MATEMÁTICAS aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2017

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS DE TODAS LAS COMUNIDADES AUTÓNOMAS

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

Textos Marea Verde

Antes Selectividad, ahora tiene distintos nombres:

ABAU (Galicia),

EAU (País Vasco),

EBAU (Asturias, Cantabria, Castilla y León, Extremadura, Islas Canarias, La Rioja y Murcia),

EvAU (Aragón, Castilla-La Mancha y Navarra),

EVAU (Madrid),

PAU (Cataluña y Valencia) ,

PBAU (Islas Baleares) o

PevAU (Andalucía): Prueba de acceso y admisión a la Universidad

TEXTOS MAREA VERDE

www.apuntesmareaverde.org.es

I.S.B.N. - 13: 978-84-608-8980-9

I.S.B.N. - 10: 84-608-8980-9

Textos Marea Verde

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA

JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones propuestas y conteste los ejercicios de la opción elegida. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin su ayuda. Justifique las respuestas.

OPCIÓN A

1º) Sean las matrices $A = (1\ 2\ 0\ \ -\ 1\ )\ y\ B = (3\ \ -\ \ 1\ 0\ 2\ )$.

a) Calcule la matriz A^{2017}.

b) ¿Se verifica la expresión $(B\ +\ A)\cdot(B\ -\ A) = B^2 - A^2$?

----

a)

$A^2 = A\cdot A = (1\ 2\ 0\ \ -\ 1\ )\cdot(1\ 2\ 0\ \ -\ 1\ ) = (1\ 0\ 0\ 1\ ) = I.$

$A^3 = A^2\cdot A = I\cdot A = A.$

…………

En general $A^n = A\ o\ A^n = I$, según que n sea impar o par, respectivamente.

$$\underline{A^{2017} = A}.$$

b)

$B\ +\ A = (3\ \ -\ \ 1\ 0\ 2\ ) + (1\ 2\ 0\ \ -\ 1\ ) = (4\ 1\ 0\ 1\ ).$

$B\ -\ A = (3\ \ -\ \ 1\ 0\ 2\ ) - (1\ 2\ 0\ \ -\ 1\ ) = (2\ \ -\ \ 3\ 0\ 3\ ).$

$(B\ +\ A)\cdot(B\ -\ A) = (4\ 1\ 0\ 1\ )\cdot(2\ \ -\ \ 3\ 0\ 3\ ) = (8\ \ -\ \ 9\ 0\ 3\ ).$
$B^2 = B\cdot B = (3\ \ -\ \ 1\ 0\ 2\ )\cdot(3\ \ -\ \ 1\ 0\ 2\ ) = (9\ \ -\ \ 5\ 0\ 4\ ).$

$$B^2 - A^2 = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\underline{No\ se\ verifica\ la\ expresión\ (B + A)\cdot(B - A) = B^2 - A^2}.$

****

2º) Sea $f(t)$ el porcentaje de ocupación de un determinado complejo hotelero en función del tiempo t, medido en meses, transcurridos desde la inauguración:

$$f(t) = \{-\frac{5}{2}t^2 + 20t \quad si \quad 0 \le t \le 6 \quad \frac{90t-240}{t+4} \quad si \quad t > 6 \, .$$

a) ¿Evoluciona la función f de forma continua?

b) ¿Cuál sería el porcentaje de ocupación al finalizar el segundo año?

c) ¿En qué momentos el porcentaje de ocupación sería del 40 %?

d) ¿Llegaría en algún momento a estar completo en caso de que estuviese abierto indefinidamente?

----

a)

La función $f(t)$ es continua en R, excepto para el valor $t = 6$ cuya continuidad es dudosa y se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites laterales son iguales en ese punto e igual al valor de la función en ese punto.

$$f(t) = \left(-\frac{5}{2}t^2 + 20t\right) = -90 + 120 = 30 = f(6) \quad f(t) = \frac{90t-240}{t+4} = \frac{540-240}{6+4} =$$

$$\Rightarrow f(t) = f(t) = f(6).$$

$\underline{La\ función\ f(t)\ evoluciona\ de\ forma\ continua.}$

b)

Como el tiempo viene dado en meses, al final del segundo año es $t = 24$:

$$f(24) = \frac{90 \cdot 24-240}{24+4} = \frac{2.160-240}{28} = \frac{1.920}{28} = 68,57.$$

$\underline{El\ porcentaje\ de\ ocupación\ al\ terminar\ el\ segundo\ año\ es\ del\ 68,57\ \%.}$

c)

$$f(t) = 40 \Rightarrow -\frac{5}{2}t^2 + 20t = 40; \quad -5t^2 + 40t = 80; \quad t^2 - 8t + 16 = 0;$$

$$(t-4)^2 = 0 \Rightarrow t = 4.$$

$$f(t) = 40 \Rightarrow \frac{90t-240}{t+4} = 40; \quad 90t - 240 = 40t + 160; \quad 5t = 40 \Rightarrow t = 8.$$

$\underline{La\ ocupación\ es\ del\ 40\ \%\ los\ meses\ 4\ y\ 8}.$

$d)$

$$f(t)\ =\frac{90t-240}{t+4}\ =\ 90.$$

$\underline{Nunca\ llegaría\ a\ estar\ completo;\ la\ máxima\ ocupación\ sería\ del\ 90\ \%}.$

****

3º) Se sabe que el 90 % de los alumnos de un centro docente está interesado por las redes sociales, el 60 % está interesado por sus notas y el 55 % por ambas cuestiones. Se elige al azar un alumno de ese centro:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que dicho alumno esté interesado por alguna de las dos cuestiones?

b) Calcule la probabilidad de que esté interesado por sus notas, sabiendo que no está interesado por las redes sociales?

c) Calcule la probabilidad de que no esté interesado por ninguna de estas dos cuestiones.

$$P(R) = 0,9 \rightarrow P(\overline{R}) = 0,1. \quad P(N) = 0,6 \rightarrow P(\overline{N}) = 0,4. \quad P(R \cap N) = 0,55.$$

a)

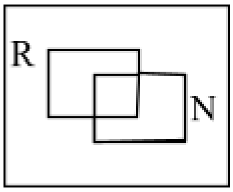
$$P(R \cup N) = P(R) + P(N) - P(R \cap N) = 0,9 + 0,6 - 0,55 = \underline{0,95}.$$

b)

$$P(\overline{R} \cap N) = P(R \cup N) - P(R) =$$

$$= [P(R) + P(N) - P(R \cap N)] - P(R) =$$

$$= P(N) - P(R \cup N) = 0,6 - 0,55 = 0,05.$$



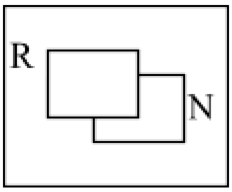
$$P = P(N/\overline{R}) = \frac{P(\overline{R} \cap N)}{P(\overline{R})} = \frac{0,05}{0,1} = \underline{0,50}.$$

c)

$$P = P(\overline{R} \cap \overline{N}) = 1 - P(R \cup N) =$$

$$= 1 - [P(R) + P(N) - P(R \cap N)] =$$

$$= 1 - (0,9 + 0,6 - 0,55) = 1 - 0,95 = \underline{0,05}.$$



****

4º) La altura de los estudiantes de 2º de bachillerato de un centro sigue una ley Normal de media 165 cm y desviación típica 10 cm.

a) ¿Qué distribución sigue la altura media de muestras de tamaño 25?

b) Se elige al azar una muestra de 25 estudiantes y se les mide la altura. ¿Cuál es la probabilidad de que la altura media de esa muestra supere 160 cm?

----

a)

La distribución de la media muestral viene dada por la expresión $X = N\left(\mu,\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

En el caso que nos ocupa es: $X = N\left(165,\ \frac{10}{\sqrt{25}}\right) \Rightarrow \underline{N(165,\ 2)}$.

b)

Tipificando: $Z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{\overline{X}-165}{2}$.

$P(X > 160) = P\left(\frac{X-165}{2} > \frac{160-165}{2}\right) = P\left(Z > -\frac{5}{2}\right) = P(Z > -\ 2,5) =$

$= P(Z \leq 2,5) = \underline{0,9938}$.

****

OPCIÓN B

1º) Un distribuidor de software informático tiene en su cartera de clientes tanto a empresas como a particulares. Ha de conseguir al menos 25 empresas como clientes y el número de clientes particulares deberá ser como mínimo el doble que el de empresas. Por razones de eficiencia del servicio postventa, tiene estipulado un límite global de 120 clientes anuales. Cada empresa le produce 386 euros de beneficio, mientras que cada particular le produce 229 euros. ¿Qué combinación de empresas y particulares le proporcionará el máximo beneficio? ¿A cuánto ascenderá ese beneficio?

Sean x e y el número de clientes empresas y particulares que tiene como clientes la empresa, respectivamente.

Las restricciones del ejercicio son las siguientes: $\left.\begin{array}{l} x \geq 25 \\ y \geq 2x \\ x + y \leq 120 \end{array}\right\}$.

La función de objetivos es $f(x, y) = 386x + 229y$.

La región factible se indica en la figura:

x	0	60
y	0	120

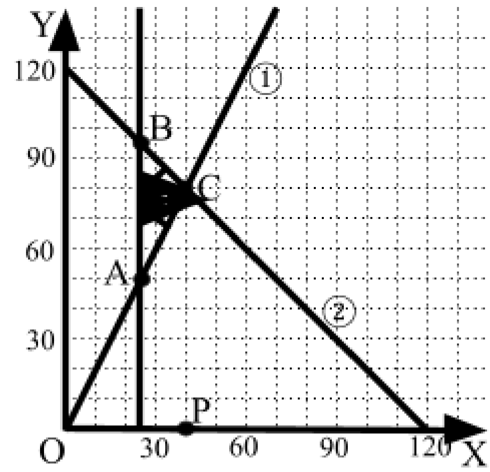
①$\Rightarrow y \geq 2x \Rightarrow P(40, 0) \rightarrow No$.

x	120	0
y	0	120

②$\Rightarrow x + y \leq 120 \Rightarrow y = 120 - x \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si$.

Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 2x \\ x = 25 \end{array}\right\} \Rightarrow A(25, 50)$.



$B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 25 \\ x + y = 120 \end{array}\right\} \Rightarrow B(25, 95)$.

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 2x \\ x + y = 120 \end{array}\right\} \Rightarrow C(40, 80)$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(25,\ 50) = 386 \cdot 25 + 229 \cdot 50 = 9.650 + 11.450 = 21.100.$$

$$B \Rightarrow f(25,\ 95) = 386 \cdot 25 + 229 \cdot 95 = 9.650 + 21.755 = 31.405.$$

$$C \Rightarrow f(40,\ 80) = 386 \cdot 40 + 229 \cdot 80 = 15.440 + 18.320 = 33.760.$$

$$\underline{El\ máximo\ beneficio\ lo\ proporcionan\ 40\ empresas\ y\ 80\ particulares\ .}$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 33.760\ euros.}$$

****

2º) a) Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{e^{5x}-x}{x^2-x}. \qquad\qquad g(x) = \left(2x^2 - x\right)^3 \cdot L\left(x^3 + 2\right).$$

b) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $h(x) = \frac{1}{x}$ en el punto de abscisa $x = 1$.

----

a)

$$f'(x) = \frac{\left(5\cdot e^{5x}-1\right)\cdot\left(x^2-x\right)-\left(e^{5x}-1\right)\cdot(2x-1)}{[x(x-1)]^2} =$$

$$= \frac{5x^2\cdot e^{5x}-5x\cdot e^{5x}-x^2+x-2x\cdot e^{5x}+e^{5x}+2x-1}{x^2(x-1)^2} = \frac{e^{5x}\cdot\left(x^2-7x+1\right)-x^2+2x-1}{x^2(x-1)^2} =$$

$$= \frac{e^{5x}\cdot\left(x^2-7x+1\right)-\left(x^2-2x+1\right)}{x^2(x-1)^2} = \frac{e^{5x}\cdot(x-1)^2-}{x^2(x-1)^2} = \frac{e^{5x}\cdot\left(x^2-7x+1\right)-(x-1)^2}{x^2(x-1)^2} \quad .$$

$$\underline{f'(x) = \frac{e^{5x}\cdot\left(x^2-7x+1\right)-(x-1)^2}{x^2(x-1)^2}.}$$

$$g'(x) = \left[3\cdot\left(2x^2 - x\right)^2\cdot(4x - 1)\right]\cdot L\left(x^3 + 2\right) + \left(2x^2 - x\right)^3\cdot\frac{3x^2}{x^3+2} =$$

$$= 3\cdot\left(2x^2 - x\right)^2\cdot\left[(4x - 1)\cdot L\left(x^3 + 2\right) + \left(2x^2 - x\right)\cdot\frac{x^2}{x^3+2}\right] =$$

$$= 3x^2\cdot(2x - 1)^2\cdot\left[(4x - 1)\cdot L\left(x^3 + 2\right) + \frac{x^3(2x-1)}{x^3+2}\right].$$

$$\underline{g'(x) = 3x^2\cdot(2x - 1)^2\cdot\left[(4x - 1)\cdot L\left(x^3 + 2\right) + \frac{x^3(2x-1)}{x^3+2}\right].}$$

b)

La pendiente de la tangente a una función en un punto es el valor de su primera derivada en ese punto.

$$h'(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow m = h'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1.$$

El punto de tangencia es el siguiente: $h(1) = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow P(1,\ 1)$.

$$y - y_0 = m\left(x - x_0\right) \Rightarrow y - 1 = -1\cdot(x - 1) = -x + 1.$$

$\underline{Recta\ tantenge: t \equiv x + y - 2 = 0}.$

****

3º) En una ciudad hay dos fábricas de pasta, F1 y F2, que producen dos tipos de productos, A y B, que venden a un distribuidor en paquetes de 1 kg. En un mes, la fábrica F1 produce 20.000 kg de pasta, de los que 12.000 son del tipo A y la fábrica F2 produce 25.000 kg de pasta de los que 15.000 kg son del tipo A. Se escoge al azar un paquete del distribuidor:

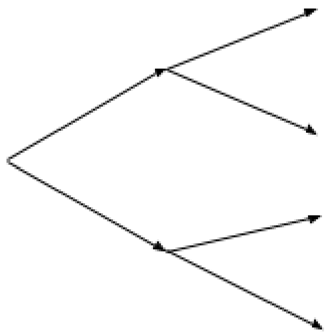
a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea del tipo B?

b) Si el paquete elegido resulta ser del tipo A, ¿qué es más probable, que proceda de la fábrica F1 o que proceda de la F2?

$$20.000 + 25.000 = 45.000 \Rightarrow \{ P(F1) = \frac{20.000}{45.000} = \frac{4}{9} \quad P(F2) = \frac{25.000}{45.000} = \frac{5}{9}.$$

$$F1 \Rightarrow \{ P(A) = \frac{12.000}{20.000} = \frac{3}{5} \quad P(B) = \frac{8.000}{20.000} = \frac{2}{5}.$$

$$F2 \Rightarrow \{ P(A) = \frac{15.000}{25.000} = \frac{3}{5} \quad P(B) = \frac{10.000}{25.000} = \frac{2}{5}.$$



a)

$$P = P(B) = P(F1) \cdot P(B/F1) + P(F2) \cdot P(B/F2) = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{5} + \frac{5}{9} \cdot \frac{2}{5} =$$

$$= \frac{8}{45} + \frac{10}{45} = \frac{18}{45} = \underline{\frac{2}{5} = 0,4}.$$

b)

Fábrica F1:

$$P = P(F1/A) = \frac{P(F1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(F1) \cdot P(A/F1)}{P(F1) \cdot P(A/F1) + P(F2) \cdot P(A/F2)} = \frac{\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{5} + \frac{5}{9} \cdot \frac{3}{5}} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{4}{15} + \frac{5}{15}} = \underline{\frac{4}{9}}$$

Fábrica F2:

$$P = P(F2/A) = \frac{P(F2 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(F2) \cdot P(A/F2)}{P(F1) \cdot P(A/F1) + P(F2) \cdot P(A/F2)} = \frac{\frac{5}{9} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{5} + \frac{5}{9} \cdot \frac{3}{5}} = \frac{\frac{5}{15}}{\frac{4}{15} + \frac{5}{15}} = \underline{\frac{5}{9}}$$

$\underline{Como\ se\ observa,\ es\ más\ probable\ que\ proceda\ de\ la\ fábrica\ F2}.$

****

4º) La puntuación obtenida por los participantes en una prueba es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal con una desviación típica de 6 puntos. Se toma una muestra aleatoria de 64 participantes en esa prueba, resultando una puntuación media de 35 puntos.

a) Calcule un intervalo de confianza, al 95 %, para la calificación media del total de participantes en la citada prueba.

b) Halle el tamaño mínimo de la muestra necesaria para estimar la puntuación media del total de participantes, con un error inferior a 0,5 puntos y un nivel de confianza del 99 %.

----

a)

$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$

$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$

Datos: $\overline{x} = 35;\ \ n = 64;\ \ \sigma = 6;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(35 - 1,96 \cdot \frac{6}{\sqrt{64}};\ 35 + 1,96 \cdot \frac{6}{\sqrt{64}}\right);$

$(35 - 1,96 \cdot 0,75;\ 35 + 1,96 \cdot 0,75);\ \ (35 - 1,47;\ 35 + 1,47).$

$$\underline{I.\ C._{95\ \%}\ (33,53;\ 36,47).}$$

b)

Nivel de confianza del 99 %.

$\alpha = 1 - 0,99 = 0,01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,005} = 2,578.$

$(1 - 0,0050 = 0,9950 \rightarrow z = 2,578).$

Datos: $\sigma = 6;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,578;\ \ E = 0,5.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(2,578 \cdot \frac{6}{0,5}\right)^2 =$

$= (2,578 \cdot 12)^2 = 30,936^2 = 957,04.$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 958\ participantes}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA

SEPTIEMBRE – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones propuestas y conteste los ejercicios de la opción elegida. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin su ayuda. Justifique las respuestas.

OPCIÓN A

1º) Sean las matrices $A = (1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1)\ y\ B = (0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1)$.

a) Justifique cuales de las siguientes operaciones pueden realizarse y, en tal caso, calcule el resultado: A^2; $A - B$; $A \cdot B$; $A \cdot B^t$.

b) Halle la matriz X tal que $A^t + B \cdot X = 3B$.

----

a)

El producto de matrices cumple que: $A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = C_{m\times p}$.

$A^2_{(2\times3)} = A_{2\times3} \cdot A_{2\times3} \Rightarrow \underline{No\ es\ posible}.$

Para sumar o restar matrices tienen que ser de la misma dimensión:

$A_{2\times3} - B_{3\times2} \Rightarrow \underline{No\ es\ posible}.$

$A_{2\times3} \cdot B_{3\times2} \Rightarrow \underline{Si\ es\ posible} \Rightarrow A \cdot B = (1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1) \cdot (0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1) = \underline{(1\ 2\ 2\ 1)}.$

$A_{2\times3} \cdot B^t_{2\times3} \Rightarrow \underline{No\ es\ posible}.$

b)

$A^t + B \cdot X = 3B \Rightarrow B \cdot X = 3B - A^t = 3 \cdot (0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1) - (1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1) =$
$= (0\ 3\ 3\ 0\ 3\ 3) - (1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1) = (-\ 1\ 3\ 3\ \ -\ 1\ 2\ 2) = D.$

$B_{3\times 2}\cdot X_{n\times p} = D_{3\times 2} \Rightarrow Tiene\ que\ ser\ X_{2\times 2} \Rightarrow X = (a\ b\ c\ d\ ).$

$(0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ )\cdot(a\ b\ c\ d\ ) = (-\ 1\ 3\ 3\ \ -\ 1\ 2\ 2\ );\ \ (c\ d\ a\ b\ a\ +\ c\ b\ +\ d\ ) = (-\ 1\ 3\ 3\ \ -\ 1\ 2$

$$\Rightarrow \underline{X = (3\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ 3\ )}.$$

****

2º) Sea la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$.

a) Halle a y b sabiendo que la función tiene un mínimo en el punto de abscisa $x = -1$ y un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = -2$.

b) Para $a = 6$ y $b = 9$, halle los puntos de corte con los ejes, estudie la monotonía y extremos y esboce la gráfica de la función.

----

a)

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$. $\qquad\qquad f''(x) = 6x + 2a$.

Por tener un mínimo para $x = -1 \Rightarrow f'(-1) = 0$:

$f'(-1) = 0 \Rightarrow 3\cdot(-1)^2 + 2a\cdot(-1) + b = 0;\ \ 3 - 2a + b = 0;$

$2a - b = 3$. (*)

Por tener un punto de inflexión para $x = -2 \Rightarrow f''(-2) = 0$:

$f''(-2) = 0 \Rightarrow 6\cdot(-2) + 2a = 0;\ \ -12 + 2a = 0;\ \ -6 + a = 0 \Rightarrow \underline{a = 6}$.

Sustituyendo el valor de a obtenido en (*):

$2\cdot 6 - b = 3;\ \ 12 - b = 3 \Rightarrow \underline{b = 9}$.

b)

Para $a = 6$ y $b = 9$ la función es $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$.

Los puntos de corte con los ejes de coordenadas son los siguientes:

$Eje\ X \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x^3 + 6x^2 + 9x = 0;\ \ x\left(x^2 + 6x + 9\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;$

$x^2 + 6x + 9 = 0;\ \ (x + 3)^2 = 0 \Rightarrow x_2 = -3$.

Los puntos de corte con el eje X son $\underline{O(0,\ 0)}$ y $\underline{A(-3,\ 0)}$.

$Eje\ Y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow \underline{O(0,\ 0)}$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 12x + 9 = 0;\ x^2 + 4x + 3 = 0;\ x = \frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2} =$
$= \frac{-4\pm\sqrt{4}}{2} = \frac{-4\pm 2}{2} = -2\pm 1 \Rightarrow x_1 = -3,\ x_2 = -1.$

Las raíces de la derivada dividen el dominio de la función, que es R, en los siguientes tres intervalos: $(-\infty, -3)$, $(-3, -1)$ y $(-1, +\infty)$, donde los valores de la derivada son, alternativamente positivos y negativos. Para determinar el signo de los intervalos se considera, por ejemplo, el valor $x = 0 \in (-1, +\infty)$, siendo $f'(0) = 9 > 0$.

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función, que son los siguientes:

$\underline{Crecimiento:\ f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)}.$

$\underline{Decrecimiento:\ f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-3, -1)}.$

Para que una función polinómica tenga un máximo o un mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$f''(x) = 6x + 12.$

$f''(-3) = -18 + 12 = -6 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -3.$

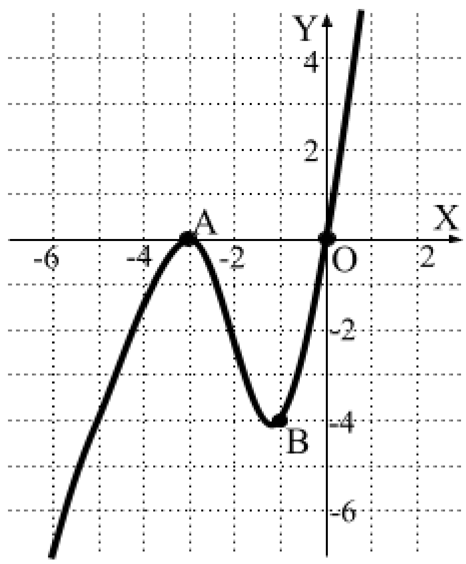
$f(-3) = 0 \Rightarrow \underline{Máximo: A(-3, 0)}.$

$f''(-1) = -6 + 12 = 6 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = -1.$

$f(-1) = (-1)^3 + 6\cdot(-1)^2 + 9\cdot(-1) =$

$= -1 + 6 - 9 = 6 - 10 = -4 \Rightarrow$



$\Rightarrow \underline{Mínimo: C(-\ 1,\ \ -\ 4)}.$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la que indica la figura adjunta.

****

3º) Supongamos que el 20 % de los votantes de Trump apoya la construcción del muro en la frontera de México y que solo el 5 % de los que no lo votaron lo apoya. En un grupo formado por 5.000 votantes de Trump y 10.000 estadounidenses que no lo votaron se elige una persona al azar.

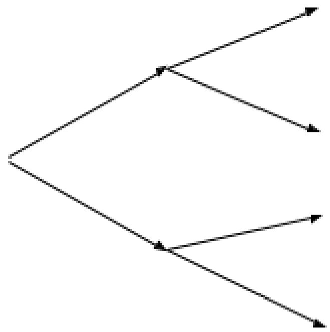
a) ¿Cuál es la probabilidad de que ésta apoye la construcción del muro?

b) Si la persona elegida apoya la construcción del muro, ¿cuál es la probabilidad de que no haya votado a Trump?

c) Calcule la probabilidad de que sea votante de Trump o apoye la construcción del muro.

Sea el suceso "V→votar a Trump".

$$P(V) = \frac{5.000}{5.000+10.000} = \frac{5.000}{15.000} = \frac{1}{3};\ \ P(\overline{V}) = \frac{2}{3}.$$



a)

$$P\ =\ P(A) =\ P(V) \cdot P(A/V) +\ P(\overline{V}) \cdot P(A/\overline{V}) = \frac{1}{3} \cdot 0,20\ +\ \frac{2}{3} \cdot 0,05\ =$$

$$=\ 0,0667\ +\ 0,0333\ =\ \underline{0,10}.$$

b)

$$P(\overline{V}/A) = \frac{P(\overline{V} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\overline{V}) \cdot P(A/\overline{V})}{P(V) \cdot P(A/V) + P(\overline{V}) \cdot P(A/\overline{V})} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0,05}{\frac{1}{3} \cdot 0,20 + \frac{2}{3} \cdot 0,05} = \frac{0,0333}{0,10} = \underline{0,3333}$$

.

c)

$$P\ =\ P(A \cup V) =\ P(A) +\ P(V) -\ P(A \cap V) =$$

$$=\ P(A) +\ P(V) -\ P(V) \cdot P\left(\frac{A}{V}\right) =\ 0,1\ +\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot 0,2\ =\ 0,1\ +\ 0,3333\ -\ 0,0667\ =$$

$$=\ 0,4333\ -\ 0,0667\ =\ \underline{0,3666}.$$

****

4º) El tiempo de vida de una determinada especia de tortuga es una variable aleatoria que sigue una ley Normal de desviación típica 10 años. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 tortugas y se obtienen los siguientes valores: 46, 38, 59, 29, 34, 32, 38, 21, 44 y 34.

a) Determine un intervalo de confianza, al 95 %, para la vida media de dicha especie de tortugas.

b) Calcule el tamaño mínimo que debe tener una muestra para que el error de estimación de la vida media no sea superior a 5 años, con un nivel de confianza del 98 %.

----

a)

$$\overline{x} = \frac{46+38+59+29+34+32+38+21+44+34}{10} = \frac{375}{10} = 37,5.$$

$$\alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$$

$$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$$

Datos: $n = 10;\ \ \overline{x} = 37,5;\ \sigma = 10;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(37,5 - 1,96\cdot\frac{10}{\sqrt{10}};\ 37,5 + 1,96\cdot\frac{10}{\sqrt{10}}\right);$$

$(37,5 - 1,96\cdot 3,1623;\ 37,5 + 1,96\cdot 3,1623);\ (37,5 - 6,1981;\ 37,5 + 6,1981)$.

$$\underline{I.\ C._{95\ \%} = (31,3019;\ 43,6981).}$$

b)

$$\alpha = 1 - 0,98 = 0,02 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,01} = 1,28.$$

$$(1 - 0,01 = 0,9000 \rightarrow z = 1,28).$$

Datos: $\sigma = 10;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,28;\ \ E = 5.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1,28 \cdot \frac{10}{5}\right)^2 =$

$= (1,28 \cdot 2)^2 = 2,56^2 = 6,55.$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 6\ tortugas}.$

****

OPCIÓN B

1º) a) Represente el recinto definido por las siguientes inecuaciones: $x + y \leq 3,\ 2x + y \geq 4,\ y \geq -1$.

b) Razone si el punto $P(2,\ 1)$ pertenece al recinto anterior.

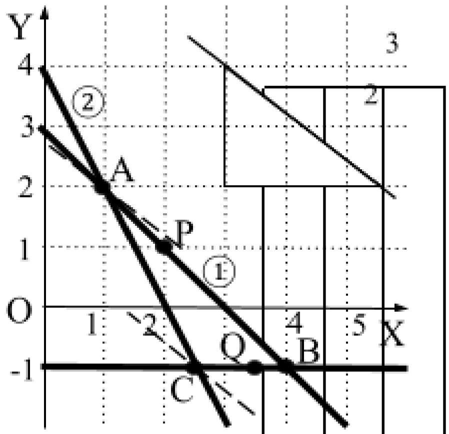
c) Obtenga los vértices del recinto y los valores mínimo y máximo de la función de objetivos $f(x,\ y) = 5x + 4y$ en ese recinto, indicando en que puntos se alcanzan.

d) Razone si la función f puede alcanzar el valor 9 en el recinto anterior.

----

a)

①$\Rightarrow x + y \leq 3 \Rightarrow y \leq 3 - x \Rightarrow$



x	0	3
y	3	0

$\Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

②$\Rightarrow 2x + y \geq 4 \Rightarrow y \geq 4 - 2x \Rightarrow$

x	0	2
y	4	0

$\Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow No$

b)

$P(2, 1) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y \leq 3 \\ 2x + y \geq 4 \\ y \geq -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \quad 2 + 1 \leq 3 \rightarrow Si \quad 2 \cdot 2 + 1 \geq 4 \rightarrow Si$

.

c)

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 3 \\ 2x + y = 4 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} -x - y = -3 \\ 2x + y = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \underline{A(1,\ 2)}$

.

$B \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 3 \\ y = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{B(4,\ -1)}.$

$C \Rightarrow 2x + y = 4 \quad y = -1 \Big\} \Rightarrow \underline{C\left(\frac{5}{2},\ -1\right)}.$

La función de objetivos es $f(x,\ y) = 5x + 4y$.

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow (1,\ 2) = 5 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 5 + 8 = 13.$

$B \Rightarrow (4,\ -1) = 5 \cdot 4 - 4 \cdot 1 = 20 - 4 = 16.$

$C \Rightarrow \left(\frac{5}{2},\ -1\right) = 5 \cdot \frac{5}{2} - 4 \cdot 1 = \frac{25}{2} - 4 = \frac{25-8}{2} = \frac{17}{2} = 8,5.$

Los puntos máximo y mínimo se produce A en el punto C.

También se hubieran obtenido los puntos A y C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = 4x + 5y = 0 \Rightarrow y = -\frac{4}{5}x = -\frac{2}{2,5} \Rightarrow m = -\frac{2}{2,5}.$

$d)$

Considerando real la función de objetivos, como es el caso, ésta alcanza todos los valores comprendidos entre el máximo y el mínimo, por lo tanto, existen valores reales de x e y para los cuales el valor de la función es 9.

Por ejemplo, para $y = -1$:

$f(x,\ -1) = 9 \Rightarrow 4x + 5 \cdot (-1) = 9;\ \ 4x - 5 = 9;\ \ 4x = 14 \Rightarrow x = 3,5.$

$\underline{Cumple\ la\ condición\ pedida\ el\ punto\ Q(3,5;\ -1)}.$

****

2º) Se consideran las siguientes funciones: $f(x) = \frac{5x-16}{x}$ y $g(x) = x^2$.

a) Determine la abscisa del punto donde se verifique $f'(x) = g'(x)$.

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de cada función en el punto de abscisa $x = 2$ y determine el punto de corte de ambas rectas tangentes, si existe.

----

a)

$$f'(x) = \frac{5x-(5x-16)\cdot 1}{x^2} = \frac{5x-5x+16}{x^2} = \frac{16}{x^2}. \qquad g'(x) = 2x.$$

$$f'(x) = g'(x) \Rightarrow \frac{16}{x^2} = 2x;\ \ x^3 = 8 \Rightarrow \underline{x = 2}.$$

b)

El valor de la pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

$$f'(x) = \frac{16}{x^2}. \qquad m_f = f'(2) = \frac{16}{2^2} = \frac{16}{4} = 4.$$

El punto de tangencia es el siguiente:

$$f(2) = \frac{5\cdot 2-16}{2} = \frac{10-16}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \Rightarrow P(2,\ -3).$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - (-3) = 4\cdot(x - 2);\ \ y + 3 = 4x - 8.$$

$$\underline{Recta\ tangente\ a\ f(x)\ para\ x = 2 \Rightarrow t_f \equiv 4x - y - 11 = 0.}$$

$$g'(x) = 2x. \qquad m_g = g'(2) = 2\cdot 2 = 4.$$

El punto de tangencia es el siguiente:

$$g(2) = 2^2 = 4 \Rightarrow Q(2,\ 4).$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 4 = 4\cdot(x - 2) = 4x - 8.$$

$$\underline{Recta\ tangente\ a\ g(x)\ para\ x = 2 \Rightarrow t_g \equiv 4x - y - 4 = 0.}$$

$$\underline{No\ existe\ el\ punto\ de\ corte\ por\ ser\ paralelas\ t_f\ y\ t_g.}$$

****

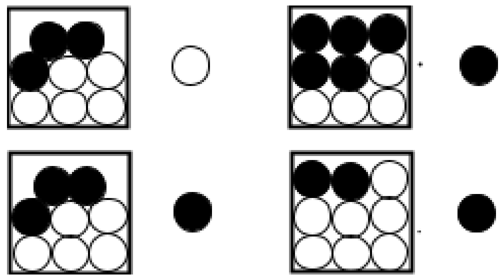
3º) Una urna contiene 5 bolas blancas y tres negras. Se extrae una bola y se reemplaza por dos bolas del otro color. A continuación se extrae una segunda bola.

a) Calcule la probabilidad de que la segunda bola extraída sea negra.

b) Halle la probabilidad de que la primera haya sido blanca, sabiendo que la segunda también ha sido blanca.

----

a)



$$P = P\left(N_2\right) = P\left(B_1 N_2\right) + P\left(N_1 N_2\right) =$$

$$= P\left(B_1\right)\cdot P\left(N_2/B_1\right) + P\left(N_1\right)\cdot P\left(N_2/N_1\right) = \frac{5}{8}\cdot\frac{5}{9} + \frac{3}{8}\cdot\frac{2}{9} = \frac{25}{72} + \frac{6}{72} = \underline{\frac{31}{72} = 0,4306}$$

.

b)

$$P = P\left(B_1/B_2\right) = \frac{P\left(B_1 \cap B_2\right)}{P\left(B_2\right)} = \frac{P\left(B_1\right)\cdot P\left(B_2/B_1\right)}{1-P\left(N_2\right)} = \frac{\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{9}}{1-\frac{31}{72}} = \frac{20}{72-31} = \underline{\frac{20}{41} = 0,4878.}$$

****

4º) En una muestra, elegida al azar, de 100 estudiantes de una Universidad, se ha observado que 25 desayunan en la cafetería del campus.

a) Determine, con un nivel de confianza del 95 %, un intervalo de confianza para estimar la proporción de estudiantes de esa Universidad que desayunan en la cafetería.

b) Si la proporción de estudiantes de esa Universidad que desayunan en la cafetería del campus en una muestra aleatoria es de 0,2, y el error cometido en la estimación ha sido inferior a 0,03, con un nivel de confianza del 92,5 % calcule el tamaño mínimo de la muestra.

----

a)

Nivel de confianza del 95 %.

$\alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$

$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$

Datos: $p = 0,25;\ \ q = 0,75;\ \ n = 100;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q $y\ n$, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}};\ p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right).$

$$\left(0'25 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,25 \cdot 0,75}{100}};\ 0'25 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,25 \cdot 0,75}{100}}\right);$$

$$\left(0'25 - 1,96 \cdot 0'0433;\ 0'25 + 1,96 \cdot 0'0433\right);\ \left(0'25 - 0'0849;\ 0'25 + 0'0849\right).$$

$$\underline{I.\ C._{95\ \%} = \left(0'1651;\ 0'3349\right).}$$

b)

Nivel de confianza del 92,5 %.

$\alpha = 1 - 0,925 = 0,075 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,0375} = 1,78.$

$(1 - 0,0375 = 0,9625 \rightarrow z = 1,78).$

$Datos$: $p = 0,2;\ \ q = 1 - 0,2 = 0,8;\ \ E = 0,03;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,78.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sqrt{p \cdot q}}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sqrt{p \cdot q}}{E}\right)^2 =$

$$= \left(1,78 \cdot \frac{\sqrt{0{,}2 \cdot 0{,}8}}{0{,}03}\right)^2 = \left(1,78 \cdot \frac{\sqrt{0{,}16}}{0{,}03}\right)^2 = \left(1,78 \cdot \frac{0{,}4}{0{,}03}\right)^2 = (1,78 \cdot 13,3333)^2 =$$

$$= 23,7333^2 = 563,27.$$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ es\ de\ 564\ estudiantes}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE ARAGÓN

JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B.

OPCIÓN A

1º) Una empresa de transporte va a realizar el transporte de animales de compañía entre dos ciudades. Para ello, va a alquilar furgonetas especializadas en este tipo de transporte, que pueden ser de dos tipos, A y B. Cada furgoneta de tipo A tiene 4 jaulas individuales para perros y 3 jaulas individuales para gatos, mientras que cada furgoneta de tipo B tiene 2 jaulas individuales para perros y 6 jaulas individuales para gatos. El coste de alquiler de cada furgoneta de tipo A es de 240 euros y el coste de alquiler de cada furgoneta B es de 400 euros. Además, por razones comerciales, el número de tipo B debe ser mayor o igual que el número de furgonetas de tipo A. La empresa tiene que garantizar espacio para, al menos, 24 perros y 54 gatos. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántas furgonetas de cada tipo debe alquilar para que el coste sea mínimo. ¿Cuál es el valor de ese coste mínimo?

Sean x e y el nº de furgonetas de los tipos A y B que se alquilan, respectivamente.

Las condiciones del ejercicio se establecen en el siguiente sistema de inecuaciones:

$$y \geq x \quad 4x + 2y \geq 24 \quad 3x + 6y \geq 54 \qquad x \geq y \geq 0 \}$$
$$y \geq x \quad 2x + y \geq 12 \quad x + 2y \geq 18 \qquad x \geq y \geq 0 \}.$$

La función de rendimiento es $f(x, y) = 240x + 400y$.

x	0	12
y	0	12

① $\Rightarrow y \geq x \Rightarrow P(2, 0) \rightarrow No.$

x	0	6
y	12	0

② $\Rightarrow 2x + y \geq 12 \Rightarrow y \geq 12 - 2x \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow No.$

x	0	18
y	9	0

③$\Rightarrow x + 2y \geq 18 \Rightarrow y \geq \frac{18-x}{2} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow No.$

La región factible es la zona sombreada de la figura siguiente.

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

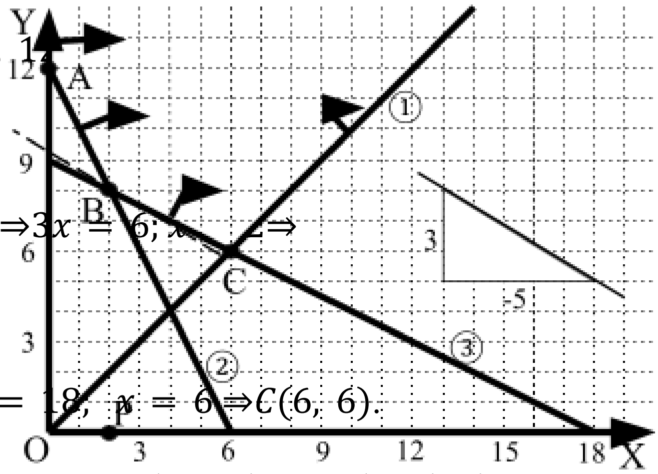
$A \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ 2x + y = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow A(0,\ 12).$

$B \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y = 12 \\ x + 2y = 18 \end{array} \right\}$

$\left. \begin{array}{l} 4x + 2y = 24 \\ -x - 2y = -18 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x = 6;\ x = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow B(2,\ 8).$

$C \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = y \\ x + 2y = 18 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x = 18;\ x = 6 \Rightarrow C(6,\ 6).$



Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 12) = 240 \cdot 0 + 400 \cdot 12 = 0 + 4.800 = 4.800.$

$B \Rightarrow f(2,\ 8) = 240 \cdot 2 + 400 \cdot 8 = 480 + 3.200 = 3.680.$

$C \Rightarrow f(6,\ 6) = 240 \cdot 6 + 400 \cdot 6 = 1.440 + 2.400 = 3.840.$

El valor mínimo se produce en el punto B.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = 240x + 400y = 0 \Rightarrow y = -\frac{240}{400}x = -\frac{3}{5} \Rightarrow m = -\frac{3}{5}.$

$\underline{El\ costo\ mínimo\ se\ produce\ alquilando\ 2\ furgonetas\ tipo\ A\ y\ 8\ tipo\ B.}$

$\underline{El\ coste\ mínimo\ es\ de\ 3.680\ euros.}$

****

2º) $a)$ Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + 2x + 2$, con $x\in R$, encontrar, si existen, a y b tal que f tenga un máximo relativo en $x =- 1$ con valor $f(- 1) = 2$.

b) Calcular: $I = \int_1^2 \left(7e^{3x} + \frac{4}{3}x^2 - 3\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)\cdot dx.$

$a)$

Por contener al punto $P(- 1,\ 2)$:

$f(- 1) = 2 \Rightarrow a\cdot(- 1)^3 + b\cdot(- 1)^2 + 2\cdot(- 1) + 2 = 2;\ \ - a + b - 2 = 0;$

$a - b =- 2.$ (1)

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 2.$

Por tener un máximo relativo en $P(- 1,\ 2)$:

$f'(- 1) = 0 \Rightarrow 3a\cdot(- 1)^2 + 2b\cdot(- 1) + 2 = 0;\ \ 3a - 2b =- 2.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$\left.\begin{matrix} a - b =- 2 \\ 3a - 2b =- 2 \end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix} - 2a + 2b = 4 \\ 3a - 2b =- 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{a = 2,\ b =}$

.

b)

$I = \int_1^2 \left(7e^{3x} + \frac{4}{3}x^2 - 3\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)\cdot dx.$

$\int 7e^{3x}\cdot dx = 7\cdot\int e^{3x}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} 3x = t \\ dx = \frac{1}{3}dt \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{7}{3}\cdot e^t = \frac{7}{3}\cdot e^{3x}.$

$I = \left[\frac{7}{3}\cdot e^{3x} + \frac{4}{3}\cdot\frac{x^3}{3} - 3\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + L|x|\right]_1^2 = \left[\frac{7}{3}\cdot e^{3x} + \frac{4}{9}x^3 - 2x\sqrt{x} + L|x|\right]_1^2 =$

$= \left(\frac{7}{3}\cdot e^{3\cdot 2} + \frac{4}{9}\cdot 2^3 - 2\cdot 2\sqrt{2} + L2\right) - \left(\frac{7}{3}\cdot e^{3\cdot 1} + \frac{4}{9}\cdot 1^3 - 2\cdot 1\sqrt{1} + L1\right) =$

$= \frac{7}{3}\cdot e^6 + \frac{32}{9} - 4\sqrt{2} + L2 - \frac{7}{3}\cdot e^3 - \frac{4}{9} + 2 - 0 = \frac{7e^3}{3}\left(e^3 - 1\right) + \frac{46}{9} - 4\sqrt{2} + L2$

.

$$I = \int_1^2 \left(7e^{3x} + \frac{4}{3}x^2 - 3\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)\cdot dx = \frac{7e^3}{3}\left(e^3 - 1\right) + \frac{46}{9} - 4\sqrt{2} + L2.$$

****

3º) En una urna hay 2 bolas blancas, 4 bolas negras y 5 bolas rojas. Se extraen dos bolas de la urna, una tras otra sin reemplazamiento. Calcular:

a) La probabilidad de que las dos sean rojas.

b) La probabilidad de que sean de distinto color.

c) La probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja.

d) Sea A el suceso “la primera bola extraída es roja” y B el suceso “las dos bolas son del mismo color”, ¿son los dos sucesos A y B independientes?

----

a)

$$P = \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} = \underline{\frac{2}{11} = 0,182}.$$

b)

La probabilidad de que sean de distinto color es igual a la unidad menos la probabilidad de que sean del mismo color:

$$P = 1 - \left[P_{BB} + P_{NN} + P_{RR}\right] = 1 - \left(\frac{2}{11} \cdot \frac{1}{10} + \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} + \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10}\right) =$$

$$= 1 - \frac{2+12+20}{110} = 1 - \frac{34}{110} = 1 - \frac{17}{55} = \frac{55-17}{55} = \underline{\frac{38}{55} = 0,691}.$$

c)

$$P = P_{RR} + P_{\overline{R}R} = \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} + \frac{2+4}{11} \cdot \frac{5}{10} = \frac{2}{11} + \frac{3}{11} = \underline{\frac{5}{11} = 0,455}.$$

d)

$$P(A) = \frac{5}{11}.$$

$$P(B) = P_{BB} + P_{NN} + P_{RR} = \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{10} + \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} + \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} = \frac{2+12+20}{110} = \frac{34}{110} = \frac{17}{55}$$

.

$$P(A \cap B) = P_{RR} = \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} = \frac{2}{11}.$$

Dos sucesos A y B son independientes cuando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$:

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{5}{11} \cdot \frac{17}{55} = \frac{17}{121} \neq P(A \cap B) = \frac{2}{11}.$$

$\underline{\textit{Por lo expuesto anteriormente los sucesos A y B no son independientes}}.$

****

<u>OPCIÓN B</u>

1º) Una empresa invirtió un total de 10.000 euros en tres fondos A, B y C. El beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo A fue de 0,05 euros, el beneficio que obtuvo por cada euros invertido en el fondo B fue de 0,1 euros y el beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo C fue de 0,02 euros. Con las inversiones realizadas en los fondos, la empresa obtuvo un beneficio total de 497 euros. Además, la inversión en el fondo A fue igual al triple de la suma de las inversiones en los fondos B y C. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales para determinar cuánto dinero invirtió en cada fondo.

Sean $x,\ y,\ z$ las inversiones en los fondos A, B y C , respectivamente.

Del enunciado se deduce el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x + y + z = 10.000\ 0,05x + 0,1y + 0,02z = 497 \qquad x = 3($$

.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|10.000\ 1\ 1\ 49.700\ 10\ 2\ 0\ -3\ -3\ |}{|1\ 1\ 1\ 5\ 10\ 2\ 1\ -3\ -3\ |} = \frac{-300.000-149.100+60.000+149.100}{-30-15+2-10+6+15} = \frac{-240.000}{-32} = 7.500$$

.

$$y = \frac{|1\ 10.000\ 1\ 5\ 49.700\ 2\ 1\ 0\ -3\ |}{-32} = \frac{-149.100+20.000-49.700+150.000}{-32} = \frac{-28.800}{-32} = 900$$

.

$$z = \frac{|1\ 1\ 10.000\ 5\ 10\ 49.700\ 1\ -3\ 0\ |}{-32} = \frac{-150.000+49.700-100.000+149.100}{-32} = \frac{-51.200}{-32} = 1.600$$

.

<u>*La empresa invirtió 7.500 euros en A, 900 euros en B y 1.600 euros en C.*</u>

****

2º) Dada la función $f(x) = \frac{x^2-4}{2x-5}$, calcular:

a) Dominio de f.

b) ¿Para qué valores de x es la función positiva?

c) Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

d) Sus máximos y mínimos relativos, si existen.

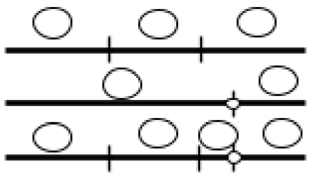
----

a)

Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$\underline{D(f) \Rightarrow R - \left\{\frac{5}{2}\right\}}.$$

b)



Se resuelve de forma gráfica el apartado mediante la figura adjunta.

De la observación de la figura se deducen los periodos donde la función es positiva, que son:

$$\underline{f(x) > 0,\ \forall x \in (-2,\ 2) \cup \left(\frac{5}{2},\ +\infty\right)}.$$

c)

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = f(x) = \frac{x^2-4}{2x-5} = \infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$2x - 5 = 0 \Rightarrow \underline{La\ recta\ x = \frac{5}{2} = 2,5\ es\ asíntota\ vertical.}$$

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \frac{f(x)}{x} \text{ y } n = \left[\frac{f(x)}{x} - mx\right].$$

$$m = \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{x^2-4}{2x-5}}{x} = \frac{x^2-4}{2x^2-5x} = \frac{1}{2}.$$

$$n = \left[\frac{f(x)}{x} - mx\right] = \left(\frac{x^2-4}{2x-5} - \frac{x}{2}\right)\frac{2x^2-8-2x^2+5x}{4x-10} =$$

$$\frac{5x-8}{4x-10} = \frac{5}{4}.$$

$$\underline{La\ recta\ y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}\ es\ asíntota\ oblicua\ de\ la\ función.}$$

$d)$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto. Esta condición necesaria no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(2x-5)-\left(x^2-4\right)\cdot 2}{(2x-5)^2} = \frac{4x^2-10x-2x^2+8}{(2x-5)^2} = \frac{2x^2-10x+8}{(2x-5)^2} = \frac{2\cdot\left(x^2-5x+4\right)}{(2x-5)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2\cdot\left(x^2-5x+4\right)}{(2x-5)^2} = 0;\ \ 2\cdot\left(x^2 - 5x + 4\right) = 0;\ \ x^2 - 5x + 4 = 0;$$

$$x = \frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2} = \frac{5\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{5\pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 4.$$

$$f''(x) = \frac{(4x-10)\cdot(2x-5)^2-2\cdot\left(x^2-5x+4\right)\cdot[2\cdot(2x-5)\cdot 2]}{(2x-5)^4} = \frac{(4x-10)\cdot(2x-5)-8\cdot\left(x^2-5x+4\right)}{(2x-5)^3} =$$

$$= \frac{8x^2-20x-20x+50-8x^2+40x-32}{(2x-5)^3} = \frac{18}{(2x-5)^3}.$$

$$f''(1) = \frac{18}{(2-5)^3} < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 1.$$

$$f(1) = \frac{1^2-4}{2\cdot 1-5} = \frac{-3}{-3} = 1 \Rightarrow \underline{Máximo: A(1,\ 1)}.$$

$$f''(4) = \frac{18}{(2\cdot 4-5)^3} > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 4.$$

$$f(4) = \frac{4^2-4}{2\cdot 4-5} = \frac{12}{3} = 4 \Rightarrow \underline{Mínimo: B(4,\ 4)}.$$

****

3º) a) Se sabe que la cantidad de hidratos de carbono de las barritas energéticas de una marca es una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica 1,5 gramos. Elegimos una muestra aleatoria simple de 75 barritas, les medimos la cantidad de hidratos de carbono y calculamos su promedio, que resulta ser igual a 23,8 gramos. Calcular el intervalo de confianza al 98 % para la media de la cantidad de hidratos de carbono en las barritas de esa marca.

b) Un opositor se sabe 28 de los 40 temas de un examen. En el examen se eligen al azar 2 de los 40 temas. ¿Cuál es la probabilidad de que el opositor se sepa los dos temas? ¿Cuál es la probabilidad de se sepa al menos uno de los dos temas?

----

a)

Para un nivel de confianza del 98 % es:

$$1-\alpha=0,98\rightarrow\alpha=1-0,98=0,02\rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0,01}=2,33.$$

$$1-0,01=0,99\rightarrow z=2,33).$$

Datos: $\overline{x}=23,8;\ \ n=75;\ \ \sigma=1,5;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=2,33.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(23,8-2,33\cdot\frac{1,5}{\sqrt{75}};\ 23,8+2,33\cdot\frac{1,5}{\sqrt{75}}\right);$$

$$(23,8-2,33\cdot 0,1732;\ 23,8+2,33\cdot 0,1732);\ \ (23,8-0,4036;\ 23,8+0,4036).$$

$$\underline{I.\ C._{98\ \%}\ (23,3964;\ 24,2036).}$$

b)

Probabilidad de que se sepa los dos temas:

$$P=\frac{\binom{28}{2}}{\binom{40}{2}}=\frac{\frac{28!}{(28-2)!\cdot 2!}}{\frac{40!}{(40-2)!\cdot 2!}}=\frac{\frac{28\cdot 27\cdot 26!}{26!}}{\frac{40\cdot 39\cdot 38!}{38!}}=\frac{28\cdot 27}{40\cdot 39}=\frac{7\cdot 9}{10\cdot 13}=\underline{\frac{63}{130}=0,4846.}$$

Probabilidad de que se sepa al menos uno de los dos temas:

La probabilidad pedida es igual que la unidad menos la probabilidad de que no se sepa ninguno de los dos temas:

$$P = 1 - \frac{\binom{40-28}{2}}{\binom{40}{2}} = 1 - \frac{\binom{12}{2}}{\binom{40}{2}} = 1 - \frac{\frac{12!}{(12-2)!\cdot 2!}}{\frac{40!}{(40-2)!\cdot 2!}} = 1 - \frac{\frac{12\cdot 11\cdot 10!}{10!}}{\frac{40\cdot 39\cdot 38!}{38!}} = 1 - \frac{12\cdot 11}{40\cdot 39} =$$

$$= 1 - \frac{3\cdot 11}{10\cdot 39} = 1 - \frac{1\cdot 11}{10\cdot 13} = 1 - \frac{11}{130} = \frac{130-11}{130} = \underline{\frac{119}{130} = 0,9154}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE ARAGÓN

SEPTIEMBRE – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B.

OPCIÓN A

1º) Dadas las matrices: $A = (3\ 1\ 0\ \ -1\ 2\ 3\ )$, $B = (1\ 0\ 5\ 2\ 1\ \ -1\ \ -1\ 4\ 0\ )$, $C = (1\ \ -1\ 0\ 2\ 3\ 1\ \ -5\ 2\ 0\ )$ y $D = (1\ 0\ 4\ 2\ 3\ 0\ 1\ \ -1\ 2\ )$.

$a)$ ¿Se puede calcular $A \cdot B$? Si es así, calcularla; si no se puede, razonar por qué.

$b)$ ¿Se puede calcular $B \cdot A$? Si es así, calcularla; si no se puede, razonar por qué.

$c)$ Calcular, si existe, la matriz inversa de C.

$d)$ Encontrar, si existe, una matriz X tal que $2C + 4X = 3D$.

$a)$

Para que se puedan multiplicar dos matrices es necesario que el número de columnas de la primera sea igual que el número de filas de la segunda teniendo la matriz producto las filas de la primera y las columnas de la segunda:

$$A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = C_{m\times p}.$$

$$\underline{El\ producto\ A\cdot B\ es\ posible\ por\ ser\ A_{2\times 3} \cdot B_{3\times 3} = P_{2\times 3}}.$$

$$P = A\cdot B = (3\ 1\ 0\ \ -1\ 2\ 3\ )\cdot(1\ 0\ 5\ 2\ 1\ \ -1\ \ -1\ 4\ 0\ ) = \underline{(5\ 1\ 14\ 0\ 14\ \ -7\ )}$$

.

$b)$

Por lo expuesto en el apartado anterior:

$$\underline{No\ es\ posible\ el\ producto\ B\cdot A\ es\ posible\ por\ ser\ B_{3\times 3} \cdot A_{2\times 3}}.$$

$c)$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$|C| = |1\ \ -\ 1\ 0\ 2\ 3\ 1\ \ -\ 5\ 2\ 0\ | = 5\ -\ 2\ =\ 3 \neq 0 \Rightarrow \underline{La\ matriz\ C\ es\ invertible}.$

La inversa de C se obtiene por la adjunta de la traspuesta: $C^{-1} = \frac{Adj.\ de\ C^t}{|C|}$.

$|C| = 3.$ $\qquad C^t = (1\ 2\ \ -\ 5\ \ -\ 1\ 3\ 2\ 0\ 1\ 0\ ).$

$Adj.\ de\ C^t = (|3\ 2\ 1\ 0\ |\ \ -|-\ 1\ 2\ 0\ 0\ |\ |-\ 1\ 2\ 0\ 1\ |\ \ -|2\ \ -\ 5\ 1\ 0\ |\ |1\ 5\ 0\ 0\ |\ \ -|1$

$$\Rightarrow \underline{C^{-1} = \frac{1}{3}\cdot(-\ 2\ 0\ \ -\ 1\ \ -\ 5\ 0\ \ -\ 1\ 19\ 3\ 5\ ).}$$

$d)$

$2C + 4X = 3D;\ \ 4X = 3D - 2C \Rightarrow \underline{X = \frac{1}{4}\cdot(3D - 2C).}$

$X = \frac{1}{4}\cdot[3\cdot(1\ 0\ 4\ 2\ 3\ 0\ 1\ \ -\ 1\ 2\ ) - 2\cdot(1\ \ -\ 1\ 0\ 2\ 3\ 1\ \ -\ 5\ 2\ 0\ )] =$

$= \frac{1}{4}\cdot[(3\ 0\ 12\ 6\ 9\ 0\ 3\ \ -\ 3\ 6\ ) - (2\ \ -\ 2\ 0\ 4\ 6\ 2\ \ -\ 10\ 4\ 0\ )] = \frac{1}{4}\cdot(1\ 2\ 12\ 2\ 3\ \ -\ 2\ 13\ \ -$
.

$$\underline{X = \frac{1}{4}\cdot(1\ 2\ 12\ 2\ 3\ \ -\ 2\ 13\ \ -\ 7\ 6\ ).}$$

****

2º) Los ingresos por ventas (en millones de euros) que obtiene una empresa dependen del gasto que haga en publicidad, de forma que, si gasta x millones de euros, los ingresos por ventas son iguales a: $V(x) = \frac{21x+12}{x+1}$.

a) Encontrar, si existe, el valor o valores de x para los cuales los ingresos por ventas son iguales a 18 millones de euros.

b) Calcular $V(x)$. ¿Cómo se puede interpretar el resultado?

c) Si definimos el beneficio por ventas como la diferencia entre los ingresos por ventas y el gasto en publicidad (esto es, $B(x) = V(x) - x$), calcular el máximo beneficio que se puede alcanzar cuando $x \in [0,\ 5]$.

----

a)

$$V(x) = 18 \Rightarrow \frac{21x+12}{x+1} = 18;\ \ 21x + 12 = 18x + 18;\ \ 3x = 6;\ \ x = 2.$$

$$\underline{Los\ ingresos\ son\ de\ 18\ millones\ de\ euros\ para\ x = 2.}$$

b)

$$V(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{21x+12}{x+1} = 21.$$

$$\underline{Con\ el\ tiempo\ los\ ingresos\ se\ estabilizan\ en\ 21\ millones\ de\ euros.}$$

c)

$$B(x) = V(x) - x = \frac{21x+12}{x+1} - x = \frac{21x+12-x^2-x}{x+1} = \frac{-x^2+20x+12}{x+1}.$$

$$B(0) = \frac{12}{1} = 12.$$

$$B(5) = \frac{-5^2+20\cdot 5+12}{5+1} = \frac{-25+100+12}{6} = \frac{87}{6} = 14,5.$$

$$B'(x) = \frac{(-2x+20)\cdot(x+1)-\left(-x^2+20x+12\right)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{-2x^2-2x+20x+20+x^2-20x-12}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{-x^2-2x+8}{(x+1)^2}.$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x^2-2x+8}{(x+1)^2} = 0;\ \ -x^2 - 2x + 8 = 0;\ x^2 + 2x - 8 = 0;$$

$$x = \frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{36}}{2} = \frac{-2\pm 6}{2} = -1\pm 3 \Rightarrow x_1 = -4,\ x_2 = 2.\quad (-4 \notin [0,\ 5]) \Rightarrow$$

Solución $x = 2$.

Máximo o mínimo relativo para $x = 2$.

$B(2) = \frac{-2^2+20\cdot 2+12}{2+1} = \frac{-4+40+12}{3} = \frac{48}{3} = 16$. (Para $x = 2$ es máximo).

$\underline{El\ máximo\ beneficio\ en\ x \in [0,\ 5]\ es\ de\ 16\ millones\ de\ euros.}$

****

3º) En la Facultad de Economía de una universidad se pueden estudiar 3 grados: Grado en Contabilidad, Grado en Economía y Grado en Empresariales. En todos los grados hay un grupo de mañana y un grupo de tarde. La distribución de los estudiantes en cada uno de los grados, según grupo de mañana y de tarde es:

	Contabilidad	Economía	Empresariales
Mañana	395	278	538
Tarde	240	306	486

a) Se elige al azar un estudiante de la Facultad. ¿Cuál es la probabilidad de que sea del grupo de tarde del Grado de Contabilidad?

b) Se elige al azar un estudiante del grupo de tarde. ¿Cuál es la probabilidad de que sea del grupo de tarde del Grado de Contabilidad?

c) Se elige al azar un estudiante de la Facultad. Sea A el suceso "es del Grado en Contabilidad" y B el suceso "es del grupo de tarde", ¿son independientes los sucesos A y B?

d) Se eligen al azar dos estudiantes distintos de la Facultad. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos sean del grupo de tarde?

e) Se eligen al azar dos estudiantes distintos de la Facultad. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo grado?

$$Total\ mañana \Rightarrow M = 395 + 287 + 538 = 1.220.$$

$$Total\ tarde \Rightarrow T = 240 + 306 + 486 = 1.032.$$

$$Total\ alumnos \Rightarrow TA = M + T = 1.220 + 1.032 = 2.252.$$

$$Total\ contabilidad \Rightarrow CON = 395 + 240 = 635.$$

$$Total\ economia \Rightarrow ECO = 278 + 306 = 584.$$

$$Total\ empresariales \Rightarrow EMP = 538 + 486 = 1.024.$$

a)

$$P = \frac{T_{CON}}{TA} = \frac{240}{2.252} = \underline{0,1066}.$$

b)

$$P = \frac{T_{CON}}{T} = \frac{240}{1.032} = \underline{0,2326}.$$

$c)$

$$P(A) = \frac{CON}{TA} = \frac{635}{2.252} = 0,2820. \qquad P(B) = \frac{T}{TA} = \frac{1.032}{2.252} = 0,4583.$$

Dos sucesos A y B son independientes cuando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

El suceso intersección de A y B es "que sea del Grado de Contabilidad de tarde":

$$P(A \cap B) = \frac{T_{CON}}{TA} = \frac{240}{2.252} = 0,1066.$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{CON}{TA} \cdot \frac{T}{TA} = \frac{635}{2.252} \cdot \frac{1.032}{2.252} = 0,2820 \cdot 0,4583 = 0,1292 \neq 0,1066$$

.

$$\underline{Los\ sucesos\ A\ y\ B\ no\ son\ independientes}.$$

$d)$

$$P = \frac{T}{TA} \cdot \frac{T-1}{TA-1} = \frac{1.032}{2.252} \cdot \frac{1.031}{2.251} = \frac{1063992}{5069252} = \underline{0,2099}.$$

$e)$

$$P = P(CON, CON) + P(ECO, ECO) + P(EMP, EMP) =$$

$$= \frac{CON}{TA} \cdot \frac{CON-1}{TA-1} + \frac{ECO}{TA} \cdot \frac{ECO-1}{TA-1} + \frac{EMP}{TA} \cdot \frac{EMP-1}{TA-1} =$$

$$\frac{635}{2.252} \cdot \frac{634}{2.251} + \frac{584}{2.252} \cdot \frac{583}{2.251} + \frac{1.024}{2.252} \cdot \frac{1.023}{2.251} = \frac{402.590+340.472+1.047.552}{2.252 \cdot 2.251} = \frac{1.790.614}{5.069.252} =$$

$$= \underline{0,3532}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Una asociación está organizando un viaje a un parque temático para sus socios. Para comprar las entradas, la asociación ha llegado a un acuerdo con la dirección del parque, de forma que puede comprar dos tipos de entradas, Grupal-A y Grupal-B con las siguientes características:

--- Cada entrada del tipo Grupal-A permite entrar al parque a 2 adultos y 3 niños, y cuesta 85 euros.
--- Cada entrada del tipo Grupal-B permite entrar al parque a 4 adultos y 12 niños, y cuesta 230 euros.
--- Deben comprarse, al menos, 4 entradas del Grupal-A y 2 entradas del Grupal-B.

La asociación quiere que entren al parque, al menos, 40 adultos y 96 niños. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántas entradas de cada tipo Grupal-A y Grupal-B debe comprar para minimizar el coste total. ¿Cuál es el valor de ese coste mínimo?

Siendo x, y los números de entradas Grupal-A y Grupal-B que compra la asociación, respectivamente.

Las condiciones del problema se establecen en el siguiente sistema de inecuaciones:

$2x + 4y \geq 40 \quad 3x + 12y \leq 96 \quad x \geq 4;\ y \geq 2 \}$ $o\ mejor$: $\ x + 2y \geq 20 \quad x + 4y \leq 24 \quad x \geq 4;\ y \geq$
.

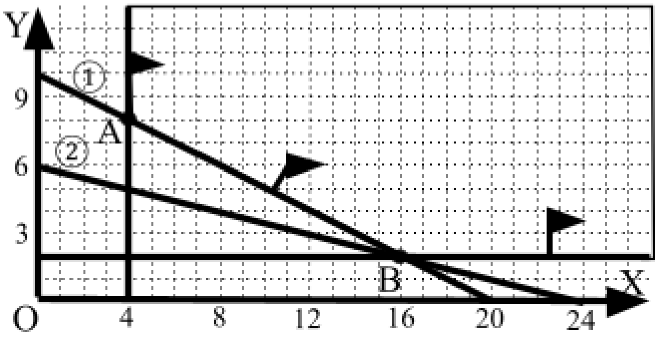
x	0	20
y	10	0

$①\Rightarrow x + 2y \geq 20 \Rightarrow y \geq \frac{20-x}{2} \Rightarrow O \rightarrow No.$

x	0	24
y	6	0

$②\Rightarrow x + 4y \geq 24 \Rightarrow y \leq \frac{24-x}{4} \Rightarrow O \rightarrow No.$

La zona factible es la zona que aparece sombreada en la figura adjunta.



Los vértices de la región factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \quad x = 4 \ x + 2y = 20 \} \Rightarrow A(4,\ 8).$

$B \Rightarrow x + 2y = 20 \ x + 4y = 24 \} \quad -x - 2y = -20 \quad x + 4y = 24 \} \Rightarrow 2y = 4$
.

La función de objetivos es $f(x,\ y) = 85x + 230y$.

Los valores de cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:
$A \Rightarrow f(4,\ 8) = 85 \cdot 4 + 230 \cdot 8 = 340 + 1.840 = 2.180$.

$B \Rightarrow f(16,\ 2) = 85 \cdot 16 + 230 \cdot 2 = 1.360 + 460 = 1.820$.

El máximo se produce en el punto $B(16,\ 2)$.

$\underline{El\ coste\ es\ mínimo\ comprando\ 16\ entradas\ Grupal - A\ y\ 2\ Grupal - B}$.

$\underline{El\ coste\ mínimo\ es\ de\ 1.820\ euros}$.

****

2º) Dada la función, definida en $x\in R$, $f(x) = \{ \quad ax + 2 \quad si \quad x <- 1\, 18 - 4x + x^{2} \quad si \quad -1\leq x < 3\, x^{3} - 9x^{2} + 15x + 20$
.

a) Calcular a sabiendo que f es continua en $x =- 1$.

b) Calcular el máximo valor que toma la función para $x\in[4,\ 8]$.

c) Calcular $I = \int_{1}^{2} f(x)\cdot dx$.

----

a)

Para que la función sea continua en $x =- 1$ es necesario que sus límites laterales en ese punto sean iguales e iguales al valor de la función.

$f(x) \ = (ax + 2) =- a + 2$ $\qquad$ $f(x) \ = \left(18 - 4x + x^{2}\right) =$

$\Rightarrow - a + 2 = 23 \Rightarrow a =- 21.$

$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ x =- 1\ para\ a =- 23}.$

b)

En el intervalo $[4,\ 8]$ la función es $f(x) = x^{3} - 9x^{2} + 15x + 20$.

$f(4) = 4^{3} - 9\cdot4^{2} + 15\cdot4 + 20 = 64 - 144 + 60 + 20 = 0.$

$f(8) = 8^{3} - 9\cdot8^{2} + 15\cdot8 + 20 = 512 - 576 + 120 + 20 = 76.$

$f'(x) = 3x^{2} - 18x + 15.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^{2} - 18x + 15 = 0;\ \ x^{2} - 6x + 5 = 0;\ \ x = \frac{6\pm\sqrt{36-20}}{2} =$

$x = \frac{6\pm\sqrt{16}}{2} = \frac{6\pm4}{2} = 3\pm2 \Rightarrow x_{1} = 1\notin[4,\ 8],\ x_{2} = 5 \Rightarrow x = 5.$

$f''(x) = 6x - 18;\ \ f''(5) = 30 - 18 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 5.$

$\underline{El\ valor\ máximo\ de\ f(x)\ en\ el\ intervalo\ [4,\ 8]\ es\ f(8) = 76}.$

c)

En el intervalo $(1,\ 2)$ la función es $f(x) = x^{2} - 4x + 18.$

$$I = \int_1^2 f(x)\cdot dx = \int_1^2 \left(x^2 - 4x + 18\right)\cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 18x\right]_0^2 =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 18x\right]_0^2 = \left(\frac{2^3}{3} - 2\cdot 2^2 + 18\cdot 2\right) - 0 = \frac{8}{3} - 8 + 36 = 28 + \frac{8}{3} =$$

$$= \frac{84+8}{3} = \frac{92}{3}.$$

$$\underline{I = \int_1^2 f(x)\cdot dx = \frac{92}{3}.}$$

****

3º) a) La duración de las bombillas de un fabricante es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 75 horas.

a_1) Queremos construir un intervalo de confianza al 98 % para la media de la duración de las bombillas del fabricante, de forma que el error no sea mayor de 15 horas. ¿Qué tamaño de la muestra debemos tomar?

a_2) Decidimos tomar un tamaño de la muestra igual a 150, comprobamos la duración media de cada bombilla y calculamos su promedio, que resulta ser 1.053 horas. Calcular el intervalo de confianza al 98 % para la media de la duración de las bombillas del fabricante.

b) Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = 0,6;\ \ P(B/A) = 0,9\ y\ P(B) = 0,8$. Calcular $P(A \cap B),\ P(A \cup B)\ y\ P(A/B)$.

----

a)

a_1)

$$1 - \alpha = 0,98 \rightarrow \alpha = 1 - 0,98 = 0,02 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,01} = 2,33.$$

$$(1 - 0,01 = 0,9900 \rightarrow z = 2,33).$$

Datos: $\sigma = 75;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,33;\ \ E = 15.$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(2,33 \cdot \frac{75}{15}\right)^2 =$$

$$= (2,33 \cdot 5)^2 = 11,65^2 = 135,72.$$

$\underline{La\ muestra\ tiene\ que\ ser\ como\ mínimo\ de\ 136\ bombillas.}$

a_1)

Datos: $\overline{x} = 1.053;\ \ n = 150;\ \ \sigma = 75;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,88.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(1.053 - 2,33 \cdot \frac{75}{\sqrt{150}};\ 1.053 + 2,33 \cdot \frac{75}{\sqrt{150}}\right);$$

$$(1.053 - 2,33 \cdot 6,1237;\ 1.053 + 2,33 \cdot 6,1237);$$

$$(1.053 - 14,2683;\ 1.053 + 14,2683).$$

$$\underline{I.\ C._{98\ \%}\ (1.038,7317;\ 1.067,2683).}$$

$b)$

$$P(B/A) = 0,9 \Rightarrow P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(A \cap B) = 0,6 \cdot 0,9 = \underline{0,54}.$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,8 - 0,54 = \underline{0,86}.$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,54}{0,8} = \underline{0,675}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE ASTURIAS

JULIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El examen presenta dos opciones: A y B. El alumno deberá elegir una de ellas y responder razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN A

1º) Una persona compró acciones de dos compañías A y B a un precio de 1 y m euros la acción, respectivamente. El importe total de la compra fue de 90 euros y el número total de acciones compradas fue de 47 acciones.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de acciones compradas de cada compañía.

b) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? ¿Qué cantidad de acciones de la compañía B habría comprado si cada una costase a 2 euros?

----

a)

Siendo $x,\ y$ el número de acciones que se adquieren de las compañías A y B, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} x\cdot 1+m\cdot y=90 \\ x+y=47 \end{array}\right\} \quad \underline{\left.\begin{array}{l} x+my=90 \\ x+y=47 \end{array}\right\}}.$$

b)

Las matrices de coeficientes y ampliada son: $A=\begin{pmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A'=\begin{pmatrix} 1 & m & 90 \\ 1 & 1 & 47 \end{pmatrix}$.

Los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada, en función del parámetro m son los siguientes:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1-m=0 \Rightarrow m=1.$$

$$\underline{Para\ m\neq 1 \Rightarrow Rang\ A=Rang\ A'=2=n^{o}\ incógn \Rightarrow S.\ C.\ D.}$$

$Para\, m = 1\, es$: $A = (1\ 1\ 1\ 1)\ y\ A' = (1\ 1\ 90\ 1\ 1\ 47)$.

$\underline{Para\, m = 1 \Rightarrow Rang\ A = 1;\ Rang\ A' = 2 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

Resolviendo por la regla de Cramer el sistema para $m \neq 1$:

$x = \frac{|90\ m\ 47\ 1|}{1-m} = \frac{90-47m}{1-m} = \frac{47m-90}{m-1}$. $\qquad y = \frac{|1\ 90\ 1\ 47|}{1-m} = \frac{47-90}{1-m} = \frac{43}{m-1}$.

$47m - 90 \geq 0;\ \ m \geq \frac{90}{47} = 1,91$.

$\underline{El\ sistema\ tiene\ infinitas\ soluciones\ con\ tal\ de\ ser\ m \geq 1,91}$.

$m = 2 \Rightarrow y = \frac{43}{2-1} = 43$.

$\underline{Si\ la\ acción\ de\ la\ compañia\ B\ cuesta\ 2\ euros\ compra\ 43\ acciones\ de\ B}$.

****

2º) El salario de un trabajador durante los primeros tres años en determinada empresa se ajusta a la función $f(x) = \{ \quad 1.500 \quad si \quad 0 \leq x < 1 \; 1.300 + 200x \quad si \;\; 1 \leq x < 2 \;\; - x^2 + 5,5x + 1.6$, donde x representa el tiempo, en años, que lleva contratado:

$a)$ ¿Es continua para $x = 2$?

$b)$ Estudia y representa la función f. ¿En qué momento el trabajador cobra más? ¿y menos?

$a)$

Para que la función $f(x)$ sea continua en $x = 2$ es necesario que sus límites laterales en ese punto sean iguales e iguales al valor de la función.

$f(x) \; = (1.300 + 200x) = 1.300 + 400 = 1.700$ $\qquad f(x) \; = \left(- x^2 + \right.$

$\Rightarrow f(x) \; = f(x) \; = f(2) \Rightarrow \underline{f(x) \; es \; continua \; en \; x = 2}.$

$b)$

En el intervalo $[0, 1)$ la función es el segmento perteneciente a la recta horizontal $y = 1500$, cuyos extremos son:

$f(0) = 1.500 \Rightarrow A(0, \; 1.500); \; f(1) = 200 + 1.300 = 1.500 \Rightarrow B(1, \; 1.500)$
.

En el intervalo $[1, \; 2)$ la función es la recta $y = 200x + 1.300$, cuyos valores extremos son:

$f(1) = 200 + 1.300 = 1.500 \Rightarrow B(1, \; 1.500).$ (continua en $x = 1$).

$f(2) = 1.700 \Rightarrow C(2, \; 1.700).$

En el intervalo $[2, \; 3)$ la función es la parábola $y =- x^2 + 5,5x + 1.693$, que es cóncava (∩) y cuyo vértice y otros puntos son los siguientes:

$y'_{(x)} =- 2x + 5,5 = 0; \;\; x = \frac{5,5}{2} = 2,75.$

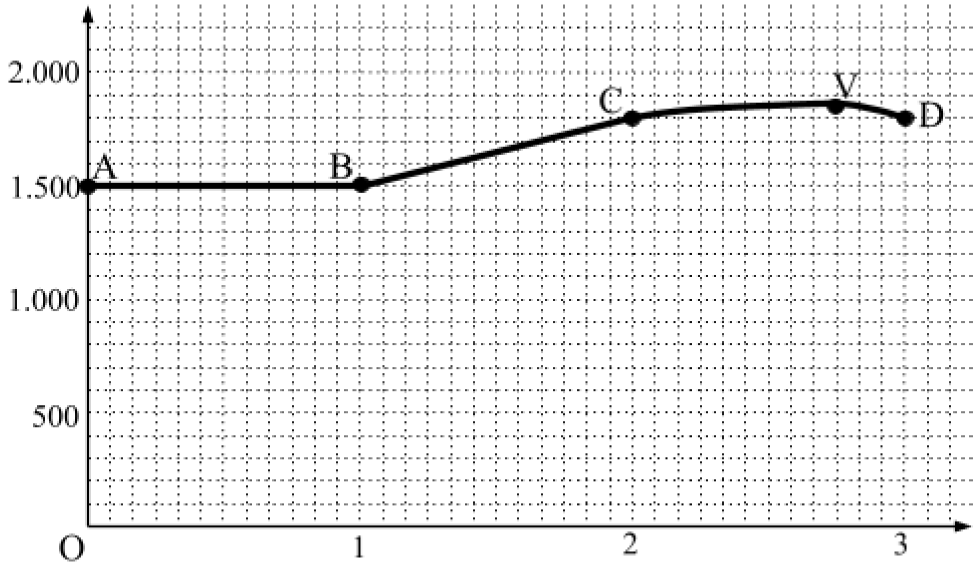
$y_{(2,75)} =- 2,75^2 + 5,5 \cdot 2,75 + 1.693 =- 7,5625 + 15,1250 + 1.693 \cong$

$\cong 1.700 \Rightarrow V(2,75; 1.700).$

$$y_{(3)} = -3^2 + 5,5\cdot 3 + 1.693 = -9 + 16,5 + 1.693 = 1.700,5 \Rightarrow$$

$\Rightarrow D(3;\, 1.700,5)$.

Con los datos obtenidos puede hacer una representación gráfica, aproximada, de la función, que es la que se expresa en el dibujo siguiente.



Conclusión:

$$\underline{El\ trabajador\ cobró\ más\ a\ los\ 2,75\ años\text{: } 1.700\ euros,\ aproximadamente.}$$

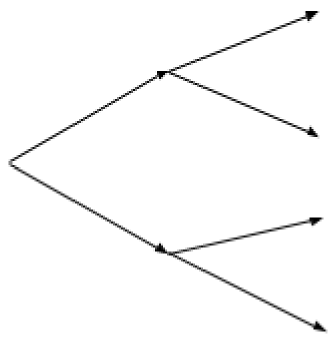
$$\underline{El\ trabajador\ cobró\ menos\ el\ primer\ año\text{: } 1.500\ euros.}$$

****

3º) En una fábrica el 40 % de la producción es realizada por la línea A y el 60 % restante por la línea B. De las piezas fabricadas por la línea A, el 5 % son defectuosas, mientras que de las fabricadas por la línea B solo el 2 % son defectuosas.

a) ¿Cuál es el porcentaje de piezas defectuosas de las producidas en dicha fábrica?

b) Si una pieza elegida al azar es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producida por la línea A?



a)

$$P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) = 0,4 \cdot 0,05 + 0,6 \cdot 0,02 =$$

$$= 0,020 + 0,012 = \underline{0,032}.$$

b)

$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A) \cdot P(D/A)}{P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B)} = \frac{0,4 \cdot 0,05}{0,4 \cdot 0,05 + 0,6 \cdot 0,02} = \frac{0,020}{0,020 + 0,012} =$$

$$= \frac{0,020}{0,032} = \underline{0,625}.$$

****

4º) En una muestra aleatoria de 250 personas en edad laboral de una determinada zona se encuentra que 35 de ellas están en paro.

a) Halla, con un nivel de confianza del 95 %, un intervalo para estimar la proporción en paro en esa zona.

b) En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? Considerando dicha muestra, ¿qué le ocurriría al error de estimación si disminuye el nivel de confianza? (Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90;\ F(1,64) = 0,95;\ F(1,96) = 0,975;\ F(2,33) = 0,99;\ F(2,58) = 0,9$.

----

a)

$$\alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$$

$$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$$

Datos:

$n \geq 30;\ p = \frac{35}{250} = 0,14;\ q = 1 - 0,14 = 0,86;\ n = 250;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q $y\ n$, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}};\ p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$.

$$\left(0'14 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,14 \cdot 0,86}{250}};\ 0'14 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,14 \cdot 0,86}{250}}\right);$$

$$\left(0'14 - 1,96 \cdot 0'0219;\ 0'14 + 1,96 \cdot 0'0219\right);\ \left(0'14 - 0'0430;\ 0'14 + 0'0430\right).$$

$$\underline{I.\ C._{95\ \%} = (0,0970;\ 0,1830).}$$

b)

$$E = \frac{0,1830 - 0,0970}{2} = \frac{0,0860}{2} = \underline{0,043}.$$

Se conoce que si disminuye el nivel de confianza también disminuye $z_{\frac{\alpha}{2}}$; si en la expresión $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}$ disminuye $z_{\frac{\alpha}{2}}$ también disminuye el valor de E.

$$\underline{Si\ disminuye\ el\ nivel\ de\ confianza\ disminuye\ el\ error\ de\ estimación.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Un centro comercial tiene en existencias 750 reproductores de DVD en el almacén A y otros 600 en el almacén B. Si se quiere tener al menos 900 reproductores en tienda.

a) ¿Cuántas unidades se podrían enviar desde cada almacén? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían enviar 400 unidades desde cada almacén?

b) Si los costes unitarios de envío son 0,30 euros por unidad para el almacén A y 0,25 euros por unidad para el almacén B, ¿cuántas unidades se deben enviar desde cada almacén para minimizar el coste de transporte? ¿a cuánto ascendería dicho coste?

----

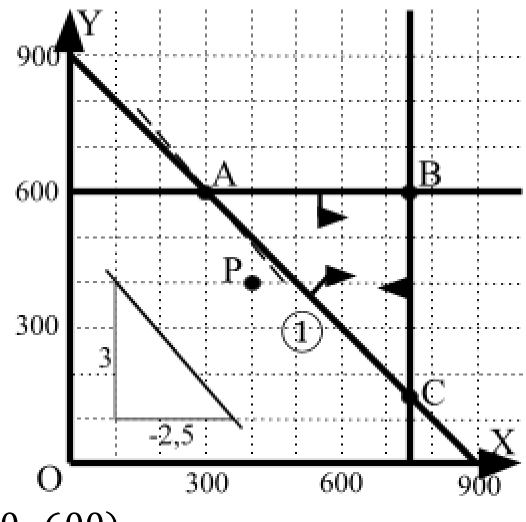
a)

Siendo x e y el número de DVDs que hay en la tienda procedentes de los almacenes A y B, respectivamente.

Las condiciones del ejercicio se establecen en el siguiente sistema de inecuaciones: $x \leq 750;\ \ y \leq 600 \quad x + y \geq 900 \quad x \geq 0;\ \ y \geq 0\,\}$.

La región factible es la zona sombreada de la figura siguiente:

Los vértices de la sección factible son los siguientes:



$A \Rightarrow \quad y = 600\ x + y = 900\,\} \Rightarrow A(300,\ 600)$.

$B \Rightarrow x = 750\ y = 600\,\} \Rightarrow B(750,\ 600)$.

$C \Rightarrow \quad x = 750\ x + y = 900\,\} \Rightarrow C(750,\ 150)$.

$\underline{Se\ pueden\ enviar\ todas\ las\ posibles\ soluciones\ de\ la\ zona\ factible}$.

El punto $P(400,\ 400)$ no pertenece a la zona factible.

$\underline{Con\ las\ condiciones\ dadas\ no\ se\ pueden\ enviar\ 400\ DVD\ de\ cada\ almacén.}$

$b)$

La función de objetivos es $f(x,\ y) = 0,30x + 0,25y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices es:

$A \Rightarrow f(300,\ 600) = 0,30 \cdot 300 + 0,25 \cdot 600 = 90 + 150 = 240.$

$B \Rightarrow f(750,\ 600) = 0,30 \cdot 750 + 0,25 \cdot 600 = 225 + 150 = 375.$

$C \Rightarrow f(750,\ 150) = 0,30 \cdot 750 + 0,25 \cdot 150 = 225 + 37,5 = 262,5.$

El mínimo se produce en el punto A.

También se hubiera obtenido el punto A por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,\ y) = 0,30x + 0,25y = 0 \Rightarrow y = -\frac{0,30}{0,25}x = -\frac{30}{25}x = -\frac{3}{2,5}x \Rightarrow m = -\frac{3}{2,5}.$$

$\underline{El\ coste\ se\ minimiza\ con\ 300\ DVDs\ del\ almacén\ A\ y\ 600\ DVDs\ del\ B.}$

$\underline{El\ coste\ mínimo\ es\ de\ 240\ euros.}$

****

2º) Si x representa el volumen de producción de una fábrica, el coste marginal de la misma viene dado por la función $f(x) = 5 + 6x + 24x^2$. Se pide:

a) Encontrar la función del coste total F, si se sabe que dicha función viene dada por la primitiva F de f que verifica que $F(2) = 90$.

b) Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 0 \; y \; x = 2$.

----

a)

$$F(x) = \int f(x)\cdot dx = \int \left(5 + 6x + 24x^2\right)\cdot dx = 5x + \frac{6x^2}{2} + \frac{24x^3}{3} + C =$$

$= 8x^3 + 3x^2 + 5x + C.$

$$F(2) = 90 \Rightarrow 8\cdot 2^3 + 3\cdot 2^2 + 5\cdot 2 + C = 90; \;\; 64 + 12 + 10 + C = 90;$$

$86 + C = 90 \Rightarrow C = 4.$

$$\underline{La\ función\ del\ coste\ es\ F(x) = 8x^3 + 3x^2 + 5x + 4.}$$

b)

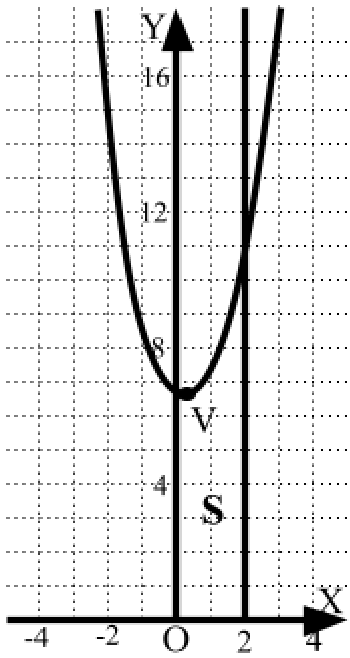
La función $f(x) = 5 + 6x + 24x^2$ es una parábola convexa (∪) cuyo vértice es el siguiente:

$f'(x) = 6 + 48x.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 6 + 48x = 0; \;\; 1 + 6x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{6}.$

$f\left(\frac{1}{6}\right) = 5 + 6\cdot\frac{1}{6} + 24\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2 = 5 + 1 + \frac{24}{36} =$

$= 6 + \frac{2}{3} = \frac{20}{3} \Rightarrow V\left(\frac{1}{6}, \frac{20}{3}\right).$



La representación gráfica, aproximada, (porque es para "felicitar" a las personas que han propuesto este ejercicio; por ejemplo, $f(2) = 113 \Rightarrow ¡P(2, 113)!$), es la que se indica en la figura adjunta.

$$S = \int_0^2 \left(5 + 6x + 24x^2\right)dx = \left[5x + \frac{6x^2}{2} + \frac{24x^3}{3}\right]_0^2 = \left[5x + 3x^2 + 8x^3\right]_0^2 =$$

$= \left(5 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2^3\right) - 0 = 10 + 12 + 64 = \underline{86\, u^2}.$

****

3º) En una empresa se sabe que el 80 % de sus trabajadores son de nacionalidad española y el resto no. También se sabe que el 30 % de sus trabajadores son mujeres de nacionalidad española. Se elige una persona al azar de dicha empresa.

a) Si es de nacionalidad española, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y de nacionalidad española?

$$P(Es) = 0,8; \quad P(Es \cap M) = 0,3.$$

a)

$$P = P(M/Es) = \frac{P(Es \cap M)}{P(Es)} = \frac{0,3}{0,8} = \underline{0,375}.$$

b)

$$P(Es \cap H) = P(Es) - P(Es \cap M) = 0,8 - 0,3 = \underline{0,5}.$$

****

4º) Se considera una muestra aleatoria de 81 personas del mismo rango de edad de la ciudad A para las que el rendimiento medio de un test conductual ha sido de 16,8 puntos. Se supone además que el rendimiento sigue una distribución normal con una desviación típica de 4,2 puntos.

a) Construir un intervalo de confianza para el rendimiento medio de las personas de ese rango de edad en esa ciudad, al 99 % de confianza.

b) ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero rendimiento medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 1,5 puntos y un nivel de confianza del 99 %?
Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90;\ F(1,64) = 0,95;\ F(1,96) = 0,975;\ F(2,33) = 0,99;\ F(2,58) = 0,9$
.

----

a)

Nivel de confianza del 99 %.

$\alpha = 1 - 0,99 = 0,01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,005} = 2,578.$

$(1 - 0,0050 = 0,9950 \rightarrow z = 2,578).$

Datos: $\overline{x} = 16,8;\ n = 81;\ \sigma = 4,2;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,578.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}$, σ y n, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(16,8 - 2,578 \cdot \frac{4,2}{\sqrt{81}};\ 16,8 + 2,578 \cdot \frac{4,2}{\sqrt{81}}\right);$

$(16,8 - 2,578 \cdot 0,4667;\ 16,8 + 2,578 \cdot 0,4667);$

$(16,8 - 1,2031;\ 16,8 + 1,2031).$

$$\underline{I.\ C._{99\ \%}\ (15,5969;\ 18,0031).}$$

b)

Datos: $\sigma = 4,2;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,578;\ E = 1,5.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(2,578 \cdot \frac{4,2}{1,5}\right)^2 =$

$$= (2,578 \cdot 2,8)^2 = 7,2184^2 = 52,10.$$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 53\ personas}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE ASTURIAS

JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El examen presenta dos opciones: A y B. El alumno deberá elegir una de ellas y responder razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN A

1º) Un librero vende 84 libros a dos precios distintos: unos a $5m$ euros y otros a $4m$ euros, obteniendo por la venta 3.105 euros.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de libros de cada tipo vendidos.

b) Basándote en un estudio de la compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que el precio de los libros fuese 45 y 36 euros, respectivamente? Resuelve el sistema para $m = 9$. ¿Cuántos libros vendió de cada tipo?

----

a)

Sean x los libros que venda a $5m$ euros cada uno e y los libros que venda a $4m$ euros cada uno.

$$x + y = 84\ 5mx + 4my = 3.105\ \}.$$

b)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = (1\ 1\ 5m\ 4m\ )$ y $M' = (1\ 1\ 84\ 5m\ 4m\ 3.105\ ).$

$|M| = |1\ 1\ 5m\ 4m\ | = 4m - 5m = 0;\ \ -m = 0 \Rightarrow m = 0.$

$$\underline{Para\ m \neq 0 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow S.\ C.\ D.}$$

$Para\ m = 0 \Rightarrow M' = (1\ 1\ 84\ 0\ 0\ 3.105\ ) \Rightarrow Rang\ M' = 2.$

$\underline{Para\ m = 0 \Rightarrow Rang\ M = 1;\ Rang\ M' = 2 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

Si el precio de los libros fuese de 45 y 36 euros sería $5m = 45 \; o \; 4m = 36$, con lo cual $m = 9$ y el sistema sería $x + y = 84 \; 45x + 36y = 3.105 \}$.

$x + y = 84 \; 5x + 4y = 345 \} \quad -4x - 4y = -336 \; 5x + 4y = 345 \} \Rightarrow x = 9; y = 7$

.

$\underline{Si \; es \; posible \; que \; los \; libros \; valgan \; 45 \; euros \; y \; 36 \; euros, \; respectivamente}.$

$\underline{Vendió \; 9 \; libros \; de \; 45 \; euros \; y \; 75 \; libros \; de \; 36 \; euros.}$

****

2º) Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, se pide:

a) Encontrar la primitiva $F\ de\ f$ verificando $F(2) = 1$.

b) Estudiar y representar gráficamente la función f. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 0\ y\ x = 2$.

----

a)

$$F(x) = \int \left(x^3 - 3x^2 + 2x\right) \cdot dx = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + C = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + C.$$

$$F(2) = 1 \Rightarrow \frac{2^4}{4} - 2^3 + 2^2 + C = 1;\ \ 4 - 8 + 4 + C = 1 \Rightarrow C = 1.$$

$$\underline{F(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + 1.}$$

b)

Los puntos de corte de la función $f(x)$ con los ejes, además del origen, son los siguientes:

$$x^2 - 3x + 2 = 0;\ \ x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 2.$$

Los puntos de corte son $A(1,\ 0)$ y $B(2,\ 0)$.

Los máximos y mínimos relativos de la función f son los siguientes:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x + 2 = 0;\ \ x = \frac{6 \pm \sqrt{36-24}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cong 0,42,\ x_2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \cong 1,58.$$

$$f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1).$$

$$f''(0,42) = 6(0,42 - 1) < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$f(0,42) = 0,42^3 - 3 \cdot 0,43^2 + 2 \cdot 0,42 = 0,08 - 0,54 + 0,84 = 0,38.$$

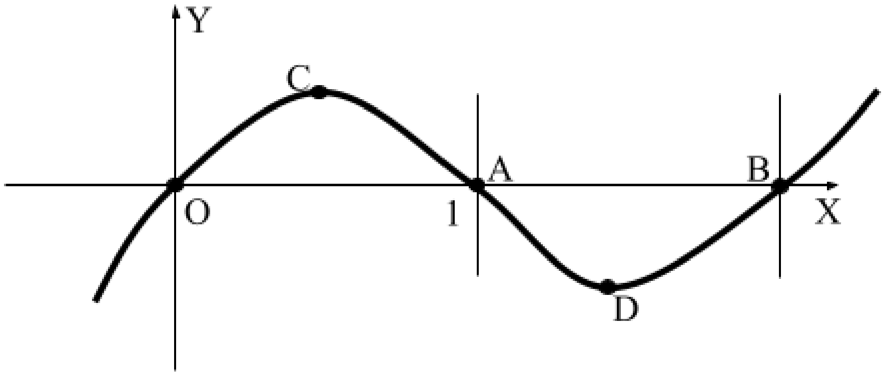
$Máximo\ relativo: C\left(0'42,\ 0'38\right).$

$f''(1,58) = 6(1,58 - 1) > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ x = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}.$

$f(1,58) = 1,58^3 - 3 \cdot 1,58^2 + 2 \cdot 1,58 = 3,92 - 7,46 + 3,15 = -0,39.$

$Mínimo\ relativo: D\left(1'58,\ -0'39\right).$

La representación gráfica, aproximada de la función es la que aparece en la figura adjunta.



De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_0^1 f(x) \cdot dx + \int_2^1 f(x) \cdot dx = [F(x)]_0^1 + [F(x)]_2^1 =$$

$$= F(1) - F(0) + F(1) - F(2) = 2 \cdot F(1) - F(0) - F(2). \quad (*)$$

$$F(x) = \int \left(x^3 - 3x^2 + 2x\right) \cdot dx = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2.$$

Sustituyendo en (*) el valor obtenido de $F(x)$:

$$S = 2 \cdot F(1) - F(0) - F(2) = 2 \cdot \left(\frac{1^4}{4} - 1^3 + 1^2\right) - 0 - \left(\frac{2^4}{4} - 2^3 + 2^2\right) =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right) - 4 + 8 - 4 = \frac{1}{2}.$$

$$\underline{S = \frac{1}{2}\, u^2.}$$

****

3º) El 30 % de los estudiantes de un instituto practica fútbol. De entre los que practican fútbol, el 40 % practica además baloncesto. De entre los que no practican fútbol, un cuarto practica baloncesto. Elegido un estudiante de ese instituto al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que practique ambos deportes?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que practique baloncesto?

$$P(F) = 0,30. \qquad P(\overline{F}) = 1 - P(F) = 1 - 0,30 = 0,70.$$

a)

$$P(F \cap B) = 0,40 \cdot 0,30 = \underline{0,12}.$$

b)

$$P(B) = P(B \cap F) + P(B \cap \overline{F}) = 0,12 + \frac{1}{4} \cdot P(\overline{F}) = 0,12 + 0,25 \cdot 0,70 =$$

$$= 0,12 + 0,175 = \underline{0,295}.$$

****

4º) En una piscifactoría se desea estimar el porcentaje de peces pequeños. Para ello, se toma una muestra aleatoria de 700 peces y se encuentra que exactamente 70 de ellos son pequeños.

a) Halla, con un nivel de confianza del 99 %, un intervalo para estimar la proporción de peces pequeños en la piscifactoría.

b) En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? Considerando dicha muestra, ¿qué le ocurriría al error de estimación si aumentase el nivel de confianza? (Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90;\ F(1,64) = 0,95;\ F(1,96) = 0,975;\ F(2,33) = 0,99;\ F(2,58) = 0,9$.

----

a)

Nivel de confianza del 99 %.

$\alpha = 1 - 0,99 = 0,01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,005} = 2,578.$

$(1 - 0,0050 = 0,9950 \rightarrow z = 2,578).$

Datos: $n = 700;\ p = \frac{70}{700} = 0,1;\ q = 0,9;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,578.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q $y\ n$, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}},\ p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right).$

$$\left(0,1 - 2,578 \cdot \sqrt{\frac{0,1 \cdot 0,9}{700}};\ 0,1 + 2,578 \cdot \sqrt{\frac{0,1 \cdot 0,9}{700}}\right);$$

$(0,1 - 2,578 \cdot 0,0113;\ 0,1 + 2,578 \cdot 0,0113);\ (0,1 - 0,0292;\ 0,1 + 0,0292)$.

$$\underline{I.\ C._{90\ \%} = \left(0'0708;\ 0'1292\right).}$$

b)

$$E = \frac{0'1292 - 0'0708}{2} = \frac{0,0584}{2} = 0,0294.$$

$$\underline{El\ error\ cometido\ es\ E = 0,0294}.$$

Si aumenta el nivel de confianza aumenta $z_{\frac{\alpha}{2}}$ y, como consecuencia, también aumentarían el intervalo de confianza y el error.

****

OPCIÓN B

1º) Una empresa fabrica dos productos A y B con tres ingredientes distintos $I1,\ I2$ *e* $I3$. Para fabricar el producto A necesita 3 unidades del ingrediente $I1$ y 1 unidad del ingrediente $I2$. Para fabricar el producto B necesita 2 unidades del ingrediente $I1$ y otras dos del ingrediente $I3$. Un día concreto, tiene en el almacén 18 unidades del ingredientes $I1$, 4 unidades del $I2$ y 12 del $I3$. Se sabe además que el beneficio obtenido con cada producto A es de 30 euros y con cada producto B es de 50 euros.

a) ¿Cuántos productos de tipo A y cuántos de tipo B puede fabricar ese día para cumplir todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían fabricar 2 productos de cada tipo ese día?

b) ¿Cuántos debe fabricar para maximizar el beneficio? ¿y para maximizar el número total de productos fabricados?

----

a)

El conjunto de restricciones son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{l}3x+2y\le 18\\ x\le 4;\ 2y\le 12\\ x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}3x+2y\le 18\\ x\le 4;\ y\le 6\\ x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}.$$

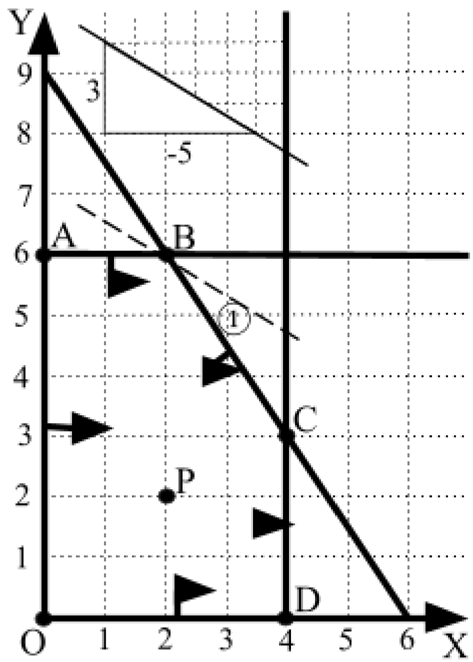
x	0	6
y	9	0

① $\Rightarrow 3x+2y\le 18 \Rightarrow y\le \frac{18-3x}{2} \Rightarrow O(0,\ 0)\rightarrow Si.$

La región factible se indica sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la zona factible, además del origen, son los siguientes:

$$A\Rightarrow \left.\begin{array}{l}x=0\\ y=6\end{array}\right\}\Rightarrow A(0,\ 6).$$



$$B\Rightarrow \left.\begin{array}{l}3x+2y=18\\ y=6\end{array}\right\}\Rightarrow B(2,\ 6).$$

$C \Rightarrow 3x + 2y = 18 \quad x = 4 \} \Rightarrow C(4, 3)$.

$D \Rightarrow x = 4\ y = 0 \} \Rightarrow D(4, 0)$.

Ese día se podrían fabricar todos los números enteros que comprende la zona sombreada, incluidos los que se encuentran en las líneas que lo limitan.

El punto $P(2, 2)$ está comprendido en la zona factible, por lo cual se pueden fabricar ese día dos productos A y dos productos B.

$b)$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x, y) = 30x + 50y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0, 6) = 30 \cdot 0 + 50 \cdot 6 = 0 + 300 = 300$.

$B \Rightarrow f(2, 6) = 30 \cdot 2 + 50 \cdot 6 = 60 + 300 = 360$.

$C \Rightarrow f(4, 3) = 30 \cdot 4 + 50 \cdot 3 = 120 + 150 = 270$.

$D \Rightarrow f(4, 0) = 30 \cdot 4 + 50 \cdot 0 = 120 + 0 = 120$.

El máximo se produce en el punto B.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = 30x + 50y = 0 \Rightarrow y = -\frac{30}{50}x \Rightarrow m = -\frac{3}{5}$.

$\underline{El\ máximo\ beneficio\ se\ produce\ fabricando\ 2\ articulos\ A\ y\ 6\ artículos\ B.}$

$\underline{El\ máximo\ de\ artículos\ fabricados\ tambien\ se\ produce\ en\ B:\ en\ total\ 8.}$

****

2º) La temperatura de un laboratorio se puede relacionar con el tiempo desde que comienza la jornada laboral mediante la expresión $f(x) = 20 - \frac{5}{4x+5}$, $x \geq 0$; $f(x)$ representa la temperatura, en grados centígrados, y x es el tiempo transcurrido, en minutos, desde que comienza la jornada laboral.

$a)$ ¿Disminuye en algún momento la temperatura? Estudia y representa gráficamente la función f.

$b)$ El sistema de aire acondicionado comenzará a funcionar si la temperatura sube de los 21 grados. ¿Se encenderá el sistema de aire acondicionado en algún instante de tiempo?

$a)$

La función disminuye (es decreciente) cuando su primera derivada es negativa.

$$f'(x) = 0 - \frac{-5 \cdot 4}{(4x+5)^2} = \frac{20}{(4x+5)^2} > 0, \ \forall x \in D(f).$$

$$\underline{La\ temperatura\ no\ disminuye\ en\ ningún\ momento.}$$

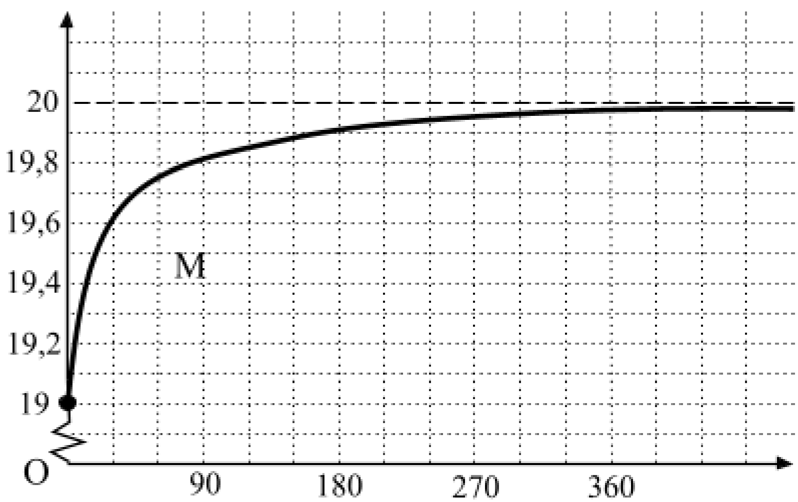
Para la representación gráfica de la función se tendrán en cuenta algunas de sus características, como que es monótona creciente y, además:

El dominio de la función es: $D(f) \Rightarrow [0, \ +\infty)$.

$$f(0) = 20 - \frac{5}{5} = 20 - 1 = 19 \Rightarrow A(0, \ 19).$$

$$f(x) = \left(20 - \frac{5}{4x+5}\right) = 20 - 0 = 20.$$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la que aparece en el gráfico adjunto.



$b)$

En el apartado anterior se ha determinado la tendencia de la temperatura y se ha comprobado que cuando el tiempo se hace infinito la temperatura se estabiliza en 20º centígrados, por lo cual:

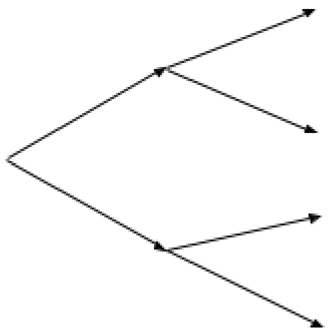
$$\underline{No\ será\ necesario\ conectar\ el\ aire\ acondicionado\ en\ ningún\ momento.}$$

****

3º) En una empresa, el 30 % de los empleados son mujeres y el 70 % restante son hombres. De las mujeres, el 80 % pasa un determinado test, mientras que del grupo de los hombres, solo el 70 % pasa dicho test.

a) Obtener el porcentaje de personas de dicha empresa que pasa el test.

b) Si una persona pasa el test, obtener la probabilidad de que sea mujer.



a)

$$P = P(T) = P(M \cap T) + P(H \cap T) = P(M) \cdot P(T/M) + P(H) \cdot P(T/H) =$$

$$= 0,30 \cdot 0,80 + 0,70 \cdot 0.70 = 0,24 + 0,49 = \underline{0,73}.$$

b)

$$P = P(M/T) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{P(M) \cdot P(T/M)}{P(M) \cdot P(T/M) + P(H) \cdot P(T/H)} = \frac{0,30 \cdot 0,80}{0,30 \cdot 0,80 + 0,70 \cdot 0.70} =$$

$$= \frac{0,24}{0,24+0,49} = \frac{0,24}{0,73} = \underline{0,3288}.$$

****

4º) Un consumidor está convencido de que el peso escurrido medio de un producto es menor que el que indican las latas. Para estudiar este hecho, el consumidor toma una muestra aleatoria simple de 100 latas en las que se ha observado un peso escurrido medio de 245 g. Se supone además que el peso escurrido por lata sigue una distribución normal con desviación típica 9 g.

a) Construir un intervalo de confianza para el peso medio escurrido de las latas de ese producto, al 90 % de confianza.

b) ¿Cuál será el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero peso medio escurrido a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 2 g y un nivel de confianza del 90 %?

Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90;\ F(1,64) = 0,95;\ F(1,96) = 0,975;\ F(2,33) = 0,99;\ F(2,58) = 0,9$
.

----

a)

$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 1 - 0,90 = 0,10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,05} = 1,645.$

$(1 - 0,05 = 0,9500 \rightarrow z = 1,645).$

Datos: $\overline{x} = 245;\ n = 100;\ \sigma = 9;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,645.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(245 - 1,645 \cdot \frac{9}{\sqrt{100}};\ 245 + 1,645 \cdot \frac{9}{\sqrt{100}}\right);$

$(245 - 1,645 \cdot 0,9;\ 245 + 1,645 \cdot 0,9);\ \ (245 - 1,4805;\ 245 + 1,4805).$

$$\underline{I.\ C._{94\ \%}\ (243,5195;\ 246,4805).}$$

b)

Datos: $n = 100;\ \sigma = 9;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,645;\ E = 2.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1,645 \cdot \frac{9}{2}\right)^2 =$

$= (1,645 \cdot 4,5)^2 = 7,4025^2 = 54,80.$

$$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 55\ latas}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE BALEARES

JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contesta de manera clara y razonada a una de las dos opciones propuestas. Se valorará la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) utilizado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autorizarán las que traigan información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1º) Un comerciante vende tres tipos de relojes, A, B y C. Los relojes del tipo A los vende a 300 euros; los del tipo B, a 600 euros, y los del tipo C, a 200 euros. En un mes determinado ha vendido 200 relojes en total. Si la cantidad de los relojes que ha vendido ese mes de tipo B ha sido igual a la suma de los relojes de los tipos B y C, calcule cuantos relojes vendió de cada tipo si la recaudación total fue de 89.000 euros.

Sean x, y, z los relojes que vende el comerciante de los tipos A, B y C, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$x + y + z = 200 \qquad y = x + z\, 300x + 600y + 200z$$

.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|200\ 1\ 1\ 0\ -1\ 1\ 890\ 6\ 2\ |}{|1\ 1\ 1\ 1\ -1\ 1\ 3\ 6\ 2\ |} = \frac{-400+890+890-1.200}{-2+6+3+3-6-2} = \frac{1.780-1.600}{2} = \frac{180}{2} = 90.$$

$$y = \frac{|1\ 200\ 1\ 1\ 0\ 1\ 3\ 890\ 2\ |}{2} = \frac{890+600-890-400}{2} = \frac{200}{2} = 100.$$

$$y = \frac{|1\ 1\ 200\ 1\ -1\ 0\ 3\ 6\ 890\ |}{2} = \frac{-890+1.200+600-890}{2} = \frac{1.800-1.780}{2} = \frac{20}{2} = 10.$$

$\underline{El\ comerciante\ vendió\ 90\ relojes\ tipo\ A,\ 100\ tipo\ B\ y\ 10\ tipo\ C.}$

****

2º) Una empresa de compraventa de automóviles ha comprobado que en los últimos 10 años sus beneficios/pérdidas se ajustan a la función $F(t) = t^3 - 18t^2 + 81t - 3$, con $0 \leq t \leq 10$, en miles de euros. Se pide:

$a)$ ¿En qué años se produjeron los valores máximo y mínimo de esta función?

$b)$ Determine los periodos de crecimiento y decrecimiento.

$c)$ ¿Cuáles son los beneficios máximos? ¿Qué resultado obtuvo la empresa el último año?

$a)$

Para que una función polinómica tenga un extremo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$F'(t) = 3t^2 - 36t + 81.$$

$$F'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 36t + 81 = 0;$$

$$t^2 - 12t + 27 = 0;\ \ t = \frac{12 \pm \sqrt{144-108}}{2} =$$

$$= \frac{12 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{12 \pm 36}{2} = \frac{12 \pm 6}{2} = 6 \pm 3 \Rightarrow t_1 = 3,\ t_2 = 9.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es negativa para los valores que anulan la primera derivada, se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$$F''(t) = 6t - 36 \Rightarrow \{t_1 = 2 \rightarrow F''(3) = 6 \cdot 3 - 36 = -18 < 0 \Rightarrow Máximo\ t_2 = 9 \rightarrow F''(9) = 6$$

.

$\underline{El\ máximo\ se\ produjo\ el\ tercer\ año\ y\ el\ mínimo\ el\ noveno\ año.}$

$b)$

Teniendo en cuenta la continuidad de la función y el máximo y mínimo obtenidos en el apartado anterior, pueden deducirse los periodos de crecimiento y decrecimiento; no obstante, se determinan por la primera derivada.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

Las raíces de la primera derivada dividen el dominio de la función en los intervalos $(0,\ 3),\ (3,\ 9)\ y\ (9,\ 10)$, en los cuales, el valor de la derivada es, alternativamente, positivo o negativo. Considerando, por ejemplo, el valor $1 \in (0,\ 3)$:

$$F'(1) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 1^2 - 36 \cdot 1 + 81 = 3 - 36 + 81 = 48 > 0.$$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento\text{: } F'(t) > 0 \Rightarrow t \in (0, 3) \cup (9, 10)}.$$

$$\underline{Decrecimiento\text{: } F'(t) < 0 \Rightarrow t \in (3, 9)}.$$

c) ¿Cuáles son los beneficios máximos? ¿Qué resultado obtuvo la empresa el último año?

$$F(3) = 3^3 - 18 \cdot 3^2 + 81 \cdot 3 - 2 = 27 - 162 + 243 - 3 = 105.$$

$$\underline{Los\ beneficios\ máximos\ fueron\ de\ 105.000\ euros}.$$

$$F(10) = 10^3 - 18 \cdot 10^2 + 81 \cdot 10 - 3 = 1.000 - 1.800 + 810 - 2 = 7.$$

$$\underline{Los\ beneficios\ del\ \text{último}\ \text{año}\ fueron\ de\ 7.000\ euros}.$$

****

3º) Sean A y B dos sucesos tales que $P(A\cup B) = 0,9$, $P\left(A^c\right) = 0,4$, siendo A^c el suceso complementario de A, y $P(A\cap B) = 0,2$. Calcule las probabilidades siguientes:

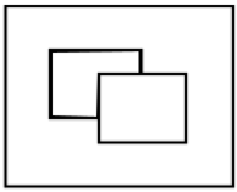
$P(B)$; $P(A/B)$; $P\left(A\cap B^c\right)$ y $P\left(A^c \cup B^c\right)$.

$$P(A) = 1 - P\left(A^c\right) = 1 - 0,4 = 0,6.$$

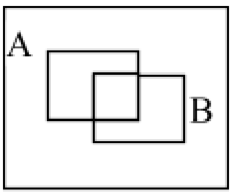
$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(B) = P(A\cup B) - P(A) + P(A\cap B) = 0,9 - 0,6 + 0,2 = \underline{0,5}.$$

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0,2}{0,5} = \underline{0,4}.$$



$$P\left(A\cap B^c\right) = P(A) - P(A\cap B) = 0,6 - 0,2 = \underline{0,4}.$$



$$\Rightarrow P\left(A^c \cup B^c\right) = 1 - P(A\cap B) = 1 - 0,2 = \underline{0,8}.$$

****

4º) A partir de una muestra de 100 individuos, se ha realizado una estimación de la proporción mediante el intervalo de confianza $(0,17;\ 0,25)$. ¿Cuál es el nivel de confianza con el que se ha realizado la estimación?

$$Proporción\ muestral = p = \frac{0,25+0,17}{2} = \frac{0,42}{2} = 0,21 \to q = 0,79.$$

$$E = \frac{0,25-0,17}{2} = \frac{0,08}{2} = 0,04.$$

$$\sigma = \sqrt{p \cdot q} = \sqrt{0,21 \cdot 0,79} = \sqrt{0,1659} = 0,4073.$$

Datos: $n = 100$; $E = 0,04$; $\sigma = 0,4073$.

Siendo

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = E \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sigma} = 0,04 \cdot \frac{\sqrt{100}}{0,4073} = 0,04 \cdot 24,5514 = 0,9821.$$

$$P\left(Z > z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow P(Z > 0,98) = 1 - P(Z \le 0,98) \Rightarrow Mirando\ en\ la\ tabla\ N(0,\ 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,8365 = 0,1635 \Rightarrow \alpha = 2 \cdot 0,8365 = 0,3270 \Rightarrow 1 - \alpha = 1 - 0,3270 = 0,6730$$
.

$$\underline{El\ nivel\ de\ confianza\ aplicado\ es\ del\ 67,30\ \%}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Se considera el sistema de ecuaciones $\{2x - y + z = 0\ x - ky - z = 0\ 2x + y - z = 1$, dependiente del parámetro real k. Se pide:

a) Determine los valores de k para los cuales el sistema es compatible determinado.

b) Resuelva el sistema para $k = 2$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A = (2\ -1\ 1\ 1\ -k\ -1\ 2\ 1\ -1)$ y $A' = (2\ -1\ 1\ 1\ -k\ -1\ 2\ 1\ -1\quad 0\ 0\ 1)$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro k es el siguiente:

$|A| = |2\ -1\ 1\ 1\ -k\ -1\ 2\ 1\ -1| = 2k + 1 + 2 + 2k + 2 - 1 = 4k + 4$

.

$$\underline{Para\ k \neq -1 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$$

b)

Para $k = 2$ el sistema resulta: $2x - y + z = 0\ x - 2y - z = 0\ 2x + y - z = 1\}$, que es compatible determinado.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$x = \frac{|0\ -1\ 1\ 0\ -2\ -1\ 1\ 1\ -1|}{4 \cdot 2 + 4} = \frac{1+2}{12} = \frac{3}{12} = \underline{\frac{1}{4}}$.

$y = \frac{|2\ 0\ 1\ 1\ 0\ -1\ 1\ 1\ -1|}{12} = \frac{1+2}{12} = \frac{3}{12} = \underline{\frac{1}{4}}$.

$z = \frac{|2\ -1\ 0\ 1\ -2\ 0\ 1\ 1\ 1|}{12} = \frac{-4+1}{12} = \frac{-3}{12} = \underline{-\frac{1}{4}}$.

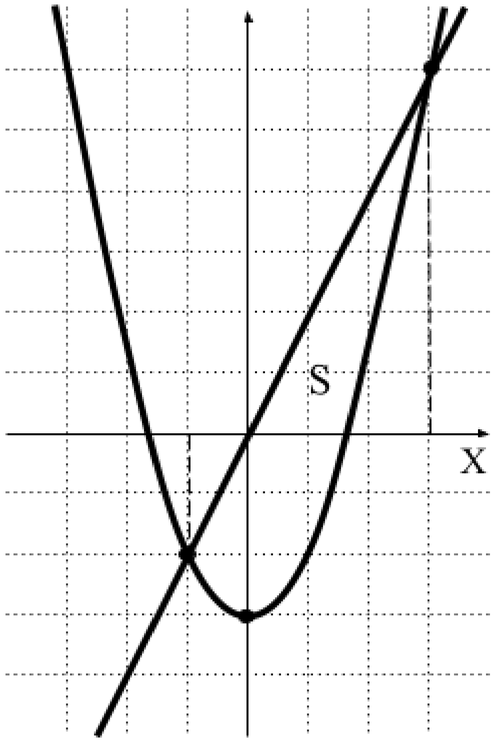
$$\underline{Solución: x = \frac{1}{4},\ y = \frac{1}{4},\ z = -\frac{1}{4}.}$$

****

2º) Calcule el área de la figura plana limitada por la recta $y = 2x$ y la parábola de ecuación $y = x^2 - 3$. Dibuje el recinto limitado por ambas funciones.

Los puntos de corte de la parábola $y = x^2 - 3$ y la recta $y = 2x$ se obtienen de la igualación de sus expresiones:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 3 \\ y = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - 3 = 2x;\ \ x^2 - 2x - 3 = 0;\ x = \frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \frac{2\pm\sqrt{}}{2}$$



$$= \frac{2\pm 4}{2} = 1\pm 2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = -1 \rightarrow A(-1,\ -2) \\ x_2 = 3 \rightarrow B(3,\ 6) \end{array}\right. .$$

El vértice de la parábola $y = x^2 - 3$, que es convexa ($\cup$) es $V(0,\ -3)$.

La representación gráfica, aproximada, de la situación es la que aparece en la figura adjunta.

Las ordenadas de la recta $y = 2x$ son mayores o iguales que las correspondientes ordenadas da la parábola $y = x^2 - 3$ en el intervalo del área a calcular. De la observación de la figura se deduce el área a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_{-1}^{3} \left[2x - \left(x^2 - 3\right)\right] dx =$$

$$= \int_{-1}^{3} \left(- x^{2} + 2x + 3\right) \cdot dx = \left[- \frac{x^{3}}{3} + \frac{2x^{2}}{2} + 3x\right]_{-1}^{3} = \left[- \frac{x^{3}}{3} + x^{2} + 3x\right]_{-1}^{3} =$$

$$= \left(- \frac{3^{3}}{3} + 3^{2} + 3 \cdot 3\right) - \left[- \frac{(-1)^{3}}{3} + (- 1)^{2} + 3 \cdot (- 1)\right] = - 9 + 9 + 9 - \frac{1}{3} - 1 + 3 =$$

$$= 11 - \frac{1}{3} = \frac{32}{3}.$$

$$\underline{S = \frac{32}{3} u^{2} \cong 10,68 \, u^{2}.}$$

****

3º) Considere la función $f(x) = \{e^{x-1}\ \ si\ \ -1 \leq x < 1\ (x + a)^2\ \ si\ \ x \geq 1$. Se pide:

a) ¿Para qué valores de a la función es continua en $x = 1$?

b) Para el valor de a que hace continua la función f en todo su dominio, calcule las derivadas de f en los puntos $x = 0\ y\ x = 3$. ¿Cuándo es creciente o decreciente la función en estos puntos?

----

a)

La función $f(x)$ es continua en R, $\forall a \in R$, excepto para $x = 1$, cuya continuidad depende del valor de a, que se obtiene a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$x = 1 \Rightarrow \{f(x)\ = e^{x-1} =\ e^0 = 1$ $\qquad f(x)\ = (x + a)^2 = (1 + a$

$\Rightarrow f(x)\ = f(x)\ = f(1) \Rightarrow a^2 + 2a + 1 = 1;\ \ a(a + 2) = 0 \Rightarrow \{a_1 = 0\ \ \ a_2 =- 2$

.

$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ x = 1\ para\ a = 0\ y\ para\ a =- 2}.$

b)

La función resulta $\{a = 0 \Rightarrow f(x) = \{e^{x-1}\ \ si\ \ -1 \leq x < 1\ \ \ x^2\ \ \ si\ \ \ x \geq 1\ \ \ a =- 2 \Rightarrow f(x) = \{e^{x-1}\ \ si\ \ - 1$

.

La función derivada para cada uno de los valores de x pedidos es la siguiente:

$a = 0 \Rightarrow f'(x) = \{e^{x-1}\ \ si\ \ -1 \leq x < 1\ 2x\ \ \ si\ \ \ x \geq 1\ \Rightarrow \{f'(0) = \{e^{-1}\ \ si\ \ -1 \leq x < 1\ 0$

.

$\underline{Para\ x = 0 \in -1 \leq x < 1 \Rightarrow f'(0) = e^{-1} > 0 \Rightarrow Creciente}.$

$\underline{Para\ x = 3 \in x \geq 1 \Rightarrow f'(3) = 6 > 0 \Rightarrow Creciente}.$

$a =- 2 \Rightarrow f'(x) = \{e^{x-1}\ \ si\ \ -1 \leq x < 1\ 2x - 4\ \ si\ \ x \geq 1\ \Rightarrow \{f'(0) = \{e^{-1}\ \ si\ \ -1 \leq x <$

$\underline{Para\ x = 0 \in -1 \leq x < 1 \Rightarrow f'(0) = e^{-1} > 0 \Rightarrow Creciente}.$

$\underline{Para\ x = 3 \in x \geq 1 \Rightarrow f'(3) = 2 > 0 \Rightarrow Creciente}.$

$\underline{La\ función\ es\ creciente\ en\ los\ dos\ puntos}.$

****

4º) Un estuche contiene 17 lápices de color rojo y 13 de color azul.

a) Si elegimos uno al azar, cual es la probabilidad de que sea rojo?

b) Si elegimos dos al azar, sin reemplazamiento, ¿cuál es la probabilidad de que los dos sean azules?

c) Si elegimos dos al azar, sin reemplazamiento, calcule la probabilidad de que el primero sea azul y el segundo sea rojo?

----

a)

$$P = \frac{17}{17+13} = \frac{17}{30} = \underline{0,5667}.$$

b)

$$P = \frac{13}{30} \cdot \frac{12}{29} = \frac{13 \cdot 2}{5 \cdot 29} = \frac{26}{145} = \underline{0,1793}.$$

c)

$$P = P(AR) = \frac{13}{30} \cdot \frac{17}{29} = \frac{221}{870} = \underline{0,2540}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE BALEARES

JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contesta de manera clara y razonada a una de las dos opciones propuestas. Se valorará la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) utilizado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autorizarán las que traigan información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1º) Considerar las matrices: $A = (2\ \ -5\ 1\ \ -3\ ),\ B = (3\ \ -1\ 0\ 1\ )\ y\ C = (1\ 2\ \ -1\ 5\ )$. Se pide:

$a)$ Calcular $A^2 - B \cdot C^t$, donde C^t es la traspuesta de la matriz C.

$b)$ Resolver la ecuación matricial $A \cdot X + B = C$.

$a)$

$$A^2 - B \cdot C^t = (2\ \ -5\ 1\ \ -3\ ) \cdot (2\ \ -5\ 1\ \ -3\ ) - (3\ \ -1\ 0\ 1\ ) \cdot (1\ \ -1\ 2\ 5\ ) =$$

$$= (-\ 1\ 5\ \ -1\ 4\ ) - (1\ \ -8\ 2\ 5\ ) = (-\ 2\ 13\ \ -3\ \ -1\ ).$$

$$\underline{A^2 - B \cdot C^t = (-\ 2\ 13\ \ -3\ \ -1\ )}.$$

$b)$

$$A \cdot X + B = C;\ \ A \cdot X = C - B;\ \ A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (C - B);$$

$I \cdot X = A^{-1} \cdot (C - B) \Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot (C - B)}.$

$$(A/I) = (1\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow (0\ 1\ 1\ 0\ ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1\} \Rightarrow (0\ 1\ 1\ \ -2\ ) \Rightarrow \{F_1 \rightarrow F_1 + 3F_2\} \Rightarrow (3\ \ -5\ 1\ \ -2\ ) \Rightarrow$$

$\Rightarrow A^{-1} = (3\ \ -5\ 1\ \ -2\ ).$

$$X = A^{-1}\cdot(C - B) = (3 \;\; - 5 \; 1 \;\; - 2)\cdot[(1 \; 2 \;\; - 1 \; 5) - (3 \;\; - 1 \; 0 \; 1)] =$$

$$= (3 \;\; - 5 \; 1 \;\; - 2)\cdot(- 2 \; 3 \;\; - 1 \; 4) = (- 1 \;\; - 11 \; 0 \;\; - 5).$$

$$\underline{X = (- 1 \;\; - 11 \; 0 \;\; - 5)}.$$

****

2º) Un estudio acerca de la presencia de CO_2 en la atmósfera de una ciudad indica que el nivel de contaminación viene dado por la función $C(t) = -0,2t^2 + 4t + 25$, con $0 \leq t \leq 25$, (t en años transcurridos desde el año 2.000). Se pide:

$a)$ ¿En qué año se alcanzará un máximo en el nivel de contaminación?

$b)$ ¿En qué año se alcanzará el nivel de contaminación cero?

$c)$ ¿Cuando $t = 17$ el nivel de contaminación será creciente o decreciente?

$a)$

Una función polinómica tiene un máximo relativo cuando se anula su primera derivada y es positiva la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$C'(t) = -0,4t + 4.$ $\qquad C''(t) = -0,4 < 0 \Rightarrow Máximo.$

$C'(t) = 0 \Rightarrow -0,4t + 4 = 0;\ -4t + 40 = 0;\ -t + 10 = 0 \Rightarrow t = 10.$

$\underline{El\ máximo\ nivel\ de\ contaminación\ se\ alcanzará\ el\ año\ 2.010}.$

$b)$

$C(t) = -0,2t^2 + 4t + 25 = 0;\ -2t^2 + 40t + 250 = 0;\ t^2 - 20t - 125 = 0;$

$t = \frac{20 \pm \sqrt{400+500}}{2} = \frac{20 \pm \sqrt{900}}{2} = \frac{20 \pm 30}{2} = 10 \pm 15 \Rightarrow t_1 = -5;\ t_2 = 25.$

La solución negativa carece de sentido.

$\underline{El\ nivel\ de\ contaminación\ cero\ se\ alcanzará\ el\ año\ 2.025}.$

$c)$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$C'(t) = -0,4t + 4.$

$C'(17) = -0,4 \cdot 17 + 4 = -6,8 + 4 = -2,8 < 0.$

$\underline{Cuando\ t = 17\ el\ nivel\ de\ contaminacion\ será\ decreciente}.$

****

3º) Sean A y B dos sucesos que tienen probabilidades 0,4 y 0,6, respectivamente. Se sabe que dado B, la probabilidad de que ocurra A es 0,3. Se pide:

$a)$ ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran ambos sucesos a la vez?

$b)$ ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra cualquiera de los dos sucesos?

$c)$ ¿Cuál es la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos?

$Datos: P(A) = 0,4; \;\; P(B) = 0,6; \;\; P(A/B) = 0,3.$

$a)$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0,3 \Rightarrow P(A \cap B) = 0,3 \cdot P(B) = 0,3 \cdot 0,6 = 0,18.$$

$\underline{La\ probabilidad\ de\ que\ ocurran\ los\ dos\ sucesos\ a\ la\ ves\ es\ 0,18}.$

$b)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,4 + 0,6 - 0,18 = 0,82.$$

$\underline{La\ probabilidad\ de\ que\ ocurra\ cualquiera\ de\ los\ dos\ sucesos\ es\ 0,82}.$

$c)$

El suceso contrario a "que no ocurra ninguno de los dos sucesos" es "que ocurra alguno de los sucesos".

$$P = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,82 = 0,18$$

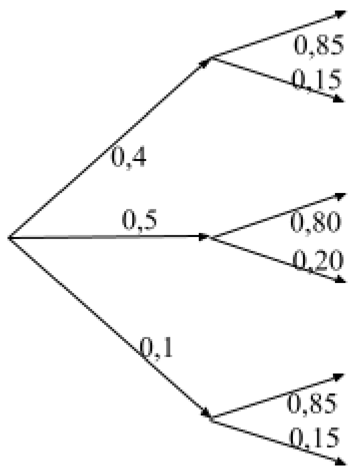
$\underline{La\ probabilidad\ de\ que\ no\ ocurra\ ninguno\ de\ los\ dos\ sucesos\ es\ 0,18}.$

****

4º) En una cierta entidad bancaria, el 40 % de los créditos concedidos son para vivienda, el 50 % se destinan a empresas, y el 10 % son para consumo. Se sabe además que de los créditos concedidos a vivienda, el 15 % resultan impagados; de los créditos concedidos a empresas son impagados el 20 %; y de los créditos concedidos al consumo resultan impagados el 15 %.

a) Calcular la probabilidad de que un cierto crédito elegido al azar sea pagado?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un crédito elegido al azar se haya destinado a consumo, sabiendo que se ha pagado?



a)

$$P = P(P) = P(V)\cdot P(P/V) + P(E)\cdot P(P/E) + P(C)\cdot P(P/C) =$$

$$= 0,4\cdot 0,85 + 0,5\cdot 0,80 + 0,1\cdot 0,85 = 0,340 + 0,400 + 0,085 = \underline{0,825}.$$

b)

$$P = P(C/P) = \frac{P(C\cap P)}{P(P)} = \frac{P(C)\cdot P(P/C)}{P(V)\cdot P(P/V)+P(E)\cdot P(P/E)+P(C)\cdot P(P/C)} =$$

$$= \frac{0,1\cdot 0,85}{0,4\cdot 0,85+0,5\cdot 0,80+0,1\cdot 0,85} = \frac{0,085}{0,825} = \underline{0,1030}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Un grupo de estudiantes financia su viaje de fin de curso con la venta de participaciones de lotería por importe de 1, 2 y 5 euros. Han recaudado un total de 620 euros y han vendido el doble de participaciones de un euros que de 5 euros. Si han vendido un total de 280 participaciones, calcular el número de participaciones que han vendido de cada importe.

Sean x, y, z el números de participaciones de lotería de 1, 2 y 5 euros que venden los estudiantes, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$x + 2y + 5z = 620 \qquad x = 2z \quad x + y + z = 280 \}.$

Sustituyendo el valor de x en la primera y tercera ecuaciones:

$2z + 2y + 5z = 620 \quad 2z + y + z = 280 \} \; 2y + 7z = 620 \;\; y + 3z = 280 \} \qquad 2$

$x = 2 \cdot 60 = 120; \;\; y + 3 \cdot 60 = 280; \;\; y + 180 = 280 \Rightarrow y = 100.$

$\underline{Han\ vendido\ 120\ participaciones\ de\ 1\ euro;\ 100\ de\ 2\ euros\ y\ 60\ de\ 3\ euros.}$

****

2º) Una fábrica de papel quiere liquidar hasta 88 kg de papel reciclado y hasta 148 kg de papel normal. Para ello hace dos tipos de lotes, A y B. Los lotes de tipo A están formados por 1 kg de papel reciclado y 3 kg de papel normal, y los lotes de tipo B por 2 kg de papel de cada clase. El precio de venta de cada lote de tipo A es de 1,1 euros y el de cada lote de tipo B es de 1,5 euros. ¿Cuántos lotes de tipo A y B debe vender para maximizar sus ingresos? ¿A cuánto ascienden estos ingresos máximos? Se tiene que plantear el problema como un problema de programación lineal, dibujando la región factible de soluciones y determinando y dibujando sus vértices.

Sean x e y el número de lotes de papel de los tipos A y B que se venden, respectivamente.

Las condiciones del ejercicio se establecen en el siguiente sistema de inecuaciones: $\left.\begin{array}{l} x + 2y \leq 88 \\ 3x + 2y \leq 148 \\ x \geq y \geq 0 \end{array}\right\}$.

x	40	20
y	24	34

$①\Rightarrow x + 2y \leq 88 \Rightarrow y \leq \frac{88-x}{2} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

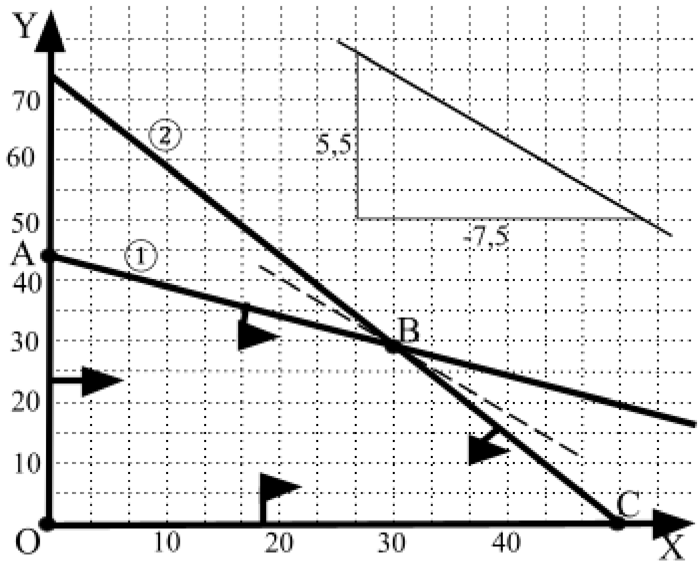
x	0	40
y	74	14

$②\Rightarrow 3x + 2y \leq 148 \Rightarrow y \leq \frac{148-3x}{2} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

La función de rendimiento es la siguiente:
$f(x,\ y) = 1,1x + 1,5y.$

La región factible es la que aparece sombreada de la figura.

Los vértices de la sección factible son, además del origen de coordenadas, los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ x + 2y = 88 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,\ 44).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + 2y = 88 \\ 3x + 2y = 148 \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l} -x - 2y = -88 \\ 3x + 2y = 148 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x = 60$

$2y = 58;\ \ y = 29 \Rightarrow B(30,\ 29).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ 3x + 2y = 148 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x = 148 \Rightarrow C\left(\frac{148}{3},\ 0\right).$

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 44) = 1,1 \cdot 0 + 1,5 \cdot 44 = 0 + 66 = 66.$

$B \Rightarrow f(30,\ 29) = 1,1 \cdot 30 + 1,5 \cdot 29 = 33 + 43,5 = 76,5.$

$C \Rightarrow f\left(\frac{148}{3},\ 0\right) = 1,1 \cdot \frac{148}{3} + 1,5 \cdot 0 = 54,27 + 0 = 54,27.$

El valor máximo se produce en el punto B.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = 1,1x + 1,5y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1,1}{1,5}x = -\frac{5,5}{7,5}x \Rightarrow m = -\frac{5,5}{7,5}.$

$\underline{Maximiza\ beneficios\ vendiendo\ 30\ lotes\ A\ y\ 29\ lotes\ B}.$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 76,5\ euros}.$

****

3º) En cierta población el consumo de agua (en m^3) en función de las horas del día, viene dado por $f(t) = \{ \quad \frac{17}{9}t \quad si\ 0 \leq t < 9\ at^2 + \beta t - 172\ si\ 9 \leq t < 20\ 168 - 7t\ si\ 20 \leq t < 24$. Sabiendo que la función es continua en el intervalo $(0,\ 20)$, y que a las 15 horas se alcanza el máximo de consumo de agua, determinar $a\ y$ β.

Siendo la función continua en $(0,\ 20)$, sus límites laterales son iguales en cualquiera de los puntos del intervalo.

$x = 9 \Rightarrow \left\{ f(x) = \left(\frac{17}{9}t\right) = \frac{17}{9} \cdot 9 = 17 \qquad f(x) = \left(at^2 + \beta t - 172\right) = 8\right.$

$\Rightarrow f(x) = f(x) \Rightarrow 17 = 81a + 9\beta - 172;\ \ 81a + 9\beta = 189;$

$9a + \beta = 21.$ (1)

La condición necesaria para que una función tenga un máximo es que se anule su primera derivada.

$f'(t) = \{ \frac{17}{9} \quad si\ 0 \leq t < 9\ 2at + \beta\ si\ 9 \leq t < 20\ -7\ si\ 20 \leq t < 24$.

Si a las 15 horas tiene un máximo:

$f'(15) = 0 \Rightarrow 2a \cdot 15 + \beta = 0;\ \ 30a + \beta = 0.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$9a + \beta = 21\ 30a + \beta = 0 \} \quad -9a - \beta = -21\ 30a + \beta = 0 \quad \} \Rightarrow 21a = -21 \Rightarrow \underline{a =}$

.

****

4º) Se sabe que el peso de los jugadores de la liga de fútbol profesional se distribuye según una normal de desviación típica de 6 kg. Para estudiar el peso medio de los jugadores, se extrae una muestra de tamaño 8, obteniendo los siguientes resultados:

63,7; 48; 43,5; 65; 82; 70,3; 56,5; 50.

a) Calcular un intervalo de confianza a un nivel de significación del 10 % para el peso medio de los jugadores.

b) ¿De qué tamaño tiene que ser la muestra para que con el mismo nivel de significación el error cometido en la estimación no exceda de 1,2 kg?

----

a)

$$\overline{x} = \frac{63{,}7+48+43{,}5+65+82+70{,}3+56{,}5+50}{8} = \frac{479}{8} = 59,875.$$

$$\alpha = 0,10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,05} = 1,645.$$

$(1 - 0,05 = 0,9500 \rightarrow z = 1,645).$

Datos: $n = 8;\ \overline{x} = 59,875;\ \sigma = 6;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,645.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(59,875 - 1,645\cdot\frac{6}{\sqrt{8}};\ 59,875 + 1,645\cdot\frac{6}{\sqrt{8}}\right);$$

$(59,875 - 1,645\cdot2,1213;\ 59,875 + 1,645\cdot2,1213);$

$(59,875 - 3,4896;\ 59,875 + 3,4896).$

$$\underline{I.\ C._{97\,\%} = (56,3854;\ 63,3646).}$$

b)

Datos: $\sigma = 6;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,645;\ E = 1,2.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1,645\cdot\frac{6}{1{,}2}\right)^2 =$

$= (1,645\cdot5)^2 = 8,225^2 = 67,65.$

$$\underline{\textit{El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser de } 68 \textit{ jugadores.}}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE CANARIAS

JULIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Cada alumno debe elegir sólo una de las pruebas, A o B.

PRUEBA A

1º) El tiempo diario, en horas, dedicado a ver la TV en una región, sigue una distribución normal con una desviación típica de 1,5 horas. Para estimar la media de esta variable, se ha realizado una encuesta a 256 personas obteniéndose el intervalo de confianza $[4,29; 4,71]$.

$a)$ ¿Cuál es el valor de la media muestral?

$b)$ ¿Cuál es el nivel de confianza del intervalo?

$c)$ Con los mismos datos, ¿cuál sería el intervalo con un nivel de confianza igual a 0,9?

$a)$

$$\overline{x} = \frac{4,71+4,29}{2} = \frac{9}{2} = \underline{4,5}.$$

$b)$

$$E = \frac{4,71-4,29}{2} = \frac{0,42}{2} = 0,21.$$

Datos: $\sigma = 1,5;\ \ n = 256;\ \ E = 0,21.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{0,21 \cdot \sqrt{256}}{1,5} = \frac{3,36}{1,5} = 2,24.$

Mirando en la tabla de distribución normal $N(0,\ 1)$:

$2,24 \rightarrow 0,9875 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9875;\ \ 2 - \alpha = 1,9750;\ \ 1 - \alpha = 0,9750.$

$$\underline{El\ nivel\ de\ confianza\ es\ del\ 97,50\ \%}.$$

$c)$

$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 1 - 0,90 = 0,10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,05} = 1,645.$

$(1 - 0,05 = 0,9500 \rightarrow z = 1,645).$

Datos: $\overline{x} = 4,5;\ \ n = 256;\ \ \sigma = 1,5;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,645.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(4,5 - 1,645 \cdot \frac{1,5}{\sqrt{256}};\ 4,5 + 1,645 \cdot \frac{1,5}{\sqrt{256}}\right);$

$(4,5 - 1,645 \cdot 0,0938;\ 4,5 + 1,645 \cdot 0,0938);\ \ (4,5 - 0,1542;\ 4,5 + 0,1542)$
.

$$\underline{I.\ C._{90\ \%}\ (4,3458;\ 4,6542).}$$

****

2º) El 30 % de loa videojuegos que se consumen en España se juegan en PC, el 45 % en consola y el resto en el móvil. De los que se juegan en PC, el 50 % son de acción, el 40 % de estrategia y el resto de otras categorías. De los que se juegan en consola, el 70 % son de acción, el 10 % de estrategia y el resto de otras categorías. De los juegos para móvil, un 25 % son de acción, otro 25 % de estrategia y el resto de otras categorías.

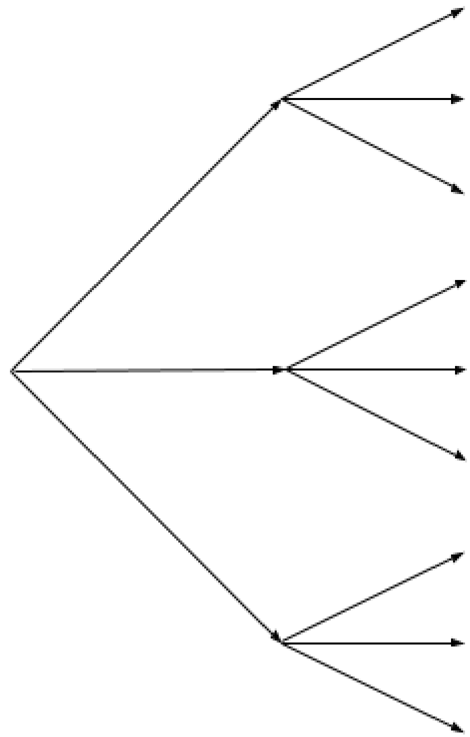
a) Construir el árbol de probabilidades.

b) ¿Qué proporción de los videojuegos consumidos en España son de acción?

c) Se elige al azar un jugador que está jugando a un juego de estrategia, ¿cuál es la probabilidad de que lo esté haciendo a través del móvil?

----

a)



b)

$$P = P(A) = P(PC) \cdot P(A/PC) + P(Co) \cdot P(A/Co) + P(Mo) \cdot P(A/Mo) =$$

$$= 0,30 \cdot 0,50 + 0,45 \cdot 0,70 + 0,15 \cdot 0,25 = 0,1500 + 0,3150 + 0,0375 = 0,5025$$

.

$\underline{En\ España\ son\ de\ acción\ el\ 50,25\ \%\ de\ los\ juegos}.$

c)

$$P = P(E/Mo) = \frac{P(Mo \cap E)}{P(E)} = \frac{P(Mo) \cdot P(E/Mo)}{P(PC) \cdot P(E/PC) + P(Co) \cdot P(E/Co) + P(Mo) \cdot P(E/Mo)} =$$

$$= \frac{0,15 \cdot 0,25}{0,30 \cdot 0,40 + 0,45 \cdot 0,10 + 0,15 \cdot 0,25} = \frac{0,0375}{0,1200 + 0,0450 + 0,0375} = \frac{0,0375}{0,2025} = \underline{0,1852}.$$

****

3º) La función: $G(x) = \{\frac{2}{5}x \ si \ 0 \leq x < 3 \ \frac{x+3}{x+2} \ \ si \ x > 3$ da la ganancia anual (en cientos de miles de euros) obtenida por una empresa de telefonía móvil en función del tiempo x (en años) transcurrido desde su creación:

a) ¿A cuánto asciende la ganancia transcurridos dos años y medio? ¿Y transcurridos cuatro años?

b) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de dichas ganancias. Justificar la respuesta.

c) ¿Qué sucede a medida que transcurre el tiempo. Razonar la respuesta.

----

a)

$$G(2,5) = \frac{2}{5} \cdot 2,5 = 2 \cdot 0,5 = 1.$$

$$\underline{La \ ganancia \ a \ los \ dos \ años \ es \ de \ 100.000 \ euros.}$$

$$G(4) = \frac{2,5+3}{2,5+2} = \frac{5,5}{4,5} = \frac{11}{9} = 1,2222.$$

$$\underline{La \ ganancia \ a \ los \ cuatro \ años \ es \ de \ 122.222,22 \ euros.}$$

b)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$G'(x) = \{\frac{2}{5} \ \ si \ 0 \leq x < 3 \ \frac{-1}{(x+2)^2} \ (*) \ si \ x > 3 \ .$$

$$(*) \quad h(x) = \frac{x+3}{x+2} \Rightarrow h'(x) = \frac{1 \cdot (x+2) - (x+3) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{x+2-x-3}{(x+2)^2} = \frac{-1}{(x+2)^2}.$$

Teniendo en cuenta que $\frac{2}{5} > 0$ y que $\frac{-1}{(x+2)^2} < 0, \ \forall x > 3$, los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función $G(x)$ son los siguientes:

$$\underline{G(x) \ creciente: \ G'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon (0, 3).}$$

$$\underline{G(x) \ decreciente: \ G'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon (3, \ + \infty).}$$

c)

$G(x) = \frac{x+3}{x+2} = 1.$

$\underline{Con\ el\ paso\ del\ tiempo\ la\ ganancia\ se\ estabiliza\ en\ 100.000\ euros}.$

****

4º) Los 30 marineros de un barco son de tres nacionalidades, chinos, filipinos y griegos. El número de marineros griegos duplica el total de las otras dos nacionalidades. Además, por cada dos marineros chinos hay tres marineros filipinos.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) ¿Cuántos marineros de cada nacionalidad hay en el barco?

----

a)

Sean x, y, z los marineros chinos, filipinos y griegos del barco, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$x + y + z = 30 \quad z = 2 \cdot (x + y) \quad\quad 3x = 2y \} \quad x + y + z = 30 \quad\quad z = 2x + 2$

.

b)

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|30\ 1\ 1\ 0\ 2\ -1\ 0\ -2\ 0\ |}{|1\ 1\ 1\ 2\ 2\ -1\ 3\ -2\ 0\ |} = \frac{-60}{-4-3-6-2} = \frac{-60}{-15} = 4.$$

$$y = \frac{|1\ 30\ 1\ 2\ 0\ -1\ 3\ 0\ 0\ |}{-15} = \frac{-90}{-15} = 6.$$

$$z = \frac{|1\ 1\ 30\ 2\ 2\ 0\ 3\ -2\ 0\ |}{-15} = \frac{-120-180}{-15} = \frac{-300}{-15} = 20.$$

$\underline{En\ el\ barco\ van\ 4\ chinos,\ 6\ filipinos\ y\ 20\ griegos.}$

****

PRUEBA B

1º) Recientes estudios indican que el 35 % de las mujeres embarazadas de una región son fumadoras. Se toma una muestra de 100 mujeres embarazadas en esa región. Calcular la probabilidad de que en dicha muestra:

a) Hay menos de 40 fumadoras.

b) Sean más de 25 las mujeres que fuman.

c) El número de fumadoras esté entre 32 y 38

$Datos: p = 0,35;\ \ q = 1 - 0,35 = 0,65;\ \ n = 100.$

$N\left(p;\ \sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}\right) \Rightarrow N\left(0,35;\ \sqrt{\frac{0,35\cdot 0,65}{100}}\right) \Rightarrow N(0,35;\ 0,0477).$

Tipificando la variable: $X\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \Rightarrow X\left(\frac{x-0,35}{0,0477}\right).$

a)

$P(X < 40).$

$P(\overline{X} < 0,40) = P\left(\frac{x-0,35}{0,0477} < \frac{0,40-0,35}{0,0477}\right) = P\left(Z < \frac{0,05}{0,0477}\right) = P(Z < 1,05) =$

$= \underline{0,8531}.$

b)

$P(X > 25).$

$P(\overline{X} > 0,25) = P\left(\frac{x-0,35}{0,0477} > \frac{0,25-0,35}{0,0477}\right) = P\left(Z > \frac{-0,10}{0,0477}\right) = P(Z > -2,24) =$

$= P(Z < 2,24) = \underline{0,9875}.$

c)

$P(0,32 < X < 0,38).$

$P(0,32 < \overline{X} < 0,38) = P\left(\frac{0,32-0,35}{0,0477} < Z < \frac{0,38-0,35}{0,0477}\right) =$

$= P\left(\frac{-0,03}{0,0477} < Z < \frac{0,03}{0,0477}\right) = P(-0,63 < Z < 0,63) =$

$= P(Z < 0,63) - P(Z < -0,63) = P(Z < 0,63) - [1 - P(Z < 0,63)] =$

$$= P(Z < 0,63) - 1 + P(Z < 0,63) = 2 \cdot P(Z < 0,63) - 1 = 2 \cdot 0,7357 - 1 =$$

$$= 1,4714 - 1 = \underline{0,4714}.$$

****

2º) Una compañía telefónica tiene interés en determinar qué proporción de sus clientes estaría dispuesta a aceptar subida de tarifas a cambio de un incremento en el número de megas de descarga. Una encuesta previa indica que esta proporción está en torno al 15 %.

a) ¿De qué tamaño debería ser la muestra de clientes si se quiere estimar dicha proporción con un error inferior a 0,08 con un nivel de confianza del 95 %?

b) Finalmente, se ha realizado el estudio con una muestra de 196 clientes, de los cuales 37 manifestaron su conformidad con la propuesta. Calcular un intervalo de confianza al 92 % para la proporción total de clientes de la compañía que aceptaría dicha propuesta.

----

a)

Nivel de confianza del 92 %.

$1 - \alpha = 0,92 \rightarrow \alpha = 1 - 0,92 = 0,08 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,04} = 1,75.$

$(1 - 0,04 = 0,9600 \rightarrow z = 1,75).$

Datos: $n = 196;\ \ p = 0,15;\ \ q = 0,85;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,75;\ \ E = 0,08.$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}};\ \left(\frac{E}{z_{\frac{\alpha}{2}}}\right)^2 = \frac{p \cdot q}{n} \Rightarrow n = p \cdot q \cdot \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{E}\right)^2 = 0,15 \cdot 0,85 \cdot \left(\frac{1,75}{0,08}\right)^2 =$$
$$= 0,1275 \cdot 21,875^2 = 0,1275 \cdot 4785,5156 = 61,011.$$

$\underline{La\ muestra\ debe\ ser,\ como\ mínimo,\ de\ 62\ clientes.}$

b)

Datos: $n = 196;\ \ p = 0,37;\ \ q = 0,63;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,75.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q , $z_{\frac{\alpha}{2}}$ y n, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}},\ p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right).$

$$\left(0,37 - 1,75 \cdot \sqrt{\frac{0,37 \cdot 0,63}{196}};\ 0,37 + 1,75 \cdot \sqrt{\frac{0,37 \cdot 0,63}{196}}\right);$$

$(0,37 - 1,75 \cdot 0,0345;\ 0,37 + 1,75 \cdot 0,0345);\ \ (0,37 - 0,0604;\ 0,37 + 0,0604)$.

$$\underline{I.\ C._{92\,\%} = \left(0'3096;\ 0'4304\right).}$$

****

3º) Una zona de una terraza está limitada por las funciones $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ y $g(x) = 2x$, debe ser reparada con pintura impermeabilizante. Si se mide en metros, el precio de la pintura es $6,25\ euros/m^2$ y hay que sumar los gastos de aplicación y transportes, que suponen el 80 % del precio total de la pintura necesaria para pintar dicha superficie:

$a)$ Hacer una gráfica de la zona. $b)$ Hallar la superficie de la zona.

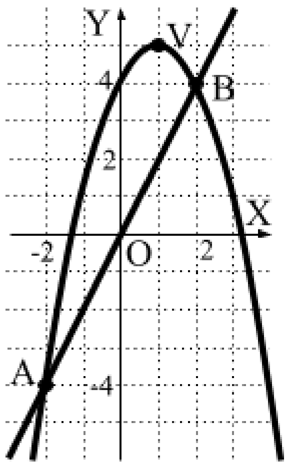
$c)$ ¿A cuánto asciende la reparación?

$a)$

Los puntos de intersección de la parábola $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ y la recta $g(x) = 2x$ tienen por abscisas las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$-x^2 + 2x + 4 = 2x;\ x^2 - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{x_1 = -2 \rightarrow A(-2, -4)\ x_2 = 2 \rightarrow B(2, 4)$$.



El vértice de la parábola $f(x) = -x^2 + 2x + 4$, que es cóncava ($\cap$), es el siguiente:

$$f'(x) = -2x + 2 = 0 \rightarrow x = 1.$$

$$f_{(1)} = -1^2 + 2 \cdot 1 + 4 = 5 \Rightarrow V(1,\ 5).$$

La representación gráfica del conjunto es el indicado en la figura adjunta.

$b)$

Para el cálculo del área limitada por la parábola y la recta, que es la parte sombreada de la figura, se tiene en cuenta que, en el intervalo $(-2,\ 2)$, todas las ordenadas de la parábola son mayores que las correspondientes ordenadas de la recta.

$$S = \int_{-2}^{2} \left[\left(-x^2 + 2x + 4\right) - 2x\right] \cdot dx = \int_{-2}^{2} \left(-x^2 + 4\right) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x\right]_{-2}^{2} =$$

$$= \left(-\frac{2^3}{3} + 4 \cdot 2\right) - \left[-\frac{(-2)^3}{3} + 4 \cdot (-2)\right] = -\frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} + 8 = 16 - \frac{16}{3} = \frac{48-16}{3} = \frac{3}{3}$$

.

$$\underline{S = \frac{32}{3}\ m^2 \cong 10,67\ m^2}.$$

$c)$

Precio de la pintura: $P_p = 6,25 \cdot S = 6,25 \cdot 10,67 = 66,67\ euros$.

El precio total, teniendo en cuenta que los gastos de aplicación y transporte suponen el 80 % del precio de la pintura, el precio total es el 180 % del precio de la pintura:

$P_T = 1,8 \cdot P_p = 1,8 \cdot 66,67 = 120.$

$$\underline{La\ reparación\ asciende\ a\ 120\ euros}.$$

****

4º) Una empresa fabrica teléfonos móviles con la misma pantalla electrónica en dos calidades distintas: calidad A, cuya carcasa es de plástico y calidad B cuya carcasa es de aluminio. El coste de producción unitario es de 70 euros para los teléfonos de calidad A y de 90 euros para los de calidad B. Asimismo, los precios de venta son de 100 euros para los de clase A y de 150 euros para los de clase B. Si, para fabricar la próxima remesa de móviles, la empresa dispone de un capital de 30.000 euros y su proveedor de componentes es capaz de suministrarle, como máximo, 350 pantallas (que se usan para ambas clases de móviles) y 310 carcasas de aluminio.

a) Plantear el problema que determina el número de móviles de cada calidad que se deben fabricar para maximizar el beneficio.

b) Representar la región factible, determinar una solución óptima y hallar el valor óptimo de la función objetivo.

----

a)

Sean x e y el número de teléfonos de los tipos A y B que se fabrica la empresa, respectivamente.

Las condiciones del ejercicio se establecen mediante el siguiente sistema de inecuaciones:

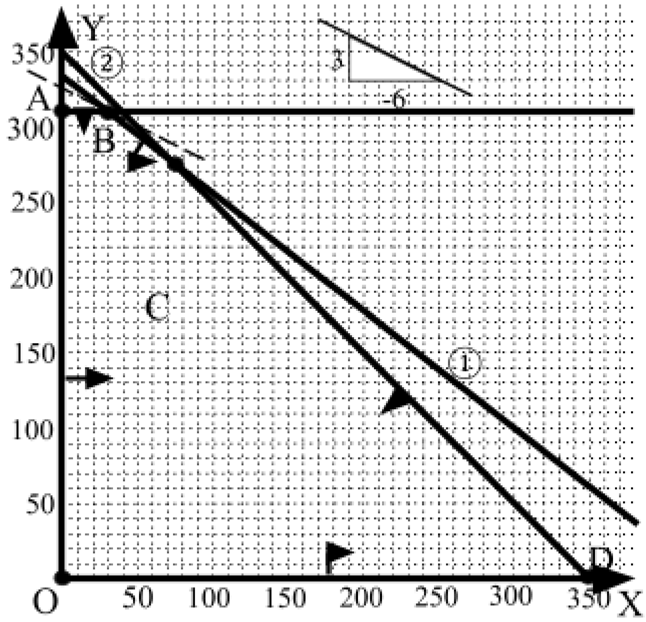
$70x + 90y \leq 30.000 \quad x + y \leq 350 \quad y \leq 310 \quad x \geq 0;\ y \geq 0 \} \Rightarrow \underline{7x}$

.

b)

La función compras es $f_C(x, y) = 70x + 90y$ y la función correspondiente a las ventas es $f_V(x, y) = 100x + 150y$.

Es evidente que la función de beneficios es la diferencia entre la función ventas y la función compras, o sea:



$f_B(x, y) = f_V(x, y) - f_C(x, y) =$

$= 100x + 150y - (70x + 90y) \Rightarrow$

$\Rightarrow f_B(x, y) = 30x + 60y.$

Para la obtención de la zona factible hacemos lo siguiente:

x	120	300
y	240	100

①$\Rightarrow 7x + 9y \leq 3.000 \Rightarrow y \leq \frac{3.000-7x}{9} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	350	0
y	0	350

②$\Rightarrow x + y \leq 350 \Rightarrow y \leq 350 - x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

Los vértices de la zona factible, que es la que aparece sombreada en la figura, además del origen, son los siguientes:

$A \Rightarrow \quad x = 0\ y = 310\ \} \Rightarrow A(0,\ 310).$

$B \Rightarrow 7x + 9y = 3.000 \qquad y = 310\ \} \Rightarrow x = \frac{3.000-9 \cdot 310}{7} = \frac{3.000-2.790}{7} = \frac{210}{7} = 30 \Rightarrow B$

.

$C \Rightarrow 7x + 9y = 3.000 \qquad x + y = 350\ \} \qquad 7x + 9y = 3.000\ - 7x - 7y =- 2.45$

$- 7x - 9y =- 3.000\ 9x + 9y = 3.150\ \} \Rightarrow 2x = 150;\ \ x = 75 \Rightarrow C(75,\ 275).$

$D \Rightarrow \qquad y = 0\ x + y = 350\ \} \Rightarrow D(350,\ 0).$

Los valores de la función de beneficios $f_B(x,\ y) = 30x + 60y$ en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 310) = 30 \cdot 0 + 60 \cdot 310 = 0 + 18.600 = 18.600.$

$B \Rightarrow f(30,\ 310) = 30 \cdot 30 + 60 \cdot 310 = 900 + 18.600 = 19.500.$

$C \Rightarrow f(75,\ 275) = 30 \cdot 75 + 60 \cdot 275 = 2.250 + 16.500 = 18.750.$

$D \Rightarrow f(350,\ 0) = 30 \cdot 350 + 60 \cdot 0 = 10.500 + 0 = 10.500.$

El máximo se produce en el punto B.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f_B(x,\ y) = 30x + 60y = 0 \Rightarrow y =- \frac{30}{60}x \Rightarrow m =- \frac{3}{6}.$

$\underline{El\ máximo\ se\ produce\ fabricando\ 30\ telefonos\ tipo\ A\ y\ 310\ tipo\ B}.$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 19.500\ euros}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE CANARIAS

JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Cada alumno debe elegir sólo una de las pruebas, A o B.

PRUEBA A

1º) Un estudio realizado por una compañía de seguros de coches estima que una de cada cinco personas accidentadas es mujer. Si se contabilizan, por término medio, 144 accidentes cada fin de semana:

a) Calcular la probabilidad de que, en un fin de semana, la proporción de mujeres accidentadas supere el 23 %.

b) Calcular la probabilidad de que, en un fin de semana, la proporción de hombres accidentados no supere el 84 %.

c) ¿Cuál es, por término medio, el número esperado de hombres accidentados cada fin de semana?

----

a)

$$Mujeres \Rightarrow p = \frac{1}{5} = 0,2; \;\; q = 1 - p = 0,8; \;\; n = 144.$$

$$\hat{P} \equiv N\left(p; \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right) \Rightarrow \hat{P} \equiv N\left(0,2; \sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{144}}\right) = N(0,2; \; 0,03).$$

$$P\left(\hat{P} > 0,23\right) = P\left(Z > \frac{0,23-0,2}{0,03}\right) = P\left(Z > \frac{0,03}{0,03}\right) = P(Z > 1) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0,8413 = \underline{0,1587}.$$

b)

$$Hombres \Rightarrow p = \frac{4}{5} = 0,8; \;\; q = 1 - p = 0,2; \;\; n = 144.$$

$$\hat{P} \equiv \left(p; \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right) \Rightarrow \hat{P} \equiv \left(0,8; \sqrt{\frac{0,8 \cdot 0,2}{144}}\right) = (0,8; \; 0,03).$$

$$P\left(\hat{P} \leq 0,84\right) = P\left(Z \leq \frac{0,84-0,8}{0,03}\right) = P\left(Z \leq \frac{0,04}{0,03}\right) = P(Z \leq 1,33) = \underline{0,9082}.$$

$c)$

Se trata de calcular el 80 % de 144.

$N = 80\ \%\ de\ 144 = 0,8 \cdot 144 = 115,2$

$$\underline{Se\ esperan\ 115\ hombres\ accidentados\ cada\ fin\ de\ semana}.$$

****

2º) Para una muestra de tamaño 100, y con una desviación típica de 15 años, la estimación media de la edad, en años, de los usuarios del servicio de atención a personas mayores, está entre 61,745 y 68,255 (ambos inclusive). Suponiendo que la variable manejada es normal:

a) ¿Cuál es la media muestral obtenida?

b) ¿Cuál es el nivel de confianza utilizado?

c) Usando la estimación puntual de la media obtenida en el apartado a), ¿cuál es la probabilidad de que la media de edad de 9 usuarios del servicio sea mayor o igual que 66 años?

----

a)

$$\overline{x} = \frac{68{,}255+61{,}745}{2} = \frac{130{,}000}{2} = \underline{65}.$$

b)

$$E = \frac{68{,}255-61{,}745}{2} = \frac{6{,}51}{2} = 3{,}255.$$

Datos: $\overline{x} = 65;\ \ n = 100;\ \ \sigma = 15;\ \ E = 3{,}255.$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{3{,}255 \cdot \sqrt{100}}{15} = 2{,}17.$$

Mirando en la tabla de distribución normal $N(0;\ 1)$:

$$\underline{El\ nivel\ de\ confianza\ utilizado\ ha\ sido\ del\ 98{,}5\ \%}.$$

c)

Datos: $\overline{x} = 65;\ \ n = 9;\ \ \sigma = 15.$

$$N\left(\mu;\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow N\left(65;\ \frac{15}{\sqrt{9}}\right) = N(65;\ 5).$$

$$P\left(\hat{P} \geq 66\right) = P\left(Z \geq \frac{66-65}{5}\right) = P\left(Z \geq \frac{1}{5}\right) = P(Z \geq 0{,}2) =$$

$$= 1 - P(Z < 0{,}2) = 1 - 0{,}5795 = \underline{0{,}4205}.$$

****

3º) Una empresa de material fotográfico oferta una máquina de revelado asegurando que es capaz de pasar a papel 13 fotografías por minuto. Sus cualidades se van deteriorando con el tiempo, de forma que el número de fotografías por minuto varía en función del número de años transcurridos desde su compra, según la siguiente función: $f(x) = \{-\ 0,5x\ +\ 13\ \ si\ 0 \leq x\ <\ 6\ \frac{5(x+14)}{x+4}\ \ ,\ si\ x \geq 6$:

a) Comprobar que el número de fotografías por minuto decrece con el paso de los años.

b) Justificar que a partir de los 6 años revelará menos de 10 fotografías por minuto y que no revelará menos de 5 fotografías por minuto por muy vieja que sea la máquina.

----

a)

Una función es creciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \{-\ 0,5\ \ si\ 0 \leq x\ <\ 6\ \frac{-50}{(x+4)^2}\ (*)\ si\ x \geq 6\ .$$

(*) Considerada la función $g(x) = \frac{5(x+14)}{x+4}$ es:

$$g'(x) = \frac{5 \cdot (x+4) - 5(x+14) \cdot 1}{(x+4)^2} = \frac{5x+20-5x-70}{(x+4)^2} = \frac{-50}{(x+4)^2}.$$

Para un valor suficientemente grande de x es $g'(x) = \frac{-50}{(x+4)^2} <\ 0,\ \forall x \in R.$

$\underline{Queda\ probado\ que\ el\ nº\ de\ fotografías\ disminuye\ con\ el\ paso\ de\ los\ años}.$

b)

$$f(x)\ \ = \frac{5(x+14)}{x+4}\ \ = 5 \Rightarrow 5 \leq f(x) \leq 10.$$

$\underline{Queda\ justificado\ que\ a\ partir\ de\ los\ 6\ años\ el\ nº\ de\ fotos\ es\ 5 \leq x\ <\ 10}.$

****

4º) En el presupuesto de una corporación pública, las partidas dedicadas a inversión en proyectos de interés comunitario, gastos de funcionamiento (personal y corrientes) y gastos sociales (acciones culturales, educativas y sociales) suman 125 millones de euros. La inversión en proyectos es el 56,25 % del resto de lo presupuestado y, por cada 9 millones dedicados a gastos sociales, hay 11 dedicados a gastos de funcionamiento.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) Resolver el sistema anterior. ¿Cuáles son las cantidades asignadas a cada partida?

----

a)

Siendo m lo presupuestado en proyectos, según el enunciado sería:

$m = 56,25 \cdot (125 - m)$; $m = 0,5625 \cdot 125 - 0,5625m$;

$1,5625m = 70,3125$; $m = \frac{70,3125}{1,5625} = 45$.

Sean x e y el número de millones invertidos en gastos de funcionamiento y en gastos sociales, respectivamente, de la corporación pública que se considera.

El sistema que resulta es el siguiente:

$$\underline{x + y = 45 \quad 9y = 11x \}}$$

b)

$x + y = 45 \quad 9y = 11x \} \qquad x + y = 45 \; 11x - 9y = 0 \} \; 9x + 9y = 405 \quad 11x - 9y$

$\Rightarrow x = \frac{81}{4} = 20,25. \qquad y = 45 - x = 45 - 20,25 = 24,75.$

$\underline{Se\ gastan\ 20,25\ millones\ en\ funcionamiento\ y\ 24,75\ en\ gastos\ sociales.}$

****

PRUEBA B

1º) El gasto mensual en agua de las familias de 4 miembros es una normal de media 32 euros con una desviación típica de 10 euros. Hallar (justificando las respuestas):

a) Probabilidad de que el gasto mensual de una de estas familias sea mayor que 36 euros.

b) Probabilidad de que el gasto mensual de una de estas familias esté entre 28 y 35 euros.

c) Probabilidad de que el gasto medio de 9 de estas familias no supere los 30 euros.

Datos: $\mu = 32; \;\; \sigma = 10.$

a)

$P(X > 36).$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-36}{10}.$

$P(X > 36) = P\left(\frac{X-32}{10} > \frac{36-32}{10}\right) P\left(Z > \frac{4}{10}\right) = P(Z >- 0,4) =$

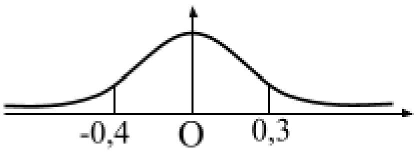
$= 1 - P(Z < 4) = 1 - 0,6554 = \underline{0,3446}.$

b)

$P(28 < X < 35).$

$P(28 < X < 35) = P\left(\frac{28-32}{10} < \frac{X-32}{10} < \frac{35-32}{10}\right) = P\left(- \frac{4}{10} < Z < \frac{3}{10}\right) =$

$= P(- 0,4 < Z < 0,3) =$



$= P(Z < 0,4) - [1 - P(Z < 0,3)] =$

$= 0,6554 - 1 + P(Z < 0,3) = 0,6554 - 1 + 0,6179 = 1,2733 - 1 = \underline{0,2733}$
.

c)

$P(X < 30) = P\left(\frac{X-32}{10} < \frac{30-32}{10}\right) = P\left(Z < \frac{-2}{10}\right) = P(Z <- 0,2) =$

$= 1 - P(Z \geq 0,2) = 1 - 0,5793 = \underline{0,4207}.$

****

2º) En una ciudad, el 20 % de las personas que acceden a un centro comercial urbano proceden del centro de la ciudad, el 45 % de barrios periféricos y el resto de pueblos cercanos. Respectivamente, efectúan compras el 60 %, el 75 % y el 50 %.

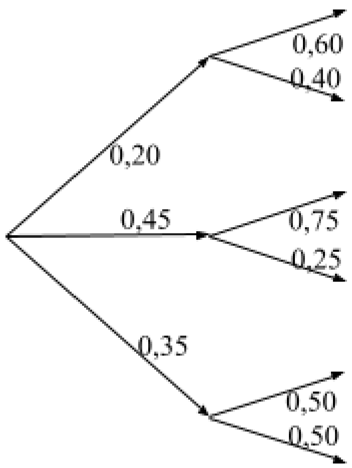
a) Dibujar el árbol de probabilidades.

b) Si un determinado día visitan el centro comercial 2.000 personas, ¿cuál es el número esperado que no realiza compras?

c) De los que entran en una determinada tienda del centro comercial, el 30 % realizan compras. ¿Cuál es el porcentaje de los que, entrando y realizando compras en esa tienda, proceden de barrios periféricos?

----

a)



b)

$$N = 2.000 \cdot P(\overline{C}) = P(Ce) \cdot P(\overline{C}/Ce) + P(B) \cdot P(\overline{C}/B) + P(P) \cdot P(\overline{C}/P) =$$

$$= 2.000 \cdot (0,20 \cdot 0,40 + 0,45 \cdot 0,25 + 0,35 \cdot 0,50) =$$

$$= 2.000 \cdot (0,0800 + 0,1125 + 0,1750) = 2.000 \cdot 0,3675 = 735.$$

$\underline{Se\ espera\ que\ no\ realicen\ compras\ 735\ personas.}$

c)

$$P = P(B/C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(B) \cdot P(C/B)}{P(Ce) \cdot P(C/Ce) + P(B) \cdot P(C/B) + P(P) \cdot P(P/C)} =$$

$$= \frac{0,45 \cdot 0,75}{0,20 \cdot 0,60 + 0,45 \cdot 0,75 + 0,35 \cdot 0,50} = \frac{0,3375}{0,1200 + 0,3375 + 0,1750} = \frac{0,3375}{0,6325} = 0,5336 = 53,36\ \%.$$

$30\ \%\ del\ 53,36\ \% \cong 16.$

$\underline{Proceden\ de\ los\ barrios\ periféricos\ el\ 16\ \%.}$

****

3º) Una zona de un patio está limitada por $y = f(x) = 3(x - 1)$ e $y = g(x) = \frac{(x-1)^2}{4}$. Si las unidades de medida son metros, justificando las respuestas:

a) Hacer una gráfica de la zona.

b) ¿Cuántos metros cuadrados tiene la zona?

c) Se pretende cubrirla de césped artificial que cuesta 10 euros el metro cuadrado. Si, por razones de instalación, se pierde el 15 % de la superficie adquirida, ¿cuánto cuesta la cantidad de césped artificial que hay que comprar?

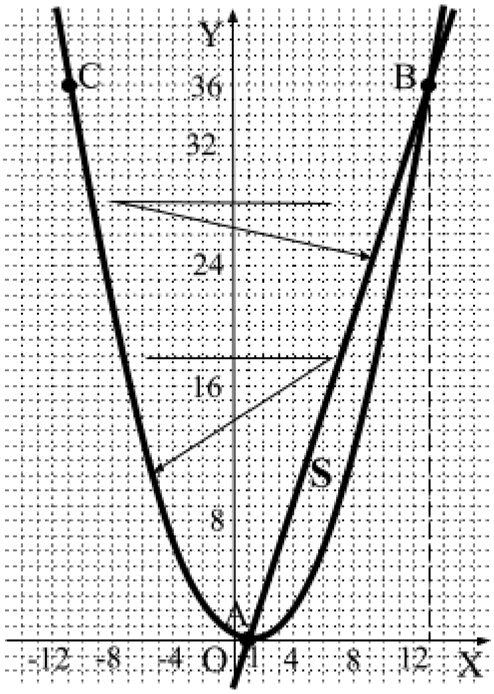
----

a)

Los puntos de intersección de las funciones son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$3(x - 1) = \frac{(x-1)^2}{4};\ 12x - 12 = x^2 - 2x + 1 = 0;\ x^2 - 14x + 13 = 0;$$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{196-52}}{2} = \frac{14 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{14 \pm 12}{2} =$$



$$= 7 \pm 6 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \rightarrow A(1, 0) \\ x_2 = 13 \rightarrow B(13, 36) \end{cases}.$$

El punto simétrico de B es $C(-11, 36)$.

El vértice de la parábola, que es convexa, $y = f(x) = \frac{(x-1)^2}{4}$ es el siguiente:

$$y' = f'(x) = \frac{x-1}{2} = 0 \rightarrow$$

$\rightarrow x = 1 \Rightarrow V(1,\ 0).$

La representación gráfica, aproximada, aparece en la figura adjunta.

b)

$$S = \int_1^{13}\left[3(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2}\right]\cdot dx = \int_1^{13}\left[3x - 3 - \frac{1}{2}(x-1)^2\right]\cdot dx =$$

$$= \left[\frac{3x^2}{2} - 3x\right]_1^{13} - \frac{1}{2}\cdot\int_1^{13}(x-1)^2\cdot dx = M - \frac{1}{2}N. \quad (*)$$

$$M = \left[\frac{3x^2}{2} - 3x\right]_1^{13} = \left(\frac{3\cdot 13^2}{2} - 3\cdot 13\right) - \left(\frac{3\cdot 1^2}{2} - 3\cdot 1\right) = \frac{507}{2} - 39 - \frac{3}{2} + 3 =$$

$$= \frac{504}{2} - 36 = 252 - 36 = 216.$$

$$N = \int_1^{13}(x-1)^2\cdot dx \Rightarrow (x = 13 \rightarrow t = 12\ x = 1 \rightarrow t = 0) \Rightarrow \int_0^{12} t^2\cdot dt =$$

$$= \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{12} = \frac{12^3}{3} - 0 = \frac{1.728}{3} = 576.$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de M y N:

$S = 216 + 576 = 792.$

$\underline{La\ zona\ tiene\ 792\ metros\ cuadrados}.$

c)

$Coste = 10\cdot 85\ \%\ de\ 792 = 10\cdot 0,85\cdot 792 = 6.732.$

$\underline{El\ césped\ cuesta\ 6.732\ euros}.$

****

4º) Una confitería tiene en el almacén 320 bombones de crema de cacao, 240 bombones con frutos secos y 200 bombones con licor. Estos bombones se venden empaquetados en dos tipos de cajas: azules y rojas. En cada caja azul se incluyen 4 bombones de crema, 4 de frutos secos y 2 de licor. En cada caja roja hay 6 bombones de crema, 2 de frutos secos y 4 de licor. Si la caja azul se vende a 8 euros y la caja roja se vende a 10 euros:

a) Plantear el problema que determina el número de cajas de cada tipo que se han de confeccionar para maximizar la recaudación.

b) Representar la región factible, determinar una solución óptima y hallar el valor óptimo de la función objetivo.

----

a)

Sean x e y el número de cajas azules o rojas que se venden, respectivamente.

Las restricciones del ejercicio se establecen en el sistema de inecuaciones:

$4x + 6y \geq 320 \; 4x + 2y \leq 240 \; 2x + 4y \leq 200 \quad x \geq 0;\ y \geq 0 \,\}$ o mejor: $2x + 3y \geq 160 \;\; 2x + y \leq 120 \;\; x + 2y \leq 100 \quad x \geq 0;\ y \geq 0 \,\}$.

b)

La región factible se indica en la figura:

x	80	50
y	0	20

① $\Rightarrow 2x + 3y \leq 160 \Rightarrow y \leq \frac{160-2x}{3} \Rightarrow O(0,\ 0) \to Si.$

x	0	60
y	120	0

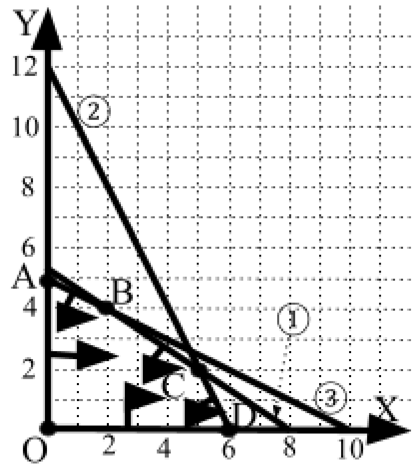
② $\Rightarrow 2x + y \leq 120 \Rightarrow y \leq 120 - 2x \Rightarrow O(0,\ 0) \to Si.$

x	100	0
y	0	50

③ $\Rightarrow x + 2y \leq 100 \Rightarrow y \leq \frac{100-x}{2} \Rightarrow O(0,\ 0) \to Si.$

Los vértices de la zona factible, además del origen, son los siguientes:

$A \Rightarrow \quad x = 0 \; x + 2y = 100 \,\} \Rightarrow A(0,\ 50).$



$B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 160 \\ x + 2y = 100 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -2x - 3y = -160 \\ 2x + 4y = 200 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 40 \Rightarrow B(20,\ 40).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 160 \\ 2x + y = 120 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 160 \\ -2x - y = 200 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y =$
.

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ 2x + y = 120 \end{array}\right\} \Rightarrow D(60,\ 0).$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,\ y) = 8x + 10y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 50) = 8 \cdot 0 + 10 \cdot 50 = 0 + 500 = 500.$

$B \Rightarrow f(20,\ 40) = 8 \cdot 20 + 10 \cdot 40 = 160 + 400 = 560.$

$C \Rightarrow f(50,\ 20) = 8 \cdot 50 + 10 \cdot 20 = 400 + 200 = 600.$

$D \Rightarrow f(60,\ 0) = 8 \cdot 60 + 10 \cdot 0 = 480 + 0 = 480.$

$\underline{La\ solución\ óptima\ se\ produce\ vendiendo\ 50\ cajas\ azules\ y\ 20\ cajas\ rojas}.$

$\underline{El\ beneficio\ óptimo\ es\ de\ 600\ euros}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones. No se admitirá ningún resultado si no está debidamente razonado. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de cualquier otro dispositivo que pueda ejercer esta función. Los dispositivos que puedan conectarse a internet, o que pueden recibir o emitir información, deben estar apagados durante la celebración del examen.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

1º) Una frutería quiere dar salida esta semana a 50 kg de manzanas y 27 kg de naranjas que le han quedado por vender. Para ello prepara dos tipos de cajas: A y B. Cada caja A contiene 5 kg de manzanas y 2 kg de naranjas. Y cada caja B, 5 kg de manzanas y 3 kg de naranjas. El precio de venta de cada caja A es de 7,5 euros, y el precio de venta de cada caja B es de 8,5 euros. ¿Cuántas cajas de cada tipo debe vender para maximizar los ingresos?

Las restricciones del ejercicio se establecen en el sistema de inecuaciones:

$5x+5y\leq 50\ \ 2x+3y\leq 27\ \ x\geq 0;\, y\geq 0\,\}$ o mejor: $x+y\leq 10\ \ 2x+3y\leq 27\ \ x\geq 0;\, y\geq 0\,\}$.

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,\ y)=7,5x+8,5y$.

La región factible se indica sombreada en la figura.

x	10	0
y	0	10

$①\Rightarrow x+y\leq 10\Rightarrow y=10-x\Rightarrow O(0,\ 0)\rightarrow Si.$

x	9	0
y	3	9

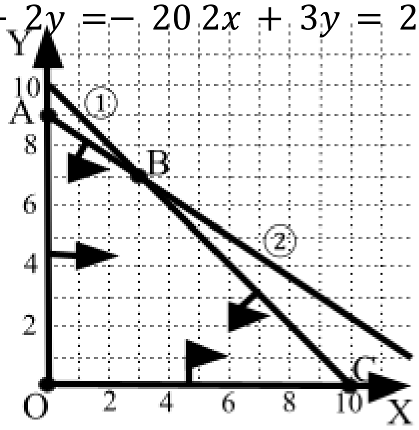
$②\Rightarrow 2x+3y\leq 27\Rightarrow y\leq \frac{27-2x}{3}\Rightarrow O(0,\ 0)\rightarrow Si.$

Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \\ 2x+3y=27 \end{array}\right\} \Rightarrow 3y=27;\ y=9 \Rightarrow A(0,\ 9).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=10 \\ 2x+3y=27 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -2x-2y=-20 \\ 2x+3y=27 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow y=7;\ \ x=3 \Rightarrow B(3,\ 7).$



$C \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=0 \\ x+y=10 \end{array}\right\} \Rightarrow C(10,\ 0).$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 9) = 7,5 \cdot 0 + 8,5 \cdot 9 = 0 + 76,5 = 76,5.$

$B \Rightarrow f(3,\ 7) = 7,5 \cdot 3 + 8,5 \cdot 7 = 22,5 + 59,5 = 82.$

$C \Rightarrow f(10,\ 0) = 7,5 \cdot 10 + 8,5 \cdot 0 = 75 + 0 = 75.$

El máximo se produce en el punto $C(3,\ 7)$.

$\underline{Para\ maximizar\ los\ ingresos\ debe\ vender\ 3\ cajas\ tipo\ A\ y\ 7\ tipo\ B}$.

****

2º) Dada la función $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$:

$a)$ Obtener los puntos de corte con los ejes OX y OY.

$b)$ Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

$c)$ Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.

$d)$ Dibujar la región delimitada por la curva anterior y la recta $y = 4x$.

$e)$ Calcular el área de la región anterior.

$a)$

El único punto de corte de la función con el eje OY ($x = 0$) es $\underline{O(0,\ 0)}$.

Los puntos de corte con el eje OX, además del origen, son los siguientes:

$$x^3 + x^2 - 2x = 0;\ x\left(x^2 + x - 2\right) = 0;\ x^2 + x - 2 = 0;\ x = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} =$$

$$= \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{-1\pm3}{2} \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 1 \Rightarrow \underline{A(-2,\ 0)}\ y\ \underline{B(1,\ 0)}.$$

$b)$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 2.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 2 = 0;\ x = \frac{-2\pm\sqrt{4+24}}{6} = \frac{-2\pm\sqrt{28}}{6} = \frac{-2\pm2\sqrt{7}}{6} =$$

$$= \frac{-1\pm\sqrt{7}}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{-1-\sqrt{7}}{3},\ x_1 = \frac{-1+\sqrt{7}}{3}.$$

Las raíces de la primera derivada dividen al dominio de la función, que es R, en los intervalos $\left(-\infty,\ \frac{-1-\sqrt{7}}{3}\right)$, $\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{3},\ \frac{-1+\sqrt{7}}{3}\right)$ y $\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{3},\ +\infty\right)$, en los cuales la función es, alternativamente, creciente o decreciente.

Considerando, por ejemplo el valor $x = 3 \in \left(\frac{-1+\sqrt{7}}{3},\ +\infty\right)$ es:

$f'(3) = 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - 2 = 27 + 6 - 2 = 31 > 0 \Rightarrow Creciente.$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento o decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{f(x)\ creciente:\ f'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon \left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{7}}{3}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{7}}{3}, +\infty\right)}.$$

$$\underline{f(x)\ decreciente:\ f'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon \left(\frac{-1-\sqrt{7}}{3}, \frac{-1+\sqrt{7}}{3}\right)}.$$

Teniendo en cuenta la continuidad de la función en su dominio por ser polinómica y los periodos de crecimiento y decrecimiento, se deducen el máximo y el mínimo relativos que tiene; no obstante se hace su estudio por derivadas.

Una función polinómica tiene un extremo relativo para los valores que anulan su primera derivada; para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan la primera derivada, se trate de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$f''(x) = 6x + 2.$

$f''\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{3}\right) = 6 \cdot \left(\frac{-1-\sqrt{7}}{3}\right) + 2 = -2 - 2\sqrt{7} + 2 = -2\sqrt{7} < 0 \Rightarrow Máximo.$

$f\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{3}\right) \cong f(-1,22) = (-1,22)^3 + (-1,22)^2 - 2 \cdot (-1,22) =$

$= -1,79 + 1,48 + 2,43 = 2,12 \Rightarrow \underline{Máximo: C(-1,22; 2,12)}.$

$f''\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{3}\right) = 6 \cdot \left(\frac{-1+\sqrt{7}}{3}\right) + 2 = -2 + 2\sqrt{7} + 2 = 2\sqrt{7} > 0 \Rightarrow Mínimo.$

$f\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{3}\right) \cong f(0,55) = 0,55^3 + 0,55^2 - 2 \cdot 0,55 = 0,17 + 0,30 - 1,10 =$

$= -0,63 \Rightarrow \underline{Mínimo: D(0,55; -0,63)}.$

$c)$

Una función es cóncava ($\cap$) o convexa ($\cup$) cuando su segunda derivada es negativa o positiva, respectivamente.

$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x + 2 = 0;\ 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}.$

$\underline{Concavidad\ (\cap) \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty,\ -\frac{1}{3}\right)}$.

$\underline{Convexidad\ (\cup) \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{1}{3},\ +\infty\right)}$.

Una función polinómica tiene un punto de inflexión cuando se anula su segunda derivada y es distinta de cero la tercera derivada para los valores que anulan la segunda.

$f'''(x) = 6 \neq 0 \Rightarrow Punto\ de\ inflexión\ para\ x = -\frac{1}{3}$.

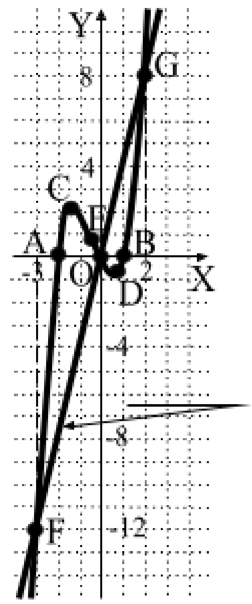
$$f\left(\frac{-1}{3}\right) = \left(\frac{-1}{3}\right)^3 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{-1}{3}\right) = -\frac{1}{27} + \frac{1}{9} + \frac{2}{3} = \frac{-1+3+18}{27} = \frac{20}{27} \cong 0,74 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{P.\ I. \Rightarrow E\left(-\frac{1}{3};\ 0,74\right)}.$$

$d)$

Los puntos de corte de la función con la recta tienen por abscisas las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$x^3 + x^2 - 2x = 4x;\ x^3 + x^2 - 6x = 0;\ x\left(x^2 + x - 6\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow$$



$\Rightarrow O(0,\ 0);\ x^2 + x - 6 = 0;\ x = \frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{25}}{2} = \frac{-1\pm5}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = -3,\ x_2 = 2 \Rightarrow F(-3,\ -12)\ y\ G(2,\ 8)$.

La representación gráfica, aproximada, de la situación es la que se indica en la figura adjunta.

$e)$

Para el cálculo de la superficie se tiene en cuenta que en el intervalo $(-\ 3,\ 0)$ las ordenadas de la función son mayores que las correspondientes ordenadas de la recta y que en el intervalo $(0,\ 2)$, las ordenadas de la recta son mayores que las correspondientes ordenadas de la función.

$$S = \int_{-3}^{0} [f(x) - 4x]\cdot dx + \int_{0}^{2} [4x - f(x)]\cdot dx =$$

$$= \int_{-3}^{0} \left[\left(x^3 + x^2 - 2x\right) - 4x\right]\cdot dx + \int_{0}^{2} \left[4x - \left(x^3 + x^2 - 2x\right)\right]\cdot dx =$$

$$= \int_{-3}^{0} \left(x^3 + x^2 - 6x\right)\cdot dx + \int_{0}^{2} \left(6x - x^2 - x^3\right)\cdot dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{2}\right]_{-3}^{0} + \left[\frac{6x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{2} = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 3x^2\right]_{-3}^{0} + \left[3x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{2} =$$

$$= 0 - \left[\frac{(-3)^4}{4} + \frac{(-3)^3}{3} - 3\cdot(-\ 3)^2\right] + \left(3\cdot 2^2 - \frac{2^3}{3} - \frac{2^4}{4}\right) - 0 =$$

$$= -\frac{81}{4} + 9 + 27 + 12 - \frac{8}{3} - 4 = 44 - \frac{81}{4} - \frac{8}{3} = \frac{528-243-32}{12} = \frac{528-275}{12} = \frac{253}{12}$$

.

$$\underline{S = \frac{253}{12}\, u^2 \cong 21,08\, u^2.}$$

****

3º) Las probabilidades de que tres tiradores con arco consigan hacer diana son, respectivamente, 3/5, 2/3 y 5/6. Si los tres disparan simultáneamente:

$a)$ ¿Cuál es la probabilidad de que acierte en el blanco uno solo?

$b)$ ¿Cuál es la probabilidad de que los tres acierten?

$c)$ ¿Cuál es la probabilidad de que acierte uno de ellos?

Sean $T_1 = \frac{3}{5}$, $T_2 = \frac{2}{3}$ y $T_3 = \frac{5}{6}$ los sucesos de que aciertes los tiradores 1º, 2º y 2º, respectivamente y $\overline{T_1} = \frac{2}{5}$, $\overline{T_2} = \frac{1}{3}$ y $\overline{T_3} = \frac{1}{6}$ los sucesos de que fallen los tiradores 1º, 2º y 2º, respectivamente.

$a)$

$$P = P\left(T_1, \overline{T_2}, \overline{T_3}\right) + P\left(\overline{T_1}, T_2, \overline{T_3}\right) + P\left(\overline{T_1}, \overline{T_2}, T_3\right) =$$

$$= \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6} + \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6} = \frac{1}{30} + \frac{2}{45} + \frac{1}{9} = \frac{3+4+10}{90} = \underline{\frac{17}{90} = 0,1889}.$$

$b)$

$$P = P\left(T_1, T_2, T_3\right) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6} = \underline{\frac{1}{3} = 0,3333}.$$

$c)$

El suceso contrario a que "acierte uno de ellos" es que "no acierte ninguno", por lo cual, la probabilidad pedida es la siguiente:

$$P = 1 - P\left(\overline{T_1}, \overline{T_2}, \overline{T_3}\right) = 1 - \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{45} = \underline{\frac{44}{45} = 0,0778}.$$

****

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

1º) a) Una empresa elabora dos modelos de un determinado producto. Un empleado necesita dos minutos para cada unidad del primer modelo y cuatro para cada unidad del segundo. Los costes unitarios de producción de cada modelo son de 4 y 6 euros, respectivamente. Por otro lado, el número de unidades del primer modelo debe ser diariamente el doble que el número de unidades del segundo modelo. El sistema de ecuaciones lineales para calcular el número de unidades de cada modelo que puede acabar un empleado en una jornada de 8 horas si se invierten k euros diarios de presupuesto, es el siguiente: $\left\{\begin{array}{l} 2x + 4y = 480 \\ 4x + 6y = k \\ x - 2y = 0 \end{array}\right.$.

Determinar, según el presupuesto disponible (según los valores del parámetro k), los casos en los que el siguiente sistema tiene o no tiene solución. Resuelve los casos en los que el sistema tenga solución.

b) Dada la matriz: $M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 480 \\ 4 & 6 & 840 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. ¿Tiene inversa? Justifica la respuesta basándote únicamente en los resultados obtenidos en el apartado anterior.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 480 \\ 4 & 6 & k \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

El rango de M es dos por tener el menor $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 16 \neq 0$.

El rango de M' en función del parámetro k es el siguiente:

$$|M'| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 480 \\ 4 & 6 & k \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -3.840 + 4k - 2.880 + 4k = -6.720 + 8k = 0;$$

$$-840 + k = 0 \Rightarrow k = 840.$$

$\underline{Para\ k \neq 840 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible}.$

$\underline{Para\ k = 840 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 = n^{o}\ incóg \Rightarrow S.\ C.\ D}.$

Para resolver el sistema es suficiente con dos ecuaciones, por lo cual, se desprecia, por ejemplo, la segunda ecuación.

El sistema a resolver es $\left.\begin{array}{l} 2x + 4y = 480 \\ x - 2y = 0 \end{array}\right\}$, equivalente a $\left.\begin{array}{l} x + 2y = 240 \\ x - 2y = 0 \end{array}\right\}$,

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y = 240 \\ x - 2y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x = 240;\ x = 120.\ \ y = 60.$$

$$\underline{La\ empresa\ debe\ fabricar\ diariamente\ 120\ artículos\ A\ y\ 60\ B}.$$

$b)$

$$\underline{No\ tiene\ inversa}.$$

Como se ha determinado en el apartado anterior, para $k = 840$ el rango de la matriz es 2, o sea, su determinante es distinto de cero y, para que una matriz sea invertible es necesario que su determinante sea distinto de cero.

****

2º) a) Durante el anterior periodo de rebajas, una tienda ofreció un artículo a 50 euros la unidad y las ventas fueron de 20 unidades. Un estudio revela que por cada euro que disminuya el precio en las próximas rebajas, conseguirá vender 4 unidades más. Por otro lado, la tienda ha asumido un coste de 35 euros por cada unidad del producto. ¿Qué precio de venta por unidad debe fijar para maximizar los beneficios obtenidos durante el nuevo periodo de rebajas?

b) Dada la función $f(x) = \{ax^2 + 5x - 2 \ si \ x \le -1 \ \frac{x+3}{x^2+5} \ si \ -1 < x \le 7 \ \frac{bx+1}{(x-5)^2} \ si \ 7 < x$, determinar los valores de los parámetros a y b para los cuales es continua la función en $x = -1$ y $x = 7$.

----

a)

Sean x las unidades del artículo que deben venderse en el periodo de rebajas, además de las 20 unidades iniciales, para obtener el máximo de ingresos.

El precio por unidad es de $(50 - x)$ euros.

$Ingresos = Número\ unidades \times precio\ unitario \Rightarrow$

$\Rightarrow I(x) = (20 + x)(50 - x) = 1.000 - 20x + 50x - x^2 = -x^2 + 30x + 1.000$

.

Los ingresos serán máximos cuando se anule su primera derivada:

$I'(x) = -2x + 30.$

$I'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 30 = 0; \ -x + 15 = 0 \Rightarrow x = 15.$

$50 - 15 = 35.$

$\underline{So\ obtiene\ el\ máximo\ beneficio\ vendiendo\ 35\ artículos\ a\ 35\ euros.}$

b)

Para que una función sea continua en un punto es necesario que sus límites laterales en ese punto sean iguales e igual al valor de la función.

$x = -1 \Rightarrow \{f(x) = \left(ax^2 + 5x - 2\right) = a - 7 = f(-1) \ f(x) = \frac{x+3}{x^2+5} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$f(x) = f(x) = f(-1) \Rightarrow a - 7 = \frac{1}{3}; \ 3a - 21 = 1; \ 3a = 22 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{a = \frac{22}{3}}.$

$$x = 7 \Rightarrow \{ f(x) = \frac{x+3}{x^2+5} = \frac{10}{54} = \frac{5}{27} = f(7) \;\; f(x) = \frac{bx+1}{(x-5)^2} = \frac{7b+1}{4} \} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x) = f(7) \Rightarrow \frac{5}{27} = \frac{7b+1}{4}; \;\; 20 = 189b + 27; \;\; 189b = -7;$$

$$27b = -1 \Rightarrow \underline{b = -\frac{1}{27}}.$$

****

3º) El sueldo mensual de los trabajadores de una empresa sigue una distribución normal con desviación típica de 310 euros. Una muestra aleatoria de 1.200 personas da como resultado un sueldo medio de 1.545 euros.

a) Obtener el intervalo de confianza del 97 % para el sueldo medio mensual.

b) ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 98 % sea la mitad del obtenido en el apartado anterior?

----

a)

Para un nivel de confianza del 98 % es:

$1 - \alpha = 0,97 \to \alpha = 1 - 0,97 = 0,03 \to z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,015} = 2,17.$

$1 - 0,015 = 0,9850 \to z = 2,17).$

Datos: $\overline{x} = 1.545;\ \ n = 1.200;\ \ \sigma = 310;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,17.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(1.545 - 2,17 \cdot \frac{310}{\sqrt{1.200}};\ 1.545 + 2,17 \cdot \frac{310}{\sqrt{1.200}}\right);$$

$$(1.545 - 2,17 \cdot 8,9489;\ 1.545 + 2,17 \cdot 8,9489);$$

$$(1.545 - 19,4192;\ 1.545 + 19,4192);$$

$$\underline{I.\ C._{97\ \%}\ (1.525,5808;\ 1.564,4192).}$$

b)

$$E = \frac{1}{2} \cdot \frac{1.564,4192 - 1.525,5808}{2} = \frac{38,8384}{4} = 9,7096.$$

Datos: $\sigma = 130;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,17;\ \ E = 9,7096.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(2,17 \cdot \frac{130}{9,7096}\right)^2 =$

$= (2,17 \cdot 133888)^2 = 29,0537^2 = 844,12.$

$$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 845\ trabajadores.}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

SEPTIEMBRE – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones. No se admitirá ningún resultado si no está debidamente razonado. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de cualquier otro dispositivo que pueda ejercer esta función. Los dispositivos que puedan conectarse a internet, o que pueden recibir o emitir información, deben estar apagados durante la celebración del examen.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

1º) $a)$ Resolver la ecuación matricial $(A + X)\cdot B = C$, siendo:

$$A = (1\ \ -2\ 1\ 3\ 2\ 0),\ B = (1\ \ -2\ 0\ 1\ 1\ 2\ 0\ 1\ 3)\ y\ C = (0\ 1\ 3\ 4\ 1\ \ -1).$$

$b)$ Dada la matriz $M = (a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ h\ i)$ con determinante $|M| = 8$, calcular:

$b_1)$ $|a\ d\ g\ b\ e\ h\ e\ f\ i|$. $b_2)$
$|4a\ -\ 3b\ c\ 4d\ -\ 3e\ f\ 4g\ -\ 3h\ i|$.

$a)$

$$(A + X)\cdot B = C;\ \ A\cdot B + X\cdot B = C;\ \ X\cdot B = C - A\cdot B = M;$$

$$X\cdot B\cdot B^{-1} = (C - A\cdot B)\cdot B^{-1};\ \ X\cdot I = (C - A\cdot B)\cdot B^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{X = (C - A\cdot B)\cdot B^{-1}}.$$

$$C - A\cdot B = (0\ 1\ 3\ 4\ 1\ \ -1) - (1\ \ -2\ 1\ 3\ 2\ 0)\cdot(1\ \ -2\ 0\ 1\ 1\ 2\ 0\ 1\ 3) =$$

$$= (0\ 1\ 3\ 4\ 1\ \ -1) - (-1\ \ -3\ \ -15\ \ -4\ 4) = (1\ 4\ 4\ \ -1\ 5\ \ -5).$$

Se obtiene la inversa de B por el método de Gauss-Jordan.

$$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 - F_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1\ 0\ 0\ \ -1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1) \Rightarrow \{F_2 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow (1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ \ -1\ 1\ 0) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \left\{ F_1 \rightarrow F_1 + 2F_2 \, F_3 \rightarrow F_3 - 3F_2 \right\} \Rightarrow (1\ 0\ 2\ 0\ 0\ 1\ \ -1\ 1\ \ -3\ ) \Rightarrow \left\{ F_3 \rightarrow -\frac{1}{7}F_3 \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(1\ 0\ 2\ 0\ 0\ 1\ \frac{1}{7}\ \ -\frac{1}{7}\ \frac{3}{7} \right) \Rightarrow \left\{ F_1 \rightarrow F_1 - 6F_3 \, F_2 \rightarrow F_2 - 3F_3 \right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{7}\ \frac{6}{7}\ \ -\frac{4}{7}\ \ -\frac{3}{7}\ \ \frac{3}{7}\right.$

$\Rightarrow B^{-1} = \left(\frac{1}{7}\ \frac{6}{7}\ \ -\frac{4}{7}\ \ -\frac{3}{7}\ \frac{3}{7}\ \ -\frac{2}{7}\ \frac{1}{7}\ \ -\frac{1}{7}\ \frac{3}{7} \right) = \frac{1}{7}\cdot(1\ 6\ \ -4\ \ -3\ 3\ \ -2\ 1\ \ -1\ 3$
.

También la inversa de la matriz B puede obtenerse por la adjunta de la traspuesta: $B^{-1} = \frac{Adj.\ de\ B^t}{|B|}$.

$|B| = |1\ \ -2\ 0\ 1\ 1\ 2\ 0\ 1\ 3\ | = 3 - 2 + 6 = 7. \quad B^t = (1\ 1\ 0\ \ -2\ 1\ 1\ 0\ 2\ 3\ ).$

$Adj.\ de\ B^t = (|1\ 1\ 2\ 3\ |\ \ -|-2\ 1\ 0\ 3\ |\ |-2\ 1\ 0\ 2\ |\ \ -|1\ 0\ 2\ 3\ |\ |1\ 0\ 0\ 3\ |\ \ -|1\ 1\ 0$

$\Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{7}\cdot(1\ 6\ \ -4\ \ -3\ 3\ \ -2\ 1\ \ -1\ 3\ ).$

$X = (C - A\cdot B)\cdot B^{-1} = (1\ 4\ 4\ \ -1\ 5\ \ -5\ )\cdot\frac{1}{7}\cdot(1\ 6\ \ -4\ \ -3\ 3\ \ -2\ 1\ \ -1\ 3\ ) =$

$= \frac{1}{7}\cdot(-7\ 14\ 0\ \ -21\ 14\ \ -21\ ) \Rightarrow \underline{X = (-1\ 2\ 0\ \ -3\ 2\ \ -3\ )}.$

$b)$

$b_1)$

$|a\ d\ g\ b\ e\ h\ c\ f\ i\ | = \underline{8}.$

El determinante de una matriz es igual que el determinante de su matriz traspuesta.

$b_2)$

$|4a\ \ -3b\ c\ 4d\ \ -3e\ f\ 4g\ \ -3h\ i\ | = 4\cdot(-3)\cdot|a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ h\ i\ | = -12\cdot 8 =$
.

Si los elementos de una línea de una matriz se multiplican por un número real, el valor del determinante de la matriz queda multiplicado por dicho número real.

****

2º) a) El representante de una firma de perfumes tiene un sueldo fijo mensual de 1.500 euros. También recibe una comisión, $-0,05x^2+0,7x+30$, que depende del número de tiendas, x, que incluye al mes en su cartera de clientes. Por otro lado, sus gastos fijos mensuales ascienden a 425 euros. ¿Cuántas tiendas debería incorporar al mes para obtener una ganancia máxima?

b) La gráfica de la función $f(x)=\frac{ax^2+bx+5}{2x-7}$ tiene como asíntota la recta $y=2x-3$. Determinar los valores de los parámetros a y b.

----

a)

Como el sueldo y los gastos son fijos, la ganancia mensual depende del número de carteras, x, que incluya al mes en su cartera de clientes.

La función comisión, $C(x)=-0,05x^2+0,7x+30$, es una parábola cóncava (∩).

La función parabólica $C(x)=-0,05x^2+0,7x+30$ tiene su vértice (máximo) en el siguiente punto:

$C'(x)=-0,1x+0,7.$

$C'(x)=0 \Rightarrow -0,1x+0,7=0;\ x-7=0 \Rightarrow x=7.$

$C(7)=-0,05\cdot 7^2+0,7\cdot 7+30=-2,45+4,9+30=32,45 \Rightarrow$

$\Rightarrow V(7;32,45).$

$Ganancia\ máxima=1.500+32,45-425=1.107,45.$

$\underline{Debe\ incorporar\ 7\ clientes\ y\ la\ ganancia\ máxima\ es\ de\ 1.107,45\ euros.}$

b)

Una asíntota oblicua es de la forma $y=mx+n$, siendo los valores de m y n los siguientes: $m=\frac{f(x)}{x}$ y $n=[f(x)-mx]$.

Por ser la asíntota $y=2x-3$ es $m=2$ y $n=-3$.

$$m=\frac{f(x)}{x}=\frac{\frac{ax^2+bx+5}{2x-7}}{x}=\frac{ax^2+bx+5}{x\cdot(2x-7)}=\frac{a}{2}=2 \Rightarrow \underline{a=4}.$$

$$n = [f(x) - mx] = \left[\frac{4x^2+bx+5}{2x-7} - 2x\right] = \frac{4x^2+bx+5-2x\cdot(2x-7)}{2x-7} =$$

$$= \frac{4x^2+bx+5-4x^2+14x}{2x-7} = \frac{(b+14)x+5}{2x-7} = \frac{b+14}{2} = -3;\ b + 14 = -6 \Rightarrow \underline{b = -20}.$$

****

3º) El peso de las manzanas que un agricultor cosecha sigue una distribución normal con desviación típica 25 gramos. Una muestra aleatoria de 150 manzanas da como resultado un peso medio de 227 gramos.

a) Obtener un intervalo de confianza del 92 % para el peso medio de las manzanas.

b) Determinar el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 98 % sea un tercio del obtenido en el apartado anterior.

----

a)

$1 - \alpha = 0,92 \rightarrow \alpha = 1 - 0,92 = 0,08 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,04} = 1,75.$

$(1 - 0,04 = 0,9600 \rightarrow z = 1,75).$

Datos: $\overline{x} = 227;\ \ n = 150;\ \ \sigma = 25;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,75.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(227 - 1,75 \cdot \frac{25}{\sqrt{150}};\ 227 + 1,75 \cdot \frac{25}{\sqrt{150}}\right);$

$(227 - 1,75 \cdot 2,0412;\ 227 + 1,75 \cdot 2,0412);\ \ (227 - 3,5722;\ 227 + 3,5722).$

$$\underline{I.\ C._{92\ \%}\ (223,4278;\ 230,5722).}$$

b)

Error del apartado anterior: $E_a = \frac{230,5722 - 223,4278}{2} = \frac{7,1444}{2} = 3,5722.$

Error a utilizar: $E = \frac{E_a}{3} = \frac{3,5722}{3} = 1,1907.$

$1 - \alpha = 0,98 \rightarrow \alpha = 1 - 0,98 = 0,02 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,01} = 2,33.$

$(1 - 0,01 = 0,99 \rightarrow z = 2,33).$

Datos: $\sigma = 25;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,33;\ \ E = 1,1907.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(2,33 \cdot \frac{25}{1,1907}\right)^2 =$

$= (2,33 \cdot 21)^2 = 48,92^2 = 2.393,11.$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 2.394\ manzanas}.$

****

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

1º) Considérese una pequeña empresa dedicada a la fabricación de mobiliario. En concreto, produce dos modelos de armario: A y B. Se dispone de 12 carpinteros para ensamblar los muebles, cada uno de ellos con una jornada laboral de 8 horas diarias. El tiempo de ensamblado de cada tipo de mueble y los beneficios obtenidos por la venta de cada unidad se muestran en la tabla adjunta:

	Tiempo ensamblado	Beneficios
Una unidad del modelo A	3 horas	70 euros
Una unidad del modelo B	6 horas	160 euros

La producción diaria total debe ser de 15 unidades como mínimo, con la condición de que el número de unidades del modelo B debe ser como máximo la mitad del número de muebles del modelo A. Si la empresa vende todo lo que fabrica, ¿cuántos armarios de cada modelo deben producirse al día para obtener los máximos beneficios diarios?

Sean $x\ e\ y$ el número de armarios de los tipos A y B que produce la empresa al día, respectivamente.

$n^{\underline{o}}\ horas = 12 \cdot 8 = 96\ horas.$

Las condiciones del ejercicio se indican en el siguiente sistema de inecuaciones:

$3x + 6y \leq 96 \quad x + y \geq 15 \quad y \leq \frac{x}{2} \quad x \geq 0,\ y \geq 0 \} \quad \underline{x + 2y \leq 32 \quad x + y \geq 15 \quad x -}$

.

La función de objetivos es $f(x) = 70x + 160y$.

x	0	32
y	16	0

①$\Rightarrow x + 2y \leq 32 \Rightarrow y \leq \frac{32-x}{2} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	0	15
y	15	0

②$\Rightarrow x + y \geq 15 \Rightarrow y \geq 15 - x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	0	30

y	0	15

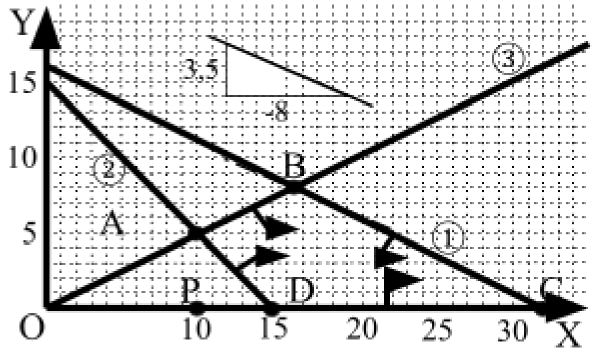
③$\Rightarrow x - 2y \geq 0 \Rightarrow y \leq \frac{x}{2} \Rightarrow P(10,\ 0) \rightarrow Si$.

La región factible es la zona sombreada de la figura adjunta.

Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 15 \\ x - 2y = 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x + y = 15 \\ -x + 2y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3y = 15;\ \ y = 5 \Rightarrow A($
.

$B \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y = 32 \\ x - 2y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x = 32 \Rightarrow x = 16 \Rightarrow B(16,\ 8)$.



$C \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y = 32 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow C(32,\ 0)$.

$D \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 15 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow D(15,\ 0)$.

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(10,\ 5) = 70 \cdot 10 + 160 \cdot 5 = 700 + 800 = 1.500$.

$B \Rightarrow f(16,\ 8) = 70 \cdot 16 + 160 \cdot 8 = 1.120 + 1.280 = 2.400$.

$C \Rightarrow f(32,\ 0) = 70 \cdot 32 + 160 \cdot 0 = 2.240 + 0 = 2.240$.

$D \Rightarrow f(15,\ 0) = 70 \cdot 15 + 160 \cdot 0 = 1.050 + 0 = 1.050$.

El máximo se produce en el punto B.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = 70x + 160y = 0 \Rightarrow y = -\frac{70}{160}x = -\frac{3,5}{8}x \Rightarrow m = -\frac{3,5}{8}$.

$\underline{Beneficio\ máximo:\ \ fabricando\ 10\ armarios\ A\ y\ 5\ armarios\ B}$.

$\underline{El\ benefico\ máximo\ es\ de\ 2.400\ euros\ diarios}$.

****

2º) a_1) Dada la función $f(x)=\frac{3x^2}{x^2+ax+b}$, determinar los valores de a y b sabiendo que su gráfica posee un extremo relativo en el punto $P\left(-3,\ \frac{9}{4}\right)$.

a_2) Para $z=-2$ y $b=-3$ determinar las asíntotas verticales de la función $f(x)$. Esbozar la posición de la gráfica respecto a dichas asíntotas, calculando previamente los límites laterales correspondientes.

b) Sea la función $f(x)=\frac{3x^2-3x-6}{x^2-2x-3}$. ¿En qué puntos es discontinua? ¿Se puede definir de nuevo esta función para evitar alguna discontinuidad?

----

a_1)

Por contener al punto $P\left(-3,\ \frac{9}{4}\right) \Rightarrow f(-3)=\frac{9}{4}$.

$$f(-3)=\frac{9}{4} \Rightarrow \frac{3\cdot(-3)^2}{(-3)^2+a\cdot(-3)+b}=\frac{9}{4};\quad \frac{3\cdot 9}{9-3a+b}=\frac{9}{4};\quad \frac{3}{9-3a+b}=\frac{1}{4};$$

$12=9-3a+b;\ \ 3a-b=-3.$ (1)

$$f'(x)=\frac{6x\cdot\left(x^2+ax+b\right)-3x^2\cdot(2x+a)}{\left(x^2+ax+b\right)^2}=\frac{6x^3+6ax^2+6bx-6x^3-3ax^2}{\left(x^2+ax+b\right)^2}=\frac{3ax^2+6bx}{\left(x^2+ax+b\right)^2}=$$

$$=\frac{3x(ax+2b)}{\left(x^2+ax+b\right)^2}.$$

Por tener $f(x)$ un extremo relativo en el punto $P\left(-3,\ \frac{9}{4}\right) \Rightarrow f'(-3)=0$:

$f'(-3)=0 \Rightarrow \frac{-9(-3a+2b)}{\left[(-3)^2-3a+b\right]^2}=0 \Rightarrow -9(-3a+2b)=0;\ \ -3a+2b=0.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{l}3a-b=-3\\ -3a+2b=0\end{array}\right\} \Rightarrow \underline{b=-3};\ \ -3a-6=0;\ \ a+2=0 \Rightarrow \underline{a=-2}.$$

a_2)

Para $a=-2$ y $b=-3$ la función es $f(x)=\frac{3x^2}{x^2-2x-3}$.

Las asíntotas verticales de una función racional son los valores reales de x que anulan el denominador.

$$x^2 - 2x - 3 = 0;\ x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2 \Rightarrow x_1 =- 1,\ x_2 = 3$$

.

$\underline{Las\ asíntotas\ verticales\ son\ las\ rectas\ x =- 1\ y\ x = 3}.$

La función puede expresarse de la forma $f(x) = \frac{3x^2}{(x+1)(x-3)}$.

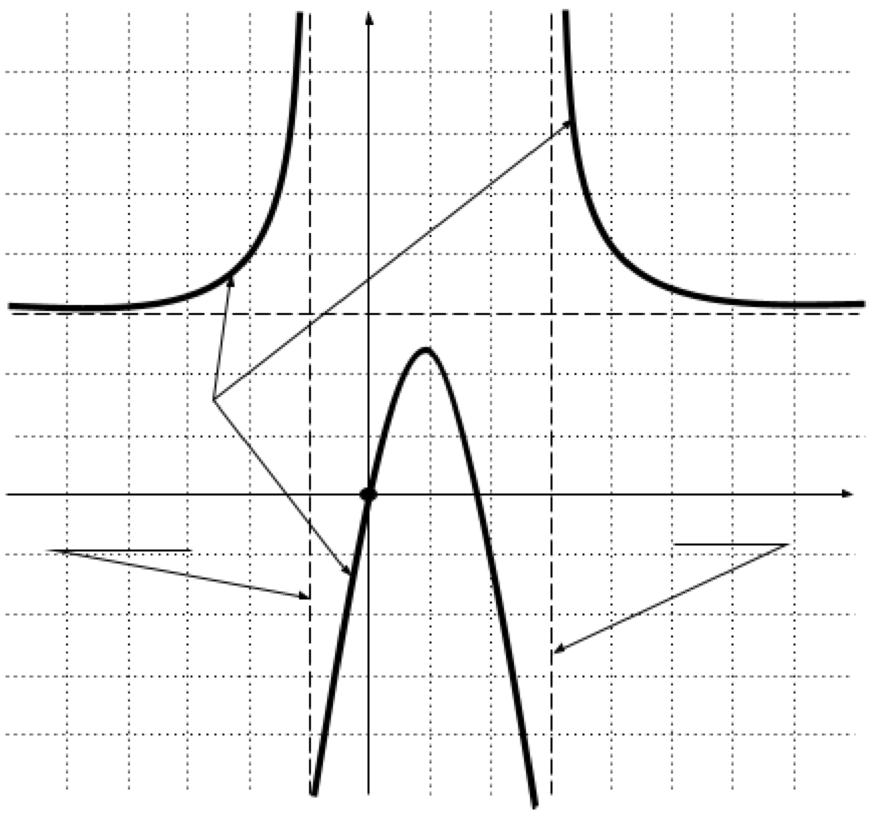
$$x =- 1 \Rightarrow \{ f(x) = \frac{3x^2}{x^2-2x-3} = \frac{3 \cdot 1}{0^- \cdot (-4)} = \frac{3}{0^+} =+ \infty\ f(x) = \frac{3x^2}{x^2-2x-3} = \frac{3 \cdot 1}{0^+ \cdot (-4)} = \frac{3}{0^-} =$$

.

$$x = 3 \Rightarrow \{ f(x) == \frac{3 \cdot (3^-)^2}{(3^-+1)(3^--3)} = \frac{3 \cdot 9}{4 \cdot 0^-} = \frac{27}{0^-} =- \infty\ f(x) = \frac{3x^2}{x^2-2x-3} = \frac{3 \cdot (3^+)^2}{(3^++1)(3^+-3)} =$$

.

Teniendo en cuenta que la función pasa por el origen de coordenadas y que $f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2}{x^2-2x-3} = 3$, que indica que la recta $y = 3$ es asíntota horizontal de la función, su representación gráfica, aproximada, es la siguiente:



$b)$

La función $f(x) = \frac{3x^2-3x-6}{x^2-2x-3}$.

Del apartado anterior sabemos que las funciones racionales cuyo denominador es $x^2 - 2x - 3$ tienen por dominio $R - \{-1, 3\}$.

$$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ discontinua\ para\ x = -1\ y\ para\ x = 3}.$$

$3x^2 - 3x - 6 = 0;\ x^2 - x - 2 = 0;\ x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 2.$

La función $f(x)$ puede expresarse de la forma $f(x) = \frac{3(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-3)}$.

Los límites de la función para los valores en los que no está definida son los siguientes:

$$f(x) = \frac{3x^2-3x-6}{x^2-2x-3} = \frac{3(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-3)} = \frac{3(x-2)}{x-3} = \frac{3\cdot(-3)}{-4} = \frac{9}{4}.$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ tiene\ una\ discontinuidad\ evitable\ para\ x = -1}.$$

$$f(x) = \frac{3x^2-3x-6}{x^2-2x-3} = \frac{3(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-3)} = \frac{3\cdot4\cdot1}{4\cdot0} = \frac{12}{0} = \infty.$$

$$\underline{f(x)\ tiene\ una\ discontinuidad\ inevitable\ de\ salto\ infinito\ para\ x = 3}.$$

La discontinuidad para $x = -1$ puede evitarse redefiniendo la función de la forma siguiente:

$$\underline{f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2-3x-6}{x^2-2x-3} & si\ x \neq -1 \\ \frac{9}{4} & si\ x = -1 \end{cases}}.$$

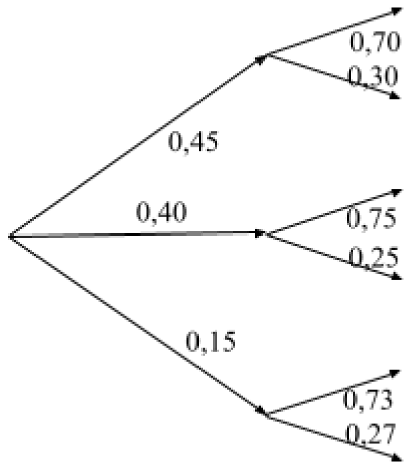
****

3º) Este último curso 2016-2017, el 45 % de los alumnos de nuevo ingreso en el Grado de Economía es de Santander, el 40 % proviene de otras localidades de Cantabria y el 15 % restante viene de fuera de la región. De los alumnos de nuevo ingreso procedentes de Santander, superaron la Selectividad en junio de 2016 el 70 %; de los procedentes de otras localidades de Cantabria, el 75 %, y de los provenientes de fuera de Cantabria, el 73 %. Si elegimos un alumno de nuevo ingreso al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea de Santander y haya superado la Selectividad en junio de 2016?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya superado la Selectividad en junio de 2016?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea de Cantabria pero de fuera de la capital, sabiendo que no superó la Selectividad en junio de 2016?



a)

$$P = P(SA/S) = P(SA \cap S) = P(SA) \cdot P(S/SA) = 0,45 \cdot 0,70 = \underline{0,3150}.$$

b)

$$P = P(S) = P(SA) \cdot P(S/SA) + P(RC) \cdot P(S/RC) + P(FC) \cdot P(S/FC) =$$

$$= 0,45 \cdot 0,70 + 0,40 \cdot 0,75 + 0,15 \cdot 0,73 = 0,3150 + 0,3000 + 0,1095 = \underline{0,7245}$$

.

c)

$$P = P(\overline{S}/FC) = \frac{P(FC/\overline{S})}{P(\overline{S})} = \frac{P(FC) \cdot P(\overline{S}/FC)}{P(SA) \cdot P(\overline{S}/SA) + P(RC) \cdot P(\overline{S}/RC) + P(FC) \cdot P(\overline{S}/FC)} =$$

$$= \frac{0,15 \cdot 0,27}{0,45 \cdot 0,30 + 0,40 \cdot 0,25 + 0,15 \cdot 0,27} = \frac{0,0405}{0,1350 + 0,1000 + 0,0405} = \frac{0,0405}{0,2755} = \underline{0,1470}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE CASTILLA-LA MANCHA

JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

OPCIÓN A

1º) Dada la matriz $M = (-\ 2\ \ -\ 1\ )$ se pide:

a) Realiza el producto $M \cdot M^t$. (siendo M^t la traspuesta de M).

b) Despeja X en la siguiente expresión matricial: $P \cdot X = M \cdot M^t$.

c) Si $P = (-\ 2\ \ -\ 3\ 3\ 4\ )$, obtén la expresión de la matriz X del apartado anterior.

----

a)

$$M \cdot M^t = (-\ 2\ \ -\ 1\ ) \cdot (-\ 2\ \ -\ 1\ ) = \underline{(4\ 2\ 2\ 1\ )}.$$

b)

$$P \cdot X = M \cdot M^t;\ \ P^{-1} \cdot P \cdot X = P^{-1} \cdot M \cdot M^t;\ \ I \cdot X = P^{-1} \cdot M \cdot M^t.$$

$$\underline{X = P^{-1} \cdot M \cdot M^t}.$$

c)

$$P = (-\ 2\ \ -\ 3\ 3\ 4\ ).\quad |P| = |-\ 2\ \ -\ 3\ 3\ 4\ | = -\ 8 + 9 = 1.$$

$P^t = (-\ 2\ 3\ \ -\ 3\ 4\ )$.

$Adj.\ de\ P^t = (4\ 3\ \ -\ 3\ \ -\ 2\ ).\qquad P^{-1} = \frac{Adj.\ de\ P^t}{|P|} = (4\ 3\ \ -\ 3\ \ -\ 2\ ).$

$X = P^{-1} \cdot M \cdot M^t = P^{-1} \cdot \left(M \cdot M^t\right) = (4\ 3\ \ -\ 3\ \ -\ 2\ ) \cdot (4\ 2\ 2\ 1\ ) = (22\ 11\ \ -\ 16\ \ -\ 8\ )$.

$$\underline{X = (22\ 11\ \ -\ 16\ \ -\ 8\ )}.$$

****

2º) A través de una página de internet se han vendido hoy 320 entradas para tres eventos distintos: un estreno de cine, una función teatral y un concierto de música. El valor de lo recaudado en total por esta venta de entradas es de 6.460 euros. Sabemos que una entrada de cine vale 8 euros, una de teatro 20 euros y una para el concierto de música vale 30 euros. El número de entradas para el concierto musical es triple que las de teatro.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas entradas se han vendido para cada uno de los eventos.

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior.

----

a)

Siendo x, y, z los números de entradas para el cine, teatro o concierto de música, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$x + y + z = 320 \; 8x + 20y + 30z = 6.460 \qquad z = 3y \}$$

.

b)

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|320\ 1\ 1\ 3.230\ 10\ 15\ 0\ 3\ -1\ |}{|1\ 1\ 1\ 4\ 10\ 15\ 0\ 3\ -1\ |} = \frac{-3.200+9.690-14.400+3.230}{-10+12-45+4} = \frac{12.920-17.600}{16-55} = \frac{-4.680}{-39} = 120$$

.

$$y = \frac{|1\ 320\ 1\ 4\ 3.230\ 15\ 0\ 0\ -1\ |}{-39} = \frac{-3.230+1.280}{-39} = \frac{-1.950}{-39} = 50.$$

$$z = \frac{|1\ 1\ 320\ 4\ 10\ 3.230\ 0\ 3\ 0\ |}{-39} = \frac{3.840-9.690}{-39} = \frac{-5.850}{-39} = 150.$$

$\underline{Se\ vendieron\ 120\ entradas\ de\ cine,\ 50\ de\ teatro\ y\ 150\ del\ concierto\ musical.}$

****

3º) Se considera la función $f(x) = \{x^2 + x - 3 \ si \ x \leq 1 \ x + t \ si \ x > 1$.

$a)$ ¿Para qué valores de t la función $f(x)$ es continua en $x = 1$?

$b)$ Para $t = 0$, calcula los extremos relativos de $f(x)$ en el intervalo $(-\infty, 1)$.

$c)$ Para $t = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en el intervalo $(-\infty, 1)$.

$a)$

Para que la función $f(x)$ sea continua en $x = 1$ es necesario que sus límites laterales en ese punto sean iguales e iguales al valor de la función.

$$f(x) = \left(x^2 + x - 3\right) = -1 = f(1) \ f(x) = (x + t) = 1 + t \quad \} \Rightarrow -$$

.

<u>$La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ x = 1\ para\ t = -2$.</u>

$b)$

En el intervalo $(-\infty, 1)$ la función resulta ser $f(x) = x^2 + x - 3$ que es una parábola convexa (∪) cuyo mínimo es el siguiente:

$$f'(x) = 2x + 1.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 3 = \frac{1-2-12}{4} = -\frac{13}{4} \Rightarrow V\left(-\frac{1}{2}, \ -\frac{13}{4}\right).$$

<u>$La\ función\ f(x)\ tiene\ un\ mínimo\ relativo\ en\ V\left(-\frac{1}{2}, \ -\frac{13}{4}\right)$.</u>

$c)$

Del apartado anterior se deduce, teniendo en cuenta la continuidad de la función en el intervalo considerado, que:

Los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función son los siguientes:

<u>$f(x)\ creciente:\ f'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.</u>

<u>$f(x)\ decreciente:\ f'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon \left(-\infty, \ -\frac{1}{2}\right)$.</u>

****

4º) De la función $H(x) = ax^3 + bx + c$ sabemos que tiene un punto de inflexión en $P\left(0, \frac{2}{3}\right)$ y un máximo relativo en el punto $Q(4, 6)$. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c.

$a)$

Por contener al punto $P\left(0, \frac{2}{3}\right) \Rightarrow H(0) = \frac{2}{3}$.

$H(0) = \frac{2}{3} \Rightarrow \underline{c = \frac{2}{3}}$.

Por contener al punto $Q(4, 6) \Rightarrow H(4) = 6$.

$H(4) = a \cdot 4^3 + b \cdot 4 + \frac{2}{3} = 6;\ 64a + 4b + \frac{2}{3} = 6;\ 192a + 12b + 2 = 18;$

$192a + 12b = 16;\ 48a + 3b = 4.$ (1)

Por tener un máximo relativo en $Q(4, 6) \Rightarrow H'(4) = 0$.

$H'(x) = 3ax^2 + b$.

$H'(4) = 0 \Rightarrow 3a \cdot 4^2 + b = 0;\ 48a + b = 0.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$\left.\begin{matrix} 48a + 3b = 4 \\ 48a + b = 0 \end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix} 48a + 3b = 4 \\ -48a - b = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2b = 4 \Rightarrow \underline{b}$

.

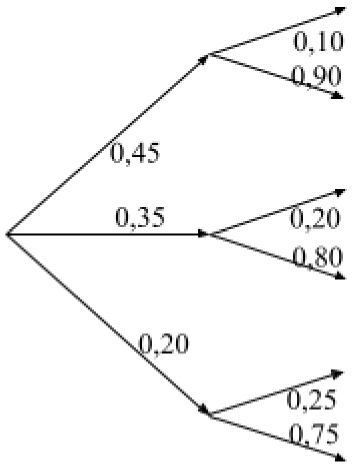
$48a + 2 = 0;\ 24a + 1 = 0 \Rightarrow \underline{a = -\frac{1}{24}}$.

****

5º) En un instituto el 45 % de los estudiantes son de la modalidad de Ciencias, el 35 % son de la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales y el resto son de la modalidad de Arte. También se sabe que el 10 % de los estudiantes de Ciencias tienen una nota media superior a 8, el 20 % de los de Humanidades y Ciencias Sociales y el 25 % de los de la modalidad de Arte.

a) Calcule la probabilidad de que un estudiante, elegido al azar, tenga una nota media superior a 8.

b) Si tenemos un estudiante que tiene una nota media menor o igual a 8, ¿cuál es la probabilidad de que sea de Ciencias?



a)

$$P = P(>8) = P(C) \cdot P(>8/C) + P(H) \cdot P(>8/H) + P(A) \cdot P(>8/A) =$$

$$= 0,45 \cdot 0,10 + 0,35 \cdot 0,20 + 0,20 \cdot 0,25 = 0,045 + 0,070 + 0,050 = \underline{0,165}.$$

b)

$$P = P(C/\leq 8) = \frac{P(C \cap \leq 8)}{P(\leq 8)} = \frac{P(C) \cdot P(\leq 8/C)}{P(C) \cdot P(\leq 8/C) + P(H) \cdot P(\leq 8/H) + P(A) \cdot P(\leq 8/A)} =$$

$$= \frac{0,45 \cdot 0,90}{0,45 \cdot 0,90 + 0,35 \cdot 0,80 + 0,20 \cdot 0,75} = \frac{0,405}{0,405 + 0,280 + 0,150} = \frac{0,405}{0,835} = \underline{0,485}.$$

****

6º) Los tiempos que tardan unos corredores en recorrer 6 km sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 10$ minutos. Se eligen al azar 10 corredores y se mide el tiempo que tardan en hacer los seis kilómetros, siendo estos: 15, 19, 20, 22, 24, 25, 27, 28, 30, 32 minutos respectivamente.

a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo medio que tardan los corredores eh hacer los 6 km, con un nivel de confianza del 95 %.

b) ¿Cuál deberá ser el tamaño mínimo de la muestra para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 1 minuto?

----

a)

$$\overline{x} = \frac{15+19+20+22+24+25+27+28+30+32}{10} = \frac{242}{10} = 24,2.$$

$\alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$

$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$

Datos: $n = 10;\ \overline{x} = 24,2;\ \sigma = 10;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(24,2 - 1,96\cdot\frac{10}{\sqrt{10}};\ 24,2 + 1,96\cdot\frac{10}{\sqrt{10}}\right);$$

$(24,2 - 1,96\cdot3,1623;\ 24,2 + 1,96\cdot3,1623);\ (24,2 - 6,1981;\ 24,2 + 6,1981)$.

$$\underline{I.\ C._{95\ \%} = (18,0019;\ 30,3981).}$$

b)

Datos: $n = 10;\ \sigma = 10;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96;\ E = 1.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1,96\cdot\frac{10}{1}\right)^2 =$

$= 19,6^2 = 384,16.$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 385\ corredores.}$

****

OPCIÓN B

1º) Considera el siguiente problema de programación lineal:

Minimizar la función $f(x) = 5x + 3y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$x + 2y \leq 16;\ \ 5x + 4y \geq 38;\ \ 4y - x \geq 2.$

a) Dibuja la región factible.

b) Determina los vértices de la región factible.

c) Indica la solución óptima del problema dado y su valor.

----

a)

x	0	16
y	8	0

① $\Rightarrow x + 2y \leq 16 \Rightarrow y \leq \frac{16-x}{2} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	2	6
y	7	2

② $\Rightarrow 5x + 4y \geq 38 \Rightarrow y \geq \frac{38-5x}{4} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow No.$

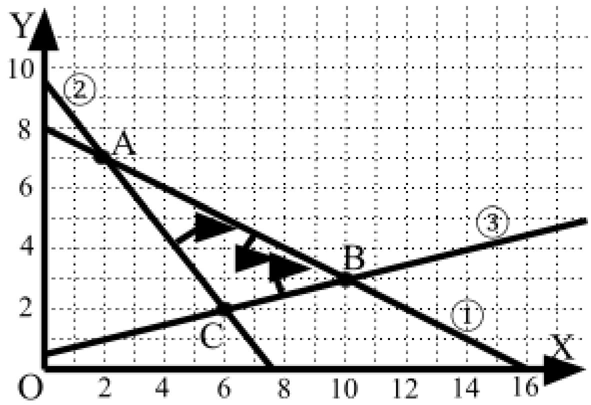
x	2	14
y	1	4

③ $\Rightarrow 4y - x \geq 2 \Rightarrow y \geq \frac{x+2}{4} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow No.$

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

b)

Los vértices de la zona factible son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + 2y = 16 \\ 5x + 4y = 38 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2x - 4y = -32 \\ 5x + 4y = 38 \end{array}\Big\} \Rightarrow$
$\Rightarrow 3x = 6;\ \ x = 2 \Rightarrow \underline{A(2,\ 7)}.$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + 2y = 16 \\ 4y - x = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 6y = 18;\ \ y = 3 \Rightarrow \underline{B(10,\ 3)}.$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5x + 4y = 38 \\ 4y - x = 2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 5x + 4y = 38 \\ -5x + 20y = 10 \end{array}\Big\} \Rightarrow 24y = 48;$

.

$c)$

La función de objetivos es $f(x) = 5x + 3y$.

El valor de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(2, 7) = 5 \cdot 2 + 3 \cdot 7 = 10 + 21 = 31.$

$B \Rightarrow f(10, 3) = 5 \cdot 10 + 3 \cdot 3 = 50 + 9 = 59.$

$C \Rightarrow f(6, 2) = 5 \cdot 6 + 3 \cdot 2 = 30 + 6 = 36.$

$\underline{La\ solución\ óptima\ de\ mínimo\ es\ el\ punto\ A(2, 7)\ y\ su\ valor\ es\ 31}.$

****

2º) Un coleccionista de objetos antiguos tiene 40 pesas; algunas son de 200 g, otras son de 100 g y también tiene algunas pesas de 50 g. El número de pesas de 50 g supera en ocho a la suma de las pesas de 200 g y las de 100 g. Todas las pesas juntas nos dan un peso total de 3.400 g.

a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas pesas de cada valor posee el coleccionista.

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior.

----

a)

Sean x, y, z los números de pesas de 200 g, 100 g y 50 g que tiene el coleccionista, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$x + y + z = 40 \qquad z - 8 = x + y \; 200x + 100y + 50z = 3$$

.

b)

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|40\ 1\ 1\ -8\ 1\ -1\ 68\ 2\ 1\ |}{|1\ 1\ 1\ 1\ 1\ -1\ 4\ 2\ 1\ |} = \frac{40-16-68-68+80+8}{1+2-4-4+2-1} = \frac{128-152}{-4} = \frac{-24}{-4} = 6.$$

$$y = \frac{|1\ 40\ 1\ 1\ -8\ -1\ 4\ 68\ 1\ |}{-4} = \frac{-8+68-160+32+68-40}{-4} = \frac{168-208}{-4} = \frac{-40}{-4} = 10.$$

$$z = \frac{|1\ 1\ 40\ 1\ 1\ -8\ 4\ 2\ 68\ |}{-4} = \frac{68+80-32-160+16-68}{-4} = \frac{96-192}{-4} = \frac{-96}{-4} = 24.$$

$$\underline{El\ coleccionista\ tiene\ 6\ pesas\ de\ 200g,\ 10\ de\ 100\ g\ y\ 24\ de\ 50\ g.}$$

****

3º) Se considera la función $f(x) = \{\ (x + 2)^2\ \ si\ x \le 1\ (x - 2)^2 + t\ si\ x > 1$:

a) Halla el valor de t para que f sea continua en $x = 1$.

b) Para $t = 0$, representa gráficamente la función f.

----

a)

Para que la función sea continua en $x = 1$ es necesario que sus límites laterales en ese punto sean iguales e igual al valor de la función en ese punto.

$f(x) = (x + 2)^2 = 3^2 = 9 = f(1)\ f(x) = \left[(x - 2)^2 + t\right] = 1 + t \quad \}\Rightarrow 9 =$

.

<u>$La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ x = 1\ para\ t = 8$</u>.

b)

Para $t = 0$ la función resulta $f(x) = \{(x + 2)^2\ si\ x \le 1\ (x - 2)^2\ si\ x > 1$.

En el intervalo $(-\infty, 1)$ la función es la parábola $g(x) = (x + 2)^2$ que es convexa ($\cup$) y cuyo vértice es el siguiente:

$g'(x) = 2(x + 2)$.

$g'(x) = 0 \Rightarrow 2(x + 2) = 0 \Rightarrow x = -2$.

$g(-2) = 0 \Rightarrow V_1(-2, 0)$.

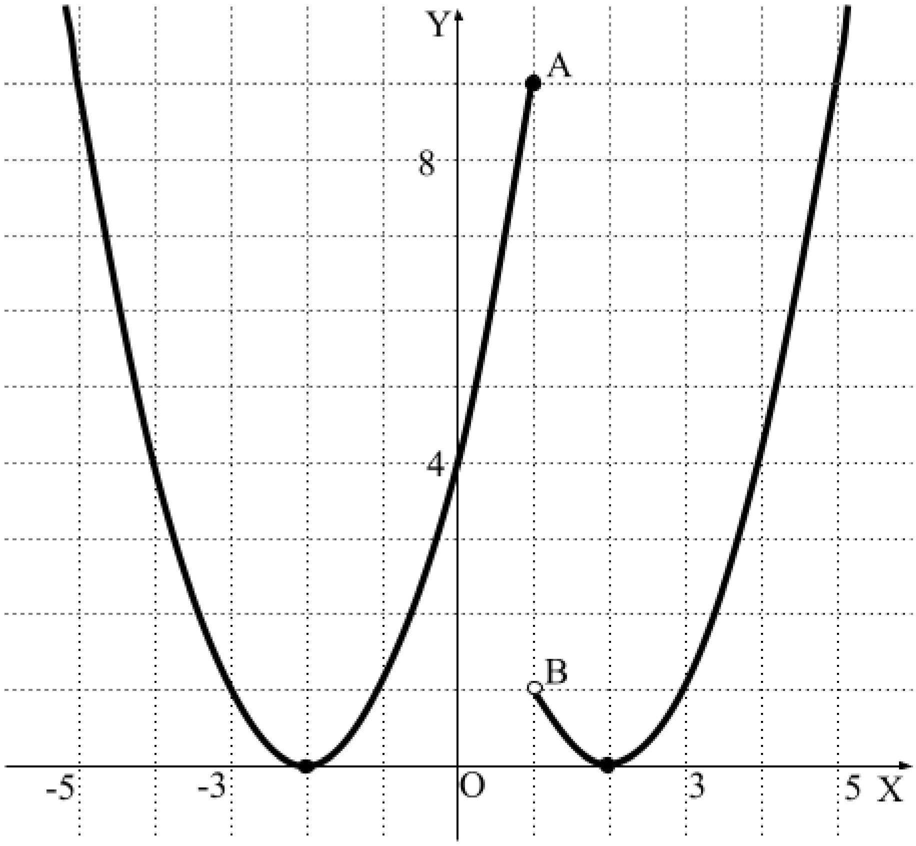
En el intervalo $(1, +\infty)$ la función es la parábola $h(x) = (x - 2)^2$ que es convexa ($\cup$) y cuyo vértice es el siguiente:

$h'(x) = 2(x - 2)$.

$h'(x) = 0 \Rightarrow 2(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 2$.

$h(2) = 0 \Rightarrow V_2(2, 0)$.

La representación gráfica de la función, aproximada, aparece en la figura siguiente.


Y
A
8
4
B
-5
-3
O
3
5
X

****

4º) En cierta sala de cine, una película permanece en cartel 16 semanas. La recaudación en taquilla de esta película a lo lardo de cada una de esas 16 semanas se ajusta a la función $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 36x + 150$ donde $0 \leq x \leq 16$ está en semanas y $F(x)$ es la recaudación en cientos de euros. Se pide:

a) Cuál es la recaudación en el momento del estreno $(x = 0)$ y cuál es la recaudación al final $(x = 16)$.

b) En qué intervalo o intervalos crece esta función y en cuál o cuáles decrece.

c) En qué momentos se alcanzan las recaudaciones máxima y mínima respectivamente y a cuánto ascienden estas recaudaciones.

----

a)

$F(0) = 150.$

$F(16) = \frac{1}{3} \cdot 16^3 - \frac{15}{2} \cdot 16^2 + 36 \cdot 16 + 150 =$

$= \frac{4.096}{3} - 15 \cdot 128 + 576 + 150 = \frac{4.096}{3} - 1.920 + 726 = \frac{4.096}{3} - 1.194 =$

$= \frac{4.096 - 3.582}{3} = \frac{514}{3} \cong 171,3333.$

$\underline{La\ recaudación\ al\ principio\ es\ de\ 15.000\ euros\ y\ el\ final\ 17.133,33\ euros.}$

b)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$F'(x) = x^2 - 15x + 36.$

$F'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 15x + 36 = 0; \ \ x = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 144}}{2} = \frac{15 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{15 \pm 9}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = 3, \ x_2 = 12.$

Las raíces encontradas de la derivada dividen el dominio de la función en los tres intervalos $(0, 3)$, $(3, 12)$ y $(12, 16)$, que son, alternativamente, crecientes o decrecientes. Considerando, por ejemplo el valor $1 \in (0, 3)$:

$F'(1) = 1^2 - 15 \cdot 1 + 36 = 1 - 15 + 36 = 22 > 0 \Rightarrow Creciente.$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función, que son los siguientes:

$$\underline{F(x)\ creciente:\ F'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon (0, 3) \cup (12,\ 16)}.$$

$$\underline{F(x)\ decreciente:\ F'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon (3,\ 12)}.$$

$c)$

La condición necesaria para que una función polinómica tenga un extremo relativo es que se anule su primera derivada. Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera derivada se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$F''(x) = 2x - 15.$$

$$F''(3) = 2 \cdot 3 - 15 = 6 - 15 = -9 < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = 3.$$

$$F(16) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - \frac{15}{2} \cdot 3^2 + 36 \cdot 3 + 150 = 9 - \frac{135}{2} + 108 + 150 =$$

$$= 267 - \frac{135}{2} = \frac{534-135}{2} = \frac{399}{2} \Rightarrow \underline{Máximo: A(3,\ 199, 5)}.$$

$$F''(12) = 2 \cdot 12 - 15 = 24 - 15 = 9 > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ x = 12.$$

$$F(112) = \frac{1}{3} \cdot 12^3 - \frac{15}{2} \cdot 12^2 + 36 \cdot 12 + 150 = 576 - 1.080 + 432 + 150 =$$

$$= 78 \Rightarrow \underline{Mínimo: B(12,\ 78)}.$$

$$\underline{Recaudación\ máxima: 19.950\ euros.}$$

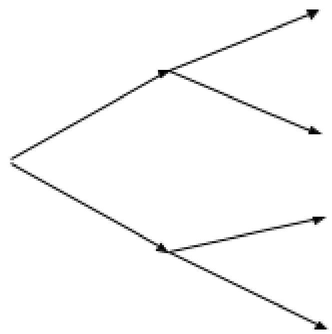
$$\underline{Recaudación\ mínima: 7.800\ euros.}$$

****

5º) En una empresa hay dos categorías para los empleados, en la categoría A se encuentra al 80 % de los empleados y el resto en la B. El 10 % de los empleados de la categoría A tiene contrato temporal mientras que en la categoría B este porcentaje es del 30 %.

a) Elegido un empleado al azar de esa empresa, ¿cuál es la probabilidad de que tenga contrato temporal?

b) Se escoge un empleado al azar y tiene contrato temporal, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la categoría B?



a)

$$P = P(T) = P(A)\cdot P(T/A) + P(B)\cdot P(T/B) = 0,8\cdot 0,1 + 0,2\cdot 0,3 =$$

$$= 0,08 + 0,06 = \underline{0,14}.$$

b)

$$P = P(B/T) = \frac{P(B\cap T)}{P(T)} = \frac{P(B)\cdot P(T/B)}{P(A)\cdot P(T/A)+P(B)\cdot P(T/B)} = \frac{0,2\cdot 0,3}{0,8\cdot 0,1+0,2\cdot 0,3} = \frac{0,06}{0,08+0,06} =$$

$$= \frac{0,06}{0,08+0,06} = \frac{0,06}{0,14} = \underline{0,4286}.$$

****

6º) El gasto por hogar en teléfonos móviles e internet sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 30$ euros. Tomando una muestra aleatoria de 9 hogares, se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza para la media poblacional: $(128,3;\ 171,7)$.

$a)$ Calcula el nivel de confianza del intervalo y calcula el valor que se obtuvo para la media muestral.

$b)$ ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de 100 y un nivel de confianza del 96,6 %?

$a)$

$$Media\ muestral = \overline{x} = \frac{171,7+128,3}{2} = \frac{300}{2} = \underline{150}.$$

$$E = \frac{171,7-128,3}{2} = \frac{43,4}{2} = 21,7.$$

Datos: $n = 9;\ \ \sigma = 30;\ \ E = 21,7.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E\cdot\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{21,7\cdot\sqrt{9}}{30} = \frac{21,7\cdot 3}{30} = 2,17.$

Mirando en la tabla de distribución normal $N(0,\ 1)$:

$2,17 \rightarrow 0,9850 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9850;\ \ 2 - \alpha = 1,9700;\ \ 1 - \alpha = 0,9700.$

$$\underline{El\ nivel\ de\ confianza\ es\ del\ 97\ \%}.$$

$b)$

Nivel de confianza del 96,6 %.

$1 - \alpha = 0,966 \rightarrow \alpha = 1 - 0,966 = 0,034 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,017} = 2,12.$

$(1 - 0,017 = 0,9830 \rightarrow z = 2,12).$

Datos: $n = 100;\ \ \sigma = 30;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,12.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,12 \cdot \frac{30}{\sqrt{100}} = 2,12 \cdot 3 = \underline{6,36\ euros}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE CASTILLA-LA MANCHA

SEPTIEMBRE – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

OPCIÓN A

1º) $a)$ Despeja X en la siguiente expresión matricial: $M \cdot X \cdot N = P$.

$b)$ Despeja y calcula X en la ecuación matricial $(-\ 3\ 1\ \ -\ 1\ 0\ ) \cdot X \cdot (-\ 1\ \ -\ 1\ 5\ 4\ ) = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

$a)$

$$M \cdot X \cdot N = P;\ \ M^{-1} \cdot M \cdot X \cdot N \cdot N^{-1} = M^{-1} \cdot P \cdot N^{-1};$$

$I \cdot X \cdot I = M^{-1} \cdot P \cdot N^{-1} \Rightarrow \underline{X = M^{-1} \cdot P \cdot N^{-1}}$.

$b)$

Siendo $M = (-\ 3\ 1\ \ -\ 1\ 0\ )\ y\ N = (-\ 1\ \ -\ 1\ 5\ 4\ )$:

$$M \cdot X \cdot N = I;\ \ M^{-1} \cdot M \cdot X \cdot N \cdot N^{-1} = M^{-1} \cdot I \cdot N^{-1} = M^{-1} \cdot N^{-1};$$

$I \cdot X \cdot I = M^{-1} \cdot N^{-1} \Rightarrow \underline{X = M^{-1} \cdot N^{-1}}$.

Las matrices inversas de M y N son las siguientes:

$|M| = |-\ 3\ 1\ \ -\ 1\ 0\ | = 1;\ \ M^{t} = (-\ 3\ \ -\ 1\ 1\ 0\ );\ \ Adj.\ de\ M^{t} = (0\ \ -\ 1\ 1\ \ -\ 3\ ) \Rightarrow$

$\Rightarrow M^{-1} = \frac{Adj.\ de\ M^{t}}{|M|} = (0\ \ -\ 1\ 1\ \ -\ 3\ )$.

$|N| = |-\ 1\ \ -\ 1\ 5\ 4\ | =-\ 4\ +\ 5\ =\ 1;\ N^{t} = (-\ 1\ 5\ \ -\ 1\ 4\ );\ Adj.\ de\ N^{t} = (4\ 1\ \ -\ 5\ \ -$

$\Rightarrow N^{-1} = \frac{Adj.\,de\, N^{t}}{|N|} = (4\;1\; -\; 5\; -\; 1\;).$

$X = M^{-1} \cdot N^{-1} = (0\; -\; 1\;1\; -\; 3\;)\cdot(4\;1\; -\; 5\; -\; 1\;) = (5\;1\;19\;4\;).$

$\underline{X = (5\;1\;19\;4\;)}.$

****

2º) Un coleccionista tiene pesas antiguas de tres pesos distintos. Tiene 8 del mayor peso; 12 de un peso intermedio y 20 del menor peso. Todas las pesas juntas nos dan un peso total de 3.800 g. Una pesa intermedia pesa la mitad que una de las mayores. Cuatro pesas de las menores equivalen a una mayor.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuál es el valor en gramos de cada uno de los tres tipos de pesas.

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior.

----

a)

Sean x, y, z los gramos de peso de las pesas de mayor peso, de peso intermedio y de menor peso, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$8x + 12y + 20z = 3.800 \qquad x = 2y \qquad x = 4z\} \quad \underline{8x +}$$

.

b)

Sustituyendo en la primera ecuación los valores de z e y:

$$8x + 12 \cdot \frac{1}{2}x + 20 \cdot \frac{1}{4}x = 3.800; \;\; 8x + 6x + 5x = 3.800; \;\; 19x = 3.800;$$

$$x = \frac{3.800}{19} = 200. y = \frac{200}{2} = 100. \;\; z = \frac{200}{4} = 50.$$

$\underline{Las\ pesas\ mayores\ son\ de\ 200\ g,\ las\ medianas\ de\ 100\ g\ y\ las\ pequeñas\ de\ 50\ g.}$

****

3º) Se considera la función $f(x) = \{x + 2t \quad si \quad x \leq 0 \; (x + t)^3 - x \;\; si \;\; x > 0$.

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 0$?

b) Para $t = 0$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, \; + \infty)$.

c) Para $t = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en el intervalo $(- \infty, \; 1)$.

----

a)

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$ es necesario que sus límites laterales en ese punto sean iguales e iguales al valor de la función:

$$f(x) \; = (x + 2t) = 2t = f(0) \;\; f(x) \; = \left[(x + t)^3 - x\right] = t^3 \quad \} \Rightarrow f(x) \; = f(0) =$$

$$\Rightarrow 2t = t^3; \;\; t^3 - 2t = 0; \;\; t\left(t^2 - 2\right) = 0 \Rightarrow t_1 = - \sqrt{2}; \; t_2 = 0; t_3 = \sqrt{2}.$$

$\underline{La\; función\; f(x)\; es\; continua\; en\; x = 0\; para\; t = - \sqrt{2}, \; t = 0\; y\; t = \sqrt{2}}.$

b)

Para $t = 0$ la función es $f(x) = \{x \quad si \quad x \leq 0 \; x^3 - x \;\; si \;\; x > 0$.

$f'(x) = \{1 \quad si \quad x \leq 0 \; 3x^2 - 1 \;\; si \;\; x > 0$.

En el intervalo $(0, \; + \infty)$ la función es $g(x) = x^3 - x$.

Para que una función polinómica tenga un extremo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$g'(x) = 3x^2 - 1. \qquad g''(x) = 6x.$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 1 = 0; \;\; x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x_1 = - \frac{\sqrt{3}}{3} \notin (0, \; + \infty); \; x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$g''\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} > 0 \Rightarrow Mínimo\; relativo\; para\; x = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{27} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{9} - \frac{3\sqrt{3}}{9} = - \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

$\underline{Mínimo\; relativo \Rightarrow P\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \; - \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)}.$

$c)$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

Siendo $f(x) = \begin{cases} x & si \quad x \le 0 \\ x^3 - x & si \ x > 0 \end{cases}$, es $f'(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \le 0 \\ 3x^2 - 1 & si \ x > 0 \end{cases}$.

Teniendo en cuanta la continuidad de la función para $t = 0$, según lo visto en el apartado $a)$ y el mínimo relativo obtenido en el apartado $b)$ y teniendo en cuenta que $\frac{\sqrt{3}}{3} < 1$:

$$\underline{Crecimiento:\ f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty,\ 0) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ 1\right).}$$

$$\underline{Decrecimiento:\ f'(x) < 0 \Rightarrow x \in \left(0,\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right).}$$

****

4º) De la función $J(x) = ax^4 + bx^3 + cx$ sabemos que en el origen de coordenadas, su derivada toma el valor -2. Además sabemos que tiene un punto de inflexión en $P(2,\ 0)$. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros $a,\ b\ y\ c$.

$J'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + c.$ $\qquad\qquad$ $J''(x) = 12ax^2 + 6bx.$

$J'(0) = -2 \Rightarrow \underline{c = -2}.$ $\qquad\qquad$ $J(x) = ax^4 + bx^3 - 2x$

Por contener al punto $P(2,\ 0) \Rightarrow J(2) = 0$: $a \cdot 2^4 + b \cdot 2^3 - 2 \cdot 2 = 0;$

$16a + 8b - 4 = 0;\ \ 4a + 2b = 1.$ (1)

Por tener un punto de inflexión en $P(2,\ 0) \Rightarrow J''(2) = 0$:

$12a \cdot 2^2 + 6b \cdot 2 = 0;\ \ 4a + b = 0.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$\left.\begin{array}{l} 4a + 2b = 1 \\ 4a + b = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 4a + 2b = 1 \\ -4a - b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{b = 1\ y\ a = -\frac{1}{4}}$

.

****

5º) De un estudio sobre accidentes de tráfico se dedujeron los siguientes datos: el 29 % de los conductores superaron los límites de alcohol en sangre, el 14 % de los conductores tenía presencia de drogas en sangre y el 37 % superaba los límites de alcohol o tenía presencia de drogas en sangre o ambas.

a) Calcula la probabilidad de que, en un accidente de tráfico, el conductor supere los límites de alcohol y tenga presencia de drogas en sangre.

b) Razone si son independientes los sucesos superar los límites de alcohol y presencia de drogas en sangre.

$P(A) = 0,29.$ $\qquad$ $P(D) = 0,14.$ $\qquad$ $P(A \cup B) = 0,37.$

a)

$$P = P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,29 + 0,14 - 0,37 = 0,43 - 0,37 =$$

$$= \underline{0,06}.$$

b)

Dos sucesos A y D son independientes cuando $P(A \cap D) = P(A) \cdot P(D)$:

$$P(A) \cdot P(D) = 0,29 \cdot 0,14 = 0,0406 \neq 0,06.$$

$$\underline{Los\ sucesos\ A\ y\ D\ no\ son\ independientes}.$$

****

6º) El rendimiento por árbol de una especie de pistacho sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 1,2\, kilos$. Se toma una muestra aleatoria de tamaño 40 y se calcula la media muestral, siendo esta igual a 6,7 kilos.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del rendimiento con un nivel de confianza del 95 %.

b) Explica razonadamente el efecto que tendría sobre el intervalo de confianza el aumento o la disminución del nivel de confianza.

c) ¿Es razonable que la media de rendimiento de esta especie sea $\mu = 5\, kilos$, con un nivel de confianza del 90 %? Razona tu respuesta.

----

a)

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$$

$$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$$

Datos: $\overline{x} = 6,7;\ \ n = 40;\ \ \sigma = 1,2;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(6,7 - 1,96 \cdot \frac{1,2}{\sqrt{40}};\ 6,7 + 1,96 \cdot \frac{1,2}{\sqrt{40}}\right);$$

$$(6,7 - 1,96 \cdot 0,1897;\ 6,7 + 1,96 \cdot 0,1897);\ \ (6,7 - 0,3719;\ 6,7 + 0,3719).$$

$$\underline{I.\ C._{95\ \%}\ (6,3281;\ 7,0719).}$$

b)

De la expresión del intervalo, $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, se deduce que a medida que aumenta el nivel de confianza, $z_{\frac{\alpha}{2}}$, aumenta la amplitud del intervalo.

$$\underline{El\ intervalo\ aumenta\ o\ disminuye\ según\ lo\ haga\ el\ nivel\ de\ confianza.}$$

c)

Por definición de intervalo de confianza: $\left(- z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < + z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ o también:

$$\frac{\overline{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \mu = \overline{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Para un nivel de confianza del 90 %:

$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 1 - 0,90 = 0,10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,05} = 1,645.$

$(1 - 0,05 = 0,9500 \rightarrow z = 1,645).$

$$\mu = \overline{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \mu = 6,7 \pm 1,645 \cdot \frac{1,2}{\sqrt{40}} = 6,7 \pm 1,645 \cdot 0,1897 =$$

$$= 6,7 \pm 0,3121 \Rightarrow \mu = 5 \notin 6,7 \pm 0,3121.$$

$\underline{No\ es\ razonable\ con\ un\ nivel\ de\ confianza\ del\ 90\ \%\ que\ \mu = 5.}$

****

OPCIÓN B

1º) Un transportista debe llevar en su camión sacos de cemento y sacos de yeso con las siguientes condiciones: el número de sacos de cemento estará entre 25 y 100 y el número de sacos de yeso estará entre 30 y 90. El transportista sabe que un saco de cemento pesa 30 kg y un saco de yeso pesa 20 kg, y se propone cumplir las condiciones llevando en su camión el menor peso posible.

a) Expresa la función objetivo.

b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido.

c) Halla el número de sacos de cada clase que debe llevar para que el peso transportado sea mínimo.

----

a)

Sean x e y el número de sacos de cemento y yeso que transporta el camión, respectivamente.

La función de objetivos es: $\underline{f(x,\ y) = 30x + 20y}$.

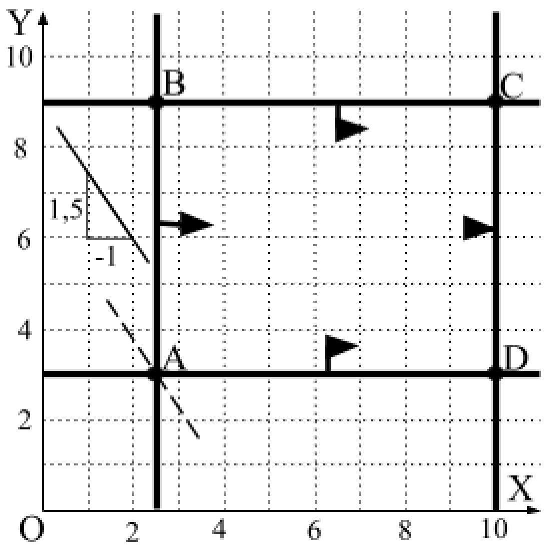
b)

Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{matrix} 25 \le x \le 100 \\ 30 \le y \le 90 \end{matrix}\right\}$.

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura.

Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A(25,\ 30)$, $B(25,\ 90)$, $C(100,\ 90)$ y $D(100,\ 30)$.



c)

Los valores de la función de objetivos $f(x,\ y) = 30x + 20y$ en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(25,\ 30) = 30 \cdot 25 + 20 \cdot 30 = 750 + 600 = 1.350.$

$B \Rightarrow f(25,\ 90) = 30 \cdot 25 + 20 \cdot 90 = 750 + 1.800 = 2.550.$

$C \Rightarrow f(100,\ 90) = 30 \cdot 100 + 20 \cdot 90 = 3.000 + 1.800 = 4.800.$

$D \Rightarrow f(100,\ 30) = 30 \cdot 100 + 20 \cdot 30 = 3.000 + 600 = 3.600.$

El mínimo se produce en el punto $A(25,\ 30)$.

También se hubiera obtenido el punto A por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = 30x + 20y = 0 \Rightarrow y = -\frac{30}{20}x = \frac{1,5}{1}x \Rightarrow m = -\frac{1,5}{1}$.

$\underline{El\ peso\ es\ mínimo\ transportando\ 25\ sacos\ de\ cemento\ y\ 30\ sacos\ de\ yeso.}$

****

2º) A través de una página de internet se han vendido hoy estradas para tres eventos distintos: 120 entradas para un estreno de cine, 50 entradas para una función teatral y 150 entradas para un concierto de música. El valor total de lo recaudado en total por esta venda de entradas es de 6.460 euros. Sabemos que el precio de dos entradas de teatro equivale al de cinco entradas de cine. El precio de dos entradas para el concierto musical equivale al de tres entradas de teatro.

a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto vale cada una de las entradas para cada evento.

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior.

----

a)

Siendo x, y, z los precios de las entradas para el cine, teatro o concierto de música, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$120x + 50y + 150z = 6.460$ $2y = 5x$ $2z = 3$

.

b)

$x = \frac{2}{5}y;\ z = \frac{3}{2}y \Rightarrow 120 \cdot \frac{2}{5}y + 50y + 150 \cdot \frac{3}{2}y = 6.460;$

$48y + 50y + 225y = 6.460;\ 323y = 6.460 \Rightarrow y = \frac{6.460}{323} = 20.$

$x = \frac{2}{5} \cdot 20 = 8;\ z = \frac{3}{2} \cdot 20 = 30.$

$\underline{Las\ entradas\ cuuestan: cine,\ 8\ euros;\ teatro,\ 20\ euros\ y\ concierto,\ 30\ euros}$

.

****

3º) Se considera la función $f(x) = \{(x + 4)^2 \ si \ x <- 1 \quad 4 \ \ si \ - 1 \le x \le 1 \ (tx - 6)^2 \ \ si \ x > 1$:

$a)$ Halla el valor de t para que f sea continua en $x = 1$.

$b)$ Para $t = 2$, representa gráficamente la función f.

$a)$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$ es necesario que sus límites laterales en ese punto sean iguales e iguales al valor de la función:

$f(x) \ = 4 = 4$ $\qquad f(x) \ = \ (tx - 6)^2 = t^2 - 12t + 36$

$\Rightarrow f(x) \ = f(0) = f(x) \Rightarrow 4 = t^2 - 12t + 36; \ \ t^2 - 12t + 32 = 0;$

$t = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 128}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{12 \pm 4}{2} = 6 \pm 2 \Rightarrow t_1 = 4, \ t_2 = 8.$

La función $f(x)$ es continua en $x = 1$ para $t = 4$ y para $t = 8$.

$b)$

Para $t = 2$ la función es $f(x) = \{(x + 4)^2 \ si \ x <- 1 \quad 4 \ \ si \ - 1 \le x \le 1 \ (2x - 6)^2 \ si \ x > 1$.

En el intervalo $(- \infty, \ - 1)$ la función es la parábola $g(x) = (x + 4)^2$ que es convexa (∪) y cuyo vértice es el siguiente:

$g'(x) = 2(x + 4).$

$g'(x) = 0 \Rightarrow 2(x + 4) = 0 \Rightarrow x =- 4.$

$g(- 4) = 0 \Rightarrow V_1(- 4, \ 0).$

En el intervalo $[- 1, \ 1]$ la función es la recta $y = 4$.

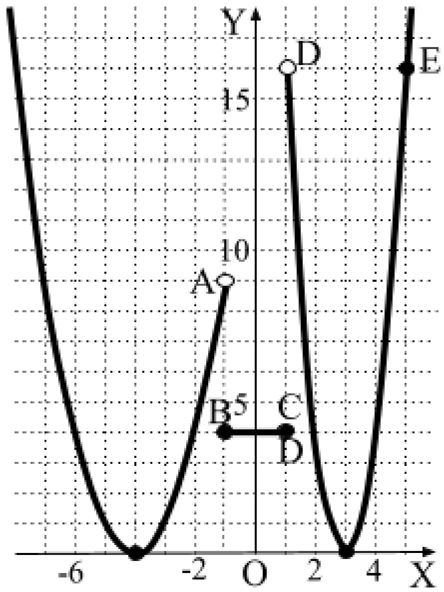
En el intervalo $(1, \ + \infty)$ la función es la parábola $h(x) = (2x - 6)^2$ que es convexa (∪) y cuyo vértice es el siguiente:

$h'(x) = 2(2x - 6) \cdot 2 = 8(x - 3).$

$h'(x) = 0 \Rightarrow 8(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 3.$

$h(3) = 0 \Rightarrow V_2(3, 0).$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la que se indica en la figura siguiente.



****

4º) Un ciclista da una vuelta completa a un circuito de modo que su velocidad a lo largo de este recorrido se ajusta a la función $V(x) = -\frac{1}{20}x^4 + \frac{1}{2}x^3$ donde $V(x)$ está en km/h y x en minutos, siendo $x \geq 0$ y $V(x) \geq 0$. Se pide:

a) Teniendo en cuenta que el ciclista se detiene cuando completa una vuelta al circuito, calcula cuánto tiempo tarda en completarlo.

b) Determina en qué intervalo su velocidad es creciente y en qué intervalo es decreciente.

c) Determina en qué instante alcanza la velocidad máxima y cuál es esa velocidad.

----

a)

Si se detiene al final del recorrido la velocidad, tanto al comienzo como al final, tiene que ser cero:

$$V(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{20}x^4 + \frac{1}{2}x^3 = 0; \ \ -x^4 + 10x^3 = 0; \ \ -x^3(x - 10) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, \ x_2 = 10.$$

$$\underline{El\ ciclista\ tarda\ en\ recorrer\ el\ circuíto\ 10\ minutos.}$$

b)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$V'(x) = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{2}x^2.$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{2}x^2 = 0; \ \ -2x^3 + 15x^2 = 0; \ x^2(-2x + 15) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, \ x_2 = \frac{15}{2} = 7,5.$$

Por ser $x^2 > 0, \ \forall x \in R$, el signo de la primera derivada es el mismo que el de la expresión $(-2x + 15)$.

$$\underline{Crecimiento:\ V'(x) > 0 \Rightarrow x \in (0; 7,5).}$$

$$\underline{Decrecimiento:\ V'(x) < 0 \Rightarrow x \in (7,5; 10).}$$

$c)$

Una función polinómica alcanza un máximo relativo cuando se anula su primera derivada y es negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$V''(x) = -\frac{3}{5}x^2 + 3x.$

No tiene sentido es estudio de la raíz $x = 0$.

$V''(7,5) = -\frac{3}{5}\cdot 7,5^2 + 3\cdot 7,5 = -3\cdot 7,5\cdot 1,5 + 22,5 = -33,75 + 22,5 =$

$= -11,25 < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = 7,5.$

$V(7,5) = -\frac{1}{20}\cdot 7,5^4 + \frac{1}{2}\cdot 7,5^3 = -\frac{1}{20}\cdot 7,5^3\cdot(7,5 - 10) \cong 52,73.$

$\underline{Alcanza\ la\ velocidad\ máxima\ de\ 52,73\ km|h\ a\ los\ 7,5\ minitos\ del\ comienzo.}$

****

5º) Una persona que fuma habitualmente tiene una probabilidad 0,1 de padecer cáncer de pulmón en el transcurso de su vida. Suponiendo que el hecho de que una persona padezca cáncer de pulmón es independiente de que otra lo padezca.

a) Si dos personas fuman habitualmente, ¿cuál es la probabilidad de que las dos padezcan cáncer de pulmón?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que padezcan cáncer de pulmón al menos una de cuatro personas que fuman habitualmente?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que padezca cáncer de pulmón exactamente una persona de las dos que fuman habitualmente?

Se trata de una distribución binomial siendo $p = 0,1$ y $q = 0,9$.

a)

$$P = \binom{2}{2} \cdot p^2 \cdot q^0 = 1 \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^0 = \underline{0,01}.$$

b)

El suceso contrario a que "al menos una de cuatro personas tenga cáncer" es que "ninguna persona tenga cáncer".

$$P = 1 - \binom{4}{0} \cdot p^0 \cdot q^4 = 1 - 1 \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^4 = 1 - 0,6561 = \underline{0,3439}.$$

c)

$$P = \binom{2}{1} \cdot p^1 \cdot q^1 = 2 \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^1 = \underline{0,18}.$$

****

6º) El gasto mensual en electricidad (sin incluir impuestos) sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 7$ euros. Se eligen al azar 10 hogares y se pide el gasto mensual, siendo estos: 25, 29, 30, 32, 24, 28, 31, 32, 33 y 32 euros, respectivamente.

a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del gasto por hogar, con un nivel de confianza del 97 %.

b) ¿Cuál deberá ser el tamaño mínimo de la muestra para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 2 euros?

----

a)

$$\overline{x} = \frac{25+29+30+32+24+28+31+32+33+32}{10} = \frac{296}{10} = 29,6.$$

$$\alpha = 1 - 0,97 = 0,03 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,015} = 2,17.$$

$$(1 - 0,015 = 0,9850 \rightarrow z = 2,17).$$

Conocemos: $n = 10;\ \overline{x} = 29,6;\ \sigma = 7;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,17.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(29,6 - 2,17\cdot\frac{7}{\sqrt{10}};\ 29,6 + 2,17\cdot\frac{7}{\sqrt{10}}\right);$$

$(29,6 - 2,17\cdot 2,2136;\ 29,6 + 2,17\cdot 2,2136);\ (29,6 - 4,8035;\ 29,6 + 4,8035)$.

$$\underline{I.\ C._{97\,\%} = \left(24'7965;\ 34'4035\right).}$$

b)

Datos: $\sigma = 7;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,17;\ E = 2.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(2,17\cdot\frac{7}{2}\right)^2 =$

$= (2,17\cdot 3,5)^2 = 7,595^2 = 57,68.$

$$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 58\ hogares.}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE CASTILLA Y LEÓN

JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá escoger una de las dos opciones y desarrollar las preguntas de la misma. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que se puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

1º) Se considera el sistema de ecuaciones lineales $\{x - y =- 1 \quad 2x - y + z = 3\, y - az = 2$ dependiente del parámetro real a.

a) Clasifica el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de a.

b) Resuelve el sistema para $a = 2$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = (1 \ - 1\ 0\ 2 \ - 1\ 1\ 0\ 1 \ - a)$ y $M' = (1 \ - 1\ 0\ 2 \ - 1\ 1\ 0\ 1 \ - a \quad - 1\ 3\ 2)$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$|M| = |1 \ - 1\ 0\ 2 \ - 1\ 1\ 0\ 1 \ - a| = a - 1 - 2a = 0; \ - a - 1 = 0; \ a + 1 =$
.

$\underline{Para\ a \neq - 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

$Para\ a =- 1 \Rightarrow M' = (1 \ - 1\ 0\ 2 \ - 1\ 1\ 0\ 1\ 1 \quad - 1\ 3\ 2) \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{F_1, F_2, F_4$

$\Rightarrow |1 \ - 1 \ - 1\ 2 \ - 1\ 3\ 0\ 1\ 2| =- 2 - 2 - 3 + 4 =- 3 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$

$\underline{Para\ a =- 1 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

b)

Para $a = 2$ el sistema resulta: $\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x - y + z = 3 \\ y - 2z = 2 \end{cases}$, que es compatible determinado.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{-2-1} = \frac{-2-2+1+6}{-3} = \frac{-9}{-3} = 3.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-6-2-4}{-3} = \frac{-12}{-3} = 4.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-2-2-3+4}{-3} = \frac{-3}{-3} = 1.$$

$$\underline{Solución: x = 3,\ y = 4,\ z = 1.}$$

****

2º) La función $f(x) = \begin{cases} 20x^3 - 20x + 32 & si\ 0 < x \leq 1 \\ \frac{90x-45}{x+8} + 27 & si\ \ x > 1 \end{cases}$ representa el beneficio, en miles de euros, de cierta empresa transcurridos x meses.

a) Estudia razonadamente la continuidad de la función $f(x)$.

b) Halla los intervalos donde se produce un aumento del beneficio y una disminución del beneficio. ¿En qué momento el beneficio es mínimo?

c) Determina el beneficio de la empresa a muy largo plazo.

----

a)

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 1$, cuya continuidad es dudosa y, como se nos pide, se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen, son iguales e igual al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 1 \Rightarrow \{f(x) = \left(20x^3 - 20x + 32\right) = 32 = f(1) \qquad f(x) = \left(\frac{90x-45}{x+8} + 27\right.$$

$$\Rightarrow f(x) = f(1) = f(x).$$

$\underline{La\ función f(x)\ es\ continua\ en\ su\ dominio}$.

b)

Una función es creciente o decreciente en un punto cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \begin{cases} 60x^2 - 20 & si\ 0 < x \leq 1 \\ \frac{4.770}{(x+8)^2}\ (*) & si\ \ x > 1 \end{cases}.$$

$$(*)\ g(x) = \frac{90x-45}{x+8} + 27 \Rightarrow g'(x) = \frac{90\cdot(x+8)-(90x-45)\cdot 1}{(x+8)^2} = \frac{90x+720-90x+4.050}{(x+8)^2} = \frac{4.770}{(x+8)^2}.$$

$60x^2 - 20 = 0;\ 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3},\ x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. La raíz negativa no pertenece al dominio de la función. La raíz única $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ divide al intervalo $(0,\ 1)$ en los intervalos $\left(0,\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ 1\right)$. Considerando, por ejemplo, el valor $x = \frac{1}{2} \in \left(0,\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$:

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 60\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 20 = 60\cdot\frac{1}{4} - 20 = 15 - 20 =- 5 < 0.$$

Teniendo en cuenta lo anterior, - en particular la continuidad de la función - y que $\frac{4.770}{(x+8)^2} > 0,\ \forall xR$, los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función son los siguientes:

$$\underline{f(x)\ creciente:\ f'(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, + \infty\right).}$$

$$\underline{f(x)\ decreciente:\ f'(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon\left(0,\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right).}$$

Del estudio del crecimiento y decrecimiento se deduce que:

$$\underline{El\ valor\ mínimo\ de\ la\ función\ se\ produce\ para\ x = \frac{\sqrt{3}}{3}.}$$

$c)$

$$f(x) = \left(\frac{90x-45}{x+8} + 27\right) = 90 + 27 = 117.$$

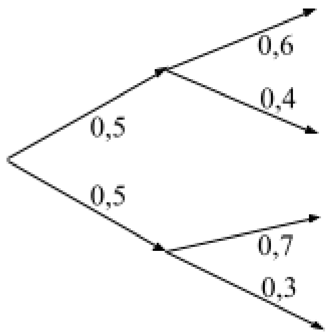
$$\underline{A\ largo\ plazo\ el\ beneficio\ de\ la\ empresa\ se\ estabiliza\ en\ 117.000\ euros.}$$

****

3º) La lista electoral de un determinado partido político está formada por un número igual de hombres y mujeres. Un análisis sociológico de dichas listas revela que el 60 % de los hombres tienen 40 o más años de edad, mientras que el 30 % de las mujeres tienen menos de 40 años. Se elige al azar una persona que forma parte de las listas electorales.

a) Calcula la probabilidad de que tenga menos de 40 años.

b) Sabiendo que tiene 40 o más años de edad, calcula la probabilidad de que sea mujer.



a)

$$P = P(< 40) = P(H) \cdot P(< 40/H) + P(M) \cdot P(< 40/M) =$$

$$= 0,5 \cdot 0,4 + 0,5 \cdot 0,3 = 0,20 + 0,15 = \underline{0,35}.$$

b)

$$P = P(M/\geq 40) = \frac{P(M \cap \geq 40)}{P(\geq 40)} = \frac{P(M) \cdot P(\geq 40/M)}{P(H) \cdot P(\geq 40/H) + P(M) \cdot P(\geq 40/M)} = \frac{0,5 \cdot 0,7}{0,5 \cdot 0,6 + 0,5 \cdot 0,7} =$$

$$= \frac{0,35}{0,30 + 0,35} = \frac{0,35}{0,65} = \underline{0,5385}.$$

****

4º) El diámetro de las piezas fabricadas por cierta máquina sigue una distribución normal con desviación típica poblacional $\sigma = 0,042$ cm. Se elige una muestra representativa de 200 piezas fabricadas por la máquina, resultando un diámetro medio muestral de 0,824 cm. Halla el intervalo de confianza al 95 % para el diámetro medio poblacional de las piezas fabricadas por esa máquina.

$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$

$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$

Datos: $\overline{x} = 0,824;\ \ n = 200;\ \ \sigma = 0,042;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(0,824 - 1,96 \cdot \frac{0,042}{\sqrt{200}};\ 0,824 + 1,96 \cdot \frac{0,042}{\sqrt{200}}\right);$

$(0,824 - 1,96 \cdot 0,030;\ 0,824 + 1,96 \cdot 0,030);\ \ (0,824 - 0,006;\ 0,824 + 0,006)$
.

$\underline{I.\ C._{95\ \%}\ (0,818;\ 0,830).}$

****

OPCIÓN B

1º) Queremos conseguir al menos 210 kg de hidratos de carbono y al menos 100 kg de proteínas adquiriendo dos alimentos A y B que sólo contienen estos dos nutrientes. Cada kg de A contiene 0,6 kg de hidratos de carbono y 0,4 kg de proteínas. Cada kg de B contiene 0,9 kg de hidratos de carbono y 0,1 kg de proteínas. Si los costes de A y B son 12 y 6 euros por kg, respectivamente, utiliza técnicas de programación lineal para calcular cuántos kg de cada alimento hay que adquirir para que el coste sea mínimo. ¿A cuánto asciende ese coste mínimo?

Sean x e y el nº de kg que se adquieren de los productos A y B, respectivamente.

Las condiciones del ejercicio se establecen en el sistema de inecuaciones:

$0,6x + 0,9y \geq 210 \; 0,4x + 0,1y \geq 100 \quad x \geq 0, \; y \geq 0 \}$ $2x + 3y \geq 700 \; 4x + y \geq 1.000 \quad x \geq 0, \; y \geq 0 \}$.

La función de rendimiento es $f(x, y) = 12x + 6y$.

x	350	200
y	0	100

①$\Rightarrow 2x + 3y \geq 700 \Rightarrow y \geq \frac{700-2x}{3} \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow No$.

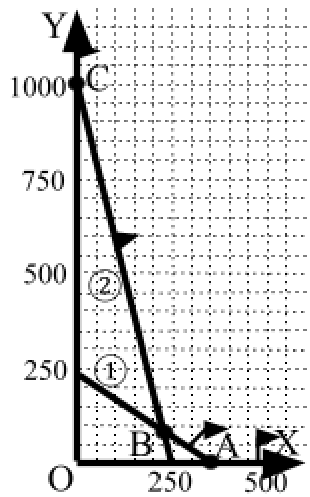
x	200	250
y	200	0

②$\Rightarrow 4x + y \geq 1.000 \Rightarrow y \geq 1.000 - 4x \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow No$.

La región factible es la zona sombreada de la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow 2x + 3y = 700 \quad y = 0 \} \Rightarrow A(350, 0)$.



$B \Rightarrow 2x + 3y = 700 \; 4x + y = 1.000 \} \quad 4x + 6y = 1.400 \; -4x - y = -1.00$

$\Rightarrow 5y = 400;\ \ y = 80;\ \ x = \frac{920}{4} = 230 \Rightarrow B(230,\ 80).$

$C \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ 4x + y = 1.000 \end{array} \right\} \Rightarrow C(0,\ 1.000).$

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(350,\ 0) = 12 \cdot 350 + 6 \cdot 0 = 4.200 + 0 = 4.200.$

$B \Rightarrow f(230,\ 80) = 12 \cdot 230 + 6 \cdot 80 = 2.760 + 480 = 3.240.$
$C \Rightarrow f(0,\ 1.000) = 12 \cdot 0 + 6 \cdot 1.000 = 6.000 + 0 = 6.000.$

El mínimo se produce en el punto B.

$\underline{El\ coste\ es\ mínimo\ comprando\ 230\ kg\ de\ A\ y\ 80\ kg\ de\ B}.$

$\underline{El\ coste\ mínimo\ asciende\ a\ 3.240\ euros}.$

****

2º) a) Calcula el valor de a que hace que el valor de la primera derivada de la función $y = f(x) = ax^3 + 6x^2 - ax - 18$, en los puntos de abscisa $x = -2$ y $x = 1$, sean iguales.

b) Sabiendo que la curva $y = f(x) = ax^3 + 6x^2 - ax - 18$ pasa por el punto $P(2,\ 12)$, calcula el valor de a y las coordenadas del punto de la curva donde se anula la segunda derivada.

----

a)

$$y' = f'(x) = 3ax^2 + 12x - a.$$

$$f'(-2) = 3a\cdot(-2)^2 + 12\cdot(-2) - a = 12a - 24 - a = 11a - 24.$$

$$f'(1) = 3a\cdot 1^2 + 12\cdot 1 - a = 3a + 12 - a = 2a + 12.$$

$f'(-2) = f'(1) \Rightarrow 11a - 24 = 2a + 12;\ \ 9a = 36 \Rightarrow \underline{a = 4}.$

b)

Por pasar por $P(2,\ 12) \Rightarrow f(2) = 12.$

$$f(2) = a\cdot 2^3 + 6\cdot 2^2 - a\cdot 2 - 18 = 12;\ \ 8a + 24 - 2a - 18 = 12;$$

$6a + 6 = 12;\ \ 6a = 6 \Rightarrow \underline{a = 1}.$

$$y'' = f''(x) = 6ax + 12 = 6\cdot 1\cdot x + 12 = 6x + 12.$$

$$y'' = f''(x) = 0 \Rightarrow 6x + 12 = 0;\ \ x + 2 = 0 \rightarrow x = -2.$$

$$f'(-2) = 11a - 24 = 11\cdot 1 - 24 = 11 - 24 = -13.$$

$$\underline{Q(-2,\ -13)}.$$

****

3º) El gasto por cliente en un supermercado sigue una distribución normal con media μ euros (desconocida) y desviación típica $\sigma = 10$ euros. Se elige una muestra representativa de 225 clientes, resultando una suma total de sus gastos de 2.587,50 euros.

a) Determina un intervalo de confianza del 99 % para el gasto medio por cliente.

b) Calcula el tamaño mínimo de la muestra de clientes que permita alcanzar, con una confianza del 95 %, un error máximo de 1,20 euros en la estimación del gasto medio por cliente.

----

a)

$$\overline{x} = \frac{\Sigma x_i}{n} = \frac{2.587{,}50}{225} = 11{,}5.$$

Nivel de confianza del 99 %.

$\alpha = 1 - 0{,}99 = 0{,}01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}005} = 2{,}578.$

$(1 - 0{,}0050 = 0{,}9950 \rightarrow z = 2{,}578).$

Datos: $\overline{x} = 11{,}5;\ \ n = 225;\ \ \sigma = 10;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}578.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(11{,}5 - 2{,}578 \cdot \frac{10}{\sqrt{225}};\ 11{,}5 + 2{,}578 \cdot \frac{10}{\sqrt{225}}\right);$$

$$(11{,}5 - 2{,}578 \cdot 0{,}6667;\ 11{,}5 + 2{,}578 \cdot 0{,}6667);$$

$$(11{,}5 - 1{,}7187;\ 11{,}5 + 1{,}7187);$$

$$\underline{I.\ C._{99\ \%}\ (9{,}7813;\ 13{,}2187).}$$

b)

Nivel de confianza del 95 %:

$\alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96.$

$(1 - 0{,}025 = 0{,}9750 \rightarrow z = 1{,}96).$

Datos: $\sigma = 10;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96;\ \ E = 1{,}2.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \right)^2 = \left(1,96 \cdot \frac{10}{1,2} \right)^2 =$

$= (1,96 \cdot 8,3333)^2 = 16,3333^2 = 266,78.$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 267\ clientes}.$

****

4º) En una clase con 15 alumnos de segundo de bachillerato, 2 alumnos están jugando al mus y 5 están jugando al tute, mientras que el resto de alumnos no está jugando a las cartas. Si se elige al azar dos alumnos, ¿qué probabilidad hay de que ninguno de los elegidos estén jugando a las cartas?

Están jugando a las cartas 7 alumnos y no están jugando a las cartas, 8 alumnos.

Aplicando la regla de Laplace:

$$P = \frac{n^{\underline{o}}\ casos\ favorables}{n^{\underline{o}}\ casos\ posibles} = \frac{C_{8,2}}{C_{15,2}} = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{15}{2}} = \frac{\frac{8!}{(8-2)!\cdot 2!}}{\frac{15!}{(15-2)!\cdot 2!}} = \frac{\frac{8!}{6!}}{\frac{15!}{13!}} = \frac{8\cdot 7}{15\cdot 14} = \frac{56}{210} = \underline{0,2667}$$

.

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE CASTILLA Y LEÓN

SEPTIEMBRE – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá escoger una de las dos opciones y desarrollar las preguntas de la misma. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que se puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

1º) Una conocida cadena de ropa ha rebajado sus precios. Un pantalón, una camisa y un abrigo valían en temporada 360 euros en total. En las primeras rebajas, el pantalón se rebajó un 10 % y la camisa un 20 %, con lo que un cliente podía llevarse ambas prendas por 137 euros. En las segundas rebajas, y sobre el precio de temporada, el pantalón se rebajó un 20 % y el abrigo un 30 %, por lo que juntos costaban 212 euros. Calcula el precio de cada prenda en temporada.

Sean $p,\ c,\ a$ los precios de temporada de una camisa, un pantalón y un abrigo, respectivamente.

El sistema que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$p + c + a = 360\ 0,9p + 0,8c = 137\ 0,8p + 0,7a = 212 \}\ \ p + c + a = 360\ 9p$$
.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|360\ 1\ 1\ 1.370\ 8\ 0\ 2.120\ 0\ 7\ |}{|1\ 1\ 1\ 9\ 8\ 0\ 8\ 0\ 7\ |} = \frac{20.160-16.960-9.590}{56-64-63} = \frac{20.160-26.550}{56-127} = \frac{-6.390}{-71} = 90.$$

$$y = \frac{|1\ 360\ 1\ 9\ 1.370\ 0\ 8\ 2.120\ 7\ |}{-71} = \frac{9590+19.080-10.960-22680}{-71} = \frac{28.670-33.600}{-71} = \frac{-4.970}{-71} = 70$$
.

$$z = \frac{|1\ 1\ 360\ 9\ 8\ 1.370\ 8\ 0\ 2.120\ |}{-71} = \frac{16.960+10.960-23.040-19.080}{-71} = \frac{27.920-42.120}{-71} = \frac{-14.200}{-71} = 200$$

.

$\underline{En\ temporada\ el\ pantalón,\ la\ camisa\ y\ el\ abrigo\ valían,\ 70,\ 90\ y\ 200\ euros.}$

(respectivamente)

****

2º) Se considera la función $f(x) = \{\frac{1}{4-x^2} \ \ si \ \ 0 < x < 2 \quad 2x \ \ si \ \ 2 \le x < 4$.

a) Estudia razonadamente su continuidad.

b) Calcula el área limitada por la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[2,\ 3]$.

----

a)

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 2$, cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$x = 2 \Rightarrow \{f(x) \ = \frac{1}{4-x^2} = \frac{1}{0} = \infty \qquad f(x) \ = (2x) = 4 = f(2) \ \Rightarrow f(x) \ \neq f(x)$

.

$\underline{f(x) \ es \ discontinua \ en \ x = 2 \ con \ una \ discontinuidad \ de \ salto \ infinito.}$

b)

En el intervalo $[2,\ 3]$ la función es $f(x) = 2x$, cuyas ordenadas en el intervalo son todas positivas.

La superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_2^3 f(x)\cdot dx = \int_2^3 (2x)\cdot dx = 2\cdot\int_2^3 x\cdot dx = 2\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3 = \left[x^2\right]_2^3 =$$

$= 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5.$

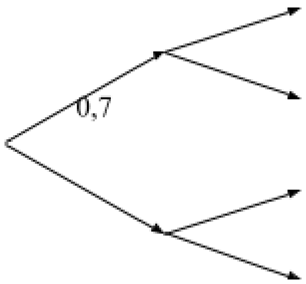
$$\underline{S = 5\,u^2.}$$

****

3º) En una asignatura de primer curso de un grado universitario, asisten a clase regularmente 210 alumnos de los 300 alumnos matriculados. Al finalizar el periodo docente, superan la asignatura el 80 % de los alumnos que existen regularmente a clase y el 50 % de los alumnos que no asisten regularmente a clase. Se elige un alumno matriculado al azar:

a) Calcula la probabilidad de que haya superado la asignatura y no haya asistido regularmente a clase.

b) Sabiendo que ha superado la asignatura, ¿cuál es la probabilidad de que haya asistido regularmente a clase?



a)

$$P = P(\overline{A}/S) = P(\overline{A}) \cdot P(S/\overline{A}) = 0,3 \cdot 0,5 = \underline{0,15}.$$

b)

$$P = P(A/S) = \frac{P(S \cap A)}{P(S)} = \frac{P(A) \cdot P(S/A)}{P(A) \cdot P(S/A) + P(\overline{S}) \cdot P(S/\overline{A})} = \frac{0,7 \cdot 0,8}{0,7 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 0,5} = \frac{0,56}{0,56 + 0,15} =$$

$$= \frac{0,56}{0,71} = \underline{0,7887}.$$

****

4º) En un grupo de 8 amigos se encuentran los tres agraciados con un viaje para visitar Lisboa sorteado por la embajada portuguesa. Si hay 4 amigos que ya han visitado Lisboa, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno de los agraciados haya visitado Lisboa?

Aplicando la regla de Laplace: $P = \frac{Casos\ favorables}{Casos\ posibles}$.

$$P = \frac{C_{4,3}}{C_{8,3}} = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{\frac{4!}{(4-3)!\cdot 3!}}{\frac{8!}{(8-3)!\cdot 3!}} = \frac{\frac{4\cdot 3!}{1!\cdot 3!}}{\frac{8!}{5!\cdot 3!}} = \frac{4}{\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5!\cdot 6}} = \frac{4\cdot 6}{8\cdot 7\cdot 6} = \frac{1}{2\cdot 7} = \frac{1}{14} = \underline{0,0714}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Una empresa dispone de dos talleres para la reparación de motos y coches. El primero de los talleres dispone de 300 horas de trabajo como máximo y necesita 6 horas para reparar cada moto y 5 horas para cada coche. El segundo de los talleres dispone de 200 horas de trabajo como máximo y necesita 2 horas para reparar cada moto y 5 horas para cada coche. El beneficio neto que obtiene la empresa por cada moto reparada es de 1.000 euros mientras que el beneficio neto que obtiene por cada choche reparado es de 1.500 euros. Calcula, utilizando técnicas de programación lineal, cuántos coches y motos ha de reparar para obtener el máximo beneficio neto. ¿Cuál es ese beneficio neto máximo?

Sean x e y el número de motos y coches, respectivamente, que se reparan en los dos talleres.

Las restricciones son las siguientes:

$6x + 5y \leq 300 \; 2x + 5y \leq 200 \quad x \geq 0;\; y \geq 0 \}$.

La región factible se indica sombreada en la figura adjunta.

x	0	50
y	60	0

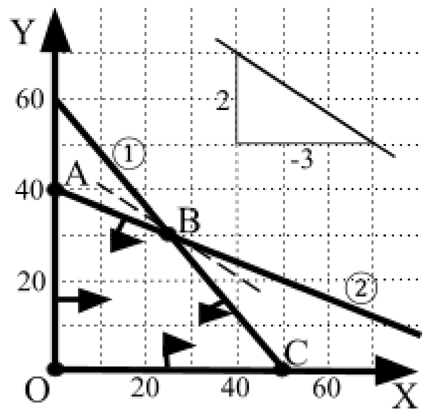
①$\Rightarrow 6x + 5y \leq 300 \Rightarrow y \leq \frac{300-6x}{5} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	0	50
y	40	20

②$\Rightarrow 2x + 5y \leq 200 \Rightarrow y \leq \frac{200-2x}{5} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

Los vértices de la sección factible, además del origen, son los siguientes:

$A \Rightarrow \qquad x = 0 \; 2x + 5y = 200 \} \Rightarrow A(0,\ 40).$



$B \Rightarrow 6x + 5y = 300 \; 2x + 5y = 200 \} \qquad 6x + 5y = 300 \; -2x - 5y = -200 \} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x = 100;\; x = 25 \Rightarrow B(25,\ 30).$

$C \Rightarrow 6x + 5y = 300 \qquad y = 0 \} \Rightarrow C(50,\ 0).$

La función de objetivos es $f(x,\ y) = 1.000x + 1.500y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 40) = 1.000 \cdot 0 + 1.500 \cdot 40 = 0 + 60.000 = 60.000.$

$B \Rightarrow f(25,\ 30) = 1.000 \cdot 25 + 1.500 \cdot 30 = 25.000 + 45.000 = 70.000.$
$C \Rightarrow f(50,\ 0) = 1.000 \cdot 50 + 1.500 \cdot 0 = 50.000 + 0 = 50.000.$

El máximo se produce en el punto B.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,\ y) = 1.000x + 1.500y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1.000}{1.500}x = -\frac{2}{3}x \Rightarrow m = -\frac{2}{3}.$$

$$\underline{El\ máximo\ beneficio\ neto\ se\ obtiene\ reparando\ 25\ motos\ y\ 30\ coches.}$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ neto\ es\ de\ 70.000\ euros.}$$

****

2º) Halla razonadamente dos números reales positivos sabiendo que su suma es 10 y que el producto de sus cuadrados es máximo.

Sean los números reales $x > 0 \; e \; y > 0$.

$x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x$.

$P(x, y) = x^2 \cdot y^2 \Rightarrow Máximo$.

$P(x) = x^2 \cdot (10 - x)^2 = \left(10x - x^2\right)^2$.

Una función polinómica tiene un máximo en un punto cuando se anula su primera derivada y es negativa su segunda derivada en ese punto:

$P'(x) = 2 \cdot \left(10x - x^2\right) \cdot (10 - 2x) = 4x \cdot (10 - x) \cdot (5 - x)$.

$P'(x) = 0 \Rightarrow 4x \cdot (10 - x) \cdot (5 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \; x_2 = 5, \; x_3 = 10$.

Es evidente que las soluciones $x = 0 \; y \; x = 10$ carecen de sentido por producir el producto mínimo; no obstante se justifica a continuación la condición de máximo para $x = 5$.

$P''(x) = 4(10 - x) \cdot (5 - x) + 4x \cdot (-1) \cdot (5 - x) + 4x \cdot (10 - x) \cdot (-1) =$

$= 4 \cdot \left(x^2 - 15x + 50\right) - 4x \cdot (5 - x) - 4x(10 - x) =$

$= 4x^2 - 60x + 200 - 20x + 4x^2 - 40x + 4x^2 = 12x^2 - 120x + 200 =$

$= 4 \cdot \left(3x^2 - 30x + 50\right)$.

$P''(0) = 200 > 0 \Rightarrow Para \; mínimo$.

$P''(5) = 4 \cdot (75 - 150 + 50) = - 100 < 0 \Rightarrow Máximo \; para \; x = 5$.

$P''(10) = 4 \cdot (300 - 300 + 50) = 200 > 0 \Rightarrow Para \; mínimo$.

Para $x = 5 \Rightarrow y = 10 - 5 = 5$.

$\underline{Los \; números \; reales \; que \; cumplen \; la \; condición \; pedida \; son \; x = y = 5}$.

****

3º) Una granja cultiva perlas cuyos diámetros siguen una distribución normal con media μ mm y desviación típica $\sigma = 0,8\, mm$. Se quiere comprobar el comportamiento de las especificaciones exigidas por una joyería en la elaboración de sus collares. Para ello se elige una muestra representativa de 256 perlas, resultando un diámetro medio muestral de 9,92 mm.

a) Calcula el intervalo de confianza para el diámetro medio poblacional de las perlas con un nivel de confianza del 90 %.

b) Calcula el tamaño necesario de la muestra de perlas que permita alcanzar, con una confianza del 98 %, un error máximo de 0,2 mm en la estimación del diámetro medio poblacional de una perla.

----

a)

$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 1 - 0,90 = 0,10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,05} = 1,645.$$

$(1 - 0,05 = 0,9500 \rightarrow z = 1,645)$.

Datos: $n = 256;\ \overline{x} = 9,92;\ \sigma = 0,8;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,645.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(9,92 - 1,645 \cdot \frac{0,8}{\sqrt{256}};\ 9,92 + 1,645 \cdot \frac{0,8}{\sqrt{256}}\right);$$

$(9,92 - 1,645 \cdot 0,05;\ 9,92 + 1,645 \cdot 0,05);\ (9,92 - 0,0823;\ 9,92 + 0,0823)$.

$$\underline{I.\ C._{90\,\%} = (9,8378;\ 10,0023).}$$

b)

$$1 - \alpha = 0,98 \rightarrow \alpha = 1 - 0,98 = 0,02 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,01} = 2,33.$$

$1 - 0,01 = 0,99 \rightarrow z = 2,33)$.

Datos: $\sigma = 0,8;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,33;\ E = 0,2.$

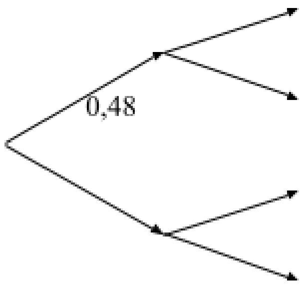
Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(2,33 \cdot \frac{0,8}{0,2}\right)^2 =$

$= (2,33 \cdot 4)^2 = 9,32^2 = 86,86.$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 87\ perlas}.$

****

4º) El 48 % de los trabajadores de una empresa son hombres. Si en esa empresa, el 82 % de los hombres y el 75 % de las mujeres están satisfechos con su trabajo, ¿qué porcentaje de trabajadores está satisfecho con su trabajo en esa empresa?



$$P = P(S) = P(H) \cdot P(S/H) + P(M) \cdot P(S/M) = 0,48 \cdot 0,82 + 0,62 \cdot 0,75 =$$

$$= 0,3936 + 0,4650 = \underline{0,8586}.$$

$\underline{Están\ satisfechos\ con\ su\ trabajo\ el\ 85,86\ \%\ de\ los\ trabajadores}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE CATALUÑA

JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1º) De una función $y = f(x)$ se sabe que su derivada es $f'(x) = x^3 - 4x$.

a) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

b) Determine las abscisas de sus extremos relativos y clasifíquelos.

----

a)

Una función es creciente o decreciente cuando su derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = x^3 - 4x = 0;\ x\left(x^2 - 4\right) = 0 \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2.$$

Teniendo en cuenta la expresión polinómica de $f'(x)$, sus raíces dividen el dominio de la función, que es R, en los periodos $(-\infty,\ -2)$, $(-2,\ 0)$, $(0,\ 2)\ y\ (2,\ +\infty)$, en los cuales el valor de la derivada es, alternativamente, positiva y negativa. Para determinar el signo de los intervalos consideramos el valor $x = 1 \in (0,\ 2)$ es $f'(1) = -3 < 0 \Rightarrow decreciente$.

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función, que son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento\text{: } f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-2,\ 0) \cup (2,\ +\infty)}.$$

$$\underline{Decrecimiento\text{: } f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty,\ -2) \cup (0,\ 2)}.$$

b)

De la continuidad de la función y de los periodos de crecimiento se deducen los extremos relativos así como si son máximo o mínimos; no obstante se determinan a través de la segunda derivada.

La condición necesaria para que una función polinómica tenga un extremo relativo es que se anule su primera derivada. Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: según que sea negativa o positiva para los valores que anulan la primera derivada se trata de un máximo o de un mínimo, respectivamente.

$f''(x) = 3x^2 - 4.$

$f''(-2) = 3\cdot(-2)^2 - 4 = 12 - 4 = 8 > 0 \Rightarrow \underline{Mínimo\ para\ x = -2}.$

$f''(0) = -4 < 0 \Rightarrow \underline{Máximo\ relativo\ para\ x = 0}.$

$f''(2) = 3\cdot 2^2 - 4 = 12 - 4 = 8 > 0 \Rightarrow \underline{Mínimo\ para\ x = 2}.$

****

2º) Desde una barca se dispara una bengala de salvamento marítimo que se apaga al caer al cabo de 4 minutos. En este intervalo de tiempo, se comprueba que la intensidad lumínica de la bengala en función del tiempo, medida en porcentaje del 0 % al 100 %, queda perfectamente descrita por la expresión $L(t) = 25 \cdot t \cdot (4 - t)$, en donde el tiempo varía entra 0 y 4 minutos.

$a)$ Calcule para qué valor de t el porcentaje de intensidad lumínica será máximo.

$b)$ Si desde la costa la bengala solo es visible cuando su intensidad lumínica es superior al 75 %, ¿cuál es el intervalo de tiempo en que será visible desde la costa y, por tanto, será más factible el salvamento?

$a)$

La condición necesaria para que una función tenga un máximo relativo es que se anule su primera derivada.

$$L'(t) = 25 \cdot [1 \cdot (4 - t) + t \cdot (-1)] = 25 \cdot (4 - t - t) = 25 \cdot (4 - 2t) =$$

$$= 50 \cdot (2 - t) = 0 \Rightarrow t = 2.$$

Teniendo en cuenta que $L(t) = 25 \cdot t \cdot (4 - t) = 100t - 25t^2$ es una parábola cóncava (∩), para $t = 2$ tiene su vértice, que es su máximo absoluto.

$$\underline{El\ valor\ de\ la\ intensidad\ lumínica\ de\ la\ bengala\ es\ máximo\ para\ t = 2}.$$

$b)$

$$L(t) = 25t(4 - t) = 75;\ \ 4t - t^2 = 3;\ \ t^2 - 4t + 3 = 0;\ \ t = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} =$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 \Rightarrow t_1 = 1,\ t_2 = 3.$$

$$\underline{Será\ visible\ desde\ la\ costa\ entre\ el\ minuto\ y\ los\ tres\ minutos}.$$

****

3º) Considere las matrices $A = (1\ 5\ 5\ 1\ )$, $B = (0\ 1\ 1\ 0\ )\ y\ C = (1\ \ -\ 1\ m\ n\ )$, donde $m\ y\ n$ son dos números reales.

a) Compruebe que se cumple la igualdad $(A\ -\ B)(A\ +\ B) = A^2 - B^2$.

b) Determine $m\ y\ n$ de manera que las matrices B y C conmuten, es decir, que se cumple que $B \cdot C\ =\ C \cdot B$.

----

a)

$$(A\ -\ B)(A\ +\ B) = A^2 - B^2.$$

$$(A\ -\ B)(A\ +\ B) = [(1\ 5\ 5\ 1\ ) - (0\ 1\ 1\ 0\ )] \cdot [(1\ 5\ 5\ 1\ ) + (0\ 1\ 1\ 0\ )] =$$

$$= (1\ 4\ 4\ 1\ ) \cdot (1\ 6\ 6\ 1\ ) = \underline{(25\ 10\ 10\ 25\ )}.$$

$$A^2 - B^2 = (1\ 5\ 5\ 1\ ) \cdot (1\ 5\ 5\ 1\ ) - (0\ 1\ 1\ 0\ ) \cdot (0\ 1\ 1\ 0\ ) = (26\ 10\ 10\ 26\ ) - (1\ 0\ 0\ 1\ )$$

$$= \underline{(25\ 10\ 10\ 25\ )}.$$

$$\underline{Queda\ comprobado\ que\ (A\ -\ B)(A\ +\ B) = A^2 - B^2}.$$

b)

$$B \cdot C\ =\ C \cdot B \Rightarrow (0\ 1\ 1\ 0\ ) \cdot (1\ \ -\ 1\ m\ n\ ) = (1\ \ -\ 1\ m\ n\ ) \cdot (0\ 1\ 1\ 0\ );$$

$$(m\ n\ 1\ \ -\ 1\ ) = (-\ 1\ 1\ n\ m\ ) \Rightarrow m = -\ 1,\ n\ =\ 1.$$

$$\underline{B \cdot C\ =\ C \cdot B \Rightarrow m = -\ 1,\ n\ =\ 1}.$$

****

4º) Se tienen unas cuantas monedas de un euro distribuidas en tres pilas. Se pasan 12 monedas de la tercera pila a la segunda y, a continuación, se pasan 10 de la segunda pila a la primera. Una vez hecho esto, las tres pilas tienen las mismas monedas.

a) Con estos datos, ¿podemos determinar la cantidad de monedas que había inicialmente en cada pila? Razona la respuesta.

b) Averigüe la cantidad de monedas que había inicialmente en cada pila si sabemos que en total hay 51 monedas.

----

a)

Sean x, y, z los números de monedas de las pilas primera, segunda y tercera, respectivamente.

Del movimiento de monedas indicado resulta: $x + 10 = y + 2 = z - 12$, que expresado en forma de sistema queda:

$$x + 10 = y + 2 \, x + 10 = z - 12 \} \quad x - y =- 8 \, x - z =- 22 \}.$$

El sistema de ecuaciones lineales que resulta tiene dos ecuaciones con tres incógnitas, por lo cual:

$\underline{No\ se\ puede\ determinar\ el\ número\ de\ monedas\ de\ cada\ pila.}$

b)

La condición de que la suma de las monedas es 51 es una ecuación que, añadida al sistema resultante del apartado anterior, resulta: $x - y =- 8 \quad x - z =- 22 \, x + y + z = 51 \}$.

De las dos primeras ecuaciones se tiene que: $y = x + 8$; $z = x + 22$.

Sustituyendo los valores obtenidos en la tercera ecuación:

$x + (x + 8) + (x + 22) = 51$; $3x + 30 = 51$; $3x = 21$; $x = 7$.

$y = 7 + 8 = 15$; $z = 7 + 22 = 29$.

$\underline{En\ la\ primera\ pila\ había\ 7\ euros,\ en\ la\ segunda,\ 15\ y\ en\ la\ tercera,\ 29.}$

****

5º) Una compañía aérea va a organizar para estos días un puente aéreo entre el aeropuerto de Barcelona – El Prat y el de Palma de Mallorca, con plazas suficientes de pasaje y carga, para transportar al menos a 1.600 personas y 96 toneladas de equipaje y mercaderías. Para hacerlo, tiene a su disposición 11 aviones de tipo A, que pueden transportar 200 personas y 6 toneladas de equipaje y mercaderías cada uno, y 18 aviones de tipo B que pueden transportar 100 personas y 15 toneladas cada uno. Si la contratación de un avión de tipo A le cuesta 4.000 euros y la de un avión de tipo B le cuesta 1.000 euros:

a) Determine la función de objetivos, las restricciones y dibuje la región de las posibles opciones que tiene la compañía.

b) Calcule el número de aviones de cada tipo que debe contratar para que el coste sea el mínimo y determine cuál es este coste mínimo.

----

a)

Sean x e y el número de aviones de los tipos A y B que se contratan, respectivamente.

Las condiciones del problema se establecen en el siguiente sistema de inecuaciones:

$200x + 100y \geq 1.600 \quad 6x + 15y \geq 96 \quad 0 \leq x \leq 11 \quad 0 \leq y \leq 8 \}$
o mejor: $2x + y \geq 16 \; 2x + 5y \geq 32 \quad 0 \leq x \leq 11 \quad 0 \leq y \leq 8 \}$.

La región factible se indica en la figura:

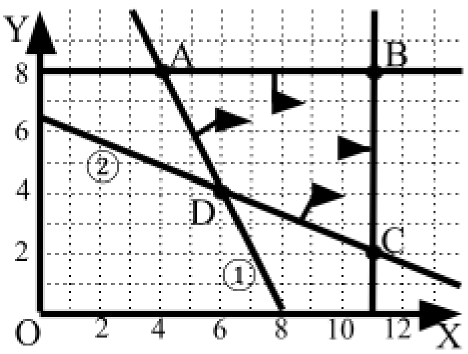
x	8	4
y	0	8

①$\Rightarrow 2x + y \geq 16 \Rightarrow y \geq 16 - 2x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	6	11
y	4	2

②$\Rightarrow 2x + 5y \geq 32 \Rightarrow y \geq \frac{32-2x}{5} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

Los vértices de la zona factible son los siguientes:



$A \Rightarrow \quad y = 8 \; 2x + y = 16 \} \Rightarrow A(4,\ 8).$

$B \Rightarrow x = 11 \;\; y = 8 \} \Rightarrow B(11,\ 8).$

$C \Rightarrow \quad x = 11 \; 2x + 5y = 32 \} \Rightarrow 22 + 5y = 32;\;\; 5y = 10;\;\; y = 2 \Rightarrow C(11,\ 2)$
.

$D \Rightarrow \; 2x + y = 16 \; 2x + 5y = 32 \} \quad -2x - y = -16 \quad 2x + 5y = 32 \} \Rightarrow 4y =$

.

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,\ y) = 4.000x + 1.000y$.

$b)$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(4,\ 8) = 4.000 \cdot 4 + 1.000 \cdot 8 = 16.000 + 8.000 = 24.000.$

$B \Rightarrow f(11,\ 8) = 4.000 \cdot 11 + 1.000 \cdot 8 = 44.000 + 8.000 = 52.000.$

$C \Rightarrow f(11,\ 2) = 4.000 \cdot 11 + 1.000 \cdot 2 = 44.000 + 2.000 = 46.000.$

$D \Rightarrow f(6,\ 4) = 4.000 \cdot 6 + 1.000 \cdot 4 = 24.000 + 4.000 = 28.000.$

El mínimo se produce en el punto $A(4,\ 8)$.

$\underline{El\ coste\ es\ minimo\ utilizando\ 4\ aviones\ tipo\ A\ y\ 8\ del\ tipo\ B}.$

$\underline{El\ coste\ mínimo\ es\ de\ 24.000\ euros}.$

****

6º) Considere la función $f(x) = -x^2 + bx + c$, con b y c números reales:

a) Encuentre b y c de manera que la gráfica de la función pase por el punto $P(-1, 0)$ y tenga un extremo local en el punto de abscisa $x = 3$. Razone de que tipo de extremo relativo se trata.

b) Para el caso de $b = 3$ y $c = 2$, encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función es paralela a la recta $y = 5x - 2$.

----

a)

Por contener al punto $P(-1, 0)$:

$f(-1) = 0 \Rightarrow -(-1)^2 + b\cdot(-1) + c = 0;\ -1 - b + c = 0;\ b - c = -1.$ (1)

$f'(x) = -2x + b.$

Por tener un extremo local para $x = 3$:

$f'(3) = 0 \Rightarrow -2\cdot3 + b = 0;\ -6 + b = 0 \Rightarrow \underline{b = 6}.$

Sustituyendo el valor de b obtenido en la expresión (1):

$6 - c = -1 \Rightarrow \underline{c = 7}.$

b)

Para el caso de $b = 3$ y $c = 2$ la función es $f(x) = -x^2 + 3x + 2$.

La pendiente de la recta $y = 5x - 2$ es $m = 5$.

El valor de la pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

$f'(x) = -2x + 3.$

$m = f'(x) = 5 \Rightarrow -2x + 3 = 5;\ 2x = -2 \Rightarrow x = -1.$

El punto de tangencia es el siguiente:

$f(-1) = -(-1)^2 + 3\cdot(-1) + 2 = -1 - 3 + 2 = -2 \Rightarrow Q(-1, -2).$

$$y - y_0 = m\left(x - x_0\right) \Rightarrow y - (-2) = 5\cdot[x - (-1)];\ \ y + 2 = 5(x + 1);$$

$y + 2 = 5x + 5.$

$$\underline{Recta\ tangente: t \equiv 5x - y + 3 = 0}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE CATALUÑA

SEPTIEMBRE – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1º) Una empresa fabrica dos tipos de helados, G1 y G2. En el proceso de elaboración utiliza dos tipos de ingredientes, A y B. Dispone de 90 kg del ingrediente A y de 150 kg del ingrediente B. Para fabricar una caja de helados del tipo G1, emplea 1 kg del ingrediente A y 2 kg del ingrediente B. Para fabricar una caja de helados del tipo G2, emplea 2 kg de ingrediente A y 1 kg del ingrediente B. Si la caja de helados del tipo G1 se vende a 10 euros y la del tipo G2 se vende a 15 euros, ¿cuántas cajas de helados de cada tipo hay que fabricar para maximizar los ingresos?

Sean x e y el número de kilos de helados de los tipos G1 y G2 que se fabrican, respectivamente.

Del enunciado del ejercicio se deducen las restricciones que se imponen, que se expresan en el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y \leq 90 \\ 2x + y \leq 150 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}.$$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x, y) = 10x + 15y$.

x	0	90
y	45	0

① $\Rightarrow x + 2y \leq 90 \Rightarrow y \leq \frac{90-x}{2} \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si.$

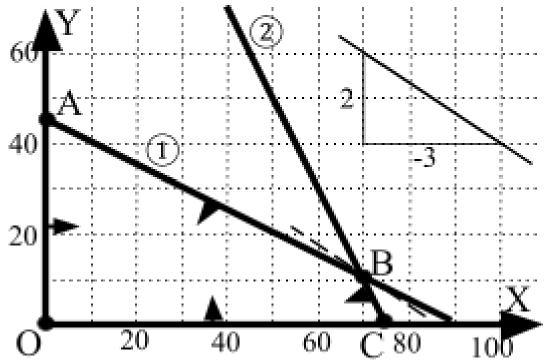
x	30	50
y	90	50

② $\Rightarrow 2x + y \leq 150 \Rightarrow y \leq 150 - 2x \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si.$

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ x + 2y = 90 \end{array} \right\} \Rightarrow A(0,\ 45).$



$B \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y = 90 \\ 2x + y = 150 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} -x - 2y = -90 \\ 4x + 2y = 300 \end{array} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x = 210;\ \ x = 70 \Rightarrow B(70,\ 10).$

$C \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 0 \\ 2x + y = 150 \end{array} \right\} \Rightarrow C(75,\ 0).$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 45) = 10 \cdot 0 + 15 \cdot 45 = 0 + 675 = 675.$

$B \Rightarrow f(70,\ 10) = 10 \cdot 70 + 15 \cdot 10 = 700 + 150 = 850.$

$C \Rightarrow f(75,\ 0) = 10 \cdot 75 + 15 \cdot 0 = 750 + 0 = 750.$

El máximo se produce en el punto $B(70,\ 10)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = 10x + 15y = 0 \Rightarrow y = -\frac{10}{15}x = -\frac{2}{3}x \Rightarrow m = -\frac{2}{3}.$

$\underline{El\ máximo\ beneficio\ se\ produce\ fabricando\ 70\ cajas\ de\ G1\ y\ 10\ de\ G2.}$

$\underline{El\ máximo\ beneficio\ es\ de\ 850\ euros.}$

****

2º) Un gimnasio cobra una cuota de 42 euros mensuales y tiene 2.000 usuarios. Un estudio de mercado afirma que por cada euro que sube (o se baja) la cuota se pierden (o se ganan) 20 usuarios.

a) Expresar el número de usuarios del gimnasio en función de la cuota, teniendo en cuenta que la relación entre las dos variables es lineal. ¿Para qué valor de la cuota el gimnasio se quedaría sin usuarios?

b) Determinar en qué precio hay que fijar la cuota para obtener un beneficio mensual máximo. ¿Cuál sería ese beneficio y cuántos usuarios tendría el gimnasio en este caso?

----

a)

Sean x el número de euros que se sube (o baja) la cuota.

$Ingresos = Número\ usuarios \times valor\ de\ la\ cuota \Rightarrow$

$\Rightarrow 42 \cdot 2.000 = N(x) \cdot (42 + x) \Rightarrow \underline{N(x) = \frac{84.000}{x+42}}.$

$N(x) = 0 \Rightarrow \frac{84.000}{x+42} \neq 0,\ \forall x \in R.$

Para que el número de usuarios sea cero es necesario que el valor de la cuota sea infinito.

$\underline{El\ gimnasio\ nunca\ (en\ teoría)\ se\ queda\ \text{sin}\ sin\ usuarios}.$

b)

Los ingresos que se obtienen en función del valor de la cuota y el número de usuarios son los siguientes:

$$I(x) = (42 + x)(2.000 - 20x) = 84.000 - 840x + 2.000x - 20x^2 =$$

$$= -20x^2 + 1.260x + 84.000.$$

Los ingresos serán máximos cuando se anule su primera derivada:

$I'(x) = -40x + 1.260.$

$I'(x) = 0 \Rightarrow -40x + 1.260 = 0;\ \ -x + 31,5 = 0 \Rightarrow x = 31,5.$

$\underline{Los\ ingresos\ son\ máximos\ con\ una\ cuota\ mensual\ de\ 73,5\ euros}.$

$$I(31,5) = -\ 20 \cdot 31,5^2 + 1.260 \cdot 31,5 + 84.000 =$$

$$= -\ 19.845 + 39.690 + 84.000 = 123.690 - 19.845 = 103.845.$$

$\underline{Los\ ingresos\ máximos\ mensuales\ son\ 103.845\ euros.}$

****

3º) Consideremos la función $f(x)$ tal que su primera derivada es la siguiente: $f'(x) = x^2 + bx - 3$, en donde b es un parámetro real.

a) Determinar el valor de b para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x = -3$ y razone si se trata de un máximo o de un mínimo.

b) Para $b = -8$, se encuentra la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $P(0, 2)$.

----

a)

Por tener un extremo relativo para $x = -3 \Rightarrow f'(-3) = 0$:

$f'(-3) = 0 \Rightarrow (-3)^2 + b\cdot(-3) - 3 = 0;\ \ 9 - 3b - 3 = 0;\ \ 6 - 3b = 0;$

$2 - b = 0 \Rightarrow \underline{b = 2}.$

La condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo es que se anule su primera derivada. Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: según que sea negativa o positiva para los valores que anulan la primera derivada se trata de un máximo o de un mínimo, respectivamente.

$f'(x) = x^2 + 2x - 3 \Rightarrow f''(x) = 2x + 2.$

$f''(-3) = 2\cdot(-3) + 2 = -6 + 2 = -4 < 0.$

$\underline{Para\ x = -3\ la\ función\ f(x)\ tiene\ un\ máximo\ relativo}.$

b)

Para $b = -8$ la función derivada es $f'(x) = x^2 - 8x - 3.$

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$m = f'(0) = -3.$ El punto de tangencia es $P(0, 2)$.

$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = -3\cdot(x - 0) = -3x.$

$\underline{Recta\ tangente: t \equiv 3x + y - 2 = 0}.$

****

4º) Un grupo inversor quiere invertir 6.000 euros en letras, bonos y acciones que tienen una rentabilidad del 10 %, del 8 % y del 4 %, respectivamente. Teniendo en cuenta que quiere obtener una rentabilidad del 7 %.

a) Encuentre la cantidad que debe invertir en letras y en bonos en función de la cantidad invertida en acciones. ¿Qué valores puede tomar la cantidad invertida en acciones sabiendo que las cantidades invertidas en cada uno de los productos deben ser siempre mayores o iguales que cero?

b) En cuanto debe invertir en cada una de las tres opciones si quiere invertir en letras tanto como en los otros dos productos juntos?

----

a)

Sean x, y, z las cantidades que se invierten en letras, bonos y acciones, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$x + y + z = 6.000 \quad 0,1x + 0,08y + 0,04z = 6.000 \cdot 0,07 \}$$

$$x + y + z = 6.000 \quad 5x + 4y + 2z = 21.000 \} \to x = 6.000 - y - z \to x = \frac{21.00}{}$$

$30.000 - 5y - 5z = 21.000 - 4y - 2z;\; 9.000 - y - 3z = 0 \Rightarrow \underline{y = 9.000 - 3z}$

.

$$x = 6.000 - y - z = 6.000 - (9.000 - 3z) - z \Rightarrow \underline{x = 2z - 3.000}.$$

$\underline{La\ posible\ inversión\ en\ acciones\ oscila\ entre\ 0\ y\ 1.500\ euros}.$

En caso de una inversión mayor de 1.500 euros, la inversión en letras (x) sería negativa, en contra de las condiciones impuestas.

b)

Siendo $x = y + z$ el sistema resulta:

$$x + y + z = 6.000 \quad 10x + 8y + 4z = 42.000 \qquad x = y + z \}$$

.

Sumando a la tercera ecuación la primera:

$2x = 6.000 \Rightarrow x = 3.000.$

$$y + z = 3.000 \quad 30.000 + 8y + 4z = 42.000 \} \qquad y + z = 3.000$$

$\Rightarrow y = 0; \;\; z = 3.000.$

<u>$Debe\ invertir\ 3.000\ euros\ en\ letras,\ 0\ en\ bonos\ y\ 3.000\ en\ acciones.$</u>

****

5º) Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$.

$a)$ Compruebe que $A^3 - I = O$, donde I es la matriz identidad de orden 2 y O es la matriz nula de orden 2.

$b)$ Calcule A^{11} utilizando la información del apartado anterior.

$a)$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

$$\underline{\textit{Queda comprobado que } A^3 - I = O}.$$

$b)$

$$A^{11} = A^3 \cdot A^3 \cdot A^3 \cdot A^2 = I \cdot I \cdot I \cdot A^2 = A^2.$$

$$\underline{A^{11} = A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}}.$$

****

6º) El vértice de una parábola es el punto $V(1,\ 2)$.

$a)$ Si la parábola corta el eje de las abscisas por un punto $A\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$, ¿cuál será el otro punto de corte de la parábola con el eje de las abscisas?

$b)$ Encuentre la ecuación de la parábola.

$a)$

Si la parábola tiene por vértice al punto $V(1,\ 2)$ y corta al eje de abscisas tiene que ser, necesariamente cóncava (∩), por lo cual, el coeficiente de x^2 en su expresión general es negativo.

Un una parábola su eje de simetría el la recta vertical que pasa por su vértice; en el caso que nos ocupa, el eje es la recta $x = 1$.

El punto pedido es el simétrico de $A\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$ con respecto a la recta $x = 1$:

$$\underline{B\left(\frac{5}{2},\ 0\right).}$$

$b)$

Existen diversas formas de hallar la ecuación de la parábola, una de ellas es la siguiente.

Sea la ecuación $y = f(x) = ax^2 + bx + c,\ a < 0$.

Como se conocen tres puntos y se tienen tres incógnitas, basta con hacer que se cumpla la función en los tres puntos:

$V(1,\ 2) \Rightarrow f(1) = 2 \Rightarrow a + b + c = 2.$ (1)

$A\left(-\frac{1}{2},\ 0\right) \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + c = 0;\ \frac{a}{4} - \frac{b}{2} + c = 0;$

$a - 2b + 4c = 0.$ (2)

$B\left(\frac{5}{2},\ 0\right) \Rightarrow f\left(\frac{5}{2}\right) = 0 \Rightarrow a \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{5}{2}\right) + c = 0;\ \frac{25a}{4} + \frac{5b}{2} + c = 0;$

$25a + 10b + 4c = 0.$ (3)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1), (2) y (3):

$$a + b + c = 2 \quad a - 2b + 4c = 0 \; 25a + 10b + 4c = 0 \}.$$

Restando la primera ecuación multiplicada por 4 a las otras dos ecuaciones:

$$- 3a - 6b = - 8 \; 21a + 6b = - 8 \} \Rightarrow 18a = - 16; \;\; 9a = - 8 \Rightarrow a = - \frac{8}{9}.$$

$$- 3\cdot\left(- \frac{8}{9}\right) - 6b = - 8; \;\; \frac{8}{3} - 6b = - 8; \;\; 8 - 18b = - 24; \;\; 18b = 32 \Rightarrow b = \frac{16}{9}$$

.

$$- \frac{8}{9} + \frac{16}{9} + c = 2; \;\; - 8 + 16 + 9c = 18; \;\; 9c = 10 \Rightarrow c = \frac{10}{9}.$$

$$\underline{La\ parábola\ es\ y = f(x) = - \frac{8}{9}x^2 + \frac{16}{9}x + \frac{10}{9}.}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

JULIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elegir una opción entre las dos que se proponen a continuación.

OPCIÓN A

1º) Un taller de confección textil produce dos categorías de trajes: de señora y de caballero. Dispone de material para fabricar diariamente 850 trajes de señora y 650 trajes de caballero. Si tiene que fabricar diariamente como máximo 1.000 unidades totales y el beneficio obtenido por cada traje de señora es de 150 euros y de 200 euros por traje de caballero, se pide, justificando las respuestas:

a) ¿Cuántos trajes de cada tipo han de fabricarse diariamente para hacer máximo el beneficio?

b) El valor de dicho beneficio máximo.

----

a)

Sean x e y el número de trajes de señora y de caballero que fabrica el taller diariamente, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes:

$x \leq 850;\ y \leq 650 \quad x + y \leq 1.000 \quad x \geq 0; y \geq 0\ \}$.

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,\ y) = 150x + 200y$.

La región factible se indica en la figura:

x	1.000	0
y	0	1.0000

①$\Rightarrow x + y \leq 1.000 \Rightarrow y \leq 1.000 - x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si$.

Los vértices de la sección factible, además del origen, son los siguientes:

$A \Rightarrow \quad x = 0 \ \ y = 650\ \} \Rightarrow A(0,\ 650)$.

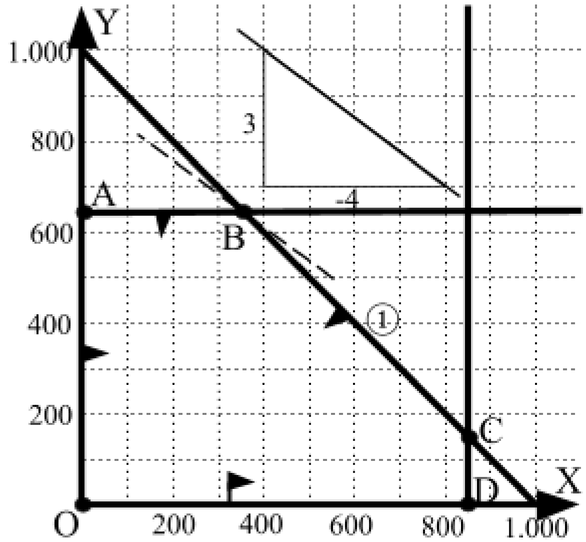
$B \Rightarrow x + y = 1.000 \quad y = 650\ \} \Rightarrow B(350,\ 650)$.

$C \Rightarrow x + y = 1.000 \quad x = 850\ \} \Rightarrow C(850,\ 150)$.

$D \Rightarrow x = 850 \quad y = 0 \} \Rightarrow D(850,\ 0)$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 650) =$



$= 150 \cdot 0 + 200 \cdot 650 = 0 + 130.000 =$

$= 130.000.$

$B \Rightarrow f(350,\ 650) =$

$= 150 \cdot 350 + 200 \cdot 650 =$

$= 52.500 + 130.000 = 182.500.$

$C \Rightarrow f(850,\ 150) = 150 \cdot 850 + 200 \cdot 150 = 127.500 + 30.000 = 157.500$
.

$D \Rightarrow f(850,\ 0) = 150 \cdot 850 + 200 \cdot 0 = 127.500 + 0 = 127.500.$

El máximo se produce en el punto B.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = 150x + 200y = 0 \Rightarrow y = -\frac{150}{200}x = -\frac{3}{4} \Rightarrow m = -\frac{3}{4}.$

$\underline{El\ máximo\ beneficio:\ haciendo\ 350\ trajes\ de\ mujer\ y\ 650\ de\ hombre}.$

$b)$

$\underline{El\ máximo\ beneficio\ que\ se\ obtiene\ es\ de\ 182.500\ euros}.$

****

2º) El estudio en un laboratorio del tratamiento con antibióticos frente a una bacteria patógena durante 7 días, se ha encontrado que el número de bacterias vivas (en miles) a lo largo de estos 7 días ha variado según la función $B(t) = -t^3 + 12t^2 - 36t + 80$, $1 \leq t \leq 7$, siendo B el número de bacterias vivas (en miles) y t el días de realización del estudio. Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar los días del estudio en los que se ha observado el número máximo y mínimo de bacterias vivas.

b) Hallar los valores de dichos valores máximo y mínimo.

c) Representar de forma aproximada la función $B(t)$ a lo largo de los 7 días del estudio.

----

a)

$$B(1) = -1^3 + 12 \cdot 1^2 - 36 \cdot 1 + 80 = -1 + 12 - 36 + 80 = 55.$$

$$B(7) = -7^3 + 12 \cdot 7^2 - 36 \cdot 7 + 80 = -343 + 588 - 252 + 80 =$$

$$= 668 - 595 = 73.$$

Para que una función polinómica tenga un máximo o un mínimo relativos es necesario que se anule su primera derivada.

$$B'(t) = -3t^2 + 24t - 36.$$

$$B'(t) = 0 \Rightarrow -3t^2 + 24t - 36 = 0;\ t^2 - 8t + 12 = 0;\ t = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{2} =$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} = 4 \pm 2 \Rightarrow t_1 = 2,\ t_2 = 6.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan la primera derivada se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$$B''(t) = -6t + 24.$$

$$B''(2) = -6 \cdot 2 + 24 = -12 + 24 = 12 > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ t = 2.$$

$$\underline{El\ mínimo\ se\ produce\ el\ día\ dos}.$$

$$B''(6) = -6 \cdot 6 + 24 = -36 + 24 = -12 < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ t = 6.$$

$\underline{El\ máximo\ se\ produce\ el\ día\ seis}.$

$b)$

$$B(2) = -\ 2^3 + 12 \cdot 2^2 - 36 \cdot 2 + 80 = -\ 8 + 48 - 72 + 80 = 48.$$

$$\underline{El\ mínimo\ es\ 48.000\ bacterias}.$$

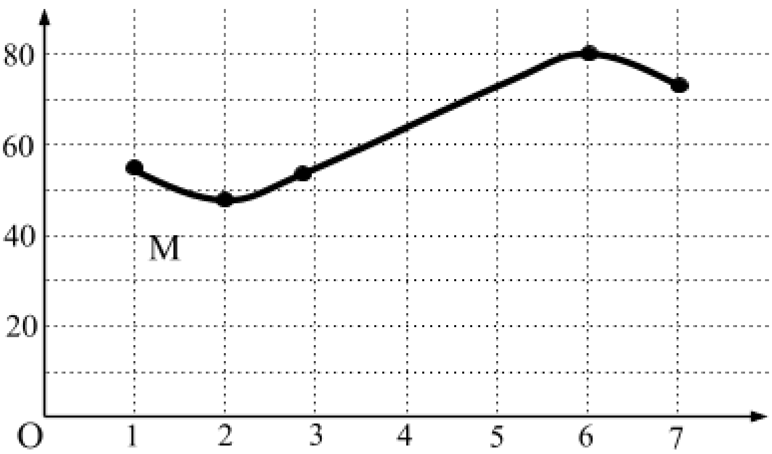
$$B(6) = -\ 6^3 + 12 \cdot 6^2 - 36 \cdot 6 + 80 = -\ 216 + 432 - 216 + 80 =$$

$= 512 - 432 = 80.$

$$\underline{El\ máximo\ es\ 80.000\ bacterias}.$$

$c)$

Con los datos de los apartados anteriores puede hacerse una representación gráfica, aproximada, de la función, que es la siguiente:



****

3º) Para realizar el control de calidad en la fabricación de protectores de pantallas de dispositivos móviles se utiliza el intervalo de confianza al 99 % del grosor de los mismos. Se sabe que la distribución del grosor es una normal de desviación típica conocida de 0,1 mm. Una empresa quiere crear su intervalo de confianza y muestra diez protectores con los siguientes grosores (en mm):

0,50 0,43 0,37 0,27 0,60 0,32 0,31 0,27 0,40 0,36

a) Calcular el intervalo de confianza al 99 % del grosor medio de los protectores.

b) Para que el intervalo de confianza sea útil, su longitud debe ser 0,1. ¿Cuántos protectores necesita muestrear la empresa para obtener esa precisión?
Justificar las respuestas.

----

a)

$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 1 - 0,99 = 0,01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,005} = 2,575.$$

$$(1 - 0,005 = 0,9950 \rightarrow z = 2,575).$$

$$\overline{x} = \frac{0,50+0,43+0,37+0,27+0,60+0,32+0,31+0,27+0,40+0,36}{10} = \frac{3,83}{8} = 0,383.$$

Datos: $\overline{x} = 0,383;\ \ n = 10;\ \ \sigma = 0,1;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,575.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(0,383 - 2'575 \cdot \frac{0,1}{\sqrt{10}};\ 0,383 + 2'575 \cdot \frac{0,1}{\sqrt{10}}\right);$$

$$\left(0,383 - 2'575 \cdot 0,0316;\ 0,383 + 2'575 \cdot 0,0316\right);$$

$$(0,383 - 0,0814;\ 0,383 + 0,0814).$$

$$\underline{I.\ C._{99\ \%}\ (0,3016;\ 0,4644).}$$

b)

Datos: $\sigma = 0,1;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,575;\ \ E = \frac{0,1}{2} = 0,05.$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2,575 \cdot 0,1}{0,05}\right)^2 = 5,15^2 = 26,52.$$

El tamaño de la muestra debe ser de al menos 27 protectores de pantalla.

****

OPCIÓN B

1º) Dadas las matrices $A = (-\ 1\ 2\ 1\ 2\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ ),\ B = (1\ \ -\ 1\ 2\ 3\ 0\ 1\ 4\ \ -\ 1\ 3\ ),\ I = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ )$
:

a) Determinar si existen las matrices inversas de A y B. En caso afirmativo, calcularlas.

b) Resolver la ecuación matricial $A\cdot X\ +\ B\ =\ I$.
Justificar las respuestas.

----

a)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$|A| = |-\ 1\ 2\ 1\ 2\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ | =-\ 1 \neq 0.$

$|B| = |1\ \ -\ 1\ 2\ 3\ 0\ 1\ 4\ \ -\ 1\ 3\ | =-\ 6\ -\ 4\ +\ 1\ +\ 9\ =\ 0.$

$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ y\ la\ matriz\ B\ no\ es\ invertible}.$

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow (0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ ) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 -\ 2F_1\ F_3 \rightarrow F_3 + F_1\} \Rightarrow (0\ 0\ 1\ 0\ 1\ \ -\ 2\ 1\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 -\ 2F_2\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (0\ 0\ 1\ 0\ 1\ \ -\ 2\ 1\ \ -\ 2\ 5\ ) \Rightarrow \underline{A^{-1}\ = (0\ 0\ 1\ 0\ 1\ \ -\ 2\ 1\ \ -\ 2\ 5\ )}.$

b)

$A\cdot X\ +\ B\ =\ I;\ \ A\cdot X\ =\ I\ -\ B;\ \ A^{-1}\cdot A\cdot X\ =\ A^{-1}\cdot(I\ -\ B);$

$I\cdot X\ =\ A^{-1}\cdot(I\ -\ B) \Rightarrow \underline{X\ =\ A^{-1}\cdot(I\ -\ B)}.$

$X\ =\ A^{-1}\cdot(I\ -\ B) = (0\ 0\ 1\ 0\ 1\ \ -\ 2\ 1\ \ -\ 2\ 5\ )\cdot[(1\ \ -\ 1\ 2\ 3\ 0\ 1\ 4\ \ -\ 1\ 3\ ) - (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0$

$= (0\ 0\ 1\ 0\ 1\ \ -\ 2\ 1\ \ -\ 2\ 5\ )\cdot(0\ \ -\ 1\ 2\ 3\ \ -\ 1\ 1\ 4\ \ -\ 1\ 2\ ) = (4\ \ -\ 1\ 2\ \ -\ 5\ 1\ \ -\ 3\ 14\ \ -$
.

$\underline{X\ =\ (4\ \ -\ 1\ 2\ \ -\ 5\ 1\ \ -\ 3\ 14\ \ -\ 4\ 10\ )}.$

****

2º) La demanda de un producto en función de su precio viene dada por la expresión: $D(x) = \{Ax - x^2 \ si \ 20 \le x \le 30 \ 600 - Bx \ si \ 30 < x \le 60$, donde D denota la demanda en unidades y x el precio en euros. Se sabe que la demanda para $x = 30$ es de 300 unidades y que la función es continua.

a) Determinar las constantes A y B. Justificar la respuesta.

b) Representar gráficamente la demanda en función de x.

c) Comprobar si la función $D(x)/(x - 25)$ tiene alguna asíntota. Encontrarla en caso afirmativo. Justificar la respuesta.

----

a)

$$D(30) = A \cdot 30 - 30^2 = 300; \ 30A = 300 + 900 = 1.200 \Rightarrow \underline{A = 40}.$$

Para que la función $D(x)$ sea continua en $x = 30$ es necesario que sus límites laterales en ese punto sean iguales e iguales al valor de la función.

$D(x) = \left(40x - x^2\right) = 1.200 - 900 = 300 = f(30)$ $D(x) = (600 - B \cdot 30) = 600 -$

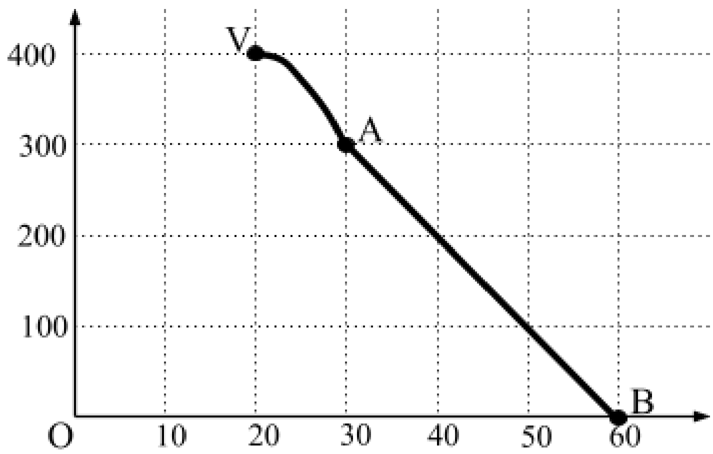
$\Rightarrow 300 = 600 - 30B; \ 30B = 300 \Rightarrow \underline{B = 10}.$

b)

La función resulta $D(x) = \{40x - x^2 \ si \ 20 \le x \le 30 \ 600 - 10x \ si \ 30 < x \le 60$.

$$D(20) = 40 \cdot 20 - 20^2 = 800 - 400 = 400 \Rightarrow A(20, 400).$$

$$D(60) = 600 - 10 \cdot 60 = 600 - 600 = 0 \Rightarrow B(60, 0).$$



La representación gráfica, aproximada, de la función es la indicada en la figura.

$c)$

La función a considerar es: $f(x) = \frac{D(x)}{x-25} = \{\frac{40-x^2}{x-25} \ si \ 20 \leq x \leq 30 \ \frac{600-10x}{x-25} \ si \ 30 < x \leq 60$, que tiene como asíntota vertical a la recta $x = 25$ en el intervalo $[20, 30]$ al que pertenece.

En el intervalo $[20, 30]$ tiene una asíntota oblicua por tener el numerador un grado más que el denominador.

Las asíntotas oblicuas son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$m = \frac{f(x)}{x}$ y $n = [f(x) - mx]$, con m finito y $m \neq 0$.

$$m = \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{40-x^2}{x-25}}{x} = \frac{40-x^2}{x^2-25x} =- 1.$$

$$n = [f(x) - mx] = \left(\frac{40-x^2}{x-25} + 1 \cdot x\right) = \frac{40-x^2+x^2-25x}{x-25} =- 25.$$

$$\underline{Asíntota\ oblicua:\ y =- x - 25}.$$

En el intervalo $[30, 60]$ tiene una asíntota horizontal por tener el numerador el mismo grado que el denominador.

$$f(x) = \frac{600-10x}{x-25} =- 10.$$

$$\underline{Asíntota\ horizontal:\ y =- 10}.$$

****

3º) Una región de bosques está dividida en tres zonas A, B y C. Para el próximo verano la probabilidad de incendio en cada zona es de 0,1; 0,2 y 0,05 respectivamente. En cada zona sólo puede producirse, como máximo, un incendio. Si consideramos que los incendios se producen de forma independiente entre las zonas:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya ningún incendio?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente dos incendios?

c) Si se sabe que ha habido un incendio, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido en la zona A?

Justificar las respuestas.

La probabilidad de que no haya incendios en las zonas A, B y C es 0,9; 0,8 y 0,95 respectivamente.

a)

$$P = 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,95 = \underline{0,684}.$$

b)

$$P = P(\overline{A},\ \overline{B},\ C) + P(\overline{A},\ B,\ \overline{C}) + P(A,\ \overline{B},\ \overline{C}) =$$

$$= 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,05 + 0,9 \cdot 0,2 \cdot 0,95 + 0,1 \cdot 0,8 \cdot 0,95 = 0,036 + 0,171 + 0,076 =$$

$$= \underline{0,283}.$$

c)

$$P(A/I) = \frac{P(A \cap I)}{P(I)} = \frac{P(A)}{P(A)+P(B)+P(C)} = \frac{0,1}{0,1+0,2+0,05} = \frac{0,1}{0,35} = \underline{0,2857}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elegir una opción entre las dos que se proponen.

OPCIÓN A

1º) Una industria de productos lácteos produce crema de queso de oveja en envases de dos tamaños: pequeño de 100 gramos con un beneficio por envase de 0,50 euros y grande de 300 gramos con un beneficio por envase de 1,40 euros. Cada día dispone de 2.400 kilogramos de crema de queso para envasar. Por razones de mercado el número de envases de 100 gramos producidos diariamente no puede ser mayor de 15.000 y debe ser igual o superior al de envases de 300 gramos. Se pide, justificando las respuestas:

a) ¿Cuántos envases de cada tipo han de producirse diariamente para hacer máximos los beneficios?

b) ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos?

----

a)

Sean x e y el número de envases de 100 gramos y de 300 gramos que se producen, respectivamente.

Las condiciones del ejercicio se establecen en el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{llll} 0,1x + 0,3y \leq 2.400 & x \leq 15.000 & x \geq y & x \geq 0,\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

.

La función de rendimiento es $f(x,\ y) = 0,5x + 1,4y$.

x	0	24.000
y	8.000	0

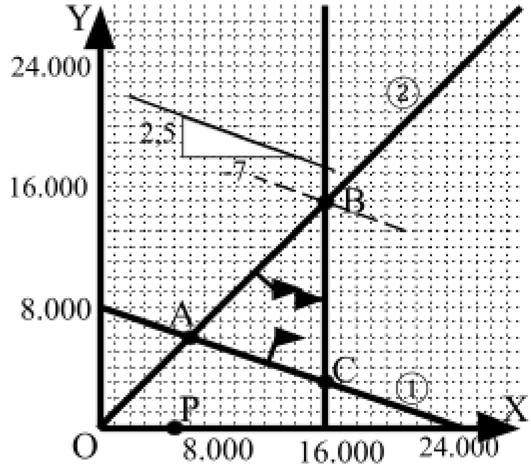
$①\Rightarrow x + 3y \leq 24.000 \Rightarrow y \leq \frac{24.000 - x}{3} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	0	24.000
y	0	24.000

$②\Rightarrow y \leq x \Rightarrow P(5.000,\ 0) \rightarrow Si.$

La región factible es la zona sombreada de la figura adjunta.

Los vértices de la zona factible son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + 3y = 24.000 \\ x = y \end{array}\right\} \Rightarrow A(6.000,\ 6.000).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 15.000 \\ y = x \end{array}\right\} \Rightarrow B(15.000,\ 15.000).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 15.000 \\ x + 3y = 24.000 \end{array}\right\} \Rightarrow C(15.000,\ 3.000).$

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(6.000,\ 6.000) = 0,5 \cdot 6.000 + 1,4 \cdot 6.000 =$

$= 3.000 + 8.400 = 11.400.$

$B \Rightarrow f(15.000,\ 15.000) = 0,5 \cdot 15.000 + 1,4 \cdot 15.000 =$

$= 7.500 + 21.000 = 28.500.$

$C \Rightarrow f(15.000,\ 3.000) = 0,5 \cdot 15.000 + 1,4 \cdot 3.000 =$

$= 7.500 + 4.400 = 11.900.$

El máximo se produce en el punto B.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = 0,5x + 1,4y = 0 \Rightarrow y = -\frac{0,5}{1,4}x = -\frac{5}{14}x = -\frac{2,5}{7} \Rightarrow m = -\frac{2,5}{7}.$

$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ fabricando\ 15.000\ envases\ de\ cada\ clase}.$

$b)$

$\underline{El\ benefico\ máximo\ es\ de\ 28.500\ euros}.$

****

2º) El número de visitantes al Museo Nacional de Arte Romano de Mérida en horario de mañana viene dado por la función $V(t) = A - 2.310t + Bt^2 - 10t^3$, $8 \leq t \leq 13$, donde $V(t)$ denota el número de visitantes y t la hora (desde las 8 hasta las 13). Se sabe que el número máximo de visitantes se alcanza para $t = 11$ horas y que a las 12 horas el número de visitantes es 480. Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar los valores de las constantes A y B.

b) Encontrar el número máximo de visitantes.

c) Determinar si la función $\frac{V(t)}{t-10}$ tiene alguna asíntota. En caso afirmativo, determinarla.

----

a)

$$V(12) = 480 \Rightarrow A - 2.310 \cdot 12 + B \cdot 12^2 - 10 \cdot 12^3 = 480;$$

$A - 27.720 + 144B - 17.280 = 480;\ \ A + 144B = 45.480.$ (*)

Para que una función tenga un máximo es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$V'(t) = -2.310 + 2Bt - 30t^2.$$

$V'(11) = 0 \Rightarrow -2.310 + 2B \cdot 11 - 30 \cdot 11^2 = 0;\ \ 22B = 2.310 + 3.630 =$

$= 5.940;\ \ B = \frac{5.940}{22} = 270.$

Sustituyendo en (*) el valor obtenido de B:

$A + 144B = 45.480 \Rightarrow A = 45.480 - 144 \cdot 270 = 45.480 - 38.880 =$

$= 6.600.$

$\underline{Solución: A = 6.600 \ y \ B = 270}.$

b)

$$V(11) = 6.600 - 2.310 \cdot 11 + 270 \cdot 11^2 - 10 \cdot 11^3 =$$

$= 110 \cdot (60 - 231 + 297 - 121) = 110 \cdot 5 = 550.$

$\underline{El\ máximo\ número\ de\ visitantes\ fue\ de\ 550}.$

$c)$

$$\frac{V(t)}{t-10}=\frac{6.600-2.310t+270t^2-10t^3}{t-10}.$$

No tiene asíntotas horizontales por ser $\frac{V(t)}{t-10}=-\infty$.

Tampoco tiene asíntotas oblicuas; para que una función racional tenga asíntotas oblicuas es necesario que el numerador tenga un grado más que el denominador.

Solamente tiene asíntota vertical: $t-10=0 \Rightarrow t=10$.

$$\underline{La\ recta\ t=10\ es\ asíntota\ vertical.}$$

****

3º) En la exposición de la Facultad de Ciencias "Original o Réplica" hay 42 fósiles, 28 rocas y 36 metales. Se sabe que, de ellos, son originales 6 fósiles, 14 rocas y 20 metales.

a) Si escogemos al azar una pieza de la exposición, ¿cuál es la probabilidad de que sea un metal original?

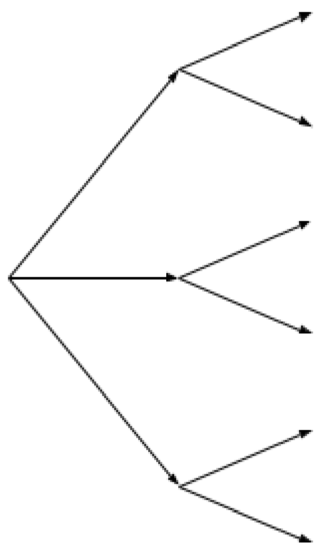
b) Si escogemos al azar una pieza de la exposición, ¿cuál es la probabilidad de que sea réplica?

c) Si escogemos al azar una pieza de la exposición y es una réplica, ¿cuál es la probabilidad de que sea un fósil?

Justificar las respuestas.

$42 + 28 + 36 = 106.$

$P(F) = \frac{42}{106} = \frac{21}{53}.$ $\qquad P(R) = \frac{28}{106} = \frac{14}{53}.$ $\qquad P(M) = \frac{36}{106} = \frac{18}{53}.$



a)

$$P = (M/O) = P(M) \cdot P(O/M) = \frac{18}{53} \cdot \frac{5}{9} = \underline{\frac{10}{53} = 0,1887}.$$

b)

$$P = P(\overline{O}) = P(F) \cdot P(\overline{O}/F) + P(R) \cdot P(\overline{O}/R) + P(M) \cdot P(\overline{O}/M) =$$

$$= \frac{21}{53} \cdot \frac{6}{7} + \frac{14}{53} \cdot \frac{1}{2} + \frac{18}{53} \cdot \frac{4}{9} = \frac{18}{53} + \frac{7}{53} + \frac{8}{53} = \underline{\frac{33}{53} = 0,6226}.$$

$c)$

$$P = P(F/\overline{O}) = \frac{P(F\cap\overline{O})}{P(\overline{O})} = \frac{P(F)\cdot P(\overline{O}/F)}{P(F)\cdot P(\overline{O}/F)+P(R)\cdot P(\overline{O}/R)+P(M)\cdot P(\overline{O}/M)} =$$

$$= \frac{\frac{21}{53}\cdot\frac{6}{7}}{\frac{21}{53}\cdot\frac{6}{7}+\frac{14}{53}\cdot\frac{1}{2}+\frac{18}{53}\cdot\frac{4}{9}} = \frac{\frac{18}{53}}{\frac{18}{53}+\frac{7}{53}+\frac{8}{53}} = \frac{18}{18+7+8} = \frac{18}{33} = \underline{\frac{6}{11} = 0,5455.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Sean las matrices $A = (2\ 1\ 3\ 2\ )$ y $B = (3\ \ -\ 2\ 1\ \ -\ 1\ )$. Se pide, justificando las respuestas:

$a)$ Hallar las matrices inversas de A y de B.

$b)$ Comprobar que $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

$c)$ Hallar la matriz X que verifique $A \cdot X = B$.

$a)$

$|A| = |2\ 1\ 3\ 2\ | = 4 - 3 = 1.\ A^t = (2\ 3\ 1\ 2\ ).$

$Adj.\ de\ A^t = (2\ \ -\ 1\ \ -\ 3\ 2\ ).$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{(2\ -1\ -3\ 2\ )}{1} \Rightarrow \underline{A^{-1} = (2\ \ -\ 1\ \ -\ 3\ 2\ )}.$$

$$(B/I) = (1\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_1 \leftrightarrow F_3\right\} \Rightarrow (0\ 1\ 1\ 0\ ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow F_2 - 3F_1\right\} \Rightarrow (0\ 1\ 1\ \ -\ 3\ ) \Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow F_1 + F_2\right\} \Rightarrow (1\ \ -\ 2\ 1\ \ -\ 3\ ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{B^{-1} = (1\ \ -\ 2\ 1\ \ -\ 3\ )}.$$

$b)$

$A \cdot B = (2\ 1\ 3\ 2\ ) \cdot (3\ \ -\ 2\ 1\ \ -\ 1\ ) = (7\ \ -\ 5\ 11\ \ -\ 8\ ).$

$|A \cdot B| = |7\ \ -\ 5\ 11\ \ -\ 8\ | =- 56 + 55 =- 1.$

$(A \cdot B)^t = (7\ 11\ \ -\ 5\ \ -\ 8\ ).$

$Adj.\ de\ (A \cdot B)^t = (-\ 8\ 5\ \ -\ 11\ 7\ ).$

$$(A \cdot B)^{-1} = \frac{Adj.\ de\ (A \cdot B)^t}{|A \cdot B|} = \frac{(-8\ 5\ -11\ 7\ )}{-1} \Rightarrow (A \cdot B)^{-1} = (8\ \ -\ 5\ 11\ \ -\ 7\ ).$$

$$B^{-1} \cdot A^{-1} = (1\ \ -\ 2\ 1\ \ -\ 3\ ) \cdot (2\ \ -\ 1\ \ -\ 3\ 2\ ) = (8\ \ -\ 5\ 11\ \ -\ 7\ )$$

$$\underline{Queda\ comprobado\ que\ (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}}.$$

$c)$

$$A \cdot X = B;\ \ A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B;\ \ I \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot B}.$$

$$X = A^{-1} \cdot B = (2 \ \ - 1 \ \ - 3\ 2) \cdot (3 \ \ - 2\ 1 \ \ - 1) = (5 \ \ - 3 \ \ - 7\ 4).$$

$$\underline{X = (5 \ \ - 3 \ \ - 7\ 4)}.$$

****

2º) El número de empleados de una factoría de fabricación de automóviles varía a lo largo del año de acuerdo con la función: $N(t) = t^3 - 21t^2 + 99t + 1.000,\ 1 \leq t \leq 12$. Siendo $N(t)$ el número de empleados y t los distintos meses del año. Se pide, justificando las respuestas:

$a)$ ¿A qué meses del año se producen el máximo y el mínimo de empleados?

$b)$ Halla los valores de dichos máximo y mínimo.

$c)$ Representa de forma aproximada la función $N(t)$ en dicho periodo.

$a)$

Para que una función tenga un máximo o un mínimo relativos es condición necesaria que se anule su primera derivada.

$$N'(t) = 3t^2 - 42t + 99.$$

$$N'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 42t + 99 = 0;\ \ t^2 - 14t + 33 = 0;\ \ t = \frac{14 \pm \sqrt{196-132}}{2} =$$

$$= \frac{14 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{14 \pm 8}{2} = 7 \pm 4 \Rightarrow t_1 = 3,\ t_2 = 11.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para los valores que anulan la primera se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo:

$$N''(t) = 6t - 42.$$

$$N''(3) = 6 \cdot 3 - 42 = 18 - 42 = -24 < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ t = 3.$$

$$N''(11) = 6 \cdot 11 - 42 = 66 - 42 = 24 > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ t = 11.$$

$\underline{El\ máximo\ de\ empleados\ se\ produce\ el\ tercer\ mes\ y\ el\ mínimo\ en\ el\ once}.$

$b)$

$$N(3) = 3^3 - 21 \cdot 3^2 + 99 \cdot 3 + 1.000 = 27 - 189 + 297 + 1.000 =$$

$$= 1.324 - 189 = 1.135.$$

$$N(11) = 11^3 - 21 \cdot 11^2 + 99 \cdot 11 + 1.000 =$$

$= 1.331 - 2.541 + 1.089 + 1.000 = 3.420 - 2.541 = 879.$

$\underline{El\ número\ máximo\ de\ trabajadores\ es\ 1.135\ y\ el\ mínimo,\ 879.}$

$c)$

Son puntos de la gráfica el máximo $P(3,\ 1135)$ y el mínimo $Q(11,\ 879)$.

$N(1) = 1^3 - 21 \cdot 1^2 + 99 \cdot 1 + 1.000 = 1 - 21 + 99 + 1.000 =$

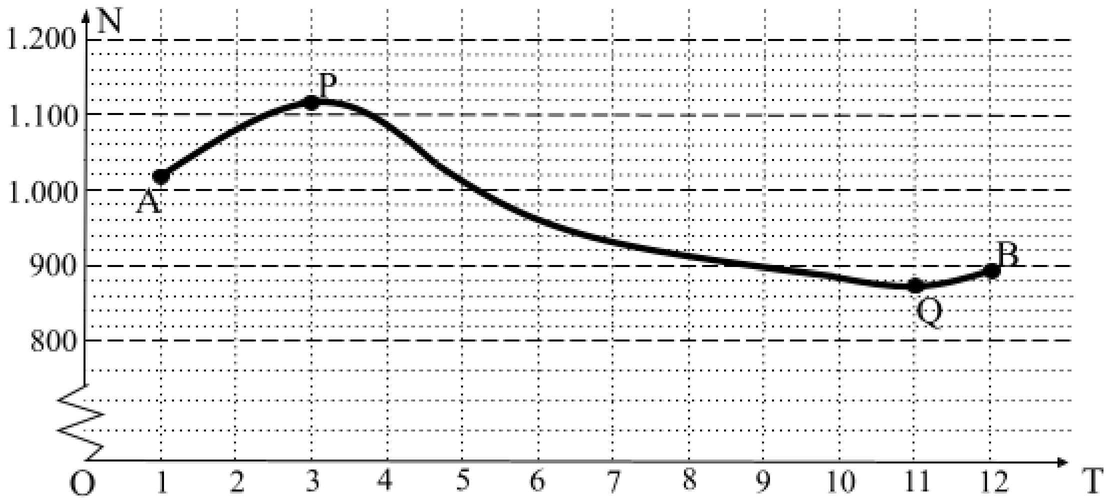
$= 79 + 1.000 = 1.079.$

$N(12) = 12^3 - 21 \cdot 12^2 + 99 \cdot 12 + 1.000 =$

$= 1.728 - 3.024 + 1.188 + 1.000 = 3.916 - 3.024 = 892.$

Otros puntos de la función son $A(1,\ 1079)$ y $B(12,\ 892)$.

La representación gráfica, aproximada, de la función es la que aparece en la gráfica siguiente.



****

3º) Una empresa de franquicias ha observado que durante el último año los beneficios han disminuido. Sospecha que hay mala gestión de las tiendas. Realizan un estudio para comprobarlo y de 95 tiendas muestreadas, 28 de ellas tienen mala gestión.

a) Calcular el intervalo de confianza al 95 % de la proporción de tiendas gestionadas.

b) Si la empresa, quiere que la longitud del intervalo sea 0,1, ¿cuántas tiendas debería muestrear?

----

a)

Nivel de confianza del 95 %.

$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$

$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$

Datos: $n = 95;\ p = \frac{28}{95};\ \ q = 1 - \frac{28}{95} = \frac{67}{95};\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q $y\ n$, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}},\ p + z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}\right).$

$$\left(\frac{28}{95} - 1,96\cdot\sqrt{\frac{\frac{28}{95}\cdot\frac{67}{95}}{95}};\ \frac{5}{9} + 1,96\cdot\sqrt{\frac{\frac{28}{95}\cdot\frac{67}{95}}{95}}\right);$$

$\left(\frac{28}{95} - 1,96\cdot 0,0468;\ \frac{28}{95} + 1,96\cdot 0,0468\right);\ \ (0,2947 - 0,0917;\ 0,2947 + 0,0917)$.

$$\underline{I.\ C._{95\ \%} = \left(0'2030;\ 0'3864\right).}$$

b)

$\sigma = \sqrt{\frac{p\cdot q}{n}} = \sqrt{\frac{\frac{28}{95}\cdot\frac{67}{95}}{95}} = 0,0468.$ $\qquad E = \frac{0,1}{2} = 0,05.$

Datos: $\sigma = 0,0468;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96;\ \ E = 0,05.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\ \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1,96\cdot\frac{0,0468}{0,05}\right)^2 =$

$= (1,96\cdot 0,936)^2 = 1,8346^2 = 3,37.$

$\underline{Debería\ muestrear\ como\ mínimo\ 4\ tiendas}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE GALICIA

JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno debe responder solamente a los ejercicios de una de las opciones.

OPCIÓN A

1º) Consideremos las matrices $A = (3\ 1\ 0\ 0\ 3\ 1\ 1\ 1\ 2\ )$, $B = (2\ 0\ \ -\ 1\ 2\ 3\ 2\ 0\ 2\ 2\ )$, $C = (-\ 2\ 3\ 1\ \ -\ 1\ )$.

$a)$ Calcula los valores de x e y para los que satisface la igualdad $C\cdot(x\ \ -\ y\ ) = (1\ x\ y\ \ -\ 1\ )\cdot(-\ 1\ 1\ )$.

$b)$ Determina el rango de las matrices A y B.

$c)$ Calcula X en la ecuación matricial $X + A^t = 2I + B$, A^t matriz traspuesta de A e I matriz identidad de orden 3.

$a)$

$C\cdot(x\ \ -\ y\ ) = (1\ x\ y\ \ -\ 1\ )\cdot(-\ 1\ 1\ );\ \ (-\ 2\ 3\ 1\ \ -\ 1\ )\cdot(x\ \ -\ y\ ) = (-\ 1\ +\ x\ \ -\ y$

$(-\ 2x\ -\ 3y\ x\ +\ y\ ) = (-\ 1\ +\ x\ \ -\ y\ -\ 1\ ) \Rightarrow\ \ -\ 2x\ -\ 3y\ =-\ 1\ +\ x\ x\ +\ y\ =-\ y$

$-\ 3x\ -\ 3y\ =-\ 1\ \ \ 3x\ +\ 6y\ =-\ 3\ \}\Rightarrow 3y\ =-\ 4;\ \ y\ =-\ \frac{3}{4};\ \ x\ =-\ 1\ -\ 2y\ =-\ 1\ +\ \frac{8}{3}$

.

$$\underline{x\ =\ \frac{5}{3},\ y\ =-\ \frac{4}{3}}.$$

$b)$

$|A| = |3\ 1\ 0\ 0\ 3\ 1\ 1\ 1\ 2\ | = 18\ +\ 1\ -\ 3\ =\ 16 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rang\ A\ =\ 3}.$

$|B| = |2\ 0\ \ -\ 1\ 2\ 3\ 2\ 0\ 2\ 2\ | = 12\ -\ 4\ -\ 8\ =\ 0;\ |2\ 0\ 2\ 3\ | \neq 0 \Rightarrow \underline{Rang\ B\ =\ 2}.$

$c)$

$X\ +\ A^t\ =\ 2I\ +\ B;\ \ X\ =\ 2I\ +\ B\ -\ A^t\ =\ M\ =$

$= (2\ 0\ 0\ 0\ 2\ 0\ 0\ 0\ 2) + (2\ 0\ \ -\ 1\ 2\ 3\ 2\ 0\ 2\ 2) - (3\ 0\ 1\ 1\ 3\ 1\ 0\ 1\ 2) = (1\ 0\ \ -\ 2\ 1\ 2\ 1\ 0\ 1$

.

$$\underline{X = (1\ 0\ \ -\ 2\ 1\ 2\ 1\ 0\ 1\ 2)}.$$

****

2º) El número de unidades en miles vendidas por una empresa del sector editorial durante su primer año de existencia se ha estimado por la función:

$$V(t) = \{ \ 12t - t^2 \ \ si \ \ 0 \le t \le 7 \ t^2 - 18t + 112 \ \ si \ \ 7 < t \le 12$$

donde t es el tiempo trascurrido en meses desde la creación de la empresa.

a) En los primeros siete meses, calcula las ventas máximas y el mes en el que se han alcanzado. Justifica si éstas han sido las máximas ventas alcanzadas por la empresa en ese año. Representa la gráfica de $V(t)$.

b) A partir del séptimo mes, ¿en qué periodo el número de ventas fue menor o igual a 32.000 unidades?

----

a)

Para $t \le 7$ es $V'(t) = 12 - 2t$.

Una función polinómica tiene un máximo relativo cuando se anula su primera derivada y es positiva la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$V'(t) = 0 \Rightarrow 12 - 2t = 0; \ \ 6 - t = 0 \Rightarrow t = 6.$$

$$V(6) = 12 \cdot 6 - 6^2 = 72 - 36 = 36.$$

$\underline{En \ el \ intervalo \ [0, \ 7] \ las \ máximas \ ventas \ fueron \ el \ 6º \ mes: \ 36.000 \ unidades}$

.

Para la representación gráfica de la función se tiene en cuenta que en el intervalo $[0, \ 7]$ la función es una parábola cóncava $(\cap)$ que corta al eje X en los puntos $O(0, \ 0)$ y $M(12, \ 0)$; su vértice es el punto $V_1(6, \ 36)$ y su eje de simetría es la recta $x = 6$. En el intervalo $(7, \ 12]$ la función es una parábola $g(t)$ convexa $(\cup)$ cuyo vértice y eje de simetría son los siguientes:

$$g(t) = t^2 - 18t + 112. \qquad g'(t) = 2t - 18.$$

$$g'(t) = 0 \Rightarrow 2t - 18 = 0; \ \ t - 9 = 0 \Rightarrow t = 9.$$

$$g(9) = 9^2 - 18 \cdot 9 + 112 = 81 - 162 + 112 = 31 \Rightarrow V_2(9, \ 31).$$

El eje de simetría es la recta $x = 9$.

$Para \ t = 7: V(t) \ = \left(12t - t^2\right) = 12 \cdot 7 - 7^2 = 84 - 49 = 35 = f(7) \ \ V(t) \ = \left(t^2 - 1\right.$

$\Rightarrow V(t) \; = V(t) \; = f(7)$.

Lo anterior indica que la función $V(t)$ es continua en su dominio.

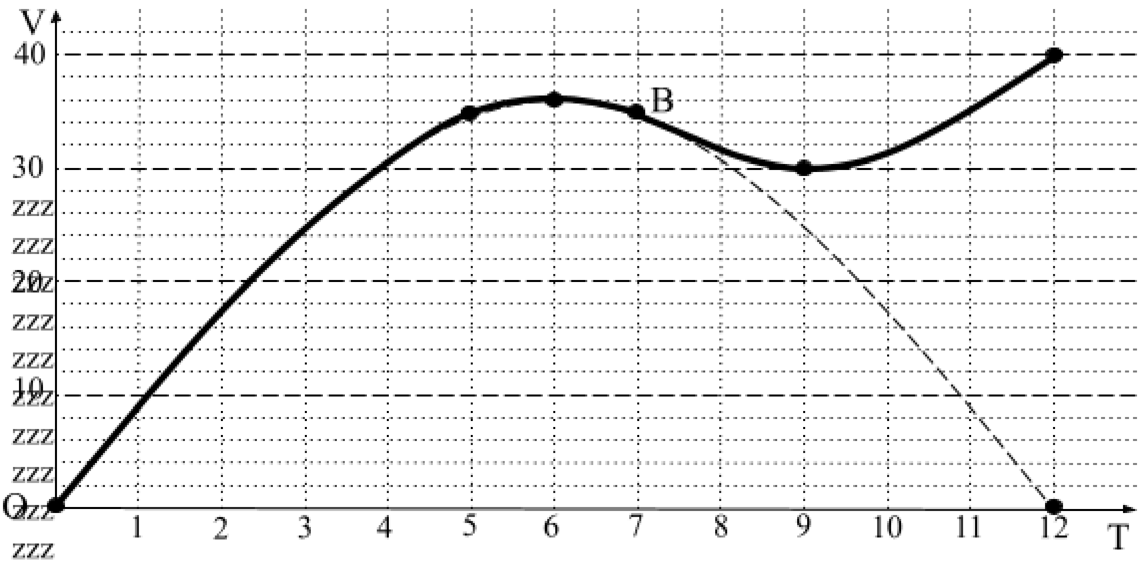
Teniendo en cuenta que $V(5) = V(7) = 12{\cdot}5 - 5^2 = 60 - 25 = 35$, son puntos de la función $A(5,\ 35)\ y\ B(7,\ 35)$.

En el valor extremo del intervalo es el siguiente:

$V(12) = 12^2 - 18{\cdot}12 + 112 = 144 - 216 + 112 = 256 - 216 = 40.$

<u>$Las\ máximas\ ventas\ fueron\ el\ 12º\ mes$: $40.000\ unidades$.</u>

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



$b)$

Para $t > 7 \Rightarrow V(t) = 32;\ \ t^2 - 18t + 112 = 32;\ \ t^2 - 18t + 80 = 0;$

$t = \frac{18 \pm \sqrt{324-320}}{2} = \frac{18 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{18 \pm 2}{2} = 9 \pm 1 \Rightarrow t_1 = 8,\ t_2 = 10.$

<u>$Las\ ventas\ fueron\ igual\ o\ menores\ de\ 32.000\ unidades\ en$ [8, 10].</u>

****

3º) Según cierto estudio del departamento de ventas de unos grandes almacenes, el 30 % de sus clientes son hombres, el 25 % de sus clientes adquieren algún producto del departamento de electrónica y el 40 % de los que adquieren algún producto del departamento de electrónica son mujeres.

a) ¿Qué porcentaje de sus clientes son mujeres y adquieren algún producto del departamento de electrónica?

b) Si un cliente elegido al azar es hombre, calcula la probabilidad de que no adquiere algún producto del departamento de electrónica.

$Datos$: $P(Hombre) = P(H) = 0,3.$ $\quad\quad P(Mujer) = P(M) = 0,7.$

$P(Comprar\ productos\ electrónicos) = P(E) = 0,25. P(M/E) = 0,4.$

a)

$$P(M/E) = \frac{P(M \cap E)}{P(E)} \Rightarrow P(M \cap E) = P(E) \cdot P(M/E) = 0,25 \cdot 0,4 = 0,10.$$

$\underline{El\ 10\ \%\ de\ los\ clientes\ son\ mujeres\ y\ compran\ productos\ electrónicos.}$

b)

$$P(E/H) = \frac{P(H \cap E)}{P(E)}. \quad (*)$$

$$P(E) = P(H \cap E) + P(M \cap E) \Rightarrow P(H \cap E) = P(E) - P(M \cap E).$$

$$P(H \cap E) = 0,25 - 0,10 = 0,15.$$

Sustituyendo en (*) el valor obtenido:

$$P(E/H) = \frac{P(E \cap H)}{P(H)} = \frac{0,15}{0,30} = 0,50.$$

$$P(\overline{E}/H) = 1 - P(H) = 1 - 0,5 = 0,5$$

$\underline{La\ probabilidad\ de\ que\ un\ hombre\ no\ compre\ en\ electrónica\ es\ 0,5.}$

****

4º) Una empresa informática ha lanzado al mercado un producto del que sabe que su vida útil, en años, sigue una distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 1,6$ años.

a) Para una muestra aleatoria de 100 productos, la vida media útil ha sido de 4,6 años. Calcule un intervalo del 95 % de confianza para estimar la vida media útil del producto. Interpreta el intervalo obtenido.

b) Supongamos que la vida útil del producto sigue una distribución $N(4,6; 1,6)$ y se toma una muestra aleatoria de 64 productos. Calcula la probabilidad de que la vida media útil de la muestra esté entre 4,25 y 4,95 años.

----

a)

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$$

$$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$$

Datos: $\overline{x} = 4,6;\ \ n = 100;\ \ \sigma = 1,6;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(4,6 - 1,96 \cdot \frac{1,6}{\sqrt{100}};\ 4,6 + 1,96 \cdot \frac{1,6}{\sqrt{100}}\right);$$

$$(4,6 - 1,96 \cdot 0,16;\ 4,6 + 1,96 \cdot 0,16);\ \ (4,6 - 0,3136;\ 4,6 + 0,3136).$$

$$\underline{I.\ C._{95\ \%}\ (4,2864;\ 4,9136).}$$

b)

$$X = N\left(\overline{x};\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow X = N\left(4,5;\ \frac{1,6}{\sqrt{64}}\right) = N(4,5;\ 0,2).$$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-4,6}{0,2}$.

$$P(4,25 \le X \le 4,95) = P\left(\frac{4,25-4,6}{0,2} \le \frac{X-4,6}{0,2} \le \frac{4,95-4,6}{0,2}\right) =$$

$$= P\left(-\frac{0,35}{0,2} \le Z \le \frac{0,35}{0,2}\right) = (-\ 1,75 \le Z \le 1,75) =$$

$$= P(Z \le 1,75) - [1 - P(z \le 1,75)] = 2 \cdot P(Z \le 1,75) - 1 = 2 \cdot 0,9599 - 1 =$$

$= 1,9198 - 1 = \underline{0,9198}.$

****

OPCIÓN B

1º) Sea la función $f(x,\ y)=\ 2x\ -\ 3y$ sujeta a las restricciones $x\ +\ 2y\leq 40$, $x\ +\ y\geq 5$, $3x\ +\ y\leq 45$, $x\geq 0$.

a) Representa gráficamente la región factible y calcula sus vértices.

b) Calcula el punto o puntos de esa región donde la función alcanza su valor máximo y su valor mínimo.

----

a)

Las restricciones son: $x\ +\ 2y\leq 40 \quad x\ +\ y\geq 5 \; 3x\ +\ y\leq 45 \qquad x\geq 0\ \}$.

x	0	20
y	20	10

①$\Rightarrow x\ +\ 2y\leq 40\Rightarrow y\geq \frac{40-x}{2}\Rightarrow O(0,\ 0)\rightarrow Si$.

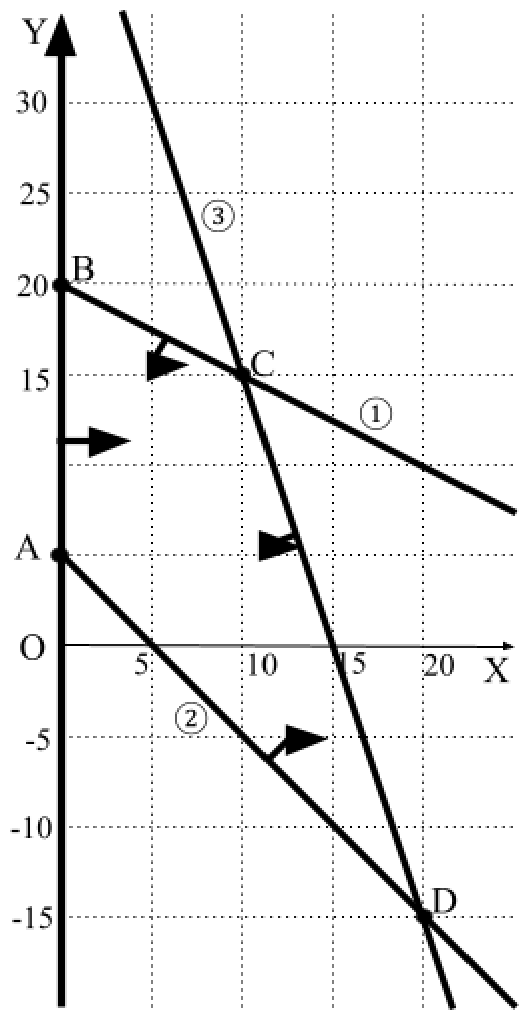
x	0	5
y	5	0

②$\Rightarrow x\ +\ y\geq 5\Rightarrow y\geq 5\ -\ x\Rightarrow O(0,\ 0)\rightarrow No$.

x	10	15
y	15	0

③$\Rightarrow 3x\ +\ y\leq 45\Rightarrow y\leq 45\ -\ 3x\Rightarrow O(0,\ 0)\rightarrow Si$.

La región factible se indica en la figura.



Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A\Rightarrow \quad x\ =\ 0\ x\ +\ y\ =\ 5\ \}\Rightarrow \underline{A(0,\ 5)}$.

$B\Rightarrow \quad x\ =\ 0\ x\ +\ 2y\ =\ 40\ \}\Rightarrow \underline{B(0,\ 20)}$.

$C \Rightarrow x + 2y = 40\ 3x + y = 45 \} \quad -x - 2y = -40 \quad 6x + 2y = 90 \} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x = 50;\ \ x = 10 \Rightarrow \underline{C(10,\ 15)}.$

$D \Rightarrow \quad x + y = 5\ 3x + y = 45 \} \quad -x - y = -5\ 3x + y = 45 \} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x = 40;\ \ x = 20 \Rightarrow \underline{D(20,\ \ -15)}.$

$b)$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,\ y) = 2x - 3y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 5) = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 5 = 0 - 15 = -15.$

$B \Rightarrow f(0,\ 20) = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 20 = 0 - 60 = -60.$

$C \Rightarrow f(10,\ 15) = 2 \cdot 10 - 3 \cdot 15 = 20 - 45 = -25.$

$D \Rightarrow f(20,\ \ -15) = 2 \cdot 20 - 3 \cdot (-15) = 40 + 45 = 85.$

$\underline{El\ valor\ máximo\ se\ alcanza\ en\ D(20,\ \ -15)\ y\ su\ valar\ es\ 85}.$

$\underline{El\ valor\ mínimo\ se\ alcanza\ en\ B(0,\ 20)\ y\ su\ valar\ es\ -60}.$

****

2º) Los beneficios de una compañía en millones de euros, en sus primeros 7 años, ha sido estimada por la función $B(x) = ax^3 - 3x^2 + bx$, $0 \leq x \leq 7$, donde x indica el tiempo transcurrido en años desde su fundación.

a) Calcula los valores de a y b sabiendo que la compañía tuvo unos beneficios máximos de 8 millones de euros en el segundo año.

b) Supongamos que $a = \frac{1}{4}$ y $b = 9$. Determina cuando la empresa no ha tenido beneficios. Calcula $\int_0^6 B(x) \cdot dx$.

----

a)

$$B(2) = 8 \Rightarrow a \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + b \cdot 2 = 8;\ 8a - 12 + 2b = 8;\ 8a + 2b = 20;$$

$4a + b = 10.$ (1)

$$B'(x) = 3ax^2 - 6x + b.$$

$$B'(2) = 0 \Rightarrow 3a \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + b = 0;\ 12a + b = 12. \quad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{l} 4a + b = 10 \\ 12a + b = 12 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -4a - b = -10 \\ 12a + b = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow 8a = 2;\ a = \frac{1}{4}.$$

$$b = 10 - 1 = 9.$$

$\underline{Solución: a = \frac{1}{4},\ b = 9.}$

b)

Para $a = \frac{1}{4}$ y $b = 9$ la función es $B(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x$.

Se trata de determinar los valores de x que hacen $B(x) < 0$.

$$B(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x = 0;\ x^3 - 12x^2 + 36x = 0;$$

$$x\left(x^2 - 12x + 36\right) = 0;\ x(x - 6)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = x_3 = 6.$$

$$B(x) \geq 0,\ \forall x \in D(B).$$

$\underline{La\ empresa\ no\ tuvo\ beneficios\ al\ comienzo\ y\ el\ año\ 6.}$

$\underline{(Nunca\ tuvo\ pérdidas).}$

$$\int_0^6 B(x)\cdot dx = \int_0^6 \left(\frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x\right)\cdot dx = \left[\frac{x^4}{16} - \frac{3x^3}{3} + \frac{9x^2}{2}\right]_0^6 =$$

$$= \left[\frac{x^4}{16} - x^3 + \frac{9x^2}{2}\right]_0^6 = \left(\frac{6^4}{16} - 6^3 + \frac{9\cdot 6^2}{2}\right) - 0 = 36\cdot\left(\frac{36}{16} - 6 + \frac{9}{2}\right) = 36\left(\frac{9}{4} - 6 + \frac{9}{2}\right)$$

$$= 81 - 216 + 162 = 243 - 216 = 27.$$

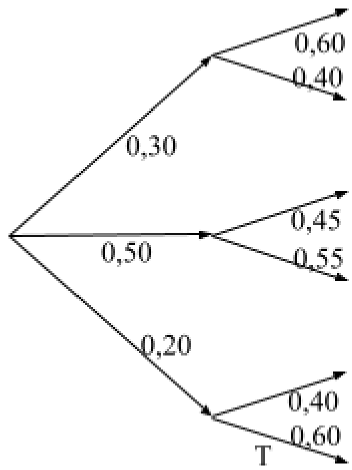
$$\underline{\int_0^6 B(x)\cdot dx = 27.}$$

****

3º) Un artículo distribuido en tres marcas distintas, A, B y C se venden en un supermercado. Se observa que el 30 % de las ventas diarias del artículo son de la marca A, el 50 % son de la marca B y el resto de la marca C. Se sabe además que el 60 % de las ventas de la marca A se realiza por la mañana, el 55 % de las ventas de la marca B por la tarde y el 40 % de la marca C se vende por la mañana.

a) Calcule el porcentaje de ventas del artículo efectuadas por la mañana.

b) Si la venta se ha efectuado por la tarde, calcula la probabilidad de que el artículo sea de la marca C.



a)

$$P = P(M) = P(A)\cdot P(M/A) + P(B)\cdot P(M/B) + P(C)\cdot P(M/C) =$$

$$= 0,30\cdot 0,60 + 0,50\cdot 0,45 + 0,20\cdot 0,40 = 0,180 + 0,225 + 0,080 = \underline{0,485}.$$

b)

$$P = P(T/C) = \frac{P(C\cap T)}{P(T)} = \frac{P(C)\cdot P(T/C)}{P(A)\cdot P(T/A)+P(B)\cdot P(T/B)+P(C)\cdot P(T/C)} =$$

$$= \frac{0,30\cdot 0,40}{0,30\cdot 0,40+0,50\cdot 0,55+0,20\cdot 0,60} = \frac{0,120}{0,120+0,275+0,120} = \frac{0,120}{0,515} = \underline{0,233}.$$

****

4º) Como resultado de una encuesta en la que se ha utilizado el supuesto de máxima indeterminación ($p = 1 - q = 1/2$) se afirma que, con un 97,56 % de confianza, el porcentaje de individuos de una población que considera el alcohol y/o las drogas como causa principal de los accidentes de tráfico, está entre el 57,5 % y el 62,5 %.

a) Calcula el número de individuos de esa población a los que se les ha realizado la encuesta.

b) De los que se les ha realizado la encuesta, ¿cuántos han contestado que la causa principal de los accidentes es el alcohol y/o drogas?

----

a)

$$E = \frac{0{,}625-0{,}575}{2} = \frac{0{,}050}{2} = 0,025.$$

Nivel de confianza del 97,56 %.

$$1 - \alpha = 0,9756 \rightarrow \alpha = 1 - 0,9756 = 0,0244 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}0122} = 2,25.$$

$$(1 - 0,0122 = 0,9878 \rightarrow z = 2,25).$$

Datos: $p = q = 0,5$; $E = 0,025$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,25$.

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sqrt{p \cdot q}}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sqrt{0{,}5 \cdot 0{,}5}}{E}\right)^2 = \left(2,25 \cdot \frac{0{,}5}{0{,}025}\right)^2 =$$

$$= (2,25 \cdot 20)^2 = 45^2 = 2.025.$$

$$\underline{Se\ les\ ha\ realizado\ la\ encuesta\ a\ 2.025\ individuos.}$$

b) De los que se les ha realizado la encuesta, ¿cuántos han contestado que la causa principal de los accidentes es el alcohol y/o drogas?

$$\overline{x} = \frac{0{,}575+0{,}625}{2} = \frac{1{,}200}{2} = 0,6.$$

El 60 % de los individuos de la población considera el alcohol y/o las drogas como causa principal de los accidentes de tráfico; el número de estos individuos es:

$$n = 60\ \%\ de\ 2.025 = 0,6 \cdot 2.025 = 1.215.$$

$$\underline{Han\ contestado\ que\ el\ alcohol \frac{y}{o} las\ drogas\ es\ la\ causa\ 1.215\ individuos.}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE GALICIA

SEPTIEMBRE – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno debe responder solamente a los ejercicios de una de las opciones.

OPCIÓN A

1º) Sean las matrices $A = (1\ 0\ 0\ 0\ 2\ a\ 0\ 1\ a)$, $B = (1\ 0\ 0\ 0\ b\ 1\ 0\ 1\ 0)$, $C = (1\ 0\ 0\ 0\ -1\ 1\ 0\ c\ c)$.

$a)$ Calcula los valores de $a, b\ y\ c$ para que se satisfaga la siguiente igualdad matricial: $A{\cdot}B + B{\cdot}C = 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

$b)$ Para $a = 4,\ b =- 3\ y\ c = 1$ calcula el rango de la matriz $M = A + B - 2C$.

$a)$

$A{\cdot}B + B{\cdot}C = (1\ 0\ 0\ 0\ 2\ a\ 0\ 1\ a){\cdot}(1\ 0\ 0\ 0\ b\ 1\ 0\ 1\ 0) + (1\ 0\ 0\ 0\ b\ 1\ 0\ 1\ 0){\cdot}(1\ 0\ 0\ 0$

$= (1\ 0\ 0\ 0\ a + 2b\ 2\ 0\ a + b\ 1) + (1\ 0\ 0\ 0\ -b + c\ b + c\ 0\ -1\ 1) = (2\ 0\ 0\ 0\ a + b$

$= (2\ 0\ 0\ 0\ 2\ 0\ 0\ 0\ 2) \Rightarrow\ a + b + c = 2\ \ b + c + 2 = 0\ \ a + b - 1 = 0\}\ \ a + b +$

.

$b)$

Para $a = 4,\ b =- 3\ y\ c = 1$ las matrices son las siguientes: $A = (1\ 0\ 0\ 0\ 2\ 4\ 0\ 1\ 4)$, $B = (1\ 0\ 0\ 0\ -3\ 1\ 0\ 1\ 0)\ y\ C = (1\ 0\ 0\ 0\ -1\ 1\ 0\ 1\ 1)$.

$M = A + B - 2C = (1\ 0\ 0\ 0\ 2\ 4\ 0\ 1\ 4) + (1\ 0\ 0\ 0\ -3\ 1\ 0\ 1\ 0) - (2\ 0\ 0\ 0\ -2\ 2\ 0\ 2\ 2$
$= (2\ 0\ 0\ 0\ -1\ 5\ 0\ 2\ 4) - (2\ 0\ 0\ 0\ -2\ 2\ 0\ 2\ 2) = (0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 3\ 0\ 0\ 2) = M.$

$\underline{Rang\ M = 2}.$

****

2º) El precio en euros de las acciones de cierto grupo empresarial a lo largo de un año se ha estimado por la función: $P(t) = \begin{cases} 15 + 2t - t^2 & si \ \ 0 \le t \le 3 \\ \frac{1}{3}t + 11 & si \ \ 3 < t \le 12 \end{cases}$ siendo t el tiempo transcurrido en meses.

a) Determina los periodos en los que ha aumentado y en los que ha disminuido el precio y calcula su precio máximo y su precio mínimo.

b) Determina el periodo en el que el precio de las acciones ha sido inferior o igual a 13,75 euros. Representa la gráfica de la función $P(t)$.

----

a)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$P'(t) = \begin{cases} 2 - 2t & si \ \ 0 \le t \le 3 \\ \frac{1}{3} & si \ \ 3 < t \le 12 \end{cases} \Rightarrow 2 - 2t = 0; \ \ 1 - t = 0 \Rightarrow t = 1$.

$$\underline{Crecimiento: \ P'(t) > 0 \Rightarrow t \in (0,\ 1) \cup (3,\ 12)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: \ P'(t) < 0 \Rightarrow t \in (1,\ 3)}.$$

$P'(t) = 0 \Rightarrow t = 1.\ P''(t) = -2 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ t = 1.$

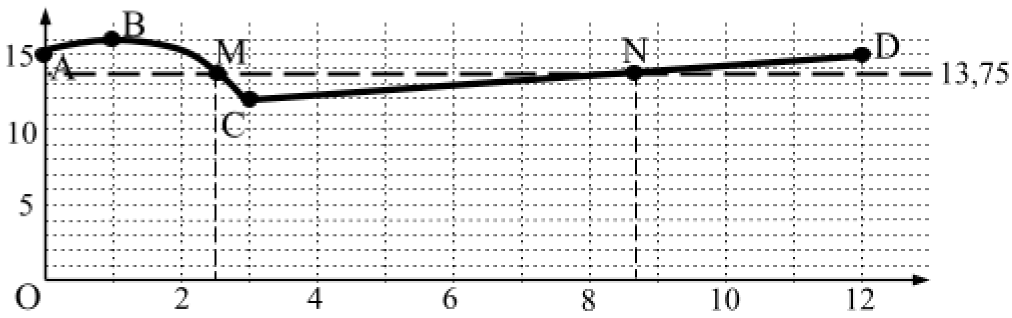
$P(0) = 15. \quad P(1) = 15 + 2 - 1 = 16.$

$P(3) = 15 + 6 - 9 = 12. \quad P(12) = \frac{1}{3} \cdot 12 + 11 = 4 + 11 = 15$

$$\underline{El\ precio\ máximo\ de\ las\ acciones\ se\ produce\ al\ comienzo\ y\ es\ de\ 16\ euros}.$$

$$\underline{El\ precio\ mínimo\ de\ las\ acciones\ se\ produce\ al\ tercer\ mes\ y\ es\ de\ 12\ euros}.$$

b)



$0 \leq t \leq 3 \Rightarrow P(t) = 13,75 \Rightarrow 15 + 2t - t^2 = 13,75;\ \ t^2 - 2t - 1,25 = 0;$
$t = \frac{2 \pm \sqrt{4+5}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{2 \pm 3}{2} \Rightarrow t_1 = 2,5;\ t_2 = -0,5 \notin D(P).$

$3 < t \leq 12 \Rightarrow P(t) = 13,75 \Rightarrow \frac{1}{3}t + 11 = 13,75;\ \ \frac{1}{3}t1 = 2,75 \Rightarrow t = 8,25$
.

$\underline{Las\ acciones\ tuvieron\ un\ precio\ \leq 13,75\ euros\ en\ t \in [2,5;8,25]}.$

****

3º) El 60 % de los individuos de una población está vacunado contra cierta enfermedad. Durante una epidemia se sabe que el 20 % ha contraído la enfermedad y que el 3 % está vacunado y ha contraído la enfermedad.

a) Calcula el porcentaje de individuos que ha contraído la enfermedad, entre los que no están vacunados.

b) Calcula el porcentaje de individuos vacunados, entre los que han contraído la enfermedad. Justifica si los sucesos "estar vacunado" y "contraer la enfermedad" son dependientes o independientes.

----

a)

Datos:

$P(V) = 0,6 \rightarrow P(\overline{V}) = 0,4. \qquad P(E) = 0,2.$

$P(V \cap E) = 0,03.$

$$P(E) = P(V \cap E) + P(\overline{V} \cap E) \Rightarrow P(\overline{V} \cap E) = P(E) - P(V \cap E).$$

$$P = P(E/\overline{V}) = \frac{P(\overline{V} \cap E)}{P(\overline{V})} = \frac{P(E) - P(V/E)}{0,4} = \frac{P(E) - P(V \cap E)}{0,4} = \frac{0,2 - 0,03}{0,4} = \frac{0,17}{0,4} = \underline{0,425}.$$

$\underline{De\ los\ no\ vacunados,\ han\ contraído\ la\ enfermedad\ el\ 42,5\ \%}.$

b)

$$P = P(V/E) = \frac{P(V \cap E)}{P(E)} = \frac{0,03}{0,2} = 0,15.$$

$\underline{De\ los\ que\ han\ contraído\ la\ enfermedad,\ el\ 15\ \%\ estaban\ vacunados.}$

Dos sucesos V y E son independientes cuando $P(V \cap E) = P(V) \cdot P(E)$.

$$P(V) \cdot P(E) = 0,6 \cdot 0,2 = 0,12 \neq 0,03 = P(V \cap E).$$

$\underline{Por\ lo\ expuesto\ anteriormente\ los\ sucesos\ V\ y\ E\ no\ son\ independientes.}$

****

4º) a) En una muestra aleatoria de 200 clientes de un centro comercial, 150 efectúan sus compras utilizando la tarjeta propia del centro. Calcula un intervalo del 95 % de confianza para la proporción de clientes que efectúan las compras utilizando la tarjeta propia del centro. Interpreta el resultado obtenido.

b) Si se sabe que 8 de cada 10 clientes del centro comercial utilizan para sus compras la tarjeta propia del centro y tomamos una muestra aleatoria de 100 clientes, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de clientes de la muestra que utilizan la tarjeta propia del centro sea superior a 0,75?

----

a)

Nivel de confianza del 95 %.

$\alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$

$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$

Datos: $n = 200;\ \ p = \frac{150}{200} = \frac{3}{4} = 0,75;\ \ q = 0,25;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q y n, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}};\ p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right).$

$\left(0,75 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,75 \cdot 0,25}{200}};\ 0,75 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,75 \cdot 0,25}{200}}\right);$

$(0,75 - 1,96 \cdot 0,0306;\ 0,75 + 1,96 \cdot 0,0306);\ \ (0,75 - 0,0600;\ 0,75 + 0,0600)$
.

$$\underline{I.\ C._{90\,\%} = \left(0'6900;\ 0'8100\right).}$$

b)

Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$p = \frac{8}{10} = 0,8;\ \ q = 0,2;\ \ n = 100 \Rightarrow X \sim B(n,\ \sigma).$

Para que la distribución binomial se pueda aproximar a una distribución normal tiene que cumplirse que $n \cdot p > 5\ y\ n \cdot q > 5$:

$100 \cdot 0,8 = 80 > 5;\ \ 100 \cdot 0,2 = 20 > 5 \Rightarrow Si\ es\ posible.$

La desviación típica es: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2} = \sqrt{16} = 4.$

$X \sim N(n \cdot p;\ \sigma) = N(80,\ 4).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-80}{4}$.

Aplicando la corrección de Yates, la variable $X = 75$ pasa a ser $X' = 75,5$.

$$P(X > 75) = P\left(X' > 75,5\right) = P\left(\frac{X-80}{4} > \frac{75,5-80}{4}\right) = P\left(Z > -\frac{4,5}{4}\right) =$$

$$= P(Z > -1,125) = P(Z \leq 1,125) = \underline{0,8697}.$$

****

<u>OPCIÓN B</u>

1º) Una fábrica de materiales plásticos produce dos tipos de contenedores A y B. Su producción semanal debe ser de por lo menos 10 contenedores en total y el número de contenedores de tipo B no puede superar en más de 10 al número de los de tipo A. Además, cada contenedor de tipo A tiene unos costes de producción de 150 euros y cada contenedor de tipo B de 100 euros, disponiendo de un máximo de 6.000 euros semanales para el coste total de la producción.

a) Formula el sistema de inecuaciones. Representa la región factible y calcula sus vértices.

b) Si cada contenedor de tipo A genera unos beneficios de 130 euros y el de tipo B de 140 euros, ¿cuántos contenedores de cada tipo tendrán que producir a la semana para que el beneficio total semanal sea máximo?

----

a)

Sean $x\ e\ y$ el nº de contenedores de los tipos A y B que se fabrican semanalmente, respectivamente.

Las condiciones del ejercicio se establecen en el siguiente sistema de inecuaciones:

$x + y \geq 10$ $\quad y \leq x + 10$ $\quad 150x + 100y \leq 6.000$ $\quad x \geq 0;\ \ y \geq 0\ \}$

.

x	10	0
y	0	10

①$\Rightarrow x + y \geq 10 \Rightarrow y \geq 10 - x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow No.$

x	0	5
y	10	15

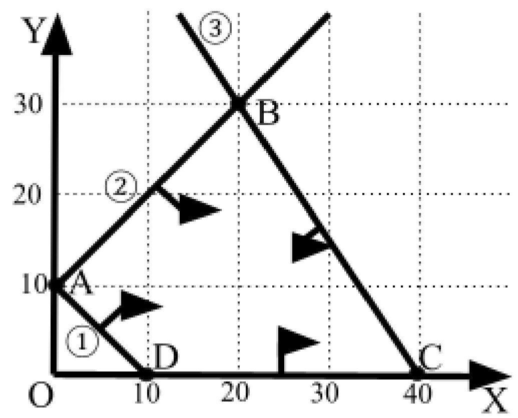
②$\Rightarrow y - x \leq 10 \Rightarrow y \leq x + 10 \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	20	40
y	30	0

③$\Rightarrow 3x + 2y \leq 120 \Rightarrow y \leq \frac{120-3x}{2} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

La región factible, cerrada, es la zona que aparece sombreada en la figura.

Los vértices de la zona factible son los siguientes:



$A \Rightarrow x + y = 10 \; y - x = 10 \} \Rightarrow A(0,\ 10).$

$B \Rightarrow \quad y - x = 10 \; 3x + 2y = 120 \} \quad 3y - 3x = 30 \; 3x + 2y = 120 \} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5y = 150;\ \ y = 50 \Rightarrow B(20,\ 30).$

$C \Rightarrow \qquad y = 0 \; 3x + 2y = 120 \} \Rightarrow 3x = 120;\ x = 40 \Rightarrow C(40,\ 0).$

$D \Rightarrow \qquad y = 0 \; x + y = 10 \} \Rightarrow C(10,\ 0).$

$b)$

La función de objetivos es $f(x,\ y) = 130x + 140y$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 10) = 130 \cdot 0 + 140 \cdot 10 = 0 + 1.400 = 1.400.$

$B \Rightarrow f(20,\ 30) = 130 \cdot 20 + 140 \cdot 30 = 2.600 + 4.200 = 6.800.$

$C \Rightarrow f(40,\ 0) = 130 \cdot 40 + 140 \cdot 0 = 5.200 + 0 = 5.200.$

$D \Rightarrow f(10,\ 0) = 130 \cdot 10 + 140 \cdot 0 = 1.300 + 0 = 1.300.$

El valor máximo se produce en el punto B.

$\underline{El\ beneficio\ se\ maximiza\ fabricando\ 20\ contenedores\ tipo\ A\ y\ 30\ tipo\ B}.$

$\underline{El\ benefico\ máximo\ es\ de\ 6.800\ euros}.$

****

2º) Sean las funciones $f(x) = x^2 + 2x - 8$ y $g(x) = - x^2 + 4$.

a) Representa el recinto limitado por las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$, estudiando los puntos de corte con los ejes, máximos, mínimos y los puntos en los que se cortan ambas funciones.

b) Calcula el área de dicho recinto.

----

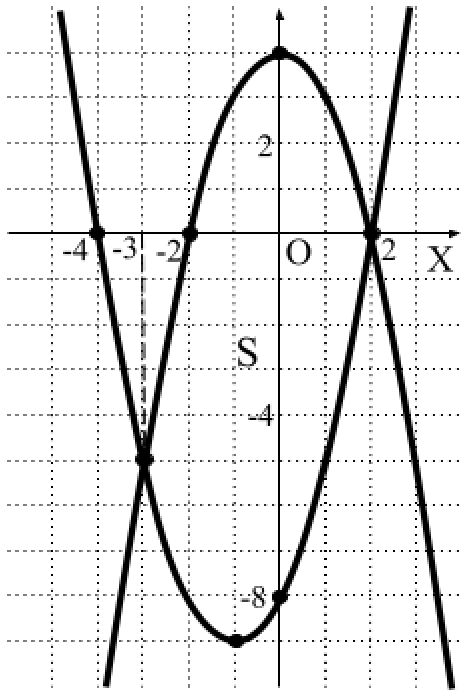
a)

Los puntos de intersección de las curvas tienen como abscisas las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$x^2 + 2x - 8 = - x^2 + 4;\ \ 2x^2 + 2x - 12 = 0;\ \ x^2 + x - 6 = 0;$$

$$x = \frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{25}}{2} = \frac{-1\pm5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = - 3 \to \underline{A(- 3, - 5)} \\ x_2 = 1 \to \underline{B(2, 0)} \end{cases}.$$

La función $f(x) = x^2 + 2x - 8$, que es una parábola convexa (∪), corta al eje X en los puntos siguientes:



$$x^2 + 2x - 8 = 0;\ \ x = \frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{36}}{2} =$$

$$= \frac{-2\pm6}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = - 4 \to \underline{C(- 4, 0)} \\ x_2 = 2 \to \underline{D(2, 0)} \end{cases}.$$

Su punto de corte con Y es $E(- 8,\ 0)$.

El vértice de la parábola $f(x) = x^2 + 2x - 8$, que es su mínimo absoluto, es el siguiente:

$$f'(x) = 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = - 1.$$

$f(-1) = 1 - 2 - 8 = -9 \Rightarrow \underline{V_1(-1, -9)}.$

La función $g(x) = -x^2 + 4$, que es una parábola cóncava ($\cap$), corta al eje X en los puntos siguientes:

$$-x^2 + 4 = 0 \Rightarrow \{x_1 = -2 \to \underline{E(-2, 0)}\ x_2 = 2 \to \underline{D(2, 0)} .$$

El vértice de la parábola $g(x) = -x^2 + 4$, que es su máximo absoluto, es el siguiente:

$$g'(x) = -2x = 0 \Rightarrow x = 0;\ \ g(0) = 4 \Rightarrow \underline{V_2(0, 4)}.$$

La representación gráfica, aproximada, de la situación se expresa en la figura adjunta.

$b)$

Por ser las ordenadas de la parábola $g(x) = -x^2 + 4$ mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola $f(x) = x^2 + 2x - 8$ en el intervalo del área a calcular, $(-3, 2)$, se deduce que la superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_{-3}^{2} [g(x) - f(x)] \cdot dx = \int_{-3}^{2} \left[\left(-x^2 + 4\right) - \left(x^2 + 2x - 8\right)\right] \cdot dx =$$

$$= \int_{-3}^{2} \left(-x^2 + 4 - x^2 - 2x + 8\right) \cdot dx = \int_{-3}^{2} \left(-2x^2 - 2x + 12\right) \cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{2x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 12x\right]_{-3}^{2} = \left[-\frac{2x^3}{3} - x^2 + 12x\right]_{-3}^{2} =$$

$$= \left(-\frac{2 \cdot 2^3}{3} - 2^2 + 12 \cdot 2\right) - \left[-\frac{2 \cdot (-3)^3}{3} - (-3)^2 + 12 \cdot (-3)\right] =$$

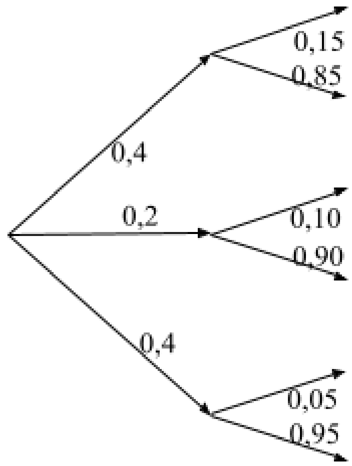
$$= -\frac{16}{3} - 4 + 24 - 18 + 9 + 36 = 47 - \frac{16}{3} = \frac{141 - 16}{3} = \underline{\frac{125}{3}\ u^2 = S}.$$

****

3º) Una multinacional realiza operaciones comerciales en tres mercados: A, B y C. El 20 % de las operaciones corresponden al mercado B y en los mercados A y C realiza el mismo número de operaciones. Se producen retrasos en el pago en el 15 %, 10 % y 5 % de las operaciones realizadas en los mercados A, B y C, respectivamente.

a) Calcula el porcentaje de operaciones de la multinacional en las que se producen retrasos en el pago.

b) ¿Qué porcentaje de las operaciones en las que se ha retrasado el pago han sido realizadas en el mercado A?



a)

$$P = P(R) = P(A)\cdot P(R/A) + P(B)\cdot P(R/B) + P(C)\cdot P(R/C) =$$

$$= 0,4\cdot 0,15 + 0,2\cdot 0,10 + 0,4\cdot 0,05 = 0,06 + 0,02 + 0,02 = \underline{0,10}.$$

$$\underline{Se\ producen\ retrasos\ en\ el\ pago\ en\ el\ 10\ \%\ de\ las\ operaciones}.$$

b)

$$P = P(R/A) = \frac{P(A\cap R)}{P(R)} = \frac{P(A)\cdot P(R/A)}{P(A)\cdot P(R/A)+P(B)\cdot P(R/B)+P(C)\cdot P(R/C)} =$$

$$= \frac{0,4\cdot 0,15}{0,4\cdot 0,15+0,2\cdot 0,10+0,4\cdot 0,05} = \frac{0,06}{0,06+0,02+0,02} = \frac{0,06}{0,10} = \underline{0,60}.$$

$$\underline{Del\ total\ de\ los\ retrasos,\ \ el\ 60\ \%\ se\ producen\ en\ el\ mercado\ A}.$$

****

4º) El tiempo de formación, en horas, que necesita un empleado de una empresa para poder trabajar en una nueva planta sigue una distribución $N(\mu,\ \sigma = 15)$.

a) Elegida una muestra de 36 empleados de la empresa, se obtiene el intervalo de confianza $(321,1;\ \ 330,9)$ para la media μ. Calcula el tiempo medio de formación de los empleados de la muestra y el nivel de confianza con el que se ha construido el intervalo.

b) Supongamos que el tiempo de formación, en horas, que necesita un empleado de esa empresa para poder trabajar en una nueva planta sigue una distribución $N(\mu = 326,\ \sigma = 15)$. Calcula la probabilidad de que el tiempo medio de formación no supere las 330 horas, en muestras de 36 empleados.

----

a)

$$E = \frac{330,9-321,1}{2} = \frac{9,8}{2} = 4,9. \qquad \overline{x} = \frac{330,9+321,1}{2} = \frac{652}{2} = \underline{326}$$

Datos: $n = 36;\ \ \sigma = 15;\ \ E = 4,9.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{4,9 \cdot \sqrt{36}}{15} = \frac{29,4}{15} = 1,96.$

Mirando en la tabla $N(0,\ 1)$:

A $1,96$ le corresponde 0,9750.

$$\underline{Se\ ha\ utilizado\ un\ nivel\ de\ confianza\ del\ 97,5\ \%}.$$

b)

El tiempo de formación, en horas, constituye una distribución normal tal que: $X \Rightarrow N(326; 15)$.

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{X-326}{\frac{15}{\sqrt{36}}} = \frac{X-326}{\frac{15}{6}} = \frac{X-326}{2,5}.$

$P(X < 330).$

$$P(X < 330) = P\left(\frac{X-326}{2,5} < \frac{330-326}{2,5}\right) = P\left(Z < \frac{4}{2,5}\right) = P(Z < 1,6) =$$

$= \underline{0,9452}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JULIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contesta sólo una de las dos opciones propuestas (OCIÓN A/OPCIÓN B).

OPCIÓN A

Parte 1

Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación.

1ª) Sea $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 7$.

a) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función dada.

b) Determina los extremos relativos de la función.

c) Utilizando la información de los apartados anteriores, haz una representación gráfica aproximada de la función.

----

a)

Para que una función sea creciente o decreciente es necesario que su primera derivada sea positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12.$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0 \Rightarrow 6x^2 - 6x - 12 = 0;\ x^2 - x - 2 = 0;$$

$$x = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{1\pm3}{2} \Rightarrow x_1 =- 1,\ x_2 = 2.$$

Las raíces de la primera derivada dividen al dominio de la función, que es R, en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)\ y\ (2, +\infty)$, en los cuales la función es, alternativamente, creciente y decreciente. Considerando, por ejemplo, el valor $x = 0 \in (-1, 2)$, donde es $f'(0) =- 12 < 0 \Rightarrow Decreciente$.

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función, que son los siguientes:

$$\underline{f(x)\ creciente:\ f'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon (-\infty, -1) \cup (2, +\infty).}$$

$$\underline{f(x)\ Decreciente:\ f'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon (-1, 2)}$$

$b)$

La condición para que una función polinómica tenga un extremo relativo, máximo o mínimo, es que se anule su primera derivada. Para diferenciar los máximos de los mínimos, se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan la primera se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$$f''(x) = 12x - 6.$$

$$f''(-1) = 12\cdot(-1) - 6 = -12 - 6 = -18 < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = -1$$

.

$$f(-1) = 2\cdot(-1)^3 - 3\cdot(-1)^2 - 12\cdot(-1) - 7 = -2 - 3 + 12 - 7 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{Máximo: A(-1, 0)}.$$

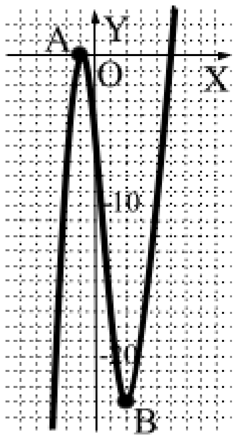
$$f''(2) = 12\cdot2 - 6 = 24 - 6 = 18 > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ x = 2.$$

$$f(2) = 2\cdot2^3 - 3\cdot2^2 - 12\cdot2 - 7 = 16 - 12 - 24 - 7 = 16 - 43 < -23 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{Mínimo: B(2, -23)}.$$

$c)$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



****

2ª) Sea a un parámetro real. Consideramos el sistema $\{ax + y + 2az = 1\ x + ay + z = 1 \quad x + y + z = a$.

a) ¿Para qué valores del parámetro a el sistema es compatible y determinado?

b) Calcular la solución para $a = 1$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = (a\ 1\ 2a\ 1\ a\ 1\ 1\ 1\ 1)$ y $M' = (a\ 1\ 2a\ 1\ a\ 1\ 1\ 1\ 1 \quad 1\ 1\ a)$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$|M| = |a\ 1\ 2a\ 1\ a\ 1\ 1\ 1\ 1| = a^2 + 2a + 1 - 2a^2 - a - 1 =- a^2 + a =$

$=- a(a - 1) = 0 \Rightarrow a_1 = 0,\ a_2 = 1.$

$\underline{Para\ \{a \neq 0\ a \neq 1\} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

$Para\ a = 0 \Rightarrow M' = (0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1 \quad 1\ 1\ 0) \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0| = 1 + 1 = 2 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$

$\underline{Para\ a = 0 \Rightarrow Rang\ A = 2;\ Rang\ A' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

$Para\ a = 1 \Rightarrow M' = (1\ 1\ 2\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \quad 1\ 1\ 1) \Rightarrow Rang\ M' = 2$

$\underline{Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

b)

Para $a = 1$ el sistema resulta: $x + y + 2z = 1\ \ x + y + z = 1\ \ x + y + z = 1\}$, equivalente a $x + y + 2z = 1\ \ x + y + z = 1\}$, que es compatible indeterminado.

De la observación del sistema se deduce que $z = 0$. Haciendo $y = \lambda$:

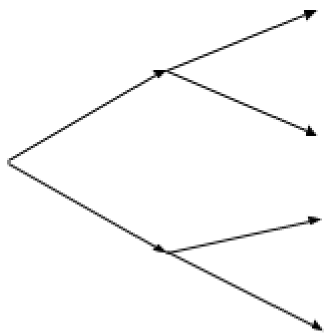
$\underline{Solución: x = 1 - \lambda,\ y = \lambda,\ z = 0,\ \forall \lambda \in R.}$

****

3ª) Durante la pasada Semana Santa el 40 % de los turistas nacionales que visitaron Logroño procedían de Cataluña. El 60 % de los turistas catalanes visitó alguna bodega y el 40 % de los turistas de otras comunidades también lo hizo.

a) Calcula el porcentaje de turistas nacionales (no catalanes) que visitó una bodega.

b) Se sabe que un determinado turista no visitó una bodega, calcula la probabilidad de que fuese catalán.



a)

$$P = P(\overline{C} \cap V) = P(\overline{C}) \cdot P(V/\overline{C}) = 0,6 \cdot 0,6 = \underline{0,48}.$$

b)

$$P = P(C/\overline{V}) = \frac{P(C \cap \overline{V})}{P(\overline{V})} = \frac{P(C) \cdot P(\overline{V}/C)}{P(C) \cdot P(\overline{V}/C) + P(\overline{C}) \cdot P(\overline{V}/\overline{C})} = \frac{0,4 \cdot 0,4}{0,4 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,6} = \frac{0,16}{0,16 + 0,36} =$$

$$= \frac{0,16}{0,52} = \underline{0,3077}.$$

****

Parte 2

Responde a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

4ª) Cierta empresa fabrica puertas y ventanas. Las instalaciones de la empresa imponen las siguientes restricciones sobre la producción diaria:

1 El número de puertas realizadas debe ser mayor o igual al número de ventanas, pero nunca puede superar su doble.

2 La empresa puede fabricar, entre puertas y ventanas, un máximo de 900 unidades diarias, y el número de puertas debe ser al menos de 400 unidades.

Con estos datos, se pide:

a) Plantea el conjunto de restricciones y dibuja la región factible asociada con ellas.

b) Si el precio de venta de las puertas es de cien euros la unidad y el de las ventanas es de ciento veinte euros, ¿cómo debe ser la producción de la empresa para maximizar los ingresos diarios?

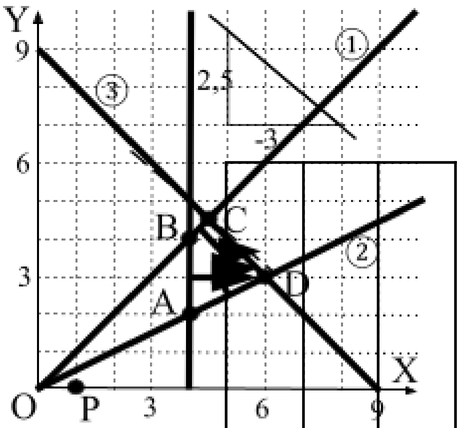
----

a)

Sean x e y el número de puertas y ventanas que se fabrica la empresa al día, respectivamente.

Las restricciones del ejercicio son: $x \geq y \quad x \leq 2y\, x + y \leq 9 \quad x \geq 400\, \}$.

La región factible se indica sombreada en la figura adjunta.



x	0	900
y	0	900

①$\Rightarrow x \geq y \Rightarrow y \leq x \Rightarrow$

$\Rightarrow P(1,\ 0) \rightarrow Si.$

x	0	600
y	0	300

②$\Rightarrow x \leq 2y \Rightarrow y \geq \frac{x}{2} \Rightarrow$

$P(1,\ 0) \rightarrow No.$

x	900	0
y	0	900

③$\Rightarrow x + y \leq 900 \Rightarrow y = 900 - x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

$b)$

Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 4 \\ x = 2y \end{matrix}\right\} \Rightarrow A(400,\ 200).$

$B \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 4 \\ x = y \end{matrix}\right\} \Rightarrow B(400,\ 400).$

$C \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = y \\ x + y = 900 \end{matrix}\right\} \Rightarrow C(450,\ 450).$

$D \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 2y \\ x + y = 900 \end{matrix}\right\} \Rightarrow D(600,\ 300).$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,\ y) = 100x + 120y.$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(400,\ 200) = 100 \cdot 400 + 120 \cdot 200 = 40.000 + 24.000 = 64.000.$

$B \Rightarrow f(400,\ 400) = 100 \cdot 400 + 120 \cdot 400 = 40.000 + 48.000 = 88.000.$

$C \Rightarrow f(450,\ 450) = 100 \cdot 450 + 120 \cdot 450 = 45.000 + 54.000 = 99.000.$

$D \Rightarrow f(600,\ 300) = 100 \cdot 600 + 120 \cdot 300 = 10.000 + 36.000 = 46.000.$

El máximo se produce en el punto C.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = 100x + 120y = 0 \Rightarrow y = -\frac{100}{120}x = -\frac{5}{6}x = -\frac{2,5}{3}x \Rightarrow m = -\frac{2,5}{3}$

.

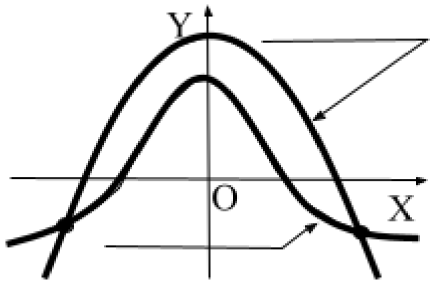
$\underline{Máximo\ beneficio\ fabricando\ al\ día\ 450\ puertas\ y\ 450\ ventanas.}$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ diario\ es\ de\ 99.000\ euros.}$

****

5ª) Sea la función $f_{a,b}(x) = x^2(x^2 - 2a) + b$, donde a y b son parámetros reales.

$a)$ Consideramos las curvas $y = f_{a,b}(x)$ e $y = f_{2,2}(x)$. Determinar el área de la región limitada por ambas curvas. Dicha región aparece sombreada en la siguiente figura.



$b)$ Calcula $\frac{f_{8,0}(x)}{x-4}$.

$a)$

$$y = f_{3,4}(x) = x^2(x^2 - 2 \cdot 3) + 4 = x^4 - 6x^2 + 4.$$

$$y = f_{2,2}(x) = x^2(x^2 - 2 \cdot 2) + 2 = x^4 - 4x^2 + 2.$$

Los puntos de corte de las dos funciones tienen por abscisas las soluciones de la ecuación que determinan la igualación de sus expresiones:

$$f_{3,4}(x) = f_{2,2}(x) \Rightarrow x^4 - 6x^2 + 4 = x^4 - 4x^2 + 2;\ \ 2x^2 = 2;\ \ x^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1.$$

Por ser las ordenadas de la función $y = f_{3,4}(x)$ mayores que las correspondientes ordenadas de la función $y = f_{2,2}(x)$ en el intervalo del área a calcular, la superficie pedida es la siguiente, teniendo en cuenta que ambas funciones son simétricas con respecto al eje de ordenadas, por ser ambas funciones pares:

$$S = \int_{-1}^{1} \left[f_{3,4}(x) - f_{2,2}(x)\right] \cdot dx = 2 \cdot \int_{0}^{1} \left[f_{3,4}(x) - f_{2,2}(x)\right] \cdot dx =$$

$$= 2 \cdot \int_{0}^{1} \left[\left(x^4 - 6x^2 + 4\right) - \left(x^4 - 4x^2 + 2\right)\right] \cdot dx = 2 \cdot \int_{0}^{1} \left(-2x^2 + 2\right) \cdot dx =$$

$$= 2 \cdot \left[-\frac{2x^3}{3} + 2x\right]_0^1 = 2 \cdot \left[\left(-\frac{2 \cdot 1^3}{3} + 2 \cdot 1\right) - 0\right] = 2 \cdot \left(-\frac{2}{3} + 2\right) = 2 \cdot \frac{4}{3} = \underline{\frac{8}{3}\, u^2}.$$

$b)$

$$\frac{f_{8,0}(x)}{x-4} = \frac{x^2(x^2 - 2 \cdot 8) + 0}{x-4} = \frac{x^4 - 16x^2}{x-4} = \frac{x^2(x^2 - 16)}{x-4} = \frac{16(16-16)}{4-4} = \frac{0}{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Indet. \Rightarrow \frac{x^2(x+4)(x-4)}{x-4} = \left[x^2(x+4)\right] = 4^2 \cdot (4+4) = 16 \cdot 8 = \underline{128}.$$

****

6ª) Andoni, el cocinero jefe del afamado restaurante El Caracol Vertiginoso, tiene a su disposición diez botellas de aceite indistinguibles en una estantería. Hay dos botellas que contienen aceite elaborado con aceitunas de la variedad arbequina, tres con aceite hecho a partir de la variedad picual y cinco cuyo aceite se ha obtenido mezclando aceitunas de distintas variedades. Esta mañana Andoni ha elaborado tres platos en cuya elaboración era necesaria aceite. Para hacer cada uno de ellos ha tomado una botella de la estantería de manera aleatoria e inmediatamente la ha devuelto.

a) Determinar la probabilidad de que en algún plato haya usado aceite elaborado con aceitunas de la variedad picual.

b) Determinar la probabilidad de que para elaborar los tres platos haya usado los tres tipos de aceite disponibles.

$$P(A) = 0,2; \;\; P(P) = 0,3; \;\; P(M) = 0,5.$$

a)

El suceso contrario a que "utilice aceite picual en alguno de los tres platos" es que "no utilice picual en ninguno de los tres platos":

$$P = 1 - P(\overline{P})\cdot P(\overline{P})\cdot P(\overline{P}) = 1 - 0,8^3 = 1 - 0,512 = \underline{0,488}.$$

b)

Los casos posibles de utilización de los tres tipos de aceite en los tres platos son los siguientes: $AMP \; APM \; MAP \; MPA \; PAM \; PMA$, que son $P3 = 3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$.

Como los seis sucesos son equiprobables:

$$P = 6\cdot(0,2\cdot 0,3\cdot 0,5) = 6\cdot 0,030 = \underline{0,18}.$$

****

OPCIÓN B

Parte 1

Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación.

1ª) Sea $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 7$.

a) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función dada.

b) Determina los extremos relativos de la función.

c) Utilizando la información de los apartados anteriores, haz una representación gráfica aproximada de la función.

2ª) Sea a un parámetro real. Consideramos el sistema $\{ax + y + 2az = 1\ x + ay + z = 1\quad x + y + z = a$.

a) ¿Para qué valores del parámetro a el sistema es compatible y determinado?

b) Calcular la solución para $a = 1$.

3ª) Durante la pasada Semana Santa el 40 % de los turistas nacionales que visitaron Logroño procedían de Cataluña. El 60 % de los turistas catalanes visitó alguna bodega y el 40 % de los turistas de otras comunidades también lo hizo.

a) Calcula el porcentaje de turistas nacionales que visitó una bodega.

b) Se sabe que un determinado turista no visitó una bodega, calcula la probabilidad de que fuese catalán.

(Resueltos en la OPCIÓN A)

Parte 2

Responde a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

4ª) Considera la matriz $A = [5 - 3a\ 2 - a\ 2(2 - a)\ 1 - a\ ]$.

a) Determinar los valores de a para los que existe la matriz inversa A^{-1}.

b) Tomando $a =- 2$, determinar una matriz X tal que $4 \cdot A \cdot X = A^t + A^2$.
(Nota: A^t indica la matriz traspuesta de la matriz A)

----

a)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$|A| = |5 - 3a\ 2 - a\ 2(2 - a)\ 1 - a\ | = (5 - 3a)(1 - a) - 2(2 - a)^2 =$

$= 5 - 5a - 3a + 3a^2 - 2\cdot\left(4 - 4a + a^2\right) = 3a^2 - 8a + 5 - 8 + 8a - 2a^2 =$

$= a^2 - 3 = 0 \Rightarrow a_1 =- \sqrt{3},\ a_2 = \sqrt{3}.$

$$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertivle\ \forall a \in R - \left\{- \sqrt{3},\ \sqrt{3}\right\}}.$$

$b)$

Para $a =- 2$ es $A = (-\ 1\ 4\ 8\ 3\ ).$

$4\cdot A\cdot X = A^t + A^2 = M;\ \ 4\cdot A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot M;\ \ 4I\cdot X = A^{-1}\cdot M \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{X = \frac{1}{4}\cdot A^{-1}\cdot M.}$

$M = A^t + A^2 = (-\ 1\ 8\ 4\ 3\ ) + (-\ 1\ 4\ 8\ 3\ )\cdot(-\ 1\ 4\ 8\ 3\ ) = (-\ 1\ 8\ 4\ 3\ ) + (33\ 8\ 16\ 41\ ) =$

$= (32\ 16\ 20\ 44\ ) = 4\cdot(8\ 4\ 5\ 11\ ) = M.$

$|A| = |-\ 1\ 4\ 8\ 3\ | =- 3 - 32 =- 35. \qquad A^t = (-\ 1\ 8\ 4\ 3\ ).$

$Adj.\ de\ A^t = (3\ \ -4\ \ -8\ \ -1\ ). \quad A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} =- \frac{1}{35}\cdot(3\ \ -4\ \ -8\ \ -1\ ).$

Sustituyendo los valores obtenidos de $M\ y\ A^{-1}$ en la expresión de X:

$X = \frac{1}{4}\cdot A^{-1}\cdot M = \frac{1}{4}\cdot\left[- \frac{1}{35}\cdot(3\ \ -4\ \ -8\ \ -1\ )\right]\cdot[4\cdot(8\ 4\ 5\ 11\ )] =- \frac{1}{35}\cdot(4\ \ -32\ \ -69$

.

$$\underline{X = \frac{1}{35}\cdot(-\ 4\ 32\ 69\ 43\ ).}$$

****

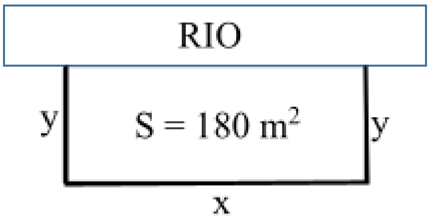
5ª) Deseamos construir un campo rectangular que debe tener un área de 3.200 m^2. Dicho campo está ubicado a lo largo de un río y no es necesario cercar el lado situado a lo largo de la orilla. (Los lados que se deben cercar aparecen con raya gruesa en la figura adjunta).

a) ¿Cuáles habrán de ser las dimensiones del campo para que se necesite el mínimo posible de metros de cerca?

b) Determinar el coste de construcción del cercado si cada metro construido perpendicular al río tiene un coste de 500 euros y cada metro paralelo al río cuesta 400 euros.

----

a)



$$S = x \cdot y = 3.20 \rightarrow y = \frac{3.200}{x}.$$

$$Perímetro = P = x + 2y = x + \frac{6.400}{x} = \frac{x^2+6.400}{x}.$$

Para que el perímetro sea mínimo es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$P'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2+6.400)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 6.400}{x^2} = \frac{x^2-6.400}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 6.400 = 0;$$

$$x = \pm\sqrt{6.400} \Rightarrow x_1 = -80,\ x_2 = 80.$$

Por ser x una longitud, la solución $x = -80$ carece de sentido lógico, por lo cual, la solución es $x = 80$.

$$y = \frac{6.400}{x} = \frac{6.400}{80} = 80.$$

$\underline{El\ lado\ paralelo\ al\ rio\ mide\ 80\ m\ y\ los\ otro\ lados\ miden\ 40\ m.}$

b)

$$Coste = 2 \cdot 40 \cdot 500 + 800 \cdot 400 = 40.000 + 32.000 = 72.000.$$

$\underline{El\ coste\ de\ la\ construcción\ es\ de\ 72.000\ euros.}$

****

6ª) Se conoce como grado de la uva al vendimiar el contenido en azúcares de la misma. Durante la última vendimia en Rioja Alta se ha detectado que el grado de la uva de los viñedos de la zona sigue una distribución normal con una desviación típica de 1,5 grados.

a) Si al tomar una muestra de 64 viñedos se ha obtenido una media de 13 grados, determinar un intervalo de confianza al 85 % para la media del grado alcohólico.

b) ¿Cuál habrá sido el tamaño y la media de una muestra cuyo intervalo de confianza al 90 % para la media del grado alcohólico ha sido $(12,225; 12,775)$.

----

a)

Nivel de confianza del 85 %.

$1 - \alpha = 0,85 \rightarrow \alpha = 1 - 0,85 = 0,15 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,075} = 1,44.$

$(1 - 0,075 = 0,9250 \rightarrow z = 1,44).$

Datos: $\overline{x} = 13;\ n = 64;\ \sigma = 1,5;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,44.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(13 - 1,44 \cdot \frac{1,5}{\sqrt{64}};\ 13 + 1,44 \cdot \frac{1,5}{\sqrt{64}}\right);$

$(13 - 1,44 \cdot 0,1875;\ 13 + 1,44 \cdot 0,1875);\ \ (13 - 0,27;\ 13 + 0,27)$

$$\underline{I.\ C._{85\ \%}\ (12,73;\ 13,27).}$$

b)

$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 1 - 0,90 = 0,10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,05} = 1,645.$

$(1 - 0,05 = 0,9500 \rightarrow z = 1,645).$

La media muestral es: $\overline{x} = \frac{12,775+12,225}{2} = \frac{25}{2} = \underline{12,5}.$

El error máximo es: $E = \frac{12,775-12,225}{2} = \frac{0,55}{2} = 0,275.$

Datos: $\sigma = 1,5;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,645;\ E = 0,275.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1,645 \cdot \frac{1,5}{0,275}\right)^2 =$

$= (1,645 \cdot 5,4545)^2 = 8,9727^2 = 80,51.$

$\underline{La\ media\ es\ 12,5\ gramos\ y\ el\ tamaño\ mínimo\ es\ de\ 81\ viñedos.}$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contesta sólo una de las dos opciones propuestas (OCIÓN A/OPCIÓN B).

OPCIÓN A

Parte 1

Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación.

1ª) Sea $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x + b$, con a un valor real positivo.

a) Determinar a y b sabiendo que la curva $y = f(x)$ pasa por el punto $P(1, 1)$ y la recta tangente en dicho punto tiene pendiente doce.

b) Tomando $a = \frac{1}{3}$ y $b = -\frac{1}{3}$, calcula $\frac{3\cdot f(x)}{x^2-1}$.

----

a)

Por pasar por el punto $P(1, 1) \Rightarrow f(1) = 1$:

$$f(1) = 1^3 - 3a\cdot 1^2 + 3a^2\cdot 1 + b = 1;\ 1 - 3a + 3a^2 + b = 1;$$

$3a^2 - 3a + b = 0.$ (1)

Por tener la recta tangente en dicho punto pendiente doce: $f'(1) = 12$:

$f'(x) = 3x^2 - 6ax + 3a^2.$

$f'(1) = 12 \Rightarrow 3\cdot 1^2 - 6a\cdot 1 + 3a^2 = 12;\ 3a^2 - 6a + 3 = 12;$

$a^2 - 2a - 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \frac{2\pm\sqrt{16}}{2} = \frac{2\pm 4}{2} = 1\pm 2 \Rightarrow a_1 = -1,\ a_2 = 3.$

Sustituyendo en (1) los valores hallados:

$a_1 = -1 \Rightarrow 3\cdot(-1)^2 - 3\cdot(-1) + b = 0;\ b = -3 - 3 \Rightarrow b_1 = -6.$

$a_2 = 3 \Rightarrow 3 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + b = 0; \;\; b = -27 + 9 \Rightarrow b_2 = -18.$

$\underline{Los\ valores\ que\ cumplen\ la\ condición\ pedida\ son\ \{a = -1\ b = -6\}\ y\ \{a = 3\ b = -1}$

.

$b)$

Para $a = \frac{1}{3}$ y $b = -\frac{1}{3}$ la función resulta: $f(x) = x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$.

$$\frac{3 \cdot f(x)}{x^2-1} = \frac{3 \cdot \left(x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)}{x^2-1} = \frac{3x^3-3x^2+x-1}{x^2-1} = \frac{3-3+1-1}{1-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \frac{9x^2-6x+1}{2x} = \frac{9-6+1}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

$$\underline{\frac{3 \cdot f(x)}{x^2-1} = 2.}$$

También se puede resolver el límite descomponiendo factorialmente numerador y denominador en la indeterminación:

	3	-2	1	-1
1		3	0	1
	3	0	1	$\boxed{0}$

$$\frac{3x^3-3x^2+x-1}{x^2-1} = \frac{3-3+1-1}{1-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(3x^2+x)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{3x^2+x}{x+1} = \frac{3+1}{1+1} = \frac{4}{2} = \underline{2}.$$

Como se esperaba, se obtiene la misma solución.

****

2ª) En la sociedad recreativa Los Peleones hay tres quioscos en los que se venden refrescos, bocadillos y bolsas de snacks (patatas fritas, cortezas, cacahuetes, etc.). Todos los productos del mismo tipo tienen un único precio; es decir, todos los refrescos cuestan igual y lo mismo para los bocadillos y las bolsas de snacks. A lo largo de un día de verano la distribución de ventas y los ingresos de los tres quioscos aparecen reflejados en la tabla adjunta.

	Quiosco 1	Quiosco 2	Quiosco 3
Refrescos vendidos	20	12	15
Bocadillos vendidos	40	25	32
Bolsas de snacks vendidas	20	13	24
Ingresos (en euros)	210	131	178

a) Plantea un sistema de ecuaciones que permita determinar el precio de cada uno de los tipos de productos que se venden en los quioscos de la sociedad.

b) Determina el precio de los distintos tipos de productos.

----

a)

Sean $x,\ y,\ z$ los números de refrescos, bocadillos y bolsas que se venden en la sociedad, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$20x + 40y + 20z = 210 \quad 12x + 25y + 13z = 131 \quad 15x + 32y + 24z = 178 \}$$

.

b)

Procediendo por el método de Gauss:

$$M' = (2\ 4\ 2\ 12\ 25\ 13\ 15\ 32\ 24 \quad 21\ 131\ 178\ ) \Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow \tfrac{1}{2}F_1\right\} \Rightarrow (1\ 2\ 1\ 12\ 25\ 13\ 15\ 32\ 24$$

$$\Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow F_2 - 12F_1\ F_3 \rightarrow F_3 - 15F_1\right\} \Rightarrow (1\ 2\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 2\ 9 \quad 10,5\ 5\ 20,5\ ) \Rightarrow \left\{F_3 \rightarrow F_3 -\right.$$

$$\Rightarrow (1\ 2\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 7 \quad 10,5\ 5\ 10,5\ ) \Rightarrow 7z = 10,5;\ \ z = \frac{10,5}{7} = 1,5.$$

$$y + z = 5;\ \ y + 1,5 = 5;\ \ y = 5 - 1,5 = 3,5.$$

$$x + 2y + z = 10,5;\ \ x + 7 + 1,5 = 10,5;\ \ x = 2.$$

$\underline{Un\ refresco\ cuesta\ 2\ euros;\ un\ bocadillo,\ 3,5\ euros\ y\ una\ bolsa,\ 1,5\ euros.}$

****

3ª) El peso de las peras de una cosecha en Rincón de Soto sigue una distribución normal con una desviación típica de 25 gramos.

a) Supongamos que tomamos una muestra de 121 peras y obtenemos un peso medio de 150 gramos, determinar un intervalo de confianza al 90 % para la media del peso.

b) ¿Cuál habrá sido el tamaño y la media de una muestra si el intervalo de confianza al 85 % obtenido para la media del peso es $(156,4;\ 163,6)$?

----

a)

$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 1 - 0,90 = 0,10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,05} = 1,645.$$

$$(1 - 0,05 = 0,9500 \rightarrow z = 1,645).$$

Datos: $\overline{x} = 150;\ n = 121;\ \sigma = 25;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,645.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(150 - 1'645 \cdot \frac{25}{\sqrt{121}};\ 150 + 1'645 \cdot \frac{25}{\sqrt{121}}\right);$$

$$\left(150 - 1'645 \cdot 2,2727;\ 150 + 1'645 \cdot 0,2727\right);\ (150 - 3,7386;\ 150 + 3,7386);$$

$$\underline{I.\ C._{90\ \%}\ (146'2614;\ 153'7386).}$$

b)

$$1 - \alpha = 0,85 \rightarrow \alpha = 1 - 0,85 = 0,15 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,075} = 1,44.$$

$$(1 - 0,075 = 0,9250 \rightarrow z = 1,44).$$

La media muestral es: $\overline{x} = \frac{163,6+156,4}{2} = \frac{320}{2} = \underline{160}.$

El error máximo es: $E = \frac{163,6-156,4}{2} = \frac{7,2}{2} = 3,6.$

Datos: $n = 121;\ \sigma = 25;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,44;\ E = 3,6.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1,44 \cdot \frac{25}{3,6}\right)^2 =$

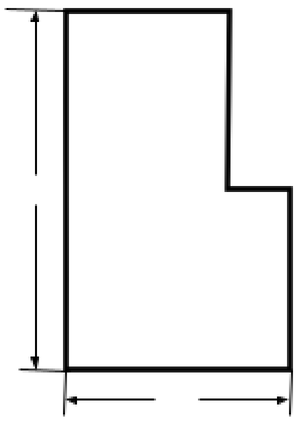
$= (1,44 \cdot 6,944)^2 = 10^2 = 100.$

$\underline{La\ media\ es\ 160\ gramos\ y\ el\ tamaño\ mínimo\ es\ de\ 100\ peras.}$

****

Parte 2

Responde a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.



4ª) Sobre dos muros formando un ángulo recto de longitudes respectivas 1 y 3 metros vamos a construir una casa con una planta como la de la figura. Responde a las siguientes cuestiones:

a) Si queremos que la planta tenga un área de 22 metros cuadrados, determinar los valores de x e y para que el número de metros de muro que debemos construir sea mínimo.

b) Si deseamos cerrar la planta construyendo 36 metros de muro, determinar los valores de x e y para que el área de la planta sea máxima.

----

a)

$$S = x \cdot y - 3 \cdot 1 = 22;\ \ y = \frac{22+3}{x} = \frac{25}{x}.$$

La longitud del muro es: $L = x + y \Rightarrow L(x) = x + \frac{25}{x} = \frac{x^2+25}{x}.$

Para que la longitud del muro sea mínima es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$L'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2+25) \cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 25}{x^2} = \frac{x^2-25}{x^2}.$$

$$L'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2-25}{x^2} = 0;\ \ x^2 - 25 = 0 \Rightarrow x_1 = -5,\ x_2 = 5.$$

La solución negativa carece de sentido; la solución es $x = 5$.

$$y = \frac{25}{x} \Rightarrow y = \frac{25}{5} = 5.$$

$\underline{La\ longitud\ el\ muro\ es\ mínima\ para\ x = y = 5\ metros.}$

b)

$$L = x + y = 36 \Rightarrow y = 36 - x.$$

$S(x, y) = x \cdot y - 3 \cdot 1 \Rightarrow S(x) = x \cdot (36 - x) - 3 = - x^2 + 36x - 3.$

Para que la superficie de la planta sea máxima es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$S'(x) = - 2x + 36.$

$S'(x) = 0 \Rightarrow - 2x + 36 = 0; \ - x + 18 = 0 \Rightarrow x = 18.$

$y = 36 - x \Rightarrow y = 36 - 18 = 18.$

$\underline{La\ superfice\ de\ la\ planta\ es\ máxima\ para\ x = y = 18\ metros.}$

****

5ª) Consideramos la matriz $A = (2a - 5\ a - 2\ 4 - a\ 1\ )$.

a) Determinar los valores de a para los que existe la matriz inversa A^{-1}.

b) Tomando $a =- 1$, determinar una matriz X tal que $A \cdot X = A^{t} - A + 8 \cdot I_{2}$.

Nota: A^{t} indica la matriz traspuesta de A e I_{2} la matriz identidad de orden dos.

----

a)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = |2a - 5\ a - 2\ 4 - a\ 1\ | = 2a - 5 - (4 - a)(a - 2) =$$

$$= 2a - 5 - \left(4a - 8 - a^{2} + 2a\right) = 2a - 5 - 6a + a^{2} + 8 = a^{2} - 4a + 3 = 0;$$

$$a = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 \Rightarrow a_{1} = 1,\ a_{2} = 3.$$

$$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall a \in R - \{1,\ 3\}}.$$

b)

Para $a =- 1$ es $A = (-\ 7\ \ -\ 3\ 5\ 1\ )$.

$|A| = |-\ 7\ \ -\ 3\ 5\ 1\ | =- 7 + 15 = 8$.

$A^{t} = (-\ 7\ 5\ \ -\ 3\ 1\ )$. $\quad Adj.\ de\ A^{t} = (1\ 3\ \ -\ 5\ \ -\ 7\ )$.

$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^{t}}{|A|} = \frac{1}{8} \cdot (1\ 3\ \ -\ 5\ \ -\ 7\ )$.

$$A \cdot X = A^{t} - A + 8 \cdot I_{2} = M;\ \ A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot M;\ \ 1 \cdot X = A^{-1} \cdot M \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot M}$.

$M = A^{t} - A + 8 \cdot I_{2} = (-\ 7\ 5\ \ -\ 3\ 1\ ) - (-\ 7\ \ -\ 3\ 5\ 1\ ) + (8\ 0\ 0\ 8\ ) = (8\ 8\ \ -\ 8\ 8\ )$
.

Sustituyendo en el valor de X los valores de A^{-1} $y\ M$:

$$X = A^{-1} \cdot M = \frac{1}{8} \cdot (1\ 3\ \ -\ 5\ \ -\ 7\ ) \cdot (8\ 8\ \ -\ 8\ 8\ ) = (1\ 3\ \ -\ 5\ \ -\ 7\ ) \cdot (1\ 1\ \ -\ 1\ 1\ ) =$$

$= (-\ 2\ 4\ 2\ \ -\ 12\ ).$

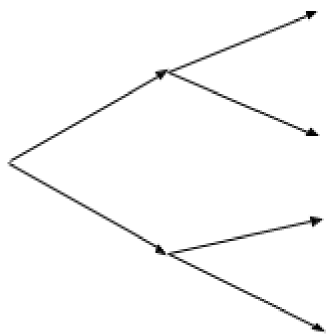
$$\underline{X = (-\ 2\ 4\ 2\ \ -\ 12\ )}.$$

****

6ª) Nuestro amigo José, reciente ganador de un concurso local de tortillas, elabora la tortilla de su bar usando patatas y huevos. Un 80 % de las tortillas las hace exclusivamente con patatas de Santo Domingo de la Calzada y el resto con patatas de otras zonas. Cuando emplea patatas de Santo Domingo de la Calzada, en el 60 % de los casos pone únicamente huevos de gallinas camperas y en el 40 % restante utiliza huevos de granja avícola. Cuando la patata no es de Sango Domingo invierte los porcentajes a la hora de añadir los huevos.

a) Cuando tomamos un pincho en el bar de José, ¿cuál es la probabilidad de que esté hecho con huevos de gallina campera?

b) Si la tortilla está hecha con huevos camperos, ¿cuál es la probabilidad de que lleve patatas de Santo Domingo?



a)

$$P = P(GC) = P(SD) \cdot P(GC/SD) + P(OZ) \cdot P(GC/OZ) =$$

$$= 0,8 \cdot 0,6 + 0,2 \cdot 0,4 = 0,48 + 0,08 = \underline{0,56}.$$

b)

$$P = P(SD/GC) = \frac{P(SD \cap GC)}{P(GC)} = \frac{P(SD) \cdot P(GC/SD)}{P(SD) \cdot P(GC/SD) + P(OZ) \cdot P(GC/OZ)} =$$

$$= \frac{0,8 \cdot 0,6}{0,8 \cdot 0,6 + 0,2 \cdot 0,4} = \frac{0,48}{0,48 + 0,08} = \frac{0,48}{0,56} = \underline{0,8571}.$$

****

OPCIÓN B

Parte 1

Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación.

1ª) Sea $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x + b$, con a un valor real positivo.

a) Determinar a y b sabiendo que la curva $y = f(x)$ pasa por el punto $P(1, 1)$ y la recta tangente en dicho punto tiene pendiente doce.

b) Tomando $a = \frac{1}{3}$ y $b =- \frac{1}{3}$, calcula $\frac{3 \cdot f(x)}{x^2 - 1}$.

2ª) En la sociedad recreativa Los Peleones hay tres quioscos en los que se venden refrescos, bocadillos y bolsas de snacks (patatas fritas, cortezas, cacahuetes, etc.). Todos los productos del mismo tipo tienen un único precio; es decir, todos los refrescos cuestan igual y lo mismo para los bocadillos y las bolsas de snacks. A lo largo de un día de verano la distribución de ventas y los ingresos de los tres quioscos aparecen reflejados en la tabla adjunta.

	Quiosco 1	Quiosco 2	Quiosco 3
Refrescos vendidos	20	12	15
Bocadillos vendidos	40	25	32
Bolsas de snacks vendidas	20	13	24
Ingresos (en euros)	210	131	178

a) Plantea un sistema de ecuaciones que permita determinar el precio de cada uno de los tipos de productos que se venden en los quioscos de la sociedad.

b) Determina el precio de los distintos tipos de productos.

3ª) El peso de las peras de una cosecha en Rincón de Soto sigue una distribución normal con una desviación típica de 25 gramos.

a) Supongamos que tomamos una muestra de 121 peras y obtenemos un peso medio de 150 gramos, determinar un intervalo de confianza al 90 % para la media del peso.

b) ¿Cuál habrá sido el tamaño y la media de una muestra se el intervalo de confianza al 85 % obtenido para la media del peso es $(156, 4;\ 163, 6)$?

(Resueltos en la OPCIÓN A)

Parte 2

Responde a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

4ª) Sea la función $f(x) = \frac{x}{2-x}$.

a) Determinar las asíntotas de la función dada.

b) Calcular la integral definida $I = \int_0^2 (2 - x)\cdot[f(x) - x]\cdot dx$.

----

a)

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = f(x) = \frac{x}{2-x} = -1 \Rightarrow \underline{Asíntota\ horizontal: y = -1}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{Asíntota\ vertical: x = 2}.$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

b)

$$I = \int_0^2 (2 - x)\cdot[f(x) - x]\cdot dx = \int_0^2 (2 - x)\cdot\left(\frac{x}{2-x} - x\right)\cdot dx =$$

$$= \int_0^2 (2 - x)\cdot\frac{x-2x+x^2}{2-x}\cdot dx = \int_0^2 \left(x^2 - x\right)\cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \left(\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2}\right) - 0 =$$

$$= \frac{8}{3} - 2 = \frac{8-6}{3} = \frac{2}{3}.$$

$$\underline{I = \int_0^2 (2 - x)\cdot[f(x) - x]\cdot dx = \frac{2}{3}}.$$

****

5ª) Los productores de las películas James Bond ya se ha puesto a trabajar en la próxima entrega de la saga. Han decidido hacer una planificación de las secuencias de acción y de las persecuciones que introducirán en la nueva película y se han puesto las siguientes limitaciones:

1 La película debe contener al menos una persecución y dos escenas de acción.

2 El número de persecuciones debe ser menor o igual que el doble de las escenas de acción.

3 La suma de persecuciones y escenas de acción debe ser menor o igual que nueve.

Ayuda a los productores y resuelve las siguientes cuestiones:

a) Plantea el conjunto de restricciones y dibuja la región factible asociada a ellas.

b) Si cada escena de acción aporta 0,8 millones de espectadores a la película y cada persecución 1,2 millones, ¿cuál debe ser la distribución de persecuciones y escenas de acción para maximizar el número de espectadores que verán la película?

----

a)

Sean x e y el número de persecuciones y escenas de acción, respectivamente.

Las restricciones del ejercicio son: $x \geq 1;\ y \geq 2 \qquad x \leq 2y \quad x + y \leq 9\,\}$.

La región factible se indica sombrada en la figura adjunta.

x	0	8
y	0	4

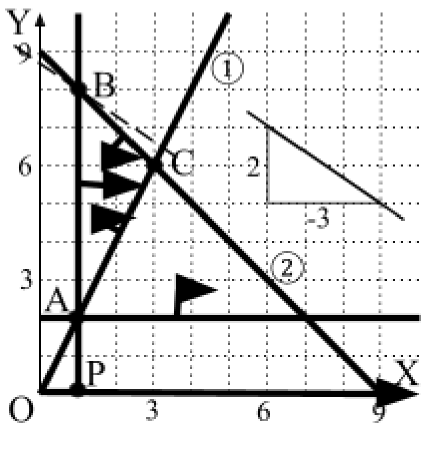
①$\Rightarrow x \leq 2y \Rightarrow y \geq \frac{x}{2} \Rightarrow P(1,\ 0) \rightarrow No.$

x	9	0
y	0	9

②$\Rightarrow x + y \leq 9 \Rightarrow y = 9 - x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

b)

Los vértices de la zona factible son los siguientes:



$A \Rightarrow\ x = 1\ x = 2y\,\} \Rightarrow A(1,\ 2).$

$B \Rightarrow\ x = 1\ x + y = 9\,\} \Rightarrow B(1,\ 8).$

$C \Rightarrow\ x = 2y\ x + y = 9\,\} \Rightarrow C(3,\ 6).$

La función de objetivos es la siguiente:

$f(x,\ y) = 0,8x + 1,2y.$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(1,\ 2) = 0,8 \cdot 1 + 1,2 \cdot 2 = 0,8 + 2,4 = 3,2.$

$B \Rightarrow f(1,\ 8) = 0,8 \cdot 1 + 1,2 \cdot 8 = 0,8 + 9,6 = 10,4.$

$C \Rightarrow f(3,\ 6) = 0,8 \cdot 3 + 1,2 \cdot 6 = 2,4 + 7,2 = 9,6.$

El máximo se produce en el punto B.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

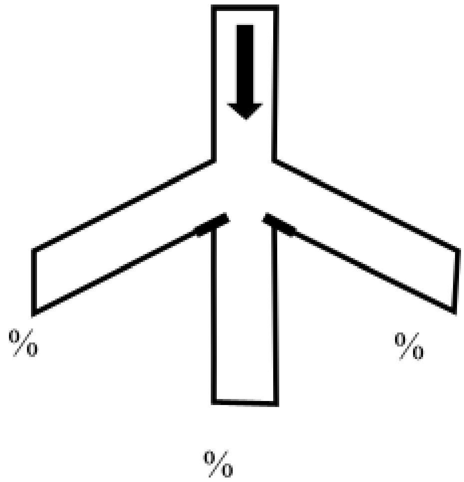
$$f(x,\ y) = 0,8x + 1,2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{0,8}{1,2}x = -\frac{8}{12}x = -\frac{2}{3}x \Rightarrow m = -\frac{2}{3}.$$

$\underline{\textit{El nº de espectadores es máximo con una persecución y } 8 \textit{ escenas de acción.}}$

$\underline{\textit{Verán la película } 10,4 \textit{ millones de espectadores.}}$

****

6ª) En un dispositivo como el de la figura adjunta, una canica que se lanza desde el punto O sale por A con una probabilidad del 30 %, por B con una probabilidad del 50 % y por C con una probabilidad del 20 %. Tras tres lanzamientos, calcular:



a) La probabilidad de que la canica haya salido por C en algún lanzamiento.

b) La probabilidad de que en los tres lanzamientos la canica haya salido por agujeros distintos.

----

a)

Que la canica haya salido por C en alguno de los tres lanzamientos es el suceso contrario a que no haya salido en ninguno de los tres lanzamientos.

$$P = 1 - P(\overline{C}, \overline{C}, \overline{C}) = 1 - 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 = 1 - 0,512 = \underline{0,488}.$$

b)

$$P = P(A, \overline{B}, \overline{C}) + P(\overline{A}, B, \overline{C}) + P(\overline{A}, \overline{B}, C) =$$

$$= 0,3 \cdot 0,5 \cdot 0,8 + 0,7 \cdot 0,5 \cdot 0,8 + 0,7 \cdot 0,5 \cdot 0,2 = 0,120 + 0,280 + 0,070 =$$

$$= \underline{0,470}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE MADRID

JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger uno de las dos opciones propuestas y responder a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.

OPCIÓN A

1º) Considérense las matrices $A = (1\ 2\ -k\ 1\ -2\ 1\ k\ 2\ -1)\ y\ B = (1\ 1\ 1\ 0\ 2\ 2\ 0\ 0\ 3)$.

$a)$ Discútase para qué valores del parámetro real k la matriz A tiene matriz inversa.

$b)$ Determínese para $k = 0$ la matriz X que verifica la ecuación $A \cdot X = B$.

$a)$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$|A| = |1\ 2\ -k\ 1\ -2\ 1\ k\ 2\ -1| = 2 - 2k + 2k - 2k^2 - 2 + 2 = 0;\ 2 - 2k^2 = 0$

$1 - k^2 = 0 \Rightarrow k_1 = -1,\ k_2 = 1.$

$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertibla\ \forall k \in R - \{-1,\ 1\}}.$

$b)$

Para $k = 0$ es $A = (1\ 2\ 0\ 1\ -2\ 1\ 0\ 2\ -1)$.

$A \cdot X = B;\ A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B;\ I \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot B}.$

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1) \Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 - F_1\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (1\ 0\ 0\ \ -1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow -\frac{1}{4}F_2\right\} \Rightarrow \left(1\ 0\ 0\ \frac{1}{4}\ \ -\frac{1}{4}\ 0\ 0\ 0\ 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow F_1 - 2F_2\ F_3 \rightarrow F_3 - 2F_3\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{4}\ \ -\frac{1}{4}\ 0\ \ -\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 1\right) \Rightarrow \left\{F_3 \rightarrow -\ 2F_3\right\}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{4}\ \ -\frac{1}{4}\ 0\ 1\ \ -1\ \ -2\right) \Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow F_1 - \frac{1}{2}F_3\ F_2 \rightarrow F_2 + \frac{1}{4}F_3\right\} \Rightarrow \left(0\ 1\ 1\ \frac{1}{2}\right.$$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \left(0\ 1\ 1\ \frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\ 1\ \ -1\ \ -2\right).$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \left(0\ 1\ 1\ \frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\ 1\ \ -1\ \ -2\right) \cdot (1\ 1\ 1\ 0\ 2\ 2\ 0\ 0\ 3\ ) = \left(0\ 2\ 5\ \frac{1}{2}\right.$$

.

$$\underline{X = \left(0\ 2\ 5\ \frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\ \ -2\ 1\ \ -1\ \ -7\right)}.$$

****

2º) Considérese la región del plano S definida por:

$$S = \left\{(x,\ y) \in R^2:\ x + 6y \geq 6;\ 5x - 2y \geq -2;\ x + 3y \leq 20;\ 2x - y \leq 12\right\}.$$

a) Represéntese gráficamente la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Determínense los puntos en los que la función $f(x) = 4x - 3y$ alcanza sus valores máximo y mínimo en S, indicando el valor de $f(x,\ y)$ en dichos puntos.

----

a)

La región factible se indica en la figura:

x	0	6
y	1	0

①$\Rightarrow x + 6y \geq 6 \Rightarrow y \geq \frac{6-x}{6} \Rightarrow O(0,\ 0) \to No.$

x	0	2
y	1	6

②$\Rightarrow 5x - 2y \geq -2 \Rightarrow y \leq \frac{5x+2}{2} \Rightarrow O(0,\ 0) \to Si.$

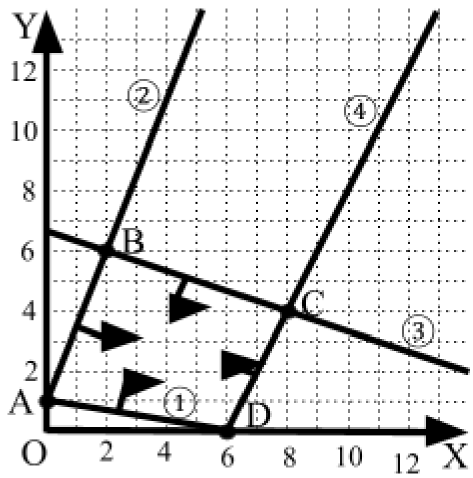
x	2	11
y	6	3

③$\Rightarrow x + 3y \leq 20 \Rightarrow y \leq \frac{20-x}{3} \Rightarrow O(0,\ 0) \to Si.$

x	6	8
y	0	4

④$\Rightarrow 2x - y \leq 12 \Rightarrow y \geq 2x - 12 \Rightarrow O(0,\ 0) \to Si.$

Los vértices de la zona factible son:



$A \Rightarrow \left.\begin{matrix} x + 6y = 6 \\ 5x - 2y = -2 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} x + 6y = 6 \\ 15x - 6y = -6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 16x = 0;\ \ x = 0 \Rightarrow \underline{A(0,\ 1)}.$

$B \Rightarrow 5x - 2y =- 2 \quad x + 3y = 20 \} \; 15x - 6y =- 6 \quad 2x + 6y = 40 \} \Rightarrow$

$\Rightarrow 17x = 34; \; x = 2 \Rightarrow \underline{B(2,\, 6)}$.

$C \Rightarrow x + 3y = 20 \; 2x - y = 12 \} \quad 2x + 6y = 40 \; - 2x + y =- 12 \} \Rightarrow 7y = 28$

.

$D \Rightarrow \; x + 6y = 6 \; 2x - y = 12 \} \; 2x + 12y = 12 \; - 2x + y =- 12 \} \Rightarrow 13y = 0$

.

$b)$

La función de objetivos es $f(x) = 4x - 3y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\, 1) = 4 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = 0 - 3 =- 3$.

$B \Rightarrow f(2,\, 6) = 4 \cdot 2 - 3 \cdot 6 = 8 - 18 =- 10$.

$C \Rightarrow f(8,\, 4) = 4 \cdot 8 - 3 \cdot 4 = 32 - 12 = 20$.

$D \Rightarrow f(6,\, 0) = 4 \cdot 6 - 3 \cdot 0 = 24 - 0 = 24$.

$\underline{El\ máximo\ se\ procuce\ en\ el\ punto\ D(6,\, 0)\ y\ el\ minimo\ en\ el\ punto\ B(2,\, 6)}$.

$\underline{El\ valor\ máximo\ es\ 24\ y\ el\ valor\ mínimo\ es\ - 10}$.

****

3º) a) Determínese el valor de la derivada de la función $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$ en el punto de abscisa $x = 0$.

b) Estúdiense las asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$.

----

a)

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot (1+x) - e^x \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{e^x + x \cdot e^x - e^x}{(1+x)^2} = \frac{x \cdot e^x}{(1+x)^2}.$$

$$f'(0) = \frac{0 \cdot e^0}{(1+0)^2} = \frac{0}{1} = 0.$$

$$\underline{f'(0) = 0.}$$

b) Estúdiense las asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$.

Horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores que toma la función cuando la variable tiende a más infinito y menos infinito.

$$y = k = g(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4x + 4} = \infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ síntotas\ horizontales}.$$

Verticales: Son los valores finitos de x que anulan el denominador.

$$1 - x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1.$$

$$\underline{Son\ asíntotas\ verticales\ las\ rectas\ x = -1\ y\ x = 1}.$$

Oblicuas: Son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$m = \frac{f(x)}{x}$ y $n = [f(x) - mx]$, con m finito y $m \neq 0$.

$$m = \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{x^3}{1-x^2}}{x} = \frac{x^3}{x - x^3} = -1.$$

$$n = [f(x) - mx] = \left(\frac{x^3}{1-x^2} + 1 \cdot x\right) = \frac{x^3 + x - x^3}{1-x^2} = 0.$$

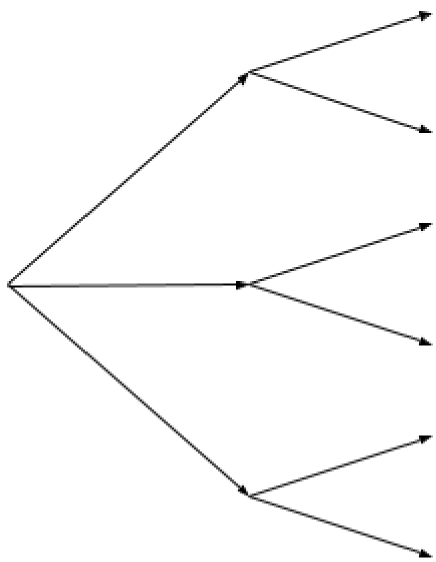
$$\underline{Asíntota\ oblicua:\ y = -x}.$$

****

4º) Una empresa de reparto de paquetería clasifica sus furgonetas en función de su antigüedad. El 25 % de sus furgonetas tiene menos de dos años de antigüedad, el 40 % tiene una antigüedad entre dos y cuatro años y el resto tiene una antigüedad superior a cuatro años. La probabilidad de que una furgoneta se estropee es 0,01 si tiene una antigüedad inferior a dos años; 0,05 si tiene una antigüedad entre dos y cuatro años y 0,12 si tiene una antigüedad superior a cuatro años. Se escoge una furgoneta al azar de esta empresa. Calcúlese la probabilidad de que la furgoneta escogida:

$a)$ Se estropee.

$b)$ Tenga una antigüedad superior a cuatro años sabiendo que no se ha estropeado.



$a)$

$$P = P(E) = P(<2) \cdot P(<2) + P(2 < A < 4) \cdot P(2 < A < 4) +$$

$$+ P(>4) \cdot P(>4) = 0,25 \cdot 0,01 + 0,40 \cdot 0,05 + 0,35 \cdot 0,12 =$$

$$= 0,0025 + 0,0200 + 0,0420 = \underline{0,0645}.$$

$b)$

$$P = P(>4/\overline{E}) = \frac{P(>4 \cap \overline{E})}{P(\overline{E})} =$$

$$\frac{P(>4) \cdot P(\overline{E}/>4)}{P(<2) \cdot P(\overline{E}<24) + P(2<A<4) \cdot P\left(\frac{\overline{E}}{2}<A<4\right) + P(>4) \cdot P(\overline{E}/>4)} = \frac{0,35 \cdot 0,88}{0,25 \cdot 0,99 + 0,40 \cdot 0,95 + 0,35 \cdot 0,88} =$$

$$= \frac{0,3080}{0,2475 + 0,3800 + 0,3080} = \frac{0,3080}{0,9355} = \underline{0,3292}.$$

****

5º) El peso en canal, en kilogramos (kg), de una raza de corderos a las seis semanas de su nacimiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 0,9 kg.

a) Se tomó una muestra aleatoria simple de 324 corderos y el peso medio observado fue $\overline{x} = 7,8$ kg. Obténgase un intervalo de confianza con un nivel del 99,2 % para μ.

b) Determínese el tamaño mínimo que debería tener una muestra aleatoria simple de la variable para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 95 % tenga una amplitud a lo sumo de 0,2 kg.

----

a)

$1 - \alpha = 0,992 \to \alpha = 1 - 0,992 = 0,008 \to z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,004} = 2,65.$

$(1 - 0,004 = 0,9960 \to z = 2,65).$

Datos: $\overline{x} = 7,8;\ \ n = 324;\ \ \sigma = 0,9;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,65.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(7,8 - 2,65 \cdot \frac{0,9}{\sqrt{324}};\ 7,8 + 2,65 \cdot \frac{0,9}{\sqrt{324}}\right);\ (7,8 - 2,65 \cdot 0,05;\ 7,8 + 2,65 \cdot 0,05);$

$(7,8 - 0,1325;\ 7,8 + 0,1325).$

$$\underline{I.\ C._{99,2\ \%}\ (7,6675;\ 7,9325).}$$

b)

$1 - \alpha = 0,95 \to \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \to z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$

$(1 - 0,025 = 0,9750 \to z = 1,96).$

$E = \frac{0,2}{2} = 0,1.$

Datos: $\sigma = 0,9;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96;\ \ E = 0,1.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1,96 \cdot \frac{0,9}{0,1}\right)^2 =$

$= (1,96 \cdot 9)^2 = 17,64^2 = 311,17.$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 312\ corderos.}$

****

<u>OPCIÓN B</u>

1º) Considérese el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x - ay + 2z = 0 \\ ax - 4y - 4z = 0 \\ (2 - a)x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$, dependiente del parámetro real a:

a) Discútase en función de los valores del parámetro a.

b) Resuélvase para $a = 3$.

----

a)

Por tratarse de un sistema homogéneo, las matrices de coeficientes y ampliada, a efectos de rango, son equivalentes.

La matriz de coeficientes es $M = \begin{pmatrix} 1 & -a & 2 \\ a & -4 & -4 \\ 2-a & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -a & 2 \\ a & -4 & -4 \\ 2-a & 3 & -2 \end{vmatrix} = 8 + 6a + 4a(2 - a) + 8(2 - a)$$

$$= 20 + 6a + 8a - 4a^2 + 16 - 8a - 2a^2 = -6a^2 + 6a + 36 = 0;$$

$$a^2 - a - 6 = 0;\ \ a = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow a_1 = -2,\ a_2 = 3.$$

$$\underline{Para\ \begin{cases} a \neq -2 \\ a \neq 3 \end{cases} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$$

$(Se\ trata\ de\ la\ solución\ trivial\ x = y = z = 0)$

$$Para\ a = -2 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & -4 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M = 2$$

$$Para\ a = 3 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & -4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M = 2$$

.

$$\underline{Para\ \begin{cases} a = -2 \\ a = 3 \end{cases} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$$

b)

Para $a = 3$ el sistema resulta:

$\{x - 3y + 2z = 0 \quad 3x - 4y - 4z = 0 \quad -x + 3y - 2z = 0$, que es compatible indeterminado, equivalente al sistema $\{x - 3y + 2z = 0 \quad 3x - 4y - 4z = 0$. Haciendo $z = \lambda$:

$x - 3y = -2\lambda \; 3x - 4y = 4\lambda \} \quad -3x + 9y = 6\lambda \quad 3x - 4y = 4\lambda \} \Rightarrow 5y = 10\lambda; \; y =$
.

$x = -2\lambda + 3y = -2\lambda + 6\lambda = 4\lambda.$

$\underline{Solución: x = 4\lambda, \; y = 2\lambda, \; z = \lambda, \; \forall\lambda \in R}.$

****

2º) Considérese la función real de variable real $f(x) = x^3 - 3x$.

a) Calcúlense $\frac{f(x)}{1-x^3}$ y $\frac{f(x)}{x}$.

b) Estúdiense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

----

a)

$$\frac{f(x)}{1-x^3} = \frac{x^3-3x}{1-x^3} = \frac{\frac{x^3-3x}{x^3}}{\frac{1-x^3}{x^3}} = \frac{1-\frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x^3}-1} = \frac{1-\frac{3}{\infty}}{\frac{1}{-\infty}-1} = \frac{1-0}{-0-1} = \underline{-\ 1}.$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^3-3x}{x} = \left(x^2 - 3\right) = 0 - 3 = \underline{-\ 3}.$$

b)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3\left(x^2 - 1\right).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3\left(x^2 - 1\right) = 0;\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1.$$

Los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función son los siguientes:

$$\underline{f(x)\ creciente\colon\ f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)}.$$

$$\underline{f(x)\ decreciente\colon\ f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-1, 1)}.$$

****

3º) Se considera la función real de variable real: $f(x)=\{\frac{2}{x+2}\ si\ x\leq 0\ x+2\ si\ x>0$.

a) Estúdiese la continuidad de $f(x)$ en R.

b) Calcúlese $I=\int_{-1}^{0} f(x)\cdot dx$.

----

a)

La función no está definida para $x=-2$ y su continuidad es dudosa para $x=0$ que se estudia a continuación.

Para que la función $f(x)$ sea continua en $x=0$ es necesario que sus límites laterales en ese punto sean iguales e iguales al valor de la función.

$$f(x)=\frac{2}{x+2}=\frac{2}{2}=1=f(0)\ f(x)=(x+2)=2\quad\}\Rightarrow f(x)\neq f(x)$$

.

<u>$La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ R-\{-2,\ 0\}$.</u>

b)

$$I=\int_{-1}^{0} f(x)\cdot dx=\int_{-1}^{0}\frac{2}{x+2}\cdot dx\Rightarrow\{x=0\rightarrow t=2\ x=-1\rightarrow t=1\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\int_{1}^{2}\frac{1}{t}\cdot dt=2\cdot[Lt]_1^2=2\cdot(L2-L1)=2L2.$$

$$\underline{I=\int_{-1}^{0} f(x)\cdot dx=2L2.}$$

****

4º) El 30 % de los individuos de una determinada población son jóvenes. Si una persona es joven, la probabilidad de que lea la prensa al menos una vez por semana es 0,20. Si una persona lee prensa al menos una vez por semana, la probabilidad de que no sea joven es 0,9. Se escoge una persona al azar. Calcúlese la probabilidad de que esa persona:

a) No lea prensa al menos una vez por semana.

b) No lea prensa al menos una vez por semana o no sea joven.

$P(J) = 0,3 \Rightarrow P(\overline{J}) = 0,7. \qquad P(L/J) = 0,2. \quad P(\overline{J}/L) = 0,9.$

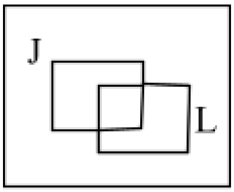
$Leer\ la\ prensa \rightarrow L. \qquad No\ leer\ la\ prensa \rightarrow \overline{L}.$

a)

La probabilidad pedida es: $P(\overline{L})$.

Del dato $P(L/J)$:

$P(L/J) = \frac{P(L \cap J)}{P(J)} \Rightarrow P(L \cap J) = P(J) \cdot P(L/J) =$



$= 0,3 \cdot 0,2 = 0,06.$

Del dato $P(\overline{J}/L)$:

$P(\overline{J}/L) = \frac{P(\overline{J} \cap L)}{P(L)} = \frac{P(L) - P(L \cap J)}{P(L)} \Rightarrow 0,9 = \frac{P(L) - 0,06}{P(L)}; \;\; 0,9 \cdot P(L) = P(L) - 0,06;$

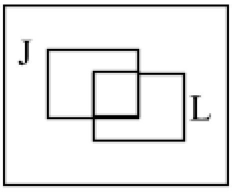
$0,06 = P(L) - 0,9 \cdot P(L) = 0,1 \cdot P(L); \;\; P(L) = \frac{0,06}{0,1} = 0,6.$

$P(\overline{L}) = 1 - P(L) = 1 - 0,6 = 0,4.$

$\underline{La\ probabilidad\ de\ que\ la\ persona\ no\ lea\ prensa\ es\ 0,4}.$

b)

$P = P(\overline{L} \cap \overline{J}) = 1 - P(L \cap J)$



$P = 1 - 0,06 = \underline{0,94}.$

****

5º) El peso en toneladas (T) de los contenedores de un barco de carga se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica $\sigma = 3$T. Se toma una muestra aleatoria simple de 484 contenedores:

$a)$ Si la media de la muestra es $\overline{x} = 25,9$ T, obténgase un intervalo de confianza con un nivel del 99 % para μ.

$b)$ Supóngase ahora que $\mu = 23$ T. Calcúlese la probabilidad de que puedan transportarse en un barco cuya capacidad máxima es de 11.000 T.

$a)$

Nivel de confianza del 99 %.

$\alpha = 1 - 0,99 = 0,01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,005} = 2,578.$

$(1 - 0,0050 = 0,9950 \rightarrow z = 2,578).$

Conocemos: $n = 484;\ \overline{x} = 25,9;\ \sigma = 3;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,578.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(25,9 - 2,578 \cdot \frac{3}{\sqrt{484}};\ 25,9 + 2,578 \cdot \frac{3}{\sqrt{484}}\right);$$

$(25,9 - 2,578 \cdot 0,1364;\ 25,9 + 2,578 \cdot 0,1364);$

$(25,9 - 0,3515;\ 25,9 + 0,3515);$

$$\underline{I.\ C._{99\ \%} = (25,5485;\ 26,2515).}$$

$b)$

Datos: $\mu = 23;\ \sigma = 3;\ n = 484;\ \overline{x} = \frac{11.000}{484} = 22,727.$

$$\overline{X} = N\left(\mu;\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(23;\ \frac{3}{\sqrt{484}}\right) = N(23; 0,136)$$

$$P(X \le 22,727) = P\left(\frac{X-23}{0,136} \le \frac{22,727-23}{0,136}\right) = P\left(Z \le \frac{-0,273}{0,136}\right) = P(Z \le -2) =$$

$= 1 - P(Z \le 2) = 1 - 0,9772 = \underline{0,0228}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE MADRID

SEPTIEMBRE – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger uno de las dos opciones propuestas y responder a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.

OPCIÓN A

1º) Se considera el sistema lineal de ecuaciones $\{x - 2y - z = -2 \quad -2x - az = 2 \quad y + az = -2$ dependiente del parámetro real a.

a) Discútase en función de los valores del parámetro a.

b) Resuélvase para $a = 4$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = (1 \ -2 \ -1 \ -2 \ 0 \ -a \ 0 \ 1 \ a)$ y $M' = (1 \ -2 \ -1 \ -2 \ 0 \ -a \ 0 \ 1 \ a \quad -2 \ 2 \ -2)$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$|M| = |1 \ -2 \ -1 \ -2 \ 0 \ -a \ 0 \ 1 \ a| = 2 + a - 4a = 0; \ 2 - 3a = 0 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$

.

$\underline{Para\ a \neq \frac{2}{2} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

$Para\ a = \frac{2}{3} \Rightarrow M' = \left(1 \ -2 \ -1 \ -2 \ 0 \ -\frac{2}{3} \ 0 \ 1 \ \frac{2}{3} \quad -2 \ 2 \ -2\right)$. A efectos de rango, la matriz M' es equivalente a $M'' = (1 \ -2 \ -1 \ -6 \ 0 \ -2 \ 0 \ 3 \ 2 \quad -2 \ 6 \ -6) \Rightarrow Rang\ M'' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |1 \ -2 \ -2 \ -6 \ 0 \ 6 \ 0 \ 3 \ -6| = 36 - 18 + 72 = 80 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M'' = Rang\ M' =$

.

$$\underline{Para\ a = \frac{2}{3} \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$b)$

Para $a = 4$ el sistema resulta: $x - 2y - z = -2 \quad -2x - 4z = 2 \quad y + 4z = -2\}$, que es compatible determinado.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|-2\ -2\ -1\ 2\ 0\ -4\ -2\ 1\ 4\ |}{2-3\cdot 4} = \frac{-2-16-8+16}{-10} = \frac{-10}{-10} = 1.$$

$$y = \frac{|1\ -2\ -1\ -2\ 2\ -4\ 0\ -2\ 4\ |}{-10} = \frac{8-4-8-16}{-10} = \frac{-20}{-10} = 2.$$

$$z = \frac{|1\ -2\ -2\ -2\ 0\ 2\ 0\ 1\ -2\ |}{-10} = \frac{4-2+8}{-10} = \frac{10}{-10} = -\ 1.$$

$$\underline{Solución: x = 1,\ y = 2,\ z = -\ 1}.$$

****

2º) Se considera la región del plano S definida por:

$$1 \leq x \leq 5;\ 2 \leq y \leq 6;\ x - y \geq -4;\ 3x - y \leq 10.$$

a) Represéntese gráficamente la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Calcúlense los valores máximo y mínimo de la función $f(x,\ y) = -200x + 600y$ en la región S y obténganse los puntos de S donde se alcanzan dichos valores.

----

a)

x	0	2
y	4	6

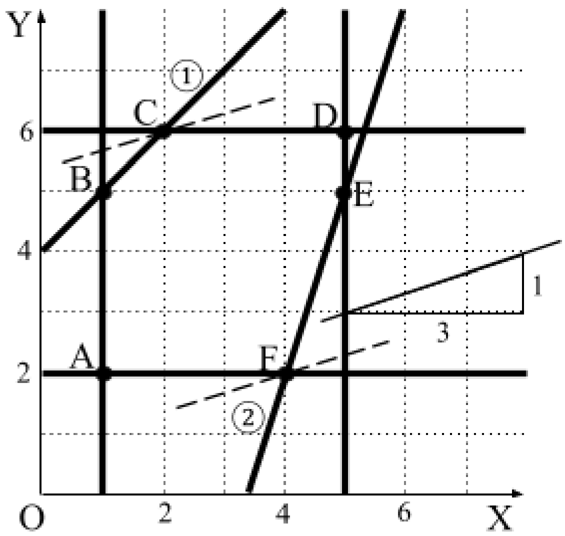
$①\Rightarrow x - y \geq -4 \Rightarrow y \leq x + 4 \Rightarrow O \rightarrow Si.$

x	4	5
y	2	5

$②\Rightarrow 3x - y \leq 10 \Rightarrow y \geq 3x - 10 \Rightarrow O \rightarrow Si.$

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{A(1,\ 2)}.$



$B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 1 \\ x - y = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{B(1,\ 5)}.$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 6 \\ x - y = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{C(2,\ 6)}.$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 5 \\ y = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{D(5,\ 6)}.$

$E \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 5 \\ 3x - y = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{E(5,\ 5)}.$

$F \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 2 \\ 3x - y = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{F(4,\ 2)}.$

b)

La función de objetivos es $f(x,\ y) = -200x + 600y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(1,\ 2) = -\ 200 \cdot 1\ +\ 600 \cdot 2\ = -\ 200\ +\ 1.200\ =\ 1.000.$$

$$B \Rightarrow f(1,\ 5) = -\ 200 \cdot 1\ +\ 600 \cdot 5\ = -\ 200\ +\ 3.000\ =\ 2.800.$$

$$C \Rightarrow f(2,\ 6) = -\ 200 \cdot 2\ +\ 600 \cdot 6\ = -\ 400\ +\ 3.600\ =\ 3.200.$$

$$D \Rightarrow f(5,\ 6) = -\ 200 \cdot 5\ +\ 600 \cdot 6\ = -\ 1.000\ +\ 3.600\ =\ 2.600.$$

$$E \Rightarrow f(5,\ 5) = -\ 200 \cdot 5\ +\ 600 \cdot 5\ = -\ 1.000\ +\ 3.000\ =\ 2.000.$$

$$F \Rightarrow f(4,\ 2) = -\ 200 \cdot 4\ +\ 600 \cdot 2\ = -\ 800\ +\ 1.200\ =\ 400.$$

$$\underline{El\ máximo\ se\ produce\ en\ punto\ C(2,\ 6)\ y\ el\ mínimo\ en\ punto\ F(4,\ 2)}.$$

También se hubieran obtenido los puntos C y F por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,\ y) = -\ 200x\ +\ 600y\ =\ 0 \Rightarrow y\ =\ \frac{200}{600}x\ =\ \frac{1}{3}x \Rightarrow m\ =\ \frac{1}{3}.$$

****

3º) Se considera la función real de variable real $f(x) = \{ \ ax + 1 \ \ si \ \ x < -1 \, x^2 + x - 2 \ \ si \ \ x \geq -1 :$

a) Calcúlese el valor del parámetro real a para que $f(x)$ sea una función continua en todo su dominio.

b) Para $a = 2$, calcúlense los puntos de corte de la gráfica de la función con los ejes cartesianos. Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

----

a)

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para el valor $x = -1$ cuya continuidad se va a forzar, para lo cual, se va a de determinar el correspondiente valor de a.

Para que $f(x)$ sea continua en $x = -1$ es necesario que sus límites laterales en ese punto sean iguales e iguales al valor de la función:

$f(x) \ = (ax + 1) = - a + 1$ $\qquad\qquad$ $f(x) \ = \left(x^2 + x - 2\right) = 1 -$

$\Rightarrow f(x) \ = f(-1) = f(x) \Rightarrow - a + 1 = - 2; \ \ a = 3.$

$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ su\ dominio,\ que\ es\ R,\ para\ a = 3}.$

b)

Para $a = 2$ la función es $f(x) = \{ \ 2x + 1 \ \ si \ \ x < -1 \, x^2 + x - 2 \ \ si \ \ x \geq -1 \ .$

Cortes con el eje X:

$f(x) = 0 \Rightarrow \{2x + 1 = 0 \rightarrow x_1 = -\frac{1}{2} > -1 \Rightarrow No\ corta \, x^2 + x - 2 = 0$

.

$x^2 + x - 2 = 0; \ \ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow \{x_2 = -2 < -1 \Rightarrow No\ corta \, x_3 = 1$

.

Corte con el eje Y: $x = 0 \Rightarrow f(0) = -2 \Rightarrow \underline{Q(0, \ -2)}$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x) = \{ \ 2 \ \ si \ \ x < -1 \, 2x + 1 \ \ si \ \ x \geq -1 \ \Rightarrow f'(x) > 0, \ \forall x \in R - \{-1\}.$

Nótese que la función no es continua para $x =- 1$; para que lo fuera es necesario que $a = 3$, como se ha determinado en el apartado a).

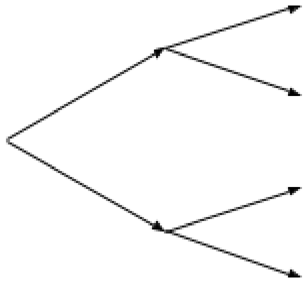
$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ creciente\ en\ su\ dominio}.$

****

4º) Una empresa fabrica dos modelos de ordenadores portátiles A y B, siendo la producción del modelo A el doble que la del modelo B. Se sabe que la probabilidad de que un ordenador portátil del modelo A salga defectuoso es de 0,02, mientras que esa probabilidad en el modelo B es de 0,06. Calcúlese la probabilidad de que un ordenador fabricado por dicha empresa elegido al azar:

a) No salga defectuoso.

b) Sea del modelo A, si se sabe que ha salido defectuoso.



a)

$$P = P(\overline{D}) = P(A) \cdot P(\overline{D}/A) + P(B) \cdot P(\overline{D}/B) = \frac{2}{3} \cdot 0,98 + \frac{1}{3} \cdot 0,94 =$$

$$= 0,6533 + 0,3133 = \underline{0,9666}.$$

b)

$$P = P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A) \cdot P(D/A)}{P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0,02}{\frac{2}{3} \cdot 0,02 + \frac{1}{3} \cdot 0,06} =$$

$$= \frac{0,0133}{0,0133 + 0,0200} = \frac{0,0133}{0,0233} = \underline{0,5708}.$$

****

5º) El tiempo, en horas, que tarda cierta compañía telefónica en hacer efectiva la portabilidad de un número de teléfono se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y la desviación típica $\sigma = 24$ horas. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 16. Calcúlese:

a) La probabilidad de que la media muestral del tiempo, $\overline{X}$, supere las 48 horas, si $\mu = 36$ horas.

b) El nivel de confianza con el que se ha calculado el intervalo $(24,24;\ 47,76)$ para μ.

----

a)

$Datos$: $\mu = 36;\ \ \sigma = 24;\ \ n = 16.$

$P(X > 48).$

$P(X > 48) = P\left(\frac{X-36}{24} > \frac{48-36}{24}\right) = P\left(Z > \frac{12}{24}\right) = P(Z > 0,5) =$

$= 1 - P(Z \leq 0,05) = 1 - 0,6915 = \underline{0,3085}.$

b)

$E = \frac{47,76-24,24}{2} = \frac{23,52}{2} = 11,76.$

Datos: $n = 16;\ \ \sigma = 24;\ \ E = 11,76.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{11,76 \cdot \sqrt{16}}{24} = \frac{11,76}{6} = 1,96.$

Mirando en la tabla $N(0,\ 1)$:

A $1,96$ le corresponde 0,9750.

$\underline{Se\ ha\ utilizado\ un\ nivel\ de\ confianza\ del\ 97,5\ \%}.$

****

OPCIÓN B

1º) Considérese las matrices $A = (1\ \ -2\ \ -1\ 1\ ),\ B = (1\ 3\ 2\ \ -1\ )\ y\ C = (-\ 1\ 0\ 3\ 1\ )$.

a) Determínese la matriz C^{40}.

b) Calcúlese la matriz X que verifica $X\cdot A + 3B = C$.

----

a)

$$C^2 = C\cdot C = (-\ 1\ 0\ 3\ 1\ )\cdot(-\ 1\ 0\ 3\ 1\ ) = (1\ 0\ 0\ 1\ ) = I.$$

$$C^3 = C^2\cdot C = I\cdot C = C.$$

. . . .

$$C^n = \{C \rightarrow si\ n\ es\ impar\ I \rightarrow si\ n\ es\ par\ \ \ .$$

$$\underline{C^{40} = I}.$$

b)

$$X\cdot A + 3B = C;\ X\cdot A = C - 3B;\ X\cdot A\cdot A^{-1} = (C - 3B)\cdot A^{-1};$$

$X\cdot I = (C - 3B)\cdot A^{-1} \Rightarrow \underline{X = (C - 3B)\cdot A^{-1}}.$

$$C - 3M = (-\ 1\ 0\ 3\ 1\ ) - 3(1\ 3\ 2\ \ -1\ ) = (-\ 1\ 0\ 3\ 1\ ) - (3\ 9\ 6\ \ -3\ ) = (-\ 4\ \ -$$

.

$$(A/I) = (1\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 - F_1\} \Rightarrow (1\ 0\ 1\ 1\ ) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \{F_2 \rightarrow -F_2\} \Rightarrow (1\ 0\ \ -1\ \ -1\ ) \Rightarrow \{F_1 \rightarrow F_1 + 2F_2\} \Rightarrow (-\ 1\ \ -2\ \ -1\ \ -1\ ) \Rightarrow$

$\Rightarrow A^{-1} = (-\ 1\ \ -2\ \ -1\ \ -1\ ).$

$X = (C - 3B)\cdot A^{-1} = (-\ 4\ \ -9\ \ -3\ 4\ )\cdot(-\ 1\ \ -2\ \ -1\ \ -1\ ) = (13\ 17\ \ -1\ 2\ )$

.

$$\underline{X = (-\ 1\ \ -2\ \ -1\ \ -1\ )}.$$

****

2º) Se considera la función real de variable real $f(x) = \frac{x^2-1}{3x-2}$.

$a)$ Estúdiense sus asíntotas.

$b)$ Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

$a)$

Horizontales:

$$y = k = f(x) = \frac{x^2-1}{3x-2} = \infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ síntotas\ horizontales}.$$

Verticales: Son los valores finitos de x que anulan el denominador.

$$\underline{Asíntota\ vertical:\ x = \frac{2}{3}.}$$

Oblicuas: Son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$m = \frac{f(x)}{x}$ y $n = [g(x) - mx]$, con m finito y $m \neq 0$.

$$m = \frac{f(x)}{x} = \frac{x^2-1}{x(3x-2)} = \frac{x^2-1}{3x^2-2x} = \frac{1}{3}.$$

$$n = [f(x) - mx] = \left(\frac{x^2-1}{3x-2} - \frac{x}{3}\right) = \frac{3x^2-3-3x^2+2x}{9x-6} = \frac{2}{9}$$

$$\underline{Asíntota\ oblicua:\ y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}.}$$

$b)$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(3x-2)-(x^2-1)\cdot 3}{(3x-2)^2} = \frac{6x^2-4x+3x^2+3}{(3x-2)^2} = \frac{9x^2-4x+3}{(3x-2)^2}.$$

Teniendo en cuenta que $(3x - 2)^2 > 0,\ \forall x \in D(f)$, la derivada es positiva o negativa cuando lo sea la expresión $9x^2 - 4x + 3$.

$$9x^2 - 4x + 3 = 0;\ x = \frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2\cdot 9} = \frac{4\pm\sqrt{4}}{18} = \frac{4\pm 2}{18} = \frac{2\pm 1}{9} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{9},\ x_2 = \frac{1}{3}.$$

Las raíces halladas dividen al conjunto de los números reales en los intervalos $\left(-\infty,\ \frac{1}{9}\right)$, $\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{3}\right)$ y $\left(\frac{1}{3},\ +\infty\right)$, que son, alternativamente, positivos o negativos.

Para determinar el signo de los intervalos consideramos, por ejemplo, el valor $0\in\left(-\infty,\ \frac{1}{9}\right)$, que es positivo por ser, para $x = 0$, el valor de $x^2 - 4x + 3$, 3.

Teniendo en cuenta lo anterior y que el dominio de la función $f(x) = \frac{x^2-1}{3x-2}$ es $D(f)\Rightarrow R - \left\{\frac{2}{3}\right\}$, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento:\ f'(x) > 0 \Rightarrow x\in\left(-\infty,\ \frac{1}{9}\right) \cup \left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3},\ +\infty\right)}.$$

$$\underline{Decrecimiento:\ f'(x) < 0 \Rightarrow x\in\left(\frac{1}{9},\ \frac{1}{3}\right)}.$$

****

3º) Se considera la función real de variable real: $f(x) = x^2 + ax$.

a) Calcúlese el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x = 2$. Determínese si se trate de un máximo o un mínimo local.

b) Para $a = -2$, hállese el área del recinto acotado por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

----

a)

Teniendo en cuenta que $f(x)$ es una parábola convexa $(\cup)$, independientemente del valor real de a, $\underline{la\ función\ f(x)\ tiene\ un\ mínimo\ absoluto\ para\ x = 2}$. No obstante lo anterior, después se justificará que se trata de un mínimo.

$$f'(x) = 2x + a.$$

Para que una función tenga un extremo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada.

$$f'(2) = 0 \Rightarrow 2 \cdot 2 + a = 0;\ \ 4 + a = 0 \Rightarrow \underline{a = -4}.$$

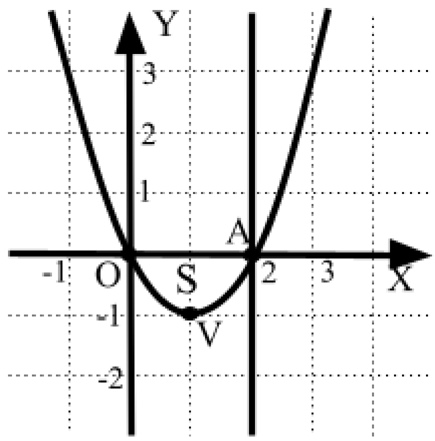
Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera derivada se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo,\ como\ ya\ se\ indicó.$$

b)

Para $a = -2$ la función es $f(x) = x^2 - 2x$.

La representación gráfica, aproximada, de la situación es la que se indica en la figura adjunta.



De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_2^0 f(x) \cdot dx = \int_2^0 \left(x^2 - 2x\right) \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2}\right]_2^0 = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_2^0 = 0 - \left(\frac{2^3}{3} - 2^2\right) =$$

$=-\frac{8}{3}+4=\frac{4}{3}.$

$$\underline{S=\frac{4}{3}\,u^2 \cong 1,33\,u^2.}$$

****

4º) La probabilidad de que cierto río esté contaminado por nitratos es 0,6, por sulfatos es 0,4, y por ambos es 0,2. Calcúlese la probabilidad de que dicho río:

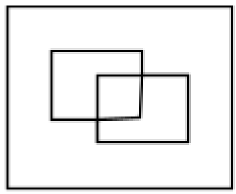
a) No esté contaminado por nitratos, si se sabe que está contaminado por sulfatos.

b) No esté contaminado ni por nitratos ni por sulfatos.

$$Datos: P(N)=0,6;\ \ P(S)=0,4;\ \ P(N\cap S)=0,2.$$

a)

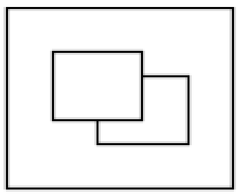
$$P=P(\overline{N}/S)=\frac{P(\overline{N}\cap S)}{P(S)}=\frac{P(S)-P(N\cap S)}{P(S)}=\frac{0,4-0,2}{0,4}=$$



$=\frac{0,2}{0,4}=\underline{0,5}.$

b)

$$P=P(\overline{N}\cap\overline{S})=1-P(N\cup S)=$$



$=1-[P(N)+P(S)-P(N\cap S)]=$

$=1-(0,6+0,4-0,2)=1-0,8=\underline{0,2}.$

****

5º) La longitud auricular de la oreja en varones jóvenes, medida en centímetros (cm), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 0,6\ cm$.

a) Una muestra aleatoria simple de 100 individuos proporcionó una media muestral $\overline{x} = 7\ cm$. Calcúlese un intervalo de confianza al 96 % para μ.

b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea a lo sumo de 0,1 cm, con un nivel de confianza del 98 %.

----

a)

$$\alpha = 1 - 0,96 = 0,04 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,02} = 2,055.$$

$$(1 - 0,02 = 0,9800 \rightarrow z = 2,055).$$

Datos: $n = 100;\ \overline{x} = 7;\ \sigma = 0,6;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,055.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(7 - 2,055\cdot\frac{0,6}{\sqrt{100}};\ 7 + 2,055\cdot\frac{0,6}{\sqrt{100}}\right);$$

$$(7 - 2,055\cdot0,06;\ 7 + 2,055\cdot0,06);\ \ (7 - 0,1233;\ 7 + 0,1233).$$

$$\underline{I.\ C._{97\ \%} = (6,8767;\ 7,1233).}$$

b)

$$\alpha = 1 - 0,98 = 0,02 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,01} = 2,33.$$

$$(1 - 0,01 = 0,9900 \rightarrow z = 2,33).$$

Datos: $\sigma = 0,6;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,33;\ E = 0,1.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(2,33\cdot\frac{0,6}{0,1}\right)^2 =$

$= (2,33\cdot6)^2 = 13,98^2 = 195,44.$

$$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 196\ jóvenes.}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá elegir una opción A o B y responder a todas las cuestiones de esa opción. Nunca podrá mezclar cuestiones de la opción A con cuestiones de la opción B. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

OPCIÓN A

1º) Dadas las matrices $A = (1\ 2\ 3\ 0\ 2\ -1)\ y\ B = (-2\ -1\ 1\ 0\ 1\ 1)$:

$a)$ Calcular A^t. $b)$ Calcular $A \cdot B$.

$c)$ Hallar la matriz $X = (a\ b\ c\ d)$ que cumple $A \cdot B \cdot X = C + I$, donde $C = (1\ -2\ 0\ -1)$ e I es la matriz identidad.

$a)$

$$\underline{A^t = (1\ 0\ 2\ 2\ 3\ -1)}.$$

$b)$

$$A \cdot B = (1\ 2\ 3\ 0\ 2\ -1) \cdot (-2\ -1\ 1\ 0\ 1\ 1) = (3\ 2\ 1\ -1).$$

$$\underline{A \cdot B = (3\ 2\ 1\ -1)}.$$

$c)$

$$A \cdot B \cdot X = C + I \Rightarrow (3\ 2\ 1\ -1) \cdot (a\ b\ c\ d) = (1\ -2\ 0\ -1) + (1\ 0\ 0\ 1);$$

$(3a + 2c\ 3b + 2d\ a - c\ b - d) = (2\ -2\ 0\ 0) \Rightarrow 3a + 2c = 2 \quad a - c = 0\};\ 3b -$
$\Rightarrow$

$$\Rightarrow a = c;\ 5a = 2;\ a = c = \frac{2}{5}.\quad b = d;\ 5b = -2;\ b = d = -\frac{2}{5}.$$

$$\underline{X = \frac{2}{5} \cdot (1\ -1\ 1\ -1)}.$$

También se puede obtener la matriz X de la forma siguiente:

$$A{\cdot}B{\cdot}X = C + I; \ \ (A{\cdot}B)^{-1}{\cdot}(A{\cdot}B){\cdot}X = (A{\cdot}B)^{-1}{\cdot}(C + I);$$

$$I{\cdot}X = (A{\cdot}B)^{-1}{\cdot}(C + I) \Rightarrow \underline{X = (A{\cdot}B)^{-1}{\cdot}(C + I)}.$$

$$|A{\cdot}B| = |3\ 2\ 1\ \ -\ 1\,| = -\ 3\ -\ 2\ = -\ 5.$$

$$(A{\cdot}B)^{t} = (3\ 1\ 2\ \ -\ 1\,); \ \ Adj.\ de\ (A{\cdot}B)^{t} = (-\ 1\ \ -\ 2\ \ -\ 1\ 3\,).$$

$$(A{\cdot}B)^{-1} = -\ \tfrac{1}{5}{\cdot}(-\ 1\ \ -\ 2\ \ -\ 1\ 3\,) = \tfrac{1}{5}{\cdot}(1\ 2\ 1\ \ -\ 3\,).$$

$$C + I = (1\ \ -\ 2\ 0\ \ -\ 1\,) + (1\ 0\ 0\ 1\,) = (2\ \ -\ 2\ 0\ 0\,).$$

$$X = (A{\cdot}B)^{-1}{\cdot}(C + I) = \tfrac{1}{5}{\cdot}(1\ 2\ 1\ \ -\ 3\,){\cdot}(2\ \ -\ 2\ 0\ 0\,) = \tfrac{1}{5}{\cdot}(2\ \ -\ 2\ 2\ \ -\ 2\,).$$

$$\underline{X = \tfrac{2}{5}{\cdot}(1\ \ -\ 1\ 1\ \ -\ 1\,).}$$

****

2º) El volumen de agua (en millones de litros) almacenado en un embalse a lo largo de un periodo de 11 años en función del tiempo t (en años) viene dado por la siguiente función: $f(t) = t^3 - 24t^2 + 180t + 8.000$ con $9 \leq t \leq 11$. Calcular:

a) La cantidad de agua almacenada en el último año ($t = 11$).

b) El año del periodo en el que el volumen almacenado fue máximo.

c) El volumen máximo que tuvo el embalse a lo largo de ese periodo.

----

a)

$$f(11) = 11^3 - 24 \cdot 11^2 + 180 \cdot 11 + 8.000 =$$

$$= 1.331 - 2.904 + 1.980 + 8.000 = 11.311 - 2.904 = 8.407.$$

$\underline{El\ agua\ almacenada\ el\ año\ 11\ fue\ de\ 8.407.000\ metros\ cúbicos.}$

b)

El volumen almacenado es máximo cuando se anule su primera derivada y su segunda derivada sea negativa para los valores que anulan la primera:

$$f'(t) = 3t^2 - 48t + 180. \qquad f''(t) = 6t - 48.$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 48t + 180 = 0;\ t^2 - 16t + 60 = 0;\ t = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 240}}{2} =$$

$$= \frac{16 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{16 \pm 4}{2} = 8 \pm 2 \Rightarrow t_1 = 6,\ t_2 = 10.$$

$$f''(6) = 6 \cdot 6 - 48 = 36 - 48 = -12 < 0 \Rightarrow Máx.\ para\ t = 6.$$

$$f''(10) = 6 \cdot 10 - 48 = 60 - 48 = 12 > 0 \Rightarrow Mín.\ para\ t = 10.$$

$\underline{Se\ alcanzó\ el\ mayor\ volumen\ almacenado\ el\ sexto\ año.}$

c)

$$f(6) = 6^3 - 24 \cdot 6^2 + 180 \cdot 6 + 8.000 = 216 - 864 + 1.080 + 8.000 =$$

$$= 9.296 - 864 = 8.432.$$

$\underline{El\ agua\ máxima\ almacenada\ fue\ de\ 8.432.000\ metros\ cúbicos.}$

****

3º) Calcular las siguientes integrales:

$a)\ I = \int_1^2 \left(-x^2 + 3x + 1\right) \cdot dx.$ $\qquad\qquad b)\ I = \int \frac{2}{x+2} \cdot dx.$

$a)$

$$I = \int_1^2 \left(-x^2 + 3x + 1\right) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + x\right]_1^2 =$$

$$= \left(-\frac{2^3}{3} + \frac{3 \cdot 2^2}{2} + 2\right) - \left(-\frac{1^3}{3} + \frac{3 \cdot 1^2}{2} + 1\right) = -\frac{8}{3} + 6 + 2 + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} - 1 =$$

$$= -\frac{7}{3} + 7 - \frac{3}{2} = \frac{-14+42-9}{6} = \frac{42-23}{6} = \frac{19}{6}.$$

$$\underline{I = \int_1^2 \left(-x^2 + 3x + 1\right) \cdot dx = \frac{19}{6}.}$$

$b)$

$$I = \int \frac{2}{x+2} \cdot dx \Rightarrow \{x + 2 = t\ dx = dt\} \Rightarrow 2 \cdot \int \frac{1}{t} \cdot dt = 2L|t| + C = L(x+2)^2 + C$$

.

$$\underline{I = \int \frac{2}{x+2} \cdot dx = L(x+2)^2 + C.}$$

****

4º) Una urna contiene tres bolas numeradas del 1 al 3. Se extraen sucesivamente las tres bolas:

a) Calcular la probabilidad de que las dos últimas bolas extraídas sean impares.

b) Determinar si los siguientes sucesos son independientes:

S_1: "sale número par antes de alguno de los impares".

S_2: "los dos números impares salen consecutivamente".

El número de formas de sacar las bolas es $n = P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Son las siguientes: $123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321$.

a)

$$P = \frac{\{213,\ 231\}}{\{123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321\}} = \frac{2}{6} = \underline{\frac{1}{3}}.$$

b)

$$P(S_1) = \frac{\{123,\ 213,\ 231,\ 321\}}{\{123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321\}} = \frac{4}{6} = \underline{\frac{2}{3}}.$$

$$P(S_2) = \frac{\{132,\ 213,\ 231,\ 312\}}{\{123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321\}} = \frac{4}{6} = \underline{\frac{2}{3}}.$$

$$P(S_1 \cap S_2) = \frac{\{213,\ 231\}}{\{123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321\}} = \frac{2}{6} = \underline{\frac{1}{3}}.$$

Dos sucesos son independientes si $P(S_1 \cap S_2) = P(S_1) \cdot P(S_2)$:

$$\frac{1}{3} \neq \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow \underline{Los\ sucesos\ S_1\ y\ S_2\ no\ son\ independientes.}$$

****

5º) En una muestra aleatoria de 175 individuos de una población se ha obtenido que 30 tienen más de 65 años. Hallar un intervalo de confianza al 90 % para la proporción de mayores de 65 años de la población.

$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 1 - 0,90 = 0,10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,05} = 1,645.$$

$$(1 - 0,05 = 0,9500 \rightarrow z = 1,645).$$

Datos: $n = 175$; $p = \frac{30}{175} = 0,1714$; $q = 0,8286$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,645$.

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q y n, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}},\ p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$.

$$\left(0,1714 - 1,645 \cdot \sqrt{\frac{0,3714 \cdot 0,6286}{175}};\ 0,1714 + 1,645 \cdot \sqrt{\frac{0,3714 \cdot 0,6286}{175}}\right);$$

$$(0,1714 - 1,645 \cdot 0,0285;\ 0,1714 + 1,645 \cdot 0,0285);$$

$$(0,1714 - 0,0469;\ 0,1714 + 0,0469).$$

$$\underline{I.\ C._{90\ \%} = \left(0'1245;\ 0'2183\right).}$$

****

OPCIÓN B

1º) Una fábrica textil compra tela a dos distribuidores, A y B. Los distribuidores A y B venden la tela a 2 y 3 euros por metro, respectivamente. Cada distribuidor le vende un mínimo de 200 metros y un máximo de 700 y para satisfacer su demanda, la fábrica debe comprar en total como mínimo 600 metros. La fábrica quiere comprar al distribuidor A, como máximo, el doble de metros que al distribuidor B. Hallar los metros que debe comprar a cada uno de los distribuidores para obtener el mínimo coste. Determinar dicho coste mínimo.

Sean x e y el número de metros de tela que se compran a los distribuidores A y B, respectivamente.

Las condiciones del ejercicio se establecen en el siguiente sistema de inecuaciones: $200 \le x \le 700$ $200 \le y \le 700$ $x + y \ge 600$ $x \le 2y$ }.

La función de rendimiento es $f(x, y) = 2x + 3y$.

x	0	600
y	600	0

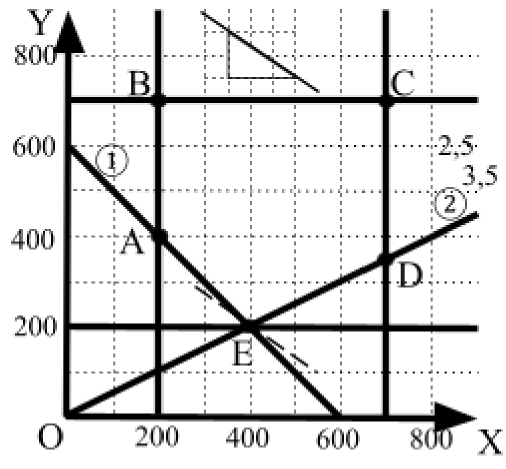
①$\Rightarrow x + y \ge 600 \Rightarrow y \ge 600 - x \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow No.$

x	200	600
y	100	300

②$\Rightarrow x \le 2y \Rightarrow y \ge \frac{1}{2}x \Rightarrow P(100, 0) \rightarrow No.$

La región factible es la zona sombreada de la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible son los siguientes:



$A \Rightarrow$ $x = 200$ $x + y = 600$ $\} \Rightarrow A(200, 400).$

$B \Rightarrow x = 200$ $y = 700$ $\} \Rightarrow B(200, 700).$

$C \Rightarrow x = 700$ $y = 700$ $\} \Rightarrow C(700, 700).$

$D \Rightarrow x = 700$ $x = 2y$ $\} \Rightarrow D(700, 350).$

$E \Rightarrow$ $y = 200$ $x + y = 600$ $\} \Rightarrow E(400, 200).$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(200,\ 400) = 2 \cdot 200 + 3 \cdot 400 = 400 + 1.200 = 1.600.$

$B \Rightarrow f(200,\ 700) = 2 \cdot 200 + 3 \cdot 700 = 400 + 2.100 = 2.500.$

$C \Rightarrow f(700,\ 700) = 2 \cdot 700 + 3 \cdot 700 = 1.400 + 2.100 = 3.500.$

$D \Rightarrow f(700,\ 350) = 2 \cdot 700 + 3 \cdot 350 = 1.400 + 1.050 = 2.450.$

$E \Rightarrow f(400,\ 200) = 2 \cdot 400 + 3 \cdot 200 = 800 + 600 = 1.400.$

El mínimo se produce en el punto C.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = 2x + 3y = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x \Rightarrow m = -\frac{2}{3}.$

$\underline{El\ coste\ es\ mínimo\ comprando\ 400\ metros\ al\ distribuidor\ A\ y\ 200\ al\ B}.$

$\underline{El\ coste\ mínimo\ es\ de\ 1.400\ euros}.$

****

2º) Dadas las funciones $f(x) = x^3 - 7x^2 + a$; $g(x) = \sqrt{2x - 1} + bx$, donde a y b son números reales, hallar a y b sabiendo que $f(1) = g(1)$ y $f'(1) = g'(1)$.

$f(x) = x^3 - 7x^2 + a.$ $\qquad$ $f'(x) = 3x^2 - 14x.$

$g(x) = \sqrt{2x - 1} + bx.$ $\qquad$ $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}} + b.$

$f(1) = 1^3 - 7 \cdot 1^2 + a = 1 - 7 + a = a - 6.$

$g(1) = \sqrt{2 \cdot 1 - 1} + b \cdot 1 = 1 + b.$

$f(1) = g(1) \Rightarrow a - 6 = 1 + b;\ \ a - b = 7.$ $\qquad$ (*)

$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 14 \cdot 1 = 3 - 14 = -11.$

$g'(1) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 1 - 1}} + b = 1 + b.$

$f'(1) = g'(1) \Rightarrow -11 = 1 + b \Rightarrow \underline{b = -12}..$

Sustituyendo el valor de b obtenido en la expresión (*):

$a - (-12) = 7;\ \ a + 12 = 7 \Rightarrow \underline{a = -5}.$

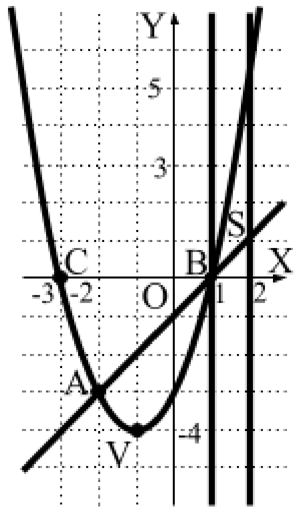
****

3º) Hallar el área del recinto acotado limitado por la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 2x - 3$, la recta $y = x - 1$ y las rectas $x = 1$ y $x = 2$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

Los puntos de intersección de la parábola y la recta son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$x^2 + 2x - 3 = x - 1;\ x^2 + x - 2 = 0;\ x = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \rightarrow A(-2,\ -3) \\ x_2 = 1 \rightarrow B(1,\ 0) \end{cases}.$$



El vértice de la parábola es:

$$f'(x) = 2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1.$$

$$f(-1) = (-1)^2 + 2\cdot(-1) - 3 =$$

$$= 1 - 2 - 3 = -4 \Rightarrow V(-1,\ -4).$$

Los puntos de corte de la parábola con el eje X son los siguientes:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0;\ x = \frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{16}}{2} = \frac{-2\pm 4}{2} = -1\pm 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \rightarrow C(-3,\ 0) \\ x_2 = 1 \rightarrow B(1,\ 0) \end{cases}.$$

La representación gráfica del conjunto es la indicada en la figura adjunta.

Para el cálculo del área limitada por la parábola y la recta, que es la parte sombreada de la figura, se tiene en cuenta que, en el intervalo $(1,\ 2)$ las ordenadas de la parábola son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la recta.

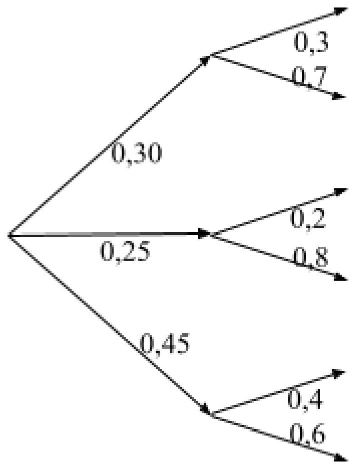
$$S = \int_1^2 \left[x^2 + 2x - 3 - (x - 1)\right]\cdot dx = \int_1^2 \left(x^2 + 2x - 3 - x + 1\right)\cdot dx =$$

$$= \int_1^2 \left(x^2 + x - 2\right)\cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} - 2\cdot 2\right) - \left(\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} - 2\cdot 1\right) =$$

$$= \frac{8}{3} + 2 - 4 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{7}{3} - \frac{1}{2} = \frac{14-3}{6} = \underline{\frac{11}{6}\ u^2 \cong 1,83\ u^2}.$$

****

4º) En una población se ha determinado que de cada 100 consumidores de agua mineral, 30 consumen la marca A, 25 de la marca B y el resto la marca C. Además, el 30 % de consumidores de A, el 20 % de consumidores de B y el 40 % de consumidores de C son mujeres. Se selecciona al azar un consumidor de agua mineral de esa población y resulta ser mujer, hallar la probabilidad de que consuma la marca A.



$$P = P(A/M) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)} = \frac{P(M) \cdot P(A/M)}{P(M) \cdot P(A/M) + P(M) \cdot P(B/M) + P(M) \cdot P(C/M)} =$$

$$= \frac{0{,}30 \cdot 0{,}3}{0{,}30 \cdot 0{,}3 + 0{,}25 \cdot 0{,}2 + 0{,}45 \cdot 0{,}4} = \frac{0{,}09}{0{,}09 + 0{,}05 + 0{,}18} = \frac{0{,}09}{0{,}32} = \underline{0{,}2813}.$$

****

5º) La duración de un tipo de bombillas sigue una distribución normal con desviación típica de 120 horas. Para estimar la duración media se quiere calcular un intervalo de confianza al 99 %. Determinar el tamaño mínimo que debe tener la muestra utilizada para el error cometido en la estimación sea menor de 25 horas.

Nivel de confianza del 99 %.

$\alpha = 1 - 0,99 = 0,01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,005} = 2,578.$

$(1 - 0,0050 = 0,9950 \rightarrow z = 2,578).$

Datos: $\sigma = 120;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,578;\ \ E = 25.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(2,578 \cdot \frac{120}{25}\right)^2 =$

$= (2,578 \cdot 4,8)^2 = 12,3744^2 = 153,13.$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 154\ bombillas.}$

****

PRUEBA DE ACCESO ()

UNIVERSIDAD DE MURCIA

SEPTIEMBRE – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá elegir una opción A o B y responder a todas las cuestiones de esa opción. Nunca podrá mezclar cuestiones de la opción A con cuestiones de la opción B. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

OPCIÓN A

1º) Tres automóviles A, B y C salen del mismo punto en tres momentos distintos y los tres circulan a una velocidad constante de 100 km por hora. Actualmente la suma de las distancias recorridas por los tres es de 800 km y la distancia recorrida por A es el triple de la recorrida por B. Hallar la distancia recorrida por cada uno de ellos en la actualidad, sabiendo que cuando pase media hora (es decir, cuando todos hayan recorrido 50 km más) la suma de las distancias recorridas por A y B será 50 km más que la recorrida por C.

Siendo $x,\ y,\ z$ las distancias recorridas actualmente por los automóviles A, B y C, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$x + y + z = 800 \qquad x = 3y\,(50 + x) + (5$$

.

Restando a la primera ecuación la tercera: $2z = 800;\ z = 400.$

$$x + y + 400 = 800 \qquad x - 3y = 0\,\}\ \ x + y = 400\ \ x - 3y = 0\,\}\ \ x + y = 40$$

.

$$x + y + z = 800;\ \ x + 400 + 100 = 800;\ \ x = 300.$$

$\underline{El\ automóvil\ A\ recorrió\ 300\ km,\ el\ B,\ 100\ km\ y\ el\ C,\ 400\ km.}$

****

2º) Dada la función $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$ donde a y b son números reales, hallar el valor de a y b para que se cumpla que $f(0) = 1$ y $f'(0) = 1$.

$f(0) = 1 \Rightarrow \frac{0+b}{0+1} = 1 \Rightarrow \underline{b = 1}$. La función resulta: $f(x) = \frac{ax+1}{x^2+1}$.

$$f'(x) = \frac{a\cdot(x^2+1)-(ax+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{ax^2+a-2ax^2-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-ax^2-2x+a}{(x^2+1)^2}$$

$f'(0) = 1 \Rightarrow \frac{-a\cdot 0^2-2\cdot 0+a}{(0^2+1)^2} = 1;\ \ \frac{a}{1} = 1 \Rightarrow \underline{a = 1}$.

****

3º) Dada la función $f(x) = \{ \ -x + 1 \quad si\ x < -3\ x^2 + 2x + 1\ si\ -3 \leq x$:

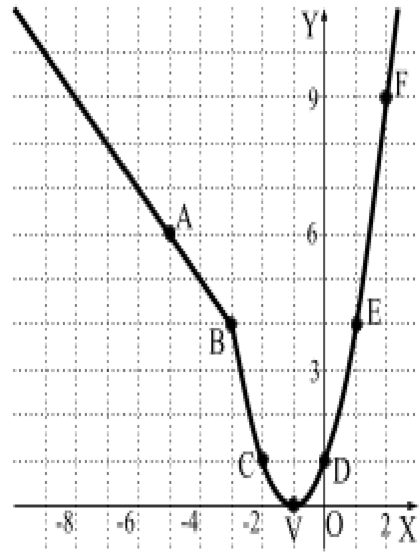
a) Hacer la representación gráfica de dicha función.

b) Hallar el área del recinto acotado limitado por el gráfica de la función $f(x)$ y la recta $y = 2x + 5$.

----

a)

Para la representación gráfica de la función tendremos en cuenta que en el intervalo $(-\infty, -3)$ y que dos de sus puntos son $A(-5, 6)$ y $B(-3, 4)$.

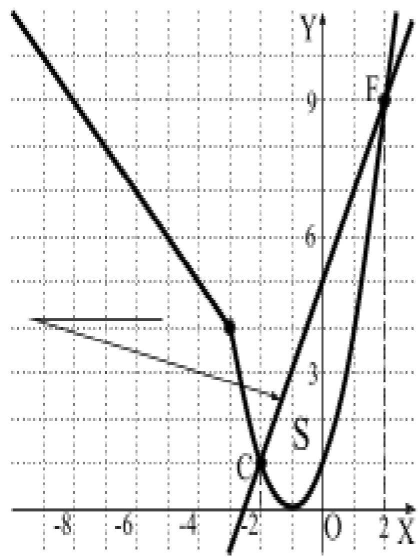


En el intervalo $[-3, +\infty)$ la función es la parábola $f(x) = x^2 + 2x + 1$ o también $f(x) = (x + 1)^2$, que es convexa $(\cup)$ y cuyo vértice es $V(-1, 0)$. Otros puntos de la parábola son $A(-3, 4)$, $C(-2, 1)$, $D(0, 1)$, $E(1, 4)$ y $F(2, 9)$.

La representación gráfica, aproximada, de la función es la que aparece en la figura adjunta.

b)

Los puntos de corte de la recta con la función tienen como abscisas las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus ecuaciones:



El punto de corte la recta $y = -x + 1$ con la recta dada $y = 2x + 5$ no pertenece al intervalo $(-\infty, -3)$, por lo tanto, los puntos de corte a determinar son los de la recta dada y la parábola $f(x) = (x + 1)^2$.

$2x + 5 = x^2 + 2x + 1;\ x^2 = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \{x_1 = -2 \rightarrow C(-2, 1)\ x_2 = 2 \rightarrow F(2, 9)$.

De la observación de la figura de la derecha se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_{-2}^{2} \left[(2x + 5) - \left(x^2 + 2x + 1 \right) \right] \cdot dx = \int_{-2}^{2} \left(4 - x^2 \right) \cdot dx =$$

$$= \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{2} = \left(4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} \right) - \left[4 \cdot (-2) - \frac{(-2)^3}{3} \right] = 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = 16 - \frac{16}{3} =$$

$$= \frac{48-16}{3} = \underline{\frac{32}{3} u^2 = S}.$$

****

4º) Para que un producto cosmético tenga el informe favorable de una agencia de sanidad debe superar tres pruebas de evaluación de garantía sanitaria. Las pruebas son independientes y todos los productos se someten a las tres pruebas. Se sabe, por otras ocasiones, que la probabilidad de superar la primera prueba es 0,8, la de superar la segunda es 0,75 y la de superar la tercera 0,85. Hallar:

a) La probabilidad de que un producto tenga el informe favorable.

b) La probabilidad de que un producto no tenga el informe favorable por fallar solamente en una prueba.

----

a)

$$P = P(1,\ 2,\ 3) = P(1) \cdot P(2) \cdot P(3) = 0,8 \cdot 0,75 \cdot 0,85 = \underline{0,51}.$$

b)

$$P = P(\overline{1},\ 2,\ 3) + P(1,\ \overline{2},\ 3) + P(1,\ 2,\ \overline{3}) =$$

$$= 0,2 \cdot 0,75 \cdot 0,85 + 0,8 \cdot 0,25 \cdot 0,85 + 0,8 \cdot 0,75 \cdot 0,15 =$$

$$= 0,1275 + 0,170 + 0,090 = \underline{0,3875}.$$

****

5º) El consumo de carne por persona en un año para una población es una variable aleatoria con distribución normal con desviación típica igual a 2 kg. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 individuos y se obtienen los siguientes consumos anuales por persona (en kg): 24, 20, 12, 10, 30, 27, 35, 30, 25, 39. Determinar el intervalo de confianza al 90 % para el consumo medio de carne por persona al año para la población.

$$\overline{x} = \frac{24+20+12+10+30+27+35+30+25+39}{10} = \frac{252}{10} = 25,2.$$

$$\alpha = 1 - 0,90 = 0,10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,05} = 1,645.$$

$$(1 - 0,9500 = 0,950 \rightarrow z = 1,645).$$

Datos: $n = 10$; $\overline{x} = 25,2$; $\sigma = 2$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,645$.

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}$, σ y n, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(25,2 - 1,645 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}};\ 25,2 + 1,645 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}}\right);$$

$(25,2 - 1,645 \cdot 0,6325;\ 25,2 + 1,645 \cdot 0,6325)$; $(25,2 - 1,0404;\ 25,2 + 1,0404)$.

$$\underline{I.\ C._{90\,\%} = (24,1596;\ 26,2404).}$$

****

OPCIÓN B

1º) Una perfumería prepara dos lotes de productos, el lote 1 contiene 2 perfumes, 2 jabones y 1 crema corporal y el lote 2 está formado por 1 perfume, 2 jabones y 2 cremas corporales. Sabiendo que dispone de 150 perfumes, 180 jabones y 150 cremas corporales y que el beneficio obtenido es de 45 euros por cada lote del tipo 1 y de 30 euros por cada lote del tipo 2, hallar el número de lotes que debe hacer de cada tipo para obtener el beneficio máximo. ¿Cuál es dicho beneficio?

Sean x e y el número de lotes de productos de los tipos 1 y 2 que prepara la perfumería, respectivamente.

Las restricciones son: $2x + y \geq 150\ 2x + 2y \leq 180\ \ x + 2\,y \leq 150\ \ \ x \geq 0;\ y \geq 0\ \}\ o\ mejor\!:\ \ 2x + y \geq 150\ \ \ x$
.

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,\ y) = 45x + 30y$.

x	50	75
y	50	0

$①\Rightarrow 2x + y \leq 150 \Rightarrow y \leq 150 - 2x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	0	90
y	90	0

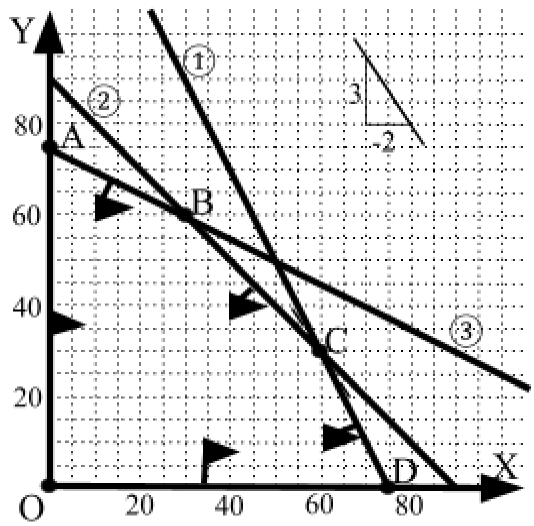
$②\Rightarrow x + y \leq 90 \Rightarrow y \leq 90 - x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	0	50
y	75	50

$③\Rightarrow x + 2y \leq 150 \Rightarrow y \leq \frac{150-x}{2} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura.

Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:



$A \Rightarrow\ \ \ \ \ \ x = 0\ x + 2y = 150\ \} \Rightarrow A(0,\ 75).$

$B \Rightarrow\ \ x + y = 90\ x + 2y = 150\ \}\ \ -x - y = -\ 90\ \ x + 2y = 150\ \} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 50 \Rightarrow B(30, 60)$.

$C \Rightarrow 2x + y = 150 \quad x + y = 90\} \quad 2x + y = 150 \; - x - y = -90\} \Rightarrow x = 60 \Rightarrow C(60$
.

$D \Rightarrow \quad y = 0 \; 2x + y = 150\} \Rightarrow D(75, 0)$.

Los valores de la función de objetivos $f(x, y) = 45x + 30y$ en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0, 75) = 45 \cdot 0 + 30 \cdot 75 = 0 + 2.250 = 2.250$.

$B \Rightarrow f(30, 60) = 45 \cdot 30 + 30 \cdot 60 = 1.350 + 1.800 = 3.150$.

$C \Rightarrow f(60, 30) = 45 \cdot 60 + 30 \cdot 30 = 2.700 + 900 = 3.600$.

$D \Rightarrow f(75, 0) = 45 \cdot 75 + 30 \cdot 0 = 3.375 + 0 = 3.375$.

El máximo se produce en el punto $C(60, 30)$.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = 45x + 30y = 0 \Rightarrow y = -\frac{45}{30}x = -\frac{3}{2}x \Rightarrow m = -\frac{3}{2}$.

$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ haciendo\ 60\ lotes\ de\ tipo\ 1\ y\ 30\ lotes\ de\ tipo\ 2}$.

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 3.600\ euros}$.

****

2º) Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

$a)\ \ f(x)=\frac{x}{\sqrt{2x+1}}.$ $\qquad b)\ \ g(x)=x^2\cdot e^{x^2}.$ $\qquad$ c) $\ h(x)=\frac{L(x^2)}{x}.$

$a)$

$$f'(x)=\frac{1\cdot\sqrt{2x+1}-x\cdot\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}}{\left(\sqrt{2x+1}\right)^2}=\frac{\sqrt{2x+1}-\frac{x}{\sqrt{2x+1}}}{2x+1}=\frac{\frac{2x+1-x}{\sqrt{2x+1}}}{2x+1}=\frac{x+1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}=\frac{(x+1)\sqrt{2x+1}}{(2x+1)^2}$$

.

$$\underline{f'(x)=\frac{(x+1)\sqrt{2x+1}}{(2x+1)^2}}.$$

$b)$

$$g'(x)=2x\cdot e^{x^2}+x^2\cdot 2x\cdot e^{x^2}=2x\cdot e^{x^2}\cdot\left(1+x^2\right).$$

$$\underline{g'(x)=2x\cdot e^{x^2}\cdot\left(1+x^2\right)}.$$

c)

$$h(x)=\frac{L(x^2)}{x}=\frac{2\cdot Lx}{x}=2\cdot\frac{Lx}{x}.$$

$$h'(x)=2\cdot\frac{\frac{1}{x}\cdot x-Lx\cdot 1}{x^2}=2\cdot\frac{1-Lx}{x^2}.$$

$$\underline{h'(x)=\frac{2(1-Lx)}{x^2}}.$$

****

3º) Dada la función $f(x) = 2\cdot e^{2x-2}$ hallar la función primitiva $F(x)$ que cumple que $F(1) = 0$.

$$F(x) = \int 2\cdot e^{2x-2}\cdot dx \Rightarrow \{2x - 2 = t \; 2\cdot dx = dt\} \Rightarrow \int e^{t}\cdot dt = e^{t} + C = e^{2x-2} + C$$

.

$$F(1) = 0 \Rightarrow e^{2\cdot 1-2} + C = 0; \;\; e^{0} + C = 0 \Rightarrow C = -1.$$

$$\underline{F(x) = e^{2\cdot x-2} - 1}.$$

****

4º) En un grupo el 60 % de los alumnos aprueba la asignatura A y el 30 % aprueba la asignatura B. Se sabe, además, que el 10 % de los alumnos que aprueba la asignatura B aprueba también la asignatura A. Hallar el porcentaje de alumnos del grupo que aprueba alguna de las dos asignaturas.

$Datos$: $P(A) = 0,6$; $P(B) = 0,3$; $P(A/B) = 0,1$.

Se pide $P(A \cup B)$.

$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B) = 0,3 \cdot 0,1 = 0,03$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,3 - 0,03 = 0,87$.

$\underline{Aprueba\ alguna\ de\ las\ dos\ asignatura\ el\ 87\ \%\ de\ los\ alumnos\ del\ grupo.}$

****

5º) La estatura de los individuos de una población es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica de 0,4 m. Para estimar la media se toma una muestra aleatoria de tamaño n y se encuentra un valor medio de la estatura igual a 1,6 m. Si el intervalo de confianza al 95 % construido a partir de esos datos es $(1,5216;\ 1,6784)$, calcular el valor de n.

$\overline{x} = \frac{1,6784+1,5216}{2} = \frac{3,2}{2} = 1,6.$

$E = \frac{1,6784-1,5216}{2} = \frac{0,1568}{2} = 0,0784.$

$\alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$

$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$

Datos: $\overline{x} = 1,6;\ \sigma = 0,4;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96;\ \ E = 0,0784.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1,96 \cdot \frac{0,4}{0,0784}\right)^2 =$

$= (1,96 \cdot 5,1020)^2 = 10^2 = 100.$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 100\ individuos}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

JULIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B).

PRUEBA A

1º) Una empresa fabrica y vende dos tipos de productos, A y B. El precio de venta de una tonelada del producto A en el mercado es de 200 euros y el de una tonelada de B es de 500 euros. Para su elaboración utilizan dos materias primas, M1 y M2, de la que disponen diariamente de 184 y 100 unidades, respectivamente. Para fabricar una tonelada de A se necesitan 8 unidades de M1 y 2 unidades de M2. Para elaborar una tonelada de B se necesitan 4 unidades M1 y 3 unidades M2. El coste unitario asociado a la fabricación del producto A es de 25 euros y el de B es de 275 euros. Determine cuántas toneladas de cada producto deberá fabricar diariamente esta empresa si desea maximizar el beneficio, garantizando un nivel de fabricación total de al menos 15 unidades.

i) Plantee el problema. ii) Resuélvalo gráficamente.

iii) Una nueva normativa en el sector de esta empresa exige que las emisiones contaminantes derivadas del proceso de fabricación no supere el nivel de 150 unidades de emisiones diarias. La fabricación de una tonelada de A genera 2,5 unidades de emisiones contaminantes y la de una tonelada de B genera 6 unidades. Analice gráficamente cómo afectaría a la política de fabricación el cumplimiento de la nueva normativa.

----

i)

Sean x e y el número de toneladas de los productos A y B que se fabrican diariamente, respectivamente.

La función ventas es $V(x,\ y) = 200x + 500y$.

La función compras es $C(x,\ y) = 25x + 275y$.

La función beneficios es la diferencia entre la función ventas y la función compras:

$B(x,\ y) = V(x,\ y) - C(x,\ y) = 200x + 500y - 25x - 275y = 175x + 225y$.

Las condiciones del ejercicio se establecen en el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 8x + 4y \leq 184 \\ 2x + 3y \leq 100 \\ x + y \geq 15 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 2x + y \leq 46 \\ 2x + 3y \leq 100 \\ x + y \geq 15 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{array}\right\}.$$

$ii)$

x	10	23
y	26	0

①$\Rightarrow 2x + y \leq 46 \Rightarrow y \leq 46 - 2x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

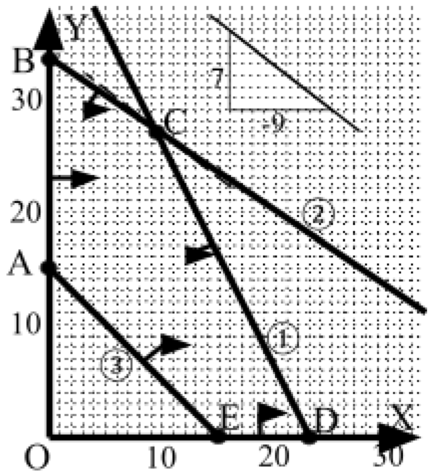
x	29	20
y	16	20

②$\Rightarrow 2x + 3y \leq 100 \Rightarrow y \leq \frac{100-2x}{3} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	0	15
y	15	0

③$\Rightarrow x + y \geq 15 \Rightarrow y \geq 15 - x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow No.$

La región factible es la zona sombreada de la figura adjunta.



Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ x + y = 15 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,\ 15).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ 2x + 3y = 100 \end{array}\right\} \Rightarrow y = \frac{100}{3} \Rightarrow B\left(0,\ \frac{100}{3}\right).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x + y = 46 \\ 2x + 3y = 100 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} -2x - y = -46 \\ 2x + 3y = 100 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2y = 54;\ y = 27;\ 2x + 27 = 46;\ 2x = 19 \Rightarrow x = \frac{19}{2} \Rightarrow C\left(\frac{19}{2},\ 27\right).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ 2x + y = 46 \end{array}\right\} \Rightarrow D(23,\ 0).$

$E \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ x + y = 15 \end{array}\right\} \Rightarrow E(15,\ 0).$

Los valores de la función de beneficios en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 15) = 175 \cdot 0 + 225 \cdot 15 = 0 + 3.375 = 3.375.$

$B \Rightarrow f\left(0,\ \frac{100}{3}\right) = 175 \cdot 0\ +\ 225 \cdot \frac{100}{3}\ =\ 0\ +\ 7.500\ =\ 7.500.$

$C \Rightarrow f\left(\frac{19}{2},\ 27\right) = 175 \cdot \frac{19}{2}\ +\ 225 \cdot 27\ =\ 1.662,5\ +\ 6.075\ =\ 7.737,5.$

$D \Rightarrow f(23,\ 0) = 175 \cdot 23\ +\ 225 \cdot 0\ =\ 4.025\ +\ 0\ =\ 4.025.$

$E \Rightarrow f(15,\ 0) = 175 \cdot 15\ +\ 225 \cdot 0\ =\ 2.625\ +\ 0\ =\ 2.625.$

Se maximizan beneficios en el punto C.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de beneficios, como puede observarse en la figura.

$B(x,\ y) = 175x\ +\ 225y\ =\ 0 \Rightarrow y\ = -\ \frac{175}{225}x\ = -\ \frac{7}{9}x \Rightarrow m\ = -\ \frac{7}{9}.$

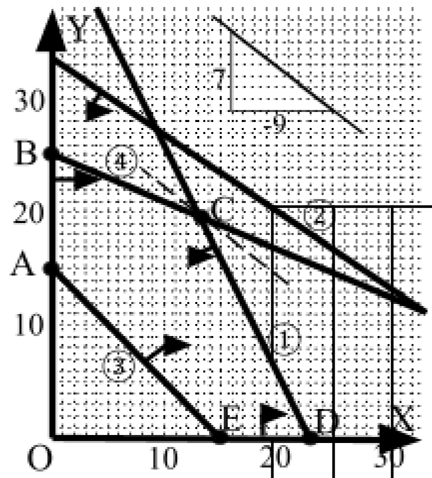
$\underline{Maximiza\ beneficios\ fabricando\ 9,5\ toneladas\ del\ producto\ A\ y\ 27\ del\ B.}$

$ii)$

La nueva condición añade una nueva restricción, que es $2,5x\ +\ 6y \leq 150$.

$2,5x\ +\ 6y \leq 150;\ 5x\ +\ 12y \leq 300.$

4 $\Rightarrow 5x\ +\ 12y \leq 300 \Rightarrow$



x	0	24
y	25	15

$\Rightarrow y \leq \frac{300-5x}{12} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

La nueva zona factible es la indicada en la figura de la derecha, en la cual se observa que han cambiado los vértices B y C que, ahora son los siguientes:

$B \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x\ =\ 0 \\ 5x\ +\ 12y\ =\ 300 \end{array} \right\} \Rightarrow y\ =\ \frac{300}{12}\ =\ 25 \Rightarrow B(0,\ 25).$

$C \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x\ +\ y\ =\ 46 \\ 5x\ +\ 12y\ =\ 300 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} -\ 10x\ -\ 5y\ = -\ 230 \\ 10x\ +\ 24y\ =\ 600 \end{array} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x + \frac{370}{19} = 46;\ \ 38x + 370 = 874 \Rightarrow x = \frac{874-370}{38} = \frac{504}{38} = \frac{252}{19} \Rightarrow C\left(\frac{370}{19},\ \frac{252}{19}\right)$
.

Los valores de la función de beneficios en estos dos vértice son los siguientes:

$B \Rightarrow f(0,\ 25) = 175 \cdot 0 + 225 \cdot 25 = 0 + 5.625 = 5.625.$

$C \Rightarrow f\left(\frac{370}{19},\ \frac{252}{19}\right) = 175 \cdot \frac{370}{19} + 225 \cdot \frac{252}{19} = 3.407,9 + 2.984,2 = 6.392,1$
.

De nuevo se maximizan beneficios en el nuevo punto C, como se corrobora con la pendiente de la función de beneficios.

$\frac{370}{19} = 19,47.$ $\frac{252}{19} = 13,26.$ Con la nueva normativa maximiza beneficios:

$\underline{Fabricando\ 19,47\ toneladas\ del\ producto\ A\ y\ 13,26\ toneladas\ del\ B}.$

****

2º) a) Calcule las siguientes integrales:

$i)\ \ I = \int sen\,(3x) \cdot [\cos cos\,(3x)\,]^2 \cdot dx.$ $\qquad ii)$

$I = \int \left(5 + 3x^2 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}\right) \cdot dx.$

b) Calcule dos funciones distintas cuya derivada sea $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}} + e^{2x}$.

$a)$

$i)$

$$I = \int sen\,(3x) \cdot [\cos cos\,(3x)\,]^2 \cdot dx.$$

$$I = \int sen\,(3x) \cdot [\cos cos\,(3x)\,]^2 \cdot dx \Rightarrow \left\{\cos cos\,(3x)\cdot dx = dt\ sen\,(3x) \cdot dx = -\frac{1}{3} \cdot dt\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int t^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot dt = -\frac{1}{3} \cdot \int t^2 \cdot dt = -\frac{1}{3} \cdot \frac{t^3}{3} + C = -\frac{1}{9} \cdot [\cos cos\,(3x)\,]^3 + C.$$

$$\underline{I = \int sen\,(3x) \cdot [\cos cos\,(3x)\,]^2 \cdot dx = -\frac{1}{9} \cdot [\cos cos\,(3x)\,]^3 + C.}$$

$ii)$

$$I = \int \left(5 + 3x^2 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}\right) \cdot dx.$$

$$I = \int \left(5 + 3x^2 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}\right) \cdot dx = 5x + \frac{3x^3}{3} + L|x| + 2 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + C.$$

$$\underline{I = \int \left(5 + 3x^2 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}\right) \cdot dx = x^3 + 5x - \frac{1}{x^2} + L|x| + C.}$$

$b)$

$$F(x) = \int f(x)\cdot dx = \int\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}} + e^{2x}\right)\cdot dx = \int (x + 2)^{-\frac{1}{2}}\cdot dx + \int e^{2x}\cdot dx =$$

$= A + B.$ (*)

$$A = \int (x + 2)^{-\frac{1}{2}}\cdot dx \Rightarrow \{x + 2 = t\; dx = dt\} \Rightarrow \int t^{-\frac{1}{2}}\cdot dt = \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= 2\sqrt{t} + C = \underline{2\sqrt{x + 2} + C}.$$

$$B = \int e^{2x}\cdot dx \Rightarrow \left\{2x = t \rightarrow dx = \frac{1}{2}dt\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}\int e^{t}dt = \frac{1}{2}e^{t} + C = \underline{\frac{1}{2}e^{2x} + C}.$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de A y B:

$$F(x) = A + B = 2\sqrt{x + 2} + \frac{1}{2}e^{2x} + C.$$

$$\underline{Solución:\ F_1(x) = 2\sqrt{x + 2} + \frac{1}{2}e^{2x};\ \ F_2(x) = 2\sqrt{x + 2} + \frac{1}{2}e^{2x} + 1.}$$

****

3º) Una caja contiene doce bolígrafos, de los cuales cuatro son defectuosos. Se extraen tres bolígrafos de forma consecutiva y sin devolverlos a la caja.

i) Calcule la probabilidad de que los tres bolígrafos extraídos no tengan defectos.

ii) Calcule la probabilidad de que al menos un bolígrafo de entre los tres extraídos sea defectuoso.

iii) Calcule la probabilidad de que solamente un bolígrafo sea defectuoso.

----

i)

Aplicando la regla de Laplace:

$$P = \frac{Casos\ favorables}{Casos\ posibles} = \frac{C_{8,3}}{C_{12,3}} = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{\frac{8!}{(8-3)!\cdot 3!}}{\frac{12!}{(12-3)!\cdot 3!}} = \frac{\frac{8!}{5!}}{\frac{12!}{9!}} = \frac{\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5!}}{\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9!}{9!}} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{12\cdot 11\cdot 10} =$$

$$= \frac{2\cdot 7\cdot 3}{3\cdot 11\cdot 5} = \frac{14}{55} = \underline{0,2545}.$$

ii)

El suceso contrario a que "al menos un bolígrafo sea defectuoso" es que "ninguno de los tres bolígrafos sea defectuoso", por lo cual, la probabilidad pedida es:

$$P = 1 - \frac{C_{8,3}}{C_{12,3}} = 1 - \frac{14}{55} = \frac{55-14}{55} = \frac{41}{55} = \underline{0,7455}.$$

iii)

$$P = P(D\,\overline{D}\,\overline{D}) + P(\overline{D}\,D\,\overline{D}) + P(\overline{D}\,\overline{D}\,D) =$$

$$= \frac{4}{12}\cdot\frac{8}{11}\cdot\frac{7}{10} + \frac{8}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{7}{10} + \frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{4}{10} = 3\cdot\frac{4}{12}\cdot\frac{8}{11}\cdot\frac{7}{10} = \frac{8}{11}\cdot\frac{7}{10} = \frac{28}{55} = \underline{0,5091}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Dadas las matrices $X = (3\ 1\ 1\ 1\ 0\ 2\ )\ e\ Y = (2\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ )$.

i) Resuelva el sistema siguiente y compruebe si su solución coincide con las matrices anteriores X e Y:
$2A - 3B = (0\ 2\ -1\ -1\ -3\ 1\ ) \quad 3A - 2B = (5\ 3\ 1\ 1\ -2\ 4\ )\}$

ii) Razone si la matriz $X + Y$ es invertible.

----

i)

$2A - 3B = (0\ 2\ -1\ -1\ -3\ 1\ ) \quad 3A - 2B = (5\ 3\ 1\ 1\ -2\ 4\ )\} \quad -4A +$

$\Rightarrow 5A = (15\ 5\ 5\ 5\ 0\ 10\ ) \Rightarrow \underline{A = (3\ 1\ 1\ 1\ 0\ 2\ )}$.

$2A - 3B = (0\ 2\ -1\ -1\ -3\ 1\ ) \quad 3A - 2B = (5\ 3\ 1\ 1\ -2\ 4\ )\} \quad -6A +$

$\Rightarrow 5B = (10\ 0\ 5\ 5\ -10\ 5\ ) \Rightarrow \underline{B = (2\ 0\ 1\ 1\ -2\ 1\ )}$.

ii)

Las matrices $X\ e\ Y$ tienen ambas por dimensión 2×3 (dos filas y tres columnas) por lo cual la suma $X + Y$ tiene la misma dimensión.

Para que una matriz sea invertible es condición necesaria de que sea cuadrada.

$\underline{La\ matriz\ X + Y\ no\ puede\ ser\ invertible\ por\ no\ ser\ cuadrada}$.

****

2º) Dada la función $f(x) = \frac{3}{x^2-4}$, calcule:

i) Dominio y puntos de corte con los ejes. ii) Asíntotas.

iii) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

iv) Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

v) Con los datos que ha obtenido, dibuje su gráfica.

----

i)

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 2.$$

El dominio de una función racional es R, excepto los valores que anulan el denominador.

$$\underline{D(f) \Rightarrow R - \{-2,\ 2\}}.$$

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$$Eje\ Y \Rightarrow x = 0 \rightarrow f(0) = \frac{3}{-4} \Rightarrow \underline{A\left(0,\ -\frac{3}{4}\right)}.$$

$$Eje\ X \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \frac{3}{x^2-4} = 0 \Rightarrow x \notin R \Rightarrow \underline{La\ función\ no\ corta\ al\ eje\ X}.$$

ii)

Asíntotas verticales: Son de la forma $x = k$; son los valores finitos de x que anulan el denominador.

$$\underline{Asíntotas\ verticales: x = -2,\ x = 2}.$$

Asíntotas horizontales: Son de la forma $y = k$; son los valores finitos que toma la función cuando $x \rightarrow \pm\infty$:

$$k = f(x) = \frac{3}{x^2-4} = 0\ .$$

$$\underline{La\ recta\ y = 0\ (eje\ X)\ es\ asíntota\ horizontal\ de\ la\ función}.$$

Asíntotas oblicuas: Son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \frac{f(x)}{x}\ \ y\ n = [f(x) - mx]\ .$$

$$m = \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{x+1}{x^2+2x}}{x} = \frac{x+1}{x^3+2x^2} = 0\ .$$

$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ oblicuas}.$

(son incompatibles con las asíntotas horizontales)

$iii)$

Una función es creciente o decreciente en un punto cuando el valor de su primera derivada en ese punto es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{-3\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{-6x}{(x^2-4)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-6x}{(x^2-4)^2} = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Teniendo en cuenta el dominio de la función y que $\left(x^2 - 4\right)^2 > 0,\ \forall x \in D(f)$, los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función son los siguientes:

$$\underline{f(x)\ creciente:\ f'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon (-\infty, -2) \cup (-2,\ 0)}.$$

$$\underline{f(x)\ decreciente:\ f'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon (0,\ 2) \cup (2,\ +\infty)}.$$

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo en un punto es que se anule su primera derivada:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para el valor que anula la primera derivada, se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo relativo.

$$f''(x) = \frac{-6\cdot\left(x^2-4\right)^2 - (-6x)\cdot\left[2\cdot\left(x^2-4\right)\cdot 2x\right]}{(x^2-4)^4} = \frac{-6\cdot\left(x^2-4\right)+24x^2}{(x^2-4)^3} = \frac{-6x^2+24+24x^2}{(x^2-4)^3} =$$

$$= \frac{18x^2+24}{(x^2-4)^3} = \frac{6\left(3x^2+4\right)}{(x^2-4)^3}.$$

$$f''(0) = \frac{6(0+4)}{(0-4)^3} = \frac{24}{-64} < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = \frac{3}{0-4} = -\frac{3}{4} \Rightarrow Máximo\ relativo:\ \underline{A\left(0,\ -\frac{3}{4}\right)}.$$

$iv)$

Una función es cóncava (∩) o convexa (∪) en un punto cuando el valor de su segunda derivada en ese punto es negativa o positiva, respectivamente.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{6(3x^2+4)}{(x^2-4)^3} \Rightarrow 6(3x^2 + 4) > 0 \ \forall x \in R.$$

La segunda derivada es positivo o negativa según lo sea $(x^2 - 4)^3$.

$$f''(x) > 0 \Rightarrow |x| > 2 \ \ y \ \ f''(x) < 0 \Rightarrow |x| < 2.$$

Los periodos de concavidad y convexidad de la función son los siguientes:

$$\underline{f(x)\ cóncava\ (\cap):\ f''(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon (-2, 2).}$$

$$\underline{f(x)\ convexa\ (\cup):\ f''(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon (-\infty, -2) \cup (2, +\infty).}$$

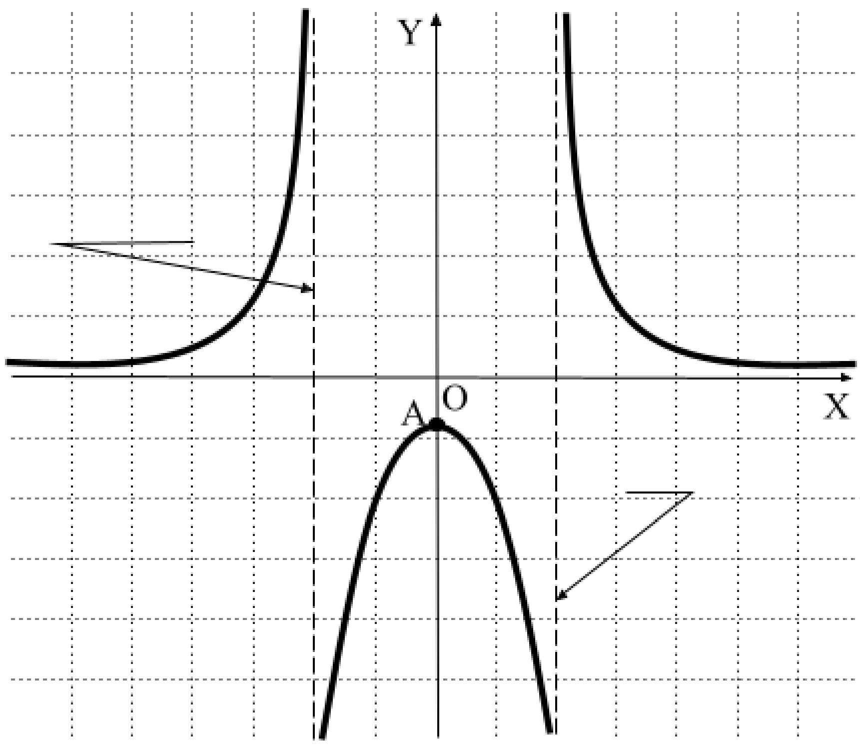
La condición necesaria para que una función tenga un punto de inflexión es que se anule su segunda derivada:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{6(3x^2+4)}{(x^2-4)^3} = 0 \Rightarrow 6(3x^2 + 4) \neq 0, \ \forall x \in R.$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ no\ tiene\ puntos\ de\ inflexión.}$$

$v)$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



****

3º) En una región se selecciona una muestra de 600 jóvenes y se observa que 500 de ellos son lectores habituales.

i) Construya un intervalo de confianza para la proporción poblacional de jóvenes no lectores habituales, con un nivel de confianza del 99 %.

ii) Analice el efecto que tiene en el intervalo la disminución del nivel de confianza. (Escriba las formulas necesarias y justifique las respuestas)

----

i)

Nivel de confianza del 99 %.

$\alpha = 1 - 0,99 = 0,01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,005} = 2,578.$

$(1 - 0,0050 = 0,9950 \rightarrow z = 2,578).$

Datos: $n = 600;\ p = \frac{600-500}{600} = \frac{100}{600} = \frac{1}{6};\ q = \frac{5}{9};\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,578.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q $y\ n$, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}},\ p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right).$

$$\left(\frac{1}{6} - 2,578 \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}{600}};\ \frac{1}{6} + 2,578 \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}{600}}\right);$$

$\left(\frac{1}{6} - 2,578 \cdot 0,0152;\ \frac{1}{6} + 2,578 \cdot 0,0152\right);\ (0,1667 - 0,0392;\ 0,1667 + 0,0392)$.

$$\underline{I.\ C._{99\ \%} = (0,1275;\ 0,2059).}$$

ii)

El nivel de confianza es directamente proporcional al valor del intervalo; es decir: si aumentamos el nivel de confianza se agranda el intervalo de confianza. Para una mayor comprensión: si se quisiera un nivel del confianza del 100 %, el intervalo de confianza sería el valor del recorrido de la variable.

$$\underline{Conclusión: a\ mayor\ nivel\ de\ confianza,\ mayor\ valor\ del\ intervalo.}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B).

PRUEBA A

1º) Una empresa va a contratar personal para la campaña de rebajas. Cada dependienta que contrate trabajará 8 horas al día y cobrará 60 euros diarios. Cada cajera trabajará 10 horas al día y cobrará 90 euros diarios. Se seleccionan 8 dependientas y 9 cajeras en paro. Si la empresa dispone de 930 euros diarios pare sueldos, ¿cuántas empleadas de cada clase debe contratar para que cubran el mayor número de horas?

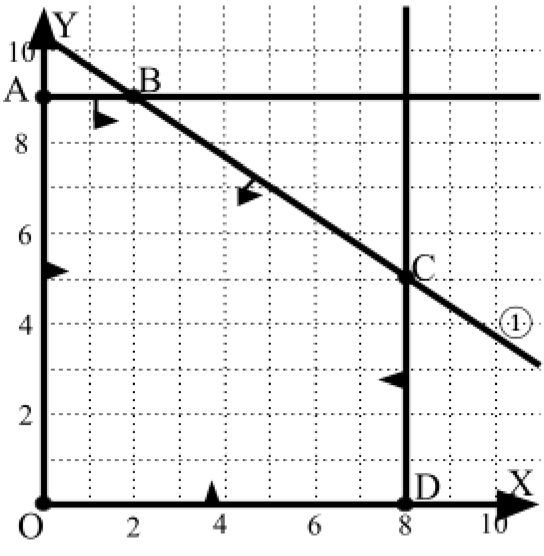
$i)$ Plantee el problema. $ii)$ Resuélvalo gráficamente.

$iii)$ Analice gráficamente qué ocurre si cada cajera tuviera que trabajar 12 horas al día.

$a)$

Sean x e y el número de dependientas y cajeras que se contratan diariamente, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes:



$60x + 90y \leq 930 \quad 0 \leq x \leq 8 \quad 0 \leq y \leq 9 \}$ $2x + 3y \leq 31 \quad 0 \leq x \leq 8 \quad 0 \leq y \leq 9 \}$

.

$b)$

La función de objetivos es la siguiente:

$f(x,\ y) = 60x + 90y.$

x	2	5
y	9	7

①$\Rightarrow 2x + 3y \leq 31 \Rightarrow y \leq \frac{31-2x}{3} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura.

Los vértices de la zona factible, además del origen, son los siguientes:
$A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,\ 9).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 9 \\ 2x + 3y = 31 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x + 27 = 31;\ \ 2x = 4;\ \ x = 2 \Rightarrow B(2,\ 9)$
.

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 8 \\ 2x + 3y = 31 \end{array}\right\} \Rightarrow 16 + 3y = 31;\ \ 3y = 15;\ \ y = 5 \Rightarrow C(8,\ 5)$
.

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 8 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow D(8,\ 0).$

Los valores de la función de objetivos $f(x,\ y) = 60x + 90y$ en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 9) = 60 \cdot 0 + 90 \cdot 9 = 0 + 810 = 810.$

$B \Rightarrow f(2,\ 9) = 60 \cdot 2 + 90 \cdot 9 = 120 + 810 = 930.$

$C \Rightarrow f(8,\ 5) = 60 \cdot 8 + 90 \cdot 5 = 480 + 450 = 930.$

$D \Rightarrow f(8,\ 0) = 60 \cdot 8 + 90 \cdot 0 = 480 + 0 = 480.$

El máximo número de horas se produce en el punto C.

$\underline{Se\ deben\ contratar\ 8\ dependientas\ y\ 5\ cajeras}.$

$c)$

Si las cajeras trabajan 12 horas cobrarían 120 euros diarios.

Las nuevas restricciones son las siguientes:

$\left.\begin{array}{l} 60x + 120y \leq 930 \\ 0 \leq x \leq 8 \\ 0 \leq y \leq 9 \end{array}\right\}\ \ 2x + 4y \leq 31 \quad 0 \leq x \leq 8 \quad 0 \leq y \leq$

La nueva función de objetivos es $g(x,\ y) = 60x + 120y.$

x	1,5	5,5

y	7	5

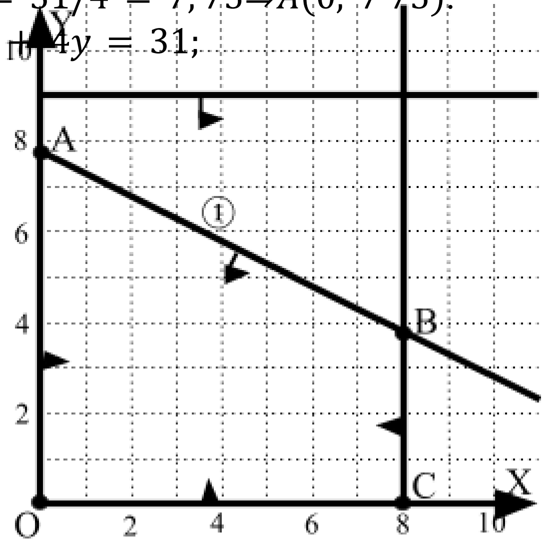
①$\Rightarrow 2x + 4y \leq 31 \Rightarrow y \leq \frac{31-2x}{4} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

La nueva zona factible es la que aparece sombreada en la figura siguiente.

Los vértices de la nueva zona factible, además del origen, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ 2x + 4y = 31 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 31/4 = 7,75 \Rightarrow A(0,\ 7'75).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 8 \\ 2x + 4y = 31 \end{array}\right\} \Rightarrow 16 + 4y = 31;$



$4y = 15;\ \ y = 3,75 \Rightarrow C(8,\ 3'75).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 8 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow C(8,\ 0).$

Los valores de la nueva función de objetivos $f(x,\ y) = 60x + 120y$ en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 7'75) = 60 \cdot 0 + 120 \cdot 7'75 =$

$= 0 + 930 = 930.$

$B \Rightarrow f(8,\ 3'75) = 60 \cdot 8 + 120 \cdot 3'75 = 480 + 450 = 930.$

$C \Rightarrow f(8,\ 0) = 60 \cdot 8 + 120 \cdot 0 = 480 + 0 = 480.$

El máximo número de horas se produce en el punto B.

Considerando, como es lógico, que el número de personas tiene que ser natural:

$\underline{Se\ deben\ contratar\ 8\ dependientas\ y\ 3\ cajeras.}$

****

2º) Dada la función $f(x) = \{2x + 5 \quad si \quad x <- 2\, x^2 + 2x + 1 \; si \; - 2 \leq x < 1 \; - x^2 + 2 \quad si \quad x \geq 1$
.

i) Estudie su continuidad y derivabilidad en todo R.

ii) Dibuje su gráfica.

iii) Aplicando la definición de derivada, calcule la derivada de $f(x)\; en\; x = 3$.

----

i)

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x =- 2\; y\; x = 1$, cuya continuidad se estudia a continuación.

Para que la función sea continua en los puntos críticos es necesario que sus límites laterales en esos puntos sean iguales e iguales a los correspondientes valores de la función en esos puntos.

$f(x) \; = (2x + 5) =- 4 + 1 = 1$ $\qquad f(x) \; = \left(x^2 + 2x + 1\right) \; =- 4 +$

$\Rightarrow f(x) \; = f(x) \; = f(- 2) \Rightarrow \underline{f(x)\; es\; continua\; en\; x \; =- 2}$.

$f(x) \; = \left(x^2 + 2x + 1\right) \; = 1 + 2 + 1 = 4 \quad f(x) \; = \left(- x^2 + 2\right) \; =- 1 + 2 = 1 = f($

$\Rightarrow f(x) \; \neq f(x) \; \Rightarrow \underline{f(x)\; no\; es\; continua\; en\; x \; = 1}$.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas laterales son iguales en ese punto.

$f'(x) = \{2 \quad si \quad x <- 2\; 2x + 2 \; si \; - 2 \leq x < 1 \; - 2x \quad si \; x \geq 1$.

$f'\left(- 2^-\right) = 2. \quad f'\left(- 2^+\right) =- 4 + 2 =- 2 \Rightarrow f'\left(- 2^-\right) \neq f'\left(- 2^+\right)$.

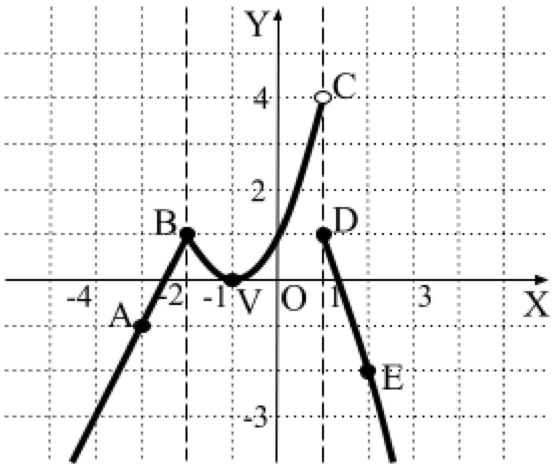
$\underline{La\; función\; no\; es\; derivable\; para\; x \; =- 2}$.

$\underline{Conclusión: Continua\; en\; R \; - \{1\}. \;\; Derivable\; en\; R \; - \{- 2, \; 1\}}$.

ii)

Representación gráfica de $f(x) = \{2x + 5 \quad si \quad x <- 2\, x^2 + 2x + 1\ si\ - 2 \leq x < 1\ - x^2 + 2 \quad si \quad x \geq 1$.

En el intervalo $(-\infty, -2)$ la función es la recta $f(x) = 2x + 5$, de pendiente es $m = 2$ y pasa por $A(-3, -1)$.



En el intervalo $(-2, -1)$ la función es la parábola convexa $f(x) = (x + 1)^2$, cuyo vértice es el punto $V(-1, 0)$ y contiene a los puntos $B(-2, 1)\ y\ C(1, 4)$.

En el intervalo $(1, +\infty)$ la función es la parábola $f(x) = -x^2 + 2$, que es cóncava, (∩), y que contiene a los puntos $D(1, 1)$ y $E(2, -2)$.

La representación gráfica, aproximada, es la que aparece en el gráfico adjunto.

****

3º) El salario medio correspondiente a una muestra aleatoria de 900 personas de una población dada es de 1.190 euros. Se sabe que los salarios de esa población siguen una distribución normal con desviación típica de 150 euros.

i) Calcule el intervalo de confianza al 95 % para la media poblacional.

ii) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral para que la amplitud del intervalo sea la misma, con un nivel de confianza del 97 %?
(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

----

a)

$\alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$
$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$

Conocemos: $n = 900$; $\overline{x} = 1.190$; $\sigma = 150$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}$, σ y n, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(1.190 - 1,96 \cdot \frac{150}{\sqrt{900}};\ 1.190 + 1,96 \cdot \frac{150}{\sqrt{900}}\right);$

$(1.190 - 1,96 \cdot 5;\ 1.190 + 1,96 \cdot 5);\ \ (1.190 - 9,8;\ 1.190 + 9,8)$

$$\underline{I.\ C._{95\ \%} = (1.180,2;\ 1.190,8).}$$

b)

Si el intervalo de confianza tiene la misma amplitud es:

$E = \frac{1.190,8 - 1.180,2}{2} = \frac{10,6}{2} = 5,3.$

Para un nivel de confianza del 97 % es:

$1 - \alpha = 0,97 \rightarrow \alpha = 1 - 0,97 = 0,03 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,015} = 2,17.$
$1 - 0,015 = 0,9850 \rightarrow z = 2,17).$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(2,17 \cdot \frac{150}{5,3}\right)^2 =$

$= (2,17 \cdot 28,30)^2 = 61,42^2 = 3771,81.$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 3.372\ personas}.$

****

OPCIÓN B

1º) Dada la ecuación matricial $AX + 2B = 2X$ con $A = (6\ 4\ 2\ 8)\ y\ B = (2\ -\ 4\ 0\ 2)$.

i) Despeje la matriz X. ii) Calcule la matriz X.

----

i)

$$AX + 2B = 2X;\ \ 2B = 2X - AX = (2I - A)\cdot X;$$

$$2\cdot(2I - A)^{-1}\cdot B = (2I - A)^{-1}\cdot(2I - A)\cdot X = I\cdot X.$$

$$\underline{X = 2\cdot(2I - A)^{-1}\cdot B}.$$

ii)

$$2I - A = (2\ 0\ 0\ 2) - (6\ 4\ 2\ 8) = (-\ 4\ \ -\ 4\ \ -\ 2\ \ -\ 6).$$

$$(2I - A)^t = (-\ 4\ \ -\ 2\ \ -\ 4\ \ -\ 6).$$

$$|2I - A| = |-\ 4\ \ -\ 4\ \ -\ 2\ \ -\ 6| = 24 - 8 = 16.$$

$$Adj.\ de\ (2I - A)^t = (-\ 6\ 4\ 2\ \ -\ 4).$$

$$(2I - A)^{-1} = \frac{Adj.\ de\ (2I-A)^t}{|2I-A|} = \frac{1}{16}\cdot(-\ 6\ 4\ 2\ \ -\ 4) = \frac{1}{8}\cdot(-\ 3\ 2\ 1\ \ -\ 2).$$

Sustituyendo los valores hallados en la expresión de X:

$$X = 2\cdot(2I - A)^{-1}\cdot B = 2\cdot\frac{1}{8}\cdot(-\ 3\ 2\ 1\ \ -\ 2)\cdot(2\ \ -\ 4\ 0\ 2) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(-\ 3\ 2\ 1\ \ -\ 2)\cdot(1\ \ -\ 2\ 0\ 1) = \frac{1}{2}\cdot(-\ 3\ 8\ 1\ \ -\ 4).$$

$$\underline{X = \frac{1}{2}\cdot(-\ 3\ 8\ 1\ \ -\ 4)}.$$

****

2º) Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

$i)\ f(x) = 3 + \sqrt{\frac{2}{x-1}}.$ $\qquad ii)\ g(x) = 3sen^2 x - L\left(x^3 + 2\right).$

$iii)\ h(x) = 4 + tg\, x^2 + \exp exp\left(2x^2 + x\right).$

$i)$

$$f(x) = 3 + \sqrt{\frac{2}{x-1}}.$$

$$f(x) = 3 + m(x) \Rightarrow f'(x) = m'(x). \quad (*)$$

$$m(x) = \sqrt{\frac{2}{x-1}} \Rightarrow L[m(x)] = L\sqrt{\frac{2}{x-1}} = \frac{1}{2}L2 - \frac{1}{2}L(x - 1).$$

$$\frac{m'(x)}{m(x)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1} \Rightarrow m'(x) = \frac{1}{2(x-1)}\cdot\left(3 + \sqrt{\frac{2}{x-1}}\right).$$

$$\underline{f'(x) = \frac{1}{2(x-1)}\cdot\left(3 + \sqrt{\frac{2}{x-1}}\right).}$$

$ii)$

$$g(x) = 3sen^2 x - L\left(x^3 + 2\right).$$

$$g'(x) = 6\cdot sen\, x\cdot \cos cos\, x - \frac{3x^2}{x^3+2}.$$

$$\underline{g'(x) = 3\cdot sen\,(2x) - \frac{3x^2}{x^3+2}.}$$

$iii)$

$$h(x) = 4 + tg\, x^2 + \exp exp\left(2x^2 + x\right).$$

$$h(x) = 4 + \frac{sen\, x^2}{cos\, x^2} + e^{2x^2+x}.$$

$$h'(x) = \frac{2x\cdot cos\, x^2\cdot \cos cos\, x^2 - sen\, x^2\cdot 2x\cdot sen\, x^2}{cos^2 x^2} + (4x + 1)\cdot e^{2x^2+x} =$$

$$= \frac{2x\cdot\left(cos^2 x^2 + sen^2 x^2\right)}{cos^2 x^2} + (4x + 1)\cdot e^{2x^2+x} = \frac{2x}{cos^2 x^2} + (4x + 1)\cdot e^{2x^2+x}.$$

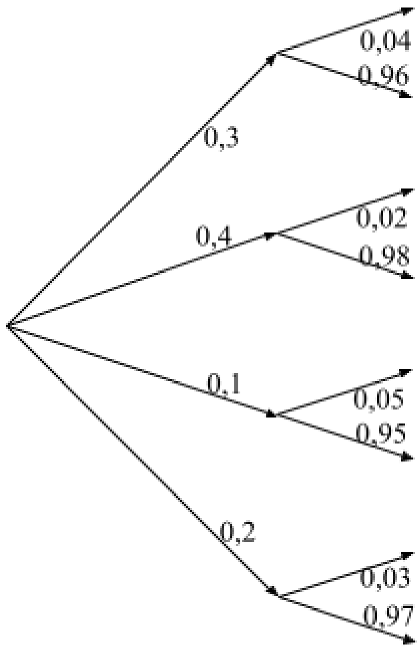
$$\underline{h'(x) = \frac{2x}{\cos^2 x^2} + (4x + 1)\cdot e^{2x^2+x}}.$$

****

3º) En un almacén hay 300 cerraduras del modelo A, 400 del modelo B, 100 del modelo C y 200 del modelo D. La probabilidad de que una cerradura se bloquee es 0,04 se es del modelo A, 0,02 si es del modelo B, 0,05 si es del modelo C y 0,03 se es del modelo D. Se toma una cerradura al azar:

i) Calcule la probabilidad de que la cerradura se bloquee.

ii) Sabiendo que la cerradura se ha bloqueado, calcule la probabilidad de que no sea del modelo B.



i)

$$P = P(Bl) = P(A)\cdot P(Bl/A) + P(B)\cdot P(Bl/B) + P(C)\cdot P(Bl/C) +$$

$$+ P(D)\cdot P(Bl/D) = 0,3\cdot 0,04 + 0,4\cdot 0,02 + 0,1\cdot 0,05 + 0,2\cdot 0,03 =$$

$$= 0,012 + 0,008 + 0,005 + 0,06 = \underline{0,031}.$$

ii)

La probabilidad pedida es equivalente a la unidad menos la probabilidad de que sea del modelo B.

$$P = 1 - P\left(\frac{Bl}{B}\right) = 1 - \frac{P(B\cap Bl)}{P(Bl)} =$$

$$= 1 - \frac{P(B)\cdot P(Bl/B)}{P(A)\cdot P(Bl/A)+P(B)\cdot P(Bl/B)+P(C)\cdot P(Bl/C)+P(D)\cdot P(Bl/D)} =$$

$$= 1 - \frac{0{,}4 \cdot 0{,}02}{0{,}3 \cdot 0{,}04 + 0{,}4 \cdot 0{,}02 + 0{,}1 \cdot 0{,}05 + 0{,}2 \cdot 0{,}03} = 1 - \frac{0{,}008}{0{,}031} = 1 - 0{,}2581 = \underline{0{,}7419}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

JULIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas. Está permitido el uso de calculadoras científicas que no sean programables.

OPCIÓN A

1º) Sean las cuatro inecuaciones lineales:

$$(i)\ 4y - x \geq 4;\ \ (ii)\ 2y - x \leq 6;\ \ (iii)\ y - x \leq 1;\ \ (iv)\ 2y + x \leq 8.$$

a) Dibuja en el plano XY el recinto limitado por las inecuaciones dadas. ¿Qué inecuación es superflua? (su ausencia no altera dicho recinto).

b) ¿Cuál es el máximo de la función $f(x,\ y) = 3x - 2y$ en el recinto definido en el apartado anterior?

----

a)

x	0	4
y	1	2

① $\Rightarrow 4y - x \geq 4 \Rightarrow y \geq \frac{x+4}{4} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow No.$

x	0	4
y	3	5

② $\Rightarrow 2y - x \leq 6 \Rightarrow y \leq \frac{x+6}{2} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	0	4
y	1	5

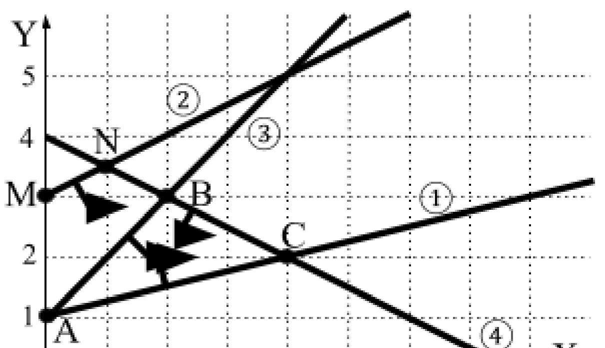
③ $\Rightarrow y - x \leq 1 \Rightarrow y \leq x + 1 \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	0	8
y	4	0

④ $\Rightarrow 2y + x \leq 8 \Rightarrow y \leq \frac{8-x}{2} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura.

Como se aprecia en la figura:



<u>$La\ inecuación\ supérflua\ es\ la$ ②</u>.

Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow 4y - x = 4\ y - x = 1\} \quad -x + 4y = 4\ \ x - y = -1\} \Rightarrow 3y = 3;\ y = 1 \Rightarrow A$

.

$B \Rightarrow\ y - x = 1\ 2y + x = 8\} \Rightarrow 3y = 9;\ y = 3 \Rightarrow B(2,\ 3).$

$C \Rightarrow\ 4y - x = 4\ 2y + x = 8\} \Rightarrow 6y = 12;\ y = 2 \Rightarrow C(4,\ 2).$

$b)$

La función de objetivos es $f(x,\ y) = 3x - 2y$.

El valor de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 1) = 3 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = 0 - 2 = -2.$

$B \Rightarrow f(2,\ 3) = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 6 - 6 = 0.$

$C \Rightarrow f(4,\ 2) = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 12 - 4 = 8.$

<u>$El\ máximo\ se\ alcanza\ en\ el\ punto\ C(4,\ 2)$</u>.

****

2º) En el periódico local se publican al mes x anuncios de un gimnasio, para captar abonados, siendo $0 \leq x \leq 14$. El precio por anuncio es de 300 euros. El número de abonados se estima mediante la función $A(x) = -x^2 + 28x$, y cada uno paga mensualmente 100 euros. Además del gasto en anuncios, el gimnasio gasta mensualmente 12.000 euros en mantenimiento. El balance mensual, $f(x)$, son las cuotas de socios menos los gastos.

a) ¿Cuál es el menor número de anuncios a contratar para eliminar las pérdidas y conseguir que el negocio sea rentable?

b) ¿Cuántos anuncios deben contratarse para maximizar las ganancias y a cuántos euros ascienden dichas ganancias?

----

a)

$$Ingresos \Rightarrow I(x) = 100 \cdot A(x) = -100x^2 + 2.800x.$$

$$Gastos \Rightarrow G(x) = 300 \cdot x + 12.000 = 300x + 12.000.$$

$$Balance \Rightarrow f(x) = I(x) - G(x) = -100x^2 + 2.800x - (300x + 12.000) =$$

$$= -100x^2 + 2.800x - 300x - 12.000 = -100x^2 + 2.500x - 12.000.$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow -100x^2 + 2.500x - 12.000 = 0;\ x^2 - 25x + 120 = 0;$$

$$x = \frac{25 \pm \sqrt{625-480}}{2} = \frac{25 \pm \sqrt{125}}{2} = \frac{25 \pm 5\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x_1 = 6,91;\ x_2 = 18,09 \notin [0,\ 14].$$

Por ser $f(x)$ una parábola cóncava es $f(x) > 0,\ \forall x > 6,91$.

Como $x \in N$:

$\underline{El\ menor\ número\ de\ anuncios\ que\ hace\ rentable\ el\ gimnasio\ es\ 7}$.

b)

Una función polinómica tiene un máximo relativo cuando se anula su primera derivada y es negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$f'(x) = -200x + 2.500.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -200x + 2.500 = 0;\ \ -2x + 25 = 0 \Rightarrow x = \frac{25}{2} = 12,5.$$

Como $x \in N$:

$$\underline{El\ mayor\ beneficio\ se\ obtiene\ con\ 12\ anuncios\ mensuales}.$$

Nota: Teniendo en cuenta que $f(x)$ es una parábola cóncava ($\cap$) cuyo eje es la recta $x = 12,5$, también es solución considerar 13 anuncios, por ser $f(12) = f(13)$.

$$f(12) = -100 \cdot 12^2 + 2.500 \cdot 12 - 12.000 =$$

$$= -14.400 + 30.000 - 12.000 = 30.000 - 26.400 = 3.600.$$

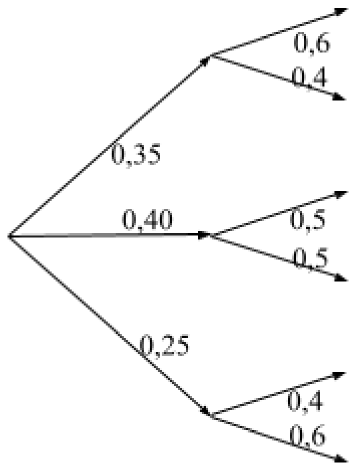
$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ mensual\ es\ de\ 3.600\ euros}.$$

****

3º) En una clínica se realizan únicamente tres tipos de servicios: ecografías, en el 35 % de los casos, radiografías, en el 40 % y resonancias magnéticas en el 25 %. El 60 % de las ecografías son de mujeres, el 50 % de las radiografías son de mujeres y el 60 % de las resonancias son de hombres. Si se elige un paciente al azar se pide:

a) La probabilidad de que el paciente elegido haya sido mujer.

b) Si el paciente elegido ha sido una mujer, probabilidad de que el servicio realizado sea una ecografía.



a)

$$P = P(M) = P(Ec) \cdot P(M/Ec) + P(Ra) \cdot P(M/Ra) + P(Re) \cdot P(M/Re) =$$

$$= 0,35 \cdot 0,6 + 0,40 \cdot 0,5 + 0,25 \cdot 0,4 = 0,210 + 0,200 + 0,100 = \underline{0,510}.$$

b)

$$P = P(Ec/M) = \frac{P(Ec \cap M)}{P(M)} = \frac{P(Ec) \cdot P(M/Ec)}{P(Ec) \cdot P(M/Ec) + P(Ra) \cdot P(M/Ra) + P(Re) \cdot P(M/Re)} =$$

$$= \frac{0,35 \cdot 0,6}{0,35 \cdot 0,6 + 0,40 \cdot 0,5 + 0,25 \cdot 0,4} = \frac{0,210}{0,210 + 0,200 + 0,100} = \frac{0,210}{0,510} = \underline{0,4118}.$$

****

4º) El número de viajes realizados mensualmente por los usuarios habituales de la línea de autobuses Donostia-Bilbao sigue una distribución normal de desviación típica $\sigma = 10$. Si seleccionamos una muestra de 625 usuarios, resulta que la media de viajes realizados por los viajeros es de 16 viajes. Contestar:

a) ¿Cuál es el intervalo de confianza para la media μ de viajes mensuales en toda la población para un nivel de significación del 4 %?

b) ¿Cuál es el intervalo de confianza para la media μ de viajes mensuales en toda la población para un nivel de confianza del 98 %?

----

a)

$\alpha = 0,04 \to z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,02} = 2,055.$ ($1 - 0,02 = 0,9800 \to z = 2,055$).

Datos: $\overline{x} = 16;\ n = 625;\ \sigma = 10;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,055.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(16 - 2,055\cdot\frac{10}{\sqrt{625}};\ 16 + 2,055\cdot\frac{10}{\sqrt{625}}\right);$

$(16 - 2,055\cdot0,4;\ 16 + 2,055\cdot0,4);\ \ (16 - 0,822;\ 16 + 0,822);$

$$\underline{I.\ C._{96\,\%}\ (15,178;\ 16,822).}$$

b)

Para un nivel de confianza del 98 % es:

$1 - \alpha = 0,98 \to \alpha = 1 - 0,98 = 0,02 \to z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,01} = 2,33.$

$1 - 0,01 = 0,99 \to z = 2,33$).

Datos: $\overline{x} = 16;\ n = 625;\ \sigma = 10;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,33.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(16 - 2,33\cdot\frac{10}{\sqrt{625}};\ 16 + 2,33\cdot\frac{10}{\sqrt{625}}\right);\ \ (16 - 2,33\cdot0,4;\ 16 + 2,33\cdot0,4);$

$(16 - 0,932;\ 16 + 0,932);$

$$\underline{I.\ C._{98\,\%}\,(15,068;\ 16,932).}$$

****

OPCIÓN B

1º) Dadas las matrices $A = (2\ 0\ 0\ \ -1\ ),\ B = (1\ 3\ \ -\ 2\ 2\ )\ y\ C = (14\ \ -\ 6\ \ -\ 9\ \ -\ 11\ )$, encontrar las componentes de las matrices de dimensión 2×2, $M = (p\ q\ r\ s\ ), H = (f\ g\ h\ i\ )$ para que se cumplan las siguientes igualdades matriciales:

$a)\ \ A\cdot M\cdot B = C.$ $\qquad\qquad b)\ \ A\cdot H\cdot B^{-1} = C.$

$a)$

$$A\cdot M\cdot B = C \Rightarrow (2\ 0\ 0\ \ -\ 1\ )\cdot(p\ q\ r\ s\ )\cdot(1\ 3\ \ -\ 2\ 2\ ) = (14\ \ -\ 6\ \ -\ 9\ \ -\ 11\ );$$

$= (2p\ 2q\ \ -\ r\ \ -\ s\ )\cdot(1\ 3\ \ -\ 2\ 2\ ) = (14\ \ -\ 6\ \ -\ 9\ \ -\ 11\ );\ (2p\ -\ 4q\ 6p\ +\ 4q\ \ -\ r\ +$

$\Rightarrow\quad 2p\ -\ 4q\ =\ 14\ 6p\ +\ 4q\ =-\ 6\ \}\quad -\ r\ +\ 2s\ =-\ 9\ \ -\ 3r\ -\ 2s\ =-\ 11\ \}\ \}\quad 8$

.

$b)$

$$B = (1\ 3\ \ -\ 2\ 2\ );\ \ |B| = |1\ 3\ \ -\ 2\ 2\ | = 2 + 6 = 8;\ \ B^{t} = (1\ \ -\ 2\ 3\ 2\ ).$$

$$Adj.\ de\ B^{t} = (2\ \ -\ 3\ 2\ 1\ ) \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{8}\cdot(2\ \ -\ 3\ 2\ 1\ ).$$

$$A\cdot H\cdot B^{-1} = C \Rightarrow (2\ 0\ 0\ \ -\ 1\ )\cdot(f\ g\ h\ i\ )\cdot\frac{1}{8}\cdot(2\ \ -\ 3\ 2\ 1\ ) = (14\ \ -\ 6\ \ -\ 9\ \ -\ 11\ );$$

$(2f\ 2g\ \ -\ h\ \ -\ i\ )\cdot(2\ \ -\ 3\ 2\ 1\ ) = (112\ \ -\ 48\ \ -\ 72\ \ -\ 88\ );$

$(4f\ +\ 4g\ \ -\ 6f\ +\ 2g\ \ -\ 2h\ -\ 2i\ 3h\ -\ i\ ) = (112\ \ -\ 48\ \ -\ 72\ \ -\ 88\ ) \Rightarrow\quad 4f\ +\ 4g$

$\Rightarrow\quad f\ +\ g\ =\ 28\ 3f\ -\ g\ =\ 24\ \}\quad h\ +\ i\ =\ 36\ 3h\ -\ i\ =-\ 88\ \}\ \}\quad 4f\ =\ 52\ \ 4h\ =$

.

****

2º) Sean el polinomio $p(x) = 2x^3 + bx^2 + c$ y la parábola $q(x) = -x^2 + 6x + 10$.

$a)$ Determinar los coeficientes de las incógnitas b y c para que dos de los puntos de corte entre $p(x)$ y $q(x)$ tengan por abscisas $x = 0$ y $x = 6$. Dibujar un esbozo de la gráfica de las funciones $p(x)$ y $q(x)$.

$b)$ Calcular el área de la región limitada por las curvas $p(x)$ y $q(x)$ en el intervalo $0 \leq x \leq 6$, sabiendo que en su interior no hay ningún punto de corte de $p(x)$ y $q(x)$.

$a)$

Si dos de los puntos de corte entre $p(x)$ y $q(x)$ tienen por abscisas $x = 0$ y $x = 6$, éstas son dos raíces de la función que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$f(x) \Rightarrow p(x) = q(x) \Rightarrow 2x^3 + bx^2 + c = -x^2 + 6x + 10.$$

$$f(x) = 2x^3 + (b + 1)x^2 - 6x + (c - 10).$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow (c - 10) = 0 \Rightarrow \underline{c = 10}.$$

$$f(6) = 0 \Rightarrow 2 \cdot 6^3 + (b + 1) \cdot 6^2 - 6 \cdot 6 = 0;\ \ 2 \cdot 6 + (b + 1) - 1 = 0;$$

$$12 + b + 1 - 1 = 0 \Rightarrow \underline{b = -12}.$$

El polinomio resulta $p(x) = 2x^3 - 12x^2 + 10$, cuyo máximo y mínimo relativo son los siguientes:

$$p'(x) = 6x^2 - 24x. \qquad\qquad p''(x) = 12x - 24.$$

$$p'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 24x = 0;\ \ 6x(x - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 4.$$

$$p''(0) = -24 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$p(0) = 10 \Rightarrow Máximo\ relativo: A(0,\ 10).$$

$$p''(4) = 12 \cdot 4 - 24 = 48 - 24 = 24 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 4.$$

$$p(4) = 2 \cdot 4^3 - 12 \cdot 4^2 + 10 = 2 \cdot 64 - 12 \cdot 16 + 10 = 128 - 192 + 10 =$$

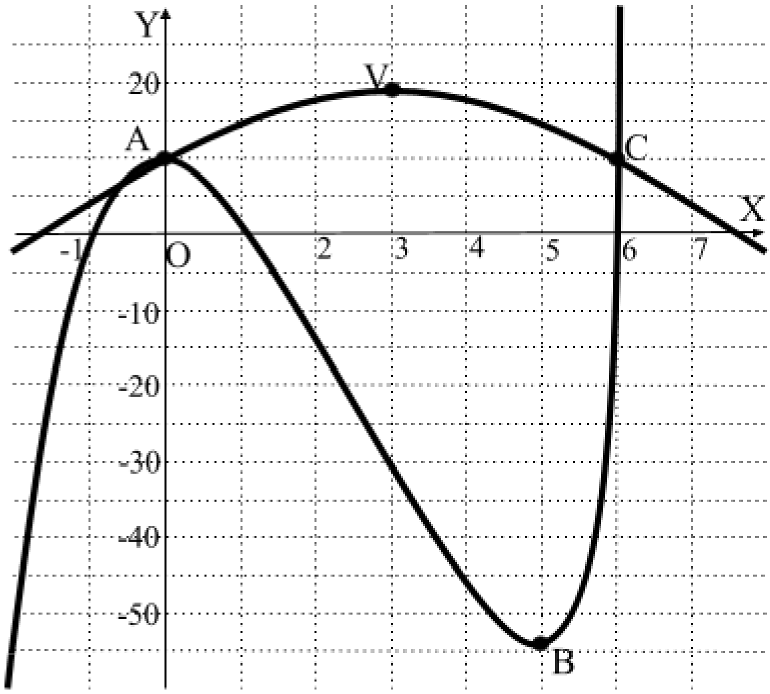
$= 138 - 192 = -54 \Rightarrow Mínimo\ relativo: B(4, -54).$

La parábola $q(x) = -x^2 + 6x + 10$, que es cóncava ($\cap$), pasa por los puntos $A(0, 10)$ y $C(6, 10)$ y su vértice, máximo absoluto, es el siguiente:

$q'(x) = -2x + 6 = 0; \ -x + 3 = 0 \Rightarrow x = 3.$

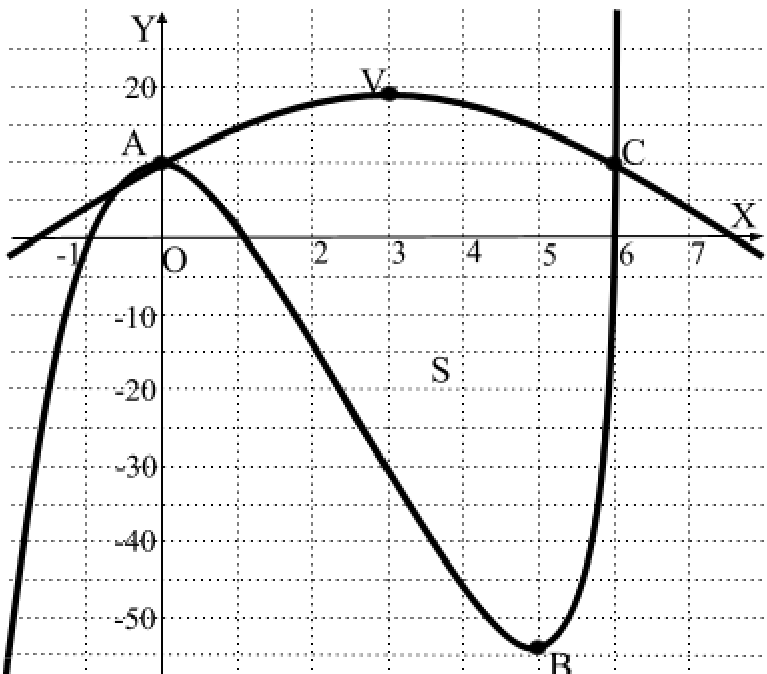
$q(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 + 10 = -9 + 18 + 10 = 19 \Rightarrow V(3, 19).$

La representación gráfica, aproximada, del polinomio y la parábola son los que aparecen en la figura siguiente.



$b)$

De la observación de la figura siguiente se deduce la superficie a calcular, teniendo en cuenta que en el intervalo $(0, 6)$ todas las ordenadas de la parábola son mayores que las correspondientes ordenadas del polinomio.



$$q(x) - p(x) = - x^2 + 6x + 10 - \left(2x^3 - 12x^2 + 10\right) =$$
$$= - x^2 + 6x + 10 - 2x^3 + 12x^2 - 10 = - 2x^3 + 11x^2 + 6x.$$

$$S = \int_0^6 [q(x) - p(x)]\cdot dx = \int_0^6 \left(- 2x^3 + 11x^2 + 6x\right)\cdot dx =$$

$$= \left[\frac{-2x^4}{4} + \frac{11x^3}{3} + \frac{6x^2}{2}\right]_0^6 = \left[- \frac{x^4}{2} + \frac{11x^3}{3} + 3x^2\right]_0^6 = \left(- \frac{6^4}{2} + \frac{11\cdot 6^3}{3} + 3\cdot 6^2\right) - 0 =$$

$$= 6^2\cdot\left(- \frac{6^2}{2} + \frac{11\cdot 6}{3} + 3\right) = 36\cdot(- 18 + 22 + 3) = 36\cdot 7 = 252.$$

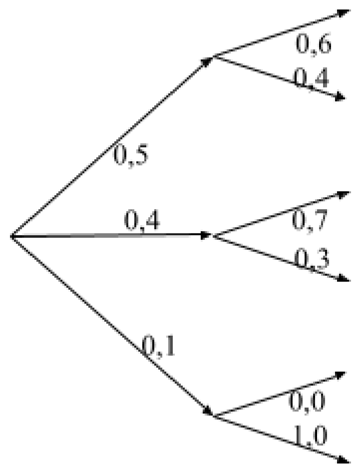
$$\underline{S = 252\, u^2}.$$

****

3º) Una familia hace sus compras de la siguiente manera: el 50 % en tiendas locales, el 40 % por Internet y, el resto, a través de terceras personas. En las tiendas pagan en el 60 % de los casos con tarjeta y en el resto en metálico. En Internet pagan en el 70 % de los casos con tarjeta y en el resto en metálico (contra reembolso). Si compran a través de una tercera persona, siempre pagan en metálico. Si se elige una compra al azar:

a) Calcular la probabilidad de que ésta se haya pagado en metálico.

b) Si una compra se ha pagado con tarjeta, calcular la probabilidad de que ésta se haya hecho en una tienda.



a)

$$P = P(M) = P(L) \cdot P(M/L) + P(I) \cdot P(M/I) + P(3p) \cdot P(M/3p) =$$

$$= 0,5 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 1,0 = 0,20 + 0,12 + 0,10 = \underline{0,42}.$$

b)

$$P = P(L/T) = \frac{P(L \cap T)}{P(T)} = \frac{P(L) \cdot P(T/L)}{P(L) \cdot P(T/L) + P(I) \cdot P(T/I) + P(3p) \cdot P(T/3p)} =$$

$$= \frac{0,5 \cdot 0,6}{0,5 \cdot 0,6 + 0,4 \cdot 0,7 + 0,1 \cdot 0,0} = \frac{0,30}{0,30 + 0,28 + 0,00} = \frac{0,30}{0,58} = \underline{0,5172}.$$

****

4º) Se desea estimar la proporción de personas que son miopes, para lo cual, se toma una muestra de n individuos.

a) El porcentaje de miopes en esa muestra es del 32 %. Calcular el tamaño mínimo de la muestra para que, con un nivel de confianza del 92 %, el error cometido en la estimación de la proporción en toda la población p no supere el 3 %.

b) En una muestra de 625 personas la proporción de miopes es del 30 %. Calcular el intervalo de confianza correspondiente a un nivel de significación del 2 % para la proporción p de miopes de la población.

----

a)

Nivel de confianza del 92 %.

$1 - \alpha = 0,92 \rightarrow \alpha = 1 - 0,92 = 0,08 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,04} = 1,75.$

$(1 - 0,04 = 0,9600 \rightarrow z = 1,75).$

$Datos$: $p = 0,32;\ \ q = 1 - 0,32 = 0,68;\ \ E = 0,03;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,75.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sqrt{p \cdot q}}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sqrt{p \cdot q}}{E}\right)^2 =$

$= \left(1,75 \cdot \frac{\sqrt{0,32 \cdot 0,68}}{0,03}\right)^2 = \left(1,75 \cdot \frac{\sqrt{0,2176}}{0,03}\right)^2 = \left(1,75 \cdot \frac{0,4665}{0,03}\right)^2 = (1,75 \cdot 15,5492)^2 =$

$= 27,2111^2 = 740,044.$

<u>$El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ es\ de\ 741\ individuos.$</u>

b)

$\alpha = 0,02 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 2,055.$

$(1 - 0,02 = 0,9800 \rightarrow z = 2,055).$

Datos: $n = 625;\ \ p = 0,3;\ \ q = 0,7;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,055.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q y n, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}},\ p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right).$

$\left(0'3 - 2,055 \cdot \sqrt{\frac{0,3 \cdot 0,7}{625}};\ 0'3 + 2,055 \cdot \sqrt{\frac{0,3 \cdot 0,7}{625}}\right);$

$$\left(0'3 - 2,055 \cdot 0,0183;\ 0'3 + 2,055 \cdot 0,0183\right);\ \left(0'3 - 0,0377;\ 0'3 + 0,0377\right).$$

$$\underline{I.\ C._{98\,\%} = \left(0'2623;\ 0'3377\right).}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas. Está permitido el uso de calculadoras científicas que no sean programables.

OPCIÓN A

1º) Sean las matrices:

$A = (x\ 6\ \ -3\ \ -5\ ),\ B = (3\ 2\ y\ \ -1\ ),\ C = (9\ z\ \ -z\ \ -1\ )\ y\ E = (1\ 2\ 2\ \ -1$

.

$a)$ ¿Qué valores deben tomar los parámetros desconocidos $\{x,\ y,\ z\}$ para que se verifique la igualdad matricial $A\cdot B\ =\ C$?

$b)$ Calcula las componentes de la matriz E^{20}. Pista: aprovecha las simetrías en la matriz E o el cálculo de sus primeras potencias para identificar un patrón.

$a)$

$A\cdot B\ =\ C \Rightarrow (x\ 6\ \ -3\ \ -5\ )\cdot(3\ 2\ y\ \ -1\ ) = (9\ z\ \ -z\ \ -1\ );$

$(3x\ +\ 6y\ 2x\ -\ 6\ \ -9\ -\ 5y\ \ -6\ +\ 5\ ) = (9\ z\ \ -z\ \ -1\ ) \Rightarrow\ \ 3x\ +\ 6y\ =\ 9\ \ -9\ -$

.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$x\ = \frac{|3\ 2\ 0\ -9\ 5\ -1\ 6\ 0\ -1\ |}{|1\ 2\ 0\ 0\ 5\ -1\ 2\ 0\ -1\ |} = \frac{-15-12-18}{-5-4} = \frac{-45}{-9} =\ 5.$

$y\ = \frac{|1\ 3\ 0\ 0\ -9\ -1\ 2\ 6\ -1\ |}{-9} = \frac{9-6+6}{-9} = \frac{9}{-9} =-\ 1.$

$z\ = \frac{|1\ 2\ 3\ 0\ 5\ -9\ 2\ 0\ 6\ |}{-9} = \frac{30-36-30}{-9} = \frac{-36}{-9}\ =\ 4.$

$\underline{A\cdot B\ =\ C\ se\ cumple\ para\ x\ =\ 5,\ y\ =-\ 1\ y\ z\ =\ 4}.$

b)

$$E^{2} = E\cdot E = (1\ 2\ 2\ \ -\ 1\ )\cdot(1\ 2\ 2\ \ -\ 1\ ) = (5\ 0\ 0\ 5\ ) = 5I.$$

$$E^{20} = \left(E^{2}\right)^{10} = (5I)^{10} = 5^{10}\cdot I^{10} = 5^{10}\cdot I.$$

$$\underline{E^{20} = \left(5^{10}\ 0\ 0\ 5^{10}\right)}.$$

****

2º) Se estima que el número de enfermos de gripe en una ciudad en el instante x está definido por la función $f(x) = -3x^2 + 24x$, siempre que ésta sea positiva. La variable x se mide en semanas. Los instantes en que $f(x) = 0$ marcan el intervalo de definición de $f(x)$ y la duración de la epidemia. El número de enfermos hospitalizados se estima por la función $g(x) = -4x^2 + 44x - 96$ cuando ésta sea positiva y $g(x) = 0$ en caso contrario.

a) Esboza una gráfica de cada una de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ e indica en qué puntos alcanzan su máximo cada una de ellas.

b) El número de personas enfermas de gripe que permanecen en su casa se estima mediante la función $h(x) = f(x) - g(x)$. Escribe la expresión de la función $h(x)$ e indica cuándo es creciente y cuándo es decreciente.

----

a)

La función $f(x) = -3x^2 + 24x$ es una parábola cóncava (∩) cuyo vértice es el siguiente:

$f'(x) = -6x + 24.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -6x + 24 = 0;\ -x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4.$

$f(4) = -3 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 = -48 + 96 = 48 \Rightarrow V_1(4, 48).$

Los puntos de corte de la parábola con el eje X son los siguientes:

$f(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 24x = 0;\ 3x(-x + 8) = 0 \Rightarrow \{x_1 = 0 \rightarrow O(0, 0)\ x_2 = 8 \rightarrow A(8, 0)$
.

Teniendo en cuenta la simetría de la parábola con respecto a su eje, otros puntos de la parábola son los siguientes: $B(1, 21)$ y $C(7, 21)$; $D(2, 36)$ y $E(6, 36)$; $F(3, 45)$

y $G(5, 45)$.

La función $g(x) = -4x^2 + 44x - 96$ es una parábola cóncava (∩) cuyo vértice es el siguiente:

$g'(x) = -8x + 44.$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow -8x + 44 = 0; \quad -2x + 11 = 0 \Rightarrow x = 5,5.$$

$$g(5,5) = -4 \cdot 5,5^2 + 44 \cdot 5,5 - 96 = -121 + 242 - 96 = 25 \Rightarrow V_2(5,5; 25).$$

Los puntos de corte de la parábola con el eje X son los siguientes:

$$g(x) = 0 \Rightarrow -4x^2 + 44x - 96 = 0; \; x^2 - 11x + 24 = 0; \; x = \frac{11 \pm \sqrt{121-96}}{2} =$$

$$= \frac{11 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{11 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \rightarrow M(3,\ 0) \\ x_2 = 8 \rightarrow A(8,\ 0) \end{cases}.$$

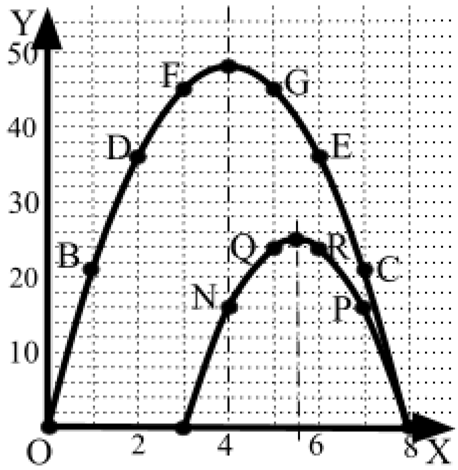
Teniendo en cuenta la simetría de la parábola con respecto a su eje, otros puntos de la parábola son los siguientes:

$$g(4) = -4 \cdot 4^2 + 44 \cdot 4 - 96 = -64 + 176 - 96 = 176 - 160 = 16.$$

$$g(5) = -4 \cdot 5^2 + 44 \cdot 5 - 96 = -100 + 220 - 96 = 220 - 196 = 24.$$

$N(4,\ 16)\ y\ P(4,\ 16); Q(5,\ 24)\ y\ R(6,\ 24).$

La representación gráfica, aproximada, de las dos funciones se expresan en la figura siguiente.



b)

$$h(x) = f(x) - g(x) = \left(-3x^2 + 24x\right) - \left(-4x^2 + 44x - 96\right) =$$

$$= -3x^2 + 24x + 4x^2 - 44x + 96 = x^2 - 20x + 96.$$

De la observación de la figura se deduce la expresión de $h(x)$:

$$\underline{h(x) = \begin{cases} -3x^2 + 24x & si\ 0 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 20x + 96 & si\ 3 < x \leq 8 \end{cases}}.$$

En el intervalo $[0,\ 3]$ es $h'(x) = -\ 6x\ +\ 24\ >\ 0,\ \forall x \in [0,\ 3]$.

En el intervalo $(3,\ 8]$ es $h'(x) =\ 2x\ -\ 20\ <\ 0,\ \forall x \in (3,\ 8]$.

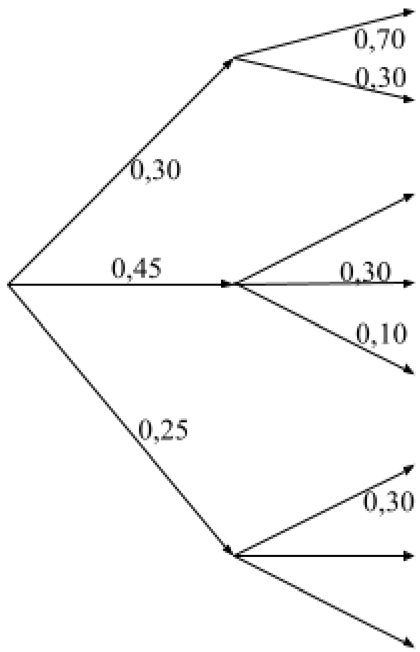
$\underline{h(x)\ es\ creciente\ en\ (0,\ 3)\ y\ decreciente\ en\ (3,\ 8)}$.

****

3º) Antes de acabar el curso la profesora hace una encuesta sobre las vacaciones de sus alumnos. El 30 % responden que harán turismo en la propia autonomía, desplazándose el 70 % en coche y el 30 % en tren. Un 45 % viajará a otras autonomías del Estado, desplazándose el 60 % en coche, el 30 % en tren y el 10 % en avión. Los restantes saldrán al extranjero, desplazándose el 60 % en avión, el 30 % en coche y el 10 % en tren. Si elegimos un alumno o alumna al azar, calcular:

a) Probabilidad de que haya elegido desplazarse en coche o en avión.

b) Si se va a desplazar en avión, probabilidad de que no haya elegido ir al extranjero.



a)

$P\ =\ P(C \cup A) =$

$=\ P(AU) \cdot P(C/AU) +\ P(OA) \cdot P(C, A/OA) +\ P(EX) \cdot P(C, A/EX) =$

$=\ 0,30 \cdot 0,70\ +\ 0,45 \cdot (0,60\ +\ 0,10) +\ 0,25 \cdot (0,30\ +\ 0,60) =$

$=\ 0,210\ +\ 0,45 \cdot 0,70\ +\ 0,25 \cdot 0,90\ =\ 0,210\ +\ 0,315\ +\ 0,225\ =\ \underline{0,750}$.

También se puede resolver esta apartado como sigue:

$$P = P(C \cup A) = 1 - P(T) =$$

$$= 1 - [P(AU) \cdot P(T/AU) + P(OA) \cdot P(T/OA) + P(EX) \cdot P(T/EX)] =$$

$$= 1 - (0,30 \cdot 0,30 + 0,45 \cdot 0,30 + 0,25 \cdot 0,10) = 1 - (0,090 + 0,135 + 0,025) =$$

$$= 1 - 0,250 = \underline{0,750}.$$

$b)$

$$P = P(\overline{EX}/A) = \frac{P(\overline{EX} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(AU) \cdot P(A/AU) + P(OA) \cdot P(A/OA)}{P(AU) \cdot P(A/AU) + P(OA) \cdot P(A/OA) + P(EX) \cdot P(A/EX)} =$$

$$= \frac{0,30 \cdot 0 + 0,45 \cdot 0,10}{0,30 \cdot 0 + 0,45 \cdot 0,10 + 0,25 \cdot 0,60} = \frac{0 + 0,045}{0 + 0,045 + 0,150} = \frac{0,045}{0,195} = \underline{0,2308}.$$

****

4º) La edad de los alumnos que han acabado bachillerato sigue una distribución normal de desviación típica $\sigma = 0,35$ años. La edad media de una muestra de 120 alumnos es 18,2 años. Determinar el intervalo de confianza al 96 % para la edad media de la población total de alumnos μ que han acabado ese bachillerato.

$$1 - \alpha = 0,96 \rightarrow \alpha = 1 - 0,96 = 0,04 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,02} = 2,055.$$

$(1 - 0,02 = 0,9800 \rightarrow z = 2,055)$.

Datos: $\overline{x} = 18,2;\ \ n = 120;\ \ \sigma = 0,35;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,055.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(18,2 - 2,055 \cdot \frac{0,35}{\sqrt{120}};\ 18,2 + 2,055 \cdot \frac{0,35}{\sqrt{120}}\right);$$

$(18,2 - 2,055 \cdot 0,0320;\ 18,2 + 2,055 \cdot 0,0320);\ (18,2 - 0,0657;\ 18,2 + 0,0657)$.

$$\underline{I.\ C._{96\ \%}\ (18,1343;\ 18,2657).}$$

****

OPCIÓN B

1º) Para optimizar las ganancias un agricultor debe repartir sus 10 áreas de terreno cultivando una cierta superficie de pimientos (P) y de tomates (T). Descontando gastos, el beneficio por área de pimiento es de 200 euros y de tomate 250 euros. Diariamente hay 180 litros de agua para regar todo el terreno; un área de pimiento consume 10 litros mientras que una de tomate 20 litros. La siembra de un área de pimiento cuesta 20 euros y de una de tomate 10 euros, siendo el presupuesto disponible 160 euros.

$a)$ Dibuja en el plano (P, T) el recinto de posibles repartos de la superficie respetando las restricciones del problema.

$b)$ Escribe la función que calcula el beneficio $F(P,\ T)$ y encuentra el valor (P,T) en el que se alcanza el máximo. Calcula dicho máximo.

$a)$

Sean x e y las parcelas de pimientos y tomates que cultiva el agricultor, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes:

$x+y\leq 10\ \ 10x+20y\leq 180\ \ 20x+10y\leq 160\qquad x\geq 0;\ y\geq 0\}$

$x+y\leq 10\ x+2y\leq 18\ 2x+y\leq 16\ x\geq 0;\ y\geq 0\}$.

La zona factible se indica sombreada en la figura adjunta

x	0	10
y	10	0

①$\Rightarrow x+y\leq 10\Rightarrow y\leq 10-x\Rightarrow O(0,\ 0)\rightarrow Si.$

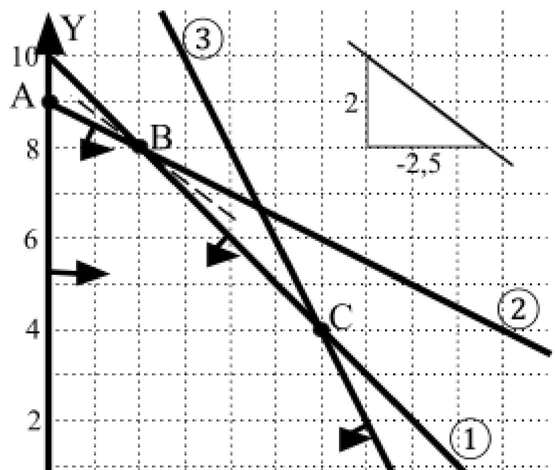
x	0	10
y	9	4

②$\Rightarrow x+2y\leq 18\Rightarrow y\leq \frac{18-x}{2}\Rightarrow O(0,\ 0)\rightarrow Si.$

x	8	3
y	0	10

③$\Rightarrow 2x+y\leq 16\Rightarrow y\leq 16-2x\Rightarrow O(0,\ 0)\rightarrow Si.$

Los vértices de la zona factible, además del origen son los siguientes:



$A \Rightarrow \quad x = 0 \; x + 2y = 18 \} \Rightarrow A(0,\ 9).$

$B \Rightarrow \; x + y = 10 \; x + 2y = 18 \} \; -x - y = -10 \quad x + 2y = 18 \} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 8 \Rightarrow B(2,\ 8).$

$C \Rightarrow \; x + y = 10 \; 2x + y = 16 \} \; -x - y = -10 \quad 2x + y = 16 \} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 6 \Rightarrow C(6,\ 4).$

$D \Rightarrow \quad y = 0 \; 2x + y = 16 \} \Rightarrow D(8,\ 0).$

$b)$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,\ y) = 200x + 250y.$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 9) = 200 \cdot 0 + 250 \cdot 9 = 0 + 2.250 = 2.250.$

$B \Rightarrow f(2,\ 8) = 200 \cdot 2 + 250 \cdot 8 = 400 + 2.000 = 2.400.$

$C \Rightarrow f(6,\ 4) = 200 \cdot 6 + 250 \cdot 4 = 1.200 + 1.000 = 2.200.$

$d \Rightarrow f(8,\ 0) = 200 \cdot 8 + 250 \cdot 0 = 1.600 + 0 = 1.600.$

El máximo se produce en el punto B.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = 200x + 250y = 0 \Rightarrow y = -\frac{200}{250}x = -\frac{2}{2,5}x \Rightarrow m = -2,5.$

$\underline{Máximo\ rendimiento: plantando\ 2\ parcelas\ de\ pimientos\ y\ 8\ de\ tomates}.$

$\underline{El\ rendimiento\ máximo\ es\ de\ 2.400\ euros.}$

****

2º) La función $f(x)$ está definida a trozos. Cuando $x \leq 0$, $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ y cuando $x > 0$, $f(x) = ax + b$.

a) Hallar los coeficientes a y b para que la función $f(x)$ sea continua en $x = 0$ y a su vez corte al eje OX en $x = 3/2$.

b) Encontrar los dos puntos de corte de la curva $f(x)$ con el eje OX y calcular el área de la región limitada por la curva $f(x)$ y el eje OX entre dichos puntos.

----

a)

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 3 & si\ x \leq 0 \\ ax + b & si\ x > 0 \end{cases}.$$

Para que la función sea continua en $x = 0$ es necesario que sus límites laterales en ese punto sean iguales e iguales al valor de la función.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \left(-x^2 - 2x + 3\right) = 3 = f(0) \\ f(x) = (ax + b) = b \end{array} \right\} \Rightarrow b$$

.

Por cortar al eje OX en $x = 3/2$ es $f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$:

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}a + 3 = 0;\ 3a + 6 = 0;\ a + 2 = 0 \Rightarrow \underline{a = -2}.$$

b)

La función resulta: $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 3 & si\ x \leq 0 \\ -2x + 3 & si\ x > 0 \end{cases}.$

Los puntos de corte con el eje de abscisas son los siguientes:

En $(-\infty,\ 0) \Rightarrow -x^2 - 2x + 3 = 0;\ x^2 + 2x - 3 = 0;\ x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} =$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = -1 \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \rightarrow A(-3,\ 0) \\ x_2 = 1 \rightarrow \notin (-\infty,\ 0) \end{cases}.$$

En $(0,\ +\infty) \Rightarrow -2x + 3 = 0;\ 2x = 3\ x = \frac{3}{2} \Rightarrow B\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$.

Para una mejor comprensión del ejercicio se hace una representación gráfica aproximada de la función.

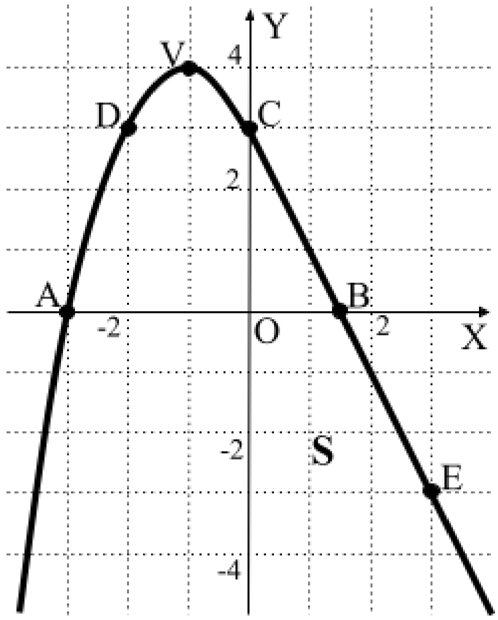
En el intervalo $(-\infty,\ 0)$ la función es la parábola $f(x) = -x^2 - 2x + 3$, que es cóncava ($\cap$) y cuyo vértice es el siguiente:

$f'(x) = -2x - 2$. $\quad f'(x) = 0 \Rightarrow -2x - 2 = 0;\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$
.

$f(-1) = -(-1)^2 - 2\cdot(-1) + 3 = -1 + 2 + 3 = 4 \Rightarrow V(-1,\ 4)$.

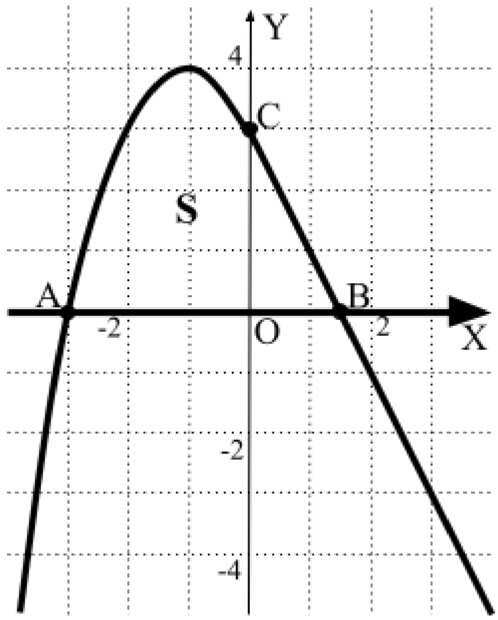
Otros puntos de la parábola son $C(0,\ 3)$, $D(-2,\ 3)\ y\ A(-3,\ 0)$.

En el intervalo $(0,\ +\infty0)$ la función es $f(x) = -2x + 3$ y dos de sus puntos son $A(0,\ 3)\ y\ E(3,\ -3)$.



La superficie a calcular es la que indica la figura siguiente.

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:



$$S = \int_{-3}^{0} f(x)\cdot dx + \int_{0}^{\frac{3}{2}} f(x)\cdot dx =$$

$$= + \int_{-3}^{0} \left(-x^2 - 2x + 3\right)\cdot dx +$$

$$+ \int_{0}^{\frac{3}{2}} (-2x + 3)dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right]_{-3}^{0} + \left[-x^2 + 3x\right]_{0}^{\frac{3}{2}} =$$

$$= 0 - \left[-\frac{(-3)^3}{3} - (-3)^2 + 3\cdot(-3)\right] +$$

$+\left[-\left(\frac{3}{2}\right)^2+3\cdot\frac{3}{2}\right]-0=-(9-9-9)+\left(-\frac{9}{4}+\frac{9}{2}\right)=9-\frac{9}{4}+\frac{9}{2}=\frac{36-9+18}{4}=$
.

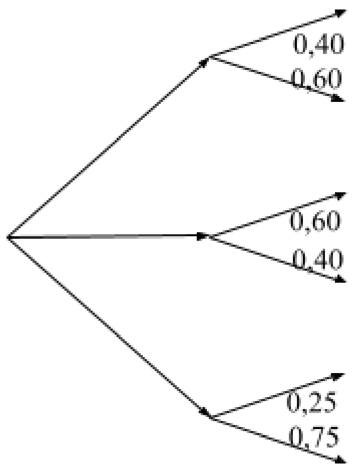
$$\underline{S=\frac{45}{4}\,u^2.}$$

****

3º) En un laboratorio se ensaya en tres grupos de 100 ratones con tres tipos de bacterias (A, B y C) que pueden causar neumonía. A los ratones del primer grupo se les inocula la bacteria A y el 40 % contraen neumonía, al segundo grupo la bacteria B y el 60 % contraen neumonía y al tercer grupo la bacteria C y el 25 % contraen neumonía. Después del experimento, se elige u0n ratón al azar:

a) Calcula la probabilidad de que el ratón haya contraído una neumonía.

b) Si el ratón ha contraído la neumonía, calcula la probabilidad de que pertenezca al grupo de ratones al que se le ha inoculado la bacteria de tipo B.



a)

$$P=P(A)\cdot P(N/A)+P(B)\cdot P(N/B)+P(C)\cdot P(N/C)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot 0,40+\frac{1}{3}\cdot 0,60+\frac{1}{3}\cdot 0,25=\frac{1}{3}\cdot(0,40+0,60+0,25)=\frac{1}{3}\cdot 1,25=\underline{0,4167}$$
.

b)

$$P=P(B/N)=\frac{P(B\cap N)}{P(N)}=\frac{P(B)\cdot P(N/B)}{P(A)\cdot P(N/A)+P(B)\cdot P(N/B)+P(C)\cdot P(N/C)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\cdot 0,60}{\frac{1}{3}\cdot 0,40+\frac{1}{3}\cdot 0,60+\frac{1}{3}\cdot 0,25}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 0,60}{\frac{1}{3}\cdot(0,40+0,60+0,25)}=\frac{0,60}{1,25}=\underline{0,48}.$$

****

4º) Una sociedad deportiva hace una campaña de captación de chicos y chicas para formar equipos de fútbol en todas sus categorías entre 10 y 18 años. La edad de los presentados sigue una distribución normal de desviación típica $\sigma = 2,5$. La media de edad en una muestra de chicos y chicas es de 13,7 años. Responder:

a) ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para asegurar que el error de la estimación de la media poblacional μ no supera 0,4 años, con un nivel de confianza del 95 %?

b) Si la muestra fuese de 144 chicos y chicas, ¿cuál sería el nuevo intervalo de confianza para la media poblacional μ con un nivel de confianza del 95 %?

----

a)

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$$

$$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$$

$$Datos: \sigma = 2,5;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96;\ E = 0,4.$$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1,96 \cdot \frac{2,5}{0,4}\right)^2 =$

$$= (1,96 \cdot 6,25)^2 = 12,25^2 = 150,06.$$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 151\ chicos\ o\ chicas.}$

b)

$$Datos: \overline{x} = 13,7;\ n = 144;\ \sigma = 2,5;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96.$$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}$, σ *y* n, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(13,7 - 1,96 \cdot \frac{2,5}{\sqrt{144}};\ 13,7 + 1,96 \cdot \frac{2,5}{\sqrt{144}}\right);$$

$(13,7 - 1,96 \cdot 0,2083;\ 13,7 + 1,96 \cdot 0,2083);\ (13,7 - 0,4083;\ 13,7 + 0,4083)$.

$$\underline{I.\ C._{95\ \%}\ (13,2917;\ 14,1083).}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

JULIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

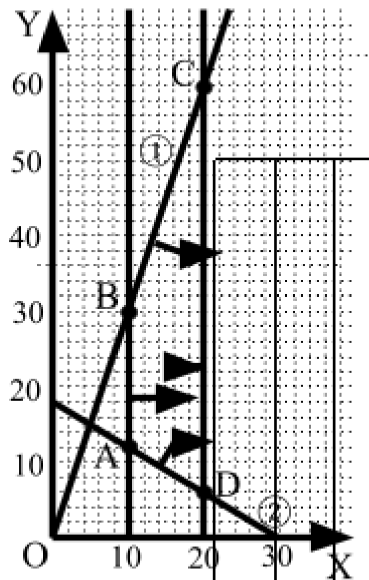
Se elegirá solo UNA de las OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberían estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

1º) Representa gráficamente la región determinada por el sistema de inecuaciones: $\{x \geq 10 \quad x \leq 20 \quad x \geq \frac{y}{3} \quad 12x + 20y \geq 360$ o mejor: $10 \leq x \leq 20 \quad y \leq 3x \; 3x + 5y \geq 90\}$ y calcula sus vértices. ¿Cuál es el mínimo de la función $f(x, y) = x - 2y$ en esta región? ¿En qué punto se alcanza?

Las restricciones son las siguientes: $\{10 \leq x \leq 20 \quad y \leq 3x \quad 3x + 5y \geq 90$.



x	0	20
y	0	60

①$\Rightarrow y \leq 3x \Rightarrow P(4,\ 0) \rightarrow Si.$

x	0	30
y	18	0

$② \Rightarrow 3x + 5y \geq 90 \Rightarrow y \geq \frac{90-3x}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

La región factible es la zona sombreada de la figura.

Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 10 \\ 3x + 5y = 90 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 30 + 5y = 90;\ \ 5y = 60;\ \ y = 12 \Rightarrow A(10,\ 1$

.

$B \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 10 \\ y = 3x \end{matrix}\right\} \Rightarrow B(10,\ 30).$ $C \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 20 \\ y = 3x \end{matrix}\right\} \Rightarrow C(20,\ 60)$

.

$D \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 20 \\ 3x + 5y = 90 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 60 + 5y = 90;\ \ 5y = 30;\ \ y = 6 \Rightarrow D(20,\ 6)$

.

La función de objetivos es $f(x,\ y) = x - 2y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(10,\ 12) = 1 \cdot 10 - 2 \cdot 12 = 10 - 24 = -14.$

$B \Rightarrow f(10,\ 30) = 1 \cdot 10 - 2 \cdot 30 = 10 - 60 = -50.$

$C \Rightarrow f(20,\ 60) = 1 \cdot 20 - 2 \cdot 60 = 20 - 120 = -100.$

$D \Rightarrow f(20,\ 6) = 1 \cdot 20 - 2 \cdot 6 = 20 - 12 = 8.$

$\underline{El\ mínimo\ se\ alcanza\ en\ el\ punto\ C(20,\ 60)}.$

****

2º) La evolución del precio de cierta acción, en euros, un día determinado siguió la función $f(x) = 35,7 \cdot \frac{x+2}{x^2+21}$, $x \in [0, 8]$, donde x representa el tiempo, en horas, transcurrido desde la apertura de la sesión. Se pide:

a) Calcular el valor máximo que alcanzó la acción y en qué momento se alcanzó.

b) Calcular el valor mínimo que alcanzó la acción y en qué momento se alcanzó.

c) Una persona compró 20 acciones en el momento de la apertura ($x = 0$) y las vendió justo al cierre ($x = 8$). Determinar si obtuvo ganancias o pérdidas y la cuantía de estas.

----

a)

La condición necesaria para que una función racional alcance un máximo o un mínimo relativos es que se anule su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = 35,7 \cdot \frac{1 \cdot (x^2+21) - (x+2) \cdot 2x}{(x^2+21)^2} = 35,7 \cdot \frac{x^2+21-2x^2-4x}{(x^2+21)^2} = -35,7 \cdot \frac{x^2+4x-21}{(x^2+21)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -35,7 \cdot \frac{x^2+4x-21}{(x^2+21)^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 4x - 21 = 0; \; x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+84}}{2} =$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-4 \pm 10}{2} = -2 \pm 5 \Rightarrow x_1 = -7, \; x_2 = 3; \; -7 \notin [0, 8].$$

$$f(3) = 35,7 \cdot \frac{3+2}{3^2+21} = 35,7 \cdot \frac{5}{30} = 5,95.$$

Los valores de la acción al comenzar y terminar la sesión son los siguientes:

$$f(0) = 35,7 \cdot \frac{0+2}{0^2+21} = 35,7 \cdot \frac{2}{21} = \frac{71,4}{21} = 3,40.$$

$$f(8) = 35,7 \cdot \frac{8+2}{8^2+21} = 35,7 \cdot \frac{10}{85} = \frac{357}{85} = 4,20.$$

$\underline{La\ acción\ alcanzó\ el\ máximo\ valor\ a\ las\ 3\ horas\ y\ fue\ de\ 5,95\ euros.}$

b)

$\underline{La\ acción\ alcanzó\ el\ mínimo\ valor\ a\ las\ 0\ horas\ y\ fue\ de\ 3,40\ euros.}$

c)

Coste de las acciones: $20 \cdot 3,40 = 68\ euros$

Valor de las acciones: $20 \cdot 4,20 = 84 \, euros$

$84 - 68 = 16.$

$$\underline{Obtuvo\ un\ beneficio\ de\ 16\ euros}.$$

****

3º) El 70 % de los solicitantes de un puesto de trabajo tiene experiencia y, además, una formación acorde con el puesto. Sin embargo, hay un 20 % que tiene experiencia y no una formación acorde con el puesto. Se sabe también que entre los solicitantes que tienen formación acorde con el puesto, un 87,5 % tiene experiencia.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un solicitante elegido al azar no tenga experiencia?

b) Si un solicitante elegido al azar tiene experiencia, ¿cuál es la probabilidad de que tenga una formación acorde con el puesto?

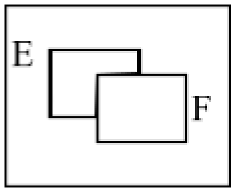
c) ¿Cuál es la probabilidad de que un solicitante elegido al azar no tenga formación acorde con el puesto ni experiencia?

$P(E) \rightarrow Tener\ experiencia.$ $\quad$ $P(F) \rightarrow Tener\ formación.$

Datos: $P(E \cap F) = 0,7.$ $\quad$ $P(E \cap \overline{F}) = 0,2.$ $\quad$ $P(E/F) = 0,875.$

a)

$P(E \cap \overline{F}) \Rightarrow$



$P(E \cap \overline{F}) = P(E) - P(E \cap F) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(E) = P(E \cap \overline{F}) + P(E \cap F) = 0,2 + 0,7 = 0,9.$

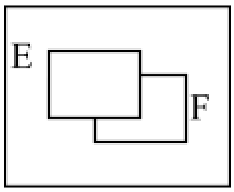
$P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - 0,9 = \underline{0,1}.$

b)

$P(F/E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{0,7}{0,9} = \underline{\frac{7}{9} = 0,7778}.$

c)

$P(\overline{E} \cap \overline{F}) \Rightarrow$



$P(\overline{E} \cap \overline{F}) = 1 - P(E \cup F).$ (*)

$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F).$ (**)

Para hallar $P(F)$ tenemos en cuenta que $P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} \Rightarrow$

$\Rightarrow P(F) = \frac{P(E \cap F)}{P(E/F)} = \frac{0,7}{0,875} = \frac{700}{875} = 0,8.$ Sustituyendo este valor en (**):

$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) = 0,9 + 0,8 - 0,7 = 1.$

Sustituyendo en (*) el valor hallado de $P(E \cup F)$:

$P(\overline{E} \cap \overline{F}) = 1 - P(E \cup F) = 1 - 1 = \underline{0}$.

****

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

1º) Un estudiante obtuvo una calificación de 7,5 puntos en un examen de tres preguntas. En la tercera pregunta obtuvo un punto más que en la segunda y los puntos que consiguió en la primera pregunta quintuplicaron la diferencia entre la puntuación obtenida en la tercera y la primera preguntas. ¿Cuál fue la puntuación obtenida en cada una de las preguntas?

Sean x, y, z las calificaciones del alumno en las tres preguntas del examen, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$x + y + z = 7,5 \quad z = y + 1 \quad x = 5\cdot(z - x) \} \; 2x + 2y + 2z = 15 \quad y -$

.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|15\ 2\ 2\ -1\ 1\ -1\ 0\ 0\ -5\ |}{|2\ 2\ 2\ 0\ 1\ -1\ 6\ 0\ -5\ |} = \frac{-75-10}{-10-12-12} = \frac{-85}{-34} = 2,5.$$

$$y = \frac{|2\ 15\ 2\ 0\ -1\ -1\ 6\ 0\ -5\ |}{-34} = \frac{10-90+12}{-34} = \frac{-68}{-34} = 2.$$

$$z = \frac{|2\ 2\ 15\ 0\ 1\ -1\ 6\ 0\ 0\ |}{-34} = \frac{-12-90}{-34} = \frac{-102}{-34} = 3.$$

$\underline{La\ puntuación\ fue\ de\ 2,5\ puntos\ en\ la\ 1ª\ pregunta,\ 2\ en\ la\ 2ª\ y\ 3\ en\ la\ 3ª}.$

****

2º) Sea la función $f(x) = \{x^3 - 3x - 20 \;\; si \;\; x \leq 3 \qquad \frac{2}{a-x} \quad si \;\; x > 3$.

a) Calcula el valor de a para que $f(x)$ es continua en $x = 3$.

b) Para $a = 0$, estudia el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

c) Para $a = 0$, calcula los máximos y mínimos locales de $f(x)$.

----

a)

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen, son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$x = 3 \Rightarrow \{f(x) = \left(x^3 - 3x - 20\right) = 3^3 - 3 \cdot 3 - 20 =- 2 = f(3) \; f(x) == \frac{2}{a-3}$

$\Rightarrow - 2 = \frac{2}{a-3}; \;\; - 2a + 6 = 2; \;\; 4 = 2a \Rightarrow a = 2.$

<u>*La función $f(x)$ es continua en $x = 3$ para $a = 2$.*</u>

b)

Para $a = 0$ la función es $f(x) = \{x^3 - 3x - 20 \;\; si \;\; x \leq 3 \qquad -\frac{2}{x} \quad si \;\; x > 3$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x) = \{3x^2 - 3 \;\; si \;\; x \leq 3 \quad \frac{2}{x^2} \quad si \;\; x > 3$.

$3x^2 - 3 = 0; \;\; 3\left(x^2 - 1\right) = 0 \Rightarrow x_1 =- 1, \; x_2 = 1.$

Teniendo en cuenta lo anterior y que $\frac{2}{x^2} > 0, \; \forall x > 3$, los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función son los siguientes:

<u>*$f(x)$ creciente: $f'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon (- \infty, - 1) \cup (1, \; + \infty)$.*</u>

<u>*$f(x)$ decreciente: $f'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon (- 1, \; 1)$*</u>

c)

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo local es que se anule su primera derivada.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para los valores que anulan la primera se trate de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \{ 6x \quad si \;\; x \leq 3 \quad -\frac{4}{x^3} \quad si \;\; x > 3 .$$

$$f''(-1) = 6 \cdot (-1) = -6 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -1.$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) - 20 = -1 + 3 - 20 = -18.$$

$$f''(1) = 6 \cdot 1 = 6 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 1.$$

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 - 20 = 1 - 3 - 20 = -22.$$

$\underline{Máximo\ relativo\ en\ A(-1,\ -18)\ y\ mínimo\ relativo\ en\ B(1,\ -22)}.$

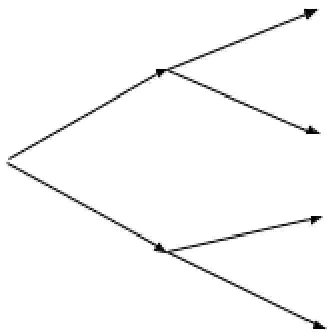
****

3º) El 60 % de los componentes electrónicos producidos en una fábrica proceden de la máquina A y el 40 % de la máquina B. La proporción de compuestos electrónicos defectuosos en A es 0,1 y en B es 0,05.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un componente electrónico de dicha fábrica seleccionado al azar sea defectuoso?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que, sabiendo que un componente electrónico no es defectuoso, proceda de la máquina A?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un componente electrónico de dicha fábrica seleccionado al azar sea defectuoso y proceda de la máquina B?



a)

$$P = P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) = 0,6 \cdot 0,10 + 0,4 \cdot 0,05 =$$

$$= 0,060 + 0,020 = \underline{0,080}.$$

b)

$$P = P(A/\overline{D}) = \frac{P(A \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{P(A) \cdot P(\overline{D}/A)}{P(A) \cdot P(\overline{D}/A) + P(B) \cdot P(\overline{D}/B)} = \frac{0,6 \cdot 0,90}{0,6 \cdot 0,90 + 0,4 \cdot 0,95} =$$

$$= \frac{0,540}{0,540 + 0,380} = \frac{0,540}{0,920} = \underline{0,5870}.$$

c)

$$P = P(D/B) = P(B) \cdot P(B/D) = 0,4 \cdot 0,05 = \underline{0,020}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se elegirá solo UNA de las OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberían estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

1º) Una empresa produce dos tipos de cerveza artesanal, A y B. La demanda mínima de cerveza tipo A es de 200 litros diarios. La producción de cerveza tipo B es al menos el doble que la de tipo A. La infraestructura de la empresa no permite producir en total más de 900 litros diarios de cerveza. Los beneficios que obtiene por litro de A y B son 2 y 2,5 euros, respectivamente. ¿Cuántos litros diarios se han de producir de cada tipo para maximizar el beneficio? ¿Cuál es dicho beneficio?

Sean x e y el número de litros de cerveza de los tipos A y B que se producen en la empresa, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes: $x\geq 200 \quad x+y\leq 900 \quad y\geq 2x \}$.

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,\ y)=2x+2,5y$.

x	900	0
y	0	900

$1 \Rightarrow x+y\leq 900 \Rightarrow y\leq 900-x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

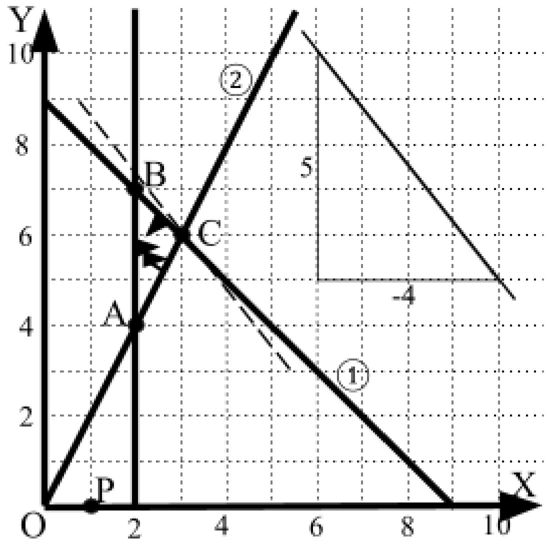
x	0	300
y	0	600

$2 \Rightarrow y\geq 2x \Rightarrow P(100,\ 0) \rightarrow No.$

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura.

Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 200 \\ y = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow A(200,\ 400).$



$B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 200 \\ x + y = 900 \end{array}\right\} \Rightarrow B(200,\ 700).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 900 \\ y = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow C(300,\ 600).$

Los valores de la función de objetivos $f(x,\ y) = 2x + 2,5y$ en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(200,\ 400) =$

$= 2 \cdot 200 + 2,5 \cdot 400 = 400 + 900 = 1.300.$

$B \Rightarrow f(200,\ 700) = 2 \cdot 200 + 2,5 \cdot 700 = 400 + 1.750 = 2.150.$

$C \Rightarrow f(300,\ 600) = 2 \cdot 300 + 2,5 \cdot 600 = 600 + 1.500 = 2.100.$

El máximo se produce en el punto B.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = 2x + 2,5y = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{2,5}x = \frac{4}{5}x \Rightarrow m = -\frac{4}{5}.$

$\underline{El\ máximo\ beneficio\ se\ produce\ elaborando\ 200\ litros\ de\ A\ y\ 700\ de\ B.}$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 2.150\ euros.}$

****

2º) Dada la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$, se pide:

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Máximos y mínimos locales. d) Representación gráfica.

e) A partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores, razona en qué puntos la función $g(x) = (x - 2)^2 - 2(x - 2)^2 + x - 2$ tiene un máximo o un mínimo local.

----

a)

Por ser $f(x)$ una función polinómica: $\underline{f(x) \Rightarrow R}$.

Punto de corte con el eje Y: $f(0) = 0 \Rightarrow \underline{O(0,\ 0)}$.

Los puntos de corte con el eje X, además del origen, son los siguientes:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x = 0;\ \ x\left(x^2 - 2x + 1\right) = 0;\ \ x(x - 1)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{A(1,\ 0)}.$$

b)

Una función es creciente y decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0;\ \ x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} = \frac{2 \pm 1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = 1.$$

Las raíces de la primera derivada de la función dividen al dominio de la función en tres periodos alternativos de crecimiento y decrecimiento.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 0 \in (-\infty,\ 0)$ es $f'(0) = 1 > 0$.

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento:\ \left(-\infty,\ \frac{1}{3}\right) \cup (1,\ +\infty).}$$

$$\underline{Decrecimiento: \left(\frac{1}{3},\ 1\right).}$$

$c)$

Para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada.

$$f^{'}(x) =\ 0 \Rightarrow x_1\ = \frac{1}{3},\ x_2\ =\ 1.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera derivada se trata de un mínimo y, si es negativa, de un mínimo.

$$f^{''}(x) =\ 6x\ -\ 4.$$

$$f^{''}\left(\frac{1}{3}\right) =\ 6\cdot\frac{1}{3} -\ 4\ =\ 2\ -\ 4\ =-\ 2\ <\ 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x\ =\ \frac{1}{3}.$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 -\ 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} = \frac{1}{27} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3} = \frac{1-6+9}{27} = \frac{4}{27} \Rightarrow \underline{Máx. \Rightarrow B\left(\frac{1}{3},\ \frac{4}{27}\right)}$$

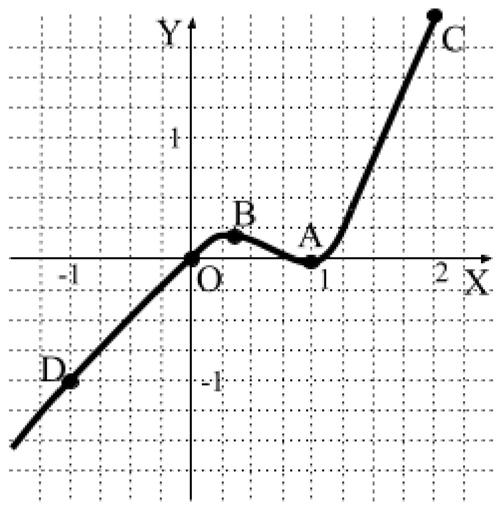
.

$$f^{''}(1) =\ 6\cdot1\ -\ 4\ =\ 6\ -\ 4\ =\ 2\ >\ 9 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x\ =\ 1.$$

$$f(1) = 1^3\ -\ 2\cdot1^2\ +\ 1\ =\ 1\ -\ 2\ +\ 1\ =\ 0 \Rightarrow \underline{Mín. \Rightarrow C(1,\ 0)}.$$

$d)$

Además de los hallados, también son puntos de la función los siguientes:



$$f(2) = 2^3\ -\ 2\cdot2^2\ +\ 2\ =\ 8\ -\ 8\ +\ 2\ =$$

$$=\ 2 \rightarrow C(2,\ 2).$$

$$f(-\ 1) = (-\ 1)^3\ -\ 2\cdot(-\ 1)^2\ +\ 2\ =$$

$$-\ 1\ -\ 2\ +\ 2\ =-\ 1 \rightarrow D(-\ 1,\ \ -\ 1).$$

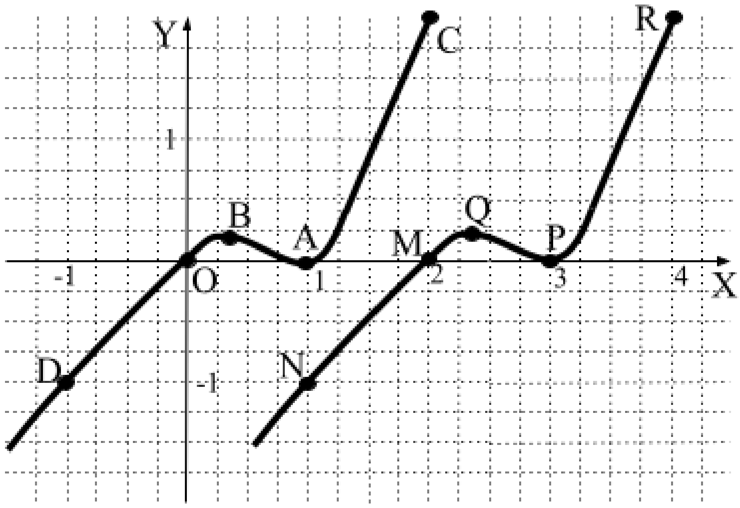
La representación gráfica, aproximada, de la función es la que aparece en la figura adjunta.

$e)$

Teniendo en cuenta que si $f(x) = x^3\ -\ 2x^2\ +\ x$ es:

$g(x) = f(x - 2) = (x - 2)^2 - 2(x - 2)^2 + x - 2$. Si $f(x)$ tiene un mínimo local en $A(1,\ 0)$, $\underline{g(x)\ tiene\ un\ mínimo\ en\ el\ punto \Rightarrow \{x - 2 = 1\ x = 3\} \Rightarrow P(3,\ 0)}$ y $\underline{g(x)\ tiene\ un\ máximo\ en\ el\ punto \Rightarrow \left\{x - 2 = \frac{1}{3}\ x = \frac{7}{3}\right\} \Rightarrow Q\left(\frac{7}{3},\ \frac{4}{27}\right)}$.

En definitiva: la función $g(x)$ se obtiene desplazando dos unidades a la derecha a la función $f(x)$.



****

3º) Imagina cinco sillas alineadas 1, 2, 3, 4, 5 y que un individuo está sentado inicialmente en la silla central (número 3). Se lanza una moneda al aire y, si el resultado es cara, se desplaza a la silla situada a su derecha, mientras si el resultado es cruz, se desplaza a la situada a su izquierda. Se realizan sucesivos lanzamientos (y los cambios de silla consecutivos correspondientes) teniendo en cuenta que si tras alguno de ellos llega a sentarse en alguna de las sillas de los extremos (1 o 5), permanecerá sentado en ella con independencia de los resultados de los lanzamientos posteriores. Se pide:

a) Dibujar el diagrama del árbol para cuatro lanzamientos de moneda.

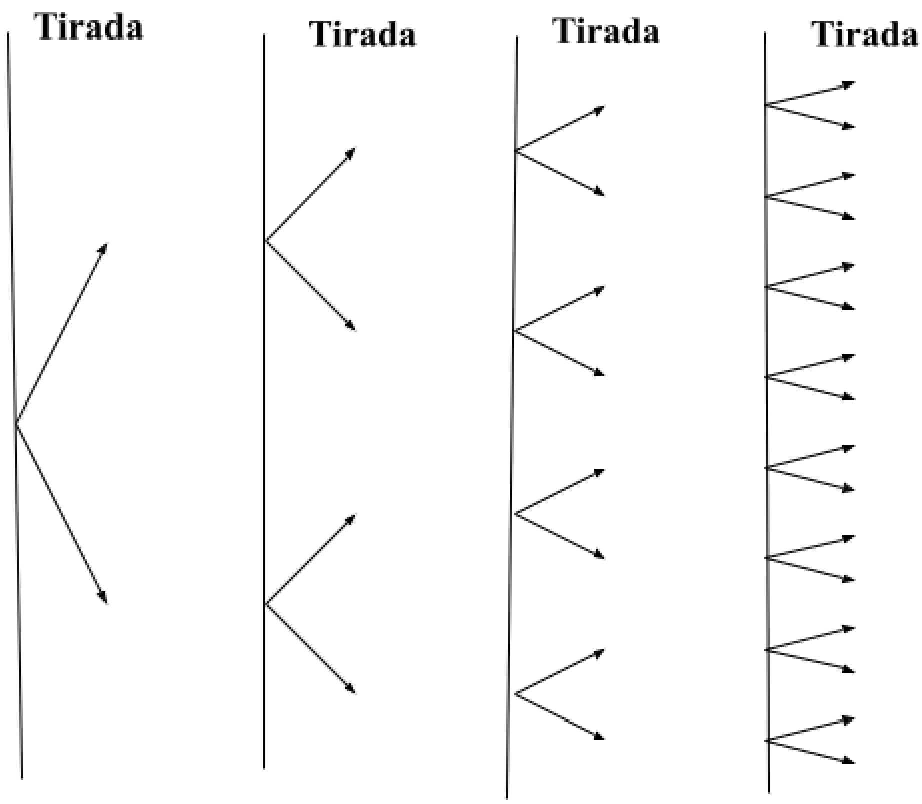
b) La probabilidad de que tras los tres primeros lanzamientos esté sentado en la silla central (3).

c) La probabilidad de que tras los tres primeros lanzamientos esté sentado en alguna de las sillas de los extremos (1 o 5).

d) La probabilidad de que tras los cuatro primeros lanzamientos esté sentado en alguna de las sillas de los extremos (1 o 5).

----

a)



b)

$$P = \frac{Casos\,favorables}{Casos\,posibles} = \frac{0}{8} = \underline{0}.$$

c)

$$P = \frac{Casos\ favorables}{Casos\ posibles} = \frac{2}{8} = \underline{\frac{1}{4} = 0,25}.$$

$d)$

$$P = \frac{Casos\ favorables}{Casos\ posibles} = \frac{8}{16} = \underline{\frac{1}{2} = 0,5}.$$

****

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

1º) Determina las matrices $X\, e\, Y$ que satisfacen las relaciones: $X + 2Y = A^t + B \quad X - Y = AB \}$, donde A^t representa la matriz traspuesta de A las matrices A y B son las siguientes:

$$A = (-\ 1\ \ -\ 2\ 4\ 2\ 3\ 0\ 1\ 0\ 2\ )\ y\ B = (4\ \ -\ 2\ 0\ 1\ 2\ 1\ 3\ 1\ 0\ ).$$

$$X + 2Y = A^t + B \quad X - Y = AB \}\ X + 2Y = A^t + B \quad -X + Y = -AB \}\Rightarrow 3$$

.

$$X = Y + AB = \frac{A^t+B-AB}{3} + AB = \frac{A^t+B-AB+3AB}{3} = \frac{A^t+B+2AB}{3}.$$

$$A \cdot B = (-\ 1\ \ -\ 2\ 4\ 2\ 3\ 0\ 1\ 0\ 2\ ) \cdot (4\ \ -\ 2\ 0\ 1\ 2\ 1\ 3\ 1\ 0\ ) = (6\ 2\ \ -\ 2\ 11\ 2\ 3\ 10\ 0\ 0\ )$$

.

$$A^t = (-\ 1\ 2\ 1\ \ -\ 2\ 3\ 0\ 4\ 0\ 2\ ).$$

$$Y = \frac{1}{3} \cdot \left(A^t + B - AB\right) = \frac{1}{3} \cdot [(-\ 1\ 2\ 1\ \ -\ 2\ 3\ 0\ 4\ 0\ 2\ ) + (4\ \ -\ 2\ 0\ 1\ 2\ 1\ 3\ 1\ 0\ ) - (6\ 2$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (-\ 3\ \ -\ 2\ 3\ \ -\ 12\ 3\ \ -\ 2\ \ -\ 3\ 1\ 2\ ).$$

$$X = \frac{1}{3} \cdot \left(A^t + B + 2AB\right) = \frac{1}{3} \cdot [(-\ 1\ 2\ 1\ \ -\ 2\ 3\ 0\ 4\ 0\ 2\ ) + (4\ \ -\ 2\ 0\ 1\ 2\ 1\ 3\ 1\ 0\ ) + (12$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (15\ 4\ \ -\ 3\ 21\ 9\ 7\ 27\ 1\ 2\ ).$$

$$\underline{X = \frac{1}{3} \cdot (15\ 4\ \ -\ 3\ 21\ 9\ 7\ 27\ 1\ 2\ ). \quad Y = \frac{1}{3} \cdot (-\ 3\ \ -\ 2\ 3\ \ -\ 12\ 3\ \ -\ 2\ \ -\ 3\ 1\ 2\ )}$$

.

****

2º) Un analista pronostica que el beneficio $B(x)$ en miles de euros de cierto fondo de inversión, donde x representa la cantidad invertida en miles de euros, viene dado por la siguiente expresión: $B(x) = \{-\ 0,01x^2 + 0,09x + 0,1 \quad si\ \ 0 < x \leq 8\ 1,26 \cdot \frac{x}{x^2-1} + 0,02 \quad si \quad x > 8$

.

a) Estudia la continuidad de $B(x)$.

b) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) ¿Qué capital, en euros, conviene invertir en este fondo para maximizar el beneficio? ¿Cuál será dicho beneficio máximo?

d) Si se invierte un capital elevado, ¿cuál sería como mínimo su beneficio? ¿Por qué?

----

a)

La función $B(x)$ es continua en R, excepto para el valor de $x = 8$, cuya continuidad es dudosa y se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites laterales son iguales en ese punto e igual al valor de la función.

$$B(x) = \left(-0,01x^2 + 0,09x + 0,1\right) = -0,01 \cdot 8^2 + 0,09 \cdot 8 + 0,1 =$$

$$= -0,64 + 0,72 + 0,1 = 0,82 - 0,64 = 0,18 = f(8).$$

$$B(x) = \left(1,26 \cdot \frac{x}{x^2-1} + 0,02\right) = 1,26 \cdot \frac{8}{8^2-1} + 0,02 = \frac{10,08}{63} + 0,02 =$$

$$= 0,16 + 0.02 = 0,18.$$

$$\underline{B(x) = B(x) = f(8) \Rightarrow B(x)\ es\ continua\ en\ R}.$$

b)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$B'(x) = \{-0,02x + 0,09 \quad si\ \ 0 < x \le 8 \quad -1,26 \cdot \frac{x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2} \quad si\ \ x > 8\ .$$

$$-0,02x + 0,09 = 0;\ \ 2x - 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{9}{2} = 4,5.$$

Teniendo en cuenta la continuidad de la función, que $-1,26 \cdot \frac{x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2} < 0$ para cualquier valor real de x, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: \left(0,\ \frac{9}{2}\right)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: \left(\frac{9}{2}, \ +\infty\right).}$$

c)

De la continuidad y los periodos de crecimiento se deduce el máximo de la función, no obstante, se deduce mediante el cálculo con derivadas.

Una función tiene un máximo relativo cuando se anula su primera derivada y es negativa la segunda derivada:

$B'(x) = 0 \Rightarrow x = 4,5.$

Para el intervalo que nos ocupa: $B''(x) = -0,02 < 0 \Rightarrow Máx.\ para\ x = 4,5.$

$B(4,5) = -0,01 \cdot 4,5^2 + 0,09 \cdot 4,5 + 0,1 = 0,2025 + 0,405 + 0,1 =$

$= 0,505 - 0,2025 = 0,3025.$

$$\underline{Conviene\ invertir\ 4.500\ euros.}$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 3.025\ euros.}$$

d)

$B(x) = \left(1,26 \cdot \frac{x}{x^2-1} + 0,02\right) = 0,02.$

$$\underline{Si\ se\ invierte\ una\ fuerte\ cantidad\ el\ beneficio\ es\ de\ 20\ euros.}$$

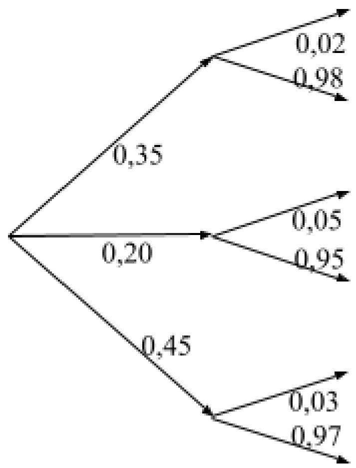
****

3º) Una compañía de transporte interurbano cube el desplazamiento a tres municipios distintos. El 35 % de los recorridos diarios realizados por los autobuses de esta compañía corresponden al destino 1, el 20 % al destino 2 y el 45 % al destino 3. Se sabe que la probabilidad de que, diariamente, un recorrido de autobús sufra un retraso es del 2 %, 5 % y 3 % para cada uno de los destinos 1, 2 y 3, respectivamente.

a) ¿Qué porcentaje de los recorridos diarios de esta compañía llegan con puntualidad a su destino?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un recorrido seleccionado al azar corresponda al destino 2 y haya experimentado un retraso?

c) Si seleccionamos un recorrido al azar y resulta que sufrió un retraso, ¿cuál era el destino más probable de dicho recorrido?



a)

$$P = P(1)\cdot P(\overline{R}/1) + P(2)\cdot P(\overline{R}/2) + P(3)\cdot P(\overline{R}/3) =$$

$$= 0,35\cdot 0,98 + 0,20\cdot 0,95 + 0,45\cdot 0,97 = 0,3430 + 0,1900 + 0,4365 = \underline{0,9695}$$

.

$\underline{Llegan\ con\ puntualidad\ el\ 96,95\ \%\ de\ los\ recorridos.}$

b)

$$P = P(2)\cdot P(R/2) = 0,20\cdot 0,0,5 = 0,10.$$

$\underline{La\ probabilidad\ de\ un\ recorrido\ sea\ del\ destino\ 2\ y\ con\ retraso\ es\ del\ 10\ \%.}$

c)

Recorrido 1º:

$$P = P(R/1) = \frac{P(1 \cap R)}{P(R)} = \frac{P(1) \cdot P(R/1)}{P(1) \cdot P(R/1) + P(2) \cdot P(R/2) + P(3) \cdot P(R/3)} =$$

$$= \frac{0{,}35 \cdot 0{,}02}{0{,}35 \cdot 0{,}02 + 0{,}20 \cdot 0{,}05 + 0{,}45 \cdot 0{,}03} = \frac{0{,}0070}{0{,}0070 + 0{,}0100 + 0{,}0135} = \frac{0{,}0070}{0{,}0305} = \underline{0{,}2295}.$$

Recorrido 2º:

$$P = P(R/2) = \frac{P(2 \cap R)}{P(R)} = \frac{P(2) \cdot P(R/2)}{P(1) \cdot P(R/1) + P(2) \cdot P(R/2) + P(3) \cdot P(R/3)} =$$

$$= \frac{0{,}20 \cdot 0{,}05}{0{,}35 \cdot 0{,}02 + 0{,}20 \cdot 0{,}05 + 0{,}45 \cdot 0{,}03} = \frac{0{,}0100}{0{,}0070 + 0{,}0100 + 0{,}0135} = \frac{0{,}0100}{0{,}0305} = \underline{0{,}3279}.$$

Recorrido 3º:

$$P = P(R/3) = \frac{P(3 \cap R)}{P(R)} = \frac{P(3) \cdot P(R/3)}{P(1) \cdot P(R/1) + P(2) \cdot P(R/2) + P(3) \cdot P(R/3)} =$$

$$= \frac{0{,}45 \cdot 0{,}03}{0{,}35 \cdot 0{,}02 + 0{,}20 \cdot 0{,}05 + 0{,}45 \cdot 0{,}03} = \frac{0{,}0135}{0{,}0070 + 0{,}0100 + 0{,}0135} = \frac{0{,}0135}{0{,}0305} = \underline{0{,}4426}.$$

$$\underline{Como\ se\ observa,\ el\ mayor\ porcentaje\ de\ tener\ retraso\ en\ el\ recorrido\ 3^{\underline{o}}}.$$

****