MATEMÁTICAS II

Selectividad 2017

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS DE TODAS LAS COMUNIDADES AUTÓNOMAS

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

Textos Marea Verde

Antes Selectividad, ahora tiene distintos nombres:

ABAU (Galicia),

EAU (País Vasco),

EBAU (Asturias, Cantabria, Castilla y León, Extremadura, Islas Canarias, La Rioja y Murcia),

EvAU (Aragón, Castilla-La Mancha y Navarra),

EVAU (Madrid),

PAU (Cataluña y Valencia) ,

PBAU (Islas Baleares) o

PevAU (Andalucía): Prueba de acceso y admisión a la Universidad

TEXTOS MAREA VERDE

I.S.B.N. - 13: 978-84-608-8980-9

I.S.B.N. - 10: 84-608-8980-9

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA

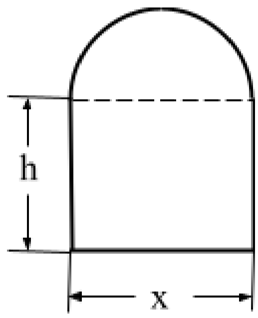
JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Instrucciones: Tienes que elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**. Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

OPCIÓN A



1º) Se quiere hacer una puerta rectangular coronada por un semicírculo como el que indica la figura. El hueco de la puerta tiene 16 metros cuadrados. Si es posible, determina la base x para que el perímetro sea mínimo.

El valor de la superficie en función de los valores de x y h:

$$S(x, h) = x \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x \cdot h + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x^2}{4} = x \cdot h + \frac{\pi}{8} \cdot x^2 = 16.$$

$$h = \frac{16 - \frac{\pi}{8} \cdot x^2}{x} = \frac{128 - \pi x^2}{8x}.$$

El perímetro en función de x es el siguiente:

$$p = 2h + x + \pi x = 2 \cdot \frac{128 - \pi x^2}{8x} + x + \pi x = \frac{128 - \pi x^2}{4x} + x + \pi x =$$

$$= \frac{128 - \pi x^2 + 4x^2 + 4\pi x^2}{4x} = \frac{1}{4} \cdot \frac{128 + 4x^2 + 3\pi x^2}{x} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(4 + 3\pi)x^2 + 128}{x}.$$

Para que la superficie sea máxima es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$S'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2 \cdot (4 + 3\pi)x^2 - (4 + 3\pi)x^2 - 128}{x^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(4 + 3\pi)x^2 - 128}{x^2}.$$

$S'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot \frac{(4+3\pi)x^2 - 128}{x^2} = 0;\ (4 + 3\pi)x^2 - 128 = 0;\ (4 + 3\pi)x^2 = 128;$

$x^2 = \frac{128}{4+3\pi} \Rightarrow x = + \sqrt{\frac{128}{4+3\pi}} \cong 3,09.$

$$\underline{El\ perímetro\ es\ mínimo\ para\ x = + \sqrt{\frac{128}{4+3\pi}} \cong 3,09\ metros.}$$

****

2º) Considera la región limitada por las curvas $y = f(x) = x^2$ e $y = g(x) = -x^2 + 4x$.

a) Esboza la gráfica de la región dada, hallando los puntos de corte de ambas curvas.

b) Expresa el área como una integral. c) Calcula el área.

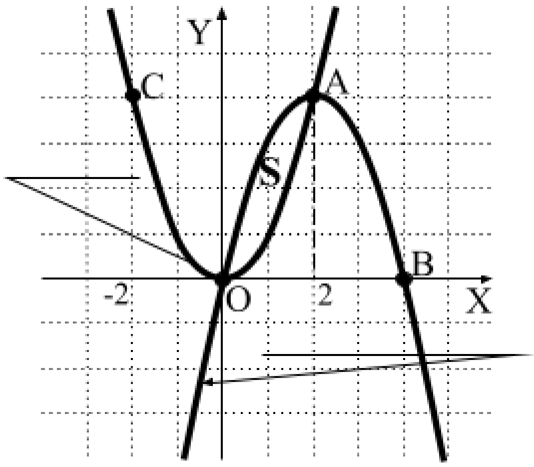
----

a)

Los puntos de intersección de las curvas son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$x^2 = -x^2 + 4x;\ \ 2x^2 - 4x = 0;\ \ x^2 - 2x = 0 \Rightarrow \{x_1 = 0 \to O(0,\ 0)\ x_2 = 2 \to A(2,\ 4$$

.



La parábola $y = g(x) = -x^2 + 4x$ corta al eje OX en los puntos siguientes:

$y = -x^2 + 4x = 0;\ \ -x(x - 4) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \{x_1 = 0 \to O(0, 0)\ x_2 = 4 \to B(4, 0)$.

La parábola $y = f(x) = x^2$, por ser simétrica con respecto al eje OY pasa por el origen y por los puntos $A(2,\ 4)$ y por su punto simétrico $C(-\ 2,\ 4)$.

La representación gráfica de la situación se expresa en la figura adjunta.

b)

Por ser las ordenadas de la parábola $y = f(x) = -x^2 + 4x$ iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de $y = f(x) = x^2$ en el intervalo del área a calcular y de la observación de la figura se deduce que:

$$S = \int_0^2 [g(x) - f(x)]dx = \int_0^2 \left[\left(-x^2 + 4x\right) - x^2\right]dx = \int_0^2 \left(-2x^2 + 4x\right)\cdot dx.$$

$$\underline{S = \int_0^2 \left(-2x^2 + 4x\right)\cdot dx.}$$

c)

$$S = \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{2}\right]_0^2 = \left[-\frac{2x^3}{3} + 2x^2\right]_0^2 = \left(-\frac{2\cdot2^3}{3} + 2\cdot2^2\right) - 0 = -\frac{16}{3} + 8 =$$

$$= \frac{-16+24}{3} = \underline{\frac{8}{3}\, u^2 = S}.$$

****

3º) Considera las matrices $A = (-\ 2\ \ -\ 2\ 0\ \ -\ 2\ 1\ 0\ 0\ 0\ \ -\ 2\ )$ y $X = (x\ y\ z\ )$.

a) Determina los valores de λ para los que la matriz $A + \lambda I$ no tiene inversa (I es la matriz identidad).

b) Resuelve $A\cdot X = -\ 3X$. Determina, si existe, asigna solución con $x = 1$.

----

a)

$$A + \lambda I = (-\ 2\ \ -\ 2\ 0\ \ -\ 2\ 1\ 0\ 0\ 0\ \ -\ 2\ ) + (\lambda\ 0\ 0\ 0\ \lambda\ 0\ 0\ 0\ \lambda\ ) = (\lambda - 2\ \ -\ 2\ 0$$

.

$|A + \lambda I| = 0 \Rightarrow |\lambda - 2\ \ -\ 2\ 0\ \ -\ 2\ \lambda + 1\ 0\ 0\ 0\ \lambda - 2\ | = 0;\ (\lambda - 2)^2(\lambda + 1) - 4(\lambda -$

;

$(\lambda - 2)[(\lambda - 2)(\lambda + 1) - 4] = 0;\ \ (\lambda - 2)\left(\lambda^2 - \lambda - 6\right) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2;$

$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0;\ \ \lambda = \frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{25}}{2} = \frac{1\pm5}{2} \Rightarrow \lambda_2 = -\ 2,\ \lambda_3 = 3.$

$\underline{\textit{La matriz } A + \lambda I \textit{ no es invertible para } \lambda = -\ 2,\ \lambda = 2 \textit{ y } \lambda = 6}.$

b)

$A\cdot X = -\ 3X;\ \ A\cdot X + 3X = O;\ \ (A + 3I)\cdot X = O;$

Del apartado anterior sabemos que la matriz $A + \lambda I$ no es invertible para $\lambda = 3$, por lo cual, la matriz $A + 3I = (3 - 2\ \ -\ 2\ 0\ \ -\ 2\ 3 + 1\ 0\ 0\ 0\ 3 - 2\ ) = (1\ \ -\ 2\ 0\ \ -\ 2\ 4\ 0\ 0\ 0\ 1\ )$ no es invertible y el sistema resulta:

$(1\ \ -\ 2\ 0\ \ -\ 2\ 4\ 0\ 0\ 0\ 1\ )\cdot(x\ y\ z\ ) = (0\ 0\ 0\ ) \Rightarrow\quad x - 2y = 0\ \ -\ 2x + 4y = 0$, equivalente al sistema homogéneo: $x - 2y = 0\qquad z = 0\ \}$, cuyas soluciones son:

$\underline{x = 2\mu;\ y = \mu;\ z = 0,\ \forall\mu\in R}.$

En particular, para $x = 1 \Rightarrow \mu = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{Solución: x = 1; y = \frac{1}{2}; z = 0}.$

****

4º) Considera el punto $P(1, -1, 0)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 \\ z = t \end{cases}$.

$a)$ Determina la ecuación del plano π que pasa por P y contiene a r.

$b)$ Halla las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r.

$a)$

Un punto y un vector director de r son $Q(1, -2, 0)$ y $\vec{v_r} = (3, 0, 1)$.

Los puntos P y Q determinan el vector $\vec{PQ} = [Q - P] = (0, -1, 0)$.

El plano π que pasa por P y contiene a r tiene la siguiente expresión general:

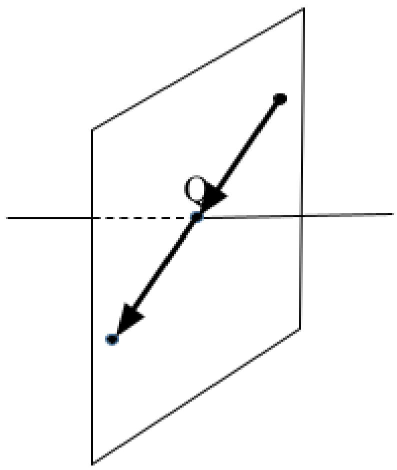
$$\pi\left(P; \vec{PQ}, \vec{v_r}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad -(x-1) + 3z = 0.$$

$x - 1 - 3z = 0 \Rightarrow \underline{\pi \equiv x - 3z - 1 = 0}.$

$b)$

El haz de planos perpendiculares a r es $\beta \equiv 3x + z + D = 0$.

El plano $\varphi \in \beta$ que contiene al punto $P(1, -1, 0)$ es el siguiente:



$$\left.\begin{array}{l} \beta \equiv 3x + z + D = 0 \\ P(1, -1, 0) \end{array}\right\} \Rightarrow 3 \cdot 1 + 0 + D = 0;$$

$3 + D = 0 \Rightarrow D = -3 \Rightarrow \varphi \equiv 3x + z - 3 = 0.$

El punto Q intersección de la recta r con el plano φ es el siguiente:

$\varphi \equiv 3x + z - 3 = 0 \quad r \equiv \{x = 1 + 3t \; y = -2 \quad z = t \quad \} \Rightarrow 3(1 + 3t) + t - 3$

$3 + 9t + t - 3 = 0; \; 10t = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow Q(1, \; -2, \; 0).$

Para que $P^{'}$ sea el simétrico de P con respecto a r tiene que cumplirse que:

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP'} \Rightarrow (0, \; -1, \; 0) = \left[P^{'} - Q\right] = [(x, \; y, \; z) - (1, \; -2, \; 0)];$

$(0, \; -1, \; 0) = (x - 1, \; y + 2, \; z - 0) \Rightarrow \{x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \quad y + 2 = -1 \rightarrow y = -3$

$\underline{\Rightarrow P'(1, \; -3, \; 0)}.$

****

OPCIÓN B

1º) Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$, para $x \neq 1$.

a) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

b) Estudia y determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f. Calcula los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).

----

a)

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = f(x) = \frac{x^4}{x-1} = \infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$x - 1 = 0 \Rightarrow \underline{La\ recta\ x = 1\ es\ asíntota\ vertical}.$$

Asíntotas oblicuas: Son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$m = \frac{f(x)}{x}$ y $n = [f(x) - mx]$, con m finito y $m \neq 0$.

$$m = \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = \frac{x^2}{x^2-x} = 1.$$

$$n = [f(x) - mx] = \left(\frac{x^2}{x-1} - 1 \cdot x\right) = \frac{x^2-x^2+x}{x-1} = 1.$$

$$\underline{Asíntota\ oblicua:\ y = x + 1}.$$

b)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0;\ x(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2.$$

Las raíces halladas dividen al conjunto de los números reales en los tres intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ y $(2, +\infty)$ en los cuales el signo del numerador es, alternativamente, positivo o negativo. Teniendo en cuenta el valor, por ejemplo 3 $\in (2, +\infty)$, que el numerador tiene por valor: $3 \cdot (3 - 2) = 3 > 0$ y el dominio de la función que es $D(f) \Rightarrow R - \{1\}$, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento\text{: } f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)}.$$

$$\underline{Decrecimiento\text{: } f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (0, 1) \cup (1, 2)}.$$

La condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo es que se anule su primera derivada. Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: según que sea negativa o positiva para los valores que anulan la primera derivada se trata de un máximo o de un mínimo, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - x(x-2) \cdot [2 \cdot (x-1) \cdot 1]}{(x-1)^4} = \frac{(2x-2)(x-1) - 2x(x-2)}{(x-1)^3} =$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - 2x + 2 - 2x^2 + 4x}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

$$f''(0) = \frac{2}{(-1)^3} < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow \underline{Máximo\text{: } O(0, 0)}.$$

$$f''(2) = \frac{2}{(2-1)^3} = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ x = 2.$$

$$f(2) = \frac{2^2}{2-1} = \frac{4}{1} = 4 \Rightarrow \underline{Mínimo\text{: } P(2, 4)}.$$

****

2º) Calcula $\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$. $\left(sugerencia\ t = \sqrt[4]{x}\right)$.

$$I = \int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} \Rightarrow \{x = 16 \rightarrow t = 2\ x = 1 \rightarrow t = 1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \int_1^2 \frac{4t^3 \cdot dt}{t^2+t} = 4\cdot\int_1^2 \frac{t^2}{t+1}\cdot dt = 4\cdot\int_1^2 \frac{t^2+t-t}{t+1}\cdot dt = 4\cdot\int_1^2 \left(t - \frac{t}{t+1}\right)\cdot dt =$$

$$= 4\cdot\int_1^2 \left(t - \frac{t+1-1}{t+1}\right)\cdot dt = 4\cdot\int_1^2 \left(t - 1 + \frac{1}{t+1}\right)\cdot dt = 4\cdot\left[\frac{t^2}{2} - t + L(t+1)\right]_1^2 =$$

$$= 4\cdot\left[\frac{2^2}{2} - 2 + L(2+1)\right] - 4\cdot\left[\frac{1^2}{2} - 1 + L(1+1)\right] =$$

$$= 4\cdot(2 - 2 + L3) - 4\cdot\left(\frac{1}{2} - 1 + L2\right) = 4L3 - 2 + 4 - 4L2 = 2 - 4L\frac{3}{2} =$$

$$= 2 - 4L1,5 \cong 2 - 1,6219 = 0,3791.$$

$$\underline{I = \int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} = 2 - 4L1,5 \cong 2 - 1,6219 = 0,3791.}$$

****

3º) Sabemos que el coste de 3 lápices, 1 rotulador y 2 carpetas es de 15 euros, mientras que el de 2 lápices, 4 rotuladores y 1 carpeta es de 20 euros.

a) Sabiendo que 1 lápiz y 7 rotuladores cuestan 25 euros ¿podemos reducir el precio de cada uno de los artículos? Razona la respuesta.

b) Si por el precio de una carpeta se pueden comprar 10 lápices ¿cuánto cuesta cada uno de los artículos?

----

a)

Sean x, y, z el número de lápices, rotuladores y carpetas que se compran, respectivamente.

Del enunciado se deduce el sistema de ecuaciones lineales: $3x + y + 2z = 15\ 2x + 4y + z = 20 \quad x + 7y = 25\,\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = (3\ 1\ 2\ 2\ 4\ 1\ 1\ 7\ 0\,)$ y $M' = (3\ 1\ 2\ 2\ 4\ 1\ 1\ 7\ 0 \quad 15\ 20\ 25\,)$.

El rango de la matriz de coeficientes es el siguiente:

$|M| = |3\ 1\ 2\ 2\ 4\ 1\ 1\ 7\ 0\,| = 28 + 1 - 8 - 21 = 0 \Rightarrow Rang\ M = 2.$

$M' = (3\ 1\ 2\ 2\ 4\ 1\ 1\ 7\ 0 \quad 15\ 20\ 25\,) \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow (1\ 7\ 0\ 2\ 4\ 1\ 3\ 1\ 2$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1\ F_3 \rightarrow F_3 - 3F_1\} \Rightarrow (1\ 7\ 0\ 0\ -\ 10\ 1\ 0\ -\ 20\ 2 \quad 25\ -\ 30\ -\ 60\,) =$

.

$$\underline{Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$$

Para resolver el sistema se desprecia una de las ecuaciones y se parametriza una de las ecuaciones:

$3x + y + 2z = 15\ 2x + 4y + z = 20 \quad x + 7y = 25\,\} \Rightarrow y = \lambda \Rightarrow 3x + 2z = 15 -$

$3(25 - 7\lambda) + 2z = 15 - \lambda;\ \ 75 - 21\lambda + 2z = 15 - \lambda;\ \ 2z =- 60 + 20\lambda \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda =- 30 + 10\lambda.$

$$\underline{Solución\!: x = 25 - 7\lambda;\, y = \lambda;\, z =- 30 + 10\lambda,\ \forall\lambda \in R.}$$

$$\underline{Del\ enunciado\ se\ deduce\ que\ la\ rebaja\ de\ los\ artículos\ es\ absurdo.}$$

Por ejemplo, si $\lambda = 0$ resulta que un lápiz costaría 25 euros; los rotuladores "nos los regalan" y por cada carpeta que cojamos "nos regalan 30 euros". En fin, cosas de los que ponen estos exámenes.

b) Si por el precio de una carpeta se pueden comprar 10 lápices ¿cuánto cuesta cada uno de los artículos?

$$z = 10\lambda \Rightarrow -30 + 10\lambda = 10 \cdot (25 - 7\lambda) = 250 - 70\lambda;\ \ 80\lambda = 280;$$

$$2\lambda = 7 \Rightarrow \lambda = 3,5.$$

$$x = 25 - 7 \cdot 3,5 = 25 - 24,5 = 0,5; y = 3,5; z = -30 + 10 \cdot 3,5 = 5.$$

$$\underline{Un\ lápiz\ cuesta\ 0,5\ euros; un\ rotulador,\ 3,5\ euros\ y\ una\ carpeta,\ 5\ euros.}$$

****

4º) Considera los vectores $\overrightarrow{u} = (1,\ 0,\ 1),\ \overrightarrow{v} = (0,\ 2,\ 1)\ y\ \overrightarrow{w} = (m,\ 1,\ n)$

$a)$ Halla $m\ y\ n$ sabiendo que $\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\ y\ \overrightarrow{w}$ son linealmente dependientes y que $\overrightarrow{w}$ es ortogonal a $\overrightarrow{u}$.

$b)$ Para $n = 1$, halla los valores de m para que el tetraedro determinado por $\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\ y\ \overrightarrow{w}$ tenga volumen 10 unidades cúbicas.

$a)$

Los vectores $\left\{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\right\}$ son linealmente dependientes cuando son coplanarios, es decir: cuando el rango del determinante que forman es cero.

$Rang\left\{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\right\} \Rightarrow |1\ 0\ 1\ 0\ 2\ 1\ m\ 1\ n\,| = 0;\ \ 2n - 2m - 1 = 0.$ (1)

Dos vectores son ortogonales (perpendiculares) cuando su producto escalar es 0:

$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w} = 0 \Rightarrow (1,\ 0,\ 1)\cdot(m,\ 1,\ n) = 0;\ \ m + n = 0.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$2n - 2m = 1 \quad n + m = 0\,\}\ \ 2n - 2m = 1\ 2n + 2m = 0\,\} \Rightarrow 4n = 1;\ \ n = \frac{1}{4};\ \ m =$

.

$\underline{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\ son\ linealmente\ independienes\ y\ \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{w}\ para\ m = -\frac{1}{4},\ n = \frac{1}{4}}$.

$b)$

Para $n = 1$ es $\overrightarrow{w} = (m,\ 1,\ 1)$.

El volumen del tetraedro que determinan tres vectores es un sexto del producto mixto de los tres vectores:

$V_{OABC} = \frac{1}{6}\cdot\left|\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\right| = 10;\ \ \left|\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\right| = 60 \Rightarrow |1\ 0\ 1\ 0\ 2\ 1\ m\ 1\ 1\,| = 60;$

$2 - 2m - 1 = 60;\ \ -2m = 61 \Rightarrow \underline{m = -\frac{61}{2} = -30,5}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA

SEPTIEMBRE – 2017

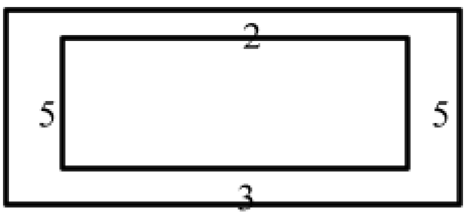
(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Instrucciones: Tienes que elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**. Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

OPCIÓN A

1º) Una imprenta recibe el encargo de realizar una tarjeta rectangular con las siguientes características: la superficie rectangular que debe ocupar la zona impresa es de 100 cm^2, el margen superior tiene que ser de 2 cm, el inferior de 3 cm y los laterales de 5 cm cada uno. Calcula si es posible, las dimensiones que debe tener la tarjeta de forma que se utilice la menos cantidad de papel posible. Si es posible, determina la base x para que el perímetro sea mínimo.



La superficie del cartel es $S = x \cdot y$, que tiene que ser mínima para lo cual su derivada tiene que ser cero.

Para poder derivar hemos de expresar una variable en función de la otra, para lo cual tendremos en cuenta que la superficie a imprimir, que es la central, tiene que ser de 100 cm^2.

De la observación de la figura se deduce que:

$(x - 10)(y - 5) = 100;\ xy - 5x - 10y + 50 = 100;\ xy - 5x - 10y = 50;$

$xy - 10y = 50 + 5x;\ y(x - 10)50 + 5x \Rightarrow y = \frac{50+5x}{x-10}.$

Sustituyendo el valor de y en la expresión de la superficie:

$S(x,\ y) = x \cdot y \Rightarrow S(x) = x \cdot \frac{50+5x}{x-10} = \frac{5x^2+50x}{x-10}.$

$S'(x) = \frac{(10x+50)\cdot(x-10)-\left(5x^2+50x\right)\cdot 1}{(x-10)^2} = \frac{10x^2-100x+50x-500-5x^2-50x}{(x-10)^2} =$

$= \frac{5x^2-100x-500}{(x-10)^2}.$

$S'(x) = 0 \Rightarrow \frac{5x^2-100x-500}{(x-10)^2} = 0;\ 5x^2 - 100x - 500 = 0;\ x^2 - 20x - 100 = 0;$

$x = \frac{20\pm\sqrt{400+400}}{2} = \frac{20\pm\sqrt{800}}{2} = \frac{20\pm 20\sqrt{2}}{2} = 10\pm 10\sqrt{2} \Rightarrow \{x_1 = 10 - 10\sqrt{2}\ x_2 = 10 + 10$

.

La raíz negativa carece de sentido, por lo cual: $x = 10 + 10\sqrt{2} \cong 24,14.$

$y = \frac{50+5x}{x-10} = \frac{50+5\cdot\left(10+10\sqrt{2}\right)}{\left(10+10\sqrt{2}\right)-10} = \frac{50+50+50\sqrt{2}}{10\sqrt{2}} = \frac{100+50\sqrt{2}}{10\sqrt{2}} = \frac{10+5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}+10}{2} =$

$= 5\sqrt{2} + 5 = 5\left(\sqrt{2} + 1\right) \cong 12,07.$

$\underline{La\ tarjeta\ de\ mínimo\ papel\ tiene\ 24,14\ cm\ de\ base\ y\ 12,07\ cm\ de\ altura.}$

$Perímetro = P(x,\ y) = 2x + 2y.$

Sabiendo que $y = \frac{50+5x}{x-10}$:

$P(x) = 2x + 2\cdot\frac{50+5x}{x-10} = 2x + 10\cdot\frac{10+x}{x-10}.$

$P'(x) = 2 + 10\cdot\frac{1\cdot(x-10)-(x+10)\cdot 1}{(x-10)^2} = 2 + 10\cdot\frac{x-10-x-10}{(x-10)^2} = 2 - \frac{200}{(x-10)^2} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 = \frac{200}{(x-10)^2};\ (x - 10)^2 = 100 \Rightarrow x = 20.$ (carece de sentido la solución $x = 0$
).

$y = \frac{50+5\cdot 20}{20-10} = \frac{50+100}{10} = 15.$

$\underline{La\ tarjeta\ de\ perímetro\ mínimo\ tiene\ 20\ cm\ de\ base\ y\ 15\ cm\ de\ altura.}$

****

2º) Determina la función $f: R \to R$ tal que $f''(x) = x \cdot e^x$, cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas y tiene un extremo relativo en $x = 1$.

$$f'(x) = \int f''(x) \cdot dx = \int x \cdot e^x \cdot dx \Rightarrow \left\{ u = x \to du = dx \quad dv = e^x \cdot dx \to v = e^x \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot e^x - \int e^x \cdot dx = x \cdot e^x - e^x + C = e^x(x-1) + C_1.$$

Por tener $f(x)$ un extremo relativo en $x = 1$ es $f'(1) = 0$:

$$f'(1) = 0 \Rightarrow e^1(1-1) + C_1 = 0; \quad e \cdot 0 + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0.$$

$$f'(x) = e^x(x-1).$$

$$f(x) = \int f'(x) \cdot dx = \int e^x \cdot (x-1) \cdot dx \Rightarrow \left\{ u = x - 1 \to du = dx \quad dv = e^x \cdot dx \to v = e^x \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1) \cdot e^x - \int e^x \cdot dx = (x-1) \cdot e^x - e^x + C = e^x(x-2) + C.$$

Por pasar $f(x)$ por el origen de coordenadas es $f(0) = 0$:

$$f(x) = 0 \Rightarrow e^x(x-2) + C = 0; \quad e^0(0-2) + C = 0; \quad -2 + C = 0 \Rightarrow C = 2.$$

$$\underline{f(x) = e^x(x-2) + 2}.$$

****

3º) Considera el sistema de ecuaciones $A\cdot X = B$, siendo $A = (1\ 1\ 1\ 2\ 0\ 3\ 1\ 3\ m - 2\ ), X = (x\ y\ z\ )$ y $B = (m\ 2m + 1\ m - 1\ )$.

a) Discute el sistema según los valores de m.

b) Para $m = 2$, calcula, si existe, una solución del sistema anterior para la que $z = 17$.

----

a)

El sistema $A\cdot X = B$ resulta ser $x + y + z = m \quad 2x + 3z = 2m + 1\ x + 2y + (m - 2)z = m$

.

La matriz de coeficientes es A y la ampliada es $A' = (1\ 1\ 1\ 2\ 0\ 3\ 1\ 3\ m - 2\quad m\ 2m + 1\ m - 1\ )$.

$|A| = |1\ 1\ 1\ 2\ 0\ 3\ 1\ 3\ m - 2\ | = 6 + 3 - 9 - 2(m - 2) = 0;\ \ - 2(m - 2) = 0 \Rightarrow m =$

.

$\underline{Para\ m \neq 2 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

$Para\ m = 2 \Rightarrow A' = (1\ 1\ 1\ 2\ 0\ 3\ 1\ 3\ 0\quad 2\ 5\ 1\ ) \Rightarrow \{C_1 + C_3 = C_4\} \Rightarrow Rang\ A' = 2.$

$\underline{Para\ m = 2 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

b)

Para $m = 2$ el sistema resulta $x + y + z = 2\quad 2x + 3z = 5\quad x + 3y = 1\ \}$, que es compatible indeterminado; despreciando la segunda ecuación y haciendo $y = \lambda$:

$x + z = 2 - \lambda \quad x = 1 - 3\lambda\ \} \Rightarrow 1 - 3\lambda + z = 2 - \lambda,\ z = 1 + 2\lambda.$

$\underline{Solución: x = 1 - 3\lambda,\ y = \lambda,\ z = 1 + 2\lambda,\ \forall\lambda \in R}.$

De las infinitas soluciones se pide la que $z = 17$:

$1 + 2\lambda = 17 \Rightarrow \lambda = 8 \Rightarrow \underline{Solución: x = - 23,\ y = 8,\ z = 17}.$

****

4º) Los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 2)$ y $C(1, 3, 3)$ son vértices consecutivos del paralelogramo ABCD.

a) Calcula el área del paralelogramo.

b) Halla la ecuación general del plano π que contiene a dicho paralelogramo.

c) Calcula las coordenadas del vértice D.

----

a)

El área de un paralelogramo es el módulo del producto vectorial de los dos vectores que lo determinan.

Los puntos $A(1,\ 1,\ 1)$, $B(2,\ 2,\ 2)$ y $C(1,\ 3,\ 3)$ determinan los vectores:

$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = [B\ -\ A] = [(2,\ 2,\ 2) - (1,\ 1,\ 1)] = (1,\ 1,\ 1).$

$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AC} = [C\ -\ A] = [(1,\ 3,\ 3) - (1,\ 1,\ 1)] = (0,\ 2,\ 2).$

$S_{ABCD} = \left|\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{v}\right| = \|i\ j\ k\ 1\ 1\ 1\ 0\ 2\ 2\ \| = |2i\ +\ 2k\ -\ 2i\ -\ 2j| = |-\ 2j\ +\ 2k| =$

$= \sqrt{(-\ 2)^2 + 2^2} = \sqrt{4\ +\ 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$

$$\underline{S_{ABCD} = 2\sqrt{2}\,u^2.}$$

b)

$\pi\left(A;\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\right) \equiv |x\ -\ 1\ y\ -\ 1\ z\ -\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 2\ 2\ | = 0;$

$2(x\ -\ 1) + 2(z\ -\ 1) - 2(x\ -\ 1) - 2(y\ -\ 1) = 0;\ \ z\ -\ 1\ -\ y\ +\ 1\ =\ 0;\ \ z\ -\ y\ =\ 0$
.

$$\underline{\pi \equiv y\ -\ z\ =\ 0.}$$

c)

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow (1,\ 1,\ 1) = [C\ -\ D] = [(1,\ 3,\ 3) - (x,\ y,\ z)];$

$(1,\ 1,\ 1) = (1\ -\ x,\ 3\ -\ y,\ 3\ -\ z) \Rightarrow \{1\ -\ x\ =\ 1 \rightarrow x\ =\ 0\ 3\ -\ y\ =\ 1 \rightarrow y\ =\ 2\ 3\ -\ z\ =$
.

****

OPCIÓN B

1º) Considera la función $f: R \to R$ definida por $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

a) Estudia y determina los intervalos de crecimiento y los intervalos de decrecimiento de f. Calcula los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).

b) Halla la ecuación normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

----

a)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^x - e^{-x}\right).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \left(e^x - e^{-x}\right) = 0 \Rightarrow e^x = e^{-x};\ \ e^x = \frac{1}{e^x};\ \ e^{2x} = 1 \Rightarrow x = 0.$$

$$\underline{Crecimiento:\ f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (0,\ +\infty)}.$$

$$\underline{Decrecimiento:\ f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty,\ 0)}.$$

b)

La pendiente de la ecuación normal a la gráfica de una función es igual a la inversa con signo contrario de la primera derivada de la función en ese punto.

$$m = -\frac{1}{f'(0)} = -\frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \left(e^0 - e^{-0}\right)} = \frac{-2}{0} = -\infty.$$ (es una recta vertical)

$$\underline{La\ normal\ a\ f(x)\ en\ el\ origen\ es\ el\ eje\ de\ ordenadas:\ x = 0}.$$

****

2º) Considera el recinto del primer cuadrante limitado por el eje OX, la recta $y = x$, la gráfica $y = \frac{1}{x^3}$ y la recta $x = 3$.

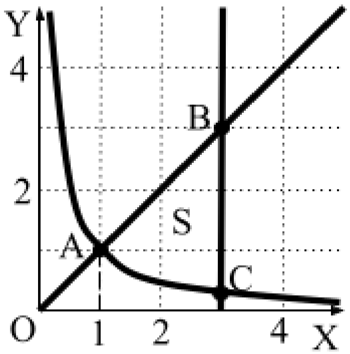
a) Haz un esbozo del recinto descrito. b) Calcula el área del recinto.

c) Si consideras la gráfica $y = \frac{1}{x}$ en lugar de $y = \frac{1}{x^3}$, el área del recinto correspondiente ¿sería mayor o menor que la del recinto inicial? ¿por qué?

----

a)

Los puntos de corte de las dos funciones en el primer cuadrante tienen por abscisas las raíces reales positivas de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:



$$x = \frac{1}{x^3};\ x^4 = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow A(1,\ 1).$$

b)

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la que aparece sombreada en la figura; es la siguiente, teniendo en cuenta que en el intervalo $(1,\ 3)$ las ordenadas de la recta $y = x$ son mayores que las correspondientes ordenadas de la función $y = \frac{1}{x^3}$:

$$S = \int_1^3 \left(x - \frac{1}{x^3}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^3 = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2}\right]_1^3 = \left(\frac{3^2}{2} + \frac{1}{2\cdot 3^2}\right) - \left(\frac{1^2}{2} + \frac{1}{2\cdot 1^2}\right) =$$

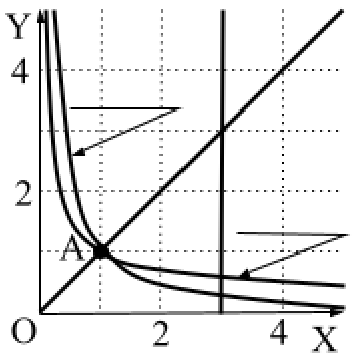
$$= \left(\frac{3^2}{2} + \frac{1}{2\cdot 3^2}\right) - \left(\frac{1^2}{2} + \frac{1}{2\cdot 1^2}\right) = \frac{9}{2} + \frac{1}{18} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{81+1-9-9}{18} = \frac{82-16}{18} = \frac{66}{18} = \frac{11}{3}$$

.

$$\underline{S = \frac{11}{3}\ u^2 \cong 3,67\ u^2.}$$

c)

Si se considera la gráfica de la función $y = \frac{1}{x}$ en lugar de $y = \frac{1}{x^3}$ la superficie sería menor por ser, a partir de $x = 1$, las ordenadas de la gráfica $y = \frac{1}{x}$ mayores que las correspondientes ordenadas de la



gráfica de la función $y = \frac{1}{x^3}$. En la gráfica siguiente se comprende mejor lo expuesto.

****

3º) Considera $A = (k\ 0\ k\ k + 1\ k\ 0\ 0\ k + 1\ k + 1\ )$.

a) Discute el rango de A según los valores de k.

b) Para $k = 1$, calcula el determinante $2\cdot\left(A^t\cdot A^{-1}\right)^{2017}$, siendo A^t la traspuesta de la matriz A.

----

a)

$$|A| = |k\ 0\ k\ k + 1\ k\ 0\ 0\ k + 1\ k + 1\ | = k^2(k + 1) + k(k + 1)^2 = 0;$$

$k(k + 1)[k + (k + 1)] = 0;\ \ k(k + 1)(2k + 1) = 0 \Rightarrow k_1 = 0,\ k_2 = - 1,\ k_3 = - \frac{1}{2}$.

$$\underline{Para \left\{k \neq 0\ k \neq - 1\ k \neq - \frac{1}{2} \right\} \Rightarrow Rang\ A = 3.}$$

$k = 0 \Rightarrow A = (0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ )$.
$k = - 1 \Rightarrow A = (- 1\ 0\ - 1\ 0\ - 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ )$.

$k = - \frac{1}{2} \Rightarrow A = \left(- \frac{1}{2}\ 0\ - \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ - \frac{1}{2}\ 0\ 0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \right)$.

$$\underline{Para \left\{k = 0\ k = - 1\ k = - \frac{1}{2} \right\} \Rightarrow Rang\ A = 2.}$$

b)

$$\left|2\cdot\left(A^t\cdot A^{-1}\right)^{2.017}\right| = 2^3\cdot\left|\left(A^t\cdot A^{-1}\right)^{2.017}\right| = 8\cdot\left|\frac{A^t}{A}\right|^{2.017} = 8\cdot 1^{2.017} = \underline{8}.$$

Nota: Se ha tenido en cuenta que la matriz cuadrada A es de tercer orden y que el determinante de una matriz es igual que el determinante de su traspuesta.

****

4º) Considera el punto $P(0,\ 1,\ 1)$ y la recta $r\equiv\begin{cases} x - 2y = -5 \\ z = 2 \end{cases}$.

a) Determina la ecuación del plano π que pasa por P y contiene a r.

b) Halla las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r.

----

a)

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es $r\equiv\begin{cases} x = -5 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{cases}$.

Un punto y un vector director de r son $Q(-5,\ 0,\ 2)$ y $\vec{v_r} = (2,\ 1,\ 0)$.

Los puntos P y Q determinan el vector $\vec{w} = \vec{QP} = [P - Q] = (5,\ 1,\ -1)$.

$\pi(P;\vec{v},\ \vec{w}) \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0;$

$-x + 2(z-1) - 5(z-1) + 2(y-1) = 0;\quad -x - 3(z-1) + 2(y-1) = 0;$

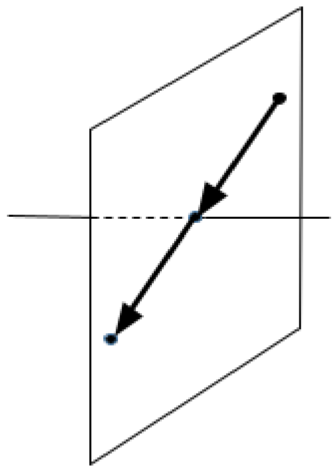
$-x - 3z + 3 + 2y - 2 = 0.$

$$\underline{\pi\equiv x - 2y + 3z - 1 = 0}.$$

b)

El haz de planos perpendiculares a r es $\beta\equiv 2x + y + D = 0$.

El plano $\alpha\in\beta$ que contiene al punto P es el que satisface su ecuación:



$\left.\begin{array}{l} \beta\equiv 2x + y + D = 0 \\ P(0,\ 1,\ 1) \end{array}\right\}\Rightarrow 2\cdot 0 + 1 + D = 0;$

$1 + D = 0 \Rightarrow D = -1 \Rightarrow \alpha\equiv 2x + y - 1 = 0.$

El punto Q intersección de r y α es el siguiente:

$\left.\begin{array}{l} \alpha\equiv 2x + y - 1 = 0 \\ r\equiv\begin{cases} x = -5 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{cases} \end{array}\right\}\Rightarrow 2\cdot(-5 + 2\lambda) +$

$-10 + 4\lambda + \lambda - 1 = 0;$

$5\lambda - 11 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{11}{5}.$

$x = -5 + 2 \cdot \frac{11}{5} = -5 + \frac{22}{5} = -\frac{3}{5}$ $y = \frac{11}{5}$

.

Para que P' sea el simétrico de P con respecto a r tiene que cumplirse que:

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP'} \Rightarrow [Q - P] = [P' - Q];$

$\left[\left(-\frac{3}{5}, \frac{11}{5}, 2\right) - (1, 1, 0)\right] = \left[(x, y, z) - \left(-\frac{3}{5}, \frac{11}{5}, 2\right)\right];$

$\left(-\frac{8}{5}, \frac{6}{5}, 2\right) = \left(x + \frac{3}{5}, y - \frac{11}{5}, z - 2\right) \Rightarrow \left\{x + \frac{3}{5} = -\frac{8}{5} \rightarrow x = -\frac{11}{5} \; y - \frac{11}{5} = \frac{6}{5} \rightarrow y\right.$

$$\Rightarrow \underline{P'\left(-\frac{11}{5}, \frac{17}{5}, 4\right)}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B.

OPCIÓN A

1º) $a)$ Clasifique el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y = 1 \\ \lambda x + z = 0 \\ x + (1 + \lambda)y + \lambda z = \lambda + 1 \end{cases}$ según los diferentes valores de la constante real λ.

b) Halle la solución, si existe, cuando $\lambda = 1$.

$a)$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & \lambda \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1+\lambda & \lambda & \lambda+1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro λ es el siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & \lambda \end{vmatrix} = 1 - (1 + \lambda) - \lambda^2 = 0;\ 1 - 1 - \lambda - \lambda^2 = 0;$$

$$-\lambda - \lambda^2 = 0;\ \lambda + \lambda^2 = 0;\ \lambda(1 + \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -1.$$

$$\underline{Para \begin{cases} \lambda \neq 0 \\ \lambda \neq -1 \end{cases} \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$$

Para $\lambda = 0 \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 = F_3\} \Rightarrow Rang\ A' = 2.$

Para $\lambda = -1 \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2 = C_4\} \Rightarrow Rang\ A' = 2.$

$$\underline{Para \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = -1 \end{cases} \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$$

$b)$

Para $\lambda = 1$ el sistema resulta $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 0 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 2\ 2\ 1\ |}{|1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 2\ 1\ |} = \frac{2-2}{1-2-1} = \frac{0}{-2} = 0.$$

$$y = \frac{|1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 2\ 1\ |}{-2} = \frac{1-2-1}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1.$$

$$z = \frac{|1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 2\ 2\ |}{-2} = \frac{2-2}{-2} = \frac{0}{-2} = 0.$$

$\underline{Solución: x = 0,\ y = 1,\ z = 0}.$

****

2º) a) Determine la posición relativa de las rectas $r\equiv\{x = 1 + t\, y = 1 + t\, z = t$ y $s\equiv\{2x - y = 0 \;\; 3y - 2z = 0$.
b) Determine la distancia del punto $O(0,\ 0,\ 0)$ a cada una de las rectas anteriores.

----

a)

La expresión de s por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$s\equiv\{2x - y = 0 \;\; 3y - 2z = 0 \Rightarrow x = \lambda;\ y = 2\lambda;\ \ 3\cdot 2\lambda - 2z = 0;\ 3\lambda - z = 0;\ z = 3$

$\Rightarrow s\equiv\{x = \lambda \;\; y = 2\lambda\, z = 3\lambda$.

Un punto y un vector director de r son $A(1,\ 1,\ 0)$ y $\vec{v}_r = (1,\ 1,\ 1)$.

Un punto y un vector director de s son $O(0,\ 0,\ 0)$ y $\vec{v}_s = (1,\ 2,\ 3)$.

Los vectores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $O\in s$ y extremo el punto $A\in r$: $\vec{w} = \vec{OA} = [A - O] = (1,\ 1,\ 0)$.

Según que los vectores $\{\vec{v}_r,\ \vec{v}_s,\ \vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\vec{v}_r,\ \vec{v}_s,\ \vec{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$Rang\{\vec{v}_r,\ \vec{v}_s,\ \vec{w}\} \Rightarrow |1\ 1\ 1\ 1\ 2\ 3\ 1\ 1\ 0| = 1 + 3 - 2 - 3 = -1 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow Rang\{\vec{v}_r,\ \vec{v}_s,\ \vec{w}\} = 3$.

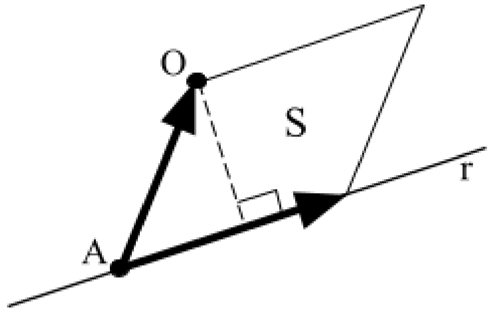
<u>*Las rectas r y s se cruzan*</u>.

b)

La recta s contiene al origen de coordenadas, por lo cual su distancia es cero.

La distancia de un punto a una recta puede determinarse teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que forman dos vectores es el módulo de su producto vectorial y, de forma geométrica, es el producto de la base por la altura.

Para una mejor comprensión del proceso se hace un dibujo de la situación.



$$S = \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AO}\right| \; S = \left|\overrightarrow{v_r}\right|\cdot h \} \Rightarrow \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AO}\right| = \left|\overrightarrow{v_r}\right|\cdot h \Rightarrow$$

$$\underline{\Rightarrow h = d(P, r) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AO}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}}.$$

Aplicando la fórmula al punto O y a la recta $r \equiv \{x = 1 + t \; y = 1 + t \; z = t$:

$$d(O, r) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AO}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|} = \frac{\| i \; j \; k \; 1 \; 1 \; 1 \; -1 \; -1 \; 0 \|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{|-j-k+k+i|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|i-j|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{1^2+(-1)^2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{1+1}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = -$$

.

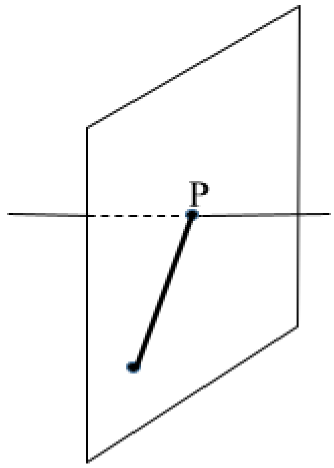
$$\underline{d(O, r) = \frac{\sqrt{6}}{3} \; unidades.}$$

Otra forma de resolver este ejercicio es la siguiente:

El haz de planos perpendiculares a la recta r tiene por ecuación general la expresión: $\alpha \equiv x + y + z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz α, el plano π que contiene al punto $O(0, 0, 0)$ es el que satisface su ecuación: $\pi \equiv x + y + z = 0$.

El punto P, intersección de la recta r con el plano π es la solución del sistema que forman:



$$\pi \equiv x + y + z = 0 \quad r \equiv \{x = 1 + t \; y = 1 + t \; z = t \quad \} \Rightarrow 1 + t + 1 + t +$$

$3t =- 2;\ t =- \frac{2}{3} \Rightarrow \left\{ x = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\ y = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\ z =- \frac{2}{3} \right\} P\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ -\right.$

.

La distancia pedida del punto O a la recta r es equivalente a la distancia entre los puntos O y P, o sea el módulo de $\left|\overrightarrow{OP}\right|$:

$$d(O,\ r) = \left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Como cabía esperar se obtiene la misma solución.

****

3º) a) Considere la función $f(x) = x\cdot(Lx)^2$.

a_1) Determine el dominio de la función $f(x)$.

a_2) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$.

a_3) Determine, si existen, los máximos y mínimos relativos y, en ese caso, calcule el valor de la función $f(x)$ en cada uno de ellos.

b) Determine el valor de la constante k para que se verifique que:

$$\left(\sqrt{x^2 + kx - 7} - \sqrt{x^2 - 2x + 5}\right) = \frac{2}{3}\ .$$

----

a_1)

Sabiendo que los números negativos y el cero no tienen logaritmo:

$$\underline{D(f) \Rightarrow (0,\ + \infty)}.$$

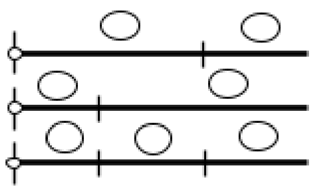
a_2)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 1\cdot(Lx)^2 + x\cdot\left(2\cdot Lx\cdot\frac{1}{x}\right) = (Lx)^2 + 2Lx = Lx\cdot(Lx + 2).$$

$Lx < 0 \Rightarrow 0 < x < 1;\ \ Lx > 0 \Rightarrow x > 1.$

$Lx + 2 = 0;\ \ Lx =- 2;\ \ x = e^{-2} = \frac{1}{e^2}.$



$Lx + 2 < 0 \Rightarrow x < \frac{1}{e^2}$; $Lx + 2 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{e^2}$.

De lo anterior se deduce, en particular del gráfico, los períodos de crecimiento y decrecimiento de la función, que son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: \left(0, \frac{1}{e^2}\right) \cup (1, +\infty).}$$

$$\underline{Decrecimiento: \left(\frac{1}{e^2}, 1\right).}$$

$a_3)$

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo en un punto es que se anule su primera derivada:

$$f'(x) = Lx \cdot (Lx + 2).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow Lx \cdot (Lx + 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = \frac{1}{e^2}.$$

Aunque se deducen los máximos y mínimos por los periodos de crecimiento y decrecimiento, se van a determinar por la segunda derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para el valor que anula la primera derivada, se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo relativo.

$$f''(x) = \frac{1}{x} \cdot (Lx + 2) + Lx \cdot \frac{1}{x} = \frac{Lx}{x} + \frac{2}{x} + \frac{Lx}{x} = \frac{2Lx}{x} + \frac{2}{x} = \frac{2}{x}(Lx + 1).$$

$$f''(1) = \frac{2}{1}(L1 + 1) = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 1.$$

$$f(1) = 1 \cdot (L1)^2 = 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo:\ \underline{A(1, 0)}.$$

$$f''\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{2}{\frac{1}{e^2}}\left(L\frac{1}{e^2} + 1\right) = -2e^2 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = \frac{1}{e^2}.$$

$$f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{1}{e^2} \cdot \left(L\frac{1}{e^2}\right)^2 = \frac{4}{e^2} \Rightarrow Máximo\ relativo:\ \underline{B\left(\frac{1}{e^2}, \frac{4}{e^2}\right)}.$$

$b)$

$$\left(\sqrt{x^2 + kx - 7} - \sqrt{x^2 - 2x + 5}\right) = \frac{5}{3}\ .$$

$$\left(\sqrt{x^2 + kx - 7} - \sqrt{x^2 - 2x + 5}\right) = \infty - \infty \Rightarrow Indeterminado \Rightarrow$$

$$\frac{\left(\sqrt{x^2+kx-7}-\sqrt{x^2-2x+5}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+kx-7}+\sqrt{x^2-2x+5}\right)}{\sqrt{x^2+kx-7}+\sqrt{x^2-2x+5}} =$$

$$= \frac{\left(x^2+kx-7\right)-\left(x^2-2x+5\right)}{\sqrt{x^2+kx-7}+\sqrt{x^2-2x+5}} = \frac{x^2+kx-7-x^2+2x-5}{\sqrt{x^2+kx-7}+\sqrt{x^2-2x+5}} = \frac{(k+2)x-12}{\sqrt{x^2+kx-7}+\sqrt{x^2-2x+5}} =$$

$$= \frac{k+2}{2} = \frac{5}{3};\ \ 3k + 6 = 10;\ \ 3k = 4 \Rightarrow k = \frac{4}{3}.$$

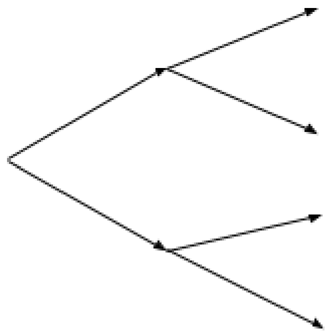
$$\underline{\left(\sqrt{x^2 + kx - 7} - \sqrt{x^2 - 2x + 5}\right) = \frac{2}{3} \Rightarrow k = \frac{4}{3}.}$$

****

4º) En una clase de bachillerato hay 10 chicas y 8 chicos. De ellos 3 chicas y 4 chicos juegan al ajedrez. Si escogemos un estudiante al azar, determine las siguientes probabilidades:

a) Sea chica y no juegue al ajedrez.

b) No juegue al ajedrez sabiendo que es chico.



a)

$$P = P(M \cap \overline{A}) = P(M) \cdot P(\overline{A}/M) = \frac{10}{18} \cdot \frac{7}{10} = \underline{\frac{7}{18} = 0,3889}.$$

b)

$$P = P(\overline{A}/V) = \frac{P(V \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(V) \cdot P(\overline{A}/V)}{P(M) \cdot P(\overline{A}/M) + P(V) \cdot P(\overline{A}/V)} = \frac{\frac{8}{18} \cdot \frac{4}{8}}{\frac{10}{18} \cdot \frac{7}{10} + \frac{8}{18} \cdot \frac{4}{8}} = \frac{\frac{4}{18}}{\frac{7}{18} + \frac{4}{18}} = \frac{4}{7+4} =$$

$$= \underline{\frac{4}{11} = 0,3636}.$$

****

OPCIÓN B

1º) a) Sea A una matriz de dimensión 3×3 y denotamos por $|A|$ el determinante de la matriz.

a_1) Considere la matriz $B = \left(\frac{1}{2}\right)\cdot A$. Si $|B| = 1$, calcule el determinante de A.

a_2) Si $A = (x\ 1\ 1\ x - 1\ 2\ 0\ 2\ x - 1\ 2\ )$. Determine los valores de x para los que se cumple que $|B| = 1$, siendo $B = \left(\frac{1}{2}\right)\cdot A$.

b) Determine las matrices cuadradas de dimensión 2×2 de la forma $M = (1\ x\ 0\ y\ )$ que verifique que $M\cdot M^t = (1\ 0\ 0\ 4\ )$ donde M^t representa la matriz traspuesta de M.

----

a_1)

Para la resolución de este apartado conviene recordar propiedades de las matrices y los determinantes tales como las siguientes:

Cuando se multiplica una matriz por un número quedan multiplicados todos los elementos de la matriz por dicho número.

Si los elementos de una línea de una matriz se multiplican por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por dicho número.

Por ser A una matriz de dimensión 3×3: $\left|\frac{1}{2}\cdot A\right| = \left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot|A| = \frac{1}{8}\cdot|A|$.

$B = \left(\frac{1}{2}\right)\cdot A \Rightarrow |B| = \left|\frac{1}{2}\cdot A\right| \Rightarrow 1 = \frac{1}{8}\cdot|A|$.

$$\underline{|A| = 8}.$$

a_2)

$|A| = 8 \Rightarrow |x\ 1\ 1\ x - 1\ 2\ 0\ 2\ x - 1\ 2\ | = 8;\ 4x + (x - 1)^2 - 4 - 2(x - 1) = 8;$

$4x + x^2 - 2x + 1 - 4 - 2x + 2 = 8;\ x^2 - 1 = 8;\ x^2 = 9 \Rightarrow x_1 = -3,\ x_2 = 3$

.

$$\underline{x = -3,\ x = 3}.$$

b)

$M = (1\ x\ 0\ y\ ) \Rightarrow M^t = (1\ 0\ x\ y\ ).$

$M \cdot M^t = (1\ x\ 0\ y\ ) \cdot (1\ 0\ x\ y\ ) = (1\ 0\ 0\ 4\ );\ \ \left(1\ +\ x^2\ xy\ xy\ y^2\right) = (1\ 0\ 0\ 4\ ) \Rightarrow \{x\ =\ 0 \quad y\ =$
.

$\underline{Solución\text{:}\ \ M_1 = (1\ 0\ 0\ 2\ )\ y\ M_2 = (1\ 0\ 0\ \ -\ 2\ )}.$

****

2º) a) Sea m una constante real. Determine la posición relativa de los planos siguientes, según los valores de m: $\pi \equiv mx - 6y + 2z = 2$ y $\pi' \equiv \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 - 2\lambda + \mu \end{cases}$.

b) Determine el ángulo que forman las rectas que tienen las siguientes ecuaciones:

$$r \equiv \begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{y } s \equiv \begin{cases} 2x - 4y - 2z = 0 \\ x + y + 3z = -1 \end{cases}.$$

----

a)

Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (m, -6, 2)$.

Dos vectores directores de π' son $\vec{a} = (1, -1, -2)$ y $\vec{b} = (1, 0, 1)$.

Un vector normal del plano π' es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$:

$$\vec{n'_1} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -i - 2j + k - j = -i - 3j + k \Rightarrow \vec{n'} = (1, 3, -1).$$

$\vec{n}$ y $\vec{n'}$ paralelos: $\frac{m}{1} = \frac{-6}{3} = \frac{2}{-1} \Rightarrow m = -2$.

Para $m = -2$ los planos π y π' son paralelos o coincidentes.

Para diferenciar el caso se considera el punto $P(0, 1, 2) \in \pi'$: si pertenece a π los planos son coincidentes y si no pertenece son paralelos:

$$\left. \begin{array}{l} -2x - 6y + 2z = 2 \\ P(0, 1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow -2 \cdot 0 - 6 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \neq 2 \Rightarrow P \notin \pi.$$

$$\underline{Para\ m = -2\ los\ planos\ \pi\ y\ \pi'\ son\ paralelos}.$$

$$\underline{Para\ m \neq -2\ los\ planos\ \pi\ y\ \pi'\ son\ secantes}.$$

b)

Con objeto de hallar un vector director de la recta r se expresa por unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$$

$\Rightarrow \vec{v}_r = (1,\ 0,\ -1).$

Un vector director de la recta s es cualquier vector que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan:

$$s \equiv \{2x - 4y - 2z = 0\ x + y + 3z = -1 \Rightarrow \{\vec{n}_1 = (1,\ -2,\ -1)\ \vec{n}_2 = (1,\ 1,$$

$$= -6i - j + k + 2k + i - 3j = -5y - 4j + 3k \Rightarrow \vec{v}_s = (5,\ 4,\ -3).$$

El ángulo que forman dos rectas es el que forman sus vectores directores:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right| \cdot \cos cos\ \alpha \Rightarrow \cos cos\ \alpha = \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s}{\left|\vec{v}_r\right| \cdot \left|\vec{v}_s\right|} = \frac{(1, 0, -1) \cdot (5, 4, -3)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{5^2 + 4^2 + (-3)^2}} =$$

$$= \frac{5+0+3}{\sqrt{1+1} \cdot \sqrt{25+16+9}} = \frac{8}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{50}} = \frac{8}{\sqrt{100}} = 0,8 \Rightarrow \alpha = 36°\ 52'\ 12''.$$

$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ forman\ un\ \acute{a}ngulo\ de\ 36°\ 52'\ 12''}.$

****

3º) a) Encuentre dos números tales que el doble del primero más el triple del segundo sea 24 y su producto sea máximo.

b) Determine: $\left(\frac{x+1}{1+sen\,x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

----

a)

Sean los números $x\ e\ y$.

$2x + 3y = 24 \rightarrow y = \frac{24-2x}{3}$.

$P(x,\ y) = x \cdot y \Rightarrow Máximo$.

$P(x) = x \cdot \frac{24-2x}{3} = \frac{2}{3} \cdot \left(12x - x^2\right)$.

Una función polinómica tiene un máximo en un punto cuando se anula su primera derivada y es negativa su segunda derivada en ese punto:

$P'(x) = \frac{2}{3} \cdot (12 - 2x) = \frac{4}{3} \cdot (6 - x)$.

$P'(x) = 0 \Rightarrow \frac{4}{3} \cdot (6 - x) = 0 \Rightarrow x = 6$.

$P''(x) = \frac{4}{3} \cdot (-1) < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = 6$.

$y = \frac{24-2 \cdot 6}{3} = \frac{24-12}{3} = \frac{12}{3} = 4$.

$\underline{Los\ números\ pedidos\ son\ 6\ y\ 4}$.

b)

$$\left(\frac{x+1}{1+sen\,x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \left(\frac{0+1}{1+0}\right)^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty} \Rightarrow Indet.\ \ nº\ e \Rightarrow \left(\frac{1+sen\,x+x-sen\,x}{1+sen\,x}\right)^{\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \left(1 + \frac{x-sen\,x}{1+sen\,x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \left(1 + \frac{1}{\frac{1+sen\,x}{x-sen\,x}}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \left(1 + \frac{1}{\frac{1+sen\,x}{x-sen\,x}}\right)^{\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1+sen\,x}{x-sen\,x} \cdot \frac{x-sen\,x}{1+sen\,x}} =$$

$$= \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{1+sen\,x}{x-sen\,x}}\right)^{\frac{1+sen\,x}{x-sen\,x}}\right]^{\frac{1}{x^2} \cdot \frac{x-sen\,x}{1+sen\,x}} = \left[\lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{1}{\frac{1+sen\,x}{x-sen\,x}}\right)^{\frac{1+sen\,x}{x-sen\,x}}\right]^{\frac{1}{x^2} \cdot \frac{x-sen\,x}{1+sen\,x}} =$$

$$= e^{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} \cdot \frac{x-sen\,x}{1+sen\,x}\right)}.\ \ (*)$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x-sen\,x}{1+sen\,x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-sen\,x}{x^2(1+sen\,x)}=\frac{0-0}{0\cdot(1+0)}=\frac{0}{0}\Rightarrow Ind.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{1-cos\,x}{2x\cdot(1+sen\,x)+x^2\cdot\text{cos}cos\,x}=\frac{1-1}{0\cdot(1+0)+0\cdot 1}=\frac{0}{0}\Rightarrow Ind.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{2\cdot(1+sen\,x)+2x\cdot\text{cos}cos\,x+2x\cdot\text{cos}cos\,x-x^2\cdot sen\,x}=\frac{0}{2\cdot(1+0)+0\cdot 1+0\cdot-0\cdot 0}=\frac{0}{2}=0.$$

Sustituyendo el valor obtenido en (*):

$$\left(\frac{x+1}{1+sen\,x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x-sen\,x}{1+sen\,x}\right)}=e^0=1\,.$$

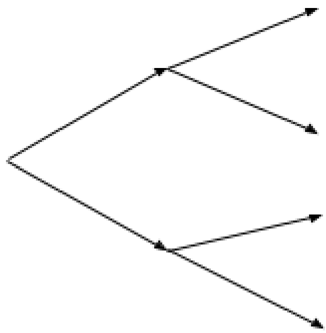
$$\underline{\left(\frac{x+1}{1+sen\,x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=1}\,.$$

****

4º) En una urna hay 10 bolas blancas y 3 negras. Se extrae una bola al azar y, sin verla ni reemplazarla, se extrae una segunda bola.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola extraída sea negra?

b) Sabiendo que la segunda bola ha sido negra, calcule la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra también.



a)

$$P = P(N) = P(B) \cdot P(N/B) + P(N) \cdot P(N/N) = \frac{10}{13} \cdot \frac{3}{12} + \frac{3}{13} \cdot \frac{2}{12} =$$

$$= \frac{30+6}{13 \cdot 12} = \frac{36}{13 \cdot 12} = \frac{3}{13 \cdot 1} = \underline{\frac{3}{13} = 0,2308}.$$

b)

$$P = P(N/N) = \frac{P(N \cap N)}{P(N)} = \frac{P(N) \cdot P(N/N)}{P(B) \cdot P(B/N) + P(N) \cdot P(N/N)} = \frac{\frac{3}{13} \cdot \frac{2}{12}}{\frac{10}{13} \cdot \frac{3}{12} + \frac{3}{13} \cdot \frac{2}{12}} = \frac{6}{30+6} =$$

$$= \underline{\frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0,1667}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

SEPTIEMBRE – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B.

OPCIÓN A

1º) Sea m una constante real. Determine para qué valores de m el siguiente sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$\left.\begin{array}{l} 5x+4y+2z=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ 4x-y+m^2z=m-1 \end{array}\right\}.$$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & m^2 \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & m^2 & m-1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro m es el siguiente:

$$|A|=\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & m^2 \end{vmatrix}=15m^2-4+16-24+5-8m^2=7m^2-7=$$

$$7(m^2-1)=0;\ m^2-1=0 \Rightarrow m_1=-1,\ m_2=1.$$

$\underline{Para \left\{\begin{array}{l} m\neq-1 \\ m\neq1 \end{array}\right\} \Rightarrow Rang\ A=Rang\ A'=3=nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

$$Para\ m=-1 \Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix}=-2\cdot\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-2\cdot(15-8)=-14\neq0 \Rightarrow Rang\ A'=3.$$

$\underline{Para\ m=-1 \Rightarrow Rang\ A=2;\ Rang\ A'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible}.$

$$Para\ m=1 \Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ A'=2.$$

$$\underline{Para\ m = 1 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$$

****

2º) a) Estudie la posición relativa de los siguientes planos: $\pi \equiv x - 2y + z = 1$ y $\pi' \equiv \{x = 2\lambda + \mu \; y = \lambda + m\mu \; z = 1 - \mu$, según los diferentes valores de la constante real m.

b) Determine el ángulo que forman esos planos cuando $m = 3$.

----

a)

Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (1, -2, 1)$.

Dos vectores directores del plano π' son $\vec{v_1'} = (2, 1, 0)$ y $\vec{v_2'} = (1, m, -1)$.

Un vector normal $\vec{n'}$ del plano π' es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de dos de sus vectores directores:

$\vec{v_1'} \times \vec{v_2'} = |i \; j \; k \; 2 \; 1 \; 0 \; 1 \; m \; -1| = -i + 2mk - k + 2j = [-i + 2j + (2m - 1)k] \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{n'} = (-1, 2, 2m - 1)$.

Los planos $\pi \; y \; \pi'$ son paralelos cuando sus vectores normales son linealmente dependientes, o sea, cuando sus componentes son proporcionales:

$\frac{1}{-1} = \frac{-2}{2} = \frac{1}{2m-1} \Rightarrow 2m - 1 = -1 \Rightarrow m = 0.$

$\underline{Para\ m \neq 0\ los\ planos\ \pi\ y\ \pi'\ son\ secantes.}$

Para $m = 0$ los planos son paralelos o coincidentes. Para diferenciar el caso determinamos un punto de uno de los planos y comprobamos si pertenece o no al otro plano.

Para $m = 0$ es $\pi' \equiv \{x = 2\lambda + \mu \; y = \lambda \quad z = 1 - \mu$. Un punto de π' es: $\{\lambda = 0 \; \mu = 0\} \Rightarrow P(0, 0, 1)$.

$\pi \equiv x - 2y + z = 1 \qquad P(0, 0, 1)\} \Rightarrow 0 - 2 \cdot 0 + 1 = 1 \Rightarrow P \in \pi$.

$\underline{Para\ m = 0\ los\ planos\ \pi\ y\ \pi'\ son\ coincidentes.}$

b)

Para $m = 3$ los planos π y π' son secantes y $\overrightarrow{n'} = (-1, 2, 5)$.

El ángulo que forman dos planos es igual que el ángulo que forman sus vectores normales.

Por el concepto de producto escalar: $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \cos cos\ \alpha \Rightarrow \cos cos\ \alpha = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right|}$.

$$\cos cos\ \alpha = \frac{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n'}}{\left|\overrightarrow{n}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n'}\right|} = \frac{(1, -2, 1) \cdot (-1, 2, 5)}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 5^2}} = \frac{-1 - 4 + 5}{\sqrt{1 + 4 + 1} \cdot \sqrt{1 + 4 + 25}} = \frac{0}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{30}} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \cos cos\ a = 0 \Rightarrow A = 90°$.

$$\underline{Para\ m = 3\ los\ planos\ \pi\ y\ \pi'\ son\ perpendiculares.}$$

****

3º) Considere la función $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$.

a) Determine el dominio de la función.

b) Determine, si existen, sus asíntotas.

c) Determine los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento de la función $f(x)$ así como sus máximos y mínimos relativos, si existen.

----

a)

Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto los valores de x que anulan el denominador: $\underline{D(f) \Rightarrow R - \{-1\}}$.

b)

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$; son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = f(x) = \frac{x^2}{1+x} = \infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$1 + x = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow \underline{La\ recta\ x = -1\ es\ asíntota\ vertical}.$$

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{x^2}{1+x}}{x} = \frac{x^2}{x+x^2} = 1.$$

$$n = \left[\frac{f(x)}{x} - mx\right] = \left(\frac{x^2}{1+x} - x\right) = \frac{x^2-x-x^2}{1+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{1+x} = -1.$$

$$\underline{La\ recta\ y = x - 1\ es\ asíntota\ oblicua}.$$

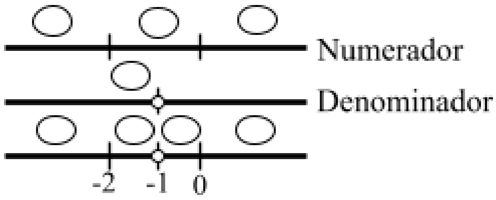
c)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(1+x)-x^2\cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+2x^2-x^2}{(1+x)^2} = \frac{x^2+2x}{(1+x)^2} = \frac{x(x+2)}{(1+x)^2}.$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x(x+2)}{(1+x)^2} = 0;\ x(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -2.$

De la observación de la figura se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:



$\underline{Crecimiento: (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)}.$

$\underline{Decrecimiento: (-2, -1) \cup (-1, 0)}.$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto. Esta condición necesaria no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{(2x+2)\cdot(1+x)^2 - x(x+2)\cdot[2\cdot(1+x)\cdot 1]}{(1+x)^4} = \frac{2(x+1)\cdot(1+x) - 2x(x+2)}{(1+x)^3} =$$

$$= \frac{2(x+1)^2 - 2x^2 - 4x}{(1+x)^3} = \frac{2\left(x^2+2x+1\right) - 2x^2 - 4x}{(1+x)^3} = \frac{2x^2+4x+2-2x^2-4x}{(1+x)^3} = \frac{2}{(1+x)^3}.$$

$f''(0) = \frac{2}{1} = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 0.$

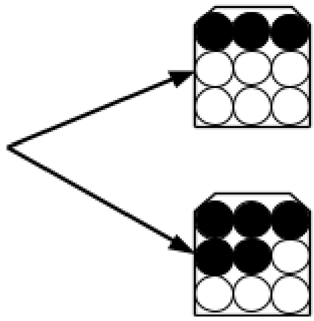
$f(0) = \frac{0}{1+0} = 0 \Rightarrow \underline{Mínimo: O(0, 0)}.$

$f''(-2) = \frac{2}{-1} = -2 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -2.$

$f(-2) = \frac{(-2)^2}{1-2} = -4 \Rightarrow \underline{Máximo: A(-2, -4)}.$

****

4º) Se dispone de dos cajas con bolas blancas y negras. La caja A contiene 6 bolas blancas y 3 bolas negras y la caja B contiene 4 bolas blancas y 5 negras. Se lanza un dado y si sale par se sacan dos bolas de la caja A, una tras otra, sin reponer ninguna. Por su parte, si sale impar al lanzar el dado se sacan dos bolas de la caja B, también unas tras otra, sin reponer ninguna. ¿Cuál es la probabilidad de extraer exactamente dos bolas blancas?



Aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$P = P(A) + P(B) = \frac{5}{24} + \frac{1}{12} = \frac{5+2}{24} = \underline{\frac{7}{24}}.$$

****

<u>OPCIÓN B</u>

1º) Sea k una constante real y considere la matriz $A = (1\ 0\ 4\ 0\ k\ 3k\ +\ 2\ 1\ 0\ \ -\ k\ )$.

a) Estudie la existencia de inversa de la matriz A según los diferentes valores de k.

b) Si $k\ =\ 2$, calcule la inversa de A, si existe.

c) Determine el rango de la matriz A según los diferentes valores de k.

----

a)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$|A| = |1\ 0\ 4\ 0\ k\ 3k\ +\ 2\ 1\ 0\ \ -\ k\ | =-\ k^2\ -\ 4k\ =\ 0;\ \ -\ k(k\ +\ 1) = 0 \Rightarrow k_1\ =\ 0,\ k_2\ =-$

.

<u>$La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall k \in R\ -\ \{0,\ \ -\ 1\}$.</u>

b)

Para $k\ =\ 2$ es $A\ =\ (1\ 0\ 4\ 0\ 2\ 8\ 1\ 0\ \ -\ 2\ )$.

Se obtiene la inversa por el método de Gauss-Jordan.

$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_3 \rightarrow F_3 - F_1\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow \frac{1}{2}F_2\ F_3 \rightarrow\ -\ \frac{1}{6}F_3\right\} \Rightarrow \left(1\ 0\ 0\ 0\ \frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{6}\ 0\ \ -\ \frac{1}{6}\ \right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow F_1\ -\ 4F_3\ F_2 \rightarrow F_2\ -\ 4F_3\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\ 0\ \frac{2}{3}\ \ -\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{2}\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{6}\ 0\ \ -\ \frac{1}{6}\right)$.

<u>$\Rightarrow A^{-1} = \left(\frac{1}{3}\ 0\ \frac{2}{3}\ \ -\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{2}\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{6}\ 0\ \ -\ \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6} \cdot (2\ 0\ 4\ \ -\ 4\ 3\ 4\ 1\ 0\ \ -\ 1\ )$.</u>

c)

$|A| =-\ k(k\ +\ 1) = 0 \Rightarrow k_1\ =\ 0,\ k_2\ =-\ 1.$

<u>$Para\ \{k \neq 0\ k \neq\ -\ 1\ \} \Rightarrow Rang\ A\ =\ 3$.</u>

$Para\ k\ =\ 0 \Rightarrow A\ =\ (1\ 0\ 4\ 0\ 0\ 2\ 1\ 0\ 0\ ) \Rightarrow |1\ 4\ 0\ 2\ | \neq 0.$

$Para\ k\ =-\ 1 \Rightarrow A\ =\ (1\ 0\ 4\ 0\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ 1\ 0\ 1\ ) \Rightarrow |1\ 0\ 0\ \ -\ 1\ | \neq 0.$

$\underline{Para\ \{k = 0\ k = -\ 1\} \Rightarrow Rang\ A = 2}.$

****

2º) a) Determine, como intersección de dos planos, la ecuación de la recta que es paralela a la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - 3y + z = 4 \\ y + z = 0 \end{cases}$ y pasa por el punto $P(2,\ 1,\ -1)$.

b) Determine el ángulo que forman los dos planos siguientes: $\pi \equiv 2x - 3y + z = 1$ y $\pi' \equiv y + z = 0$.

----

a)

Un vector director de una recta dada por la intersección de dos planos es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan.

$$r \equiv \begin{cases} 2x - 3y + z = 4 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \vec{n}_1 = (2,\ -3,\ 1) \\ \vec{n}_2 = (0,\ 1,\ 1) \end{Bmatrix} =$$

$$= -3i + 2k - i - 2j = -4i - 2k + 2k \Rightarrow \vec{v}_r = (2,\ 1,\ -1).$$

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$.

$$r \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1};\quad r \equiv \begin{cases} x - 2 = 2y - 2 \\ -x + 2 = 2z + 2 \end{cases}.$$

$$\underline{r \equiv \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}}.$$

b)

El ángulo que forman dos planos es igual que el ángulo que forman sus vectores normales.

Los vectores normales de los planos son $\vec{n} = (2,\ -3,\ 1)$ y $\vec{n}' = (0,\ 1,\ 1)$.

Por el concepto de producto escalar: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos cos\, \alpha \Rightarrow \cos cos\, \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$.

$$\cos cos\, \alpha = \frac{\vec{n} \cdot \vec{n}'}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}'|} = \frac{(2,-3,1)\cdot(0,1,1)}{\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}\cdot\sqrt{0+1^2+1^2}} = \frac{0-3+1}{\sqrt{4+9+1}\cdot\sqrt{1+1}} = \frac{-2}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{7}} =$$

$$= -0,3780 \Rightarrow \alpha = arc \cos cos\, (-0,3780) = 112^\circ\ 12'\ 35''.$$

Como quiera que también forman el complementario del ángulo hallado y, como es lógico, debe considerarse como ángulo que forman dos planos al menor de ellos.

$$180° - 112°\ 12'\ 35'' = 67°\ 47'\ 32''.$$

$\underline{Los\ planos\ \pi\ y\ \pi'\ forman\ un\ ángulo\ de\ 67°\ 47'\ 32''}.$

****

3º) a) Determine los valores de a y b para que la función que aparece a continuación sea continua:
$f(x) = \{ \quad \frac{1}{e^x} \quad si \quad x \leq 0 \; a \cos cos\, x + b \, si \; 0 \leq x \leq \pi \; sen\, x - ax \quad si \quad x < \pi$.

b) Calcule la integral: $I = \int x^2 \cdot (Lx)^2 \cdot dx$.

c) Determine el siguiente límite: $\left(e^{x-1} - 1\right)^{x-1}$.

----

a)

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para los valores de $x = 0 \; y \; x = \pi$. Se trata de determinar los valores de α y b para que lo sea.

Para que la función sea continua en los puntos críticos es necesario que sus límites laterales en esos puntos sean iguales e iguales a los correspondientes valores de la función en esos puntos.

$f(x) = \frac{1}{e^x} = 1 = f(0) \qquad f(x) = (a \cdot \cos cos\, x + b) = a + b \} \Rightarrow a + b =$
. (1)

$f(x) = (a \cdot \cos cos\, x + b) = - a + b = f(\pi) \; f(x) = (sen\, x - ax) = - \pi a$
. (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$a + b = 1 \;\; - a + b = - \pi a \} \quad b = 1 - a \; b = a - \pi a \} \Rightarrow 1 - a = a - \pi a; \;\; 2a$

$a(2 - \pi) = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2-\pi}. \qquad b = 1 - a = 1 - \frac{1}{2-\pi} = \frac{2-\pi-1}{2-\pi} = \frac{1-\pi}{2-\pi}.$

$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ para\ a = \frac{1}{2-\pi}\ y\ b = \frac{1-\pi}{2-\pi}}.$

b)

$I = \int x^2 \cdot (Lx)^2 \cdot dx \Rightarrow \left\{ u = (Lx)^2 \rightarrow du = 2Lx \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \; dv = x^2 \cdot dx \rightarrow v = \frac{x^3}{3} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (Lx)^2 \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot 2Lx \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = \frac{x^3}{3} \cdot (Lx)^2 - \frac{2}{3} \cdot \int x^2 \cdot Lx \cdot dx =$

$$= \frac{x^3}{3}\cdot(Lx)^2 - \frac{2}{3}\cdot A. \quad (*)$$

$$A = \int x^2\cdot Lx\cdot dx \Rightarrow \left\{ u = Lx \rightarrow du = \frac{1}{x}\cdot dx \; dv = x^2\cdot dx \rightarrow v = \frac{x^3}{3} \right\} \Rightarrow Lx\cdot\frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\cdot dx =$$

$$= Lx\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\cdot\int x^2\cdot dx = Lx\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3} + C = \frac{x^3}{9}(3Lx - 1) + C.$$

Sustituyendo el valor de A encontrado en (*):

$$= \frac{x^3}{3}\cdot(Lx)^2 - \frac{2}{3}\cdot\frac{x^3}{9}(3Lx - 1) + C = \frac{x^3}{27}\cdot\left[9\cdot(Lx)^2 - 2\cdot(3Lx - 1)\right] + C.$$

$$\underline{I = \int x^2\cdot(Lx)^2\cdot dx = \frac{x^3}{27}\cdot\left[9\cdot(Lx)^2 - 2\cdot(3Lx - 1)\right] + C.}$$

$c)$

$$\left(e^{x-1} - 1\right)^{x-1} = \left(e^{1-1} - 1\right)^{1-1} = \left(e^0 - 1\right)^0 = (1 - 1)^0 = 0^0 \Rightarrow Indt. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(e^{x-1} - 1\right)^{x-1} = A; \; L\left[\left(e^{x-1} - 1\right)^{x-1}\right] = LA; \; \left[L\left(e^{x-1} - 1\right)^{x-1}\right] =$$

$$= \left[(x - 1)L\left(e^{x-1} - 1\right)\right] = \lim_{x\rightarrow 1} \frac{L\left(e^{x-1}-1\right)}{\frac{1}{x-1}} = \frac{L0}{\frac{1}{0}} = \frac{-\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\rightarrow 1} \frac{\frac{e^{x-1}}{e^{x-1}-1}}{\frac{-1}{(x-1)^2}} = \lim_{x\rightarrow 1} \frac{\frac{e^{x-1}-1+1}{e^{x-1}-1}}{\frac{-1}{(x-1)^2}} = \lim_{x\rightarrow 1} \frac{\frac{1}{e^{x-1}-1}}{\frac{-1}{(x-1)^2}} = - \lim_{x\rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{1-e^{x-1}} = - \frac{0}{0} \Rightarrow Indet \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow - \lim_{x\rightarrow 1} \frac{2\cdot(x-1)}{-e^{x-1}} = - \frac{2\cdot 0}{-e^0} = \frac{0}{1} = 0 = LA \Rightarrow A = 1.$$

$$\underline{\left(e^{x-1} - 1\right)^{x-1} = 1.}$$

****

4º) En una clase de bachillerato, el 60 % de los alumnos aprueban matemáticas, el 50 % aprueban inglés y el 30 % aprueban las dos asignaturas. Calcule la probabilidad de que un alumno elegido al azar:

a) Apruebe alguna de las dos asignaturas (una o las dos).

b) Apruebe Matemáticas sabiendo que ha aprobado inglés.

$$P(M) = 0,6; \quad P(I) = 0,5; \quad P(M \cap I) = 0,3.$$

a)

$$P = P(M \cup I) = P(M) + P(I) - P(M \cap I) = 0,6 + 0,5 - 0,3 = \underline{0,8}.$$

b)

$$P = P(M/I) = \frac{P(M \cap I)}{P(I)} = \frac{0,3}{0,5} = \underline{0,6}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE ASTURIAS

JULIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Tiene que elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la Opción A o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la Opción B. Conteste de forma razonada y escriba ordenadamente y con letra clara. Todos los procesos que conducen a resultados deben estar suficientemente justificados y completamente explicados.

OPCIÓN A

1º) Determina los valores de a para los que el sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + ay = 2 \\ 5x + (3a - 1)y = 6 - a \end{cases}$ tiene solución. Calcula las soluciones en los casos posibles.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & a \\ 5 & 3a - 1 \end{pmatrix} \; y \; M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 2 \\ 5 & 3a - 1 & 6 - a \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de a es el siguiente:

$$|M'| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 2 \\ 5 & 3a - 1 & 6 - a \end{vmatrix} = 0;$$

$$a(6 - a) + 2(3a - 1) + 10 - 5a - 2(3a - 1) - 2(6 - a) = 0;$$

$$6a - a^2 + 6a - 2 + 10 - 5a - 6a + 2 - 12 + 2a = 0; \quad -a^2 + 3a - 2 = 0;$$

$$a^2 - 3a + 2 = 0; \; a = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow a_1 = 1, \; a_2 = 2.$$

$$\underline{Para \begin{cases} a \neq 1 \\ a \neq 2 \end{cases} \Rightarrow Rang\, M = 2; \; Rang\, M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$a = 1 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}; \; M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\, M = Rang\, M' = 2$$

.

$\underline{Para\, a\ =\ 1 \Rightarrow Ran\, M\ =\ Ran\, M^{'}\ =\ 2\ =\ nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

$a\ =\ 2 \Rightarrow M\ = (1\ 1\ 2\ 2\ 5\ 5\ );\ M^{'}\ = (1\ 1\ 1\ 2\ 2\ 2\ 5\ 5\ 4\ ) \Rightarrow Rang\ M\ =\ 1;\ Rang\ M^{'}\ =\ 2$
.

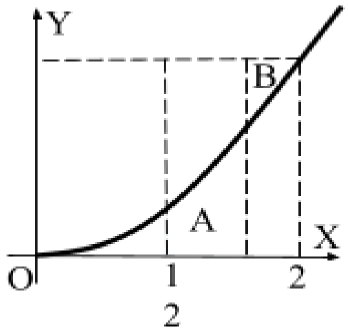
$\underline{Para\, a\ =\ 2 \Rightarrow Rang\ M\ =\ 1;\ Rang\ M^{'}\ =\ 2 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

Se resuelve para $a\ =\ 1$. El sistema resulta: $\{x\ +\ y\ =\ 1\quad 2x\ +\ y\ =\ 2\quad 5x\ +\ 2y\ =\ 5$, que es compatible determinado; como tiene tres ecuaciones con dos incógnitas, se desprecia una de las ecuaciones, por ejemplo, la tercera.

$x\ +\ y\ =\ 1\ 2x\ +\ y\ =\ 2\ \}\quad -\ x\ -\ y\ =-\ 1\quad 2x\ +\ y\ =\ 2\ \} \Rightarrow \underline{x\ =\ 1; y\ =\ 0}.$

****

2º) Sea la gráfica de la parábola $y = 3x^2$ en el intervalo $[1,\ 2]$ y m un valor de dicho intervalo.



a) Halla, en función de m, el área de cada una de las partes sombreadas A y B.

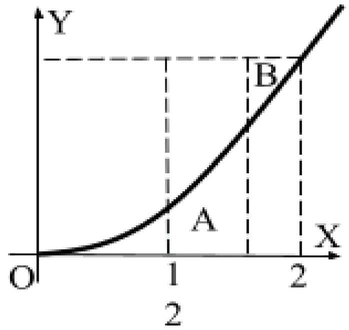
b) ¿Cuál es el valor de m que hace mínima la suma de esas áreas?

----

a)

$$A = \int_1^m 3x^2 \cdot dx = \left[\frac{3x^3}{3}\right]_1^m = \left[x^3\right]_1^m = m^3 - 1^3 = m^3 - 1.$$

$$y_{(2)} = 3 \cdot 2^2 = 12.$$



$$B = \int_m^2 \left(12 - 3x^2\right) \cdot dx = \left[12x - \frac{3x^3}{3}\right]_m^2 =$$

$$= \left[12x - x^3\right]_m^2 = \left(12 \cdot 2 - 2^3\right) - \left(12 \cdot m - m^3\right) =$$

$$= 24 - 8 - 12m + m^3 = m^3 - 12m + 16.$$

$$\underline{A = \left(m^3 - 1\right) u^2 \ y \ B = \left(m^3 - 12m + 16\right) u^2}.$$

b)

$$S = A + B \Rightarrow S(m) = m^3 - 1 + m^3 - 12m + 16 = 2m^3 - 12m + 15.$$

La condición necesaria para que una función tenga un mínimo es que se anule su primera derivada:

$$S'(m) = 6m^2 - 12.$$

$$S'(m) = 0 \Rightarrow 6m^2 - 12 = 0;\ m^2 - 2 = 0 \Rightarrow m_1 = -\sqrt{2};\ m_2 = \sqrt{2}.$$

La solución negativa carece de sentido lógico, según la figura dada.

$$\underline{La\ suma\ de\ las\ áreas\ es\ máxima\ para\ m = \sqrt{2}}.$$

****

3º) Sea el punto $A(1,\ 2,\ 0)$ perteneciente a un plano π. Calcula:

a) La ecuación del plano π sabiendo que $P(0,\ 0,\ -2)$ pertenece a la recta perpendicular a π que pasa por el punto A.

b) La ecuación de un plano π_1 paralelo a π que esté a distancia 3 unidades del mismo.

c) Un punto B perteneciente a π y al plano $\pi' \equiv 2x - y = 0$ y que está a distancia $\sqrt{45}$ de A. (Observación: $A \in \pi'$).

----

a)

Los puntos A y P determinan el vector:

$$\overrightarrow{AP} = [P - A] = (0,\ 0,\ -2) - (1,\ 2,\ 0) = (-1,\ -2,\ -2).$$

Un vector director del plano π es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{AP}$, por ejemplo: $\overrightarrow{n_\pi} = (1,\ 2,\ 2)$.

La expresión general del plano π es la siguiente: $\pi \equiv x + 2y + 2z + D = 0$.

Para determinar el término independiente D se tiene en cuenta que $A \in \pi$ por lo cual tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x + 2y + 2z + D = 0 \\ A(1,\ 2,\ 0) \end{array}\right\} \Rightarrow 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + D = 0;\ 1 + 5 + D = 0 \Rightarrow D = -5.$$

$$\underline{\pi \equiv x + 2y + 2z - 5 = 0}.$$

b)

El plano π_1, por ser paralelo a π, tiene por ecuación $\pi' \equiv x + 2y + 2z + D_1 = 0$.

La distancia entre dos planos paralelos es $d(\pi,\ \pi_1) = \frac{|D - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$; aplicando la fórmula a los planos que nos ocupan:

$$d(\pi,\ \pi_1) = \frac{|-5 - D_1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 3;\ \ \frac{|-5 - D_1|}{\sqrt{1+4+4}} = 3;\ \ \frac{|-5 - D_1|}{\sqrt{9}} = 3;\ \ \frac{|-5 - D_1|}{3} = 3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \left|- 5 - D_1\right| = 9 \Rightarrow \{- 5 - D_1 = 9 \rightarrow D_{11} = - 14 \ + 5 + D_1 = 9 \rightarrow D_{12} = 4$.

Existen dos planos que cumplen la condición pedida:

$$\underline{\pi_{11} \equiv x + 2y + 2z - 14 = 0 \ y \ \pi_{12} \equiv x + 2y + 2z + 4 = 0.}$$

$c)$

Los planos $\pi \equiv x + 2y + 2z - 5 = 0$ y $\pi' \equiv 2x - y = 0$ determinan la recta s de expresión $s \equiv \{x + 2y + 2z - 5 = 0 \ 2x - y = 0$, que contiene al punto B.

La expresión de s dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$s \equiv \{x + 2y + 2z - 5 = 0 \ 2x - y = 0 \quad \Rightarrow x = \lambda; \ y = 2\lambda; \ 2z = 5 - x - 2y$

$= 5 - \lambda - 2 \cdot 2\lambda = 5 - 5\lambda; \ z = \frac{5}{2} - \frac{5}{2}\lambda \Rightarrow s \equiv \{x = \lambda \quad y = 2\lambda \quad z = \frac{5}{2} - \frac{5}{2}\lambda$

.

El punto $B \in s$ tiene por expresión general: $B\left(\lambda, \ 2\lambda, \ \frac{5}{2} - \frac{5}{2}\lambda\right)$.

$\overline{AB} = \sqrt{45} \Rightarrow \sqrt{(\lambda - 1)^2 + (2\lambda - 2)^2 + \left(\frac{5}{2} - \frac{5}{2}\lambda - 0\right)^2} = \sqrt{45};$

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 + 4\lambda^2 - 8\lambda + 4 + \frac{25}{4} - 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2}\lambda + \frac{25}{4}\lambda^2 = 45;$

$5\lambda^2 + \frac{25}{4}\lambda^2 - 10\lambda - \frac{25}{2}\lambda + 5 + \frac{25}{4} = 45;$

$20\lambda^2 + 25\lambda^2 - 40\lambda - 50\lambda + 20 + 25 = 180; \ 45\lambda^2 - 90\lambda + 45 = 180;$

$45\lambda^2 - 90\lambda - 135 = 0; \ \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0; \ \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_1 = - 1, \ \lambda_2 = 3.$

$B_1 \Rightarrow \lambda_1 = - 1 \Rightarrow \left\{x = - 1 \quad y = 2 \cdot (- 1) = - 2 \quad z = \frac{5}{2} - \frac{5}{2} \cdot (- 1) = 5\right.$

.

$B_2 \Rightarrow \lambda_2 = 3 \Rightarrow \left\{x = 3 \quad y = 2 \cdot 3 = 6 \quad z = \frac{5}{2} - \frac{5}{2} \cdot 3 = - 5\right\} \Rightarrow \underline{B_2(}$

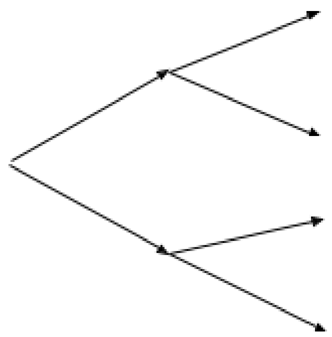
.

****

4º) En una cierta enfermedad el 60 % de los pacientes son hombres y el resto mujeres. Con el tratamiento que se aplica se sabe que se curan un 70 % de los hombres y un 80 % de las mujeres. Se elige un paciente al azar:

a) Calcula la probabilidad de que se cure de la enfermedad.

b) Si un paciente no se ha curado, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?



a)

$$P = P(C) = P(H) \cdot P(C/H) + P(M) \cdot P(C/M) = 0,6 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot 0,8 =$$

$$= 0,42 + 0,32 = \underline{0,74}.$$

b)

$$P(M/\overline{C}) = \frac{P(M \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \frac{P(M) \cdot P(\overline{C}/M)}{P(H) \cdot P(\overline{C}/H) + P(M) \cdot P(\overline{C}/M)} = \frac{0,4 \cdot 0,2}{0,6 \cdot 0,3 + 0,4 \cdot 0,2} = \frac{0,08}{0,18 + 0,08} =$$

$$= \frac{0,08}{0,26} = \underline{0,3077}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Dada la matriz $A = (1\ 0\ \ -\ 1\ 0\ x\ 3\ 4\ 1\ \ -\ x\ )$ donde x es un número real. Halla:

$a)$ Los valores de x para los que la matriz A posee inversa.

$b)$ La inversa de A para $x = 2$.

$c)$ Con $x = 5$, el valor de $b \in R$ para que la matriz $b \cdot A$ tenga determinante 1.

$a)$

Una matriz es invertible (tiene inversa) cuando su determinante es distinto de 0.

$|A| = |1\ 0\ \ -\ 1\ 0\ x\ 3\ 4\ 1\ \ -\ x\ | = -x^2 + 4x - 3 = 0;\ x^2 - 4x + 3 = 0;\ x = \frac{4 \pm \sqrt{16-1}}{2}$

$= \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 3.$

$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall x \in R - \{1,\ 3\}}.$

$b)$

Para $x = 2$ es $A = (1\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 2\ 3\ 4\ 1\ \ -\ 2\ )$.

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 - 4F_1\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ \ -\ 4\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \{F_2 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow (1\ 0\ 0\ \ -\ 4\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ ) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 - 2F_2\} \Rightarrow (1\ 0\ 0\ \ -\ 4\ 0\ 1\ 8\ 1\ \ -\ 2\ ) \Rightarrow \{F_3 \rightarrow -F_3\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (1\ 0\ 0\ \ -\ 4\ 0\ 1\ \ -\ 8\ \ -\ 1\ 2\ ) \Rightarrow \{F_1 \rightarrow F_1 + F_3\ F_2 \rightarrow F_2 - 2F_3\} \Rightarrow (-\ 7\ \ -\ 1\ 2\ 12\ 2$

$\Rightarrow \underline{A^{-1} = (-\ 7\ \ -\ 1\ 2\ 12\ 2\ \ -\ 3\ \ -\ 8\ \ -\ 1\ 2\ )}.$

$c)$

Para $x = 5$ es $A = (1\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 5\ 3\ 4\ 1\ \ -\ 5\ )$ y
$b \cdot A = (b\ 0\ \ -\ b\ 0\ 5b\ 3b\ 4b\ b\ \ -\ 5b\ )$.

$|b\cdot A| = |b\ 0\ \ -\ b\ 0\ 5b\ 3b\ 4b\ b\ \ -\ 5b\ | =\ 1;\ b^{3}\cdot|1\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 5\ 3\ 4\ 1\ \ -\ 5\ | =\ 1;\ b^{3}(-\ 25\ -$

$-\ 8b^{3}\ =\ 1;\ \ b^{3} =-\ \frac{1}{8}\Rightarrow b\ = \sqrt[3]{-\ \frac{1}{8}} =-\ \frac{1}{2}.$

$$\underline{b\ =-\ \frac{1}{2}.}$$

****

2º) Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{x-4}$.

a) Estudia su dominio de definición y calcula sus asíntotas.

b) Halla, si existen, los máximos, mínimos y puntos de inflexión. Intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad.

c) Haz un esbozo de su gráfica.

----

a)

Por tratarse de una función racional su dominio es el conjunto de los números reales, excepto los valores que anulan el denominador:

$$\underline{D(f) \Rightarrow R - \{4\}}.$$

Verticales: Son de la forma $x = k$; son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{Asíntota\ vertical: x = 4}.$$

Horizontales: Son de la forma $y = k$; son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a $\pm\infty$:

$$k = f(x) = \frac{x^2}{x-4} = \infty .$$

$$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas oblicuas: Son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \frac{f(x)}{x}\ \ y\ n = [f(x) - mx] .$$

$$m = \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{x^2}{x-4}}{x} = \frac{x^2}{x^2-4x} = 1 .$$

$$n = [f(x) - mx] = \left(\frac{x^2}{x-4} - x\right) = \frac{x^2-x^2+4x}{x-4} = 4 .$$

$$\underline{Asíntota\ oblicua: y = x + 4}.$$

b)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(x-4)-x^2\cdot 1}{(x-4)^2} = \frac{2x^2-8x-x^2}{(x-4)^2} = \frac{x^2-8x}{(x-4)^2} = \frac{x(x-8)}{(x-4)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x(x-8)}{(x-4)^2} = 0;\ x(x-8) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 8.$$

$$\underline{Crecimiento\colon\ f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty,\ 0) \cup (8,\ +\infty)}.$$

$$\underline{Decrecimiento\colon\ f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (0,\ 4) \cup (4,\ 8)}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto. Esta condición necesaria no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; se es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{(2x-8)\cdot(x-4)^2-x(x-8)\cdot[2\cdot(x-4)\cdot 1]}{(x-4)^4} = \frac{(2x-8)\cdot(x-4)-2x(x-8)}{(x-4)^3} =$$

$$= \frac{2x^2-8x-8x+32-2x^2+16x}{(x-4)^3} = \frac{32}{(x-4)^3}.$$

$$f''(0) = \frac{32}{(-4)^3} < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = \frac{0}{0-4} = 0 \Rightarrow \underline{Máximo\colon O(0,\ 0)}.$$

$$f''(8) = \frac{32}{(8-4)^3} > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 8.$$

$$f(8) = \frac{8^2}{8-4} = \frac{64}{4} = 16 \Rightarrow \underline{Mínimo\colon A(8,\ 16)}.$$

Una función es cóncava ($\cap$) o convexa ($\cup$) cuando su segunda derivada es negativa o positiva, respectivamente.

$$f''(x) = \frac{32}{(x-4)^3}.$$

$$\underline{Concavidad\colon\ f''(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty,\ -4)}.$$

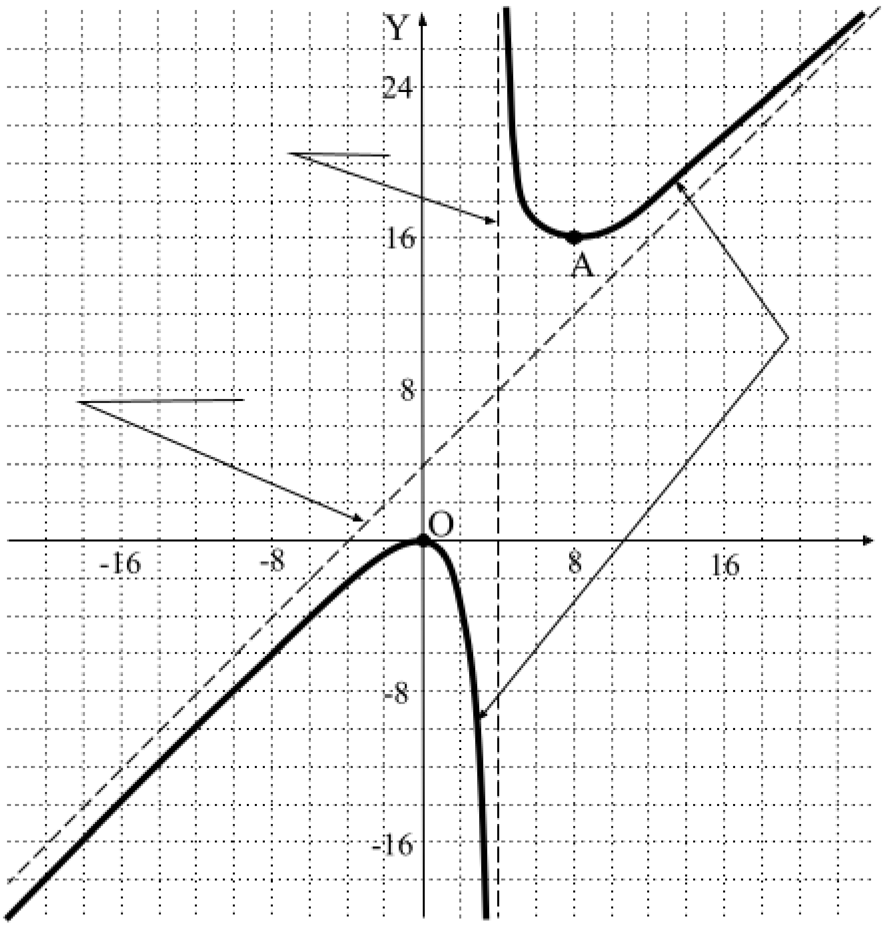
$$\underline{Convexidad\colon\ f''(x) > 0 \Rightarrow x \in (-4,\ 4) \cup (4,\ +\infty)}.$$

$c)$

Los puntos de corte de la función con los ejes son los siguientes:

Eje Y $\Rightarrow x = 0 \rightarrow O(0, 0)$. Eje X $\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x-4} = 0 \Rightarrow x = 0 \rightarrow O(0, 0)$.
El único punto de corte con los ejes es el origen de coordenadas.

Teniendo en cuenta lo anterior, la representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



****

3º) Dada la recta $r\equiv\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + y - 5z = 2 \end{cases}$ y el plano $\pi\equiv ax - y + z + 1 = 0$.

a) Halla el valor de a para que sean paralelos.

b) Para $a = 2$, calcula la ecuación del plano π' que contiene a r y es perpendicular al plano π.

----

a)

La expresión de la recta r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$r\equiv\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + y - 5z = 2 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 - 2\lambda \\ 2x + y = 2 + 5 \end{cases}$

$x = 1 + \lambda;\ \ y = x + 2\lambda - 1 = 1 + \lambda + 2\lambda - 1 = 3\lambda \Rightarrow r\equiv\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \end{cases}$

.

Un punto y un vector director de la recta r son $P(1,\ 0,\ 0)$ y $\vec{v_r} = (1,\ 3,\ 1)$.

Un vector director del plano π es $\vec{n} = (a,\ -1,\ 1)$.

La recta r y el plano π son paralelos cuando el vector director de la recta y el vector normal del plano son perpendiculares.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$\vec{v_r}\cdot\vec{n} = 0 \Rightarrow (1,\ 3,\ 1)(a,\ -1,\ 1) = 0;\ \ a - 3 + 1 = 0 \Rightarrow a = 2.$

$\underline{\text{La recta } r \text{ y el plano } \pi \text{ son paralelos para } a = 2}.$

b)

El plano π', por ser perpendicular al plano π, tiene como vector director a su vector normal y, por contener a r, contiene a todos sus puntos y el vector director de la recta es vector director del plano π' cuya expresión general es la siguiente:

$\pi'\left(P;\ \vec{n},\ \vec{v_r}\right) \equiv \begin{vmatrix} x - 1 & y & z \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$

$-(x - 1) + y + 6z + z - 3(x - 1) - 2y = 0;\ \ -4(x - 1) - y + 7z = 0;$

$-4x + 4 - y + 7z = 0.$

$\underline{\pi' \equiv 4x + y - 7z - 4 = 0}.$

****

4º) De una baraja española Daniel y Olga extraen 8 cartas: los cuatro ases y los cuatro reyes. Con esas 8 cartas Olga da dos cartas a Daniel y posteriormente una para ella. Calcula:

a) La probabilidad de que Daniel tenga dos ases.

b) La probabilidad de que Daniel tenga un as y un rey.

c) La probabilidad de que Olga tenga un as y Daniel no tenga dos reyes.

----

a)

$$P = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} = \underline{\frac{3}{14} = 0,2143}.$$

b)

$$P = \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} = \underline{\frac{4}{7} = 0,5714}.$$

c)

$$P = P\left(O_A/D_{AA}\right) \cdot P\left(D_{AA}\right) + P\left(O_A/D_{AR}\right) \cdot P\left(D_{AR}\right) + P\left(O_A/D_{RA}\right) \cdot P\left(D_{RA}\right) =$$

$$= \frac{2}{6} \cdot \left(\frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7}\right) + \frac{3}{6} \cdot \left(\frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7}\right) + \frac{3}{6} \cdot \left(\frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7}\right) = \frac{1}{14} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{1+2+2}{14} = \underline{\frac{5}{14} = 0,3571}$$

.

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE ASTURIAS

JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Tiene que elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la Opción A o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la Opción B. Conteste de forma razonada y escriba ordenadamente y con letra clara. Todos los procesos que conducen a resultados deben estar suficientemente justificados y completamente explicados.

OPCIÓN A

1º) Un boxeador ha disputado 20 combates en el año 2016. Por cada combate ganado cobraba 3.000 euros, 2.000 por combate nulo y 1.000 por combate perdido. En total obtuvo 40.000 euros. Si las cantidades cobradas hubieran sido 6.000 euros por combate ganado, 4.000 por nulo y 1.000 por perdido, habría obtenido 72.000 euros.

a) Plantea, en el campo de los números reales, el sistema de ecuaciones que modeliza el problema en función del número de combates ganados, hechos nulos y perdidos. Y, si es posible, calcúlalos.

b) Estudia si hay alguna cantidad k que sustituya a los 6.000 euros por combate ganado que hiciera imposible la solución del problema dentro del campo de los números reales.

----

a)

Sean x, y, z los combates que gana, hace nulo y pierde el boxeador, respectivamente.

$$x + y + z = 20 \; 3.000x + 2.000y + 1.000z = 40.000 \; 6.000x$$

.

La matriz de coeficientes es $M = (1\ 1\ 1\ 3\ 2\ 1\ 6\ 4\ 1)$ cuyo rango es el siguiente:

$$|M| = |1\ 1\ 1\ 3\ 2\ 1\ 6\ 4\ 1| = 2 + 12 + 6 - 12 - 4 - 3 = 1 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M = 3.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$x = \frac{|20\ 1\ 1\ 40\ 2\ 1\ 72\ 4\ 1\ |}{1} = 4 \cdot |5\ 1\ 1\ 10\ 2\ 1\ 18\ 4\ 1\ | = 4 \cdot (10 + 40 + 18 - 36 - 20 - 10)$

$= 4 \cdot (68 - 66) = 4 \cdot 2 = 8.$

$y = \frac{|1\ 20\ 1\ 3\ 40\ 1\ 6\ 72\ 1\ |}{1} = 4 \cdot |1\ 5\ 1\ 3\ 10\ 1\ 6\ 18\ 1\ | = 4 \cdot (10 + 54 + 30 - 60 - 18 - 15)$

$= 4 \cdot (94 - 93) = 4 \cdot 1 = 4.$

$z = \frac{|1\ 1\ 20\ 3\ 2\ 40\ 6\ 4\ 72\ |}{1} = 4 \cdot |1\ 1\ 5\ 3\ 2\ 10\ 6\ 4\ 18\ | = 4 \cdot (36 + 60 + 60 - 60 - 40 - 54)$

$= 4 \cdot (156 - 154) = 4 \cdot 2 = 8.$

$\underline{El\ boxeador\ ganó\ 8\ combates,\ hizo\ 4\ nulos\ y\ perdió\ 8\ combates}.$

$b)$

La matriz resultaría: $x + y + z = 20\ 3.000x + 2.000y + 1.000z = 40.000 \quad kx$

.

Para que el sistema sea incompatible es necesario que los rangos de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada sean distintos.

Expresando a k en miles de euros es: $M' = (1\ 1\ 1\ 3\ 2\ 1\ k\ 4\ 1 \quad 20\ 40\ 72\ ).$

$(1\ 1\ 1\ 3\ 2\ 1\ k\ 4\ 1 \quad 20\ 40\ 72\ ) \Rightarrow \left\{ F_2 \rightarrow F_2 - 3F_1\ F_3 \rightarrow F_3 - kF_1 \right\} \Rightarrow (1\ 1\ 1\ 0\ -1$

$\Rightarrow \left\{ F_3 \rightarrow F_3 + (4 - k)F_2 \right\} \Rightarrow (1\ 1\ 1\ 0\ -1\ -2\ 0\ 0\ k - 7 \quad 20\ -20\ -8\ ).$

$\underline{Para\ k = 7.000 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible}.$

****

2º) Sean las funciones $f: R \rightarrow R\ y\ g: [0, +\infty) \rightarrow R$ definidas por $f(x) = \frac{x^2}{4}$ y $g(x) = 2\sqrt{x}$.

$a)$ Halla los puntos de corte de las gráficas $f\ y\ g$.

$b)$ Realiza un esbozo del recinto que queda limitado por las gráficas de las funciones entre esos puntos y calcula su área.

$a)$

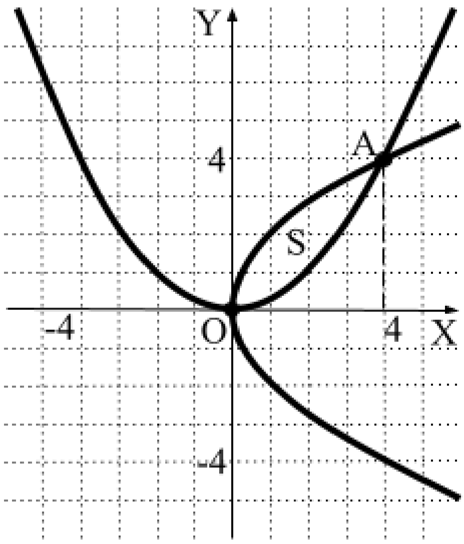
Los puntos de corte de las gráficas f y g tienen como abscisas las raíces reales de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{x^2}{4} = 2\sqrt{x};\ \ x^2 = 8\sqrt{x};\ \ x^4 = 64x;\ \ x^4 - 64x = 0;$$

$$x\left(x^3 - 64\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow \underline{O(0,\ 0)} \\ x_2 = 4 \rightarrow \underline{A(4,\ 4)} \end{cases}.$$

$b)$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la expresada en la figura adjunta.



De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4}\right)dx = \left[2\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{x^3}{12}\right]_0^4 =$$

$$= \left(2\cdot\frac{4\sqrt{4}}{\frac{3}{2}} - \frac{4^3}{12}\right) - 0 = \frac{4\cdot4\cdot2}{3} - \frac{4\cdot4}{3} = \frac{32-16}{3} = \frac{16}{3}.$$

$$\underline{S = \frac{16}{3}\,u^2 \cong 5,33\,u^2.}$$

****

3º) Dadas las rectas $r \equiv \{x + 2y = 1 \; z = 1$ y $s \equiv x + 1 = \frac{y-1}{2} = z$. Calcula:

a) Un vector director de cada recta. b) El ángulo que forman las rectas.

c) El plano paralelo a las dos rectas y que pasa por el punto $A(1, 2, 1)$.

----

a)

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \{x = 1 - 2\lambda \; y = \lambda \quad z = 1$.

Un vector director de r es $\underline{\vec{v}_r = (-2, 1, 0)}$.

Un vector director de s es $\underline{\vec{v}_s = (1, 2, 1)}$.

b)

El ángulo que forman dos rectas es el menor ángulo que forman sus vectores directores.

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = \left|\vec{v}_r\right| \cdot \left|\vec{v}_r\right| \cdot \cos cos\, a \Rightarrow \cos cos\, a = \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s}{\left|\vec{v}_r\right| \cdot \left|\vec{v}_r\right|} = \frac{(-2, 1, 0)\cdot(1, 2, 1)}{\sqrt{(-2)^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+1^2}} =$$

$$= \frac{-2+2}{\sqrt{4+1}\cdot\sqrt{1+4+1}} = \frac{0}{\sqrt{5\cdot 5}} = 0 \Rightarrow a = 90°.$$

$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ son\ perpendiculares}$.

c)

El plano π pedido tiene como vectores a los vectores directores de las rectas; su expresión general es la siguiente:

$$\pi\left(A; \vec{v}_r, \vec{v}_s\right) \equiv |x - 1 \; y - 2 \; z - 1 \quad -2 \; 1 \; 0 \; 1 \; 2 \; 1| = 0;$$

$(x - 1) - 4(z - 1) - (z - 1) + 2(y - 2) = 0; (x - 1) + 2(y - 2) - 5(z - 1) = 0;$

$x - 1 + 2y - 4 - 5z + 5 = 0.$

$\underline{\pi \equiv x + 2y - 5z = 0}$.

****

4º) Una urna A contiene tres bolas numeradas del 1 al 3 y otra urna B, seis bolas numeradas del 1 al 6. Se elige, al azar, una urna y se extrae una bola:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea una bola con el número 1?

b) Se extraída la bola resulta tener el número 1, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna A?

----

a)

$$P = P(A/1) + P(B/1) = P(A) \cdot P(1/A) + P(B) \cdot P(1/B) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{2+1}{12} = \frac{3}{12} = \underline{\frac{1}{4} = 0,25}.$$

b)

$$P = P(1/A) = \frac{P(A \cap 1)}{P(1)} = \frac{P(A) \cdot P(1/A)}{P(A) \cdot P(1/A) + P(B) \cdot P(1/B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{6} = \underline{\frac{2}{3} = 0,67}$$

.

****

OPCIÓN B

1º) Sean las matrices $A = (1\ 0\ 2\ k\ 0\ 1)\ y\ B = (k\ 0\ -\ 1\ 1\ 1\ 2)$.

a) Estudia, en función de los valores reales de k, si la matriz $B\cdot A$ tiene inversa. Calcúlala, si es posible.

b) Estudia, en función de los valores reales de k, si la matriz $A\cdot B$ posee inversa.

----

a)

$B\cdot A = (k\ 0\ -\ 1\ 1\ 1\ 2)\cdot(1\ 0\ 2\ k\ 0\ 1)(k\ -\ 1\ 3\ k\ +\ 2)$.

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero:

$|B\cdot A| = |k\ -\ 1\ 3\ k\ +\ 2\,| = k^2 + 2k + 3 = 0;\ \ k = \frac{-2\pm\sqrt{4-12}}{2} \Rightarrow k \notin R$.

$\underline{La\ matriz\ B\cdot A\ es\ invertible\ para\ cualquier\ valor\ real\ de\ k.}$

Por ejemplo, para $k = 0 \Rightarrow B\cdot A = (0\ -\ 1\ 3\ 2)$.

$|B\cdot A| = 3.$ $(B\cdot A)^t = (0\ 3\ -\ 1\ 2)$. $Adj.\ de\ (B\cdot A)^t = (2\ 1\ -\ 3\ 0)$.

$(B\cdot A)^{-1} = \frac{Adj.\ de\ (B\cdot A)^t}{|B\cdot A|} = \underline{\frac{1}{3}\cdot(2\ 1\ -\ 3\ 0)}.$

b)

$A\cdot B = (1\ 0\ 2\ k\ 0\ 1)\cdot(k\ 0\ -\ 1\ 1\ 1\ 2) = (k\ 0\ -\ 1\ 3k\ k\ 2k\ -\ 2\ 1\ 1\ 2)$.

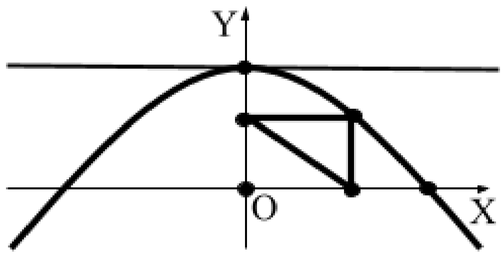
$|A\cdot B| = |k\ 0\ -\ 1\ 3k\ k\ 2k\ -\ 2\ 1\ 1\ 2\,| = 2k^2 - 3k + k - k(2k - 2) = 0;$

$2k^2 - 2k - 2k^2 + 2k = 0 \Rightarrow 0 = 0.$

$\underline{La\ matriz\ A\cdot B\ no\ es\ invertible\ para\ cualquier\ valor\ real\ de\ k.}$

****

2º) Se considera el arco comprendido entre los puntos $P(0,\ 1)$ y $Q(2,\ 0)$ de la gráfica de la función $y = f(x) = a + bx + cx^2$ con tangente en el punto P paralela al eje OX.



a) Calcula los valores $a,\ b\ y\ c$.

$b)$ Con $a = 1,\ b = 0\ y\ c = -\frac{1}{4}$ y siendo $A(m,\ n)$ un punto perteneciente a ese arco. Determina los valores $m\ y\ n$ para que el área del triángulo rectángulo ABC sea máxima.

$a)$

Por contener la función al punto $P(0,\ 1) \Rightarrow f(0) = 1$:

$f(0) = a = 1.$

Por contener la función al punto $Q(2,\ 0) \Rightarrow f(2) = 0$:

$f(2) = 1 + 2b + c \cdot 2^2 = 0;\ \ 2b + 4c = -1.$ (*)

Por tener la función una tangente horizontal para $x = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$:

$f'(x) = b + 2cx.$

$f'(0) = 0 \Rightarrow b + 2c \cdot 0 = 0 \Rightarrow b = 0.$

Sustituyendo el valor de b obtenido en la expresión (*): $c = -\frac{1}{4}$.

$$\underline{y = f(x) = 1 - \frac{1}{4}x^2.}$$

$b)$

Se debe tener en cuenta que $m = x$ y que $n = y = 1 - \frac{1}{4}x^2$.

La superficie del triángulo es $S = \frac{1}{2} \cdot m \cdot n = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \left(1 - \frac{1}{4}x^2\right) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^3$.

Para que la superficie sea mínima tiene que anularse su primera derivada y ser positiva la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$S'(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{8}x^2 = 0;\ \ 4 - 3x^2 = 0;\ \ x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{2}{\sqrt{3}},\ x_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}}.$

El valor negativo carece de sentido, según el gráfico.
$S''(x) = -\frac{3}{4}x < 0.$

$$S''\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$n = 1 - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

$$\underline{m = \frac{2}{\sqrt{3}} \cong 1,15\ unidades.\ \ n = \frac{2}{3} \cong 0,67\ unidades.}$$

****

3º) Dados los puntos $A(1,\ 2,\ 0),\ B(-\ 1,\ 1,\ 1),\ C(0,\ 0,\ 1)\ y\ D(4,\ 1,\ 3)$. Determina:

$a)$ Si los cuatro puntos son coplanarios.

$b)$ La recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene a los puntos A, B y C.

$c)$ El punto de corte de la recta r con el plano π.

$a)$

Los puntos A, B, C, y D determinan los siguientes vectores:

$\overrightarrow{AB} = [B\ -\ A] = [(-\ 1,\ 1,\ 1) - (1,\ 2,\ 0)] = (-\ 2,\ \ -\ 1,\ 1).$

$\overrightarrow{AC} = [C\ -\ A] = [(0,\ 0,\ 1) - (1,\ 2,\ 0)] = (-\ 1,\ \ -\ 2,\ 1).$

$\overrightarrow{AD} = [D\ -\ A] = [(4,\ 1,\ 3) - (1,\ 2,\ 0)] = (3,\ \ -\ 1,\ 3).$

Para que los puntos A, B, C y D sean coplanarios, los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ tienen que ser coplanarios, o sea, que su rango tiene que ser menor de tres; el determinante que forman tiene que valer cero:

$Rang\left\{\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}\right\} \Rightarrow |-\ 2\ \ -\ 1\ 1\ \ -\ 1\ \ -\ 2\ 1\ 3\ \ -\ 1\ 3\ | =\ 12\ +\ 1\ -\ 3\ +\ 6\ -\ 2\ -\ 3$

$19\ -\ 8\ =\ 11 \neq 0.$

$\underline{Los\ puntos\ A,\ B,\ C\ y\ D\ no\ son\ coplanarios}.$

Otra forma de resolver este apartado es la siguiente:

Los puntos A, B y C determinan el plano:

$\pi\left(A;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right) \equiv |x\ -\ 1\ y\ -\ 2\ z\ \ -\ 2\ \ -\ 1\ 1\ \ -\ 1\ \ -\ 2\ 1\ | =\ 0;$

$-\ (x\ -\ 1) +\ 4z\ - (y\ -\ 2) -\ z\ +\ 2(x\ -\ 1) +\ 2(y\ -\ 1) =\ 0;$

$(x\ -\ 1) + (y\ -\ 2) +\ 3z\ =\ 0;\ \ x\ -\ 1\ +\ y\ -\ 2\ +\ 3z\ =\ 0 \Rightarrow \pi \equiv x\ +\ y\ +\ 3z\ -\ 3\ =\ 0$

.

Si los puntos son coplanarios, el punto D pertenece a él; en caso contrario, no:

$\pi \equiv x + y + 3z - 3 = 0 \quad D(4, 1, 3) \} \Rightarrow 4 + 1 + 3 \cdot 3 - 3 = 14 - 3 \neq 0 \Rightarrow$

.

Como cabía esperar, se llega a la misma conclusión.

b)

Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (1, 1, 3)$, que es linealmente dependiente del vector director de la recta r pedida, por lo cual $\vec{v_r} = (1, 1, 3)$.

$$\underline{r \equiv \{x = 4 + \lambda\, y = 1 + \lambda\, z = 3 + 3\lambda}.$$

El plano π se determinó en el apartado anterior:

$$\underline{\pi \equiv x + y + 3z - 3 = 0}.$$

c)

El punto de corte de la recta r con el plano π es la solución del sistema que forman:

$\pi \equiv x + y + 3z - 3 = 0 \quad r \equiv \{x = 4 + \lambda\, y = 1 + \lambda\, z = 3 + 3\lambda \} \Rightarrow (4 +$

$4 + \lambda + 1 + \lambda + 9 + 9\lambda - 3 = 0;\ 11\lambda + 11 = 0;\ \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1.$

$$x = 4 - 1 = 3\, y = 1 - 1 = 0\, z = 3 - 3 = 0 \} \Rightarrow \underline{P(3, 0, 0)}.$$

****

4º) En una asociación benéfica se reparten dos productos, harina y leche. Todas las personas que entran cogen dos unidades a elegir entre dos tipos de producto. El 70 % de las personas que entran cogen harina y el 40 % los dos productos. Calcula:

a) La probabilidad de que una persona que entre coja leche.

b) La probabilidad de que una persona que entre coja un solo tipo de producto.

c) Una persona que sale de la asociación lleva leche. ¿Cuál es la probabilidad de que haya cogido también harina?

$P(H) = 0,7.$ $\qquad$ $P(H \cap L) = 0,4.$

Por coger todas las personas dos unidades a elegir entre los dos productos se deduce que $P(H \cup L) = 1$.

a)

$$P(H \cup L) = 1 = P(H) + P(L) - P(H \cap L).$$

$$P = P(L) = 1 + P(H \cap L) - P(H) = 1 + 0,4 - 0,7 = \underline{0,7}.$$

b)

Como todas las personas cogen dos productos, los sucesos coger un solo producto y coger los dos productos son sucesos contrarios, por lo cual:

$$P = 1 - P(H \cap L) = 1 - 0,4 = \underline{0,6}.$$

c)

$$P = P(H/L) = \frac{P(H \cap L)}{P(L)} = \frac{0,4}{0,7} = \underline{0,5714}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE BALEARES

JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contesta de manera clara y razonada a una de las dos opciones propuestas. Se valorará la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) utilizado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autorizarán las que traigan información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1º) a) Discuta para que valores de m el sistema $mx + 3z = m\, x + 2y - z = 1\; 2x + y - z = 2 \}$ es compatible.

b) Resuélvalo en el caso o casos en que sea compatible indeterminado.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A = (m\; 0\; 3\; 1\; 2\; -1\; 2\; 1\; -1)$ y $A' = (m\; 0\; 3\; 1\; 2\; -1\; 2\; 1\; -1\quad m\; 1\; 2)$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro m es el siguiente:

$|A| = |m\; 0\; 3\; 1\; 2\; -1\; 2\; 1\; -1| = -2m + 3 - 12 + m = 0;\; -m - 9 = 0 \Rightarrow m$

.

$\underline{Para\, m \neq -9 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

$Para\, m = -9 \Rightarrow A' = (-9\; 0\; 3\; 1\; 2\; -1\; 2\; 1\; -1\quad -9\; 1\; 2) \Rightarrow \{C_1 = C_4\} \Rightarrow Rang\ A$

.

$\underline{Para\, m = -9 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

b)

Para $m = -9$ el sistema resulta:

$-9x + 3z = -9 \; x + 2y - z = 1 \; 2x + y - z = 2 \}$, equivalente al sistema simplificado: $3x - z = 3 \; x + 2y - z = 1 \; 2x + y - z = 2 \}$, que es compatible indeterminado.

Despreciando una ecuación, por ejemplo la segunda, y haciendo $x = \lambda$:

$z = -3 + 3\lambda$; $y = 2 - 2x + z = 2 - 2\lambda - 3 + 3\lambda = -1 + \lambda$.

$\underline{Solución: x = \lambda,\ y = -1 + \lambda,\ z = -3 + 3\lambda,\ \forall\lambda \in R.}$

****

2º) El número de litros por metro cuadrado que llovió un determinado día viene dado por la función $Q(t) =- \frac{t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} - \frac{9t}{2} + 10$, con t dado en días, con $1 \le t \le 8$ (días de la semana).

a) Determine el día de la semana que llovió más y el que llovió menos. ¿Cuántos litros por metro cuadrado llovieron estos dos días?

b) Haga un esbozo de la función anterior durante los 8 días.

----

a)

La condición necesaria para que una función polinómica tenga un extremo relativo es que se anule su primera derivada.

$$Q'(t) =- \frac{3}{8}t^2 + 3t - \frac{9}{2}.$$

$$Q'(t) = 0 \Rightarrow - \frac{3}{8}t^2 + 6t - \frac{9}{2} = 0;\ \ t^2 - 8t + 12 = 0;\ \ t = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{2} =$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} = 4 \pm 2 \Rightarrow t_1 = 2,\ t_2 = 6.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para los valores que anulan la primera derivada, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$Q''(t) =- \frac{3}{4}t + 3 \Rightarrow \{t_1 = 2 \rightarrow Q''(2) =- \frac{3}{4} \cdot 2 + 3 = \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow Mínimo \quad t_2 = 6 \rightarrow Q''(6) =$$

.

$$Q(2) =- \frac{2^3}{8} + \frac{3 \cdot 2^2}{2} - \frac{9 \cdot 2}{2} + 10 =- 1 + 6 - 9 + 10 = 6.$$

$$Q(6) =- \frac{6^3}{8} + \frac{3 \cdot 6^2}{2} - \frac{9 \cdot 6}{2} + 10 =- 27 + 54 - 27 + 10 = 10.$$

$$\underline{El\ día\ que\ más\ llovió\ fue\ es\ sexto\ y\ fueron\ 10\ l/m^2}.$$

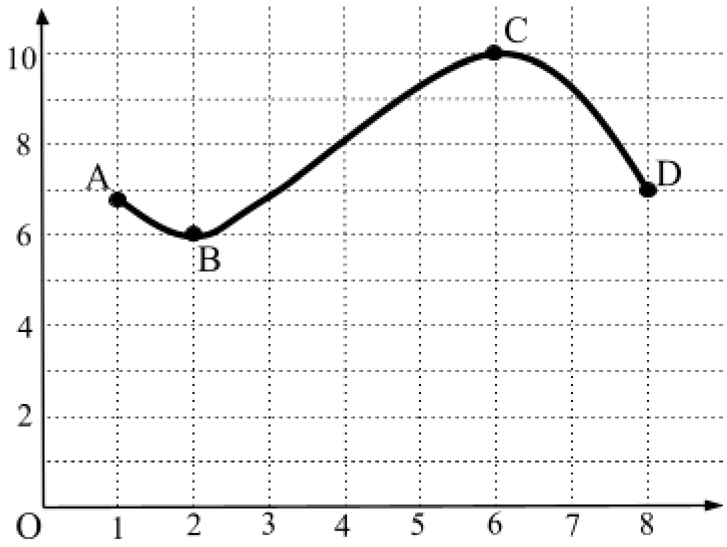
$$\underline{El\ día\ que\ menos\ llovió\ fue\ es\ segundo\ y\ fueron\ 6\ l/m^2}.$$

b)

$$Q(1) = -\frac{1^3}{8} + \frac{3 \cdot 1^2}{2} - \frac{9 \cdot 1}{2} + 10 = -\frac{1}{8} + \frac{3}{2} - \frac{9}{2} + 10 = \frac{-1-24+80}{8} = \frac{55}{8} \cong 6,8$$
.

$$Q(8) = -\frac{8^3}{8} + \frac{3 \cdot 8^2}{2} - \frac{9 \cdot 8}{2} + 10 = -64 + 96 - 36 + 10 = 6.$$

La representación gráfica de la función es, aproximadamente, la que se indica en la gráfica siguiente.



****

3º) Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$ y $s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-2}$:

a) Demuestre que se cruzan.

b) Calcule la distancia entre las rectas.

----

a)

Un punto y un vector director de cada una de las rectas son los siguientes:

Recta r: $A(1,\ 0,\ -1)$ y $\vec{v_r} = (2,\ 3,\ -1)$. Recta s: $B(0,\ 2,\ -1)$ y $\vec{v_s} = (1,\ 2,\ -2)$.

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\vec{w} = \vec{AB} = [B - A] = [(0,\ 2,\ -1) - (1,\ 0,\ -1)] = (-1,\ 2,\ 0)$.

Según que los vectores $\{\vec{v_r},\ \vec{v_s},\ \vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\vec{v_r},\ \vec{v_s},\ \vec{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

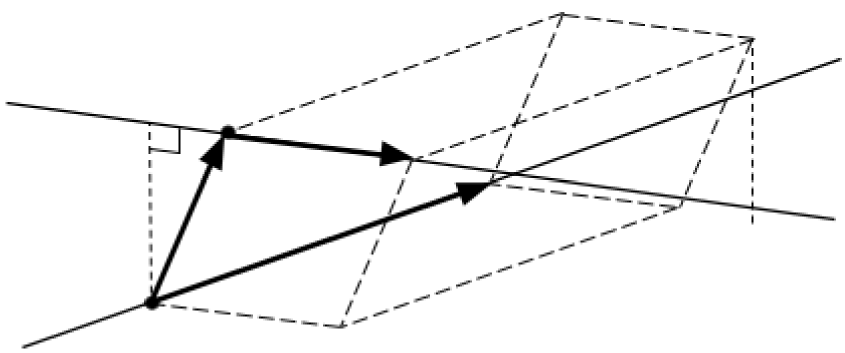
$Rang\,\{\vec{v_r},\ \vec{v_s},\ \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 + 6 - 2 + 8 = 10 \neq 0.$

$\underline{Rang\,\{\vec{v_r},\ \vec{v_s},\ \vec{w}\} \Rightarrow 3 \Rightarrow Queda\ demostrado\ que\ las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan.}$

b)

Para calcular la distancia entre las rectas r y s vamos a determinar un paralelepípedo cuyas dimensiones son los vectores directores de las rectas, $\vec{v_r}$ y $\vec{v_s}$, y un tercer vector $\vec{w}$ que tiene como origen al punto A de r y extremo el punto B de s.

Para una mejor comprensión se hace el esquema que se observa.



El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observando que la altura h es igual a la distancia d pedida entre las rectas.

Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$V = \vec{v}_r \cdot \left(\vec{v}_s \times \vec{w} \right) = \left| \vec{v}_r \times \vec{v}_s \right| \cdot h = \left| \vec{v}_r \times \vec{v}_s \right| \cdot d \Rightarrow d = \frac{\left| \vec{v}_r \cdot \left(\vec{v}_s \times \vec{w} \right) \right|}{\left| \vec{v}_r \times \vec{v}_s \right|}.$$

$$d = \frac{\left| \vec{v}_r \cdot \left(\vec{v}_s \times \vec{w} \right) \right|}{\left| \vec{v}_r \times \vec{v}_s \right|} = \frac{\|2\ 3\ -1\ 1\ 2\ -2\ -1\ 2\ 0\ \|}{|i\ j\ k\ 2\ 3\ -1\ 1\ 2\ -2\ |} = \frac{|10|}{|-6i-j+4k-3k+2i+4j|} = \frac{10}{|-4i+3j+k|} =$$

$$= \frac{10}{\sqrt{(-4)^2+3^2+1^2}} = \frac{10}{\sqrt{16+9+1}} = \frac{10}{\sqrt{26}} = \frac{10\sqrt{26}}{26} = \underline{\frac{5\sqrt{26}}{13}\ u = d(r,\ s)}.$$

****

4º) Se lanzan dos dados de 6 caras no trucados y se consideran los siguientes casos:

S_7: "la suma de los resultados de los dos dados es 7".

P_{impar}: "el producto de los resultados de los dos dados es impar".

a) Calcule las probabilidades de que se produzcan los eventos anteriores.

b) ¿Son independientes los eventos S_7 y P_{impar}? Razona la respuesta.

----

a)

$$P\left(S_7\right) = P(16) + P(61) + P(25) + P(52) + P(34) + P(43).$$

Por ser equiprobables todos los sucesos del caso anterior:

$$P\left(S_7\right) = 6 \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}\right) = \underline{\frac{1}{6} = 0,1667}.$$

$$P\left(P_{impar}\right) = P(11) + P(13) + P(31) + P(33) + P(15) + P(51) +$$

$$+ P(35) + P(53) + P(55).$$

Por ser equiprobables todos los sucesos del caso anterior:

$$P\left(P_{impar}\right) = 9 \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}\right) = \frac{9}{36} = \underline{\frac{1}{4} = 0,2500}.$$

b)

Dos sucesos S_7 y P_{impar} son independientes cuando se cumple que:

$$P\left(S_7 \cap P_{impar}\right) = P\left(S_7\right) \cdot P\left(P_{impar}\right).$$

Conocemos $P\left(S_7\right)$ y $P\left(P_{impar}\right)$ pero carece de sentido hablar de la probabilidad $P\left(S_7 \cap P_{impar}\right)$ ya que es un suceso que no existe; es un conjunto vacío.

$$\underline{\textit{Por lo anterior, los sucesos } S_7 \textit{ y } P_{impar} \textit{ no son independientes.}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Tenemos tres grifos para llenar un depósito de agua y suponemos que el caudal de agua de cada grifo es constante. Si usamos el grifo 1, tardamos 10 horas en llenar el depósito; si usamos los grifos 1 y 2, tardamos 4 horas y si utilizamos los tres grifos, tardamos una hora. Supongamos que la suma del caudal de los tres grifos juntos es de 10 litros por minuto, calcule el caudal de cada uno de los grifos y la capacidad del depósito.

Supongamos que en una hora llenan cada uno de los depósitos:

$n^{\underline{o}}\ 1 \to \frac{1}{x}\ del\ depósito;\ \ n^{\underline{o}}\ 2 \to \frac{1}{y}\ del\ depósito;\ \ n^{\underline{o}}\ 3 \to \frac{1}{z}\ del\ depósito.$

$$10 \cdot \frac{1}{x}\ de\ D = D \qquad 4 \cdot \frac{1}{x}\ de\ D + 4 \cdot \frac{1}{y}\ de\ D = D\ 1 \cdot \frac{1}{x}\ d$$

.

De la primera ecuación se deduce que $x = 10\ horas$.

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$\frac{4}{10} + \frac{4}{y} = 1;\ \ \frac{2}{5} + \frac{4}{y} = 1;\ \ 2y + 20 = 5y;\ \ 3y = 20 \Rightarrow y = \frac{20}{3}\ horas.$

Sustituyendo en la tercera ecuación:

$\frac{1}{10} + \frac{3}{20} + \frac{1}{z} = 1;\ \ 2z + 3z + 20 = 20z;\ \ 15z = 20;\ \ 3z = 4 \Rightarrow z = \frac{4}{3}\ horas$

.

Como los tres grifos juntos llenan el depósito en una hora y cada minuto los tres juntos 10 litros:

$\underline{La\ capacidad\ del\ depósito\ es\ de\ 600\ litros.}$

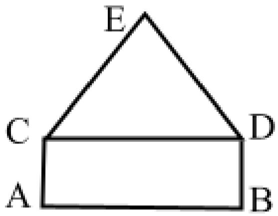
$Grifo\ n^{\underline{o}}\ 1:\ \ En\ 10\ horas = 600\ minutos\ arroja\ 600\ litros \Rightarrow C_1 = \frac{1l}{min}.$

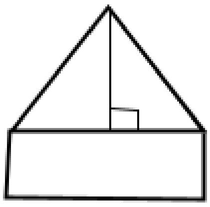
$Grifo\ n^{\underline{o}}\ 2:\ \ En\ \frac{20}{3}\ hora = 400\ minutos\ arroja\ 600\ litros \Rightarrow C_2 = \frac{1{,}5l}{min}.$

$Grifo\ n^{\underline{o}}\ 3:\ \ En\ \frac{4}{3}\ hora = 80\ minutos\ arroja\ 600\ litros \Rightarrow C_3 = \frac{7{,}5l}{min}.$

****

2º) Debemos diseñar una ventana como la que aparece en la figura adjunta, o sea, el polígono ACEDB, de 30 metros de perímetro. Se trata de un rectángulo con un triángulo equilátero encima. Calcular las dimensiones del rectángulo para que el área de la ventana sea máxima.





$$3x + 2y = 30 \Rightarrow y = \frac{30-3x}{2}.$$

$$x^2 = h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2; \; x^2 = h^2 + \frac{x^2}{4}; \; h = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4x^2-x^2}{4}} = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \frac{x\sqrt{3}}{2} = h.$$

$$S = x \cdot y + \frac{x \cdot h}{2} \Rightarrow S(x) = x \cdot \frac{30-3x}{2} + \frac{x \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{30x-3x^2}{2} + \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{60x-6x^2+x^2\sqrt{3}}{4} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left[\left(\sqrt{3} - 6\right)x^2 + 60x\right] = \frac{\sqrt{3}-6}{4}x^2 + 15x = S(x).$$

Para que la superficie sea máxima es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$S'(x) = \frac{\sqrt{3}-6}{2}x + 15. \qquad S''(x) = \frac{\sqrt{3}-6}{2} < 0 \Rightarrow Máximo.$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}-6}{2}x + 15 = 0; \; \left(\sqrt{3} - 6\right)x + 30 = 0; \; x = \frac{-30}{\sqrt{3}-6} = \frac{30}{6-\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{30 \cdot \left(6+\sqrt{3}\right)}{\left(6-\sqrt{3}\right) \cdot \left(6+\sqrt{3}\right)} = \frac{30 \cdot \left(6+\sqrt{3}\right)}{36-3} = \frac{30 \cdot \left(6+\sqrt{3}\right)}{33} = \frac{10 \cdot \left(6+\sqrt{3}\right)}{11} \cong 7,03.$$

$$y = \frac{30-3 \cdot \frac{10 \cdot \left(6+\sqrt{3}\right)}{11}}{2} = \frac{15-\frac{15\left(6+\sqrt{3}\right)}{11}}{1} = 15 - \frac{15\left(6+\sqrt{3}\right)}{11} = \frac{165-90-15\sqrt{3}}{11} = \frac{75-15\sqrt{3}}{11} =$$

$$= \frac{15}{11} \cdot \left(5 - \sqrt{3}\right) \cong 4,46.$$

$\underline{Área\ máxima: rectángulo\ de\ 7,03\ u\ de\ base\ y\ 4,46\ u\ de\ altura.}$

****

3º) Se consideran las rectas $r\equiv\{x = 1 + \lambda t\ y = -1 + t\ z = 3 - 2t$ y $s\equiv\frac{x-2}{\lambda} = \frac{y}{2\lambda} = \frac{x-3}{-1}$, dependientes del parámetro λ.

a) Calcule el valor del parámetro λ para que $r\ y\ s$ se corten.

b) Calcule el punto de intersección para el valor de λ calculado.

----

a)

Un punto y un vector de cada una de las rectas son los siguientes:

Recta r: $A(1,\ -1,\ 3)\ y\ \overrightarrow{v_r} = (\lambda,\ 1,\ -2)$. Recta s: $B(2,\ 0,\ 3)\ y\ \overrightarrow{v_s} = (\lambda,\ 2\lambda,\ -1)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independiente por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\overrightarrow{w}$ que tiene como origen el punto $A\in r$ y extremo el punto $B\in s$: $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = [B - A] = [(2,\ 0,\ 3) - (1,\ -1,\ 3)] = (1,\ 1,\ 0)$.

Para que las rectas $r\ y\ s$ se corten es necesario que los vectores $\left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\right\}$ sean coplanarios.

Los vectores $\left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\right\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero:

$Rang\left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\right\} \Rightarrow |\lambda\ 1\ \ -2\ \lambda\ 2\lambda\ \ -1\ 1\ 1\ 0\,| = 0;\ \ -2\lambda - 1 + 4\lambda + \lambda = 0;\ \ 3\lambda - 1$

$= \lambda = \frac{1}{3}$.

$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cortan\ para\ \lambda = \frac{1}{3}}$.

b)

Para $\lambda = \frac{1}{3}$ las rectas son $r\equiv\{x = 1 + \frac{1}{3}t\ y = -1 + t\ z = 3 - 2t$ y $s\equiv\frac{x-2}{\frac{1}{3}} = \frac{y}{\frac{2}{3}} = \frac{x-3}{-1}$

La expresión de s por unas ecuaciones paramétricas es: $s \equiv \{ x = 2 + \frac{1}{3}\mu \quad y = \frac{2}{3}\mu \quad z = 3 - \mu$.

$\{ 1 + \frac{1}{3}t = 2 + \frac{1}{3}\mu \quad -1 + t = \frac{2}{3}\mu \quad 3 - 2t = 3 - \mu \} \Rightarrow t = 3 + \mu \quad \mu = 2t \} =$
.

<u>*El punto de corte de las rectas r y s es* $P(0, -4, 9)$</u>

****

4º) El test de inteligencia (CI) es una prueba que en teoría mide la inteligencia de los individuos y da un valor que aproximadamente tiene una media de 100. O sea, el nivel 100 se supone que es nivel de inteligencia de una persona normal. Supóngase ahora que el nivel de inteligencia de una determinada población sigue una distribución normal de media 100 y desviación típica 10.

a) Calcule el porcentaje de la población que se considera superdotada. Una persona se considera superdotada si tiene un nivel de inteligencia superior a 130.

b) Calcule el porcentaje de la población con un nivel de inteligencia entre 90 y 110.

c) Nos dicen que el 70 % de la población tiene un nivel de inteligencia menor que un determinado umbral. Calcule este umbral.

----

a)

$Datos$: $\overline{x} = 100;\ \sigma = 10.$

$(X \geq 130)$. Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-100}{10}$.

$$P(X \geq 130) = P\left(\frac{X-100}{10} \geq \frac{130-100}{10}\right) = P\left(Z \geq \frac{30}{10}\right) = P(Z \geq 3) =$$

$$= 1 - P(Z < 3) = 1 - 0,9987 = \underline{0,0013}.$$

$$\underline{Son\ superdotados\ un\ 0,13\ \%\ de\ la\ población.}$$

b)

$(90 \leq X \leq 100)$.

$$P(90 \leq X \leq 100) = P\left(\frac{90-100}{10} \leq \frac{X-100}{10} \leq \frac{100-100}{10}\right) = P\left(\frac{-10}{10} \leq Z \leq \frac{10}{10}\right) =$$

$$= P(-1 \leq Z \leq 1) = P(Z < 1) - P(Z < -1) = P(Z < 1) - [1 - P(Z < 1)] =$$

$$= P(Z < 1) - 1 = 2 \cdot 0,8413 - 1 = 1,6826 - 1 = 0,6826.$$

$$\underline{El\ 68,26\ \%\ de\ la\ población\ tiene\ un\ nivel\ de\ inteligencia\ entre\ 90\ y\ 110}.$$

c)

$P(X \leq x) = 0,70.$

$P(X \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x-100}{10}\right) = 0,7 \Rightarrow$ Mirando en la tabla $N(0,1)$ resulta:

Para 0,52→ 0,6985 y para 0,53→ 0,7019 ⇒ Para <u>0,525→0,7</u>.

$$\frac{x-100}{10} = 0,525; \;\; x - 100 = 5,25 \Rightarrow x = 100 + 5,25 = 105,25.$$

$\underline{El\ 70\ \%\ de\ la\ población\ tiene\ un\ nivel\ de\ inteligencia\ menor\ de\ 105,25}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE BALEARES

SEPTIEMBRE – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contesta de manera clara y razonada a una de las dos opciones propuestas. Se valorará la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) utilizado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autorizarán las que traigan información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1º) Las edades de Juan, Miguel y Gabriel suman 70 años. La edad de Juan, el doble de la edad de Miguel y el triple de la edad de Gabriel suman 160 años y la edad de Gabriel es igual a la suma de las edades de Juan y Miguel. Calcule las edades de Juan, Miguel y Gabriel y en qué año nació cada uno.

Sean $x,\ y,\ z$ las edades actuales de Juan, Miguel y Gabriel, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$x + y + z = 70\, x + 2y + 3z = 160 \qquad z = x + y \}.$$

Sustituyendo el valor de z en las dos primera ecuaciones:

$$x + y + (x + y) = 70\, x + 2y + 3(x + y) = 160 \} \qquad x + y + x + y = 70\, x$$
;

$$- 4x - 4y =- 140 \quad 4x + 5y = 160 \quad \} \Rightarrow y = 20.$$
$$x + y = 35;\ x + 20 = 35 \Rightarrow x = 15.$$

$$z = x + y = 15 + 20 = 35.$$

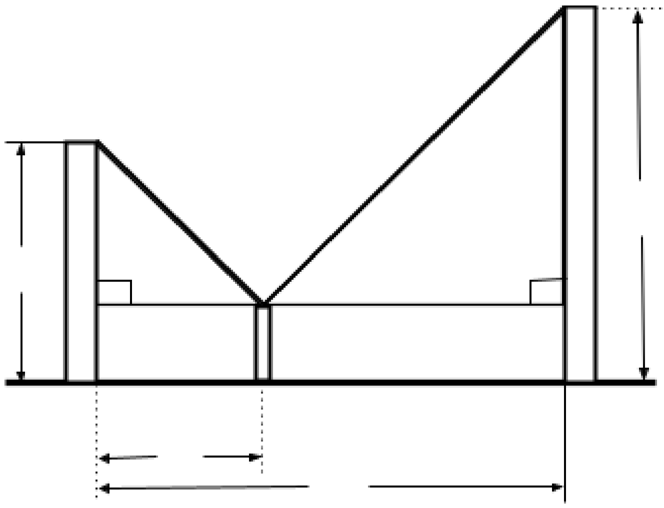
$\underline{Juan\ tiene\ actualmente\ 15\ años,\ Miguel\ 20\ años\ y\ Gabrial,\ 35\ años.}$

Como estos ejercicios de Selectividad son del año 2.017:

$\underline{Juan\ nació\ el\ 2.002;\ \ Miguel\ nació\ el\ año\ 1.997\ y\ Gabrial\ el\ año\ 1.982}.$

****

2º) Entre dos torres de 15 y 25 metros de altura, respectivamente, hay una distancia de 30 metros. En medio de las dos torres tenemos que poner otra torreta de 5 metros de altura y hemos de tender un cable que una los extremos de las torres con el extremo de la torreta. ¿Dónde hemos de situar la torreta de 5 metros para que la longitud del cable sea la mínima posible? ¿Cuál es la longitud del cable en este caso?



La longitud del cable es la siguiente: $L = l_1 + l_2$, que tiene que ser mínima.

De la observación de la figura se deduce lo siguiente:

$$l_1 = \sqrt{x^2 + 10^2} = \sqrt{x^2 + 100}$$

.

$$l_2 = \sqrt{(30 - x)^2 + 20^2} =$$

$$= \sqrt{900 - 60x + x^2 + 400} = \sqrt{x^2 - 60x + 1.300}.$$

$$L(x) = \sqrt{x^2 + 100} + \sqrt{x^2 - 60x + 1.300}.$$

Para que la longitud del cable sea mínima es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$L'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+100}} + \frac{2x-60}{2\sqrt{x^2-60x+1.300}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+100}} + \frac{x-30}{\sqrt{x^2-60x+1.300}} = 0;$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+100}} = \frac{30-x}{\sqrt{x^2-60x+1.300}}; \quad \frac{x^2}{x^2+100} = \frac{(30-x)^2}{x^2-60x+1.300} = \frac{900-60x+x^2}{x^2-60x+1.300};$$

$$x^4 - 60x^3 + 1.300x^2 = 900x^2 - 60x^3 + x^4 + 90.000 - 6.000x + 100x^2;$$

$$1.300x^2 = 900x^2 + 90.000 - 6.000x + 100x^2; \; 300x^2 + 6.000x - 90.000 = 0;$$

$$x^2 + 20x - 300 = 0; \; x = \frac{-20\pm\sqrt{400+1.200}}{2} = \frac{-20\pm\sqrt{1.600}}{2} = \frac{-20\pm40}{2} = -10\pm20 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_1 = -30,\ x_2 = 10.$

La solución negativa carece de sentido lógico, por lo cual: $x = 10.$

$\underline{La\ torreta\ debe\ colocarse\ a\ 10\ metros\ de\ la\ torre\ pequeña.}$

Para $x = 10$ metros la longitud del cable es la siguiente:

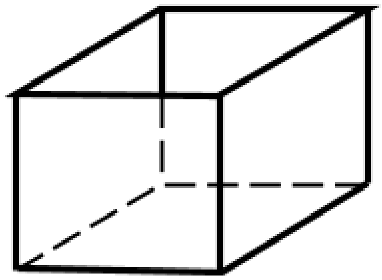
$$L = \sqrt{10^2 + 100} + \sqrt{10^2 - 60\cdot10 + 1.300} = \sqrt{200} + \sqrt{1.400 - 600} =$$

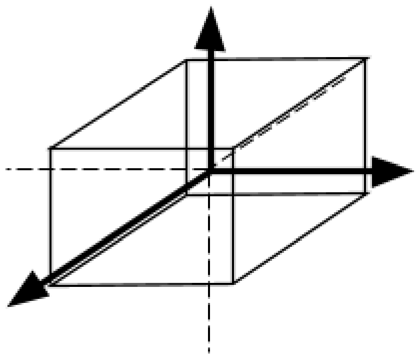
$$= \sqrt{200} + \sqrt{800} = 10\sqrt{2} + \sqrt{100\cdot4\cdot2} = 10\sqrt{2} + 20\sqrt{2} = 30\sqrt{2}.$$

$\underline{La\ longitud\ mínima\ del\ cable\ es\ de\ 30\sqrt{2}\ metros \cong 42,43\ metros.}$

****

3º) Consideremos el cubo que aparece en la figura adjunta. Supongamos que las coordenadas del punto C son $C(1,\ 1,\ 1)$, las aristas del cubo son paralelas a los ejes de coordenadas (o sea, la arista AE es paralela al eje X, la arista AD, al eje Y y la arista AB, al eje Z) y los lados del cubo tienen de longitud 2. Calcule el plano π que pasa por los puntos A, E, C y G y la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto D.





Las coordenadas de los vértices del cubo son los siguientes:

$Anteriores \Rightarrow \{A(1,\ -1,\ -1);\ B(1,\ -1,\ 1)\ C(1,\ 1,\ 1);\ D(1,\ 1,\ -1)$.

$Posteriores \Rightarrow \{E(-1,\ -1,\ -1);\ F(-1,\ -1,\ 1)\ G(-1,\ 1,\ 1);\ H(-1,\ 1,\ -1)$
.

$$\overrightarrow{AE} = [E - A] = [(-1,\ -1,\ -1) - (1,\ -1,\ -1)] = (-2,\ 0,\ 0).$$

$$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(1,\ 1,\ 1) - (1,\ -1,\ -1)] = (0,\ 2,\ 2).$$

$$\pi\left(G;\ \overrightarrow{AE},\ \overrightarrow{AC}\right) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z-1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0;\ -4(z-1) + 4(y-1) =$$

$$-(z-1) + (y-1) = 0;\ -z + 1 + y - 1 = 0.$$

$$\underline{z \equiv y - z = 0}.$$

Un vector director de r es cualquier vector que sea linealmente dependiente del vector normal del plano π: $\overrightarrow{v_r} = (0,\ 1,\ -1)$.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es:

$$\underline{r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}}.$$

****

4º) El tiempo que un alumno puede estar concentrado y escuchar al profesor en una clase de Matemáticas sigue una distribución normal de media 15 minutos y desviación típica 5 minutos.

a) Calcule la probabilidad de que un alumno esté concentrado más de 20 minutos.

b) Calcule la probabilidad de que un alumno esté concentrado entre 10 y 30 minutos.

c) Nos dicen que la probabilidad de que un alumno esté concentrado más de x minutos vale 0,75. Calcular este valor de x minutos.

----

a)

$Datos$: $\mu = 15;\ \sigma = 5.$

El tiempo constituye una distribución normal tal que: $X \Rightarrow N(15; 5)$.

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-15}{5}$. $\qquad P(X > 20)$.

$$P(X > 20) = P\left(\frac{X-15}{5} > \frac{20-15}{5}\right) = P\left(Z > \frac{5}{1}\right) = P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1) =$$

$$= 1 - 0,8413 = \underline{0,1587}.$$

b)

$(10 < X < 30)$.

$$P(10 < X < 30) = P\left(\frac{10-15}{5} < \frac{X-15}{5} < \frac{30-15}{5}\right) = P\left(\frac{-5}{5} < Z < \frac{15}{5}\right) =$$

$$= P(-1 < Z < 3) = P(Z < 3) - P(Z < -1) = P(Z < 3) - [1 - P(Z < 1)] =$$

$$= 0,9987 - (1 - 0,8413) = 0,9987 - 0,1587 = \underline{0,8400}.$$

c)

$P(X > x) = P\left(Z > \frac{x-15}{5}\right) = 0,75 \Rightarrow$ Mirando en la tabla $N(0, 1)$ resulta:

Para 0,67→ 0,7486 y para 0,68→ 0,7517 ⇒ Para <u>0,675→0,75</u>.

Por la simetría de la curva, el valor correspondiente es <u>-0,675</u>:

$$\frac{x-15}{5} = -0,675;\ \ x - 15 = -3,375 \Rightarrow x = 15 - 3,375 = 11,625.$$

$$\underline{El\ 75\ \%\ de\ los\ estudiantes\ está\ concentrado\ menos\ de\ 11,625\ minutos.}$$

****

OPCIÓN B

1º) a) Discuta para los distintos valores de a el sistema: $ax + y - 2z =- 1 \quad - x + ay + z = 2 \quad 3x + y - z = 0 \quad y + z = 3 \}$
.
b) Resuélvalo en el caso en que sea compatible.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = (a\,1 \ -2 \ -1\,a\,1\,3\,1 \ 1\,0 \ -1\,1 \ )$ y $M' = (a\,1 \ -2 \ -1 \ -1\,a\,1 \ 2\ 3\,0\ 1\,1 \ -1\,1\ 0\,3 \ )$.

El rango de la matriz ampliada en función del parámetro a es el siguiente:

$|M| = |a\,1 \ -2 \ -1 \ -1\,a\,1\,2\ 3\,0\ 1\,1 \ -1\,1\ 0\,3 \ | \Rightarrow \{C_3 \to C_3 - C_2\, C_4 \to C_4$

$\Rightarrow |a\,1 \ -3 \ -4 \ -1\,a\,1 - a\,2 - 3a\ 3\,0\ 1\,1 \ -2\,0 \ -3\,0 \ | = |a \ -3 \ -4 \ -1$

$=- 3a(1 - a) - 8 - 9(2 - 3a) + 12(1 - a) + 9 + 2a(2 - 3a) =$

$=- 3a + 3a^2 + 1 - 18 + 27a + 12 - 12a + 4a - 6a^2 =;$

$=- 3a^2 + 16a - 5 = 0;\ 3a^2 - 16a + 5 = 0;\ a = \frac{16\pm\sqrt{256-60}}{6} = \frac{16\pm\sqrt{196}}{6} =$

$= \frac{16\pm14}{6} = \frac{8\pm7}{3} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{3},\ a_2 = 5.$

$\underline{Para \{a\neq\frac{1}{3}\ a\neq5 \} \Rightarrow Rang\ M < 4;\ Rang\ M' = 4 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

$Para\ a = \frac{1}{3} \Rightarrow M = \left(\frac{1}{3}\,1 \ -2 \ -1\,\frac{1}{3}\,1\,3\,1 \ 1\,0 \ -1\,1 \ \right) \Rightarrow Rang\ M \Rightarrow \{F_1, F_3, F_4\}$

$\Rightarrow \left|\frac{1}{3}\,1 \ -2\,3\,1 \ -1\,1\,0\,1\right| \Rightarrow \{C_3 \to C_3 - C_1\} \Rightarrow \left|\frac{1}{3}\,1 \ -\frac{7}{3}\,3\,1 \ -4\,1\,0\,0\right| = \left|1 \ -\frac{7}{3}\right.$

$\Rightarrow Rang\ M = 3.$

$Para\ a = 5 \Rightarrow M = (5\,1 \ -2 \ -1\,5\,1\,3\,1 \ 1\,0 \ -1\,1 \ ) \Rightarrow Rang\ M \Rightarrow \{F_1, F_3, F_4\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |5\,1 \ -2\,3\,1 \ -1\,1\,0\,1| \Rightarrow \{C_3 \to C_3 - C_1\} \Rightarrow |5\,1 \ -7\,3\,1 \ -4\,1\,0\,0| = |1 \ -7\,1$

$\Rightarrow Rang\ M\ =\ 3.$

$$\underline{Para\left\{a\ =\frac{1}{3}\ a\ =\ 5\ \right\}\Rightarrow Rang\ M\ =\ Rang\ M^{'}\ =\ 3\ =\ n^{o}\ incóg.\Rightarrow S.\ C.\ D.}$$

$b)$

Por ser un sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas y compatible determinado para los valores $a\ =\frac{1}{3}\ y\ a\ =\ 5$, para su resolución, despreciamos una de las ecuaciones.

Para $a\ =\frac{1}{3}$ el sistema resulta: $\frac{1}{3}x\ +\ y\ -\ 2z\ =-\ 1\quad 3x\ +\ y\ -\ z\ =\ 0\qquad y\ +\ z\ =\ 3\ \}$, que es compatible determinado y equivalente al sistema: $x\ +\ 3y\ -\ 6z\ =-\ 3\quad 3x\ +\ y\ -\ z\ =\ 0\qquad y\ +\ z\ =\ 3\ \}$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x\ =\frac{|-3\ 3\ -6\ 0\ 1\ -1\ 3\ 1\ 1\ |}{|1\ 3\ -6\ 3\ 1\ -1\ 0\ 1\ 1\ |}=\frac{-3-9+18-3}{1-18+1-9}=\frac{3}{-25}=-\ \frac{3}{25}.$$

$$y\ =\frac{|1\ -3\ -6\ 3\ 0\ -1\ 0\ 3\ 1\ |}{-25}=\frac{-54+3+9}{-25}=\frac{-42}{-25}=\frac{42}{25}.$$

$$z\ =\frac{|1\ 3\ -3\ 3\ 1\ 0\ 0\ 1\ 3\ |}{-25}=\frac{3-9-27}{-25}=\frac{-33}{-25}=\frac{33}{25}.$$

$$\underline{Solución: x\ =\ 1,\ y\ =\ 0,\ z\ =\frac{9}{2}.}$$

Para $a\ =\ 5$ el sistema resulta: $-\ x\ +\ 5y\ +\ z\ =\ 2\quad 3x\ +\ y\ -\ z\ =\ 0\qquad y\ +\ z\ =\ 3\ \}$, que es compatible determinado.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x\ =\frac{|2\ 5\ 1\ 0\ 1\ -1\ 3\ 1\ 1\ |}{|-1\ 5\ 1\ 3\ 1\ -1\ 0\ 1\ 1\ |}=\frac{2-15-3+2}{-1+3-1-15}=\frac{-14}{-14}=\ 1.$$

$$y\ =\frac{|-1\ 2\ 1\ 3\ 0\ -1\ 0\ 3\ 1\ |}{-14}=\frac{9-3-6}{-14}=\frac{0}{-14}=\ 0.$$

$$z\ =\frac{|-1\ 5\ 2\ 3\ 1\ 0\ 0\ 1\ 3\ |}{-14}=\frac{-3+6-45}{-14}=\frac{-42}{-14}=\ 3.$$

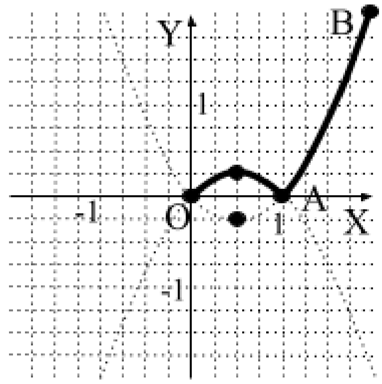
$$\underline{Solución: x\ =\ 1,\ y\ =\ 0,\ z\ =\ 3.}$$

****

2º) Considere la función $f(x) = x \cdot |x - 1|$. Haga un dibujo aproximado de la función anterior en el intervalo $[0,\ 2]$. Calcule el área limitada por la gráfica de la función anterior y el eje X.

Teniendo en cuenta que $|x - 1| = \{- x + 1\ si\ x < 0\, x - 1\ \ si\ \ x \geq 0$, la función puede expresarse de la forma siguiente: $f(x) = \{- x^2 + x\ si\ x < 0\, x^2 - x\ si\ x \geq 0$.

En el intervalo $(- \infty,\ 0)$ la función es $f(x) =- x^2 + x$, que es una parábola cóncava (∩) cuyo vértice es el siguiente:



$$f'(x) =- 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

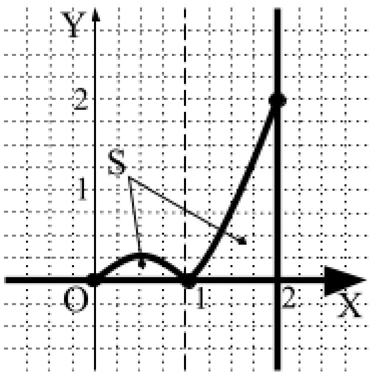
$$f\left(\frac{1}{2}\right) =- \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_1 = \left(\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\right).$$

En el intervalo $(0,\ + \infty)$ la función es $f(x) = x^2 - x$, que es una parábola convexa (∪) cuyo vértice es el siguiente:

$$f'(x) = 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}. \qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} =- \frac{1}{4} \Rightarrow V_2 = \left(\frac{1}{2},\ - \frac{1}{4}\right).$$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la que aparece en la figura anterior.

La superficie a calcular se deduce de la figura siguiente:



$$S = \int_0^1 \left(- x^2 + x\right) \cdot dx + \int_1^2 \left(x^2 - x\right) \cdot dx =$$

$$= \left[- \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \left(- \frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2}\right) - 0 +$$

$$+ \left(\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2}\right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2}\right) =- \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} =$$

$$=- \frac{2}{3} + 1 + \frac{8}{3} - 2 = 1.$$

$$\underline{S = 1\, u^2.}$$

****

3º) Dados los puntos $A(1,\ 0,\ 3)\ y\ B(1,\ 3,\ 4)$, determina los puntos situados en el plano $\pi \equiv z = 1$ que forman con los puntos A y B un triángulo equilátero. Calcule el volumen del tetraedro formado por los tres puntos anteriores y el origen de coordenadas.

Los puntos del plano π tienen por expresión general $P(x,\ y,\ 1)$.

$$\overline{AB} = \sqrt{(1-1)^2 + (3-0)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{0+9+1} = \sqrt{10}.$$

$$\overline{AP} = \overline{AB} = \sqrt{10} \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2 + (1-3)^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4} = \sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 4};\ \ x^2 + y^2 - 2x + 5 = 10;$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 5 = 0. \quad (1)$$

$$\overline{BP} = \overline{AB} = \sqrt{10} \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2 + (1-4)^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 + 9} = \sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 6y + 19};$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 19 = 10;\ \ x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0. \quad (2)$$

Igualando las expresiones (1) y (2):

$$x^2 + y^2 - 2x - 5 = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0;\ \ -5 = -6y + 9;$$

$$6y = 14 \Rightarrow y = \frac{7}{3}.$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 5 = 0;\ \ x^2 + \left(\frac{7}{3}\right)^2 - 2x - 5 = 0;$$

$$x^2 + \frac{49}{9} - 2x - 5 = 0;\ \ 9x^2 + 49 - 18x - 45 = 0;\ \ 9x^2 - 18x + 4 = 0;$$

$$x = \frac{18 \pm \sqrt{324-144}}{18} = \frac{18 \pm \sqrt{180}}{18} = \frac{18 \pm \sqrt{36 \cdot 5}}{18} = \frac{18 \pm 6\sqrt{5}}{18} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{3},\ x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{3}.$$

$$\underline{Los\ puntos\ pedidos\ son\ P_1\left(\frac{3-\sqrt{5}}{3},\ \frac{7}{3},\ 1\right)\ y\ P_2\left(\frac{3+\sqrt{5}}{3},\ \frac{7}{3},\ 1\right).}$$

El volumen de un tetraedro es, en valor absoluto, un sexto del producto mixto de los tres vectores que lo determinan; en este caso se tienen dos tetraedros cuyos volúmenes son:

$$V_{OABP_1} = \frac{1}{6}\cdot\left\|\left|\vec{OA},\ \vec{OB},\ \vec{OP}_1\right|\right\| = \frac{1}{6}\cdot\left\|\left| 1\ 0\ 3\ 1\ 3\ 4\ \frac{3-\sqrt{5}}{3}\ \ \frac{7}{3}\ \ 1 \right|\right\| = \frac{1}{18}\cdot\left\|\left| 1\ 0\ 3\ 1\ 3\ 4\ 3\ -\sqrt{5}\ 7\right.\right.$$

$$= \frac{1}{18}\cdot\left|9 + 21 - 9\left(3 - \sqrt{5}\right) - 28\right| = \frac{1}{18}\cdot\left|2 - 27 + 9\sqrt{5}\right| = \frac{\left|9\sqrt{5}-25\right|}{18} = \frac{\left|\sqrt{405}-25\right|}{18}$$

.

$$\underline{V_{OABP_1} = \frac{25-9\sqrt{5}}{18}\, u^3 \cong 4,88\, u^3.}$$

$$V_{OABP_2} = \frac{1}{6}\cdot\left\|\left|\vec{OA},\ \vec{OB},\ \vec{OP}_2\right|\right\| = \frac{1}{6}\cdot\left\|\left| 1\ 0\ 3\ 1\ 3\ 4\ \frac{3+\sqrt{5}}{3}\ \ \frac{7}{3}\ \ 1 \right|\right\| = \frac{1}{18}\cdot\left\|\left| 1\ 0\ 3\ 1\ 3\ 4\ 3\ +\right.\right.$$

$$= \frac{1}{18}\cdot\left|9 + 21 - 9\left(3 + \sqrt{5}\right) - 28\right| = \frac{1}{18}\cdot\left|2 - 27 - 9\sqrt{5}\right| = \frac{\left|-9\sqrt{5}-25\right|}{18} = \frac{9\sqrt{5}+25}{18}$$

.

$$\underline{V_{OABP_2} = \frac{25+9\sqrt{5}}{18}\, u^3 \cong 45,12\, u^3.}$$

****

4º) Supongamos que los estudiantes de la UIB solo tienen dos sistemas operativos en sus teléfonos móviles: Android e IOS (el de iPhone). El 80 % de los estudiantes de la UIB tienen el sistema operativo Android. El 25 % de las chicas de la UIB tienen IOS en su teléfono móvil y el 45 % de los estudiantes de la UIB chicos.

a) Calcule la probabilidad de que un chico de la UIB tenga IOS en su teléfono móvil.

b) Calcule la probabilidad de que un estudiante que tenga Android en su teléfono móvil siendo chica.

$$Datos: \{P(A) = 0,8 \rightarrow P(I) = 0,2 \qquad P(I/M) = 0,25 \rightarrow P(A/M) = 0,75 \; P(H) =$$

.

a)

Se pide: $P(I/H)$.

$$P(I) = P(H/I) + P(M/I) = P(H) \cdot P(I/H) + P(M) \cdot P(I/M).$$

$$P(I/H) = \frac{P(I) - P(M) \cdot P(I/M)}{P(H)} = \frac{0,2 - 0,55 \cdot 0,25}{0,45} = \frac{0,2 - 0,1375}{0,45} = \frac{0,0625}{0,45} = \underline{0,1389}.$$

b)

$$P(M/A) = \frac{P(M \cap A)}{P(A)} = \frac{P(M) \cdot P(A/M)}{P(A)} = \frac{0,55 \cdot 0,75}{0,8} = \frac{0,4125}{0,8} = \underline{0,5156}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE CANARIAS

JULIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones, A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo.

OPCIÓN A

1º) Determinar los valores de a y b para que la función $f(x)$ definida de la siguiente forma: $f(x) = \{x^2 + 4x + a \ \ si \ \ x\leq 2 \ \ -x^2 + bx \ \ si \ \ x > 2$ sea derivable en todo $x\in R$.

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 2$; se trata de determinar los valores de α y b para que sea derivable en el punto crítico $x = 2$.

Para que la función sea continua en $x = 2$ es necesario que sus límites laterales en ese punto sean iguales e iguale al valor de la función en ese punto.

$f(x) \ = \left(x^2 + 4x + a\right) = 4 + 8 + a = 12 + a \ = f(2)\, f(x) \ = \left(-x^2 + bx\right) = -4 +$

$12 + a = -4 + 2b; \ \ a - 2b = -16.$ (1)

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas laterales son iguales en ese punto.

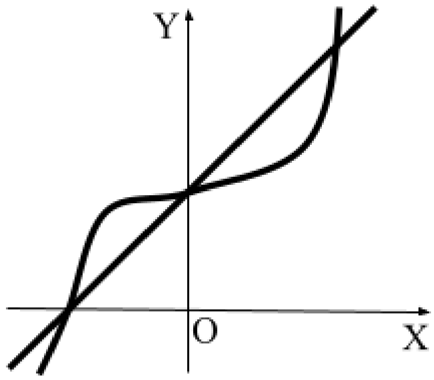
$f'(x) = \{\ 2x + 4 \ \ si \ \ x\leq 2 \ \ -2x + b \ \ si \ \ x > 2 \Rightarrow \{f'\left(2^-\right) = 4 + 4 = 8\, f'\left(2^+\right) = -4 +$

$\Rightarrow -4 + b = 8 \Rightarrow \underline{b = 12}$. Sustituyendo el valor de b en (1):

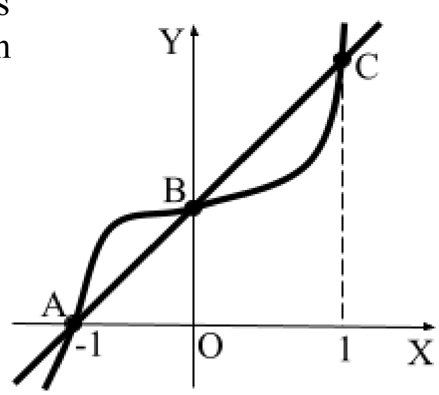
$a - 2\cdot 12 = -16; \ \ a = -16 + 24 \Rightarrow \underline{a = 8}.$

****

2º) Calcular el área de la región sombreada en la figura adjunta, sabiendo las ecuaciones de las funciones que aparecen en la gráfica.



Los puntos de corte de las dos funciones tienen como abscisas las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:



$f(x) = g(x) \Rightarrow x^3 + 1 = x + 1;\ x^3 - x = 0;$

$x\left(x^2 - 1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \rightarrow A(-1,\ 0) \\ x_2 = 0 \rightarrow B(0,\ 1) \\ x_3 = 1 \rightarrow C(1,\ 2) \end{cases}.$

En el intervalo $(-1,\ 0)$ las ordenadas de la función $f(x) = x^3 + 1$ son mayores que las correspondientes ordenadas de la función $g(x) = x + 1$ y en el intervalo $(0,\ 1)$ ocurre lo contrario.

Teniendo en cuenta lo anterior y de la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente.

$$S = \int_{-1}^{0} [f(x) - g(x)] \cdot dx + \int_{0}^{1} [g(x) - f(x)] \cdot dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} \left[\left(x^3 + 1\right) - (x + 1)\right] \cdot dx + \int_{0}^{1} \left[(x + 1) - \left(x^3 - 1\right)\right] \cdot dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(x^3 + 1 - x - 1\right) \cdot dx + \int_{0}^{1} \left(x + 1 - x^3 + 1\right) \cdot dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(x^3 - x\right) \cdot dx + \int_{0}^{1} \left(-x^3 + x + 2\right) \cdot dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{0}^{1} =$$

$$= 0 - \left[\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^2}{2}\right] + \left(-\frac{1^4}{4} + \frac{1^2}{2} + 2 \cdot 1\right) - 0 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$$

.

$$\underline{S = \frac{3}{2} u^2.}$$

****

3º) Sea la matriz $M = (0\ 1\ 1\ 7\ )$. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones matriciales: $2X + 3Y = M\ 3X - 2y = M^{-1}\}$.

La inversa de M se obtiene por el método de Gauss-Jordan.

$(M/I) = (1\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_1 \leftrightarrow F_2\right\} \Rightarrow (0\ 1\ 1\ 0\ ) \Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow F_1 - 7F_1\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (-\ 7\ 1\ 1\ 0\ ) \Rightarrow M^{-1} = (-\ 7\ 1\ 1\ 0\ )$.

$2X + 3Y = M\ 3X - 2y = M^{-1}\} \quad 4X + 6Y = 2M\ 9X - 6y = 3M^{-1}\} \Rightarrow 13X$

$13X = 2 \cdot (0\ 1\ 1\ 7\ ) + 3 \cdot (-\ 7\ 1\ 1\ 0\ ) = (0\ 2\ 2\ 14\ ) + (-\ 21\ 3\ 3\ 0\ ) = (-\ 21\ 5\ 5\ 14\ ) \Rightarrow$

$$\underline{X = \frac{1}{13} \cdot (-\ 21\ 5\ 5\ 14\ ).}$$

$2X + 3Y = M\ 3X - 2y = M^{-1}\} \qquad 6X + 9Y = 3M\ - 6X + 4y = -\ 2M^{-1}$

$13Y = 3 \cdot (0\ 1\ 1\ 7\ ) - 2 \cdot (-\ 7\ 1\ 1\ 0\ ) = (0\ 3\ 3\ 21\ ) - (-\ 14\ 2\ 2\ 0\ ) = (14\ 1\ 1\ 21\ ) \Rightarrow$

$$\underline{Y = \frac{1}{13} \cdot (14\ 1\ 1\ 21\ ).}$$

****

4º) Dado el plano $\pi \equiv 2x + y - z = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ y, se pide:

a) Escribir la ecuación de la recta r en forma de ecuaciones continuas.

b) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1,\ 2,\ 1)$, es paralelo a la recta r y perpendicular al plano π.

----

a)

$r \equiv \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \lambda;\ y = 1 - 2\lambda;\ z = 3 - x + y = 3 - \lambda +$

$= 4 - 3\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 4 - 3\lambda \end{cases}.$

$$\underline{r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-4}{-3}}.$$

b)

Un vector director de la recta r es $\vec{v_r} = (1,\ -2,\ -3)$.

Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (2,\ 1,\ -1)$.

La expresión general del plano β pedido es la siguiente:

$\beta\left(P;\ \vec{v_r},\ \vec{n}\right) \equiv \begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z - 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0;$

$2(x - 1) - 6(y - 2) + (z - 1) + 4(z - 1) + 3(x - 1) + (y - 1) = 0;$

$5(x - 1) - 5(y - 2) + 5(z - 1) = 0;\ \ (x - 1) - (y - 2) + (z - 1) = 0;$

$x - 1 - y + 2 + z - 1 = 0 \Rightarrow \underline{\beta \equiv x - y + z = 0}.$

****

OPCIÓN B

1º) Calcular los siguientes límites: $a)\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2\cos x}{sen\left(x^2\right)}$. $b)\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x}-2-\frac{x}{4}}{x^2}$.

$a)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2\cos x}{sen\left(x^2\right)} = \frac{e^0+e^{-0}-2\cos 0}{sen\,0} = \frac{1+1-2\cdot 1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \left\{L'Hopital\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}+2sen\,x}{2x\cdot\cos\left(x^2\right)} = \frac{1}{2}\cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos\left(x^2\right)}\cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}+2sen\,x}{x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}\cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}+2sen\,x}{x} =$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}+2sen\,x}{x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^0-e^{-0}+2sen\,0}{0} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-1+2\cdot 0}{0} = \frac{1}{2}\cdot\frac{0}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{L'Hopital\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}+2\cdot\cos x}{1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+1+2\cdot 1}{1} = \frac{4}{2} = 2.$$

$$\underline{\lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2\cos x}{sen\left(x^2\right)} = 2.}$$

$b)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x}-2-\frac{x}{4}}{x^2} = \frac{\sqrt{4+0}-2-\frac{0}{4}}{0^2} = \frac{2-2-0}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \left\{L'Hopital\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{4+x}}-0-\frac{1}{4}}{2x} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{4+0}}-0-\frac{1}{4}}{2\cdot 0} = \frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \left\{L'Hopital\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{-\frac{1}{2\sqrt{4+x}}}{x+4}}{2} =$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{(4+x)\cdot\sqrt{4+x}} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4\cdot 2} = -\frac{1}{32}.$$

$$\underline{\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x}-2-\frac{x}{4}}{x^2} = -\frac{1}{32}.}$$

Otra forma de hacer este ejercicio:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x}-2-\frac{x}{4}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{4\sqrt{4+x}-8-x}{4x^2} = \frac{4\sqrt{4+0}-8-0}{4\cdot 0^2} = \frac{4\cdot 2-8}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

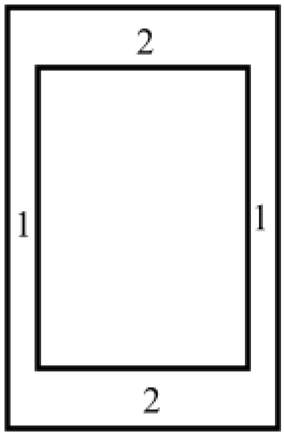
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{4\sqrt{4+x}-8-x}{4x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{4\sqrt{4+x}-(8+x)}{4x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\left[4\sqrt{4+x}-(8+x)\right]\cdot\left[4\sqrt{4+x}+(8+x)\right]}{4x^2\cdot\left[4\sqrt{4+x}+(8+x)\right]} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(4\sqrt{4+x}\right)^2-(8+x)^2}{4x^2\cdot\left(4\sqrt{4+x}+8+x\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{16(4+x)-\left(64+16x+x^2\right)}{4x^2\cdot\left(4\sqrt{4+x}+8+x\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{64+16x-64-16x-x^2}{4x^2\cdot\left(4\sqrt{4+x}+8+x\right)} =$$

$$= \frac{-x^2}{4x^2\cdot\left(4\sqrt{4+x}+8+x\right)} = \frac{-1}{4\cdot\left(4\sqrt{4+x}+8+x\right)} = \frac{-1}{4\cdot(4\cdot 2+8+0)} = \underline{-\frac{1}{32}}.$$

****

2º) Se quiere fabricar un smartphone con una pantalla LCD de 18 cm^2. Los bordes superior e inferior han de tener 2 cm cada uno y los bordes laterales 1 cm. Calcular las dimensiones del teléfono para que la superficie del mismo sea mínima.



La superficie total es $S = x \cdot y$. (*)

También puede expresarse la superficie total de la forma siguiente:

$S = 18 + 2 \cdot 2x + 2 \cdot 1 \cdot (y - 4)$.

$18 + 2 \cdot 2x + 2 \cdot 1 \cdot (y - 4) = x \cdot y$;

$18 + 4x + 2y - 8 = x \cdot y$; $10 + 4x = x \cdot y - 2y$;

$y(x - 2) = 10 + 4x \Rightarrow y = \frac{10+4x}{x-2}$.

Sustituyendo en (*) el valor hallado de y: $S(x) = x \cdot \frac{4x+10}{x-2} = \frac{4x^2+10x}{x-2}$.

Para que la superficie sea mínima es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$S'(x) = \frac{(8x+10) \cdot (x-2) - \left(4x^2+10x\right) \cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{8x^2-16x+10x-20-4x^2-10x}{(x-2)^2} = \frac{4x^2-16x-20}{(x-2)^2}.$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow \frac{4x^2-16x-20}{(x-2)^2} = 0;\ 4x^2 - 16x - 20 = 0;\ x^2 - 4x - 5 = 0;$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = 2 \pm 3 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 5.$$

La solución negativa carece de sentido, es para mínimo. La solución es $x = 5$.

$$y = \frac{10+4 \cdot 5}{5-2} = \frac{10+20}{3} = \frac{30}{3} = 10.$$

$\underline{\textit{La superficie es mínima cuando las dimensiones del teléfono son } 10 \times 5\ cm.}$

****

3º) Hallar la matriz X que cumple la ecuación matricial $A^{-1}XA = B$ siendo las matrices $A = (3\ 1\ \ -\ 2\ \ -\ 1\ )$ y $B = (1\ \ -\ 1\ 2\ 1\ )$.

$$A^{-1}XA = B;\ \ A\cdot A^{-1}\cdot X\cdot A\cdot A^{-1} = A\cdot B\cdot A^{-1};\ \ I\cdot X\cdot I = A\cdot B\cdot A^{-1}.$$

$$\underline{X = A\cdot B\cdot A^{-1}}.$$

$$|A| = |3\ 1\ \ -\ 2\ \ -\ 1\ | = -\ 3\ +\ 2\ = -\ 1.$$

$A^{t} = (3\ \ -\ 2\ 1\ \ -\ 1\ ).\ \ Adj.\ de\ A^{t} = (-\ 1\ \ -\ 1\ 2\ 3\ ).$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^{t}}{|A|} = \frac{(-1\ -1\ 2\ 3\ )}{-1} \Rightarrow A^{-1} = (1\ 1\ \ -\ 2\ \ -\ 3\ ).$$

$$X = A\cdot B\cdot A^{-1} = (3\ 1\ \ -\ 2\ \ -\ 1\ )\cdot(1\ \ -\ 1\ 2\ 1\ )\cdot(1\ 1\ \ -\ 2\ \ -\ 3\ ) =$$

$$= (5\ \ -\ 2\ \ -\ 4\ 1\ )\cdot(1\ 1\ \ -\ 2\ \ -\ 3\ ) = (9\ 11\ \ -\ 6\ \ -\ 7\ ).$$

$$\underline{X = (9\ 11\ \ -\ 6\ \ -\ 7\ )}.$$

****

4º) Dados la recta $r\equiv x = y + 1 = \frac{z-\frac{11}{m}}{\frac{-3}{m}}$ y el planos $\pi\equiv 2x + y + z = 9$, se pide:

a) Calcular el valor del parámetro m para que la recta r sea paralela al plano π.

b) Para $m = 2$, determinar el punto de intersección de la recta r y el plano π.

----

a)

La recta r es paralela al plano π cuando el vector director de la recta y el vector normal del plano son perpendiculares.

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = \left(1,\ 1,\ \frac{-3}{m}\right)$.

Un vector normal de π es $\overrightarrow{n} = (2,\ 1,\ 1)$.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{n} = 0 \Rightarrow \left(1,\ 1,\ \frac{-3}{m}\right)\cdot(2,\ 1,\ 1) = 0;\ \ 2 + 1 - \frac{3}{m} = 0;\ \ 3m - 3 = 0;$

$m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1.$

$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ perpendiculares\ cuando\ m = 1}.$

b)

Para $m = 2$ la recta es $r\equiv x = y + 1 = \frac{z-\frac{11}{2}}{\frac{-3}{2}}$ o mejor $r\equiv x = y + 1 = \frac{2z-11}{-3}$.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r\equiv\{x = \lambda \quad y = -1 + \lambda\ z = \frac{11}{2} - \frac{3}{2}\lambda$.

$\pi\equiv 2x + y + z = 9 \quad r\equiv\{x = \lambda \quad y = -1 + \lambda\ z = \frac{11}{2} - \frac{3}{2}\lambda \quad \}\Rightarrow 2\lambda + (-1 +$

$2\lambda - 1 + \lambda + \frac{11}{2} - \frac{3}{2}\lambda = 9;\ \ 3\lambda + \frac{11}{2} - \frac{3}{2}\lambda = 10;\ \ 6\lambda + 11 - 3\lambda = 20;\ \ 3\lambda = 9$

$\Rightarrow\lambda = 3 \Rightarrow \left\{x = 3 \quad y = -1 + 3 = 2\ z = \frac{11}{2} - \frac{9}{2} = 1\right\} \Rightarrow \underline{P(3,\ 2,\ 1)}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE CANARIAS

JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones, A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo.

OPCIÓN A

1º) Calcular el valor de los parámetros c y d sabiendo que la gráfica de la función $f: R \to R$ definida por $f(x) = 2x^3 - x^2 + cx + d$, tiene como recta tangente en el punto $P(1, -2)$ la recta de ecuación $y = 5x - 7$.

Por contener $f(x)$ al punto $P(1, -2)$ es $f(1) = -2$:

$f(1) = 2 \cdot 1^3 - 1^2 + c + d = -2;\ 2 - 1 + c + d = -2;\ c + d = -3.$ (1)

La pendiente de la recta tangente $y = 5x - 7$ es $m = 5$.

La pendiente a una función en un punto es igual que el valor de la pendiente de la recta tangente en ese punto, por lo cual es $f'(1) = 5$:

$f'(x) = 6x^2 - 2x + c.$

$f'(1) = 5 \Rightarrow 6 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + c = 5;\ 6 - 2 + c = 5;\ 4 + c = 5 \Rightarrow \underline{c = 1}.$

Sustituyendo en (1) el valor de $c = 1$:

$c + d = -3;\ 1 + d = -3 \Rightarrow \underline{d = -4}.$

$$\underline{f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 4}.$$

****

2º) Resolver las siguientes integrales: $a)\ I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} \frac{[L(2x)]^2}{3x} \cdot dx.$ $\quad b)\ I = \int \frac{3x^4+5x^2+\sqrt{x}}{x^2} dx.$

$a)$

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} \frac{[L(2x)]^2}{3x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ x = \frac{e}{2} \rightarrow t = 1\ x = \frac{1}{2} \rightarrow t = 0 \right\} \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \int_0^1 t^2 \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{9} \cdot \left[t^3\right]_0^1 = \frac{1}{9} \cdot \left(1^3 - 0^3\right) = \frac{1}{9}.$$

$$\underline{I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} \frac{[L(2x)]^2}{3x} \cdot dx = \frac{1}{9}.}$$

$b)$

$$I = \int \frac{3x^4+5x^2+\sqrt{x}}{x^2} dx = \int \left(3x^2 + 5 + x^{-\frac{3}{2}}\right) \cdot dx = \frac{3x^3}{3} + 5x + \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C =$$

$$= x^3 + 5x - \frac{2}{\sqrt{x}} + C.$$

$$\underline{I = \int \frac{3x^4+5x^2+\sqrt{x}}{x^2} dx = x^3 + 5x - \frac{2\sqrt{x}}{x} + C.}$$

****

3º) Dadas las matrices $A = (1\ 0\ 1\ \ -\ 1\ );\ B\ = (1\ x\ x\ -\ 1\ \ -\ 1\ )\ y\ C\ = (0\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ 2\ ):$

a) Calcular el valor de x para que se cumpla: $A\ +\ B\ +\ C^{2}\ =\ 3I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

b) Calcular la matriz X solución de la ecuación matricial: $A\cdot X\ +\ C^{2}\ =\ 3I$.

----

a)

$A\ +\ B\ +\ C^{2} = 3I;\ \ (1\ 0\ 1\ \ -\ 1\ ) + (1\ x\ x\ -\ 1\ \ -\ 1\ ) + (0\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ 2\ )(0\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ 2$

$(2\ x\ x\ \ -\ 2\ ) + (1\ \ -\ 2\ \ -\ 2\ 5\ ) = 3I;\ \ (3\ x\ -\ 2\ x\ -\ 2\ 3\ ) = (3\ 0\ 0\ 3\ ) \Rightarrow \underline{x\ =\ 2}.$

b)

$A\cdot X\ +\ C^{2}\ =\ 3I;\ \ A\cdot X\ =\ 3I\ -\ C^{2}\ =\ M;\ \ A^{-1}\cdot A\cdot X\ = A^{-1}\cdot M;$

$I\cdot X\ = A^{-1}\cdot M \Rightarrow \underline{X\ = A^{-1}\cdot M}.$

$M\ =\ 3I\ -\ C^{2} = (3\ 0\ 0\ 3\ ) - (1\ \ -\ 2\ \ -\ 2\ 5\ ) = (3\ 0\ 0\ 3\ ) + (-\ 1\ 2\ 2\ \ -\ 5\ ) = (2\ 2\ 2\ \ -$
.

$A\ = (1\ 0\ 1\ \ -\ 1\ );\ \ |A| =-\ 1;\ \ A^{t} = (1\ 1\ 0\ \ -\ 1\ );\ \ Adj.\ de\ A^{t} = (-\ 1\ 0\ \ -\ 1\ 1\ ) =$

$\Rightarrow A^{-1} = (1\ 0\ 1\ \ -\ 1\ ) =\ A.$

$X\ = A^{-1}\cdot M\ = (1\ 0\ 1\ \ -\ 1\ )\cdot(2\ 2\ 2\ \ -\ 2\ ) = (2\ 2\ 0\ 4\ ).$

$\underline{X\ = (2\ 2\ 0\ 4\ )}.$

****

4º) Dado el plano $\pi \equiv 5x + ay + 4z - 5 = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-2}{-4}$ y, se pide:

a) Calcular el valor del parámetro a para que la recta r sea paralela al plano π.

b) Para $a = 0$, calcular el ángulo que forman el plano π y la recta r.

----

a)

La recta r y el plano π son paralelos cuando el vector director de la recta y el vector normal del plano son perpendiculares, o sea, cuando su producto escalar es 0.

Un vector director de la recta es $\vec{v}_r = (1,\ 3,\ -2)$.

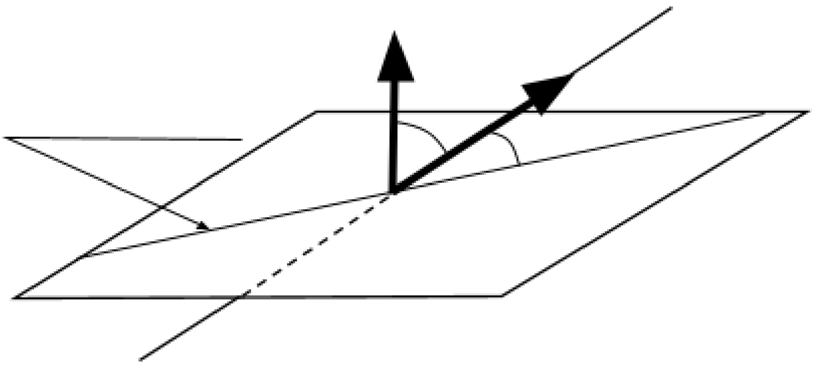
Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (5,\ a,\ 4)$.

$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = (1,\ 3,\ -2)\cdot(5,\ a,\ 4) = 0;\ \ 5 + 3a - 8 = 0;\ \ 3a = 3 \Rightarrow \underline{a = 1}.$

b)

Para $a = 0$ el vector normal del plano π es $\vec{n} = (5,\ 0,\ 4)$.

El vector director de r y el vector normal de π son linealmente independientes por no tener proporcionales sus componentes, por lo cual son secantes.



Por definición de producto escalar: $\vec{n}\cdot\vec{v}_r = \left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{v}_r\right|\cdot \cos cos\ \beta$.

$$\cos cos\ \beta = \frac{\vec{n}\cdot\vec{v}_r}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{v}_r\right|} = sen\ \alpha.$$

$$sen\ \alpha = \frac{(5, 0, 4)\cdot(1, 3, -2)}{\sqrt{5^2+4^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}} = \frac{5+0-8}{\sqrt{25+16}\cdot\sqrt{1+9+4}} = \frac{-3}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{14}} = \frac{-3}{\sqrt{574}} = \frac{-3}{23{,}9583} =$$

$$= -\ 0,1252 \Rightarrow \beta = arc(-\ 0,1252) = 7°\ 11'\ 36''.$$

$$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ forman\ un\ ángulo\ de\ 7°\ \ 11'\ 36''}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{e^{x^2}}$, se pide:

a) Determinar los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento.

b) Calcular los máximos y mínimos relativos.

----

a)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{2x \cdot e^{x^2} - x^2 \cdot 2x \cdot e^{x^2}}{e^{2x^2}} = \frac{2x - 2x^3}{e^{x^2}} = \frac{2x(1-x^2)}{e^{x^2}}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x(1-x^2)}{e^{x^2}} = 0;\ 2x\left(1 - x^2\right) = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1.$$

Por ser $e^{x^2} > 0,\ \forall x \in R,\ f'(x)$ es positiva o negativa cuando lo sea el numerador de su expresión, que por ser una expresión polinómica, sus tres raíces dividen el dominio de la función, que es R, en cuatro intervalos donde la derivada es, alternativamente, positiva o negativa.

Los intervalos mencionados son $(-\infty,\ -1), (-1,\ 0), (0,\ 1), (1,\ +\infty)$.

Considerando el valor $2 \in (1,\ +\infty) \Rightarrow f'(2) = \frac{4(1-4)}{e^4} < 0$, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento:\ (-\infty,\ -1) \cup (0,\ 1)}.$$

$$\underline{Decrecimiento:\ (-1,\ 0) \cup (1,\ +\infty)}.$$

b)

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto. Esta condición, que es necesaria, no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{(2-6x^2)\cdot e^{x^2} - 2x(1-x^2)\cdot 2x\cdot e^{x^2}}{e^{2x^2}} = \frac{2-6x^2-4x^2(1-x^2)}{e^{x^2}} = \frac{2-6x^2-4x^2+4x^4}{e^{x^2}} =$$

$$= \frac{4x^4-10x^2+2}{e^{x^2}} = \frac{2(2x^4-5x^2+1)}{e^{x^2}}.$$

$$f''(-1) = \frac{2(2\cdot 1-5\cdot 1+1)}{e^{1^2}} = \frac{-4}{e} < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -1.$$

$$f(-1) = \frac{(-1)^2}{e^{(-1)^2}} = \frac{1}{e} \Rightarrow \underline{Máximo: A\left(-1, \frac{1}{e}\right)}.$$

$$f''(0) = \frac{2(2\cdot 0-5\cdot 0+1)}{e^{0^2}} = \frac{2}{1} = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = \frac{0^2}{e^{0^2}} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \underline{Mínimo: O(0, 0)}.$$

$$f''(1) = \frac{2(2\cdot 1-5\cdot 1+1)}{e^{1^2}} = \frac{-4}{e} < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 1.$$

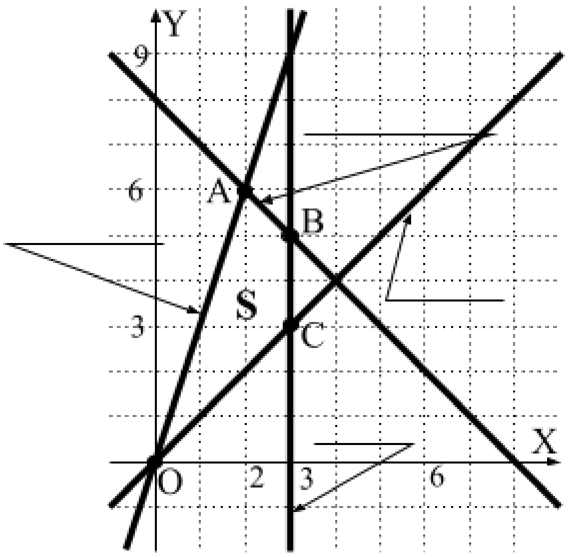
$$f(1) = \frac{1^2}{e^{1^2}} = \frac{1}{e} \Rightarrow \underline{Máximo: B\left(1, \frac{1}{e}\right)}.$$

Estos cálculos se simplifican teniendo en cuenta que la función es simétrica con respecto al eje de ordenadas, por ser $f(-x) = f(x)$.

****

2º) Dibujar y calcular el área de la región del plano limitada por las siguientes rectas:

$$y = 3x;\ \ y = x;\ \ y =- x + 8;\ \ x = 3.$$



De la observación de la figura se deduce el área a calcular, que aparece sombreada en la figura, y que es la siguiente:

$$S = \int_0^2 3x\cdot dx + \int_2^3 (- x + 8)\cdot dx + \int_3^0 x\cdot dx =$$

$$= \left[\frac{3x^2}{2}\right]_0^2 + \left[- \frac{x^2}{2} + 8x\right]_2^3 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_3^0 =$$

$$= \left[\left(\frac{3\cdot 2^2}{2}\right) - 0\right] + \left[\left(- \frac{\cdot 3^2}{2} + 8\cdot 3\right) - \left(- \frac{\cdot 2^2}{2} + 8\cdot 2\right)\right] + \left(0 - \frac{3^2}{2}\right) =$$

$$= 6 - \frac{9}{2} + 24 + 2 - 16 - \frac{9}{2} = 32 - 16 - 9 = 32 - 25 = 7.$$

$$\underline{S = 7\,u^2}.$$

****

3º) Sea el sistema de ecuaciones lineales: $\left.\begin{array}{l} 2x + y + kz = 1 \\ kx + 2y - z = -2 \\ \quad y - 3z = -3 \end{array}\right\}$.

a) Estudiarlo y clasificarlo para los distintos valores del parámetro k.

b) Resolverlo para $k = 2$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & k \\ k & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & k & 1 \\ k & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro k es el siguiente:

$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & k \\ k & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -12 + k^2 + 2 + 3k = 0;\ \ k^2 + 3k - 10 = 0$

$k = \frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{2} = \frac{-3\pm\sqrt{49}}{2} = \frac{-3\pm 7}{2} \Rightarrow k_1 = -5,\ k_2 = 2.$

$\underline{Para \left\{\begin{array}{l} k \neq -5 \\ k \neq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

$Para\ k = -5 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ -5 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' =$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -12 - 5 + 4 - 15 = -28 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3$.

$\underline{Para\ k = -5 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

$Para\ k = 2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' = \{C_1,\ C_2,$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -12 + 2 + 4 + 6 = 0 \Rightarrow Rang\ M' = 2.$

$\underline{Para\ k = 2 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

b)

Para $k = 2$ el sistema resulta $\left.\begin{array}{l} 2x + y + 2z = 1 \\ 2x + 2y - z = -2 \\ \quad y - 3z = -3 \end{array}\right\}$, que es compatible indeterminado.

Para resolverlo se desprecia una de las ecuaciones (primera) y se parametriza una de las incógnitas, por ejemplo, $z = \lambda$.

$2x + 2y = -2 + \lambda \quad y = -3 + 3\lambda \} \Rightarrow 2x + 2(-3 + 3\lambda) = -2 + \lambda;\ \ 2x - 6 + 6$

$2x = 4 - 5\lambda;\ \ x = 2 - \frac{5}{2}\lambda.$

$\underline{Solución: x = 2 - \frac{5}{2}\lambda;\ y = -3 + 3\lambda;\ \ z = \lambda;\ \forall\lambda \in R.}$

****

4º) Dados los planos $\pi_1 \equiv x - y + 3 = 0$; $\pi_2 \equiv 2x + y - z = 0$, determinar:

$a)$ La ecuación de la recta perpendicular a π_1 que pasa por el punto $P(2,\ 2,\ 1)$.

$b)$ La ecuación del plano perpendicular a la recta que determinan π_1 y π_2 que contiene al punto $A(1,\ 1,\ -1)$.

$a)$

Un vector normal del plano π_1 es $\vec{n}_1 = (1,\ -1,\ 0)$.

Un vector de la recta r pedida es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector normal del plano π_1, por lo cual, $\vec{v}_r = (1,\ -1,\ 0)$.

$$\underline{r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 \end{cases}}.$$

$b)$

El plano π_3 pedido es perpendicular a los planos $\vec{\pi}_1$ y $\vec{\pi}_2$ por lo cual tiene como vectores directores a los vectores normales de los planos $\vec{\pi}_1$ y $\vec{\pi}_2$.

$\vec{n}_2 = (2,\ 1,\ -1)$.

$\pi_3\left(A;\ \vec{n}_1,\ \vec{n}_2\right) \equiv \begin{vmatrix} x - 1 & y - 1 & z + 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0;$

$(x - 1) + (z + 1) + 2(z + 1) + (y - 1) = 0;\ \ (x - 1) + (y - 1) + 3(z + 1) = 0;$

$x - 1 + y - 1 + 3z + 3 = 0.$

$$\underline{\pi_3 \equiv x + y + 3z + 1 = 0.}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

1.- Debe escogerse una sola de las opciones
2.- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
3.- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.
4.- Los dispositivos que puedan conectarse a internet, o que pueden recibir o emitir información, deben estar apagados durante la celebración del examen.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

1º) Consideremos la igualdad de matrices $A \cdot M = B$, donde $A = (t\ 2t\ 2\ \ -1\ t\ 1\ \ -1\ 1\ 1\ )$ y $B = (1\ \ -3\ 0\ 1\ \ -2\ 2\ )$.

$a)$ ¿Cuántas filas y columnas debe tener la matriz M?

$b)$ ¿Para qué valores de t es la matriz A invertible?

$c)$ En el caso $t = -1$, despeje la matriz M en función de las matrices A y B y calcule su valor.

$a)$

El producto de matrices cumple que: $A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = C_{m\times p}$.

En el caso que nos ocupa: $A_{3\times 3} \cdot M_{n\times p} = B_{3\times 2} \Rightarrow n = 3\ y\ p = 2$.

$\underline{La\ matriz\ M\ tiene\ por\ dimensión\ 3\times 2.}$

$b)$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$|A| = |t\ 2t\ 2\ \ -1\ t\ 1\ \ -1\ 1\ 1\ | = t^2 - 2 - 2t + 2t - t + 2t = t^2 + t - 2 = 0;$
$t = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow t_1 = -2,\ t_2 = 1.$

$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall t \in R\ -\{-\ 2,\ 1\}}$.

$c)$

Para $t\ =-\ 1$ es $A\ =(-\ 1\ \ -\ 2\ 2\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ 1\ \ -\ 1\ 1\ 1\ )$.

$A\cdot M\ =\ B;\ \ A^{-1}\cdot A\cdot M\ =\ A^{-1}\cdot B;\ \ I\cdot M\ =\ A^{-1}\cdot B \Rightarrow M\ =\ A^{-1}\cdot B.$ (*)

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow -\ F_1\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (-\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow F_2 + F_1\, F_3 \rightarrow F_3 + F_1\right\} \Rightarrow (-\ 1\ 0\ 0\ \ -\ 1\ 1\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 1\ )$

$\Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow F_1 -\ 2F_2\, F_3 \rightarrow F_3 -\ 3F_2\right\} \Rightarrow (1\ \ -\ 2\ 0\ \ -\ 1\ 1\ 0\ 2\ \ -\ 3\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_3 \rightarrow \frac{1}{2}F_3\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(1\ \ -\ 2\ 0\ \ -\ 1\ 1\ 0\ 1\ \ -\frac{3}{2}\ \frac{1}{2}\ \right) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow F_2 + F_3\right\} \Rightarrow \left(1\ \ -\ 2\ 0\ 0\ \ -\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 1\ \ -\frac{3}{2}\ \frac{1}{2}\right.$

$\Rightarrow A^{-1} = \left(1\ \ -\ 2\ 0\ 0\ \ -\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 1\ \ -\frac{3}{2}\ \frac{1}{2}\ \right)$. Sustituyendo este valor en (*):

$M\ = A^{-1}\cdot B\ = \left(1\ \ -\ 2\ 0\ 0\ \ -\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 1\ \ -\frac{3}{2}\ \frac{1}{2}\ \right)\cdot(1\ \ -\ 3\ 0\ 1\ \ -\ 2\ 2\ ) = \left(1\ \ -\ 5\ \ -\ 1\ \frac{1}{2}\right.$

.

$\underline{M\ = \left(1\ \ -\ 5\ \ -\ 1\ \frac{1}{2}\ \ -\ 2\ \ -\frac{7}{2}\right)}$.

****

2º) Sea la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$.

a) Calcule una primitiva de f. Compruebe la solución obtenida.

b) Calcule el área encerrada por f y el eje $y = 0$ y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

----

a)

$$F(x) = \int \frac{x}{\sqrt{1+x}} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \sqrt{1 + x} = t \rightarrow x = t^2 - 1 \; dx = 2t \cdot dt \right\} \Rightarrow \int \frac{t^2-1}{t} \cdot 2t \cdot dt =$$

$$= 2 \cdot \int \left(t^2 - 1\right) \cdot dt = 2 \cdot \left(\frac{t^3}{3} - t\right) + C = \frac{2}{3}t^3 - 2t + C = \frac{2}{3}t \cdot \left(t^2 - 3\right) + C =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{1 + x} \cdot (1 + x - 3) + C = \frac{2}{3}\sqrt{1 + x} \cdot (x - 2) + C.$$

$$\underline{F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x + 1} \cdot (x - 2) + C.}$$

Comprobación:

$$F'(x) = \frac{2}{3} \cdot \left[\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot (x - 2) + \sqrt{x + 1}\right] = \frac{2}{3} \cdot \left[\frac{\sqrt{x+1}}{2(x+1)} \cdot (x - 2) + \sqrt{x + 1}\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x + 1} \cdot \left[\frac{x-2}{2(x+1)} + 1\right] = \frac{2}{3}\sqrt{x + 1} \cdot \frac{x-2+2x+2}{2(x+1)} = \frac{1}{3}\sqrt{x + 1} \cdot \frac{3x}{x+1} = \frac{x}{\sqrt{1+x}} = f(x)$$
.

$$\underline{Queda\ comprobado\ lo\ pedido}.$$

b)

En el intervalo (0, 4) todas las ordenadas de la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ son positivas, por lo cual, al área pedida es la siguiente:

$$S = \int_0^4 f(x) \cdot dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x + 1} \cdot (x - 2)\right]_0^4 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{5} \cdot 3\right) - \left[\frac{2}{3}\sqrt{1} \cdot (-1)\right] =$$

$$= \frac{6\sqrt{5}}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\left(3\sqrt{5} + 1\right).$$

$$\underline{S = \frac{2}{3}\left(3\sqrt{5} + 1\right) u^2 \cong 5,14\ u^2.}$$

****

3º) Sea el punto $P(0,\ 2,\ 2)$. Sea la recta r dada en forma continua $r \equiv \frac{x-2}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$.

$a)$ Escriba unas ecuaciones paramétricas de la recta r.

$b)$ Calcule la distancia de P a r.

$c)$ Calcule un plano perpendicular a r que pase por el punto P.

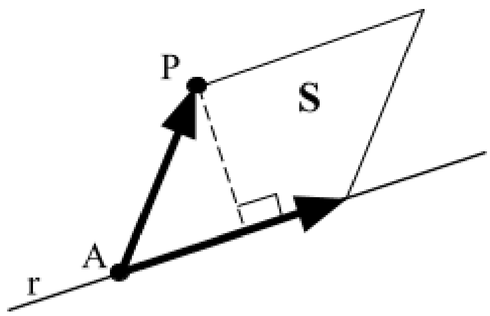
$a)$

$$\underline{r \equiv \begin{cases} x = 2 + 4\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}}.$$

$b)$

La distancia de un punto a una recta puede determinarse teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que forman dos vectores es el módulo de su producto vectorial y, de forma geométrica, es el producto de la base por la altura.

Para una mejor comprensión del proceso se hace un dibujo de la situación.



$$\left. \begin{array}{l} S = \left| \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AP} \right| \\ S = \left| \overrightarrow{v_r} \right| \cdot h \end{array} \right\} \Rightarrow \left| \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AP} \right| = \left| \overrightarrow{v_r} \right| \cdot h \Rightarrow$$

$$\underline{\Rightarrow h = d(P, r) = \frac{\left| \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AP} \right|}{\left| \overrightarrow{v_r} \right|}}.$$

Un punto y un vector director de r son $A(2,\ 0,\ -1)$ y $\overrightarrow{v_r} = (4,\ 1,\ 2)$.

$\overrightarrow{AP} = [P - A] = [(0,\ 2,\ 2) - (2,\ 0,\ -1)] = (-2,\ 2,\ 3)$.

Aplicando la fórmula al punto P y a la recta r:

$$d(P, r) = \frac{\left| \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AP} \right|}{\left| \overrightarrow{v_r} \right|} = \frac{\left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \right\|}{\sqrt{4^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|3i - 4j + 8k + 2k - 4i - 12j|}{\sqrt{16 + 1 + 4}} = \frac{|-i - 16j + 10k|}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{(-1)^2 + (-16)^2 +}}{\sqrt{21}}$$

$$= \frac{\sqrt{1 + 256 + 100}}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{357}}{\sqrt{21}} = \underline{\sqrt{17}\ u \cong 4,12\ u = d(P, r)}.$$

Otra forma de resolver este ejercicio es la siguiente:

El haz de planos perpendiculares a r es: $\alpha \equiv 4x + y + 2z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz α, el plano π que contiene al punto $P(0, 2, 2)$ es el que satisface su ecuación:

$\alpha \equiv 4x + y + 2z + D = 0 \quad P(0, 2, 2) \} \Rightarrow 4 \cdot 0 + 2 + 2 \cdot 2 + D = 0 \Rightarrow D =$

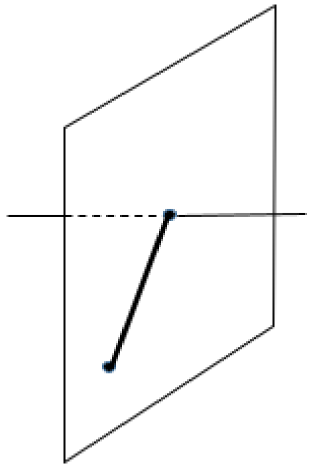
$\Rightarrow \pi \equiv 4x + y + 2z - 6 = 0$.

El punto B, intersección de la recta r con el plano π es la solución del sistema que forman:

$\pi \equiv 4x + y + 2z - 6 = 0 \quad r \equiv \{ x = 2 + 4\lambda \;\; y = \lambda \;\; z = -1 + 2\lambda \} \Rightarrow 4(2$

$8 + 16\lambda + \lambda - 2 + 4\lambda - 6 = 0;\; 21\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow B \equiv A(2, 0, -1)$.



La distancia pedida del punto P a la recta r es equivalente a la distancia entre los puntos B y P, o sea el módulo de $\left|\overrightarrow{BP}\right|$:

$d(P, r) = \left|\overrightarrow{BP}\right| = \sqrt{(0 - 2)^2 + (2 - 0)^2 + (2 + 1)^2} =$

$= \sqrt{4 + 4 + 9} = \sqrt{17}$.

$\underline{d(P, r) = \sqrt{17}\; unidades}$.

$c)$

Calculado en la segunda forma de hallar la distancia del punto a la recta del apartado anterior.

$\underline{\pi \equiv 4x + y + 2z - 6 = 0}$.

****

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

1º) Considere el sistema matricial: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 3a & 2a & 2a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Determine los valores de a para que el sistema sea compatible.

b) Calcule todas las soluciones en el caso en el que sea compatible indeterminado y en el caso de $a = 3$.

----

a)

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, para que un sistema sea compatible es necesario que los rangos de las matrices de coeficientes M y ampliada M' sean iguales.

El rango de la matriz de coeficientes en función de a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 3a & 2a & 2a \end{vmatrix} = 2a + 2a + 3a^2 - 3a - 2a - 2a^2 = a^2 - a = 0;$$

$$a(a - 1) = 0 \Rightarrow a_1 = 0,\ a_2 = 1.$$

$$Para \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 1 \end{cases} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.$$

$Para\ a = 0$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow Rang\ M = 2.$$

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -$$

$$\Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$Para\ a = 0 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.$$

$Para\ a = 1$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow Rang\ M = 2.$$

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{F_1 = F_2\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.$$

$\underline{El\ sistema\ es\ compatible\ \forall a \in R\ -\ \{0\}}.$

$b)$

Se resuelve en primer lugar para $a = 1$; el sistema resulta $x + y + z = 2 \quad x + y + z = 2\ 3x + 2y + 2z = 1\ \}$, que es compatible indeterminado, equivalente al sistema $x + y + z = 2\ 3x + 2y + 2z = 1\ \}$.

$x + y + z = 2\ 3x + 2y + 2z = 1\ \} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow\ x + y = 2 - \lambda\ 3x + 2y = 1 - 2\lambda$

$\Rightarrow x = -\ 3;\ \ y = 2 - \lambda - x = 2 - \lambda + 3 = 5 - \lambda.$

$\underline{Solución: x = -\ 3;\ y = 5 - \lambda; z = \lambda,\ \forall \lambda \in R}.$

Para $a = 3$ el sistema resulta $x + y + z = 2 \quad x + y + 3z = 2\ 9x + 6y + 6z = 1\ \}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|2\ 1\ 1\ 2\ 1\ 3\ 1\ 6\ 6\ |}{3^2-3} = \frac{12+12+3-1-36-12}{9-3} = \frac{15-37}{6} = -\ \frac{22}{6} = -\ \frac{11}{3}.$$

$$y = \frac{|1\ 2\ 1\ 1\ 2\ 3\ 9\ 1\ 6\ |}{6} = \frac{12+1+54-18-3-12}{6} = \frac{55-21}{6} = \frac{34}{6} = \frac{17}{3}.$$

$$z = \frac{|1\ 1\ 2\ 1\ 1\ 2\ 9\ 6\ 1\ |}{6} = \frac{0}{6} = 0.$$

$$\underline{Solución: x = -\ \frac{11}{3}; y = \frac{17}{3}; z = 0.}$$

****

2º) Tenemos la función definida a trozos: $g(x) = \{ \frac{x+1}{x} \ \ si \ \ x < 0 \ 2x^3 - 15x^2 + 36x + 3 \ \ si \ \ x \geq 0$.

$a)$ Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función g en $R - \{0\}$ y determine los máximos y mínimos relativos.

$b)$ Determine si la función es continua en $x = 0$.

$c)$ Haga un esbozo del gráfico de la función en un entorno de $x = 0$.

$a)$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$g'(x) = \{ -\frac{1}{x^2} \ \ si \ \ x < 0 \ 6x^2 - 30x + 36 \ \ si \ \ x \geq 0 .$$

$6x^2 - 30x + 36 = 0; \ x^2 - 5x + 6 = 0; \ x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = 2, \ x_2 = 3.$

Las raíces halladas dividen al intervalo $[0, + \infty)$ en los intervalos siguientes: $(0, 2), (2, 3) \ y \ (3, + \infty)$, donde la expresión $6x^2 - 30x + 36$ es, alternativamente, positiva o negativa.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 1$, el valor de la expresión $6x^2 - 30x + 36$ es: $6 - 30 + 36 > 0$.

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{Decrecimiento: \ g'(x) < 0 \Rightarrow x \in (- \infty, 0) \cup (2, 3)}.$$

$$\underline{Crecimiento: \ g'(x) > 0 \Rightarrow x \in (0, 2) \cup (3, + \infty)}.$$

$b)$

Para que la función sea continua en $x = 0$ es necesario que sus límites laterales en ese punto sean iguales e iguales al valor de la función.

$g(x) = \frac{0+1}{0^-} = -\infty$ $g(x) = \left(2x^3 - 15x^2 + 36x + 3\right) = 3 =$

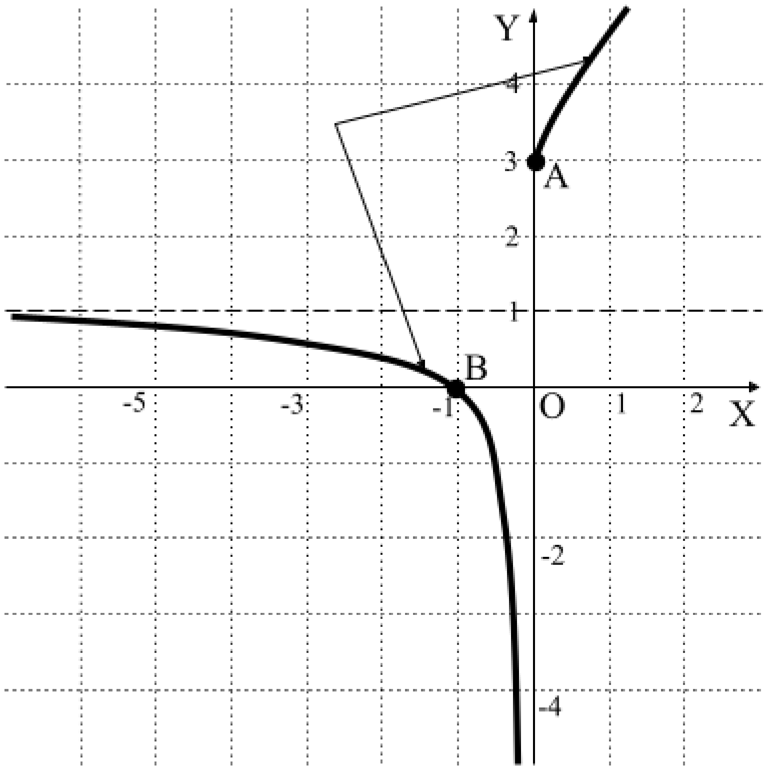
$g(x) \neq g(x)$.

$\underline{La\ función\ g(x)\ es\ discontinua\ para\ x = 0.}$

(Discontinuidad inevitable de salto infinito).

c)

Son puntos de la función $A(0,\ 3)$ y $B(-\ 1,\ 0)$ y son asíntotas las rectas $y = 1$ y $x = 0$. La representación gráfica de la función es, aproximadamente, la que se indica en la figura adjunta.



****

3º) Sean $A(-2,\ 1,\ 0)$, $B(1,\ 1,\ 1)\ y\ C(2,\ 0,\ 2)$ tres puntos de R^3.

a) Calcule la ecuación implícita (general) del plano π que pasa por A, B y C.

b) Calcule la ecuación continua de la recta $\overline{BC}$.

c) Calcule el área del triángulo definido por ABC.

d) Determine, usando el producto escalar, si los vectores $\vec{u} = (3,\ 1,\ 0)$ y $\vec{v} = (4,\ -1,\ 2)$ son ortogonales.

----

a)

Los puntos A, B, y C determinan los vectores:

$$\vec{AB} = [B - A] = [(1,\ 1,\ 1) - (-2,\ 1,\ 0)] = (3,\ 0,\ 1).$$

$$\vec{AC} = [C - A] = [(2,\ 0,\ 2) - (-2,\ 1,\ 0)] = (4,\ -1,\ 2).$$

$$\pi\left(B;\ \vec{AB},\ \vec{AC}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$4(y-1) - 3(z-1) + (x-1) - 6(y-1) = 0;$$

$$(x-1) - 2(y-1) - 3(z-1) = 0;\ \ x - 1 - 2y + 2 - 3z + 3 = 0.$$

$$\underline{\pi \equiv x - 2y - 3z + 4 = 0}.$$

b)

$$\vec{v_r} = \vec{BC} = [C - B] = [(2,\ 0,\ 2) - (1,\ 1,\ 1)] = (1,\ -1,\ 1).$$

$$\underline{r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{1}}.$$

c)

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan los puntos:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\cdot|4j - 3k + i - 6j| =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot|i - 2j - 3k| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{1 + 4 + 9} = \underline{\frac{\sqrt{14}}{2}\ u^2}.$$

$d)$

Dos vectores son ortogonales (perpendiculares) cuando su producto escalar es cero:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (3,\ 1,\ 0) \cdot (4,\ -1,\ 2) = 12 - 1 + 0 = 11 \neq 0.$$

$$\underline{Los\ vectores\ \vec{u}\ y\ \vec{v}\ no\ son\ ortogonales}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

SEPTIEMBRE – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

1.- Debe escogerse una sola de las opciones
2.- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
3.- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.
4.- Los dispositivos que puedan conectarse a internet, o que pueden recibir o emitir información, deben estar apagados durante la celebración del examen.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

1º) Sea la matriz $M = (x\ -\ x\, x\, 1\ -\ x\, x\, x\, 2x\, x\,)$.

a) Calcule el rango de M en función del valor de x.

b) Calcule la inversa de M en el caso de $x = -\ 1$.

----

a)

$$|M| = |x\ -\ x\, x\, 1\ -\ x\, x\, x\, 2x\, x\,| = -\ x^3 + 2x^2 - x^3 + x^3 - 2x^3 + x^2 = -\ 3x^3 + 3x^2 =$$

$$-\ 3x^2(x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = 1.$$

$$\underline{Para\ \{x \neq 0\ x \neq 1\ \} \Rightarrow Rang\ M = 3}.$$

$$Para\ x = 0 \Rightarrow |M| = |0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\,| \Rightarrow \underline{Rang\ M = 1}.$$

$$Para\ x = 1 \Rightarrow |M| = |1\ -\ 1\ 1\ 1\ -\ 1\ 1\ 1\ 2\ 1\,| \Rightarrow |1\ -\ 1\ 1\ 2\,| \neq 0 \Rightarrow \underline{Rang\ M = 2}.$$

b)

$$Para\ x = -\ 1\ es\ M = (-\ 1\ 1\ -\ 1\ 1\ 1\ -\ 1\ -\ 1\ -\ 2\ -\ 1\,).$$

Se obtiene la inversa de M por el método de Gauss-Jordan.

$$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_1 \leftrightarrow F_2\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow F_2 + F_1\ F_3 \rightarrow F_3 + F_1\right\} \Rightarrow (0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_2 \leftrightarrow F_3\right\} \Rightarrow (0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ ) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow -F_2\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (0\ 1\ 0\ 0\ \ -1\ \ -1\ 1\ 1\ 0\ ) \Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow F_1 - F_2\ F_3 \rightarrow F_3 - 2F_2\right\} \Rightarrow (0\ 2\ 1\ 0\ \ -1\ \ -1\ 1\ 3$$

$$\Rightarrow \left\{F_3 \rightarrow -\tfrac{1}{6}F_2\right\} \Rightarrow \left(0\ 2\ 1\ 0\ \ -1\ \ -1\ \ -\tfrac{1}{6}\ \ -\tfrac{1}{2}\ \ -\tfrac{1}{3}\ \right) \Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow F_1 + 3F_3\ F_2 \rightarrow F_2 -$$

$$\Rightarrow \left(-\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ 0\ \tfrac{1}{3}\ 0\ \ -\tfrac{1}{3}\ \ -\tfrac{1}{6}\ \ -\tfrac{1}{2}\ \ -\tfrac{1}{3}\ \right) \Rightarrow \underline{M^{-1} = \left(-\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ 0\ \tfrac{1}{3}\ 0\ \ -\tfrac{1}{3}\ \ -\tfrac{1}{6}\ \ -\right.}$$

.

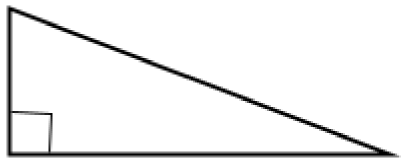
****

2º) a) Calcule el rectángulo de base x cm, altura y cm y diagonal $3\sqrt{2}$ cm cuyo perímetro sea máximo.

b) Calcule la recta tangente a la función $h(x) = x^2 + x$ en el punto $P(1, 2)$.

----

a)



Perímetro: $P(x, y) = x + y + 3\sqrt{2} \Rightarrow Mínimo$.

Por el teorema de Pitágoras: $\left(3\sqrt{2}\right)^2 = x^2 + y^2$.

$y = \sqrt{18 - x^2}$. Sustituyendo en el perímetro:

$$P(x) = x + \sqrt{18 - x^2} + 3\sqrt{2}.$$

El perímetro será mínimo cuando se anule su primera derivada:

$$P'(x) = 1 + \frac{-2x}{2\sqrt{18-x^2}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{18-x^2}} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{x}{\sqrt{18-x^2}};\ \ x = \sqrt{18 - x^2};$$

$x^2 = 18 - x^2;\ \ 2x^2 = 18;\ \ x^2 = 9 \Rightarrow x_1 = -3,\ x_2 = 3.$

El valor negativo carece de sentido lógico, por lo cual: $x = 3$.

$$y = \sqrt{18 - 3^2} = \sqrt{18 - 9} = \sqrt{9} = 3.$$

$\underline{Es\ un\ triángulo\ rectángulo\ isósceles\ de\ catetos\ x = y = 3\ cm\ y\ z = 3\sqrt{2}\ cm.}$

b)

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$h'(x) = 2x + 1 \Rightarrow m = h'(1) = 2\cdot 1 + 1 = 3.$$

$$y - y_0 = m\left(x - x_0\right) \Rightarrow y - 2 = 3\cdot(x - 1) = 3x - 3.$$

$$\underline{Recta\ tangente:\ t \equiv 3x - y - 1 = 0.}$$

****

3º) Sean $\alpha \equiv x + 3y + 2z - 1 = 0$ y $\beta \equiv 2x + 6y + 4z + 3 = 0$ dos planos.

a) Extraiga el vector normal al plano α de su ecuación implícita (general).

b) Calcule unas ecuaciones paramétricas del plano α.

c) Determine la posición relativa de los planos α y β.

d) Calcule la recta normal al plano β que pase por el punto $O(0, 0, 0)$.

----

a)

$\underline{\overrightarrow{n_\alpha} = (1, 3, 2).}$

b)

$\alpha \equiv x + 3y + 2z - 1 = 0 \Rightarrow \{y = \gamma \; z = \delta\} \Rightarrow \underline{\alpha \equiv \{x = 1 + 3\gamma + 2\delta \; y = \gamma}$

.

c)

$\overrightarrow{n_\beta} = (1, 3, 2).$

Los vectores directores de los planos son linealmente dependientes, en este caso iguales, por lo cual los planos α y β son paralelos o coincidentes.

Teniendo en cuenta que $\beta \equiv x + 3y + 2z + \frac{3}{2} = 0$:

$$\underline{Los\ planos\ \alpha\ y\ \beta\ son\ paralelos}.$$

d)

Una recta normal a un plano tiene como vector director a cualquiera que sea linealmente dependiente del vector normal del plano.

La recta r normal al plano β que pase por el punto $O(0, 0, 0)$ tiene la siguiente expresión mediante unas ecuaciones paramétricas:

$$\underline{r \equiv \{x = \lambda \;\; y = 3\lambda \; z = 2\lambda}.$$

****

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

1º) Considere el sistema de ecuaciones $\{x + y + z = 3 \quad 2tx + y + (t + 1)z = 1 \quad (t - 1)x + ty + tz =- 2$ dependiente del parámetro real t.

a) Escriba el sistema de ecuaciones como el siguiente sistema matricial: $A\cdot(x\, y\, z\,) = B$.

b) Clasifique el sistema en función del valor del parámetro t, calculando todas las soluciones en los casos en los que sea compatible.

----

a)

$$\underline{(1\ 1\ 1\ 2t\ 1\ t + 1\ t - 1\ t\ t\,)\cdot(x\, y\, z\,) = (3\ 1\ \ - 2\,)}.$$

b)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A = (1\ 1\ 1\ 2t\ 1\ t + 1\ t - 1\ t\ t\,)$ y $A' = (1\ 1\ 1\ 2t\ 1\ t + 1\ t - 1\ t\ t\ \ \ 3\ 1\ \ - 2\,)$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro t es el siguiente:

$$|A| = |1\ 1\ 1\ 2t\ 1\ t + 1\ t - 1\ t\ t\,| = t + 2t^2 + (t + 1)(t - 1) - (t - 1) - t(t + 1) -$$

$$= t + t^2 - 1 - t + 1 - t^2 - t =- t = 0 \Rightarrow t = 0.$$

$$\underline{Para\ t\neq 0 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$$

$$Para\ t = 0 \Rightarrow A' = (1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ - 1\ 0\ 0\ \ \ 3\ 1\ \ - 2\,) \Rightarrow \left\{F_3 = F_2 - F_1\right\} \Rightarrow Rang\ A' =$$

.

$$\underline{Para\ t = 0 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.\ I.}$$

Se resuelve para $t\neq 0$ por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|3\ 1\ 1\ 1\ 1\ t+1\ -2\ t\ t\,|}{-t} = \frac{3t+t-2(t+1)+2-t-3t(t+1)}{-t} = \frac{3t-2t-2+2-3t^2-3t}{-t} = \frac{-2t-3t^2}{-t} =$$

$$= 3t + 2.$$

$$y = \frac{|1\ 3\ 1\ 2t\ 1\ t+1\ t-1\ -2\ t\,|}{-t} = \frac{t-4t+3(t+1)(t-1)-(t-1)+2(t+1)-6t^2}{-t} =$$

$$= \frac{-3t+3\left(t^2-1\right)-t+1+2t+2-6t^2}{-t} = \frac{-2t+3t^2-3+3-6t^2}{-t} = \frac{-3t^2-2t}{-t} = 3t + 2.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2t & 1 & 1 \\ t-1 & t & -2 \end{vmatrix}}{-t} = \frac{-2+6t^2+(t-1)-3(t-1)-t+4t}{-t} = \frac{-2+6t^2-2t+2+3t}{-t} = \frac{6t^2+t}{-t} =$$

$$= -6t - 1.$$

<u>$Solución: x = 3t + 2,\ y = 3t + 2,\ z = -6t - 1,\ \forall t \in R - \{0\}.$</u>

Se resuelve ahora para $t = 0$. El sistema resulta $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ y + z = 1 \\ -x = -2 \end{cases}$, que es compatible indeterminado. Despreciando la primera ecuación y haciendo $z = \lambda$:

<u>$Solución: x = 2,\ y = 1 - \lambda,\ z = \lambda,\ \forall \lambda \in R.$</u>

****

2º) Sea f la función definida a trozos: $f(x) = \{ax^2 + x + 3 \ \ si \ \ x\leq 3 \ 2x^2 - 3 \ \ si \ \ 3 < x < 5 \quad be^x \quad si \quad x\geq 5$.

a) Calcule los valores de a y b para que la función sea continua en todo R.

b) Si $a = 1,\ b = 3$, calcule el área encerrada bajo la gráfica de f comprendido entre las rectas $x = -1$ y $x = 3$.

c) Calcule los extremos relativos de la función $g(x) = 2x^2 + x + 3$.

----

a)

La función $f(x)$ es continua en $R\ \forall a, b\in R$. Se trata de determinar los valores de a y b para que lo sea en los puntos críticos $x = 3$ y $x = 5$.

Para que la función sea continua en los puntos críticos es necesario que sus límites laterales en esos puntos sean iguales e iguales a los correspondientes valores de la función en esos puntos.

$x = 3\Rightarrow\left\{f(x) \ = \left(ax^2 + x + 3\right) = 9a + 6 = f(3) \ f(x) \ = (2x^2 - 3) \ = 2\cdot 9 - 3 = 1\right.$

$9a = 9\Rightarrow \underline{a = 1}$.

$x = 5\Rightarrow\{f(x) \ = \left(2x^2 - 3\right) = 2\cdot 25 - 3 = 47 \ f(x) \ = \left(be^x\right) = b\cdot e^5 = f(5) \qquad \}$
$\Rightarrow 47 = b\cdot e^5 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{b = \frac{47}{e^5}}$.

b)

$Para\ a = 1\ y\ b = 3\ es\ f(x) = \{x^2 + x + 3 \ \ si \ \ x\leq 3 \ 2x^2 - 3 \ \ si \ \ 3 < x < 5 \quad 3e^x \quad si$
.

En el intervalo $(-1,\ 3)$ la función es $f(x) = x^2 + x + 3$, cuyas ordenadas en el intervalo son todas positivas, por ello, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_{-1}^{3}\left(x^2 + x + 3\right)\cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{-1}^{3} =$$

$$= \left(\frac{3^3}{3} + \frac{3^2}{2} + 3\cdot 3\right) - \left[\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 3\cdot(-1)\right] = 9 + \frac{9}{2} + 9 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 3 =$$

$= 21 + 4 + \frac{1}{3} = 25 + \frac{1}{3} = \frac{75+1}{3} = \frac{76}{3}.$

$$\underline{S = \frac{76}{3} u^2 \cong 25,33 u^2.}$$

$c)$

La función $g(x) = 2x^2 + x + 3$ es una parábola convexa (∪) cuyo vértice, que es un mínimo absoluto, es el siguiente:

$g'(x) = 4x + 1.$ $\qquad g''(x) = 4 > 0 \Rightarrow Mínimo.$

$g'(x) = 0 \Rightarrow 4x + 1 = 0;\ 4x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}.$

$g\left(-\frac{1}{4}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} + 3 = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + 3 = \frac{1-2+24}{8} = \frac{23}{8}.$

$$\underline{Mínimo\ absoluto: V\left(-\frac{1}{4}, \frac{23}{8}\right).}$$

****

3º) Sea π el plano de ecuación vectorial
$\pi \equiv (0,\ 0,\ 1) + s\,(2,\ -1,\ 0) + t\,(2,\ -1,\ 1)$.

a) Calcule la ecuación implícita (general) del plano π.

b) Calcule la ecuación de la recta que pasa por $P(-1,\ 2,\ 4)$ y sea perpendicular a π.

c) Calcule la distancia del punto $P(-1,\ 2,\ 4)$ al plano π.

----

a)

Un punto de π y dos vectores directores son $A(0,\ 0,\ 1)$, $\vec{u} = (2,\ -1,\ 0)$ y $\vec{v} = (2,\ -1,\ 1)$.

$\pi\left(A;\ \vec{u},\ \vec{v}\right) \equiv |x\ y\ z-1\ 2\ -1\ 0\ 2\ -1\ 1| = 0;\ \ -x - 2(z-1) + 2(z-1) - 2y =$

$-x - 2y = 0.$

$$\underline{\pi \equiv x + 2y = 0}.$$

b)

La recta r que pasa por $P(-1,\ 2,\ 4)$ y es perpendicular a π tiene como vector director al vector normal del plano π, que es $\vec{n} = (1,\ 2,\ 0)$.

$$\underline{r \equiv \{x = -1 + \lambda\ y = 2 + 2\lambda\ z = 4}.$$

c)

La distancia de un punto a un plano es $d(P,\ \pi) = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Aplicada al punto $P(-1,\ 2,\ 4)$ y plano $\pi \equiv x + 2y = 0$:

$$d(P,\ \pi) = \frac{|1\cdot(-1) + 2\cdot 2 + 0\cdot 4 + 0|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2}} = \frac{|-1 + 4 + 0|}{\sqrt{1+4}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

$$\underline{d(P,\ \pi) = \frac{3\sqrt{5}}{5}\ unidades.}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE CASTILLA-LA MANCHA

JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puede utilizar cualquier tipo de calculadora.

OPCIÓN A

1º) Dada la función $f(x) = \{ \quad x^2 + a \quad si\, x \leq 2 \;\; -x^2 + bx - 9 \;\; si\, x > 2$:

a) Calcula razonadamente los parámetros $a\, y\, b$ para que $f(x)$ sea derivable en todo R.

b) Enuncia el teorema de Rolle y comprueba si, para los valores hallados en el apartado anterior, la función $f(x)$ verifica las hipótesis del teorema en el intervalo $[-2, 6]$.

----

a)

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto.

La función $f(x)$ es continua $\forall a,\ b \in R$. Se trata de determinar los valores de α y b para que sea derivable en el punto crítico $x = 2$.

Para que la función sea continua en $x = 2$ es necesario que sus límites laterales en ese punto sean iguales e iguales al valor de la función.

$f(x) = \left(x^2 + a\right) = 4 + a = f(2)$ $\qquad f(x) = \left(-x^2 + bx - 9\right) =$

$\Rightarrow 4 + a = 2b - 13;\ a - 2b = -17.$ (1)

La función $f(x)$ es derivable $\forall a,\ b \in R$, excepto para el valor crítico $x = 2$, cuya derivabilidad vamos a forzar determinando los correspondientes valores de $a\, y\, b$.

Una función es derivable en un punto cuando es continua en ese punto y, además, sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales.

$f'(x) = \{ \quad 2x \quad si \quad x \leq 2 \; - 2x + b \; si \; x > 2 .$

$f'(2^-) = 2 \cdot 2 = 4. \quad f'(2^+) = - 2 \cdot 2 + b = - 4 + b.$

$f'(2^-) = f'(2^+) \Rightarrow 4 = - 4 + b \Rightarrow b = 8; \; a - 2 \cdot 8 = - 17 \Rightarrow a = - 1.$

$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ derivable\ en\ R\ para\ a = - 1\ y\ b = 8}.$

$b)$

El teorema de Rolle dice que "si una función $f(x)$ en continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), con $a, b \in R$ y $a < b$, y se cumple que $f(a) = f(b)$, existe al menos un valor c, $a < c < b$ tal que $f'(c) = 0$".

Para $a = - 1 \; y \; b = 8$ es $f(x) = \{ \quad x^2 - 1 \quad si \, x \leq 2 \; - x^2 + 8x - 9 \; si \, x > 2 .$

$f(- 2) = (- 2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3.$

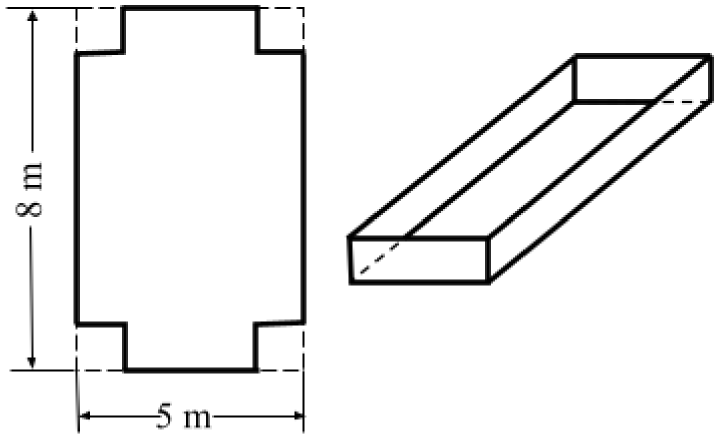
$f(6) = - 6^2 + 8 \cdot 6 - 9 = - 36 + 48 - 9 = 3.$

Teniendo en cuenta que la función $f(x)$ en continua en R, por lo tanto le es aplicable el teorema de Rolle a cualquier intervalo cerrado que se considere, por ejemplo, el intervalo dado $[- 2, 6]$:

$\underline{A\ la\ función\ f(x)\ le\ es\ aplicable\ el\ teorema\ de\ Rolle\ por\ ser\ f(- 2) = f(6)}.$

****

2º) Con una chapa metálica de 8 × 5 metros se desea construir, cortando cuadrados en las esquinas, un cajón sin tapa de volumen máximo. Halla razonadamente las dimensiones de dicho cajón.



De la observación de la figura se deduce que:

$$V(x) = x \cdot (8 - 2x)(5 - 2x) = x \cdot \left(4x^2 - 26x + 40\right) = 4x^3 - 26x^2 + 40x$$

.

Para que el volumen sea máximo es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$V'(x) = 12x^2 - 52x + 40.$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 52x + 40 = 0;\ \ 3x^2 - 13x + 10 = 0;$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169-120}}{6} = \frac{13 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{13 \pm 7}{6} \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = \frac{10}{3}.$$

La solución $x = \frac{10}{3}$ carece de sentido por ser imposible la construcción del cajón por ser $2x = \frac{20}{3} > 5$ metros.

La solución lógica de máximo es para $x = 1$ metro. Se comprueba a continuación:

$$V''(x) = 24x - 52.$$

$$V''(1) = 24 - 52 < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = 1.$$

$\underline{Las\ dimensiones\ del\ cajón\ son\ 6 \times 3 \times 1\ metros\ y\ su\ volumen\ 18\ m^3}.$

****

3º) a) Discute el sistema de ecuaciones lineales $\{ax - y + z = a - 4 \;\; 2x + y - az = a - 1 \; y - z = -3$ en función del parámetro $a \in R$.

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = -1$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = (a \; -1 \; 1 \; 2 \; 1 \; -a \; 0 \; 1 \; -1)$ y $M' = (a \; -1 \; 1 \; 2 \; 1 \; -a \; 0 \; 1 \; -1 \quad a - 4 \; a - 1 \; -3)$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$|M| = |a \; -1 \; 1 \; 2 \; 1 \; -a \; 0 \; 1 \; -1| = -a + 2 + a^2 - 2 = 0; \; a^2 - a = 0; \; a(a - 1) =$

$\Rightarrow a_1 = 0, \; a_2 = 1.$

$\underline{Para \, \{a \neq 0 \; a \neq 1\} \Rightarrow Rang \, M = Rang \, M' = 3 = nº \, incóg. \Rightarrow S. \, C. \, D.}$

$Para \, a = 0 \Rightarrow M' = (0 \; -1 \; 1 \; 2 \; 1 \; 0 \; 0 \; 1 \; -1 \quad -4 \; -1 \; -3) \Rightarrow Rang \, M' \Rightarrow \{C_1$

$\Rightarrow |0 \; -1 \; -4 \; 2 \; 1 \; -1 \; 0 \; 1 \; -3| = -8 - 6 = -14 \neq 0 \Rightarrow Rang \, M' = 3.$

$Para \, a = 1 \Rightarrow M' = (1 \; -1 \; 1 \; 2 \; 1 \; -1 \; 0 \; 1 \; -1 \quad -3 \; 0 \; -3) \Rightarrow Rang \, M' \Rightarrow \{C_1$

$\Rightarrow |1 \; -1 \; -3 \; 2 \; 1 \; 0 \; 0 \; 1 \; -3| = -3 - 6 - 6 = -15 \neq 0 \Rightarrow Rang \, M' = 3.$

$\underline{Para \, \{a = 0 \; a = 1\} \Rightarrow Rang \, M = 2; \; Rang \, M' = 3 \Rightarrow Sistema \, incompatible}.$

b)

Para $a = -1$ el sistema resulta: $-x - y + z = -5 \; 2x + y + z = -2 \quad y - z = -3\}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|-5 \; -1 \; 1 \; -2 \; 1 \; 1 \; -3 \; 1 \; -1|}{(-1)^2 - (-1)} = \frac{5-2+3+3+5+2}{1+1} = \frac{16}{2} = 8.$$

$$y = \frac{|-1\ -5\ 1\ 2\ -2\ 1\ 0\ -3\ -1\ |}{2} = \frac{-2-6-3-10}{2} =- \frac{21}{2} =- \ 10,5.$$

$$z = \frac{|-1\ -1\ -5\ 2\ 1\ -2\ 0\ 1\ -3\ |}{2} = \frac{3-10-2-6}{2} =- \frac{15}{2} =- \ 7,5.$$

$$\underline{Solución: x = 8;\ y =- \ 10,5;\ z =- \ 7,5.}$$

****

4º) Dado el punto $P(2,\ 0,\ -1)$ las rectas $r\equiv\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{0}$ y $s\equiv\{x-y+2z=-4\ x+y=-1$:

a) Determina razonadamente la posición relativa de las rectas $r\ y\ s$.

b) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que pasando por P es paralelo a r y a s.

----

a)

La expresión de la recta s dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$s\equiv\{x-y+2z=-4\ x+y=-1 \quad \Rightarrow z=\lambda\Rightarrow x-y=-4-2\lambda\ x+y=-1$

$x=-\frac{5}{2}-\lambda.$

$y=-1-x=-1+\frac{5}{2}+\lambda=\frac{3}{2}+\lambda\Rightarrow s\equiv\{x=-\frac{5}{2}-\lambda\ y=\frac{3}{2}+\lambda \quad z=\lambda$

.

Un punto y un vector director de r son $A(2,\ -1,\ 0)$ y $\vec{v_r}=(1,\ -2,\ 0)$.

Un punto y un vector director de s son $B\left(-3,\ 2,\ -\frac{1}{2}\right)$ y $\vec{v_s}=(-1,\ 1,\ 1)$.

Los vectores $\vec{v_r}$ y $\vec{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas $r\ y\ s$ se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso se hace lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ linealmente dependiente del vector que tiene como origen el punto $A\in r$ y extremo el punto $B\in s$:

$$\vec{w}'=\vec{AB}=[B-A]=\left[\left(-3,\ 2,\ -\frac{1}{2}\right)-(2,\ -1,\ 0)\right]=\left(-5,\ 3,\ -\frac{1}{2}\right).$$

El vector $\vec{w}$ considerado puede ser, por ejemplo: $\vec{w}=(10,\ -6,\ 1)$.

Según que los vectores $\left\{\vec{v_r},\ \vec{v_s},\ \vec{w}\right\}$ sean o no coplanarios las rectas $r\ y\ s$ se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\left\{\vec{v_r},\ \vec{v_s},\ \vec{w}\right\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$Rang \left\{ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w} \right\} \Rightarrow |1\ -\ 2\ 0\ \ -\ 1\ 1\ 1\ 10\ \ -\ 6\ 1\,| = 1 - 20 + 6 - 2 = -15 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow Rang \left\{ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w} \right\} = 3 \Rightarrow \left\{ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w} \right\}$ *no son coplanarios.*

$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan.}$

$b)$

El plano π pedido tiene como vectores directores a los vectores directores de las rectas y contiene al punto $P(2,\ 0,\ -1)$:

$$\pi\left(P;\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}\right) \equiv |x - 2\ y\ z + 1\ 1\ \ -\ 2\ 0\ \ -\ 1\ 1\ 1\,| = 0;$$

$$-2(x-2) + (z+1) - 2(z+1) - y = 0;\quad -2(x-2) - y - (z+1) = 0;$$

$$-2x + 4 - y - z - 1 = 0.$$

$$\underline{\pi \equiv 2x + y + z - 3 = 0.}$$

****

5º) a) Los operadores A, B y C producen, respectivamente, el 50 %, el 30 % y el 20 % de las resistencias que se utilizan en un laboratorio de electrónica. Resultan defectuosas el 6 % de las resistencias producidas por A, el 5 % de las producidas por B y el 3 % de las producidas por C. Se selecciona al azar una resistencia:

a_1) Calcula razonadamente la probabilidad de que sea defectuosa.

a_2) Si es defectuosa, calcula razonadamente la probabilidad de que proceda del operario A.

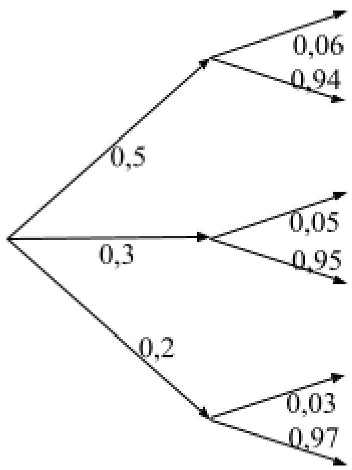
b) Las resistencias se empaquetan al azar en cajas de cinco unidades. Calcula razonadamente la probabilidad de:

b_1) Que en una caja haya exactamente tres resistencias fabricadas por B.

b_2) Que en una caja haya al menos dos fabricados por B

----

a)



a_1)

$$P = P(D) = P(A)\cdot P(D/A) + P(B)\cdot P(D/B) + P(C)\cdot P(D/C) =$$

$$= 0,5\cdot 0,006 + 0,3\cdot 0,05 + 0,2\cdot 0,03 = 0,030 + 0,015 + 0,006 = \underline{0,051}.$$

a_2)

$$P = P(A/D) = \frac{P(A\cap D)}{P(D)} = \frac{P(A)\cdot P(D/A)}{P(A)\cdot P(D/A)+P(B)\cdot P(D/B)+P(C)\cdot P(D/C)} =$$

$$= \frac{0,5\cdot 0,006}{0,5\cdot 0,006+0,3\cdot 0,05+0,2\cdot 0,03} = \frac{0,030}{0,030+0,015+0,006} = \frac{0,030}{0,051} = \underline{0,5882}.$$

b)

b_1) Se trata de una distribución binomial cuya probabilidad es: $P = (n\ x)\cdot p^{r}\cdot q^{n-r}$, siendo $p = 0,3$ la probabilidad de que la resistencia la haya producido el operario B y $q = 1 - p = 1 - 0,3 = 0'7$ la probabilidad de que la resistencia no la haya producido el operario B; n es el número de resistencia del grupo y r es el número de las resistencias del grupo que ha producido el operario B.

$$P = (n\ r)\cdot p^{r}\cdot q^{n-r} = (5\ 3)\cdot 0,3^{3}\cdot 0,7^{5-3} = \frac{5!}{(5-3)!\cdot 3!}\cdot 0,3^{3}\cdot 0,7^{2} =$$

$$= \frac{5\cdot 4\cdot 3!}{2!\cdot 3!}\cdot 0,027\cdot 0,49 = 10\cdot 0,027\cdot 0,49 = \underline{0,1323}.$$

También puede resolverse este apartado de la forma siguiente:

$$P = P(BBBAA)\cdot P_{5}^{3,\,2} + P(BBBAC)\cdot P_{5}^{3} + P(BBBCC)\cdot P_{5}^{3,\,2} =$$

$$= \frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot 0,3^{3}\cdot 0,5^{2} + \frac{5!}{3!}\cdot 0,3^{3}\cdot 0,5\cdot 0,2 + \frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot 0,3^{3}\cdot 0,2^{2} =$$

$$= 0,3^{3}\left(\frac{5\cdot 4}{2}\cdot 0,25 + 20\cdot 0,10 + \frac{5\cdot 4}{2}\cdot 0,04\right) = 0,027\cdot(2,5 + 2 + 0,4) =$$

$$= 0,027\cdot 4,9 = \underline{0,1323}.$$

b_2) La probabilidad pedida es equivalente a la unidad menos la probabilidad de que no haya ninguna producida por el operario B menos la probabilidad de que una haya sido fabricada por el operario B:

$$P = 1 - \left[(5\ 0)\cdot 0,3^{0}\cdot 0,7^{5-0} + (5\ 1)\cdot 0,3^{1}\cdot 0,7^{5-1}\right] =$$

$$= 1 - \left[1\cdot 1\cdot 0,7^{5} + 5\cdot 0,3\cdot 0,7^{4}\right] = 1 - (0,16807 + 0,36015) = 1 - 0,52822 =$$

$$= \underline{0,4718}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Calcula razonadamente los siguientes límites:

$a)\ \frac{x^3+3x^2-4}{x^3+5x^2+8x+4}$. $b)\ \frac{x\cdot L(x+1)}{2-2\cos\cos x}$.

$a)$

$$\frac{x^3+3x^2-4}{x^3+5x^2+8x+4} = \frac{-8+12-4}{-8+20-16+4} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$= \frac{3x^2+6x}{3x^2+10x+8} = \frac{12-12}{12-20+8} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \frac{6x+6}{6x+10} = \frac{-12+6}{-12+10} =$$

$$= \frac{-6}{-2} = 3.$$

$$\underline{\frac{x^3+3x^2-4}{x^3+5x^2+8x+4} = 3.}$$

$b)$

$$\frac{x\cdot L(x+1)}{2-2\cos\cos x} = \frac{0\cdot L1}{2-2\cdot 1} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \frac{1\cdot L(x+1)+x\cdot\frac{1}{x+1}}{0+2x} =$$

$$= \frac{L(x+1)+\frac{x}{x+1}}{2x} = \frac{L1+\frac{0}{1}}{2\cdot 0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \frac{\frac{1}{x+1}+\frac{1\cdot(x+1)-x\cdot 1}{(x+1)^2}}{2\cdot\cos\cos x} =$$

$$= \frac{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}}{2\cdot\cos\cos x} = \frac{\frac{1}{0+1}+\frac{1}{(0+1)^2}}{2\cdot\cos\cos 0} = \frac{1+1}{2\cdot 1} = \frac{2}{2} = 1.$$

$$\underline{\frac{x\cdot L(x+1)}{2-2\cos\cos x} = 1.}$$

****

2º) Dadas las funciones $f(x) =- x^2$ y $g(x) = x^2 - 2x - 4$:

a) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitados por sus gráficas.

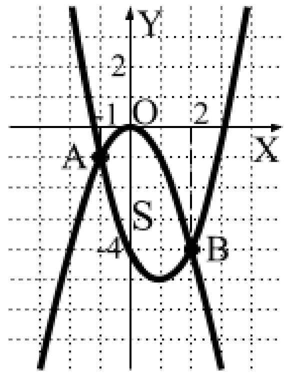
b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de $g(x)$ en el punto de abscisa $x =- 3$.

----

a)

Los puntos de intersección de las curvas son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow - x^2 = x^2 - 2x - 4;\ 2x^2 - 2x - 4 = 0;\ \ x^2 - x - 2 = 0;$$



$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \{x_1 =- 1 \rightarrow A(- 1,\ - 1)\ x_2 = 2 \rightarrow B(2,\ - 4)$$

.

La representación gráfica, aproximada, de la situación se expresa en la figura adjunta.

Por ser las ordenadas de la parábola $f(x) =- x^2$ iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola $g(x) = x^2 - 2x - 4$ en el intervalo del área a calcular y de la observación de la figura se deduce que:

$$S = \int_{-1}^{2} [f(x) - g(x)]dx = \int_{-1}^{2} \left[- x^2 - \left(x^2 - 2x - 4\right)\right]dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} \left(- x^2 - x^2 + 2x + 4\right) \cdot dx = \int_{-1}^{2} \left(- 2x^2 + 2x + 4\right) \cdot dx =$$

$$= \left[- \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 4x\right]_{-1}^{2} = \left[- \frac{2x^3}{3} + x^2 + 4x\right]_{-1}^{2} =$$

$$= \left(- \frac{2 \cdot 2^3}{3} + 2^2 + 4 \cdot 2\right) - \left[- \frac{2 \cdot (-1)^3}{3} + (- 1)^2 + 4 \cdot (- 1)\right] =$$

$= -\frac{16}{3} + 4 + 8 - \frac{2}{3} - 1 + 4 = 15 - 6 = \underline{9\, u^2 = S}.$

$b)$

La ecuación de la recta normal a una curva en un punto viene dada por la ecuación $y - y_0 = -\frac{1}{m'}\left(x - x_0\right)$, donde m' es la derivada de la curva en el punto.

El punto de tangencia es el siguiente:

$g(-3) = (-3)^2 - 2\cdot(-3) - 4 = 9 + 6 - 4 = 11 \Rightarrow P(-3,\ 11).$

La pendiente de la recta normal es la siguiente:

$g'(x) = 2x - 2 \Rightarrow g'(-3) = 2\cdot(-3) - 2 = -6 - 2 = -8.$

$m = \frac{-1}{g'(3)} = \frac{-1}{-8} = \frac{1}{8}.$

$y - 11 = \frac{1}{8}(x + 3);\ \ 8y - 88 = x + 3.$

$\underline{La\ recta\ normal\ pedida\ es: n \equiv x - 8y + 91 = 0}.$

****

3º) Dadas las siguientes matrices cuadradas $A = (2\ 1\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 0\ 1\ 2\ \ -\ 1\ )$, $B = (-\ 1\ 0\ 1\ 2\ \ -\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ )$ y $C = (0\ 1\ 0\ 0\ 3\ 0\ \ -\ 1\ 0\ \ -\ 1\ )$:

$a)$ ¿Tiene inversa la matriz $2I_3 +\ B$? Razona la respuesta.

$b)$ Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $2X\ +\ C\ =\ A\ -\ X\cdot B$.

$a)$

$M\ =\ 2I_3 + B = (2\ 0\ 0\ 0\ 2\ 0\ 0\ 0\ 2\ ) + (-\ 1\ 0\ 1\ 2\ \ -\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ ) = (1\ 0\ 1\ 2\ 1\ 0\ 1\ 0\ 2$

.

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$|M| = \left|2I_3 +\ B\right| = |1\ 0\ 1\ 2\ 1\ 0\ 1\ 0\ 2\ | =\ 2\ -\ 1\ =\ 1 \neq 0.$

$\underline{La\ matriz\ 2I_3 +\ B\ es\ invertible.}$

$b)$

$2X\ +\ C\ =\ A\ -\ X\cdot B;\ \ 2X\ +\ X\cdot B\ =\ A\ -\ C;\ \ X\cdot 2I\ +\ X\cdot B\ =\ A\ -\ C.$

Sacando X factor común por la izquierda en el primer término:

$X\cdot(2I\ +\ B) =\ A\ -\ C;\ \ X\cdot M\ =\ N.$

Multiplicando los dos términos por la derecha por M^{-1}:

$X\cdot M\cdot M^{-1}\ =\ N\cdot M^{-1};\ \ X\cdot I\ =\ N\cdot M^{-1} \Rightarrow \underline{X\ =\ N\cdot M^{-1}}.$ (*)

$N\ =\ A\ -\ C\ = (2\ 1\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 0\ 1\ 2\ \ -\ 1\ ) - (0\ 1\ 0\ 0\ 3\ 0\ \ -\ 1\ 0\ \ -\ 1\ ) = (2\ 0\ 0\ \ -\ 1\ \ -$

.

Se obtiene la inversa de $M = (1\ 0\ 1\ 2\ 1\ 0\ 1\ 0\ 2\ )$ por el método de Gauss-Jordan.

$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow F_2 -\ 2F_1\ F_3 \rightarrow F_3 - F_1\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (1\ 0\ 0\ \ -\ 2\ 1\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow F_1 - F_3\ F_2 \rightarrow F_2 +\ 2F_3\right\} \Rightarrow (2\ 0\ \ -\ 1\ \ -\ 4\ 1\ 2\ \ -$

$\Rightarrow M^{-1} = (2\ 0\ \ -\ 1\ \ -\ 4\ 1\ 2\ \ -\ 1\ 0\ 1\ ).$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de $N\ y\ M^{-1}$:

$$X\ =\ N\cdot M^{-1} = (2\ 0\ 0\ \ -1\ \ -\ 3\ 0\ 2\ 2\ 0\ )\cdot(2\ 0\ \ -1\ \ -\ 4\ 1\ 2\ \ -\ 1\ 0\ 1\ ) = (4\ 0\ \ -\ 2\ 10\ \ -$$

.

$$\underline{X\ =\ (4\ 0\ \ -\ 2\ 10\ \ -\ 3\ \ -\ 5\ \ -\ 4\ 2\ 2\ )}.$$

****

4º) a) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta s, en su forma general o implícita, que contiene a los puntos $P(0,\ 1,\ \ -2)$ y $Q(4,\ \ -3,\ 0)$.

b) Encuentra razonadamente un punto que equidiste de P y Q y que pertenezca a la recta $r\equiv\{x\ =\ 2\ +\ \lambda\ y\ =-\ \lambda\quad z\ =-\ 5\quad ,\lambda\in R$.

----

a)

Los puntos P y Q determinan el vector $\overrightarrow{PQ} = [Q\ -\ P] = (4,\ \ -4,\ 2)$.

Un vector director de s es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{PQ} = (4,\ \ -4,\ 2)$, por ejemplo: $\overrightarrow{v_s} = (2,\ \ -2,\ 1)$.

$s\equiv\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+2}{1}$. $\quad s\equiv\{x\ =-\ y\ +\ 1\qquad y\ -\ 1\ =-\ 2z\ -\ 4$.

La expresión de s por unas ecuaciones generales o implícitas es la siguiente:

$$\underline{s\equiv\{x\ +\ y\ -\ 1\ =\ 0\ \ y\ +\ 2z\ +\ 3\ =\ 0}.$$

b)

El punto medio del segmento que forman los puntos $P(0,\ 1,\ \ -2)$ y $Q(4,\ \ -3,\ 0)$ es $M(2,\ \ -1,-1)$.

El plano π, bisector del segmento $\overline{PQ}$ tiene por expresión general a la ecuación $\pi\equiv 2x\ -\ 2y\ +\ z\ +\ D\ =\ 0$. Teniendo en cuenta que contiene al punto $M(2,\ \ -1,-1)$ tiene que satisfacer su ecuación:

$\pi\equiv 2x\ -\ 2y\ +\ z\ +\ D\ =\ 0\qquad M(2,\ \ -1\ -\ 1)\ \}\Rightarrow 2\cdot 2\ -\ 2\cdot(-\ 1) + (-\ 1) +\ D$
;

$4\ +\ 2\ -\ 1\ +\ D\ =\ 0;\ \ 5\ +\ D\ =\ 0\Rightarrow D\ =-\ 5\Rightarrow \pi\equiv 2x\ -\ 2y\ +\ z\ -\ 5\ =\ 0.$

La intersección del plano $\pi\equiv 2x - 2y + z - 5 = 0$ y la recta $r\equiv\{x\ =\ 2\ +\ \lambda\ y\ =-\ \lambda\quad z\ =-\ 5$ es la solución del sistema que forman:

$\pi\equiv 2x\ -\ 2y\ +\ z\ -\ 5\ =\ 0\qquad r\equiv\{x\ =\ 2\ +\ \lambda\ y\ =-\ \lambda\quad z\ =-\ 5\quad \}\Rightarrow 2(2\ +\ \lambda) -$

$4\ +\ 2\lambda\ +\ 2\lambda\ -\ 5\ -\ 5\ =\ 0;\ \ 4\lambda\ -\ 6\ =\ 0;\ \ 2\lambda\ -\ 3\ =\ 0\Rightarrow\lambda\ =\ \frac{3}{2}.$

El punto T de r que equidista de $P(0,\ 1,\ \ -2)$ y $Q(4,\ \ -3,\ 0)$ es el siguiente:

$$\left\{ x = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} \quad y = -\frac{3}{2} \quad z = -5 \right\} \Rightarrow \underline{T\left(\frac{7}{2},\ -\frac{3}{2},\ -5\right)}.$$

****

5º) a) En mi casa dispongo de dos estanterías A y B. En A tengo 20 novelas, 10 ensayos y 10 libros de matemáticas y en la B tengo 12 novelas y 8 libros de matemáticas. Elijo una estantería al azar y de ella, también al azar, un libro. Calcula razonadamente la probabilidad de que:

a_1) El libro escogido sea de matemáticas.

a_2) Si el libro elegido resultó ser de matemáticas, que fuera de la estantería B.

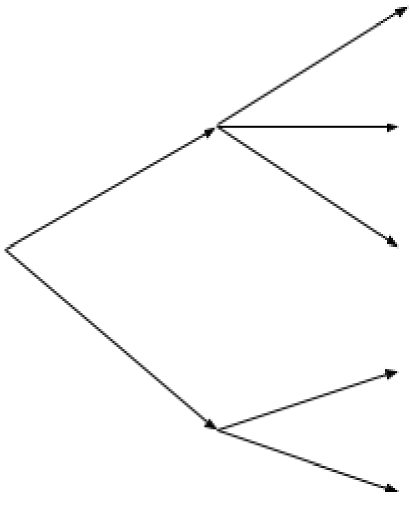
b) El tiempo de espera en una parada de autobús se distribuye según una distribución normal de media 15 minutos y desviación típica 5 minutos.

b_1) Calcula razonadamente la probabilidad de esperar menos de 13 minutos.

b_2) ¿Cuántos minutos de espera son superados por el 33 % de los usuarios? Razona la respuesta.

----

a)



a_1)

$$P = P(M) = P(A) \cdot P(M/A) + P(B) \cdot P(M/B) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{40} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{20} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{8} + \frac{1}{5} = \frac{5+8}{40} = \underline{\frac{13}{40} = 0,3250}.$$

a_2)

$$P = P(B/M) = \frac{P(M \cap B)}{P(M)} = \frac{P(B) \cdot P(M/B)}{P(A) \cdot P(M/A) + P(B) \cdot P(M/B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{20}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{10}{40} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{20}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{8} + \frac{1}{5}}$$

$$= \frac{\frac{1}{5}}{\frac{5+8}{40}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{13}{40}} = \frac{1 \cdot 40}{5 \cdot 13} = \underline{\frac{8}{13} = 0,6154}.$$

$b)$

Datos: $\mu = 15;\ \ \sigma = 5.$

$b_1)$

$P(X < 13).$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-15}{5}.$

$P(X < 13) = P\left(\frac{X-15}{5} < \frac{13-15}{5}\right) = P\left(Z < \frac{-2}{5}\right) = P(Z <- 0,4) =$

$= 1 - P(Z \geq 0,4) = 1 - 0,6554 = \underline{0,3446}.$

$b_2)$

$Z_0 = P\left(Z < Z_0\right) = 1 - 33\ \% = 67\ \% = 0,67.$

Mirando la tabla de distribución Normal $N(0,\ 1)$, a 0,6700 le corresponde en la tabla 0,44.

$\frac{X-15}{5} = 0,44;\ \ X = 15 + 2,2 = 17,2.$

$\underline{El\ 33\ \%\ de\ los\ usuarios\ supera\ los\ 17,2\ minutos\ de\ espera}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE CASTILLA-LA MANCHA

SEPTIEMBRE – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puede utilizar cualquier tipo de calculadora.

OPCIÓN A

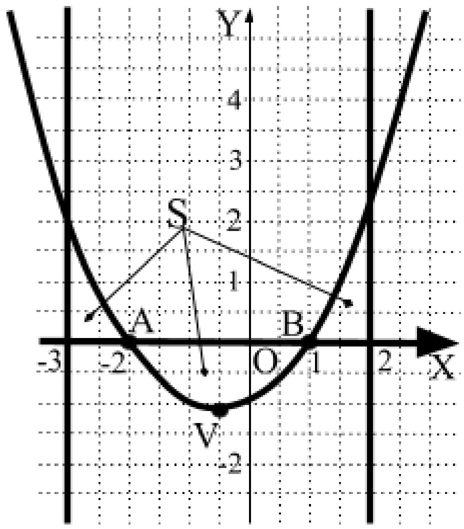
1º) a) Calcula razonadamente el área de la región determinada por la curva de ecuación $f(x) = (x - 1)(x + 2)$, las rectas $x = -3$, $x = 2$ y el eje de abscisas. Esboza dicha región.

b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

----

a)

La función $f(x) = (x - 1)(x + 2) = x^2 + x - 2$ es una parábola convexa ($\cup$) cuyo vértice es el siguiente:



$f'(x) = 2x + 1.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 2 =$

$= \frac{1+2-8}{4} = -\frac{5}{4} \Rightarrow V\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right).$

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_{-3}^{-2} f(x)dx - \int_{-2}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx =$$

$$= \int_{-3}^{-2} f(x)dx + \int_{1}^{-2} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx = [F(x)]_{-3}^{-2} + [F(x)]_{1}^{-2} + [F(x)]_{1}^{2} =$$

$$= F(-2) - F(-3) + F(-2) - F(1) + F(2) - F(1) =$$
$$= 2F(-2) - F(-3) - 2F(1) + F(2) = S. \quad (*)$$

$$F(x) = \int f(x)\cdot dx = \int \left(x^2 + x - 2\right)\cdot dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x.$$

$$F(-2) = \frac{(-2)^3}{3} + \frac{(-2)^2}{2} - 2\cdot(-2) = -\frac{8}{3} + 2 + 4 = 6 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}.$$

$$F(-3) = \frac{(-3)^3}{3} + \frac{(-3)^2}{2} - 2\cdot(-3) = -9 + \frac{9}{2} + 6 = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}.$$

$$F(1) = \frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} - 2\cdot 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 = \frac{2+3-12}{6} = -\frac{7}{6}.$$

$$F(2) = \frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} - 2\cdot 2 = \frac{8}{3} + 2 - 4 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}.$$

Sustituyendo los valores hallados en la expresión (*):

$$S = 2\cdot\frac{10}{3} - \frac{3}{2} - 2\cdot\left(-\frac{7}{6}\right) + \frac{2}{3} = \frac{20}{3} - \frac{3}{2} + \frac{7}{3} + \frac{2}{3} = \frac{29}{3} - \frac{3}{2} = \frac{58-9}{6} = \underline{\frac{49}{6}\, u^2}$$
.

b)

El punto de tangencia es el siguiente:

$$f(2) = (2 - 1)(2 + 2) = 4 \Rightarrow P(2,\ 4).$$

El valor de la pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

$$f'(x) = 2x + 1. \qquad m = f'(2) = 2\cdot 2 + 1 = 4 + 1 = 5.$$

$$y - y_0 = m\left(x - x_0\right) \Rightarrow y - 4 = 5\cdot(x - 2) = 5x - 10$$

$$\underline{Recta\ tangente: t \equiv 5x - y - 6 = 0}.$$

****

2º) $a)$ Determinar el valor de $k\in R$ para que la función $f(x)=\{\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}\ si\ x<0\ 6x+k\ si\ x\geq 0$ sea continua en $x=0$.

$b)$ Enuncia el teorema de Bolzano y comprueba si la ecuación $\cos cos\, x=2-x$ tiene alguna solución real en el intervalo $[0,\ 2\pi]$.

$a)$

Para que la función sea continua en $x=0$ es necesario que sus límites laterales en ese punto sean iguales e iguales al valor de la función.

$$f(x)=\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=e\quad (*)\qquad f(x)=(6x+k)=k=f(0)\ \}\Rightarrow k=e.$$

$$(*)\ \left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\frac{0+1}{0+10}\right)^{\frac{1}{0}}=1^{\infty}\Rightarrow Indet.\ n^{\underline{o}}\ e\Rightarrow\left(\frac{x+1+x-x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=$$

$$=\left(\frac{2x+1-x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(1+\frac{-x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(1+\frac{1}{\frac{2x+1}{x}}\right)^{\frac{1}{x}}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{\frac{2x+1}{x}}\right)^{\frac{1}{x}\cdot\frac{2x+1}{x}\cdot\frac{x}{2x+1}}=\left(1+\frac{1}{\frac{2x+1}{x}}\right)^{\frac{2x+1}{x}\cdot\frac{1}{2x+1}}=$$

$$=\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2x+1}{x}}\right)^{\frac{2x+1}{x}}\right]^{\frac{1}{2x+1}}=\left[\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{2x+1}{x}}\right)^{\frac{2x+1}{x}}\right]^{\frac{1}{2x+1}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x+1}}=e^{2}=e.$$

$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ para\ x=0\ cuando\ k=e.}$

$b)$

El teorema de Bolzano dice que "si $f(x)$ es una función continua en $[a,\ b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c\in(a,\ b)$ tal que $f(c)=0$".

Sea la función $f(x)=2-x-\cos cos\, x$.

Comprobar que la ecuación $\cos cos\, x=2-x$ tiene alguna solución real en el intervalo $[0,\ 2\pi]$ es equivalente a demostrar que la función $f(x)$ tiene alguna raíz real en el mismo intervalo.

La función $f(x)$ es continua en su dominio, que es R, por lo cual le es aplicable el teorema de Bolzano en cualquier intervalo finito que se considere.

Considerando el intervalo $\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right] \in [0,\ 2\pi]$ y aplicando el teorema de Bolzano a $f(x)$:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - \frac{\pi}{2} - \cos cos\ \frac{\pi}{2} \ = 2 - \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{4-\pi}{2} > 0.$$

$$f(\pi) = 2 - \pi - \cos cos\ \pi \ = 2 - \pi + 1 = 3 - \pi < 0.$$

$\underline{Queda\ demuestrado\ que\ \cos cos\ x = 2 - x\ \ tiene\ alguna\ solución\ en\ [0,\ 2\pi]}.$

****

3º) a) Discute el sistema de ecuaciones lineales $ax + y + z = 1\, x + ay + z = 0\, x + y + az = 0 \}$ en función del parámetro $a \in R$.

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 0$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$M = (a\, 1\, 1\, 1\, a\, 1\, 1\, 1\, a\,)$ y $M^{'} = (a\, 1\, 1\;\; 1\, a\, 1\;\; 1\, 1\, a\;\; 1\, 0\, 0\;\;)$.

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$|M| = |a\, 1\, 1\, 1\, a\, 1\, 1\, 1\, a\,| = a^{3} + 1 + 1 - a - a - a = a^{3} - 3a + 2 = 0.$

Resolviendo por Ruffini:

$a_{1} = a_{2} = 1;\ a_{3} = -\ 2.$

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	0
1		1	2	
2	1	2	0	
-2		-2		
	1	0		

$\underline{Para\, \{a \neq 1\ a \neq -\ 2\,\} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M^{'} = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

$a = 1 \Rightarrow M = (1\, 1\, 1\, 1\, 1\, 1\, 1\, 1\, 1\,)\, y\, M^{'} = (1\, 1\, 1\;\; 1\, 1\, 1\;\; 1\, 1\, 1\;\; 1\, 0\, 0\;\;) \Rightarrow \{Rang\ M = 1\ Ra$

.

$\underline{Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ M = 1;\ Rang\ M^{'} = 2 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

$Para\ a = -\ 2 \Rightarrow M^{'} = (2\, 1\, 1\;\; 1\, 2\, 1\;\; 1\, 1\, 2\;\; 1\, 0\, 0\;\;) \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \left\{C_{1},\ C_{2},\ C_{4}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |2\, 1\, 1\, 1\, 2\, 0\, 1\, 1\, 0\,| = 1 - 2 = -\ 1 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M^{'} = 3.$

$\underline{Para\ a = -\ 2 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M^{'} = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

b)

Para $a = 0$ el sistema es $y + z = 1\, x + z = 0\, x + y = 0 \}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ |}{|0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ |} = \frac{-1}{1+1} =- \frac{1}{2}. \quad y = \frac{|0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ |}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$z = \frac{|0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ |}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\underline{Solución: x =- \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{2},\ z = \frac{1}{2}.}$$

****

4º) Dados los planos $\alpha \equiv -x+2y+z+2=0$ y $\beta \equiv -2y+z=0$:

a) Calcula razonadamente el volumen del tetraedro formado por el origen de coordenadas y los puntos de intersección del plano α con los tres ejes de coordenadas.

b) Encuentra razonadamente la ecuación general o implícita de la recta paralela a los planos $\alpha\ y\ \beta$ que pase por el punto $P(0,\ -1,\ 3)$.

----

a)

Los cortes con los ejes coordenados del plano $\alpha \equiv -x+2y+z+2=0$ son los siguientes:

$$Eje\ X \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow -x+2=0;\ \ x=2 \Rightarrow A(2,\ 0,\ 0).$$

$$Eje\ Y \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow 2y+2=0;\ \ y+1=0;\ y=-1 \Rightarrow B(0,\ -1,\ 0).$$

$$Eje\ Z \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow z+2=0;\ \ z=-2 \Rightarrow C(0,\ 0,\ -2).$$

Los vectores que determina el origen de coordenadas con los puntos de corte con los ejes coordenados son los siguientes:

$$\overrightarrow{OA}=(2,\ 0,\ 0). \qquad \overrightarrow{OB}=(0,\ -1,\ 0). \qquad \overrightarrow{OC}=(0,\ 0,\ 2).$$

El volumen del tetraedro que determinan tres vectores es un sexto de su producto mixto en valor absoluto:

$$V=\frac{1}{6}\cdot\left|\left[\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC}\right]\right|=\frac{1}{6}\cdot\left|\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}\cdot|-4|=\underline{\frac{2}{3}\ u^3}.$$

b)

Los vectores normales de los planos son $\overrightarrow{n_\alpha}=(-1,\ 2,\ 1)\ y\ \overrightarrow{n_\beta}=(0,\ -2,\ 1)$.

El vector director de la recta tiene que ser, simultáneamente, perpendicular a los vectores normales de los dos planos; es decir: el vector director de la recta es cualquier vector que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos:

$$\overrightarrow{v'}=\overrightarrow{n_\alpha}\wedge\overrightarrow{n_\alpha}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}=2i+2k+2i+j=4i+j+2k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{v}=(4,\ 1,\ 2).$$

La expresión de la recta r pedida dada por unas ecuaciones continuas es la siguiente: $r \equiv \frac{x}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{2}$. Su expresión por unas ecuaciones implícitas es:

$$r \equiv \left. \begin{matrix} x = 4y + 4 \\ 2y + 2 = z - 3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \underline{r \equiv \left\{ \begin{matrix} x - 4y = 4 \\ 2y - z = -5 \end{matrix} \right.}.$$

****

5º) a) En una empresa hay tres robots A, B y C dedicados a soldar componentes electrónicos en placas de circuito impreso. El 25 % de los componentes son soldados por el robot A, el 20 % por el B y el 55 % por el C. Se sabe que la probabilidad de que una placa tenga un defecto de soldadura es de 0,03 si ha sido soldado por el robot A, 0,04 por el robot B y 0,02 por el robot C.

a_1) Elegida una placa al azar, calcula razonadamente la probabilidad de que tenga un defecto de soldadura.

a_2) Se escoge al azar una placa y resulta tener un defecto de soldadura, calcula razonadamente la probabilidad de que haya sido soldada por el robot C.

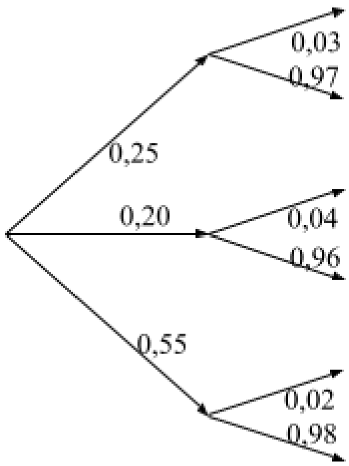
b) Lanzamos cinco veces una moneda trucada. La probabilidad de obtener cara es 0,6. Calcula razonadamente la probabilidad de:

b_1) Obtener exactamente tres caras.

b_2) Obtener más de tres caras.

----

a)



a_1)

$$P = P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C) =$$

$$= 0,25 \cdot 0,03 + 0,20 \cdot 0,04 + 0,55 \cdot 0,02 = 0,0075 + 0,0080 + 0,0110 = \underline{0,0265}.$$

a_2)

$$P = P(C/D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{P(C) \cdot P(D/C)}{P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C)} =$$

$$= \frac{0,55 \cdot 0,02}{0,25 \cdot 0,03 + 0,20 \cdot 0,04 + 0,55 \cdot 0,02} = \frac{0,0110}{0,0075 + 0,0080 + 0,0110} = \frac{0,0110}{0,0265} = \underline{0,4151}.$$

$b)$

$b_1)$

$Datos: p = 0,6;\ \ q = 0,4;\ \ n = 5;\ \ r = 3.$

Aplicando la fórmula de la probabilidad de la distribución binomial, que es la siguiente: $P = (n\, r\,)\cdot p^r \cdot q^{n-r}$.

$$P = (5\ 3\,)\cdot 0,6^3\cdot 0,4^2 = \frac{5!}{(5-3)!\cdot 3!}\cdot 0,216\cdot 0,16 = \frac{5\cdot 4}{2}\cdot 0,03456 = \underline{0,3456}.$$

$b_2)$

$$P = (5\ 4\,)\cdot 0,6^4\cdot 0,4^1 + P = (5\ 5\,)\cdot 0,6^5\cdot 0,4^0 =$$

$$= \frac{5!}{(5-4)!\cdot 4!}\cdot 0,1296\cdot 0,4 + \frac{5!}{(5-5)!\cdot 5!}\cdot 0,0778\cdot 1 = 5\cdot 0,0518 + 1\cdot 0,0778 =$$

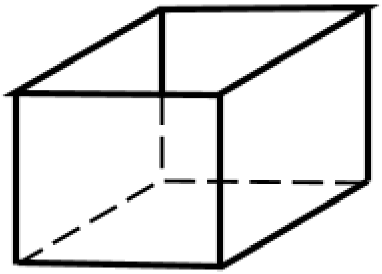
$$= 0,2592 + 0,0778 = \underline{0,3370}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Halla razonadamente las dimensiones más económicas de una piscina de 32 m^3 con un fondo cuadrado, de manera que la superficie de sus paredes y el suelo necesiten la cantidad mínima de material.

Para que la cantidad de material sea mínima tiene que serlo la superficie.



$V = x^2 \cdot h = 32 \Rightarrow h = \frac{32}{x^2}.$ (*)

$S = x^2 + 4 \cdot x \cdot h.$

Sustituyendo el valor de h obtenido en (*):

$$S(x) = x^2 + 4 \cdot x \cdot \frac{32}{x^2} = x^2 + \frac{128}{x} = \frac{x^3+128}{x}.$$

Para que la superficie sea mínima es condición necesaria que su primera derivada sea cero:

$$S'(x) = \frac{3x^2 \cdot x - \left(x^3+128\right) \cdot 1}{x^2} = \frac{3x^3 - x^3 - 128}{x^2} = \frac{2x^3-128}{x^2}.$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^3-54}{x^2} = 0; \;\; 2x^3 - 128 = 0; \;\; x^3 = 64 = 4^3 \Rightarrow x = 3.$$

$$h = \frac{32}{4^2} = \frac{32}{16} = 2.$$

$\underline{El\ material\ es\ mínimo\ para\ 4\ m\ de\ lado\ de\ la\ base\ y\ 2\ m\ de\ altura}.$

Justificación de que se trata de un mínimo:

Una función tiene un mínimo relativo cuando su segunda derivada es positiva para los valores que anulan su primera derivada:

$$S''(x) = \frac{6x^2 \cdot x^2 - \left(2x^3-128\right) \cdot 2x}{x^4} = \frac{6x^3 - 2\left(2x^3-128\right)}{x^3} = \frac{6x^3-4x^3+256}{x^3} = \frac{2x^3+256}{x^3}.$$

$$S''(3) = \frac{2 \cdot 3^3+256}{3^3} > 0 \Rightarrow \underline{Mínimo,\ como\ se\ quería\ justificar}.$$

****

2º) Calcula razonadamente las siguientes integrales:

$a)\ \ I = \int \frac{x^3+2x^2+x-10}{x^2+x-2} \cdot dx.$ $\qquad\qquad b)\ \ I = \int x^2 \cdot Lx \cdot dx.$

Nota: L denota logaritmo neperiano.

$a)$

$$I = \int \frac{x^3+2x^2+x-10}{x^2+x-2} \cdot dx$$

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & +\ 2x^2 & +\ x & -\ 10 & x^2 - 5x \\ \cline{5-5} -\ x^3 & -\ x^2 & +\ 2x & & x + 1 \\ \hline 0 & +\ x^2 & +\ 3x & -\ 10 & \\ & -\ x^2 & -\ x & +\ 2 & \\ \hline & 0 & +\ 2x & -\ 8 & \end{array}$$

$$I = \int \frac{x^3+2x^2+x-10}{x^2+x-2} \cdot dx = \int \left(x + 1 + \frac{2x-8}{x^2+x-2} \right) \cdot dx = \frac{x^2}{2} + x + A. \quad (*)$$

$$A = \int \frac{2x-8}{x^2+x-2} \cdot dx.$$

$$x^2 + x - 2 = 0;\ \ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 1.$$

$$x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1).$$

$$\frac{2x-8}{x^2+x-2} = \frac{M}{x+2} + \frac{N}{x-1} = \frac{Mx - M + Nx + 2N}{(x+2)(x-1)} = \frac{(M+N)x + (-M+2N)}{x^2+x-2} \Rightarrow\ \ M + N = 2\ \ -M + 2N =$$

$$\Rightarrow 3N = -6;\ \ N = -2 \Rightarrow M = 4.$$

$$A = \int \frac{2x-8}{x^2+x-2} \cdot dx = \int \left(\frac{M}{x+2} + \frac{N}{x-1} \right) \cdot dx = \int \left(\frac{4}{x+2} - \frac{2}{x-1} \right) \cdot dx =$$

$$= 4 \cdot L|x+2| - 2 \cdot L|x-1| + C = L\frac{(x+2)^4}{(x-1)^2} + C.$$

Sustituyendo en (*) el valor de A obtenido:

$$I = \int \frac{x^3+2x^2+x-10}{x^2+x-2}\cdot dx = \frac{x^2}{2} + x + L\frac{(x+2)^4}{(x-1)^2} + C.$$

b)

$$I = \int x^2\cdot Lx\cdot dx \Rightarrow \left\{ u = Lx \rightarrow du = \frac{1}{x}\cdot dx \; dv = x^2\cdot dx \rightarrow v = \frac{x^3}{3} \right\} \Rightarrow Lx\cdot\frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\cdot dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\cdot Lx - \frac{1}{3}\cdot\int x^2\cdot dx = \frac{x^3}{3}\cdot Lx - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{9}\cdot(3Lx - 1).$$

$$I = \int x^2\cdot Lx\cdot dx = \frac{x^3}{9}\cdot(3Lx - 1) + C.$$

****

3º) Dadas las matrices $A = (0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ ),\ B = (-\ 1\ 0\ 1\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ )\ y\ C = (1\ 1\ 0\ 0\ 3\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 1\ )$:

a) Calcula razonadamente A^{-1}.

b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $A \cdot X\ +\ B\ =\ C^2$.

----

a)

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow (0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 - F_3\} \Rightarrow (0\ 1\ 0\ 1\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \underline{A^{-1} = (0\ 1\ 0\ 1\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 0\ 1\ )}.$

b)

$A \cdot X\ +\ B\ =\ C^2;\ A \cdot X\ =\ C^2 - B;\ A^{-1} \cdot A \cdot X\ =\ A^{-1} \cdot \left(C^2 - B\right);$

$I \cdot X\ =\ A^{-1} \cdot \left(C^2 - B\right) \Rightarrow \underline{X\ =\ A^{-1} \cdot \left(C^2 - B\right)}.$

$C^2\ =\ C \cdot C\ =\ (1\ 1\ 0\ 0\ 3\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 1\ ) \cdot (1\ 1\ 0\ 0\ 3\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 1\ ) = (1\ 4\ 0\ 0\ 9\ 0\ \ -\ 2\ \ -\ 1\ 1\ )$
.

$C^2 - B\ =\ (1\ 4\ 0\ 0\ 9\ 0\ \ -\ 2\ \ -\ 1\ 1\ ) - (-\ 1\ 0\ 1\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ ) = (2\ 4\ \ -\ 1\ 0\ 10\ 0\ \ -\ 3$
.

$X\ =\ A^{-1} \cdot \left(C^2 - B\right) = (0\ 1\ 0\ 1\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 0\ 1\ ) \cdot (2\ 4\ \ -\ 1\ 0\ 10\ 0\ \ -\ 3\ \ -\ 2\ 1\ ) = (0\ 10\ 0\ 5\ 6$
.

$\underline{X\ =\ (0\ 10\ 0\ 5\ 6\ \ -\ 2\ \ -\ 3\ \ -\ 2\ 1\ )}.$

****

4º) a) Halla razonadamente el valor de $a \in R$ para el cual el plano $\beta \equiv x - y - az + 5 = 0$ es paralelo a la recta $r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{2}$.

b) Calcula razonadamente la distancia de la recta $r \equiv \frac{x-3}{2} = y - 1 = z$ al punto $P(1,\ 2,\ 3)$.

----

a)

Un vector normal del plano β es $\overrightarrow{n} = (1,\ -1,\ -a)$.

Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{v_r} = (3,\ -5,\ 2)$.

El plano β y la recta r serán paralelos cuando el vector normal del plano y el vector director de la recta sean perpendiculares, o sea, cuando su producto escalar sea cero.

$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0 \Rightarrow (1,\ -1,\ -a) \cdot (3,\ -5,\ 2) = 0;\ \ 3 + 5 - 2a = 0;\ \ 8 - 2a = 0;$

$4 - a = 0 \Rightarrow a = 4.$

$$\underline{El\ plano\ \beta\ y\ la\ recta\ son\ paralelos\ para\ a = 4.}$$

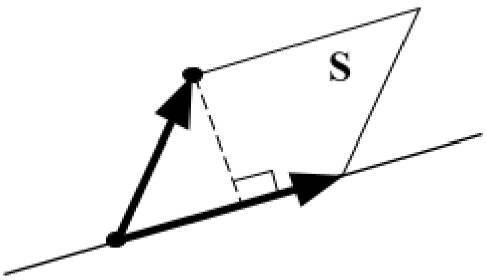
b)

La distancia de un punto a una recta puede determinarse teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que forman dos vectores es el módulo de su producto vectorial y, de forma geométrica, es el producto de la base por la altura.

Un punto y un vector de r son $Q(3,\ 1,\ 0)$ y $\overrightarrow{v_r} = (2,\ 1,\ 1)$.

$\overrightarrow{QP} = [P - Q] = [(1,\ 2,\ 3) - (3,\ 1,\ 0)] = (-2,\ 1,\ 3)$.

Para una mejor comprensión del proceso se hace un dibujo de la situación.



$$S = \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{QP}\right|\ S = \left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot h \,\} \Rightarrow \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{QP}\right| = \left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot h \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{h = d(P,r) = \frac{\left|\vec{v}_r \wedge \vec{QP}\right|}{\left|\vec{v}_r\right|}}.$

Aplicando la fórmula al punto P y a la recta r:

$$d(P,r) = \frac{\left|\vec{v}_r \wedge \vec{QP}\right|}{\left|\vec{v}_r\right|} = \frac{\|i\ j\ k\ 2\ 1\ 1\ -2\ 1\ 3\ \|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \frac{|3i-2j+2k+2k-i-6j|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{|2i-8j+4k|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2^2+(-8)^2+4^2}}{\sqrt{6}} =$$

$$= \frac{\sqrt{4+64+16}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{84}}{\sqrt{6}} = \underline{\sqrt{14}\,u = d(P,r)}.$$

Otra forma de resolver este ejercicio es la siguiente:

El haz de planos $\perp$ a r tiene por ecuación: $\alpha \equiv 2x + y + z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz α, el plano π que contiene al punto $P(1,\ 2,\ 3)$ es el que satisface su ecuación:

$\alpha \equiv 2x + y + z + D = 0 \qquad P(1,\ 2,\ 3)\,\} \Rightarrow 2\cdot 1 + 2 + 3 + D = 0;\ 7 + D =$

$\Rightarrow \pi \equiv 2x + y + z - 7 = 0.$

La expresión de la recta r dada por dos ecuaciones implícitas es la siguiente:

$r \equiv \frac{x-3}{2} = y - 1 = z;\ \ x - 3 = 2y - 2\ y - 1 = 2z\,\} \Rightarrow r \equiv \{x - 2y = 1\ y - 2z$

.

El punto T, intersección de la recta r con el plano π es la solución del sistema que forman:

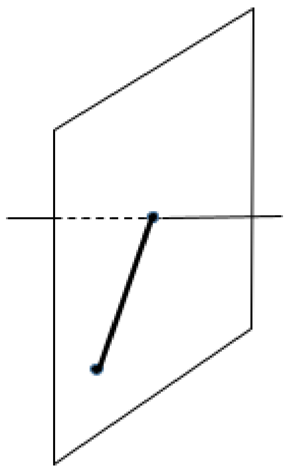
$\pi \equiv 2x + y + z - 7 = 0 \qquad r \equiv \{x - 2y = 1\ y - 2z = 1\ \}\ \ 2x + y + z =$

$2(2y + 1) + y + z = 7 \qquad y - 2z = 1\,\}\ 5y + z = 5\ y - 2z = 1\,\}\ 10y + 2$

.

$1 - 2z = 1 \Rightarrow z = 0;\ \ x = 2\cdot 1 + 1 = 3.$

El punto de corte es $T(3,\ 1,\ 0)$.



La distancia pedida del punto P a la recta r es equivalente a la distancia entre los puntos P y T, o sea el módulo de $\left|\vec{PT}\right|$:

$$d(P,\ r) = \left|\overrightarrow{PT}\right| = \sqrt{(3\ -\ 1)^2 + (1\ -\ 2)^2 + (0\ -\ 3)^2} =$$

$$= \sqrt{2^2 + (-\ 1)^2 + (-\ 3)^2} = \sqrt{4\ +\ 1\ +\ 9} = \sqrt{14}.$$

$$\underline{d(P,\ r) = \sqrt{14}\ unidades}.$$

****

5º) a) De una urna que contiene tres bolas blancas y dos bolas rojas extraemos, sucesivamente y sin reemplazamiento, dos bolas. Calcula razonadamente la probabilidad de:

a_1) Que la segunda bola extraída sea blanca.

a_2) Si la segunda bola extraída ha sido blanca, que la primera fuera roja.

b) El tiempo de duración de las llamadas telefónicas a cierta centralita se distribuye según una distribución normal de media 5 minutos y varianza 4. Calcular razonadamente:

b_1) La probabilidad de que una llamada dure menos de 4,5 minutos.

b_2) El tiempo de duración que no es superado por el 33 % de las llamadas.

----

a)

a_1)

$$P = P(BB) + P(RB) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20} + \frac{6}{20} = \frac{12}{20} = \underline{\frac{3}{4} = 0,75}.$$

a_2)

$$P = P(2^{a}B) = \frac{P(1^{a}R \cap 2^{a}B)}{P(2^{a}B)} = \frac{P(1^{a}R) \cdot P(2^{a}B)}{P(BB)+P(RB)} = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{\frac{6}{20}}{\frac{6}{20} + \frac{6}{20}} = \frac{6}{12} =$$

$$= \underline{\frac{1}{2} = 0,5}.$$

b)

b_1)

Datos: $\mu = 5; \ \ \sigma = 4.$

$P(X < 4,5).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-5}{4}.$

$$P(X < 4,5) = P\left(\frac{X-5}{4} < \frac{4,4-5}{4}\right) = P\left(Z < \frac{-0,5}{4}\right) = P(Z < -0,125) =$$

$$= 1 - P(Z \geq 0,125) = 1 - 0,5497 = \underline{0,4503}.$$

b_2)

$$Z_0 = P\left(Z < Z_0\right) = 1 - 33\ \% = 67\ \% = 0,67.$$

Mirando la tabla de distribución Normal $N(0,\ 1)$, a 0,6700 le corresponde en la tabla 0,44.

$\frac{X-5}{4} = 0,44;\ \ X = 5 + 1,76 = 6,76.$

$\underline{El\ 33\ \%\ de\ los\ usuarios\ no\ supera\ los\ 6,76\ minutos\ por\ llamada.}$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN

JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cuatro ejercicios de la misma en el orden que desee.
2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de calculadoras no programables (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).
CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

1º) Sean $A = (1\ \ -4\ \ -1\ 3)$ y $B = (1\ \ -1\ \ -1\ 1)$.

$a)$ Estudiar si A y B tienen inversa y calcularlas cuando sea posible.

$b)$ Determinar X tal que $AX = 2B + I$ siendo $I = (1\ 0\ 0\ 1)$.

$a)$

$$|A| = |1\ \ -4\ \ -1\ 3| = 3 - 4 = -1 \Rightarrow \underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible}.$$

$A^t = (1\ \ -1\ \ -4\ 3)$. $\qquad Adj.\ de\ A^t = (3\ 4\ 1\ 1)$.

$$\underline{A^{-1} = -(3\ 4\ 1\ 1)}.$$

$$|B| = |1\ \ -1\ \ -1\ 1| = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \underline{La\ matriz\ B\ no\ es\ invertible}.$$

$b)$

$$AX = 2B + I = M;\ A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot M;\ I\cdot X = A^{-1}\cdot M \Rightarrow \underline{X = A^{-1}\cdot M}.$$

$M = 2B + I = 2\cdot(1 \ -1 \ -1\ 1) + I = (2 \ -2 \ -2\ 2) + (1\ 0\ 0\ 1) = (3 \ -2 \ -2$
.

$$X = A^{-1}\cdot M = -(3\ 4\ 1\ 1)\cdot(3 \ -2 \ -2\ 3) = -(4\ 6\ 1\ 1).$$

$$\underline{X = (-4 \ -6 \ -1 \ -1)}.$$

****

2º) Determinar la recta r que es paralela al plano $\pi \equiv x - y - z = 0$ y que corta perpendicularmente a la recta $s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{-4}$ en el punto $P(2, \ -1, \ -2)$.

Un vector director de la recta s es $\overrightarrow{v_s} = (1, \ 2, \ -4)$.

Un vector normal del plano π es $\overrightarrow{n} = (1, \ -1, \ -1)$.

La recta r, por ser perpendicular al plano π, tiene como vector a cualquiera que sea linealmente dependiente del vector normal del plano y por ser perpendicular a s sus vectores directores también lo son; es decir: $\overrightarrow{v_r}$ tiene que ser perpendicular simultáneamente a $\overrightarrow{v_s}$ y a $\overrightarrow{n}$, o lo que es lo mismo: linealmente dependiente del producto vectorial de estos vectores.

$$\overrightarrow{v'_r} = |i \ j \ k \ 1 \ 2 \ -4 \ 1 \ -1 \ -1| = -2i - 4j - k - 2k - 4i + j = -6i - 3j - 3j =$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (2, \ 1, \ 1).$$

La expresión de r dada, por ejemplo, por unas ecuaciones paramétricas es:

$$\underline{r = \{x = 2 + 2\lambda \ y = -1 + \lambda \ z = -2 + \lambda}.$$

****

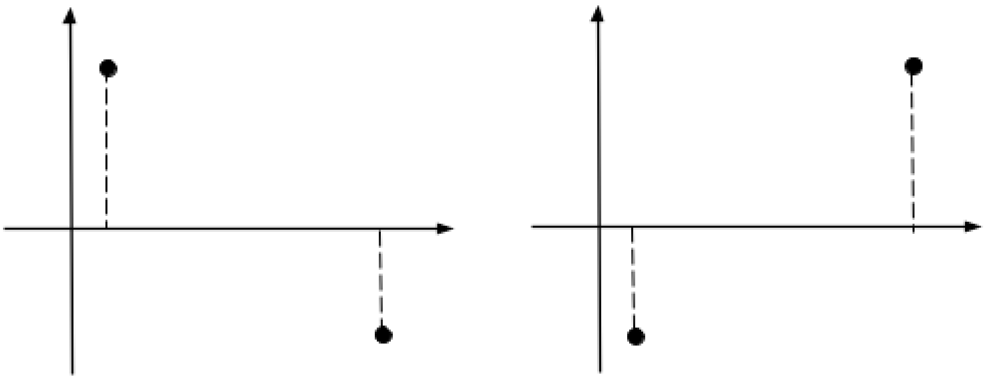
3º) $a)$ Enunciar el teorema de Bolzano e interpretarlo geométricamente.

$b)$ Encontrar un intervalo en el que $P(x) = x^6 + x^4 - 1$ tenga al menos una raíz.

$a)$

El teorema de Bolzano dice que "si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$".

La interpretación gráfica del Teorema de Bolzano es la indicada en las figuras.



$b)$

La función $P(x)$ es continua en su dominio, que es R, por lo cual le es aplicable el teorema de Bolzano en cualquier intervalo cerrado que se considere, por ejemplo, $[0, 1]$:

$P(0) = 0 + 0 - 1 = -1 < 0$ $\qquad$ $P(1) = 1^6 + 1^4 - 1 = 1 + 1 - 1 = 1 > 0$

.

$\underline{La\ función\ P(x) = x^6 + x^4 - 1\ tiene\ al\ menos\ una\ raiz\ real\ en\ [0, 1]}.$

****

4º) $a)$ Calcular la recta tangente a la curva $f(x) = 4e^{x-1}$ en el punto $P[1,\ f(1)]$.

$b)$ Calcular el área de la región limitada en el primer cuadrante por la gráfica de la función $g(x) = x^3$ y la recta $y = 4x$.

$a)$

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = f(x) = 4e^{x-1} \Rightarrow m = f'(1) = 4 \cdot e^{1-1} = 4 \cdot e^0 = 4 \cdot 1 = 4.$$

$$f(1) = 4 \cdot e^{1-1} = 4 \cdot e^0 = 4 \cdot 1 = 4 \Rightarrow P(1,\ 4).$$

$$y - y_0 = m\left(x - x_0\right) \Rightarrow y - 4 = 4 \cdot (x - 1) = 4x - 4.$$

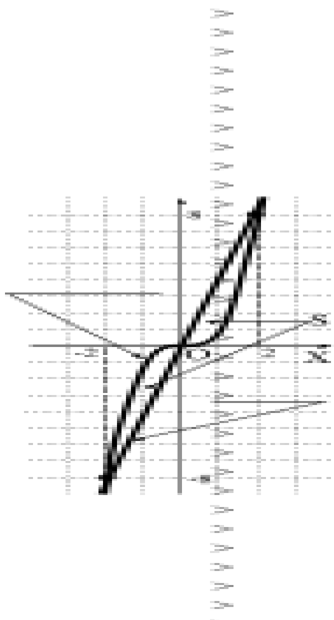
$$\underline{Recta\ tantenge: t \equiv 4x - y = 0.}$$

$b)$

Las abscisas de los puntos de corte de la curva y la recta son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$x^3 = 4x;\ \ x^3 - 4x = 0;\ \ x\left(x^2 - 4\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2.$$



Los puntos de corte de la función y la recta son los siguientes: $A(-2,\ -8),\ O(0,\ 0)\ y\ B(2,\ 8)$.

Nótese que, tanto la función como la recta son simétricas con respecto al origen. Por otra parte, en el intervalo $(0,\ 2)$ las ordenadas de la recta son mayores que las correspondientes ordenadas de la función.

Teniendo en cuenta lo anterior, la superficie S a calcular es la siguiente:

$$S = 2 \cdot \int_0^2 \left(4x - x^3\right) \cdot dx = \left[\frac{4x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \left(2 \cdot 2^2 - \frac{2^4}{4}\right) - 0 =$$

$$= 8 - 4 = 4.$$

$$\underline{S = 4\,u^2.}$$

****

5º) Se lanzan dos dados (con forma cúbica) al aire. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los puntos sea 8?

El espacio muestral es: $E = \{11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16\ 21,\ 22,\ 23,\ 24,\ 25,\ 26\ 31,\ 32,\ 33,\ 34,\ 35,\ 36\ 41,$
.

Los casos favorables aparecen sombreados en la siguiente expresión del espacio vectorial:
$E = \{11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16\ 21,\ 22,\ 23,\ 24,\ 25,\ 26\ 31,\ 32,\ 33,\ 34,\ 35,\ 36\ 41,\ 42,\ 43,$

Aplicando la regla de Laplace:

$$P = \frac{Casos\ favorables}{Casos\ posibles} = \underline{\frac{5}{36} = 0,139}.$$

****

OPCIÓN B

1º) $a)$ Discutir, según el valor del parámetro λ, el sistema $\{x + \lambda y + \lambda z = 1\ x + y + z = 1 \quad x + 2y + 4z = 2$.

$b)$ Resolverlo para $\lambda = 1$.

$a)$

Las matrices de coeficientes y ampliada en función de λ son las siguientes:

$M = (1\ \lambda\ \lambda\ 1\ 1\ 1\ 1\ 2\ 4\ )$ y $M' = (1\ \lambda\ \lambda\ 1\ 1\ 1\ 1\ 2\ 4 \quad 1\ 1\ 2\ )$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro λ es el siguiente:

$|M| = |1\ \lambda\ \lambda\ 1\ 1\ 1\ 1\ 2\ 4\ | = 4 + 2\lambda + \lambda - \lambda - 2 - 4\lambda = 0; \quad - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda =$

.

$\underline{Para\ \lambda \neq 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M^{'} = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

$Para\ \lambda = 1 \Rightarrow M^{'} = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 2\ 4 \quad 1\ 1\ 2\ ) \Rightarrow \{F_1 = F_2\} \Rightarrow Rang\ M^{'} = 2.$

$\underline{Para\ \lambda = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M^{'} = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

$b)$

Para $\lambda = 1$ el sistema es $x + y + z = 1 \quad x + y + z = 1\ x + 2y + 4z = 2\ \}$, equivalente a $x + y + z = 1\ x + 2y + 4z = 2\ \}$, que es compatible indeterminado. Haciendo $z = \mu$:

$x + y = 1 - \mu\ x + 2y = 2 - 4\mu\ \} \quad - x - y = - 1 + \mu \ \ x + 2y = 2 - 4\mu\ \} \Rightarrow y$

.

$x + y = 1 - \mu \Rightarrow x + 1 - 3\mu = 1 - \mu; \ \ x = 2\mu.$

$\underline{Solución: x = 2\mu,\ y = 1 - 3\mu,\ z = \mu,\ \forall \mu \in R.}$

****

2º) Dado el plano $\pi\equiv 3x + y + z - 2 = 0$ y los puntos $P(0, 1, 1)$ y $Q(2, -1, -3)$ que pertenecen al plano π, determinar la recta r del plano π que pasa por el punto medio de P y Q y es perpendicular a la recta que contiene a estos puntos.

El punto medio de los puntos $P(0, 1, 1)$ y $Q(2, -1, -3)$ es el siguiente:

$$x = \frac{0+2}{2} = 1;\ y = \frac{1-1}{2} = 0;\ \ z = \frac{1-3}{2} = -1 \Rightarrow M(1, 0, -1).$$

Los puntos $P(0, 1, 1)$ y $Q(2, -1, -3)$ determinan el vector:

$$\overrightarrow{PQ} = [Q - P] = [(2, -1, -3) - (0, 1, 1)] = (2, -2, -4).$$

El vector normal del plano π es $\overrightarrow{n} = (3, 1, 1)$.

El vector director de la recta r es, al mismo tiempo, perpendicular a los vectores $\overrightarrow{n}$ y $\overrightarrow{PQ}$. Un vector perpendicular a dos vectores dados es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los dos vectores.

$$\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{PQ} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -4i + 2j - 6k - 2k + 2i + 12j = -2i + 14j$$
.

Un vector director de la recta r es, por ejemplo, $\overrightarrow{v_r} = (1, -7, 4)$.

La recta r, que contiene a $M(1, 0, -1)$, dada, por ejemplo, por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$\underline{r\equiv\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -7\lambda \\ z = -1 + 4\lambda \end{cases}.}$$

****

3º) a) Dado el polinomio $P(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x + C$, hallar C para que el valor de $P(x)$ en su mínimo relativo sea 1.

b) Calcular $(x \cdot Lx)$.

----

a)

El polinomio $P(x)$ puede considerarse a efectos de máximos y mínimos relativos como la función $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x + C$.

Para que una función polinómica tenga un mínimo relativo son condiciones necesarias que se anule su primera derivada y sea positiva su segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$f'(x) = x^2 - 3x + 2.$ $\qquad f''(x) = 2x - 3.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0;\ x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 2.$

$f''(1) = 2 \cdot 1 - 3 = 2 - 3 = -1 < 0 \Rightarrow$ Máximo relativo para $x = 1$.

$f''(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 4 - 3 = 1 > 0 \Rightarrow$ Mínimo relativo para $x = 2$.

$P(2) = 1 \Rightarrow \frac{2^3}{3} - \frac{3 \cdot 2^2}{2} + 2 \cdot 2 + C = 1;\ \frac{8}{3} - 6 + 4 + C = 1;\ \frac{8}{3} - 2 + C = 1;$

$8 - 6 + 3C = 3;\ 2 + 3C = 3;\ 3C = 1 \Rightarrow \underline{C = \frac{1}{3}}.$

b)

$(x \cdot Lx) = 0 \cdot L0 = 0 \cdot (-\infty) \Rightarrow Indet. \Rightarrow \frac{Lx}{\frac{1}{x}} = \frac{L0}{\frac{1}{0}} = \frac{-\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow$

$\Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x = -0.$

$$\underline{(x \cdot Lx) = 0^-}.$$

****

4º) Sea $f(x) = \{(x - 1)^2 \ si \ x \leq 1 \ a + Lx \ si \ x > 1$.

a) Encontrar a para que la función sea continua.

b) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de $f(x)$ y las rectas $x = 1$ e $y = 1$.

----

a)

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 0$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de a para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

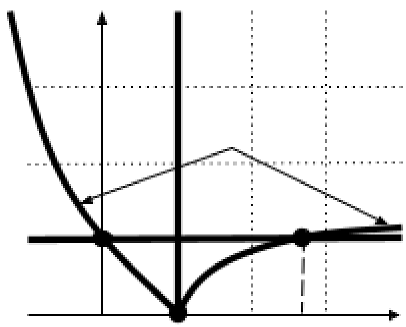
$Para\, x = 1 \Rightarrow \{f(x) = (x - 1)^2 = 0 = f(1) \quad f(x) = (a + Lx) = a + L1 =$

$\Rightarrow f(x) = f(x) = f(1) \Rightarrow \underline{a = 0}$.

b)

La función resulta: $f(x) = \{(x - 1)^2 \ si \ x \leq 1 \ 1 + Lx \ si \ x > 1$.

Para la representación gráfica de la función se tiene en cuenta que en el intervalo $(-\infty, 1]$ la función es la parábola $y = (x - 1)^2$, que es una parábola convexa ($\cup$) que corta al eje de ordenadas en el punto $A(0, 1)$ y cuyo vértice es el punto $B(1, 0)$. En el intervalo $(1, +\infty)$ la función es una rama parabólica de origen el punto B y contiene al punto $C(e, 1) \approx C(2'73, 1)$.



La representación gráfica, aproximada, es la que indica la figura adjunta.

La superficie pedida se deduce de la observación de la figura, teniendo en cuenta que sus puntos tienen todos ordenadas positivas; es la siguiente:

$$S = \int_0^1 \left[1 - (x - 1)^2\right] dx = \int_0^1 \left[1 - \left(x^2 - 2x + 1\right)\right] dx = \int_0^1 \left(-x^2 + 2x\right) dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\right]_0^1 = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^1 = \left(-\frac{1^3}{3} + 1^2\right) - 0 = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{-1+3}{3} = \underline{\frac{2}{3} u^2 = S}$$

.

****

5º) La probabilidad de obtener cara al lanzar una moneda es $\frac{1}{2}$. ¿Cuál es la probabilidad de sacar 3 caras en tres lanzamientos?

$$P = P(CCC) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\frac{1}{8}}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN

SEPTIEMBRE – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cuatro ejercicios de la misma en el orden que desee.
2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de calculadoras no programables (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).
CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

1º) $a)$ Sea $M = (1\ 2\ 3\ a\ )$. Estudiar, en función del parámetro a, cuando M posee inversa.

$b)$ Siendo $A = (1\ 2\ 3\ 7\ )$, calcular $A^2\ y\ A^{-1}$.

$a)$

Una función tiene inversa cuando su determinante es distinto de cero.

$|A| = |1\ 2\ 3\ a\ | = a - 6 = 0 \Rightarrow a = 6.$

$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall a \in R - \{6\}}.$

$b)$

$A^2 = A \cdot A = (1\ 2\ 3\ 7\ ) \cdot (1\ 2\ 3\ 7\ ) = \underline{(7\ 16\ 24\ 54\ )}.$

La inversa de A se obtiene por el método de Gauss-Jordan.

$(A/I) = (1\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow F_2 - 3F_1\right\} \Rightarrow (1\ 0\ \ -3\ 1\ ) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{ F_1 \to F_1 - 2F_2 \right\} \Rightarrow (7 \ - \ 2 \ - \ 3 \ 1) \Rightarrow \underline{A^{-1} = (7 \ - \ 2 \ - \ 3 \ 1)}.$$

****

2º) a) Consideremos los puntos $P(-1, -4, 0)$, $Q(0, 1, 3)$ y $R(1, 0, 3)$. Hallar el plano π que contiene a los puntos P, Q y R.

b) Halla a para que el punto $S(3, a, 2)$, pertenezca al plano $\pi \equiv x + y - 2z + 5 = 0$.

----

a)

Los puntos P, Q y R determinan los siguientes vectores:

$\overrightarrow{PQ} = [Q - P] = [(0, 1, 3) - (-1, -4, 0)] = (1, 5, 3).$

$\overrightarrow{PR} = [R - P] = [(1, 0, 3) - (-1, -4, 0)] = (2, 4, 3).$

$\pi\left(P; \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}\right) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y+4 & z \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0;$

$15(x + 1) + 6(y + 4) + 4z - 10z - 12(x + 1) - 3(y + 4) = 0;$

$3(x + 1) + 3(y + 4) - 6z = 0; \ (x + 1) + (y + 4) - 2z = 0.$

$$\underline{\pi \equiv x + y - 2z + 5 = 0}.$$

b)

El punto $S(3, a, 2)$ pertenecerá al plano $\pi \equiv x + y - 2z + 5 = 0$ cuando satisfaga su ecuación:

$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x + y - 2z + 5 = 0 \\ S(3, a, 2) \end{array}\right\} \Rightarrow 3 + a - 2 \cdot 2 + 5 = 0; \ 8 +$

$4 + a = 0 \Rightarrow a = -4.$

$$\underline{El\ punto\ S\ está\ contenido\ en\ el\ plano\ \pi\ para\ a = -4}.$$

****

3º) a) Dada la función $f(x) = \{ \quad x \quad si \quad x < 0\, x^2 + ax, \quad si \quad x \geq 0$, calcular a para que f sea derivable en $x = 0$.

b) Hallar a, b y c para que la función $f(x) = ax^2 + b \cdot sen\, x + c$ verifique $f(0) = 0$,
$f'(0) = 1\ y\ f''(0) = 2$.

----

a)

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para el valor $x = 0$ cuya continuidad se va a forzar, para lo cual, se va a de determinar el correspondiente valor de a.

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$ es necesario que sus límites laterales en ese punto sean iguales e iguales al valor de la función:

$$f(x) \ = x = 0 \qquad\qquad f(x) \ = \left(x^2 + ax\right) = 0 = f(0) \ \} \Rightarrow f(x) \ = f(0) =$$

$\Rightarrow$ La función $f(x)$ es continua en $x = 0$, $\forall a \in R$.

Una función es derivable en un punto cuando es continua en ese punto y, además, sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales.

Se va a determinar ahora cuál o cuáles de los valores de a hacen derivable a la función para $x = 0$:

$$f'(x) = \{1 \ \ si\, x < 0\ 2x + a\, si\, x \geq 0 .$$

$$f'\left(0^+\right) = 1. \qquad f'\left(0^-\right) = a.$$

$$f'\left(0^-\right) = f'\left(0^+\right) \Rightarrow a = 1.$$

<u>*La función $f(x)$ es derivable en $x = 0$ para $a = 1$*</u>.

b)

$$f(0) = 0 \Rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot sen\, 0 + c = 0; \ \ 0 + 0 + c = 0 \Rightarrow \underline{c = 0}.$$

$$f'(x) = 2ax + b \cdot \cos cos\, x .$$

$$f'(0) = 1 \Rightarrow 2a \cdot 0 + b \cdot \cos cos\, 0 \ = 1; \ \ 0 + b \cdot 1 = 1 \Rightarrow \underline{b = 1}.$$

$f''(x) = 2a - 1 \cdot x = 2a - sen\, x.$

$f''(0) = 2 \Rightarrow 2a - sen\, 0 = 2;\ \ 2a - 0 = 2;\ \ 2a = 2 \Rightarrow \underline{a = 1}.$

****

4º) $a)$ Calcular $\frac{e^x - e^{(x^2)}}{x}$.

$b)$ Hallar el área de la región del plano comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2$ y $g(x) = x^2 - 2$.

$a)$

$$\frac{e^x - e^{(x^2)}}{x} = \frac{e^0 - e^{(0^2)}}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \frac{e^x - 2x \cdot e^{(x^2)}}{1} =$$

$$\frac{e^0 - 2 \cdot 0 \cdot e^{(0^2)}}{1} = \frac{1-0}{1} = 1.$$

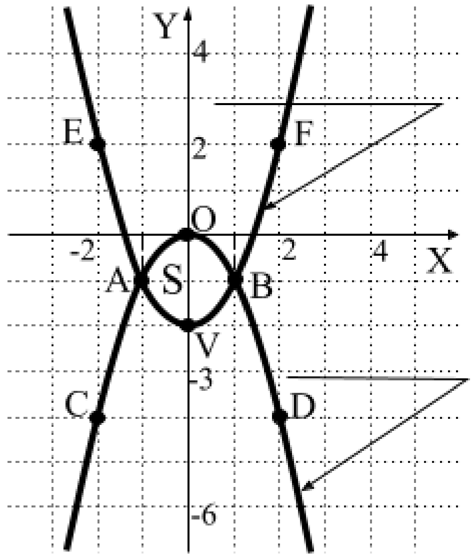
$$\underline{\frac{e^x - e^{(x^2)}}{x} = 1.}$$

$b)$

Las abscisas de los puntos de intersección de las curvas son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$-x^2 = x^2 - 2;\ 2x^2 - 2 = 0;\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \{x_1 = -1 \rightarrow A(-1,\ -1)\ x_2 = 1 \rightarrow B$$

.



La parábola $f(x) = -x^2$, cuyo vértice es el origen, también tiene otros puntos, como por ejemplo, $C(-2,\ -4)\ y\ D(2,\ -4)$.

La parábola $g(x) = x^2 - 2$ tiene como vértice al punto $V(0,\ -2)$. Otros puntos de la parábola son $E(-2,\ 2)\ y\ F(2,\ 2)$.

La representación gráfica, aproximada, de la situación se expresa en la figura adjunta.

Por ser las ordenadas de la parábola $f(x)$ iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola $g(x)$ en el intervalo del área a calcular y de la observación de la figura se deduce que:

$$S = \int_{-1}^{1} [f(x) - g(x)] \cdot dx = \int_{-1}^{1} \left[-x^2 - \left(x^2 - 2\right)\right] \cdot dx = \int_{-1}^{1} \left(2 - 2x^2\right) dx =$$

$$= \left[2x - \frac{2x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \left(2 \cdot 1 - \frac{2 \cdot 1^3}{3}\right) - \left[2 \cdot (-1) - \frac{2 \cdot (-1)^3}{3}\right] = 2 - \frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{3} = 4 - \frac{4}{3} =$$

$$= \frac{12-4}{3} = \underline{\frac{8}{3}\, u^2 = S}.$$

****

5º) De una bolsa con 2 bolas blancas, 2 negras y 2 amarillas se extraen dos sin devolución (es decir, una vez extraída una bola no se vuelve a poner en la bolsa). Calcular la probabilidad de que las dos sean blancas.

$$P = P(BB) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \underline{\frac{1}{15} = 0,0667}.$$

****

OPCIÓN B

1º) a) Discutir, según el valor del parámetro m, el sistema $\{mx + y + z = 1\, x + y + 2z = 1$.

b) Resolverlo para $m = 1$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A = (m\, 1\, 1\, 1\, 1\, 2\,)$ y $A' = (m\, 1\, 1\, 1\, 1\, 2 \quad 1\, 1\,)$.

Por existir el menor $|1\, 1\, 1\, 2\, | \neq 0 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A^{'} = 2,\ \forall m \in R$.

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\underline{Rang\ A = Rang\ A^{'} = 2 < n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.\ \forall m \in R.}$$

b)

Para $m = 1$ el sistema resulta: $x + y + z =- 1\, x + y + 2z = 1\, \}$, que es compatible indeterminado. Haciendo $y = \lambda$, resulta:

$x + z =- 1 - \lambda\, x + 2z = 1 - \lambda\, \} \quad - x - z = 1 + \lambda\, x + 2z = 1 - \lambda\, \} \Rightarrow z = 2;\ x$
.

$$\underline{Solución: x =- 3 - \lambda,\ y = \lambda,\ z = 2,\ \forall \lambda \in R.}$$

****

2º) a) Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(2, 3, 4)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x + y + 2z + 4 = 0$.

b) Calcular a para que las rectas $r \equiv x - 1 = y - 2 = \frac{z-2}{2}$ y $s \equiv \frac{x-1}{a} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{3}$ sean perpendiculares.

----

a)

Un vector normal del plano $\pi \equiv x + y + 2z + 4 = 0$ es $\overrightarrow{n} = (1, 1, 2)$, que también es vector director de la recta r pedida.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es: $\underline{r \equiv \{x = 2 + \lambda \;\; y = 3 + \lambda \;\; z = 4 + 2\lambda}$.

b)

Los vectores directores de las rectas son $\overrightarrow{v_r} = (1, 1, 2)$ y $\overrightarrow{v_s} = (a, 2, 3)$.

Dos rectas son perpendiculares cuando lo son sus vectores directores.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero.

$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s} = 0 \Rightarrow (1, 1, 2) \cdot (a, 2, 3) = 0;\;\; a + 2 + 6 = 0 \Rightarrow a = -8.$

$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ son\ perpendiculares\ para\ a = -8}$.

****

3º) Consideremos la función $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2}$. Calcular el dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos. Esbozar su gráfica.

Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$\underline{x^2 + 2 \neq 0,\ \forall x \in R \Rightarrow D(f) \Rightarrow R}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2} = 1 \Rightarrow \underline{Asíntota\ horizontal: y = 1}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{x^2 + 2 \neq 0,\ \forall x \in R \Rightarrow No\ tiene\ asíntotas\ verticales}.$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2+2) - (x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{2x \cdot (x^2+2-x^2-1)}{(x^2+2)^2} = \frac{2x}{(x^2+2)^2}.$$

$$Para\ x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: (0, +\infty)}.$$

$$Para\ x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: (-\infty, 0)}.$$

Para que una función racional tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x}{(x^2+2)^2} = 0;\ \ 2x = 0;\ \ x = 0.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

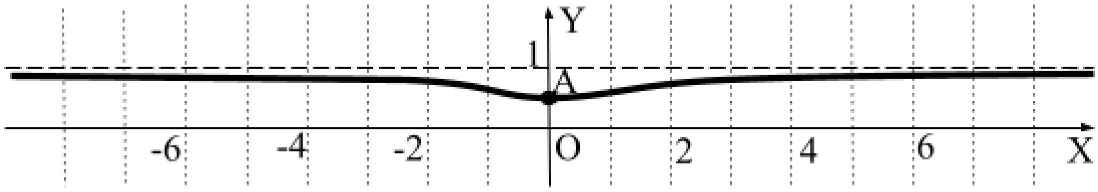
$$f''(x)=\frac{2\cdot\left(x^2+2\right)^2-2x\cdot\left[2\cdot\left(x^2+2\right)\cdot 2x\right]}{\left(x^2+2\right)^4}=\frac{2\cdot\left(x^2+2\right)-8x^2}{\left(x^2+2\right)^3}=\frac{2x^2+4-8x^2}{\left(x^2+2\right)^3}=\frac{4-6x^2}{\left(x^2+2\right)^3}=$$

$$=\frac{2\left(2-3x^2\right)}{\left(x^2+2\right)^3}.$$

$f''(0)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}>0\Rightarrow \text{Mínimo relativo para } x=0.$

$f(0)=\frac{0+1}{0+2}=\frac{1}{2}\Rightarrow \underline{\text{Mínimo: } A\left(0,\ \frac{1}{2}\right)}.$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



****

4º) $a)$ Calcular $\frac{x\cdot e^{x}-sen\, x}{x^{2}}$.   b) Calcular $I = \int Lx\cdot dx$.

$a)$

$$\frac{x\cdot e^{x}-sen\, x}{x^{2}} = \frac{0\cdot e^{0}-sen\, 0}{0^{2}} = \frac{0-0}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1\cdot e^{x}+x\cdot e^{x}-cos\, x}{2x} = \frac{1\cdot e^{0}+0\cdot e^{0}-cos\, 0}{0} = \frac{1+0-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{e^{x}+1\cdot e^{x}+x\cdot e^{x}+sen\, x}{2} = \frac{e^{0}+1\cdot e^{0}+0\cdot e^{0}+0}{2} = \frac{1+1+0+0}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

$$\underline{\frac{x\cdot e^{x}-sen\, x}{x^{2}} = 1.}$$

b)

$$I = \int Lx\cdot dx \Rightarrow \left\{ u = Lx \to du = \frac{1}{x}\cdot dx \quad dv = dx \to v = x \right\} \Rightarrow Lx\cdot x - \int x\cdot \frac{1}{x}\cdot dx =$$

$$= x\cdot Lx - \int dx = x\cdot Lx - x + C.$$

$$\underline{I = \int Lx\cdot dx = x(Lx - 1) + C.}$$

****

5º) Se tiran al aire, simultáneamente, un dado (con forma cúbica) y una moneda. Teniendo en cuenta que los sucesos son independientes. ¿Cuál es la probabilidad de que en el dado salga un 5 y de que en la moneda salga cara?

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\frac{1}{12} = 0,0833}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE CATALUÑA

JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Puede utilizar calculadoras, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1º) Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\left\{\begin{array}{l}\lambda x + y - z = 0 \\ y + z = 10 \\ 2\lambda x - y + 5\lambda z = 30\end{array}\right.$:

a) Estudie para que valores del parámetro λ el sistema es incompatible.

b) Resuelva el sistema para el caso de $\lambda = 1$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2\lambda & -1 & 5\lambda \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 2\lambda & -1 & 5\lambda & 30 \end{pmatrix}$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro λ es el siguiente:

$|M| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2\lambda & -1 & 5\lambda \end{vmatrix} = 5\lambda^2 + 2\lambda + 2\lambda + \lambda = 0;\ 5\lambda^2 + 5\lambda = 0;\ \lambda^2$

$\lambda(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 0.$

$Para \left\{\begin{array}{l}\lambda \neq -1 \\ \lambda \neq 0\end{array}\right. \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = n^{o}\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.$

$Para\ \lambda = -1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ -2 & -1 & -5 & 30 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 10 \\ -2 & -1 & 30 \end{vmatrix} = -30 - 20 - 10 = -60 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$

$Para\ \lambda = 0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & 30 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 10 \\ -1 & 0 & 30 \end{vmatrix} = 30 + 10 + 30 = 60 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$

$\underline{Para\ \{\lambda \neq -1\ \lambda \neq 0\ \} \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

$b)$

Para $\lambda = 1$ el sistema resulta $\{x + y - z = 0 \quad y + z = 10 \quad 2x - y + 5z = 30$, que es compatible determinado.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|0\ 1\ -1\ 10\ 1\ 1\ 30\ -1\ 5\ |}{5 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1} = \frac{10+30+30-50}{5+5} = \frac{20}{10} = 2.$$

$$y = \frac{|1\ 0\ -1\ 0\ 10\ 1\ 2\ 30\ 5\ |}{10} = \frac{50+20-30}{10} = \frac{40}{10} = 4.$$

$$z = \frac{|1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 10\ 2\ -1\ 30\ |}{10} = \frac{30+20+10}{10} = \frac{60}{10} = 6.$$

$\underline{Solución: x = 2,\ y = 4,\ z = 6.}$

****

2º) Considere los planos $\pi_1 \equiv 5x - y - 7z = 1$ y $\pi_2 \equiv 2x + 3y + z = 5$.

a) Determine la ecuación general $(Ax + By + Cz + D = 0)$ del plano β que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los planos π_1 y π_2.

b) Calcule el ángulo que forman los planos π_1 y π_2.

----

a)

Los vectores normales de los planos son $\overrightarrow{n_1} = (5, -1, -7)$ y $\overrightarrow{n_2} = (2, 3, 1)$.

El plano β, por ser perpendicular a los planos π_1 y π_2, tiene como vectores directores a sus vectores normales; su expresión general es la siguiente:

$$\beta\left(O;\ \overrightarrow{n_1},\ \overrightarrow{n_2}\right) \equiv |x\ y\ z\ 5\ \ -1\ \ -7\ 2\ 3\ 1| = 0;\ \ -x - 14y + 15z + 2z + 21x - 5y =$$

$$\underline{\beta \equiv 20x - 19y + 17z = 0}.$$

b)

El ángulo que forman los planos π_1 y π_2 es el mismo que forman sus vectores normales.

Por el concepto de producto escalar:

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = \left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right| \cdot \cos cos\ \alpha \Rightarrow \cos cos\ \alpha = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{(5, -1, -7) \cdot (2, 3, 1)}{\sqrt{5^2 + (-1)^2 + (-7)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} =$$

$$= \frac{10 - 3 - 7}{\sqrt{25 + 1 + 49} \cdot \sqrt{4 + 9 + 1}} = \frac{0}{\sqrt{75} \cdot \sqrt{14}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90°.$$

$\underline{\textit{Los planos } \pi_1 \textit{ y } \pi_2 \textit{ son perpendiculares.}}$

****

3º) Considere la función $f(x) = \frac{1}{x^2-k}$, siendo k un parámetro real distinto de 0. Para los diferentes valores de k:

a) Calcule el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

b) Determine los máximos y mínimos relativos de $f(x)$.

----

a)

$$x^2 - k = 0;\ x^2 = k \Rightarrow x_1 = -\sqrt{k},\ x_2 = \sqrt{k}.$$

$$\underline{D(f) \Rightarrow R - \{-\sqrt{k},\ \sqrt{k}\}}.$$

Asíntotas verticales: Son de la forma $x = k$; son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{Asíntotas\ verticales: x = -\sqrt{k}\ y\ x = \sqrt{k}}.$$

Horizontales: Son de la forma $y = k$; son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a $\pm\infty$:

$$y = k = f(x) = \frac{1}{x^2-k} = 0\ .$$

$$\underline{La\ recta\ y = 0\ (eje\ de\ abscisas)\ es\ asíntota\ horizontal}.$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

b)

La condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo es que se anule su primera derivada. Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: según que sea negativa o positiva para los valores que anulan la primera derivada se trata de un máximo o de un mínimo, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-k)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x}{(x^2-k)^2} = 0 \Rightarrow -2x = 0;\ x = 0.$$

$$f''(x) = \frac{-2\cdot(x^2-k)^2 + 2x\cdot[2\cdot(x^2-k)\cdot 2x]}{(x^2-k)^4} = \frac{-2\cdot(x^2-k)+8x^2}{(x^2-k)^3} = \frac{-2x^2+2k+8x^2}{(x^2-k)^3} = \frac{6x^2+2k}{(x^2-k)^3}.$$

$$f''(0) = \frac{0+2k}{(0-k)^3} = -\frac{2}{k^2} < 0,\ \forall k \in R,\ k \neq 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = \frac{1}{0-k} = -\frac{1}{k} \Rightarrow \underline{Mínimo: A\left(0,\ -\frac{1}{k}\right)}.$$

****

4º) Sabiendo que el sistema de ecuaciones lineales $\{x + ay = 1\ x + az = 1\ y + z = a$ tiene una única solución:

a) Compruebe que $a \neq 0$.

b) Encuentre la solución del sistema en función del parámetro a.

----

a)

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es compatible determinado cuando el rango de la matriz de coeficientes es tres, o sea, que su determinante es distinto de cero.

La matriz de coeficientes es $M = (1\ a\ 0\ 1\ 0\ a\ 0\ 1\ 1\ )$.

$|M| = |1\ a\ 0\ 1\ 0\ a\ 0\ 1\ 1\ | = -\ a - a = -\ 2a \neq 0 \Rightarrow a \neq 0.$

<u>$Queda\ comprobado\ que\ el\ sistema\ es\ compatible\ determinado\ \forall a \in R,\ a \neq 0$.</u>

b)

$M' = (1\ a\ 0\ 1\ 0\ a\ 0\ 1\ 1 \quad 1\ 1\ a\ ) \Rightarrow \{Cambiando\ filas\} \Rightarrow (1\ 0\ a\ 0\ 1\ 1\ 1\ a\ 0 \quad 1\ a\ 1\ ) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{F_3 \rightarrow F_3 - F_1\right\} \Rightarrow (1\ 0\ a\ 0\ 1\ 1\ 0\ a\ -\ a \quad 1\ a\ 0\ ) \Rightarrow \left\{F_3 \rightarrow F_3 - aF_2\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(1\ 0\ a\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ -\ 2a \quad 1\ a\ -\ a^2\right) \Rightarrow \left\{F_3 \rightarrow -\frac{1}{a}F_3\right\} \Rightarrow (1\ 0\ a\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 2 \quad 1\ a\ a\ ) \Rightarrow 2$

$\Rightarrow z = \frac{a}{2};\ \ y + z = a;\ \ y + \frac{a}{2} = a \Rightarrow y = \frac{a}{2};\ \ x + az = 1 \Rightarrow x = 1 - \frac{a^2}{2} = \frac{2-a^2}{2}$

.

<u>$Solución:\ x = \frac{2-a^2}{2},\ y = \frac{a}{2},\ z = \frac{a}{2},\ \forall a \in R.$</u>

****

5º) Considere las matrices cuadradas de orden 2 de la forma $M = \begin{pmatrix} x & -1 \\ y^2+1 & x \end{pmatrix}$, siendo x e y números reales.

a) Compruebe que la matriz M es siempre invertible, independientemente de los valores de x e y.

b) Para $x = 1,\ y = -1$, calcule M^{-1}.

----

a)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|M| = \begin{vmatrix} x & -1 \\ y^2+1 & x \end{vmatrix} = x^2 + y^2 + 1 \neq 0,\ \forall x,\ y \in R$$

$$\underline{Queda\ comprobado\ que\ M\ es\ invertibla\ \forall x,\ y \in R.}$$

b)

Para $x = 1,\ y = -1$ es $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$ $\quad M^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$Adj.\ de\ M^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$

$$M^{-1} = \frac{Adj.\ de\ M^t}{|M|} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

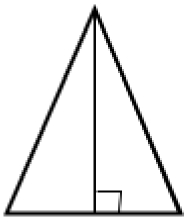
$$\underline{M^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.}$$

****

6º) Considere un cono de 120 cm³ de volumen que tiene una altura h, un radio de la base x y una generatriz a.

a) Comprueba que $a^2 = \frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h} + h^2$.

b) Calcule la altura del cono que tiene la generatriz de longitud mínima.
Nota: Recuerde que el volumen del cono es un tercio del volumen del cilindro recto que tiene el mismo radio de la base y la misma altura.



$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot h = 120; \quad \frac{\pi \cdot x^2 \cdot h}{12} = 120 \Rightarrow x^2 = \frac{1.440}{\pi \cdot h}.$$

$$a^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2 = \frac{x^2}{4} + h^2 = \frac{\frac{1.440}{\pi \cdot h}}{4} + h^2 = \frac{360}{\pi \cdot h} + h^2.$$

$$\underline{Queda\ comprobado\ que\ a^2 = \frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h} + h^2.}$$

b)

La condición necesaria para que la generatriz a sea mínima es que se anule su primera derivada.

$$a_{(h)} = \sqrt{\frac{360}{\pi \cdot h} + h^2} = \sqrt{\frac{360 + \pi \cdot h^3}{\pi \cdot h}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{360 + \pi \cdot h^3}{h}}.$$

$$a'_{(h)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\frac{3\pi \cdot h^2 \cdot h - \left(360 + \pi \cdot h^3\right) \cdot 1}{h^2}}{2 \cdot \sqrt{\frac{360 + \pi \cdot h^3}{h}}} = 0 \Rightarrow 3\pi \cdot h^2 \cdot h - \left(360 + \pi \cdot h^3\right) \cdot 1 = 0;$$

$$3\pi \cdot h^3 = 360 + \pi \cdot h^3; \quad 2\pi \cdot h^3 = 360; \quad h^3 = \frac{180}{\pi} \Rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{180}{\pi}}.$$

$$\underline{h = \sqrt[3]{\frac{180}{\pi}} \cong 3,86\ cm.}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE CATALUÑA

SEPTIEMBRE – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Puede utilizar calculadoras, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1º) Considere el plano $\pi \equiv x + y + z = 1$ y la recta r que pasa por los puntos $P(0,\ 0,\ 6)$ y $Q(1,\ 2,\ 3)$.

a) Estudie la posición relativa de la recta r y el plano π.

b) Calcule la distancia entre la recta r y el plano π.
Nota: Puede utilizar la fórmula de la distancia del punto $P_0\left(x_0,\ y_0,\ z_0\right)$ al plano de ecuación $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ como la expresión $d\left(P_0,\ \pi\right) = \frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

----

a)

El vector director de la recta r es $\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{PQ} = [Q - P] = (1,\ 2,\ -3)$.

El vector normal el plano π es $\overrightarrow{n} = (1,\ 1,\ 1)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{n}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes, pero son perpendiculares por ser $\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{n} = (1,\ 2,\ -3) \cdot (1,\ 1,\ 1) = 1 + 2 - 3 = 0$, por lo cual:

$$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ son\ paralelos.}$$

b)

La distancia entre la recta r y el plano π es la misma que la distancia de cualquier punto de la recta al plano: $d(r,\ \pi) = d(P,\ \pi) = \frac{1\cdot 0+1\cdot 0+1\cdot 6-1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$.

$$\underline{d(r,\ \pi) = \frac{5\sqrt{3}}{3}\ unidades.}$$

****

2º) Sean las matrices $A = (1\ 1\ 1\ 0\ \ -2\ 1\ 1\ \ -1\ 1\ )\ y\ B = (3\ 4\ \ -1\ \ -1\ \ -4\ 3\ 0\ \ -4\ 4\ )$.

a) Compruebe que satisfacen la igualdad $A^2 - \frac{1}{2}A\cdot B = I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

b) Utilizando la igualdad anterior, determina la matriz inversa de A: A^{-1}.

----

a)

$$A^2 - \frac{1}{2}A\cdot B = I;\ \ 2A\cdot A - A\cdot B = 2I;\ \ A\cdot(2A - B) = 2I;$$

$$(1\ 1\ 1\ 0\ \ -2\ 1\ 1\ \ -1\ 1\ )\cdot[2\cdot(1\ 1\ 1\ 0\ \ -2\ 1\ 1\ \ -1\ 1\ ) - (3\ 4\ \ -1\ \ -1\ \ -4\ 3\ 0$$

$$(1\ 1\ 1\ 0\ \ -2\ 1\ 1\ \ -1\ 1\ )\cdot[(2\ 2\ 2\ 0\ \ -4\ 2\ 2\ \ -2\ 2\ ) - (3\ 4\ \ -1\ \ -1\ \ -4\ 3\ 0\ \ -4\ 4\ )$$

$$(1\ 1\ 1\ 0\ \ -2\ 1\ 1\ \ -1\ 1\ )\cdot(-1\ \ -2\ 3\ 1\ 0\ \ -1\ 2\ 2\ \ -2\ ) = 2I;$$

$$(-1 + 1 + 2\ \ -2 + 0 + 2\ 3 - 1 - 2\ \ -0 - 2 + 2\ \ -0 - 0 + 2\ 0 + 2 - 2\ -$$

.

<u>*Queda comprobado que* $A^2 - \frac{1}{2}A\cdot B = I$.</u>

b)

$A^2 - \frac{1}{2}A\cdot B = I$. Multiplicando por la izquierda por A^{-1}:

$$A^{-1}\cdot A\cdot A - \frac{1}{2}\cdot A^{-1}A\cdot B = A^{-1}\cdot I;\ \ I\cdot A - \frac{1}{2}\cdot I\cdot B = A^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = A - \frac{1}{2}\cdot B \Rightarrow 2A^{-1} = 2A - B = (2\ 2\ 2\ 0\ \ -4\ 2\ 2\ \ -2\ 2\ ) - (3\ 4\ \ -1\ \ -1\ \ -$$

$$= (-1\ \ -2\ 3\ 1\ 0\ \ -1\ 2\ 2\ \ -2\ ) \Rightarrow \underline{A^{-1} = \frac{1}{2}\cdot(-1\ \ -2\ 3\ 1\ 0\ \ -1\ 2\ 2\ \ -2\ ).}$$

****

3º) Considere el sistema de ecuaciones lineales $x + y + z = 3\ x + y - z = 1\ 2x + ay = 2a\ \}$.

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro real a.

b) Resuelva el sistema para el caso de $a = 2$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ -1\ 2\ a\ 0\ )$ y $M' = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ -1\ 2\ a\ 0\quad 3\ 1\ 2a\ )$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$|M| = |1\ 1\ 1\ 1\ 1\ -1\ 2\ a\ 0\ | = a - 2 - 2 + a = 0;\ \ 2a - 4 = 0;\ \ a - 2 = 0 \Rightarrow$

.

$\underline{Para\ a \neq 2 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

$Para\ a = 1 \Rightarrow M' = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ -1\ 2\ 1\ 0\quad 3\ 1\ 2\ ) \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |1\ 1\ 3\ 1\ 1\ 1\ 2\ 1\ 2\ | = 2 + 3 + 2 - 6 - 1 - 2 = -2 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$

$\underline{Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ \ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

$b)$

Para $a = 2$ el sistema resulta: $x + y + z = 3\ x + y - z = 1\ \ 2x + 2y = 4\ \}$, que es compatible indeterminado. Despreciando una ecuación, por ejemplo la primera, y haciendo $y = \lambda$:

$x = 2 - \lambda;\ \ z = 3 - x - y = 3 - 2 + \lambda - \lambda = 1.$

$\underline{Solución: x = 2 - \lambda,\ y = \lambda,\ z = 1, \forall\lambda \in R.}$

****

4º) De las funciones $f(x)$, $f'(x)$, $g(x)$ y $g'(x)$, conocemos los valores siguientes:

x	$f(x)$	$f'(x)$		x	$g(x)$	$g'(x)$
0	2	1		0	1	1
1	0	-6		1	3	3

a) De la función $f(x)$ se sabe también que la pendiente de la recta tangente en un punto de abscisa x es $4x^3 - 9x^2 - 2x + 1$. Encuentre $f(x)$.

b) Calcule: $(g \circ f)'(1)$.

----

a)

La pendiente de la recta tangente en un punto de una función es el valor de su primera derivada en ese punto: $f'(x) = 4x^3 - 9x^2 - 2x + 1$.

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int \left(4x^3 - 9x^2 - 2x + 1\right)dx = \frac{4x^4}{4} - \frac{9x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + x + C =$$

$$= x^4 - 3x^3 - x^2 + x + C.$$

$f(0) = 2 \Rightarrow C = 2.$

$$\underline{f(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + x + 2}.$$

b)

Según la regla de la cadena de la derivación de la composición de funciones:

$(g \circ f)(x) = g[f(x)] \Rightarrow (g \circ f)'(x) = g'[f(x)] \cdot f'(x).$

$(g \circ f)'(1) = g'[f(1)] \cdot f'(1) = g'(0) \cdot (-6) = 1 \cdot (-6) = -6.$

$$\underline{(g \circ f)'(1) = -6}.$$

****

5º) En R^3, sean la recta $r \equiv \begin{cases} x - z = 2 \\ 2y + z = 4 \end{cases}$ y el punto $P(0,\ 1,\ -1)$.

$a)$ Calcular la ecuación general (es decir, la que tiene de forma $Ax + By + Cz = D$) del plano π perpendicular a la recta r y que pasa por el punto P.

$b)$ Calcular el punto simétrico del punto P respecto del plano $\gamma \equiv x + y + z = -3$.

$a)$

Un vector director de una recta dada por la intersección de dos planos es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{n}_1 = (1,\ 0,\ -1) \\ \vec{n}_2 = (0,\ 2,\ 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2k + 2i - j$$

$\Rightarrow \vec{v}_r = (2,\ -1,\ 2)$.

Por ser la recta r perpendicular al plano π, el vector director de la recta es linealmente dependiente del vector normal del plano, por lo cual:

$\pi \equiv 2x - y + 2z + D = 0$.

Para determinar el valor del término independiente D se tiene en cuenta que el plano contiene al punto $P(0,\ 1,\ -1)$ tiene que satisfacer su ecuación:

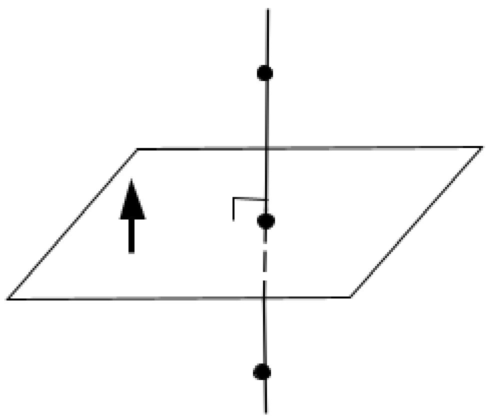
$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2x - y + 2z + D = 0 \\ P(0,\ 1,\ -1) \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 0 - 1 + 2 \cdot (-1) +$$

$-1 - 2 + D = 0 \Rightarrow D = 3$.

$$\underline{\pi \equiv 2x - y + 2z + 3 = 0}.$$

$b)$

La recta t que pasa por $P(0,\ 1,\ -1)$ y es perpendicular al plano $\gamma \equiv x + y + z = -3$ tiene como vector director al vector normal del plano: $\vec{n}_1 = (1,\ 1,\ 1)$.



La expresión de t dada por unas ecuaciones paramétricas es $t \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$.

El punto Q, intersección del plano γ con la recta t, es el siguiente:

$\gamma \equiv x + y + z = -3 \qquad t \equiv \{x = \lambda \qquad y = 1 + \lambda \;\; z = -1 + \lambda \;\} \Rightarrow \lambda + (1 + \lambda) + (-$

$\Rightarrow Q(1,\ 2,\ 0)$.

Tiene que cumplirse que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP'}$.

$\overrightarrow{PQ} = [Q - P] = [(1,\ 2,\ 0) - (0,\ 1,\ -1)] = (1,\ 1,\ 1)$.

$\overrightarrow{QP'} = [P' - Q] = [(x,\ y,\ z) - (1,\ 2,\ 0)] = (x - 1,\ y - 2,\ z - 0)$.

$(1,\ 1,\ 1) = (x - 1,\ y - 2,\ z - 0) \Rightarrow \{x - 1 = 1 \rightarrow x = 2\ y - 2 = 1 \rightarrow y = 3\ z -$

.

****

6º) Sea la función $f(x) = \frac{sen\, x}{cos^2 x}$.

a) Calcule la primitiva de la función $f(x)$.

b) Calcule el área limitada por la función $f(x)$ y el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{4}$.

----

a)

$$\int f(x)\cdot dx = \int \frac{sen\, x}{cos^2 x}\cdot dx \Rightarrow \{\cos cos\, x = t \;\; sen\, x\cdot dx = -\, dt\} \Rightarrow -\int \frac{1}{t^2}\cdot dt = -\int t^{-2} dt =$$

$$= -\frac{t^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{t} + C.$$

$$\underline{\int f(x)\cdot dx = \int \frac{sen\, x}{cos^2 x}\cdot dx = \frac{1}{\text{coscos}\, x} + C.}$$

b)

En el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ todas las ordenadas de la función $f(x) = \frac{sen\, x}{cos^2 x}$ son positivas, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{sen\, x}{cos^2 x}\cdot dx = \left[\frac{1}{\text{coscos}\, x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\text{coscos}\, \frac{\pi}{4}} - \frac{1}{\text{coscos}\, 0} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \frac{1}{1} = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 =$$

$$= \sqrt{2} - 1.$$

$$\underline{S = \sqrt{2} - 1\, u^2 \cong 0,41\, u^2}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

JULIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

La prueba consta de dos opciones, A y B, de las cuales el alumno deberá elegir una. Cada opción consta de 5 ejercicios. En el caso de realizar ejercicios de opciones diferentes, se considerará como elegida la correspondiente al primer ejercicio presentando por el alumno. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1º) $a)$ Calcule el determinante de la matriz $A = (1\ 0\ 1\ 0\ \ -1\ 0\ 2\ 0\ \ -1\ )$.

$b)$ Obtenga el determinante de la matriz $B = \frac{1}{3}\cdot A^4$, sin calcular previamente B.

$c)$ Calcule la matriz inversa de A.

$a)$

$$|A| = |1\ 0\ 1\ 0\ \ -1\ 0\ 2\ 0\ \ -1\ | = 1 + 2 = 3 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rang\ A = 3}.$$

$b)$

$$|B| = \left|\frac{1}{3}\cdot A^4\right| = \left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot(|A|)^4 = \frac{1}{3^3}\cdot 3^4 = 3.$$

$$\underline{|B| = 3}.$$

Nota: La expresión $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ se debe a que si se multiplica un número real por una matriz resulta otra matriz cuyos elementos han sido todos multiplicados por dicho número y la matriz A es de orden tres.

$c)$

Se obtiene la inversa de $A = (1\ 0\ 1\ 0\ \ -1\ 0\ 2\ 0\ \ -1\ )$ por el método de Gauss-Jordan.

$$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ \ -2\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow -F_2\ F_3 \rightarrow -\frac{1}{3}F_3\right\} \Rightarrow \left(1\ 0\ 0\ 0\ \ -1\ 0\ \frac{2}{3}\ 0\ \ -\frac{1}{3}\ \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ F_1 \rightarrow F_1 - F_3 \right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\ 0\ \frac{1}{3}\ 0\ \ -\ 1\ 0\ \frac{2}{3}\ 0\ \ -\ \frac{1}{3} \right) \Rightarrow$$

$$\underline{A^{-1} = \left(\frac{1}{3}\ 0\ \frac{1}{3}\ 0\ \ -\ 1\ 0\ \frac{2}{3}\ 0\ \ -\ \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3} \cdot (1\ 0\ 1\ 0\ \ -\ 3\ 0\ 2\ 0\ \ -\ 1\ ).}$$

****

2º) Considere en R^3 las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$.

a) Obtenga un vector director de la recta s.

b) Obtenga el plano π_1 que contiene a r y es paralelo a s.

c) Obtenga el plano π_2 que contiene a r y es perpendicular a s.

----

a)

Un vector director de una recta dada por la intersección de dos planos es cualquier vector que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan

$$s \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{n}_1 = (1,\ 1,\ 0) \\ \vec{n}_2 = (0,\ 0,\ 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{v}_s = (1,\ -1,\ 0)}.$$

b)

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$.

Un punto y un vector director de r son $O(0,\ 0,\ 0)$ y $\vec{v}_r = (0,\ 0,\ 1)$.

$$\pi_1\left(O;\ \vec{v}_r,\ \vec{v}_s\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0;\quad -x - y = 0.$$

$$\underline{\pi_1 \equiv x + y = 0.}$$

c)

Las rectas r y s son perpendiculares por ser $\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 0$.

El haz de planos perpendiculares a s es $\beta \equiv x - y + D = 0$.

El plano π_2 pedido, perteneciente al haz β, es el que contiene al punto $O \in r$:

$$\left. \begin{array}{l} \beta \equiv x - y + D = 0 \\ O(0,\ 0,\ 0) \end{array} \right\} \Rightarrow 0 - 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0.$$

$$\underline{\pi_2 \equiv x - y = 0.}$$

****

3º) a) Enuncie el teorema del valor medio de Lagrange.

b) Aplicando a la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ el anterior teorema, pruebe que cualquiera que sean los números reales $1 < a < b$ se cumple la desigualdad $a + b < 2a^2b^2$.

----

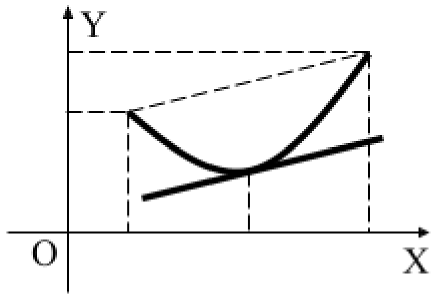
a)

El teorema del valor medio del cálculo diferencial, también conocido como teorema de Lagrange, se puede enunciar del siguiente modo:

"Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo [α, b] y derivable en (α, b), entonces, existe al menos un punto $c \in (\alpha, b)$ que cumple $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$".

La interpretación geométrica puede apreciarse fácilmente en la figura adjunta.

Considerando la función $f(x)$, continua en [α, b] y derivable en (α, b) existe, por lo menos un punto N perteneciente al intervalo (α, b) en el que la recta tangente a la gráfica de f es paralela a la cuerda que une los puntos P y Q de coordenadas $P[a,\ f(a)]$ y $Q[b,\ f(b)]$.



b)

$$f'(x) = -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}.$$

Aplicando el teorema de Lagrange a la función $f(x)$:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow -\frac{2}{c^3} = \frac{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}{b-a} = \frac{\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}}{b-a} = -\frac{a^2-b^2}{a^2b^2\cdot(a-b)} = \frac{(a+b)(a-b)}{a^2b^2\cdot(a-b)};$$

$$\frac{2}{c^3} = \frac{a+b}{a^2b^2} \Rightarrow 2a^2b^2 = c^3\cdot(a + b).$$

Teniendo en cuenta que $c^3 > 1 \Rightarrow \underline{queda\ probado\ que\ a + b < 2a^2b^2}$.

****

4º) Calcule la primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = \frac{2x}{x^2+1} - e^{-x} + 2x\cdot \cos cos\left(x^2\right)$ que cumpla $F(0) = 0$.

$$F(x) = \int\left[\frac{2x}{x^2+1} - e^{-x} + 2x\cdot \cos cos\left(x^2\right)\right]\cdot dx =$$

$$= \int \frac{2x}{x^2+1}\cdot dx - \int e^{-x}\cdot dx + \int 2x\cdot \cos cos\left(x^2\right)\cdot dx = A - B + C. \quad (*)$$

$$A = \int \frac{2x}{x^2+1}\cdot dx \Rightarrow \left\{x^2 + 1 = t\ 2x\cdot dx = dt\right\} \Rightarrow \int \frac{1}{t}\cdot dt = Lt = L\left(x^2 + 1\right).$$

$$B = \int e^{-x}\cdot dx \Rightarrow \{- x = t\ dx =- dt\} \Rightarrow - \int e^{t}\cdot dt =- e^{t} =- e^{-x}.$$

$$C = \int 2x\cdot \cos cos\left(x^2\right)\cdot dx \Rightarrow \left\{x^2 = t\ 2x\cdot dx = dt\right\} \Rightarrow \int \cos cos\ t\cdot dt = sen\ t + C =$$

$$= sen\left(x^2\right) + C.$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de A, B y C:

$$F(x) = L\left(x^2 + 1\right) + e^{-x} + sen\left(x^2\right) + C.$$

$$F(0) = 0 \Rightarrow L(0 + 1) + e^{-0} + sen\ 0 + C = 0;\ 0 + 1 + 0 + C = 0 \Rightarrow C =- 1.$$

$$\underline{F(x) = L\left(x^2 + 1\right) + e^{-x} + sen\left(x^2\right) - 1.}$$

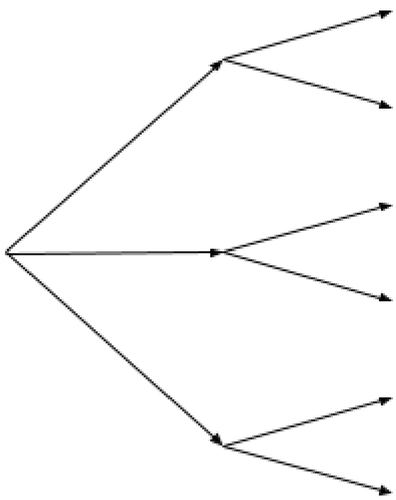
****

5º) En un libro con 3 capítulos, el primero consta de 100 páginas y 15 de ellas contienen errores. El segundo capítulo, de 80 páginas, tiene 8 con error, y en el tercero, de 50 páginas, el 80 % no tiene ningún error. Calcule la probabilidad de que una página elegida al azar no esté en el capítulo dos y no tenga errores.

$$Total\ de\ páginas: 100 + 80 + 50 = 230.$$

$Capítulo\ 1º \to \frac{100}{230} = \frac{10}{23}$. $Capitulo\ 2º \to \frac{80}{230} = \frac{8}{23}$.

$Capítulo\ 3º \to \frac{50}{230} = \frac{5}{23}$.



$$P = P(1) \cdot P(1) + P(3) \cdot P(3) = \frac{10}{23} \cdot \frac{17}{20} + \frac{5}{23} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{23} \cdot \frac{17}{2} + \frac{1}{23} \cdot \frac{4}{1} =$$

$$= \frac{17}{46} + \frac{4}{23} = \frac{17+8}{46} = \underline{\frac{25}{46} = 0,5435}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Considere el sistema de ecuaciones $x + y = 0 \quad x - z = 1\ ax + by + cz = 1\ \}$. Obtenga valores de los parámetros $a,\ b\ y\ c$ en los siguientes casos:

a) Para que el sistema sea compatible determinado.

b) Para que el sistema sea compatible indeterminado.

c) Para que el sistema sea incompatible.

----

a)

Las matriz ampliada es: $M' = (1\ 1\ 0\ 1\ 0\ \ -1\ a\ b\ c\ \ \ 0\ 1\ 1\ )$.

$M' = (1\ 1\ 0\ 1\ 0\ \ -1\ a\ b\ c\ \ \ 0\ 1\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow F_2 - F_1\ F_3 \rightarrow F_3 - aF_1\right\} \Rightarrow (1\ 1\ 0\ 0$

$\Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow -F_2\right\} \Rightarrow (1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ b - a\ c\ \ \ 0\ \ -1\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_3 \rightarrow F_3 + (a - b)F_2\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ a - b + c\ \ \ 0\ \ -1\ \ -a + b + 1\ )$.

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$Para\ a - b + c \neq 0 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.$$

$\underline{El\ sistema\ es\ compatible\ determinado\ cuando\ a - b + c \neq 0}$.

b)

Para $a - b + c = 0 \Rightarrow -a + b + 1 = (a - b + c) - a + b + 1 =$

$= a - b + c - a + b + 1 = c + 1 = 0;\ \ c = -1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2.$

$\underline{El\ sistema\ es\ compatibl\ indeterminado\ para\ c = -1}$.

c)

Para

$\{\ \ a - b + c = 0\ \ -a + b + 1 \neq 0\ \} \Rightarrow c + 1 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3.$

$\underline{El\ sistema\ es\ incompatible\ cuando\ c + 1 \neq 0}$.

****

2º) Considere en R^3 los puntos $A(1,\ 2,\ 1)$, $B(-\ 2,\ \ -\ 1,\ \ -\ 3)$, $C(0,\ 1,\ \ -\ 1)$ y $D(0,\ 3,\ \ -\ 1)$, y sea la recta r que pasa por los A y B.

a) Calcule ecuaciones paramétricas de r.

b) Obtenga un punto P de la recta r tal que la distancia de C a P sea igual a la distancia de D a P.

----

a)

Los puntos A y B determinan el vector $\overrightarrow{AB} = [B\ -\ A] = (-\ 3,\ \ -\ 3\ -\ 4)$.

Un vector director de r es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{AB}$, por ejemplo: $\overrightarrow{v_r} = (3,\ 3,\ 4)$.

Unas ecuaciones paramétricas de r son: $\underline{r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 1 + 4\lambda \end{cases}}$.

b)

Un punto genérico de r es: $P(1\ +\ 3\lambda,\ 2\ +\ 3\lambda,\ 1\ +\ 4\lambda)$.

$$\overline{CP} = \overline{DP} \Rightarrow \sqrt{(1\ +\ 3\lambda\ -\ 0)^2 + (2\ +\ 3\lambda\ -\ 1)^2 + (1\ +\ 4\lambda\ +\ 1)^2} =$$

$$\sqrt{(1\ +\ 3\lambda\ -\ 0)^2 + (2\ +\ 3\lambda\ -\ 3)^2 + (1\ +\ 4\lambda\ +\ 1)^2};$$

$$(1\ +\ 3\lambda)^2 + (1\ +\ 3\lambda)^2 + (2\ +\ 4\lambda)^2 = (1\ +\ 3\lambda)^2 + (-\ 1\ +\ 3\lambda)^2 + (2\ +\ 4\lambda)^2;$$

$$(1\ +\ 3\lambda)^2 = (-\ 1\ +\ 3\lambda)^2;\ \ 1\ +\ 6\lambda\ +\ 9\lambda^2\ =\ 1\ -\ 6\lambda\ +\ 9\lambda^2;\ \ 12\lambda\ =\ 0 \Rightarrow \lambda\ =\ 0.$$

$$\underline{P \equiv A(1,\ 2,\ 1)}.$$

****

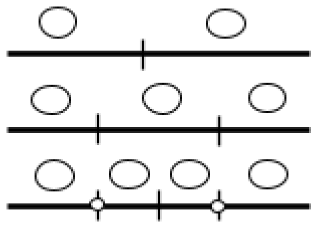
3º) Estudie el dominio, el signo, las asíntotas verticales y las asíntotas horizontales de la función $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x}$.

Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$x^2 + x = 0;\ \ x(x + 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -1.$$

$$\underline{D(f) \Rightarrow R - \{0,\ -1\}}.$$

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$



Para determinar el signo de la función nos fijamos en la figura de la derecha, donde se deducen los periodos donde la función $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x}$ es positiva o negativa, que son los siguientes:

$$\underline{Positiva \Rightarrow f(x) > 0:\ x \in \left(-1,\ -\frac{1}{2}\right) \cup (0,\ +\infty)}.$$

$$\underline{Negativa \Rightarrow f(x) < 0:\ x \in (-\infty,\ -1) \cup \left(-\frac{1}{2},\ 0\right)}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x} = 0 \Rightarrow \underline{El\ eje\ OX\ es\ asíntota\ horizontal}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores de x que anulan el denominador.

$$x^2 + x = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -1.$$

$$\underline{Las\ rectas\ x = 0\ y\ x = -1\ son\ asíntotas\ verticales}.$$

****

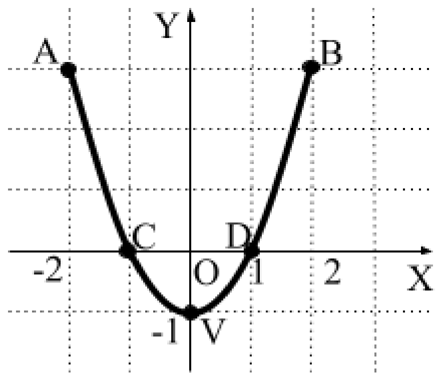
4º) a) Represente, aproximadamente, la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 1$ definida en el intervalo $[0,\ 2]$.

b) Calcule el área de la región plana limitada por la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 1$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

----

a)

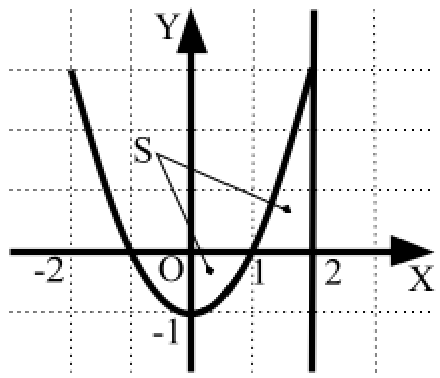
La función $f(x) = x^2 - 1$ es una parábola convexa ($\cup$) cuyo eje de simetría es el eje de ordenadas y cuyo vértice es $V(0,\ -1)$. Corta al eje X en los puntos $C(-1,\ 0)$ y $D(1, 0)$. Otros puntos de la función son $A(-2,\ 3)$ y $B(2, 3)$



La representación gráfica de $f(x)$, aproximada es la que indica la figura.

b)

De la observación de la figura se deduce que la superficie a calcular es la siguiente:



$$S = -\int_0^1 f(x) \cdot dx + \int_1^2 f(x) \cdot dx =$$

$$= \int_1^0 f(x) \cdot dx + \int_1^2 f(x) \cdot dx =$$

$$= [F(x)]_1^0 + [F(x)]_1^2 = F(0) - F(1) + F(2) - F(1) = F(0) + F(2) - 2F(1).$$
(*)

$$F(x) = \int f(x) \cdot dx = \int \left(x^2 - 1\right) \cdot dx = \frac{x^3}{3} - x.$$

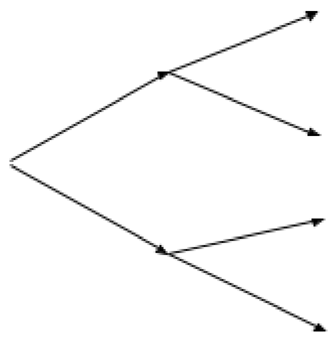
Sustituyendo en (*) el valor obtenido de $F(x)$:

$$S = 0 + \left(\frac{2^3}{3} - 2\right) - 2 \cdot \left(\frac{1^3}{3} - 1\right) = \frac{8}{3} - 2 - \frac{2}{3} + 2 = \frac{6}{3} = 2.$$

$$\underline{S = 2\,u^2}.$$

****

5º) El 40 % de la población activa de una ciudad son mujeres. Se sabe que el 20 % de las mujeres y el 12 % de los varones está en el paro. Elegida al azar una persona entre la población activa que no está en paro, calcule la probabilidad de que dicha persona sea mujer.



$$P = P(M/\overline{P}) = \frac{P(M \cap \overline{P})}{P(\overline{P})} = \frac{P(M) \cdot P(\overline{P}/M)}{P(M) \cdot P(\overline{P}/M) + P(V) \cdot P(\overline{P}/V)} = \frac{0,4 \cdot 0,80}{0,4 \cdot 0,80 + 0,6 \cdot 0,88} =$$

$$= \frac{0,320}{0,320 + 0,528} = \frac{0,320}{0,848} = \underline{0,3774}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

La prueba consta de dos opciones, A y B, de las cuales el alumno deberá elegir una. Cada opción consta de 5 ejercicios. En el caso de realizar ejercicios de opciones diferentes, se considerará como elegida la correspondiente al primer ejercicio presentando por el alumno. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1º) a) Estudie cómo es el sistema de ecuaciones: $3x - 5z = 3\ 3x - 3y + 2z = 0 \quad 2x - y - z = 1\}$.

b) Resuelva el anterior sistema de ecuaciones.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = (3\,0\ -5\,3\ -3\,2\,2\ -1\ -1\,)\ y\ M' = (3\,0\ -5\,3\ -3\,2\,2\ -1\ -1\quad 3$$

.

$$M' = (3\,0\ -5\,3\ -3\,2\,2\ -1\ -1\quad 3\,0\,1\,) \Rightarrow \{F_1 \rightarrow F_1 - F_3\} \Rightarrow (1\,1\ -4\,3\ -$$

$$\Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 - 3F_1\ F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1\} \Rightarrow (1\,1\ -4\,0\ -6\,14\,0\ -3\,7\quad 2\ -6\ -3\,) \Rightarrow$$

.

$$\underline{Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$$

b)

Se resuelve el sistema despreciando una de las ecuaciones, por ejemplo la segunda, y se parametriza una de las ecuaciones, por ejemplo, $z = \lambda$:

$$3x = 3 + 5\lambda\ 2x - y = 1 + \lambda\} \Rightarrow x = 1 + \frac{5}{3}\lambda.$$

$y = 2x - 1 - \lambda = 2 + \frac{10}{3}\lambda - 1 - \lambda \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 1 + \frac{7}{3}\lambda.$

$\underline{Solución: \ x = 1 + \frac{5}{3}\lambda; \ y = 1 + \frac{7}{3}\lambda; \ z = \lambda, \ \forall\lambda\in R.}$

****

2º) Sean en R^3 los vectores $\vec{e} = (0,\ 1,\ 0)$, $\vec{u} = (3,\ \ -2,\ 2)$ y $\vec{v} = (0,\ 1,\ 1)$.

a) Calcule el producto vectorial $\vec{e} \times \vec{u}$.

b) Calcule el ángulo ϕ que forman $\vec{u}\ y\ \vec{v}$.

c) Demuestre que la familia de vectores $\left\{\vec{e},\ \vec{u},\ \vec{v}\right\}$ es linealmente independiente.

----

a)

$$\vec{e} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2i - 3k \Rightarrow \underline{\vec{e} \times \vec{u} = (2,\ 0,\ -3)}.$$

b)

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot \cos cos\ \phi \Rightarrow \cos cos\ \phi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|} = \frac{(3, -2, 2)\cdot(0, 1, 1)}{\sqrt{3^2+(-2)^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+(-3)^2}} =$$

$$= \frac{0-2+2}{\sqrt{9+4+4}\cdot\sqrt{4+9}} = \frac{0}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{13}} = 0 \Rightarrow \underline{\phi = 90°}.$$

c)

La familia de vectores $\left\{\vec{e},\ \vec{u},\ \vec{v}\right\}$ es linealmente independiente cuando el rango de la matriz que determinan es tres, o sea que, el determinante de la matriz que determinan tiene que ser distinto de cero:

$$Rang\left\{\vec{e},\ \vec{u},\ \vec{v}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow Rang\left\{\vec{e},\ \vec{u},\ \vec{v}\right\} = 3.$$

$$\underline{Queda\ demostrado\ que\ la\ familia\ de\ vectores \left\{\vec{e},\ \vec{u},\ \vec{v}\right\} es\ l.\ independiente.}$$

****

3º) a) Estudie el dominio de definición, los extremos relativos y las asíntotas de la función $f(x) = x + \frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x}$.

b) Teniendo en cuenta los datos obtenidos en el apartado anterior, represente, aproximadamente, la gráfica de la función $f(x)$.

----

a)

El dominio de una función racional es el conjunto de números reales excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$\underline{D(f) \Rightarrow R - \{0\}}.$$

Es condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo (máximo o mínimo) que se anule su primera derivada:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2+1) \cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2-1}{x^2} = 0;\ \ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para el valor que anula la primera derivada, se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo relativo.

$$f''(x) = \frac{2x \cdot x^2 - (x^2-1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2x^2 - 2x^2 + 2}{x^3} = \frac{2}{x^3}.$$

$$f''(-1) = \frac{2}{(-1)^3} = -2 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -1.$$

$$f(-1) = \frac{(-1)^2+1}{-1} = \frac{2}{-1} = -2 \Rightarrow Máximo\ relativo:\ \underline{A(-1,\ -2)}.$$

$$f''(1) = \frac{2}{1^3} = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 1.$$

$$f(1) = \frac{1^2+1}{1} = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow Mínimo\ relativo:\ \underline{B(1,\ 2)}.$$

Asíntotas verticales: son los valores reales de x que anulan el denominador:

$$\underline{La\ recta\ x = 0\ (eje\ Y)\ es\ asíntota\ vertical\ de\ la\ función}.$$

Asíntotas horizontales: son los valores finitos que alcanza la función cuando x

tiende a más infinito o menos infinito:

$$k = f(x) = \frac{x^2+1}{x} = \infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Una función racional tiene asíntotas oblicuas cuando el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador, como es el caso que nos ocupa. Las asíntotas oblicuas son de la forma $y = mx + n$, siendo:

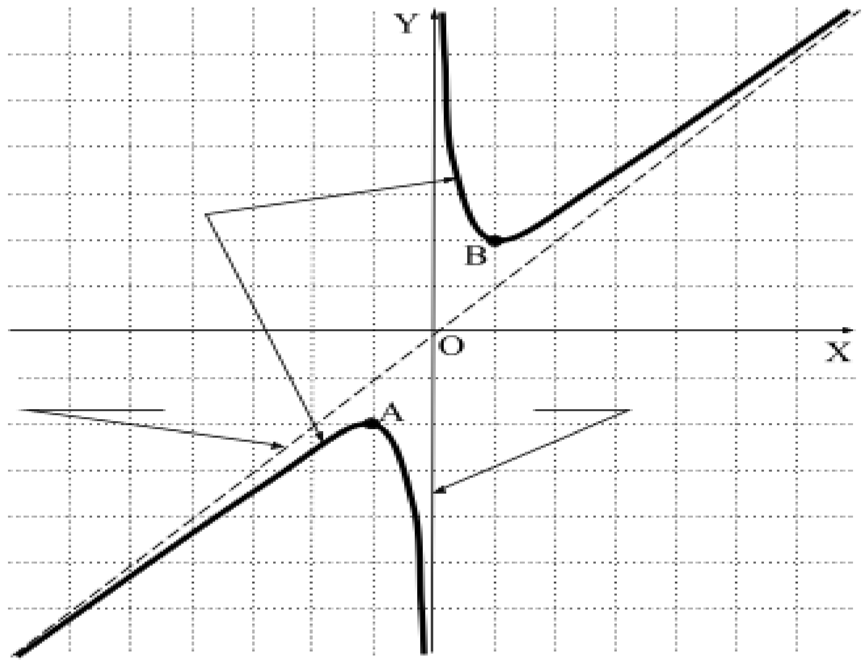
$$m = \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{x^2+1}{x}}{x} = \frac{x^2+1}{x^2} = 1.$$

$$n = [f(x) - mx] = \left(\frac{x^2+1}{x} - x\right) = \frac{x^2+1-x^2}{x} = 0.$$

$$\underline{Asíntota\ oblicua:\ y = x.}$$

$b)$

La representación gráfica, aproximada, de la función $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ se expresa en la figura adjunta.



****

4º) Utilizando el cambio de variable $1 + x^2 = t^2$, calcule una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$ que cumpla que $F(0) = 0$.

$$F(x) = \int f(x)\cdot dx = \int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\cdot dx \Rightarrow \left\{ 1 + x^2 = t^2 \rightarrow 2x\cdot dx = 2t\cdot dt \; x = \sqrt{t^2 - 1} \Rightarrow x \right.$$

$$\Rightarrow \int \frac{\sqrt{\left(t^2-1\right)^3}}{t}\cdot\frac{t\cdot dt}{\sqrt{t^2-1}} = \int\left(t^2 - 1\right)\cdot\sqrt{t^2 - 1}\cdot\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \int\left(t^2 - 1\right)\cdot dt = \frac{t^3}{3} - t + C =$$

$$= \frac{t}{3}\left(t^2 - 3\right) + C = \frac{1}{3}\sqrt{x^2 + 1}\cdot\left(1 + x^2 - 3\right) + C = \frac{1}{3}\left(x^2 - 2\right)\sqrt{x^2 + 1} + C.$$

$$F(x) = \frac{1}{3}\left(x^2 - 2\right)\sqrt{x^2 + 1} + C \Rightarrow F(0) = 0 \Rightarrow -\frac{2}{3} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{2}{3}.$$

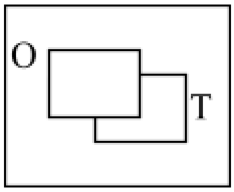
$$\underline{F(x) = \frac{1}{3}\left(x^2 - 2\right)\sqrt{x^2 + 1} + \frac{2}{3}.}$$

****

5º) En una población se sabe que el 80 % de los jóvenes tienen ordenador portátil, el 60 % tiene teléfono móvil, y el 10 % no tiene portátil ni móvil. Si un joven de esa población tiene teléfono móvil, calcule la probabilidad de que dicho joven tenga también ordenador portátil.

Se conoce: $P(O) = 0,8$; $P(T) = 0,6$; $P(\overline{O} \cap \overline{T}) = P(\overline{O \cup T}) = 0,1$.

Se pide: $P(T) = \frac{P(T \cap O)}{P(T)}$. (*)



$P(\overline{O} \cap \overline{T}) = P(\overline{O \cup T}) = 1 - P(O \cup T) \Rightarrow$

$\Rightarrow 0,1 = 1 - P(O \cup T) \Rightarrow P(O \cup T) = 0,9.$

Sabiendo que $P(O \cup T) = P(O) + P(T) - P(O \cap T) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(O \cap T) = P(O) + P(T) - P(O \cup T) = 0,8 + 0,6 - 0,9 = 0,5.$

Sustituyendo en la expresión (*): $P(T) = \frac{P(T \cap O)}{P(T)} = \frac{0,5}{0,6}$.

$$\underline{P(T) = \frac{P(T \cap O)}{P(T)} = \frac{5}{6} = 0,8333.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Considere las matrices $A = (1 \ -1)$, $B = (1 \ -2)$, $X = (x \ y)$ y $O = (0 \ 0)$.

a) Obtenga la matriz $A \cdot B$ y calcule su rango.

b) Clasifique y resuelva el sistema de ecuaciones $A \cdot B \cdot X = O$.

----

a)

$A \cdot B = (1 \ -1) \cdot (1 \ -2) = (1 \ -2 \ -1 \ 2)$.

$|A \cdot B| = |1 \ -2 \ -1 \ 2| = 2 - 2 = 0$.

$$\underline{A \cdot B = (1 \ -2 \ -1 \ 2)}.$$

$$\underline{Rang\ (A \cdot B) = 1}.$$

b)

$A \cdot B \cdot X = O \Rightarrow (1 \ -2 \ -1 \ 2) \cdot (x \ y) = (0 \ 0) \Rightarrow (x - 2y \ -x + 2y) = (0 \ 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad x - 2y = 0 \ -x + 2y = 0 \}$.

$$\underline{Sistema\ homogéneo\ compatible\ indeterminado}.$$

Haciendo $y = \lambda$:

$$\underline{Solución: x = 2\lambda,\ y = \lambda,\ \forall \lambda \in R}.$$

****

2º) En R^3 se consideran las rectas $r\equiv\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x - 2z = -8 \end{cases}$ y $s\equiv\frac{x+1}{-2} = \frac{y-3}{a} = \frac{z-1}{-1}$.

a) Halle el valor de a para que r y s sean paralelas.

b) Para el valor de a obtenido en el anterior apartado, calcule la distancia entre las rectas r y s.

----

a)

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r\equiv\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x - 2z = -8 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow x = -8 + 2\lambda;\ -24 + 6\lambda + 2y = 0;$$

$$-12 + 3\lambda + y = 0;\ y = 12 - 3\lambda \Rightarrow r\equiv\begin{cases} x = -8 + 2\lambda \\ y = 12 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}.$$

Los vectores directores de las rectas son $\vec{v_r} = (2, -3, 1)$ y $\vec{v_s} = (2, -a, 1)$.

Dos rectas son paralelas cuando sus vectores directores son linealmente dependientes, o sea, sus componentes son proporcionales.

$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ son\ paralelas\ para\ a = 3}$.

b)

Se va a determinar la distancia entre las dos rectas por dos procedimientos:

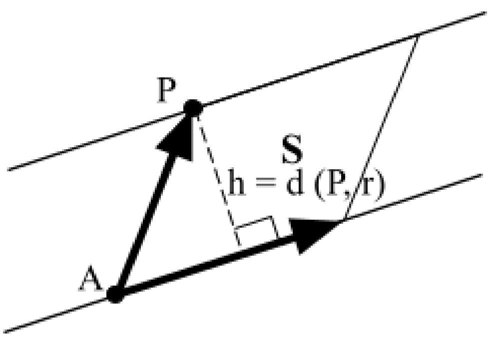
Primero:

Un punto de r es $A(-8, 12, 0)$ y un punto de s es $P(-1, 3, 1)$.

La distancia entre r y s es equivalente a la distancia de $P\in s$ a r.

La distancia de un punto a una recta puede determinarse teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que forman dos vectores es el módulo de su producto vectorial y, de forma geométrica, es el producto de la base por la altura.

Para una mejor comprensión del proceso se hace un dibujo de la situación.



$$S = \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AP}\right| \; S = \left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot h \, \} \Rightarrow \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AP}\right| = \left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = d(P, r) = d(r,\ s) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AP}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}. \quad (*)$$

$$\overrightarrow{AP} = [P - A] = [(-1,\ 3,\ 1) - (-8,\ 12,\ 0)] = (7,\ -9,\ 1).$$

Aplicando la fórmula al punto $P(-1,\ 3,\ 1)$ y a la recta $r \equiv \{3x + 2y = 0 \; x - 2z = -8$:

$$d(P, r) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AP}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|} = \frac{\left\| i \; j \; k \; 2 \; -3 \; 1 \; 7 \; -9 \; 1 \right\|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{|-3i + 7j - 18k + 21k + 9i - 2j|}{\sqrt{4 + 9 + 1}} = \frac{|6i + 5j + 3k|}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{6^2 + 5^2 + 3^2}}{\sqrt{14}} =$$

$$= \frac{\sqrt{36 + 25 + 9}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{70}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{70}{14}} = \sqrt{5}.$$

$$\underline{d(r,\ s) = \sqrt{5}\, unidades}.$$

Segundo:

El haz de planos α perpendicular a las rectas r y s tiene por ecuación general: $\alpha \equiv 2x - 3y + z + D = 0$.

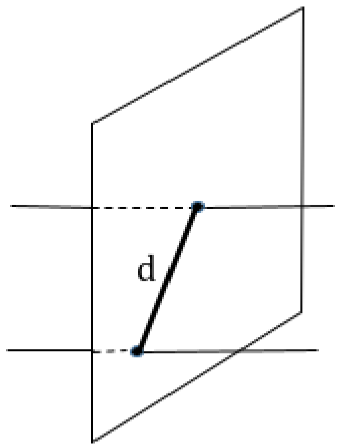
De los infinitos planos del haz α, el plano π que contiene al punto $P(-1,\ 3,\ 1)$ es el que satisface su ecuación:

$$\alpha \equiv 2x - 3y + z + D = 0 \quad P(-1,\ 3,\ 1) \, \} \Rightarrow 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 3 + 1 + D = 0;$$

$$-2 - 9 + 1 + D = 0; \; -10 + D = 0 \Rightarrow D = 10 \Rightarrow \pi \equiv 2x - 3y + z + 10 = 0$$

.

El punto Q, intersección de la recta r con el plano π es el siguiente:



$$\pi \equiv 2x - 3y + z + 10 = 0 \quad r \equiv \{x = -8 + 2\lambda \; y = 12 - 3\lambda \; z = \lambda$$

$$\Rightarrow 2(-8 + 2\lambda) - 3(12 - 3\lambda) + \lambda + 10 = 0;$$

$- 16 + 4\lambda - 36 + 9\lambda + \lambda + 10 = 0;\ \ 14\lambda = 42;$

$\lambda = 3 \Rightarrow Q(- 2,\ 3,\ 3).$

La distancia pedida entre las rectas es la misma que la distancia entre los puntos $P\ y\ Q$, o sea, el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$.

$\overrightarrow{PQ} = [P - Q] = [(- 1,\ 3,\ 1) - (- 2,\ 3,\ 3)] = (1,\ 0,\ - 2).$

$$d(r,\ s) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{1^2 + (- 2)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}.$$

$$\underline{d(r,\ s) = \sqrt{5}\ unidades}.$$

****

3º) Calcule, aplicando la regla de L'Hopital, el límite $\frac{sen\ (2x)+(1-x)^2-1}{L\ (\cos cos\ x\ )}$.

$$\frac{sen\ (2x)+(1-x)^2-1}{L\ (\cos cos\ x\ )} = \frac{0+1-1}{L1} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2\cdot cos\ (2x)+2\cdot(1-x)\cdot(-1)}{\frac{-sen\ x}{\cos cos\ x}} = - 2\cdot \cos cos\ x \cdot \frac{cos\ (2x)-1+x}{sen\ x} =$$

$$= - 2\cdot \frac{cos\ (2x)-1+x}{sen\ x} = - 2\cdot \frac{1-1+0}{0} = - 2\cdot \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow - 2\cdot \frac{-2\cdot sen\ (2x)-0+1}{cos\ x} = - 2\cdot \frac{-2\cdot 0+1}{1} = - 2.$$

$$\underline{\frac{sen\ (2x)+(1-x)^2-1}{L\ (\cos cos\ x\ )} = - 2}\ .$$

****

4º) $a)$ Calcule los puntos en los que las curvas $y = e^x$ e $y = -x^2$ cortan a la rectas $x = 0$ y $x = 1$.

$b)$ Calcule el área de la región plana limitada por las curvas $y = e^x$ e $y = -x^2$ y por las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

$a)$

$$\left.\begin{array}{l} y = e^x \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow e^0 = 1 \Rightarrow \underline{A(0,\ 1)}.$$

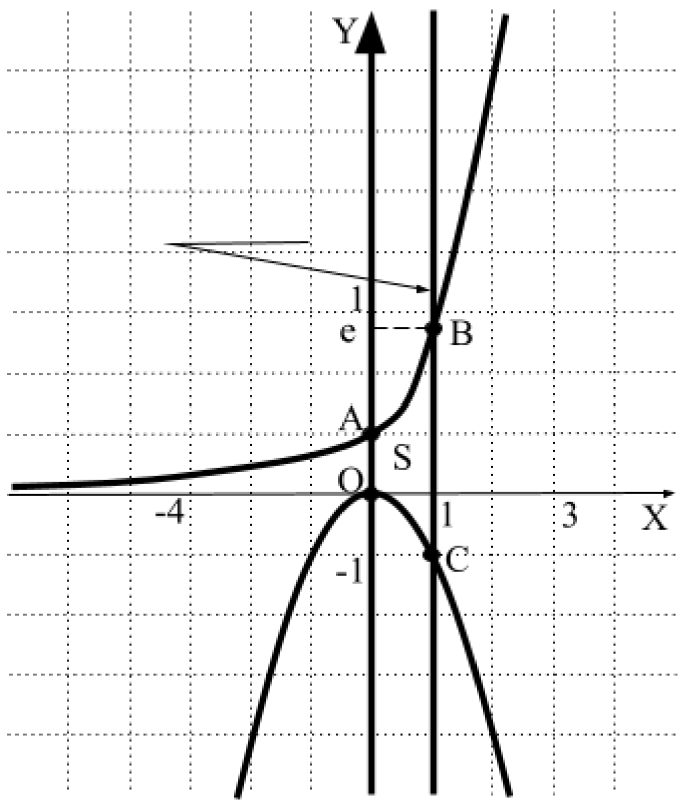
$$\left.\begin{array}{l} y = e^x \\ x = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow e^1 = e \Rightarrow \underline{B(1,\ e)}.$$

$$\left.\begin{array}{l} y = -x^2 \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -0^2 = 0 \Rightarrow \underline{O(0,\ 0)}.$$

$$\left.\begin{array}{l} y = -x^2 \\ x = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow -1^2 = -1 \Rightarrow \underline{C(1,\ -1)}.$$

$b)$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la que se indica en la figura adjunta.



$$S = \int_0^1 e^x \cdot dx - \int_0^1 -x^2 \cdot dx = \int_0^1 e^x \cdot dx + \int_0^1 x^2 \cdot dx = \int_0^1 \left(e^x + x^2\right) \cdot dx =$$

$$= \left[e^x + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left(e^1 + \frac{1^3}{3}\right) - \left(e^0 + \frac{0^3}{3}\right) = e + \frac{1}{3} - 1 - 0 = e - \frac{2}{3} = \frac{3e-2}{3}.$$

$$\underline{S = \frac{3e-2}{3} \cong 2,05\ u^2}.$$

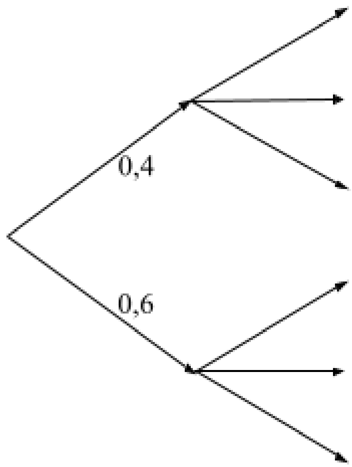
****

5º) Una asociación deportiva tiene 1.000 socios, el 40 % de ellos mujeres. Están repartidos en tres secciones y cada socio sólo pertenece a una sección. En la sección de baloncesto hay 400 socios, 120 de ellos mujeres, en la de natación hay 350 socios, 180 de ellos mujeres, y en la de tenis están el resto de los socios. Calcule la probabilidad de que un socio seleccionado al azar sea varón y de la sección de tenis.

$Mujeres = 40\,\%\ de\ 1.000 = 400.$
$Hombres = 1.000 - 400 = 600.$

$Baloncesto \Rightarrow \{120\ mujeres\ \ 280\ hombres\}.$
$Natación \Rightarrow \{180\ mujeres\ \ 170\ hombres\}$

$Tenis \Rightarrow \{100\ mujeres\ \ 150\ hombres\}.$



$$P = P(V \cap T) = P(V) \cdot P(T/V) = 0,6 \cdot \frac{150}{600} = \underline{0,15}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE GALICIA

JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá responder solo a los ejercicios de una de las opciones.

OPCIÓN A

1º) Dada la matriz $A = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ )$:

a) Determina, según los valores de λ, el rango de la matriz $A \cdot A^t - \lambda I$, siendo A^t la matriz traspuesta de A e I la matriz unidad de orden 2.

b) Determina la matriz $X = (x\ y\ )$ que verifica la ecuación matricial $A \cdot A^t \cdot X = 6X$.

----

a)

$$A \cdot A^t - \lambda I = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ ) \cdot (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ ) - \lambda \cdot I = (3\ 3\ 3\ 3\ ) - \lambda \cdot (1\ 0\ 0\ 1\ ) =$$

$$= (3\ 3\ 3\ 3\ ) - (\lambda\ 0\ 0\ \lambda\ ) = (3 - \lambda\ 3\ 3\ 3 - \lambda\ ).$$

$$\left|A \cdot A^t - \lambda I\right| = |3 - \lambda\ 3\ 3\ 3 - \lambda\ | = (3 - \lambda)^2 - 9 = 9 - 6\lambda + \lambda^2 - 9 =$$

$$= \lambda^2 - 6\lambda = \lambda(\lambda - 6) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 6.$$

$$\underline{Para\ \{\lambda \neq 0\ \lambda \neq 6\ \} \Rightarrow Rang\left(A \cdot A^t - \lambda I\right) = 2}.$$

$$Para\ \lambda = 0 \Rightarrow A \cdot A^t - \lambda I = (3\ 3\ 3\ 3\ ) \Rightarrow Rang\left(A \cdot A^t - \lambda I\right) = 1.$$

$$Para\ \lambda = 6 \Rightarrow A \cdot A^t - \lambda I = (-\ 3\ 3\ 3\ \ -\ 3\ ) \Rightarrow Rang\left(A \cdot A^t - \lambda I\right) = 1.$$

$$\underline{Para\ \{\lambda = 0\ \lambda = 6\ \} \Rightarrow Rang\left(A \cdot A^t - \lambda I\right) = 1}.$$

b)

$$A \cdot A^t \cdot X = 6X \Rightarrow (3\ 3\ 3\ 3\ ) \cdot (x\ y\ ) = (6x\ 6y\ );\ \ 3x + 3y = 6x\ 3x + 3y = 6y\ \}\ \ -3x + 3$$

$$\left.\begin{array}{l} -x+y=0 \\ x-y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=y=\lambda \Rightarrow \underline{X=\begin{pmatrix}\lambda \\ \lambda\end{pmatrix},\ \forall \lambda \in R}.$$

****

2º) a) Calcula $\frac{sen^2 x - 3x^2}{e^{x^2} - coscos\ 2x}$.

b) Se desea construir una caja de base cuadrada, con tapa y con una capacidad de 80 dm^3. Para la tapa y la superficie lateral se quiere utilizar un material que cuesta 2 euros/dm^2 y para la base otro que cuesta 3 euros/dm^2. Calcule las dimensiones de la caja para que su coste sea mínimo.

c) Calcula $I = \int_0^1 x\cdot L(1 + x)\cdot dx$.

----

a)

$$\frac{sen^2 x - 3x^2}{e^{x^2} - coscos\ 2x} = \frac{0-0}{e^0 - coscos\ 0} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

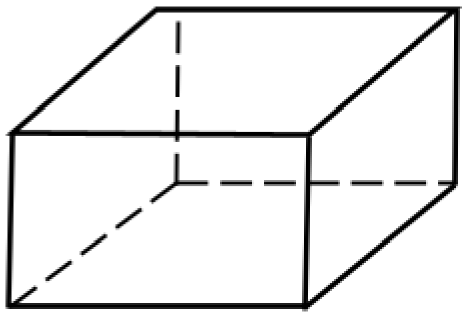
$$\Rightarrow \frac{2\cdot sen\ x\cdot coscos\ x - 6x}{2x\cdot e^{x^2} + 2\cdot 2x} = \frac{1}{2}\frac{sen\ 2x - 6x}{x\cdot e^{x^2} + 2x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{0-0}{0+0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot cos\ 2x - 6}{1\cdot e^{x^2} + x\cdot 2x\cdot e^{x^2} + 2\cdot coscos\ 2x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot coscos\ 0 - 6}{e^0 + 0 + 2\cdot coscos\ 0} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 1 - 6}{1 + 2\cdot 1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{-4}{3} = -\frac{2}{3}.$$

$$\underline{\frac{sen^2 x - 3x^2}{e^{x^2} - coscos\ 2x} = -\frac{2}{3}}.$$

b)

$$V = x^2\cdot h = 80 \Rightarrow h = \frac{80}{x^2}.$$



$$Coste = C(x,\ y) = \left(x^2 + 4xh\right)\cdot\overbrace{2}^{Tapa\ y\ laterales} + x^2\cdot\overbrace{3}^{Suelo}.$$

Sustituyendo el valor de h:

$$C(x) = \left(x^2 + 4x\cdot\frac{80}{x^2}\right)\cdot 2 + 3x^2 = 2x^2 + \frac{640}{x} + 3x^2 = 5x^2 + \frac{640}{x}.$$

Es condición necesaria para que el coste sea mínimo que se anule su primera derivada:

$$C'(x) = 10x - \frac{640}{x^2} = 0 \Rightarrow 10x^3 = 640;\ \ x^3 = 64 = 4^3 \Rightarrow x = 4.$$

Se justifica que se trata de un mínimo:

$$C^{''}(x) = 10 - \frac{-640\cdot 2x}{x^4} = 10 + \frac{1.280}{x^3}.$$

$$C^{''}(4) = 10 + \frac{1.280}{4^3} > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ x = 4. \quad (queda\ justificado).$$

$$h = \frac{80}{x^2} = \frac{80}{4^2} = \frac{80}{16} = 5.$$

$\underline{El\ coste\ es\ mínimo\ cuando\ el\ lado\ de\ la\ base\ es\ de\ 4\ dm\ y\ la\ altura,\ 5\ dm}.$

$c)$

$$I = \int_0^1 x\cdot L(1+x)\cdot dx \Rightarrow \left\{ x = L(1+x) \rightarrow du = \frac{dx}{1+x}\ dv = x\cdot dx \rightarrow v = \frac{x^2}{2} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{llll} x^2 & & & x+1 \\ -x^2 & -x & & x-1 \\ 0 & -x & & \\ & +x & +1 & \\ & & +1 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[L(1+x)\cdot\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{1+x} \right]_0^1 =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\cdot L(1+x) - \frac{1}{2}\cdot\int \frac{x^2}{x+1}\cdot dx \right]_0^1 =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\cdot L(1+x) - \frac{1}{2}\cdot\int \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} \right)\cdot dx \right]_0^1 =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\cdot L(1+x) - \frac{1}{2}\cdot\left\{ \frac{x^2}{2} - x + L(x+1) \right\} \right]_0^1 =$$

$$= \left[\frac{1}{2} L(1+1) - \frac{1}{2}\cdot\left\{ \frac{1}{2} - 1 + L(1+1) \right\} \right] - \left[\frac{0}{2}\cdot L(1+0) - \frac{1}{2}\cdot\{0 - 0 + L(0+1)\} \right]$$

$$= \left(\frac{1}{2} L2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} L2 \right) - \left(0 - \frac{1}{2}\cdot 0 \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 0 = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}.$$

$$I = \int_0^1 x \cdot L(1 + x) \cdot dx = \frac{1}{4}.$$

****

3º) Dados los planos $\pi_1 \equiv x + y - z + 2 = 0$ y $\pi_2 \equiv \{x = 2 + \lambda + \mu\ y = \lambda + 3\mu \quad z = -1 - \lambda$:

a) Estudia la posición relativa de $\pi_1\ y\ \pi_2$. Si se cortan, calcula el ángulo que forman.

b) Sea r la recta que pasa por el punto $P(1,\ 1,\ 1)$ y es perpendicular a π_1. Calcula el punto de corte de $r\ y\ \pi_1$.

c) Calcula el punto simétrico del punto P respecto del plano π_1.

----

a)

Un vector normal del plano π_1 es $\vec{n_1} = (1,\ 1,\ -1)$.

Dos vectores directores del plano π_2 son $\vec{u} = (1,\ 1,\ -1)\ y\ \vec{v} = (1,\ 3,\ 0)$.

Un vector normal del plano π_2 es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de dos de sus vectores directores.

$\vec{n_2} = \vec{u} \times \vec{v} = |i\ j\ k\ 1\ 1\ \ -1\ 1\ 3\ 0\,| = -j + 3k - k + 3i = 3i - j + 2k = (3,\ -1,\ 2$
.

Los vectores normales de los planos $\pi_1\ y\ \pi_2$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes.

$\underline{Los\ planos\ \pi_1 y\ \pi_2\ son\ secantes.}$

El ángulo que forman dos planos secantes es el mismo que forman sus vectores normales.

$$\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = \left|\vec{n_1}\right| \cdot \left|\vec{n_2}\right| \cdot \cos cos\ \alpha \Rightarrow \cos cos\ \alpha = \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{\left|\vec{n_1}\right| \cdot \left|\vec{n_2}\right|} = \frac{(1, 1, -1)\cdot(3, -1, 2)}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}+\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}} =$$

$$= \frac{3-1-2}{\sqrt{1+1+1}+\sqrt{9+1+4}} = \frac{0}{\sqrt{3}+\sqrt{14}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90°.$$

$\underline{Los\ planos\ \pi_1\ y\ \pi_2\ son\ perpendiculares.}$

$b)$

La recta r, por ser perpendicular al plano π_1 tiene como vector director al vector normal del plano: $\vec{n_1} = (1,\ 1,\ \ -\ 1)$.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \{x\ =\ 1\ +\ \lambda\, y\ =\ 1\ +\ \lambda\, z\ =\ 1\ -\ \lambda$.

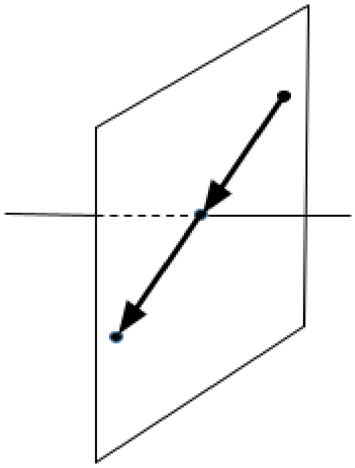
El punto de corte de r y π_1 tienen por componentes las soluciones del sistema que forman:

$\pi_1 \equiv x\ +\ y\ -\ z\ +\ 2\ =\ 0 \qquad r \equiv \{x\ =\ 1\ +\ \lambda\, y\ =\ 1\ +\ \lambda\, z\ =\ 1\ -\ \lambda\ \} \Rightarrow (1\ +$

$1\ +\ \lambda\ +\ 1\ +\ \lambda\ -\ 1\ +\ \lambda\ +\ 2\ =\ 0;\ \ 3\lambda\ +\ 3\ =\ 0;\ \ \lambda\ +\ 1\ =\ 0 \Rightarrow \lambda\ =-\ 1.$

$\lambda\ =-\ 1 \Rightarrow \{x\ =\ 1\ -\ 1\ =\ 0 \quad y\ =\ 1\ -\ 1\ =\ 0 \quad z\ =\ 1\ -\ (-\ 1) =\ 2\ \} \Rightarrow \underline{M(0,\ 0,\ 2)}$
.

$c)$



De los apartados anteriores se deduce la situación que refleja el dibujo adjunto, del que se deduce lo siguiente:

El punto $P'(x,\ y,\ z)$ es simétrico de $P(1,\ 1,\ 1)$ cuando sea $\vec{PM} = \vec{MP'}$:

$\vec{PM} = [M\ -\ P] = [(0,\ 0,\ 2) - (1,\ 1,\ 1)] = (-\ 1,\ \ -\ 1,\ 1).$

$\vec{MP'} = [P'\ -\ M] = [(x,\ y,\ z) - (0,\ 0,\ 2)] = (x,\ y,\ z\ -\ 2).$

$(x,\ y,\ z\ -\ 2) = (-\ 1,\ \ -\ 1,\ 1) \Rightarrow \{x\ =-\ 1 \qquad y\ =-\ 1 \qquad z\ -\ 2\ =\ 1 \rightarrow z$
.

****

4º) a) En un experimento aleatorio, sean A y B dos sucesos con $P(\overline{A}) = 0,4; P(B) = 0,7$. Si A y B son independientes, calcula $P(A \cup B)$ y $P(A - B)$. (Nota: $\overline{A}$ suceso contrario o complementario de A)

b) En un grupo de 100 personas hay 40 hombres y 60 mujeres. Se eligen al azar 4 personas del grupo, ¿cuál es la probabilidad de seleccionar más mujeres que hombres?

----

a)

Si A y B son independientes se cumple que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

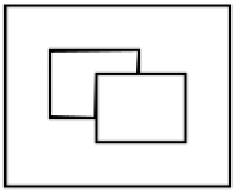
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = [1 - P(\overline{A})] \cdot P(B) = (1 - 0,4) \cdot 0,7 = 0,42.$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = [1 - P(\overline{A})] + P(B) - P(A \cap B) =$$

$$= 1 - 0,4 + 0,7 - 0,42 = 1,7 - 0,82 = \underline{0,88}.$$

$$P(A - B) = P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) =$$

$$= [1 - P(\overline{A})] - P(A \cap B) = 1 - 0,4 - 0,42 = \underline{0,18}.$$



b)

La probabilidad de elegir una mujer es: $p = \frac{60}{100} = 0,6$.

La probabilidad de elegir un hombre es: $q = 1 - p = 1 - 0,6 = 0,4$.

Por tratarse de una distribución binomial la probabilidad de que salgan r elementos de un total de $n \geq r$ es: $P(r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}$.

Si en elección de 4 personas tiene que haber más mujeres que hombres tendrán que ser los casos de 3 mujeres y un hombre o 4 mujeres y ningún hombre.

$$P = P(mmmh) + P(mmmm) = \binom{4}{3} \cdot 0,6^3 \cdot 0,4^1 + \binom{4}{4} \cdot 0,6^4 \cdot 0,4^0 =$$

$$= \frac{4!}{(4-3)! \cdot 3!} \cdot 0,216 \cdot 0,4 + \frac{4!}{(4-4)! \cdot 4!} \cdot 0,1296 \cdot 1 = 4 \cdot 0,0864 + 1 \cdot 0,1296 \cdot 1 =$$

$$= 0,3456 + 0,1296 = \underline{0,4752}.$$

****

OPCIÓN B

1º) $a)$ Discute, según los valores del parámetro m, el sistema: $\{x + 2y - z = 1\, x - z = m \quad x + y - z = 1$.

$b)$ Resuélvelo, si es posible, cuando $m = 1$.

$a)$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = (1\, 2\ -\ 1\, 1\, 0\ -\ 1\, 1\, 1\ -\ 1\,)$ y $M' = (1\, 2\ -\ 1\, 1\, 0\ -\ 1\, 1\, 1\ -\ 1\quad 1\, m\, 1\,)$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$|M| = |1\, 2\ -\ 1\, 1\, 0\ -\ 1\, 1\, 1\ -\ 1\,| = 0 \Rightarrow \left\{C_3 = -C_1\right\} \Rightarrow Rang\ M = 2.$

$Rang\ M^{'} \Rightarrow \left\{C_1,\ C_2,\ C_4\right\} \Rightarrow |1\, 2\, 1\, 1\, 0\, m\, 1\, 1\, 1\,| = 1 + 2m - m - 2 = m - 1 = 0$

$\Rightarrow m = 1.$

$\underline{Para\, m = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M^{'} = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I}.$

$\underline{Para\, m \neq 1 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M^{'} = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible}.$

$b)$

Para $m = 1$ el sistema resulta: $x + 2y - z = 1 \quad x - z = 1\ x + y - z = 1\,\}$, que es compatible indeterminado. Despreciando una de las ecuaciones, por ejemplo la primera, y haciendo $z = λ$:

$x = 1 + λ;\ \ y = 1 + λ - x = 1 + λ - 1 - λ = 0$

$\underline{Solución: x = 1 + λ,\ y = 0,\ z = λ;\ \forall λ \in R}.$

****

2º) a) Calcula los valores $a\ y\ b$ para que la función $f(x)=\{ax^2+b\ si\ x<3\ L(x-2)\ si\ x\geq 3$ sea derivable en $x=3$ y determina el punto en el que la tangente a la gráfica de $f(x)$ es paralela a la recta $x+3y=0$.

b) Si $P(x)$ es un polinomio de tercer grado, con un punto de inflexión en $A(0,\ 5)$ y un extremo relativo en el punto $B(1,\ 1)$, calcula $I=\int_0^1 P(x)\cdot dx$.

----

a)

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=3$, cuya continuidad es dudosa; a continuación se determinan los valores de $a\ y\ b$ para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$x=3\Rightarrow\{f(x)=\left(ax^2+b\right)=9a+b\qquad f(x)=[L(x-2)]=L1=0=f(3)$

$\Rightarrow f(x)=f(x)=f(3)\Rightarrow 9a+b=0.$ (1)

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales.

$f'(x)=\{2ax\ si\ x<3\ \frac{1}{x-2}\ si\ x\geq 0$. $\quad f'\left(3^-\right)=6a.$

$f'\left(3^+\right)=\frac{1}{3-2}=\frac{1}{1}=1.$

$f'\left(3^-\right)=f'\left(3^+\right)\Rightarrow 6a=1\Rightarrow \underline{a=\frac{1}{6}}.$

Sustituyendo en (1) el valor de a: $\quad 9\cdot\frac{1}{6}+b=0\Rightarrow \underline{b=-\frac{3}{2}}.$

Resultan: $\quad f(x)=\{\frac{1}{6}x^2-\frac{3}{2}\ si\ x<3\ L(x-2)\ si\ x\geq 3$ y $f'(x)=\{\frac{1}{3}x\ si\ x<3\ \frac{1}{x-2}\ si\ x\geq 0$

La pendiente de la recta $x+3y=0$ es $m=-\frac{1}{3}$.

La pendiente de la tangente a una función en un punto es el valor de su primera derivada en ese punto.

$x < 3 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = -1.$

Punto de tangencia:

$f(-1) = \frac{1}{6}\cdot(-1)^2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{6} - \frac{3}{2} = \frac{1-9}{6} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3} \Rightarrow \underline{P_1\left(-1,\ -\frac{4}{3}\right)}$

.

La expresión de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente es la siguiente: $y - y_0 = m\left(x - x_0\right)$.

$y + \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}\cdot(x + 1);\ \ 3y + 4 = -x - 1 \Rightarrow \underline{Tangente: t \equiv x + 3y + 5 = 0}.$

$x > 3 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{3};\ x - 2 = -3 \Rightarrow x = -1 \not> 3.$

La tangente hallada es la única que cumple la condición.

$b)$

Sea el polinomio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Por contener $P(x)$ al punto $A(0,\ 5) \Rightarrow P(0) = 5$:

$P(0) = 5 \Rightarrow \underline{d = 5}.$

Por contener $P(x)$ al punto $B(1,\ 1) \Rightarrow P(1) = 1$:

$P(1) = 1 \Rightarrow a + b + c + 5 = 1;\ \ a + b + c = -4.$ (1)

$P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$ $\qquad P''(x) = 6ax + 2b.$

Por tener $P(x)$ un punto de inflexión en $A(0,\ 5) \Rightarrow P''(0) = 0$:

$P''(0) = 0 \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow \underline{b = 0}.$

Por tener $P(x)$ un extremo relativo en $B(1,\ 1) \Rightarrow P'(1) = 0$:

$P'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0 \rightarrow b = 0 \rightarrow 3a + c = 0.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2) y teniendo en cuenta que $b = 0$:

$\left.\begin{array}{l} a + c = -4 \\ 3a + c = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -a - c = 4 \\ 3a + c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2a = 4;\ \underline{a = 2}.$

$2 + c = -4 \Rightarrow \underline{c = -6}.$

$$\underline{P(x) = 2x^3 - 6x + 5}.$$

$$I = \int_0^1 P(x) \cdot dx = \int_0^1 \left(2x^3 - 6x + 5\right) \cdot dx = \left[\frac{2x^4}{4} - \frac{6x^2}{2} + 5x\right]_0^1 =$$

$$= \left[\frac{x^4}{2} - 3x^2 + 5x\right]_0^1 = \left(\frac{1^4}{2} - 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1\right) - 0 = \frac{1}{2} - 3 + 5 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}.$$

$$\underline{I = \int_0^1 P(x) \cdot dx = \frac{5}{2} = 2,5.}$$

****

3º) Sea r la recta que pasa por los puntos $P(1,\ 0,\ 5)$ y $Q(5,\ 2,\ 3)$.

a) Calcula la distancia del punto $A(5,\ -1,\ 6)$ a la recta r.

b) Calcula la ecuación implícita o general del plano que es perpendicular a r y pasa por el punto $A(5,\ -1,\ 6)$.

c) Calcula el área del triángulo de vértices los puntos $P(1,\ 0,\ 5)$ y $A(5,\ -1,\ 6)$ y al punto de corte de la recta r con el plano $\pi \equiv 2x + y - z - 3 = 0$.

----

a)

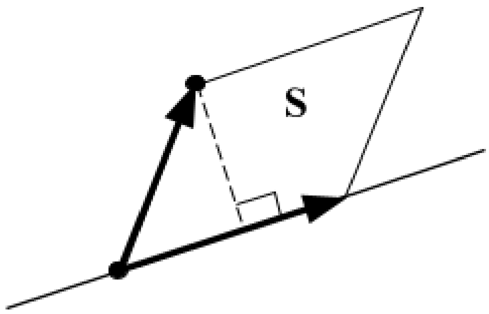
Un vector director de r es:

$$\overrightarrow{PQ} = [Q - P] = [(5,\ 2,\ 3) - (1,\ 0,\ 5)] = (4,\ 2,\ -2) \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (2,\ 1,\ -1)$$

.

La distancia de un punto a una recta puede determinarse teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que forman dos vectores es el módulo de su producto vectorial y, de forma geométrica, es el producto de la base por la altura.

Para una mejor comprensión del proceso se hace un dibujo de la situación.



$$\left.\begin{array}{l} S = \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{PA}\right| \\ S = \left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot h \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{PA}\right| = \left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot h \Rightarrow \underline{h = d(A, r) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{PA}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}}$$

.

$$\overrightarrow{PA} = [A - P] = [(5,\ -1,\ 6) - (1,\ 0,\ 5)] = (4,\ -1,\ 1).$$

Aplicando la fórmula al punto A y a la recta r:

$$d(A, r) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{PA}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|} = \frac{||i\ j\ k\ 2\ 1\ -1\ 4\ -1\ 1\ ||}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|i - 4j - 2k - 4k - i - 2j|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{|-6j - 6k|}{\sqrt{6}} = \frac{6 \cdot |-j - k|}{\sqrt{6}} =$$

$$= \frac{6 \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}}{\sqrt{6}} = \frac{6 \cdot \sqrt{1+1}}{\sqrt{6}} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = \underline{2\sqrt{3}\ u = d(A, r)}.$$

b)

El haz de plano β perpendiculares a r es $\beta \equiv 2x + y - z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz β, el plano π que contiene al punto $A(5,\ -1,\ 6)$ es el que satisface su ecuación:

$\beta \equiv 2x + y - z + D = 0 \quad A(5,\ -1,\ 6)\} \Rightarrow 2 \cdot 5 + (-1) - 6 + D = 0;\ \ 10$
$3 + D = 0 \Rightarrow D = -3.$

<u>*El plano ⊥ a r que contiene al punto A es* $\pi \equiv 2x + y - z - 3 = 0$</u>.

c)

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es: $r \equiv \{x = 1 + 2\lambda\ y = \lambda \quad z = 5 - \lambda$

El punto N de corte de la recta r con el plano π es el siguiente:

$\pi \equiv 2x + y - z - 3 = 0 \quad r \equiv \{x = 1 + 2\lambda\ y = \lambda \quad z = 5 - \lambda \quad \} \Rightarrow 2 \cdot (1 + 2\lambda$

$2 + 4\lambda + \lambda - 5 + \lambda - 3 = 0;\ -6 + 6\lambda = 0;\ -1 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1.$

$\lambda = 1 \Rightarrow \{x = 1 + 2 \cdot 1 = 1 + 2 = 3\ y = 1 \quad z = 5 - 1 = 4$
.

$\overrightarrow{AP} = (-4,\ 1,\ -1).$

$\overrightarrow{AN} = [N - A] = [(3,\ 1,\ 4) - (5,\ -1,\ 6)] = (-2,\ 2,\ -2).$

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan los puntos:

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AN}\right| = \frac{1}{2} \cdot \|i\ j\ k\ \ -4\ 1\ -1\ \ -2\ 2\ -2\ \| = \|i\ j\ k\ \ -4\ 1\ -1\ \ -1\ 1$

$= |-i + j - 4k + k + i - 4j| = |-3j - 3k| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9 + 9} =$

$= \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$

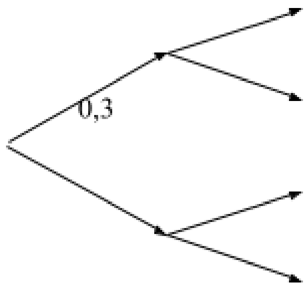
<u>$S_{APN} = 3\sqrt{2}\,u^2$</u>.

****

4º) En un estudio realizado en un centro de salud se ha observado que el 30 % de los pacientes son fumadores y de éstos, el 60 % son hombres. Entre los pacientes que no son fumadores, el 70 % son mujeres. Elegido un paciente al azar:

a) Calcula la probabilidad de que el paciente sea mujer.

b) Se el paciente elegido es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que sea fumador?



a)

$$P = P(M) = P(F) \cdot P(M/F) + P(\overline{F}) \cdot P(M/\overline{F}) = 0,3 \cdot 0,4 + 0,7 \cdot 0,7 =$$

$$= 0,12 + 0,49 = \underline{0,61}.$$

b)

$$P = P(F/H) = \frac{P(F \cap H)}{P(H)} = \frac{P(F) \cdot P(H/F)}{P(F) \cdot P(H/F) + P(\overline{F}) \cdot P(H/\overline{E})} = \frac{0,3 \cdot 0,6}{0,3 \cdot 0,6 + 0,7 \cdot 0,3} = \frac{0,18}{0,18 + 0,21} =$$

$$= \frac{0,18}{0,39} = \underline{0,4615}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE GALICIA

SEPTIEMBRE – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá responder solo a los ejercicios de una de las opciones.

OPCIÓN A

1º) Dadas las matrices $A = (1\ 0\ k\ 1\ 1\ 1)\ y\ B = (1\ 1\ \ -3\ 3\ 1\ \ -1)$:

a) Determina, según los valores de k, el rango de las matrices $A \cdot B\ y\ B \cdot A$.
b) Para el valor de $k = 0$, determina las matrices X que verifican $A \cdot B \cdot X = (0\ 0\ 0)$.

----

a)

$A \cdot B = (1\ 0\ k\ 1\ 1\ 1) \cdot (1\ 1\ \ -3\ 3\ 1\ \ -1) = (1\ 1\ \ -3\ k + 3\ k + 1\ \ -3k - 1\ 4\ 2$

.

$|A \cdot B| = |1\ 1\ \ -3\ k + 3\ k + 1\ \ -3k - 1\ 4\ 2\ \ -4| =$

$= -4(k + 1) - 6(k + 3) + 4(-3k - 1) + 12(k + 1) - 2(-3k - 1) + 4(k + 3) =$

$= 8(k + 1) - 2(k + 3) + 2(-3k - 1) = 8k + 8 - 2k - 6 - 6k - 2 = 0.$

$|1\ 1\ 4\ 2| \neq 0$ es un menor de $A \cdot B$, por lo cual:

$\underline{Rang\ (A \cdot B) = 2,\ \forall k \in R}$.

$B \cdot A = (1\ 1\ \ -3\ 3\ 1\ \ -1) \cdot (1\ 0\ k\ 1\ 1\ 1) = (k - 2\ \ -2\ k + 2\ 0)$.

$|B \cdot A| = |k - 2\ \ -2\ k + 2\ 0| = 2(k + 2) = 0 \Rightarrow k = -2.$

$\underline{Para\ k \neq -2 \Rightarrow Rang\ (B \cdot A) = 2;\ \ Para\ k = -2 \Rightarrow Rang\ (B \cdot A) = 1}$.

b)

Para $k = 0$ es $A \cdot B = (1\ 1\ \ -3\ 3\ 1\ \ -1\ 4\ 2\ \ -4)$.

$A \cdot B \cdot X = (A \cdot B) \cdot X = (0\ 0\ 0) \Rightarrow (1\ 1\ \ -3\ 3\ 1\ \ -1\ 4\ 2\ \ -4) \cdot (x\ y\ z) = (0\ 0\ 0) \Rightarrow \quad x +$

.

Despreciando una ecuación, por ejemplo, la tercera y haciendo $z = \lambda$:

$x + y = 3\lambda$ $3x + y = \lambda$ $\}$ $- x - y =- 3\lambda$ $3x + y = \lambda$ $\}\Rightarrow 2x =- 2\lambda;$ $x =- \lambda;$ y
.

$$\underline{X = (- \lambda \ 4\lambda \ \lambda), \ \forall\lambda\in R.}$$

****

2º) $a)$ Calcula: $i)\,\frac{x+3\cdot e^{2x}}{x+e^{2x}}$. $\qquad ii)\,\frac{x+3\cdot e^{2x}}{x+e^{2x}}$

b) La derivada de una función $f(x)$, cuyo dominio es $(0,\ \infty)$, es $f'(x) = 1 + Lx$. Determina la función $f(x)$ teniendo en cuenta que su gráfica pasa por el punto $P(1,\ 4)$.

$c)$ Determina, si existen, los máximos y mínimos relativos de $f(x)$.

$a)$

$$i)\,\frac{x+3\cdot e^{2x}}{x+e^{2x}} = \frac{-\infty+3\cdot e^{-\infty}}{-\infty+e^{-\infty}} = \frac{-\infty+\frac{3}{e^{\infty}}}{-\infty+\frac{1}{e^{\infty}}} = \frac{-\infty+\frac{3}{\infty}}{-\infty+\frac{1}{\infty}} = \frac{-\infty+0}{-\infty+0} = \frac{\infty}{\infty}\Rightarrow Indet\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{L'Hopital\}\Rightarrow \frac{x+3\cdot e^{2x}}{x+e^{2x}} = \frac{-x+3\cdot e^{-2x}}{-x+e^{-2x}} = \frac{-1+3\cdot(-2)\cdot e^{-2x}}{-1-2\cdot e^{-2x}} = \frac{-1-\frac{6}{e^{\infty}}}{-1-\frac{2}{e^{\infty}}} =$$

$$= \frac{-1-\frac{3}{\infty}}{-1-\frac{1}{\infty}} = \frac{-1-0}{-1-0} = 1 \Rightarrow \underline{\frac{x+3\cdot e^{2x}}{x+e^{2x}} = 1}.$$

$$ii)\,\frac{x+3\cdot e^{2x}}{x+e^{2x}} = \frac{\infty+3\cdot e^{\infty}}{\infty+e^{\infty}} = \frac{\infty+\infty}{\infty+\infty} = \frac{\infty}{\infty}\Rightarrow Indet\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1+3\cdot 2\cdot e^{2x}}{1+2\cdot e^{2x}} = \frac{\infty}{\infty}\Rightarrow Indet\Rightarrow \frac{\frac{1+6\cdot e^{2x}}{e^{2x}}}{\frac{1+2\cdot e^{2x}}{e^{2x}}} = \frac{\frac{1}{e^{2x}}+6}{\frac{1}{e^{2x}}+2} = \frac{\frac{1}{\infty}+6}{\frac{1}{\infty}+2} = \frac{0+6}{0+2} = 3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\frac{x+3\cdot e^{2x}}{x+e^{2x}} = 3}.$$

b)

$$f(x) = \int f(x)\cdot dx = \int(1 + Lx)\cdot dx\Rightarrow\left\{u = 1 + Lx\rightarrow du = \frac{1}{x}\cdot dx\ dv = dx\rightarrow v = x\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 + Lx)\cdot x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x(1 + Lx) - x + C = x(1 + Lx - 1) + C = xLx + C$$

.

Por pasar la función $f(x)$ por el punto $P(1,\ 4) \Rightarrow f(1) = 4$:

$f(1) = 4\Rightarrow 1\cdot L1 + C = 4;\ \ 1\cdot 0 + C = 4\Rightarrow C = 4.$

$$\underline{f(x) = xLx + 4}.$$

$c)$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 + Lx = 0;\ \ Lx = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f''\left(\frac{1}{e}\right) = e > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = \frac{1}{e}.$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \cdot L\frac{1}{e} + 4 = \frac{1}{e} \cdot (-1) + 4 = 4 - \frac{1}{e} = \frac{4e-1}{e}.$$

$$\underline{Mínimo\ relativo: Q\left(\frac{1}{e},\ \frac{4e-1}{e}\right)}.$$

****

3º) Sea r la recta que pasa por los puntos $P(0,\ 1,\ 3)$ y $Q(1,\ 1,\ 1)$ y s la recta de ecuación $s \equiv \begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$:

a) Estudia su posición relativa.

b) ¿Es s paralela al plano YZ? ¿Está contenida en dicho plano?

c) Calcula la distancia de la recta r al plano $\pi \equiv 2x + z = 0$.

----

a)

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{v_r} = [Q - P] = [(0,\ 1,\ 3) - (1,\ 1,\ 1)] = (-\ 1,\ 0,\ 2)$.

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$.

$s \equiv \begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow y = 2\lambda;\ \ x + 2\lambda - 2\lambda - 1 =$

$\Rightarrow x = 1 \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.

Un punto y un vector de cada una de las rectas son los siguientes:

Recta r: $Q(1,\ 1,\ 1)$ y $\overrightarrow{v_r} = (-\ 1,\ 0,\ 2)$. Recta s: $A(1,\ 0,\ 0)$ y $\overrightarrow{v_s} = (0,\ 2,\ 1)$

.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\overrightarrow{w}$ que tiene como origen el punto $Q \in r$ y extremo el punto $A \in s$: $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{QA} = [A - Q] = [(1,\ 0,\ 0) - (1,\ 1,\ 1)] = (0,\ -\ 1,\ -\ 1)$.

Según que los vectores $\left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\right\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\right\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$Rang \left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow Rang\left\{\vec{v}_r,\ \vec{v}_s,\ \vec{w}\right\} = 3 \Rightarrow \vec{v}_r,\ \vec{v}_s\ y\ \vec{w}\ no\ son\ coplanarios.$

$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan}.$

$b)$

Un vector normal del plano YZ es $\vec{n} = (1,\ 0,\ 0)$.

La recta s será paralela al plano YZ cuando el producto escalar del vector director de la recta y el vector normal del plano sea 0; es decir, estos vectores son perpendiculares:

$$\vec{n}\cdot\vec{v}_s = (1,\ 0,\ 0)\cdot(0,\ 2,\ 1) = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{v}_s.$$

El plano YZ tiene por ecuación general o implícita $YZ \Rightarrow \gamma \equiv x = 0$.

La recta s estará contenida en $YZ \Rightarrow \gamma \equiv x = 0$ cuando todos sus puntos estén contenidos en el plano, para lo cual, basta que lo estén dos de ellos.

Siendo $s \equiv \{x = 1\ \ y = 2\lambda\ z = \lambda$, los puntos de s son de la forma $M(1,\ 2\lambda,\ \lambda)$; ninguno de los puntos de s están contenidos en YZ.

$\underline{La\ recta\ s\ y\ el\ plano\ YZ\ son\ paralelos}.$

$c)$

Como es lógico suponer, la recta r al plano $\pi \equiv 2x + z = 0$ son paralelos; en caso contrario tendrían algún punto en común y su distancia sería cero.

La recta r es paralela al plano π cuando el producto escalar del vector director de la recta y el vector normal del plano sea 0; es decir, estos vectores son perpendiculares:

$$\vec{n}_\pi \cdot \vec{v}_r = (2,\ 0,\ 1)\cdot(-\ 1,\ 0,\ 2) = -\ 2 + 0 + 2 = 0 \Rightarrow \vec{n}_\pi \perp \vec{v}_r.$$

La distancia de la recta r al plano π es igual a la distancia de un punto de $r\ a$ π.

La distancia de un punto $P_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d\left(P_0, \pi\right) = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Aplicando la fórmula al plano de ecuación $\pi \equiv 2x + z = 0$ y al punto de r $Q(1,\ 1,\ 1)$:

$$d(Q, \pi) = d(r,\ \pi) = \frac{|2\cdot1+0\cdot1+1\cdot1+0|}{\sqrt{2^2+0^2+1^2}} = \frac{|2+0+1+0|}{\sqrt{4+0+1}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \underline{\frac{3\sqrt{5}}{5}\ unidades}.$$

****

4º) Sean A y B dos sucesos con $P(A) = 0,7;\ P(B) = 0,6\ y\ P(A \cup B) = 0,9$.

$a)$ ¿Son A y B sucesos independientes? Justifica la respuesta.

$b)$ Calcula $P(A - B)\ y\ P(A/\overline{B})$. (Nota: $\overline{B}$ suceso contrario o complementario de B).

$a)$

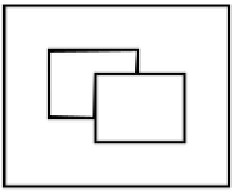
Dos sucesos A y B son independientes cuando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,7 + 0,6 - 0,9 = 1,3 - 0,9 = 0,4$.

$P(A) \cdot P(B) = 0,7 \cdot 0,6 = 0,42 \neq 0,4 = P(A \cap B)$.

$\underline{Por\ lo\ expuesto\ anteriormente\ los\ sucesos\ A\ y\ B\ no\ son\ independientes}$.

$b)$



$P(A - B) = P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) =$

$= 0,7 - 0,4 = \underline{0,3}$.

$P(A/\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A \cap \overline{B})}{1 - P(B)} = \frac{0,3}{1-0,6} = \frac{0,3}{0,4} = \underline{0,75}$.

****

OPCIÓN B

1º) $a)$ Discute, según los valores del parámetro m, el sistema: $\{3x - 2y = 0 \quad x - y + z = m \quad x + my - 2z = m$.

$b)$ Resuélvelo, si es posible, cuando $m = 0$.

$a)$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A = (3 \ -2\, 0\, 1 \ -1\, 1\, 1\, m \ -2)$ y $A' = (3 \ -2\, 0\, 1 \ -1\, 1\, 1\, m \ -2 \quad 0\, m\, m)$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro m es el siguiente:

$|A| = |3 \ -2\, 0\, 1 \ -1\, 1\, 1\, m \ -2| = 6 - 2 - 3m - 4 = -3m = 0 \Rightarrow m = 0$.

$$\underline{Para\ m \neq 0 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$$

$$Para\ m = 0 \Rightarrow A' = (3 \ -2\, 0\, 1 \ -1\, 1\, 1\, 0 \ -2 \quad 0\, 0\, 0) \Rightarrow Rang\ A' = 2$$

$$\underline{Para\ m = 0 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$$

$b)$

Para $m = 0$ el sistema resulta: $3x - 2y = 0\ x - y + z = 0 \quad x - 2z = 0\}$, que es compatible indeterminado. Despreciando la segunda ecuación y haciendo $z = \lambda$, resulta:

$x = 2\lambda;\ \ 3 \cdot 2\lambda - 2y = 0;\ \ 3\lambda - y = 0;\ \ y = 3\lambda.$

$$\underline{Solución: x = 2\lambda,\ y = 3\lambda,\ z = \lambda,\ \forall\lambda \in R.}$$

****

2º) Dada la función $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$:

a) Estudia, en $x = 0$, la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$.

b) Determina los puntos de la gráfica de $f(x)$ en los que la recta tangente es paralela a la recta $x - 4y = 0$ y determina las ecuaciones de estas rectas tangentes.

c) Calcula $I = \int_{-1}^{0} f(x) \cdot dx$.

----

a)

Teniendo en cuenta que $|x| = \{- x \ si \ x < 0 \ x \ \ si \ \ x \geq 0$, la función puede expresarse de la forma siguiente: $f(x) = \{\frac{x}{1-x} \ \ si \ \ x < 0 \ \frac{x}{1+x} \ \ si \ \ x \geq 0$.

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 0$, cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$x = 0 \Rightarrow \{f(x) \ = \frac{x}{1-x} = \ \frac{0}{1-0} = 0 \qquad f(x) \ = \frac{x}{1+x} = \frac{0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0 = f(0) \ =$

$\Rightarrow f(x) \ = f(x) \ = f(0) \Rightarrow \underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ x = 0}.$

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales.

$y = \frac{x}{1-x} \Rightarrow y' = \frac{1 \cdot (1-x) - x \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} \ y = \frac{x}{1-x} \Rightarrow y' = \frac{1 \cdot (1-x) - x \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+}{(1-x)}$

.

$f'(0^-) = \frac{1}{(1-0)^2} = 1 \ f'(0^+) = \frac{1}{(1+0)^2} = 1 \} \Rightarrow f'(0^-) = f'(0^+).$

$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ derivable\ en\ x = 0}.$

b)

La pendiente de la recta $x - 4y = 0$ es $m = \frac{1}{4}$.

La pendiente de la tangente a una función en un punto es el valor de su primera derivada en ese punto.

$$x < 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - x = \pm 2 \Rightarrow 1 - x = 2 \Rightarrow x = -1.$$

Punto de tangencia: $f(-1) = \frac{-1}{1-(-1)} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \underline{P_1\left(-1, -\frac{1}{2}\right)}$.

La expresión de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente es la siguiente: $y - y_0 = m\left(x - x_0\right)$.

$$y + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\cdot(x + 1);\ \ 4y + 2 = x + 1 \Rightarrow \underline{Tangente:\ t_1 \equiv x - 4y - 1 = 0}.$$

$$x > 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 + x = \pm 2 \Rightarrow 1 + x = 2 \Rightarrow x = 1.$$

Punto de tangencia: $f(11) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{P_2\left(1, \frac{1}{2}\right)}$.

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\cdot(x - 1);\ \ 4y - 2 = x - 1 \Rightarrow \underline{Tangente:\ t_2 \equiv x - 4y + 1 = 0}.$$

$c)$

$$I = \int_{-1}^{0} f(x)\cdot dx = \int_{-1}^{0} \frac{x}{1-x}\cdot dx = \int_{0}^{-1} \frac{x}{x-1}\cdot dx = \int_{0}^{-1} \frac{x-1+1}{x-1}\cdot dx =$$

$$= \int_{0}^{-1} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)\cdot dx = \int_{0}^{-1} dx + \int_{0}^{-1} \frac{1}{x-1}\cdot dx = [x]_0^{-1} + A = -1 + 0 + A =$$

$$= -1 + A = I. \quad (*)$$

$$A = \int_{0}^{-1} \frac{1}{x-1}\cdot dx \Rightarrow \{x = -1 \rightarrow t = -2\ x = 0 \rightarrow t = -1\} \Rightarrow \int_{-1}^{-2} \frac{1}{t}\cdot dt =$$

$$= [L|t|]_{-1}^{-2} = L|-2| - L|-1| = L2.$$

Sustituyendo en (*) el valor encontrado de A: $I = -1 + L2$.

$$\underline{I = \int_{-1}^{0} f(x) \cdot dx = L2 - 1.}$$

****

3º) Dados los planos $\alpha \equiv 2x - 2y + 4z - 7 = 0$; $\beta \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda + 3\mu \\ y = 5 + \lambda + \mu \\ z = 4 + \lambda - \mu \end{cases}$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x + 2z - 3 = 0 \\ y - 5 = 0 \end{cases}$:

a) Estudia la posición relativa de los planos α y β. Calcula la distancia entre ellos.

b) Calcula la ecuación implícita o general del plano π que es perpendicular a α y contiene a la recta r.

c) Sean P y Q los puntos de corte de la recta r con los planos XY e YZ respectivamente. Calcula la distancia entre P y Q.

----

a)

Un vector normal del plano α es $\vec{n_\alpha} = (1, -1, 2)$.

Dos vectores directores del plano β son $\vec{u} = (-1, 1, 1)$ y $\vec{v} = (3, 1, -1)$.

Un vector normal del plano β es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de dos de sus vectores directores.

$$\vec{n_\beta} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -i + 3j - k - 3k - i - j = -2i + 2j - 4$$

$$= (-2, 2, -4) \Rightarrow \vec{n_\beta} = (1, -1, 2).$$

Por ser linealmente dependientes los vectores normales de los planos α y β, éstos son paralelos o coincidentes, en cuyo caso la distancia entre ellos sería cero.

La distancia entre dos planos paralelos es la misma que la distancia de un punto de uno de los planos al otro plano.

Un punto del plano β es $P(1, 5, 4)$.

La distancia de un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Aplicando la fórmula al punto $P(1, 5, 4)$ y al plano $\alpha \equiv 2x - 2y + 4z - 7 = 0$:

$$d(\alpha, \beta) = d(P, \pi) = \frac{|2\cdot1 - 2\cdot5 + 4\cdot4 - 7|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{|2 - 10 + 16 - 7|}{\sqrt{4+4+16}} = \frac{1}{\sqrt{24}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}.$$

$$\underline{d(\alpha,\ \beta) = \frac{\sqrt{6}}{12}\ unidades.}$$

$b)$

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$r \equiv \{x + 2z - 3 = 0\ y - 5 = 0 \quad \Rightarrow z = \lambda; x = 3 - 2\lambda;\ \ y = 5 \Rightarrow r \equiv \{x = 3 - 2\lambda\ y$
.

Un punto y un vector director de r son $A(3,\ 5,\ 0)$ y $\vec{v}_r = (-\ 2,\ 0,\ 1)$.

Un vector normal del plano α es $\vec{n}_\alpha = (1,\ \ -\ 1,\ 2)$.

La ecuación implícita o general del plano π pedido es la siguiente:

$\pi\left(A;\ \vec{v}_r,\ \vec{n}_\alpha\right) \equiv \begin{vmatrix} x - 3 & y - 5 & z \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0;$

$(y - 5) + 2z + (x - 3) + 4(y - 5) = 0;\ \ (x - 3) + 5(y - 5) + 2z = 0;$

$x - 3 + 5y - 25 + 2z = 0.$

$$\underline{\pi \equiv x + 5y + 2z - 28 = 0}.$$

$c)$

Siendo $r \equiv \{x = 3 - 2\lambda\ y = 5 \quad z = \lambda$ y las ecuaciones implícitas de los planos: $\{XY \to z = 0\ YZ \to x = 0$, los puntos de intersección son los siguientes:

$XY \to z = 0\ r \equiv \{x = 3 - 2\lambda\ y = 5 \quad z = \lambda \quad \} \Rightarrow z = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow P(3,\ 5,\ 0)$
.

$YZ \to x = 0\ r \equiv \{x = 3 - 2\lambda\ y = 5 \quad z = \lambda \quad \} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2} \Rightarrow Q\left(0,\ 5,\ \frac{3}{2}\right)$
.

$$d(QP) = \left|\overrightarrow{QP}\right| = \sqrt{(3 - 0)^2 + (5 - 5)^2 + \left(0 - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{9 + 0 + \frac{9}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{36+9}{4}} = \sqrt{\frac{45}{4}} = \underline{\frac{3\sqrt{5}}{2}\ unidades.}$$

****

4º) El total de ventas diarias de un pequeño restaurante es una variable que sigue una distribución normal de media 1.220 euros al día y desviación típica 120 euros al día.

a) Calcula la probabilidad de que un día elegido al azar las ventas excedan de 1.400 euros.

b) Si el restaurante debe vender al menos 980 euros al día para cubrir gastos, ¿cuál es la probabilidad de que un día elegido al azar, el restaurante no cubra gastos?

----

a)

$Datos$: $\mu = 1.220; \ \ \sigma = 120.$

Las ventas constituyes una distribución normal tal que: $X \Rightarrow N(1.220; 120)$.

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-1.220}{120}$.

$P(X > 1.400)$.

$$P(X > 1.400) = P\left(\frac{X-1.220}{120} > \frac{1.400-1.220}{120}\right) = P\left(Z > \frac{180}{120}\right) = P(Z > 1,5) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1,5) = 1 - 0,9332 = \underline{0,0668}.$$

b)

$P(X \leq 980)$.

$$P(X \leq 980) = P\left(\frac{X-1.220}{120} \leq \frac{980-1.220}{120}\right) = P\left(Z \leq \frac{-240}{120}\right) = P(Z \leq -2) =$$

$$= 1 - P(Z > 2) = 1 - 0,9772 = \underline{0,0228}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JULIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

PROPUESTA A

1º) Sea m un número real y los vectores $\vec{u} = (1,\ 0,\ 1)$ y $\vec{v} = (2,\ -1,\ m)$.

$i)$ Halle todos los vectores de módulo 3 que son perpendiculares a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$ii)$ Determine, si existe, un valor de m tal que el correspondiente vector $\vec{v}$ forma un ángulo de 45° con el vector $\vec{u}$.

$i)$

Un vector perpendicular a dos vectores dados es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los dos vectores.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = |i\ j\ k\ 1\ 0\ 1\ 2\ 1\ -m| = 2j + k - i + mj = -i + (m+2)j + k.$$

Un vector perpendicular a los vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ es $\vec{w} = (-1,\ m+2,\ 1)$.

$$|\vec{w}| = 3 \Rightarrow \sqrt{(-1)^2 + (m+2)^2 + 1^2} = 3;\ \ 1 + m^2 + 4m + 4 + 1 = 3;$$

$$m^2 + 4m + 3 = 0;\ \ m = \frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4\pm\sqrt{4}}{2} = \frac{-4\pm 2}{2} \Rightarrow m_1 = -3,\ m_2 = -1.$$

Los vectores que cumplen la condición pedida son los siguientes:

$$\underline{\vec{w}_1 = (-\ 1,\ \ -\ 1,\ 1)\ y\ \vec{w}_2 = (-\ 1,\ 1,\ 1).}$$

$ii)$

Por el concepto de producto escalar:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot \cos cos\ \alpha \Rightarrow \cos cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|} = \frac{(1,0,1)\cdot(2,-1,m)}{\sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+m^2}} =$$

$$= \frac{2-0+m}{\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{4+1+m^2}} = \frac{2+m}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+m^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};\ \ 2(2\ +\ m) =\ 2\sqrt{5\ +\ m^2};\ \ 2\ +\ m\ = \sqrt{5\ +\ m^2};$$

$$4\ +\ 4m\ +\ m^2 =\ 5\ +\ m^2;\ \ 4m\ =\ 1 \Rightarrow m\ = \frac{1}{4}.$$

$$\underline{Los\ vectores\ \vec{u}\ y\ \vec{v}\ forman\ 45°\ para\ m\ = \frac{1}{4}.}$$

****

2º) i) Halle, según el valor de a, el rango de la matriz $M = (1\ \ -1\ 1\ 3\ 1\ 0\ 1\ 2\ 3\ \ -3\ \ -2\ a+4\ )$.

ii) Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 4 tales que $det(AB) = 1$. ¿Qué se puede decir del rango de A?

----

i)

$$M = (1\ \ -1\ 1\ 3\ 1\ 0\ 1\ 2\ 3\ \ -3\ \ -2\ a+4\ ) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 - 3F_1\ F_3 \to F_3 - F_1\ F$$

.

A efectos de rango la matriz M es equivalente a $M' = (1\ \ -1\ 1\ 0\ 4\ \ -3\ 0\ \ -1\ a+2\ )$.

$$|M'| = |1\ \ -1\ 1\ 0\ 4\ \ -3\ 0\ \ -1\ a+2\ | = 4(a+2) - 3 = 0;\ \ 4a + 8 - 3 = 0$$

$\Rightarrow a = -\frac{5}{4}$.

$$\underline{Para\ a \neq -\frac{5}{4} \Rightarrow Rang\ M = 3.\ \ Para\ a = -\frac{5}{4} \Rightarrow Rang\ M = 2}.$$

ii)

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0\ y\ |B| \neq 0.$$

$$\underline{Por\ ser\ |A| \neq 0\ el\ rango\ de\ A\ es\ 4}.$$

(Igual puede decirse del rango de B)

****

3º) En una universidad el 30 % de los alumnos va a la cafetería A, el 60 % va a la cafetería B y el 20 % va a ambas cafeterías.

i) Si se elige al azar un estudiante que va a la cafetería A, halle la probabilidad de que también vaya a la cafetería B.

ii) Si se elige al azar un estudiante de esa universidad, calcule la probabilidad de que el estudiante no vaya a la cafetería A ni a la cafetería B.

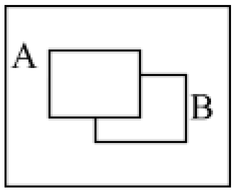
$$P(A) = 0,3; \;\; P(B) = 0,6; \;\; P(A \cap B) = 0,2.$$

i)

$$P = P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,2}{0,3} = \frac{2}{3} = \underline{0,6667}.$$

ii)

$$P = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B) =$$



$$1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] =$$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - 0,3 - 0,6 + 0,2 = 1,2 - 0,9 = \underline{0,3}.$$

****

4º) Sea $f(x) = \frac{e^x + x}{e^x - x}$. Sabiendo que $e^x > x$ para todo número real x, para la función f estudie:

i) El dominio y las asíntotas.

ii) La monotonía y los extremos relativos.

iii) Dibuje la gráfica de f destacando los elementos anteriores.

----

i)

El dominio de una función racional es el conjunto de los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

Como es $e^x > x \Rightarrow e^x - x \neq 0,\ \forall x \in R$.

$$\underline{D(f) \Rightarrow R}.$$

Asíntotas verticales: Son de la forma $x = k$; son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ verticales}.$$

Horizontales: Son de la forma $y = k$; son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a $\pm\infty$:

$$y = k = f(x) = \frac{e^x + x}{e^x - x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \frac{\frac{e^x + x}{e^x}}{\frac{e^x - x}{e^x}} = \frac{1 + \frac{x}{e^x}}{1 - \frac{x}{e^x}} = 1.\ (*)$$

(*) $\frac{x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0.$

$$y = k = f(x) = \frac{e^x + x}{e^x - x} = \frac{0 - \infty}{0 + \infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \frac{\frac{e^x + x}{x}}{\frac{e^x - x}{x}} =$$

$$= \frac{\frac{e^x}{x} + 1}{\frac{e^x}{x} - 1} = -1.\ (**)$$

(**) $\frac{e^x}{x} = \frac{e^{-\infty}}{-\infty} = \frac{\frac{1}{e^{\infty}}}{\infty} = \frac{0}{\infty} = 0.$

$$\underline{Las\ rectas\ y = 1\ e\ y = -1\ son\ asíntotas\ horizontales}.$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

$ii)$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{(e^x+1)\cdot(e^x-x)-(e^x+x)\cdot(e^x-1)}{(e^x-x)^2} = \frac{e^{2x}-x\cdot e^x+e^x-x-(e^{2x}-e^x+x\cdot e^x-x)}{(e^x-x)^2} =$$

$$= \frac{e^{2x}-x\cdot e^x+e^x-x-e^{2x}+e^x-x\cdot e^x+x}{(e^x-x)^2} = \frac{2e^x-2x\cdot e^x}{(e^x-x)^2} = \frac{2e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2e^x(1-x)}{(e^x-x)^2} = 0;\ \ 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función son los siguientes:

$$\underline{f(x)\ creciente:\ f'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon (-\infty, 1)}.$$

$$\underline{f(x)\ decreciente:\ f'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon (1,\ +\infty)}.$$

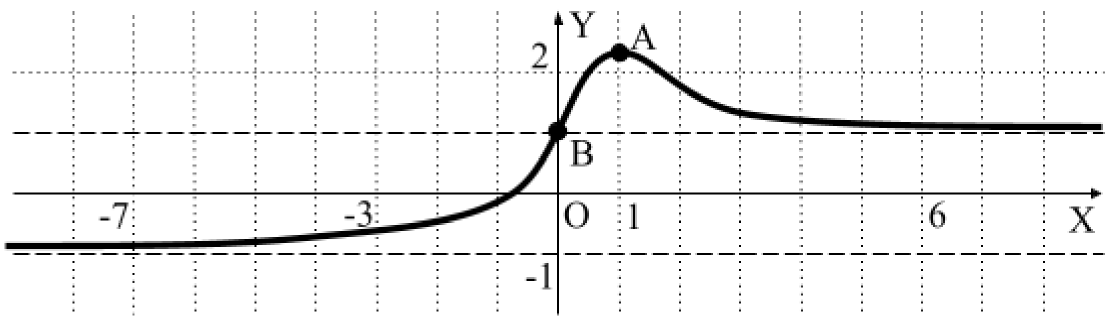
La condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo es que se anule su primera derivada.

Teniendo en cuenta la continuidad de la función y los periodos de crecimiento y decrecimiento, la función $f(x)$ tiene un máximo absoluto para $x = 1$.

$$f(1) = \frac{e^1+1}{e^1-1} = \frac{\sqrt{e}+1}{\sqrt{e}-1} \cong \frac{3,7183}{1,7183} = 2,15 \Rightarrow \underline{Máx.\ \ A(1,\ 2'16)}.$$

$iii)$

Teniendo en cuenta que $f(0) = 1 \Rightarrow B(0,\ 1)$ y todo lo anterior, la representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



****

PROPUESTA B

1º) Sea m un número real y consideremos la matriz $A = (1\ 0\ m\ m\ 0\ 4\ 2\ \ -\ 1\ 1\ )$.
i) Halle los valores de m para los que la matriz A tiene inversa.

ii) Determine el rango de A cuando $m = 2$.

----

i)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$|A| = |1\ 0\ m\ m\ 0\ 4\ 2\ \ -\ 1\ 1\ | =- m^2 + 4 = 0 \Rightarrow m_1 =- 2,\ m_2 = 2.$

$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall m \in R - \{- 2,\ 2\}}$.

ii)

Para $m = 2$ es $A = (1\ 0\ 2\ 2\ 0\ 4\ 2\ \ -\ 1\ 1\ ) \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow |2\ 0\ 2\ \ -\ 1\ | \neq 0.$

$\underline{Para\ a = 2\ el\ rango\ de\ la\ matriz\ A\ es\ 2}$.

****

2º) i) Pruebe que cualquiera que sea el valor de a, los planos $\pi_1 \equiv ax + ay - z = 0$, $\pi_2 \equiv x - y + az = 0$ se cortan en una recta r.

ii) Estudie, en función de a, la posición relativa de la recta r y el plano que contiene a los puntos $A(1,\ 1,\ 1),\ B(1,\ 0,\ 2)\ y\ C(0,\ 1,\ 2a)$.

----

i)

Dos planos se cortan en una recta cuando sus vectores normales son linealmente independientes, es decir, que no tienen proporcionales sus componentes.

Los vectores normales de los planos son $\overrightarrow{n_1} = (a,\ a,\ -1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1,\ -1,\ a)$.

$\frac{a}{1} \neq \frac{a}{-1} \neq \frac{-1}{a},\ \forall a \in R \Rightarrow \overrightarrow{n_1}\ y\ \overrightarrow{n_2}$ son linealmente independientes.

<u>$Queda\ probado\ que\ los\ planos\ \pi_1\ y\ \pi_2\ se\ cortan\ en\ una\ recta\ \forall a \in R.$</u>

ii)

La recta en que se cortan los planos π_1 y π_2 es $r \equiv \begin{cases} ax + ay - z = 0 \\ x - y + az = 0 \end{cases}$.

Un vector director de la recta r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan:

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = a^2 i - j - ak - ak - i - a^2 j =$$

$$= \left(a^2 - 1\right)i + \left(-a^2 - 1\right)j + (-2a)k = \left(a^2 - 1,\ -a^2 - 1,\ -2a\right) = \overrightarrow{v_r}.$$

Los puntos A, B, y C determinan los siguientes vectores:

$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(1,\ 0,\ 2) - (1,\ 1,\ 1)] = (0,\ -1,\ 1).$

$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(0,\ 1,\ 2a) - (1,\ 1,\ 1)] = (-1,\ 0,\ 2a - 1).$

La expresión general del plano β que determinan es la siguiente:

$$\beta\left(B;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right) \equiv \begin{vmatrix} x - 1 & y & z - 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2a - 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$-(x-1)(2a-1)-y-(z-2)=0;\ \ (x-1)(2a-1)+y+(z-2)=0;$

$2ax-x-2a+1+y+z-2=0\Rightarrow\beta\equiv(2a-1)x+y+z+(-1-2a)=0$
.

Un vector normal del plano β es $\overrightarrow{n_\beta}=(2a-1,\ 1,\ 1)$.

La recta r y el plano β son secantes cuando el producto escalar del vector director de la recta y el vector normal del plano es distinto de cero:

$\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{n_\beta}\neq0\Rightarrow\left(a^2-1,\ -a^2-1,\ -2a\right)\cdot(2a-1,\ 1,\ 1)\neq0;$

$\left(a^2-1\right)(2a-1)+\left(-a^2-1\right)\cdot1-2a\cdot1\neq0;$

$2a^3-a^2-2a+1-a^2-1-2a\neq0;\ \ 2a^3-2a^2-4a\neq0;\ \ a^3-a^2-2a\neq0;$

$a\left(a^2-a-2\right)=0\Rightarrow a_1=0;\ \ a^2-a-2=0;\ \ a=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm3}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow a_2=-1,\ a_3=2.$

$\underline{Para\ \{a\neq0\ \ a\neq-1\ \ a\neq2\ \}\ la\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \beta\ son\ secantes.}$

$\underline{Para\ \{a=0\ \ a=-1\ \ a=2\ \}\ la\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \beta\ son\ paralelos.}$

****

3º) En una universidad el 30 % de los alumnos va a la cafetería A, el 60 % va a la cafetería B y el 20 % va a ambas cafeterías.

i) Si se elige al azar un estudiante que va a la cafetería A, halle la probabilidad de que también vaya a la cafetería B.

ii) Si se elige al azar un estudiante de esa universidad, calcule la probabilidad de que el estudiante no vaya a la cafetería A ni a la cafetería B.

4º) Sea $f(x) = \frac{e^x + x}{e^x - x}$. Sabiendo que $e^x > x$ para todo número real x, para la función f estudie:

i) El dominio y las asíntotas.

ii) La monotonía y los extremos relativos.

iii) Dibuje la gráfica de f destacando los elementos anteriores.

(RESUELTOS EN LA OPCIÓN A)

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

PROPUESTA A

1º) Sean los puntos $A(1,\ -1,\ 0)$, $B(2,\ 2,\ 1)$, $C(1,\ -2,\ -1)$ y $D(0,\ -1,\ 2)$.

$i)$ Halle una ecuación de la recta que pasa por A y por B.

$ii)$ ¿Son coplanarios los puntos A, B, C y D?

$i)$

Los puntos A y B determinan el vector: $\overrightarrow{AB} = [B - A] = (1,\ 3,\ 1)$, que es vector director de la recta r pedida.

La recta r dada, por ejemplo, por unas ecuaciones paramétricas tiene por expresión: $\underline{r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}}$.

$ii)$

Los puntos A, B y C determinan los siguientes vectores:

$\overrightarrow{AB} = [B - A] = (1,\ 3,\ 1)$. $\overrightarrow{AC} = [C - A] = (0,\ -1,\ -1)$.

Los puntos A, B y C determinan el plano π cuya ecuación general es la siguiente:

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$-3(x-1) - z + (x-1) + (y+1) = 0;\quad -2(x-1) + (y+1) - z = 0;$

$-\ 2x + 2 + y + 1 - z = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x - y + z - 3 = 0.$

Para que los puntos A, B, C y D sean coplanarios es condición necesaria que el punto D pertenezca al plano π, o sea, tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 2x - y + z - 3 = 0 \\ D(0,\ -1,\ 2) \end{array}\right\} \Rightarrow 0 - (-1) + 2 - 3 = 0 \Rightarrow Si \Rightarrow D$$

.

$\underline{Los\ puntos\ A,\ B,\ C\ y\ D\ son\ coplanarios}.$

****

2º) Sea el sistema de ecuaciones: $cx + 3y - z = -3 \quad x + cy + z = c \quad cx + y + z = 1 \}$.

i) Discuta el sistema anterior para los distintos valores del parámetro c.

ii) Halle la solución o soluciones cuando el sistema sea compatible.

----

i)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = (c\;3\;\;-\;1\;1\;c\;1\;c\;1\;1\,)$ y $M' = (c\;3\;\;-\;1\;1\;c\;1\;c\;1\;1\quad -\;3\;c\;1\,)$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro c es el siguiente:

$|M| = |c\;3\;\;-\;1\;1\;c\;1\;c\;1\;1\,| = c^2 - 1 + 3c + c^2 - c - 3c = 0;\;\; 2c^2 - c - 1 =$

$c = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{2},\; c_2 = 1.$

$\underline{Para \left\{ c \neq -\frac{1}{2}\;\; c \neq 1 \right\} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

$Para\ c = -\frac{1}{2} \Rightarrow M' = \left(-\frac{1}{2}\;3\;\;-\;1\;1\;\;-\frac{1}{2}\;1\;\;-\frac{1}{2}\;1\;1\quad -\;3\;\;-\frac{1}{2}\;1 \right) \Rightarrow Rang\ M$

$\Rightarrow \left| -\frac{1}{2}\;3\;\;-\;3\;1\;\;-\frac{1}{2}\;\;-\frac{1}{2}\;\;-\frac{1}{2}\;1\;1 \right| = \frac{1}{4} - 3 + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} - 3 = -6 + \frac{3}{2} \neq 0 =$

.

$\underline{Para\ c = -\frac{1}{2} \Rightarrow Rang\ M = 2;\; Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

$Para\ c = 1 \Rightarrow M' = (1\;3\;\;-\;1\;1\;1\;1\;1\;1\;1\quad -\;3\;1\;1\,) \Rightarrow \left\{ F_2 = F_3 \right\} \Rightarrow Rang\ M' = 2$

.

$\underline{Para\ c = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

b)

Resolvemos en primer lugar para $\left\{ c \neq -\frac{1}{2}\;\; c \neq 1 \right\}$, $cx + 3y - z = -3 \quad x + cy + z = c \quad cx + y + z = 1 \}$, por la regla de Cramer.

$$x = \frac{|-3\ 3\ -1\ c\ c\ 1\ 1\ 1\ 1\ |}{2c^2-c-1} = \frac{-3c-c+3+c+3-3c}{2\left(c+\frac{1}{2}\right)(c-1)} = \frac{6-6c}{(2c+1)(c-1)} = \frac{6(1-c)}{(2c+1)(c-1)} = \frac{-6}{2c+1}.$$

$$y = \frac{|c\ -3\ -1\ 1\ c\ 1\ c\ 1\ 1\ |}{2c^2-c-1} = \frac{c^2-1-3c+c^2-c+3}{2\left(c+\frac{1}{2}\right)(c-1)} = \frac{2c^2-4c+2}{(2c+1)(c-1)} = \frac{2\left(c^2-2c+1\right)}{(2c+1)(c-1)} = \frac{2(c-1)^2}{2c+1} =$$

$$= \frac{2(c-1)}{2c+1}.$$

$$z = \frac{|c\ 3\ -3\ 1\ c\ c\ c\ 1\ 1\ |}{2c^2-c-1} = \frac{c^2-3+3c^2+3c^2-c^2-3}{2\left(c+\frac{1}{2}\right)(c-1)} = \frac{6c^2-6}{(2c+1)(c-1)} = \frac{6\left(c^2-1\right)}{(2c+1)(c-1)} = \frac{6(c+1)(c-1)}{(2c+1)(c-1)} =$$

$$= \frac{6(c+1)}{2c+1}.$$

$$\underline{Solución: x = \frac{-6}{2c+1},\ y = \frac{2(c-1)}{2c+1},\ z = \frac{6(c+1)}{2c+1}.}$$

Para $c = 1$ el sistema resulta $x + 3y - z = -3 \quad x + y + z = 1 \quad x + y + z = 1 \}$, que es compatible indeterminado. Despreciando una de las ecuaciones iguales y haciendo $z = \lambda$:

$$x + 3y - z = -3 \quad x + y + z = 1 \} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow x + 3y = -3 + \lambda\ x + y = 1 - \lambda \}$$

$$\Rightarrow 2y = -4 + 2\lambda;\ \ y = -2 + \lambda. \qquad x + (-2 + \lambda) = 1 - \lambda \Rightarrow x = 3 - 2\lambda.$$

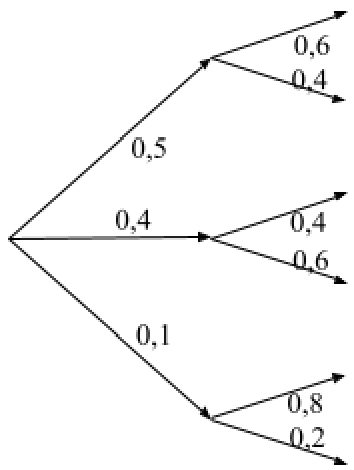
$$\underline{Solución: x = 3 - 2\lambda,\ y = -2 + \lambda,\ z = \lambda,\ \forall\lambda \in R.}$$

****

3º) El 50 % de los habitantes de una localidad tienen más de 65 años y el 10 % tienen menos de 18 años. El 60 % de los mayores de 65 años, así como el 80 % de los menores de 18 y el 40 % del resto de los habitantes, utilizan el complejo de piscinas local.

i) Elegido al azar un habitante de la localidad, calcule la probabilidad de que utilice el complejo de piscinas local.

ii) Elegido al azar un habitante de la localidad que no utiliza el complejo de piscinas local, halle la probabilidad que tenga más de 65 años.



Consideremos las probabilidades $P(V)$, $P(M)\ y\ P(J)$ como mayor de 65 años, entre 18 y 65 años y menor de 18 años, respectivamente.

Igualmente se considera $P(U)\ y\ P(\overline{U})$ las probabilidades de utilización o no utilización del complejo de piscina local, respectivamente.

a)

$$P = P(U) = P(V) \cdot P(U/V) + P(M) \cdot P(U/M) + P(J) \cdot P(U/J) =$$

$$= 0,5 \cdot 0,6 + 0,4 \cdot 0,4 + 0,1 \cdot 0,8 = 0,30 + 0,16 + 0,08 = \underline{0,54}.$$

b)

$$P = P(\overline{U}/M) = \frac{P(M \cap \overline{U})}{P(\overline{U})} = \frac{P(M) \cdot P(\overline{U}/M)}{P(M) \cdot P(\overline{U}/M) + P(M) \cdot P(\overline{U}/M) + P(J) \cdot P(\overline{U}/J)} =$$

$$= \frac{0,5 \cdot 0,4}{0,5 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,6 + 0,1 \cdot 0,2} = \frac{0,20}{0,20 + 0,24 + 0,02} = \frac{0,20}{0,46} = \underline{0,4348}.$$

****

4º) Sea la función $f(x) = \left(8 - x^2\right)^{1/3}$. Para ella estudie:

i) El dominio, la continuidad y las asíntotas.

ii) La derivabilidad, los extremos relativos y la monotonía.

iii) La curvatura y los puntos de inflexión. Dibuje la gráfica de f destacando los elementos anteriores.

----

i)

$$f(x) = \left(8 - x^2\right)^{1/3} = \sqrt[3]{8 - x^2}.$$

La raíz cúbica de cualquier número real es un número real, por lo cual:

$$\underline{D(f) \Rightarrow R}.$$

ii) La derivabilidad, los extremos relativos y la monotonía.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas laterales existen y son iguales en ese punto.

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(8 - x^2\right)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (-2x) = \frac{-2x}{3} \cdot \left(8 - x^2\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{-2x}{3\sqrt[3]{\left(8-x^2\right)^2}} = \frac{-2x \cdot \sqrt[3]{8-x^2}}{3\left(8-x^2\right)}.$$

La función no es derivable para $8 - x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2\sqrt{2}$ y $x_2 = +2\sqrt{2}$.

iii) La curvatura y los puntos de inflexión. Dibuje la gráfica de f destacando los elementos anteriores.

****

PROPUESTA B

1º) Sean las matrices $A = (3\ 5\ 1\ 2\ )$ y $B = (1\ 1\ 2\ 2\ )$.

i) Halle, si existe, A^{-1}.

ii) Determine, si existe, la solución X de la ecuación matricial: $A = AXA^{-1} + B$.

----

i)

$A = (3\ 5\ 1\ 2\ ) \Rightarrow |A| = |3\ 5\ 1\ 2\ | = 6 - 1 = 1 \Rightarrow$ $\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible}$.

$$(A/I) = (1\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_1 \leftrightarrow F_2\right\} \Rightarrow (0\ 1\ 1\ 0\ ) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow F_2 - 3F_1\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (0\ 1\ 1\ \ -3\ ) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow -F_2\right\} \Rightarrow (0\ 1\ \ -1\ 3\ ) \Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow F_1 - 2F_2\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2\ \ -5\ \ -1\ 3\ ) \Rightarrow \underline{A^{-1} = (2\ \ -5\ \ -1\ 3\ )}.$$

ii)

$$A = A \cdot X \cdot A^{-1} + B;\ \ A - B = A \cdot X \cdot A^{-1};$$

$$A^{-1} \cdot (A - B) \cdot A = A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot A^{-1} \cdot A;\ \ A^{-1} \cdot (A - B) \cdot A = I \cdot X \cdot I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot (A - B) \cdot A}.$$

$$X = A^{-1} \cdot (A - B) \cdot A = (2\ \ -5\ \ -1\ 3\ ) \cdot [(3\ 5\ 1\ 2\ ) - (1\ 1\ 2\ 2\ )] \cdot (3\ 5\ 1\ 2\ ) =$$

$$= (2\ \ -5\ \ -1\ 3\ ) \cdot (2\ 4\ \ -1\ 0\ ) \cdot (3\ 5\ 1\ 2\ ) = (9\ 8\ \ -5\ \ -4\ ) \cdot (3\ 5\ 1\ 2\ ) = (35\ 61\ \ -19$$

.

$$\underline{X = (35\ 61\ \ -19\ \ -33\ )}.$$

****

2º) Dados los vectores $\overrightarrow{u} = (2,\ -3,\ 5)$, $\overrightarrow{v} = (1,\ 2,\ -2)$ y $\overrightarrow{w} = (2k,\ -1,\ k)$,

i) Calcule el valor de k para que los vectores anteriores sean linealmente dependientes.

ii) Compruebe que para $k = 2$ los vectores forman una base del espacio euclídeo tridimensional.

iii) Halle las coordenadas del vector $\overrightarrow{a} = (15,\ -11,\ 18)$ respecto de la base del apartado anterior.

----

i)

Los vectores $\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ son linealmente dependientes cuando el rango de la matriz que determinan es menor de tres, es decir, que el valor del determinante sea cero.

$$Rango \left\{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right\} \Rightarrow |2\ \ -3\ 5\ 1\ 2\ \ -2\ 2k\ \ -1\ k\,| = 4k - 5 + 12k - 20k - 4 +$$

$- k - 9 = 0;\ \ k + 9 = 0 \Rightarrow k = -9.$

$\underline{Los\ vectores\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\ son\ linealmente\ dependientes\ para\ k = -9}.$

ii)

Tres vectores forman una base cuando son linealmente independientes. Según el apartado anterior, los vectores $\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ forman base $\forall k \in R - \{-9\}$.

$\underline{Con\ lo\ anterior\ se\ comprueba\ que\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\ forman\ base\ para\ k = 2}.$

iii)

$$\overrightarrow{a} = (15,\ -11,\ 18) = \beta \cdot \overrightarrow{u} + \gamma \cdot \overrightarrow{v} + \delta \cdot \overrightarrow{w};$$

$\beta \cdot (2,\ -3,\ 5) + \gamma \cdot (1,\ 2,\ -2) + \delta \cdot (4,\ -1,\ 2) = (15,\ -11,\ 18) \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad 2\beta + \gamma + 4\delta = 15\ \ -3\beta + 2\gamma - \delta = -11\ \ \ 5\beta - 2\gamma + 2\delta = 18\,\}.$
Resolviendo por la regla de Cramer:

$$\beta = \frac{|15\ 1\ 4\ -11\ 2\ -1\ 18\ -2\ 2\,|}{|2\ 1\ 4\ -3\ 2\ -1\ 5\ -2\ 2\,|} = \frac{60+88-18-144-30+22}{8+24-5-40-4+6} = \frac{170-192}{38-49} = \frac{-22}{-11} = 2.$$

$$\gamma = \frac{|2\ 15\ 4\ -3\ -11\ -1\ 5\ 18\ 2\,|}{-11} = \frac{-44-216-75+220+36+90}{-11} = \frac{346-335}{-11} = \frac{11}{-11} = -1$$

.

$$\delta = \frac{|2\ 1\ 15\ -3\ 2\ -11\ 5\ -2\ 18\,|}{-11} = \frac{72+90-55-150-44+54}{-11} = \frac{216-249}{-11} = \frac{-33}{-11} = 3.$$

$$\underline{\vec{a} = 2\vec{u} - \vec{v} + 3\cdot\vec{w}}.$$

****

3º) El 50 % de los habitantes de una localidad tienen más de 65 años y el 10 % tienen menos de 18 años. El 60 % de los mayores de 65 años, así como el 80 % de los menores de 18 y el 40 % del resto de los habitantes, utilizan el complejo de piscinas local.

i) Elegido al azar un habitante de la localidad, calcule la probabilidad de que utilice el complejo de piscinas local.

ii) Elegido al azar un habitante de la localidad que no utiliza el complejo de piscinas local, halle la probabilidad que tenga más de 65 años.

(Resuelto en la opción A)

4º) Sea la función $f(x) = \left(8 - x^2\right)^{1/3}$. Para ella estudie:

i) El dominio, la continuidad y las asíntotas.

ii) La derivabilidad, los extremos relativos y la monotonía.

iii) La curvatura y los puntos de inflexión. Dibuje la gráfica de f destacando los elementos anteriores.

(Resuelto en la opción A)

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE MADRID

JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger una de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

OPCIÓN A

1º) Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x + ay + z = a \\ x - 4y + (a+1)z = 1 \\ 4y - az = 0 \end{cases}$, se pide:

a) Discutirlo en función de los valores del parámetro real a.

b) Resolver el sistema para $a = 1$.

c) Resolver el sistema para $a = 2$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & -4 & a+1 \\ 0 & 4 & -a \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 & a \\ 1 & -4 & a+1 & 1 \\ 0 & 4 & -a & 0 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & -4 & a+1 \\ 0 & 4 & -a \end{vmatrix} = 8a + 4 - 8(a+1) + a^2 = 0;$$

$$a^2 + 8a + 4 - 8a - 8 = 0;\ a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a_1 = -2,\ a_2 = 2.$$

$$\underline{Para \begin{cases} a \neq -2 \\ a \neq 2 \end{cases} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$$

$$Para\ a = -2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2$$

$\Rightarrow |2\ \ -2\ \ -2\ 1\ \ -4\ 1\ 0\ 4\ 0| = -\ 8\ -\ 8 = -\ 16 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$

$\underline{Para\ a = -\ 2 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

$Para\ a = 2 \Rightarrow M' = (2\ 2\ 1\ 1\ \ -4\ 3\ 0\ 4\ \ -2\ \ \ 2\ 1\ 0) \Rightarrow \{C_1 = C_4\} \Rightarrow Rang\ M' = 2$
.

$\underline{Para\ a = 2 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

$b)$

Para $a = 2$ el sistema resulta: $\{2x + y + z = 1\ \ \ x - 4y + 2z = 1\ 4y - z = 0$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$x = \frac{|1\ 1\ 1\ 1\ -4\ 2\ 0\ 4\ -1\ |}{1^2-4} = \frac{4+4-8+1}{-3} = \frac{1}{-3} = -\ \frac{1}{3}.$
$y = \frac{|2\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 2\ 0\ 0\ -1\ |}{-3} = \frac{-2+1}{-3} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}.$

$z = \frac{|2\ 1\ 1\ 1\ -4\ 1\ 0\ 4\ 0\ |}{1^2-4} = \frac{4-8}{-3} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}.$

$\underline{Solución: x = -\ \frac{1}{3},\ y = \frac{1}{3},\ z = \frac{4}{3}.}$

$c)$

Para $a = 1$ el sistema resulta: $\{2x + 2y + z = 2\ x - 4y + 3z = 1\ 4y - 2z = 0$, que es compatible indeterminado. Despreciando, por ejemplo, la segunda ecuación y haciendo $z = \lambda$:

$2x + 2y = 2 - \lambda\ \ \ \ \ \ \ \ 4y = 2\lambda\ \} \Rightarrow y = \frac{1}{2}\lambda.$
$2x + 2 \cdot \frac{1}{2}\lambda = 2 - \lambda;\ \ 2x = 2 - \lambda - \lambda;$

$2x = 2 - 2\lambda \Rightarrow x = 1 - \lambda.$

$\underline{Solución: x = 1 - \lambda,\ y = \frac{1}{2}\lambda,\ z = \lambda,\ \forall \lambda \in R.}$

****

2º) Dados los puntos $P(1,\ -\ 2,\ 1)$, $Q(-\ 4,\ 0,\ 1)$, $R(-\ 3,\ 1,\ 2)$ y $S(0,\ -\ 3,\ 0)$, se pide:

$a)$ Hallar la ecuación del plano que contiene a P, Q y R.

b) Estudiar la posición relativa de la recta r, que pasa por los puntos P y Q, la recta s, que pasa por R y S.

c) Hallar el área del triángulo formado por los puntos P, Q y R.

----

a)

Los puntos P, Q y R determinan los vectores:

$\overrightarrow{PQ} = [Q - P] = [(-4, 0, 1) - (1, -2, 1)] = (-5, 2, 0).$

$\overrightarrow{PR} = [R - P] = [(-3, 1, 2) - (1, -2, 1)] = (-4, 3, 1).$

El plano π que determinan los puntos P, Q y R tiene la siguiente expresión general:

$\pi\left(P;\ \overrightarrow{PQ},\ \overrightarrow{PR}\right) \equiv |x - 1\ y + 2\ z - 1\ \ -5\ 2\ 0\ \ -4\ 3\ 1| = 0;$

$2(x - 1) - 15(z - 1) + 8(z - 1) + 5(y + 2) = 0;$

$2(x - 1) + 5(y + 2) - 7(z - 1) = 0;\ \ 2x - 2 + 5y + 10 - 7z + 7 = 0.$

$$\underline{z = 2x + 5y - 7z + 15 = 0}.$$

b)

$\overrightarrow{PQ} = [Q - P] = [(-4, 0, 1) - (1, -2, 1)] = (-5, 2, 0).$

$\overrightarrow{RS} = [S - R] = [(0, -3, 0) - (-3, 1, 2)] = (3, -4, -2).$

La recta r que pasa por P y Q es $r \equiv \{x = 1 - 5\lambda\ \ y = -2 + 2\lambda\ x = 1$ y la recta s que pasa por los puntos R y S es $s \equiv \frac{x}{3} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z}{-2}$.

Un punto y un vector de cada una de las rectas son los siguientes:

Recta r: $P(1, -2, 1)\ y\ \overrightarrow{v_r} = (-5, 2, 0).$

Recta s: $R(-3, 1, 2)\ y\ \overrightarrow{v_s} = (-3, 4, 2).$

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas $r\ y\ s$ se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\overrightarrow{w}$ que tiene como origen el punto $P \in r$ y extremo el punto $R \in s$: $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{PR} = [R - P] = [(-3, 1, 2) - (1, -2, 1)] = (-4, 3, 1)$.

Según que los vectores $\left\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\right\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\left\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\right\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\left\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -5 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -20 - 16 + 30 + 6 = -36 + 36 =$$

$$\Rightarrow Rang\left\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\right\} = 2 \Rightarrow \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\ son\ coplanarios.$$

$$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cortan}.$$

$c)$

$$\overrightarrow{PQ} = [Q - P] = [(-4, 0, 1) - (1, -2, 1)] = (-5, 2, 0).$$

$$\overrightarrow{PR} = [R - P] = [(-3, 1, 2) - (1, -2, 1)] = (-4, 3, 1).$$

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan los puntos:

$$S_{PQR} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ -5 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\cdot|2i - 15k + 8k + 5j| =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot|2i + 5j - 7k| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2^2 + 5^2 + (-7)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 25 + 49} = \underline{\frac{1}{2}\sqrt{78}\,u^2}.$$

****

3º) Se administra una medicina a un enfermo y t horas después la concentración en sangre del principio activo viene dada por $c(t) = t \cdot e^{-t/2}$ miligramos por mililitro. Determine el valor máximo de $c(t)$ e indique en qué momento se alcanza dicho valor máximo. Sabiendo que la máxima concentración sin peligro es de 1 mg/ml, señale si en algún momento hay riesgo para el paciente.

$$c'(t) = 1 \cdot e^{-t/2} - t \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{t}{2}} = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{t}{2}} \cdot (2 - t).$$

$$c'(t) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{t}{2}} \cdot (2 - t) = 0;\ \ 2 - t = 0 \Rightarrow t = 2.$$

$$c''(t) = -\frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{t}{2}} \cdot (2 - t) - \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{t}{2}} = -\frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{t}{2}} \cdot (2 - t + 2) =$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{t}{2}} \cdot (4 - t).$$

$$c''(2) = -\frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{2}{2}} \cdot (4 - 2) = -\frac{3}{2} \cdot e^{-1} = -\frac{3}{2e} > 0 \Rightarrow Máximo\ para\ t = 2.$$

$$c(2) = 2 \cdot e^{-2/2} = \frac{2}{e} \cong 0,7358.$$

$\underline{El\ máximo\ se\ produce\ para\ t = 2\ y\ es\ de\ 0,7358\ mg/ml.}$

$\underline{Por\ ser\ 0,7358 \ll 1,\ el\ paciente\ no\ debe\ tener\ ningún\ temor.}$

****

4º) Dada la función $f(x) = \frac{x^2+x+6}{x-2}$, se pide:

a) Determinar su dominio y asíntotas verticales.

b) Calcular $\frac{f(x)}{x}$.

c) Calcular $\int_3^5 f(x) \cdot dx$.

----

a)

Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$\underline{D(f) \Rightarrow R - \{2\}}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{Asíntota\ vertical: x = 2}.$$

$$\begin{array}{rrr|l} +x^2 & +x & +6 & x-2 \\ \cline{4-4} -x^2 & +2x & & x+3 \\ \cline{1-2} 0 & +3x & +6 & \\ & -3x & +6 & \\ \cline{2-3} & 0 & 12 & \end{array}$$

b)

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{x^2+x+6}{x-2}}{x} = \frac{x^2+x+6}{x^2-2x} = \underline{1}.$$

c)

$$\int_3^5 f(x) \cdot dx = \int_3^5 \frac{x^2+x+6}{x-2} \cdot dx = \int_3^5 \left(x + 3 + \frac{12}{x-2}\right) \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 3x + 12L(x - 2)\right]_3^5 =$$

$$= \left[\frac{5^2}{2} + 3 \cdot 5 + 12L(5 - 2)\right] - \left[\frac{3^2}{2} + 3 \cdot 3 + 12L(3 - 2)\right] =$$

$$= \frac{25}{2} + 15 + 12L3 - \frac{9}{2} - 9 - 12L1 = \frac{16}{2} + 6 + 12L3 - 0 = 14 + 12L3.$$

$$\int_{3}^{5} f(x) \cdot dx = 2(7 + 6L3).$$

****

OPCIÓN B

1º) Dadas las funciones $f(x)=\frac{2}{x}$ y $g(x)=\ sen\ x$, se pide:

$a)$ Calcular $\left[f(x)-\frac{2}{g(x)}\right]$.

$b)$ Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y\ =\ f(x)$ en el punto $P\left(\frac{1}{2},\ 4\right)$.

$c)$ Calcular el área delimitada por la curva $y\ =\ f(x)$ y la recta $y\ =-\ x\ +\ 3$.

$a)$

$$\left[f(x)-\frac{2}{g(x)}\right]\ =\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{sen\ x}\right)\ =\frac{2}{0}-\frac{2}{0}=\ \infty\ -\ \infty\Rightarrow Ind.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{sen\ x}\right)\ =\ 2\cdot\frac{sen\ x-x}{x\cdot sen\ x}\ =\ 2\cdot\frac{0-0}{0\cdot 0}\ =\frac{0}{0}\Rightarrow Ind.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\frac{cos\ x-1}{1\cdot sen\ x+x\cdot \mathrm{cos} cos\ x}\ =\ 2\cdot\ =\frac{0}{0}\Rightarrow Ind.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\frac{-sen\ x-0}{cos\ x+1\cdot \mathrm{cos} cos\ x\ -x\cdot sen\ x}\ =\ 2\cdot\frac{-0}{1+1-0}\ =-\ 2\cdot\frac{0}{2}\ \ =\ \underline{0}.$$

$b)$

$$f'(x)=-\frac{2}{x^2}.\qquad\qquad m\ =f'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=-\frac{2}{\frac{1}{4}}=-\ 8.$$

$$y\ -y_0=\ m\left(x\ -\ x_0\right)\Rightarrow y\ -\ 4\ =-\ 8\cdot\left(x\ -\frac{1}{2}\right)=-\ 8x\ +\ 4.$$

$$\underline{Recta\ tangente\colon t\equiv 8x\ +\ y\ -\ 8\ =\ 0}.$$

$c)$

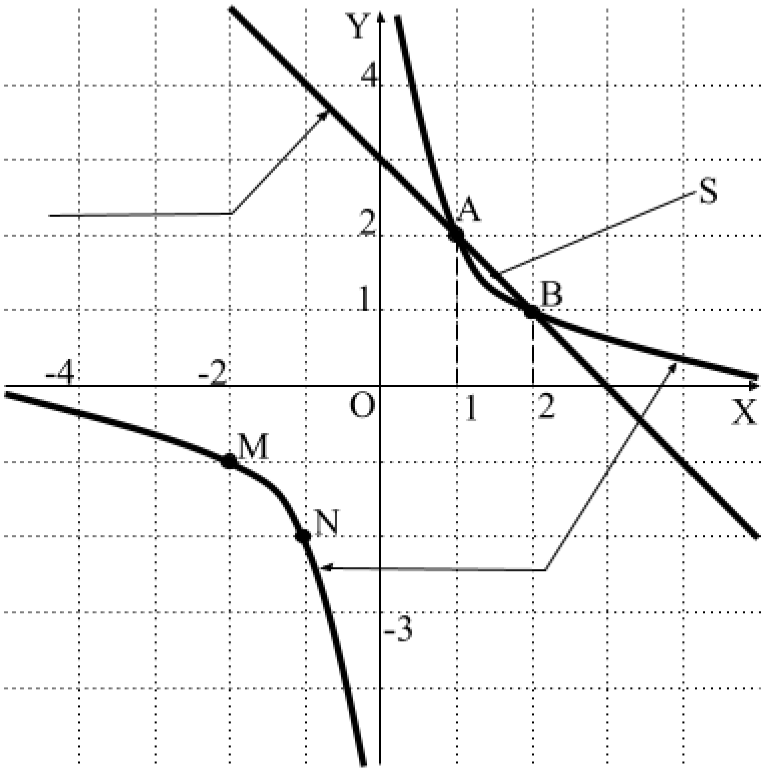
Los puntos de corte de la curva $y\ =\ f(x)$ y la recta $y\ =-\ x\ +\ 3$ tienen por abscisas las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$f(x)=\ y\Rightarrow\frac{2}{x}=-\ x\ +\ 3;\ \ 2\ =-\ x^2\ +\ 3x;\ \ x^2\ -\ 3x\ +\ 2\ =\ 0;\ \ x\ =\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=$$

$$=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}\Rightarrow x_1\ =\ 1\rightarrow A(1,\ 2);\ x_2\ =\ 2\rightarrow B(2,\ 1).$$

La función $f(x) = \frac{2}{x}$ es simétrica con respecto al eje Y por ser $f(-x) = -f(x)$ y pasa por los puntos $A(1, 2)$, $B(2, 1)$ y sus simétricos $M(-2, -1)$, $N(-1, -2)$.

La representación gráfica de la situación se expresa en la figura adjunta.



Como puede observarse en la figura, en el intervalo de la superficie a calcular, que es $(1, 2)$, las ordenadas correspondientes a la recta son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la curva, por lo cual la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_1^2 [y - f(x)] \cdot dx = \int_1^2 \left[(3 - x) - \frac{2}{x}\right] \cdot dx = \int_1^2 \left(3 - x - \frac{2}{x}\right) \cdot dx =$$

$$= \left[3x - \frac{x^2}{2} - 2Lx\right]_1^2 = \left(3 \cdot 2 - \frac{2^2}{2} - 2 \cdot L2\right) - \left(3 \cdot 1 - \frac{1^2}{2} - 2 \cdot L1\right) =$$

$$= 6 - 2 - 2L2 - 3 + \frac{1}{2} + 2 \cdot 0 = 1 + \frac{1}{2} - L4 = \frac{3}{2} - L4 = \underline{\frac{3 - L16}{2} \cong 0,1137\, u^2}$$

.

****

2º) Dadas las matrices $P = (1\ 2\ 1\ 3\ 2\ 2\ 2\ 3\ 2\ )\ y\ J = (-\ 1\ 0\ 0\ 0\ 2\ 0\ 0\ 0\ 1\ )$, se pide:

$a)$ Determinar la matriz P^{-1}, inversa de la matriz P.

$b)$ Determinar la matriz B^{-1}, inversa de la matriz $B = P^{-1}\cdot J^{-1}$.

$c)$ Calcular el determinante de la matriz A^2, siendo $A = P\cdot J\cdot P^{-1}$.

$a)$

La inversa de P se obtiene por la adjunta de la traspuesta: $P^{-1} = \frac{Adj.\ de\ P^t}{|P|}$.

$|P| = |1\ 2\ 1\ 3\ 2\ 2\ 2\ 3\ 2\ | = 4 + 9 + 8 - 4 - 6 - 12 =- 1.$

$P^t = (1\ 3\ 2\ 2\ 2\ 3\ 1\ 2\ 2\ ).$

$Adj.\ de\ P^t = (|2\ 3\ 2\ 2\ |\ \ -|2\ 3\ 1\ 2\ |\ |2\ 2\ 1\ 2\ |\ \ -|3\ 2\ 2\ 2\ |\ |1\ 2\ 1\ 2\ |\ \ -|1\ 3\ 1\ 2\ |\ |3$

.

$P^{-1} = \frac{Adj.\ de\ P^t}{|P|} = \frac{(-2\ -1\ 2\ -2\ 0\ 1\ 5\ 1\ -4\ )}{-1} \Rightarrow \underline{P^{-1} = (2\ 1\ \ -2\ 2\ 0\ \ -1\ \ -5\ \ -1\ 4\ )}$

.

$b)$

Se obtiene la inversa de J por el método de Gauss-Jordan.

$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_1 \to -F_1\ F_2 \to \frac{1}{2}F_1\right\} \Rightarrow \left(-\ 1\ 0\ 0\ 0\ \frac{1}{2}\ 0\ 0\ 0\ 1\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow J^{-1} = \left(-\ 1\ 0\ 0\ 0\ \frac{1}{2}\ 0\ 0\ 0\ 1\right).$

$B = P^{-1}\cdot J^{-1} = (2\ 1\ \ -2\ 2\ 0\ \ -1\ \ -5\ \ -1\ 4\ )\cdot\left(-\ 1\ 0\ 0\ 0\ \frac{1}{2}\ 0\ 0\ 0\ 1\right) = \left(-\ 2\ \frac{1}{2}\right.$

.

$\underline{B = P^{-1}\cdot J^{-1} = \left(-\ 2\ \frac{1}{2}\ \ -2\ \ -2\ 0\ \ -1\ 5\ \ -\frac{1}{2}\ 4\right)}.$

$c)$

$A = P\cdot J\cdot P^{-1} = (1\ 2\ 1\ 3\ 2\ 2\ 2\ 3\ 2\ )\cdot(-\ 1\ 0\ 0\ 0\ 2\ 0\ 0\ 0\ 1\ )\cdot(2\ 1\ \ -2\ 2\ 0\ \ -1\ \ -5$

$= (-\ 1\ 4\ 1\ \ -3\ 4\ 2\ \ -2\ 6\ 2\ )\cdot(2\ 1\ \ -2\ 2\ 0\ \ -1\ \ -5\ \ -1\ 4\ ) = (1\ \ -2\ 2\ \ -8\ \ -5$

.

$|A| = |1\ \ -2\ 2\ \ -8\ \ -5\ 10\ \ -2\ \ -4\ 6\ | =- 30 + 64 + 40 - 20 + 40 - 96 = 14$

.

$$\left|A^2\right| = |A \cdot A| = |A| \cdot |A| = |A|^2 = (-\ 2)^2 = \ 4.$$

$$\underline{\left|A^2\right| = \ 4}.$$

****

3º) a) Determine la distancia entre las rectas $r_1 \equiv x = y = z$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$.

b) Obtenga el punto de corte de la recta $s \equiv x = 2 - y = z - 1$ con el plano perpendicular a s, que pasa por el origen.

----

a)

Un punto y un vector de r_1 son $O(0,\ 0,\ 0)$ y $\overrightarrow{v_1} = (1,\ 1,\ 1)$.

La expresión de la recta r_2 por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r_2 \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \lambda \Rightarrow y = 1 - \lambda;\ z = 1 + \lambda \Rightarrow r_2 \equiv \{x = \lambda$$

.

Un punto y un vector de r_2 son $A(0,\ 1,\ 1)$ y $\overrightarrow{v_2} = (1,\ -1,\ 1)$.

Para hallar la distancia entre dos rectas que se cruzan hacemos lo siguiente:

Los vectores directores de las rectas r_1 y r_2 son linealmente independientes por no ser sus componentes proporcionales, lo cual implica que las rectas se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso consideramos el vector $\overrightarrow{m}$ que tiene como origen un punto $O(0,\ 0,\ 0)$ de r_1 y como extremo el punto $A(0,\ 1,\ 1)$ de r_2:

$$\overrightarrow{m} = \overrightarrow{OA} = A - O = (0,\ 1,\ 1) - (0,\ 0,\ 0) = (0,\ 1,\ 1).$$

Según que los vectores $\left\{\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{m}\right\}$ sean coplanarios o no, las rectas r_1 y r_2 se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\left\{\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{m}\right\}$ son coplanarios cuando su rango es menor que tres, es decir, cuando el determinante que determinan es cero:

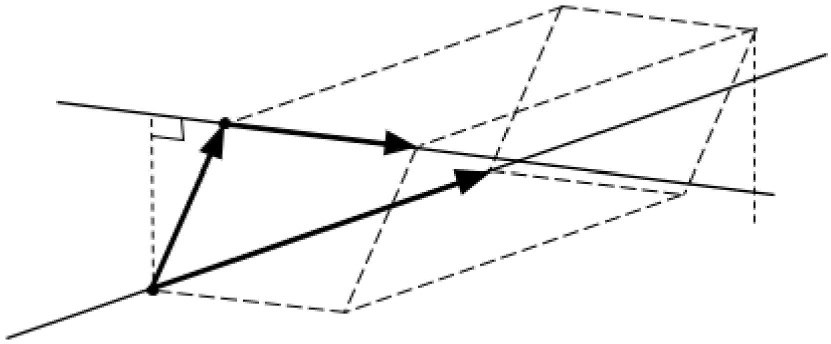
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 - 1 - 1 = -2 \neq 0 \Rightarrow Rango\left\{\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{m}\right\} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Las\ rectas\ r_1\ y\ r_2\ se\ cruzan.$$

Se determina un paralelepípedo cuyas dimensiones son los vectores directores de las rectas $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ y el vector $\overrightarrow{m}$.

El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observar que la altura h es igual a la distancia d pedida entre las rectas.

Para una mejor comprensión se hace el esquema adjunto.



Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$V = \overrightarrow{v_1} \cdot \left(\overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{m}\right) = \left|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\right| \cdot h = \left|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\right| \cdot d \Rightarrow d = \frac{\left|\overrightarrow{v_1} \cdot \left(\overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{m}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\right|}.$$

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{v_1} \cdot \left(\overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{m}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\right|} = \frac{\|1\ 1\ 1\ 1\ -1\ 1\ 0\ 1\ 1\ \|}{\|\,i\ j\ k\ 1\ 1\ 1\ 1\ -1\ 1\ \|} = \frac{|-1+1-1-1|}{|i+j-k-k+i-j|} = \frac{|-2|}{|2i-2k|} = \frac{|-1|}{|i-k|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\frac{\sqrt{2}}{2}\ unidades = d\left(r_1,\ r_2\right)}.$$

$b)$

La expresión de s dada por unas ecuaciones paramétricas es $s \equiv \{x = \lambda \quad y = 2 - \lambda\, z = 1 + \lambda$.

Un vector normal del plano es cualquier vector que sea linealmente dependiente de cualquier vector director de la recta s.

Un vector director de s se $\overrightarrow{v_s} = (1,\ -1,\ 1)$.

La expresión general del plano π, perpendicular a s, que pasa por el origen de coordenadas es $\pi \equiv x - y + z = 0$.

El punto P de corte de s y π es la solución del sistema que forman:

$$\pi \equiv x - y + z = 0 \qquad s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda - (2 - \lambda) + (1 + \lambda) =$$

$3\lambda - 1 = 0;\ \lambda = \frac{1}{3}$.

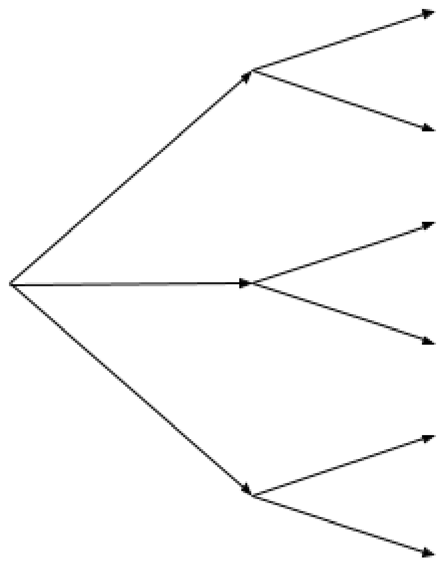
$$P \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \\ z = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \underline{P\left(\frac{1}{3},\ \frac{5}{3},\ \frac{4}{3}\right)}.$$

****

4º) El 40 % de los sábados Marta va al cine, el 30 % va de compras y el 30 % restante juega a videojuegos. Cuando va al cine, el 60 % de las veces lo hace con sus compañeros de baloncesto. Lo mismo le ocurre el 20 % de las veces que va de compras, y el 80 % de las veces que juega a videojuegos. Se pide:

a) Hallar la probabilidad de que el próximo sábado Marta no quede con sus compañeros de baloncesto.

b) Si se sabe que Marta ha quedado con sus compañeros de baloncesto, ¿cuál es la probabilidad de que vayan al cine?



a)

$$P = P(\overline{B}) = P(Ci) \cdot P(\overline{B}/Ci) + P(Co) \cdot P(\overline{B}/Co) + P(Vi) \cdot P(\overline{B}/Vi) =$$

$$= 0,4 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 0,2 = 0,16 + 0,24 + 0,06 = \underline{0,46}.$$

b)

$$P = P(Ci/B) = \frac{P(Ci \cap B)}{P(B)} = \frac{P(Ci) \cdot P(B/Ci)}{P(Ci) \cdot P(B/Ci) + P(Co) \cdot P(B/Co) + P(Vi) \cdot P(B/Vi)} =$$

$$= \frac{0,4 \cdot 0,6}{0,4 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,8} = \frac{0,24}{0,24 + 0,06 + 0,24} = \frac{0,24}{0,54} = \underline{0,4444}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE MADRID

SEPTIEMBRE – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger una de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

OPCIÓN A

1º) Dada la función $f(x) = \{x \cdot e^{2x} \; si \; x < 0 \; \frac{L(x+1)}{x+1} \; si \; x \geq 0$, donde L significa logaritmo neperiano, se pide:

$a)$ Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$.

$b)$ Calcular $f(x)$ y $f(x)$ $\qquad$ $c)$ Calcular $I = \int_{-1}^{0} f(x) \cdot dx$.

$a)$

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 0$, cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$x = 0 \Rightarrow \{ f(x) = \left(x \cdot e^{2x}\right) = 0 \cdot 1 = 0 \qquad f(x) = \frac{L(x+1)}{x+1} = \frac{L1}{1} = \frac{0}{1} = 0 = f(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{f(x) = f(x) = f(0) \Rightarrow f(x) \; es \; continua \; en \; x = 0}.$$

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales.

$$f'(x) = \{1\cdot e^{2x} + x\cdot 2\cdot e^{2x} = e^{2x}(2x + 1) \ \ si \ \ x < 0 \ \ \frac{\frac{1}{x+1}\cdot(x+1) - L(x+1)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1 - L(x+1)}{(x+1)^2} \ \ si \ \ x \geq 0$$

.

$$f'\left(0^-\right) = e^0(2\cdot 0 + 1) = 1\cdot 1 = 1.$$

$$f'\left(0^+\right) = \frac{1 - L(0+1)}{(0+1)^2} = \frac{1 - L1}{1^2} = \frac{1-0}{1} = 1.$$

$$\underline{f'\left(0^-\right) = f'\left(0^+\right) \Rightarrow f(x) \ es \ derivable \ para \ x = 0}.$$

$b)$

$$f(x) = \left(x\cdot e^{2x}\right) = -\infty\cdot e^{-\infty} = -\frac{\infty}{e^{\infty}} = -\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{e^{2x}}} = \frac{-\infty}{\frac{1}{e^{-\infty}}} = \frac{-\infty}{e^{\infty}} = -\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \frac{1}{-\frac{1\cdot 2\cdot e^{x}}{e^{4x}}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot e^{3x} = -\frac{1}{2}\cdot e^{-\infty} = -\frac{1}{2\cdot e^{\infty}} = -\frac{1}{\infty} = 0.$$

$$\underline{f(x) = \left(x\cdot e^{2x}\right) = 0}.$$

$$f(x) = \left(x\cdot e^{2x}\right) = \infty\cdot e^{\infty} = \infty\cdot\infty = \infty.$$

$$\underline{f(x) = \left(x\cdot e^{2x}\right) = \infty}.$$

$c)$

$$I = \int_{-1}^{0} f(x)\cdot dx = \int_{-1}^{0} x\cdot e^{2x}\cdot dx \Rightarrow \left\{u = x \rightarrow du = dx \ dv = e^{2x}\cdot dx \rightarrow v = \frac{1}{2}\cdot e^{2x}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[x\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2x} - \int \frac{1}{2}\cdot e^{2x}\cdot dx\right]_{-1}^{0} = \left[\frac{1}{2}\cdot x\cdot e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\cdot dx\right]_{-1}^{0} =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\cdot x\cdot e^{2x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\right]_{-1}^{0} = \left[\frac{1}{4}\cdot e^{2x}\cdot(2x - 1)\right]_{-1}^{0} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot e^{0}\cdot(0 - 1) - \frac{1}{4}\cdot e^{-2}\cdot(-2 - 1) = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4e^2} = \frac{3 - e^2}{4e^2}.$$

$$\underline{I = \int_{-1}^{0} f(x)\cdot dx = \frac{3-e^2}{4e^2}.}$$

****

2º) Dadas las rectas $r_1 \equiv \{6x - y - z = 1\ 2x - y + z = 1$ y $r_2 \equiv \{3x - 5y - 2z = 3\ 3x + y + 4z = 3$, se pide:

a) Estudiar la posición relativa de las rectas $r_1\ y\ r_2$.

b) Calcular la distancia entre las dos rectas.

c) Hallar la ecuación del plano π que contiene a r_1 y al punto $P(1,\ 2,\ 3)$.

----

a)

La expresión de ambas recta r por ecuaciones paramétricas son las siguientes:

$r_1 \equiv \{6x - y - z = 1\ 2x - y + z = 1 \Rightarrow x = \lambda \Rightarrow - y - z = 1 - 6\lambda\ \ - y + z$

$\Rightarrow y =- 2 + 4\lambda;\ \ y + z =- 1 + 6\lambda\ \ - y + z = 1 - 2\lambda \} \Rightarrow 2z = 4\lambda;\ \ z = 2\lambda \Rightarrow r_1 \equiv \{$

.

$r_2 \equiv \{3x - 5y - 2z = 3\ 3x + y + 4z = 3\ \ \Rightarrow y = \lambda \Rightarrow 3x - 2z = 3 + 5\lambda\ \ 3x + 4z =$

$\Rightarrow - 6z = 6\lambda;\ \ z =- \lambda;\ \ 3x + 2\lambda = 3 + 5\lambda \Rightarrow 3x = 3 + 3\lambda;\ \ x = 1 + \lambda \Rightarrow$

$\Rightarrow r_2 \equiv \{x = 1 + \lambda\ y = \lambda\ \ \ \ z =- \lambda$.

Un punto y un vector de cada una de las rectas son los siguientes:

Recta r_1: $A(0,\ - 2,\ 0)\ y\ \vec{v_1} = (1,\ 4,\ 2)$. Recta r_2: $B(1,\ 0,\ 0)\ y\ \vec{v_2} = (1,\ 1,\ - 1)$.

Los vectores $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas $r_1\ y\ r_2$ se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r_1$ y extremo el punto $B \in r_2$: $\vec{w} = \vec{AB} = [B - A] = [(1,\ 0,\ 0) - (0,\ - 2,\ 0)] = (1,\ 2,\ 0)$.

Según que los vectores $\left\{\vec{v_1},\ \vec{v_2},\ \vec{w}\right\}$ sean o no coplanarios las rectas $r_1\ y\ r_2$ se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\left\{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{w}\right\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas $r_1\ y\ r_2$ se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\left\{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{w}\right\} \Rightarrow |1\ 4\ 2\ 1\ 1\ \ -\ 1\ 1\ 2\ 0\,| = 4 - 4 - 4 + 2 = -\ 2 \neq 0 \Rightarrow$$

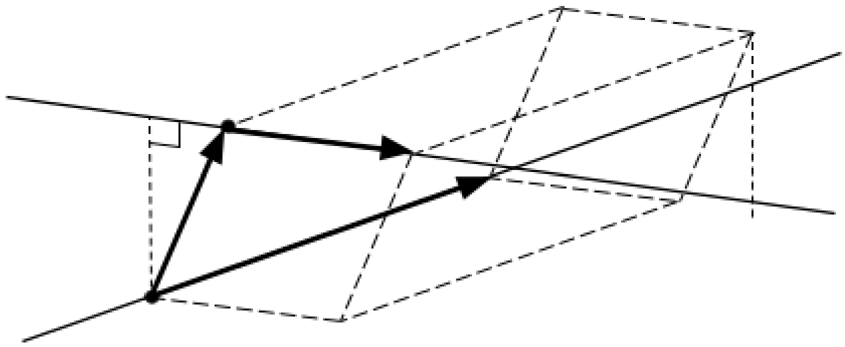
$$\Rightarrow Rang\left\{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{w}\right\} = 3 \Rightarrow \vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{w}\ no\ son\ coplanarios.$$

$$\underline{Las\ rectas\ r_1\ y\ r_2\ se\ cruzan.}$$

$b)$

Para calcular la distancia entre las rectas $r_1\ y\ r_2$ vamos a determinar un paralelepípedo cuyas dimensiones son los vectores directores de las rectas, $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, y un tercer vector $\vec{w}$ que tiene como origen al punto A de r_1 y extremo el punto B de r_2 .

Para una mejor comprensión se hace el esquema que se observa.



El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observando que la altura h es igual a la distancia d pedida entre las rectas.

Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$V = \vec{v}_1 \cdot \left(\vec{v}_2 \times \vec{w}\right) = \left|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right| \cdot h = \left|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right| \cdot d \Rightarrow d = \frac{\left|\vec{v}_1 \cdot \left(\vec{v}_2 \times \vec{w}\right)\right|}{\left|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right|}.$$

$$d = \frac{\left|\vec{v}_1 \cdot \left(\vec{v}_2 \times \vec{w}\right)\right|}{\left|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right|} = \frac{||1\ 4\ 2\ 1\ 1\ -1\ 1\ 2\ 0\,||}{|i\ j\ k\ 1\ 4\ 2\ 1\ 1\ -1\,|} = \frac{|-2|}{|-4i+2j+k-4k-2i+j|} = \frac{|-2|}{|-6i+3j-3k|} =$$

$$= \frac{2}{3\cdot|-2i+j-k|} = \frac{2}{3\cdot\sqrt{(-2)^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{2}{3\cdot\sqrt{4+1+1}} = \frac{2}{3\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{18} = \underline{\frac{\sqrt{6}}{9}\, u = d\left(r_1,\, r_2\right)}.$$

$c)$

$$\vec{\beta} = \vec{AP} = [P\, -\, A] = [(1,\, 2,\, 3) - (0,\, -\, 2,\, 0)] = (1,\, 4,\, 3).$$

$$\pi\left(P;\, \vec{v}_1,\, \vec{\beta}\right) \equiv |x\, -\, 1\; y\, -\, 2\; z\, -\, 3\; 1\; 4\; 2\; 1\; 4\; 3\,| = 0;$$

$12(x-1)+2(y-2)+4(z-3)-4(z-3)-8(x-1)-3(y-2)=0;$

$4(x-1)-(y-2)=0;\;\; 4x-4-y+2=0.$

$$\underline{\pi \equiv 4x-y-2=0}.$$

****

	Oro (%)	Plata (%)
A	100	0
B	75	15
C	60	22

3º) Se dispone de tres aleaciones A, B y C que contienen, entre otros metales, oro y plata en las proporciones indicadas en la tabla adjunta. Se quiere obtener un lingote de 25 gramos, con una proporción del 72 % de oro y una proporción del 16 % de plata, tomando x gramos de A, y gramos de B y z gramos de C. Determínense las cantidades $x,\ y,\ z$.

El lingote a obtener contiene: $\{Oro \rightarrow 72\ \%\ de\ 25\ =\ 0,72 \cdot 25\ =\ 18\ gr\ \ Plata \rightarrow 16\ \%\ de\ 25\ =\ 0,16 \cdot 25\ =\ 4\ gr\ Otros \rightarrow 1$
.

$Oro \rightarrow x\ +\ 0,75y\ +\ 0,6z\ =\ 18 \qquad Plata \rightarrow 0,15y\ +\ 0,22\ =\ 4 \qquad Otros \rightarrow 0,1y\ +\ 0,18z$

$20x\ +\ 15y\ +\ 12z\ =\ 360 \qquad 15y\ +\ 22z\ =\ 400 \qquad 5y\ +\ 9z\ =\ 150\ \}.$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x\ =\ \frac{|360\ 15\ 12\ 400\ 15\ 22\ 150\ 5\ 9\ |}{|20\ 15\ 12\ 0\ 15\ 22\ 0\ 5\ 9\ |}\ =\ \frac{48.600+24.000+49.500-27.000-39.600-54.000}{2.700-2.200}\ =$$

$$=\ \frac{122.100-120.600}{500}\ =\ \frac{122.100-120.600}{500}\ =\ \frac{1.500}{500}\ =\ 3.$$

$$y\ =\ \frac{|20\ 360\ 12\ 0\ 400\ 22\ 0\ 150\ 9\ |}{500}\ =\ \frac{72.000-66.000}{500}\ =\ \frac{6.000}{500}\ =\ 12.$$

$$z\ =\ \frac{|20\ 15\ 360\ 0\ 15\ 400\ 0\ 5\ 150\ |}{500}\ =\ \frac{45.000-40.000}{500}\ =\ \frac{5.000}{500}\ =\ 10.$$

$\underline{Hay\ que\ coger\ 3\ gramos\ de\ A,\ 12\ gramos\ de\ B\ y\ 10\ gramos\ de\ C.}$

****

4º) Dados dos sucesos, A y B, de un experimento aleatoria, con probabilidades tales que $P(A) = \frac{4}{9}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ y $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$, se pide:

a) Comprobar si los sucesos A y B son independientes o no.

b) Calcular $P(\overline{A}/B)$, donde $\overline{A}$ denota el suceso complementario de A.

----

a)

Dos sucesos A y B son independientes cuando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

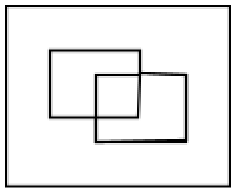
$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{4}{9} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{8+9-12}{18} = \frac{5}{18}.$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{9} \neq \frac{5}{18} = P(A \cap B).$$

$\underline{Por\ lo\ expuesto\ anteriormente\ los\ sucesos\ A\ y\ B\ no\ son\ independientes}.$

b)

$$P(\overline{A}/B) = P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) =$$



$$= \frac{1}{2} - \frac{5}{18} = \frac{9-5}{18} = \frac{4}{18} = \underline{\frac{2}{9}}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Dada la matriz $A = (2\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ )$ y la matriz identidad $I = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ )$, se pide:

a) Calcular la matriz $B = (A - I)\cdot(2I + 2A)$.

b) Determinar el rango de las matrices $A - I,\ A^2 - I$ y $A^3 - I$.

c) Calcular la matriz inversa de A^6, en caso de que exista.

----

a)

$$B = (A - I)\cdot(2I + 2A) = [(2\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ ) - (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ )]\cdot(2I + 2A) =$$

$$= (1\ 0\ 0\ 0\ \ -1\ 1\ 0\ 1\ \ -1\ )\cdot[2\cdot(1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) + 2\cdot(2\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ )] =$$

$$= (1\ 0\ 0\ 0\ \ -1\ 1\ 0\ 1\ \ -1\ )\cdot[(2\ 0\ 0\ 0\ 2\ 0\ 0\ 0\ 2\ ) + (4\ 0\ 0\ 0\ 0\ 2\ 0\ 2\ 0\ )] = (1\ 0\ 0\ 0\ \ -1\ 1$$

$$= \underline{(6\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ )}.$$

b)

$$A - I = (1\ 0\ 0\ 0\ \ -1\ 1\ 0\ 1\ \ -1\ ) \Rightarrow |1\ 0\ 0\ 0\ \ -1\ 1\ 0\ 1\ \ -1\ | = 1 - 1 = 0$$

.

$$\underline{Rang\ (A - I) = 2}.$$

$$A^2 - I = (2\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ )\cdot(2\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ ) - (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) =$$

$$= (4\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) - (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) = (3\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ ).$$

$$\underline{Rang\left(A^2 - I\right) = 1}.$$

$$A^3 - I = A^2\cdot A - I = (4\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ )\cdot(4\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) - (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) =$$

$$= (16\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) - (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) = (15\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ ).$$

$$\underline{Rang\left(A^3 - I\right) = 1}.$$

c)

$$A^6 = A^3\cdot A^3 = (16\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ )\cdot(16\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) = (256\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ )$$

.

$\left|A^{6}\right| = 256 \neq 0 \Rightarrow \underline{A^{6}\ es\ invertible}.$

Se obtiene la inversa de A^{6} por el método de Gauss-Jordan.

$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_{1} \rightarrow \frac{1}{256}F_{1}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{256}\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ \right).$

$$\underline{\left(A^{6}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{256}\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ \right).}$$

****

2º) Se considera la función $f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2+1}$ y se pide:

a) Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

b) Estudiar la existencia de asíntotas horizontales y verticales de la función f y, en su caso, determinarlas.

c) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y sus extremos relativos en el caso de que existan.

----

a)

La pendiente de la tangente a una función en un punto es el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}\cdot(x^2+1)-e^{-x}\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-e^{-x}\cdot(x^2+2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-e^{-x}\cdot(x+1)^2}{(x^2+1)^2}.$$

$$m = f'(0) = \frac{-e^{-0}\cdot(0+1)^2}{(0^2+1)^2} = \frac{-1\cdot 1}{1} = -1.$$

El punto de tangencia es el siguiente: $f(0) = \frac{e^{-0}}{0^2+1} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow A(0,\ 1)$.

La expresión de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente es la siguiente: $y - y_0 = m(x - x_0)$.

$$y - 1 = -1\cdot(x - 0) = -x.$$

$$\underline{Recta\ tangente:\ t \equiv x + y - 1 = 0}.$$

b)

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$; son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2+1} = 0 \Rightarrow \underline{La\ recta\ y = 0\ es\ asíntota\ horizontal}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{x^2 + 1 \neq 0,\ \forall x \in R \Rightarrow La\ función\ f(x)\ no\ tiene\ asíntotas\ verticales}.$$

$c)$

Una función es creciente o decreciente en un punto cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente, en ese punto.

$f'(x) = \frac{-e^{-x} \cdot (x+1)^2}{(x^2+1)^2}$.

Teniendo en cuenta que $-e^{-x} = -\frac{1}{e^x} < 0, \forall x \in R$ y que $\frac{(x+1)^2}{(x^2+1)^2} > 0, \forall x \in R$:

$\underline{f'(x) < 0, \forall x \in R \Rightarrow f(x) \text{ es monótona decreciente en su dominio, que es } R.}$

$\underline{\text{Por ser } f'(x) \neq 0, \forall x \in R \Rightarrow f(x) \text{ no tiene extremos relativos.}}$

****

3º) Sea r la recta que pasa por los puntos $P_1(3,\ 2,\ 0)$ y $P_2(7,\ 0,\ 2)$. Se pide:

a) Hallar la distancia del punto $Q(3,\ 5,\ -3)$ a la recta r.

b) Hallar el punto de corte de la recta r con el plano π perpendicular a r que pasa por el punto Q.

----

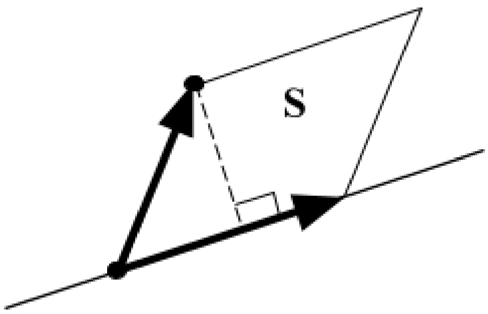
a)

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \left[P_2 - P_1\right] = [(7,\ 0,\ 2) - (3,\ 2,\ 0)] = (4,\ -2,\ 2) \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (2,\ -1,\ 1).$$

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es: $r \equiv \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.

La distancia de un punto a una recta puede determinarse teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que forman dos vectores es el módulo de su producto vectorial y, de forma geométrica, es el producto de la base por la altura.

Para una mejor comprensión del proceso se hace un dibujo de la situación.



$$\left.\begin{array}{l} S = \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{P_1Q}\right| \\ S = \left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot h \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{P_1Q}\right| = \left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{h = d(P, r) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{P_1Q}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}}.$$

$$\overrightarrow{P_1Q} = \left[Q - P_1\right] = [(3,\ 5,\ -3) - (3,\ 2,\ 0)] = (0,\ 3,\ -3).$$

Aplicando la fórmula al punto Q y a la recta r:

$$d(P, r) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{P_1Q}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|} = \frac{\left|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \left|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{|i + 2k - i + 2j|}{3\sqrt{6}} = \frac{|2j + 2k|}{3\sqrt{6}} = \frac{2 \cdot |j \cdots}{3\sqrt{\cdots}}$$

$$= \frac{2 \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}}{3\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{12}}{3 \cdot 6} = \underline{\frac{2\sqrt{3}}{9}\ u = d(P, r)}.$$

b)

El haz de planos perpendiculares a r es $\beta \equiv 2x - y + z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz β, el plano π es el que contiene al punto Q:

$\beta \equiv 2x - y + z + D = 0 \quad Q(3,\ 5,\ -3) \}\Rightarrow 2 \cdot 3 - 5 + 1 \cdot (-3) + D = 0;$

$6 - 5 - 3 + D = 0;\ -2 + D = 0;\ D = 2 \Rightarrow \pi \equiv 2x - y + z + 2 = 0.$

El punto N pedido es la intersección de la recta r con el plano π:

$\pi \equiv 2x - y + z + 2 = 0 \quad r \equiv \{x = 3 + 2\lambda\ y = 2 - \lambda\ \ z = \lambda \quad \}\Rightarrow 2 \cdot (3 + 2\lambda$

$6 + 4\lambda - 2 + \lambda + \lambda + 2 = 0;\ 6 + 6\lambda = 0;\ 1 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1.$

$\lambda = -1 \Rightarrow \{x = 3 + 2 \cdot (-1) = 3 - 2 = 1\ y = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3 \quad z = -1$

.

****

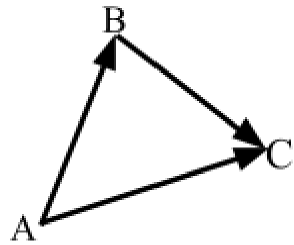
4º) Se considera el triángulo de vértices $A(1,\ 3,\ -1)$, $B(3,\ 1,\ 0)\ y\ C(2,\ 5,\ 1)$ y se pide:

a) Determinar razonadamente si el triángulo es equilátero, isósceles o escaleno.

b) Obtener las medidas de sus tres ángulos.

La contestación del apartado b) conlleva la respuesta del apartado a).

b)



$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(3,\ 1,\ 0) - (1,\ 3,\ -1)] = (2,\ -2,\ 1).$

$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(2,\ 5,\ 1) - (1,\ 3,\ -1)] = (1,\ 2,\ 2).$

$\overrightarrow{BC} = [C - B] = [(2,\ 5,\ 1) - (3,\ 1,\ 0)] = (-1,\ 4,\ 1).$

Por el concepto de producto escalar:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot \cos cos\ \alpha\ \Rightarrow \cos cos\ \alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}.$$

$$\cos cos\ \alpha = \frac{(2,-2,1)\cdot(1,2,2)}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{2-4+2}{\sqrt{4+4+1}\cdot\sqrt{1+4+4}} = \frac{0}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{9}} = \frac{0}{9} = 0 \Rightarrow \underline{\alpha = 90°}$$

.

$\underline{El\ triángulo\ es\ rectángulo\ en\ A}.$

$$\cos cos\ \beta = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{(-2,2,-1)\cdot(-1,4,1)}{\sqrt{(-2)^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+4^2+1^2}} = \frac{2+8-1}{\sqrt{4+4+1}\cdot\sqrt{1+16+1}} = \frac{9}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{18}} =$$

$$= \frac{9}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \underline{\beta = 45°}.$$

$$\cos cos\ \gamma = \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CB}\right|} = \frac{(-1,-2,-2)\cdot(1,-4,-1)}{\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-4)^2+(-1)^2}} = \frac{-1+8+2}{\sqrt{1+4+4}\cdot\sqrt{1+16+1}} =$$

$$= \frac{9}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{18}} = \frac{9}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \underline{\gamma = 45°}.$$

$\underline{El\ tri\acute{a}ngulo\ es\ rect\acute{a}ngulo\ en\ A\ e\ is\acute{o}sceles}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas. No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

OPCIÓN A

1º) Considere las matrices $A = (-\ 2\ 0\ 1\ 2\ )$, $B = (1\ 3\ 2\ 2\ )$ y $C = (0\ 2\ \ -\ 1\ 2\ )$.

a) Compruebe que las matrices A y B son regulares (o invertibles) y calcule sus correspondientes matrices inversas.

b) Determine la matriz X que cumple la ecuación $A \cdot X \cdot B = C$.

----

a)

$$A = (-\ 2\ 0\ 1\ 2\ );\ \ |A| = |-\ 2\ 0\ 1\ 2\ | = -\ 4 \neq 0 \Rightarrow \underline{A\ es\ invertible}.$$

$$A^t = (-\ 2\ 1\ 0\ 2\ );\ \ Adj.\ de\ A^t = (2\ 0\ \ -\ 1\ \ -\ 2\ ) \Rightarrow \underline{A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot (-\ 2\ 0\ 1\ 2\ )}.$$

$$B = (1\ 3\ 2\ 2\ );\ \ |B| = |1\ 3\ 2\ 2\ | = 2\ -\ 6\ = -\ 4 \neq 0 \Rightarrow \underline{B\ es\ invertible}.$$

La inversa de B se obtiene por el método de Gauss-Jordan.

$$(B/I) = (1\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{ F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1 \right\} \Rightarrow (1\ 0\ \ -\ 2\ 1\ ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ F_2 \rightarrow -\frac{1}{4}F_2 \right\} \Rightarrow \left(1\ 0\ \frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{4}\right) \Rightarrow \left\{ F_1 \rightarrow F_1 - 3F_2 \right\} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{B^{-1} = \left(-\frac{1}{2}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \cdot (-\ 2\ 3\ 2\ \ -\ 1\ )}.$$

b)

$$A \cdot X \cdot B = C;\ \ A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot A^{-1};\ \ I \cdot X \cdot I = A^{-1} \cdot C \cdot A^{-1}.$$

$$\underline{X = A^{-1} \cdot C \cdot A^{-1}}.$$

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot (-\ 2\ 0\ 1\ 2\ ) \cdot (0\ 2\ \ -\ 1\ 2\ ) \cdot \frac{1}{4} \cdot (-\ 2\ 3\ 2\ \ -\ 1\ ) =$$

$$= \frac{1}{16} \cdot (0\ \ -\ 4\ \ -\ 2\ 6\ ) \cdot (-\ 2\ 3\ 2\ \ -\ 1\ ) = \frac{1}{16} \cdot (-\ 8\ 4\ 16\ \ -\ 12\ ) = \frac{1}{4} \cdot (-\ 2\ 1\ 4\ \ -\ 3\ )$$
.

$$\underline{X = \frac{1}{4} \cdot (-\ 2\ 1\ 4\ \ -\ 3\ )}.$$

****

2º) Considere el plano π que pasa por el punto $P(1,\ 2,\ 3)$ y tiene como vectores directores a $\vec{u} = (1,\ -1,\ 0)$ y $\vec{v} = (1,\ 0,\ 2)$. Considere la recta r que pasa por los puntos $A(1,\ 0,\ 4)$ y $B(3,\ 2,\ 2)$.

a) Determine la ecuación del plano π.

b) Determine la ecuación de la recta r.

c) Estudie la posición relativa del plano π y la recta r.

----

a)

$$\pi\left(P;\ \vec{u},\ \vec{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$-2(x-1) + (z-3) - 2(y-2) = 0;\quad -2x + 2 + z - 3 - 2y + 4 = 0;$

$-2x - 2y + z + 3 = 0.$

$$\underline{z \equiv 2x + 2y - z - 3 = 0}.$$

b)

Los puntos A y B determinan el vector: $\vec{AB} = [B - A] = (2,\ 2,\ -2)$.

Un vector de la recta r pedida es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector $\vec{AB} = (2,\ 2,\ -2)$, por ejemplo, $\vec{v}_r = (1,\ 1,\ -1)$.

La expresión de r dada, por ejemplo, por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$\underline{r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{-1}}.$$

c)

Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (2,\ 2,\ -1)$, que es linealmente independiente del vector director de la recta, $\vec{v}_r = (1,\ 1,\ -1)$, por no ser proporcionales sus componentes; por otra parte $\vec{n} \cdot \vec{v}_r = (2,\ 2,\ -1) \cdot (1,\ 1,\ -1) = 2 + 2 + 1 \neq 0$, tampoco son perpendiculares. De todo esto se deduce que:

$$\underline{La\ recta\ r\ corta\ al\ plano\ \pi\ en\ un\ punto\ no\ siendo\ perpendiculares}.$$

****

3º) Calcule los siguientes límites: $a)\ \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2}-\frac{4}{x-4}\right)$. $\qquad b)\ \frac{sen\,x-x\cdot \text{coscos}\,x}{x-sen\,x}$.

$a)$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}-2}-\frac{4}{x-4}\right)=\frac{1}{\sqrt{4}-2}-\frac{4}{4-4}=\frac{1}{0}-\frac{4}{0}=\infty-\infty\Rightarrow Ind.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{x-4-4\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)(x-4)}=\frac{x-4-4\sqrt{x}+8}{\left(\sqrt{x}-2\right)(x-4)}=\frac{x+4-4\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-2\right)(x-4)}=\frac{4+4-4\sqrt{4}}{\left(\sqrt{4}-2\right)(4-4)}=\frac{0}{0}\Rightarrow Ind.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\left(x+4-4\sqrt{x}\right)\left(x+4+4\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)(x-4)\left(x+4+4\sqrt{x}\right)}=\frac{\left[(x+4)^{2}-\left(4\sqrt{x}\right)^{2}\right]\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)(x-4)\left(x+4+4\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{x}+2}{x+4+4\sqrt{x}}\cdot\frac{x^{2}-8x+16}{(x-4)^{2}}=\frac{2+2}{4+4+8}\cdot\frac{(x-4)^{2}}{(x-4)^{2}}=\frac{4}{16}\cdot 1=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}.$$

También puede seguirse de la forma siguiente a partir de:

$$\cdots=\frac{x+4-4\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-2\right)(x-4)}=\frac{4+4-4\sqrt{4}}{\left(\sqrt{4}-2\right)(4-4)}=\frac{0}{0}\Rightarrow Ind.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1+0-\frac{4}{2\sqrt{x}}}{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-0\right)(x-4)+\left(\sqrt{x}-2\right)\cdot 1}=\frac{2\sqrt{x}-4}{x-4+2x-4\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}-4}{3x-4-4\sqrt{x}}=\frac{4-4}{12-4-8}=\frac{0}{0}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ind.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow\frac{\frac{2}{2\sqrt{x}}-0}{3-0-\frac{4}{2\sqrt{x}}}=\frac{\frac{1}{2}}{3-1}=\frac{1}{4}.$$

$$\underline{\left(\frac{1}{\sqrt{x}-2}-\frac{4}{x-4}\right)=\frac{1}{4}.}$$

$b)$

$$\frac{sen\,x-x\cdot \text{coscos}\,x}{x-sen\,x}=\frac{0-0\cdot 1}{0-0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Ind.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{cos\,x-(1\cdot \text{coscos}\,x-1\cdot sen\,x)}{1-cos\,x}=\frac{cos\,x-\text{coscos}\,x+x\cdot sen\,x}{1-cos\,x}=\frac{x\cdot sen\,x}{1-cos\,x}=\frac{0\cdot 0}{1-1}=\frac{0}{0}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ind.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow\frac{1\cdot sen\,x+x\cdot \text{coscos}\,x}{0+sen\,x}=\frac{sen\,x+x\cdot \text{coscos}\,x}{sen\,x}=\frac{0+0\cdot 1}{0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Ind.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow\frac{cos\,x+1\cdot \text{coscos}\,x-x\cdot sen\,x}{cos\,x}=\frac{1+1-0}{1}=2.$$

$$\underline{\frac{sen\,x-x\cdot \text{coscos}\,x}{x-sen\,x}=2}$$

****

4º) a) Calcule la siguiente integral indefinida $I = \int x \cdot sen\, \frac{\pi x}{2} \cdot dx$.

b) Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x = 0$ y $x = 1$, y la gráfica de la función $f(x) = x \cdot sen\, \frac{\pi x}{2}$.

----

a)

$$I = \int x \cdot sen\, \frac{\pi x}{2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ u = x \rightarrow du = dx\ dv = sen\, \frac{\pi x}{2} \cdot dx \rightarrow v = -\frac{2}{\pi} \cdot \cos cos\, \frac{\pi x}{2} \right.$$

$$\Rightarrow I = x \cdot \left(-\frac{2}{\pi} \cdot \cos cos\, \frac{\pi x}{2} \right) - \int -\frac{2}{\pi} \cdot \cos cos\, \frac{\pi x}{2} \cdot dx = -\frac{2x}{\pi} \cdot \cos cos\, \frac{\pi x}{2} + \frac{2}{\pi} \cdot \int \cos c$$

$$= -\frac{2x}{\pi} \cdot \cos cos\, \frac{\pi x}{2} + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot sen\, \frac{\pi x}{2} + C = -\frac{2x}{\pi} \cdot \cos cos\, \frac{\pi x}{2} + \frac{4}{\pi^2} \cdot sen\, \frac{\pi x}{2} + C$$

.

$$\underline{I = \int x \cdot sen\, \frac{\pi x}{2} \cdot dx = -\frac{2x}{\pi} \cdot \cos cos\, \frac{\pi x}{2} + \frac{4}{\pi^2} \cdot sen\, \frac{\pi x}{2} + C.}$$

(*)

$$v = \int sen\, \frac{\pi x}{2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \frac{\pi x}{2} = t \rightarrow dx = \frac{2}{\pi} \cdot dt \right\} \Rightarrow \frac{2}{\pi} \int sen\, t \cdot dt = -\frac{2}{\pi} \cdot \cos cos\, \frac{\pi x}{2}$$

b)

En el intervalo $(0,\ 1)$ todas las ordenadas de la función $f(x) = sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ son positivas, por lo cual el área pedida es la siguiente, teniendo en cuenta (*):

$$S = \int_0^1 f(x) \cdot dx = \left[-\frac{2x}{\pi} \cdot \cos cos\, \frac{\pi x}{2} + \frac{4}{\pi^2} \cdot sen\, \frac{\pi x}{2} \right]_0^1 =$$

$$= \left(-\frac{2}{\pi} \cdot \cos cos\, \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi^2} \cdot sen\, \frac{\pi}{2} \right) - \left(-0 \cdot \cos cos\, 0 + \frac{4}{\pi^2} \cdot sen\, 0 \right) = -\frac{2}{\pi} \cdot 0 + \frac{4}{\pi^2} \cdot 1 -$$

.

$$\underline{S = \frac{4}{\pi^2}\, u^2 \cong 0,405\, u^2.}$$

****

5º) Según un estudio reciente, el 68 % de los encuestados poseen un smartphone, el 38 % tienen una tablet y el 16 % disponen de ambos dispositivos.

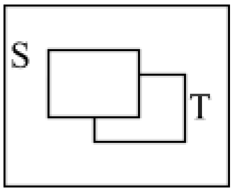
a) Calcule la probabilidad de que una persona elegida al azar no disponga de ninguno de los dos dispositivos.

b) Resulta que la persona elegida posee un smartphone, ¿qué probabilidad hay de que tenga una tablet?

$Smartphone \rightarrow P(S) = 0,68.$ $\qquad$ $Tablet \rightarrow P(T) = 0,38.$ $\qquad$ $P(S \cap T) = 0,16.$

a)

$$P = P(\overline{S} \cap \overline{T}) = 1 - P(S \cup T) =$$



$$= 1 - [P(S) + P(T) - P(S \cap T)] =$$

$$= 1 - (0,68 + 0,38 - 0,16) = 1 - 0,90 = \underline{0,10}.$$

b)

$$P = P(T/S) = \frac{P(T \cap S)}{P(S)} = \frac{0,16}{0,68} = \underline{0,2353}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Considere el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \\ x - y + a^2 z = a - 1 \end{cases}$ en función del parámetro a:

a) Determine para qué valores del parámetro a el sistema tiene solución única. No hay que resolverlo.

b) Determine para qué valor del parámetro a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) Determine para qué valor del parámetro a el sistema no tiene solución.

----

a)

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas tiene solución única cuando el determinante de la matriz de coeficientes es tres.

Matriz de coeficientes: $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & a^2 \end{pmatrix}$.

$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & a^2 \end{vmatrix} = 0;\ 6a^2 - 4 + 2 - 6 + 4 - 2a^2 = 4a^2 - 4 = 0;$

$a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a_1 = -1,\ a_2 = 1.$

$\underline{El\ sistema\ tiene\ solución\ única\ \forall a \in R - \{-1,\ 1\}}.$

b)

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas tiene infinitas soluciones cuando los determinantes de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada son iguales y menor que el número de incógnitas. Como en este caso existe en el sistema el menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, el rango de las dos matrices tiene que ser dos.

$|M| = 0 \Rightarrow a_1 = -1,\ a_2 = 1.\quad Para\ a = -1\ y\ a = 1 \Rightarrow Rang\ M = 2.$

$Para\ a = -1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -12 + 4 = -8 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$

$Para\ a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1 = C_3\} \Rightarrow Rang M' = 2.$

$\underline{El\ sistema\ tiene\ infinitas\ soluciones\ para\ a\ =\ 1}.$

$Para\ a\ =\ 1 \Rightarrow \{2x\ +\ y\ +\ 2z\ =\ 0\quad 2x\ +\ 3y\ +\ 2z\ =\ 0\ x\ -\ y\ +\ z\ =\ 0$, que es homogéneo. Para resolverlo se desprecia una ecuación (segunda) y se parametriza una incógnita, por ejemplo, $z\ =\ \lambda$.

$2x\ +\ y\ =-\ 2\lambda\quad x\ -\ y\ =-\ \lambda\ \} \Rightarrow 3x\ =-\ 3\lambda;\ \ x\ =-\ \lambda.$
$y\ =\ x\ +\ \lambda\ =-\ \lambda\ +\ \lambda\ =\ 0.$

$\underline{Solución: x\ =-\ \lambda;\ y\ =\ 0;\ \ z\ =\ \lambda,\ \forall\lambda \in R}.$

$c)$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es incompatible cuando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son diferentes.

$Para\ a\ =-\ 1 \Rightarrow Rang\ M\ =\ 2;\ Rang\ M'\ =\ 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.$

$\underline{El\ sistema\ no\ tiene\ solución\ para\ a\ =-\ 1}.$

****

2º) Los vértices de un triángulo ABC son $A(-a,\ 1,\ 1)$, $B(2,\ -1,\ 2)$ y $C(1,\ -2a,\ 3)$.

$a)$ ¿Cuánto ha de valer a para que el triángulo sea rectángulo en B?

$b)$ Calcule el área del triángulo ABC para el caso de $a = -1$.

$a)$

$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(2,\ -1,\ 2) - (-a,\ 1,\ 1)] = (2 + a,\ -2,\ 1)$.

$\overrightarrow{BC} = [C - B] = [(1,\ -2a,\ 3) - (2,\ -1,\ 2)] = (-1,\ 1 - 2a,\ 1)$.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow (2 + a,\ -2,\ 1)\cdot(-1,\ 1 - 2a,\ 1) = 0;$

$-(2 + a) - 2(1 - 2a) + 1 = 0;\ \ -2 - a - 2 + 4a + 1 = 0;\ \ 3a - 3 = 0;$

$a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$.

$\underline{El\ triángulo\ de\ vértices\ ABC\ es\ rectángulo\ en\ B\ para\ a = 1}$.

$b)$

Para $a = -1$: $A(1,\ 1,\ 1)$, $B(2,\ -1,\ 2)$ y $C(1,\ 2,\ 3)$.

$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(2,\ -1,\ 2) - (1,\ 1,\ 1)] = (1,\ -2,\ 1)$.

$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(1,\ 2,\ 3) - (1,\ 1,\ 1)] = (0,\ 1,\ 2)$.

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan los puntos:

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left\|i\ j\ k\ 1\ \ -2\ 1\ 0\ 1\ 2\right\| = \frac{1}{2}\cdot|-4i + k - i - 2j| =$

$= \frac{1}{2}\cdot|-5i - 2j + k| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{(-5)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{25 + 4 + 1} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{30}$

.

$\underline{S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{30}\ u^2}$.

****

3º) La producción mensual de una fábrica de bombillas viene dada por $P = 2LK^2$ (en millones), donde L es el coste de la mano de obra y K es el coste del equipamiento (en millones de euros). La fábrica pretende producir 8 millones de unidades al mes. ¿Qué valores de L y K minimizarían el coste total $L + K$?

$P = 2LK^2 = 8 \Rightarrow L = \frac{8}{2K^2} = \frac{4}{K^2}$. Llamando $S = L + K$:

$$S(K) = L + K = \frac{4}{K^2} + K = \frac{4+K^3}{K^2}.$$

$$S'(K) = \frac{3K^2 \cdot K^2 - (4+K^3) \cdot 2K}{K^4} = \frac{3K^3 - 2(4+K^3)}{K^3} = \frac{3K^3 - 8 - 2K^3}{K^3} = \frac{K^3 - 8}{K^3}.$$

$$S'(K) = 0 \Rightarrow \frac{K^3 - 8}{K^3} = 0 \Rightarrow K^3 - 8 = 0 \Rightarrow K = 2.$$

Justificación de que se trata de un mínimo:

$$S''(K) = \frac{3K^2 \cdot K^3 - (K^3 - 8) \cdot 3K^2}{K^6} = \frac{3K^3 - 3(K^3 - 8)}{K^4} = \frac{3K^3 - 3K^3 + 24}{K^4} = \frac{24}{K^4}.$$

$$S''(2) = \frac{24}{2^4} = \frac{24}{16} > 0 \Rightarrow Mínimo,\ como\ se\ quería\ justificar.$$

$$L(2) = \frac{4}{2^2} = \frac{4}{4} = 1.$$

$\underline{Se\ minimiza\ el\ coste\ para\ K = 2.000.000\ euros\ y\ L = 1.000.000\ euros.}$

****

4º) Calcule la siguiente integral indefinida: $I = \int \frac{x}{x^2+x-6} \cdot dx$.

$$x^2 + x - 6 = 0; \; x = \frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{25}}{2} = \frac{-1\pm5}{2} \Rightarrow x_1 = -3, \; x_2 = 2$$

$\Rightarrow$

$x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$.

$$\frac{x}{x^2+x-6} = \frac{x-2}{(x+3)(x-2)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2} = \frac{Ax-2A+Bx+3B}{(x+3)(x-2)} = \frac{(A+B)x+(-2A+3B)}{x^2+x-6} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} A + B = 1 \\ -2A + 3B = 0 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} 2A + 2B = 2 \\ -2A + 3B = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 5B = 2; \; B =$$

. $A = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.

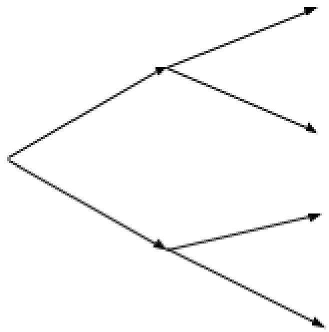
$$I = \int \frac{x}{x^2+x-6} \cdot dx = \int \left(\frac{\frac{3}{5}}{x+3} + \frac{\frac{2}{5}}{x-2} \right) \cdot dx = \frac{3}{5} L|x + 3| + \frac{2}{5} L|x - 2| + C.$$

$$\underline{I = \int \frac{x}{x^2+x-6} \cdot dx = \frac{1}{5} \cdot L\left|(x + 3)^3 \cdot (x - 3)^2\right| + C.}$$

****

5º) Dos aulas de 2º de Bachillerato hacen conjuntamente un examen de Matemáticas. En el primer grupo hay 25 alumnos de los cuales aprueba el 64 %, mientras que en el segundo grupo, de 30 alumnos, lo hace el 70 %. De entre todos los exámenes se elige uno al azar y resulta que está aprobado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un alumno del primer grupo?

$$Total\ alumnos: 25 + 30 = 55.$$



$$P = P(G1/A) = \frac{P(G1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(G1) \cdot P(A/G1)}{P(G1) \cdot P(A/G1) + P(G2) \cdot P(A/G2)} = \frac{\frac{25}{55} \cdot 0{,}64}{\frac{25}{55} \cdot 0{,}64 + \frac{30}{55} \cdot 0{,}70} =$$

$$= \frac{0{,}2909}{0{,}2909 + 0{,}3818} = \frac{0{,}2909}{0{,}6727} = \underline{0{,}4324}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

SEPTIEMBRE – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas. No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

OPCIÓN A

1º) Considere las matrices $A = (2\ 4\ 1\ 3)\ y\ B = (-\ 2\ 1\ \ -\ 2\ 0)$.

a) Compruebe que las matrices A y B son regulares (o invertibles) y calcule sus correspondientes matrices inversas.

b) Determine la matriz X que cumple la ecuación $A \cdot X \cdot B = A + B$.

----

a)

Una matriz es regular o invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$|A| = |2\ 4\ 1\ 3\ | = 6 - 4 = 2 \neq 0 \Rightarrow \underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible}$.

La inversa de A se obtiene por el método de Gauss-Jordan.

$(A/I) = (1\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow (0\ 1\ 1\ 0\ ) \Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (0\ 1\ 1\ \ -\ 2\ ) \Rightarrow \{F_2 \rightarrow -\frac{1}{2}F_2\} \Rightarrow \left(0\ 1\ \ -\frac{1}{2}\ 1\right) \Rightarrow \{F_1 \rightarrow F_1 - 3F_2\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\ \ -2\ \ -\frac{1}{2}\ 1\right) \Rightarrow \underline{A^{-1} = \left(\frac{3}{2}\ \ -2\ \ -\frac{1}{2}\ 1\right) = \frac{1}{2} \cdot (3\ \ -\ 4\ \ -\ 1\ 2\ )}$.

$|B| = |-\ 2\ 1\ \ -\ 2\ 0\ | = 0 + 2 = 2 \neq 0 \Rightarrow \underline{La\ matriz\ B\ es\ invertible.}$

La inversa de B se obtiene por la adjunta de la traspuesta.

$B^t = (-\ 2\ \ -\ 2\ 1\ 0\ ).$ $\qquad Adj.\ de\ B^t = (0\ \ -\ 1\ 2\ \ -\ 2\ ).$

$B^{-1} = \frac{Adj.\,de\,B^t}{|B|} = \frac{(0\ -1\ 2\ -2\ )}{2} \Rightarrow \underline{B^{-1} = \frac{1}{2}\cdot(0\ \ -\ 1\ 2\ \ -\ 2\ ).}$

$b)$

$A\cdot X\cdot B\ =\ A\ +\ B\ =\ S;\ \ A^{-1}\cdot A\cdot X\cdot B\cdot B^{-1} = A^{-1}\cdot S\cdot B^{-1};$

$I\cdot X\cdot I\ = A^{-1}\cdot S\cdot B^{-1} \Rightarrow \underline{X\ = A^{-1}\cdot S\cdot B^{-1}}.$

$S\ =\ A\ +\ B\ = (2\ 4\ 1\ 3\ ) + (-\ 2\ 1\ \ -\ 2\ 0\ ) = (0\ 5\ \ -\ 1\ 3\ ).$

$X\ = A^{-1}\cdot S\cdot B^{-1} = \frac{1}{2}\cdot(3\ \ -\ 4\ \ -\ 1\ 2\ )\cdot(0\ 5\ \ -\ 1\ 3\ )\cdot\frac{1}{2}\cdot(0\ \ -\ 1\ 2\ \ -\ 2\ ) =$

$= \frac{1}{4}\cdot(4\ 3\ \ -\ 2\ 1\ )\cdot(0\ \ -\ 1\ 2\ \ -\ 2\ ) = \frac{1}{4}\cdot(6\ \ -\ 10\ 2\ 0\ ).$

$\underline{X\ = \frac{1}{2}\cdot(3\ \ -\ 5\ 1\ 0\ ).}$

****

2º) Considere la recta r que pasa por los puntos $A(1,\ 1,\ 1)$ y $B(3,\ 3,\ 4)$ y la recta s cuyo vector director es $\overrightarrow{v_s} = (-\ 1,\ 3,\ 1)$ y pasa por el punto $C(4,\ 0,\ 3)$.

$a)$ Determine las ecuaciones continuas de $r\ y\ s$.

$b)$ Estudie la posición relativa de $r\ y\ s$.

$a)$

Los puntos A y B determinan el vector $\overrightarrow{AB}$, que es director de la recta r.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v_r} = [B\ -\ A] = [(3,\ 3,\ 4) - (1,\ 1,\ 1)] = (2,\ 2,\ 3).$$

Las expresiones de las rectas pedidas expresadas por ecuaciones paramétricas son las siguientes:

$$\underline{r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}}\ \ y\ \ \underline{s \equiv \begin{cases} x = 4 - \mu \\ y = 3\mu \\ z = 3 + \mu \end{cases}}.$$

$b)$

Los vectores directores de las rectas $r\ y\ s$ son linealmente independientes por no tener proporcionales sus componentes, por lo cual, o se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso se determina un vector $\overrightarrow{w}$ que tiene como origen el punto A de r y como extremo el punto C de s; es el siguiente:

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AC} = [C\ -\ A] = [(4,\ 0,\ 3) - (1,\ 1,\ 1)] = (3,\ -\ 1,\ 2).$$

Según que los vectores $\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s}\ y\ \overrightarrow{w}$ sean coplanarios o no, las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\right\}$ son coplanarios cuando su rango es menor que tres, es decir, cuando es cero el determinante de la matriz que forman:

$$Rang\left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12 + 3 + 6 - 27 + 2 + 4 = 0.$$

$$Rang\left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\right\} < 3 \Rightarrow \underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cortan\ en\ un\ punto}.$$

****

3º) Calcule los siguientes límites: $a)\ \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^x$. $\qquad b)\ \left(\frac{1}{Lx}-\frac{1}{x-1}\right)$.

$a)$

$$\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^x = 1^{\infty} \Rightarrow Indet.\ \ nº\ e \Rightarrow \left(\frac{x+3-4}{x+3}\right)^x = \left(1+\frac{-4}{x+3}\right)^x =$$

$$= \left(1+\frac{1}{\frac{x+3}{-4}}\right)^x = \left(1+\frac{1}{\frac{x+3}{-4}}\right)^{x\cdot\frac{x+3}{-4}\cdot\frac{-4}{x+3}} =$$

$$= \left[\left(1+\frac{1}{\frac{x+3}{-4}}\right)^{\frac{x+3}{-4}}\right]^{x\cdot\frac{-4}{x+3}} = \left[\left(1+\frac{1}{\frac{x+3}{-4}}\right)^{\frac{x+3}{-4}}\right]^{\frac{-4x}{x+3}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-4x}{x+3}} = e^{-4}.$$

$$\underline{\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^x = e^{-4} = \frac{1}{e^4}}.$$

$b)$

$$\left(\frac{1}{Lx}-\frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{L1}-\frac{1}{1-1} = \frac{1}{0}-\frac{1}{0} = \infty-\infty \Rightarrow Indet. \Rightarrow \lim_{x\to1}\frac{x-1-Lx}{(x-1)Lx} =$$

$$= \frac{1-1-L1}{(1-1)L1} = \frac{1-1-0}{0\cdot0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to1}\frac{1-0-\frac{1}{x}}{1\cdot Lx+(x-1)\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to1}\frac{\frac{x-1}{x}}{Lx+\frac{x-1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{x-1}{x\cdot Lx+x-1} = \frac{1-1}{1\cdot0+1-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to1}\frac{1-0}{1\cdot Lx+x\cdot\frac{1}{x}+1-0} =$$

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{Lx+1+1} = \frac{1}{L1+2} = \frac{1}{0+2} = \frac{1}{2}.$$

$$\underline{\left(\frac{1}{Lx}-\frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{2}}.$$

****

4º) $a)$ Calcule la siguiente integral indefinida $I = \int \frac{\cos\cos x \cdot sen^2 x}{1+sen^2 x} \cdot dx$.

$b)$ Obtenga una primitiva $F(x)$ de la función $\frac{\cos\cos x \cdot sen^2 x}{1+sen^2 x}$ que cumpla que $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
.

$a)$

$$I = \int \frac{\cos\cos x \cdot sen^2 x}{1+sen^2 x} \cdot dx \Rightarrow \{sen\, x = t \ \cos \cos x \cdot dx = dt\} \Rightarrow \int \frac{t^2}{1+t^2} \cdot dt = \int \frac{1+t^2-1}{1+t^2} \cdot$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) \cdot dt = t - arc\, tag\, t + C = sen\, x - arc\, tag\, (sen\, x) + C.$$

$$\underline{I = \int \frac{\cos\cos x \cdot sen^2 x}{1+sen^2 x} \cdot dx = sen\, x - arc\, tag\, (sen\, x) + C.}$$

$b)$

$$F(x) = \int \frac{\cos\cos x \cdot sen^2 x}{1+sen^2 x} \cdot dx = sen\, x - arc\, tag\, (sen\, x) + C.$$

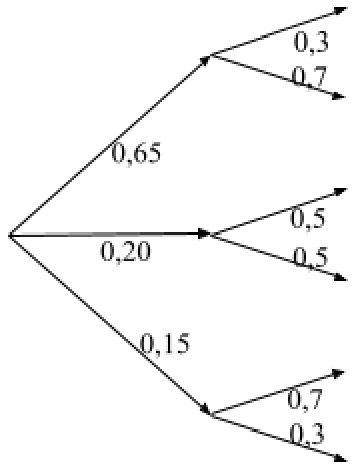
$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow sen\, \frac{\pi}{2} - arc\, tag\left(sen\, \frac{\pi}{2}\right) + C = 1; \ \ 1 - arc\, tag\, 1 + C = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = arc\, tag\, 1 = \frac{\pi}{4}.$$

$$\underline{F(x) = sen\, x - arc\, tag\, (sen\, x) + \frac{\pi}{4}}.$$

****

5º) En un colegio se imparten, como primer idioma, inglés, alemán y francés. El 65 % de los alumnos estudian inglés, el 20 % alemán y el recto francés. La asignatura de robótica es optativa y la elige el 30 % de los alumnos de inglés, el 50 % de los que estudian alemán y el 70 % de los que cursan francés. Se elige un alumno al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que estudie robótica?



$$P = P(R) = P(I)\cdot P(R/I) + P(A)\cdot P(R/A) + P(F)\cdot P(R/F) =$$

$$= 0,65\cdot 0,3 + 0,20\cdot 0,5 + 0,15\cdot 0,7 = 0,195 + 0,100 + 0,105 = \underline{0,400}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Considere el sistema de ecuaciones $\begin{cases} ax + 2y + z = 1 \\ x + 2ay + z = 2 \\ x + 2y + az = -3 \end{cases}$ en función del parámetro real a:

a) Determine para qué valores del parámetro a el sistema tiene solución única. No hay que resolverlo.

b) Determine para qué valor del parámetro a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) Determine para qué valor del parámetro a el sistema no tiene solución.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$M = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 1 & 2a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2a & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a & -3 \end{pmatrix}$.

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$|M| = \begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 1 & 2a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = 2a^3 + 2 + 2 - 2a - 2a - 2a = 2a^3 - 6a + 4 =$

$= 2\left(a^2 - 3a + 2\right) = 0;\ \ a^2 - 3a + 2 = 0;\ \ a = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow a_1 = 1,\ a_2 = 2$.

$$Para \begin{cases} a \neq 1 \\ a \neq 2 \end{cases} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.$$

$$\underline{El\ sistema\ tiene\ solución\ única\ \forall a \in R - \{1,\ 2\}}.$$

b) c)

$Para\ a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$

$$Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ M = 1;\ Rang\ M' = 2 \Rightarrow Sistema\ incompatible.$$

$Para\ a = 2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \left\{C_1,\ C_2,\ C_3\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -24 + 2 + 4 - 4 - 8 + 6 = -24 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3$.

$$Para\ a = 2 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.$$

$$\underline{El\ sistema\ no\ tiene\ solución\ para\ a = 1\ y\ para\ a = 2}.$$

$$\underline{No\ existen\ valores\ de\ a\ para\ que\ el\ sistema\ tenga\ infinitas\ soluciones}.$$

****

2º) Considere los puntos $A(1,\ 1,\ 1)$, $B(1,\ -1,\ 0)$ y $C(0,\ -2,\ 1)$.

a) Calcule el área del triángulo ABC.

b) Calcule la ecuación de la recta (en cualquiera de sus formas) contenidas en el plano que forman A, B y C que, pasando por A, es perpendicular al lado BC.

----

a)

Los puntos A, B y C determinan los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(1,\ -1,\ 0) - (1,\ 1,\ 1)] = (0,\ -2,\ -1).$$

$$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(0,\ -2,\ 1) - (1,\ 1,\ 1)] = (-1,\ -3,\ 0).$$

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan los puntos:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\cdot\|i\ j\ k\ 0\ -2\ -1\ -1\ -3\ 0\| = \frac{1}{2}\cdot\|i\ j\ k\ 0\ 2\ 1\ 1\ 3\ 0\| =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot|j - 2k - 3i| = \frac{1}{2}\cdot|-3i + j - 2k| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{(-3)^2 + 1^2 + (-2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{9 + 1 + 4} = \underline{\frac{\sqrt{14}}{2}\ u^2}.$$

b)

El plano α que contiene a los puntos A, B y C es el siguiente:

$$\alpha\left(A;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right) \equiv |x - 1\ y - 1\ z - 1\ 0\ -2\ -1\ -1\ -3\ 0| = 0;$$

$$(y - 1) - 2(z - 1) - 3(x - 1) = 0;\ \ y - 1 - 2z + 2 - 3x + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 2z - 3x + 4 = 0;\ \ -3x + y - 2z + 4 = 0;\ \ \alpha \equiv 3x - y + 2z - 4 = 0$$
.

Los puntos B y C determinan el vector:

$$\overrightarrow{CB} = [B - C] = [(1,\ -1,\ 0) - (0,\ -2,\ 1)] = (1,\ 1,\ -1).$$

El haz de planos β perpendiculares a la recta que pasa por B y C tiene la siguiente expresión general: $\beta \equiv x + y - z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz β, el plano γ que contiene al punto $A(1,\ 1,\ 1)$ es el que satisface su ecuación:

$$\beta \equiv x + y - z + D = 0 \qquad A(1,\ 1,\ 1)\ \} \Rightarrow 1 + 1 - 1 + D = 0;\ \ 1 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma \equiv x + y - z - 1 = 0.$$

La recta r pedida es la que forman los planos α y γ al cortarse:

$$\underline{r \equiv \{3x - y + 2z - 4 = 0\ \ x + y - z - 1 = 0}\ .$$

Otra forma de expresión de r es, por ejemplo, por unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \{3x - y + 2z - 4 = 0\ \ x + y - z - 1 = 0 \quad \Rightarrow x = \lambda; \quad -y + 2z = 4 - 3\lambda$$

$$y = z + 1 - \lambda = 5 - 4\lambda + 1 - \lambda = 6 - 5\lambda.$$

$$\underline{r \equiv \{x = \lambda \qquad y = 6 - 5\lambda\ z = 5 - 4\lambda}\ .$$

****

3º) Dada la función $f(x) = x\cdot e^{-x^2}$, se pide:

$a)$ Calcular $f(x)$.

$b)$ Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos de la función.

$a)$

$$f(x) = \left(x\cdot e^{-x^2}\right) = \frac{x}{e^{x^2}} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2x\cdot e^{x^2}} = \frac{1}{\infty} = 0 .$$

$$\underline{\left(x\cdot e^{-x^2}\right) = 0.}$$

$b)$

$$f'(x) = 1\cdot e^{-x^2} + x\cdot(-2x)\cdot e^{-x^2} = e^{-x^2}\left(1 - 2x^2\right).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{-x^2}\left(1 - 2x^2\right) = 0;\ \ 1 - 2x^2 = 0;\ \ 2x^2 = 1;\ \ x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Teniendo en cuenta que $f(x) = x\cdot e^{-x^2}$ es continua en R por estar compuesta por el producto de dos funciones continuas, las raíces de su primera derivada dividen su dominio en los intervalos $\left(-\infty,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ +\infty\right)$ donde su valor es, alternativamente, positivo y negativo. Considerando, por ejemplo, el valor $x = 0$ es $f'(0) = e^0(1 - 0) = 1 > 0$.

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función, que son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento:\ f'(x) > 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right).}$$

$$\underline{Decrecimiento:\ f'(x) < 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ +\infty\right).}$$

De la continuidad de la función y de los periodos de crecimiento se deducen los extremos relativos así como si son máximo o mínimos; no obstante se determinan a través de la segunda derivada.

La condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo es que se anule su primera derivada. Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: según que sea negativa o positiva para los valores que anulan la primera derivada se trata de un máximo o de un mínimo, respectivamente.

$$f''(x) = -2x \cdot e^{-x^2} \cdot \left(1 - 2x^2\right) + e^{-x^2}(-4x) = -2x \cdot e^{-x^2}\left(1 - 2x^2 + 2\right) =$$

$$= -2x \cdot e^{-x^2} \cdot \left(3 - 2x^2\right).$$

$$f''\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}} \cdot (3 - 1) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{e}} > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}} = -\frac{\sqrt{2e}}{2e} \Rightarrow \underline{Mínimo: P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2e}}{2e}\right)}.$$

Teniendo en cuenta que $f(x)$ es simétrica con respecto al origen por cumplirse que $f(-x) = -f(x)$:

$$\underline{Máximo: Q\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2e}}{2e}\right)}.$$

****

4º) Calcule la siguiente integral indefinida: $I = \int \frac{L(1+x^2)}{x^2} \cdot dx$.

$$I = \int \frac{L(1+x^2)}{x^2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ u = L(1 + x^2) \rightarrow du = \frac{2x}{1+x^2} \cdot dx \quad dv = \frac{1}{x^2} \cdot dx \rightarrow v = -\frac{1}{x} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(1 + x^2) \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) - \int -\frac{1}{x} \cdot \frac{2x}{1+x^2} \cdot dx = -\frac{1+x^2}{x} + 2 \cdot \int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx =$$

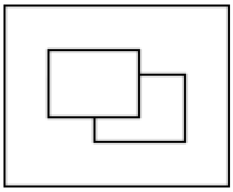
$$= -\frac{1+x^2}{x} + 2 \cdot arc\ tag\ x + C.$$

$$\underline{I = \int \frac{L(1+x^2)}{x^2} \cdot dx = -\frac{1+x^2}{x} + 2 \cdot arc\ tag\ x + C.}$$

****

5º) Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que: $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(B) = \frac{7}{10}$, $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{10}$. Calcule: $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$ y $P(\overline{B}/A)$. (Donde, si C y D son sucesos $\overline{C}$ denota el suceso complementario de C y $P(C/D)$ denota la probabilidad del suceso C condicionada al suceso D).

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B).$$

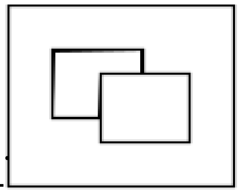


$$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - \frac{1}{10} = \underline{\frac{9}{10} = 0,9}.$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{3}{5} + \frac{7}{10} - \frac{9}{10} = \frac{3}{5} - \frac{2}{10} = \frac{6-2}{10} =$$

$$= \frac{4}{10} = \underline{\frac{2}{5} = 0,4}.$$



$$P(\overline{B}/A) = \frac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{5} - \frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \underline{\frac{1}{5} = 0,2}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE NAVARRA

JULIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B).

OPCIÓN A

1º) Estudia el siguiente sistema $\{2x + 4y + z = 1 \quad 2x + \left(a^2 + 2\right)y + 3z = 3 \quad - 2$ dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible.

$a)$

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$M = \left[2\ 4\ 1\ 2\ a^2 + 2\ 3\ -2\ -\left(a^2 + 2\right)\ a - 3\right];$ $M^{'} = \left[2\ 4\ 1\ 2\ a^2 + 2\ 3\ -2\ -\left(a^2 + 2\right)\ a - 3 \quad 1\ 3\ \sqrt{2} - 3\right].$

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$|M| = \left|2\ 4\ 1\ 2\ a^2 + 2\ 3\ -2\ -\left(a^2 + 2\right)\ a - 3\right| =$

$= 2(a - 3)\left(a^2 + 2\right) - 2\left(a^2 + 2\right) - 24 + 2\left(a^2 + 2\right) + 6\left(a^2 + 2\right) - 8(a - 3) =$

$= 2(a - 3)\left(a^2 + 2\right) - 24 + 6\left(a^2 + 2\right) - 8a + 24 =$

$= \left(a^2 + 2\right)(2a - 6 + 6) - 8a = 2a\cdot\left(a^2 + 2\right) - 8a = 2a^3 + 4a - 8a =$

$= 2a^3 - 4a = 2a\left(a^2 - 2\right) = 0 \Rightarrow a_1 = 0,\ x_2 = -\sqrt{2},\ x_3 = \sqrt{2}.$

$\underline{Para \left\{a \neq 0\ a \neq -\sqrt{2}\ a \neq \sqrt{2}\right\} \Rightarrow Ran\ M = Ran\ M^{'} = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

$Para\ a = 0 \Rightarrow M^{'} = \left(2\ 4\ 1\ 2\ 2\ 3\ -2\ -2\ -3 \quad 1\ 3\ \sqrt{2} - 3\right) \Rightarrow Rang\ M^{'} \Rightarrow \left\{C_1,\ C_2,\ C_4\right.$

$\Rightarrow \left| 2\ 4\ 1\ 2\ 2\ 3\ \ -2\ \ -2\sqrt{2} - 3 \right| = 4\sqrt{2} - 12 - 4 - 24 + 4 + 12 - 8\sqrt{2} + 24 =-$

$\Rightarrow Rang\ M' = 3.$

$Para\ a =- \sqrt{2} \Rightarrow M' = \left(2\ 4\ 1\ 2\ 4\ 3\ \ -2\ \ -4\ \ -\sqrt{2} - 3 \quad 1\ 3\sqrt{2} - 3 \right) \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{ C_1,\ C_3,\ C_4 \right\} \Rightarrow \left| 2\ 1\ 1\ 2\ 3\ 3\ \ -2\ \ -\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - 3 \right| =$

$= 6\sqrt{2} - 18 - 2\sqrt{2} - 6 - 6 + 6 - 6\sqrt{2} + 18 - 2\sqrt{2} + 6 =- 4\sqrt{2} \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow Rang\ M' = 3.$

$\underline{Para \left\{ a = 0\ a =- \sqrt{2} \right\} \Rightarrow Ran\ M = 2;\ Ran\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

$Para\ a = \sqrt{2} \Rightarrow M' = \left(2\ 4\ 1\ 2\ 4\ 3\ \ -2\ \ -4\sqrt{2} - 3 \quad 1\ 3\sqrt{2} - 3 \right) \Rightarrow \left\{ C_3 = C_4 \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow Rang\ M' = 2.$

$\underline{Para\ a = \sqrt{2} \Rightarrow Ran\ M = Ran\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

Se resuelve, en primer lugar, cuando el sistema es compatible determinado aplicando el método de Gauss:

$$M' = \left[2\ 4\ 1\ 2\ a^2 + 2\ 3\ \ -2\ \ -\left(a^2 + 2\right) a - 3 \quad 1\ 3\sqrt{2} - 3 \right] \Rightarrow \left\{ F_2 \to F_2 - F_1\ F \right.$$

$\Rightarrow \left(2\ 4\ 1\ 0\ a^2 - 2\ 2\ 0\ 0\ a \quad 1\ 2\sqrt{2} \right) \Rightarrow az = \sqrt{2} \Rightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{a}.$

$\left(a^2 - 2\right)y + 2z = 2 \Rightarrow y = \frac{2-2z}{a^2-2} = \frac{2-\frac{2\sqrt{2}}{a}}{a^2-2} = \frac{\frac{2a-2\sqrt{2}}{a}}{a^2-2} = \frac{2\left(a-\sqrt{2}\right)}{a\left(a^2-2\right)}.$

$2x + 4y + z = 1 \Rightarrow 2x = 1 - 4y - z = 1 + \frac{-8\left(a-\sqrt{2}\right)}{a\left(a^2-2\right)} + \frac{-\sqrt{2}}{a} =$

$= \frac{a\left(a^2-2\right)-8\left(a-\sqrt{2}\right)-\sqrt{2}\left(a^2-2\right)}{a\left(a^2-2\right)} = \frac{a^3-2a-8a+8\sqrt{2}-a^2\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{a\left(a^2-2\right)} = \frac{a^3-10a+10\sqrt{2}-a^2\sqrt{2}}{a\left(a^2-2\right)} =$

$= \frac{a^2\left(a-\sqrt{2}\right)-10\left(a-\sqrt{2}\right)}{a\left(a^2-2\right)} = \frac{\left(a-\sqrt{2}\right)\left(a^2-10\right)}{a\left(a^2-2\right)} \Rightarrow x = \frac{\left(a-\sqrt{2}\right)\left(a^2-10\right)}{2a\left(a^2-2\right)}.$

$\underline{Solución: x = \frac{(a-\sqrt{2})(a^2-10)}{2a(a^2-2)}, \ \ y = \frac{2(a-\sqrt{2})}{a(a^2-2)}, \ \ z = \frac{\sqrt{2}}{a}; \ \ \forall a \in R - \{0, \sqrt{2}\}.}$

Se resuelve ahora para $a = \sqrt{2}$ en cuyo caso el sistema es:

$\{2x + 4y + z = 1 \qquad 2x + 4y + 3z = 3 \qquad - 2x - 4y + ($
, que es compatible indeterminado.

Para su resolución se elimina una de las ecuaciones, por ejemplo la tercera, y se parametriza una de las incógnitas, por ejemplo $y = \lambda$, con lo que resulta:

$2x + 4\lambda + z = 1 \ \ 2x + 4\lambda + 3z = 3 \} \ 2x + z = 1 - 4\lambda \ \ 2x + 3z = 3 - 4\lambda \} \ \ -$

$\Rightarrow z = 1; \ \ 2x + z = 1 - 4\lambda; \ \ 2x = 1 - 4\lambda - 1 = - 4\lambda \Rightarrow x = - 2\lambda.$

$\underline{Solución: \{x = - 2\lambda \ y = \lambda \quad z = 1 \quad , \forall \lambda \in R.}$

****

2º) Comprueba que las rectas $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-2}$ y $s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{2}$ se cortan perpendicularmente y halla el punto P de corte. Encuentra un punto $R \in r$ y un punto $S \in s$ de forma que P, R , S sean vértices de un triángulo rectángulo cuyos catetos son de longitud 3.

Un punto y un vector de r son $A(1, -1, 1)$ y $\overrightarrow{v_r} = (1, 2, -2)$.

Un punto y un vector de s son $B(0, 0, -3)$ y $\overrightarrow{v_s} = (2, 1, 2)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\overrightarrow{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$:
$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = [B - A] = [(0, 0, -3) - (1, -1, 1)] = (-1, 1, -4)$.

Según que los vectores $\left\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\right\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\left\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\right\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$Rang\left\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\right\} \Rightarrow |1\ 2\ -2\ 2\ 1\ 2\ -1\ 1\ -4| = -4 - 4 - 4 - 2 - 2 + 16 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow Rang\left\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\right\} = 2 \Rightarrow \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\ son\ coplanarios.$

$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cortan}.$

Dos rectas son perpendiculares cuando lo son sus vectores directores; dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s} = (1, 2, -2) \cdot (2, 1, 2) = 2 + 2 - 4 = 0.$

$\underline{Queda\ comprobado\ que\ las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cortan\ perpendicularmente}.$

El punto P de corte de ambas rectas es el siguiente:

$\frac{x-1}{1} = \frac{x}{2};\ 2x - 2 = x;\ x = 2.$ $\qquad$ $\frac{y+1}{2} = \frac{y}{1};\ y + 1 = 2y;\ y = 1$

.

$\frac{z-1}{-2} = \frac{z+3}{2};\ 2z - 2 = -2z - 6;\ 4z = -4;\ z = -1 \Rightarrow \underline{P(2,\ 1,\ -1)}.$

Las expresiones de ambas rectas por ecuaciones paramétricas son las siguientes:

$r \equiv \{x = 1 + \lambda \quad y = -1 + 2\lambda\ z = 1 - 2\lambda$ y $s \equiv \{x = 2\lambda \qquad y = \lambda \qquad z =$

.

Unos puntos de r y s son $R(1 + \lambda,\ -1 + 2\lambda,\ 1 - 2\lambda)$ y $S(2\lambda,\ \lambda,\ -3 + 2\lambda)$.

Los puntos P, R y S determinan los siguiente vectores:

$\overrightarrow{PR} = [R - P] = [(1 + \lambda,\ -1 + 2\lambda,\ 1 - 2\lambda) - (2,\ 1,\ -1)] =$

$= (-1 + \lambda,\ -2 + 2\lambda,\ 2 - 2\lambda).$

$\left|\overrightarrow{PR}\right| = 3 \Rightarrow \sqrt{(-1 + \lambda)^2 + (-2 + 2\lambda)^2 + (2 - 2\lambda)^2} = 3;$

$1 - 2\lambda + \lambda^2 + 4 - 8\lambda + 4\lambda^2 + 4 - 8\lambda + 4\lambda^2 = 9;\ 9\lambda^2 - 18\lambda + 9 = 9;$

$9\lambda^2 - 18\lambda = 0;\ \lambda^2 - 2\lambda = 0;\ \lambda(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2.$

$\lambda_1 = 0 \Rightarrow \underline{R_1(1,\ -1,\ 1)}.$ $\qquad$ $\lambda_2 = 2 \Rightarrow \underline{R_2(3,\ 3,\ -3)}.$

$\overrightarrow{PS} = [S - P] = [(2\lambda,\ \lambda,\ -3 + 2\lambda) - (2,\ 1,\ -1)] =$

$= (-2 + 2\lambda,\ -1 + \lambda,\ -2 + 2\lambda).$

$\left|\overrightarrow{PS}\right| = 3 \Rightarrow \sqrt{(-2 + 2\lambda)^2 + (-1 + \lambda)^2 + (-2 + 2\lambda)^2} = 3;$

$4 - 8\lambda + 4\lambda^2 + 1 - 2\lambda + \lambda^2 + 4 - 8\lambda + 4\lambda^2 = 9;\ 9\lambda^2 - 18\lambda = 0;\ \lambda^2 - 2\lambda = 0;$

$\lambda(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2.$

$\lambda_1 = 0 \Rightarrow \underline{S_1(0,\ 0,\ -3)}$. $\lambda_2 = 2 \Rightarrow \underline{S_2(4,\ 2,\ 1)}$.

****

3º) Calcula las siguientes integrales indefinidas:

$a)\ I=\int \frac{dx}{x^2-x-2}$. $\qquad$ $b)\ I=\int x^2\cdot e^{2x}\cdot dx$.

$a)$

$$I=\int \frac{dx}{x^2-x-2}.$$

$$x^2-x-2=0;\ x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}\Rightarrow x_1=-1,\ x_2=2.$$

$$x^2-x-2=(x+1)(x-2).$$

$$\frac{1}{x^2-x-2}=\frac{M}{x+1}+\frac{N}{x-2}=\frac{Mx-2M+Nx+N}{(x+1)(x-2)}=\frac{(M+N)x+(-2M+N)}{x^2-x-2}\Rightarrow \quad M+N=0\ \ -2M+N$$

$$\Rightarrow \quad M+N=0\ 2M-N=-1\ \}\Rightarrow 3M=-1;\ M=-\frac{1}{3};\ \ -\frac{1}{3}+N=0\Rightarrow N=\frac{1}{3}$$

.

$$I=\int \frac{1}{x^2+x-2}\cdot dx=\int\left(\frac{-\frac{1}{3}}{x+1}+\frac{\frac{1}{3}}{x-2}\right)\cdot dx=-\frac{1}{3}\cdot L|x+1|+\frac{1}{3}\cdot L|x-2|+C=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot(L|x-2|-L|x+1|)=L\sqrt[3]{\left|\frac{x-2}{x+1}\right|}+C.$$

$$\underline{I=\int \frac{dx}{x^2-x-2}=L\sqrt[3]{\left|\frac{x-2}{x+1}\right|}+C.}$$

$b)$

$$I=\int x^2\cdot e^{2x}\cdot dx.$$

$$I=\int x^2e^{2x}\cdot dx\Rightarrow \left\{u=x^2\rightarrow du=2xdx\ e^{2x}dx=dv\rightarrow v=\frac{1}{2}e^{2x}\right\}\Rightarrow x^2\frac{1}{2}e^{2x}-\int e^{2}$$

$$=\frac{1}{2}x^2\cdot e^{2x}-\int x\cdot e^{2x}\cdot dx=\frac{1}{2}x^2\cdot e^{2x}-A. \qquad (*)$$

$A = \int xe^{2x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ u = x \rightarrow du = dx \; e^{2x} \cdot dx = dv \rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x} \right\} \Rightarrow x \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x} \cdot dx =$

$= \frac{1}{2}x \cdot e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C = \frac{1}{4}e^{2x}(2x - 1) + C.$

Sustituyendo en (*) el valor de A:

$I = \frac{1}{2}x^2 \cdot e^{2x} - \frac{1}{4} \cdot e^{2x}(2x - 1) + C = \frac{1}{4}e^{2x}\left(2x^2 - 2x + 1\right) + C.$

$$\underline{I = \int x^2 \cdot e^{2x} \cdot dx = \frac{1}{4}e^{2x}\left(2x^2 - 2x + 1\right) + C.}$$

****

4º) Demuestra que existe $a \in (0,\ 2)$ tal que $f'(a) = -\frac{1}{3}$, siendo la función primitiva $f(x) = (x\ +\ 1)^{(x-1)\cdot \cos cos \frac{\pi x}{2}}$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

Las funciones $f(x)$ y $f'(x)$ son continuas y derivables en el intervalo $(0,\ 2)$.

$$f(x) = (x\ +\ 1)^{(x-1)\cdot \cos cos \frac{\pi x}{2}} \Rightarrow L[f(x)] = \left[(x\ -\ 1)\cdot \cos cos \frac{\pi x}{2}\right]\cdot L(x\ +\ 1).$$

Derivando:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \left[1\cdot \cos cos \frac{\pi x}{2}\ -\ (x\ -\ 1)\cdot \frac{\pi}{2}\cdot \frac{\pi x}{2}\right]L(x\ +\ 1) + \left[(x\ -\ 1)\cdot \cos cos \frac{\pi x}{2}\right]\cdot \frac{1}{x+1}$$

$$= \left[\cos cos \frac{\pi x}{2}\ -\ \frac{\pi(x-1)}{2}\cdot \frac{\pi x}{2}\right]L(x\ +\ 1) + \frac{x-1}{x+1}\cdot \cos cos \frac{\pi x}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = (x\ +\ 1)^{(x-1)\cdot \cos cos \frac{\pi x}{2}}\cdot\left\{\left[\cos cos \frac{\pi x}{2}\ -\ \frac{\pi(x-1)}{2}\cdot \frac{\pi x}{2}\right]L(x\ +\ 1) + \frac{x-1}{x+1}\cdot \cos cos \frac{\pi x}{2}\right\}$$

.

$$f'(0) = 1^{-1\cdot 1}\cdot\left\{\left[1\ +\ \frac{\pi}{2}\cdot 0\right]\cdot 0\ -\ 1\right\} = -\ 1.$$

$$f'(1) = 2^{0\cdot 0}\cdot\{[0\ -\ 0\cdot 1]L2\ +\ 0\cdot 0\} =\ 2\cdot 0\ =\ 0.$$

En el intervalo $(0,\ 1) \in (0,\ 2)$ le es aplicable a $f'(x)$ el teorema de los Valores Intermedios o propiedad de Darboux que dice: "si una función $f(x)$ es continua en un intervalo $[a,\ b]$ y un número k está comprendido entre los valores extremos de la función, o sea, $f(a) \leq k \leq f(b)$ o $f(a) \geq k \geq f(b)$, entonces existe un valor $c \in [a,\ b]$ tal que $f(c) =\ k$".

Como quiera que es $f'(0) = -\ 1 < -\frac{1}{3} < f'(1) =\ 0$:

$$\underline{\exists a \in (0,\ 2)\ tal\ que\ f'(a) = -\frac{1}{3},\ como\ ten\acute{\imath}amos\ que\ demostrar.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Encuentra la matriz X que verifica $7A - A^7 = B \cdot B^t \cdot X$, siendo $A = (1\ 0\ \ -\ 1\ 1\ )$ y $B = (2\ 0\ \ -\ 1\ 1\ 1\ 0\ )$.

$$7A - A^7 = B \cdot B^t \cdot X;\ \ 7A - A^7 = M \cdot X;\ \ M^{-1} \cdot \left(7A - A^7\right) = M^{-1} \cdot M \cdot X;$$

$M^{-1} \cdot \left(7A - A^7\right) = I \cdot X \Rightarrow \underline{X = M^{-1} \cdot \left(7A - A^7\right)}$.

$$M = B \cdot B^t = (2\ 0\ \ -\ 1\ 1\ 1\ 0\ ) \cdot (2\ 1\ 0\ 1\ \ -\ 1\ 0\ ) = (5\ 2\ 2\ 2\ ).$$

$|M| = |5\ 2\ 2\ 2\ | = 10 - 4 = 6.$ $\qquad M^t = M = (5\ 2\ 2\ 2\ ).$

$Adj.\ de\ M^t = (2\ \ -\ 2\ \ -\ 2\ 5\ ).$

$$M^{-1} = \frac{Adj.\ de\ M^t}{|M|} = \frac{1}{6} \cdot (2\ \ -\ 2\ \ -\ 2\ 5\ ).$$

$$A^2 = A \cdot A = (1\ 0\ \ -\ 1\ 1\ ) \cdot (1\ 0\ \ -\ 1\ 1\ ) = (1\ 0\ \ -\ 2\ 1\ ).$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = (1\ 0\ \ -\ 2\ 1\ ) \cdot (1\ 0\ \ -\ 1\ 1\ ) = (1\ 0\ \ -\ 3\ 1\ ).$$

....

$$A^7 = (1\ 0\ \ -\ 7\ 1\ ).$$

$$7A - A^7 = (7\ 0\ \ -\ 7\ 7\ ) - (1\ 0\ \ -\ 7\ 1\ ) = (6\ 0\ 0\ 6\ ) = 6I.$$

Sustituyendo los valores obtenidos en la expresión de X:

$$X = M^{-1} \cdot \left(7A - A^7\right) = \frac{1}{6} \cdot (2\ \ -\ 2\ \ -\ 2\ 5\ ) \cdot 6I = (2\ \ -\ 2\ \ -\ 2\ 5\ ).$$

$$\underline{X = (2\ \ -\ 2\ \ -\ 2\ 5\ )}.$$

****

2º) A, B y C son los puntos de corte del plano $\pi \equiv 4x + 2y + z - 4 = 0$ con los ejes coordenados. Encuentra el punto D de la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-3}{-1}$ tal que A, B, C y D son vértices de un paralelepípedo de volumen $6\ u^3$.

$Eje\ X \Rightarrow s_1 \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. $Eje\ Y \Rightarrow s_2 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. $Eje\ Z \Rightarrow s_3 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Corte con el eje X: $\pi \equiv 4x + 2y + z - 4 = 0$ $s_1 \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow A(1,\ 0,\ 0)$.

Corte con el eje Y: $\pi \equiv 4x + 2y + z - 4 = 0$ $s_2 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow B(0,\ 2,\ 0)$.

Corte con el eje Z: $\pi \equiv 4x + 2y + z - 4 = 0$ $s_3 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 4 \Rightarrow C(0,\ 0,\ 4)$.

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3 \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$.

El punto D tiene por expresión general: $D(1 + \lambda,\ 3,\ 3 - \lambda)$.

Los puntos A, B, C y D determinan los siguientes vectores:

$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(0,\ 2,\ 0) - (1,\ 0,\ 0)] = (-1,\ 2,\ 0)$.

$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(0,\ 0,\ 4) - (1,\ 0,\ 0)] = (-1,\ 0,\ 4)$.

$\overrightarrow{AD} = [D - A] = [(1 + \lambda,\ 3,\ 3 - \lambda) - (1,\ 0,\ 0)] = (\lambda,\ 3,\ 3 - \lambda)$.

Sabiendo que el volumen de un paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores que lo determinan:

$V_{ABCD} = \left\| \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ \lambda & 3 & 3 - \lambda \end{vmatrix} \right\| = 6;$ $|8\lambda + 12 + 2(3 - \lambda)| = 6;$

$|4\lambda + 6 + 3 - \lambda| = 3;$ $|3\lambda + 9| = 3 \Rightarrow |\lambda + 3| = 1 \Rightarrow \lambda + 3 = \pm 1 \Rightarrow$.

$\Rightarrow \lambda_1 = -4 \Rightarrow \underline{D_1(-3,\ 3,\ 7)}$; $\lambda_2 = -2 \Rightarrow \underline{D_2(-1,\ 3,\ 5)}$.

****

3º) Demuestra que existe $\alpha \in (0,\ 1)$ tal que $f'(\alpha) = 3$ siendo la función primitiva $f(x) = (x+1)^{(x+1)}$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

La función $f(x) = (x+1)^{(x+1)}$ es continua y derivable en $(0,\ 1)$.

$f(0) = (0+1)^{(0+1)} = 1$

$f(1) = (1+1)^{(1+1)} = 2^2 = 4.$

$L[f(x)] = L(x+1)^{(x+1)} = (x+1) \cdot L(x+1).$

Derivando:

$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \cdot L(x+1) + (x+1) \cdot \frac{1}{x+1} = 1 + L(x+1).$

$f'(x) = (x+1)^{(x+1)} \cdot [1 + L(x+1)].$

$f'(0) = (0+1)^{(0+1)} \cdot [1 + L(0+1)] = 1 \cdot 1 = 1.$

$f'(1) = (1+1)^{(1+1)} \cdot [1 + L(2+1)] = 4 \cdot (1 + L3) \cong 8,39.$

Por ser $f'(0) \neq f'(1)$ no es posible la aplicación del teorema de Rolle, pero si es posible la aplicación del teorema de los Valores Intermedios o propiedad de Darboux que dice: “si una función $f(x)$ es continua en un intervalo $[a,\ b]$ y un número k está comprendido entre los valores extremos de la función, o sea, $f(a) \leq k \leq f(b)$ o $f(a) \geq k \geq f(b)$, entonces existe un valor $c \in [a,\ b]$ tal que $f(c) = k$”.

Como es $f'(0) < 3 < f'(1) \Rightarrow \exists a \in (0,\ 1)\ tal\ que\ f'(a) = 3.$

$\underline{Lo\ anterior\ demuestra\ lo\ pedido.}$

****

4º) Dadas las funciones: $f(x) = \frac{\pi x}{2}$ y $g(x) = x^3 - 4x$, encuentra los tres puntos en que se cortan. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas curvas.

Los tres puntos de corte son $A(-2, 0)$, $O(0, 0)\ y\ B(2, 0)$.

Teniendo en cuenta que $f(-x) = -f(x)\ y\ g(-x) = -g(x)$, ambas funciones son simétricas con respecto al origen.

Considerando el valor $x = 1 \in (0, 2)$:

$f(1) = sen\ \frac{\pi}{2} = 1;\ \ g(1) = 1 - 4 = -3 \Rightarrow f(1) > g(1).$

De lo expresado anteriormente se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = 2\cdot\int_0^2 [f(x) - g(x)]\cdot dx = 2\cdot\int_0^2 \left[\frac{\pi x}{2} - \left(x^3 - 4x\right)\right]\cdot dx =$$

$$= 2\cdot\int_0^2 \frac{\pi x}{2}\cdot dx - 2\cdot\int_0^2 \left(x^3 - 4x\right)\cdot dx = 2M - 2N. \quad (*)$$

$$M = \int_0^2 \frac{\pi x}{2}\cdot dx \Rightarrow \{x = 2 \rightarrow t = \pi\ x = 0 \rightarrow t = 0\} \Rightarrow \int_0^\pi sen\ t\cdot\frac{2}{\pi}\cdot dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot[-\ cos\ t]_0^\pi = \frac{2}{\pi}\cdot[cos\ t]_\pi^0 = \frac{2}{\pi}\cdot(\cos cos\ 0 - \cos cos\ \pi) = \frac{2}{\pi}\cdot[1 - (-1)] = \frac{4}{\pi}.$$

$$N = \int_0^2 \left(x^3 - 4x\right)\cdot dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2}\right]_0^2 = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_0^2 = \left(\frac{2^4}{4} - 2\cdot 2^2\right) - 0 =$$

$$= 4 - 8 = -4.$$

Sustituyendo los valores obtenidos de M y N en la expresión (*):

$$S = 2M - 2N = 2\cdot\frac{4}{\pi} - 2\cdot(-4) = \frac{8}{\pi} + 8 = \frac{8+8\pi}{\pi} = \frac{8(1+\pi)}{\pi}.$$

$$\underline{S = \frac{8(1+\pi)}{\pi}\ u^2 \cong 10,55\ u^2.}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE NAVARRA

JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B).

OPCIÓN A

1º) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible: $\left\{ x + (a-1)y + z = -1 \quad (a-1)y + 2z = -2 \quad x + \left(a^2 - 5a + 5\right)z \right.$
.

$a)$

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$M = \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 1 & 0 & a^2-5a+5 \end{pmatrix};$
$M' = \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & a^2-5a+5 & -a+4 \end{pmatrix}.$

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$|M| = \begin{vmatrix} 1 & a-1 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 1 & 0 & a^2-5a+5 \end{vmatrix} = (a-1)\left(a^2-5a+5\right) + 2(a-1) -$

$= (a-1)\left(a^2-5a+5\right) + (a-1) = (a-1)\left(a^2-5a+6\right) =$

$= a^3 - 5a^2 + 6a - a^2 + 5a - 6 = a^3 - 6a^2 + 11a - 6 = 0 \Rightarrow \{Ruffini\} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 = 1,\ a_2 = 2;\ a_3 = 3.$

$\underline{Para \left\{ a \neq 1 \quad a \neq 2 \quad a \neq 3 \right\} \Rightarrow Ran\ M = Ran\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

$Para\ a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \left\{C_1, C_3, C_4\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 2 + 2 + 2 = 8 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$

$Para\ a = 2 \Rightarrow M' = (1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 2\ 1\ 0\ -1\quad -1\ -2\ 2\ ) \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \left\{C_1,\ C_2,\ C_4\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |1\ 1\ -1\ 0\ 1\ -2\ 1\ 0\ 2\ | = 2 - 2 + 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$

$\underline{Para\ \{a = 1\ a = 2\ \} \Rightarrow Ran\ M = 2;\ Ran\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

$Para\ a = 3 \Rightarrow M' = (1\ 2\ 1\ 0\ 2\ 2\ 1\ 0\ -1\quad -1\ -2\ 1\ ) \Rightarrow \left\{C_4 =- C_3\right\} \Rightarrow Rang\ M' = 2$

.

$\underline{Para\ a = 3 \Rightarrow Ran\ M = Ran\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

Se resuelve, en primer lugar, cuando el sistema es compatible determinado aplicando el método de Gauss:

$M' = \left(1\ a - 1\ 1\ 0\ a - 1\ 2\ 1\ 0\ a^2 - 5a + 5\quad -1\ -2\ -a + 4\right) \Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow F_1 -\right.$

$\Rightarrow \left(1\ 0\ -1\ 0\ a - 1\ 2\ 0\ 1 - a\ a^2 - 5a + 4\ \ 1\ -2\ -a + 5\right) \Rightarrow \left\{F_3 \rightarrow F_3 + F_2\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(1\ a - 1\ 1\ 0\ a - 1\ 2\ 0\ 0\ a^2 - 5a + 6\quad -1\ -2\ -a + 3\right) \Rightarrow z = \frac{-a+3}{a^2-5a+6} = \frac{-a}{(a-2)}$

.

$(a - 1)y + 2z =- 2 \Rightarrow y = \frac{-2-2z}{a-1} = \frac{-2+\frac{2}{a-2}}{a-1} = \frac{\frac{-2a+4+2}{a-2}}{a-1} = \frac{-2(a-3)}{(a-1)(a-2)}.$

$x - z = 1 \Rightarrow x = 1 + z = 1 + \frac{-1}{a-2} = \frac{a-2-1}{a-2} = \frac{a-3}{a-2}.$

$\underline{Solución: x = \frac{a-3}{a-2},\ \ y = \frac{-2(a-3)}{(a-1)(a-2)},\ \ z = \frac{-1}{a-2};\ \ \forall a \in R - \{1,\ 2\}.}$

Se resuelve ahora para $a = 3$ en cuyo caso el sistema es $\{x + 2y + z =- 1\ 2y + 2z =- 2\quad x - z = 1$, que es compatible indeterminado.

Para su resolución se elimina una de las ecuaciones, por ejemplo la primera, y se parametriza una de las incógnitas, por ejemplo $z = \lambda$, con lo que resulta:

$2y + 2\lambda =- 2\qquad x - \lambda = 1\ \} \Rightarrow x = 1 + \lambda;\ \ y =- 1 - \lambda.$

$\underline{Solución: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \forall \lambda \in R}.$

****

2º) Dadas las rectas $r\equiv\{2x - y - 2z + 1 = 0\ 3x - y - 4z + 6 = 0$, $s\equiv\frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{1}$ y el punto de expresión $P(1, -1, 0)$, halla la ecuación general de un plano π que sea paralelo a ambas rectas y tal que la distancia de P a π sea 2.

Un vector director de una recta dada por la intersección de dos planos es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan.

$r\equiv\{2x - y - 2z + 1 = 0\ 3x - y - 4z + 6 = 0 \Rightarrow \{\vec{n}_1 = (2, -1, -2)\ \vec{n}_2 = (3,$

$= 4i - 6j - 2k + 3k - 2i + 8j = 2i + 2j + k \Rightarrow \vec{v}_r = (2, 2, 1).$

Un vector director de $s\equiv\frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{1}$ es $\vec{v}_s = (1, 0, 1)$.

El vector normal del haz de planos paralelos β que contiene al plano π pedido es linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores directores de las dos rectas:

$\vec{n} = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = |i\ j\ k\ 2\ 2\ 1\ 1\ 0\ 1| = 2i + j - 2k - 2j = 2i - j - 2k = (2, -1, -2$

.

La expresión general del haz de planos β es: $\beta\equiv 2x - y - 2z + D = 0$.

La distancia de un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Aplicando la fórmula anterior al punto $P(1, -1, 0)$ y al plano β:

$d(P, \beta) = \frac{|2\cdot1-1\cdot(-1)-2\cdot0+D|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}} = 2;\ \frac{|2+1-0+D|}{\sqrt{4+1+4}} = 2;\ \frac{|3+D|}{\sqrt{9}} = 2;\ |3 + D| = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow\quad 3 + D = 6 \rightarrow D_1 = 3\ \ -3 - D = 6 \rightarrow D_2 = -9\ \}.$

Existen dos planos que cumplen la condición pedida; son los siguientes:

$\underline{\pi_1\equiv 2x - y - 2z + 3 = 0\ y\ \pi_1\equiv 2x - y - 2z - 9 = 0.}$

****

3º) Calcula los siguientes límites:

$a)\ \left(\sqrt{2x^2+3x+1}-\sqrt{2x^2-5x+7}\right).\qquad b)\ \left[\cos cos\,(\pi x)+2^x\right]^{\frac{1}{Lx}}.$

$a)$

$$\left(\sqrt{2x^2+3x+1}-\sqrt{2x^2-5x+7}\right)=\infty-\infty\Rightarrow Indet.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{2x^2+3x+1}-\sqrt{2x^2-5x+7}\right)\cdot\left(\sqrt{2x^2+3x+1}+\sqrt{2x^2-5x+7}\right)}{\sqrt{2x^2+3x+1}+\sqrt{2x^2-5x+7}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{2x^2+3x+1}\right)^2-\left(\sqrt{2x^2-5x+7}\right)^2}{\sqrt{2x^2+3x+1}+\sqrt{2x^2-5x+7}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3x+1-\left(2x^2-5x+7\right)}{\sqrt{2x^2+3x+1}+\sqrt{2x^2-5x+7}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3x+1-2x^2+5x-7}{\sqrt{2x^2+3x+1}+\sqrt{2x^2-5x+7}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8x-6}{\sqrt{2x^2+3x+1}+\sqrt{2x^2-5x+7}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{8x-6}{x}}{\frac{\sqrt{2x^2+3x+1}}{x}+\frac{\sqrt{2x^2-5x+7}}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8-\frac{6}{x}}{\sqrt{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{5-\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}}}=\frac{8-\frac{1}{\infty}}{\sqrt{2+\frac{3}{\infty}+\frac{1}{\infty}}+\sqrt{5-\frac{5}{\infty}+\frac{7}{\infty}}}=$$

$$=\frac{8-0}{\sqrt{2+0+0}+\sqrt{2-0+0}}=\frac{8}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{8}{2\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=\underline{2\sqrt{2}}.$$

$b)$

$$\left[\cos cos\,(\pi x)+2^x\right]^{\frac{1}{Lx}}=\left(\cos cos\,\pi+2^1\right)^{\frac{1}{L1}}=(-1+2)^{\frac{1}{0}}=1^{\infty}\Rightarrow Indet.\ nº\ e\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=\left[\cos cos\,(\pi x)+2^x\right]^{\frac{1}{Lx}}\Rightarrow LA=\frac{1}{Lx}L\left[\cos cos\,(\pi x)+2^x\right]=\frac{L\left[coscos\,(\pi x)+2^x\right]}{Lx}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=\left[\cos cos\,(\pi x)+2^x\right]^{\frac{1}{Lx}}\Rightarrow LA=\frac{L\left[coscos\,(\pi x)+2^x\right]}{Lx}\Rightarrow A=e^{\frac{L\left[coscos\,(\pi x)+2^x\right]}{Lx}}=e^{\frac{L(-1+2)}{L1}}=$$

$$=e^{\frac{L1}{L1}}=e^{\frac{0}{0}\to Ind.}\Rightarrow e^{\frac{\frac{-\pi\cdot sen\,(\pi x)+2^x\cdot L2}{coscos\,(\pi x)+2^x}}{\frac{1}{x}}}=e^{\frac{\frac{-0+L4}{-1+2}}{\frac{1}{1}}}=e^{L4}.$$

$$\underline{\left[\cos cos\,(\pi x)+2^x\right]^{\frac{1}{Lx}}=e^{L4}}.$$

****

4º) Demuestra que la función $f(x)= sen\ \frac{\pi x}{2}\cdot\sqrt{x^2 + x}$ tiene un máximo relativo en el intervalo $(1,\ 3)$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

La condición necesaria para que una función tenga un máximo relativo es que se anule su primera derivada.

$$f'(x)=\frac{\pi}{2}\cdot cos\ \frac{\pi x}{2}\cdot\sqrt{x^2 + x} + sen\ \frac{\pi x}{2}\cdot\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}.$$

$$f'(1)=\frac{\pi}{2}\cdot cos\ \frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{1^2 + 1} + sen\ \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2\cdot1+1}{2\sqrt{1^2+1}}=\frac{\pi}{2}\cdot0\cdot\sqrt{2} + 1\cdot\frac{3}{2\sqrt{2}}=\frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

$$f'(3)=\frac{\pi}{2}\cdot cos\ \frac{3\pi}{2}\cdot\sqrt{3^2 + 3} + sen\ \frac{3\pi}{2}\cdot\frac{2\cdot3+1}{2\sqrt{3^2+3}}=\frac{\pi}{2}\cdot0\cdot\sqrt{12} + (-\ 1)\cdot\frac{7}{2\sqrt{12}}=$$

$$=-\ \frac{7}{4\sqrt{3}}.$$

Las funciones $f(x)$ y $f'(x)$ son continuas y derivables en el intervalo $(1,\ 3)$.

Por ser $f(1)\neq f(3)$ no es posible la aplicación del teorema de Rolle, pero si es posible la aplicación del teorema de los Valores Intermedios o propiedad de Darboux que dice: “si una función $f(x)$ es continua en un intervalo $[a,\ b]$ y un número k está comprendido entre los valores extremos de la función, o sea, $f(a)\leq k\leq f(b)$ o $f(a)\geq k\geq f(b)$, entonces existe un valor $c\in[a,\ b]$ tal que $f(c)=\ k$”.

Como es $f'(1)>\ 0\ >f'(3)$ y la función $f(x)$ es creciente en $x=1$ y decreciente en $x=\ 3$, necesariamente tiene al menos un máximo en $(1,\ 3)$.

$\underline{Lo\ anterior\ demuestra\ lo\ pedido.}$

****

OPCIÓN B

1º) Calcula los valores del parámetro t para los que la siguiente matriz no es regular: $A = (-\ t\, t\ +\ 1\ \ -\ t\ +\ 1\, 1\, 0\ \ -\ t\ +\ 1\, 2\ \ -\ t\ -\ 1\, 1\,)$.

Una matriz es regular o invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$|A| = |-\ t\, t\ +\ 1\ \ -\ t\ +\ 1\, 1\, 0\ \ -\ t\ +\ 1\, 2\ \ -\ t\ -\ 1\, 1\,| = (-\ t\ -\ 1)(-\ t\ +\ 1) + 2(t\ +$

$+\ t(-\ t\ -\ 1)(-\ t\ +\ 1) - (t\ +\ 1) =$

$= (-\ t\ +\ 1)[(-\ t\ -\ 1) + 2(t\ +\ 1) + t(-\ t\ -\ 1)] - (t\ +\ 1) =$

$= (-\ t\ +\ 1)\left(-\ t\ -\ 1\ +\ 2t\ +\ 2 - t^2 - t\right) - t\ -\ 1\ = (-\ t\ +\ 1)\left(1\ - t^2\right) - t\ -\ 1\ =$

$=-\ t\ + t^3\ +\ 1 - t^2 - t\ -\ 1\ = t^3 - t^2 - 2t\ =\ t\left(t^2 - t\ -\ 2\right) =\ 0 \Rightarrow t_1\ =\ 0;$

$t^2 - t\ -\ 2\ =\ 0;\ \ t\ =\ \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{1\pm3}{2} \Rightarrow t_2 =-\ 1,\ t_3\ =\ 2.$

$\underline{La\ matriz\ A\ no\ es\ regular\ para\ t\ =-\ 1,\ t\ =\ 0\ y\ t\ =\ 2}.$

****

2º) Encuentra la ecuación continua de la recta r que pasa por el punto $P(-4, 2, 0)$ y corta a las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} 2x + 3y + z - 1 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$ y $r_2 \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+2}{3}$.

La expresión de r_1 por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$r_1 \equiv \begin{cases} 2x + 3y + z - 1 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \lambda \Rightarrow x = 3 - 2\lambda;\ z = 1 -$

$= 1 - 6 + 4\lambda - 3\lambda = -5 + \lambda = z \Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -5 + \lambda \end{cases}$.

Un punto y un vector director de r_1 son $Q(3, 0, -5)$ y $\vec{v_1} = (2, -1, -1)$.

Los puntos P y Q determinan el vector:

$\vec{PQ} = [Q - P] = [(3, 0, -5) - (-4, 2, 0)] = (7, -2, -5)$.

El plano π_1 que contiene a la recta r_1 y al punto P tiene la siguiente expresión general:

$\pi_1\left(P; \vec{v_1}, \vec{PQ}\right) \equiv \begin{vmatrix} x+4 & y-2 & z \\ 2 & -1 & -1 \\ 7 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 0;$

$5(x + 4) - 7(y - 2) - 4z + 7z - 2(x + 4) + 10(y - 2) = 0;$

$3(x + 4) + 3(y - 2) + 3z = 0;\ x + 4 + y - 2 + z = 0 \Rightarrow \pi_1 \equiv x + y + z + 2 = 0$.

Un punto y un vector director de r_2 son: $R(-1, -3, -2)$ y $\vec{v_2} = (-2, 3, 3)$.

Los puntos P y R determinan el vector:

$\vec{PR} = [R - P] = [(-1, -3, -2) - (-4, 2, 0)] = (3, -5, -2)$.

El plano π_2 que contiene a la recta r_2 y al punto P tiene la siguiente expresión general:

$$\pi_2\left(P;\ \vec{v_2},\ \vec{PR}\right) \equiv |x\ +\ 4\,y\ -\ 2\,z\ \ -\ 2\,3\,3\,3\ \ -\ 5\ \ -\ 2\,| = 0;$$

$$-\ 6(x\ +\ 4) + 9(y\ -\ 2) +\ 10z\ -\ 9z\ +\ 15(x\ +\ 4) -\ 4(y\ -\ 2) =\ 0;$$

$9(x\ +\ 4) +\ 5(y\ -\ 2) +\ z\ =\ 0;\ \ 9x\ +\ 36\ +\ 5y\ -\ 10\ +\ z\ =\ 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \pi_2 \equiv 9x\ +\ 5y\ +\ z\ +\ 26\ =\ 0.$

La recta r pedida es la intersección de los planos π_1 y π_2:

$$\underline{r \equiv \{x\ +\ y\ +\ z\ +\ 2\ =\ 0 \qquad 9x\ +\ 5y\ +\ z\ +\ 26\ =\ 0}\ .$$

La expresión de r por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$x\ +\ y\ +\ z\ +\ 2\ =\ 0\ 9x\ +\ 5y\ +\ z\ +\ 26\ =\ 0\,\} \Rightarrow x\ =\ \lambda \Rightarrow \qquad y\ +\ z\ =-\ 2\ -\ \lambda\ 5y$$

$$-\ y\ -\ z\ =\ 2\ +\ \lambda\ 5y\ +\ z\ =-\ 26\ -\ 9\lambda\,\} \Rightarrow 4y\ =-\ 24\ -\ 8\lambda \Rightarrow y\ =-\ 6\ -\ 2\lambda$$

.

$$z\ =-\ 2\ -\ x\ -\ z\ =-\ 2\ -\ \lambda\ +\ 6\ +\ 2\lambda\ =\ 4\ +\ \lambda \Rightarrow r \equiv \{x\ =\ \lambda \qquad y\ =-\ 6\ -\ 2\lambda\ z\ =$$

.

$$\underline{r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+6}{-2} = \frac{z-4}{1}}.$$

****

3º) Encuentra los extremos absolutos de la función $f(x) = \left(x^2 - 3\right)\cdot e^{-x+2}$ en el intervalo $[-2, 4]$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

$$f(x) = \left(x^2 - 3\right)\cdot e^{-x+2}.$$

La condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo es que se anule su primera derivada.,

$$f'(x) = 2x\cdot e^{-x+2} + \left(x^2 - 3\right)\cdot(-1)\cdot e^{-x+2} = e^{-x+2}\cdot\left(2x - x^2 + 3\right).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{-x+2}\cdot\left(2x - x^2 + 3\right) = 0;\ \ x^2 - 2x - 3 = 0;\ \ x = \frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} =$$

$$= \frac{2\pm\sqrt{16}}{2} = \frac{2\pm4}{2} = 1\pm2 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 3.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera derivada se trate de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = -e^{-x+2} + \left(-x^2 + 2x + 3\right) + e^{-x+2}\cdot(-2x + 2) =$$

$$= e^{-x+2}\cdot\left(-2x + 2 + x^2 - 2x - 3\right) = e^{-x+2}\cdot\left(x^2 - 4x - 1\right).$$

$$f''(-1) = e^3\cdot(1 + 4 - 1) = 4e^3 > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ x = -1.$$

$$f(-1) = (1 - 3)\cdot e^3 = -2e^3 \cong -40,17 \Rightarrow Mínimo: P\left(-1,\ -2e^3\right).$$

$$f''(3) = e^{-1}\cdot(9 - 12 - 1) = -\frac{4}{e} < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = 3.$$

$$f(3) = (9 - 3)\cdot e^{-1} = \frac{6}{e} \cong 2,21 \Rightarrow Máximo: Q\left(3,\ \frac{6}{e}\right).$$

Teniendo en cuenta que $f(x)$ es continua en su dominio y que:

$$f(-2) = (4 - 3)\cdot e^4 = e^4 \cong 54,60.$$

$$f(4) = (16 - 3)\cdot e^{-2} = \frac{13}{e^2} = 1,76.$$

$$\underline{Mínimo\ absoluto:\ P\left(-1,\ -2e^3\right)\ y\ máximo\ absoluto: B\left(-2,\ e^4\right).}$$

****

4º) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de las siguientes funciones: $f(x) = \cos cos\ \frac{\pi x}{4}$ y $g(x) = \frac{x^2}{4} - 1$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

Las abscisas de los puntos de corte de las dos funciones son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \cos cos\ \frac{\pi x}{4} = \frac{x^2}{4} - 1; \Rightarrow \cos cos\ \frac{\pi x}{4} = \left(\frac{x}{2} - 1\right)\left(\frac{x}{2} + 1\right).$$

Teniendo en cuenta que para $x = \pm 2 \Rightarrow \cos cos\ \frac{\pi x}{4} = 0$, las soluciones de la ecuación son $x_1 =- 2,\ x_2 = 2$.

Los puntos de corte de las dos curvas son $A(-2,\ 0)\ y\ B(2,\ 0)$.

En el intervalo $(-2,\ 2)$ las ordenadas de la función $f(x) = \cos cos\ \frac{\pi x}{4}$ son mayores que las correspondientes ordenadas de la función $g(x) = \frac{x^2}{4} - 1$, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_{-2}^{2} [f(x) - g(x)] \cdot dx = \int_{-2}^{2} \left[\left(\cos cos\ \frac{\pi x}{4}\right) - \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)\right] \cdot dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(\cos cos\ \frac{\pi x}{4} - \frac{x^2}{4} + 1\right) dx = \int_{-2}^{2} \cos cos\ \frac{\pi x}{4} \cdot dx + \int_{-2}^{2} \left(-\frac{x^2}{4} + 1\right) dx = M + N$$

. (*)

$$M = \int_{-2}^{2} \cos cos\ \frac{\pi x}{4} \cdot dx \Rightarrow \left\{ x = 2 \rightarrow t = \frac{\pi}{2}\ x =- 2 \rightarrow t = \frac{-\pi}{2} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos cos\ t \cdot \frac{4}{\pi} \cdot dt = \frac{4}{\pi} \cdot [sen\ t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi} \cdot \left[sen\ \frac{\pi}{2} - sen\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{4}{\pi} \cdot [1 - (-1)] = \frac{8}{\pi}.$$

$$N = \int_{-2}^{2} \left(-\frac{x^2}{4} + 1\right) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{12} + x\right]_{-2}^{2} = \left(-\frac{2^3}{12} + 2\right) - \left[-\frac{(-2)^3}{12} + (-2)\right] =$$

$$=-\frac{8}{12}+2-\frac{8}{12}+2=4-\frac{16}{12}=4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}.$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de M y N:

$$S=M+N=\frac{8}{\pi}+\frac{8}{3}=\frac{24+8\pi}{3\pi}=\frac{8(\pi+3)}{3\pi}.$$

$$\underline{S=\frac{8(\pi+3)}{3\pi}\,u^2\cong 5,21\,u^2.}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

JULIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se valorará el planteamiento correcto, tango global como de cada una de las partes, si las hubiere. No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc., siempre que no sean de tipo conceptual. Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc., que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución se valorarán positivamente. Se valorará la buena presentación del examen.

OPCIÓN A

1º) Discute el sistema $\{ax + 2y + 6z = 0 \quad 2x + ay + 4z = 2 \quad 2x + ay + 6z = a - 2$ según los valores del parámetro a. En caso de existir, encontrar la solución para el caso de $a = 0$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = (a\ 2\ 6\ 2\ a\ 4\ 2\ a\ 6\ )$ y $M' = (a\ 2\ 6\ 2\ a\ 4\ 2\ a\ 6\quad 0\ 2\ a - 2\ )$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$|M| = |a\ 2\ 6\ 2\ a\ 4\ 2\ a\ 6\ | = 6a^2 + 12a + 16 - 12a - 4a^2 - 24 = 2a^2 - 8 = 0$

$a^2 - 4 = 0;\ a^2 = 4 \Rightarrow a_1 = -2,\ a_2 = 2.$

$\underline{Para\ \{a \neq -2\ a \neq 2\ \} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

$Para\ a = -2 \Rightarrow M' = (-\ 2\ 2\ 6\ 2\ \ -2\ 4\ 2\ \ -2\ 6\quad 0\ 2\ \ -4\ ) \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow (C_1,\ C_3$

$\Rightarrow |-\ 2\ 6\ 0\ 2\ 4\ 2\ 2\ 6\ \ -4\ | = 32 + 24 + 24 + 48 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$

$\underline{Para\ = -2 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatile.}$

$Para\ a = 2 \Rightarrow M' = (2\ 2\ 6\ 2\ 2\ 4\ 2\ 2\ 6 \quad 0\ 2\ 0\ ) \Rightarrow \left\{F_1 = F_3\right\} \Rightarrow Rang\ M' = 2$

.

$\underline{Para\ a = 2 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < nº\ incog. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

Para $a = 0$ el sistema resulta: $2y + 6z = 0 \quad 2x + 4z = 2\ 2x + 6z = -\ 2\ \}$, que es compatible determinado, equivalente al sistema $y + 3z = 0 \quad x + 2z = 1\ x + 3z = -\ 1\ \}$.

Restando a la tercera ecuación la segunda resulta $z = -\ 2;\ x = 5;\ y = 6$.

$\underline{Solución: x = 5,\ y = 6,\ z = -\ 2}$.

****

2º) Dada la recta que pasa por los puntos $A(0,\ 2,\ 3)$ y $B(-\ 1,\ 1,\ 1)$, encontrar un punto P de dicha recta tal que la distancia de P al punto $M(1,\ 0,\ 1)$ sea la misma que la distancia de P al punto $N(0,\ 4,\ 2)$.

$\overrightarrow{BA} = [A\ -\ B] = [(0,\ 2,\ 3) - (-\ 1,\ 1,\ 1)] = (1,\ 1,\ 2)$.

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$.

Un punto genérico de r es $P(\lambda,\ 2 + \lambda,\ 3 + 2\lambda)$.

$\overline{MP} = \overline{NP} \Rightarrow \sqrt{(\lambda - 1)^2 + (2 + \lambda - 0)^2 + (3 + 2\lambda - 1)^2} =$

$= \sqrt{(\lambda - 0)^2 + (2 + \lambda - 4)^2 + (3 + 2\lambda - 2)^2}$;

$(\lambda - 1)^2 + (2 + \lambda)^2 + (2 + 2\lambda)^2 = (\lambda)^2 + (-\ 2 + \lambda)^2 + (1 + 2\lambda)^2$;

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 + 4 + 4\lambda + \lambda^2 + 4 + 8\lambda + 4\lambda^2 = \lambda^2 + 4 - 4\lambda + \lambda^2 + 1 + 4\lambda + 4\lambda^2$;

$6\lambda^2 + 10\lambda + 9 = 6\lambda^2 + 5;\ \ 10\lambda + 9 = 5;\ \ 10\lambda = -\ 4;\ \ 5\lambda = -\ 2 \Rightarrow \lambda = -\ \frac{2}{5}$.

$\begin{cases} x = -\ \frac{2}{5} \\ y = 2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5} \\ z = 3 - \frac{4}{5} = \frac{11}{5} \end{cases} \Rightarrow \underline{P\left(-\ \frac{2}{5},\ \frac{8}{5},\ \frac{11}{5}\right)}$

.

****

3º) Sabemos que la recta $y = 2x - 10$ es tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx - 1$ en el punto $P(1, \; -8)$.

a) Calcular los valores de A y B.

b) Calcular los puntos de corte de la función $f(x)$ con la recta $y = -15x - 1$.

----

a)

Por contener $f(x)$ al punto $P(1, \; -8) \Rightarrow f(1) = -8$:

$f(1) = 1^3 + A \cdot 1^2 + B \cdot 1 - 1 = -8; \;\; A + B = -8.$ (1)

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual al valor de su primera derivada en ese punto.

La recta $y = 2x - 10$ tiene de pendiente $m = 2 \Rightarrow f'(1) = 2$:

$f'(x) = 3x^2 + 2Ax + B.$

$f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 2A \cdot 1 + B = 2; \;\; 2A + B = -1.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$\left. \begin{array}{l} A + B = -8 \\ 2A + B = -1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} -A - B = 8 \\ 2A + B = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{A = 7, \; B = -}$

.

$$\underline{f(x) = x^3 + 7x^2 - 15x - 1}.$$

b)

$f(x) = y \Rightarrow x^3 + 7x^2 - 15x - 1 = -15x - 1; \;\; x^3 + 7x^2 = 0;$

$x^2(x + 7) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0, \; x_3 = -7.$

$y_{(0)} = -1 \Rightarrow P(0, \; -1).$

$y_{(-7)} = -15 \cdot (-7) - 1 = 105 - 1 = 104 \Rightarrow Q(-7, \; 104).$

$$\underline{Los \; puntos \; de \; corte \; son \; P(0, \; -1) \; y \; Q(-7, \; 104)}.$$

****

4º) Resolver la integral: $I = \int (x + 5) \cdot e^{3x} \cdot dx$.

$$I = \int (x + 5) \cdot e^{3x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ x + 5 = u \rightarrow du = dx \; e^{3x} \cdot dx = dv \rightarrow v = \frac{1}{3} \cdot e^{3x} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x + 5) \cdot \frac{1}{3} \cdot e^{3x} - \int \frac{1}{3} \cdot e^{3x} \cdot dx = (x + 5) \cdot \frac{1}{3} \cdot e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} \cdot dx = (x + 5) \cdot \frac{1}{3} \cdot e^{3x} - \frac{1}{9} \cdot$$

$$= \frac{1}{9} \cdot e^{3x} \cdot (3x + 15 - 1) + C = \frac{1}{9} \cdot e^{3x} \cdot (3x + 14) + C.$$

$$\underline{I = \int (x + 5) \cdot e^{3x} \cdot dx = \frac{1}{9} \cdot e^{3x} \cdot (3x + 14) + C.}$$

****

5º) La suma de 45 números seguidos nos da 1.890. ¿Cuál es el menor y el mayor de los números que componen esa suma?

Se trata de la suma de los 45 términos de una progresión aritmética cuya diferencia es uno.

Sabiendo que $S_n = \frac{a_n + a_1}{2} \cdot n$ y que $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$:

$$S_n = \frac{a_n + a_1}{2} \cdot n \Rightarrow \frac{2 \cdot s_n}{n} = a_n + a_1;\;\; a_n = \frac{2 \cdot s_n}{n} - a_1.$$

$$a_n = \frac{2 \cdot s_n}{n} - a_1\; a_n = a_1 + (n - 1)d \} \Rightarrow \frac{2 \cdot s_n}{n} - a_1 = a_1 + (n - 1) \cdot d;\;\; 2a_1 = \frac{2 \cdot s_n}{n}$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{\frac{2 \cdot s_n}{n} - (n-1)d}{2} = \frac{\frac{2 \cdot 1.890}{45} - (45-1) \cdot 1}{2} = \frac{84-44}{2} = \frac{40}{2} = 20.$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d = 20 + 44 \cdot 1 = 64.$$

$\underline{El\ menor\ de\ los\ números\ es\ 20\ y\ el\ mayor,\ 64.}$

****

OPCIÓN B

1º) a) Calcula para que valor, o valores, de x admite inversa la siguiente matriz $A = (1\ 1\ x\ x\ 0\ -\ 1\ -\ 6\ -\ 1\ 0\ )$.

b) En caso de existir, calcula la inversa de A para $x =- 3$.

----

a)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$|A| = |1\ 1\ x\ x\ 0\ -\ 1\ -\ 6\ -\ 1\ 0\ | =- x^2 + 6 - 1 = 0;\ x^2 = 5 \Rightarrow x_1 =- \sqrt{5},\ x_2 = \sqrt{5}$

.

$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall x \in R - \{- \sqrt{5},\ \sqrt{5}\}}.$

b)

Para $x =- 3$ es $A = (1\ 1\ -\ 3\ -\ 3\ 0\ -\ 1\ -\ 6\ -\ 1\ 0\ )$.

La inversa de A se obtiene por la adjunta de la traspuesta: $A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|}$.

$|A| = |1\ 1\ -\ 3\ -\ 3\ 0\ -\ 1\ -\ 6\ -\ 1\ 0\ | =- 9 + 6 - 1 =- 4.\quad A^t = (1\ -\ 3\ -\ 6\ 1$

.

$Adj.\ de\ A^t = (|0\ -\ 1\ -\ 1\ 0\ |\ -|1\ -\ 1\ -\ 3\ 0\ |\ |1\ 0\ -\ 3\ -\ 1\ |\ -|-\ 3\ -\ 6\ -\ 1\ 0$

.

$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{(-1\ 3\ -1\ 6\ -18\ 10\ 3\ -5\ 3\ )}{-4} =- \frac{1}{4} \cdot (-\ 1\ 3\ -\ 1\ 6\ -\ 18\ 10\ 3\ -\ 5\ 3\ )$

.

$\underline{A^{-1} =- \frac{1}{4} \cdot (-\ 1\ 3\ -\ 1\ 6\ -\ 18\ 10\ 3\ -\ 5\ 3\ ).}$

****

2º) a) Encontrar la ecuación de la recta que es paralela a los planos de ecuaciones: $\pi_1 \equiv x - 3y + z = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x - y + 3z - 5 = 0$ y que pasa por el punto $P(2,\ 6,\ 5)$.

b) Encontrar la distancia del primer plano a la recta obtenida.

----

a)

Por ser la recta paralela a los planos π_1 y π_2 su vector director tiene que ser perpendicular a los vectores normales de los planos, es decir: tiene que ser linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{n}_1 = (1,\ -3,\ 1) \\ \vec{n}_2 = (2,\ -1,\ 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -9i +$$

$$= -8i - j + 5k = (-8,\ -1,\ 5) \Rightarrow \vec{v}_r = (8,\ 1,\ -5).$$

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es: $\underline{r \equiv \begin{cases} x = 2 + 8\lambda \\ y = 6 + \lambda \\ z = 5 - 5\lambda \end{cases}}$.

b)

La distancia del plano π_1 a la recta r es la misma que la distancia del plano a un punto cualquiera de la recta:

La distancia de un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Aplicando la fórmula al plano $\pi_1 \equiv x - 3y + z = 0$ y al punto $P(2,\ 6,\ 5)$:

$$d(P,\ \pi_1) = \frac{|1 \cdot 2 - 3 \cdot 6 + 1 \cdot 5|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{|2 - 18 + 5|}{\sqrt{1 + 9 + 1}} = \frac{11}{\sqrt{11}} = \sqrt{11}.$$

$$\underline{d(r,\ \pi_1) = \sqrt{11}\ unidades.}$$

****

3º) Dada la función $y = f(x) = \frac{x^3+4}{x^2}$:

a) Razonar la existencia de máximos y mínimos de la función. Si existen, hallarlos.

b) ¿Para qué intervalos es creciente la función?

c) Hallar todas las asíntotas de la función.

----

a)

Para que una función racional tenga un extremo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$y' = f'(x) = \frac{3x^2 \cdot x^2 - (x^3+4) \cdot 2x}{x^4} = \frac{3x^3 - 2 \cdot (x^3+4)}{x^3} = \frac{3x^3 - 2x^3 - 8}{x^3} = \frac{x^3-8}{x^3}.$$

$$y' = f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^3-8}{x^3} = 0; \;\; x^3 - 8 = 0 \Rightarrow x = 2.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera derivada se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$y'' = f''(x) = \frac{3x^2 \cdot x^3 - (x^3-8) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{3x^3 - 3 \cdot (x^3-8)}{x^4} = \frac{3x^3 - 3x^3 + 24}{x^3} = \frac{24}{x^3}.$$

$$f''(2) = \frac{24}{2^3} = 3 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 2.$$

$$f(2) = \frac{2^3+4}{2^2} = \frac{8+4}{4} = \frac{12}{4} = 3 \Rightarrow \underline{Mínimo: P(2,\ 3)}.$$

b)

Una función es creciente cuando su primera derivada es positiva.

$$f'(x) = \frac{x^3-8}{x^3} = 1 - \frac{8}{x^3} > 0 \Rightarrow \frac{8}{x^3} < 1 \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 2 \end{cases}.$$

$$\underline{La\ función\ y = f(x)\ es\ creciente\ para\ x \in (-\infty,\ 0) \cup (2,\ +\infty)}.$$

c)

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = f(x) = \frac{x^3+4}{x^2} = \infty \Rightarrow \underline{\textit{No tiene asíntotas horizontales}}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$x = 0 \Rightarrow \underline{La\ recta\ x = 0\ (eje\ de\ ordenadas)\ es\ asíntota\ vertical.}$$

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{x^3+4}{x^2}}{x} = \frac{x^3+4}{x^3} = 1.$$

$$n = [f(x) - mx] = \left(\frac{x^3+4}{x^2} - x\right) = \frac{x^3+4-x^3}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x^2} = 0.$$

$$\underline{La\ recta\ y = x\ es\ asíntota\ oblicua.}$$

****

4º) Calcular el área del recinto limitado por las parábolas $y =- x^2 - 10x$, $y = (x + 4)^2$, realizando un dibujo del mismo.

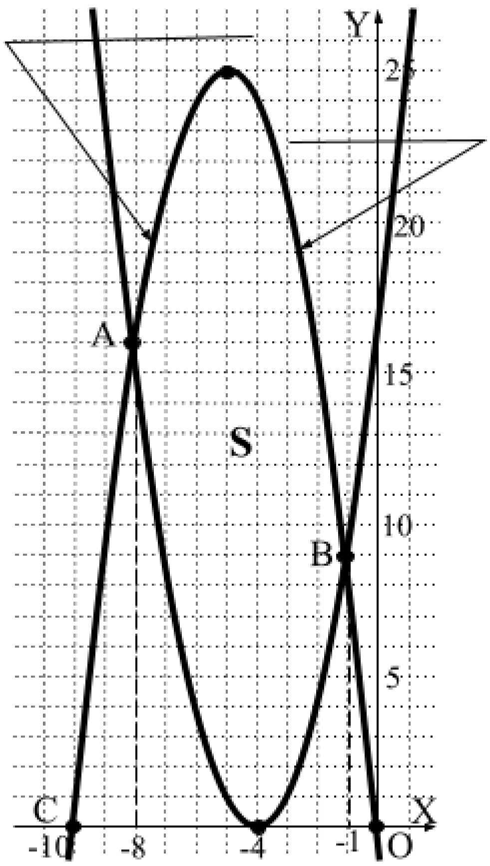
Los puntos de intersección de las parábolas son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$- x^2 - 10x = (x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16 = 0;\ \ 2x^2 + 18x + 16 = 0;$$

$x^2 + 9x + 8 = 0;\ \ x = \frac{-9\pm\sqrt{81-32}}{2} = \frac{-9\pm\sqrt{49}}{2} = \frac{-9\pm 7}{2} \Rightarrow \{x_1 =- 8 \rightarrow A(- 8, 16)\ x_2 =-$

.

La parábola $y =- x^2 - 10x$ es cóncava (∩) y su máximo es el siguiente:



$y' =- 2x - 10 = 0;\ \ x + 5 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x =- 5.$

$y_{(-5)} =- (- 5)^2 - 10\cdot(- 5) =$

$=- 25 + 50 = 25 \Rightarrow V_1(- 5,\ 25).$

La parábola $y = (x + 4)^2$ es convexa (∪) y su mínimo es el siguiente:

$y' = 2(x + 4) = 0;\ \ x + 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x =- 4.$

$y_{(-4)} = (- 4 + 4)^2 = 0 \Rightarrow V_2(- 4,\ 0)$.

La parábola $y = (x + 4)^2$ corta al eje de abscisas en los puntos $C(- 10,\ 0)$ y $O(0,\ 0)$.

La situación se expresa, aproximadamente, en la figura adjunta.

Como se observa en la figura, en el intervalo $(- 8,\ - 1)$ las ordenadas de la parábola $y =- x^2 - 10x$ son mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola $y = (x + 4)^2$, por lo cual la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_{-8}^{-1} \left[\left(-x^2 - 10x \right) - (x+4)^2 \right] \cdot dx =$$

$$= \int_{-8}^{-1} \left[-x^2 - 10x - \left(x^2 + 8x + 16 \right) \right] \cdot dx = \int_{-8}^{-1} \left(-2x^2 - 18x - 16 \right) \cdot dx =$$

$$= \int_{-1}^{-8} \left(2x^2 + 18x + 16 \right) \cdot dx = \left[\frac{2x^3}{3} + \frac{18x^2}{2} + 16x \right]_{-1}^{-8} = \left[\frac{2x^3}{3} + 9x^2 + 16x \right]_{-1}^{-8} =$$

$$= \left[\frac{2 \cdot (-8)^3}{3} + 9 \cdot (-8)^2 + 16 \cdot (-8) \right] - \left[\frac{2 \cdot (-1)^3}{3} + 9 \cdot (-1)^2 + 16 \cdot (-1) \right] =$$

$$= \left(-\frac{1.024}{3} + 576 - 128 \right) - \left(-\frac{2}{3} + 9 - 16 \right) = \left(-\frac{1.024}{3} + 448 \right) - \left(-\frac{2}{3} - 7 \right) =$$

$$= -\frac{1.024}{3} + 448 + \frac{2}{3} + 7 = 455 - \frac{1.022}{3} = \frac{1.365 - 1.024}{3} = \frac{341}{3}.$$

$$\underline{S = \frac{341}{3}\, u^2 \cong 113,67\, u^2.}$$

****

5º) Dado el número $N = 2^{2017} + 5^{2017} + 6^{2017}$ sea $Z = N^{2017}$. Contestar razonadamente a la siguiente pregunta: ¿es Z múltiplo de 10?

$$2^0 = 1;\ \ 2^1 = 2;\ \ 2^2 = 4;\ \ 2^3 = 8;\ \ 2^4 = 16;\ \ 2^5 = 32,\ \ 2^6 = 64,\ \cdots\cdots$$

Nótese que las sucesivas potencias de 2 (excluyendo 2^0) terminan, sucesivamente, en 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, ⋯⋯

En general, 2^n termina en:
$\{6 \rightarrow Si\ el\ resto\ n: 4\ es\ 0\ \ 2 \rightarrow Si\ el\ resto\ n: 4\ es\ 1\ \ 4 \rightarrow Si\ el\ resto\ n: 4\ es\ 2\ \ 8 \rightarrow Si\ el\ resto\ n: 4$
.

El resto de 2.017 entre 4 es 1, por lo cual $2^{2.011}$ termina en 2.

Todas las potencias de 5 terminan en 5, por tanto $5^{2.017}$ termina en 5.

Todas las potencias de 6 terminan en 6, por tanto $6^{2.017}$ termina en 6.

$N = 2^{2017} + 5^{2017} + 6^{2017}$.

El número *N* termina en 3 por ser $2 + 5 + 6 = 13$.

Las sucesivas potencia de 3 son las siguientes:

$$3^0 = 1,\ \ 3^1 = 3;\ \ 3^2 = 9;\ \ 3^3 = 27;\ \ 3^4 = 81;\ \ 3^5 = 243,\ \cdots\cdots$$

Nótese que las sucesivas potencias de 3 terminan en 1, 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, ⋯⋯

En general 3^n termina en el resto de la división de n entre 4.

En general, 3^n termina en:
$\{1 \rightarrow Si\ el\ resto\ n: 4\ es\ 0\ \ 3 \rightarrow Si\ el\ resto\ n: 4\ es\ 1\ \ 9 \rightarrow Si\ el\ resto\ n: 4\ es\ 2\ \ 7 \rightarrow Si\ el\ resto\ n: 4$
.

En resumen: ninguna potencia de un número que termine en tres puede terminar en cero y, como consecuencia de todo lo anterior se deduce que:

$$\underline{Z = N^{2017}\ no\ es\ múltiplo\ de\ 10}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se valorará el planteamiento correcto, tango global como de cada una de las partes, si las hubiere. No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc., siempre que no sean de tipo conceptual. Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc., que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución se valorarán positivamente. Se valorará la buena presentación del examen.

OPCIÓN A

1º) Discute el sistema $\{2x + y - z = 1 \quad x + my + z = 2 \quad 3x + y - mz = 3$ según los valores del parámetro m. (NO es necesario resolverlo).

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A = (2\ 1\ \ -1\ 1\ m\ 1\ 3\ 1\ \ -m\ )$ y $A' = (2\ 1\ \ -1\ 1\ m\ 1\ 3\ 1\ \ -m\quad 1\ 2\ 3\ )$

.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro m es el siguiente:

$|A| = |2\ 1\ \ -1\ 1\ m\ 1\ 3\ 1\ \ -m\ | = -2m^2 - 1 + 3 + 3m - 2 + m = 0;$

$-2m^2 + 4m = 0;\ m^2 - 2m = 0;\ m(m-2) = 0 \Rightarrow m_1 = 0,\ m_2 = 2.$

$\underline{Para\ \{m \neq 0\ m \neq 2\ \} \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

$Para\ m = 0 \Rightarrow A' = (2\ 1\ \ -1\ 1\ 0\ 1\ 3\ 1\ 0\quad 1\ 2\ 3\ ) \Rightarrow \{C_1 + C_3 = C_4\} \Rightarrow Rang\ A' = 2$

.

$\underline{Para\ m = 0 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

$Para\ m = 2 \Rightarrow A' = (2\ 1\ \ -1\ 1\ 2\ 1\ 3\ 1\ \ -2\quad 1\ 2\ 3\ ) \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \{C_1, C_2,\ C_4\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |2\ 1\ 1\ 1\ 2\ 2\ 3\ 1\ 3\,| = 12 + 1 + 6 - 6 - 4 - 3 = 6 \neq 0 \Rightarrow Rang\ A^{'} = 3.$

$\underline{Para\ m = 2 \Rightarrow Rang\ A = 2;\ Rang\ A^{'} = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

****

2º) Dado el punto $M(1,\ -3,\ 7)$, obtener su simétrico respecto a la recta que pasa por los puntos $A(1,\ -3,\ 4)$ y $B(0,\ -4,\ 1)$.

$\overrightarrow{BA} = [A - B] = [(1,\ -3,\ 4) - (0,\ -4,\ 1)] = (1,\ 1,\ 3).$

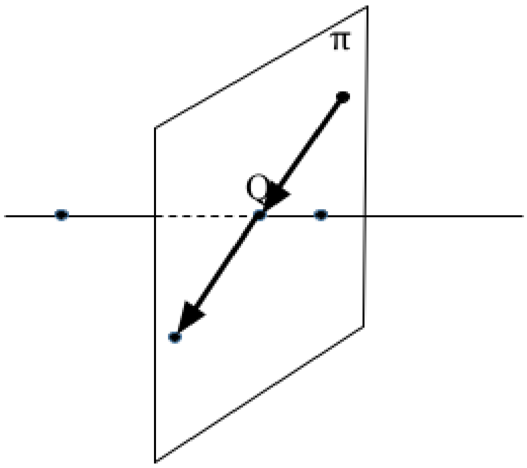
Un vector director de la recta r que pasa por A y B es $\overrightarrow{v_r} = (1,\ 1,\ 3).$

El haz de planos perpendiculares a r es $\beta \equiv x + y + 3z + D = 0.$

El plano $\pi \in \beta$ que contiene al punto $M(1,\ -3,\ 7)$ es el siguiente:

$\beta \equiv x + y + 3z + D = 0 \qquad M(1,\ -3,\ 7) \} \Rightarrow 1 - 3 + 3 \cdot 7 + D = 0;$

$D = -19 \Rightarrow \pi \equiv x + y + 3z - 19 = 0.$



La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es
$r \equiv \{x = \lambda \qquad y = -4 + \lambda\, z = 1 + 3\lambda$.

El punto Q intersección de la recta r con el plano π es el siguiente:

$\pi \equiv x + y + 3z - 19 = 0 \qquad r \equiv \{x = \lambda \qquad y = -4 + \lambda\, z = 1 + 3\lambda\ \} \Rightarrow \lambda + (-$

$\lambda - 4 + \lambda + 3 + 9\lambda - 19 = 0;\ \ 11\lambda - 20 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{20}{11}.$

$x = \frac{20}{11}\ y = -4 + \frac{20}{11} = -\frac{24}{11} \qquad z = 1 + \frac{60}{11} = \frac{71}{11}\ \} \Rightarrow Q\left(\frac{20}{11}, -\frac{24}{11},\ \frac{7}{1}\right.$

.

Para que M' sea el simétrico de M con respecto a r tiene que cumplirse que:

$$\vec{MQ} = \vec{QM'} \Rightarrow \left[\left(\frac{20}{11}, -\ \frac{24}{11},\ \frac{71}{11}\right) - (1,\ \ -\ 3,\ 7)\right] = \left[(x,\ y,\ z) - \left(\frac{20}{11}, -\ \frac{24}{11},\ \frac{71}{11}\right)\right];$$

$$\left(\frac{9}{11},\ \frac{9}{11},\ \ -\frac{6}{11}\right) = \left(x - \frac{20}{11},\ y + \frac{24}{11},\ z - \frac{71}{11}\right) \Rightarrow \left\{x - \frac{20}{11} = \frac{9}{11} \rightarrow x = \frac{29}{11} \quad y + \frac{24}{11} =\right.$$

$$\underline{\Rightarrow M'\left(\frac{29}{11},\ \ -\frac{15}{11},\ \frac{65}{11}\right)}.$$

****

3º) Dada la función $f(x) = x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + 7$:

a) Calcular A, B y C sabiendo que su recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$ es horizontal, que además la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 2$ y que corta al eje OX en $x = 1$.

b) Para los valores obtenidos calcule los máximos y los mínimos de la función.

----

a)

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual al valor de su primera derivada en ese punto:

$$f'(x) = 4x^3 + 3Ax^2 + 2Bx + C.$$

$$m = 0 = f'(0) \Rightarrow \underline{C = 0}.$$

Por tener un extremo relativo para $x = 2 \Rightarrow f'(2) = 0$:

$$f'(2) = 4\cdot 2^3 + 3A\cdot 2^2 + 2B\cdot 2 + 0 = 0;\ \ 32 + 12A + 4B = 0;$$

$8 + 3A + B = 0;\ \ 3A + B = -8.$ (1)

Por cortar al eje OX en $x = 1 \Rightarrow f(1) = 0$:

$1^4 + A\cdot 1^3 + B\cdot 1^2 + 0\cdot 1 + 7 = 0;\ \ A + B = -8.$ (2)

Resolviendo el sistema que forman las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{l} 3A + B = -8 \\ A + B = -8 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 3A + B = -8 \\ -A - B = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow 2A = 0 \Rightarrow \underline{A = 0}; \ \ \underline{B = -8}.$$

$$\underline{f(x) = x^4 - 8x^2 + 7}.$$

b)

$$f'(x) = 4x^3 - 16x.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 16x = 0;\ \ 4x\left(x^2 - 4\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -2,\ x_3 = 2.$$

$$f''(x) = 12x^2 - 16.$$

$f''(0) = 12 \cdot 0^2 - 16 = -16 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 0.$

$f(0) = 7 \Rightarrow \underline{Máximo: P(0,\ 7)}.$

$f''(-2) = 12 \cdot (-2)^2 - 16 = 32 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = -2.$

$f(-2) = (-2)^4 - 8(-2)^2 + 7 = 16 - 32 + 7 = -9 \Rightarrow \underline{Mínimo: Q(-2,\ -9)}$

.

$f''(2) = 12 \cdot 2^2 - 16 = 32 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 2.$

$f(2) = 2^4 - 8 \cdot 2^2 + 7 = 16 - 32 + 7 = -9 \Rightarrow \underline{Mínimo: R(2,\ -9)}.$

****

4º) La curva $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2$ divide al rectángulo $A(0,\ 0)$, $B(0,\ 2), C(4,\ 2)$, $D(4,\ 0)$ en dos recintos.

a) Dibuja la gráfica de la función y el rectángulo ABCD.

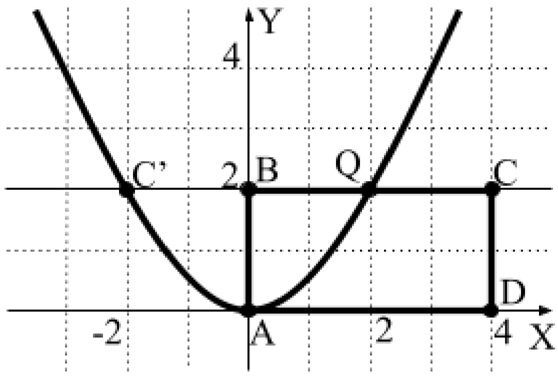
b) Calcula el área de cada uno de los dos recintos.

----

a)

La parábola $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2$, por ser simétrica con respecto al eje OY pasa por el punto $C(4,\ 2)$ y su simétrico $C'(-\ 4,\ 2)$, y tiene su vértice en el origen.

La recta $y = 2$ es la que pasa por los puntos $B(0,\ 2)$ y $C(4,\ 2)$.



La representación gráfica de la situación se expresa en la figura adjunta.

b)

$$S_1 = \int_0^2 [2 - f(x)] \cdot dx = \int_0^2 \left(2 - \frac{1}{2}x^2\right) \cdot dx = \left[2x - \frac{x^3}{6}\right]_0^2 =$$

$$= \left(2 \cdot 2 - \frac{2^3}{6}\right) - 0 = 4 - \frac{8}{6} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}.$$

$$\underline{S_1 = \frac{8}{3}\ u^2 \cong 2,57\ u^2.}$$

$$S_2 = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^4 2dx = \int_0^2 \frac{1}{2}x^2\ dx + \int_2^4 2dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 dx + 2\int_2^4 dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 + 2 \cdot [x]_2^4 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2^3}{6} - 0\right) + 2 \cdot (4 - 2) = \frac{4}{6} + 4 = 4 + \frac{4}{3} = \frac{16}{3}.$$

$$\underline{S_2 = \frac{16}{3}\ u^2 \cong 5,33\ u^2.}$$

****

5º) Calcular la potencia A^{2017} de la matriz $A = (0\ 1\ \ -\ 1\ 0\ )$.

$A^2 = A \cdot A = (0\ 1\ \ -\ 1\ 0\ ) \cdot (0\ 1\ \ -\ 1\ 0\ ) = (-\ 1\ 0\ 0\ \ -\ 1\ ) = -\ (1\ 0\ 0\ 1\ ) = -\ I$
.

$A^3 = A^2 \cdot A = -\ I \cdot A = -\ A.$

$A^4 = A^3 \cdot A = -\ A \cdot A = -\ A^2 = -\ (-\ I) = I.$

En general A elevado a n es igual que A elevado al resto que resulta de dividir n entre 4.

$\frac{2017}{4} = \frac{2016+1}{4} = 504 + \frac{1}{4} \Rightarrow Resto = 1.$

$$\underline{A^{0172} = A^1 = A = (0\ 1\ \ -\ 1\ 0\ )}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Dada la matriz $A = (m \;\; -2\,0\,0 \;\; -2\,0\,0\,1\,m)$:

a) ¿Para qué valores de m la matriz A posee inversa? Estudiar el rango de la matriz en función del parámetro m.

b) Hallar el valor de m para que se cumpla la igualdad $A^2 = 4\cdot(1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1)$.

----

a)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$|A| = |m \;\; -2\,0\,0 \;\; -2\,0\,0\,1\,m| = -2m^2 = 0 \Rightarrow m = 0.$

$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall m \in R - \{0\}}.$

$Para\ m = 0 \Rightarrow A = (0 \;\; -2\,0\,0 \;\; -2\,0\,0\,1\,0) \Rightarrow Rang\ A = 1.$

$\underline{Para\ m \neq 0 \Rightarrow Rang\ A = 2;\ para\ m = 0 \Rightarrow Rang\ A = 1}.$

b)

$A^2 = A\cdot A = (m \;\; -2\,0\,0 \;\; -2\,0\,0\,1\,m)\cdot(m \;\; -2\,0\,0 \;\; -2\,0\,0\,1\,m) = \left(m^2 \;\; -2m + 4\,0\right.$

.

$A^2 = 4\cdot(1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1) \Rightarrow \left(m^2 \;\; -2m + 4\,0\,0\,4\,0\,0 \;\; -2 + m\,m^2\right) = (4\,0\,0\,0$

.

****

2º) Calcula la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a la recta de ecuación continua $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-1}{3}$ y que pasa por el punto $A(14,\ 3,\ 3)$.

Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{v_r} = (2,\ -2,\ 3)$.

El haz de planos β perpendiculares a r es $\beta \equiv 2x - 2y + 3z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz β, el plano π que contiene a $A(14,\ 3,\ 3)$ es el que satisface su ecuación:

$\left.\begin{array}{l} \beta \equiv 2x - 2y + 3z + D = 0 \\ A(14,\ 3,\ 3) \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot 14 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + D =$

$28 - 6 + 9 + D = 0;\ \ 31 + D = 0 \Rightarrow D = -31 \Rightarrow \pi \equiv 2x - 2y + 3z - 31 = 0$.

La recta r dada por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3 - 2\lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$.

El punto B, intersección de la recta r y el plano π es el siguiente:

$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 2x - 2y + 3z - 31 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3 - 2\lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$4\lambda - 6 + 4\lambda + 3 + 9\lambda - 31 = 0;\ \ 17\lambda - 34 = 0;\ \ \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$.

$B \Rightarrow \left.\begin{cases} x = 2 \cdot 2 = 4 \\ y = 3 - 2 \cdot 2 = -1 \\ z = 1 + 3 \cdot 2 = 7 \end{cases}\right\} \Rightarrow B(4,\ -1,\ 7)$.

Los puntos A y B determinan el vector $\overrightarrow{BA} = [A - B] = (10,\ 4,\ -4)$.

La recta s pedida dada, por ejemplo, por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$\underline{s \equiv \frac{x-4}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-7}{-2}}.$$

****

3º) Dada la función $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$:

$a)$ ¿Cuál es el dominio de la función? ¿Para qué intervalos es creciente?

$b)$ Razonar si tiene máximos y mínimos. En caso afirmativo, hallarlos.

$c)$ Calcula la recta tangente a dicha curva en el punto cuya abscisa es $x = 0$.

$a)$

El dominio de una función racional es R, excepto los valores que anulan el denominador.

$$1 - x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1.$$

$$\underline{D(f) \Rightarrow R - \{-1,\ 1\}}.$$

Una función es creciente o decreciente en un punto cuando el valor de su primera derivada en ese punto es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{1\cdot\left(1-x^2\right)+x\cdot 2x}{\left(1-x^2\right)^2} = \frac{1-x^2+2x^2}{\left(1-x^2\right)^2} = \frac{1+x^2}{\left(1-x^2\right)^2} > 0,\ \forall x \in D(f).$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ monótona\ creciente\ en\ su\ dominio}.$$

$b)$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto.

Por ser $f'(x) \neq 0,\ \forall x \in R$.

$$\underline{La\ función\ f(x)\ no\ tiene\ máximos\ ni\ mínimos}.$$

$c)$

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto, por lo cual:

$$m = f'(0) = \frac{1-0}{(1-0)^2} = 1.$$

El punto de tangencia es $O(0,\ 1)$.

La ecuación de la recta punto-pendiente es $y - y_0 = m\left(x - x_0\right)$:

$y - 0 = 1 \cdot (x - 0) = x.$

$$\underline{Recta\ tangente: t \equiv x - y = 0}.$$

****

4º) Resolver la integral: $I = \int \frac{x^2+5}{x^3-2x^2+x} \cdot dx$.

$$I = \int \frac{x^2+5}{x^3-2x^2+x} \cdot dx = \int \frac{x^2+5}{x\left(x^2-2x+1\right)} \cdot dx = \int \frac{x^2+5}{x(x-1)^2} \cdot dx \quad (*) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+5}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx}{x(x-1)^2} = \frac{A\left(x^2-2x+1\right)+Bx^2-Bx+Cx}{x(x-1)^2} =$$

$$= \frac{Ax^2-2Ax+A+Bx^2-Bx+Cx}{x(x-1)^2} = \frac{(A+B)x^2+(-2A-B+C)x+A}{x(x-1)^2} \Rightarrow \quad A + B = 1\ 2A + B - C = 0$$

$2 \cdot 5 - 4 - C = 0;\ \ 10 - 4 - C = 0;\ \ 6 - C = 0 \Rightarrow C = 6.$

Sustituyendo los valores hallados en la expresión (*):

$$I = \int \frac{x^2+5}{x^3-2x^2+x} \cdot dx = \int \left[\frac{5}{x} + \frac{-4}{x-1} + \frac{6}{(x-1)^2}\right] \cdot dx = 5Lx - 4L|x - 1| + M.$$

(**)

$$M = \int \frac{6}{(x-1)^2} \cdot dx \Rightarrow \{x - 1 = t\ dx = dt\} \Rightarrow 6 \cdot \int \frac{1}{t^2} \cdot dt = 6 \cdot \int t^{-2} \cdot dt =$$

$$= 6 \cdot \frac{t^{-1}}{-1} + K = -\frac{6}{t} + K = -\frac{6}{x-1} + K = M.$$

Sustituyendo el valor de M en (**):

$$I = \int \frac{x^2+5}{x^3-2x^2+x} \cdot dx = 5Lx - 4L|x - 1| - \frac{6}{x-1} + K.$$

$$\underline{I = \int \frac{x^2+5}{x^3-2x^2+x} \cdot dx = \frac{5}{4} L\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{6}{x-1} + K.}$$

****

5º) Un autobús transporta 60 viajeros de tres tipos. Hay viajeros que pagan el billete entero, que vale 1,2 euros. Otro grupo de viajeros abona el 80 % y un tercer grupo abona el 50 %. La recaudación del autobús fue de 46,56 euros. Calcular el número de viajeros de cada clase sabiendo que el número de viajeros con mayor descuento es el doble que el número del resto de viajeros.

Siendo x los viajeros que pagan el billete entero; y los viajeros que pagan el 80 % del billete y z los viajeros que pagan el 50 % del billete.

Cada uno de los tipos paga: $x \rightarrow 1,2\ euros$; $y \rightarrow 0,96\ euros$; $z \rightarrow 0,6\ euros$.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$x + y + z = 60 \quad 1,2 \cdot x + 0,96y + 0,6z = 46,56 \quad z =$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 60 \\ 30x + 24y + 15z = 1.164 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{array} \right\}.$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 60 & 1 & 1 \\ 1.164 & 24 & 15 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 30 & 24 & 15 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-1.440+2.328-1.800+1.164}{-24+60+30-48-30+30} = \frac{3.492-3.240}{90-72} = \frac{252}{18} = 14.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 60 & 1 \\ 30 & 1.164 & 15 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{18} = \frac{-1.164+1.800-2.328+1.800}{18} = \frac{3.600-3.492}{18} = \frac{108}{18} = 6.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 60 \\ 30 & 24 & 1.164 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{18} = \frac{3.600+2.328-2.880-2.328}{18} = \frac{5.928-5.208}{18} = \frac{720}{18} = 40.$$

$\underline{Pagan\ el\ billete\ entero\ 14\ viajeros;\ el\ 80\ \%,\ 6\ viajeros\ y\ el\ 50\ \%,\ 40\ viajeros}$.

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

JULIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se elegirá solamente UNA de los dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de la opción. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberían estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

1º) Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 tales que $A^2 =- A - I$ y $2B^3 = B$, siendo I la matriz unidad. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

$a)$ La justificación de que la matriz A es invertible.

$b)$ Los valores posibles del determinante de B.

$c)$ El valor del determinante de la matriz B^2, sabiendo que la matriz B tiene inversa.

$a)$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$A^2 =- A - I;\ \ A^2 + A =- I;\ \ A\cdot(A + I) =- I \Rightarrow |A\cdot(A + I)| = |- I|;$$

$|A||A + I| =- 1 \Rightarrow |A| \neq 0,\ |A + I| \neq 0$, lo cual prueba que:

$$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ como\ queríamos\ justificar}.$$

$b)$

Una solución trivial es $|B| = 0$ y otras soluciones son las siguientes:

$$2B^3 = B;\ \ 2B^2\cdot B = B \Rightarrow 2B^2 = I; 2\cdot B\cdot B = I \Rightarrow |2\cdot B\cdot B| = |I|;$$

$|2B||B| = 1;\ \ 2^3 \cdot |B||B| = 1;\ \ (|B|)^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow |B| = \pm\sqrt{\frac{1}{8}} = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}.$

$$\underline{Soluciones:\ |B| = 0;\ |B| = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}.}$$

$c)$

$$2B^3 = B;\ \ 2B^2 \cdot B = B;\ \ 2B^2 \cdot B \cdot B^{-1} = B \cdot B^{-1};\ \ 2B^2 \cdot I = I;$$

$2 \cdot B \cdot B = I \Rightarrow |2B||B| = 1;\ \ 2^3 \cdot |B||B| = 1;\ \ \left|B^2\right| = \frac{1}{8}.$

$$\underline{\left|B^2\right| = \frac{1}{8}.}$$

****

2º) Se dan la recta $r \equiv \begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ x + 3y - z = 1 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y + mz = n$. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) Los valores de m y n para los que la recta r y el plano π se corten en un punto.

b) Los valores de m y n para los que la recta r y el plano π no se cortan.

c) Los valores de m y n para los que la recta r está contenida en el plano π.

----

a)

La recta r y el plano π se corten en un punto cuando el sistema que forman es compatible determinado.

La recta r y el plano π determinan el sistema $\begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ x + 3y - z = 1 \\ 2x + y + mz = n \end{cases}$.

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es compatible determinado cuando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son iguales e igual al número de incógnitas, es decir, tres.

Para que el rango de ambas matrices sea tres es suficiente que el rango de la matriz de coeficientes sea tres, o sea, que su determinante sea distinto de cero.

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix}$.

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & m \end{vmatrix} = 3m - 2 + 4 + 12 + 1 + 2m = 5m + 1$

$m + 3 = 0 \Rightarrow m = -3$.

<u>*La recta r y el plano* π *se cortan en un punto* $\forall m \in R - \{-3\}$ *y* $n \in R$.</u>

b)

La recta r y el plano π no se cortan cuando son paralelos sin ser coincidentes, o sea, cuando el vector normal del plano y el vector director de la recta son perpendiculares y el plano no contiene ningún punto de r.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero.

Para determinar un punto y un vector de la recta r se expresa mediante unas ecuaciones paramétricas:

$r \equiv \begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ x + 3y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow y = \lambda \Rightarrow \begin{cases} x - 2z = 1 + 2\lambda \\ x - z = 1 - 3\lambda \end{cases}$

$\Rightarrow z = -5\lambda;\ x = 1 + 2\lambda - 10\lambda = 1 - 8\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 - 8\lambda \\ y = \lambda \\ z = -5\lambda \end{cases}$

.

Un punto y un vector director de r son $P(1,\ 0,\ 0)$ y $\overrightarrow{v_r} = (8,\ -1,\ 5)$.

Un vector normal del plano $\pi \equiv 2x + y + mz = n$ es $\overrightarrow{n} = (2,\ 1,\ m)$.

$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \Rightarrow (8,\ -1,\ 5) \cdot (2,\ 1,\ m) = 0;\ 16 - 1 + 5m = 0;\ \ 15 + 5m = 0;$

$3 + m = 0 \Rightarrow m = -3.$

$\pi \notin P \Rightarrow \pi \equiv 2x + y - 3z = n \qquad\qquad P(1,\ 0,\ 0)\ \} \Rightarrow 2 + 0 - 0 \neq n \Rightarrow n \neq 2.$

$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ no\ se\ cortan\ para\ m = -3\ y\ n \neq 2.}$

$c)$

La recta r está contenida en el plano π cuando tienen infinitos puntos en común, o sea, cuando el sistema que forman es compatible indeterminado.

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema es compatible indeterminado cuando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son iguales y menores que el número de incógnitas, es decir, menor que tres.

Un menor de la matriz de coeficientes es $|1\ 3\ 2\ 1| \neq 0 \Rightarrow Rang\ A = 2.$

$A' = (1\ \ -2\ \ -2\ 1\ 3\ \ -1\ 2\ 1\ \ -3\ \ \ 1\ 1\ n) \Rightarrow Rang\ A' = 2 \Rightarrow \{F_1 + F_2 = F_3\} \Rightarrow n$

.

$\underline{La\ recta\ r\ está\ contenida\ en\ el\ plano\ \pi\ para\ m = -3\ y\ n = 2.}$

****

3º) Se consideran las curvas $y = x^3$, $y = ax$ y la función $f(x) = x^3 - ax$, siendo a un parámetro real y $a > 0$. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) Los puntos de corte de la curva $y = f(x)$ con los ejes de coordenadas y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f.

b) La gráfica de la función f cuando $a = 9$.

c) El valor del parámetro a, el área de la región acotada del primer cuadrante encerrada entre las curvas $y = x^3$ e $y = ax$, cuando $a > 1$.

d) El valor del parámetro a para el que el área obtenida en el apartado c) coincide con el área de la región acotada comprendida entre la curva $y = x^3$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

----

a)

Corte con el eje Y: $f(x) = x^3 - ax \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \underline{O(0,\ 0)}$.

Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - ax = 0;\ x\left(x^2 - a\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = -\sqrt{a},\ x_3 = \sqrt{a} \Rightarrow \underline{O(0,\ 0)},\ \underline{P\left(-\sqrt{a},\ 0\right)}$ y $\underline{Q\left(\sqrt{a},\ 0\right)}$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 3x^2 - a = 0;\ x^2 = \frac{a}{3} \Rightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{3a}}{3},\ x_2 = \frac{\sqrt{3a}}{3}.$$

Las raíces de la derivada dividen el dominio de la función, que es R, en los tres siguientes intervalos: $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3a}}{3}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3a}}{3},\ \frac{\sqrt{3a}}{3}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{3a}}{3},\ +\infty\right)$ que son, alternativamente, crecientes o decrecientes.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 0 \in \left(-\frac{\sqrt{3a}}{3},\ \frac{\sqrt{3a}}{3}\right)$ es $f'(0) = -a < 0$.

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{f(x)\ creciente: f'(x) > 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3a}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3a}}{3},\ +\infty\right)}.$$

$$f(x)\ decreciente: f'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon \left(-\frac{\sqrt{3a}}{3},\ \frac{\sqrt{3a}}{3}\right).$$

b)

Cuando $a = 9$ la función es $f(x) = x^3 - 9x$.

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes: $O(0,\ 0)$, $P(-3,\ 0)$ y $Q(3,\ 0)$.

Los puntos máximo y mínimo son los siguientes:

$$f'(x) = 3x^2 - 9 = 0;\ \ x^2 = 3 \Rightarrow$$

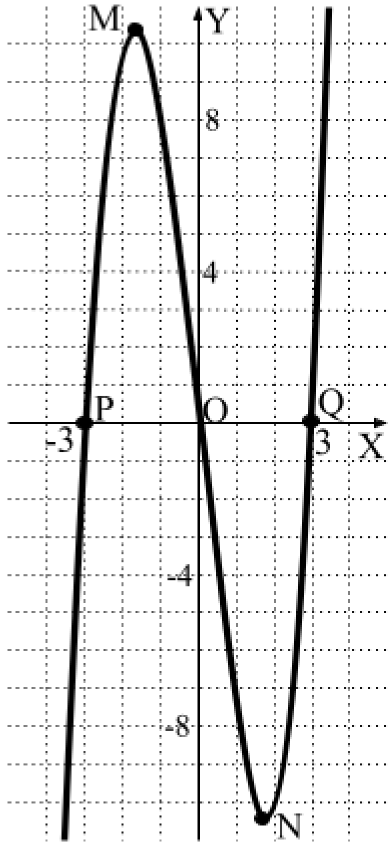
$$\Rightarrow x_1 = -\sqrt{3},\ x_2 = \sqrt{3}.$$

Teniendo en cuenta la simetría con respecto al origen de la función por ser $f(-x) = -f(x)$:

$$f\left(-\sqrt{3}\right) = -3\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \cong 10,4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Máx \Rightarrow M\left(-\sqrt{3},\ 6\sqrt{3}\right).$$

Por simetría: $Mín. \Rightarrow N\left(\sqrt{3},\ -6\sqrt{3}\right)$.



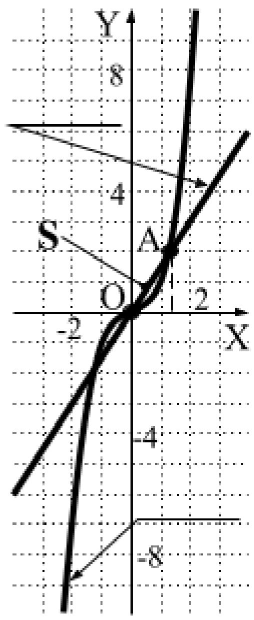
La representación gráfica de la función, aproximada, aparece en la figura adjunta.

c)

La abscisa del punto de corte de la curva $y = x^3$ con la recta $y = ax$, cuando $a > 1$, es la siguiente:

$$x^3 = ax;\ \ x^2 = a \Rightarrow x = +\sqrt{a}.$$

En el intervalo $\left(0,\ \sqrt{a}\right)$ las ordenadas de la recta son mayores que las correspondientes ordenadas de la función, por lo cual el área pedida es la siguiente:



$$S = \int_0^{\sqrt{a}} \left[ax - x^3\right] \cdot dx = \left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{\sqrt{a}} =$$

$$= \left[\frac{a \cdot \left(\sqrt{a}\right)^2}{2} - \frac{\left(\sqrt{a}\right)^4}{4} \right] - 0 = \frac{a \cdot a}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{2a^2 - a^2}{4} = \frac{a^2}{4}.$$

$$\underline{S = \frac{a^2}{4} u^2.}$$

$d)$

El área de la región acotada comprendida entre la curva $y = x^3$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$ es la siguiente:

$$S = \int_0^2 x^3 \cdot dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \frac{2^4}{4} - 0 = 4.$$

$$\frac{a^2}{4} = 4; \;\; a^2 = 16 \Rightarrow a > 0 \Rightarrow \underline{a = 4}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Se consideran las matrices $A = (0\ 0\ -\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ )$ e $I = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ )$. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) La justificación de que A tiene matriz inversa y el cálculo de dicha inversa A^{-1}.

b) La justificación de que $A^4 = I$.

c) El cálculo de las matrices A^7, A^{30} y A^{100}.

----

a)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$|A| = |0\ 0\ -\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ | = 1 \neq 0 \Rightarrow \underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible,\ c.\ q.\ j.}$

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow (0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ ) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{F_3 \rightarrow -F_3\} \Rightarrow (0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ -\ 1\ 0\ 0\ ) \Rightarrow \underline{A^{-1} = (0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ -\ 1\ 0\ 0\ )}.$

$\Rightarrow M^{-1} = (2\ 0\ -\ 1\ -\ 4\ 1\ 2\ -\ 1\ 0\ 1\ ).$

b)

$A^2 = A \cdot A = (0\ 0\ -\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ ) \cdot (0\ 0\ -\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ ) = (-\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ -$

.

$A^3 = A^2 \cdot A = (-\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ -\ 1\ ) \cdot (0\ 0\ -\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ ) = (0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ -\ 1\ 0$

.

$A^4 = A^3 \cdot A = (0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ -\ 1\ 0\ 0\ ) \cdot (0\ 0\ -\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ ) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) =$

.

$\underline{Queda\ justificado\ que\ A^4 = I}.$

c)

$A^7 = A^4 \cdot A^3 = I \cdot A^3 \Rightarrow \underline{A^7 = (0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ -\ 1\ 0\ 0\ )}.$

$A^{30} = \left(A^4\right)^7 \cdot A^2 = I^7 \cdot A^2 = A^2 \Rightarrow \underline{A^{30} = (-\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ -\ 1\ )}.$

$$A^{100} = \left(A^{4}\right)^{25} = I^{25} = I \Rightarrow \underline{A^{100} = I}.$$

****

2º) Se dan la recta $r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{y}{a} = \frac{z-1}{-1}$ y el plano $\pi \equiv 2x - y + bz = 0$, siendo a y b dos parámetros reales. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) El punto de intersección de la recta r y el plano π cuando $a = -b = 1$.

b) La distancia entre la recta r y el plano π cuando $a = b = 4$.

c) La posición relativa de la recta r y del plano π en función de los valores de los parámetros a y b.

----

a)

Para $a = -b = 1 \Rightarrow r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$ y $\pi \equiv 2x - y - z = 0$.

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \{x = 1 + 4\lambda \; y = \lambda \quad z = 1 - \lambda$.

$\pi \equiv 2x - y - z = 0 \quad r \equiv \{x = 1 + 4\lambda \; y = \lambda \quad z = 1 - \lambda \; \} \Rightarrow 2(1 + 4\lambda) -$

$2 + 8\lambda - \lambda - 1 + \lambda = 0; \;\; 8\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{8}$.

$\{x = 1 - 4 \cdot \frac{1}{8} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \; y = -\frac{1}{8} \qquad z = 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8} \}$

.

b)

Para $a = b = 4 \Rightarrow r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{-1}$ y $\pi \equiv 2x - y + 4z = 0$.

Un punto y un vector director de r son $A(1, 0, 1)$ y $\overrightarrow{v_r} = (4, 4, -1)$.

Un vector normal del plano π es $\overrightarrow{n} = (2, -1, 4)$.

Como es lógico, la recta r es paralela al plano (en cualquier otro caso la distancia sería cero), para lo cual es necesario que el vector director de la recta sea perpendicular al vector normal del plano, o sea, que su producto escalar tiene que ser cero, como se comprueba a continuación:

$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{n} = (4, 4, -1) \cdot (2, -1, 4) = 8 - 4 - 4 = 0 \Rightarrow \underline{Paralelos, \; c.q.c.}$

La distancia de la recta r al plano π es la misma que la de cualquier punto de r al plano π.

La distancia de un punto $P_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d\left(P_0, \pi\right) = \frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Aplicando la fórmula al punto $A(1,\ 0,\ 1)$ y al plano $\pi \equiv 2x - y + 4z = 0$:

$$d(P, \pi) = d(r,\ \pi) = \frac{|2\cdot1-1\cdot0+4\cdot1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+4^2}} = \frac{|2-0+4|}{\sqrt{4+1+16}} = \frac{6}{\sqrt{21}} = \frac{6\sqrt{21}}{21} = \underline{\frac{2\sqrt{21}}{7}\ unidades.}$$

$c)$

La expresión de r por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$r\equiv\frac{x-1}{4} = \frac{y}{a} = \frac{z-1}{-1};\ \ r\equiv\{ax - a = 4y \qquad - x + 1 = 4z - 4 \Rightarrow r\equiv\{ax - 4y = a\ x$

.

La recta r y el plano π determinan el sistema
$\{ax - 4y = a \qquad x + 4z = 5 \qquad 2x - y + bz = 0$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$M = (a\ \ - 4\ 0\ 1\ 0\ 4\ 2\ \ - 1\ b\ )$ y $M^{'} = (a\ \ - 4\ 0\ 1\ 0\ 4\ 2\ \ - 1\ b \quad a\ 5\ 0\ )$.

Según sean los rangos de M y $M^{'}$ pueden presentarse los siguientes casos:

$1. - \ Rang\ M = Rang\ M^{'} = 2 \Rightarrow$ La recta está contenida en el plano.

$2. - \ Rang\ M = 2;\ Rang\ M^{'} = 3 \Rightarrow$ La recta es paralela al plano.

$3. - \ Rang\ M = Rang\ M^{'} = 3 \Rightarrow$ La recta es secante al plano.

$Rang\ M\ y\ M' \Rightarrow (a\ \ - 4\ 0\ 1\ 0\ 4\ 2\ \ - 1\ b \quad a\ 5\ 0\ ) \Rightarrow \{Rotando\ filas\} \Rightarrow (1\ 0\ 4\ 2\ \ -$

$\Rightarrow \left\{F_2 \to F_2 - 2F_1\ F_3 \to F_3 - aF_1\right\} \Rightarrow (1\ 0\ 4\ 0\ \ - 1\ b - 8\ 0\ \ - 4\ - 4a \quad 5\ - 10\ -$

$\Rightarrow \left\{F_2 \leftrightarrow F_3\right\} \Rightarrow (1\ 0\ 4\ 0\ 1\ a\ 0\ \ - 1\ b - 8 \quad 5\ a\ \ - 10\ ) \Rightarrow \left\{F_3 \to F_3 + F_2\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (1\ 0\ 4\ 0\ 1\ a\ 0\ 0\ a + b - 8 \quad 5\ a\ a - 10\ ).$

$a + b - 8 = 0;\ \ a = 8 - b$

$$Para\ a = 10\ y\ b = -2 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{Para\ a = 10\ y\ b = -2 \Rightarrow La\ recta\ esta\ contenida\ en\ el\ plano}.$$

$$\left. \begin{array}{l} Para\ a = 10\ y\ b \neq -2 \\ Para\ a \neq 10\ y\ a + b \neq 8 \end{array} \right\} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{\left. \begin{array}{l} Para\ a = 10\ y\ b \neq -2 \\ Para\ a \neq 10\ y\ a + b \neq 8 \end{array} \right\} \Rightarrow La\ recta\ y\ el\ plano\ son\ secantes}.$$

$$Para\ a \neq 10\ y\ a + b \neq 8 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Para\ a \neq 10\ y\ a + b \neq 0 \Rightarrow La\ recta\ y\ el\ plano\ son\ paralelos}.$$

****

3º) Se considera el triángulo T de vértices $O(0, 0)$, $A(x, y)$ y $B(0, y)$, siendo $x > 0$, $y > 0$, y tal que la suma de las longitudes de los lados OA y AB es 30 metros. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) El área del triángulo T en función de x.

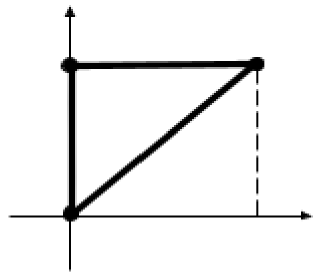
b) El valor de x para el que dicha área es máxima.

c) El valor de dicha área máxima.

----

a)

Para facilitar la comprensión del ejercicio se ilustra con un dibujo aproximado de la situación.



$$S = \frac{Base \times Altura}{2} = \frac{x \cdot y}{2}. \qquad (*)$$

$$\overline{OA} + \overline{AB} = 30; \ \sqrt{x^2 + y^2} + x = 30;$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 30 - x; \ x^2 + y^2 = (30 - x)^2 = 900 - 60x + x^2; \ y^2 = 900 - 60x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{900 - 60x}.$$

Sustituyendo el valor obtenido de y en la expresión (*):

$$S = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{x \cdot \sqrt{900 - 60x}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{900x^2 - 60x^3}.$$

$$\underline{S(x) = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{900 - 60x}.}$$

b)

La condición necesaria para que el área sea máxima es que se anule su primera derivada:

$$S'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1.800x - 180x^2}{2\sqrt{900x^2 - 60x^3}} = 0 \Rightarrow 1.800x - 180x^2 = 0; \ 180x(10 - x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, \ x_2 = 10.$$

La solución $x = 0$ carece de sentido y, además, con cumple la condición $x > 0$.

$\underline{La\ superficie\ es\ máxima\ para\ x\ =\ 10\ metros}.$

$c)$

$$S(10) = \frac{10}{2} \cdot \sqrt{900\ -\ 60 \cdot 10} =\ 5 \cdot \sqrt{300} =\ 50\sqrt{3} \cong 86,60.$$

$\underline{La\ superficie\ máxima\ es\ S\ =\ 86,60\ metros\ cuadrados}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se elegirá solamente UNA de los dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de la opción. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberían estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

1º) Se da el sistema de ecuaciones $\{- x + ay + 2z = a \; 2x + ay - z = 2 \;\; ax - y + 2z = a$, dependiente del parámetro real a. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) La solución del sistema cuando $a = 2$.

b) Los valores del parámetro a para los que el sistema es compatible determinado.

c) El valor del parámetro a para que el sistema es compatible indeterminado y obtener todas las soluciones del sistema para ese valor de a.

----

a)

Cuando $a = 2$ el sistema resulta $\{- x + 2y + 2z = 2 \; 2x + 2y - z = 2 \;\; 2x - y + 2z = 2$. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|2\ 2\ 2\ 2\ 2\ -1\ 2\ -1\ 2\ |}{|-1\ 2\ 2\ 2\ 2\ -1\ 2\ -1\ 2\ |} = \frac{8-4-4-8-2-8}{-4-4-4-8+1-8} = \frac{-18}{-27} = \frac{2}{3}.$$

$$y = \frac{|-1\ 2\ 2\ 2\ 2\ -1\ 2\ 2\ 2\ |}{-27} = \frac{-4+8-4-8-2-8}{-27} = \frac{-18}{-27} = \frac{2}{3}.$$

$$z = \frac{|-1\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ -1\ 2\ |}{-27} = \frac{-4-4+8-8-2-8}{-27} = \frac{-18}{-27} = \frac{2}{3}.$$

$$\underline{Solución: x = y = z = \frac{2}{3}.}$$

$b)$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es compatible determinado cuando las matrices de coeficientes y ampliada tienen rango tres, o sea, cuando el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero:

Matriz de coeficientes: $M = (-\ 1\ a\ 2\ 2\ a\ \ -\ 1\ a\ \ -\ 1\ 2\ )$.

$|M| = |-\ 1\ a\ 2\ 2\ a\ \ -\ 1\ a\ \ -\ 1\ 2\ | =-\ 2a\ -\ 4\ -\ a^2\ -\ 2a^2\ +\ 1\ -\ 4a\ =\ 0;$

$-\ 3a^2\ -\ 6a\ -\ 3\ =\ 0;\ \ a^2\ +\ 2a\ +\ 1\ =\ 0;\ \ (a\ +\ 1)^2\ =\ 0 \Rightarrow a\ =-\ 1.$

$\underline{El\ sistema\ es\ compatible\ determinado\ \forall a \in R\ -\ \{-\ 1\}}.$

$c)$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es compatible indeterminado cuando las matrices de coeficientes y ampliada tienen el mismo rango y menor de tres, que es el número de incógnitas.

La matriz ampliada es $M^{'} = (-\ 1\ a\ 2\ 2\ a\ \ -\ 1\ a\ \ -\ 1\ 2\ \ \ \ \ a\ 2\ a\ )$.

Del apartado $b)$ $\Rightarrow Para\ a\ =-\ 1 \Rightarrow Rang\ M\ =\ 2$ por ser $|-\ 1\ \ -\ 1\ 2\ \ -\ 1\ | \neq 0.$

$Para\ a\ =-\ 1 \Rightarrow M^{'} = (-\ 1\ \ -\ 1\ 2\ 2\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ 2\ \ \ \ \ -\ 1\ 2\ \ -\ 1\ ) \Rightarrow \{C_1 = C_4$

.

$\underline{El\ sistema\ es\ compatible\ indeterminado\ para\ a\ =-\ 1}.$

$c)$

Para $a\ =-\ 1$ el sistema resulta

$\{-\ x\ -\ y\ +\ 2z\ =-\ 1\ 2x\ -\ y\ -\ z\ =\ 2\ \ \ \ \ \ -\ x\ -\ y\ +\ 2z\ =-\ 1$, que tiene dos ecuaciones

iguales, por lo que es equivalente al sistema: $x\ +\ y\ -\ 2z\ =\ 1\ 2x\ -\ y\ -\ z\ =\ 2\ \}$.

$x\ +\ y\ -\ 2z\ =\ 1\ 2x\ -\ y\ -\ z\ =\ 2\ \} \Rightarrow z\ =\ \lambda \Rightarrow x\ +\ y\ =\ 1\ +\ 2\lambda\ 2x\ -\ y\ =\ 2\ +\ \lambda\ \} \Rightarrow 3x$

$x\ +\ y\ =\ 1\ +\ 2\lambda;\ \ 1\ +\ \lambda\ +\ y\ =\ 1\ +\ 2\lambda \Rightarrow y\ =\ \lambda.$

$\underline{Solución: x\ =\ 1\ +\ \lambda;\ y\ =\ \lambda;\ z\ =\ \lambda,\ \forall \lambda \in R}.$

****

2º) Se dan el punto $P(1,\ 1,\ 1)$, la recta $r\equiv\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ x+2y-z-1=0 \end{cases}$ y el plano de ecuación general $\pi\equiv x+y+z=1$. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*, las ecuaciones de:

$a)$ El plano α que contiene al punto P y a la recta r.

$b)$ La recta s que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π, la distancia del punto P al plano π y el punto de intersección de la recta s con el plano π.

$c)$ El plano σ que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

$a)$

La expresión de la recta r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r\equiv\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ x+2y-z-1=0 \end{cases} \Rightarrow z=\lambda \Rightarrow \begin{cases} x+y=-1+\lambda \\ x+2y= \end{cases}$$

$$\Rightarrow y=2;\ \ x=-1+\lambda-y=-1+\lambda-2=-3+\lambda \Rightarrow r\equiv\begin{cases} x=-3+\lambda \\ y=2 \\ z \end{cases}$$

.

Un punto de r es $A(-3,\ 2,\ 0)$ y un vector director de r es $\vec{v_r}=(1,\ 0,\ 1)$.

Los puntos A y B determinan $\vec{AP}=[P-A]=(4,\ -1,\ 1)$.

$$\alpha\left(P;\ \vec{v_r},\ \vec{AP}\right)\equiv\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0;$$

$4(y-1)-(z-1)+(x-1)-(y-1)=0;\ \ 3(y-1)+(x-1)-(z-1)=0;$

$x-1+3y-3-z+1=0.$

$$\underline{\alpha\equiv x+3y-z-3=0}.$$

$b)$

Un vector normal del plano π es $\vec{n}=(1,\ 1,\ 1)$, que también es vector director de la recta s pedida:

$$\underline{s\equiv\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}}.$$

La distancia de un punto a un plano es $d(P,\ \pi)=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Aplicada al punto $P(1,\ 1,\ 1)$ y plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$:

$$d(P,\ \pi) = \frac{|1\cdot1+1\cdot1+1\cdot1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{|1+1+1-1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\underline{d(P,\ \pi) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\ unidades.}$$

El punto de intersección de la recta s con el plano π es la solución del sistema que forman:

$$\pi \equiv x + y + z - 1 = 0 \qquad s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow (1 + \lambda)$$

$$1 + \lambda + 1 + \lambda + 1 + \lambda - 1 = 0;\ \ 3\lambda = -2 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{3}.$$

$$\begin{cases} x = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ y = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ z = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \underline{M\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)}.$$

$c)$

Un punto de r es $A(-3,\ 2,\ 0)$:

$$\sigma\left(A;\ \vec{v_r},\ \vec{n}\right) \equiv \begin{vmatrix} x+3 & y-2 & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$(y - 2) + z - (x + 3) - (y - 2) = 0;\ \ -(x + 3) + z = 0;\ \ -x - 3 + z = 0$.

$$\underline{\sigma \equiv x - z + 3 = 0}.$$

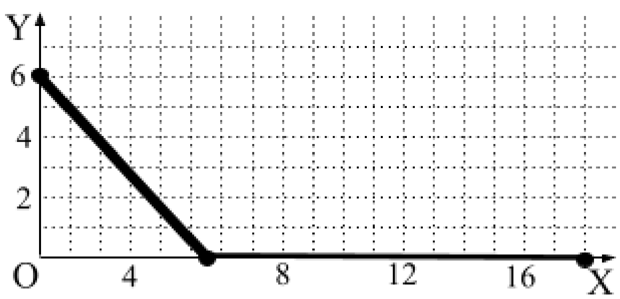
****

3º) Se desea unir un punto M situado en un lado de una calle, de 6 m de anchura, con el punto N situado en el otro lado de la calle, 18 m más abajo, mediante dos cables rectos, uno desde M hasta un punto P, situado al otro lado de la calle, y otro desde P hasta el punto N. Se representó la calle en un sistema cartesiano y resultó que los puntos son $M(0,\ 6)$, $P(x,\ 0)$ y $N(18,\ 0)$. El cable MP tiene que ser más grueso debido a que cruza la calle sin apoyos intermedios, siendo su precio de 10 euros/m. El precio del cable PN es de 5 euros/m. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) El costo total C de los dos cables en función de la abscisa x del punto P, cuando $0 \le x \le 18$.

b) El valor de x, con $0 \le x \le 18$, para que el costo total C es mínimo.

c) El valor de dicho costo total mínimo.



a)

$$C(x) = 10 \cdot \overline{MP} + 5 \cdot (18 - x) = 10 \cdot \sqrt{x^2 + 6^2} + 90 - 5x.$$

$$\underline{C(x) = 10 \cdot \sqrt{x^2 + 36} - 5x + 90}.$$

b)

El coste es mínimo para los valores de x que anulan su primera derivada y hacen positiva la segunda derivada:

$$C'(x) = 10 \cdot \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{x^2+36}} - 5 = \frac{10x}{\sqrt{x^2+36}} - 5.$$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow \frac{10x}{\sqrt{x^2+36}} - 5 = 0; \quad \frac{2x}{\sqrt{x^2+36}} - 1 = 0 \Rightarrow 2x = \sqrt{x^2 + 36};$$

$$4x^2 = x^2 + 36; \ 3x^2 = 36; \ x^2 = 12 \Rightarrow x_1 = -2\sqrt{3}, \ x_2 = 2\sqrt{3}.$$

$$C''(x) = \frac{10\cdot\sqrt{x^2+36}-10x\cdot\frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+36}}}{\left(\sqrt{x^2+36}\right)^2} = 10\cdot\frac{\sqrt{x^2+36}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+36}}}{\sqrt{x^2+36}} = 10\cdot\frac{x^2+36-x^2}{\left(x^2+36\right)\sqrt{x^2+6^2}} =$$

$$= 360\cdot\frac{1}{\left(x^2+36\right)\sqrt{x^2+6^2}} = 360\cdot\frac{\sqrt{x^2+6^2}}{\left(x^2+36\right)^2}.$$

$$C''\left(-2\sqrt{3}\right) = C''\left(2\sqrt{3}\right) = 360\cdot\frac{\sqrt{12+36}}{(12+36)^2} > 0 \Rightarrow Mínimo.$$

Teniendo en cuenta que la raíz negativa no pertenece al dominio de la función:

$$\underline{El\ costo\ es\ mínimo\ para\ x = 2\sqrt{3}\ metros \cong 3,46\ metros}.$$

$c)$

$$C\left(2\sqrt{3}\right) = 10\cdot\sqrt{12 + 36} - 5\cdot 2\sqrt{3} + 90 = 10\cdot\sqrt{48} - 10\sqrt{3} + 90 =$$

$$= 10\cdot\sqrt{16\cdot 3} - 10\sqrt{3} + 90 = 10\cdot 4\sqrt{3} - 10\sqrt{3} + 90 = 30\sqrt{3} + 90 =$$

$$= 30\cdot\left(3 + \sqrt{3}\right) \cong 141,96.$$

$$\underline{El\ costo\ mínimo\ es\ de\ 141,96\ euros}.$$

****

OPCIÓN B

1º) a) La comprobación de que $C^2 = 2C - I$, siendo $C = (5\ \ -4\,2\,2\ \ -1\,1\ \ -4\,4\ \ -1\,)$ e I la matriz identidad de orden 3×3, y el cálculo de la matriz C^4.

b) El valor del determinante de la matriz $\left(3A^4\right)\left(4A^2\right)^{-1}$, sabiendo que A es una matriz cuadrada de cuatro columnas cuyo determinante vale $-\ 1$.

c) La matriz B que admite inversa y que verifica la igualdad $B \cdot B = B$.

----

a)

$C^2 = C \cdot C = (5\ \ -4\,2\,2\ \ -1\,1\ \ -4\,4\ \ -1\,) \cdot (5\ \ -4\,2\,2\ \ -1\,1\ \ -4\,4\ \ -1\,) = (9\ \ -$
.

$2C - I = 2 \cdot (5\ \ -4\,2\,2\ \ -1\,1\ \ -4\,4\ \ -1\,) - I = (10\ \ -8\,4\,4\ \ -2\,2\ \ -8\,8$

$= (9\ \ -8\,4\,4\ \ -3\,2\ \ -8\,8\ \ -3\,).$

$\underline{Queda\ comprobado\ que\ C^2 = 2C - I.}$

$C^4 = C^2 \cdot C^2 = (9\ \ -8\,4\,4\ \ -3\,2\ \ -8\,8\ \ -3\,) \cdot (9\ \ -8\,4\,4\ \ -3\,2\ \ -8\,8\ \ -3\,) = (17$
.

$\underline{C^4 = (17\ \ -16\,8\,8\ \ -7\,4\ \ -16\,16\ \ -7\,).}$

b)

$$M = \left(3A^4\right)\left(4A^2\right)^{-1} = \frac{3A^4}{4A^2} = \frac{3}{4} \cdot A^2.$$

Para la resolución de este apartado conviene recordar propiedades de las matrices y los determinantes tales como las siguientes:

Cuando se multiplica una matriz por un número quedan multiplicados todos los elementos de la matriz por dicho número.

Si los elementos de una línea de una matriz se multiplican por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por dicho número.

Temiendo en cuenta, además, que la matriz A es cuadrada de orden 4:

$$|M| = \left|\frac{3}{4}\cdot A^2\right| = \left(\frac{3}{4}\right)^4\cdot|A|\cdot|A| = \left(\frac{3}{4}\right)^4\cdot(-\ 1)^2 = \frac{3^4}{4^4}.$$

$$\underline{\left|\left(3A^4\right)\left(4A^2\right)^{-1}\right| = \frac{3^4}{4^4} = \frac{81}{256}.}$$

$c)$

$B\cdot B\ =\ B.$ Multiplicando los dos términos por la derecha por B^{-1}:

$B\cdot B\cdot B^{-1}\ =\ B\cdot B^{-1};\ \ B\cdot I\ =\ I\Rightarrow B\ =\ I.$

$\underline{La\ \text{única}\ matriz\ invertible\ B\ que\ cumple\ que\ B\cdot B\ =\ B\ es\ B\ =\ I.}$

****

2º) Sea T un tetraedro de vértices $O(0,\ 0,\ 0)$, $A(1,\ 1,\ 1)$, $B(3,\ 0,\ 0)$ y $C(0,\ 3,\ 0)$. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) La ecuación del plano π que pasa por los puntos $A,\ B$ y C, y las ecuaciones de la recta h_0 perpendicular a π que pasa por O.

b) El punto de intersección de la altura h_0 y el plano π.

c) El área de la cara cuyos vértices son los puntos $A,\ B$ y C, y el volumen del tetraedro T.

----

a)

Los puntos $A(1,\ 1,\ 1)$, $B(3,\ 0,\ 0)$ y $C(0,\ 3,\ 0)$ determinan los vectores:

$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(3,\ 0,\ 0) - (1,\ 1,\ 1)] = (2,\ -1,\ -1)$.

$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(0,\ 3,\ 0) - (1,\ 1,\ 1)] = (-1,\ 2,\ -1)$.

$\pi\left(B;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0;$

$(x - 3) + y + 4z - z + 2(x - 3) + 2y = 0;\ \ 3(x - 3) + 3y + 3z = 0;$

$x - 3 + y + z = 0.$

$\underline{\pi \equiv x + y + z - 3 = 0}.$

Un vector normal de π es $\overrightarrow{n} = (1,\ 1,\ 1)$.

La recta pedida h_0 dada por unas ecuaciones paramétricas es: $\underline{h_0 \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}}$.

b)

El punto de intersección de la altura h_0 y el plano π es la solución del sistema que forman:

$\pi \equiv x + y + z - 3 = 0 \qquad h_0 \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda + \lambda + \lambda - 3 =$

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{A(1,\ 1,\ 1)}.$

c)

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan los puntos:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\|i\ j\ k\ 2\ -1\ -1\ -1\ 2\ -1\ \| = \frac{1}{2}\cdot|i\ +\ j\ +\ 4k\ -\ k\ +\ 2i$$

$$= \frac{1}{2}\cdot|3i\ +\ 3j\ +\ 3k| = \frac{3}{2}\cdot\sqrt{1^2\ +\ 1^2\ +\ 3^2} = \frac{3}{2}\cdot\sqrt{1\ +\ 1\ +\ 1} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$\underline{S_{ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\ u^2.}$$

El volumen de un tetraedro es un sexto del producto mixto de los tres vectores que lo determinan.

Siendo los vértices del tetraedro $O(0,\ 0,\ 0)$, $A(1,\ 1,\ 1)$, $B(3,\ 0,\ 0)$ y $C(0,\ 3,\ 0)$, los vectores que lo determinan son: $\overrightarrow{OA} = (0,\ 0,\ 0)$; $\overrightarrow{OB} = (3,\ 0,\ 0)\ y\ \overrightarrow{OC} = (0,\ 3,\ 0)$.

$$V_{OABC} = \frac{1}{6}\cdot\left|\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC}\right| = \frac{1}{6}\cdot|1\ 1\ 1\ 3\ 0\ 0\ 0\ 3\ 0\ | = \frac{1}{6}\cdot 9\ = \frac{3}{2}.$$

$$\underline{V_{OABC} = \frac{3}{2}\ u^3\ =\ 1,5\ u^3.}$$

****

3º) Dada la función f definida por $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, para cualquier valor real $x \neq 0$, se pide obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f, y los extremos relativos de la función f.

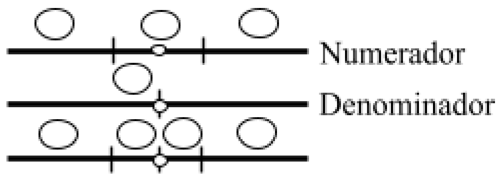
b) Las asíntotas de la curva $y = f(x)$.

c) El área de la región plana limitada por la curva $y = \frac{x^2+1}{x}$, $1 \leq x \leq e$, el segmento que une los puntos $P(1,\ 0)$ y $Q(e,\ 0)$, y las rectas $x = 1$ y $x = e$.

----

a)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.



$$f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2+1)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2-1}{x^2} = 0;\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1.$$

Teniendo en cuenta que el dominio de la función es $D(f) \Rightarrow R - \{0\}$ y de la observación de la figura se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función, que son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento\colon (-\infty,\ -1) \cup (1,\ +\infty)}.$$

$$\underline{Decrecimiento\colon (-1,\ 0) \cup (0,\ 1)}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto. Esta condición necesaria no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{2x \cdot x^2 - (x^2-1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2x^2 - 2x^2 + 2}{x^3} = \frac{2}{x^3}.$$

$$f''(-1) = \frac{2}{(-1)^3} = \frac{2}{-1} = -2 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -1.$$

$$f(-1) = \frac{(-1)^2+1}{-1} = \frac{1+1}{-1} = -2 \Rightarrow \underline{Máximo\ relativo: A(-1,\ -2)}.$$

$$f''(1) = \frac{2}{1^3} = \frac{2}{1} = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 1.$$

$$f(1) = \frac{1^2+1}{1} = \frac{1+1}{1} = 2 \Rightarrow \underline{Mínimo\ relativo: B(1,\ 2)}.$$

$b)$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = f(x) = \frac{x^2+1}{x} = \infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$x = 0 \Rightarrow \underline{La\ recta\ x = 0\ (eje\ de\ ordenadas)\ es\ asíntota\ vertical}.$$

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{x^2+1}{x}}{x} = \frac{x^2+1}{x^2} = 1.$$

$$n = \left[\frac{f(x)}{x} - mx\right] =$$

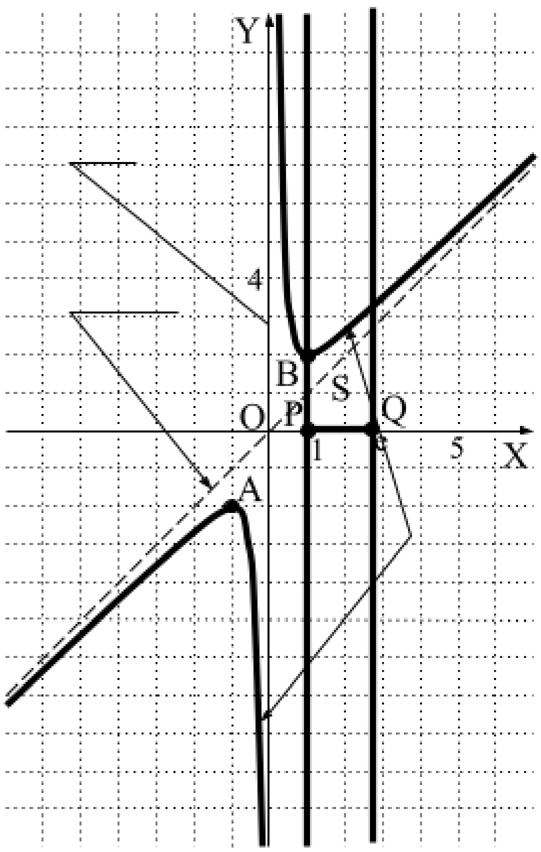
$$= \left(\frac{x^2+1}{x} - x\right) = \frac{x^2+1-x^2}{x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

$\underline{La\ recta\ y = x\ es\ asíntota\ oblicua}.$

$c)$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la indicada en la figura adjunta.



$$S = \int_1^e f(x) \cdot dx = \int_1^e \frac{x^2+1}{x} \cdot dx =$$

$$= \int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot dx = \left[\frac{x^2}{2} + Lx\right]_1^e = \left(\frac{e^2}{2} + Le\right) - \left(\frac{1^2}{2} + L1\right) = \frac{e^2}{2} + 1 - \frac{1}{2} - 0 =$$

$$= \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{e^2+1}{2}.$$

$$\underline{S = \frac{e^2+1}{2}\, u^2 \cong 4,19\, u^2.}$$

****