MATEMÁTICAS aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2016

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS DE TODAS LAS COMUNIDADES AUTÓNOMAS

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

Textos Marea Verde

Antes Selectividad, ahora tiene distintos nombres:

ABAU (Galicia),

EAU (País Vasco),

EBAU (Asturias, Cantabria, Castilla y León, Extremadura, Islas Canarias, La Rioja y Murcia),

EvAU (Aragón, Castilla-La Mancha y Navarra),

EVAU (Madrid),

PAU (Cataluña y Valencia) ,

PBAU (Islas Baleares) o

PevAU (Andalucía): Prueba de acceso y admisión a la Universidad

TEXTOS MAREA VERDE

I.S.B.N. - 13: 978-84-608-8980-9

I.S.B.N. - 10: 84-608-8980-9

Textos Marea Verde

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA

JUNIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones propuestas y conteste los ejercicios de la opción elegida. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin su ayuda. Justifique las respuestas.

OPCIÓN A

1º) Las columnas de la matriz P indican los respectivos precios de tres artículos A_1, A_2 y A_3 en dos comercios, C_1 (fila 1) y C_2 (fila 2): $P = (25\ 20\ 15\ 23\ 25\ 17\ )$. Katy desea comprar 2 unidades del artículos A_1, 1 de A_2 y 3 de A_3. Manuel desea comprar 5 unidades del A_1, 1 de A_2 y 1 de A_3. Han dispuesto esas compras en la matriz $Q = (2\ 1\ 3\ 5\ 1\ 1\ )$.

a) Calcule $P \cdot Q^t$ y $Q \cdot P^t$ e indique el significado de los elementos de las matrices resultantes.

b) A la vista de lo obtenido en el apartado anterior, ¿dónde les interesa hacer la compra a cada uno?

----

a)

$P \cdot Q^t = (25\ 20\ 15\ 23\ 25\ 17\ ) \cdot (2\ 5\ 1\ 1\ 3\ 1\ ) = (50 + 20 + 45\ 125 + 20 + 15\ 46 + 25$
.

$$\underline{P \cdot Q^t = (115\ 160\ 122\ 167\ )}.$$

La primera columna representa el importe de la compra de Katy en los comercios C_1 y C_2, respectivamente.

La segunda columna representa el importe de la compra de Manuel en los comercios C_1 y C_2, respectivamente.

$$Q \cdot P^t = (2\ 1\ 3\ 5\ 1\ 1\ ) \cdot (25\ 23\ 20\ 25\ 15\ 17\ ) = (50\ +\ 20\ +\ 45\ 46\ +\ 25\ +\ 51\ 125$$
.

$$\underline{Q \cdot P^t = (115\ 122\ 160\ 167\ )}.$$

La primera columna representa los ingresos del comercio C_1 por las ventas hechas a Katy y Manuel, respectivamente.

La segunda columna representa los ingresos del comercio C_2 por las ventas hechas a Katy y Manuel, respectivamente.

$b)$

$$\underline{A\ Katy\ se\ interesa\ comprar\ en\ el\ 1^{er}\ comercio\ y\ a\ Manuel,\ en\ el\ segundo}.$$

****

2º) a) Calcule los valores de a y b para que la función $f(x) = \{ \frac{b}{2-x} \ \ si \ \ x\leq 1 \ ax^2 - 3x + 1 \ si \ x > 1$ sea derivable en el punto de abscisa $x = 1$.

b) Para $a = 1 \ y \ b = 2$, estudie su monotonía y determine las ecuaciones de sus asíntotas, si existen.

----

a)

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto.

La función $f(x)$ es continua en R, $\forall a, \ b\in R$, excepto para el valor de $x = 1$. Se trata de determinar los valores de α y b para que sea derivable para ese valor.

Para que la función sea continua en $x = 1$ es necesario que sus límites laterales sean iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$f(x) \ = \frac{b}{2-x} \ = \frac{b}{2-1} = b = f(1)$ $\qquad f(x) \ = \left(ax^2 - 3x + 1\right) \ = a -$

. (1)

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas laterales existen y son iguales en ese punto.

$f^{'}(x) = \{ \ \frac{b}{(2-x)^2} \ \ si \ \ x\leq 1 \ 2ax - 3 \ \ si \ \ x > 1 \ \Rightarrow f^{'}\left(1^{-}\right) = b \qquad f^{'}\left(1^{+}\right) = 2a - 3 \} \Rightarrow b =$

. (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$b = a - 2 \ \ b = 2a - 3 \} \Rightarrow a - 2 = 2a - 3 \Rightarrow \underline{a = 1, \ b =- 1}$.

b)

Para $a = 1 \ y \ b = 2$ la función es $f(x) = \{\frac{2}{2-x} \ \ si \ \ x\leq 1 \ x^2 - 3x + 1 \ si \ x > 1$ y la función derivada es $f^{'}(x) = \{ \ \frac{2}{(2-x)^2} \ \ si \ \ x\leq 1 \ 2x - 3 \ \ si \ \ x > 1$.

Teniendo en cuanta, según el apartado anterior, que la función no es discontinua para $x = 1$, su dominio es $D(f)\Rightarrow R - \{1\}$.

Sabiendo que $\frac{2}{(2-x)^2} > 0, \ \forall x\in(- \infty, \ 1)$ y que $\{2x - 3 < 0 \ \ si \ 1 < x < 1,5 \ 2x - 3 > 0 \ \ si \ \ x > 1,5$, los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento\colon f'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon (-\infty, 1) \cup (1'5, +\infty)}.$$

$$\underline{Decrecimiento\colon f'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon (1, 1'5)}.$$

La función $f(x)$ tiene las siguientes asíntotas:

1.- Para $-\infty < x < 1$ la función es racional: $\frac{2}{2-x}$. No tiene asíntotas verticales porque el valor que anula su denominador (x = 2) no pertenece al dominio que se estudia.

Sin embargo tiene asíntota horizontal, por ser: $\frac{2}{2-x} = \frac{2}{\infty} = 0$.

$$\underline{El\ eje - X\ es\ asíntota\ horizontal\ de\ la\ función\ f(x)}.$$

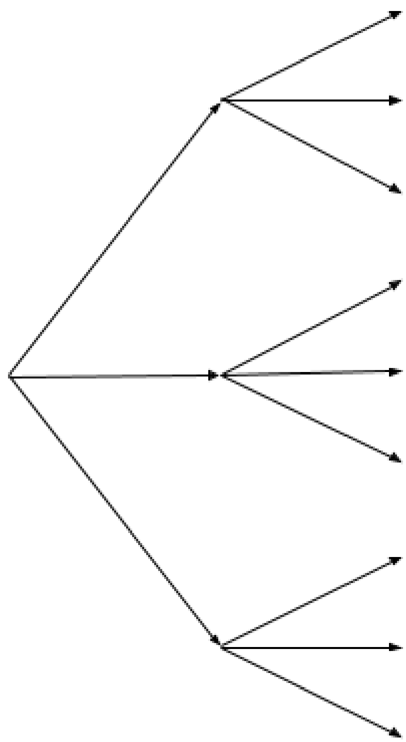
2.- Para $x > 1$ la función es polinómica y **no tiene ningún tipo de asíntotas**.

****

3º) Marta tiene dos trajes rojos, un traje azul y uno blanco. Además, tiene un par de zapatos de color rojo, otro de color azul y dos pares blancos. Si decide aleatoriamente qué ponerse, determine las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) Llevar un traje rojo y unos zapatos blancos.

b) No ir vestida de blanco. c) Calzar zapatos azules o blancos.



a)

$$P_{T_{R,}Z_B} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\frac{1}{4}}.$$

b)

No ir vestida de blanco es el suceso contrario de "ir vestida de blanco" por lo cual, la probabilidad pedida es la siguiente:

$$P_{\overline{B}} = 1 - P_B = 1 - P_{T_{B,}Z_B} = 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{8} = \underline{\frac{7}{8}}.$$

c)

Calzar zapatos azules o blancos es el suceso contrario de "calzar zapatos rojos" por lo cual, la probabilidad pedida es la siguiente:

$$P_{Z_{B\,o\,A}} = 1 - P_{Z_R} = 1 - \left(P_{T_{R,}Z_R} + P_{T_{A,}Z_R} + P_{T_{B,}Z_R}\right) = 1 - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) =$$

$$= 1 - \frac{2+1+1}{16} = 1 - \frac{4}{16} = 1 - \frac{1}{4} = \underline{\frac{3}{4}}.$$

****

4º) Se desea estimar la media de una variable aleatoria Normal cuya desviación típica es $\sigma = 2,5$. Para ello, se toma una muestra aleatoria, obteniéndose los siguientes datos:

18 18,5 14 16,5 19 20 20,5 17 18,5 18

a) Determine un intervalo de confianza al 96 % para la media poblacional.

b) ¿Cuál es el error máximo cometido con esa estimación?

c) Con el mismo nivel de confianza, si queremos que el error máximo sea inferior a 1, ¿qué tamaño muestral mínimo debemos tomar?

----

a)

$$\overline{x} = \frac{18+18,5+14+16,5+19+20+20,5+17+18,5+18}{10} = \frac{180}{10} = 18.$$

$1 - \alpha = 0,96 \rightarrow \alpha = 1 - 0,96 = 0,04 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,02} = 2,055.$

$(1 - 0,02 = 0,9800 \rightarrow z = 2,055).$

Conocemos: $\overline{x} = 18,\ \sigma = 2,5;\ n = 10;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,02} = 2,055.$

Se aplica la fórmula adecuada que nos da el intervalo de confianza pedido, que es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(18 - 2,055 \cdot \frac{2,5}{\sqrt{10}}, 18 + 2,055 \cdot \frac{2,5}{\sqrt{10}}\right);\ (18 - 2,055 \cdot 0,791,\ 18 + 2,055 \cdot 0,791);$

$(18 - 1,625,\ 18 + 1,625);\ \ (16'375,\ 19'625).$

$\underline{Intervalo\ de\ confianza\text{: } \left(16'375,\ 19'625\right)}.$

b)

$$E = \frac{19,625 - 16,375}{2} = \frac{3,250}{2} = 1,625.$$

$\underline{El\ error\ máximo\ que\ se\ comete\ es\ de\ 1,625}.$

c)

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{E} \right)^2 = \left(\frac{2{,}055 \cdot 2{,}5}{1} \right)^2 = 5,1375^2 = 26,39.$

$\underline{La\ muestra\ debe\ ser\ como\ mínimo\ de\ 27}.$

****

OPCIÓN B

1º) Un taller fabrica y vende dos tipos de alfombras, de seda y de lana. Para la elaboración de una unidad se necesita un trabajo manual de 2 horas para el primer tipo y de 3 horas para el segundo y de un trabajo de máquina de 2 horas para el primer tipo y de una hora para el segundo. Por cuestiones laborales y de planificación, se dispone de hasta 600 horas al mes para el trabajo manual y de hasta 480 horas al mes para el destinado a la máquina. Si el beneficio por unidad para cada tipo de alfombra es de 150 euros y 100 euros, respectivamente, ¿cuántas alfombras de cada tipo debe elaborar para obtener el máximo de beneficio? ¿A cuánto asciende el mismo?

Sean x e y el número de alfombras de seda y lana que se elaboran, respectivamente.

Las condiciones del ejercicio se establecen en el siguiente sistema de inecuaciones: $\left.\begin{array}{l} 2x+3y\leq 600 \\ 2x+y\leq 480 \\ x\geq 0,\ y\geq 0 \end{array}\right\}$. La función de rendimiento es $F(x,\ y) = 150x + 100y$.

x	300	0
y	0	200

①$\Rightarrow 2x + 3y \leq 600 \Rightarrow y \leq \frac{600-2x}{3} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

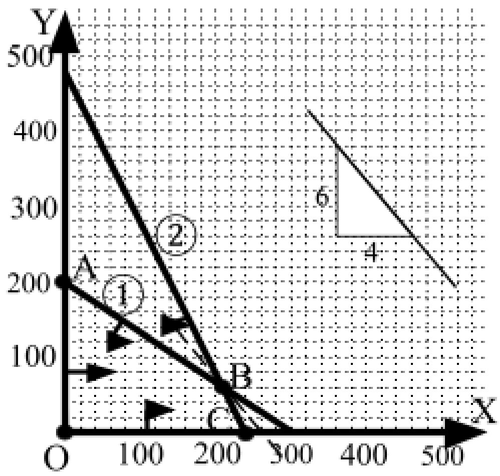
x	240	0
y	0	480

②$\Rightarrow 2x + y \leq 480 \Rightarrow y \leq 480 - 2x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

La región factible es la zona sombreada de la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible, además de O(0, 0), son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 200 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,\ 200).$



$B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 600 \\ 2x + y = 480 \end{array}\right\} \Rightarrow B(210,\ 60).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 240 \\ 2x + y = 480 \end{array}\right\} \Rightarrow C(240,\ 0).$

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 200) = 150 \cdot 0 + 100 \cdot 200 = 0 + 20.000 = 20.000.$

$B \Rightarrow f(210,\ 60) = 150 \cdot 210 + 100 \cdot 60 = 31.500 + 6.000 = 37.500.$

$C \Rightarrow f(240,\ 0) = 150 \cdot 240 + 100 \cdot 0 = 36.000 + 0 = 36.000.$

El máximo se produce en el punto B.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = 150x + 100y = 0 \Rightarrow y = -\frac{150}{100}x \Rightarrow m = -\frac{6}{4}.$

$\underline{La\ ganancia\ es\ máxima\ elaborando\ 210\ alfombras\ de\ seda\ y\ 60\ de\ lana}.$

$\underline{El\ benefico\ máximo\ es\ de\ 37.500\ euros}.$

****

2º) La cantidad, C, que una entidad bancaria dedica a créditos depende de su liquidez, x, según la función $C(x) = \{\frac{150+5x}{100}\ si\ 10 \le x \le 50\ \frac{200+10x}{25+3x}\ si\ x > 50$, donde C y x están expresadas en miles de euros.

a) Justifique que C es una función continua.

b) ¿A partir de qué liquidez decrece la cantidad dedicada a créditos? ¿Cuál es el valor máximo de C?

c) Calcule la asíntota horizontal e interprétela en el contexto del problema.

----

a)

La función $C(x)$ es continua $\forall x \in R$, excepto para $x = 50$, cuya continuidad se estudia a continuación.

Para que la función sea continua en $x = 50$ es necesario que sus límites laterales sean iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$C(x) = \frac{150+5x}{100} = \frac{150+200}{100} = 4 = C(50)\ C(x) = \frac{200+10x}{25+3x} = \frac{200+500}{25+150} = \frac{700}{175} = 4$$

$\Rightarrow C(x) = C(x) = C(50)$.

<u>$Queda\ justificado\ que\ C(x)\ es\ continua\ en\ su\ dominio.$</u>

b)

Siendo $g(x) = \frac{200+10x}{25+3x}$ es:

$$g'(x) = \frac{10(25+3x)-3(200+10x)}{(25+3x)^2} = \frac{250+30x-600-30x}{(25+3x)^2} = \frac{-350}{(25+3x)^2} < 0,\ \forall x \in R.$$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$C'(x) = \{\frac{1}{20}x\ si\ 10 \le x \le 50\ \frac{-350}{(25+3x)^2}\ si\ x > 50$. Siendo $\frac{1}{20}x > 0,\ 10 \le x \le 50$.

<u>$La\ cantidad\ decrece\ cuando\ la\ liquidez\ es\ mayor\ de\ 50.000\ euros.$</u>

Por ser la función $C(x)$ una recta cuando $10 \le x \le 50$, de pendiente positiva, su máximo es para x = 50; como la función es continua y a partir de x = 50 es decreciente, el máximo absoluto se produce para x = 50.

$$C(50) = \frac{150+5\cdot 50}{100} = \frac{150+250}{100} = \frac{400}{100} = 4.$$

$$\underline{La\ cantidad\ máxima\ dedicada\ a\ créditos\ es\ de\ 4.000\ euros}.$$

$c)$

Siendo $C(x) = \frac{200+10x}{25+3x} = \frac{10}{3} = 3,333$:

$$\underline{La\ recta\ y = 3,333\ es\ asíntota\ horizontal\ de\ la\ función}.$$

La asíntota horizontal debe interpretarse que, con el tiempo, la cantidad dedicada a créditos tiende a estabilizarse en la constante de 3.333 euros.

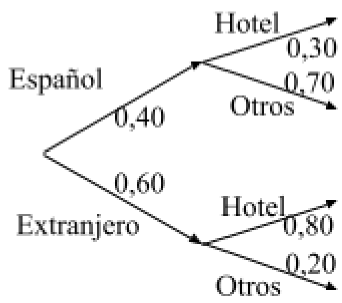
****

3º) En una encuesta sobre la nacionalidad de los veraneantes en un municipio de la costa andaluza, se ha observado que el 40 % de los encuestados son españoles y el 60 % extranjeros, que el 30 % de los españoles y el 80 % de los extranjeros residen en un hotel y el resto en otro tipo de residencia. Se elige al azar un veraneante del municipio.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no resida en un hotel?

b) Si no reside en un hotel, ¿cuál es la probabilidad de que sea español?

c) ¿Son independientes los sucesos "ser extranjero" y "residir en un hotel"?



a)

$$P = 0,28 + 0,12 = \underline{0,40}.$$

b)

$$P = \frac{0,28}{0,28+0,12} = \frac{0,28}{0,40} = \underline{0,70}.$$

c)

Dos sucesos A y B son independientes cuando se cumple lo siguiente:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Sean P_{SE} la probabilidad de "ser extranjero" y P_{RH} la probabilidad de "residir en un hotel".

$$P_{SE} = 0,60. \qquad P_{RH} = 0,12 + 0,48 = 0,50.$$

Los sucesos "ser extranjero" y "residir en un hotel" son independientes cuando se cumple que:

$$P\left(P_{SE} \cap P_{RH}\right) = P\left(P_{RH}\right) \cdot P\left(P_{RH}\right) \Rightarrow 0,48 \neq 0,60 \cdot 0,50 = 0,30.$$

$$\underline{Los\ sucesos\ "ser\ extranjero"\ y\ "residir\ en\ un\ hotel"\ no\ son\ independientes.}$$

****

4º) El peso de los habitantes de una determinada ciudad sigue una ley Normal de media 65 kg y desviación típico 8 kg.

a) ¿Qué distribución sigue la media de los pesos de las muestras de habitantes de tamaño 64 extraídas de esa ciudad?

b) Si se extrae una muestra aleatoria de tamaño 100 de esa ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que el peso medio de esa muestra esté comprendido entre 64 y 65 kg?

----

a)

$$Variable\ X \to N(65,\ 8).$$

$$Para\ n = 64 \to \overline{X} = N\left(65,\ \frac{8}{\sqrt{64}}\right) = \underline{N(65,\ 1)}.$$

b)

$$Para\ n = 100 \to \overline{X} = N\left(65,\ \frac{8}{\sqrt{100}}\right) = N\left(65,\ \frac{8}{10}\right) = N(65,\ 0'8).$$

Tipificando: $Z = \frac{\overline{X}-65}{0,8}$.

$$P(64 \leq \overline{X} \leq 65) = P\left(\frac{64-65}{0,8} \leq \frac{\overline{X}-65}{0,8} \leq \frac{65-65}{0,8}\right) = P\left(\frac{-1}{0,8} \leq \frac{\overline{X}-65}{0,8} \leq \frac{0}{0,8}\right) =$$

$$= P(-\ 1,25 \leq Z \leq 0) = P(Z \leq 0) - P(Z \leq -\ 1,25) = 0,5 - P(Z \geq 1,25) =$$

$$= 0,5 - [1 - P(Z < 1,25)] = 0,5 - 1 + 0,8944 = 1,3944 - 1 = \underline{0,3944}.$$

****

Z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,5	0,6915	0,6050	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7258	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7518	0,7549
0,7	0,7580	0,7612	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7996	0,8023	0,8051	0,8079	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8290	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9310
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9430	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9485	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9700	0,9706

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA

SEPTIEMBRE – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones propuestas y conteste los ejercicios de la opción elegida. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin su ayuda. Justifique las respuestas.

OPCIÓN A

1º) Sean las matrices $A = (1\,2\ -1\ -3)$, $B = (2\ -1\,3\,4\,0\,1)$ $y\,C = (-1\ -1\,0\,2\,3\ -2)$.

a) Resuelva la ecuación matricial $A^2 \cdot X + C = 2B$.

b) ¿Qué dimensiones deben tener las matrices P y Q para que las matrices $(B + C) \cdot P$ y $B \cdot Q \cdot C$ sean cuadradas?

----

a)

$$A^2 \cdot X + C = 2B;\ A^2 \cdot X = 2B - C;\ \left(A^2\right)^{-1} \cdot A^2 \cdot X = \left(A^2\right)^{-1} \cdot (2B - C);$$

$$I \cdot X = \left(A^2\right)^{-1} \cdot (2B - C) \Rightarrow \underline{X = \left(A^2\right)^{-1} \cdot (2B - C)}. \quad (*)$$

$$A^2 = A \cdot A = (1\,2\ -1\ -3) \cdot (1\,2\ -1\ -3) = (-1\ -4\,2\,7).$$

$$\left(A^2/I\right) = (1\,0\,0\,1) \Rightarrow \left\{F_1 \to -F_1\right\} \Rightarrow (-1\,0\,0\,1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_2 \to F_2 - 2F_1\right\} \Rightarrow (-1\,0\,2\,1) \Rightarrow \left\{F_2 \to -F_2\right\} \Rightarrow (-1\,0\ -2\ -1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_1 \to F_1 - 4F_2\right\} \Rightarrow (7\,4\ -2\ -1) \Rightarrow \left(A^2\right)^{-1} = (7\,4\ -2\ -1).$$

$$2B - C = 2 \cdot (2\ -1\,3\,4\,0\,1) - (-1\ -1\,0\,2\,3\ -2) =$$

$$= (4\ -2\,6\,8\,0\,2) - (-1\ -1\,0\,2\,3\ -2) = (5\ -1\,6\,6\ -3\,4).$$

Sustituyendo en (*) los valores de las matrices obtenidas:

$X = \left(A^{2}\right)^{-1}\cdot(2B - C) = (7\ 4\ \ -2\ \ -1\ )\cdot(5\ \ -1\ 6\ 6\ \ -3\ 4\ ) = (59\ \ -19\ 58\ \ -16\ 5$
.

$$\underline{X = (59\ \ -19\ 58\ \ -16\ 5\ \ -16\ )}.$$

$b)$
Teniendo en cuanta que el producto de matrices, en cuanto a dimensiones, tiene que cumplir que: $M_{(a,\,b)}\cdot N_{(b,\,m)} = P_{(a,\,m)}$; la matriz producto tiene el número de filas de la primera matriz y el número de columnas de la segunda.

Como la matriz $(B + C)$ tiene por dimensiones $(B + C)_{(2,\,3)}$, según lo anterior tiene que ser: $(A + B)_{(2,\,3)}\cdot P_{(x,\,y)} = (Producto)_{(2,\,2)} \Rightarrow \underline{P_{(3,\,2)}}$.

$B_{(2,\,3)}\cdot Q_{(x,\,y)}\cdot C_{(2,\,3)} = (Producto)_{(2,\,2)} \Rightarrow \underline{Q_{(3,\,3)}}$.

****

2º) De una función continua y derivable f, se sabe que la gráfica de la función derivada f', es una parábola que pasa por los puntos $A(-1, 0)$ y $B(3, 0)$ y que tiene su vértice en el punto $V(1, -2)$.

a) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f, así como la existencia de sus extremos.

b) Si $f(1) = 2$, encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x = 1$.

Si f' es una parábola, necesariamente $f(x)$ es una función polinómica de tercer grado: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Por contener $f'(x)$ al punto $A(-1, 0) \Rightarrow f'(-1) = 0$:

$3a\cdot(-1)^2 + 2b\cdot(-1) + c = 0;\ \ 3a - 2b + c = 0.$ (1)

Por contener $f'(x)$ al punto $B(3, 0) \Rightarrow f'(3) = 0$:

$3a\cdot 3^2 + 2b\cdot 3 + c = 0;\ \ 27a + 6b + c = 0.$ (2)

Por contener $f'(x)$ al punto $V(1, -2) \Rightarrow f'(1) = -2$:

$3a\cdot 1^2 + 2b\cdot 1 + c = -2;\ \ 3a + 2b + c = -2.$ (3)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1), (2) y (3):

$3a - 2b + c = 0\ \ 27a + 6b + c = 0\ \ 3a + 2b + c = -2\ \}$. Restando a la primera ecuación la tercera:

$-4b = 2;\ \ 2b = -1 \Rightarrow \underline{b = -\frac{1}{2}}$.

$3a + 1 + c = 0\ \ 27a - 3 + c = 0\ \}\ \ 3a + c = -1\ \ 27a + c = 3\ \}\ \ \ -3a - c = 1\ \ 27$

.

$c = -3a + 2b = -\frac{3}{6} - 1 = -\frac{1}{2} - 1 \Rightarrow \underline{c = -\frac{3}{2}}$.

La función resulta: $\underline{f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + d}$.

$a)$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0; \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} =$$

$$= \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2 \Rightarrow x_1 = -1, \ x_2 = 3.$$ (como se esperaba)

Por ser $f'(x)$ una función polinómica, sus raíces dividen su dominio, que es R, en tres intervalos que son, alternativamente, positivos y negativos.

Teniendo en cuenta que $f'(0) = -\frac{3}{2} < 0$, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon (-1, 3)}.$$

$b)$

$$f(1) = 2 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{6} \cdot 1^3 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{3}{2} \cdot 1 + d = 2; \quad \frac{1}{6} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + d = 2;$$

$$1 - 3 - 9 + 6d = 12; \quad 6d = 12 + 11 = 23 \Rightarrow \underline{d = \frac{23}{6}}.$$

$$\underline{f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{23}{6}}.$$

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto: $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} =$

$$m = f'(1) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 - 1 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} - 1 - \frac{3}{2} = -2.$$

El punto de tangencia es $P(1, 2)$.

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = -2 \cdot (x - 1) = -2x + 2.$$

$\underline{Recta\ tangente: y = -\ 2x\ +\ 4}.$

****

3º) Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que $P(A) = 0'3,\ P(B) = 0'6,\ P\left(A^c \cap B^c\right) = 0,28$.

a) Calcule la probabilidad de que ocurran ambos sucesos a la vez.

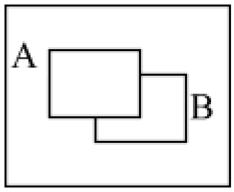
b) Calcule la probabilidad de que ocurra A sabiendo que no ha ocurrido B.

c) ¿Son A y B independientes?

----

a)

$P\left(A^c \cap B^c\right) = P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) \Rightarrow$ 

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B) \Rightarrow P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

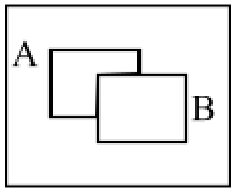
$P = P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) =$

$= P(A) + P(B) - [1 - P(\overline{A} \cap \overline{B})] = P(A) + P(B) - 1 + P(\overline{A} \cap \overline{B}) =$

$= 0,3 + 0,6 - 1 + 0,28 = 1,18 - 1 = \underline{0,18}$.

b)

$P = (A/\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$.

$P(A \cap \overline{B}) \Rightarrow$ 

$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$.

$P = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{0,3 - 0,18}{1 - 0,6} = \frac{0,12}{0,40} = \underline{0,30}$.

c)

Los sucesos A y B son independientes cuando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$P(A) \cdot P(B) = 0,3 \cdot 0,6 = 0,18 = P(A \cap B)$.

$\underline{\textit{Los sucesos A y B son independientes.}}$

****

4º) Una cadena de hipermercados decide estudiar la proposición de artículos de un determinado tipo que tienen defectos en el envoltorio. Para ello, selecciona aleatoriamente 2.000 artículos de este tipo entre sus hipermercados y encuentra que 19 de ellos tienen defectos en su envoltorio.

a) Determine un intervalo, al 95 % de confianza, para la proporción real de artículos de este tipo e interpreta el resultado obtenido.

b) ¿Cuántos artículos, como mínimo, deberá seleccionar para que, con un nivel de confianza del 99 %, la proporción muestral difiera de la proporción real a lo sumo en un 1 %?

----

a)

$$\alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$$

$$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$$

Datos:

$$n = 2.000;\ \ p = \frac{19}{2.000};\ \ q = 1 - p = 1 - \frac{19}{2.000} = \frac{1.981}{2.000};\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96.$$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q y n, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}};\ p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$.

$$\left(\frac{19}{2.000} - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{\frac{19}{2.000} \cdot \frac{1.981}{2.000}}{2.000}};\ \frac{19}{2.000} + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{\frac{19}{2.000} \cdot \frac{1.981}{2.000}}{2.000}}\right);$$

$$\left(0'0095 - 1,96 \cdot 0'00217;\ 0'0095 + 1,96 \cdot 0'00217\right);$$

$$\left(0'0095 - 0'00425;\ 0'0095 + 0'00425\right);$$

$$\underline{I.\ C._{95\ \%} = \left(0'00525;\ 0'01375\right).}$$

b)

Nivel de confianza del 99 %.

$$\alpha = 1 - 0,99 = 0,01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,005} = 2,578.$$

$$(1 - 0,0050 = 0,9950 \rightarrow z = 2,578).$$

Datos: $n = 2.000;\ \ p = \frac{19}{2.000};\ \ q = \frac{1.981}{2.000};\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,578;\ \ E = 0,01.$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{E}\right)^2 \cdot p \cdot q = \left(\frac{2,578}{0,01}\right)^2 \cdot \frac{19}{2.000} \cdot \frac{1.981}{2.000} =$$

$$= 257,8^2 \cdot \frac{37.639}{4.000.000} = 66.460,84 \cdot 0,00941 = 625,40.$$

$\underline{El\ tamaño\ de\ la\ muestra\ debe\ ser\ de\ al\ menos\ de\ 626\ artículos.}$

$**********$

OPCIÓN B

1º) $a)$ Represente la región definida por las siguientes inecuaciones y determine sus vértices: $2x - y \leq -2$; $4x - 2y \geq -10$; $5x - y \leq 4$; $x \geq 0$.

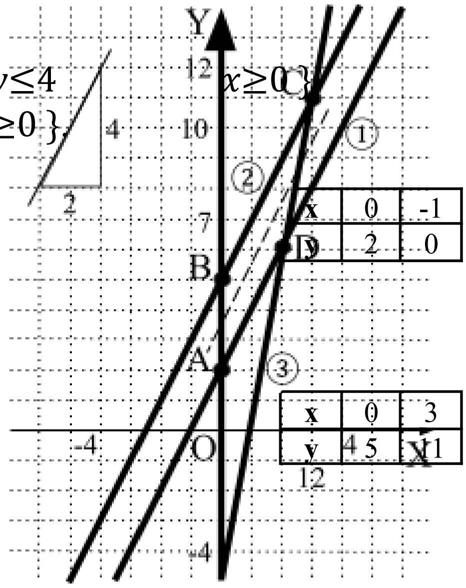
$b)$ Calcule los valores extremo y mínimo de la función objetivo $F(x,\ y) = 6x - 3y$, en la región anterior y determine los puntos en los que se alcanzan.

$a)$

Las condiciones del ejercicio se establecen en el siguiente sistema de inecuaciones:

$$2x - y \leq -2\ \ 4x - 2y \geq -10 \quad 5x - y \leq 4 \quad x \geq 0\ \}$$

$$2x - y \leq -2\ \ 2x - y \geq -5 \quad 5x - y \leq 4 \quad x \geq 0\ \}$$



x	0	-1
y	2	0

x	0	3
y	5	11

x	0	2
y	-4	6

①$\Rightarrow 2x - y \leq -2 \Rightarrow y \geq 2x + 2.$

$O(0,\ 0) \rightarrow No.$

②$\Rightarrow 2x - y \geq -5 \Rightarrow y \leq 2x + 5.$

$O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

③$\Rightarrow 5x - y \leq 4 \Rightarrow y \geq 5x - 4.$

$O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

La región factible es la zona sombreada de la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \quad x = 0\ \ 2x - y = -2\ \} \Rightarrow \underline{A(0,\ 2)}.$

$B \Rightarrow \quad x = 0\ \ 2x - y = -5\ \} \Rightarrow \underline{B(0,\ 5)}.$

$C \Rightarrow 2x - y = -5 \quad 5x - y = 4\ \} \quad -2x + y = 5 \quad 5x - y = 4\ \} \Rightarrow 3x = 9;\ x =$

.

$D \Rightarrow 2x - y = -2 \quad 5x - y = 4\ \} \quad -2x + y = 2 \quad 5x - y = 4\ \} \Rightarrow 3x = 6;\ x =$

.

$b)$

Los valores de la función de objetivos $F(x,\ y) = 6x - 3y$ en cada uno de los vértice son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(0,\ 2) = 6 \cdot 0 - 3 \cdot 2 = 0 - 6 = \underline{-\ 6}.$$

$$B \Rightarrow f(0,\ 5) = 6 \cdot 0 - 3 \cdot 5 = 0 - 15 = \underline{-\ 15}.$$

$$C \Rightarrow f(3,\ 11) = 6 \cdot 3 - 3 \cdot 11 = 18 - 33 = \underline{-\ 15}.$$

$$D \Rightarrow f(2,\ 6) = 6 \cdot 2 - 3 \cdot 6 = 12 - 18 = \underline{-\ 6}.$$

El máximo se produce en los puntos B y C, es decir, en todos los puntos del segmento $\overline{BC}$.

El mínimo se produce en los puntos A y D, es decir, en todos los puntos del segmento $\overline{AD}$.

También se hubiera obtenido el mismo resultado por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$F(x,\ y) = 6x - 3y = 0;\ \ 2x - y = 0 \Rightarrow y = 2x \Rightarrow m = \frac{4}{2} = 2.$$

Nótese que la pendiente $m = 2$ es la que tienen las rectas ① y ②; de ahí que los puntos máximos y mínimos pertenezcan a segmentos de la región factible.

****

2º) Sea la función $f(x) = \{x^2 - 4x + a \ si \ x < 2 \ \frac{1}{x-1} \quad si \ \ x \geq 2$.

a) Calcule el valor de a para que la función sea continua en $x = 2$. Para ese valor de a obtenido, ¿es derivable la función en $x = 2$?

b) Para $a = 4$, estudie la monotonía y calcule las ecuaciones de las asíntotas, si existen.

----

a)

La función $f(x)$ es continua en R, $\forall a \in R$, excepto para $x = 2$, cuya continuidad se va a obtener determinando el correspondiente valor de a.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen, son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$x = 2 \Rightarrow \{f(x) \ = \left(x^2 - 4x + a\right) \ = 4 - 8 + a = a - 4 \ f(x) \ = \frac{1}{x-1} \ = \frac{1}{1} = 1 = f($

$\Rightarrow f(x) \ = f(x) \ = f(0) \Rightarrow a - 4 = 1; \ \ a = 5.$

<u>$La \ función \ f(x) \ es \ continua \ en \ x = 2 \ para \ a = 5.$</u>

Un función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales.

$f'(x) = \{2x - 4 \ si \ x < 2 \ -\frac{1}{(x-1)^2} \ si \ x \geq 2$.

$f'\left(2^-\right) = 2 \cdot 2 - 4 = 0.$ $\qquad f'\left(2^+\right) = -\frac{1}{1} = -1 \Rightarrow f'\left(2^-\right) \neq f'\left(2^+\right).$

<u>$La \ función \ f(x) \ no \ es \ derivable \ en \ x = 2 \ para \ a = 5.$</u>

b)

La función resulta: $f(x) = \{x^2 - 4x + 4 \ si \ x < 2 \ \frac{1}{x-1} \quad si \ \ x \geq 2 \ = \{(x-2)^2 \ si \ x < 2 \ \frac{1}{x-1} \quad si \ \ x \geq 2$

Para $x < 2$ es: $f'(x) = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \{x > 1 \rightarrow f'(x) > 0 \ x < 1 \rightarrow f'(x) < 0$.

Para $x > 2$ es: $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0, \ \forall x R.$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{Decrecimiento\colon\ (-\ \infty,\ 1) \cup (2,\ \ +\ \infty)}.$$

$$\underline{Crecimiento\colon\ f'(x) >\ 0 \Rightarrow x \in (1,\ 2)}.$$

En el intervalo $(-\ \infty,\ 2)$ la función no tiene asíntotas por ser su expresión de tipo polinómico.

En el intervalo $(2,\ \ +\ \infty)$ la función tiene por expresión $f(x) = \frac{1}{x-1}$, cuyas asíntotas son las siguientes:

Asíntotas horizontales: son de la forma $y\ =\ k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$k\ =\ f(x) =\ \frac{1}{x-1} = \frac{1}{\infty} =\ 0 \Rightarrow \underline{Asíntota\ horizontal\colon y\ =\ 0}$.

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$x\ -\ 1\ =\ 0 \Rightarrow x\ =\ 1 \notin (2,\ \ +\ \infty)$.

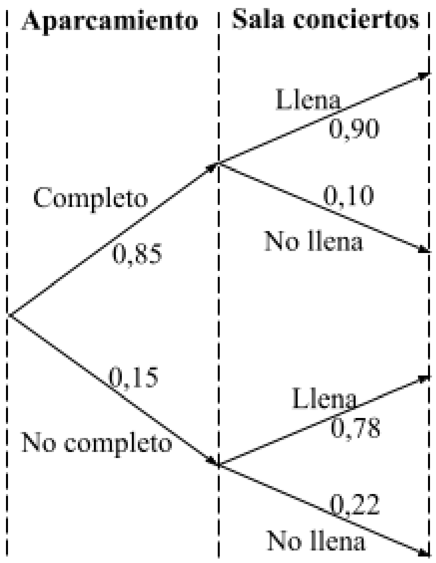
$$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ verticales}.$$

****

3º) El aparcamiento de una sala de conciertos está completo el 85 % de los días. El 90 % de los días que el aparcamiento está completo, la sala de conciertos está llena, y el 22 % de los días que el aparcamiento no está completo, la sala de conciertos no está llena. Elegido un día al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la sala de conciertos esté llena?

b) Si se sabe que la sala de conciertos está llena, ¿cuál es la probabilidad de que el aparcamiento esté completo?



a)

$P = P(Ll/C) + P(Ll/\overline{C}) = 0,85 \cdot 0,90 + 0,15 \cdot 0,78 = 0,765 + 0,117 = \underline{0,882}$.

b)

$$P = P(C/Ll) = \frac{P(C \cap Ll)}{P(Ll)} = \frac{P(C \cap Ll)}{P(Ll/C) + P(Ll/\overline{C})} = \frac{0,85 \cdot 0,90}{0,882} = \frac{0,765}{0,882} = \underline{0,867}.$$

****

4º) a) Se desea tomar una muestra estratificada de las personas mayores de edad de un municipio, cuyos estratos son los siguientes intervalos de edades, en años: de 18 a 30, de 31 a 45, de 45 a 60 y mayores de 60. En el primer intervalo hay 7.500 personas, en el segundo 8.400, en el tercero 5.700 y en el cuarto 3.000. Calcule el tamaño de la muestra total y su composición, sabiendo que el muestreo se hace con afijación proporcional y se han elegido 375 personas del primer estrato.

b) Dada la población $\{2,\ 4,\ 6\}$, construya todas las muestras posibles de tamaño 2, que puedan formar mediante muestreo aleatorio simple, y halle la varianza de las medias muestrales de todas las muestras.

----

a)

18 a 30 años	7.500	n_1=375
31 a 41 años	8.400	n_2
45 a 60 años	5.700	n_3
Mas 60 años	3.000	n_4
Total	24.600	

$$\frac{7.500}{375} = \frac{8.400}{n_2} = \frac{5.700}{n_3} = \frac{3.000}{n_4} = 20 \Rightarrow \{n_2 = \frac{8.400}{20} = 420\ n_3 = \frac{5.700}{20} = 285\ n_4 = \frac{3.000}{20} =$$

.

$$N = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 375 + 420 + 285 + 150 = 1.230.$$

$\underline{De\ cada\ grupo\ se\ eligen\ 375,\ 420,\ 285\ y\ 150\ personas,\ respectivamente.}$

$\underline{El\ total\ de\ la\ muestra\ es\ de\ 1.230\ personas.}$

b)

Las muestras posibles de tamaño 2 del grupo $\{2,\ 4,\ 6\}$ y sus medias correspondientes son las siguientes:

$$(2,\ 2) \to \overline{x} = 2, \quad (2,\ 4) \to \overline{x} = 3, \quad (2,\ 6) \to \overline{x} = 4,$$

$$(4,\ 2) \to \overline{x} = 3, \quad (4,\ 4) \to \overline{x} = 4, \quad (4,\ 6) \to \overline{x} = 5,$$

$$(6,\ 2) \to \overline{x} = 4, \quad (6,\ 4) \to \overline{x} = 5, \quad (6,\ 6) \to \overline{x} = 6.$$

La media de las medias muestrales μ es la siguiente:

$$\mu = \frac{2+3+4+3+4+5+4+5+6}{9} = \frac{36}{9} = \underline{4}.$$

Se calcula ahora la varianza de las medias muestrales de todas las muestras:

$$\rho^2 = \frac{\Sigma x_i^2}{N} - \overline{x}^2 = \frac{2^2+3^2\cdot 2+4^2\cdot 3+5^2\cdot 2+6^2}{9} - 4^2 = \frac{4+9\cdot 2+16\cdot 3+25\cdot 2+36}{9} - 16 =$$

$$= \frac{40+18+48+50}{9} - 16 = \frac{156}{9} - 16 = 17,3333 - 16 = \underline{1,3333}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

JUNIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B.

OPCIÓN A

1º) Una empresa conservera va a preparar lotes de dos tipos, A y B, con sus productos. En cada lote de tipo A pone 10 frascos de pimientos, 2 frascos de espárragos y 1 frasco de alcachofas. En cada lote de tipo B pone 4 frascos de pimientos, 5 frascos de espárragos y 1 frasco de alcachofas. Puede utilizar, como máximo, 500 frascos de pimientos, 310 frascos de espárragos y 65 frascos de alcachofas. Sabiendo que por cada lote de tipo A obtiene un beneficio de 10 euros y por cada lote de tipo B obtiene un beneficio de 6 euros, ¿cuántos lotes de cada tipo tendrá que preparar para que su beneficio sea máximo? ¿Cuál será el valor de ese beneficio máximo?

Sean x e y el número de lotes de productos que se preparan de los tipos A y B, respectivamente.

Las condiciones del problema se establecen en el siguiente sistema de inecuaciones:

$10x + 4y \leq 500 \;\; 2x + 5y \leq 310 \;\; x + y \leq 65 \;\; x \geq 0;\; y \geq 0 \}$ o mejor: $5x + 2y \leq 250 \;\; 2x + 5y \leq 310 \;\; x + y \leq 65 \;\; x \geq 0;\; y \geq 0 \}$.

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,\, y) = 10x + 6y$.

La región factible se indica en la figura:

x	20	50
y	75	0

① $\Rightarrow 5x + 2y \leq 250 \Rightarrow y \leq \frac{250-5x}{2} \Rightarrow O(0,\, 0) \rightarrow Si.$

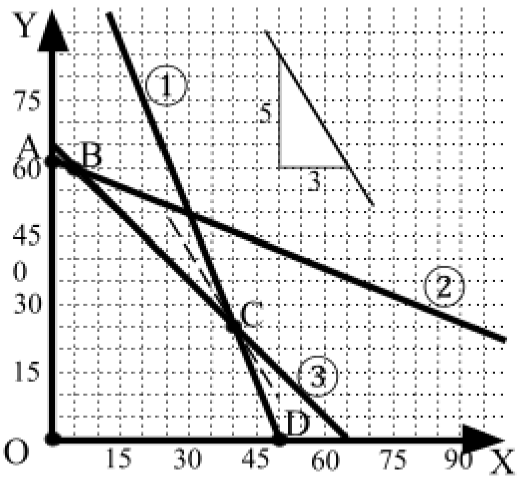
x	55	30
y	40	50

②$\Rightarrow 2x + 5y \le 310 \Rightarrow y \le \frac{310-2x}{5} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	0	65
y	65	0

③$\Rightarrow x + y \le 65 \Rightarrow y \le 65 - x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

La región factible se indica en la figura, cuyos vértices son los siguientes:



$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 62 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{A(0,\ 62)}.$$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x + 5y = 310 \\ x + y = 65 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{B(5,\ 60)}.$$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5x + 2y = 250 \\ x + y = 65 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{C(40,\ 25)}.$$

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 50 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{D(50,\ 0)}.$$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 62) = 10 \cdot 0 + 6 \cdot 62 = 0 + 372 = 372.$

$B \Rightarrow f(5,\ 60) = 10 \cdot 5 + 6 \cdot 60 = 50 + 360 = 410.$

$C \Rightarrow f(40,\ 25) = 10 \cdot 40 + 6 \cdot 25 = 400 + 150 = 550.$

$D \Rightarrow f(50,\ 0) = 10 \cdot 50 + 6 \cdot 0 = 500 + 0 = 500.$

El máximo se produce en el punto C.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,\ y) = 10x + 6y = 0 \Rightarrow y = -\frac{10}{6}x \Rightarrow m = -\frac{5}{3}.$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ se\ produce\ preparando\ 40\ lotes\ A\ y\ 25\ lotes\ B.}$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 550\ euros.}$$

****

2º) $a)$ Encontrar los extremos absolutos de la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 8$ en el intervalo $x \in [-4, 2]$.

b) Calcular: $\left(\sqrt{4x^2 + 9x} - 2x\right)$.

$a)$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto. Esta condición necesaria no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; se es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

Los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 8$ son los siguientes:

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0;\ x^2 + x - 2 = 0;\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} =$$

$$= \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 1.$$

$$f''(x) = 12x + 6.$$

$$f''(-2) = 12 \cdot (-2) + 6 = -24 + 6 = -18 < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -2.$$

$$f(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - 12 \cdot (-1) + 8 = -16 + 12 + 12 + 8 =$$

$$= 16 \Rightarrow Máximo\ relativo: A(-2,\ 16).$$

$$f''(1) = 12 \cdot 1 + 6 = 18 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = -1.$$

$$f(1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 8 = 2 + 3 - 12 + 8 = 13 - 12 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ Mínimo\ relativo: B(1,\ 1).$$

Teniendo en cuenta que $f(x)$ es continua por ser polinómica y su dominio es R y que:

$f(-4) = 2\cdot(-4)^3 + 3\cdot(-4)^2 - 12\cdot(-4) + 8 = -128 + 48 + 24 + 8 =$
$= 80 - 128 = -48.$

$f(2) = 2\cdot 2^3 + 3\cdot 2^2 - 12\cdot 2 + 8 = 16 + 12 - 24 + 8 = 36 - 24 = 12$
.

De lo anterior se deduce que los extremos absolutos en el intervalo $[-4, 2]$ son los siguientes:

$$\underline{Mínimo\ absoluto: P(-4, -48)}.$$

$$\underline{Máximo\ absoluto: A(-2, 17)}.$$

$b)$

$$\left(\sqrt{4x^2 + 9x} - 2x\right) = \sqrt{\infty} - \infty = \infty - \infty \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2+9x}-2x\right)\cdot\left(\sqrt{4x^2+9x}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+9x}+2x} = \frac{\left(\sqrt{4x^2+9x}\right)-(2x)^2}{\sqrt{4x^2+9x}+2x} = \frac{4x^2+9x-4x^2}{\sqrt{4x^2+9x}+2x} =$$

$$\frac{9x}{\sqrt{4x^2+9x}+2x} \quad \frac{\frac{9x}{x}}{\frac{\sqrt{4x^2+9x}+2x}{x}} \quad \frac{9}{\frac{\sqrt{4x^2+9x}}{x}+\frac{2x}{x}} \frac{9}{\sqrt{\frac{4x^2+9x}{x^2}}+2} =$$

$$\frac{9}{\sqrt{4+\frac{9}{x}}+2} = \frac{9}{\sqrt{4+\frac{9}{\infty}}+2} = \frac{9}{\sqrt{4+0}+2} = \frac{9}{2+2} = \underline{\frac{9}{4}}.$$

****

3º) Un grupo de turistas está formado por 12 alemanes, 8 franceses y 6 italianos. Se escogen al azar dos turistas del grupo. Calcular:

$a)$ La probabilidad de que los dos sean alemanes.

$b)$ La probabilidad de que ninguno sea alemán.

$c)$ La probabilidad de que sean de distinta nacionalidad.

$a)$

$$P(a,\ a) = \frac{12}{12+8+6} \cdot \frac{11}{11+8+6} = \frac{12}{26} \cdot \frac{11}{25} = \frac{6 \cdot 11}{13 \cdot 25} = \underline{\frac{66}{325}}.$$

$b)$

La probabilidad de que ninguno sea alemán es igual que uno menos la probabilidad de que los dos sean alemanes:

$$P = 1 - \frac{66}{325} = \frac{325-66}{325} = \underline{\frac{259}{325}}.$$

$c)$

La probabilidad de que sean de distinta nacionalidad es igual que uno menos la probabilidad de que sean de la misma nacionalidad:

$$P(f,\ f) = \frac{8}{12+8+6} \cdot \frac{7}{12+7+6} = \frac{8}{26} \cdot \frac{7}{25} = \frac{4 \cdot 7}{13 \cdot 25} = \frac{28}{325}.$$

$$P(i,\ i) = \frac{6}{12+8+6} \cdot \frac{5}{11+8+5} = \frac{6}{26} \cdot \frac{5}{25} = \frac{3 \cdot 5}{13 \cdot 25} = \frac{15}{325}.$$

$$P = 1 - [P(a,\ a) + P(f,\ f) + P(i,\ i)] = 1 - \left(\frac{66}{325} + \frac{28}{325} + \frac{15}{325}\right) =$$

$$= 1 - \frac{66+28+15}{325} = 1 - \frac{109}{325} = \frac{325-109}{325} = \underline{\frac{216}{325}}.$$

****

OPCIÓN B

1º) a) Dadas las matrices: $A = (3\ 0\ \ -1\ 1\ 2\ 9)$, $B = (1\ 2\ \ -1\ 0\ 1\ 4)$ y $C = (2\ 1\ 3\ \ -1)$, encontrar, si existe, una matriz X tal que: $5X + 3C^2 = 2AB$.

b) Calcular el rango de la matriz $M = (-\ 1\ 0\ 2\ \ -\ 1\ 3\ 1\ \ -\ 3\ 3\ 5)$.

----

a)

$$5X + 3C^2 = 2AB;\ \ 5X = 2AB - 3C^2 \Rightarrow X = \frac{1}{5}\cdot\left(2AB - 3C^2\right).$$

$$A\cdot B = (3\ 0\ \ -\ 1\ 1\ 2\ 9)\cdot(1\ 2\ \ -\ 1\ 0\ 1\ 4) = (2\ 2\ 8\ 38) \Rightarrow 2AB = (4\ 4\ 16\ 76)$$

.

$$C^2 = (2\ 1\ 3\ \ -\ 1)\cdot(2\ 1\ 3\ \ -\ 1) = (7\ 1\ 3\ 4) \Rightarrow 3C^2 = (21\ 3\ 9\ 12).$$

Sustituyendo los valores obtenidos en la expresión de X:

$$X = \frac{1}{5}\cdot\left(2AB - 3C^2\right) = \frac{1}{5}\cdot[(4\ 4\ 16\ 76) - (21\ 3\ 9\ 12)] = \frac{1}{5}\cdot(-\ 17\ 1\ 7\ 64).$$

$$\underline{X = \frac{1}{5}\cdot(-\ 17\ 1\ 7\ 64) = \left(-\ \frac{17}{5}\ \frac{1}{5}\ \frac{7}{5}\ \frac{64}{5}\right)}$$

b)

Por ser $|-\ 1\ 0\ \ -\ 1\ 3| \neq 0 \Rightarrow Rang\ M \geq 2$.

$$|M| = |-\ 1\ 0\ 2\ \ -\ 1\ 3\ 1\ \ -\ 3\ 3\ 5| = -\ 15 - 6 + 18 + 3 = -\ 21 + 21 = 0$$

.

$$\underline{Rang\ M = 2}.$$

****

2º) Dada la función f, definida para $x \geq 0$: $f(x) = \{ x - 1 \quad si\ 0 \leq x \leq 5 \quad 9 - \frac{25}{x} \quad si\ 5 < x \leq 10\ 4\sqrt{x + 6} - \frac{x}{5}\ si\ x > 10$
.

$a)$ ¿Para qué valores de $x > 0$ es la función f continua?

$b)$ ¿Cuál es el máximo valor que toma $f(x)$ para $x \in [30,\ 100]$?

$c)$ Calcular: $I = \int_6^8 f(x) \cdot dx$.

$a)$

La función $f(x)$ en continua en su dominio $[0,\ +\infty)$, excepto para los valores de x = 5 y x = 10, cuya continuidad se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen, son iguales e igual al valor de la función en ese punto.

$$x = 5 \Rightarrow \{ f(x) == 4 = f(5)\ f(x) == 4 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x) = f(5) \Rightarrow f(x)\ es\ continua\ para\ x = 5.$$

$$x = 10 \Rightarrow \{ f(x) == 9 - \frac{5}{2} = \frac{13}{2} = f(10)\ f(x) == 4 \cdot 4 - \frac{4}{5} = \frac{76}{5} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) \neq f(x) \Rightarrow f(x)\ no\ es\ continua\ para\ x = 10.$$

$$\underline{f(x)\ es\ continua\ \forall x \in [0,\ 10) \cup (10,\ +\infty)}.$$

$b)$

$$f(30) = 4\sqrt{30 + 6} - \frac{30}{5} = 4 \cdot 6 - 6 = 24 - 6 = 18.$$

$$f(100) = 4\sqrt{100 + 6} - \frac{100}{5} = 4\sqrt{106} - 20 \cong 21,18.$$

Para $x > 10$ es $f'(x) = 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+6}} - \frac{1}{5} = \frac{2}{\sqrt{x+6}} - \frac{1}{5}$.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x+6}} - \frac{1}{5} = 0;\ \ \frac{2}{\sqrt{x+6}} = \frac{1}{5};\ \ 10 = \sqrt{x + 6};\ \ 100 = x + 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 94.$$

$$f(94) = 4\sqrt{94 + 6} - \frac{94}{5} = 40 - 18,8 = 21,2.$$

Teniendo en cuenta la continuidad de la función en el intervalo $(10, \ +\infty)$, el punto hallado para x = 94, $P(94,\ 21'2)$ es un máximo relativo para la función y absoluto para el intervalo.

$$\underline{La\ función\ f(x)\ toma\ el\ valor\ máximo\ en\ x \in [30,\ 100]\ para\ x = 94.}$$

$c)$

$$I = \int_6^8 f(x) \cdot dx = \int_6^8 \left(9 - \frac{25}{x}\right) \cdot dx = [9x - 25Lx]_6^8 =$$

$$= (9 \cdot 8 - 25L8) - (9 \cdot 6 - 25L6) = 72 - 25L8 - 54 + 25L6 = 18 - 25L\frac{4}{3} =$$

$$= 18 - 25(L4 - L3) = 18 - 25(2L2 - L3) = 18 - 50L2 + 25L3.$$

$$\underline{I = \int_6^8 f(x) \cdot dx = 18 - 50L2 + 25L3 \cong 10,81.}$$

****

3º) El consumo mensual de electricidad (en kw/h) de los hogares de una ciudad es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 25 kw/h.

a) Queremos construir un intervalo de confianza al 96 % para la media del consumo de electricidad de los hogares de esta ciudad, de forma que su amplitud no sea mayor que 12 kw/h. ¿Qué tamaño de la muestra debemos tomar?

b) Decidimos tomar un tamaño de la muestra igual a 10. Elegimos 10 hogares y miramos su consumo mensual en electricidad, con los siguientes resultados:

100, 125, 78, 80, 88, 89, 124, 142, 98, 125.

Calcular el intervalo de confianza al 96 % para la media del consumo mensual de electricidad en los hogares de esta ciudad.

----

a)

Conocemos: $E = \frac{12}{2} = 6;\ \sigma = 25.$

$1 - \alpha = 0,96 \rightarrow \alpha = 1 - 0,96 = 0,04 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,02} = 2,055.$

$(1 - 0,02 = 0,9800 \rightarrow z = 2,055).$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2,055 \cdot 25}{6}\right)^2 = 8,5625^2 = 73,32.$

$\underline{La\ muestra\ debe\ ser\ como\ mínimo\ de\ 74\ viviendas.}$

b)

$\overline{x} = \frac{100+125+78+80+88+89+124+142+98+125}{10} = \frac{1.049}{10} = 104,9.$

Conocemos: $\overline{x} = 104,9,\ \sigma = 25;\ n = 10;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,02} = 2,055.$

Se aplica la fórmula adecuada que nos da el intervalo de confianza pedido, que es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(104,9 - 2,055 \cdot \frac{25}{\sqrt{10}}, 104,9 + 2,055 \cdot \frac{25}{\sqrt{10}}\right);$

$\left(104,9 - 2,055 \cdot 7,906,\ 104'9 + 2,055 \cdot 7,906\right);$

$(104,9 - 16,246,\ 104'9 + 16,246);\ \ (88'654,\ 121'146).$

$\underline{Intervalo\ de\ confianza\text{: }\left(88'645,\ 121'146\right)}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

SEPTIEMBRE – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B.

OPCIÓN A

1º) Un ganadero puede comprar dos tipos de pienso, A y B, para alimentar a sus cerdos. Cada saco de pienso A contiene 4 kilos de cereales y 2 kilos de bellotas, además de otros ingredientes, y cuesta 4 euros. Cada saco de pienso B contiene 2 kilos de cereales y 3 kilos de bellotas, además de otros ingredientes, y cuesta 5 euros. Para alimentar a sus cerdos quiere tener, al menos, 160 kilos de cereales y 120 kilos de bellotas. Como tiene que transportar los sacos en su furgoneta, no quiere comprar, entre los dos tipos de pienso, más de 70 sacos. ¿Cuántos sacos de cada tipo de pienso tiene que comprar para que el coste sea mínimo? ¿Cuál es el valor de ese coste mínimo?

Sean x e y el número de sacos de los tipos A y B, respectivamente, que se compran.

Las restricciones son las siguientes:

$4x + 2y \geq 160 \; 2x + 3y \geq 120 \quad x + y \leq 70 \quad x \geq 0, \; y \geq 0 \} \; o \quad 2x + y \geq 80 \; 2x + 3y \geq 1$

.

La función de objetivos es: $f(x, y) = 4x + 5y$.

La región factible se indica en la figura:

x	40	0
y	0	80

①$\Rightarrow 2x + y \geq 80 \Rightarrow y = 80 - 2x \Rightarrow O \to No$.

x	60	0
y	0	40

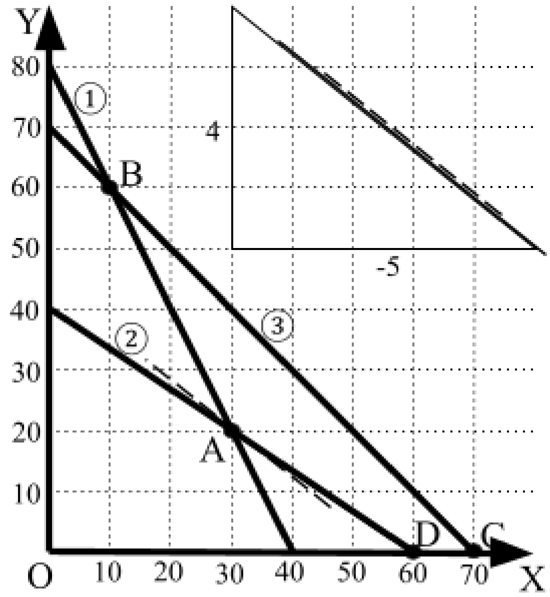
②$\Rightarrow 2x + 3y \leq 120 \Rightarrow y = \frac{120-2x}{3} \Rightarrow O \to No$.

x	0	70
y	70	0

③$\Rightarrow x + y \leq 70 \Rightarrow y = 70 - x \Rightarrow O \to Si$.

Los vértices de la sección factible, además de O(0, 0), son los siguientes:

$A \Rightarrow \quad 2x + y = 80 \; 2x + 3y = 120 \} \Rightarrow A(30,\ 20).$
$B \Rightarrow 2x + y = 80 \quad x + y = 70 \} \Rightarrow B(10,\ 60).$
$C \Rightarrow x + y = 70 \qquad y = 0 \} \Rightarrow C(70,\ 0).$
$D \Rightarrow 2x + 3y = 120 \qquad\qquad y = 0 \} \Rightarrow D(60,\ 0).$



Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(30,\ 20) = 4 \cdot 30 + 5 \cdot 20 =$

$= 120 + 100 = 220.$

$B \Rightarrow f(10,\ 60) = 4 \cdot 10 + 5 \cdot 60 =$

$= 40 + 300 = 340.$

$C \Rightarrow f(70,\ 0) = 4 \cdot 70 + 5 \cdot 0 =$

$= 280 + 0 = 280.$

$D \Rightarrow f(60,\ 0) = 4 \cdot 60 + 5 \cdot 0 = 240 + 0 = 240.$

El mínimo se produce en el punto A.

También se hubiera obtenido el punto A por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = 4x + 5y = 0 \Rightarrow y = -\frac{4}{5}x \Rightarrow m = -\frac{4}{5}.$

$\underline{El\ coste\ mínimo\ se\ produce\ comprando\ 30\ sacos\ de\ A\ y\ 20\ de\ B.}$

$\underline{El\ coste\ mínimo\ asciende\ a\ 220\ euros.}$

****

2º) Dada la función $f(x) = \frac{x^2+2}{4x+2}$, calcular:

$a)$ Dominio de f.

b) ¿Para que valores de x es la función positiva?

$c)$ Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

$d)$ Sus máximos y mínimos relativos, si existen.

$a)$

Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto los valores de x que anulan el denominador:

$$4x + 2 = 0;\ \ 2x + 1 = 0 \to x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \underline{D(f) \Rightarrow R - \left\{-\frac{1}{2}\right\}}.$$

$b)$

Por ser $x^2 + 2 > 0,\ \forall x \in R$, la función es positiva cuando lo sea la expresión $(4x + 2)$.

$$\underline{f(x) > 0 \forall x \in \left(-\infty,\ \ -\frac{1}{2}\right)}.$$

$c)$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{La\ recta\ x = -\frac{1}{2}\ es\ asíntota\ vertical\ de\ la\ función.}$$

Asíntotas horizontales: son de la forma y = k y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = f(x) = \frac{x^2+2}{4x+2} = \infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \frac{f(x)}{x} \text{ y } n = \left[\frac{f(x)}{x} - mx\right].$$

$$m = \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{x^2+2}{4x+2}}{x} = \frac{x^2+2}{4x^2+2x} = \frac{1}{4}.$$

$$n = \left[\frac{f(x)}{x} - mx\right] = \left(\frac{x^2+2}{4x+2} - \frac{x}{4}\right) = \frac{4x^2+8-4x^2-2x}{16x+8} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x+8}{16x+8} =$$

$$= -\frac{2}{16} = -\frac{1}{8}.$$

$$\underline{La\ recta\ y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\ es\ asíntota\ oblicua\ de\ la\ función.}$$

$d)$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto. Esta condición necesaria no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(4x+2)-\left(x^2+2\right)\cdot 4}{(4x+2)^2} = \frac{8x^2+4x-4x^2-8}{[2(2x+1)]^2} = \frac{4x^2+4x-8}{4(2x+1)^2} = \frac{x^2+x-2}{(2x+1)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2+x-2}{(2x+1)^2} = 0;\ x^2 + x - 2 = 0;\ x = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 1.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{(2x+1)\cdot(2x+1)^2-\left(x^2+x-2\right)\cdot[2\cdot(2x+1)\cdot 2]}{(2x+1)^4} = \frac{(2x+1)^2-4\left(x^2+x-2\right)}{(2x+1)^3} =$$

$$= \frac{4x^2+4x+1-4x^2-4x+8}{(2x+1)^3} = \frac{9}{(2x+1)^3}.$$

$$f''(-2) = \frac{9}{(-3)^3} = \frac{9}{-27} < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -2.$$

$$f(-2) = \frac{4+2}{-8+2} = \frac{6}{-6} = -1 \Rightarrow \underline{Máximo: A(-2,\ -1)}.$$

$$f''(1) = \frac{9}{3^3} = \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 1.$$

$$f(1) = \frac{1^2+2}{4\cdot 1+2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{Mínimo: B\left(1,\ \frac{1}{2}\right)}.$$

****

3º) Un estudiante se va a examinar de Física y de Historia. La probabilidad de que apruebe el examen de Física es 0,8, la de que apruebe el examen de Historia es 0,7 y la de que apruebe los dos exámenes es 0,6.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe al menos uno de los dos exámenes?

b) Si aprueba el examen de Física, ¿cuál es la probabilidad de que también apruebe el de Historia?

c) Sea A el suceso "el estudiante aprueba el examen de Física" y B el suceso "el estudiante aprueba el examen de Historia". ¿Son independientes los sucesos A y B?

----

a)

$P(F)=0,8;\ \ P(H)=0,7;\ \ P(F\cap H)=0,6.$ Se pide $P(F\cup H)$.

$$P(F\cup H)=P(F)+P(H)-P(F\cap H)=0,8+0,7-0,6=1,5-0,6=0,9.$$

$\underline{La\ probabilidad\ de\ aprobar\ al\ menos\ una\ asignatura\ es\ 0,9}.$

b)

$$P(H/F)=\frac{P(H\cap F)}{P(F)}=\frac{0,6}{0,8}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}=0,75.$$

$\underline{La\ probabilidad\ de\ aprobar\ Física\ si\ ha\ aprobado\ historia\ es\ 0,75}.$

c)

Dos sucesos A y B son independientes cuando $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

$$P(A)\cdot P(B)=0,8\cdot 0,7=0,56\neq P(A\cap B)=0,6.$$

$\underline{Los\ sucesos\ (aprobar\ Fisica)\ y\ (aprobar\ Historia)\ no\ son\ independientes.}$

****

OPCIÓN B

1º) a) Un pintor ha comprado pintura de 3 colores: azul, roja y verde. Cada kilo de pintura azul cuesta 2 euros, cada kilo de pintura roja cuesta 4 euros y cada kilo de pintura verde cuesta 3 euros. En total ha comprado 500 kilos de pintura y se ha gastado 1.400 euros. Además, sabemos que la suma de las cantidades de pintura azul y verde es el triple que la cantidad de pintura roja. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones para determinar la cantidad de pintura de cada color que ha comprado.

b) Calcular, si existe, la matriz inversa de $M = (1\ 3\ 2\ -\ 2\ )$.

----

a)

Sean $x,\ y,\ z$ los kilos de pintura azul, roja y verde que compra el pintor, respectivamente.

$$x + y + z = 500\ 2x + 4y + 3z = 1.400 \qquad x + z = 3y\} \qquad x + y$$

.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|500\ 1\ 1\ 1.400\ 4\ 3\ 0\ -3\ 1\ |}{|1\ 1\ 1\ 2\ 4\ 3\ 1\ -3\ 1\ |} = \frac{2.000-4.200+4.500-1.400}{4-6+3-4+9-2} = \frac{6.500-5.600}{16-12} = \frac{900}{4} = 225$$

.

$$y = \frac{|1\ 500\ 1\ 2\ 1.400\ 3\ 1\ 0\ 1\ |}{4} = \frac{1.400+1.500-1.400-1.000}{4} = \frac{500}{4} = 125.$$

$$z = \frac{|1\ 1\ 500\ 2\ 4\ 1.400\ 1\ -3\ 0\ |}{4} = \frac{-3.000+1.400-2.000+4.200}{4} = \frac{5.600-5.000}{4} = \frac{600}{4} = 150$$

.

$\underline{Ha\ comprado\ 225,\ 125\ y\ 150\ kilos\ de\ pintura\ azul,\ roja\ y\ verde,\ respectiv.}$

b)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$|M| = |1\ 3\ 2\ -\ 2\ | =-\ 2\ -\ 6\ =-\ 8 \neq 0 \Rightarrow \underline{La\ matriz\ M\ es\ invertible}.$

$$(M/I) = (1\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_2 \to F_2 - 2F_1\right\} \Rightarrow (1\ 0\ -\ 2\ 1\ ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_2 \to -\frac{1}{8}F_2\right\} \Rightarrow \left(1\ 0\ \frac{1}{4}\ -\frac{1}{8}\ \right) \Rightarrow \left\{F_1 \to F_1 - 3F_2\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\ \frac{3}{8}\ \frac{1}{4}\ -\frac{1}{8}\right).$$

$$\underline{M^{-1} = \left(\frac{1}{4}\ \frac{3}{8}\ \frac{1}{4}\ -\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}\cdot(2\ 3\ 2\ -\ 1\ ).}$$

****

2º) $a)$ Dada la función $f(x) = ax^3 + bx$, encontrar a y b de forma que $f(2) = 4$ y f tenga un mínimo relativo en $x = 1$.

$b)$ Calcular $I = \int_1^2 \left(e^{3x} + \frac{7}{x} + \frac{3}{4x^4} - 9\right) \cdot dx$.

$a)$

Por ser $f(2) = 4 \Rightarrow a \cdot 2^3 + b \cdot 2 = 4;\ \ 8a + 2b = 4;\ \ 4a + b = 2.$ (1)

Por tener un mínimo relativo en $x = 1 \Rightarrow f'(1) = 0$:

$f'(x) = 3ax^2 + b \Rightarrow f'(1) = 3a \cdot 1^2 + b = 0;\ \ 3a + b = 0.$ (2)

Resolviendo el sistema formando por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{l} 4a + b = 2 \\ 3a + b = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 4a + b = 2 \\ -3a - b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{a = 2,\ b = -6}.$$

$b)$

$$I = \int_1^2 \left(e^{3x} + \frac{7}{x} + \frac{3}{4x^4} - 9\right) \cdot dx = \left[\frac{1}{3}e^{3x} + 7L|x| + \frac{3}{4} \cdot \frac{x^{-3}}{-3} - 9x\right]_1^2 =$$

$$= \left[\frac{1}{3}e^{3x} + 7L|x| - \frac{1}{4x^3} - 9x\right]_1^2 = \left(\frac{e^6}{3} + 7L|2| - \frac{1}{32} - 18\right) - \left(\frac{e^3}{3} + 7L|1| - \frac{1}{4} - 9\right) =$$

$$= \frac{e^6}{3} + 7L2 - \frac{1}{32} - 18 - \frac{e^3}{3} - 0 + \frac{1}{4} + 9 = \frac{e^6 - e^3}{3} + 7L2 + \frac{8-1}{32} - 9 =$$

$$= \frac{32e^3(e^3-1) + 672L2 + 21 - 864}{96} = \frac{32e^3(e^3-1) + 672L2 - 853}{96}.$$

$$\underline{I = \int_1^2 \left(e^{3x} + \frac{7}{x} + \frac{3}{4x^4} - 9\right) \cdot dx = \frac{32e^3(e^3-1) + 672L2 - 853}{96}}.$$

****

3º) El peso (en kilos) de los habitantes de una ciudad es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 15 kilos.

a) Queremos construir un intervalo de confianza al 96 % para la media del peso de los habitantes de la ciudad, de forma que su amplitud no sea mayor que 10 kilos. ¿Qué tamaño de la muestra debemos tomar?

b) Decidimos tomar un tamaño de la muestra igual a 8. Elegimos 8 habitantes y los pesamos, con los siguientes resultados:

60, 75, 105, 98, 65, 60, 87, 73.

Calcular el intervalo de confianza al 96 % para la media del peso de los habitantes de esta ciudad.

----

a)

Datos: $\sigma = 15;\ E = \frac{10}{2} = 5.$

$1 - \alpha = 0,96 \rightarrow \alpha = 1 - 0,96 = 0,04 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,02} = 2,055.$

$(1 - 0,02 = 0,9800 \rightarrow z = 2,055).$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2,055 \cdot 15}{5}\right)^2 = 6,165^2 = 38,007.$$

$\underline{El\ tamaño\ de\ la\ muestra\ debe\ ser\ de\ al\ menos\ de\ 39\ habitantes.}$

b)

$$\overline{x} = \frac{60+75+105+98+65+60+87+73}{8} = \frac{623}{8} = 77,875.$$

Datos: $\overline{x} = 77,875;\ n = 8;\ \sigma = 15;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,055.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(77'875 - 2'055 \cdot \frac{15}{\sqrt{8}},\ 77'875 + 2'055 \cdot \frac{15}{\sqrt{8}}\right);$$

$$\left(77'875 - 2'055 \cdot 5'3033,\ 77'875 + 2'055 \cdot 5'3033\right);$$

$$\left(77'875 - 10'8983,\ 77'875 + 10'8983\right);$$

$$\underline{I.\ C._{96\,\%}\left(66'9767,\ \ 87'8983\right).}$$

****

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6915	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6050	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7258	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7518	0,7549
0,7	0,7580	0,7612	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7996	0,8023	0,8051	0,8079	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8290	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9310
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9430	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9485	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9700	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

Nota: En la tabla figuran los valores $P(Z\leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE ASTURIAS

JUNIO – 2016 (ESPECÍFICO)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El examen presenta dos opciones: A y B. El alumno deberá elegir una de ellas y responder razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN A

1º) En una fábrica envasan los bombones en cajas de tamaño pequeño y mediano. Cierto día se envasaron 60 cajas en total, habiendo m cajas más de tamaño pequeño que de tamaño mediano.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de cajas de cada tipo envasadas ese día. ¿Para qué valores de m el sistema tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única?

b) Si ese día se envasan 4 cajas más de bombones de tamaño pequeño que de tamaño mediano, ¿cuántas se habrán envasado de cada tipo?

----

a)

Sean x e y el número de cajas pequeñas y medianas de bombones que se envasan, respectivamente.

$\left.\begin{array}{l} x+y=60 \\ x=y+m \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x+y=60 \\ x-y=m \end{array}\right\}$. Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 60 \\ 1 & -1 & m \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2\neq 0 \Rightarrow \underline{Rang\ A=Rang\ A'=2,\ \forall m\in R \Rightarrow S.\ C.\ D.}$$

$$\underline{La\ solución\ siempre\ es\ única\ \forall m\in R}.$$

b)

Para $m=4$ el sistema resulta $\left.\begin{array}{l} x+y=60 \\ x-y=4 \end{array}\right\}$.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=60 \\ x-y=4 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x=64;\ \ x=32.\ \ 32-y=4;\ \ y=28.$$

$\underline{Se\ envasaron\ 32\ cajas\ pequeñas\ y\ 28\ cajas\ medianas}.$

****

2º) Una fábrica va a lanzar al mercado dos nuevos productos A y B. El coste de fabricación del producto A es de 100 euros por unidad y el del producto B es de 150 euros por unidad, disponiendo para esta operación de 6.000 euros. Para evitar riesgos, es necesario fabricar al menos tantas unidades del producto A como del producto B y, en todo caso, no fabricar más de 45 unidades del producto A.

a) De acuerdo con las restricciones anteriores, ¿cuántas unidades de cada producto puede fabricar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) Si su objetivo es maximizar el número total de productos fabricados, ¿cuántas unidades de cada producto debe fabricar? ¿a cuánto asciende el coste total de fabricación de dichas unidades?

----

a)

Sean x e y el número de productos de los tipos A y B, respectivamente, que se fabrican.

Las restricciones son las siguientes:

$100x + 150y \leq 6.000$ $\quad x \geq y \quad$ $x \leq 45; y \geq 0 \}$ $\quad 2x + 3y \leq 120 \quad$ $x -$

.

La región factible es la zona sombreada de la figura:

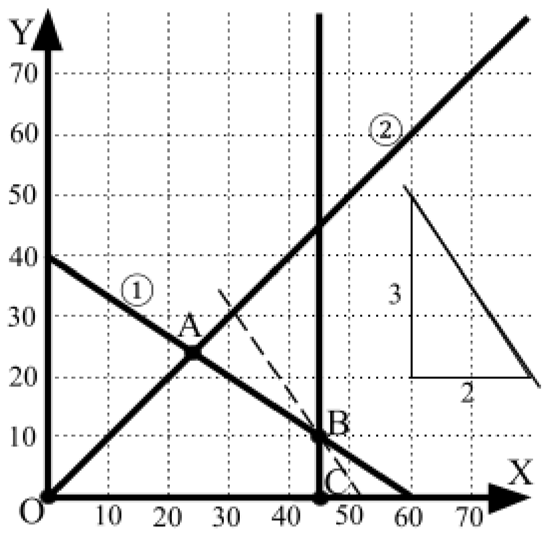
x	0	60
y	40	0

①$\Rightarrow 2x + 3y \leq 120 \Rightarrow y \leq \frac{120-2x}{3} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	350	0
y	0	350

②$\Rightarrow x - y \geq 0 \Rightarrow y \leq x \Rightarrow A(1,\ 0) \rightarrow Si.$

Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas son los siguientes:



$A \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 120 \\ x - y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A(25,\ 25).$

$B \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 120 \\ x = 45 \end{array} \right\} \Rightarrow B(45,\ 10).$

$C \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 45 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow C(45,\ 0).$

$b)$

La función de objetivos es: $f(x,\ y) = 100x + 150y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(25,\ 25) = 100 \cdot 25 + 150 \cdot 25 = 2.500 + 3.750 = 6.250.$

$B \Rightarrow f(45,\ 10) = 100 \cdot 45 + 150 \cdot 10 = 4.500 + 1.500 = 6.000.$

$C \Rightarrow f(45,\ 0) = 100 \cdot 45 + 150 \cdot 0 = 4.500 + 0 = 4.500.$

El máximo se produce en el punto B.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = 150x + 100y = 0 \Rightarrow y = -\frac{150}{100}x \Rightarrow m = -\frac{3}{2}.$

$\underline{El\ máximo\ beneficio\ se\ obtiene\ fabricando\ 45\ productos\ A\ y\ 10\ B}.$

$\underline{El\ máximo\ beneficio\ asciende\ a\ 6.250\ euros}.$

****

3º) La propensión marginal al consumo viene dada por una función f con la expresión $f(x) = 0,6 - 0,01Lx$, donde x representa los ingresos. Se pide:

a) Encontrar la función de consumo F, si se sabe que dicha función viene dada por la primitiva F de f que verifica $F(0) = 0,2$.

b) Estudiar y representar gráficamente la función f en el intervalo $[0,\ 60]$. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 1$ y $x = 2$.

----

a)

$$F(x) = \int f(x)\cdot dx = \int (0,6 - 0,01Lx)\cdot dx = 0,6\cdot\int dx - 0,01\cdot\int Lx\cdot dx =$$

$$= 0,6x - 0,01\cdot A. \quad (*)$$

$$A = \int Lx\cdot dx \Rightarrow \left\{ u = Lx \rightarrow du = \frac{1}{x}\cdot dx \ dx = dv \rightarrow v = x \right\} \Rightarrow A = Lx\cdot x - \int x\cdot\frac{1}{x}\cdot dx =$$

$$= xLx - \int dx = xLx - x = x(Lx - 1).$$

Sustituyendo en (*) el valor obtenido de A:

$$F(x) = 0,6x - 0,01\cdot x(Lx - 1) + C.$$

$$F(0) = 0,2 \Rightarrow 0,6\cdot 0,2 - 0,01\cdot 0,2\cdot\left(L0'2 - 1\right) + C = 0,2;$$

$$0,12 - 0,002\cdot\left(L\frac{2}{10} - 1\right) + C = 0,2;\ \ 120 - 2\cdot(L2 - L10 - 1) + 1000C = 200;$$

$$60 - (L2 - L10 - 1) + 500C = 100;\ \ 500C = 40 + L2 - L10 - 1;$$

$$500C = 39 + L2 - L10 = 39 + 0,6931 - 2,3026 = 37,3905 \Rightarrow C = \frac{37,3905}{500} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = 0,0748.$$

$$\underline{F(x) = 0,6x - 0,01\cdot x(Lx - 1) + 0,0748}.$$

b)

$f'(x) = -\frac{0,01}{x} < 0,\ \forall x > 0 \Rightarrow$ La función es monótona decreciente en su dominio, que es: $D(f) \Rightarrow (0,\ +\infty)$.

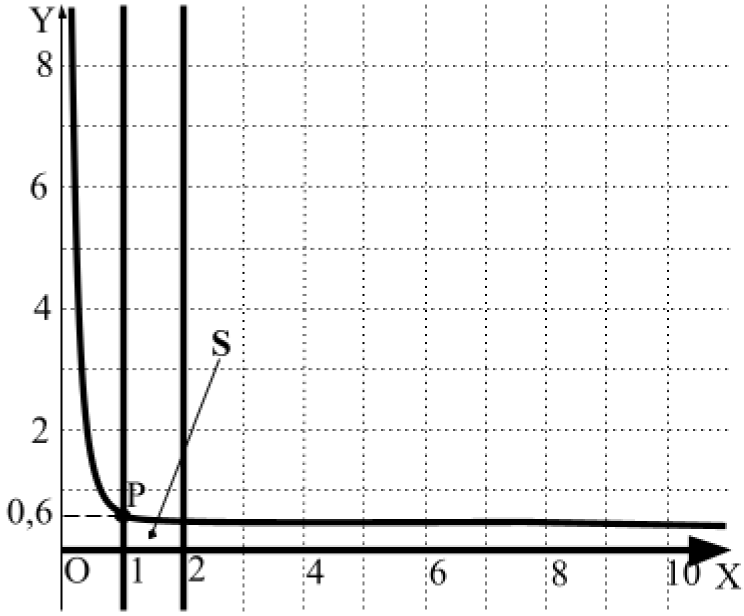
$f(x) \;=(0,6\,-\,0,01Lx)\;=-\,\infty.$

$f(x)\;=\left(0,6\,-\,0,01L0^{+}\right)\;=+\,\infty.$

$f(x)=\,0\Rightarrow 0,6\,-\,0,01Lx\,=\,0;\;\;0,6\,=\,0,01Lx;\;\;Lx\,=\,60\Rightarrow x\,=\,e^{60}.$

El punto de corte está suficientemente alejado del origen de coordenadas, por lo que no afecta a la zona de la superficie a calcular; de otra forma: todas las ordenadas de la superficie a calcular son positivas.

La representación gráfica de la función es, aproximadamente, la que se indica en la figura siguiente.



No se hace la representación en el intervalo pedido porque apenas se distinguiría la superficie a calcular.

$$S\,=\int_{1}^{2} f(x)\cdot dx\,=\,[0,6x\,-\,0,01\cdot x(Lx\,-\,1)]_{1}^{2}\,=$$

$$=[0,6\cdot 2\,-\,0,01\cdot 2\cdot(L2\,-\,1)]-[0,6\cdot 1\,-\,0,01\cdot 2\cdot(L1\,-\,1)]=$$

$$=\,1,2\,-\,0,02\cdot(0,693\,-\,1)-\,0,6\,-\,0,01\cdot(0\,-\,1)=\,1,2\,+\,0,06\,-\,0,6\,+\,0,01\,=$$

$$=\,1,27\,-\,0,6\,=\,0,67.$$

$$\underline{S\,=\,0,67\,u^{2}}.$$

****

4º) Una encuesta realizada hace una década reveló que el 78 % de quienes respondieron consideraron que estaban económicamente mejor que sus padres. Se ha repetido recientemente dicha encuesta y se obtuvo que de 370 de las 500 personas encuestadas respondieron que estaban económicamente mejor que sus padres.

a) Plantea un test para contrastar la hipótesis de que el porcentaje de personas que consideran que están económicamente mejor que sus padres no ha descendido en la última década, frente a la alternativa de que sí lo ha hecho, siendo dicho porcentaje menor del 78 %.

b) ¿A qué conclusión se llega en el contraste anterior para un nivel de significación del 4 %)
(Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1: $F(0'04) = 0'52; F(0'96) = 0'83; F(1'75) = 0'96; F(2'05) = 0'98\ y\ F(2'16) = 0'985$).

----

a)

$\underline{Hipótesis\ nula \rightarrow H_0: p \geq 0,78 \qquad Hipótesis\ alternativa \rightarrow H_1:\ p\ <\ 0,78\ \}.}$

Contraste unilateral.

b)

$\alpha\ =\ 0,04 \rightarrow z_\alpha\ =\ 1,75.\ (1\ -\ 0,04\ =\ 0,9600 \rightarrow z\ =\ 1,75).$

Conocemos: $n\ =\ 500;\ \ p_0\ =\ 0,78;\ q_0\ =\ 0,22;\ \ z_\alpha\ =\ 1,75.$

La proporción muestral es $p\ =\ \frac{370}{500}\ =\ 0,74.$

La región de aceptación es $\left(p_0 - z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot p_0}{n}},\ \ +\ \infty\right)$, por lo tanto la región crítica es:

$\left(0,78\ -\ 1,75 \cdot \sqrt{\frac{0,78 \cdot 0,22}{500}};\ \ +\ \infty\right);\ \ (0,78\ -\ 1,75 \cdot 0,0185;\ \ +\ \infty);$

$(0,78\ -\ 0,0324;\ \ +\ \infty);\ \ (0,7476;\ \ +\ \infty).$

$\underline{p\ =\ 0,74 \in (0,6862;\ \ +\ \infty) \Rightarrow Se\ acepta\ la\ hipótesis\ nula.}$

$\underline{Con\ significación\ del\ 4\ \%\ se\ estima\ que\ están\ mejor\ que\ sus\ padres.}$

****

OPCIÓN B

1º) Sean las matrices $A = (1\, m\, -\, 2\, 1\, 2\,)$, $B = (0\ \ -\ 2\ \ -\ m\, 0\,)$, $C = (x\, y\,)\; y\; D = (5\, 10\,)$.

a) Si $(A - B)\cdot C = D$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por $x\; e\; y$) en función del parámetro m.

b) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = 3$.

----

a)

$$A - B = (1\, m\, -\, 2\, 1\, 2\,) - (0\ -\ 2\ -\ m\, 0\,) = (1\, m\, m\, +\, 1\, 2\,).$$

$(A - B)\cdot C = D \Rightarrow (1\, m\, m\, +\, 1\, 2\,)\cdot(x\, y\,) = (5\, 10\,) \Rightarrow$ $\underline{\qquad x + my = 5\, (m + 1}$

.

b)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = (1\, m\, m\, +\, 1\, 2\,)\; y\; M' = (1\, m\, m\, +\, 1\, 2\quad 5\, 10\,).$$

$|1\, m\, m\, +\, 1\, 2\,| = 2 - m(m + 1) = 0;\;\; 2 - m^2 - m = 0;\;\; m^2 + m - 2 = 0;$

$$m = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow m_1 = -\, 2,\; m_2 = 1.$$

$$\underline{Para\; \{m \neq -\, 2\; m \neq 1\,\} \Rightarrow Rang\; M = Rang\; M' = 2 = nº\; incóg. \Rightarrow S.\; C.\; D.}$$

$$Para\; m = -\, 2\; es\; M' = (1\ -\ 2\ -\ 1\, 2\quad 5\, 10\,) \Rightarrow Rang\; M' = 2.$$

$$\underline{Para\; m = -\, 2 \Rightarrow Rang\; M = 1;\; Rang\; M' = 2 \Rightarrow Sistema\; incompatible.}$$

$$Para\; m = 1 \Rightarrow M' = (1\, 1\, 2\, 2\quad 5\, 10\,) \Rightarrow \{F_2 = 2F_1\} \Rightarrow Rang\; M' = 1.$$

$$\underline{Para\; m = 1 \Rightarrow Rang\; M = Rang\; M' = 1 < nº\; incóg. \Rightarrow S.\; C.\; I.}$$

Para $m = 3$ el sistema resulta $\quad x + 3y = 5\; 4x + 2y = 10\,\}$ equivalente a $x + 3y = 5\; 2x + y = 5\,\}$. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|5\, 3\, 5\, 1\,|}{|1\, 3\, 2\, 1\,|} = \frac{5-15}{1-6} = \frac{-10}{-5} = 2. \qquad\qquad y = \frac{|1\, 5\, 2\, 5\,|}{-5} = \frac{5-10}{-5} = \frac{-5}{-5} = 1.$$

$\underline{Solucion: x = 2,\ y = 1}.$

****

2º) La función de costes marginales de una factoría, se puede estimar mediante la expresión $f(x) = 40 - 6x + x^2$, donde x representa la cantidad producida de determinado artículo, con lo que $x \geq 0$.

a) ¿Disminuye el coste alguna vez? Determina la cantidad producida de dicho artículo cuando el coste es mínimo. ¿Cuánto vale dicho coste?

b) ¿Cuánto vale el coste si no se produce nada de ese artículo?

c) Estudia y representa gráficamente la función f.

----

a)

Una función es creciente o decreciente cuando su derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x) = -6 + 2x.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -6 + 2x = 0; \quad -3 + x = 0 \Rightarrow x = 3.$

$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon (0, 3)}.$

$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon (3, +\infty)}.$

Para que una función tenga un mínimo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada y que, para los valores que anulan la primera derivada, sea positiva el valor de la segunda derivada:

$f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ x = 3.$

$\underline{El\ coste\ es\ mínimo\ cuando\ la\ cantidad\ de\ producción\ es\ de\ 3}.$

$f(3) = 40 - 6 \cdot 3 + 3^2 = 40 - 18 + 9 = 49 - 18 = 31.$

$\underline{Los\ costes\ marginales\ mínimos\ son\ de\ 31\ unidades}.$

b)

$f(0) = 40 - 6 \cdot 0 + 0^2 = 40.$

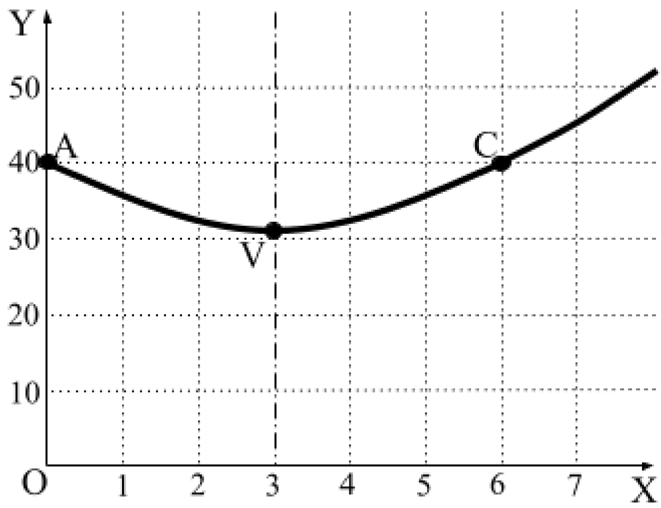
$\underline{No\ produciendo\ nada\ del\ artículo\ los\ costes\ son\ de\ 40\ unidades}.$

c)

Teniendo en cuenta que:

$f(0) = 40$; $f(3) = 31$ $(mínimo)$ y que la función es una parábola convexa $(\cup)$, simétrica con respecto a la recta $x = 3$, que es su eje de simetría, su representación gráfica es la siguiente.

Son puntos de la función $A(0,\ 40)$ y $V(3,\ 31)$; simétrico de A es $C(6,\ 40)$.

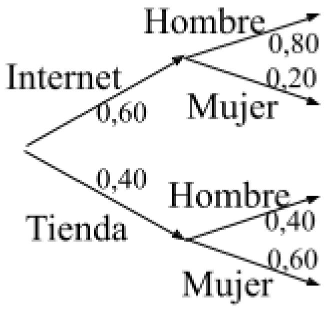


****

3º) De las ventas de una empresa, el 60 % se hace por internet y el resto en tienda. De quienes compran por internet, el 80 % son hombres, mientras que de los que compran en tienda solo el 40 % son hombres. Si se elige un cliente al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre?

b) Si es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que haya comprado por internet?



a)

$$P = P(I)\cdot P(H/I) + P(T)\cdot P(H/T) = 0,60\cdot 0,80 + 0,40\cdot 0,40 =$$

$$= 0,48 + 0,16 = \underline{0,64}.$$

b)

$$P = \frac{P(H/I)}{P(I)\cdot P(H/I)+P(T)\cdot P(H/T)} = \frac{0,60\cdot 0,80}{0,60\cdot 0,80+0,40\cdot 0,0,40} = \frac{0,48}{0,64} = \underline{0,75}.$$

****

4º) Un partido político de determinada región considera que el gasto medio por estudiante en dicha región está por debajo del promedio nacional que es de 5.536 euros. Para contrastar esta afirmación se toma una muestra aleatoria de 1.200 estudiantes de la región, para los que se obtiene que el gasto medio ha sido de 5.102 euros. Se supone además que el gasto por estudiante en esa región sigue una distribución normal con desviación típica 1.253 euros.

a) Plantea un test para contrastar la hipótesis de que el gasto medio por estudiante en esa región es mayor o igual que el nacional, frente a la alternativa de que es menor de los 5.536 euros nacionales.

b) ¿A qué conclusión se llega en el contraste anterior para un nivel de significación del 2 %?

Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1: $F(0'02) = 0'51$, $F(0'98) = 0'84$, $F(2'05) = 0'98$, $F(2'33) = 0'99$, $F(12) = 1$.

----

a)

$Hipótesis\ nula \rightarrow H_0: \mu \leq 5.536$ $\quad$ $Hipótesis\ alternativa \rightarrow H_1: \mu > 5.536\}.$

Contraste unilateral.

b)

Conocemos: $n = 1.200;\ \mu_0 = 5.536;\ \sigma = 1.253.$

$\alpha = 0,02 \rightarrow z_\alpha = 2,055.$ $\quad$ $(1 - 0,02 = 0,9800 \rightarrow z = 2,055).$

La región de aceptación es $\left(-\infty;\ \mu_0 + z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$:

$\left(-\infty;\ 5.536 + 2,055 \cdot \frac{1.253}{\sqrt{1.200}}\right);\ (-\infty;\ 5.536 + 2,055 \cdot 36,1710);$

$(-\infty;\ 5.536 + 74,3314);\ (-\infty;\ 5.610,33);$

$$\underline{\overline{x} = 5.102 \in (-\infty;\ 5.610,33) \Rightarrow Se\ acepta\ la\ hipótesis\ nula.}$$

$$\underline{Con\ significación\ del\ 2\ \%\ la\ inversión\ por\ alumno\ es\ mayor\ de\ 5.536\ euros.}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE ASTURIAS

JUNIO – 2016 (GENERAL)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El examen presenta dos opciones: A y B. El alumno deberá elegir una de ellas y responder razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN A

1º) Sean las matrices:

$A = (1\ m\ 2\ 1)$, $B = (0\ m\ 1\ 1)$, $C = (m - 1\ m\ - m\ 1)$, $D = (x\ y)$ y $E = (1\ 2)$:

a) Si $(A \cdot B - C) \cdot D = E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

b) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para m = 3.

----

a)

$A \cdot B - C = (1\ m\ 2\ 1) \cdot (0\ m\ 1\ 1) - C = (m\ 2m\ 1\ 2m + 1) - (m - 1\ m\ - m\ 1)$

$= (1\ m\ m + 1\ 2m)$.

$(A \cdot B - C) \cdot D = E \Rightarrow (1\ m\ m + 1\ 2m) \cdot (x\ y) = (1\ 2)$;

$[x + my\ (m + 1)x + 2my] = (1\ 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{x + my = 1\ (m + 1)x + 2my = 2\}}$.

b)

Las matrices de coeficientes y ampliadas son las siguientes:

$A = (1\ m\ m + 1\ 2m)\ y\ A' = (1\ m\ m + 1\ 2m\ \ 1\ 2)$.

$|A| = |1\ m\ m + 1\ 2m| = m \cdot |1\ 1\ m + 1\ 2| = m(2 - m - 1) = m(1 - m) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow m_1 = 0,\ m_2 = 1$.

$\underline{Para\ \{m\neq 0\ m\neq 1\ \}\Rightarrow Rang\ A\ =\ Rang\ A'\ =\ 2\ =\ nº\ incóg.\Rightarrow S.\ C.\ D.}$

$Para\ m\ =\ 0\Rightarrow A\ =\ (1\ 0\ 1\ 0\ ),\ A'\ =\ (1\ 0\ 1\ 0\quad 1\ 2\ ).$

$Para\ m\ =\ 1\Rightarrow A\ =\ (1\ 1\ 2\ 2\ ),\ A'\ =\ (1\ 2\ 2\ 2\quad 1\ 2\ ).$

$\underline{Para\ \{m\ =\ 0\ m\ =\ 1\ \}\Rightarrow Rang\ A\ =\ 1;\ Rang\ A'\ =\ 2\Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

$\underline{El\ sistema\ tiene\ solución\ \forall m\in R\ -\ \{0,\ 1\}}.$

$\underline{La\ solución\ es\ única\ \forall m\in R\ -\ \{0,\ 1\}}.$

Para $m\ =\ 3$ el sistema resulta $x\ +\ 3y\ =\ 1\ 4x\ +\ 6y\ =\ 2\ \}$, equivalente a $x\ +\ 3y\ =\ 1\ 2x\ +\ 3y\ =\ 1\ \}$, que es compatible determinado. Resolviendo por Cramer:

$$x\ =\ \frac{|1\ 3\ 1\ 3\ |}{|1\ 3\ 2\ 3\ |}\ =\ \frac{3-3}{3-6}\ =\ \frac{0}{-3}\ =\ 0.\qquad y\ =\ \frac{|1\ 1\ 2\ 1\ |}{-3}\ =\ \frac{1-2}{-3}\ =\ \frac{-1}{-3}\ =\ \frac{1}{3}.$$

$\underline{Solución:\ x\ =\ 0,\ y\ =\ \frac{1}{3}}.$

****

2º) Una familia desea invertir 6.500 euros en acciones de la compañía A y de la compañía B. Cada acción de la compañía A cuesta 100 euros y tiene unos beneficios de 22 euros. Cada acción de la compañía B cuesta 600 euros y tiene unos beneficios esperados de 108 euros. Además se sabe que está obligada a comprar al menos 5 acciones de cada compañía.

a) ¿Cuántas acciones de cada tipo puede comprar con el dinero disponible? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) ¿Cuántas debe comprar para maximizar el beneficio esperado? ¿cuánto vale dicho beneficio esperado máximo?

----

a)

Sean x e y las acciones invertidas en las compañías A y B, respectivamente.

Las restricciones son: $\left.\begin{array}{l} 100x + 600y \leq 6.500 \\ x \geq 5, \ y \geq 5 \end{array}\right\} \ \left.\begin{array}{l} x + 6y \leq 65 \\ x \geq 5, \ y \geq 5 \end{array}\right\}$.

La función de objetivos es la siguiente: $f(x, \ y) = 22x + 108y$.

La región factible se indica en la figura:

x	5	35
y	10	5

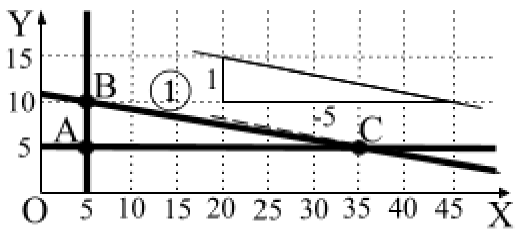
$①\Rightarrow x + 6y \leq 65 \Rightarrow y \leq \frac{65-x}{6} \Rightarrow O(0, \ 0) \rightarrow Si.$

Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 5 \\ y = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{A(5, \ 5)}.$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 5 \\ y = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{B(5, \ 10)}.$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 35 \\ y = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{C(35, \ 10)}.$



Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(5, \ 5) = 22 \cdot 5 + 108 \cdot 5 = 110 + 540 = \underline{650}.$

$B \Rightarrow f(5, \ 10) = 22 \cdot 5 + 108 \cdot 10 = 110 + 1.080 = \underline{1.190}.$

$C \Rightarrow f(35, \ 10) = 22 \cdot 35 + 108 \cdot 10 = 770 + 1.080 = \underline{1.850}.$

El máximo se produce en el punto C.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,\ y) = 22x + 108y = 0 \Rightarrow y = -\frac{22}{108}x \Rightarrow m \cong -\frac{1}{5}.$$

$b)$

$$\underline{Debe\ comprar\ 35\ acciones\ a\ la\ compañía\ A\ y\ 10\ a\ la\ B.}$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ esperado\ es\ de\ 1.850\ euros.}$$

****

3º) El beneficio mensual de una empresa (f), en miles de euros, se relaciona con las toneladas (x) tal como sigue: $f(x) = \{10x - \frac{5x^2}{4} + 1.800 \;\; si \;\; 0 < x \leq 10 \;\; 1.805 \qquad si \qquad 10 < x$:

a) Estudia y representa gráficamente la función f. Comenta dicha gráfica indicando cuál es el beneficio mensual mínimo y como evoluciona (aumenta o disminuye) el beneficio según la cantidad de producto vendido.

b) ¿Puede llegar alguna vez a tener unos beneficios de 1.900 miles de euros? ¿y de 1.815 euros? En caso de que alcance alguno de estos dos beneficios, indica cuántas toneladas de producto habría vendido.

----

a)

En el intervalo $0 < x \leq 10$ la función es una parábola cóncava (∩) de las siguientes características:

$$f'(x) = \{10 - \frac{5}{2}x \;\; si \;\; 0 < x \leq 10 \qquad 0 \qquad si \;\; 10 < x \;.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 0 < x \leq 10 \Rightarrow 10 - \frac{5}{2}x = 0;\;\; 20 - 5x = 0;\;\; 4 - x = 0 \Rightarrow x = 4.$$

$$f(4) = 10 \cdot 4 - \frac{5 \cdot 4^2}{4} + 1.800 = 40 - 20 + 1.800 = 1.820 \Rightarrow V(4,\; 1.820).$$

Otros puntos de la parábola son los siguientes:

$$f(10) = 10 \cdot 10 - \frac{5 \cdot 10^2}{4} + 1.800 = 100 - 125 + 1.800 = 1.775 \Rightarrow A(10,\; 1.775)$$

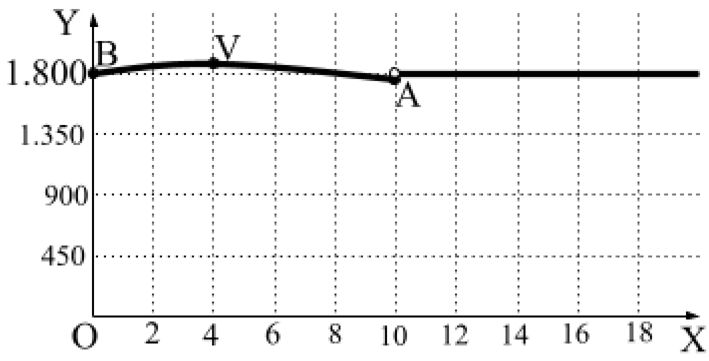
.

$$f(0) = 1.800 \Rightarrow B(0,\; 1.800).$$

En el intervalo $(10,\; +\infty)$ la función es la recta $y = 1.800$.

La representación gráfica, aproximada, es la indicada en la figura adjunta.

Nótese lo extraño de no ser la función continua para x = 10.

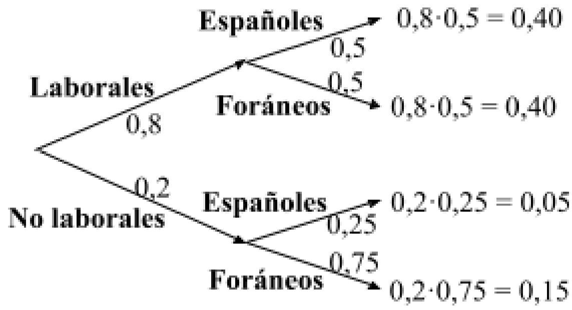


b) ¿Puede llegar alguna vez a tener unos beneficios de 1.900 miles de euros? ¿y de 1.815 euros

4º) El 80 % de los clientes de un hotel viaja por motivos laborales. De ellos, el 50 % son españoles. Para los que no viajan por motivos laborales, el porcentaje de españoles es del 25 %.

a) De entre los clientes del hotel, ¿qué porcentaje son españoles?

b) De entre los españoles, ¿qué porcentaje no viaja por motivos laborales?



a)

$$P = 0,40 + 0,05 = \underline{0,45}.$$

Nótese que se ha aplicado el teorema de la probabilidad total:

$$P(E) = P(L) \cdot P(E/L) + P(NL) \cdot P(E/NL) = 0,8 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,25 =$$

$$= 0,40 + 0,05 = \underline{0,45}.$$

b)

$$P = \frac{0,05}{0,40+0,05} = \frac{0,05}{0,45} = \frac{5}{45} = \underline{\frac{1}{9} = 0,11}.$$

Nótese que se ha empleado el teorema de Bayes:

$$P(NL/E) = \frac{P(NL) \cdot P(E/NL)}{P(E)} = \frac{0,2 \cdot 0,25}{0,45} = \frac{0,05}{0,45} = \frac{5}{45} = \underline{\frac{1}{9} = 0,11}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Una empresa dedicada a la fabricación de trofeos deportivos recibe el encargo de un ayuntamiento de elaborar una serie de trofeos para la Semana Deportiva Municipal. Los trofeos que se han de entregar corresponden a las modalidades de fútbol y baloncesto. Cada trofeo requiere una serie de materiales para su fabricación: madera para la base, acero para la estructura y oro para los dorados y embellecedores. Estos datos, juntos con los ingresos para la empresa por cada tipo de trofeo, aparecen en la siguiente tabla:

TROFEO	**KILOGRAMOS EMPLEADOS**			**INGRESOS**
	MADERA	**ACERO**	**ORO**	
FÚTBOL	0,4	0,6	0,4	1.200 euros
BALONCESTO	0,5	0,3	0,1	750 euros

Además se sabe que las disponibilidades de la tienda son: 56 kilogramos de madera, 39 kilogramos de acero y 16 kilogramos de oro.

a) ¿Cuántos trofeos de cada tipo puede hacer? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) ¿Cuántos trofeos de cada tipo tendría que hacer para maximizar los ingresos? ¿a cuánto ascenderían dichos ingresos?

----

a)

Siendo x e y el número de trofeos fabricados de fútbol y baloncesto, respectivamente, la función beneficios es $f(x,\ y) = 1.200x + 750y$.

Las condiciones del problema se pueden expresar en el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 0,4x + 0,5y \leq 56 \\ 0,6x + 0,3y \leq 39 \\ 0,4x + 0,1y \leq 16 \\ x \geq 0,\ \ y \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x + 5y \leq 560 \\ 6x + 3y \leq 390 \\ 4x + y \leq 160 \\ x \geq 0,\ \ y \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x + 5y \leq 560 \\ 2x + y \leq 120 \\ 4x + y \leq 160 \\ x \geq 0,\ \ y \geq 0 \end{array}\right\}.$$

x	40	140
y	80	0

①$\Rightarrow 4x + 5y \leq 560 \Rightarrow y \leq \frac{560-4x}{5} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	60	0
y	0	120

②$\Rightarrow 2x + y \leq 120 \Rightarrow y \leq 120 - 2x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	0	40
y	160	0

③$\Rightarrow 4x + y \leq 160 \Rightarrow y \leq 160 - 4x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

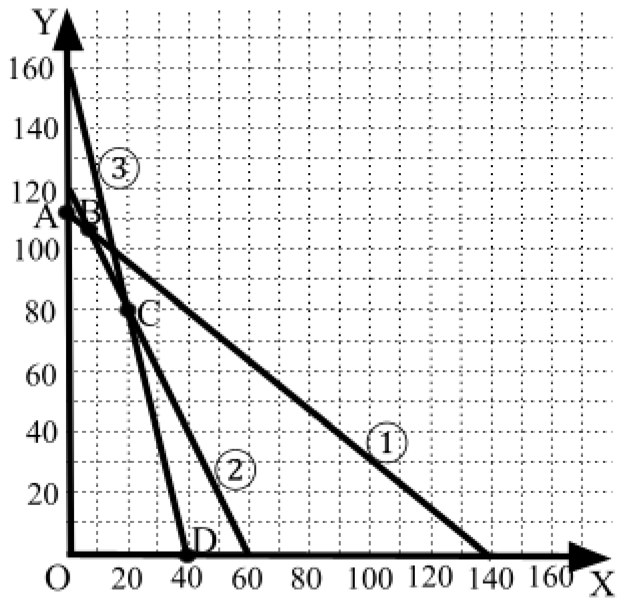
$A \Rightarrow \left. \begin{matrix} x = 0 \\ 4x + 5y = 560 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \underline{A(0,\ 112)}.$

$B \Rightarrow \left. \begin{matrix} 4x + 5y = 560 \\ 2x + y = 120 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \underline{B(6'67,\ 106'67)}.$

$C \Rightarrow \left. \begin{matrix} 2x + y = 120 \\ 4x + y = 160 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \underline{C(20,\ 80)}.$

$D \Rightarrow \left. \begin{matrix} y = 0 \\ 4x + y = 160 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \underline{D(40,\ 0)}.$

La zona factible queda reflejada en la figura adjunta.



Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 112) = 1.200 \cdot 0 + 750 \cdot 112 = 84.000.$

$B \Rightarrow f(6'67,\ 106'67) = 1.200 \cdot 6'67 + 750 \cdot 106'67 = 8.000 + 80.000 =$

$= 88.000.$

$C \Rightarrow f(20,\ 80) = 1.200 \cdot 20 + 750 \cdot 80 = 24.000 + 60.000 = 84.000.$

$D \Rightarrow f(40,\ 0) = 1.200 \cdot 40 + 750 \cdot 0 = 48.000 + 0 = 48.000.$

TERMINAR

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 3.200\ euros.}$

****

2º) La función de costes marginales de una empresa es $f(x) = \frac{20}{(x+2)^2}$, se pide:

a) Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(3) = 0$.

b) Estudiar y representar gráficamente la función f. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre x = 0 y x = 3.

----

a)

$$F(x) = \int f(x)\cdot dx = \int \frac{20}{(x+2)^2}\cdot dx \Rightarrow \{x + 2 = t \; dx = dt\} \Rightarrow \int \frac{20}{t^2}\cdot dt =$$

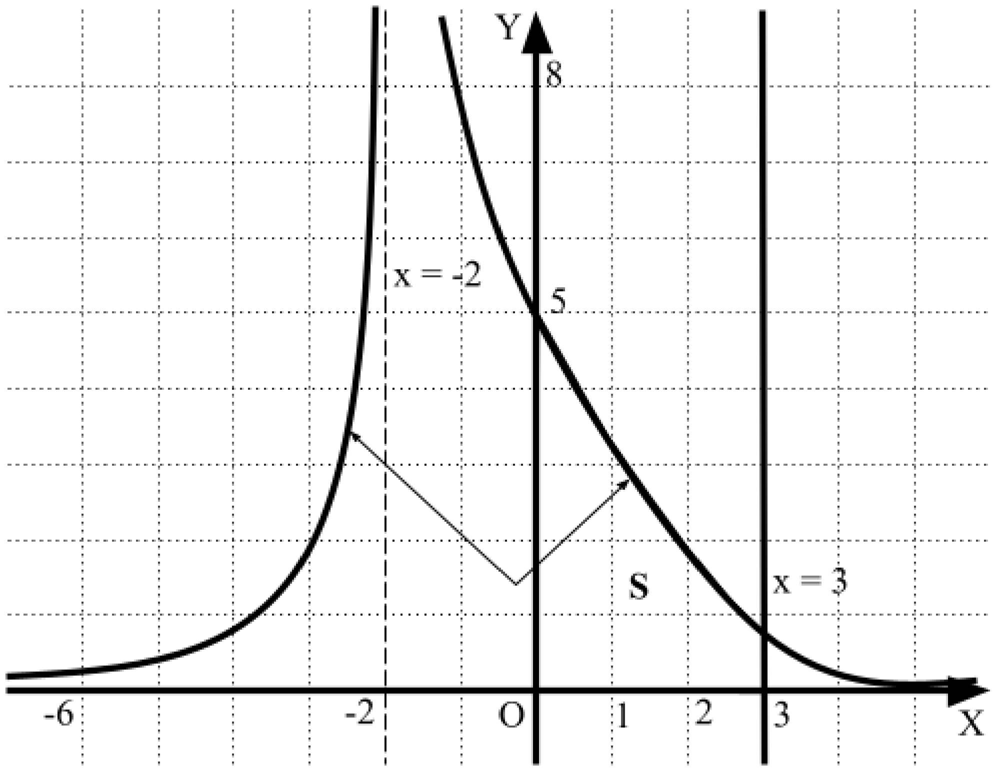
$$= 20\cdot \int t^{-2}\cdot dt = 20\cdot \frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{20}{t} + C \Rightarrow F(x) = -\frac{20}{x+2} + C.$$

$$F(3) = 0 \Rightarrow -\frac{20}{3+2} + C = 0; \quad -4 + C = 0 \Rightarrow C = 4.$$

$$\underline{F(x) = -\frac{20}{x+2} + 4.}$$

b)

La función $f(x) = \frac{20}{(x+2)^2}$ es mayor que cero para cualquier valor real de x perteneciente a su dominio, que es: $D(f) \Rightarrow R - \{-2\}$. Esto significa que el recorrido de la función es $R(f) \Rightarrow (0, +\infty)$.



Siendo $(x + 2)^2 = 0$ para $x = -2$, la recta $x = -2$ es asíntota vertical de la función.

Por ser $f(x) = \frac{20}{(x+2)^2} = 0$, la recta $y = 0$ (eje X) es asíntota horizontal de la función.

Los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$f'(x) = 20\cdot\frac{-2\cdot(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{-40}{(x+2)^3}.$$

$$Para\, x < -2 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow Crecimiento: (-\infty, -2).$$

$$Para\, x > -2 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow Decrecimiento: (-2, +\infty).$$

Teniendo en cuenta que $f(0) = 5$ y $f(3) = 0,8$, la representación gráfica, aproximada, de la situación es la indicada en la figura adjunta.

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$S = \int_3^0 \left[0 - \frac{20}{(x+2)^2}\right]\cdot dx$. (Se cambian los límites de integración por ser negativas las ordenadas del intervalo correspondiente a la superficie a calcular).

$S = \int_0^3 \frac{20}{(x+2)^2}\cdot dx$. (se cambian de nuevo los límites de integración considerando el signo de la función).

$$S = \int_0^3 \frac{20}{(x+2)^2}\cdot dx \Rightarrow \{x = 3 \rightarrow t = 5\ x = 0 \rightarrow t = 2\} \Rightarrow \int_2^5 \frac{20}{t^2}\cdot dt =$$

$$= 20\cdot\int_2^5 t^{-2}\cdot dt = 20\cdot\left[\frac{t^{-1}}{-1}\right]_2^5 = 20\cdot\left[\frac{-1}{t}\right]_2^5 = 20\cdot\left[\frac{1}{t}\right]_5^2 = 20\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = 20\cdot\frac{5-2}{10} =$$

$$= 20\cdot\frac{3}{10} = 6.$$

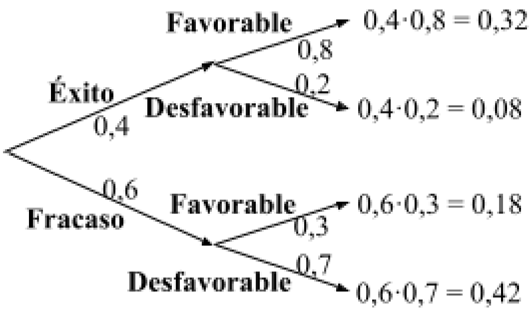
$$\underline{S = 6\, u^2}.$$

****

3º) El gerente de una empresa sabe que históricamente el 40 % de los nuevos productos lanzados ha sido un éxito y el resto ha sido un fracaso. De entre los que fueron un éxito, el 80 % había recibido un informe previo favorable y de entre los fueron un fracaso, el 30 % habían recibido un informe previo favorable. Según estos datos:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un nuevo producto tenga un informe favorable y sea un éxito?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un nuevo producto sea un éxito si tiene un informe favorable?



a)

$$P = 0,4 \cdot 0,2 = \underline{0,08}.$$

b)

$$P = \frac{0,32}{0,32+0,18} = \frac{0,32}{0,50} = \frac{32}{50} \underline{= 0,64}.$$

****

4º) Un líder político afirma que al menos una quinta parte de los egresados universitarios españoles encuentran trabajo antes de un año. Para contrastar dicha afirmación un periódico realizó un estudio con 3.600 egresados universitarios de los cuales 420 habían encontrado trabajo en el primer año.

a) Plantea un test para contrastar la hipótesis de que la afirmación del líder político no es correcta, frente a la alternativa de que el porcentaje de egresados que encuentran trabajo el primer año es menor del 20 %.

b) ¿A qué conclusión se llega en el contraste anterior para un nivel de significación del 5 %?

Nota: Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1: $F(0'05) = 0'52$, $F(0'95) = 0'83$, $F(1'64) = 0'95$, $F(1'96) = 0'975$, $F(12'5) = 1$.

----

a)

$$\underline{Hipótesis\ nula \rightarrow H_0: p \geq 0,20 \qquad Hipótesis\ alternativa \rightarrow H_1:\ p < 0,20\,\}.}$$

Contraste unilateral.

b)

Conocemos: $n = 3.600;\ \ p_0 = 0,20;\ q_0 = 1 - 0,20 = 0,80.$

$\alpha = 0,05 \rightarrow z_\alpha = 1,645. \qquad (1 - 0,05 = 0,9500 \rightarrow z = 1,645).$

La zona de aceptación es $\left(p_0 - z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot q_0}{n}};\ \ +\infty\right)$:

$$\left(0,20 + 1,645 \cdot \sqrt{\frac{0,20 \cdot 0,80}{3.600}};\ \ +\infty\right);\ \ (0,20 + 1,645 \cdot 0,067;\ \ +\infty);$$

$(0,20 + 0,0110;\ \ +\infty);\ \ (0,2110;\ \ +\infty).$

$$\underline{p = \frac{420}{3.600} = 0,117 \notin (0,2294;\ \ +\infty) \Rightarrow Se\ rechaza\ la\ hipótesis\ nula.}$$

$$\underline{Con\ significación\ del\ 5\ \%\ encuentran\ trabajo\ el\ 1^{er}\ año\ menos\ del\ 20\ \%.}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE BALEARES

JUNIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contesta de manera clara y razonada a una de las dos opciones propuestas. Se valorará la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) utilizado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autorizarán las que traigan información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1º) a) Discuta para que valores de m tiene solución el sistema $x + my + z = 1\ 3x + 2y + z =- 1\ mx + y - z =- 1 \}$.

b) Resuélvalo, si es posible, para m = 1.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A = (1\, m\, 1\ 3\, 2\, 1\, m\, 1\ -1\ )$ y $A' = (1\, m\, 1\ 3\, 2\, 1\, m\, 1\ -1\ \ 1\ -1\ -1\ )$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro m es el siguiente:

$|A| = |1\, m\, 1\ 3\, 2\, 1\, m\, 1\ -1\ | =- 2 + 3 + m^2 - 2m - 1 + 3m = m^2 + m = 0;$

$m(m + 1) \Rightarrow m_1 = 0,\ m_2 =- 1.$

$\underline{Para\ \{m\neq 0\ m\neq -1\ \} \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

Para $m = 0 \Rightarrow A' = (1\ 0\ 1\ 3\ 2\ 1\ 0\ 1\ -1\ \ 1\ -1\ -1\ ) \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \left(C_1,\ C_3,\ C_4\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow |1\ 0\ 1\ 3\ 2\ -1\ 0\ 1\ -1\ | =- 2 + 3 + 1 = 2\neq 0 \Rightarrow Rang\ A' = 3.$

$\underline{Para\ m = 0 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

Para $m =- 1 \Rightarrow A^{'} = (1 \ - \ 1 \ 1 \ 3 \ 2 \ 1 \ - \ 1 \ 1 \ - \ 1 \ \ 1 \ - \ 1 \ - \ 1 \ ) \Rightarrow \{F_1 =- \ F_3\} \Rightarrow Rang\ A^{'} =$
.

$\underline{Para\, m =- 1 \Rightarrow Rang\ A = 2; Rang\ A^{'} = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

$b)$

Para $m = 1$ el sistema resulta: $x - y + z = 1 \ 3x + 2y + z =- 1 \ - x + y - z =- 1 \}$., que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|1\ 1\ 1\ -1\ 2\ 1\ -1\ 1\ -1\ |}{|1\ 1\ 1\ 3\ 2\ 1\ 1\ 1\ -1\ |} = \frac{-2-1-1+2-1-1}{1^2+1} = \frac{-4}{2} =- 2.$$

$$y = \frac{|1\ 1\ 1\ 3\ -1\ 1\ 1\ -1\ -1\ |}{2} = \frac{1-3+1+1+1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

$$y = \frac{|1\ 1\ 1\ 3\ 2\ -1\ 1\ 1\ -1\ |}{2} = \frac{-2+3-1-2+1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

$\underline{Solución: x =- 2,\ y = 2,\ z = 1}.$

****

2º) La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ tiene un extremo relativo en $x = 2$ y un punto de inflexión para $x = 3$. Calcula los valores de a y b y determina si el extremo relativo es un máximo o un mínimo.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b.$ $f''(x) = 6x + 2a.$

Por tener un extremo relativo en $x = 2 \Rightarrow f'(2) = 0$:

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 2^2 + 2a \cdot 2 + b = 0;\ \ 12 + 4a + b = 0;\ \ 4a + b = -12.$

Por tener un punto de inflexión en $x = 3 \Rightarrow f''(3) = 0$:

$f''(3) = 0 \Rightarrow 6 \cdot 3 + 2a = 0;\ \ 18 + 2a = 0;\ \ 9 + a = 0 \Rightarrow \underline{a = -9}.$

Sustituyendo en la expresión $4a + b = -12$:

$4 \cdot (-9) + b = -12;\ \ -36 + b = -12 \Rightarrow \underline{b = 24}.$

La función resulta $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x.$

La condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo es que se anule su primera derivada. Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: según que sea negativa o positiva para los valores que anulan la primera derivada se trata de un máximo o de un mínimo, respectivamente.

$f''(x) = 6x + 2a = 6x - 18.$

$f''(2) = 6 \cdot 2 - 18 = 12 - 18 = -6 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo.$

$\underline{El\ extremo\ que\ tiene\ f(x)\ para\ x = 2\ es\ un\ máximo}.$

****

3º) Contesta a los apartados siguientes:

a) Si la probabilidad de la intersección de dos sucesos independientes es 0,2 y la probabilidad de la unión es 0,7, ¿cuál es la probabilidad de cada uno de los sucesos?

b) En un experimento se sabe que $p(A) = 0,6$, $p(B) = 0,3$ y $p(B) = 0,1$. Calcula $p(A \cup B)$.

----

a)

Sean los sucesos M y N: $P(M \cap N) = 0,2$; $P(M \cup N) = 0,7$.

Por ser sucesos independientes: $P(M \cap N) = P(M) \cdot P(N)$.

$P(M \cap N) = P(M) \cdot P(N) \Rightarrow 0,2 = P(M) \cdot P(N) \Rightarrow P(M) = \frac{0,2}{P(N)}$. (1)

$P(M \cup N) = P(M) + P(N) - P(M \cap N) \Rightarrow 0,7 = P(M) + P(N) - 0,2;$

$0,9 = P(M) + P(N) \Rightarrow P(M) = 0,9 - P(N)$. (2)

De las expresiones (1) y (2):

$\frac{0,2}{P(N)} = 0,9 - P(N);\ \ 0,2 = 0,9 \cdot P(N) - [P(N)]^2;$

$[P(N)]^2 - 0,9 \cdot P(N) + 0,2 = 0 \Rightarrow P(N) = 0 \Rightarrow P(N) = \frac{0,9 \pm \sqrt{0,81 - 0,8}}{2} = \frac{0,9 \pm \sqrt{0,01}}{2} =$

$= \frac{0,9 \pm 0,1}{2} \Rightarrow \left\{ P(N_1) = 0,5 \ P(N_2) = 0,4 \right\} \Rightarrow \{ P(M_1) = \frac{0,2}{P(N_1)} = \frac{0,2}{0,5} = 0,4 \ P(M_2) = \frac{0,2}{P(N_2)}$

.

<u>*La probabilidad de cada uno de los sucesos es* $0,4$ *y* $0,5$.</u>

b)

$p(A) = 0,6$, $p(B) = 0,3$ y $p(B) = 0,1$.

Sabiendo que $p(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$:

$P(A \cap B) = p(B) \cdot P(B) = 0,1 \cdot 0,3 = 0,03$.

Por otra parte: $p(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,3 - 0,03 =$

$= 0,9 - 0,03 = 0,87 \Rightarrow \underline{P(A \cup B) = 0,87}$.

****

4º) Se supone que la cantidad de agua (en litros) recogida cada día en una estación meteorológica está aproximada por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica $\sigma = 2$. En una muestra aleatoria simple se obtuvieron las siguientes cantidades de agua cada día en litros: 8,8 3,8 6,5 3,6 5,5 7,5 3,5 8,9 7,9 4.

a) Determinar un intervalo de confianza para la cantidad media de agua recogida en la estación con un nivel de confianza del 95 %.

b) Calcula la dimensión de la muestra mínima necesaria con un nivel de confianza del 98 % y una amplitud del intervalo de confianza inferior a 1 litro.

----

a)

$$\overline{x} = \frac{8{,}8+3{,}8+6{,}5+3{,}6+5{,}5+7{,}5+3{,}5+8{,}9+7{,}9+4}{10} = \frac{60}{10} = 6.$$

$$\alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1,96.$$

$$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$$

Conocemos: $n = 10$; $\overline{x} = 6$; $\sigma = 2$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$.

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}$, σ y n, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(6 - 1,96 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}},\ 6 + 1,96 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}}\right);\ (6 - 1,96 \cdot 0'632,\ 6 + 1,96 \cdot 0'632);$$

$$(6 - 1'240,\ 6 + 1'240);$$

$$\underline{I.\ C._{95\ \%} = (4'760,\ 7'240).}$$

b)

Si el intervalo de confianza tiene una amplitud inferior a 1 litro, es $E = 0,5$.

Para un nivel de confianza del 98 % es:

$$1 - \alpha = 0,98 \rightarrow \alpha = 1 - 0,98 = 0,02 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}01} = 2,33.$$

$$1 - 0,01 = 0,99 \rightarrow z = 2,33).$$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(2,33 \cdot \frac{2}{0{,}5}\right)^2 =$

$$= (2,33 \cdot 4)^2 = 9,32^2 = 86,86.$$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 87\ días}$.

****

OPCIÓN B

1º) $a)$ Sean $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ y+x & 7 & 7 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & x+y & 1 \\ 3 & x+y+z & x+y+z \end{pmatrix}$ dos matrices de dimensión 2×3, con $x,\ y,\ z$ denotan tres números reales por determinar.

a_1) Determinar los valores de $x,\ y,\ z$ de manera que $A = B$.

a_2) ¿Es posible el cálculo de $A \cdot B$? Razona la respuesta.

b) Dar un ejemplo de cada una de las matrices siguientes: una matriz identidad, una matriz simétrica, y una matriz diagonal que no sea la matriz unidad.

$a)$

$a_1)$

$$A = B \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ y+x & 7 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & x+y & 1 \\ 3 & x+y+z & x+y+z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} y+x=3 \\ x+y+z=7 \end{matrix}\right\} \Rightarrow z = 4;\ x + y = 3.$ Haciendo $y = \lambda \rightarrow x = 3 - \lambda$.

$$\underline{Solución: x = 3 - \lambda,\ y = \lambda,\ z = 4,\ \forall \lambda \in R}.$$

$a_2)$

Para que el producto de dos matrices sea posible es necesario que el número de filas de la matriz multiplicando sea igual que el número de columnas de la matriz multiplicador, por lo cual:

$$\underline{No\ es\ posible\ el\ producto\ de\ A \cdot B}.$$

$b)$

Una matriz identidad es toda matriz cuadrada que tiene todos sus elementos nulos excepto los elementos de su diagonal principal, que son todos unos.

Ejemplo: $\underline{I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

Una matriz simétrica es aquella que coincide con su traspuesta:

Ejemplo: $\underline{M = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}}$.

Una matriz diagonal es toda matriz cuadrada que tenga todos sus elementos nulos, excepto los elementos de la diagonal principal que son, al menos uno de ellos, distintos de cero.

Ejemplos: $\underline{M = (1\ 0\ 0\ 0\ 2\ 0\ 0\ 0\ \ -3\ ),\ N = (2\ 0\ 0\ 0\ )}$.

****

2º) Se va a organizar un puente aéreo entre las islas de Mallorca y Menorca, con plazas suficientes de pasaje y carga, para transportar un mínimo de 1.600 personas y 96 toneladas de equipajes y mercancías. Para ello se dispone de dos tipos de aviones, 11 de tipo A y 8 de tipo B. La contratación de un avión de tipo A cuesta 4.000 euros y puede transportar 200 personas y 6 toneladas de equipajes y mercancía; los aviones de tipo B cuestan 1.000 euros cada uno y pueden transportar 100 personas y 15 toneladas. ¿Cuántos aviones de cada tipo han de utilizarse para que el coste sea mínimo? Se ha de plantear el problema como un problema de programación lineal, dibujando la región factible de soluciones y determinar y dibujar sus vértices.

Sean x e y el número de aviones de los tipos A y B que se contratan, respectivamente.

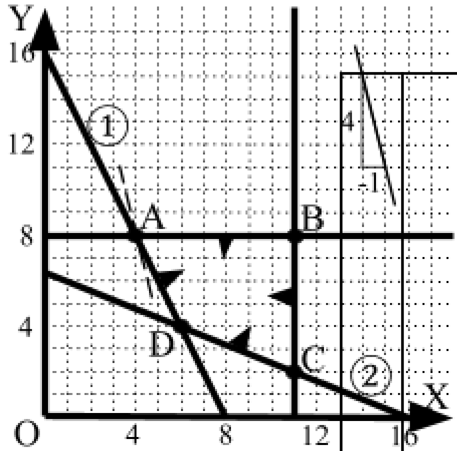
Las condiciones del ejercicio se establecen en el siguiente sistema de inecuaciones:

$x \leq 11,\ y \leq 8\ 200x + 100y \geq 1.600 \qquad 6x + 15y \geq 96\} \quad x \leq 11,\ y \leq 8 \quad 2x + y \geq$

.

La región factible se indica sombreada en la figura adjunta.

$①\Rightarrow 2x + y \geq 16 \Rightarrow y \leq 16 - x \Rightarrow$



x	0	8
y	16	0

$\Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow No.$

$②\Rightarrow 2x + 5y \geq 32 \Rightarrow y \leq \frac{32-2x}{5} \Rightarrow$

x	1	16
y	6	0

$\Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow No.$

Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \quad y = 8\ 2x + y = 16 \} \Rightarrow A(4,\ 8).$
$B \Rightarrow x = 11\ \ y = 8 \} \Rightarrow B(11,\ 8).$

$C \Rightarrow \quad x = 11\ 2x + 5y = 32 \} \Rightarrow D(11,\ 2).$
$D \Rightarrow\ 2x + y = 16\ 2x + 5y = 32 \}\ -2x - y = -16\quad 2x + 5y = 32 \} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4y = 16 \Rightarrow D(6,\ 4).$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,\ y) = 4.000x + 1.000y.$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(4,\ 8) = 4.000 \cdot 4 + 1.000 \cdot 8 = 16.000 + 8.000 = 24.000.$

$B \Rightarrow f(11,\ 8) = 4.000 \cdot 11 + 1.000 \cdot 8 = 44.000 + 8.000 = 52.000.$

$C \Rightarrow f(11,\ 2) = 4.000 \cdot 11 + 1.000 \cdot 2 = 44.000 + 2.000 = 46.000.$

$D \Rightarrow f(6,\ 4) = 4.000 \cdot 6 + 1.000 \cdot 4 = 24.000 + 4.000 = 28.000.$

El mínimo se produce en el punto A.

También se hubiera obtenido el punto por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = 4.000x + 1.000y = 0 \Rightarrow y = -\frac{4.000}{1.000}x \Rightarrow m = -\frac{4}{1}.$

$\underline{El\ coste\ mínimo\ se\ obtiene\ contratando\ 4\ aviones\ tipo\ A\ y\ 8\ tipo\ B}.$

$\underline{El\ coste\ mínimo\ asciende\ a\ 24.000\ euros}.$

****

3º) El beneficio neto, en miles de euros, obtenidos por la venta de x unidades de un artículo viene dada por la función $f(x) = -x^2 + 9x - 16$. ¿Cuál es la función que determina el beneficio neto unitario? Calcular el número de unidades del artículo que se han de vender para obtener un beneficio neto por unidad máximo. Determinar el beneficio máximo por unidad.

La función que determina el beneficio neto unitario es:

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{-x^2+9x-16}{x} = -x + 9 - \frac{16}{x}.$$

$$\underline{Función\ de\ beneficio\ neto\ unitario\text{: } g(x) = -x + 9 - \frac{16}{x}.}$$

Para que el beneficio neto por unidad sea máximo tiene que anularse su primera derivada y ser negativa su segunda derivada para los valores que anulan la primera:

$$g'(x) = -1 + \frac{16}{x^2}. \qquad g''(x) = -\frac{16 \cdot 2x}{x^4} = -\frac{32}{x^3}.$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow -1 + \frac{16}{x^2} = 0;\ \ \frac{16}{x^2} = 1;\ \ x^2 = 16 \Rightarrow x_1 = -4,\ x_2 = 4.$$

La solución negativa carece de sentido lógico, por lo cual la solución es $x = 4$. Además: $g''(4) = -\frac{32}{4^3} < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = 4.$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ neto\ por\ unidad\ es\ máximo\ vendiendo\ 4\ unidades.}$$

$$g(4) = -4 + 9 - \frac{16}{4} = 5 - 4 = 1.$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ neto\ por\ unidad\ es\ de\ 1.000\ euros.}$$

****

4º) Una empresa dedicada a la elaboración de productos derivados del maíz tiene una determinada máquina que envasa los granos de maíz en bolsas que siguen una distribución normal con $\mu = 250\ g$ y $\sigma = 25\ g$. Las bolsas son empaquetadas en paquetes de 200 unidades.

a) Determinar la distribución de las medias de las muestras.

b) Calcular la probabilidad de que la media de los pesos de las bolsas de un paquete sea menor de 245 gramos.

c) Calcular la probabilidad de que un paquete de 200 bolsas pese más de 51 kilos.
(Si se necesita para el cálculo aproximado: $\sqrt{2} = 1,4142$)

----

a)

Para determinar la distribución de las medias muestrales debemos considerar cada paquete como una muestra de 200 unidades de la población de bolsas de maíz. Teniendo en cuenta que las medias muestrales $\overline{x}$ de los pesos de las bolsas siguen una distribución normal de la forma $N\left(\mu,\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$:

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{25}{\sqrt{200}} = \frac{25}{\sqrt{100\cdot 2}} = \frac{25}{\sqrt{100}\cdot\sqrt{2}} = \frac{25}{10\cdot\sqrt{2}} = \frac{5}{2\cdot\sqrt{2}} = \frac{5}{2\cdot 1,4142} \cong 1,7678.$$

$$\underline{\overline{x} \sim N(250,\ 1'7678)}.$$

b)

$P(X < 245)$.

$$P(X < 245) = P\left(\frac{X-250}{1,7678} < \frac{245-250}{1,7678}\right) = P\left(Z < \frac{-5}{1,7678}\right) = P(Z < -2,828) =$$

$$= 1 - P(Z \geq 2,828) = 1 - 0,9977 = \underline{0,0023}.$$

c)

El peso medio de las 200 bolsas es: $n\cdot\mu = 200\cdot 250 = 50.000\ gr$.

La distribución ahora es: $N\left(n\cdot\mu,\ \frac{n\cdot\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow N\left(n\cdot\mu,\ \sigma\cdot\sqrt{n}\right)$.

$N\left(50.000,\ 25\sqrt{200}\right) \Rightarrow N(50.000,\ 353,55)$.

$$P(X > 51.000) = P\left(\frac{X-50.000}{353,55} > \frac{51.000-50.000}{353,55}\right) = P\left(Z > \frac{1.000}{353,55}\right) =$$

$$= P(Z > 2,828) = 1 - P(Z < 2,828) = 1 - 0,9977 = \underline{0,0023 > 2 \cdot 10^{-3}}.$$

$\underline{Se\ puede\ decir\ que,\ al\ menos,\ 2\ de\ cada\ mil\ paquetes\ pesan\ más\ de\ 51\ kilos}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE BALEARES

SEPTIEMBRE – 2016

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contesta de manera clara y razonada a una de las dos opciones propuestas. Se valorará la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) utilizado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autorizarán las que traigan información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1º) $a)$ Dadas las matrices $A = (3\ 2\ 2\ 4)$ y $B = (2\ 5\ -3\ 1)$, resuelve la ecuación matricial $AX + B^t = B$, donde X es una matriz cuadrada de orden 2 y B^t es la matriz traspuesta de B.

$b)$ Dar un ejemplo de las matrices siguientes:

$i)$ Una matriz fila con tres columnas. $ii)$ Una matriz columna con tres filas.

$iii)$ Una matriz de dimensión 3×2. $iv)$ Una matriz simétrica de dimensión 3×3.

$a)$

$$AX + B^t = B;\ \ AX = B - B^t;\ \ A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot\left(B - B^t\right);$$

$$I\cdot X = A^{-1}\cdot\left(B - B^t\right) \Rightarrow \underline{X = A^{-1}\cdot\left(B - B^t\right)}.$$

$$B - B^t = (2\ 5\ -3\ 1) - (2\ -3\ 5\ 1) = (0\ 8\ -8\ 0).$$

$$(A/I) = (1\ 0\ 0\ 1) \Rightarrow \left\{F_1 \to F_1 - F_2\right\} \Rightarrow (1\ -1\ 0\ 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_2 \to F_2 - 2F_1\right\} \Rightarrow (1\ -1\ -2\ 3) \Rightarrow \left\{F_2 \to \tfrac{1}{8}F_2\right\} \Rightarrow \left(1\ -1\ -\tfrac{1}{4}\ \tfrac{3}{8}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_1 \to F_1 + 2F_2\right\} \Rightarrow \left(\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{4}\ -\tfrac{1}{4}\ \tfrac{3}{8}\right) \Rightarrow A^{-1} = \left(\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{4}\ -\tfrac{1}{4}\ \tfrac{3}{8}\right) = \tfrac{1}{8}\cdot(4\ -2$$

.

$X = A^{-1} \cdot \left(B - B^{t}\right) = \frac{1}{8} \cdot (4 \ \ - 2 \ \ - 2\ 3\ ) \cdot (0\ 8 \ \ - 8\ 0\ ) = \frac{1}{8} \cdot (16\ 32 \ \ - 24 \ \ - 16\ )$
.

$$\underline{X = (2\ 4 \ \ - 3 \ \ - 2\ )}.$$

$b)$

$i)$ $\underline{A = (1\ 2\ 3\ )}$. $ii)$ $\underline{B = (2\ 0\ 1\ )}$.

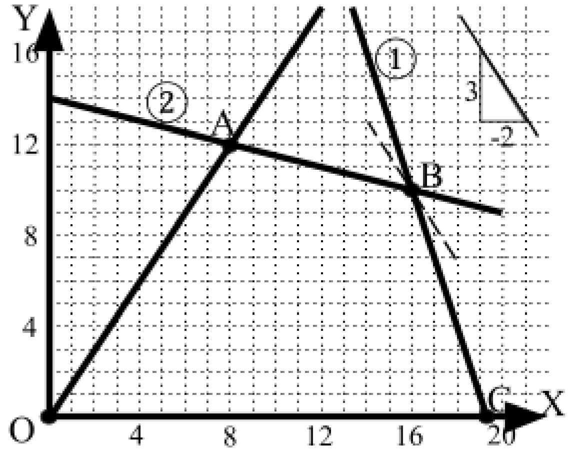
$iii)$ $\underline{C = (2\ 3\ 4\ 0 \ \ - 1\ 1\ )}$. $iv)$ $\underline{D = (2 \ \ - 2\ 1 \ \ - 2 \ \ - 3\ 4\ 1\ 4\ 5\ )}$
.

****

2º) Para fabricar dos tipos de cables, A y B, que se venderán a 150 euros y 100 euros el hectómetro, respectivamente, se utilizan 18 kg de plástico y 3 kg de cobre por cada hectómetro del tipo A y 6 kg de plástico y 12 kg de cobre por cada hectómetro del tipo B. El doble del cable B no puede ser mayor que tres veces el cable A. Además, solamente se tienen 348 kg de plástico y 168 kg de cobre. Determinar la longitud, en hectómetros, de cada tipo de cable para que la cantidad de dinero obtenida en la venta se máxima. ¿Cuál es esa cantidad máxima? Se ha de plantear el problema como un problema de programación lineal, dibujando la región factible de soluciones y determinar dibujando sus ejes.

Siendo x e y los cables de los tipos A y B que se fabrican, respectivamente.

Las condiciones del ejercicio se establecen en el siguiente sistema de inecuaciones:



$18x + 6y \leq 348$ $3x + 12y \leq 168$ $2y \leq 3x$ $x \geq 0; y \geq 0$ } $3x + y \leq 58$ $x + 4y \leq 56$

.

La función de objetivos es la siguiente: $f(x, y) = 150x + 100y$.

La región factible se indica en la figura:

x	14	16
y	16	10

①$\Rightarrow 3x + y \leq 58 \Rightarrow y \leq 58 - 3x \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si.$

x	0	16
y	14	10

②$\Rightarrow x + 4y \leq 56 \Rightarrow y \leq \frac{56-x}{4} \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si.$

x	0	10
y	0	15

③$\Rightarrow 3x - 2y \geq 0 \Rightarrow y \leq \frac{3x}{2} \Rightarrow P(1, 0) \rightarrow Si.$

Los vértices de la zona factible, además del origen, son los siguientes:

$A \Rightarrow 3x - 2y = 0$ $x + 4y = 56$ } $6x - 4y = 0$ $x + 4y = 56$ }$\Rightarrow 7x = 56;\ x = 8;\ y =$

.

$B \Rightarrow 3x + y = 58$ $x + 4y = 56$ } $-3x - y = -58$ $3x + 12y = 168$ }$\Rightarrow 11y = 110;$

.

$C \Rightarrow 3x + y = 58 \qquad y = 0 \} \Rightarrow \underline{D\left(\frac{58}{3},\ 0\right)}.$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(8,\ 12) = 150 \cdot 8 + 100 \cdot 12 = 1.200 + 1.200 = 2.400.$$

$$B \Rightarrow f(16,\ 10) = 150 \cdot 16 + 100 \cdot 10 = 2.400 + 1.000 = 3.400.$$

$$C \Rightarrow f\left(\frac{58}{3},\ 0\right) = 150 \cdot \frac{58}{3} + 100 \cdot 0 = 50 \cdot 58 + 06 = 2.900.$$

El máximo se produce en el punto B.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,\ y) = 150x + 100y = 0 \Rightarrow y = -\frac{150}{100}x \Rightarrow m = -\frac{3}{2}.$$

$$\underline{La\ ganancia\ máxima\ se\ obtiene\ 16\ cables\ A\ y\ 10\ cables\ B}.$$

$$\underline{La\ ganancia\ máxima\ asciende\ a\ 3.400\ euros}.$$

****

3º) La cotización de las acciones de una determinada sociedad anónima, suponiendo que la bolsa funciona todos los días del mes de 30 días, responde a la siguiente función: $C(x) = x^3 - 45x^2 + 243x + 30.000$, siendo x el número de días. Se pide:

a) ¿Cuál fue la cotización de partida de las acciones de la sociedad?

b) Determina los periodos de crecimiento y decrecimiento de las cotizaciones durante este mes.

c) Determine los días en que se consiguieron las cotizaciones máxima y mínima.

d) ¿Cuáles son las cotizaciones máxima y mínima?

----

a)

$$C(0) = 30.000.$$

$\underline{La\ cotización\ inicial\ de\ las\ acciones\ fue\ de\ 30.000\ euros}$.

b)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$C'(x) = 3x^2 - 90x + 243.$ $\qquad$ $C'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 90x + 243 = 0;$

$x^2 - 30x + 81 = 0;\ x = \frac{30\pm\sqrt{900-324}}{2} = \frac{30\pm\sqrt{576}}{2} = \frac{30\pm 24}{2} \Rightarrow x_1 = 3,\ x_2 = 27.$

Por ser $C(x)$ una función polinómica, las raíces de la primera derivada dividen al dominio de la función en tres intervalos alternativos de crecimiento y decrecimiento.

Considerando que $C'(10) = 3\cdot 10^2 - 90\cdot 10 + 243 = 300 - 900 + 243 < 0$,

los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$\underline{La\ cotización\ de\ las\ acciones\ crece\ los\ días\ 1,\ 2,\ 28,\ 29\ y\ 30}$.

$\underline{La\ cotización\ de\ las\ acciones\ decrece\ entre\ los\ días\ 4\ y\ 26\ ambos\ inclusive}$.

c)

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera derivada se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$C''(x) = 6x - 90 \Rightarrow \{C''(3) = 6\cdot3 - 90 = 18 - 90 < 0 \Rightarrow Máx. \rightarrow x = 3 \qquad C''(27) = 6$

.

$\underline{La\ máxima\ cotización\ se\ produjo\ el\ día\ 3\ y\ la\ mínima,\ el\ díd\ 27.}$

$d)$

$C(3) = 3^3 - 45\cdot3^2 + 243\cdot3 + 30.000 = 27 - 405 + 729 + 30.000 =$

$= 30.756 - 405 = 30.351.$

$C(27) = 27^3 - 45\cdot27^2 + 243\cdot27 + 30.000 =$

$= 19.683 - 32805 + 6.561 + 30.000 = 56.244 - 32.805 = 23.439.$

$\underline{La\ máxima\ cotización\ fueron\ 30.351\ euros\ y\ la\ mínima,\ 23.439\ euros.}$

****

4º) Un estudiante hizo dos pruebas en un mismo día. La probabilidad de que apruebe la primera prueba es de 0,6; la probabilidad de que apruebe la segunda prueba es de 0,8, y la probabilidad de que apruebe las dos es 0,5.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe al menos una de las pruebas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que no apruebe ninguna prueba?

c) Son "aprobar la primera prueba" y "aprobar la segunda prueba" sucesos independientes?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe la segunda prueba en el caso de no haber aprobado la primera?

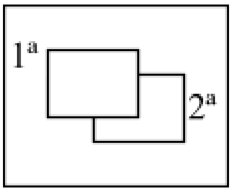
----

a)

$$P = P(1ª \cup 2ª) = P(1ª) + P(2ª) - P(1ª \cap 2ª) = 0,6 + 0,8 - 0,5 = \underline{0,9}.$$

b)

$$P = P(\overline{1ª} \cap \overline{2ª}) = 1 - P(1ª \cup 2ª) = 1 - 0,9 = \underline{0,1}.$$



c)

Dos sucesos (1ª) y (2ª) son independientes cuando $P(1ª \cup 2ª) = P(1ª) \cdot P(2ª)$:

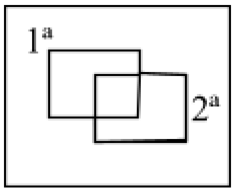
$$P(1ª) \cdot P(2ª) = 0,6 \cdot 0,8 = 0,48 \neq 0,9 = P(1ª \cup 2ª).$$

$$\underline{Los\ sucesos\ (1ª)\ y\ (2ª)\ no\ son\ independientes.}$$

d)

$$P(\overline{1ª}) = \frac{P(2ª \cap \overline{1ª})}{P(\overline{1ª})} = \frac{P(2ª) - P(2ª \cap 1ª)}{P(\overline{1ª})} = \frac{0,8 - 0,5}{1 - 0,6} = \frac{0,3}{0,4} = \underline{\frac{3}{4} = 0,75}.$$

$$P = P(2ª \cap \overline{1ª}) = P(2ª) - P(2ª \cap 1ª) = 0,8 - 0,5 = 0,3.$$



****

OPCIÓN B

1º) Considerada la matriz $A = (1\ 0\ \ -1\ 0\ m\ \ -1\ 1\ 1\ \ -m)$:

a) Determine para qué valores del parámetro m existe A^{-1}.

b) Calcule A^{-1} para $m = 2$.
c) Resuelve, para $m = 2$ el sistema $A \cdot (x\ y\ z) = (1\ 0\ 3)$.

----

a)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero, por lo cual, para que exista A^{-1} tiene que ser $|A| \neq 0$.

$$|A| = |1\ 0\ \ -1\ 0\ m\ \ -1\ 1\ 1\ \ -m| = -m^2 + m + 1 = 0;\ \ m^2 - m - 1 = 0;\ \ m = \frac{1}{}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow m_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},\ m_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

$$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall m \in R - \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}}.$$

b)

Para $m = 2$ es $A = (1\ 0\ \ -1\ 0\ 2\ \ -1\ 1\ 1\ \ -2)$. Se obtiene la inversa por el método de Gauss-Jordan.

$$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1) \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - F_1\} \Rightarrow (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ \ -1\ 0\ 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_3 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow (1\ 0\ 0\ \ -1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0) \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - 2F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1\ 0\ 0\ \ -1\ 0\ 1\ 2\ 1\ \ -2) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 + F_3\ F_2 \to F_2 + F_3\} \Rightarrow (3\ 1\ \ -2\ 1\ 1\ \ -1\ 2\ 1$$

$$\underline{\Rightarrow A^{-1} = (3\ 1\ \ -2\ 1\ 1\ \ -1\ 2\ 1\ \ -2)}.$$

c)

$$A \cdot (x\ y\ z) = (1\ 0\ 3);\ \ A^{-1} \cdot A \cdot (x\ y\ z) = A^{-1} \cdot (1\ 0\ 3);\ \ I \cdot (x\ y\ z) = A^{-1} \cdot (1\ 0\ 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x\ y\ z) = (3\ 1\ \ -2\ 1\ 1\ \ -1\ 2\ 1\ \ -2) \cdot (1\ 0\ 3) = (-3\ \ -2\ \ -4).$$

$$\underline{Solución: x = -3,\ y = -2,\ z = -4}.$$

****

2º) De un problema de programación lineal se conocen las siguientes restricciones: $4x + 3y \geq 12,\ y \leq 30,\ x \leq \frac{10+y}{2},\ x \geq 0,\ y \geq 0.$

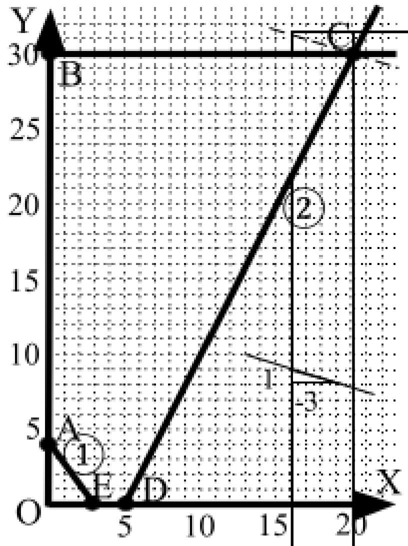
a) Represente gráficamente la región factible del problema y calcule sus vértices.

b) Maximice en la región factible la función $F(x,\ y) = x + 3y$.

c) ¿Pertenece el punto $\mathrm{P}(11,\ 10)$ a la región factible?

----

a)



x	0	3
y	4	0

①$\Rightarrow 4x + 3y \geq 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow y \geq \frac{12-4x}{3} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow No.$

x	5	10
y	0	10

②$\Rightarrow x \leq \frac{10+y}{2} \Rightarrow$

$y \geq 2x - 10 \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

La región factible es la zona sombreada de la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible, además de O(0, 0), son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ 4x + 3y = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{A(0,\ 4)}.$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 30 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{B(0,\ 30)}.$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 30 \\ 2x - y = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{C(20,\ 30)}.$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ 2x - y = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{D(5,\ 0)}.$

$E \Rightarrow \quad y = 0\ 4x + 3y = 12 \} \Rightarrow \underline{E(3,\ 0)}$.

$b)$

Los valores de la función $F(x,\ y) = x + 3y$ en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow F(0,\ 4) = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 4 = 0 + 12 = 12.$

$B \Rightarrow F(0,\ 30) = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 30 = 0 + 90 = 90.$

$C \Rightarrow F(20,\ 30) = 1 \cdot 20 + 3 \cdot 30 = 20 + 90 = 110.$

$D \Rightarrow F(5,\ 0) = 1 \cdot 5 + 3 \cdot 0 = 5 + 0 = 5.$

$E \Rightarrow F(3,\ 0) = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 0 = 3 + 0 = 3.$

El máximo se produce en el punto C.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función dada, como puede observarse en la figura.

$F(x,\ y) = x + 3y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x \Rightarrow m = -\frac{1}{3}.$

$\underline{El\ máximo\ se\ produce\ en\ el\ punto\ C(20,\ 30)\ y\ su\ valor\ es\ 110}.$

$c)$

Un punto pertenece a una zona cuando satisface todas las condiciones o inecuaciones que la definen:

$P(11,\ 10) \Rightarrow \{ 1 \Rightarrow 4x + 3y \geq 12 \rightarrow 4 \cdot 11 + 3 \cdot 10 = 74 > 12 \Rightarrow Si\ 2 \Rightarrow x \leq \frac{10+y}{2} \rightarrow 11 \leq \frac{10+1}{2}$

$\underline{El\ punto\ P(11,\ 10)\ no\ pertenece\ a\ la\ zona\ factible}.$

****

3º) Se considera la función $f(x) = \left(x^2 + a\right)\cdot e^{ax}$, siendo a un parámetro real.

a) Razone y determine cual es el dominio de la función $f(x)$.

b) Determine el valor de a para que la gráfica de la función $f(x)$ pase por el punto $P(0,\ 4)$.

c) Para $a = -2$ determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. ¿Existen máximos y mínimos de $f(x)$? En caso afirmativo, determine los valores en que se producen.

----

a)

Considerando las funciones $g(x) = x^2 + a$ y $h(x) = e^{ax}$, que tienen ambas por dominio R.

$f(x) = g(x)\cdot h(x)$; teniendo en cuenta que $D(g\cdot h) = D(g)\cap D(h)$:

$\underline{El\ dominio\ de\ f(x)\ es\ R}$.

b)

Para que la gráfica de la función $f(x)$ pase por el punto $P(0,\ 4)$ es necesario que se cumpla que $f(0) = 4 \Rightarrow 4 = \left(0^2 + a\right)\cdot e^{a\cdot 0} = a\cdot e^0 = a\cdot 1 = a$.

$\underline{La\ función\ f(x)\ pasa\ por\ el\ punto\ P(0,\ 4)\ para\ a = 4}$.

c)

Para $a = -2$ la función es $f(x) = \left(x^2 - 2\right)\cdot e^{-2x}$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 2x\cdot e^{-2x} + \left(x^2 - 2\right)\cdot(-2)\cdot e^{-2x} = 2e^{-2x}\cdot\left(-x^2 + x + 2\right).$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2e^{-2x}\left(-x^2 + x + 2\right) = 0;\ -x^2 + x + 2 = 0;\ x^2 - x - 2 = 0;$

$x = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{1\pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 2.$

Por ser $2e^{-2x} > 0 \forall x\in R$, $f'(x)$ será positiva o negativa cuando lo sea la expresión $-x^2 + x + 2$.

Las raíces que anulan la primera derivada dividen el dominio de la función $f(x)$, que es R, en tres intervalos donde la función es, alternativamente, creciente o decreciente.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 0$ es $f'(0) > 0$.

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son las siguientes:

$$\underline{Crecimiento\colon\ f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-1,\ 2)}.$$

$$\underline{Decrecimiento\colon\ f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty,\ -1) \cup (2,\ +\infty)}.$$

Teniendo en cuenta que $f(x)$ es continua en R, por los periodos de crecimiento y decrecimiento se pueden determinar los máximos y mínimos relativos; no obstante, se obtienen a través de la segunda derivada.

Para que una función tenga un extremo relativo, máximo o mínimo, es condición necesaria que se anule su primera derivada. Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = -4 \cdot e^{-2x} \cdot \left(-x^2 + x + 2\right) + 2e^{-2x} \cdot (-2x + 1) =$$

$$= 2e^{-2x} \cdot \left[(-2x + 1) - 2\left(-x^2 + x + 2\right)\right] = 2e^{-2x} \cdot \left(-2x + 1 + 2x^2 - 2x - 4\right) =$$

$$= 2e^{-2x} \cdot \left(2x^2 - 4x - 3\right).$$

$$f''(-1) = 2e^2 \cdot (2 + 4 - 3) = 6e^2 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = -1.$$

$$f(-1) = (1 - 2) \cdot e^2 = -e^2 \Rightarrow \underline{Mínimo\colon A\left(-1,\ -e^2\right)}.$$

$$f''(2) = 2e^{-4} \cdot (8 - 8 - 3) = -6e^{-4} < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 2.$$

$$f(2) = (4 - 2) \cdot e^{-4} = \frac{2}{e^4} \Rightarrow \underline{Máximo\colon B\left(2,\ \frac{2}{e^4}\right)}.$$

****

4º) a) Para estudiar el consumo de leche, en litros, por persona al mes, se ha escogido una muestra de 150 personas con un consumo medio de 22 litros por persona y mes. Si este consumo sigue una distribución normal con desviación típica 6, determine un intervalo de confianza para el consumo medio por persona y mes con un nivel de confianza del 96 %.

b) Se quiere estimar el consumo medio de leche, en litros, por persona y mes. Si este consumo sigue una distribución normal con desviación típica 6, cual es el tamaño de la muestra necesaria para estimar el consumo medio con un error de un litro y con un nivel de confianza del 90 %.

----

a)

$$1 - \alpha = 0,96 \rightarrow \alpha = 1 - 0,96 = 0,04 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,02} = 2,055.$$

$$(1 - 0,02 = 0,9800 \rightarrow z = 2,055).$$

Datos: $\overline{x} = 22;\ \ n = 150;\ \ \sigma = 6;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,055.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(22 - 2'055 \cdot \frac{6}{\sqrt{150}};\ \ 22 + 2'055 \cdot \frac{6}{\sqrt{150}}\right);$$

$$\left(22 - 2'055 \cdot 0,4899;\ \ 22 + 2'055 \cdot 0,4899\right);\ \left(22 - 1,0067;\ \ 22 + 1'0067\right);$$

$$\underline{I.\ C._{96\ \%}\left(20'9933,\ \ 23'0067\right).}$$

b)

$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 1 - 0,90 = 0,10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,05} = 1,645.$$

$$(1 - 0,05 = 0,9500 \rightarrow z = 1,645).$$

Datos: $\overline{x} = 22;\ \sigma = 6;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,645;\ \ E = 1.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1,645 \cdot \frac{6}{1}\right)^2 =$

$$= (1,645 \cdot 6)^2 = 9,87^2 = 97,4169.$$

$$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 98\ personas.}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CANARIAS

JULIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Cada alumno debe elegir sólo una de las pruebas, A o B.

PRUEBA A

1º) Un estudio sobre los kilogramos de residuos no minerales que genera cada español al año, ha dado, para una muestra de 100 personas, el intervalo de confianza siguiente:
$[1.470,6; 1.529,4]$. Si la desviación típica es de 150 kilogramos, suponiendo que la generación de residuos sigue una distribución normal:

$a)$ ¿Cuál es la media muestral?

$b)$ ¿Cuál es el nivel de confianza utilizado?

$c)$ ¿Cuál sería el correspondiente intervalo con la misma información muestral pero con un nivel del confianza igual a 0,9?

$a)$

La media muestral es la media aritmética del intervalo de confianza.

$\overline{x} = \frac{1.470,6+1.529,4}{2} = \frac{3.000}{2} = \underline{1.500}.$

$b)$

Datos: $\overline{x} = 1.000;\ n = 100;\ \sigma = 150.$

$E = \frac{1.529,4-1.470,6}{2} = \frac{58,8}{2} = 29,4.$

De la fórmula del error máximo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$:

$z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E\cdot\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{29,4\cdot\sqrt{100}}{150} = \frac{294}{150} = 1,96.$

Mirando en la tabla $N(0,\ 1)$: A 1,96 le corresponde en la tabla 0'9750.

$1-\frac{\alpha}{2}=0'9750;\ \ 2-\alpha=1'9500;\ \ \alpha=2-1'9500=0'0500.$

$\underline{El\ nivel\ de\ confianza\ es\ 0,05}.$

$c)$

Para un nivel de confianza de $0,9=90\ \%$:

$1-\alpha=0,90\rightarrow\alpha=1-0,90=0,10\rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0,05}=1,645.$
$(1-0,05=0,9500\rightarrow z=1,645).$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(1.500-1,645\cdot\frac{150}{\sqrt{100}};\ 1.500+1,645\cdot\frac{150}{\sqrt{100}}\right);$

$(1.500-1,645\cdot 15;\ 1.500+1,645\cdot 15);$

$\left(1.500-24'675;\ 1.500+24'675\right);$

$$\underline{I.\ C._{90\ \%}=\left(1.475'325,\ 1.524'675\right)}.$$

****

2º) El dueño de un pequeño supermercado ha observado, durante un largo periodo de tiempo, que sus beneficios semanales se distribuyen según una ley normal con una media de 5.300 euros y una desviación típica de 500 euros. A finales del año 2.014 se abrió una frutería justo enfrente y él cree que, desde entonces, su beneficio semanal medio ha disminuido. Para contrastar esta suposición, ha tomado una muestra aleatoria de 20 semanas del año 2.015 y ha encontrado que el beneficio semanal medio de esa muestra es de 5.000 euros:

a) Plantear un test de hipótesis que permita contrastar la suposición del comerciante.

b) ¿A qué conclusión se llega con un nivel de significación del 2 %?

c) ¿Cuál es la conclusión con un nivel de significación igual a 0,003?

----

a)

$\underline{Hipótesis\ nula \rightarrow H_0: \mu \geq 5.300 \qquad Hipótesis\ alternativa \rightarrow H_1: \mu < 5.300\}.}$

Contraste unilateral.

b)

Conocemos: $n = 20;\ \mu_0 = 5.300;\ \sigma = 500.$

La región de aceptación es $\left(\mu_0 - z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ +\infty\right)$:

$\alpha = 0,02 \rightarrow z_\alpha = 2,055. \qquad (1 - 0,02 = 0,9800 \rightarrow z = 2,055).$

Región de aceptación: $\left(5.300 - 2,055 \cdot \frac{500}{\sqrt{20}};\ +\infty\right)$;

$(5.300 - 2,055 \cdot 111,80;\ +\infty)$; $\left(5.300 - 29'756;\ +\infty\right) \Rightarrow \left(5.270'244;\ +\infty\right)$.

$\underline{\overline{x} = 5.000 \notin \left(5.270'244\right) \Rightarrow No\ se\ acepta\ la\ hipótesis\ nula.}$

$\underline{Con\ significación\ del\ 2\ \%\ el\ beneficio\ semanal\ ha\ disminuído.}$

c)

$Para\ \alpha = 0,003 \rightarrow z_\alpha = 2,75. \qquad (1 - 0,003 = 0,9970 \rightarrow z = 2,75).$

La región de aceptación es $\left(5.300 - 2,75 \cdot \frac{500}{\sqrt{20}};\ +\infty\right)$;

$$(5.300 - 2,75 \cdot 111,80; \ + \infty); \ \left(5.300 - 29'756; \ + \infty\right) \Rightarrow (5.329'756).$$

$$\underline{\overline{x} = 5.000 \in (-\infty, \ 5.529'576) \Rightarrow Se\ acepta\ la\ hipótesis\ nula}.$$

****

3º) En 8 años, el capital invertido por una compañía de fondos de inversión, en millones de euros, viene dado por la función $c(t) = t^2 - 7t + 14$, siendo $t \in [0,\ 8]$ el tiempo en años. Justificando la respuesta:

a) ¿Cuándo ha crecido y ha decrecido $c(t)$? ¿En qué momento ha sido máximo el capital invertido? ¿Cuál es el capital máximo invertido?

b) ¿Cuándo $c(t)$ alcanza un mínimo? ¿Cuál es el capital mínimo invertido?

c) ¿Cuándo el capital invertido fue igual a 4 millones?

----

a)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$c'(t) = 2t - 7 = 0 \Rightarrow t = \frac{7}{2} = 3,5.$$

$$Para\ t < 3,5 \Rightarrow c'(t) < 0 \Rightarrow \underline{Derecimiento:\ (0,\ 3'5)}.$$

$$Para\ t > 3,5 \Rightarrow c'(t) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento:\ (3'5,\ 8)}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$c''(t) = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ t = 3,5.$$

Por ser $c(t)$ una parábola convexa (∪), lo que tiene es un mínimo (como se acaba de deducir), por lo cual el máximo capital invertido tiene que ser al principio o al final del proceso.

$$c(0) = 14. \qquad c(8) = 8^2 - 7 \cdot 8 + 14 = 64 - 56 + 14 = 22.$$

$$\underline{El\ capital\ invertido\ ha\ sido\ máximo\ al\ terminar\ el\ octavo\ año.}$$

$$\underline{El\ máximo\ capital\ invertido\ ha\ sido\ de\ 22\ millones\ de\ euros.}$$

b)

$$\underline{El\ mínimo\ se\ alcanza\ a\ los\ 3,5\ años\ del\ comienzo\ de\ la\ inversión.}$$

$$c(3,5) = 3,5^2 - 7 \cdot 3,5 + 14 = 12,25 - 24,5 + 14 = 1,75.$$

$\underline{El\ capital\ mínimo\ invertido\ fue\ de\ 1,75\ millones\ de\ euros}.$

$c)$

$c(t) = 4 \Rightarrow t^2 - 7t + 14 = 4;\ \ t^2 - 7t + 10 = 0;\ t = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} =$

$= \frac{7 \pm 3}{2} \Rightarrow t_1 = 2,\ t_2 = 5.$

$\underline{El\ capital\ invertido\ fue\ de\ 4\ millones\ a\ los\ 2\ años\ y\ a\ los\ 5\ años}.$

****

4º) Un instituto oferta a sus 240 alumnos actividades extraescolares. Algunos hacen deportes, otros hacen teatro y los hay que deciden no hacer actividades. Los que hacen deportes son el doble de los que hacen teatro y los que no hacen ninguna actividad juntos. Los que hacen teatro son la tercera parte de los que no hacen ninguna actividad. ¿Cuántos alumnos hay en cada modalidad?

Sean $x,\ y,\ z$ los alumnos que hacen deporte, teatro o no hacen ninguna actividad, respectivamente.

$x + y + z = 240 \quad x = 2(y + z) \quad\quad y = \frac{z}{3} \} \quad x + y + z = 240 \quad x = 2y$

.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$x = \frac{|240\ 1\ 1\ 0\ -2\ -2\ 0\ 3\ -1\ |}{|1\ 1\ 1\ 1\ -2\ -2\ 0\ 3\ -1\ |} = \frac{240\cdot|-2\ -2\ 3\ -1\ |}{2+3+6+1} = \frac{240\cdot(2+6)}{12} = 20\cdot8 = 160.$

$y = \frac{|1\ 240\ 1\ 1\ 0\ -2\ 0\ 0\ -1\ |}{12} = \frac{-240\cdot|1\ -2\ 0\ -1\ |}{12} = \frac{-240\cdot(-1)}{12} =- 20\cdot(-\ 1) = 20.$

$z = \frac{|1\ 1\ 240\ 1\ -2\ 0\ 0\ 3\ 0\ |}{12} = \frac{240\cdot|1\ -2\ 0\ 3\ |}{12} = \frac{240\cdot(3)}{12} = 20\cdot3 = 60.$

$\underline{Hacen\ deporte\ 160,\ teatro,\ 20\ y\ no\ hacen\ ninguna\ actividad,\ 60}$

****

PRUEBA B

1º) En un invernadero que se dedica a la producción de tomates, se ha comprobado que el peso de los tomates sigue una distribución normal con media 100 g y desviación típica 10 g. A la hora de comercializarlos se toman para la clase A los comprendidos entre 80 y 120 g. Hallar la probabilidad de que:

a) Elegido un tomate al azar, corresponda a la clase A.

b) Elegidos una docena de tomates al azar, su peso medio sea superior a 105 g.

----

a)

$X = N(\mu,\ \sigma) = N(100,\ 10).$

Tipificando la variable: $Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma} \Rightarrow Z = \frac{\overline{X}-100}{10}$.

$P\left(\frac{80-100}{10} \leq \frac{\overline{X}-100}{10} \leq \frac{120-100}{10}\right) = P\left(\frac{-20}{10} \leq Z \leq \frac{20}{10}\right) = P(-\ 2 \leq Z \leq 2) =$

$= P(Z\leq 2) - P(Z\leq\ -\ 2) = P(Z\leq 2) - [1\ -\ P(Z\leq 2)] =$

$= P(Z\leq 2) -\ 1\ +\ P(Z\leq 2) =\ 2\cdot P(Z\leq 2) -\ 1\ =\ 2\cdot 0,9772\ -\ 1\ =$

$= 1,9544\ -\ 1\ = \underline{0,9544\ =\ 95,44\ \%}$.

b)

$Variable\ X \rightarrow N(100,\ 10) \Rightarrow$

$\Rightarrow Para\ n\ =\ 12 \rightarrow \overline{X}\ =\ N\left(100,\ \frac{10}{\sqrt{12}}\right) =\ N(100,\ 2'887).$

$P(\overline{X}\ >\ 105) = P\left(Z\ >\ \frac{105-100}{2,887}\right) = P\left(Z\ >\ \frac{5}{2,887}\right) = P(Z\ >\ 1,73) =$

$= 1\ -\ P(Z\leq 1,73) =\ 1\ -\ 0,9582\ = \underline{0,0418\ =\ 4,18\ \%}$.

****

2º) Un estudio realizado sobre 225 adultos indica que 135 duermen menos de 8 horas cada día.

a) Con una confianza del 98 %, construir un intervalo de confianza para la proporción de adultos que duermen, al menos, 8 horas cada día.

b) Con una significación del 0,5 %, si se obtuviese el mismo porcentaje muestral para una muestra de 350 adultos, ¿se puede rechazar la hipótesis de que como mínimo el 65 % de los adultos duermen menos de 8 horas cada día?

----

a)

$$p = \frac{225-135}{225} = \frac{90}{225} = 0,4;\ \ q = 1 - p = 1 - 0,4 = 0,6;\ \ n = 225.$$

El intervalo de confianza es: $I.C. = \left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}};\ p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right).$

Para un nivel de confianza del 98 % es:

$$1 - \alpha = 0,98 \rightarrow \alpha = 1 - 0,98 = 0,02 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,01} = 2,33.$$

$$1 - 0,01 = 0,99 \rightarrow z = 2,33).$$

$$I.C. = \left(0'4 - 2'33 \cdot \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{225}};\ 0'4 + 2'33 \cdot \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{225}}\right);$$

$$\left(0'4 - 2'33 \cdot 0'0327;\ 0'4 + 2'33 \cdot 0'0327\right);\ .$$

$$\left(0'4 - 0'0761;\ 0'4 + 0'0761\right).$$

$$\underline{I.\ C._{\ 98\%} = \left(0'3239;\ 0'4761\right).}$$

b)

$$p_0 = 0,65;\ \ q_0 = 1 - 0,65 = 0,35;\ \ n = 350. \qquad p = \frac{135}{225} = 0,6.$$

Para una significación del 0,5 %:

$$Para\ \alpha = 0,005 \rightarrow z_{\alpha} = 2,575. \qquad (1 - 0,005 = 0,9950 \rightarrow z_{\alpha} = 2,575)$$

.

$Hipótesis\ nula \rightarrow H_0: p_0 \geq 0,65$ $\qquad$ $Hipótesis\ alternativa \rightarrow H_1:\ p < 0,65\ \}$

. Contraste unilateral.

La zona de aceptación es: $\left(p_0 - z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot q_0}{n}};\ \ +\infty\right)$.

$\left(0,65 - 2,575 \cdot \sqrt{\frac{0,65 \cdot 0,35}{350}};\ \ +\infty\right);\ (0,65 - 2,575 \cdot 0,0255);$

$(0,65 - 0,0656;\ \ +\infty);\ \ (0,5844;\ \ +\infty).$

$p = 0,6 \in (0,5844;\ \ +\infty) \Rightarrow No\ se\ rechaza\ la\ hipótesis\ nula.$

$\underline{Al\ menos\ el\ 65\ \%\ duerme\ menos\ de\ 8\ horas}.$

****

3º) Un estudio acerca de la presencia de gases contaminantes en la atmósfera de una gran ciudad en los últimos años, indica que su concentración (en mg/m^3) viene dada por la función: $f(t) = -0,2t^2 + 5t + 10$, donde t indica el número de años que han transcurrido desde el 1 de enero de 2.010 a las 0:00 horas. Según ese estudio:

a) ¿Cuál fue la concentración el 1 de enero de 2.016 a las 0:00 horas?

b) ¿En qué año se alcanzará un máximo en el nivel de contaminación? ¿En qué estación del año tendrá lugar? ¿Cuál será el valor de dicha concentración?

----

a)

$$t = 2.016 - 2.010 = 6\ años.$$

$$f(6) = -0,2\cdot 6^2 + 5\cdot 6 + 10 = -0,2\cdot 36 + 30 + 10 = -7,2 + 40 = 32,8.$$

$\underline{La\ concentración\ el\ 1\ de\ enero\ de\ 2.016\ a\ las\ 0:00\ horas\ fue\ de\ 32,8\ mg/m^3}.$

b)

La función $f(t) = -0,2t^2 + 5t + 10$ es una parábola cóncava (∩) por lo cual el valor máximo se encuentra en el valor que anula su primera derivada:

$$f'(t) = -0,4t + 5 = 0;\ 0,4t = 5;\ \ t = \frac{5}{0,4} = \frac{50}{4} = \frac{25}{2} = 12,5.$$

$\underline{El\ máximo\ nivel\ de\ contaminación\ se\ alcanzará\ dentro\ de\ 12\ años\ y\ medio}.$

Entendiendo que la máxima contaminación se produce al final de junio:

$\underline{La\ máxima\ contaminación\ se\ producirá\ en\ verano}.$

$$f(12,5) = -0,2\cdot 12,5^2 + 5\cdot 12,5 + 10 = -0,2\cdot 156,25 + 62,5 + 10 =$$

$$= -31,25 + 72,5 = 41,25.$$

$\underline{La\ concentración\ máxima\ será\ de\ 41,25\ mg/m^3}.$

****

4º) Para sufragarse los gastos del viaje de estudios, los alumnos de un instituto han montado un mercadillo para vender objetos de segunda mano distribuidos en dos tipos de packs. Cada pack tipo A consta de 3 libros y una pieza de ropa, y cada pack tipo B consta de 2 libros y 2 piezas de ropa. Cada pack tipo A se vende a 7 euros y cada pack tipo B se vende a 8,5 euros. Por problemas de almacenamiento, se pueden disponer, a lo sumo, de 342 libros y 218 piezas de ropa. Desean maximizar su recaudación.

a) Determinar la función objetivo y expresar mediante inecuaciones las restricciones del problema.

b) ¿Cuántas unidades de cada tipo de pack deben vender los alumnos para que la recaudación obtenida sea máxima? Calcula dicha recaudación.

----

a)

Sean x e y el número de packs de los tipos A y B que venden, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes:

$3x + 2y \leq 342 \quad x + 2y \leq 218 \quad x \geq 0; \quad y \geq 0 \}$.

La función de objetivos es: $\underline{f(x, y) = 7x + 8,5y}$.

La región factible se indica en la figura:

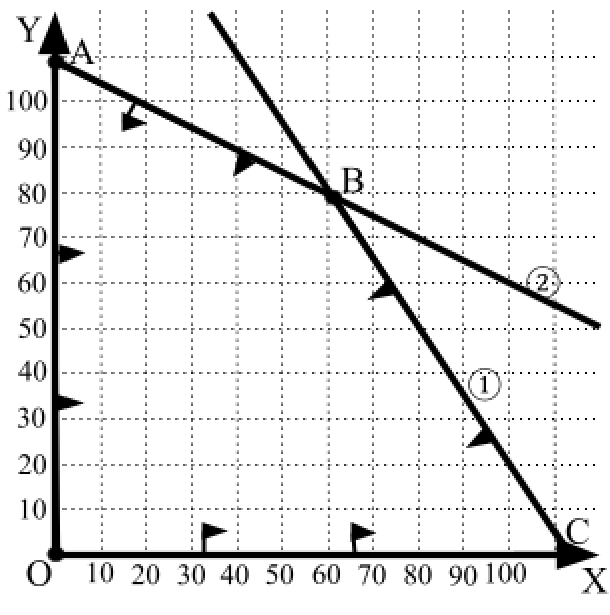
x	0	100
y	109	21

①$\Rightarrow 3x + 2y \leq 342 \Rightarrow y \leq \frac{342-3x}{2} \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si$.

x	100	50
y	59	84

②$\Rightarrow x + 2y \leq 218 \Rightarrow y \leq \frac{218-x}{2} \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si$.

Los vértices de la sección factible, además del origen, son los siguientes:



$A \Rightarrow \left. \begin{matrix} x = 0 \\ x + 2y = 218 \end{matrix} \right\} \Rightarrow A(0,\ 109).$

$B \Rightarrow \left. \begin{matrix} 3x + 2y = 342 \\ x + 2y = 218 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left. \begin{matrix} 3x + 2y = 342 \\ -x - 2y = -218 \end{matrix} \right\} \Rightarrow 2x = 124 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 62;\ y = \frac{218-62}{2} = \frac{156}{2} = 78 \Rightarrow$

$\Rightarrow B(62,\ 78).$

$C \Rightarrow \left. \begin{matrix} 3x + 2y = 342 \\ y = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow C(114,\ 0).$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 109) = 7 \cdot 0 + 8,5 \cdot 109 = 0 + 926,5 = 926,5.$

$B \Rightarrow f(62,\ 78) = 7 \cdot 62 + 8,5 \cdot 78 = 434 + 663 = 1.097.$

$C \Rightarrow f(114,\ 0) = 7 \cdot 114 + 8,5 \cdot 0 = 798 + 0 = 798.$

El máximo se produce en el punto B.

$\underline{La\ recaudación\ es\ máxima\ vendiendo\ 62\ packs\ tipo\ A\ y\ 78\ packs\ tipo\ B}.$

$\underline{La\ ganancia\ máxima\ es\ de\ 1.097\ euros}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CANARIAS

JUNIO – 2016

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Cada alumno debe elegir sólo una de las pruebas, A o B.

PRUEBA A

1º) Un estudio, realizado hace un año, concluyó que, al menos, el 32 % de los habitantes de una comunidad tenían obesidad o sobrepeso. Poco después, se puso en marcha una campaña de fomento de hábitos de vida saludable que ha culminado recientemente con una encuesta realizada a 450 habitantes de esa comunidad, de los que 324 no tenían ni obesidad ni sobrepeso.

a) Con un nivel de significación del 1 %, ¿se puede rechazar que la campaña ha sido un éxito y que, por tanto, el porcentaje de habitantes con obesidad o sobrepeso no ha disminuido?

b) ¿Qué ocurre si el nivel de significación es del 10 %?

----

a)

$Hipótesis\ nula \rightarrow H_0: p \geq 0,32$ $\quad$ $Hipótesis\ alternativa \rightarrow H_1:\ p < 0,32\ \}$.

Contraste *unilateral;* en el caso que nos ocupa es $\left(p_0 - z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot q_0}{n}};\ \ +\infty\right)$.

$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 1 - 0,99 = 0,01 \rightarrow z_\alpha = 2,33.$
$(1 - 0,01 = 0,9900 \rightarrow z = 2,33).$

Para $p_0 = 0,32,\ q_0 = 0,68\ y\ n = 450$:

$\left(0'32 - 2,33 \cdot \sqrt{\frac{0.32 \cdot 0,68}{450}};\ \ +\infty\right);\ \left(0'32 - 2,33 \cdot 0,022;\ \ +\infty\right);$

$\left(0'32 - 0,051;\ \ +\infty\right) \Rightarrow \underline{\left(0'269;\ \ +\infty\right)}.$

La proporción muestral es $p = 1 - q = 1 - \frac{324}{450} = 1 - 0,72 = 0,28$, que pertenece a la zona de contraste, por lo cual se debe admitir la hipótesis nula, o sea que:

$$\underline{Con\ significación\ del\ 1\ \%\ se\ admite\ que\ la\ campaña\ no\ ha\ sido\ un\ éxito.}$$

$b)$

Para un nivel de significación es del 10 % es:

$\alpha = 0,10 \rightarrow z_{\alpha} = 1,28.(1 - 0,10 = 0,9000 \rightarrow z = 1,28).$

$$\left(0'32 - 1,28 \cdot \sqrt{\frac{0.32 \cdot 0,68}{450}};\ +\infty\right);\ \left(0'32 - 1,28 \cdot 0,022;\ +\infty\right);$$

$$\left(0'32 - 0,028;\ +\infty\right) \Rightarrow \underline{\left(0'2918;\ +\infty\right)}.$$

La proporción muestral $p = 0,28$ no pertenece a la zona de contraste, por lo cual no se debe admitir la hipótesis nula, o sea que:

$$\underline{Con\ significación\ del\ 10\ \%\ se\ rechaza\ la\ hipótesis\ inicial:\ ha\ sido\ un\ éxito.}$$

****

2º) Del alumnado que se matricula en la universidad, el 60 % acaba la carrera elegida y, de éstos, el 45 % son chicos. Además, el 25 % cambia de carrera, de los que el 30 % son chicas, y el 15 % deja los estudios, de los que el 50 % son chicos.

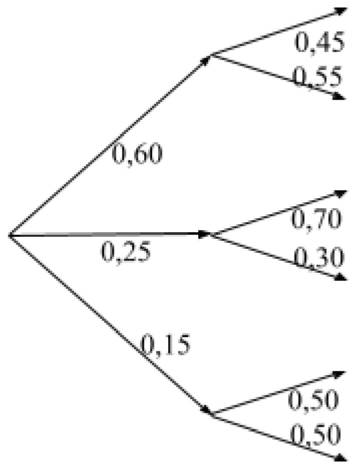
a) Construir un diagrama del árbol.

b) Elegido un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea chico?

c) Elegido un chico al azar, ¿cuál es la probabilidad de que cambie de carrera?

----

a)



b)

$$P = (T/Chico) + (C/Chico) + (A/Chico) =$$

$$= 0,60 \cdot 0,45 + 0,25 \cdot 0,70 + 0,15 \cdot 0,50 = 0,2700 + 0,1750 + 0,0750 = 0,5200.$$

$$\underline{P = 0,5200}.$$

c)

$$P = P(C/Chico) = \frac{P(C) \cap P(Chico)}{P(Chico)} = \frac{0,25 \cdot 0,70}{0,2700+0,1750+0,0750} = \frac{0,1750}{0,5200} = 0,3365.$$

$$\underline{P = 0,3365}.$$

****

3º) La función $G(x) = \{\frac{2x}{3},\ si\ 0 \leq x \leq 8\ \frac{5x+8}{2x-7}\ ,\ si\ x > 8$, en miles de euros, de las ganancias de una empresa, creada para dar servicio y potenciar el sector de las Energías Renovables en función del tiempo transcurrido x, en meses desde su creación.

a) ¿Cuánto gana la empresa transcurridos 6 meses desde su creación? ¿Y transcurridos 10 años?

b) Dar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de dichas ganancias.

c) ¿Qué sucede a medida que transcurre el tiempo? Razona la respuesta.

----

a)

$$G(6) = \frac{2 \cdot 6}{3} = 2 \cdot 2 = 4.$$

Diez años son 120 meses

$$G(120) = \frac{5 \cdot 120+8}{2 \cdot 120-7} = \frac{600+8}{240-7} = \frac{608}{233} \cong 2,60944.$$

$$\underline{Transcurridos\ 6\ meses\ gana\ 4.000\ euros.}$$

$$\underline{Transcurridos\ 10\ años\ gana\ 2.609,4\ euros.}$$

b)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$G'(x) = \{\frac{2}{3}\ \ si\ 0 \leq x \leq 8\ \frac{-51}{(2x-7)^2}\ \ (*),\ si\ x > 8\ .$$

(*) $\quad g(x) = \frac{5x+8}{2x-7} \Rightarrow g'(x) = \frac{5 \cdot (2x-7)-(5x+8) \cdot 2}{(2x-7)^2} = \frac{10x-35-10x-16}{(2x-7)^2} = \frac{-51}{(2x-7)^2}.$

$$Crecimiento: G'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon [0,\ 8].$$

$$Decrecimiento: G'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon (8, +\ \infty).$$

$$\underline{La\ ganancia\ crece\ los\ 8\ primeros\ meses;\ despúes\ decrece.}$$

c)

$$G(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{5x+8}{2x-7} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

$\underline{Con\ el\ tiempo\ la\ ganancia\ se\ estabiliza\ en\ 2.500\ euros\ mensuales}$.

****

4º) Una casa rural adquirió un total de 200 toallas de tres tipos: de baño, de manos y de pies, gastando para ello un total de 7.600 euros. El precio de una toalla de baño es de 50 euros, el de una toalla para manos es de 40 euros y el de una toalla para pies es de 25 euros. Además, por cada tres toallas para manos se compran dos toallas para pies. ¿Cuántas toallas de cada tipo ha comprado la casa rural?

Sean x, y, z el número de toallas de baño, de manos y de pies que se adquieren, respectivamente.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=200 \\ 50x+40y+25z=7.600 \\ 2y=3z \end{array}\right\}$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 200 & 1 & 1 \\ 1.520 & 8 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 8 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}}=\frac{-4.800+3.040-2.000+4.560}{-24+20-10+30}=\frac{7.600-6.800}{50-24}=\frac{800}{16}=50.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 200 & 1 \\ 10 & 1.520 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{16}=\frac{-4.560+6.000}{16}=\frac{1.440}{16}=90.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 200 \\ 10 & 8 & 1.520 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{16}=\frac{4.000-3.040}{16}=\frac{960}{16}=60.$$

$\underline{\textit{La casa rual adquirió } 50,\ 90 \textit{ y } 60 \textit{ toallas de baño, manos y pies, respect.}}$

****

PRUEBA B

1º) En un periódico se lee el siguiente titular: "Un 57,2 % de los catalanes están *totalmente o bastante* a favor de la independencia".

a) Sabiendo que para obtener dicha proporción se han realizado 1.050 encuestas telefónicas, construir un intervalo de confianza con un nivel de confianza de 0,8.

b) ¿A cuántas personas habría que encuestar para estimar la proporción de respuestas del titular con un error máximo del 1,5 % y con un nivel de confianza del 95 %?

----

a)

Para un nivel de confianza de $0,8 = 80$ %:

$1 - \alpha = 0,80 \rightarrow \alpha = 1 - 0,80 = 0,20 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,1} = 1,28.$

$(1 - 0,1 = 0,9000 \rightarrow z = 1,28).$

Conocemos: $n = 1.050;\ \ p = 0,572;\ \ q = 1 - 0,496 = 0,428.$

Se aplica la fórmula adecuada que nos da el intervalo de confianza pedido, que es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}},\ p + z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}\right).$

$$\left(0,572 - 1,28\cdot\sqrt{\frac{0,572\cdot 0,428}{1.050}},\ 0'572 + 1,28\cdot\sqrt{\frac{0,572\cdot 0,428}{1.050}}\right);$$

$$\left(0,572 - 1,28\cdot 0'0153, 0'572 + 1,28\cdot 0'0153\right);$$

$$\left(0,572 - 0'0195,\ 0'572 + 0'0195\right).$$

$$\underline{I.\ C._{80\,\%} = \left(0'5525,\ 0'5915\right).}$$

b)

Para un nivel de confianza del 95 %:

$\alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$

$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$

Conocemos: $E = 0,015;\ \ p = 0,572;\ \ q = 0,428;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96.$

De la fórmula del error máximo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{P \cdot q}{n}} \Rightarrow E^2 = \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot \frac{P \cdot q}{n} \Rightarrow$

$$\Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot \frac{P \cdot q}{E^2} = 1,96^2 \cdot \frac{0,572 \cdot 0,428}{0,015^2} = 3,8416 \cdot \frac{0,2448}{0,000225} = 3,8416 \cdot 1.088'07 =$$

$$= 4.179,93.$$

$\underline{Habría\ que\ encuestar\ por\ lo\ menos\ a\ 4.180\ catalanes.}$

****

2º) Para contrastar la noticia de que, al menos, el consumo medio mensual de energía eléctrica de los hogares canarios es de 295 Kwh, con una desviación típica de 32 Kwh, se toma una muestra de 400 hogares del archipiélago para los que se obtiene una media de 292 KWh. Si la variable *consumo mensual de energía eléctrica de los hogares canarios* es normal:

a) Plantear el contraste adecuado. Indicar cuál es la región crítica.

b) Con un nivel de significación del 10 %, ¿se puede aceptar lo que se afirma en la noticia?

c) ¿Qué se puede decir si el nivel de significación es del 0,5 %?

----

a)

$Hipótesis\ nula \to H_0: \mu \geq 295$ $\qquad$ $Hipótesis\ alternativa \to H_1: \mu < 295 \}$

. Contraste unilateral.

Conocemos: $n = 400;\ \mu_0 = 295;\ \sigma = 32.$

La región de aceptación es $\left(\mu_0 - z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ + \infty\right)$, por lo tanto la región crítica es:

$\overline{x} > \mu - z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \overline{x} > 295 - z_\alpha \cdot \frac{32}{\sqrt{400}} = 295 - z_\alpha \cdot 1'6.$

$\underline{Región\ crítica:\ \overline{x} > 295 - z_\alpha \cdot 1'6}.$

b)

$\alpha = 0,10 \to z_\alpha = 1,28.$ $(1 - 0,10 = 0,9000 \to z = 1,28).$

Región crítica: $295 - z_\alpha \cdot 1'6 = 295 - 1'28 \cdot 1'6 = 295 - 2'048 =$

$= 292'952 > 292.$

$\underline{\overline{x} = 292 \notin (292'952, + \infty) \Rightarrow Se\ rechaza\ la\ hipótesis\ nula.}$

$\underline{Con\ nivel\ de\ confianza\ del\ 10\ \%\ el\ consumo\ mensual\ es\ menor\ de\ 295\ KWh.}$

c)

$Para\ \alpha = 0,005 \to z_\alpha = 2,575.$ $\qquad (1 - 0,005 = 0,9950 \to z = 2,575).$

Región crítica: $295 - z_\alpha \cdot 1'6 = 295 - 2'575 \cdot 1'6 = 295 - 4'12 =$

$= 290'88 < 292.$

$\underline{\overline{x} = 292 \in (290'88, \ +\infty) \Rightarrow Ahora\ si\ se\ acepta\ la\ hipótesis\ nula.}$

$\underline{Con\ significación\ del\ 0,5\ \%\ el\ consumo\ mensual\ es\ superior\ a\ 295\ KWh.}$

****

3º) La función del nivel de rendimiento físico de un participante en una carrera de montaña, que tiene una duración de 5 horas, es $R(t) = t^3 - 7,5t^2 + 12t + 13$ unidades, siendo t el tiempo de la carrera en horas. Se pide, justificando la respuesta:

a) ¿Con qué nivel de rendimiento empieza y con qué nivel de rendimiento acaba la carrera?

b) ¿Cuándo alcanza el máximo rendimiento?

c) Cuando llega a su mínimo rendimiento, ¿en qué nivel de rendimiento está?

----

a)

$R(0) = 13.$

$R(5) = 5^3 - 7,5 \cdot 5^2 + 12 \cdot 5 + 13 = 125 - 187,5 + 60 + 13 =$

$= 198 - 187,5 = 10,5.$

$\underline{El\ rendimiento\ al\ comenzar\ es\ 13\ unidades\ y\ al\ terminar,\ 10'5\ unidades.}$

b)

Es condición necesaria para que una función tenga un máximo relativo que se anule su primera derivada:

$R'(t) = 3t^2 - 15t + 12.$

$R'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 15t + 12 = 0;\ t^2 - 5t + 4 = 0;\ t = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} =$

$= \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow t_1 = 2;\ t_2 = 4.$

La condición anterior, que es necesaria, no es suficiente; para que una función tenga un máximo tiene que ser negativa la segunda derivada para los valores que anulen la primera derivada:

$R''(t) = 6t - 15 \Rightarrow \{R''(2) = 6 \cdot 2 - 15 = - 3 < 0 \rightarrow Máximo\ para\ x = 2\ R''(4) = 6 \cdot 4 -$
.

$\underline{El\ máximo\ rendimiento\ lo\ alcanza\ en\ la\ segunda\ hora\ de\ la\ carrera.}$

c)

Del apartado anterior:

$\underline{El\ mínimo\ rendimiento\ lo\ alcanza\ en\ la\ cuarta\ hora\ de\ la\ carrera}.$

$R(4) = 4^3 - 7,5 \cdot 4^2 + 12 \cdot 4 + 13 = 64 - 120 + 48 + 13 =$

$= 125 - 120 = 5.$

$\underline{En\ el\ rendimiento\ mínimo\ está\ en\ 5\ unidades}.$

****

4º) Una empresa de transporte quiere organizar un viaje para 320 personas. Dispone de 4 autocares de 60 plazas y 5 autocares de 40 plazas. Si el costo de cada autocar de 60 plazas es igual a 320 euros y el costo de cada autocar de 40 plazas es de 230 euros:

a) Plantear el problema que determina el número de autocares de cada tipo que se han de elegir para minimizar los costos globales.

b) Representar la región factible, determinar la solución óptima y hallar el costo global mínimo.

----

a)

Sean x e y el número de autobuses utilizados de 60 y 40 plazas, respectivamente.

Las condiciones del ejercicio se establecen en el siguiente sistema de inecuaciones: $60x + 40y \geq 320 \quad x \leq 4; \; y \leq 5 \}$ $3x + 2y \geq 16 \; x \leq 4; \; y \leq 5 \}$.

La función de rendimiento es $f(x, y) = 320x + 230y$.

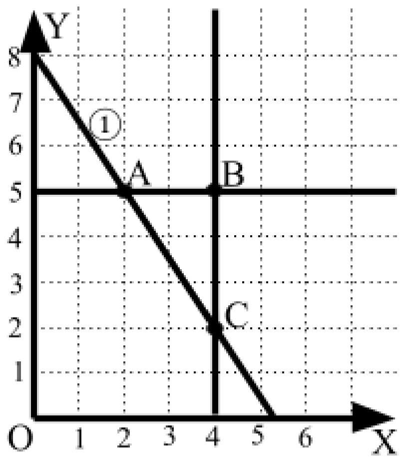
b)

x	0	2
y	8	5

① $\Rightarrow 3x + 2y \geq 16 \Rightarrow y \leq \frac{16-3x}{2} \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow No.$

La región factible es la zona sombreada de la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible son los siguientes:



$A \Rightarrow 3x + 2y = 16 \quad y = 5 \} \Rightarrow A(2, 5).$

$B \Rightarrow x = 4 \; y = 5 \} \Rightarrow B(4, 5).$

$C \Rightarrow 3x + 2y = 16 \quad x = 4 \} \Rightarrow C(4, 2).$

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(2, 5) = 320 \cdot 2 + 230 \cdot 5 = 640 + 1.150 = 1.790.$

$B \Rightarrow f(4,\ 5) = 320 \cdot 4 + 230 \cdot 5 = 1.280 + 1.150 = 2.430.$

$C \Rightarrow f(4,\ 2) = 320 \cdot 4 + 230 \cdot 2 = 1.280 + 460 = 1.740.$

$\underline{El\ mínimo\ se\ produce\ con\ 4\ de\ 60\ plazas\ y\ 2\ de\ 40\ y\ es\ de\ 1.740\ euros}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

JUNIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones. No se admitirá ningún resultado si no está debidamente razonado. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de cualquier otro dispositivo que pueda ejercer esta función. Los dispositivos que puedan conectarse a internet, o que pueden recibir o emitir información, deben estar apagados durante la celebración del examen.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

1º) a) Dada la matriz $A = \left(-\ 1\ 3\ a^2\ 0\ \ -\ 2\ a\ 3\ 1\ \ -\ 2\right)$, analizar su rango según los valores del parámetro a.

b) Sea el sistema de ecuaciones lineales $\{-\ x + 3y = a^2\ \ -\ 2y = a \qquad 3x + y = -\ 2$. Basándose en los resultados obtenidos en el apartado anterior:

b_1) ¿Para qué valores de a tenemos un sistema compatible determinado?

b_2) ¿Para qué valores de a tenemos un sistema incompatible?

c) Resolver los casos compatibles del sistema anterior.

----

a)

$$|A| = \left|-\ 1\ 3\ a^2\ 0\ \ -\ 2\ a\ 3\ 1\ \ -\ 2\right| = -\ 4 + 9a + 6a^2 + a = 6a^2 + 10a - 4 =$$

$3a^2 + 5a - 2 = 0;\ x = \frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{2\cdot 3} = \frac{-5\pm\sqrt{49}}{6} = \frac{-5\pm 7}{6} \Rightarrow a_1 = -\ 2,\ a_2 = \frac{1}{3}$.

$$\underline{Rang\ A = 3,\ \forall a \in R - \left\{-\ 2,\ \frac{1}{3}\right\}}.$$

$Para\ a = -\ 2\ es\ A = (-\ 1\ 3\ 4\ 0\ \ -\ 2\ \ -\ 2\ 3\ 1\ \ -\ 2) \Rightarrow |-\ 1\ 3\ 0\ \ -\ 2\ | \neq 0 \Rightarrow Rang\ A =$
.

$Para\ a\ = \frac{1}{3}\ es\ A\ = \left(-\ 1\ 3\ \frac{1}{9}\ 0\ \ -\ 2\ \ -\frac{1}{3}\ 3\ 1\ \ -\ 2\right) \Rightarrow |-\ 1\ 3\ 0\ \ -\ 2\ | \neq 0 \Rightarrow Rang\ A\ =$
.

$$\underline{Para\ a\ =-\ 2\ y\ a\ = \frac{1}{3} \Rightarrow Rang\ A\ =\ 2.}$$

$b)$

El sistema de ecuaciones lineales $\{-\ x\ +\ 3y\ = a^2\ \ -\ 2y\ =\ a\qquad 3x\ +\ y\ =-\ 2$ tiene como matriz de coeficientes $M\ = (-\ 1\ 2\ 0\ \ -\ 2\ 3\ 1\ )$, cuyo rango es do por ser $|-\ 1\ 3\ 0\ \ -\ 2\ | \neq 0$. La matriz ampliada del sistema es A.

$b_1)$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, para que un sistema sea compatible determinado es necesario que los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada sean iguales e igual al número de incógnitas.

$$\underline{El\ sistema\ dado\ es\ compatible\ determinado\ para\ a\ =-\ 2\ y\ a\ = \frac{1}{3}.}$$

$b_2)$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, para que un sistema sea incompatible es necesario que los rangos de las matrices sean diferentes.

$$\underline{El\ sistema\ dado\ es\ incompatible\ \forall a \in R\ - \left\{-\ 2,\ \frac{1}{3}\right\}.}$$

$c)$

Para $a\ =-\ 2$ el sistema resulta $\{-\ x\ +\ 3y\ =\ 4\ \ -\ 2y\ =-\ 2\qquad 3x\ +\ y\ =-\ 2$; para su resolución basta con dos ecuaciones, por ejemplo: $\{y\ =\ 1\qquad 3x\ +\ y\ =-\ 2$.

$$\underline{Solución: x\ =-\ 1,\ y\ =\ 1.}$$

Para $a\ = \frac{1}{3}$ el sistema resulta $\{-\ x\ +\ 3y\ = \frac{1}{9}\ \ -\ 2y\ = \frac{1}{3}\qquad 3x\ +\ y\ =-\ 2$; para su resolución basta con dos ecuaciones, por ejemplo: $\{-\ 6y\ =\ 1\qquad 3x\ +\ y\ =-\ 2$.

$$y\ =-\frac{1}{6};\ \ 3x\ - \frac{1}{6}\ =-\ 2;\ \ 18x\ -\ 1\ =-\ 12,\ \ 18x\ =-\ 11 \Rightarrow x\ =-\frac{11}{18}.$$

$$\underline{Solución: x\ =-\frac{11}{18},\ y\ =-\frac{1}{6}.}$$

****

2º) $a)$ El coste de producción de x unidades mensuales de un determinado producto es $C(x) = \frac{x^2}{2} + 25x + 25$, y el precio de venta de cada unidad es $70 - \frac{x}{3}$ euros. Hallar el número de unidades que deben venderse mensualmente para que el beneficio sea máximo. ¿A cuánto asciende dicho beneficio? ¿Y los ingresos?

$b)$ Una función $f(x)$ tiene como primera derivada $f'(x) = ax^2 - 4x + 3$. Hallar el valor del parámetro a si $f(x)$ pasa por los puntos $P(-1, 3)$ y $Q(2, 1)$. Indicar también la expresión de la función f y calcular $\int_0^2 f(x) \cdot dx$.

$a)$

La función de beneficios es la diferencia entre la función ingresos y la función de costes.

La función ingresos $I(x)$ se obtienen multiplicando el número de productos producidos por el precio de cada uno de ellos:

$$I(x) = x \cdot \left(70 - \frac{x}{3}\right) = 70x - \frac{1}{3}x^2.$$

$$B(x) = I(x) - C(x) = 70x - \frac{1}{3}x^2 - \left(\frac{x^2}{2} + 25x + 25\right) =$$

$$= 70x - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x^2 - 25x - 25 = -\frac{5}{6}x^2 + 45x - 25.$$

El beneficio será máximo para los valores de x que anulen su primera derivada:

$$B'(x) = -\frac{5}{3}x + 45 = 0 \Rightarrow -5x + 135 = 0; \quad -x + 27 = 0 \Rightarrow x = 27.$$

$\underline{El\ mayor\ beneficio\ se\ produce\ vendiendo\ al\ mes\ 27\ productos.}$

$$B(27) = -\frac{5}{6} \cdot 27^2 + 45 \cdot 27 - 25 = -\frac{1.215}{2} + 1.215 - 25 =$$

$$= -607,5 + 1.190 = 582,5.$$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ mensual\ es\ de\ 582,5\ euros.}$

$$I(27) = 70 \cdot 27 - \frac{1}{3} \cdot 27^2 = 1.890 - \frac{1}{3} \cdot 729 = 1.890 - 243 = 1.647.$$

$\underline{El\ ingreso\ máximo\ mensual\ es\ de\ 1.647\ euros.}$

$b)$

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int \left(ax^2 - 4x + 3\right)dx = \frac{ax^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 3x + C =$$

$$= \frac{ax^3}{3} - 2x^2 + 3x + C = f(x).$$

Por pasar $f(x)$ por los puntos $P(-1, 3)$ y $Q(2, 1)$ se cumple:

$$f(-1) = 3 \Rightarrow \frac{a\cdot(-1)^3}{3} - 2\cdot(-1)^2 + 3\cdot(-1) + C = -\frac{1}{3}a - 2 - 3 + C =$$

$$= -\frac{1}{3}a - 5 + C = 3; \quad -a - 15 + 3C = 9; \quad -a + 3C = 24. \quad (1)$$

$$f(2) = 1 \Rightarrow \frac{a\cdot 2^3}{3} - 2\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + C = \frac{8}{3}a - 8 + 6 + C = \frac{8}{3}a - 2 + C = 1;$$

$$8a - 6 + 3C = 3; \; 8a + 3C = 9. \quad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{l} -a + 3C = 24 \\ 8a + 3C = 9 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} a - 3C = -24 \\ 8a + 3C = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow 9a = -15; \; 3a$$

$$\frac{5}{3} + 3C = 24; \; 5 + 9C = 72; \; 9C = 67 \Rightarrow C = \frac{67}{9}.$$

$$\underline{f(x) = -\frac{5}{9}x^3 - 2x^2 + 3x + \frac{67}{9}.}$$

$$\int_0^2 f(x)\cdot dx = \int_0^2 \left(-\frac{5}{9}x^3 - 2x^2 + 3x + \frac{67}{9}\right)\cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{5x^4}{36} - \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + \frac{67x}{9}\right]_0^2 = \left(-\frac{5\cdot 2^4}{36} - \frac{2\cdot 2^3}{3} + \frac{3\cdot 2^2}{2} + \frac{67\cdot 2}{9}\right) - 0 =$$

$$= -\frac{20}{9} - \frac{16}{3} + 6 + \frac{134}{9} = \frac{114}{9} - \frac{16}{3} + 6 = \frac{38}{3} - \frac{16}{3} + 6 = \frac{22}{3} + 6 = \frac{40}{3}.$$

$$\underline{\int_0^2 f(x)\cdot dx = \frac{40}{3}.}$$

****

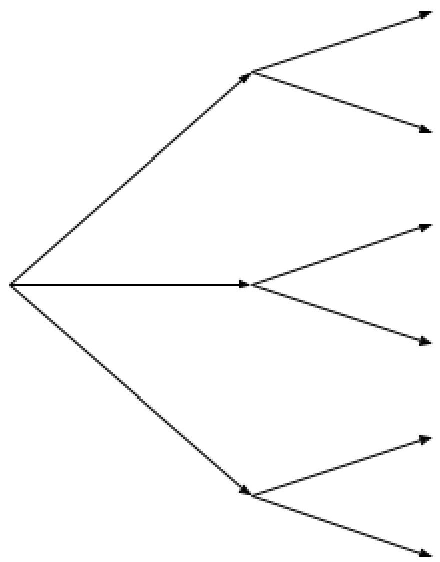
3º) Una organización de consumidores ha analizado el comportamiento de tres marcas de lavadoras durante todo un año. En concreto, se ha seguido la pista de 350 unidades: 125 de la marca A, 75 de la marca B y 150 de la marca C. En la siguiente tabla se indica cuáles de ellas han sufrido alguna avería durante el año:

	Marca A	Marca B	Marca C	Total
Avería	35	15	20	70
No avería	90	60	130	280
Total	125	75	150	350

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una lavadora haya sufrido una avería?

b) Si se escoge una lavadora al azar y no ha sufrido ninguna avería, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca B?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que una lavadora de la marca A haya tenido una avería? ¿Qué marca crees que es más fiable? Justifica la respuesta.



a)

$$P = \frac{1}{10} + \frac{3}{70} + \frac{2}{35} = \frac{7+3+4}{70} = \frac{14}{70} = \frac{2}{10} = \underline{\frac{1}{5} = 0,2}.$$

b)

$$P = \frac{\frac{6}{35}}{\frac{9}{35}+\frac{6}{35}+\frac{13}{35}} = \frac{\frac{6}{35}}{\frac{28}{35}} = \frac{6}{28} = \underline{\frac{3}{14} = 0,2143}.$$

c)

$$P = \frac{35}{125} = \underline{\frac{7}{25} = 0,28}.$$

Para determinar la marca más fiable comparamos su probabilidad de sufrir una avería:

$$A\to\frac{35}{125};\ \ B\to\frac{15}{75};\ \ C\to\frac{20}{150}\to\frac{7}{25},\ \ \frac{3}{25},\ \ \frac{2}{15}\to\frac{21}{75},\ \ \frac{9}{75},\ \ \frac{12}{75}.$$

$$\underline{Son\ más\ fiables\ las\ lavadoras\ de\ la\ marca\ B}.$$

****

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

1º) a_1) Sea la matriz $A = (2\ 0\ 3\ \ -\ 1\ 3\ 2\ 0\ 1\ \ -\ 1\ )$. Calcula su determinante.

a_2) Dada la matriz $B = (2\ 0\ 3\ 3\ \ -\ 9\ \ -\ 6\ 0\ 1\ \ -\ 1\ )$, ¿podrías determinar el valor de su determinante **con una sola operación aritmética**? Justifica la respuesta.

a_3) Dada la matriz $C = (2\ 3\ 0\ \ -\ 1\ 2\ 3\ 0\ \ -\ 1\ 1\ )$, ¿podrías determinar el valor de su determinante **con una sola operación aritmética**? Justifica la respuesta.

b) Dadas las matrices $A = (2\ 0\ \ -\ 1\ 3\ 1\ 2\ )$, $B = (2\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ \ -\ 1\ 3\ 1\ )$, $C = (1\ 0\ 2\ 0\ \ -\ 1\ 4\ )$, resolver la ecuación matricial $B\left(A^t + X\right) = C$, donde A^t es la matriz traspuesta de A.

----

a_1)

$|A| = |2\ 0\ 3\ \ -\ 1\ 3\ 2\ 0\ 1\ \ -\ 1\ | = -\ 6 - 3 - 4 = \underline{-\ 13}.$

a_2)

$\underline{Si\ se\ puede}.$

Considerando que las matrices A y B se diferencian en que la segunda fila de la matriz B es la segunda fina de la matriz A multiplicada por -6.

Una propiedad de los determinantes es que "si se multiplica o divide una línea de un determinante por un número, el valor del determinante queda multiplicado o dividido por dicho número".

$$\underline{|B| = -\ 6 \cdot |A| = -\ 6 \cdot (-\ 13) = 78}.$$

a_3)

$\underline{Si\ se\ puede}.$

Considerando que las matrices A y C se diferencian en que se han intercambiado las columnas segunda y tercera de la matriz C.

Una propiedad de los determinantes es que "si se intercambian dos líneas del determinante de una matriz, el valor del determinante cambia de signo".

$$\underline{|C| = -\ 1 \cdot |A| = -\ 1 \cdot (-\ 13) = 13}.$$

b)

$B\left(A^t + X\right) = C$. Multiplicando por la izquierda los dos términos por B^{-1}:

$$B^{-1}\cdot B\cdot\left(A^{t} + X\right) = B^{-1}\cdot C;\ \ I\cdot\left(A^{t} + X\right) = B^{-1}\cdot C;\ \ A^{t} + X = B^{-1}\cdot C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{X = B^{-1}\cdot C - A^{t}}.$$

Se obtiene la inversa de B por el método de Gauss-Jordan.

$$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_1 \leftrightarrow F_2\right\} \Rightarrow (0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1\ F_3 \rightarrow F_3 + F_1\right\} \Rightarrow (0\ 1\ 0\ 1\ \ -\ 2\ 0\ 0\ 1\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow -\ \tfrac{1}{2}F_2\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(0\ 1\ 0\ \ -\ \tfrac{1}{2}\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\right) \Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow F_1 - F_2\ F_3 \rightarrow F_3 - 4F_1\right\} \Rightarrow \left(\tfrac{1}{2}\ 0\ 0\ \ -\ \tfrac{1}{2}\ 1\ 0\ 2\ \ -\ 3\right.$$

$$\Rightarrow \left\{F_3 \rightarrow -\ \tfrac{1}{2}F_3\right\} \Rightarrow \left(\tfrac{1}{2}\ 0\ 0\ \ -\ \tfrac{1}{2}\ 1\ 0\ \ -\ 1\ \tfrac{3}{2}\ \ -\ \tfrac{1}{2}\right) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow F_2 - F_3\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\tfrac{1}{2}\ 0\ 0\ \tfrac{1}{2}\ \ -\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ \ -\ 1\ \tfrac{3}{2}\ \ -\ \tfrac{1}{2}\right) \Rightarrow B^{-1} = \left(\tfrac{1}{2}\ 0\ 0\ \tfrac{1}{2}\ \ -\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ \ -\ 1\ \tfrac{3}{2}\ \ -\ \tfrac{1}{2}\right)$$

.

$$X = B^{-1}\cdot C - A^{t} = \left(\tfrac{1}{2}\ 0\ 0\ \tfrac{1}{2}\ \ -\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ \ -\ 1\ \tfrac{3}{2}\ \ -\ \tfrac{1}{2}\right)\cdot(1\ 0\ 2\ 0\ \ -\ 1\ 4\ ) - (2\ 3\ 0\ 1$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot(1\ 0\ 0\ 1\ \ -\ 1\ 1\ \ -\ 2\ 3\ \ -\ 1\ )\cdot(1\ 0\ 2\ 0\ \ -\ 1\ 4\ ) - (2\ 3\ 0\ 1\ \ -\ 1\ 2\ ) = \tfrac{1}{2}\cdot(1\ 0\ \ -\ 2\ 4$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\ 0\ \ -\ 1\ 2\ \tfrac{5}{2}\ \ -\ 2\right) - (2\ 3\ 0\ 1\ \ -\ 1\ 2\ ) \Rightarrow \underline{X = \left(-\ \tfrac{3}{2}\ \ -\ 3\ \ -\ 1\ 1\ \tfrac{7}{2}\ \ -\ 4\right)}$$

.

****

2º) $a)$ Dada la función $f(x) = \{ \quad 3x - a \ \ si \ x \leq -2 \qquad x^2 + 3x - 2 \ \ si \ -2 < x \leq 3 \ \frac{2bx+10}{x^2+x-2} \quad si \ \ x > 3$, determinar los valores de los parámetros $a \ y \ b$ para los cuales es continua en todo su dominio.

$b)$ Considere la función $g(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x-12}$. Determinar sus asíntotas. Si existen asíntotas verticales, esbozar la posición de la gráfica respecto a las mismas, calculando previamente los límites laterales correspondientes.

$a)$

La función $f(x)$ es continua en $R \forall a \leq -2, \ b > 3$, excepto para los valores $x = -2$ y $x = 3$, que se van a determinar los valores de a y b para que lo sea.

Para que la función sea continua en los puntos críticos es necesario que sus límites laterales sean iguales e iguales a los correspondientes valores de la función en esos puntos.

$$f(x) = (3x - a) = -6 - a = f(-2) \qquad f(x) = (x^2 + 3x - 2) = 4 - 6 -$$

$\Rightarrow a = -2.$

$$f(x) = \left(x^2 + 3x - 2\right) = 9 + 9 - 2 = 16 = f(3) \ f(x) = \frac{2bx+10}{x^2+x-2} = \frac{6b+10}{9+3-2} = \frac{6b+10}{10}$$

$80 = 3b + 5; \ \ 3b = 75 \Rightarrow b = 25.$

$\underline{La \ función \ f(x) \ es \ continua \ en \ R \ para \ a = -2 \ y \ b = 25}.$

$b)$

Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$x^2 + x - 12 = 0; \ \ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \Rightarrow x_1 = -4, \ x_2 = 3.$$

$$\underline{D(f) \Rightarrow R - \{-1, \ 1\}}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma y = k y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = g(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x-12} = 1 \Rightarrow \underline{Asíntota \ horizontal: y = 1} \ .$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{Asíntotas\ verticales: x = -\ 4,\ x\ =\ 3.}$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

La tendencia de la función con respecto a las asíntotas verticales puede determinarse mediante los límites laterales de la función:

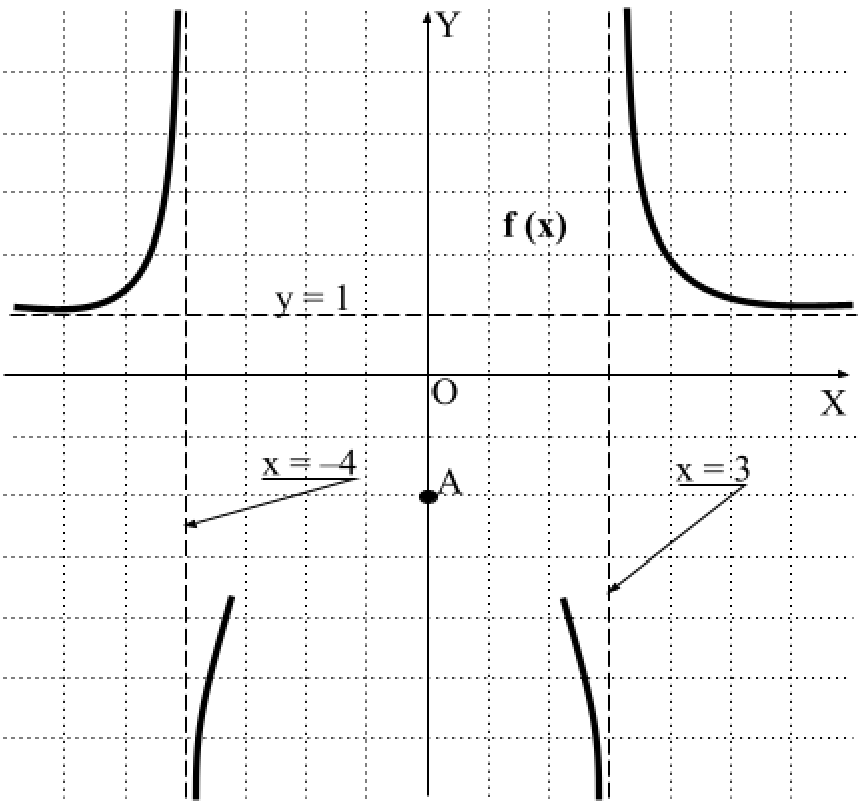
$$g(x)\ = \frac{x^2+1}{x^2+x-12}\ = \frac{x^2+1}{(x+4)(x-3)} = \frac{17}{0^-\cdot 1} = \frac{17}{0^-} =-\ \infty\ .$$

$$g(x)\ = \frac{x^2+1}{x^2+x-12}\ = \frac{x^2+1}{(x+4)(x-3)} = \frac{17}{0^+\cdot 1} = \frac{17}{0^+} =+\ \infty\ .$$

$$g(x)\ = \frac{x^2+1}{x^2+x-12}\ = \frac{x^2+1}{(x+4)(x-3)} = \frac{10}{7\cdot 0^-} = \frac{10}{0^-} =-\ \infty\ .$$

$$g(x)\ = \frac{x^2+1}{x^2+x-12}\ = \frac{x^2+1}{(x+4)(x-3)} = \frac{10}{7\cdot 0^+} = \frac{10}{0^+} =+\ \infty\ .$$

Un boceto de la representación gráfica de la función es el siguiente:



****

3º) La asistencia anual al cine de los habitantes de determinada ciudad sigue una distribución normal con desviación típica 3. Una muestra aleatoria de 375 personas da como resultado una cifra media de 15 asistencias al año.

a) Obtener el intervalo de confianza del 98 % para la asistencia media anual.

b) ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 92 % sea un cuarto del obtenido en el apartado anterior?

----

a)

$$1 - \alpha = 0,98 \rightarrow \alpha = 1 - 0,98 = 0,02 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,01} = 2,33.$$

$$1 - 0,01 = 0,99 \rightarrow z = 2,33).$$

Siendo $\overline{x} = 15$, $\sigma = 3$ y $n = 375$, se aplica la fórmula adecuada que nos de el intervalo de confianza pedido, que es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(15 - 2,33 \cdot \frac{3}{\sqrt{375}},\ 15 + 2,33 \cdot \frac{3}{\sqrt{375}}\right);\ (15 - 2,33 \cdot 0'155,\ 15 + 2,33 \cdot 0'155);$$

$$(15 - 0'361,\ 15 + 0,361).$$

$$\underline{Intervalo\ de\ confianza\text{:}\ \left(14'639,\ 15'361\right)}.$$

b)

El error del apartado anterior es: $E = \frac{15,361 - 14,369}{2} = \frac{0,992}{2} = 0,496.$

El error pedido tiene que ser $\frac{1}{4}E = 0,124.$

Para un nivel de confianza del 92 % es:

$$1 - \alpha = 0,92 \rightarrow \alpha = 1 - 0,92 = 0,08 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,04} = 1,75.$$

$$(1 - 0,04 = 0,9600 \rightarrow z = 1,75).$$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1,75 \cdot \frac{3}{0,124}\right)^2 =$

$$= (1,75 \cdot 24,194)^2 = 42,339^2 = 179,27.$$

$$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 180}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

SEPTIEMBRE – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones. No se admitirá ningún resultado si no está debidamente razonado. No se permite calculadoras gráficas, ni programables. Está prohibido el uso de teléfonos móviles.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

1º) Una fábrica de productos navideña decide comercializar, con vistas a la próxima campaña de diciembre, dos surtidos diferentes con polvorones de limón y roscos de vino. En concreto, para los dos surtidos elabora 750 polvorones de limón y 600 roscos de vino. Cada caja del surtido A contendrá 15 polvorones de limón y 10 roscos de vino. Cada caja del surtido B, 15 polvorones de limón y 20 roscos de vino. Las cajas del surtido A las venderá a 8 euros la unidad, y las cajas del surtido B, a 10 euros la unidad. ¿Cuántas cajas de cada tipo se deben preparar y vender para obtener unos ingresos máximos? ¿A cuánto ascienden esos ingresos?

Sean x e y el número de cajas de los surtidos A y B que se comercializan, respectivamente.

Del enunciado del problema se deduce el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 15x+15y\leq 750 \\ 10x+20y\leq 600 \\ x\geq 0,\ y\geq 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x+y\leq 50 \\ x+2y\leq 60 \\ x\geq 0,\ y\geq 0 \end{array}$$

x	0	50
y	50	0

①$\Rightarrow x+y\leq 50 \Rightarrow y\leq 50-x \Rightarrow O(0,\ 0)\rightarrow Si.$

x	0	60
y	30	0

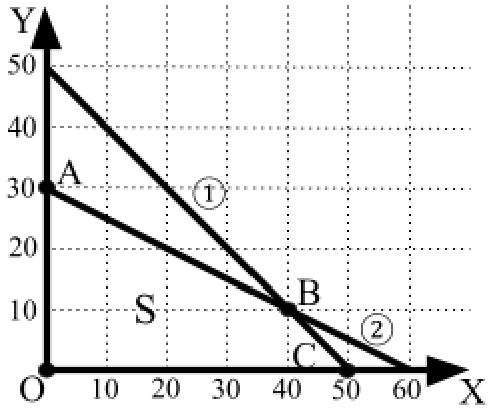
②$\Rightarrow x+2y\geq 60 \Rightarrow y\leq \frac{60-x}{2} \Rightarrow O(0,\ 0)\rightarrow Si.$

Los vértices de la sección factible, además del origen, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ x + 2y = 60 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{A(0,\ 30)}.$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 50 \\ x + 2y = 60 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{B(40,\ 10)}.$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 50 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{C(50,\ 0)}.$



La función de objetivos es la siguiente:

$$f(x,\ y) = 8x + 10y$$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 30) = 8 \cdot 0 + 10 \cdot 30 = 300.$

$B \Rightarrow f(40,\ 10) = 8 \cdot 40 + 10 \cdot 10 = 320 + 100 = 420.$

$C \Rightarrow f(50,\ 0) = 8 \cdot 50 + 10 \cdot 0 = 400 + 0 = 400.$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ se\ obtiene\ elaborando\ 40\ cajas\ tipo\ A\ y\ 10\ cajas\ tipo\ B}.$

$\underline{Los\ ingresos\ máximos\ son\ de\ 420\ euros}.$

****

2º) a) Dada la función $f(x) = \frac{x^2+x-a}{x^2+2x-3}$, determinar el valor de a para que tenga una discontinuidad evitable en $x = -3$. Para el valor de a obtenido, definir de nuevo la función para que sea continua en $x = -3$.

b) Si $a = 2$, estudiar la continuidad de $f(x)$, analizando los distintos tipos de discontinuidad que existan.

c) Determinar las asíntotas verticales de la función del apartado b). Esbozar la posición de la gráfica respecto a las mismas, calculando previamente los límites laterales correspondientes.

----

a)

La función $f(x) = \frac{x^2+x-a}{x^2+2x-3}$ tiene una discontinuidad evitable para $x = -3$ cuando exista $\lim_{x \to -3} f(x)$ y, además, sea finito.

$$\lim_{x \to -3} f(x) = \lim_{x \to -3} \frac{x^2+x-a}{x^2+2x-3} = \frac{9-3-a}{9-6-3} = \frac{6-a}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow \underline{a = 6}.$$

Para $a = 6$ la función es $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2+2x-3}$, que puede redefinirse de la forma siguiente:

$$x^2 + x - 6 = 0;\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow x_1 = -3,\ x_2 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2).$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0;\ x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \Rightarrow x_1 = -3,\ x_2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1).$$

$$f(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2+2x-3} = \frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(x-1)} \Rightarrow \underline{f(x) = \frac{x-2}{x-1}}.$$

b)

Para $a = 2$ la función es $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$, que puede expresarse de la forma siguiente:

$$x^2 + x - 2 = 0;\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1).$$

$$f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3} = \frac{(x+2)(x-1)}{(x+3)(x-1)} = \frac{x+2}{x+3}.$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ para\ R\ -\{1,\ 3\}}.$$

$$\underline{Para\ x\ =\ 1\ tiene\ una\ discontinuidad\ evitable}.$$

$$\underline{Para\ x\ =-\ 3\ tiene\ una\ discontinuidad\ inevitable\ de\ salto\ infinito}.$$

$c)$

La función $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3} = \frac{(x+2)(x-1)}{(x+3)(x-1)} = \frac{x+2}{x+3}$ tiene una asíntota vertical para $x =-\ 3$ y por ser: $lím\ x\rightarrow\infty\ \ f(x) =\ lím\ x\rightarrow\infty\ \frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3} =\ 1$, tiene una asíntota horizontal para el valor de $y\ =\ 1$.

$$\underline{Asíntotas: vertical\rightarrow x\ =-\ 3; horizontal\rightarrow y\ =\ 1}.$$

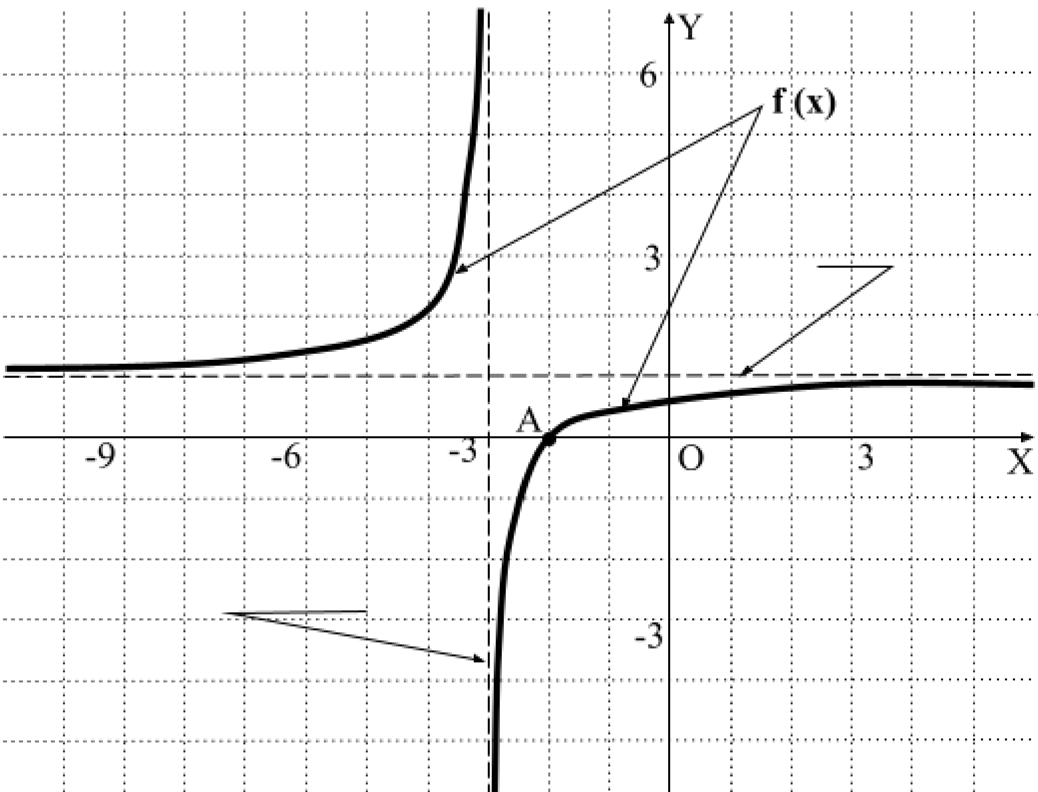
$$lím\ x\rightarrow\ -\ 3^-\ \ f(x) =\ lím\ x\rightarrow\ -\ 3^-\ \frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3} =\ lím\ x\rightarrow\ -\ 3^-\ \frac{x+2}{x+3} = \frac{-3+2}{-3^-+3} = \frac{-1}{0^-} =+\ \infty$$

.

$$lím\ x\rightarrow\ -\ 3^+\ \ f(x) =\ lím\ x\rightarrow\ -\ 3^+\ \frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3} =\ lím\ x\rightarrow\ -\ 3^+\ \frac{x+2}{x+3} = \frac{-3+2}{-3^++3} = \frac{-1}{0^+} =-\ \infty$$

.

La representación gráfica, aproximada de la función es la siguiente:



****

3º) a) La altura de los estudiantes de determinada ciudad sigue una distribución normal con desviación típica σ. Con una muestra aleatoria de 375 individuos se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza del 90 %, $\left(163'3\ cm,\ 170'7\ cm\right)$, para la estatura media. Determinar la media muestral y la desviación típica.

b) El peso de los estudiantes de la misma ciudad sigue una distribución normal con desviación típica 4. Con una muestra aleatoria de 375 jóvenes se ha obtenido un peso medio de 63'5 kg. Determinar el intervalo de confianza del 93 % para el peso medio.

----

a)

$$\overline{x} = \frac{163,3+170,7}{2} = \frac{334}{2} = 167.$$

$\underline{La\ media\ muestral\ es\ de\ 167\ cm.}$

$$E = \frac{170,7-163,3}{2} = \frac{7,4}{2} = 3,7.$$

$$\alpha = 1 - 0,90 = 0,10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,05} = 1,65.$$

$$(1 - 0,05 = 0,9500 \rightarrow z = 1,65).$$

Conocemos, además: $n = 375$ y $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,65$.

De la fórmula del error máximo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sigma = \frac{E \cdot \sqrt{n}}{z_{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{3,7 \cdot \sqrt{375}}{1,65} = \frac{3,7 \cdot 19,36}{1,65} =$
$= \frac{71,65}{1,65} = 43,42 \Rightarrow Desviación\ típica = \sqrt{\sigma} = \sqrt{43,42} = 6,590$.

$\underline{La\ desviación\ típica\ es\ 6,590.}$

b)

$$\alpha = 1 - 0,93 = 0,07 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,035} = 1,81.$$

$$(1 - 0,035 = 0,9650 \rightarrow z = 1,81).$$

Conocemos: $n = 375;\ \ \sigma = 4;\ \ \overline{x} = 63,5.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(63,5 - 1,81 \cdot \frac{4}{\sqrt{375}};\ 63,5 + 1,81 \cdot \frac{4}{\sqrt{375}}\right);$$

$(63,5\ -\ 1,81·0,207;\ 63,5\ +\ 1,81·0,207);\ \ (63,5\ -\ 0,374;\ 63,5\ +\ 0,374) \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{(63'1261;\ 63'8739)}$.

****

<u>OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2</u>

1º) a) A y B son dos matrices cuadradas de dimensión 3. Sus determinantes tienen como valor 4 y -5, respectivamente. Con estos datos calcular:

a_1) $|B^{-1}|$.

a_2) El determinante del producto $A^t·B$, donde A^t es la matriz traspuesta de A.

a_3) El determinante del producto $C·B$, siendo C la matriz resultante de multiplicar por 5 los elementos de la segunda fila de A.

b) Resolver la ecuación matricial $A·X·B^{-1}\ +\ C\ =\ O$, donde:

$A = (-\ 1\ \ -\ 2\ 0\ 1\ 0\ \ -\ 1\ 4\ \ -\ 2\ 0\ ), B = (1\ 2\ 0\ 3\ ), C = (1\ 3\ \ -\ 3\ 2\ 1\ 1\ )$, y O la matriz de dimensión 3x2 con todos sus elementos nulos.

----

a)

a_1)

$$|B^{-1}| = \left|\frac{1}{B}\right| = \frac{1}{|B|} = \frac{1}{-5}\ \Rightarrow\ \underline{|B^{-1}| = -\ \frac{1}{5}}.$$

a_2)

El determinante de una matriz es igual que el determinante de su traspuesta.

$$|A^t·B| = |A^t|·|B| = |A|·|B| =\ 4·(-\ 5) = -\ 20\ \Rightarrow\ \underline{|A^t·B| = -\ 20}.$$

a_3)

Si los elementos de una línea de una matriz cuadrada se multiplican por un número real, el valor de su determinante queda multiplicado por dicho número.

$$|C| =\ 5·|A| =\ 5·4\ =\ 20.$$

$$|C·B| = |C|·|B| =\ 20·(-\ 5) = -\ 100\ \Rightarrow\ \underline{|C·B| = -\ 100}.$$

b)

$$A\cdot X\cdot B^{-1} + C = O; \;\; A\cdot X\cdot B^{-1} = O - C = - C;$$

$$A^{-1}A\cdot X\cdot B^{-1}\cdot B = - A^{-1}C\cdot B; \;\; I\cdot X\cdot I = - A^{-1}\cdot C\cdot B \Rightarrow \underline{X = - A^{-1}\cdot C\cdot B}.$$

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan:

$$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1) \Rightarrow \left\{F_1 \leftrightarrow F_2\right\} \Rightarrow$$

$$= (0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow F_2 + F_1\ F_3 \rightarrow F_3 - 4F_1\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ -4\ 1) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow -\tfrac{1}{2}F_2\right\} \Rightarrow \left(0\ 1\ 0\ -\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\ 0\ 0\ -4\ 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_3 \rightarrow F_3 + 2F_2\right\} \Rightarrow \left(0\ 1\ 0\ -\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\ 0\ -1\ -5\ 1\right) \Rightarrow \left\{F_3 \rightarrow \tfrac{1}{5}F_3\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(0\ 1\ 0\ -\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\ 0\ -\tfrac{1}{5}\ -1\ \tfrac{1}{5}\right) \Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow F_1 + F_3\ F_2 \rightarrow F_2 - \tfrac{1}{2}F_3\right\} \Rightarrow \left(-\tfrac{1}{5}\ 0\ \tfrac{1}{5}\right.$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \left(-\tfrac{1}{5}\ 0\ \tfrac{1}{5}\ -\tfrac{2}{5}\ 0\ -\tfrac{1}{10}\ -\tfrac{1}{5}\ -1\ \tfrac{1}{5}\right) = -\tfrac{1}{10}\cdot(2\ 0\ -2\ 4\ 0\ 1\ 2\ 10\ -2)$$

.

$$X = - A^{-1}\cdot C\cdot B = + \tfrac{1}{10}\cdot(2\ 0\ -2\ 4\ 0\ 1\ 2\ 10\ -2)\cdot(1\ 3\ -3\ 2\ 1\ 1)\cdot(1\ 2\ 0\ 3) =$$

$$= \tfrac{1}{10}\cdot(0\ 4\ 5\ 13\ -30\ 24)\cdot(1\ 2\ 0\ 3) = \tfrac{1}{10}\cdot(0\ 12\ 5\ 49\ -30\ 12).$$

$$\underline{X = \tfrac{1}{10}\cdot(0\ 12\ 5\ 49\ -30\ 12).}$$

****

2º) Dada la función $f(x) = \frac{x+3}{x^2+x-2}$, determinar:

$a)$ El dominio de definición y los puntos de corte con los ejes.

$b)$ Las asíntotas.

$c)$ Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos, si existen.

$d)$ Finalmente, con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar su gráfica.

$a)$

El dominio de una función racional es el conjunto de los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$x^2 + x - 2 = 0;\ x = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{-1\pm3}{2} \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 1.$$

$$\underline{D(f)\Rightarrow R - \{-2,\ 1\}}.$$

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

Eje X: $y = f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x+3}{x^2+x-2} = 0;\ \ x + 3 = 0 \to x = -3 \Rightarrow \underline{A(-3,\ 0)}$.

Eje Y: $x = 0 \Rightarrow y = f(0) = \frac{3}{-2} \Rightarrow \underline{B\left(0,\ -\frac{3}{2}\right)}$.

$b)$

Asíntotas horizontales: son de la forma y = k y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$y = k = f(x) = \frac{x+3}{x^2+x-2} = 0 \Rightarrow \underline{Asíntota\ horizontal: y = 0\ (eje\ X)}\ .$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{Asíntotas\ verticales: x = -2,\ x = 1}.$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

$c)$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{1\cdot\left(x^2+x-2\right)-(x+3)\cdot(2x+1)}{\left(x^2+x-2\right)^2} = \frac{x^2+x-2-\left(2x^2+x+6x+3\right)}{\left(x^2+x-2\right)^2} = \frac{x^2+x-2-2x^2-7x-3}{\left(x^2+x-2\right)^2} =$$

$$= \frac{-x^2-6x-5}{\left(x^2+x-2\right)^2}.$$

Por ser $\left(x^2 + x - 2\right)^2 \geq 0,\ \forall x \in R$, la función es creciente o decreciente cuando el numerador sea positivo o negativo, respectivamente.

$$-x^2 - 6x - 5 = 0;\ \ x^2 + 6x + 5 = 0;\ \ x = \frac{-6\pm\sqrt{36-20}}{2} = \frac{-6\pm\sqrt{16}}{2} = \frac{-6\pm4}{2} =$$

$$= -3\pm2 \Rightarrow x_1 = -5,\ x_2 = -1.$$

Las raíces obtenidas dividen al numerador en los siguientes tres intervalos: $(-\infty,\ -5)$, $(-5,\ -1)$ y $(-1,\ +\infty)$, que son, alternativamente, positivos y negativos.

Considerando el valor $x = 0 \in (-1,\ +\infty)$ es $-0^2 - 6\cdot0 - 5 = -5 < 0$.

Considerando lo anterior y el dominio de la función, los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función son los siguientes:

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento\colon\ (-\infty,\ -5) \cup (-1,\ 1) \cup (1,\ +\infty)}.$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento\colon\ (-5,\ -2) \cup (-2,\ -1)}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto. Esta condición necesaria no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x^2-6x-5}{\left(x^2+x-2\right)^2} = 0;\ \ -x^2 - 6x - 5 = 0 \Rightarrow x_1 = -5,\ x_2 = -1.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x)=\frac{(-2x-6)\cdot\left(x^2+x-2\right)^2-\left(-x^2-6x-5\right)\cdot\left[2\cdot\left(x^2+x-2\right)\cdot(2x+1)\right]}{\left(x^2+x-2\right)^4}=$$

$$=\frac{(-2x-6)\cdot\left(x^2+x-2\right)-\left(-x^2-6x-5\right)\cdot[2\cdot(2x+1)]}{\left(x^2+x-2\right)^3}=$$

$$=\frac{-2x^3-2x^2+4x-6x^2-6x+12-\left(-x^2-6x-5\right)\cdot(4x+2)}{\left(x^2+x-2\right)^3}=\frac{-2x^3-8x^2-2x+12-\left(-x^2-6x-5\right)\cdot(4x+2)}{\left(x^2+x-2\right)^3}=$$

$$=\frac{-2x^3-8x^2-2x+12-\left(-4x^3-2x^2-24x^2-12x-20x-10\right)}{\left(x^2+x-2\right)^3}=$$

$$=\frac{-2x^3-8x^2-2x+12-\left(-4x^3-26x^2-32x-10\right)}{\left(x^2+x-2\right)^3}=\frac{-2x^3-8x^2-2x+12+4x^3+26x^2+32x+10}{\left(x^2+x-2\right)^3}=$$

$$=\frac{2x^3+18x^2+30x+22}{\left(x^2+x-2\right)^3}=\frac{2\cdot\left(x^3+9x^2+15x+11\right)}{\left(x^2+x-2\right)^3}=f''(x).$$

$$f''(-5)=\frac{2\cdot\left[(-5)^3+9\cdot(-5)^2+15\cdot(-5)+11\right]}{\left[(-5)^2-5-2\right]^3}=\frac{2\cdot(-125+225-75+11)}{(25-7)^3}=\frac{2\cdot(236-200)}{18^3}=$$

$$=\frac{2\cdot 36}{18^3}>0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x=-5.$$

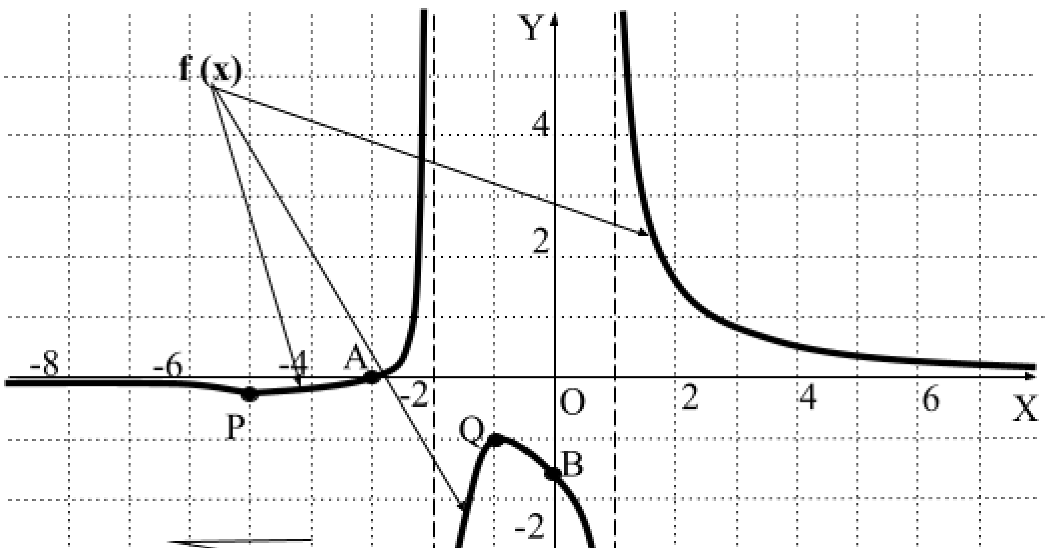
$$f(-5)=\frac{-5+3}{25-5-2}=\frac{-2}{18}=-\frac{1}{9}\ \Rightarrow\ \underline{Mínimo: P\left(-5,\ -\frac{1}{9}\right)}.$$

$$f''(-1)=\frac{2\cdot\left[(-1)^3+9\cdot(-1)^2+15\cdot(-1)+11\right]}{\left[(-1)^2-5-2\right]^3}=\frac{2\cdot(-1+9-15+11)}{(1-7)^3}=\frac{2\cdot(20-16)}{(-6)^3}=$$

$$=\frac{2\cdot 4}{-216}<0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x=-1.$$

$$f(-1)=\frac{-1+3}{1-1-2}=\frac{2}{-2}=-1\ \Rightarrow\ \underline{Máximo: Q(-1,\ -1)}.$$

b)



****

3º) El finalista de un concurso televisivo debe realizar la siguiente prueba para llevarse el premio. Hay tres urnas A, B y C. La urna A contiene 3 bolas rojas y 5 azules; la urna B, 4 rojas y 7 azules; la urna C, 2 bolas rojas y 6 azules. Debe escoger una urna al azar y de ella extraer una bola. Si es roja, gana el premio.

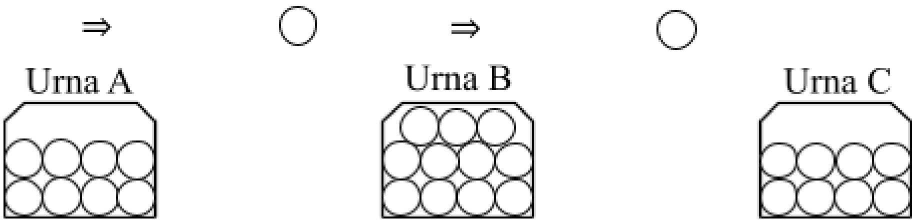
a) ¿Qué probabilidad tiene de ganar el premio?

b) Si ha ganado el premio, ¿cuál es la probabilidad de haberlo conseguido con la urna B?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la urna escogida sea la A y no consiga el premio?

----

a)



$$P(R) = P(R/A) + P(R/B) + P(R/C) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8} + \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{11} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{8} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{8} + \frac{4}{11} + \frac{2}{8}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{33+32+22}{88} = \frac{1}{3}\cdot\frac{87}{88} = \underline{\frac{29}{88}}.$$

b)

$$P(B/Gane) = \frac{P(R/B)}{P(R/A)+P(R/B)+P(R/C)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{11}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{11}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{8}} = \frac{\frac{4}{33}}{\frac{29}{88}} = \frac{4\cdot 8\cdot 11}{29\cdot 3\cdot 11} = \underline{\frac{32}{87}}.$$

c)

$$P(A/\overline{Gane}) = \frac{P(\overline{R}/A)}{1-P(R)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{8}}{1-\frac{29}{88}} = \frac{\frac{5}{24}}{\frac{59}{88}} = \frac{5\cdot 8\cdot 11}{59\cdot 3\cdot 8} = \underline{\frac{55}{177}}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE CASTILLA-LA MANCHA

JUNIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

OPCIÓN A

1º) Dadas las matrices $A = (2\ 1\ 1\ 1\ -\ 2\ 3)$, $B = (-\ 1\ 4\ -\ 3\ 1\ 0\ 4)$ y $C = (-\ 2\ -\ 2\ 0\ 3\ -\ 1\ 0)$:

$a)$ Realiza la siguiente operación: $(A - B) \cdot C^t$. (C^t es la traspuesta de C).

$b)$ Explica la razón por la cual las dos matrices siguientes no tienen inversa:

$$M = (-\ 1\ 0\ -\ 1\ 0\ 2\ 0), N = (-\ 2\ 0\ -\ 2\ 1\ -\ 1\ 0\ 2\ 4\ 6).$$

$a)$

$$(A - B) \cdot C^t = [(2\ 1\ 1\ 1\ -\ 2\ 3) - (-\ 1\ 4\ -\ 3\ 1\ 0\ 4)] \cdot (-\ 2\ 0\ -\ 1\ -\ 2\ 3\ 0) =$$

$$= (3\ -\ 3\ 4\ 0\ -\ 2\ -\ 1) \cdot (-\ 2\ 0\ -\ 1\ -\ 2\ 3\ 0) = (0\ -\ 9\ -\ 3\ -\ 8\ 0\ -\ 4\ 6\ -\ 3\ 2$$

.

$$\underline{(A - B) \cdot C^t = (0\ -\ 9\ -\ 3\ -\ 8\ 0\ -\ 4\ 6\ -\ 3\ 2)}.$$

$b)$

$$\underline{La\ matriz\ M\ no\ tiene\ inversa\ por\ no\ ser\ cuadrada.}$$

$$|N| = |-\ 2\ 0\ -\ 2\ 1\ -\ 1\ 0\ 2\ 4\ 6| = 12 - 8 - 4 = 0.$$

$$\underline{La\ matriz\ N\ no\ tiene\ inversa\ por\ ser\ cero\ su\ determinante}.$$

****

2º) Cierto dulce tradicional está compuesto exclusivamente por tres ingredientes: harina, huevo y miel. El porcentaje de harina es el triple de la suma de los porcentajes de los otros dos ingredientes. Además, la diferencia entre el porcentaje de harina y el de huevo es seis veces el porcentaje de miel.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar el porcentaje de cada ingrediente en este dulce.

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior.

----

a)

Siendo $x,\ y,\ z$ los % de harina, huevo y miel de que está compuesto el dulce regional, respectivamente.

Del enunciado del ejercicio se deduce el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$x + y + z = 100 \quad x = 3(y + z) \quad x - y = 6z \}$,
$x + y + z = 100\, x - 3y - 3z = 0\ \ x - y - 6z = 0 \}$.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|100\ 1\ 1\ 0\ -3\ -3\ 0\ -1\ -6\ |}{|1\ 1\ 1\ 1\ -3\ -3\ 1\ -1\ -6\ |} = \frac{100\cdot|3\ 3\ 1\ 6\ |}{18-1-3+3-3+6} = \frac{100\cdot(18-3)}{20} = 5\cdot 15 = 75.$$

$$y = \frac{|1\ 100\ 1\ 1\ 0\ -3\ 1\ 0\ -6\ |}{20} = \frac{-100\cdot|1\ -3\ 1\ -6\ |}{20} = -5\cdot(-6 + 3) = 15.$$

$$z = \frac{|1\ 1\ 100\ 1\ -3\ 0\ 1\ -1\ 0\ |}{20} = \frac{100\cdot|1\ -3\ 1\ -1\ |}{20} = 5\cdot(-1 + 3) = 10.$$

$\underline{El\ dulce\ lleva\ el\ 75\ \%\ de\ harina,\ el\ 15\ \%\ de\ huevo\ y\ el\ 10\ \%\ miel.}$

****

3º) Se considera la función $f(x) = \{t^2 + t - 5x \ si \ x \leq 1 \ (x - 3)^2 + t \ si \ x > 1$.

$a)$ ¿Para qué valores de t la función $f(x)$ es continua en x = 1?

$b)$ Para t = 0, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(1, \infty)$.

$c)$ Para t = 0, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en el intervalo $(1, \infty)$.

$a)$

Para que la función $f(x)$ sea continua en $x = 1$ es necesario que sus límites laterales sean iguales e igual al valor de la función en ese punto.

$$f(x) = \left(t^2 + t - 5x\right) = t^2 + t - 5 = f(1) \ f(x) = \left[(x - 3)^2 + t\right] = 4 + t$$

$t^2 - 9 = 0 \Rightarrow t_1 = -3, \ t_2 = 3.$

<u>$La \ función \ f(x) \ es \ continua \ en \ x = 1 \ para \ t = -3 \ y \ t = 3$</u>.

$b)$

Para t = 0 la función $f(x)$ en el intervalo $(1, \infty)$ es $f(x) = (x - 3)^2$, que es una parábola convexa (∪), cuyo vértice es el siguiente:

$f'(x) = 2(x - 3) \cdot 1 = 2(x - 3).$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 3.$

$f(3) = (3 - 3)^2 = 0 \Rightarrow Vértice \Rightarrow$<u>$Mínimo: V(3, 0)$</u>.

Para justificar que el vértice es un mínimo: $f''(x) = 2 > 0.$

$c)$

Una función es creciente o decreciente en un punto cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente, en ese punto.

$f'(x) = 2(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 3.$

<u>$Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon (3, + \infty)$</u>.

<u>$Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon (1, 3)$</u>.

****

4º) De la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sabemos que tiene un máximo relativo en el punto $P(1,\ 2)$ y que tiene un punto de inflexión en el punto $O(0,\ 0)$. Con estos datos, halla los valores de los parámetros $a,\ b,\ c$ y d.

Por contener $f(x)$ al origen es $d = 0$.

Por contener $f(x)$ al punto $P(1,\ 2)$ es $f(1) = 2$:

$f(1) = a\cdot 1^3 + b\cdot 1^2 + c\cdot 1 = 2;\ \ a + b + c = 2.$ (1)

Por tener $f(x)$ un máximo relativo en el punto $P(1,\ 2)$ es $f'(1) = 0$:

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$

$f'(1) = 3a\cdot 1^2 + 2b\cdot 1 + c = 0;\ \ 3a + 2b + c = 0.$ (2)

Por tener $f(x)$ un punto de inflexión en $O(0,\ 0)$ es $f''(0) = 0$:

$f''(x) = 6ax + 2b.$

$f''(0) = 6a\cdot 0 + 2b = 0;\ \ 2b = 0 \Rightarrow b = 0.$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$a + 0 + c = 2\ 3a + 0 + c = 0\}\quad - a - c =- 2\ 3a + c = 0\quad \} \Rightarrow 2a =- 2$

.

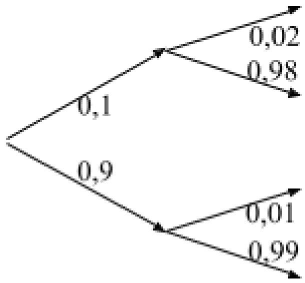
<u>$Solución: a =- 1,\ b = 0,\ c = 3,\ d = 0.$</u>

****

5º) En una empresa de Toledo se producen dos modelos de vajillas: A y B. El 10 % de las vajillas son del modelo A y el 90 % del modelo B. La probabilidad de que una vajilla del modelo A sea defectuosa es 0,02 y de que una vajilla del modelo B sea defectuosa es 0,01.

a) Elegida una vajilla al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuosa?

b) Se escoge al azar una vajilla y resultas defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea del modelo A?



a)

$$P = 0,002 + 0,009 = \underline{0,011}.$$

b)

$$P = \frac{0,002}{0,002+0,009} = \frac{0,002}{0,011} = \frac{2}{11} = \underline{0,182}.$$

****

6º) La longitud de un determinado insecto sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 0,52$ centímetros. Se toma una muestra aleatoria de tamaño 40 y se calcula la media muestral, siendo esta igual a 2,47 centímetros.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 95 %.

b) ¿Es razonable que la media de la longitud del insecto sea $\mu = 2,2$, con un nivel de confianza del 95 %? Obtén un valor razonable para la media de la longitud de este insecto μ con ese mismo nivel de confianza. Razona tus respuestas.

----

a)

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$$

$$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$$

Siendo $\overline{x} = 2,47;\ \sigma = 0,52\ y\ n = 40$, se aplica la fórmula adecuada que nos de el intervalo de confianza pedido, que es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(2,47 - 1,96 \cdot \frac{0,52}{\sqrt{40}},\ 2'47 + 1,96 \cdot \frac{052}{\sqrt{40}}\right);$$

$$(2,47 - 1,96 \cdot 0'08,\ 2'47 + 1,96 \cdot 0'08);\ \ (2,47 - 0'161,\ 2'47 + 0'161).$$

$$\underline{Intervalo\ de\ confianza:\ (2'309,\ 2'631)}.$$

b)

La media dada: $\mu = 2,2$ no está contenida en el intervalo de confianza por lo que se decide que:

$$\underline{No\ se\ puede\ admitir\ que\ la\ longitud\ media\ de\ los\ insectos\ sea\ de\ 2,2\ cm}.$$

El valor razonable de la media es la media del intervalo de confianza:

$$\mu = \frac{2,309+2,631}{2} = \frac{4,940}{2} = 2,47.$$

$$\underline{El\ valor\ \text{"}más\ razonable\text{"}\ de\ la\ media\ es\ de\ 2,47\ cm}.$$

$$\underline{En\ general,\ es\ razonabla\ cualquier\ valor\ de\ (2'309,\ 2'631)}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Un aficionado a la artesanía dedica su tiempo libre a decorar botijos y jarrones. Cada mes decora un máximo de 10 botijos y un máximo de 10 jarrones. Dedica una hora en decorar un botijo y 2 horas en decorar un jarrón. Puede dedicar cada mes un máximo de 24 horas a esta afición. Vende toda su producción mensual, y cobra 6 euros por cada botijo y 18 euros por cada jarrón. Se propone obtener el máximo beneficio mensual posible con las condiciones mencionadas.

a) Expresa la función objetivo.

b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido.

c) Halla el número de botijos y jarrones que debe decorar cada mes para obtener un beneficio máximo e indica a cuánto asciende ese beneficio máximo.

Sean x e y el número de botijos y jarrones que decora al mes, respectivamente.

a)

$\underline{La\ función\ objetivo\ es: f(x,\ y) = 6x + 18y}.$

b)

El conjunto de restricciones es: $0\le x\le 10$ $0\le x\le 10$ $x + 2y\le 24$ $\}$ o: $x\le 10,\ y\le 10$ $x + 2y\le 24$ $x\ge 0,\ y\ge 0$ $\}$.

La región factible se indica en la figura:

x	10	8
y	7	8

①$\Rightarrow x + 2y\le 24 \Rightarrow y\ge \frac{24-x}{2} \Rightarrow O(0,\ 0)\rightarrow Si.$

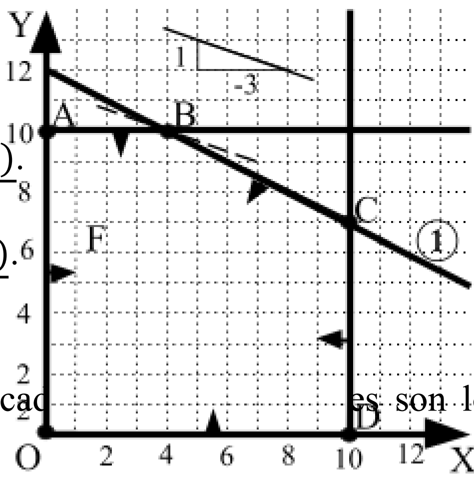
Los vértices de la sección factible, además del origen, son los siguientes:

$A\Rightarrow x = 0\ y = 10\ \}\Rightarrow \underline{A(0,\ 10)}.$

$B\Rightarrow x + 2y = 24 \quad y = 10\ \}\Rightarrow \underline{B(4,\ 10)}.$

$C\Rightarrow x + 2y = 24 \quad x = 10\ \}\Rightarrow \underline{C(10,\ 7)}.$

$D\Rightarrow x = 10\ \ y = 0\ \}\Rightarrow \underline{D(10,\ 0)}.$



Los valores de la función de objetivos en ca... es son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 10) = 6 \cdot 0 + 18 \cdot 10 = 0 + 180 = 180.$

$B \Rightarrow f(4,\ 10) = 6 \cdot 4 + 18 \cdot 10 = 24 + 180 = 204.$

$C \Rightarrow f(10,\ 7) = 6 \cdot 10 + 18 \cdot 7 = 60 + 126 = 186.$

$D \Rightarrow f(10,\ 0) = 6 \cdot 10 + 18 \cdot 0 = 60 + 0 = 60.$

El máximo se produce en el punto B.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = 6x + 18y = 0 \Rightarrow y = -\frac{6}{18}x \Rightarrow m = -\frac{1}{3}.$

$$\underline{Cada\ mes\ debe\ decorar\ 4\ botijos\ y\ 10\ jarrones}.$$

$$\underline{El\ benefico\ máximo\ asciende\ a\ 204\ euros}.$$

****

2º) Los precios de mis tres frutos secos favoritos son: almendras a 6 euros/kilo; avellanas a 16 euros/kilo y cacahuetes a 10 euros/kilo. En el supermercado he tomado algunos kilos de cada uno de estos frutos secos y he llenado una caja de 9 kilos, por los que he pagado 90 euros. En esta caja, la suma de los kilos de avellanas más los de cacahuetes es igual al doble de los kilos de almendras.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos kilos de cada fruto seco he comprado.

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior.

----

a)

Siendo $x,\ y,\ z$ el número de kilos de almendras, avellanas y cacahuetes que he comprado, respectivamente.

Del enunciado del ejercicio se deduce el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$x + y + z = 9\ 6x + 16y + 10z = 90 \qquad y + z = 2x\ \},$$

$$3 \quad x + y + z = 9\ x + 8y + 5z = 45 \quad 2x - y - z = 0\ \}.$$

b)

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|9\ 1\ 1\ 45\ 8\ 5\ 0\ -1\ -1\ |}{|1\ 1\ 1\ 3\ 8\ 5\ 2\ -1\ -1\ |} = \frac{-72-45+45+45}{-8-3+10-16+5+3} = \frac{-72+45}{18-27} = \frac{-27}{-9} = 3.$$

$$y = \frac{|1\ 9\ 1\ 3\ 45\ 5\ 2\ 0\ -1\ |}{-9} = \frac{-45+90-90+27}{-9} = \frac{-45+27}{-9} = \frac{-18}{-9} = 2.$$

$$z = \frac{|1\ 1\ 9\ 3\ 8\ 45\ 2\ -1\ 0\ |}{-9} = \frac{-27+90-144+45}{-9} = \frac{-171+135}{-9} = \frac{-36}{-9} = 4.$$

$\underline{He\ comprado\ 3\ kilos\ de\ almendras,\ 2\ de\ avellanas\ y\ 4\ de\ cacahuetes.}$

****

3º) Se considera la función $f(x) = \{(x - t)^2 \ si \ x < 0 \quad 1 \quad si \ x = 0 \ (x - 1)^2 \ si \ x > 0$:

a) Halla el valor de t para que f sea continua en x = 0.

b) Para $t = -1$, representa gráficamente la función f.

----

a)

Para que la función $f(x)$ sea continua en $x = 0$ es necesario que sus límites laterales sean iguales e igual al valor de la función en ese punto.

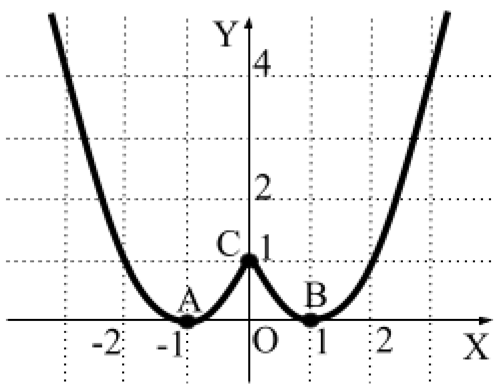
$$f(x) = (x - t)^2 = t^2 \qquad f(x) = (x - 1)^2 = 1 = f(1) \ \} \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t_1 = -$$

.

<u>*La función $f(x)$ es continua en $x = 0$ para $t = -1$ y $t = 1$*</u>.

b)

Para $t = -1$ la función resulta: $f(x) = \{(x + 1)^2 \ si \ x < 0 \quad 1 \quad si \ x = 0 \ (x - 1)^2 \ si \ x > 0$.



Para la representación de la función tenemos en cuenta que en su intervalo $(-\infty, 0]$ se trata de la expresión $f(x) = (x + 1)^2$, que es una parábola convexa (∪) que tiene su vértice en el punto A$(-1, 0)$ y en su intervalo $(0, +\infty)$ se trata de la expresión $f(x) = (x - 1)^2$, que es otra parábola convexa (∪) que tiene su vértice en el punto B$(1, 0)$.

Un punto importante de la función ex $C(0, 1)$.

Nótese que la función es simétrica con respecto al eje de ordenadas.

La representación gráfica es, aproximadamente, la que indica la figura.

****

4º) Al comenzar el año ponemos en marcha el estudio de la evolución de la población de un tipo de insectos. Hemos llegado a la conclusión de que esa población se ajusta a la función $f(x) = -\frac{1}{30}x^4 + \frac{2}{5}x^3 + 7$ donde x está en meses, con $0 \leq x \leq 12$ y $f(x)$ está en decenas de individuos.

a) Calcula cuántos insectos tenemos al comenzar el estudio (x = 0) y cuántos al terminarlo (x = 12).

b) Determina en qué intervalo la población crece y en cuál decrece.

c) Determina en qué momento la población de insectos es máxima y a cuántos individuos asciende.

----

a)

$$f(0) = 7.$$

$$f(12) = -\frac{1}{30} \cdot 12^4 + \frac{2}{5} \cdot 12^3 + 7 = -\frac{3.456}{5} + \frac{3.456}{5} + 7 = 7.$$

$$\underline{El\ número\ de\ insectos,\ tanto\ al\ empezar\ como\ al\ acabar,\ es\ 70}.$$

b)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = -\frac{2}{15}x^3 + \frac{6}{5}x^2 = \frac{2}{15}x^2(-x + 9).$$

Por ser $\frac{2}{15}x^2 > 0,\ \forall x \in R$, $f'(x)$ es positiva o negativa según que lo sea la expresión $(-x + 9)$.

Teniendo en cuenta el dominio de la función, los períodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (0,\ 9)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (9,\ 12)}.$$

c)

Una función tiene un máximo relativo para los valores de x que anulan su primera derivada y hacen negativa la segunda derivada.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2}{15}x^2(-x + 9) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 9.$$

$f''(x) = -\frac{2}{5}x^2 + \frac{12}{5}x = \frac{2}{5}x(-x+6).$

$f''(0) = 0.$ (para punto de inflexión)

$f''(9) = \frac{2}{5}\cdot 9\cdot(-9+6) < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 9.$

$\underline{El\ máximo\ número\ de\ insectos\ se\ produce\ para\ x = 9.}$

$f(9) = -\frac{1}{30}\cdot 9^4 + \frac{2}{5}\cdot 9^3 + 7 = -\frac{2.187}{10} + \frac{1.458}{5} + 7 = \frac{-2.187+2.916+70}{10} =$

$= \frac{799}{10} \cong 80.$

$\underline{El\ máximo\ número\ de\ insectos\ es\ 80.}$

****

5º) Se sabe que una máquina determinada tiene una probabilidad de tener una avería de 0,1. Tenemos una empresa con 4 máquinas como las anteriores que funcionan de forma independiente.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que las cuatro tengan una avería?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna tenga una avería?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de las máquinas tenga una avería?

Se trata de una distribución binomial con $p = 0,1$ y $q = 0,9$.

a)

$$P = 0,1\cdot 0,1\cdot 0,1\cdot 0,1 = 0,1^4 = \underline{0,0001}.$$

b)

$$P = 0,9\cdot 0,9\cdot 0,9\cdot 0,9 = 0,9^4 = \underline{0,6561}.$$

c)

Aplicando la fórmula de la probabilidad de la distribución binomial, que es la siguiente: $P = \binom{n}{r}\cdot p^r\cdot q^{n-r}$.

$$P = \binom{4}{1}\cdot 0,1^1\cdot 0,9^3 + \binom{4}{2}\cdot 0,1^2\cdot 0,9^2 + \binom{4}{3}\cdot 0,1^3\cdot 0,9^1 + \binom{4}{4}\cdot 0,1^4\cdot 0,9^0 =$$

$$= 4\cdot 0,1\cdot 0,729 + 6\cdot 0,01\cdot 0,81 + 4\cdot 0,001\cdot 0,9 + 1\cdot 0,0001\cdot 1 =$$

$$= 0,2916 + 0,0486 + 0,0036 + 0,0001 = \underline{0,3439}.$$

****

6º) Se sabe que las puntuaciones de los alumnos en la PAEG siguen una distribución normal de desviación típica $\sigma = 1$. Los siguientes datos representan las puntuaciones de 15 alumnos elegidos al azar:

7’8, 6’8, 6’7, 6’2, 7’4, 8’1, 5’9, 6’9, 7’5, 8’3, 7’5, 7’1, 6’1, 7’0 y 7’5.

a) Determina el intervalo de confianza para la media poblacional de la puntuación de la PAEG con un nivel de confianza del 97 %.

b) ¿Sería razonable pensar que esta muestra proviene de una población normal con media $\mu = 6$ con un nivel de confianza del 97 %? ¿Y con un nivel de significación igual a 0,08? Razona tus respuestas.

----

a)

$$\overline{x} = \frac{7,8+6,8+6,7+6,2+7,4+8,1+5,9+6,9+7,5+8,3+7,5+7,1+6,1+7,0+7,5}{15} = \frac{106,8}{15} = 7,12.$$

$$1 - \alpha = 0,97 \rightarrow \alpha = 1 - 0,97 = 0,03 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,015} = 2,17.$$

$$(1 - 0,015 = 0,9850 \rightarrow z = 2,17).$$

Conocemos: $\overline{x} = 7'12,\ \sigma = 1;\ n = 15;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,02} = 2,17.$

Ahora se aplica la fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, que es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(7,12 - 2,17\cdot\frac{1}{\sqrt{15}},\ 7,12 - 2,17\cdot\frac{1}{\sqrt{15}}\right);$$

$$\left(7,12 - 2,17\cdot 0'258,\ 7,12 + 2,17\cdot 0'258\right);\ (7,12 - 0'560,\ 7'12 + 0'560).$$

$$\underline{Intervalo\ de\ confianza\colon\ \left(6'56,\ 7'68\right)}.$$

b)

La media dada: $\mu = 6$ no está contenida en el intervalo de confianza por lo que se decide que:

$$\underline{No\ se\ puede\ admitir\ que\ la\ puntuación\ media\ de\ los\ alumnos\ de\ PAEG\ es\ 6.}$$

Para $\alpha = 0,08 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,04} = 1,75$

$$(1 - 0,04 = 0,9600 \rightarrow z = 1,75).$$

$$\left(7,12 - 1,75\cdot 0'258,\ 7'12 + 1,75\cdot 0'258\right);\ (7,12 - 0'452,\ 7'12 + 0'452).$$

$$\underline{Intervalo\ de\ confianza\text{: } \left(6'668,\ 7'572\right)}.$$

$$\underline{Tampoco\ debe\ admitirse\ que\ la\ nota\ media\ de\ los\ alumnos\ de\ PAEG\ de\ 6}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE CASTILLA-LA MANCHA

SEPTIEMBRE – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

OPCIÓN A

1º) En una granja hay vacas y caballos. El veterinario contratado tiene la obligación de supervisar diariamente entre 4 y 8 vacas, y además entre 2 y 5 caballos. Además, el número de vacas supervisadas debe ser al menos el doble que el número de caballos supervisados. El veterinario tarda una hora en supervisar cada animal y trata de averiguar cuál es el tiempo mínimo diario que le permite cumplir todas las condiciones del contrato.

a) Expresa la función objetivo.

b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido.

c) Halla el número de vacas y caballos que debe supervisar diariamente para cumplir las condiciones en un tiempo mínimo.

----

a)

Sean x e y el número de vacas y caballos que hay en la granja, respectivamente.

La función de objetivos es: $\underline{f(x,\ y) = x + y}$.

b)

Las restricciones son las siguientes:

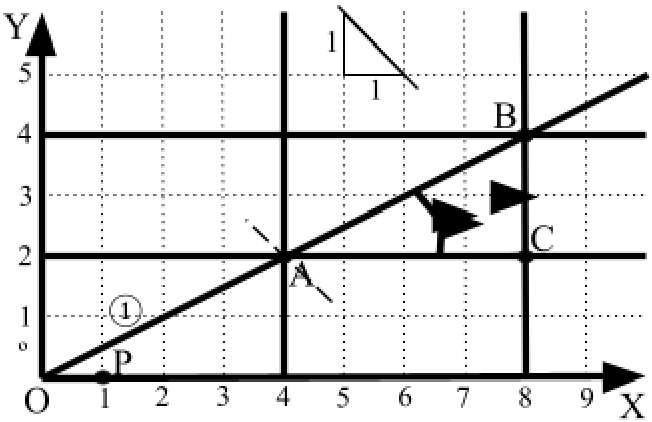
$\left.\begin{array}{l} 4 \le x \le 8 \\ 2 \le y \le 5 \\ x \ge 2y \end{array}\right\}\ o\ mejor:\quad \left.\begin{array}{l} 4 \le x \le 8 \\ 2 \le y \le 5 \\ x - 2y \ge 0 \end{array}\right\}.$

La región factible se indica en la figura:

x	0	4
y	0	2

① $\Rightarrow x - 2y \ge 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x \Rightarrow P(1,\ 0) \rightarrow Si.$

Los vértices de la sección factible son los siguientes:



$A\Rightarrow x = 4\ y = 2\ \}\Rightarrow A(4,\ 2).$

$B\Rightarrow x = 8\ y = 4\ \}\Rightarrow B(8,\ 4).$

$C\Rightarrow x = 8\ y = 2\ \}\Rightarrow C(8,\ 2).$

$c)$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A\Rightarrow f(4,\ 2) = 4\cdot 1 + 2\cdot 1 = 4 + 2 = 6.$

$B\Rightarrow f(8,\ 4) = 8\cdot 1 + 4\cdot 1 = 8 + 4 = 12.$

$C\Rightarrow f(8,\ 2) = 8\cdot 1 + 2\cdot 1 = 8 + 2 = 10.$

El mínimo se produce en el punto A.

También se hubiera obtenido el punto A por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = x + y = 0 \Rightarrow y = -\ x \Rightarrow m = -\ \frac{1}{1} = -\ 1.$

$\underline{Con\ 6\ horas\ cumple\ las\ condiciones\ supervisando\ 4\ vacas\ y\ 2\ caballos.}$

****

2º) He comprado 5 kg de almendras, 3 kg de avellanas y 2 kg de cacahuetes, y he pagado por todo ello 98 euros. La diferencia entre el precio por kg de las avellanas y de los cacahuetes, es igual al precio por kg de las almendras. Si hubiera comprado 1 kg de cada fruto seco, hubieras pagado 32 euros.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar el precio por kg de cada fruto seco.

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior.

----

a)

Sean x, y, z los precios del kg de almendras, avellanas y cacahuetes, respectivamente.

$$\left.\begin{array}{l} 5x + 3y + 2z = 98 \\ y - z = x \\ x + y + z = 32 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{5x + 3y + 2z = 9}$$

.

b)

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 98 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 32 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-98+96+64-98}{-5+3+2+2-5-3} = \frac{-196+160}{-6} = \frac{-36}{-6} = 6.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 98 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 32 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{98+64-160-98}{-6} = \frac{162-258}{-6} = \frac{-96}{-6} = 16.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 98 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 32 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-160+98+98-96}{-6} = \frac{196-256}{-6} = \frac{-60}{-6} = 10.$$

$\underline{Precios\ kg: almendras,\ 6\ euros; avellanas,\ 16\ euros\ y\ cacahuetes,\ 10\ euros.}$

****

3º) Se considera la función $f(x) = \{- (x + 3)^2 \; si \; x <- 3 \quad t \; \; si - 3 \leq x \leq 3 - (x - 3)^2 \; si \; x > 3$.

a) Halla el valor de t para que f sea continua en $x = 3$.

b) Para $t = 2$, representa gráficamente la función f.

----

a)

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

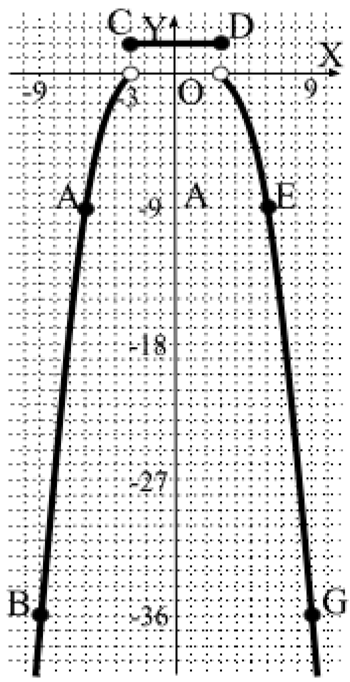
$$Para\, x = 3 \Rightarrow \{ f(x) \;\; == \;\; t = f(3) \quad f(x) \;\; = \left[- (x - 3)^2\right] = 0 \Rightarrow t = 0.$$

$$\underline{La\, función\, f(x)\; es\; continua\; en\; x = 3\; para\; t = 0}.$$

b)

Para $t = 2$ la función es $f(x) = \{- (x + 3)^2 \; si \; x <- 3 \quad 2 \; \; si - 3 \leq x \leq 3 - (x - 3)^2 \; si \; x > 3$.

El dominio de la función $f(x)$ es R.



La función $f(x)$ en el intervalo $(- \infty, \; - 3)$ se trata de la expresión $f(x) = - (x + 3)^2$, que es una parábola cóncava (∩) que tiene su vértice en el punto $V_1(- 3, \; 0)$. Son otros puntos de la función en este intervalo $A(- 6, \; - 9)$ y $B(- 6, \; - 9)$.

Deba hacerse notar que la función no es continua para $x = 3$ y para $x =- 3$ por ser el valor de la función en esos puntos 2: $E(- 3, \; 2)$ y $G(3, \; 2)$.

La función $f(x)$ en el intervalo $(3, \; + \infty)$ se trata de la expresión $f(x) = - (x - 3)^2$, que es una parábola cóncava (∩) que tiene su vértice en el punto $V_2(3, \; 0)$. Son puntos de la función en este intervalo $E(6, \; - 9)$ y G$(9, \; - 36)$.

La representación gráfica de la función, aproximada, es la que aparece en la figura adjunta.

****

4º) De la función $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ sabemos que pasa por el punto $O(0,\ 0)$, que tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa 3 y que la pendiente de la recta tangente en ese mismo punto vale -18. Con estos datos halla el valor de los parámetros $a,\ b\ y\ c$.

Por pasar por $O(0,\ 0) \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$.

Por tener un punto de inflexión en $x = 3$ es $f''(3) = 0$:

$f'(x) = 4ax^3 + 2bx;\ \ f''(x) = 12ax^2 + 2b.$

$f''(3) = 0 \Rightarrow 12a \cdot 3^2 + 2b = 0;\ \ 108a + 2b = 0;\ \ 54a + b = 0.$ (1)

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto, por lo cual:

$f'(3) = -18 \Rightarrow 4a \cdot 3^3 + 2b \cdot 3 = -18;\ \ 18a + b = -3.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{matrix} 54a + b = 0 \\ 18a + b = -3 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} 54a + b = 0 \\ -18a - b = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 36a = 3 \Rightarrow a$$

.

$b = -54a = -54 \cdot \frac{1}{12} = -9 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{9}{2}.$

<u>*Solución*: $a = \frac{1}{12},\ b = -\frac{9}{2},\ c = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{9}{2}x^2.$</u>

****

5º) De un total de 80 alumnos de un instituto que se han presentado a la PAEG, 6 no han aprobado la PAEG.

a) Calcula la probabilidad de que un alumno de ese instituto elegido al azar haya aprobado la PAEG.

b) Calcula la probabilidad de que seleccionamos tres alumnos distintos al azar de ese instituto, ninguno resulte suspenso.

c) Si elegimos cuatro alumnos distintos al azar y el primero y el segundo han suspendido, ¿cuál es la probabilidad de que el tercero y el cuarto sean suspensos?

----

a)

$$P = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{80-6}{80} = \frac{74}{80} = \underline{\frac{37}{40} = 0,925}.$$

b)

$$P = \frac{74}{80} \cdot \frac{73}{79} \cdot \frac{72}{78} = \frac{37}{40} \cdot \frac{73}{79} \cdot \frac{12}{13} = \frac{37}{10} \cdot \frac{73}{79} \cdot \frac{3}{13} = \underline{\frac{8.103}{10.270} = 0,789}.$$

c)

Si el primero y el segundo de los cuatro alumnos elegidos han suspendido, queda un conjunto de 78 alumnos de los cuales 4 han suspendido. Se trata de calcular la probabilidad de que, elegidos dos alumnos al azar, ambos hayan suspendido:

$$P = \frac{4}{78} \cdot \frac{3}{77} = \frac{4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 77} = \underline{\frac{2}{1.001} = 0,002}.$$

****

6º) El gasto en electricidad por hogar y año sigue una distribución normal con media desconocida. Se elige una muestra aleatoria de 10 hogares y se observa que el gasto para los hogares de esta muestra (en euros) es: 828, 687, 652, 650, 572, 769, 860, 681, 589 y 755. Según la compañía eléctrica el gasto por hogar y año tiene una desviación típica $\sigma = 100$ euros.

a) Determina el intervalo de confianza para la media poblacional del gasto por hogar y año, con un nivel de confianza del 97 %.

b) ¿Aceptarías con un nivel de confianza del 97 % que la media poblacional es $\mu = 800$ euros? ¿Y con un nivel de significación igual a 0,09? Razona las respuestas.

----

a)

$$\overline{x} = \frac{828+687+652+650+572+769+860+681+589+755}{10} = \frac{7.043}{10} = 704,3.$$

$$1 - \alpha = 0,97 \rightarrow \alpha = 1 - 0,97 = 0,03 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,015} = 2,17.$$

$$(1 - 0,015 = 0,9850 \rightarrow z = 2,17).$$

Datos: $\overline{x} = 674,3;\ \ n = 10;\ \ \sigma = 100;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,17.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(704'3 - 2'17\cdot\frac{100}{\sqrt{10}},\ \ 704'3 + 2'17\cdot\frac{100}{\sqrt{10}}\right);$$

$$\left(704'3 - 2'17\cdot 31'623,\ \ 704'3 + 2'17\cdot 31'623\right);$$

$$\left(704'3 - 68'621,\ \ 704'3 + 68'621\right);$$

$$\underline{I.\ C._{97\ \%}\left(635'679,\ \ 772'921\right)}.$$

b)

$Hipótesis\ nula \rightarrow H_0$: $\mu = 800$ $\quad$ $Hipótesis\ alternativa \rightarrow H_1$: $\mu \neq 800$ }

. Contraste bilateral.

Conocemos: $n = 10;\ \ \mu = 800;\ \ \sigma = 100;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,17.$

La región de aceptación es $\left(\mu - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \mu + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(800 - 2,17 \cdot \frac{100}{\sqrt{10}};\ 800 + 2,17 \cdot \frac{100}{\sqrt{10}}\right);\ (800 - 68'621,\ 800 + 68'621);$

$(731'379,\ 868'621)$.

$\underline{\overline{x} = 704,3 \notin (731'379,\ 868'621) \Rightarrow Se\ rechaza\ la\ hipótesis\ nula.}$

$\underline{Con\ un\ nivel\ de\ confianza\ del\ 97\ \%\ no\ se\ acepta\ que\ \mu = 800.}$

$Para\ \alpha = 0,09 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,045} = 1,7.\quad (1 - 0,045 = 0,9550 \rightarrow z = 1,7).$

$\left(800 - 1,7 \cdot \frac{100}{\sqrt{10}};\ 800 - 1,7 \cdot \frac{100}{\sqrt{10}}\right);\ (800 - 53'759,\ 800 + 53'759);$

$(746'241,\ 853'759)$.

$\underline{\overline{x} = 704,3 \notin \left(746'241,\ 868'621\right) \Rightarrow No\ se\ acepta\ la\ hipótesis\ nula.}$

$\underline{Con\ un\ nivel\ de\ significación\ del\ 0,09\ tampoco\ se\ acepta\ que\ \mu = 800.}$

****

OPCIÓN B

1º) Dadas la matrices: $A = (3 \ \ - \ 1 \ 1 \ 2 \ ) \ y \ B = (- \ 4 \ \ - \ 2 \ k \ \ - \ 6 \ )$. Determinar el valor que debe tomar el parámetro k para que ambas matrices conmuten; es decir $A \cdot B = B \cdot A$.

$$A \cdot B = (3 \ \ - \ 1 \ 1 \ 2 \ ) \cdot (- \ 4 \ \ - \ 2 \ k \ \ - \ 6 \ ) = (- \ 12 - \ k \ \ - \ 6 + \ 6 \ \ - \ 4 \ + \ 2k \ \ - \ 2$$

$$= (- \ 12 \ - \ k \ 0 \ \ - \ 4 \ + \ 2k \ \ - \ 14 \ ).$$

$$B \cdot A = (- \ 4 \ \ - \ 2 \ k \ \ - \ 6 \ ) \cdot (3 \ \ - \ 1 \ 1 \ 2 \ ) = (- \ 12 \ - \ 2 \ 4 \ - \ 4 \ 3k \ - \ 6 \ \ - \ k \ - \ 12 \ )$$

$$= (- \ 14 \ 0 \ 3k \ - \ 6 \ \ - \ k \ - \ 12 \ ).$$

$$A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow (- \ 12 \ - \ k \ 0 \ \ - \ 4 \ + \ 2k \ \ - \ 14 \ ) = (- \ 14 \ 0 \ 3k \ - \ 6 \ \ - \ k \ - \ 12 \ ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \ - \ 12 \ - \ k \ =- \ 14 \ \ - \ 4 \ + \ 2k \ = \ 3k \ - \ 6 \ \ - \ 14 \ =- \ k \ - \ 12 \ \} \Rightarrow k \ = \ 2.$$

$$\underline{Las \ matrices \ A \ y \ B \ son \ invertibles \ para \ k \ = \ 2}.$$

****

2º) Hemos gastado 7.000 euros en comprar 85 acciones de la empresa A, 100 acciones de la empresa B y 70 acciones de la empresa C. El valor de una acción de la empresa C es el doble que el de una acción de la empresa A. El valor de una acción de la empresa B supera en 5 euros al de una acción de la empresa A.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuál es el valor de una acción de cada una de las empresas mencionadas.

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior.

----

a)

Sean x, y, z los valores de las acciones de las empresas A, B y C, respectivamente.

$$85x + 100y + 70z = 7.000 \qquad z = 2x \qquad y = x + 5 \}$$

.

b)

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|1.400\ 20\ 14\ 0\ 0\ -1\ -5\ -1\ 0\ |}{|17\ 20\ 14\ 2\ 0\ -1\ 1\ -1\ 0\ |} = \frac{+|1.400\ 20\ -5\ -1\ |}{-28-20-17} = \frac{-1.400+100}{-65} = \frac{-1{,}300}{-65} = 20$$

.

$$y = \frac{|17\ 1.400\ 14\ 2\ 0\ -1\ 1\ -5\ 0\ |}{-65} = \frac{-140-1.400-85}{-65} = \frac{-1.625}{-65} = \frac{325}{13} = 25.$$

$$z = \frac{|17\ 20\ 1.400\ 2\ 0\ 0\ 1\ -1\ -5\ |}{-65} = \frac{-2\cdot|20\ 1.400\ -1\ -5\ |}{-65} = \frac{2\cdot(-100+1.400)}{65} = \frac{2\cdot 1.300}{65} = 2\cdot 20 = 40$$

.

$\underline{Valor\ de\ cada\ acción: A,\ 20\ euros; B,\ 25\ euros\ y\ C,\ 40\ euros.}$

****

3º) Se considera la función $f(x) = \{(x - t)^2 \;\; si \;\; x \leq 0 \;\; (x + t)^3 - x \;\; si \;\; x > 0 :$

$a)$ ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 0$?

$b)$ Para $t = 0$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, \; + \infty)$.

$c)$ Para $t = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, \; + \infty)$.

$a)$

Para que la función sea continua en $x = 0$ es necesario que sus límites laterales sean iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$f(x) \; = (x - t)^2 = t^2 = f(0) \;\; f(x) \; == t^3 \quad \} \Rightarrow t^2 = t^3 \Rightarrow t_1 = 0, \; t_2 = 1$$

.

$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ para\ x\ =\ 0\ para\ t\ =\ 0\ y\ t\ =\ 1}.$

$b)$

Para $t = 0$ la función es $f(x) = \{x^2 \;\; si \;\; x \leq 0 \;\; x^3 - x \;\; si \;\; x > 0$, que en el intervalo $(0, \; + \infty)$ se manifiesta de la forma $g(x) = x^3 - x$.

Los extremos relativos son los siguientes:

$$g'(x) = 3x^2 - 1 = 0; \;\; x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x_1 = - \frac{\sqrt{3}}{3}, \; x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$g''(x) = 6x \Rightarrow \{ g''_{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} = - 2\sqrt{3} < 0 \rightarrow x \notin (0, \; + \infty) \qquad g''_{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} = 2\sqrt{3} > 0 \rightarrow Mín$$

.

$$g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{27} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{9} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{-3\sqrt{3}+\sqrt{3}}{9} = - \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

$\underline{La\ función\ f(x)\ tiene\ un\ mínimo\ relativo\ en\ el\ punto\ A\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \; - \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)}.$

$c)$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente. En el intervalo $(0, \; + \infty)$ la función $f(x)$ se manifiesta de la forma $g(x) = x^3 - x$.

$g'(x) = 3x^2 - 1 = 0;\ x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3},\ x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Solo se considera la raíz positiva por no pertenecer la raíz negativa al intervalo considerado.

$$\underline{Decrecimiento \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow x < \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x \in \left(0,\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right).}$$

$$\underline{Crecimiento \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow x > \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ +\infty\right).}$$

****

4º) A las 0 horas de un día lanzamos a la atmósfera un pequeño globo de helio que mediante un transmisor nos va dando información, entre otras cosas, de la altura a la que se encuentra. El globo asciende durante algunas horas y después desciende hasta caer de nuevo a tierra. La altura a la que se encuentra el globo se ajusta a la función: $f(x) = 64x^2 - \frac{1}{2}x^4$ donde $f(x)$ está en metros y x en horas, con $x \geq 0$ y $f(x) \geq 0$.

a) Determina cuándo vuelve el globo a caer a tierra, así como en qué intervalo de tiempo el globo está ascendiendo y en qué intervalo está descendiendo.

b) Determina cuál es la altura máxima que alcanza el globo y cuándo se produce esa altura máxima.

----

a)

El globo cae a tierra cuando la altura sea cero siendo $x > 0$:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 64x^2 - \frac{1}{2}x^4 = 0;\ \ 128x^2 - x^4 = 0;\ \ x^2\left(128 - x^2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 128 = x^2;\ \ x = +\sqrt{128} = \sqrt{2 \cdot 8^2} = 8\sqrt{2} \cong 11'3137\ horas = 11h\ 18\ m\ 49s.$$

$$\underline{El\ globo\ cae\ a\ tierra\ a\ las\ 11\ horas\ 18 y\ 49\ segundos}.$$

El globo asciende o desciende cuando la función $f(x)$ sea creciente o decreciente, respectivamente.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 128x - 2x^3 = 2x\left(64 - x^2\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -8,\ x_3 = 8.$$

Como el tiempo tiene que ser positivo, la única raíz válida es $x = 8$.

$$f'(x) > 0 \Rightarrow x < 8. \qquad f'(x) < 0 \Rightarrow x > 8.$$

$$\underline{El\ globo\ asciende\ las\ 8\ primeras\ horas\ y\ despues\ desciende\ hasta\ caer}.$$

b)

Del crecimiento y decrecimiento se deduce que la altura máxima la alcanza a las 8 horas de su lanzamiento.

$$f(8) = 64 \cdot 8^2 - \frac{1}{2}8^4 = 8^4\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot 8^4 = \frac{1}{2} \cdot 4.096 = 2.048.$$

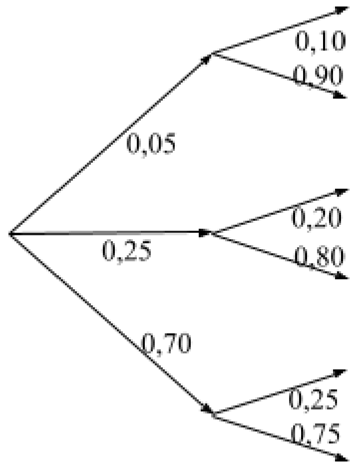
$$\underline{El\ globo\ alcanza\ su\ altura\ máxima\ de\ 2.048\ metros\ a\ las\ 8\ horas}.$$

****

5º) En una liga de fútbol se sabe que el 5 % de los futbolistas son asiáticos, el 25 % son africanos y el resto son europeos. También se sabe que el 10 % de los futbolistas asiáticos, el 20 % de los futbolistas africanos y el 25 % de los futbolistas europeos hablan castellano.

a) Calcule la probabilidad de que un futbolista, elegido al azar, hable castellano.

b) Si nos encontramos con un futbolista que no habla castellano, ¿cuál es la probabilidad de que sea europeo?



a)

$$P = P(As/C) + P(Af/C) + P(E/C) =$$

$$= 0,05 \cdot 0,10 + 0,25 \cdot 0,20 + 0,70 \cdot 0,25 = 0,005 + 0,050 + 0,175 = \underline{0,230}.$$

b)

$$P = P(E/\overline{C}) = \frac{P(E \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \frac{P(E) \cdot P(\overline{C}/E)}{P(\overline{C}/As) + P(\overline{C}/Af) + P(\overline{C}/E)} = \frac{0,70 \cdot 0,75}{0,05 \cdot 0,90 + 0,25 \cdot 0,80 + 0,70 \cdot 0,75} =$$

$$= \frac{0,525}{0,045 + 0,200 + 0,525} = \frac{0,525}{0,770} = \underline{0,682}.$$

****

6º) El consumo medio de agua por habitante y día en España sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 30$ litros. Tomando una muestra aleatoria de habitantes, se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza para la media poblacional $\left(130'4,\ 169'6\right)$ con un nivel de confianza del 95 %.

a) Calcula el tamaño de la muestra utilizada y calcula el valor que se obtuvo para la media muestral.

b) ¿Cuál es el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 92,98 %?

----

a)

$$\overline{x} = \frac{169,6+130,4}{2} = \frac{300}{2} = 150.$$

$$\underline{La\ media\ muestral\ es\ de\ 150\ litros.}$$

$$E = \frac{169,6-130,4}{2} = \frac{39,2}{2} = 19,6.$$

$$\alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$$

$$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$$

Datos: $\overline{x} = 150;\ \sigma = 30;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96;\ E = 19,6.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1,96 \cdot \frac{30}{19,6}\right)^2 =$

$= (1,96 \cdot 1,5306)^2 = 3^2 = 9.$

$$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 9\ habitantes.}$$

b)

$$\alpha = 1 - 0,9298 = 0,0702 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,0351} = 1,81.$$

$$(1 - 0,0351 = 0,9649 \rightarrow z = 1,81).$$

Para $n = 100$ el error máximo que se comete es:

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1'81 \cdot \frac{30}{\sqrt{100}} = 1,81 \cdot 3 = \underline{5,43}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE CASTILLA Y LEÓN

JUNIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá escoger una de las dos opciones y desarrollar las preguntas de la misma. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que se puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

1º) Para realizar una excursión, un IESO no puede utilizar más de 5 autobuses de 55 plazas cada uno, ni más de 9 microbuses de 33 plazas cada uno. El coste de cada autobús se eleva a 500 euros, mientras que el coste de cada microbús es de 300 euros. Además, han de viajar 3 profesores en cada autobús y 2 en cada microbús. Si como mucho hay 27 profesores que pueden participar en la excursión y el coste del transporte no puede exceder de 4.300 euros, utiliza técnicas de programación lineal para determinar el número de autobuses y microbuses que han de contratarse para que el número de alumnos que puedan ir de excursión sea máximo. ¿A cuánto asciende ese número de alumnos?

Sean x e y el número de autobuses y microbuses, respectivamente, que utiliza el IES para realizar la excursión.

El conjunto de restricciones es:
$0 \leq x \leq 5 \quad 0 \leq x \leq 9 \quad 3x + 2y \leq 27 \; 500x + 300y \leq 4.300 \} \; o\!: \; x \leq 5, \;\; y \leq 9 \; 3x + 2y \leq 27$

La función de objetivos es la siguiente: $F(x,\ y) = 55x + 33y$.

x	9	3
y	0	9

$① \Rightarrow 3x + 2y \leq 27 \Rightarrow y \geq \frac{27-3x}{2} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

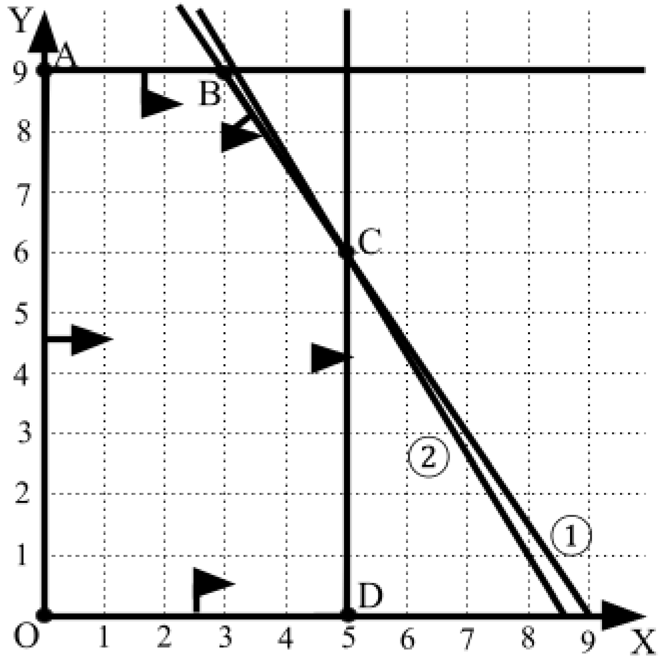
x	5	8
y	6	1

$② \Rightarrow 5x + 3y \leq 43 \Rightarrow y \leq \frac{43-5x}{3} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

La región factible se indica en la figura.

Los vértices de la zona factible, además del origen, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 9 \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,\ 9).$



$B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x + 2y = 27 \\ y = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow B(3,\ 9).$
$C \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 5 \\ 5x + 3y = 43 \end{array}\right\} \Rightarrow C(5,\ 6).$
$D \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 5 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow D(5,\ 0).$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 9) = 55 \cdot 0 + 33 \cdot 9 = 0 + 297 = 297.$

$B \Rightarrow f(3,\ 9) = 55 \cdot 3 + 33 \cdot 9 = 165 + 297 = 462.$

$C \Rightarrow f(5,\ 6) = 55 \cdot 5 + 33 \cdot 6 = 165 + 198 = 363.$

$D \Rightarrow f(5,\ 0) = 55 \cdot 5 + 33 \cdot 0 = 275 + 0 = 275.$

$\underline{Deben\ utilizarse\ 3\ autobuses\ y\ 9\ microbuses}.$

$\underline{El\ máximo\ número\ de\ estudiantes\ que\ pueden\ ir\ de\ excursión\ son\ 462\ }.$

****

2º) Calcula los valores de los parámetros $a,\ b$ y c en la función $y = ax^3 - bx + c$, sabiendo que pasa por el origen de coordenadas y que tiene un máximo relativo en el punto $P(1,\ 4)$.

Por pasar por el origen: $y_{(0)} = 0 \Rightarrow \underline{c = 0}$.

La función resulta $y = f(x) = ax^3 - bx$.

Por contener $y = f(x) = ax^3 - bx$ al punto $P(1,\ 4) \Rightarrow f(1) = 4$:

$f(1) = a \cdot 1^3 - b \cdot 1 = a - b = 4.$ (1)

Por tener $y = f(x) = ax^3 - bx$ un máximo relativo en $P(1,\ 4) \Rightarrow f'(1) = 0$:

$f'(x) = 3ax^2 - b \Rightarrow f'(1) = 3a \cdot 1^2 - b = 3a - b = 0.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$\left.\begin{array}{l} a - b = 4 \\ 3a - b = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} -a + b = -4 \\ 3a - b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2a = -4;\ \underline{a = -2},$

.

****

3º) La probabilidad de que un socio de un club vaya a la playa de vacaciones es 0,9. Si el club tiene 60 socios, calcula, utilizando la aproximación a la distribución normal apropiada, la probabilidad de que como mucho 50 socios vayan a la playa de vacaciones.

$$Para\, n = 60 \rightarrow \{p = 0,9\; q = 0,1\} \Rightarrow \hat{P} = N\left(0'9,\ \sqrt{\frac{0,9\cdot 0,1}{60}}\right) = N\left(0'9,\ \sqrt{\frac{0,09}{60}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{P} = N(0'9,\ 0'039).$$

$$P = \frac{50}{60} = 0,83.$$

$$P\left(\hat{P} \leq \frac{50}{60}\right) = P\left(\hat{P} < 0,83\right) = P\left(\frac{\hat{P}-0,9}{0,039} \leq \frac{0,83-0,9}{0,039}\right) = P\left(Z \leq \frac{-0,07}{0,039}\right) =$$

$$= P(Z \leq -1,79) = 1 - P(Z < 1,79) = 1 - 0,9633 = \underline{0,0367}.$$

****

4º) El 30 % de los despidos laborales de una empresa son improcedentes. Si la empresa despide a 3 trabajadores hoy, ¿cuál es la probabilidad de que hoy ningún despido sea improcedente?

La probabilidad de que un despido sea improcedente es: $P(i) = 0,3$.

La probabilidad de que un despido sea procedente es: $P(p) = 1 - 0,3 = 0,7$
.

$P = 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7 = (0,7)^3 = 0,343.$

$\underline{La\ probabilidad\ de\ que\ ning\text{ú}n\ despido\ de\ hoy\ sea\ improcedente\ es\ 0,343.}$

****

OPCIÓN B

1º) Una editorial va a lanzar al mercado tres ediciones L_1, L_2 y L_3 de libros de bolsillo. Los costes por unidad de cada libro son 7, 5 y 6 euros, respectivamente. El coste total de las tres ediciones asciende a 37.500 euros. Se sabe que el número de ejemplares de L_3 es igual a dos séptimos del número de ejemplares de L_2, y que, si al triple del número de ejemplares de L_1 se le suma el número de ejemplares de L_3, se obtiene el doble del número de ejemplares de L_2. Calcula cuántos libros de cada tipo se han editado.

Siendo x, y, z los libros lanzados por las ediciones L_1, L_2 y L_3, respectivamente, del enunciado del ejercicio se deduce el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$7x + 5y + 6z = 37.500 \qquad z = \frac{2}{7}y \qquad 3x + z = 2y \},$$
$$7x + 5y + 6z = 37.500 \qquad 2y - 7z = 0 \qquad 3x - 2y + z = 0 \}.$$

De la segunda ecuación: $2y = 7z \rightarrow y = \frac{7}{2}z = 3,5z$.

Sustituyendo en la 3ª ecuación: $3x - 7z + z = 0;\ \ 3x - 6z = 0 \Rightarrow x = 2z$.

Sustituyendo en la 1ª ecuación los valores obtenidos de x e y en función de z:

$$7 \cdot 2z + 5 \cdot 3,5z + 6z = 37.500;\ \ 14z + 17,5z + 6z = 37.500;$$

$$37,5z = 37.500 \Rightarrow z = 1.000,\ x = 2.000 \ e \ y = 3.500.$$

$$\underline{\mathit{Se\ han\ editado}\ 2.000,\ 3.500\ y\ 1.000\ \mathit{libros\ de}\ L_1,\ L_2\ y\ L_3,\ \mathit{respectivamente}.}$$

****

2º) Consideramos la función $f(x) = \{\frac{1}{x^2} + b \quad si \quad x \leq -1 \; 3x^2 + 4 \;\; si \;\; -1 < x < 1 \;\; -x^3 + 8 \quad si \;\; x \geq 1$.

a) Calcula el valor del parámetro b para que $f(x)$ sea continua.

b) Para b = 6 estudia la derivabilidad de $f(x)$ en $[0,\ 2]$ y representa su gráfica.

----

a)

Por ser $f(x) \; = f(x) \; = 1 = f(1)$, la función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = -\ 1$, que se va a obtener el correspondiente valor de b para que lo sea.

Para que la función sea continua en $x = -\ 1$ es necesario que sus límites laterales sean iguales e iguales al valor de la función en ese punto:

$$f(x) \; = \left(\frac{1}{x^2} + b\right) = f(-\ 1) = 1 + b \;\; f(x) \; = (3x^2 + 4) \; = 3 + 4 = 7 \qquad \} \Rightarrow 1$$

.

<u>$La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ R\ para\ b\ =\ 6$</u>.

La función resulta $f(x) = \{\frac{1}{x^2} + 6 \quad si \quad x \leq -1 \; 3x^2 + 4 \;\; si \;\; -1 < x < 1 \;\; -x^3 + 8 \quad si \;\; x \geq 1$.

b)

Un función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales; una función es derivable en un intervalo cuando lo es en todos y cada uno de los puntos del intervalo.

La función $f(x)$ es derivable en $[0,\ 2]$ por ser polinómica, excepto para x = 1 cuya derivabilidad es dudosa y se estudia a continuación:

$$f'(x) = \{-\frac{2}{x^3} + 6 \;\; si \;\; x \leq -1 \; 6x \;\; si \;\; -1 < x < 1 \;\; -3x^2 \;\; si \;\; x \geq 1 \Rightarrow f'\left(1^-\right) = 6 \neq f'\left(1\right.$$

.

<u>$La\ función\ f(x)\ es\ derivable\ en\ [0,\ 2],\ excepto\ para\ x\ =\ 1$</u>.

Para la representación de la función tenemos en cuenta que en su intervalo $(-\ \infty,\ -\ 1]$ se trata de la expresión $g(x) = \frac{1}{x^2} + 6$, que es creciente en su dominio, por ser $g'(x) = \frac{-2}{x^3} > 0,\ \forall x \in (-\ \infty,\ -\ 1]$.

Tiene como asíntota horizontal en este intervalo a la recta de ecuación $y = 6$ por ser $\left(\frac{1}{x^2} + 6\right) = \frac{1}{\infty} + 6 = 0 + 6 = 6$.

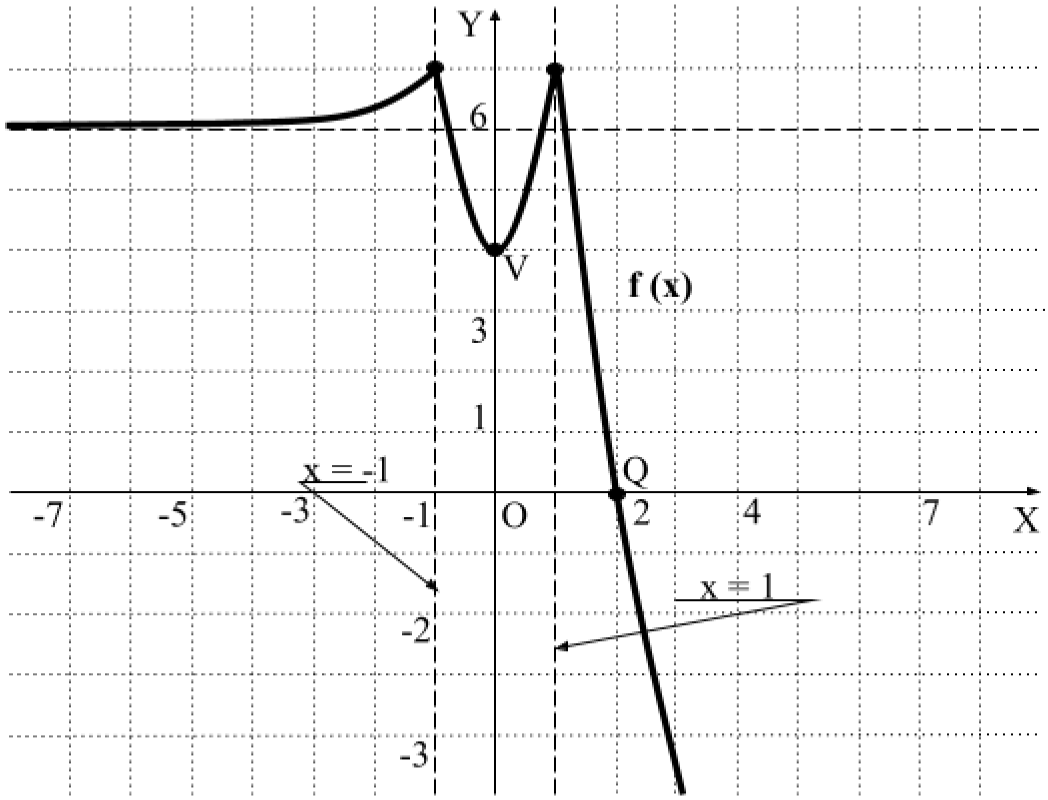
En el intervalo $(-1, 1)$ tiene la expresión $h(x) = 3x^2 + 4$, que es una parábola convexa ($\cup$) que tiene su vértice en el punto $V(0, 4)$ y es simétrica con respecto al eje Y por ser $h(x) = h(-x)$.

En el intervalo $[1, +\infty)$ tiene por expresión $i(x) =- x^3 + 8$, que es decreciente en su dominio, por ser $i'(x) =- 3x^2 < x,\ \forall\in[1, +\infty)$.

$i(x) = 0 \Rightarrow -x^3 + 8 = 0 \Rightarrow x = 2$.

Corta al eje X en el punto $Q(2, 0)$.

La representación gráfica es, aproximadamente, la siguiente:

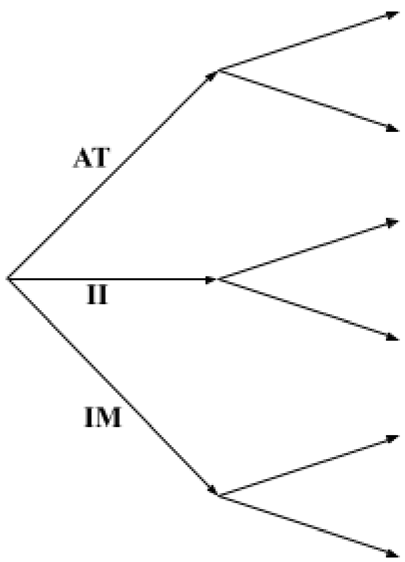


****

3º) En una Escuela Politécnica se imparten tres grados: Arquitectura Técnica, Ingeniería Informática e Ingeniería Mecánica. Un estudio, realizado sobre 60 alumnos de cada grado, revela que han terminado sus estudios en cuatro años el 5 % de los alumnos de Ingeniería Mecánica, el 30 % de Ingeniería Informática y el 50 % de Arquitectura Técnica. Se elige un estudiante al azar:

a) Calcula la probabilidad de que haya terminado sus estudios en cuatro años.

b) Calcula la probabilidad de que sea alumno de Ingeniería Mecánica y haya terminado sus estudios en cuatro años.



a)

$$P = \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{75} = \frac{25+15+2}{150} = \frac{42}{150} = \underline{\frac{7}{25}}.$$

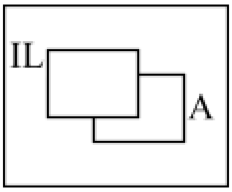
b)

$$P = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{25} = \underline{\frac{1}{75}}.$$

****

4º) El 78 % de los universitarios estudia inglés, el 23 % estudia alemán y el 15 % estudia ambos idiomas. Calcula la probabilidad de encontrar un universitario que no estudie ninguno de los dos idiomas.

Datos: $P(I) = 0,78, \ \ P(A) = 0,23, \ \ P(I \cap A) = 0,15 \Rightarrow ¿P(\overline{I} \cap \overline{A})?$



$$P = P(\overline{I} \cap \overline{A}) = 1 - P(I \cup A) = 1 - [P(I) + P(A) - P(I \cap A)] =$$

$$= 1 - (0,78 + 0,23 - 0,15) = 1 - (1,01 - 0,15) = 1 - 0,86 = \underline{0,14}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE CASTILLA Y LEÓN

SEPTIEMBRE – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá escoger una de las dos opciones y desarrollar las preguntas de la misma. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que se puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

1º) Se considera el sistema $\left.\begin{array}{l} x+y-z=a \\ ax+2y-z=3a \\ 2x+ay-z=6 \end{array}\right\}$, dependiente del parámetro real a:

a) Clasifica el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de a.

b) Resuelve el sistema para $a = 2$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a & 2 & -1 \\ 2 & a & -1 \end{pmatrix}$ y $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & a \\ a & 2 & -1 & 3a \\ 2 & a & -1 & 6 \end{pmatrix}$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a & 2 & -1 \\ 2 & a & -1 \end{vmatrix} = -2 - a^2 - 2 + 4 + a + a = -a^2 + 2a =$$

$$= -a(a-2) = 0 \Rightarrow a_1 = 0,\ a_2 = 2.$$

$$\underline{Para \left\{\begin{array}{l} a \neq 0 \\ a \neq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$$

$$Para\ a = 0 \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \left(C_1,\ C_3,\ C_4\right)$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 12 = 0 \Rightarrow Rang\ A' = 2.$$

$Para\ a = 2 \Rightarrow A' = (1\ 1\ \ -1\ 2\ 2\ \ -1\ 2\ 2\ \ -1\ \ \ 2\ 6\ 6\ ) \Rightarrow \{F_2 = F_3\} \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow (,\ C_4)$

$\Rightarrow |1\ 1\ 2\ 3\ 2\ 0\ 9\ 4\ \ -12\ | = -24 + 24 - 36 + 36 = 0 \Rightarrow Rang\ A' = 2.$

$\underline{Para\ \{a = 0\ a = 2\ \} \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < nº\ incog. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

$b)$

Para $a = 2$ el sistema resulta: $x + y - z = 2\ 2x + 2y - z = 6\ \ 2x + 2y - z = 6\ \}$, equivalente al siguiente sistema: $x + y - z = 2\ 2x + 2y - z = 6\ \}$, que es compatible indeterminado.

Haciendo $y = \lambda$, resulta:

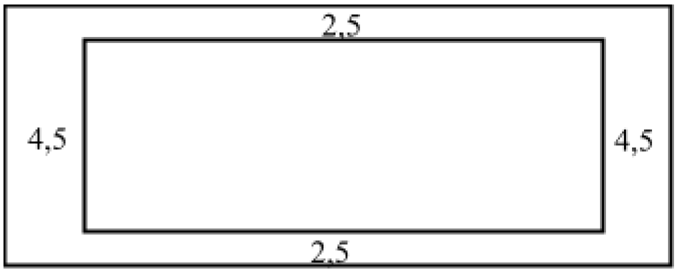
$x - z = 2 - \lambda\ 2x - z = 6 - 2\lambda\ \}\ \ \ -x + z = -2 + \lambda\ \ 2x - z = 6 - 2\lambda\ \} \Rightarrow x =$

$= 4 - \lambda - 2 + \lambda = 2.$

$\underline{Solución: x = 4 - \lambda,\ y = \lambda,\ z = 0,\ \forall\lambda \in R}.$

****

2º) En una tarjeta de visita rectangular y de 4.500 mm^2 de superficie, la zona destinada a la escritura está delimitada por los márgenes superior, inferior, derecho e izquierdo. Si los márgenes superior e inferior son de 2,5 mm cada uno y los márgenes derecho e izquierdo son de 4,5 mm cada uno, determina las dimensiones de la tarjeta para que la superficie de la zona destinada a la escritura sea máxima.



$S = x \cdot y \Rightarrow Mínima.$

$(x - 9)(y - 5) = 4.500;$

$xy - 5x - 9y + 45 = 4.500;$

$xy - 9y = 5x + 4.455;\ \ y(x - 9) = 5x + 4.455 \Rightarrow y = \frac{5x+4.455}{x-9}.$

Sustituyendo el valor de y en la superficie:

$S = x \cdot y = x \cdot \frac{5x+4455}{x-9} = \frac{5x^2+4.455x}{x-9}.$

Para que la superficie sea mínima es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$S'(x) = \frac{(10x+4.455)\cdot(x-9)-\left(5x^2+4.455x\right)\cdot 1}{(x-9)^2} = \frac{10x^2-90x+4.455x-40.095-5x^2-4.455x}{(x-9)^2} =$$

$$= \frac{5x^2-90x-40.095}{(x-9)^2} = 5 \cdot \frac{x^2-18x-8.019}{(x-9)^2}.$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow 5 \cdot \frac{x^2-18x-8.019}{(x-9)^2} = 0;\ \ x^2 - 18x - 8.019 = 0;$$

$$x = \frac{18 \pm \sqrt{324+32.076}}{2} = \frac{18 \pm \sqrt{32.400}}{2} = \frac{18 \pm 180}{2} = 9 \pm 90 \Rightarrow x_1 = 99,\ x_2 = -81.$$

La solución negativa carece de sentido, por lo cual: $x = 99$.

$$y = \frac{5 \cdot 99+4.455}{99-9} = \frac{495+4.455}{90} = \frac{4950}{90} = \frac{495}{9} = 55.$$

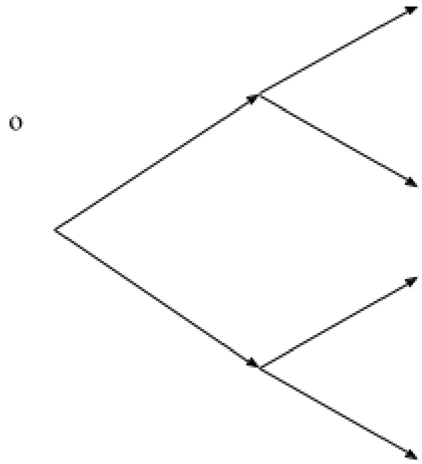
<u>*La zona de escritura es máxima con* 99 *cm de alto y* 55 *cm de ancho*.</u>

****

3º) En el curso 2.013-2.014 los resultados de las pruebas a las Universidades de Castilla y León de dos centros fueron los siguientes: en el primer centro aprobaron el 75 % de los 128 alumnos presentados, mientras que en el segundo centro aprobaron el 50 % de los 88 alumnos presentados.

a) Calcula la probabilidad de que, elegido un alumno al azar, haya aprobado las pruebas de acceso.

b) Calcula la probabilidad de que un alumno suspenso proceda del segundo centro.



a)

$$P = P(A) \cdot P(1º/A) + P(A) \cdot P(2º/A) = 0,75 \cdot 0,25 + 0,50 \cdot 0,25 =$$

$$= 0,375 + 0,250 = \underline{0,625}.$$

b)

$$P(2º/S) = \frac{P(2º \cap S)}{P(S)} = \frac{P(S) \cdot P(2º/S)}{P(S) \cdot P(1º/S) + P(S) \cdot P(2º/S)} = \frac{0,5 \cdot 0,250}{0,75 \cdot 0,25 + 0,50 \cdot 0,25} = \frac{0,125}{0,125 + 0,250} =$$

$$= \frac{0,125}{0,375} = \frac{125}{375} = \frac{5}{15} = \underline{\frac{1}{3} = 0,333}.$$

****

4º) La nota de un estudiante en un examen de matemáticas sigue una distribución normal cuya desviación típica es $\sigma = 2,04$ puntos. La nota media de una muestra de 30 estudiantes es 5,5 puntos. Calcula un intervalo de confianza al 95 % para la nota media de un estudiante en un examen de matemáticas.

Nivel de confianza del 95 %.

$\alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$

$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$

Datos: $n \geq 30$; $\overline{x} = 5,5$; $\sigma = 2,04$; $n = 30$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}$, σ y n, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(5'5 - 1,96 \cdot \frac{2,04}{\sqrt{30}},\ 5'5 + 1,96 \cdot \frac{2,04}{\sqrt{30}}\right);$

$\left(5'5 - 1,96 \cdot 0'3725,\ 5'5 + 1,96 \cdot 0'3725\right);$ $\left(5'5 - 0'730,\ 5'5 + 0'730\right).$

$$\underline{I.\ C._{95\ \%} = (4,770;\ 6,230).}$$

****

OPCIÓN B

1º) Un barco pesquero captura marisco y pescado. La clasificación automatizada de sus capturas, que ha de realizarse como mucho en 2 horas, exige un tiempo de 2 segundos por cada kg de marisco capturado y de 3 segundos por cada kg de pescado capturado. Por razones de conservación, puede capturar como mucho 3.000 kg entre marisco y pescado, pero necesita al menos capturar 500 kg de pescado para atender compromisos comerciales. El barco obtiene un beneficio de 3 euros por kg de marisco capturado y de 2 euros por kg de pescado capturado. Utiliza técnicas de programación lineal para calcular la cantidad de marisco y de pescado que el barco ha de capturar para maximizar sus beneficios. ¿A cuánto asciende ese beneficio máximo?

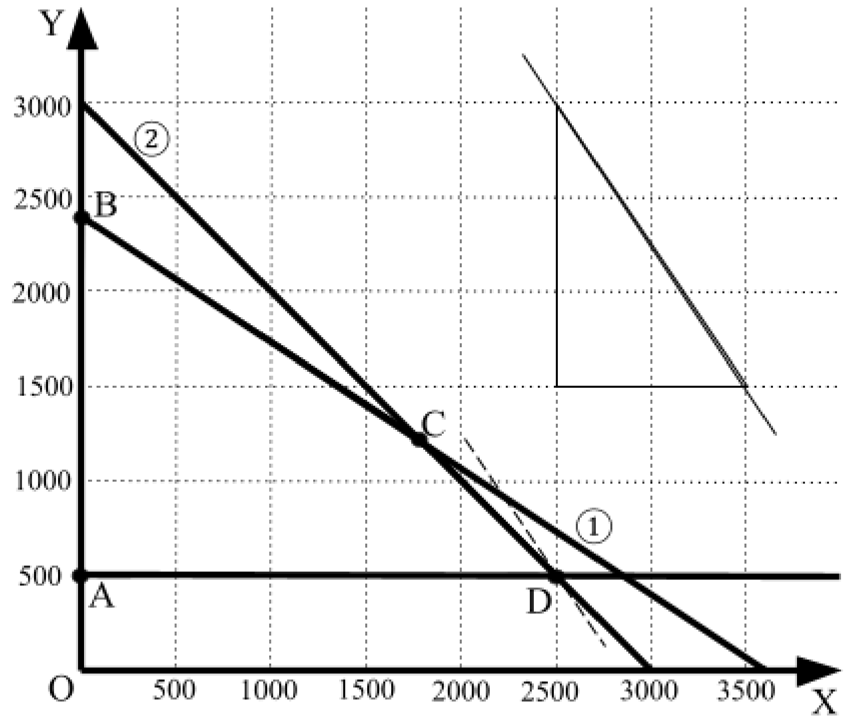
Sean x e y los kg de mariscos y pescado que captura el barco, respectivamente.

Una hora son 3.600 segundos.

Las condiciones del ejercicio se establecen en el siguiente sistema de inecuaciones: $2x + 3y \leq 7.200 \quad x + y \leq 3.000 \quad x \geq 0, \; y \geq 500 \}$.

La función de rendimiento es la siguiente:

$F(x, y) = 3x + 2y$.



x	0	3.600
y	2.400	0

①$\Rightarrow 2x + 3y \leq 7.200 \Rightarrow y \leq \frac{7.200 - 2x}{3} \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si$.

x	3.000	0
y	0	3.000

②$\Rightarrow x + y \leq 3.000 \Rightarrow y \leq 3.000 - x \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si$.

La región factible es la zona sombreada de la figura.

Los vértices de la sección factible, además de O(0, 0), son los siguientes:
$A \Rightarrow \quad x = 0 \; y = 500 \} \Rightarrow A(0,\ 500).$
$B \Rightarrow 2x + 3y = 7.200 \qquad x = 0 \} \Rightarrow B(0,\ 2.400).$

$C \Rightarrow 2x + 3y = 7.200 \quad x + y = 3.000 \} \qquad 2x + 3y = 7.200 \; - 2x - 2y =-$
.

$D \Rightarrow x + y = 3.000 \qquad y = 0 \} \Rightarrow D(3.000,\ 0).$

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 500) = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 500 = 0 + 1.000 = 1.000.$

$B \Rightarrow f(0,\ 2.400) = 3 \cdot 0 + 3 \cdot 2.400 = 0 + 7.200 = 7.200.$

$C \Rightarrow f(1.800,\ 1.200) = 3 \cdot 1.800 + 2 \cdot 1.200 = 5.400 + 2.400 = 7.800.$

$D \Rightarrow f(3.000,\ 0) = 3 \cdot 3.000 + 2 \cdot 0 = 9.000 + 0 = 9.000.$

El máximo se produce en el punto D.

También se hubiera obtenido el punto D por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = 3x + 2y = 0 \Rightarrow y =- \frac{3}{2}x \Rightarrow m =- \frac{3}{2}.$

$\underline{Ganancia\ máxima\text{: } capturando\ 500\ kg\ de\ mariscos\ y\ 2.500\ kg\ de\ pescado}.$

$\underline{La\ ganancia\ máxima\ es\ de\ 9.000\ euros}.$

****

2º) La función $f(x)$ dada por: $f(x) = \{-x^2 + 4x + 8 \ si \ 0 < x \leq 3 \ \frac{18}{x} + 5 \ si \ x > 3$, expresa el precio de la venta (en euros) de una botella de vino en función del tiempo x (en años) que lleva en el mercado.

a) Representa gráficamente la función $f(x)$, estudiando su continuidad y derivabilidad.

b) Estudia en qué momento el precio alcanza su valor máximo, así como ese precio máximo.

c) Determina el precio de la botella a muy largo plazo.

----

a)

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 3$, cuya continuidad es dudosa y se estudia a continuación.

Para que una función sea continua en un punto es necesario que sus límites laterales en ese punto sean iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$f(x) = \left(-x^2 + 4x + 8\right) = 11 = f(3) \ f(x) = \left(\frac{18}{x} + 5\right) = 11 \quad \}$$

$\Rightarrow f(x) = f(3) = f(x)$.

<u>$La\ función\ es\ continua\ en\ R$.</u>

Para que la función sea derivable para $x = 3$, sus derivadas laterales en ese punto tienen que ser iguales:

$f'(x) = \{-2x + 4 \ \ si \ \ x \leq 3 \ \ -\frac{18}{x^2} \ \ si \ \ x > 3 \Rightarrow f'\left(3^-\right) = -6 + 4 = -2 \ f'\left(3^+\right) = -\frac{18}{9}$
$\Rightarrow f'\left(3^-\right) = f'\left(3^+\right)$.

<u>$La\ función\ es\ derivable\ en\ R$.</u>

En el intervalo $(-\infty, 3]$ la función es la parábola cóncava ($\cap$) que tiene por expresión $g(x) = -x^2 + 4x + 8$, cuyo vértice es el máximo relativo siguiente:

$g'(x) = -2x + 4 = 0 \rightarrow x = 2 \Rightarrow V(2, 12)$.

La parábola $g(x) = -x^2 + 4x + 8$ corta el eje de ordenadas en $A(0, 8)$ y al eje X en los siguientes puntos:

$$-x^2+4x+8=0;\ x^2-4x-8=0;\ x=\frac{4\pm\sqrt{16+32}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{48}}{2}=\frac{4\pm4\sqrt{2}}{2}=$$

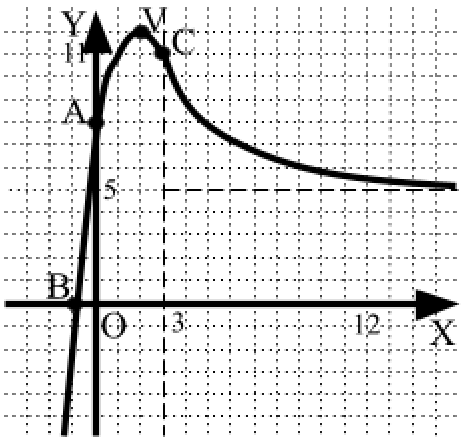
$$=2\pm2\sqrt{2}\Rightarrow B\left(2-2\sqrt{2},\ 0\right)\sim B(0,83,\ 0).$$

El punto $P\left(2+2\sqrt{2},\ 0\right)$ no pertenece a $(-\infty,\ 3]$ por ser $2+2\sqrt{2}>3$.

En el intervalo $(3,\ +\infty)$ la función es la rama hiperbólica $h(x)=\frac{18}{x}+5$.

Por ser $\left(\frac{18}{x}+5\right)=5$, la rama hiperbólica tiene por asíntota horizontal a la recta $x=5$.

La representación gráfica, aproximada, de la función es la que se observa en la figura adjunta.



$b)$

$\underline{La\ función\ alcanza\ el\ valor\ máximo\ para\ x=2\ (a\ los\ dos\ años).}$

$$f(2)=-(2)^2+4\cdot2+8=-4+8+8=12.$$

$\underline{El\ valor\ máximo\ de\ la\ botella\ es\ de\ 12\ euros.}$

$c)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\left(\frac{18}{x}+5\right)=5\ .$$

$\underline{A\ muy\ largo\ plazo\ el\ precio\ de\ la\ botella\ se\ estabiliza\ en\ 5\ euros.}$

****

3º) El volumen de madera (en m^3) que se obtiene de un chopo de diez años es una variable aleatoria con distribución normal con media $\mu = 0,443$ y desviación típica $\sigma = 0,068$.

a) Calcula la probabilidad de que un chopo de diez años se obtengan más de 0,5 m^3 de madera.

b) De una chopera con 60 chopos de diez años, ¿cuál es la probabilidad de obtener más de 26 m^3 de madera?

Datos: $\mu = 0,443$; $\sigma = 0,068$.

a)

$P(X > 0,5)$.

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-0,443}{0,068}$.

$P(X > 0,5) = P\left(\frac{X-0,443}{0,068} > \frac{0,5-0,443}{0,068}\right) = P\left(Z > \frac{0,057}{0,068}\right) = P(Z > 0,838) =$

$= 1 - P(Z < 0,838) = 1 - 0,7995 = \underline{0,200}$.

b)

$\mu = \frac{26}{60} = 0,433$; $\sigma = 0,068$.

$$P(X > 0,433) = P\left(\frac{X-0,443}{0,068} > \frac{0,433-0,443}{0,068}\right) = P\left(Z > \frac{-0,01}{0,068}\right) =$$

$= P(Z >- 0,147) = 1 - P(Z \leq 0,147) = 1 - 0,5585 = \underline{0,4415}$.

****

4º) La clase de los hermanos Laura y Pepe consta de 30 estudiantes. La clase participa en un sorteo de dos entradas para un evento deportivo, de manera que no se permite que un mismo estudiante consiga las dos entradas. Halla la probabilidad de que ambos hermanos consigan las dos entradas sorteadas.

$$P = \frac{2}{30} \cdot \frac{1}{29} = \frac{1}{15 \cdot 29} = \frac{1}{435} = 0,0023.$$

$\underline{La\ probabilidad\ de\ que\ ambos\ hermanos\ tengan\ entrada\ es\ del\ 0,23\ \%}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE CATALUÑA

JUNIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1º) Una fábrica de muebles de cocina vende 1.000 unidades mensuales de un modelo de armario a 200 euros por unidad. Para reducir el stock, hace una oferta a los compradores y estima que, por cada euro de reducción del precio, las ventas mensuales del producto se incrementarán en 100 unidades.

a) ¿Cuántas unidades habrá que vender para obtener el máximo de ingresos mensuales?

b) ¿A cuánto ascenderán estos ingresos?

----

a)

Sean x las centenas de unidades que deben venderse mensualmente, además de las 1.000 unidades iniciales, para obtener el máximo de ingresos.

El precio por unidad es de $(200 - x)$ euros.

$Ingresos = Número\ unidades \times precio\ unitario \Rightarrow$

$\Rightarrow I(x) = (1.000 + 100x)(200 - x) = 200.000 - 1.000x + 20.000x - 100x^2 =$

$= - 100x^2 + 19.000x + 200.000.$

Los ingresos serán máximos cuando se anule su primera derivada:

$I'(x) = - 200x + 19.000 = 0;\ 2x = 190 \Rightarrow x = 95.$

$\underline{Para\ obtener\ el\ máximo\ beneficio\ hay\ que\ vender\ 10.500\ muebles\ al\ mes.}$

$b)$

$$I(x) = -100 \cdot 95^2 + 19.000 \cdot 95 + 200.000 =$$

$$= -100 \cdot \left(95^2 - 190 \cdot 95 - 2.000\right) = -100 \cdot (9.025 - 18.050 - 2.000) =$$

$$= -100 \cdot (9.025 - 20.050) = -100 \cdot (-11.025) = 1.102.500.$$

$\underline{El\ benefico\ máximo\ es\ de\ 1.102.500\ euros.}$

****

2º) Considere la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

a) Estudie su crecimiento y, si tiene, determine y clasifique sus extremos relativos.

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

----

a)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{0-1\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

Teniendo en cuentas que el dominio de la función es R, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$Para\, x < 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: (-\infty, 0)}.$$

$$Para\, x > 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: (0, +\infty)}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto. Esta condición es necesaria pero no suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2} = 0;\ -2x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

$$f''(x) = \frac{-2\cdot\left(1+x^2\right)^2 + 2x\cdot\left[2\cdot\left(1+x^2\right)\cdot 2x\right]}{\left(1+x^2\right)^4} = \frac{-2\cdot\left(1+x^2\right)+8x^2}{\left(1+x^2\right)^3} = \frac{-2-2x^2+8x^2}{\left(1+x^2\right)^3} = \frac{6x^2-2}{\left(1+x^2\right)^3} =$$

$$= \frac{2\left(3x^2-1\right)}{\left(1+x^2\right)^3}.$$

$$f''(0) = \frac{2(0-1)}{(1+0)^3} = -2 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \underline{Máximo: A(0,\ 1)}.$$

$b)$

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$m = f'(1) = \frac{-2\cdot 1}{\left(1+1^2\right)^2} = \frac{-2}{2^2} = -\frac{1}{2}.$$

El punto de tangencia es el siguiente: $y = f(1) = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow P\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$.

La ecuación de la recta punto-pendiente es $y - y_0 = m\left(x - x_0\right)$:

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\cdot(x - 1);\ \ 2y - 1 = -(x - 1) = -x + 1.$$

$$\underline{Recta\ tangente: t \equiv x + 2y - 2 = 0}.$$

****

3º) Sea el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ 3x + 4y - 5z = 6 \\ x - y = 2 \end{array}\right\}$.

a) Justifique si es compatible determinado.

b) Resuelva el sistema formado por las dos primeras ecuaciones.

----

a)

Las matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Un sistema es compatible determinado cuando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son iguales e igual al número de incógnitas.

Según lo anterior, para justificar que el sistema es compatible determinado basta con probar que el rango de la matriz de coeficientes es tres.

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 + 5 - 4 - 5 = -7 \neq 0 \Rightarrow Rang\ A = 3$.

<u>$Queda\ justificado\ que\ el\ sistema\ es\ compatible\ determinado.$</u>

b)

El sistema formado por las dos primeras ecuaciones es $\left.\begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ 3x + 4y - 5z = 6 \end{array}\right\}$, que es compatible indeterminado por ser los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada iguales e iguales a dos, que es menor que el número de incógnitas, que es tres.

Haciendo $z = \lambda$, resulta el sistema: $\left.\begin{array}{l} x - y = -\lambda \\ 3x + 4y = 6 + 5\lambda \end{array}\right\}$,

$\left.\begin{array}{l} 4x - 4y = -4\lambda \\ 3x + 4y = 6 + 5\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 7x = 6 + \lambda \rightarrow x = \frac{6}{7} + \frac{1}{7}\lambda$,

$y = x + \lambda = \frac{6}{7} + \frac{1}{7}\lambda + \lambda = \frac{6}{7} + \frac{8}{7}\lambda$.

<u>$Solución: x = \frac{6}{7} + \frac{1}{7}\lambda,\ y = \frac{6}{7} + \frac{8}{7}\lambda,\ z = \lambda,\ \forall\lambda \in R.$</u>

****

4º) Durante la última epidemia de Ébola se consideró que, sin intervención, el virus se propagaba aumentando en un 3 % diario el número de afectados. Suponga que en una población, hoy, hay 25 personas.

a) Escriba la fórmula de la función que da el número de personas infectadas al pasar los días. ¿Cuántas personas estarán infectadas al cabo de 20 días?

b) A partir de una fecha determinada, en esta población se aplican unas medidas sanitarias que permiten que el número de personas infectadas disminuya según la función $g(x) = 1.000 \cdot 0,95^x$. Si se considera controlada la epidemia cuando el número de afectados es igual o inferior a 10 personas, ¿cuántos días deberán transcurrir después de aplicar las medidas sanitarias para poder declarar controlada la epidemia?

----

a)

$$Número\ de\ infectados \Rightarrow \underline{N = 25 \cdot 1,03^{n-1}}.$$

$$N_{20} = 25 \cdot 1,03^{20-1} = 25 \cdot 1,03^{19} = 43,838.$$

$$\underline{El\ número\ más\ probable\ de\ afectados\ dentro\ de\ 20\ días\ es\ de\ 44\ personas}.$$

b)

$g(x) = 1.000 \cdot 0,95^x \leq 10;\ \ 100 \cdot 0,95^x = 1$. Tomando logaritmos decimales:
$2 + x \cdot \log log\ 0,95 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2}{\log log\ 0,95} = \frac{-2}{-0,0223} = 89,78.$

$$\underline{Deben\ transcurrir\ 90\ días}.$$

****

5º) El boleto ganador de una lotería está formado por tres números. Se sabe que la suma del primero y del segundo excede en dos unidades al tercero; que el primer número menos el doble del segundo es diez unidades menor que el tercero, y que la suma de los tres números es 24. ¿Cuál es el boleto ganador?

Sean los números $a,\ b\ y\ c$, respectivamente.

Del enunciado del problema se deduce el siguiente sistema: $a + b = c + 2\ a - 2b + 10 = c\ \ a + b + c = 24\}$.

Restando término a término a la primera ecuación la tercera:

$a + b - (a + b + c) = c + 2 - 24;\ \ - c = c - 22;\ \ 2c = 22 \Rightarrow c = 11.$

Resolviendo ahora el sistema formado por las dos primeras ecuaciones:

$a + b = 13\ a - 2b + 10 = 11\}\quad a + b = 13\ a - 2b = 1\}\qquad a + b = 13$

.

$a + 4 = 13 \Rightarrow a = 9.$

$\underline{Los\ números\ son\ 9,\ 4\ y\ 11,\ respectivamente.}$

****

6º) Tenemos cuatro rectas: la recta r_1 pasa por $A(-1, 0)$ y $B(0, 1)$; la recta r_2 pasa por $A(-1, 0)$ y $C(0, -1)$; la recta r_3 pasa por $D(1, 0)$ y $B(0, 1)$, y la recta r_4 pasa por $D(1, 0)$ y $C(0, -1)$.

$a)$ Escriba las inecuaciones que cumplen los puntos de la frontera y del interior del cuadrado que determinan estas cuatro rectas, y dibújelo.

$b)$ Determine el valor máximo de k para que la recta $y = 2x + k$ tenga algún punto en común con el cuadrilátero anterior.

$a)$

Las ecuaciones de las rectas r_1, r_2, r_3 y r_4 son las siguientes, recordando la fórmula de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$:

$r_1 \Rightarrow \frac{y-0}{1-0} = \frac{x+1}{0+1} \Rightarrow r_1 \equiv y = x + 1.$ $\quad$ $r_2 \Rightarrow \frac{y-0}{-1-0} = \frac{x+1}{0+1} \Rightarrow r_2 \equiv y = -x - 1$.

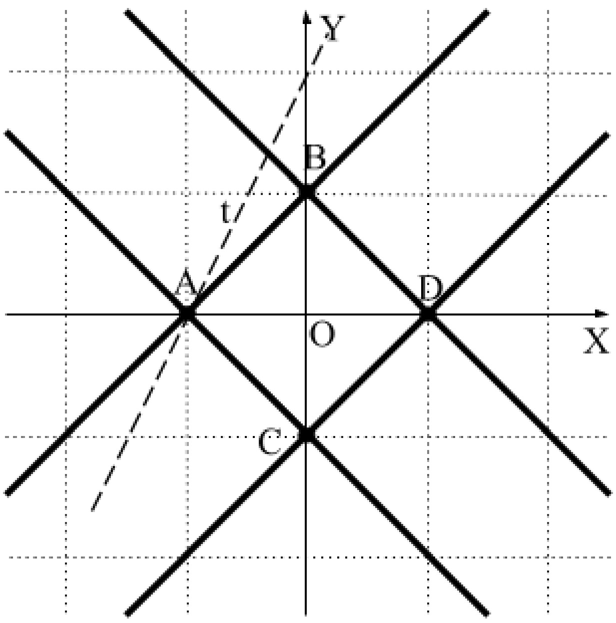
$r_3 \Rightarrow \frac{y-0}{1-0} = \frac{x-1}{0-1} \Rightarrow r_3 \equiv y = -x + 1.$

$r_4 \Rightarrow \frac{y-0}{-1-0} = \frac{x-1}{0-1} \Rightarrow r_4 \equiv y = x - 1.$

Las expresiones de las correspondientes inecuaciones de las rectas, teniendo en cuenta que todas incluyen al origen de coordenadas, son las siguientes:

$\underline{i_1 \Rightarrow y \leq x + 1.}$ $\quad$ $\underline{i_2 \Rightarrow y \geq -x - 1.}$ $\quad$ $\underline{i_3 \Rightarrow y \leq -x + 1.}$ $\quad$ $\underline{i_4 \Rightarrow y \geq x + 1.}$

La representación gráfica de la situación es la indicada en la figura adjunta.



$b)$

La recta dada, $y = 2x + k$, tiene de pendiente 2; con esta pendiente, la recta t, paralela a la anterior, que determina la mayor ordenada en el origen pasa por el punto $A(-1, 0)$, como se observa en la figura.

El valor de k es el siguiente: $0 = 2\cdot(-1) + k;\ \ 0 = -2 + k \Rightarrow k = 2$.

$\underline{El\ valor\ máximo\ de\ k\ es\ 2\ y\ el\ punto\ es\ A(-1,\ 0)}$.

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE CATALUÑA

SEPTIEMBRE – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1º) María tiene el doble de dinero que Pol y Júlia juntos. Pol tiene la sexta parte de dinero que María. Júlia tiene el doble de dinero que Pol. María tiene el triple de dinero que Júlia.

a) Con estos datos, ¿podemos saber cuánto dinero tiene cada uno de ellos? Halle el conjunto de soluciones posibles.

b) Si Pol tiene 35 euros, ¿cuánto dinero tienen María y Júlia?

----

a)

Sean $x,\ y,\ z$ las cantidades respectivas de María, Pol y Júlia.

$$x = 2\cdot(y + z)\ y = \frac{x}{6}\ z = 2y \}\quad x = 2y + 2z\ 6y = x\ z = 2y \}\quad x - 2y - 2z =$$

.

Por ser un sistema homogéneo admite la solución trivial $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$; si además el sistema admite otras soluciones es compatible indeterminado. Para resolverlo, se parametriza una de las incógnitas, por ejemplo $y = \lambda$: $x = 6\lambda,\ z = 2\lambda$.

$$S.\ C.\ I \Rightarrow \underline{No\ puede\ saberse\ cuanto\ dinero\ tiene\ cada\ uno}.$$

b)

$Para\ y = 35\ es\ x = 210\ y\ z = 70.$

$$\underline{María\ tiene\ 210\ euros,\ Pol\ 35\ euros\ y\ Júlia,\ 70\ euros}.$$

****

2º) Una empresa vende un producto a un precio de p euros. El número de unidades vendidas depende del precio que fijemos según la función: $V(p) = \frac{30p+10}{p}$.

a) Demuestre que, al aumentar los precios, las ventas disminuyen.

b) ¿Es posible que la empresa venda 20 unidades del producto? Si el precio aumenta indefinidamente, ¿qué pasará con las ventas?

----

a)

Demostrar que al aumentar los precios disminuyen las ventas es equivalente a demostrar que la función $V(p)$ es decreciente.

Una función es decreciente cuando su derivada es negativa.

$$V'(p) = \frac{30 \cdot p - (30p+10) \cdot 1}{p^2} = \frac{30p - 30p - 10}{p^2} = \frac{-10}{p^2} < 0,\ \forall p \in R.$$

$\underline{Queda\ demostrado\ que\ al\ aumentar\ los\ precios\ disminuyen\ las\ ventas.}$

b)

$$V(p) = 20 \Rightarrow \frac{30 \cdot p + 10}{p} = 20;\ \ 30p + 10 = 20p;\ \ 10p = -1;\ p = -\frac{1}{10}.$$

No es posible que el precio del producto sea negativo, por eso:

$\underline{No\ es\ posible\ que\ la\ empresa\ venda\ 20\ unidades\ del\ producto.}$

$$lím_{p\to\infty} V(p) = lím_{p\to\infty} \frac{30p+10}{p} = 30.$$

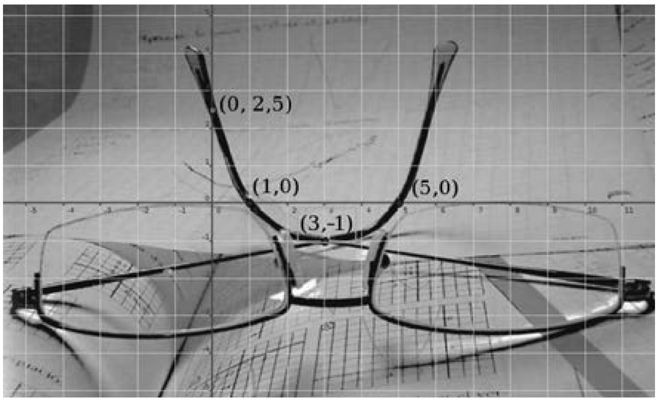
$\underline{Si\ el\ precio\ crece\ indefinidamente\ las\ ventas\ se\ estabilizan\ en\ 30\ unidades.}$

$$V(p) = 30 \Rightarrow \frac{30 \cdot p + 10}{p} = 30;\ \ 30p + 10 = 30p;\ \ 10 = 0\ ??.$$

$\underline{Si\ el\ precio\ crece\ indefinidamente\ la\ empresa\ en\ inviable.}$

****

3º) La siguiente fotografía matemática parece indicar que las patillas de las gafas forman una parábola. Sin embargo, no todas las curvas en forma de U son parás. Hemos marcado sobre unos ejes de coordenadas algunos de los puntos: $A(0,\ 2'5)$,



$B(1,\ 0),\ C(3,\ -1)$ y $D(5,\ 0)$.

Justifique si la gráfica corresponde o no a una parábola.

Si la función es una parábola, su eje es la mediatriz del segmento $\overline{BD}$, por tener ambos puntos la misma ordenada.

La mediatriz del segmento de extremos $B(1,\ 0)$ y $D(5,\ 0)$ es la recta vertical de ecuación $y = 3$.

El punto $C(3,\ -1)$, por pertenecer a la recta $y = 3$ es el vértice de la supuesta parábola.

Conociendo tres puntos de una parábola puede obtenerse su ecuación, teniendo en cuenta que su expresión general es $y = ax^2 + bx + c$:

$B(1,\ 0) \Rightarrow 0 = a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c;\ \ a + b + c = 0.$ (1)

$D(5,\ 0) \Rightarrow 0 = a\cdot 5^2 + b\cdot 5 + c;\ \ 25a + 5b + c = 0.$ (2)

$C(3,\ -1) \Rightarrow -1 = a\cdot 3^2 + b\cdot 3 + c;\ \ 9a + 3b + c = -1.$ (3)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1), (2) y (3):

$a + b + c = 0\ 25a + 5b + c = 0\ 9a + 3b + c =- 1\}$. Restando la primera ecuación a las demás:

$24a + 4b = 0\ 8a + 2b =- 1\}\quad 24a + 4b = 0\ - 16a - 4b = 2\}\Rightarrow 8a = 2;\ \ a =$

.

$8a + 2b =- 1;\ \ 8\cdot\frac{1}{4} + 2b =- 1;\ \ 2 + 2b =- 1;\ \ 2b =- 3;\ \ b =- \frac{3}{2}.$
$a + b + c = 0;\ \ \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + c = 0;\ \ 1 - 6 + 4c = 0;\ \ 4c = 5;\ \ c = \frac{5}{4}.$

La ecuación de la supuesta parábola es $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$.

La función será una parábola si su expresión satisface al punto $A(0,\ 2'5)$:

$A(0,\ 2'5)\Rightarrow 2,5 = \frac{1}{4}\cdot 0 - \frac{3}{2}\cdot 0 + \frac{5}{4};\ \ 2,5 = \frac{5}{4}$??.

$\underline{La\ gráfica\ dada\ no\ corresponde\ a\ una\ parábola.}$

****

4º) $a)$ La matriz ampliada de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es la siguiente: $M' = (1\ 0\ 0\ )$. Justifique, sin resolverlo, si el sistema es incompatible, compatible indeterminado o determinado.

$b)$ Considere ahora la matriz de otro sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas: $(3\ 2\ 1\ )$. Justifique si es incompatible o compatible y, en este último caso, resuélvalo.

Por ser el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas y teniendo en cuenta que el teorema de Rouché-Fröbenius, que dice que un sistema es compatible determinado cuando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son iguales e igual al número de incógnitas, el sistema será compatible determinado si el rango de la matriz de coeficientes es tres.

La matriz de coeficientes es $M = (0\ 0\ 1\ 0\ \ -\ 1\ 1\ 5\ 2\ \ -\ 2\ )$.

Sien do $|M| = |0\ 0\ 1\ 0\ \ -\ 1\ 1\ 5\ 2\ \ -\ 2\ | = 5 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3$.

$\underline{El\ sistema\ es\ compatible\ determinado.}$

$b)$

Siendo las matrices de coeficientes y ampliada $A\ y\ A'$:

$|A| = |2\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ \ -\ 1\ | = 1 - 2 + 1 = 0 \Rightarrow Rang\ M = 2$.

$A' = (3\ 2\ 1\ ) \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow (2\ 3\ 1\ ) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{F_2 \to F_2 - 2F_1\ F_3 \to F_3 - F_1\} \Rightarrow (2\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ ) \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - F_2\} \Rightarrow (2\ \ -\ 1\ 0\ ) \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{Rang\ A = Rang\ A' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow Sistema\ compatible\ indeterminado}$.

Para resolver el sistema se desprecia una de las ecuaciones, por ejemplo, la primera, resultando el sistema $x + z = 2 \quad x + y - z = 1\ \}$. Haciendo $z = \lambda$;

$x + \lambda = 2 \quad x + y - \lambda = 1\ \} \Rightarrow x = 2 - \lambda;\ \ 2 - \lambda + y - \lambda = 1;\ \ y = -\ 1 + 2\lambda$.

$\underline{Solución: x = 2 - \lambda,\ y = -\ 1 + 2\lambda,\ z = \lambda,\ \forall\lambda \in R}$.

****

5º) Considere la función $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$.

a) Determine los puntos donde la función f corta cada uno de los ejes. Determine también los intervalos donde la función f es positiva.

b) Determine los puntos donde la recta tangente a la gráfica de f es horizontal.

----

a)

Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x+1}{x^2+3} = 0;\ x + 1 = 0;\ x = -1 \Rightarrow \underline{A(-1,\ 0)}$.

Corte con el eje Y: $x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{0+1}{0+3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \underline{B\left(0,\ \frac{1}{3}\right)}$.

Teniendo en cuenta que $x^2 + 3 > 0,\ \forall x \in R$, la función $f(x)$ es positiva o negativa cuando lo sea la expresión $x + 1$.

Considerando que el dominio de la función es R:

$$\underline{f(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty,\ -1)}.\quad \underline{f(x) > 0 \Rightarrow x \in (-1,\ +\infty)}.$$

b)

La pendiente de una recta horizontal es cero.

La pendiente de una recta tangente a la gráfica de una función es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

$$f'(x) = \frac{1\cdot\left(x^2+3\right)-(x+1)\cdot 2x}{\left(x^2+3\right)^2} = \frac{x^2+3-2x^2-2x}{\left(x^2+3\right)^2} = \frac{-x^2-2x+3}{\left(x^2+3\right)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x^2-2x+3}{\left(x^2+3\right)^2} = 0;\ -x^2 - 2x + 3 = 0;\ x^2 + 2x - 3 = 0;$$

$$x = \frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{16}}{2} = \frac{-2\pm 4}{2} = -1\pm 2 \Rightarrow x_1 = -3,\ x_2 = 1.$$

Los puntos de tangencia pedido son los siguientes:

$$f(-3) = \frac{-3+1}{(-3)^2+3} = \frac{-2}{9+3} = -\frac{1}{6} \Rightarrow \underline{P\left(-3,\ -\frac{1}{6}\right)}.$$

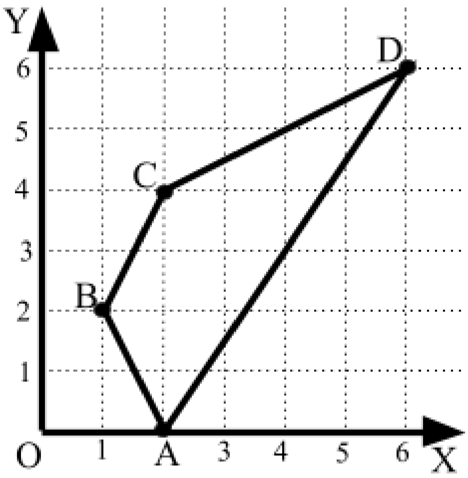
$$f(1) = \frac{1+1}{1^2+3} = \frac{2}{1+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{Q\left(1,\ \frac{1}{2}\right)}.$$

****

6º) Considere el cuadrilátero de la figura adjunta.

a) Defina las condiciones que deben cumplir los puntos del cuadrilátero sombreado, incluyendo la frontera.

b) Justifique analíticamente si el punto $P(4,\ 3)$ pertenece al cuadrilátero.



----

a)

Las ecuaciones de las rectas $r_1,\ r_2,\ r_3\ y\ r_4$ que determinan el cuadrilátero de la figura son las siguientes, recordando la fórmula de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$:

$$r_1 \Rightarrow \overline{AB} \Rightarrow \frac{y-0}{2-0} = \frac{x-2}{1-2};\ \ -y = 2x - 4 \Rightarrow r_1 \equiv y = -2x + 4.$$

$$r_2 \Rightarrow \overline{BC} \Rightarrow \frac{y-4}{2-4} = \frac{x-2}{1-2};\ \ -y + 4 = -2x + 4 \Rightarrow r_2 \equiv y = 2x.$$

$$r_3 \Rightarrow \overline{CD} \Rightarrow \frac{y-6}{4-6} = \frac{x-6}{2-6};\ \ -4y + 24 = -2x + 12 \Rightarrow r_3 \equiv y = \frac{x+6}{2}.$$

$$r_4 \Rightarrow \overline{DA} \Rightarrow \frac{y-6}{0-6} = \frac{x-6}{2-6};\ \ -4y + 24 = -6x + 36 \Rightarrow r_4 \equiv y = \frac{3x-6}{2}.$$

Las expresiones de las correspondientes inecuaciones de las rectas, teniendo en cuenta que contienen a los puntos indicados, son las siguientes:

$\underline{i_1 \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow No \Rightarrow y \geq -2x + 4.}$ $\underline{i_2 \Rightarrow M(1,\ 0) \rightarrow Si \Rightarrow y \leq 2x.}$

$\underline{i_3 \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si \Rightarrow y \leq \frac{x+6}{2}}.$ $\underline{i_4 \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si \Rightarrow y \geq \frac{3x-6}{2}}.$

$b)$

Para que el punto $P(4,\ 3)$ pertenezca a la zona factible es necesario que satisfaga las inecuaciones que la determinan:

$i_1 \Rightarrow y\ \geq -\ 2x\ +\ 4 \Rightarrow P(4,\ 3) \Rightarrow 3\ \geq -\ 2\cdot 4\ +\ 4 \rightarrow \underline{Si}$

$i_2 \Rightarrow y\ \leq\ 2x \Rightarrow P(4,\ 3) \Rightarrow 3\ \leq\ 2\cdot 4 \rightarrow \underline{Si}$

$i_3 \Rightarrow y\ \leq\ \frac{x+6}{2} \Rightarrow P(4,\ 3) \Rightarrow 3 \leq \frac{4+6}{2} \rightarrow \underline{Si}$

$i_4 \Rightarrow y\ \geq\ \frac{3x-6}{2} \Rightarrow P(4,\ 3) \Rightarrow 3\ \geq\ \frac{3\cdot 4-6}{2} \rightarrow \underline{Si}$

$\underline{El\ punto\ P(4,\ 3)\ pertenece\ a\ la\ zona\ factible}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

JULIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elegir una opción entre las dos que se proponen a continuación.

OPCIÓN A

1º) Una empresa farmacéutica produce vacunas contra la gripe y contra la neumonía en dos laboratorios: A y B. El laboratorio A produce diariamente 2.000 dosis de vacunas contra la gripe y 2.000 dosis contra la neumonía, con un coste diario de 8.000 euros y el laboratorio B, 4.000 dosis de vacunas contra la gripe y 1.000 contra la neumonía, con un coste diario de 10.000 euros. Si se recibe un pedido de 24.000 dosis de vacunas contra la gripe y 18.000 contra la neumonía, se pide, justificando las respuestas:

a) ¿Cuántos días debe funcionar cada laboratorio para satisfacer el pedido con el mínimo coste?

b) ¿Cuál será el valor de dicho coste mínimo?

----

a)

Sean x e y los días que tienen que trabajar los laboratorios A y B, respectivamente.

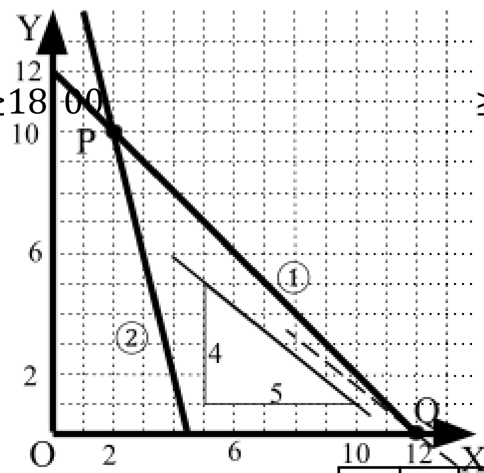
Las condiciones del ejercicio se establecen en el siguiente sistema de inecuaciones:

$2.000x + 2.000y \geq 24.000 \quad 4.000x + 1.000y \geq 18.000 \quad \geq 0 \} \quad x$ -
.

La función de objetivos es la siguiente:

$f(x, y) = 8.000x + 10.000y.$

La región factible se indica en la figura:



x	0	12
y	12	0

①$\Rightarrow x + y \geq 12 \Rightarrow y \geq 12 - x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow No.$

x	2	4
y	10	2

②$\Rightarrow 4x + y \geq 18 \Rightarrow y \geq 18 - 4x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow No.$

Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$P \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 12 \\ 4x + y = 18 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{P(2,\ 10)}.$

$Q \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 12 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{Q(12,\ 0)}.$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$P \Rightarrow f(2,\ 10) = 2 \cdot 8.000 + 10 \cdot 10.000 = 16.000 + 100.000 = 116.000.$

$Q \Rightarrow f(12,\ 0) = 12 \cdot 8.000 + 0 \cdot 10.000 = 96.000 + 0 = 96.000.$

El mínimo se produce en el punto Q.

También se hubiera obtenido el punto Q por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = 8.000x + 10.000y = 0 \Rightarrow y = -\frac{8.000}{10.000}x \Rightarrow m = -\frac{4}{5}.$

$\underline{El\ mínimo\ coste\ se\ obtiene\ trabajando\ 12\ días\ únicamente\ el\ laboratorio\ B.}$

$b)$

$\underline{El\ coste\ mínimo\ asciende\ a\ 96.000\ euros.}$

****

2º) La altura alcanzada por un cohete en su trayectoria viene dada en función del tiempo transcurrido desde su lanzamiento por la expresión: $H(t)=\{t(a-t)\ si\ 0\leq t\leq 30\ b+ct\ si\ 30<t\leq 60$, siendo $H(t)$ la altura (en metros) alcanzada por el cohete a los t segundos de su lanzamiento. Sabiendo que es una función continua, que a los 20 segundos del lanzamiento el cohete alcanza la altura máxima de 400 metros, y que a los 60 segundos del lanzamiento cae al suelo:

a) Determinar, justificando las respuestas, los valores de las constantes $a,\ b\ y\ c$.

b) Representar gráficamente la altura alcanzada por el cohete en función del tiempo transcurrido desde su lanzamiento.

----

a)

$H(20)=400\Rightarrow 20\cdot(a-20)=400;\ \ 20a-400=400;\ \ 20a=800\Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{a=40}$.

$H(60)=0\Rightarrow b+c\cdot 60=0;\ \ b+60c=0.$ (1)

Por ser continua la función: $lím\ t\rightarrow 30^{-}\ H(t)=lím\ t\rightarrow 30^{+}\ H(t)=H(30)$.

$lím\ t\rightarrow 30^{-}\ H(t)=lím\ t\rightarrow 30\ [30(40-30)]=30\cdot 10=300=H(30)\ lím\ t\rightarrow 30^{+}\ H(t)=$

$\Rightarrow b+30c=300.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$b+60c=0\ b+30c=300\}\quad -b-60c=0\ b+30c=300\}\Rightarrow -30c=30$

.

$b+60c=0;\ \ b+60\cdot(-10)=0;\ \ b-600=0\Rightarrow \underline{b=600}$.

b)

La función resulta: $H(t)=\{t(40-t)\ \ si\ \ 0\leq t\leq 30\ 600-10t\ \ si\ 30<t\leq 60$.

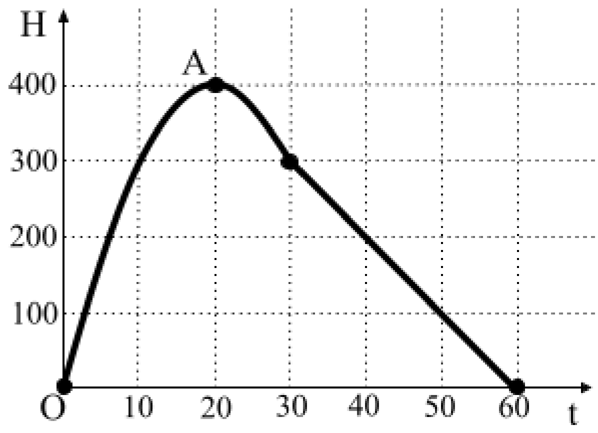
En el intervalo $0\leq t\leq 30$ la función es una parábola cóncava ($\cap$) de expresión $H_1(t)=-t^2+40t$, cuyo máximo es el siguiente:

$H_1'(t)=-2t+40=0\Rightarrow t=20.$

$H_1(20)=-20^2+40\cdot 20=-400+800=400\Rightarrow Máximo:\ A(20,\ 400).$

En el intervalo $30 \leq t \leq 60$ la función es una recta de pendiente negativa cuya expresión es $H_2(t) = 600 - 10t$.

Teniendo en cuenta que $H_2(60) = 600 - 10 \cdot 60 = 0$, la representación gráfica de la función es la siguiente:



****

3º) En el Senado de cierto país hay 400 senadores. El 25 % de ellos son menores de 40 años. El Senado está organizado en los grupos parlamentarios: G1, G2, G3 y G4. El G1 tiene 120 senadores, 30 de ellos menores de 40 años, el G2 tiene 110 senadores, 20 de ellos menores de 40 años, el G3 tiene 100 senadores, 28 de ellos menores de 40 años, y el G4 están el resto de los senadores. Determinar, justificando las respuestas, la probabilidad de que seleccionado al azar un senador de ese Senado:

a) Sea del grupo G3.

b) Sea del grupo G2 y tenga menos de 40 años.

Nota: En mi criterio, el ejercicio propicia la duda de elegir senador-grupo o grupo-senador.

SENADOR-GRUPO

a)

$$\underline{P = \frac{100}{400} = \frac{1}{4} = 0,25.}$$

b)

$$P = \frac{110}{400} \cdot \frac{20}{110} = \frac{20}{400} = \underline{\frac{1}{20} = 0,050.}$$

GRUPO-SENADOR

a)

$$\underline{P = \frac{1}{4} = 0,25.}$$

b)

$$P = \frac{1}{4} \cdot \frac{20}{110} = \frac{5}{110} = \underline{\frac{1}{22} = 0,045.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Sean A e I las matrices siguientes: $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar el valor de a para que se verifique la ecuación matricial: $A + A^{-1} = I$.

b) Para el valor de a calculado en el apartado anterior, determinar la matriz A^{10}.

----

a)

Multiplicando los dos términos por A (en este caso es independiente que se haga por la izquierda o por la derecha):

$$A\cdot\left(A + A^{-1}\right) = A\cdot I;\ \ A^2 + A\cdot A^{-1} = A;\ \ A^2 + I = A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + I = A;\ \ \begin{pmatrix} a^2-1 & a \\ -a & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{a = 1}.$$

b)

Para $a = 1$ resulta $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2\cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I.$$

$$A^4 = A^3\cdot A = -I\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -A.$$

$$A^5 = A^4\cdot A = -A\cdot A = -A^2.$$

$$A^6 = A^5\cdot A = -A^2\cdot A = -A^3 = -(-I) = I.$$

$$A^7 = A^6\cdot A = I\cdot A = A.$$

………….

En general:

$$\underline{A^n \text{ es igual que } A \text{ resto de la división de } n \text{ entre } 6}.$$

En el caso particular de A^{10}, como el resto de dividir 10 entre 6 es 4:

$$\underline{A^{10} = A^{4} = - A}.$$

También se resuelve el ejercicio de la forma siguiente:

$A^{10} = \left(A^{5}\right)^{2} = \left(- A^{2}\right)^{2} = A^{4} \Rightarrow \underline{A^{10} = - A}.$

****

2º) Una explotación ganadera ha estimado que sus beneficios a lo largo de los últimos diez años, dependen del número de años en funcionamiento, de acuerdo con la siguiente función: $B(x) = -2x^3 + 30x^2 - 96x$, donde $B(x)$ es el beneficio (en miles de euros) a los x años de funcionamiento. Se pide, justificando las respuestas e interpretando los resultados obtenidos:

a) ¿En qué años fueron máximos y mínimos los beneficios?

b) ¿Cuáles fueron los valores de dichos beneficios máximo y mínimo?

c) Representar de forma aproximada $B(x)$ a lo largo de los últimos 10 años.

----

a)

La condición necesaria para que una función polinómica tenga un máximo o un mínimo relativo es que se anule su primera derivada.

$$B'(x) = -6x^2 + 60x - 96. \quad B'(x) = 0 \Rightarrow -6x^2 + 60x - 96 = 0;$$

$$x^2 - 10x + 16 = 0;\ x = \frac{10 \pm \sqrt{100-64}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2} = 5 \pm 3 \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = 8$$

.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo relativo.

$$B''(x) = -12x + 60.$$

$$B''(2) = -12 \cdot 2 + 60 = -24 + 60 = 36 > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ x = 2.$$

$$B''(8) = -12 \cdot 8 + 60 = -96 + 60 = -36 < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = 8.$$

$\underline{Los\ beneficios\ fueron\ máximos\ el\ octavo\ año\ y\ mínimos\ el\ segundo.}$

b)

$$B(8) = -2 \cdot 8^3 + 30 \cdot 8^2 - 96 \cdot 8 = -2 \cdot 512 + 30 \cdot 64 - 192 =$$

$$= -1.024 + 1.920 - 192 = 1.920 - 1.216 = 704.$$

$\underline{El\ benefico\ máximo\ fue\ de\ 704.000\ euros.}$

$$B(2) = -2 \cdot 2^3 + 30 \cdot 2^2 - 96 \cdot 2 = -2 \cdot 8 + 30 \cdot 4 - 192 =$$

$$=- 16 + 120 - 192 = 120 - 208 =- 88.$$

$$\underline{El\ beneficio\ (pérdidas)\ mínimo\ fueron\ unas\ pérdidas\ de\ 88.000\ euros.}$$

$c)$

Para representar de forma aproximada la función beneficios a lo largo de los últimos 10 años, tenemos en cuenta, además de que $B(0) = 0$, algunos de sus valores intermedios:

$$B(4) =- 2 \cdot 4^3 + 30 \cdot 4^2 - 96 \cdot 4 =- 2 \cdot 64 + 30 \cdot 16 - 384 =$$

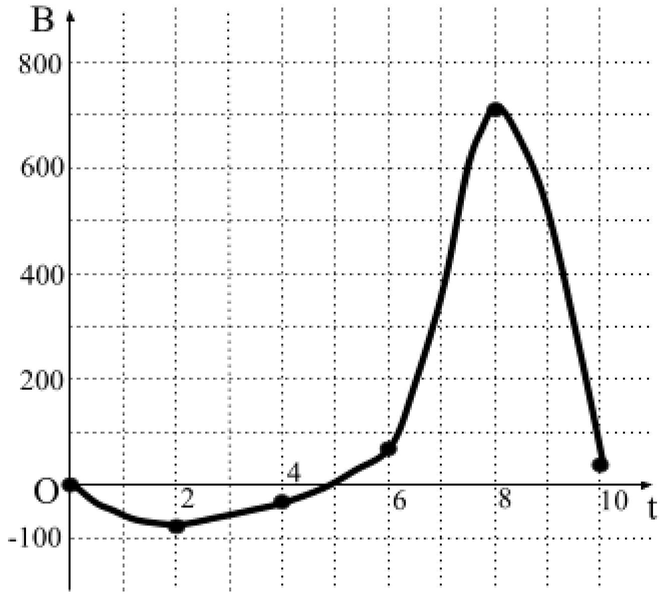
$$=- 128 + 480 - 384 = 480 - 512 =- 32.$$

$$B(6) =- 2 \cdot 6^3 + 30 \cdot 6^2 - 96 \cdot 6 =- 2 \cdot 216 + 30 \cdot 36 - 576 =$$

$$=- 432 + 1.080 - 576 = 1.080 - 1.008 = 72.$$

$$B(10) =- 2 \cdot 10^3 + 30 \cdot 10^2 - 96 \cdot 10 =- 2 \cdot 1.000 + 30 \cdot 100 - 960 =$$

$$=- 2.000 + 3.000 - 960 = 3.000 - 2.960 = 40.$$



****

3º) El porcentaje de peso que se pierde tras la realización de un programa de ejercicios sigue una distribución Normal con desviación típica 0,5, tanto en hombres como en mujeres. Un grupo de hombres y otro de mujeres de cierta región realizaron dicho programa de ejercicios. Se recogió la siguiente información sobre el porcentaje de peso perdido:

Hombres	3,1	3,9	3,7	4,0	4,1	4,2	4,0	3,8	3,9	4,1
Mujeres	3,0	3,8	2,5	4,1	3,7	3,6	3,3	4,0	3,7	2,9

Se pide, justificando las respuestas:

a) Una estimación del porcentaje medio de peso que se pierde en mujeres.

b) ¿Se podría concluir, para α = 0,05, que el porcentaje medio de peso que se pierde es diferente en hombres y en mujeres?

----

a)

$$\overline{x_M} = \frac{3{,}0+3{,}8+2{,}5+4{,}1+3{,}7+3{,}6+3{,}3+4{,}0+3{,}7+2{,}9}{10} = \frac{34{,}6}{10} = 3,46.$$

$$\underline{El\ peso\ medio\ perdido\ por\ las\ mujeres\ es\ del\ 0,0345\ \%.}$$

b)

Se va a determinar un intervalo de confianza para la diferencia de medias, para lo cual determinamos el valor $z_{\frac{\alpha}{2}}$, pues la fórmula que nos da el intervalo es la siguiente:

$$\left[\left(\overline{x_1} - \overline{x_2}\right) - z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}};\ \left(\overline{x_1} - \overline{x_2}\right) + z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right].$$

$$\alpha = 0,05 \to z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96. \qquad (1 - 0,025 = 0,9750 \to z = 1,96).$$

$$\overline{x_H} = \frac{3{,}1+3{,}9+3{,}7+4{,}0+4{,}1+4{,}2+4{,}0+3{,}8+3{,}9+4{,}1}{10} = \frac{38{,}8}{10} = 3,88.$$

Datos:

$$\overline{x_1} = \overline{x_H} = 3,88;\ \overline{x_2} = \overline{x_M} = 3,46;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96;\ \sigma_1 = \sigma_2 = 0,5;\ n_1 = n_2 = 10.$$

$$\left[(3,88 - 3,46) - 1,96\cdot\sqrt{\frac{0{,}5^2}{10} + \frac{0{,}5^2}{10}};\ (3,88 - 3,46) + 1,96\cdot\sqrt{\frac{0{,}5^2}{10} + \frac{0{,}5^2}{10}}\right];$$

$$\left(0,42 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,50}{10}};\ 0,42 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,50}{10}}\right);$$

$$(0,42 - 1,96 \cdot 0,224;\ 0,42 + 1,96 \cdot 0,224); \quad (0,42 - 0,438;\ 0,42 + 0,438) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-\ 0,018;\ \ 0,858).$$

Que el valor del límite inferior del intervalo sea negativo (el intervalo contiene al cero) indica que para los datos de este ejercicio no puede concluirse la existencia de diferencias entre las medias.

$\underline{El\ peso\ que\ pierden\ hombres\ y\ mujeres\ es,\ aproximadamente,\ el\ mismo}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

JUNIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elegir una opción entre las dos que se proponen a continuación.

OPCIÓN A

1º) Un frutero quiere comprar naranjas y manzanas. Cada kg de naranjas le cuesta 0,6 euros y le proporciona un beneficio de 0,3 euros y cada kg de manzanas le cuesta 1 euro con un beneficio de 0,4 euros. Si sólo dispone de 1.200 euros y su vehículo solo puede transportar 1.500 kg de fruta, se pide, justificando las respuestas:

a) ¿Cuántos kg de naranjas y de manzanas debe comprar para hacer máximos los beneficios?

b) ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos?

----

a)

Sean x e y los kg de naranjas y manzanas que compra, respectivamente.

Las restricciones son: $\left.\begin{array}{l} 0,6x + y \leq 1.200 \\ x + y \leq 1.500 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} 3x + 5y \leq 6.000 \\ x + y \leq 1.500 \end{array}$.

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,\ y) = 0,3x + 0,4y$.

La región factible se indica en la figura:

x	0	1.000
y	1.200	600

① $\Rightarrow 3x + 5y \leq 6.000 \Rightarrow y \leq \frac{6.000 - 3x}{5} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	0	1.500
y	1.500	0

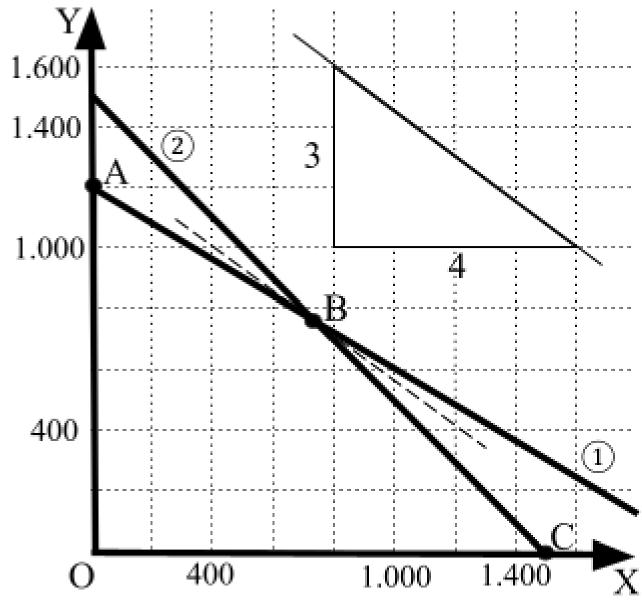
② $\Rightarrow x + y \leq 1.500 \Rightarrow y \leq 1.500 - x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

Los vértices de la zona factible, además del origen, son los siguientes:

$A \Rightarrow \quad x = 0 \; 3x + 5y = 6.000 \} \Rightarrow \underline{A(0,\ 1.200)}$.

$B \Rightarrow 3x + 5y = 6.000 \quad x + y = 1.500 \} \Rightarrow \underline{B(750,\ 750)}$.

$C \Rightarrow x + y = 1.500 \; y = 0 \} \Rightarrow \underline{C(1.500,\ 0)}$.



Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 1.200) = 0,3 \cdot 0 + 0,4 \cdot 1.200 = 0 + 480 = 480$.

$B \Rightarrow f(750,\ 750) = 0,3 \cdot 750 + 0,4 \cdot 750 = 225 + 900 = \underline{1.125}$.

$C \Rightarrow f(1.500,\ 0) = 0,3 \cdot 1.500 + 0,4 \cdot 0 = 450 + 0 = 450$.

El máximo se produce en el punto B.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = 0,3x + 0,4y = 0 \Rightarrow y = -\frac{0,3}{0,4}x \Rightarrow m = -\frac{3}{4}$.

$b)$

$\underline{Debe\ comprar\ 750\ kg\ de\ naranjas\ y\ 750\ kg\ de\ manzanas.}$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ esperado\ es\ de\ 1.125\ euros.}$

****

2º) El porcentaje de agua embalsada en cierto pantano a lo largo del año como función de t (instante de tiempo en meses) viene dado por la función:

$P(t) = \{50 + at \; si \; 0 \leq t < 4 \quad 90 \; si \; 4 \leq t < 5 \qquad b(11 - t) \; si \; 5 \leq t < 9 \; ct - 30 \; s$

.

Sabiendo que es una función continua, se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar los valores de las constantes $a, \; b \; y \; c$.

b) Representar gráficamente el porcentaje de agua embalsada en función del instante de tiempo a lo largo del año.

----

a)

Una función es continua en un punto cuando sus límites laterales existen y son iguales en ese punto e igual al valor de la función.

$P(t) \; = (50 + at) \; = 50 + 4a \; P(t) \; = 90 \; = 90 = P(4) \quad \} \Rightarrow 50 + 4a = 90; \; 4a =$

.

$P(t) \; = 90 \; = 90 \qquad P(t) \; = [b(11 - t)] \; = 6b = P(5) \} \Rightarrow 90 = 6b \Rightarrow \underline{b =}$

.

$P(t) \; = [b(11 - t)] \; = 2b \qquad P(t) \; = (ct - 30) \; = 9c - 30 = P(9) \} \Rightarrow 30 =$

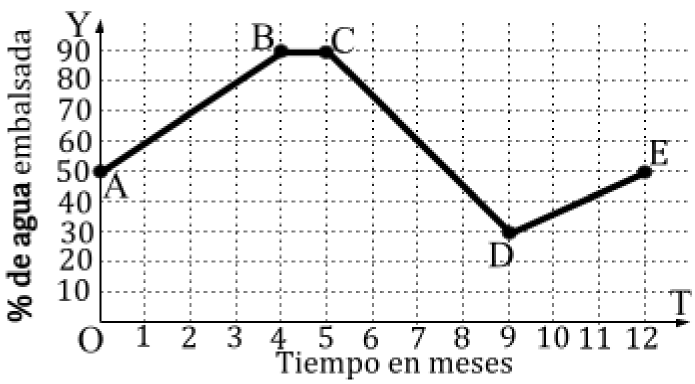
.

La función resulta:

$\underline{P(t) = \{50 + 10t \; si \; 0 \leq t < 4 \quad 90 \; si \; 4 \leq t < 5 \qquad 15(11 - t) \; si \; 5 \leq t < 9 \; \frac{20}{3}t}$

.

b)



****

3º) Para que una persona sea contratada en cierta empresa, tiene que superar las pruebas psicológicas P1, P2 y P3, en ese mismo orden. En el momento en que no supera alguna de ellas, no es contratada. Por la experiencia, se sabe que el 96 % de las personas aspirantes a ser contratadas superan P1, que P2 no es superada con probabilidad 0,03 y que el 95 de cada 100 aspirantes superan P3. Determinar, justificando la respuesta, la probabilidad de que una persona aspirante a conseguir empleo en esa empresa no sea contratada.

Los sucesos "ser contratada" y "no ser contratada" son sucesos opuestos o contrarios, por lo tanto, la suma de sus probabilidades es 1 por constituir el "suceso seguro".

$$P(no\ contratada) = 1 - P(contratada).$$

$$P(contratada) = 0,96 \cdot 0,97 \cdot 0,95 = 0,88464.$$

$$P(no\ contratada) = 1 - 0,88464 = 0,11536.$$

$\underline{La\ probabilidad\ de\ que\ una\ persona\ no\ sea\ contratada\ es\ del\ 11,54\ \%.}$

****

OPCIÓN B

1º) Sea la matriz $A = (1\ 0\ 2\ \ -\ 1\ )$, se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar su matriz inversa.

b) Teniendo en cuenta el apartado anterior, determinar la matriz $B = 2\cdot A^{18}$.

----

a)

Por el procedimiento de la matriz adjunta.

$|A| = |1\ 0\ 2\ \ -\ 1\ | = -\ 1.$ $\qquad A^t = (1\ 2\ 0\ \ -\ 1\ ).$

$Adj.\ de\ A^t = (-\ 1\ 0\ \ -\ 2\ 1\ ).$

$$\underline{A^{-1} = (1\ 0\ 2\ \ -\ 1\ )}.$$

Por el método de Gauss-Jordan.

$(I) = (1\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 -\ 2F_1\} \Rightarrow (1\ 0\ \ -\ 2\ 1\ ) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{F_2 \rightarrow -\ F_2\} \Rightarrow (1\ 0\ 2\ \ -\ 1\ ) \Rightarrow \underline{A^{-1} = (1\ 0\ 2\ \ -\ 1\ )}.$

b)

Nótese que la matriz A es ortogonal por ser igual que su inversa, lo cual permite hacer lo siguiente:

$A^2 = A\cdot A = A\cdot A^{-1} = I.$

$B = 2\cdot A^{18} = 2\cdot\left(A^2\right)^9 = 2\cdot I^9 = 2I.$

$$\underline{B = 2\cdot A^{18} = (2\ 0\ 0\ 2\ )}.$$

****

2º) El consumo de agua, en metros cúbicos, de una industria varía a lo largo de las 8 horas de la jornada laboral de acuerdo con la función:

$$C(x) = -2x^3 + 27x^2 - 84x + 90,\ 1 \leq x \leq 8.$$

Siendo $C(x)$ el consumo de agua en la hora x de la jornada laboral. Se pide, justificando las respuestas:

a) ¿A qué horas se producen los consumos máximo y mínimo?

b) Determinar los valores de dichos consumos máximo y mínimo.

c) Determinar los periodos de crecimiento y decrecimiento de dicho consumo a lo largo de la jornada.

----

a)

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo en un punto es que se anule su primera derivada:

$$C'(x) = -6x^2 + 54x - 84.$$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow -6x^2 + 54x - 84 = 0;\ x^2 - 9x + 14 = 0;\ x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 56}}{2} =$$

$$= \frac{9 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{9 \pm 5}{2} \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = 7.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para el valor que anula la primera derivada, se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo relativo.

$$C''(x) = -12x + 54 = -6 \cdot (2x - 9).$$

$C''(2) = -6 \cdot (4 - 9) = 30 > 0$ ⇒ Mínimo relativo para x = 2.

$\underline{El\ consumo\ mínimo\ se\ produce\ en\ la\ segunda\ hora\ laboral.}$

$C''(7) = -6 \cdot (14 - 9) = -30 < 0$ ⇒ Máximo relativo para x = 7.

$\underline{El\ consumo\ máximo\ se\ produce\ en\ la\ séptima\ hora\ laboral.}$

b)

$$C(2) = -2 \cdot 2^3 + 27 \cdot 2^2 - 84 \cdot 2 + 90 = -16 + 108 - 162 + 90 = 20.$$

$$\underline{El\ consumo\ mínimo\ es\ de\ 20\ m^3}.$$

$$C(7) = -2 \cdot 7^3 + 27 \cdot 7^2 - 84 \cdot 7 + 90 = -686 + 1.323 - 588 + 90 = 139.$$

$$\underline{El\ consumo\ máximo\ es\ de\ 139\ m^3}.$$

$c)$

Teniendo en cuenta que la función, por ser polinómica, es continua en su dominio y considerando que el mínimo se produce para x = 2 y el máximo para x = 7, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$Decrecimiento:\ (0,\ 2) \cup (7,\ 8). \qquad Crecimiento:\ (2,\ 7).$$

$$\underline{El\ consumo\ de\ agua\ disminuye\ las\ dos\ primeras\ horas\ y\ la\ última}.$$

$$\underline{El\ consumo\ de\ agua\ aumenta\ entre\ la\ segunda\ y\ la\ séptima\ horas}.$$

****

3º) Se seleccionó una muestra de deportistas de alto nivel en cierto país. Se les preguntó si la competición les producía problemas de ansiedad. Los datos recogidos fueron los siguientes:

Sí, Sí, No, Sí, No, No, Sí, Sí, No, No, No, Sí, No, No, Sí, No, Sí, No, No, No.

Determinar, justificando las respuestas:

a) Una estimación del porcentaje de deportistas de alto nivel de ese país con problemas de ansiedad ante la competición.

b) Un intervalo de confianza (al 99 %) para el porcentaje de deportistas de alto nivel de ese país con problemas de ansiedad ante la competición.

c) El error máximo cometido con la estimación dada en el apartado a), con un 99 % de confianza.

----

a)

Nº de síes: 8. Nº de noes: 12.

$$P(ansiedad) = \frac{casos\,favorables}{casos\,posibles} = \frac{8}{8+12} = \frac{8}{20} = 0,40.$$

$\underline{La\ competición\ les\ produce\ ansiedad\ al\ 40\ \%\ de\ los\ atletas}.$

b)

$Confianza\ al\ 99\ \% \Rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,576.$

Considerando p y q como las probabilidades de tener o no ansiedad, respectivamente, se tiene que $p = 0,4\ y\ q = 0,6$. n = 20.

Ahora se aplica la fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q y n, que es la siguiente: $I.\ C. = \left(p - z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}},\ p + z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}\right)$.

$$I.\ C._{99\ \%} = \left(0,4 - 2,576\cdot\sqrt{\frac{0,4\cdot 0,6}{20}},\ 0'4 + 2,576\cdot\sqrt{\frac{0,4\cdot 0,6}{20}}\right) =$$

$$= \left(0,4 - 2,576\cdot\sqrt{\frac{0,24}{20}},\ 0'4 + 2,576\cdot\sqrt{\frac{0,24}{20}}\right) =$$

$$= \left(0,4 - 2,576\cdot 0,11,\ 0'4 + 2,576\cdot 0,11\right) = \left(0,4 - 0,282,\ 0'4 + 0,282\right) =$$

$$= \left(0'118,\ 0'682\right).$$

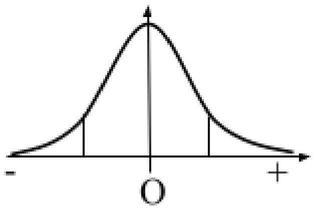
$\underline{Intervalo\ de\ confianza\ al\ 99\ \%:\ 11,8\ \%\ -\ 68,2\ \%}.$

$c)$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 2,576 \cdot \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{20}} = 2,576 \cdot 0,11 = 0,282.$$

$\underline{El\ error\ máximo\ que\ se\ comete\ es\ del\ 28,2\ \%}.$

****



α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	∞	2,576	2,326	2,170	2,054	1,960	1,881	1,812	1,761	1,695
0,1	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405	1,372	1,341	1,311
0,2	1,202	1,254	1,227	1,200	1,175	1,150	1,126	1,103	1,080	1,098
0,3	1,036	1,015	0,994	0,924	0,954	0,935	0,915	0,896	0,878	0,860
0,4	0,842	0,824	0,806	0,780	0,772	0,755	0,739	0,722	0,706	0,690

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE GALICIA

JUNIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno debe responder solamente a los ejercicios de una de las opciones.

OPCIÓN A

1º) Dadas las matrices $A = (1\ 1\ \ -\ 1\ 0\ ),\ B = (2\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ 1\ ),\ C = (3\ 1\ 2\ \ -\ 1\ )$.

a) Calcula las matrices B^{-1} y C^{-1}, inversas de las matrices B y C respectivamente.

b) Despeja y calcula la matriz X que verifica $A^t + B \cdot X = 5 \cdot C^{-1}$, siendo A^t la traspuesta de A.

----

a)

$$(B/I) = (1\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_1 \leftrightarrow F_2\right\} \Rightarrow (0\ 1\ 1\ 0\ ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow -\ F_2\right\} \Rightarrow (0\ \ -\ 1\ 1\ 0\ ) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow F_2 -\ 2F_1\right\} \Rightarrow (0\ \ -\ 1\ 1\ 2\ ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow F_1 + F_2\right\} \Rightarrow (1\ 1\ 1\ 2\ ) \Rightarrow \underline{B^{-1} = (1\ 1\ 1\ 2\ )}.$$

$$|C| = -\ 5. \quad C^t = (3\ 2\ 1\ \ -\ 1\ ).$$

$$Adj.\ de\ C^t = (-\ 1\ \ -\ 1\ \ -\ 2\ 3\ ) \Rightarrow \underline{C^{-1} = \tfrac{1}{5}(1\ 1\ 2\ \ -\ 3\ )}.$$

b)

$$A^t + B \cdot X = 5 \cdot C^{-1};\ \ B \cdot X = 5 \cdot C^{-1} - A^t = M.$$

Multiplicando los dos términos por la izquierda por la inversa de B:

$$B^{-1} \cdot B \cdot X = B^{-1} \cdot M;\ \ I \cdot X = B^{-1} \cdot M.$$

$$\underline{X = B^{-1} \cdot \left(5 \cdot C^{-1} - A^t\right)}.$$

$$M = 5\cdot C^{-1} - A^{t} = 5\cdot\frac{1}{5}(1\ 1\ 2\ -\ 3) - (1\ -\ 1\ 1\ 0) = (0\ 2\ 1\ -\ 3).$$

$$X = B^{-1}\cdot\left(5\cdot C^{-1} - A^{t}\right) = (1\ 1\ 1\ 2)\cdot(0\ 2\ 1\ -\ 3) = (1\ -\ 1\ 2\ -\ 4).$$

$$\underline{X = (1\ -\ 1\ 2\ -\ 4)}.$$

****

2º) a) Calcula los valores de a y b para que la función $f(x) = ax^2 + bx^3$ tenga un punto de inflexión en $P(2, 16)$.

b) Consideremos la función $f(x) = -x^3 + 6x^2$. Calcula y clasifica sus extremos relativos. Determine el punto o puntos en los que la recta tangente a la gráfica de la función tiene pendiente igual a 9.

----

a)

Por pasar por $P(2, 16) \Rightarrow f(2) = 16 \Rightarrow a \cdot 2^2 + b \cdot 2^3 = 16;\ \ 4a + 8b = 16;$

$a + 2b = 4.$ (1)

Una función polinómica tiene un punto de inflexión para los valores de x que anulan la segunda derivada y hacen distinta de cero a la tercera derivada.

$f'(x) = 2ax + 3bx^2.$ $\qquad f''(x) = 2a + 6bx.$

Por tener un punto de inflexión en $P(2, 16) \Rightarrow f''(2) = 0 \Rightarrow$

$2a + 6b \cdot 2 = 0;\ \ a + 6b = 0.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$\left.\begin{array}{l} a + 2b = 4 \\ a + 6b = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -a - 2b = -4 \\ a + 6b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 4b = -4 \Rightarrow \underline{b = -1},\ \ \underline{a =}$

.

b)

Para que una función tenga un extremo relativo, máximo o mínimo, es condición necesaria que se anule la primera derivada de la función y sea distinta de cero el valor de la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$f'(x) = -3x^2 + 12x = -3x(x - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 4.$

$f''(x) = -6x + 12.$

$f''(0) = 12 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 0.$

$f(0) = 0 \Rightarrow \underline{Mínimo\ relativo: O(0, 0)}.$

$f''(4) = -24 + 12 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 4.$

$$f(4) = -4^3 + 6 \cdot 4^2 = -64 + 96 = 32 \Rightarrow \underline{Máximo\ relativo: A(4,\ 32)}.$$

La pendiente de la recta tangente a una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

$$f'(x) = -3x(x-4) = m = 9;\ \ -x^2 + 4x = 3;\ \ x^2 - 4x + 3 = 0;$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 3.$$

Los puntos de tangencia son los siguientes:

$$f(1) = -1^3 + 6 \cdot 1^2 = -1 + 6 = 5 \Rightarrow \underline{P_1(1,\ 5)}.$$

$$f(3) = -3^3 + 6 \cdot 3^2 = -27 + 54 = 27 \Rightarrow \underline{P_2(3,\ 27)}.$$

La recta que pasa por un punto conociendo la pendiente es $y - y_0 = m\left(x - x_0\right)$:

$$t_1 \Rightarrow y - 5 = 9(x-1) = 9x - 9 \Rightarrow \underline{t_1 \equiv 9x - y - 4 = 0}.$$

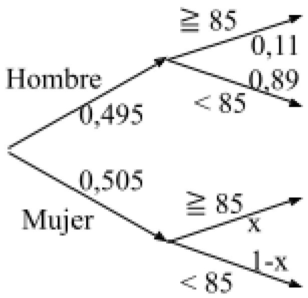
$$t_2 \Rightarrow y - 27 = 9(x-3) = 9x - 27 \Rightarrow \underline{t_2 \equiv 9x - y = 0}.$$

****

3º) Según los datos del año 2.013 relativas a las pensiones básicas en alta de la Seguridad Social en nuestra Comunidad Autónoma, se sabe que el 49,5 % de las pensiones son hombres y de ellas el 11 % tiene 85 o más años. Además se sabe también que el 16 % del total de pensiones tiene 85 o más años.

a) Calcula el porcentaje de hombres entre los pensionistas de 85 o más años.

b) Si se elige un pensionista al azar y resulta ser mujer, calcula la probabilidad de que tenga 85 o más años.

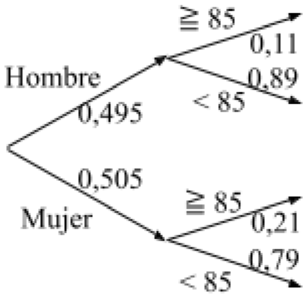


Sabemos que el 16 % de pensionistas son mayores de 85 años:

$0,054 + 0,505 \cdot x = 0,16; \;\; 0,505x = 0,16 - 0,054 = 0,106;$

$x = \frac{0,106}{0,505} = 0,210.$

Ahora se puede completar "el árbol":



a)

$$P = \frac{0,054}{0,054+0,106} = \frac{0,054}{0,160} = \underline{0,3375 = 33,75 \,\%}.$$

b)

$$P = \frac{0,106}{0,505} = \underline{0,210}.$$

****

4º) Un fabricante garantiza a un laboratorio farmacéutico que sus máquinas producen comprimidos con un diámetro medio no superior a 13 milímetros, que es el tope admitido por el laboratorio. Se sabe que el diámetro de los comprimidos del fabricante sigue una distribución normal con desviación típica 0,6 milímetros. El laboratorio comprueba una muestra aleatoria de 100 comprimidos de ese fabricante y obtiene que el diámetro medio es de 13,12 milímetros.

a) Formula un test para contrastar que el diámetro de los comprimidos es el que afirma el fabricante, frente a que es superior. ¿A qué conclusión se llega con un 5 % de nivel de significación?

b) Calcula un intervalo del 95 % de confianza para el diámetro medio de los comprimidos de ese fabricante. Interpreta el intervalo obtenido.

----

a)

$Hipótesis\ nula \rightarrow H_0: \mu \leq 13$ $\qquad$ $Hipótesis\ alternativa \rightarrow H_1: \mu > 13 \}$.

Queremos contrastar la hipótesis nula.

$\alpha = 0,05.\ \ z_\alpha = 1,65.\ (1 - 0,05 = 0,95 \rightarrow z = 1,65).$

Zona de contraste *unilateral;* en el caso es $\left(- \infty,\ \mu + z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Para $\overline{x} = 13,\ \sigma = 0,6\ y\ n = 100 \Rightarrow N\left(13,\ \frac{0,6}{\sqrt{100}}\right) = (13,\ 0'06).$

$(- \infty,\ 13 + 1,65 \cdot 0,06);\ (- \infty,\ 13 + 0,099) \Rightarrow (- \infty,\ 13'099).$

La media muestral es $\overline{x} = 13,12$, que no pertenece a la zona de contraste, por lo cual se debe rechazar la hipótesis nula, o sea que:

$\underline{No\ se\ admite\ que\ el\ \emptyset\ medio\ de\ los\ comprimidos\ no\ sea\ superior\ de\ 13\ mm.}$

b)

Zona de contraste *bilateral;* en este caso es $\left(\mu_0 - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \mu_0 + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Para $\mu_0 = 13,\ \sigma = 0,6,\ \alpha = 0,05\ y\ n = 100$:

$(13 - 0'118,\ 13 + 0'118) \Rightarrow \underline{(12'882, 13'118)}.$

$El\ diámetro\ del\ 95\ \%\ de\ los\ comprimidos\ está\ entre\ 12,882\ y\ 13,118\ mm.$

****

OPCIÓN B

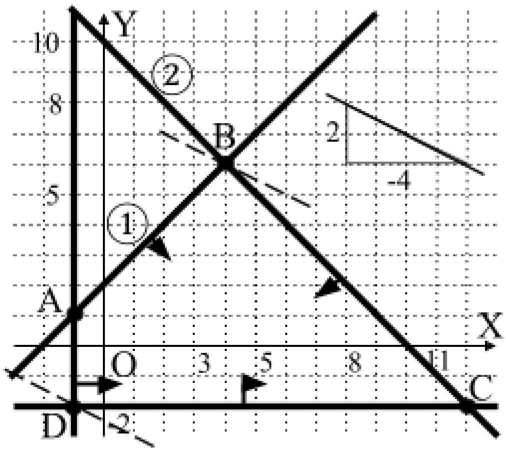
1º) Sea la función $f(x,\ y) = x + 2y$ sujeta al conjunto de restricciones $y \leq x + 2$, $x + y \leq 10$, $x \geq -1$, $y \geq -2$.

a) Representa gráficamente la región factible y calcula sus vértices.

b) Calcula el punto o puntos donde la función alcanza su valor máximo y su valor mínimo. Razona si se obtiene el mismo valor máximo se añadimos al conjunto de restricciones $y \leq 3$.

----

a)



$\left.\begin{array}{l} y \leq x + 2 \\ x + y \leq 10 \\ x \geq -1,\ y \geq -2 \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l} x - y \geq -2 \\ x + y \leq 10 \\ x \geq -1,\ y \geq -2 \end{array}\right\}$

.

x	0	-2
y	2	0

$\textcircled{1} \Rightarrow x - y \geq -2 \Rightarrow$

$y \leq x + 2 \Rightarrow O(0,\ 0) \to Si.$

x	4	6
y	6	4

$\textcircled{2} \Rightarrow x + y \leq 10 \Rightarrow$

$y \leq 10 - x \Rightarrow O(0,\ 0) \to Si.$

La región factible es la zona sombreada de la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -1 \\ x - y = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow A(-1,\ 1).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x - y = -2 \\ x + y = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow B(4,\ 6).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 10 \\ y = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow C(12,\ -2).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -1 \\ y = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow D(-1,\ -2).$

$b)$

La función de objetivos es $f(x,\ y) = x + 2y$.

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(-1,\ 1) = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = -1 + 2 = 1.$

$B \Rightarrow f(4,\ 6) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 6 = 4 + 12 = 16.$

$C \Rightarrow f(12,\ -2) = 1 \cdot 12 + 2 \cdot (-2) = 12 - 4 = 8.$

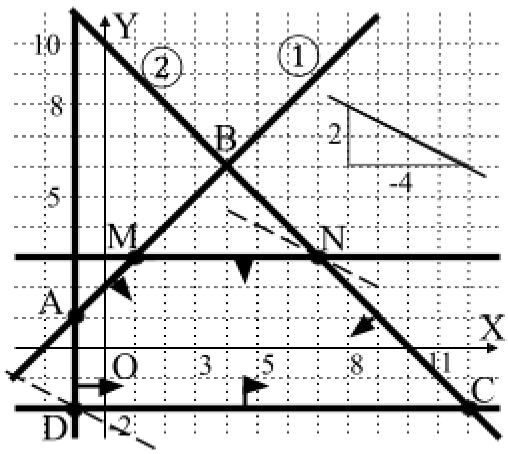
$D \Rightarrow f(-1,\ -2) = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) = -1 - 4 = -5.$

El máximo se produce en el punto B y el mínimo en el punto D.
También se hubieran obtenido los puntos B y D por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = x + 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x \Rightarrow m = -\frac{2}{4}.$

$\underline{Los\ valores\ máximo\ y\ mínimo\ son\ 16\ y\ -5,\ respectivamente}.$

Si se incluye la exclusión $y \leq 3$ resulta:



Los vértices nuevos son M y N son los siguientes:

$M \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y = -2 \\ y = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow M(1,\ 3).$

$N \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 10 \\ y = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow N(7,\ 3).$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de estos vértices son los siguientes:

$M \Rightarrow f(1,\ 3) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 1 + 6 = 7.$

$N \Rightarrow f(7,\ 3) = 1 \cdot 7\ +\ 2 \cdot 3\ =\ 7\ +\ 6\ =\ 13.$

El máximo ahora se produce en el punto N; el mínimo sigue siendo el punto D.

$\underline{Los\ valores\ máximo\ y\ mínimo\ ahora\ son\ 13\ y\ -\ 5,\ respectivamente}.$

****

2º) Sea la función de población $P(t) = 8 + \frac{12t}{t^2+9}$, $t\geq 0$, donde t es el tiempo transcurrido en años y $P(t)$ la población en millones de individuos.

a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la población. Calcula el valor máximo de la población.

b) Calcula cuando la población es de 9,6 millones de individuos. Estudia el comportamiento de la población a largo plazo.

----

a)

Una función es creciente o decreciente en un punto cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente, en ese punto.

$$P'(t) = \frac{12\cdot(t^2+9)-12t\cdot 2t}{(t^2+9)^2} = \frac{12x^2+108-24t^2}{(t^2+9)^2} = \frac{-12x^2+108}{(t^2+9)^2} = \frac{-12(t^2-9)}{(t^2+9)^2}.$$

$$P'(t) = 0 \Rightarrow \frac{-12(t^2-9)}{(t^2+9)^2} = 0; \quad -12(t^2-9) = 0 \Rightarrow t_1 = -3,\ t_2 = 3.$$

Teniendo en cuenta que $(t^2+9)^2 > 0,\ \forall t \in D(P)$, y que el dominio de la función es $(0, +\infty)$, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: P'(t) > 0 \Rightarrow t \in (0, 3)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: P'(t) < 0 \Rightarrow t \in (3, +\infty)}.$$

Para que una función tenga un máximo relativo, es condición necesaria que se anule la primera derivada de la función y sea negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$P''(t) = \frac{-24t\cdot(t^2+9)^2+12(t^2-9)\cdot[2\cdot(t^2+9)\cdot 2t]}{(t^2+9)^4} = \frac{-24t\cdot(t^2+9)+48t\cdot(t^2-9)}{(t^2+9)^3} =$$

$$= \frac{-24t^3-216t+48t^3-432t}{(t^2+9)^3} = \frac{24t^3-648t}{(t^2+9)^3} = \frac{24t(t^2-27)}{(t^2+9)^3}.$$

$$P''(3) = \frac{24\cdot 3\cdot(9-27)}{(9+9)^3} < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ t = 3.$$

$$P(3) = 8 + \frac{12\cdot 3}{3^2+9} = 8 + \frac{36}{18} = 8 + 2 = 10.$$

$\underline{El\ valor\ máximo\ se\ produce\ el\ tercer\ año\ y\ es\ de\ 10\ millones}.$

$b)$

$P(t) = 8 + \frac{12t}{t^2+9} = 9,6;\ \ 8\left(t^2 + 9\right) + 12t = 9,6\left(t^2 + 9\right);\ \ 12t = 1,6\left(t^2 + 9\right);$
$120t = 16\left(t^2 + 9\right);\ \ 15t = 2\left(t^2 + 9\right);\ \ 2t^2 - 15t + 18 = 0;\ t = \frac{15\pm\sqrt{225-144}}{2\cdot2} =$

$= \frac{15\pm\sqrt{225-144}}{4} = \frac{15\pm\sqrt{81}}{4} = \frac{15\pm9}{4} \Rightarrow t_1 = 1'5,\ t_2 = 6.$

$\underline{La\ población\ es\ de\ 9,6\ millones\ para\ t = 1'5\ años\ y\ para\ t = 6\ años}.$

$P(t) = \left(8 + \frac{12t}{t^2+9}\right) = 8 + 0 = 8.$

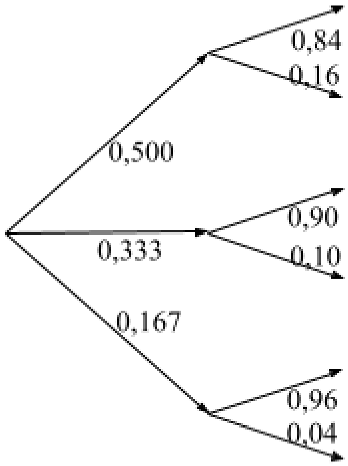
$\underline{Con\ el\ tiempo\ la\ población\ tiende\ a\ estabilizarse\ en\ 8\ millones}.$

****

3º) Una tienda que vende productos a través de Internet utiliza tres empresas de transporte para la entrega de sus pedidos A, B y C. Reparten la entrega de los pedidos entre las empresas, de forma que A entrega la mitad, B la tercera parte y C el resto de los pedidos. El 84 % de los pedidos entregados por A, el 90 % de los entregados por B y el 96 % de los entregados por C, cumplen con el plazo de entrega establecido.

a) ¿Qué porcentaje de pedidos son entregados en el plazo establecido?

b) Calcula la probabilidad de que un pedido, seleccionado al azar, o es entregado por la empresa B o no cumple con el plazo de estrega establecido.



a)

$$P = 0,420 + 0,300 + 0,160 = \underline{0,880}.$$

b)

$$P = 0,333 + 0,080 + 0,007 = \underline{0,420}.$$

****

4º) Una empresa multinacional que posee delegaciones en Francia y España, realiza un estudio sobre la satisfacción de sus empleados en el trabajo. Por el estudio realizado en la delegación francesa, sabemos que el 45 % de los empleados están satisfechos con su trabajo. En la delegación española, de una muestra aleatoria de 1.600 empleados 672 están satisfechos con su trabajo.

a) Formula un test para contrastar la hipótesis de que la proporción de empleados satisfechos en la delegación española es por lo menos la misma que en la delegación francesa frente a que es inferior. ¿Cuál sería la conclusión con un 1 % de nivel de significación?

b) Explica, en el contexto del problema, en qué consisten los errores de tipo I y de tipo II.

----

a)

$Hipótesis\ nula \rightarrow H_0: p \geq 0,45$ $Hipótesis\ alternativa \rightarrow H_1:\ p\ <\ 0,45\,\}$.

Zona de contraste *unilateral;* en este caso es $\left(p_0 - z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot q_0}{n}},\ \ + \infty\right)$.

Para $p_0 = 0'45,\ q_0 = 0'55,\ \alpha = 0,01\, y\, n = 1.600$:

Para un 1 % de significación: $\alpha = 0,01.\ \ z_\alpha = 2,33.$
$(1 - 0,01 = 0,99 \rightarrow z = 2,33)$.

$\left(0,45 - 2,33 \cdot \sqrt{\frac{0,45 \cdot 0,55}{1.600}},\ \ + \infty\right);\ \left(0,45 - 2'33 \cdot 0'012,\ \ + \infty\right);$

$\left(0,45 - 0'028, + \infty\right) \Rightarrow \left(0'478, + \infty\right)$.

La proporción de la delegación española (muestral) es $p_0 = \frac{672}{1.600} = 0,42$.

La proporción muestral no se encuentra en la zona de contraste.

Con una significación del 1 % se concluye lo siguiente:

$\underline{Se\ rechaza\ que\ la\ satisfacción\ española\ es\ superior\ a\ la\ francesa.}$

b)

Error tipo I: Se rechaza la hipótesis nula H_0 siendo cierta.

Error tipo II: Se acepta la hipótesis nula H_0 siendo falsa.

En lo que respecta a este problema, haber aceptado la hipótesis nula, supondría un error tipo I.

Este tipo de error depende del nivel de significación pedido.

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE GALICIA

SEPTIEMBRE – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno debe responder solamente a los ejercicios de una de las opciones.

OPCIÓN A

1º) Sea la matriz $A = (-\ 1\ 1\ 1\ 2\ )$.

a) Determina los valores de $x\ e\ y$ para los que se verifica la siguiente ecuación: $3A^2 - xA + yI = O$, donde I es la matriz identidad de orden 2 y O es la matriz del mismo orden.

b) Despeja y calcula la matriz X en la ecuación matricial $2A + X = 3A^{-1}$ (A^{-1} es la matriz inversa de A).

----

a)

$A^2 = A \cdot A = (-\ 1\ 1\ 1\ 2\ ) \cdot (-\ 1\ 1\ 1\ 2\ ) = (2\ 1\ 1\ 5\ )$.

$3A^2 - xA + yI = O \Rightarrow 3 \cdot (2\ 1\ 1\ 5\ ) - x \cdot (-\ 1\ 1\ 1\ 2\ ) + y \cdot (1\ 0\ 0\ 1\ ) = (0\ 0\ 0\ 0\ )$;

$(6\ 3\ 3\ 15\ ) + (x\ \ -x\ \ -x\ \ -2x\ ) + (y\ 0\ 0\ y\ ) = O$; $(6 + x + y\ 3 - x\ 3 - x\ 15 - 2x$

$\Rightarrow \quad 6 + x + y = 0 \qquad 3 - x = 0\ 15 - 2x + y = 0\ \} \Rightarrow \underline{x = 3,\ y = -9}$.

b)

$2A + X = 3A^{-1};\ X = 3A^{-1} - 2A$.

$A = A^t = (-\ 1\ 1\ 1\ 2\ )$; $|A| = -3$; $Adj.\ A^t = (2\ \ -1\ \ -1\ \ -1\ ) \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3}(-$

.

$X = 3A^{-1} - 2A = 3 \cdot \frac{1}{3}(-\ 2\ 1\ 1\ 1\ ) - 2 \cdot (-\ 1\ 1\ 1\ 2\ ) = (-\ 2\ 1\ 1\ 1\ ) - (-\ 2\ 2\ 2\ 4$

$= (0\ \ -1\ \ -1\ \ -3\ )$.

$\underline{X = (0\ \ -1\ \ -1\ \ -3\ )}$.

****

2º) El número de personas, en cientos, que ha visitado una exposición que ha permanecido abierta durante tres meses en un museo, se ha estimado por la siguiente función:

$N(t) =- t^3 + at^2 + bt$, $0 \leq t \leq 3$, donde t es el tiempo transcurrido en meses desde la inauguración.

a) Calcula los valores de a y b, si se sabe que el segundo mes se alcanzó el máximo de 400 visitantes.

b) Para $a = 3$ y $b = 0$, estudia en qué periodo de tiempo se ha registrado un aumento y en el que se ha registrado una disminución del número de visitantes. Estudia la concavidad y la convexidad de la función y representa su gráfica.

----

a)

$$N(2) = 4 \Rightarrow - 2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 = 4; \ \ - 8 + 4a + 2b = 4;$$

$- 4 + 2a + b = 2;\ \ 2a + b = 6.$ (1)

$$N'(t) =- 3t^2 + 2at + b. \qquad N'(2) = 0 \Rightarrow - 3 \cdot 2^2 + 2a \cdot 2 + b = 0;$$

$- 12 + 4a + b = 0;\ \ 4a + b = 12.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{l} 2a + b = 6 \\ 4a + b = 12 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} - 2a - b =- 6 \\ 4a + b = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow \underline{a = 3,\ b =}$$

.

b)

La función resulta ser $N(t) =- t^3 + 3t^2$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$N'(t) =- 3t^2 + 6t =- 3t(t - 2) = 0 \Rightarrow t_1 = 0,\ t_2 = 2.$$

Teniendo en cuenta que $N'(t)$ es una parábola cóncava ($\cap$) y el dominio de la función, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes;

$$\underline{Crecimiento: N'(t) > 0 \Rightarrow t \epsilon (0,\ 2)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: N'(t) < 0 \Rightarrow t \epsilon (2,\ 3)}.$$

Una función es cóncava (∩) o convexa (∪) cuando su segunda deriva es negativa o positiva, respectivamente.

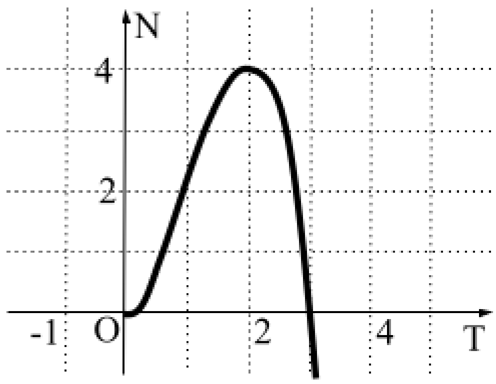
$N''(t) = -6t + 6 = -6(t - 1) = 0 \Rightarrow t = 1.$

Considerando el dominio de la función, los periodos de concavidad y convexidad son los siguientes:

$$\underline{Concavidad: N''(t) < 0 \Rightarrow t \epsilon (1,\ 3)}.$$

$$\underline{Convexidad: N'(t) > 0 \Rightarrow t \epsilon (0,\ 1)}.$$

Teniendo en cuenta lo anterior y que la función tiene un mínimo relativo en el punto $O(0,\ 0)$, la representación gráfica de la función, aproximada, es la siguiente:

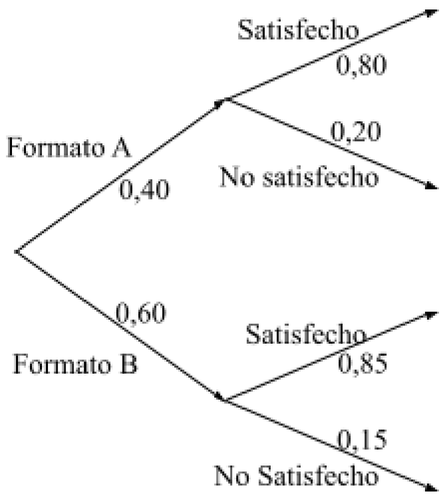


****

3º) Unos grandes almacenes tienen a la venta un determinado artículo en dos formatos diferentes: A y B. Entre los compradores del artículo, dos de cada cinco eligen el formato A y el resto eligen el formato B. Quedan satisfechos el 80 % de los que eligen el formato A y el 85 % de los que eligen el formato B.

a) Determina la probabilidad de que una persona quede satisfecha con la compra del artículo.

b) Si un comprador del artículo, elegido al azar, no ha quedado satisfecho con la compra, ¿cuál es la probabilidad de que haya elegido el formato A?



a)

$$P = P(S/A) + P(S/B) = 0,40 \cdot 0,80 + 0,60 \cdot 0,85 = 0,32 + 0,51 = \underline{0,83}.$$

b)

$$P = P(\overline{S}/A) = \frac{P(A \cap \overline{S})}{P(\overline{S})} = \frac{P(A \cap \overline{S})}{P(A/\overline{S}) + P(B/\overline{S})} = \frac{0,40 \cdot 0,20}{0,08 + 0,09} = \frac{0,08}{0,17} = \underline{0,471}.$$

****

4º) Un estudio revela que por lo menos el 80 % de los universitarios gallegos practican algún deporte. Elegida una muestra aleatoria de 200 universitarios gallegos se ha comprobado que 146 de ellos practican algún deporte.

a) Formula un test para contrastar la afirmación del estudio frente a que menos del 80 % de los universitarios gallegos practican algún deporte. ¿A qué conclusión se llega con un nivel de significación del 5 %?

b) A partir de la muestra dada, calcula un intervalo del 95 % de confianza para la proporción de universitarios gallegos que practican algún deporte. Interpreta el intervalo obtenido.

----

a)

$p_0 = 0,8;\ q_0 = 0,2.$

$Hipótesis\ nula \rightarrow H_0: p \geq 0,8$ $\qquad$ $Hipótesis\ alternativa \rightarrow H_1:\ p < 0,8\}.$

Zona de contraste *unilateral;* en este caso es $\left(p_0 - z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot q_0}{n}},\ +\infty\right).$

$\alpha = 0,05 \rightarrow z_\alpha = 1,645.$ $\qquad$ $(1 - 0,05 = 0,9500 \rightarrow z = 1,645).$

$\left(0'8 - 1,645 \cdot \sqrt{\frac{0,8 \cdot 0,2}{200}},\ +\infty\right); \left(0'8 - 1,645 \cdot 0'0283,\ +\infty\right);$

$\left(0'8 - 0'0465,\ +\infty\right) \Rightarrow \left(0'753,\ +\infty\right).$

La proporción de la muestra es $p = \frac{146}{200} = 0,73.$

Por no encontrarse la proporción muestral en la zona de contraste:

$\underline{Se\ rechaza\ que\ al\ menos\ el\ 80\ \%\ de\ los\ estudiantes\ gallegos\ hacen\ deporte}.$

b)

$p = 0,73;\ q = 1 - 0,73 = 0,27;\ n = 200.$

El intervalo de confianza es: $I.C. = \left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}};\ p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right).$

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1 - \alpha = 1 - 0,5 = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96$

.

$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96)$.

$$I.C. = \left(0'73 - 1'96 \cdot \sqrt{\frac{0,73 \cdot 0,27}{200}};\ 0'73 + 1'96 \cdot \sqrt{\frac{0,73 \cdot 0,27}{200}}\right);$$

$$\left(0'73 - 1'96 \cdot 0'0314;\ 0'73 + 1'96 \cdot 0'0314\right);\ \left(0'73 - 0'0615;\ 0'73 + 0'0651\right).$$

$$\underline{I.\ C._{95\ \%} = \left(0'669;\ 0'792\right)}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Consideramos el sistema de inecuaciones $y \geq 0$, $2 \leq y + x \leq 9$, $3y - 4x \leq 6$, $2y \geq 3x - 12$.

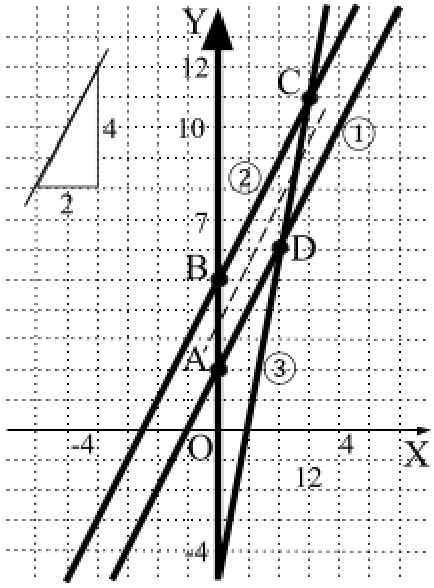
a) Representa gráficamente la región factible y calcula sus vértices.

b) ¿En qué punto o puntos de esa región alcanza los valores máximo y mínimo la función $f(x) = 4x - 3y + 2$?

----

a)

Las condiciones del ejercicio se establecen en el siguiente sistema de inecuaciones:



$y \geq 0 \quad 2 \leq y + x \quad x + y \leq 9 \quad 3y - 4x \leq 6 \quad 2y \geq 3x - 12 \}$ $\quad y \geq 0 \quad x$

.

x	0	2
y	2	0

①$\Rightarrow x + y \geq 2 \Rightarrow y \geq 2 - x$.

$O(0,\ 0) \rightarrow No.$

x	0	9
y	9	0

②$\Rightarrow x + y \leq 9 \Rightarrow y \leq 9 - x$.

$O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	0	3
y	2	6

③$\Rightarrow 4x - 3y \geq -6 \Rightarrow y \leq \frac{4x+6}{3}$.

$O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	6	4
y	3	0

④$\Rightarrow 2y \geq 3x - 12 \Rightarrow y \geq \frac{3x-12}{2}$. $O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

La región factible es la zona sombreada de la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \quad x = 0\ 2x - y = -\ 2\ \} \Rightarrow \underline{A(0,\ 2)}.$

$B \Rightarrow \quad x = 0\ 2x - y = -\ 5\ \} \Rightarrow \underline{B(0,\ 5)}.$

$C \Rightarrow 2x - y = -\ 5 \quad 5x - y = 4\ \} \quad -2x + y = 5 \quad 5x - y = 4\ \} \Rightarrow 3x = 9;\ x =$

.

$D \Rightarrow 2x - y = -\ 2 \quad 5x - y = 4\ \} \quad -2x + y = 2 \quad 5x - y = 4\ \} \Rightarrow 3x = 6;\ x =$

.

$b)$

Los valores de la función de objetivos $F(x,\ y) = 6x - 3y$ en cada uno de los vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 2) = 6 \cdot 0 - 3 \cdot 2 = 0 - 6 = \underline{-\ 6}.$

$B \Rightarrow f(0,\ 5) = 6 \cdot 0 - 3 \cdot 5 = 0 - 15 = \underline{-\ 15}.$

$C \Rightarrow f(3,\ 11) = 6 \cdot 3 - 3 \cdot 11 = 18 - 33 = \underline{-\ 15}.$

$D \Rightarrow f(2,\ 6) = 6 \cdot 2 - 3 \cdot 6 = 12 - 18 = \underline{-\ 6}.$

El máximo se produce en los puntos B y C, es decir, en todos los puntos del segmento $\overline{BC}$.

El mínimo se produce en los puntos A y D, es decir, en todos los puntos del segmento $\overline{AD}$.

También se hubiera obtenido el mismo resultado por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$F(x,\ y) = 6x - 3y = 0;\ 2x - y = 0 \Rightarrow y = 2x \Rightarrow m = \frac{4}{2} = 2.$

Nótese que la pendiente $m = 2$ es la que tienen las rectas ① y ②; de ahí que los puntos máximos y mínimos pertenezcan a segmentos de la región factible.

****

2º) Los gastos de mantenimiento $G(t)$, en miles de euros, de la maquinaria de una empresa se estiman en función del tiempo t, en meses, que dicha maquinaria lleva funcionando por $G(t) = \begin{cases} -\frac{1}{9}t + \frac{7}{2} & si \ \ 0 \leq t \leq 18 \\ 6 - \frac{144}{t+14} & si \ \ t > 18 \end{cases}$.

a) Calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento del gasto de mantenimiento. ¿En algún mes el gasto es mínimo? En ese caso, ¿a cuánto asciende?

b) Determina en qué mes o meses el gasto es de 3.000 euros. Justifica y calcula el valor al que tiende el gasto con el paso del tiempo.

----

a)

Una función es creciente o decreciente en un punto cuando su primera derivada es positiva o negativa en ese punto, respectivamente.

$$G'(t) = \begin{cases} -\frac{1}{9} & si \ \ 0 \leq t \leq 18 \\ \frac{144}{(t+14)^2} & si \ \ t > 18 \end{cases}.$$

De la función derivada se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{Decrecimiento: G'(t) < 0 \Rightarrow t \epsilon (0, 18)}.$$

$$\underline{Crecimiento: G'(t) > 0 \Rightarrow t \epsilon (18, +\infty)}.$$

$$G(0) = \frac{7}{2} = 3,5. \qquad G(18) = -\frac{1}{9} \cdot 18 + \frac{7}{2} = -2 + \frac{7}{2} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Teniendo en cuenta lo anterior y los periodos de crecimiento y decrecimiento, se deduce que:

$\underline{La\ función\ G(t)\ presenta\ un\ mínimo\ para\ t = 18\ que\ asciende\ a\ 1.500\ euros}.$

b)

$$G(t) = 3 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{9}t + \frac{7}{2} = 3 \\ 6 - \frac{144}{t+14} = 3 \end{cases}.$$

$$-\frac{1}{9}t + \frac{7}{2} = 3; \ \ -t + 63 = 54; \ \ t = 63 - 54 = 9.$$

$$6 - \frac{144}{t+14} = 3; \ \ 3 = \frac{144}{t+14}; \ \ 3t + 42 = 144; \ \ 3t = 102 \Rightarrow t = 34.$$

$\underline{Los\ gastos\ son\ de\ 3.000\ euros\ para\ t = 9\ meses\ y\ t = 34\ meses}.$

$$G(t) = \left(6 - \frac{144}{t+14}\right) = 6 - 0 = 6.$$

$\underline{Con\ el\ tiempo\ los\ gastos\ se\ estabilizan\ en\ \ 6.000\ euros\ mensuales.}$

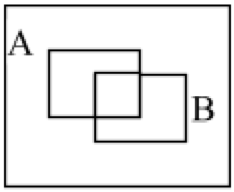
****

3º) Sean A y B sucesos tales que $P(A) = 0,80$, $P(B) = 0,60$ y $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,52$, donde $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son los sucesos contrarios o complementarios de A y B, respectivamente.

a) Calcula $P(A \cap B)$. Justifica si son independientes o no los sucesos A y B.

b) Formula y calcula las probabilidades de: "*que ocurra A y no ocurra B*" y "*que no ocurra ni A ni B*".

$P(A) = 0,80$; $P(B) = 0,60$ y $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,52$.



a)

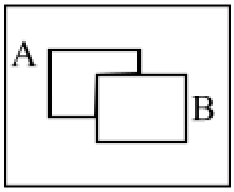
$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B}) =$

$= 1 - 0,52 = 0,48.$

$\underline{P(A \cap B) = 0,48}.$

b)

La probabilidad de que ocurra A y no ocurra B es $P = P(A \cap \overline{B})$.

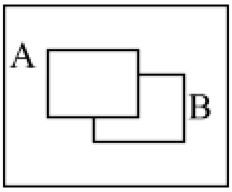


$A \cap \overline{B} = P(A) - (A \cap B).$

$P = P(A \cup \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,80 - 0,48 = 0,32.$

$\underline{P(A \cup \overline{B}) = 0,32}.$

La probabilidad de que no ocurra ni A ni B es $P = (\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B})$.



$\overline{A} \cap \overline{B} = 1 - (A \cup B).$

$P = (\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B) =$

$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - (0,80 + 0,60 - 0,48) = 1 - 0,92 = 0,08$
.

$\underline{P = (\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,08}.$

****

4º) El peso de las lubinas capturadas por los pesqueros de un puerto de la costa gallega se distribuye normalmente con media μ y desviación típica $\sigma = 500$ gramos. Se elige una muestra aleatoria de 25 lubinas de dicho puerto.

a) Se obtienen el intervalo de confianza $(2.083,\ 2.517)$ para la media μ. Calcula el peso medio de las lubinas de la muestra y el nivel de confianza con el que se ha construido el intervalo.

b) Utilizando el peso medio de la muestra obtenido en el apartado anterior, formula un test para contrastar que el peso medio de las lubinas que allí se pescan es por lo menos 2.500 gramos como afirman los pescadores del lugar, frente a que es inferior. ¿A que conclusión se llega con un nivel de significación del 5 %?

----

a)

$$\overline{x} = \frac{2,517+2,083}{2} = \frac{4,600}{2} = 2,3.$$

$\underline{El\ peso\ medio\ de\ las\ lubinas\ es\ de\ 2,3\ kilogramos.}$

$$E = \frac{2,517-2,083}{2} = \frac{0,434}{2} = 0,217.$$

Datos: $n = 25;\ \ \sigma = 0,5;\ \ E = 0,217.$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{0,217 \cdot \sqrt{25}}{0,5} = \frac{1,085}{0,5} = 2,17.$$

Mirando en la tabla $N(0,\ 1)$: $z_{\frac{\alpha}{2}} = 0,9850.$

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - 0,9850 = 0,0150 \Rightarrow \alpha = 2 \cdot 0,0150 = 0,0300.$$

$$1 - \alpha = 1 - 0,0300 = 0,9700.$$

$\underline{El\ nivel\ de\ confianza\ utilizado\ es\ del\ 97\ \%.}$

b)

$\underline{Hipótesis\ nula \rightarrow H_0: \mu \geq 2.500 \qquad Hipótesis\ alternativa \rightarrow H_1:\ \mu < 2.500\ \}.}$

Contraste unilateral.

$\alpha = 0,05 \rightarrow z_{\alpha} = 1,645.$ $\qquad (1 - 0,05 = 0,9500 \rightarrow z_{\alpha} = 1,645).$

Conocemos: $n = 25;\ \ \mu_0 = 2.500;\ \sigma = 500.$

La región de aceptación es $\left(\mu_0 - z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \ +\infty\right)$:

$$\left(2.500 + 1,645 \cdot \frac{500}{\sqrt{25}};\ \ +\infty\right); (2.500 - 1,645 \cdot 100;\ \ +\infty);$$

$$(2.500 - 164,5;\ \ +\infty) \Rightarrow (2.335,5;\ \ +\infty).$$

$$\underline{\overline{x} = 2.300 \notin \left(2.335'5;\ \ +\infty\right) \Rightarrow \mathit{Se\ rechaza\ la\ hipótesis\ nula}.}$$

$$\underline{\mathit{Con\ significación\ del}\ 5\ \%\ \mathit{las\ lubinas\ pesan\ menos\ de}\ 2.500\ \mathit{gramos}.}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JULIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contesta sólo una de las dos opciones propuestas (OCIÓN A/OPCIÓN B).

OPCIÓN A

Parte A1. Responde a cuatro de las cinco preguntas que se plantean a continuación.

1º) ¿Para qué valor o valores del parámetro m el sistema $\{- 2x + y = 1 \quad (m - 1)x + (m + 2)y = 2$ es incompatible? Resolver el sistema para m = 0.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A = (- 2\ 1\ m - 1\ m + 2\ )$ y $A' = (- 2\ 1\ 1\ m - 1\ m + 2\ 2\ )$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro m es el siguiente:

$|A| = |- 2\ 1\ m - 1\ m + 2\ | =- 2m - 4 - m + 1 = 0; \ - 3m - 3 = 0 \Rightarrow m =$
.

$$Para\ m \neq - 1 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A^{'} = 2 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.$$

$Para\ m =- 1 \Rightarrow A^{'} = (- 2\ 1\ 1\ - 2\ 1\ 2\ ) \Rightarrow Rang\ A^{'} = 2.$

$\underline{Para\ m =- 1 \Rightarrow Rang\ A = 1;\ Rang\ A^{'} = 2 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

Para $m = 0$ el sistema resulta $\{- 2x + y = 1 \ - x + 2y = 2$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$x = \frac{|1\ 1\ 2\ 2\ |}{|-2\ 1\ -1\ 2\ |} = \frac{0}{-4+1} = \underline{0}.$ $y = \frac{|-2\ 1\ -1\ 2\ |}{-3} = \frac{-4+1}{-4+1} = \underline{1}.$

****

2º) Sean las matrices $A = (1\ - 2\ - 1\ 3\ )$ y $B = (x\ 1\ 2\ x\ )$.

$a)$ Calcular, para cualquier valor de x, la matriz $C = A^{-1} \cdot B$.

$b)$ ¿Existe algún valor de x para el que la matriz C es igual a su traspuesta?

$a)$

Se obtiene la inversa de A por el procedimiento de Gauss-Jordan:

$(I) = (1\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow F_2 + F_1\right\} \Rightarrow (1\ 0\ 1\ 1\ ) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow F_1 + 2F_2\right\} \Rightarrow (3\ 2\ 1\ 1\ ) \Rightarrow A^{-1} = (3\ 2\ 1\ 1\ )$.

$C = A^{-1} \cdot B = (3\ 2\ 1\ 1\ ) \cdot (x\ 1\ 2\ x\ ) = (3x + 4\ 3 + 2x\ x + 2\ 1 + x\ )$.

$\underline{C = (3x + 4\ 3 + 2x\ x + 2\ 1 + x\ ),\ \forall x \in R}$.

$b)$

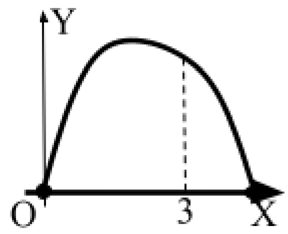
$C = C^t \Rightarrow (3x + 4\ 3 + 2x\ x + 2\ 1 + x\ ) = (3x + 4\ x + 2\ 3 + 2x\ 1 + x\ ) \Rightarrow 3 + 2x =$

$\Rightarrow x = -\ 1$.

$\underline{C = C^t\ para\ x = \ -\ 1}$.

****

3º) Sea $f(x) = \{ \; 4x - x^2, \; x \leq 3 \; \frac{3}{2}(-x + 5), \; x > 3$. Calcular el área limitada por la función $f(x)$ y el eje OX. El área solicitada aparece sombreada en la figura adjunta.



El punto de corte de $f(x)$ con el eje X, además del origen, es el siguiente:

$\frac{3}{2}(-x + 5) = 0; \; -x + 5 = 0; \; x = 5 \Rightarrow P(5, 0).$

De la observación del gráfico dado se deduce el área a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_0^3 \left(4x - x^2\right)dx + \int_3^5 \frac{3}{2} \cdot (-x + 5)dx = \left[\frac{4x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 + \frac{3}{2} \cdot \left[\frac{-x^2}{2} + 5x\right]_3^5 =$$

$$= \left(2 \cdot 3^2 - \frac{3^2}{3}\right) - 0 + \frac{3}{2} \cdot \left[\left(-\frac{5^2}{2} + 5 \cdot 5\right) - \left(-\frac{3^2}{2} + 5 \cdot 3\right)\right] =$$

$$= 18 - 9 + \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{25}{2} + 25 + \frac{9}{2} - 15\right) = 9 + \frac{3}{2} \cdot (-8 + 10) = 9 + 3 = 12.$$

$$\underline{S = 12 \, u^2}.$$

****

4º) Se sabe que en las bodegas de vino de Rioja el número de días necesarios para el proceso de fermentación de la uva en la elaboración de vinos tintos sigue una distribución normal de media 17 días con una desviación típica de 7 días. Con una muestra de 25 bodegas, calcular la probabilidad de que el proceso de fermentación tenga una duración media de entre 15 y 18 días.

$$Para\, n = 25 \rightarrow \overline{X} = N\left(17,\ \frac{7}{\sqrt{25}}\right) = N\left(17,\ \frac{7}{5}\right) = N(17,\ 1'4).$$

Tipificando: $Z = \frac{\overline{X}-17}{7}$.

$$P(15 \leq \overline{X} \leq 18) = P\left(\frac{15-17}{7} \leq \frac{\overline{X}-17}{7} \leq \frac{18-17}{7}\right) = P\left(\frac{-2}{7} \leq \frac{\overline{X}-17}{7} \leq \frac{1}{7}\right) =$$

$$= P(-\ 0,29 \leq Z \leq 0,14) = P(Z \leq 0,14) - P(Z \leq -\ 0,29) =$$

$$= 0,5557 - P(Z \geq 0,29) = 0,5557 - [1 - P(Z < 0,29)] =$$

$$= 0,5557 - 1 + 0,6141 = 1,1698 - 1 = \underline{0,1698}.$$

****

5º) Se dispone de un dado equilibrado de seis caras, que se lanza seis veces con independencia. Calcular la probabilidad de sacar al menos un seis en los seis lanzamientos.

La probabilidad de sacar 6 es $\frac{1}{6}$ y la probabilidad de no sacar 6 es $\frac{5}{6}$.

La probabilidad pedida es igual que uno menos la probabilidad de no sacar ningún 6:

$$P = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 1 - \frac{5^6}{6^6} = 1 - \frac{15.625}{46.656} = 1 - \frac{46.656-15.625}{46.656} = 1 - \frac{31.031}{46.656} =$$

$$= 1 - 0,6651 = \underline{0,3349}.$$

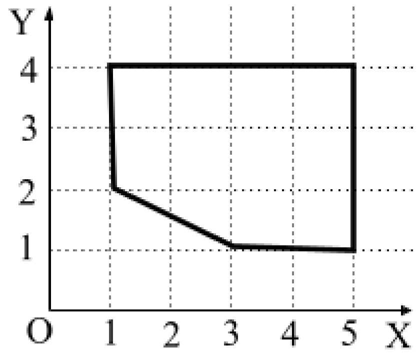
****

Parte A2.- Resuelve <u>los dos problemas</u> que se proponen a continuación.

6º) La región factible asociada a las restricciones impuestas para maximizar la función $f(x,\ y) = 5x - y + 5$ aparece representada en la figura siguiente.

a) Usando la figura, determinar el conjunto de restricciones del problema.

b) Obtener el máximo de la función $f(x,\ y)$ en la región factible.



c) Si añadimos la restricción $x \leq y + 3$, ¿cuál es el máximo de $f(x,\ y)$ en este caso?

----

a)

Una de las restricciones es la recta que pasa por los puntos $P(1,\ 2)$ y $Q(3,\ 1)$. Siendo la recta $y = mx + n \Rightarrow P(1,\ 2) \rightarrow 2 = m + n \ \ Q(3,\ 1) \rightarrow 1 = 3m + n \} \quad -2 = -m - n \quad 1 =$

$\Rightarrow 2m = -1;\ \ m = -\frac{1}{2};\ \ n = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$, o $x + 2y = 5$.

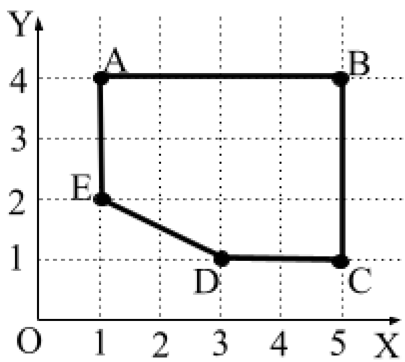
Como quiera que el origen no se encuentra en el semiplano que determina la recta hallada anteriormente, se considera la restricción $x + 2y \geq 5$.

Las restricciones son: $1 \leq x \leq 5 \quad 1 \leq y \leq 4 \ x + 2y \geq 5 \}$ $o\ mejor$: $\underline{1 \leq x,\ x \leq 5\ 1 \leq y,\ y \geq 4 \quad x + 2y \geq 5 \}}$.

b)

Los vértices de la región factible son los siguientes:

$A(1,\ 4)$, $B(5,\ 4)$, $C(5,\ 1)$, $D(3,\ 1)$ y E$(1,\ 2)$.



Para cada uno de los vértices, el valor de la función de objetivos $f(x,\ y) = 5x - y + 5$ es el siguiente:

$A \Rightarrow f(1,\ 4) = 5 \cdot 1 - 4 + 5 = 5 + 1 = 6$.

$B \Rightarrow f(5,\ 4) = 5 \cdot 5 - 4 + 5 = 25 + 1 = 26.$

$C \Rightarrow f(5,\ 1) = 5 \cdot 5 - 1 + 5 = 25 + 4 = 29.$

$D \Rightarrow f(3,\ 1) = 5 \cdot 3 - 1 + 5 = 15 + 4 = 19.$

$E \Rightarrow f(1,\ 2) = 5 \cdot 1 - 2 + 5 = 5 + 3 = 8.$

El valor máximo de la función se obtiene en el punto $C(5,\ 1)$.

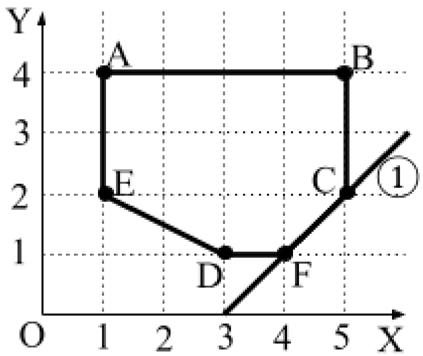
$\underline{El\ valor\ máximo\ de\ la\ función\ de\ objetivos\ es\ 29.}$

$c)$

Si se añade la restricción $x \leq y + 3$ la región de objetivos es la que indica la figura siguiente:

x	3	5
y	0	2

$① \Rightarrow x \leq y + 3 \Rightarrow y \geq x - 3 \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$



Como se observa, añadiendo la restricción $x \leq y + 3$ desaparece el punto D y aparece el punto $F(4,\ 1)$, en el cual la función de objetivos vale lo siguiente:

$F \Rightarrow f(4,\ 1) = 5 \cdot 4 - 1 + 5 = 20 + 4 = 24.$

$\underline{El\ valor\ máximo\ de\ la\ función\ sigue\ siendo\ el\ mismo.}$

****

2º) Se da la función $f(x) = \frac{ax^2}{(x-1)(x-2)}$, donde a es un cierto parámetro real.

a) ¿Cuál es el valor de a si sabemos que la recta $y = 4$ es una asíntota horizontal para la función dada? Justificar la respuesta.

b) Para $a = 1$, estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y determinar sus extremos relativos.

c) Para $a = 1$, calcular $\left[f(x) - \frac{1}{1-x}\right]$.

----

a)

Las asíntotas horizontales de una función racional son los valores finitos a los que tienen la función cuando x tiende a $\pm\infty$.

$$f(x) = \frac{ax^2}{(x-1)(x-2)} = \frac{ax^2}{x^2-3x+2} = 4 \Rightarrow a = 4.$$

$$\underline{La\ recta\ y = 4\ es\ asíntota\ de\ f(x)\ para\ a = 4}.$$

b)

Para $a = 1$ la función es $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)(x-2)} = \frac{x^2}{x^2-3x+2}$.

Una función es creciente o decreciente en un punto cuando el valor de su primera derivada en ese punto es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{2x\cdot\left[x^2-3x+2\right] - x^2\cdot(2x-3)}{(x-1)^2(x-2)^2} = \frac{2x^3-6x^2+4x-2x^3+3x^2}{(x-1)^2(x-2)^2} = \frac{-3x^2+4x}{(x-1)^2(x-2)^2} =$$

$$= \frac{-x\cdot(3x-4)}{(x-1)^2(x-2)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x\cdot(3x-4)}{(x-1)^2(x-2)^2} = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = \frac{4}{3}.$$

Como quiera que el denominador de $f'(x)$ es positivo para cualquier valor real del dominio de la función, que es: $D(f) \Rightarrow R - \{1,\ 2\}$.

Las raíces de la primera derivada dividen la recta real en tres intervalos de signos alternativos. Considerando, por ejemplo, que $f'(3) < 0$ y teniendo en cuanta el dominio de la función, los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función son los siguientes:

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: (-\infty, 0) \cup \left(\frac{4}{3}, 2\right) \cup (2, +\infty)}.$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: (0, 1) \cup \left(1, \frac{4}{3}\right)}.$$

Una función tiene un máximo relativo en un punto cuando se anula la primera derivada y es negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera y, tiene un mínimo relativo para los valores reales que anulan la primera derivada y hacen positiva la segunda derivada.

$$f'(x) = \frac{-3x^2+4x}{(x-1)^2(x-2)^2} = \frac{-3x^2+4x}{[(x-1)(x-2)]^2} = \frac{-x\cdot(3x-4)}{(x^2-3x+2)^2}.$$

$$f''(x) = \frac{(-6x+4)\cdot\left[(x-1)^2(x-2)^2\right]-[-x\cdot(3x-4)]\cdot 2\cdot(x-1)(x-2)\cdot(2x-3)}{(x-1)^4(x-2)^4} =$$

$$= \frac{(-6x+4)\cdot[(x-1)(x-2)]+x\cdot(3x-4)\cdot 2\cdot(2x-3)}{(x-1)^3(x-2)^3} = \frac{(-6x+4)\cdot\left(x^2-3x+2\right)+2x\cdot\left(6x^2-9x-8x+12\right)}{(x-1)^3(x-2)^3} =$$

$$= \frac{-6x^3+18x^2-12x+4x^2-12x+8+12x^3-34x^2+24x}{(x-1)^3(x-2)^3} = \frac{6x^3-12x^2+8}{(x-1)^3(x-2)^3} = \frac{2\left(3x^3-6x^2+4\right)}{(x-1)^3(x-2)^3}.$$

$$f''(0) = \frac{8}{8} = 1 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow \underline{Mínimo: O(0, 0)}.$$

$$f''\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{2\left[3\left(\frac{4}{3}\right)^3-6\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2+4\right]}{\left(\frac{4}{3}-1\right)^3\left(\frac{4}{3}-2\right)^3} = \frac{2\cdot\left(\frac{64}{9}-\frac{32}{3}+4\right)}{\frac{1}{27}\cdot\left(-\frac{8}{27}\right)} = \frac{2\cdot\frac{64-96+36}{9}}{-\frac{8}{27^2}} = \frac{\frac{8}{9}}{-\frac{8}{27^2}} < 0 \Rightarrow Máx.\ rela-$$

$$\text{-}tivo\ para\ x = \frac{4}{3}.$$

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2}{\left(\frac{4}{3}-1\right)\left(\frac{4}{3}-2\right)} = \frac{\frac{16}{9}}{\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{\frac{16}{9}}{-\frac{2}{9}} = -8 \Rightarrow \underline{Máximo: A\left(\frac{4}{3}, -8\right)}.$$

$c)$

$$\left[f(x) - \frac{1}{1-x}\right] = \left[\frac{x^2}{(x-1)(x-2)} + \frac{1}{x-1}\right] = \frac{x^2+x-2}{(x-1)(x-2)}. \quad (*)$$

$$x^2 + x - 2 = 0;\ x = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 1.$$

$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$. Sustituyendo este valor en (*):

$$\left[f(x) - \frac{1}{1-x}\right] = \frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x+2}{x-2} = \frac{1+2}{2-1} = 3.$$

$$\underline{\left[f(x) - \frac{1}{1-x}\right] = 3} \quad .$$

****

OPCIÓN B

Parte A1. Responde a cuatro de las cinco preguntas que se plantean a continuación.

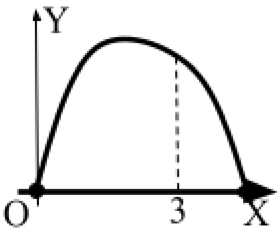
1º) ¿Para qué valor o valores del parámetro m el sistema $\{- 2x + y = 1 \quad (m - 1)x + (m + 2)y = 2$ es incompatible? Resolver el sistema para m = 0.

2º) Sean las matrices $A = (1 \;\; - 2 \;\; - 1 \; 3\,)$ y $B = (x\; 1\; 2\; x\,)$.

$a)$ Calcular, para cualquier valor de x, la matriz $C = A^{-1} \cdot B$.

$b)$ ¿Existe algún valor de x para el que la matriz C es igual a su traspuesta?

3º) Sea $f(x) = \{\; 4x - x^2, \;\; x \leq 3 \; \frac{3}{2}(- x + 5), \; x > 3$. Calcular el área limitada por la función $f(x)$ y el eje OX. El área solicitada aparece sombreada en la figura adjunta.



4º) Se sabe que en las bodegas de vino de Rioja el número de días necesarios para el proceso de fermentación de la uva en la elaboración de vinos tintos sigue una distribución normal de media 17 días con una desviación típica de 7 días. Con una muestra de 25 bodegas, calcular la probabilidad de que el proceso de fermentación tenga una duración media de entre 15 y 18 días.

5º) Se dispone de un dado equilibrado de seis caras, que se lanza seis veces con independencia. Calcular la probabilidad de sacar al menos un seis en los seis lanzamientos.

(Resueltos en el apartado anterior)

Parte A2.- Resuelve los dos problemas que se proponen a continuación.

6º) Una agencia de viajes ofrece tres tipos de paquetes a un mismo destino: PA, PB y PC. Los precios (en centenares de euros) son: 20 para el paquete PA, 18 para el paquete PB y 16 para el paquete PC. El número total de paquetes contratados durante este mes ha sido 22 y los ingresos obtenidos por la venta de estos paquetes ha sido de 386 (en centenares de euros). Si el número de paquetes contratados de tipo PC es el doble que el de PA, se pide:

a) Plantear el sistema de ecuaciones que determina el número de paquetes de cada tipo contratados.

b) Resolver el sistema de ecuaciones planteado en el apartado anterior.

c) Si el coste para la agencia de viajes de los paquetes PA es de 15, de los PB es de 14 y de los PC es de 13 (siempre en centenares de euros), ¿cuál ha sido el beneficio de la agencia derivado de la venta de estos paquetes durante este mes? Nota: para calcular los beneficios debes aplicar que Beneficios = Ingresos – Costes.

----

a)

Sean x, y, z el número de paquetes de los tipos PA, PB y PC que ofrece la agencia durante este mes, respectivamente.

$$x + y + z = 22 \quad 20x + 18y + 16z = 386 \qquad z = 2x \}$$

.

b)

$z = 2x \Rightarrow \quad x + y + 2x = 22 \quad 10x + 9y + 16x = 193 \} \quad 3x + y = 22 \quad 26x +$

$\Rightarrow 26x + 9 \cdot (22 - 3x) = 193;\ \ 26x + 198 - 27x = 193;\ \ -x = -5 \Rightarrow x = 5.$

$y = 22 - 15 = 7;\ \ z = 10.$

$$\underline{La\ agencia\ ofrece\ 5\ viajes\ PA,\ 7\ viajes\ PB\ y\ 10\ viajes\ PC.}$$

c)

El coste total para la agencia es el siguiente:

$C = 5 \cdot 15 + 7 \cdot 14 + 10 \cdot 13 = 75 + 98 + 130 = 303.$

$B = I - C = 386 - 303 = 83.$

$$\underline{El\ beneficio\ de\ la\ agencia\ es\ de\ 830\ euros.}$$

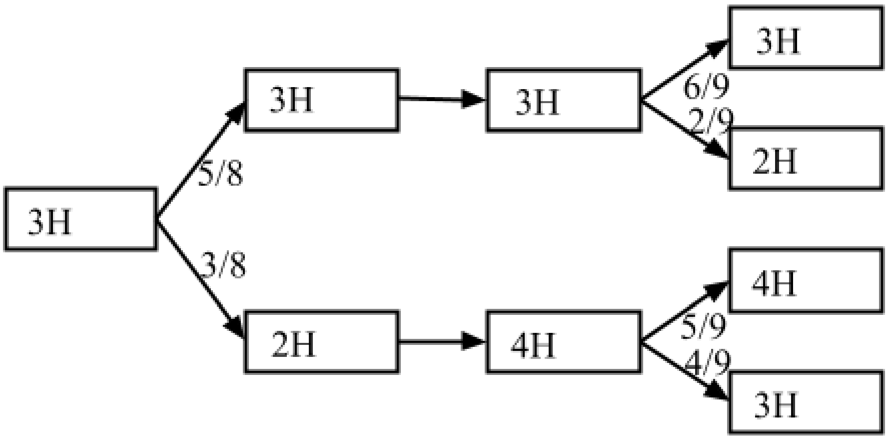
****

2º) En un estudio sobre hábitos de apareamiento entre ratones, se introducen en una jaula cinco ratones macho y tres ratones hembra. Se extrae uno de ellos aleatoriamente y se colocan en la jaula otros dos ratones del mismo sexo que el eliminado. Hecho esto, se elimina, también al azar, otro de los ratones.

a) Calcula la probabilidad de que el segundo ratón eliminado sea hembra.

b) Calcula la probabilidad de que en ambas eliminaciones se hayan extraído dos ratones del mismo sexo.

c) Si el segundo ratón eliminado ha sido una hembra, calcula la probabilidad de que el primero también lo haya sido.



a)

$$P = P_{MH} + P_{HH} = \frac{5}{36} + \frac{1}{6} = \frac{5+6}{36} = \underline{\frac{11}{36}}.$$

b)

$$P = P_{MM} + P_{HH} = \frac{5}{12} + \frac{1}{6} = \frac{5+2}{12} = \underline{\frac{7}{12}}.$$

c)

La probabilidad de que el primer eliminado sea hembra es: $\frac{3}{8}$.

$$P = \frac{\frac{11}{36}}{\frac{11}{36}+\frac{3}{8}} = \frac{\frac{22}{72}}{\frac{22+27}{72}} = \underline{\frac{22}{49}}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JUNIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contesta sólo una de las dos opciones propuestas (OCIÓN A/OPCIÓN B).

OPCIÓN A

Responde a cuatro de las cinco preguntas que se plantean a continuación.

1ª) Mi amigo Diego dice que la función $f(x) = \{- 2ax^2 + 4bx + 1 \ si\, x > 1 \quad ax + b \quad si\, 1 \geq x \geq - 1 \ 2ax^2 + 2bx - 1 \ si\, x$, con a y b números reales, no es continua para ninguna pareja de valores a y b. Yo le he dicho que no tiene razón y que es continua para infinitas parejas de valores de a y b. ¿Quién de los dos tiene razón? Argumenta tu respuesta.

La función f(x) es continua en $R \forall a,\ b$. Se trata de determinar los valores de α y b para que sea continua en los puntos críticos $x = - 1$ y $x = 1$.

Para que una función sea continua en un puntos es necesario que sus límites laterales en ese punto sean iguales e igual al valor de la función en ese punto.

$$f(x) = \left(2ax^2 + 2bx - 1\right) = 2a - 2b - 1\, f(x) = \lim_{x \to -1^+} (ax + b) = - a + b$$

$\Rightarrow 2a - 2b - 1 = - a + b;\ \ 3a - 3b = 1.$ (1)

$f(x) = (ax + b) = a + b = f(1)$ $f(x) = \left(- 2ax^2 + 4bx + 1\right) = - 2a +$

$\Rightarrow a + b = - 2a + 4b + 1;\ \ 3a - 3b = 1.$ (2)

La igualdad de las expresiones (1) y (2) indica que el "sistema" que forman tiene infinitas soluciones.

Lo anterior demuestra que:

Mi amigo Diego no tiene razón, tengo razón yo.

****

2ª) Si $A = (-\ 4\,6\ \ -\ 3\,5\,)$, calcula las matrices $A - I_2 - 2A^{-1}$ y $\left(A - 2A^{-1}\right)^{2016}$.
Nota: I_2 denota la matriz identidad de orden dos y A^{-1} la matriz inversa de A.

$A = (-\ 4\,6\ \ -\ 3\,5\,)$. $\quad |A| = |-\ 4\,6\ \ -\ 3\,5\,| =-\ 20 + 18 =-\ 2.$
$A^t = (-\ 4\ \ -\ 3\,6\,5\,).$

$Adj.\ de\ A^t = (5\ \ -\ 6\,3\ \ -\ 4\,) \Rightarrow A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{1}{-2}\cdot(5\ \ -\ 6\,3\ \ -\ 4\,).$

$A - I_2 - 2A^{-1} = (-\ 4\,6\ \ -\ 3\,5\,) - (1\,0\,0\,1\,) - 2\cdot\frac{1}{-2}\cdot(5\ \ -\ 6\,3\ \ -\ 4\,) =$

$= (-\ 5\,6\ \ -\ 3\,4\,) + (5\ \ -\ 6\,3\ \ -\ 4\,) = (0\,0\,0\,0\,).$

$$\underline{A - I_2 - 2A^{-1} = (0\,0\,0\,0\,).}$$

$A - 2A^{-1} = (-\ 4\,6\ \ -\ 3\,5\,) - 2\cdot\frac{1}{-2}(5\ \ -\ 6\,3\ \ -\ 4\,) = (-\ 4\,6\ \ -\ 3\,5\,) + (5\ \ -$
.

$$\underline{\left(A - 2A^{-1}\right)^{2016} = I^{2016} = I}$$

****

3ª) Se sabe que la edad de los trabajadores de las fábricas de calzado de la zona de Arnedo sigue una distribución normal de desviación típica 10. Con una muestra de trabajadores elegida al azar se ha obtenido una media de 42 años. Si el intervalo de confianza al 90 % para la media de edad es $(39'25,\ 44'75)$, ¿cuál ha sido el tamaño de la muestra utilizada? (Véase la Tabla simplificada para la normal tipificada al final del examen)

Conocemos: El intervalo de confianza del cual obtenemos el error:

$E = 42 - 39,25 = 2,75.$ Desviación típica: $\sigma = 10.$

Para un nivel de confianza del 90 % es $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,645.$

$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 1 - 0,90 = 0,10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,05} = 1,645.$

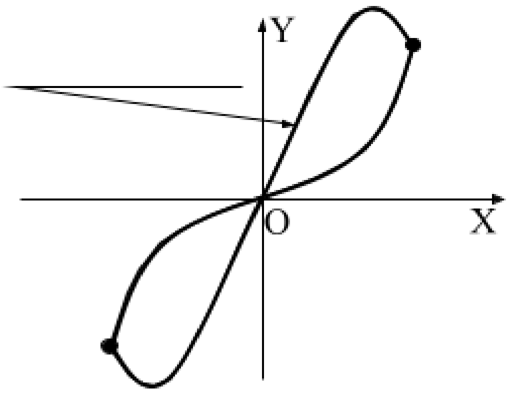
$(1 - 0,05 = 0,9500 \rightarrow z = 1,645).$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1,645 \cdot 10}{2,75}\right)^2 = 5,98^2 = 35,78.$$

$\underline{\textit{El tamaño de la muestra debe ser de al menos } 36 \textit{ trabajadores}.}$

****

4ª) Calcula el área de la región limitada por las curvas $y = x^3$ e $y = x\left(8 - x^2\right)$. En la figura adjunta se muestra sombreada la región cuya área se solicita.



Las dos curvas son funciones impares, o sea, que son simétricas con respecto al origen de coordenadas.

Los puntos de corte de ambas curvas son los siguientes:

$$y = x^3 \qquad y = x\left(8 - x^2\right)\} \Rightarrow x^3 = x\left(8 - x^2\right);\ \ x^3 = 8x - 8x^3;\ \ 9x^3 - 8x = 0;$$

$$x\left(9x^2 - 8\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow O(0,\ 0);\ \ 9x^2 - 8 = 0;\ \ 9x^2 = 8;\ \ x^2 = \frac{8}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{x_2 = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow A\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3},\ -\frac{16\sqrt{2}}{27}\right) x_3 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow B\left(\frac{2\sqrt{2}}{3},\ \frac{16\sqrt{2}}{27}\right) .$$

Considerando la simetría de las curvas y teniendo en cuenta que en el intervalo $\left(0,\ \frac{16\sqrt{2}}{27}\right)$ las ordenadas de la curva $y = x\left(8 - x^2\right)$ son mayores que las correspondientes ordenadas de la curva $y = x^3$, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = 2\cdot\int_0^{\frac{2\sqrt{2}}{3}} \left[x\left(8 - x^2\right) - x^3\right]\cdot dx = 2\cdot\int_0^{\frac{2\sqrt{2}}{3}} \left(8x - x^3 - x^3\right)\cdot dx =$$

$$= 2\cdot\int_0^{\frac{2\sqrt{2}}{3}} \left(8x - 2x^3\right)\cdot dx = 2\cdot\left[\frac{8x^2}{2} - \frac{2x^4}{4}\right]_0^{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = 2\cdot\left[4x^2 - \frac{x^4}{2}\right]_0^{\frac{2\sqrt{2}}{3}} =$$

$$= 2\cdot\left[4\cdot\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 - \frac{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^4}{2}\right] = 2\cdot\left(4\cdot\frac{8}{9} - \frac{64}{2\cdot 81}\right) = 2\cdot\frac{32}{9}\cdot\left(1 - \frac{2}{18}\right) = \frac{64}{9}\cdot\left(1 - \frac{1}{9}\right) =$$

$$= \frac{64}{9} \cdot \frac{8}{9} = \frac{512}{81}.$$

$$\underline{S = \frac{512}{81}\, u^2 \cong 6,32\, u^2.}$$

****

5ª) Para la próxima temporada de otoño-invierno, el programador del Teatro Timorato debe seleccionar tres espectáculos de entre dieciséis propuestas que ha recibido y, puesto que le gustan todas, ha decidido hacer la selección por sorteo. Como estamos en el año de Cervantes, entre las propuestas recibidas hay seis inspiradas o basadas en textos de dicho autor. ¿Qué probabilidad tiene de programar al menos un espectáculo cervantino?

El suceso contrario a elegir al menos un espectáculo cervantino es no elegir ningún espectáculo cervantino.

La probabilidad de elegir de entre los tres espectáculos al menos uno cervantino es equivalente a la unidad menos la probabilidad de no elegir ningún espectáculo cervantino:

$$P = 1 - \frac{C_{10,3}}{C_{16,3}} = 1 - \frac{\binom{10}{3}}{\binom{16}{3}} = 1 - \frac{\frac{10!}{(10-3)!\cdot 3!}}{\frac{16!}{(16-3)!\cdot 3!}} = 1 - \frac{\frac{10!}{7!}}{\frac{16!}{13!}} = 1 - \frac{10\cdot 9\cdot 8}{16\cdot 15\cdot 14} = 1 - \frac{5\cdot 3\cdot 4}{8\cdot 5\cdot 7} =$$

$$= 1 - \frac{3\cdot 1}{2\cdot 7} = 1 - \frac{3}{14} = \frac{14-3}{14} = \frac{11}{14}.$$

$$\underline{P = \frac{11}{14}.}$$

****

Resuelve los dos problemas que se plantean a continuación.

1º) Consideramos el sistema de ecuaciones lineales $\{(1+a)x+(2-a)y+z=2\ 2ax+y+z=2 \quad (1-a)x+(1-a)y$
:

a) Determinar los valores del parámetro a para los que el sistema es compatible determinado.

b) ¿Existe algún valor de a para el que el sistema es compatible indeterminado?, ¿e incompatible?

c) Resolver el sistema para $a = 1$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$M = (1+a\ 2-a\ 1\ 2a\ 1\ 1\ 1-a\ 1-a\ 1)$ y $M' = (1+a\ 2-a\ 1\ 2a\ 1\ 1\ 1-a\ 1-a\ 1 \quad 2\ 2\ 3)$.

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$|M| = |1+a\ 2-a\ 1\ 2a\ 1\ 1\ 1-a\ 1-a\ 1| =$

$1+a+2a(1-a)+(2-a)(1-a)-(1-a)-(1-a)(1+a)-2a(2-a)=$

$= 1+a+2a-2a^2+2-2a-a+a^2-1+a-\left(1-a^2\right)-4a+2a^2 =$

$= 2+a^2-3a-1+a^2 = 2a^2-3a+1 = 0;\ a = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2\cdot2} = \frac{3\pm\sqrt{1}}{4} = \frac{3\pm1}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = 1.$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$Para\ \{a\neq½\ a\neq1\}\Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg.\Rightarrow S.\ C.\ D.$

$\underline{El\ sistema\ es\ compatible\ determinado\ para\ a = ½\ y\ para\ a = 1}.$

b)

Para α = ½ es $M' = \left(\frac{3}{2}\ \frac{1}{2}\ 1\ 1\ 1\ 1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 1 \quad 2\ 2\ 3\right)\Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \left\{C_1,\ C_3,\ C_4\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow \left|\frac{3}{2}\ 1\ 2\ 1\ 1\ 2\ \frac{1}{2}\ 1\ 2\right| = \frac{1}{2}|3\ 1\ 2\ 2\ 1\ 2\ 1\ 1\ 3| = \frac{1}{2}(9+4+2-2-6-6) = \frac{1}{2}\neq0 =$

.

$$Para\ a\ =\ ½ \Rightarrow Ran\ M\ =\ 2;\ Ran\ M'\ =\ 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.$$

Para α = 1 es $M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 = F_2\} \Rightarrow Rang\ M'\ =\ 2$

$$Para\ a\ =\ 1 \Rightarrow Ran\ M\ =\ Ran\ M'\ =\ 2\ <\ nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.$$

$$\underline{El\ sistema\ es\ compatible\ indeterminado\ para\ a\ =\ 1.}$$

$$\underline{El\ sistema\ es\ incompatible\ para\ a\ =\ ½.}$$

c)

Para α = 1 el sistema es $\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 2x + y + z = 2 \\ z = 3 \end{cases}$, que es compatible indeterminado, según se ha visto en el apartado anterior.

$$\underline{Solución: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 - 2\lambda \\ z = 3 \end{cases}, \forall \lambda \in R.}$$

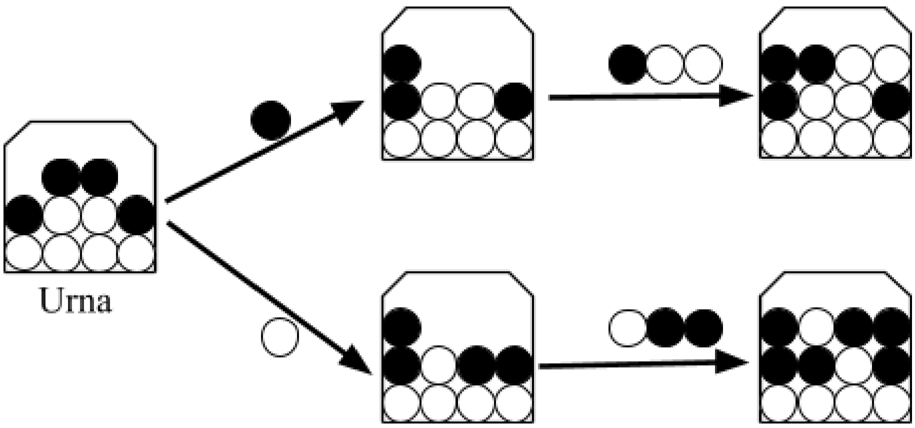
****

2º) Una urna contiene seis bolas rojas y cuatro negras. Se extrae una de ellas al azar y se introducen en la urna una bola del color de la extraída y dos del otro color. Tras la reposición, se extrae una segunda bola.

a) Calcula la probabilidad de sacar una bola roja en la segunda extracción.

b) Calcula la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color.

c) Si en la segunda extracción hemos sacado una bola roja, calcula la probabilidad de que en la primera también lo haya sido.



a)

$$P = \frac{4}{10} \cdot \frac{8}{12} = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \underline{\frac{4}{15}}.$$

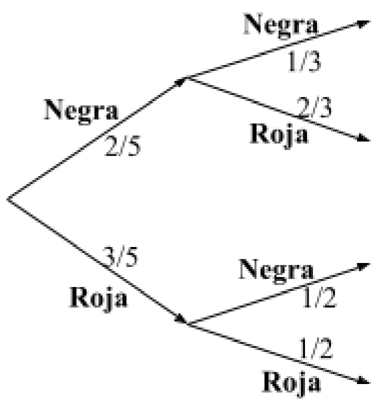
b)

$$P = P(RN) + P(NR) = \frac{4}{10} \cdot \left(\frac{8}{12} \cdot \frac{4}{11} + \frac{4}{12} \cdot \frac{7}{11}\right) + \frac{8}{12} \cdot \left(\frac{8}{12} \cdot \frac{4}{11} + \frac{4}{12} \cdot \frac{7}{11}\right) =$$

$$= \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{11} + \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{11}\right)\left(\frac{4}{10} + \frac{8}{12}\right) = \left(\frac{8}{33} + \frac{7}{33}\right)\left(\frac{2}{5} + \frac{2}{3}\right) = \frac{15}{33} \cdot \frac{6+10}{15} = \frac{5}{11} \cdot \frac{16}{15} = \underline{\frac{16}{33}}$$

.

c)



$$P=\frac{\frac{4}{15}}{\frac{4}{15}+\frac{3}{10}}=\frac{\frac{4}{15}}{\frac{16+18}{60}}=\frac{4\cdot 60}{15\cdot 34}=\frac{4\cdot 4}{1\cdot 34}=\underline{\frac{8}{34}}.$$

****

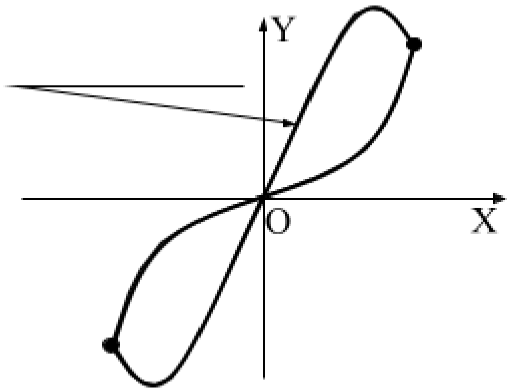
OPCIÓN B

Responde a cuatro de las cinco preguntas que se plantean a continuación.

1ª) Mi amigo Diego dice que la función $f(x) = \begin{cases} -2ax^2 + 4bx + 1 & si\ x > 1 \\ ax + b & si\ 1 \geq x \geq -1 \\ 2ax^2 + 2bx - 1 & si\ x \end{cases}$, con a y b números reales, no es continua para ninguna pareja de valores a y b. Yo le he dicho que no tiene razón y que es continua para infinitas parejas de valores de a y b. ¿Quién de los dos tiene razón? Argumenta tu respuesta.

2ª) Si $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, calcula las matrices $A - I_2 - 2A^{-1}$ y $\left(A - 2A^{-1}\right)^{2016}$. Nota: I_2 denota la matriz identidad de orden dos y A^{-1} la matriz inversa de A.

3ª) Se sabe que la edad de los trabajadores de las fábricas de calzado de la zona de Arnedo sigue una distribución normal de desviación típica 10. Con una muestra de trabajadores elegida al azar se ha obtenido una media de 42 años. Si el intervalo de confianza al 90 % para la media de edad es $(39'25,\ 44'75)$, ¿cuál ha sido el tamaño de la muestra utilizada? (Véase la Tabla simplificada para la normal tipificada al final del examen)



4ª) Calcula el área de la región limitada por las curvas $y = x^3$ e $y = x\left(8 - x^2\right)$. En la figura adjunta se muestra sombreada la región cuya área se solicita.

5ª) Para la próxima temporada de otoño-invierno, el programador del Teatro Timorato debe seleccionar tres espectáculos de entre dieciséis propuestas que ha recibido y, puesto que le gustan todas, ha decidido hacer la selección por sorteo. Como estamos en el año de Cervantes, entre las propuestas recibidas hay seis inspiradas o basadas en textos de dicho autor. ¿Qué probabilidad tiene de programar al menos un espectáculo cervantino?

****

(Resueltos en la opción A anterior)

Resuelve los dos problemas que se plantean a continuación.

1º) Sea la función $f(x) = \frac{-x}{x^2+b}$, donde supondremos que b es un valor real no nulo.

a) Determinar b si la recta tangente a la función dada en x = 1 es paralela a la recta $y = x + 6.102$.

b) Para b = 2, calcular $\left[\frac{1}{f(x)} + x - 2\right]$.

c) Para b = 4, estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función y determinar sus extremos relativos.

----

a)

La pendiente de la tangente $y = x + 6.102$ es $m = 1$.

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = \frac{-1\cdot\left(x^2+b\right)+x\cdot 2x}{\left(x^2+b\right)^2} = \frac{-x^2-b+2x^2}{\left(x^2+b\right)^2} = \frac{x^2-b}{\left(x^2+b\right)^2}.$$

$$f'(1) = m = 1 \Rightarrow \frac{1^2-b}{\left(1^2+b\right)^2} = \frac{1-b}{(1+b)^2} = 1;\ \ 1 - b = 1 + 2b + b^2;\ \ b^2 + 3b = 0;$$

$$b(b + 3) = 0 \Rightarrow b_1 = 0,\ b_2 = -3.$$

$$\underline{Cumplen\ lo\ pedido\ los\ valores\ b = 0\ y\ b = -3}.$$

b)

Para b = 2 es $f(x) = \frac{-x}{x^2+2}$.

$$\left[\frac{1}{f(x)} + x - 2\right] = \left(\frac{1}{\frac{-x}{x^2+2}} + x - 2\right) = \left(-\frac{x^2+2}{x} + x - 2\right) =$$

$$= \frac{-x^2-2+x^2-2x}{x} = \frac{-2x-2}{x} = -2.$$

$$\underline{\left[\frac{1}{f(x)} + x - 2\right] = -2.}$$

c)

Para b = 4 es $f(x) = \frac{-x}{x^2+4}$ y $f'(x) = \frac{x^2-4}{\left(x^2+4\right)^2}$.

Una función es creciente o decreciente en un punto cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente, en ese punto.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2-4}{\left(x^2+4\right)^2} = 0;\ \ x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 2.$$

Teniendo en cuenta que f(x) es continua en R por ser una función racional cuyo denominador es distinto de cero para cualquier valor real de x, los valores que anulan la primera derivada dividen el dominio de la función en tres intervalos crecientes o decrecientes de forma alternativa.

Teniendo en cuenta que, por ejemplo, $f'(0) = -\frac{4}{16} < 0$, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon (-2, 2)}.$$

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo en un punto es que se anule su primera derivada:

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para el valor que anula la primera derivada, se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo relativo.

$$f''(x) = \frac{2x\cdot\left(x^2+4\right)-\left(x^2-4\right)\cdot 2\cdot\left(x^2+4\right)\cdot 2x}{\left(x^2+4\right)^4} = \frac{2x-4x\cdot\left(x^2-4\right)}{\left(x^2+4\right)^3} = \frac{2x-4x^3+16x}{\left(x^2+4\right)^3} = \frac{2x\left(9-2x^2\right)}{\left(x^2+4\right)^3}.$$

$f''(-2) = \frac{-4\cdot(9-8)}{(4+4)^3} = \frac{-4}{8^3} < 0 \Rightarrow$ **Máximo relativo para x = -2**.

$$f(-2) = \frac{2}{4+4} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \Rightarrow Máximo\ relativo:\ \underline{A\left(-2,\ \frac{1}{4}\right)}.$$

$f''(2) = \frac{4\cdot(9-8)}{(4+4)^3} = \frac{4}{8^3} > 0 \Rightarrow$ **Mínimo relativo para x = 2**.

$$f(2) = \frac{x^2-4}{\left(2^2+4\right)^2} = \frac{4-4}{8^2} = \frac{0}{8^2} = 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo:\ \underline{B(2,\ 0)}.$$

****

2º) En un colegio de educación infantil deben solicitar la ayuda de las madres y los padres de los niños para realizar una actividad en el centro. Los profesores tienen una serie de necesidades y se han impuesto las siguientes limitaciones:

1.- El número de padres debe ser igual o mayor que el de madres.

2.- La diferencia entre el número de padres y el doble del número de madres debe ser menor o igual que cuatro.

3.- El número total de madres y padres debe ser al menos cuatro pero no exceder de 10.

Echa una mano a los profesores y resuelve las siguientes cuestiones:

a) Plantea el conjunto de restricciones del problema.

b) Dibuja la región factible asociada con las restricciones anteriores.

c) Si las madres pueden dedicar, de media, cuatro horas a la actividad y los padres tres, ¿cuál debe ser la distribución de padres y madres por la que deben optar los profesores para maximizar el tiempo dedicado por las familias a la actividad?

----

a)

Sean x e y el número de padres y madres del colegio, respectivamente.

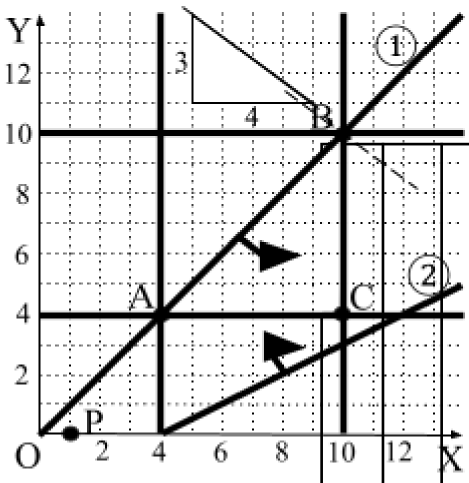
Las condiciones del ejercicio se establecen en el siguiente sistema de inecuaciones:

$$x \geq y \; x - 2y \leq 4 \; 4 \leq x \leq 10 \; 4 \leq y \leq 10 \; \}$$

$\underline{x - y \geq 0 \; x - 2y \leq 4 \; 4 \leq x \leq 10 \; 4 \leq y \leq 10 \; \}}$.

b)

$1 \Rightarrow x - y \geq 0 \Rightarrow y \leq x \Rightarrow$



x	0	10
y	0	10

$\Rightarrow P(1,\ 0) \rightarrow Si \Rightarrow$

x	4	10

y	0	3

$$② \Rightarrow x - 2y \leq 4 \Rightarrow$$

$\Rightarrow y \leq \frac{x-4}{2} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

La región factible es la zona sombreada de la figura adjunta.

$c)$

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 4 \\ y = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow A(4,\ 4).$ $\quad$ $B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 10 \\ y = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow B(10,\ 10).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 10 \\ y = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow C(10,\ 4).$

La función de objetivos es: $f(x,\ y) = 3x + 4y.$

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(4,\ 4) = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 12 + 16 = 28.$

$B \Rightarrow f(10,\ 10) = 3 \cdot 10 + 4 \cdot 10 = 30 + 40 = 70.$

$C \Rightarrow f(10,\ 4) = 3 \cdot 10 + 4 \cdot 4 = 30 + 16 = 46.$

El máximo se produce en el punto B.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,\ y) = 3x + 4y = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x \Rightarrow m = -\frac{3}{4}.$$

$\underline{\textit{Los más conveniente es que padres y madres dediquen } 10 \textit{ horas semanales}.}$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MADRID

JUNIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger uno de las dos opciones propuestas y responder a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.

OPCIÓN A

1º) Considérense las matrices $A = (3\ 2\ 2\ 1\ 7\ 4\ 4\ 5\ 2\ ),\ B = (2\ 1\ 5\ 3\ 0\ 1\ )\ y\ C = (2\ 4\ 8\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ )$.

a) Calcúlese el determinante de la matriz $A \cdot C \cdot C^t \cdot A^{-1}$.

b) Calcúlese la matriz $M = A \cdot B$. ¿Existe M^{-1}?

Nota: C^tdenota la matriz traspuesta de C.

----

a)

Teniendo en cuenta que el determinante de un producto de matrices es igual que el producto de los determinantes de las matrices; que el determinante de la traspuesta de una matriz es igual que el determinante de la matriz y que $\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$:

$$\left|A \cdot C \cdot C^t \cdot A^{-1}\right| = |A| \cdot |C| \cdot \left|C^t\right| \cdot \frac{1}{|A|} = |C| \cdot \left|C^t\right| = 2 \cdot |C| = 2 \cdot |2\ 4\ 8\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ | =$$
$$= 2 \cdot 2 = 4.$$

$$\underline{\left|A \cdot C \cdot C^t \cdot A^{-1}\right| = 4}.$$

b)

$$M = A \cdot B = (3\ 2\ 2\ 1\ 7\ 4\ 4\ 5\ 2\ ) \cdot (2\ 1\ 5\ 3\ 0\ 1\ ) = \underline{(16\ 11\ 37\ 26\ 33\ 21\ )}.$$

<u>La matriz M no puede tener inversa por no ser cuadrada.</u>

****

2º) Sea S la región del plano definida por: $y + x \leq 5;\ y - x \leq 3;\ \frac{1}{2}x - y \leq -2$.

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x,\ y) = 2x + y$ en la región S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

----

a)

$$\left.\begin{array}{l} y + x \le 5 \\ y - x \le 3 \\ \frac{1}{2}x - y \le -2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x + y \le 5 \\ -x + y \le 3 \\ x - 2y \le -4 \end{array}\right\}$$

.

x	0	5
y	5	0

① $\Rightarrow x + y \le 5 \Rightarrow y \le 5 - x \Rightarrow O(0,\ 0) \to Si.$

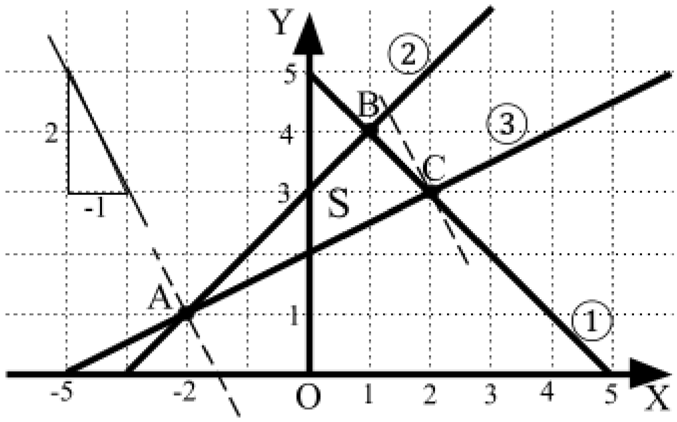
x	0	3
y	3	6

② $\Rightarrow -x + y \le 3 \Rightarrow y \le x + 3 \Rightarrow O(0,\ 0) \to Si.$

x	0	4
y	2	4

③ $\Rightarrow x - 2y \le -4 \Rightarrow y \le \frac{x+4}{2} \Rightarrow O(0,\ 0) \to No.$

Los vértices de la sección factible son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -x + y = 3 \\ x - 2y = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{A(-2,\ 1)}.$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 5 \\ -x + y = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{B(1,\ 4)}.$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 5 \\ x - 2y = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{C(2,\ 3)}.$

b)

Los valores de la función de objetivos, $f(x,\ y) = 2x + y$, en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(-2,\ 1) = 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 = -4 + 1 = -3.$

$B \Rightarrow f(1,\ 4) = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 2 + 4 = 6.$

$C \Rightarrow f(2,\ 3) = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 4 + 3 = 7.$

$$\underline{El\ máximo\ es\ 7\ y\ se\ produce\ en\ el\ punto\ \ C}.$$

$$\underline{El\ mínimo\ es\ -3\ y\ se\ produce\ en\ el\ punto\ \ A}.$$

También se hubieran obtenido el punto A como mínimo y C como máximo por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = 2x + y = 0 \Rightarrow y = -2x \Rightarrow m = -2.$

****

3º) Se considera la función real de variable real $f(x) = x^3 + 8$.

$a)$ Determínese el área de la región acotada delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y por las rectas $x =- 3$ y $x =- 1$.

$b)$ Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

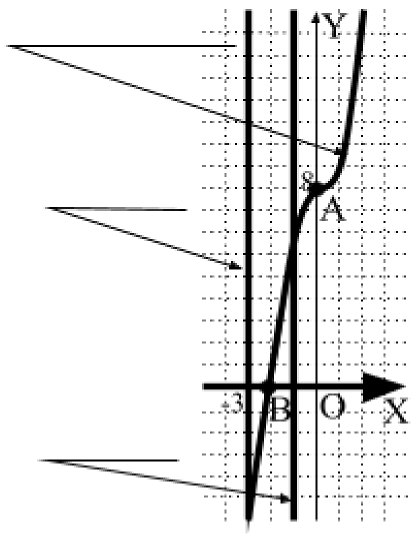
$a)$

El punto de corte de la función con el eje de ordenadas es $A(0,\ 8)$.

El punto de corte de la función con el eje de abscisas es B$(- 2,\ 0)$.

La representación gráfica, aproximada, de la situación es la que indica la figura adjunta.

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:



$$S =- \int_{-3}^{-2} f(x)\cdot dx + \int_{-2}^{-1} f(x)\cdot dx =$$

$$= \int_{-2}^{-3} \left(x^3 + 8\right)\cdot dx + \int_{-2}^{-1} (x^3 + 8)\cdot dx = \left[\frac{x^4}{4} + 8x\right]_{-2}^{-3} + \left[\frac{x^4}{4} + 8x\right]_{-2}^{-1} =$$

$$= \frac{(-3)^4}{4} + 8\cdot(- 3) - \left[\frac{(-2)^4}{4} + 8\cdot(- 2)\right] + \frac{(-1)^4}{4} + 8\cdot(- 1) - \left[\frac{(-2)^4}{4} + 8\cdot(- 2)\right] =$$

$$= \frac{81}{4} - 24 - \frac{16}{4} + 16 + \frac{1}{4} - 8 - \frac{16}{2} + 16 = \frac{50}{4} = \underline{\frac{25}{2}\, u^2 = 12,5\, u^2}.$$

$b)$

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow m = f'(1) = 3\cdot1^2 = 3\cdot1 = 3.$$

El punto de tangencia es el siguiente: $f(1) = 1^3 + 8 = 9 \Rightarrow P(1,\ 9)$.

La recta que pasa por un punto conocida la pendiente es $y - y_0 = m\left(x - x_0\right)$

:

$$y - 9 = 3 \cdot (x - 1) = 3x - 3 \Rightarrow \underline{Tangente:\ t \equiv 3x - y + 6 = 0}.$$

****

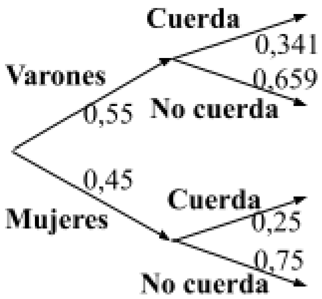
4º) Una conocida orquesta sinfónica está compuesta por un 55 % de varones y un 45 % de mujeres. En la orquesta un 30 % de los instrumentos son de cuerda. Un 25 % de las mujeres de la orquesta interpreta un instrumento de cuerda. Calcúlese la probabilidad de que un intérprete de dicha orquesta elegido al azar:

a) Sea una mujer si se sabe que es intérprete de un instrumento de cuerda.

b) Sea intérprete de un instrumento de cuerda y sea varón.

Siendo x el % de hombres que tocan instrumentos de cuerda, tiene que ser:

$$0,55 \cdot x + 0,45 \cdot 0,25 = 0,30 \Rightarrow x = \frac{0,30 - 0,45 \cdot 0,25}{0,55} = \frac{0,1875}{0,55} = 0,341.$$



a)

$$P(M|C) = \frac{P(C|M) \cdot P(M)}{P(C)} = \frac{0,25 \cdot 0,45}{0,3} = \frac{0,1125}{0,3} = \underline{0,3750}.$$

b)

$$P(V \cap C) = 0,55 \cdot 0,341 = \underline{0,1875}.$$

****

5º) La producción diaria de leche, medida en litros, de una granja familiar de ganado vacuno se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 50$ litros.

a) Determínese el tamaño mínimo de la muestra aleatoria simple para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 95 % tenga una amplitud a lo sumo de 10 litros.

b) Se toman los datos de producción de 25 días escogidos al azar. Calcúlese la probabilidad de que la media de las producciones obtenidas, $\overline{X}$, sea menor o igual a 940 litros si sabemos que $\mu = 950$ litros.

----

a)

Se conoce: $\sigma = 50, E = \frac{10}{2} = 5.$

Para un nivel de confianza del 95 % es $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96.$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{E} \right)^2 = \left(\frac{1,96 \cdot 50}{5} \right)^2 = (1,96 \cdot 10)^2 = 19,6^2 = 384,16.$$

$\underline{El\ mínimo\ tamaño\ de\ la\ muestra\ debe\ ser,\ como\ mínimo,\ de\ 385\ días.}$

b)

Se conoce: $\sigma = 50, n = 25, \overline{X} = 950.$

Normalizando los datos: $\overline{X} \to \left(N, \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \Rightarrow \overline{X} \to \left(950, \frac{50}{\sqrt{25}} \right) = (950, 10).$

$$P(\overline{X} \leq 940) = P\left(\frac{\overline{X} - 950}{10} \leq \frac{940 - 950}{10} \right) = P(Z \leq -1) = 1 - P(Z < 1) =$$

$$= 1 - 0,8413 = 0,1587.$$

$\underline{La\ probabilidad\ de\ que\ \overline{X} \leq 940\ es\ del\ 15,87\ \%.}$

****

OPCIÓN B

1º) Se considera el sistema de ecuaciones lineales: $\{x + 2y + z = 1 \ \ x + 2y + 3z = 0 \ x + ay + 2z = 0$.

a) Discútase para los diferentes valores del parámetro $a \in R$.

b) Resuélvase para $a = 0$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A = (1\ 2\ 1\ 1\ 2\ 3\ 1\ a\ 2\ )$ y $A' = (1\ 2\ 1\ 1\ 2\ 3\ 1\ a\ 2 \quad 1\ 0\ 0\ )$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$|A| = |1\ 2\ 1\ 1\ 2\ 3\ 1\ a\ 2\ | = 4 + a + 6 - 2 - 3a - 4 = 0;\ \ 4 - 2a = 0 \Rightarrow a = 2$

.

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$\underline{Para\ a \neq 2 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

$Para\ a = 2\ es\ A' = (1\ 2\ 1\ 1\ 2\ 3\ 1\ 2\ 2 \quad 1\ 0\ 0\ ) \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |1\ 1\ 1\ 1\ 3\ 0\ 1\ 2\ 0\ | = - |1\ 3\ 1\ 2\ | \neq 0 \Rightarrow Rang\ A' = 3.$

$\underline{Para\ a = 2 \Rightarrow Rang\ A = 2;\ Rang\ A' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

b)

Para $a = 0$ el sistema resulta $\{x + 2y + z = 1 \ \ x + 2y + 3z = 0 \ x + 2z = 0$, que es compatible determinado.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$x = \frac{|1\ 2\ 1\ 0\ 2\ 3\ 0\ 0\ 2\ |}{4} = \frac{4}{4} = 1.\ \ y = \frac{|1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 3\ 1\ 0\ 2\ |}{4} = \frac{3-2}{4} = \frac{1}{4}.$

$z = \frac{|1\ 2\ 1\ 1\ 2\ 0\ 1\ 0\ 0\ |}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.$

$\underline{Para\ a = 0\ las\ soluciones\ del\ sistema\ son: x = 1,\ y = \frac{1}{4},\ z = -\frac{1}{2}.}$

****

2º) Se considera la función real de variable real $f(x) = \{ \ \frac{-x+b}{x-2} \ \ si \ \ x \leq -1 \ \frac{x^2+6x+5}{x^2+4x+3} \ si \ x > -1$.

a) Determínese para qué valores del parámetro b la función $f(x)$ es continua en x=-1.

b) Calcúlense las asíntotas de $f(x)$.

----

a)

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen, son iguales e igual al valor de la función en ese punto.

$$\{ f(x) \ \ == \ \frac{1+b}{-3} = f(-1) \ f(x) \ \ == \ 2 \qquad (*) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) \ = f(x) \ = f(-1) \Rightarrow \frac{1+b}{-3} = 2; 1 + b = -6 \Rightarrow b = -7.$$

(*)

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2+6x+5}{x^2+4x+3} = \frac{1-6+5}{1-4+3} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to -1} \frac{2x+6}{2x+4} = \frac{-2+6}{-2+4} = 2.$$

$$\underline{La \ función \ f(x) \ es \ continua \ en \ x = -1 \ para \ x = b = -7}.$$

b)

La función resulta: $f(x) = \{ \ \frac{-x-7}{x-2} \ \ si \ \ x \leq -1 \ \frac{x^2+6x+5}{x^2+4x+3} \ si \ x > -1$.

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$, siendo k el valor de la función cuando x tiende a $+\infty$ o a $-\infty$.

$$f(x) \ = \frac{-x-7}{x-2} \ = -1.$$

$$f(x) \ = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+6x+5}{x^2+4x+3} = 1.$$

$$\underline{La \ rectas \ y = -1 \ e \ y = 1 \ son \ asíntotas \ horizontales \ de \ la \ función}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que anulan el denominador de las expresiones racionales.

Nótese que la recta x = 2 no es asíntota vertical de la función por ser 2 > -1.

$x^2 + 4x + 3 = 0; \ x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} = -2 \pm 1 \Rightarrow x_1 = -3, \ x_2 = -1.$

Nótese que ninguna de las rectas x = -3 y x = -1 son asíntotas verticales de la función por no ser ninguno de los valores mayores que -1.

Otra forma: no puede tener asíntotas verticales por ser $D(f) = R$.

Asíntotas oblicuas: $\underline{No\ tiene}$.

Las asíntotas oblicuas son incompatibles con las asíntotas horizontales.

También porque para tener asíntotas oblicuas una función racional tiene que ser el grado del numerador una unidad mayor que el grado del denominador, cosa que no ocurre con ninguna de las partes de la función.

****

3º) Sabiendo que la derivada de una función real de variable real es $f'(x) = 6x^2 + 4x - 2$:

a) Determínese la expresión de $f(x)$ sabiendo que $f(0) = 5$.

b) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f así como sus máximos y mínimos locales, si los tuviese.

----

a)

$$f(x) = \int f'(x) \cdot dx = \int \left(6x^2 + 4x - 2\right) \cdot dx = \frac{6x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - 2x + C =$$

$$= 2x^3 + 2x^2 - 2x + C.$$

$$f(0) = 5 \Rightarrow C = 5.$$

$$\underline{f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 2x + 5}.$$

b)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 + 4x - 2 = 0;\ \ 3x^2 + 2x - 1 = 0;\ \ x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2 \cdot 3} =$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{-2 \pm 4}{6} = \frac{-1 \pm 2}{3} \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = \frac{1}{3}.$$

Por ser la función polinómica, las raíces de la primera derivada dividen el dominio de la función (que es R) en los tres siguientes intervalos: $(-\infty, -1)$, $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$ y $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$, que son, alternativamente, crecientes y decrecientes.

Considerando el punto sencillo $x = 0 \in \left(-1, \frac{1}{3}\right)$, se observa que es negativo.

De lo anterior se deducen los intervalos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento:\ f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)}.$$

$$\underline{Decrecimiento:\ f'(x) < 0 \Rightarrow x \in \left(-1, \frac{1}{3}\right)}.$$

$d)$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto. Esta condición necesaria no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; se es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = 12x + 4.$$

$$f''(-1) =- 12 + 4 =- 8 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x =- 1.$$

$$f(-1) = 2\cdot(-1)^3 + 2\cdot(-1)^2 - 2\cdot(-1) + 5 =- 2 + 2 + 2 + 5 = 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{Máximo: A(-1,\ 7)}.$$

$$f''\left(\frac{1}{3}\right) = 12\cdot\frac{1}{3} + 4 = 4 + 4 = 8 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = \frac{1}{3}.$$

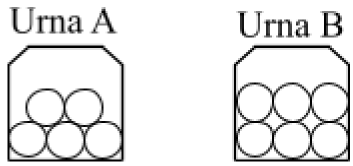
$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{3} + 5 = \frac{2}{27} + \frac{2}{9} - \frac{2}{3} + 5 = \frac{2+6-18+135}{27} =$$

$$= \frac{143-18}{27} = \frac{125}{27} \Rightarrow \underline{Mínimo: B\left(\frac{1}{3},\ \frac{125}{27}\right)}.$$

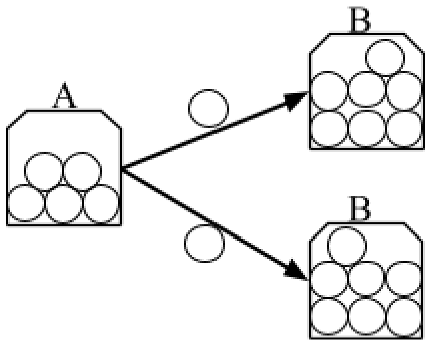
****

4º) Tenemos dos urnas A y B. La urna A contiene 5 bolas: 3 rojas y 2 blancas. La urna B contiene 6 bolas: 2 rojas y 4 blancas. Se extrae una bola al azar de la urna A y se deposita en la urna B. Seguidamente se extrae una bola al azar de la urna B. Calcúlese la probabilidad de que:

a) La segunda bola extraída sea roja. b) Las dos bolas extraídas sean blancas.



a)

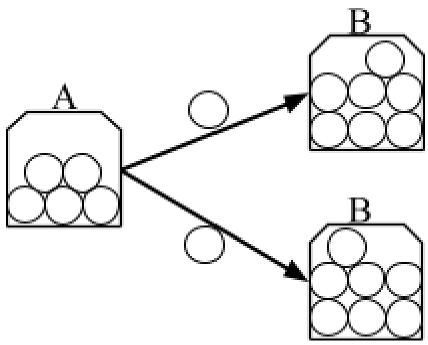


$\Rightarrow P(R) = \frac{2}{7}$.

$\Rightarrow P(R) = \frac{3}{7}$.

$$P = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{4}{35} + \frac{9}{35} = \underline{\frac{13}{35}}.$$

b)



$\Rightarrow P(B) = \frac{5}{7}$.

$\Rightarrow P(B) = \frac{4}{7}$.

$$P = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{7} = \underline{\frac{2}{7}}.$$

****

5º) El peso por unidad, en gramos, de la gamba roja de Palamós, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 5$ gramos.

a) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 25 gambas y la media de sus pesos ha sido $\overline{x} = 70$ gramos. Calcúlese un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) Si sabemos que $\mu = 70$ gramos, y si se consideran los pesos de las 12 gambas de una caja como una muestra aleatoria simple, calcúlese la probabilidad de que el peso total de esas 12 gambas sea mayor o igual que 855 gramos.

----

a)

Conocemos: $\sigma = 5\ gramos; n = 25;\ \overline{x} = 70\ gramos.$

Para un nivel de confianza del 95 % es $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96.$

$$I_{95\%} = \left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(70 - 1,96 \cdot \frac{5}{\sqrt{25}};\ 70 + 1,96 \cdot \frac{5}{\sqrt{25}}\right) =$$

$$= (70 - 1,96;\ 70 + 1,96) = \left(68'04; 71'96\right)$$

$$\underline{I_{95\%} = \left(68'04; 71'96\right).}$$

b)

El peso de una gamba sería $\overline{X} = \frac{855}{12} = 71,25.$

Se conoce: $\sigma = 5, n = 12, \overline{X} = 71,25.$

Normalizando los datos: $\overline{X} \rightarrow \left(N, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \overline{X} \rightarrow \left(70, \frac{5}{\sqrt{12}}\right) = (70,\ 1,44).$

$$P(\overline{X} \geq 71,25) = P\left(\frac{\overline{X}-70}{1,44} \geq \frac{71,25-70}{1,44}\right) = P(Z \geq 0,87) = 1 - P(Z < 0,87) =$$

$$= 1 - 0,8079 = 0,1922.$$

$$\underline{La\ probabilidad\ de\ que\ \overline{X} > 71,25\ es\ del\ 19,22\ \%.}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MADRID

SEPTIEMBRE – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger uno de las dos opciones propuestas y responder a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.

OPCIÓN A

1º) Se considera la matriz $A = (k\ -1\ 0\ -7\ k\ k\ -1\ -1\ k)$.

$a)$ Estúdiese para qué valores del parámetro k la matriz A tiene inversa.

$b)$ Determínese, para $k = 1$, la matriz X tal que $X \cdot A = I$.

$a)$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$|A| = |k\ -1\ 0\ -7\ k\ k\ -1\ -1\ k| = k^3 + k + k^2 - 7k = k^3 + k^2 - 6k =$

$= k(k^2 + k - 6) = 0 \Rightarrow k_1 = 0;\ k^2 + k - 6 = 0;\ k = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} =$

$= \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow k_2 = -3,\ k_3 = 2.$

$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall k \in R - \{-3,\ 0,\ 2\}.}$

$b)$

Para $k = 1$ es $A = (1\ -1\ 0\ -7\ 1\ 1\ -1\ -1\ 1)$.

$X \cdot A \cdot A^{-1} = I \cdot A^{-1} = A^{-1};\ X \cdot I = A^{-1} \Rightarrow \underline{X = A^{-1}}.$

La inversa de A se obtiene por la adjunta de la traspuesta: $A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|}$.

$|A| = |1\ \ -1\ 0\ \ -7\ 1\ 1\ \ -1\ \ -1\ 1\,| = 1 + 1 + 1 - 7 = -\ 4.\quad A^{t} = (1\ \ -7\ \ -1\ \ -$
.

$$Adj.\ de\ A^{t} = (|1\ \ -1\ 1\ 1\,|\ \ -|-\ 1\ \ -1\ 0\ 1\,|\,|-\ 1\ 1\ 0\ 1\,|\ \ -|-\ 7\ \ -1\ 1\ 1\,|\,|1\ \ -$$
.

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^{t}}{|A|} = \frac{(2\ 1\ -1\ 6\ 1\ -1\ 8\ 2\ -6\ )}{-4} = -\ \frac{1}{4}\cdot(2\ 1\ \ -1\ 6\ 1\ \ -1\ 8\ 2\ \ -6\ ).$$

$$\underline{X = -\ \frac{1}{4}\cdot(2\ 1\ \ -1\ 6\ 1\ \ -1\ 8\ 2\ \ -6\ ).}$$

****

2º) Sea S la región del plano definida por: $2x-y\geq 1$; $2x-3y\leq 6$; $x+2y\geq 3$; $x+y\leq 8$; $y\leq 3$.

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x,\ y)=2x+y$ en la región S, indicando los puntos en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

----

a)

Las condiciones del ejercicio son: $\left.\begin{array}{l}2x-y\geq 1\\ 2x-3y\leq 6\\ x+2y\geq 3\\ x+y\leq 8\\ y\leq 3\end{array}\right\}$.

x	2	4
y	3	7

①$\Rightarrow 2x-y\geq 1\Rightarrow y\leq 2x-1\Rightarrow O(0,\ 0)\rightarrow No.$

x	3	6
y	0	2

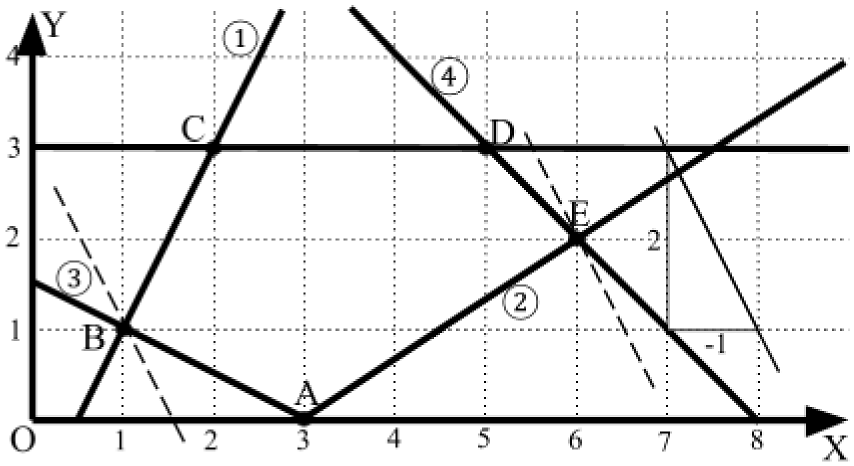
②$\Rightarrow 2x-3y\leq 6\Rightarrow y\leq\frac{2x-6}{3}\Rightarrow O(0,\ 0)\rightarrow Si.$

x	3	1
y	0	1

③$\Rightarrow x+2y\geq 3\Rightarrow y\leq\frac{3-x}{2}\Rightarrow O(0,\ 0)\rightarrow No.$

x	4	8
y	4	0

④$\Rightarrow x+y\leq 8\Rightarrow y\leq 8-x\Rightarrow O(0,\ 0)\rightarrow Si.$



Los vértices de la sección factible, además de O(0, 0), son los siguientes:

$A\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2x-3y=6\\ x+2y=3\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l}-2x+3y=-6\\ 2x+4y=6\end{array}\right\}\Rightarrow A(3,\ 0)$.

$B\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2x-y=1\\ x+2y=3\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l}4x-2y=2\\ x+2y=3\end{array}\right\}\Rightarrow B(1,\ 1).$

$C \Rightarrow 2x - y = 1 \quad y = 3 \} \Rightarrow C(2, 3).$
$D \Rightarrow x + y = 8 \quad y = 3 \} \Rightarrow D(5, 3).$
$E \Rightarrow 2x - 3y = 6 \quad x + y = 8 \} \quad -2x + 3y = -6 \quad 2x + 2y = 16 \} \Rightarrow E(6, 2)$
.

La región factible es la zona sombreada de la figura adjunta.

$b)$

La función de rendimiento es $f(x, y) = 2x + y$.

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(3, 0) = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 = 6 + 1 = 6.$

$B \Rightarrow f(1, 1) = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2 + 1 = 3.$

$C \Rightarrow f(2, 3) = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 4 + 3 = 7.$

$D \Rightarrow f(5, 3) = 2 \cdot 5 + 1 \cdot 3 = 10 + 3 = 13.$

$E \Rightarrow f(6, 2) = 2 \cdot 6 + 1 \cdot 2 = 12 + 2 = 14.$

$\underline{El\ máximo\ se\ produce\ en\ el\ punto\ E\ y\ el\ mínimo\ en\ el\ punto\ B}.$

También se hubieran obtenido los punto E y B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = 2x + y = 0 \Rightarrow y = -2x \Rightarrow m = \frac{2}{-1}.$

$\underline{El\ valor\ máximo\ es\ 14\ y\ el\ mínimo,\ 3}.$

****

3º) Dada la función real de variable real definida por $f(x) = \{ x^2 + 1 \;\; si \;\; x < 1 \;\; \frac{ax+b}{x} \;\; si \; 1 \le x \le 2 \; \sqrt{x^3 + 1} \;\; si \;\; x > 2$.

a) Determínense los valores que deben tomar los parámetros $a \; y \; b$ para que $f(x)$ sea continua en $x = 1 \; y \; x = 2$.

b) Calcúlese, para $a = 4 \; y \; b = -2$, el área del recinto acotado por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1 \; y \; x = 2$.

----

a)

La función $f(x)$ es continua en $R \forall a, \; b \in R$. Se trata de determinar los valores de $a \; y \; b$ para que sea derivable en los puntos críticos $x = 1$ y $x = 2$.

Para que la función sea continua en los puntos críticos es necesario que sus límites laterales en esos puntos sean iguales e iguales a los correspondientes valores de la función en esos puntos.

$$f(x) = \left(x^2 + 1\right) = 1 + 1 = 2 \qquad f(x) = \frac{ax+b}{x} = \frac{a+b}{2} = f(1) = a + b$$

. (1)

$$f(x) = \frac{ax+b}{x} = \frac{2a+b}{2} = f(2) \quad f(x) = \sqrt{x^3 + 1} = \sqrt{9} = 3 \} \Rightarrow \frac{2a+b}{2} = 3; \;\; 2a + b =$$

. (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$a + b = 2 \; 2a + b = 6 \} \quad -a - b = -2 \quad 2a + b = 6 \} \Rightarrow a = 4, \;\; b = -2.$$

<u>*La función $f(x)$ es continua en $x = 1 \; y \; x = 2$ para $a = 4 \; y \; b = -2$.*</u>

b)

Para $a = 4 \; y \; b = -2$, el área del recinto acotado por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1 \; y \; x = 2$, la función tiene la expresión $f(x) = \frac{4x-2}{x}$ y sus ordenadas correspondientes al intervalo $(1, \; 2)$ son todas positivas.

Teniendo en cuanta lo anterior, la superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_1^2 \frac{4x-2}{x} \cdot dx = \int_1^2 \left(4 - \frac{2}{x}\right) \cdot dx = [4x - 2Lx]_1^2 = \left[4x - Lx^2\right]_1^2 =$$

$$= (4 \cdot 2 - L4) - (4 \cdot 1 - L1) = 8 - L4 - 4 + 0 = \underline{4 - L4 \cong 2,614 \; u^2}.$$

****

4º) Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(A/B) = \frac{3}{4}$ y $P(B/A) = \frac{1}{4}$.

a) Demuéstrese que A y B son sucesos independientes pero no incompatibles.

b) Calcúlese $P(\overline{A}/\overline{B})$.

----

a)

Dos sucesos A y B son incompatibles cuando $A \cap B = \emptyset$, o $P(A \cap B) = 0$.

Dos sucesos A y B son independientes cuando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Rightarrow P(B \cap A) = P(B/A) \cdot P(A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16} \neq 0.$$

$\underline{Queda\ probado\ que\ los\ sucesos\ A\ y\ B\ no\ son\ incompatibles}.$

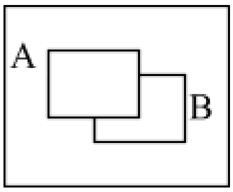
$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A/B)} = \frac{P(B \cap A)}{P(A/B)} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16} = P(A \cap B).$$

$\underline{Queda\ probado\ que\ los\ sucesos\ A\ y\ B\ son\ independientes}.$

b)

$$P(\overline{A}/\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}. \quad (1)$$



$$P = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B) =$$

$$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{3}{16}\right) = 1 - \frac{12+4-3}{16} = 1 - \frac{13}{16} =$$

$$= \frac{16-13}{16} = \frac{3}{16}.$$

Sustituyendo en (1):

$$P(\overline{A}/\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{1-P(B)} = \frac{\frac{3}{16}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{16} = \underline{\frac{1}{4}}.$$

****

5º) El tiempo, en minutos, que los empleados de unos grandes almacenes tardan en llegar a su casa se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 5$.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 64 empleados y su media muestral es $\overline{x} = 30$ minutos. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra aleatoria simple para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 99 % tenga una amplitud a lo sumo de 10 unidades.

----

a)

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$$

$$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$$

Datos: $\overline{x} = 30;\ \ n = 64;\ \ \sigma = 5;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(30 - 1'96 \cdot \frac{5}{\sqrt{64}};\ 30 + 1'96 \cdot \frac{5}{\sqrt{64}}\right);\ \left(30 - 1'96 \cdot 0,625;\ 30 + 1'96 \cdot 0,625\right);$$

$$\left(30 - 1'225;\ 30 + 1'225\right)$$

$$\underline{I.\ C._{95\ \%}\left(28'775,\ \ 31'225\right).}$$

b)

$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 1 - 0,99 = 0,01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,005} = 2,575.$$

$$(1 - 0,005 = 0,9950 \rightarrow z = 2,575).$$

Datos: $\sigma = 5;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,575;\ \ E = \frac{10}{2} = 5.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(2,575 \cdot \frac{5}{5}\right)^2 =$

$= (2,575 \cdot 1)^2 = 2,575^2 = 6,63.$

$$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 7\ empleados.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Se considera el sistema de ecuaciones lineales $(a-1)x+y+z=1\ x+(a-1)y+(a-1)z=1 \qquad x+az$ dependientes del parámetro real a:

a) Discútase el sistema según los valores de a.

b) Resuélvase el sistema para $a=3$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$M=(a-1\ 1\ 1\ 1\ a-1\ a-1\ 1\ 0\ a)$ y $M'=(a-1\ 1\ 1\ 1\ a-1\ a-1\ 1\ 0\ a \quad 1\ 1\ 1)$.

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$$|M|=|a-1\ 1\ 1\ 1\ a-1\ a-1\ 1\ 0\ a|=a(a-1)^2+(a-1)-(a-1)-a=$$

$$=a\left(a^2-2a+1\right)-a=a^3-2a^2+a-a=a^3-2a^2=a^2(a-2)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1=a_2=0;\ a_3=2.$$

$$\underline{Para\ \{a\neq 0\ a\neq 2\ \}\Rightarrow Ran\ M=Ran\ M'=3=nº\ incóg.\Rightarrow S.\ C.\ D.}$$

$$Para\ a=0\Rightarrow M'=(-1\ 1\ 1\ 1\ \ -1\ \ -1\ 1\ 0\ 0 \quad 1\ 1\ 1)\Rightarrow Rang\ M'\Rightarrow\left\{C_1,\ C_2,\ C_4\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |-1\ 1\ 1\ 1\ \ -1\ 1\ 1\ 0\ 1|=1+1+1-1=2\neq 0\Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ a=0\Rightarrow Ran\ M=2;\ Ran\ M'=3\Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ a=2\Rightarrow M'=(1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 2 \quad 1\ 1\ 1)\Rightarrow\left\{F_1=F_2\right\}\Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ a=2\Rightarrow Ran\ M=Ran\ M'=2<nº\ incóg.\Rightarrow S.\ C.\ I.}$$

b)

Para $a=3$ el sistema es $2x+y+z=1\ x+2y+2z=1 \quad x+3z=1\}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{|1\ 1\ 1\ 1\ 2\ 2\ 1\ 0\ 3\ |}{|2\ 1\ 1\ 1\ 2\ 2\ 1\ 0\ 3\ |}=\frac{6+2-2-3}{12+2-2-3}=\frac{8-5}{14-5}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}.$$

$$y=\frac{|2\ 1\ 1\ 1\ 1\ 2\ 1\ 1\ 3\ |}{9}=\frac{6+1+2-1-4-3}{9}=\frac{9-8}{9}=\frac{1}{9}.$$

$$z=\frac{|2\ 1\ 1\ 1\ 2\ 1\ 1\ 0\ 1\ |}{9}=\frac{4+1-2-1}{9}=\frac{5-3}{9}=\frac{2}{9}.$$

$$\underline{Solución: x=\frac{1}{3},\ y=\frac{1}{9},\ z=\frac{2}{9}.}$$

****

2º) Se considera la función real de variable real $f(x) = \{x^2 + 2x \ si \ x < 0 \ - x^2 + 3x \, si \, x \geq 0$.

a) Estúdiese la continuidad y derivabilidad de la función.

b) Determínense los valores de $a \in R$ para los cuales la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$ es $m = -\ 2$. Calcúlese, para cada valor de a obtenido, la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$.

----

a)

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 0$, cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$x = 0 \Rightarrow \{f(x) = \left(x^2 + x\right) = 0 \qquad f(x) = \left(-\ x^2 + 3x\right) = 0 = f(0) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = f(x) = f(0)$.

<u>$La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ x = 0.$</u>

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x = 0$ cuya derivabilidad se va a estudiar a continuación.

Un función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales.

$f'(x) = \{2x + 2 \ si \ x < 0 \ - 2x + 3 \, si \, x \geq 0$.

$f'\left(0^-\right) = 0 + 2 = 2. \quad f'\left(0^+\right) = -\ 0 + 3 = 3 \Rightarrow f'\left(0^-\right) \neq f'\left(0^+\right)$.

<u>$La\ función\ f(x)\ no\ es\ derivable\ en\ x = 0.$</u>

b)

Para $x = a$ los puntos de tangencia son $M\left(a,\ a^2 + 2a\right)$ y $N\left(a,\ -\ a^2 + 3a\right)$, según que el valor de a sea menor o mayor que 0, respectivamente.

El valor de la tangente a la gráfica de una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$f'(a) = \{2a + 2 \ si \ x < 0 \ - 2a + 3 \ si \ x \geq 0$.

Para $a < 0$:

$f'(a) = -2 \Rightarrow 2a + 2 = -2; \ a + 1 = -1 \Rightarrow \underline{a = -2}$.

El punto de tangencia es $M(-2, \ 0)$.

Recta tangente: $y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 0 = -2(x + 2) = -2x - 4$.

$$\underline{t_1 \equiv 2x + y + 4 = 0.}$$

Para $a > 0$:

$f'(a) = -2 \Rightarrow -2a + 3 = -2; \ 2a = 5 \Rightarrow \underline{a = \frac{5}{2}}$.

El punto de tangencia es $N(a, \ -a^2 + 3a)$:

$-\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 3 \cdot \frac{5}{2} = -\frac{25}{4} + \frac{15}{2} = \frac{30-25}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow N\left(\frac{5}{2}, \ \frac{5}{4}\right)$.

Recta tangente: $y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - \frac{5}{4} = -2\left(x - \frac{5}{2}\right) = -2x + 5;$

$4y - 5 = -8x + 20.$

$$\underline{t_2 \equiv 8x + 4y - 30 = 0.}$$

****

3º) Se considera la función real de variable real $f(x) = \frac{x^2-3}{x^2-9}$.

a) Calcúlense sus asíntotas.

b) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

----

a)

Asíntotas horizontales: son de la forma y = k y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = f(x) = \frac{x^2-3}{x^2-9} = 1 \Rightarrow \underline{Asíntota\ horizontal: y = 1}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x_1 = -3,\ x_2 = 3.$$

$$\underline{Asíntotas\ verticales: x = -3,\ x = 3}.$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

b)

Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto los valores reales de x que anulan el denominador: $D(f) \Rightarrow R - \{-3,\ 3\}$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(x^2-9)-(x^2-3)\cdot 2x}{(x^2-9)^2} = \frac{2x\cdot(x^2-9-x^2+3)}{(x^2-9)^2} = \frac{-12x}{(x^2-9)^2}.$$

$$Para\ x < 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: (-\infty,\ -3) \cup (-3,\ 0)}.$$

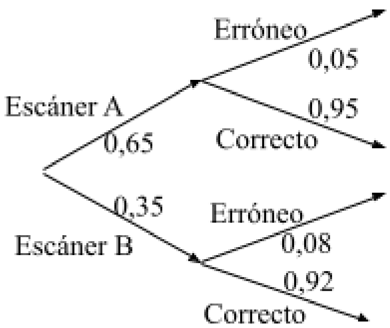
$$Para\ x > 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: (0,\ 3) \cup (3,\ +\infty)}.$$

****

4º) Para efectuar cierto diagnóstico, un hospital dispone de dos escáneres, a los que denotamos como A y B. El 65 % de las pruebas de diagnóstico que se llevan a cabo en ese hospital se realizan usando el escáner A, el resto con el B. Se sabe además que el diagnóstico efectuado usando el escáner A es erróneo en un 5 % de los casos, mientras que el diagnostico efectuado usando el escáner B es erróneo en un 8 % de los casos. Calcúlese la probabilidad de que:

a) El diagnóstico de esa prueba efectuado a un paciente en ese hospital sea erróneo.

b) El diagnóstico se haya efectuado usando el escáner A, sabiendo que ha resultado erróneo.



a)

$$P = P(E/A) + P(E/B) = 0,65 \cdot 0,05 + 0,35 \cdot 0,08 = 0,0325 + 0,0280 =$$

$$= \underline{0,0605}.$$

b)

$$P = P(A/E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{P(E/A)}{P(E/A)+P(E/B)} = \frac{0,65 \cdot 0,05}{0,65 \cdot 0,05 + 0,35 \cdot 0,08} = \frac{0,0325}{0,0605} = \underline{0,5372}.$$

****

5º) El tiempo, en meses, que una persona es socia de un club deportivo, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 9$.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 100 personas que han sido socias de ese club y se obtuvo una estancia media de $\overline{x} = 8,1$ meses. Determínese un intervalo de confianza al 90 % para μ.

b) Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 144 personas se ha obtenido un intervalo de confianza $(7'766;\ 10'233)$ para μ, determínese el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.

----

a)

$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 1 - 0,90 = 0,10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,05} = 1,645.$$

$(1 - 0,05 = 0,9500 \rightarrow z = 1,645)$.

Datos: $\overline{x} = 8,1;\ n = 100;\ \sigma = 9;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,645$.

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(8,1 - 1'645 \cdot \frac{9}{\sqrt{100}};\ 8,1 + 1'645 \cdot \frac{9}{\sqrt{100}}\right);$$

$$\left(8,1 - 1'645 \cdot 0,9;\ 8,1 + 1'645 \cdot 0,9\right);\ \left(8,1 - 1'4805;\ 8,1 + 1'4805\right)$$

$$\underline{I.\ C._{90\ \%}\ (6'6195;\ 9'5805).}$$

b)

$$E = \frac{10'233 - 7'766}{2} = \frac{2,467}{2} = 1'2335.$$

Datos: $\sigma = 9;\ n = 144;\ E = 1'2335$.

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{1,2335 \cdot \sqrt{144}}{9} = \frac{1,2335 \cdot 12}{9} = 1,645.$

Por lo visto en el apartado anterior:

$$\underline{El\ nivel\ de\ confianza\ es\ del\ 90\ \%.}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

JUNIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá elegir una opción A o B y responder a todas las cuestiones de esa opción. Nunca podrá mezclar cuestiones de la opción A con cuestiones de la opción B. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

OPCIÓN A

1º) En una empresa trabajan empleados de las categorías A, B y C. El salario mensual de cada trabajador es de 1.200, 1.700 y 2.200 euros, según que pertenezcan a la categoría A, B y C, respectivamente. Todos los trabajadores destinan el 5 % de su salario a un plan de pensiones, lo que asciende en un mes a un total de 4.930 euros. El número de trabajadores de la categoría A es el 150 % de los de la categoría B. El número de trabajadores de la categoría B más el de la C supera en 3 al número de trabajadores de la categoría A. Hallar el número de trabajadores de cada categoría que tiene la empresa.

Sean x, y, z los trabajadores de las categorías A, B y C, respectivamente.

El total de la suma de los salarios se obtiene del modo siguiente:

$$5\ \% \ ---- \ 4.930 \ 100\ \% \ ---- \ x \ \} \Rightarrow x = \frac{100 \cdot 4.930}{5} = 20 \cdot 4.930 = 98.600.$$

$$1.200x + 1.700y + 2.200z = 98.600 \qquad x = 1,5y$$

.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|986\ 17\ 22\ 0\ -3\ 0\ -3\ -1\ -1\ |}{|12\ 17\ 22\ 2\ -3\ 0\ 1\ -1\ -1\ |} = \frac{2.958-198}{36-44+66+34} = \frac{2.760}{92} = 30.$$

$$y = \frac{|12\ 986\ 22\ 2\ 0\ 0\ 1\ -3\ -1\ |}{92} = \frac{-132+1.972}{92} = \frac{1.840}{92} = 20.$$

$$z = \frac{|12\ 17\ 986\ 2\ -3\ 0\ 1\ -1\ -3\ |}{92} = \frac{108-1.972+2.958+102}{92} = \frac{1.196}{92} = 13.$$

$\underline{Los\ empleados\ de\ los\ grupos\ A,\ B\ y\ C\ son\ 30,\ 20\ y\ 13,\ respectivamente}.$

****

2º) Dada la función $f(x) = \frac{ax^2-2b}{x^2+1}$ donde $a,\ b \in R$:

$a)$ Hallar el dominio de $f(x)$.

$b)$ Hallar a y b para que la función tenga una asíntota horizontal en $y = 2$ y pase por el punto $P(0,\ 4)$.

$c)$ Para $a = 1$ y $b = 1$, hallar $f'(x)$.

$a)$

Por ser $x^2 + 1 \neq 0,\ \forall a,\ b \in R\ \Rightarrow\ \underline{D(f) \Rightarrow R}.$

$b)$

Una asíntota horizontal es el valor que toma la función cuando x tiende a más o menos infinito:

$f(x) = \quad = \underline{a = 2}.$

La función resulta: $f(x) = \frac{2x^2-2b}{x^2+1}$

Por pasar por $P(0,\ 4)$ es $f(0) = 4 \Rightarrow \frac{2\cdot 0-2b}{0+1} = 4; \quad -2b = 4\ \Rightarrow\ \underline{b = -2}.$

$c)$

Para $a = 1$ y $b = 1$ la función resulta: $f(x) = \frac{x^2-2}{x^2+1}$.

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(x^2+1)-(x^2-2)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x\cdot[(x^2+1)-(x^2-2)]}{(x^2+1)^2} = \frac{2x\cdot(x^2+1-x^2+2)}{(x^2+1)^2} = \frac{6x}{(x^2+1)^2}.$$

$$\underline{f'(x) = \frac{6x}{(x^2+1)^2}}.$$

****

3º) Se considera la función definida por: $f(x) = \{ \quad x + 3 \quad si\ x < 0 \ - x^2 + 2x + 3\ si\ x \geq 0$.

a) Representar gráficamente la función f.

b) Calcular el área del recinto acotado limitado por la gráfica de f y el eje OX.

----

a)

Teniendo en cuenta que $f(x) \ = f(x) \ = f(0) = 3$, la función es continua en su dominio, que es R.

En el intervalo $(-\infty,\ 0)$ la función es una recta, siendo dos puntos de la misma, por ejemplo, $A(-\ 3,\ 0)\ y\ B(0,\ 3)$.

En el intervalo $(0,\ +\infty)$ la función es la parábola $g(x) =- x^2 + 2x + 3$, que es cóncava (∩), y cuyo vértice es el siguiente:

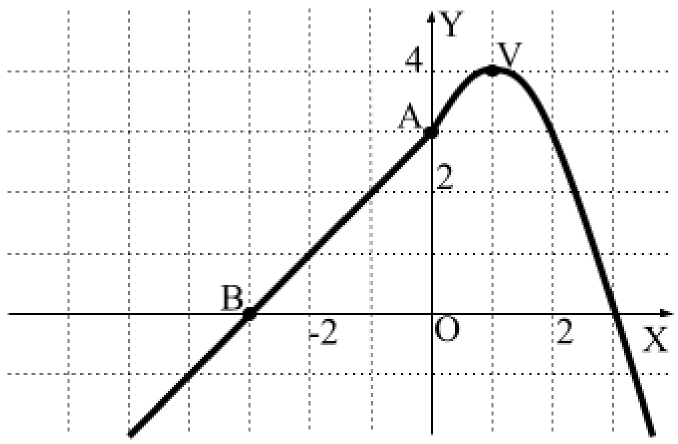
$g'(x) =- 2x + 2. \qquad g'(x) = 0 \Rightarrow - 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow V(1,\ 4).$

La parábola corta al eje Y en el punto $B(0,\ 3)$ y al eje X en:

$g(x) = 0 \Rightarrow - x^2 + 2x + 3 = 0;\ x^2 - 2x - 3 = 0;\ x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} =$

$= \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2 \Rightarrow \{x_1 =- 1 \Rightarrow \notin (0,\ +\infty)\ x_2 = 3 \rightarrow C(3,\ 0)$.

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



b)

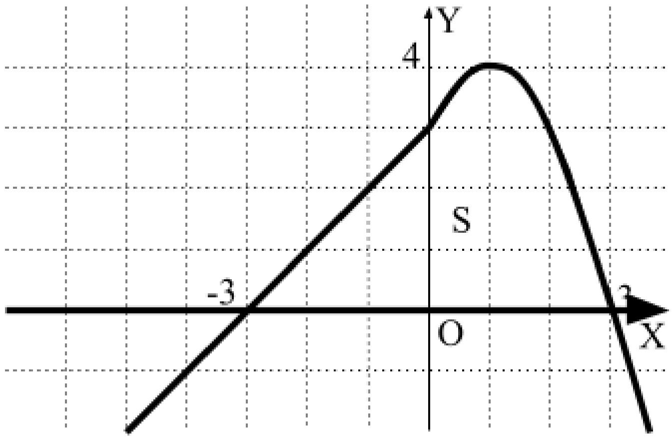
El área del recinto acotado limitado por la gráfica de f y el eje OX es la siguiente:

$$S = \int_{-3}^{0} (x + 3)\cdot dx + \int_{0}^{3} \left(- x^2 + 2x + 3\right)\cdot dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 3x\right]_{-3}^{0} + \left[- \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 3x\right]_{0}^{3} = \left[\frac{x^2}{2} + 3x\right]_{-3}^{0} + \left[- \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_{0}^{3} =$$

$$= 0 - \left[\frac{(-3)^2}{2} + 3\cdot(- 3)\right] + \left(- \frac{3^3}{3} + 3^2 + 3\cdot 3\right) - 0 = - \frac{9}{2} + 9 - 9 + 9 + 9 =$$

$$= 18 - \frac{9}{2} = \frac{36-9}{2} = \frac{27}{2}.$$



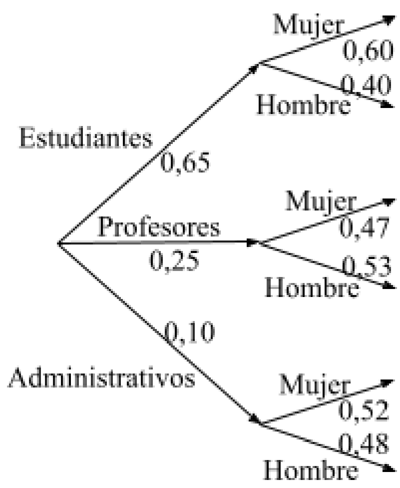
$$\underline{S = \frac{27}{2}\, u^2 = 13,5\, u^2.}$$

****

4º) En una universidad, el 65 % de sus miembros son estudiantes, el 25 % profesores y el 10 % personal de administración y servicios. Son mujeres el 60 % de los estudiantes, el 47 % de los profesores y el 52 % del personal de administración y servicios. Si seleccionamos al azar un integrante de esa universidad:

a) Determinar la probabilidad de que sea mujer.

b) Sabiendo que la persona seleccionada ha resultado ser hombre, hallar la probabilidad de que sea estudiante.



a)

$$P = 0,3900 + 0,1175 + 0,0520 = \underline{0,5595}.$$

b)

$$P = \frac{0,2600}{0,2600+0,1325+0,0480} = \frac{0,2600}{0,4405} = \underline{0,5902}.$$

****

5º) En una población el tiempo de desplazamiento de los trabajadores al lugar de trabajo sigue una distribución normal con desviación típica de 15 minutos. Tras realizar una encuesta a una muestra aleatoria de 60 trabajadores se ha encontrado que el tiempo medio de desplazamiento es de 45 minutos. Hallar un intervalo de confianza al 90 % para el tiempo medio de desplazamiento al lugar de trabajo de los individuos de la población.

$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 1 - 0,90 = 0,10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,05} = 1,645.$

$(1 - 0,05 = 0,9500 \rightarrow z = 1,645).$

Conocemos: $\sigma = 15;\ n = 60;\ \overline{x} = 45;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,645.$

Se aplica la fórmula adecuada que nos da el intervalo de confianza pedido, que es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$I_{90\ \%} = \left(45 - 1,645 \cdot \frac{15}{\sqrt{60}}, 45 + 1,645 \cdot \frac{15}{\sqrt{60}}\right);$

$(45 - 1,645 \cdot 1,936,\ 45 + 1,645 \cdot 1,936);$

$(45 - 3,186,\ 45 + 3,186);\ \ (41'814,\ 48'186).$

$\underline{Intervalo\ de\ confianza\ al\ 90\ \%:\ (41'814,\ 48'186)}.$

****

OPCIÓN B

1º) Un supermercado necesita, al menos, 80 docenas de huevos de tamaño pequeño, 120 docenas de tamaño mediano y 90 docenas de tamaño grande. Se abastece en dos granjas A y B. La granja A suministra lotes de 4 docenas de huevos pequeños, 12 docenas de medianos y 2 docenas de grandes, y el coste de cada lote es de 6 euros. La granja B proporciona lotes de 2 docenas de huevos pequeños, 2 docenas de medianos y 6 docenas de grandes, con un coste de 4 euros por lote. Además, la granja A puede suministrar, como máximo, 50 lotes y la granja B puede suministrar, como máximo, 60 lotes. Hallar el número de lotes que debe comprar a cada granja para satisfacer sus necesidades con el mínimo coste.

Sean x e y el número de lotes que abastecen al supermercado las granjas A y B, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes:

$4x + 2y \geq 80 \; 2x + 2y \geq 120 \; 2x + 6y \geq 90 \; x \leq 50; y \leq 60 \}$ $\quad 2x + y \geq 40 \quad x + y \geq 6$

.

La función de objetivos es la siguiente: $f(x, y) = 6x + 4y$.

La región factible se indica en la figura:

x	0	20
y	40	0

①$\Rightarrow 2x + y \geq 40 \Rightarrow y \geq 40 - 2x \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow No$.

x	0	10
y	60	0

②$\Rightarrow 6x + y \geq 60 \Rightarrow y \geq 60 - 6x \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow No$.

x	0	45
y	15	0

③$\Rightarrow x + 3y \geq 45 \Rightarrow y \geq \frac{45-x}{3} \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow No$.

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

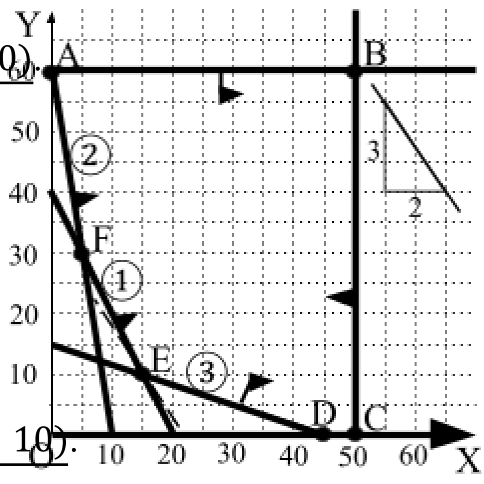
$A \Rightarrow 6x + y = 60 \quad y = 60 \} \Rightarrow \underline{A(0, 60)}$.

$B \Rightarrow x = 50 \; y = 60 \} \Rightarrow \underline{B(50, 60)}$.

$C \Rightarrow x = 50 \; y = 0 \} \Rightarrow \underline{C(50, 0)}$.

$D \Rightarrow x = 45 \; y = 0 \} \Rightarrow \underline{D(45, 0)}$.

$E \Rightarrow 2x + y = 40 \; x + 3y = 45 \} \Rightarrow \underline{E(15, 10)}$.



$F \Rightarrow 2x + y = 40\ 6x + y = 60 \} \Rightarrow \underline{E(5,\ 30)}$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 60) = 6 \cdot 0 + 4 \cdot 60 = 0 + 240 = 240.$

$B \Rightarrow f(50,\ 60) = 6 \cdot 50 + 4 \cdot 60 = 300 + 240 = 540.$

$C \Rightarrow f(50,\ 0) = 6 \cdot 50 + 4 \cdot 0 = 60 + 0 = 300 + 0 = 300.$

$D \Rightarrow f(45,\ 0) = 6 \cdot 45 + 4 \cdot 0 = 270 + 0 = 270.$

$E \Rightarrow f(15,\ 10) = 6 \cdot 15 + 4 \cdot 10 = 90 + 40 = 130.$

$F \Rightarrow f(5,\ 30) = 6 \cdot 5 + 4 \cdot 30 = 30 + 120 = 150.$

El mínimo se produce en el punto C.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = 6x + 4y = 0 \Rightarrow y = -\frac{6}{4}x \Rightarrow m = -\frac{3}{2}.$

$\underline{Debe\ comprar\ 15\ lotes\ a\ la\ granja\ A\ y\ 10\ a\ la\ B\ para\ minimizar\ costes}.$

****

2º) Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

$a)\ f(x) = e^{x^2-2} \cdot \sqrt{x+1}.$ $\qquad b)\ g(x) = \frac{x^3-x}{x^2+2}.$

$a)$

$$f'(x) = 2x \cdot e^{x^2-2} \cdot \sqrt{x+1} + e^{x^2-2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}} =$$

$$= 2xe^{x^2-2} \cdot \sqrt{x+1} + e^{x^2-2} \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{2(x+1)} = \frac{1}{2(x+1)} \cdot e^{x^2-2} \cdot \sqrt{x+1} \cdot [4x(x+1)+1] =$$

$$= \frac{4x^2+4x+1}{2(x+1)} \cdot e^{x^2-2} \cdot \sqrt{x+1}.$$

$$\underline{f'(x) = \frac{4x^2+4x+1}{2(x+1)} \cdot e^{x^2-2} \cdot \sqrt{x+1}.}$$

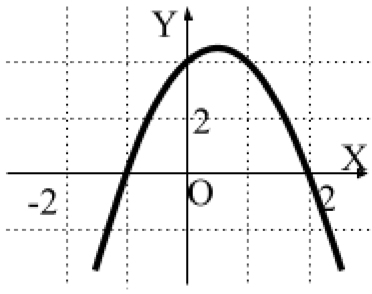
$b)$

$$g'(x) = \frac{(3x^2-1)(x^2+2)-(x^3-x)\cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{3x^4+6x^2-x^2-2-2x^4+2x^2}{(x^2+2)^2} = \frac{x^4+7x^2-2}{(x^2+2)^2}.$$

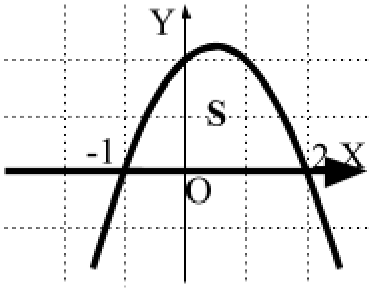
$$\underline{g'(x) = \frac{x^4+7x^2-2}{(x^2+2)^2}.}$$

****

3º) La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x) = -x^2 + x + a$, donde $a \in R$.



Sabiendo que el área encerrada por el recinto acotado que limita la curva con el eje OX vale $\frac{9}{2}$, utilizar esta información para hallar el valor del parámetro a.



De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_{-1}^{2} f(x) \cdot dx = \int_{-1}^{2} \left(-x^2 + x + a\right) \cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + ax\right]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}.$$

$$\left(-\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + 2a\right) - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + a \cdot (-1)\right] = \frac{9}{2};$$

$$-\frac{8}{3} + 2 + 2a - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + a = \frac{9}{2}; \quad -\frac{9}{3} + 2 + 3a = \frac{9}{2} + \frac{1}{2}; \quad 3a - 1 = 5; \quad 3a =$$

.

$$\underline{a = 2.}$$

****

4º) Cierto día, la probabilidad de que llueva en la ciudad A es 0,3, la de que no llueva en la ciudad B es 0,6 y la de que llueva, al menos, en una de las dos ciudades es 0,5.

a) Calcular la probabilidad de que no llueva en ninguna de las dos ciudades.

b) Calcular la probabilidad de que llueva en las dos. ¿Son independientes los sucesos "llueve en la ciudad A" y "llueve en la ciudad B".

$P(A)$ → probabilidad de que llueva en la ciudad A.

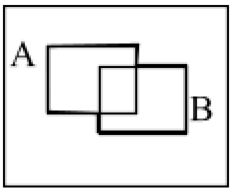
$P(B)$ → probabilidad de que llueva en la ciudad B.

$P(\overline{A})$ → probabilidad de que no llueva en la ciudad A.

$P(\overline{B})$ → probabilidad de que no llueva en la ciudad B.

a)

$P(A) = 0,3;\ \ P(\overline{B}) = 0,6;\ \ P(A \cup B) = 0,5.$ Se pide: $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.



$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,5 = 0,5.$

b)

Se pide $P(A \cap B)$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,3 + 0,4 - 0,5 = 0,2.$

$\underline{La\ probabilidad\ de\ que\ llueva\ en\ las\ dos\ ciudades\ es\ 0,2}.$

Dos sucesos A y B son independientes cuando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$:

$P(A) \cdot P(B) = 0,3 \cdot 0,4 \neq 0,2.$

$\underline{Los\ sucesos\ A\ y\ B\ no\ son\ independientes}.$

****

5º) Según un estudio, el porcentaje de adultos de la Unión Europea que hablan una lengua extranjera es del 64 %. En una encuesta aleatoria tomada en España de 250 adultos se ha obtenido que 128 hablan una lengua extranjera. A partir de estos datos, plantear un contraste para determinar si se puede aceptar que el porcentaje de adultos que hablan una lengua extranjera en España es igual al de la Unión Europea frente a la alternativa de que es menor, como parecen indicar los datos. ¿A qué conclusión se llega para un nivel de significación de 0,01?

$Hipótesis\ nula \rightarrow H_0 : \mu = 0,64$ $\qquad$ $Hipótesis\ alternativa \rightarrow H_1 : \mu < 0,64$ }.

Para $p_0 = \frac{128}{250} = 0'512,\ q_0 = 1 - 0,512 = 0'488,\ \alpha = 0,01\ y\ n = 250$:

El intervalo de confianza es, en este caso: $\left(p_0 - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot q_0}{n}},\ p_0 + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot q_0}{n}}\right)$.

$\alpha = 0,01.\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,005} = 2,578.$
$(1 - 0,005 = 0,9950 \rightarrow z = 2,578).$

$\left(0,64 - 2,578 \cdot \sqrt{\frac{0,512 \cdot 0,488}{250}},\ 0,64 + 2,578 \cdot \sqrt{\frac{0,512 \cdot 0,488}{250}}\right);$

$(0,64 - 2,578 \cdot 0,0316,\ 0,64 + 2,578 \cdot 0,0316);\ (0,64 - 0'082,\ 0'64 + 0'082) \Rightarrow$

$\Rightarrow (0'558,\ 0'722).$

La proporción de la muestra es $p = \frac{128}{250} = 0,512.$

Por NO encontrarse la proporción muestral en la zona de contraste:

$\underline{Se\ admite\ que\ el\ \%\ de\ españoles\ que\ hablan\ una\ lengua\ extranjera\ es\ menor}$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

SEPTIEMBRE – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá elegir una opción A o B y responder a todas las cuestiones de esa opción. Nunca podrá mezclar cuestiones de la opción A con cuestiones de la opción B. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

OPCIÓN A

1º) Dadas las matrices $A = (y\ 0\ 1\ 3\ \ -\ 2\ 0\ 0\ 1\ 4\ ),\ B = (1\ 0\ 2\ 2\ 1\ z\ x\ 2\ y\ )\ y\ C = (1\ \ -\ \ 1\ 6\ 2\ \ -\ 3\ 9\ 3\ 10\ 1\ )$
.

$a)$ Calcular $C^t + I$, siendo I la matriz identidad.

$b)$ Hallar $x,\ y,\ z$ para que se cumpla que $AB = C^t + I$.

$a)$

$$C^t + I = (1\ 2\ 3\ \ -\ 1\ \ -\ 3\ 10\ 6\ 9\ 1\ ) + (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) = \underline{(2\ 2\ 3\ \ -\ 1\ \ -\ 2\ 10\ 6}$$
.

$b)$

$A \cdot B = (y\ 0\ 1\ 3\ \ -\ 2\ 0\ 0\ 1\ 4\ ) \cdot (1\ 0\ 2\ 2\ 1\ z\ x\ 2\ y\ ) = (x + y\ 2\ 3y\ \ -\ 1\ \ -\ 2\ 6 - 2z\ 4x +$
.

$$AB = C^t + I \Rightarrow (x + y\ 2\ 3y\ \ -\ 1\ \ -\ 2\ 6 - 2z\ 4x + 2\ 9\ 4y + z\ ) = (2\ 2\ 3\ \ -\ 1\ \ -$$

$\Rightarrow \{x + y = 2\ 3y = 3\ 4x + 2 = 6\ 6 - 2z = 10\ 4y + z = 2\ \} \Rightarrow \underline{x = 1,\ y = 1,\ z =-}$
.

****

2º) Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

$a)\ f(x) = x^5 Lx + 2e^x$. $b)\ g(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{2x+5}}$. $c)\ h(x) = \frac{x^2-1}{x+3}$.

$a)$

$$f(x) = x^5 Lx + 2e^x.$$

$$f'(x) = 5x^4 \cdot Lx + x^5 \cdot \frac{1}{x} + 2e^x = 5x^4 Lx + x^4 + 2e^x = x^4(5Lx + 1) + 2e^x.$$

$$\underline{f'(x) = x^4(5Lx + 1) + 2e^x.}$$

$b)$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{2x+5}} = (2x + 5)^{-\frac{1}{7}}.$$

$$g'(x) = -\frac{1}{7} \cdot (2x + 5)^{-\frac{1}{7}-1} \cdot 2 = -\frac{2}{7} \cdot (2x + 5)^{-\frac{8}{7}} = \frac{-2}{7(2x+5)^{\frac{8}{7}}} = \frac{-2}{7\sqrt[7]{(2x+5)^8}} =$$

$$= \frac{-2}{7(2x+5)\cdot\sqrt[7]{2x+5}} = -\frac{2\sqrt[7]{(2x+5)^6}}{7(2x+5)(2x+5)} = -\frac{2\sqrt[7]{(2x+5)^6}}{7(2x+5)^2}.$$

$$\underline{g'(x) = -\frac{2\cdot\sqrt[7]{(2x+5)^6}}{7\cdot(2x+5)^2}.}$$

$c)$

$$h(x) = \frac{x^2-1}{x+3}.$$

$$h'(x) = \frac{2x\cdot(x+3)-\left(x^2-1\right)\cdot 1}{(x+3)^2} = \frac{2x^2+6x-x^2+1}{(x+3)^2} = \frac{x^2+6x+1}{(x+3)^2}.$$

$$\underline{h'(x) = \frac{x^2+6x+1}{(x+3)^2}.}$$

****

3º) Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y = f(x) = x^2 - 4x + 8$ y la recta $y = g(x) = -2x + 8$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

El vértice de la parábola $y = f(x) = x^2 - 4x + 8$ es el siguiente:

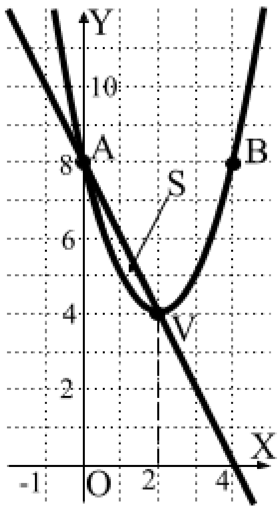
$y' = f'(x) = 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2 \Rightarrow f(2) = 4 \Rightarrow V(4,\ 2)$.

Los puntos de intersección de las funciones son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$x^2 - 4x + 8 = -2x + 8;\ x^2 - 2x = 0;$$

$$x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow A(0,\ 8) \\ x_2 = 2 \rightarrow V(2,\ 4) \end{cases}.$$

La representación gráfica del conjunto es el indicado en la figura adjunta.



Para el cálculo del área limitada por la parábola y la recta, que es la parte sombreada de la figura, se tiene en cuenta que, en el intervalo (0, 2), todas las ordenadas de la recta son mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola.

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_0^2 [g(x) - f(x)] \cdot dx = \int_0^2 \left[(-2x + 8) - \left(x^2 - 4x + 8\right)\right] \cdot dx =$$

$$= \int_0^2 \left(-2x + 8 - x^2 + 4x - 8\right) \cdot dx = \int_0^2 \left(-x^2 + 2x\right) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\right]_0^2 =$$

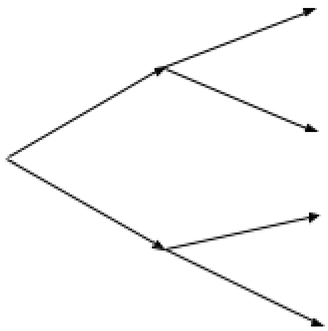
$$= \left[-\frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^2 = \left(-\frac{2^3}{3} + 2^2\right) - 0 = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{-8+12}{3} = \underline{\frac{4}{3}\,u^2}.$$

****

4º) Se sabe que el 28 % de una población padece algún tipo de alergia. El 45 % de los individuos de la población que sufren alergia son mujeres. Además, de la parte de la población que no padece alergia, el 35 % son mujeres.

a) Calcular la probabilidad de que al elegir al azar un individuo de la población sea mujer.

b) Se ha elegido un individuo al azar y es mujer; calcular la probabilidad de que no padezca alergia.



a)

$$P = P(M) = P(M \cap A) + P(M \cap \overline{A}) = P(A) \cdot P(M/A) + P(\overline{A}) \cdot P(M/\overline{A}) =$$

$$= 0,28 \cdot 0,45 + 0,72 \cdot 0,35 = 0,126 + 0,252 = \underline{0,378}.$$

b)

$$P = P(\overline{A}/M) = \frac{P(M \cap \overline{A})}{P(M)} = \frac{P(\overline{A}) \cdot P(M/\overline{A})}{P(A) \cdot P(M/A) + P(\overline{A}) \cdot P(M/\overline{A})} = \frac{0,72 \cdot 0,35}{0,28 \cdot 0,45 + 0,72 \cdot 0,35} =$$

$$= \frac{0,252}{0,126 + 0,252} = \frac{0,252}{0,378} = \underline{0,667}.$$

****

5º) Para estimar la proporción de individuos de una población que utilizan el comercio electrónico se ha realizado una encuesta a una muestra aleatoria de 200 individuos, de los cuales 90 han respondido que utilizan el comercio electrónico. Con estos datos, hallar un intervalo de confianza del 95 % para la proporción de individuos de la población que utilizan el comercio electrónico.

$\alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$

$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$

$Datos: n = 200;\ \ p = \frac{90}{200} = 0,45;\ \ q = 0,55;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $p,\ q,\ n\ y\ z_{\frac{\alpha}{2}}$ es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}};\ p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right).$

$$\left(0'45 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,45 \cdot 0,55}{200}};\ 0'45 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,45 \cdot 0,55}{200}}\right);$$

$$\left(0'45 - 1,96 \cdot 0'0352;\ 0'45 + 1,96 \cdot 0'0352\right);$$

$$\left(0'45 - 0'0689;\ 0'45 + 0'0689\right).$$

$$\underline{I.\ C._{95\ \%} = \left(0'3811;\ 0'5189\right).}$$

****

OPCIÓN B

1º) Una empresa necesita, como mínimo, 180 uniformes de mujer y 120 de hombre. Los encarga a dos talleres A y B. El taller A confecciona diariamente 6 uniformes de mujer y 2 de hombre con un coste de 75 euros al día. El taller B hace diariamente 4 uniformes de mujer y 3 de hombre con un coste diario de 90 euros. ¿Cuántos días debe trabajar cada taller para satisfacer las necesidades de la empresa con el mínimo de coste?, ¿cuánto vale dicho coste?

Sean x e y el número de uniformes de mujeres y hombres que se confeccionan, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} 6x+4y\geq 180 \\ 2x+3y\geq 120 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 3x+2y\geq 90 \\ 2x+3y\geq 120 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}.$$

La función de objetivos es: $f(x,\ y) = 75x + 90y$.

La región factible se indica en la figura:

x	30	0
y	0	45

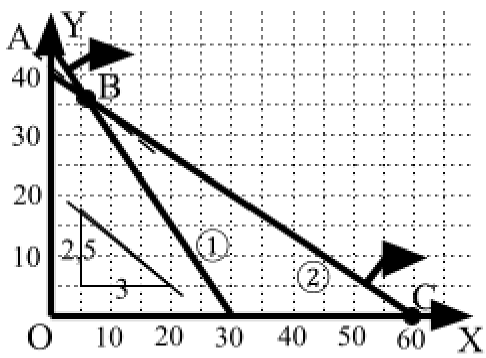
①$\Rightarrow 3x + 2y\geq 90 \Rightarrow y\geq \frac{90-3x}{2} \Rightarrow O(0,\ 0)\rightarrow No.$

x	60	0
y	0	40

②$\Rightarrow 2x + 3y\geq 120 \Rightarrow y\geq \frac{120-2x}{3} \Rightarrow O(0,\ 0)\rightarrow No.$

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+2y=90 \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,\ 45).$



$B\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+2y=90 \\ 2x+3y=120 \end{array}\right\} \ \left.\begin{array}{l} -6x-4y=-180 \\ 6x+9y=360 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5y = 180 \rightarrow y = 36 \Rightarrow B(6,\ 36).$

$C\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+3y=120 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow C(60,\ 0).$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 45) = 75 \cdot 0 + 90 \cdot 45 = 0 + 4.050 = 4.050.$

$B \Rightarrow f(6,\ 36) = 75 \cdot 6 + 90 \cdot 36 = 450 + 3.240 = 3.690.$

$C \Rightarrow f(60,\ 0) = 75 \cdot 60 + 90 \cdot 0 = 4.500 + 0 = 4.500.$

El mínimo se produce en el punto B.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,\ y) = 75x + 90y = 0 \Rightarrow y = -\frac{75}{90}x = -\frac{15}{18} = -\frac{5}{6} \Rightarrow m = -\frac{2,5}{3}.$$

$$\underline{Mínimo\ coste: trabajando\ 6\ días\ el\ taller\ A\ y\ 36\ días\ el\ taller\ B.}$$

$$\underline{El\ coste\ mínimo\ asciende\ a\ 3.690\ euros.}$$

****

2º) Dada la función $f(x) = \{ \quad - x + 1 \quad si \quad x \leq -2 \;\; 2x + 7 \;\; si \;\; -2 < x < 1 \; ax^2 - 5x + 6 \;\; si \;\; x \geq 1$, donde $a \in R$:

a) Estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x = -2$.

b) Hallar a para que la función sea continua en $x = 1$.

c) Para $a = 1$ hacer la representación gráfica de la función.

----

a)

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\, x = -2 \Rightarrow \left\{ f(x) = \lim_{x \to -2} (-x + 1) = 3 = f(-2) \;\; f(x) = \lim_{x \to -2} (2x + 7\right.$$

$f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x) = f(-2)$.

$\underline{La\, función\, f(x)\, es\, continua\, en\, x = -2.}$

b)

$$x = 1 \Rightarrow \left\{ f(x) = \lim_{x \to 1} (2x + 7) = 2 + 7 = 9 \qquad f(x) = \lim_{x \to 1}\right.$$

$\Rightarrow 9 = a + 1 \Rightarrow a = 8.$

$\underline{La\, función\, f(x)\, es\, continua\, en\, x = 1\, para\, a = 8.}$

c)

Para $a = 1$ la función es $f(x) = \{ \quad - x + 1 \quad si \quad x \leq -2 \;\; 2x + 7 \;\; si \;\; -2 < x < 1 \; x^2 - 5x + 6 \;\; si \;\; x \geq 1$
.

En el intervalo $(-\infty, -2]$ la función es la recta de expresión $g(x) = -x + 1$ que contiene a los puntos $A(-5, 6)$ y $B(-2, 3)$.

En el intervalo $(-2, 1)$ la función es la recta de expresión $h(x) = 2x + 7$, cuyos puntos extremos son $B(-2, 3)$ y $C(1, 9)$, que no pertenecen a la recta.

En el intervalo $[1, +\infty)$ la función es $q(x) = x^2 - 5x + 6$, que es una parábola convexa (∪) cuyo vértice es el siguiente:

$$q'(x) = 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}.$$

$$q\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5\cdot\frac{5}{2} + 6 = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 6 = \frac{25-50+24}{4} = -\frac{1}{4} \Rightarrow V\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right).$$

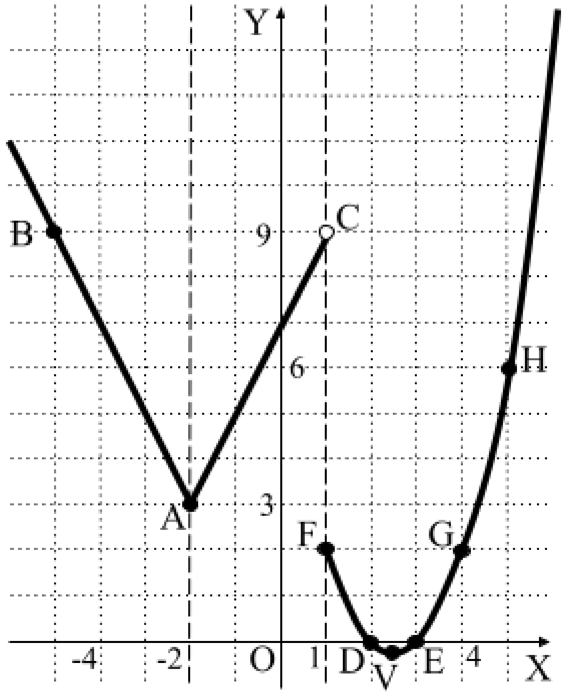
Las abscisas de los puntos de corte con el eje X de la parábola son las soluciones de la ecuación que resulta de su igualación a cero:

$$x^2 - 5x + 6 = 0;\ x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow \{x_1 = 2 \rightarrow D(2, 0)\ x_2 = 3 \rightarrow E(3, 0)$$

.

Otros puntos de la parábola son $F(1, 2)$, $G(4, 2)\ y\ H(5, 6)$.

La representación gráfica de la función, aproximada, es la que aparece en el gráfico siguiente.



****

3º) Calcular las siguientes integrales:

$a)\ I = \int \left(-x + 2e^{x}\right) \cdot dx.$ $\qquad$ $b)\ I = \int_{1}^{2} \left(x^{2} - \frac{x^{3}}{2} - 1\right) \cdot dx.$

$a)$

$$\underline{I = \int \left(-x + 2e^{x}\right) \cdot dx = -\frac{x^{2}}{2} + 2e^{x} + C.}$$

$b)$

$$I = \int_{1}^{2} \left(x^{2} - \frac{x^{3}}{2} - 1\right) \cdot dx = \left[\frac{x^{3}}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{4}}{4} - x\right]_{1}^{2} = \left[\frac{x^{3}}{3} - \frac{x^{4}}{8} - x\right]_{1}^{2} =$$

$$= \left(\frac{2^{3}}{3} - \frac{2^{4}}{8} - 2\right) - \left(\frac{1^{3}}{3} - \frac{1^{4}}{8} - 1\right) = \frac{8}{3} - \frac{16}{8} - 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + 1 = \frac{7}{3} - 2 + \frac{1}{8} - 1$$

$$= \frac{7}{3} + \frac{1}{8} - 3 = \frac{56+3-72}{24} = -\frac{13}{24}.$$

$$\underline{I = \int_{1}^{2} \left(x^{2} - \frac{x^{3}}{2} - 1\right) \cdot dx = -\frac{13}{24}.}$$

****

4º) En una urna hay bolas numeradas de 1 al 3, hay 30 bolas con el número 1, 60 con el número 2 y 90 con el número 3. Se realiza el experimento de sacar dos bolas consecutivamente sin reemplazamiento.

a) Hallar la probabilidad de que en las dos salga 1.

b) Hallar la probabilidad de que la suma de los números obtenida sea par.

----

a)

$$P = \frac{30}{180} \cdot \frac{29}{179} = \frac{1 \cdot 29}{6 \cdot 179} = \underline{\frac{29}{1.074} = 0,027}.$$

b)

Los casos posibles son: $(1,\ 1),\ (1,\ 3),\ (3,\ 1),\ (2,\ 2)\ y\ (3,\ 3)$.

$$\mathrm{P}(1,\ 1) = \frac{29}{1.074}.$$

$$\mathrm{P}(1,\ 3) = \frac{30}{180} \cdot \frac{90}{179} = \frac{1}{6} \cdot \frac{90}{179} = \frac{15}{179}.$$

$$\mathrm{P}(3,\ 1) = \frac{90}{180} \cdot \frac{30}{179} = \frac{1}{2} \cdot \frac{30}{179} = \frac{15}{179}.$$

$$P(2,\ 2) = \frac{60}{180} \cdot \frac{59}{179} = \frac{1 \cdot 59}{3 \cdot 179} = \frac{59}{537}.$$

$$P(3,\ 3) = \frac{90}{180} \cdot \frac{89}{179} = \frac{1 \cdot 89}{2 \cdot 179} = \frac{89}{358}.$$

$$P = \frac{29}{1.074} + 2 \cdot \frac{15}{179} + \frac{59}{537} + \frac{89}{358} = \frac{29+2 \cdot 15 \cdot 6+2 \cdot 59+3 \cdot 89}{1.074} = \frac{29+180+118+267}{1.074} =$$

$$= \frac{594}{1.074} = \frac{198}{358} = \underline{\frac{99}{179} = 0,5531}.$$

****

5º) Según un informe sobre calidad de infraestructuras turísticas, la puntuación media de los alojamientos turísticos de un país es, como mínimo, de 7’8, con una desviación típica de 0’7. Para comprobar esta información, se toma una muestra aleatoria de 150 alojamientos, para los que se obtiene una puntuación media de 7’5. Si la puntuación es una variable normal:

a) Plantear un contraste para determinar si se puede aceptar la afirmación del informe. Dar la expresión de la región de aceptación.

b) Con un nivel de significación del 4 %, ¿se puede aceptar lo que dice el informe?

----

a)

$Hipótesis\ nula \rightarrow H_0: \mu \geq 7,8$ $\qquad$ $Hipótesis\ alternativa \rightarrow H_1: \mu < 7,8\}$.

Contraste unilateral.

Conocemos: $n = 150;\ \mu = 7,8;\ \sigma = 0,7.$

La región de aceptación es $\left(\mu - z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ +\infty\right)$, por lo tanto la región crítica es:

$$\overline{x} < \mu - z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \overline{x} < 7,8 - z_\alpha \cdot \frac{0,7}{\sqrt{150}} = 7,8 - z_\alpha \cdot 0'057.$$

$$\underline{Región\ crítica\text{: } \overline{x} < 7,8 - z_\alpha \cdot 0'057}.$$

b)

$\alpha = 0,04 \rightarrow z_\alpha = 1,75.\ (1 - 0,04 = 0,9600 \rightarrow z = 1,75).$

Región crítica: $7,8 - z_\alpha \cdot 0'057 = 7,8 - 1'75 \cdot 0'057 = 7,8 - 0'100 =$

$= 7'700 > 7'5.$

$$\underline{\overline{x} = 7'5 \notin (7'700;\ +\infty) \Rightarrow Se\ rechaza\ la\ hipótesis\ nula}.$$

****

<u>PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)</u>

<u>UNIVERSIDAD DE NAVARRA</u>

<u>JUNIO – 2016</u>

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

<u>MATEMÁTICAS CC SS</u> <u>Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos</u>

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B).

<u>PRUEBA A</u>

1º) Una empresa fabrica dos modelos de cazadoras de caballero: un modelo clásico y otro moderno. La empresa tiene 900 horas disponibles en su departamento de corte y costura, 300 horas disponibles en el departamento de terminado y 100 horas disponibles en el departamento de empaquetado. Las horas necesarias por cazadora y sus beneficios se dan en la siguiente tabla:

	Corte y costura	*Terminado*	*Empaquetado*	*Beneficios*
Modelo clásico	1	1/2	1/8	40
Modelo moderno	3/2	1/3	1/4	80

Formule el modelo que permita encontrar una política de producción que maximice el beneficio.

i) Plantee el problema. ii) Resolución gráfica.

iii) Analice gráficamente qué ocurre si las horas de empaquetado aumentan en 100.

----

i)

Sean x e y el número de cazadoras clásicas y modernas que se fabrican, respectiva mente.

El conjunto de restricciones son las siguientes:

$$x + \frac{3}{2}y \leq 900 \quad \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y \leq 300 \quad \frac{1}{8}x + \frac{1}{4}y \leq 100 \quad x \geq 9; \; y \geq 0 \} \quad \underline{2x + 3y \leq 1.800}$$

.

La función de objetivos es: $\underline{f(x, y) = 40x + 80y}$.

ii)

x	0	900
y	600	0

①$\Rightarrow 2x+3y\le 1.800 \Rightarrow y\le \frac{1.800-2x}{3} \Rightarrow O(0,\ 0)\rightarrow Si.$

x	0	600
y	900	0

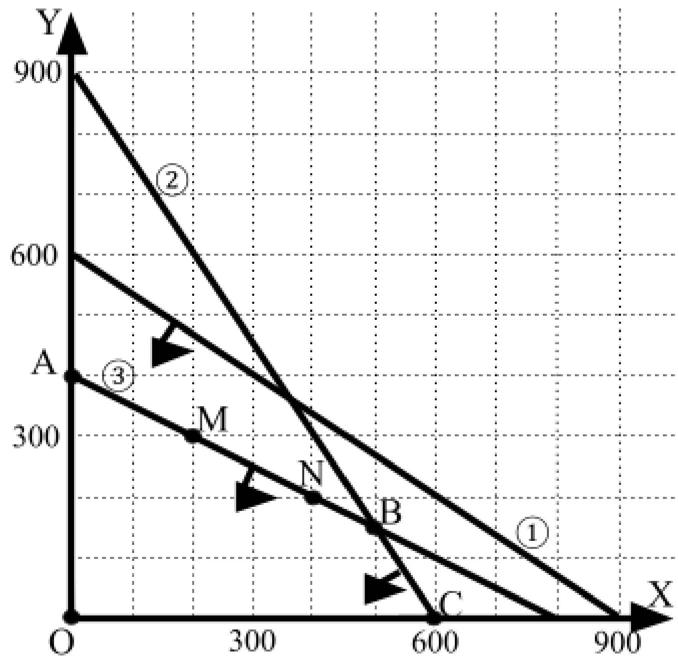
②$\Rightarrow 3x+2y\le 1.800 \Rightarrow y\le \frac{1.800-3x}{2} \Rightarrow O(0,\ 0)\rightarrow Si.$

x	0	800
y	800	0

③$\Rightarrow x+2y\le 800 \Rightarrow y\le \frac{800-x}{2} \Rightarrow O(0,\ 0)\rightarrow Si.$

La región factible se indica en la figura.

Los vértices de la zona factible son, además del origen, los siguientes:



$A\Rightarrow \left. \begin{matrix} x=0 \\ x+2y=800 \end{matrix} \right\} \Rightarrow A(0,\ 400).$

$B\Rightarrow \left. \begin{matrix} 3x+2y=1.800 \\ x+2y=800 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow B(500,\ 150).$

$C\Rightarrow \left. \begin{matrix} 3x+2y=1.800 \\ y=0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow C(600,\ 0).$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A\Rightarrow f(0,\ 400)=40\cdot 0+80\cdot 400=0+32.000=32.000.$

$B\Rightarrow f(500,\ 150)=40\cdot 500+80\cdot 150=20.000+12.000=32.000.$

$C\Rightarrow f(600,\ 0)=40\cdot 600+80\cdot 0=24.000+0=24.000.$

El máximo se produce en todos los puntos enteros del segmento AB, que son, además de A y B, los puntos $M(200,\ 300)$ y $N(400,\ 200)$.

$\underline{El\ beneficio\ se\ maximiza\ fabricando: \{500\ clásicas\ y\ 0\ modernas \quad 200\ clásicas\ y\ 3}$

.

$iii)$

Si las horas de empaquetado aumentan en 100, el problema es como sigue:
El conjunto de restricciones son las siguientes:

$$x + \frac{3}{2}y \le 900\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y \le 300\ \frac{1}{8}x + \frac{1}{4}y \le 200 \quad x \ge 9;\ \ y \ge 0\,\} \ \underline{2x + 3y \le 1.800}$$

.

La función de objetivos es la misma: $\underline{f(x,\ y) = 40x + 80y}$.

La única recta que varía es la ③.

x	0	900
y	600	0

①$\Rightarrow 2x + 3y \le 1.800 \Rightarrow y \le \frac{1.800 - 2x}{3} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	0	600
y	900	0

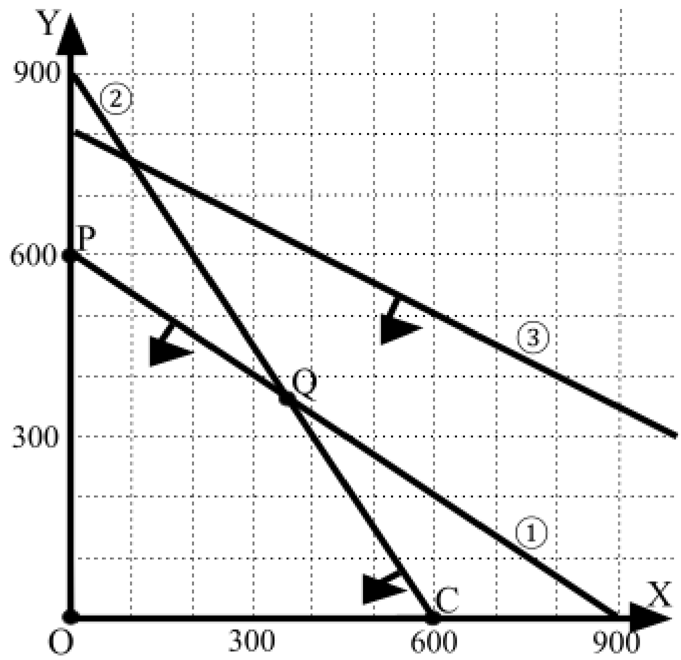
②$\Rightarrow 3x + 2y \le 1.800 \Rightarrow y \le \frac{1.800 - 3x}{2} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	800	600
y	400	500

③$\Rightarrow x + 2y \le 1.600 \Rightarrow y \le \frac{1.600 - x}{2} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

La región factible se indica en la figura.

Los vértices de la zona factible, además del origen, son los siguientes:



$P \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 0 \\ 2x + 3y = 1.600 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow A(0,\ 600)$.

$B \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x + 3y = 1.800 \\ 3x + 2y = 1.800 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = y \Rightarrow Q(360,\ 360)$.

$C \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3x + 2y = 1.800 \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow C(600,\ 0)$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$P \Rightarrow f(0,\ 600) = 40 \cdot 0 + 80 \cdot 600 = 0 + 48.000 = 48.000$.

$Q \Rightarrow f(360,\ 360) = 40 \cdot 360 + 80 \cdot 360 = 14.400 + 28.800 = 43.200$.

$C \Rightarrow f(600,\ 0) = 40 \cdot 600 + 80 \cdot 0 = 24.000 + 0 = 24.000$.

El máximo se produce en el punto $P(0,\ 600)$.

$\underline{El\ beneficio\ se\ maximiza\ fabricando\ sólamente\ 600\ cazadoras\ modernas.}$

****

2º) La función $f(x) = -x^2 + 110x - 2.400$ representa el beneficio que obtiene una empresa por la fabricación de x unidades de un producto.

i) ¿Cuántas unidades ha de fabricar para que no haya pérdidas?

ii) ¿Cuál es el mayor beneficio posible? ¿Cuántas unidades han de fabricar para alcanzarlo?

iii) ¿Calcule la función del beneficio unitario?

----

i)

La solución pedida es cuando $f(x)$ es positiva.

La función $f(x) = -x^2 + 110x - 2.400$ es una parábola cóncava ($\cap$) cuyos puntos de corte con el eje X son los siguientes:

$$f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 110x - 2.400 = 0;\ \ x^2 - 110x + 2.400 = 0;$$

$$x = \frac{110 \pm \sqrt{110^2 - 4 \cdot 2.400}}{2} = \frac{110 \pm \sqrt{12.100 - 9.600}}{2} = \frac{110 \pm \sqrt{2.500}}{2} = \frac{110 \pm 50}{2} \Rightarrow \{x_1 = 30\ x_1 = 80$$

.

$\underline{No\ hay\ pérdidas\ en\ la\ empresa\ fabricando\ entre\ 30\ y\ 80\ unidades}.$

ii)

El punto máximo de la función se obtiene para el valor de x que anula la primera derivada:

$$f'(x) = -2x + 110 = 0;\ \ -x + 55 = 0 \Rightarrow x = 55.$$

$$f(55) = -55^2 + 110 \cdot 55 - 2.400 = -3.025 + 6.050 - 2.400 = 625.$$

$\underline{El\ máximo\ beneficio\ posible\ es\ de\ 625\ euros\ (se\ supone\ que\ son\ euros)}.$

$\underline{El\ maximo\ beneficio\ se\ obtiene\ produciendo\ 55\ unidades}.$

iii)

La función unitaria del beneficio $f(u)$ es la que se obtiene dividiendo por x la función de beneficios:

$$f(u) = \frac{-x^2 + 110x - 2.400}{x} = -x + 110 - \frac{2.400}{x}.$$

$$\underline{f(u) = -x + 110 - \frac{2.400}{x}.}$$

****

3º) La puntuación que obtienen los alumnos de la UPNA en cierto test psicológico sigue una distribución normal de desviación típica 35. Sabiendo que en una muestra de 50 estudiantes se observó una media de 75 puntos.

i) Calcule un intervalo de confianza del 90 % para la media poblacional.

ii) Razone cómo se puede reducir el error máximo.

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

----

i)

Para un nivel de confianza del 90 % es:

$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 1 - 0,90 = 0,10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,05} = 1,645.$

$(1 - 0,05 = 0,9500 \rightarrow z = 1,645).$

Conocemos: $n = 50;\ \ \sigma = 35;\ \ \overline{x} = 75;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,645.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(75 - 1,645 \cdot \frac{35}{\sqrt{50}};\ 75 + 1,645 \cdot \frac{35}{\sqrt{50}}\right);$

$(75 - 1,645 \cdot 4,950;\ 75 + 1,645 \cdot 4,950);\ \ \left(75 - 8'142;\ 75 + 8'142\right).$

$$\underline{I.\ C._{90\ \%}\left(66'858;\ 83'142\right).}$$

ii)

El error es: $E = \frac{83,142 - 66,853}{2} = \frac{16,289}{2} = 8,1445.$

Existen dos formas de reducir el error máximo: aumentando el tamaño de la muestra o aumentando el nivel de confianza.

$$\underline{El\ error\ disminuye\ aumentando\ la\ muestra\ o\ el\ nivel\ de\ confianza.}$$

Ejemplo primero:

Con una muestra de 100 estudiantes.

Conocemos: $n = 100$; $\sigma = 35$; $\overline{x} = 75$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,645$.

$$\left(75 - 1,645\cdot\frac{35}{\sqrt{100}};\ 75 + 1,645\cdot\frac{35}{\sqrt{100}}\right);$$

$(75 - 1,645\cdot 3,5;\ 75 + 1,645\cdot 3,5)$; $\left(75 - 5'789;\ 75 + 5'789\right)$.

$I.\ C._{90\,\%}\left(69'211;\ 82'789\right) \Rightarrow E = \frac{82,789-69,211}{2} = \frac{13,578}{2} = \underline{6,789 < 8,145}$.

Ejemplo segundo:

Con un nivel de confianza del 95 %.

$\alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96$.
$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96)$.

Conocemos: $n = 50$; $\sigma = 35$; $\overline{x} = 75$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$.

$$\left(75 - 1,96\cdot\frac{35}{\sqrt{50}};\ 75 + 1,96\cdot\frac{35}{\sqrt{50}}\right);$$

$(75 - 1,96\cdot 4,950;\ 75 + 1,96\cdot 4,950)$; $\left(75 - 9'702;\ 75 + 9'702\right)$.

$I.\ C._{90\,\%}\left(65'298;\ 83'702\right) \Rightarrow E = \frac{83,702-65,298}{2} = \frac{18,403}{2} = \underline{9,202 < 8,145}$.

Ejemplo tercero:

Con $n = 100$ y nivel del confianza del 95 %.

Conocemos: $n = 100$; $\sigma = 35$; $\overline{x} = 75$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$.

$$\left(75 - 1,96\cdot\frac{35}{\sqrt{100}};\ 75 + 1,96\cdot\frac{35}{\sqrt{100}}\right);$$

$(75 - 1,96\cdot 3,5;\ 75 + 1,96\cdot 3,5)$; $\left(75 - 6'860;\ 75 + 6'860\right)$.

$I.\ C._{90\,\%}\left(68'140;\ 81'860\right) \Rightarrow E = \frac{81,860-68,140}{2} = \frac{13,720}{2} = \underline{6,860 < 8,145}$.

****

OPCIÓN B

1º) Determine las matrices X e Y que verifican: $X + 2Y = (3\ 4\ 5\ 2\ 3\ 4)\ 2X + Y = (3\ 5\ 7\ 7\ 9\ 11)\ \}$. Si existen, calcule las matrices $X \cdot Y\ y\ X \cdot Y^{t}$.

$2X + 4Y = (6\ 8\ 10\ 4\ 6\ 8) \qquad - 2X - Y = (-3\ \ -5\ \ -7\ \ -7\ \ -9\ \ -11)\ \} \Rightarrow 3Y$

.

$- X - 2Y = (-3\ \ -4\ \ -5\ \ -2\ \ -3\ \ -4)\ 4X + 2Y = (6\ 10\ 14\ 14\ 18\ 22)\ \} \Rightarrow 3X =$

.

$X \cdot Y = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6) \cdot (1\ 1\ 1\ \ -1\ \ -1\ \ -1) \Rightarrow \underline{No\ existe}.$

Para multiplicar dos matrices tiene que cumplirse que el número de columnas del multiplicando sea igual que el número de filas del multiplicador.

$X \cdot Y = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6) \cdot (1\ \ -1\ 1\ \ -1\ 1\ \ -1) = (6\ \ -6\ 15\ \ -15).$

$$\underline{X \cdot Y = (6\ \ -6\ 15\ \ -15)}.$$

****

2º) Halle los valores a, b y c para que la curva $f(x) = ax^2 + bx + c$ pase por el punto $P(1, 3)$ y sea tangente en el origen de coordenadas a la bisectriz del primer cuadrante.

Por pasar por $P(1, 3)$: $f(1) = 3 \Rightarrow a \cdot 1^2 + b + c = 3$; $a + b + c = 3$. (1)

Por pasar por $O(0, 0)$: $f(0) = 0 \Rightarrow \underline{c = 0}$.

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual al valor de su primera derivada en ese punto.

La bisectriz del primer cuadrante tiene de pendiente $1 \Rightarrow m = 1$.

$f'(x) = 2ax + b \Rightarrow f'(0) = m \Rightarrow 0 + b = 1 \Rightarrow \underline{b = 1}$.

Sustituyendo en (1) los valores de b y c:

$a + 1 + 0 = 3 \Rightarrow \underline{a = 2}$.

****

3º) En una empresa, el 45 % de los empleados usa el comedor del personal, el 30 % usa los transportes de la empresa y el 20 % usa ambos servicios. Seleccionado un empleado al azar, se pide:

i) Si usa el servicio de comedor, calcule la probabilidad de que use el servicio de transporte.

ii) Si usa el servicio de transporte, calcule la probabilidad de que no use el servicio de comedor.

iii) Calcule la probabilidad de que no use ni el servicio de transporte ni el servicio de comedor.

$$P(C) = 0,45. \qquad P(T) = 0,30. \qquad P(C \cap T) = 0,2.$$

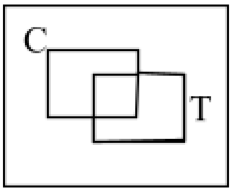
i)

$$P(T/C) = \frac{P(T \cap C)}{P(C)} = \frac{0,2}{0,45} = \underline{0,444}.$$

ii)

$$P(\overline{C}/T) = \frac{P(\overline{C} \cap T)}{P(T)} = \frac{P(T) - P(C \cap T)}{0,30} =$$

$$= \frac{0,30 - 0,20}{0,30} = \frac{0,10}{0,30} = \underline{\frac{1}{3}}$$

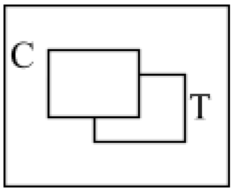


iii)

$$P = P(\overline{C} \cap \overline{T}) = 1 - P(C \cup T) =$$

$$= 1 - [P(C) + P(T) - P(C \cap T)] =$$

$$= 1 - (0,45 + 0,30 - 0,20) = 1 - 0,55 = \underline{0,45}.$$



****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

SEPTIEMBRE – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B).

PRUEBA A

1º) Dada la matriz $A = (3\ \ -\ 3\ 2\ \ -\ 2\ )$:

i) Encuentre todas las matrices cuadradas X de orden 2 que verifiquen: $A \cdot X = O$. (O es la matriz nula).

ii) ¿Se cumple que $X \cdot A = O$? iii) ¿Alguna de esas matrices X es simétrica?

----

i)

Sea la matriz $X = (a\ b\ c\ d\ )$.

$A \cdot X = (3\ \ -\ 3\ 2\ \ -\ 2\ ) \cdot (a\ b\ c\ d\ ) = (3a\ -\ 3c\ 3b\ -\ 3d\ 2a\ -\ 2c\ 2b\ -\ 2d\ ) = (0\ 0\ 0\ 0\ )$

$\Rightarrow \{3a\ -\ 3c\ =\ 0\ 2a\ -\ 2c\ =\ 0\ 3b\ -\ 3d\ =\ 0\ 2b\ -\ 2d\ =\ 0\ \} \Rightarrow \{a\ =\ c\ b\ =\ d\ \} \Rightarrow \underline{X\ =\ (}$

.

ii)

$X \cdot A = (a\ b\ a\ b\ ) \cdot (3\ \ -\ 3\ 2\ \ -\ 2\ ) = (3a\ +\ 2b\ \ -\ 3a\ -\ 2b\ 3a\ +\ 2b\ \ -\ 3a\ -\ 2b\ )$

.

$$\underline{X \cdot A\ =\ O \Rightarrow a\ =\ b\ =\ 0}.$$

iii)

Una matriz es simétrica cuando es igual a su traspuesta.

$$\underline{X\ es\ simétrica\ para\ a\ =\ b \in R}.$$

****

2º) Dada la función $f(x) = \frac{2x^3}{x^2-1}$, halle:

i) Dominio y puntos de corte con los ejes. ii) Asíntotas.

iii) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

iv) Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

v) Con los datos que ha obtenido, dibuje su gráfica.

----

i)

Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto los valores de x que anulan el denominador: $\underline{D(f) \Rightarrow R - \{-1, 1\}}$.

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$Eje\ Y \Rightarrow x = 0 \rightarrow \underline{O(0, 0)}$.

$Eje\ X \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^3}{x^2-1} = 0 \Rightarrow x = 0 \rightarrow \underline{O(0, 0)}$.

$\underline{El\ único\ punto\ de\ corte\ con\ los\ ejes\ de\ f(x)\ es\ el\ origen\ de\ coordenadas}$.

ii)

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$, son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = f(x) = \frac{2x^3}{x^2-1} = \infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \underline{La\ rectas\ x = -1\ y\ x = 1\ son\ asíntotas\ verticales}.$$

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \frac{f(x)}{x} \text{ y } n = \left[\frac{f(x)}{x} - mx\right].$$

$$m = \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{2x^3}{x^2-1}}{x} = \frac{2x^3}{x^3-x^2} = 2.$$

$$n = \left[\frac{f(x)}{x} - mx\right] = \left(\frac{2x^3}{x^2-1} - 2x\right)\frac{2x^3-2x^3+2x}{x^2-1} = 0.$$

$$\underline{La\ recta\ y = 2x\ es\ asíntota\ oblicua\ de\ la\ función.}$$

$iii)$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{6x^2\cdot\left(x^2-1\right)-2x^3\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{6x^4-6x^2-4x^4}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{2x^4-6x^2}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{2x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2} = 0;\ 2x^2\left(x^2 - 3\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -\sqrt{3},\ x_3 = \sqrt{3}.$$

Teniendo en cuenta que la función $f(x) = \frac{2x^3}{x^2-1}$ es simétrica con respecto al origen por ser $f(-x) = -f(x)$, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Decrecimiento:\ f'(x) < 0 \Rightarrow x \in \left(-\sqrt{3}, -1\right) \cup (-1, 1) \cup \left(1, \sqrt{3}\right).}$$

$$\underline{Crecimiento:\ f'(x) > 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right).}$$

Una función tiene un extremo relativo (máximo o mínimo) para los valores de x que anulan la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan la primera derivada se trate de un máximo relativo y, si es positiva, de un mínimo relativo.

$$f''(x) = \frac{\left(8x^3-12x\right)\cdot\left(x^2-1\right)^2-2x^2\left(x^2-3\right)\cdot\left[2\cdot\left(x^2-1\right)\cdot 2x\right]}{\left(x^2-1\right)^4} = \frac{\left(8x^3-12x\right)\cdot\left(x^2-1\right)-8x^3\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^3} =$$

$$= \frac{8x^5-8x^3-12x^3+12x-8x^5+24x^3}{\left(x^2-1\right)^3} = \frac{4x^3+12x}{\left(x^2-1\right)^3} = \frac{4x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}.$$

$$f''(0) = 0 \Rightarrow Ni\ máximo\ ni\ mínimo\ (para\ punto\ de\ inflexión).$$

$$f''\left(\sqrt{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}(3+3)}{(3-1)^3} = \frac{24\sqrt{3}}{8} > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = \sqrt{3}.$$

$$f\left(\sqrt{3}\right)=\frac{2\cdot 3\sqrt{3}}{3-1}=\frac{6\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}\cong 5,2\Rightarrow \underline{Mínimo\ relativo: A\left(\sqrt{3},\ 3\sqrt{3}\right)}.$$

Por simetría con respecto al origen $\Rightarrow \underline{Máximo\ relativo: B\left(-\sqrt{3},\ -3\sqrt{3}\right)}.$

$iv)$

Una función es cóncava o convexa cuando su segunda derivada es negativa o positiva, respectivamente. $f''(x)=\frac{4x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}$.

$$\underline{Concavidad\ (\cap):\ f''(x)<0\Rightarrow x\in(-\infty,\ -1)\cup(0,\ 1)}.$$

$$\underline{Convexidad\ (\cup):\ f''(x)>0\Rightarrow x\in(-1,\ 0)\cup(1,\ +\infty)}$$

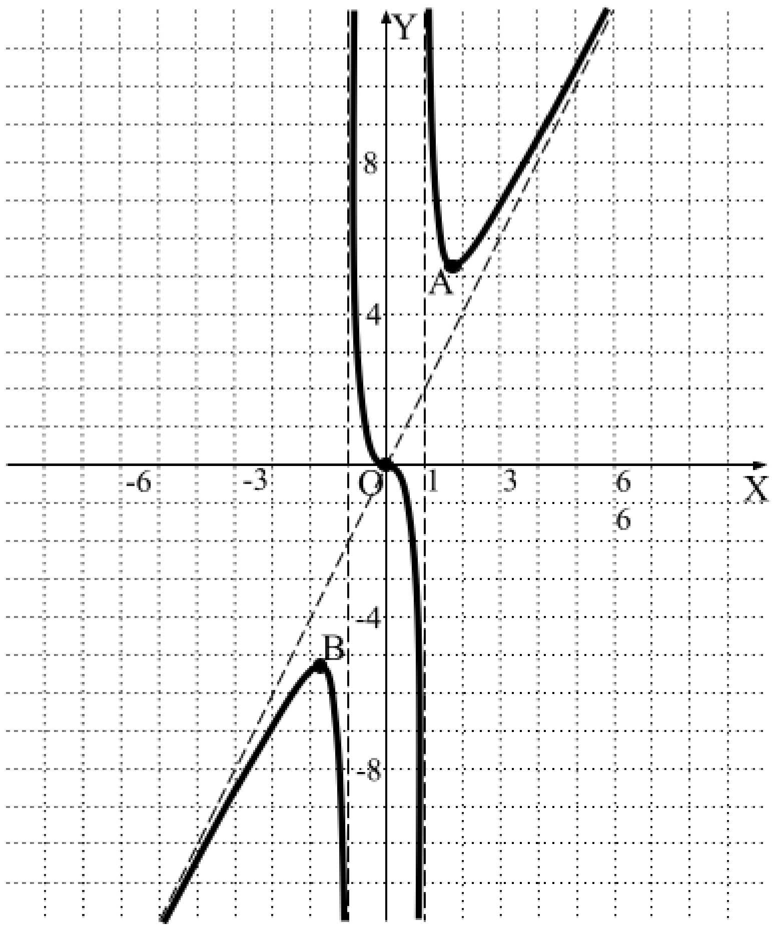
Para que una función tenga un punto de inflexión es condición necesaria que se anule su segunda derivada:

$$f''(x)=0\Rightarrow\frac{4x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}=0;\ \ 4x\left(x^2+3\right)=0\Rightarrow x=0.$$

$$\underline{Punto\ de\ inflexión: O(0,\ 0)}.$$

$v)$

Considerando los elementos hallados anteriormente, la representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



****

3º) El beneficio anual (pérdidas en el caso de valores negativos) de las empresas de una determinada comunidad sigue una distribución normal con una desviación típica de 2 millones de euros.

i) Se elige una muestra aleatoria de 25 empresas y, la media muestral observada es de 0,5 millones. Determine el intervalo de confianza del 95 % para el beneficio medio anual de las empresas de esa comunidad.

ii) Si se desea obtener un intervalo de confianza del 90 % para el beneficio medio con una amplitud de 2 millones de euros, ¿qué tamaño deberá tener la muestra?

----

i)

$$1-\alpha=1-0,5=0,95\rightarrow\alpha=1-0,95=0,05\rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0,025}=1,96$$

.

$(1-0,025=0,9750\rightarrow z=1,96)$.

Datos: $n=25;\ \sigma=2;\ \overline{x}=0,5;\ z_{\frac{\alpha}{2}}=1,96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(0,5-1,96\cdot\frac{2}{\sqrt{25}};\ 0,5+1,96\cdot\frac{2}{\sqrt{25}}\right);\ \left(0,5-1'96\cdot0'4;\ 0,5+1'96\cdot0'4\right);$$

$$(0,5-0,784;\ 0,5+0'784)\Rightarrow \underline{I.\ C._{95\ \%}=\left(-0'284;\ 1'284\right)}.$$

ii)

Para un nivel del 90 %:

$$1-\alpha=0,90\rightarrow\alpha=1-0,90=0,10\rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0,05}=1,645.$$

$(1-0,05=0,9500\rightarrow z=1,645)$.

$$E=\frac{Amplitud\ del\ intervalo}{2}=\frac{2}{2}=1.$$

Datos: $\overline{x}=0,5;\ \sigma=2;\ z_{\frac{\alpha}{2}}=1,645;\ E=1.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Rightarrow\sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(1,645\cdot\frac{2}{1}\right)^2=$

$= (1,645 \cdot 2)^2 = 3,29^2 = 10,82.$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 11\ empresas.}$

****

OPCIÓN B

1º) Una empresa de transporte de viajeros dispone de 12 chóferes, 10 autobuses de 25 plazas y 6 autobuses de 50 plazas y tiene que llevar de excursión a 400 escolares. El gasto para ese viaje de un autobús grande es de 900 euros y el gasto de uno pequeño es de 600 euros. ¿Cuántos autobuses de cada clase debe utilizar en esa excursión para tener el menor gasto?

i) Plantee el problema. ii) Resolución gráfica.

iii) Analice gráficamente qué ocurre si el gasto del autobús pequeño se reduce a 450 euros.

----

i)

Sean x e y el número de autobuses de 25 y 50 plazas que se utilizan en la excursión, respectivamente.

Las restricciones del ejercicio se establecen en el sistema de inecuaciones:

$x + y \leq 12\ \ 25x + 50y \geq 400 \quad x \leq 10,\ y \leq 6\ \} \Rightarrow \quad x + y \leq 12\ \ x + 2y \geq 16\ x \leq 10,$

.

La región factible se indica sombreada en la figura:

x	0	12
y	12	0

$① \Rightarrow x + y \leq 12 \Rightarrow y \leq 12 - x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

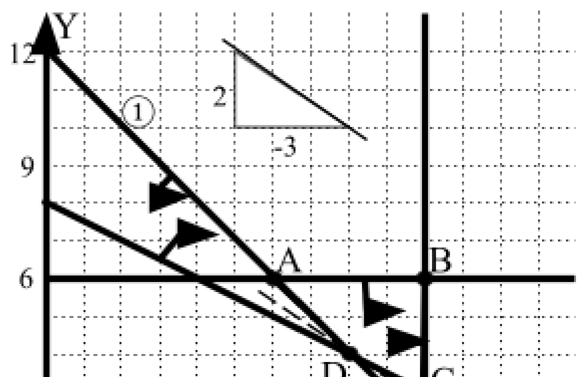
x	0	8
y	8	4

$② \Rightarrow x + 2y \geq 16 \Rightarrow y \geq \frac{16-x}{2} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow No.$

Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow x + y = 12\ y = 6\ \} \Rightarrow A(6,\ 6).$

$B \Rightarrow x = 10\ y = 6\ \} \Rightarrow B(10,\ 6).$



$C \Rightarrow \quad x = 10 \; x + 2y = 16 \} \Rightarrow C(10,\ 3).$

$D \Rightarrow \ x + y = 12 \; x + 2y = 16 \} \Rightarrow C(8,\ 4).$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,\ y) = 600x + 900y.$

$ii)$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(6,\ 6) = 600 \cdot 6 + 900 \cdot 6 = 3.600 + 5.400 = 9.000.$

$B \Rightarrow f(10,\ 6) = 600 \cdot 10 + 900 \cdot 6 = 6.000 + 5.400 = 11.400.$

$C \Rightarrow f(10,\ 3) = 600 \cdot 10 + 900 \cdot 3 = 6.000 + 2.700 = 8.700.$

$D \Rightarrow f(8,\ 4) = 600 \cdot 8 + 900 \cdot 4 = 4.800 + 3.600 = 8.400.$

El mínimo se produce en el punto D.

También se hubiera obtenido el punto D por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

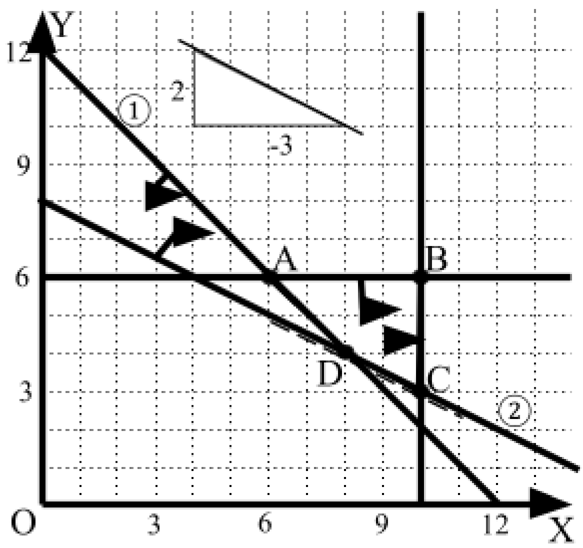
$f(x,\ y) = 600x + 900y = 0 \Rightarrow y = -\frac{600}{900}x = -\frac{2}{3}x \Rightarrow m = -\frac{2}{3}.$

$\underline{Deben\ utilizarse\ 8\ autobuses\ de\ 25\ plazas\ y\ 4\ autobuses\ de\ 50\ plazas.}$

$\underline{El\ menor\ coste\ posible\ es\ de\ 8.400\ euros.}$

$iii)$

S el gasto del autobús pequeño se reduce a 450 euros, la función de beneficios es la siguiente: $f(x,\ y) = 450x + 900y.$



El punto de mínimo gasto puede obtenerse por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,\ y) = 450x + 900y = 0 \Rightarrow y = -\frac{450}{900}x = -\frac{1}{2}x \Rightarrow m = -\frac{2}{4}.$$

Como se observa en el gráfico, los puntos de mínimo gasto son los puntos enteros del segmento CD, como se puede observar en la figura. Solamente tiene dos puntos enteros, que son los extremos C y D.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(6,\ 6) = 450 \cdot 6 + 900 \cdot 6 = 2.700 + 5.400 = 8.100.$$

$$B \Rightarrow f(10,\ 6) = 450 \cdot 10 + 900 \cdot 6 = 4.500 + 5.400 = 9.900.$$

$$C \Rightarrow f(10,\ 3) = 450 \cdot 10 + 900 \cdot 3 = 4.500 + 2.700 = 7.200.$$

$$D \Rightarrow f(8,\ 4) = 450 \cdot 8 + 900 \cdot 4 = 3.600 + 3.600 = 7.200.$$

$$\underline{Deben\ utilizarse\ 10\ autobuses\ de\ 25\ plazas\ y\ 3\ autobuses\ de\ 50\ plazas}$$

o también:

$$\underline{Pueden\ utilizarse\ 8\ autobuses\ de\ 25\ plazas\ y\ 4\ autobuses\ de\ 50\ plazas}.$$

$$\underline{El\ menor\ coste\ posible\ es\ de\ 7.200\ euros}.$$

****

2º) Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

$i)\ f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+3x}}.$ $\qquad ii)\ g(x) = L(1 - 5x) + e^{7x^2}.$

$iii)\ h(x) = 3sen\,x\cdot(\cos cos\, 2x\,)^2.$

$i)$

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+3x}}.$$

$$f'(x) = \frac{2x\cdot\sqrt{1+3x} - x^2\cdot\frac{3}{2\sqrt{1+3x}}}{\left(\sqrt{1+3x}\right)^2} = \frac{\frac{4x(1+3x)-3x^2}{2\sqrt{1+3x}}}{1+3x} = \frac{4x+12x^2-3x^2}{2(1+3x)\cdot\sqrt{1+3x}} = \frac{9x^2+4x}{2(1+3x)\cdot\sqrt{1+3x}} =$$

$$= \frac{x(9x+4)\cdot\sqrt{1+3x}}{2(1+3x)\cdot(1+3x)} =$$

$$\underline{f'(x) = \frac{x(9x+4)\cdot\sqrt{1+3x}}{2(1+3x)^2}}.$$

$ii)$

$$g(x) = L(1 - 5x) + e^{7x^2}.$$

$$\underline{g'(x) = \frac{-5}{1-5x} + 14x\cdot e^{7x^2}}.$$

$iii)$

$$h(x) = 3sen\,x\cdot(\cos cos\, 2x\,)^2.$$

$$h'(x) = 3\cdot\left\{\cos cos\, x\cdot(\cos cos\, 2x\,)^2 + sen\,x\cdot 2\cdot\cos cos\,(2x)\cdot 2\cdot[-\ sen\,(2x)]\right\} =$$

$$= 3\cos cos\,(2x)\cdot[\cos cos\, x\cdot\cos cos\,(2x) - 4\cdot sen\,x\cdot sen\,(2x)] =$$

$$= 3\cos cos\,(2x)\cdot[\cos cos\, x\cdot\cos cos\,(2x) - 4\cdot sen\,x\cdot 2\cdot sen\,x\cdot\cos cos\, x\,] =$$

$$= 3\cos cos\, x\cdot\ \cos cos\,(2x)\cdot\left[\cos cos\,(2x) - 8\cdot sen^2 x\right] =$$

$$= 3\cos cos\, x\cdot\ \cos cos\,(2x)\cdot\left(cos^2 x - sen^2 x - 8\cdot sen^2 x\right).$$

$$\underline{h'(x) = 3(2x)\cdot\left(cos^2 x - 9sen^2 x\right)}.$$

****

3º) La siguiente tabla recoge la distribución por sectores de las 750 empresas existentes en Pamplona y el porcentaje de las mismas que ha reducido su plantilla en 2.015:

Sector	*Nº total de empresas*	*% de empresa que reducen plantilla*
Primario	120	15
Industria	330	20
Servicios	300	40

i) ¿Cuál es la probabilidad de que una empresa elegida al azar haya reducido su plantilla en 2.015 y pertenezca al sector primario?

ii) Si se sabe que una empresa no redujo su plantilla en 2.015, ¿cuál es la probabilidad de que la empresa pertenezca al sector servicios?

La probabilidad de reducir plantilla en 2.015 de las empresas de los sectores primario, industria y servicios son, respectivamente:

$$P(P)=\frac{15}{120}=\frac{1}{8};\ \ P(I)=\frac{20}{330}=\frac{2}{11};\ \ P(S)=\frac{40}{300}=\frac{2}{15}.$$

i)

$$P=\frac{P(S)}{P(P)+P(I)+P(S)}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{1}{8}+\frac{2}{11}+\frac{2}{15}}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{11\cdot 15+2\cdot 8\cdot 15+2\cdot 8\cdot 11}{8\cdot 11\cdot 15}}=\frac{2\cdot 8\cdot 11}{165+240+176}=\underline{\frac{167}{581}}.$$

ii)

La probabilidad de no reducir plantilla en 2.015 de las empresas de los sectores primario, industria y servicios son, respectivamente:

$$P(\overline{P})=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8};\ \ P(\overline{I})=1-\frac{2}{11}=\frac{9}{11};\ \ P(\overline{S})=1-\frac{2}{15}=\frac{13}{15}.$$

$$P=\frac{P(\overline{S})}{P(\overline{P})+P(\overline{I})+P(\overline{S})}=\frac{\frac{13}{15}}{\frac{7}{8}+\frac{9}{11}+\frac{13}{15}}=\frac{\frac{13}{15}}{\frac{7\cdot 11\cdot 15+9\cdot 8\cdot 15+13\cdot 8\cdot 11}{8\cdot 11\cdot 15}}=\frac{13\cdot 8\cdot 11}{1.155+1.080+1.144}=\underline{\frac{1.144}{3.379}}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

JULIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas. Está permitido el uso de calculadoras científicas que no sean programables.

OPCIÓN A

1º) Consideramos la función lineal $F(x, y) = 15x + 6y$ definida en el plano XY y las siguientes restricciones: $6 \leq 2x + 3y \leq 29$, $0 \leq y \leq -1 + 2x$, $5x + 2y \leq 45$.

a) Dibujar en el plano XY la región de soluciones factibles que cumplen las restricciones.

b) Hallar los máximos y mínimos de la función $F(x, y)$ en la región descrita en el apartado anterior.

----

a)

El conjunto de restricciones son las siguientes: $\{2x + 3y \geq 6 \;\; 2x + 3y \leq 29 \; 2x - y \geq 1 \;\; 5x + 2y \leq 45 \; x \geq 0,\; y \geq 0$.

La función de objetivos es la siguiente: $F(x, y) = 15x + 6y$.

x	0	3
y	3	0

①$\Rightarrow 2x + 3y \geq 6 \Rightarrow y \geq \frac{6-2x}{3} \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow No.$

x	10	4
y	3	7

②$\Rightarrow 2x + 3y \leq 29 \Rightarrow y \leq \frac{29-2x}{3} \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si.$

x	5	2
y	9	3

③$\Rightarrow 2x - y \geq 1 \Rightarrow y \leq 2x - 1 \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow No.$

x	0	4
y	10	0

④$\Rightarrow 5x + 2y \leq 45 \Rightarrow y \leq \frac{45-5x}{2} \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si.$

La región factible se indica en la figura.

Los vértices de la zona factible son los siguientes:

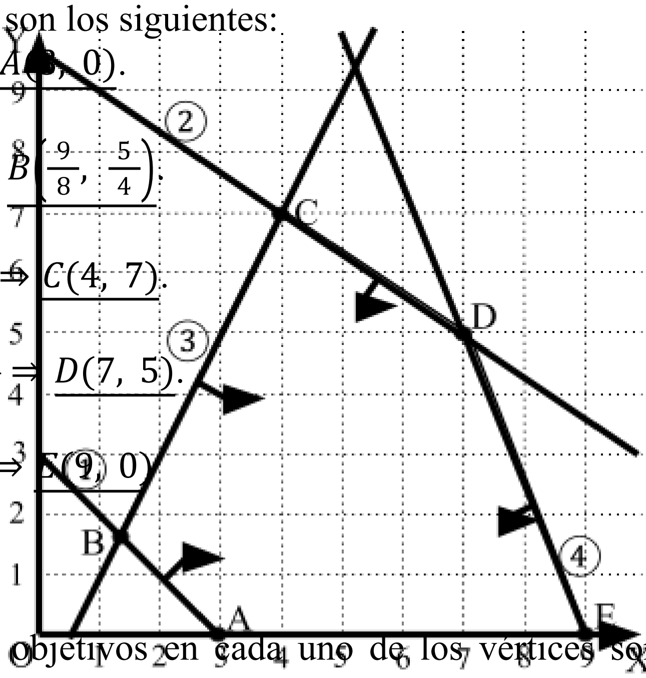
$A \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 0 \\ 2x + 3y = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{A(3,\ 0)}.$

$B \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 6 \\ 2x - y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{B\left(\frac{9}{8},\ \frac{5}{4}\right)}.$

$C \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ 2x + 3y = 29 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{C(4,\ 7)}.$

$D \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 29 \\ 5x + 2y = 45 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{D(7,\ 5)}.$

$E \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 0 \\ 5x + 2y = 45 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{E(9,\ 0)}.$



$b)$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(3,\ 0) = 15 \cdot 3 + 6 \cdot 0 = 45 + 0 = 45.$

$B \Rightarrow f\left(\frac{9}{8},\ \frac{5}{4}\right) = 15 \cdot \frac{9}{8} + 6 \cdot \frac{5}{4} = \frac{135}{8} + \frac{60}{8} = \frac{195}{8} = 24,375 \Rightarrow Mínimo.$

$C \Rightarrow f(4,\ 7) = 15 \cdot 4 + 6 \cdot 7 = 60 + 42 = 102.$

$D \Rightarrow f(7,\ 5) = 15 \cdot 7 + 6 \cdot 5 = 105 + 30 = 135 \Rightarrow Máximo.$

$E \Rightarrow f(9,\ 0) = 15 \cdot 9 + 6 \cdot 0 = 135 + 0 = 135 \Rightarrow Máximo.$

$\underline{El\ mínimo\ se\ produce\ en\ el\ punto\ B\ y\ su\ valor\ es\ 24,375}.$

$\underline{El\ máximo\ se\ produce\ en\ todos\ los\ puntos\ del\ intervalo\ (3,\ 9)\ de\ X\ y\ es\ 135.}$

****

2º) El polinomio cúbico $f(x) = ax^3 + bx - 22$ pasa por el punto $P(1,\ 0)$ y tiene un máximo en $x = 2$. Responder las siguientes preguntas:

a) Encontrar con la información anterior los coeficientes a y b.

b) Encontrar el mínimo y el máximo de la función $f(x)$ y hacer un esbozo de la gráfica del polinomio con todas las características significativas.

----

a)

Por pasar por $P(1,\ 0) \Rightarrow f(1) = 0$:

$f(1) = a \cdot 1^3 + b \cdot 1 - 22 = 0;\ \ a + b = 22.$ (1)

$f'(x) = 3ax^2 + b.$

Por tener un máximo en $x = 2 \Rightarrow f'(2) = 0$:

$f'(2) = 3a \cdot 2^2 + b = 0;\ \ 12a + b = 0.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$a + b = 22\ 12a + b = 0 \} \quad -a - b = -22\ 12a + b = 0\ \} \Rightarrow 11a = -22 \Rightarrow \underline{a = -}$

. $\underline{b = 24}$.

$$\underline{f(x) = -2x^3 + 24x - 22}.$$

b)

$f(2) = -2 \cdot 2^3 + 24 \cdot 2 - 22 = -16 + 48 - 22 = 10 \Rightarrow Máx: P(2,\ 10).$

$f'(x) = -6x^2 + 24 = -6\left(x^2 - 4\right) = -6(x - 2)(x + 2).$

La segunda raíz de la primera derivada es $x_2 = -2$. (la primera es x = 2).

$f(-2) = -2 \cdot (-2)^3 + 24 \cdot (-2) - 22 = 16 - 48 - 22 = -54.$

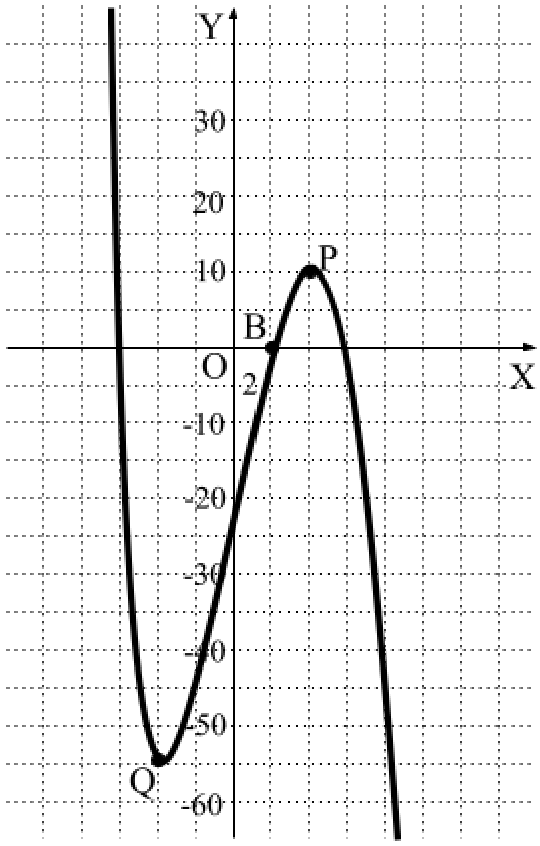
$$\underline{El\ punto\ mínimo\ pedido\ es\ Q(-2,\ -54)}.$$

Para hacer un esbozo de la gráfica del polinomio tenemos en cuenta que su dominio es R y que corta a los ejes de coordenadas en los puntos siguientes:

$Eje\ Y \Rightarrow x = 0 \rightarrow A(0,\ -22).$

$Eje\ X \Rightarrow f(x) = y = 0;\ -2x^3 + 24x - 22 = 0$. Resolviendo por Ruffini se obtiene una primera raíz x = 1, por lo cual el punto $B(1,\ 0)$ es de corte con X; los otros dos puntos de corte son valores irracionales.

La representación gráfica, aproximada, del polinomio es la siguiente:



****

3º) Un productor de Ecuador y otro de Brasil trasladan cajas idénticas de una tonelada (tn) de peso a un almacén. Cada caja puede contener plátanos o café. El productor de Brasil aporta 600 cajas de plátanos y 1.200 de café y el de Ecuador aporta 750 cajas de plátanos y un número desconocido de cajas de café. Responder las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántas toneladas de café habrá aportado Ecuador si el café es el 60 % del contenido del almacén?

Un cliente compra café de Ecuador dejando sólo 400 tn de este producto en el almacén.

b) Si alguien elige al azar consecutivamente dos cajas, ¿cuál es la probabilidad de que sean del mismo país?

c) ¿Qué probabilidad hay de que si una caja elegida al azar es de plátanos, su origen sea Ecuador?

----

a)

Sean x el número de cajas de café de Ecuador.

El nº total de cajas en el almacén es: $600 + 1.200 + 750 + x = 2.550 + x$.

El nº total de cajas de café es: $1.200 + x$.

Como el café supone el 60 % del total de cajas del almacén, ha de ser:

$1.200 + x = 0,6 \cdot (2.550 + x)$.

$1.200 + x = 1.530 + 0,6x;\ \ x - 0,6x = 1.530 - 1.200;\ \ 0,4x = 330;$

$4x = 3.300;\ \ x = \frac{3.300}{4} = 825.$

$\underline{Ecuador\ ha\ aportado\ 825\ cajas\ de\ café}.$

b)

Después de la compra del cliente queda en el almacén:

De Brasil: 600 cajas de plátanos y 1.200 cajas de café $\Rightarrow Total: 1.800$.

De Ecuador: 750 cajas de plátanos y 400 cajas de café $\Rightarrow Total: 1.150$.

El número total de cajas en el almacén es: $1.800 + 1.150 = 2.950$.

Teniendo en cuanta las simplificaciones que se efectúan a continuación, el diagrama del árbol que resume la situación es el que se indica.

$\frac{1.800}{2.950} = \frac{180}{295} = \frac{36}{59}$. $\frac{600}{1.800} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$. $\frac{1.200}{1.800} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$.

$\frac{1.150}{2.950} = \frac{115}{295} = \frac{23}{59}$. $\frac{750}{1.150} = \frac{75}{115} = \frac{15}{23}$. $\frac{400}{1.150} = \frac{40}{115} = \frac{8}{23}$

$$P = \frac{1.800}{2950} \cdot \frac{1.799}{2949} + \frac{1.150}{2950} \cdot \frac{1.149}{2949} = \frac{3.238.200+1.321.350}{8.699.550} = \frac{4.559.550}{8.699.550} = \underline{0,5241}.$$

$c)$

$$P = \frac{\frac{15}{59}}{\frac{12}{59}+\frac{15}{59}} = \frac{15}{12+15} = \frac{15}{27} = \frac{5}{9} = \underline{0,5556}.$$

****

4º) En una muestra de 300 universitarios al 80 % ha respondido que acude semanalmente al cine.

a) ¿Entre qué valores se encuentra, con un nivel de confianza del 95 %, la proporción del total de universitarios que acude todas las semanas al cine?

b) ¿Y el intervalo para la proporción anterior con un nivel de confianza del 99 %?

----

a)

$n = 300;\ \ p = 0,8;\ \ q = 0,2.$

$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$

$1 - 0,025 = 0,975 \rightarrow z = 1,96).$

Ahora se aplica la fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q y n, que es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}},\ p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right).$

$$\left(0,8 - 1,96\sqrt{\frac{0,8 \cdot 0,2}{300}},\ 0'8 + 1,96\sqrt{\frac{0,8 \cdot 0,2}{300}}\right);\ \left(0,8 - 1,96\sqrt{\frac{0,16}{300}},\ 0'8 + 1,96\sqrt{\frac{0,16}{300}}\right);$$

$$\left(0,8 - 1,96 \cdot 0,023,\ 0'8 + 1,96 \cdot 0,023\right);\ (0,8 - 0,045,\ 0'8 + 0,045).$$

$$\underline{Intervalo\ de\ confianza:\ \left(0'755,\ 0'845\right)}.$$

b)

$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 1 - 0,99 = 0,01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,005} = 2,575.$

$1 - 0,005 = 0,995 \rightarrow z = 2,575).$

$$\left(0,8 - 2,575 \cdot 0,023,\ 0'8 + 2,575 \cdot 0,023\right);\ (0,8 - 0,059,\ 0'8 + 0,059).$$

$$\underline{Intervalo\ de\ confianza:\ \left(0'741,\ 0'859\right)}.$$

****

OPCIÓN B

1º) a) Dada la matriz $A = (3\ \ -\ 3\ a\ b\ )$, determinar los valores de los parámetros $a\ y\ b$ para que se verifique la ecuación matricial $A^2 = 2A$.

b) Dadas las matrices $B = (1\ 0\ \ -\ 1\ 1\ )\ y\ C = (1\ 2\ 0\ 1\ )$, calcular la matriz $D = B^{50}\cdot C^t$. (C^t es la matriz traspuesta de C).

----

a)

$$A^2 = 2A \Rightarrow (3\ \ -\ 3\ a\ b\ )\cdot(3\ \ -\ 3\ a\ b\ ) = 2\cdot(3\ \ -\ 3\ a\ b\ );$$

$$\left(9 - 3a\ \ - 9 - 3b\ 3a + ab\ \ - 3a + b^2\right) = (6\ \ - 6\ 2a\ 2b\ ) \Rightarrow \{9 - 3a = 6\ \ - 9 - 3$$

$\Rightarrow a = 1,\ b = -\ 1.$

$$\underline{A^2 = 2A \Rightarrow a = 1\ y\ b = -\ 1}.$$

b)

$$B^2 = B\cdot B = (1\ 0\ \ -\ 1\ 1\ )\cdot(1\ 0\ \ -\ 1\ 1\ ) = (1\ 0\ \ -\ 2\ 1\ ).$$

$$B^3 = B^2\cdot B = (1\ 0\ \ -\ 2\ 1\ )\cdot(1\ 0\ \ -\ 1\ 1\ ) = (1\ 0\ \ -\ 3\ 1\ ) \Rightarrow B^{50} = (1\ 0\ \ -\ 50\ 1\ ).$$

$$D = B^{50}\cdot C^t = (1\ 0\ \ -\ 50\ 1\ )\cdot(1\ 0\ 2\ 1\ ) = (1\ 0\ \ -\ 48\ 1\ ).$$

$$\underline{D = (1\ 0\ \ -\ 48\ 1\ )}.$$

****

2º) A lo largo de la semana una planta potabilizadora de agua aporta al depósito municipal una cantidad de litros expresado por la función $p(x) = 10x^2 - 100x + 550$, donde $0 \leq x \leq 7$ representa el instante de la semana medido en días. De la misma manera, la demanda de agua se representa por la función $d(x) = -10x^2 + 80x + 240$. Por un lado el flujo de agua en el instante x es la diferencia entre lo aportado y lo extraído, es decir, $f(x) = p(x) - d(x)$ y por otro el excedente $e(r)$ es la cantidad de agua acumulada hasta el momento r, $e(r) = \int_0^r f(x) \cdot dx$. Responder:

$a)$ ¿Cuál es el instante de mayor demanda?

$b)$ ¿En qué intervalo de tiempo el flujo es negativo, es decir, el depósito se esta vaciando?

$c)$ ¿Cuál es el excedente al final de la semana (r = 7)?

$a)$

El instante de mayor demanda será el valor de x que anule la primera derivada de la función demanda: $d(x) = -10x^2 + 80x + 240$.

$$d'(x) = -20x + 80 = 0 \Rightarrow -20x + 80 = 0; \quad -x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4.$$

$\underline{La\ mayor\ demanda\ de\ agua\ se\ produce\ el\ cuarto\ día\ de\ la\ semana.}$

$b)$

El depósito se estará vaciando cuando el aporte sea menor que el gasto, es decir, cuando sea negativa la función $f(x) = p(x) - d(x)$:

$$f(x) = p(x) - d(x) = 10x^2 - 100x + 550 - \left(-10x^2 + 80x + 240\right) =$$

$$= 10x^2 - 100x + 550 + 10x^2 - 80x - 240 = 20x^2 - 180x + 310.$$

Los puntos de corte con el eje de abscisas de la parábola convexa (∪) obtenida son los siguientes:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 20x^2 - 180x + 310 = 0; \quad 2x^2 - 18x + 31 = 0;$$

$$x = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 2 \cdot 31}}{2 \cdot 2} = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 248}}{2 \cdot 2} = \frac{18 \pm \sqrt{76}}{4} = \frac{18 \pm \sqrt{4 \cdot 19}}{4} = \frac{18 \pm 2\sqrt{19}}{4} = \frac{9 \pm \sqrt{19}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 2,32; \quad x_2 = 6,68.$$

$\underline{El\ depósito\ se\ vacía\ en\ el\ intervalo\ 2,32 < x < 6,68\ de\ la\ semana.}$

$c)$

$$e(r) = \int_0^7 f(x) \cdot dx = \int_0^7 \left(20x^2 - 180x + 310\right) \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{20x^3}{3} - \frac{180x^2}{2} + 310x\right]_0^7 = \left[\frac{20x^3}{3} - 90x^2 + 310x\right]_0^7 =$$

$$= \left(\frac{20 \cdot 7^3}{3} - 90 \cdot 7^2 + 310 \cdot 7\right) - 0 = \frac{6.860}{3} - 4.410 + 2.170 = \frac{6.860}{3} - 2.240 =$$

$$= \frac{6.860 - 6.720}{3} = \frac{140}{3} = 46,67.$$

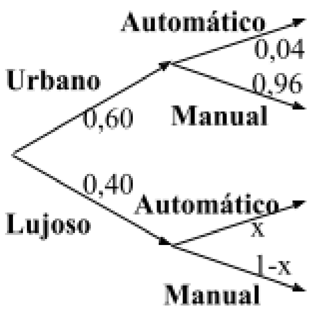
$\underline{El\ excedente\ semanal\ es\ de\ 46,67\ litros.}$

****

3º) Un concesionario vende vehículos de dos gamas: U (urbano) y L (lujoso). El 60 % son de la gama U; de éstos, el 40 % vienen con cambio automático (A), mientras que el resto de los de gama U son de cambio manual (M). En el stock total el porcentaje de vehículos con cambio automático A es el 5 % y de cambio manual M el 95 %.

a) Si se elige un vehículo al azar y tiene cambio automático, hallar la probabilidad de que sea urbano.

b) ¿Qué porcentaje de vehículos de lujo tienen cambio automático?



a)

$$P = P(A) = \frac{P(U \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}024}{0{,}024+0{,}026} = \frac{0{,}024}{0{,}05} = \underline{0{,}048}.$$

b)

$$P = P(L) = \frac{P(A \cap L)}{P(L)} = \frac{0{,}026}{0{,}4} = \frac{0{,}026}{0{,}4} = \underline{0{,}065 = 6{,}5\ \%}.$$

****

4º) Las calificaciones de 1.000 estudiantes sometidos a un test de inteligencia se distribuyen normalmente con media 70 y desviación típica 20. Calcular:

a) La probabilidad de que un estudiante obtenga más de 80 puntos.

b) La probabilidad de que un estudiante obtenga menos de 50 puntos.

c) ¿Cuál es, con una probabilidad del 95 %, la calificación máxima que se puede esperar alcanzar?

----

a)

$Variable\ X \rightarrow N(70,\ 20).$

$Para\, n\ =\ 1.000 \rightarrow \overline{X}\ =\ N\left(70,\ \frac{20}{\sqrt{1.000}}\right) =\ N\left(70,\ \frac{20}{10\sqrt{10}}\right) =\ N(70,\ 0'63).$

Tipificando: $Z\ =\ \frac{\overline{X}-70}{20}$.

$P(\overline{X} >\ 80) =\ P\left(\frac{\overline{X}-70}{20} > \frac{80-70}{20}\right) =\ P\left(\frac{\overline{X}-70}{20} > \frac{10}{20}\right) =\ P(Z\ >\ 0,5) =$

$=\ 1\ -\ P(Z\ \leq\ 0,5) =\ 1\ -\ 0,6915\ =\ \underline{0,3085}.$

b)

$P(\overline{X} <\ 50) =\ P\left(\frac{\overline{X}-70}{20} < \frac{50-70}{20}\right) =\ P\left(\frac{\overline{X}-70}{20} < \frac{-20}{20}\right) =\ P(Z\ <-\ 1) =$

$=\ 1\ -\ P(Z\leq 1) =\ 1\ -\ 0,8413\ =\ \underline{0,1587}.$

c)

El valor correspondiente en la tabla del 95 % $=\ 0,9500\ es\ 1,645.$

$P(\overline{X}\leq n) =\ 0,95 \Rightarrow P\left(\frac{\overline{X}-70}{20} \leq \frac{n-70}{20}\right) =\ 0,95 \Rightarrow \frac{n-70}{20}\ =\ 1,645;$

$n\ -\ 70\ =\ 20\cdot 1,645\ =\ 32,9\ \Rightarrow\ \underline{n\ =\ 102,9}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

JUNIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas. Está permitido el uso de calculadoras científicas que no sean programables.

OPCIÓN A

1º) A la compañía de transportes que lleva a la escuela municipal los 160 jóvenes de su alumnado, un servicio de un autobús de 40 plazas le supone un gasto de 120 euros y uno de un microbús de 20 plazas sólo 80 euros. Se debe decidir el número de autobuses X y microbuses Y que transporten a todo el alumnado, minimizando el gasto y cumpliendo ciertas limitaciones: la compañía sólo cuenta con 5 conductores de autobús (aptos para conducir microbuses) y otros 7 conductores de microbús (no aptos para conducir autobuses). Además las autoridades de tráfico obligan a que circulen al menos el doble de microbuses que de autobuses. Se pide:

a) Representar en el plano XY la región de soluciones factibles del programa.

b) Encontrar el número óptimo de autobuses X y microbuses Y que minimizan el gasto de la empresa y cumplen con las restricciones. Calcular dicho gasto.

Las restricciones del ejercicio se establecen en el sistema de inecuaciones:

$40x + 20y \geq 160 \quad x + y \leq 12 \quad 2x \leq y \;\; x \leq 5; y \leq 12 \,\}$ o mejor: $2x + y \geq 8 \quad x + y \leq 12 \; 2x - y \leq 0 \; x \leq 5; y \leq 12 \,\}$.

La función de objetivos es la siguiente: $f(x, y) = 120x + 80y$.

La región factible se indica en la figura:

x	0	4
y	8	0

①$\Rightarrow 2x + y \geq 8 \Rightarrow y = 8 - 2x \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow No.$

x	12	0
y	0	12

②$\Rightarrow x + y \leq 12 \Rightarrow y = 12 - x \Rightarrow O(0, 0) \to Si.$

x	0	4
y	0	8

③$\Rightarrow 2x - y \geq 0 \Rightarrow y = 2x \Rightarrow O(0, 0) \to Si.$

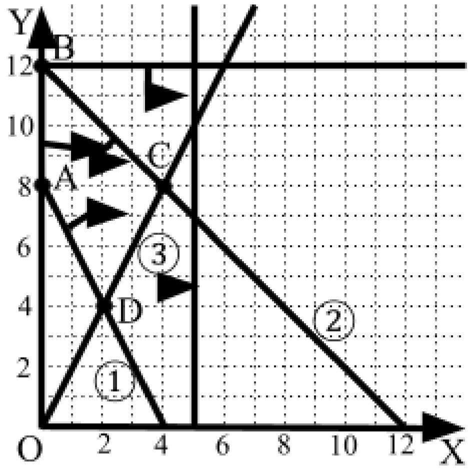
Los vértices de la zona factible, que es abierta, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 8 \\ 2x + y = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{A(0, 8)}.$

$B \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 12 \\ x + y = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{B(0, 12)}.$

$C \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y = 8 \\ x + y = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{C(4, 8)}.$

$D \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y = 8 \\ 2x - y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{D(2, 4)}.$



$b)$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0, 8) = 120 \cdot 0 + 80 \cdot 8 = 0 + 640 = 640.$

$B \Rightarrow f(0, 12) = 120 \cdot 0 + 80 \cdot 12 = 0 + 960 = 960.$

$C \Rightarrow f(4, 8) = 120 \cdot 4 + 80 \cdot 8 = 480 + 640 = 1.120.$

$D \Rightarrow f(2, 4) = 120 \cdot 2 + 80 \cdot 4 = 240 + 320 = \underline{560}.$

$\underline{El\ gasto\ es\ minimo\ utilizando\ 2\ autobuses\ y\ 4\ microbuses}.$

$\underline{El\ gasto\ mínimo\ es\ de\ 560\ euros}.$

****

2º) Dos curvas representadas por las funciones $f(x) = \frac{A}{x+9}$ y $g(x) = \frac{Bx}{x^2+6x+a}$ dependen de los parámetros desconocidos A, B y a. Responder:

a) ¿Qué valores de A y B hacen que las curvas $f(x)$ y $g(x)$ pasen por el punto $P\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$ y tomen valores iguales en el punto $x = 5$, es decir, $f(5) = g(5)$?

b) Calcula los máximos y mínimos de $f(x)$ y $g(x)$.

c) Indica los dominios de definiciones de $f(x)$ y $g(x)$.

----

a)

$$f(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{A}{1+9} \Rightarrow 2A = 10 \Rightarrow \underline{A = 5}.$$

$$g(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{B\cdot 1}{1^2+6\cdot 1+a};\ \ \frac{1}{2} = \frac{B}{7+a};\ \ 2B = 7 + a \Rightarrow 2B - a = 7.$$

(1)

$$f(5) = g(5) \Rightarrow \frac{5}{5+9} = \frac{B\cdot 5}{5^2+6\cdot 5+a};\ \ \frac{1}{14} = \frac{B}{25+30+a};\ \ \frac{1}{14} = \frac{B}{55+a};$$

$55 + a = 14B;\ \ 14B - a = 55.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$2B - a = 7\ \ 14B - a = 605\, \}\ \ - 2B + a = - 7\ 14B - a = 55\, \} \Rightarrow 12B = 48 \Rightarrow \underline{B =}$

.

b)

Para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada para ese punto.

$$f'(x) = \frac{-5}{(x+9)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-5}{(x+9)^2} = 0,\ x \notin R.$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ no\ tiene\ máximos\ ni\ mínimos.}$$

$$g'(x) = \frac{4\cdot\left(x^2+6x+1\right)-4x\cdot(2x+6)}{\left(x^2+6x+1\right)^2} = 4\cdot\frac{x^2+6x+1-2x^2-6x}{\left(x^2+6x+1\right)^2} = 4\cdot\frac{-x^2+1}{\left(x^2+6x+1\right)^2}.$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow\ = 4\cdot\frac{-x^2+1}{\left(x^2+6x+1\right)^2} = 0;\ \ - x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = - 1,\ x_2 = 1.$$

La condición anterior para que una función tenga extremos relativos no es suficiente; para que existe el extremo relativo es necesario que no se anule su segunda derivada para los valores que anulan la primera. Si resulta positiva la segunda derivada, la función tiene un máximo y, si es negativa, un máximo relativo.

$$g''(x) = 4\cdot\frac{-2x\cdot\left(x^2+6x+1\right)^2+\left(x^2-1\right)\cdot\left[2\cdot\left(x^2+6x+1\right)\cdot(2x+6)\right]}{\left(x^2+6x+1\right)^4} =$$

$$= 4\cdot\frac{-2x\cdot\left(x^2+6x+1\right)+2\left(x^2-1\right)(2x+6)}{\left(x^2+6x+1\right)^3} = 8\cdot\frac{-x^3-6x^2-x+2\left(2x^3+6x^2-2x-6\right)}{\left(x^2+6x+1\right)^3} =$$

$$= 8\cdot\frac{-x^3-6x^2-x+4x^3+12x^2-4x-12}{\left(x^2+6x+1\right)^3} = 8\cdot\frac{6x^2-5x-12}{\left(x^2+6x+1\right)^3}.$$

$$g''(-1) = 8\cdot\frac{6+5-12}{(1-6+1)^3} = \frac{-8}{(-6)^3} > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = -1.$$

$$g(-1) = \frac{-4}{1-6+1} = \frac{-4}{-4} = 1 \Rightarrow \underline{Mínimo:\ \ A(-1,\ 1)}.$$

$$g''(1) = 8\cdot\frac{6-5-12}{(1+6+1)^3} = 8\cdot\frac{-11}{(8)^3} < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 1.$$

$$g(1) = \frac{4}{1+6+1} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{Máximo:\ \ B\left(1,\ \frac{1}{2}\right)}.$$

$c)$

El dominio de definición de una función racional es R, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$f(x) = \frac{5}{x+9} \Rightarrow x + 9 = 0 \Rightarrow x = -9.$$

$$\underline{D(f) \Rightarrow R - \{-9\}}.$$

$$g(x) = \frac{4x}{x^2+6x+1} \Rightarrow x^2 + 6x + 1 = 0;\ \ x = \frac{-6\pm\sqrt{36-4}}{2} = \frac{-6\pm\sqrt{32}}{2} =$$

$$= \frac{-6\pm4\sqrt{2}}{2} = -3\pm2\sqrt{2}.$$

$$\underline{D(f) \Rightarrow R - \left\{-3 - 2\sqrt{2},\ \ -3 + 2\sqrt{2}\right\}}.$$

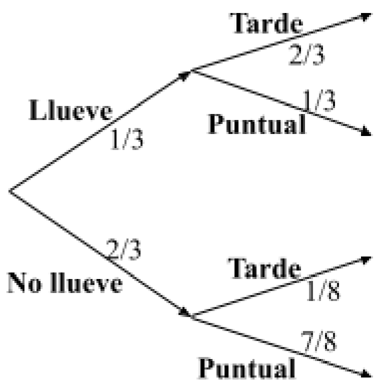
****

3º) En mi ciudad llueve uno de cada tres días. Cuando llueve se producen atascos y la probabilidad de llegar tarde al trabajo es de 2/3. En cambio, cuando no llueve la probabilidad de llegar tarde al trabajo es de 1/8. Responder:

a) ¿Cuál es la probabilidad de llegar tarde al trabajo?

b) Hoy he llegado tarde al trabajo, ¿cuál es la probabilidad de que haya llovido?

c) Sabiendo que ayer llovió y hoy no lo ha hecho, ¿cuál es la probabilidad de que haya llegado al trabajo uno de los dos días tarde y el otro puntual?



a)

$$P = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{9} + \frac{1}{12} = \frac{8+3}{36} = \underline{\frac{11}{36}}.$$

b)

$$P = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{9} + \frac{1}{12}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{11}{36}} = \underline{\frac{8}{11}}.$$

c)

Primera forma: considerando la probabilidad de llegar tarde el día de lluvia y puntual el día de no lluvia más la probabilidad de llevar puntual el día de lluvia y tarde el día de no lluvia:

$$P = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{14}{24} + \frac{1}{24} = \frac{15}{24} = \underline{\frac{5}{8}}.$$

Segunda forma: por el suceso contrario. Lo pedido es equivalente a la unidad menos la suma de las probabilidades de llegar tarde los dos días más la probabilidad de llegar puntual los dos días:

$$P = 1 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{8} \right) = 1 - \left(\frac{2}{24} + \frac{7}{24} \right) = 1 - \frac{9}{24} = \frac{24-9}{24} = \frac{15}{24} = \underline{\frac{5}{8}}.$$

****

4º) En unas pruebas clasificatorias de salto de longitud para una olimpiada la media de los primeros 400 intentos es de 7,75 m. Se sabe que los saltos se comportan como una variable aleatoria que sigue una distribución normal con varianza $\sigma^2 = 0,36\ m^2$.

a) Construye un intervalo, de un 95 % de confianza, para la media μ de los saltos de la población.

b) ¿Cuál sería el mínimo tamaño muestral necesario para que pueda decirse que la verdadera media de los saltos está a menos de 4 cm de la media muestral, con un nivel de confianza del 90 %?

----

a)

$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$

$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$

Siendo $\overline{x} = 7,75,\ \sigma = 0,6\ y\ n = 400$, se aplica la fórmula adecuada que nos da el intervalo de confianza pedido, que es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(7,75 - 1,96 \cdot \frac{0,6}{\sqrt{400}}, 7'75 + 1,96 \cdot \frac{0,6}{\sqrt{400}}\right);$$

$(7,75 - 1,96 \cdot 0'03,\ 7'75 + 1,96 \cdot 0,03);\ (7,75 - 0'0588,\ 7'75 + 0,0588).$

$\underline{Intervalo\ de\ confianza\text{: } (7'69,\ 7'81)}.$

b)

$E = 4\ cm = 0,04\ m, \sigma = 6.$

$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 1 - 0,90 = 0,10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,05} = 1,645.$

$(1 - 0,05 = 0,9500 \rightarrow z = 1,645).$

Sabiendo que el error es: $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$:

$$n = \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1,645 \cdot 0,6}{0,04}\right)^2 = \left(\frac{0,987}{0,04}\right)^2 = 24,675^2 = 608,8.$$

$\underline{La\ muestra\ debe\ ser\ como\ mínimo\ de\ 609\ saltos.}$

****

OPCIÓN B

1º) Sean las matrices $A = (2\ -1\ -3\ 3)$, $B = (0\ 2\ -1\ 2)$, $C = (-2\ 0\ -1\ 4)$ y $D = (2\ u\ v\ -2)$.

a) Determinar los valores de los parámetros a, β, μ y v para que se cumpla la igualdad matricial: $A\cdot(a\ 0\ 0\ \beta)\cdot B^t + C\cdot(0\ a\ \beta\ 0) = D$, siendo B^t la matriz traspuesta de B.

b) Siendo A^{-1} la matriz inversa de A, encontrar los valores de las constantes a y b que verifiquen: $A^{-1}\cdot(a\ b) = B\cdot(a\ b) + (1\ 2)$.

----

a)

$B^t = (0\ -1\ 2\ 2)$.

$A\cdot(a\ 0\ 0\ \beta)\cdot B^t + C\cdot(0\ a\ \beta\ 0) = D;$

$(2\ -1\ -3\ 3)\cdot(a\ 0\ 0\ \beta)\cdot(0\ -1\ 2\ 2) + (-2\ 0\ -1\ 4)\cdot(0\ a\ \beta\ 0) = D;$

$(2a\ -\beta\ -3a\ 3\beta)\cdot(0\ -1\ 2\ 2) + (0\ -2\alpha\ 4\beta\ -\alpha) = D;$

$(-2\beta\ -2a\ -2\beta\ 6\beta\ 3a + 6\beta) + (0\ -2\alpha\ 4\beta\ -\alpha) = D;\ \ (-2\beta\ -4a\ -2\beta\ 10\beta\ 2$

$\Rightarrow \{-2\beta = 2\ 10\beta = v\ -4\alpha - 2\beta = u\ 2\alpha + 6\beta = -2\} \Rightarrow \underline{\beta = -1};\ \underline{v = -10};\ \underline{a = 2}$

.

b)

$A = (2\ -1\ -3\ 3) \Rightarrow A^t = (2\ -3\ -1\ 3);\ \ |A| = |2\ -1\ -3\ 3| = 6 - 3 = 3$

.

$Adj.\ de\ A^t = (3\ 1\ 3\ 2) \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3}\cdot(3\ 1\ 3\ 2)$.

$A^{-1}\cdot(a\ b) = B\cdot(a\ b) + (1\ 2) = (0\ 2\ -1\ 2)\cdot(a\ b) + (1\ 2) = (2b\ -a + 2b) +$

$A^{-1}\cdot(a\ b) = (2b + 1\ -a + 2b + 2) \Rightarrow$ Multiplicando por la izquierda los dos términos por A, resulta:

$A\cdot A^{-1}\cdot(a\ b) = A\cdot(2b + 1\ -a + 2b + 2);\ \ I\cdot(a\ b) = A\cdot(2b + 1\ -a + 2b + 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow (a\ b\ ) = (2\ \ -1\ \ -3\ 3\ )\cdot(2b\ +\ 1\ \ -\ a\ +\ 2b\ +\ 2\ ) = (4b\ +\ 2\ +\ a\ -\ 2b\ -\ 2\ \ -\ 6$

$\Rightarrow a\ =\ 2b\ +\ a\ b\ =\ 3\ -\ 3a\ \}\Rightarrow \underline{b\ =\ 0},\ \underline{a\ =\ 1}.$

****

2º) Para financiar el viaje de fin de curso un instituto propone la venta de camisetas. Se ha hecho un estudio previo y se sabe que el número de camisetas NC que se vendan dependerá del precio x (en euros) según la función $NC(x) = 180 - 10x$, $0 \leq x \leq 18$.

$a)$ ¿Cuántas camisetas se venderían a 10 euros? Interpreta el aumento o disminución del número de camisetas vendidas por cada euro que aumente o disminuya el precio.

$b)$ Obtén la función que expresa los ingresos por la venta. ¿Para qué precio los ingresos son máximos? ¿Cuántas camisetas se venderían en este caso?

$c)$ El almacén que suministra camisetas nos cobra en total $C(z) = 4z + 50$ euros por un pedido de z camisetas. Obtén el coste total pagado al almacén por las camisetas vendidas en función del precio de venta x. Obtén la función de beneficio (en función de x) y el precio x para conseguir el máximo beneficio.

$a)$

$$NC(10) = 180 - 10 \cdot 10 = 180 - 100 = 80.$$

$$\underline{A\ 10\ euros\ se\ venderían\ 80\ camisetas.}$$

La función NC es una recta afín de pendiente negativa por lo cual las coordenadas de sus puntos son inversamente proporcionales.

$$\underline{El\ aumento\ del\ precio\ disminuye\ las\ camisetas\ vendidas\ y\ viceversa.}$$

$b)$

La función ingresos $I(x)$ se obtiene multiplicando las camisetas vendidas por el precio de las camisetas:

$$I(x) = x \cdot NC(x) = x \cdot (180 - 10x) = - 10x^2 + 180x.$$

$$\underline{I(x) = - 10x^2 + 180x.}$$

Por ser la función de ingresos una parábola cóncava (∩) tiene máximo.

Una función ingresos presenta su máximo absoluto para los valores que anulan su primera derivada:

$$I'(x) = - 20x + 180 = 0 \Rightarrow - 20(x - 9) = 0 \Rightarrow x = 9.$$

$$\underline{Los\ ingresos\ son\ máximos\ cuando\ el\ precio\ de\ las\ camisetas\ es\ de\ 9\ euros.}$$

$$I(9) = - 10 \cdot 9^2 + 180 \cdot 9 = 9 \cdot (- 90 + 180) = 9 \cdot 90 = 810.$$

$$\underline{El\ ingreso\ máximo\ es\ de\ 810\ euros}.$$

$c)$

El coste de x camisetas es $NC(x) = 180 - 10x$, por consiguiente, el almacén nos cobra por x camisetas:

$$C(x) = 4 \cdot (180 - 10x) + 50 = 720 - 40x + 50 = 770 - 40x.$$

Como los beneficios son los ingresos menos el coste, la función beneficios es la siguiente:

$$B(x) = I(x) - C(x) = -10x^2 + 180x - (770 - 40x) =$$

$$= -10x^2 + 180x - 770 + 40x = -10x^2 + 220x - 770.$$

$$\underline{B(x) = -10x^2 + 220x - 770}.$$

Al igual que la función ingresos, la función beneficios es también una parábola cóncava (∩) , por lo que tiene máximo.

$$B'(x) = -20x + 220 = 0 \Rightarrow -20(x - 11) = 0 \Rightarrow x = 11.$$

$$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ cuando\ el\ precio\ de\ las\ camisetas\ es\ de\ 11\ euros}.$$

****

3º) Un bingo ha sustituido el clásico dado en forma de cubo por uno nuevo en forma de dodecaedro. En las 12 caras del dado se alternan los números 1, 2, 3, 4 y 5. El 1 aparece en una cara, el 2 en una cara, el 3 en dos caras, el 4 en tres caras y el 5 en cinco caras. Si el dado está equilibrado, es decir, la probabilidad de que al lanzarlo salga cualquier cara es la misma, calcula:

a) Se le lanza dos veces el dado, ¿cuál es la probabilidad de que salgan dos números impares?

b) Si se lanza tres veces el dado, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los números aparecidos sea 6?

----

a)

El espacio muestral es el siguiente: $E = \{11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15\ 21,\ 22,\ 23,\ 24,\ 25\ 31,\ 32,\ 33,\ 34,\ 35\ 41,\ 42,\ 43,\ 44,\ 45\ 51,\ 5$
.

Si los sucesos fueran equiprobables la solución se obtendría aplicando la regla de Laplace; pero como no es así, la probabilidad pedida es la suma de las probabilidades de los sucesos favorables, que son los marcados en negrita.

Las probabilidades de obtener los diferentes números son las siguientes:

$P1 = P2 = \frac{1}{12},\ P3 = \frac{2}{12},\ P4 = \frac{3}{12},\ P5 = \frac{5}{12}$.

Son equiprobables los sucesos: $13 \to 31,\ 15 \to 51,\ 35 \to 53$.

La probabilidad pedida $\{11,\ 13,\ 31,\ 15,\ 51,\ 33,\ 35,\ 53,\ 55\}$ es la siguiente:

$$P = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} + 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{2}{12} + 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{5}{12} + \frac{2}{12} \cdot \frac{2}{12} + 2 \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{5}{12} + \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12} =$$

$$= \frac{1+4+10+4+20+25}{12^2} = \frac{64}{124} = \frac{16}{31} \cong 0,516.$$

$\underline{La\ probabilidad\ de\ que\ salgan\ dos\ número\ impares\ es\ P = \frac{16}{31} \cong 0,516.}$

b)

Los casos favorables son las permutaciones de los sucesos: $\{114,\ 123,\ 222\}$.

$114 \to P_3^2 = \frac{3!}{2!} = \frac{6}{2} = 3,\ que\ son$: $114,\ 141,\ 114$. (equiprobables).

$123 \to P_3 = 3! = 6,\ que\ son$: $123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321$.

(equiprobables).

$222 \rightarrow P_3^3 = \frac{3!}{3!} = \frac{6}{6} = 1,\ que\ es: 222.$

La probabilidad pedida es la siguiente:

$$P = 3 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{12} + 6 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{2}{12} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} = \frac{9+12+1}{12^3} = \frac{22}{12 \cdot 144} = \frac{11}{6 \cdot 144} =$$

$$= \frac{11}{864} \cong 0,0127.$$

$\underline{La\ probabilidad\ de\ que\ sumen\ 6\ es\ P = \frac{11}{864} \cong 0,0127.}$

****

4º) La estación meteorológica de una ciudad indica que la temperatura máxima de los días de agosto sigue una distribución normal de media 28º C y desviación típica 4º C. Se pide:

a) La probabilidad de que un día de agosto la temperatura máxima alcanzada sea mayor que 32º C.

b) En el mes de agosto de un año concreto, ¿cuál es el número de días en que se espera una temperatura máxima inferior a 25º C?

c) La probabilidad de que un día de agosto la temperatura máxima esté entre 28ºC y 32º C.

d) ¿Cuál es, con una probabilidad del 95 %, el valor que no será superado por la temperatura máxima de un día de agosto?

$n = 31 \rightarrow \overline{X} = 28 \rightarrow \sigma = 4.$

a)

$$p(\overline{X} > 32) = p\left(\frac{\overline{X}-28}{4} > \frac{32-28}{4}\right) = p(Z > 1) = 1 - p(Z \leq 1) =$$

$$= 1 - 0,8413 = \underline{0,1587}.$$

$$\underline{La\ probabilidad\ que\ la\ temperatura\ sea\ mayor\ de\ 35°\ algún\ día\ es\ 0,1587}.$$

b)

La probabilidad de que algún día la temperatura sea menor de 25º es:

$$p(\overline{X} < 25) = p\left(\frac{\overline{X}-28}{4} < \frac{25-28}{4}\right) = p(Z < -0,75) = 1 - 0,7743 = 0,2266.$$

Como agosto tiene 31 días, la probabilidad pedida es:

$$P = 0,2266 \cdot 31 = 7,02\ días \cong 7\ días.$$

$$\underline{La\ probabilidad\ que\ la\ temperatura\ sea\ menor\ de\ 25°\ es\ de\ 7\ días}.$$

c)

$$p(28 \leq \overline{X} \leq 32) = p\left(\frac{28-28}{4} \leq \frac{\overline{X}-28}{4} \leq \frac{32-28}{4}\right) = p(0 \leq Z \leq 1) =$$

$$= p(Z \leq 1) - p(Z \leq 0) = 0,8413 - 0,5 = \underline{0,3413}.$$

$\underline{Probabilidad\ que\ la\ temperatura\ sea\ 28°{\le}t{\le}32\ es\ 0,3413}$.

$d)$

$$p(\overline{X} < t) = 0,95 {\Rightarrow} p\left(\frac{\overline{X}-28}{4} \le \frac{t-28}{4}\right) = 0,95.$$

Mirando en el interior de la tabla dada de las áreas limitadas por la curva $N(0,\ 1)$, con el valor de 0,95 se obtiene: 1,645.

$$\frac{t-28}{4} = 1,645;\ \ t - 28 = 6,58 \Rightarrow t = 34,58.$$

$\underline{Con\ probabilidad\ del\ 95\ \%\ la\ temperatura\ no\ ser\text{á}\ mayor\ de\ 35,58°C}$.

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

JUNIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberían estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

1º) Sean las matrices $A = (1\ 2\ 1\ 1\ 3\ 1\ 0\ 1\ 3\ )$ y $B = (0\ -\ 1\ 2\ 1\ 0\ -\ 1\ 2\ 1\ 0\ )$.

a) Calcula A^{-1}.

b) Determina la matriz X tal que $AX = A + B$.

----

a)

Se obtiene la matriz inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_2 \to F_2 - F_1\right\} \Rightarrow (1\ 0\ 0\ -\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_1 \to F_1 -\ 2F_2 F_3 \to F_3 - F_2\right\} \Rightarrow (3\ -\ 2\ 0\ -\ 1\ 1\ 0\ 1\ -\ 1\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_3 \to \tfrac{1}{3}F_3\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(3\ -\ 2\ 0\ -\ 1\ 1\ 0\ \tfrac{1}{3}\ -\ \tfrac{1}{3}\ \tfrac{1}{3}\ \right) \Rightarrow \left\{F_1 \to F_1 - F_3\right\} \Rightarrow \left(\tfrac{8}{3}\ -\ \tfrac{5}{3}\ -\ \tfrac{1}{3}\ -\ 1\ 1\ 0\ \tfrac{1}{3}\ -$$

$$\Rightarrow \underline{A^{-1} = \left(\tfrac{8}{3}\ -\ \tfrac{5}{3}\ -\ \tfrac{1}{3}\ -\ 1\ 1\ 0\ \tfrac{1}{3}\ -\ \tfrac{1}{3}\ \tfrac{1}{3}\ \right) = \tfrac{1}{3}\cdot(8\ -\ 5\ -\ 1\ -\ 3\ 3\ 0\ 1\ -\ 1\ 1\ )}$$

.

b)

$$AX = A + B = S;\ A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot S;\ I\cdot X = A^{-1}\cdot S \Rightarrow X = A^{-1}\cdot S.$$

$$S = A + B = (1\ 2\ 1\ 1\ 3\ 1\ 0\ 1\ 3\ ) + (0\ -\ 1\ 2\ 1\ 0\ -\ 1\ 2\ 1\ 0\ ) = (1\ 1\ 3\ 2\ 3\ 0\ 2\ 2\ 3$$

.

Sustituyendo en la expresión de X los valores de M y A^{-1}:

$$X = A^{-1} \cdot S = \frac{1}{3} \cdot (8 \; -5 \; -1 \; -3 \; 3 \; 0 \; 1 \; -1 \; 1) \cdot (1 \; 1 \; 3 \; 2 \; 3 \; 0 \; 2 \; 2 \; 3) = \frac{1}{3} \cdot (-4 \; -$$

.

$$\underline{X = \frac{1}{3} \cdot (-4 \; -9 \; 21 \; 3 \; 6 \; -9 \; 1 \; 0 \; 6) = \left(-\frac{4}{3} \; -3 \; 7 \; 1 \; 2 \; -3 \; \frac{1}{3} \; 0 \; 2\right)}.$$

****

2º) El departamento de análisis financiero de una consultora determina que la rentabilidad $R(x)$, en miles de euros, de cierta inversión, en función de la cantidad invertida en miles de euros, x, viene dada por la expresión: $R(x) =- 0'01x^2 + 0'1x + 1$, siendo $x > 0$.

a) ¿Cuántos euros conviene invertir para maximizar la rentabilidad? ¿Cuál será dicha rentabilidad máxima?

b) Determina la función que proporciona la rentabilidad media (es decir, el cociente entre la rentabilidad y la cantidad invertida) de dicha inversión y estudia la evolución de dicha rentabilidad media en función de la cantidad invertida.

----

a)

Para maximizar la rentabilidad es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$R'(x) =- 0'02x + 0'1.$ $\qquad R'(x) = 0 \Rightarrow - 0'02x + 0'1 = 0;$

$2x - 10 = 0;\ x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5.$

$\underline{La\ rentabilidad\ es\ máxima\ cuando\ se\ invierten\ 5.000\ euros}.$

$R(5) =- 0'01 \cdot 5^2 + 0'1 \cdot 5 + 1 =- 0'25 + 0'5 + 1 = 1,5 - 0,25 = 1,25$

.

$\underline{La\ rentabilidad\ máxima\ asciende\ a\ 1.250\ euros}.$

b)

La función rendimiento medio (RM) es la siguiente:

$RM(x) = \frac{R(x)}{x} = \frac{-0,01x^2+0,1x+1}{x} =- 0,01x + 0,1 + \frac{1}{x}.$

$\underline{RM(x) =- 0,01x + 0,1 + \frac{1}{x}}.$

$RM'(x) =- 0,01 - \frac{1}{x^2} < 0,\ \forall x > 0.$

La función $RM(x)$ es decreciente para cualquier valor positivo (lógico) de x.

$\underline{La\ función\ RM(x)\ es\ decreciente\ para\ cualquier\ valor\ que\ se\ invierta}.$

****

3º) Juan va normalmente a alquilar películas a uno de los tres videoclubs siguientes: A, B y C. Se sabe que la probabilidad de que vaya al videoclub C es 0,2 y que la probabilidad de que vaya al A es la misma que la probabilidad de que vaya al B. En el videoclub A el 35 % de las películas son españolas, el 55 % en el B y el 40 % en el C. Un día va a un videoclub y una vez allí elige aleatoriamente una película. Se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya ido al videoclub A?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la película elegida sea española?

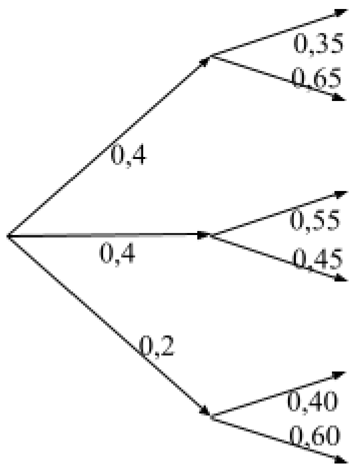
c) Suponiendo que ha elegido una película no española, ¿cuál es la probabilidad de que haya ido al videoclub C?

----

a)

$P(A) + P(B) + P(C) = 1 \Rightarrow \{P(A) = P(C)\ P(C) = 0,2\} \Rightarrow P(A) + P(A) + 0,2 = 1;$

$2 \cdot P(A) = 1 - 0,2 = 0,8 \Rightarrow \underline{P(A) = 0,4}.$



b)

$$P = 0,14 + 0,22 + 0,08 = \underline{0,44}.$$

c)

$$P = \frac{0,12}{0,26+0,18+0,12} = \frac{0,12}{0,56} = \underline{0,214}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Un comerciante compró 200 kilos de melocotones, 100 de manzanas y 300 de peras. Los vende incrementando un 25 % el precio de los melocotones y de las manzanas y un 40 % el de las peras. Por la venta de todo el género obtuvo 1.087 euros de los que 257 fueron beneficios. Sabiendo que el precio de compra del kilo de melocotones fue 50 céntimos más caro que el kilo de peras, ¿cuál fue el precio de compra del kilo de cada una de las frutas?

Sean x, y, z los precios de compra de un kilo de melocotones, manzanas y peras, respectivamente.

Coste de la compra: $200x + 100y + 300z$.

Venta de todo el género: $200 \cdot 1,25x + 100 \cdot 1,25y + 300 \cdot 1,40z$.

El coste de la compra también es la diferencia entre la venta de todo el género, menos los 275 euros de beneficios: $1.087 - 257 = 830$ euros.

De lo anterior se deduce el sistema de ecuaciones siguiente:

$200x + 100y + 300z = 830\ 250x + 125y + 420z = 1.087 \quad x = z + 0,5\} \quad 20x$

.

Sustituyendo el valor de x de la tercera ecuación en las otra dos:

$20(z + 0,5) + 10y + 30z = 83\ 250(z + 0,5) + 125y + 420z = 1.087\} \ 10y + 5$

$10y + 50z = 73\ 125y + 670z = 962\} \quad - 250y - 1.250z =- 1825\ 250y + 1.34$

.

$x = z + 0,5 = 1,1 + 0,5 = 1,6.$

$10y + 50z = 73; \ \ 10y + 50 \cdot 1,1 = 73; \ \ 10y = 73 - 55 = 18 \Rightarrow y = 1,8.$

$\underline{Melocotones: 1,6\ euros/k; Manzanas: 1,8\ euros/k\ y\ peras: 1,1\ euros/k.}$

****

2º) Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{4-x}$, se pide:

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes de coordenadas.

b) Las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales.

e) La representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

----

a)

Por tratarse de una función racional su dominio es el conjunto de los números reales, excepto los valores que anulan el denominador:

$$D(f) \Rightarrow R - \{4\}.$$

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

Eje Y $\Rightarrow x = 0 \rightarrow O(0, 0)$. Eje X $\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{4-x} = 0 \Rightarrow x = 0 \rightarrow O(0, 0)$.

$$\underline{El\ único\ punto\ de\ corte\ con\ los\ ejes\ de\ f(x)\ es\ el\ origen\ de\ coordenadas}.$$

b)

Verticales: Son de la forma x = k; son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{Asíntota\ vertical: x = 4}.$$

Horizontales: Son de la forma y = k; son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a $\pm\infty$:

$$k = f(x) = \frac{2x^2-1}{x-2} = \infty .$$

$$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Aunque no se pide, también se calcula la asíntota oblicua.

Asíntotas oblicuas: Son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \frac{f(x)}{x}\ y\ n = [f(x) - mx] .$$

$$m = \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{x^2}{4-x}}{x} = \frac{x^2}{4x-x^2} =- 1 .$$

$$n = [f(x) - mx] = \left(\frac{x^2}{4-x} + x\right) = \frac{x^2+4x-x^2}{4-x} =- 4 .$$

$$\underline{Asíntota\ oblicua: y =- x - 4}.$$

$c)$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(4-x)-x^2\cdot(-1)}{(4-x)^2} = \frac{8x-2x^2+x^2}{(4-x)^2} = \frac{8x-x^2}{(4-x)^2} = \frac{x(8-x)}{(4-x)^2}.$$

$$f'(x) = 0\Rightarrow\frac{x(8-x)}{(4-x)^2} = 0;\ x(8 - x) = 0\Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 8.$$

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0\Rightarrow x\in (0,\ 4) \cup (4,\ 8)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0\Rightarrow x\in(- \infty,\ 0) \cup (8,\ + \infty)}.$$

$d)$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto. Esta condición necesaria no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; se es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{(8-2x)\cdot(4-x)^2-x(8-x)\cdot[2\cdot(4-x)\cdot(-1)]}{(4-x)^4} = \frac{(8-2x)\cdot(4-x)+2x(8-x)}{(4-x)^3} =$$

$$= \frac{32-8x-8x+2x^2+16x-2x^2}{(4-x)^3} = \frac{32}{(4-x)^3}.$$

$$f''(0) = \frac{32}{4^3} > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 0.$$

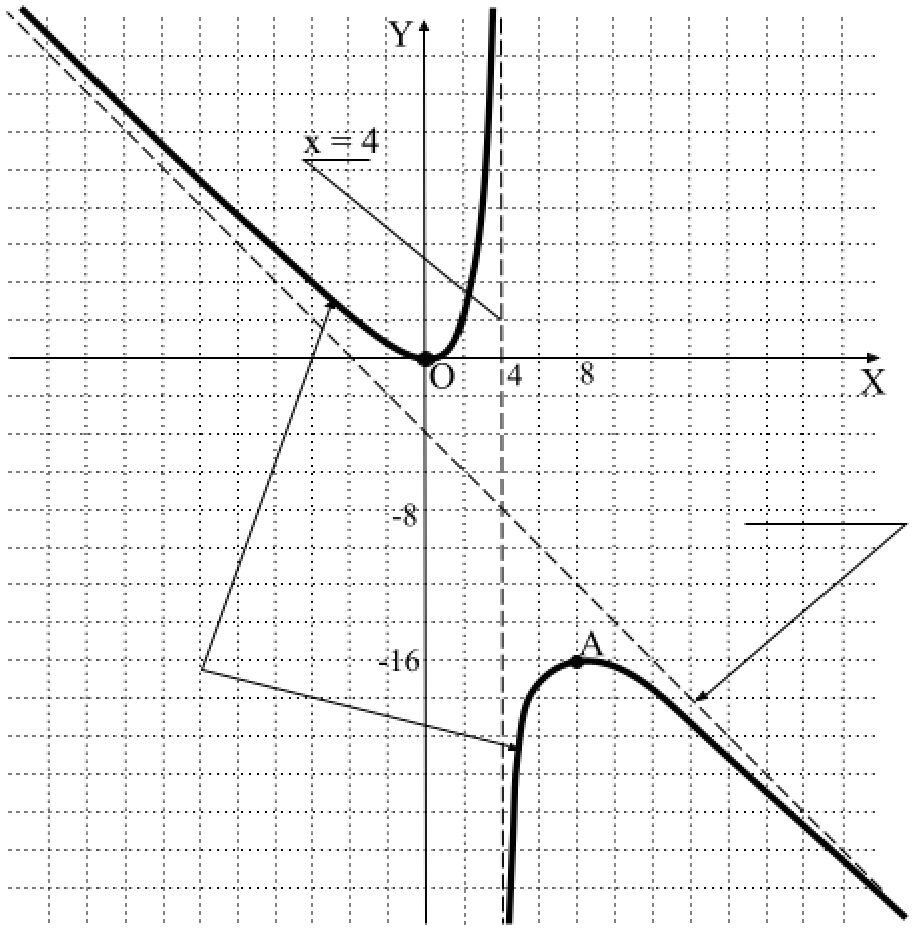
$$f(0) = \frac{0}{0-4} = 0 \Rightarrow \underline{Mínimo: O(0,\ 0)}.$$

$$f''(8) = \frac{32}{(-4)^3} < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 8.$$

$f(8)=\frac{8^2}{4-8}=\frac{64}{-4}=-\ 16\Rightarrow \underline{Máximo\!:A(8,\ -\ 16)}.$

$e)$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



****

3º) El espacio muestral asociado a un experimento aleatoria es $\Omega = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\}$. Se conocen las siguientes probabilidades: $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = \frac{1}{12}$, $P(e) = \frac{1}{2}$ y $P(f) = \frac{1}{6}$. Dados los sucesos $A = \{a,\ c,\ d\}$ y $B = \{c,\ e,\ f\}$ relacionados con el experimento aleatorio y siendo $\overline{A}$ el suceso contrario o complementario de A, calcula:

$a)\ P(A \cup B).\ b)\ P(\overline{A} \cup B).\ c)\ P(A \cap B).\ d)\ P(B).$

$a)$

$$A \cup B = \{a,\ c,\ d\} \cup \{c,\ e,\ f\} = \{a,\ c,\ d,\ e,\ f\}.$$

$$P(A \cup B) = P(a) + P(c) + P(d) + P(e) + P(f) = 3 \cdot \frac{1}{12} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{3}{12} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3+6+2}{12} = \frac{11}{12}.$$

$$\underline{P(A \cup B) = \frac{11}{12}}.$$

$b)$

$$\overline{A} \cup B = \{b,\ e,\ f\} \cup \{c,\ e,\ f\} = \{b,\ c,\ e,\ f\}.$$

$$P(\overline{A} \cup B) = P(b) + P(c) + P(e) + P(f) = 2 \cdot \frac{1}{12} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2+6+2}{12} = \frac{10}{12}.$$

$$\underline{P(\overline{A} \cup B) = \frac{5}{6}}.$$

$c)$

$$A \cap B = \{a,\ c,\ d\} \cap \{c,\ e,\ f\} = \{c\}.$$

$$\underline{P(A \cap B) = P(c) = \frac{1}{12}}.$$

$d)$

$$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{12}}{P(c)+P(e)+P(f)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1+6+2}{12}} = \frac{1}{9}.$$

$$\underline{P(B) = \frac{1}{9}}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

JULIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberían estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

1º) Un restaurante ofrece cada día desayunos, comidas y cenas. Los desayunos cuestan 4 euros, las comidas 8 y las cenas 10. El último sábado se sirvieron tantas comidas como desayunos y cenas juntos. La recaudación total fue de 1.116 euros. La recaudación obtenida con las comidas superó a la de las cenas en 156 euros.

a) ¿Cuántos desayunos, comidas y cenas se sirvieron?

b) ¿Qué beneficio se obtuvo si las ganancias de un desayuno son 2,5 euros, las de una comida 4 euros y las de una cena 5 euros?

----

a)

Sean x, y, z el número de desayunos, comidas y cenas que sirvió el último sábado el restaurante, respectivamente.

$$y = x + z\ 4x + 8y + 10z = 1.116 \qquad 8y - 10z = 156\,\} \qquad x -$$

.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|0\ -1\ 1\ 558\ 4\ 5\ 78\ 4\ -5\ |}{|1\ -1\ 1\ 2\ 4\ 5\ 0\ 4\ -5\ |} = \frac{2.232-390-312-2.790}{-20+8-20-10} = \frac{2.232-3.492}{-42} = \frac{-1.260}{-42} = 30$$

.

$$y = \frac{|1\ 0\ 1\ 2\ 558\ 5\ 0\ 78\ -5\ |}{-42} = \frac{-2.790+156-390}{-42} = \frac{156-3.180}{-42} = \frac{-3.024}{-42} = 72.$$

$$z = \frac{|1\ -1\ 0\ 2\ 4\ 558\ 0\ 4\ 78\ |}{-42} = \frac{312-2.232+156}{-42} = \frac{468-2.232}{-42} = \frac{-1.764}{-42} = 42.$$

$$\underline{Se\ sirvieron\ 30\ desayunos,\ 72\ comidas\ y\ 42\ cenas}.$$

$b)$

$$Beneficio = 2,5x + 4y + 5z = 2,5 \cdot 30 + 4 \cdot 72 + 5 \cdot 42 =$$

$$= 75 + 288 + 210 = 573.$$

$$\underline{Se\ obtuvo\ un\ beneficio\ de\ 573\ euros}.$$

****

2º) Dada la función continua $f(x) = \{ \quad 2x + 3 \quad 0 \leq x < 2 \quad -\frac{x^2}{2} + 4x + 1 \quad 2 \leq x \leq 8$.

a) Calcula sus máximos absolutos y sus mínimos absolutos, razonando que, efectivamente, lo son.

b) Calcula el valor de la integral de la función $f(x)$ en el intervalo $[5,\ 7]$.

----

a)

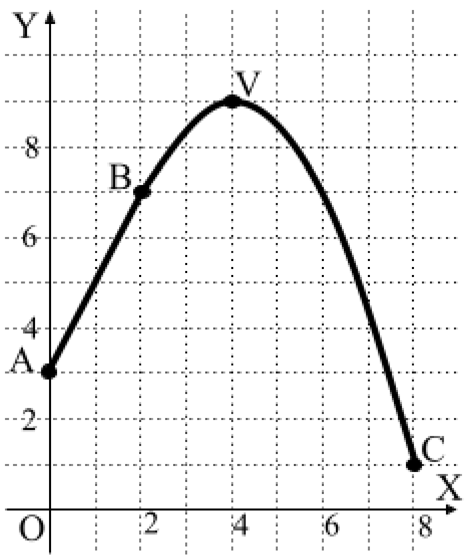
Con objeto de facilitar la comprensión del ejercicio se hace un dibujo aproximado de la función.

Para la representación de la función tenemos en cuenta que en su intervalo $(0,\ 2)$ se trata de la expresión $f(x) = 2x + 3$ cuyos puntos extremos son $A(0,\ 3)$ y $B(2,\ 7)$. En el intervalo $(2,\ 8)$ se trata de la expresión $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 4x + 1$, que es una parábola cóncava ($\cap$), cuyo vértice, que es un máximo absoluto que se deduce de la continuidad de la función, es el siguiente:

$$f'(x) = -x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4.$$

$$f(4) = -\frac{4^2}{2} + 4 \cdot 4 + 1 = -8 + 17 = 9 \Rightarrow V(4,\ 9).$$

Los valores que toma la función en los valores extremos del intervalo $(2,\ 8)$ son $B(2,\ 7)$ y $f(8) = -\frac{8^2}{2} + 4 \cdot 8 + 1 = -32 + 32 + 1 = 1 \Rightarrow C(8,\ 1)$.



De la observación de la figura se observa que:

$\underline{El\ máximo\ absoluto\ es\ V(2,\ 9)\ y\ el\ mínimo\ absoluto\ es\ C(8,\ 1)}.$

$b)$

$$\int_5^7 f(x)\cdot dx = \int_5^7 \left(-\frac{x^2}{2} + 4x + 1\right)\cdot dx = \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + x\right]_5^7 =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{6} + 2x^2 + x\right]_5^7 = \left(-\frac{7^3}{6} + 2\cdot 7^2 + 7\right) - \left(-\frac{5^3}{6} + 2\cdot 5^2 + 5\right) =$$

$$= -\frac{343}{6} + 98 + 7 + \frac{125}{6} - 50 - 5 = -\frac{218}{6} + 50 = \frac{-218+300}{6} = \frac{82}{6} = \frac{41}{3}.$$

$$\underline{\int_5^7 f(x)\cdot dx = \frac{41}{3}}.$$

****

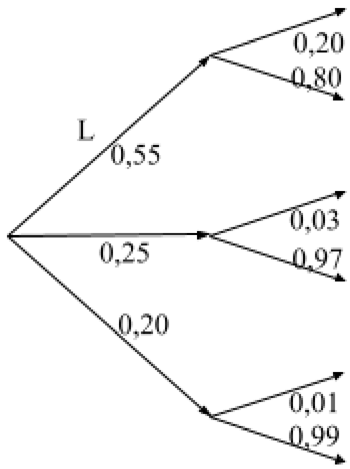
3º) El 55 % de los empleados de una empresa son licenciados, el 25 % tienen nivel de estudios de educación secundaria y el resto tan sólo nivel de estudios primarios. Un 20 % de los licenciados, un 3 % de los que tienen educación secundaria y un 1 % de los que tienen estudios primarios ocupan un puesto directivo en la empresa.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un directivo de la empresa elegido al azar sea licenciado?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado de la empresa elegido al azar no sea directivo y su nivel de estudios sea de estudios primarios?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado de la empresa elegido al azar tenga nivel de estudios secundarios o sea directivo?

$L \rightarrow licenciado$; $S \rightarrow secundarios$; $P \rightarrow primarios$.
$D \rightarrow directivo$; $\overline{D} \rightarrow no\ directivo$.



a)

$$P = \frac{0{,}1100}{0{,}1100+0{,}0075+0{,}0020} = \frac{0{,}1100}{0{,}1185} = \underline{0,9283}.$$

b)

$$P = 0,20 \cdot 0,99 = \underline{0,1980}.$$

c)

$$P = 0,2500 + 0,1100 + 0,0020 = \underline{0,3620}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Dadas las matrices $A = (1\ 2\ \ -\ 1\ \ -\ 3\ )$ y $B = (1\ 3\ 0\ 2\ )$, calcula:

$a)\ (A - I)^2$. $\qquad$ $b)\ A \cdot B^t$. $\qquad$ $c)\ A - B^{-1}$.

(I es la matriz identidad y $B^t\ y\ B^{-1}$ las matrices traspuesta e inversa de B, respectivamente).

$a)$

$$A - I = (1\ 2\ \ -\ 1\ \ -\ 3\ ) - (1\ 0\ 0\ 1\ ) = (0\ 2\ \ -\ 1\ \ -\ 4\ ).$$

$$(A - I)^2 = (0\ 2\ \ -\ 1\ \ -\ 4\ ) \cdot (0\ 2\ \ -\ 1\ \ -\ 4\ ) = \underline{(-\ 2\ \ -\ 8\ 4\ 14\ )}.$$

$b)$

$$A \cdot B^t = (1\ 2\ \ -\ 1\ \ -\ 3\ ) \cdot (1\ 0\ 3\ 2\ ) = \underline{(7\ 4\ \ -\ 10\ \ -\ 6\ )}.$$

$c)$

La inversa de B se obtiene por el método de Gauss-Jordan.

$$(B/I) = (1\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow \tfrac{1}{2}F_2\right\} \Rightarrow \left(1\ 0\ 0\ \tfrac{1}{2}\ \right) \Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow F_1 - 3F_1\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1\ \ -\tfrac{3}{2}\ 0\ \tfrac{1}{2}\ \right) \Rightarrow B^{-1} = \left(1\ \ -\tfrac{3}{2}\ 0\ \tfrac{1}{2}\ \right).$$

$$A - B^{-1} = (1\ 2\ \ -\ 1\ \ -\ 3\ ) - \left(1\ \ -\tfrac{3}{2}\ 0\ \tfrac{1}{2}\ \right) = \underline{\left(0\ \tfrac{7}{2}\ \ -\ 1\ \ -\tfrac{7}{2}\ \right)}.$$

****

2º) Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$, calcula:

$a)$ Su dominio y puntos de corte con los ejes de coordenadas.

$b)$ Las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales.

$c)$ Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$d)$ Los máximos y mínimos locales.

$e)$ Representa gráficamente la función a partir de la información de los apartados anteriores.

$a)$

Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$\underline{D(f) \Rightarrow R - \{-1,\ 1\}}.$$

$$\underline{El\ \text{único}\ punto\ de\ corte\ con\ los\ ejes\ es\ el\ origen\ de\ coordenadas}.$$

$b)$

Asíntotas horizontales: son de la forma y = k y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = f(x) = \frac{x^2}{x^2-1} = 1 \Rightarrow \underline{As\text{í}ntota\ horizontal: y = 1}\ .$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{As\text{í}ntotas\ verticales: x = -1,\ x = 1}.$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

$c)$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(x^2-1)-x^2\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x\cdot(x^2-1-x^2)}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}.$$

Teniendo en cuenta el dominio de la función:

$Para\, x < 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento\colon\, (-\infty,\ -1) \cup (-1,\ 0)}.$

$Para\, x > 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento\colon\, (0,\ 1) \cup (1,\ +\infty)}.$

$d)$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto. Esta condición necesaria no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; se es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{-2\cdot(x^2-1)^2 - 2x\cdot[2\cdot(x^2-1)\cdot 2x]}{(x^2-1)^4} = \frac{-2\cdot(x^2-1)-8x^2}{(x^2-1)^3} = \frac{-2x^2+2-8x^2}{(x^2-1)^3} = \frac{2-10x^2}{(x^2-1)^3} =$$

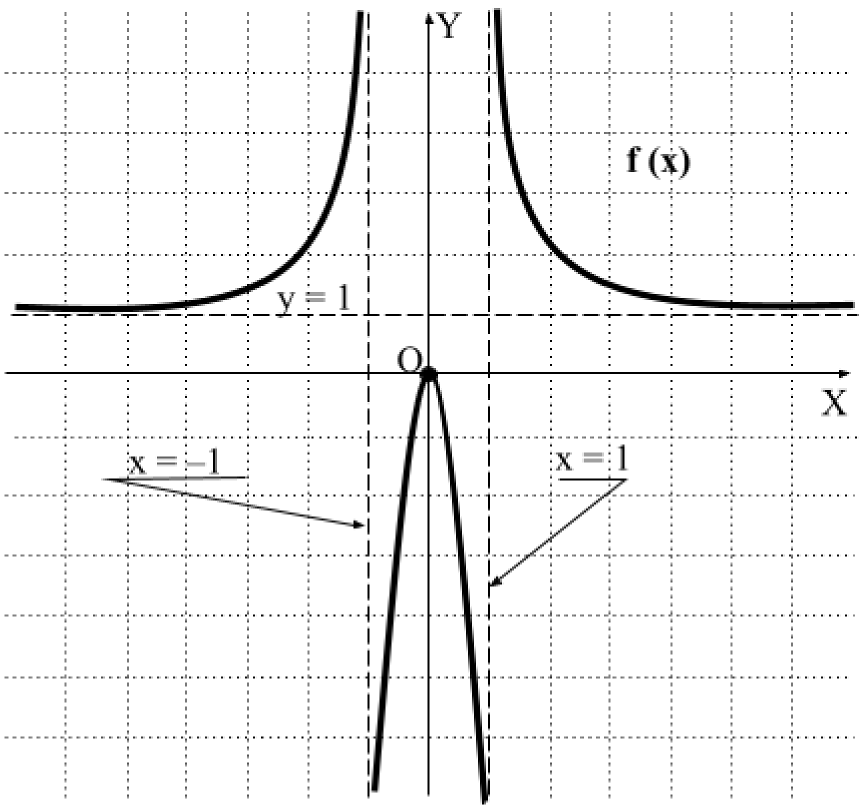
$$= \frac{2(1-5x^2)}{(x^2-1)^3}.$$

$$f''(0) = \frac{2}{-1} = -2 < 0 \Rightarrow M\acute{a}ximo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = \frac{0}{0-1} = 0 \Rightarrow \underline{M\acute{a}ximo\colon O(0,\ 0)}.$$

$e)$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



****

3º) El 35 % de los alumnos de un instituto viste vaqueros y el 50 % lleva calzado deportivo. El 30 % de ellos no usa ni vaqueros ni calzado deportivo. Calcula:

a) La probabilidad de que un alumno elegido al azar vista vaqueros o use calzado deportivo?

b) La probabilidad de que un alumno elegido al azar vista vaqueros y use calzado deportivo?

c) La probabilidad de que un alumno elegido al azar vista vaqueros pero no use calzado deportivo?

d) Si se elige un alumno al azar y se observa que no lleva calzado deportivo, ¿cuál es la probabilidad de que no lleve vaqueros?

$Datos$:

$P_{Vaqueros} = P(V) = 0,35.$ $\qquad P_{Deportivos} = P(D) = 0,50.$

$P(\overline{V \cup D}) = P(\overline{V} \cap \overline{D}) = 0,3.$

a)

$¿P(V \cup D)?$ $\qquad P(V \cup D) = 1 - P(\overline{V \cup D}) = 1 - 0,3 = \underline{0,7}.$

b)

$¿P(V \cap D)?$

$P(V \cap D) = P(V) + P(D) - P(V \cap D) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(V \cap D) = P(V) + P(D) - P(V \cup D) = 0,35 + 0,50 - 0,7 = \underline{0,15}.$

c)

$¿P(V \cup \overline{D})? P(V \cup \overline{D}) = P(V) - P(V \cap D) = 0,35 + 0,15 = \underline{0,20}.$

d)

$¿P(\overline{D})?$

$$P(\overline{D}) = \frac{P(\overline{V} \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{0,3}{1 - P(D)} = \frac{0,3}{1 - 0,5} = \frac{0,3}{0,5} = \underline{0,6}.$$

****