una recta que corta al eje de abscisas en el punto $A(-2, 0)$. En el intervalo $(1, +\infty)$ se trata de la expresión $f(x) = 3(x - 2)^2$, que es una parábola convexa (∪) que tiene su vértice en el punto $V(2, 0)$. Un punto especial de la función es $B(1, 3)$, en donde se produce la continuidad y no derivabilidad de la función.

La representación gráfica es, aproximadamente, la que indica la figura.

La superficie S pedida, que se deduce fácilmente de la gráfica, es la siguiente:

$$S = \int_{-2}^{1} (x + 2)dx + \int_{1}^{2} 3(x - 2)^2 dx = \int_{-2}^{1} (x + 2)dx + 3\int_{1}^{2} (x - 2)^2 dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} + 3\int_{1}^{2}\left(x^2 - 4x + 4\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} + 3\cdot\left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right]_{1}^{2} =$$

$$= \left(\frac{1^2}{2} + 2\cdot1\right) - \left[\frac{(-2)^2}{2} + 2\cdot(-2)\right] + 3\cdot\left[\left(\frac{2^3}{3} - 2\cdot2^2 + 4\cdot2\right) - \left(\frac{1}{3} - 2 + 4\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2} + 2 - 2 + 4 + 3\cdot\left(\frac{8}{3} - 8 + 8 - \frac{1}{3} - 2\right) = \frac{1}{2} + 4 + 3\left(\frac{7}{3} - 2\right) = \frac{1}{2} + 4 + 7 -$$

$$= \frac{1}{2} + 5 = \frac{11}{2}.$$

$$\underline{S = \frac{11}{2}\, u^2 = 5,5\, u^2.}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE GALICIA

SEPTIEMBRE – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá responder solo a los ejercicios de una de las opciones.

OPCIÓN A

1º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & a-2 & 1 \\ a-1 & a & -1 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}$:

a) Calcula, según los valores de a, el rengo de A. Calcula, si existe, la inversa de A cuando $a = 0$.

b) Para $a = 0$ calcula la matriz B que verifica $ABA^{-1} - A = 2I$.

c) Para $a = 1$, calcula todas las matrices $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tales que $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

----

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & a-2 & 1 \\ a-1 & a & -1 \\ a & 0 & 2 \end{vmatrix} = -a(a-2) - a^2 - 2(a-1)(a-2) =$$

$$= -a^2 + 2a - a^2 - 2\left(a^2 - 2a - a + 2\right) = -2a^2 + 2a - 2a^2 + 6a - 4 =$$

$$= -4a^2 + 8a - 4 = -4\left(a^2 - 2a + 1\right) = -4(a-1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1.$$

$$\underline{Para\ a \neq 1 \Rightarrow Rang\ A = 3}.$$

$$Para\ a = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow Rang\ A = 2.$$

$$\underline{Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ A = 2}.$$

b)

$$Para\ a = 0\ es\ A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$A \cdot B \cdot A^{-1} - A = 2I;\ \ A \cdot B \cdot A^{-1} = A + 2I$. Siendo $A + 2I = M$:

$A^{-1}\cdot A\cdot B\cdot A^{-1}\cdot A = A^{-1}\cdot M\cdot A;\ \ I\cdot B\cdot I = A^{-1}\cdot M\cdot A \Rightarrow B = A^{-1}\cdot M\cdot A.$

$M = A + 2I = (0\ -2\ 1\ -1\ 0\ -1\ 0\ 0\ 2\ ) + (2\ 0\ 0\ 0\ 2\ 0\ 0\ 0\ 2\ ) = (2\ -2\ 1\ -$

.

Para obtener la inversa de A se utiliza el método de Gauss-Jordan:

$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow -F_2\right\} \Rightarrow$

$= (1\ 0\ 0\ 0\ -1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_1 \leftrightarrow F_2\right\} \Rightarrow (0\ -1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow -\frac{1}{2}F_2\ F_3 \rightarrow \frac{1}{2}F_2\right\} \Rightarrow \left(0\ -1\ 0\ -\frac{1}{2}\ 0\ 0\ 0\ 0\ \frac{1}{2}\ \right) \Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow F_1 - F_3\ F_2 \rightarrow F_2 +\right.$

$\Rightarrow \left(0\ -1\ -\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ 0\ 1\ 0\ 0\ \frac{1}{2}\ \right) \Rightarrow A^{-1} = \left(0\ -1\ -\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{4}\ 0\ 0\ \frac{1}{2}\ \right) = \frac{1}{4}\cdot(0$

.

Sustituyendo los valores obtenidos en la expresión de B:

$B = A^{-1}\cdot M\cdot A = \frac{1}{4}\cdot(0\ -4\ -2\ -2\ 0\ 1\ 0\ 0\ 2\ )\cdot(2\ -2\ 1\ -1\ 2\ -1\ 0\ 0\ 4\ )\cdot(0\ -2$

$= \frac{1}{4}\cdot(4\ -8\ -4\ -4\ 4\ 2\ 0\ 0\ 8\ )\cdot(0\ -2\ 1\ -1\ 0\ -1\ 0\ 0\ 2\ ) = \frac{1}{4}\cdot(8\ -8\ 4\ -4\ 8$

.

$\underline{B = (2\ -2\ 1\ -1\ 2\ -1\ 0\ 0\ 4\ )}.$

$c)$

Para $a = 1 \Rightarrow A\cdot X = (0\ 0\ 0\ ) \Rightarrow (0\ -1\ 1\ 0\ 1\ -1\ 1\ 0\ 2\ )\cdot(x\ y\ z\ ) = (0\ 0\ 0\ ) \Rightarrow$

$\Rightarrow -y + z = 0\ \ y - z = 0\ x + 2z = 0\ \}$, equivalente al sistema: $y - z = 0\ x + 2z = 0\ \}$, que es compatible indeterminado.

Haciendo $z = \lambda \Rightarrow x = -2\lambda,\ y = \lambda.$

$\underline{X = (-2\lambda\ \lambda\ \lambda\ ),\ \forall\lambda \in R}.$

****

2º) Dados los planos $\pi_1 \equiv 3x + 3z - 8 = 0$; $\pi_2 \equiv \{x = \frac{5}{2} + \lambda - \mu \quad y = -\lambda + \mu \quad z = 3 + 2\lambda + \mu$:

a) Calcula el ángulo que forman π_1 y π_2. Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por $O(0,\ 0,\ 0)$ y es paralela a π_1 y π_2.

b) Calcula punto simétrico de $O(0,\ 0,\ 0)$ respecto del plano π_1.

----

a)

El ángulo α que forman dos planos es el menos ángulo que forman sus vectores normales. Un vector normal de π_1 es $\vec{n_1} = (1,\ 0,\ 1)$.

Los vectores directores del plano π_2 son $\vec{u} = (1,\ 0,\ 2)$ y $\vec{v} = (-1,\ 1,\ 1)$.

Un vector normal de π_2 es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de dos de sus infinitos vectores directores, por ejemplo:

$$\vec{n_2} = \vec{u} \times \vec{v} = |i\ j\ k\ 1\ \ -1\ 2\ \ -1\ 1\ 1| = -i - 2j + k - k - 2i - j = -3i - 3j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{n_2} = (1,\ 1,\ 0).$$

Por el concepto de producto escalar:

$$\left|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}\right| = \left|\vec{n_1}\right| \cdot \left|\vec{n_2}\right| \cdot \cos cos\ \alpha \Rightarrow \cos cos\ \alpha = \frac{\left|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}\right|}{\left|\vec{n_1}\right| \cdot \left|\vec{n_2}\right|} = \frac{|(1,0,1)\cdot(1,1,0)|}{\sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{1+1}} =$$

$$= \frac{|1+0+0|}{\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{1+1}} = \frac{|1|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60°.$$

$\underline{Los\ planos\ \pi_1\ y\ \pi_2\ forman\ un\ ángulo\ de\ 60°.}$

Un punto de $\pi_2 \equiv \{x = \frac{5}{2} + \lambda - \mu \quad y = -\lambda + \mu \quad z = 3 + 2\lambda + \mu\ es\ P\left(\frac{5}{2},\ 0,\ 3\right)$.

La expresión general del plano π_2 es la siguiente:

$$\pi_2\left(P;\ \vec{u},\ \vec{v}\right) \equiv \left|x - \frac{5}{2}\ y\ z - 3\ 1\ \ -1\ 2\ \ -1\ 1\ 1\right| = 0;$$

$-\left(x-\frac{5}{2}\right)-2y+(z-3)-(z-3)-2\left(x-\frac{5}{2}\right)-y=0; \quad -3\left(x-\frac{5}{2}\right)-3y=0$
$x-\frac{5}{2}+y=0;\ 2x-5+2y=0 \Rightarrow \pi_2 \equiv 2x+2y-5=0.$

La recta s es la que forman los planos $\pi_1\ y\ \pi_2$ es $s \equiv \{3x+3z-8=0\ 2x+2y-5=0$.

Un vector director de s es cualquiera que sea linealmente dependiente de los vectores normales de los planos que la determinan:

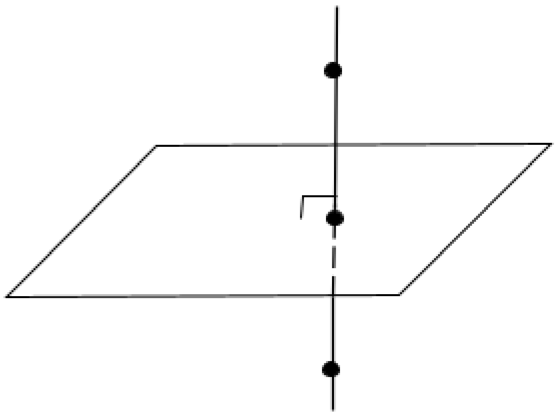
$\vec{v}_s = |i\ j\ k\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ | = j+k-i=-i+j+k \Rightarrow \vec{v}_s = (1,\ -1,\ -1)$
.

La recta r, por ser paralela a la recta s, tiene su mismo vector director.

La recta r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente: $r \equiv \{x=\lambda\ \ y=-\lambda\ z=-\lambda$.

b)

La recta t que pasa por O y es perpendicular al plano π_1 tiene como vector director al vector normal del plano: $\vec{n}_1 = (1,\ 0,\ 1)$.



La expresión de t dada por unas ecuaciones paramétricas es $t \equiv \{x=\mu\ y=0\ z=\mu$.

El punto Q, intersección del plano π_1 con la recta t es el siguiente:

$\pi_1 \equiv 3x+3z-8=0 \qquad t \equiv \{x=\mu\ y=0\ z=\mu\ \} \Rightarrow 3\mu+3\mu-8=0 \Rightarrow \mu=\frac{4}{3}$
.

Tiene que cumplirse que $\vec{OQ} = \vec{QO'}$.

$\vec{OQ} = [Q-O] = \left(\frac{4}{3},\ 0,\ \frac{4}{3}\right).$

$\vec{QO'} = [O'-Q] = \left[(x,\ y,\ z)-\left(\frac{4}{3},\ 0,\ \frac{4}{3}\right)\right] = \left(x-\frac{4}{3},\ y-0,\ z-\frac{4}{3}\right).$

$$\left(\frac{4}{3},\ 0,\ \frac{4}{3}\right) = \left(x - \frac{4}{3},\ y - 0,\ z - \frac{4}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \to x = \frac{8}{3} & y - 0 = 0 \to y = \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{O'\left(\frac{8}{3},\ 0,\ \frac{8}{3}\right)}.$$

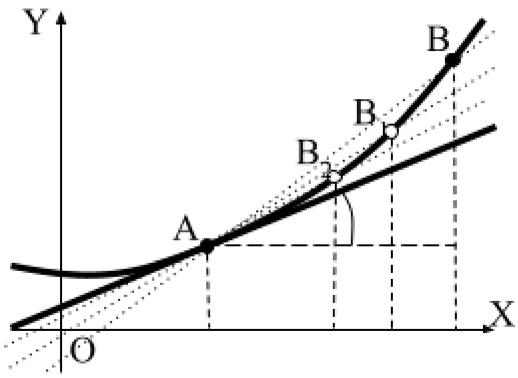
****

3º) a) Definición e interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto.

b) De una función $f(x)$ sabemos que $f'(-1) = 1$ y que su función derivada es la siguiente: $f'(x) = \{2x - 1 \;\; si \;\; x < 0 \; e^{2x} - 2 \; si \; x \geq 0$. Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de $f(x)$ en los puntos de abscisas $x = -2 \; y \; x = \frac{L2}{2}$.

----

a)



Considerando la función $f(x)$ de la figura, continua en el punto A, de abscisa ɑ, se denomina tasa de variación media de un intervalo cerrado $[a, \; b]$ a la expresión:

$TVM[a, \; b] = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.   (1)

La $TVM[a, \; b]$ es la tangente o pendiente de la secante a la función $f(x)$ que pasa por los puntos A y B.

La derivada de una función en un punto es la tasa de variación instantánea de la función en ese punto, o sea, es el límite cuando $b \rightarrow a$ de la fracción (1). Si hacemos el cambio de variable $h = b - a$, queda finalmente la expresión de la derivada, que se expresa de este modo: $f'(a) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

La interpretación gráfica de la derivada de una función en un punto puede deducirse de la observación de la figura: cuando b tiende a ɑ (h tiende a cero), el punto B tiende a aproximarse infinitamente al punto A, con lo cual la secante tiende a confundirse con la tangente; es decir:

$\underline{La \; derivada \; de \; una \; función \; en \; un \; punto \; es \; la \; recta \; tangente \; en \; ese \; punto.}$

b)

Para $x < 0$ la función es $f(x) = \int (2x - 1) \cdot dx = x^2 - x + C_1$.

$f(-1) = 1 \Rightarrow (-1)^2 - (-1) + C_1 = 1; \;\; 1 + 1 + C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = -1.$

El punto de tangencia para $x < 0$ es:

$f(-2) = (-2)^2 - (-2) - 1 = 4 + 2 - 1 = 5 \Rightarrow P(-2, \; 5).$

La pendiente de una función en un punto es igual que el valor de su derivada en ese punto. Para el punto $P(-\ 2,\ 5)$ la pendiente es la siguiente:

$m_1 = f'(-\ 2) = 2 \cdot (-\ 2) - 1 =-\ 4 - 1 =-\ 5.$

La ecuación de la recta punto-pendiente es $y - y_0 = m\left(x - x_0\right)$.

Para $P(-\ 2,\ 5)$ y $m_1 = f'(-\ 2) = 2 \cdot (-\ 2) - 1 =-\ 4 - 1 =-\ 5.$

$t_1 \Rightarrow y - 5 =-\ 5 \cdot (x + 2) =-\ 5x - 10.$

$$\underline{t_1 \equiv 5x + y + 5 = 0.}$$

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, cuando una función es derivable en un punto, necesariamente, es continua en ese punto.

Por existir la derivada en $x = 0$, la función $f(x)$ es continua para $x = 0$.

La función derivada es $f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & si\ \ x < 0 \\ e^{2x} - 2 & si\ x \geq 0 \end{cases}$ y la función $f(x)$ resulta ser $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 \\ \frac{1}{2}e^{2x} - 2x + C_2 \end{cases}$.

Por ser la función continua en $x = 0$ tiene que cumplirse:

$$\begin{cases} f(x) = \left(x^2 - x - 1\right) = -\ 1 \\ f(x) = \left(\frac{1}{2}e^{2x} - 2x + C_2\right) = \frac{1}{2} + C_2 \end{cases} \Rightarrow -\ 1 =$$

.

Para $x > 0$ la función es $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2x - \frac{3}{2}$.

El punto de tangencia para $x = \frac{L2}{2}$ es el siguiente:

$$f\left(\frac{L2}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{L2} - L2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2 - L2 - \frac{3}{2} =-\ L2 - \frac{1}{2} \Rightarrow Q\left(\frac{L2}{2},\ -\ \frac{L4+1}{2}\right).$$

La pendiente en el punto Q es: $m_2 = f'\left(\frac{L2}{2}\right) = e^{2 \cdot \frac{L2}{2}} - 2 = 2 - 2 = 0.$

$t_2 \Rightarrow y + \frac{L4+1}{2} = 0 \cdot \left(x - \frac{L2}{2}\right) = 0;\ \ 2y + L4 + 1 = 0.$

$$\underline{t_2 \equiv 2y + L4 + 1 = 0.}$$

****

4º) Dibuja y calcula el área de la región limitada por el eje de abscisas, la gráfica de la parábola $y = x(x - 2)$ y la recta $y = x$. (Nota: para el dibujo de la gráfica de la parábola, indica los puntos de corte con los ejes, el vértice y la concavidad o convexidad).

Las abscisas de los puntos de corte de dos funciones son las soluciones reales de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones.

$y = x^2 - 2x \qquad y = x \} \Rightarrow x^2 - 2x = x;\ x^2 - 3x = 0;\ x(x - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 =$

.

Los puntos de corte se deducen fácilmente de la recta: $O(0,\ 0)\ y\ A(3,\ 3)$.

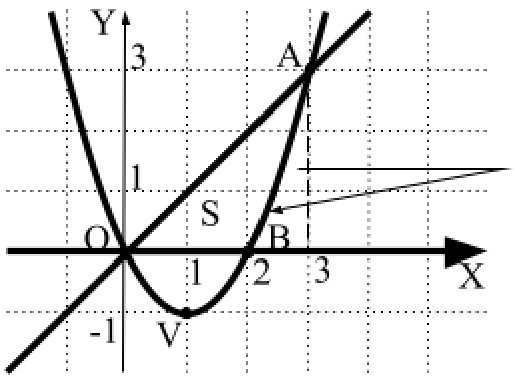
La parábola $y = x^2 - 2x$ es convexa (∪) y su vértice es el siguiente:

$y'(x) = 2x - 2. \qquad y'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \Rightarrow V(1,\ -1)$.

Los puntos de corte con el eje X de la parábola son los siguientes:

$x^2 - 2x = 0;\ x(x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2 \Rightarrow O(0,\ 0)$ y $B(2,\ 0)$.

La representación gráfica, aproximada, de la situación se indica en la figura adjunta.



De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_0^2 x \cdot dx + \int_2^3 \left[x - \left(x^2 - 2x\right)\right] dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + \int_2^3 \left(3x - x^2\right) dx = 2 + \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_2^3 =$$

$$= 2 + \left(\frac{3 \cdot 3^2}{2} - \frac{3^3}{3}\right) - \left(\frac{3 \cdot 2^2}{2} - \frac{2^3}{3}\right) = 2 + \frac{27}{2} - 9 - 6 + \frac{8}{3} = \frac{27}{2} + \frac{8}{3} - 13 = \frac{81+16-}{6}$$

$$= \frac{97-78}{6} = \frac{19}{6}.$$

$$\underline{S = \frac{19}{6} u^2.}$$

****

OPCIÓN B

1º) $a)$ Discute, según los valores de m, el sistema: $\{x + y + z = 1 \quad 4x + my + 3z = m \; 2x + 3y + z = 3$.

$b)$ Resuelve cuando $m = 5$.

$a)$

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$M = (1\ 1\ 1\ 4\ m\ 3\ 2\ 3\ 1\ )$ y $M' = (1\ 1\ 1\ 4\ m\ 3\ 2\ 3\ 1 \quad 1\ m\ 3\ )$.

El rango de M en función del parámetro m es el siguiente:

$|M| = |1\ 1\ 1\ 4\ m\ 3\ 2\ 3\ 1\ | = m + 12 + 6 - 2m - 9 - 4 = - m + 5 = 0 \Rightarrow m = 5$

.

$\underline{Para\ m \neq 5 \Rightarrow Ran\ M = Ran\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

$Para\ m = 5 \Rightarrow M' = (1\ 1\ 1\ 4\ 5\ 3\ 2\ 3\ 1 \quad 1\ 5\ 3\ ) \Rightarrow \{C_2 = C_4\} \Rightarrow Rang\ M' = 2$

.

$\underline{Para\ m = 5 \Rightarrow Ran\ M = Ran\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

$b)$

Para $m = 5$ el sistema es $\{x + y + z = 1 \quad 4x + 5y + 3z = 5 \; 2x + 3y + z = 3$, que es compatible indeterminado.

Despreciando la segunda ecuación y haciendo $z = \lambda$:

$x + y = 1 - \lambda \; 2x + 3y = 3 - \lambda\} \quad 3x + 3y = 3 - 3\lambda \; - 2x - 3y = - 3 + \lambda\}$

$= 1 - \lambda - (- 2\lambda) = 1 - \lambda + 2\lambda = 1 + \lambda.$

$\underline{Solución: \{x = - 2\lambda \;\; y = 1 + \lambda \; z = \lambda \quad , \forall\lambda \in R}.$

****

2º) Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{3}$ y $s \equiv \begin{cases} 3x + 2y - 6 = 0 \\ 2y + 4z + 3 = 0 \end{cases}$:

a) Estudia su posición relativa.

b) Calcula la ecuación implícita o general del plano que contiene a r y es paralelo a s.

c) Calcula la distancia entre r y s.

----

a)

La expresión de la recta s por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

Haciendo $y = \lambda \Rightarrow x = \frac{6-2\lambda}{3} = 2 - \frac{2}{3}\lambda;\ z = \frac{-3-2\lambda}{4} = -\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\lambda \Rightarrow$

$\Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 2 - \frac{2}{3}\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\lambda \end{cases}$.

Un punto y un vector de cada una de las rectas son los siguientes:

Recta r: $A(3, 2, 1)$ y $\vec{v}_r = (4, -1, 3)$. Recta s: $B\left(2, 0, -\frac{3}{4}\right)$ y $\vec{v}_s = (4, -6, 3)$.

Los vectores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$:
$\vec{w} = \overrightarrow{AB} = [B - A] = \left[\left(2, 0, -\frac{3}{4}\right) - (3, 2, 1)\right] = \left(-1, -2, -\frac{7}{4}\right)$.

Según que los vectores $\{\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$Rang\{\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 4 & -6 & 3 \\ -1 & -2 & -\frac{7}{4} \end{vmatrix} = 42 + 3 - 24 - 18 + 24 -$

$= 45 - 25 = 20 \neq 0 \Rightarrow Rang\left\{\vec{v}_r,\ \vec{v}_s,\ \vec{w}\right\} = 3 \Rightarrow \vec{v}_r,\ \vec{v}_s,\ \vec{w}$ *no son coplanarios.*

<u>*Las rectas r y s se cruzan.*</u>

b)

El plano π pedido, por contener a r contiene al punto $A(3,\ 2,\ 1) \in r$ y tiene como vector director a $\vec{v}_r = (4,\ -1,\ 3)$.

Por ser π paralelo a la recta s tiene como vector director a $\vec{v}_s = (4,\ -6,\ 3)$.

La expresión general del plano π es la siguiente:

$$\pi\left(A;\ \vec{v}_r,\ \vec{v}_s\right) \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 4 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-3(x-3) + 12(y-2) - 24(z-1) + 4(z-1) + 18(x-3) - 12(y-2) = 0;$$

$$15(x-3) - 20(z-1) = 0;\ \ 3(x-3) - 4(z-1) = 0;\ \ 3x - 9 - 4z + 4 = 0$$

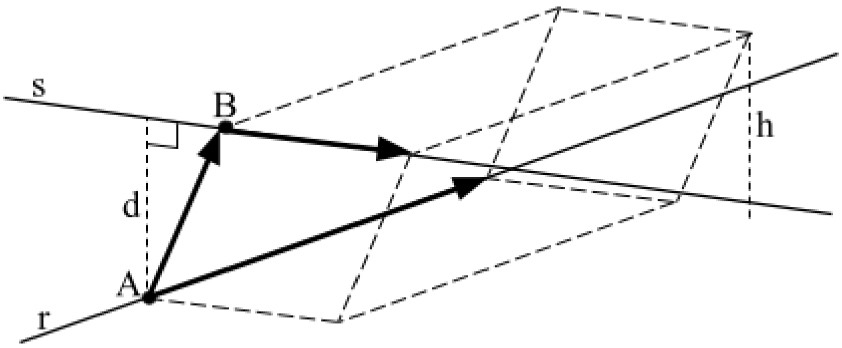
.

<u>$\pi \equiv 3x - 4z - 5 = 0$</u>.

c)

Para calcular la distancia entre las rectas r y s vamos a determinar un paralelepípedo cuyas dimensiones son los vectores directores de las rectas, $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$, y el vector $\vec{w}$ que tiene como origen al punto A de r y extremo el punto B de s.

Para una mejor comprensión se hace el esquema que se observa.



El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observando que la altura h es igual a la distancia d pedida entre las rectas.

Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$V = \vec{v}_r \cdot \left(\vec{v}_s \times \vec{w} \right) = \left| \vec{v}_r \times \vec{v}_s \right| \cdot h = \left| \vec{v}_r \times \vec{v}_s \right| \cdot d \Rightarrow d = \frac{\left| \vec{v}_r \cdot \left(\vec{v}_s \times \vec{w} \right) \right|}{\left| \vec{v}_r \times \vec{v}_s \right|}.$$

$$d(r,\ s) = \frac{\left| \vec{v}_r \cdot \left(\vec{v}_s \times \vec{w} \right) \right|}{\left| \vec{v}_r \times \vec{v}_s \right|} = \frac{\| 4\ -1\ 3\ 4\ -6\ 3\ -1\ -2\ -\frac{7}{4}\ \|}{| i\ j\ k\ 4\ -1\ 3\ 4\ -6\ 3\ |} = \frac{|20|}{|-3i+12j-24k+4k+18i-12j|} =$$

$$= \frac{20}{|-3i+21j-9k|} = \frac{20}{|15i-20k|} = \frac{20}{5 \cdot |3i-4k|} = \frac{4}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{4}{\sqrt{9+16}} = \frac{4}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}.$$

$$\underline{d(r,\ s) = \frac{4}{5} u = 0,8\ u.}$$

****

3º) Dibuja la gráfica de $f(x) = 1 + \frac{2}{(x-2)^2}$, estudiando: dominio, simetrías, puntos de corte con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, puntos de inflexión e intervalos de concavidad y convexidad.

$$f(x) = 1 + \frac{2}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)^2+2}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+4+2}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+6}{(x-2)^2}.$$

Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto los valores reales de x que anulan el denominador ⇒ $\underline{D(f) \Rightarrow R - \{2\}}$.

No es simétrica con respecto al eje Y por ser $f(-x) \neq f(x)$ y, tampoco es simétrica con respecto al origen, por ser $f(-x) \neq -f(x)$.

$$\underline{No\ tiene\ ningún\ tipo\ de\ simetrías.}$$

Cortes con el eje X:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2-4x+6}{(x-2)^2} = 0;\ \ x^2 - 4x + 6 = 0;\ \ x = \frac{4 \pm \sqrt{16-24}}{2} \Rightarrow x \notin R.$$

$$\underline{La\ función\ no\ corta\ al\ eje\ X.}$$

Corte con el eje Y: $x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{6}{(-2)^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow \underline{A\left(0,\ \frac{3}{2}\right)}$.

Asíntotas horizontales: son de la forma y = k y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = f(x) = \frac{x^2-4x+6}{(x-2)^2} = 1 \Rightarrow \underline{Asíntota\ horizontal: y = 1}\ .$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{Asíntota\ vertical: x = 2.}$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{(2x-4)(x-2)^2-\left(x^2-4x+6\right)\cdot 2\cdot (x-2)\cdot 1}{(x-2)^4} = \frac{(2x-4)(x-2)-2\left(x^2-4x+6\right)}{(x-2)^3} =$$

$$= \frac{2x^2-4x-4x+8-2x^2+8x-12}{(x-2)^3} = \frac{-4}{(x-2)^3}.$$

Teniendo en cuenta el dominio de la función, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$Para\ x < 2 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: (-\infty, 2)}.$$

$$Para\ x > 2 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: (2, +\infty)}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

$$f'(x) = \frac{-4}{(x-2)^3} \neq 0,\ \forall x \in D(f).$$

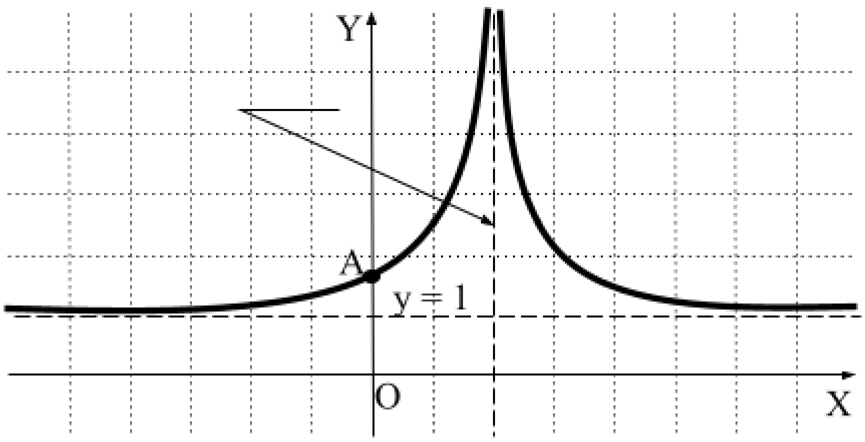
$$\underline{La\ función\ f(x)\ no\ tiene\ ni\ máximos\ ni\ mínimos\ relativos}.$$

Para que una función tenga un punto de inflexión es necesario que se anule su segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{0+4\cdot 3(x-2)^2\cdot 1}{(x-2)^6} = \frac{12}{(x-2)^4} \neq 0,\ \forall x \in D(f).$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ no\ tiene\ puntos\ de\ inflexión}.$$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente, teniendo en cuenta que el recorrido de la función es $R(f) \Rightarrow (1, +\infty)$:



****

4º) a) Enuncia el teorema fundamental del cálculo integral. Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $F(x) = \int_0^x \frac{t^2+6}{2+e^t} \cdot dt$, en $x = 0$.

b) Calcula $\int_0^1 x \cdot L(1 + x) \cdot dx$.

----

a)

El teorema fundamental del cálculo integral dice que:

"Dada una función f integrable en el intervalo $[a, b]$, se define F sobre $[a, b]$ por $F(x) = \int_a^x f(t) \cdot dt$. Si f es continua en $c \in (a, b)$, entonces F es derivable en c y $F(c) = f(c)$"

$$F(x) = \int_0^x \frac{t^2+6}{2+e^t} \cdot dt \Rightarrow F'(x) = \frac{x^2+6}{2+e^x}.$$

La pendiente de una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto:

$$m = F'(0) = \frac{0^2+6}{2+e^0} = \frac{6}{2+1} = \frac{6}{3} = 2.$$

El punto de tangencia es: $F(0) = \int_0^0 \frac{t^2+6}{2+e^t} \cdot dt = 0 \Rightarrow O(0, 0)$.

La ecuación de la recta punto-pendiente es $y - y_0 = m\left(x - x_0\right)$:

$$y - 0 = 2(x - 0) = 2x.$$

<u>$Recta\ tangente: t \equiv 2x - y = 0$.</u>

$$\begin{array}{ll}
x^2 & \underline{|\,x + 1} \\
\underline{-x^2 - x} & x - 1 \\
0 \quad -x & \\
\quad \underline{+x + 1} & \\
\quad 0 \quad + 1 &
\end{array}$$

b)

$$\int_0^1 x \cdot L(1 + x) \cdot dx \Rightarrow \left\{ u = L(x + 1) \rightarrow du = \frac{dx}{x+1} \quad dv = x \cdot dx \rightarrow v = \frac{x^2}{2} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[L(x+1)\cdot\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x+1} \right]_0^1 = \left[\frac{x^2}{2}\cdot L(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x+1}\cdot dx \right]_0^1 =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} L(x+1) - \frac{1}{2}\int \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx \right]_0^1 = \left[\frac{x^2}{2} L(x+1) - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} L|x+1| \right]_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{2}L2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}L2 \right) - \left(0\cdot L1 - 0 + 0 - \frac{1}{2}L1 \right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 0 = \frac{-1+2}{4} = \underline{\frac{1}{4}}$$

.

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JULIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

PROPUESTA A

1º) i) Halle una función f tal que $f(0) = 1$ y para $x > -1$ cumple $f'(x) = \frac{x}{1+x}$.

ii) Calcule el área de la región que delimita la gráfica de $f'(x)$ y el eje de abscisas para $0 \leq x \leq 1$.

iii) Determine, si existe, $\frac{f'(x)}{\sqrt{x+1}-1}$.

----

i)

$$f(x) = \int f'(x) \cdot dx = \int \frac{x}{1+x} \cdot dx = \int \frac{1+x-1}{1+x} \cdot dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) \cdot dx =$$

$$= x - L(1 + x) + C.$$

$$f(0) = 1 \Rightarrow 0 - L(1 + 0) + C = 1;\ \ 0 - 0 + C = 1 \Rightarrow C = 1.$$

$$\underline{f(x) = x - L(1 + x) + 1}.$$

ii)

En el intervalo $0 \leq x \leq 1$, todas las ordenadas de la función $f'(x) = \frac{x}{1+x}$ son positivas, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_0^1 f^{'}(x) \cdot dx = \int_0^1 \frac{x}{1+x} \cdot dx = [x - L(1 + x)]_0^1 =$$

$$= (1 - L2) - (0 - L1) = 1 - L2 = 1 - 0,593 = 0,307.$$

$$\underline{S = \int_0^1 f^{'}(x) \cdot dx \cong 0,307\, u^2.}$$

$iii)$

$$\frac{f^{'}(x)}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{\frac{x}{1+x}}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{(1+x)\left(\sqrt{x+1}-1\right)} = \frac{0}{1 \cdot (1-1)} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \left(\sqrt{x+1}+1\right)}{(1+x)\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \left(\sqrt{x+1}+1\right)}{(1+x)\left[\left(\sqrt{x+1}\right)^2 - 1\right]} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \left(\sqrt{x+1}+1\right)}{(1+x)(x+1-1)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \left(\sqrt{x+1}+1\right)}{(1+x) \cdot x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}+1}{1+x} = \frac{\sqrt{0+1}+1}{1+0} = \frac{1+1}{1} = 2.$$

$$\underline{\frac{f^{'}(x)}{\sqrt{x+1}-1} = 2.}$$

****

2º) $i)$ ¿Cuál es el ángulo que forman los vectores no nulos $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ que satisfacen la igualdad $\left|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\right| = \left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right|$?

$ii)$ Los vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ cumplen $\left|\overrightarrow{a}\right| = 1$, $\left|\overrightarrow{b}\right| = 2$ y su producto escalar es $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 2$. Calcule el producto vectorial $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$.

$i)$

Por definición: $\left|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\right| = \left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right| \cdot sen\, \alpha$, siendo α el ángulo que forman los vectores.

Por ser $\left|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\right| = \left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right|$, se deduce que $sen\, \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 90°$.

$$\underline{Los\ vectors\ \overrightarrow{u}\ y\ \overrightarrow{v}\ forman\ un\ ángulo\ de\ 90°.}$$

$ii)$

Por definición de producto escalar de dos vectores: $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \left|\overrightarrow{a}\right| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \cos cos\, \alpha$.

Con los datos del ejercicio es: $2 = 1 \cdot 2 \cdot \cos cos\, \alpha \Rightarrow \cos cos\, \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 0°$.

$\left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right| = \left|\overrightarrow{a}\right| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot sen\, 0° = 1 \cdot 2 \cdot sen\, 0° = 2 \cdot 0 = 0.$

Como quiera que el producto vectorial de dos vectores es otro vector:

Los vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ cumplen $\left|\overrightarrow{a}\right| = 1$, $\left|\overrightarrow{b}\right| = 2$ y su producto escalar es $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 2$. Calcule el producto vectorial $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$.

$$\underline{\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}.}$$

****

3º) Sea $g(x) = \frac{x^3-5x}{x^2+1}$.

i) Determine el dominio de g. ii) Halle sus asíntotas.

iii) Determina los extremos relativos y estudie la monotonía de g.

iv) Dibuje la gráfica de g destacando los elementos hallados anteriormente.

----

i)

Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto los valores de x que anulan el denominador y como es $x^2 + 1 \neq 0,\ \forall x \in R \Rightarrow \underline{D(g) \Rightarrow R}$.

ii)

Asíntotas horizontales: son de la forma y = k y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = g(x) = \frac{x^3-5x}{x^2+1} = \infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$x^2 + 1 \neq 0,\ \forall x \in R \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ verticales}.$$

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \frac{g(x)}{x} \text{ y } n = \left[\frac{g(x)}{x} - mx\right].$$

$$m = \frac{g(x)}{x} = \frac{\frac{x^3-5x}{x^2+1}}{x} = \frac{x^3-5x}{x^3+x} = 1.$$

$$n = \left[\frac{g(x)}{x} - mx\right] = \left(\frac{x^3-5x}{x^2+1} - x\right)\frac{x^3-5x-x^3-x}{x^2+1} \quad \frac{-6x}{x^2+1} = 0.$$

$$\underline{La\ recta\ y = x\ es\ asíntota\ oblicua\ de\ la\ función.}$$

iii)

Una función tiene un extremo relativo (máximo o mínimo) para los valores de x que anulan su primera derivada.

$$g'(x) = \frac{(3x^2-5)\cdot(x^2+1)-(x^3-5x)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^4+3x^2-5x^2-5-2x^4+10x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+8x^2-5}{(x^2+1)^2}.$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^4+8x^2-5}{(x^2+1)^2} = 0;\ \ x^4 + 8x^2 - 5 = 0.$$

Se trata de una ecuación bicuadrada. Haciendo $x^2 = y \Rightarrow\ y^2 + 8y - 5 = 0.$

$$y = \frac{-8\pm\sqrt{64+20}}{2} = \frac{-8\pm\sqrt{84}}{2} = \frac{-8\pm\sqrt{4\cdot 21}}{2} = \frac{-8\pm 2\sqrt{21}}{2} =-\ 4\pm\sqrt{21} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1 =-\ 4 + \sqrt{21},\ y_2 =-\ 4 - \sqrt{21}.$$

La solución $y_2 =-\ 4 - \sqrt{21}$ por ser menor que cero no tiene soluciones en x.

$y =-\ 4 + \sqrt{21} \cong 0,58$. Deshaciendo el cambio de variable:

$$x^2 = y \Rightarrow y = \pm\sqrt{x} = \pm\sqrt{0,58} \Rightarrow x_1 =-\ 0,76,\ x_2 = 0,76.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan la primera derivada se trate de un máximo relativo y, si es positiva, de un mínimo relativo.

$$g''(x) = \frac{(4x^3+16x)(x^2+1)^2-(x^4+8x^2-5)[2(x^2+1)\cdot 2x]}{(x^2+1)^4} = \frac{(4x^3+16x)(x^2+1)-4x(x^4+8x^2-5)}{(x^2+1)^3} =$$

$$= \frac{4x^5+4x^3+16x^3+16x-4x^5-32x^3+20x}{(x^2+1)^3} = \frac{-12x^3+36x}{(x^2+1)^3} = \frac{-12x\cdot(x^2-3)}{(x^2+1)^3} = g''(x).$$

$$g''(-\ 0,76) = \frac{-12\cdot(-0,76)\cdot(-)}{(+)} < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x =-\ 0,76.$$

$$g(-\ 0,76) = \frac{(-0,76)^3-5\cdot(-0,76)}{(-0,76)^2+1} \cong \frac{4,26}{1,58} = 2,42 \Rightarrow \underline{Máx. \Rightarrow A(-\ 0,76,\ 2,42)}.$$

Por ser $g(-\ x) = \frac{(-x)^3-5\cdot(-x)}{(-x)^2+1} = \frac{-x^3+5x}{x^2+1} =-\ \frac{x^3-5x}{x^2+1} =-\ g(x)$, la función $g(x)$ es simétrica con respecto al origen, por lo cual:

$\underline{Mín. \Rightarrow B(0,76,\ \ -\ 2,42)}$.

Teniendo en cuenta que la función es continua en R y el máximo y mínimo obtenidos anteriormente, la monotonía de la función es la siguiente:

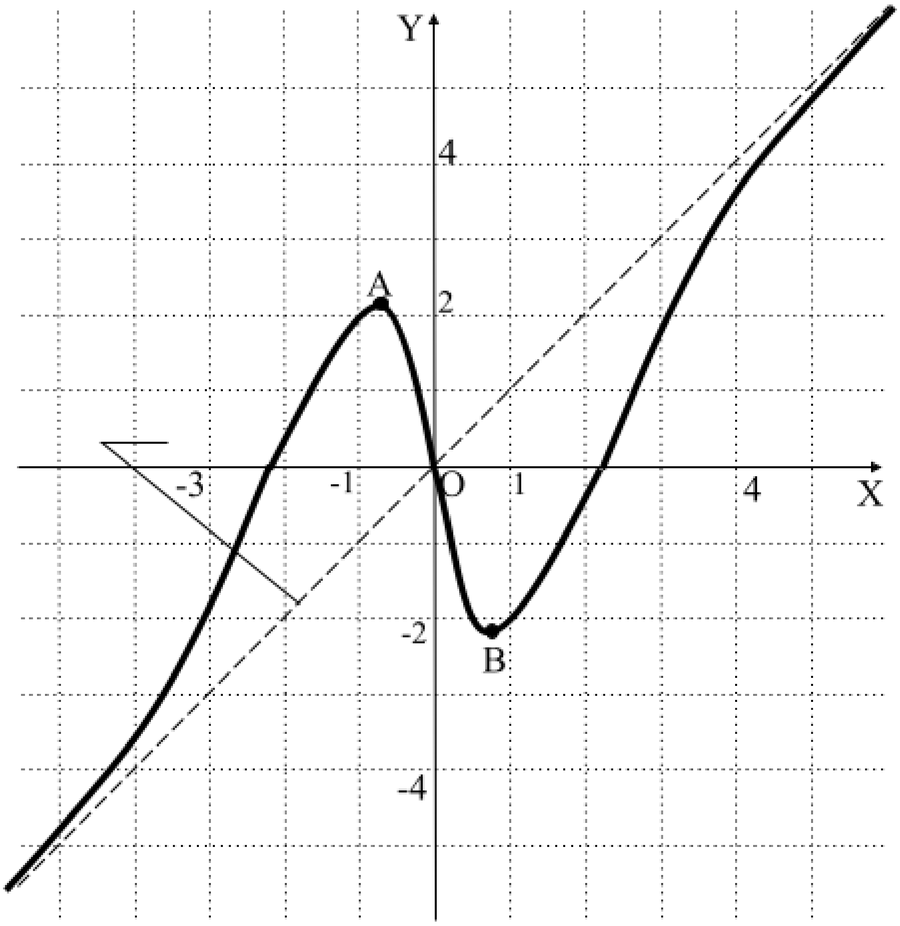
$$\underline{Crecimiento \Rightarrow g'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -0'76) \cup (0'76, +\infty)}.$$

$$\underline{Decrecimiento \Rightarrow g'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-0'76, 0'76)}.$$

$iv)$

Considerando los elementos hallados anteriormente, a representación gráfica, aproximada, de la función es la que aparece a continuación.

También se ha tenido en cuenta que la función pasa por el origen de coordenadas, que es un punto de inflexión.



****

4º) Dadas las rectas $r\equiv\frac{x}{2} = 2 - y = \frac{z-1}{3}$ y $s\equiv\begin{cases} x = 2 + a\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 5 - 6\lambda \end{cases}, \lambda\in R$.

i) Halle una ecuación para el plano π que pasa por $O(0,\ 0,\ 0)$ y es perpendicular a r.

ii) Estudie la posición relativa de las rectas r y s en función de a.

----

i)

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (2,\ -1,\ 3)$.

Por ser el plano π perpendicular a la recta r, el vector normal del plano es linealmente dependiente del vector director de la recta.

El plano π carece de término independiente por pasar por el origen de coordenadas; su expresión general es la siguiente:

$$\underline{\pi\equiv 2x - y + 3z = 0}.$$

ii)

Un punto y un vector director de cada una de las rectas son los siguientes:

Recta r: $A(0,\ -2,\ 1)\ y\ \overrightarrow{v_r} = (2,\ -1,\ 3)$. Recta s: $B(2,\ 0,\ 5)\ y\ \overrightarrow{v_s} = (a,\ 2,\ -6)$.

Para que los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ sean linealmente dependientes tienen que ser proporcionales sus componentes:

$$\frac{a}{2} = \frac{2}{-1} = \frac{-6}{3} \Rightarrow \frac{a}{2} = -2 \Rightarrow a = -4.$$

Para $a = -4$ las rectas r y s son paralelas. Para diferenciar el caso de que sean o no coincidentes comprobamos si el punto $A\in r$ pertenece o no a la recta s:

$$s\equiv\begin{cases} x = 2 + a\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 5 - 6\lambda \end{cases}\ \begin{matrix} A(0,\ -2,\ 1) \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow 2\lambda = -2 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow 0 =$$

.

$$\underline{\textit{Para } a = -4 \textit{ las rectas r y s son paralelas no coincidentes.}}$$

Para $a\neq -4$ los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independiente por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\overrightarrow{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = [B - A] = [(2,\ 0,\ 5) - (0,\ -2,\ 1)] = (2,\ 2,\ 4)$.

Según que los vectores $\left\{\overrightarrow{v}_r,\ \overrightarrow{v}_s,\ \overrightarrow{w}\right\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\left\{\overrightarrow{v}_r,\ \overrightarrow{v}_s,\ \overrightarrow{w}\right\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$Rang\left\{\overrightarrow{v}_r,\ \overrightarrow{v}_s,\ \overrightarrow{w}\right\} \Rightarrow |2\ 1\ 3\ a\ 2\ -6\ 2\ 2\ 4| = 16 + 6a - 12 - 12 + 24 - 4a =$

$= 2a + 16 = 0;\ \ a + 8 = 0 \Rightarrow a = -8.$

$\underline{Para\ a = -8\ las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cortan}.$

$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan\ \forall a \in R - \{-4,\ -8\}}.$

****

PROPUESTA B

1º) $i)$ Halle una función f tal que $f(0) = 1$ y para $x >- 1$ cumple $f^{'}(x) = \frac{x}{1+x}$.

$ii)$ Calcule el área de la región que delimita la gráfica de $f^{'}(x)$ y el eje de abscisas para $0 \leq x \leq 1$.

$iii)$ Determine, si existe, $\frac{f^{'}(x)}{\sqrt{x+1}-1}$.

2º) $i)$ ¿Cuál es el ángulo que forman los vectores no nulos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que satisfacen la igualdad $\left|\vec{u} \times \vec{v}\right| = \left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right|$?

$ii)$ Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ cumplen $\left|\vec{a}\right| = 1$, $\left|\vec{b}\right| = 2$ y su producto escalar es $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$. Calcule el producto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$.

(Resueltos en la propuesta A)

3º) Sea $g(x) = \{\frac{L(x+1)}{x} + 1, \ si\, x > 0 \quad ax + b, \quad si\, x \leq 0$.

$i)$ Halle los valores de $a\ y\ b$ para que la función g sea continua en R.

$ii)$ Determine los valores de $a\ y\ b$ para los cuales g sea derivable en R.

$iii)$ Para los valores de $a\ y\ b$ del inciso anterior, calcule la derivada de g.

$i)$

La función $g(x)$ es continua en R, $\forall a,\ b \in R$, excepto para $x = 0$, para lo cual se van a determinar los valores de α y b para que lo sea.

Para que la función sea continua en $x = 0$ es necesario que sus límites laterales sean iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$g(x) = \left[\frac{L(x+1)}{x} + 1\right] = 1 + 1 = 2 \ (*) \ g(x) = (ax + b) = b = f(0) = 2$$

.

$$(*) \ \frac{L(x+1)}{x} = \frac{L1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = \frac{\frac{1}{0+1}}{1} = 1.$$

$\underline{La\ función\ g(x)\ es\ continua\ ex\ x = 0,\ \forall a \in R\ y\ b = 2.}$

$ii)$

La función resulta: $g(x) = \{\frac{L(x+1)}{x} + 1, \; si\; x > 0 \quad ax + 2, \quad si\; x \leq 0\,.$

Una función es derivable en un punto cuando, siendo continua en ese punto, existen las derivadas laterales y además son iguales:

$$g'(x) = \{\frac{x-(x+1)L(x+1)}{x^2(x+1)} \; (*) \; si\; x > 0 \quad a \quad si\; x \leq 0\,.$$

$$(*)\; Siendo\; h(x) = \frac{L(x+1)}{x} \Rightarrow h'(x) = \frac{\frac{1}{x+1}\cdot x - L(x+1)}{x^2} = \frac{\frac{x}{x+1} - L(x+1)}{x^2} = \frac{x-(x+1)L(x+1)}{x^2(x+1)}.$$

$g'\left(0^+\right) = \frac{0-(0+1)L(0+1)}{0^2(0+1)} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet.$Se obtiene el límite:

$$g'(x) \;= \frac{x-(x+1)L(x+1)}{x^2(x+1)} \;= \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1-\left[1\cdot L(x+1)+(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}\right]}{2x\cdot(x+1)+x^2\cdot 1} = \frac{1-[L(x+1)+1]}{2x^2+2x+x^2} = \frac{1-L(x+1)-1}{2x^2+2x+x^2} = \frac{-L(x+1)}{3x^2+2x} =$$

$$= \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \frac{-\frac{1}{x+1}}{6x+2} = \frac{-\frac{1}{0+1}}{0+2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow g'\left(0^+\right) = -\frac{1}{2}.$$

$$g'\left(0^-\right) = a.$$

$$g'\left(0^+\right) = g'\left(0^-\right) \Rightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

$$\underline{g(x)\; es\; derivable\; en\; R\; para\; a = -\frac{1}{2}\; y\; b = 2.}$$

$iii)$

$$\underline{g'(x) = \{\frac{x-(x+1)L(x+1)}{x^2(x+1)} \; si\; x > 0 \quad -\frac{1}{2} \quad si\; x \leq 0\,.}$$

****

4º) Discuta, en función del parámetro β, el sistema $\{\beta x + y + z = \beta^2\ x - y + z = 1\ \ 3x - y - z = 1\ \ 6x - y + z = 3\beta$ y resuélvalo cuando sea compatible.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A = (\beta\ 1\ 1\ 1\ \ - 1\ 1\ 3\ 6\ \ - 1\ \ - 1\ \ - 1\ 1\ )$ y $A^{'} = \left(\beta\ 1\ 1\ 1\ \ - 1\ 1\ 3\ 6\ \ - 1\ \ - 1\ \ - 1\ 1\ \ \ \beta^2\ 1\ 1\ 3\beta\ \right).$

En primer lugar se determina el rango de la matriz ampliada en función de β:

$|A'| = \left|\beta\ 1\ 1\ 1\ \ - 1\ 1\ 3\ 6\ \ - 1\ \ - 1\ \ - 1\ 1\ \ \ \beta^2\ 1\ 1\ 3\beta\ \right| \Rightarrow$ Sumando la tercera fina a todas las demás:

$|A'| = \left|\beta + 3\ 0\ 0\ 4\ \ - 2\ 0\ 3\ 9\ \ - 1\ \ - 2\ \ - 1\ 0\ \ \ \beta^2 + 1\ 2\ 1\ 3\beta + 1\ \right| = - \left|\beta +\right.$

$\Rightarrow \left\{F_3 \rightarrow F_3 - F_2\right\} \Rightarrow - \left|\beta + 3\ 0\ \beta^2 + 1\ 4\ \ - 2\ 2\ 5\ 0\ 3\beta - 1\ \right| = 2\cdot\left|\beta + 3\ \beta^2 + 1\ 5\ 3\beta -\right.$
;

$(\beta + 3)(3\beta - 1) - 5\left(\beta^2 + 1\right) = 0;\ \ 3\beta^2 - \beta + 9\beta - 3 - 5\beta^2 - 5 = 0;$

$2\beta^2 - 8\beta + 8 = 0;\ \ \beta^2 - 4\beta + 4 = 0;\ \ (\beta - 2)^2 = 0 \Rightarrow \beta = 2.$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\underline{Para\ \beta \neq 2 \Rightarrow Rang\ A = 3;\ Rang\ A^{'} = 4 \Rightarrow Sistema\ incompatible}.$$

Para $\beta = 2$ es $A = (2\ 1\ 1\ 1\ \ - 1\ 1\ 3\ 6\ \ - 1\ \ - 1\ \ - 1\ 1\ )$ y $A^{'} = (2\ 1\ 1\ 1\ \ - 1\ 1\ 3\ 6\ \ - 1\ \ - 1\ \ - 1\ 1\ \ \ 4\ 1\ 1\ 6\ ).$

$Rang\ A \Rightarrow \left\{F_1,\ F_2,\ F_3\right\} \Rightarrow |2\ 1\ 1\ 1\ \ - 1\ 1\ 3\ \ - 1\ \ - 1| = 2 - 1 + 3 + 3 + 2 + 1 \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow Rang\ A = 3.$

$$\underline{Para\ \beta = 2 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A^{'} = 3 \Rightarrow S.\ C.\ D}.$$

Para $\beta = 2$ el sistema es $\{2x + y + z = 4\ x - y + z = 1\ \ 3x - y - z = 1\ 6x - y + z = 6$, que tiene cuatro ecuaciones con tres incógnitas. Para resolverlo es suficiente con tres ecuaciones; cogemos las 3 primeras y resolvemos por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|4\ 1\ 1\ 1\ -1\ 1\ 1\ -1\ -1\ |}{|2\ 1\ 1\ 1\ -1\ 1\ 3\ -1\ -1\ |} = \frac{4-1+1+1+4+1}{2-1+3+3+2+1} = \frac{10}{10} = 1.$$

$$y = \frac{|2\ 4\ 1\ 1\ 1\ 1\ 3\ 1\ -1\ |}{10} = \frac{-2+1+12-3-2+4}{10} = \frac{10}{10} = 1.$$

$$z = \frac{|2\ 1\ 4\ 1\ -1\ 1\ 3\ -1\ 1\ |}{10} = \frac{-2-4+3+12+2-1}{10} = \frac{10}{10} = 1.$$

$$\underline{Solución\ del\ sistema: x = y = z = 1}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JUNIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

PROPUESTA A

1º) Sean las matrices $A = (1\ 1\ 1\ 2\ )$ y $B = (0\ 2\ 1\ 4\ )$.

i) Halle la matriz inversa de A.

ii) Encuentre la matriz X tal que $A \cdot X = B$.

----

i)

Se obtiene la inversa de A mediante el método de Gauss-Jordan.

$$(I) = (1\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 - F_1\} \Rightarrow (1\ 0\ \ -\ 1\ 1\ ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_1 \rightarrow F_1 - F_2\} \Rightarrow (2\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ 1\ ) \Rightarrow \underline{A^{-1} = (2\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ 1\ )}.$$

ii)

$A \cdot X = B$, multiplicando por la izquierda los dos términos por A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B;\ \ I \cdot X = A^{-1} \cdot B \ \Rightarrow\ X = A^{-1} \cdot B.$$

$$X = A^{-1} \cdot B = (2\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ 1\ ) \cdot (0\ 2\ 1\ 4\ ) \ \Rightarrow\ \underline{X = (-\ 1\ 0\ 1\ 2\ )}.$$

****

2º) i) Calcule, si existe, $\left(1 + 4x^2\right)^{\frac{1}{sen^2 x}}$.

ii) Halle el área de la región delimitada por las gráficas de las siguientes parábolas: $y = x^2, x = y^2$.

----

i)

$$\left(1 + 4x^2\right)^{\frac{1}{sen^2 x}} = (1 + 0)^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty} \Rightarrow Ind.\ del\ tipo\ n^{\underline{o}}\ e.$$

Siendo $A = \left(1 + 4x^2\right)^{\frac{1}{sen^2 x}}$ y tomando logaritmos naturales:

$LA = L\left[\left(1 + 4x^2\right)^{\frac{1}{sen^2 x}}\right]$. Teniendo en cuenta que el logaritmo de un límite es el límite del logaritmo:

$$LA = \lim_{x\to 0}\left[\left(1 + 4x^2\right)^{\frac{1}{sen^2 x}}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{sen^2 x}\cdot L\left(1 + 4x^2\right)\right] = \lim_{x\to 0}\frac{L\left(1+4x^2\right)}{sen^2 x} =$$

$$= \frac{L(1+0)}{sen^2 0} = \frac{L1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\frac{8x}{1+4x^2}}{2\cdot sen\, x\cdot \cos\, x} = \lim_{x\to 0}\frac{8x}{\left(1+4x^2\right)\cdot sen\,(2x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{8}{1+4x^2}\cdot \lim_{x\to 0}\frac{x}{sen\,(2x)} = M\cdot N. \quad (*)$$

$$M = \lim_{x\to 0}\frac{8}{1+4x^2} = \frac{8}{1+0} = 8.$$

$$N = \lim_{x\to 0}\frac{x}{sen\,(2x)} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cdot \cos\,(2x)} = \frac{1}{2\cdot 1} = \frac{1}{2}$$

.

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de M y N:

$$LA = M\cdot N = 8\cdot\frac{1}{2} = 4 \Rightarrow A = e^4.$$

$$\underline{\left(1 + 4x^2\right)^{\frac{1}{sen^2 x}} = e^4}.$$

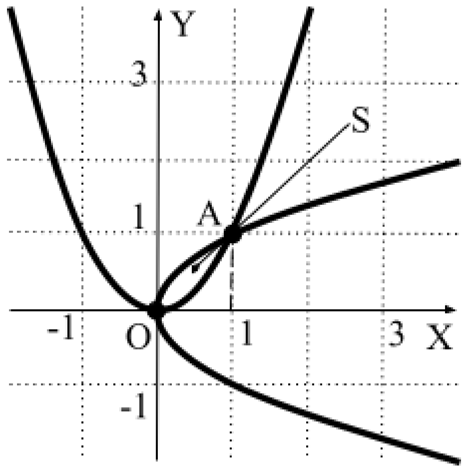
ii)

Los puntos de corte de las parábolas tienen por abscisas las soluciones reales de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$y = x^2\ x = y^2 \}$ $o\ también$: $y = x^2\ y = \sqrt{x} \} \Rightarrow x^2 = \sqrt{x};\ \ x^4 = x^2;\ \ x^4 - x^2 = 0;$

$x^2\left(x^2 - 1\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1, x_3 = -\ 1.$ (la solución $x = -\ 1$ no tiene sentido).

Los puntos de corte son $O(0,\ 0)$ y $A(1,\ 1)$.



La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la expresada en la figura adjunta.

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^2\right) dx = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left(\frac{1^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{1^3}{3}\right) - 0 =$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\underline{S = \frac{1}{3}\, u^2.}$$

****

3º) Sea $g(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-4}$.

i) Determine el dominio y la continuidad de g.

ii) Halle las asíntotas de la gráfica de g.

iii) Determina los extremos relativos y estudie la monotonía de g.

iv) Dibuje la gráfica de g destacando los elementos hallados anteriormente.

----

i)

La función puede simplificarse: $g(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-4} = \frac{x^2(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x^2}{x-2}$.

Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto los valores de x que anulan el denominador: $\underline{D(g) \Rightarrow R - \{2\}}$.

La función es continua en R, excepto para los valores que anulan el denominador que no está definida.

ii)

Asíntotas horizontales: son de la forma y = k y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = g(x) = \frac{x^2}{x-2} = \infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$x - 2 = 0 \Rightarrow \underline{La\ recta\ x = 2\ es\ asíntota\ vertical}.$$

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \frac{g(x)}{x} \text{ y } n = \left[\frac{g(x)}{x} - mx\right].$$

$$m = \frac{g(x)}{x} = \frac{\frac{x^2}{x-2}}{x} = \frac{x^2}{x^2-2x} = 1.$$

$$n = \left[\frac{g(x)}{x} - mx\right] = \left(\frac{x^2}{x-2} - x\right)\frac{x^2-x^2+2x}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x-2} = 2 = n.$$

$$\underline{La\ recta\ y = x + 2\ es\ asíntota\ oblicua\ de\ la\ función}.$$

$iii)$

Una función tiene un extremo relativo (máximo o mínimo) para los valores de x que anulan la primera derivada.

$$g'(x) = \frac{2x\cdot(x-2)-x^2\cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{2x^2-4x-x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}.$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x(x-4)}{(x-2)^2} = 0;\ \ x(x-4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 4.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan la primera derivada se trate de un máximo relativo y, si es positiva, de un mínimo relativo.

$$g''(x) = \frac{(2x-4)\cdot(x-2)^2-x(x-4)\cdot[2\cdot(x-2)\cdot 1]}{(x-2)^4} = \frac{(2x-4)\cdot(x-2)-2x(x-4)}{(x-2)^3} =$$

$$= \frac{2x^2-4x-4x+8-2x^2+8x}{(x-2)^3} = \frac{8}{(x-2)^3}.$$

$$g''(0) = \frac{8}{(0-2)^3} = \frac{8}{-8} = -1 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$g(0) = \frac{0^2}{0-2} = 0 \Rightarrow \underline{Máximo\ relativo: O(0,\ 0)}.$$

$$g''(4) = \frac{8}{(4-2)^3} = \frac{8}{8} = 1 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 4.$$

$$g(4) = \frac{4^2}{4-2} = \frac{16}{2} = 8 \Rightarrow \underline{Mínimo\ relativo: A(4,\ 8)}.$$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada sea positiva o negativa, respectivamente.

Para estudiar el signo de la derivada $g'(x) = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$ tenemos en cuenta que, por ser el denominador positivo para los valores de su dominio, la derivada es positiva o negativa cuando lo sea su numerador.

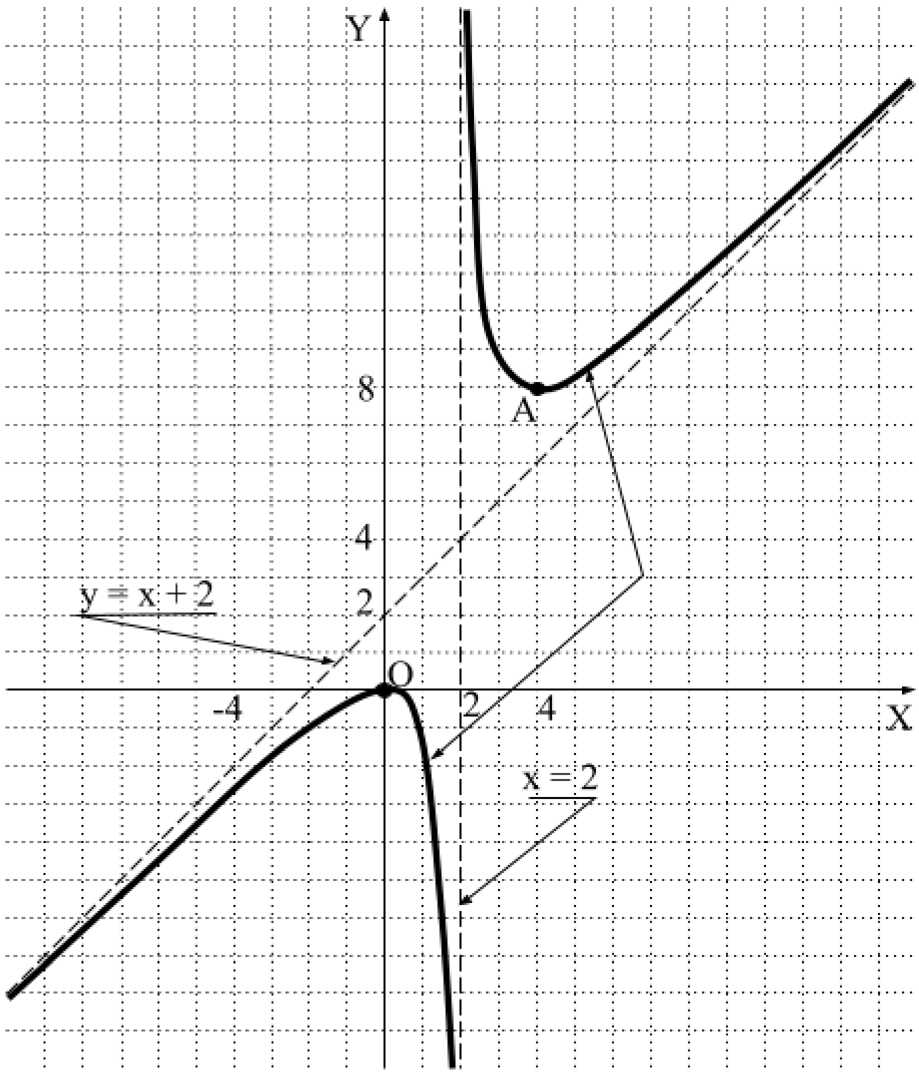
Considerando lo anterior y teniendo en cuenta el dominio de la función y los máximos y mínimos relativos encontrados, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento \Rightarrow g'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty,\ 0) \cup (4,\ +\infty)}.$$

$$\underline{Decrecimiento \Rightarrow g'(x) < 0 \Rightarrow x \in (0,\ 2) \cup (2,\ 4)}.$$

$iv)$

Considerando los elementos hallados anteriormente, a representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



****

4º) Dadas las rectas $r_1 \equiv x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$:

i) Determine la posición relativa de las rectas r_1 y r_2.

ii) Halle el punto de la recta r_1 más próximo al punto $P(1,\ 0,\ 1)$.

----

i)

Un punto y un vector de cada una de las rectas son los siguientes:

Recta r_1: $O(0,\ 0,\ 0)$ y $\overrightarrow{v_1} = (1,\ 2,\ 3)$. Recta r_2: $B(1,\ -1,\ 1)$ y $\overrightarrow{v_2} = (0,\ 1,\ -1)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r_1 y r_2 se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\overrightarrow{w}$ que tiene como origen el punto $O \in r_1$ y extremo el punto $B \in r_2$: $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OB} = (1,\ -1,\ 1)$.

Según que los vectores $\left\{\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},\ \overrightarrow{w}\right\}$ sean o no coplanarios las rectas r_1 y r_2 se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\left\{\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},\ \overrightarrow{w}\right\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r_1 y r_2 se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\left\{\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},\ \overrightarrow{w}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 - 3 - 1 = -6 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rang\left\{\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},\ \overrightarrow{w}\right\} = 3 \Rightarrow \overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},\ \overrightarrow{w}\ no\ son\ coplanarios.$$

$$\underline{Las\ rectas\ r_1\ y\ r_2\ se\ cruzan.}$$

ii)

Una forma de resolver este ejercicio es la siguiente:

El haz de planos perpendiculares a r_1 es de la forma $\beta \equiv x + 2y + 3z + D = 0$.

De los infinitos planos pertenecientes al haz β, el plano π que contiene al punto $P(1,\ 0,\ 1)$ es el que satisface su ecuación:

$\beta \equiv x + 2y + 3z + D = 0 \ P(1,\ 0,\ 1) \quad \} \Rightarrow 1 + 3 \cdot 1 + D = 0;\ \ 4 +$

$\Rightarrow \pi \equiv x + 2y + 3z - 4 = 0.$

La expresión de $r_1 \equiv x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente: $r_1 \equiv \{x = \lambda \ \ y = 2\lambda \ z = 3\lambda$.

El punto Q, intersección de la recta $r_1 \equiv x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ con el plano π es la solución del sistema que forman:

$r_1 \equiv \{x = \lambda \ \ y = 2\lambda \ z = 3\lambda \ \pi \equiv x + 2y + 3z - 4 = 0 \} \Rightarrow \lambda + 2 \cdot 2\lambda + 3 \cdot 3$

$14\lambda - 4 = 0;\ \ 7\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{7} \Rightarrow Q\left(\frac{2}{7},\ \frac{4}{7},\ \frac{6}{7}\right).$

$\underline{\textit{El punto de } r_1 \textit{ más próximo a } P(1,\ 0,\ 1) \textit{ es } Q\left(\frac{2}{7},\ \frac{4}{7},\ \frac{6}{7}\right).}$

****

PROPUESTA B

1º) Sean las matrices $A = (1\ 1\ 1\ 2\ )$ y $B = (0\ 2\ 1\ 4\ )$.

i) Halle la matriz inversa de A. ii) Encuentre la matriz X tal que $A \cdot X = B$.

2º) i) Calcule, si existe, $\left(1 + 4x^2\right)^{\frac{1}{sen^2 x}}$.

ii) Halle el área de la región delimitada por las gráficas de las siguientes parábolas: $y = x^2, x = y^2$.

(Resueltos en la Propuesta A)

3º) Sean a y b números reales y la función $f(x) = \{\ \ x^3\ \ si\ x <- 1\ ax + 1\ si\ - 1 \leq x \leq 1\ x^2 + bx + 2\ si\ x > 1$.

i) Calcule los valores de a y b tales que la función f es continua en todos los puntos reales.

ii) Determine, en función de a y b, la derivabilidad de f y calcule f' cuando sea posible.

iii) Utilice el teorema de Bolzano para justificar que si P es un polinomio de grado 5, con coeficiente principal positivo, tal que $P(- 1) >- 1$, entonces la ecuación $f(x) = P(x)$ tiene al menos una solución c, con $c <- 1$.

----

i)

La función f(x) es continua en $\forall a, b \in R$. Se trata de determinar los valores de α y b para que sea continua en los puntos críticos $x =- 1$ y $x = 1$.

Para que la función sea continua en x = -1 es necesario que sus límites laterales sean iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$f(x) = x^3 = (- 1)^3 =- 1$ $f(x) = (ax + 1) =- a + 1 = f(- 1)\ \} \Rightarrow - 1 = a + 1 \Rightarrow \underline{a =- 2}$.

Para que la función sea continua en x = 1 es necesario que sus límites laterales sean iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$f(x) = (- 2x + 1) =- 2 + 1 =- 1 = f(1)\ f(x) = \left(x^2 + bx + 2\right) = 1 + b + 2 =$

.

La función resulta: $f(x) = \{ \quad x^3 \quad si\ x <- 1\ - 2x + 1\ si\ - 1\leq x\leq 1\ x^2 - 4x + 2\ si\ x > 1$

$ii)$

Una función es derivable en un punto cuando existen las derivadas laterales en ese punto y además son iguales:

$f'(x) = \{\ 3x^2 \quad si\ x <- 1 \quad - 2 \quad si\ - 1\leq x\leq 1\ 2x - 4\ si\ x > 1$

$f'\left(-1^-\right) = 3\cdot(-1)^2 = 3. \quad f'\left(-1^+\right) =- 2.$

$\underline{f'\left(-1^-\right) \neq f'\left(-1^+\right) \Rightarrow f(x)\ no\ es\ derivable\ en\ x\ =-\ 1}.$

$f'\left(1^-\right) =- 2. \quad f'\left(1^+\right) = 2\cdot 1 - 4 =- 2.$

$\underline{f'\left(1^-\right) = f'\left(1^+\right) \Rightarrow f(x)\ es\ derivable\ en\ x\ =\ 1}.$

$iii)$

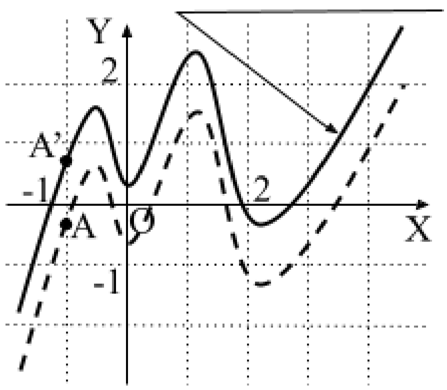
Siendo $f(x) = P(x)$ y $P(-1) >- 1$, considerando la función $g(x) = f(x) + 1$ se cumple que $g(-1) = f(-1) + 1 = P(-1) + 1 >- 1 + 1 > 0.$

La gráfica adjunta pretende ilustrar la cuestión; el punto A corresponde al valor $f(-1) >- 1$ y el punto A' corresponde al valor $g(-1) > 0$.

Por otra parte: $f(x) \ =- \infty$, por ser $f(x)$ una función de quinto grado con el coeficiente principal positivo.

De lo anterior se deduce que $g(x) \ = [f(x) + 1] \ =- \infty + 1 =- \infty$.

Lo anterior implica, teniendo en cuenta la continuidad de la función $g(x)$ en R por ser polinómica, que para un valor $k\in R$ suficiente grande es $g(-k) < 0$.



Probar que $f(x)$ tiene al menos una solución $c <- 1$, que es lo pedido, es equivalente a probar que la función $g(x)$ tiene al menos una solución igual a la pedida, $c <- 1$.

Aplicando el teorema de Bolzano a la función $g(x)$ y considerando el intervalo finito $[-\ k,\ \ -\ 1]$:

$$\left.\begin{array}{l} g(-\ k) <\ 0 \\ g(-\ 1) >\ 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in [-\ k,\ \ -\ 1] \Rightarrow g(c) =\ 0.$$

$\underline{Queda\ probado\ que\ f(x)\ tiene\ al\ menos\ una\ solución\ c\ <-\ 1}.$

****

4º) Sea c un número real y el sistema de ecuaciones lineales: $\{cx + y + cz = 1\ x + cy + z = c^2\ x + y + cz = c^3$:

i) Calcule el determinante de la matriz de los coeficientes y determine para qué valores de c el sistema anterior es compatible, compatible determinado y compatible indeterminado.

ii) Resuelve el sistema anterior cuando $c = 2$.

----

i)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A = (c\ 1\ c\ 1\ c\ 1\ 1\ 1\ c)$ y $A' = \left(c\ 1\ c\ 1\ c\ 1\ 1\ 1\ c \quad 1\ c^2\ c^3\right)$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro c es el siguiente:

$|A| = |c\ 1\ c\ 1\ c\ 1\ 1\ 1\ c| = c^3 + c + 1 - c^2 - c - c = 0;\ c^3 - c^2 - c + 1 = 0$

.

Resolviendo por Ruffini resultan las raíces: $c_1 = c_2 = 1,\ c_3 = -1$.

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$\underline{Para\ \{c \neq 1\ c \neq -1\} \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

$Para\ c = 1\ es\ A' = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \quad 1\ 1\ 1) \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 1.$

$\underline{Para\ c = 1 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 1 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

(Dos grados de libertad)

$Para\ c = -1\ es\ A' = (-1\ 1\ \ -1\ 1\ \ -1\ 1\ 1\ 1\ \ -1\ \ 1\ 1\ \ -1) \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4$

$\Rightarrow |-1\ 1\ 1\ 1\ \ -1\ 1\ 1\ 1\ \ -1| = -1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \neq 0 \Rightarrow Rang\ A' = 3$

.

$\underline{Para\ c = -1 \Rightarrow Rang\ A = 2,\ Rang\ A' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible}.$

ii)

Para $c = 2$ el sistema resulta $\{2x + y + 2z = 1\ x + 2y + z = 4\ \ x + y + 2z = 8$, que es compatible determinado.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|1\ 1\ 2\ 4\ 2\ 1\ 8\ 1\ 2\ |}{|2\ 1\ 2\ 1\ 2\ 1\ 1\ 1\ 2\ |} = \frac{4+8+8-32-1-8}{8+2+1-4-2-2} = \frac{20-41}{11-8} = \frac{-21}{3} =-\ 7.$$

$$y = \frac{|2\ 1\ 2\ 1\ 4\ 1\ 1\ 8\ 2\ |}{3} = \frac{16+16+1-8-16-2}{3} = \frac{33-26}{3} = \frac{7}{3}.$$

$$z = \frac{|2\ 1\ 1\ 1\ 2\ 4\ 1\ 1\ 8\ |}{3} = \frac{32+1+4-2-8-8}{3} = \frac{37-18}{3} = \frac{19}{3}.$$

$\underline{Para\ c\ =\ 2\ las\ soluciones\ del\ sistema\ son: x\ =-\ 7,\ y\ =\frac{7}{3},\ z\ =\frac{19}{3}.}$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MADRID

JUNIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger una de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

OPCIÓN A

1º) Dada la función $f(x) = \{\frac{L(1-x)}{1-x}\ si\ x < 0\ x\cdot e^{-x}\ si\ s\geq 0$, donde L denota el logaritmo neperiano, se pide:

a) Estudiar la continuidad de f y calcular $f(x)$.

b) Calcular la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 2$.

c) Calcular $\int_{-1}^{1} f(x)\cdot dx$.

----

a)

La función f(x) es continua $\forall x\in R - \{0\}$, cuya continuidad vamos a estudiar.

Para que $f(x)$ sea continua en x = 0 es necesario que sus límites laterales sean iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$f(x) = \frac{L(1-x)}{1-x} = \frac{L1}{1} = \frac{0}{1} = 0 \qquad f(x) = \left(x\cdot e^{-x}\right) = \frac{0}{e^{1}} = \frac{0}{1} = 0 = f(0) \} =$$

$$\underline{f(x) = f(x) = f(0) \Rightarrow f(x)\ es\ continua\ en\ x = 0}.$$

$$f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{L(1-x)}{1-x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{-1}{1-x}}{-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1+\infty} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$\underline{f(x) = 0}.$$

$b)$

La pendiente de la tangente a una función en un punto es el valor de su primera derivada en ese punto:

Para x = 2 la función es $f(x) = x\cdot e^{-x}$.

$$f'(x) = 1\cdot e^{-x} - x\cdot e^{-x} = e^{-x}(1 - x) = \frac{1-x}{e^x}.$$

$$m = f'(2) = \frac{1-2}{e^2} = -\frac{1}{e^2}.$$

El punto de tangencia es: $f(2) = 2\cdot e^{-2} \Rightarrow T\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$.

La expresión de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente es la siguiente: $y - y_0 = m\left(x - x_0\right)$.

$$y - \frac{2}{e^2} = -\frac{1}{e^2}(x - 2);\ \ e^2y - 2 = -x + 2.$$

La ecuación de la recta tangente pedida es la siguiente:

$$\underline{Recta\ tangente:\ t\equiv x + e^2y - 4 = 0}.$$

$c)$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\cdot dx = \int_{-1}^{0} \frac{L(1-x)}{1-x}\cdot dx + \int_{0}^{1} x\cdot e^{-x}\cdot dx = A + B. \quad (*)$$

$$A = \int_{-1}^{0} \frac{L(1-x)}{1-x}\cdot dx \Rightarrow \{x = 0 \to t = 0\ x = -1 \to t = L2\} = \int_{L2}^{0} -t\cdot dt =$$

$$= \int_{0}^{L2} t\cdot dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{L2} = \frac{(L2)^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{L^2 2}{2} = A.$$

$$B = \int_{0}^{1} x\cdot e^{-x}\cdot dx \Rightarrow \left\{u = x \to du = dx\ dv = e^{-x}\cdot dx \to v = -e^{-x}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[x\cdot\left(-e^{-x}\right) - \int - e^{-x}\cdot dx\right]_0^1 = \left[-xe^{-x} + \int e^{-x}\cdot dx\right]_0^1 = \left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]_0^1 =$$

$$= \left[-e^{-x}(x+1)\right]_0^1 = \left[e^{-x}(x+1)\right]_1^0 = e^0(0+1) - e^{-1}\cdot 2 = 1 - \frac{2}{e} = \frac{e-2}{e} = B$$

.

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de A y B:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\cdot dx = \frac{L^2 2}{2} + \frac{e-2}{e} = \frac{e\cdot L^2 2 + 2e - 4}{2e}.$$

$$\underline{\int_{-1}^{1} f(x)\cdot dx = \frac{e\cdot L^2 2 + 2e - 4}{2e}.}$$

****

2º) a) Despeje X en la ecuación matricial $X\cdot(CD)^{-1} = A + X\cdot\left(D^{-1}C^{-1} - B\right)$, siendo A, B, C, D matrices cuadradas invertibles. Expresar X de la forma más simple posible.

b) Para $A = (2\ 0\ \ -\ 1\ 1\ 0\ 1\ 2\ 1\ 1\ )$, $B = (1\ 1\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ )$, determine Y tal que $Y\cdot B = A$.

----

a)

Para la realización de este apartado es muy importante saber que la inversa del producto de dos matrices es el producto de las inversas de las matrices cambiando el orden, es decir: $(CD)^{-1} = D^{-1}C^{-1}$.

$$X\cdot(CD)^{-1} = A + X\cdot\left(D^{-1}C^{-1} - B\right) = A + X\cdot D^{-1}C^{-1} - X\cdot B =$$

$= A + X\cdot(CD)^{-1} - X\cdot B.$ Eliminando los sumandos iguales:

$X\cdot B = A.$ Multiplicando los dos términos, por la derecha, por B^{-1}:

$X\cdot B\cdot B^{-1} = A\cdot B^{-1};\ \ X\cdot I = A\cdot B^{-1}.$

$$\underline{X = A\cdot B^{-1}}.$$

b)

$Y\cdot B = A.$ Multiplicando los dos términos, por la derecha, por B^{-1}:

$Y\cdot B\cdot B^{-1} = A\cdot B^{-1};\ \ Y\cdot I = A\cdot B^{-1} \Rightarrow Y = A\cdot B^{-1}.$

Se obtiene la inversa de B por el método de Gauss-Jordan.

$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_2 \to F_2 + F_1\ F_3 \to F_3 - F_1\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_1 \to F_1 - F_2\right\} \Rightarrow (0\ \ -\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 1\ ) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{F_3 \to \frac{1}{2}F_3\right\} \Rightarrow \left(0\ \ -\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ \ -\frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{2}\ \right) \Rightarrow \left\{F_1 \to F_1 + F_3\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\ \ -\ 1\ \frac{1}{2}\ 1\ 1\ 0\ \ -\frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{2}\ \right) \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{2}\cdot(-\ 1\ \ -\ 2\ 1\ 2\ 2\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 1\ ).$

Sustituyendo en el valor de Y el valor de B^{-1} y operando:

$Y = A \cdot B^{-1} = (2\ 0\ \ -\ 1\ 1\ 0\ 1\ 2\ 1\ 1\ ) \cdot \frac{1}{2} \cdot (-\ 1\ \ -\ 2\ 1\ 2\ 2\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 1\ ) = \frac{1}{2} \cdot (-\ 1\ \ -\ 4\ 1$

.

$$\underline{Y = \frac{1}{2} \cdot (-\ 1\ \ -\ 4\ 1\ \ -\ 2\ \ -\ 2\ 2\ \ -\ 1\ \ -\ 2\ 3\ ).}$$

****

3º) Dados los planos $\pi_1 \equiv ax + y - z + 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv x + ay + z - 2 = 0$, determine, en caso de que existan, el valor o posibles valores del parámetro a, para cada uno de los siguientes supuestos:

a) Que π_1 y π_2 sean paralelos.

b) Que π_1 y π_2 sean perpendiculares.

c) Que la recta intersección de π_1 y π_2 sea perpendicular al plano $\beta \equiv x = y$.

----

a)

Teniendo en cuenta sus términos independientes, la condición necesaria y suficiente para que los planos π_1 y π_2 sean paralelos es que sus vectores normales sean linealmente dependientes, o sea, que tengan proporcionales sus componentes.

Los vectores normales de los planos son $\overrightarrow{n_1} = (a,\ 1,\ -1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1,\ a,\ 1)$.

$$\frac{a}{1} = \frac{1}{a} = \frac{-1}{1} \Rightarrow a = -1.$$

<u>*Los planos π_1 y π_2 son paralelos para $a = -1$.*</u>

b)

Para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares es condición necesaria y suficiente que sus vectores normales los sean, o sea, que su producto escalar sea cero:

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0 \Rightarrow (a,\ 1,\ -1) \cdot (1,\ a,\ 1) = 0;\ \ a + a - 1 = 0;\ \ 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

<u>*Los planos π_1 y π_2 son perpendiculares para $a = \frac{1}{2}$.*</u>

c)

La recta r intersección de los planos π_1 y π_2 es $r \equiv \begin{cases} ax + y - z + 1 = 0 \\ x + ay + z - 2 = 0 \end{cases}$.

Un vector director de la recta r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan:

$$\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = i - j + a^2 k - k + ai - aj =$$

$= (a + 1)i - (a + 1)j + \left(a^2 - 1\right)k = (a + 1)i - (a + 1)j + (a + 1)(a - 1)k$
.

Un vector director de r es $\vec{v}_r = (1, \ -1, \ a - 1)$.

Un vector normal del plano $\beta \equiv x = y$ es $\vec{n}_\beta = (1, \ -1, \ 0)$.

Para que la recta r intersección de π_1 y π_2 sea perpendicular al plano $\beta \equiv x = y$ es necesario que el vector director de la recta y el vector normal del plano sean linealmente dependientes, o sea, que sus componentes sean proporcionales:

$$\frac{1}{1} = \frac{-1}{-1} = \frac{a-1}{0} \Rightarrow \frac{a-1}{0} = 1; \ \ a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1.$$

$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \beta\ son\ perpendiculares\ para\ a = 1.}$

****

4º) Dado el punto $P(2,\ 1,\ -1)$, determine el punto P' simétrico de P respecto al plano que pasa por los puntos $A(0,\ 2,\ -1)$, $B(1,\ -3,\ 0)$ y $C(2,\ 1,\ 1)$.

Los puntos $A(0,\ 2,\ -1)$, $B(1,\ -3,\ 0)$ y $C(2,\ 1,\ 1)$ determinan los vectores:

$$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(1,\ -3,\ 0) - (0,\ 2,\ -1)] = (1,\ -5,\ 1).$$

$$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(2,\ 1,\ 1) - (0,\ 2,\ -1)] = (2,\ -1,\ 2).$$

La expresión implícita o general de plano π que contiene a los puntos A, B y C es la siguiente: $\pi\left(A;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y-2 & z+1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0;$

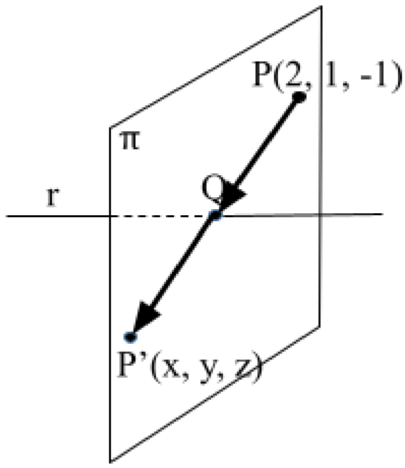
$$-10x + 2(y-2) - (z+1) + 10(z+1) + x - 2(y-2) = 0;$$

$$-9x + 9(z+1) = 0;\ \ -x + z + 1 = 0 \Rightarrow \pi \equiv x - z - 1 = 0.$$

Un vector normal del plano π es $\overrightarrow{n} = (1,\ 0,\ -1)$.

La recta r, perpendicular a π que contiene al punto $P(2,\ 1,\ -1)$ tiene la siguiente expresión dada por unas ecuaciones paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -1 - \lambda \end{cases}.$

El punto Q intersección de r y π es el siguiente:



$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x - z - 1 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow (2 + \lambda) + (1 + \lambda) -$$

$$2 + \lambda + 1 + \lambda - 1 = 0;\ \ 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1.$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 - 1 = 1 \\ y = 1 \\ z = -1 + 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow Q(1,\ 1,\ 0).$$

Para que P' sea el simétrico de P con respecto a r tiene que cumplirse que:

$\vec{PQ} = \vec{QP'} \Rightarrow [Q - P] = [P' - Q];\ [(1,\ 1,\ 0) - (2,\ 1,\ -1)] = [(x,\ y,\ z) - (1,\ 1,\ 0)];$

$(-1,\ 0,\ 1) = (x - 1,\ y - 1,\ z) \Rightarrow \underline{P'(0,\ 1,\ 1)}.$

****

OPCIÓN B

1º) Dado el sistema de ecuaciones lineales: $\{3x + y + mz = 1 \quad x - y + 2z =- 2 \quad 5x + (m + 1)y + 2z = 4$, se pide:

$a)$ Discutirlo según los valores del parámetro m.

$b)$ Resolverlo en el caso de m = 0.

$c)$ Resolverlo en el caso de m = 2.

$a)$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A = (3\ 1\ m\ 1\ \ -1\ 2\ 5\ m + 1\ 2\ )$ y $A' = (3\ 1\ m\ 1\ \ -1\ 2\ 5\ m + 1\ 2\ \ \ 1\ -2\ 4\ ).$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro m es el siguiente:

$|A| = |3\ 1\ m\ 1\ \ -1\ 2\ 5\ m + 1\ 2\ | =- 6 + m(m + 1) + 10 + 5m - 6(m + 1) -$

$= 2 + m^2 + m + 5m - 6m - 6 = m^2 - 4 = 0 \Rightarrow m_1 =- 2,\ m_2 = 2.$

$\underline{Para\ \{m \neq -2\ m \neq 2\ \} \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

$Para\ m =- 2 \Rightarrow A' = (3\ 1\ \ -2\ 1\ \ -1\ 2\ 5\ \ -1\ 2\ \ \ 1\ -2\ 4\ ) \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,$

$\Rightarrow |3\ 1\ 1\ 1\ \ -1\ \ -2\ 5\ \ -1\ 4\ | =- 12 - 1 - 10 + 5 - 6 - 4 \neq 0 \Rightarrow Rang\ A' = 3$

.

$\underline{Para\ m =- 2 \Rightarrow Rang\ A = 2;\ Rang\ A' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

$Para\ m = 2 \Rightarrow A' = (3\ 1\ 2\ 1\ \ -1\ 2\ 5\ 3\ 2\ \ \ 1\ -2\ 4\ ) \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (1\ \ -1\ 2\ 3\ 1\ 2\ 5\ 3\ 2\ \ \ \ -2\ 1\ 4\ ) \Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 - 3F_1\ F_3 \rightarrow F_3 - 5F_1\} \Rightarrow (1\ \ -1\ 2\ 0\ 4$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow Rang\ A^{'} = 2.$

<u>$Para\, m = 2 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A^{'} = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.$</u>

$b)$

Para $m = 0$ el sistema resulta: $3x + y = 1\, x - y + 2z =- 2\, 5x + y + 2z = 4\, \}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|1\ 1\ 0\ -2\ -1\ 2\ 4\ 1\ 2\ |}{-4} = \frac{-2+8-2+4}{-4} = \frac{8}{-4} =- 2.$$

$$y = \frac{|3\ 1\ 0\ 1\ -2\ 2\ 5\ 4\ 2\ |}{-4} = \frac{-12+10-24-2}{-4} =- \frac{28}{-4} = 7.$$

$$z = \frac{|3\ 1\ 1\ 1\ -1\ -2\ 5\ 1\ 4\ |}{-4} = \frac{-12+1-10+5+6-4}{-4} =- \frac{14}{-4} = \frac{7}{2}.$$

<u>$Solución: x =- 2,\ y = 7,\ z = \frac{7}{2}.$</u>

$c)$

Para $m = 2$ el sistema resulta: $3x + y + 2z = 1\ x - y + 2z =- 2\, 5x + 3y + 2z = 4\, \}$, que es compatible indeterminado. Despreciando una ecuación (tercera) y haciendo $z = \lambda$:

$$3x + y = 1 - 2\lambda\, x - y =- 2 - 2\lambda\, \} \Rightarrow 4x =- 1 - 4\lambda \rightarrow x =- \frac{1}{4} - \lambda.$$

$$y = x + 2 + 2\lambda =- \frac{1}{4} - \lambda + 2 + 2\lambda = \frac{7}{4} + \lambda.$$

<u>$Solución: x =- \frac{1}{4} - \lambda,\ y = \frac{7}{4} + \lambda,\ z = \lambda,\ \ \forall\lambda \in R.$</u>

****

2º) Se consideran los puntos $A(0,\ 5,\ 3)$, $B(0,\ 6,\ 4)$, $C(2,\ 4,\ 2)$ y $D(2,\ 3,\ 1)$ y se pide:

$a)$ Comprobar que los cuatro puntos son coplanarios y que el polígono ABCD es un paralelogramo.

$b)$ Calcular el área de dicho paralelogramo.

$c)$ Determinar el lugar geométrico de los puntos P cuya proyección sobre el plano ABCD es el punto medio del paralelogramo.

$a)$

Los puntos A, B, C y D son coplanarios cuando el punto D pertenezca al plano π determinado por los puntos A, B y C.

Los puntos $A(0,\ 5,\ 3)$, $B(0,\ 6,\ 4)$, $C(2,\ 4,\ 2)$ determinan los vectores:

$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(0,\ 6,\ 4) - (0,\ 5,\ 3)] = (0,\ 1,\ 1).$

$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(2,\ 4,\ 2) - (0,\ 5,\ 3)] = (2,\ -1,\ -1).$

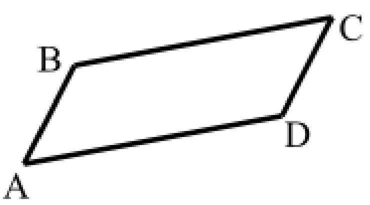
$\pi\left(A;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y-5 & z-3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0;$

$-x + 2(y-5) - 2(z-3) + x = 0;\ \ y - 5 - z + 3 = 0 \Rightarrow \pi \equiv y - z - 2 = 0$.

$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv y - z - 2 = 0 \\ D(2,\ 3,\ 1) \end{array}\right\} \Rightarrow 3 - 1 - 2 = 0 \Rightarrow Si \Rightarrow D \in \pi.$

$\underline{Los\ puntos\ A,\ B,\ C\ y\ D\ son\ coplanarios,\ como\ se\ pedía\ comprobar}.$

El polígono ABCD es un paralelogramo cuando se cumplan las siguientes igualdades de vectores: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}\ y\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.



$\overrightarrow{AB} = (0,\ 1,\ 1).$

$\overrightarrow{DC} = [C - D] = [(2,\ 4,\ 2) - (2,\ 3,\ 1)] = (0,\ 1,\ 1).$

$\overrightarrow{AD} = [D - A] = [(2,\ 3,\ 1) - (0,\ 5,\ 3)] = (2,\ -2,\ -2).$

$\overrightarrow{BC} = [C - B] = [(2,\ 4,\ 2) - (0,\ 6,\ 4)] = (2,\ -2,\ -2).$

Como puede observarse, se cumple lo pedido: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}\ y\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

$\underline{Los\ puntos\ A,\ B,\ C\ y\ D\ forman\ un\ paralelogramo,\ c.\ q.\ c.}$

$b)$

El área de un paralelogramo es el módulo del producto vectorial de los dos vectores que lo determinan:

$$S_{ABCD} = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = \begin{Vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{Vmatrix} = 2\cdot\begin{Vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{Vmatrix} =$$

$$= 2\cdot|-i + j - k + i| = 2\cdot|j - k| = 2\cdot\sqrt{1^2 + (-1)^2} = 2\cdot\sqrt{1+1} \Rightarrow$$

$$\underline{S_{ABCD} = 2\sqrt{2}\,u^2.}$$

$c)$

El lugar geométrico de los puntos P cuya proyección sobre el plano ABCD es el punto medio Q del paralelogramo es la recta r, perpendicular al plano π, (que es el que contiene a los puntos dados), que pasa por el centro del paralelogramo.

El punto medio del paralelogramo es el punto medio del segmento $\overline{AC}$ (o también el punto medio del segmento $\overline{BD}$):

$$\left.\begin{array}{l} A(0,\ 5,\ 3) \\ C(2,\ 4,\ 2) \end{array}\right\} \Rightarrow Q\left(1,\ \frac{9}{2},\ \frac{5}{2}\right).$$

Un vector normal del plano $\pi \equiv y - z - 2 = 0$ es $\overrightarrow{n} = (0,\ 1,\ -1)$.

$$\underline{Lugar\ geométrico\ pedido:\ \ r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{9}{2} + \lambda \\ z = \frac{5}{2} - \lambda \end{cases},\ \ \forall\lambda \in R.}$$

****

3º) a) Determine el polinomio $f(x)$, sabiendo que $f'''(x) = 12$, para todo $x \in R$ y además verifica: $f(1) = 3$; $f'(1) = 1$; $f''(1) = 4$.

b) Determine el polinomio $g(x)$, sabiendo que $g''(x) = 6$, para todo $x \in R$ y además verifica: $\int_0^1 g(x) \cdot dx = 5$, $\int_0^2 g(x) \cdot dx = 14$.

----

a)

Por ser que $f'''(x) = 12$, el polinomio $f(x)$ es de tercer grado.

Sea el polinomio pedido $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. $\quad f''(x) = 6ax + 2b$. $\quad f'''(x) = 6a$.

$f'''(x) = 12 \Rightarrow 6a = 12 \Rightarrow a = 2$.

$f''(1) = 4 \Rightarrow 6 \cdot 2 \cdot 1 + 2b = 4;\ 12 + 2b = 4;\ 6 + b = 2 \Rightarrow b = -4$.

$f'(1) = 1 \Rightarrow 3 \cdot 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot (-4) \cdot 1 + c = 1;\ 6 - 8 + c = 1 \Rightarrow c = 3$.

$f(1) = 3 \Rightarrow 2 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + d = 3;\ 2 - 4 + 3 + d = 3 \Rightarrow d = 2$.

$$\underline{f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x + 2}.$$

b)

Por ser $g''(x) = 6$, el polinomio $g(x)$ es un polinomio de segundo grado.

Sea $g(x) = ax^2 + bx + c$.

$g'(x) = 2ax + b$. $\quad g''(x) = 2a$.

$g''(x) = 6 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$.

El polinomio resulta: $g(x) = 3x^2 + bx + c$.

$\int_0^1 g(x) \cdot dx = 5 \Rightarrow \int_0^1 \left(3x^2 + bx + c\right) \cdot dx = \left[\frac{3x^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right]_0^1 =$

$$= \left(1^3 + \frac{b \cdot 1^2}{2} + c \cdot 1\right) - 0 = 5;\ 1 + \frac{b}{2} + c = 5;\ 2 + b + 2c = 10;\ b + 2c = 8$$
. (1)

$$\int_0^2 g(x) \cdot dx = 14 \Rightarrow \int_0^2 \left(3x^2 + bx + c\right) \cdot dx = \left[x^3 + \frac{bx^2}{2} + cx\right]_0^2 =$$

$$= \left(2^3 + \frac{b \cdot 2^2}{2} + 2c\right) - 0 = 14;\ 8 + 2b + 2c = 14;\ 4 + b + c = 7;\ b + c = 3$$
. (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left. \begin{array}{l} b + 2c = 8 \\ b + c = 3 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} b + 2c = 8 \\ -b - c = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow c = 5,\ b = -2.$$

$$\underline{g(x) = 3x^2 - 2x + 5}.$$

****

4º) Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función $f(x) = \{ \ 0 \quad si \quad x \le 0 \ |xLx| \ si \ x > 0$, donde L denota el logaritmo neperiano.

Teniendo en cuenta que $Lx < 0 \Rightarrow 0 < x < 1$ y que $Lx > 0 \Rightarrow x > 1$, la función $f(x)$ puede redefinirse de la forma $f(x) = \{ \ 0 \quad si \quad x \le 0 \ - x \cdot Lx \ si \ 0 < x < 1 \ x \cdot Lx \ \ si \ \ x \ge 1$.

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para x = 0 y para x = 1 cuya continuidad es dudosa y se va a determinar.

Una función es continua en un punto cuando se cumple que sus límites por la izquierda y por la derecha son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para \, x = 0 \Rightarrow \left\{ f(x) = \lim_{x \to 0} = 0 = f(0) \qquad f(x) = \lim_{x \to 0} (- x \cdot Lx) = 0 \ \ (*) \right\}$$

$$(*) \quad \lim_{x \to 0} (- x \cdot Lx) = - \lim_{x \to 0} (x \cdot Lx) = - 0 \cdot (- \infty) \Rightarrow Ind. \Rightarrow - \lim_{x \to 0} \frac{Lx}{\frac{1}{x}} = - \frac{-\infty}{\infty} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow - \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} x = 0.$$

$$f(x) = \lim_{x \to 0^+} = f(0) \Rightarrow f(x) \ es \ continua \ en \ x = 0.$$

$$Para \, x = 1 \Rightarrow \left\{ f(x) = \lim_{x \to 1} (- x \cdot Lx) = 0 \qquad f(x) = \lim_{x \to 1} (x \cdot Lx) = 0 = f(0) \right.$$

$$f(x) = \lim_{x \to 1^+} = f(1) \Rightarrow f(x) \ es \ continua \ en \ x = 1.$$

Para que la función sea derivable para x = 0, sus derivadas laterales en ese punto tienen que ser iguales:

$$f'(x) = \{ \ 0 \quad si \quad x \le 0 \ - 1 - Lx \ si \ 0 < x < 1 \ 1 + Lx \ \ si \quad x \ge 1 \Rightarrow f'(0^-) = 0 \quad f'(0^+) = + \infty \} \Rightarrow f'(0^-) \ne f'(0^+) \Rightarrow$$

$$\underline{f(x) \ no \ es \ derivable \ en \ x = 0}.$$

$$f'(x) = \{ \ 0 \quad si \quad x \le 0 \ - 1 - Lx \ si \ 0 < x < 1 \ 1 + Lx \ \ si \quad x \ge 1 \Rightarrow f'(1^-) = - 1 \ f'(1^+) = 1 \ \ \} \Rightarrow f'(1^-) \ne f'(1^+) \Rightarrow$$

$\underline{f(x)\ no\ es\ derivable\ en\ x\ =\ 1}$.

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MADRID

SEPTIEMBRE – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger una de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

OPCIÓN A

1º) Dada la función $f(x) = (6 - x) \cdot e^{x/3}$, se pide:

a) Determinar su dominio, asíntotas y cortes con los ejes.

b) Calcular su derivada, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos.

c) Determinar el área de un triángulo que forman los ejes coordenados con la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $x = 0$.

----

a)

La función $f(x)$ está definida para cualquier valor real de x: $\underline{D(f) \Rightarrow R}$.

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen infinito el valor de la función: $\underline{No\ tiene\ asíntotas\ verticales}$.

Asíntotas horizontales: son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a más infinito o menos infinito.

$$f(x) = \left[(6 - x) \cdot e^{x/3}\right] = \frac{6-x}{e^{-\frac{x}{3}}} = \frac{\infty}{e^{\infty}} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \frac{-1}{-\frac{1}{3} \cdot e^{-\frac{x}{3}}} = \frac{3}{e^{+\infty}} = \frac{3}{\infty} = 0.$$

$f(x) = \left[(6 - x)\cdot e^{x/3}\right] = -\infty\cdot e^{\infty} = -\infty.$

$\underline{La\ recta\ x = 0\ es\ asíntota\ horizontal\ en\ la\ parte\ negativa\ del\ eje\ X.}$

Cortes con el eje X:

$f(x) = 0 \Rightarrow (6 - x)\cdot e^{x/3} = 0 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow \underline{A(6,\ 0)}.$

Cortes con el eje Y:

$x = 0 \Rightarrow y = f(0) = (6 - 0)\cdot e^{0/3} = 6\cdot e^{0} = 6\cdot 1 = 6 \Rightarrow \underline{B(0,\ 6)}.$

$b)$

$f'(x) = -1\cdot e^{x/3} + (6 - x)\cdot\frac{1}{3}e^{x/3} = \frac{1}{3}e^{x/3}(-3 + 6 - x) = \frac{1}{3}e^{x/3}(3 - x).$

$$\underline{f'(x) = \frac{1}{3}\cdot e^{x/3}\cdot(3 - x).}$$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente:

$f'(x) = \frac{1}{3}e^{x/3}(3 - x) = 0 \Rightarrow x = 3.$

Teniendo en cuenta que el dominio de la función es R, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty,\ 3).}$$

$$\underline{Decrecimiento \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (3,\ +\infty).}$$

Es condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo (máximo o mínimo) que se anule su primera derivada:

$f'(x) = \frac{1}{3}e^{x/3}(3 - x) = 0 \Rightarrow x = 3.$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para el valor que anula la primera derivada, se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo relativo.

$$f''(x) = \frac{1}{3}\cdot\left[\frac{1}{3}e^{x/3}(3 - x) + e^{x/3}(-1)\right] = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}e^{x/3}(3 - x - 3) = -\frac{1}{9}xe^{x/3}.$$

$$f''(3) = -\frac{1}{9}\cdot 3\cdot e^{1} = -\frac{e}{3} < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 3.$$

$$f(3) = (6 - 3)\cdot e^{3/3} = 3e \Rightarrow Máximo\ relativo\text{: } \underline{C(3,\ 3e)}.$$

$b)$

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto:

$$m = f'(0) = \frac{1}{3}e^{0/3}(3 - 0) = e^{0} = 1.$$

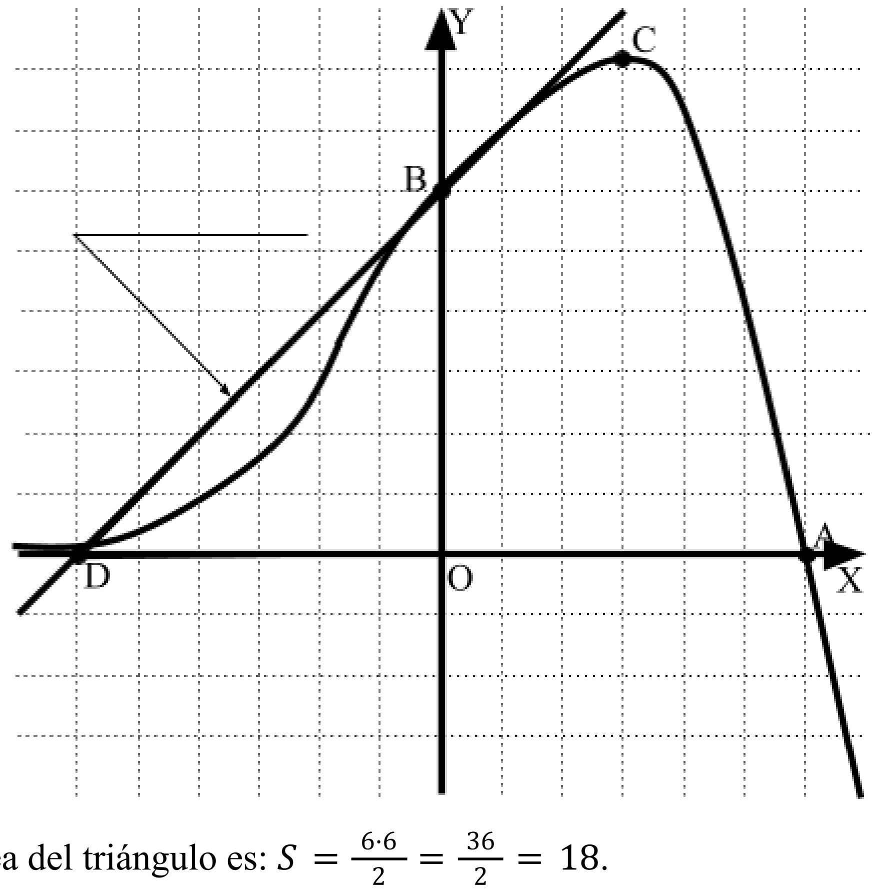
El punto de tangencia es: $f(0) = (6 - 0)\cdot e^{0/3} = 6\cdot 1 = 6 \Rightarrow B(0,\ 6)$.

La ecuación de la recta punto-pendiente es $y - y_0 = m\left(x - x_0\right)$:

$$y - 6 = 1\cdot(x - 0) = x;\ \ x - y = -6 \Rightarrow t \equiv \frac{x}{-6} + \frac{y}{6} = 1.$$

Los puntos de corte con los ejes de la tangente son $D(-6,\ 0)\ y\ B(0,\ 6)$.

La representación gráfica, aproximada, de la situación es la siguiente:



El área del triángulo es: $S = \frac{6\cdot 6}{2} = \frac{36}{2} = 18$.

$$\underline{S = 18\,u^2}.$$

****

2º) Dadas las rectas $r\equiv\{x - 2z - 1 = 0 \quad x + y + z - 4 = 0$ y $s\equiv\{(2 + \lambda,\ 1 - 3\lambda,\ \lambda);\ \lambda\in R\}$, se pide:

a) Obtener la recta t que pasa por el punto $P(1,\ 0,\ 5)$ y corta perpendicularmente a r .

b) Obtener el plano que contiene a la recta r y es paralelo a s.

c) Hallar la distancie entre las rectas r y s.

----

a)

Un vector director de r es cualquiera que sea linealmente dependiente de los vectores normales de los planos que la determinan:

$\overrightarrow{v_r} = |i\ j\ k\ 1\ 0\ \ -2\ 1\ 1\ 1\ | = -2j + k + 2i - j = 2i - 3j + k \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (2,\ \ -3,\ 1)$.

El haz de planos β perpendiculares a r es $\beta\equiv 2x - 3y + z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz β, el plano α que contiene al punto $P(1,\ 0,\ 5)$ es el que satisface su ecuación:

$\beta\equiv 2x - 3y + z + D = 0 \quad P(1,\ 0,\ 5)\ \} \Rightarrow 2\cdot 1 - 3\cdot 0 + 5 + D = 0;\ \ 2 +$

$7 + D = 0 \rightarrow D = -7 \Rightarrow \alpha\equiv 2x - 3y + z - 7 = 0$.

El punto Q, intersección de π con r es:

$\alpha\equiv 2x - 3y + z - 7 = 0 \quad r\equiv\{x - 2z - 1 = 0 \quad x + y + z - 4 = 0\ \} \Rightarrow 2x$. Resolviendo por Cramer:

$x = \frac{|7\ -3\ 1\ 1\ 0\ -2\ 4\ 1\ 1\ |}{|2\ -3\ 1\ 1\ 0\ -2\ 1\ 1\ 1\ |} = \frac{1+24+14+3}{1+6+4+3} = \frac{42}{14} = 3 \qquad y = \frac{|2\ 7\ 1\ 1\ 1\ -2\ 1\ 4\ 1\ |}{14} = \frac{2+4-14-1+16-}{14}$.

Los puntos P y Q determinan el vector:

$\overrightarrow{QP} = [P - Q] = [(1,\ 0,\ 5) - (3,\ 0,\ 1)] = (-2,\ 0,\ 4)$.

Un vector director de t es cualquiera que sea linealmente dependiente de $\overrightarrow{QP}$, por ejemplo: $\overrightarrow{v_t} = (1,\ 0,\ \ -2)$.

La expresión de t por unas ecuaciones paramétricas es: $\underline{t \equiv \{x = 1 + \lambda \quad y = 0 \qquad z = 5 - 2\lambda}$.

$b)$

El plano π pedido, por contener a r, contiene al punto $Q(3,\ 0\ 1) \in r$ y tiene como vector director a $\overrightarrow{v_r} = (2,\ -3,\ 1)$ y, por ser paralelo a s tiene como vector director al vector $\overrightarrow{v_s} = (1,\ -3,\ 1)$.

La expresión general de π es la siguiente:

$$\pi\left(Q;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y & z-1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$-3(x-3) + y - 6(z-1) + 3(z-1) + 3(x-3) - 2y = 0; \quad -y - 3(z-1) =$
.

$$\underline{\pi \equiv y + 3z - 3 = 0}.$$

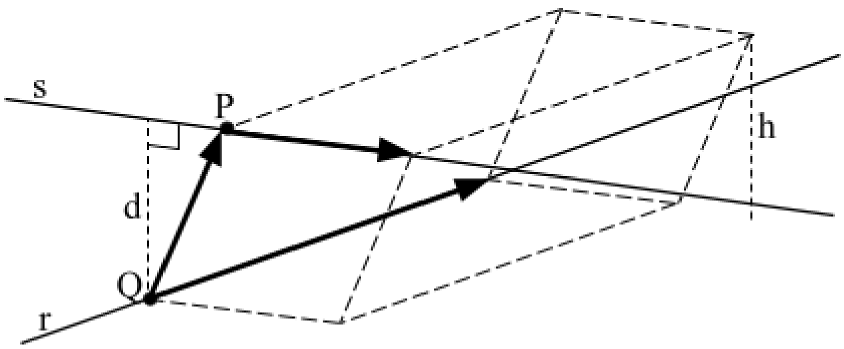
$c)$

Los vectores directores de las rectas r y s son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; por otra parte r y s no tienen puntos en común, por lo cual se cruzan.

Para calcular la distancia entre las rectas r y s vamos a determinar un paralelepípedo cuyas dimensiones son los vectores directores de las rectas, $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$, y el vector $\overrightarrow{w}$ que tiene como origen al punto Q de r y extremo el punto $P(2,\ 1,\ 0)$ de s
.

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{PQ} = [Q - P] = [(3,\ 0,\ 1) - (2,\ 1,\ 0)] = (1,\ -1,\ 1).$$

Para una mejor comprensión se hace el esquema que se observa.



El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observando que la altura h es igual a la distancia d pedida entre las rectas.

Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$V = \vec{v}_r \cdot \left(\vec{v}_s \times \vec{w}\right) = \left|\vec{v}_r \times \vec{v}_s\right| \cdot h = \left|\vec{v}_r \times \vec{v}_s\right| \cdot d \Rightarrow d = \frac{\left|\vec{v}_r \cdot \left(\vec{v}_s \times \vec{w}\right)\right|}{\left|\vec{v}_r \times \vec{v}_s\right|}.$$

$$d(r,\ s) = \frac{\left|\vec{v}_r \cdot \left(\vec{v}_s \times \vec{w}\right)\right|}{\left|\vec{v}_r \times \vec{v}_s\right|} = \frac{\|2\ -3\ 1\ 1\ -3\ 1\ 1\ -1\ 1\ \|}{|i\ j\ k\ 2\ -3\ 1\ 1\ -3\ 1\ |} = \frac{|-6-1-3+3+2+3|}{|-3i+j-6k+3k+3i-2j|} = \frac{|8-10|}{|-j-3k|} =$$

$$= \frac{|-2|}{\sqrt{(-1)^2+(-3)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+9}} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

$$\underline{d(r,\ s) = \frac{\sqrt{10}}{5}u.}$$

****

3º) a) Determine, si es posible, los parámetros $\alpha\, y\, \beta$ de modo que se verifique la igualdad: $\alpha\cdot(3\ \ -\ 4\ 5\ \ -\ 1\ )+\ \beta\cdot(1\ 0\ 2\ 1\ )^{2}=(3\ \ -\ 8\ \ -\ 2\ \ -\ 5\ )$.

b) Determine los posibles valores de λ para que el rango de la matriz A sea 2, donde $A\ =\ \lambda\cdot(2\ 2\ 1\ 3\ )+\ (1\ 0\ 0\ 1\ )$.

----

a)

$$(1\ 0\ 2\ 1\ )^{2}=(1\ 0\ 2\ 1\ )\cdot(1\ 0\ 2\ 1\ )=(1\ 0\ 4\ 1\ ).$$

$\alpha(3\ \ -\ 4\ 5\ \ -\ 1\ )+\ \beta(1\ 0\ 4\ 1\ )=(3\ \ -\ 8\ \ -\ 2\ \ -\ 5\ )\Rightarrow\quad 3\alpha\ +\ \beta\ =\ 3\qquad -\ 4\alpha\ =-$

.

b)

$$A\ =\ \lambda\cdot(2\ 2\ 1\ 3\ )+\ (1\ 0\ 0\ 1\ )=(2\lambda\ +\ 1\ 2\lambda\ \lambda\ 3\lambda\ +\ 1\ ).$$

Para que $Rang\ A\ =\ 2$ tiene que ser $|A|\neq 0$:

$$|2\lambda\ +\ 1\ 2\lambda\ \lambda\ 3\lambda\ +\ 1\ |=\ 0;\ \ (2\lambda\ +\ 1)(3\lambda\ +\ 1)-\ 2\lambda^{2}\ =\ 0;$$

$$6\lambda^{2}\ +\ 2\lambda\ +\ 3\lambda\ +\ 1\ -\ 2\lambda^{2}\ =\ 0;\ \ 4\lambda^{2}\ +\ 5\lambda\ +\ 1\ =\ 0;\ \ \lambda\ =\frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{8}=\frac{-5\pm\sqrt{9}}{8}=$$

$$=\frac{-5\pm 3}{8}\Rightarrow\lambda_{1}=-\ 1,\ \lambda_{2}=-\ \frac{1}{4}.$$

$$\underline{Rang\ A\ =\ 2,\ \forall\lambda\in R\ -\left\{-\ 1,\ \ -\ \frac{1}{4}\right\}.}$$

****

4º) Cierta fundación ha destinado 247.000 euros para la dotación de 115 becas de estudios. El importe de cada beca es de 3.000 euros, si el estudiante cursa grado universitario; de 2.000 euros, si cursa la fundación profesional y de 1.500 euros, si realiza estudios de posgrado. Sabiendo que la fundación ha concedido doble número de becas de formación profesional que de posgrado, ¿cuántas becas ha concedido a cada nivel de estudios.

Sean x, y, z el número de becas concedidas a estudiantes de grado universitario, formación profesional y postgrado, respectivamente.

$3.000x + 2.000y + 1.500z = 247.000 \qquad x + y + z = 115$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|494\ 4\ 3\ 115\ 1\ 1\ 0\ 1\ -2\ |}{|6\ 4\ 3\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ -2\ |} = \frac{-988+345-494+920}{-12+3-6+8} = \frac{1.265-1.482}{11-18} = \frac{-217}{-7} = 31.$$

$$y = \frac{|6\ 494\ 3\ 1\ 115\ 1\ 0\ 0\ -2\ |}{-7} = \frac{-2\cdot|6\ 494\ 1\ 115\ |}{-7} = \frac{-2\cdot(690-494)}{-7} = \frac{-2\cdot 196}{-7} = 2\cdot 28 = 56$$

.

$$z = \frac{|6\ 4\ 494\ 1\ 1\ 115\ 0\ 1\ 0\ |}{-7} = \frac{-|6\ 494\ 1\ 115\ |}{-7} = \frac{690-494}{7} = \frac{196}{7} = 28.$$

$\underline{Se\ concedieron\ 31,\ 56\ y\ 28\ becas\ de\ grado,\ f.\ profesional\ y\ posgrado,\ respec.}$

****

OPCIÓN B

1º) Dado el sistema de ecuaciones lineales: $\{2x + (a - 1)y - 2z = a\ 2x + y - az = 2 \qquad - x + y + z = 1 - a$
, se pide:
a) Discutirlo según los valores del parámetro a.

b) Resolverlo cuando sea posible.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = (2\ a - 1\ \ - 2\ 2\ 1\ \ - a\ \ - 1\ 1\ 1\ )\ y\ M' = (2\ a - 1\ \ - 2\ 2\ 1\ \ - a\ \ - 1\ 1\ 1\ \ \ a\ 2\ 1$
.

$Rang\ M \Rightarrow |2\ a - 1\ \ - 2\ 2\ 1\ \ - a\ \ - 1\ 1\ 1\ | = 0;\ 2 - 4 + a(a - 1) - 2 + 2a - 2(a$

$- 4 + a^2 - a + 2a - 2a + 2 = 0;\ \ a^2 - a - 2 = 0;\ \ x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 = - 1,\ a_2 = 2.$

<u>$Para\ \{a \neq - 1\ a \neq 2\ \} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.$</u>

$Para\ a = - 1 \Rightarrow M' = (2\ \ - 2\ \ - 2\ 2\ 1\ 1\ \ - 1\ 1\ 1\ \ \ \ - 1\ 2\ 2\ ) \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_3\}$

$\Rightarrow |2\ \ - 2\ \ - 1\ 2\ 1\ 2\ \ - 1\ 1\ 2\ | = 4 - 2 + 4 - 1 - 4 + 8 = 16 - 7 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' =$
.

<u>$Para\ a = - 1 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.$</u>

$Para\ a = 2 \Rightarrow M' = (2\ 1\ \ - 2\ 2\ 1\ \ - 2\ \ - 1\ 1\ 1\ \ \ 2\ 2\ \ - 1\ ) \Rightarrow \{F_1 = F_2\} \Rightarrow Rang\ M$
.

<u>$Para\ a = 2 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.$</u>

b)

Resolvemos en primer lugar para $a \neq - 1$ y $a \neq 2$ aplicando la regla de

Cramer:

$$x = \frac{|a\ a-1\ -2\ 2\ 1\ -a\ 1-a\ 1\ 1\ |}{(a+1)(a-2)} = \frac{a-4+a(a-1)^2+2(1-a)+a^2-2(a-1)}{(a+1)(a-2)} =$$

$$= \frac{a-4+a\left(a^2-2a+1\right)+4(1-a)+a^2}{(a+1)(a-2)} = \frac{a-4+a^3-2a^2+a+4-4a+a^2}{(a+1)(a-2)} = \frac{a^3-a^2-2a}{(a+1)(a-2)} = \frac{a\left(a^2-a-2\right)}{(a+1)(a-2)} =$$

$$= \frac{a\left(a^2-a-2\right)}{(a+1)(a-2)} = \frac{a(a-2)(a+1)}{(a+1)(a-2)} = a.$$

$$y = \frac{|2\ a\ -2\ 2\ 2\ -a\ -1\ 1-a\ 1\ |}{(a+1)(a-2)} = \frac{4+a^2-4(1-a)-4-2a+2a(1-a)}{(a+1)(a-2)} = \frac{a^2-4+4a-2a+2a-2a^2}{(a+1)(a-2)} =$$

$$= \frac{-a^2+4a-4}{(a+1)(a-2)} = \frac{-(a-2)^2}{(a+1)(a-2)} = \frac{-(a-2)}{a+1} = \frac{2-a}{a+1}.$$

$$z = \frac{|2\ a-1\ a\ 2\ 1\ 2\ -1\ 1\ 1-a\ |}{(a+1)(a-2)} = \frac{2(1-a)+2a-2(a-1)+a-4-2(a-1)(1-a)}{(a+1)(a-2)} =$$

$$= \frac{-4(a-1)+3a-4+2(a-1)^2}{(a+1)(a-2)} = \frac{-4a+4+3a-4+2\left(a^2-2a+1\right)}{(a+1)(a-2)} = \frac{-a+2a^2-4a+2}{(a+1)(a-2)} = \frac{2a^2-5a+2}{(a+1)(a-2)} =$$

$$= \frac{(a-2)(2a-1)}{(a+1)(a-2)} = \frac{2a-1}{a+1}.$$

$$\underline{Solución:\ x = a,\ y = \frac{2-a}{a+1},\ z = \frac{2a-1}{a+1}}.$$

Resolvemos ahora para $a = 2$. El sistema resulta: $\{2x + y - 2z = 2\ \ 2x + y - 2z = 2\ \ - x + y + z =- 1$, equivalente al sistema $\{2x + y - 2z = 2\ \ - x + y + z =- 1$, que es compatible indeterminado.

Haciendo
$z = \lambda \Rightarrow 2x + y = 2 + 2\lambda\ \ - x + y =- 1 - \lambda\}\ \ 2x + y = 2 + 2\lambda\ x - y = 1 + \lambda\}$

$\Rightarrow x = 1 + \lambda;\ \ y = x - 1 - \lambda = 1 + \lambda - 1 - \lambda = 0.$

$$\underline{Solución:\ x = 1 + \lambda,\ \ y = 0,\ z = \lambda,\ \ \forall\lambda\in R}.$$

****

2º) Dada la función $f(x) = \{\frac{1}{5-x} \ si \ x\leq 0 \ \frac{1}{5+x} \ si \ x > 0$, se pide:

a) Estudiar la continuidad de f y determinar sus asíntotas.

b) Estudiar la derivabilidad de f y calcular $f'(x)$ donde sea posible.

c) Calcular $I = \int_{-1}^{1} f(x)\cdot dx$.

----

a)

La función f(x) es continua $\forall x\in R$, excepto para $x = 0$, cuya continuidad se estudia a continuación.

Para que la función sea continua en $x = 0$ es necesario que sus límites laterales en ese punto sean iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$f(x) \ = \frac{1}{5-x} = \ \frac{1}{5} = f(0) \ f(x) \ == \frac{1}{5} \qquad \} \Rightarrow f(x) \ = f(x) \ = f(0).$$

$$\underline{f(x) \ es \ continua \ en \ R}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma y = k y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$x < 0 \Rightarrow y = k = f(x) = \ \frac{1}{5-x} = \frac{1}{\infty} = 0 \, .$$

$$x > 0 \Rightarrow y = k = f(x) = \ \frac{1}{5+x} = \frac{1}{\infty} = 0 \, .$$

$$\underline{La \ recta \ y = 0 \ (eje \ X) \ es \ asintota \ horizontal \ en \ -\infty \ y \ en \ +\infty}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{No \ tiene \ asíntotas \ verticales}.$$

(Los valores que anulan el denominador no pertenecen a la parte de la función)

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

b)

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se ha estudiado su continuidad.

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para los valores $x = 0$ cuya derivabilidad se va a estudiar a continuación.

Un función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales.

$$f'\left(0^-\right) \Rightarrow \frac{0\cdot(5-x)-1\cdot(-1)}{(5-x)^2} = \frac{1}{(5-x)^2} \Rightarrow f'\left(0^-\right) = \frac{1}{(5-0)^2} = \frac{1}{25}.$$

$$f'\left(0^+\right) \Rightarrow \frac{0\cdot(5+x)-1\cdot 1}{(5+x)^2} = \frac{-1}{(5+x)^2} \Rightarrow f'\left(0^+\right) = \frac{-1}{(5+0)^2} = \frac{-1}{25}.$$

$$\underline{f'\left(0^-\right) \neq f'\left(0^+\right) \Rightarrow f(x)\ no\ es\ derivable\ en\ x = 0}.$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ derivable\ en\ R - \{0\}}.$$

La función derivada de $f(x)$ es la siguiente:

$$\underline{f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(5-x)^2} & si\ x \leq 0 \\ \frac{-1}{(5+x)^2} & si\ x > 0 \end{cases}}.$$

$c)$

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)\cdot dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{5-x}\cdot dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{5+x}\cdot dx =$$

$$= [-L|5-x|]_{-1}^{0} + [L|5+x|]_{0}^{1} = (-L5) - (-L6) + L6 - L5 = 2L6 - 2L5 =$$

$$= L\frac{36}{25} = L1,44 \cong 0,36.$$

$$\underline{I = \int_{-1}^{1} f(x)dx = L1,44 \cong 0,36.}$$

****

3º) Sea π el plano que contiene a los puntos $A(0,\ 2,\ 1)$, $B(1,\ 0,\ 1)\ y\ C(-\ 1,\ -\ 2,\ -\ 1)$. Calcule el volumen del tetraedro que forma el origen de coordenadas con los puntos de intersección de π con cada uno de los ejes coordenados.

Los puntos A, B y C determinan los siguientes vectores:

$\overrightarrow{AB} = [B\ -\ A] = [(1,\ 0,\ 1) - (0,\ 2,\ 1)] = (1,\ -\ 2,\ 0).$

$\overrightarrow{AC} = [C\ -\ A] = [(-\ 1,\ -\ 2,\ -\ 1) - (0,\ 2,\ 1)] = (-\ 1,\ -\ 4,\ -\ 2).$

$\pi\left(A;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right) \equiv |x\ y\ -\ 2\ z\ -\ 1\ 1\ \ -\ 2\ 0\ \ -\ 1\ \ -\ 4\ \ -\ 2\ | = 0;$

$4x\ -\ 4(z\ -\ 1) -\ 2(z\ -\ 1) +\ 2(y\ -\ 2) =\ 0;\ \ 4x\ -\ 6(z\ -\ 1) +\ 2(y\ -\ 2) =\ 0;$

$2x\ +\ (y\ -\ 2) -\ 3(z\ -\ 1) =\ 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x\ +\ y\ -\ 3z\ +\ 1\ =\ 0.$

Los puntos de corte del plano $\pi \equiv 2x\ +\ y\ -\ 3z\ +\ 1\ =\ 0$ con los ejes de coordenadas son los siguientes:

$\pi \equiv 2x\ +\ y\ -\ 3z\ +\ 1\ =\ 0\ Eje\ X \to \{y\ =\ 0,\ z\ =\ 0\}\ \} \to 2x\ +\ 1\ =\ 0;\ x\ =-\ \frac{1}{2} \Rightarrow A\Big(-$

.

$\pi \equiv 2x\ +\ y\ -\ 3z\ +\ 1\ =\ 0\ Eje\ Y \to \{x\ =\ 0,\ z\ =\ 0\}\ \} \to y\ +\ 1\ =\ 0;\ y\ =-\ 1 \Rightarrow B(0,$

.

$\pi \equiv 2x\ +\ y\ -\ 3z\ +\ 1\ =\ 0\ Eje\ Z \to \{x\ =\ 0,\ y\ =\ 0\}\ \} \to\ -\ 3z\ +\ 1\ =\ 0;\ z\ =\ \frac{1}{3} \Rightarrow C$

.

Los puntos A, B y C con el origen forman los vectores que determinan el tetraedro.

$\overrightarrow{OA} = \left(-\ \frac{1}{2},\ \ 0,\ 0\right).\ \ \overrightarrow{OB} = (0,\ \ -\ 1,\ 0).\ \ \overrightarrow{OC} = \left(0,\ \ 0,\ \frac{1}{3}\right).$

El volumen de un tetraedro es un sexto del producto mixto de los tres vectores que los determinan:

$V_{OABC} = \frac{1}{6} \cdot \left|\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC}\right| = \frac{1}{6} \cdot \left|-\ \frac{1}{2}\ 0\ 0\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 0\ 0\ \frac{1}{3}\ \right| = \frac{1}{6} \cdot \left(-\ \frac{1}{2}\right) \cdot (-\ 1) \cdot \frac{1}{3} = \underline{\frac{1}{36}\ u}$

.

****

4º) Dado el plano $\pi \equiv 3x + 3y + z - 9 = 0$, se pide:

a) Determinar la ecuación del plano β perpendicular a π que contiene al eje OX.

b) Determinar el punto P del plano π más cercano al origen de coordenadas.

----

a)

Un vector director del plano β pedido es el vector normal de π: $\overrightarrow{n} = (3,\ 3,\ 1)$.

El plano β, por contener al eje OX contiene al punto $O(0,\ 0,\ 0)$ y tiene como vector director a $\overrightarrow{v} = (1,\ 0,\ 0)$.

La expresión general del plano β es la siguiente:

$$\beta\left(O;\ \overrightarrow{n},\ \overrightarrow{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;\ \ y - 3z = 0.$$

$$\underline{\beta \equiv y - 3z = 0}.$$

b)

La recta r que pasa por el origen y es perpendicular al plano π tiene la siguiente expresión dada por unas ecuaciones paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.

El punto P pedido es la intersección del plano π con la recta r:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 3x + 3y + z - 9 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 3 \cdot 3\lambda + 3 \cdot \lambda$$

$19\lambda = 9 \Rightarrow \lambda = \frac{9}{19}$.

$$\underline{P\left(\frac{27}{19},\ \frac{27}{19},\ \frac{9}{19}\right)}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

JUNIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas. No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

OPCIÓN A

1º) Considere las matrices $A = (4 \ -2\ 1\ 1)$ y $B = (4 \ -2 \ -3\ 1)$.

a) Compruebe que ambas matrices son regulares (o invertibles) y calcule sus correspondientes matrices inversas.

b) Determine la matriz X que cumple la ecuación $A \cdot X \cdot B = A + B$.

----

a)

Una matriz es regular o invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$|A| = |4 \ -2\ 1\ 1| = 4 + 2 = 6 \neq 0 \Rightarrow \underline{A\ es\ invertible,\ \ c.q.c.}$

$|B| = |4 \ -2 \ -3\ 1| = 4 - 6 = -2 \neq 0 \Rightarrow \underline{B\ es\ invertible,\ \ c.q.c.}$

$A^t = (4\ 1 \ -2\ 1)$.

$Adj.\ de\ A^t = (1\ 2 \ -1\ 4) \Rightarrow \underline{A^{-1} = \frac{1}{6} \cdot (1\ 2 \ -1\ 4)}$.

$B^t = (4 \ -3 \ -2\ 1)$. $Adj.\ de\ B^t = (1\ 2\ 3\ 4) \Rightarrow \underline{B^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot (1\ 2\ 3\ 4)}$.

b)

$A \cdot X \cdot B = A + B$.

Multiplicando por la izquierda por la inversa de A y por la derecha por la inversa de B los dos términos:

$$A^{-1}\cdot A\cdot X\cdot B\cdot B^{-1} = A^{-1}\cdot(A + B)\cdot B^{-1};\ \ I\cdot X\cdot I = A^{-1}\cdot(A + B)\cdot B^{-1}.$$

$$\underline{X = A^{-1}\cdot(A + B)\cdot B^{-1}}.$$

$X = \frac{1}{6}\cdot(1\ 2\ \ -\ 1\ 4\ )\cdot[(4\ \ -\ 2\ 1\ 1\ ) + (4\ \ -\ 2\ \ -\ 3\ 1\ )]\cdot(-\ 1)\frac{1}{2}\cdot(1\ 2\ 3\ 4\ ) =$

$=-\ \frac{1}{12}\cdot(1\ 2\ \ -\ 1\ 4\ )\cdot(8\ \ -\ 4\ \ -\ 2\ 2\ )\cdot(1\ 2\ 3\ 4\ ) =-\ \frac{1}{12}\cdot(4\ 0\ \ -\ 16\ 12\ )\cdot(1\ 2\ 3\ 4\ ) =$

$=-\ \frac{1}{12}\cdot(4\ 8\ 20\ 16\ ).$

$$\underline{X =-\ \frac{1}{3}\cdot(1\ 2\ 5\ 4\ ).}$$

****

2º) Considere los puntos $P(2,\ 7,\ 3)$, $Q(1,\ 2,\ 5)$ y $R(-\ 1,\ \ -\ 2,\ 5)$.

a) Calcule el área del triángulo PQR.

b) Determine la ecuación general (o implícita) del plano que contiene al triángulo PQR.

c) Calcule la ecuación (en cualquiera de sus formas) de la recta que pasa por P, está contenida en el plano que contiene al triángulo PQR y es perpendicular al lado QR.

----

a)

Los puntos P, Q y R determinan los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{PQ} = [Q\ -\ P] = [(1,\ 2,\ 5) - (2,\ 7,\ 3)] = (-\ 1,\ \ -\ 5,\ 2).$$

$$\overrightarrow{PR} = [R\ -\ P] = [(-\ 1,\ \ -\ 2,\ 5) - (2,\ 7,\ 3)] = (-\ 3,\ \ -\ 9,\ 2).$$

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan los puntos:

$$S_{PQR} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{vmatrix} i & j & k \\ -\ 1 & -\ 5 & 2 \\ -\ 3 & -\ 9 & 2 \end{vmatrix}\right\| =$$

$$= |-\ 10i\ -\ 6j\ +\ 9k\ -\ 15k\ +\ 18i\ +\ 2j| = |8i\ -\ 4j\ -\ 6k| = 2\cdot|4i\ -\ 2j\ -\ 3k| =$$

$$= 2\cdot\sqrt{4^2 + (-\ 2)^2 + (-\ 3)^2} = 2\cdot\sqrt{16\ +\ 4\ +\ 9} \Rightarrow \underline{S_{PQR}\ =\ 2\cdot\sqrt{29}\,u^2}.$$

b)

$$\pi\left(P;\ \overrightarrow{PQ},\ \overrightarrow{PR}\right) \equiv \begin{vmatrix} x\ -\ 2 & y\ -\ 7 & z\ -\ 3 \\ -\ 1 & -\ 5 & 2 \\ -\ 3 & -\ 9 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-\ 10(x\ -\ 2) -\ 6(y\ -\ 7) + 9(z\ -\ 3) -\ 15(z\ -\ 3) +\ 18(x\ -\ 2) +\ 2(y\ -\ 7) =\ 0;$$

$$8(x\ -\ 2) -\ 4(y\ -\ 7) -\ 6(z\ -\ 3) =\ 0;\ \ 4(x\ -\ 2) -\ 2(y\ -\ 7) -\ 3(z\ -\ 3) =\ 0;$$

$$4x\ -\ 8\ -\ 2y\ +\ 14\ -\ 3z\ +\ 9\ =\ 0.$$

$$\underline{\pi \equiv 4x\ -\ 2y\ -\ 3z\ +\ 15\ =\ 0}.$$

c)

Los puntos R y Q determinan el vector:

$$\overrightarrow{RQ} = [Q\ -\ R] = [(1,\ 2,\ 5) - (-\ 1,\ \ -\ 2,\ 5)] = (2,\ 4,\ 0).$$

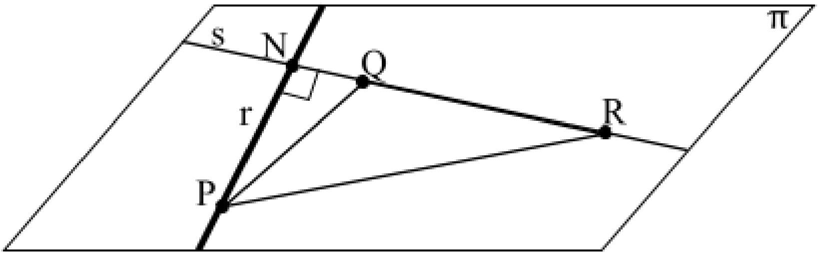
La recta s que pasa por los puntos R y Q tiene la siguiente expresión dada por unas ecuaciones paramétricas: $s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 5 \end{cases}$.

El haz de planos β que contiene a la recta s que pasa por los puntos Q y R tiene la siguiente expresión general: $\beta \equiv x - 2y + D = 0$.

De los infinitos planos del haz β, el plano γ que contiene al punto $P(2, 7, 3)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \beta \equiv x - 2y + D = 0 \\ P(2, 7, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow 2 - 2 \cdot 7 + D = 0;\ 2 - 14 + D = 0;\ -$$

$$\Rightarrow D = 14 \Rightarrow \gamma \equiv x - 2y + 14 = 0.$$



El punto N es la intersección de la recta s con el plano γ:

$$\left. \begin{array}{l} \gamma \equiv x - 2y + 14 = 0 \\ s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 5 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow (1 + \lambda) - 2(2$$

$$1 + \lambda - 4 - 4\lambda + 14 = 0;\ \ 9 - 3\lambda = 0;\ \ 3 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 3.$$

$$N \Rightarrow \left. \begin{cases} x = 1 + 3 \\ y = 2 + 2 \cdot 3 \\ z = 5 \end{cases} \right\} \Rightarrow N(4, 8, 5).$$

La recta r pedida es la que pasa por los puntos $P(2, 7, 3)$ y $N(4, 8, 5)$:

$$\overrightarrow{PN} = [N - P] = [(4, 8, 5) - (2, 7, 3)] = (2, 1, 2).$$

$$\underline{r \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 7 + \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}}.$$

****

3º) Calcule los siguientes límites: $a)\ \frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}$. $b)\ \frac{sen\,(1-sen\,x)}{cos^2 x}$.

$a)$

$$\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x} = \frac{\sqrt{4+0}-\sqrt{4-0}}{4\cdot 0} = \frac{\sqrt{4}-\sqrt{4}}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}\right)\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}{4x\cdot\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)} = \frac{\left(\sqrt{4+x}\right)^2-\left(\sqrt{4-x}\right)^2}{4x\cdot\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)} = \frac{4+x-(4-x)}{4x\cdot\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)} =$$

$$= \frac{4+x-4+x}{4x\cdot\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)} = \frac{2x}{4x\cdot\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)} = \frac{1}{2\cdot\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)} = \frac{1}{2\cdot\left(\sqrt{4+0}+\sqrt{4-0}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2\cdot(2+2)} = \frac{1}{8}.$$

$$\underline{\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x} = \frac{1}{8}}.$$

$b)$

$$\frac{sen\,(1-sen\,x)}{cos^2 x} = \frac{sen\left(1-sen\,\frac{\pi}{2}\right)}{cos^2\frac{\pi}{2}} = \frac{sen\,(1-1)}{0^2} = \frac{sen\,0}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-\mathrm{coscos}\,x\cdot cos\,(1-sen\,x)}{-2\cdot sen\,x\cdot \mathrm{coscos}\,x} = \frac{cos\,(1-sen\,x)}{2\cdot sen\,x} = \frac{cos\left(1-sen\,\frac{\pi}{2}\right)}{2\cdot sen\,\frac{\pi}{2}} = \frac{cos\,(1-1)}{2\cdot 1} = \frac{\mathrm{coscos}\,0}{2} = \frac{1}{2}$$

.

$$\underline{\frac{sen\,(1-sen\,x)}{cos^2 x} = \frac{1}{2}}.$$

****

4º) a) Calcule la siguiente integral indefinida $I = \int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} \cdot dx$.

b) Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$, y la gráfica de la función $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$.

----

a)

$$I = \int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ x^2 + x + 1 = t \; (2x + 1) \cdot dx = dt \right\} \Rightarrow \int \frac{1}{t^2} \cdot dt = \int t^{-2} \cdot dt$$

$$= \frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{t} + C.$$

$$\underline{I = \int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} \cdot dx = -\frac{1}{x^2+x+1} + C.}$$

b)

En el intervalo $(0, 2)$ todas las ordenadas de la función $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$ son positivas, por lo cual, la superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} dx \Rightarrow \{ x = 2 \to t = 7 \; x = 0 \to t = 1 \} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^7 \frac{1}{t^2} \cdot dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_1^7 = \left[\frac{1}{t} \right]_7^1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{7} = \frac{7-1}{7} = \frac{6}{7}.$$

$$\underline{S = \frac{6}{7} u^2.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Considere el sistema de ecuaciones $\{x + 3y + z = 5\ ax + 2z = 0 \quad ay - z = a$ en función del parámetro a:

a) Determine para qué valores del parámetro a el sistema tiene solución única. Calcule dicha solución para $a = 1$.

b) Determine para qué valor del parámetro a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) Determine para qué valor del parámetro a el sistema no tiene solución.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A = (1\ 3\ 1\ a\ 0\ 2\ 0\ a\ -1)$ y $A' = (1\ 3\ 1\ a\ 0\ 2\ 0\ a\ -1\quad 5\ 0\ a)$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$|A| = |1\ 3\ 1\ a\ 0\ 2\ 0\ a\ -1| = a^2 - 2a + 3a = 0;\ a^2 + a = 0;\ a(a + 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 = 0,\ a_2 = -1.$ Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$Para\ \{a \neq 0\ a \neq -1\} \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.$

$\underline{El\ sistema\ tiene\ solución\ única\ \forall a \in R - \{0, -1\}}.$

Para $a = 1$ el sistema resulta $\{x + 3y + z = 5\ x + 2z = 0 \quad y - z = 1$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$x = \frac{|5\ 3\ 1\ 0\ 0\ 2\ 1\ 1\ -1|}{1^2+1} = \frac{2 \cdot |5\ 3\ 1\ 1|}{2} = 5 - 3 = 2.$

$y = \frac{|1\ 5\ 1\ 1\ 0\ 2\ 0\ 1\ -1|}{2} = \frac{1-2+5}{2} = \frac{4}{2} = 2.$

$z = \frac{|1\ 3\ 5\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1|}{2} = \frac{-|3\ 5\ 1\ 1|}{2} = \frac{-(3-5)}{2} = \frac{2}{2} = 1.$

$\underline{Para\ a = 1\ la\ solución\ del\ sistema\ es: x = 2,\ y = 2,\ z = 1}.$

b)

$Para\ a\ =\ 0\ es\ A^{'}\ =\ (1\ 3\ 1\ 0\ 0\ 2\ 0\ 0\ \ -\ 1\ \ \ 5\ 0\ 0\ )\Rightarrow\left\{F_{2}\ =-\ 2F_{3}\right\}\Rightarrow\ Rang\ A^{'}\ =\ 2$
.

$$Para\ a\ =\ 0\Rightarrow Rang\ A\ =\ Rang\ A^{'}\ =\ 2\ <\ nº\ incóg.\Rightarrow S.\ C.\ I.$$

$$\underline{El\ sistema\ tiene\ infinitas\ soluciones\ para\ a\ =\ 0}.$$

Para $a\ =\ 0$ el sistema es $\{x\ +\ 3y\ +\ z\ =\ 5\ 2z\ =\ 0\ \ \ \ \ \ \ z\ =\ 0$, equivalente a $\{x\ +\ 3y\ +\ z\ =\ 5\ z\ =\ 0$, que es compatible indeterminado, cuyas soluciones son, haciendo $y\ =\ \lambda$:

$$\underline{Para\ a\ =\ 0\ las\ soluciones\ del\ sistema\ son: x\ =\ 5\ -\ 3\lambda,\ y\ =\ \lambda,\ z\ =\ 0,\ \forall\lambda\in R}.$$

$c)$

$Para\ a\ =-\ 1\ es\ A^{'}\ =\ (1\ 3\ 1\ \ -\ 1\ 0\ 2\ 0\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ \ \ 5\ 0\ \ -\ 1\ )\Rightarrow Rang\ A^{'}\ \Rightarrow\left\{C_{1},\ C_{2},\right.$

$\Rightarrow\ |1\ 3\ 5\ \ -\ 1\ 0\ 0\ 0\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ |\ =\ |3\ 5\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ |\ =-\ 3\ +\ 5\ =\ 2\neq 0\Rightarrow Rang\ A^{'}\ =\ 3$
.

$$Para\ a\ =-\ 1\Rightarrow Rang\ A\ =\ 2,\ Rang\ A^{'}\ =\ 3\Rightarrow Sistema\ incompatible.$$

$$\underline{El\ sistema\ no\ tiene\ solución\ para\ a\ =\ 0}.$$

****

2º) Considere los puntos $P(1,\ 0,\ 0)$, $Q(0,\ 2,\ 0)$ y $R(0,\ 0,\ 1)$.

a) Estudie si el triángulo PQR es o no rectángulo en el vértice P.

b) Dado el punto $S(1,\ 2,\ 3)$, calcule el volumen del tetraedro de vértices P, Q, R y S.

----

a)

Los puntos P, Q y R determinan los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{PQ} = [Q\ -\ P] = [(0,\ 2,\ 0) - (1,\ 0,\ 0)] = (-\ 1,\ 2,\ 0).$$

$$\overrightarrow{PR} = [R\ -\ P] = [(0,\ 0,\ 1) - (1,\ 0,\ 0)] = (-\ 1,\ 0,\ 1).$$

El triángulo de vértices PQR es rectángulo en P cuando los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ sean perpendiculares, es decir, que su producto escalar sea cero:

$$\overrightarrow{PQ}\cdot \overrightarrow{PR} = (-\ 1,\ 2,\ 0)\cdot(-\ 1,\ 0,\ 1) = 1\ +\ 0\ +\ 0\ =\ 1 \neq 0.$$

$$\underline{El\ triángulo\ PQR\ no\ es\ rectángulo\ en\ P}.$$

b)

$$\overrightarrow{PS} = [S\ -\ P] = [(1,\ 2,\ 3) - (1,\ 0,\ 0)] = (0,\ 2,\ 3).$$

El volumen de un tetraedro es un sexto del producto mixto de los tres vectores que lo determinan:

$$V_{OABC} = \frac{1}{6}\cdot\left|\overrightarrow{PQ},\ \overrightarrow{PR},\ \overrightarrow{PS}\right| = \frac{1}{6}\cdot|-\ 1\ 2\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 1\ 0\ 2\ 3\ | = \frac{1}{6}\cdot(2\ +\ 6) = \frac{8}{6}.$$

$$\underline{V_{OABC} = \frac{4}{3}\ u^2}.$$

****

3º) El número de personas, medido en miles, afectadas por una enfermedad infecciosa viene dado por la función $f(x) = \frac{90x}{x^2+2x+9}$, donde x es el tiempo transcurrido, medido en días, desde que se inició el contagio.

a) ¿Cuál es el número de personas enfermas el cuarto día?

b) ¿Qué día se alcanza el máximo número de personas enfermas? ¿Cuál es ese número máximo?

c) ¿Puede afirmarse que la enfermedad se irá erradicando con el paso del tiempo? Razone la respuesta. (Indicación: calcule el límite de $f(x)$ cuando $x \to +\infty$ y observe qué ocurre.)

----

a)

$$f(4) = \frac{90 \cdot 4}{4^2+2 \cdot 4+9} = \frac{360}{16+8+9} = \frac{360}{33} = \frac{120}{11} = 10'909090 \cdots$$

$$\underline{El\ número\ de\ personas\ enfermas\ el\ cuarto\ día\ fue\ de\ 10.909}.$$

b)

$$f'(x) = \frac{90 \cdot (x^2+2x+9) - 90x \cdot (2x+2)}{(x^2+2x+9)^2} = 90 \cdot \frac{x^2+2x+9-2x^2-2x}{(x^2+2x+9)^2} = 90 \cdot \frac{9-x^2}{(x^2+2x+9)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 90 \cdot \frac{9-x^2}{(x^2+2x+9)^2} = 0 \Rightarrow 9 - x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 3,\ x_2 = -3.$$

La solución $x = -3$ carece de sentido lógico.

$$f''(x) = 90 \cdot \frac{-2x \cdot (x^2+2x+9)^2 - (9-x^2) \cdot [2 \cdot (x^2+2x+9) \cdot (2x+2)]}{(x^2+2x+9)^4} =$$

$$= 90 \cdot \frac{-2x \cdot (x^2+2x+9) - 4(9-x^2)(x+1)}{(x^2+2x+9)^4} = -180 \cdot \frac{x \cdot (x^2+2x+9) + 2(9x+9-x^3-x^2)}{(x^2+2x+9)^3} =$$

$$= -180 \cdot \frac{x^3+2x^2+9x+18x+18-2x^3-2x^2}{(x^2+2x+9)^3} = -180 \cdot \frac{-x^3+27x+18}{(x^2+2x+9)^3}.$$

$$f''(3) = -180 \cdot \frac{-3^3+27 \cdot 3+18}{(3^2+2 \cdot 3+9)^3} < 0 \Rightarrow \text{Máximo, como cabía esperar.}$$

$$\underline{El\ máximo\ número\ de\ personas\ enfermas\ se\ produce\ el\ tercer\ día}.$$

$$f(3) = \frac{90 \cdot 3}{3^2+2 \cdot 3+9} = \frac{360}{9+6+9} = \frac{360}{24} = \frac{90}{6} = 15.$$

$\underline{El\ máximo\ número\ de\ personas\ enfermas\ fue\ de\ 15.000}.$

$c)$

$$f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{90x}{x^2+2x+9} = 0.$$

$\underline{Con\ el\ paso\ del\ tiempo\ se\ erradica\ la\ enfermedad}.$

****

4º) a) Calcule la siguiente integral indefinida: $I = \int x^2 \cdot e^x \cdot dx$.

b) Obtenga una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = x^2 \cdot e^x$ que cumpla la condición $F(0) = 1$.

----

a)

$$I = \int x^2 \cdot e^x \cdot dx \Rightarrow \left\{ u = x^2 \rightarrow du = 2x \cdot dx \quad e^x \cdot dx = dv \rightarrow v = e^x \right\} \Rightarrow x^2 \cdot e^x - \int e^x \cdot 2x \cdot$$

$$= x^2 \cdot e^x - 2 \cdot \int x \cdot e^x \cdot dx = x^2 \cdot e^x - 2 \cdot A. \qquad (*)$$

$$A = \int x \cdot e^x \cdot dx \Rightarrow \left\{ u = x \rightarrow du = dx \quad e^x \cdot dx = dv \rightarrow v = e^x \right\} \Rightarrow x \cdot e^x - \int e^x \cdot dx =$$

$$= x \cdot e^x - e^x + C = e^x (x - 1) + C.$$

Sustituyendo en (*) el valor de A:

$$I = x^2 \cdot e^x - 2 \cdot e^x (x - 1) + C = e^x \left(x^2 - 2x + 2 \right) + C.$$

$$\underline{I = \int x^2 \cdot e^x \cdot dx = e^x \left(x^2 - 2x + 2 \right) + C.}$$

b)

$$F(x) = \int f(x) \cdot dx = \int x^2 \cdot e^x \cdot dx = e^x \left(x^2 - 2x + 2 \right) + C.$$

$$F(0) = 1 \Rightarrow e^0 (0 - 0 + 2) + C = 1; \;\; 2 + C = 1 \Rightarrow C = -1.$$

$$\underline{F(x) = e^x \left(x^2 - 2x + 2 \right) - 1}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

SEPTIEMBRE – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas. No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

OPCIÓN A

1º) Considere la siguiente matriz $A = (sen\,\alpha\ \cos cos\,\alpha\ 0\ \cos cos\,\alpha\ - sen\,\alpha\,0\,0\,0\,1\,)$.

a) Calcule el determinante de A.

b) Calcule las potencias sucesivas $A^2,\ A^3,\ A^4\ y\ A^5$. Calcule A^{2016}.

----

a)

$$|A| = |sen\,\alpha\ \cos cos\,\alpha\ 0\ \cos cos\,\alpha\ - sen\,\alpha\,0\,0\,0\,1\,| = - sen^2 x - cos^2 x = - 1.$$

$$\underline{|A| = - 1}.$$

b)

$$A^2 = A \cdot A = (sen\,\alpha\ \cos cos\,\alpha\ 0\ \cos cos\,\alpha\ - sen\,\alpha\,0\,0\,0\,1\,) \cdot (sen\,\alpha\ \cos cos\,\alpha\ 0\ c$$

$$= \Big(sen^2 x + cos^2 x\ \cos cos\,x \cdot sen\,x - sen\,x \cdot \cos cos\,x\ 0\ \cos cos\,x \cdot sen\,x - sen\,x \cdot \cos c$$

$$\Rightarrow \underline{A^2 = (1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,) = I}.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = I \cdot A = A \Rightarrow \underline{A^3 = A}.$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = A^2 = I \Rightarrow \underline{A^4 = I}.$$

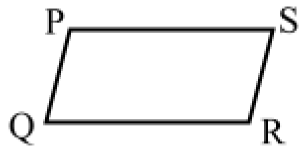
$A^5 = A^4 \cdot A = I \cdot A = I \Rightarrow \underline{A^5 = I}.$

En general A^n es igual que A o I, según que n sea impar o par, respectivamente.

$$\underline{A^{2016} \rightarrow n\ par \Rightarrow A^{2016} = I}.$$

****

2º) Los puntos $P(1,\ 1,\ 1)$, $Q(2,\ 2,\ 2)$ y $R(1,\ 3,\ 3)$ son tres vértices consecutivos del siguiente paralelogramo:



$a)$ Calcule el área del paralelogramo.

$b)$ Determine el cuarto vértice del paralelogramo.

$a)$

Los puntos P, Q y R determinan los siguientes vectores:

$\overrightarrow{PQ} = [Q - P] = [(2,\ 2,\ 2) - (1,\ 1,\ 1)] = (1,\ 1,\ 1).$

$\overrightarrow{PR} = [R - P] = [(1,\ 3,\ 3) - (1,\ 1,\ 1)] = (0,\ 2,\ 2).$

El área del paralelogramo que determinan dos vectores linealmente independientes es el módulo de su producto vectorial:

$$S_{PQRS} = \left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right| = \left|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}\right| = |2i + 2k - 2i - 2j| = |2j - 2k| =$$

$$= 2\cdot|j - k| = 2\cdot\sqrt{1^2 + (-1)^2} = 2\cdot\sqrt{1 + 1} = 2\sqrt{2}.$$

$$\underline{S_{PQRS} = 2\sqrt{2}\, u^2}.$$

$b)$

Siendo $S(x,\ y,\ z)$ tiene que ser $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$:

$(1,\ 1,\ 1) = [R - S] = [(1,\ 3,\ 3) - (x,\ y,\ z)] = (1 - x,\ 3 - y,\ 3 - z) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = 1 - x \rightarrow x = 0 \\ 1 = 3 - y \rightarrow y = 2 \\ 1 = 3 - z \rightarrow z = 2 \end{cases} \Rightarrow \underline{S(0,\ 2,\ 2)}.$$

****

3º) Dada la función $f(x) = e^{\frac{2x}{1+x^2}}$, se pide

a) Estudie las asíntotas de la gráfica de $f(x)$.

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos de la función.

----

a)

Asíntotas verticales: son los valores finitos que hacen que la función valga más infinito o menos infinito.

$$e^{\frac{2x}{1+x^2}} \text{ es finito } \forall x \in R \Rightarrow \underline{f(x) \text{ no tiene asíntotas verticales}}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$, siendo k los valores finitos que toma la función cuando x tiende a más infinito o menos infinito:

$$k = f(x) = e^{\frac{2x}{1+x^2}} = e^0 = 1.$$

$$\underline{La\ recta\ y = 1\ es\ asíntota\ horizontal\ en\ \pm\infty\ de\ la\ función.}$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

b)

Una función es creciente o decreciente en un punto cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{2\cdot(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}\cdot e^{\frac{2x}{1+x^2}} = \frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2}\cdot e^{\frac{2x}{1+x^2}} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}\cdot e^{\frac{2x}{1+x^2}}.$$

Por ser $\left(1+x^2\right)^2 > 0,\ \forall x \in R$ y $e^{\frac{2x}{1+x^2}} > 0,\ \forall x \in R$, $f'(x)$ es positiva o negativa cuando lo sea la expresión $2 - 2x^2$:

$$2 - 2x^2 = 2\left(1 - x^2\right) = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1.$$

Teniendo en cuenta que $f(x)$ es continua en su dominio, que es R, las raíces de la primera derivada dividen su dominio en tres intervalos alternativos de crecimiento y decrecimiento. Para determinar los intervalos que son crecientes o decrecientes se estudia un punto de uno de ellos, por ejemplo $x = 0$:

$$f'(0) = \frac{2-0}{(1+0)^2}\cdot e^{\frac{0}{1+0}} = 2\cdot 1 = 2 > 0 \rightarrow Creciente.$$

Los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento\text{: } f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-1, 1)}.$$

$$\underline{Decrecimiento\text{: } f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)}.$$

Una función tiene un máximo o un mínimo relativo para los valores de x que anulan la primera derivada; para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera derivada se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo relativo.

No obstante lo anterior y debido a la complejidad de la segunda derivada, se deducen los máximos y mínimos por los periodos de crecimiento y decrecimiento.

$Mínimo\ relativo\ para\ x = -1\ y\ máximo\ relativo\ para\ x = 1.$

$$f(-1) = e^{\frac{-2}{1+1}} = e^{-1} = \frac{1}{e} \Rightarrow \underline{Mínimo\ obsoluto\text{: } A\left(-1, \frac{1}{e}\right)}.$$

$$f(1) = e^{\frac{2}{1+1}} = e^{1} = e \Rightarrow \underline{Máximo\ obsoluto\text{: } B(1, e)}.$$

****

4º) $a)$ Calcule la siguiente integral indefinida $I = \int \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2} \cdot dx$.

$b)$ Determine el valor de $a > 0$ para que $\int_0^a \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2} \cdot dx = \frac{1}{4}$.

$a)$

$$I = \int \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ e^x = t \quad e^x \cdot dx = dt \quad dx = \frac{dt}{t} \right\} \Rightarrow \int \frac{t}{(1+t)^2} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{1}{(1+t)^2} \cdot dt =$$

$$= \int (1+t)^{-2} \cdot dt = \frac{(1+t)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{1+t} + C.$$

$$\underline{I = \int \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2} \cdot dx = -\frac{1}{1+e^x} + C.}$$

$b)$

Teniendo en cuenta la solución del apartado anterior:

$$\int_0^a \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2} \cdot dx = \frac{1}{4} \Rightarrow \left[-\frac{1}{1+e^x} \right]_0^a = \frac{1}{4}; \quad \left[\frac{1}{1+e^x} \right]_a^0 = \frac{1}{4}; \quad \frac{1}{1+e^0} - \frac{1}{1+e^a} = \frac{1}{4};$$

$$\frac{1}{1+1} - \frac{1}{1+e^a} = \frac{1}{4}; \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^a} = \frac{1}{4}; \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{1+e^a}; \quad \frac{1}{4} = \frac{1}{1+e^a} \Rightarrow 4 = 1 + e^a; \quad e^a = 3$$

$$\underline{a = L3}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Sabiendo que $|x\ y\ z\ 1\ 0\ 1\ 2\ 4\ 6\ | = 2$, calcule razonadamente los siguientes determinantes:

$a)\ |3\ 0\ 1\ 3x\ 2y\ z\ 6\ 8\ 6\ |$. $b)\ |2\ +\ x\ 4\ +\ y\ 6\ +\ z\ 3x\ -\ 1\ 3y\ 3z\ -\ 1\ 1\ 0\ 1\ |$.

$a)$

$|3\ 0\ 1\ 3x\ 2y\ z\ 6\ 8\ 6\ | = 3 \cdot 2 \cdot |1\ 0\ 1\ x\ y\ z\ 2\ 4\ 6\ | = -\ 6 \cdot |x\ y\ z\ 1\ 0\ 1\ 2\ 4\ 6\ | = -\ 6 \cdot 2 = \underline{-\ 12}$
.

$b)$

$|2\ +\ x\ 4\ +\ y\ 6\ +\ z\ 3x\ -\ 1\ 3y\ 3z\ -\ 1\ 1\ 0\ 1\ | = |2\ +\ x\ 4\ +\ y\ 6\ +\ z\ 3x\ -\ 1\ 3y\ +$

$= |2\ 4\ 6\ 3x\ 3y\ 3z\ 1\ 0\ 1\ | + |x\ y\ z\ \ -\ 1\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 0\ 0\ | = 3 \cdot |2\ 4\ 6\ x\ y\ z\ 1\ 0\ 1\ | = 3 \cdot 2 = \underline{6}$
.

En la realización de los dos apartados del ejercicio se han utilizado las siguientes propiedades de los determinantes:

1ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se descomponen en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en dicha línea el primero y el segundo sumandos, respectivamente, siendo los restantes elementos iguales a los del determinante inicial.

2ª.- Si un determinante tiene dos líneas paralelas iguales o proporcionales su valor es cero.

3ª.- Si se intercambian dos líneas de un determinante su valor cambia de signo.

4ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se multiplican o dividen por un número su valor queda multiplicado o dividido por dicho número.

5ª.- Si se rotan las líneas de un determinante no cambia su valor

****

2º) Considere el plano π que pasa por el punto $P(2,\ 0,\ 1)$ y tiene como vectores directores a los vectores $\vec{v} = (1,\ 0,\ 2)$ y $\vec{w} = (0,\ 1,\ -2)$. Considere la recta r dada por la expresión $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1}$.

$a)$ Estudie la posición relativa de π y r.

$b)$ Calcule la ecuación de la recta s que pasa por el punto $Q(-1,\ 0,\ -2)$, es paralela a π y perpendicular a r.

$a)$

La expresión general del plano π es la siguiente:

$$\pi\left(P;\ \vec{v},\ \vec{w}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0;\ \ (z-1) - 2(x-2) + 2y = 0;$$

$$z - 1 - 2x + 4 + 2y \Rightarrow \pi \equiv 2x - 2y - z - 3 = 0.$$

La expresión de $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1}$ por unas ecuaciones implícitas es la siguiente:

$r \equiv \begin{cases} 3x = 2y + 2 \\ x = 2z \end{cases}$ o mejor: $r \equiv \begin{cases} 3x - 2y - 2 = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$.

La recta r y el plano π determinan el sistema $\left. \begin{array}{l} 3x - 2y = 2 \\ x - 2z = 0 \\ 2x - 2y - z = 3 \end{array} \right\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Según sean los rangos de M y M' pueden presentarse los siguientes casos:

1. -- Rango M = Rango M' = 2 ⇛ La recta está contenida en el plano.

2. -- Rango M =2, Rango M' = 3 ⇛ La recta es paralela al plano.

3. -- Rango M = Rango M' = 3 ⇛ La recta es secante al plano.

$$Rang\ M \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 8 - 12 - 2 = -6 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M = 3.$$

$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ secantes}.$

$b)$

El vector director de s, por ser paralela al plano π, es perpendicular a su vector normal, que es $\vec{n} = (2,\ -2,\ -1)$.

También, el vector director de s, por ser perpendicular a r, tiene que ser perpendicular a su vector director, que es $\vec{v}_r = (2,\ 3,\ 1)$.

Un vector perpendicular a dos vectores dados es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de estos dos vectores:

$$\vec{v}_s = \left(\vec{n} \wedge \vec{v}_r\right) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2i - 2j + 6k + 4k + 3i - 2j =$$

$$= i - 4j + 10k \Rightarrow \vec{v}_s = (1,\ -4,\ 10).$$

La expresión de s dada, por ejemplo, por unas ecuaciones paramétricas es:

$$\underline{s \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = -4\lambda \\ z = -2 + 10\lambda \end{cases}}.$$

****

3º) Considere la función dada por $f(x) = \{a + L(1 - x) \; si \; x < 0 \quad x^2 \cdot e^{-x} \; si \; x \geq 0$:

a) Calcule $f(x)$ y $f(x)$.

b) Determine el valor de a para que la función sea continua en todo R.

----

a)

$$f(x) = [a + L(1 - x)] = L\infty = \underline{+\infty}.$$

$$f(x) = \left(x^2 \cdot e^{-x}\right) = \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = \underline{0}.$$

b)

La función $f(x)$ es continua en $R \forall a \in R$. Se trata de determinar los valores de a para que sea derivable en su punto crítico $x = 0$.

Para que la función sea continua en un punto es necesario que sus límites laterales en ese punto sean iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$f(x) = [a + L(1 - x)] = a + 0 = a \; f(x) = \frac{x^2}{e^x} = \frac{0}{1} = f(0) = 0 \qquad \} \Rightarrow$$

.

$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ x = 0\ para\ a = 0}.$

****

4º) $a)$ Calcule la siguiente integral indefinida: $I = \int \frac{x^3+x+1}{x^2+1} \cdot dx$.

$b)$ Obtenga una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = \frac{x^3+x+1}{x^2+1}$ que cumpla la condición $F(0) = 2$.

$a)$

$$I = \int \frac{x^3+x+1}{x^2+1} \cdot dx = \int \left(\frac{x^3+x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \right) \cdot dx = \int \left(x + \frac{1}{x^2+1} \right) \cdot dx =$$

$$= \int x \cdot dx + \int \frac{1}{x^2+1} \cdot dx = \frac{x^2}{2} + arc\ tag\ x + C.$$

$$\underline{I = \int \frac{x^3+x+1}{x^2+1} \cdot dx = \frac{x^2}{2} + arc\ tag\ x + C.}$$

$b)$

Teniendo en cuenta la solución del apartado anterior:

$$F(x) = \int \frac{x^3+x+1}{x^2+1} \cdot dx = \frac{x^2}{2} + arc\ tag\ x + C.$$

$$F(0) = 2 \Rightarrow 0 + arc\ tag\ 0 + C = 2; \;\; 0 + C = 2 \Rightarrow C = 2.$$

$$\underline{F(x) = \frac{x^2}{2} + arc\ tag\ x + 2.}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE NAVARRA

JULIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B).

OPCIÓN A

1º) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro a y resuélvelo en los casos en que es compatible: $\{2y + z = 1 \quad (a - 1)x + (a + 2)y + z = 0 \; \left(a^2 - a\right)x - ay = a +$
.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$M = \left(0\ 2\ 1\ a - 1\ a + 2\ 1\ a^2 - a\ - a\ 0\right)$ y $M' = \left(0\ 2\ 1\ a - 1\ a + 2\ 1\ a^2 - a\ - a\ 0 \quad 1\ 0\ a + 2\right)$.

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$|M| = \left|0\ 2\ 1\ a - 1\ a + 2\ 1\ a^2 - a\ - a\ 0\right| = 2\left(a^2 - a\right) - a(a - 1) - (a + 2)\left(a^2 - a\right.$

$= a(a - 1)(2 - a - 2) - a(a - 1) = - a^2(a - 1) - a(a - 1) =$

$= - a(a - 1)(a + 1) = 0 \Rightarrow a_1 = - 1,\ a_2 = 0,\ a_3 = 1.$

$\underline{Para\ \{a \neq - 1\ a \neq 0\ a \neq 1\} \Rightarrow Ran\ M = Ran\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

$Para\ a = - 1 \Rightarrow M' = (0\ 2\ 1\ - 2\ 1\ 1\ 2\ 1\ 0 \quad 1\ 0\ 1) \Rightarrow \left\{F_1 - F_2 = F_3\right\} \Rightarrow Rang\ M' =$
.

$\underline{Para\ a = - 1 \Rightarrow Ran\ M = Ran\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

$Para\ a\ =\ 0 \Rightarrow M^{'}\ =\ (0\ 2\ 1\ \ -\ 1\ 2\ 1\ 0\ 0\ 0\quad 1\ 0\ 2\ ) \Rightarrow Rang\ M^{'}\ \Rightarrow \left\{C_1,\ C_3,\ C_4\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |0\ 1\ 1\ \ -\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 2\ |\ =\ 2\cdot|0\ 1\ \ -\ 1\ 1\ |\ =\ 2\cdot 1\ =\ 2 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M^{'}\ =\ 3.$

$Para\ a\ =\ 1 \Rightarrow M^{'}\ =\ (0\ 2\ 1\ 0\ 3\ 1\ 0\ \ -\ 1\ 0\quad 1\ 0\ 3\ ) \Rightarrow Rang\ M^{'}\ \Rightarrow |2\ 1\ 1\ 3\ 1\ 0\ \ -\ 1\ 0$

$=\ 6\ +\ 1\ -\ 9\ =-\ 2 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M^{'}\ =\ 3.$

$\underline{Para\ \{a\ =\ 0\ a\ =\ 1\ \} \Rightarrow Ran\ M\ =\ 2;\ Ran\ M^{'}\ =\ 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

Se resuelve para $\{a \neq\ -\ 1,\ a \neq 0,\ a \neq 1\}$ por la regla de Cramer:

$$x\ =\ \frac{|1\ 2\ 1\ 0\ a+2\ 1\ a+2\ -a\ 0\ |}{\left|0\ 2\ 1\ a-1\ a+2\ 1\ a^2-a\ -a\ 0\ \right|}\ =\ \frac{2(a+2)-(a+2)^2+a}{-a(a-1)(a+1)}\ =\ \frac{2a+4-\left(a^2+4a+4\right)+a}{-a(a-1)(a+1)}\ =\ \frac{3a+4-a^2-4a-4}{-a(a-1)(a+1)}\ =$$

$$=\ \frac{-a^2-a}{-a(a-1)(a+1)}\ =\ \frac{-a(a+1)}{-a(a-1)(a+1)}\ =\ \frac{1}{a-1}.$$

$$y\ =\ \frac{\left|0\ 1\ 1\ a-1\ 0\ 1\ a^2-a\ a+2\ 0\ \right|}{-a(a-1)(a+1)}\ =\ \frac{(a-1)(a+2)+\left(a^2-a\right)}{-a(a-1)(a+1)}\ =\ \frac{a^2+2a-a-2+a^2-a}{-a(a-1)(a+1)}\ =\ \frac{2a^2-2}{-a(a-1)(a+1)}\ =$$

$$=\ \frac{2\left(a^2-1\right)}{-a(a-1)(a+1)}\ =\ \frac{2(a+1)(a-1)}{-a(a-1)(a+1)}\ =-\ \frac{2}{a}.$$

$$z\ =\ \frac{\left|0\ 2\ 1\ a-1\ a+2\ 0\ a^2-a\ -a\ a+2\ \right|}{-a(a-1)(a+1)}\ =\ \frac{-a(a-1)-(a+2)\left(a^2-a\right)-2(a-1)(a+2)}{-a(a-1)(a+1)}\ =$$

$$=\ \frac{-a^2+a-\left(a^3-a^2+2a^2-2a\right)-2\left(a^2+a-2\right)}{-a(a-1)(a+1)}\ =\ \frac{-a^2+a-a^3-a^2+2a-2a^2-2a+4}{-a(a-1)(a+1)}\ =\ \frac{-a^3-4a^2+a+4}{-a(a-1)(a+1)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow Descomponiendo\ por\ Ruffini:\ \ -\ a^3\ -\ 4a^2\ +\ a\ +\ 4\ =-\ (a\ -\ 1)(a\ +\ 1)(a\ +\ 4) \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ \frac{-(a-1)(a+1)(a+4)}{-a(a-1)(a+1)}\ =\ \frac{a+4}{a}.$$

$$\underline{Solución: x\ =\ \frac{1}{a-1}; y\ =-\ \frac{2}{a}; z\ =\ \frac{a+4}{a}\ .}$$

Se resuelve ahora el caso de compatible indeterminado:

Para $a\ =-\ 1$ el sistema es $\{2y\ +\ z\ =\ 1\qquad -\ 2x\ +\ y\ +\ z\ =\ 0\ 2x\ +\ y\ =\ 1$: que es compatible indeterminado; despreciando una de las ecuaciones (primera) y haciendo $x\ =\ \lambda$:

$$\left.\begin{array}{l} y + z = 2\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow z = -y + 2\lambda = -1 + 2\lambda + 2\lambda = -1 + 4\lambda.$$

$$\underline{Solución: \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = -1 + 4\lambda \end{array}\right., \forall\lambda \in R.}$$

****

2º) Dados los puntos $P(1,\ -2,\ 3)$ y $Q(3,\ 0,\ -1)$, encuentra el punto R que equidista de P y Q y está en la recta $r \equiv \frac{x-4}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{1}$.

La expresión de la r por unas ecuaciones paramétricas es: $r \equiv \{x = 4 + \lambda \quad y = -1 + 3\lambda \quad z = 3 + \lambda$.

Un punto genérico de la recta r es $R(4 + \lambda,\ -1 + 3\lambda,\ 3 + \lambda)$.

Tiene que cumplirse que $\overline{PR} = \overline{QR}$.

$$\overline{PR} = \sqrt{(4 + \lambda - 1)^2 + (-1 + 3\lambda + 2)^2 + (3 + \lambda - 3)^2} =$$

$$= \sqrt{(\lambda + 3)^2 + (3\lambda + 1)^2 + \lambda^2} = \sqrt{\lambda^2 + 6\lambda + 9 + 9\lambda^2 + 6\lambda + 1 + \lambda^2} =$$

$$= \sqrt{11\lambda^2 + 12\lambda + 10}.$$

$$\overline{QR} = \sqrt{(4 + \lambda - 3)^2 + (-1 + 3\lambda - 0)^2 + (3 + \lambda + 1)^2} =$$

$$= \sqrt{(\lambda + 1)^2 + (3\lambda - 1)^2 + (\lambda + 4)^2} =$$

$$= \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda + 1 + 9\lambda^2 - 6\lambda + 1 + \lambda^2 + 8\lambda + 16} = \sqrt{11\lambda^2 + 4\lambda + 18}.$$

$$\overline{PR} = \overline{QR} \Rightarrow \sqrt{11\lambda^2 + 12\lambda + 10} = \sqrt{11\lambda^2 + 4\lambda + 18};\ 12\lambda + 10 = 4\lambda + 18;$$

$$8\lambda = 8 \Rightarrow \lambda = 1.$$

$$R(4 + \lambda,\ -1 + 3\lambda,\ 3 + \lambda) \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \underline{R(5,\ 2,\ 4)}.$$

Otra forma de resolver este ejercicio es la siguiente:

El punto medio de los puntos $P(1,\ -2,\ 3)$ y $Q(3,\ 0,\ -1)$ es $M(2,\ -1,\ 1)$.

Los puntos P y Q determinan el vector $\overrightarrow{PQ} = [Q - P] = (2,\ 2,\ -4)$.

El plano π perpendicular al segmento $\overline{PQ}$ que pasa por M tiene la siguiente expresión general: $\pi \equiv x + y - 2z + D = 0$.

Por contener el plano π al punto $M(2, -1, 1)$ tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l}\pi \equiv x+y-2z+D=0 \\ M(2, -1, 1)\end{array}\right\} \Rightarrow 2-1-2\cdot 1+D=0;$$

.

$\pi \equiv x+y-2z+1=0.$

El punto R pedido es la intersección del plano π con la recta r:

$$\left.\begin{array}{l}\pi \equiv x+y-2z+1=0 \\ r \equiv \begin{cases} x=4+\lambda \\ y=-1+3\lambda \\ z=3+\lambda \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow (4+$$

$4+\lambda-1+3\lambda-6-2\lambda+1=0; \; -2+2\lambda=0 \; -1+\lambda=0 \Rightarrow \lambda=1.$

$$R \Rightarrow \left.\begin{cases} x=4+\lambda \\ y=-1+3\lambda \\ z=3+\lambda \end{cases}\right\} \Rightarrow \lambda=1 \Rightarrow \underline{R(5, 2, 4)}.$$

****

3º) Calcula las siguientes integrales indefinidas: $I_1 = \int \frac{x^3-2}{x+3} \cdot dx$ e $I_2 = \int \frac{2}{x^3-x} \cdot dx$.

$$
\begin{array}{llll|l}
x^3 & & & -2 & x+3 \\ \hline
-x^3 & -3x^2 & & & x^2-3x+9 \\ \hline
 & +3x^2 & & -2 & \\
 & +3x^2 & +9x & & \\ \hline
 & & +9x & -2 & \\
 & & -9x & -27 & \\ \hline
 & & & -29 &
\end{array}
$$

$$I_1 = \int \frac{x^3-2}{x+3} dx = \int \left(x^2 - 3x + 9 + \frac{-29}{x+3} \right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 9x - 29L|x+3| + C.$$

$$\underline{I_1 = \int \frac{x^3-2}{x+3} dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 9x - 29L|x+3| + C.}$$

$$I_2 = \int \frac{2}{x^3-x} \cdot dx = \int \frac{2}{x\left(x^2-1\right)} \cdot dx = \int \frac{2}{x(x+1)(x-1)} \cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1} = \frac{A(x+1)(x-1)+Bx(x-1)+Cx(x+1)}{x(x+1)(x-1)} =$$

$$= \frac{Ax^2-A+Bx^2-Bx+Cx^2+Cx}{x(x+1)(x-1)} = \frac{(A+B+C)x^2+(-B+C)x+(-A)}{x(x+1)(x-1)} \Rightarrow A+B+C=0 \quad -B+C=0$$

$$\Rightarrow \quad B+C=2 \quad -B+C=0 \,\} \Rightarrow 2C=2; \;\; C=1; \;\; B=1.$$

$$I_2 = \int \frac{2}{x^3-x} dx = \int \left(\frac{-2}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right) dx = -2L|x| + L|x+1| + L|x-1| + C =$$

$$= L\frac{\left|x^2-1\right|}{x^2} + C.$$

$$I_2 = \int \frac{2}{x^3 - x} dx = L\frac{|x^2 - 1|}{x^2} + C.$$

****

4º) Demuestra que existe $\alpha \in \left(1,\ \sqrt{2}\right)$, tal que $f'(\alpha) = 1$ siendo $f(x) = L\ sen\ \frac{\pi x^2}{4}$.

La derivada de la función es la siguiente:

$$f'(x) = \frac{\frac{\pi x}{2} \cdot cos\ \frac{\pi x^2}{4}}{sen\ \frac{\pi x^2}{4}} = \frac{\pi x}{2} \cdot cotg\ \frac{\pi x^2}{4}.$$

Teniendo en cuenta que $f'(x)$ es continua en R le es aplicable el teorema de los valores intermedios a cualquier intervalo finito que se considere.

El teorema de los valores intermedios dice que: "*si f es una función continua en el intervalo $[a,\ b]$, entonces para cada valor m tal que $f(a) < m < f(b)$, exista al menos un valor c perteneciente al intervalo $(a,\ b)$ tal que $f(c) = m$*".

$$f'(1) = \frac{\pi}{2} \cdot cotg\ \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \frac{\pi}{2} > 1.$$

$$f'\left(\sqrt{2}\right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} \cdot cotg\ \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} \cdot 0 = 0 < 1.$$

$\underline{Lo\ anterior\ demuestra\ que\ \exists a \in \left(1,\ \sqrt{2}\right)\ tal\ que\ f'(a) = 1.}$

****

OPCIÓN B

1º) Encuentra todas las matrices B que cumplen $AB = BA$, siendo $A = (1\ 1\ 1\ 2\ )$.

Sea la matriz $B = (m\ n\ p\ q\ )$.

$A \cdot B = (1\ 1\ 1\ 2\ ) \cdot (m\ n\ p\ q\ ) = (m + p\ n + q\ m + 2p\ n + 2q\ )$.

$B \cdot A = (m\ n\ p\ q\ ) \cdot (1\ 1\ 1\ 2\ ) = (m + n\ m + 2n\ p + q\ p + 2q\ )$.

$A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow (m + p\ n + q\ m + 2p\ n + 2q\ ) = (m + n\ m + 2n\ p + q\ p + 2q\ ) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{m + p = m + n\ m + 2p = p + q\ n + q = m + 2n\ n + 2q = p + 2q\ \} \Rightarrow \{n =$

.

Ejemplo, a modo de comprobación: $m = 0,\ n = 1 \Rightarrow B = (0\ 1\ 1\ 1\ )$:

$A \cdot B = (1\ 1\ 1\ 2\ ) \cdot (0\ 1\ 1\ 1\ ) = (1\ 2\ 2\ 3\ )\ B \cdot A = (0\ 1\ 1\ 1\ ) \cdot (1\ 1\ 1\ 2\ ) = (1\ 2\ 2\ 3\ )\ \} \Rightarrow \underline{A \cdot B =}$

****

2º) Encuentra la ecuación continua de la recta r que pasa por el punto $P(-3,\ -2,\ 4)$ y corta a las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 3x - y + z - 5 = 0 \end{cases}$ y $r_2 \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+3}{2}$.

La expresión de r_1 por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r_1 \equiv \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 3x - y + z - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow \quad 2x + y = \lambda \ \ 3x - y =$$

$$y = -2x + \lambda = -2 + \lambda \Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de r_1 son $A(1,\ -2,\ 0)$ y $\vec{v_1} = (0,\ 1,\ 1)$.

Los puntos A y P determinan el vector $\vec{PA} = [A - P] = (4,\ 0,\ -4)$.

El plano π_1 que contiene a r_1 y a P tiene la siguiente expresión general:

$$\pi_1\left(P;\ \vec{v_1},\ \vec{AP}\right) \equiv \begin{vmatrix} x+3 & y+2 & z-4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0;\ \ |x + 3\ y + 2\ z - 4\ 0\ 1\ 1\ 1$$

$$-(x+3) + (y+2) - (z-4) = 0;\ \ -x - 3 + y + 2 - z + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi_1 \equiv x - y + z - 3 = 0.$$

Un punto y un vector director de r_2 son $B(1,\ 1,\ -3)$ y $\vec{v_2} = (1,\ 0,\ 2)$.

Los puntos B y P determinan el vector $\vec{PB} = [B - P] = (4,\ 3,\ -7)$.

El plano π_2 que contiene a r_2 y a P tiene la siguiente expresión general:

$$\pi_2\left(P;\ \vec{v_2},\ \vec{BP}\right) \equiv \begin{vmatrix} x+3 & y+2 & z-4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 0;$$

$$8(y+2) + 3(z-4) - 6(x+3) + 7(y+2) = 0;$$

$$-6(x+3) + 15(y+2) + 3(z-4) = 0;\ \ 2(x+3) - 5(y+2) - (z-4) = 0;$$

$2x + 6 - 5y - 10 - z + 4 = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv 2x - 5y - z = 0.$

La recta pedida r es la que determinan los planos π_1 y π_2 al cortarse, que es la siguiente: $r \equiv \begin{cases} x - y + z - 3 = 0 \\ 2x - 5y - z = 0 \end{cases}$.

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$r \equiv \begin{cases} x - y + z - 3 = 0 \\ 2x - 5y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \lambda \Rightarrow \begin{cases} x + z = 3 + \lambda \\ 2x - z = 5\lambda \end{cases}$

$x = 1 + 2\lambda;\ \ z = 3 + \lambda - x = 3 + \lambda - 1 - 2\lambda = 2 - \lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \end{cases}$
.

La expresión de r dada por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$\underline{r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}}.$$

****

3º) Siendo $f(x)=\frac{\sqrt[4]{2^{x^2+3x+3}+3\cdot 2^{x+1}+4}}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$, demuestra que existe $\alpha\in(-\ 1,\ 1)$ tal que $f'(\alpha)=\frac{1}{2}$.

La función $f(x)$ es continua y derivable en su dominio, que es R, por cual le es aplicable el teorema del valor medio o de Lagrange, que dice que: “Si una función es continua en $[m,\ n]$ y derivable en $(m,\ n)$, entonces existe al menos un valor $a\in(m,\ n)$ que cumple lo siguiente: $f'(a)=\frac{f(m)-f(n)}{m-n}$.”

Aplicando el teorema de Lagrange a la función $f(x)$ en el intervalo $(-\ 1,\ 1)$:

$$f(-\ 1)=\frac{\sqrt[4]{2^1+3\cdot 2^0+4}}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{\sqrt[4]{2+3+4}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt[4]{9}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\ 1.$$

$$f(1)=\frac{\sqrt[4]{2^7+3\cdot 2^2+4}}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{\sqrt[4]{128+12+4}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt[4]{144}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}=\sqrt{4}=\ 2.$$

$$f'(a)=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{2-1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

$\underline{Lo\ anterior\ prueba\ que\ \exists a\in(-\ 1,\ 1)\ tal\ que\ f'(a)=\frac{1}{2}.}$

****

4º) Dadas las funciones $f(x) = x^3 - x$ y $g(x) = 2x^3 - 2x$, encuentra los tres puntos en que se cortan. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas curvas.

Las dos funciones son continuas y tienen ambas por dominio R.

Las abscisas de los puntos de corte de las dos funciones son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^3 - x = 2x^3 - 2x; \;\; x^3 - x = 0; \;\; x\left(x^2 - 1\right) = 0;$$

$$x(x - 1)(x + 1) = 0 \Rightarrow x_1 = -1, \; x_2 = 0, \; x_3 = 1.$$

Los puntos de corte son $A(-1, 0), \; O(0, 0) \; y \; B(1, 0)$.

Por ser $f(-x) = -f(x)$ y $g(-x) = -g(x)$, las dos funciones son simétricas con respecto al origen.

Teniendo en cuenta que: $\{ f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{2} = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} = \frac{1-4}{8} = -\frac{3}{8}$ $\quad g\left(\frac{1}{2}\right) = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{8} - 1 =$, es $f\left(\frac{1}{2}\right) > g\left(\frac{1}{2}\right)$.

Teniendo en cuenta lo anterior y la simetría de las funciones, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = 2\cdot\int_0^1 [f(x) - g(x)]\cdot dx = 2\cdot\int_0^1 \left[x^3 - x - \left(2x^3 - 2x\right)\right]\cdot dx =$$

$$= 2\cdot\int_0^1 \left(-x^3 + x\right)\cdot dx = 2\cdot\left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 2\cdot\left[\left(-\frac{1^4}{4} + \frac{1^2}{2}\right) - 0\right] = 2\cdot\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

$$\underline{S = \frac{1}{2}\, u^2.}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE NAVARRA

JUNIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B).

OPCIÓN A

1º) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro a y resuélvelo en los casos en que sea compatible: $\{x + 2y + 2z = 1 \quad x + (a + 1)y - z = 1 \quad - 2x - (2a$
.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A = \left(1\ 2\ 2\ 1\ a + 1\ \ - 1\ \ - 2\ \ - 2a - 2\ a^2 - 2\right)$ y $A' = \left(1\ 2\ 2\ 1\ a + 1\ \ - 1\ \ - 2\ \ - 2a - 2\ a^2 - 2\ \ 1\ 1\ a\right)$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$|A| = \left|1\ 2\ 2\ 1\ a + 1\ \ - 1\ \ - 2\ \ - 2a - 2\ a^2 - 2\right| =$

$= (a + 1)\left(a^2 - 2\right) + 2(- 2a - 2) + 4 + 4(a + 1) + (- 2a - 2) - 2\left(a^2 - 2\right) =$

$= a^3 - 2a + a^2 - 2 - 4a - 4 + 4 + 4a + 4 - 2a - 2 - 2a^2 + 4 =$

$= a^3 - a^2 - 4a + 4 = 0.$

Resolviendo por Ruffini:

	1	-1	-4	4
1		1	0	-4
	1	0	-4	$\boxed{0}$
2		2	4	
2	1	2	$\boxed{0}$	
-2		-2		
	1	$\boxed{0}$		

$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = - 2.$

$\underline{Para\ \{a\neq 1\ a\neq 2\ a\neq - 2\ \}\Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

$Para\ a = 1 \Rightarrow A' = (1\ 2\ 2\ 1\ 2\ \ - 1\ \ - 2\ \ - 4\ \ - 1\ \ \ 1\ 1\ 1\ ) \Rightarrow Rang.\ A' \Rightarrow \left(C_1,\ C_3,\ C\right.$

$\Rightarrow |1\ 2\ 1\ 1\ \ -1\ 1\ \ -2\ \ -1\ 1\ | =- 1 - 1 - 4 - 2 + 1 - 2 =- 9 \neq 0 \Rightarrow Rang.\ A^{'} = 3$
.

$Para\ a = 2 \Rightarrow A^{'} = (1\ 2\ 2\ 1\ 3\ \ -1\ \ -2\ \ -6\ 2\quad 1\ 1\ 2\ ) \Rightarrow Rang.\ A' \Rightarrow \left(C_1,\ C_2,\ C_4\right) =$

$\Rightarrow |1\ 2\ 1\ 1\ 3\ 1\ \ -2\ \ -6\ 2\ | = 6 - 6 - 4 + 6 + 6 - 4 = 4 \neq 0 \Rightarrow Rang.\ A^{'} = 3$
.

$\underline{Para\ \{a = 1\ a = 2\ \} \Rightarrow Rang\ A = 2;\ Rang\ A^{'} = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

$Para\ a =- 2 \Rightarrow A^{'} = (1\ 2\ 2\ 1\ \ -1\ \ -1\ \ -2\ 2\ 2\quad 1\ 1\ \ -2\ ) \Rightarrow Rang.\ A' \Rightarrow \left(C_1 = C\right.$

$\Rightarrow Rang.\ A^{'} = 2.$

$\underline{Para\ a =- 2 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A^{'} = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

Se resuelve, en primer lugar, para $\{a \neq 1,\ a \neq 1,\ a \neq - 2\}$:

$A' = \left(1\ 2\ 2\ 1\ a + 1\ \ -1\ \ -2\ \ -2a - 2\ a^2 - 2\quad 1\ 1\ a\right) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow F_2 - F_1\ F_3 \rightarrow\right.$

$\Rightarrow \left(1\ 2\ 2\ 0\ a - 1\ \ -3\ 0\ 2 - 2a\ a^2 + 2\quad 1\ 0\ a + 2\right) \Rightarrow \left\{F_3 \rightarrow F_3 + 2F_2\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(1\ 2\ 2\ 0\ a - 1\ \ -3\ 0\ 0\ a^2 - 4\quad 1\ 0\ a + 2\right) \Rightarrow \left\{F_3 \rightarrow \frac{1}{a+2} F_3\right\} \Rightarrow (1\ 2\ 2\ 0\ a - 1\ \ -3$

$\Rightarrow (a - 2)z = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{a-2}.\quad (a - 1)y - 3z = 0 \Rightarrow y = \frac{3z}{a-1} = \frac{3}{(a-1)(a-2)}.$

$x = 1 - 2y - 2z = 1 - \frac{6}{(a-1)(a-2)} - \frac{2}{a-2} = \frac{(a-1)(a-2)-6-2(a-1)}{(a-1)(a-2)} =$

$= \frac{a^2-3a+2-6-2a+2}{(a-1)(a-2)} = \frac{a^2-5a-2}{(a-1)(a-2)} = x.$

$\underline{Solución: x = \frac{a^2-5a-2}{(a-1)(a-2)},\ y = \frac{3}{(a-1)(a-2)},\ z = \frac{1}{a-2}.}$

Para $a =- 2$ el sistema resulta $\{x + 2y + 2z = 1\quad x - y - z = 1\quad - 2x + 2y + 2z =- 2$, que es equivalente al sistema $\{x + 2y + 2z = 1\ x - y - z = 1\quad x - y - z = 1$ o, también: $\{x + 2y + 2z = 1\ x - y - z = 1$, que es compatible indeterminado. Haciendo $z = \lambda$:

$x + 2y = 1 - 2\lambda\ x - y = 1 + \lambda \}$ $x + 2y = 1 - 2\lambda\ 2x - 2y = 2 + 2\lambda \} \Rightarrow 3x = 3$
.

$y = x - 1 - \lambda = 1 - 1 - \lambda = -\lambda.$

<u>$Solución$: $\{x = 1\quad y = -\lambda\ z = \lambda$, $\forall \lambda \in R$.</u>

****

2º) Se considera el plano π que pasa por los puntos $P(1,\ 1,\ 3)$, $Q(2,\ 1,\ 0)$ y $R(-\ 1,\ -\ 4,\ -\ 1)$. Encuentra el punto de π que más cerca está del punto $S(-\ 3,\ 1,\ 1)$ (o sea, el pie de la perpendicular de S a π).

Los puntos P, Q y R determinan los vectores:

$$\overrightarrow{PQ} = [Q - P] = [(2,\ 1,\ 0) - (1,\ 1,\ 3)] = (1,\ 0,\ -\ 3).$$

$$\overrightarrow{PR} = [R - P] = [(-\ 1,\ -\ 4,\ -\ 1) - (1,\ 1,\ 3)] = (-\ 2,\ -\ 5,\ -\ 4).$$

Considerando el punto $P(1,\ 1,\ 3)$:

$$\pi\left(P;\ \overrightarrow{PQ},\ \overrightarrow{PR}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-3 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & -5 & -4 \end{vmatrix} = 0;$$

$$6(y-1) - 5(z-3) - 15(x-1) + 4(y-1) = 0;$$

$$-\ 15(x-1) + 10(y-1) - 5(z-3) = 0;\ \ 3(x-1) - 2(y-1) + (z-3) = 0;$$

$$3x - 3 - 2y + 2 + z - 3 = 0 \Rightarrow \pi \equiv 3x - 2y + z - 4 = 0.$$

Un vector normal de π es $\overrightarrow{n} = (3,\ -\ 2,\ 1)$.

La expresión de la recta r, perpendicular a π es: $r \equiv \begin{cases} x = -3 + 3\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$.

El punto M de π pedido es la intersección de la recta r con el plano π:

$$\pi \equiv 3x - 2y + z - 4 = 0 \qquad r \equiv \begin{cases} x = -3 + 3\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

$$-\ 9 + 9\lambda - 2 + 4\lambda + 1 + \lambda - 4 = 0;\ \ 14\lambda - 14 = 0;\ \ \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1.$$

$$\left.\begin{matrix} x = -3 + 3\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \underline{M(0,\ -\ 1,\ 2)}.$$

****

3º) Calcula los siguientes límites: $a)\ \frac{x\cdot tag\ x}{1-\cos cos\ (2x)}$. $b)\ x^{\frac{x}{sen\ (\pi x)}}$.

$a)$

$$\frac{x\cdot tag\ x}{1-(2x)} = \frac{0\cdot tag\ 0}{1-\cos cos\ 0} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1\cdot tag\ x + x\cdot\left(1+tag^2 x\right)}{+2\cdot(2x)} = \frac{tag\ 0 + 0\cdot(1+0)}{2\cdot 0} = \frac{0+0\cdot 0}{2\cdot 0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1+tag^2 x + 1\cdot\left(1+tag^2 x\right) + x\cdot 2\cdot tag\ x\cdot\left(1+tag^2 x\right)}{2\cdot(2x)} = \frac{1+0+1\cdot 1+0}{4\cdot 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$\underline{\frac{x\cdot tag\ x}{1-(2x)} = \frac{1}{2}.}$$

$b)$

$$x^{\frac{x}{sen\ (\pi x)}} = 1^{\frac{1}{sen\ \pi}} = 1^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{\frac{x}{sen\ (\pi x)}} = A;\ \ LA = L\left[x^{\frac{x}{sen\ (\pi x)}}\right] = Lx^{\frac{x}{sen\ (\pi x)}} = \left[\frac{x}{sen\ (\pi x)}\cdot Lx\right] =$$

$$\frac{x\cdot Lx}{sen\ (\pi x)} = \frac{1\cdot L1}{sen\ \pi} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \frac{1\cdot Lx + x\cdot\frac{1}{x}}{\pi\cdot cos\ (\pi x)} =$$

$$= \frac{1+Lx}{\pi\cdot cos\ (\pi x)} = \frac{1+L1}{\pi\cdot cos\ \pi} = \frac{1+0}{\pi\cdot(-1)} = -\frac{1}{\pi} = LA \Rightarrow A = e^{-\frac{1}{\pi}} = \frac{1}{\sqrt[\pi]{e}}.$$

$$\underline{x^{\frac{x}{sen\ (\pi x)}} = \frac{1}{\sqrt[\pi]{e}}.}$$

****

4º) Dadas las funciones $f(x) = |x - 1| - 1$ y $g(x) = sen\,\frac{\pi x}{2}$, encuentra los dos puntos en que se cortan. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas curvas.

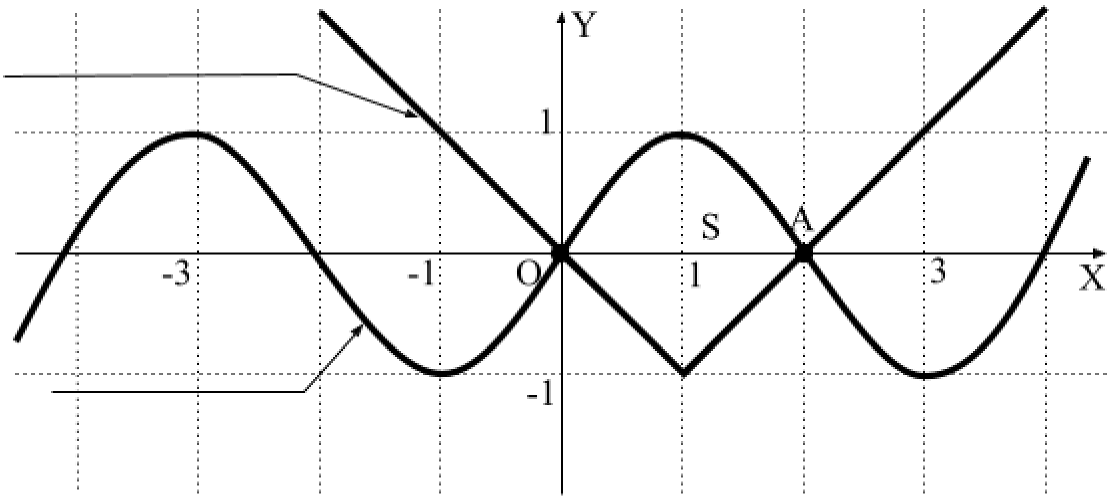
Teniendo en cuanta que $|x - 1| = \{- x + 1\; si\; x \leq 1\; x - 1\; si\; x > 1$, la función $f(x)$ puede redefinirse de la forma siguiente: $f(x) = \{- x\; si\; x \leq 1\; x - 2\; si\; x > 1$.

Los puntos de corte se obtienen igualando las dos funciones:

Para $x < 1 \Rightarrow - x = sen\,\frac{\pi x}{2} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \underline{O(0,\ 0)}$.

Para $x > 1 \Rightarrow x - 2 = sen\,\frac{\pi x}{2} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \underline{A(2,\ 0)}$.

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la siguiente:



$$\int sen\,\frac{\pi x}{2}\cdot dx \Rightarrow \left\{\frac{\pi x}{2} = t \to \frac{\pi}{2}dx = dt \to dx = \frac{2}{\pi}dt\right\} \Rightarrow \frac{2}{\pi}\int sen\, t\cdot dt =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\cdot \cos cos\, t = -\frac{2}{\pi}cos\frac{\pi x}{2}\ .$$

Teniendo en cuenta lo anterior y de la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_0^2 [g(x) - f(x)]dx = \int_0^1 \left[sen\,\frac{\pi x}{2} - (- x)\right]dx + \int_1^2 \left[sen\,\frac{\pi x}{2} - (x - 2)\right]dx =$$

$$= \int_0^1 \left(sen\,\frac{\pi x}{2} + x\right)dx + \int_1^2 \left(sen\,\frac{\pi x}{2} - x + 2\right)dx =$$

$$= \left[-\frac{2}{\pi} cos\frac{\pi x}{2} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[-\frac{2}{\pi} cos\frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^2 =$$

$$= \left(-\frac{2}{\pi} cos\frac{\pi}{2} + \frac{1^2}{2}\right) - \left(-\frac{2}{\pi}\cos cos\, 0 \ + 0\right) +$$

$$+ \left(-\frac{2}{\pi}\cos cos\, \pi \ - \frac{2^2}{2} + 2\cdot 2\right) - \left(-\frac{2}{\pi}\cos cos\, \frac{\pi}{2} \ - \frac{1^2}{2} + 2\cdot 1\right) =$$

$$= -\ 0 + \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cdot 1 - \frac{2}{\pi}\cdot(-\ 1) - 2 + 4 + 0 + \frac{1}{2} - 2 = \frac{4}{\pi} + 1 = \frac{4+\pi}{\pi}.$$

$$\underline{S = \frac{4+\pi}{\pi} \cong 2,27\ u^2.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Dada la matriz $A = (-\ 1\ 0\ 1\ \ -\ 1\ )$, calcula A^{57} y A^{-68}.

$$A^2 = A \cdot A = (-\ 1\ 0\ 1\ \ -\ 1\ ) \cdot (-\ 1\ 0\ 1\ \ -\ 1\ ) = (1\ 0\ \ -\ 2\ 1\ ).$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = (1\ 0\ \ -\ 2\ 1\ ) \cdot (-\ 1\ 0\ 1\ \ -\ 1\ ) = (-\ 1\ 0\ 3\ \ -\ 1\ ).$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = (-\ 1\ 0\ 3\ \ -\ 1\ ) \cdot (-\ 1\ 0\ 1\ \ -\ 1\ ) = (1\ 0\ \ -\ 4\ 1\ ).$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = (1\ 0\ \ -\ 4\ 1\ ) \cdot (-\ 1\ 0\ 1\ \ -\ 1\ ) = (-\ 1\ 0\ 5\ \ -\ 1\ ).$$

....

$$A^n = \left[(-\ 1)^n\ 0\ n \cdot (-\ 1)^{n+1}\ (-\ 1)^n\right].$$

$$A^{57} = \left[(-\ 1)^{57}\ 0\ 57 \cdot (-\ 1)^{58}\ (-\ 1)^{57}\right] = (-\ 1\ 0\ 57\ \ -\ 1\ ).$$

$$\underline{A^{57} = (-\ 1\ 0\ 57\ \ -\ 1\ )}.$$

$$A^{-68} = \left[(-\ 1)^{-68}\ 0\ \ -\ 68 \cdot (-\ 1)^{-67}\ (-\ 1)^{-68}\right] = (1\ 0\ 68\ 1\ ).$$

$$\underline{A^{-68} = (1\ 0\ 68\ 1\ )}.$$

También puede hacerse del siguiente modo:

$$A^{-68} = \frac{1}{A^{68}} = \frac{1}{\left[(-1)^{58}\ 0\ 68 \cdot (-1)^{69}\ (-1)^{68}\right]} = \frac{1}{(1\ 0\ -68\ 1\ )} = (1\ 0\ \ -\ 68\ 1\ )^{-1}.$$

Procediendo por el método de Gauss-Jordan:

$$(1\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow F_2 +\ 68F_1\right\} \Rightarrow (1\ 0\ 68\ 1\ ).$$

****

2º) Encuentra la ecuación en forma continua de la recta que corta perpendicularmente a $r \equiv \{2x - y - 2 = 0 \quad x - 2y + z - 3 = 0$ y $s \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+2}{1}$.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

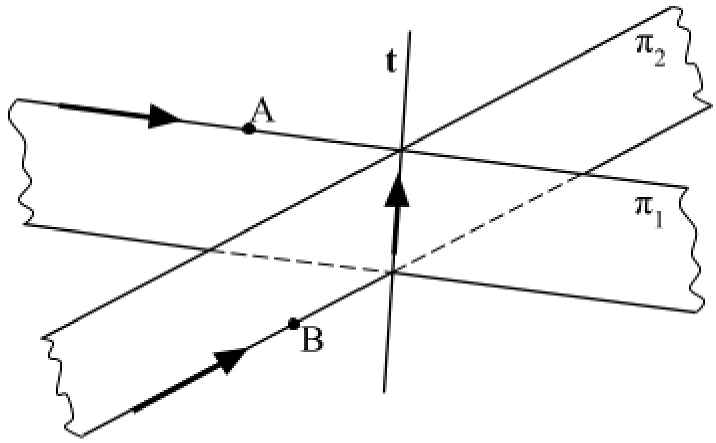
$r \equiv \{2x - y - 2 = 0 \qquad x - 2y + z - 3 = 0 \Rightarrow x = \lambda \Rightarrow y = -2 + 2\lambda;\ z = 3 - x +$

$= 3 - \lambda - 4 + 4\lambda = -1 + 3\lambda \Rightarrow r \equiv \{x = \lambda \qquad y = -2 + 2\lambda\ z = -1 + 3\lambda$

.

Un punto y un vector director de r son $A(0,\ -2,\ -1)$ y $\vec{v}_r = (1,\ 2,\ 3)$.

Un punto y un vector director de s son $B(2,\ 4,\ -2)$ y $\vec{v}_s = (2,\ -1,\ 1)$.



Un vector $\vec{w}$ perpendicular a los vectores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de estos vectores:

$\vec{w}' = \vec{v}_r \wedge \vec{v}_s = |i\ j\ k\ 1\ 2\ 3\ 2\ -1\ 1| = 2i + 6j - k - 4k + 3i - j = 5i + 5j - 5k \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{w} = (1,\ 1,\ -1)$.

Determinamos dos planos π_1 y π_2 de las siguientes características:

$\pi_1\left(A;\ \vec{v}_r,\ \vec{w}\right) \equiv |x\ y + 2\ z + 1\ 1\ 2\ 3\ 1\ 1\ -1| =$

$= -2x + 3(y + 2) + (z + 1) - 2(z + 1) - 3x + (y + 2) = 0;$

$= -5x + 4(y + 2) - (z + 1) = 0;\ -5x + 4y + 8 - z - 1 = 0 \Rightarrow$
$\pi_1 \equiv 5x - 4y + z - 7 = 0.$

$\pi_2\left(B;\ \vec{v}_s,\ \vec{w}\right) \equiv |x - 2\ y - 4\ z + 2\ 2\ -1\ 1\ 1\ 1\ -1| =$

$= (x - 2) + (y - 4) + 2(z + 2) + (z + 2) - (x - 2) + 2(y - 4) = 0;$

$= 3(y - 4) + 3(z + 2) = 0;\ \ y - 4 + z + 2 = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv y + z - 2 = 0.$

La recta pedida t es la intersección de los planos obtenidos anteriormente, π_1 y π_2: $t \equiv \begin{cases} 5x - 4y + z - 7 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$.

Para expresar t en función continua hacemos:

$z = \lambda;\ \ y = 2 - \lambda;\ \ 5x = 7 + 4y - z = 7 + 8 - 4\lambda - \lambda = 15 - 5\lambda \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 3 - \lambda \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.

La expresión de t dada por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$\underline{t \equiv \frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}}.$$

****

3º) Hallar las asíntotas de la función $y = f(x) = \frac{4x^2-1}{2x+4}$.

Las asíntotas pueden ser horizontales, verticales y oblicuas.

Horizontales: Son los valores finitos de x para los cuales la función toma valores finitos, es decir, es el límite cuando $x \to \infty$ de la función.

$$y = k = f(x) = \frac{4x^2-1}{2x+4} = \infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ síntotax\ horizontales}.$$

Verticales: Son los valores finitos de x que anulan el denominador.

$$2x + 4 = 0;\ \ x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2.$$

$$\underline{La\ recta\ x = -2\ es\ asíntota\ vertical\ de\ la\ función}.$$

Oblicuas: Son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \frac{f(x)}{x} \text{ y } n = [f(x) - mx] \text{, con m finito y } m \neq 0.$$

$$m = \frac{f(x)}{x} = \frac{4x^2-1}{2x^2+4x} = 2.$$

$$n = [f(x) - mx] = \left(\frac{4x^2-1}{2x+4} - 2 \cdot x\right) = \frac{4x^2-1-4x^2-8x}{2x+4} = -4.$$

$$\underline{Asíntota\ oblicua:\ y = 2x - 4}.$$

****

4º) Dada la función $f(x) = sen\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\cdot e^{x^2}$, demuestra que existe un valor $a\in(-1,\ 1)$ tal que $f'(a) = 2$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

Por ser $f(-x) = f(x)$, la función es simétrica con respecto al eje de ordenadas, lo que implica que $f(-1) = f(1)$ y, en consecuencia, no le es aplicable el teorema del valor medio o de Lagrange, que dice que: "Si una función es continua en $[m,\ n]$ y derivable en $(m,\ n)$, entonces existe al menos un valor $a\in(m,\ n)$ que cumple lo siguiente: $f'(a) = \frac{f(m)-f(n)}{m-n}$".

La derivada de la función es la siguiente:

$$f'(x) = \pi x\cdot cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\cdot e^{x^2} + sen\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\cdot 2x\cdot e^{x^2} =$$

$$= x\cdot e^{x^2}\cdot\left[\pi\cdot cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) + 2sen\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\right].$$

Teniendo en cuenta que $f'(x)$ es continua en R le es aplicable el teorema de los valores intermedios, que dice que: "*si* $Escriba\ aquí\ la\ ecuación.$ *es una función continua en el intervalo* $[a,\ b]$, *entonces para cada valor* m *tal que* $f(a) < m < f(b)$, *exista al menos un valor c perteneciente al intervalo* $(a,\ b)$ *tal que* $f(c) = m$".

$$f'(-1) = -1\cdot e^1\cdot\left(\pi\cdot cos\,\frac{\pi}{2} + 2\cdot sen\,\frac{\pi}{2}\right) = -e\cdot 2 = -2e < 2.$$

$$f'(1) = 1\cdot e^1\cdot\left(\pi\cdot cos\,\frac{\pi}{2} + 2\cdot sen\,\frac{\pi}{2}\right) = e\cdot 2 = 2e > 2.$$

$\underline{Lo\ anterior\ demuestra\ que\ \exists c\in(-1,\ 1)\ tal\ que\ f'(c) = 2}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

JULIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se valorará el planteamiento correcto, tango global como de cada una de las partes, si las hubiere. No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc., siempre que no sean de tipo conceptual. Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc., que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución se valorarán positivamente. Se valorará la buena presentación del examen.

OPCIÓN A

1º) Discute el sistema $\begin{cases} x+y+z=0 \\ -x+2y+bz=-3 \\ x-2y-z=b \end{cases}$. Encontrar la solución, si existe, para el caso de $b=2$.

$a)$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & b \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & b & -3 \\ 1 & -2 & -1 & b \end{pmatrix}$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro b es el siguiente:

$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & b \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}=-2+2+b-2+2b-1=3b-3=0$ ...

$$\underline{Para\ b\neq 1\Rightarrow Rang\ A=Rang\ A'=3\Rightarrow S.\ C.\ D.}$$

Para $b=1\Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\}\Rightarrow |1\ 1\ 0\ \ -1\ 2\ -$ ...

$=2-3-6+1=-6\neq 0\Rightarrow Rang\ A'=3.$

$$\underline{Para\ b=1\Rightarrow Rang\ A=2;\ Rang\ A'=3\Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$b)$

Se resuelve para b = 2; el sistema es compatible determinado.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|0\ 1\ 1\ -3\ 2\ 2\ 2\ -2\ -1\ |}{3\cdot 2-3} = \frac{6+4-4-3}{3} = \frac{3}{3} = 1.$$

$$y = \frac{|1\ 0\ 1\ -1\ -3\ 2\ 1\ 2\ -1\ |}{3} = \frac{3-2+3-4}{3} = \frac{0}{3} = 0.$$

$$z = \frac{|1\ 1\ 0\ -1\ 2\ -3\ 1\ -2\ 2\ |}{3} = \frac{4-3-6+2}{3} = \frac{-3}{3} =- 1.$$

$$\underline{Solución: x = 1,\ y = 0,\ z =- 1}.$$

****

2º) Calcular la distancia del punto $A(4,\ 4,\ 3)$ al plano que pasa por los puntos $B(1,\ 1,\ 0)$, $C(1,\ 0,\ 1)$ y $D(0,\ 1,\ 1)$.

Los puntos B, C, y D determinan los vectores:

$\overrightarrow{BC} = [C - B] = [(1,\ 0,\ 1) - (1,\ 1,\ 0)] = (0,\ -1,\ 1).$

$\overrightarrow{BD} = [D - B] = [(0,\ 1,\ 1) - (1,\ 1,\ 0)] = (-1,\ 0,\ 1).$

Considerando, por ejemplo, el punto B:

$\pi\left(B;\ \overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{BD}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad -(x-1) - (y-1) -$

$x - 1 + y - 1 + z = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + y + z - 2 = 0.$

La distancia de un punto $P_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d\left(P_0, \pi\right) = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Aplicando la fórmula al plano $\pi \equiv x + y + z - 2 = 0$ y al punto $A(4,\ 4,\ 3)$:

$$d(A, \pi) = \frac{|1\cdot4 + 1\cdot4 + 1\cdot3 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|4 + 4 + 3 - 2|}{\sqrt{3}} = \frac{9}{\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{3} = \underline{3\sqrt{3}\ unidades}.$$

****

3º) Calcular los valores A, B, C y D para que la función $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ tenga extremos relativos en $O(0,\ 0)$ y $P(2,\ 2)$.

Por pasar por $O(0,\ 0)$ y $P(2,\ 2)$:

$f(0) = 0 \Rightarrow 0 + 0 + 0 + D = 0 \Rightarrow \underline{D = 0}$.

$f(2) = 2 \Rightarrow A\cdot 2^3 + B\cdot 2^2 + C\cdot 2 = 2;\ \ 8A + 4B + 2C = 2;$

$4A + 2B + C = 1.$ (1)

$f'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C.$

Para que una función tenga un extremo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto:

Por tener extremos relativos en $O(0,\ 0)$ y $P(2,\ 2)$:

$f'(0) = 0 \Rightarrow 0 + 0 + C = 0 \Rightarrow \underline{C = 0}$.

$f'(2) = 0 \Rightarrow 3A\cdot 2^2 + 2B\cdot 2 = 0;\ \ 12A + 4B = 0;\ \ 3A + B = 0.$ (2)

Con las ecuaciones (1) y (2) con C = 0 se forma el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 4A + 2B = 1 \\ 3A + B = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -4A - 2B = -1 \\ 6A + 2B = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2A = -1;\ \ \underline{A = -\frac{1}{2}}$$

.

La función resulta ser: $\underline{f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2}$.

****

4º) Resolver las siguientes integrales: $a)\ I = \int \frac{5dx}{x^2-3x+2}$. $b)\ I = \int (2x+1)^4 \cdot dx$.

$a)$

$$I = \int \frac{5dx}{x^2-3x+2}.$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0;\ \ x = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \frac{3\pm1}{2} \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 2.$$

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2).$$

$$\frac{5}{x^2-3x+2} = \frac{M}{x-1} + \frac{N}{x-2} = \frac{Mx-2M+Nx-N}{(x+2)(x-1)} = \frac{(M+N)x+(-2M-N)}{x^2-3x+2} \Rightarrow\ \ M + N = 0\ \ -2M - N$$

$$\Rightarrow -M = 5;\ \ M = -5 \Rightarrow N = 5.$$

$$A = \int \frac{5}{x^2-3x+2} \cdot dx = \int \left(\frac{M}{x-1} + \frac{N}{x-2}\right) \cdot dx = \int \left(\frac{-5}{x-1} + \frac{5}{x-2}\right) \cdot dx =$$

$$= -5 \cdot L|x-1| + 5 \cdot L|x-2| + C = L\left|\left(\frac{x-2}{x-1}\right)^5\right| + C.$$

$$\underline{\int \frac{5}{x^2-3x+2} \cdot dx = L\left|\left(\frac{x-2}{x-1}\right)^5\right| + C.}$$

$b)$

$$I = \int (2x+1)^4 \cdot dx \Rightarrow \left\{2x + 1 = t\ dx = \frac{1}{2} \cdot dt\right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \int t^4 \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^5}{5} + C =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+1)^5}{5} + C.$$

$$\underline{\int (2x+1)^4 \cdot dx = \frac{1}{10} \cdot (2x+1)^5 + C.}$$

****

5º) Calcula la cifra de las unidades del número $N = 3^{2.016} + 2^{2.016}$.

$3^0 = 1,\ 3^1 = 3;\ 3^2 = 9;\ 3^3 = 27;\ 3^4 = 81;\ 3^5 = 243,\ \cdots\cdots$

Nótese que las sucesivas potencias de 3 terminan en 1, 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, ⋯⋯

En general 3^n termina en el resto de la división de n entre 4.

En particular $3^{2.016}$ termina en 1 por ser 2.016 divisible por 4. (resto 0)

$2^0 = 1;\ 2^1 = 2;\ 2^2 = 4;\ 2^3 = 8;\ 2^4 = 16;\ 2^5 = 32,\ 2^6 = 64,\ \cdots\cdots$

Nótese que las sucesivas potencias de 2 (excluyendo 2^0) terminan, sucesivamente, en 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, ⋯⋯

En general, 2^n termina en: $\{6 \to Resto\ n: 4\ es\ 0\ 2 \to Resto\ n: 4\ es\ 1\ 4 \to Resto\ n: 4\ es\ 2\ 8 \to Resto\ n: 4\ es\ 3$.

El resto de 2.016 entre 4 es 0, por lo cual $2^{2.016}$ termina en 6.

Como $6 + 1 = 7$:

$$\underline{N = 3^{2.016} + 2^{2.016}\ termina\ en\ 7}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Determina el rango de la matriz $A = (-\ 1\ 2\ a\ a\ a\ -\ 3\ \ -\ 1\ 0\ 2\ 1\ )$ según los valores del parámetro a. En caso de existir, calcula la inversa de A para $a\ =\ 1$. Si no existe tal inversa explica porqué.

$$|A| = |-\ 1\ 2\ a\ a\ a\ -\ 3\ \ -\ 1\ 0\ 2\ 1\ | =- (a\ -\ 3) +\ 2a^2\ -\ 2\ -\ 2a\ =$$

$$=-\ a\ +\ 3\ +\ 2a^2\ -\ 2\ -\ 2a\ =\ 2a^2\ -\ 3a\ +\ 1\ =\ 0;\ \ a\ = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2\cdot 2} = \frac{3\pm\sqrt{1}}{4} = \frac{3\pm 1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{1}{2},\ a_2\ =\ 1.$$

Por existir el menor de A: $|-\ 1\ 2\ 0\ 2\ | \neq 0$:

$$\underline{Para\ \{a\neq ½\ a\neq 1\ \} \Rightarrow Rang\ A\ =\ 3}.$$

$$\underline{Para\ \{a\ =\ ½\ a\ =\ 1\ \} \Rightarrow Rang\ A\ =\ 2}.$$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

Como quiera que para $a\ =\ 1 \Rightarrow |A| =\ 0$.

$$\underline{La\ matriz\ A\ no\ tiene\ inversa\ para\ a\ =\ 1}.$$

****

2º) Sea r la recta que pasa por los puntos $P(1,\ 2,\ 3)$ y $Q(-\ 1,\ 0,\ 1)$.

a) Determinar la ecuación del plano π_1 perpendicular a la recta r y que pase por el punto $A(4,\ \ -\ 2,\ \ -\ 1)$.

b) Determinar la ecuación del plano π_2 perpendicular a la recta r y que pase por el punto $B(2,\ 1,\ \ -\ 3)$.

c) Calcular la distancia que hay entre ambos planos.

----

a)

Los puntos Q y P determinan el vector:

$\overrightarrow{QP} = [P\ -\ Q] = [(1,\ 2,\ 3) - (-\ 1,\ 0,\ 1)] = (2,\ 2,\ 2).$

Cualquier vector linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{QP}$ es normal al plano pedido π_1, por ejemplo, $\overrightarrow{n_1} = (1,\ 1,\ 1)$.

La expresión general de π_1 es $\pi_1 \equiv x\ +\ y\ +\ z\ +D_1\ =\ 0$.

Como π_1 contiene al punto $A(4,\ \ -\ 2,\ \ -\ 1)$ debe satisfacer su ecuación:

$\pi_1 \equiv x\ +\ y\ +\ z\ +D_1\ =\ 0\ A(4,\ \ -\ 2,\ \ -\ 1)\quad \}\Rightarrow 4\ -\ 2\ -\ 1\ +D_1\ =\ 0=$

.

$$\underline{\pi_1 \equiv x\ +\ y\ +\ z\ +\ 1\ =\ 0.}$$

b)

Cualquier vector linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{QP}$ es normal al plano pedido π_2, por ejemplo, $\overrightarrow{n_2} = (1,\ 1,\ 1)$.

La expresión general de π_2 es $\pi_1 \equiv x\ +\ y\ +\ z\ +D_2 = 0$.

Como π_2 contiene al punto $B(2,\ 1,\ \ -\ 3)$ debe satisfacer su ecuación:

$\pi_2 \equiv x\ +\ y\ +\ z\ +D_2\ =\ 0\ B(2,\ 1,\ \ -\ 3)\quad \}\Rightarrow 2\ +\ 1\ -\ 3\ +D_2\ =\ 0\Rightarrow D$

.

$$\underline{\pi_2 \equiv x + y + z = 0.}$$

$c)$

La distancia entre los planos paralelos cualesquiera dados por sus ecuaciones generales: $\alpha_1 \equiv Ax + By + Cz + D_1 = 0$ y $\alpha_2 \equiv Ax + By + Cz + D_2 = 0$, viene dada por la fórmula: $d\left(\alpha_1,\ \alpha_2\right) = \frac{\left|D_1 - D_2\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Aplicada a los planos $\pi_1 \equiv x + y + z + 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv x + y + z = 0$ es:

$$d\left(\pi_1,\ \pi_2\right) = \frac{\left|D_1 - D_2\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|1-0|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\underline{d\left(\pi_1,\ \pi_2\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\ unidades.}$$

****

3º) Dada la función polinómica $P(x) = \frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{x^2}{2}$:

$a)$ Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $P(x)$.

$b)$ Obtener sus máximos y mínimos.

$c)$ ¿Existe algún valor de x tal que $P(x) < 0$? Razonar porqué.

$a)$

Una función es creciente o decreciente en un punto cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente, en ese punto.

$$P'(x) = 2x^3 - 3x^2 + x = x\left(2x^2 - 3x + 1\right).$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow x\left(2x^2 - 3x + 1\right) = 0;\ \Rightarrow x_1 = 0;\ \ 2x^2 - 3x + 1 = 0;$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = 1.$$

Teniendo en cuenta que $P(x)$ es continua en R por ser una función polinómica, los valores que anulan la primera derivada dividen el dominio de la función en cuatro intervalos crecientes o decrecientes de forma alternativa.

Teniendo en cuenta que, por ejemplo, $P'(2) = 6 > 0$, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: P'(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty).}$$

$$\underline{Decrecimiento: P'(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon(-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right).}$$

$b)$

Una función tiene un máximo relativo en un punto cuando se anula la primera derivada y es negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera y, tiene un mínimo relativo para los valores reales que anulan la primera derivada y hacen positiva la segunda derivada.

$P''(x) = 6x^2 - 3x + 1 \Rightarrow \{P''(0) = 1 > 0 \rightarrow mín.$ $\qquad P''(½) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} + 1 = 1$
.

$P(0) = 0 \Rightarrow Mínimo \Rightarrow \underline{O(0, 0)}.$

$P(½) = \frac{1}{32} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{32} \Rightarrow Máximo \Rightarrow \underline{A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{32}\right)}.$

$P(1) = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow Mínimo \Rightarrow \underline{B(1, 0)}.$

$c)$

$$P(x) = \frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}\left(x^2 - x + 1\right).$$

$$x^2 - x + 1 = 0;\ x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \Rightarrow x \notin R \Rightarrow x^2 - x + 1 > 0.$$

Según lo anterior y siendo $\frac{x^2}{2} > 0$ se cumple que $P(x) > 0,\ \forall x \in R$.

$\underline{No\ existe\ ningun\ valor\ real\ de\ x\ tal\ que\ P(x) < 0}.$

****

4º) Dadas las funciones $y = f(x) = 9 - x^2$ e $y = g(x) = 2x + 1$.

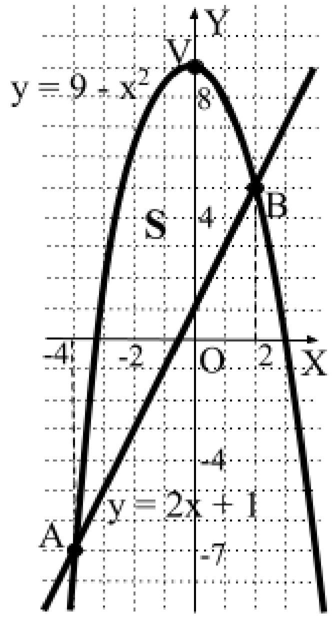
a) Dibujar el recinto acotado por sus gráficas.

b) Hallar el área de dicho recinto.

----

a)

Los puntos de intersección de la parábola y la recta son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:



$$9 - x^2 = 2x + 1 \;;\; x^2 + 2x - 8 = 0;$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} = -1 \pm 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \rightarrow A(-4,\ -7) \\ x_2 = 2 \rightarrow B(2,\ 5) \end{cases}.$$

El vértice de la parábola $y = 9 - x^2$ es:

$$y' = -2x = 0 \rightarrow x = 0 \Rightarrow V(0,\ 9).$$

La representación gráfica del conjunto es el indicado en la figura adjunta.

b)

Para el cálculo del área limitada por la parábola y la curva, que es la parte sombreada de la figura, se tiene en cuenta que, en el intervalo $(-4,\ 2)$, todas las ordenadas de la parábola son mayores que las correspondientes ordenadas de la recta.

$$S = \int_{-4}^{2} \left[\left(9 - x^2\right) - (2x + 1)\right] \cdot dx = \int_{-4}^{2} \left(-x^2 - 2x + 8\right) \cdot dx =$$

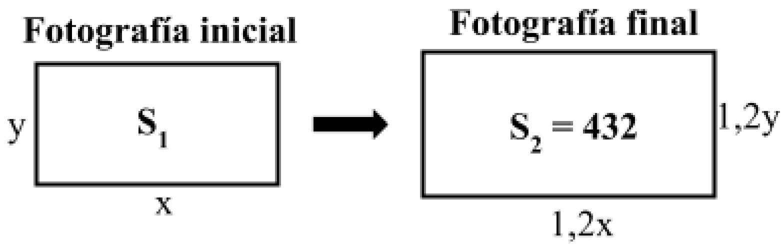
$$= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 8x\right]_{-4}^{2} = \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 8x\right]_{-4}^{2} =$$

$$= \left(-\frac{2^3}{3} - 2^2 + 8 \cdot 2\right) - \left[-\frac{(-4)^3}{3} - (-4)^2 + 8 \cdot (-4)\right] =$$

$$= -\frac{8}{3} - 4 + 16 - \frac{64}{3} + 16 + 32 = 60 - \frac{72}{3} = 60 - 24 = \underline{36\, u^2}.$$

****

5º) Ampliamos una fotografía rectangular de manera que sus dimensiones, largo y ancho, sean un 20 % más que las dimensiones originales. Si la nueva fotografía ocupa 432 centímetros cuadrados, ¿cuánto ocupaba la fotografía inicial?



Siendo x e y las dimensiones del rectángulo inicial, el rectángulo final tiene, respectivamente, 1,2 x y 1,2 y como dimensiones.

$$S_1 = x \cdot y \Rightarrow S_2 = (1,2x) \cdot (1,2y) = 1,44x \cdot y = 1,44 \cdot S_1 = 432 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_1 = \frac{432}{1,44} = \frac{43.200}{144} = 300.$$

$\underline{La\ fotografía\ inicial\ ocupaba\ 300\ centímetros\ cuadrados.}$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

JUNIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se valorará el planteamiento correcto, tango global como de cada una de las partes, si las hubiere. No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc., siempre que no sean de tipo conceptual. Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc., que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución se valorarán positivamente. Se valorará la buena presentación del examen.

OPCIÓN A

1º) Discute el sistema $\left\{\begin{array}{l} x+2y-z=2 \\ x+(1+b)y-bz=2b \\ x+by+(1+b)z=1 \end{array}\right.$ según los valores del parámetro b (NO es necesario resolverlo en ningún caso).

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+b & -b \\ 1 & b & 1+b \end{pmatrix}$ y $A'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1+b & -b & 2b \\ 1 & b & 1+b & 1 \end{pmatrix}$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro b es el siguiente:

$$|A'|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+b & -b \\ 1 & b & 1+b \end{vmatrix}=(1+b)^2-b-2b+(1+b)+b^2-2(1$$

$$=b^2+2b+1-3b-(1+b)+b^2=2b^2-b+1-1-b=2b^2-2b=$$

$$=2b(b-1)=0 \Rightarrow b_1=0,\ b_2=1.$$

$\underline{Para\ \left\{\begin{array}{l} b\neq 0 \\ b\neq 1 \end{array}\right. \Rightarrow Rang\ A=Rang\ A'=3=n^{o}\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

$Para\ b=0\ es\ A'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \left\{C_1,\ C_2,\ C_4\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |1\ 2\ 2\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1| = 1 - 2 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow Rang\ A' = 3.$

$\underline{Para\ b = 0 \Rightarrow Rang\ A = 2;\ Rang\ A' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible}.$

$Para\ b = 1\ es\ A' = (1\ 2\ \ -1\ 1\ 2\ \ -1\ 1\ 1\ 2\quad 2\ 2\ 1) \Rightarrow \{F_1 = F_2\} \Rightarrow Rang\ A' = 2$

.

$\underline{Para\ b = 1 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I}.$

****

2º) Determinar el plano π que pasa por el origen de coordenadas, es paralelo a la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$ y también es paralelo a la recta s que pasa por los siguientes puntos: $A(0,\ 1,\ 1)$ y $B(1,\ 1,\ 0)$.

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (1,\ -1,\ 1)$.

Un vector director de s es $\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{AB} = [B - A] = (1,\ 0,\ -1)$.

La expresión general del plano π pedido es la siguiente:

$$\pi\left(O;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s}\right) \equiv |x\ y\ z\ 1\ \ -1\ 1\ 1\ 0\ \ -1\,| = x + y + z + y = 0.$$

$$\underline{\pi \equiv x + 2y + z = 0}.$$

****

3º) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $y = f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$ y calcula cuáles son sus máximos y sus mínimos.

El dominio de la función $y = \frac{x^3}{x^2-4}$ es $D(y) \Rightarrow R - \{2, \ -2\}$.

Por ser $y = f(x) = -f(-x)$, la función es simétrica con respecto al origen.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x^2-4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{3x^4 - 12x^2 - 2x^4}{(x^2-4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2} = 0; \ x^2(x^2 - 12) = 0 \Rightarrow x_1 = 0. \ x^2 - 12 = 0;$$

$$x = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3} \Rightarrow \ x_2 = -2\sqrt{3}, \ x_3 = 2\sqrt{3}.$$

Teniendo en cuanta el dominio de la función, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon \left(-\infty, -2\sqrt{3}\right) \cup \left(2\sqrt{3}, \ +\infty\right)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon \left(-2\sqrt{3}, -2\right) \cup (-2, \ 2) \cup \left(2, \ 2\sqrt{3}\right)}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto. Esta condición necesaria no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; se es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{(4x^3 - 24x) \cdot (x^2-4)^2 - x^2(x^2-12)[2 \cdot (x^2-4) \cdot 2x]}{(x^2-4)^4} = \frac{(4x^3 - 24x)(x^2-4) - 4x^3(x^2-12)}{(x^2-4)^3} =$$

$$= \frac{4x^5 - 16x^3 - 24x^3 + 96x - 4x^5 + 48x^3}{(x^2-4)^3} = \frac{8x^3 + 96x}{(x^2-4)^3} = \frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}.$$

$f''(0) = 0 \Rightarrow No\ hay\ ni\ máximo\ ni\ mímino\ para\ x = 0.$

Para x = 0 existe un punto de inflexión.

$f''\left(-2\sqrt{3}\right) = \frac{-16\sqrt{3}\cdot(12+12)}{(12-4)^3} < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -2\sqrt{3}.$

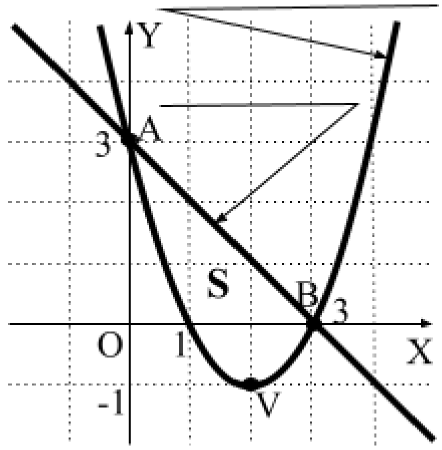
$f\left(-2\sqrt{3}\right) = \frac{\left(-2\sqrt{3}\right)^3}{12-4} = \frac{-24\sqrt{3}}{8} = -3\sqrt{3} \Rightarrow \underline{Máximo: P\left(-2\sqrt{3},\ -3\sqrt{3}\right)}.$

Por simetría con respecto al origen: $\underline{Mínimo: Q\left(2\sqrt{3},\ 3\sqrt{3}\right)}.$

****

4º) Dibujar el recinto encerrado entre las gráfica de las funciones $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y $g(x) = - x + 3$ y calcular el área de dicho recinto.

Los puntos de corte de la curva y la recta son los siguientes:



$$x^2 - 4x + 3 = - x + 3;\ \ x^2 - 3x = 0;$$

$$x(x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow A(0,\ 3) \\ x_2 = 3 \rightarrow B(3,\ 0) \end{cases}.$$

El vértice de la parábola $f(x) = x^2 - 4x + 3$ es el siguiente:

$$f'(x) = 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2 \Rightarrow V(2,\ - 1).$$

La representación gráfica, aproximada, de la situación es la que indica la figura.

De la observación de la figura se deduce la superficie S a calcular, que es:

$$S = \int_0^3 \left[(- x + 3) - \left(x^2 - 4x + 3\right)\right] dx = \int_0^3 \left(- x^2 + 3x\right) dx = \left[- \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^3 =$$

$$= - \frac{3^3}{3} + \frac{3 \cdot 3^2}{2} = - 9 + \frac{27}{2} = \frac{-18+27}{2} = \underline{\frac{9}{2}\, u^2 = 4,5\, u^2}.$$

****

5º) La siguiente serie está compuesta por los siguientes múltiplos consecutivos del número 5: 45, 50, 55, $\cdots\cdots$, 650, 655.

a) ¿Cuántos números componen la serie? b) ¿Cuál es su suma?

----

a)

La serie: $45,\ 50,\ 55,\ \cdots\cdots,\ 650,\ 655$ es una progresión aritmética de las siguientes características: $a_1 = 45$; $a_n = 655$; $d = 5$. Se desconoce el número de términos.

Siendo:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \Rightarrow n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{655-45}{5} + 1 = \frac{610}{5} + 1 =$$

$$= 122 + 1 = 123.$$

$\underline{La\ serie\ la\ componen\ 123\ números}.$

b)

La suma de los términos de una progresión aritmética es: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$.

$$S_{123} = \frac{a_1 + a_{123}}{2}\cdot 123 = \frac{45+655}{2}\cdot 123 = \frac{700}{2}\cdot 123 = 350\cdot 123 = 43.050$$

$\underline{La\ suma\ de\ los\ números\ de\ la\ serie\ es\ 43.050}.$

****

OPCIÓN B

1º) Dada la matriz $A = (a\ \ -1\ \ -1\ 1\ a\ 1\ a\ -\ 2\ 2\ 2\ )$:

a) Encuentra los valores del parámetro a para que la matriz NO sea invertible.

b) En caso de existir, calcula la inversa de A para $a = 2$.

----

a)

Una matriz no es invertible cuando su determinante es cero.

$|A| = |a\ \ -1\ \ -1\ 1\ a\ 1\ a\ -\ 2\ 2\ 2\ | = 2a^2 - 2 - (a - 2) + a(a - 2) - 2a + 2$

$2a^2 - a + 2 + a^2 - 2a - 2a = 0;\ \ 3a^2 - 5a + 2 = 0;\ \ a = \frac{5\pm\sqrt{25-24}}{6} =$

$= \frac{5\pm\sqrt{1}}{6} = \frac{5\pm1}{6} \Rightarrow a_1 = \frac{2}{3},\ a_2 = 1.$

$\underline{La\ matriz\ A\ no\ es\ inversible\ para\ a = \frac{2}{3}\ y\ para\ a = 1.}$

b)

Para $a = 2$ la matriz es $A = (2\ \ -1\ \ -1\ 1\ 2\ 1\ 0\ 2\ 2\ )$.

Se obtiene la matriz inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow (0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1\} \Rightarrow (0\ 1\ 0\ 1\ \ -2\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \{F_2 \rightarrow -F_2\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (0\ 1\ 0\ \ -1\ 2\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 - 2F_3\} \Rightarrow (0\ 1\ 0\ \ -1\ 2\ \ -2\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{F_1 \rightarrow F_1 - 2F_2\ F_3 \rightarrow F_3 - 2F_2\} \Rightarrow (2\ \ -3\ 4\ \ -1\ 2\ \ -2\ 2\ \ -4\ 5\ ) \Rightarrow \{F_3 \rightarrow \frac{1}{4}F_3\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(2\ \ -3\ 4\ \ -1\ 2\ \ -2\ \frac{1}{2}\ \ -1\ \frac{5}{4}\right) \Rightarrow \{F_1 \rightarrow F_1 - 3F_3\ F_2 \rightarrow F_2 + F_3\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{4}\ \ -\frac{1}{2}\ 1\ \ -\frac{3}{4}\ \frac{1}{2}\ \ -1\ \frac{5}{4}\right) \Rightarrow \underline{A^{-1} = \left(\frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{4}\ \ -\frac{1}{2}\ 1\ \ -\frac{3}{4}\ \frac{1}{2}\ \ -1\ \frac{5}{4}\right)}$

.

****

2º) Dado el plano: $\pi \equiv x - 3y + 2z = 7$:

a) Determinar el punto simétrico de $P(3, \ -8, \ 4)$ respecto a dicho plano.

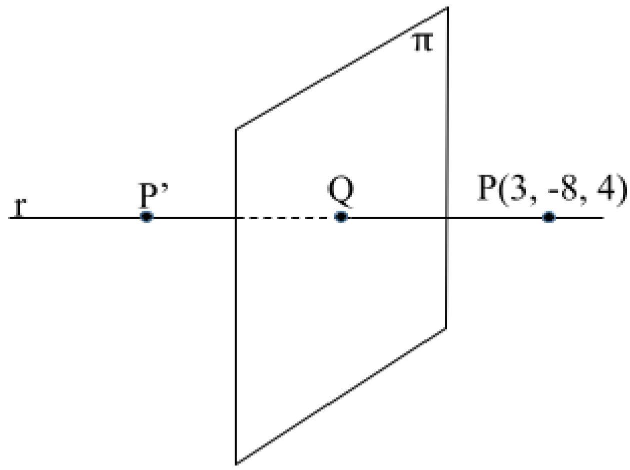
b) Calcular la distancia entre los dos puntos simétricos.

----

a)

Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (1, \ -3, \ 2)$.

La recta r que pasa por punto $P(3, \ -8, \ 4)$ y es perpendicular al plano π tiene como vector director al vector normal del plano; su expresión dada por unas ecuaciones paramétricas es



$r \equiv \{x = 3 + \lambda \quad y = -8 - 3\lambda \, z = 4 + 2\lambda$.

El punto Q intersección de r y π es el siguiente:

$\pi \equiv x - 3y + 2z - 7 = 0 \qquad r \equiv \{x = 3 + \lambda \quad y = -8 - 3\lambda \, z = 4 + 2\lambda \ \} \Rightarrow$

$3 + \lambda - 3(-8 - 3\lambda) + 2(4 + 2\lambda) - 7 = 0; \ 3 + \lambda + 24 + 9\lambda + 8 + 4\lambda - 7 = 0;$

$14\lambda + 28 = 0; \ \lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow \{x = 3 - 2 = 1 \quad y = -8 + 6 = -2 \, z = 4$
.

Para que P' sea el opuesto de P con respecto al plano π tiene que cumplirse que:

$\vec{PQ} = \vec{QP'} \Rightarrow [Q - P] = \left[P' - Q\right];$

$[(1, \ -2, \ 0) - (3, \ -8, \ 4)] = [(x, \ y, \ z) - (1, \ -2, \ 0)];$

$(-2, \ 6, \ -4) = (x - 1, \ y + 2, \ z) \Rightarrow \{x - 1 = -2 \rightarrow x = -1 \, y + 2 = 6 \rightarrow y = 4 \quad z$
.

$b)$

$$\overline{P'P} = \sqrt{(3+1)^2 + (4+8)^2 + (4+4)^2} = \sqrt{4^2 + 12^2 + 8^2} =$$

$$= \sqrt{16 + 144 + 64} = \sqrt{224} = \sqrt{16 \cdot 14} \Rightarrow \underline{\overline{P'P} = 4\sqrt{14}\ unidades}.$$

****

3º) Dada la función $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + C$:

$a)$ Calcula los valores de A, B y C de manera que la función satisfaga las siguientes propiedades: pase por el punto $O(0,\ 0)$ y tenga un máximo local en $P(1,\ 2)$.

$b)$ Calcula todos los valores de la variable x en los que la gráfica de la función tiene tangente horizontal.

$a)$

Por pasar por el punto $O(0,\ 0)$: $f(0) = 0 \Rightarrow \underline{C = 0}$.

Por pasar por $P(1,\ 2)$: $f(1) = 2 \Rightarrow A + B = 2$. (1)

$f'(x) = 3Ax^2 + 2Bx$.

Por tener un máximo local en $P(1,\ 2)$: $f'(1) = 0 \Rightarrow 3A + 2B = 0$. (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{l} A + B = 2 \\ 3A + 2B = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -2A - 2A = -4 \\ 3A + 2B = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{A = -4};\ \underline{B = 6}.$$

$b)$

La función resulta: $f(x) = -4x^3 + 6x^2$.

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto; se debe tener en cuenta que una recta horizontal tiene de pendiente cero.

$f'(x) = -12x^2 + 12x$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow -12x^2 + 12x = 0;\ -12x(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1$.

Los puntos de tangente horizontal son los siguientes:

$f(0) = 0 \Rightarrow \underline{O(0,\ 0)}$. $\quad f(1) =- 4 + 6 = 2 \Rightarrow \underline{A(1,\ 2)}$.

****

4º) Resolver la integral: $I = \int \frac{2x^2+5x-1}{x\left(x^2+x-2\right)} \cdot dx$.

$$x^2 + x - 2 = 0; \; x = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow x_1 =- 2, \; x_2 = 1.$$

$$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1).$$

$$\frac{2x^2+5x-1}{x\left(x^2+x-2\right)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-1} = \frac{A(x+2)(x-1)+Bx(x-1)+Cx(x+2)}{x(x+2)(x-1)} =$$

$$= \frac{A\left(x^2+x-2\right)+B\left(x^2-x\right)+C\left(x^2+2x\right)}{x(x+2)(x-1)} = \frac{Ax^2+Ax-2A+Bx^2-Bx+Cx^2+2Cx}{x\left(x^2+x-2\right)} =$$

$$= \frac{(A+B+C)x^2+(A-B+2C)x+(-2A)}{x\left(x^2+x-2\right)} \Rightarrow \; A + B + C = 2 \; A - B + 2C = 5 \qquad - 2A =- 1 \}$$

$$B + C = \frac{3}{2} \quad - B + 2C = \frac{9}{2} \} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3C = 6 \Rightarrow C = 2; \; \frac{1}{2} + B + 2 = 2 \Rightarrow B =- \frac{1}{2}.$$

$$I = \int \frac{2x^2+5x-1}{x\left(x^2+x-2\right)} \cdot dx = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+2} + \frac{2}{x-1} \right) \cdot dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+2} + 2 \int \frac{dx}{x-1} =$$

$$= \frac{1}{2} L|x| - \frac{1}{2} L|x + 2| + 2L|x - 1| + C = L\left| \frac{(x-1)^2\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} \right| + C.$$

$$\underline{I = \int \frac{2x^2+5x-1}{x\left(x^2+x-2\right)} \cdot dx = L\left| \frac{(x-1)^2\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} \right| + C.}$$

****

5º) En un teatro hay tres tipos de localidades, que llamaremos A, B y C. Las del tipo A cuestan 24 euros, las del tipo B cuestan 20 euros y las del tipo C cuestan 15 euros. El teatro tiene una capacidad de 400 butacas de las cuales se han vendido el 80 %. En total se han recaudado 5.940 euros. Sabiendo que se han vendido el doble de localidades del tipo B que del tipo A. ¿Cuántas localidades de cada tipo se han vendido?

Se han vendido: $80\ \%\ de\ 400 = 0,8 \cdot 400 = 320$ butacas.

$$A + B + C = 320\ 24A + 20B + 15C = 5.940 \qquad 2A = B \}$$

$$3A + C = 320\ 64A + 15C = 5.940 \} - 45A - 15C = -4.800 \quad 64A + 15C = 5.$$

$A = \frac{1.140}{19} = 60.\ \ B = 120.$

$60 + 120 + C = 320;\ \ C = 320 - 180;\ \ C = 140.$

$\underline{Se\ han\ vendido\ 60\ butacas\ tipo\ A,\ 120\ butacas\ tipo\ B\ y\ 140\ butacas\ tipo\ C.}$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNED

JUNIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Atención: Conteste a los problemas de una única opción. Puede utilizar una calculadora científica sin prestaciones gráficas ni de programación.

OPCIÓN A

1º) Resuelva el sistema $S_\lambda \equiv \begin{cases} 3\lambda x + 2y + 3z = 1 \\ x - \lambda y - z = 1 \\ x - y - z = \lambda \end{cases}$ para los valores de λ que hacen al sistema compatible.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = \begin{pmatrix} 3\lambda & 2 & 3 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 3\lambda & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro λ es el siguiente:

$|M| = \begin{vmatrix} 3\lambda & 2 & 3 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3\lambda^2 - 3 - 2 + 3\lambda - 3\lambda + 2 = 0;\ 3\lambda$

$3(\lambda^2 - 1) = 0;\ \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_1 = 1.$

$\underline{Para \begin{cases} \lambda \neq -1 \\ \lambda \neq 1 \end{cases} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

Se resuelve para $\lambda \neq -1\ y\ \lambda \neq 1$ por el método de Gauss:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 - F_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda - 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{y = 1} \Rightarrow S_\lambda \equiv \begin{cases} 3\lambda x + 2 + 3z = 1 \\ x - \lambda - z = 1 \\ x - 1 - z = \lambda \end{cases} \Rightarrow 3\lambda x +$

$\Rightarrow 3\lambda x + 3x = 2 + 3\lambda;\ \ 3x(\lambda + 1) = 2 + 3\lambda \Rightarrow \underline{x = \frac{2+3\lambda}{3(\lambda+1)}}.$

$x - z = 1 + \lambda;\ \ z = x - 1 - \lambda = \frac{2+3\lambda}{3(\lambda+1)} - (1 + \lambda) = \frac{2+3\lambda-3(1+\lambda)^2}{3(\lambda+1)} =$

$= \frac{2+3\lambda-3\left(\lambda^2+2\lambda+1\right)}{3(\lambda+1)} = \frac{2+3\lambda-3\lambda^2-6\lambda-3}{3(\lambda+1)} = \underline{\frac{-3\lambda^2-3\lambda-1}{3(\lambda+1)} = z}.$

$Para\ \lambda = -\ 1 \Rightarrow M' = (-\ 3\ 2\ 3\ 1\ 1\ \ -\ 1\ 1\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ \ \ \ 1\ 1\ \ -\ 1\ ) \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1,$

$\Rightarrow |-\ 3\ 2\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ | = 3 - 1 + 2 - 1 - 3 + 2 = 2 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3$
.

$\underline{Para\ \lambda = -\ 1 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible}.$

$Para\ \lambda = 1 \Rightarrow M' = (3\ 2\ 3\ 1\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ 1\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ \ \ \ 1\ 1\ 1\ ) \Rightarrow \{F_2 = F_3\} \Rightarrow Rang\ M$

$\underline{Para\ \lambda = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

El sistema resulta $S \equiv \{3x + 2y + 3z = 1\ x - y - z = 1\ \ \ \ x - y - z = 1$ equivalente a $\{3x + 2y + 3z = 1\ x - y - z = 1$.

Haciendo $z = \lambda \Rightarrow$
$3x + 2y = 1 - 3\lambda\ \ x - y = 1 + \lambda\}\ 3x + 2y = 1 - 3\lambda\ 2x - 2y = 2 + 2\lambda\} \Rightarrow 5x =$

$\Rightarrow x = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}\lambda.\ \ \ y = x - 1 - \lambda = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}\lambda - 1 - \lambda = -\ \frac{2}{5} - \frac{6}{5}\lambda.$

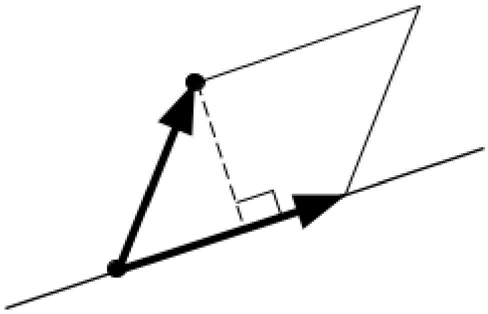
$\underline{Solución: x = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}\lambda,\ y = -\ \frac{2}{5} - \frac{6}{5}\lambda,\ z = \lambda,\ \ \forall \lambda \in R.}$

****

2º) Determine la distancia del punto $A(1,\ 1,\ 1)$ a la recta $r \equiv \{3x + 2y + 3z - 1 = 0\ x - y - z + 1 = 0$.

La distancia de un punto a una recta puede determinarse teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que forman dos vectores es el módulo de su producto vectorial y, de forma geométrica, es el producto de la base por la altura, siendo la altura la distancia pedida del punto P a la recta r.

Para una mejor comprensión del proceso se hace un esquema de la situación.



$$S = \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{PA}\right|\ S = \left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot h\ \} \Rightarrow \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{PA}\right| = \left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot h \Rightarrow$$

$$\underline{\Rightarrow h = d(A, r) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{PA}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}}.$$

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \{3x + 2y + 3z - 1 = 0\ x - y - z + 1 = 0 \quad \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow 3x + 2y = 1 - 3$$

$$3x + 2y = 1 - 3\lambda\ 2x - 2y = -2 + 2\lambda\ \} \Rightarrow 5x = -1 - \lambda;\ \ x = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\lambda;\ \ y = x$$

$$= -\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\lambda + 1 - \lambda = \frac{4}{5} - \frac{6}{5}\lambda = y \Rightarrow r \equiv \{x = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\lambda\ y = \frac{4}{5} - \frac{6}{5}\lambda \quad z = \lambda$$

.

Un punto y un vector director de r son $P\left(-\frac{1}{5},\ \frac{4}{5},\ 0\right)$ y $\overrightarrow{v_r} = (1,\ 6\ -5)$.

$$\overrightarrow{PA} = [A - P] = \left[(1,\ 1,\ 1) - \left(-\frac{1}{5},\ \frac{4}{5},\ 0\right)\right] = \left(\frac{6}{5},\ \frac{1}{5},\ 1\right).$$

Aplicando la fórmula al punto A y a la recta r:

$$d(A, r) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{PA}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|} = \frac{\|i\ j\ k\ 1\ 6\ -5\ \frac{6}{5}\ \frac{1}{5}\ 1\ \|}{\sqrt{1^2 + 6^2 + (-5)^2}} = \frac{\left|6i - 6j + \frac{1}{5}k - \frac{36}{5}k + i - j\right|}{\sqrt{1 + 36 + 25}} = \frac{|7i - 7j - 7k|}{\sqrt{62}} = \frac{7 \cdot |i - j - k|}{\sqrt{62}} =$$

$= \frac{7\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}}{\sqrt{62}} = \frac{7\cdot\sqrt{1+1+1}}{\sqrt{62}} = \frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{62}} = \underline{\frac{7\sqrt{186}}{62}\ unidades\ =\ d(A, r).}$

Otra forma de resolver este ejercicio es la siguiente:

El haz de planos perpendiculares a la recta r tiene la siguiente ecuación general: $\alpha \equiv x + 6y - 5z + D = 0$.

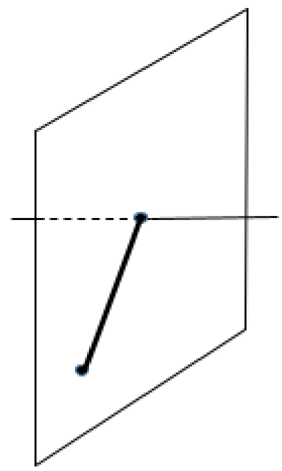
De los infinitos planos del haz α, el plano π que contiene al punto $A(1,\ 1,\ 1)$ es el que satisface su ecuación:

$\alpha \equiv x + 6y - 5z + D = 0 \qquad A(1,\ 1,\ 1) \} \Rightarrow 1 + 6 - 5 + D = 0;\ 2 + D$

$\Rightarrow \pi \equiv x + 6y - 5z - 2 = 0.$

El punto Q, intersección de la recta r con el plano π es la solución del sistema que forman:

$\pi \equiv x + 6y - 5z - 2 = 0 \qquad r \equiv \{ x = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\lambda\ y = \frac{4}{5} - \frac{6}{5}\lambda \quad z = \lambda$



$- 1 - \lambda + 24 - 36\lambda - 25\lambda - 10 = 0;\ 13 = 62\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{13}{62}.$

$\{ x = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\cdot\frac{13}{62} = -\frac{62+13}{310} = \frac{-75}{310} = \frac{-15}{62}\ y = \frac{4}{5} - \frac{6}{5}\cdot\frac{13}{62} = \frac{248-78}{310} = \frac{170}{310} = \frac{34}{62}$

.

La distancia pedida del punto A a la recta r es equivalente a la distancia entre los puntos A y Q, o sea el módulo del vector $|\overrightarrow{AQ}|$:

$d(A,\ r) = |\overrightarrow{AQ}| = \sqrt{\left(-\frac{15}{62} - 1\right)^2 + \left(\frac{34}{62} - 1\right)^2 + \left(\frac{13}{62} - 1\right)^2} =$

$= \sqrt{\left(\frac{-77}{62}\right)^2 + \left(\frac{-28}{62}\right)^2 + \left(\frac{-49}{62}\right)^2} = 7\cdot\sqrt{\frac{11^2+4^2+7^2}{62^2}} = 7\cdot\sqrt{\frac{186}{62\cdot62}} = 7\cdot\sqrt{\frac{3}{62}} = \frac{7\sqrt{186}}{62}$

.

$$\underline{d(A,\ r) = \frac{7\sqrt{186}}{62}\ unidades.}$$

****

3º) Represente la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-x^2}}$.

El dominio de la función f es el conjunto de números reales que cumplen la condición $3x - x^2 > 0;\ \ x(3 - x) = 0 \Rightarrow \underline{D(f) \Rightarrow (0,\ 3)}$.

La función f no corta a los ejes de coordenadas por lo siguiente:

Cortes con el eje X $\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3x-x^2}} \neq 0,\ \forall x \in D(f)$.

Corte con el eje Y $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) \notin D(f)$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-x^2}} = \left(3x - x^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \left(3x - x^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot (3 - 2x) = -\frac{3-2x}{\sqrt{(3-2x)^3}}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{3-2x}{\sqrt{(3-2x)^3}} = 0;\ \ 3 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Teniendo en cuenta el dominio de la función, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon \left(0,\ \frac{3}{2}\right)}.$$

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon \left(\frac{3}{2}, 3\right)}.$$

Dado que la función f es continua en su dominio, de lo anterior se deduce que tiene un mínimo absoluto para $x = \frac{3}{2}$.

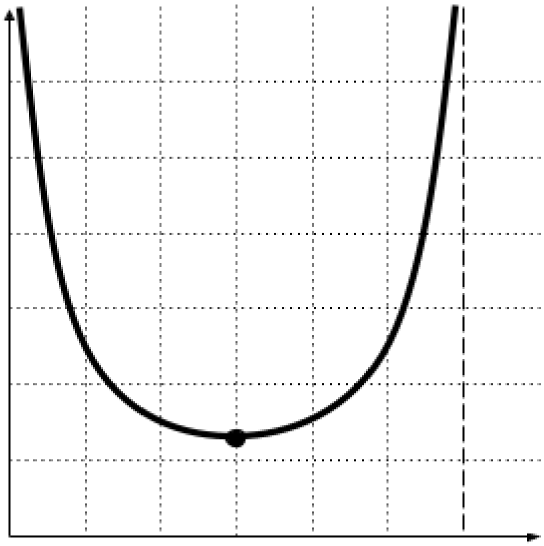
$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3 \cdot \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{2} - \frac{9}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4}}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \underline{Mínimo\ absoluto: P\left(\frac{3}{2},\ \frac{2}{3}\right)}.$$

Los límites laterales de la función es sus valores extremos son los siguientes:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-x^2}} = +\frac{1}{0} = +\infty. \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-x^2}} = +\frac{1}{0} = +\infty.$$

$$\underline{Las\ rectas\ x = 0\ y\ x = 3\ son\ asíntotas\ verticales\ de\ la\ función.}$$

Con todos los datos obtenidos anteriormente puede hacer una representación gráfica bastante aproximada de la función, que es la que aparece en la figura siguiente.



****

4º) Calcule $I = \int \frac{-x^2+2x+1}{x^3-x^2+x-1} \cdot dx$.

Descomponiendo por Ruffini el denominador resulta:

$$x^3 - x^2 + x - 1 = (x - 1)\left(x^2 + 1\right).$$

$$\frac{-x^2+2x+1}{x^3-x^2+x-1} = \frac{-x^2+2x+1}{(x-1)\left(x^2+1\right)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A\left(x^2+1\right)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)\left(x^2+1\right)} =$$

$$= \frac{Ax^2+A+Bx^2-Bx+Cx-C}{x^3-x^2+x-1} = \frac{(A+B)x^2+(-B+C)x+(A-C)}{x^3-x^2+x-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A + B =- 1 \;\; - B + C = 2 \;\; A - C = 1 \} \Rightarrow \{1ª + 2ª\} \Rightarrow A + C = 1 \; A - C = 1 \}$$

.

$$I = \int \frac{-x^2+2x+1}{x^3-x^2+x-1} \cdot dx = \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{-2x}{x^2+1}\right) \cdot dx = \int \frac{1}{x-1} \cdot dx - \int \frac{2x}{x^2+1} \cdot dx =$$

$$= L|x - 1| - M = I. \quad (*)$$

$$M = \int \frac{2x}{x^2+1} \cdot dx \Rightarrow \left\{x^2 + 1 = t \;\; 2x \cdot dx = dt \right\} \Rightarrow \int \frac{1}{t} \cdot dt = Lt + C = L\left(x^2 + 1\right) +$$

.

Sustituyendo en (*) el valor obtenido de M:

$$I = L|x - 1| - L\left(x^2 + 1\right) + C.$$

$$\underline{I = \int \frac{-x^2+2x+1}{x^3-x^2+x-1} \cdot dx = L\frac{|x-1|}{x^2+1} + C.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Resuelva, dependiendo del valor de λ, el sistema $S_{\lambda} \equiv \{2\lambda x + 2y + 3\lambda z = 1\ \lambda x - \lambda y - z = 2 \quad x - y - z = \lambda$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = (2\lambda\ 2\ 3\lambda\ \lambda\ -\lambda\ -1\ 1\ -1\ -1)$ y $M' = (2\lambda\ 2\ 3\lambda\ \lambda\ -\lambda\ -1\ 1\ -1\ -1 \quad 1\ 2\ \lambda)$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro λ es el siguiente:

$|M| = |2\lambda\ 2\ 3\lambda\ \lambda\ -\lambda\ -1\ 1\ -1\ -1| = 2\lambda^2 - 3\lambda^2 - 2 + 3\lambda^2 - 2\lambda + 2\lambda = 0$

$2\lambda^2 - 2 = 0;\ 2\left(\lambda^2 - 1\right) = 0;\ \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_1 = 1.$

$\underline{Para\ \{\lambda \neq -1\ \lambda \neq 1\ \} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D}.$

Se resuelve para $\lambda \neq -1\ y\ \lambda \neq 1$ por el método de Gauss:

$(\ 1\ 2\ \lambda\ ) \Rightarrow \left\{F_1 \leftrightarrow F_3\right\} \Rightarrow (\ \lambda\ 2\ 1\ ) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow F_2 - \lambda F_1\ F_3 \rightarrow F_3 - 2\lambda F_1\right\} \Rightarrow \left(\ \lambda\ 2\ -\lambda^2\ 1\ -2\lambda^2\ \right) \Rightarrow \underline{z = \frac{2-\lambda^2}{\lambda-1}}.$

$2(1+\lambda)y + 5\lambda \cdot \frac{2-\lambda^2}{\lambda-1} = 1 - 2\lambda^2;\ 2(1+\lambda)y = 1 - 2\lambda^2 - \frac{10\lambda - 5\lambda^3}{\lambda-1} =$

$= \frac{\left(1-2\lambda^2\right)(\lambda-1)-10\lambda+5\lambda^3}{\lambda-1} = \frac{\lambda-1-2\lambda^3+2\lambda^2-10\lambda+5\lambda^3}{\lambda-1} = \frac{3\lambda^3+2\lambda^2-9\lambda-1}{\lambda-1} = \underline{\frac{3\lambda^3+2\lambda^2-9\lambda-1}{2\left(\lambda^2-1\right)} = y}.$

$x - y - z = \lambda;\ x = y + z + \lambda = \frac{3\lambda^3+2\lambda^2-9\lambda-1}{2\left(\lambda^2-1\right)} + \frac{2-\lambda^2}{\lambda-1} + \lambda =$

$= \frac{(\lambda-1)\left(3\lambda^3+2\lambda^2-9\lambda-1\right)+(2\lambda-2)\left(\lambda^2-1\right)+2\lambda(\lambda-1)\left(\lambda^2-1\right)}{2(\lambda-1)\left(\lambda^2-1\right)} =$

$= \frac{3\lambda^4+2\lambda^3-9\lambda^2-\lambda-3\lambda^3-2\lambda^2+9\lambda+1+2\lambda^3-2\lambda-2\lambda^2+2+\left(2\lambda^2-2\lambda\right)\left(\lambda^2-1\right)}{2(\lambda-1)\left(\lambda^2-1\right)} =$

$= \frac{3\lambda^4+\lambda^3-13\lambda^2+6\lambda+3+2\lambda^4-2\lambda^2-2\lambda^3+2\lambda}{2(\lambda-1)\left(\lambda^2-1\right)} = \underline{\frac{5\lambda^4-\lambda^3-15\lambda^2+8\lambda+3}{2(\lambda-1)\left(\lambda^2-1\right)} = x}.$

$Para\ \lambda = -1 \Rightarrow M' = (-\ 2\ 2\ \ -3\ \ -1\ 1\ \ -1\ 1\ \ -1\ \ -1\ \ \ 1\ 2\ \ -1\ ) \Rightarrow Rang\ M$

$\Rightarrow |-\ 2\ \ -3\ 1\ \ -1\ \ -1\ 2\ 1\ \ -1\ \ -1\ | = -2 + 1 - 5 + 1 - 4 + 3 = -6 \neq 0 \Rightarrow Ran$
.

$Para\ \lambda = 1 \Rightarrow M' = (2\ 2\ 3\ 1\ \ -1\ \ -1\ 1\ \ -1\ \ -1\ \ \ 1\ 2\ 1\ ) \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,$

$\Rightarrow |2\ 2\ 1\ 1\ \ -1\ 2\ 1\ \ -1\ 1\ | = -2 - 1 + 4 + 1 + 4 - 2 = -5 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3$
.

$\underline{Para\ \{\lambda = -1\ \lambda = 1\ \} \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

****

2º) Se considera la recta $r \equiv \{x + y - 1 = 0\ x + z + 1 = 0$ y el plano $\pi \equiv x + my - z = 6$. Determine m para que r sea paralela a π. Para ese valor de m, calcule la distancia entre $r\ y\ \pi$.

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$r \equiv \{x + y - 1 = 0\ x + z + 1 = 0 \Rightarrow x = \lambda;\ \ y = 1 - \lambda;\ \ z =- 1 - \lambda \Rightarrow r \equiv \{x = \lambda$
.

Un punto y un vector de r son $P(0,\ 1,\ \ - 1)$ y $\vec{v}_r = (1,\ \ - 1,\ \ - 1)$.

Un vector normal del plano $\pi \equiv x + my - z = 6$ es $\vec{n} = (1,\ m,\ \ - 1)$.

Una recta y un plano son paralelos cuando el vector director de la recta y el vector normal del plano son perpendiculares.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (1,\ \ - 1,\ \ - 1) \cdot (1,\ m,\ \ - 1) = 1 - m + 1 = 0;\ \ m = 2.$

$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ paralelos\ para\ m = 2}.$

Para $m = 2$ es $\pi \equiv x + 2y - z = 6$.

La distancia de un punto $P_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d\left(P_0, \pi\right) = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Aplicando la fórmula al punto $P(0,\ 1,\ \ - 1)$ y al plano $\pi \equiv x + 2y - z - 6 = 0$:

$d(P, \pi) = \frac{|1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) - 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{|0 + 2 + 1 - 6|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{|-3|}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \underline{\frac{\sqrt{6}}{2}\ unidades}.$

****

3º) Sea la función $f(x) = e^{x}(x - 2)$. Estudie el dominio, asíntotas, crecimiento, posibles extremos relativos, convexidad y posibles puntos de inflexión de la función f. Haga un dibujo aproximado de la gráfica de la función f.

Por ser $f(x)$ una función que es producto de dos funciones continuas cuyo dominio es R: $\underline{D(f) = R}$.

$$f(x) = \left[e^{x}(x - 2)\right] = e^{-\infty}\cdot(-\infty) = -0\cdot\infty \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x-2}{e^{-x}} = \frac{-\infty}{\infty} \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \frac{1}{-e^{-x}} = -\lim_{x\to-\infty} e^{x} = -e^{-\infty} = \frac{-1}{e^{\infty}} = 0.$$

$$\underline{El\ eje\ -\ X\ es\ asíntota\ horizontal\ de\ la\ función.}$$

$$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ verticales.}$$

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$Eje\ X \rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \underline{A(2,\ 0)}.$

$Eje\ Y \rightarrow x = 0 \rightarrow f(0) = -2 \Rightarrow \underline{B(0,\ -2)}.$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = e^{x}\cdot(x - 2) + e^{x}\cdot 1 = e^{x}\cdot(x - 1).$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon (-\infty,\ 1).}$$

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon (1, +\infty).}$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto. Esta condición, que es necesaria, no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{x} \cdot (x - 1) = 0;\ \ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1.$

$f''(x) = e^{x} \cdot (x - 1) + e^{x} \cdot 1 = x \cdot e^{x}.$

$f''(1) = 1 \cdot e^{1} = e > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 1.$

$f(1) = e^{1} \cdot (1 - 2) = - e \Rightarrow \underline{Mínimo: P(1,\ - e)}.$

Una función es cóncava (∩) o convexa (∪) cuando su segunda derivada es negativa o positiva, respectivamente.

$f''(x) = 0 \Rightarrow x \cdot e^{x} = 0 \Rightarrow x = 0.$

$\underline{Concavidad\ (\cap): f''(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon (- \infty,\ 0)}.$

$\underline{Convexidad\ (\cup): f''(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon (0, + \infty)}.$

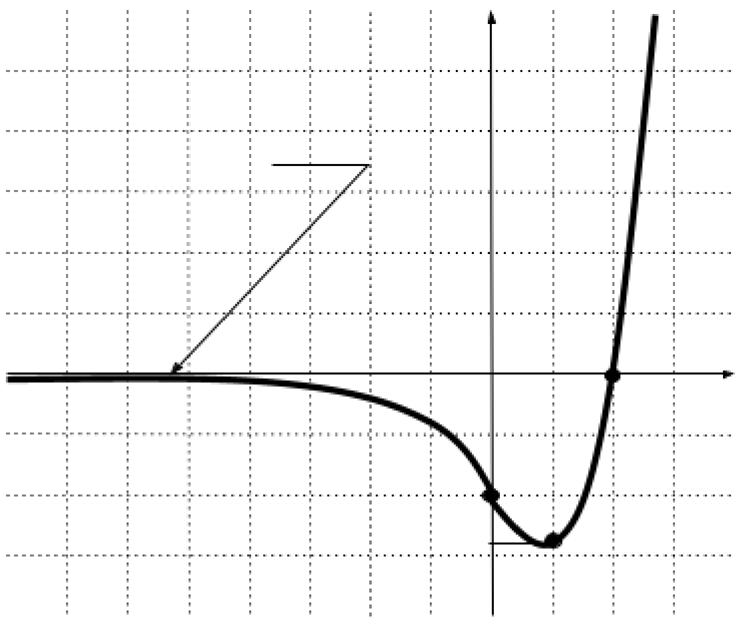
Una función tiene un punto de inflexión cuando se anula su segunda derivada y es distinta de cero la tercera derivada para los valores que anulan la segunda.

$f'''(x) = 1 \cdot e^{x} + x \cdot e^{x} = e^{x}(x + 1).$

$f'''(0) = e^{0} \cdot (0 + 1) = 1 \neq 0 \Rightarrow Punto\ de\ inflexión\ para\ x = 0.$

$f(0) = e^{0} \cdot (0 - 2) = - 2 \Rightarrow \underline{Punto\ de\ inflexión: A(0,\ - 2)}.$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la que aparece en la figura adjunta.



****

4º) Calcule $I = \int_1^e Lx^2 \cdot dx$. Observación: Lx representa el logaritmo neperiano de x.

Se resuelva en primer lugar la integral indefinida:

$$A = \int Lx^2 \cdot dx = \int 2xLx \cdot dx = 2\int xLx \cdot dx \Rightarrow \left\{ u = Lx \rightarrow du = \frac{1}{x}dx \; xdx = dv \rightarrow v = \frac{x^2}{2} \right\}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \frac{x^2}{2} \cdot Lx - 2 \cdot \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = x^2 \cdot Lx - \int x \cdot dx = x^2 \cdot Lx - \frac{x^2}{2} + C =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot (2Lx - 1) + C = A.$$

$$I = \int_1^e Lx^2 \cdot dx = \left[\frac{x^2}{2} \cdot (2Lx - 1) \right]_1^e = \left[\frac{e^2}{2} \cdot (2Le - 1) \right] - \left[\frac{1^2}{2} \cdot (2L1 - 1) \right] =$$

$$= \frac{e^2}{2} \cdot (2 - 1) - \frac{1}{2} \cdot (0 - 1) = \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{e^2+1}{2}.$$

$$\underline{I = \int_1^e Lx^2 \cdot dx = \frac{e^2+1}{2}.}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

JULIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se elegirá solamente UNA de los dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de la opción. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberían estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

1º) Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ -3x + 2y + 3z = -2 \\ 2x + ay - 5z = -4 \end{cases}$, donde a es un parámetro real. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) La solución del sistema cuando $a = 0$.

b) El valor del parámetro a para el que el sistema es incompatible.

c) Los valores del parámetro a para los que el sistema es compatible y determinado y obtener la solución del sistema en función del parámetro a.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & a & -5 \end{pmatrix}$ y $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & a & -5 & -4 \end{pmatrix}$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & a & -5 \end{vmatrix} = -10 + 6 - 6a - 8 - 3a - 15 = -27 - 9a = 0;$

$3 + a = 0 \Rightarrow a = -3.$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$Para\ a \neq -3 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.$$

Para $a = 0$ el sistema resulta $\{x + y + 2z = 2 \quad - 3x + 2y + 3z =- 2 \; 2x + ay - 5z =- 4$, que es compatible determinado.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|2\ 1\ 2\ -2\ 2\ 3\ -4\ 0\ -5\ |}{-27} = \frac{-20-12+16-10}{-27} = \frac{-42+16}{-27} = \frac{-26}{-27} = \frac{26}{27}.$$

$$y = \frac{|1\ 2\ 2\ -3\ -2\ 3\ 2\ -4\ -5\ |}{-27} = \frac{10+24+12+8+12-30}{-27} = \frac{66-30}{-27} =- \frac{36}{27} =- \frac{4}{3}.$$

$$z = \frac{|1\ 1\ 2\ -3\ 2\ -2\ 2\ 0\ -4\ |}{-27} = \frac{-8-4-8-12}{-27} = \frac{-32}{-27} = \frac{32}{27}.$$

$$\underline{Para\ a = 0\ la\ solución\ del\ sistema\ es{:}\ x = \frac{26}{27},\ y =- \frac{4}{3},\ z = \frac{32}{27}.}$$

$b)$

$Para\ a =- 3\ es\ A^{'} = (1\ 1\ 2\ \ - 3\ 2\ 3\ 2\ \ - 3\ \ - 5 \quad 2\ \ - 2\ \ - 4\ ) \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \{C_1,$

$\Rightarrow |1\ 1\ 2\ \ - 3\ 2\ \ - 2\ 2\ \ - 3\ \ - 4\,| =- 8 + 18 - 4 - 8 - 6 - 12 \neq 0 \Rightarrow Rang\ A^{'} = 3$
.

$$Para\ a =- 3 \Rightarrow Rang\ A = 2;\ Rang\ A^{'} = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.$$

$$\underline{El\ sistema\ es\ incompatible\ para\ a = \quad - 3.}$$

$c)$

Según se deduce del apartado a):

$$\underline{El\ sistema\ es\ incompatible\ determinado\ \forall a \in R - \{- 3\}.}$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|2\ 1\ 2\ -2\ 2\ 3\ -4\ a\ -5\ |}{-27-9a} = \frac{-20-12-4a+16-6a-10}{-9(3+a)} = \frac{-26-10a}{-9(3+a)} = \frac{2(13+5a)}{9(a+3)}.$$

$$y = \frac{|1\ 2\ 2\ -3\ -2\ 3\ 2\ -4\ -5\ |}{-27-9a} = \frac{10+24+12+8+12-30}{-9(3+a)} = \frac{66-30}{-9(3+a)} = \frac{36}{-9(3+a)} = \frac{-4}{3+a}.$$

$$z = \frac{|1\ 1\ 2\ -3\ 2\ -2\ 2\ a\ -4\ |}{-27-9a} = \frac{-8-6a-4-8+2a-12}{-9(a+3)} = \frac{-32-4a}{-9(a+3)} = \frac{4(8+a)}{9(a+3)}.$$

$$\underline{La\ solución\ del\ sistema\ es{:}\ x = \frac{2(13+5a)}{9(a+3)},\ y = \frac{-4}{3+a},\ z = \frac{4(8+a)}{9(a+3)}.}$$

****

2º) Se dan los puntos $A(0,\ 0,\ 1)$, $B(1,\ 0,\ -1)$, $C(0,\ 1,\ -2)$ y $D(1,\ 2,\ 0)$.

Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) La ecuación del plano π que contiene a los puntos A, B y C.

b) La justificación de que los cuatro puntos A, B, C y D, no son coplanarios.

c) La distancia del punto D al plano π, y el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos A, B, C y D.

----

a)

Los puntos A, B y C determinan los vectores:

$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(1,\ 0,\ -1) - (0,\ 0,\ 1)] = (1,\ 0,\ -2).$

$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(0,\ 1,\ -2) - (0,\ 0,\ 1)] = (0,\ 1,\ -3).$

Considerando el punto $A(0,\ 0,\ 1)$:

$\pi\left(A;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right) \equiv |x\ y\ z - 1\ 1\ 0\ -2\ 0\ 1\ -3| = 0;\ z - 1 + 2x + 3y = 0$

.

$$\underline{\pi \equiv 2x + 3y + z - 1 = 0}.$$

b)

Los puntos A, B, C y D son coplanarios si el punto D pertenece al plano π:

$\pi \equiv 2x + 3y + z - 1 = 0\ D(1,\ 2,\ 0)\ \} \Rightarrow 2\cdot 1 + 3\cdot 2 + 0 - 1 = 2 + 6 - 1 = 7 \neq 0$

.

$$\underline{Queda\ justificado\ que\ los\ puntos\ A,\ B,\ C\ y\ D\ no\ son\ coplanarios}.$$

c)

La distancia de un punto $P_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d\left(P_0, \pi\right) = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Aplicando la fórmula al plano $\pi \equiv 2x + 3y + z - 1 = 0$ y al punto $D(1,\ 2,\ 0)$:

$$d(D, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{|2 + 6 - 1|}{\sqrt{4 + 9 + 1}} = \frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{7\sqrt{14}}{14} = \underline{\frac{\sqrt{14}}{2}\ unidades}.$$

El volumen de un tetraedro es un sexto del producto mixto de los tres vectores que los determinan:

$\overrightarrow{AD} = [D - A] = [(1, 2, 0) - (0, 0, 1)] = (1, 2, -1).$

$V_{OABC} = \frac{1}{6} \cdot \left|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6} \cdot |1\ 0\ -2\ 0\ 1\ -3\ 1\ 2\ -1| = \frac{1}{6} \cdot (-1 + 2 + 6) = \underline{\frac{7}{6}\ u}$

.

****

3º) Se da la función f definida por $f(x) = x^2 + |x|$, donde x es un número real cualquiera y $|x|$ representa al valor absoluto de x.

Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) El punto o puntos donde la gráfica de la función f corta a los ejes coordenados.

b) La justificación de que la curva $y = f(x)$ es simétrica respecto al eje de ordenadas.

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f.

d) La representación gráfica de dicha curva $y = f(x)$.

e) Las integrales definidas $I_1 = \int_{-1}^{0} f(x)\cdot dx$ e $I_2 = \int_{0}^{2} f(x)\cdot dx$.

----

a)

Teniendo en cuenta que $|x| = \begin{cases} -x & si\ x < 0 \\ x & si\ x\geq 0 \end{cases}$ la función $f(x)$ puede redefinirse de la forma siguiente: $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & si\ x < 0 \\ x^2 + x & si\ x\geq 0 \end{cases}$.

La función contiene al origen de coordenadas, por ser $f(0) = 0$.

Además, corta al eje X en los puntos siguientes:

$x\in(-\infty, 0)\Rightarrow f(x) = x^2 - x = x(x - 1) = 0\Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1$. No corta al eje X en su parte negativa por no pertenecer $x = 1$ al intervalo $(-\infty, 0)$.

$x\in(0, +\infty)\Rightarrow f(x) = x^2 + x = x(x + 1) = 0\Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -1$. No corta al eje X en su parte positiva por no pertenecer $x = -1$ al intervalo $(0, +\infty)$.

$\underline{El\ único\ punto\ de\ corte\ de\ f(x)\ con\ los\ ejes\ es\ el\ origen.}$

b)

Una función es simétrica con respecto al eje Y cuando $f(-x) = f(x)$.

Utilizando la expresión dada: $f(-x) = (-x)^2 + |-x| = x^2 + |-x| = f(x)$.

$\underline{Queda\ justificado\ que\ f(x)\ es\ simétrica\ respecto\ al\ eje\ de\ ordenadas.}$

c)

$f'(x) = \{2x - 1 \;\; si \;\; x < 0 \;\; 2x + 1 \;\; si \;\; x \geq 0$.

$\underline{Crecimiento\text{: } f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (0, \; +\infty)}.$

$\underline{Decrecimiento\text{: } f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, \; 0)}.$

d)

Considerando la parábola $g(x) = x^2 - x$, que es convexa (∪) y cortas el eje X en el origen y en el punto $A(1, 0)$; su vértice es el siguiente:

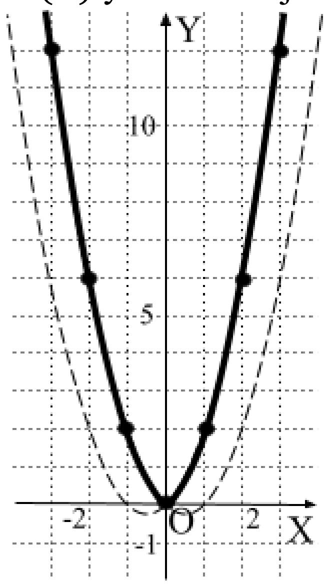
$g'(x) = 2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$.

$g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow V_1\left(\frac{1}{2}, \; -\frac{1}{4}\right)$.

Otros puntos de $g(x)$ son $(-1, \; 2), \; (-2, \; 6), \; (-3, \; 12)$.

Considerando la parábola $h(x) = x^2 + x$, que es convexa (∪) y cortas el eje X en el origen y en el punto $B(-1, 0)$; su vértice es el siguiente:

$h'(x) = 2x + 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$.



$g\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow V_2\left(-\frac{1}{2}, \; -\frac{1}{4}\right)$.

Otros puntos de $h(x)$ son $(1, \; 2), \; (2, \; 6), \; (3, \; 12)$.

La representación gráfica, aproximada, de la función es la que aparece al lado.

e)

$I_1 = \int_{-1}^{0} f(x) \cdot dx = \int_{-1}^{0} \left(x^2 - x\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} =$

$= 0 - \left[\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2}\right] = -\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2+3}{6} = \frac{5}{6}$.

$$\underline{I_1 = \int_{-1}^{0} f(x)\cdot dx = \frac{5}{6}.}$$

$$I_2 = \int_{0}^{2} f(x)\cdot dx = \int_{0}^{2}\left(x^2 + x\right)\cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \left(\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2}\right) - 0 = \frac{8}{3} + 2 =$$

$$= \frac{8+6}{3} = \frac{14}{3}.$$

$$\underline{I_2 = \int_{0}^{2} f(x)\cdot dx = \frac{14}{3}.}$$

****

<u>OPCIÓN B</u>

1º) Se dan las matrices $A = (1\ 1\ \ -\ 1\ 1\ 2\ 1\ 0\ 1\ 1\ )$, $B = (0\ 1\ \ -\ 1\ 2\ 1\ 2\ 1\ 0\ \ -\ 1\ )$ e $I = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ )$.

Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) El determinante de las matrices $A\cdot\left(2\cdot B^2\right)$ y $A\cdot\left(2\cdot B^2\right)\cdot(3A)^{-1}$.

b) Las matrices A^{-1} y $\left[(B\cdot A)^{-1}\cdot B\right]^{-1}$.

c) Las solución de la ecuación matricial $A\cdot X + B\cdot X = 3I$.

----

a)

$B^2 = B\cdot B = (0\ 1\ \ -\ 1\ 2\ 1\ 2\ 1\ 0\ \ -\ 1\ )\cdot(0\ 1\ \ -\ 1\ 2\ 1\ 2\ 1\ 0\ \ -\ 1\ ) = (1\ 1\ 3\ 4\ 3\ \ -\ 2\ \ -\ 1$
.

$A\cdot\left(2\cdot B^2\right) = (1\ 1\ \ -\ 1\ 1\ 2\ 1\ 0\ 1\ 1\ )\cdot[2\cdot(1\ 1\ 3\ 4\ 3\ \ -\ 2\ \ -\ 1\ 1\ 0\ )] =$

$= (1\ 1\ \ -\ 1\ 1\ 2\ 1\ 0\ 1\ 1\ )\cdot(2\ 2\ 6\ 8\ 6\ \ -\ 4\ \ -\ 2\ 2\ 0\ ) = (12\ 6\ 2\ 16\ 16\ \ -\ 2\ 6\ 8\ \ -\ 4$
.

$\left|A\cdot\left(2\cdot B^2\right)\right| = |12\ 6\ 2\ 16\ 16\ \ -\ 2\ 6\ 8\ \ -\ 4\ | = 2\cdot 2\cdot 2\cdot|6\ 3\ 1\ 8\ 8\ \ -\ 1\ 3\ 4\ \ -\ 2\ | =$

$= 8\cdot(-\ 96 + 32 - 9 - 24 + 24 + 48) = 8\cdot(80 - 105) = 8\cdot(-\ 25) =-\ 200.$

$$\underline{\left|A\cdot\left(2\cdot B^2\right)\right| = -\ 200}.$$

También puede hacerse de la forma siguiente: teniendo en cuenta que el determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes de las matrices y que el producto de una matriz por un número es la matriz que resulta de multiplicar todos y cada uno de los elementos de la matriz por el número:

$$\left|\left(2\cdot B^2\right)\right| = 2^3\cdot\left|B^2\right| = 8\cdot|B|\cdot|B|.$$

$$\left|A\cdot\left(2\cdot B^2\right)\right| = 8\cdot|A|\cdot|B\cdot B| = 8\cdot|A|\cdot|B|\cdot|B|.$$

$$|A| = |1\ 1\ \ -\ 1\ 1\ 2\ 1\ 0\ 1\ 1\ | = 2\ -\ 1\ -\ 1\ -\ 1\ = -\ 1.$$

$$|B| = |0\ 1\ \ -\ 1\ 2\ 1\ 2\ 1\ 0\ \ -\ 1\ | = 2\ +\ 1\ +\ 2\ =\ 5.$$

$$\underline{\left|A\cdot\left(2\cdot B^2\right)\right| = 8\cdot(-\ 1)\cdot 5\cdot 5\ = -\ 200}.$$

$$\left|A\cdot\left(2\cdot B^2\right)\cdot(3A)^{-1}\right| = |A|\cdot 2^3\cdot|B|\cdot|B|\cdot\frac{1}{|3A|} = 8\cdot|A|\cdot|B|\cdot|B|\cdot\frac{1}{3^3\cdot|A|} =$$

$$= \frac{8}{27}\cdot 5^2 = \frac{200}{27}.$$

$$\underline{\left|A\cdot\left(2\cdot B^2\right)\cdot(3A)^{-1}\right| = \frac{200}{27}}.$$

$b)$

Se obtiene la inversa de $A = (1\ 1\ \ -\ 1\ 1\ 2\ 1\ 0\ 1\ 1\ )$ por el método de Gauss-Jordan.

$$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow F_2 - F_1\right\} \Rightarrow$$

$$= (1\ 0\ 0\ \ -\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow F_1 - F_2 F_3 \rightarrow F_3 - F_2\right\} \Rightarrow (2\ \ -\ 1\ 0\ \ -\ 1\ 1\ 0\ 1\ \ -\ 1\ 1$$

$$\Rightarrow \left\{F_3 \rightarrow -\ F_3\right\} \Rightarrow (2\ \ -\ 1\ 0\ \ -\ 1\ 1\ 0\ \ -\ 1\ 1\ \ -\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow F_1 +\ 3F_3 F_2 \rightarrow F_2 -\ 2F_3\right\} =$$

$$\Rightarrow (-\ 1\ 2\ \ -\ 3\ 1\ \ -\ 1\ 2\ \ -\ 1\ 1\ \ -\ 1\ ) \Rightarrow \underline{A^{-1} = (-\ 1\ 2\ \ -\ 3\ 1\ \ -\ 1\ 2\ \ -\ 1\ 1\ \ -\ 1\ )}$$
.

$$\left[(B\cdot A)^{-1}\cdot B\right]^{-1} = \left[A^{-1}\cdot B^{-1}\cdot B\right]^{-1} = \left[A^{-1}\cdot I\right]^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{-1} = A.$$

$$\underline{\left[(B\cdot A)^{-1}\cdot B\right]^{-1} = A}.$$

$c)$

$A\cdot X + B\cdot X = 3I$; $(A + B)\cdot X = 3I$. Multiplicando por la izquierda los dos términos por $(A + B)^{-1}$:

$$(A + B)^{-1}\cdot(A + B)\cdot X = (A + B)^{-1}\cdot(3I);\ \ I\cdot X = (A + B)^{-1}\cdot(3I) \Rightarrow$$

$\Rightarrow X = (A + B)^{-1}\cdot(3I)$.

$A + B = (1\ 1\ -\ 1\ 1\ 2\ 1\ 0\ 1\ 1\ ) + (0\ 1\ -\ 1\ 2\ 1\ 2\ 1\ 0\ -\ 1\ ) = (1\ 2\ -\ 2\ 3\ 3\ 3\ 1\ 1$

.

$(A + B)^{-1}$ se obtiene por la adjunta de la traspuesta: $(A + B)^{-1} = \frac{Adj.\ de\ (A+B)^t}{|A+B|}$.

$|A + B| = |1\ 2\ -\ 2\ 3\ 3\ 3\ 1\ 1\ 0\ | = 6 - 6 + 6 - 3 = 3.$ $(A + B)^t = (1\ 3\ 1\ 2\ 3\ 1\ -$

.

$Adj.\ de\ (A + B)^t = (|3\ 1\ 3\ 0\ |\ -|2\ 1\ -\ 2\ 0\ |\ |2\ 3\ -\ 2\ 3\ |\ -|3\ 1\ 3\ 0\ |\ |1\ 1\ -\ 2$

$= (-\ 3\ -\ 2\ 12\ 3\ 2\ -\ 9\ 0\ 1\ -\ 3\ ) \Rightarrow (A + B)^{-1} = \frac{Adj.\ de\ (A+B)^t}{|A+B|} = \frac{1}{3}\cdot(-\ 3\ -\ 2\ 12\ 3\ 2$

.

$X = (A + B)^{-1}\cdot(3I) = \frac{1}{3}\cdot(-\ 3\ -\ 2\ 12\ 3\ 2\ -\ 9\ 0\ 1\ -\ 3\ )\cdot 3I = (-\ 3\ -\ 2\ 12\ 3$

.

$$\underline{X = (-\ 3\ -\ 2\ 12\ 3\ 2\ -\ 9\ 0\ 1\ -\ 3\ )}.$$

****

2º) Se dan los planos $\pi \equiv x + y + z = 1$ y $\sigma \equiv ax + by + z = 0$, donde a y b son dos parámetros reales.

Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) Los valores de a y b para los que el plano σ pasa por el punto $P(1, 2, 3)$ y, además, dicho plano σ es perpendicular al plano π.

b) Los valores de a y b para los cuales sucede que el plano σ pasa por el punto $Q(0, 1, 1)$ y la distancia del punto $M(1, 0, 1)$ al plano σ es 1.

c) Los valores de a y b para los que la intersección de los planos π y σ es la recta r para la que el vector $\overrightarrow{v} = (3, 2, -5)$ es un vector director de la recta r, y obtener un punto cualquiera de la recta r.

----

a)

Si el plano σ pasa por el punto $P(1, 2, 3)$ tiene que satisfacer su ecuación:

$\left.\begin{array}{l}\sigma \equiv ax + by + z = 0 \\ P(1, 2, 3)\end{array}\right\} \Rightarrow a + 2b + 3 = 0;\ \ a + 2b = -3.$ (1)

Si el plano σ es perpendicular al plano π, sus vectores normales también son perpendiculares.

$\overrightarrow{n_\pi} = (1, 1, 1)$ y $\overrightarrow{n_\sigma} = (a, b, 1)$.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$\overrightarrow{n_\pi} \cdot \overrightarrow{n_\sigma} = (1, 1, 1) \cdot (a, b, 1) = a + b + 1 = 0;\ \ a + b = -1.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$\left.\begin{array}{l} a + 2b = -3 \\ a + b = -1 \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l} a + 2b = -3 \\ -a - b = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{b = -2},\ \underline{a = 1}$.

b)

Si el plano σ pasa por el punto $Q(0, 1, 1)$ tiene que satisfacer su ecuación:

$\left.\begin{array}{l}\sigma \equiv ax + by + z = 0 \\ Q(0, 1, 1)\end{array}\right\} \Rightarrow b + 1 = 0 \Rightarrow \underline{b = -1}$.

La distancia de un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$

viene dada por la fórmula $d\left(P_0, \pi\right) = \frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Aplicando la fórmula al plano $\sigma \equiv ax - y + z = 0$ y al punto $M(1,\ 0,\ 1)$:

$$d(M, \sigma) = 1 \Rightarrow \frac{|a\cdot 1 - 0 + 1|}{\sqrt{a^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{|a+1|}{\sqrt{a^2+1+1}} = \frac{a+1}{\sqrt{a^2+2}} = 1 \Rightarrow a + 1 = \sqrt{a^2 + 2};$$

$$a^2 + 2a + 1 = a^2 + 2;\ \ 2a = 1 \Rightarrow \underline{a = \frac{1}{2}}.$$

$c)$

La recta r intersección de $\pi \equiv x + y + z = 1$ y $\sigma \equiv ax + by + z = 0$ tiene la expresión: $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + z = 0 \end{cases}$.

Un vector director de una recta dada por la intersección de dos planos es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{n}_1 = (1,\ 1,\ 1) \\ \vec{n}_2 = (a,\ b,\ 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = i + aj + bk - ak -$$

$$= (1 - b)i + (a - 1)j + (b - a)k = (3,\ 2,\ -5) \Rightarrow \begin{cases} 1 - b = 3 \\ a - 1 = 2 \\ b - a = \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = 3,\ b = -2 \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}}.$$

Un punto cualquiera de r es una solución del sistema compatible indeterminado que forman las ecuaciones de la recta, por ejemplo, haciendo x = 0:

$$\left. \begin{array}{l} y + z = 1 \\ -2y + z = 0 \end{array} \right\} \ \left. \begin{array}{l} y + z = 1 \\ 2y - z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3y = 1;\ y = \frac{1}{3};\ \ z = 1 -$$

.

$$\underline{Un\ punto\ de\ r\ es\ N\left(0,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)}.$$

****

3º) La diferencia de potencial “x” entre dos puntos de un circuito eléctrico provoca el paso de una corriente eléctrica de intensidad “y”, que está relacionada con la diferencia de potencial “x” por la ecuación $y =- x^2 - x + 6$, siendo $0 \leq x \leq 2$.

Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) La gráfica de la función $f(x) =- x^2 - x + 6$ y deducir, gráfica o analíticamente, el valor de la intensidad “y” cuando la diferencia de potencial “x” es 0 y el valor de la diferencia de potencial “x” al que corresponden una intensidad “y” igual a 0, siendo $0 \leq x \leq 2$.

b) El valor de la diferencia de potencial “x” para el que es máximo el producto $y \cdot x$ de la intensidad “y” por la diferencia de potencial “x”, cuando $0 \leq x \leq 2$, y obtener el valor máximo de dicho producto $y \cdot x$, cuando $0 \leq x \leq 2$.

c) El área de la superficie situada en el primer cuadrante limitada por la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas y el eje de ordenadas.

----

a)

La función $f(x) =- x^2 - x + 6$ es cóncava (∩) y su vértice es el siguiente:

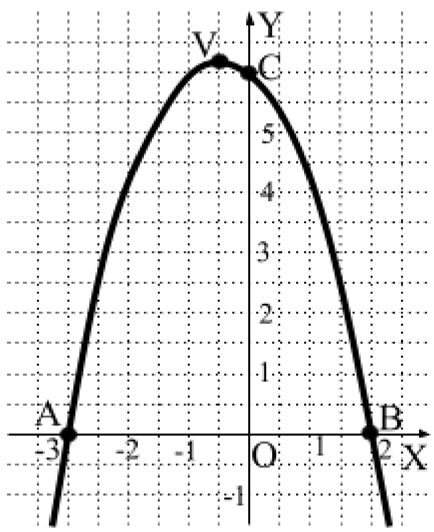
$y'(x) =- 2x - 1.$ $\qquad y'(x) = 0 \Rightarrow - 2x - 1 = 0 \rightarrow x =- \frac{1}{2}.$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) =- \left(- \frac{1}{2}\right)^2 - \left(- \frac{1}{2}\right) + 6 =- \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 6 = \frac{-1+2+24}{4} = \frac{25}{4} \Rightarrow V\left(- \frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right).$$

Los puntos de corte con el eje X de la parábola son los siguientes:

$$- x^2 - x + 6 = 0;\ x^2 + x - 6 = 0;\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_1 =- 3,\ x_2 = 2 \Rightarrow A(- 3, 0)$ y $B(2, 0)$.



La representación gráfica, aproximada, de la situación se indica en la figura adjunta.

Analíticamente se deduce el valor de la función para x = 0: $f(0) = 6$, así como los valores de x que anulan la función, que son x = -3 y x = 2, pero como tiene que ser $0 \leq x \leq 2$, solamente vale el valor positivo de x.

Gráficamente los valores pedidos son los puntos C y B, respectivamente.

$b)$

La función producto $P(x) = x \cdot y = x \cdot \left(-x^2 - x + 6\right) = -x^3 - x^2 + 6x.$

$P'(x) = -3x^2 - 2x + 6.$

La condición necesaria para que una función tenga un máximo en un punto es que se anule su primera derivada y sea negativa su segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$P'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 - 2x + 6 = 0;\ 3x^2 + 2x - 6 = 0;\ x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+72}}{2 \cdot 3} =$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{76}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 \cdot 19}}{6} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{19}}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{19}}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{-1-\sqrt{19}}{3},\ x_2 = \frac{-1+\sqrt{19}}{3}.$$

La solución $x_1 = \frac{-1-\sqrt{19}}{3}$ se deshecha por no cumplir la condición $0 \leq x \leq 2$.

$$\underline{El\ producto\ y \cdot x\ es\ máximo\ para\ x = \frac{-1+\sqrt{19}}{3}.}$$

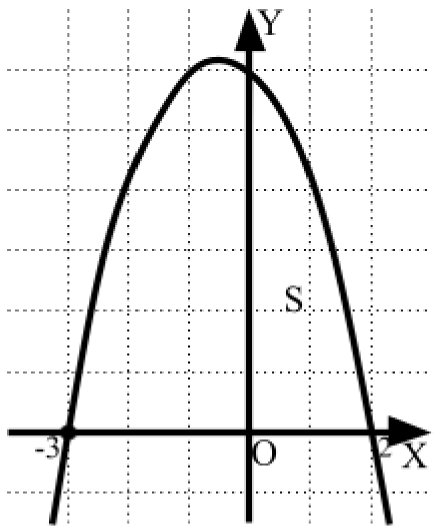
El valor del producto máximo $y \cdot x$ es el siguiente, considerando el valor aproximado de $x = \frac{-1+\sqrt{19}}{3} \cong 1,12$:

$$P(1,12) = -1,12^3 - 1,12^2 + 6 \cdot 1,12 = -1,40 - 1,25 + 6,72 = 4,07,$$

$$\underline{El\ valor\ máximo,\ aproximado\ del\ producto\ y \cdot x\ es\ 4,07.}$$

$c)$

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:



$$S = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 \left(-x^2 - x + 6\right)dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x \right]_0^2 = \left(-\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} + 6\cdot 2 \right) - 0 =$$

$$= -\frac{8}{3} - 2 + 12 = 10 - \frac{8}{3} = \frac{30-8}{3} = \frac{22}{3}.$$

$$\underline{S = \frac{22}{3} u^2.}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

JUNIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se elegirá solamente UNA de los dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de la opción. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberían estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

1º) Se da el sistema de ecuaciones $\{ax - z = a \quad 2x + ay + z = 1 \; 2x + z = 2$, donde a es un parámetro real. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) Los valores del parámetro a para los cuales el sistema es incompatible.

b) Todas las soluciones del sistema cuando éste sea compatible indeterminado.

c) Las soluciones del sistema cuando $a =- 1$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A = (a\,0\ -1\ 2\,a\,1\ 2\,0\,1)$ y $A' = (a\,0\ -1\ 2\,a\,1\ 2\,0\,1\quad a\,1\,2)$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$|A| = |a\,0\ -1\ 2\,a\,1\ 2\,0\,1| = a^2 + 2a = 0;\ a(a+2) = 0 \Rightarrow a_1 = 0,\ a_2 =- 2$

.

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$Para\, \{a \neq 0\ a \neq -2\} \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.$

$Para\ a = 0\ es\ A' = (0\,0\ -1\ 2\,0\,1\ 2\,0\,1\quad 0\,1\,2) \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow |0\ -1\ 0\ 2\ 1\ 1\ 2\ 1\ 2$

$= |2\ 1\ 2\ 2| = 4 - 2 = 2 \neq 0 \Rightarrow Rang\ A' = 3.$

$\underline{Para\ a = 0 \Rightarrow Rang\ A = 2,\ Rang\ A' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

$Para\ a =- 2\ es\ A' = (-\ 2\ 0\ \ -1\ 2\ \ -2\ 1\ 2\ 0\ 1\ \ \ -2\ 1\ 2) \Rightarrow \{F_1 =- F_3\} \Rightarrow Rang\ A' =$
.

$\underline{Para\ a =- 2 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < n^{o}\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

$b)$

Para $a =- 2$ el sistema resulta $\{-\ 2x - z =- 2\ \ \ 2x - 2y + z = 1\ 2x + z = 2$, que es equivalente al sistema $\{2x - 2y + z = 1\ 2x + z = 2$, que es compatible indeterminado.

Haciendo $x = \lambda$ es $z = 2 - 2\lambda$.
$2\lambda - 2y + 2 - 2\lambda = 1;\ \ 2y = 1;\ \ y = \frac{1}{2}.$

$\underline{Para\ a =- 2\ las\ soluciones\ son: x = \lambda,\ y = \frac{1}{2},\ z = 2 - 2\lambda,\ \forall\lambda \in R.}$

$c)$

Para $a =- 1$ el sistema resulta: $\{-\ x - z =- 1\ \ \ 2x - y + z = 1\ 2x + z = 2$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|-1\ 0\ -1\ 1\ -1\ 1\ 2\ 0\ 1|}{-1\cdot(-1+2)} = \frac{-|-1\ -1\ 2\ 1|}{-1} = \frac{-(-1+2)}{-1} = 1.$$

$$y = \frac{|-1\ -1\ -1\ 2\ 1\ 1\ 2\ 2\ 1|}{-1} = \frac{-1-4-2+2+2+2}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

$$z = \frac{|-1\ 0\ -1\ 2\ -1\ 1\ 2\ 0\ 2|}{-1} = \frac{-|-1\ -1\ 2\ 2|}{-1} = \frac{0}{-1} = 0.$$

$\underline{Para\ a =- 1\ las\ soluciones\ del\ sistema\ son: x = 1,\ y = 1,\ z = 0.}$

****

2º) Se dan las rectas $r \equiv \{x - 2y + z + 3 = 0\ 3x + y - z + 1 = 0$ y $s \equiv \{x = 1\ \ \ \ y = 2a\ \ \ z = a - 2$.

Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

$a)$ La recta t paralela a r que pasa por el punto $P(0,\ 1,\ 0)$.

b) El plano π que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s.

c) La distancia entre las rectas r y s.

----

a)

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$r \equiv \{x - 2y + z + 3 = 0 \; 3x + y - z + 1 = 0 \Rightarrow y = \lambda \Rightarrow x + z = -3 + 2\lambda \; 3x - z =$

$x = -1 + \frac{1}{4}\lambda;\; z = -3 + 2\lambda + 1 - \frac{1}{4}\lambda = -2 + \frac{7}{4}\lambda.$

$r \equiv \{x = -1 + \frac{1}{4}\lambda \; y = \lambda \quad z = -2 + \frac{7}{4}\lambda$ o mejor: $r \equiv \{x = -1 + \lambda \;\; y = 4\lambda \quad z = -2 + 7\lambda$.

Un vector director de r es $\vec{v}_r = (1,\ 4,\ 7)$.

La recta t es, dada por unas ecuaciones continuas: $\underline{t \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{7}}$.

b)

Dos puntos de r son $A(-1,\ 0,\ -2)$ y $B(0,\ 4,\ 5)$.

Los puntos A y B determinan el vector: $\vec{AB} = [B - A] = (1,\ 4,\ 7)$.

Un vector director de s es $\vec{v}_s = (0,\ 2,\ 1)$.

El plano π pedido tiene la siguiente ecuación general:

$\pi\left(A;\ \vec{AB},\ \vec{v}_s\right) \equiv |x + 1 \; y \; z + 2 \; 1 \; 4 \; 7 \; 0 \; 2 \; 1| = 0;$

$4(x + 1) + 2(z + 2) - 14(x + 1) - y = 0;\; -10(x + 1) + 2(z + 2) - y = 0;$

$-10x - 10 + 2z + 4 - y = 0.$

$$\underline{\pi \equiv 10x + y - 2z + 6 = 0}.$$

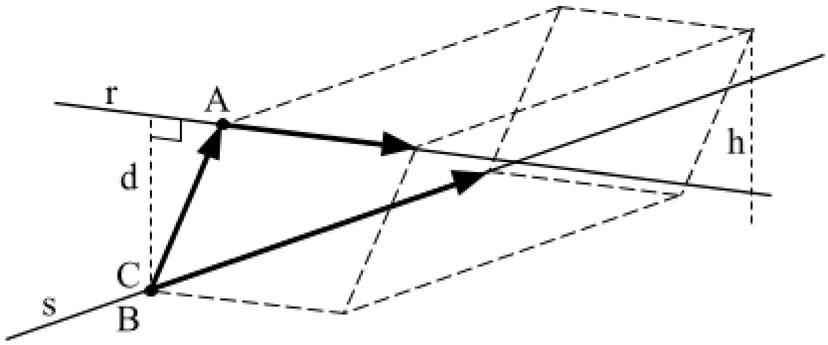
c)

Las rectas r y s se cruzan o se cortan por ser linealmente independientes sus vectores directores $\vec{v}_r = (1,\ 4,\ 7)$ y $\vec{v}_s = (0,\ 2,\ 1)$.

Es de suponer que se cruzan; en el caso de que se corten, su distancia sería 0.

Un punto de s es $C(1,\ 0,\ \ -\ 2)$.

Para una mejor comprensión se hace el esquema adjunto.



Se determina un paralelepípedo cuyas dimensiones son los vectores directores de las rectas $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ y el vector $\vec{m}$.

$$\vec{m} = \vec{AC} = C - A = (1,\ 0,\ \ -\ 2) - (-\ 1,\ 0,\ \ -\ 2) = (2,\ 0,\ 0).$$

El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observar que la altura h es igual a la distancia d pedida entre las rectas.

Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$V = \vec{v}_r \cdot \left(\vec{v}_s \times \vec{m}\right) = \left|\vec{v}_r \times \vec{v}_s\right| \cdot h = \left|\vec{v}_r \times \vec{v}_s\right| \cdot d \Rightarrow d = \frac{\left|\vec{v}_r \cdot \left(\vec{v}_s \times \vec{m}\right)\right|}{\left|\vec{v}_r \times \vec{v}_s\right|}.$$

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = |i\ j\ k\ 1\ 4\ 7\ 0\ 2\ 1\ | = 4i + 2k - 14i - j = -\ 10i - j + 2k = (-\ 10,\ \ -\ 1,\ 2$$
.

$$d(r,\ s) = \frac{\left|\vec{v}_r \cdot \left(\vec{v}_s \times \vec{m}\right)\right|}{\left|\vec{v}_r \times \vec{v}_s\right|} = \frac{||1\ 4\ 7\ 0\ 2\ 1\ 2\ 0\ 0\ ||}{|(-10, 1, 2)|} = \frac{|8-28|}{\sqrt{(-10)^2+(-1)^2+2^2}} = \frac{20}{\sqrt{100+1+4}} = \frac{20}{\sqrt{105}} = \frac{20\sqrt{105}}{105}$$
.

$$\underline{d(r,\ s) = \frac{5\sqrt{105}}{21}\ unidades.}$$

****

3º) Se da la función f definida por $f(x) = \frac{1}{x^2-5x+6}$.

Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) Dominio y asíntotas de la función f.

b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f.

c) El valor de $a > 4$ para el que el área de la superficie limitada por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0,\ x = 4$ y $x = a$ es $L(3/2)$.

----

a)

Por tratarse de una función racional su dominio es el conjunto de los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$x^2 - 5x + 6 = 0;\ \ x = \frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2} = \frac{5\pm\sqrt{1}}{2} = \frac{5\pm1}{2} \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = 3.$$

$$\underline{D(f) \Rightarrow R - \{2,\ 3\}}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito. En el caso de funciones racionales, son los valores reales de x que anulan el denominador.

$$\underline{Las\ rectas\ x = 2\ y\ x = 3\ son\ asíntotas\ verticales}.$$

Asíntotas horizontales: Son de la forma y = k; son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a $\pm\infty$:

$$k = f(x) = \frac{1}{x^2-5x+6} = 0\ .$$

$$\underline{La\ recta\ y = 0\ (eje\ X)\ es\ asíntota\ horizontal\ de\ la\ función.}$$

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, $\{m\neq0,\ m\neq\infty\}$ siendo:

$$m = \frac{f(x)}{x}\ \text{ y } n = \left[\frac{f(x)}{x} - mx\right].$$

$$m = \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{1}{x^2-5x+6}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x\left(x^2-5x+6\right)} = 0.$$

$$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ oblicuas}.$$

b)

Una función es creciente o decreciente cuando el valor de su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{-(2x-5)}{\left(x^2-5x+6\right)^2} = \frac{5-2x}{\left(x^2-5x+6\right)^2}.$$

Por ser $\left(x^2 - 5x + 6\right)^2 > 0,\ \forall x \in R,\ f'(x)$ es positiva o negativa cuando lo sea la expresión $5 - 2x$.

$$5 - 2x = 0;\ \ 2x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{2} \Rightarrow \{f'(x) > 0 \Rightarrow x < \frac{5}{2}\ f'(x) < 0 \Rightarrow x > \frac{5}{2}\ .$$

Teniendo en cuenta el dominio de la función, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon (-\infty, 2) \cup \left(2, \frac{5}{2}\right).}$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon \left(\frac{5}{2}, 3\right) \cup (3, +\infty).}$$

$c)$

Para valores de $x \geq 4$, todas las ordenadas de $f(x) = \frac{1}{x^2-5x+6}$ son positivas, por lo cual es:

$$\int_4^a f(x) \cdot dx = L\frac{3}{2};\ \ \int_4^a \frac{1}{x^2-5x+6} \cdot dx = L\frac{3}{2}. \quad (*)$$

Se resuelve previamente la integral indefinida:

$$I = \int \frac{1}{x^2-5x+6} \cdot dx = \int \frac{1}{(x-2)(x-3)} \cdot dx = \int \left(\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}\right) \cdot dx. \quad (1)$$

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{Ax-3A+Bx-2B}{x^2-5x+6} = \frac{(A+B)x+(-3A-2B)}{x^2-5x+6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad A + B = 0\ \ -3A - 2B = 1\} - 2A - 2B = 0 \quad 3A + 2B =- 1\} \Rightarrow A =-$$

.

Sustituyendo en (1) los valores de A y B obtenidos:

$$I = \int \frac{1}{x^2-5x+6} \cdot dx = \int \left(\frac{-1}{x-2} + \frac{1}{x-3}\right) \cdot dx =- L|x - 2| + L|x - 3| = L\left|\frac{x-3}{x-2}\right|.$$

Considerando el valor obtenido de I, la expresión (*) resulta:

$\left[L\left|\frac{x-3}{x-2}\right|\right]_4^a = L\frac{3}{2} \Rightarrow \left[\left|\frac{x-3}{x-2}\right|\right]_4^a = \frac{3}{2}$. Por ser $a > 4$:

$$L\frac{a-3}{a-2} - L\frac{4-3}{4-2} = L\frac{3}{2};\ L\frac{a-3}{a-2} - (L1 - L2) = L3 - L2;\ L\frac{a-3}{a-2} + L2 = L3 - L2;$$

$$L\frac{a-3}{a-2} = L3 - 2L2 = L3 - L4 = L\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{a-3}{a-2} = \frac{3}{4};\ 4a - 12 = 3a - 6.$$

$$\underline{a = 6}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Se da la matriz $A = \left(\sqrt{5}\ 0\ 0\ 0\ 1\ -\ 2\ 0\ 2\ 1\right)$.

Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) La comprobación de que $A^{-1} = 5^{-1} \cdot A^{t}$, siendo A^{t} la matriz traspuesta de A.

b) Los valores del parámetro real λ para los cuales $A - \lambda I$ no es invertible, siendo I la matriz identidad de orden 3.

c) El determinante de una matriz cuadrada B cuyo determinante es mayor que 0 y verifica la ecuación $B^{-1} = B^{t}$.

----

a)

La inversa de A se obtiene por la adjunta de la traspuesta: $A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^{t}}{|A|}$.

$|A| = \left|\sqrt{5}\ 0\ 0\ 0\ 1\ -\ 2\ 0\ 2\ 1\right| = \sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$. $A^{t} = \left(\sqrt{5}\ 0\ 0\ 0\ 1\ 2\ 0\ -\ 2\ 1\right)$

.

$Adj.\ de\ B^{t} = \left(|1\ 2\ -\ 2\ 1|\ -|0\ 2\ 0\ 1|\ |0\ 1\ 0\ -\ 2|\ -|0\ 0\ -\ 2\ 1|\ \left|\sqrt{5}\ 0\ 0\ 1\right|\ -\left|\sqrt{5}\ 0\right.\right.$

.

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^{t}}{|A|} = \frac{\left(5\ 0\ 0\ 0\ \sqrt{5}\ 2\sqrt{5}\ 0\ -2\sqrt{5}\ \sqrt{5}\right)}{5\sqrt{5}} = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\ 0\ 0\ 0\ \frac{1}{5}\ \frac{2}{5}\ 0\ -\ \frac{2}{5}\ \frac{1}{5}\right).$$

$$5^{-1} \cdot A^{t} = \frac{1}{5} \cdot \left(\sqrt{5}\ 0\ 0\ 0\ 1\ 2\ 0\ -\ 2\ 1\right) = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\ 0\ 0\ 0\ \frac{1}{5}\ \frac{2}{5}\ 0\ -\ \frac{2}{5}\ \frac{1}{5}\right).$$

$\underline{Queda\ probado\ que\ A^{-1} = 5^{-1} \cdot A^{t}}$.

b)

$A - \lambda I = \left(\sqrt{5}\ 0\ 0\ 0\ 1\ -\ 2\ 0\ 2\ 1\right) - \left(\lambda\ 0\ 0\ 0\ \lambda\ 0\ 0\ 0\ \lambda\right) = \left(\sqrt{5} - \lambda\ 0\ 0\ 0\ 1 - \lambda\ -\right.$

.

Una matriz no es invertible cuando su determinante es cero:

$|A - \lambda I| = \left|\sqrt{5} - \lambda\ 0\ 0\ 0\ 1 - \lambda\ -\ 2\ 0\ 2\ 1 - \lambda\right| = 0;\ \left(\sqrt{5} - \lambda\right)(1 - \lambda)^{2} + 4\left(\sqrt{5} - \lambda\right) =$

$\left(\sqrt{5}-\lambda\right)\left[(1-\lambda)^2+4\right]=0;\ \left(\sqrt{5}-\lambda\right)\left(1-2\lambda+\lambda^2+4\right)=0;$

$\left(\sqrt{5}-\lambda\right)\left(\lambda^2-2\lambda+5\right)=0 \Rightarrow \lambda^2-2\lambda+5>0,\ \forall\lambda\in R \Rightarrow \lambda=\sqrt{5}.$

$$\underline{La\ matriz\ A-\lambda I\ no\ es\ invertible\ para\ \lambda=\sqrt{5}.}$$

$c)$

$B^{-1}=B^t$. Multiplicando por la izquierda los dos términos por B:

$B\cdot B^{-1}=B\cdot B^t;\ \ I=B\cdot B^t.$

Teniendo en cuenta que el determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes de las matrices y que $|I|=1$; también que el determinante de una matriz es igual que el determinante de su matriz traspuesta:

$|I|=\left|B\cdot B^t\right|;\ \ 1=|B|\cdot\left|B^t\right|=|B|\cdot|B|=(|B|)^2 \Rightarrow |B|=\pm\sqrt{1}$; como tiene que ser $|B|>0$:

$$\underline{|B|=1}.$$

****

2º) Se da el plano $\pi \equiv 6x + 3y + 2z - 12 = 0$ y los puntos $A(1,\ 0,\ 0)$, $B(0,\ 2,\ 0)$ y $C(0,\ 0,\ 3)$.

Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) La ecuación implícita del plano σ que pasa por los puntos A, B y C.

b) El área del triángulo de vértices A, B y C.

c) Un punto P del plano π y el volumen del tetraedro cuyos vértices son P, A, B y C.

----

a)

Los puntos A, B y C determinan los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(0,\ 2,\ 0) - (1,\ 0,\ 0)] = (-1,\ 2,\ 0).$$

$$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(0,\ 0,\ 3) - (1,\ 0,\ 0)] = (-1,\ 0,\ 3).$$

$$\sigma\left(A;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right) \equiv \begin{vmatrix} x - 1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0;\ \ 6(x - 1) + 2z + 3y = 0$$

.

$$\underline{\sigma \equiv 6x + 3y + 2z - 6 = 0}.$$

b)

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan los puntos:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\cdot|6i + 2k + 3j| =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{36 + 4 + 9} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{49} = \frac{7}{2}.$$

$$\underline{S_{ABC} = \frac{7}{2}\ u^2}.$$

c)

Un punto P del plano $\pi \equiv 6x + 3y + 2z - 12 = 0$ es, por ejemplo, $P(2,\ 0,\ 0)$.

$$\overrightarrow{AP} = [P - A] = [(2,\ 0,\ 0) - (1,\ 0,\ 0)] = (1,\ 0,\ 0)$$

El volumen de un tetraedro es un sexto del producto mixto de los tres vectores que los determinan:

$$V_{ABCP} = \frac{1}{6}\cdot\left|\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OP}\right| = \frac{1}{6}\cdot|-\ 1\ 2\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 3\ 1\ 0\ 0\,| = \frac{1}{6}\cdot 6\ = \underline{1\ u^{3}}.$$

****

3º) Cada día, una planta productora de acero vende x toneladas de acero de baja calidad e y toneladas de acero de alta calidad. Por restricciones del sistema de producción debe suceder que $y = \frac{23-5x}{10-x}$, siendo $0 < x < \frac{23}{5}$. El precio de una tonelada de acero de alta calidad es de 900 euros y el precio de una tonelada de acero de baja calidad es de 300 euros.

Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) Los ingresos obtenidos en un día en función de x.

b) Cuántas toneladas de cada tipo de acero se deben vender en un día para que los ingresos obtenidos ese día sean máximos.

c) El ingreso máximo que se puede obtener por las ventas de acero en un día.

----

a)

$$Ingresos = I(x) = 300 \cdot x + 900 \cdot y = 300 \cdot x + 900 \cdot \frac{23-5x}{10-x} =$$

$$= 300 \cdot \left(x + \frac{69-15x}{10-x}\right) = 300 \cdot \frac{10x-x^2+69-15x}{10-x} = 300 \cdot \frac{-x^2-5x+69}{10-x}.$$

$$\underline{I(x) = 300 \cdot \frac{x^2+5x-69}{x-10}}.$$

b)

Para que los ingresos sean máximos es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$I'(x) = 300 \frac{(2x+5)\cdot(x-10)-\left(x^2+5x-69\right)\cdot 1}{(x-10)^2} = 300 \frac{2x^2-20x+5x-50-x^2-5x+69}{(x-10)^2} =$$

$$= 300 \frac{x^2-20x+19}{(x-10)^2}.$$

$$I'(x) = 0 \Rightarrow 300 \frac{x^2-20x+19}{(x-10)^2} = 0; \; x^2 - 20x + 19 = 0; \; x = \frac{20 \pm \sqrt{400-76}}{2} =$$

$$= \frac{20 \pm \sqrt{324}}{2} = \frac{20 \pm 18}{2} = 10 \pm 9 \Rightarrow x_1 = 1, \; x_2 = 19.$$

Por ser $0 < x < \frac{23}{5}$ la solución $x = 19$ no tiene sentido lógico (para mínimo).

$Para\ x = e\ es\ y = \frac{23-5}{10-1} = \frac{18}{9} = 2$. Los ingresos máximos se obtienen:

$\underline{Vendiendo\ al\ día\ 1\ y\ 2\ Tm\ de\ acero\ de\ baja\ y\ alta\ calidad,\ respectivamente}.$

$c)$

$$I(1) = 300 \cdot \frac{1^2+5\cdot1-69}{1-10} = 300 \cdot \frac{-63}{-9} = 300 \cdot 7 = 2.100$$

$\underline{El\ ingreso\ máximo\ al\ día\ es\ de\ 2.100\ euros}.$

****